

ACADÉMIE YOUGOSLAVE DES SCIENCES ET DES ARTS DE ZAGREB

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
DU ROYAUME DES SERBES, CROATES ET SLOVÈNES

THÉORIE MATHÉMATIQUE
DES
PHÉNOMÈNES THERMIQUES

PRODUITS PAR
LA RADIATION SOLAIRE,

PAR

M. MILANKOVITCH,

PROFESSEUR ORDINAIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1920

PRÉFACE.

Les premières ébauches relatives à cet ouvrage datent de l'année 1911. En cherchant des exemples concrets parmi les phénomènes naturels pour illustrer mes cours de Physique mathématique, mon attention fut attirée par le problème suivant, posé en 1885 par l'Académie des Sciences de Paris :

„Distribution de la chaleur à la surface du globe. Rechercher par la théorie, suivant quelles lois la chaleur solaire arrive aux différentes latitudes du globe terrestre dans le cours de l'année, en tenant compte de l'absorption atmosphérique. Faire une étude comparative de la distribution des températures données par les observations.“

On peut élargir ce problème, et lui donner une forme plus précise, en se proposant de décrire mathématiquement la marche de l'insolation de la surface terrestre, et de trouver, par des lois physiques, la connexion entre cette insolation et la température de la surface du globe et de son atmosphère.

Sous une telle forme, la proposition devient le problème fondamental de la Météorologie et de la Climatologie ; et je dois avouer ma surprise quand je remarquai que ce problème n'avait pas encore été résolu, même dans ses grands traits, malgré son importance particulière. Poisson déjà, dans son ouvrage classique „Théorie mathématique de la chaleur“, s'était occupé de ce problème, mais l'ignorance où l'on était alors au sujet des lois du rayonnement, l'empêcha d'en entrevoir la solution. Après lui, ce furent notamment

VI

Meech, Wiener et Angot qui ont donné une description mathématique de l'insolation du globe, sans étudier le rapport entre l'insolation et la température. Zenker a consacré à cette dernière question deux ouvrages particuliers (*Die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche*. Berlin 1888. — *Der thermische Aufbau der Klimate aus den Wärmewirkungen der Sonnestrahlung und des Erdinnern*. Halle 1895), mais, pour avoir négligé de faire usage des lois du rayonnement alors connues, il ne réussit qu'à établir quelques formules empiriques sans signification. Ainsi, malgré les efforts de cet auteur, le problème en est resté à attendre sa solution.

L'inconvénient de cet état de choses pour la construction scientifique de la Météorologie et de la Climatologie se fait nettement sentir dans les ouvrages consacrés à ces sciences. C'est ainsi que les ouvrages fondamentaux de Hann, connus de tout le monde, ne contiennent que les quantités de radiation envoyées à différentes latitudes au cours de diverses saisons de l'année, quantités calculées antérieurement par les auteurs cités plus haut; mais on n'y trouve aucun essai pour découvrir une connexion fondée sur les lois de la Physique qui existerait entre ces quantités de radiation et l'état thermique de la surface et de l'atmosphère terrestres.

Tout cela me convainquit que la solution scientifique du problème cité au début aurait plus de portée qu'une simple application à titre d'exemple de la Physique mathématique, et je pris la résolution de me consacrer entièrement à l'étude de cette question.

Je me persuadai bientôt que ce travail devait être repris du commencement, c'est-à-dire en étudiant d'abord la distribution de la radiation solaire à la surface terrestre. Avant tout, il fallait expliquer et écarter maintes contradictions et erreurs dans les exposés antérieurs de cette distribution. De plus, il était désirable d'étendre les recherches également aux autres corps célestes dont les températures superficielles sont déterminées par la radiation solaire. Finalement, les expressions de l'insolation de la Terre devaient prendre une forme propre au calcul de leurs variations

séculaires, de sorte que le problème paléoclimatique et, particulièrement, le problème des époques glaciaires pût être impliqué dans le domaine de mes recherches. C'est seulement après avoir fait tout cela que je pus procéder à l'exposition de la connexion entre l'état de l'insolation et de la température des planètes.

Là aussi j'avancai pas à pas. D'abord je déduisis la connexion mentionnée sans tenir compte de l'atmosphère, ayant trouvé, il est vrai, dans ce domaine, mainte question déjà préparée. Après cela, je pris en considération l'influence de l'atmosphère. Une série d'articles parus de 1912 à 1914 dans diverses revues scientifiques et publications académiques a été consacrée à ces études préliminaires dont la publication fut quelque peu retardée par les guerres balkaniques. Pendant ce temps, Emden faisait paraître un mémoire important du même domaine.

Mes travaux ainsi commencés furent brusquement interrompus en 1914 par une nouvelle guerre. Prisonnier des Austro-Hongrois, je pus cependant quitter à la fin de l'année 1914 le camp des prisonniers et m'installer à Budapest où je pus, grâce à l'hospitalité de l'Académie des Sciences hongroise, pendant les trois années qui suivirent, poursuivre et mener à bonne fin le travail commencé.

Telle est l'origine de cet ouvrage qui s'est développé peu à peu pour former un domaine particulier de la Physique cosmique. Je l'ai divisé en deux parties; la première comprend les théories mathématiques, la seconde leurs applications. Cette division est faite dans le désir de présenter les résultats de ce travail sous une forme accessible aux non-mathématiciens et spécialement aux météorologistes. Pour cette même raison, les problèmes mathématiques ont été développés avec plus d'ampleur qu'il n'eût été nécessaire pour les lecteurs mathématiciens.

L'ouvrage garde complètement l'esprit de la Physique mathématique et évite les procédés empiriques. Cela lui donne des limites fermement établies qui semblent parfois étroites, car plus d'une question, comme le problème paléoclimatique, eut pu être facile-

VIII

ment traitée avec plus d'ampleur. Cependant, je ne crois pas que ce fait doive être considéré comme un désavantage. Pour moi, du moins, c'est un sentiment agréable de savoir que toutes les formules de cet ouvrage ont un fondement scientifique, qu'elles s'enchaînent et qu'on ne peut discuter que les simplifications admises pour pouvoir traiter le problème mathématiquement.

En effet, pour pouvoir traduire en langage mathématique les phénomènes de la nature, il est toujours nécessaire d'admettre des simplifications et de négliger certaines influences et irrégularités. Je dus le faire devant un objet aussi compliqué que notre atmosphère. Cependant, je me suis efforcé de faire valoir dans mes recherches les éléments les plus importants du phénomène et de donner aux influences laissées de côté le caractère de perturbations secondaires. Quand par conséquent, des différences se présentent entre les données théoriques et les observations, ces différences sont, pour la plupart, à inscrire au compte des influences perturbatrices dont l'effet se fait sentir aussi de cette façon. Je vais citer quelques exemples en guise d'éclaircissement.

Dans la deuxième partie de cet ouvrage, on trouvera les valeurs numériques des températures moyennes annuelles aux latitudes terrestres telles qu'elles résultent de la théorie. Ces températures se distinguent de celles qui sont observées en ce qu'elles sont un peu plus élevées pour les basses latitudes et un peu plus basses pour les hautes latitudes. La cause de ce phénomène se trouve principalement dans ce fait que dans mes recherches j'ai dû laisser de côté les courants aériens et marins. Ces courants diminuent les contrastes entre les régions tropicales et les régions polaires, et tendent à uniformiser les températures. Il est clair que ces courants ne peuvent pas influencer notablement l'état moyen de la température de toute la surface terrestre et de l'atmosphère; par conséquent, leur influence sera éliminée lorsqu'on considère seulement la température moyenne de toute la surface terrestre et de la couche atmo-

sphérique adjacente. En opérant ainsi, on ne trouve entre les valeurs calculées et les valeurs observées qu'une différence de 0.1° .

Des différences et des concordances semblables apparaissent aussi dans la question de la constitution verticale de l'atmosphère terrestre. En déduisant cette constitution théoriquement, je n'ai pu considérer que l'état d'équilibre mécanique et d'équilibre de rayonnement, et j'ai été obligé de laisser de côté les phénomènes thermodynamiques. La comparaison des températures obtenues par les moyens théoriques et des températures observées montre clairement le rôle prédominant des phénomènes de rayonnement, le rôle subordonné des processus dynamiques et prouve que la théorie a embrassé la partie la plus importante du phénomène d'une façon exacte. Cela ressort encore plus clairement du fait que la théorie est en mesure d'expliquer deux phénomènes de l'atmosphère terrestre, observés depuis peu de temps.

Le premier de ces phénomènes est ce qu'on appelle l'inversion de la température au-dessus de la couche isotherme, c'est-à-dire le fait que la température moyenne de l'air ne diminue pas indéfiniment avec la hauteur, mais fait place, à environ onze kilomètres d'altitude, à une élévation de température. Si on suppose dans l'atmosphère d'une planète deux gaz qui absorbent fortement les rayons obscurs, comme cela est le cas dans l'atmosphère de notre Terre, grâce à la présence de la vapeur d'eau et de l'acide carbonique, il résulte de la théorie, non seulement qu'une inversion de température doit se produire avec une augmentation d'altitude, mais de plus que, par suite du pouvoir absorbant de la vapeur d'eau atmosphérique et de l'acide carbonique, cette inversion doit avoir lieu dans l'atmosphère terrestre à une altitude de 10,530 mètres.

Le deuxième des phénomènes mentionnés est la propagation des oscillations annuelles de la température en altitude suivant la verticale en partant de la surface terrestre. Là encore, la théorie, outre qu'elle fournit les explications qualitatives du phénomène, donne

X

aussi des résultats numériques satisfaisants concernant le degré d'affaiblissement de ces oscillations et le moment où elles atteignent différentes hauteurs.

Obligé de me tenir dans les limites de mes hypothèses, je ne pouvais décrire qu'une partie des phénomènes climatiques de la surface terrestre; je crois pourtant pouvoir affirmer que la théorie met en évidence le mécanisme de ces phénomènes mieux que ne le ferait l'empirisme pur. Toutefois ce n'était là que l'un des buts que je me proposais au cours de mon travail.

Le deuxième et peut-être le plus important de mes buts était de fonder une théorie qui nous permette de transgresser les limites de notre observation directe dans l'espace et dans le temps. Dans l'espace: en ce sens que cette théorie nous permettrait de suivre les phénomènes thermiques là même où nous ne pouvons parvenir avec nos instruments de mesure, c'est-à-dire dans les régions les plus hautes de notre atmosphère, et sur les surfaces des autres membres de notre système solaire. Dans le temps: par la possibilité d'étudier le climat terrestre aux époques géologiques.

Dans cette voie, la nature elle-même nous aide de la façon la plus surprenante. Plus nous nous éloignons dans notre atmosphère de la surface terrestre, plus les simplifications théoriques sont réalisées, car dans ce cas nous quittons la zone des nuages et des processus dynamiques, et nous atteignons les régions où seuls les phénomènes de radiation comptent. Une heureuse rencontre de circonstances analogues se trouve sur la planète Mars. Elle réalise avec son atmosphère claire et sans nuages et sa surface aplanie les suppositions de notre théorie dans une plus forte mesure que notre Terre. Même chose pour la planète Mercure et pour la Lune, qui ne possèdent aucune atmosphère. Il était donc possible d'appliquer largement la théorie développée dans l'ouvrage à ces corps célestes et d'obtenir également quelques renseignements concernant le climat de Vénus.

Le climat du passé géologique de notre Terre est aussi l'objet d'une partie assez étendue de mon ouvrage. Au sujet de l'âge de la croûte terrestre j'ai pu donner une limite minima de 122 millions d'années. Cette limite, bien que vraisemblablement très au-dessous de l'âge réel de la croûte terrestre, possède cependant l'avantage d'être déduite sans suppositions hypothétiques.

En composant cet ouvrage, je me suis efforcé de prendre connaissance de tous les ouvrages et articles concernant les questions traitées ici; de citer même ceux que je n'ai pas utilisés; — pour faciliter de cette façon l'avancement de cette partie de la Physique cosmique. Si néanmoins, les indications bibliographiques réunies à la fin de l'ouvrage se trouvaient être incomplètes, je compte sur l'indulgence de mes lecteurs, qui voudront bien tenir compte des conditions dans lesquelles l'ouvrage a dû être composé.

L'époque troublée pendant laquelle j'écrivis cet ouvrage, en a retardé la publication de plus de trois années. Dès 1917, mon vénéré maître et ami M. E. Czuber, professeur à l'École Polytechnique de Vienne, avait essayé, mais en vain, de faire paraître en allemand le présent ouvrage. Lorsque, enfin, la paix eut succédé à la guerre, les circonstances étaient restées tellement défavorables, que mon ouvrage aurait attendu encore longtemps sa publication, si l'Académie yougoslave des Sciences et des Arts de Zagreb, aidée libéralement par S. E. M. L. Davidovitch, ministre de l'Instruction Publique du Royaume des Serbes, Croates et Slovènes, n'eût pris à sa charge la publication de mon ouvrage. Ensuite il y eut de nouveaux retards: selon le désir de l'Académie et du Ministère, il a fallu traduire l'ouvrage en français et, de plus, l'impression devait se faire, comme pour toutes les éditions de l'Académie yougoslave, à Zagreb, à l'imprimerie de l'Archevêché. C'est avant tout à deux excellents amis que je suis redevable d'avoir surmonté ces dernières difficultés: à mon cher collègue M. I. Gjaja, professeur à l'Université de Belgrade, qui se chargea de la traduction, et au très distingué secrétaire général de l'Académie

XII

yougoslave, M. G. Majcen, professeur à l'Université de Zagreb, qui a bien voulu diriger et surveiller l'impression de l'ouvrage; il y mit tous les soins afin de rendre l'édition du présent volume en tout conforme aux autres éditions de Gauthier-Villars et Cie. Enfin M.M. Y. Chataigneau et H. Bosco, lecteurs en langue française à l'Université de Belgrade, m'ont prêté leur concours lors de la révision des épreuves. A toutes ces personnes et institutions qui m'ont aidé dans la publication de cet ouvrage, j'adresse mes remerciements les plus sincères.

Belgrade, 7 août 1920.

M. Milankovitch

SYMBOLES.

Les nombres entre parenthèses indiquent la page sur laquelle on trouvera une définition plus complète du symbole.

1. Coordonnées et autres grandeurs astronomiques.

- φ latitude géographique (p. 7)
 ψ longitude géographique (p. 7)
 $n = \tan \varphi$ (p. 27)
 z distance zénithale du Soleil (p. 8)
 δ déclinaison du Soleil (p. 8)
 ω angle horaire du Soleil (p. 8)
 λ longitude vraie du Soleil (p. 9)
 v anomalie vraie du Soleil (p. 11)
 v_0 anomalie du point vernal (p. 12)
 ε inclinaison de l'axe de rotation de la planète ; obliquité de l'écliptique (p. 9.)
 $k = \sin \varepsilon$ (p. 27)
 a_0 demi-grand axe de l'orbite terrestre ; unité astronomique (p. 5)
 a demi-grand axe de l'orbite de la planète (p. 11)
 b demi-petit axe de l'orbite de la planète (p. 11)
 e excentricité de l'orbite de la planète (p. 11)
 ρ rayon vecteur Soleil-Planète (p. 11)
 i inclinaison de l'orbite (p. 47)
 Ω longitude du noeud ascendant (p. 47)
 π_h longitude du périhélie (p. 47)
 H longitude du périhélie par rapport au point vernal correspondant (p. 51)
 ψ' précession générale (p. 49)
 r rayon du globe planétaire (p. 16)
 g accélération de la pesanteur à la surface de la planète (p. 75)
 t temps moyen (p. 10)
 τ_s jour sidéral de la planète (p. 8)
 τ jour moyen de la planète (p. 10)
 T année sidérale de la planète (p. 10)
 T_e durée de la saison chaude (de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne) (p. 44)
 T_h durée de la saison froide (de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps) (p. 44)

XIV

2. Grandeurs déterminant l'état de l'insolation de la planète.

a) abstraction faite de l'atmosphère

- I_0 constante solaire (p. 6)
 I intensité de la radiation solaire à la distance ϱ du Soleil (p. 5)
 $\left. \begin{array}{l} \frac{dW}{dt} \\ W_1(t) \end{array} \right\}$ insolation du point considéré de la surface planétaire, au moment t
 (p. 14 et p. 88)
 I_T insolation totale de la planète (p. 16)
 I_N insolation totale de l'hémisphère nord (p. 16)
 I_S insolation totale de l'hémisphère sud (p. 16)
 I_m insolation moyenne de la surface de la planète (p. 16)
 I_m^P moyenne insolation annuelle de la planète (p. 43)
 w moyenne insolation du parallèle (p. 17)
 W_τ quantité diurne de radiation (p. 20)
 W quantité de radiation reçue à la latitude φ dans l'intervalle de temps $(t_1 t_2)$
 (p. 34)
 $W_I, W_{II}, W_{III}, W_{IV}$ quantités de radiation reçues à la latitude φ au cours de
 saisons astronomiques (p. 37)
 W_e quantité de radiation reçue à la latitude φ pendant la saison chaude (p. 40)
 W_h quantité de radiation reçue à la latitude φ pendant la saison froide (p. 40)
 W_T quantité de radiation reçue à la latitude φ au cours de l'année entière (p. 41)
 N_e quantité de radiation reçue par l'hémisphère nord pendant la saison chaude
 (p. 42)
 N_h quantité de radiation reçue par l'hémisphère nord pendant la saison froide
 (p. 42)
 $W_2(t)$ quantité de radiation pénétrant dans l'hydrosphère (p. 109)

b) en tenant compte de l'atmosphère

- $I'(x)$ intensité de la radiation solaire à l'altitude x (p. 57)
 $I'(h)$ intensité de la radiation solaire à son entrée dans l'atmosphère de la planète
 (p. 58)
 $\frac{dW''}{dt}$ insolation du point considéré de la surface planétaire au moment t (p. 59)
 I_T insolation totale de la planète (p. 60)
 w' moyenne insolation du parallèle (p. 62)
 W'_τ quantité diurne de radiation (p. 62)

- W'' quantité de radiation solaire directe reçue à la latitude φ dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) (p. 63)
- W''_c quantité de radiation solaire directe reçue à la latitude φ pendant la saison chaude (p. 63)
- W''_h quantité de radiation solaire directe reçue à la latitude φ pendant la saison froide (p. 63)
- W''_T quantité de radiation solaire directe reçue à la latitude φ au cours de l'année entière (p. 63)
- $I''(x)$ intensité de la radiation solaire directe et diffuse à l'altitude x (p. 66)
- $\frac{dW''}{dt}$ insolation directe et diffuse du point considéré de la surface planétaire au moment t à l'état d'une moyenne nébulosité du ciel (p. 67)
- $W(x, t)$ radiation solaire directe et diffuse atteignant en unité de temps l'unité de surface, parallèle à la surface de la planète, à l'altitude x (p. 122)
- $O(x, t)$ radiation obscure de l'atmosphère, dirigée vers la surface de la planète, à l'altitude x (p. 123).
- $U(x, t)$ radiation obscure dirigée vers l'espace interplanétaire, à l'altitude x (p. 132)
- $\frac{dQ_r}{dt}$ émission de la surface planétaire (p. 83)
- σ constante de la loi d'émission de Stefan-Boltzmann (p. 83)

3. Grandeurs exprimant les propriétés de l'atmosphère.

- x altitude de l'endroit considéré de l'atmosphère (p. 56)
- h hauteur de l'atmosphère (p. 58)
- S_x couche atmosphérique d'épaisseur dx , à l'altitude x (p. 57)
- A pouvoir réfléchissant de la planète avec son atmosphère (p. 66); équivalent calorique du travail (p. 160)
- p coefficient de transmission de l'atmosphère pour la radiation solaire (p. 58)
- p_o coefficient de transmission de l'atmosphère pour la radiation solaire directe et diffuse (p. 67)
- p'_o coefficient de transmission de l'atmosphère pour la radiation obscure de la planète (p. 126)
- $a_1(x)dx$ pouvoir absorbant de la couche S_x pour la radiation solaire (p. 66)
- $a_2(x)dx$ pouvoir absorbant de la couche S_x pour la radiation obscure de la planète (p. 125)
- a_1 pouvoir absorbant pour la radiation solaire de la couche la plus inférieure d'une épaisseur égale à l'unité (p. 138)
- a'_1 pouvoir absorbant pour la radiation obscure de la couche la plus inférieure d'une épaisseur égale à l'unité (p. 138)
- k_1 coefficient d'absorption de l'atmosphère pour les rayons solaires (p. 79)
- k coefficient d'absorption de l'atmosphère pour la radiation obscure (p. 126)
- $\rho(x)$ densité de l'atmosphère à l'altitude x (p. 74)
- ρ_0 densité de l'atmosphère à la surface de la planète (p. 76)

XIV

2. Grandeurs déterminant l'état de l'insolation de la planète.

a) abstraction faite de l'atmosphère

- I_0 constante solaire (p. 6)
 I intensité de la radiation solaire à la distance ϱ du Soleil (p. 5)
 $\left. \begin{array}{l} \frac{dW}{dt} \\ W_1(t) \end{array} \right\}$ insolation du point considéré de la surface planétaire, au moment t
 (p. 14 et p. 88)
 I_T insolation totale de la planète (p. 16)
 I_N insolation totale de l'hémisphère nord (p. 16)
 I_S insolation totale de l'hémisphère sud (p. 16)
 I_m insolation moyenne de la surface de la planète (p. 16)
 I_m^T moyenne insolation annuelle de la planète (p. 43)
 w moyenne insolation du parallèle (p. 17)
 W_τ quantité diurne de radiation (p. 20)
 W quantité de radiation reçue à la latitude φ dans l'intervalle de temps (t_1, t_2)
 (p. 34)
 $W_I, W_{II}, W_{III}, W_{IV}$ quantités de radiation reçues à la latitude φ au cours de
 saisons astronomiques (p. 37)
 W_e quantité de radiation reçue à la latitude φ pendant la saison chaude (p. 40)
 W_h quantité de radiation reçue à la latitude φ pendant la saison froide (p. 40)
 W_T quantité de radiation reçue à la latitude φ au cours de l'année entière (p. 41)
 N_e quantité de radiation reçue par l'hémisphère nord pendant la saison chaude
 (p. 42)
 N_h quantité de radiation reçue par l'hémisphère nord pendant la saison froide
 (p. 42)
 $W_2(t)$ quantité de radiation pénétrant dans l'hydrosphère (p. 109)

b) en tenant compte de l'atmosphère

- $I'(x)$ intensité de la radiation solaire à l'altitude x (p. 57)
 $I'(h)$ intensité de la radiation solaire à son entrée dans l'atmosphère de la planète
 (p. 58)
 $\frac{dW'}{dt}$ insolation du point considéré de la surface planétaire au moment t (p. 59)
 I_T' insolation totale de la planète (p. 60)
 w' moyenne insolation du parallèle (p. 62)
 W'_τ quantité diurne de radiation (p. 62)

- W'' quantité de radiation solaire directe reçue à la latitude φ dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) (p. 63)
 W''_c quantité de radiation solaire directe reçue à la latitude φ pendant la saison chaude (p. 63)
 W''_h quantité de radiation solaire directe reçue à la latitude φ pendant la saison froide (p. 63)
 W''_x quantité de radiation solaire directe reçue à la latitude φ au cours de l'année entière (p. 63)
 $i''(x)$ intensité de la radiation solaire directe et diffuse à l'altitude x (p. 66)
 $\frac{dW''}{dt}$ insolation directe et diffuse du point considéré de la surface planétaire au moment t à l'état d'une moyenne nébulosité du ciel (p. 67)
 $W(x, t)$ radiation solaire directe et diffuse atteignant en unité de temps l'unité de surface, parallèle à la surface de la planète, à l'altitude x (p. 122)
 $O(x, t)$ radiation obscure de l'atmosphère, dirigée vers la surface de la planète, à l'altitude x (p. 123).
 $U(x, t)$ radiation obscure dirigée vers l'espace interplanétaire, à l'altitude x (p. 132)
 $\frac{dQ_r}{dt}$ émission de la surface planétaire (p. 83)
 σ constante de la loi d'émission de Stefan-Boltzmann (p. 83)

3. Grandeurs exprimant les propriétés de l'atmosphère.

- x altitude de l'endroit considéré de l'atmosphère (p. 56)
 h hauteur de l'atmosphère (p. 58)
 S_x couche atmosphérique d'épaisseur dx , à l'altitude x (p. 57)
 A pouvoir réfléchissant de la planète avec son atmosphère (p. 66); équivalent calorique du travail (p. 160)
 p coefficient de transmission de l'atmosphère pour la radiation solaire (p. 58)
 p_a coefficient de transmission de l'atmosphère pour la radiation solaire directe et diffuse (p. 67)
 p'_a coefficient de transmission de l'atmosphère pour la radiation obscure de la planète (p. 126)
 $a_1(x)dx$ pouvoir absorbant de la couche S_x pour la radiation solaire (p. 66)
 $a_2(x)dx$ pouvoir absorbant de la couche S_x pour la radiation obscure de la planète (p. 125)
 a_1 pouvoir absorbant pour la radiation solaire de la couche la plus inférieure d'une épaisseur égale à l'unité (p. 138)
 a'_1 pouvoir absorbant pour la radiation obscure de la couche la plus inférieure d'une épaisseur égale à l'unité (p. 138)
 k_1 coefficient d'absorption de l'atmosphère pour les rayons solaires (p. 79)
 k coefficient d'absorption de l'atmosphère pour la radiation obscure (p. 126)
 $\rho(x)$ densité de l'atmosphère à l'altitude x (p. 74)
 ρ_0 densité de l'atmosphère à la surface de la planète (p. 76)

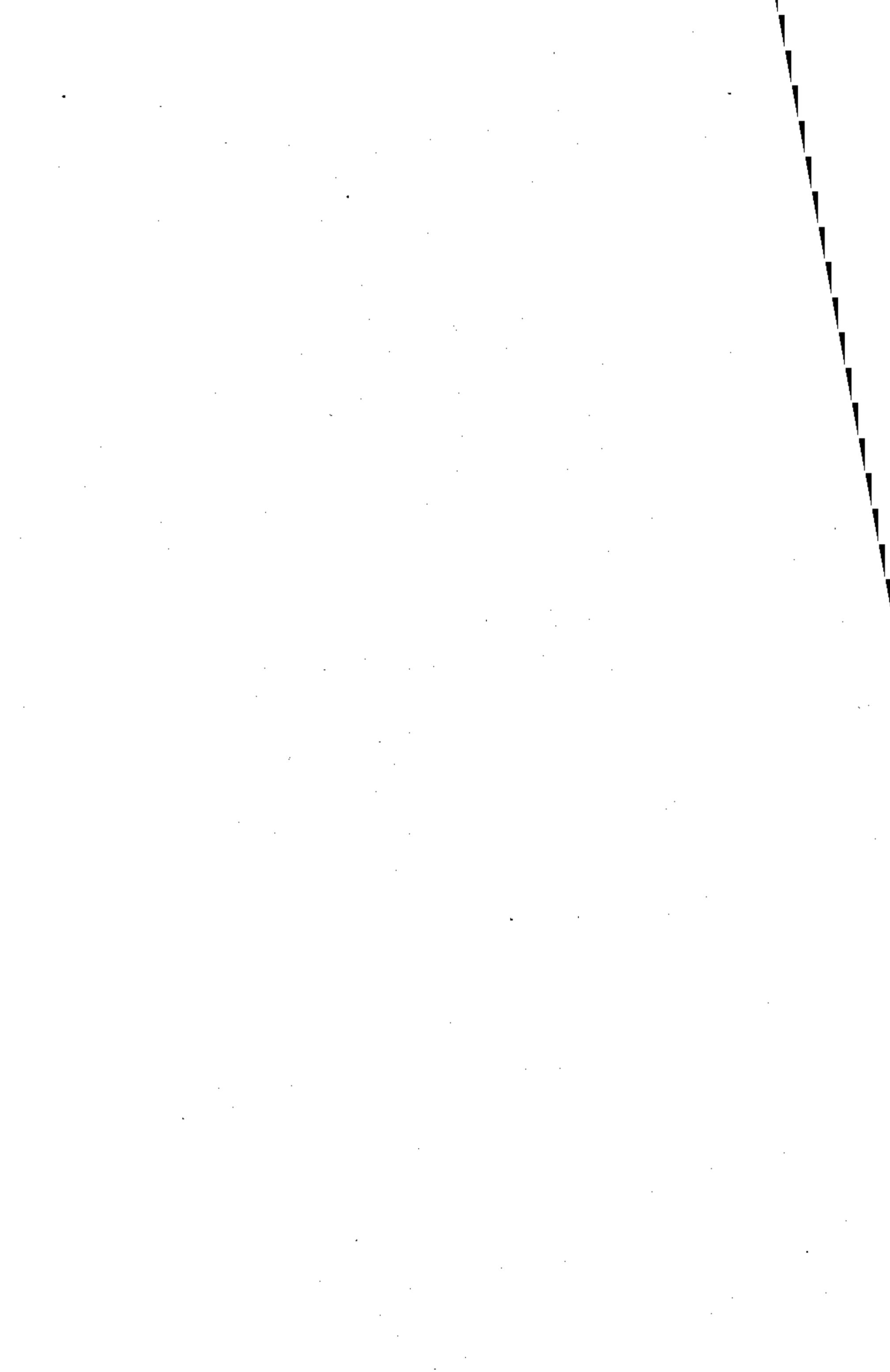
XVI

- R constante du gaz (p. 74)
 R_0 constante du gaz mesurée en poids de l'unité de masse à la surface planétaire (p. 77)
 $p(x)$ pression atmosphérique à l'altitude x (p. 74)
 H hauteur virtuelle de l'atmosphère (p. 76)
 M masse de l'atmosphère reposant sur l'unité de surface planétaire (p. 77)
 $u(x, t)$ température de l'atmosphère à l'altitude x , au moment t (p. 132)
 $\Theta(x, t)$ température de l'atmosphère à l'altitude x , au moment t , en degrés absolus (p. 134)
 $(a, t) dx$ émission de la couche S_z par chacun de ses deux plans limitant, au moment t (p. 132)
chaleur spécifique de l'atmosphère par unité de masse à volume constant (p. 132)
chaleur spécifique du gaz par unité de masse à pression constante (p. 161)

4. Grandeurs exprimant les propriétés de la croûte planétaire.

- pouvoir réfléchissant de la surface planétaire (p. 82)
pouvoir absorbant de la surface planétaire (p. 83)
distance du point considéré du sol de la surface planétaire (p. 86)
 $u(x, t)$ température du sol à la profondeur x , au moment t (p. 87)
 Θ_p température de la surface planétaire en degrés absolus (p. 84)
 c_p chaleur spécifique du sol (par unité de masse) (p. 87)
 ρ_p densité du sol (p. 87)
 K coefficient de conductibilité de chaleur du sol (p. 87)
 m^2 coefficient de conductibilité de température du sol (p. 88).
-

PREMIÈRE PARTIE
EXPOSÉ THÉORIQUE



CHAPITRE I.

DISTRIBUTION DE LA RADIATION SOLAIRE A LA SURFACE DES PLANÈTES, ABSTRACTION FAITE DE LEURS ATMOSPHÈRES.

1. — *Introduction. — La constante solaire.*

Le Soleil est une source énorme d'énergie rayonnante qui se propage à la vitesse de la lumière dans l'espace et se manifeste sous diverses formes d'énergie. A quelques exceptions près, toutes les énergies qui se manifestent à la surface de la Terre et au sein de son atmosphère, y compris la vie, ne sont que des transformations de l'énergie solaire.

Le débit de cette source d'énergie nous paraît immuable. Cependant, la distribution de son rayonnement à la surface de notre globe subit des changements incessants. Ainsi, la rotation de la Terre autour de son axe provoque la marche diurne de la radiation solaire, qui trouve son expression dans l'alternance du jour et de la nuit; de même la révolution de la Terre autour du Soleil est la cause des saisons, tandis que les variations séculaires des éléments astronomiques sont accompagnées de variations séculaires notables de la distribution du rayonnement solaire.

Cette distribution variable du rayonnement solaire à la surface de la Terre est la cause primordiale de tous les phénomènes météorologiques, dont l'irrégularité contraste singulièrement avec la régularité de leur cause première. Les phénomènes météorologiques nous apparaissent aussi capricieux que la radiation — dont le Soleil inonde la Terre — suit une marche régulière diurne et annuelle. Cependant, ce caractère capricieux du temps est loin de se confondre avec un manque de toute régularité, car le temps lui-même n'échappe pas aux lois de la nature. Les saisons se suivent tous les ans et les caprices du temps nous paraissent bien

insignifiants à côté de leur marche régulière qui se reflète dans la nature. Rien que pour cette raison la tâche ne paraît pas infructueuse de vouloir étudier les conséquences de la marche régulière du rayonnement solaire à la surface de la Terre et des autres planètes. C'est le but de cet ouvrage.

Nous nous proposons d'atteindre ce but par voie purement théorique. à l'aide des lois bien fondées de la physique mathématique, pour pouvoir étudier, de cette façon, les phénomènes thermiques qui apparaissent comme la conséquence du rayonnement solaire à la surface des planètes.

Nous commençons par l'étude mathématique de la distribution de la radiation solaire à la surface des planètes, en supposant que leurs atmosphères n'exercent aucune influence sur cette distribution.¹⁾ Celle-ci ne dépend, ainsi que nous le verrons, que de la position relative des planètes par rapport au Soleil et se réduit, par conséquent, à un problème de géométrie. Les causes de ces variations, c'est-à-dire les mouvements des corps célestes, peuvent être également exprimées par des lois mathématiques très exactes, de sorte que nous pouvons suivre les variations du rayonnement des planètes, dans le passé éloigné aussi bien que dans l'avenir.

En supposant une sphère concentrique au Soleil, décrite avec le rayon ϱ , qui est assez grand par rapport aux dimensions du Soleil — ce que réalisent les distances de toutes les planètes du système solaire — l'énergie rayonnante du Soleil traversera radialement la surface de cette sphère. En n'importe quel point M de cette sphère, déterminé par les coordonnées sphériques φ et ψ , supposons que l'unité de surface laisse passer dans un infiniment petit intervalle de temps dt la quantité dQ d'énergie rayonnante. La valeur

$$(1) \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

nous représente alors le flux d'énergie ou l'intensité du rayonnement solaire au point M . Nous avons sur cette valeur les données suivantes.

On pouvait s'attendre à ce que cette valeur fût fonction des coordonnées φ et ψ et du temps t . En effet, la surface du Soleil présente diverses irrégularités changeant avec le temps, de même que sa rotation permet de supposer que le rayonnement de diverses

parties de cette surface est fonction de leurs distances de l'équateur solaire, ainsi que E m d. e n²) l'a prouvé théoriquement. Mais en réalité, jusqu'à présent, on n'a pu constater aucun rapport entre l'intensité du rayonnement solaire et la direction de ce rayonnement³). Ceci est valable au moins pour les rayons dont la direction ne forme pas avec le plan équatorial du Soleil un angle supérieur à 7° 50', car nos connaissances ne concernent que ces rayons, le plan de l'orbite terrestre formant cet angle avec le plan équatorial du Soleil. En tenant compte que toutes les planètes se meuvent presque dans le même plan, on peut admettre pour toutes les valeurs de φ et ψ que nous rencontrerons que I est indépendant de celles-ci, pour considérer cette valeur comme étant uniquement fonction de la distance du Soleil ϱ et du temps t . On pourra donc poser

$$(2) \quad I = I(\varrho, t).$$

Il est facile de déduire la dépendance de I du rayon ϱ . En n'importe quel moment t , la surface de la sphère considérée, du rayon ϱ , est traversée par la quantité $4\pi\varrho^2 I(\varrho, t)$ d'énergie rayonnante. Au même moment, une sphère du rayon a_0 , concentrique à la première, est traversée par la quantité $4\pi a_0^2 I(a_0, t)$ d'énergie. On peut admettre que, pendant le très court laps de temps que la radiation solaire emploie à traverser la distance des deux sphères, le débit solaire ne subit pas de changement; dans ce cas, il est évident que les deux quantités précédentes doivent être égales. On a donc

$$(3) \quad I(\varrho, t) = \frac{a_0^2}{\varrho^2} I(a_0, t).$$

Si a_0 représente le demi-grand axe de l'orbite terrestre qu'on appelle aussi l'unité astronomique, $I(a_0, t)$ sera l'intensité du rayonnement solaire à la distance moyenne qui sépare la Terre du Soleil. C'est cette valeur, ainsi que nous le verrons, qui détermine les traits généraux du climat terrestre; et, comme celui-ci n'a pas subi des changements appréciables depuis l'époque historique, on en déduit que la valeur $I(a_0, t)$ n'a pas subi non plus des variations notables. Tout au plus celle-ci a-t-elle effectué de faibles et courtes oscillations autour d'une valeur constante.

On peut donc poser pour l'intervalle des temps historiques

$$(4) \quad I(a_0, t) = I_0 + i(t),$$

où I_0 est une constante, tandis que $i(t)$ représente une fonction oscillatoire du temps, à faibles amplitudes et courtes périodes, ayant la valeur moyenne zéro.

En faisant abstraction de cette fonction ou en calculant avec les valeurs séculaires moyennes de $I(\varrho, t)$ et $I(a_0, t)$ qui ne contiennent probablement plus la fonction $i(t)$, celles-ci deviennent indépendantes du temps t et on obtient au lieu de l'équation (3) :

$$(5) \quad I(\varrho) = \frac{a_0^2}{\varrho^2} I_0.$$

On appelle I_0 Constante solaire. On l'exprime ordinairement en calories, de sorte qu'elle peut être définie comme il suit :

La constante solaire est la quantité d'énergie rayonnante, supposée intégralement transformée en chaleur, que le Soleil envoie, dans l'unité de temps, à l'unité de surface placée perpendiculairement à la direction du rayon, à une distance égale à l'unité astronomique du Soleil. Les oscillations périodiques du rayonnement doivent être éliminées, c'est-à-dire qu'on doit prendre la valeur moyenne se rapportant à un intervalle de temps assez grand.

La constance de la valeur I_0 n'a été constatée que durant l'espace relativement court des temps historiques et ne peut être, par conséquent, admise pour toujours; les astrophysiciens sont même d'avis que le débit solaire diminue lentement. La diversité des spectres des étoiles fixes, qui ne sont que des soleils lointains, est considérée comme une preuve de l'évolution stellaire qui irait du stade d'incandescence à l'état de refroidissement complet. Notre Soleil se trouverait à mi-chemin de cette évolution¹).

2. — Rappel de quelques notions et formules d'astronomie sphérique.

Pour pouvoir exprimer mathématiquement les lois de l'insolation des surfaces des planètes, il est nécessaire de décrire mathématiquement le mouvement relatif du Soleil autour de la planète considérée; ce que l'on fait à l'aide des formules connues de l'astronomie, que nous rappellerons ici.

La mécanique céleste détermine les lois du mouvement des planètes autour du Soleil et de la rotation des planètes autour de leur axe. Elle nous apprend que cette rotation est uniforme et que la direction de cet axe est fixe, à part les faibles écarts dont il sera question plus tard.

Supposons que nous nous trouvions en un point C de la surface de la planète considérée, que la position de ce point soit déterminée par sa longitude géographique ψ , comptée à partir d'un méridien donné à la surface de la planète, et par sa latitude géographique φ , que nous prenons positive pour l'hémisphère nord et négative pour l'hémisphère sud. En ne tenant pas compte des accidents du sol, c'est-à-dire en supposant celui-ci parfaitement horizontal, le plan tangent à la surface de la planète au point C coupera la sphère céleste apparente en un grand cercle nommé l'horizon du point considéré. Représentons-le par le cercle $H D H'$ (fig. 1). La normale érigée au point C sur le plan de l'horizon atteint la sphère céleste au zénith Z de ce point. Imaginons-nous l'axe de rotation de la planète prolongé jusqu'aux points de pénétration N et N' de la sphère céleste. Ayant égard aux dimensions infiniment petites de la planète par rapport à la sphère céleste, une parallèle à cet axe, menée par le point C , atteindra également la sphère céleste aux points N et N' qui en sont les pôles. Nous supposons

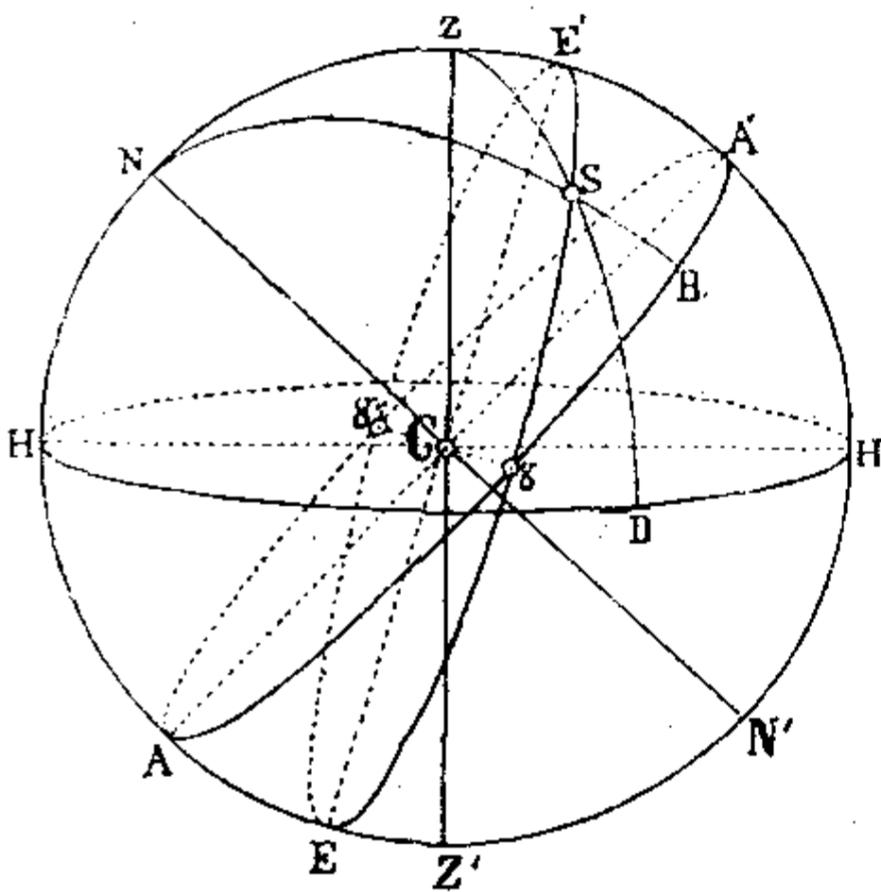


Fig. 1.

que le point C appartient à l'hémisphère boréal de la planète, c'est-à-dire que N est le pôle nord et N' le pôle sud.

Le grand cercle $A B A'$ de la sphère céleste dont les pôles sont les points N et N' , s'appelle l'équateur céleste. Son plan est normal à l'axe de la planète et se confond, par suite du rapport mentionné des dimensions de la planète à celles de la sphère céleste, avec le plan de l'équateur de la planète. Le grand cercle $H N Z$

$H' N' Z'$ de la sphère céleste, passant par le zénith Z et le pôle N , est le méridien du point d'observation C . La hauteur du pôle N au-dessus de l'horizon du point C , c'est-à-dire l'arc $H N$, est évidemment égale à l'arc $Z A'$ ou à l'angle $Z C A'$ que forme la verticale du point d'observation C avec le plan de l'équateur et qui n'est autre chose que la latitude géographique φ de ce point.

Soit S la position du Soleil à un moment donné, ainsi qu'il apparaît sur la sphère céleste à l'observateur en C . L'arc $Z S$ du grand cercle $Z S D$ passant par Z et S est la distance zénithale du Soleil, que nous désignerons toujours par z . L'arc $S B$ du grand cercle $N S B$ passant par N et S représente la déclinaison du Soleil, que nous désignerons par δ en valeur positive lorsque le Soleil se trouve dans l'hémisphère céleste boréal. L'angle sphérique au pôle $Z N S$ est l'angle horaire du Soleil. Nous le désignerons par ω en comptant en valeurs positives, à partir de la partie sud du méridien, dans la direction du mouvement diurne du Soleil.

Du triangle $N Z S$ on peut déduire une équation importante entre la distance zénithale z , la déclinaison δ , l'angle horaire ω du Soleil et la latitude φ du point d'observation. Nous avons en effet dans ce triangle

$$\begin{aligned} \text{arc } NS &= 90^\circ - \delta; \quad \text{arc } ZS = z; \quad \text{arc } ZN = 90^\circ - \varphi; \\ \sphericalangle ZNS &= \omega \end{aligned}$$

de sorte que, d'après la formule bien connue de trigonométrie sphérique, on a

$$(6) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega.$$

A cause de la rotation de la planète, la sphère céleste paraîtra, à l'observateur au point C , animée d'une rotation uniforme autour de son axe $C N$, de l'est à l'ouest. On appelle jour sidéral de la planète la durée d'une rotation de la sphère céleste, qui est évidemment égale à la durée de la rotation de la planète autour de son axe et qui sera désignée par τ_s . Ce mouvement ne modifie pas les déclinaisons des étoiles et ne fait qu'accroître leurs angles horaires régulièrement de 2π pendant chaque intervalle τ_s .

En dehors de ce mouvement apparent, auquel prennent part toutes les étoiles, le Soleil effectue sur la sphère céleste un mouvement annuel.

Toutes les planètes se déplacent autour du Soleil dans la même direction qui est de l'ouest à l'est. La conséquence de ce mouvement sera que le Soleil, observé du point C, se déplacera, sur la sphère céleste, entre les étoiles fixes, dans la même direction. Les mouvements des planètes autour du Soleil s'effectuant dans des plans passant par le Soleil, il est évident que le mouvement relatif du Soleil par rapport à la planète aura lieu dans un plan passant par le centre de la planète ou bien, ce qui revient au même, ainsi que nous l'avons vu, par le point d'observation C. Représentons l'intersection de ce plan avec la sphère céleste par le cercle $E \gamma S E' \gamma'$ (*fig. 1*) qui marquera la course annuelle du Soleil sur la sphère céleste observée du point C. En ne tenant pas compte des perturbations mutuelles des planètes, dont il sera question plus tard, ce cercle peut être considéré invariable sur la sphère céleste. On peut également supposer invariable le cercle équatorial $A \gamma A'$, si l'on fait provisoirement abstraction des lentes variations de l'axe de rotation de la planète. L'angle $A' \gamma E'$ que forment les plans de ces deux cercles est évidemment égal à celui que forme l'axe de rotation de la planète avec la normale du plan de son orbite et qui s'appelle l'inclinaison de l'axe de rotation de la planète. Nous désignerons cet angle par ε . Dans le cas particulier de la Terre, le cercle $E \gamma E' \gamma'$ s'appelle l'écliptique et l'angle ε , l'obliquité de l'écliptique. Les intersections γ et γ' de l'écliptique et de l'équateur sont nommées les points des équinoxes. Le point γ (*fig. 1*) par lequel passe le Soleil lorsqu'il s'élève de l'hémisphère céleste sud vers le nord est l'équinoxe de printemps ou le point vernal; γ' est l'équinoxe d'automne. Les deux points de l'écliptique éloignés de 90° des points des équinoxes s'appellent les solstices: celui qui est situé dans la sphère nord est le solstice d'été, celui de l'hémisphère sud est le solstice d'hiver. Dans ce même sens nous emploierons la désignation d'équinoxes et de solstices également pour les autres planètes.

L'arc de l'orbite annuelle du Soleil, compris entre le point vernal γ et la position S du Soleil à un moment donné, c'est-à-dire l'arc γS , est la longitude vraie du Soleil. Nous la désignerons par λ .

On déduit du triangle sphérique $\gamma B S$, rectangle en B, dans lequel on a: arc $\gamma B = \lambda$; arc $B S = \delta$; $\sphericalangle S \gamma B = \varepsilon$, l'équation

$$(7) \quad \sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda$$

que nous aurons l'occasion d'employer plus tard.

Le temps que le Soleil emploie à parcourir le cercle $E \gamma S E'$ $\gamma' E$ de la sphère céleste est l'année sidérale de la planète considérée. Cet intervalle, qui est évidemment égal à celui de la révolution sidérale de la planète autour du Soleil, sera désigné par T .

Le temps qui sépare deux passages consécutifs par le point vernal est l'année tropique de la planète. A cause de la variabilité de la position du point vernal, que nous avons déjà mentionnée et dont il sera plus loin encore question, l'année tropique n'est pas absolument égale à l'année sidérale. Cependant nous pouvons ne pas tenir compte de cette légère inégalité dans la description du mouvement annuel du Soleil.

La trajectoire apparente du Soleil est la résultante de son mouvement diurne et annuel; elle est représentée par une spire sphérique très serrée formant une ceinture autour de la sphère céleste.

Pendant que la sphère céleste a accompli en une année $\frac{T}{\tau_s}$ rotations de l'est vers l'ouest, le Soleil a, de son côté, effectué un tour sur cette sphère dans le sens opposé. Il s'ensuit que le Soleil, observé du point C, dans ce laps de temps, ne s'est levé et couché que $\left(\frac{T}{\tau_s} - 1\right)$ fois. L'année a, par conséquent, une journée sidérale de plus qu'elle n'a de journées solaires. En éliminant, par l'introduction d'un Soleil fictif moyen, les irrégularités de croissance de l'angle horaire ω , dont les origines sont l'inégale vitesse orbitale du Soleil ainsi que l'obliquité de son orbite par rapport à l'équateur⁵⁾, on aura

$$\frac{T}{\tau_s} T_s = \left(\frac{T}{\tau_s} - 1\right) \tau,$$

où τ désigne le jour moyen, c'est-à-dire l'espace de temps entre deux culminations consécutives du Soleil moyen. Il s'ensuit

$$(8) \quad \tau = \frac{T}{T - \tau_s} \tau_s.$$

Le temps écoulé entre le midi moyen et le moment considéré est le temps moyen.

La course annuelle du Soleil sur la sphère céleste n'est rien d'autre que la trajectoire du mouvement relatif du Soleil, projetée du centre de la planète sur la sphère céleste. Cette trajectoire est une ellipse dont un foyer est occupé par la planète considérée. En conséquence, la distance du Soleil à la planète, c'est-à-dire le rayon vecteur ρ , varie au cours de l'année.

Pour pouvoir exprimer mathématiquement cette variation, prenons l'ellipse $P \gamma A \gamma'$ (fig. 2) comme trajectoire du mouvement relatif du Soleil par rapport à la planète considérée occupant son foyer

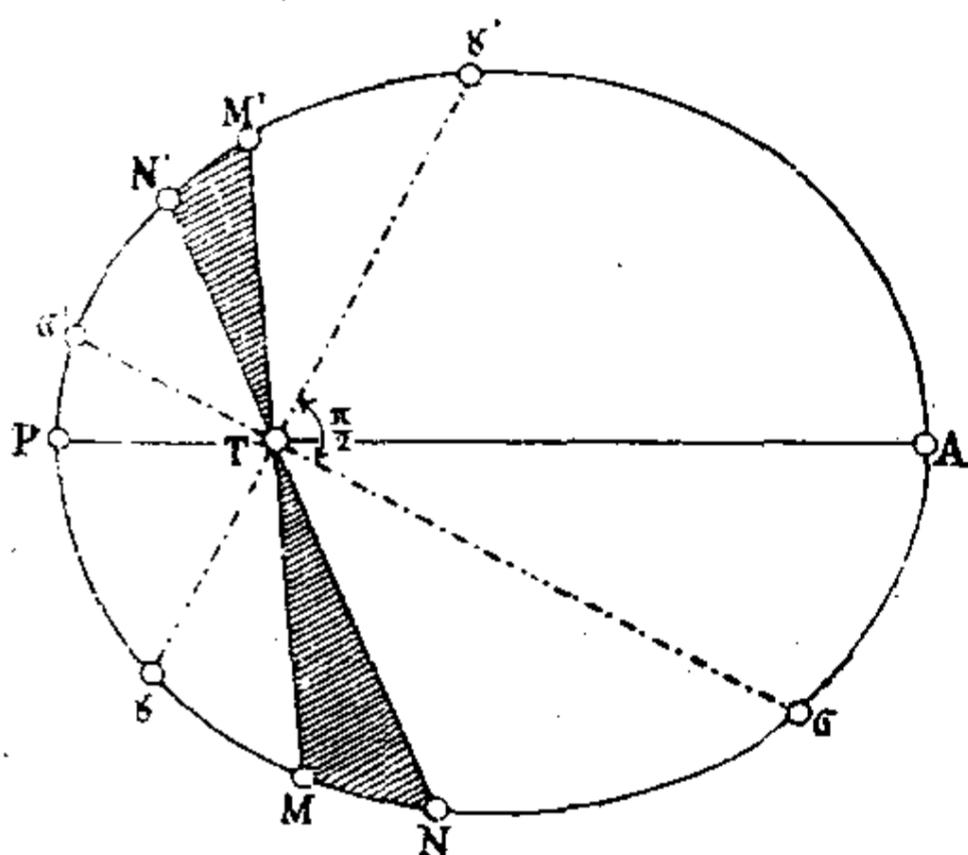


Fig. 2.

T. Dans le cas de la Terre on appelle le point P du grand axe le perigée et le point opposé A l'apogée. Si M représente la position considérée du Soleil sur cette trajectoire, l'angle $P T M$ que forme le rayon vecteur $T M = \rho$ avec le grand axe de cette ellipse est l'anomalie vraie du Soleil. Cet angle, que nous désignerons

par ν , doit être compté, à partir de la direction TP, dans le sens du mouvement annuel du Soleil.

En désignant par a le demi-grand axe de la trajectoire apparente du Soleil, qui est évidemment égal au demi-grand axe de l'orbite de la planète autour du Soleil, par b son demi-petit axe, par e l'excentricité, exprimée en parties du demi-grand axe a , on aura comme équation polaire de cette trajectoire elliptique

$$(9) \quad \rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + e \cos \nu}$$

où

$$(10) \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Supposons que le Soleil se trouve à l'équinoxe du printemps au point γ (*fig. 2*) de sa course annuelle; il est évident qu'il passera à l'équinoxe d'automne par le point γ' . En tirant la droite $\sigma\sigma'$ perpendiculaire à la droite $\gamma\gamma'$, on obtient les points σ et σ' par lesquels le Soleil passe respectivement au solstice d'été et au solstice d'hiver.

L'angle $P T \gamma$ représente l'anomalie du point vernal. Nous le désignerons par ν_0 . L'angle $\gamma T M$, formé par le rayon vecteur du Soleil avec la demi-droite dirigée vers le point vernal, représente, ainsi que nous l'avons vu, la longitude vraie du Soleil désignée par λ . On a donc

$$(11) \quad \nu = \nu_0 + \lambda.$$

La fraction de l'année, que le Soleil emploie à parcourir l'arc $\gamma\sigma$ de son orbite est le printemps boréal de la planète. Dans cet intervalle λ croît de 0° à 90° et δ de 0° à sa valeur maxima ε [voir l'équation (7)].

Pendant l'été boréal le Soleil parcourt l'arc $\sigma\gamma'$ (entre $\lambda = 90^\circ$ et $\lambda = 180^\circ$) tandis que δ décroît de ε à 0° .

Pendant l'automne boréal le Soleil parcourt l'arc $\gamma'\sigma'$ (entre $\lambda = 180^\circ$ et $\lambda = 270^\circ$) tandis que δ tombe de 0° à sa valeur minima $-\varepsilon$.

Pendant l'hiver boréal le Soleil parcourt l'arc $\sigma'\gamma$ (entre $\lambda = 270^\circ$ et $\lambda = 360^\circ$) tandis que δ croît de $-\varepsilon$ jusqu'à 0° .

Le printemps, l'été, l'automne et l'hiver australs de la planète correspondent respectivement aux quatre sections $\gamma'\sigma'$; $\sigma'\gamma$; $\gamma\sigma$ et $\sigma\gamma'$ de l'orbite solaire.

Le mouvement du Soleil le long de son orbite relative a lieu d'après la seconde loi de Kepler, c'est-à-dire que les aires décrites par le rayon vecteur croissent proportionnellement aux temps: la vitesse sectorielle $\frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\lambda}{dt}$ est donc constante. Le rayon vecteur, décrivant pendant l'année T de la planète entièrement la surface $ab\pi$ de l'ellipse formée par l'orbite solaire cette vitesse est égale à

$$(12) \quad \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{ab\pi}{T}.$$

A l'aide des équations (10) à (12) les valeurs ρ et λ peuvent être représentées en fonction du temps et on obtient par développement en séries ⁶⁾ les équations suivantes :

$$(13) \quad \frac{\rho}{a} = 1 - e \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) - \frac{e^2}{2} \left[\cos \frac{4\pi}{T} (t - t_0) - 1 \right] - \\ - \frac{e^3}{2^3} \left[3 \cos \frac{6\pi}{T} (t - t_0) - 3 \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) \right] -$$

$$(14) \quad \lambda = \frac{2\pi}{T} (t - t_0) - \nu_0 + 2e \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + \\ + \frac{5}{4} e^2 \sin \frac{4\pi}{T} (t - t_0) + \frac{e^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} \left[13 \sin \frac{6\pi}{T} (t - t_0) - \right. \\ \left. - 3 \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0) \right] +$$

où t_0 est l'époque du passage du Soleil au point le plus proche de la planète.

Pour les planètes dont les excentricités e sont tellement petites que les puissances supérieures de cette valeur peuvent être négligées, les formules précédentes se simplifient comme il suit :

$$(15) \quad \frac{\rho}{a} = 1 - e \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0)$$

$$(16) \quad \lambda = \frac{2\pi}{T} (t - t_0) - \nu_0 + 2e \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_0),$$

3. - *Distribution du rayonnement solaire à la surface de la planète à un moment donné.*

Les dimensions de toutes les planètes sont tellement petites par rapport à leur distance au Soleil, qu'on peut admettre que la distance de n'importe quel élément de leur surface au Soleil est égale au rayon vecteur ρ . Il s'ensuit que l'intensité du rayonnement solaire en chaque point de l'hémisphère éclairé de la planète est représentée par l'équation (5). En faisant abstraction des accidents du sol, c'est-à-dire en supposant la surface de la planète partout horizontale,

l'angle d'incidence du rayonnement solaire avec cette surface sera en chaque point égal à la distance zénithale z du Soleil, observé de ce point.

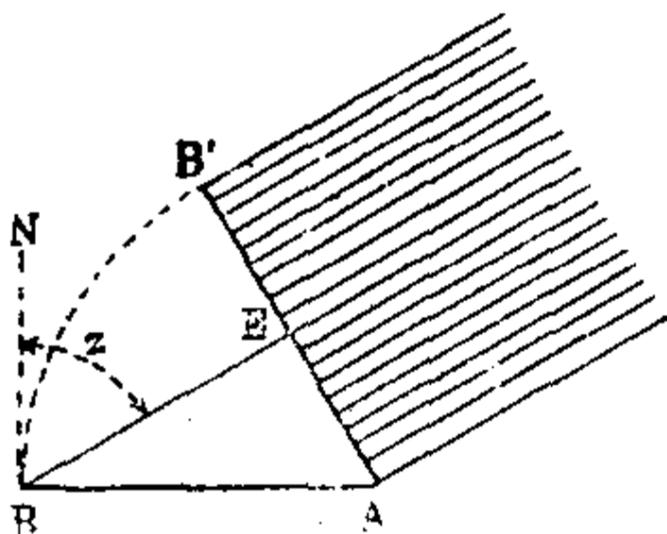


Fig. 3.

Supposons que $A B$ (fig. 3) représente l'unité de surface considérée de la planète orientée normalement au plan de la figure. Le rayonnement solaire forme avec la normale $B N$ de cette surface l'angle z , apportant par unité de temps et à l'unité de surface $A B'$, placée perpendiculairement à la direction de ce rayonnement, la quantité I de chaleur solaire représentée par la formule (5). De cette chaleur il n'y a que la fraction traversant la projection $A E$ de la surface $A B$, qui atteint la surface $A B$ et qui est donc égale à $I \cos z$. En désignant par $\frac{dW}{dt}$ la chaleur solaire qui tombe dans l'unité de temps sur l'unité de surface au point considéré de la surface de la planète, et en mesurant le rayon vecteur ρ en unités astronomiques a_0 , on aura

$$(17) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{I_0}{\rho^2} \cos z.$$

Nous désignerons cette valeur brièvement par *insolation* du point considéré de la surface de la planète.

Si φ et ψ sont les coordonnées géographiques de ce point, la distance zénithale z est donnée par (6), et on a

$$(18) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{I_0}{\rho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega).$$

En désignant par ω_0 la valeur de l'angle horaire du Soleil au moment considéré et au méridien zéro, à partir duquel on compte les longitudes (de l'ouest à l'est), on aura

$$(19) \quad \omega = \omega_0 + \psi.$$

Par conséquent on obtient

$$(20) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{I_0}{\rho^2} \left[\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (\omega_0 + \psi) \right].$$

Cette équation, où φ et ψ doivent être considérés comme des variables, exprime la loi de la distribution de la chaleur solaire à la surface de la planète au moment donné.

En posant

$$(21) \quad \omega_0 + \psi = \psi_1,$$

c'est-à-dire en comptant la longitude ψ_1 à partir du méridien dans le plan duquel se trouve le Soleil, on a

$$(22) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{I_0}{\rho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1).$$

L'insolation atteint sa valeur maxima $\frac{I_0}{\rho^2}$ au point de la surface de la planète pour lequel on a

$$\cos \psi_1 = 1; \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos (\varphi - \delta) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\psi_1 = 0; \psi = \delta.$$

C'est le point dont le zénith est occupé par le Soleil.

L'insolation est égale à zéro pour tous les points de la surface de la planète, dont les coordonnées φ et ψ_1 satisfont à l'équation

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1 = 0$$

où

$$(23) \quad \cos \psi_1 = -\tan \varphi \tan \delta.$$

En négligeant la forme légèrement ellipsoïdale de la planète et en la supposant complètement sphérique, l'équation (23) sera satisfaite pour tous les points du grand cercle de cette sphère auquel les rayons solaires sont tangents. A cause des faibles dimensions des planètes et même du Soleil par rapport au rayon vecteur ρ , tous les rayons tombant sur la planète peuvent être considérés parallèles entre eux, de sorte que l'équation (23) représentera le grand cercle de la sphère de la planète dont le pôle est le point mentionné $\psi_1 = 0; \varphi = \delta$. On appelle ce cercle qui partage la sphère de la planète en deux moitiés, l'hémisphère éclairé et l'hémisphère obscur, brièvement: le *terminateur*.

Le disque dont le contour est le terminateur représente la section normale du faisceau des rayons solaires tombant sur la planète. Il s'ensuit que la radiation totale tombant sur la planète par unité de temps, que nous désignerons par I_T , est égale à la surface de ce disque multipliée par le flux d'énergie I qui traverserait cette surface. En désignant par r le rayon du globe planétaire, on a

$$(24) \quad I_T = \frac{I_0}{\rho^2} r^2 \pi .$$

On obtient l'insolation moyenne I_m de la surface de la planète en divisant la valeur précédente par $4 \pi r^2$. On a donc

$$(25) \quad I_m = \frac{1}{4} \frac{I_0}{\rho^2} .$$

Le terminateur passe par les deux pôles de la planète seulement dans le cas où le Soleil se trouve dans le plan de l'équateur de la planète, c'est-à-dire lorsqu'on a $\delta = 0$. Dans ce cas les deux hémisphères de la planète, l'hémisphère boréal et l'hémisphère austral, reçoivent la même quantité de radiation. En dehors de ce cas les radiations I_N et I_S que reçoivent respectivement l'hémisphère boréal et l'hémisphère austral sont différentes et peuvent être déterminées comme il suit.

Soit ANA'S (fig. 4.) le cercle représentant le méridien de la planète, dont le plan passe par le centre du Soleil; soit N le pôle nord, S le pôle sud de la planète,

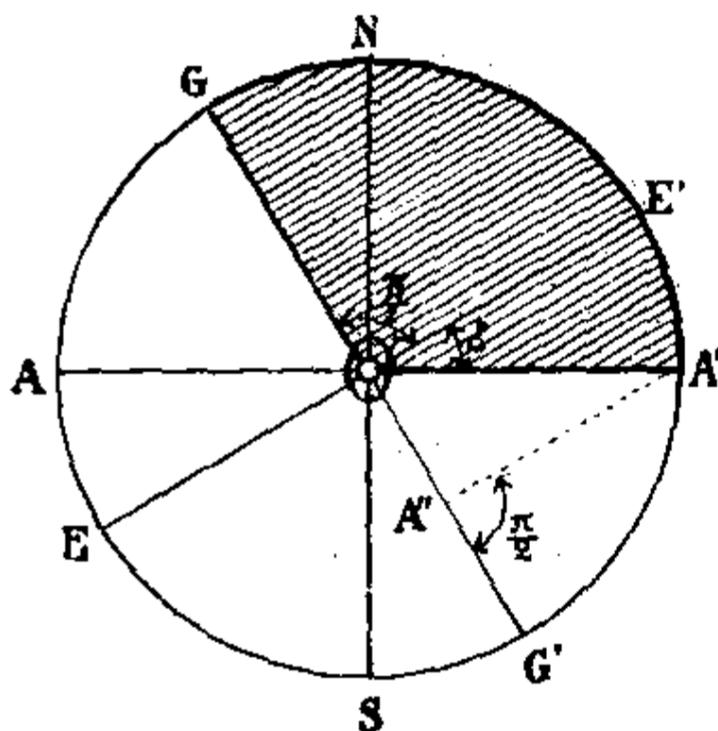


Fig. 4.

nord, S le pôle sud de la planète, A A' l'intersection du plan équatorial avec le plan de la figure; soit E' E la direction des rayons solaires, c'est-à-dire que l'angle A' O E' est égal à la déclinaison du Soleil. Alors le diamètre G G' normal à E E' représente l'intersection du terminateur avec le plan de la figure. Le secteur G' C A' E' N G (ombré à traits pleins est la projection orthogonale de la partie éclairée de l'hémisphère

boréal sur le plan de la figure. La projection orthogonale de cette partie de l'hémisphère boréal sur le plan du terminateur

se compose de l'aire d'un demi-cercle occupant la moitié nord du disque du terminateur et de l'aire d'une demi-ellipse ayant pour demi-grand axe le rayon r de ce disque et pour demi-petit axe la longueur $OA'' = r \sin \delta$. La surface de la projection ainsi limitée est, par conséquent, égale à

$$\frac{\pi}{2} r^2 + \frac{\pi}{2} r^2 \sin \delta,$$

tandis que la radiation I_N sera obtenue en multipliant cette surface par le flux I d'énergie la traversant normalement. On a donc

$$(26) \quad I_N = \frac{I_0}{\rho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 + \sin \delta),$$

et puisqu'on a $I_N + I_S = I_T$, on obtient

$$(27) \quad I_S = \frac{I_0}{\rho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 - \sin \delta).$$

La distribution de la radiation solaire le long du parallèle φ est représentée par l'équation (22) dont il n'y a que la valeur ψ_1 qui doit être considérée comme variable. Dans ce cas, ψ_1 représente également l'angle que forment les deux rayons du parallèle, celui du point considéré E et celui du point M dont le plan du méridien passe par le centre du Soleil (fig. 5). Il découle de (22) que les insolation des deux points symétriques par rapport à M sont égales. Les angles ψ_0 et $-\psi_0$, correspondant aux points N_1 et N_2 dont l'insolation est nulle, sont donnés par l'équation

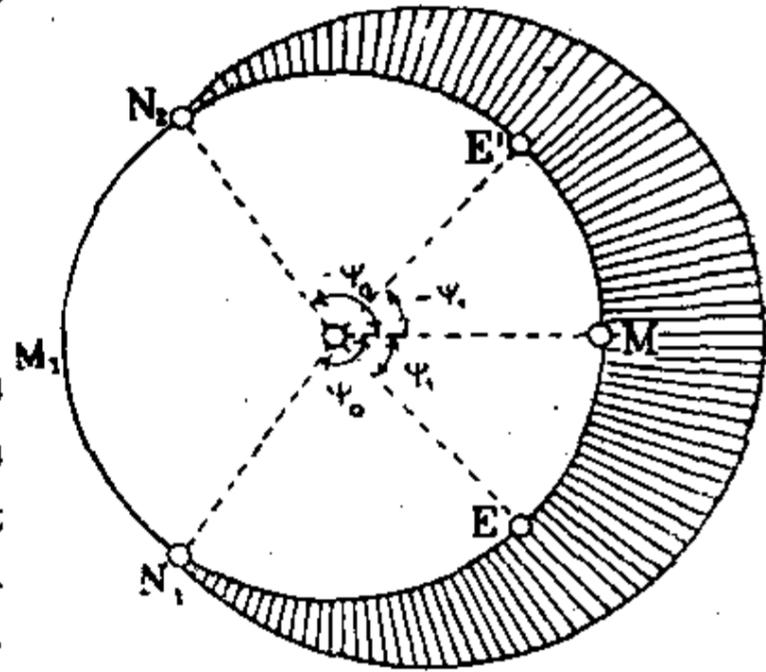


Fig. 5.

$$(28) \quad \cos \psi_0 = - \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta.$$

L'arc $N_1 M_1 N_2$ du parallèle est privé de radiation.

Nous verrons plus tard l'importance de la notion de moyenne insolation du parallèle à un moment donné. Nous désignerons cette valeur par w ; on la détermine comme il suit.

L'aire de la bande infiniment étroite, comprise entre les parallèles φ et $\varphi + d\varphi$ est évidemment égale à

$$df = 2\pi r^2 \cos \varphi d\varphi,$$

de sorte que la radiation solaire tombant sur l'élément de cette bande, compris entre les méridiens ψ_1 et $\psi_1 + d\psi_1$, est égale à

$$\frac{dW}{dt} r^2 \cos \varphi d\varphi d\psi_1.$$

L'insolation totale de cette bande est, par conséquent, représentée par

$$r^2 \cos \varphi d\varphi \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} d\psi_1,$$

tandis qu'on obtient l'insolation moyenne w en divisant la valeur précédente par l'aire df . On a donc

$$(29) \quad w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} d\psi_1,$$

et en égard à (22) après l'intégration effectuée

$$(30) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{\rho^2} (\psi_0 \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \psi_0).$$

L'angle ψ_0 contenu dans la formule précédente est donné par (28), de sorte que la valeur w ne contient que les deux variables φ et δ dépendant du temps. Il s'ensuit que la valeur w ne varie que par suite de la révolution de la planète autour du Soleil, tandis qu'elle est indépendante de sa rotation. Ceci est également valable pour les valeurs I_V et I_S .

4. — Marche diurne de l'insolation et la quantité diurne de radiation.

Lorsqu'il s'agit de suivre la marche diurne de l'insolation c'est-à-dire les changements de la valeur $\frac{dW}{dt}$ au cours d'une journée τ de la planète, on peut considérer φ et δ comme constants

leurs variations étant négligeables dans cet intervalle de temps pour toutes les planètes dont nous connaissons la durée de rotation, Mercure excepté, dont la durée de rotation est probablement égale à la durée de sa révolution autour du Soleil.

Il s'ensuit que les valeurs

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{I_0}{\varrho^2} \sin \varphi \sin \delta = A. \\ \frac{I_0}{\varrho^2} \cos \varphi \cos \delta = B \end{cases}$$

sont également constantes et que l'insolation est donnée en fonction de l'angle horaire ω par :

$$(32) \quad \frac{dW}{dt} = A + B \cos \omega .$$

La marche diurne de l'insolation se présente donc comme une simple fonction trigonométrique de l'angle horaire.

L'équation (32) n'est valable que pour les valeurs de ω fournissant une valeur positive de l'insolation, c'est-à-dire pour les valeurs comprises entre les angles horaires du lever et du coucher du Soleil. Ces deux angles sont évidemment donnés par l'équation

$$(33) \quad \cos \omega_0 = - \frac{A}{B} = - \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta ,$$

dont la racine négative $-\omega_0$ correspond au lever, la racine positive $+\omega_0$ au coucher du Soleil. L'équation (32) est donc valable pour l'intervalle

$$-\omega_0 < \omega + \omega_0 ;$$

pour toutes les autres valeurs de ω l'insolation est égale à zéro.

La valeur $\omega = 0$ correspond au passage du Soleil au méridien et marque le midi vrai, c'est-à-dire, à très peu près, le milieu de l'intervalle précédant. Les moyennes valeurs de ϱ et δ pendant cet intervalle sont donc à très peu près égales aux valeurs correspondant au midi vrai. C'est avec ces valeurs qu'on calculera les valeurs A et B.

Les annuaires astronomiques nous donnent les valeurs de ϱ et δ pour tous les midis vrais de l'observatoire. Elles nous donnent également les variations horaires de ces deux valeurs, de sorte qu'on peut tenir compte de ces variations au cours de la journée.

La quantité de radiation qui tombe sur l'unité de surface considérée, dans l'espace d'un jour solaire, sera nommée quantité diurne de radiation et désignée par W_τ . Il est aisé de calculer cette valeur lorsqu'on ne tient pas compte de petites irrégularités de l'accroissement de l'angle horaire ω dont il a été question au N^o 2. Dans ce cas, l'angle horaire s'accroît uniformément de 2π au cours d'une journée solaire τ . Il s'ensuit que l'angle horaire ω est lié au temps t par l'équation suivante

$$(34) \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} t,$$

où le temps t est compté à partir du midi vrai.

On a donc

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{dW}{dt} \frac{dt}{d\omega},$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (32) et (34),

$$(35) \quad \frac{dW}{d\omega} = \frac{\tau}{2\pi} (A + B \cos \omega).$$

On obtient la quantité diurne W_τ en intégrant l'expression précédente entre les limites $-\omega_0$ et $+\omega_0$ de sorte qu'on a

$$(36) \quad W_\tau = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (A + B \cos \omega) d\omega$$

et après l'intégration effectuée et eu égard à (31)

$$(37) \quad W_\tau = \frac{\tau}{\pi} \frac{I_0}{\rho^2} (\omega_0 \sin \varphi \sin \delta + \sin \omega_0 \cos \varphi \cos \delta).$$

Les équations (37) et (33) nous donnent la quantité diurne de radiation pour une valeur donnée de φ et δ .

Pour les latitudes auxquelles le Soleil ne se couche pas au cours de la journée considérée, c'est-à-dire pour les valeurs φ et δ qui dans l'équation (33) n'admettent pas une racine réelle de ω_0 , on doit poser $\omega_0 = \pi$ et on obtient, dans ce cas,

$$(38) \quad W_\tau = \tau \frac{I_0}{\rho^2} \sin \varphi \sin \delta.$$

5. — *La discontinuité de la marche de l'insolation et son élimination.*

Il résulte de l'équation (33) que lorsque l'inégalité

$$(39) \quad -1 < \text{tang } \varphi \text{ tang } \delta < +1$$

est satisfaite, ω_0 est réel, c'est-à-dire que le Soleil disparaît, durant l'intervalle de temps τ , au-dessous de l'horizon du point considéré. La déclinaison δ du Soleil ne pouvant être plus grande que $+\varepsilon$ et plus petite que $-\varepsilon$, il en résulte que l'inégalité (39) est satisfaite au cours de toute l'année aux latitudes géographiques pour lesquelles on a :

$$(40) \quad -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < \varphi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Les parallèles $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $\varphi = -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, les latitudes boréales étant négatives, s'appellent cercles polaires, tandis que nous appellerons la zone comprise entre ces deux cercles zone non-arctique. Dans cette zone le Soleil s'élève et se couche journellement.

Les deux calottes cernées par les cercles polaires dont les points satisfont aux inégalités

$$(41) \quad \varphi > \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{ou} \quad \varphi < -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

seront, contrairement à la dénomination usitée, appelées zones arctiques. La marche de l'insolation de ces zones est essentiellement différente de celle de la zone non-arctique.

Pour démontrer cela, supposons que le cercle HH' (*fig. 6*) représente l'horizon d'un point de la surface de la planète dont la latitude satisfait aux conditions (41). Soit AA' l'équateur, $EE'E'$ la trajectoire annuelle

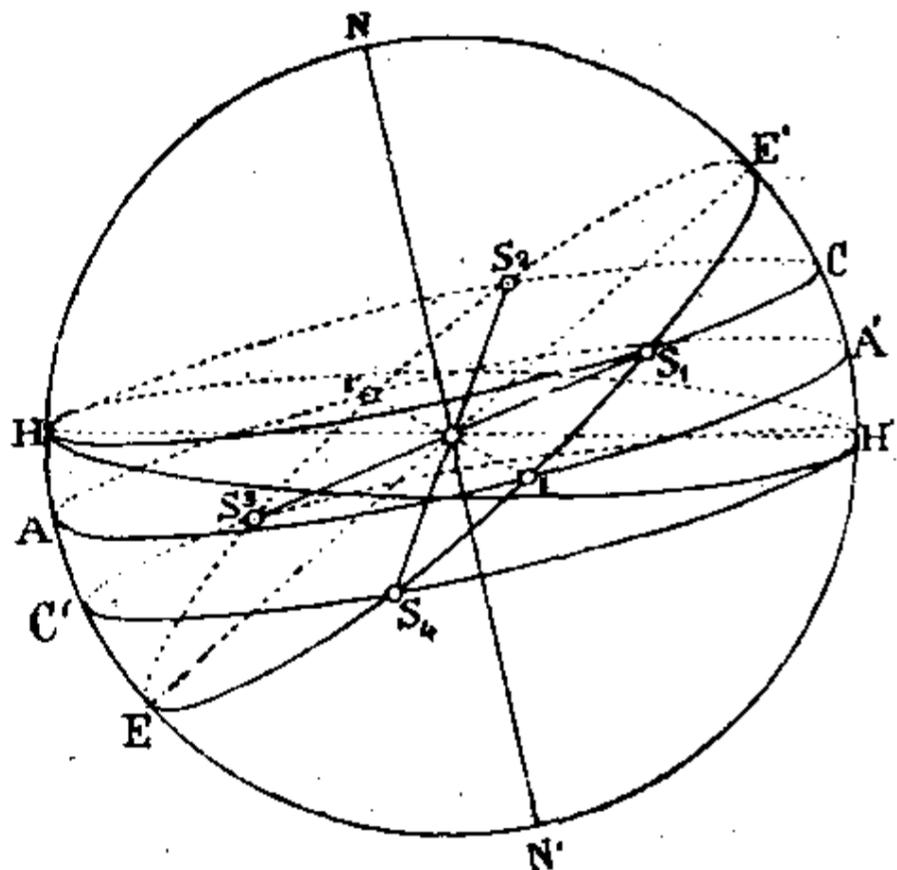


Fig. 6.

du Soleil sur la sphère céleste et γ le point vernal. Si N représente le pôle boréal de la sphère céleste observé de la planète considérée, alors l'arc HN du méridien HNHN' est égal à la latitude du point d'observation. En faisant passer par le point nord H de la méridienne le parallèle HS₁CS₂, celui-ci coupe la trajectoire annuelle du Soleil aux points S₁ et S₂ dont la déclinaison est égale à

$$(42) \quad \delta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Dès que le Soleil a atteint, dans sa course annuelle, le point S₁, il ne se couche plus au cours de la journée, ainsi qu'il ressort nettement de la figure ci-jointe. Ceci a lieu durant le parcours de l'intervalle S₁E'S₂ que nous nommerons l'intervalle du long jour arctique.

En faisant passer par le point sud H' de la méridienne le parallèle H'S₄C'S₃, il coupera la trajectoire annuelle du Soleil aux points S₃ et S₄ dont la déclinaison est égale à

$$(43) \quad \delta = - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

Il est facile de voir que le Soleil, durant le parcours du chemin S₃ES₄, n'apparaît pas au-dessus de l'horizon. Nous appellerons cet intervalle S₃ES₄ l'intervalle de la longue nuit arctique.

Durant le parcours des intervalles S₄ γ S₁ et S₂ γ S₃, que nous nommerons intervalles du lever et du coucher quotidiens du Soleil, le Soleil se lève et se couche pendant chaque journée de la planète.

Les particularités des zones arctiques ressortent également de l'équation (33). D'après celle-ci ω_0 atteint la valeur π , c'est-à-dire le long jour arctique commence, au moment où on a

$$(44) \quad \text{tang } \varphi \text{ tang } \delta = 1$$

et dure aussi longtemps que

$$\text{tang } \varphi \text{ tang } \delta > 1.$$

La longue nuit arctique commence aussitôt que ω_0 tombe à la valeur zéro, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$(45) \quad \text{tang } \varphi \text{ tang } \delta = -1$$

et dure aussi longtemps que

$$\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta < -1.$$

Les déclinaisons des points S_1 , S_2 , S_3 et S_4 sont données par les équations (44) et (45) que l'on peut combiner en une seule :

$$\operatorname{tang}^2 \varphi \operatorname{tang}^2 \delta = 1.$$

Pour déterminer les longitudes λ_1 , λ_2 , λ_3 et λ_4 des quatre points précédents, transformons l'équation précédente comme il suit :

$$1 + \operatorname{tang}^2 \varphi = 1 + \operatorname{cotg}^2 \delta$$

c'est-à-dire

$$\sin^2 \delta = \cos^2 \varphi.$$

Il s'ensuit donc, en tenant compte de l'équation (7),

$$(46) \quad \sin^2 \lambda = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varepsilon}.$$

Les quatre racines de cette équation comprises entre 0 et 2π représentent les longitudes des points S_1 , S_2 , S_3 et S_4 . Entre ces racines existent les rapports suivants

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \lambda_1 < \frac{\pi}{2} \\ \lambda_2 = \pi - \lambda_1 \\ \lambda_3 = \pi + \lambda_1 \\ \lambda_4 = 2\pi - \lambda_1. \end{array} \right.$$

On déduit de (28) et (33) que les valeurs ψ_0 et ω_0 sont égales entre elles, c'est-à-dire qu'elles atteignent en même temps la valeur π et qu'elles tombent ensemble à la valeur zéro. C'est pourquoi le parallèle considéré est, durant le long jour arctique, entièrement ensoleillé, tandis qu'il est complètement plongé dans l'obscurité durant la longue nuit arctique.

Il ressort également de ce qui précède que l'allure de la fonction $\frac{dW}{dt}$ au cours de l'année est discontinue pour toutes les latitudes, car aussitôt que le Soleil disparaît sous l'horizon, l'insolation cesse, ne pouvant avoir une valeur négative. En considérant la marche de l'insolation pendant un intervalle de temps plus long que le séjour du Soleil au-dessus de l'horizon, on doit donc tenir compte des discontinuités de la fonction $\frac{dW}{dt}$.

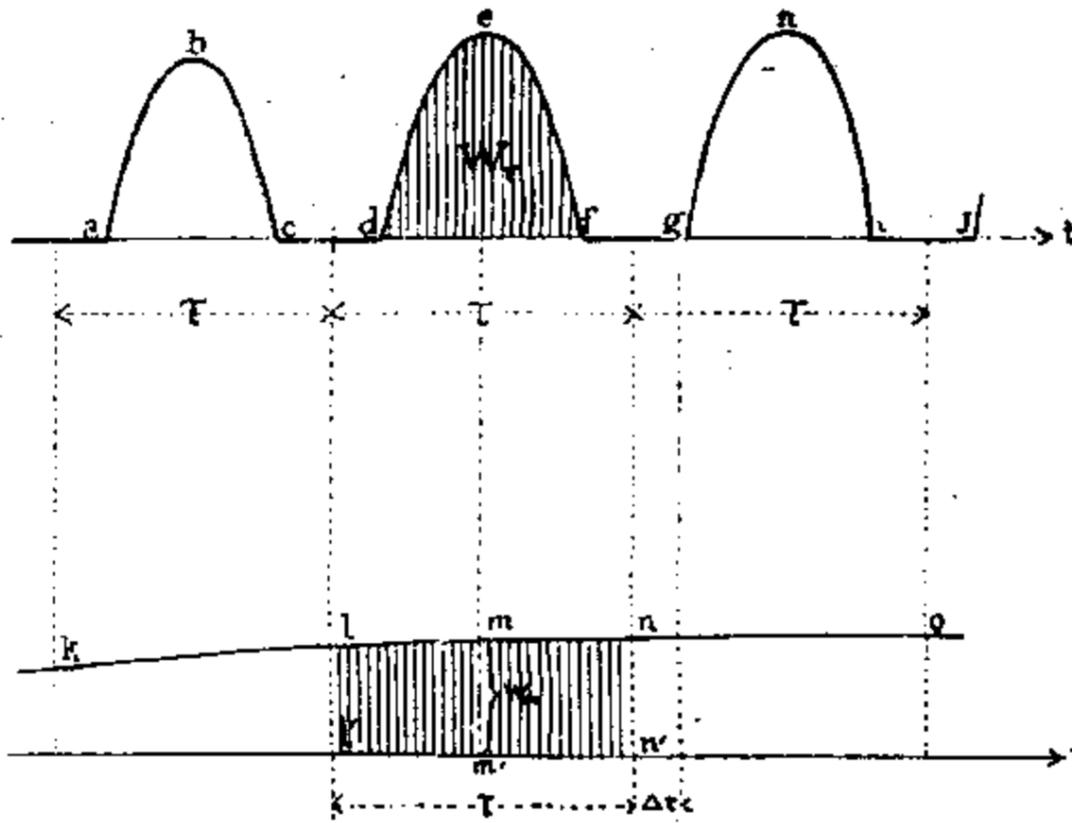


Fig. 7.

l'axe des abscisses. Les monticules, dont la hauteur et la largeur varient au cours de l'année, à cause de la variabilité de ϱ et de δ , représentent la marche diurne de l'insolation, tandis que les portions droites, qui varient également, correspondent aux intervalles nocturnes.

Si l'on veut déterminer la quantité de radiation qui tombe sur l'unité de surface considérée de la planète dans un intervalle de temps plus long qu'une journée, on doit alors, en tenant compte de la discontinuité de la fonction $\frac{dW}{dt}$, former une somme d'intégrales avec un nombre de membres égal au nombre de séjours du Soleil au-dessus de l'horizon du lieu considéré.

On peut éviter la formation de cette somme en employant la valeur w représentée par la formule (30). Cette valeur n'est égale à zéro que lorsque le parallèle considéré est complètement privé de radiation solaire. Ceci n'a jamais lieu aux latitudes de la zone non-arctique et n'a lieu qu'une fois par an aux latitudes des zones arctiques et cela pendant la longue nuit arctique. Il s'ensuit que w sera représenté, en fonction du temps, par une ligne $k l m n o$ (fig. 7) qui n'est pas discontinue.

Entre les deux lignes mentionnées, représentées dans la figure 7, il existe un rapport remarquable.

L'aire ombrée du monticule $d e f$ représente évidemment la quantité de radiation solaire qui tombe au cours d'une journée donnée

Représentons graphiquement l'insolation $\frac{dW}{dt}$ en fonction du temps par la ligne ondulée $a b c d e f g h i j$ (fig. 7), formée des monticules $a b c - d e f - g h i -$, séparés par les vallées horizontales $c d - f g - i j \dots$ qui ne sont que des portions de

sur l'unité de surface considérée à la latitude φ . Nous avons désigné cette quantité par W_τ et nous l'avons représentée par les équations (37) et (33) en admettant que les valeurs de ρ et de δ qui y figurent correspondent au midi vrai de la journée considérée. En comparant ces deux équations avec les équations (30) et (28), qui définissent l'insolation moyenne w du parallèle φ , on trouve que la quantité W_τ est égale à l'intervalle de temps τ multiplié par l'insolation moyenne w du parallèle φ , au moment du midi vrai de la journée considérée. Cette dernière quantité est représentée par l'ordonnée $m'm$ de la courbe $k l m n o$, qui coupe en deux parties égales l'intervalle de temps τ qui, s'étendant d'un minuit au suivant, contient la journée considérée. En désignant cette ordonnée par w_m , on aura

$$(48) \quad W_\tau = \tau w_m.$$

Nous avons mentionné que les valeurs ρ et δ varient tellement peu au cours d'une journée, que nous avons pu calculer W_τ avec leurs valeurs moyennes de la journée. Pour cette même raison on peut admettre que l'aire $l'n'n'l$ de la figure 7 est égale à τW_m ou bien, d'après (48), à W_τ . Les courbes $a b c d e f g h i \dots$ et $k l m n o$ sont donc liées par le rapport signifiant que les aires ombrées comprises entre ces courbes et leurs axes des abscissés sont égales entre elles. Ces aires s'étendent au-dessus de la section τ des axes des abscisses, comprise entre deux minuits consécutifs.

Lorsqu'on veut déterminer la quantité de radiation W_m que reçoit l'unité de surface considérée dans l'espace d'un nombre entier m de jours, on peut donc, au lieu d'intégrer la fonction discontinue $\frac{dW}{dt}$, intégrer la fonction continue w dans l'intervalle de temps comprenant le nombre considéré de jours. On a donc

$$(49) \quad W_m = \int_{t_1}^{t_1 + m\tau} w dt$$

où le moment t_1 doit coïncider avec un minuit.

Dans le cas où m n'est pas un nombre entier, ou bien lorsque $m\tau$ ne s'étend pas entre deux minuits, l'équation précédente n'est plus exacte, et la différence entre les aires limitées par les courbes $a b c d e f \dots$ et $k l m n o \dots$ peut être considérable. Cette diffé-

rence repose sur le fait que l'aire limitée par la première courbe représente la radiation solaire tombant dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) sur une unité de surface située à un endroit déterminé, à la latitude géographique φ , tandis que l'aire limitée par la seconde courbe représente la radiation qui dans le même intervalle est versée en moyenne sur toutes les unités de surface à la latitude φ . Dans cette seconde aire représentée par l'intégrale

$$(50) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} w dt$$

les inégalités d'insolation le long du même parallèle et dans l'intervalle (t_1, t_2) sont effacées.

Ces inégalités peuvent devenir très considérables pour de brefs intervalles de temps. Ainsi, par exemple, dans l'intervalle d'une demi-journée, un endroit du parallèle φ peut recevoir toute la radiation diurne, tandis que le point diamétralement opposé du même parallèle reste, pendant tout ce temps, dans l'obscurité. Avec la croissance de l'intervalle (t_1, t_2) ces inégalités deviennent relativement moins accusées; mais, même dans l'espace d'une année, tous les points du même parallèle ne reçoivent pas la même quantité de radiation. Les années tropiques des planètes ne comprennent pas, en général, un nombre entier de jours et l'année terrestre, par exemple, est plus longue d'un quart de journée. Cet excédant coïncide, pour un endroit du parallèle, avec le jour et, pour un autre endroit, avec la nuit, ce qui a pour conséquence que le premier recevra plus de radiation que le second. Il s'ensuit même que le même élément de surface reçoit, chaque année, des quantités variables de radiation, le quart de journée mentionné coïncidant, une année, avec le jour, une autre année, avec la nuit.

Dans les quantités w et W toutes ces différences, le long du même parallèle et au cours de différentes années, sont aplanies. La première de ces quantités représente la marche annuelle de la moyenne insolation à la latitude φ . Elle n'exprime donc pas la marche diurne provoquée par la rotation de la planète. La valeur W représente la quantité moyenne de radiation reçue par l'unité de surface à la latitude φ durant l'intervalle (t_1, t_2) ⁷.

6. — *Développements en séries.*

Pour pouvoir calculer l'intégrale (50) il est d'abord nécessaire d'exprimer les quantités w et dt par une variable commune et indépendante. Wiener a décomposé, dans son mémoire mentionné sous 1), et en choisissant la valeur λ comme variable indépendante, l'intégrale (50) en fonctions elliptiques de Legendre, de première, seconde et troisième espèce. Il fut par suite dans la possibilité d'employer les tables des intégrales elliptiques de Legendre pour le calcul des valeurs numériques de l'intégrale (50). Sa méthode mathématique, si élégante soit-elle, ne se prête pas bien aux buts que nous avons en vue. A part le fait que les fonctions de Legendre représentent un outil aujourd'hui peu connu et peu employé, cette méthode ne s'applique bien ni au calcul des variations séculaires de l'insolation ni à la détermination du rapport de l'état d'insolation à l'état thermique de la planète.

Pour ces motifs nous emploierons le développement en séries suivant, qui s'applique bien aux deux buts mentionnés.

Posons, pour abrégé,

$$(51) \quad \text{tang } \varphi = n$$

$$(52) \quad \sin \varepsilon = k.$$

Les équations (30) et (28) deviennent

$$(53) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{\varrho^2} \cos \varphi (n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0)$$

$$(54) \quad \cos \psi_0 = -n \text{ tang } \delta.$$

Il s'ensuit de la dernière équation,

$$\sin \psi_0 = \sqrt{1 - n^2 \text{ tang}^2 \delta} = \sqrt{\frac{1 - (1 + n^2) \sin^2 \delta}{\cos^2 \delta}}$$

c'est-à-dire

$$\cos \delta \sin \psi_0 = \sqrt{1 - (1 + n^2) \sin^2 \delta},$$

ou bien, à cause de (7) et (52),

$$(55) \quad \cos \delta \sin \psi_0 = \sqrt{1 - k^2 (1 + n^2) \sin^2 \lambda}.$$

L'expression précédente peut être développée en une série d'après la formule du binôme, pour toute valeur de λ , tant qu'on a

$$k^2 (1 + n^2) \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$\sin^2 \varepsilon (1 + \tan^2 \varphi) \leq 1 \text{ ou bien } \sin^2 \varepsilon \leq \cos^2 \varphi$$

$$(56) \quad -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

ce qui signifie que le parallèle considéré φ doit appartenir à la zone non-arctique.

Nous supposons ce cas et nous reviendrons plus tard au cas où le parallèle considéré appartient aux zones arctiques.

Le développement en série mentionné donnera donc

$$(57) \quad \begin{aligned} \cos \delta \sin \psi_0 = & 1 - \frac{1}{2} (1 + n^2) k^2 \sin^2 \lambda - \\ & - \frac{1}{2^3} (1 + n^2)^2 k^4 \sin^4 \lambda - \frac{1}{2^4} (1 + n^2)^3 k^6 \sin^6 \lambda - \\ & - \frac{5}{2^7} (1 + n^2)^4 k^8 \sin^8 \lambda - \frac{7}{2^8} (1 + n^2)^5 k^{10} \sin^{10} \lambda - \\ & - \frac{3.7}{2^{10}} (1 + n^2)^6 k^{12} \sin^{12} \lambda - \frac{3.11}{2^{11}} (1 + n^2)^7 k^{14} \sin^{14} \lambda - \dots \end{aligned}$$

Il ressort de (54)

$$(58) \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin (n \tan \delta).$$

Cette expression peut être développée en une série de Maclaurin tant qu'on a

$$-1 \leq n \tan \varphi \leq 1$$

Ceci a lieu, d'après (39) et (40), lorsque le parallèle considéré appartient à la zone non-arctique, ainsi que nous l'avons justement supposé. On a donc

$$(59) \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2} + n \operatorname{tang} \delta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} n^3 \operatorname{tang}^3 \delta + \\ \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{5} n^5 \operatorname{tang}^5 \delta + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{5}{7} n^7 \operatorname{tang}^7 \delta + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{5 \cdot 7}{9} n^9 \operatorname{tang}^9 \delta + \\ \frac{1}{2^8} \cdot \frac{7 \cdot 9}{11} n^{11} \operatorname{tang}^{11} \delta + \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{13} n^{13} \operatorname{tang}^{13} \delta + \dots$$

Il découle ensuite de (7) et (52)

$$(60) \quad \operatorname{tang} \delta = \sqrt{\frac{\sin^2 \delta}{1 - \sin^2 \delta}} = k \sin \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(61) \quad \psi_0 \sin \delta = \psi_0 k \sin \lambda.$$

En substituant l'expression que donne (60) pour $\operatorname{tang} \delta$ dans la formule (59) et en portant l'expression ainsi obtenue pour ψ_0 dans (61), on obtient:

$$(62) \quad \psi_0 \sin \delta = \frac{\pi}{2} k \sin \lambda + n k^2 \sin^2 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} n^3 k^4 \sin^4 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{3}{2}} + \\ + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{5} n^5 k^6 \sin^6 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{5}{2}} + \\ + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{5}{7} n^7 k^8 \sin^8 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{7}{2}} + \\ + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{5 \cdot 7}{9} n^9 k^{10} \sin^{10} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{9}{2}} + \\ + \frac{1}{2^8} \cdot \frac{7 \cdot 9}{11} n^{11} k^{12} \sin^{12} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{11}{2}} + \\ + \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{7 \cdot 3 \cdot 11}{13} n^{13} k^{14} \sin^{14} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{13}{2}} + \dots$$

En développant les termes entre parenthèses de l'équation précédente, d'après la formule du binôme, et en formant, à l'aide de (57), l'expression $n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0$ qu'on range suivant les puissances de $\sin \lambda$, tout en introduisant les désignations suivantes

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{2} (-1 + n^2) \\
 a_2 &= \frac{1}{8} (-1 + 2n^2) + \frac{1}{24} n^4 \\
 a_3 &= \frac{1}{16} (-1 + 3n^2 + n^4) + \frac{1}{80} n^6 \\
 a_4 &= \frac{5}{128} (-1 + 4n^2 + 2n^4) + \frac{1}{32} n^6 + \frac{5}{896} n^8 \\
 a_5 &= \frac{7}{256} (-1 + 5n^2 + \frac{10}{3} n^4 + 2n^6) + \frac{5}{256} n^8 \\
 &\quad + \frac{7}{2304} n^{10} \\
 a_6 &= \frac{21}{1024} (-1 + 6n^2 + 5n^4 + 4n^6) + \\
 &\quad + \frac{1}{1024} (45n^8 + 14n^{10}) + \frac{21}{11264} n^{12} \\
 a_7 &= \frac{33}{2048} (-1 + 7n^2 + 7n^4 + 7n^6 + 5n^8) + \\
 &\quad + \frac{7}{2048} (11n^{10} + 3n^{12}) + \frac{33}{26624} n^{14}
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

on a finalement

$$\begin{aligned}
 (64) \quad n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0 &= 1 + \frac{\pi}{2} n k \sin \lambda + \\
 &\quad + \sum_{m=1, 2, 3, \dots} a_m k^{2m} \sin^{2m} \lambda .
 \end{aligned}$$

Le développement en série précédent était lié à la condition que le parallèle considéré appartint à la zone non-arctique. Lorsque ce parallèle appartient aux zones arctiques, on doit distinguer, dans le calcul de l'expression précédente, trois cas, suivant que la longitude λ du Soleil appartient

1° à l'intervalle de la longue nuit arctique

2° à l'intervalle du long jour arctique

3° aux intervalles du lever et du coucher quotidien du Soleil.

Dans le premier cas, c'est-à-dire pour les longitudes du Soleil

$$\lambda_3 < \lambda < \lambda_4,$$

le parallèle considéré est, ainsi qu'il a été démontré au N^o 5, complètement sombre, c'est-à-dire que $\psi_0 = 0$, et, pour cet intervalle, l'expression précédente est égale à zéro.

Dans le second cas, c'est-à-dire pour les longitudes du Soleil

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2,$$

le parallèle est entièrement ensoleillé et on a $\psi_0 = \pi$, c'est-à-dire

$$(65) \quad n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0 = \pi n \sin \delta = \pi n k \sin \lambda.$$

Dans le troisième cas, c'est-à-dire pour les intervalles

$$0 < \lambda < \lambda_1; \quad \lambda_2 < \lambda < \lambda_3; \quad \lambda_4 < \lambda < 2\pi$$

on a, d'après ce qui a été dit au N^o 5,

$$(66) \quad -1 < n \tan \delta < +1.$$

Or, on peut maintenant démontrer que, tant que l'inégalité (66) est satisfaite, le développement en série précédent est applicable également aux zones arctiques.

Il découle, en effet, de (55) et (58) que ce développement est admissible lorsqu'on a

$$(67) \quad k^2 (1 + n^2) \sin^2 \lambda < 1$$

et

$$n^2 \tan^2 \delta < 1.$$

Cette dernière condition est identique à (66) et elle est donc réalisée. En la transformant comme il suit

$$n^2 < \cot^2 \delta$$

$$1 + n^2 < 1 + \cot^2 \delta = \operatorname{cosec}^2 \delta$$

$$(1 + n^2) \sin^2 \delta < 1$$

on voit qu'en tenant compte de (7) et (52) la condition (67) est également accomplie. Le développement en série est donc admissible.

De cette façon tous les cas possibles pour le calcul de l'expression (53) sont résolus. A cause de l'intégration à effectuer de cette expression, il est nécessaire d'exprimer les puissances de $\sin \lambda$ de la formule (64) par les cosinus des multiples de λ .

Dans ce but employons la formule connue

$$(68) \quad (-1)^m 2^{2m-1} \sin^{2m} \lambda = \cos 2m \lambda - \binom{2m}{1} \cos (2m-2) \lambda + \\ + \binom{2m}{2} \cos (2m-4) \lambda - \dots + \binom{2m}{m} \frac{1}{2}$$

et en posant pour abrégé

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} b_0 &= \cos \varphi \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} \binom{2}{1} a_1 k^2 + \frac{1}{2^4} \binom{4}{2} a_2 k^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^6} \binom{6}{3} a_3 k^6 + \frac{1}{2^8} \binom{8}{4} a_4 k^8 + \frac{1}{2^{10}} \binom{10}{5} a_5 k^{10} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{6} a_6 k^{12} + \frac{1}{2^{14}} \binom{14}{7} a_7 k^{14} + \dots \right\} \\ b_1 &= \frac{\cos \varphi}{2} \left\{ a_1 k^2 + \frac{1}{2^2} \binom{4}{1} a_2 k^4 + \frac{1}{2^4} \binom{6}{2} a_3 k^6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^6} \binom{8}{3} a_4 k^8 + \frac{1}{2^8} \binom{10}{4} a_5 k^{10} + \frac{1}{2^{10}} \binom{12}{5} a_6 k^{12} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{12}} \binom{14}{6} a_7 k^{14} + \dots \right\} \\ b_2 &= \frac{\cos \varphi}{2^3} \left\{ a_2 k^4 + \frac{1}{2^2} \binom{6}{1} a_3 k^6 + \frac{1}{2^4} \binom{8}{2} a_4 k^8 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^6} \binom{10}{3} a_5 k^{10} + \frac{1}{2^8} \binom{12}{4} a_6 k^{12} + \frac{1}{2^{10}} \binom{14}{5} a_7 k^{14} + \dots \right\} \\ b_3 &= \frac{\cos \varphi}{2^5} \left\{ a_3 k^6 + \frac{1}{2^2} \binom{8}{1} a_4 k^8 + \frac{1}{2^4} \binom{10}{2} a_5 k^{10} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^6} \binom{12}{3} a_6 k^{12} + \frac{1}{2^8} \binom{14}{4} a_7 k^{14} + \dots \right\} \\ b_4 &= \frac{\cos \varphi}{2^7} \left\{ a_4 k^8 + \frac{1}{2^2} \binom{10}{1} a_5 k^{10} + \frac{1}{2^4} \binom{12}{2} a_6 k^{12} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^6} \binom{14}{3} a_7 k^{14} + \dots \right\} \\ b_5 &= \frac{\cos \varphi}{2^9} \left\{ a_5 k^{10} + \frac{1}{2^2} \binom{12}{1} a_6 k^{12} + \frac{1}{2^4} \binom{14}{2} a_7 k^{14} + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

$$(69) \left\{ \begin{array}{l} b_6 = \frac{\cos \varphi}{2^{11}} \left\{ a_6 k^{12} + \frac{1}{2^2} \binom{14}{1} a_7 k^{14} + \dots \right\} \\ b_7 = \frac{\cos \varphi}{2^{13}} \left\{ a_2 k^{14} + \dots \right\} \\ a_1' = \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \end{array} \right.$$

on obtient

$$(70) \quad \cos \varphi (n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0) = b_0 + a_1' \sin \lambda - \\ - b_1 \cos 2 \lambda + b_2 \cos 4 \lambda - b_3 \cos 6 \lambda + b_4 \cos 8 \lambda - + \dots$$

7. — Marche annuelle de l'insolation.

Il s'ensuit de (53) et (70) que la quantité w , à l'aide de laquelle on peut exprimer la marche annuelle de l'insolation, ainsi que nous l'avons vu au N° 5, peut être représentée par l'équation suivante :

$$(71) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{\varrho^2} (b_0 + a_1' \sin \lambda - b_1 \cos 2 \lambda + b_2 \cos 4 \lambda - \\ - b_3 \cos 6 \lambda + b_4 \cos 8 \lambda - + \dots).$$

Celle-ci est applicable à la zone non-arctique pour toutes les longitudes du Soleil et aux zones arctiques seulement pour les intervalles du lever et du coucher quotidiens du Soleil.

Pour l'intervalle du long jour arctique, l'équation précédente doit être remplacée, d'après (65) et (53), par

$$(72) \quad w = \frac{I_0}{\varrho^2} k \sin \varphi \sin \lambda.$$

En exprimant dans les deux équations précédentes les quantités ϱ et λ à l'aide de (13) et (14) par t , on obtient w en fonction du temps et par cela la marche annuelle de l'insolation.

Nous reviendrons dans un chapitre ultérieur sur cette question. Pour le moment nous n'envisagerons que le cas particulier où l'excentricité e de l'orbite de la planète est tellement petite qu'elle peut être négligée.

Dans ce cas on a, d'après (13) et (14),

$$(73) \quad \begin{cases} \varrho = a \\ \lambda = \frac{2\pi}{T} t - \nu_0 \end{cases}$$

en comptant le temps t à partir du moment du passage du Soleil au point le plus proche de la planète. On obtient alors, au lieu de (71) et (72),

$$(74) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{a^2} \left\{ b_0 + a'_1 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \nu_0 \right) - b_1 \cos 2 \left(\frac{2\pi}{T} t - \nu_0 \right) + \right. \\ \left. + b_2 \cos 4 \left(\frac{2\pi}{T} t - \nu_0 \right) - b_3 \cos 6 \left(\frac{2\pi}{T} t - \nu_0 \right) + \right. \\ \left. + b_4 \cos 8 \left(\frac{2\pi}{T} t - \nu_0 \right) - + \dots \right\};$$

$$(75) \quad w = \frac{I_0}{a^2} k \sin \varphi \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \nu_0 \right) \quad (\text{intervalle du long jour arctique}).$$

8. — *Quantité de radiation reçue au cours d'un intervalle donné de l'année.*

La grandeur w représente l'insolation moyenne par unité de temps. Ceci découle de sa définition au N° 3, de même que de l'équation (48). Par ce fait la quantité de radiation que reçoit l'unité de surface, à la latitude φ , dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) , est représentée par

$$(76) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} w dt,$$

où, ainsi qu'il a été montré au N° 5, toutes les inégalités d'insolation le long du parallèle φ sont aplanies.

Dans cette équation on doit introduire pour w tantôt l'expression (71) tantôt (72) suivant le cas. En introduisant au lieu de t la variable λ , c'est-à-dire en déterminant la quantité de radiation que reçoit l'unité de surface dans la fraction de l'année durant laquelle le Soleil parcourt l'arc de sa trajectoire annuelle apparente,

compris entre les longitudes λ' et λ'' , l'intégrale précédente se simplifie considérablement. On a, en effet,

$$(77) \quad W = \int_{\lambda'}^{\lambda''} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda,$$

où la dérivée $\frac{dt}{d\lambda}$ forme avec le dénominateur ϱ^2 des expressions (71) et (72) une constante, car, en vertu de (12), on a

$$\frac{1}{\varrho^2} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{T}{ab\pi}.$$

De plus, en tenant compte qu'on a, à cause de (10),

$$(78) \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}},$$

on obtient pour W les expressions suivantes:

$$(79) \quad W = \frac{T}{2\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (b_0 + a_1 \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + \\ + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - + \dots) d\lambda$$

$$(80) \quad W = \frac{T}{2\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \sin \lambda d\lambda \quad (\text{intervalle du long jour arctique}).$$

La première de ces deux équations est valable dans la zone non-arctique pour toutes les longitudes du Soleil et dans les zones arctiques seulement pour les longitudes λ appartenant aux intervalles du lever et du coucher quotidiens du Soleil; la seconde équation n'est valable que pour les zones arctiques, et cela seulement pour les longitudes appartenant à l'intervalle du long jour arctique.

En effectuant les intégrations, on obtient

$$(81) \quad W = \frac{T}{2\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 (\lambda'' - \lambda') - a_1 (\cos \lambda'' - \cos \lambda') - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda'' - \sin 2\lambda') + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda'' - \sin 4\lambda') - \right. \\ \left. - \frac{b_3}{6} (\sin 6\lambda'' - \sin 6\lambda') + \frac{b_4}{8} (\sin 8\lambda'' - \sin 8\lambda') - + \dots \right\}$$

$$(82) \quad W = \frac{T}{2\pi} \frac{J_0}{a^2} \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1-e^2}} (\cos \lambda' - \cos \lambda'') \quad \begin{array}{l} \text{(intervalle du long} \\ \text{jour arctique).} \end{array}$$

Ces deux expressions ne seront pas modifiées lorsqu'on effectue les substitutions suivantes

$$\begin{array}{l|l} \varphi & -\varphi \\ \lambda' & \lambda' + \pi \\ \lambda'' & \lambda'' + \pi. \end{array}$$

Il s'ensuit que la quantité de radiation que reçoit l'unité de surface à la latitude φ , pendant que le Soleil parcourt l'arc de sa trajectoire annuelle, compris entre λ' et λ'' , est égale à la quantité de radiation que reçoit l'unité de surface, à la latitude $-\varphi$, pendant le parcours de l'arc compris entre $\lambda' + \pi$ et $\lambda'' + \pi$.

Soit $M N$ (*fig. 2*, page 11) l'arc de la trajectoire du Soleil, compris entre λ' et λ'' , l'arc $M' N'$ diamétralement opposé est alors celui compris entre $\lambda' + \pi$ et $\lambda'' + \pi$. La conclusion précédente étant valable pour toutes les latitudes, on peut également affirmer que la quantité de radiation que reçoit l'un des deux hémisphères de la planète pendant le parcours d'une portion quelconque $M N$ de l'orbite solaire est égale à la quantité de radiation que reçoit l'autre hémisphère, lorsque le Soleil parcourt la portion diamétralement opposée $M' N'$.⁸⁾

Nous remarquerons dès à présent, que l'égalité des quantités de radiations mentionnées n'entraîne pas une marche identique de la température des deux hémisphères, toutes autres conditions supposées d'ailleurs égales, car les temps que le Soleil met à parcourir les deux arcs $M N$ et $M' N'$ ne sont pas égaux (d'après la seconde loi de Kepler).

9. — Quantités de radiation reçues pendant les saisons astronomiques de la planète.

Nous adopterons, pour les intervalles de longitudes solaires qui caractérisent, d'après ce qui a été dit au N^o 2, les saisons astronomiques de la planète, la notation suivante:

a) hémisphère boréal

$$(83) \left\{ \begin{array}{l} \text{l'intervalle du printemps I, compris entre } \lambda = 0 \text{ et } \lambda = \frac{\pi}{2} \\ \text{l'intervalle de l'été II, compris entre } \lambda = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lambda = \pi \\ \text{l'intervalle de l'automne III, compris entre } \lambda = \pi \text{ et } \lambda = \frac{3}{2}\pi \\ \text{l'intervalle de l'hiver IV, compris entre } \lambda = \frac{3}{2}\pi \text{ et } \lambda = 2\pi \end{array} \right.$$

b) hémisphère austral

$$(84) \left\{ \begin{array}{l} \text{l'intervalle du printemps } \bar{\text{I}}, \text{ compris entre } \lambda = \pi \text{ et } \lambda = \frac{3}{2}\pi \\ \text{l'intervalle de l'été } \bar{\text{II}}, \text{ compris entre } \lambda = \frac{3}{2}\pi \text{ et } \lambda = 2\pi \\ \text{l'intervalle de l'automne } \bar{\text{III}}, \text{ compris entre } \lambda = 0 \text{ et } \lambda = \frac{\pi}{2} \\ \text{l'intervalle de l'hiver } \bar{\text{IV}}, \text{ compris entre } \lambda = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lambda = \pi. \end{array} \right.$$

Les quantités de radiation reçues par unité de surface à la latitude φ , pendant le parcours de ces intervalles, seront désignées respectivement par

$$W_I, W_{II}, W_{III}, W_{IV},$$

et

$$\bar{W}_I, \bar{W}_{II}, \bar{W}_{III}, \bar{W}_{IV},$$

suivant qu'il s'agit d'une latitude nord ou sud.

En tenant compte de ce qui a été dit à la fin du numéro précédent, on obtient facilement les équations suivantes

$$(85) \left\{ \begin{array}{l} \bar{W}_I = W_I \\ \bar{W}_{II} = W_{II} \\ \bar{W}_{III} = W_{III} \\ \bar{W}_{IV} = W_{IV}. \end{array} \right.$$

Si l'on veut à présent déterminer les valeurs de $W_I, W_{II}, W_{III}, W_{IV}$, on doit distinguer si la latitude considérée appartient à la zone non-arctique ou aux zones arctiques. Dans le premier cas, on doit mettre dans l'équation (81), pour λ' et λ'' , les limites des inter-

valles données par (83). On obtient alors, en prenant pour a' , l'expression donnée par (69),

$$(86) \left\{ \begin{array}{l} W_I = \frac{T}{4\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 + \sin \varphi \sin \varepsilon) \\ W_{II} = \frac{T}{4\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 + \sin \varphi \sin \varepsilon) \\ W_{III} = \frac{T}{4\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 - \sin \varphi \sin \varepsilon) \\ W_{IV} = \frac{T}{4\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 - \sin \varphi \sin \varepsilon) \end{array} \right. \quad \text{(zone non-arctique)}$$

Dans le calcul de $W_I, W_{II}, W_{III}, W_{IV}$ pour une latitude des zones arctiques, on doit partager les saisons astronomiques en intervalles limités par les longitudes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 , tels qu'ils ont été définis au N° 5. Pour l'intervalle du lever et du coucher quotidiens du Soleil, on doit employer l'équation (81), tandis que pour l'intervalle du long jour arctique on emploiera l'équation (82). Pendant la longue nuit arctique l'insolation est nulle. De cette façon on obtient les équations suivantes

$$W_I = \frac{T}{2\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 (\lambda'' - \lambda') - a'_1 (\cos \lambda'' - \cos \lambda') - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda'' - \sin 2\lambda') + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda'' - \sin 4\lambda') - \frac{b_3}{6} (\sin 6\lambda'' - \sin 6\lambda') + \dots \right\} \begin{array}{l} \lambda'' = \lambda_1 \\ \lambda' = 0 \end{array} + \\ + \frac{T}{2\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1-e^2}} (\cos \lambda' - \cos \lambda'') \begin{array}{l} \lambda'' = \frac{\pi}{2} \\ \lambda' = \lambda_1 \end{array}$$

c'est-à-dire

$$(87) \quad W_I = \frac{T}{2\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(b_0 \lambda_1 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda_1 + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda_1 + \dots \right) \quad \text{(zone arctique)}.$$

Dans cette équation λ_1 est donné par (46) et (47).

On obtient de la même façon, en tenant compte de (47),

$$(88) \quad W_{II} = \frac{T}{2\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(b_0 \lambda_1 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - \frac{b_4}{2} \sin 2 \lambda_1 + \frac{b_2}{4} \sin 4 \lambda_1 - \right. \\ \left. - \frac{b_3}{6} \sin 6 \lambda_1 + \dots \right) \quad (\text{zone arctique})$$

$$(89) \quad W_{III} = \frac{T}{2\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(b_0 \lambda_1 - \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - \frac{b_1}{2} \sin 2 \lambda_1 + \frac{b_2}{4} \sin 4 \lambda_1 - \right. \\ \left. - \frac{b_3}{6} \sin 6 \lambda_1 + \dots \right) \quad (\text{zone arctique})$$

$$(90) \quad W_{IV} = \frac{T}{2\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(b_0 \lambda_1 - \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - \frac{b_1}{2} \sin 2 \lambda_1 + \frac{b_2}{4} \sin 4 \lambda_1 - \right. \\ \left. - \frac{b_3}{6} \sin 6 \lambda_1 + \dots \right) \quad (\text{zone arctique}).$$

Des équations précédentes (86) à (90) on tire les équations valables pour toutes les latitudes:

$$(91) \quad \begin{cases} W_{II} = W_I \\ W_{IV} = W_{III} \\ W_{II} = \overline{W}_I \\ \overline{W}_{IV} = \overline{W}_{III} \end{cases}$$

Celles-ci nous montrent que la quantité de radiation correspondant à l'été est égale à celle du printemps, tandis que celle de l'hiver est égale à celle de l'automne.

A l'aide des équations (85) et (91) toutes les huit quantités $W_I, W_{II}, W_{III}, W_{IV}, \overline{W}_I, \overline{W}_{II}, \overline{W}_{III}, \overline{W}_{IV}$ peuvent être

exprimées par deux de celles-ci. Prenons à ce titre les deux quantités suivantes

$$(92) \quad \begin{cases} W_e = 2 W_I \\ W_h = 2 W_{III} . \end{cases}$$

La première de ces deux quantités représente évidemment la quantité de radiation solaire reçue par une latitude boréale pendant la saison chaude (de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne), la seconde celle reçue pendant la saison froide (de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps).

En désignant respectivement par W_e et W_h les quantités de radiation reçues par une latitude sud pendant la saison chaude australe et pendant la saison froide australe, on a

$$\overline{W}_e = 2 \overline{W}_I ; \overline{W}_h = 2 \overline{W}_{II} ,$$

c'est-à-dire

$$(93) \quad \begin{cases} W_e = \overline{W}_e \\ W_h = \overline{W}_h . \end{cases}$$

Il s'ensuit qu'une latitude de l'hémisphère austral reçoit, pendant sa saison chaude, la même quantité de radiation solaire que la même latitude de l'hémisphère boréal, pendant la saison chaude boréale, de même que, pendant sa saison froide, cette latitude reçoit la même quantité de radiation que la même latitude nord, pendant la saison froide boréale. Tout cela découle également de ce qui a été dit au N^o 8.

La détermination des quantités W_e et W_h s'effectue le mieux de la manière suivante.

Il s'ensuit de (86) et (93)

$$(94) \quad W_e - W_h = \frac{T}{\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \varepsilon .$$

Cette équation est valable pour toutes les latitudes.

Il découle ensuite des mêmes équations

$$(95) \quad W_e + W_h = \frac{T}{\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{b_0}{\sqrt{1-e^2}} \quad (\text{zone non-arctique})$$

$$(96) \quad W_e + W_h = \frac{T}{\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (2 b_0 \lambda_1 + \\ + \pi \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - b_1 \sin 2 \lambda_1 + \frac{b_2}{2} \sin 4 \lambda_1 - \\ - \frac{b_3}{3} \sin 6 \lambda_1 + \dots) \quad (\text{zone arctique}).$$

La première de ces équations est valable pour la zone non-arctique, tandis que la seconde l'est pour la zone arctique.

Les équations (94) à (96) donnent les quantités W_e et W_h pour toutes les latitudes.

La quantité

$$(97) \quad W_T = W_e + W_h$$

représente la radiation solaire reçue en une année par la latitude considérée.

Pour les deux pôles de la planète on a, à cause de (46),

$$\lambda_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(98) \quad \begin{cases} W_h = 0 \\ W_e = W_T = \frac{T}{\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{1-e^2}}. \end{cases}$$

10. — Quantités de radiation reçues par les deux hémisphères dans un intervalle donné de l'année.

En désignant par dN et dS la quantité de radiation que reçoivent respectivement les hémisphères boréal et austral de la planète par élément dt de temps, on a, en tenant compte de (26) et (27),

$$(99) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{I_0}{\varrho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 + \sin \delta). \\ \frac{dS}{dt} = \frac{I_0}{\varrho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 - \sin \delta). \end{cases}$$

Pendant que le Soleil parcourt l'arc compris entre les longitudes

λ' et λ'' , les deux hémisphères reçoivent des quantités suivantes N et S de radiation :

$$N = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dN}{dt} \frac{dt}{d\lambda} d\lambda$$

$$S = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\lambda} d\lambda.$$

En tenant compte de (99), (12), (78) et (7), on obtient

$$N = \frac{T}{4} \frac{I_0}{a^2} \frac{r^2}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 + \sin \varepsilon \sin \lambda) d\lambda$$

$$S = \frac{T}{4} \frac{I_0}{a^2} \frac{r^2}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 - \sin \varepsilon \sin \lambda) d\lambda,$$

c'est-à-dire

$$(100) \quad \begin{cases} N = \frac{T}{4} \frac{I_0}{a^2} \frac{r^2}{\sqrt{1-e^2}} \left[(\lambda'' - \lambda') + \sin \varepsilon (\cos \lambda' - \cos \lambda'') \right] \\ S = \frac{T}{4} \frac{I_0}{a^2} \frac{r^2}{\sqrt{1-e^2}} \left[(\lambda'' + \lambda') + \sin \varepsilon (\cos \lambda'' - \cos \lambda') \right]. \end{cases}$$

La quantité de radiation versée sur toute la planète pendant le parcours de l'intervalle λ' à λ'' est donnée par

$$(101) \quad N + S = \frac{T}{2} \frac{I_0}{a^2} \frac{r^2}{\sqrt{1-e^2}} (\lambda'' - \lambda').$$

Cette quantité est donc proportionnelle à l'accroissement de la longitude du Soleil et égale pour toutes les quatre saisons de la planète.

Si nous désignons respectivement par N_e et N_h les quantités de radiation que reçoit l'hémisphère nord pendant la saison chaude boréale ($\lambda = 0$ à $\lambda = \pi$) et pendant la saison froide boréale

($\lambda = \pi$ à $\lambda = 2\pi$) et si nous désignons respectivement par S_e et S_h les quantités de radiation reçues par l'hémisphère sud pendant la saison chaude australe et pendant la saison froide australe, on a, d'après (100),

$$(102) \quad \begin{cases} N_e = S_e = \frac{T}{4} \frac{I_0}{a^2} \frac{r^2}{\sqrt{1-e^2}} (\pi + 2 \sin \varepsilon) \\ N_h = S_h = \frac{T}{4} \frac{I_0}{a^2} \frac{r^2}{\sqrt{1-e^2}} (\pi - 2 \sin \varepsilon) . \end{cases}$$

Les quantités de radiation que reçoivent respectivement chacun des deux hémisphères durant leurs saisons chaudes et leurs saisons froides sont liées par le rapport remarquable découvert par Wiener :

$$(103) \quad \frac{N_e}{N_h} = \frac{S_e}{S_h} = \frac{\pi + 2 \sin \varepsilon}{\pi - 2 \sin \varepsilon} .$$

Il découle de (101) qu'en une année entière la planète reçoit la quantité suivante de radiation :

$$T \frac{I_0}{a^2} \frac{r^2 \pi}{\sqrt{1-e^2}} .$$

On obtient la moyenne insolation annuelle de la planète I_m^T par unité de temps et de surface en divisant la quantité précédente par le temps T et par la surface $\frac{1}{4} \pi r^2$. On a donc

$$(104) \quad I_m^T = \frac{1}{4} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} .$$

On admet souvent comme une chose évidente que la moyenne insolation annuelle de la planète est égale à sa moyenne insolation à la distance moyenne a du Soleil. D'après (25) cette dernière insolation est donnée par

$$(105) \quad I_m = \frac{1}{4} \frac{I_0}{a^2} ,$$

et elle n'est égale à l'insolation I_m^T que lorsque l'excentricité e de l'orbite de la planète est négligeable.

11. — *L'inégale durée des saisons astronomiques.*

Les saisons astronomiques de la planète sont, d'après ce qui a été dit au N^o 2, les intervalles de temps que met le Soleil à parcourir, dans son mouvement apparent autour de la planète considérée, les arcs $\gamma \sigma$, $\sigma \gamma'$, $\gamma' \sigma'$, $\sigma' \gamma$ (*fig. 2*, page 11). Comme les aires des secteurs correspondant à ces arcs ne sont pas égales, et comme le rayon vecteur du Soleil décrit dans les mêmes espaces de temps les mêmes aires, il s'ensuit que les saisons astronomiques auront des durées différentes. Il n'y a que lorsque le grand axe PA de l'orbite solaire coïncide avec la ligne des équinoxes que le printemps et l'hiver, d'une part, et l'été et l'automne, d'autre part, sont d'égales durées. Lorsque ces deux lignes sont perpendiculaires l'une à l'autre, la durée du printemps est égale à celle de l'été, tandis que l'automne a la même durée que l'hiver.

Nous allons développer maintenant les expressions mathématiques des durées de la saison chaude (de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne) et de la saison froide (de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps). Désignons, dans ce but, par T_e la durée de la saison chaude et par T_h la durée de la saison froide de l'hémisphère boréal, par \overline{T}_e et \overline{T}_h les durées de ces saisons de l'hémisphère austral. On a alors évidemment :

$$(106) \quad T_e + T_h = T$$

$$(107) \quad \begin{cases} \overline{T}_e = T_h \\ \overline{T}_h = T_e \end{cases}$$

de sorte qu'on n'a à déterminer qu'une de ces quatre quantités.

Si F_e désigne l'aire du secteur $\gamma \sigma \gamma'$ (*fig. 2*, page 11) et que F désigne l'aire de l'ellipse de l'orbite solaire, on a alors, d'après la seconde loi de Kepler,

$$(108) \quad T_e = \frac{F_e}{F} \cdot T.$$

On a

$$F_e = \frac{1}{2} \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \pi} \rho^2 d\nu,$$

où ν_0 désigne l'anomalie du Soleil au point vernal, de plus

$$F' = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\nu$$

et, d'après (9),

$$\rho^2 = \frac{b^4}{a^2} (1 + e \cos \nu)^{-2}.$$

Les excentricités des orbites planétaires sont petites, de sorte que l'expression précédente peut être développée en une série d'après la formule du binôme, où l'on peut négliger toutes les puissances supérieures de e . On obtient donc

$$T_e = \frac{\int_{\nu_0}^{\nu_0 + \pi} (1 - 2e \cos \nu) d\nu}{2\pi \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \pi} (1 - 2e \cos \nu) d\nu},$$

c'est-à-dire

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_e = \frac{1}{2} T \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0 \right) \\ T_h = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0 \right) \end{array} \right.$$

$$(110) \quad T_e - T_h = T \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0.$$

12. — Variations séculaires des éléments des orbites et des éléments de rotation des planètes.

La Mécanique céleste nous apprend que les orbites des planètes autour du Soleil et l'orientation de leurs axes de rotation dans l'espace sont soumises à de lentes mais incessantes variations et il est clair que celles-ci doivent se manifester dans l'état de l'insolation des planètes.

Les conséquences de ces variations sont d'une importance toute particulière pour les phénomènes terrestres, aussi allons-nous consacrer notre attention à l'étude de la Terre. Les considérations suivantes sont applicables à toute autre planète, mais nous n'aurons pas besoin de faire cette application dans les pages qui suivent.

Si la Terre ne subissait que l'attraction du Soleil, son orbite autour de celui-ci serait une ellipse de Kepler invariable dans le système solaire. L'attraction mutuelle des planètes a pour conséquence que cette orbite est une courbe gauche compliquée que l'on cherche à représenter d'après la méthode de variation des constantes, introduite en Mécanique par Lagrange, consistant à considérer comme variables les éléments qui déterminent la forme et la position de l'ellipse mentionnée et à les exprimer en fonction du temps.

Pour expliquer cela, imaginons un plan $X-Y$ passant par le Soleil S (*fig. 8*) fixé invariablement dans le système solaire. Dans ce plan prenons une droite passant par le Soleil pour l'axe des x . De cette manière on obtient un système fixe de coordonnées à l'aide duquel on peut représenter les orbites des planètes. Choisissons, comme on a coutume de le faire, pour le plan $X-Y$, le plan $E_0 \gamma_0 E'_0$ de l'orbite terrestre à l'époque 1850.0 et dirigeons l'axe des x vers le point du ciel représentant le point vernal à cette époque. Le temps t sera également compté à partir de cette époque.

Par suite de la variabilité des éléments de l'orbite terrestre, à chaque moment t , celle-ci sera représentée par une autre ellipse; cependant ces variations sont tellement lentes qu'on peut considérer l'orbite d'une année comme une ellipse de Kepler. Ceci admis, supposons l'orbite terrestre à l'époque t représentée par l'ellipse $E \cup E' \Omega$ (*fig. 8*) coupant le plan $X-Y$ suivant la droite $\Omega \cup$ et formant avec ce plan l'angle i . Depuis l'époque 1850.0, l'orientation du grand axe de cette ellipse a également changé, de façon que le périhélie s'est déplacé du point P_0 au point P . De même la forme de l'orbite a changé pendant l'intervalle t . Supposons que son demi-grand axe et son excentricité à l'époque t sont représentés respectivement par a et par e .

L'orbite de la Terre autour du Soleil sera donc déterminée par les cinq éléments suivants:

1. longitude du noeud ascendant $\Omega = \text{arc } \gamma_0 \Omega$
2. inclinaison de l'orbite i représentée par l'angle que forme le plan $E \gamma E'$ avec le plan $X-Y$
3. demi-grand axe a de l'orbite
4. excentricité e de l'orbite
5. longitude du périhélie $\pi_h = \text{arc } \gamma_0 \Omega + \text{arc } \gamma' P$, les deux arcs étant mesurés par les angles en S .

La théorie des perturbations détermine les variations que subissent

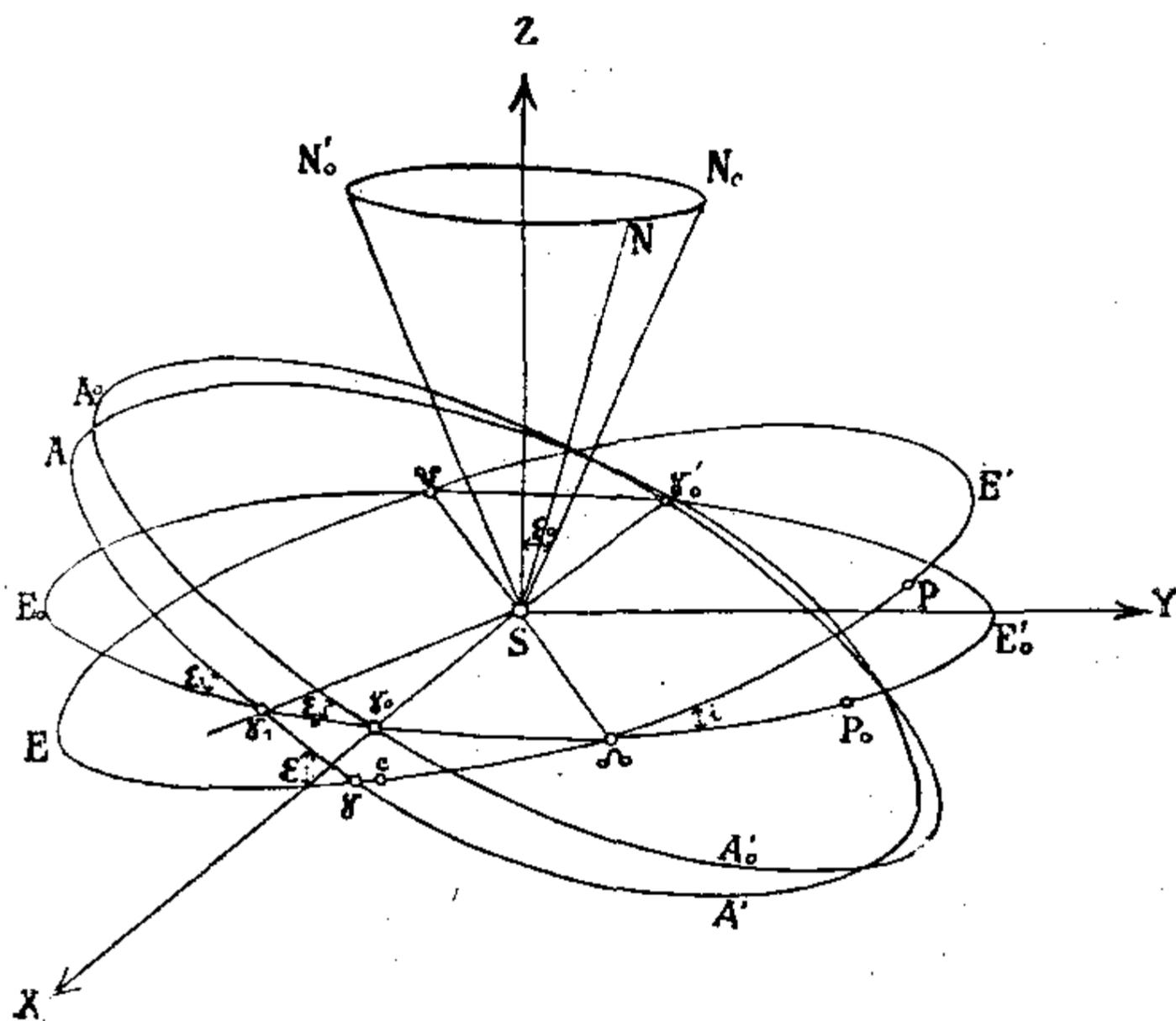


Fig. 8.

ces éléments. On distingue, parmi ces variations, des périodiques et des séculaires. Les premières oscillent entre de très étroites limites et n'ont aucune influence appréciable sur l'insolation de la planète; aussi pouvons-nous ne pas en tenir compte.

Quant aux variations séculaires, la Mécanique céleste nous apprend que les demi-grands axes a des planètes ne sont pas passibles de telles variations et il s'ensuit, d'après la troisième loi de Kepler, que les durées de révolutions T des planètes sont également invariables. Pour la détermination numérique des variations séculaires

des autres quatre éléments, Stockwell⁹⁾ a développé des équations de la forme suivante :

$$(111) \quad \begin{cases} e \cos \pi_h = f_1(t) \\ e \sin \pi_h = f_2(t) \\ \sin i \cos \Omega = f_3(t) \\ \sin i \sin \Omega = f_4(t), \end{cases}$$

dont les seconds membres sont des fonctions du temps données pour chaque planète.

En employant ces équations, que nous exposerons dans la seconde partie du présent ouvrage, on est dans la possibilité de suivre mathématiquement les variations des éléments des orbites.

En dehors de ces variations nous devons aussi, ainsi que nous l'avons déjà dit, tenir compte des variations des éléments de rotation. Pour élucider le mécanisme de ces variations nous prendrons de nouveau l'exemple de la Terre.

En faisant passer par S (*fig. 8*) un plan représenté par le disque $A_0 A'_0$ parallèle à celui de l'équateur terrestre à l'époque 1850.0, il coupera évidemment le plan de l'orbite terrestre $E_0 E'_0$ suivant la droite $\gamma_0 \gamma'_0$ menée d'un équinoxe à l'autre, c'est-à-dire suivant l'axe des x , tandis que les deux plans formeront l'angle ε_0 égal à l'obliquité de l'écliptique à l'époque 1850.0. L'axe de rotation de la Terre à l'époque 1850.0 est perpendiculaire au plan $A_0 A'_0$ et, par conséquent, également à l'axe des x ; il s'ensuit que la droite $S N_0$, qui lui est parallèle, reposera dans le plan $Y-Z$ et formera avec l'axe des z l'angle ε_0 .

Si la Terre était une sphère homogène ou à couches concentriques homogènes, la résultante de l'attraction du Soleil, de la Lune et des planètes passerait par son centre, tandis que son axe de rotation conserverait constamment la direction $S N_0$. Par suite de l'aplatissement de la Terre, cette résultante ne passe pas par son centre, c'est-à-dire qu'on doit faire intervenir un moment de rotation, si l'on veut que cette résultante passe par le centre; ce moment de rotation tend à faire tourner l'axe de la Terre, de façon que $S N_0$ dans un intervalle de temps nommé l'année platonique décrive un cône dont l'axe coïncide avec l'axe des z et dont l'ouverture est égale à $2 \varepsilon_0$.

Soit $N_0 S N'_0$ ce cône. Après le temps t , l'axe terrestre aura la direction $S N$. A la suite de cette déviation, le plan de l'équateur

terrestre arrivera à la position $A A'$ et coupera le plan $X - Y$ suivant la droite $S \gamma_1$, normale au plan $N S Z$. L'angle $\gamma_0 S \gamma_1 = \psi$ ou bien l'arc $\gamma_0 \gamma_1$, que nous mesurerons, ainsi que tous les autres arcs qui suivront, par leurs angles en S , s'appelle la *précession luni-solaire* dans l'intervalle t . C'est la tâche de la Mécanique céleste de déterminer cette valeur. Ainsi que la dénomination de cette quantité l'indique, on ne tient compte que du moment de rotation dû à l'attraction du Soleil et de la Lune, celui des planètes étant minime.

Pendant le temps t que met le plan de l'équateur terrestre à passer de la position $A_0 A_0'$ à la position $A A'$, le plan de l'orbite de la Terre s'est déplacé de $E_0 E_0'$ à $E E'$ de façon que le point vernal occupe, à l'époque t , la position γ . En faisant arc $\Omega c = \text{arc } \Omega \gamma_0$, on voit que le point vernal s'est déplacé pendant le temps t , par rapport au point Ω , de la valeur $\text{arc } c \gamma = \psi'$. L'arc ψ' est la *précession générale*.

Le mouvement du plan de l'orbite terrestre et l'excentricité de cette orbite ont pour conséquence que l'axe de rotation de la Terre ne décrit pas exactement le cône $N_0 S N_0'$ à axe Z mais s'en écarte sensiblement. Il s'ensuit que le plan de l'équateur, à l'époque t , ne formera plus, avec le plan $X - Y$, l'angle ε_0 , mais un angle différent ε_1 . Pendant le temps t le plan de l'orbite terrestre est arrivé à la position $E E'$ et forme, à l'époque t , l'angle ε avec le plan équatorial $A A'$. L'obliquité de l'écliptique a donc changé, pendant le temps t , de la valeur ε_0 à la valeur ε . Cette différence s'appelle la *variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique*.

Dans le travail mentionné de Stockwell, on trouve également les équations pour le calcul des variations séculaires des quantités ψ' et ε , qu'on retrouvera dans la seconde partie du présent ouvrage.

En plus de ces variations séculaires, les valeurs ψ' et ε sont affectées de variations périodiques, connues sous le nom de *nutations*, produites par la constellation périodiquement variable que forment le Soleil, la Terre et la Lune et surtout par le mouvement des noeuds de l'orbite lunaire. Par suite de ces variations les plans de l'équateur et de l'orbite terrestre, à l'époque t , ne se couperont pas au point γ , mais en un point différent qui est le vrai point vernal à cette époque. De même la vraie obliquité de l'écliptique différera quelque peu de l'angle ε . Cependant les effets de la nutation sont tellement petits que nous pouvons n'en pas tenir compte.

13. — Variations séculaires de l'insolation des planètes.

Pour pouvoir exprimer mathématiquement l'influence qu'exercent les changements des éléments astronomiques, exposés au N^o précédent, sur l'état d'insolation des planètes, imaginons notre système de coordonnées $X - Y - Z$ (fig. 8) déplacé, tout en conservant son orientation, de façon que son origine coïncide avec le centre T de la planète considérée (fig. 9). Supposons que cette planète soit, par exemple, notre Terre.

Ceci posé, l'intersection $E_0 E'_0$ du plan $X - Y$ du système de coordonnées avec la sphère céleste représente la course apparente du Soleil, c'est-à-dire l'écliptique à l'époque 1850,0; γ_0 est la position du point vernal à cette époque. Au moment où la Terre, dans

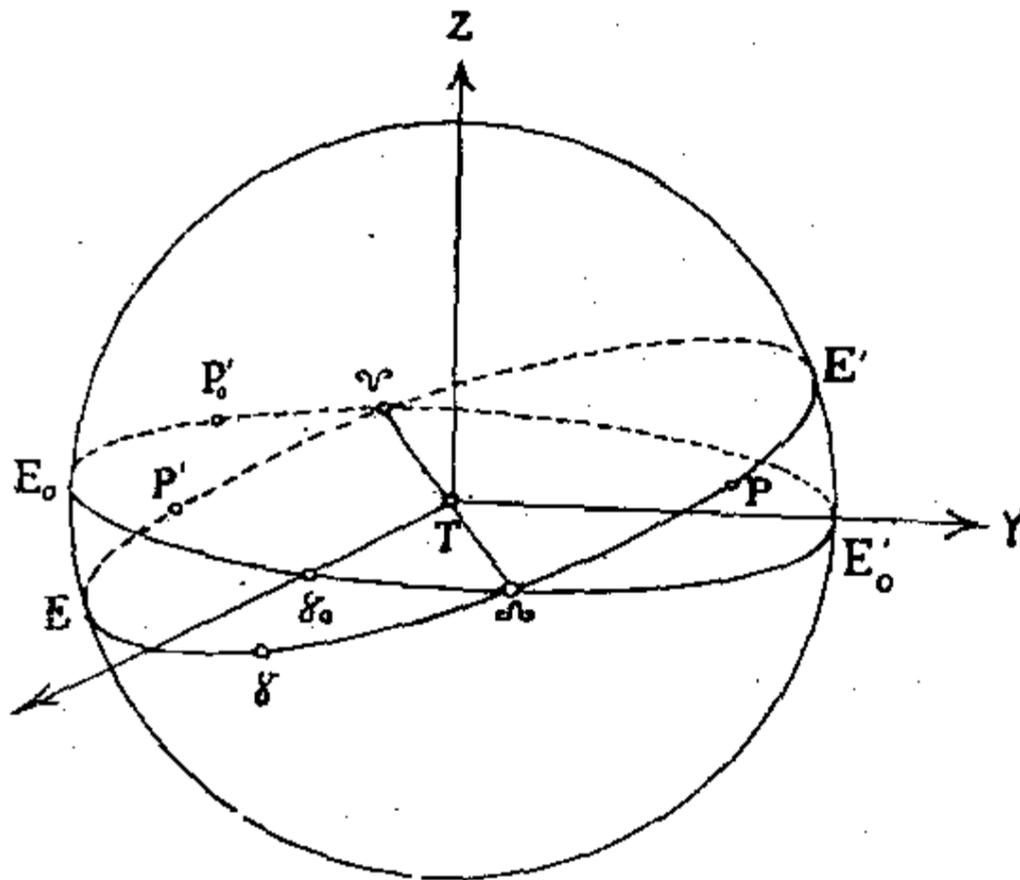


Fig. 9.

son parcours autour du Soleil, passe au périhélie P_0 de la figure 8, le Soleil apparaît dans sa course apparente au périhélie P'_0 de la figure 9. Ces deux points sont diamétralement opposés dans le système de coordonnées.

Faisons passer par T (fig. 9) un plan parallèle au plan $E E'$ (fig. 8) de l'orbite terrestre à l'époque t ; l'intersection $E E'$ de ce

plan avec la sphère céleste représente évidemment la course apparente du Soleil à l'époque t . Au moment où la Terre, dans son parcours autour du Soleil, passe au périhélie P de la figure 8, le Soleil apparaît dans sa course apparente au point P' de la figure 9. Ces deux points sont diamétralement opposés dans le système de coordonnées.

L'arc $P' \gamma$ de la figure 9 représente, d'après ce qui a été dit au N^o 2, l'anomalie ν_0 du point vernal à l'époque t ; cet arc est

représenté, dans la figure 8, par l'arc $180^\circ - \gamma P$. Or, l'arc γP représente, en tenant compte de ce qui a été dit au N^o précédent et en égard à ce que $c \Omega = \gamma_0 \Omega$, la somme de la précéssion générale ψ' , et de la longitude du périhélie π_h . On a donc

$$(112) \quad \nu_0 = 180^\circ - (\pi_h + \psi').$$

L'arc

$$(113) \quad \pi_h + \psi' = \Pi$$

est ce qu'on appelle la longitude du périhélie par rapport au point vernal correspondant et on a alors:

$$(114) \quad \nu_0 = 180^\circ - \Pi.$$

Les quantité π_h et ψ' ne se présentent que sous forme de leur somme, dans l'expression de ν_0 et, par conséquent, également dans les équations (14), (71), (74) et (109). Il s'ensuit que, dans toutes les équations développées dans ce chapitre, représentant l'état d'insolation de la planète, on n'aura à tenir compte que des variations séculaires des quantités

$$e, \varepsilon, \Pi.$$

Ainsi la marche annuelle de l'insolation dépend, à cause de (114), (14), (52) (69) et (71), de toutes ces trois variables, ce qui peut être exprimé symboliquement par

$$(115) \quad w = w(e, \varepsilon, \Pi).$$

Les quantités de radiation reçues pendant les saisons astronomiques ne dépendent pas, ainsi qu'il découle de (86) à (90), de la quantité Π , mais uniquement de e et ε , ce qui doit être exprimé par les équations:

$$(116) \quad \begin{cases} W_e = W_e(e, \varepsilon) \\ W_h = W_h(e, \varepsilon). \end{cases}$$

Les durées des saisons astronomiques, représentées d'après (109) et (114) par

$$(117) \quad \begin{cases} T_e = \frac{1}{2} T \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right) \\ T_h = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right), \end{cases}$$

ne dépendent que de e et de Π , ce qui peut être exprimé par les équations

$$(118) \quad \begin{cases} T_e = T_e(e, \Pi) \\ T_h = T_h(e, \Pi). \end{cases}$$

Ainsi qu'il découle des équations développées dans ce chapitre, toutes ces quantités sont des fonctions simples des variables séculaires e et Π et l'influence de celles-ci sur l'état d'insolation peut être aisément calculée.

Un peu plus compliqué se présente le calcul des variations de l'état d'insolation, provoquées par la variabilité de la quantité ε , car d'après (52) et (69) le rapport entre ε et l'état d'insolation est représenté par des séries. Mais en tenant compte que, ainsi que nous le verrons plus loin, ε varie entre de très étroites limites, il est permis d'admettre que les variations des valeurs $b_0, b_1, b_2 \dots W_e$ et W_h provoquées par ε sont respectivement proportionnelles

aux dérivées partielles $\frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} \dots \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial W_h}{\partial \varepsilon}$.

En désignant respectivement par $\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2 \dots \Delta W_e, \Delta W_h$, les variations des valeurs $b_0, b_1, b_2 \dots W_e, W_h$ provoquées par l'accroissement de ε d'un degré, on peut donc poser.

$$(119) \quad \Delta b_0 = \frac{\pi}{180} \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon}; \quad \Delta b_1 = \frac{\pi}{180} \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon};$$

$$\Delta b_2 = \frac{\pi}{180} \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} \dots$$

$$(120) \quad \Delta W_e = \frac{\pi}{180} \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon}; \quad \Delta W_h = \frac{\pi}{180} \frac{\partial W_h}{\partial \varepsilon}.$$

En différenciant les équations (69) par rapport à ε , en multipliant en même temps tous les membres entre parenthèses par k et en divisant pour cela par $\sin \varepsilon$ les facteurs devant les parenthèses, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon} &= \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tang} \varepsilon} \left\{ a_1 k^2 + \frac{4}{2^4} \binom{4}{2} a_2 k^4 + \frac{6}{2^6} \binom{6}{3} a_3 k^6 + \right. \\
 &+ \frac{8}{2^8} \binom{8}{4} a_4 k^8 + \frac{10}{2^{10}} \binom{10}{5} a_5 k^{10} + \frac{12}{2^{12}} \binom{12}{6} a_6 k^{12} + \\
 &\quad \left. + \frac{14}{2^{14}} \binom{14}{7} a_7 k^{14} + \dots \right\} \\
 \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} &= \frac{\cos \varphi}{2 \operatorname{tang} \varepsilon} \left\{ 2 a_1 k^2 + \frac{4}{2^2} \binom{4}{1} a_2 k^4 + \frac{6}{2^4} \binom{6}{2} a_3 k^6 + \right. \\
 &+ \frac{8}{2^6} \binom{8}{3} a_4 k^8 + \frac{10}{2^8} \binom{10}{4} a_5 k^{10} + \frac{12}{2^{10}} \binom{12}{5} a_6 k^{12} + \\
 &\quad \left. + \frac{14}{2^{12}} \binom{14}{6} a_7 k^{14} + \dots \right\} \\
 \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} &= \frac{\cos \varphi}{2^3 \operatorname{tang} \varepsilon} \left\{ 4 a_2 k^4 + \frac{6}{2^2} \binom{6}{1} a_3 k^6 + \frac{8}{2^4} \binom{8}{2} a_4 k^8 + \right. \\
 &+ \frac{10}{2^6} \binom{10}{3} a_5 k^{10} + \frac{12}{2^8} \binom{12}{4} a_6 k^{12} + \\
 &\quad \left. + \frac{14}{2^{10}} \binom{14}{5} a_7 k^{14} + \dots \right\} \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \right\} \quad (121)
 \end{aligned}$$

Ces valeurs peuvent donc être calculées à l'aide des produits $a_1 k^2, a_2 k^4, a_3 k^6 \dots$ obtenus dans le calcul des valeurs $b_0, b_1, b_2 \dots$

On obtient les valeurs $\frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon}$ et $\frac{\partial W_h}{\partial \varepsilon}$ en différenciant les équations (94) à (96) par rapport à ε . On a donc

$$(122) \quad \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial W_h}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \cos \varepsilon \quad \text{(pour toutes les latitudes)}$$

$$(123) \quad \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W_h}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{\pi} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon} \quad \text{(zone non-arctique)}$$

$$\begin{aligned}
 (124) \quad & \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W_h}{\partial \varepsilon} = \frac{T I_0}{\pi^2 a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2 \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon} \lambda_1 + 2 b_0 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} + \right. \\
 & + \pi \sin \varphi \cos \varepsilon \cos \lambda_1 - \pi \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} \sin 2 \lambda_1 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} \sin 4 \lambda_1 - \frac{1}{3} \frac{\partial b_3}{\partial \varepsilon} \sin 6 \lambda_1 + \dots + 2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} \left[- b_1 \cos 2 \lambda_1 + \right. \\
 & \left. \left. + b_2 \cos 4 \lambda_1 - b_3 \cos 6 \lambda_1 + \dots \right] \right\} \quad (\text{zone arctique}).
 \end{aligned}$$

Dans ces équations λ_1 est donné par (46), c'est-à-dire par

$$\sin \lambda_1 = \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon}$$

et $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon}$ par

$$(125) \quad \cos \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} = - \cos \varphi \frac{\cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon}$$

Une fois les valeurs $b_0, b_1, b_2 \dots W_e$ et W_h calculées pour une valeur déterminée de ε (par exemple pour sa valeur actuelle), on peut alors déterminer les valeurs $b_0, b_1, b_2 \dots W_e$ et W_h pour toute autre valeur $\varepsilon + \Delta \varepsilon$ de cet élément ($\Delta \varepsilon$ étant exprimé en degrés), en ajoutant aux valeurs primitives les produits $\Delta b_0 \Delta \varepsilon, \Delta b_1 \Delta \varepsilon; \Delta b_2 \Delta \varepsilon \dots \Delta W_e \Delta \varepsilon, \Delta W_h \Delta \varepsilon$.

De cette façon nous sommes en état de suivre mathématiquement les variations séculaires de l'insolation des planètes, ce que nous ferons, en ce qui concerne la Terre, dans la seconde partie de cet ouvrage.

CHAPITRE II.

DISTRIBUTION DE LA RADIATION SOLAIRE A LA SURFACE DES PLANÈTES, EN TENANT COMPTE DE LEURS ATMOSPHÈRES.

14. — *Données fondamentales.*

En pénétrant dans l'atmosphère des planètes, la radiation solaire subit diverses transformations. La densité de l'atmosphère augmentant à l'approche de la surface de la planète, il s'ensuit que les rayons solaires sont déviés de leur direction primitive en une courbe à concavité tournée vers la planète. Ce phénomène de réfraction, qui joue un grand rôle dans l'optique de l'atmosphère, n'est que d'une importance secondaire quant à son état thermique. C'est pourquoi nous ne nous y attarderons pas.¹⁰⁾

Une autre influence de l'atmosphère sur la radiation solaire, de beaucoup plus importante pour notre point de vue, consiste en ce qu'une fraction de cette radiation se disperse au contact des molécules de l'atmosphère, une autre fraction se transforme en énergie moléculaire, tandis que le reste atteint la surface de la planète comme radiation solaire directe. Par suite de ces influences envers la radiation solaire, dont la première est ce qu'on appelle la réflexion diffuse et la seconde l'absorption, chaque molécule de l'atmosphère devient le siège de deux sortes de radiations: de la radiation solaire diffuse est de la radiation atmosphérique obscure provoquée par la température de la molécule. Ces deux radiations s'étendent de leur source dans toutes les directions pour atteindre la surface de la planète ou l'espace interplanétaire; sur leur parcours à travers l'atmosphère, ces radiations subissent les mêmes influences que les rayons solaires directs.

La surface de la planète est donc inondée d'énergie rayonnante composée de trois sortes de radiations qui sont : la radiation solaire directe, la radiation solaire diffuse et la radiation obscure de l'atmosphère. De cette énergie rayonnante une partie est réfléchiée par la surface de la planète et obligée de rebrousser chemin à travers l'atmosphère, tout en étant influencée sur son parcours de la manière mentionnée plus haut ; le reste est absorbé par la surface solide ou liquide de la planète et transformé soit en chaleur sensible, soit en chaleur d'évaporation. La surface de la planète émet à son tour des radiations obscures qui s'étendent dans l'espace pour être influencées par l'atmosphère de la même façon que les autres radiations.

Si l'atmosphère contient des nuages, toutes les radiations qui tombent sur eux seront en partie réfléchies, transmises ou absorbées, ces dernières devenant la cause de la radiation obscure des nuages.

15. — *La loi de Bouguer-Lambert.*

Si l'on veut exprimer mathématiquement les phénomènes de radiation décrits au N^o précédent, il est permis à cet effet de supposer la partie considérée de la surface de la planète comme étant plane, de même que la partie correspondante de l'atmosphère peut être considérée comme étant constituée d'une série de couches infiniment minces, parallèles à la surface planétaire.¹¹⁾ Imaginons ensuite que chacune de ces couches est homogène, c'est-à-dire que la densité et les autres propriétés considérées de l'atmosphère ne sont que fonctions de l'altitude x au-dessus de la surface.

Ces simplifications ne sont, à vrai dire, jamais complètement réalisées, ainsi que nous le prouve l'atmosphère terrestre. Les phénomènes météorologiques font subir sans cesse des changements de température, de pression et d'humidité à l'atmosphère de notre globe et il est probable que des phénomènes semblables ont lieu également dans l'atmosphère des autres planètes. Mais, comme ces phénomènes ne sont pas exprimables en langage mathématique, nous sommes obligés de prendre, comme base de nos recherches, un état moyen idéal de l'atmosphère.

Sur les mêmes suppositions fondamentales est également construite la science de la photométrie astronomique et nous pouvons donc, dans ce chapitre, nous appuyer sur les résultats de cette science.

La radiation solaire qui pénètre dans l'atmosphère est complexe, c'est-à-dire qu'elle est constituée de rayons de différentes longueurs d'onde. Les divers rayons dont se compose cette radiation sont influencés différemment par l'atmosphère de façon que non seulement l'intensité de la radiation solaire, mais aussi sa composition varient sur tout son parcours, à travers l'atmosphère.

Il découle des suppositions précédentes que, pour un angle d'incidence donné z (égal à la distance zénithale), l'intensité de radiation solaire ne sera qu'une fonction de x .

En désignant l'intensité de la radiation solaire au point x par $I(x)$ nous pouvons déduire sa dépendance de x de la façon suivante: Pendant le passage de cette radiation à travers la couche atmosphérique d'épaisseur dx et à la distance x de la surface de la planète, couche que nous nommerons S_x , la radiation solaire sera affaiblie par réflexion diffuse et par absorption. Une fois le milieu atmosphérique de cette couche supposé comme étant homogène, il est justifié d'admettre que l'affaiblissement de la radiation solaire est proportionnel à l'intensité de cette radiation et au chemin parcouru à travers cette couche. Ce chemin, traversant la couche S_x sous l'angle z , sera égal à $\sec z dx$ et on a alors

$$(126) \quad dI(x) = -i I(x) \sec z dx,$$

où i est une quantité dépendant de la constitution de la couche S_x . L'expression précédente est positive, car lorsque x croît, l'intensité $I(x)$ augmente.

L'équation précédente exprime la loi Bouguer-Lambert¹²⁾ qui constitue la base de la théorie de l'extinction de la lumière. Sous sa forme primitive cette loi ne concerne pas la totalité des rayons solaires mais seulement les rayons visibles, c'est-à-dire la lumière solaire. La différence entre les rayons visibles et les rayons obscurs de la radiation solaire n'étant que de nature physiologique, la loi précédente peut être généralisée pour toute la radiation solaire.

A la suite des suppositions précédentes la quantité i est une fonction de x et nous la désignerons pour cela par $i(x)$, en la supposant en même temps, comme indépendante de x . On a donc

$$(127) \quad \frac{dI'(x)}{I'(x)} = \sec z \cdot i(x) dx.$$

Comme nous ne tenons pas compte de la réfraction des rayons solaires, z a une valeur constante pour tout le parcours du rayon et l'équation précédente peut être intégrée sur le champ. Supposons pour le moment que l'atmosphère s'étend jusqu'à la hauteur $x = h$ et désignons l'intensité de la radiation solaire à cette hauteur par $I'(h)$, l'intégration de (127) nous donne

$$\log_{\text{nép}} \frac{I'(x)}{I'(h)} = \sec z \int_h^x i(x) dx$$

ou

$$(128) \quad I'(x) = I'(h) e^{-\sec z \int_x^h i(x) dx}$$

L'intensité de la radiation solaire au contact de la surface planétaire est représentée par

$$(129) \quad I'(0) = I'(h) e^{-\sec z \int_0^h i(x) dx}$$

Nous nommerons la quantité

$$(130) \quad p = e^{-\int_0^h i(x) dx}$$

coefficient de transmission de l'atmosphère pour la radiation solaire, la dénomination „coefficient de transparence“, qu'on emploie souvent, ne nous paraissant applicable qu'aux rayons visibles de la radiation solaire.

On obtient de ce qui précède l'équation

$$(131) \quad I'(0) = I'(h) p^{\sec z},$$

d'où ressort la signification du coefficient p : c'est la fraction suivant laquelle le passage à travers l'atmosphère réduit l'intensité de la radiation solaire, lorsque le Soleil est au zénith, c'est-à-dire lorsque $z = 0$.

16. — *Radiation solaire directe atteignant la surface de la planète par ciel découvert.*

Lorsque l'atmosphère est privée de nuages, la radiation solaire qui y pénètre n'est affaiblie que par réflexion diffuse et par absorption, ainsi que nous l'avons exposé au N^o précédent. Nous y avons également désigné par $I(h)$ l'intensité de la radiation solaire avant son entrée dans l'atmosphère, et celle-ci, à cause de l'épaisseur insignifiante de l'atmosphère par rapport à la distance ϱ de la planète au Soleil, peut être, d'après (5), posée égale à

$$(132) \quad I'(h) = \frac{I_0}{\varrho^2}$$

où ϱ doit être mesuré en unités astronomiques.

Au contact de la surface planétaire, la radiation solaire aura, d'après (131), l'intensité

$$(133) \quad I'(o) = \frac{I_0}{\varrho^2} p^{\sec z}.$$

Sa direction formera avec la normale de la surface planétaire, supposée complètement horizontale, l'angle z . Il s'ensuit que l'unité de la surface de la planète recevra dans l'unité de temps une quantité de radiation solaire directe que nous désignerons par $\frac{dW'}{dt}$ et qui est égale à

$$(134) \quad \frac{dW'}{dt} = \frac{I_0}{\varrho^2} p^{\sec z} \cos z.$$

Cette équation devient identique à l'équation (17) lorsque $p = 1$, c'est-à-dire lorsque la transmissibilité de l'atmosphère est absolue.

Il découle de (6), (19) et (21)

$$(135) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1$$

où ψ_1 désigne la longitude géographique comptée à partir du méridien au-dessus duquel se trouve le Soleil.

Les équations (134) et (135) expriment la loi de la distribution de la radiation solaire à la surface de la planète. Comme $p < 1$ et que $0 < z < \frac{\pi}{2}$ la radiation solaire atteint sa valeur maxima $\frac{I_0}{\rho^2} p$ au point pour lequel on a $z = 0$, c'est-à-dire au point dont le zénith est occupé par le Soleil. Cette radiation est nulle pour tous les points de la surface planétaire pour lesquels $z = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire pour lesquels l'équation (23) est satisfaite. Le terminateur est dans le cas présent identique à celui qu'on obtient en faisant abstraction de l'atmosphère.¹³⁾

Si nous voulons, dans le cas actuel, déterminer la radiation totale atteignant la surface planétaire par l'unité de temps (et que nous désignerons, dans le sens des désignations employées au premier chapitre, par I'_T), nous aurons à tenir compte de ce qui suit.

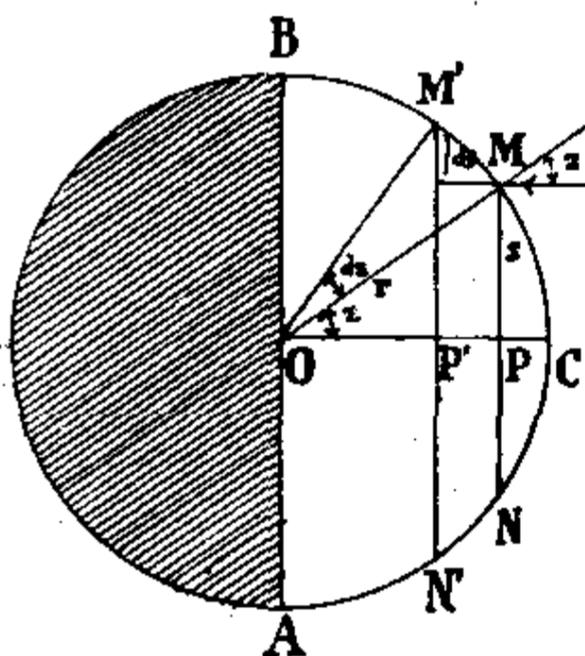


Fig. 10.

Soit A C B (fig. 10) l'hémisphère éclairé de la planète. Au point C les rayons solaires tombent perpendiculairement à sa surface. En reliant par une droite n'importe quel point M de l'hémisphère éclairé au centre O, le rayon $OM = r$ formera avec la droite OC l'angle z , égal à la distance zénithale du Soleil observé du point M. En faisant tourner le rayon OM autour de OC, le point M

décrit un cercle de la sphère planétaire, jouissant de la propriété qu'en tous ses points la distance zénithale du Soleil est égale à z . En faisant croître l'angle z de dz , on obtient un autre cercle de la sphère planétaire, infiniment proche du premier. A tous les points de la zone df infiniment étroite, comprise entre ces deux cercles, parvient une radiation dont l'intensité est donnée par (133). La quantité de radiation tombant par unité de temps sur cet élément de surface est obtenue en multipliant l'intensité de la radiation par la projection df_1 de cet élément, normale à la direction du rayon. En posant $PM = s$; $P'M' = s + ds$, on a $df_1 = 2\pi s ds$

de façon qu'à l'élément df parvient dans l'unité de temps la radiation $I(o) 2\pi s ds$. Or, $s = r \sin z$; $ds = r \cos z dz$, de sorte que tout l'hémisphère éclairé de la planète sera atteint dans l'unité de temps par la quantité de radiation égale à

$$(136) \quad I'_T = 2\pi r^2 \frac{I_0}{\rho^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec z} \sin z \cos z dz.$$

Pour le calcul numérique de cette intégrale définie on est obligé d'avoir recours à des méthodes d'approximation. Si l'on veut, en utilisant par exemple la formule de Simpson, déterminer la

valeur d'une intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$, on divise l'intervalle (a, b)

en $2n$ parties égales $h = \frac{b-a}{2n}$ et on désigne par

$$y_0, y_1, y_2 \dots \dots \dots y_{2n}$$

les valeurs de la fonction $f(x)$, correspondant aux valeurs

$$a, a+h, a+2h, \dots \dots \dots a+2nh$$

de la variable x , et on a alors

$$(137) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) \right].$$

En choisissant h suffisamment petit cette équation est d'une précision satisfaisante.

Dans notre cas, on a $h = \frac{\pi}{4n}$; $y_0 = y_{2n} = 0$ et on obtient

$$(138) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec z} \sin z \cos z dz = \frac{\pi}{6n} \left[y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2} + 2(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) \right],$$

où $y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}$ représentent les valeurs de la fonction $p^{\sec z} \sin z \cos z$ correspondant aux valeurs $z = \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2}, \frac{2}{2n} \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{2}$.

En comparant l'insolation totale I'_T de la surface planétaire à celle qu'on obtiendrait en l'absence de l'atmosphère, et qui est donnée par (24), nous trouvons que le rapport entre ces deux quantités est égal à

$$(139) \quad \frac{I'_T}{I_T} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec z} \sin z \cos z dz.$$

Dans le Tableau suivant on trouve les valeurs numériques de ce rapport pour différentes valeurs de p .

Tableau I.

p	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\frac{I'_T}{I_T}$	0.435	0.550	0.680	0.830	1.000

L'insolation moyenne du parallèle φ que nous désignerons, maintenant que nous tenons compte de l'atmosphère, par w' , sera obtenue d'après le procédé décrit au N^o 3; sa valeur est

$$(140) \quad w' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW'}{dt} d\psi_1$$

où $\frac{dW'}{dt}$ est donné par (134) et (135), et ψ_0 par (28).

Pour le calcul numérique de la quantité précédente on peut se servir également de la formule de Simpson.

En représentant dans (134) z à l'aide de (6) et (34) en fonction du temps, on obtient la marche diurne de l'insolation. Les valeurs φ et δ peuvent être considérées comme constantes.

La quantité diurne de radiation qui tombe sur l'unité de surface à la latitude φ et que nous désignerons dans le cas présent par

W'_τ est représentée, d'une façon analogue aux équations (32) et (36), par

$$(141) \quad W'_\tau = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \frac{dW'}{dt} d\omega,$$

où ω_0 est donné par (33).

Cette valeur doit être également calculée à l'aide des procédés approximatifs.

Il découle de (140), (141), (28) et (33) que les mêmes rapports existent entre w' et W'_τ que ceux reliant w à W_τ et qui ont été examinés en détail au N^o 5.

En calculant les valeurs W'_τ pour une série de jours convenablement distribués tout le long de l'année, et en portant en abscisses les espaces de temps écoulés du commencement de l'année au midi du jour considéré, tandis que les valeurs correspondantes $\frac{W'_\tau}{\tau}$ sont portées en ordonnées, on obtient une représentation graphique de la quantité w' en fonction du temps, c'est-à-dire une représentation graphique de la marche annuelle de l'insolation.

Cette marche peut être aussi, ainsi que nous le verrons dans un chapitre ultérieur, représentée analytiquement.

L'aire incluse dans le graphique mentionné entre la courbe w' , l'axe des abscisses et les ordonnées correspondant à t_1 et t_2 , c'est-à-dire l'intégrale

$$(142) \quad W' = \int_{t_1}^{t_2} w' dt$$

représente, dans le sens de ce qui a été exposé au N^o 5, la quantité moyenne de radiation reçue à la latitude φ dans l'intervalle de temps $(t_1 t_2)$. Cette valeur peut être calculée à l'aide du planimètre ou de la formule de Simpson.

Si l'on désire calculer les quantités de radiations parvenues au cours des saisons astronomiques jusqu'à la surface de la planète, quantités que nous désignerons par W'_I , W'_{II} , W'_{III} , W'_{IV} ou W'_e et W'_h , il est avantageux de choisir λ comme variable indépendante, car dans ce cas on a

$$(143) \quad W' = \int_{\lambda'}^{\lambda''} w' \frac{dt}{d\lambda} d\lambda$$

c'est-à-dire, d'après (140),

$$(144) \quad W' = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \frac{dt}{d\lambda} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW'}{dt} d\psi_1.$$

Les quantités ρ et δ , qui figurent par l'intermédiaire de $\frac{dW'}{dt}$ dans (134) et (135), peuvent être, d'après le N^o 4, considérées comme constantes entre les limites d'intégration $-\psi_0$ et $+\psi_0$, de façon qu'on obtient

$$W' = \frac{I_0}{2\pi} \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \frac{1}{\rho^2} \frac{dt}{d\lambda} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} p^{\sec z} \cos z d\psi_1$$

ou bien, d'après (12) et (78),

$$(145) \quad W' = \frac{T}{2\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} p^{\sec z} \cos z d\psi_1$$

où z est donné par (135) et ψ_0 par (28), tandis que λ et δ sont liés par le rapport (7).

Dans le calcul de l'expression précédente on n'a donc pas à tenir compte de la variabilité de ρ .

17. — Radiation solaire directe et diffuse transmise jusqu'à la surface de la planète.

Jusqu'à présent nous n'avons tenu aucun compte des nuages. Cependant, ceux-ci apparaissent si souvent dans l'atmosphère terrestre, qu'en moyenne un peu plus de la moitié du ciel est couvert

de nuages. Les nuages ont un grand pouvoir réfléchissant, ce qui est la cause qu'une partie considérable de la radiation solaire est renvoyée dans l'espace, et, par conséquent, perdue pour la calorification de la Terre. D'une façon semblable se comporte la planète Vénus, dont l'atmosphère est très nébuleuse.

Lorsqu'on veut exprimer mathématiquement l'influence des nuages sur l'insolation de la planète, on est obligé de prendre pour base du calcul un degré moyen de nébulosité, les variations locales et temporaires de la nébulosité du ciel n'étant pas exprimables mathématiquement. De même il n'y a pas à tenir compte de la distribution des nuages dans le sens vertical, qui a lieu selon une certaine régularité. Ainsi que nous le verrons plus tard, la température de l'atmosphère ne dépend guère de la hauteur à laquelle une partie de la radiation solaire est réfléchi par l'atmosphère, celle-ci étant en majeure partie réchauffée par la radiation obscure de la surface planétaire. Il est, par conséquent, permis de supposer que la réflexion produite par les nuages a lieu à la limite de l'atmosphère, c'est-à-dire qu'on peut déduire de la radiation $I'(h)$, donnée par (132), la fraction réfléchi par les nuages.

D'une façon semblable, on peut également tenir compte de la partie de la radiation solaire qui est renvoyée dans l'espace interplanétaire par réflexion diffuse produite dans l'atmosphère et par réflexion à la surface de la planète. Nous pouvons, sans commettre une erreur de quelque portée, déduire également cette perte de la radiation solaire avant son entrée dans l'atmosphère.

En réalité, il n'y aurait aucune difficulté à se passer des simplifications précédentes et à admettre l'état réel des choses, c'est-à-dire que les réflexions par les nuages s'effectuent à différentes hauteurs, et que c'est à la surface de la planète qu'a lieu la réflexion due à celle-ci.¹⁴⁾ On pourrait même admettre, comme au N^o 15, que les réflexions diffuses ont lieu tout le long du parcours du rayon solaire à travers l'atmosphère, mais tout cela compliquerait inutilement les calculs.

Nous supposerons donc que de la radiation solaire qui pénètre dans l'atmosphère planétaire la fraction A est renvoyée dans l'espace interplanétaire par la réflexion des nuages, des molécules de l'atmosphère et de la surface de la planète, c'est-à-dire que nous suppo-

sons que la radiation solaire, à son entrée dans l'atmosphère, est égale à

$$(146) \quad I''(h) = (1 - A) \frac{J_0}{\rho^2}.$$

Nous nommerons la quantité A le pouvoir réfléchissant de la planète avec son atmosphère.¹⁵⁾

La quantité A ne contient que la partie de la radiation solaire diffuse qui est dirigée vers l'espace interplanétaire. Le reste de cette radiation diffuse parvient, affaibli par l'atmosphère, jusqu'à la surface planétaire, avec la radiation solaire directe. Ces deux radiations sont intégralement absorbées par la surface planétaire, car les pertes par réflexion de cette surface ont déjà été déduites dans la valeur A .

Nous verrons que, pour les phénomènes thermiques à la surface de la planète, il n'y a que la somme de la radiation solaire directe et diffuse absorbée par cette surface qui entre dans les calculs, et que, par conséquent, nous n'avons pas à distinguer ces deux radiations l'une de l'autre et nous n'avons qu'à nous occuper de leur affaiblissement commun produit par absorption dans l'atmosphère.

En désignant par $I''(x)$ l'intensité de la radiation solaire directe et diffuse, à l'altitude x , une certaine partie de cette radiation sera absorbée par la couche élémentaire S_x d'épaisseur dx se trouvant à cette altitude. Cette partie peut être, d'une façon semblable à ce qui a été dit au N° 15, considérée proportionnelle à l'intensité de la radiation et à la longueur du chemin parcouru à travers la couche S_x . Tandis que la radiation solaire directe parcourt la couche S_x sous l'angle d'incidence z , la radiation solaire diffuse la traverse sous tous les angles possibles; cependant, la quantité de cette dernière radiation étant petite par rapport à la radiation solaire directe on peut admettre que le chemin moyen de ces deux radiations est égal à $\sec z dx$. On peut donc poser

$$(147) \quad dI''(x) = a_1(x) I''(x) \sec z dx,$$

où $a_1(x)$ signifie le pouvoir absorbant de la couche S_x pour les rayons la traversant normalement. Cette valeur est, d'après ce qui a été admis au N° 15, fonction de x .

L'équation (147) est semblable à l'équation (126) et son intégration entre les limites x et h donne

$$(148) \quad I''(x) = I''(h) e^{-\sec z \int_x^h a_1(x) dx}$$

La surface de la planète reçoit et absorbe la radiation

$$(149) \quad I''(0) = I''(h) e^{-\sec z \int_0^h a_1(x) dx}$$

La quantité

$$(150) \quad p_a = e^{-\int_0^h a_1(x) dx}$$

est nommée le coefficient de transmission de l'atmosphère pour la radiation solaire directe et diffuse. On a donc

$$(151) \quad I''(0) = I''(h) p_a^{\sec z}$$

Lorsque le Soleil est au zénith on a $I''(0) = I''(h) p_a$, c'est-à-dire que la quantité p_a est la fraction de la radiation solaire qui atteint la surface planétaire après avoir été affaiblie par absorption dans l'atmosphère en traversant celle-ci perpendiculairement. La quantité $1 - p_a$ représente donc le pouvoir absorbant de l'atmosphère envers la radiation solaire.

Il résulte de (146) et (151)

$$(152) \quad I''(0) = (1 - A) \frac{I_0}{\rho^2} p_a^{\sec z}$$

Cette radiation forme, en tenant compte des simplifications précédentes, l'angle z avec la normale à la surface planétaire. Il s'ensuit que l'unité de surface de la planète reçoit et absorbe dans l'unité de temps une quantité de radiation solaire directe et diffuse que nous désignerons par $\frac{dW''}{dt}$ et qui est égale à

$$(153) \quad \frac{dW''}{dt} = (1 - A) \frac{I_0}{\rho^2} p_a^{\sec z} \cos z.$$

En comparant les équations (134) et (153), on voit qu'on peut employer tous les résultats obtenus dans le N^o précédent, pour le calcul de la radiation solaire directe et diffuse absorbée par la surface planétaire. A cet effet, on n'a qu'à remplacer, dans les formules du N^o précédent, la constante solaire par $(1 - A) I_0$, et le coefficient de transmission p par la valeur p_a .

18. — *Variations séculaires de l'insolation des surfaces planétaires.*

Les deux N^{os} précédents nous ont montré que la détermination mathématique de l'état d'insolation de la surface planétaire, en tenant compte de l'atmosphère, est une tâche laborieuse. Il est évident que le calcul des variations séculaires de cet état, provoquées par les perturbations des planètes et par la précession, sera une tâche encore plus compliquée. Cependant, on peut avec un moindre effort obtenir des renseignements suffisants sur ces variations, de la façon suivante.

L'insolation moyenne du parallèle φ à un moment donné est, à cause de (140) et (134), représentée par

$$(154) \quad w' = \frac{1}{2\pi} \frac{I_0}{\varrho^2} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} p^{\sec z} \cos z \, d\psi_1$$

z , ψ_0 et ϱ étant donnés par (135), (28) et (9). Cette dernière quantité doit être mesurée en unités astronomiques. En tenant compte que

$$(155) \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2,$$

on a

$$(156) \quad \varrho = a \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \nu},$$

où a doit être également mesuré en unités astronomiques. Or, on a, eu égard à (11) et (114),

$$(157) \quad \nu = 180^\circ - (\Pi - \lambda),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{a^2} \left[1 - e \cos (\Pi - \lambda) \right]^2 (1 - e^2)^{-2},$$

ou bien, en négligeant les puissances supérieures de e ,

$$(158) \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{a^2} \left[1 - 2 e \cos (\Pi - \lambda) \right].$$

La quantité w' atteint dans les zones tempérées et arctiques, qui sont celles qui nous intéressent particulièrement, ses valeurs extrêmes aux solstices. Au maximum de w' correspondent les valeurs $\delta = + \varepsilon$; $\lambda = 90^\circ$, c'est-à-dire que les équations (135), (28) et (158) obtiennent la forme

$$(159) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon \cos \psi_1$$

$$(160) \quad \cos \psi_0 = - \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \varepsilon$$

$$(161) \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{a^2} \left[1 - 2 e \sin \Pi \right],$$

tandis que pour le minimum de w' on a $\delta = - \varepsilon$; $\lambda = 270^\circ$, c'est-à-dire

$$(162) \quad \cos z = - \sin \varphi \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon \cos \psi_1$$

$$(163) \quad \cos \psi_0 = \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \varepsilon$$

$$(164) \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{a^2} \left[1 + 2 e \sin \Pi \right].$$

En tenant compte que, dans l'intégrale (154), aux valeurs $-\psi_1$ et $+\psi_1$ correspondent les mêmes valeurs de la fonction à intégrer, nous pouvons étendre l'intégration entre les limites 0 et ψ_0 et multiplier l'intégrale ainsi obtenue par 2. De plus, en posant pour abrégé

$$(165) \quad p^{sec} = \cos z = f_e (\varepsilon, \psi_1),$$

où z est donné par (159), et

$$(166) \quad p^{sec} = \cos z = f_h (\varepsilon, \psi_1),$$

où z est donné par (162), on obtient

$$(167) \quad \text{Maximum } w' = \frac{1}{\pi} \frac{l_0}{a^2} (1 - 2 e \sin \Pi) \int_0^{\psi_0} f_e (\varepsilon, \psi_1) d\psi_1,$$

où ψ_0 est donné par (160), et

$$(168) \quad \text{Minimum } w' = \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{a^2} (1 + 2e \sin \Pi) \int_0^{\psi_0} f_h(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1,$$

où ψ_0 est donné par (163).

Ces deux valeurs subiront des variations séculaires, par suite de la variabilité des éléments astronomiques e, Π, ε ; le calcul de ces variations présente des difficultés, à cause de la valeur ε se trouvant sous le signe intégral, car on serait obligé d'effectuer, pour chaque valeur de ε , des quadratures compliquées. On peut cependant éviter cette difficulté en utilisant, ainsi que nous l'avons fait au N° 13, la circonstance que ε varie entre d'étroites limites. On peut, par conséquent, admettre que les changements des intégrales précédentes, correspondant à l'accroissement d'un degré de ε , sont égaux à

$$(169) \quad \Delta \int_0^{\psi_0} f_e(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1 = \frac{\pi}{180} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^{\psi_0} f_e(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1$$

$$(170) \quad \Delta \int_0^{\psi_0} f_h(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1 = \frac{\pi}{180} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^{\psi_0} f_h(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1.$$

En calculant les dérivées des intégrales précédentes, on doit tenir compte que la fonction sous le signe intégral, de même que la limite supérieure, sont fonctions de ε . On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^{\psi_0} f_e(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1 = f_e(\varepsilon, \psi_0) \frac{\partial \psi_0}{\partial \varepsilon} + \int_0^{\psi_0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f_e(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1.$$

Mais, comme on a pour $\psi_1 = \psi_0$, d'après (159) et (160), $\cos z = 0$, et que p est plus petit que l'unité, il s'ensuit que

$$f_e = (\varepsilon, \psi_0) = 0.$$

Il découle de (165)

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f_e(\varepsilon, \psi_1) = p^{\sec z} (\text{tang } z \log_{\text{nat}} p - \sin z) \frac{dz}{d\varepsilon}$$

où $\frac{dz}{d\varepsilon}$, qui s'obtient par différentiation de (159), est égal à

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = \frac{-\sin \varphi \cos \varepsilon + \cos \varphi \sin \varepsilon \cos \psi_1}{\sin z}.$$

On a donc

$$(171) \quad \Delta \int_0^{\psi_0} f_e(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1 = \frac{\pi}{180} \int_0^{\psi_0} p^{\sec z} (\sec z \log_{n^{\text{ép}}} p - 1) \times \\ \times (\cos \varphi \sin \varepsilon \cos \psi_1 - \sin \varphi \cos \varepsilon) d\psi_1,$$

où z est donné par (159).

De la même manière on obtient, en faisant usage de (162), (163) et (166),

$$(172) \quad \Delta \int_0^{\psi_0} f_h(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1 = \frac{\pi}{180} \int_0^{\psi_0} p^{\sec z} (\sec z \log_{n^{\text{ép}}} p - 1) \times \\ \times (\cos \varphi \sin \varepsilon \cos \psi_1 + \sin \varphi \cos \varepsilon) d\psi_1,$$

où z est donné par (162).

Les seconds membres des équations précédentes peuvent être calculés à l'aide de la formule de Simpson. Une fois les valeurs

$$\int_0^{\psi_0} f_e(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1; \quad \int_0^{\psi_0} f_h(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1$$

calculées pour une valeur déterminée de ε (par exemple pour sa valeur actuelle), on peut alors déterminer les valeurs des intégrales précédentes correspondant à toute autre valeur $\varepsilon + \Delta \varepsilon$ ($\Delta \varepsilon$ étant exprimé en degrés) en ajoutant à leurs valeurs primitives les produits

$$\Delta \varepsilon. \Delta \int_0^{\psi_0} f_e(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1; \quad \Delta \varepsilon. \Delta \int_0^{\psi_0} f_h(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1.$$

De cette façon on est dans la possibilité de calculer les valeurs extrêmes (167), (168) de la quantité w' pour toute combinaison possible des éléments astronomiques e , Π , ε .

Or, ces valeurs extrêmes représentent en même temps les extrêmes de la marche annuelle de l'insolation. Nous verrons dans la seconde partie de cet ouvrage que l'effet prépondérant des variations séculaires des éléments astronomiques consiste en ce qu'elles accentuent ou atténuent les contrastes entre l'été et l'hiver, autrement dit qu'elles n'altèrent pas tant la moyenne annuelle de l'insolation, mais les amplitudes de cette dernière. Le procédé ci-dessus nous permet de calculer les variations séculaires de cette amplitude.

19. — *Variations séculaires de l'insolation représentées par des oscillations fictives des latitudes.*

Les valeurs w, w', w'' exprimées en fonction du temps t représentent respectivement la marche annuelle de l'insolation, 1^o abstraction faite de l'atmosphère, 2^o en tenant compte de l'atmosphère et 3^o en tenant compte à la fois de l'atmosphère et des nuages. Ainsi la fonction

$$(173) \quad w' = f_0(\varphi, t)$$

représente, en y portant les valeurs de e, Π, ε , pour l'année 1850. 0, et en prenant φ invariable, la marche annuelle de l'insolation à la latitude φ à l'époque 1850, bien, à l'époque actuelle, les éléments astronomiques n'ayant changé qu'insensiblement depuis cette époque. En posant dans cette fonction $p = 1$, on obtient la fonction w ; en y remplaçant I_0 par $(1 - A) I_0$ et p par p_a , on obtient la fonction w'' . Toutes les trois quantités w, w', w'' sont fonctions périodiques de t à période T .

Pour toute autre année éloignée de n années de l'époque 1850 (c'est surtout l'intervalle de temps des plus récentes époques géologiques qui nous intéressera), la marche annuelle de l'insolation sera représentée par une autre fonction de la forme

$$(174) \quad w' = f_n(\varphi, t),$$

les éléments e, Π, ε ayant changé. La fonction f_n est également une fonction périodique de t à période T , car la longueur T de l'année ne subit pas des variations séculaires.

La fonction f_n détermine complètement l'état de l'insolation de la planète à l'époque éloignée de n années de l'époque 1850, et, pour

pouvoir se procurer une comparaison rationnelle entre cet état de l'insolation et l'état actuel, on peut employer la méthode suivante.

L'insolation d'un parallèle déterminé φ_m à l'époque n est représentée par

$$(175) \quad w' = f_n(\varphi_m, t).$$

En attribuant à la variable t une valeur déterminée t_1 correspondant à un moment donné de l'année, on peut alors, à l'aide de l'équation

$$(176) \quad f_n(\varphi_m, t_1) = f_o(\varphi, t_1),$$

déterminer le parallèle φ , qui, au moment t_1 de l'année, à l'époque actuelle, a la même insolation que le parallèle φ_m , au même moment de l'année, à l'époque n . De cette façon nous avons exprimé la variation séculaire de l'insolation correspondant au moment t_1 de l'année, par un changement de latitude.

En résolvant l'équation (176) par rapport à φ et en considérant t_1 comme variable, on obtiendra une équation de la forme

$$(177) \quad \varphi = \Phi_m(t),$$

qui représente toute la marche annuelle de l'insolation du parallèle φ à l'époque n par des oscillations de latitude. Par conséquent, nous pouvons obtenir la marche annuelle de l'insolation du parallèle φ_m à l'époque n , en considérant les éléments astronomiques e , Π , ε , c'est-à-dire l'état actuel de l'insolation de la planète, comme invariables, mais en admettant, d'autre part, que le parallèle φ_m effectue des oscillations fictives. Les fonctions f_o et f_n étant des fonctions périodiques de t à période T , la fonction Φ_m sera également une périodique à même période T .

Au lieu de supposer que le parallèle considéré change de position au cours de l'année n , nous pouvons, en choisissant, sur ce parallèle, un point déterminé, obtenir également la marche annuelle de l'insolation à l'époque n , en faisant effectuer au pôle de la planète des oscillations dans le méridien du point considéré, de façon que l'équation (177) soit satisfaite, mais tout en laissant les éléments e , Π , ε invariables. La durée de ces oscillations du pôle sera égale à T .

Le calcul de la marche de ces oscillations est très compliqué; cependant, dans la majorité des cas, il suffit de déterminer leurs amplitudes.

20. — *Sur la constitution de l'atmosphère des planètes.*

Jusqu'à présent nous avons laissé de côté la question de l'allure de la fonction $a_1(x)$, car nous n'avions à opérer qu'avec l'intégrale définie $\int_a^h a_1(x) dx$. Dans la suite, il sera nécessaire de connaître cette fonction même et, dans ce but, il faudra premièrement répondre à la question: comment varient la densité et la constitution de l'atmosphère avec l'altitude x .

L'atmosphère terrestre est un mélange de plusieurs gaz parfaits et de vapeur d'eau. Il est probable que les autres planètes ont une atmosphère semblable. Quels que soient ces gaz parfaits, toujours est-il qu'ils subissent l'influence de la gravitation de la planète et qu'ils sont assujettis à la loi de Dalton, d'après laquelle les pressions partielles de chaque gaz du mélange atmosphérique sont indépendantes de la présence des autres gaz. Nous pouvons donc traiter chaque gaz séparément; tandis que la vapeur d'eau occupe une place à part, dont il sera question plus loin.

Supposons pour le moment l'atmosphère de la planète privée de tout courant aérien et constituée d'un seul gaz parfait obéissant à la loi de Mariotte-Gay-Lussac:

$$v p = R \Theta,$$

où v représente le volume de l'unité de masse, p la pression du gaz, Θ sa température en degrés absolus et R une constante dépendant de la nature du gaz.

En désignant par $\rho(x)$ la densité de l'atmosphère à l'altitude x , c'est-à-dire la masse de l'unité de volume, on obtiendra, d'après ce qui a été admis ci-dessus,

$$(178) \quad p(x) = R \Theta(x) \rho(x).$$

Le poids spécifique de l'atmosphère à l'altitude x est égal

$$(179) \quad \sigma(x) = g(x) \rho(x),$$

où $g(x)$ représente l'accélération de la pesanteur à l'altitude x .

En désignant par g l'accélération à la surface de la planète et en faisant abstraction de la gravitation interne de l'atmosphère, on a, d'après la loi de gravitation de Newton :

$$(180) \quad \frac{g(x)}{g} = \frac{r^2}{(r+x)^2},$$

où r désigne le rayon de la sphère planétaire. On a donc

$$(181) \quad \sigma(x) = \frac{r^2}{(r+x)^2} g \varrho(x).$$

En remontant la verticale d'une longueur dx , la pression du gaz augmente de

$$(182) \quad dp(x) = -\sigma(x) dx,$$

la pression s'exerçant sur l'unité de surface diminuant lorsque l'altitude augmente, de la même quantité que diminue le poids de l'atmosphère, supporté par cette unité de surface.

En différenciant (178) par rapport à x , on obtient

$$dp(x) = R \varrho(x) d\Theta(x) + R \Theta(x) d\varrho(x),$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (182) et (181),

$$(183) \quad R \varrho(x) d\Theta(x) + R \Theta(x) d\varrho(x) = -\frac{r^2}{(r+x)^2} g \varrho(x) dx.$$

Cette équation exprime le rapport entre la densité, la température de l'atmosphère et l'altitude x . En tenant compte du fait que l'épaisseur de l'atmosphère effective des planètes est très petite par rapport aux dimensions de celles-ci, c'est-à-dire que la valeur $\frac{x}{r}$ est négligeable par rapport à l'unité, nous pouvons remplacer l'équation précédente par

$$(184) \quad R \varrho(x) d\Theta(x) + R \Theta(x) d\varrho(x) = -g \varrho(x) dx.$$

Si nous avons encore une équation entre les quantités $\varrho(x)$, $\Theta(x)$ et x , nous serions dans la possibilité de déterminer les fonctions $\varrho(x)$ et $\Theta(x)$. Nous développerons dans un des chapitres suivants cette équation qui nous manque. Contentons-nous, dès à présent, de déterminer la fonction $\varrho(x)$, en nous bornant aux couches inférieures de l'atmosphère ou en négligeant le changement de température de l'atmosphère avec l'altitude. Dans ce cas, on peut considérer

$\Theta(x)$ constant, c'est-à-dire poser $d\Theta(x) = 0$; $\Theta(x) = \Theta$, ce qui donne

$$(185) \quad R \Theta \rho(x) = -g \rho(x) dx.$$

En introduisant la notation

$$(186) \quad \frac{R \Theta}{g} = H$$

on obtient

$$\frac{d\rho(x)}{\rho(x)} = -\frac{dx}{H}.$$

L'intégration de cette équation donne, si nous désignons la densité de l'atmosphère à la surface de la planète (c'est-à-dire pour $x = 0$), par ρ_0 ,

$$(187) \quad \rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}}.$$

Cette équation exprime la loi de la décroissance de la densité de l'atmosphère, supposée isotherme, avec l'altitude x . D'après cette loi une pareille atmosphère s'étendrait à l'infini.

En employant l'équation précédente aux altitudes auxquelles Θ ne peut plus être considéré constant, on peut, dans ce cas, compenser partiellement l'erreur, en employant, dans (186) pour Θ la valeur moyenne des températures le long de l'altitude considérée.

Quelle est la signification de la constante H ? Pour avoir une réponse, calculons la masse totale de la colonne atmosphérique surmontant l'unité de surface de la planète. Celle-ci est donnée par

$$M = \int_0^{\infty} \rho(x) dx = \rho_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{H}} dx,$$

c'est-à-dire

$$(188) \quad M = \rho_0 H.$$

H représente donc l'altitude que l'atmosphère aurait lorsqu'elle serait comprimée partout à la densité ρ . Cette altitude H est ce qu'on appelle la hauteur virtuelle de l'atmosphère.

En exprimant la pression $p(0)$ à la surface de la planète et la constante R par le poids de l'unité de masse à la surface plané-

taire et en les désignant respectivement par p_0 et R_0 , c'est-à-dire en posant

$$p(0) = p_0 g; \quad R = R_0 g,$$

on tire de (178)

$$p_0 = R_0 \Theta_0 \varrho_0,$$

et on obtient, pour H , au lieu de (186), l'expression

$$(189) \quad H = R_0 \Theta_0$$

qui est la forme sous laquelle on exprime ordinairement la hauteur virtuelle.

Cette expression représente la hauteur virtuelle de l'atmosphère, alors même que celle-ci n'est pas édiflée d'après la loi (187), mais d'après toute autre loi. Il résulte, en effet, de (181) et (182), en négligeant $\frac{x}{r}$, que

$$(190) \quad dp(x) = -g \varrho(x) dx.$$

En intégrant cette expression entre les limites 0 et h , cette dernière altitude représentant la limite supérieure de l'atmosphère où $p(x)$ s'annule, on obtient

$$g \int_0^h \varrho(x) dx = p(0).$$

L'intégrale précédente représentant la masse M de l'atmosphère, on a

$$(191) \quad M = p_0,$$

d'où l'on tire aisément l'expression (189), en tenant compte de (188) et des équations précédentes.

Lorsque l'atmosphère est constituée d'un mélange de plusieurs gaz parfaits, chacun de ces gaz obéit alors, d'après la loi de Dalton, aux équations développées ci-dessus. Ainsi les lois de décroissance de densité des divers gaz peuvent être exprimées par des équations de la forme (187), mais alors ϱ_0 et H ont des valeurs différentes pour chacun de ces gaz. En désignant la densité de chacun de ces gaz à la surface de la planète par $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$ et leurs hauteurs

virtuelles par H_1, H_2, H_3, \dots , la densité $\rho(x)$ de l'atmosphère composée de ces gaz sera évidemment donnée par l'expression

$$(192) \quad \rho(x) = \rho_1 e^{-\frac{x}{H_1}} + \rho_2 e^{-\frac{x}{H_2}} + \rho_3 e^{-\frac{x}{H_3}} + \dots$$

Par suite de l'inégalité des valeurs H_1, H_2, H_3, \dots , les densités des gaz constituant l'atmosphère croîtront inégalement lorsque l'altitude x augmente, de façon qu'à chaque valeur de x corresponde un mélange de gaz en proportions différentes.

L'atmosphère terrestre est constituée dans ses couches inférieures principalement d'azote et d'oxygène. Les constantes R_0 de ces deux gaz ne diffèrent que très peu l'une de l'autre, de façon qu'on peut, d'après (189), admettre que leurs altitudes virtuelles sont égales. Le second membre de l'équation (192) se réduit alors à un binôme dans lequel on peut poser $H_1 = H_2 = H$. La somme $\rho_1 + \rho_2 = \rho_0$ représentant la densité de l'air sec à la surface de la Terre, l'équation (187) devient valable pour une atmosphère isotherme d'air sec.

Jusqu'à présent nous n'avons pas tenu compte de la présence de vapeur d'eau dans l'atmosphère. La teneur de l'atmosphère terrestre en vapeur d'eau est assujettie à des variations incessantes, cependant sa tension moyenne peut être exprimée par l'équation

$$\frac{e(x)}{e(o)} = \left[\frac{p(x)}{p(o)} \right]^3,$$

où e représente la tension de la vapeur d'eau et p la pression de l'air.¹⁶⁾ Dans une atmosphère supposée isotherme et non saturée de vapeur d'eau, la pression de celle-ci peut être considérée proportionnelle à sa densité $\rho'(x)$, et on a alors

$$\rho'(x) = \rho'_0 \left[\frac{p(x)}{p(o)} \right]^3,$$

où ρ'_0 représente la densité de la vapeur à la surface de la Terre. Or, on a, lorsque θ est constant, d'après (178) et (187),

$$\frac{p(x)}{p(o)} = \frac{\rho(x)}{\rho_0} = e^{-\frac{x}{H}},$$

d'où il suit

$$\rho'(x) = \rho' e^{-\frac{3x}{H}},$$

équation qui représente la décroissance de la densité de la vapeur d'eau en fonction de l'altitude x et où H représente la hauteur virtuelle de l'atmosphère terrestre.

En posant

$$(193) \quad H' = \frac{H}{3},$$

on obtient

$$(194) \quad \rho'(x) = \rho'_0 e^{-\frac{x}{H'}}.$$

Cette dernière équation a la même forme que (187). Il faut remarquer cependant que, dans l'équation (194), H' ne signifie pas la hauteur virtuelle de l'atmosphère constituée uniquement de vapeur d'eau. Celle-ci est beaucoup plus grande que H' , ce qui signifie que la teneur en vapeur d'eau diminue beaucoup plus vite que ne le fait prévoir la théorie des gaz parfaits.

Il découle de (194) et (192) que cette dernière équation est valable pour tous les gaz de l'atmosphère terrestre y-compris la vapeur d'eau.

21. — La loi de Beer et ses conséquences.

Après avoir exprimé mathématiquement au N^o précédent la dépendance de la densité et de la constitution de l'atmosphère de l'altitude x , on peut maintenant aborder le problème de la détermination de la fonction $a_1(x)$.

Il est naturel d'admettre que l'absorption de la radiation solaire par la couche atmosphérique S_x est d'autant plus intense que le nombre de molécules que rencontre le rayon solaire sur son parcours est plus grand, c'est-à-dire que l'absorption est proportionnelle à la densité du milieu. On peut donc poser

$$(195) \quad a_1(x) = k_1 \rho(x),$$

où k_1 désigne une constante que nous nommerons coefficient d'absorption de l'atmosphère pour les rayons solaires.

L'équation (195) exprime la loi, dite loi de Beer, qui ne peut être considérée qu'approximativement exacte.¹⁷⁾ Celle-ci a été déjà employée avec succès par Laplace dans sa théorie de l'extinction

de la lumière¹⁸); nous l'emploierons également, convenablement modifiée. Dans la seconde partie de cet ouvrage, nous verrons que les différents gaz de l'atmosphère absorbent différemment la radiation solaire, de telle façon qu'il est plus exact d'introduire des coefficients d'absorption pour chaque gaz. De cette manière on obtient, en tenant compte des résultats du N^o précédent, l'expression suivante

$$(196) \quad a_1(x) = a_1 e^{-\frac{x}{H_1}} + a_2 e^{-\frac{x}{H_2}} + a_3 e^{-\frac{x}{H_3}} + \dots,$$

où $a_1, a_2, a_3 \dots$ représentent des constantes nouvelles.

Ces suppositions admises, le coefficient de transmission p_a de l'atmosphère est représenté d'après (150) par

$$p_a = e^{-\int_0^x (a_1 e^{-\frac{x}{H_1}} + a_2 e^{-\frac{x}{H_2}} + a_3 e^{-\frac{x}{H_3}} + \dots) dx}$$

c'est-à-dire par

$$(197) \quad p_a = e^{-a_1 H_1 - a_2 H_2 - a_3 H_3 - \dots},$$

tandis que le pouvoir absorbant a_m de l'atmosphère est représenté par

$$(198) \quad a_m = 1 - p_a.$$

Nous allons à présent déterminer la part que prennent les différents gaz dans cette absorption. Supposons, pour simplifier, que l'atmosphère n'est constituée que par trois gaz différents. On a alors

$$(199) \quad a_m = 1 - e^{-a_1 H_1 - a_2 H_2 - a_3 H_3}.$$

Si l'atmosphère n'était constituée que d'un seul gaz (à hauteur virtuelle H_1) son pouvoir absorbant serait

$$a'_m = 1 - e^{-a_1 H_1}.$$

Si l'atmosphère ne contenait que le gaz à hauteur virtuelle H_2 , ce pouvoir serait

$$a''_m = 1 - e^{-a_2 H_2}.$$

tandis que, pour le gaz à altitude virtuelle H_3 seul, le pouvoir absorbant serait

$$a_m''' = 1 - e^{-a_3 H_3}.$$

Or, il découle de ces équations précédentes

$$a_m = 1 - e^{-a_1 H_1} \cdot e^{-a_2 H_2} \cdot e^{-a_3 H_3} = 1 - (1 - a_m') (1 - a_m'') (1 - a_m'''),$$

c'est-à-dire

$$(200) \quad a_m = a_m' + a_m'' + a_m''' - a_m' a_m'' - a_m'' a_m''' - a_m''' a_m' + a_m' a_m'' a_m''.$$

Cette équation montre que le pouvoir absorbant d'un mélange de gaz n'est point égal à la somme des pouvoirs absorbants des gaz constituants. Seulement lorsque les valeurs de ces pouvoirs absorbant sont tellement petites que leurs produits peuvent être négligés, on peut poser, alors,

$$(201) \quad a_m = a_m' + a_m'' + a_m''.$$

CHAPITRE III.

RAPPORT ENTRE L'INSOLATION ET LA TEMPÉRATURE DES PLANÈTES, ABSTRACTION FAITE DE LEURS ATMOSPHÈRES.

22. — *Distribution de la température à la surface planétaire à l'état permanent d'insolation.*

Avant d'aborder le cas général d'une insolation variable, nous allons étudier, comme introduction à ce chapitre, le cas spécial d'une insolation permanente et invariable. A la rigueur ce cas ne se présente jamais, l'insolation variant sans cesse par suite de la rotation et de la révolution des planètes; mais, lorsqu'il s'agit de déterminer la moyenne température annuelle des parallèles d'une planète, il est permis d'admettre que ceux-ci sont exposés à la moyenne insolation annuelle invariable. Nous verrons plus tard que pour des variations de température ne dépassant pas une certaine limite, cette supposition est admissible.

Supposons donc que l'endroit considéré de la surface planétaire reçoit, par unité de temps et par unité de surface, une quantité invariable W_m de radiation solaire. Si la surface planétaire possédait les propriétés d'un corps absolument noir, elle absorberait complètement les rayons incidents, et, comme nous ne tenons pas compte des autres transformations de l'énergie rayonnante, celle-ci serait employée intégralement à la calorification de la planète. Mais en réalité la fraction R_p de la radiation solaire est réfléchie à la surface de la planète sans être utilisée à sa calorification. Le nombre R_p , qui est plus petit que l'unité, s'appelle le pouvoir réfléchissant de la surface planétaire envers la radiation solaire. Il

Il ensuit que la quantité de chaleur absorbée par l'unité de surface de la planète dans l'unité de temps est représentée par

$$(202) \quad \frac{dQ_i}{dt} = a_p W_m,$$

où on a mis

$$(203) \quad a_p = 1 - R_p,$$

a_p représentant donc le pouvoir absorbant de la surface planétaire pour la radiation solaire.

A part cette chaleur, la surface de la planète reçoit encore celle qui lui est transmise par la conductibilité du sol même. Nous désignerons la quantité de cette dernière chaleur, reçue par unité de temps et unité de surface, par

$$\frac{dQ_e}{dt}$$

Nous donnerons plus tard sur la valeur de celle-ci les renseignements nécessaires.

L'état thermique de la surface planétaire produit, ainsi qu'il a été déjà mentionné au N^o 14, un rayonnement vers l'espace interplanétaire nommé l'émission de cette surface. La valeur de cette émission dépend de l'état thermique de la surface rayonnante. Pour un corps absolument noir cette émission est proportionnelle à la quatrième puissance de sa température absolue Θ et représentée par l'expression

$$(204) \quad \frac{dQ_r}{dt} = \sigma \Theta^4,$$

σ étant une constante.

L'équation (204) exprime la loi de Stefan-Boltzmann, bien fondée théoriquement et expérimentalement. La valeur numérique de σ a été déterminée avec une précision très satisfaisante et trouvée égale à

$$(205) \quad \sigma = 0.76 \times 10^{-10} \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}} \cdot 19)$$

Quant à l'émission des corps qui ne sont pas absolument noirs, on n'a pas encore définitivement fixé à quelle loi elle est assujettie. D'après des recherches de Ferrel, Paschen et Siegl²⁰⁾, cette émission peut être exprimée par

$$(206) \quad \frac{dQ_r}{dt} = s \Theta^m,$$

où s et m sont des constantes dépendant de la constitution de la surface du corps rayonnant. D'après les recherches de Siegl s'étendant à une série de pierres, à l'eau et à la glace, m serait compris entre 4 et 5 tandis que s est plus petit que σ .

Cependant la formule ci-dessus est empirique et sans fondement théorique. De plus les données de Siegl ne sont pas utilisables à notre point de vue, l'état des matériaux étudiés ne répondant pas à leur état naturel.²¹⁾

Cependant, on peut déterminer approximativement par voie théorique, à l'aide de la loi de rayonnement de Kirchhoff, aussi l'émission des corps qui ne sont pas absolument noirs. D'après cette loi, le pouvoir émissif d'un corps donné, pour une radiation de longueur d'onde déterminée, est égal au pouvoir absorbant de ce corps, pour cette radiation, multiplié par le pouvoir émissif du corps absolument noir. En admettant que cette loi est valable également pour une radiation composée, ce qui n'est qu'approximativement le cas, on obtient pour l'émission de la surface planétaire l'expression

$$(207) \quad \frac{dQ_r}{dt} = a_p' \sigma \Theta_p^4,$$

où Θ_p représente la température absolue de la surface planétaire et a_p' son moyen pouvoir absorbant pour les rayons émis. Nous désignerons cette quantité par pouvoir absorbant pour la radiation obscure, afin de la distinguer de celle donnée par (203).

Les trois quantités de chaleur $\frac{dQ_i}{dt}$, $\frac{dQ_e}{dt}$, $\frac{dQ_r}{dt}$ déterminent l'état thermique de la surface planétaire et celle-ci prendra la température Θ_p , pour laquelle l'apport de chaleur est égal à la perte. Comme les deux premières quantités représentent la chaleur reçue

et la troisième la chaleur émise par la surface planétaire, on doit avoir l'équation

$$\frac{dQ_i}{dt} + \frac{dQ_c}{dt} = \frac{dQ_r}{dt},$$

où bien, en tenant compte de (202) et (207),

$$(208) \quad a_p' \sigma \Theta_p^4 - \frac{dQ_c}{dt} = a_p W_m.$$

Lorsque le refroidissement de la planète a atteint le degré auquel sa chaleur interne n'a plus d'influence sur la température de sa surface, ce qui est le cas de la Terre, de la Lune et très probablement de Mercure, Vénus et Mars, la quantité de chaleur $\frac{dQ_c}{dt}$ envoyée de l'intérieur à la surface est négligeable par rapport aux deux autres quantités de chaleur, et on a, alors,

$$(209) \quad \Theta_p^4 = \frac{a_p}{a_p'} \frac{W_m}{\sigma}.$$

N'étant pas suffisamment informé sur la valeur numérique de a_p et a_p' , on a coutume de poser

$$a_p = a_p',$$

et on obtient l'équation plus simple

$$(210) \quad \Theta_p^4 = \frac{W_m}{\sigma}.$$

En substituant à W_m la valeur de la moyenne insolation annuelle de la planète représentée par (104) ou bien par (105), on obtient pour Θ_p la température moyenne de la surface planétaire supposée en tous ses points solide et privée d'atmosphère.²²⁾ En substituant à W_m les moyennes insolutions annuelles $\frac{W_T}{T}$ des parallèles de la planète, on obtient les moyennes températures annuelles de ces parallèles.

23. — *Equation différentielle de la propagation de la chaleur dans le sol.*

Nous avons déjà mentionné, et nous en donnerons une preuve numérique, que la quantité de chaleur transmise par conductibilité du sol de l'intérieur à la surface de la Terre est tellement petite qu'elle n'influence pas la température moyenne de la surface terrestre. Malgré cela il est nécessaire de tenir compte de cette conductibilité, lorsqu'il ne s'agit pas d'une insolation stationnaire. Il est en effet connu, et nous en verrons la raison, que la température du sol déjà à une profondeur de 10 mètres environ est à peu près constante au cours de l'année et qu'elle diffère peu de la température annuelle à la surface. Il s'ensuit qu'en été la température moyenne à la surface du sol sera plus haute que celle à la profondeur mentionnée, d'où, à cette époque de l'année, un flux de chaleur parcourant le sol de sa surface vers l'intérieur de la Terre. Ceci aura pour conséquence qu'en été la température à la surface du sol sera inférieure à ce qu'elle serait sans cette conductibilité. C'est l'inverse qui aura lieu en hiver. Des flux semblables ont lieu à n'importe quelle époque de l'année, dans un sens, la nuit, dans l'autre, le jour. Il doit en être de même pour les trois planètes mentionnées et la Lune.

Lorsque l'on veut décrire mathématiquement ce phénomène, il est permis, ainsi que nous l'avons fait jusqu'à présent, d'admettre que l'élément de la surface planétaire considéré est une surface plane. En tenant compte de plus que la température ne change, d'un point à l'autre de cette surface, que d'une façon insignifiante, on n'a à s'occuper que de la propagation de la chaleur normalement à cette surface.

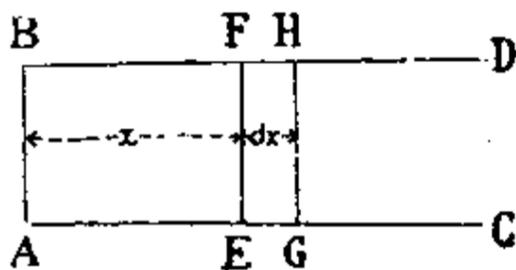


Fig. 11.

Soit donc $A B$ (*fig. 11*) l'élément plan de surface considéré de la planète vu de côté. De cet élément comme base imaginons un prisme $A B C D$ prolongé à l'intérieur de la planète et soit $E F$ une section droite de ce prisme à la distance x de la

surface. Désignons la température de la section E.F à l'époque t par $u(x, t)$. Alors, la pente de la température, suivant la normale à la section E F et dans la direction dans laquelle x croît, est représentée par $-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$.

La quantité de chaleur $\frac{dQ_c}{dt}$ traversant en unité de temps l'unité d'aire de la section E F est, d'après les principes fondamentaux de la théorie de la propagation de la chaleur, égale au produit du coefficient de conductibilité de chaleur K par la pente de la température, suivant la normale à la section E F. On a donc

$$(211) \quad \frac{dQ_c}{dt} = -K \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

On peut considérer K indépendant de u et t . De plus nous supposons que le sol est isotrope et homogène c'est-à-dire que K est indépendant aussi de x . Alors la quantité de chaleur $\frac{dQ'_c}{dt}$ traversant, dans l'unité de temps, la section G H éloignée de dx de la section E F et dans la direction dans laquelle x croît, est représentée par

$$\frac{dQ'_c}{dt} = -K \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx \right].$$

Par conséquent, dans l'unité de temps, l'élément de volume E F G H s'enrichit de la quantité de chaleur

$$(212) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_c}{dt} - \frac{dQ'_c}{dt} = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Comme nous faisons pour le moment abstraction des autres transformations de la chaleur, cette quantité sera entièrement employée à l'élevation de la température $u(x, t)$ de cet élément. Désignons par c_p la chaleur spécifique du sol, c'est-à-dire la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température de l'unité de sa masse, par ρ_p sa densité, il s'ensuit que l'élément de volume E F G H contient une masse $\rho_p dx$, de sorte que la quantité de chaleur $\frac{dQ}{dt}$ provoquera, dans l'unité de temps, l'élevation de la

température $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ donnée par

$$(213) \quad \frac{dQ}{dt} = c_p \varrho_p \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx.$$

La quantité

$$(214) \quad c_p \varrho_p = C_p$$

est ce qu'on appelle la capacité calorifique de l'unité de volume du sol.

Posons

$$(215) \quad \frac{K}{c_p \varrho_p} = m^2$$

et nommons m^2 le coefficient de conductibilité de température, il découle des équations précédentes

$$(216) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = m^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Cette équation à dérivées partielles règle, avec les conditions spéciales aux surfaces-limites, dont il sera question plus loin, la propagation de la chaleur dans le sol.

24. — *Températures de la surface planétaire lorsque l'insolation est une oscillation simple.*

Admettons que l'unité de surface considérée de la planète reçoit, dans l'unité de temps, la radiation solaire

$$(217) \quad W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t$$

dont elle retient la fraction

$$(218) \quad \frac{dQ_i}{dt} = a_p W_1(t) = a_p (a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t)$$

et la transforme en chaleur du sol.

Nous verrons plus tard que toute autre insolation peut être ramenée à ce cas spécial.

Si nous voulons déterminer les variations de température provoquées par l'insolation variable précédente, nous devons tenir compte que, en dehors de la quantité de chaleur précédente, la planète reçoit de plus celle qui lui est transmise par la conductibilité du sol. Cette dernière est représentée, d'une façon analogue à (211), par

$$(219) \quad \frac{dQ_c}{dt} = K \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}.$$

Cette équation a perdu le signe — car elle représente la quantité de chaleur qui s'écoule vers la surface de la planète c'est-à-dire dans la direction — x .

La surface de la planète accusera, au moment t , la température absolue Θ_p , qui satisfait l'équation (207), et celle qui la suit, car les apports et les pertes de chaleur de la surface planétaire doivent être en équilibre à tout moment, une surface ne pouvant pas emmagasiner de la chaleur. Nous pouvons, pour les raisons mentionnées au N^o 22 et pour simplifier, poser $a_p' = a_p$.

En mesurant la température $u(x, t)$ en degrés centésimaux, on a

$$(220) \quad \Theta_p = 273 + u(0, t),$$

et nous obtenons l'équation

$$(221) \quad a_p (a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t) + K \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = a_p \sigma \left[273 + u(0, t) \right]^4.$$

Pour pouvoir déterminer la température $u(0, t)$ de la surface planétaire à l'aide de cette équation nous devrions connaître $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$

ce qui nécessiterait la solution d'un problème plus général et la détermination de l'état thermique provoqué par l'insolation précédente à l'intérieur même du sol.

La propagation de la chaleur dans le sol obéit à l'équation à dérivées partielles (216). On doit donc déterminer l'intégrale particulière de cette équation en tenant compte des conditions aux surfaces-limites, dont l'une est justement l'équation (221). L'intégrale cherchée doit, par conséquent, pour $x = 0$ satisfaire l'équation (221). Le second plan limitant le corps étudié peut être supposé dans la position $x = \infty$. Il sera plus tard question des conditions qui doivent être satisfaites sur cette surface.²³⁾ La connaissance de l'état initial, c'est-à-dire de la distribution de la température à

un moment donné, n'est pas nécessaire dans notre cas, car nous avons affaire à une insolation périodique. En effet, nous pouvons supposer que l'insolation périodique a duré un temps infiniment long de façon que l'influence de la distribution initiale de la température ait disparu et que la température ait pris un caractère purement périodique.

Le problème précédent peut être résolu sous une forme finie, lorsque le second membre de l'équation (221) est linéaire par rapport à $u(0, t)$, et c'est de ce cas que nous allons nous occuper en premier lieu. Ce cas se présentera lorsque l'amplitude a_1 de l'insolation est petite car, dans ce cas, les amplitudes de la température $u(0, t)$ le sont également et l'on peut alors poser

$$(222) \quad u(0, t) = u_0 + \Delta u(t),$$

où u_0 est constant et représente la valeur moyenne de $u(0, t)$ qu'on déterminera plus tard, tandis que $\Delta u(t)$ est variable et petit.

En développant l'expression

$$\left[273 + u(0, t) \right]^4 = \left[273 + u_0 + \Delta u(t) \right]^4,$$

d'après la formule du binôme, tout en négligeant les puissances supérieures de $\Delta u(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left[273 + u(0, t) \right]^4 &= (273 + u_0)^4 + 4(273 + u_0)^3 \Delta u(t) = \\ &= (273 + u_0)^4 - 4(273 + u_0)^3 u_0 + 4(273 + u_0)^3 u(0, t). \end{aligned}$$

En posant pour abrégier

$$(223) \quad \begin{cases} \sigma \left[(273 + u_0)^4 - 4(273 + u_0)^3 u_0 \right] = h v_0, \\ 4 \sigma (273 + u_0)^3 = h \end{cases}$$

on obtient

$$(224) \quad \sigma \left[273 + u(0, t) \right]^4 = h \left[v_0 + u(0, t) \right].$$

Nous obtenons donc, au lieu de (221), l'équation

$$(225) \quad u(0, t) - \frac{K}{a_p h} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{a_0}{h} - v_0 + \frac{a_1}{h} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Il s'agit maintenant de trouver l'intégrale particulière de l'équation à dérivées partielles (216) satisfaisant les conditions ci-dessus et celles dont il sera question plus loin.

En posant, à cet effet,

$$(226) \quad u(x, t) = e^{\alpha t + \beta x},$$

où α et β sont des constantes, cette expression représentera évidemment une intégrale particulière de (216), lorsque l'équation

$$(227) \quad \alpha = m^2 \beta^2$$

est satisfaite.

Il est facile de se rendre compte que l'expression

$$(228) \quad u(x, t) = C_1 e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 t + \beta_2 x} + C_3 x + C_4$$

est aussi une intégrale de l'équation (216), lorsque C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes, d'ailleurs arbitraires, et lorsque les valeurs α_1, β_1 et α_2, β_2 , prises par paires, satisfont à l'équation (227).

Il s'agit maintenant de savoir s'il est possible d'attribuer à α, β et C de telles valeurs que la condition (225) soit satisfaite.

La quantité $u(x, t)$ doit être une fonction périodique du temps, ce qui aura lieu lorsque α_1 et α_2 seront des valeurs imaginaires.

Posons donc

$$(229) \quad \begin{cases} \alpha_1 = +iN \\ \alpha_2 = -iN, \end{cases}$$

où N est un nombre réel, tandis que i représente l'unité imaginaire, il résulte de (227) que les valeurs β_1 et β_2 seront des quantités imaginaires conjuguées, la seconde découlant de la première, lorsqu'on remplace $+i$ par $-i$. Ces deux quantités sont donc de la forme

$$(230) \quad \begin{cases} \beta_1 = R + iP \\ \beta_2 = R - iP. \end{cases}$$

En portant les valeurs (229) et (230) dans l'équation (227) et en dédoublant celle-ci, en séparant le réel de l'imaginaire, on obtient

$$(231) \quad P = R = \pm \frac{1}{m} \sqrt{\frac{N}{2}}$$

$$(232) \quad \begin{cases} \beta_1 = (1 + i)P \\ \beta_2 = (1 - i)P. \end{cases}$$

On a donc

$$(233) \quad u(x, t) = e^{Px} \left[C_1 e^{i(Nt + Px)} + C_2 e^{-i(Nt + Px)} \right] + C_3 x + C_4$$

Or, d'après la formule d'Euler, on a

$$(234) \quad e^{\pm i(Nt + Px)} = \cos(Nt + Px) \pm i \sin(Nt + Px),$$

et on obtient, en posant

$$(235) \quad C_1 + C_2 = C_1'; \quad i(C_1 - C_2) = C_2',$$

où C_1' et C_2' sont encore des constantes arbitraires,

$$(236) \quad u(x, t) = e^{Px} \left[C_1' \cos(Nt + Px) + C_2' \sin(Nt + Px) \right] + C_3 x + C_4.$$

Il découle de cette équation

$$(237) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = P e^{Px} \left[(C_1' + C_2') \cos(Nt + Px) + (C_2' - C_1') \sin(Nt + Px) \right] + C_3.$$

En portant (236) et (237) dans (225), on obtient

$$\left[C_1' - \frac{KP}{a_p h} (C_1' + C_2') \right] \cos Nt + \left[C_2' - \frac{KP}{a_p h} (C_2' - C_1') \right] \sin Nt + C_4 - \frac{K}{a_p h} C_3 = \frac{a_0}{h} - v_0 + \frac{a_1}{h} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Cette équation doit être satisfaite identiquement, ce qui veut dire qu'on doit avoir

$$(238) \quad N = \frac{2\pi}{T}$$

$$(239) \quad C_1' - \frac{KP}{a_p h} (C_1' + C_2') = \frac{a_1}{h}$$

$$(240) \quad C_2' - \frac{KP}{a_p h} (C_2' - C_1') = 0$$

$$(241) \quad C_4 - \frac{K}{a_p h} C_3 = \frac{a_0}{h} - v_0.$$

Ces équations, avec deux autres qui suivront, servent à la détermination des constantes P , N , C_1' , C_2' , C_3 et C_4 .

Pour la constante P nous disposons, d'après (231) et (238), de deux valeurs égales et de signes contraires. Si on adoptait le signe positif pour la quantité P , les oscillations de température augmente

raient, d'après (236), avec la profondeur x et deviendraient infiniment grandes à la limite $x = \infty$. Nous excluons ce cas physiquement impossible et nous n'emploierons, par conséquent, que le signe négatif. On a donc

$$(242) \quad P = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}.$$

Avec cette valeur les membres de l'équation (236), qui dépendent du temps, décroissent avec la profondeur x et deviennent, pour les valeurs de x assez grandes, négligeables par rapport à $C_3 x + C_4$. A de telles profondeurs la température du sol est stationnaire.

En posant, pour abréger,

$$(243) \quad M = -\frac{K P}{a_p} = \frac{K}{a_p m} \sqrt{\frac{\pi}{T}},$$

on tire de (239) et (240)

$$(244) \quad C_1' = \frac{h + M}{h^2 + 2hM + 2M^2} a_1.$$

$$(245) \quad C_2' = \frac{M}{h^2 + 2hM + 2M^2} a_1.$$

Les constantes C_3 et C_4 ont la signification suivante.

Pour $a_1 = 0$ l'insolation devient stationnaire et égale à

$$(246) \quad W_m = a_0;$$

nous avons donc devant nous le cas du N^o 22. Dans ce cas la température de l'intérieur de l'écorce planétaire est donnée d'après (236), (244) et (245) par

$$(247) \quad u(x) = C_3 x + C_4.$$

Nous aurions obtenu la même distribution de la température en cherchant les températures moyennes de l'intervalle de temps T , car dans les membres trigonométriques de l'équation (236), à chaque valeur positive correspond une valeur égale, mais de signe contraire appartenant au même intervalle T . Si (217) représente la marche annuelle de l'insolation, ce que nous admettons pour le moment, alors l'équation précédente nous donne les températures annuelles à différentes profondeurs.

La constante C_4 représente donc la moyenne température annuelle à la surface de la planète, que nous désignerons par u_0 , tandis que C_3 représente le gradient $\frac{\partial u(x)}{\partial x}$ des températures annuelles

que nous désignerons par g_T . On peut également définir la constante C_3 comme étant le gradient de température à des profondeurs auxquelles l'influence de l'insolation variable de la surface de la planète ne se fait plus sentir et auxquelles la température est à l'état stationnaire.

On a donc

$$(248) \quad C_3 = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = g$$

$$(249) \quad C_4 = u_0 .$$

Il découle de (241), (248) et (249)

$$(250) \quad u_0 = \frac{a_0}{h} - v_0 + \frac{K}{a_p h} g_T ,$$

ou bien, ayant à cause de (224),

$$\sigma (273 + u_0)^4 = h (v_0 + u_0) ,$$

on a

$$(251) \quad a_p \sigma (273 + u_0)^4 = a_p a_0 + K g_T .$$

Cette équation détermine la valeur a_0 .

Nous aurions obtenu la même valeur de u , en cherchant d'après le procédé donné au N^o 22, la température qu'aurait prise la surface planétaire, si elle était exposée à l'insolation permanente (247) et si elle recevait de l'intérieur de la planète la quantité de chaleur

$$(252) \quad \frac{dQ_c}{dt} = K g_T .$$

Or, l'expression (247) représente la moyenne insolation annuelle, car, en faisant la moyenne, le terme trigonométrique disparaît, tandis que (252) représente le moyen flux de chaleur annuel de l'intérieur de la planète. Il s'ensuit, en tenant compte des suppositions admises, que la moyenne température annuelle est égale à celle qui régnerait à la surface de la planète, si celle-ci était exposée à la moyenne insolation annuelle permanente. Ainsi, voilà donnée la démonstration annoncée au N^o 22.

Par les équations précédentes le problème posé est complètement résolu. Pour mieux saisir cette solution, posons

$$(253) \quad \begin{cases} C_1' = A_1 \cos \varepsilon_1 \\ C_2' = A_1 \sin \varepsilon_1, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(254) \quad \begin{aligned} \text{tang } \varepsilon_1 &= \frac{C_2'}{C_1'} = \frac{M}{h + M} = \frac{K \sqrt{\pi}}{h a_p m \sqrt{T} + K \sqrt{\pi}}, \\ A_1^2 &= C_1'^2 + C_2'^2 = \frac{a_1^2}{h^2 + 2 h M + 2 M^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$(255) \quad A_1 = \frac{a_1}{\sqrt{h^2 + \frac{2 h K}{a_p m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{2 K^2 \pi}{a_p^2 m^2 T}}}.$$

On a alors

$$C_1' \cos (N t + P x) + C_2' \sin (N t + P x) = A_1 \cos (N t + P x - \varepsilon_1)$$

et nous obtenons, à la place de (236),

$$(256) \quad u(x, t) = u_0 + g_T x + A_1 e^{-\frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \left(\cos \frac{2 \pi}{T} t - \frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon_1 \right).$$

La température de la surface planétaire est représentée par l'expression

$$(257) \quad u(0, t) = u_0 + A_1 \cos \left(\frac{2 \pi}{T} t - \varepsilon_1 \right).$$

Il découle de celle-ci que la température de la surface planétaire atteint respectivement ses valeurs maxima et minima $u_0 + A_1$, $u_0 - A_1$, lors que $t = t_1$, t_1 étant donné, dans le premier cas, par

$$(258) \quad \frac{2 \pi}{T} t_1 - \varepsilon_1 = 2 n \pi$$

et, dans le second,

$$(259) \quad \frac{2 \pi}{T} t_1 - \varepsilon_1 = n \pi,$$

n étant un nombre entier et impair quelconque.

L'insolation (217) atteint ses valeurs extrêmes pour $t = t_2$, t_2 étant donné par

$$\frac{2\pi}{T} t_2 = 2n\pi$$

$$\frac{2\pi}{T} t_2 = n\pi.$$

Le retard de l'époque des maxima et des minima de la température par rapport à l'époque des maxima et des minima de l'insolation est donc égal à

$$(260) \quad t_1 - t_2 = \frac{T}{2\pi} \varepsilon_1.$$

Comme on a, à cause de (215),

$$(261) \quad \frac{m}{K} = \frac{1}{m c_p \varrho_p},$$

on peut se convaincre, en tenant compte de (254), que ce retard s'annule pour $m = 0$ et qu'il atteint son maximum $\frac{T}{8}$ pour $m = \infty$.

La différence entre la température maxima et la température minima de la surface est égale, d'après (257), à $2A_1$. Pour une conductibilité négligeable du sol, c'est-à-dire pour $m = 0$, cet écart serait, d'après (255) et (261), égal à $\frac{2a_1}{h}$. La conductibilité du sol adoucit, par conséquent, les oscillations des températures dans le rapport

$$1 : \sqrt{1 + \frac{2m c_p \varrho_p}{a_p h} \sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{2m^2 c_p^2 \varrho_p^2}{a_p^2 h^2} \frac{\pi}{T}}.$$

De semblables retards et affaiblissements des températures extrêmes ont également lieu à l'intérieur du sol. Il en sera question plus tard.

25. — *Températures de l'écorce des planètes lorsque l'insolation est une fonction périodique quelconque du temps.*

Si nous avons remplacé dans la formule (217) le cosinus par le sinus — ceci revenant à déplacer le moment initial du temps — nous aurions obtenu également, dans la formule (256), le sinus au

lieu du cosinus, l'équation ne subissant pas d'autres changements. Il est facile de se persuader que, lorsque $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$... sont des intégrales particulières de l'équation (216), leur somme également satisfait cette équation. Il s'ensuit que si l'insolation de la surface planétaire, au lieu d'être représentée par (217) l'était par

$$(262) \quad W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos \frac{4\pi}{T} t + a_3 \cos \frac{6\pi}{T} t + \dots \\ + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \sin \frac{4\pi}{T} t + b_3 \sin \frac{6\pi}{T} t + \dots,$$

la température, à la profondeur x , serait donnée par l'expression

$$(263) \quad u(x, t) = u_0 + g_T x + \sum_n A_n e^{-\frac{x}{m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}}} \cos \left(\frac{2n\pi}{T} t - \frac{x}{m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}} - \varepsilon_n \right) \\ + \sum_n B_n e^{-\frac{x}{m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}}} \sin \left(\frac{2n\pi}{T} t - \frac{x}{m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}} - \varepsilon_n \right).$$

On a ensuite

$$(264) \quad \text{tang } \varepsilon_n = \frac{K \sqrt{n\pi}}{h a_p m \sqrt{T} + K \sqrt{n\pi}},$$

$$(265) \quad A_n = \frac{a_n}{\sqrt{h^2 + \frac{2hK}{a_p m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}} + \frac{2K^2}{a_p^2 m^2} \frac{n\pi}{T}}},$$

$$(266) \quad B_n = \frac{b_n}{\sqrt{h^2 + \frac{2hK}{a_p m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}} + \frac{2K^2}{a_p^2 m^2} \frac{n\pi}{T}}}.$$

La valeur u_0 est donnée ici également par (251).

On peut simplifier l'expression (263) en posant

$$(267) \quad \begin{cases} A_n = C_n \cos \delta_n \\ B_n = C_n \sin \delta_n, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(268) \quad \text{tang } \delta_n = \frac{B_n}{A_n} = \frac{b_n}{a_n},$$

$$(269) \quad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{h^2 + \frac{2hK}{a_p m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}} + \frac{2K^2 n\pi}{a_p^2 m^2 T}}}$$

car on a alors évidemment

$$(270) \quad u(x, t) = u_0 + g_T x + \sum_n C_n e^{-\frac{x}{m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}}} \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t - \frac{x}{m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}} - \varepsilon_n - \delta_n\right),$$

$$(271) \quad u(0, t) = u_0 + \sum_n C_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t - \varepsilon_n - \delta_n\right).$$

Or, il est possible, ainsi que nous le verrons tout de suite, de développer toute fonction uniforme $f(t)$ en une série de la forme (262), à condition qu'elle remplisse certaines stipulations, qui sont d'ailleurs satisfaites par toutes les fonctions employées dans l'analyse des problèmes du domaine des sciences naturelles. A l'aide d'un tel développement en série, nommé développement de Fourier,² nous pouvons résoudre le problème en question, lorsque l'insolation de la surface est une fonction périodique quelconque du temps. Pour le moment, il faut encore tenir compte de la restriction que l'amplitude de l'insolation ne doit pas être grande.

Nous allons exposer brièvement le procédé de développement des fonctions périodiques en série de Fourier.

Ce développement repose sur quelques intégrales définies de fonctions trigonométriques, que nous allons exposer d'abord. n et t étant des nombres entiers, on a

$$(272) \quad \int_0^T \sin \frac{2n\pi}{T} t dt = -\frac{T}{2n\pi} \left\{ \cos \frac{2n\pi}{T} t \right\}_0^T = 0,$$

$$(273) \quad \int_0^T \cos \frac{2n\pi}{T} t dt = \frac{T}{2n\pi} \left\{ \sin \frac{2n\pi}{T} t \right\}_0^T = 0;$$

comme on a ensuite

$$\int_0^T \sin \frac{2n\pi}{T} t \sin \frac{2m\pi}{T} t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos (n-m) \frac{2\pi}{T} t - \cos (n+m) \frac{2\pi}{T} t \right] dt,$$

$$\int_0^T \cos \frac{2n\pi}{T} t \cos \frac{2m\pi}{T} t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos (n-m) \frac{2\pi}{T} t + \cos (n+m) \frac{2\pi}{T} t \right] dt,$$

$$\int_0^T \sin \frac{2n\pi}{T} t \cos \frac{2m\pi}{T} t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\sin (n-m) \frac{2\pi}{T} t + \sin (n+m) \frac{2\pi}{T} t \right] dt,$$

on aura, en tenant compte de (272) et (273),

$$(274) \quad \left. \int_0^T \sin \frac{2n\pi}{T} t \sin \frac{2m\pi}{T} t dt = 0 \right\} \text{ pour } n \neq m$$

$$(275) \quad \int_0^T \cos \frac{2n\pi}{T} t \cos \frac{2m\pi}{T} t dt = 0$$

$$(276) \quad \int_0^T \sin \frac{2n\pi}{T} t \cos \frac{2m\pi}{T} t dt = 0,$$

tandis qu'on obtient pour $n = m$

$$(277) \quad \int_0^T \sin^2 \frac{2n\pi}{T} t dt = \frac{T}{2}$$

$$(278) \quad \int_0^T \cos^2 \frac{2n\pi}{T} t dt = \frac{T}{2}.$$

Si l'on veut donc développer une fonction périodique quelconque $W_1(t)$ à période T en une série de la forme (262), on multiplie, à cet effet, (262) par dt et on l'intègre entre les limites 0 et T . On obtient alors

$$(279) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T W_1(t) dt,$$

tous les membres de la partie droite de l'équation (262) disparaissant comme conséquence de (273) et (274), excepté le premier.

En multipliant (262) par $\cos \frac{2n\pi}{T} t dt$, où n est un nombre quelconque, et en l'intégrant entre les limites 0 et T , tous les membres de la partie droite de cette équation, à l'exception du membre en a_n , disparaissent comme conséquence de (273), (275), (276). En employant (278) on obtient

$$(280) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T W_1(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt.$$

En multipliant (262) par $\sin \frac{2n\pi}{T} t dt$ et en l'intégrant entre les limites 0 et T on obtient, en tenant compte de (272), (274), (276) et (277),

$$(281) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T W_1(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt.$$

De cette façon, tous les coefficients de la série (262) sont déterminés.

Lorsque l'allure de la fonction $W_1(t)$ n'est pas donnée analytiquement, mais lorsque sont données seulement quelques-unes de ses valeurs correspondant à des valeurs déterminées de t , on peut, dans ce cas, déterminer les coefficients (279) à (281) à l'aide de la quadrature mécanique. Si, par exemple, les valeurs mentionnées de t sont équidistantes, on peut, dans ce cas, employer la formule de Simpson, exposée au N^o 16; autrement, on peut déterminer les intégrales (279) à (281) à l'aide d'un graphique et du planimètre. Il existe également des appareils nommés analyseurs harmoniques, permettant de déterminer les coefficients de la série d'une manière encore plus simple. L'analyse harmonique, c'est-à-dire la représentation des fonctions, données analytiquement ou empiriquement, par des séries trigonométriques de la forme (262), dispose également d'autres méthodes applicables, auxquelles nous ne nous arrêterons pas ici.

Nous avons admis dans les recherches précédentes que les oscillations de la température de la surface de la planète sont tellement

petites, que la loi de rayonnement peut être représentée comme fonction linéaire de la température u , car il n'y a que dans ce cas que le premier membre de l'équation (224) peut être posé égal au second. Le premier membre de cette équation est représenté graphiquement par la parabole biquadratique A B C D (fig. 12) qui est en contact avec l'axe des x au point $u = -273^{\circ}$ C. Cette équation signifie que nous avons remplacé cette courbe au voisinage du point à l'abscisse u_0 par sa tangente $T T'$.

Si les oscillations de la température sont d'une telle grandeur que la courbe en question ne peut pas être remplacée par sa tangente dans l'intervalle contenant ces oscillations, ce qui a lieu,

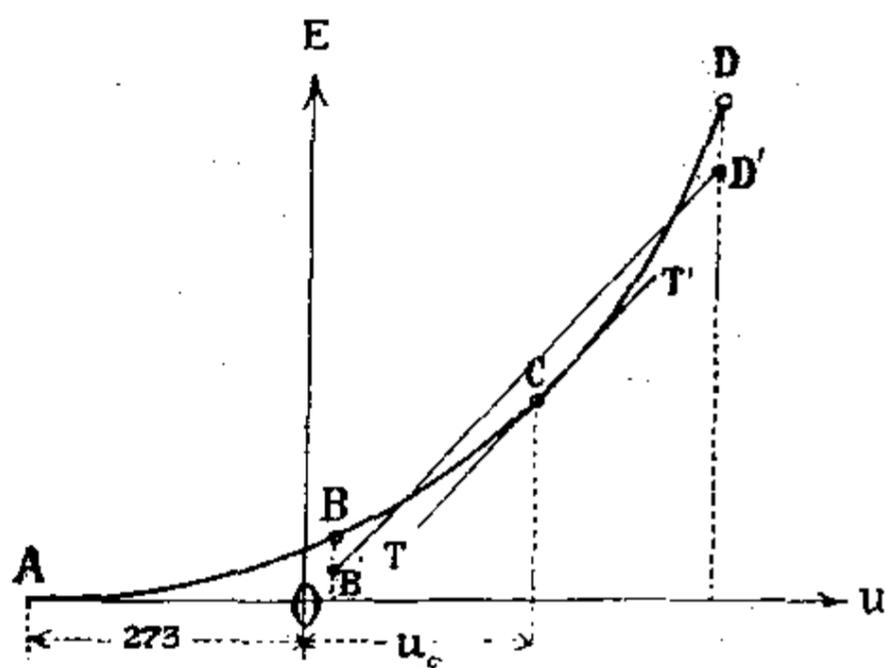


Fig. 12.

par exemple, lorsque cet intervalle s'étend à une partie notable B D de la courbe mentionnée, on ne peut alors déterminer la température $u(0, t)$ de la surface planétaire que par des approximations successives.

On peut commencer par remplacer la portion B C D de la courbe par une droite B' D' convenablement choisie et déterminer les valeurs u_0 , v_0 et h qui lui correspondent. A l'aide de ces valeurs, on calcule le gradient de température qu'on obtient en déterminant la dérivée de (270) par rapport à x pour $x = 0$.

On a donc

$$(282) \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = g_T + \sum_n C_n \frac{1}{m} \sqrt{\frac{n\pi}{T}} \left[\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t - \varepsilon_n - \delta_n\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t - \varepsilon_n - \delta_n\right) \right],$$

où C_n est donné par (269), ε_n par (264) et δ_n par (268).

En introduisant la valeur ainsi obtenue de $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$ dans l'équation (221), à laquelle on peut donner, dans ce cas, la forme

$$(283) \quad W_1(t) + \frac{K}{a_p} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \sigma \left[273 + u(0, t) \right]^4,$$

on en tire la fonction $u(0, t)$. Dans la détermination de cette fonction, la loi approximative de rayonnement n'est employée que pour le calcul du membre $K \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$, qui a une valeur relativement petite par rapport aux autres membres, le coefficient K étant lui-même petit.

Lorsqu'il est nécessaire, on peut pousser plus loin le degré d'exactitude du calcul. Dans ce but, on développe la fonction obtenue $u(0, t)$ en une série de la forme (271), à l'aide de l'Analyse harmonique et du procédé représenté par (267) à (269). Une fois les valeurs C_n , ε_n et δ_n calculées de cette manière, on peut déterminer, à l'aide de celles-ci, le gradient de température (282). Le rapport existant entre $u(0, t)$ et $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$ ne dépend évidemment que de la conductibilité du sol et non pas de l'émission de la surface. Par ce dernier procédé nous avons donc complètement satisfait l'équation (216). En introduisant la valeur ainsi obtenue de $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$ dans l'équation (283) et en répétant le procédé exposé, on peut réussir à faire paraître satisfaite non seulement l'équation (216) mais aussi l'équation (283).

26. — Propagation des oscillations de température dans le sol.

D'après ce qui a été exposé au N^o précédent, la température de la surface planétaire peut être représentée par une série de la forme (271). Si la fonction $u(0, t)$ est obtenue par observation directe, les valeurs C_n et $(\varepsilon_n + \delta_n)$ peuvent être calculées à l'aide de l'Analyse harmonique. A cet état de température à la surface de la planète correspond à la profondeur x celui donné par (270), que nous pouvons déduire du premier lorsque les valeurs g_T et m sont données.

La température $u(x, t)$ à la profondeur x , a, de même que celle à la surface de la planète, un caractère oscillatoire et est composée d'oscillations à périodes $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3} \dots$ etc. Envisageons dans cette

série l'oscillation à période T , qui est la plus importante. L'amplitude α de cette oscillation est égale à C_1 , à la surface, tandis qu'aux profondeurs $x_1, x_2, x_3 \dots$ elle a les valeurs :

$$(284) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = C_1 e^{-\frac{x_1}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \\ \alpha_2 = C_1 e^{-\frac{x_2}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \\ \alpha_3 = C_1 e^{-\frac{x_3}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Ces amplitudes sont atteintes aux époques $t_1, t_2, t_3 \dots$, données par les équations suivantes où k désigne un nombre entier quelconque.

$$(285) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{T} t_1 - \frac{x_1}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - (\varepsilon_1 + \delta_1) = 2k\pi \\ \frac{2\pi}{T} t_2 - \frac{x_2}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - (\varepsilon_1 + \delta_1) = 2k\pi \\ \frac{2\pi}{T} t_3 - \frac{x_3}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - (\varepsilon_1 + \delta_1) = 2k\pi \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Il résulte des équations (284), que les amplitudes décroissent en progression géométrique quand la profondeur croît en progression arithmétique; les amplitudes sont d'autant plus amorties que la période T est plus petite.

En déduisant les deux premières équations (284) l'une de l'autre, on obtient

$$(286) \quad m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \sqrt{\frac{T}{4\pi}}$$

La quantité

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v$$

représente évidemment la vitesse de propagation des oscillations de température dans le sol, et on a

$$(287) \quad v = m \sqrt{\frac{4\pi}{T}},$$

c'est-à-dire que cette vitesse est constante.

Les oscillations se propagent d'autant plus vite que la période T est plus petite.

Lorsqu'on a déterminé par observation les amplitudes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ ou bien leurs époques $t_1, t_2, t_3 \dots$, on peut alors calculer, à l'aide de deux équations quelconques du groupe (284) ou (285), le coefficient de conductibilité de température m^2 . Il découle ainsi des deux premières équations du groupe (284)

$$(288) \quad m = \frac{x_2 - x_1}{\log_{\text{nép}} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \sqrt{\frac{\pi}{T}},$$

et des deux premières équations du groupe (285) l'équation que nous avons déjà obtenue sous (286).

Dispose-t-on de plus de deux équations, on peut calculer alors, d'après la méthode des moindres carrés, la valeur la plus probable de m^2 .

27. — Représentation de la marche diurne de l'insolation par les séries de Fourier.

La marche diurne de l'insolation est représentée d'après (32) et (34) par

$$(289) \quad W_1(t) = A + B \cos \omega; \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} t.$$

Cependant ces équations ne sont valables que pour l'intervalle

$$(290) \quad -\omega_0 < \omega < +\omega_0; \quad \cos \omega_0 = -\frac{A}{B};$$

pour le reste de la journée on a

$$(291) \quad W_1(t) = 0.$$

Nous allons à présent développer la fonction $W_1(t)$, en tenant compte de cette discontinuité, en une série de Fourier, pour pouvoir l'utiliser dans les problèmes de la propagation de la chaleur

dans le sol. Les coefficients de cette série sont donnés par (279) à (281); on n'a qu'à remplacer dans ces équations la période annuelle T par la période diurne τ . En introduisant la variable ω à la place de la variable t , nous obtenons, en tenant compte que les intégrales (279) à (281) ne s'étendent qu'à l'intervalle (290),

$$(292) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (A + B \cos \omega) d\omega$$

$$(293) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (A + B \cos \omega) \cos n\omega d\omega$$

$$(294) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (A + B \cos \omega) \sin n\omega d\omega.$$

Les quadratures précédentes peuvent être facilement effectuées à l'aide des équations:

$$(295) \quad \int \cos \omega \cos n\omega d\omega = \frac{1}{2} \int [\cos (n+1)\omega + \cos (n-1)\omega] d\omega = \\ = \frac{\sin (n+1)\omega}{2(n+1)} + \frac{\sin (n-1)\omega}{2(n-1)}$$

$$(296) \quad \int \cos \omega \sin n\omega d\omega = \frac{1}{2} \int [\sin (n+1)\omega + \sin (n-1)\omega] d\omega = \\ = -\frac{\cos (n+1)\omega}{2(n+1)} - \frac{\cos (n-1)\omega}{2(n-1)}$$

A l'époque des équinoxes, c'est-à-dire pour

$$(297) \quad \delta = 0,$$

les coefficients précédents se simplifient notablement. On a, en effet, dans ce cas,

$$(298) \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{I_0}{\rho^2} \cos \varphi, \end{cases}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (290),

$$(299) \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Nous obtenons donc

$$(300) \quad a_0 = \frac{B}{\pi}$$

$$a_n = \frac{B}{\pi} \left\{ \frac{\sin (n+1) \frac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin (n-1) \frac{\pi}{2}}{n-1} \right\}$$

et, puisqu'on a $\sin (n+1) \frac{\pi}{2} = -\sin (n-1) \frac{\pi}{2}$,

$$(301) \quad a_n = \frac{2B}{\pi} \frac{1}{n^2-1} \sin (n-1) \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n=1$ cette expression prend la forme $\frac{0}{0}$. En différenciant le numérateur et le dénominateur par rapport à n on obtient

$$(302) \quad a_1 = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{B \cos (n-1) \frac{\pi}{2}}{2n} = \frac{B}{2}.$$

Pour toutes les autres valeurs impaires de n on a $a_n = 0$.
On a ensuite

$$(303) \quad b_n = -\frac{B}{\pi} \left\{ \frac{\cos (n+1) \omega}{2(n+1)} + \frac{\cos (n-1) \omega}{2(n-1)} \right\}_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Nous obtenons finalement les coefficients suivants différents de zéro

$$(304) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{B}{\pi}; \quad a_1 = \frac{B}{2}; \quad a_3 = \frac{1}{3} \frac{2B}{\pi}; \quad a_5 = -\frac{1}{15} \frac{2B}{\pi}; \\ a_6 = \frac{1}{35} \frac{2B}{\pi}; \quad a_8 = -\frac{1}{63} \frac{2B}{\pi}; \quad a_{10} = \frac{1}{99} \frac{2B}{\pi}; \\ a_{12} = -\frac{1}{143} \frac{2B}{\pi}. \end{array} \right.$$

28. — *Représentation de la marche annuelle de l'insolation par les séries de Fourier.*

La marche annuelle de l'insolation est donnée, d'après (71), par

$$(305) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{I_0}{\rho^2} (b_0' + a_1' \sin \lambda - b_1' \cos 2\lambda + b_2' \cos 4\lambda - \\ - b_3' \cos 6\lambda + \dots).$$

Dans cette équation, nous avons muni d'une apostrophe les coefficients a et b pour pouvoir les distinguer des coefficients de la série suivante.

Si nous voulons maintenant représenter la marche annuelle de l'insolation par une fonction de t de la forme

$$(306) \quad W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos \frac{4\pi}{T} t + \\ + a_3 \cos \frac{6\pi}{T} t + \dots + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \sin \frac{4\pi}{T} t + b_3 \sin \frac{6\pi}{T} t + \dots,$$

il convient de faire emploi des équations (12) et (78), d'où il ressort

$$(307) \quad \frac{1}{\rho^2} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{T}{2\pi} \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Si on pose, pour abréger,

$$(308) \quad \frac{1}{2\pi^2} \frac{I_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = L,$$

on obtient, d'après (279) à (281), pour les coefficients a_0 , a_n et b_n , les expressions suivantes :

$$(309) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda = L \int_0^{2\pi} (b_0' + a_1' \sin \lambda - b_1' \cos 2\lambda + \\ + b_2' \cos 4\lambda - b_3' \cos 6\lambda + \dots) d\lambda,$$

$$(310) \quad a_n = 2L \int_0^{2\pi} (b_0' \cos \frac{2n\pi}{T} t + a_1' \sin \lambda \cos \frac{2n\pi}{T} t - \\ - b_1' \cos 2\lambda \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_2' \cos 4\lambda \cos \frac{2n\pi}{T} t - \dots) d\lambda,$$

$$(311) \quad b_n = 2L \int_0^{2\pi} (b_0' \sin \frac{2n\pi}{T} t + a_1' \sin \lambda \sin \frac{2n\pi}{T} t - \\ - b_1' \cos 2\lambda \sin \frac{2n\pi}{T} t + b_2' \cos 4\lambda \sin \frac{2n\pi}{T} t - \dots) d\lambda.$$

On obtient donc

$$(312) \quad a_0 = 2\pi b_0' L,$$

tandis que, dans le calcul de a_n et b_n , il s'agit de déterminer les intégrales définies

$$\int_0^{2\pi} \sin \lambda \cos \frac{2n\pi}{T} t d\lambda; \quad \int_0^{2\pi} \sin \lambda \sin \frac{2n\pi}{T} t d\lambda \\ \int_0^{2\pi} \cos 2m\lambda \cos \frac{2n\pi}{T} t d\lambda; \quad \int_0^{2\pi} \cos 2m\lambda \sin \frac{2n\pi}{T} t d\lambda,$$

où λ et t sont liés par le rapport (14). On calculera ces intégrales à l'aide de la quadrature mécanique.

29. — Rapport entre l'insolation et la température de l'hydrosphère.

Si la partie considérée de la surface planétaire est représentée par la surface d'une mer ou d'un lac, le développement précédent doit être modifié de la façon suivante.

Tandis que, dans le cas d'une surface solide, nous pouvions admettre que le pouvoir réfléchissant de cette surface est indépendant de l'angle d'incidence des rayons, nous devons à présent tenir compte de la dépendance mutuelle de ces deux facteurs. Celle-ci est réglée par la théorie ondulatoire de la lumière de Fresnel, d'après laquelle un rayon solaire tombant à la surface d'une nappe d'eau sous l'angle d'incidence z est réfracté sous l'angle ψ , et on a

$$(313) \quad \frac{\sin z}{\sin \psi} = n,$$

où n est l'indice de réfraction. Cette valeur dépend de la longueur

d'onde du rayon et, d'une façon insignifiante, de la température de l'eau; mais on peut poser comme moyenne

$$(314) \quad n = 1.33.$$

Si l'intensité du rayon solaire atteignant la surface liquide est égale à I , l'intensité du rayon pénétrant à l'intérieur sera égale, d'après la théorie mentionnée,²⁵⁾ à

$$\frac{1}{2} \frac{\sin 2z \sin 2\psi}{\sin^2(z + \psi)} \left[1 + \frac{1}{\cos^2(z - \psi)} \right] I_0.$$

Comme l'unité de surface de la planète reçoit la radiation (17), il en pénétrera dans l'eau la quantité

$$(315) \quad W_2(t) = \frac{1}{2} \frac{I_0}{\rho^2} \frac{\sin 2z \sin 2\psi}{\sin^2(z + \psi)} \left[1 + \frac{1}{\cos^2(z - \psi)} \right] \cos z.$$

A l'aide des formules ci-dessus et de la théorie exposée au premier chapitre on peut calculer pour n'importe quel moment de la journée ou de l'année la radiation pénétrant à l'intérieur du liquide, tout en la représentant en fonction du temps. En employant l'analyse harmonique, on peut donner à la fonction $W_1(t)$ la forme (262).

La radiation solaire qui a pénétré dans le liquide est absorbée sur son parcours d'après des lois semblables à celles auxquelles nous sommes arrivés pour l'atmosphère. Toutefois il y a une différence essentielle: d'une part, par suite du fort pouvoir absorbant de l'eau, la radiation solaire directe n'atteint que de faibles profondeurs et d'autre part, par suite du brassage continu, les couches profondes de l'eau, remontant vers la surface, reçoivent des radiations et prennent part aux échanges de chaleur.²⁶⁾ Il est très difficile de représenter ces phénomènes mathématiquement et nous sommes obligés d'admettre quelques simplifications.

Nous admettons donc que la nappe d'eau considérée n'a qu'une profondeur limitée H , suffisante, d'une part, pour que la radiation solaire y soit complètement absorbée et, d'autre part, assez petite pour que la masse liquide puisse être considérée isotherme. Autrement dit, nous étudions les phénomènes thermiques d'une couche d'eau d'une telle profondeur H que le fond de cette couche ne reçoit pas de radiation solaire et nous admettons que, par suite d'un brassage continu, la même température règne en tous les points. Nous ne tiendrons pas compte des échanges de chaleur entre cette couche d'eau et le milieu qui la supporte, c'est-à-dire

que nous admettons que le coefficient de conductibilité de celui-ci est très petit. Nous écarterons également de nos recherches la formation de la glace, c'est-à-dire que nous nous bornerons aux températures au dessus du point de congélation.

Ceci admis, la colonne d'eau de la nappe considérée, s'étendant du fond à la surface et dont la section est égale à l'unité, absorbera, dans l'unité de temps, la quantité de chaleur $W_2(t)$ représentée par (315). Cette même colonne émet, dans le même temps, par sa surface supérieure, la quantité de chaleur $\frac{dQ_r}{dt}$ et dépense dans le même espace de temps, comme chaleur de vaporisation, la quantité représentée par $\frac{dQ_a}{dt}$. L'excédent de chaleur reçue sur la chaleur émise est employé à l'élevation de température de la colonne d'eau. En désignant cette température par u , cet excédent, pour des considérations identiques à celles du N° 23, est égal à

$$c_w \varrho_w \frac{du}{dt} H,$$

où ϱ_w désigne la densité et c_w la chaleur spécifique du liquide. Nous obtenons donc l'équation:

$$(316) \quad W_2(t) - \frac{dQ_r}{dt} - \frac{dQ_a}{dt} = c_w \varrho_w H \frac{du}{dt}.$$

En ce qui concerne la quantité $\frac{dQ_r}{dt}$, lorsque u est mesuré en degrés centesimaux on a, d'après (206),

$$(317) \quad \frac{dQ_r}{dt} = s (273 + u)^m,$$

où, d'après les recherches de Siegl, mentionnées sous²⁰), on a

$$(318) \quad \begin{cases} s = 0.30 \times 10^{-10} \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}} \\ m = 4.1 \end{cases}$$

Les objections que nous avons faites sous²¹) contre l'emploi de ces valeurs ne s'appliquent pas au cas présent.

En ce qui concerne la valeur de $\frac{dQ_a}{dt}$ on doit mentionner ce qui suit.

La vaporisation de l'unité de masse d'eau exige une quantité de chaleur nommée chaleur de vaporisation. La valeur de celle-ci dépend de la température à laquelle la vaporisation a lieu;²⁷⁾ cependant elle peut être considérée, sans commettre par ce fait une erreur notable, constante et égale à

$$(319) \quad r = 600 \text{ gramme-calories.}$$

En désignant par $\frac{dm}{dt}$ la masse d'eau qui est évaporée, à l'unité de surface de la nappe d'eau, dans l'unité de temps, on aura alors

$$(320) \quad \frac{dQ_a}{dt} = r \frac{dm}{dt}.$$

On appelle le quotient $\frac{dm}{dt}$ la vitesse d'évaporation. D'après une loi trouvée par Dalton, cette vitesse est proportionnelle au déficit de saturation de la vapeur d'eau se trouvant au dessus du liquide et inversement proportionnelle à la pression atmosphérique. Désignons donc par p_w la tension de la vapeur d'eau au-dessus du liquide, se trouvant à la température u , par P_w la tension de la vapeur d'eau à l'état de saturation, alors $P_w - p_w$ représente le déficit de saturation mentionné. Désignons ensuite par p la pression exercée par l'atmosphère à la surface du liquide, on aura d'après la loi précédente,

$$(321) \quad \frac{dm}{dt} = C \frac{P_w - p_w}{p},$$

où C est une constante.²⁸⁾

Des recherches plus récentes ont montré que cette équation n'est qu'approximativement exacte et notamment que la vitesse d'évaporation dépend, dans une large mesure, de l'intensité de la circulation de l'air au contact de la surface du liquide.²⁹⁾ Nous ne pouvons pas embrasser ces phénomènes dans nos études et nous admettons un état moyen de l'atmosphère. Les valeurs C , p_w et p de l'équation (321) sont prises pour cet état moyen de façon qu'il n'y a que P_w qui doit être considéré comme étant variable.

Cette dernière valeur n'est fonction que de la température u . La nature de cette fonction a été déterminée expérimentalement de même qu'elle a été représentée par une formule empirique.³⁰⁾ Il s'ensuit que cette fonction, lorsque l'intervalle des températures

considérées n'est pas grand, peut être représentée, sans qu'il y ait une erreur considérable, par l'équation linéaire.

$$(322) \quad P_w = P_0 + Q.u,$$

où P_0 et Q sont des constantes. On obtient donc

$$(323) \quad \frac{dQ_a}{dt} = r C \frac{P_0 - p_w + Q.u}{p}.$$

Il découle des équations précédentes que lorsque u , en diminuant, a atteint une telle valeur que $P_w - p_w$ s'annule, la valeur de $\frac{dQ_a}{dt}$ devient négative. Ceci signifie qu'il y a, par condensation,

apport de chaleur à la masse liquide.

Nous pouvons dès à présent évaluer l'influence qualitative de ce phénomène. La quantité de chaleur, contenue dans la masse liquide, diminue, par l'effet d'évaporation, lorsque u croît, tandis qu'elle augmente, par l'effet de condensation, lorsque u décroît, il en résulte que ces deux phénomènes tendent à amortir les oscillations de la température u .

En réalité les conséquences de l'évaporation et de la condensation sont plus complexes, car la vapeur d'eau ne se condense pas à l'endroit même où elle s'est formée; les phénomènes dynamiques de l'atmosphère y jouent un grand rôle et la chaleur libérée par condensation n'est pas transmise directement à la surface de la planète, mais par l'intermédiaire de l'atmosphère. Quoiqu'il en soit, les équations précédentes nous donnent une image approximative des échanges atmosphériques de chaleur dus à l'évaporation et à la condensation.

Posons, pour abrégé,

$$(324) \quad \begin{cases} r C \frac{P_0 - p_w}{p} = U \\ \frac{r C Q}{p} = V; \end{cases}$$

nous obtenons

$$(325) \quad \frac{dQ_a}{dt} = U + V u.$$

Il découle finalement de (316), (317) et (325)

$$(326) \quad c_w \rho_w H \frac{du}{dt} + s (273 + u)^m + V u = W_2 (t).$$

L'intégration de cette équation nous fournit la température u en fonction du temps t .

30. — *Quelques cas particuliers se rapportant au N^o précédent.*

Si l'on pose, comme il est généralement convenu, que la densité et la chaleur spécifiques de l'eau sont égales à l'unité, on obtient, au lieu de (326),

$$(327) \quad \frac{du}{dt} + \frac{s}{H} (273 + u)^m + \frac{V}{H} u = \frac{1}{H} W_2(t) - \frac{U}{H}.$$

Nous allons nous occuper à présent de quelques cas intégrables de cette équation. Un de ces cas se présente lorsque l'insolation est périodique et à faibles amplitudes autour de sa valeur moyenne, car alors la température u devient également périodique à petites amplitudes autour de sa valeur moyenne u_0 et nous pouvons, comme au N^o 24, à l'occasion de la formation de (223) et (224), poser

$$(328) \quad s (273 + u)^m = h (v_0 + u),$$

où on a

$$(329) \quad \begin{cases} s [(273 + u_0)^m - m (273 + u_0)^{m-1} u_0] = h v_0 \\ m s (273 + u_0)^{m-1} = h. \end{cases}$$

Nous obtenons donc

$$(330) \quad \frac{du}{dt} + \frac{h + V}{H} u = \frac{1}{H} W_2(t) - \frac{h v_0 + U}{H},$$

c'est-à-dire une équation différentielle linéaire de la forme

$$(331) \quad \frac{du}{dt} + P u = Q,$$

où P et Q ne sont fonctions que de t .

L'intégrale générale d'une telle équation est, comme on le sait, représentée par

$$(332) \quad u = e^{-\int P dt} \left\{ C + \int Q e^{\int P dt} dt \right\};$$

de sorte qu'on obtient

$$(333) \quad u = e^{-\frac{h+V}{H}t} \left\{ C + \frac{1}{H} \int [W_2(t) - (h v_0 + U)] e^{\frac{h+V}{H}t} dt \right\}.$$

Admettons à présent que la fonction $W_2(t)$ ait la forme

$$(334) \quad W_2(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

Comme on a, en général,

$$(335) \quad \int e^{at} \cos bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} [a \cos bt + b \sin bt] + C,$$

on obtient

$$(336) \quad u = C e^{-\frac{h+V}{H}t} + \frac{a_0 - h v_0 - U}{h + V} + \\ + \frac{1}{H} \frac{a_1}{\left(\frac{h+V}{H}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} \left[\frac{h+V}{H} \cos \frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T}t \right].$$

La constante C est déterminée par l'état initial. Si le moment considéré est suffisamment éloigné du moment initial, le membre $C e^{-\frac{h+V}{H}t}$ devient très petit et l'influence de l'état initial ne se fait plus sentir. Supposons un état d'insolation périodique à durée infiniment longue; dans ce cas on a $C = 0$. Or, si on pose, comme dans (253),

$$(337) \quad \begin{cases} \frac{h+V}{H} = A_1 \cos \varepsilon_1 \\ \frac{2\pi}{T} = A_1 \sin \varepsilon_1, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(338) \quad \text{tang } \varepsilon_1 = \frac{2\pi}{T} \frac{H}{h+V}$$

$$(339) \quad A_1 = \sqrt{\left(\frac{h+V}{H}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}},$$

on obtient

$$(340) \quad u = \frac{a_0 - h v_0 - U}{h + V} + \frac{a_1}{A_1} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_1 \right).$$

La valeur moyenne u_0 de la température u est, d'après l'équation précédente, donnée par

$$(341) \quad u_0 = \frac{a_0 - h v_0 - U}{h + V}.$$

Nous aurions obtenu la même valeur de (330) également en y posant $\frac{du}{dt} = 0$; $W_2(t) = a_0$, c'est-à-dire en supposant une insolation stationnaire de l'intensité a_0 . La valeur moyenne de la température correspond donc à la valeur moyenne de l'insolation. En posant dans (373) $\frac{du}{dt} = 0$, $W_2(t) = 0$, on obtient

$$(342) \quad s(273 + u_0)^m + V u_0 = a_0 - U,$$

d'où on peut calculer la valeur de u_0 .

Il résulte de (340) que les extrêmes de température retardent sur les extrêmes d'insolation de l'espace de temps $\frac{T}{2\pi} \varepsilon_1$.

A l'aide de séries de Fourier on peut résoudre le problème précédent même lorsque $W_2(t)$ est une fonction périodique quelconque du temps t , à condition que ses amplitudes soient suffisamment petites.

Un autre cas intégrable de l'équation différentielle (327) se présente lorsque l'insolation est constante dans l'intervalle de temps considéré.

Posons donc

$$(343) \quad W_2(t) = a_0;$$

on obtient alors, au lieu de (327),

$$(344) \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{H} \left\{ a_0 - U - V u - s(273 + u)^m \right\},$$

d'où il s'ensuit par intégration

$$(345) \quad t = C + H \int \frac{du}{a_0 - U - V u - s(273 + u)^m}.$$

Lorsque m est un nombre entier, la quadrature précédente peut être effectuée. La constante C est déterminée lorsque pour une valeur donnée de t la température u est connue.

La solution précédente n'est pas liée à la condition que la variation de température soit faible. A l'aide de cette solution on peut résoudre également le cas général où $W_2(t)$ est une fonction quelconque de t . Dans ce but, on doit décomposer l'intervalle de temps considéré en des portions suffisamment petites pour que $W_2(t)$ puisse être considéré constant.

Il découle de (318) que m n'est pas très différent de 4. En posant

$$(346) \quad m = 4,$$

et, de plus,

$$(347) \quad V = 0; \quad U = 0,$$

c'est-à-dire, en ne tenant pas compte des phénomènes d'évaporation, nous obtenons, au lieu de (346),

$$(348) \quad t = C - \frac{H}{s} \int \frac{d\Theta}{\Theta^4 - \mu^4},$$

où nous avons posé pour abrégé

$$\frac{a_0}{s} = \mu^4$$

$$273 + u = \Theta.$$

Θ représente donc la température absolue de la masse liquide.

Pour effectuer la quadrature précédente décomposons la fraction

$\frac{1}{\Theta^4 - \mu^4}$ en fractions simples. Posons à cet effet

$$(349) \quad u_1 = + \sqrt[4]{\frac{a_0}{s}},$$

l'équation $\Theta^4 - \mu^4 = 0$ aura les quatre racines suivantes

$$+ \mu_1, \quad - \mu_1, \quad + i\mu_1, \quad - i\mu_1,$$

où i désigne l'unité imaginaire. On a donc

$$\frac{1}{\Theta^4 - \mu^4} = \frac{A}{\Theta - \mu_1} + \frac{B}{\Theta + \mu_1} + \frac{C}{\Theta - i\mu_1} + \frac{D}{\Theta + i\mu_1},$$

où A, B, C, D sont indépendants de Θ . En faisant disparaître les dénominateurs de l'équation précédente et en égalant les coefficients des mêmes puissances de Θ , on obtient

$$A = \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_1^3}, \quad B = -\frac{1}{4} \frac{1}{\mu_1^3}, \quad C = +\frac{1}{4} i \frac{1}{\mu_1^3}, \quad D = -\frac{1}{4} i \frac{1}{\mu_1^3}.$$

On a donc

$$\frac{1}{\Theta^4 - \mu^4} = \frac{1}{4\mu_1^3} \left\{ \frac{1}{\Theta - \mu_1} - \frac{1}{\Theta + \mu_1} + \frac{i}{\Theta - i\mu_1} - \frac{i}{\Theta + i\mu_1} \right\},$$

ou bien

$$(350) \quad \frac{1}{\Theta^4 - \mu^4} = \frac{1}{4\mu_1^3} \left\{ \frac{1}{\Theta - \mu_1} - \frac{1}{\Theta + \mu_1} + \frac{2\mu_1}{\Theta^2 + \mu_1^2} \right\}.$$

En introduisant cette expression dans (348) on peut alors effectuer la quadrature et on obtient

$$(351) \quad t = C - \frac{1}{4} \frac{H}{s\mu_1^3} \left\{ \log_{\text{nép.}} \frac{\Theta - \mu_1}{\Theta + \mu_1} - 2 \text{ arc tang } \frac{\Theta}{\mu_1} \right\}.$$

Cette équation nous donne, sous une forme explicite par rapport à t , le rapport cherché entre Θ et t . Il résulte de cette équation que pour $\Theta = \mu_1$, t devient infiniment grand, c'est-à-dire que la température Θ s'approche asymptotiquement de la valeur μ_1 .

Lorsque l'insolation devient nulle, c'est-à-dire pour $a_0 = 0$, on a, à cause de (349), $\mu = 0$, et nous obtenons, au lieu de (348),

$$t = C - \frac{H}{s} \int \frac{d\Theta}{\Theta^4},$$

ou bien, après l'intégration effectuée,

$$(352) \quad t = C + \frac{1}{3} \frac{H}{s} \frac{1}{\Theta^3}.$$

Pour $\Theta = 0$, t devient infini, c'est-à-dire que la température s'approche asymptotiquement du zéro absolu.

31. — Influence de la vitesse de rotation de la planète sur la température de sa surface.

Si l'excentricité e de l'orbite de la planète et l'inclinaison ε de son axe de rotation sont nulles, on a alors $\varrho = 0$ et, à cause de (7), $\delta = 0$, c'est-à-dire que la marche diurne de l'insolation, que nous désignerons par $W_1(t)$, est donnée, d'après ce qui a été dit au N^o 4, par

$$(353) \quad W_1(t) = B \cos \omega,$$

où on a

$$(354) \quad B = \frac{I_0}{a^2} \cos \varphi$$

$$(355) \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} t.$$

L'équation (353) n'est valable que pour l'intervalle

$$(356) \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < +\frac{\pi}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\frac{\tau}{4} < t < +\frac{\tau}{4};$$

pour le reste de la journée, on a

$$(357) \quad W_1(t) = 0.$$

Dans ce cas, l'insolation de la planète n'accusera aucune marche annuelle, tous les jours étant égaux entre eux; la moyenne température diurne restera pendant toute l'année invariable et sera égale à la moyenne température annuelle.

Posons la question: Le changement de vitesse de rotation de la planète a-t-il une influence sur la moyenne température de sa surface?

La durée de rotation τ , de la planète et la durée de son jour solaire moyen sont liées par le rapport (8), ce qui a pour conséquence que le changement de la vitesse de rotation se répercute sur la valeur τ et, d'après ce qui a été dit aux Nos 25 et 29, sur la température de la surface planétaire.

Si nous voulions déterminer cette température à l'aide de l'équation (271), nous aurions à introduire dans cette dernière τ au lieu de T , tandis que les coefficients de la série (262) seraient donnés par (304). Il s'ensuit que la moyenne température diurne u_m et, par conséquent, la moyenne température annuelle également, seraient données par

$$(358) \quad u_m = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u(0, t) dt = u_0;$$

car, l'intégrale des membres trigonométriques de l'équation (271) disparaît.

La valeur u_0 de l'équation précédente doit être déterminée par la moyenne insolation a_0 , à l'aide de (251), et cette dernière étant, d'après (300), représentée par $\frac{B}{\pi}$, on obtient, en laissant de côté

le flux de chaleur $K g_{\tau}$, qui s'écoule de l'intérieur de la planète, pour la détermination de u_0 l'équation,

$$(359) \quad \sigma (273 + u_0)^4 = \frac{B}{\pi},$$

de façon qu'on a, en tenant compte de (358),

$$(360) \quad u_m = \sqrt[4]{\frac{B}{\sigma \pi}} - 273.$$

Il s'ensuit que la valeur u_m est indépendante de τ et que la réponse à la question posée plus haut serait négative.

Mais on ne doit pas perdre de vue que l'équation (271) repose sur la supposition (224) qui n'est pas absolument exacte et d'après laquelle nous avons remplacé par une droite la parabole biquadratique représentant la loi d'émission. Si nous n'avions pas fait cela nous aurions obtenu d'autres expressions pour la marche diurne de température et pour la moyenne température diurne.

Ces expressions ne peuvent être, ainsi qu'il a été montré au N° 25, ou bien, dans le cas d'une surface liquide au N° 30, déterminées que par des approximations successives et le calcul numérique qui s'y rapporte appartient au domaine de la seconde partie de cet ouvrage. Nous allons pour cela nous occuper ici de deux cas particuliers qui se distinguent par leur simplicité.

Le premier de ces deux cas est celui où la durée de rotation de la planète est infiniment petite, c'est-à-dire que la vitesse de rotation est infiniment grande. Dans ce cas on peut admettre que tout point de la surface planétaire est exposé à une insolation permanente fournissant à l'unité de surface la radiation a_0 égale à la moyenne insolation diurne de ce point. Celle-ci est égale, d'après ce qui précède, à $\frac{B}{\pi}$ et la moyenne température diurne à la latitude φ sera tirée de l'équation (359), en faisant abstraction du flux calorique dans le sol. En désignant par Θ_1 la moyenne température diurne correspondant à ce cas et mesurée en degrés absolus, on a

$$(361) \quad \Theta_1 = \sqrt[4]{\frac{B}{\sigma \pi}}.$$

Le second cas spécial que nous allons prendre en considération, pour le comparer au premier, est celui où la durée de rotation τ de la planète est égale à sa révolution sidérale T . Dans ce cas l'angle horaire du Soleil est, d'après (8), indépendant du temps et le Soleil a une position invariable par rapport à la surface de la planète, de façon que cette dernière présente un hémisphère constamment ensoleillé et l'autre constamment obscur.

La loi de la distribution de la radiation solaire le long du parallèle φ est maintenant représentée par l'équation (22), où la longitude ψ_1 — comptée à partir du méridien dont le plan passe par le centre du Soleil — est indépendante du temps; de plus on doit poser dans (22) $\rho = a$ et $\delta = 0$. On obtient donc, en tenant compte de (354),

$$(362) \quad \frac{dW}{dt} = B \cos \psi_1.$$

Le point (φ, ψ_1) aura, par conséquent, une température absolue Θ qu'on obtient — en faisant abstraction du flux calorifique du sol — de l'équation (210), c'est-à-dire de

$$(363) \quad \sigma \Theta^4 = B \cos \psi_1.$$

On a donc

$$(364) \quad \Theta = \sqrt[4]{\frac{B}{\sigma} \cos \psi_1}.$$

On obtient la température moyenne Θ_2 , mesurée en degrés absolus, tout le long du parallèle φ , en intégrant l'expression précédente entre $\psi_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\psi_1 = +\frac{\pi}{2}$ et en la divisant par 2π , la portion du parallèle comprise entre $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\psi_1 = \frac{3}{2}\pi$ étant complètement à l'abri des rayons solaires et accusant une température égale au zéro absolu. L'expression (364) ayant les mêmes valeurs pour ψ_1 et $-\psi_1$, on peut étendre l'intégrale entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$ et la multiplier par 2 . On obtient donc

$$(365) \quad \Theta_2 = \frac{1}{\pi} \sqrt[4]{\frac{B}{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\cos \psi_1} d\psi_1.$$

Les moyennes températures diurnes (et annuelles) des parallèles (et de toute la surface de la planète), que nous avons calculées pour le premier et pour le second cas spécial, se trouvent, d'après ce qui précède, dans le rapport

$$(366) \quad \Theta_1 : \Theta_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi}} : \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \pi_1} d\psi_1 .$$

En se servant de la formule (137) (avec $n = 6$) pour le calcul de l'intégrale précédente, on obtient

$$(367) \quad \Theta_1 : \Theta_2 = 100 : 56 .$$

Il découle de tout ce qui précède que, lorsque la vitesse de rotation d'une planète refroidie et privée d'atmosphère passe successivement d'une valeur infiniment grande à zéro, la moyenne température de sa surface due à la radiation solaire, tombe, de ce fait, à 56 pour cent de sa valeur primitive mesurée en degrés absolus.

CHAPITRE IV.

RAPPORT ENTRE L'INSOLATION ET LA TEMPÉRATURE DES PLANÈTES, EN TENANT COMPTE DE LEURS ATMOSPHÈRES.

32. — *Rapport entre la radiation émise par la surface de la planète et la radiation contraire de son atmosphère.*

D'après les résultats du N^o 17, l'atmosphère planétaire est traversée par la radiation solaire directe et diffuse dont l'intensité à la distance x de la surface de la planète est donnée par (148). Nous avons désigné l'angle d'incidence de cette radiation par z , et il s'ensuit qu'il tombe sur l'unité de surface parallèle à la surface de la planète la quantité de radiation $I''(x) \cos z$ que nous désignons, vu sa dépendance du temps, par $W(x, t)$.

On a donc

$$(368) \quad W(x, t) = I''(x) \cos z.$$

De cette quantité, la fraction

$$dW(x, t) = dI''(x) \cos z$$

est retenue dans son passage à travers la couche S_x ; dans la différentielle $dW(x, t)$ il n'y a à tenir compte que de la variabilité de x .

On obtient, eu égard à (147), l'équation

$$(369) \quad dW(x, t) = a_1(x) I''(x) dx,$$

où bien, à cause de (368), l'équation

$$(370) \quad dW(x, t) = a_1(x) W(x, t) \sec z dx,$$

dont l'intégration entre les limites x et h donne

$$(371) \quad W(x, t) = W(h, t) e^{-\sec z \int_x^h a_1(x) dx}$$

La quantité $W(h, t)$ représente la radiation qui pénètre à la limite supérieure de l'atmosphère par unité de surface. En tenant compte de (146) et (17), on a

$$(372) \quad W(h, t) = I''(h) \cos z = (1 - A) W_1(t),$$

où $W_1(t)$ représente la radiation, précédemment désignée par $\frac{dW}{dt}$, qui tomberait en l'absence d'atmosphère sur l'unité de sa surface en l'unité de temps.

On a donc

$$(373) \quad W(x, t) = (1 - A) W_1(t) e^{-\sec z \int_x^h a_1(x) dx}$$

Il s'ensuit que l'unité de surface de la planète reçoit la radiation

$$(374) \quad W(0, t) = (1 - A) W_1(t) e^{-\sec z \int_0^h a_1(x) dx},$$

ou bien, eu égard à (150),

$$(375) \quad W(0, t) = (1 - A) W_1(t) p_a^{\sec z},$$

quantité qui sera complètement absorbée par cette surface, A contenant déjà toute les pertes par réflexion.

En plus de cette radiation, la surface de la planète reçoit encore la radiation obscure, émise par l'atmosphère. Nous désignerons l'intensité de cette radiation, dirigée vers la surface de la planète, à l'endroit x et au moment t , par $O(x, t)$. A la limite supérieure de l'atmosphère, cette radiation disparaît complètement, c'est-à-dire qu'on a

$$(376) \quad O(h, t) = 0,$$

tandis qu'à la surface de la planète elle possède l'intensité $O(0, t)$. Cette dernière valeur est ce qu'on nomme la contre-radiation de l'atmosphère. La surface de la planète émettant une radiation obscure semblable, on peut admettre, dans le sens de la loi de Kirchhoff, que la contre-radiation de l'atmosphère est intégralement absorbée par la surface planétaire. Il s'ensuit que la surface de la planète absorbera, en tout, la radiation $W(0, t) + O(0, t)$, et, en laissant de côté la chaleur lui parvenant par conductibilité du sol (cette chaleur étant négligeable par rapport aux radiations précédentes), la surface de la planète prendra la température pour

laquelle l'émission est égale à la réception calorique. Nous avons désigné cette émission par $\frac{dQ_r}{dt}$ et l'avons représentée par (207); on obtient donc, en posant pour simplifier $a_p' = a_p$,

$$(377) \quad \frac{dQ_r}{dt} = W(0, t) + O(0, t),$$

ou bien

$$(378) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = W(0, t) + O(0, t).$$

Cette équation est analogue à l'équation (208), avec cette seule différence que dans la précédente la contre-radiation de l'atmosphère occupe la place du flux calorique $\frac{dQ_c}{dt}$. Pour pouvoir déterminer, à l'aide de cette équation, la température de la surface planétaire, nous devrions connaître la valeur $O(0, t)$, et, pour déterminer celle-ci, nous devons, de même qu'au chapitre précédent, résoudre un problème plus général et déterminer l'état thermique de l'atmosphère elle-même. C'est ce que nous ferons dans les numéros qui suivent.

33. — Influence d'une couche atmosphérique de faible épaisseur sur la température de la planète.

La détermination de la contre-radiation de l'atmosphère devient très simple lorsqu'on ne considère que la couche la plus inférieure de l'atmosphère qui peut être, à cause de sa faible épaisseur, considérée comme étant homogène et isotherme.

A la rigueur, nous ne sommes pas obligé d'admettre cette simplification, car nous sommes en état de décrire mathématiquement les phénomènes de radiation et les phénomènes thermiques des atmosphères planétaires dans le cas plus général où l'on tient compte de la variabilité de densité et de température le long de la verticale. Ce qui suit a pour but de nous donner une première orientation sur l'influence de l'atmosphère des planètes; de plus, les résultats qu'on obtiendra pourraient être utilisés pour l'étude du climat de Mars. L'atmosphère de cette planète est, en effet,

extrêmement raréfiée et il n'y a que sa couche la plus inférieure, contenant probablement de la vapeur d'eau, qui remplit l'office d'une enveloppe protectrice de la planète.

Supposons donc que l'atmosphère de la planète a une faible hauteur h , une densité ρ_0 et une température absolue Θ . On a alors, d'après (195),

$$(379) \quad a_1(x) = k_1 \rho_0,$$

et d'après (150),

$$(380) \quad p_a = e^{-k_1 \rho_0 h}$$

Lorsque la planète est exposée à une insolation variable $W_1(t)$, il parvient jusqu'à sa surface, qui l'absorbe complètement, la quantité de radiation donnée par la formule (375). L'atmosphère retient la quantité de radiation

$$(381) \quad (1 - A) W_1(t) - W(0, t) = a_m(z) (1 - A) W_1(t),$$

où on a

$$(382) \quad a_m(z) = 1 - p_a^{\sec z},$$

cette grandeur représentant le pouvoir absorbant de l'atmosphère pour la radiation solaire sous un angle d'incidence z .

En plus de cette radiation, l'atmosphère absorbe encore la radiation obscure de la surface de la planète. Désignons par $E(x)$ l'intensité de cette radiation à la distance x de la surface et supprimons, pour un instant, les simplifications admises plus haut, concernant l'épaisseur, la constitution et la température de l'atmosphère, on aura alors l'équation suivante, tout-à-fait analogue à l'équation (147),

$$(383) \quad dE(x) = -a_2(x) E(x) dx,$$

où $a_2(x) dx$ représente le pouvoir absorbant de la couche atmosphérique d'épaisseur dx et à l'endroit x pour la radiation obscure s'étendant dans toutes les directions. Le signe négatif de l'équation précédente provient de ce que $E(x)$ décroît lorsque x croît.

En tenant compte que

$$E(0) = \frac{dQ_2}{dt},$$

l'intégration de (383) entre les limites x et 0 donne

$$(384) \quad E(x) = \frac{dQ_r}{dt} e^{-\int_0^x a_2(x) dx}$$

A la limite supérieure de l'atmosphère la radiation $E(x)$ a l'intensité

$$(385) \quad E(h) = \frac{dQ_r}{dt} e^{-\int_0^h a_2(x) dx}$$

La quantité

$$(386) \quad e^{-\int_0^h a_2(x) dx} = p_a'$$

sera nommée le coefficient de transmission de l'atmosphère pour la radiation obscure de la planète.

Dans le cas particulier qui nous occupe, on a, d'une façon semblable à (379),

$$(387) \quad a_2(x) = k \varrho_0,$$

où k représente le coefficient d'absorption de l'atmosphère pour la radiation obscure de la planète. On a donc

$$(388) \quad p_a' = e^{-k \varrho_0 h}$$

De la radiation émise par la surface de la planète la fraction

$$(389) \quad \frac{dQ_r}{dt} - E(h) = a_m' \frac{dQ_r}{dt}$$

est absorbée par l'atmosphère. Dans l'équation précédente nous avons posé

$$(390) \quad a_m' = 1 - p_a'$$

Cette grandeur représente donc le pouvoir absorbant de l'atmosphère pour la radiation obscure de la planète.

Il résulte de ce qui précède que l'atmosphère absorbe en tout la radiation

$$a_m(z) (1 - A) W_1(t) + a_m' \frac{dQ_r}{dt},$$

tandis qu'elle émet par ses deux surfaces-limites des radiations qui sont égales entre elles, par suite de l'homogénéité et de l'isothermie

de l'atmosphère et dont nous avons désigné celle qui est dirigée vers la surface de la planète, par $O(0, t)$. La différence entre la radiation absorbée et émise, c'est-à-dire entre l'expression précédente et $2 O(0, t)$, est employée à l'élévation de la température de l'atmosphère. Si nous designons, par conséquent, la température de l'atmosphère par u , ou bien en degrés absolus par Θ , cette différence doit être, en raisonnant de la même façon qu'au N^o 23, égale à

$$c \varrho_0 h \frac{du}{dt} = c \varrho_0 h \frac{d\Theta}{dt},$$

où c désigne la chaleur spécifique de l'atmosphère. Nous obtenons donc

$$(391) \quad c \varrho_0 h \frac{d\Theta}{dt} = a_m(z) (1 - A) W_1(t) + a_m' \frac{dQ_r}{dt} - 2 O(0, t).$$

De la même manière que nous avons fait pour l'émission de la surface planétaire, en employant (207), nous pouvons représenter la radiation $O(0, t)$ de l'atmosphère en fonction de sa température. Nous obtenons ainsi

$$(392) \quad O(0, t) = a_m' \sigma \Theta^4.$$

En introduisant (375), (382), (207) et (392) dans (378) et (391), nous obtenons

$$(393) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = [1 - a_m(z)] (1 - A) W_1(t) + a_m' \sigma \Theta^4$$

$$(394) \quad c \varrho_0 h \frac{d\Theta}{dt} = a_m(z) (1 - A) W_1(t) + a_m' a_p \sigma \Theta_p^4 - 2 a_m' \sigma \Theta^4.$$

En éliminant des équations précédentes la valeur Θ_p^4 , nous obtenons une équation différentielle entre Θ et t , $a_m(z)$ étant également une fonction donnée de t . L'intégration de cette équation nous donne la température de l'atmosphère en fonction du temps. A l'aide de (393) nous pouvons alors représenter la température de la surface planétaire en fonction du temps.

34. — Quelques cas spéciaux se rapportant au N^o précédent.

Lorsque l'insolation est stationnaire³¹⁾, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$(395) \quad W_1(t) = W_m$$

$$(396) \quad a_m(z) = a_m,$$

où W_m et a_m sont des valeurs indépendantes du temps, il s'établira dans l'atmosphère et à la surface de la planète un état de température stationnaire, c'est-à-dire qu'on aura

$$(397) \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0$$

et on obtiendra, au lieu de (393) et (394), les équations :

$$(398) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 - a_m' \sigma \Theta^4 = (1 - a_m) (1 - A) W_m$$

$$(399) \quad a_m' a_p \sigma \Theta_p^4 - 2 a_m' \sigma \Theta^4 = - a_m (1 - A) W_m,$$

dont on tire :

$$(400) \quad \Theta_p = \sqrt[4]{\frac{1}{a_p \sigma} \frac{2 - a_m}{2 - a_m'} (1 - A) W_m}$$

$$(401) \quad \Theta = \sqrt[4]{\frac{1}{a_m' \sigma} \frac{a_m + a_m' (1 - a_m)}{2 - a_m'} (1 - A) W_m}$$

Si la surface de la planète n'était pas surmontée d'une atmosphère, sa température Θ_p serait représentée par (210). Le rapport des deux températures données par (400) et (210), c'est-à-dire la valeur

$$(402) \quad G = \sqrt[4]{\frac{2 - a_m}{2 - a_m'} \frac{1 - A}{a_p}},$$

représente donc l'action de l'atmosphère, comparable, au point de vue de la conservation de la chaleur, à celle du vitrage d'une serre, que nous allons examiner de plus près.

Lorsque les phénomènes de réflexion dans l'atmosphère et à la surface planétaire sont négligeables, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$(403) \quad A = 0; \quad a_p = 1;$$

il résulte de (402)

$$(404) \quad G = \sqrt[4]{\frac{2 - a_m}{2 - a_m'}}$$

Cette valeur est plus grande que l'unité lorsque $a_m < a_m'$, c'est-à-dire que, dans ce cas, la présence de l'atmosphère élève la température de la surface planétaire. Ce rôle protecteur de l'atmosphère atteint son maximum $\sqrt[4]{2} = 1.189$ lorsqu'on a

$$(405) \quad a_m = 0; \quad a_m' = 1,$$

les valeurs de a_m et a_m' ne pouvant pas être supérieures à l'unité, ce qui résulte également de (380), (382), (388) et (390). Dans ce cas, qui est le plus favorable, l'atmosphère n'oppose aucun obstacle au passage de la radiation solaire, tandis qu'elle absorbe intégralement la radiation émise par la surface planétaire. Une telle atmosphère est donc capable d'élever la température de la surface ensoleillée de 18·9 pour cent.

Le verre a la propriété de laisser passer la majeure partie de la radiation solaire, tandis qu'il absorbe presque complètement les radiations émises par des corps obscurs. Un espace clos, recevant la radiation solaire par un vitrage, aura une température supérieure à l'espace ouvert. C'est sur ce phénomène qu'est basée la construction des serres et l'emploi de casiers.

Notre atmosphère possède, ainsi que l'a montré expérimentalement Tyndall³²), une propriété semblable. En la traversant, la radiation solaire ne subit que de faibles pertes, tandis que la radiation émise par la Terre y est presque entièrement absorbée. Cette absorption est due presque exclusivement à la présence de vapeur d'eau et d'acide carbonique. Nous reviendrons plus loin sur ce phénomène rappelant ce qui se passe dans une serre. Nous verrons également que l'atmosphère de Mars se comporte d'une façon semblable.

Un autre cas particulier intégrable de l'équation (394) se présentera pour

$$(406) \quad p_a = 1$$

ou bien

$$(407) \quad a_m(z) = 0,$$

c'est-à-dire lorsque la radiation solaire est transmise sans aucun obstacle par l'atmosphère et que, de plus, les oscillations des températures $\Theta = 273 + u$ et $\Theta_p = 273 + u_p$ sont tellement petites qu'on peut poser, de-même que dans la formule (224),

$$(408) \quad \sigma \Theta^4 = h_0 (v_0 + u),$$

$$(409) \quad \sigma \Theta_p^4 = h_p (v_p + u_p).$$

Les valeurs h_0, v_0, h_p, v_p sont données par des équations de la forme (223), où u_0 est la température correspondant à la moyenne insolation stationnaire.

Nous obtenons dans ce cas, en admettant, pour simplifier, (403) et (405) et en posant

$$(410) \quad \frac{1}{c \rho_0 h} = m,$$

au lieu de (393) et (394), les deux équations suivantes:

$$(411) \quad h_p (v_p + u_p) = W_1(t) + h_0 (v_0 + u)$$

$$(412) \quad \frac{du}{dt} = m h_p (v_p + u_p) - 2 m h_0 (v + u),$$

c'est-à-dire

$$(413) \quad \frac{du}{dt} + m h_0 u = m W_1(t) - m h_0 v_0.$$

Ceci est une équation différentielle linéaire de la forme (331) et son intégrale générale est, d'après (332), représentée par

$$(414) \quad u = e^{-m h_0 t} \left\{ C + m \int \left[W_1(t) - h_0 v_0 \right] e^{m h_0 t} dt \right\}.$$

Si $W_1(t)$ est une fonction trigonométrique simple:

$$(415) \quad W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

et si cet état périodique d'insolation a suffisamment duré, nous obtenons, eu égard à (335) et aux remarques qui suivent cette équation,

$$(416) \quad u = \frac{a_0}{h_0} - v_0 + \frac{m a_1}{m^2 h_0^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} \left[m h_0 \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t \right].$$

Posons, pour abréger,

$$(417) \quad \begin{cases} m h_0 = A_1 \cos \varepsilon_1 \\ \frac{2\pi}{T} = A_1 \sin \varepsilon_1, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(418) \quad \text{tang } \varepsilon_1 = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{m h_0}$$

$$(419) \quad A_1 = \sqrt{m^2 h_0^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}};$$

on obtient alors

$$(420) \quad u = \frac{a_0}{h_0} - v_0 + \frac{m a_1}{A_1} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_1 \right).$$

En introduisant (415) et (416) dans (411) on obtient

$$(421) \quad u_p = \frac{2a_0}{h_p} - v_p + \frac{a_1}{h_p} \left[\frac{m^2 h_0^2 + A_1^2}{A_1^2} \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t \right],$$

ou bien en posant

$$(422) \quad \begin{cases} \frac{m^2 h_0^2 + A_1^2}{A_1^2} = A_2 \cos \varepsilon_2 \\ \frac{2\pi}{T} = A_2 \sin \varepsilon_2, \end{cases}$$

on obtient

$$(423) \quad u_p = \frac{2a_0}{h_p} - v_p + \frac{a_1}{h_p} A_2 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_2 \right).$$

Il découle de (415), (420) et (423) que les oscillations de l'inso-
lation, de la température de l'atmosphère et de la température de
la surface planétaire ont la même période, mais atteignent à diffé-
rentes époques leurs valeurs extrêmes.

35. — *Equations différentielles réglant les phénomènes de radiation dans les atmosphères des planètes.*

Nous allons à présent supprimer les restrictions faites au N^o 33, en admettant que l'atmosphère possède une épaisseur quelconque h et que sa constitution est une fonction arbitraire mais continue de la hauteur x , de sorte que les valeurs $a_1(x)$ et $a_2(x)$ sont des fonctions arbitraires mais continues de x .

Pour obtenir, dans ce cas général, les équations différentielles des phénomènes de radiation, envisageons une couche élémentaire S_x de l'atmosphère. Soit x la distance de cette couche de la surface planétaire et dx son épaisseur. Cette couche est traversée par les radiations suivantes: la radiation solaire directe et diffuse, la radiation obscure de l'atmosphère, dirigée vers la surface planétaire

et désignée au N^o 32 par $O(x, t)$, et enfin une radiation obscure dirigée vers l'espace interplanétaire. Cette dernière radiation, dont nous allons désigner l'intensité, à l'endroit x et au moment t , par $U(x, t)$, est composée de la radiation obscure de la surface planétaire et de la radiation obscure de l'atmosphère dirigée vers l'espace interplanétaire. A la surface de la planète cette seconde composante de la radiation $U(x, t)$ s'annule et on a

$$(424) \quad U(0, t) = \frac{dQ_r}{dt}.$$

De ces radiations, les fractions suivantes sont absorbées par la couche S_x : de la radiation solaire la quantité $dW(x, t)$ représentée par (370), des radiations $O(x, t)$ et $U(x, t)$ les quantités $a_2(x) O(x, t) dx$ et $a_2(x) U(x, t) dx$, le pouvoir absorbant de la couche S_x étant désigné par $a_2(x) dx$. Désignons par $\varepsilon(x, t) dx$ les radiations que la couche S_x émet par chacun de ses deux plans limitants, on obtient alors la quantité suivante de radiation retenue par la couche S_x par unité de section et de temps:

$$(425) \quad \frac{dQ}{dt} = \left[a_1(x) W(x, t) \sec z + a_2(x) O(x, t) + \right. \\ \left. + a_2(x) U(x, t) - 2 \varepsilon(x, t) \right] dx.$$

Cette quantité, en faisant abstraction des autres transformations de l'énergie rayonnante, sera employée à l'élévation de la température $u(x, t)$ de la couche considérée. La radiation $\frac{dQ}{dt}$ provoquera donc, dans l'unité de temps, une élévation de température $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ donnée par

$$(426) \quad \frac{dQ}{dt} = c \rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx.$$

Dans cette équation, la production de travail mécanique par la chaleur étant exclue, c désigne la chaleur spécifique de l'atmosphère par unité de masse à volume constant. Nous admettons ensuite que le changement de température précédent ne trouble pas la stabilité de l'atmosphère et ne provoque aucun courant au sein de sa masse. Nous nous occuperons ultérieurement de ces phénomènes.

Il découle de (425) et (426)

$$(127) \quad 2 \varepsilon(x, t) + c \rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a_1(x) W(x, t) \sec z + \\ + a_2(x) O(x, t) + a_2(x) U(x, t).$$

On obtient de la façon suivante deux autres équations différentielles.

Par le passage de la radiation $O(x, t)$ à travers la couche S_x , cette radiation est affaiblie de la quantité $a_2(x) O(x, t) dx$, c'est-à-dire qu'elle est renforcée de la même valeur dans la direction $+x$. De plus elle sera renforcée de la valeur $\varepsilon(x, t) dx$ par l'émission de cette couche vers la surface planétaire, c'est-à-dire qu'elle sera affaiblie de cette même valeur dans la direction $+x$. On a donc

$$(428) \quad \frac{\partial O(x, t)}{\partial x} = a_2(x) O(x, t) - \varepsilon(x, t).$$

Par le passage de la radiation $U(x, t)$ à travers la couche S_x , cette radiation sera affaiblie de la valeur $a_2(x) U(x, t) dx$ et renforcée de la valeur $\varepsilon(x, t) dx$. On a donc

$$(429) \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = -a_2(x) U(x, t) + \varepsilon(x, t).$$

En posant

$$(430) \quad \begin{cases} O(x, t) + U(x, t) = Y(x, t) \\ O(x, t) - U(x, t) = Z(x, t), \end{cases}$$

la somme puis la différence de (428) et (429) donnera respectivement ce qui suit:

$$(431) \quad \frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} = a_2(x) Z(x, t)$$

$$(432) \quad \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = a_2(x) Y(x, t) - 2\varepsilon(x, t).$$

Il résulte de (427), (369) et (430),

$$(433) \quad 2\varepsilon(x, t) + c \rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + a_2(x) Y(x, t).$$

Les équations (431) à (433) sont celles qui régissent les phénomènes de radiation dans les atmosphères des planètes. L'équation (432) peut être remplacée par la suivante qu'on tire de (432) et (433):

$$(434) \quad \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = c \rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial W(x, t)}{\partial x}.$$

La dépendance analytique existant entre $\varepsilon(x, t)$ et $u(x, t)$ est fournie par les lois de Kirchhoff et de Stefan et on obtient de la même manière que (392):

$$(435) \quad \varepsilon(x, t) = a_2(x) \sigma \Theta^4(x, t),$$

où on a

$$(436) \quad \Theta(x, t) = 273 + u(x, t).$$

On doit, dans l'intégration des précédentes équations aux dérivées partielles, tenir compte des conditions suivantes, spéciales aux surfaces-limites.

Il résulte de (377), (375), (424) et (430):

$$(437) \quad Z(0, t) = -(1 - A) W_1(t) p_n^{\sec z},$$

et de (376) et (430)

$$(438) \quad Y(h, t) + Z(h, t) = 0.$$

36. — Intégration des équations différentielles du N^o 35 pour le cas d'une insolation stationnaire.³³⁾

Lorsque l'insolation est stationnaire, ou bien lorsqu'elle peut être considérée comme telle dans le sens de ce qui a été dit au N^o 22, on a

$$(439) \quad W_1(t) = W_m,$$

où W_m représente une constante. Dans ce cas, il s'établira dans l'atmosphère de la planète une température également stationnaire, c'est-à-dire qu'on aura:

$$(440) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0,$$

et les valeurs u , Y , Z et ε ne seront que des fonctions de x .

On obtient alors, au lieu de (431), (434) et (433), les équations suivantes:

$$(441) \quad \frac{dY(x)}{dx} = a_2(x) Z(x)$$

$$(442) \quad \frac{dZ(x)}{dx} = - \frac{dW(x)}{dx}$$

$$(443) \quad 2 \varepsilon (x) = \frac{dW(x)}{dx} + a_2 (x) Y(x).$$

Dans celles-ci, on a, d'après (373) et (439),

$$(444) \quad W(x) = (1 - A) W_m e^{-\sec z \int_x^h a_1(x) dx}$$

A la place des conditions spéciales (437) et (438) nous obtenons les suivantes

$$(445) \quad Z(0) = - (1 - A) W_m p_a^{\sec z}$$

$$(446) \quad Y(h) + Z(h) = 0.$$

Or, il résulte par intégration de (442):

$$Z(x) = - W(x) + C,$$

et comme, d'après (375) et (439), $Z(0) = - W(0)$, C devient égal à zéro, c'est-à-dire

$$(447) \quad Z(x) = - W(x),$$

on obtient, en tenant compte de (446) et (444),

$$(448) \quad Y(h) = - Z(h) = (1 - A) W_m.$$

Il découle de (441) et (447)

$$dY(x) = - a_2(x) W(x) dx,$$

et par intégration de cette expression entre les limites x et h , tout en tenant compte de (448),

$$(449) \quad Y(x) = (1 - A) W_m + \int_x^h a_2(x) W(x) dx.$$

Les équations (443), (435), (370) et (449) donnent:

$$(450) \quad 2 \sigma \Theta^4(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \sec z W(x) + (1 - A) W_m + \int_x^h a_2(x) W(x) dx,$$

équation qui donne la température $\Theta(x)$ de l'atmosphère à la hauteur x .

A la limite supérieure de l'atmosphère, c'est-à-dire pour $x = h$, cette température est donnée par

$$(451) \quad 2 \sigma \Theta^4 (h) = \left[1 + \frac{a_1 (h)}{a_2 (h)} \sec z \right] (1 - A) W_m .$$

On tire ensuite de (378) et (430)

$$(452) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = W (0) + \frac{1}{2} [Y (0) + Z (0)] ,$$

c'est-à-dire qu'on obtient, en tenant compte de (375), (439), (449), (444) et (445),

$$(453) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[1 + p_a \sec z + \int_0^h a_2 (x) e^{-\sec z \int_x^h a_1 (x) dx} dx \right] ,$$

équation nous donnant la température Θ_p de la surface de la planète.

Dans le cas d'un passage perpendiculaire des rayons solaires à travers l'atmosphère, c'est-à-dire pour $Z = 0$, nous obtenons à la place de (444), (450) et (453):

$$(454) \quad W (x) = (1 - A) W_m e^{-\int_x^h a_1 (x) dx}$$

$$(455) \quad 2 \sigma \Theta^4 (x) = \frac{a_1 (x)}{a_2 (x)} W (x) + (1 - A) W_m + \int_x^h a_2 (x) W (x) dx$$

$$(456) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[1 + p_a + \int_0^h a_2 (x) e^{-\int_x^h a_1 (x) dx} dx \right] .$$

Ainsi qu'il est facile de s'en apercevoir, on peut employer ces trois équations également lorsque les rayons solaires traversent

obliquement l'atmosphère, en prenant pour $a_1(x)$ sa valeur multipliée par $\sec z$.

Le cas où on a

$$(457) \quad a_1(x) = 0,$$

c'est-à-dire le cas où l'atmosphère transmet intégralement la radiation solaire, est d'un intérêt particulier. On a alors, d'après (150), $p_a = 1$ et, d'après (444), $W(x) = (1 - A) W_m$, de sorte qu'on obtient, au lieu de l'équation (450), la suivante:

$$(458) \quad \sigma \Theta^4(x) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[1 + \int_x^h a_2(x) dx \right].$$

Cette équation nous fournit, pour la température $\Theta(h)$ de la couche supérieure de l'atmosphère, l'expression

$$(459) \quad \sigma \Theta^4(h) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m,$$

et, pour la température $\Theta(0)$ de la couche inférieure,

$$\sigma \Theta^4(0) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[1 + \int_0^h a_2(x) dx \right],$$

on bien, à cause de (386),

$$(460) \quad \sigma \Theta^4(0) = \frac{1 - \log_{n\epsilon p} p_a'}{2} (1 - A) W_m \quad (\text{pour } p_a = 1).$$

La température Θ_p de la surface planétaire, au lieu d'être donnée par (453), l'est maintenant par

$$(461) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{2 - \log_{n\epsilon p} p_a'}{2} (1 - A) W_m \quad (\text{pour } p_a = 1).$$

37. — Quelques cas spéciaux se rapportant au N^o précédent.

Tyndall avait déjà démontré dans ses mémoires cités sous³²⁾ que ce ne sont pas les principaux constituants de notre atmosphère, c'est-à-dire l'azote et l'oxygène, qui absorbent notablement l'énergie rayonnante, mais que cette absorption est due presque exclusivement à la présence de composantes gazeuses et à l'état de vapeur. Celles-ci ne sont représentées en quantités notables que par l'acide

carbonique et la vapeur d'eau, et c'est à ces deux corps qu'incombe la majeure partie de la radiation solaire absorbée et l'absorption de la presque totalité des radiations émises par la surface terrestre.

Les valeurs $a_1(x)$ et $a_2(x)$ dépendent pour cette raison presque exclusivement de tels gaz absorbants et l'on doit, par conséquent, strictement tenir compte du nombre de ces gaz que contient l'atmosphère d'une planète considérée.

Nous allons nous occuper premièrement du cas où l'atmosphère de la planète ne contient qu'un seul gaz absorbant.

D'après ce qui a été exposé au N^o 20, on peut admettre que dans ce cas la densité de ce gaz est donnée par la formule (187) comme fonction de x , de façon que, d'après la loi de Beer, les valeurs $a_1(x)$ et $a_2(x)$ sont représentées par les expressions de la forme

$$(462) \quad a_1(x) = a_1 e^{-\frac{x}{H}}, \quad a_2(x) = a_1' e^{-\frac{x}{H}}.$$

Dans les équations précédentes H représente, lorsqu'il s'agit d'un gaz parfait, la hauteur virtuelle de son atmosphère et une autre constante dont il a été question au N^o 20, lorsqu'il s'agit de la vapeur d'eau. Les valeurs respectives de a_1 et a_1' représentent évidemment le pouvoir absorbant, respectivement pour la radiation solaire ou la radiation obscure de la surface planétaire, de la couche la plus inférieure d'une épaisseur égale à l'unité.

Nous admettons encore, pour pouvoir employer les équations (454) à (456), que la radiation solaire traverse l'atmosphère de la planète perpendiculairement à l'endroit considéré; dans le cas d'un passage oblique de ces rayons, il en est tenu compte en augmentant la valeur numérique de a_1 , ainsi qu'il a été dit au N^o 36.

Eu égard à (150), (386), (462) et au fait que, d'après N^o 20, on doit poser

$$(463) \quad h = \infty,$$

on a

$$(464) \quad \begin{cases} p_a = e^{-a_1 \int_0^\infty e^{-\frac{x}{H}} dx} = e^{-a_1 H} \\ p_a' = e^{-a_1' \int_0^\infty e^{-\frac{x}{H}} dx} = e^{-a_1' H} \end{cases}$$

Il résulte de (454), (462) et (463)

$$(465) \quad W(x) = (1 - A) W_m e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}},$$

et de (455) et des équations précédentes

$$(466) \quad \sigma \Theta^4(x) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_1'} e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} + \right. \\ \left. + a_1' \int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx \right\}.$$

Posons

$$(467) \quad a_1 H e^{-\frac{x}{H}} = y,$$

c'est-à-dire

$$- a_1 e^{-\frac{x}{H}} = dy,$$

on obtient

$$(468) \quad \int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx = - \frac{1}{a_1} \int_y^0 e^{-y} dy = \frac{1}{a_1} \left[1 - e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} \right] = \\ = \frac{1}{a_1} \left[1 - p_a e^{-\frac{x}{H}} \right],$$

et, au lieu de (466), on a

$$(469) \quad \sigma \Theta^4(x) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \frac{a_1 + a_1'}{a_1} \left[1 + \frac{a_1 - a_1'}{a_1'} p_a e^{-\frac{x}{H}} \right].$$

Cette équation nous donne la température $\Theta(x)$ de l'atmosphère à la hauteur x .

À la limite inférieure de l'atmosphère, on a

$$(470) \quad \sigma \Theta^4(0) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \frac{a_1 + a_1'}{a_1} \left[1 + \frac{a_1 - a_1'}{a_1'} p_a \right],$$

et, à sa limite supérieure,

$$(471) \quad \sigma \Theta^4(\infty) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \frac{a_1 + a_1'}{a_1'}.$$

Il découle de (456), (462) et (463)

$$a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left\{ 1 + p_a + a_1' \int_0^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx \right\}.$$

D'autre part on a, d'après (468),

$$\int_0^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx = \frac{1}{a_1} (1 - p_a),$$

de façon que nous obtenons

$$(472) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[1 + p_a + \frac{a_1'}{a_1} (1 - p_a) \right].$$

Comme on a

$$(473) \quad 1 - p_a = a_m,$$

où a_m représente le pouvoir absorbant de l'atmosphère pour la radiation solaire, on obtient

$$(474) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[2 - a_m + \frac{a_1'}{a_1} a_m \right].$$

Cette équation sert à déterminer la température de la surface de la planète.

Il est remarquable que la température de la surface planétaire, de même que celle de l'atmosphère, ne dépend pas des valeurs absolues de a_1 et a_1' mais seulement du rapport de ces deux valeurs. Ce rapport peut être exprimé par les coefficients de transmission, car il résulte de (464)

$$(475) \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{H} \log_{n^{\text{ép}}} p_a = -\frac{1}{M H} \log p_a \\ a_1' = -\frac{1}{H} \log_{n^{\text{ép}}} p_a' = -\frac{1}{M H} \log p_a', \end{cases}$$

où $M = \log e$. On obtient donc

$$(476) \quad \frac{a_1'}{a_1} = \frac{\log p_a'}{\log p_a}.$$

De cette manière on peut donner, par exemple, à l'équation (472) la forme suivante:

$$(477) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \frac{\log p_a + \log p_a' + p_a (\log p_a - \log p_a')}{\log p_a}.$$

En donnant à l'équation (470) la forme

$$(478) \quad \sigma \Theta^4 (0) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m (a_1 + a_1') \left[\frac{1 - p_a}{a_1} + \frac{1}{a_1'} p_a \right],$$

nous voyons que, dans le cas d'une transmissibilité absolue des rayons solaires par l'atmosphère, c'est-à-dire pour le quotient

$$(479) \quad p_a = 1; a_1 = 0,$$

$$\frac{1 - p_a}{a_1} = \frac{1 - e^{-a_1 H}}{a_1}$$

de l'équation ci-dessus et de l'équation (472) devient $\frac{0}{0}$. En différenciant son numérateur et son dénominateur par rapport à a_1 , on obtient

$$\lim_{a_1 = 0} \frac{1 - p_a}{a_1} = \lim_{a_1 = 0} H e^{-a_1 H} = H.$$

Introduisons cette valeur et celle de (479) dans (478) et (472), nous obtenons, en tenant compte de (475), ainsi qu'il fallait s'y attendre, les équations (460) et (461) qui servent à la détermination des valeurs $\Theta(0)$ et Θ_p dans le cas d'une transmissibilité complète des rayons solaires par l'atmosphère.

Un autre cas important pour les applications ultérieures est celui dans lequel l'atmosphère contient deux différents gaz absorbants de manière que, d'une façon analogue à (196), on obtient:

$$(480) \quad \begin{cases} a_1(x) = a_1 e^{-\frac{x}{H_1}} + a_2 e^{-\frac{x}{H_2}} \\ a_2(x) = a_1' e^{-\frac{x}{H_1}} + a_2' e^{-\frac{x}{H_2}}. \end{cases}$$

Alors on a, d'après (197),

$$(481) \quad p_a = e^{-a_1 H_1 - a_2 H_2},$$

et, d'après (454),

$$(482) \quad W(x) = (1 - A) W_m e^{-a_1 H_1 e^{-\frac{x}{H_1}} - a_2 H_2 e^{-\frac{x}{H_2}}};$$

de telle manière qu'on obtient, au lieu de (455),

$$(483) \quad \sigma \Theta^4(x) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{a_1 e^{-\frac{x}{H_1}} + a_2 e^{-\frac{x}{H_2}}}{a_1' e^{-\frac{x}{H_1}} + a_2' e^{-\frac{x}{H_2}}} e^{-a_1 H_1 e^{-\frac{x}{H_1}} - a_2 H_2 e^{-\frac{x}{H_2}}} + \right.$$

$$\left. + a_1' \int_x^\infty e^{-a_1 H_1 e^{-\frac{x}{H_1}} - a_2 H_2 e^{-\frac{x}{H_2}}} e^{-\frac{x}{H_1}} dx + a_2' \int_x^\infty e^{-a_1 H_1 e^{-\frac{x}{H_1}} - a_2 H_2 e^{-\frac{x}{H_2}}} e^{-\frac{x}{H_2}} dx \right\}$$

Ces dernières intégrations peuvent être effectuées sous une forme finie lorsqu'on a

$$(484) \quad a_2 = 0$$

et lorsque $\frac{H_1}{H_2}$ est un nombre positif entier. C'est ce que nous allons admettre, et, en tenant compte des applications ultérieures, nous considérerons le cas

$$(485) \quad \frac{H_1}{H_2} = 3.$$

Dans ce cas nous obtenons, au lieu de (483),

$$(486) \quad \sigma \Theta^4(x) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_1' + a_2' e^{-\frac{x}{H_1}}} p_a e^{-\frac{x}{H_1}} + \right.$$

$$\left. + a_1' \int_x^\infty e^{-a_1 H_1 e^{-\frac{x}{H_1}}} e^{-\frac{x}{H_1}} dx + a_2' \int_x^\infty e^{-a_1 H_1 e^{-\frac{x}{H_1}}} e^{-\frac{3x}{H_1}} dx \right\}.$$

En utilisant la substitution (467) et l'intégration partielle, nous obtenons

$$(487) \quad \int_x^\infty e^{-a_1 H_1 e^{-\frac{x}{H_1}}} e^{-\frac{3x}{H_1}} dx = -\frac{1}{a_1^3 H_1^2} \int_y^0 e^{-y} y^2 dy =$$

$$= \frac{1}{a_1^3 H_1^2} \left\{ e^{-y} (y^2 + 2y + 2) \right\}_y^0 =$$

$$= \frac{1}{a_1} \left\{ \frac{2}{a_1^2 H_1^2} - p_a e^{-\frac{x}{H_1}} \left[e^{-\frac{2x}{H_1}} + \frac{2}{a_1 H_1} e^{-\frac{x}{H_1}} + \frac{2}{a_1^2 H_1^2} \right] \right\},$$

de façon que nous obtenons, eu égard à (468), au lieu de (486),

$$(488) \quad \sigma \Theta^4(x) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_1' + a_2'} p_a e^{-\frac{2x}{H_1}} + \frac{a_1'}{a_1} (1 - p_a e^{-\frac{x}{H_1}}) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_2'}{a_1} \left[\frac{2}{a_1^2 H_1^2} - p_a e^{-\frac{x}{H_1}} \left(e^{-\frac{2x}{H_1}} + \frac{2}{a_1 H_1} e^{-\frac{x}{H_1}} + \frac{2}{a_1^2 H_1^2} \right) \right] \right\}.$$

Pour $x = \infty$ cette équation devient identique à (471).

Il résulte de (456) et des équations précédentes :

$$a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left\{ 1 + p_a + a_1' \int_0^\infty e^{-a_1 H_1 e^{-\frac{x}{H_1}}} e^{-\frac{x}{H_1}} dx + \right.$$

$$\left. + a_2' \int_0^\infty e^{-a_1 H_1 e^{-\frac{x}{H_1}}} e^{-\frac{3x}{H_1}} dx \right\};$$

et ainsi, en faisant emploi de (468) et (487), on obtient

$$(489) \quad a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left\{ 1 + p_a + \frac{a_1'}{a_1} (1 - p_a) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_2'}{a_1} \left[\frac{2}{a_1^2 H_1^2} - p_a \left(1 + \frac{2}{a_1 H_1} + \frac{2}{a_1^2 H_1^2} \right) \right] \right\}.$$

38. — *Intégrations des équations différentielles du N^o 35 pour le cas d'une insolation variable.³⁴*

Lorsque l'insolation de la planète est périodique à période T , elle peut être, comme nous l'avons démontré au N^o 25, représentée par une série trigonométrique de la forme (262).

Nous allons d'abord supposer que cette série est réduite aux premiers membres, c'est-à-dire qu'on a

$$(490) \quad W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

tandis que nous nous occuperons plus tard du cas général.

L'intégration des équations différentielles du N^o 35 est réalisable, sous une forme finie, pour une insolation variable, lorsque les conditions suivantes sont remplies.

Les amplitudes des oscillations de l'insolation et de la température $u(x, t)$ doivent être petites, de manière qu'on peut poser, ainsi que nous l'avons fait pour l'équation (224), et en tenant compte de (435) et (436),

$$(491) \quad \varepsilon(x, t) = a_2(x) h [v_0 + u(x, t)],$$

où l'on a

$$(492) \quad \begin{cases} \sigma (273 + u_0)^4 - 4 \sigma (273 + u_0)^3 u_0 = h v_0 \\ 4 \sigma (273 + u_0)^3 = h. \end{cases}$$

Dans ces équations u_0 représente la température moyenne de la couche considérée de l'atmosphère qui s'établirait dans le cas d'une insolation stationnaire a_0 .

Une autre condition est

$$(493) \quad a_1(x) = 0,$$

c'est-à-dire que l'atmosphère de la planète ne doit pas absorber la radiation solaire.

De plus, on doit avoir

$$(494) \quad \rho(x) = \rho_0,$$

ρ_0 étant une constante, c'est-à-dire que l'atmosphère doit être homogène au point de vue de sa densité; de même la densité ρ_a des gaz absorbants ne doit pas varier avec la hauteur.

Alors on peut poser

$$(495) \quad a_2(x) = k_a \rho_a,$$

où k_a représente le coefficient d'absorption des gaz absorbants.

En posant

$$(496) \quad \frac{\rho_a}{\rho_0} k_a = k,$$

où k désigne une nouvelle constante, on aura

$$(497) \quad a_2(x) = k \rho_0.$$

Ayant admis que $\rho(x) = \rho_0$, on doit attribuer à l'atmosphère également une certaine hauteur limitée, ce qui aura lieu de la manière suivante.

Si nous avons tenu compte du changement de densité de l'atmosphère avec la hauteur, en supposant en même temps que la teneur pour cent en gaz absorbants ne varie pas avec la hauteur, on aurait

$$(498) \quad a_2(x) = k \rho_0(x),$$

où $\rho(x)$ serait une fonction donnée de x , et nous aurions, au lieu de l'équation (458), où il est tenu compte de (493), la suivante

$$(499) \quad \sigma \Theta^4(x) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[1 + k \int_x^h \rho(x) dx \right].$$

La température de la couche atmosphérique la plus inférieure serait donc donnée par

$$(500) \quad \sigma \Theta^4(0) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[1 + k \int_0^h \rho(x) dx \right].$$

Or, l'intégrale $\int_0^h \rho(x) dx$ représente la masse de la colonne atmosphérique s'élevant au-dessus de l'unité de surface planétaire, masse qui est, d'après (188) représentée par $\rho_0 H$, H étant la hauteur virtuelle de l'atmosphère. On aurait donc

$$(501) \quad \sigma \Theta^4(0) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[1 + k \rho_0 H \right].$$

Si nous avons supposé que l'atmosphère eût partout une seule densité ρ_0 et une hauteur H , nous aurions obtenu, au lieu de l'équation (499),

$$(502) \quad \sigma \Theta^4(x) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left[1 + k \rho_0 (H - x) \right];$$

mais la température $\Theta(0)$ de la couche la plus inférieure garderait la valeur (501).

Dans le cas d'une densité variable, le gradient $\frac{\partial \Theta(x)}{\partial x}$ de température serait donné par (499) et par l'équation

$$(503) \quad 4 \sigma \Theta^3(x) \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x} = - \frac{1}{2} (1 - A) W_m k \rho(x),$$

qui est obtenue par différentiation de (499).

Dans le cas d'une atmosphère homogène de densité ρ_0 et de hauteur H , ce gradient serait donné par (502) et par l'équation

$$(504) \quad 4 \sigma \Theta^3(x) \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x} = - \frac{1}{2} (1 - A) W_m h \rho_0.$$

Il est remarquable que, dans les deux cas précédents, nous aurions obtenu le même gradient de température $\frac{\partial \Theta(0)}{\partial x}$ pour la couche la plus inférieure de l'atmosphère.

Il découle des considérations précédentes que les deux atmosphères, celle à densité variable et à hauteur h et celle à densité constante et à hauteur H , accusent pour une insolation stationnaire la même température et le même gradient de température dans leurs couches les plus inférieures. Pour cette raison nous interpréterons la supposition (494) de telle manière que nous imaginerons l'atmosphère considérée comprimée à sa hauteur virtuelle H et à la densité ρ_0 .

Il s'ensuit que nous obtenons au lieu de la condition (438), la suivante

$$(505) \quad Y(H, t) + Z(H, t) = 0.$$

A la suite de ce que nous venons d'admettre, nous obtenons, à cause de (370),

$$(506) \quad \frac{\partial W(x)}{\partial x} = 0,$$

et, à la place de (431), (434) et (433), les équations suivantes

$$(507) \quad \frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} = k \varrho_0 Z(x, t)$$

$$(508) \quad \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = c \varrho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

$$(509) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 2 \frac{k h}{c} \left[v_0 + u(x, t) \right] = \frac{k}{c} Y(x, t),$$

et de plus, au lieu de (437), la condition suivante

$$(510) \quad Z(0, t) = - (1 - A) a_0 - (1 - A) a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Il s'agit donc de trouver les intégrales particulières des équations différentielles (507) à (509) satisfaisant les conditions spéciales aux surfaces-limites (510) et (505). De plus, les fonctions $u(x, t)$, $Y(x, t)$ et $Z(x, t)$ doivent être les fonctions périodiques du temps, puisque nous supposons que l'insolation périodique a duré un temps infini.

Pour séparer l'une de l'autre les trois fonctions mentionnées, différencions (509) par rapport à x et en tenant compte de (507); nous obtenons alors

$$(511) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + 2 \frac{k h}{c} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{k^2 \varrho_0}{c} Z(x, t).$$

Une nouvelle différentiation par rapport à x et l'utilisation de l'équation (508) donne

$$(512) \quad \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + 2 \frac{k h}{c} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = k^2 \varrho_0^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

En posant maintenant

$$(513) \quad u(x, t) = e^{at + \beta x},$$

où α et β sont des constantes, (513) deviendra évidemment une intégrale particulière de (512), lorsque l'équation

$$(514) \quad \alpha \beta^2 + 2 \frac{k h}{c} \beta^2 = k^2 \varrho_0^2 \alpha$$

est satisfaite.

Or, ainsi qu'il est facile de s'en apercevoir, l'expression

$$(515) \quad u(x, t) = C_1 e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 t + \beta_2 x} + C_3 x + C_4,$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes arbitraires, est également une intégrale de l'équation (512), à condition que les valeurs α_1, β_1 , et α_2, β_2 , prises par paires, satisfassent à l'équation (514).

A cette intégrale correspond l'intégrale suivante de l'équation (508),

$$(516) \quad Z(x, t) = C_1 c \varrho_0 \frac{\alpha_1}{\beta_1} e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} + C_2 c \varrho_0 \frac{\alpha_2}{\beta_2} e^{\alpha_2 t + \beta_2 x} + C_5,$$

où C_5 peut être considéré, pour le moment, comme étant une fonction de t .

A cette dernière intégrale correspond l'intégrale suivante de l'équation (507)

$$(517) \quad Y(x, t) = C_1 k c \varrho_0^2 \frac{\alpha_1}{\beta_1^2} e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} + C_2 k c \varrho_0^2 \frac{\alpha_2}{\beta_2^2} e^{\alpha_2 t + \beta_2 x} + C_5 k \varrho_0 x + C_6,$$

où C_6 peut être considéré, pour le moment, comme étant une fonction de t .

En introduisant les expressions (515) et (516) dans (511), on obtient

$$(518) \quad C_5 = 2 \frac{h}{k \varrho_0} C_3,$$

tandis qu'en introduisant les expressions (515) et (517) dans (509), on obtient

$$(519) \quad C_6 = 2 h (v_0 + C_4),$$

d'où il ressort que C_5 et C_6 sont également des constantes.

Il s'agit maintenant de savoir s'il est possible d'attribuer à α, β et C de telles valeurs que les conditions spéciales (510) et (505) paraissent satisfaites.

Les quantités $u(x, t)$, $Y(x, t)$ et $Z(x, t)$ doivent être des fonctions périodiques du temps t , ce qui aura lieu lorsque les constantes α_1 et α_2 seront imaginaires.

Posons donc

$$(520) \quad \begin{cases} \alpha_1 = +iN \\ \alpha_2 = -iN, \end{cases}$$

N étant un nombre réel et i l'unité imaginaire; dans ce cas β_1 et β_2 seront, d'après (514), des quantités imaginaires conjuguées, β_2 découlant de β_1 lorsqu'on remplace $+i$ par $-i$. Ces quantités ont, par conséquent, la forme

$$(521) \quad \begin{cases} \beta_1 = R + iP \\ \beta_2 = R - iP, \end{cases}$$

où R et P sont des nombres réels.

En portant les valeurs (520) et (521) dans l'équation (514) et en dédoublant celle-ci, en séparant le réel de l'imaginaire, on obtient

$$(522) \quad \begin{cases} k^2 \varrho_0^2 c N = c N (R^2 - P^2) + 4 k h P R \\ c N P R = k h (R^2 - P^2). \end{cases}$$

En posant, pour abréger,

$$(523) \quad \frac{k^2 \varrho_0^2}{2} \frac{c^2 N^2}{c^2 N^2 + 4 k^2 h^2} = M^2,$$

il résulte de ces deux dernières équations

$$(524) \quad R^2 - P^2 = 2 M^2$$

$$(525) \quad R P = \frac{2 k h}{c N} M^2,$$

c'est-à-dire

$$(526) \quad R^2 = M^2 \left\{ 1 + \sqrt{\frac{c^2 N^2 + 4 k^2 h^2}{c^2 N^2}} \right\}.$$

Dans cette expression on a devant la racine carrée le signe $+$, car c'est seulement dans ce cas que R est réel.

Il résulte des équations précédentes

$$(527) \quad \begin{cases} R = - \sqrt{\frac{k \varrho_0}{\sqrt{2}}} M + M^2 \\ P = - \sqrt{\frac{k \varrho_0}{\sqrt{2}}} M - M^2. \end{cases}$$

On verra plus loin pourquoi dans ce cas la racine carrée est précédée du signe négatif.

En posant, pour abréger,

$$(528) \quad C_1 c \varrho_0 \frac{\alpha_1}{\beta_1} = C_1'; \quad C_2 c \varrho_0 \frac{\alpha_2}{\beta_2} = C_2',$$

on aura, d'après (516), (520) et (521),

$$Z(x, t) = e^{Rx} \left\{ C_1' e^{i(Nt + Px)} + C_2' e^{-i(Nt + Px)} \right\} + C_5,$$

c'est-à-dire, en utilisant la formule d'Euler (234),

$$(529) \quad Z(x, t) = e^{Rx} \left\{ (C_1' + C_2') \cos(Nt + Px) + \right. \\ \left. + i(C_1' - C_2') \sin(Nt + Px) \right\} + C_5.$$

Afin que cette expression satisfasse à la condition (510), les constantes C et N étant jusqu'à présent arbitraires, nous les prendrons telles qu'elles satisfassent aux équations suivantes:

$$(530) \quad C_1' + C_2' = -(1 - A) a_1$$

$$(531) \quad N = \frac{2\pi}{T}$$

$$(532) \quad C_1' - C_2' = 0$$

$$(533) \quad C_5 = -(1 - A) a_0.$$

Pour que $Z(x, t)$ ne devienne pas infiniment grand lorsque x croît, il sera de plus nécessaire que R soit négatif; mais alors, k, h, c, N et M^2 étant des nombres positifs, P sera, à cause de (525), également négatif. C'est pour cette raison que, dans (527), nous n'avons fait précéder les racines carrées que du signe négatif.

On obtient donc

$$(534) \quad Z(x, t) = -(1 - A) a_0 - (1 - A) a_1 e^{Rx} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + Px\right).$$

En appliquant aux expressions (515) et (517) la formule d'Euler (234) et en tenant compte qu'à cause de (530), (532), (528), (520) et (521)

$$C_1 + C_2 = -(1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{2P}{N}$$

$$i(C_1 - C_2) = -(1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{2R}{N}$$

$$C_1 \frac{\alpha_1}{\beta_1^2} + C_2 \frac{\alpha_2}{\beta_2^2} = - (1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{2 R}{R^2 + P^2}$$

$$i \left(C_1 \frac{\alpha_1}{\beta_1^2} - C_2 \frac{\alpha_2}{\beta_2^2} \right) = - (1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{2 P}{R^2 + P^2},$$

on obtient

$$(535) \quad u(x, t) = - (1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{2}{N} e^{Rx} \left\{ P \cos (Nt + Px) + \right. \\ \left. + R \sin (Nt + Px) \right\} + C_3 x + C_4$$

$$(536) \quad Y(x, t) = - (1 - A) a_1 k c \frac{2 e^{Rx}}{R^2 + P^2} \left\{ R \cos (Nt + Px) + \right. \\ \left. + P \sin (Nt + Px) \right\} + C_5 k \varrho_0 x + C_6.$$

Pour la détermination des constantes C_3, C_4, C_5, C_6 il nous manque encore une équation. Celle-ci est fournie par la condition (505), lorsque la hauteur virtuelle H de l'atmosphère est grande, de manière que l'expression e^{Rx} , où R est négatif, devienne très petite pour $x = H$. De plus, il est nécessaire que la période T de l'oscillation ne soit pas très longue, afin que N et $R^2 + P^2$ ne soient pas très petits. Lorsque ces conditions sont remplies, et nous admettons qu'elles le sont, les premiers membres de la partie droite des expressions (529) et (536) disparaissent pour $x = H$, et on obtient

$$Z(H, t) = C_3$$

$$Y(H, t) = C_5 k \varrho_0 H + C_6,$$

de sorte que la condition spéciale (505) donne

$$(537) \quad C_3 + C_5 k \varrho_0 H + C_6 = 0.$$

Il résulte des équations ci-dessus et de (518), (519) et (533)

$$(538) \quad C_3 = - (1 - A) a_0 \frac{k \varrho_0}{2 h}$$

$$(539) \quad C_4 = (1 - A) \frac{a_0}{2 h} + (1 - A) a_0 \frac{k \varrho_0}{2 h} H - v_0$$

$$(540) \quad C_5 = -(1 - A) a_0$$

$$(541) \quad C_6 = (1 - A) a_0 + (1 - A) a_0 k \varrho_0 H.$$

Par ces équations toutes les constantes sont déterminées. Nous obtenons donc, au lieu de (535),

$$(542) \quad u(x, t) = (1 - A) \frac{a_0}{2h} + (1 - A) a_0 \frac{k \varrho_0}{2h} H - \\ - v_0 - (1 - A) a_0 \frac{k \varrho_0}{2h} x - (1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{2}{N} \times \\ \times e^{Rx} \left\{ P \cos (Nt + Px) + R \sin (Nt + Px) \right\}.$$

Pour $a_1 = 0$ l'insolation devient stationnaire, et, dans ce cas, l'expression précédente doit se réduire à (502), ce qui est en effet le cas à cause de (435), (491) et (490).

Cette solution du problème peut être mieux saisie lorsqu'on pose, ainsi que nous l'avons fait dans l'équation (253),

$$(543) \quad \begin{cases} P = A_1 \cos \varepsilon_1 \\ R = A_1 \sin \varepsilon_1. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a, P et R étant des nombres négatifs, et en admettant que ε_1 se trouve dans le premier quadrant,

$$(544) \quad \text{tang } \varepsilon_1 = \frac{R}{P} = \sqrt{\frac{k \varrho_0 + \sqrt{2} M}{k \varrho_0 - \sqrt{2} M}}$$

$$(545) \quad A_1 = -\sqrt{P^2 + R^2} = -\sqrt[4]{2} \sqrt{k \varrho_0 M},$$

et on obtient alors

$$(546) \quad u(x, t) = (1 - A) \frac{a_0}{2h} + (1 - A) a_0 \frac{k \varrho_0}{2h} H - v_0 - \\ - (1 - A) a_0 \frac{k \varrho_0}{2h} x - (1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{2 A_1}{N} e^{Rx} \cos (Nt + Px - \varepsilon_1).$$

On voit que les variations de température de l'atmosphère ont le même caractère oscillatoire que les variations de l'insolation; la période de ces variations est, à cause de (531), également T .

L'amplitude de ces oscillations à la hauteur u est égale à

$$(547) \quad \alpha_x = (1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{2 A_1}{N} e^{Rx}$$

et, R étant négatif, elle diminue lorsque la hauteur croît. Les époques des amplitudes de la température, à la hauteur x , sont données par l'équation

$$(548) \quad Nt + Px - \varepsilon_1 = 2n\pi,$$

où n est un nombre entier quelconque. La vitesse v de propagation des oscillations de température dans l'atmosphère est donnée, d'après l'équation précédente, par

$$(549) \quad v = \frac{dx}{dt} = -\frac{N}{P},$$

c'est-à-dire par

$$(550) \quad v = \frac{2\pi}{T \sqrt{\frac{k \varrho_0}{V^2} M - M^2}}.$$

Cette vitesse est donc constante.

Ce phénomène de propagation des oscillations thermiques dans l'atmosphère est singulièrement semblable à celui de transmission des ondes thermiques par le sol dont il a été question au N^o 26. Dans les deux cas les oscillations se propagent avec une vitesse constante, sans changement de période et en s'amortissant d'après la loi logarithmique.

La température de la couche atmosphérique la plus inférieure est donnée, d'après (546), (545), (531) et (527), par

$$(551) \quad u(0, t) = (1 - A) \frac{a_0}{2h} (1 + k \varrho_0 H) - v_0 + \\ + (1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{2}{V^2}} \sqrt{k \varrho_0 M} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_1 \right).$$

Il découle de (424) et (430)

$$(552) \quad \frac{dQ_r}{dt} = \frac{1}{2} \left[Y(0, t) - Z(0, t) \right],$$

et, en tenant compte de (536), (534), (541), (531) et (527), il résulte que l'émission de la surface planétaire est représentée par

$$(553) \quad \frac{dQ_r}{dt} = (1 - A) a_0 \left(1 + \frac{k \varrho_0 H}{2} \right) +$$

$$+ (1 - A) \frac{a_1}{2} \frac{\sqrt{2} c}{\varrho_0 M} \left\{ \left[\frac{\varrho_0 M}{\sqrt{2} c} + \sqrt{\frac{k \varrho_0}{\sqrt{2}}} M + M^2 \right] \cos \frac{2\pi}{T} t + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{k \varrho_0}{\sqrt{2}}} M - M^2 \sin \frac{2\pi}{T} t \right\}.$$

En posant

$$(554) \quad \begin{cases} \frac{\varrho_0 M}{\sqrt{2} c} + \sqrt{\frac{k \varrho_0}{\sqrt{2}}} M + M^2 = B_1 \cos \eta_1 \\ \sqrt{\frac{k \varrho_0}{\sqrt{2}}} M - M^2 = B_1 \sin \eta_1, \end{cases}$$

on obtient

$$(555) \quad \frac{dQ_r}{dt} = (1 - A) a_0 \left(1 + \frac{k \varrho_0 H}{2} \right) + \\ + (1 - A) \frac{a_1}{2} \frac{\sqrt{2} c}{\varrho_0 M} B_1 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \eta_1 \right).$$

Maintenant on peut calculer, à l'aide de l'équation (207) et éventuellement de l'équation (409), la température Θ_p ou u_p de la surface planétaire.

Il ressort de (490), (551) et (555) que les oscillations de l'insolation, les oscillations de la température de la couche atmosphérique la plus inférieure et les oscillations de la température de la surface planétaire ont différentes phases.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que l'insolation de la surface planétaire est donnée par l'expression (490). Si celle-ci est une fonction périodique quelconque du temps, on la développera en une série de Fourier de la forme (262), de façon qu'on obtient, en suivant les mêmes raisonnements qu'au N° 25, les formules suivantes remplaçant les précédentes

$$(556) \quad u(0, t) = (1 - A) \frac{a_0}{2h} (1 + k \varrho_0 H) - v_0 + \\ + (1 - A) \frac{1}{c \varrho_0} \frac{T}{\pi} \sqrt[4]{2} \sqrt{k \varrho_0} \left\{ \sum_n \frac{a_n}{n} \sqrt{M_n} \cos \left(\frac{2n\pi}{T} t - \varepsilon_n \right) + \right. \\ \left. + \sum_n \frac{b_n}{n} \sqrt{M_n} \sin \left(\frac{2n\pi}{T} t - \varepsilon_n \right) \right\},$$

$$(557) \quad \begin{cases} M_n = \frac{k^2 \varrho_0^2}{2} \frac{n^2 \pi^2 c^2}{n^2 \pi^2 c^2 + k^2 h^2 T}, \\ \operatorname{tang} \varepsilon_n = \sqrt{\frac{k \varrho_0 + \sqrt{2} M_n}{k \varrho_0 - \sqrt{2} M_n}}, \end{cases}$$

$$(558) \quad \frac{dQ_r}{dt} = (1 - A) a_0 \left(1 + \frac{k \varrho_0 H}{2} \right) + \\ + (1 - A) \frac{\sqrt{2} c}{2 \varrho_0} \left\{ \sum_n \frac{a_n B_n}{M_n} \cos \left(\frac{2 n \pi}{T} t - \eta_n \right) + \right. \\ \left. + \sum_n \frac{b_n B_n}{M_n} \sin \left(\frac{2 n \pi}{T} t - \eta_n \right) \right\} x,$$

$$(559) \quad \begin{cases} \frac{\varrho_0 M_n}{\sqrt{2} c} + \sqrt{\frac{k \varrho_0}{V^2}} M_n + M_n^2 = B_n \cos \eta_n, \\ \sqrt{\frac{k \varrho_0}{V^2}} M_n - M_n^2 = B_n \sin \eta_n. \end{cases}$$

39. — *Loi de décroissance de la densité et de la température avec la hauteur, lorsque l'atmosphère est en équilibre d'échanges de radiation.*³⁵⁾

Les équations (187) et (192), qui représentent respectivement la densité d'une atmosphère constituée d'un seul ou de plusieurs gaz en fonction de la hauteur x , sont basées sur la supposition que la température de l'atmosphère ne varie pas notablement avec la hauteur; ce qui a pour conséquence que ces équations peuvent être considérées, ainsi qu'il a été déjà dit, comme valables pour des intervalles de hauteur limités.

Mais c'est précisément la loi régissant la décroissance de la densité de l'atmosphère aux grandes hauteurs, où les observations directes manquent, qui est pour nous d'un intérêt tout particulier, car bien des phénomènes, comme les nuages nocturnes encore ensoleillés, les étoiles filantes, les aurores boréales, sont en relation étroite avec cette loi.

Pour cette raison nous allons abandonner la supposition d'une atmosphère isotherme et admettre que la température de l'atmosphère varie avec la hauteur d'après les lois données par les phénomènes de radiation. Nous admettons, à cet effet, que l'atmosphère planétaire n'est constituée que d'un seul gaz parfait, de manière que sa densité $\rho(x)$, sa pression $p(x)$ et sa température absolue $\Theta(x)$, à l'endroit x , soient liées par les équations (178) et (189).

L'équation entre $\rho(x)$, $p(x)$ et $\Theta(x)$, qui nous manque encore, nous est donnée par les équations, du N^o 35 qui expriment mathématiquement les phénomènes de radiation au sein de l'atmosphère. En établissant ces équations, nous n'avons pas tenu compte des courants de convection; ces courants semblent être absents dans les couches supérieures de l'atmosphère, c'est-à-dire dans la stratosphère, où leur présence est, en effet, rendue improbable par des considérations d'ordre théorique que nous allons exposer au N^o suivant.

Pour pouvoir intégrer les équations du N^o 20 avec celles du N^o 35, nous sommes obligés d'admettre que l'atmosphère planétaire transmet intégralement les rayons solaires. Nous poserons, à cet effet, $a_1(x) = 0$. Cette supposition est presque réalisée dans les couches supérieures de l'atmosphère terrestre et d'autant plus dans l'atmosphère martienne. D'après cette même supposition, l'atmosphère planétaire n'est rechauffée que par la radiation obscure de la surface planétaire. Nous ne considérons plus loin que la moyenne température annuelle de l'atmosphère, de telle façon que nous pouvons employer les équations (458) et (459), où on peut poser, d'après la loi de Beer, et d'une façon analogue à l'équation (195),

$$(560) \quad a_2(x) = k \rho(x).$$

Dans cette équation k désigne le coefficient d'absorption de l'atmosphère pour la radiation émise par la planète.

Nous obtenons donc, au lieu de (458),

$$(561) \quad 2 \sigma \Theta^4(x) = (1 - A) W_m \left[1 + k \int_x^h \rho(x) dx \right].$$

Nous pouvons donner à cette équation une forme qui se prête mieux aux développements suivants, en y introduisant la tempé-

rature de la couche la plus supérieure donnée par (459) et que nous désignerons dorénavant par μ . On a alors

$$(562) \quad 2 \sigma \mu^4 = (1 - A) W_m,$$

et on obtient, à la place de (561),

$$(563) \quad 2 \sigma [\Theta^4(x) - \mu^4] = (1 - A) W_m k \int_x^h \varrho(x) dx.$$

En intégrant l'équation (189) entre les limites x et h , tout en tenant compte que pour $x = h$ $p(x)$ disparaît, on obtient

$$p(x) = g \int_x^h \varrho(x) dx,$$

c'est-à-dire à cause de (563),

$$(564) \quad 2 \sigma [\Theta^4(x) - \mu^4] = (1 - A) W_m \frac{k}{g} p(x),$$

ou bien, en différenciant par rapport à x ,

$$(565) \quad 8 \sigma \Theta^3(x) d\Theta(x) = (1 - A) W_m \frac{k}{g} dp(x).$$

Il résulte de (189) et (178)

$$(566) \quad \frac{dp(x)}{p(x)} = - \frac{g}{R} \frac{dx}{\Theta(x)}.$$

En y introduisant pour $p(x)$ et $dp(x)$ les valeurs données par (564) et (565), on obtient

$$(567) \quad dx = - \frac{4 R}{g} \frac{\Theta^4(x) d\Theta(x)}{\Theta^4(x) - \mu^4},$$

ou bien, en décomposant par division la fraction du second membre en un polynôme et une fraction rationnelle,

$$dx = - \frac{4 R}{g} d\Theta(x) - \frac{4 R}{g} \frac{d\Theta(x)}{\Theta^4(x) - \mu^4}.$$

Pour intégrer cette expression décomposons-la en éléments simples d'après la formule (350), et nous obtiendrons

$$(568) \quad x = C - \frac{4 R}{g} \Theta(x) - \frac{R}{g} \mu \left\{ \log_{n\text{ap}} \frac{\Theta(x) - \mu}{\Theta(x) + \mu} - 2 \operatorname{arc tang} \frac{\Theta(x)}{\mu} \right\},$$

où C est une constante d'intégration déterminée par la condition pour $x = 0$ $\Theta(u) = \Theta_0$. On a donc

$$(568^*) \quad C = \frac{4R}{g} \Theta_0 + \frac{R}{g} \mu \left\{ \log_{\text{nat}} \frac{\Theta_0 - \mu}{\Theta_0 + \mu} - 2 \text{arc tang} \frac{\Theta_0}{\mu} \right\}.$$

L'équation (568) nous donne, sous une forme explicite par rapport à x , le rapport existant entre x et $\Theta(x)$.

En éliminant $p(x)$ de (564) et (178), tout en tenant compte de (563), on obtient

$$(569) \quad \rho(x) = \frac{g}{Rk} \frac{\Theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4 \Theta(x)},$$

ou bien, à cause de (178),

$$(570) \quad p(x) = \frac{g}{k} \frac{\Theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4}.$$

Ces deux équations nous fournissent, en relation avec (568), respectivement le rapport entre $\rho(x)$ et x , ou entre $p(x)$ et x , sous forme paramétrique; $\Theta(x)$ jouant le rôle du paramètre.

Il résulte de (568) et (569)

$$(571) \quad \begin{cases} \text{pour } \Theta(x) = \mu \\ x = \infty; \rho(x) = 0, \end{cases}$$

ce qui signifie que, tandis que la température $\Theta(x)$ s'approche de la valeur μ lorsque x croît à l'infini, la densité $\rho(x)$ s'approche de la valeur zéro. L'atmosphère s'étend théoriquement à l'infini, et on a

$$(572) \quad h = \infty.$$

Pour de grandes hauteurs on peut considérablement simplifier l'équation (568) et représenter les valeurs Θ , ρ et p comme fonctions de x sous une forme explicite. En effet, lorsque x est très grand, $\Theta(x)$ diffère très peu de μ , de façon qu'on peut remplacer dans l'équation (568)

$$\begin{aligned} \frac{4R}{g} \Theta(x) &\text{ par } \frac{4R}{g} \mu \\ \frac{\Theta(x) - \mu}{\Theta(x) + \mu} &\text{ par } \frac{\Theta(x) - \mu}{2\mu} \\ \text{arc tang} \frac{\Theta(x)}{\mu} &\text{ par } \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

et on obtient alors

$$\frac{g}{R \mu} x = \frac{g}{R \mu} C - 4 + \frac{\pi}{2} - \log_{\text{nép}} \frac{\theta(x) - \mu}{2 \mu}.$$

Si on pose maintenant, pour abrégé,

$$\frac{g}{R \mu} C - 4 + \frac{\pi}{2} = \log_{\text{nép}} C_1,$$

c'est-à-dire, à cause de (568*),

$$(573) \quad C_1 = \frac{\theta_0 - \mu}{\theta_0 + \mu} e^{4 \frac{\theta_0 - \mu}{\mu} + \frac{\pi}{2} - 2 \text{arc tang} \frac{\theta_0}{\mu}},$$

on obtient

$$(574) \quad \theta(x) = \mu + 2 \mu C_1 e^{-\frac{g}{R \mu} x}.$$

La valeur

$$(575) \quad \frac{R \mu}{g} = H_1$$

représente, d'après (186), la hauteur virtuelle d'une atmosphère isotherme à température μ et à la constante de gaz R ; ou bien elle représente encore, d'après (191), la hauteur virtuelle d'une atmosphère constituée d'un seul gaz au sein de laquelle la température est distribuée d'une façon arbitraire, à la seule condition qu'elle possède à la surface de la planète la température μ et que la constante de son gaz constituant ait également la valeur R . On a donc

$$(576) \quad \theta(x) = \mu + 2 \mu C_1 e^{-\frac{x}{H_1}}$$

$$\left[\frac{\theta(x)}{\mu} \right]^4 = \left(1 + 2 C_1 e^{-\frac{x}{H_1}} \right)^4.$$

En développant le second membre de l'équation précédente d'après la formule du binôme et en négligeant les puissances supérieures de la valeur $e^{-\frac{x}{H_1}}$ qui est petite, on obtient

$$\left[\frac{\theta(x)}{\mu} \right]^4 - 1 = 8 C_1 e^{-\frac{x}{H_1}}.$$

En introduisant cette expression et (575) dans (569) et (570), et en remplaçant, dans le dénominateur de (569), $\theta(x)$ par μ , on obtient

$$(577) \quad \rho(x) = \frac{8 C_1}{k H_1} e^{-\frac{x}{H_1}}$$

$$(578) \quad p(x) = \frac{g}{k} 8 C_1 e^{-\frac{x}{H_1}}.$$

En comparant (577) à (187), on voit que l'atmosphère en question se comporte à de grandes hauteurs comme une atmosphère isotherme à la température μ et d'une densité

$$\rho_0' = \frac{8 C_1}{k H_1}$$

à la surface de la planète.

40. — *Phénomènes thermodynamiques ayant lieu dans les atmosphères planétaires.*

Jusqu'à présent nous n'avons pas tenu compte des phénomènes de transformation de chaleur en travail mécanique ou inversement, ce qui faisait admettre que l'atmosphère se trouve en équilibre mécanique, de façon qu'elle n'était le siège d'aucun courant. Nous allons examiner à présent sous quelle condition cette supposition est réalisée. Dans ce but, nous devons faire usage de quelques équations de la théorie mécanique de la chaleur que nous allons premièrement développer.

En communiquant à l'unité de masse d'un gaz occupant le volume v la quantité de chaleur $d\theta$, une partie de celle-ci sera employée à l'élévation de la température de ce gaz et l'autre partie à l'augmentation de son volume, c'est-à-dire à la production de travail mécanique. La première partie est évidemment égale à $c d\theta$, c étant la chaleur spécifique du gaz à volume constant, tandis que la seconde partie est égale à $A p dv$, A étant l'équivalent calorique du travail. On a donc

$$(579) \quad d\theta = c d\theta + A p dv.$$

Si le gaz est parfait, et c'est ce que nous supposons, c'est à l'équation suivante, déjà donnée au N^o 20, qu'il obéit:

$$(580) \quad p v = R \Theta.$$

En la différenciant on obtient

$$p dv + v dp = R d\Theta,$$

de sorte qu'on obtient, au lieu de (579),

$$(581) \quad dQ = (c + A R) d\Theta - A v dp.$$

Si la détente s'effectue à pression constante, c'est-à-dire en posant dans la formule précédente $dp = 0$, $\frac{dQ}{d\Theta}$ représente la chaleur spécifique du gaz à pression constante. Nous désignerons cette chaleur spécifique par c' , et on a

$$(582) \quad c' = c + A R,$$

c'est-à-dire

$$(583) \quad dQ = c' d\Theta - A v dp.$$

Si le gaz subit des changements adiabatiques, c'est-à-dire sans échanges de chaleur, on a $dQ = 0$ et, au lieu de (583),

$$(584) \quad c' d\Theta = A v dp.$$

En éliminant de cette équation v à l'aide de (580), en tenant compte de (582) et en posant

$$(585) \quad \frac{c'}{c} = \kappa,$$

on obtient

$$(586) \quad \frac{dp}{p} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{d\Theta}{\Theta}.$$

C'est la forme différentielle de l'équation de Poisson.

Revenons à l'atmosphère de la planète. En admettant qu'elle est constituée d'un seul gaz parfait, elle sera régie par les équations que nous venons de développer. En élevant une particule de sa masse de l'altitude x à l'altitude $x + dx$, elle parvient d'une région à pression p dans une région à pression $p + dp$, et on a, d'après (566),

$$(587) \quad \frac{dp}{p} = - \frac{g}{R} \frac{dx}{\Theta}.$$

Lorsque ce déplacement a lieu sans échanges de chaleur, la variation dp de la pression et la variation correspondante $d\Theta$ de la température sont liées par l'équation (586). Or, il découle de (586) et (587)

$$(588) \quad \frac{d\Theta}{dx} = - \frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}.$$

Cette équation nous donne la variation $d\Theta$ de la température Θ de la particule atmosphérique, lorsque celle-ci se déplace de la hauteur dx .³⁶⁾

Si, à l'endroit considéré de l'atmosphère, la décroissance de la température avec la hauteur est plus petite que $\frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}$, dans ce cas, la particule atmosphérique ascendante arrivera dans des couches atmosphériques plus chaudes et plus raréfiées qu'elle ne l'est elle-même, ce qui aura pour conséquence qu'elle sera soumise à une pression de haut en bas. De même une particule atmosphérique descendante subira une pression de bas en haut. L'équilibre de l'atmosphère sera à cet endroit stable. Si, par contre, la décroissance de la température avec la hauteur est plus grande que $\frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}$, dans ce cas, l'équilibre est instable.

Lorsque l'atmosphère a une telle constitution qu'en chacun de ses points la relation

$$(589) \quad \frac{d\Theta(x)}{d\Theta} = - \frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

est satisfaite, elle se trouve alors dans un état d'équilibre indifférent.

L'intégration de l'équation ci-dessus donne, en tenant compte qu'on a pour $x = 0$ $\Theta(u) = \Theta_0$,

$$(590) \quad \Theta(x) = \Theta_0 - \frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa} x.$$

Dans ce cas la température est une fonction linéaire de x , et, à la hauteur

$$(591) \quad x = \frac{R}{g} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \Theta_0,$$

la température atteindra le zéro absolu. Cette hauteur représente également la limite supérieure de l'atmosphère.

Ce cas d'équilibre s'établirait dans une atmosphère privée de toute radiation, chauffée uniquement par conductibilité au contact de la surface planétaire, lorsqu'elle serait soumise à un brassage incessant.

Si éloigné que soit ce cas idéal de la réalité, il n'en a pas moins été employé jusqu'à présent dans presque toutes les explications de la distribution verticale de la température dans l'atmosphère,³⁷⁾ de même que dans l'analyse des problèmes cosmologiques.³⁸⁾

La limite de l'équilibre instable à l'endroit considéré de l'atmosphère sera atteinte lorsque la décroissance de la densité cessera avec la hauteur, c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$(592) \quad \frac{d\rho(x)}{dx} = 0.$$

Nous pouvons donner une autre forme à cette condition. En différenciant l'équation (178), à laquelle nous pouvons donner la forme

$$(593) \quad \rho(x) = \frac{1}{R} \frac{p(x)}{\Theta(x)},$$

par rapport à x et en tenant compte de (592), on obtient

$$\frac{dp(x)}{p(x)} = \frac{d\Theta(x)}{\Theta(x)},$$

c'est-à-dire, à cause de (566),

$$(594) \quad \frac{d\Theta(x)}{dx} = -\frac{g}{R}.$$

Par conséquent, l'équilibre cesse également d'être instable lorsque la décroissance de la température avec la hauteur devient supérieure à $\frac{g}{R}$.

A l'aide des conditions d'équilibre précédentes nous sommes en état de déterminer si une partie considérée de l'atmosphère, constituée d'un seul gaz parfait, se trouve en équilibre dans la direction verticale.

Ainsi, l'atmosphère planétaire envisagée au N^o 39 sera en équilibre stable, lorsque la décroissance de la température avec la hauteur, décroissance donnée par (567), devient inférieure à $\frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}$, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$(595) \quad 1 - \left[\frac{\mu}{\Theta(x)} \right]^4 < 4 \frac{\kappa - 1}{\kappa}.$$

Cette condition est toujours satisfaite pour

$$(596) \quad \kappa \geq \frac{4}{3}.$$

Comme la théorie cinétique des gaz nous enseigne que pour un gaz monoatomique on a $\kappa = \frac{5}{3}$, pour un gaz diatomique $\kappa = \frac{7}{5}$, pour un gaz triatomique $\kappa = \frac{4}{3}$, et qu'en général κ n'est jamais inférieur à l'unité, il s'ensuit que l'atmosphère sera dans toute sa hauteur en équilibre, lorsqu'elle sera constituée d'un gaz mono-di-, ou triatomique.

Lorsque l'atmosphère contient de la vapeur d'eau (ou toute autre vapeur), ce qui précède doit être modifié. Aussi longtemps que l'atmosphère n'est pas saturée, on peut y appliquer, sans commettre une erreur notable, les équations précédentes; mais, lorsque le point de rosée est atteint, l'élévation des particules d'atmosphère saturée provoquera la condensation de vapeur d'eau et la chaleur latente libérée atténuera l'abaissement de température provoqué par le déplacement vertical. En désignant par q la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'unité de masse d'atmosphère saturée, pour un déplacement dx il y aura condensation d'une quantité $-dq$ de sorte que $-rdq$ représentera la chaleur libérée, r désignant, de même que dans la formule (319), la chaleur de condensation. Cette quantité de chaleur est cédée à l'atmosphère et on doit poser dans l'équation (583)

$$(597) \quad dQ = -rdq.$$

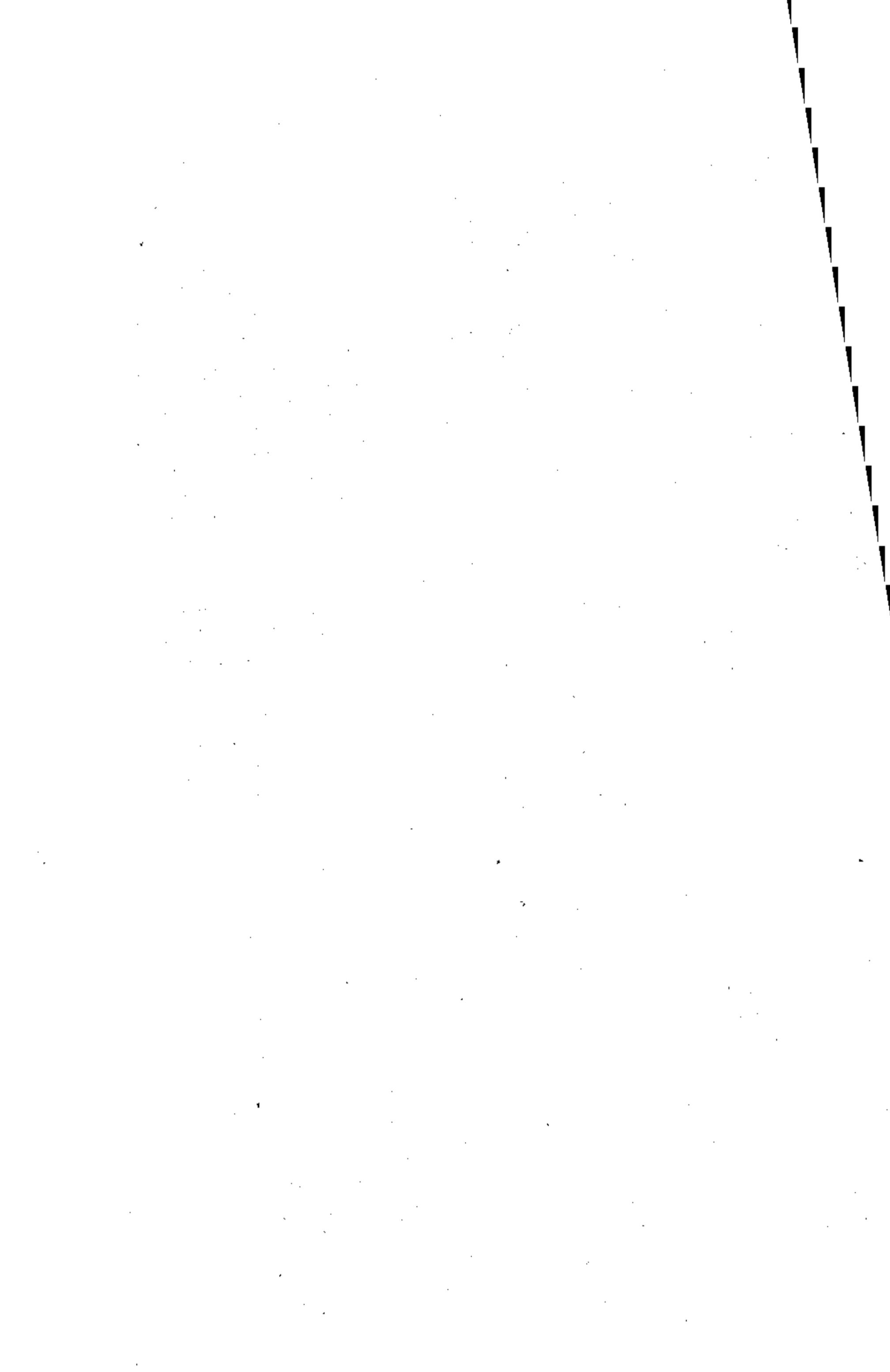
Il s'ensuit qu'on obtient, au lieu de (588), une autre expression pour la décroissance de la température à laquelle nous ne pouvons pas nous attarder.³⁹⁾

Il résulte de (595) et (596) que probablement, dans l'atmosphère de toutes les planètes, l'équilibre des échanges de radiation aura pour conséquence l'équilibre mécanique, c'est-à-dire que, dans le cas d'une insolation stationnaire, il ne se manifesterà dans l'atmosphère aucune tendance à la formation des courants verticaux. Ceux-ci ne peuvent être provoqués que par des changements de l'insolation et de la température et encore faut-il que ces changements aient atteint une certaine valeur. Il a été démontré au N^o 38 que les variations de température en fonction du temps diminuent avec la hauteur, ce qui a pour conséquence qu'il y a moins de probabilité que des courants verticaux prennent naissance à de grandes hauteurs.

Il en est tout autrement quant à la stabilité de l'équilibre en direction horizontale; ses conditions ne sont théoriquement jamais remplies, même lorsque l'insolation est stationnaire. En effet, il découle de (570) que, dans ce cas, la pression atmosphérique à une hauteur donnée x est une fonction de $\Theta(x)$, et, par l'intermédiaire de (568) et (568*), une fonction de Θ_0 . La valeur Θ_0 étant pour la moyenne insolation annuelle une fonction de la latitude géographique, on obtiendra, pour une seule valeur de x , différentes valeurs de $p(x)$, en se déplaçant le long du méridien. Inversement, on obtiendra, pour une valeur donnée de $p(x)$, différentes valeurs de x le long du méridien. L'équation $p(x) = \text{constante}$ représente les méridiens des surfaces d'égale pression atmosphérique qui sont, dans ce cas, des surfaces de révolution. Ces surfaces ne se confondent pas avec les surfaces équipotentielles de la pesanteur, ce qui a pour conséquence un écoulement de la masse atmosphérique le long de cette surface dans la direction du méridien.

Pour un état non-stationnaire de l'insolation le phénomène devient encore plus compliqué. Les accidents locaux de la distribution de la température dans la direction perpendiculaire à la direction du méridien auront pour conséquence que les surfaces de la même pression atmosphérique ne seront point des surfaces de révolution, tandis que les variations temporaires de la température seront accompagnées de différentes oscillations locales de ces surfaces. A cela il faut ajouter la déviation des courants provoquée par la rotation de la planète.

Le traitement mathématique de ces phénomènes étant du domaine de la Météorologie dynamique, ne sera pas poursuivi dans ces pages.



DEUXIÈME PARTIE
APPLICATIONS

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

CHAPITRE I.

DISTRIBUTION DE LA RADIATION SOLAIRE A LA SURFACE DU GLOBE TERRESTRE ET SON CLIMAT MATHÉMATIQUE.

42. — *Définition du climat mathématique.*

Ce qu'on entend généralement par „climat terrestre“ c'est la description des moyennes tirées de chacun des phénomènes atmosphériques en différents points de la surface terrestre. On obtient cette description par une longue expérience à l'aide de données des instruments météorologiques, utilisées d'après les méthodes statistiques. La Climatologie est, par conséquent, dans son état actuel et d'après ses méthodes, une science purement empirique. La Météorologie a pour but d'expliquer les phénomènes de l'atmosphère terrestre par les lois de la physique et de découvrir, de cette façon, les rapports entre le climat terrestre et ses causes premières.

La plus importante de ces causes premières, c'est la radiation solaire et les modifications qu'elle subit, à un endroit donné, par suite de la rotation et de la révolution de la Terre. Cette cause est, ainsi que nous l'avons vu dans la première partie de cet ouvrage, accessible à une description mathématique exacte, et il est, par conséquent, possible d'étudier les phénomènes de l'atmosphère en partant de cette cause première. Tandis qu'on a, jusqu'à présent, dans la description et dans l'analyse du climat terrestre, suivi la voie déductive en partant d'observations journalières, on peut également se frayer une voie partant du côté opposé, c'est-à-dire la voie inductive, en déterminant théoriquement les traits caractéristiques du climat terrestre de ses causes données.

Le climat obtenu théoriquement de cette façon sera ce qu'on peut nommer le climat mathématique. Celui-ci ne devrait pas différer du climat observé si nous possédions une théorie parfaite, car celle-ci serait en état de prévoir et de décrire tous les phénomènes atmosphériques dans tous leurs détails, ces phénomènes étant soumis à des lois connues ou à connaître de la Physique.

Nous sommes cependant bien éloignés de cet état de la science, qui nous apparaît dans le lointain comme un but idéal. Premièrement, nous ne connaissons qu'incomplètement les lois physiques qui régissent les phénomènes dans l'atmosphère, les lois de rayonnement, par exemple; deuxièmement, nous sommes obligés, pour obtenir un nombre fini d'équations différentielles intégrables, d'admettre sur l'état de la surface du Globe et de son atmosphère, à titre de simplification, une série de suppositions qui, en réalité, ne sont jamais complètement réalisées.

Résumons ici les plus importantes de ces suppositions sur lesquelles sont basées les théories contenues dans la première partie de cet ouvrage.

La surface de la planète est supposée parfaitement horizontale et le matériel superficiel, solide ou liquide, constituant la couche qui prend part aux échanges de chaleur, est supposé homogène. L'atmosphère, soumise à l'action de la pesanteur et obéissant aux lois des gaz parfaits, se trouve, au point de vue de sa nébulosité, dans un état moyen et sa constitution et son humidité ne sont que fonctions de l'altitude au-dessus de la surface de la Terre. La radiation solaire qui pénètre dans l'atmosphère, le rayonnement de la surface terrestre et le rayonnement obscur de l'atmosphère se comportent comme des radiations d'une longueur d'onde déterminée, de telle façon que la loi combinée de Kirchhoff-Stefan y est applicable à tous les trois. Les pertes de rayonnement solaire, dans le bilan calorifique de la Terre, produites par la réflexion des nuages, des molécules de l'atmosphère et de la surface terrestre, seront déduites sous forme d'une moyenne du rayonnement avant sa pénétration dans l'atmosphère. Les échanges de chaleur entre la surface de la Terre et l'atmosphère n'ont lieu que par rayonnement. On ne tiendra pas compte des courants produits dans l'atmosphère par perturbation de son équilibre mécanique.

De toutes ces suppositions, la dernière est la plus importante quant à ses conséquences; car elle paraît exclure de la portée de nos recherches toute une série de phénomènes météorologiques, de façon que notre climat, obtenu par le calcul, sera, à vrai dire, ce qu'on appelle le climat solaire, c'est-à-dire le climat qui ne dépend que de la quantité de chaleur solaire envoyée à un endroit donné d'après sa position géographique.

Malgré cela, il ne faut pas confondre le climat mathématique avec le climat solaire. Ce sont deux choses différentes qui ne deviennent identiques que lorsqu'on admet les suppositions précédentes. On doit espérer qu'on pourra, avec le progrès de la science, se passer d'une partie de ces suppositions.

42. — *La constante solaire et les coefficients de transmission de l'atmosphère terrestre.*

La constante solaire est le point de départ dans l'étude des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire; aussi la détermination de sa valeur numérique est-elle le sujet des efforts incessants de la part des physiciens. Si les équations développées au N^{os} 15 et 16 étaient absolument exactes et si, d'autre part, la transmissibilité des rayons solaires par l'atmosphère restait constante pendant la durée des observations, on obtiendrait, par la mesure des intensités $I'(0, z_1)$ et $I'(0, z_2)$ de la radiation solaire correspondant aux distances zénithales z_1 et z_2 , d'après (133), les relations suivantes:

$$I'(0, z_1) = \frac{I_0}{\rho^2} p^{\sec z_1}$$

$$I'(0, z_2) = \frac{I_0}{\rho^2} p^{\sec z_2}.$$

Dans celles-ci il n'y a que I_0 et p d'inconnu; par conséquent, on pourrait en tirer non seulement la valeur de la constante solaire I_0 , mais aussi celle du coefficient de transmission p .

Malheureusement, la détermination de la constante solaire présente des difficultés considérables. La radiation solaire est composée des rayons de différentes longueurs d'ondes, possédant différents pouvoirs de pénétration, tandis que les propriétés de l'atmosphère s'éloignent sensiblement de celles que nous avons admises au N^o 15, de telle façon que les équations précédentes ne sont pas absolument exactes. De plus, la transmissibilité des rayons solaires par l'atmosphère est soumise, par suite du changement de sa teneur en vapeur d'eau, à des changements incessants, tandis que les mesures de l'intensité de la radiation solaire sont entachées d'erreurs fortuites.

Aussi ne faut-il pas s'étonner que pendant longtemps les déterminations de la constante solaire ne donnaient que des résultats très discordants.

Il n'y a que récemment qu'on a réussi, grâce à la Smithsonian Institution à Washington, sous la direction d'Abbot, à obtenir, à l'aide de nombreuses mesures exécutées en divers endroits, une valeur très satisfaisante de la constante solaire.⁴⁰⁾

D'après ces mesures, au nombre de 692, qui ont été faites de 1902 à 1912, la constante solaire serait de 1.932 gramme-calories par cm^2 et par minute. On a constaté, en même temps, que l'intensité du rayonnement était soumise à des variations périodiques qui peuvent atteindre jusqu'à 7 pour cent de la valeur moyenne de la radiation solaire. Une série d'observations, faites en 1913, donna la valeur de 1.960 gramme-calories, ou bien, d'après la méthode de calcul de Angström-Kimball, 2.019 gramme-calories.⁴¹⁾

Il n'est pas douteux, qu'à cause de la variabilité de l'intensité du rayonnement solaire, une série d'observations s'étendant à un plus long espace de temps sera nécessaire pour qu'on puisse obtenir une valeur moyenne définitive. En tout cas il est très probable que celle-ci ne différera pas beaucoup de 2 gramme-calories.

Ce nombre semble également confirmé par les recherches théoriques qui vont suivre sur la température moyenne de la surface terrestre. En effet, en attribuant à la Terre le rôle d'un énorme pyréliomètre, on tire de sa température moyenne la valeur précédente de la constante solaire.

Pour base de nos calculs nous prendrons donc, en chiffres ronds,

$$I_0 = 2 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}}$$

valeur généralement acceptée en Météorologie et dont nous pouvons d'autant plus nous contenter que nous ne sommes qu'imparfaitement renseignés sur les valeurs moyennes des coefficients de transmission de l'atmosphère.

Ainsi, la valeur du coefficient de transmission p varie considérablement avec le temps et le lieu. D'après les recherches mentionnées de la Smithsonian Institution la valeur moyenne de ce coefficient serait pour Washington, à 10 m au-dessus de la mer, 0.70 environs, pour Mount Wilson, à 1790 m d'altitude, un peu plus de 0.80, pour atteindre au Mount Whitney, en Cali-

fornie, à 4420 m d'altitude, la valeur de 0.90. Pour les régions basses et humides p possède, par contre, de très faibles valeurs. Il est difficile d'estimer la valeur moyenne de p pour toute la Terre; d'après Trabert elle serait de 0.60.

De même le pouvoir réfléchissant A de la Terre avec son atmosphère ne peut être déterminé qu'approximativement. Abbot et Fowle⁴²⁾ l'évaluent à 0.37. Trabert⁴³⁾ admet, par contre, que l'atmosphère avec les nuages reflète environ 40 pour cent du rayonnement solaire dans l'espace. Si on tient compte, de plus, des réflexions qui ont lieu à la surface de la Terre et qui représenteraient (voir note 42) environs 2.3 pour cent du rayonnement solaire total, on obtient pour A la valeur de 0.423. Nous prendrons, dans ce qui suit, la moyenne arrondie des deux valeurs précédentes, c'est-à-dire

$$A = 0.40.$$

Nos connaissances sur la valeur numérique du coefficient de transmission p_a de l'atmosphère pour la radiation solaire directe et diffuse, sont également très incomplètes.

D'après le bilan calorifique de Trabert, mentionné dans la note 43, l'atmosphère terrestre absorbe environ 19.4 pour cent de la radiation solaire totale, dirigée vers l'hémisphère éclairé de la Terre. Par contre, on obtiendrait du bilan d'Abbot et Fowle, mentionné dans la note 42, pour la partie absorbée de la radiation solaire la valeur de 22 pour cent, en supposant que les nuages absorbent les deux tiers de la radiation qu'ils ne reflètent pas dans l'espace interplanétaire, tandis qu'il laissent passer un tiers comme radiation diffuse.⁴⁴⁾ Nous prendrons comme valeur arrondie des valeurs précédentes le chiffre 20 et alors le calcul numérique de p_a s'effectue comme il suit.

D'après ce que nous avons admis sur la valeur numérique de A , 60 pour cent de la radiation solaire destinée à l'hémisphère éclairé, pénètrent dans son atmosphère. L'atmosphère absorbe 20 pour cent de la radiation que le Soleil lui envoie, c'est-à-dire $\frac{20}{0.60} = 33.3$

pour cent de la radiation qui pénètre à son intérieur. Par conséquent, il y a, en chiffres ronds, 67 pour cent de cette dernière radiation qui est transmise à la surface de la Terre sous forme

de radiation solaire directe et diffuse. On peut donc, en tenant compte de l'hémisphère entier qui reçoit la radiation solaire, poser

$$p_a = 0.67.$$

Ce coefficient se rapporte à l'hémisphère pris dans son entier et qui reçoit les rayons solaires sous tous les angles d'incidence. Pour l'incidence normale, le coefficient de transmission sera — d'après la formule (139) et le tableau I — égal à 0.79, ou en chiffres ronds

$$p_a = 0.80.$$

Donc, si on veut calculer les radiations diurnes ou annuelles transmises par l'atmosphère à une latitude déterminée, il faut employer ce coefficient de transmission.

Le coefficient de transmission p_a' pour la radiation obscure de la surface terrestre est également d'une grande importance. D'après les recherches mentionnées d'Abbot et Fowle, il n'y a que 10 pour cent de cette radiation qui atteint la limite supérieure de l'atmosphère, lorsque celle-ci ne contient pas de nuages; et, comme les nuages absorbent complètement cette radiation, et que, d'autre part, le ciel est en moyenne couvert dans la proportion de 52 pour cent, on aura pour cet état moyen

$$p_a' = 0.05.$$

C'est surtout la vapeur d'eau et, à un moindre degré, l'acide carbonique et l'air sec qui absorbent la radiation terrestre. La question du partage de cette absorption entre ces trois facteurs n'a pas encore trouvé une solution satisfaisante.⁴⁵⁾

43. — *Quantités diurnes de radiation reçues par la surface terrestre.*

On peut facilement calculer, à l'aide des équations (37), (38), (33), (7), (10) et (11), pour n'importe quelle longitude λ du Soleil, la quantité de radiation qui arriverait pendant un jour solaire, abstraction faite de l'atmosphère, à un endroit donné de la surface terrestre; ou, en tenant compte de l'atmosphère, la quantité qui atteint la limite supérieure de l'atmosphère au dessus de cet endroit.

Pour les éléments astronomiques qui entrent dans ce calcul nous avons les valeurs suivantes⁴⁶⁾

$$\begin{aligned} e &= 0.0168 \\ \varepsilon &= 23^{\circ} 27' 30'' \\ \nu_0 &= 79^{\circ} 38'. \end{aligned}$$

Pour être indépendant de la valeur numérique de la constante solaire, qui n'est pas encore définitivement fixée, nous poserons dans l'équation (37) respectivement (38)

$$I_0 = 1,$$

et, de plus,

$$\tau = 1,$$

c'est-à-dire que nous calculons en réalité la quantité moyenne de radiation qui, par unité de temps, dans l'espace d'un jour, atteint l'unité de surface à l'endroit donné, en prenant comme unité de radiation la constante solaire.

Les valeurs des quantités diurnes W_{τ} , obtenues de cette façon, pour chaque dixième degré de latitude et pour 17 longitudes de Soleil, sont consignées dans le tableau II.⁴⁷⁾

Si la constante solaire contient I_0 gramme-calories par cm^2 et minute, alors il suffit de multiplier par I_0 les nombres contenus dans le tableau II, pour obtenir la valeur moyenne de la quantité de radiation qui, au cours d'une journée donnée, arriverait à la surface de la Terre, abstraction faite de l'atmosphère, par minute et centimètre carré.

Si l'on veut tenir compte de l'atmosphère, on doit alors avoir recours, pour obtenir les valeurs de W'_{τ} , à des quadratures mécaniques compliquées, ainsi que nous l'avons déjà vu au N^o 16. Angot⁴⁸⁾ a accompli cette tâche. Ses calculs concernent chaque dixième degré de latitude, pour les jours de l'année où la déclinaison du Soleil atteint les valeurs $\delta = 0^{\circ}, \pm 4^{\circ}, \pm 8^{\circ}, \pm 12^{\circ}, \pm 16^{\circ}, \pm 20^{\circ}, \pm 22^{\circ}, \pm \varepsilon$ et pour les valeurs numériques du coefficient de transmission $p = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$. Il pose $\varrho = 1$, c'est-à-dire qu'il admet que la Terre se trouve à la distance moyenne du Soleil; il s'ensuit qu'il faut multiplier ses valeurs par le facteur $\frac{1}{\varrho^2}$ correspondant à la journée donnée. Pour unité, Angot prend la millième partie de la radiation solaire qui arriverait par unité de surface à l'équateur au jour de l'équinoxe, en négligeant l'absorption

Tableau .II
Quantités de radiation diurnes, atteignant la limite supérieure de l'atmosphère
(d'après Wiener)

Longitude du Soleil		0°	22° 30'	45°	67° 30'	90°	112° 30'	135°	157° 30'	180°
Latitude géographique	+ 90°		0.15137	0.27637	0.35776	0.38529	0.35600	0.27390	0.14965	
	+ 80°	0.05564	0.15137	0.27216	0.35223	0.37944	0.35059	0.26974	0.14965	0.05496
	+ 70°	0.10960	0.18777	0.26805	0.33619	0.36206	0.33453	0.26565	0.18565	0.10826
	+ 60°	0.16023	0.22745	0.28343	0.33423	0.35038	0.33258	0.28683	0.22486	0.15826
	+ 50°	0.20599	0.26232	0.31051	0.34307	0.35413	0.34138	0.30774	0.25934	0.20347
	+ 40°	0.24548	0.28893	0.32553	0.34781	0.35484	0.34610	0.32263	0.28564	0.24248
	+ 30°	0.27752	0.30966	0.33253	0.34532	0.34880	0.34363	0.32956	0.30613	0.27412
	+ 20°	0.30114	0.32009	0.33067	0.33456	0.33479	0.33292	0.32772	0.31645	0.29745
	+ 10°	0.31559	0.32112	0.31971	0.31531	0.31259	0.31376	0.31685	0.31747	0.31172
	0	0.32046	0.31261	0.29981	0.28793	0.28262	0.28652	0.29714	0.30905	0.31654
	- 10°	0.31559	0.29483	0.27171	0.25318	0.24568	0.25194	0.26928	0.29147	0.31172
	- 20°	0.30114	0.26831	0.23614	0.21219	0.20300	0.21115	0.23403	0.26525	0.29745
	- 30°	0.27752	0.23397	0.19434	0.16645	0.15615	0.16563	0.19260	0.23131	0.27412
	- 40°	0.24548	0.19282	0.14789	0.11784	0.10634	0.11726	0.14657	0.19063	0.24248
	- 50°	0.20599	0.14636	0.09881	0.06902	0.05898	0.06868	0.09793	0.14469	0.20347
	- 60°	0.16023	0.09636	0.05007	0.02440	0.01671	0.02428	0.04963	0.09526	0.15826
	- 70°	0.10960	0.04553	0.00834				0.00826	0.04501	0.10826
	- 80°	0.05564	0.00230						0.00227	0.05496
- 90°										
Date	1874									
	Mars 20.776	Avr. 12.606	Mai 5.728	Mai 29.100	Juin 21.610	Juill. 15.224	Août 7.760	Août 31.122	Sept. 23.222	

Tableau II (suite)

Quantités de radiation diurnes, atteignant la limite supérieure de l'atmosphère
(d'après Wiener)

Longitude du Soleil		180°	202° 30'	225°	247° 30'	270°	292° 30'	315°	337° 30'	360°
Latitude géographique	+ 90°								0·00236	0·05565
	+ 80°	0·05496	0·00233							
	+ 70°	0·10826	0·04616	0·00866				0·00873	0·04671	0·10962
	+ 60°	0·15826	0·09769	0·05199	0 02580	0·01784	0·02592	0 05245	0·09886	0·16026
	+ 50°	0·20347	0·14838	0·10260	0·07300	0·06300	0·07333	0·10350	0·15016	0·20603
	+ 40°	0·24248	0·19506	0·15356	0·12462	0·11359	0·12521	0·15492	0·19784	0·24553
	+ 30°	0·27412	0·23731	0·20180	0·17604	0·16678	0·17686	0·20358	0·24006	0 27757
	+ 20°	0·29745	0·27202	0·24521	0·22442	0·21684	0·22547	0·24737	0·27528	0·30120
	+ 10°	0·31172	0·29891	0·28214	0·26778	0·26243	0·26903	0·28462	0·30249	0·31565
	0	0·31654	0·31694	0·31132	0·30453	0 30188	0·30595	0·31407	0·32074	0·32052
	- 10°	0·31172	0·32557	0·33198	0·33347	0·33389	0·33504	0·33490	0·32947	0·31565
	- 20°	0·29745	0·32452	0·34336	0·35384	0·35759	0·35549	0·34638	0·32841	0·30120
	- 30°	0·27412	0·31394	0·34529	0·36523	0·37257	0·36693	0·34834	0·31771	0·27757
	- 40°	0·24248	0·29293	0·33802	0·36786	0·37902	0·36958	0·34101	0·29644	0·24553
	- 50°	0·20347	0·26595	0·32243	0·36284	0·37826	0·36454	0·32528	0·26914	0·20603
	- 60°	0·15826	0·23060	0·30053	0·35349	0·37426	0·35514	0·30317	0·23337	0·16026
	- 70°	0·10826	0·19037	0·27833	0·35557	0·38674	0·35722	0·28078	0·19310	0·10962
	- 80°	0·05496	0·15347	0·28261	0·37263	0·40529	0·37437	0·28510	0·15531	0·05565
- 90°		0·15347	0·28697	0·37838	0·41155	0·38015	0·28950	0·15531		
Date		1874 Sept. 23·222	Oct. 16·038	Nov. 7·562	Nov. 29·853	Dec. 21·953	1875 Jan. 13·043	Feb. 4·181	Feb. 26·479	Mars 21·014

APPLICATIONS.

atmosphérique. Il pose donc

$$\begin{cases} \text{pour } \varphi = 0; & \delta = 0; & \varrho = 1; & p = 1 \\ W_{\tau}' = 1000. \end{cases}$$

A ces valeurs correspond, d'après (6) et (33),

$$z = \omega; \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

de sorte qu'on a, en tenant compte de (134), (135) et (141),

$$1000 = \frac{\tau}{2\pi} I_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \omega \, d\omega = \frac{\tau}{\pi} I_0.$$

Nous avons donc pour W_{τ}' , exprimé en unités d'Angot,

$$W_{\tau}' = \frac{1000}{2} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} p^{\sec z} \cos z \, d\omega.$$

Puisqu'on a $\tau = 24 \times 60$ minutes et $\frac{\tau}{1000\pi} I_0 = 0.4584 I_0$, il s'ensuit que les nombres d'Angot représenteraient des calories si la constante solaire était égale à $\frac{1}{0.4584} = 2.18$.

Nous reproduisons dans le tableau III les nombres d'Angot.

Si l'on voulait réduire ces nombres aux mêmes unités que celles du tableau II il faudrait poser $I_0 = 1$, $\tau = 1$, d'où il s'ensuivrait, d'après (134) et (141),

$$W_{\tau}' = \frac{1}{\varrho^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} p^{\sec z} \cos z \, d\omega,$$

c'est-à-dire qu'on devrait diviser les nombres d'Angot par $1000\pi\varrho^2$.

Les chiffres exposés peuvent être également utilisés pour le calcul des quantités diurnes de radiation solaire directe et diffuse W_{τ}''

Tableau III

Quantités de radiation diurnes, transmises jusqu'au sol; $p = 0.6$
(d'après Angot)

Déclinaison du Soleil	Latitude nord									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
+ ε	432	497	540	559	554	523	472	406	359	347
+ 22°	440	500	538	552	541	505	448	376	318	301
+ 20°	450	503	535	541	522	479	415	339	265	241
+ 16°	467	508	524	517	484	427	352	261	173	136
+ 12°	481	509	512	490	443	375	291	195	104	56
+ 8°	491	506	495	459	401	324	234	138	54	11
+ 4°	497	498	474	427	358	274	181	90	22	0
0°	499	487	450	391	315	225	134	52	6	0
- 4°	497	472	423	355	271	179	92	25	0	0
- 8°	491	454	394	316	228	137	58	8	0	0
- 12°	481	431	361	277	186	99	31	1	0	0
- 16°	467	406	326	238	146	66	12	0	0	0
- 20°	450	378	290	199	110	39	2	0	0	0
- 22°	440	362	272	179	93	28	1	0	0	0
- ε	432	351	258	166	81	21	0	0	0	0

Tableau III (suite)

Quantités de radiation diurnes, transmises jusqu'au sol; $p = 0.7$
(d'après Angot)

Déclinaison du Soleil	Latitude nord									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
+ ε	536	609	660	683	682	654	604	542	514	511
+ 22°	544	613	657	675	667	632	575	506	462	454
+ 20°	556	616	653	662	646	603	536	460	393	379
+ 16°	575	621	641	634	601	541	461	363	269	237
+ 12°	590	621	626	602	554	481	387	279	171	118
+ 8°	601	617	606	568	506	421	318	206	98	34
+ 4°	607	609	582	532	456	362	253	142	45	1
0°	609	596	556	491	405	303	194	89	14	0
- 4°	607	580	526	448	354	248	140	47	2	0
- 8°	601	559	492	405	303	195	94	19	0	0
- 12°	590	534	455	361	254	147	55	4	0	0
- 16°	575	506	416	314	205	104	27	0	0	0
- 20°	556	474	375	268	159	66	8	0	0	0
- 22°	544	457	353	245	136	50	3	0	0	0
- ε	536	444	337	228	120	40	1	0	0	0

Tableau III (suite)

Quantités de radiation diurnes transmises jusqu'au sol; $p = 0.8$
(d'après Angot)

Déclinaison du Soleil	Latitude nord									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
+ ε	650	731	788	820	822	797	755	703	707	714
+ 22°	659	735	784	810	804	773	721	658	646	649
+ 20°	671	738	779	795	780	738	676	599	561	560
+ 16°	692	743	765	762	730	670	588	487	404	385
+ 12°	708	742	748	727	677	601	502	387	268	223
+ 8°	719	737	727	688	622	532	421	296	166	88
+ 4°	726	728	701	647	566	464	343	214	87	9
0°	728	714	671	602	509	397	271	143	33	0
- 4°	726	696	638	555	451	332	205	85	6	0
- 8°	719	673	600	505	392	268	145	40	0	0
- 12°	708	646	560	453	334	209	93	13	0	0
- 16°	692	615	515	401	278	154	51	1	0	0
- 20°	671	580	470	349	223	106	21	0	0	0
- 22°	659	561	446	321	197	84	10	0	0	0
- ε	650	548	428	302	178	70	5	0	0	0

Tableau III (suite)

Quantités de radiation diurnes transmises jusqu'au sol; $p = 0.9$
(d'après Angot)

Déclinaison du Soleil	Latitude nord									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
+ ε	776	864	928	966	977	962	929	899	944	960
+ 22°	786	867	924	955	956	933	890	847	876	888
+ 20°	798	870	918	938	929	894	837	776	779	790
+ 16°	819	874	902	902	872	815	736	643	588	591
+ 12°	836	873	882	863	813	738	638	522	411	394
+ 8°	847	867	858	820	752	660	545	411	271	205
+ 4°	855	857	830	774	690	584	456	311	160	48
0°	857	842	798	726	627	508	371	222	75	0
- 4°	855	822	761	674	563	433	290	145	23	0
- 8°	847	798	720	618	497	360	217	80	4	0
- 12°	836	769	676	562	430	290	149	32	0	0
- 16°	819	736	628	505	367	225	92	5	0	0
- 20°	798	699	577	446	304	163	45	0	0	0
- 22°	786	678	551	416	272	136	27	0	0	0
- ε	776	664	534	394	249	116	17	0	0	0

transmises par l'atmosphère dans un état de nébulosité moyenne. Dans ce but, en tenant compte de ce qui a été dit au N^o 17, et en partant des valeurs numériques de A et p_a communiquées au N^o précédent, on n'aurait qu'à multiplier par 0.60 les nombres du tableau III correspondant à $p = 0.80$.

44. -- Résumé des résultats précédents.

Pour pouvoir jeter un coup d'oeil sur l'ensemble des résultats précédents, nous représenterons axonométriquement les quantités diurnes de radiation contenues dans le tableau II. A cet effet, nous portons sur l'axe AB de la *figure 13* les longitudes du Soleil, sur l'axe AD les latitudes géographiques et dans la direction du troisième axe, normal au plan du quadrilatère $ABCD$, les valeurs correspondantes de la quantité diurne de radiation, à l'échelle jointe à la figure.

Les points terminaux de ces dernières longueurs forment une surface ondulée représentant les variations de la quantité diurne de radiation au cours d'une année. En même temps cette surface représente également les variations des moyennes insolation w des divers parallèles au cours d'une année, car ayant posé $\tau = 1$ dans le tableau II, il s'ensuit, d'après (48), que les longueurs portées sont égales à w .

Cette représentation graphique nous montre ce qui suit.

Pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire à l'équinoxe de printemps, on a, d'après (7), (28) et (33), $\delta = 0$; $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ et, comme on a posé $I_0 = 1$; $\tau = 1$, il s'ensuit, d'après (30) et (37),

$$W_\tau = w = \frac{1}{\pi Q^2} \cos \varphi,$$

c'est-à-dire que la courbe AED est une simple cosinusoïde. A ce moment la distribution méridionale de la quantité diurne de radiation et de la moyenne insolation du parallèle suit une loi simple : les deux quantités sont proportionnelles au cosinus de la latitude

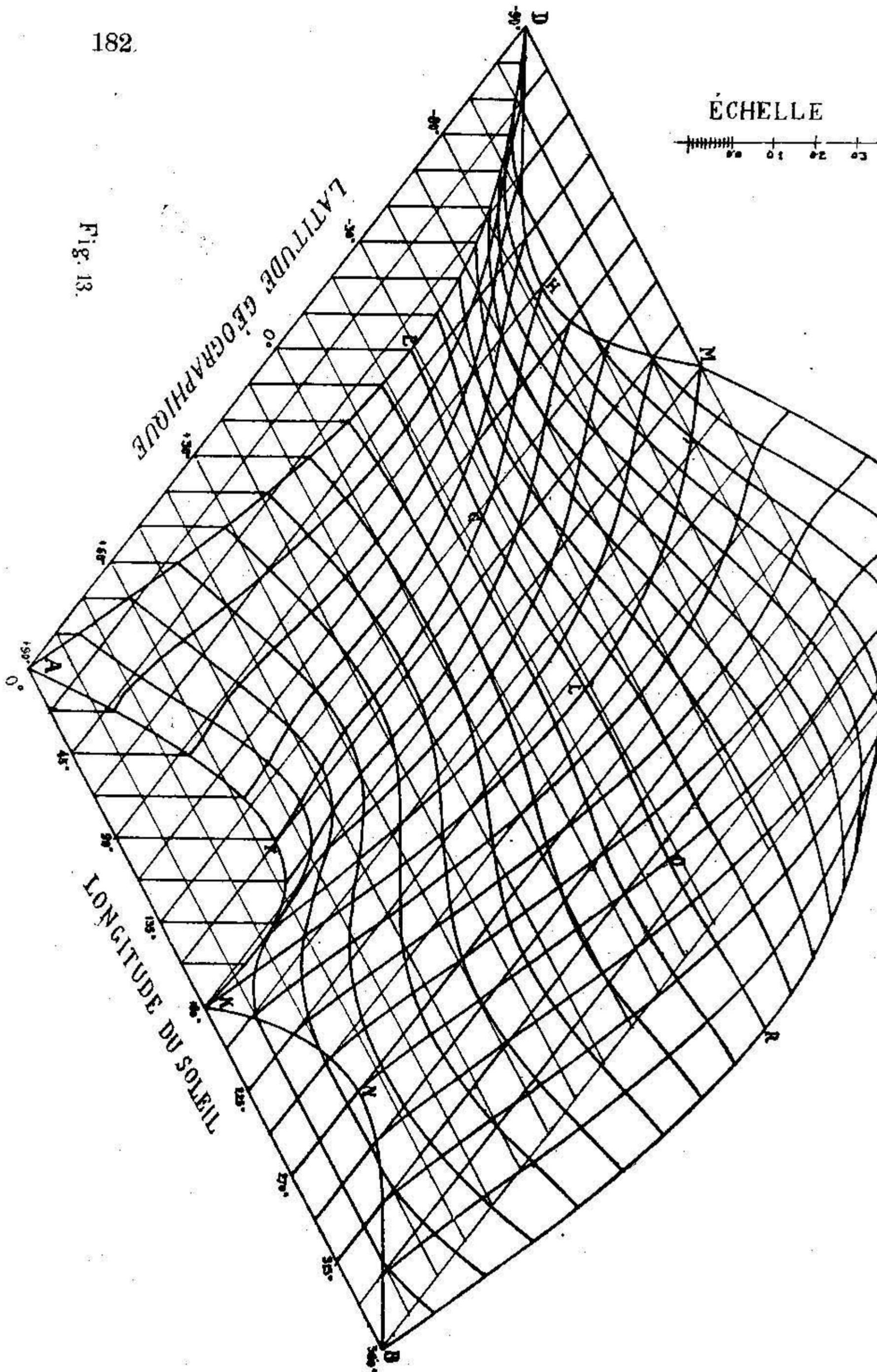


Fig. 13.

géographique, atteignent leur maximum à l'équateur pour disparaître aux deux pôles.

Cette distribution simple change vite avec la longitude du Soleil : autour du pôle austral il se forme une calotte, qui est à l'abri de la radiation solaire, dont les dimensions augmentent constamment jusqu'au moment du solstice d'été boréal. Le maximum de la radiation diurne se déplace de l'équateur vers le nord et l'insolation des régions polaires boréales augmente rapidement. Dans ces régions où le Soleil ne se couche pas au cours de la journée, la radiation diurne est donnée, d'après (38) et (7), par

$$W_r = \frac{\sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda}{\rho^2},$$

c'est-à-dire que, dans cette zone, la quantité diurne de radiation reçue par le pôle est plus grande que celle reçue par aucun des points environants. Il se forme donc au pôle un maximum relatif de radiation diurne, et la surface représentée par la *figure 13* présente, à partir de la courbe A F K, une légère inflexion contenant le minimum de la radiation diurne, qui s'éloigne de plus en plus du pôle. Le 25 mai, le pôle boréal est le point recevant la plus grande quantité diurne de radiation parmi tous les points de l'hémisphère boréal, c'est-à-dire qu'il devient le maximum absolu, remplaçant celui de la zone équatoriale, qui s'est déplacé de l'équateur jusqu'au 36° degré de latitude en devenant un maximum relatif.

Pour $\lambda = 90^\circ$, c'est-à-dire à l'époque du solstice d'été, la distribution de la radiation diurne est représentée par la courbe F G H. Le pôle boréal obtient son maximum de radiation diurne de 0.385 unités, tandis que le maximum relatif de 0.355 unités se trouve à la latitude de 43° 33' 34". Le minimum de l'hémisphère boréal s'est avancé jusqu'à la latitude de 61° 52' 16" et a atteint la valeur de 0.350 unités. Dans l'hémisphère austral la radiation diurne diminue rapidement à mesure qu'on s'approche du pôle, pour devenir nulle au cercle polaire; toute la zone antarctique est à l'abri de la radiation solaire.

A partir de ce moment la radiation diurne reçue par le pôle boréal décroît et son minimum commence à s'approcher de celui-ci pour l'atteindre de nouveau à l'époque de l'équinoxe d'automne.

Le 19 juillet, le maximum absolu passe du pôle boréal au 36° degré de latitude nord, se déplaçant vers l'équateur à mesure que la longitude du Soleil croît, pour l'atteindre à l'équinoxe d'automne. A ce moment, la calotte de l'hémisphère austral, privée de radiation solaire a complètement disparu et la distribution de la radiation diurne est représentée par une simple cosinusoïde K L M. Celle-ci n'est pas congrue à la ligne A E D, les valeurs du rayon vecteur ρ pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 180^\circ$ n'étant pas égales.

A partir de cette époque, le maximum de la radiation diurne se déplace de l'équateur vers le sud; autour du pôle boréal se forme une calotte dépourvue de radiation, tandis que le pôle austral en reçoit de plus en plus formant un maximum relatif qui devient du 25 novembre au 17 janvier le maximum absolu. A cette dernière date le maximum absolu passe au 36° degré de latitude sud et se déplace vers l'équateur qu'il atteint à l'équinoxe d'automne. Le minimum de la radiation diurne de l'hémisphère austral se déplace au fond de la gouttière visible sur la *figure 13*, atteint sa plus basse latitude de $61^\circ 52' 16''$ au solstice et se retrouve à l'équinoxe de printemps au pôle austral.

Pour $\lambda = 270^\circ$, c'est-à-dire au solstice d'hiver, la distribution de la radiation diurne est représentée par la courbe N O P qui est semblable à la courbe H G F en ayant toutefois les ordonnées plus allongées. Ainsi à cette époque la radiation diurne reçue par le pôle austral accuse la valeur de 0.412 unités, tandis que le maximum relatif (latitude $-43^\circ 33' 34''$) est égal à 0.380 unités. La cause de ce phénomène réside dans le fait que la Terre passe au périhélie pendant l'été austral et à l'aphélie pendant l'été boréal. C'est pourquoi l'insolation estivale de l'hémisphère austral est plus intense que celle de l'hémisphère boréal, tandis que l'insolation hivernale de l'hémisphère austral est encore plus modérée que celle de l'hémisphère boréal. Par conséquent, l'amplitude de la marche annuelle de l'insolation est plus accentuée sur l'hémisphère boréal que sur l'hémisphère austral.

Les intersections D H M et K N B de la surface ondulée représentée par la *figure 13* et du plan du quadrilatère A B C D sont données, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte, par l'équation (46). Les intersections de cette surface et des plans $\varphi = \text{constant}$ sont des lignes ondulées.

Pour $\varphi = 0$, on a, d'après (33) et (37),

$$W_{\tau} = \frac{1}{\pi} \frac{\cos \delta}{\rho^2}.$$

Pour l'excentricité nulle de l'orbite terrestre, c'est-à-dire pour $\rho = \text{constant}$, la courbe E G L O R (*fig. 13*), représentée par l'équation précédente, serait une ligne à deux ondes avec deux maxima égaux qui ont lieu pour $\delta = 0$, c'est-à-dire aux époques des équinoxes, et deux minima égaux qui ont lieu pour $\delta = \pm \varepsilon$, c'est-à-dire aux époques des solstices. L'excentricité de l'orbite terrestre a pour conséquence que les deux maxima et respectivement les deux minima, ne sont pas égaux et qu'il n'ont pas lieu aux époques indiquées: ainsi le deuxième maximum est retardé du 23 septembre au 14 octobre.

A la latitude de 15° environ, la double période n'existe plus et, à partir de là, la radiation diurne ne présente plus qu'une simple onde à un seul maximum et un seul minimum, à l'époque des solstices. Aux cercles polaires, le minimum tombe à la valeur zéro qu'il garde pour les latitudes plus hautes, durant la longue nuit arctique, de sorte que les courbes mentionnées coïncident pour cet intervalle avec l'axe des abscisses. Pour $\varphi = \pm 90^{\circ}$, il résulte de (38), (7) et (52)

$$W_{\tau} = \pm k \frac{\sin \lambda}{\rho^2}.$$

A cause de la faible variabilité du rayon vecteur ρ , les courbes A F K et M P C, représentant l'équation précédente, ne diffèrent que peu des simples sinusoïdes; il leur manque, d'autre part, la partie au-dessous de l'axe des abscisses qui est remplacée par celui-ci.

Pour pouvoir jeter un coup d'oeil sur l'ensemble des variations que la distribution de la radiation diurne subit par l'effet de l'atmosphère, nous représenterons graphiquement une partie de résultats contenus dans le tableau III. Il n'y est pas tenu compte de la variabilité du rayon vecteur ρ , ce qui est sans conséquence quant à la comparaison des divers degrés de transmission des rayons solaires par l'atmosphère, l'intensité de la radiation transmise étant pour tous ces degrés proportionnelle à $\frac{1}{\rho^2}$.

Dans ce but, les quantités diurnes de radiation transmises aux époques des solstices jusqu'au sol et contenues dans le tableau III, sont portées en ordonnées dans la *figure 14*; les abscisses correspondantes représentent les latitudes. Les quantités correspondant

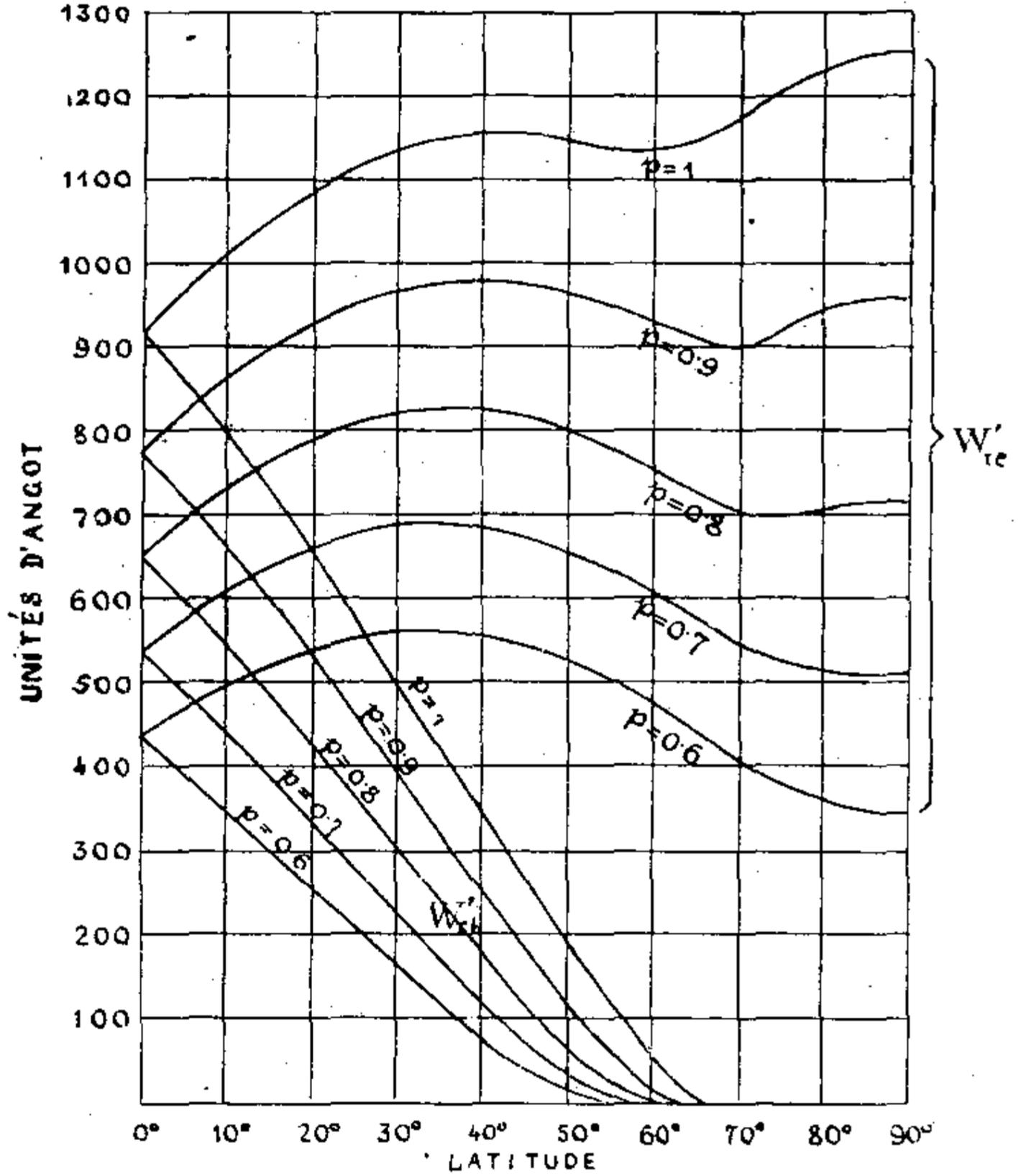


Fig. 14.

au solstice d'été sont marquées par W'_{re} , celles du solstice d'hiver par W'_{rh} . Pour compléter la comparaison, la figure contient aussi les radiations diurnes W_{re} et W_{rh} correspondant à $p = 1$, c'est-à-dire à l'absence de l'atmosphère.

Cette figure montre la façon dont l'influence de l'atmosphère se fait sentir à différentes latitudes. La radiation solaire atteignant la surface horizontale de la Terre ne diminue pas avec la croissance

de la distance zénithale uniquement à cause de l'augmentation de l'angle d'incidence, mais aussi parce que la route parcourue par les rayons solaires à travers l'atmosphère augmente de ce fait. Cet affaiblissement de la radiation solaire est d'autant plus sensible que le coefficient de transmission p est plus petit. Lorsque p diminue, l'influence de l'atmosphère se fait d'autant plus sentir que la latitude est plus haute. Ainsi, par exemple, en supposant l'atmosphère absente ou complètement transparente, c'est le pôle qui, au solstice d'été, est le point qui reçoit la plus grande radiation diurne, ce qui n'est plus le cas pour un coefficient de transmission de 0·9. Pour un coefficient de transmission égal à 0·7, le pôle, même au solstice d'été, reçoit moins de radiation diurne que toute autre latitude. Pour $0·8 \leq p \leq 0·9$, il se forme encore au dessus du pôle, au solstice d'été, un maximum relatif de radiation diurne; pour $p \leq 0·7$ le minimum de la radiation diurne ne s'éloigne plus du pôle.

Il serait faux d'admettre que la température suit cette forte diminution de radiation solaire directe, qui a lieu lorsqu'on s'approche du pôle. La chaleur absorbée par l'atmosphère n'est pas complètement perdue quant à son effet calorifique, car elle se retrouve en partie sous forme du rayonnement obscur que l'atmosphère envoie à la Terre.

45. — *Quantités de radiation reçues dans un intervalle quelconque de l'année.*

Lorsqu'il s'agit de calculer la quantité de radiation versée à une certaine latitude de la surface terrestre, en l'absence d'atmosphère, au cours d'un intervalle quelconque de l'année, on doit employer, à cet effet, les équations (81) et (82). Les valeurs numériques des coefficients $b_0, b_1, b_2 \dots$ de la formule (81) sont données par le tableau IV ci-joint, de cinq en cinq degrés jusqu'au soixante-quinzième degré inclus. Ainsi que le montre ce tableau, la série (81) converge très rapidement et seulement pour les latitudes au-dessus de 75^e degré un plus grand nombre de membres serait nécessaire. Mais, dans ce cas, l'intervalle du lever et du coucher

Tableau IV

φ	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0°	+ 0.9591	- 0.0413	- 0.0004	- 0.0000				
5°	+ 0.9558	- 0.0407	- 0.0004	- 0.0000				
10°	+ 0.9458	- 0.0393	- 0.0004	- 0.0000				
15°	+ 0.9293	- 0.0369	- 0.0004	- 0.0000				
20°	+ 0.9065	- 0.0334	- 0.0003	- 0.0000				
25°	+ 0.8777	- 0.0289	- 0.0002	- 0.0000				
30°	+ 0.8429	- 0.0232	- 0.0001	+ 0.0000				
35°	+ 0.8028	- 0.0163	+ 0.0001	+ 0.0000				
40°	+ 0.7577	- 0.0081	+ 0.0002	+ 0.0000				
45°	+ 0.7084	+ 0.0018	+ 0.0005	+ 0.0000				
50°	+ 0.6558	+ 0.0138	+ 0.0009	+ 0.0000				
55°	+ 0.6014	+ 0.0286	+ 0.0014	+ 0.0001	+ 0.0000			
60°	+ 0.5455	+ 0.0477	+ 0.0024	+ 0.0002	+ 0.0000			
65°	+ 0.4932	+ 0.0746	+ 0.0045	+ 0.0005	+ 0.0001	+ 0.0000		
70°	+ 0.4540	+ 0.1223	+ 0.0123	+ 0.0024	+ 0.0005	+ 0.0002	+ 0.0000	
75°	+ 0.6161	+ 0.3312	+ 0.1029	+ 0.0382	+ 0.0111	+ 0.1013	+ 0.0003	+ 0.0000

quotidien du Soleil est très court, si bien qu'on peut facilement calculer, pour cette partie de l'année, les radiations diurnes W_τ et en faire la somme; pour le reste de l'année on peut se servir de l'équation simple (82).

Les quantités de radiation versées au cours des saisons astronomiques sont d'un intérêt tout particulier. Ces quantités peuvent être facilement calculées d'après le procédé donné au N° 9, en employant les valeurs numériques données ci-joint des coefficients b_0, b_1, b_2, \dots . On trouvera au tableau V les valeurs numériques de W_e, W_h, W_τ , données pour chaque cinquième degré de latitude. Elles représentent les quantités de radiation versée à diverses latitudes pendant la saison chaude (de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne), pendant la saison froide (de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps) et pendant l'année entière.

Dans le calcul des ces valeurs nous avons — ainsi que nous l'avons déjà fait dans le calcul du tableau II — posé

$$I_0 = 1 \quad \text{et} \quad T = 1.$$

Il s'ensuit que la valeur W_τ représente en réalité la quantité moyenne de radiation reçue par unité de temps au cours de l'année,

Tableau V.

Quantités de radiation atteignant la limite supérieure de l'atmosphère.

φ	Saison chaude	Saison froide	Année entière
	W_e	W_h	W_T
0°	0.1527	0.1527	0.3053
5°	0.1577	0.1466	0.3043
10°	0.1616	0.1396	0.3011
15°	0.1643	0.1315	0.2959
20°	0.1660	0.1227	0.2886
25°	0.1665	0.1129	0.2794
30°	0.1658	0.1025	0.2683
35°	0.1641	0.0914	0.2556
40°	0.1613	0.0799	0.2412
45°	0.1576	0.0680	0.2255
50°	0.1529	0.0558	0.2088
55°	0.1476	0.0438	0.1915
60°	0.1417	0.0320	0.1737
65°	0.1359	0.0211	0.1570
70°	0.1319	0.0128	0.1446
75°	0.1294	0.0070	0.1364
80°	0.1279	0.0031	0.1310
85°	0.1270	0.0007	0.1277
90°	0.1267	0	0.1267

en prenant pour unité de radiation la constante solaire. Lorsque la constante solaire contient I_0 gramme-calories par cm^2 et par minute, on doit multiplier les valeurs W_T par I_0 pour obtenir la quantité de radiation, mesurée en gramme-calories, reçue en moyenne par minute et par cm^2 au cours d'une année.

En multipliant respectivement les valeurs W_e et W_h par $\frac{T}{T_e} I_0$ et $\frac{T}{T_h} I_0$, T_e représentant la durée de la saison chaude et T_h celle de la saison froide, on obtient les quantités moyennes de radiation versées par minute et par cm^2 au cours de ces demi-années.

On calcule les valeurs T_e et T_h à l'aide de (109) en posant $T = 365.24$ jours et en se servant des valeurs de e et ε données au N° 43. On obtient de cette manière:

$$T_e = 186 \text{ jours } 11 \text{ heures}$$

$$T_h = 178 \text{ jours } 19 \text{ heures,}$$

c'est-à-dire que l'hémisphère boréal a une saison estivale plus longue de 7 jours 16 heures que sa saison hivernale; pour l'hémisphère austral, c'est exactement l'inverse qui a lieu. Puisque chacun de deux hémisphères reçoit pour une même saison la même quantité de radiation, il s'ensuit que l'hémisphère boréal reçoit pendant la saison estivale par jour moins de calories que l'hémisphère austral; pendant la saison hivernale, c'est l'inverse qui a lieu.

Si l'on tient compte de l'atmosphère, les valeurs W_e' , W_h' et W_T' ne peuvent être calculées, ainsi qu'il a été montré au N^o 16, qu'à l'aide de la quadrature mécanique. Angot a effectué le calcul laborieux dont les résultats ont été publiés dans son mémoire que nous avons cité sous.⁴⁸⁾ Ses calculs se rapportent à chaque dixième degré de latitude et aux coefficients de transmission 0.6, 0.7, 0.8 et 0.9. Cet auteur prend pour unité la quantité de radiation que reçoit l'unité de surface à l'équateur, à l'époque des équinoxes, en supposant l'atmosphère absente et la Terre à la distance moyenne du Soleil. Cette unité est 1000-fois plus grande que celle nous ayant servi à établir le tableau III. Angot pose donc $\frac{\tau}{\pi} I_0 = 1$. Dans le tableau VI nous avons converti les nombres d'Angot en unités qui nous ont servi dans le tableau V, c'est-à-dire que nous avons pris $\tau = \frac{1}{365.24}$; $I_0 = 1$. Il s'ensuit qu'on obtient du tableau VI les valeurs données par Angot en multipliant les nombres qu'il contient par 365.24π .

La *figure 15* donne une représentation graphique des résultats contenus dans les tableaux V et VI. On y voit nettement l'influence de l'atmosphère, dont il a été longuement question dans les N^{os} précédents. Les quantités de radiation transmises jusqu'au sol décroissent rapidement à l'approche du pôle si bien que celui-ci ne reçoit, pour un coefficient de transmission égal à 0.6, que la cinquième partie de la radiation annuelle qui atteint, à cet endroit, la limite supérieure de l'atmosphère.

46. — *Le climat terrestre en supposant l'atmosphère absente.*

Il n'est pas sans intérêt de répondre à la question de savoir quel serait le climat de la Terre si la surface de celle-ci était partout

Tableau VI

Quantités de radiation transmises jusqu'au sol pour différents coefficients de transmission (d'après Angot).

φ	$p = 0.6$			$p = 0.7$		
	W'_e	W'_h	W'_T	W'_e	W'_h	W'_T
0°	0.0742	0.0742	0.1484	0.0912	0.0912	0.1824
10°	0.0800	0.0651	0.1451	0.0968	0.0810	0.1788
20°	0.0819	0.0532	0.1351	0.1003	0.0675	0.1678
30°	0.0802	0.0397	0.1199	0.0986	0.0521	0.1507
40°	0.0746	0.0258	0.1004	0.0929	0.0354	0.1283
50°	0.0655	0.0134	0.0789	0.0833	0.0200	0.1033
60°	0.0539	0.0049	0.0588	0.0706	0.0080	0.0786
70°	0.0405	0.0010	0.0415	0.0561	0.0021	0.0582
80°	0.0292	0.0000	0.0292	0.0439	0.0001	0.0440
90°	0.0247		0.0247	0.0392		0.0392

φ	$p = 0.8$			$p = 0.9$		
	W'_e	W'_h	W'_T	W'_e	W'_h	W'_T
0°	0.1098	0.1098	0.2196	0.1300	0.1300	0.2600
10°	0.1170	0.0985	0.2155	0.1379	0.1178	0.2557
20°	0.1200	0.0836	0.2036	0.1417	0.1016	0.2433
30°	0.1189	0.0661	0.1850	0.1410	0.0828	0.2238
40°	0.1131	0.0473	0.1604	0.1356	0.0617	0.1973
50°	0.1033	0.0285	0.1318	0.1261	0.0400	0.1661
60°	0.0903	0.0127	0.1030	0.1135	0.0198	0.1333
70°	0.0751	0.0038	0.0789	0.0992	0.0068	0.1060
80°	0.0638	0.0003	0.0641	0.0906	0.0010	0.0916
90°	0.0594		0.0594	0.0881		0.0881

solide et privée de son enveloppe gazeuse. Les résultats du troisième chapitre de la première partie de cet ouvrage nous mettent en état de donner une réponse plus complète qu'il n'a été fait jusqu'à présent.⁴⁹⁾

Nous avons montré aux Nos 22 et 24, que lorsqu'il s'agit de déterminer les moyennes températures annuelles des parallèles, il est permis d'admettre que ceux-ci sont exposés à leurs moyennes insolation annuelles W_m .

On obtient ces insolation, mesurées en gramme-calories par cm^2 et par minute, en multipliant les nombres contenus dans la

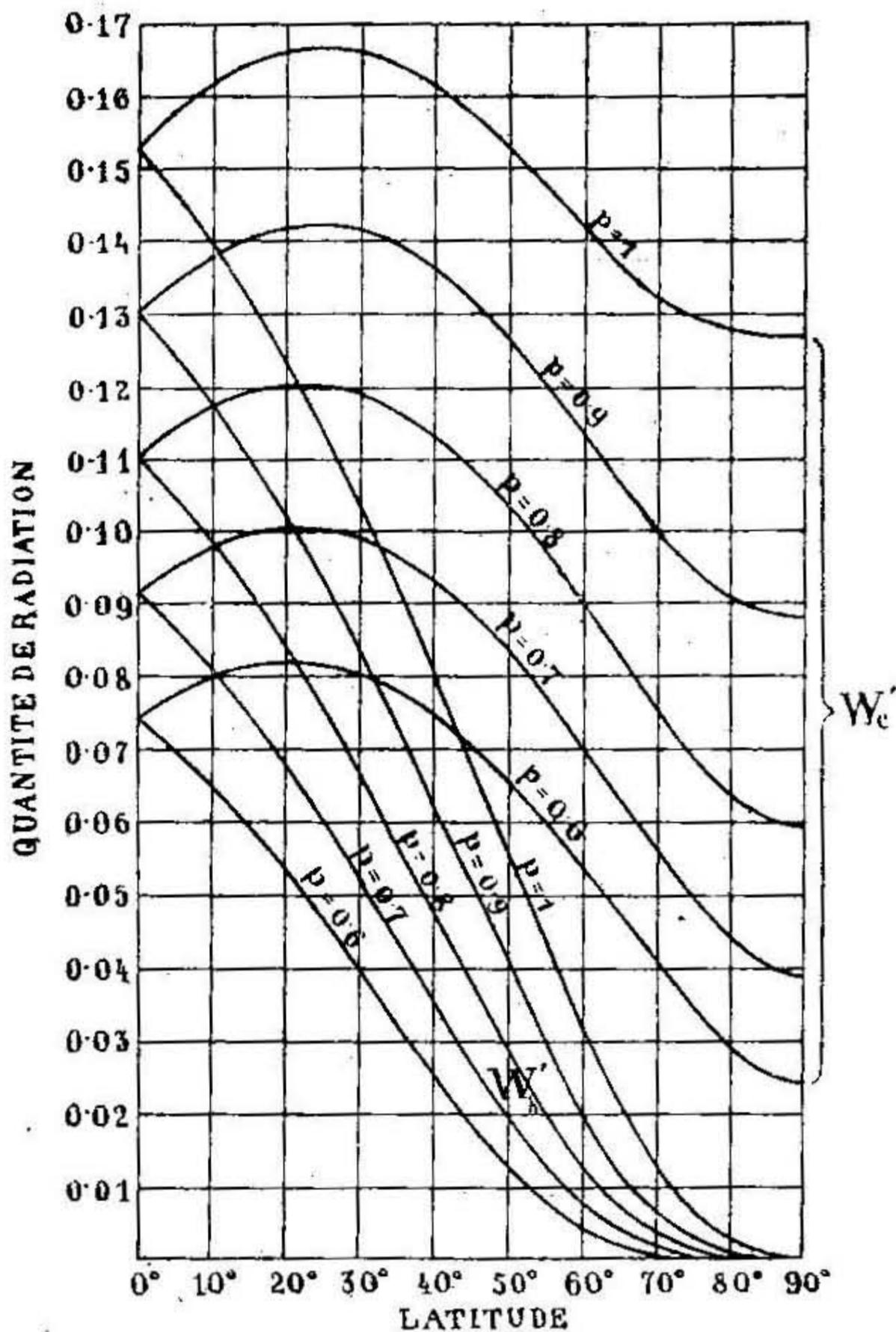


Fig. 15.

dernière colonne du tableau V par la valeur numérique 2 de la constante solaire. De ces radiations, la surface terrestre absorbe la fraction $a_p W_m$, où on doit poser, d'après le bilan calorique d'Abbot et Fowle déjà cité sous,⁴²⁾

$$a_p = 0.92.$$

En plus de ces quantités de chaleur, il parvient à la surface de la Terre celle qui lui est transmise de son intérieur par la conductibilité du sol. Cette quantité de chaleur est représentée, d'après (252), par

$$\frac{dQ_c}{dt} = K g_T,$$

où K désigne le coefficient de conductibilité de chaleur du sol et g_T le gradient de la température annuelle dans les couches superficielles de la Terre. En ce qui concerne ces deux valeurs nous en avons les renseignements suivants.

Les oscillations de température à la surface de la Terre ne se propagent que jusqu'à une profondeur peu considérable, 30 mètres à peine. A de plus grandes profondeurs, la température ne subit plus de variations temporaires; elle ne varie que avec l'endroit dans ce sens qu'elle augmente avec la profondeur. Cet accroissement de température avec la profondeur est différent selon le lieu, mais il est en général proche d'une valeur moyenne, de façon qu'on peut admettre, d'après les constatations faites à ce sujet dans les mines, qu'à une augmentation de 35 mètres de profondeur (degré géothermique) correspond en moyenne un accroissement de température d'un degré.⁵⁰⁾ On peut donc poser avec une approximation suffisante

$$g_T = 0.000286 \text{ degrés centésimaux par cm.}$$

La valeur K dépend, par l'intermédiaire de l'équation (215), du coefficient de conductibilité de température m^2 qui peut être, d'après ce qui a été dit au N^o 26, déterminé par l'observation des variations de la température du sol. De telles observations ont été faites jusqu'à présent en grand nombre et ont donné des résultats assez discordants selon la nature du sol.⁵¹⁾ En tout cas, on peut prendre comme moyenne

$$m^2 = 0.70 \frac{\text{cm}^2}{\text{minute}}.$$

De même, la capacité calorifique du sol, représentée par (214), est également très différente. On peut prendre comme moyenne environ 0.43 gramme-calories par cm^3 , c'est-à-dire qu'on a

$$K = 0.30 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}}.$$

Le flux calorique constant s'écoulant des profondeurs de la Terre vers sa surface est, par conséquent, égal à

$$\frac{dQ_c}{dt} = 0.0000858 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}}.$$

Cette quantité de chaleur est tellement petite par rapport à celle que le Soleil envoie et que la Terre absorbe, qu'on peut employer pour le calcul numérique des moyennes températures annuelles des parallèles l'équation (210). Celle-ci, en relation avec (205), fournit les valeurs numériques des températures exposées dans le tableau VII.

Tableau VII

Moyennes températures annuelles des parallèles en l'absence de l'atmosphère.
(graduation centigrade)

Latitude	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Température	+ 26.4	+ 25.4	+ 22.2	+ 16.9	+ 9.3	- 0.7	- 13.0	- 24.6	- 30.7	- 32.7

On obtient la moyenne température annuelle u_m de toute la surface terrestre en multipliant la moyenne température annuelle u_φ correspondant à la latitude φ par l'aire $2\pi r^2 \cos \varphi d\varphi$ de la zone contiguë, infiniment étroite, puis en prenant l'intégrale de cette expression pour toute la sphère et en divisant le résultat par la surface $4\pi r^2$ de cette sphère. On a donc

$$u_m = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} u_\varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Pour le calcul numérique de cette expression, employons la formule de Simpson exposée au N° 16. Divisons, dans ce but, l'intervalle π en 18 parties égales et désignons par $y_0, y_1, y_2 \dots y_{18}$ les valeurs de $u_\varphi \cos \varphi$ correspondant à $\varphi = -\frac{\pi}{2}, \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{18}\right),$

$\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{18} \right) \dots, + \frac{\pi}{2}$, nous obtenons, puisqu'on a $y_0 = y_{18} = 0$,

$$y_1 = y_{17}, y_2 = y_{16} \dots y_8 = y_{10},$$

$$u_m = \frac{\pi}{27} \left\{ (y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_9) + 2(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) \right\}.$$

De cette manière on obtient une température moyenne de toute la surface terrestre

$$u_m = + 10.4^\circ.$$

Cette valeur ne diffère pas beaucoup de la moyenne température actuelle de la surface terrestre qui est de 15° environ. Si la surface terrestre était partout solide, sa moyenne température dépasserait à peine 20° .⁵²⁾ Même dans ce cas, l'absence d'atmosphère n'aurait pas, même de loin, l'influence qu'on a cru pouvoir lui attribuer.⁵³⁾ L'action protectrice de l'atmosphère est en majeure partie compensée par les pertes qu'elle inflige par réflexion à l'insolation de la surface terrestre.

L'absence d'atmosphère exercerait une influence plus considérable sur la marche diurne de la température. A l'insolation diurne intense qui ne serait pas troublée par l'atmosphère, suivrait un fort refroidissement nocturne, celui-ci n'étant atténué par aucune radiation de sens contraire. A une journée torride succéderait une nuit glaciale et les oscillations diurnes de la température seraient plus fortes qu'en présence de l'atmosphère. Nous allons en donner un exemple numérique.

L'amplitude de l'insolation diurne atteint sa valeur maxima à l'équateur et disparaît complètement au pôle, où il n'existe point de marche diurne d'insolation, la rotation de la Terre ne changeant pas l'altitude du Soleil au-dessus de l'horizon. C'est pourquoi nous allons calculer la moyenne annuelle de la marche diurne de la température à l'équateur.

Imaginons à cet effet le Soleil à la distance moyenne de la Terre et dans le plan équatorial et attribuons aux rayons solaires une intensité telle que l'insolation moyenne diurne soit égale à la moyenne annuelle.

Nous posons donc $\varrho = 1$; $\delta = 0$; $\varphi = 0$, de façon que nous obtenons d'après (37) pour l'insolation moyenne diurne

$$\frac{W_z}{\tau} = \frac{B}{\pi}.$$

Cette valeur doit être égale à la moyenne insolation annuelle qui est égale, d'après le tableau V, à 2×0.3053 gramme-calories par cm^2 et minute. On a par conséquent

$$\frac{B}{\pi} = 0.6106 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}}.$$

C'est à l'aide de cette valeur que nous avons calculé les coefficients a_0, a_1, a_2, \dots de la série de Fourier donnée par (304) cette série représentant la marche diurne de l'insolation. Les coefficients b_1, b_2, b_3, \dots de cette série disparaissent.

La température de la surface terrestre est représentée, eu égard à (263), (264) et (265), par

$$u(0, t) = u_0 + \sum_n A_n \cos \left(\frac{2n\pi}{\tau} t - \varepsilon_n \right),$$

$$\text{tang } \varepsilon_n = \frac{\frac{K}{a_p m} \sqrt{\frac{n\pi}{\tau}}}{h + \frac{K}{a_p m} \sqrt{\frac{n\pi}{\tau}}},$$

$$A_n = \frac{a_n}{\sqrt{h^2 + 2h \frac{K}{a_p m} \sqrt{\frac{n\pi}{\tau}} + 2 \frac{K^2}{a_p^2 m^2} \frac{n\pi}{\tau}}},$$

où τ représente la durée de la journée, c'est-à-dire

$$\tau = 1440 \text{ minutes}$$

et où on doit poser, d'après le tableau VII,

$$u_0 = 26.4^\circ.$$

h est donné par (223) et (205) et nous obtenons, à l'aide des valeurs précédentes de a_p, m^2 et K , l'expression suivante de la marche diurne de la température à l'équateur. Dans cette expression nous avons introduit, comme variable indépendante, l'angle horaire ω du Soleil, donné par (34).

$$\begin{aligned} u(0, t) = & 26.4 + 29.94 \cos(\omega - 34^\circ 37' 38'') + \\ & + 9.57 \cos(2\omega - 37^\circ 12' 42'') - 1.42 \cos(4\omega - 39^\circ 14' 51'') + \\ & + 0.50 \cos(6\omega - 40^\circ 12' 33'') - 0.25 \cos(8\omega - 40^\circ 48' 7'') + \\ & + 0.14 \cos(10\omega - 41^\circ 12' 54'') - 0.09 \cos(12\omega - 41^\circ 31' 26'') + \\ & + 0.06 \cos(14\omega - 41^\circ 45' 58'') - 0.04 \cos(16\omega - 41^\circ 57' 50''). \end{aligned}$$

A l'aide de cette formule, nous avons calculé les températures contenues dans le tableau suivant pour chaque 45^e degré de l'angle horaire, ou bien pour chaque troisième heure de la journée. Comme il s'agissait de la moyenne annuelle, il était permis d'identifier l'heure vraie avec l'heure moyenne.

Tableau VIII

Marche diurne de la température à l'équateur en absence d'atmosphère
(graduation centigrade)

Heure	Minuit	3 ^h	6 ^h	9 ^h	Midi	3 ^h	6 ^h	9 ^h
Température	8.5	3.4	-0.1	26.2	57.8	62.3	33.9	17.5

Afin de pouvoir mieux les embrasser d'un coup d'œil, ces résultats sont représentés par le graphique *fig. 16*, qui nous montre que la température atteint son maximum de 64° un peu après 2 heures

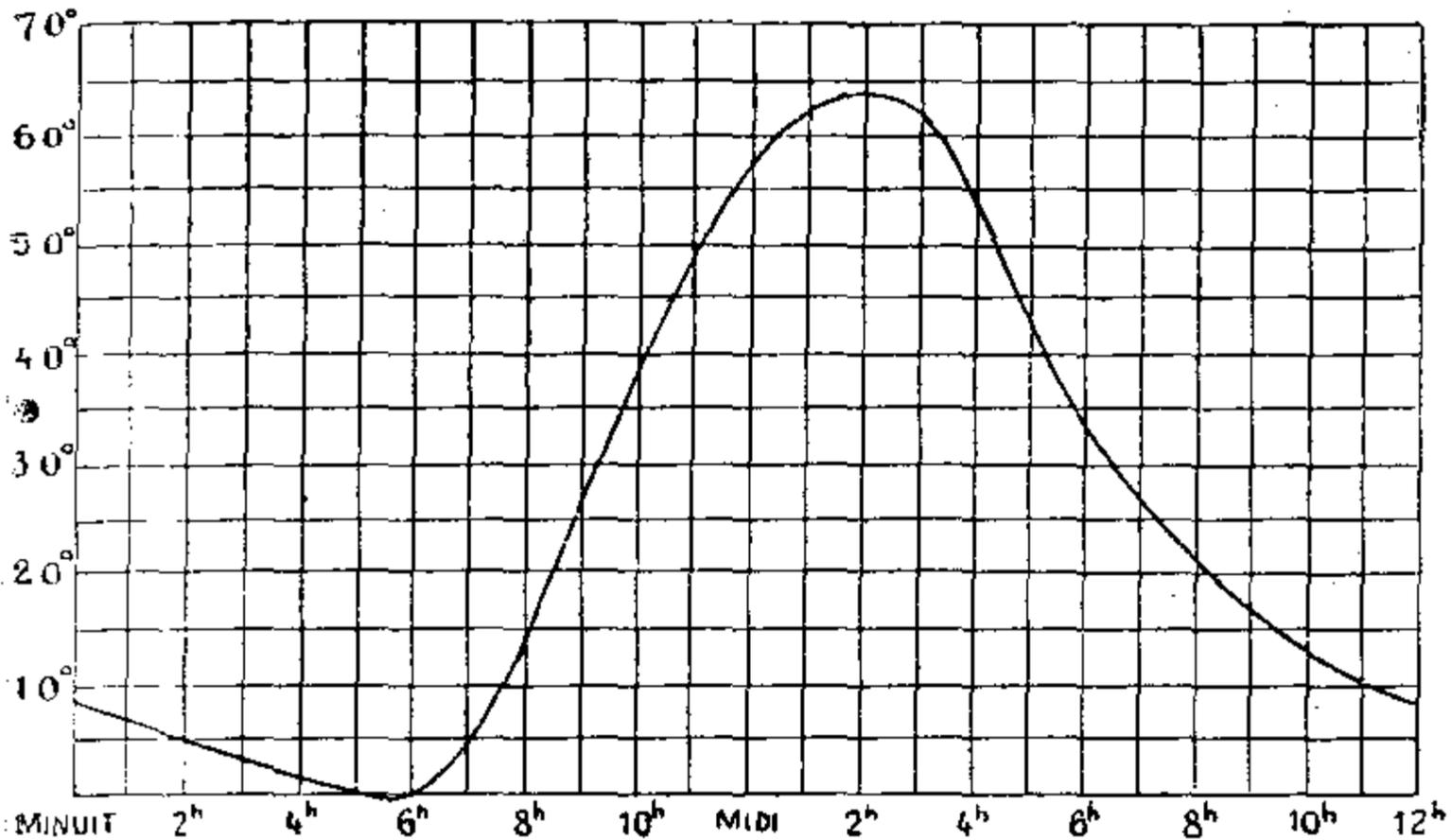


Fig. 16.

de l'après midi et son minimum de -0.1° à six heures du matin c'est-à-dire au moment du lever du Soleil. L'amplitude diurne est donc 64°.

Nous avons remplacé dans le calcul précédent la parabole biquadratique A B C D de la *fig. 12*, représentant la loi d'émission, par une droite TT' tangente à cette parabole au point C (pour lequel on

a $u = 26.4^{\circ}$). Les écarts de ces deux lignes ne sont pas grands pour le précédent intervalle de température. Si nous avons renoncé à la simplification précédente en faisant usage du procédé exposé au N^o 26, nous aurions obtenu une oscillation de température ayant une amplitude un peu plus forte.

De même, la marche annuelle de la température accuserait en absence d'atmosphère de plus fortes amplitudes qu'en sa présence. Ces amplitudes atteindraient leurs plus grandes valeurs numériques aux pôles, où les insolation au solstice d'été sont les plus fortes et qui sont, d'autre part, durant tout l'hiver à l'abri du Soleil. Cette longue nuit hivernale abaissera considérablement la température de ces lieux, mais — contrairement à ce qui a été souvent avancé — elle n'atteindra pas le zéro absolu. Premièrement, le flux calorifique s'écoulant sans cesse de l'intérieur de la Terre serait lui seul en état de maintenir la température de la surface terrestre à environ 33 degrés absolus; ensuite, pendant l'été, une quantité très considérable de chaleur emmagasinée par le sol, s'écoule vers sa surface au cours de l'hiver. Nous pourrions suivre numériquement ce phénomène à l'aide du procédé exposé au N^o 25, mais nous y renoncerons car cela exigerait des calculs très compliqués. Du reste, nous aurons l'occasion d'en exposer de semblables à propos du calcul de la température de la surface lunaire.

47. — *Rôle protecteur de l'atmosphère terrestre.*

Lorsqu'il s'agit de déterminer la valeur moyenne de l'action protectrice de l'atmosphère terrestre, il est permis d'admettre que celle-ci possède partout les coefficients moyens de transmission donnés au N^o 42. Ceci admis, et en supposant de plus que la surface terrestre est entièrement solide, tandis que l'atmosphère peut être considérée, au point de vue de son pouvoir absorbant, comme n'étant constituée que d'un seul gaz, obéissant à la formule barométrique (187), nous allons déterminer mathématiquement l'action protectrice de l'atmosphère.

D'après (104), il est envoyé à la Terre par unité de sa surface et dans l'unité de temps la quantité de chaleur

$$W_m = \frac{1}{4} \frac{I_0}{\sqrt{1-e^2}} I$$

où on a, d'après le N^o 42, $I_0 = 2 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}}$ et $e = 0.0168$. Le carré de ce dernier nombre peut être négligé par rapport à l'unité, de façon qu'on obtient

$$W_m = 0.50 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}}.$$

A l'aide des valeurs données au N^o 42, $A = 0.40$; $p_a = 0.67$; $p'_a = 0.05$, et en employant les équations (205), (476), (477), (478), on peut calculer les températures respectives Θ_p et $\Theta(0)$ de la surface terrestre et de la couche la plus inférieure de l'atmosphère, en tenant compte toutefois de ce qui suit.

L'atmosphère reçoit de la surface terrestre de la chaleur non seulement par radiation mais encore par convection et évaporation. La quantité de chaleur que l'atmosphère reçoit par convection ne peut pas être déterminée mathématiquement, cependant, on peut dire qu'elle ne doit pas être très considérable, la convection étant faible au-dessus de la mer. Par contre, la chaleur apportée à l'atmosphère sous forme de chaleur d'évaporation peut être calculée avec une approximation suffisante. Des observations concernant la distribution des pluies à la surface du globe, il s'ensuit qu'il s'en évapore journellement une couche de 3 mm d'épaisseur. Comme l'évaporation d'une couche d'eau, couvrant un cm^2 d'une épaisseur d'un cm, exige, d'après (319), 600 gramme-calories, il s'ensuit que chaque cm^2 de la surface terrestre dépense, à cet effet, 180 gramme-calories par jour, ou bien 0.125 gramme-calories par minute. Pour cette raison, il faut déduire cette dernière quantité de chaleur de celle que reçoit la surface de la terre, pour avoir la quantité réelle qui émet celle-ci par rayonnement. On doit donc remplacer dans (447) l'expression $a_p \sigma \Theta_p^4$ par $a_p \sigma \Theta_p^4 - 0.125$. Nous obtenons de cette manière $\Theta_p = 290^\circ$, ou bien à l'échelle centigrade

$$u_p = 17^\circ.$$

La chaleur employée à l'évaporation est cédée à l'atmosphère lors de la condensation de la vapeur d'eau. En supposant, pour simplifier, que cette transmission de chaleur dans la direction verticale obéit aux mêmes lois que celle qui s'effectue par rayonnement,

on peut employer l'équation (470) pour calculer la température de la couche atmosphérique la plus inférieure. On obtient de cette manière $\theta(0) = 289.5^\circ$, ou bien, en employant la graduation centigrade

$$u_m = 16.5^\circ.$$

Enfin, en employant l'équation (451), où on doit poser $z = 0$, et en tenant compte de (476), on obtient $\theta(h) = 217^\circ$, ou bien

$$u_h = -56^\circ.$$

Ces valeurs, obtenues par le calcul, concordent bien avec les températures observées, car, ainsi que nous l'avons déjà mentionné, u_m est égal à 15° environ, tandis que la température de la surface terrestre est supérieure de 1 à 2° à celle de l'air environant. La plus basse température annuelle de l'air que l'on observe le long la verticale au-dessus de l'Europe centrale est égale à -54.4° , c'est-à-dire qu'elle diffère peu de la valeur ci-dessus de u_h .

Si la Terre était privée d'atmosphère, on obtiendrait avec la valeur précédente de W_m à l'aide de (210) une température moyenne de 11.8° . Par conséquent la présence de l'atmosphère élève la température de la surface terrestre de 5° environ.

48. — *Moyennes températures annuelles le long des parallèles pour une atmosphère calme.*

La théorie exposée dans la première partie de cet ouvrage nous met en état de calculer les moyennes températures annuelles de la couche la plus inférieure de l'atmosphère, en supposant toutefois l'atmosphère à l'état de calme parfait. Ces températures qui, ainsi qu'il a été mentionné au N^o 41, peuvent être également nommées „températures solaires“ sont évidemment différentes de celles qu'on observe. Ces dernières ne sont pas l'effet de l'insolation locale, les courants atmosphériques et marins tendant à niveler les températures de diverses latitudes; de plus ces températures dépendent beaucoup de la configuration de la surface terrestre ainsi que des propriétés locales de l'atmosphère.

On a essayé, il est vrai, de déterminer à l'aide du calcul, les moyennes températures annuelles observées, mais la concordance entre le calcul et l'observation n'est qu'apparente.⁵⁴⁾

Nous allons à présent calculer les températures solaires des parallèles. A cet effet, il faut tenir compte de ce qui suit.

On obtient la moyenne insolation annuelle d'une latitude donnée, à la limite supérieure de l'atmosphère, en multipliant les nombres contenus dans la dernière colonne du tableau V, désignés par W_r , par la constante solaire I_0 . Les nombres ainsi obtenus doivent être substitués à la place de W_m dans l'équation (470). De la quantité annuelle de radiation W_r arrivant à la limite supérieure de l'atmosphère, il n'y a que la fraction W_r' qui atteint la surface terrestre. Cette fraction correspond, d'après ce qui a été dit au N^o 42, à la valeur 0.80 du coefficient de transmission, et on la trouve dans le tableau VI page 191. Pour cette raison, la transmission moyenne p_a à la latitude considérée est représentée par

$$p_a = \frac{W_r'}{W_r},$$

où les valeurs de W_r et W_r' doivent être tirées des tableaux V et VI.

La valeur de p_a varie donc de parallèle en parallèle tandis que le coefficient de transmission p_a' pour la radiation obscure de la surface terrestre peut être considéré comme indépendant de la latitude et égal à 0.05 (voir le N^o 42). De même considérons-nous le pouvoir réfléchissant A comme indépendant de la latitude, n'ayant à notre disposition que sa valeur moyenne donnée au N^o 42. De cette manière nous obtenons à l'aide de (476) et (470) les températures solaires indiquées dans le tableau IX.

Tableau IX

Moyennes températures annuelles des parallèles pour une atmosphère calme.
(graduation centigrade)

Lai- tude	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Tempé- rature	+ 32.8	+ 31.6	+ 28.2	+ 22.1	+ 13.7	+ 2.6	- 10.9	- 24.1	- 32.0	- 34.8

Nous allons comparer ces valeurs obtenues par le calcul et celles fournies par l'observation. Dans ce but, on trouvera dans le ta-

Tableau X

Latitude	Moyennes températures annuelles observées à différentes latitudes			Pour-cent occupés par les continents	
	Nord	Sud	correspondant à 28 p. c. de terre ferme	Nord	Sud
0°	+ 26.3	+ 26.3	+ 29.1	22	22
10°	+ 26.8	+ 25.5	+ 28.1	24	20
20°	+ 25.3	+ 23.0	+ 24.2	31.5	24
30°	+ 20.4	+ 18.4	+ 19.1	43.5	20
40°	+ 14.1	+ 11.9	+ 13.2	45	4
50°	+ 5.8	+ 5.4	+ 5.6	58	2
60°	- 1.1	- 3.2	- 2.2	61	0
70°	- 10.7	- 12.0	- 8.9	53	71
80°	- 17.1	- 20.6	- 17.5	20	100
90°	- 22.7	- 25.0	- 23.3	0	100

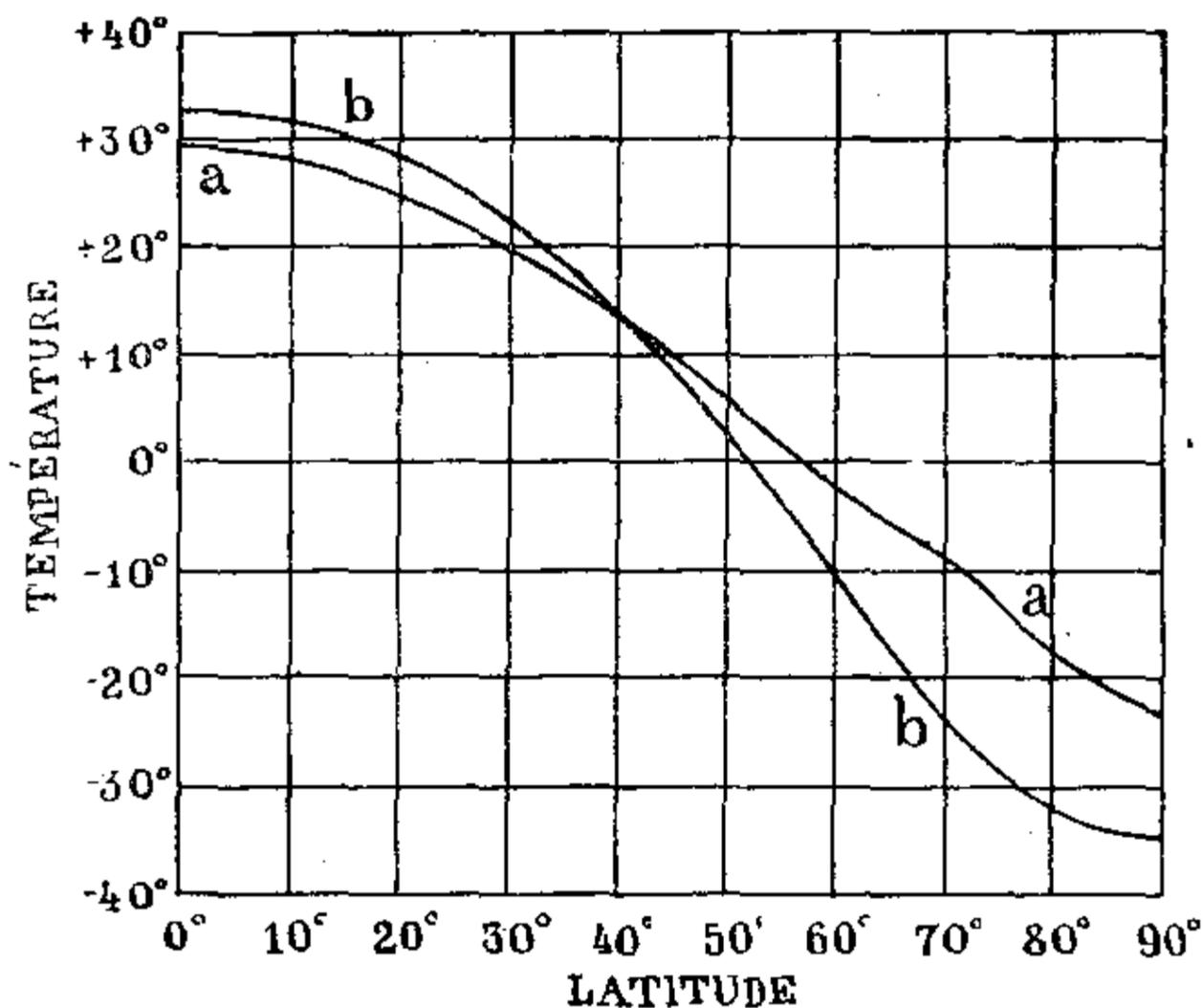
bleau X, dans les colonnes 2 et 3, les moyennes températures annuelles correspondant aux deux hémisphères et à différentes latitudes, tirées de l'ouvrage cité sous¹⁶⁾. Ainsi qu'on le voit, aux mêmes latitudes des deux hémisphères correspondent différentes températures. Cette différence tient principalement à la répartition différente des continents et des mers aux mêmes latitudes de deux hémisphères, cette répartition étant donnée par les deux dernières colonnes du tableau X. Pour toute la Terre, les continents occupent environ 28 pour cent de sa surface, et pour éliminer l'influence de la répartition inégale du sol et de l'eau à différentes latitudes, nous avons réduit les températures observées à cette répartition moyenne, en interpolant entre les deux valeurs contenues dans les colonnes 2 et 3 la valeur correspondant à cette même répartition moyenne. Les nombres obtenus de cette manière sont indiqués dans la colonne 4.

Pour saisir d'un coup d'oeil les résultats obtenus, nous les avons représentés graphiquement par la *fig. 17*. La ligne *a a* représente les températures observées réduites à la distribution moyenne des continents, tandis que la ligne *b b* représente les températures solaires données par le tableau IX.

Ce graphique montre qu'aux environs du 41^e degré de latitude les températures solaires ne diffèrent que peu des températures observées; en s'approchant de l'équateur, les températures solaires

s'élèvent de plus en plus au-dessus des températures observées; tandis que vers les pôles elles s'abaissent au-dessous des températures observées. Le climat solaire est, ainsi qu'on pouvait s'y attendre, plus excessif que le climat réel dont les extrêmes géographiques sont adoucis par les courants atmosphériques et marins.

Ces courants ont lieu dans ce sens que l'air et l'eau transportent sans cesse de la chaleur des régions équatoriales vers les régions polaires, tandis qu'ils circulent refroidis dans la direction opposée. De cette façon, de la chaleur est enlevée sans cesse aux zones équatoriales — qui y est remplacée par l'insolation — pour être cédée aux zones polaires. On peut, par conséquent, ainsi que l'a



Figur 17.

fait Bezold,⁵⁵⁾ partager la surface terrestre en trois zones: une équatoriale, dont l'insolation est plus forte que l'émission, et deux polaires qui sont dans le cas contraire. Bezold les désigne par „zones de radiation“, tandis qu'il désigne par „ligne de l'équilibre de rayonnement“, „lignes d'égaies insolation et émission“, ou bien encore par „lignes neutres“ les courbes de la surface terrestre séparant ces zones les unes des autres. En supposant une distribution uniforme des continents, ces lignes coïncideraient, ainsi qu'il

ressort de la *fig. 17*, avec les deux parallèles $\varphi = \pm 41^\circ$. Les irrégularités de la surface terrestre auraient pour conséquence que ces lignes seraient sinueuses et qu'il y aurait même, en dehors de ces limites principales, des lignes secondaires fermées, servant de limite à des régions insulaires.

Il est évident que les courants aériens et marins ne peuvent influencer que d'une façon insignifiante la moyenne température annuelle correspondant à l'ensemble de la surface terrestre. Ceci a pour conséquence que la température moyenne obtenue des valeurs correspondant à la courbe *aa* ne devrait pas être sensiblement différente de celle qu'on obtient des valeurs de la courbe *bb*. En effectuant ce calcul de la même manière qu'au N^o 46, nous déduisons des températures réduites à une distribution uniforme des continents et des mers une température moyenne pour toute la surface terrestre

$$u_m = 15.3^\circ.$$

Des températures solaires calculées on déduit pour cette température moyenne

$$u_m = 15.2^\circ.$$

La concordance entre l'observation et le calcul est donc presque parfaite.

49. — *Constitution thermique d'une atmosphère sèche se trouvant en équilibre de rayonnement.*

Les résultats du N^o 39 concernent une atmosphère formée d'un seul gaz. En se demandant dans quelle mesure ils sont applicables à l'atmosphère terrestre, nous devons tenir premièrement compte que celle-ci est constituée de plusieurs gaz à constantes *R* différentes, ce qui aura, d'après (192) et (186), pour conséquence que la constitution de l'atmosphère sera différente selon la hauteur. Cependant, jusqu'à une hauteur de 40 km, l'azote et l'oxygène forment 98 pour cent de l'atmosphère terrestre. Les constantes de ces deux gaz n'étant pas très différentes, et ceux-ci se comportant d'une façon semblable envers les radiations, on peut supposer, à

notre point de vue, l'atmosphère comme étant formée par un seul gaz que nous nommerons „air sec“. Il s'ensuit que la théorie exposée au N^o 39 peut être appliquée, sans commettre une erreur appréciable, à l'atmosphère terrestre jusqu'à une hauteur de 40 km, en admettant toutefois que l'air est réellement sec sur toute cette hauteur. Nous sommes obligé de faire cette supposition, car, ainsi qu'il a été dit au N^o 37, la vapeur d'eau absorbe très énergiquement les radiations obscures, tandis que sa densité décroît, à cause de (194), beaucoup plus vite avec la hauteur que celle de l'air sec; de manière que pour l'air humide, l'équation (560) n'est plus valable. On ne tiendra compte de tous ces faits que dans le N^o suivant où il seront amplement discutés.

Une autre supposition que nous devons faire, à cause du N^o 39, c'est que l'air sec n'absorbe pas la radiation solaire. Du reste, c'est à peu près ce qui a lieu en réalité, l'atmosphère terrestre étant chauffée presque exclusivement par les radiations obscures que lui envoie la Terre. Dans le N^o suivant nous discuterons les conséquences de ces suppositions.

Nous comparerons les résultats de nos calculs à ceux de l'observation. De telles observations ont été faites principalement au-dessus de l'Europe centrale et leurs résultats ont été réunis dans l'ouvrage de Wegener cité sous³⁰⁾ en une série représentant la distribution moyenne de la température le long d'une verticale. A cette série correspond une température de 10.5° à la surface terrestre. Posons donc

$$\theta_0 = 283.5^{\circ}.$$

A l'aide des tableaux V et IX, on trouve qu'à cette insolation correspond une moyenne insolation annuelle

$$W_m = 0.464 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}}$$

de la limite supérieure de l'atmosphère.

A l'aide de (205) et en prenant $A = 0.40$, on obtient, en se servant de (562),

$$\mu = 206.9^{\circ},$$

ce qui signifie qu'à la limite supérieure de l'atmosphère règne une température de -66.1° .

Tableau XI.

Constitution de l'atmosphère sèche et en équilibre de radiation.

Altitude <i>m</i>	Température échelle centi- grade	Pression barométrique mm de <i>Hg</i>	Densité $\frac{gr}{cm^3}$
0	+ 10.5°	760	1.293 × 10 ⁻³
918	+ 5°	679	1.134 × 10 ⁻³
1.779	0°	610	1.038 × 10 ⁻³
2.672	- 5°	545	0.945 × 10 ⁻³
3.602	- 10°	484	0.855 × 10 ⁻³
4.577	- 15°	426	0.767 × 10 ⁻³
5.606	- 20°	371	0.682 × 10 ⁻³
6.706	- 25°	320	0.599 × 10 ⁻³
7.891	- 30°	271	0.519 × 10 ⁻³
9.190	- 35°	226	0.440 × 10 ⁻³
10.644	- 40°	183	0.364 × 10 ⁻³
12.320	- 45°	143	0.291 × 10 ⁻³
14.344	- 50°	105	0.218 × 10 ⁻³
16.975	- 55°	70	0.149 × 10 ⁻³
20.977	- 60°	37	0.080 × 10 ⁻³
31.723	- 65°	7	0.016 × 10 ⁻³

En calculant avec une pression barométrique de 760^{mm} de mercure à la surface de la Terre, le poids spécifique du mercure étant 13.596 grammes par cm³, on aura

$$p_0 = 1033.3 \frac{\text{grammes (poids)}}{\text{cm}^2}$$

Il résulte donc de (191) que chaque cm² de surface terrestre supporte une masse d'atmosphère

$$M = 1033.3 \text{ grammes.}$$

Comme on a, ainsi qu'il a été montré par l'équation précédente à (190), $p(0) = p_0 g$, il résulte de (178)

$$\frac{R}{g} = \frac{p_0}{\Theta_0 \rho_0},$$

ρ_0 étant la densité de l'air à la température Θ_0 et à la pression p_0 . La densité de l'air sec à cette pression et à la température de 0° est égale à $1.293 \times 10^{-3} \frac{\text{grammes}}{\text{cm}^3}$, de manière qu'on a, à cause de (178), $\Theta_0 \rho_0 = 273 \times 1.293 \times 10^{-3}$.

En employant les valeurs précédentes et les équations (568), (568*), (569) et (570), on obtient les nombres contenus dans le tableau XI.

Si l'insolation était permanente, l'atmosphère persisterait dans l'état d'équilibre mécanique, l'air sec étant constitué de gaz diatomiques pour lesquels $\kappa = \frac{7}{5}$, de manière que la condition d'équilibre (596) se trouve réalisée.

50. — *Le phénomène de l'inversion de température au-dessus de la couche isotherme.*

Nous allons à présent comparer les résultats du N^o précédent aux résultats fournis par l'observation. A cet effet portons les altitudes du tableau XI en ordonnées (*fig. 18*) et les températures en abscisses, ce qui nous donnera la ligne *a, a, a*. Celle-ci représente donc la distribution de la température le long de la verticale dans une atmosphère d'air sec et en équilibre de rayonnement. De la même manière nous représenterons par la courbe *b, b* la distribution de la température le long de la verticale, mentionnée au N^o précédent et obtenue par observation au-dessus de l'Europe centrale.

En plus de ces deux lignes introduisons dans la *fig. 18* celle représentant la distribution verticale dans une atmosphère complètement privée d'insolation, chauffée uniquement par conduction au contact du sol et perdant cette chaleur par le mouvement ascendant de sa masse.

Une atmosphère sèche, chauffée à cette manière, accusera, d'après (590), une décroissance de température constante tout le long de sa hauteur :

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = - \frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}.$$

En employant les valeurs de $\frac{R}{g}$ et de κ , communiquées dans le N^o précédent, nous obtenons pour cette décroissance de température la valeur de

$$0.976^\circ \text{ par } 100 \text{ mètres d'altitude.}$$

Ce cas est représenté par la droite *cc* de la *fig. 18* qui montre que le zéro absolu serait, dans ce cas, atteint à une altitude de 29 km.

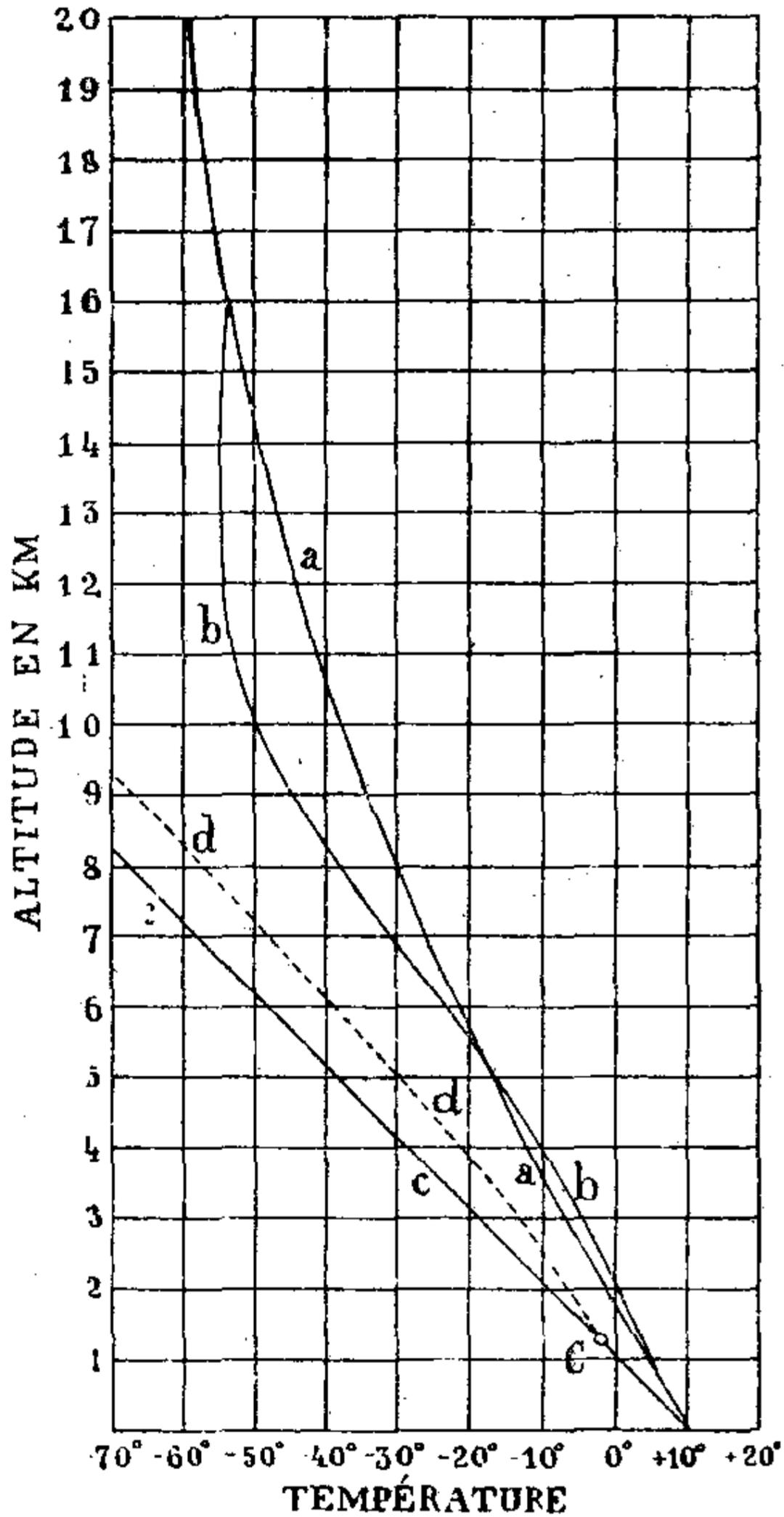


Fig. 18.

Lorsque l'air contient de la vapeur d'eau, dans ce cas, ainsi qu'il a été mentionné au N^o 40, la décroissance de la température,

à partir de l'altitude à laquelle le point de rosée est atteint, est plus faible que dans l'air sec. Ainsi, par exemple, lorsque l'air à la surface de la Terre accuse un état de 50 pour cent d'humidité relative, alors, d'après les travaux de Hertz et Neuhoff, cité sous³⁹), la saturation sera atteinte à une altitude d'environ 1.25 km, et, à partir de cette altitude, la vapeur d'eau contenue dans l'air sera successivement condensée et congelée, la température à cette altitude étant au-dessous du point de congélation. La chaleur latente, libérée dans ce changement d'état, adoucit la décroissance de température provoquée par le mouvement vertical ascendant; cette décroissance, adoucie de cette manière, est représentée par la courbe *d, d* (*fig. 18*) qui se sépare au point *C* de la courbe *c, c*, appartenant à l'air sec.

En comparant entre elles les courbes contenues dans la *fig. 18*, on en déduit ce qui suit.

La théorie de la détente adiabatique de l'air sec ou humide, employée jusqu'à présent dans l'explication de la décroissance de la température dans le sens vertical de l'atmosphère ne s'accorde point avec les observations. En réalité, les lignes *cc* et *dd* diffèrent tellement de la ligne *bb*, surtout pour les grandes altitudes, qu'on doit admettre que ce qui se passe dans l'atmosphère doit être très différent de ce que prévoit cette théorie. Par contre, la théorie de l'équilibre de rayonnement donne des valeurs qui s'accordent beaucoup mieux avec les observations. La radiation obscure de la surface terrestre et son absorption par l'atmosphère peuvent donc être considérées comme les facteurs dominants de la distribution verticale du moyen état thermique de l'atmosphère.

Il va sans dire que d'autres facteurs influent également sur cet état. C'est ce que montre l'écart existant entre les lignes *a, a* et *b, b*. Cet écart consiste principalement en ceci que du troisième au onzième kilomètre la décroissance observée est quelque peu plus forte que celle calculée. D'autre part, au-dessus du onzième kilomètre la décroissance observée de la température devient nulle pour faire place à une faible croissance. Il se produit donc une inversion de température au-dessus d'une couche à température à peu près constante qu'on appelle couche isotherme.

Le premier de ces écarts est dû en majeure partie à la présence de vapeur d'eau. Dans nos calculs, nous avons supposé l'air comète-

ment sec, ce qui, en réalité, n'est pas le cas. Ceci est d'autant plus important que la vapeur d'eau atmosphérique absorbe fortement

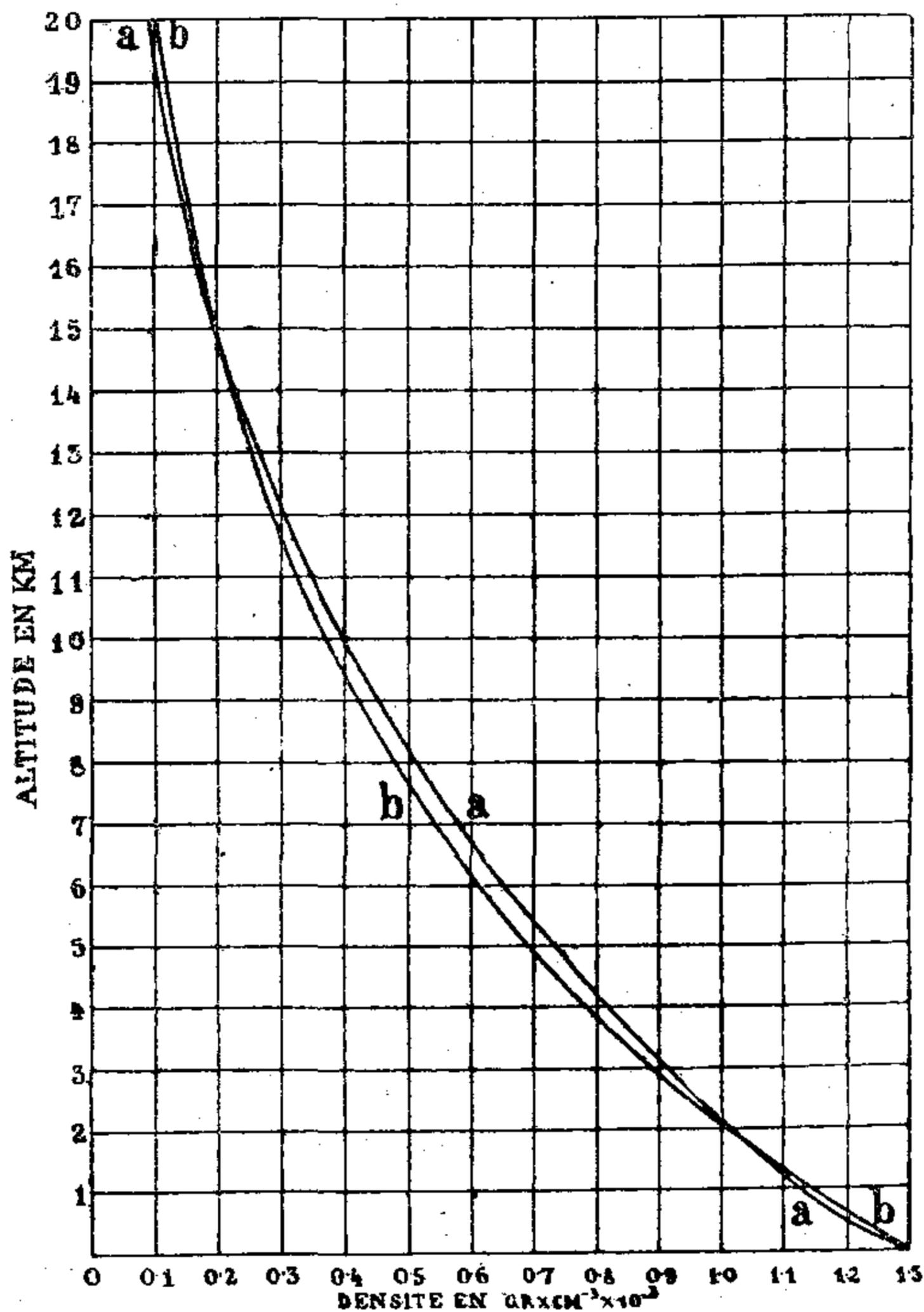


Fig. 19.

les radiations émises par la surface terrestre. Or, la densité de cette vapeur d'eau diminue, d'après (194), beaucoup plus vite avec

la hauteur que celle de l'air sec, ce qui provoque une décroissance plus accentuée de la température. Il n'y a pas de doute que les phénomènes dynamiques font également sentir leur influence dans la partie inférieure de l'atmosphère d'une épaisseur de onze kilomètres environ. Celle-ci, nommée troposphère est le véritable siège des troubles de l'équilibre mécanique et de toutes leurs conséquences.

La partie supérieure de l'atmosphère reposant sur la précédente, désignée par stratosphère, se trouve, à en juger d'après ce que nous savons à ce sujet, en équilibre mécanique, de manière que tous les phénomènes thermiques dont elle est le siège doivent être ramenés à des phénomènes de rayonnement.

L'inversion de température que nous venons de constater est également un pur phénomène de rayonnement. Pour l'expliquer, on doit prendre en considération l'absorption de la radiation solaire par l'atmosphère, dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à présent, et qui a une influence notable sur l'état thermique des couches atmosphériques supérieures.

Pour l'expression mathématique de cette influence nous disposons des résultats du N^o 37. Ceux-ci reposent sur la supposition que la densité des gaz absorbants peut être représentée par l'équation (187). Nous allons donc examiner la compatibilité de cette supposition avec l'équilibre de rayonnement. A cet effet, nous avons représenté graphiquement par la ligne *a, a, a* (*fig. 19*) la distribution de la densité d'une atmosphère en équilibre de rayonnement, donnée par le tableau XI. D'autre part, la ligne *b, b, b* représente la distribution qui découle de l'équation (187). Dans cette équation nous avons pris pour *H* la valeur généralement employée

$$H = 8000 \text{ m.}$$

Ainsi qu'on peut le voir par ce graphique, l'écart entre les deux lois concernant la décroissance de la densité n'est pas grand, ce qui justifie l'emploi des résultats du N^o 37.

Supposons, d'abord, en nous servant de ces résultats, que l'atmosphère ne contient qu'un seul gaz absorbant, c'est-à-dire admettons, par exemple, que l'air est complètement sec. On obtient alors, ainsi qu'il résulte de la comparaison de l'équation (471) avec l'équation (562), que les couches supérieures de l'atmosphère auront, dans ce cas, une température supérieure à celle trouvée dans le N^o précédent, mais il n'est peut pas être question d'une inversion de

température. C'est bien ce que montre l'équation (469). Lorsque x croît continuellement entre 0 et ∞ , $e^{-\frac{x}{H}}$ décroît continuellement entre

1 et 0, tandis que $p_a e^{-\frac{x}{H}}$ croît entre p_a et 1, p_a étant plus petit que 1. La radiation terrestre, étant plus fortement absorbée par l'atmosphère que la radiation solaire, $(a_1 - a_1')$ sera négatif, c'est-à-dire lorsque x croît, la température $\Theta(x)$ diminuera régulièrement en s'approchant asymptotiquement de sa valeur donnée par (471).

Ce phénomène change d'aspect lorsque l'atmosphère est constituée de deux gaz absorbants. Pour ce cas nous avons à la disposition l'équation (488) obtenue des suppositions (484) et (485). En différentiant cette équation par rapport à x et en égalant le résultat à zéro, on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{H_1} \log_{\text{nép}} p_a \left\{ a_1 \left(a_1' + a_2' e^{-\frac{2x}{H_1}} \right)^{-1} - \right. \\ & \left. - \frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_2'}{a_1} \left(e^{-\frac{2x}{H_1}} + \frac{2}{a_1 H_1} e^{-\frac{x}{H_1}} + \frac{2}{a_1^2 H_1^2} \right) \right\} + \\ & + \frac{2 a_1 a_2'}{H_1} \left(a_1' + a_2' e^{-\frac{2x}{H_1}} \right)^{-2} e^{-\frac{x}{H_1}} + \frac{2}{H_1} \frac{a_2'}{a_1} \left(e^{-\frac{x}{H_1}} + \frac{1}{a_1 H_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

L'équation précédente contenait aussi le facteur $e^{-\frac{x}{H_1}}$ qui a pu être supprimé, ce qui revient à dire que pour $x = \infty$ la température possède un maximum secondaire.

En tenant compte que, à cause de (481) et (484), $\log_{\text{nép}} p_a = -a_1 H_1$, et en posant, pour abrégé,

$$e^{-\frac{x}{H_1}} = z,$$

on obtient de l'équation précédente la suivante:

$$\left(a_1' + a_2' z^2 \right)^3 - a_1^2 \left(a_1' + a_2' z^2 \right) - \frac{2 a_1 a_2'}{H_1} z = 0.$$

Les deux dernières équations déterminent la hauteur x à laquelle l'inversion de température a lieu.

Dans l'application de ces équations à l'atmosphère terrestre, nous devons tenir compte de ce que cette dernière peut être décomposée:

dans les trois gaz suivants: l'air sec (c'est-à-dire un mélange d'azote, d'oxygène et d'argon), la vapeur d'eau et l'acide carbonique. La teneur de l'atmosphère en acide carbonique est très faible (inférieure à 0.03 pour cent à la surface de la Terre), cependant, on doit en tenir compte à cause du fort pouvoir absorbant de ce gaz envers la radiation obscure terrestre. On a donc, en réalité, une atmosphère composée de trois gaz différents par rapport à leurs pouvoirs absorbants, tandis que nos équations ne sont valables que pour un mélange de deux gaz. Nous obvions à cette difficulté en admettant que le mélange d'acide carbonique et d'air sec se comporte comme un gaz unique à hauteur virtuelle de 8000 m, quoique la hauteur virtuelle de l'acide carbonique ne soit que 5230 m. La hauteur H_2 pour la vapeur d'eau est, d'après (193), égale au tiers de la hauteur virtuelle de l'air sec. Par conséquent, la condition (485) sur laquelle reposent les équations précédentes est accomplie.

Pour satisfaire à la condition (484), nous sommes obligés d'attribuer l'absorption de la radiation solaire uniquement au mélange mentionné d'air sec et d'acide carbonique, tandis que cette restriction n'est pas nécessaire pour la radiation émise par la surface terrestre.

Quelle est la part de ces divers gaz dans les phénomènes d'absorption, on ne saurait le dire avec précision, ainsi que nous l'avons mentionné au N^o 42. D'après les recherches d'Ekholm, mentionnées sous⁴⁵⁾, l'air sec et l'acide carbonique absorberaient environ 25 pour cent de la radiation terrestre, c'est-à-dire qu'ils en transmettent 75 pour cent. La vapeur d'eau absorberait 60 pour cent de cette radiation, c'est-à-dire qu'elle en transmet 40 pour cent. On aurait donc, d'après (464),

$$e^{-a_1' H_1} = 0.75; \quad e^{-\frac{a_2' H_1}{3}} = 0.40,$$

d'où le rapport

$$a_2' = 10a_1,$$

c'est-à-dire que la vapeur d'eau de la couche inférieure atmosphérique absorberait dix fois plus de radiation terrestre que l'air sec et l'acide carbonique de cette couche ensemble.

Nous emploierons les nombres d'Ekholm uniquement sous la forme de la dernière équation; pour les valeurs absolues des coefficients de transmission p_a et p_a' nous employons les valeurs données au N^o 42 qui se sont montrées utilisables jusqu'à présent.

On obtient de cette manière

$$e^{-a_1 H_1} = 0.67; \quad e^{-a_1' H_1 - \frac{a_2' H_1}{3}} = 0.05$$

c'est-à-dire

$$a_1 = 0.0501; \quad a_1' = 0.0864; \quad a_2' = 0.8642.$$

Pour la détermination de l'altitude x à laquelle l'inversion de température a lieu, nous obtenons donc l'équation

$$(0.0864 + 0.8642 z^2)^3 - 0.0025 (0.0864 + 0.8642 z^2) - 0.0108 z = 0,$$

d'où il résulte

$$z = 0.268,$$

c'est-à-dire

$$x = 10.530 \text{ m.}$$

Cette valeur calculée concorde parfaitement avec la valeur observée. Mais malgré cela les phénomènes sont en réalité plus compliqués que ne le suppose notre théorie. De plus, les valeurs numériques employées dans le calcul précédent ne sont pas définitivement fixées. Enfin, on ne doit pas perdre de vue ce qui suit.

Dans nos recherches nous avons supposé toutes les réflexions ayant lieu dans l'atmosphère terrestre, se produisant à la limite supérieure de celle-ci. Cette simplification n'exerce aucune influence notable sur le calcul de la température des couches inférieures de l'atmosphère; mais son influence est plus considérable lorsqu'il s'agit de la température des couches supérieures. La majeure partie des réflexions ayant lieu dans l'atmosphère est limitée à la troposphère dans laquelle sont suspendus ces puissants réflecteurs que sont les nuages. A cause de cela la stratosphère est traversée non seulement par la presque totalité de la radiation solaire envoyée à la Terre, mais aussi par la radiation solaire réfléchie par la Terre. Dans cette partie de l'atmosphère, l'intensité de la radiation solaire n'est pas ainsi que nous l'avons admis, égale à $(1 - A) W_m$, mais elle est très peu différente de $(1 + A) W_m$. Cette circonstance, malgré le très haut pouvoir de transmission de ces couches, ne peut pas être sans influence sur leur température.

51. — *Propagation verticale des oscillations de température dans une atmosphère calme.*

D'après ce qui a été dit au N^o 38, les oscillations de température produites par les variations de l'insolation se propagent des couches inférieures de l'atmosphère verticalement vers les couches supérieures. La période des oscillations reste invariable au cours de ce phénomène, mais leur amplitude décroît avec la hauteur tandis que les époques des maxima de température subissent un retard au fur et à mesure que la hauteur croît. Nous allons suivre ce phénomène sur un exemple concret.

En admettant ce qui a été exposé au N^o 38, une simple oscillation de l'insolation représentée par (490) provoque une oscillation de température à la hauteur x , dont l'amplitude α_x est donnée par (547). L'oscillation de température correspondante ayant lieu dans la couche la plus inférieure de l'atmosphère, c'est-à-dire pour $x = 0$, est égale à

$$\alpha_0 = (1 - A) \frac{a_1}{c \varrho_0} \frac{2 A_1}{N}.$$

Les deux amplitudes sont liées par le rapport

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_0} = e^{-Rx}$$

qui représente l'amortissement relatif des oscillations avec la hauteur. La valeur R est donnée par (527), (523) et (531).

L'équation ci-dessus ne contient pas les éléments de l'insolation à l'exception de sa période, et elle est valable sans égard à l'origine des oscillations. On suppose toutefois que ces oscillations sont de simples fonctions trigonométriques du temps. Si tel n'est pas le cas, on peut les représenter par des séries de Fourier, et on obtient à la place de l'expression précédente, des expressions analogues, à plusieurs membres.

La vitesse de propagation des ondes de température à période T est donnée par l'expression (550).

hauteur suit la loi (194), où H' est égal à un tiers de la valeur ci-dessus de H , en même temps que nous attribuons à la vapeur d'eau seule l'absorption de la radiation obscure de la surface terrestre et de l'atmosphère. On obtient alors, au lieu de (462),

$$a_2(x) = a_1' e^{-\frac{3x}{H}},$$

où a_1' représente le pouvoir absorbant de la couche atmosphérique la plus inférieure d'une épaisseur égale à l'unité. On obtient cette valeur à l'aide de (464) et de la valeur $p_a' = 0.05$ que nous avons déjà rencontrée au N^o 42. On a donc :

$$e^{-\frac{a_1' H}{3}} = 0.05,$$

c'est-à-dire

$$a_2'(x) = \frac{3 \log_{\text{nép}} 0.05}{H} e^{-\frac{3x}{H}}.$$

De plus, en tenant compte que, d'après (495) et (492)

$$a_2(x) = k \varrho,$$

on obtient pour k l'expression

$$k = \frac{3 \log_{\text{nép}} 0.05}{0.00129^3 H} \varrho^2.$$

C'est à l'aide de cette formule que nous avons calculé les valeurs de k contenues dans le tableau XII.

Cependant, ce tableau n'est pas valable que pour un degré moyen d'humidité de l'atmosphère. En réalité, par suite de la variabilité de cette humidité notamment dans les couches inférieures de l'atmosphère, la valeur k subira des variations notables.

Si nous voulons calculer, à l'aide des données précédentes, l'amortissement des oscillations diurnes de la température avec la hauteur, nous devons introduire dans (531) pour T la durée de la journée en minutes, c'est-à-dire $T = 1440$. La chaleur spécifique de l'air est égale en unités adoptées à 0.17, de sorte que nous obtenons pour $c^2 N^2$ la valeur 0.00000055. Par rapport à ce chiffre les valeurs numériques $4 k^2 h^2$ sont négligeables pour tous les échelons d'altitude contenus dans le tableau XII, de sorte que nous obtenons, dans le cas qui nous occupe, pour M^2 , au lieu de (523), l'expression

$$M^2 = \frac{k^2 \varrho_0^2}{2}.$$

hauteur suit la loi (194), où H' est égal à un tiers de la valeur ci-dessus de H , en même temps que nous attribuons à la vapeur d'eau seule l'absorption de la radiation obscure de la surface terrestre et de l'atmosphère. On obtient alors, au lieu de (462),

$$a_2(x) = a_1' e^{-\frac{3x}{H}},$$

où a_1' représente le pouvoir absorbant de la couche atmosphérique la plus inférieure d'une épaisseur égale à l'unité. On obtient cette valeur à l'aide de (464) et de la valeur $p_a' = 0.05$ que nous avons déjà rencontrée au N^o 42. On a donc :

$$e^{-\frac{a_1' H}{3}} = 0.05,$$

c'est-à-dire

$$a_2'(x) = -\frac{3 \log_{nép} 0.05}{H} e^{-\frac{3x}{H}}.$$

De plus, en tenant compte que, d'après (495) et (492)

$$a_2(x) = k \varrho,$$

on obtient pour k l'expression

$$k = -\frac{3 \log_{nép} 0.05}{0.00129^3 H} \varrho^2.$$

C'est à l'aide de cette formule que nous avons calculé les valeurs de k contenues dans le tableau XII.

Cependant, ce tableau n'est pas valable que pour un degré moyen d'humidité de l'atmosphère. En réalité, par suite de la variabilité de cette humidité notamment dans les couches inférieures de l'atmosphère, la valeur k subira des variations notables.

Si nous voulons calculer, à l'aide des données précédentes, l'amortissement des oscillations diurnes de la température avec la hauteur, nous devons introduire dans (531) pour T la durée de la journée en minutes, c'est-à-dire $T = 1440$. La chaleur spécifique de l'air est égale en unités adoptées à 0.17, de sorte que nous obtenons pour $e^2 N^2$ la valeur 0.00000055. Par rapport à ce chiffre les valeurs numériques $4 k^2 h^2$ sont négligeables pour tous les échelons d'altitude contenus dans le tableau XII, de sorte que nous obtenons, dans le cas qui nous occupe, pour M^2 , au lieu de (523), l'expression

$$M^2 = \frac{k^2 \varrho_0^2}{2}.$$

Il s'ensuit alors qu'on a, d'après (527),

$$R = -k \rho_0.$$

L'amortissement vertical des oscillations diurnes dans différents échelons d'altitude est donc donné par l'équation

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_0} = e^{-k \rho x},$$

où α_0 représente l'amplitude de l'oscillation à la base de cet échelon, tandis que k et ρ représentent les valeurs moyennes contenues dans le tableau XII. On obtient donc pour les trois premiers échelons les équations suivantes

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_0} = e^{-1.03 x}; \quad \frac{\alpha_x}{\alpha_0} = e^{-0.69 x}; \quad \frac{\alpha_x}{\alpha_0} = e^{-0.38 x}.$$

Dans ces formules x doit être mesuré en kilomètres.

Pour $x = 0.5 \text{ km}$ nous obtenons de la première des équations précédentes, $\frac{\alpha_x}{\alpha_0} = 0.60$, c'est-à-dire que l'amplitude de l'oscillation diurne à la hauteur de 500 m est égale à 60 pour cent de sa valeur à la surface terrestre. Pour $x = 1.5 \text{ km}$ nous obtenons, à l'aide de la seconde des formules précédentes, $\frac{\alpha_x}{\alpha_0} = 0.36$ ce qui signifie que l'amplitude à la hauteur de 2000 m est égale à 36 pour cent de celle qui a lieu à la hauteur de 500 m , tandis qu'elle n'atteint que 22 pour cent de l'amplitude à la surface terrestre. A l'aide de la troisième des équations précédentes, on calcule que l'amplitude diurne à la hauteur de 4000 m tombe à 10 pour cent de la valeur de celle à la surface terrestre.

Ces nombres ne sont valables que pour un degré hygrométrique de l'atmosphère correspondant à un coefficient de transmission de 0.05. Les variations de l'humidité atmosphérique ont une grande influence sur le rapport $\frac{\alpha_x}{\alpha_0}$. Ainsi pour une teneur double en vapeur d'eau, nous aurions obtenu à la place de nombres précédents leurs carrés. Par conséquent, l'amplitude des oscillations thermiques à la hauteur de 500 m ne serait plus que 36 pour cent et à la hauteur de 4000 m un pour cent seulement de celle ayant lieu à la surface de la Terre.

Les nuages exercent une action bien plus forte que la vapeur d'eau au point de vue de l'amortissement des oscillations thermiques diurnes.

La vitesse v de propagation des oscillations diurnes de bas en haut est, à cause de faible valeur de la racine carrée figurant dans la formule (550), considérable et très variable avec la teneur des couches atmosphériques en vapeur d'eau.

Dans le calcul de la propagation des oscillations annuelles de la température, on doit prendre dans (531) pour T la durée de l'année en minutes, c'est-à-dire en chiffres ronds $T = 526.000$. On obtient, par conséquent, pour $c N$ la valeur de 2.03×10^{-6} et pour $c^2 N^2$ la valeur de 4.12×10^{-12} . Ce dernier nombre peut être négligé, eu égard à la valeur numérique de $4 k^2 h^2$, pour toutes les altitudes figurant au tableau XII, de sorte qu'on obtient dans ce cas, au lieu de (523), pour M l'expression suivante:

$$M = \frac{e_0}{\sqrt{2}} \frac{c N}{2 h}.$$

Il s'ensuit, en tenant compte de (527),

$$R = - \frac{e_0}{2 \sqrt{2} h} \sqrt{c N (2 k h + c N)}.$$

A l'aide de cette formule, on obtient les valeurs de R contenues dans le tableau XIII correspondant à divers échelons d'altitude.

Tableau XIII.

Altitude en mètres	0	500	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000
Valeur moyenne de R	- 0.098	- 0.078	- 0.055	- 0.037	- 0.021	- 0.015	

En se servant des nombres contenus dans le tableau XIII, on doit mesurer l'altitude x en km. En comparant ces nombres à ceux correspondant aux oscillations diurnes, on voit que les oscillations annuelles s'amortissent considérablement moins lorsqu'on s'élève dans l'atmosphère que les oscillations diurnes. Surtout aux grandes altitudes leur amortissement est insignifiant.

C'est ce que montre le tableau XIV, où les amplitudes des oscillations annuelles sont représentées jusqu'à l'altitude de 10.000 mètres en pour cent de l'amplitude au-dessus du sol.

Tableau XIV

Propagation verticale des oscillations thermiques annuelles dans une atmosphère calme.

Altitude en mètres	500	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000
Amplitude annuelle de la température en pour cent de celle au-dessus du sol	95	85	76	70	68	66
Retard en jours de l'oscillation par rapport à celle au-dessus du sol	3	9	16	20	22	23

Le phénomène du faible amortissement des oscillations annuelles à été constaté à l'aide des ballons, mais les choses ne sont pas si simples en réalité qu'en théorie. La hauteur virtuelle de l'atmosphère terrestre n'est pas suffisamment grande pour que l'équation (537) reste valable pour les oscillations annuelles. La teneur variable en vapeur d'eau, les courants aériens et, notamment, la nébulosité du ciel, sans cesse variable, auraient une influence perturbatrice considérable même dans le cas d'une altitude virtuelle suffisamment grande. De même, on ne doit pas oublier que, dans le calcul précédent, il n'a pas été tenu compte de l'absorption de la radiation solaire par l'atmosphère, et cependant, celle-ci a une influence notable sur l'état thermique des couches supérieures.

La vitesse de propagation des oscillations annuelles de bas en haut peut être calculée à l'aide de l'équation (550) à laquelle on peut donner dans ce cas la forme suivante :

$$v = \frac{4\pi\sqrt{2}h}{T\varrho_0\sqrt{cN(2hk - cN)}}$$

Cette vitesse est différente pour divers échelons d'altitude étant plus petite pour les couches atmosphériques inférieures que pour les couches supérieures. Lorsqu'on l'a déterminée, il est facile de calculer le retard que subissent les oscillations thermiques à diverses altitudes par rapport à l'oscillation au-dessus du sol. Ces retards sont contenus dans la tableau XIV. Ainsi qu'on le voit, les oscillations annuelles atteignent l'altitude de 10 km en 23 jours. Au-dessus de cette altitude, on peut à peine noter un tel retard. Par contre, l'absorption de la radiation solaire par les couches supérieures peut changer le signe de ce retard et provoquer, pour ainsi dire, une inversion des époques des maxima et minima de la température.

CHAPITRE II.

VARIATIONS SÉCULAIRES DE L'INSOLATION ET LE PROBLÈME PALÉOCLIMATIQUE.

52. — *Variations séculaires des éléments astronomiques du mouvement elliptique et de la rotation de la Terre.*

Parmi les variations séculaires des éléments du mouvement elliptique et de la rotation de la Terre, décrites au N^o 12, il n'y a que celles concernant les valeurs de e , π_h , ψ' et ε qui ont une influence sur l'état d'insolation de la Terre. Ainsi que nous l'avons dit, on se sert pour la détermination de ces variations des formules calculées par Stockwell.

Les valeurs de e et π_h correspondant au moment t sont, d'après Stockwell, données par les deux formules suivantes :

$$e \sin \pi_h = N \sin (gt + \beta) + N_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin (g_2 t + \beta_2) + \dots + N_7 \sin (g_7 t + \beta_7)$$

$$e \cos \pi_h = N \cos (gt + \beta) + N_1 \cos (g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos (g_2 t + \beta_2) + \dots + N_7 \cos (g_7 t + \beta_7),$$

où N , g et β ont les valeurs numériques suivantes :

$N = + 0.0053002$	$g = 5.5550002''$	$\beta = 87^\circ 28' 12.8''$
$N_1 = - 0.0151823$	$g_1 = 7.3790776''$	$\beta_1 = 18^\circ 39' 8.9''$
$N_2 = + 0.0125684$	$g_2 = 17.4034121''$	$\beta_2 = 329^\circ 15' 1.2''$
$N_3 = + 0.0173974$	$g_3 = 18.0984790''$	$\beta_3 = 134^\circ 45' 1.6''$
$N_4 = + 0.000013561$	$g_4 = 0.6166870''$	$\beta_4 = 67^\circ 56' 42.3''$
$N_5 = + 0.00057941$	$g_5 = 2.7277089''$	$\beta_5 = 105^\circ 6' 59.3''$
$N_6 = + 0.0161491$	$g_6 = 3.7172386''$	$\beta_6 = 28^\circ 8' 55.1''$
$N_7 = - 0.0024585$	$g_7 = 22.4611216''$	$\beta_7 = 307^\circ 56' 54.3''$

Dans les équations précédentes t désigne le nombre des années juliennes ayant suivi l'an 1850 de notre ère, tandis que la longitude du périhélie π_h est rapportée au point vernal de cette même année.

Pour le calcul de la précession générale ψ on peut se servir, avec une approximation suffisante, de la formule

$$\begin{aligned} \psi = & 50.438239'' t + 8915.6'' + 696.462'' \sin(ft + \beta) - \\ & - 552.463'' \sin(f_1 t + \beta_1) + 2250.29'' \sin(f_2 t + \beta_2) + \\ & + 8708.52'' \sin(f_3 t + \beta_3) + 10.0558'' \sin(f_5 t + \beta_5) + \\ & + 57.102'' \sin(f_6 t + \beta_6) - 1910.92'' \sin(f_7 t + \beta_7), \end{aligned}$$

où on doit poser

$f = 45.312168''$	$\beta = 21^\circ 6' 26.8''$
$f_1 = 43.846111''$	$\beta_1 = 132^\circ 40' 56.2''$
$f_2 = 33.044849''$	$\beta_2 = 292^\circ 49' 53.2''$
$f_3 = 32.029325''$	$\beta_3 = 251^\circ 45' 8.6''$
$f_5 = 49.776573''$	$\beta_5 = 20^\circ 31' 24.6''$
$f_6 = 47.522157''$	$\beta_6 = 133^\circ 56' 10.8''$
$f_7 = 24.503672''$	$\beta_7 = 306^\circ 19' 21.2''$

Pour le calcul de l'obliquité de l'écliptique ε on se sert de la formule suivante, où f et β ont les mêmes valeurs que précédemment.

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 23^\circ 17' 16.57'' - 248.520'' \cos(ft + \beta) + 196.017'' \cos(f_1 t + \\ & + \beta_1) - 755.057'' \cos(f_2 t + \beta_2) - 2901.753'' \cos(f_3 t + \beta_3) - \\ & - 3.644'' \cos(f_5 t + \beta_5) - 20.539'' \cos(f_6 t + \beta_6) + \\ & + 595.433'' \cos(f_7 t + \beta_7). \end{aligned}$$

Ainsi qu'il a été montré au N^o 13, dans le calcul des variations séculaires de l'insolation, on n'a à considérer que la somme Π des valeurs π_h et ψ . Cette somme représente la longitude du périhélie rapportée au point vernal correspondant au moment considéré. Nous n'avons donc à tenir compte que des variations des éléments Π , e et ε .

Pilgrim⁵⁶⁾ a calculé les variations séculaires de ces trois valeurs pour l'espace de temps compris entre l'an 1,010,000 avant l'an 1850 de notre ère et l'an 50000 après 1850 de notre ère; une partie de ses résultats est contenue dans le tableau XV.

Ainsi qu'il ressort de ce tableau, ces variations séculaires ont une marche assez régulière.

La longitude du périhélie Π augmente presque proportionnellement avec le temps de manière que cette augmentation atteint en moyenne la valeur de 360° dans l'espace de

20.7000 années juliennes.

Tableau XV

Mil- liades avant 1850	<i>H</i>	<i>e</i>	<i>ε</i>	Mil- liades avant 1850	<i>H</i>	<i>e</i>	<i>ε</i>
500	27° 3'	0·0207	23° 25'	414·7	90°	0·0128	24° 9'
496 2	90°	0·0250	23° 39'	410	189·7°	0·0105	24° 15'
495	110·5°	0·0264	23° 44'	406·3	270°	0·0104	23° 53'
490	194·3°	0·0314	23° 53'	405	299·6°	0·0106	23° 44'
485·5	270°	0·0351	23° 36'	400	48·5°	0·0122	23° 4'
485	278·6°	0·0356	23° 34'	398	90°	0·0133	22° 51'
480	3·6°	0·0389	23° 8'	395	150·4°	0·0150	22° 33'
475	90°	0·0413	22° 48'	390	248·5°	0·0181	22° 18'
470	177·2°	0·0428	22° 38'	388·9	270°	0·0185	22° 21'
465	263·8°	0·0433	22° 56'	385	343·7°	0·0198	22° 42'
464·7	270°	0·0432	22° 57'	380	76·7°	0·0209	23° 18'
460	349·8°	0·0428	23° 22'	379·3	90°	0·0210	23° 23'
455	74·4°	0·0415	23° 51'	375	167·8°	0·0217	23° 54'
454·1	90°	0·0411	23° 57'	370	258·5°	0·0221	24° 16'
450	159·1°	0·0394	24° 5'	369·4	270°	0·0221	24° 16'
445	244·7°	0·0366	23° 34'	365	349·8°	0·0219	23° 58'
443·5	270°	0·0356	23° 23'	360	83°	0·0212	23° 25'
440	331·9°	0·0331	22° 55'	359·6	90°	0·0211	23° 22'
435	61·8°	0·0290	22° 29'	355	180·4°	0·0204	22° 45'
433·5	90°	0·0278	22° 22'	350·5	270°	0·0200	22° 19'
430	153·6°	0·0249	22° 22'	350	280·2°	0·0199	22° 18'
425	246·1°	0·0215	22° 57'	345	22·3°	0·0207	22° 39'
423·8	270°	0·0202	23° 8'	341·7	90°	0·0207	23° 2'
420	341·9°	0·0164	23° 40'	340	123·6°	0·0209	23° 14'
415	83·9°	0·0129	24° 7'	335	220·1°	0·0228	23° 50'

Tableau XV (suite)

Mil- liades avant 1850	<i>II</i>	<i>e</i>	<i>ε</i>	Mil- liades avant 1850	<i>II</i>	<i>e</i>	<i>ε</i>
332.4	270°	0.0240	24° 7'	245	229.4°	0.0179	24°
330	314.2°	0.0252	24°11'	242.3	270°	0.0209	23°36'
325	48.6°	0.0279	23°46'	240	305.1°	0.0234	23°15'
322.6	90°	0.0292	23°29'	235	25.3°	0.0285	22°27'
320	138.2°	0.0306	23° 9'	231.1	90°	0.0322	22° 2'
315	230.2°	0.0329	22°43'	230	108.7°	0.0333	22°
312.8	270°	0.0337	22°32'	225	193.8°	0.0374	22°31'
310	321.3°	0.0347	22°31'	220.5	270°	0.0404	23°15'
305	51.0°	0.0358	22°56'	220	278.6°	0.0407	23°20'
302.8	90°	0.0360	23°11'	215	359.7°	0.0432	24° 1'
300	139.1°	0.0360	23°30'	210	79.8°	0.0449	24°25'
295	255.1°	0.0352	23°53'	209.4	90°	0.0451	24°24'
292.4	270°	0.0343	24° 2'	205	160.2°	0.0459	24°
290	309.7°	0.0335	24° 2'	200	241.1°	0.0462	23°20'
285	33.8°	0.0308	23°40'	198.3	270°	0.0460	23° 8'
281.6	90°	0.0285	23°18'	195	323.8°	0.0456	22°45'
280	117.3°	0.0274	23° 8'	190	46.9°	0.0444	22°23'
275	201.4°	0.0232	22°38'	187.4	90°	0.0435	22°30'
270.7	270°	0.0198	22°22'	185	129.4°	0.0426	22°36'
270	281.6°	0.0186	22°22'	180	210.7°	0.0404	23° 5'
265	356.5°	0.0139	22°39'	176.2	270°	0.0384	23°31'
260	58.7°	0.0103	23°21'	175	289.7°	0.0378	23°40'
256.9	90°	0.0099	23°47'	170	6.9°	0.0350	24° 6'
255	109.5°	0.0106	24° 3'	165	82.1°	0.0321	23°58'
250	161.4°	0.0132	24°28'	164.5	90°	0.0319	23°54'

Tableau XV (suite)

Mil- liades avant 1850	<i>H</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	Mil- liades avant 1850	<i>H</i>	<i>e</i>	<i>e</i>
160	156.4°	0.0296	23°32'	65	205.4°	0.0231	22°29'
155	230.6°	0.0274	22°53'	60.9	270°	0.0194	22°56'
152.3	270°	0.0265	22°37'	60	284.2°	0.0186	23° 2'
150	304.4°	0.0258	22°24'	55	356.2°	0.0145	23°49'
145	17.3°	0.0254	22°39'	50	62.3°	0.0115	24°25'
140	90°	0.0259	23°12'	47.6	90°	0.0110	24°25'
135	161.9°	0.0275	23°52'	45	119°	0.0105	24°13'
130	234.6°	0.0297	24°18'	40	176.6°	0.0110	23°39'
127.6	270°	0.0308	24° 8'	35	246.5°	0.0130	22°49'
125	308.9°	0.0320	23°41'	33.5	270°	0.0138	22°37'
120	25.5°	0.0344	23° 9'	30	322.8°	0.0156	22°10'
116	90°	0.0363	22°41'	25	44.3°	0.0175	22°25'
115	106.2°	0.0368	22°33'	22.3	90°	0.0182	22°44'
110	188.8°	0.0388	22°15'	20	128.1°	0.0189	23°
105.1	270°	0.0401	22°42'	15	210.3°	0.0196	23°43'
100	354°	0.0407	23°28'	11.4	270°	0.0195	24° 5'
95	74.8°	0.0405	24° 2'	10	292.8°	0.0195	24°14'
94.1	90°	0.0403	24° 8'	5	15.5°	0.0185	23°59'
90	155.1°	0.0394	24°18'	0.6	90°	0.0170	23°31'
85	235.7°	0.0376	23°55'	0	100.4°	0.0168	23°28'
82.9	270°	0.0364	23°39'				
80	317°	0.0349	23°17'				
75	40.1°	0.0315	22°39'				
72	90°	0.0292	22°20'				
70	123.1°	0.0276	22°14'				

Tableau XV (suite)

Mil- liades après 1850	Π	e	ε
0	100.4°	0.0168	23°28'
5	187.9°	0.0144	22°55'
9.6	270°	0.0118	22°33'
10	278.1°	0.0115	22°32'
15	11.7°	0.0082	22°45'
18.8	90°	0.0061	23° 5'
20	114.7°	0.0054	23°10'
25	241.4°	0.0044	23°39'
26.1	270°	0.0044	23°44'
30	8.1°	0.0048	23°59'
34	90°	0.0064	23°52'
35	111.1°	0.0069	23°50'
40	204.9°	0.0095	23°25'

L'excentricité e de l'orbite terrestre croît et décroît assez régulièrement de manière qu'elle effectue de lentes et faibles oscillations d'une période d'environ

91.800 années juliennes,

l'amplitude de ces oscillations ne pouvant dépasser d'après Stockwell la valeur

$$e = 0.0677.$$

Les variations de l'obliquité de l'écliptique accusent également un caractère oscillatoire d'une période moyenne de

40.400 années juliennes.

Ces oscillations sont, d'après Stockwell, comprises entre les limites :

$$\text{minimum } \varepsilon = 21^{\circ}58.5'$$

$$\text{maximum } \varepsilon = 24^{\circ}36'.$$

53. — Tableaux pour faciliter le calcul des variations séculaires de l'insolation.

Les limites étroites entre lesquelles oscille la valeur de ε , nous permettent de faire emploi du procédé exposé au N° 13 et d'admettre que les variations des valeurs $b_0, b_1, b_2, \dots, W_e, W_h$ et

Tableau XVI

φ	L'accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique provoque les variations suivantes de							
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0°	— 0·00339	— 0·00346	— 0·00007	— 0·00000				
5°	— 0·00335	— 0·00341	— 0·00007	— 0·00000				
10°	— 0·00323	— 0·00330	— 0·00007	— 0·00000				
15°	— 0·00302	— 0·00308	— 0·00006	— 0·00000				
20°	— 0·00274	— 0·00278	— 0·00005	— 0·00000				
25°	— 0·00236	— 0·00239	— 0·00004	— 0·00000				
30°	— 0·00189	— 0·00191	— 0·00002	— 0·00000				
35°	— 0·00129	— 0·00128	+ 0·00002	+ 0·00000				
40°	— 0·00060	— 0·00056	+ 0·00005	+ 0·00000				
45°	+ 0·00023	+ 0·00031	+ 0·00009	+ 0·00001	+ 0·00000			
50°	+ 0·00127	+ 0·00142	+ 0·00017	+ 0·00001	+ 0·00000			
55°	+ 0·00255	+ 0·00280	+ 0·00027	+ 0·00003	+ 0·00000			
60°	+ 0·00426	+ 0·00469	+ 0·00047	+ 0·00005	+ 0·00001	+ 0·00000		
65°	+ 0·00687	+ 0·00772	+ 0·00100	+ 0·00017	+ 0·00003	+ 0·00000		
70°	+ 0·01260	+ 0·01538	+ 0·00357	+ 0·00100	+ 0·00024	+ 0·00004	+ 0·00001	+ 0·00000
* 75°	+ 0·05705	+ 0·08748	+ 0·04429	+ 0·01851	+ 0·00571	+ 0·00122	+ 0·00016	+ 0·00001

APPLICATIONS.

Tableau XVII

φ	L'accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique provoque les variations suivantes de		
	W_e	W_h	W_T
0°	- 0.00054	- 0.00054	- 0.00108
5°	- 0.00031	- 0.00075	- 0.00106
10°	- 0.00007	- 0.00096	- 0.00103
15°	+ 0.00018	- 0.00114	- 0.00096
20°	+ 0.00044	- 0.00131	- 0.00087
25°	+ 0.00070	- 0.00145	- 0.00075
30°	+ 0.00097	- 0.00157	- 0.00060
35°	+ 0.00125	- 0.00167	- 0.00041
40°	+ 0.00154	- 0.00173	- 0.00019
45°	+ 0.00184	- 0.00177	+ 0.00007
50°	+ 0.00215	- 0.00175	+ 0.00040
55°	+ 0.00249	- 0.00168	+ 0.00081
60°	+ 0.00288	- 0.00153	+ 0.00136
65°	+ 0.00340	- 0.00121	+ 0.00219
70°	+ 0.00420	- 0.00059	+ 0.00361
75°	+ 0.00461	- 0.00030	+ 0.00431
90°	+ 0.00509	0.00000	+ 0.00509

W_T sont proportionnelles aux variations de ε . Les valeurs de toutes ces quantités pour l'état actuel d'insolation, c'est-à-dire pour

$$\varepsilon = 23^{\circ}27'30'',$$

ont été données au N° 45. Les tableaux précédents, XVI et XVII, donnent leurs variations correspondant à un accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique. A l'aide de ces tableaux nous sommes en état de calculer pour toutes les valeurs possibles de ε les valeurs de $b_0, b_1, b_2 \dots W_e, W_h$ et W_T caractérisant l'état d'insolation de la Terre.

Ces deux tableaux montrent que les variations de l'obliquité de l'écliptique se font sentir différemment aux diverses latitudes. Une augmentation de cette obliquité provoque une diminution assez insignifiante des quantités annuelles W_T envoyées aux zones équatoriales, tandis que les quantités annuelles envoyées aux zones polaires augmentent dans une mesure un peu plus considérable. La limite entre ces deux zones, à insolation croissante et à insolation décroissante se trouve à la latitude de 44 degrés. Les quantités de radiation W_e et W_h correspondant aux deux demi-années

Tableau XVIII

φ	L'accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique provoque les variations de		
	W_e	W_h	W_T
	en pour cent		
0°	— 0.35	— 0.35	— 0.35
5°	— 0.20	— 0.52	— 0.35
10°	— 0.04	— 0.69	— 0.34
15°	+ 0.11	— 0.87	— 0.33
20°	+ 0.26	— 1.07	— 0.30
25°	+ 0.42	— 1.29	— 0.27
30°	+ 0.59	— 1.54	— 0.22
35°	+ 0.76	— 1.83	— 0.16
40°	+ 0.96	— 2.17	— 0.08
45°	+ 1.17	— 2.60	+ 0.03
50°	+ 1.41	— 3.14	+ 0.19
55°	+ 1.69	— 3.84	+ 0.42
60°	+ 2.04	— 4.78	+ 0.78
65°	+ 2.51	— 5.77	+ 1.39
70°	+ 3.18	— 4.62	+ 2.49
75°	+ 3.57	— 4.31	+ 3.17
90°	+ 4.02	0.00	+ 4.02

se comportent tout autrement. La quantité estivale ne décroît que jusqu'au 11^e degré, lorsque l'obliquité de l'écliptique augmente, tandis qu'elle croît à partir de cette latitude; la quantité hivernale décroît à toutes les latitudes.

Il sera nécessaire plus tard de comparer entre elles les influences de la variation des éléments astronomiques ε , e et II sur l'état d'insolation de la Terre. A cet effet, il sera avantageux de connaître les variations en pour cent des valeurs W_e , W_h et W_T , correspondant à l'accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique. Les données respectives sont contenues dans le tableau XVIII. Elles présentent le fait remarquable que les quantités de radiations hivernales W_h correspondant aux latitudes de 60 à 70 degrés sont très influencées par les changements de l'obliquité de l'écliptique. Cette influence atteint son maximum à la latitude de 66°, où un accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique provoque une variation de — 5.86 pour cent de la valeur de W_h .

Les variations que subissent les quantités de radiation diurne aux jours des solstices par la variabilité de ε , ont également une

Tableau XIX

φ	$W_{\tau e}$	$W_{\tau h}$
15°	0.3354	0.2324
20°	0.3459	0.2098
25°	0.3542	0.1860
30°	0.3604	0.1614
35°	0.3645	0.1361
40°	0.3666	0.1107
45°	0.3669	0.0855
50°	0.3659	0.0609
55°	0.3640	0.0380
60°	0.3620	0.0172
65°	0.3628	0.0020
70°	0.3741	
75°	0.3845	
80°	0.3920	
85°	0.3966	
90°	0.3981	

importance particulière, car ces quantités déterminent l'amplitude de la marche annuelle de l'insolation.

Elles peuvent être calculées à l'aide de (37) et (33) en substituant dans ces expressions $+\varepsilon$ ou $-\varepsilon$ à δ ; mais nous pouvons nous servir également avec avantage des tableaux précédents.

Supposons d'abord l'excentricité de l'orbite terrestre infiniment petite, c'est-à-dire posons $\rho = 1$, et, ceci admis, désignons par $W_{\tau e}$ la quantité de radiation diurne reçue par l'unité de surface en un endroit donné de l'hémisphère boréal à l'époque du solstice d'été ($\lambda = 90^\circ$), tandis qu'à l'époque du solstice d'hiver ($\lambda = 270^\circ$) nous désignerons cette quantité par $W_{\tau h}$; on obtient alors pour ces deux quantités, à cause de (48) et (71), les expressions suivantes :

$$W_{\tau e} = \frac{\tau}{\pi} I_0 \left[b_0 + a_1' + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots \right]$$

$$W_{\tau h} = \frac{\tau}{\pi} I_0 \left[b_0 - a_1' + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots \right].$$

Posons, de même qu'au N° 43, $\tau = 1$, $I_0 = 1$, c'est-à-dire calculons les quantités de radiation reçues aux jours des solstices par unité de temps, en prenant pour unité de radiation la constante

Tableau XX

L'accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique provoque les variations suivantes de				
	$W_{\tau e}$	$W_{\tau h}$	$W_{\tau e}$	$W_{\tau h}$
φ	absolues		en pour cent	
15°	+ 0·00011	— 0·00403	+ 0·33	— 1·73
20°	+ 0·00096	— 0·00451	+ 0·28	— 2·15
25°	+ 0·00186	— 0·00490	+ 0·53	— 2·63
30°	+ 0·00279	— 0·00521	+ 0·77	— 3·23
35°	+ 0·00377	— 0·00541	+ 1·03	— 3·97
40°	+ 0·00479	— 0·00551	+ 1·31	— 4·97
45°	+ 0·00586	— 0·00546	+ 1·60	— 6·39
50°	+ 0·00704	— 0·00522	+ 1·92	— 8·57
55°	+ 0·00836	— 0·00476	+ 2·30	— 12·53
60°	+ 0·00995	— 0·00391	+ 2·76	— 22·73
65°	+ 0·01290	— 0·00155	+ 3·56	— 77·50
70°	+ 0·01505		} + 4·02	
75°	+ 0·01547			
80°	+ 0·01577			
85°	+ 0·01595			
90°	+ 0·01601			

solaire, nous obtenons alors, en tenant compte de la dernière équation (69),

$$W_{\tau e} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{m=7} b_m + \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon$$

$$W_{\tau h} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{m=7} b_m - \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon .$$

Ces équations sont valables pour la zone non-arctique, tandis que pour les zones arctiques on devrait employer les formules simples (38) dont nous ne nous occuperons plus dans ce qui suit.

Pour le calcul numérique des expressions précédentes on peut se servir du tableau IV. Dans le tableau XIX on trouvera les quantités de radiation diurne aux jours des solstices $W_{\tau e}$ et $W_{\tau h}$ pour les latitudes auxquelles elles représentent également les extrêmes de la marche annuelle de l'insolation.

Les variations de ces valeurs correspondant à l'accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique sont représentées, à cause de (119), pour la zone non-arctique par les expressions suivantes:

$$\Delta W_{\tau e} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{m=7} \Delta b_m + \frac{\pi}{180} \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varepsilon$$

$$\Delta W_{\tau h} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{m=7} \Delta b_m - \frac{\pi}{180} \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varepsilon.$$

Comme les valeurs numériques de Δb_m sont contenues dans le tableau XVI, il est aisé de calculer ces variations qu'on trouvera dans le tableau XX. Ce tableau contient également ces variations exprimées en pour cent.

Jusqu'à présent nous avons supposé l'orbite terrestre comme étant circulaire. A cause de sa forme elliptique les valeurs de $W_{\tau e}$ et $W_{\tau h}$ doivent être multipliées respectivement par $\frac{1}{\varrho_e^2}$ et $\frac{1}{\varrho_h^2}$, ϱ_e désignant le rayon vecteur Soleil-Terre à l'époque du solstice d'été, mesurés en unités astronomiques, tandis que ϱ_h désigne sa valeur au jour du solstice d'hiver. Ces deux valeurs sont, d'après (9), (10), (11) et (14), de simples fonctions de ε et II de sorte que leurs variations séculaires sont facilement calculables.

54. — Marche séculaire de l'insolation de la Terre.

Les résultats des deux derniers Nos nous mettent en état de représenter par des chiffres la marche séculaire de l'insolation de la Terre.

L'état d'insolation de la Terre pendant une année quelconque de son passé géologique ou de son avenir est exprimé le plus complètement par la marche annuelle de l'insolation à diverses latitudes au cours de l'année en question. Si l'on voulait poursuivre les variations séculaires de cet état d'insolation dans le passé éloigné, on devrait déterminer la marche annuelle de l'insolation pour une série d'années convenablement choisie et pour une série de latitudes, ce qui serait une tâche très laborieuse. Or, nous pouvons saisir également les traits principaux de cette marche séculaire en poursuivant au cours des temps les variations séculaires des quantités de radiation estivales et hivernales W_e et W_h pour une série de latitudes, tout en tenant compte des variations des durées T_e et T_h des saisons.

Nous avons remarqué au N^o 13 que les quantités W_e , W_h et W_T ne contiennent d'éléments astronomiques variables e , ε , Π que les deux premiers. Il résulte ensuite des équations (86) à (92) que, dans les expressions des quantités mentionnées, l'excentricité e de l'orbite terrestre n'apparaît que dans le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$. En tenant compte enfin que e varie entre zéro et 0.0677, on trouve que les valeurs de W_e , W_h et W_T , sous l'influence de la variabilité de e , ne peuvent diminuer que de 0.01 et augmenter que de 0.24 pour cent par rapport à leur valeur actuelle (pour $e = 0.0168$). Ces écarts sont tellement faibles qu'on peut dire: les quantités de radiation W_e , W_h et W_T versées au cours des saisons astronomiques ne sont notablement influencées que par les changements de l'obliquité de l'écliptique.

La façon dont les variations de cette obliquité se font sentir dans les valeurs numériques de W_e , W_h et W_T est donnée par les tableaux XVII et XVIII. Un accroissement de l'obliquité de l'écliptique diminue les quantités de radiations annuelles W_T des régions équatoriales et augmente celles des régions polaires, ou bien, autrement dit, il diminue les contrastes géographiques entre l'équateur et les pôles.

On peut démontrer par le calcul que pour une obliquité de l'écliptique de 54° ces contrastes s'effacent complètement, c'est-à-dire que la quantité de radiation annuelle versée au pôle devient égale à celle versée à l'équateur.

Une diminution de l'obliquité de l'écliptique a des conséquences contraires: elle accentue les contrastes géographiques qui atteignent leur maximum pour une obliquité égale à zéro, les deux pôles étant, dans ce cas, durant toute l'année, à l'abri des rayons solaires.

Au sujet des valeurs W_e et W_h , il découle des tableaux mentionnés plus haut, ce qui suit. A part la région de la zone tropique, comprise entre le dixième parallèle nord et le dixième parallèle sud, les contrastes entre l'été et l'hiver ne se manifestant pas dans cette région, la croissance de l'écliptique provoquera partout ailleurs une augmentation de la quantité de radiation estivale W_e et une diminution de la quantité hivernale W_h . Autrement dit, l'augmentation de l'obliquité de l'écliptique accentue les contrastes entre l'été et l'hiver, tandis que sa diminution les adoucit. Pour une obliquité nulle, les saisons s'effacent complètement. L'augmentation

de l'obliquité de l'écliptique accentue les amplitudes de la marche annuelle de l'insolation, c'est ce qu'on peut voir nettement dans le tableau XX.

En résumant ce qui précède, on peut dire que l'augmentation de l'obliquité de l'écliptique adoucit les contrastes géographiques de l'insolation, tandis qu'elle en accentue les contrastes saisonniers.

Il résulte de (93) que les variations de l'obliquité de l'écliptique se font sentir de la même manière sur les deux hémisphères terrestres, c'est-à-dire que les contrastes géographiques ou saisonniers s'accroissent et s'adoucissent sur les deux hémisphères aux mêmes époques.

Nous avons vu au N^o 52 que les variations de cette obliquité ont un caractère oscillatoire assez régulier à une période de 40·4 milliades. Ceci a pour conséquence qu'au cours d'une de ces périodes, les contrastes géographiques des deux hémisphères atteignent, à l'époque de l'obliquité maxima de l'écliptique, leur minimum, alors que les contrastes saisonniers atteignent leur maximum. C'est l'inverse qui aura lieu lorsque l'obliquité de l'écliptique, après 20·2 milliades, tombe à son minimum. Ces phénomènes se répéteraient régulièrement si la variabilité des autres éléments astronomiques n'intervenait pas.

La marche annuelle de l'insolation ne se manifeste pas seulement par les valeurs de W_e et W_h mais aussi par la durée T_e et T_h des saisons astronomiques pendant lesquelles ces quantités de radiation sont reçues.

Ces durées T_e et T_h sont, ainsi qu'il a été montré au N^o 13, des fonctions de deux autres éléments astronomiques variables, c'est-à-dire de l'excentricité de l'orbite terrestre e et de la longitude du périhélie Π . Dans les formules (117) représentant les durées des saisons T_e et T_h ces deux éléments n'apparaissent que sous la forme suivante:

$$\frac{4}{\pi} T e \sin \Pi = T_e - T_h$$

représentant la différence des durées des saisons astronomiques. A cause de la variabilité des éléments e et Π , cette différence sera une fonction du temps dont l'allure peut être esquissée de la manière suivante.

Nous avons appris au N^o 52 que la valeur Π croît assez régulièrement jusqu'à 360° dans l'espace de 20·7 milliades, c'est-à-dire

que la fonction $\sin II$ effectuera pendant ce temps une oscillation complète entre les limites -1 et $+1$. La valeur de e effectue au cours d'une plus longue période de 91.8 milliades une oscillation semblable, mais à amplitude considérablement plus faible, qui reste comprise entre les limites 0 et 0.0677. Dans l'expression de $T_e - T_h$ les deux oscillations précédentes se font sentir toutes les deux, mais la première beaucoup plus que la seconde; ce qui a pour conséquence que cette expression oscillera avec une période de 20.7 milliades autour de sa valeur moyenne égale à zéro et que ces oscillations seront successivement accentuées ou adoucies tous les 45.9 milliades par la variabilité de l'élément e .

Ces oscillations se font sentir de la manière suivante dans la marche séculaire de l'insolation.

En faisant abstraction du cas $e = 0$, qui, du reste, ne se présente pas dans l'espace de temps auquel les équations de Stockwell peuvent être appliquées, la différence $T_e - T_h$ ne disparaît que lorsque II est égale à zéro ou à 180° . Lorsque II croît de zéro à 90° , la saison chaude T_e de l'hémisphère boréal devient plus longue aux dépens de la saison froide; en laissant de côté les variations de l'obliquité de l'écliptique, la quantité de radiation W_e , qui reste invariable, correspondra à des espaces de temps de plus en plus longs, c'est-à-dire que la moyenne insolation estivale par unité de temps diminue d'année en année. C'est l'inverse qui a lieu pour la saison froide qui devient plus courte et dont l'insolation moyenne devient plus forte.

Lorsque II a atteint la valeur de 90° , la durée de la saison estivale est près de son maximum (qui par suite de la variabilité de e ne coïncide pas exactement avec $II = 90^\circ$), c'est-à-dire que la moyenne insolation estivale est près de son minimum, tandis que l'hivernale est près de son maximum. Les contrastes saisonniers sont alors tombés à leur minimum.

Mais ceci n'est valable que pour l'hémisphère boréal. Pendant ce temps-là, la saison chaude de l'hémisphère austral (qui coïncide avec la saison froide de l'hémisphère boréal) a atteint son minimum, tandis que la quantité de radiation \overline{W}_e versée sur une latitude quelconque de cet hémisphère pendant son court été est égale, d'après (93), à la quantité que reçoit la même latitude boréale durant le long été de cet hémisphère. Il s'ensuit donc que l'hémisphère

austral aura un été court et chaud et un hiver long et froid par rapport aux saisons de l'autre hémisphère. Au moment, où les contrastes saisonniers de l'hémisphère boréal sont adoucis au plus fort degré, ceux de l'hémisphère austral sont accentués au plus fort degré également.

Lorsque Π a atteint la valeur de 180° , les durées des saisons T_e et T_h sont égales; les deux hémisphères se trouvent être dans les mêmes conditions.

Lorsque $\Pi = 270^\circ$, la durée de la saison chaude boréale est tombée à son minimum, celle de la saison froide a atteint son maximum; les contrastes saisonniers sont accentués au plus fort degré. Pendant ce temps-là, sur l'hémisphère austral, où règne un été long et froid et un hiver court et doux, l'adoucissement de ces contrastes est le plus fort.

Pour $\Pi = 360^\circ$, les durées des saisons T_e et T_h étant égales, les deux hémisphères sont dans des conditions identiques et le jeu précédent recommence de la même manière avec cette différence, qu'à cause de la variabilité de e , les contrastes saisonniers de la période suivante de $20\cdot7$ milliades ne seront pas identiques aux précédents. En effet, lorsque e croît, l'accentuation et l'adoucissement des contrastes saisonniers deviennent plus prononcés, et lorsque e décroît, c'est l'inverse qui a lieu.

Les variations de la marche annuelle de l'insolation que nous venons d'exposer et qui sont dues à celles des valeurs e et Π , se combineront aux variations provoquées par la variabilité de la valeur ε . Ces dernières variations ont, comme il a été déjà montré, une période différente et se font sentir dans le même sens sur les deux hémisphères mais différemment à différentes latitudes.

Par la superposition de ces deux genres de variations séculaires de la marche annuelle de l'insolation, la régularité de ces deux phénomènes, pris à part, disparaît.

C'est ce qui sera montré au N^o suivant par des exemples numériques.

55. — Exemples numériques se rapportant au N^o précédent.

L'insolation moyenne par unité de temps au cours de la saison chaude T_e à la latitude φ , est représentée par

$$w_e = \frac{W_e}{T_e},$$

T_e étant donné par la formule (117). En tenant compte que la valeur e reste toujours petite, on peut développer l'expression de T_e^{-1} , d'après la formule du binôme, en une série, tout en négligeant les puissances supérieures de e . De cette manière on obtient

$$w_e = \frac{2}{T} \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right) W_e,$$

et, pour l'insolation moyenne w_h par unité de temps au cours de la saison froide T_h ,

$$w_h = \frac{2}{T} \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right) W_h.$$

Ces expressions sont valables pour l'hémisphère boréal; pour l'hémisphère austral, dont la saison chaude coïncide avec la saison froide boréale, on obtient, en tenant compte de (93),

$$\overline{w_e} = \frac{2}{T} \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right) W_e$$

$$\overline{w_h} = \frac{2}{T} \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right) W_h.$$

Les valeurs $\frac{W_e}{T}$ et $\frac{W_h}{T}$ sont contenues dans le tableau V (désignées par W_e et W_h) pour l'obliquité de l'écliptique actuelle $\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 30''$ et pour $I_0 = 1$. Pour une autre obliquité ε , on obtient les valeurs correspondantes en ajoutant aux valeurs précédentes respectivement les produits $\Delta W_e \Delta \varepsilon$ et $\Delta W_h \Delta \varepsilon$, où on a

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0,$$

$\Delta \varepsilon$ étant mesuré en degrés, tandis que ΔW_e et ΔW_h désignent les variations de W_e et W_h contenues dans le tableau XVII.

On obtient donc

$$w_e = 2 \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right) \left(W_e + \Delta W_e \Delta \varepsilon \right).$$

Or, l'expression

$$\frac{4}{\pi} T e \sin \Pi = \Delta T$$

représente, d'après (117), la différence entre les durées de la saison chaude et de la saison froide de l'hémisphère boréal, de sorte qu'on a

$$w_e = 2 \left(1 - \frac{\Delta T}{T} \right) \left(W_e + \Delta W_e \Delta \varepsilon \right).$$

On obtient de semblables expressions pour les valeurs w_h , \bar{w}_e et \bar{w}_h également, dont les variations séculaires peuvent être poursuivies au cours des siècles à l'aide des tableaux V, XVII et XV. Si l'on tient compte que, d'après ces tableaux, les produits $\frac{\Delta T}{T} \Delta W_e$ et $\frac{\Delta T}{T} \Delta W_h$ ont une valeur tellement petite qu'ils peuvent être négligés, on obtient

$$w_e = 2 \left[W_e + \Delta W_e \Delta \varepsilon - \frac{W_e}{T} \Delta T \right]$$

$$w_h = 2 \left[W_h + \Delta W_h \Delta \varepsilon + \frac{W_h}{T} \Delta T \right]$$

$$\bar{w}_e = 2 \left[W_e + \Delta W_e \Delta \varepsilon + \frac{W_e}{T} \Delta T \right]$$

$$\bar{w}_h = 2 \left[W_h + \Delta W_h \Delta \varepsilon - \frac{W_h}{T} \Delta T \right].$$

Il ressort nettement de ces équations que les variations de l'obliquité de l'écliptique se font sentir sur les deux hémisphères dans le même sens, tandis que les variations de saisons astronomiques se font sentir en sens inverse.

En désignant par η_e , η_h , $\bar{\eta}_e$, $\bar{\eta}_h$ les écarts respectifs des valeurs w_e , w_h , \bar{w}_e , \bar{w}_h de leurs moyennes $2 W_e$ et $2 W_h$ correspondant à l'obliquité actuelle de l'écliptique $\varepsilon = \varepsilon_0$ et à l'excentricité $e = 0$, on obtient

$$\eta_e = 2 \Delta W_e \Delta \varepsilon - \frac{2 W_e}{T} \Delta T$$

$$\eta_h = 2 \Delta W_h \Delta \varepsilon + \frac{2 W_h}{T} \Delta T$$

$$\bar{\eta}_e = 2 \Delta W_e \Delta \varepsilon + \frac{2 W_e}{T} \Delta T$$

$$\bar{\eta}_h = 2 \Delta W_h \Delta \varepsilon - \frac{2 W_h}{T} \Delta T .$$

On obtient donc les expressions précédentes par addition des valeurs $\Delta \varepsilon$ et ΔT après avoir multiplié chacune d'elles par un facteur indépendant du temps.

Les variations des valeurs $\Delta \varepsilon$ et ΔT au cours des dernières 125 milliades sont contenues dans le tableau XXI et représentées gra-

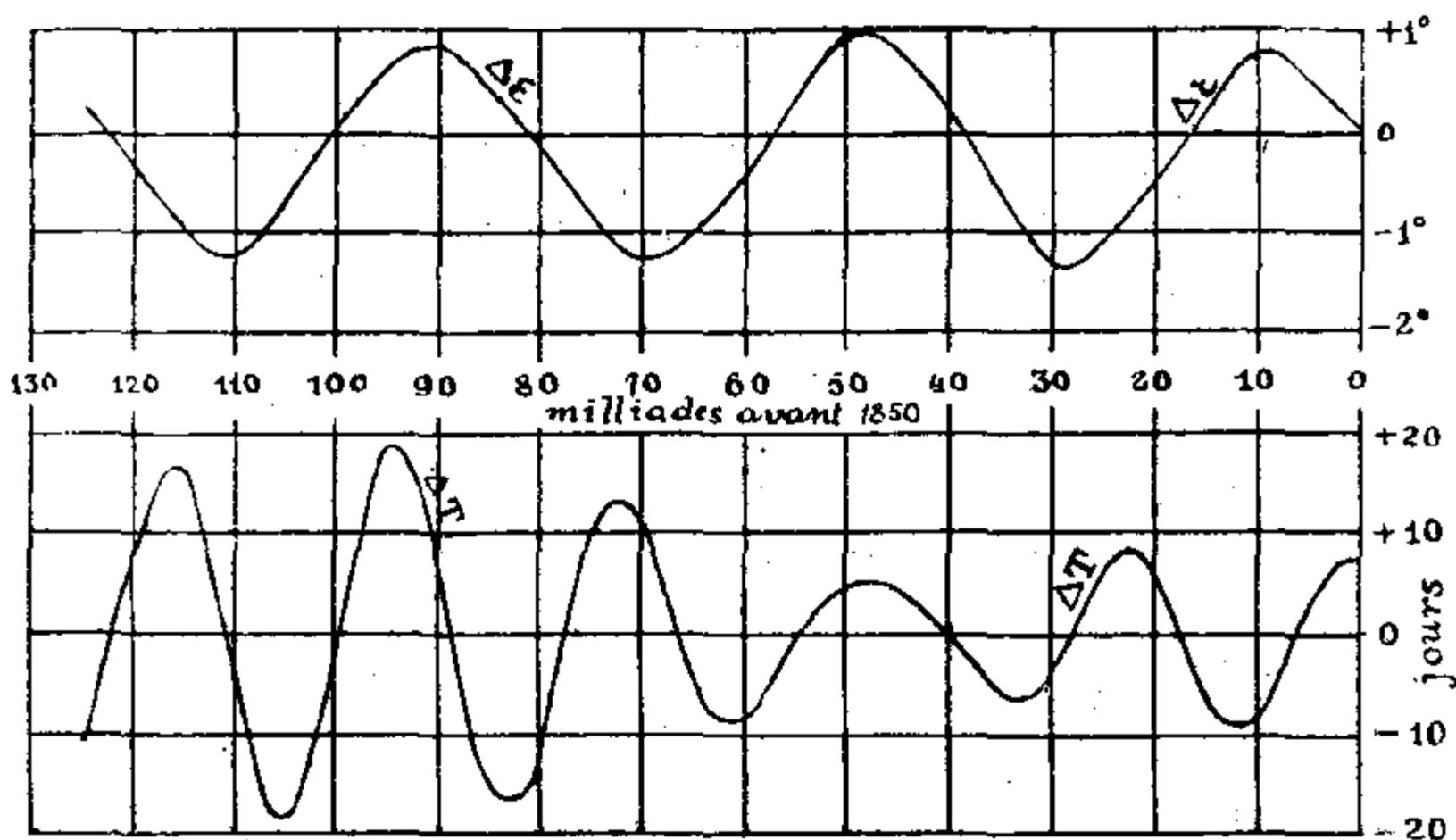


Fig. 20.

phiquement par la *fig. 20*. La courbe désignée par $\Delta \varepsilon$ représente les oscillations assez régulières de l'obliquité de l'écliptique dont l'amplitude est égale à deux degrés environ; la courbe ΔT représente les variations des saisons astronomiques. La double oscillation de cette quantité, dont il a été question au N^o précédent, est nettement exprimée par la figure ci-jointe. Tandis que, à l'époque de la cinquantième milliade, l'écart maximum entre la durée de la saison chaude et celle de la saison froide n'était que de cinq jours, cet écart atteignit, par suite de la variabilité de e , presque dixneuf

Tableau XXI

Milliades avant 1850	$\Delta \varepsilon$ degrés	ΔT jours	Milliades avant 1850	$\Delta \varepsilon$ degrés	ΔT jours
0	0	+ 7.68	60.9	- 0.533	- 9.02
0.6	+ 0.050	+ 7.90	65	- 0.983	- 4.60
5	+ 0.517	+ 2.30	70	- 1.233	+ 10.74
10	+ 0.767	- 8.36	72	- 1.133	+ 13.57
11.4	+ 0.617	- 9.06	75	- 0.817	+ 9.44
15	+ 0.250	- 4.60	80	- 0.183	- 11.06
20	- 0.467	+ 6.90	82.9	+ 0.183	- 16.92
22.3	- 0.733	+ 8.46	85	+ 0.450	- 14.43
25	- 1.050	+ 5.67	90	+ 0.833	+ 7.72
30	- 1.300	- 4.40	94.1	+ 0.667	+ 18.72
33.5	- 0.850	- 6.41	95	+ 0.567	+ 18.17
35	- 0.650	- 5.53	100	0.000	- 1.97
40	+ 0.183	+ 0.30	105.1	- 0.767	- 18.65
45	+ 0.750	+ 4.28	110	- 1.217	- 2.76
47.6	+ 0.950	+ 5.11	115	- 0.917	+ 16.44
50	+ 0.950	+ 4.74	116	- 0.783	+ 16.88
55	+ 0.350	- 0.44	120	- 0.317	+ 6.88
60	- 0.433	- 8.39	125	+ 0.217	- 11.57

jours, à l'époque comprise entre la quatre-vingt-dixième et la centième milliade avant l'époque actuelle.⁵⁷⁾

L'allure du changement séculaire de la quantité η apparaît comme une superposition de ces deux courbes. Il dépend du rapport des facteurs de leurs ordonnées, c'est-à-dire des valeurs de $\frac{1}{T} \frac{\Delta W_e}{W_e}$ ou $\frac{1}{T} \frac{\Delta W_h}{W_h}$, quelle sera celle qui dominera l'allure de la courbe représentant les variations de η . Pour pouvoir aisément trancher cette question, nous avons calculé les rapports $\frac{100 \Delta W_e}{W_e}$ et $\frac{100 \Delta W_h}{W_h}$ pour diverses latitudes; les valeurs obtenues se trouvent consignées dans le tableau XVIII.

Il découle de ce tableau que, pour des latitudes basses, c'est l'influence des membres contenant ΔT qui est prépondérante, de façon que, dans ce cas, la marche séculaire des valeurs η_h et η_e sera représentée par une courbe semblable à la courbe ΔT de la fig. 20. La marche séculaire des valeurs η_e et η_h sera représentée

par une courbe à peu près symétrique à la précédente par rapport à l'axe des abscisses.

Plus on s'éloigne de l'équateur, plus grande est l'influence des membres contenant $\Delta \varepsilon$. A la latitude de 48 degrés, les moyennes amplitudes des deux membres $2 \Delta W_h \Delta \varepsilon$ et $\frac{2 W_h}{T} \Delta T$ dans les expressions de η_h et $\bar{\eta}_h$ deviennent à peu près égales. Les deux oscillations composantes de η_h et $\bar{\eta}_h$ se renforceront tantôt, ou s'affaibliront, irrégulièrement sur les deux hémisphères par suite de leurs

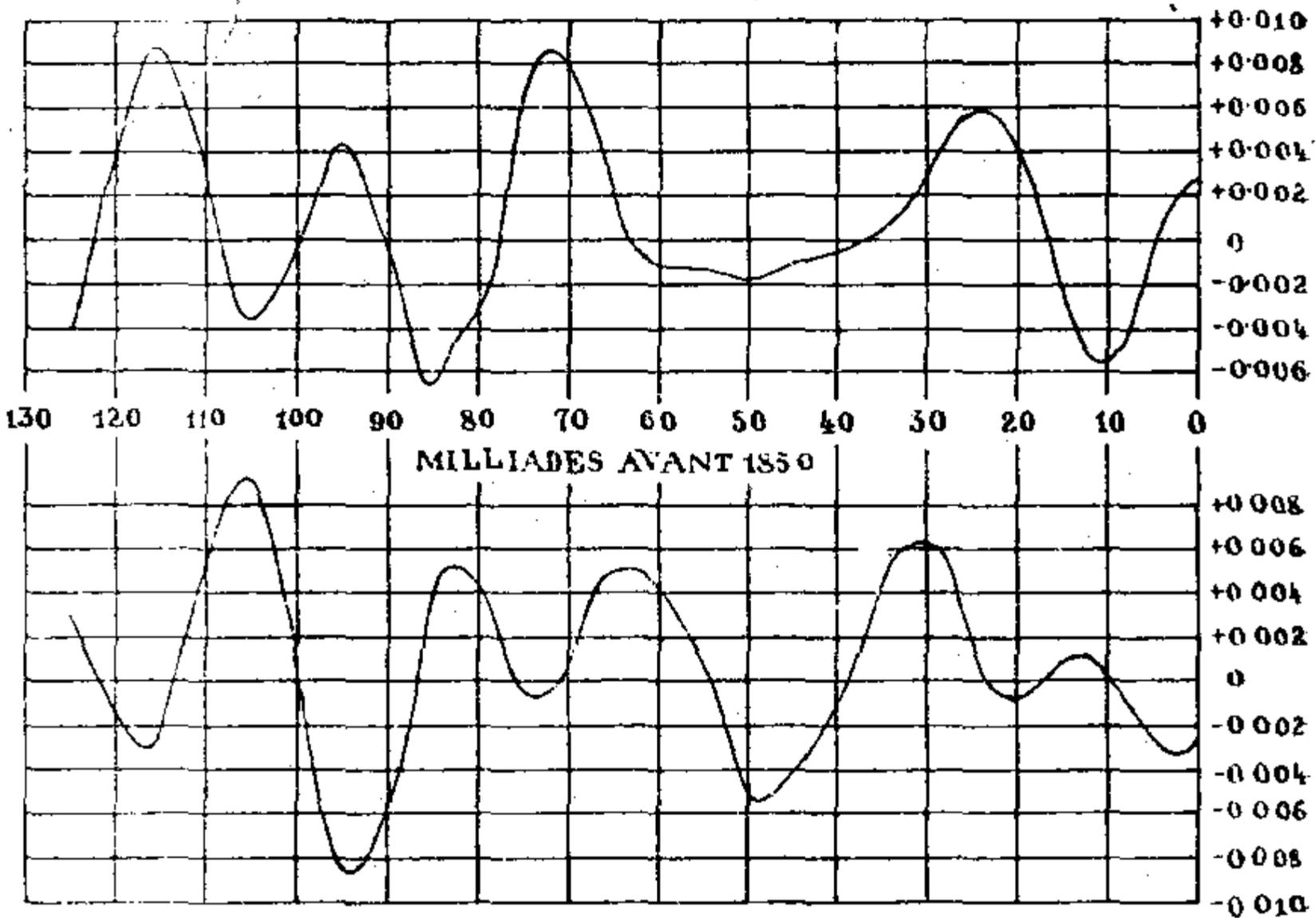


Fig. 21.

périodes inégales, et à cause du signe négatif contenu dans l'expression de $\bar{\eta}_h$. C'est ce que montre la *fig. 21*, où la courbe supérieure représente la marche séculaire de la valeur η_h , tandis que la courbe inférieure représente celle de la valeur $\bar{\eta}_h$. Le calcul de ces valeurs a été effectué avec les mêmes unités que celles ayant servi au calcul du tableau V. Les oscillations représentées par ces deux courbes ne sont ni de même sens ni de sens contraire et leur période varie considérablement avec le temps. Ainsi, la

valeur η_h n'effectue qu'une seule oscillation dans l'intervalle de la vingtième à la soixante-dixième milliade avant 1850, tandis que, dans le même espace de temps, précédant celui-ci, cette valeur effectue deux oscillations complètes.

Pour $\varphi = 66^\circ$, les moyennes amplitudes du membre $2 \Delta W_h \Delta \varepsilon$ dans les expressions de η_h et $\bar{\eta}_h$ deviennent doubles de celles du membre $\frac{2 W_h}{T} \Delta T$. Dans ce cas, les courbes représentant les valeurs η_h et $\bar{\eta}_h$ se rapprocheront par leur forme de la courbe $\Delta \varepsilon$ représentée dans la *fig. 20* et elles auront la même allure pour les deux hémisphères. Pour des latitudes encore plus hautes, l'influence des membres contenant $\Delta \varepsilon$ diminue de nouveau.

Dans les expressions de $\bar{\eta}_e$ et η_e , l'influence du membre $2 \Delta W_e \Delta \varepsilon$ ne devient prépondérante qu'à la latitude $\varphi = 68^\circ$ et son influence augmente sans cesse jusqu'au pôle.

On ne doit pas oublier que les valeurs w_e et w_h n'expriment pas exactement les durées des saisons astronomiques et qu'à une petite valeur de w_e ou w_h correspond, en général, un été ou un hiver froids et longs dont l'influence se fait, par conséquent, doublement sentir. Inversement à de fortes valeurs de w_e ou w_h correspond, en général, un été ou un hiver courts, ce qui diminue leur influence. Il s'ensuit que les minima des valeurs w_e et w_h se font plus sentir que leurs maxima.

Pour cette raison on peut compléter la représentation de la marche séculaire que nous venons de donner par le calcul des variations séculaires des amplitudes de l'insolation annuelle.

Ces amplitudes sont, à l'exception de celles de la zone équatoriale, représentées par les insolutions aux jours des solstices et l'on peut employer pour leur calcul les tableaux XIX et XX. En effet, les quantités de radiations aux jours des solstices, pour $\varrho = 1$, $I_0 = 1$, $\tau = 1$ et une obliquité de l'écliptique ε différant de la valeur $\Delta \varepsilon$ de celle à l'époque 1850, sont représentées par

$$\begin{aligned} W_{\tau e} + \Delta W_{\tau e} \Delta \varepsilon \\ W_{\tau h} + \Delta W_{\tau h} \Delta \varepsilon, \end{aligned}$$

où les valeurs $W_{\tau e}$ et $W_{\tau h}$ sont données par le tableau XIX, tandis que celles de $\Delta W_{\tau e}$ et $\Delta W_{\tau h}$ sont données par le tableau XX.

Pour obtenir la moyenne insolation w d'un parallèle à l'époque du solstice, on devrait, d'après (48), diviser les expressions précédentes avec τ , ce qui a déjà eu lieu, ayant posé $\tau = 1$.

On doit encore multiplier les expressions précédentes par $\frac{1}{\rho^2}$. En tenant compte que, pour les jours des solstices, cette valeur est donnée respectivement par (161) et (164), où on doit poser $a = 1$, car il s'agit de la Terre, nous obtenons

$$\text{Maximum } w = (W_{\tau e} + \Delta W_{\tau e} \Delta \varepsilon) (1 - 2e \sin II)$$

$$\text{Minimum } w = (W_{\tau h} + \Delta W_{\tau h} \Delta \varepsilon) (1 + 2e \sin II).$$

Ces équations sont valables pour l'hémisphère boréal, tandis que pour l'hémisphère austral nous obtenons, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte.

$$\text{Maximum } \bar{w} = (W_{\tau e} + \Delta W_{\tau e} \Delta \varepsilon) (1 + 2e \sin II)$$

$$\text{Minimum } \bar{w} = (W_{\tau h} + \Delta W_{\tau h} \Delta \varepsilon) (1 - 2e \sin II).$$

En introduisant dans les équations précédentes, ainsi que nous l'avons déjà fait pour w_e et w_h , la différence ΔT des saisons et en négligeant d'autre part les produits, ordinairement très petits, $\Delta W_{\tau e} \frac{\Delta T}{T}$ et $\Delta W_{\tau h} \frac{\Delta T}{T}$, on obtient

$$\text{Maximum } w = W_{\tau e} + \Delta W_{\tau e} \Delta \varepsilon - \frac{\pi}{2} \frac{W_{\tau e}}{T} \Delta T$$

$$\text{Minimum } w = W_{\tau h} + \Delta W_{\tau h} \Delta \varepsilon + \frac{\pi}{2} \frac{W_{\tau h}}{T} \Delta T$$

$$\text{Maximum } \bar{w} = W_{\tau e} + \Delta W_{\tau e} \Delta \varepsilon + \frac{\pi}{2} \frac{W_{\tau e}}{T} \Delta T$$

$$\text{Minimum } \bar{w} = W_{\tau h} + \Delta W_{\tau h} \Delta \varepsilon - \frac{\pi}{2} \frac{W_{\tau h}}{T} \Delta T.$$

Ces expressions ont la même constitution que celles de $w_e, w_h, \bar{w}_e, \bar{w}_h$, et ce qui a été dit précédemment pour celles-ci, s'applique également à celles-là. On trouvera facilement à l'aide du tableau XX que, dans les expressions pour *Maximum* w et *Maximum* \bar{w} , l'influence du membre contenant ΔT est prépondérante; dans les expressions pour *Minimum* w et *Minimum* \bar{w} l'influence du membre contenant

$\Delta \varepsilon$ sera déjà prépondérante pour $\varphi = 38^\circ$. La représentation graphique des deux valeurs *Maximum* w et *Maximum* \bar{w} est, par conséquent, semblable à la courbe ΔT (fig. 20), tandis que celle des deux valeurs *Minimum* w et *Minimum* \bar{w} ressemble à la courbe $\Delta \varepsilon$ (fig. 20). Dans le premier cas, l'influence se fait sentir en sens inverse sur les deux hémisphères, et dans le même sens dans le second cas.

Jusqu'à présent nous n'avons pas tenu compte de l'affaiblissement que subit la radiation solaire par son passage à travers l'atmosphère, c'est-à-dire nous avons considéré la quantité de radiation solaire qui atteint la limite supérieure de l'atmosphère terrestre. Pour calculer les quantités de radiation atteignant la surface terrestre, on peut employer les résultats du N^o 18. On s'apercevra alors — ainsi qu'on pouvait s'y attendre — que, dans la marche séculaire, l'influence de la valeur ε deviendra plus forte que ce qu'elle était lorsqu'on faisait abstraction de l'atmosphère. Une plus faible obliquité de l'écliptique aura, en effet, pour conséquence, non seulement, que les rayons solaires tomberont pendant l'été sous un angle d'incidence plus grand, mais aussi que les jours d'été seront plus courts, de même que la route parcourue à travers l'atmosphère sera plus longue, ce qui sera aussi une cause d'affaiblissement de la radiation solaire atteignant la surface terrestre. En hiver, l'effet est contraire. Les conséquences de changement des éléments e et Π restent les mêmes, comme si l'on n'avait pas tenu compte de l'atmosphère. Il découle de ce qui précède que l'atmosphère renforce les effets des variations de l'obliquité de l'écliptique.

Pour pouvoir poursuivre ce fait sur un exemple, nous allons calculer les variations qu'a subies, au cours des 125 milliades écoulées, l'insolation directe du 70° degré de latitude au jour du solstice d'été.

L'insolation directe de ce parallèle, à cette époque, peut être calculée à l'aide de (167). Posons $\frac{J_0}{a^2} = 1$ et exprimons les résultats en unités d'Angot en multipliant, d'après le N^o 43, cette expression par 1000π , nous obtenons

$$\text{Maximum } w' = 1000 (1 - 2e \sin \Pi) \int_0^{\psi_0} f_e(\varepsilon, \psi_1) d\psi_1.$$

L'insolation au jour du solstice d'hiver est égale à zéro.

Pour $e = 0$, pour l'obliquité actuelle de l'écliptique ε_0 et pour le moyen coefficient de transmission $p = 0.60$, donné au N^o 42, l'insolation précédente est, d'après le tableau III, égale à 406 unités d'Angot, c'est-à-dire qu'on a

$$1000 \int_0^{\psi_0} f_e(\varepsilon_0, \psi_1) d\psi_1 = 406.$$

La variation que subit cette valeur pour un accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique peut être calculée en effectuant la quadrature mécanique de l'intégrale (171). On obtient de cette manière, et en introduisant la quantité ΔT ,

$$\text{Maximum } w' = \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{\Delta T}{T}\right) (406 + 21.5 \Delta \varepsilon).$$

A l'aide de cette équation, valable pour une combinaison quelconque des éléments e , Π et $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon$, et à l'aide du tableau XXI,

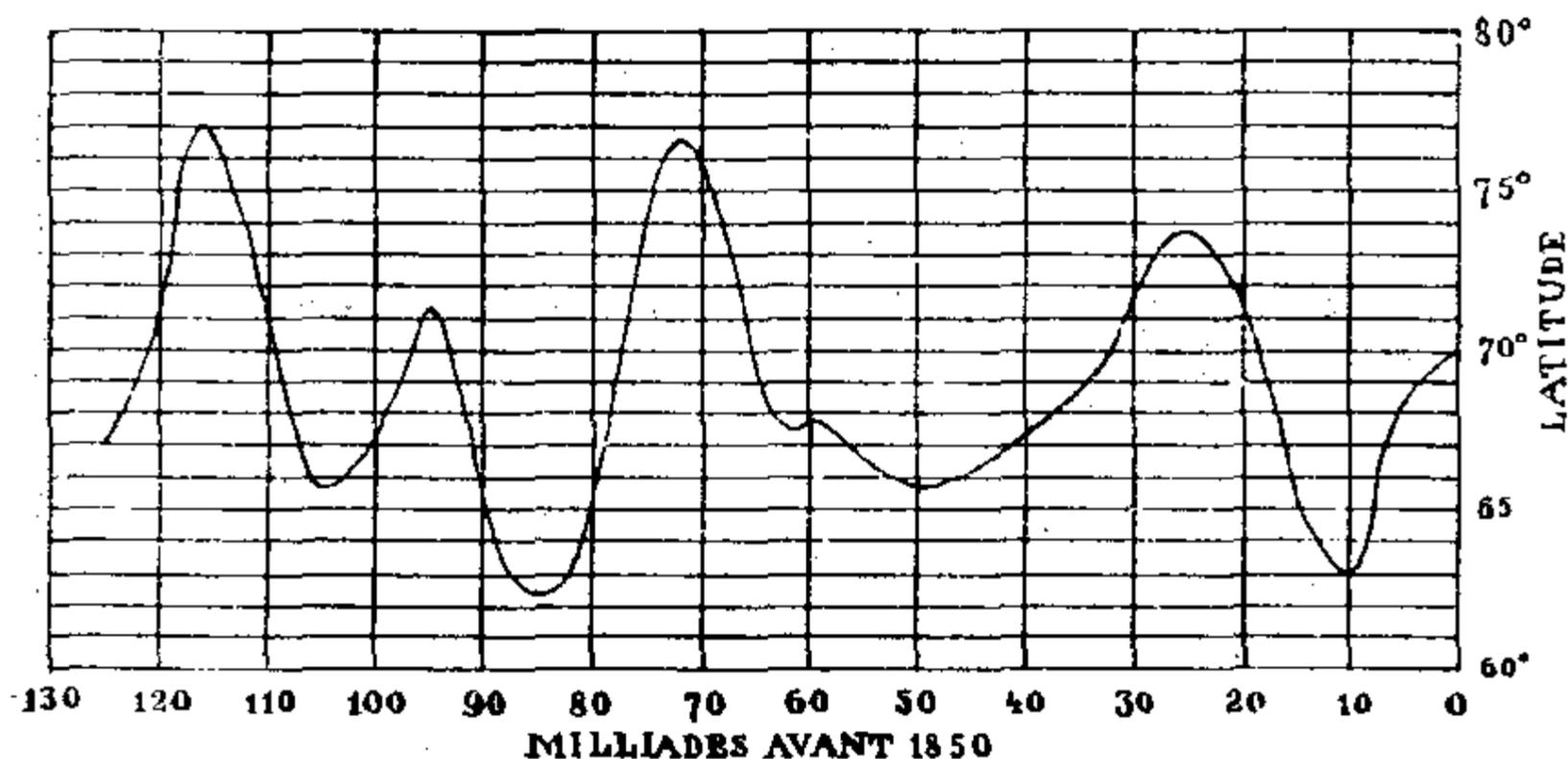


Fig. 22.

on peut facilement calculer les variations séculaires de l'insolation au jour du solstice d'été.

Nous pouvons représenter les résultats ainsi obtenus, également à l'aide d'oscillations fictives de la latitude, ainsi qu'il a été montré au N^o 19, c'est-à-dire nous pouvons déterminer les latitudes géographiques qui sont actuellement, à l'époque du solstice d'été, insolées de la même manière que le 70^e parallèle au cours des années du passé géologique.

De cette manière on obtient la courbe de la *fig. 22* qui exprime ce qui suit.

En reculant de l'année 1850 dans le passé, nous voyons l'insolation au solstice d'été croître au début, c'est-à-dire que l'été devient de plus en plus chaud. A la 10^e milliade avant 1850, le 70^e parallèle est exposé, à l'époque du solstice d'été, à une insolation directe égale à celle qu'on retrouve actuellement sept degrés plus au sud. A partir de cette époque, l'été devient plus frais et, à l'époque de la 25^e milliade avant 1850, sa quantité maxima de radiation diurne n'est pas plus grande que celle du 74^e parallèle à l'époque actuelle. En continuant à nous enfoncer dans le passé, nous entrons de nouveau dans une longue période d'insolation croissante qui fait place ensuite à une période de décroissance. Ceci se repète par la suite avec cette différence que les périodes, de même que les amplitudes des oscillations fictives de la latitude sont différentes de ce qu'elles étaient dans la période précédente. La 85^e milliade se distingue par une forte, et la 116^e milliade par une faible insolation solsticiale.

56. — *Théories astronomiques des époques glaciaires.*

Les variations séculaires de l'insolation de la Terre, que nous venons d'exposer, sont d'une telle grandeur qu'elles exercent, sans doute, une influence appréciable sur le climat terrestre. Avant d'aborder la question relative à la façon dont aurait pu se manifester cette influence dans le cadre du climat terrestre, nous allons faire quelques remarques qui nous paraissent importantes, sur les théories dites Théories astronomiques des époques glaciaires.

Ces théories partent d'un point de vue opposé. On avait déjà constaté en Géologie de grandes variations climatiques au cours de l'histoire de notre planète, variations trouvant leur plus forte expression aux périodes de glaciation intense en Europe et en Amérique du Nord, et la question se posa de savoir quelles étaient les causes de ces changements climatiques.

C'est Adhémars⁵⁸) qui, à notre connaissance, fut le premier qui tenta la solution de ce problème à l'aide des variations séculaires de l'insolation de la Terre. Dans l'ouvrage de cet auteur, ce

grand problème ne nous apparaît pas encore posé en pleine clarté, il est vrai, mais il est d'un grand attrait par la nouveauté de la question qu'il aborde, car c'est à peine si l'on avait démontré l'origine de ces amas caractéristiques de débris pierreux et de blocs erratiques venus du Nord et disseminés sur une grande partie de l'Europe et de l'Amérique du Nord et dont il s'agissait de trouver le mode de transport à ces grandes distances. Plusieurs hypothèses se trouvèrent face à face. D'après l'une de celles-ci, les icebergs auraient transporté sur leurs dos les roches et leurs débris à partir de leurs lieux d'origine à travers une mer dont était couverte la majeure partie de l'hémisphère boréal. Arrivés dans des parages plus chauds, les icebergs en fondant déposèrent leurs fardeaux aux endroits où nous les trouvons aujourd'hui. Une autre hypothèse voudrait que ce fussent des flots, déchaînés au cours d'une catastrophe, roulant du Nord vers le Sud qui auraient été la cause de transport. Enfin, d'après une troisième hypothèse, ce seraient d'énormes glaciers qui auraient effectué ce transport.

Adhémar, sous l'empire des idées de Cuvier, d'après lesquelles notre planète aurait été successivement dévastée par une série de cataclysmes pour être peuplée chaque fois à nouveau par un acte de création, chercha, avant tout, d'étayer l'hypothèse des flots porteurs par une théorie dont les traits principaux sont les suivants.

A cause de la précession des équinoxes, du déplacement du périhélie et des changements des saisons qui en découlent, tous les dix mille ans, ainsi qu'il a été montré au N^o 54, sur chaque hémisphère alternent les hivers courts et doux avec les hivers longs et rigoureux, et cela de telle façon que, lorsque un hémisphère subit un hiver excessif, l'autre jouit d'un hiver élément. Lorsque un des deux hémisphères entre dans une série d'hivers de plus en plus longs, les glaces s'accumulent en telles quantités autour de son pôle que cette augmentation notable de masse sur cet hémisphère provoque par l'attraction newtonienne la submersion des continents de cet hémisphère, ce qui accentue encore son refroidissement. L'hémisphère austral, qui actuellement possède un hiver plus long que l'autre hémisphère, est (en apparence) dans ce cas. Avec le commencement de la période d'hivers moins froids, les masses de glaces et d'eau, accumulées autour du pôle, vont commencer à s'écouler vers l'équateur entraînant avec elles des masses

rocheuses de toute espèce. La calotte de glace polaire ramollie s'écroule à un moment donné, produisant un déchaînement de flots catastrophals dévastant la surface de la Terre. De telles accumulations de glaces et d'eau dans les régions polaires suivies d'écoulements lents puis brusques vers l'équateur, se repètent tous les dix mille ans environ et cela alternativement sur les deux hémisphères.

Des recherches géologiques ultérieures ont jeté une nouvelle lumière sur la succession des climats terrestres, en démontrant incontestablement que, pendant certaines parties de l'époque diluvienne, l'Europe du Nord et l'Amérique du Nord étaient ensevelies sous une croûte de glaces et que le transport de débris rocheux en question n'a pu se faire par que l'intermédiaire des glaciers. L'hypothèse des icebergs et celle des catastrophes produites par des flots furent complètement rejetées.

La théorie d'Adhémar ne put plus subsister, même adaptée aux conceptions actuelles des époques glaciaires, dès qu'il fut démontré que les accumulations de glaces aux époques glaciaires n'avaient pas une telle grandeur pour pouvoir être la cause de la submersion des continents d'une hémisphère, ainsi qu'Adhémar l'imaginait. Il n'est pas moins vrai que la théorie d'Adhémar fut le point de départ de toute une série de théories astronomiques des époques glaciaires qui trouvèrent, d'une part, des partisans convaincus et qui furent, d'autre part, combattues avec passion et qui, aujourd'hui encore, ne paraissent être ni adoptées ni définitivement rejetées.

Toutes ces théories, dont nous allons exposer ici seulement les plus importantes,⁵⁹⁾ ont, comme point de départ, le fait incontestable de la variation séculaire de l'insolation de la Terre. La théorie de Croll⁶⁰⁾ qui n'a pas perdu jusqu'à présent la grande renommée dont elle a jouie jadis, se rattache, de même que celle d'Adhémar, à l'inégale durée des saisons, tout en présentant déjà, par rapport à celle-ci, un progrès à ce point de vue: Croll ayant reconnu plus exactement l'influence de l'excentricité de l'orbite terrestre sur la durée des saisons. Il n'y a que pour une excentricité relativement grande que la différence entre la saison chaude et la saison froide peut être considérable. S'il arrive donc que, pour une excentricité notable, la ligne des équinoxes s'approche de la normale au grand axe de la route apparente du Soleil, alors

L'hémisphère dont l'hiver coïncide avec le passage de la Terre à l'aphélie, aura un hiver long et froid; il s'ensuit que, dans ses zones modérées, il neigera même aux latitudes auxquelles aujourd'hui la neige est inconnue et que, même lorsque sa couche ne sera pas très épaisse, elle subsistera, la température restant bien au-dessous du point de congélation. Lorsque le printemps et l'été s'approchent, la température croissante ne fera, d'abord, qu'augmenter les chutes de neige sur les continents, à cause de l'évaporation plus intense à la surface des mers. Mais lorsque plus tard la neige commence à fondre, il faudra un espace de temps assez long jusqu'à ce que les régions basses soient dépourvues de neige, tandis que sur les montagnes la neige subsistera jusqu'en automne, lorsque commenceront de nouvelles chutes.

L'année suivante, les choses se répètent, avec cette différence que la limite des neiges perpétuelles est descendue à un niveau plus bas. D'année en année cette limite s'abaisse ainsi, jusqu'à ce que enfin toutes régions de quelque altitude soient durablement couvertes de neige. Les vallées se remplissent alors de glaciers et une grande partie de cet hémisphère est ainsi couverte de glace et de neige.

A cela s'ajoute un nouveau puissant facteur qui accélère la formation de glaciers: c'est l'influence d'une couche de neige sur le climat. La neige et la glace couvrant de vastes étendues condensent la vapeur d'eau apportée par les vents et la transforment en neige. Même en été, cette influence se fera sentir par un rafraîchissement de l'air, et la formation d'épais brouillards, qui en résultera, contribuera à produire un climat semblable, par exemple, à celui régnant actuellement dans la Géorgie du Sud. Toutes ces conditions climatiques retarderont évidemment la fonte estivale de neige.

Tandis que neige et glace s'accumulent, de cette manière, sur un hémisphère, leur quantité diminue sur l'autre. Ceci renforce les vents alizés sur l'hémisphère froid et les affaiblit sur l'hémisphère chaud. La conséquence en sera que l'eau chaude des mers tropicales sera de plus en plus poussée vers l'hémisphère chaud. Ce déversement de chaleur de l'hémisphère froid favorisera à nouveau l'accumulation des neiges et des glaces sur cet hémisphère, ce qui affaiblira encore plus les courants marins chauds. De cette manière, ces deux influences se renforcent mutuellement.

Le même procédé d'action et de réaction mutuelles a également lieu sur l'hémisphère chaud, mais en sens contraire. Sur celui-ci, tous les effets tendent à élever la température moyenne et à restreindre la quantité de neige et de glace. Cet hémisphère se trouve en une période interglaciaire.

Avec le changement de la longitude du périhélie par rapport au point vernal, les circonstances précédentes changent. A l'époque à laquelle la ligne des équinoxes arrive à coïncider avec le grand axe de l'orbite apparent du Soleil, les deux hémisphères se trouvent être dans les mêmes conditions d'insolation, c'est-à-dire dans une période de transition par laquelle un hémisphère passe de l'époque glaciaire à l'époque interglaciaire et l'autre hémisphère, inversement, de l'époque interglaciaire à l'époque glaciaire. Ainsi se suivent sur chaque hémisphère les époques glaciaires, transitives, et interglaciaires, et cela de telle façon que lorsqu'un hémisphère a l'époque glaciaire, l'autre traverse l'époque interglaciaire. Les effets ci-dessus décrits seront renforcés lorsque l'excentricité de l'orbite terrestre augmente et affaiblis lorsqu'elle diminue.

Bien des objections ont été élevées contre la théorie de Croll, que nous venons d'esquisser. Nous allons examiner, pour le moment, seulement celles qui concernent la partie astronomique de cette théorie, car, c'est à l'aide des résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent, qu'on peut le mieux juger de leur bien-fondé.

Ces objections à la théorie de Croll gravitent autour des trois points suivants :

1. D'après Croll, les époques glaciaires réapparaîtraient sur chaque hémisphère dans des intervalles de vingt mille ans, toutefois avec des intensités variables. Ceci est en contradiction avec nos connaissances géologiques qui admettent, il est vrai, plusieurs époques glaciaires, mais non en de si courts et de si réguliers intervalles.

2. En opposition avec ces connaissances, les époques glaciaires auraient eu lieu, d'après Croll, alternativement sur les deux hémisphères; une glaciation simultanée des deux hémisphères serait exclue.

3. D'après la théorie de Croll, l'hémisphère austral devrait présenter actuellement au moins des signes manifestes de glaciation, la saison froide de cet hémisphère étant de presque huit jours plus

longue que celle de la saison chaude. Or, c'est l'inverse qu'on observe.

Ces objections auraient été épargnées à la théorie de Croll, si celui-ci y avait prêté plus d'attention dans sa partie astronomique. Il commit, en effet, l'erreur de ne pas avoir tenu suffisamment compte de la variabilité de l'obliquité de l'écliptique, de n'avoir calculé son influence que sur les quantités annuelles de radiation. Nous avons attiré l'attention sur ce point, et on peut voir directement du tableau XVIII, que le principal effet de l'augmentation de l'obliquité de l'écliptique consiste en une accentuation des contrastes entre l'été et l'hiver. C'est le même effet qui apparaît par suite de la variabilité de la durée des saisons lorsque l'hiver devient long et l'été court. Nous allons à présent examiner si ces deux causes ont des effets du même ordre de grandeur.

Avec la valeur maxima de e , donnée au N° 52, il résulte que la durée de la saison froide peut atteindre 198.36 jours. A la suite de ce changement de la durée des saisons, l'insolation moyenne d'une latitude quelconque, pendant la saison froide, peut tomber à environ 90 pour cent de sa valeur actuelle pour l'hémisphère boréal, la saison froide de cet hémisphère n'étant actuellement que de 178.78 jours.

Les variations de l'obliquité de l'écliptique se font sentir inégalement à différentes latitudes, au plus haut degré aux environs du cercle polaire, ainsi que le montre le tableau XVIII, c'est-à-dire précisément dans la zone qui entre en considération pour les époques glaciaires. Au 66° degré de latitude, l'accroissement de l'obliquité de l'écliptique d'un degré diminue l'insolation hivernale de 5.86 pour cent, et comme cette obliquité peut augmenter de 1.14 degré par rapport à l'obliquité actuelle, il s'ensuit qu'une diminution hivernale à presque 93 pour cent de sa valeur actuelle serait possible. Par conséquent, à ces latitudes, on peut obtenir presque les mêmes effets par la variation de l'obliquité de l'écliptique que par la variation de la durée des saisons.

On voit que l'influence de la variabilité de l'obliquité de l'écliptique est suffisamment puissante pour troubler profondément, aux hautes latitudes, le caractère régulier et à courtes périodes des variations séculaires de l'insolation qui résulterait de seules variations des saisons. Ceci ressort également de la *fig. 21*, d'après laquelle

l'insolation hivernale du 48^e degré de latitude nord n'exécute, dans l'intervalle de la 72^e à la 25^e milliade avant l'époque actuelle, qu'une seule oscillation, tandis que, par suite de la variabilité des saisons, elle en subirait deux.

Pour les hautes latitudes, en appréciant à leur juste titre les variations de l'obliquité de l'écliptique, la première objection à la théorie de Croll perd donc toute valeur.

Une autre circonstance encore doit être mise en ligne de compte. Le climat terrestre n'est pas uniquement une fonction des éléments e , II et ε , mais également d'autres facteurs variables n'accusant aucun caractère de périodicité régulière. Ceci aura pour conséquence une nouvelle perturbation de la périodicité des variations climatiques.

Les variations de l'obliquité de l'écliptique se font sentir — inversement à ce qui a lieu pour celles des saisons — dans le même sens sur les deux hémisphères et, aux époques auxquelles l'excentricité n'est pas trop grande, elles seront d'un effet prépondérant aux hautes latitudes. A ces époques qui, d'après le tableau XV, remplissent la majeure partie du plus récent passé géologique, la marche séculaire de l'insolation hivernale a la même allure pour les deux calottes polaires, plutôt qu'elle n'est de sens contraire. Ceci enlève tout fondement à la seconde objection à la théorie de Croll.

L'obliquité actuelle de l'écliptique est loin de son maximum ce qui a pour conséquence qu'actuellement l'insolation hivernale de la calotte polaire australe est loin de son minimum, quoique la longueur de sa saison froide n'ait dépassé que récemment un maximum relatif. En effet, l'insolation hivernale actuelle de l'hémisphère austral atteint presque 96 pour cent de celle de l'hémisphère boréal, mais, lorsque l'obliquité de l'écliptique et la durée des saisons atteignent en même temps les valeurs extrêmes, l'insolation mentionnée peut s'abaisser à 85 pour cent, de sorte que l'état d'insolation de la calotte polaire australe est loin de s'être approché de sa valeur extrême. Par conséquent, la troisième objection à la théorie de Croll perd également son poids.⁶¹⁾

Bien plus importantes sont les objections élevées contre la partie climatologique de la théorie de Croll. Nous n'allons mentionner que celles concernant la formation des glaciers.

On est généralement d'avis aujourd'hui que la formation de puissants glaciers n'est pas favorisée par un hiver long et rigoureux, mais que, par contre, un tel hiver s'y oppose, ainsi qu'on peut l'observer à l'intérieur des continents du nord, surtout en Sibérie. Ce n'est pas un hiver rigoureux qui favorise la descente des glaciers dans les vallées mais un été frais. Aussi est-on obligé de modifier les théories astronomiques des époques glaciaires, si on veut les rendre viables, en faisant coïncider les époques glaciaires avec les époques de moindres contrastes saisonniers.

Récemment R. Ball⁽²⁾ a repris la théorie de Croll en lui donnant une nouvelle forme mathématique qui ne marque, du reste, aucun progrès notable, pour la raison suivante. Ball, n'ayant pas calculé les quantités de radiation qu'obtiennent différentes latitudes, n'opère qu'avec les radiations estivales et hivernales reçues par tout l'hémisphère. Ces radiations sont représentées par les équations (102) et leurs variations en pour cent, provoquées par l'accroissement de l'obliquité de l'écliptique d'un degré, sont données par les expressions suivantes :

$$100 \frac{\pi}{180} \frac{1}{N_e} \frac{\partial N_e}{\partial \varepsilon} = 100 \frac{\pi}{180} \frac{2 \cos \varepsilon}{\pi + 2 \sin \varepsilon}$$

$$100 \frac{\pi}{180} \frac{1}{N_h} \frac{\partial N_h}{\partial \varepsilon} = 100 \frac{\pi}{180} \frac{2 \cos \varepsilon}{\pi - 2 \sin \varepsilon}$$

On trouve donc, avec la valeur numérique de ε donnée au N^o 43, qu'un accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique provoque une augmentation de l'insolation estivale de l'hémisphère boréal de 0.81 pour cent, tandis qu'il provoque une diminution de l'insolation hivernale de 1.37 pour cent. Ces variations sont faibles par rapport à celles concernant les hautes latitudes, données au tableau XVIII. Les changements de l'obliquité de l'écliptique n'ont aucune influence notable sur l'insolation totale de chacun des deux hémisphères, mais ils ont pour conséquence une modification de la distribution de celle-ci à la surface de l'hémisphère considéré. Cette importante conséquence ne peut se manifester dans les considérations sommaires de Ball.

Ce n'est que tout récemment qu'on a prêté plus d'attention aux variations de l'obliquité de l'écliptique. Hargreaves fait con-

naître dans son mémoire cité déjà sous 1) une méthode élégante pour déterminer cette influence à diverses latitudes; cependant, il ne calcula que les variations des quantités annuelles de radiation, provoquées par la variabilité de l'obliquité de l'écliptique. Les accentuations et adoucissements périodiques des contrastes saisonniers résultant de cette variabilité semblent avoir échappé à son attention.

Ekholm⁶³⁾ consacra à la question de savoir, comment se manifestent les variations de l'obliquité de l'écliptique dans le climat terrestre, un travail détaillé, tout en se bornant à l'étude des conséquences du dernier maximum et du dernier minimum de l'obliquité de l'écliptique. Ces deux époques, à cause de la variabilité des éléments e et II , ne coïncident pas avec les extrêmes que peut atteindre l'insolation de la Terre et, à ces époques, les conséquences de la variation de l'obliquité de l'écliptique sont partiellement compensées par les autres facteurs.

Spitaler⁶⁴⁾ étudia le cas le plus favorable à la formation des glaciers pouvant se produire par le changement des éléments e , II et ε ; malheureusement, les calculs de cet auteur reposent sur les recherches théoriques de Hopfner qui sont entachées d'erreurs, ainsi que nous l'avons déjà mentionné sous 7).

Ainsi qu'on le voit, la question des variations séculaires de l'insolation de la Terre n'a été traitée qu'incomplètement jusqu'à ces jours.

57. — *Etats extrêmes d'insolation de la Terre.*

Pour l'étude du climat du passé géologique, il importe de connaître les limites entre lesquelles le climat mathématique de la Terre peut varier par suite de la variabilité des éléments astronomiques. Ce cadre est tracé par les limites entre lesquelles peuvent varier les éléments astronomiques et qui ont été données au N^o 52. Celles-ci déterminent exactement les états extrêmes d'insolation de la Terre et c'est ceux-ci que nous allons à présent décrire mathématiquement.

En attribuant à ε , e , $\sin II$ leurs valeurs extrêmes et en les combinant convenablement, il est possible de construire pour chacun des deux hémisphères deux cas extrêmes d'insolation.

Ainsi, en attribuant à l'obliquité de l'écliptique sa valeur maxima $\varepsilon = 24^{\circ}36'$, on obtient, comme il a été démontré au N^o 54, les plus forts contrastes saisonniers qui peuvent être provoqués par des changements de l'obliquité de l'écliptique. Toutes les latitudes ayant une saison chaude et une saison froide recevront, dans ce cas, la plus grande quantité possible de radiation estivale W_e et la plus petite quantité possible de radiation hivernale W_h . Mais, les contrastes saisonniers peuvent être également accentués en faisant tomber la durée de la saison chaude à son minimum. C'est ce qui aura lieu, d'après (117), lorsque e atteint son maximum $e = 0.0677$ et lorsqu'on a $II = 270^{\circ}$. Les variations des éléments e et II n'affectent pas les valeurs de W_e et W_h , mais elles influencent les intervalles de temps dans lesquels ces radiations sont reçues. Le premier cas extrême de l'état d'insolation de la Terre, que nous pouvons désigner par le cas de contrastes saisonniers maxima de l'hémisphère boréal, est donc donné par les valeurs suivantes :

$$\varepsilon = 24^{\circ}36', \quad e = 0.0677, \quad II = 270^{\circ}.$$

Le second cas extrême de l'état d'insolation de la Terre, que l'on peut désigner par le cas de contrastes saisonniers minima de l'hémisphère boréal, est réalisé, comme il est facile de s'en rendre compte, par la combinaison suivante des éléments astronomiques :

$$\varepsilon = 21^{\circ}58'30'', \quad e = 0.0677, \quad II = 90^{\circ}.$$

Les valeurs de W_e et T_h atteignent, de cette manière, leurs maxima et les valeurs de W_h et T_e leurs minima, c'est-à-dire qu'on a la plus longue saison chaude avec la plus faible quantité de radiation estivale et la plus courte saison froide avec la plus grande quantité de radiation hivernale.

Pour l'hémisphère austral on aura, comme il est aisé de le reconnaître, le cas de contrastes saisonniers maxima en combinant les valeurs suivantes :

$$\varepsilon = 24^{\circ}36', \quad e = 0.0677, \quad II = 90^{\circ},$$

et le cas de contrastes saisonniers minima par la combinaison de valeurs suivantes :

$$\varepsilon = 21^{\circ}58'30'', \quad e = 0.0677, \quad II = 270^{\circ}.$$

Les cas de contrastes saisonniers maxima sont égaux pour les deux hémisphères, de même que les cas de contrastes saisonniers

Tableau XXII

φ	W_e	W_h	W_e	W_h
	pour une obliquité de l'écliptique de			
	24°36'		21°58'30"	
0°	0.1521	0.1521	0.1535	0.1535
5°	0.1573	0.1457	0.1582	0.1477
10°	0.1615	0.1385	0.1617	0.1410
15°	0.1645	0.1302	0.1640	0.1332
20°	0.1665	0.1212	0.1653	0.1246
25°	0.1673	0.1112	0.1655	0.1150
30°	0.1669	0.1007	0.1644	0.1048
35°	0.1655	0.0895	0.1622	0.0939
40°	0.1631	0.0779	0.1590	0.0825
45°	0.1597	0.0660	0.1549	0.0706
50°	0.1554	0.0538	0.1497	0.0584
55°	0.1504	0.0419	0.1439	0.0463
60°	0.1450	0.0302	0.1374	0.0343
65°	0.1398	0.0197	0.1309	0.0229
70°	0.1367	0.0121	0.1257	0.0137
75°	0.1347	0.0067	0.1226	0.0074
90°	0.1325		0.1196	

minima. Dans la première combinaison, les insolation solsticiales d'été atteignent, d'après le N° 55, à toutes les latitudes des zones extratropiques leurs valeurs maxima, tandis que celles d'hiver atteignent leurs valeurs minima. On peut, par conséquent, désigner ces cas par „cas des plus grandes amplitudes de la marche annuelle de l'insolation“ et l'autre combinaison par „cas des plus petites amplitudes“.

Les cas de contrastes saisonniers maxima se distinguent, d'après le N° 54, par les plus faibles contrastes géographiques entre l'équateur et les pôles. Les cas de contrastes saisonniers minima présentent, par contre, les contrastes géographiques maxima.

Les valeurs extrêmes de W_e et W_h peuvent être facilement calculées à l'aide des tableaux V et XVII. A cet effet, on doit ajouter aux valeurs W_e et W_h du tableau V, correspondant à une obliquité de l'écliptique de 23°27'30", les variations de ces valeurs contenues dans le tableau XVII, après les avoir multipliées par le changement de l'obliquité de l'écliptique exprimé en degrés. Comme on le sait, on a posé $I_0 = 1$, $T = 1$. De cette manière, on obtient les valeurs contenues dans le tableau XXII.

Dans le cas de contrastes saisonniers maxima, la durée de la saison chaude est de 166·88 jours, celle de la saison froide de 198·36 jours; les moyennes insolation estivales atteignent leur maximum, tandis que les insolation hivernales tombent à leur minimum. Ces valeurs peuvent être calculées pour chaque latitude et comparées aux valeurs actuelles.

On obtient une meilleure comparaison de cet état extrême d'insolation avec l'état actuel, en calculant les quantités de radiations reçues par les différentes latitudes, dans ce cas extrême, pendant les durées respectives de la saison chaude et de la saison froide actuelles de l'hémisphère boréal.

La saison chaude actuelle de l'hémisphère boréal est, ainsi qu'il a été montré au N^o 45, d'une durée de 186·46 jours partagés symétriquement par rapport au solstice d'été; ce sont les 186·46 jours de la plus forte insolation des latitudes extratropiques. Dans le cas extrême de contrastes saisonniers maxima sur l'hémisphère boréal, la saison chaude ne dure, ainsi qu'il a été dit, que 166·88 jours et embrasse — l'ellipse $ATPT'$ (fig. 23) représentant l'orbite apparente du Soleil et γ la position du Soleil au point vernal — l'intervalle de temps employé par le Soleil à parcourir l'arc $\gamma P \gamma'$. Si nous prolongeons le parcours estival du Soleil par les arcs $T\gamma$ et $\gamma' T'$ égaux entre eux et choisis de telle façon que chacun est parcouru en 9·79 jours, l'arc TPT' sera parcouru en 186·46 jours. Il s'agit maintenant de déterminer les quantités de radiation reçues dans ce temps par les différentes latitudes.

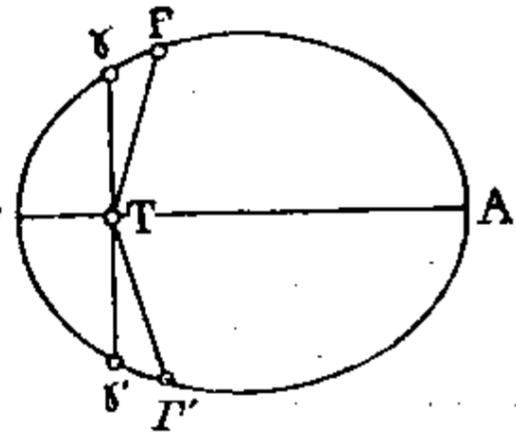


Fig. 23.

A cause de la faible valeur des arcs $T\gamma$ et $\gamma' T'$, on peut admettre qu'ils sont parcourus à la vitesse correspondant aux points γ et γ' . En désignant par Δt le temps pendant lequel chacun de ces deux arcs est parcouru, et par $\Delta \lambda$ l'angle $\sphericalangle T\gamma = \sphericalangle \gamma' T'$ il découle de (12)

$$\frac{1}{2} \rho^2 \frac{\Delta \lambda}{dt} = \frac{ab\pi}{T},$$

où ρ désigne le rayon vecteur $T\gamma$. Or, celui-ci étant, d'après (9), représenté par

$$\rho = \frac{b^2}{a},$$

on a

$$\Delta\lambda = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{\Delta t}{T} 2\pi.$$

De plus, en tenant compte de (10) et en exprimant $\Delta\lambda$ en degrés on a

$$\Delta\lambda = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\Delta t}{T} 360^\circ.$$

Avec les valeurs $e = 0.0677$, $\Delta t = 9.79$, $T = 365.24$, on obtien

$$\Delta\lambda = 9^\circ 43'.$$

On obtient les quantités de radiation reçues par diverses latitudes durant le parcours de l'arc $\Gamma\gamma$ en posant dans la formule (81) $\lambda' = -\Delta\lambda$, $\lambda'' = 0$ et, à cause des unités acceptées, $T = 1$, $I_0 = 1$, $a = 1$. La quantité de radiation reçue durant le parcours des deux arcs $\Gamma\gamma$ et $\gamma\Gamma'$ est deux fois plus grande et elle est par conséquent, représentée par

$$\Delta W = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - e^2}} \left\{ b_0 \frac{\Delta\lambda}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi (1 - \cos \Delta\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{m=6} (-1)^m \frac{b_m}{2m} \sin 2m \Delta\lambda \right\}.$$

Dans cette expression, on doit poser pour $b_0, b_1, b_2 \dots$ les valeurs correspondant à une obliquité de $24^\circ 36'$ et qu'on obtient à l'aide des tableaux IV et XVI; de plus, on doit poser $e = 0.0677$, $\varepsilon = 24^\circ 36'$, $\Delta\lambda = 9^\circ 43'$,

On obtient les quantités de radiation reçues par les différentes latitudes au cours de 186.46 jours mentionnés en ajoutant aux valeurs W_e contenues dans la colonne 2 du tableau XXII les valeurs ΔW calculées d'après l'équation précédente. On obtient les quantités de radiation reçues pendant le reste de l'année, c'est-à-dire pendant les 178.78 jours de la plus faible insolation, en déduisant des valeurs W_h contenues dans la colonne 3 du tableau XXII les valeurs ΔW . On trouve les nombres calculés de cette manière dans le tableau XXIII.

Avant d'aborder la discussion des résultats obtenus, nous allons comparer, de la façon précédente, également l'autre cas extrême d'insolation de l'hémisphère boréal avec l'état actuel, c'est-à-dire

Tableau XXIII

Latitude	Quantités de radiation reçues pendant la durée des saisons actuelles dans le cas de contrastes saisonniers			
	maxima		minima	
	été	hiver	été	hiver
0°	0.1693	0.1349	0.1430	0.1640
5°	0.1743	0.1287	0.1477	0.1582
10°	0.1783	0.1217	0.1513	0.1514
15°	0.1809	0.1138	0.1538	0.1434
20°	0.1824	0.1053	0.1553	0.1346
25°	0.1825	0.0960	0.1559	0.1246
30°	0.1814	0.0862	0.1552	0.1140
35°	0.1790	0.0760	0.1535	0.1026
40°	0.1757	0.0653	0.1508	0.0907
45°	0.1712	0.0545	0.1473	0.0782
50°	0.1658	0.0434	0.1427	0.0654
55°	0.1595	0.0328	0.1376	0.0526
60°	0.1528	0.0224	0.1318	0.0399
65°	0.1462	0.0133	0.1262	0.0276
70°	0.1417	0.0071	0.1218	0.0176
75°	0.1383	0.0031	0.1196	0.0104
90°	0.1328	0.0000	0.1188	0.0006

nous allons calculer les quantités de radiations reçues, dans ce cas, par les différentes latitudes pendant les 186.46 jours de la plus forte insolation et pendant les 178.78 jours de la plus faible insolation.

Dans ce second cas, la saison chaude dure 198.36 jours, la saison froide 166.88 jours. Le point vernal doit être supposé à la place de γ' (fig. 23) et l'équinoxe d'automne à la place de γ , de façon que $\gamma' A \gamma$ représente le parcours estival et $\gamma P \gamma'$ le parcours hivernal du Soleil. Nous devons à présent raccourcir la durée de la saison chaude de 2×5.95 jours et prolonger celle de la saison froide de la même valeur, c'est-à-dire que l'arc $I' A I$ représentera le parcours estival et l'arc $I P I'$ le parcours hivernal du Soleil. Les arcs $I \gamma$ et $\gamma' I'$ doivent être choisis tels que chacun d'eux soit parcouru en 5.95 jours. A l'aide des équations précédentes, on trouve que les angles $I T \gamma$ et $\gamma' T I'$ sont égaux à $\Delta \lambda = 5^{\circ} 54'$.

Les quantités de radiation reçues par les différentes latitudes, pendant le parcours de l'arc $\gamma' I'$, sont obtenues en posant dans (81) $\lambda' = 0$, $\lambda'' = \Delta \lambda$, $T = 1$, $I_0 = 1$, $a = 1$. La radiation reçue

pendant le parcours de deux arcs $\Gamma\gamma$ et $\gamma\Gamma'$ est donc représentée par

$$\Delta W = \frac{1}{\pi \sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 \frac{\Delta\lambda}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi (1 - \cos \Delta\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{m=6} (-1)^m \frac{b_m}{2m} \sin 2m \Delta\lambda \right\}.$$

Dans cette équation on doit poser $e = 0.0677$, $\Delta\lambda = 5^\circ 54'$ et pour ε , b_0 , b_1 , b_2 , ... les valeurs correspondant à une obliquité de l'écliptique de $21^\circ 58' 30''$. En déduisant les valeurs obtenues de cette manière des valeurs de W_e contenues dans la colonne 4 du tableau XXII et en les ajoutant aux valeurs W_h contenues dans la colonne 5 du même tableau, on obtient les quantités de radiation cherchées, contenues également dans le tableau XXIII (colonne 4 et 5).

Les résultats obtenus sont représentés graphiquement par la *fig. 24* qui contient également, à titre de comparaison, les quantités de radiation reçues actuellement pendant la saison chaude et la saison froide boréales.

De ce graphique on déduit les faits importants qui suivent.

Par les changements possibles des éléments astronomiques, les contrastes saisonniers peuvent être notablement accentués ou adoucis à toutes les latitudes possédant un été et un hiver. Ainsi, dans le cas de contrastes saisonniers maxima (état d'insolation I), durant les 186.46 jours de la plus forte insolation,

le 90° degré	}	reçoit la même quantité qu'actuellement	}	le 69° degré
" 80° "				" 65° "
" 70° "				" 60° "
" 60° "				" 50° "
" 50° "				" 30° "

Nous devons donc, à ces latitudes, descendre de dix à vingt et un degrés au sud pour trouver actuellement les mêmes insolutions. Pour des latitudes au-dessous de 49 degrés, les quantités estivales sont supérieures à celles de n'importe quelle latitude de l'époque présente.

Les quantités hivernales de radiation correspondant à ce cas, diffèrent également des quantités actuelles d'une façon qui n'est pas négligeable. Ainsi, pendant les 178.78 jours de la plus faible insolation

le 80 ^e degré	} reçoit la même quantité qu'actuellement	le 85 ^e degré
" 70 ^e "		" 75 ^e "
" 60 ^e "		" 64.5 ^e "
" 50 ^e "		" 55 ^e "
" 40 ^e "		" 46 ^e "
" 30 ^e "		" 37 ^e "
" 20 ^e "		" 29 ^e "

Nous devons remonter donc de quatre et demi à neuf degrés vers le nord pour trouver actuellement les mêmes insolation.

Grandes sont également les différences existant entre l'état extrême de contrastes saisonniers minima (état d'insolation II) et l'état actuel. Ainsi, dans ce cas, pendant les 186.46 jours de la plus forte insolation

le 64 ^e degré	} reçoit la même quantité qu'actuellement	le 90 ^e degré
" 50 ^e "		" 60 ^e "
" 40 ^e "		" 52 ^e "
" 30 ^e "		" 48 ^e "

Nous devons donc, à ces latitudes, remonter vers le nord de dix à vingt-six degrés pour trouver actuellement les mêmes quantités de radiation.

Les quantités hivernales sont, dans ce cas, assez différentes des quantités actuelles. Ainsi pendant les 178.78 jours de la plus faible insolation

le 90 ^e degré	} reçoit la même quantité qu'actuellement	le 85 ^e degré
" 80 ^e "		" 76 ^e "
" 70 ^e "		" 67 ^e "
" 60 ^e "		" 56 ^e "
" 50 ^e "		" 46 ^e "
" 40 ^e "		" 35 ^e "
" 30 ^e "		" 24 ^e "
" 20 ^e "		" 13 ^e "

Nous devons, par conséquent, descendre vers le sud de trois à sept degrés pour trouver actuellement les mêmes insolation.

Ainsi qu'il ressort des chiffres précédents, on voit que les variations possibles de l'état d'insolation de la Terre sont très remarquables.

Culverwell⁶⁵⁾ a effectué de semblables calculs en négligeant toutefois les changements de l'obliquité de l'écliptique, ce qui est

cause que les oscillations de l'insolation terrestre qu'il a calculées sont de beaucoup inférieures aux nôtres. Ainsi, par exemple, dans son graphique, semblable à notre *fig. 24*, les deux courbes supé-

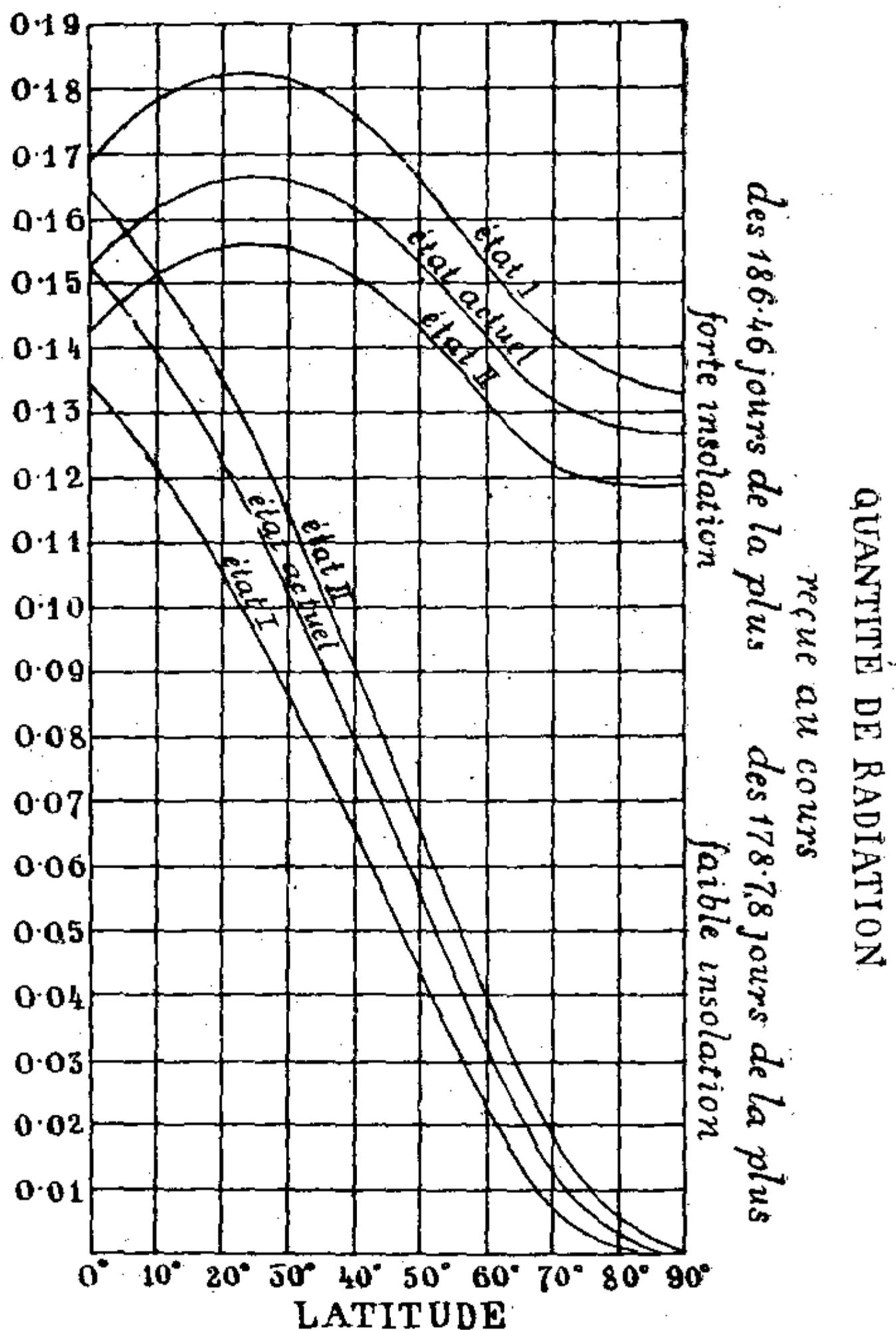


Fig. 24.

rieures se rejoignent dans leur parcours de gauche à droite, c'est-à-dire, à l'endroit où nous avons trouvé une variation de l'insolation équivalente à une oscillation de latitude de vingt-cinq

degrés, cette oscillation de latitude est d'après Culverwell égale à zéro. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner que les calculs de Culverwell aient été une arme employée contre les théories astronomiques des époques glaciaires.

A la question: si par les variations des éléments astronomiques un changement notable du climat terrestre peut être obtenu, on doit répondre, d'après les résultats précédents, par l'affirmative.

58. — *Climat solaire dans les cas d'insolations extrêmes de la Terre.*

Bien plus difficile que la question précédente, se présente celle concernant la manière dont se font sentir dans la physionomie du climat terrestre les variations séculaires de l'insolation, qui, ainsi que nous l'avons vu, peuvent varier entre de larges limites. Nous ne pouvons ici aborder qu'un côté de cette question, en déterminant les changements que peut subir le climat mathématique de la Terre calculé dans le chapitre précédent, par la variabilité des éléments astronomiques.

Nous avons calculé au N^o 48 les moyennes températures annuelles de diverses latitudes pour l'état d'insolation actuel. Ces températures ne dépendent que des quantités annuelles de radiation W_T et W'_T ; c'est pourquoi aussi ne sont-elles influencées que d'une façon insignifiante par la variabilité de la valeur e et pas du tout par celle de la valeur II . Elles ne sont influencées que par les changements de l'obliquité de l'écliptique. Nous allons voir quelles valeurs peuvent atteindre ces variations des températures annuelles.

Il résulte du tableau XVIII que les changements des valeurs W_T , sous l'influence de la variabilité de l'obliquité de l'écliptique, ne peuvent être notables qu'aux latitudes supérieures pour atteindre leur maximum aux pôles. Ceci est valable également pour les valeurs W'_T , de façon que les changements de l'obliquité de l'écliptique se reflètent le mieux dans les variations de la température annuelle des pôles. D'où l'intérêt de connaître les limites entre lesquelles oscille cette température.

A cet effet, on doit calculer, d'abord, les valeurs de W_T et W'_T pour les deux cas extrêmes d'insolation. Les valeurs de W_T sont,

aux pôles, égales aux valeurs W_e ; elles sont, par conséquent, contenues dans le tableau XXII; les valeurs de W'_T peuvent être calculées comme il suit.

La quantité de radiation transmise jusqu'au pôle nord, par l'atmosphère à coefficient de transmission p , dans l'unité de temps, est donnée par la formule (134) où on doit poser, à cause de (135), $\cos z = \sin \delta$. Par conséquent, la quantité de radiation transmise au cours de l'année, c'est-à-dire en réalité pendant la saison chaude, est égale à

$$W'_T = I_0 \int_0^\pi \frac{1}{\rho^2} p^{\operatorname{cosec} \delta} \sin \delta \frac{dt}{d\lambda} d\lambda.$$

Eu égard à (12) et (7), tout en posant $\alpha = 1$, on obtient

$$W'_T = \frac{T}{2\pi} \frac{I_0}{b} \sin \varepsilon \int_0^\pi p^{\operatorname{cosec} \varepsilon \operatorname{cosec} \lambda} \sin \lambda d\lambda.$$

Cette valeur peut être calculée à l'aide de l'intégration mécanique pour toute valeur de ε . Mais nous pouvons procéder également comme il suit.

Il résulte de l'équation précédente

$$\frac{\partial W'_T}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{2\pi} \frac{I_0}{b} \left\{ \cos \varepsilon \int_0^\pi p^{\operatorname{cosec} \varepsilon \operatorname{cosec} \lambda} \sin \lambda d\lambda - \right. \\ \left. - (\log_{n\text{ép}} p) \cotg \varepsilon \int_0^\pi p^{\operatorname{cosec} \varepsilon \operatorname{cosec} \lambda} d\lambda \right\},$$

de sorte que le changement de la valeur W'_T , correspondant à l'accroissement d'un degré de l'obliquité de l'écliptique, exprimé en pour cent, est donné par l'expression suivante:

$$100 \frac{\partial W'_T}{\partial \varepsilon} \frac{1}{W'_T} = \frac{\pi}{1.8} \left\{ \cotg \varepsilon - \frac{\cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon} \log_{n\text{ép}} p \frac{\int_0^\pi p^{\operatorname{cosec} \varepsilon \operatorname{cosec} \lambda} d\lambda}{\int_0^\pi p^{\operatorname{cosec} \varepsilon \operatorname{cosec} \lambda} \sin \lambda d\lambda} \right\}.$$

Avec $\varepsilon = 23^\circ 27' 30''$ et $p = 0.80$, ce changement atteint 6.87 pour cent. Il est notablement plus grand que celui qu'on aurait

obtenu en ne tenant pas compte de l'atmosphère, ce dernier changement étant égal, d'après le tableau XVIII, à 4.02 pour cent.

La valeur de W_T' pour $\varepsilon = 23^\circ 27' 30''$ est, d'après le tableau VI, égale à 0.0594 et on obtient, à l'aide du changement que nous venons de calculer, pour l'obliquité de l'écliptique maxima de $24^\circ 36'$

$$W_T' = 0.0639$$

et pour l'obliquité minima de $21^\circ 58' 30''$

$$W_T' = 0.0533.$$

A présent nous pouvons, ainsi qu'il a été montré au N^o 48, calculer les températures annuelles des pôles. Dans le premier cas, on obtient une température de

$$- 31.6^\circ$$

et dans le second

$$- 39.0^\circ.$$

En comparant ces nombres à la valeur de $- 34.8^\circ$, donnée au N^o 48, on voit que la température annuelle solaire du pôle peut augmenter de 3.2° et diminuer de 4.2° .

En s'éloignant du pôle, ces oscillations de la température annuelle diminuent rapidement pour devenir à peine notables dans la zone modérée. La détermination de la valeur de ces oscillations possibles est très difficile, le calcul de W_T' étant une opération laborieuse; aussi n'allons-nous plus nous en occuper.

On doit s'attendre à de plus fortes variations que les précédentes dans la marche annuelle de l'insolation. Nous avons insisté plusieurs fois sur ce fait que la principale influence de la variabilité des éléments astronomiques consiste en une accentuation ou un adoucissement des contrastes entre l'été et l'hiver, ce qui doit se manifester sur la valeur de l'amplitude de la marche annuelle de température ou, autrement dit, sur l'oscillation annuelle.

Afin d'obtenir une relation simple entre les amplitudes de l'insolation et celles de la température, on peut faire abstraction de la faible excentricité de l'orbite terrestre. On obtient ainsi, pour la marche annuelle de l'insolation de la zone non-arctique, l'expression (74). Dans celle-ci, les coefficients $b_1, b_2, b_3 \dots$ n'ont, ainsi que le montre le tableau IV, que de faibles valeurs numériques, aussi peuvent-ils être négligés, de sorte que la marche annuelle de l'insolation peut être représentée par une expression de la forme

$$W(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

dans laquelle on a déplacé convenablement l'origine de l'échelle du temps.

Dans le cas d'une faible excentricité de l'orbite terrestre, la marche annuelle de l'insolation peut être, d'après le N^o 28, représentée par l'expression (306) dans laquelle les coefficients $a_2, a_3, a_4 \dots b_2, b_3, b_4 \dots$ seront négligeables par rapport aux coefficients a_1 et b_1 . On obtient donc, en déplaçant convenablement l'origine de l'échelle du temps, dans ce cas, également l'expression précédente. Les valeurs a_0 et a_1 figurant dans cette expression peuvent être calculées de la manière suivante.

Les valeurs extrêmes qu'atteint l'insolation annuelle coïncident pour les zones modérées avec les insolutions aux jours de solstices. Pour ce motif, nous avons désigné ces dernières valeurs au N^o 55 par *Maximum w* et *Minimum w*; celles-ci peuvent être facilement calculées à l'aide des tableaux XIX et XX pour chaque combinaison des éléments astronomiques. On a donc :

$$a_0 + a_1 = \textit{Maximum } w$$

$$a_0 - a_1 = \textit{Minimum } w,$$

d'où il résulte :

$$a_0 = \frac{1}{2} \left\{ \textit{Maximum } w + \textit{Minimum } w \right\}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left\{ \textit{Maximum } w - \textit{Minimum } w \right\}.$$

Le rapport entre la marche d'insolation $W(t)$ et la marche de la température, qu'elle provoque à la surface de la planète et dans l'atmosphère, a été l'objet de nos recherches dans la première partie de cet ouvrage. Ainsi, le N^o 24 concerne le cas d'une surface solide, les N^{os} 29 et 30 le cas d'une surface liquide, l'influence de l'atmosphère étant négligée. Les recherches exposées aux N^{os} 33 et 34 s'occupent de l'influence d'une couche atmosphérique mince sur l'état thermique de la planète; enfin le N^o 38 concerne les phénomènes thermiques provoqués par une insolation périodique dans une atmosphère calme s'étendant jusqu'à une hauteur considérable, tout en laissant de côté la conductibilité de la chaleur dans la croûte planétaire.

De tels cas idéaux ne se présentent pas dans la nature, du moins quant à la Terre. L'influence de son atmosphère sur l'état de température de sa surface et sur celui des couches atmosphériques inférieures est trop prononcée pour être mise hors de compte. L'épaisseur de l'atmosphère terrestre est, d'une part, trop considérable pour que les résultats des Nos 33 et 34 puissent y être applicables et trop faible, d'autre part, pour que les suppositions du N^o 38 puissent être considérées comme réalisées. De plus, plusieurs cas, traités séparément dans les théories mentionnées, se présentent simultanément dans la nature. Ainsi, dans les phénomènes thermiques au-dessus des continents, on a à faire avec un emmagasinement de chaleur à la fois par le sol et par l'atmosphère, tandis que, dans les phénomènes thermiques ayant lieu au-dessus des océans, on a, en même temps, un emmagasinement par l'eau et par l'atmosphère. Toutefois, on pourrait, à titre de première orientation, dans le premier de ces deux cas négliger, comme secondaire, l'emmagasinement de chaleur par le sol et, dans le second, celui exercé par l'atmosphère.

Malgré la diversité de cas traités, on découvre dans les théories mentionnées un résultat commun. En désignant par Δu l'amplitude des oscillations de la température $u(t)$, c'est-à-dire la différence entre la valeur maxima et la valeur minima de $u(t)$, on obtient, dans le premier de cas traités, d'après (257) et (255),

$$\Delta u = \frac{2a_1}{\sqrt{h^2 + \frac{2hK}{a_p m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{2K^2}{a_p^2 m^2} \frac{\pi}{T}}}$$

Dans le second cas, on a, d'après (340) et (339),

$$\Delta u = \frac{2a_1}{\sqrt{\left(\frac{h+V}{H}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}}}$$

Dans le troisième cas, on obtient, d'après (420) et (419) comme amplitude de l'oscillation thermique dans la couche atmosphérique

$$\Delta u = \frac{2a_1 m}{\sqrt{m^2 h_0^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}}}$$

et, d'après (423) et (422), comme amplitude de la température de la surface planétaire,

Tableau XXIV

Latitude	Accroissement maximum		Abaissement maximum	
	de l'amplitude de l'oscillation annuelle de la température en pour cent de l'amplitude actuelle			
	Nord	Sud	Nord	Sud
25°	65.3	33.7	43.9	54.7
30°	53.1	28.7	36.1	46.3
35°	44.7	25.1	30.7	40.1
40°	38.3	22.2	26.8	35.3
45°	35.5	20.0	23.6	31.4
50°	29.6	18.1	21.1	28.1
55°	26.6	16.7	19.2	25.5
60°	24.3	15.6	17.5	23.3
65°	22.9	14.9	16.1	21.6

$$\Delta u = \frac{2a_1}{h_p} \sqrt{\left[\frac{m^2 h_0^2 + A_1^2}{A_1^2} \right]^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}}$$

Dans le quatrième cas, l'amplitude de l'oscillation thermique dans la couche atmosphérique la plus inférieure est donnée, d'après (551), par

$$\Delta u = 2a_1 \frac{1 - A}{c \rho_0} \frac{T}{\pi} \sqrt{k \rho_0 M},$$

tandis que, d'après (555), (207), (409), l'oscillation de la température de la surface planétaire accuse une amplitude donnée par

$$\Delta u = 2a_1 \frac{1 - A}{\sqrt{2} \rho_0 M} \frac{c B_1}{a_p h_p}$$

Dans tous ces cas, l'amplitude de ces oscillations est proportionnelle à celle de l'insolation. Par conséquent, lorsqu'on a déterminé les variations que subit en pour-cent l'insolation et qui correspondent aux deux états extrêmes que présentera celle-ci, on a de ce fait déterminé en pour-cent les variations maxima que peut subir l'oscillation de la température par la variabilité des éléments astronomiques.

Les plus fortes amplitudes dans la marche annuelle de l'insolation se produisent dans le cas de plus grands contrastes saisonniers, et les plus petites amplitudes dans le cas des plus faibles contrastes. Ces amplitudes, de même que celles correspondant à l'état actuel,

peuvent être facilement calculées à l'aide des tableaux XIX et XX. En comparant ces amplitudes, nous avons dressé le tableau XXIV qui donne les variations maxima (en pour cent) de l'oscillation annuelle de la température. Ainsi que le montre ce tableau, ces variations possibles sont assez considérables.

Le climat réel est, en majeure partie, une combinaison des cas particuliers ci-dessus mentionnés, perturbés par l'influence des courants marins et atmosphériques. Pour cette raison, le rapport entre les amplitudes de la température et de l'insolation change de valeur dans de très larges limites, d'après la position géographique de l'endroit considéré. On rencontre le long du même parallèle les plus diverses oscillations annuelles de la température et qui augmentent, en général, avec l'éloignement du lieu de la mer. Ainsi, par exemple, au 50° degré de latitude, l'oscillation annuelle de la température, à l'intérieur de l'Asie, est cinq fois plus forte que celle ayant lieu sur la côte occidentale de l'Europe.

Il est évident que cet état de choses se fera surtout sentir sur les variations séculaires du climat terrestre. En effet, lorsque les contrastes saisonniers s'accroissent par la variations des éléments astronomiques, les amplitudes de la marche annuelle de la température augmentent, de ce fait, d'une façon plus considérable au-dessus des continents qu'au-dessus des mers. Ceci aura pour conséquence d'accroître la différence entre les températures estivales du climat continental et du climat marin, de même que les différences entre leurs températures hivernales. Un adoucissement des contrastes saisonniers aura, par contre, pour conséquence d'atténuer ces différences. L'accroissement ou l'adoucissement des contrastes saisonniers vont de pair avec l'accroissement ou l'adoucissement des contrastes entre le climat continental et le climat marin.

59. — *Sur la possibilité d'autres causes changeant les éléments astronomiques. — Divagations des pôles.*

Les changements des éléments astronomiques dont nous nous sommes occupés, ne sont pas les seuls possibles. Les limites de ces variations, fixées par Stockwell et mentionnées sous ⁹⁾ ne doivent pas être considérées comme définitives. De ce fait, il est possible

que ces éléments subissent de plus forts changements qui, ainsi qu'il a été démontré au N^o précédent, pourraient occasionner de notables variations dans la marche annuelle de l'insolation.

Mais à part les perturbations mutuelles des planètes, qui provoquent les variations séculaires dont nous avons tenu compte jusqu'à présent, il y a d'autres forces encore qui tendent également à faire changer les éléments de rotation de la Terre et, par ce fait, l'état de son insolation. Ces forces ont leur origine dans les marées. L'attraction lunaire produit en deux endroits diamétralement opposés de la Terre, des calottes liquides qui, agissant comme les patins d'un frein, en retardent la rotation. De plus, le fait que le diamètre reliant les deux calottes ne coïncide pas avec le rayon vecteur Terre-Lune et ne repose pas dans le plan de l'équateur terrestre, provoque des forces d'attraction tendant à modifier la distance de la Lune à la Terre et la position de leurs axes dans l'espace. L'attraction solaire a une influence semblable mais de beaucoup plus faible. Ces phénomènes ont été exposés magistralement sous une forme très accessible par G. H. Darwin⁶⁶⁾ auquel on doit les recherches fondamentales sur cette question.⁶⁷⁾

L'influence des marées n'est pas considérable dans l'état actuel des choses et il est démontré que l'augmentation de la durée de la rotation de la Terre pendant les dix dernières milliades ne dépasse pas la valeur d'une seconde; autrement il n'y aurait pas concordance entre l'observation et le calcul concernant les éclipses de Soleil, observées durant les époques historiques. De même, le changement correspondant de l'axe de rotation de la Terre doit être extrêmement faible pour se faire sentir au cours des derniers millions d'années.

Tout autrement se présente ce phénomène lorsque nous le poursuivons dans le passé encore plus éloigné. A ces époques, la distance de la Lune à la Terre était, d'après les recherches de Darwin, plus petite qu'actuellement, aussi les marées étaient-elles plus puissantes et leurs effets plus forts.

Le tableau XXV contient les changements du jour sidéral et de l'obliquité de l'écliptique provoqués par les marées, d'après les calculs de Darwin.⁶⁸⁾ Ces nombres, vu la difficulté du problème et l'incertitude des suppositions, ne donnent que l'allure générale du problème en question. Il n'est pas moins vrai que pendant le

primaire et, probablement, pendant une partie du secondaire également, on doit s'attendre à une obliquité de l'écliptique plus faible qu'actuellement car, d'après l'estimation des géologues, il se serait écoulé 50 millions d'années environ depuis le commencement du secondaire.⁶⁹⁾

Aux éléments de rotation de la Terre, dont il a été question jusqu'à présent, s'en ajoute encore un qui entre dans le domaine du possible: c'est le déplacement de l'axe de rotation par rapport à la Terre même, phénomène connu sous le nom de divagation du pôle. Euler avait déjà démontré qu'un tel déplacement devait être possible. Si la Terre était complètement solide, ces pôles de rotations pourraient décrire autour de leur position moyenne des cercles à la surface de la Terre, ce mouvement serait uniforme et la durée d'un tour serait, d'après les dimensions de la Terre, de 305 jours; l'orientation de l'axe terrestre resterait invariable dans l'espace.

Nous allons examiner l'influence qu'un tel mouvement exercerait sur la marche de l'insolation. A cet effet soit $N_1 N N_2$ (fig. 25.) le cercle tracé par le pôle de rotation à la surface de la Terre, dans l'espace de temps U , à une vitesse constante. Soit O le centre de la surface limitée par ce cercle. En reliant un point quelconque M de la surface terrestre au point O par le grand cercle $M N_1 O$, celui-ci peut être considéré comme le méridien moyen et le complément de l'arc MO comme la moyenne latitude géographique φ_m du point M . La latitude vraie φ du point M varie sans cesse. En comptant le temps t à partir du moment auquel le pôle de rotation passe par le point N_1 , ce pôle se trouvera à l'époque t au point N éloigné de l'angle $N_1 O N = \delta$ du point N_1 , δ étant donné par l'équation

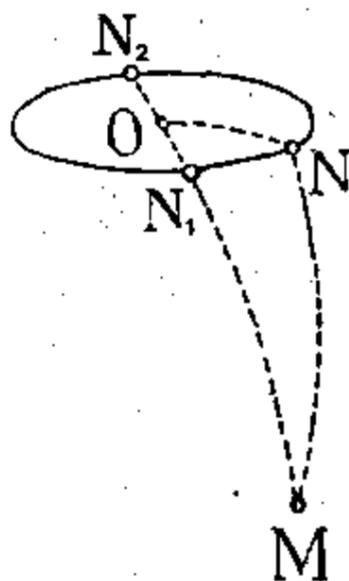


Fig. 25.

$$\delta = \frac{2\pi}{U} t,$$

A ce moment l'arc $\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arc } MN$ représente la latitude vraie du point M et il découle du triangle sphérique MNO :

$$\cos \widehat{MN} = \cos \widehat{MO} \cos \widehat{NO} + \sin \widehat{MO} \sin \widehat{NO} \cos \delta.$$

Tableau XXV

Epoques	Durée du jour sidéral	Obliquité de l'écliptique
0	23 ^h 56 ^m	23° 28'
46,300.000	15 ^h 30 ^m	20° 40'
56,600.000	9 ^h 55 ^m	17° 20'
56,800.000	7 ^h 50 ^m	15° 30'
56,810.000	6 ^h 45 ^m	14° 25'

En désignant par 2α l'ouverture du cône décrit par l'axe de rotation dans le globe même, on obtient:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_m \cos \alpha + \cos \varphi_m \sin \alpha \cos \frac{2\pi}{U} t.$$

La latitude serait donc, dans ce cas, une fonction périodique simple à période U .

Par une telle variation de latitude, à la marche diurne et annuelle de l'insolation se superposerait une autre marche à période U . Lorsque l'angle α est suffisamment grand, cette dernière marche peut provoquer de singuliers phénomènes. Tandis que dans les variations séculaires de l'insolation, dont il a été question précédemment, une année ne diffère de la suivante au point de vue de l'insolation que d'une façon insignifiante, maintenant que U est du même ordre de grandeur que T , les années peuvent présenter de fortes différences entre elles. De même, la marche de l'insolation apparaîtrait différente pour divers points du même parallèle au cours d'une même année. En un mot, le caractère annuel de l'insolation et sa distribution le long des méridiens pourraient être singulièrement défigurés.

Cependant, il découle de la théorie que α ne peut pas être grand, de sorte que l'écart $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_m$ entre la latitude vraie et la latitude moyenne reste petit. Pour cette raison, on peut remplacer dans l'équation précédente les sinus des petits angles $\Delta \varphi$ et α par leurs arcs et admettre que leurs cosinus sont égaux à l'unité. On a donc

$$\Delta \varphi = \alpha \cos \frac{2\pi}{U} t.$$

L'observation a confirmé la faible valeur de ces oscillations périodiques. Longtemps il ne fut même pas possible de les constater, quoiqu'elles fussent prévues par la théorie. Ce n'est qu'en 1891 qu'on est parvenu à constater de faibles oscillations du pôle. Elles se présentent comme étant une superposition de plusieurs oscillations périodiques dont la plus forte aurait une périodicité de 427 jours (la période de Chandler). La cause de l'écart entre la théorie et l'observation réside dans le fait que la Terre n'est pas absolument rigide et que d'autres facteurs, encore insuffisamment éclairés, perturbent ce phénomène.

C'est une question encore ouverte de savoir si, dans le passé géologique, de plus fortes divagations du pôle ont eu lieu. La possibilité n'en est pas exclue. Ainsi, tous les changements de la distribution des masses du globe occasionnent des déplacements des pôles de rotation. De tels changements ont eu lieu, en effet, au cours des époques géologiques. Les époques glaciaires en sont une preuve. A ces époques, il y avait, d'après Penck, en Europe plus de 7 millions de kilomètres carrés couverts de glaciers, en Amérique environ 21 millions. En admettant une épaisseur moyenne d'un kilomètre au moins de cette couverture de glace, il y avait, par conséquent, plus de 28 millions de kilomètres cubes de glace sur les continents de l'hémisphère boréal, masses soustraites aux océans dont le niveau était, de ce fait, environ 70 mètres au-dessous du niveau actuel. Cette accumulation de glace produisait, d'après Spitaler,⁷⁰⁾ des tensions à l'intérieur de la croûte terrestre, capables de favoriser les plissements et d'autres déformations.

Contrairement à ce qu'on était en droit de s'attendre, les déplacements de ces masses énormes n'ont eu que peu d'influence sur la position des pôles d'inertie qui ne se déplacèrent que de 8 kilomètres environ, de sorte qu'en supposant la Terre complètement rigide, le déplacement des pôles de rotation serait également insignifiant. Notre planète, cependant, n'est point dans ce cas, et, à cause de sa plasticité, de faibles déplacements des pôles d'inertie suffisent à provoquer de forts écarts dans la position des pôles de rotation. C'est ce que Darwin⁷¹⁾ et Schiaparelli⁷²⁾ ont démontré théoriquement.

Ainsi, la possibilité de changements notables du climat terrestre, produits par les déplacements des pôles, ne peut pas être exclue.

Toutefois, il est antiscientifique, ainsi que l'ont fait certains géologues, de faire effectuer aux pôles terrestres, selon leur convenance, des déplacements à la surface de la Terre de grandeurs et de vitesses arbitraires. Des déplacements plus considérables des pôles ne peuvent s'effectuer que très lentement, de sorte qu'ils entrent à peine en ligne de compte comme facteurs dans l'explication des dernières époques glaciaires, d'autant plus, lorsqu'on considère que les accumulations de glace, dont il a été question plus haut, n'étaient point la cause mais la conséquence des époques glaciaires. Wegener³⁾ a édifié une hypothèse extrêmement hardie, d'après laquelle les continents, flottant en quelque sorte sur le magma intérieur, auraient subi, au cours des âges, de forts déplacements les uns par rapport aux autres. Même dans ce cas de grande variabilité de la physiologie de la Terre, le pôle d'inertie n'aurait, d'après les estimations de Wegener, parcouru un degré du grand cercle qu'en 360.000 années.

60. — *Sur quelques autres causes de la variabilité du climat terrestre.*

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les changements du climat mathématique dûs aux changements de l'insolation, provoqués par la variation des éléments astronomiques. Toutefois, le climat terrestre dépend d'autres facteurs également. L'intensité de l'insolation est, par exemple, proportionnelle à la constante solaire I_0 , cette valeur n'étant pas, en réalité, une constante quoiqu'elle en porte le nom. De plus, on rencontre dans les équations développées pour le calcul du climat mathématique, par exemple dans les équations (470) et (476), aussi les quantités A , p_a et p_a' dont aucune ne peut être considérée comme constante. Les variations de ces quatre quantités auront pour conséquence divers changements du climat mathématique de la Terre.

Il a été mentionné au N^o 1 que les observations des spectres stellaires portent à admettre que la radiation solaire s'épuise lentement. Des considérations théoriques mènent également à la même conclusion et, de plus, dans de telles proportions qu'on est embarrassé pour expliquer comment le Soleil peut subvenir aux énormes

pertes qu'il a subies par radiation au cours de la longue histoire de la Terre.⁷⁴⁾

Pour cette raison on est loin d'avoir une idée, même approximative sur l'ordre de grandeur de la décroissance séculaire de la constante solaire. La valeur numérique actuelle de la dérivée $\frac{dI_0}{dt}$ (les faibles oscillations à courte période étant éliminées) nous est complètement inconnue. En désignant par t_c l'âge de la croûte terrestre, il est évident que, lorsque l'expression $\frac{dI_0}{dt} t_c$ n'est pas négligeable par rapport à I_0 , la diminution de chaleur solaire s'est fait sentir au cours du passé géologique. La valeur de t_c se cote au moins à des centaines de millions d'années, aussi la possibilité de tels changements climatiques n'est-elle pas exclue, même en cas d'une très petite valeur numérique de $\frac{dI_0}{dt}$. De même il est possible qu'en dehors de cette décroissance lente de la radiation solaire au cours du passé, d'autres changements oscillatoires de son intensité ont eu lieu, assez remarquables pour se manifester dans le climat terrestre. Ainsi que nous l'avons déjà mentionné, ces phénomènes ne peuvent pas être poursuivis mathématiquement, dans l'état actuel de la science.⁷⁵⁾

Le pouvoir réfléchissant de la Terre et de son atmosphère était assujetti durant le passé géologique à des variations considérables. Ainsi, les calottes de neige et de glace aux époques glaciaires augmentaient le pouvoir réfléchissant de la surface terrestre et abaissaient, de leur part, les températures solaires, notamment celles des hautes latitudes. Ces phénomènes pourraient être également poursuivis mathématiquement vu les renseignements, suffisants que nous possédons sur l'extension des calottes mentionnées, si nous possédions des données exactes sur la valeur numérique du pouvoir réfléchissant de la neige. Ces données sont, malheureusement, très divergentes, mais il est tout de même incontestable que les accumulations de neige et de glace exercent une influence considérable sur la température de l'atmosphère.⁷⁶⁾

Il est probable que les variations de l'état moyen de la nébulosité de l'atmosphère terrestre exercent une influence encore plus forte sur le pouvoir réfléchissant A . Les nuages sont les plus forts

réflecteurs de la radiation solaire et leur augmentation provoque de considérables pertes dans l'économie calorifique de la Terre. Ces pertes sont en partie compensées par le fait que les nuages empêchent la transmission de la radiation terrestre vers l'espace interplanétaire, c'est-à-dire qu'ils diminuent le coefficient de transmission p_a' de l'atmosphère terrestre pour la radiation obscure. Les données dont nous disposons sur le pouvoir réfléchissant des nuages et sur la valeur de p_a' sont encore trop divergentes pour qu'il soit possible de calculer cette influence d'une façon satisfaisante. L'observation nous apprend que les nuages abaissent la température estivale, tandis qu'ils élèvent la température hivernale,⁷⁷⁾ c'est-à-dire qu'en été c'est l'influence de la variation de A et en hiver celle de p_a' qui est prépondérante. Dans la moyenne annuelle, ces deux influences devraient s'annuler mutuellement et, dans ce cas, l'influence d'une augmentation de la nébulosité moyenne consisterait principalement en un adoucissement des contrastes saisonniers.

Une catégorie particulière de changements climatiques embrasse les changements ayant leur origine dans la variabilité de deux coefficients de transmission de l'atmosphère. Ces coefficients sont dans une très forte mesure dépendants de la teneur de l'atmosphère en gaz à fort pouvoir absorbant, c'est-à-dire en vapeur d'eau et en acide carbonique, si bien que de Marchi⁷⁸⁾ et Arrhenius⁷⁹⁾ ont essayé d'expliquer les oscillations climatiques du passé par les variations de cette teneur. Tandis que de Marchi ne donne pas une réponse définitive à la question de savoir comment ces changements de la teneur auraient eu lieu, et qu'il admet la possibilité de variations indépendantes de la teneur de chacun de ces deux gaz, Arrhenius admet que les variations de la teneur en acide carbonique furent la cause première de la variabilité des coefficients de transmission. Ces variations de la teneur en acide carbonique trouvent une explication simple dans celles de l'activité volcanique au cours du passé géologique.⁸⁰⁾ Elles sont accompagnées de variations parallèles de la teneur en vapeur d'eau, ce qui renforce leur effet.⁸¹⁾

L'influence de telles variations sur le climat terrestre est accessible au traitement mathématique. A cet effet, on doit distinguer deux cas. Lorsqu'on cherche à connaître les conséquences de la variation de la teneur en vapeur d'eau, il est permis de ne tenir compte que

de la présence de ce seul gaz absorbant dans l'atmosphère, son pouvoir absorbant dépassant de beaucoup celui des autres gaz. Mais lorsqu'on veut poursuivre les changements de la teneur en acide carbonique, on doit alors tenir compte également des autres gaz présents.

Envisageons d'abord le premier cas et admettons que, pour une raison quelconque, la teneur moyenne de l'atmosphère en vapeur d'eau ait augmenté de n pour cent. Alors, suivant la loi de Beer, les valeurs $a_1(x)$ et $a_2(x)$ varient du même pour cent, de sorte que le rapport $\frac{a_1'}{a_1}$, donné par (476), reste invariable. Nous avons, par conséquent, dans la formule (470), donnant la température de la couche atmosphérique la plus inférieure, eu égard à (150), à remplacer uniquement p_a par $p_a^{1 + \frac{n}{100}}$.

Pour illustrer les conséquences d'une telle variation, admettons que n est égal à ± 10 et calculons le changement de la moyenne température de la couche atmosphérique la plus inférieure, donnée au N° 47, qui en résultera. Lorsque la teneur augmente de 10 pour cent, on doit prendre pour p_a la valeur $0.67^{1.1}$; lorsque cette teneur tombe de la même valeur, on a pour p_a $0.67^{0.9}$. Dans le premier cas, on obtient, au lieu de la valeur 16.5° calculée au N° 47, la valeur de 20.3° et dans le second cas une valeur de 12.3° . Par conséquent, à la variation de 20 pour cent de la teneur en vapeur d'eau, correspond une oscillation de température de 8 degrés.

Turnons-nous maintenant vers le second cas, dans lequel nous avons à faire avec plusieurs gaz absorbants. Dans ce cas, nous pouvons considérer l'atmosphère, ainsi que nous l'avons déjà fait au N° 50, comme étant constituée par trois gaz: l'air sec, la vapeur d'eau et l'acide carbonique. Ce sont les deux premiers gaz qui absorbent surtout la radiation solaire; les variations de la teneur en acide carbonique n'ont donc aucune influence notable sur le coefficient de transmission p_a qui peut être considéré comme indépendant de la teneur de l'atmosphère en ce gaz.

Le coefficient de transmission p_a' dépend de tous les trois gaz. On peut le représenter par

$$p_a' = e^{-a_1' H_1 - a_2' H_2 - a_3' H_3},$$

a_1', H_1 ; a_2', H_2 ; a_3', H_3 étant dans l'ordre suivant les constantes se rapportant à l'air sec, la vapeur d'eau et l'acide carbonique.

Le pouvoir absorbant a_m de ce mélange gazeux pour la radiation obscure, émise par la surface terrestre et par l'atmosphère, est représenté par l'équation suivante, semblable à (200)

$$a_m = a_m' + a_m'' + a_m''' - a_m' a_m'' - a_m'' a_m''' - a_m''' a_m' + a_m' a_m'' a_m''',$$

a_m' , a_m'' , a_m''' étant les pouvoirs absorbants de gaz constituant le mélange.

Nous ne sommes qu'approximativement renseignés quant à la valeur numérique des quantités contenues dans l'équation précédente. L'absorption totale produite par l'ensemble des trois gaz mentionnés, y compris les nuages, est égale, d'après le N^o 42,

$$a_m = 0.95.$$

D'après les recherches d'Ekholm,⁸²⁾ on aurait pour le pouvoir absorbant de l'air sec,

$$a_m' = 0.075,$$

et d'après les recherches de Rubens et Ladenburg,⁸³⁾ pour le pouvoir absorbant de l'acide carbonique,

$$a_m''' = 0.225.$$

A l'aide des trois dernières valeurs et de l'équation précédente on obtient, pour le pouvoir absorbant de la vapeur d'eau atmosphérique et des nuages, la valeur

$$a_m'' = 0.930.$$

Ainsi qu'on le voit, ce dernier pouvoir absorbant dépasse de beaucoup celui des autres gaz constituant l'atmosphère.

Admettons, à présent, que l'acide carbonique ait disparu, pour un motif quelconque, de l'atmosphère, c'est-à-dire posons

$$a_m''' = 0.$$

Il découle alors de l'équation et des nombres précédents

$$a_m = 0.935,$$

c'est-à-dire qu'on obtient à la place du coefficient de transmission 0.05, employé au N^o 47, le coefficient 0.065. De ce fait on obtient, au lieu de la température 16.5° calculée dans le N^o 47, une température de 12.2°.

La disparition complète de l'acide carbonique atmosphérique abaisserait donc à peine de 4.3° la température moyenne de la couche atmosphérique la plus inférieure, car, dans le calcul ci-dessus,

il n'a pas été tenu compte de l'élévation du coefficient de transmission p_a . Toutefois cette influence primaire est suivie d'une influence secondaire. L'abaissement précédent de la température provoquerait, en effet, la condensation et l'élimination d'une partie de la vapeur d'eau atmosphérique, ce qui aurait comme conséquence une nouvelle chute de la température.

Une augmentation de la teneur de l'atmosphère en acide carbonique, due à l'activité volcanique ou à tout autre cause, provoque une élévation de la température moyenne de la couche atmosphérique la plus inférieure. Demandons-nous quelle sera la valeur de cette élévation lorsque la teneur actuelle de l'atmosphère en acide carbonique doublera. De ce fait le coefficient de transmission de l'acide carbonique contenu dans l'atmosphère passe de $e^{-a_3' H_2}$ à $e^{-2a_3' H_2}$, c'est-à-dire de 0.775 à 0.60, ce qui entraîne le changement du pouvoir absorbant a_m''' de 0.225 à 0.400.⁸⁴) Ceci aura pour conséquence que le pouvoir absorbant a_m de l'atmosphère prise en entier atteindra la valeur de 0.961 tandis que le coefficient de transmission p_a' tombera de 0.05 à 0.039. A cet état correspond une température de la couche atmosphérique la plus inférieure de 20.5.

Par conséquent, la duplication de la teneur en acide carbonique peut augmenter la température de cette couche de 5° tout au plus. A cette influence primaire suit une influence secondaire, l'air pouvant contenir, à présent, plus de vapeur d'eau.

D'après Arrhenius, la teneur de l'atmosphère en acide carbonique pourrait décupler dans certaines circonstances. Dans ce cas il y aurait possibilité de grands changements climatiques et cela uniquement dans le sens d'une augmentation de température.

61. — *Le problème paléoclimatique.*

A la suite des premières découvertes faites au début du XIX^e siècle, témoignant que le climat terrestre a subi, dans le passé, de fortes variations, la science géologique a réussi à esquisser, à l'aide de ses méthodes d'investigation, les traits principaux des climats du passé de notre planète. De ce fait le problème des époques glaciaires se trouva élargi, en devenant le problème paléoclima-

tique, à savoir quelles sont les causes qui ont provoqué la succession des divers climats de notre globe.

Ce grand problème n'est pas résolu jusqu'à présent, ce qui ne doit pas nous étonner lorsqu'on songe à sa nature particulièrement complexe. Le climat terrestre est le résultat de nombreuses causes différentes. La climatologie actuelle, étant une science essentiellement empirique, ne peut embrasser que le résultat final de ces causes multiples, tandis qu'elle est impuissante à déduire de ces dernières le climat tel que nous le constatons. Aussi le lien entre les climats géologiques et leur causes lui resta-t-il caché.

Par conséquent, la solution de ce problème est encore à trouver, et on doit l'aborder par l'étude des changements du climat mathématique. Ces changements constituent une importante composante des variations climatiques et ont l'avantage de pouvoir être traités mathématiquement. A cette étude on doit rattacher celle concernant les autres composantes des variations climatiques.

Une partie de la solution du problème paléoclimatique trouverait, par conséquent, sa place dans le cadre de cet ouvrage. Toutefois, cette partie ne peut pas être traitée indépendamment, car si nous voulions poursuivre la marche séculaire de l'insolation et du climat mathématique aussi loin que nous le permettent les lois de la Mécanique céleste, nous serions obligés de mettre en jeu un matériel numérique immense dont il n'y aurait probablement qu'une minime partie qui pourrait être utilisée dans les recherches ultérieures.

Ces recherches doivent être faites tout en tenant compte de l'histoire de la Terre, et les résultats en doivent être sans cesse comparés avec les documents géologiques pour ne pas être des chiffres en dehors de la réalité. En agissant ainsi, on s'apercevra que certaines époques du passé exigent une analyse mathématique approfondie de leur climat mathématique, les phénomènes de radiation ayant été prépondérants dans ces époques. Pour les autres époques on pourra se passer d'une telle analyse, soit que pour celles-ci le climat mathématique ait été peu différent du climat mathématique actuel, esquissé dans le chapitre précédent, soit qu'à ces époques d'autres facteurs, étrangers à notre théorie, aient notablement influencé le climat terrestre.

Le but de cet ouvrage est de fournir l'outil nécessaire pour des recherches de ce genre, et non point de s'étendre sur ces recherches

mêmes. Nous ne ferons que signaler où elles pourraient être surtout employées avec succès.

En reculant dans le passé, nous voyons, tout d'abord, l'obliquité de l'écliptique croître, c'est-à-dire que les contrastes géographiques diminuent. Vers la fin de la neuvième milliade avant l'époque actuelle, cette diminution est prononcée au plus haut degré, tandis que l'obliquité de l'écliptique a atteint la valeur de $24^{\circ}15'$. A cette époque, la différence entre les températures annuelles à l'équateur et aux pôles tombe à un minimum. Il est difficile de déterminer de quelle façon a pu se manifester cet état thermique dans le régime des vents et des pluies, ce phénomène appartenant, du reste, à la Météorologie dynamique. Il est probable que la diminution de la pente de la température entre l'équateur et les pôles a affaibli les courants aériens et marins dans le sens du méridien. L'insolation affaiblie des régions équatoriales fait prévoir un climat plus sec, la vapeur d'eau constituant les nuages provenant principalement des eaux équatoriales. Ces suppositions auraient besoin d'être soumises à un examen approfondi; aussi les prendrons-nous, dans ce qui suit, comme une simple probabilité.

En même temps que les contrastes géographiques diminuent sur toute la Terre, nous voyons les contrastes saisonniers de l'hémisphère boréal s'accroître comme conséquence de l'augmentation de l'obliquité de l'écliptique et la diminution de la durée de la saison chaude. Tandis que l'obliquité de l'écliptique croît jusqu'à la fin de la neuvième milliade en partant de l'époque actuelle, la durée de la saison chaude décroît jusqu'au milieu de la douzième milliade. Nous avons vu, au N^o 55, que, pour les basses latitudes, cette seconde cause des contrastes saisonniers est prépondérante, tandis que c'est la première qui se fait surtout sentir aux hautes latitudes. C'est pourquoi les contrastes saisonniers atteignent leur maximum aux basses latitudes vers la onzième milliade avant l'époque actuelle et vers la dixième aux hautes latitudes.

Par conséquent, on doit admettre que pendant les dix ou douze milliades qui ont précédé l'époque actuelle, l'hémisphère boréal avait un été plus chaud, un hiver plus froid et, probablement, moins de pluies et de neiges. En remontant la période qui a précédé la douzième milliade, ce caractère est en régression. Par suite de la décroissance de l'obliquité de l'écliptique, les contrastes géographiques

s'accroissent, tandis que, pour la même raison, les contrastes saisonniers s'adoucissent, phénomènes puissamment favorisés également par l'augmentation de la durée de la saison chaude, qui a lieu bientôt après le passage de l'obliquité de l'écliptique par son maximum. Vers la dix-huitième milliade, les contrastes saisonniers ont à peu près atteint leur valeur actuelle; à partir de cette époque, on doit s'attendre à ce qu'ils continuent à décroître, tandis que la quantité de précipitations aqueuses doit, probablement, continuer à augmenter, phénomènes atteignant vers la vingt-troisième milliade leur maximum pour tomber vers la quarantième milliade à peu près à leur intensité actuelle.

Il résulte, par conséquent, que, durant les quarante milliades écoulées, les conditions climatiques de l'hémisphère boréal ont accompli une oscillation complète comme conséquence de la variabilité des éléments astronomiques. Nous nommerons cette oscillation, pour abrégier le langage, la dernière vague climatique. L'époque vers la dixième milliade avant l'époque actuelle représente, en quelque sorte, la crête, l'époque vers la vingt-troisième milliade le creux de cette vague. A la première époque, les contrastes saisonniers atteignent leur maximum, à la seconde leur minimum. Par contre, les contrastes géographiques atteignent à la crête de la vague climatique leur minimum, tandis que, dans le creux, ils atteignent leur maximum.

L'hémisphère austral n'accuse pas avec la même netteté une telle vague climatique, les variations de l'obliquité de l'écliptique et des saisons ne s'y corroborant pas mutuellement. Toutefois on y constate vers la trentième milliade, par conséquent un peu plus tôt que pour l'autre hémisphère, un adoucissement notable des contrastes saisonniers et une accentuation des contrastes géographiques.

En continuant notre route dans le passé, nous arrivons dans une période durant laquelle les contrastes saisonniers de l'hémisphère boréal ne varient que d'une façon insignifiante, les changements de l'obliquité de l'écliptique et de la durée des saisons se compensant mutuellement pour la majeure partie et, d'autre part, l'excentricité de l'orbite terrestre étant à cette époque très petite. C'est seulement entre la soixantième et la soixante-dixième milliade que nous descendons la pente d'une vague climatique nettement dessinée dont nous atteignons le fond vers la soixante-douzième milliade.

A cette époque, par suite de la coïncidence de l'obliquité minima avec la durée maxima de la saison chaude, les contrastes géographiques sont accentués et les contrastes saisonniers sont adoucis, les uns et les autres au plus haut degré. Vers la quatre-vingt-quatrième milliade, la crête de la vague climatérique est gravie. A cette époque, les contrastes saisonniers ont atteint leur maximum, tandis que les contrastes géographiques sont encore loin de leur minimum. En reculant dans le passé, on rencontre ensuite une période de compensation partielle des effets de variation de l'obliquité de l'écliptique et de la durée des saisons; la quatre-vingt-quatorzième milliade présente la particularité que les insolutions solsticiales, celle d'été de même que celle d'hiver, étaient aux hautes latitudes plus faibles que celles que nous avons actuellement, quoique l'insolation annuelle de ces mêmes latitudes fût plus forte qu'à présent.

Nous allons maintenant aborder la question suivante: ces vagues climatériques ont-elles laissé quelques traces à la surface de notre Terre?

Trois sortes de documents géologiques peuvent nous donner une réponse à cette question: 1^o les limites géographiques et les limites dans la direction verticale de la distribution du monde végétal à différentes époques du passé, 2^o les anciens niveaux des lacs, 3^o les anciennes limites des neiges perpétuelles et des glaciers.

En effet, lorsque les contrastes saisonniers s'accroissent, c'est-à-dire lorsque l'été devient plus chaud, les limites de la distribution de certains végétaux avancent en latitude et en altitude, la période de végétation étant devenue plus chaude. Par contre, lorsque les contrastes saisonniers s'adoucissent, c'est-à-dire lorsque la température estivale s'abaisse et lorsque, probablement, les précipitations aqueuses augmentent, une crue des lacs advient comme conséquence d'un été pluvieux et froid. Dans ces périodes, on doit s'attendre également à une poussée des glaciers vers les vallées, la quantité de neige ayant augmenté et ne pouvant fondre jusqu'à sa limite primitive.

Par conséquent, en avançant dans le passé, nous devons nous attendre à ce que pendant les dix premières milliades, la limite géographique de certaines plantes s'avance vers le nord et vers le sommet des montagnes, phénomène régressant après la dixième

milliade. En effet, c'est ce qui paraît avoir eu lieu. Par exemple, on a constaté que le noisetier s'étendait jadis en Suède au-dessus du 63° degré de latitude tandis qu'aujourd'hui sa limite est bien plus au sud; on trouve des faits semblables concernant le chêne⁸⁵⁾. Ces déplacements correspondent à une augmentation de la température annuelle de 2.4°, et c'est précisément la valeur qui résulte, d'après la théorie exposée, des variations des éléments astronomiques et qui aurait eu lieu, il y a dix mille ans. Les trouvailles préhistoriques confirment ce calcul, en permettant de fixer l'époque du plus fort recul des limites en question, entre la septième et la dixième milliade avant l'époque actuelle.

On voit que, dans le phénomène précédent, une partie de la dernière vague climatérique a trouvé son expression. Quant aux autres parties de cette vague et à celles qui lui ont précédé, on ne saurait rien dire de certain. Il est vrai qu'à l'époque diluvienne de grands changements dans la distribution géographique du monde végétal et animal eurent lieu, mais il a été impossible, jusqu'à présent, de fixer s'ils furent en quelque rapport avec les vagues climatériques provoquées par la variabilité des éléments astronomiques.

On peut dire la même chose pour les oscillations des niveaux de quelques lacs qui paraissent avoir été particulièrement sensibles envers les variations climatériques. Un faible changement de la quantité annuelle de précipitations aqueuses est en état de faire varier notablement la hauteur des niveaux des lacs; une fois l'équilibre établi entre les précipitations et l'écoulement, le niveau, étant devenu pour quelque temps constant, laisse des traces de sa hauteur. De cette manière on a été dans la possibilité de constater d'une façon indubitable les changements de niveau de quelques lacs. De telles constatations ont été faites, par exemple, pour le Lake Bonneville, dont le Lac Salé de Utah représente le dernier reste, et qui aurait changé cinq fois de niveau;⁸⁶⁾ pour le Lake Lahontan dans le nord-ouest de la Nevade,⁸⁷⁾ et pour le Lac diluvien Éordeïque en Macedoine où Cvijić⁸⁸⁾ a constaté cinq terrasses marquant autant de niveaux différents de ce lac. Dans tous ces cas, les changements de niveau ont dû être provoqués par des variations climatériques. Quand à savoir si ces dernières étaient en rapports avec les vagues climatériques d'origine astronomique, des études spéciales seraient nécessaires pour qu'on pût donner une réponse précise. Si cett

réponse était positive, nous aurions traversé, tout récemment, une période de crues des lacs submergeant les traces de leurs anciens niveaux. La période actuelle serait une période d'équilibre.

Il serait d'une importance particulière de connaître l'influence des vagues climatiques d'origine astronomique sur le troisième des phénomènes mentionnés, c'est-à-dire sur l'extension des neiges perpétuelles et des glaciers, les grands élargissements de leurs limites étant le signe le plus caractéristique des époques glaciaires.

Actuellement, la plupart des auteurs sont d'accord pour reconnaître que les époques glaciaires ont été provoquées plutôt par l'augmentation des précipitations aqueuses que par l'abaissement de la température. Cet abaissement concernait principalement la saison estivale. Les précipitations abondantes couvrirent sous forme de neiges les montagnes, plus hautes à ces époques qu'actuellement, et s'avancèrent sous forme de glaciers vers les vallées où ils ne fondirent qu'incomplètement à cause de l'abaissement de la température estivale. L'équilibre entre l'apport et la fonte de neige à la limite ancienne du glacier étant rompu, les glaciers s'avancèrent envahissant les vallées.

De telles poussées de glaciers eurent lieu dans les Alpes à plusieurs reprises pendant l'époque diluvienne, et il s'agit de savoir si celles-ci sont en rapport avec les vagues climatiques d'origine astronomique. Nous allons premièrement aborder la question, à savoir si le nombre constaté et l'espacement relatif de ces poussées concordent avec les causes astronomiques.

Il s'ensuit de ce qui précède qu'une poussée notable des glaciers n'est possible que lorsqu'une augmentation des précipitations aqueuses coïncide avec un abaissement de la température estivale. Les causes astronomiques peuvent produire de tels effets lorsqu'une faible obliquité de l'écliptique coïncide avec une longue durée de la saison chaude. Au cours de la dernière centaine de milliades, de telles circonstances n'ont été réalisées que deux fois : vers la 23^e et vers la 72^e milliade avant l'époque actuelle. A la première de ces deux dates, l'abaissement de la température estivale par rapport à la température actuelle était assez insignifiant, aussi cette époque ne fut-elle pas très favorable à une grande extension des glaciers. Il ressort du tableau XV. que des descentes importantes de glaciers n'ont pu encore avoir eu lieu que vers la 116^e, vers la 188^e, vers

la 230^e et vers la 475^e milliade, de sorte qu'au cours des cinq cent dernières milliades, on n'aurait eu que quatre à six poussées importantes de glaciers sur l'hémisphère boréal. Cela concorde assez bien avec les données géologiques, notamment la longue époque interglaciaire de la 475^e à la 230^e milliade est remarquable à ce point de vue.

Cette concordance n'est pas une preuve suffisante que les poussées glaciaires aient coïncidé avec des périodes astronomiques favorables à la glaciation et encore moins une preuve que ces extensions de glaciers aient été provoquées par les seules causes astronomiques. Les descentes de glaciers dans les Alpes paraissent avoir été trop considérables pour être passibles d'une telle explication, et à plus forte raison les énormes glaciations du nord de l'Europe et de l'Amérique.

Il est extrêmement difficile de répondre à la question qui concerne le rapport entre les causes astronomiques et les développements glaciaires. Les époques glaciaires étaient, ainsi que nous l'avons dit, plutôt des phénomènes dûs à l'intensité des précipitations que des phénomènes thermiques, et tandis que nous avons découvert des rapports mathématiques entre les éléments astronomiques et les phénomènes thermiques, les rapports liant les précipitations aqueuses et les éléments astronomiques nous manquent totalement. Aussi devons-nous nous contenter de ne répondre qu'incomplètement à la question posée, par quelques données numériques.

Choisissons, à cet effet, les conditions d'insolation telles qu'elles furent sur l'hémisphère boréal vers la 187.4^e milliade avant l'époque actuelle et qui favorisèrent la formation des glaciers. A cette époque l'été était relativement très froid, la saison chaude étant plus longue que la saison froide de plus de 20 jours; d'autre part, l'obliquité de l'écliptique était moins accentuée. D'après le procédé employé au N^o 57, on peut facilement calculer qu'à cette époque, pendant les 186.46 jours de la plus forte insolation de l'année, l'insolation des régions alpines était aussi faible qu'aujourd'hui celle des régions situées six degrés plus au nord, ce qui correspond à un déplacement des Alpes jusqu'aux côtes de la Mer du Nord. En tenant compte qu'actuellement la limite moyenne des neiges perpétuelles des Alpes est (pour une latitude moyenne de 46 degrés) à l'altitude de 2750 mètres, tandis qu'elle est à l'altitude de 1520 mètres en

Norvège, à une latitude moyenne de 60 degrés, il résulte que le déplacement précédent aurait provoqué un abaissement de la limite des neiges perpétuelles d'environ 500 mètres. Dans ce calcul, nous avons admis que le régime des pluies et des neiges était le même pour les deux régions considérées, de même que la température estivale est le facteur dominant l'altitude de la limite des neiges perpétuelles, ce qui est, du reste, admis par la plupart des auteurs.⁸⁹⁾

Cet abaissement calculé ne représente cependant qu'une partie du déplacement de la limite des neiges perpétuelles qui a dû avoir lieu en réalité. Ainsi, les nouvelles étendues de neige ne sont pas sans influence sur le climat de ces régions. Le fort pouvoir réfléchissant de la neige et le fait que, dans les contrées couvertes de neige, une notable partie de la chaleur solaire est employée à des phénomènes de fonte, auront pour conséquence que la température annuelle de la région s'abaissera et que, de ce fait, la limite des neiges perpétuelles continuera à descendre. Il est très difficile d'évaluer numériquement l'effet de ce facteur secondaire.

Il est probable, d'autre part, que l'augmentation des précipitations aqueuses exerce une influence encore plus notable sur l'abaissement de la limite des neiges; et précisément une telle augmentation a dû se produire vers l'époque considérée. A cette époque, la différence entre la température annuelle à l'équateur et celle au pôle boréal était, ainsi qu'on peut le calculer facilement, de trois degrés environ supérieure à la différence actuelle. Les régions équatoriales étaient plus chaudes, les régions polaires plus froides. Par conséquent, on doit s'attendre, non seulement, à ce que l'évaporation ait été plus intense dans les premières régions, mais aussi qu'une circulation aérienne plus forte ait régné entre l'équateur et les régions boréales. Ces deux circonstances doivent augmenter les précipitations aqueuses dans les régions couvertes de glaciers, lesquelles, jouant le rôle de puissants condensateurs, absorbent l'humidité des courants atmosphériques, abaissant de cette manière le pouvoir protecteur de l'atmosphère. Le résultat de tout cela sera une nouvelle poussée des glaciers.

Quelle fut la grandeur de cette poussée, nous ne sommes pas en état de le dire. Les glaciations sont un phénomène se renforçant de lui-même et qu'il est difficile de poursuivre mathématiquement. Il est extrêmement difficile de suivre la bonne voie dans ce pro-

blême et d'apprécier à son juste titre l'influence de ce phénomène. Il est vrai qu'on a cherché d'exprimer cette influence par des formules mathématiques, mais il n'est pas moins vrai que celles-ci sont empiriques, qu'elles ne s'appuyent pas sur les lois physiques et qu'elles ne sauraient, par conséquent, être utilisées dans cet ouvrage.

Quoique nous soyons obligés de renoncer à exprimer numériquement l'influence de l'augmentation des précipitations aqueuses sur l'extension des glaciers, il paraît tout de même acquis que les limites des neiges et des glaciers réagissent sensiblement aux changements des éléments astronomiques. Si on n'a pu constater, au cours des temps historiques aucun changement notable dans les limites des glaciers, la cause en est que les variations des éléments astronomiques étaient de telle nature qu'on ne pouvait pas s'attendre à des changements de quelque importance. Les durées des saisons ne subirent, pendant ce temps-là, presque aucun changement, ainsi que le montre la *fig. 20*. De telle manière, les contrastes saisonniers n'étaient influencés que par le changement de l'obliquité de l'écliptique et leurs conséquences étaient réduites au minimum.

Les difficultés qui s'opposent à la solution du problème considéré, sont grandes mais non point insurmontables. En tout cas, on ne doit pas les éviter, ainsi qu'on l'a malheureusement fait souvent, en refusant aux causes astronomiques toute influence notable sur le climat terrestre. Il ne peut être question d'une étude scientifique du problème des époques glaciaires si l'on ne tient pas compte de ces causes.

Plus nous reculons dans le passé, plus grande devient la possibilité d'autres causes de changements climatiques. Ainsi, par exemple, tandis que, pendant les dernières vagues climatiques, un déplacement des pôles de quelque importance est presque exclu, il est, par contre, très probable dans le passé plus reculé. Il en est de même des autres causes de changements climatiques. Ainsi, il est probable qu'aux époques antérieures la constitution de l'atmosphère terrestre était différente de la constitution actuelle, par exemple dans le sens de l'hypothèse d'Arrhenius. De même, la distribution des continents et des mers était jadis différente de ce qu'elle est actuellement, ce qui exerçait une forte influence sur le climat terrestre. Forbes⁹⁰⁾ et Spitaler⁹¹⁾ ont essayé d'exprimer

mathématiquement cette influence et Kerner⁹³) a employé les formules ainsi obtenues dans le problème paléoclimatique. Cependant, ces formules n'ont pas de fondements physiques.

En s'éloignant dans le passé, la précision avec laquelle on peut déterminer les changements des éléments astronomiques, diminue rapidement, de sorte que, arrivés à l'époque tertiaire, nous devons renoncer à l'emploi des formules de Stockwell. Les limites données au N^o 52, entre lesquelles peuvent varier les éléments astronomiques, deviennent trop étroites pour les époques plus reculées, aussi-bien devons-nous les élargir. De telle manière, à ces époques du passé, les changements du climat mathématique pouvaient être assez considérables et le climat réel très déformé par des causes étrangères.

En arrivant à l'époque paléozoïque, un nouveau facteur climatique entre dans le domaine des possibilités: c'est la chaleur propre du globe. Celle-ci peut avoir trois origines: elle peut être un reste de l'état thermique initial, ou bien un produit de la désagrégation des substances radioactives, ou enfin une conséquence du frottement des marées.

On peut démontrer que la chaleur interne de la Terre a perdu très vite toute signification comme facteur climatique. C'est ce que nous allons justifier par quelques chiffres.

La quantité de radiation W_m que reçoit du Soleil la surface terrestre en absence d'atmosphère, est égale, d'après le N^o 47, à

$$W_m = 0.50 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}}.$$

Cette quantité de chaleur produirait à la surface de la Terre une température moyenne de 12° ou bien de 285 degrés absolus. Pour que le flux de chaleur ΔW_m , venant de l'intérieur de la Terre, se fasse sentir à côté de la chaleur W_m , c'est-à-dire pour qu'il soit, par exemple, en état d'élever la température précédente d'un degré, on doit avoir, d'après (210), le rapport

$$\frac{W_m + \Delta W_m}{W_m} = \left(\frac{286}{285} \right)^4,$$

c'est-à-dire

$$1 + \frac{\Delta W_m}{W_m} = \left(1 + \frac{1}{285} \right)^4.$$

En développant l'expression précédente d'après la formule du binôme en une série, tout en négligeant les puissances supérieures du petit nombre $\frac{1}{285}$, on obtient

$$\Delta W_m = \frac{4}{285} W_m,$$

c'est-à-dire, avec la valeur numérique précédente de W_m ,

$$\Delta W_m = 0.007 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^3 \times \text{minute}}.$$

Pour que cette quantité de chaleur puisse se frayer passage à travers la croûte terrestre, il faut que dans celle-ci la température accuse un gradient g_T , donné, d'après le N^o 46, par l'équation

$$\Delta W_m = K g_T,$$

où K désigne le coefficient de conductibilité du sol. Celui-ci est, d'après le N^o 46, égal, en moyenne, à

$$K = 0.30 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm} \times \text{minute}},$$

de sorte qu'on obtient pour g_T la valeur

$$g_T = \frac{1}{43} \frac{\text{degré}}{\text{cm}}.$$

Ceci signifie que la température doit croître d'un degré tous les 43 centimètres de profondeur. Or, presque toutes les roches terrestres fondent à une température inférieure à 1800°, à la pression d'une atmosphère. En admettant donc que cette température de fusion n'est pas considérablement influencée par l'augmentation de la pression à l'intérieur de la Terre, on aurait atteint, dans le cas précédent, déjà à la profondeur de 800 mètres la limite inférieure de la croûte solide de la Terre. Même pour une épaisseur aussi faible de la croûte terrestre, qui en fait une véritable pellicule, l'influence du noyau central sur l'état thermique de la surface est minime, de sorte que l'on peut dire que, au moment où la Terre fut complètement couverte d'une enveloppe, la température centrale cessa d'être un facteur climatérique.

Nous verrons au N^o suivant comment cette première croûte s'est formée en un espace de temps incroyablement court, une fois

que la température de la surface fut tombée à la température de solidification des roches.

Malgré cela, il n'est point exclu que, pour d'autres raisons, la croûte terrestre posséda, jadis, une certaine chaleur qui lui fut propre et qui se fit sentir sur le climat terrestre. G. H. Darwin a attiré l'attention sur une telle cause. Ainsi que nous l'avons mentionné au N^o 59, dans un passé reculé, les marées étaient beaucoup plus fortes qu'actuellement et Darwin a calculé dans son travail cité sous⁶⁸) qu'à l'époque de 46·3 millions d'années avant l'époque actuelle, le frottement des marées était tellement fort que sa transformation complète en chaleur aurait élevé de 100° la température de la Terre; dans le passé encore plus reculé, ce frottement était encore plus considérable. Malgré toutes les incertitudes que comportent ces données, on doit quand même admettre la possibilité d'un réchauffement mécanique des océans. Toutefois depuis que la vie existe sur la Terre, la température des océans n'a pas dû dépasser de beaucoup 55°.

A l'aide de cette température propre de la croûte terrestre et à l'aide de la faible obliquité de l'écliptique à l'époque paléozoïque, mentionnée au N^o 55, on pourrait, à la rigueur, expliquer la formation de calottes de glace polaires si toutefois celles-ci ont existé au cambrium pour disparaître plus tard⁶⁹). La faible obliquité de l'écliptique à ces époques eut été la cause de première formation de ces glaces polaires qui aurait disparu sous l'influence combinée de l'accroissement de l'obliquité de l'écliptique, de l'insolation plus intense des régions polaires, qui en découle et de la chaleur propre de la croûte terrestre, pour apparaître de nouveau dès que l'influence de cette dernière chaleur a complètement cessé de se faire sentir.

CHAPITRE III.

RECHERCHES THÉORIQUES

SUR LE CLIMAT DE QUELQUES PLANÈTES ET SUR LE CLIMAT LUNAIRE.

62. — *Sur la formation des croûtes planétaires.*

Dans l'état actuel de nos connaissances, l'évolution de la Terre et des autres corps célestes de notre système solaire, peut être conçue de la manière suivante.

Au début, à l'état de gaz incandescents, les corps célestes se refroidissent par rayonnement pour regagner une partie indéterminée de leur chaleur par contraction et, probablement, aussi par la désagrégation des substances radioactives. Lorsque la perte de chaleur dépasse la production, la surface passe à état de liquide incandescent s'étendant vers l'intérieur. Sous l'influence de l'attraction solaire et, d'une façon analogue, sous l'influence des satellites de la planète considérée, en deux endroits diamétralement opposés, s'amoncellent à la surface de la planète des masses liquides entre lesquelles s'effectue la rotation de la planète, comme d'une roue entre les patins du frein. Plus l'état d'agrégation s'approche, par refroidissement, de la consistance sémitliquide, plus également croissent les forces de frottement que doit vaincre la masse en mouvement sous les calottes liquides, ce qui en retarde la rotation. Ce frottement a, en effet, diminué tellement la vitesse de rotation de la Lune que celle-ci a toujours sa même face tournée vers la Terre. Le même effet doit être produit sur la planète Mercure par la proximité du Soleil, de sorte que la durée de rotation de cette planète est probablement égale à la durée de sa révolution autour du Soleil.

Lorsque, au cours de l'évolution de la planète, les premières scories se formèrent à sa surface comme conséquence de l'abaissement de la température au-dessus du point de fusion, les scories

surmontant le magma épais⁹⁴), constitué, en partie, de matériaux plus lourds, se groupèrent en une pellicule couvrant toute la surface de la planète. De ce fait, le caractère du phénomène du refroidissement se trouva complètement modifié. La perte de chaleur du noyau gazeux de la planète n'eut plus lieu (en exceptant les phénomènes éruptifs) par convection et rayonnement, mais par conductibilité à travers la croûte solide de la planète. Or, ce phénomène peut être suivi mathématiquement.

A cet effet, admettons que l'épaisseur de la croûte planétaire ait atteint la valeur x ; admettons ensuite que sa surface externe accuse sa température actuelle, car nous avons vu qu'elle a dû l'atteindre bientôt après sa formation et que depuis elle n'a pas dû changer considérablement. On peut enfin admettre que la surface interne de la croûte planétaire qui est en état de formation incessante, accuse, pour cette raison, la température de fusion des roches à la pression qui y règne. Le refroidissement de la croûte planétaire a lieu si lentement que la valeur $\frac{\partial u}{\partial t}$ reste toujours petite, ce qui a pour conséquence, d'après (216), qu'on a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, c'est-à-dire que la valeur de $\frac{\partial u}{\partial x}$ peut être considérée constante pour toute l'épaisseur de cette croûte. On est en droit donc d'admettre que la distribution de la température entre les deux surfaces-limite est, à tout moment, une fonction linéaire de l'abscisse x .

Soient AB (*fig. 26*) la surface externe et CD la surface interne de la croûte planétaire à moment quelconque t . Prenons pour zéro de l'échelle thermométrique la température de la surface externe; on peut alors représenter la distribution de la température dans la croûte planétaire par le diagramme ombré EFG , en faisant $FG = u_s$, où u_s désigne la différence de température entre la surface interne et la surface externe.

Après l'espace de temps dt , par suite du refroidissement de la croûte planétaire, l'épaisseur de celle-ci augmentera de dx , de sorte qu'on obtiendra la nouvelle surface-limite in-

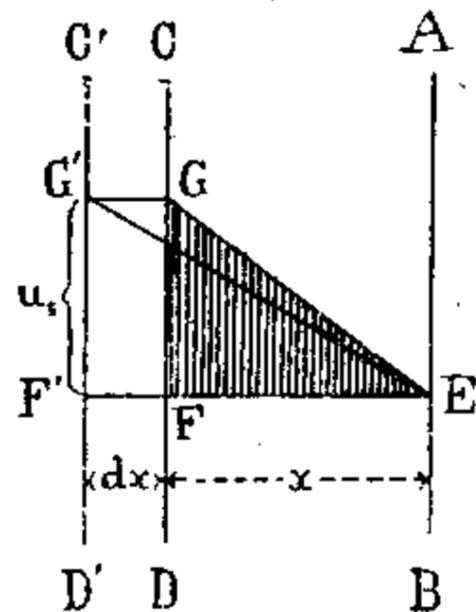


Fig. 26.

terne $C' D'$. La température à cette surface sera égale à la température u_s qu'avait la surface-limite antérieure, en supposant la croûte planétaire homogène et en admettant que la pression, en croissant avec la profondeur, ne fait pas varier notablement la température de fusion des roches. Il s'établira alors à l'intérieur de la croûte planétaire une distribution de température représentée par les ordonnées de la droite $E G'$.

En considérant une partie prismatique de la croûte planétaire, dont une base se trouve à la surface externe et est égale à l'unité, il est évident que ce prisme a été, durant le temps dt , le siège des changements suivants: La masse des roches ignées, située à la base interne et ayant le volume dx s'est solidifiée. Ce phénomène a mis en liberté une quantité de chaleur égale à

$$dW_s = C_s \rho_p dx,$$

où ρ_p désigne la densité du matériel igné et C_s la chaleur de fusion pour l'unité de masse.

Dans le même temps dt , le refroidissement est passé de la distribution $E G$ à la distribution $E G'$. De ce fait, une quantité de chaleur égale à

$$dW_k = C_p \rho_p \text{ aire } E G G'$$

a été mise en liberté, C_p désignant la chaleur spécifique de l'unité de masse de la croûte planétaire. On a donc

$$dW_k = \frac{1}{2} C_p \rho_p u_s dx.$$

En excluant provisoirement tout apport de chaleur par la surface $C' D'$, le prisme considéré a perdu, dans l'espace de temps dt , la quantité de chaleur

$$dQ = dW_s + dW_k.$$

Cette quantité de chaleur a atteint par conductibilité, dans la direction $-x$, la surface de la planète, de sorte qu'on a, d'après (211)

$$\frac{dQ}{dt} = K \frac{\partial u}{\partial x},$$

où K désigne le coefficient de conductibilité de chaleur du sol.

Dans le cas qui nous occupe, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_s}{x},$$

de sorte qu'on obtient des équations précédentes :

$$\frac{C_s + \frac{1}{2} C_p u_s}{K u_s} \varrho_p x dx = dt.$$

L'intégration de cette dernière équation donne :

$$t = \frac{2C_s + C_p u_s}{4 K u_s} \varrho_p x^2.$$

Dans cette opération, nous avons posé pour $t = 0$, $x = 0$, c'est-à-dire que nous comptons le temps t à partir du moment où la formation des scories commença.

Nous allons employer la formule précédente dans le but d'obtenir quelques points de repère concernant la formation de la croûte terrestre, puisque nous sommes en état de donner les valeurs numériques des grandeurs figurant dans cette formule.

La croûte terrestre est constitué principalement des roches granitiques; aussi, en tenant compte de données sous⁵¹⁾, on peut poser

$$K = 0.47; \quad \varrho_p = 2.66; \quad C_p = 0.195,$$

en employant comme unités la gramme-calorie, le centimètre et la minute. En employant ces unités, on peut poser⁹⁵⁾

$$C_s = 130,$$

de sorte qu'on obtient

$$t = 1.415 \frac{260 + 0.195 u_s}{u_s} x^2,$$

où x est mesuré en centimètres et t en minutes. En exprimant x en kilomètres et t en années, on obtient la formule suivante

$$t = 27.000 \frac{260 + 0.195 u_s}{u_s} x^2.$$

Nous avons appris au N^o précédent que, pour une épaisseur de la croûte terrestre d'un kilomètre environ, l'intérieur n'exerce plus une influence notable sur la température de la surface. Or,

la formule précédente nous apprend, en y posant $u_s = 1600^{\circ}$, le résultat intéressant que la croûte terrestre a atteint l'épaisseur d'un kilomètre dans un intervalle de temps de 10.000 ans.

Ce nombre, quoique approximatif, nous donne l'ordre de grandeur de l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre l'état igné et l'état de refroidissement complet de la croûte terrestre, dans lequel l'intérieur de la Terre ne joua plus aucun rôle comme facteur climatique. Un tel intervalle n'est qu'un moment par rapport à la longue histoire de notre Terre et des autres planètes.

La formule précédente nous donne également quelques renseignements sur l'ordre de grandeur de l'intervalle de temps qui s'est écoulé depuis la formation de la croûte terrestre.

Nous avons évalué, au N^o 46, à 28.6 degrés par kilomètre la valeur actuelle du gradient de température dans la croûte terrestre. Ce nombre correspond aux couches superficielles de la croûte terrestre, où on a $K = 0.30$ (en gramme-calories, cm, minutes). Pour les couches sousjacentes, nous devons nous attendre à un coefficient de conductibilité supérieur au précédent et ces couches doivent, par conséquent, accuser un gradient de température plus petit, conformément à la plus faible valeur de K . En posant pour cette dernière valeur, d'après la note⁵¹),

$$K = 0.47,$$

nous obtenons

$$g_T = \frac{30}{47} 28.6 = 18.3 \frac{\text{degrés}}{\text{km}}.$$

On a donc

$$u_s = 18.3 x,$$

où x désigne la profondeur, à laquelle est atteinte la température u_s de fusion des roches.

En posant $u_s = 2200^{\circ}$, vu que la pression qui règne à cette profondeur élève la température de fusion, on obtient $x = 120$ km. En portant cette valeur dans la formule développée plus haut, on obtient

$$t = 122,000.000 \text{ années.}$$

Par conséquent, ce temps eût été nécessaire pour que toute chaleur mise en liberté par la solidification et le refroidissement s'échappât à travers la croûte en formation.

Mais, en réalité, l'âge de la croûte terrestre doit être, en tout cas, supérieur au nombre précédent, car le refroidissement de la croûte terrestre est retardé par diverses influences. Premièrement, par le flux de chaleur qui traverse la surface $C' D'$, dont nous n'avons point tenu compte; deuxièmement, par des quantités de chaleur mises en liberté par la contraction du globe et par le travail de gravitation qui en résulte; troisièmement, par la désagrégation des substances radioactives contenues au sein de notre Terre.

Nous ne pouvons pas apprécier dans quelle mesure ces trois causes retardent la formation de la croûte terrestre, sans avoir recours à des hypothèses gratuites, car nous ne sommes pas renseignés sur l'état du noyau central de la Terre.⁹⁶⁾ C'est pourquoi nous nous contenterons du chiffre précédent, représentant avec sécurité la limite inférieure de l'âge de la croûte terrestre.

Ces deux nombres $t = 10.000$ années et $t = 122.000.000$ années, nous donnent une image saisissante, d'une part, de la vitesse avec laquelle la formation de la croûte empêcha l'influence de l'intérieur de la Terre sur le climat terrestre et d'autre part, de la lenteur avec laquelle la croûte continua à se former.

Ce phénomène que nous venons d'illustrer numériquement pour la Terre, doit être en principe le même pour toute autre planète.

Les planètes: Mercure, Vénus, la Terre, Mars, leurs satellites et, sans doute, toutes les petites planètes, ont depuis longtemps franchi la première phase de leur évolution et leur climats sont, par conséquent, conditionnés uniquement par la radiation solaire. Aussi pouvons nous employer les théories exposées dans le présent ouvrage, afin d'obtenir quelques renseignements importants sur ces phénomènes.

Nous ne sommes que fort peu renseignés sur la constitution des autres grandes planètes. Toutefois, elles sont moins avancées dans leur évolution que les planètes nommées ci-devant, ainsi qu'il est permis d'en conclure de leurs grandeurs, de leur densités et de quelques phénomènes observés à leur surface. Pour ces corps célestes, la radiation solaire ne doit pas être un facteur thermique important, d'autant moins que l'intensité de cette radiation est déjà très affaiblie lorsqu'elle atteint ces planètes éloignées.

63. — *Le climat de la planète Mercure.*

Il est vrai que nous ne sommes pas renseignés d'une façon certaine, par observation directe, sur la durée de rotation de la planète Mercure, mais tout porte à croire que cette durée est égale à la durée de révolution de cette planète autour du Soleil, de sorte que Mercure aurait toujours la même face tournée vers le Soleil comme c'est le cas pour la Lune envers la Terre. Toutefois, il ne découle pas de ce fait que la surface de Mercure peut être partagée en deux moitiés nettement délimitées dont l'une jouirait d'un jour continu, tandis que l'autre serait plongée dans les ténèbres perpétuelles. Même dans le cas où l'axe de rotation de la planète serait perpendiculaire au plan de son orbite, l'excentricité considérable de cette orbite produirait un phénomène semblable à la libration de la Lune.

Pour étudier mathématiquement ce dernier phénomène, supposons que cette position perpendiculaire de l'axe de rotation, dont nous venons de parler soit réalisée et commençons nos considérations en partant du moment où la planète se trouve au périhélie.

Soient (*fig. 27*) T la position de la planète et P la position du Soleil à l'époque choisie; l'ellipse P S A représente l'orbite apparente du Soleil par rapport à la planète. Le mouvement du Soleil dans son orbite à lieu d'après la seconde loi de Kepler de sorte qu'on a, en tenant compte de (11) et (12),

$$\frac{1}{2} \varrho^2 \frac{d\nu}{dt} = \frac{ab\pi}{T}.$$

Dans cette équation ϱ désigne le rayon vecteur Mercure-Soleil, a et b les deux demi-axes de l'orbite (mesurés en unités astronomiques) T la durée de révolution de la planète et ν l'anomalie vraie du Soleil représentée par l'angle P T S.

Nous allons nous occuper premièrement du point de la surface de Mercure, dont le zénith est occupé par le Soleil au moment initial choisi. Ce point, que nous désignerons par M, appartient au cercle équatorial et est, en même temps, le point de la surface planétaire recevant la plus forte insolation possible dont

peut jouir un point de la surface de Mercure. Cette insolation, qu'il reçoit précisément au moment initial, est égale, en supposant l'atmosphère absente, à

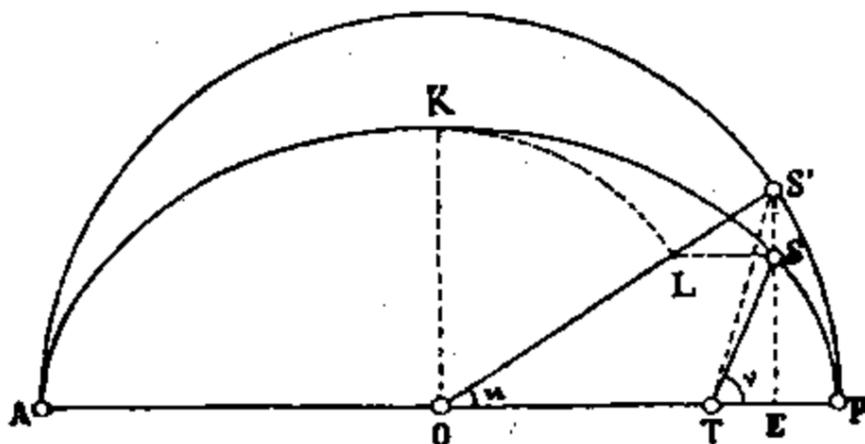


Fig. 27.

$$W_1 = \frac{I_0}{a^2 (1 - e)^2}.$$

Dans cette équation I_0 désigne la constante solaire et e l'excentricité de l'orbite.

On a

$$a = 0.3871$$

$$e = 0.2056,$$

de sorte qu'on obtient

$$W_1 = 10.7 I_0.$$

La rotation de la planète a lieu avec une vitesse angulaire constante. En désignant par α l'angle que forme le plan du méridien du point M avec l'axe AP de l'orbite apparente du Soleil, cette vitesse angulaire est évidemment représentée par

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T}.$$

En comptant le temps t à partir du moment initial mentionné, on a

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} t.$$

Le Soleil, en la position P, a sa plus grande vitesse relative et, par conséquent, il précédera le plan du méridien du point M (ce plan tournant à la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ autour de l'axe perpendiculaire au plan de la figure). En abandonnant, donc, la position P,

le Soleil commence à s'éloigner du zénith du point M, et lorsqu'il arrive sur son parcours au point S, c'est-à-dire lorsque son anomalie atteint la valeur ν , sa distance zénithale est alors donnée par

$$z = \nu - \alpha.$$

Cette distance zénithale accusera sa valeur maxima pour

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\nu}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire, d'après les équations précédentes, lorsqu'on a

$$e^2 = ab.$$

D'autre part, on a, d'après (9) et (10),

$$e = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu},$$

et on trouve à l'aide des deux équations précédentes et de l'équation (10) que l'élongation maxima du Soleil au zénith du point M a lieu lorsqu'on a

$$\cos \nu = \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{e}.$$

A l'aide de la valeur précédente de e , on obtient

$$\nu = 98^{\circ}54'.$$

Pour trouver la valeur de cette élongation, opérons comme il suit.

Les aires du secteur d'ellipse PTS et du secteur du cercle PTS' sont dans le même rapport que le petit axe de l'ellipse envers le grand. On a donc

$$\text{aire } PTS = \frac{b}{a} \text{aire } PTS'.$$

En reliant S' au centre O de l'ellipse et en désignant l'angle POS' nommé anomalie excentrique, par u , on obtient

$$\text{aire } PTS' = \text{aire } POS' - \text{aire } TOS' = \frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} a^2 e \sin u.$$

L'aire PTS est, d'après la seconde loi de Kepler, égale à $\frac{ab\pi}{T} t$, de sorte qu'on obtient des équations précédentes

$$\alpha = u - e \sin u.$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Kepler.

En décrivant le cercle KL au rayon OK , il résulte de la construction bien connue de l'ellipse que LS est parallèle à OP , de sorte qu'on a $\overline{SE} = b \sin u$; $\overline{OE} = a \cos u$; $\overline{OT} = ea$, c'est-à-dire

$$\text{tang } \nu = \frac{\overline{SE}}{\overline{TE}} = \frac{b \sin u}{a (\cos u - e)}.$$

En exprimant dans cette équation les fonctions trigonométriques par le tangens du demi-arc, on obtient, en tenant compte de (10),

$$\text{tang } \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{ tang } \frac{\nu}{2}.$$

Il découle de cette équation, de celle de Kepler et de la valeur numérique de ν , donnée plus haut,

$$\alpha = 75^{\circ}13'.$$

De cette manière, on trouve que l'élongation maxima du Soleil, au zénith du point M est égale à

$$z = 23^{\circ}41'.$$

En continuant sa marche apparente autour de la planète, le Soleil s'approche de nouveau du zénith du point M qu'il atteint en arrivant au point A . A ce moment, l'insolation du point M est égale à

$$W_2 = \frac{I_0}{a^2 (1+e)^2},$$

c'est-à-dire

$$W_2 = 4.6 I_0.$$

Cette insolation est l'insolation minima du point M .

La marche ultérieure de l'insolation est la reproduction symétrique de ce qui vient d'être décrit. Le Soleil commence à s'éloigner du zénith du point M vers le côté opposé du ciel jusqu'à ce qu'il ait atteint la même élongation maxima que précédemment. Ce mouvement s'accomplit en un cercle vertical passant de l'est à l'ouest.

Il découle de (6) qu'on a pour M , comme conséquence de $\varphi = 0$; $\delta = 0$

$$z = \omega_0,$$

ω_0 désignant l'angle horaire du Soleil, observé du point M .

En comptant la longitude géographique à partir du méridien passant par le point M , l'angle horaire ω du Soleil observé à la longitude ψ est donné, d'après (19), par

$$\omega = \omega_0 + \psi.$$

Par conséquent, pour un point quelconque de la surface de Mercure, aux coordonnées géographiques φ et ψ , la distance zénithale z du Soleil est donnée, d'après (6), par

$$\cos z = \cos \varphi \cos (\omega_0 + \psi).$$

La valeur de ω_0 varie, d'après ce qui précède, au cours de la journée, dont la durée est égale à celle de l'année, entre les limites $-23^{\circ}41'$ et $+23^{\circ}41'$. Il en découle que pour tous les points de la surface de Mercure, dont la longitude ψ satisfait à l'inégalité

$$-66^{\circ}19' < \psi < +66^{\circ}19',$$

z reste constamment inférieur à un angle droit, de sorte que le Soleil ne se couche jamais au-dessous de l'horizon. Les points pour lesquels on a

$$66^{\circ}19' < \psi < 113^{\circ}41'$$

ou

$$-66^{\circ}19' > \psi > -113^{\circ}41'$$

ont le jour et la nuit. Le reste de la surface de Mercure a la nuit éternelle.

La température de cette partie obscure de la surface de Mercure, représentant environ 37 pour cent de la surface totale, en admettant que l'axe de rotation occupe une position perpendiculaire au plan de l'orbite, est très basse et proche du zéro absolu. Par contre, aux environs du point M , la température doit être très élevée, car, en l'absence d'atmosphère, elle oscillerait, d'après (210) entre les

limites $\sqrt[4]{\frac{W_2}{\sigma}}$ et $\sqrt[4]{\frac{W_1}{\sigma}}$, c'est-à-dire entre 300° et 450° en chiffres

ronds. Cette grande différence de température entre la face éclairée et celle qui ne l'est pas, est une preuve suffisante que Mercure ne possède aucune enveloppe gazeuse, car tous les gaz se condenseraient à la partie froide de sa surface.

De même, le faible pouvoir réflecteur de Mercure qui est égal, d'après la définition de Lambert, à 0.14 et qui ne diffère pas beaucoup de ceux de la Lune et de la marne argileuse, parle en

faveur de la conclusion précédente concernant l'atmosphère de Mercure. En comparaison avec les autres planètes, Mercure est un corps relativement sombre, d'où on doit conclure que la lumière solaire réfléchie ne provient que de sa surface et que toute atmosphère de quelque importance y est absente.

Cette absence de l'atmosphère nous permettrait de suivre avec une précision remarquable la marche de la température à la surface de Mercure, mais nous n'aborderons pas ici cette question.

64. — *Le climat de la planète Vénus.*

Contrairement à ce que nous avons vu pour Mercure, le pouvoir réflecteur de Vénus est très grand et égal à 0.76. Le grand pouvoir réflecteur de cette planète brillante tient aux nuages contenus dans son atmosphère et qui recouvrent la surface entière de la planète, la masquant ainsi à notre vue. Pour cette raison il est difficile de déterminer la durée de rotation de cette planète. En effet, les observations faites dans ce but ont donné des résultats très divergents. Tandis que Schiaparelli, par exemple, concluait de ses observations que la durée de rotation de Vénus est égale à la durée de sa révolution autour du Soleil, les observations spectroscopiques plus récentes portent à admettre une durée de rotation plus courte. Ce dernier résultat est le plus probable, la présence même de l'atmosphère parle contre la supposition de Schiaparelli. Si Vénus avait toujours le même côté tourné vers le Soleil, cette planète, de même que Mercure, ne pourrait avoir une enveloppe gazeuse. Sur l'orientation de l'axe de rotation de Vénus on n'est pas, également, définitivement fixé.

A notre incertitude sur la durée de rotation et sur l'inclinaison de l'axe de rotation, s'ajoute l'ignorance complète sur les conditions de transmissibilité dans son atmosphère, de sorte que nous ne sommes renseignés dans une certaine mesure que sur le pouvoir réfléchissant A de cette planète, comme nous l'avons défini au N^o 17.

La nébulosité de l'atmosphère de Vénus étant, ainsi que nous l'avons déjà dit, égale à 100 pour cent et, d'autre part, le pouvoir

réfléchissant des nuages étant, d'après les recherches d'Abbot et Fowle, mentionnées sous ⁴²), égale à 0.65, on peut poser

$$A = 0.65 .$$

Cette perte d'énergie par réflexions est donc encore plus considérable pour Vénus que pour la Terre. Nous avons montré au N^o 47 que l'insolation moyenne de la Terre est de 0.50 gramme-calories par cm^2 et minute et qu'il n'y a que 60 pour cent de cette valeur, c'est-à-dire seulement 0.30 gramme-calories qui sont employées à la calorification de la Terre. L'insolation moyenne de Vénus est, d'après (104) égale à

$$W_m = \frac{1}{4} \frac{I_0}{a^2}$$

car l'excentricité e de son orbite est très petite ($e = 0.0068$). Comme on a, d'autre part,

$$a = 0.7233 ,$$

on obtient

$$W_m = 0.956 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}} .$$

De cette radiation, il n'y a que la fraction de 35 pour cent qui réussit à traverser les nuages, de sorte qu'il ne reste pour la calorification de la planète que 0.3346 gramme-calories, c'est-à-dire pas beaucoup plus que pour la Terre.

Si l'atmosphère de Vénus possédait les mêmes pouvoirs absorbants que l'atmosphère de la Terre, la température moyenne de sa couche la plus inférieure ne différerait que peu de la température qui règne sur la Terre. Nous avons trouvé pour cette dernière, au N^o 47, la valeur de 16.5° ou bien 289.5 degrés absolus, par conséquent, d'après (470), la température absolue correspondante de l'atmosphère de Vénus serait égale à

$$\theta = 289.5 \sqrt[4]{\frac{3346}{3000}} = 297.5$$

c'est-à-dire 24.5 degrés centésimaux.

Nous aurions donc, dans ce cas, à la surface de Vénus un climat très humide avec une température supérieure de 8 degrés au climat terrestre. Ce climat serait peu différent de celui qui a régné sur la Terre à l'époque carbonifère. Mais en réalité, le climat de Vénus

doit être considérablement plus chaud. La haute teneur en vapeur d'eau et la nébulosité de son atmosphère exercent, en tout cas, une forte action protectrice, en absorbant les radiations obscures dans une plus forte mesure que ne le fait l'atmosphère terrestre. Nous ne pouvons pas déterminer la température réelle de la surface de Vénus et de son atmosphère, car, ainsi qu'il a été mentionné, il nous manque la connaissance des valeurs numériques de p_a et p_a' , aussi devons-nous nous contenter de déterminer, au moins, les limites entre lesquelles se trouve cette température.

Supposons, dans ce but, que l'atmosphère de Vénus ne contient, dans des proportions notables, qu'un seul gaz à fort pouvoir absorbant, admettons que ce soit la vapeur d'eau, désignons sa densité au contact de la surface planétaire par ϱ_0 , il découle alors de (195)

$$a_1(0) = k \varrho_0$$

et de (462)

$$a_1(0) = a_1,$$

c'est-à-dire

$$a_1 = k \varrho_0.$$

Dans ces équations k désigne le coefficient d'absorption de l'atmosphère pour la radiation solaire.

D'autre part, on a

$$a_1' = k' \varrho_0,$$

où k' désigne le coefficient d'absorption de l'atmosphère pour la radiation émise par la planète.

On obtient, par conséquent, de (470) et (464),

$$\varrho \Theta'(0) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left(1 + \frac{k'}{k} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{k}{k'} \right) e^{-k \varrho_0 H} \right].$$

Nous sommes renseignés, dans une certaine mesure, sur le rapport des valeurs numériques de k et k' par les propriétés de transmission de l'atmosphère terrestre. En admettant que toute l'absorption dans l'atmosphère terrestre est due à la vapeur d'eau, ce qui est à peu près exact, et en désignant la densité de la vapeur d'eau à la surface de la Terre par ϱ_0' , sa hauteur virtuelle par H' , on a, d'après les données du N^o 42 et d'après (464),

$$e^{-k \varrho_0' H'} = 0.67$$

$$e^{-k' \varrho_0' H'} = 0.05,$$

c'est-à-dire

$$\frac{k'}{k} = \frac{\log 0.05}{\log 0.67} = 7.5.$$

D'après (188) la grandeur

$$e_0 H = M$$

représente la masse de la vapeur d'eau, contenue dans l'atmosphère au-dessus de l'unité de surface de Vénus. Exprimons cette masse par la masse M_0 de la vapeur d'eau, contenue dans l'atmosphère terrestre au-dessus de l'unité de surface, c'est-à-dire posons

$$M = n M_0.$$

Dans cette équation, n indique, donc, combien de fois plus forte est la teneur en vapeur d'eau d'une colonne verticale de l'atmosphère de Vénus par rapport à la teneur d'une colonne de l'atmosphère terrestre ayant la même base. Ceci admis, on a

$$e^{-k e_0 H} = e^{-k M} = e^{-k n e_0' H'} = 0.67^n.$$

On obtient ensuite, en employant les formules et les valeurs numériques précédentes, l'équation suivante donnant la température moyenne u_m de la couche la plus inférieure de l'atmosphère de Vénus mesurée en degrés centigrades

$$u_m = \sqrt[4]{1.87 \times 10^{10} (1 - 0.867 \cdot 67 \times 0.67^n) - 273}.$$

Le tableau suivant contient les valeurs de u_m pour différentes valeurs de n .

Tableau XXVI

n	1	2	3	4	∞
Température	25°	54°	70°	80°	97°

Les recherches ultérieures, fondées sur les observations spectroscopiques, nous apprendront quelle est, parmi les valeurs contenues dans ce tableau, celle qui s'approche le plus de la réalité. Il est remarquable que la température cherchée ne peut être, en aucun cas, supérieure à 100° , car pour $n = \infty$, u_m s'approche de la valeur-limite de 96.8° .

A l'intéressante question concernant l'existence d'êtres vivants sur la planète Vénus, on ne peut, dans l'état actuel de nos connaissances, donner une réponse décisive. Même lorsque la température moyenne des couches inférieures de l'atmosphère de Vénus était compatible avec la vie, il reste à savoir si les contrastes entre le jour et la nuit et entre l'été et l'hiver ne seraient pas trop accentués pour que la vie y puisse prospérer. La réponse à cette question dépend de la durée de rotation de la planète et de l'inclinaison de son axe. Une courte durée de rotation tend à adoucir les contrastes entre le jour et la nuit. Cette tendance pourrait aller assez loin dans l'atmosphère humide et nébuleuse de Vénus. Une faible inclinaison de l'axe de rotation adoucit les contrastes saisonniers, de sorte que, dans ce cas, l'été ne serait pas trop chaud par rapport à l'hiver. Mais c'est pour une autre raison qu'une faible inclinaison de l'axe de rotation produirait des conditions favorables au développement de la vie organique. Dans ce cas, même si la température moyenne de la couche inférieure de l'atmosphère de Vénus était très élevée, les régions polaires jouiraient d'un climat modéré.

Un très fort adoucissement des contrastes saisonniers s'effectuerait dans les mers de Vénus et si de telles mers couvrent la surface de cette planète, c'est dans leur sein que la vie a commencé ou qu'elle commencera à se développer, comme c'était précisément le cas sur notre Terre.

65. — *Le climat de la planète Mars.*

L'atmosphère martienne se distingue par sa clarté et sa transparence exceptionnelles, de sorte qu'à l'aide d'instruments puissants, on peut, pendant les oppositions favorables, observer les détails de la surface de cette planète. Les nuages, si gênants à l'application des lois mathématiques au climat terrestre, n'apparaissent que très rarement dans l'atmosphère de Mars. La surface, presque complètement nivelée de cette planète, favorise également l'application des théories mathématiques, car on n'a pas à craindre de notables perturbations locales des régularités zonales. De plus, les courants des

mers peu profondes de Mars, qui ne sont, en réalité, que des plaines marécageuses, sont loin d'exercer sur le climat l'influence qui appartient aux courants des mers terrestres. Enfin, nous avons toutes les raisons d'admettre que la masse de l'atmosphère martienne est considérablement plus petite que celle de l'atmosphère terrestre et que les phénomènes dynamiques y sont moins importants que ceux de l'atmosphère terrestre. Bref, cette planète est un objet idéal pour l'application des théories exposées dans cet ouvrage.

Nous possédons toutes les données concernant la rotation de Mars. La durée de sa rotation a pu être déterminée avec toute précision désirable; elle est égale à

$$\tau = 24^h 37^m 23^s .$$

L'inclinaison de son axe de rotation est égale à ⁸⁷⁾

$$\varepsilon = 25^{\circ} 13' .$$

Le grand demi-axe de l'orbite martienne, mesuré en unités astronomiques, est égal à

$$a = 1.5237 ,$$

tandis que l'excentricité de cette orbite est

$$e = 0.0933 .$$

L'inclinaison de l'axe et la durée de rotation de Mars s'approchent singulièrement de celles de la Terre. Nous pouvons profiter de cet état de choses pour déterminer, d'une façon simple, les quantités de radiation W_e , W_h et W_T envoyées à différentes latitudes de Mars au cours de la saison chaude, au cours de la saison froide, et au cours de l'année martienne entière. En effet, il suffit pour cela de partir des valeurs correspondantes concernant la Terre, contenues dans le tableau V et ajouter à ces valeurs les produits des changements donnés par le tableau XVII et de la quantité $\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$, où ε désigne l'inclinaison de l'axe de rotation de Mars et ε_0 l'obliquité actuelle de l'écliptique. $\Delta \varepsilon$ doit être mesuré en degrés. Les résultats ainsi obtenus doivent être, d'après (86) à (90), multipliés par

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{1 - e_0^2}{1 - e^2}} ,$$

où e désigne l'excentricité de l'orbite martienne, e_0 l'excentricité de l'orbite terrestre et a le grand demi-axe de l'orbite martienne mesuré en unités astronomiques. De cette manière, on obtient les

Tableau XXVII

Quantités de radiation atteignant la limite supérieure de l'atmosphère martienne

φ	Saison chaude	Saison froide	Année entière
	W_c	W_h	W_T
0°	0.0656	0.0656	0.1312
5°	0.0680	0.0628	0.1308
10°	0.0699	0.0596	0.1295
15°	0.0712	0.0560	0.1272
20°	0.0721	0.0521	0.1242
25°	0.0725	0.0477	0.1202
30°	0.0724	0.0431	0.1155
35°	0.0719	0.0383	0.1102
40°	0.0709	0.0333	0.1042
45°	0.0695	0.0281	0.0976
50°	0.0678	0.0228	0.0906
55°	0.0657	0.0176	0.0833
60°	0.0635	0.0127	0.0762
65°	0.0614	0.0082	0.0696
70°	0.0603	0.0051	0.0654
75°	0.0595	0.0028	0.0623
80°	0.0590	0.0012	0.0602
85°	0.0587	0.0002	0.0589
90°	0.0587		0.0587

nombres contenus dans le tableau XXVII, dressé à l'aide des mêmes unités que le tableau V.

La longitude héliocentrique de Mars au moment de l'équinoxe vernal est actuellement⁹⁸⁾ de $84^{\circ}17'$, la longitude du périhélie de $333^{\circ}49'$, de sorte que l'anomalie héliocentrique de Mars au moment de l'équinoxe vernal est égale à $84^{\circ}17' - 333^{\circ}49'$. En ajoutant à cette valeur 360° , pour ne pas avoir d'angles négatifs, celle-ci peut être remplacée par $110^{\circ}28'$. Le même angle est parcouru par le Soleil sur son orbite apparente par rapport à la planète, pour parvenir de la proximité de la planète au point vernal. On a donc, d'après le N^o 2,

$$v_0 = 110^{\circ}28'.$$

La durée de révolution de Mars autour du Soleil, c'est-à-dire son année sidérale, est égale à

$$T = 686 \text{ jours terrestres } 23 \text{ heures.}$$

En employant les équations (109), on calcule les durées suivantes des deux saisons martiennes:

$$T_e = 381 \text{ jours terrestres } 17 \text{ heures}$$

$$T_h = 305 \text{ jours terrestres } 6 \text{ heures.}$$

La différence entre les durées des saisons est beaucoup plus grande sur Mars que sur la Terre; son hémisphère austral possède un hiver long et froid et un été court et chaud.

Il est probable que nous sommes mieux renseignés sur la valeur numérique du pouvoir réfléchissant de Mars et de son atmosphère que sur celle concernant la Terre.

Le pouvoir réflecteur de Mars pour la lumière peut être mesuré et il est égal à 0.22. Cette valeur représente l'effet des réflexions de la lumière à la surface et dans l'atmosphère de Mars. La part de la surface devrait être égale à celle de la surface terrestre, de sorte que de la lumière incidente de la fraction de 0.13⁹⁹⁾ est réfléchi par la surface de Mars et le reste de 0.09 par l'atmosphère de cette planète. Vu la faible valeur de ces nombres, il était permis, comme dans (201), de poser la réflexion totale égale à la somme de ces deux nombres.

On peut également poser que le pouvoir réfléchissant A de Mars pour la totalité des radiations, visibles et obscures, qui est encore plus faible que le précédent, est égal à la somme des réflexions R_1 et R_2 produites à la surface et dans l'atmosphère. On a donc

$$A = R_1 + R_2.$$

Le pouvoir réfléchissant R_1 doit être assez peu différent de celui de la surface terrestre, pour qu'on puisse poser, d'après la note¹⁰²⁾,

$$R_1 = 0.08.$$

Le pouvoir réfléchissant R_2 de l'atmosphère martienne pour la radiation solaire complète serait égal à la moitié environ du pouvoir réfléchissant pour la radiation visible.¹⁰⁰⁾ On peut donc poser

$$R_2 = 0.04,$$

de sorte qu'on obtient

$$A = 0.12.$$

Le pouvoir absorbant de l'atmosphère martienne pour la radiation solaire qui y pénètre est, en tout cas, très petit. Pour l'atmosphère terrestre, la valeur numérique du coefficient de transmission p_a , donnée au N^o 42, est relativement petite à cause du fort pouvoir

réfléchissant A . Mais, pour une atmosphère claire et sèche, ce coefficient ne peut pas dépasser la valeur de 0.90. Pour l'atmosphère de Mars, on a, en tout cas,

$$0.90 < p_a < 1,$$

et même, on ne commet pas une erreur considérable en posant

$$p_a = 1.$$

Si nous connaissions encore la valeur numérique du coefficient de transmission p_a' pour la radiation obscure, nous serions dans la possibilité, d'après (460) et (461), c'est-à-dire à l'aide des équations

$$\sigma \Theta^4 (0) = \frac{1 - \log_{\text{nép}} p_a'}{2} (1 - A) W_m$$

$$a_p \sigma \Theta_p^4 = \frac{2 - \log_{\text{nép}} p_a'}{2} (1 - A) W_m,$$

de calculer les températures annuelles de la couche la plus inférieure de l'atmosphère et celles de la surface de Mars.

Ce calcul serait d'une précision satisfaisante, car ainsi que nous l'avons mentionné, cette planète possède un climat à caractère solaire très prononcé et réalise, dans une grande mesure, presque toutes les suppositions de notre théorie.

La valeur numérique du coefficient de transmission p_a' dépend, ainsi qu'il a été plusieurs fois rappelé, de la teneur de l'atmosphère planétaire en gaz à fort pouvoir absorbant. Nous avons vu que dans l'atmosphère terrestre la vapeur d'eau et l'acide carbonique sont de tels gaz.

Selon toute probabilité, la vapeur d'eau se trouve également dans l'atmosphère martienne. Les calottes polaires de Mars, d'un blanc clair, dont l'extension change avec les saisons et qui sont, probablement, formées de neige ou d'une couche épaisse de givre, parlent en faveur d'une telle supposition. De même, les régions sombres de la surface de Mars, que l'on désigne comme mers et lacs, et qui changent parfois leurs contours, paraissent également être constituées par de l'eau. Cependant, une preuve décisive nous manque encore.

Il n'y a que l'analyse spectrale qui peut nous donner une réponse définitive au sujet de l'existence et au sujet de la quantité de la vapeur d'eau dans l'atmosphère de Mars. En effet, à l'aide de cette méthode, on a cru avoir constaté et mesuré la vapeur d'eau

présente dans l'atmosphère martienne, mais ces résultats ne sont pas restés sans contradiction, de sorte qu'ils peuvent servir seulement comme une preuve qualitative sur la présence de l'eau dans l'atmosphère de Mars.

Ainsi, nous n'aurions aucun appui pour déterminer la valeur numérique du coefficient p_a' si un phénomène intéressant, observé dans des conditions irréprochables à la surface martienne, n'était venu à notre secours. On a observé que la calotte polaire boréale ne disparaissait jamais complètement, ce qui paraît avoir lieu, par contre, certains étés, pour la calotte australe. En tout cas, il est hors de doute que la calotte australe se réduit en été à un reste insignifiant.

La cause de ce phénomène a été facilement trouvée. Nous avons montré que l'anomalie ν_0 du point vernal pour la planète Mars est égale à $110^{\circ}28'$, ce qui signifie que cette planète se trouve pendant l'été de l'hémisphère boréal en aphélie, tandis qu'elle est en périhélie pendant l'été austral. C'est pourquoi la calotte polaire australe fond parfois complètement sous les rayons ardents du Soleil, approché à son maximum. Le fait que cette fonte complète n'a pas lieu tous les ans martiens signifie que la couche atmosphérique couvrant le pôle austral ne s'échauffe que peu au-dessus du point de fusion. Il en découle que nous connaissons approximativement la température estivale de la couche atmosphérique au contact du pôle austral. L'insolation de ce pôle en plein été est à peu près constante. L'angle d'incidence des rayons solaires, c'est-à-dire la distance zénithale, ne change que lentement à cause de la longue durée de l'année martienne et nous pouvons déterminer les températures du sol et de la couche atmosphérique adjacente en substituant; dans les équations précédentes, W_m par les insolutions solsticiales.

La quantité de radiation envoyée au pôle austral de Mars, à l'époque du solstice d'été, par unité de temps, est égale, d'après (38) et (164), à

$$W_m = \frac{I_0}{a^2} (1 + 2e \sin II) \sin \varepsilon.$$

A l'aide de valeurs numériques précédentes, en utilisant la valeur numérique de la constante solaire, donnée au N^o 42, et en tenant compte de l'équation (114), on obtient

$$W_m = 0.4312 \frac{\text{gramme-calories}}{\text{cm}^2 \times \text{minute}}.$$

Afin que cette insolation maintienne la couche la plus inférieure de l'atmosphère à la température de fusion de glace, c'est-à-dire pour que $\Theta(0) = 273$, il faut que, d'après l'équation précédente et en tenant compte de (205), le coefficient de transmission p_a' soit égal à

$$p_a = 0.30.$$

En réalité, déjà un pouvoir absorbant moindre, c'est-à-dire un coefficient de transmission plus grand, fera atteindre le même but pour les raisons suivantes.

En employant les valeurs précédentes de p_a' et W_m , on obtient pour Θ_p la valeur de 305, c'est-à-dire une température du sol de $+32$ degrés. Il est vrai que dans cette détermination de la température du sol, il n'a pas été tenu compte de la conductibilité de celui-ci et de la chaleur employée à la fonte et à l'évaporation des précipitations aqueuses. Ces influences tendent, comme nous l'avons montré aux Nos 23 et 47, à abaisser la température du sol et à diminuer la différence entre la température du sol et celle de l'atmosphère. Malgré cela, on doit s'attendre, à cause de la faible quantité de précipitations à la surface de Mars, à un écart assez remarquable entre les deux températures, ce qui provoquera de forts courants aériens verticaux et, par cela même, une élévation de la température des couches atmosphériques, couvrant le sol, au-dessus de la valeur admise de 0° . C'est pourquoi un plus faible pouvoir absorbant de l'atmosphère martienne, qui serait, du reste, mieux d'accord avec les observations spectroscopiques, pourrait également expliquer la disparition de la calotte polaire australe. Mais comme nous n'avons pas de données précises concernant la correction de la valeur précédente de p_a' , nous la laissons telle quelle.

Employons maintenant cette valeur pour calculer les températures annuelles de la surface planétaire à différentes latitudes. Nous devons, dans ce but, d'après le procédé du N^o 48, dans la formule précédente donnant Θ_p , remplacer W_m par les quantités de radiations contenues dans le tableau XXVII, après les avoir eu multipliées par la constante solaire. De cette manière, nous obtenons les valeurs contenues dans le tableau XXVIII, exprimant la température en degrés centigrades. Ces valeurs sont, selon toute probabilité, supérieures aux températures réelles, car, en réalité, p_a' doit avoir une

Tableau XXVIII

Limite supérieure des températures annuelles de la surface de Mars
(graduation centigrade)

Lati- tude	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Tempé- rature	— 3°	— 4°	— 7°	— 12°	— 18°	— 27°	— 38°	— 46°	— 51°	— 52°

valeur numérique supérieure à celle que nous avons admise. Pour cette raison, nous pouvons considérer les températures calculées comme étant la limite supérieure des températures annuelles de la surface de Mars.

On déduit de ces températures la valeur de la température moyenne de toute la surface. Elle serait de

$$u_m = - 17^{\circ}.$$

En réalité, cette température doit être quelque peu plus basse.

Ces températures semblent, à première vue, en contradiction avec le fait que les mers martiennes ne sont pas toujours gelées. Cette contradiction peut être facilement levée en admettant avec Arrhenius que ces mers sont dans une phase d'assèchement intense, de sorte qu'elles représentent des marées salantes. Or, une solution concentrée de chlorure de sodium se congèle à $- 22^{\circ}$.

Nous pourrions, à l'aide de l'équation précédente pour $\Theta(t)$, calculer également les températures annuelles de la couche la plus inférieure de l'atmosphère martienne à différentes latitudes. Cependant, nous obtiendrons, de même que dans le calcul de la température solsticiale, un écart de presque 30° entre la température de la surface planétaire et celle de la couche atmosphérique adjacente. Ce fait provoquerait des forts courants aériens verticaux et, par cela, une élévation de cette dernière température. Cette température doit se trouver, donc, entre la température calculée pour l'atmosphère et celle de la surface; elle doit être, par conséquent, inférieure à la température calculée ci-dessus.

La marche diurne de la température à la surface de Mars doit être notablement différente de celle de la température terrestre. L'absence de nuages et de fortes précipitations aqueuses, de même que le grand pouvoir de transmission de l'atmosphère, doivent donner à cette marche une allure très régulière à caractère excessif.

Nous avons mentionné dans la note ⁴²) que, d'après les recherches d'Abbot et Fowle, il n'y a que 50 pour cent de la radiation solaire directe qui atteint par un ciel complètement pur la surface de la Terre. Ce nombre se rapporte à tout l'hémisphère éclairé. A ce chiffre correspond, d'après ce qui a été exposé au N^o 16 et d'après le tableau I, un coefficient de transmission $p = 0.65$. L'atmosphère de Mars transmet beaucoup mieux la radiation solaire, vu sa transparence, son faible pouvoir réfléchissant et sa faible teneur en vapeur d'eau. Les observations que Campbell effectua en 1909 sur Mount Whitney montrèrent que l'atmosphère de Mars contient, en tout cas, notablement moins de vapeur d'eau que la colonne de l'atmosphère terrestre, surmontant la même surface de l'endroit d'observation. Nous avons dit au N^o 42 que le coefficient de transmission sur Mount Whitney, pour une faible humidité de l'air, à laquelle se rapportent les observations de Campbell, dépasse la valeur de 0.90. Pour cette raison, on peut poser pour l'atmosphère martienne au moins

$$p = 0.95.$$

Il en découle, en tenant compte de (133), que la radiation solaire directe atteignant, par un ciel pur et sous une distance zénithale z du Soleil, l'unité de la surface terrestre est dans le rapport suivant avec la radiation solaire directe atteignant la surface de Mars sous le même angle d'incidence:

$$I_0 \times 0.65^{\sec z} : \frac{I_0}{a^2} \times 0.95^{\sec z}.$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, la Terre et Mars dans leurs distances moyennes du Soleil.

Ces deux radiations auront la même valeur lorsque la distance zénithale z satisfera à l'équation

$$0.65^{\sec z} = \frac{1}{1.5237^2} 0.95^{\sec z},$$

c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\cos z = \frac{\log 0.95 - \log 0.65}{2 \log 1.5237}.$$

Il en découle

$$z = 63^{\circ} 13'.$$

Jusqu'à une altitude h du Soleil au-dessus de l'horizon

$$h = 26^{\circ} 47'$$

la radiation solaire directe est, donc, plus intense sur Mars que sur la Terre. L'insolation directe de l'équateur de Mars est, durant les deux premières et les deux dernières heures de la journée, plus intense que celle de l'équateur terrestre. En s'éloignant de l'équateur, ces deux intervalles de temps augmentent, de sorte que les deux pôles de Mars, auxquelles l'altitude du Soleil ne peut jamais atteindre la valeur précédente, sont exposés à une insolation directe toujours plus forte que celle tombant sur les pôles terrestres, sous le même angle d'incidence.

Aux premières heures de la journée, un réchauffement rapide du sol de Mars a lieu, provoquant de forts courants verticaux dans l'atmosphère et une brusque évaporation des précipitations aqueuses qui ont couvert le sol durant la nuit. Ces vapeurs forment au-dessus du sol une couche protectrice relativement mince, ayant pour effet que les journées presque toujours claires de Mars sont relativement chaudes. Cet état de choses réalise, dans une forte mesure, les suppositions qui sont la base des considérations théoriques exposées aux Nos 33 et 34.

Après le coucher du Soleil, le sol et l'atmosphère raréfiée se refroidissent vite, la vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère se précipite, de sorte que l'action protectrice de celle-ci cesse complètement. Ainsi, la planète rayonne sans obstacles sa chaleur dans l'espace et une nuit excessivement froide suit la journée chaude.

La marche annuelle de la température sur la planète Mars doit également avoir un caractère excessif, accusé au maximum aux deux pôles de Mars: A la journée longue et ensoleillée, qui dure 305 jours terrestres au pôle boréal, et 382 jours au pôle austral, fait suite une nuit longue, occupant le reste de l'année martienne. La vapeur d'eau ne pouvant pas subsister durant cette longue nuit au-dessus des régions polaires, celles-ci sont exposées à un froid des plus rigoureux.

Tels sont les traits caractéristiques du climat de Mars. Il sera, sans doute, possible de compléter cette esquisse par l'observation continue et l'application de la théorie. Cependant, on peut considérer comme acquis que les températures annuelles de Mars sont au moins de 30° plus basses que celles de la Terre et que son

climat est, au plus haut degré, excessif, avec des nuits très froides et des hivers extrêmement rigoureux.

Si les données précédentes ne suffisent pas, à la rigueur, pour pouvoir répondre négativement à la question beaucoup discutée de l'habitabilité de Mars, elles nous montrent, en tout cas, que les conditions d'existence y sont tellement différentes de celles qu'offre la Terre qu'elles excluent la possibilité d'un monde organisé, semblable à celui peuplant notre planète. Il n'y a que les régions polaires qui, à cause de leur long été sans nuit, présenterait des conditions plus favorables à ce point de vue.

66. — *La température à la surface de la Lune.*

La Lune ne possède pas d'atmosphère qui pourrait avoir une influence sur son état d'insolation. D'autre part, sa croûte complètement solide est certainement refroidie jusqu'à ce point pour que son intérieur ne puisse exercer aucune influence sur la température de la surface. Il est vrai que cette surface, quoique partout solide, n'est pas homogène et qu'elle accuse un pouvoir réfléchissant très variable avec le lieu, cependant, pour un endroit déterminé de la surface lunaire, dont on veut étudier l'état thermique, on peut considérer cette surface et le sol jusqu'à la profondeur à laquelle pénètrent les oscillations de température, comme étant homogènes. Ce corps céleste réalise donc, de la manière la plus parfaite, toutes les suppositions sur lesquelles reposent les considérations théoriques du troisième chapitre de la première partie de cet ouvrage. Par conséquent, si nous étions renseignés suffisamment sur les propriétés de conductibilité et d'émission de la partie superficielle de la croûte lunaire, nous pourrions déterminer avec une grande précision les phénomènes thermiques de sa surface.

On ne sait que très peu de chose sur la composition chimique des matériaux formant la croûte de la Lune et quoique des recherches spectroscopiques soient en cours, l'hypothèse occupe encore une large place dans cette question.

Pour acquérir une première orientation sur l'état thermique de la surface lunaire, nous sommes obligés de faire quelques hypo-

thèses plus ou moins gratuites, concernant la nature de cette surface. Nous allons donc admettre que la partie considérée de la surface lunaire est constituée de roches granitiques, de sorte que, d'après la note ⁵¹⁾, on peut prendre pour les deux coefficients de conductibilité m^2 et K et pour la capacité calorifique C_p , du sol les valeurs numériques suivantes, en chiffres ronds

$$m^2 = 1.00, \quad K = 0.50, \quad C_p = 0.50.$$

Ces valeurs sont mesurées en cm, grammes et minutes.

Nous admettons ensuite que l'émission de la surface lunaire obéit à la loi combinée de Kirchhoff-Stefan et que le pouvoir absorbant de l'endroit considéré pour la radiation solaire et pour la radiation obscure a la même valeur que pour la Terre, c'est-à-dire qu'on a

$$a_p = 0.92.$$

Les chiffres précédents déterminent, d'une façon précise, la marche de la température correspondant à n'importe quelle marche d'insolation.

Prenons en considération la moyenne marche diurne à l'équateur lunaire, c'est-à-dire celle d'un jour lunaire auquel le Soleil passe au zénith du point considéré de l'équateur. Dans notre calcul, de même qu'au N^o 4, nous ne tiendrons pas compte de la variation de la déclinaison δ du Soleil au cours de la journée, pas plus que de la variation du rayon vecteur ρ que nous poserons égal à la moyenne distance de la Terre au Soleil. Nous aurons donc $\varphi = 0$, $\delta = 0$, $\rho = 1$.

La durée τ de la journée lunaire découle de l'équation (9). Dans celle-ci on doit poser pour τ_s la durée de rotation de la Lune, c'est-à-dire 27.32 jours et pour T la durée de sa révolution autour du Soleil, c'est-à-dire 365.25 jours. Il en découle

$$\tau = 42.500 \text{ minutes.}$$

Par ces nombres la marche de l'insolation est exactement déterminée et l'on peut, à présent, procéder au calcul de la marche correspondante de la température. Dans cette opération on doit, à cause de la longue durée de la journée lunaire et de la forte oscillation de température qui en découle, employer le procédé, exposé à la fin du N^o 25.

Dans ce but, prenons comme base d'un premier calcul approximatif la loi linéaire de l'émission donnée par la formule

$$\frac{dQ_r}{dt} = h (v_0 + u),$$

laquelle doit satisfaire la loi de Stefan pour les températures $u = -103^\circ$ et $u = +82^\circ$. On obtient ainsi deux équations donnant les valeurs de h et v_0 . L'insolation moyenne a_0 est, d'après (298) et (304), égale à $\frac{I_0}{\pi}$, et on obtient, à l'aide de (250) avec $g_T = 0$, la valeur numérique de u_0 . Les coefficients $a_1, a_2, a_3 \dots$ sont donnés par (304), tandis que les équations (263) à (265) donnent la marche diurne de la température $u'(\omega)$ correspondant à la loi précédente de l'émission.

Employons maintenant la loi de Stefan et remplaçons les températures u' par les températures u données par l'équation

$$h (v_0 + u') = \sigma (273 + u)^4.$$

De cette manière on obtient une autre marche de la température $u(\omega)$ qui doit être développée en une série de Fourier. Ceci a lieu le plus simplement de la manière suivante.

On calcule une série de valeurs équidistantes

$$u_0, u_1, u_2 \dots u_m$$

de la marche $u(\omega)$ de la température, divisant l'intervalle $(0, 2\pi)$ en m parties égales à $h = \frac{2\pi}{m}$. Les coefficients de la série de Fourier

$$u(\omega) = a_0 + a_1 \cos \omega + a_2 \cos 2\omega + a_3 \cos 3\omega + \dots \\ + b_1 \sin \omega + b_2 \sin 2\omega + b_3 \sin 3\omega + \dots$$

sont alors, d'après (279) à (281), donnés par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega) d\omega \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega) \cos n\omega d\omega$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega) \sin n\omega d\omega.$$

En employant pour le calcul des intégrales précédentes la formule bien connue du trapèze

$$\int_0^{2\pi} f(\omega) d\omega = \frac{2\pi}{m} \left[\frac{y_0 + y_m}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{m-1} \right],$$

où $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m$ représentent les valeurs numériques de la fonction à intégrer pour $\omega = 0, \omega = h, \omega = 2h \dots \omega = 2\pi$, et tenant compte qu'on a $y_0 = y_m$, à cause de la périodicité des fonctions $u(\omega), \sin n\omega$ et $\cos n\omega$, on obtient

$$a_0 = \frac{1}{m} \left[u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{m-1} \right]$$

$$a_n = \frac{2}{m} \left[u_0 + u_1 \cos nh + u_2 \cos n2h + \dots + u_{m-1} \cos n(m-1)h \right]$$

$$b_n = \frac{2}{m} \left[u_1 \sin nh + u_2 \sin n2h + \dots + u_{m-1} \sin n(m-1)h \right].$$

A l'aide de ces coefficients, on calcule, en employant (282), une série de valeurs numériques du gradient de température $\frac{\partial u(\omega)}{\partial x}$ et ensuite, à l'aide de (283), une série de températures représentant avec plus d'exactitude la marche diurne. Cette marche peut être, à son tour, représentée par une série de Fourier et le procédé ci-dessus peut être répété.

De cette façon, les températures contenues dans le tableau XXIX sont calculées de quinze à quinze degrés de l'angle horaire, ou bien, ce qui revient au même, de la distance zénithale. Il faut noter que, parmi ces températures, celles concernant la nuit (pour $z > 90^\circ$) n'accusent pas la même exactitude que les autres, la marche nocturne de la température ne se prêtant pas bien à une représentation par les séries de Fourier.

Rosse,¹⁰¹⁾ Böddicker,²⁰²⁾ Langley,¹⁰³⁾ Véry¹⁰⁴⁾ et autres ont essayé de déterminer par l'observation les températures de la surface lunaire. Notamment les recherches du dernier des auteurs mentionnés ont attiré l'attention du monde scientifique. Cependant les calculs des températures lunaires effectués par cet auteur reposent sur une base tellement différente de la nôtre que nous ne pouvons pas les prendre comme terme de comparaison.¹⁰⁵⁾

Tableau XXIX

Distance zénithale	Température (graduation centigrade)	
	avant midi	après midi
0°	+ 97·0°	+ 97·0°
15°	+ 88·5°	+ 100·5°
30°	+ 71·0°	+ 96·7°
45°	+ 45·5°	+ 85·5°
60°	+ 5·5°	+ 69·5°
75°	− 32·0°	+ 44·5°
90°	− 53·8°	+ 8·8°
105°	− 51·0°	− 7·0°
120°	− 47·7°	− 14·7°
135°	− 44·5°	− 20·0°
150°	− 40·5°	− 24·4°
165°	− 36·5°	− 29·0°
180°	− 33·0°	− 33·0°

De toutes ces observations il paraît ressortir que les parties obscures de la Lune accusent des températures extrêmement basses, inférieures à celles que nous avons calculé. Il en ressort que la croûte lunaire ne possède pas la conductibilité des roches granitiques comme nous l'avons admis. Le mécanisme du phénomène reste, toutefois, le même.

Les chiffres contenus dans le tableau XXIX donnent comme température moyenne de l'équateur lunaire la valeur de $+ 12^{\circ}$.

La durée de rotation de la Lune était jadis moindre. D'après les recherches de G. H. Darwin mentionnées sous ⁶⁷⁾, celle-ci n'était, dans les premiers temps de l'existence de la Lune, que de quelques heures. Si l'on veut calculer la température moyenne qui a régné à cette époque, après la solidification et le refroidissement de la croûte lunaire, dans la zone équatoriale, on peut admettre, ainsi qu'il a été démontré au N^o 31, que tous les points de l'équateur lunaire étaient exposés à une insolation permanente fournissant à l'unité de surface la moyenne insolation diurne. Nous avons trouvé

que cette insolation était égale à $\frac{I_0}{\pi}$, de sorte qu'on obtient, en em-

ployant (210), une moyenne température de l'équateur de $+ 29·5^{\circ}$. Par conséquent, la moyenne température de la surface lunaire s'est très abaissée depuis ces temps là, à cause de l'augmentation de la durée de rotation.

Un sort semblable est réservé à notre planète. D'après la théorie de G. H. Darwin, la durée de rotation de la Terre augmente, à cause du frottement des marées, et lorsque celles-ci auront atteint leur but, la durée de rotation sera de 55 jours. Pour cette raison, les températures moyennes à la surface terrestre décroissent, tandis que les oscillations diurnes augmentent.

Les conditions de la vie sur la Terre deviennent lentement de moins en moins favorables; la lente diminution de la puissance de la radiation solaire et la raréfaction croissante de l'atmosphère terrestre y contribuent de leur côté. D'autre part, pour les mêmes raisons, ces conditions d'existence s'améliorent sur la planète Vénus. La vie s'achemine sur la Terre vers son extinction, pour renaître avec une nouvelle ardeur sur une autre planète.

Données bibliographiques, remarques et notes.

- ¹⁾ (p. 4) Ce sujet a été également traité par les auteurs suivants:
Halley, A discourse concerning the proportional heat of the sun in all latitude. Philosoph. Transactions. Vol. XVII. (1693).
Lambert, Pyrometrie oder vom Maasse des Feuers und der Wärme. Berlin 1779.
Poisson, Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1835.
Meech, On the relative intensity of the heat and light of the sun etc. Smithsonian contributions to knowledge. Vol. IX. Washington 1856.
Wiener, Ueber die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in den verschiedenen Breiten und Jahreszeiten. Zeitschr. für Mathematik und Physik. Bd. XXII. (1877).
Ferrel, Temperature of the atmosphere and earth's surface. Professional papers of the Signal Service. No XIII. Washington 1884.
Hargreaves, Distribution of solar radiation of the surface of the earth and its dependence on astronomical elements. Transactions of the Cambridge Philosoph. Society. Vol. XVI. (1896).
Doležal, Ueber die graphische Bestimmung der Intensität und Quantität der solaren Bestrahlung. Wiener Sitzungsberichte. Bd. CXVII. Abt. II a. (1908).
Deux mémoires de **Hopfner** traitant le même sujet sont entachés d'erreurs, ainsi que nous le verrons plus loin.
- ²⁾ (p. 5) **Emden**, Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme. Leipzig 1907. (p. 440).
- ³⁾ (p. 5) Si l'intensité de la radiation solaire était une fonction de la direction du rayonnement, elle devrait accuser une période de 27 jours environ, ce chiffre étant la durée de rotation des régions équatoriales de la surface solaire par rapport à la Terre. Les aurores boréales semblent accuser une telle période (**Arrhenius**, Das Werden der Welten. Leipzig 1913) tandis qu'elle n'a pas été observée pour l'intensité du rayonnement solaire et, en tout cas, ces oscillations ne doivent pas être notables pour pouvoir avoir une influence sur le climat terrestre.
- ⁴⁾ (p. 6) Voir, par exemple, **Kobold**, Der Bau des Fixsternsystems. Braunschweig 1906. p. 28.
- ⁵⁾ (p. 10) On trouvera plus de détails sur ce sujet dans chaque traité d'Astronomie sphérique ou d'Astronomie pratique. Je me suis servi dans la rédaction de ce N^o des ouvrages suivants: **Herr**, Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Wien 1887. — **Souchon**, Traité d'Astronomie pratique. Paris 1883.
- ⁶⁾ (p. 13) Voir, par exemple, le dernier des ouvrages précédents, pages 151 et 153.
- ⁷⁾ (p. 26) Dans les deux mémoires :
Hopfner, Die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erde. Wiener Sitzungsberichte. Bd. CXIV. Abt. II a. (1905)

Hopfner, Untersuchung über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne. Ibid. Bd. CXVI. Abt. II a. (1907)

il n'est pas tenu compte de la discontinuité de l'insolation terrestre, aussi les résultats de ces deux mémoires, malheureusement souvent employés, sont-ils inexacts. J'ai traité avec quelques détails cette question dans un mémoire intitulé „Sur la distribution de la radiation solaire à la surface de la Terre“ (en serbe). Bulletin de l'Académie royale de Serbie. Tome XCI. (1913). — **Herz** a également attiré l'attention sur quelques erreurs fondamentales commises par **Hopfner**. Voir **Herz**, Die Eiszeiten und ihre Ursachen. Leipzig und Wien 1909, p. 227.

- ⁸⁾ (p. 36) Voir également sur le même sujet: **Le Goarant de Tromelin**, Sur la répartition calorifique de la chaleur du Soleil à la surface des hémisphères nord et sud du globe terrestre. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Tome CXV (1892).
- ⁹⁾ (p. 48) **Stockwell**, Memoir on the secular variations of the elements of the eight principal planets. Smithsonian contributions to knowledge. Vol. XVIII. Washington 1873.

Les résultats de cet important travail sont également reproduits dans **Charlier**, Die Mechanik des Himmels. Bd. I. Leipzig 1902, page 385 et suivantes.

Les valeurs numériques des masses des planètes employées par **Stockwell** dans la construction de ses équations ne concordent plus avec celles actuellement admises. Toutefois, cet auteur a fourni, dans son travail, des données numériques permettant d'en faire la correction. **Farland** (American Journal of Sciences, 1880) a effectué de telles corrections, mais celles-ci ne doivent pas [être] considérées comme définitives d'autant moins que déjà de faibles variations des valeurs admises pour les masses entraînent des changements considérables des éléments astronomiques. Les formules de **Stockwell** ne peuvent, en tout cas, être appliquées à des intervalles de temps très grands et il serait nécessaire d'en refaire le calcul en tenant compte des progrès de la théorie de relativité.

- ¹⁰⁾ (p. 55) La réfraction des rayons solaires dans l'atmosphère terrestre disparaît complètement pour l'incidence zénithale; pour les distances zénithales de 30° , 60° et 90° les valeurs moyennes de la réfraction sont de $33''$, $1' 40''$ et de $34' 54''$, c'est-à-dire que la distance zénithale réelle du Soleil est en apparence augmentée de ces angles.
- ¹¹⁾ (p. 56) Sur l'admissibilité de cette supposition voir pour plus de détails **Zenker**, Die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche. Berlin 1888.
- ¹²⁾ (p. 57) **Bouguer**, Traité d'optique sur la gradation de la lumière. Ouvrage posthume, publié par l'abbé de Lacaille. Paris 1760.

Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augustae Vindelicorum 1760. (Edition allemande de **Anding**. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 31—33. Leipzig 1892).

- ¹³⁾ (p. 60) Si nous avons tenu compte de la réfraction des rayons solaires, nous serions arrivés à un résultat quelque peu différent. D'après la remarque ¹⁰⁾, les rayons solaires directs atteignent la surface de la planète également aux

endroits pour lesquels le Soleil se trouve au-dessous de l'horizon. Pour la Terre cela a lieu autant que la distance zénithale du Soleil n'atteigne pas la valeur de $90^{\circ} 34' 54''$, ce qui a pour conséquence que le terminateur se déplacera de l'angle $34' 54''$ vers l'hémisphère obscur, de sorte qu'il y aura, en réalité, 50,5 pour cent de la surface terrestre d'éclairé.

- ¹⁴⁾ (p. 65) J'ai pris cette supposition pour base de mes deux mémoires: *Zur Theorie der Strahlenabsorption in der Atmosphäre. Annalen der Physik. Bd. 43. (1914).* — *Ueber die Verringerung der Wärmeabgabe durch die Marsatmosphäre. Ibid. Bd. 44. (1914).*
- ¹⁵⁾ (p. 66) **Emden** dénomme cette valeur par „Energie-Albedo“. Cette dénomination provient de ce que „Albedo“ signifie le pouvoir réflecteur de la planète pour la lumière.
- ¹⁶⁾ (p. 78) **Hann**, *Lehrbuch der Meteorologie. Dritte Aufl. Leipzig, 1915, p. 230.*
- ¹⁷⁾ (p. 79) Voir à ce sujet l'article VI, 2, 6 de la *Encyklopädie der math. Wissensch. Leipzig.*
- ¹⁸⁾ (p. 80) **Laplace**, *Mécanique céleste. Tome IV.*
- ¹⁹⁾ (p. 83) D'après les recherches de **Kurlbaum**, on a $\sigma = 0.768 \times 10^{-10}$, d'après celles de **Bauer** et **Moulin** $\sigma = 0.763 \times 10^{-10}$ en unités déjà mentionnées; **Emden** a démontré qu'on doit corriger la valeur de **Kurlbaum** en prenant $\sigma = 0.759 \times 10^{-10}$. Voir à ce sujet: **Kurlbaum**, *Ueber eine Methode zur Bestimmung der Strahlung in absolutem Masse. Annalen der Physik. Bd. 65. (1898).* — **Bauer** et **Moulin**, *La constante de la loi de Stefan. Journal de Physique. 4. Sér. Vol. IX. (1910)* et le mémoire d'**Emden** mentionné sous ¹³⁾.
- ²⁰⁾ (p. 84) **Ferrel**—*Bull. philos. Soc. Washington 5.* — **Paschen**—*Annalen der Physik. Bd. 49. (1893), page 50; Bd. 58. (1896), page 455; Bd. 60. (1897), page 662.* — **Siegl**, *Ueber das Emissionsvermögen von Gesteinen, Wasser und Eis. Wiener Sitzungsberichte. Bd. CXVI. Abt. II a. (1907).*
- ²¹⁾ (p. 84) Des recherches ci-devant mentionnés de **Siegl**, il serait à peine possible de déterminer, ne serait-ce qu'approximativement, le pouvoir émissif d'une catégorie donnée du sol, car, dans ces recherches, les surfaces, étant polies, ne correspondaient pas à la constitution réelle du sol. Celui-ci est, en effet, en majeure partie couvert de végétation et, dans ce cas, la surface rayonnante est beaucoup plus grande que sa base horizontale. De plus, **Siegl** a négligé de déterminer le pouvoir absorbant des roches qu'il a étudiées.
- ²²⁾ (p. 85) L'équation (210) a été utilisée, dans ce sens, pour la première fois par **Christiansen** (*Danske Vidensk. Selsk. Forh. 1886. — Beiblätter der Annalen der Physik und Chemie. Bd. 10. 1886.*) — Voir également **Poynting**, *Die Strahlung im Sonnensystem. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Bd. II. (1905).*
- ²³⁾ (p. 89) Pour plus de détails sur les conditions spéciales aux surfaces limites, sur l'unité de solution et sur l'ensemble du problème de la propagation de la chaleur voir: **Weber**, *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. Zweiter Bd. Braunschweig 1912.* — **Boussinesq**, *Théorie analytique de la chaleur. Tome I. Paris 1901.*
- ²⁴⁾ (p. 98) **Fourier**, *Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822.*

- ²⁵⁾ (p. 109) D'après les recherches de **Tyndall**, la surface de l'eau parfaitement calme réfléchit les fractions suivantes de la radiation solaire, correspondant à divers angles d'incidence.

Incidence	0°	40°	60°	80°	89°30'
Réflexion	0.018	0.022	0.065	0.333	0.721

Zenker, dans son ouvrage mentionné sous ¹¹⁾, a tenu compte des ondulations de la surface des mers, et en utilisant la théorie de **Fresnel**, il a obtenu les réflexions suivantes.

Incidence	5°	15°	25°	35°	45°	55°	65°	75°	85°
Réflexion	0.0210	0.0206	0.0205	0.0226	0.0281	0.0435	0.0870	0.2021	0.5835

- ²⁶⁾ (p. 109) D'après l'ouvrage de **Hann** mentionné sous ¹⁶⁾, la radiation solaire pénètre dans la mer jusqu'à 15—20 m de profondeur; les effets se font sentir jusqu'à 300 m.
- ²⁷⁾ (p. 111) Cette dépendance a été déterminée expérimentalement à plusieurs reprises et représentée par des formules empiriques. D'après une de ces formules, dressée par **Clausius**, on a en unités employées $r = 607 - 0.708 u$.
- ²⁸⁾ (p. 111) En l'absence d'atmosphère, c'est-à-dire pour $p = 0$, on obtiendrait une vitesse d'évaporation infiniment grande, aussi sommes-nous obligés, dans le calcul de la valeur $\frac{dQ_d}{dt}$, de supposer l'atmosphère présente.
- ²⁹⁾ (p. 111) Pour plus de détails voir l'ouvrage de **Hann** mentionné sous ¹⁶⁾, p. 214 et suivantes.
- ³⁰⁾ (p. 111) Les déterminations les plus récentes de la pression de saturation de la vapeur d'eau doivent être celles de **Scheel** et **Heuse** (*Annalen der Physik*. Bd. 31, 1910). On trouvera ses résultats également dans l'ouvrage **Wegener**, *Thermodynamik der Atmosphäre*. Leipzig 1911. p. 77. D'après **Magnus** (*Pogg. Annalen* Bd. 41. p. 247), ces pressions (en millimètres de mercure) peuvent être représentées par la formule $P_w = 4.53 \times 10^{\frac{7.45u}{235+u}}$ comme fonction de la température u .
- ³¹⁾ (p. 127) Sur ce cas spécial voir également:

Pointing, On prof. Lowell's method for evaluating the surface-temperatures of the planets; with an attempt to represent the effect of day and night on the temperature of the Earth. *Philosoph. Magazine* 1907.

Lowell, A general method for evaluating the surface-temperatures of the planets; with special reference to the temperature of Mars. *Philosoph. Magazine*, 1907.

Lowell, Temperature of Mars. A determination of the solar heat received. *Proceedings of the American Acad. of Arts and Sciences*. Boston. Vol. 42. (1907).

Very, The greenhouse theory and planetary temperatures. *Philosoph. Magazine* 1908.

- ³²⁾ (p. 129) **Tyndall**, On luminous and obscure radiation. *Philosoph. Magazine* 1864. — Voir également: **Tyndall**, Contribution to molecular physics. London 1872. — **Tyndall**, Sur la radiation; traduit par Moigno. Paris 1884.

- ³³⁾ (p. 134) Les premières solutions de ce problème nous ont été données par **Schwarzschild et Emden**. — **Schwarzschild**, Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse 1906. — **Emden**, Ueber das Strahlungsgleichgewicht und die atmosphärische Strahlung. Ein Beitrag zur Theorie der oberen Inversion. Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. B. Akademie der Wissenschaften zu München. 1913. — Le mémoire d'**Emden** parut quelque peu avant les miens cités sous ¹⁴⁾.
- ³⁴⁾ (p. 144) Publié pour la première fois dans mon mémoire: Recherches sur le climat de la planète Mars (en serbo-croate). Travaux de l'Académie yougoslave des Sciences et des Arts de Zagreb. Tome 213. (1916). — Un résumé complet de ce mémoire parut en allemand dans le „Bulletin des travaux“ de la dite Académie. Tome 6. et 7. (1916—1917).
- ³⁵⁾ (p. 155) Voir également le mémoire de **Schwarzschild** cité sous ³³⁾.
- ³⁶⁾ (p. 162) L'idée fondamentale de ce rapport a été exprimée déjà par **Carnot**, Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance. Paris 1824. Cette équation fut introduite en Météorologie par: **Thomson W.**, On the convective equilibrium of temperature in the atmosphere. Mem. Lit. and Phil. Soc. of Manchester. 1865. — **Peslin**, Sur les mouvements généraux de l'atmosphère. Bull. hebdomadaire de l'Assoc. Scientifique de France. Tome III. (1868). — **Reye**, Die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erdatmosphäre. Hannover 1872. — **Hann**, Die Gesetze der Temperaturänderungen in aufsteigenden Luftströmen. Zeitschr. für Meteorologie 1874.
- ³⁷⁾ (p. 163) Dans l'ouvrage fondamental de **Hann**, cité sous ¹⁶⁾, la théorie de la distribution verticale de la température dans l'atmosphère est uniquement fondée sur celle des changements adiabatiques de l'air.
- ³⁸⁾ (p. 163) Dans une série de mémoires remarquables de **Ritter A.** parus de 1878 à 1890 dans les *Annalen der Physik*. Voir aussi **Ritter A.**, Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. Leipzig 1882.
- ³⁹⁾ (p. 164) Se sont occupés de cette question les écrits cités sous ³⁶⁾ et spécialement **Hertz**, Graphische Methode zur Bestimmung der Zustandsänderungen feuchter Luft. Deutsche Meteor. Zeitschrift. Bd. I. (1884) (Réimprimé dans **Hertz**, Gesammelte Werke. Bd. I. Leipzig 1895). — **Neuhoff**, Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft. Abhandlungen des kgl. Preussischen Meteorologischen Instituts. Bd. I. (1900).
- ⁴⁰⁾ (p. 172) Les résultats de ce travail merveilleusement organisé sont consignés dans les deux volumes: *Annales of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution*. Vol. II. By **C. G. Abbot** and **F. E. Fowle**, Washington 1908; Vol. III. By **C. G. Abbot**, **F. E. Fowle** and **L. B. Aldrich**, Washington 1913.
- ⁴¹⁾ (p. 172) Voir: Some pyrheliometric observations on Mt Whytney. *Astrophysical Journal*. Vol. 39. (1914).
- ⁴²⁾ (p. 173) Dans le volume II des *Annales* cités sous ⁴⁰⁾ **Abbot** et **Fowle** réunissent un bilan de radiation que nous allons résumer ainsi qu'il suit.

D'après Arrhenius, la nébulosité moyenne du ciel se monte à 52 pour cent dont 21 pour cent appartiennent aux nuages inférieurs (au-dessous du niveau du Mt Wilson 1800 m) et 31 aux nuages plus élevés. Prenons donc un intervalle de temps convenablement choisi, disons une année, nous pouvons alors admettre que pour 48 pour cent de cet intervalle le ciel est sans nuages, pour 21 pour cent il est couvert de nuages bas, et pour 31 pour cent de nuages élevés. Durant l'intervalle sans nuages, 21.5 pour cent de la radiation solaire sont absorbés par l'atmosphère (dont 12 pour cent en sélection), 9.5 pour cent sont réfléchis dans l'espace interplanétaire, si bien que 69 pour cent atteignent la surface terrestre sous forme de radiation solaire directe (50 p. c) et sous forme de radiation solaire diffuse (19 p. c.). Cela fait $0.48 \times 69 = 33$ pour cent de la radiation solaire annuelle. Comme le pouvoir réfléchissant de la surface terrestre peut être évalué à 0.08 (0.06 pour les superficies aqueuses, 0.15 pour les superficies désertiques et enneigées), il en résulte que, de ces 33 pour cent, 2.6 sont réfléchis par la surface terrestre dont 2.3 seulement atteignent l'espace interplanétaire par suite d'affaiblissement à travers l'atmosphère terrestre. Pendant l'intervalle de temps occupé par les nuages bas, 85 pour cent de la radiation solaire les atteignent, c'est-à-dire $0.21 \times 85 = 17.9$ pour cent de la radiation annuelle. De cela (puisque le pouvoir réfléchissant des nuages peut être évalué à 0.65) $0.65 \times 17.9 = 11.6$ pour cent sont réfléchis dont 11 seulement atteignent l'espace interplanétaire. Pendant l'intervalle de temps occupé par les nuages élevés, 90 pour cent de la radiation solaire parviennent jusqu'à ces nuages, c'est-à-dire $0.31 \times 90 = 28$ pour cent de la radiation annuelle. De ces 28 pour cent $0.65 \times 28 = 18.2$ sont réfléchis et 17.7 atteignent l'espace interplanétaire. Par réflexion diffuse pendant l'intervalle de temps dépourvu de nuages, 9.5 pour cent de la radiation incidente, c'est-à-dire $0.48 \times 9.5 = 4.5$ pour cent de la radiation annuelle, atteignent l'espace interplanétaire. Par cette même réflexion pendant l'intervalle de temps des nuages bas, 4 pour cent de la radiation incidente sont réfléchis vers l'espace interplanétaire, c'est-à-dire $0.21 \times 4 = 0.8$ pour cent de la radiation annuelle. Pendant l'intervalle de temps occupé par les nuages élevés, 3 pour cent de la radiation incidente, c'est-à dire $0.31 \times 3 = 0.9$ pour cent de la radiation annuelle subissent le même sort. Il résulte de ce qui précède que, par suite de la radiation diffuse, 6 pour cent de la radiation annuelle son renvoyés vers l'espace interplanétaire. En résumé, nous recevons les réflexions suivantes vers l'espace interplanétaire: de la surface terrestre 2.3 pour cent, des nuages inférieurs 11 pour cent, des nuages supérieurs 17.7 pour cent et par l'atmosphère 6 pour cent. Cela fait en tout 37 pour cent.

⁴³⁾ (p. 173) Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik. Leipzig 1911. page 490. Il en résulte que le bilan de radiation de la Terre s'établit ainsi qu'il suit: A la limite de l'atmosphère arrivent 720 gramme-calories par jour et par cm^2 . De ces 720 calories environ 160 sont réfléchies par les nuages, environ 130 par la réflexion diffuse vers l'espace planétaire et environ 140 sont absorbées par l'atmosphère. Il reste donc environ 290 gramme-calories dont 160 atteignent la surface terrestre sous forme de radiation solaire directe et 130 sous forme de radiation diffuse.

- ⁴⁴⁾ (p. 173) En utilisant les chiffres communiqués sous ⁴²⁾, on obtient les résultats suivants : Pendant l'intervalle de temps dépourvu de nuages, 21.5 pour cent sont absorbés, c'est-à-dire $0.48 \times 21.5 = 10$ pour cent de la radiation annuelle. Pendant l'intervalle occupé par des nuages bas, il parvient à ces nuages 85 pour cent de la radiation solaire ; 15 pour cent sont en partie dispersés, en parties absorbés. Puisque la radiation absorbée et la radiation dispersée se trouvent dans le rapport 1 : 2 (voir l'ouvrage cité sous ⁴³⁾ page 446), 5 pour cent sont absorbés, c'est-à-dire $0.21 \times 5 = 1$ pour cent de la radiation annuelle. Des 85 pour cent parvenus jusqu'aux nuages, $0.35 \times 85 = 30$ pour cent ne sont pas réfléchis, deux tiers, c'est-à-dire 20 pour cent restent dans les nuages, c'est-à-dire $0.21 \times 20 = 4$ pour cent de la radiation annuelle. Pendant l'intervalle occupé par les nuages élevés, 3 pour cent de la radiation incidente sont absorbés par les couches atmosphériques susjacentes, c'est-à-dire $0.31 \times 3 = 1$ pour cent de la radiation annuelle. Les nuages absorbent $0.35 \times 90 \times \frac{2}{3} = 21$ pour cent, c'est-à-dire $0.31 \times 21 = 6$ pour cent de la radiation annuelle. Le total des absorptions dans l'atmosphère fait 22 pour cent.
- ⁴⁵⁾ (p. 174) D'après **Ekholm**, Ueber Emission und Absorption der Wärme und deren Bedeutung für die Temperatur der Erdoberfläche. Meteorologische Zeitschr. 1902., la vapeur d'eau doit absorber 60.4, l'acide carbonique 17.6, et l'air sec 7.5 pour cent de la radiation terrestre. Remarquons que ces chiffres ne concordent pas avec les recherches de la **Smithsonian Institution** mentionnées sous ⁴⁰⁾.
- ⁴⁶⁾ (p. 175) D'après **Harkness**, The solar parallax and its related constants. Washington 1891, les valeurs de ρ et de ε pour l'époque 1850 sont égales respectivement à 0.016771049 et 23°27'31.47".
- ⁴⁷⁾ (p. 175) Ce tableau a été emprunté au mémoire de **Wiener** cité sous ¹⁾; il concerne l'intervalle de temps entre l'équinoxe du printemps de l'année 1874 et celui de l'année 1875. L'influence de la précession se fait sentir sur les décimaux des nombres correspondant aux longitudes du Soleil de 0° et 360°.
- ⁴⁸⁾ (p. 175) **Angot**, Recherches théoriques sur la distribution de la chaleur à la surface du globe. Annales du Bureau Central Météorol. de France. Mémoires de 1883. Paris 1885.
- Avant **Angot**, c'est notamment **Radau** qui a essayé d'étudier mathématiquement l'influence de l'atmosphère sur la radiation solaire : **Radau**, Actinométrie. Paris 1877. — **Radau**, La lumière et les climats. Paris 1877. — **Radau**, Les radiations chimiques du Soleil. Paris 1877.
- ⁴⁹⁾ (p. 191) **Trabert** s'est occupé de cette question (Die Bedeutung der Atmosphäre im Energiehaushalte unseres Erdballes. Nachrichten über Geophysik. Bd. I. — Das „solare“ Klima. Meteorologische Zeitschr. 1894), mais dans sa réponse il a négligé l'influence de l'emmagasinement de la chaleur dans le sol, c'est-à-dire qu'il admit que la température des parties de la surface terrestre momentanément à l'abri de la radiation solaire est de -273° .
- ⁵⁰⁾ (p. 193) Pour plus de détails sur cette question voir l'ouvrage de **Hann** cité sous ¹⁶⁾ pages 21—23.
- ⁵¹⁾ (p. 193) Un travail fondamental sur cette question : **Thomson W.**, On the reduction of observations of underground temperature. Royal Society of Edin-

burgh Transactions. Vol. XXII (1860). — La bibliographie de cette question se trouve dans l'ouvrage de **Hann** cité sous ¹⁶⁾ et dans **Kühl**, Der jährliche Gang der Bodentemperatur in verschiedenen Klimaten. (Gerland's) Beiträge zur Geophysik. Bd. VIII. (1907). Dans ce dernier mémoire, on trouvera, également le résumé des données fournies par vingt-cinq diverses stations d'observation. — Nous donnons ici un aperçu de quelques valeurs numériques pour m^2 , C et K (gramme-calorie, cm, minute): neige $m^2 = 0.16$, $C = 0.10$, $K = 0.016$ roche-trappe $m^2 = 0.47$, $C = 0.53$, $K = 0.25$ — terrain sableu $m^2 = 0.52$, $C = 0.31$, $K = 0.16$ — granit de la Forêt noire $m^2 = 0.90$, $C = 0.52$ ($c_p = 0.195$, $\rho_p = 2.66$), $K = 0.47$ — grès $m^2 = 1.39$, $C = 0.46$, $K = 0.64$.

⁵²⁾ (p. 195) **Hann**, Handbuch der Klimatologie. I. Bd. Allgemeine Klimalehre. Stuttgart 1908. page 328.

⁵³⁾ (p. 195) **Langley** (Researches on solar heat. Professional papers of the Signal Service, N^o XV. Washington 1884. page 123): Je crois qu'en l'absence d'atmosphère la température de la Terre sous l'influence directe des rayons solaires ne serait pas beaucoup supérieure à -225° .

⁵⁴⁾ (p. 201) **Zenker**, Ueber solare Temperaturen. Meteorolog. Zeitschr. 1896. — **Liznar**, Berechnung der Mitteltemperaturen der Breitenkreise einer Land- bzw. Wasser-Hemisphäre, sowie der Erde aus den an der Grenze der Atmosphäre zugestrahlten Wärmemengen. Ibid 1900.

⁵⁵⁾ (p. 203) **Bezold**, Der Wärmeaustausch an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre. Sitzungsberichte der k. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1892. page 1152.

⁵⁶⁾ (p. 222) **Pilgrim**, Versuch einer rechnerischen Behandlung der Eiszeit. Jahreshefte des Vereins für vaterl. Naturkunde in Württemberg. Bd. 60 (1904). — Sous forme de résumé: **Pilgrim**, Der Einfluss der Schwankungen der Schiefe der Ekliptik und der Exzentrizität der Erdbahn auf das Klima, mit besonderer Berücksichtigung des Eiszeitproblems. Mathem.-naturwiss. Mitteilungen des mathem.-naturwiss. Vereins in Württemberg. Zweite Serie. Bd. 5 (1903).

Les équations de **Stockwell** que nous avons exposées au N^o 52 n'ont pas été prises du mémoire original mais du travail précédent.

⁵⁷⁾ (p. 240) Une semblable représentation graphique et une formule approximative pour le calcul des maxima et des minima de ΔT se trouve dans **Charlier**, Contribution to the astronomical theory of an ice age. Meddelanden fran Lunds Astronomiska Observatorium. Lund 1901.

⁵⁸⁾ (p. 246) **Adhémar**, Les révolutions de la mer, déluges périodiques. Paris 1842. Deuxième édition 1860.

⁵⁹⁾ (p. 248) Pour plus de détails voir l'ouvrage de **Hann** cité sous ⁵²⁾ que nous suivons ici en ce qui concerne l'exposition des théories des époques glaciaires, mais non quant à leur critique.

⁶⁰⁾ (p. 248) **Croll**, Climate and time in their geological relations, a theory of secular changes of the earth's climate. London 1875. — **Croll**, Discussions on climate and cosmology. London 1889.

A ces ouvrages a précédé une série de mémoires parus dans le Philosoph. Magazine depuis 1864.

- ⁶¹⁾ (p. 252) J'ai écrit sur ces questions en 1914 dans les publications de l'Académie yougoslave des Sciences et des Arts de Zagreb. Un résumé en allemand a paru dans le „Bulletin des travaux“ de la dite Académie. Tome 3. (1915).
- ⁶²⁾ (p. 253) **Ball**, Astronomical theory of the glacial period. The cause of an Ice Age. London 1891.
- ⁶³⁾ (p. 254) **Ekholm**, On the variations of climate. Quart. Journ. Royal Meteorological Society. Vol. 27. (1901).
- ⁶⁴⁾ (p. 254) **Spitaler**, Die jährlichen und periodischen Aenderungen der Wärmeverteilung auf der Erdoberfläche und die Eiszeiten. (Gerland's) Beiträge zur Geophysik. Bd. VIII. (1907).
- ⁶⁵⁾ (p. 261) **Culverwell**, A mode of calculating a limit to the direct effect of great eccentricity of the earth's orbit on terrestrial temperatures, showing the inadequacy of the astronomical theory of Ice Ages and Genial Ages. Philosoph. Magazine. Vol. 38. (1894).
- ⁶⁶⁾ (p. 270) Je me suis servi de **Darwin G. H.**, Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. (Traduction allemande de Pockels). II. Aufl. Leipzig 1911.
- ⁶⁷⁾ (p. 270) Dans une série de mémoires parus dans les Philosoph. Transactions of the Royal Society de 1879 à 1882 et recueillis dans **Darwin G. H.**, Scientific Papers. Vol. II. Tidal friction and cosmogony. Cambridge 1908.
La théorie de Darwin a été brillamment reproduite et analysée par **Poincaré**, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. Paris 1911.
- ⁶⁸⁾ (p. 270) **Darwin G. H.**, On the precession of a viscous spheroid and on the remote history of the Earth. Philosoph. Transactions of the Royal Society. Part. II. Vol. 170. (1879). Voir également les ouvrages cités sous ⁶⁷⁾.
- ⁶⁹⁾ (p. 271) **Königsberger**, Berechnung des Erdalters auf physikalischer Grundlage. Geologische Rundschau. Bd. I (1910).
- ⁷⁰⁾ (p. 273) **Spitaler**, Die Eiszeiten und Polschwankungen der Erde. Wiener Sitzungsberichte. Bd. CXXI. Abt. IIa. (1912).
- ⁷¹⁾ (p. 273) **Darwin G. H.**, On the influence of geological changes of the Earth's axis of rotation. Philosoph. Transactions of the Royal Society. Part. I. Vol. 167. (1877). Réimprimé dans **Darwin G. H.**, Scientific Papers. Vol. III. Cambridge 1910. Un résumé de ce mémoire dans Proceedings of the Royal Society. Vol. 25. (1876).
- ⁷²⁾ (p. 273) **Schiaparelli**, De la rotation de la Terre sous l'influence des actions géologiques; Mémoire présenté à l'observatoire de Poulkova à l'occasion de sa fête semiséculaire. St. Petersburg. Académie impériale des Sciences. 1889.
- ⁷³⁾ (p. 274) **Wegener**, Die Entstehung der Kontinente. Geologische Rundschau. Bd. III. (1912). — Avec plus de détails dans l'ouvrage: **Wegener**, Die Entstehung der Kontinente und Ozeane. Braunschweig 1915.
- ⁷⁴⁾ (p. 275) Voir à ce sujet les ouvrages de **Emden** et de **Poincaré** cités sous ²⁾ et ⁶⁷⁾.
- ⁷⁵⁾ (p. 275). A ce sujet consulter **Dubois**, Die Klimate der geologischen Vergangenheit und ihre Beziehungen zur Entwicklungsgeschichte der Sonne. Leipzig 1893.

- ⁷⁶⁾ (p. 275) A Upsala on a observé que les températures moyennes des jours sans neige étaient de 5° à 6° plus hautes à celles des jours où le sol était couvert de neige. **Woeikoff**, Der Einfluss einer Schneedecke auf Boden, Klima und Wetter. Penck's Geogr. Abhandlungen. III. Wien (1889). — Voir également Meteorolog. Zeitschr. 1889.
- ⁷⁷⁾ (p. 276) Voir l'ouvrage de **Hann** cité sous ⁵²⁾ page 130.
- ⁷⁸⁾ (p. 276) **De Marchi**, Le cause dell'era glaciale. Pavia 1895.
- ⁷⁹⁾ (p. 276) **Arrhenius**, On the influence of carbonic acid in the air upon the temperature of the ground. Philosoph. Magazine, Vol. 41. (1896):
- ⁸⁰⁾ (p. 276) Voir également l'ouvrage de **Arrhenius**, cité sous ³⁾.
- ⁸¹⁾ (p. 276) **Arrhenius**, Die physikalischen Grundlagen der Kohlensäuretheorie der Klimaänderungen. Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie 1909.
- ⁸²⁾ (p. 278) Voir le mémoire de **Ekholm** cité sous ⁴⁵⁾.
- ⁸³⁾ (p. 278) **Rubens und Ladenburg**, Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. Bd. VII. (1905), page 171.
- ⁸⁴⁾ (p. 279) D'après les recherches mentionnées ci-dessus qui, il est vrai ne correspondent qu'incomplètement aux conditions qui règnent dans l'atmosphère, le pouvoir absorbant a_m''' n'atteindrait que 0.30. Par conséquent, l'augmentation de température que nous avons calculée ne représenterait qu'une limite supérieure.
- ⁸⁵⁾ (p. 284) **Andersson**, Das nacheiszeitliche Klima von Schweden. Zürich 1903. — Die Entwicklungsgeschichte der skandinavischen Flora. Internat. botanischer Kongress Wien 1905. Jena.
- ⁸⁶⁾ (p. 284) D'après **Gilbert**, Contributions to the history of Lake Bonneville. Second Annual Report of the U. S. Geolog. Survey. Powell 1882., on peut distinguer les cinq périodes suivantes: 1. Une longue période de climat sec à niveau très bas du lac. 2. Une période de climat humide à haut niveau pendant laquelle celui-ci monta jusqu'à 30 mètres au-dessous du plus profond défilé des environs du lac. 3. Une période d'extrême sécheresse pendant laquelle le lac s'évapora complètement formant une croûte saline, de sorte que le pays présentait un aspect plus désertique qu'actuellement la région autour du Lac Salé d'Utah. 4. Une période relativement courte durant laquelle l'eau monta encore plus haut que pendant la seconde période, jusqu'à une hauteur de 300 mètres environ au-dessus du niveau actuel du Lac d'Utah, de sorte qu'il se produisit un écoulement au nord, vers la Colombie. 5. La période actuelle d'une sécheresse moyenne, le lac étant réduit de son extension primitive de 500 km de longueur et de 300 km de largeur au Lac Salé d'Utah.
- ⁸⁷⁾ (p. 284) **Russell**, Sketch of the history of Lake Lahontan. Third. Annual Report of the U. S. Geolog. Survey.
- ⁸⁸⁾ (p. 284) **Cvijić**, L'histoire du Lac Eordeïque. (en serbe). Mémoires de l'Académie royale serbe. Tome 131. (1910).
- ⁸⁹⁾ (p. 287) **Paschinger**, Die Schneegrenze in verschiedenen Klimaten. Ergänzungsheft N^o 173 zu „Petermann's Mitteilungen“ (1912).

- ⁹⁰⁾ (p. 288) **Forbes**, Inquiries about terrestrial temperature. Transactions of the Royal Society. Edinburgh. Vol. 22. (1859).
- ⁹¹⁾ (p. 288) **Spitaler**, Die Wärmeverteilung auf der Erdoberfläche. Denkschriften der mathem. - naturw. Klasse der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. 51. (1885).
- ⁹²⁾ (p. 289) **Kerner von Marilaun**, Eine paläoklimatologische Studie. Wiener Sitzungsberichte. Bd. CIV. Abt. II a. (1895).
- ⁹³⁾ (p. 291) **Walter**, Geschichte der Erde und des Lebens. Leipzig 1908. page 199.
- ⁹⁴⁾ (p. 293) Sur le fait que les scories se forment par refroidissement de la lave surnagent celle-ci, consulter: **Neumayr**, Erdgeschichte. Leipzig 1887. page 137.
- ⁹⁵⁾ (p. 295) **Landolt-Börnstein-Meyerhoffer**, Physikalisch-chemische Tabellen. Dritte Aufl. Berlin 1905. page 472.
- ⁹⁶⁾ (p. 297) **Fourier**, (plusieurs mémoires réunis dans les **Oeuvres de Fourier**, Tome II. Paris 1890) et **W. Thomson** (Transactions of the Royal Society. Edinburgh 1882) calculèrent l'âge de la croûte terrestre, en partant d'un état initial uniforme de température. **Thomson** admit que les scories se formant à la surface du corps terrestre, refroidi dans toute sa masse à sa température de fusion, étaient immergées faisant place à de nouvelles masses liquides, qui se solidifiaient à leur tour, jusqu'à ce que tout le corps terrestre ne fût solidifié, accusant partout la température de 4000 degrés. Aujourd'hui cette hypothèse est devenue insoutenable.
- ⁹⁷⁾ (p. 308) Cette valeur fut déterminée par **H. Struve** en 1895. En 1891 **Schiaparelli** trouva $24^{\circ}52'$. Les déterminations plus anciennes de **W. Herschel**, **Lilienthal** et de **Bessel** donnèrent des valeurs très divergeantes. Voir à ce sujet: **Flammarion**, La planète Mars et ses conditions d'habitabilité. Deux Tomes. Paris 1892 et 1909, où nous avons puisé d'autres données concernant la planète Mars. La valeur de $23^{\circ}13'$ donnée par **Lowell**, Mars as the abode life. New York 1908. page 226, ne paraît pas admissible. Il serait à désirer qu'une détermination exacte de cette valeur fût exécutée.
- ⁹⁸⁾ (p. 309) Cette valeur est donnée par **Flammarion** dans le second tome de son ouvrage cité ci-dessus, page 270. Dans le premier tome, on trouve une valeur plus grande.
- ⁹⁹⁾ (p. 310) D'après **Arrhenius**, Das Schicksal der Planeten. Leipzig 1911. page 9.
- ¹⁰⁰⁾ (p. 310) Ibid. page 9.
- ¹⁰¹⁾ (p. 320) **Rosse**, On the radiation of heat from the Moon, the law of its absorption by our atmosphere and its variation in amount with her phase. Philosoph. Transactions. Vol. 163. (1873).
- ¹⁰²⁾ (p. 320) **Boeddicker**, Lunar radiant heat, measured at Birr Castle Observatory, during the total eclipse of Jan. 28. 1888. Transactions of the Roy. Dublin Society. 2. Ser. Vol. 4. (1888—92).
- ¹⁰³⁾ (p. 320) **Langley, Very and Keeler**, On the temperature of the surface of the Moon. Mem. National Acad. of Sciences 1885. — **Langley**, The temperature of the Moon. Ibid. 1887. — **Langley and Very**, The temperature of the Moon. Philosoph. Magazine 1890.

- ¹⁰⁴⁾ (p. 320) **Very**, The probable range of temperature of the Moon. *Astrophysical Journal* 1898.
- ¹⁰⁵⁾ (p. 320) **Very** mesura, à l'aide d'instruments sensibles, la radiation parvenant à la Terre de différents points de la surface lunaire éclairée. Ayant déduit de cette radiation la huitième partie à titre de radiation solaire réfléchie, il calcula l'émission et la température de la partie correspondante de la surface lunaire, en admettant que la moitié de la radiation propre à la Lune est absorbée par l'atmosphère terrestre et en se servant d'une loi par lui-même formulée, reliant la température à l'émission. De cette manière, cet auteur obtint une oscillation de température de -273° à $+181^{\circ}$, par conséquent une valeur notablement plus grande que celle qui a été ici calculée. Cependant, il faut tenir compte que, à cause de (221), il n'existe aucune proportionalité entre la radiation solaire réfléchie et la radiation propre à la Lune et que l'atmosphère terrestre absorbe particulièrement la radiation lunaire obscure et, finalement, que la loi de radiation de **Very** fournit de tout autres résultats que celle de **Stefan**. Par exemple, la première de ces deux lois fournit pour les températures absolues de 100 et de 300 degrés des émissions qui sont dans le rapport 1 : 11, tandis que d'après la seconde loi ce rapport serait de $1 : 3^4 = 1 : 81$. Aussi, d'après la loi de **Stefan** la température maxima de la surface lunaire ne peut, à cause de (210), dépasser la valeur de 130° . L'oscillation réelle de la température de la surface lunaire devrait, par conséquent, être notablement inférieure à celle donnée par **Very**.

Noms d'auteurs cités dans la bibliographie précédente.

Abbot ⁴⁰⁾ ⁴²⁾ — Adhémar ⁵⁸⁾ — Aldrich ⁴⁰⁾ — Andersson ⁸⁵⁾ — Anding ¹²⁾ —
Angot ⁴⁸⁾ — Arrhenius ³⁾ ⁴²⁾ ⁷⁹⁾ ⁸⁰⁾ ⁸¹⁾ ⁹⁹⁾
Baill ⁶²⁾ — Bauer ¹⁹⁾ — Bessel ⁹⁷⁾ — Bezold ⁵⁵⁾ — Boeddicker ¹⁰²⁾ — Börnstein ⁹⁵⁾
— Bouguer ¹²⁾ — Boussinesq ²³⁾
Carnot ³⁰⁾ — Charlier ⁹⁾ ⁵⁷⁾ — Christiansen ²²⁾ — Clausius ²⁷⁾ — Croll ⁶⁰⁾ — Cul-
verwell ⁶⁵⁾ — Cvijić ⁸⁸⁾
Darwin G. H. ⁶⁶⁾ ⁶⁷⁾ ⁶⁸⁾ ⁷¹⁾ — De Marchi ⁷⁸⁾ — Doležal ¹⁾ — Dubois ⁵⁵⁾
Ekholm ⁴⁵⁾ ⁶³⁾ ⁸²⁾ — Emden ²⁾ ¹⁵⁾ ¹⁹⁾ ³³⁾ ⁷⁴⁾
Farland ⁹⁾ — Ferrel ¹⁾ ²⁰⁾ — Flammarion ⁹⁷⁾ ⁸⁸⁾ — Forbes ⁹⁰⁾ — Fourier ²⁴⁾ ⁹⁶⁾ —
Fowle ⁴¹⁾ ⁴²⁾ — Fresnel ²⁵⁾
Gilbert ⁸⁶⁾
Halley ¹⁾ — Hann ¹⁶⁾ ²⁶⁾ ²⁹⁾ ³⁶⁾ ³⁷⁾ ⁵⁰⁾ ⁵¹⁾ ⁵²⁾ ⁵⁹⁾ ⁷⁷⁾ — Hargreaves ¹⁾ — Harkness ⁴⁶⁾
— Herr ³⁾ — Herschel W. ⁹⁷⁾ — Hertz ³⁹⁾ — Herz ⁷⁾ — Heuse ³⁰⁾ — Hopfner ¹⁾ ⁷⁾
Keeler ¹⁰³⁾ — Kerner von Marilaun ⁹²⁾ — Kobold ⁴⁾ — Königsberger ⁶⁹⁾ —
Kühl ⁵¹⁾ — Kurlbaum ¹⁹⁾
Lacaille ¹²⁾ — Ladenburg ⁸³⁾ — Lambert ¹⁾ ¹²⁾ — Landolt ⁹⁵⁾ — Langley ⁵³⁾ ¹⁰³⁾ —
Laplace ³⁸⁾ — Le Goarant de Tromelin ⁸⁾ — Lilienthal ⁹⁷⁾ — Liznar ⁵⁴⁾ — Lowell ³¹⁾ ⁹⁷⁾
Magnus ³⁰⁾ — Meech ¹⁾ — Meyerhoffer ⁹⁵⁾ — Moulin ¹⁹⁾
Neuhoff ³⁹⁾ — Neumayr ⁹⁴⁾
Pasehen ²⁰⁾ — Paschinger ⁸⁹⁾ — Peslin ³⁶⁾ — Pilgrim ⁵⁶⁾ — Poincaré ⁶⁷⁾ ⁷⁴⁾ —
Poisson ¹⁾ — Poynting ²²⁾ ³¹⁾
Radan ⁴⁸⁾ — Reye ³⁸⁾ — Ritter A. ³⁸⁾ — Rosse ¹⁰¹⁾ — Rubens ⁶³⁾ — Russell ⁸⁷⁾
Scheel ³⁹⁾ — Schiaparelli ⁷³⁾ ⁹⁷⁾ — Schwarzschild ³³⁾ ³⁵⁾ — Siegl ²⁰⁾ ²¹⁾ — Sou-
chon ⁵⁾ — Spitaler ⁶⁴⁾ ⁷⁰⁾ ⁹¹⁾ — Stefan ¹⁰⁵⁾ — Stockwell ⁹⁾ ⁵⁸⁾ — Struve H. ⁹⁷⁾
Thomson W. ³⁶⁾ ⁵¹⁾ ⁹⁶⁾ — Träbert ⁴³⁾ ⁴⁹⁾ — Tyndall ²⁵⁾ ³²⁾
Very ³¹⁾ ¹⁰³⁾ ¹⁰⁴⁾ ¹⁰⁵⁾
Walter ⁹³⁾ — Weber H. ²³⁾ — Wegener ³⁰⁾ ⁷³⁾ — Wiener ¹⁾ ⁴⁷⁾ — Woeikoff ⁷⁶⁾
Zenker ¹¹⁾ ²⁵⁾ ⁵⁴⁾.



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Préface	V
Symboles	XIII

PREMIÈRE PARTIE EXPOSÉ THÉORIQUE.

CHAPITRE I.

DISTRIBUTION DE LA RADIATION SOLAIRE A LA SURFACE DES PLANÈTES, ABSTRACTION FAITE DE LEURS ATMOSPHÈRES.

1. Introduction — La constante solaire — 2. Rappel de quelques notions et formules d'astronomie sphérique — 3. Distribution du rayonnement solaire à la surface de la planète à un moment donné — 4. Marche diurne de l'insolation et la quantité diurne de radiation — 5. La discontinuité de la marche de l'insolation et son élimination — 6. Développements en séries — 7. Marche annuelle de l'insolation — 8. Quantité de radiation reçue au cours d'un intervalle donné de l'année — 9. Quantités de radiations reçues pendant les saisons astronomiques de la planète — 10. Quantités de radiation reçues par les deux hémisphères dans un intervalle donné de l'année — 11. L'inégale durée des saisons astronomiques — 12. Variations séculaires des éléments des orbites et des éléments de rotation des planètes — 13. Variations séculaires de l'insolation des planètes	3
---	---

CHAPITRE II.

DISTRIBUTION DE LA RADIATION SOLAIRE A LA SURFACE DES PLANÈTES, EN TENANT COMPTE DE LEURS ATMOSPHÈRES.

14. Données fondamentales — 15. La loi de Bouguer-Lambert — 16. Radiation solaire directe atteignant la surface de la planète par ciel découvert — 17. Radiation solaire directe et diffuse transmise jusqu'à la surface de la planète — 18. Variations séculaires de l'insolation des surfaces planétaires — 19. Variations séculaires de l'insolation représentées par des oscillations fictives des latitudes — 20. Sur la constitution de l'atmosphère des planètes — 21. La loi de Beer et ses conséquences	55
--	----

CHAPITRE III.

RAPPORT ENTRE L'INSOLATION ET LA TEMPÉRATURE DES PLANÈTES,
ABSTRACTION FAITE DE LEURS ATMOSPHÈRES.

	Pages
22. Distribution de la température à la surface planétaire à l'état permanent d'insolation — 23. Equation différentielle de la propagation de la chaleur dans le sol — 24. Températures de la surface planétaire lorsque l'insolation est une oscillation simple — 25. Températures de l'écorce des planètes lorsque l'insolation est une fonction périodique quelconque du temps — 26. Propagation des oscillations de température dans le sol — 27. Représentation de la marche diurne de l'insolation par les séries de Fourier — 28. Représentation de la marche annuelle de l'insolation par les séries de Fourier — 29. Rapport entre l'insolation et la température de l'hydrosphère — 30. Quelques cas particuliers se rapportant au N ^o précédent — 31. Influence de la vitesse de rotation de la planète sur la température de sa surface	82

CHAPITRE IV.

RAPPORT ENTRE L'INSOLATION ET LA TEMPÉRATURE DES PLANÈTES,
EN TENANT COMPTE DE LEURS ATMOSPHÈRES.

32. Rapport entre la radiation émise par la surface de la planète et la radiation contraire de son atmosphère — 33. Influence d'une couche atmosphérique de faible épaisseur sur la température de la planète — 34. Quelques cas spéciaux se rapportant au N ^o précédent — 35. Equations différentielles réglant les phénomènes de radiation dans les atmosphères des planètes — 36. Intégration des équations différentielles du N ^o 35 pour le cas d'une insolation stationnaire — 37. Quelques cas spéciaux se rapportant au N ^o précédent — 38. Intégration des équations différentielles du N ^o 35 pour le cas d'une insolation variable — 39. Loi de décroissance de la densité et de la température avec la hauteur, lorsque l'atmosphère est en équilibre d'échanges de radiation — 40. Phénomènes thermodynamiques ayant lieu dans les atmosphères planétaires	122
---	-----

DEUXIÈME PARTIE APPLICATIONS.

CHAPITRE I.

DISTRIBUTION DE LA RADIATION SOLAIRE A LA SURFACE DU GLOBE TERRESTRE ET SON CLIMAT MATHÉMATIQUE.

Pages

41. Définition du climat mathématique — 42. La constante solaire et les coefficients de transmission de l'atmosphère terrestre — 43. Quantités diurnes de radiation reçues par la surface terrestre — 44. Résumé des résultats précédents — 45. Quantités de radiation reçues dans un intervalle quelconque de l'année — 46. Le climat terrestre en supposant l'atmosphère absente — 47. Rôle protecteur de l'atmosphère terrestre — 48. Moyennes températures annuelles le long des parallèles pour une atmosphère calme — 49. Constitution thermique d'une atmosphère sèche se trouvant en équilibre de rayonnement — 50. Le phénomène de l'inversion de température au-dessus de la couche isotherme — 51. Propagation verticale des oscillations de température dans une atmosphère calme	169
---	-----

CHAPITRE II.

VARIATIONS SÉCULAIRES DE L'INSOLATION ET LE PROBLÈME PALÉOCLIMATIQUE.

52. Variations séculaires des éléments astronomiques du mouvement elliptique et de la rotation de la Terre — 53. Tableaux pour faciliter le calcul des variations séculaires de l'insolation — 54. Marche séculaire de l'insolation de la Terre — 55. Exemples numériques se rapportant au N ^o précédent — 56. Théories astronomiques des époques glaciaires — 57. Etats extrêmes d'insolation de la Terre — 58. Climat solaire dans les cas d'insolations extrêmes de la Terre — 59. Sur la possibilité d'autres causes changeant les éléments astronomiques — Divagations des pôles — 60. Sur quelques autres causes de la variabilité du climat terrestre — 61. Le problème paléoclimatique	221
---	-----

CHAPITRE III.

RECHERCHES THÉORIQUES SUR LE CLIMAT DE QUELQUES PLANÈTES ET SUR LE CLIMAT LUNAIRE.

62. Sur la formation des croûtes planétaires — 63. Le climat de la planète Mercure — 64. Le climat de la planète Vénus — 65. Le climat de la planète Mars — 66. La température à la surface de la Lune . . .	292
Données bibliographiques, remarques et notes	323
Noms d'auteurs cités dans la bibliographie précédente	335

