У Н И В Е Р З И Т Е Т У Б Е О Г Р А Д У

J. Л. СИМОВЉЕВИЋ

ОСНОВЕ ТЕОРИЈСКЕ АСТРОНОМИЈЕ

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ
ГРАЂЕВИНСКА КЊИГА
БЕОГРАД, 1977.

Решењем ректора универзитета у Београду, бр. 06/099 од 21. јуна 1976. год. на предлог Универзитетске комисије за уџбенике, ова књига је примљена као стални уџбеник.

За предузеће
Љ. Јурела, главни уредник
Д. Лазин, уредник
Ј. Ристић-Пршендић, техн. уредник
В. Лебовић, коректор
А. Пајванчић, насловна страна

Тираж 1000 примерака

Штампа: Београдски издавачко-графички завод Београд, Булевар војводе Мишића 17

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник је написан првенствено за потребе наставе из предмета *Теоријска астрономија*, за студенте астрономске групе Природно-математичког факултета Универзитета у Београду. Настојао сам да у излагању посветим више пажње општим питањима, а мање детаљима, који се могу обрађивати на веома различите начине. Зато се надам да ће ова књига моћи корисно да послужи и другим заинтересованим за питања која се у њој обрађују. Стога су и неки уводни делови обрађени нешто опширније, но што би то било потребно студентима астрономије.

Уношење нумеричких примера — који би, по природи ствари, могли бити и веома обимни — прилично би пореметило општи ток излагања и смањило његову прегледност. Зато су они предвиђени за посебан приручник за вежбе из поменута предмета, као збирка решених задатака и примера из теоријске астрономије. Па ипак, већ је и у овој књизи дат на више места, после одговарајућих одељака, „*Преглед образаца*" за ефективно нумеричко рачунање. Надам се да ће и то потпомоћи лакшем схватању начина за стварно решавање појединих задатака теоријске астрономије.

Уџбеник је био написан још 1968. г., али тада није могао бити објављен. У међувремену сам извршио неке исправке и допуне, у вези и са допуном наставног програма. Сада ћу бити захвалан свакоме ко ми достави своју критику, примедбе и мишљење, како на књигу као целину, тако и на поједина питања из ње.

Користим и ову прилику да изразим своју захвалност професору В. В. Мишковићу, дугогодишњем наставнику овог предмета на Природно-математичком факултету, као и професору Б. М. Шеварлићу и доценту Ј. П. Лазовићу, за помоћ коју су ми указали приликом израде овог уџбеника.

Београд, фебруар 1976. г.

Симовљевић

САДРЖАЈ

Увод

Успомени
професора *ВОЈИСЛАВА В. МИШКОВИЋА*
(18. I 1892 — 25. XI 1976)

УВОД

1. **ПРЕДМЕТ ТЕОРИЈСКЕ АСТРОНОМИЈЕ.** *Небеска механика*, наука о кретањима небеских тела, исувише је обимна дисциплина да би се могла изучавати као једна целина. Током свога развоја су се поједине њене области све више шириле и гранале, повезујући се и са другим наукама, тако да се могу проучавати и као посебне дисциплине (нпр. Теорија Месечева кретања, Теорија кретања Земљиних вештачких сателита, Теорија Земљине ротације, Динамика звезданих система, итд.).

Два су главна фактора који условљавају поделу Небеске механике на поједине одељке или, како рекосмо, чак и посебне области: врста небеског тела и врста његова кретања. Даље поделе могу да се врше по поступцима решавања најважнијег питања Небеске механике: по начину интеграљења диференцијалних једначина уочена кретања. Ово интеграљење је или аналитичко, или нумеричко, или комбиновано од ова два главна поступка.

Поред тога, и наставни разлози доприносе подели широког подручја Небеске механике. Тако се на Природно-математичком факултету Универзитета у Београду већ дужи низ година изучавају кретања небеских тела у два наставна предмета, у *Небеској механици* и *Теоријској астрономији*, а био је уведен и трећи, *Теоријска кретања Земљиних вештачких сателита*. Небеска механика (у ужем смислу) обухвата основе ове науке, ослањајући се на предмет *Рационална механика*, и приказује аналитичку теорију транслаторног кретања чланова Сунчева система — специјално великих планета. Стога ћемо надаље у овом курсу под Небском механиком подразумевати управо тај њен део, тај обим и садржај.

Теоријска астрономија, курс који започињемо, посвећен је излагању изградње теорије транслаторног кретања небеских тела, при чему се интеграљење диференцијалних једначина кретања врши нумеричким поступцима. Друга важна разлика између овог курса и оног Небеске механике је у томе, што ћемо посебну пажњу поклонити поступцима за ефективно одређивање почетних услова кретања, помоћу којих налазимо константе интеграљења.

Оваква теорија кретања примењује се, у највећој мери, на мале планете и комете. Велики њихов број, стално проналажење нових, особености у кретању и тежи услови посматрања са Земље, веома отежавају, па чак и потпуно онемогућују, изградњу аналитичке теорије кретања сваког од ових тела, како је то учињено за велике планете. То су главни разлози који су проучавање кретања планетоида и комета издвојили из општег курса Небеске механике у посебну наставну целину, у курс Теоријске астрономије, и што је временом, после неколико промена наставног програма, испунило цео његов садржај.

Међутим, поступци који ће се овде изложити, нису начелно везани за проучавање кретања само малих планета или комета. Они се могу — *mutatis mutandis* — применити, и примењују се, и у случају других небеских тела.

2. **ПРИКАЗ ОДРЕЂИВАЊА ПУТАЊА МАЛИХ ПЛАНЕТА И КОМЕТА.** Стварно кретање чланова Сунчева система (са изузетком сателита великих планета) комбиновано је од кретања око тежишта (барицентра) система и кретања овог тежишта кроз простор. Но, положај барицентра у неком координатном систему одређује се тек кад су познати положаји, у истом координатном систему, свих тела посматрана скупа. С друге стране, маса Сунца је знатно већа од масе било којег члана система, што ће рећи да се барицентар налази увек у близини Сунчева средишта (тежишта). Коначно, барицентар се креће, под претпоставком о изолованости система, праволинијски и униформно кроз простор. Све ово нам казује да за основу изучавања кретања небеских тела, која нас овде интересују, можемо усвојити њихово *хелиоцентрично кретање*, тј. кретање око средишњег тела система, Сунца.

У Небеској механици се изводи диференцијална једначина хелиоцентричног кретања небеског тела

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2} = -f(M+m)\, r^{-3}\, \mathbf{r} + \sum_{i=1}^{n} f m_i \left(\rho_i^{-3} \boldsymbol{\rho}_i - r_i^{-3} \mathbf{r}_i\right). \tag{1}$$

Овде је

f — гравитациона константа,

M — маса средишњег тела, Сунца,

m, $\mathbf{r}$ — маса одн. вектор хелиоцентричног положаја посматрана тела (планетоида или комете),

m_i, $\mathbf{r}_i$ — масе одн. вектори хелиоцентричног положаја осталих тела Сунчева система,

$\boldsymbol{\rho}_i$ — вектори положаја ових тела у односу на посматрано, тј. $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}$.

Диференцијална једначина (1) изведена је под следећим претпоставкама:

а) усвајају се класичне, Њутнове, аксиоме кретања (не узимају се у обзир тзв. *релативистички ефекти*);

б) сва тела су посматрана као материјалне тачке, и то константне масе;

в) између ових материјалних тачака делује само Њутнова привлачна (гравитациона) сила. Претпостављамо, дакле, да средина не узрокује никакав отпор кретању и да Сунчева светлост не врши никакав притисак на тела.

За огромну већину малих планета и комета су ове претпоставке прихватљиве; другим речима, сви тзв. *нгравитациони ефекти* су занемарљиво мали у односу на данашњу тачност одређивања положаја тела из посматрања са Земље. Међутим, третирање диференцијалне једначине кретања у коју су укључена и поменута дејства, може да се начелно изведе као и у случају диференцијалне једначине (1).

Изградња гравитационе теорије хелиоцентричног кретања тела своди се на интеграљење диференцијалне једначине (1), то јест на извођење њених интеграла

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t), \qquad \mathbf{v}=\mathbf{v}(t), \tag{2}$$

при чему се подразумева и ефективно налажење вредности интеграционих константи. У ствари, за нас ће најчешће бити од интереса само прва једначина (2); брзину хелиоцентричног кретања, уколико нам је потребна, најлакше ћемо добити из

$$\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{r}(t).$$

кад већ познајемо $\mathbf{r}$ као функцију времена. Нумеричко интеграљење доводи, као што је познато, до дискретног низа нумеричких вредности рецимо координата тела, у одабраном координатном систему — тј. компонената вектора $\mathbf{r}$.

Пре но што пређемо на скицирање поступка интеграљења (1), приметимо да у тој диференцијалној једначини фигуришу и положаји тела чије нас кретање тренутно не интересује. То су тела са масама m_i, $i=1, 2, \dots, l, \dots, n$. Хелиоцентрично кретање сваког од њих, рецимо l-тог, описано је аналогном диференцијалном једначином, дакле

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_l}{\mathrm{d}t^2}=-f(M+m_l)\,r_l^{-3}\,\mathbf{r}_l+\left(\sum_{i=1}^{n}\right)f\,m_i\,(\rho_i^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_i-r_i^{-3}\,\mathbf{r}_i).$$

Знак збира смо ставили у заграду да упозоримо да се сад у том збиру не јавља члан $f\,m_l(\rho_l^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_l-r_l^{-3}\,\mathbf{r}_l)$, већ, уместо њега, члан $f\,m\cdot[|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l|^{-3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_l)-$ $-r^{-3}\,\mathbf{r}]$. — То значи, начелно говорећи, да $\mathbf{r}(t)$ добивамо заједно са $\mathbf{r}_i(t)$, $i=1, 2, \dots, l, \dots, n$, то јест интеграљењем *система* од $n+1$ диференцијалне једначине облика (1). Потсетимо се поступка којим Небеска механика изводи интеграљење овог система, сводећи га, посредно, на интеграљење појединачних диференцијалних једначина. —

Већ смо навели да су масе m и m_i мале у односу на Сунчеву масу M. Стога ће и апсолутна вредност величине

$$\sum_{i=1}^{n}f\,m_i\,(\rho_i^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_i-r_i^{-3}\,\mathbf{r}_i)=\mathbf{F} \tag{3}$$

из (1) бити мала у односу на апсолутну вредност првог члана десне стране $-f(M+m)r^{-3}\,\mathbf{r}$ — догод даљине ρ_i нису врло мале. Ставимо ли зато да је $\mathbf{F}=0$, једначина (1) ће се свести на

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}=-f(M+m)\,r^{-3}\,\mathbf{r}, \tag{4}$$

то јест, на диференцијалну једначину *проблема два тела* (маса M и m). Интеграли ове једначине описују тзв. *Кеплерово кретање* тела масе m око тела масе M. На исти начин се поменути систем диференцијалних једначина редукује на

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{d t^2} = -f(M+m_i)\, r_i^{-3}\, \mathbf{r}_i\,,$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l,\ \ldots,\ n$$

то јест на прост скуп једначина које се могу интегралити независно једна од друге.

Нека су решења ових једначина

$$\mathbf{r}_K(t);\quad \mathbf{r}_{K1}(t),\quad \mathbf{r}_{K2}(t),\quad \mathbf{r}_{K3}(t), \ldots \ldots \ldots,\ \mathbf{r}_{Kn}(t). \tag{5}$$

Она се, аналитички посматрано, суштински разликују од решења (2) једначине (1) и њој аналогних за тела маса̂ m_i. Међутим је

$$\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}_K(t);\qquad \mathbf{r}_1(t) \approx \mathbf{r}_{K1}(t), \ldots \ldots \ldots,\ \mathbf{r}_n(t) \approx \mathbf{r}_{Kn}(t),$$

у ужем или ширем временом интервалу, са мањим или већим степеном тачности, што све зависи од односа величине маса̂ m и m_i према M, и од даљина r, r_i и ρ_i.

Унесимо овако добивена решења $\mathbf{r}_{Ki}(t)$ из (5) у (3); добићемо да је сада $\mathbf{F} \neq 0$. С тим ћемоући у (1), што тако постаје диференцијална једначина са само једном непознатом функцијом времена: $\mathbf{r}(t)$. Њен интеграл представља знатно боље решење, но што је било оно $\mathbf{r}_K(t)$ из (5). Али још увек није егзактно: добивено је из диференцијалне једначине у којој фигуришу приближне вредности $\mathbf{r}_{Ki}(t)$, а не тачне $\mathbf{r}_i(t)$.

Зато се цео овај поступак понавља, примењујући га, очигледно, и на диференцијалне једначине за $\mathbf{r}_i$, догод се не дође до интеграла са жељеним степеном тачности. На тај начин — овако само грубо скициран — изградила је Небеска механика гравитациону теорију хелиоцентричног кретања главних тела Сунчева система — великих планета. Маса сваке од њих је знатно већа од масе било које мале планете или комете. Одатле закључујемо да дејство велике планете на кретање планетоида или комете може да буде осетно, па чак и веома велико, што све зависи од међусобне даљине тела.

Ову дужу екскурзију извели смо колико да потсетимо читаоца на основни ток рада Небеске механике, толико и да одмах нагласимо једну важну чињеницу, с којом ћемо убудуће стално рачунати. Она се састоји у томе, што ћемо сматрати да су нам за сваки тренутак познати $\mathbf{r}_i$, вектори положаја великих планета, у односу на неки хелиоцентрични координатни систем. Детаљније ће о овом бити више речено на свом месту.

Нумеричко интеграљење диференцијалне једначине (1) можемо сада спровести на два начина: непосредни и посредни. Како се она своди на систем од три скаларане диференцијалне једначине другог реда, облика

$$x'' = F(t;\, x,\, y,\, z),\qquad y'' = G(t;\, x,\, y,\, z),\qquad z'' = H(t;\, x,\, y,\, z)$$

то видимо да можемо приступити решавању задатка чим нам је познато неколико положаја тела, $\mathbf{r}(t_j)$, $j = 1,\ 2,\ \ldots$, ради започињања таблице интеграљења.

Ако нам неколико таквих положаја није познато (што ће увек бити случај код новопронађена тела), претпоставићемо да смо из посматрања извели Кеплерову путању објекта и тиме дошли у могућност да израчунамо оних неколико положаја за тренутке t_j. Но то ће бити величине $\mathbf{r}_K(t_j)$, а не $\mathbf{r}(t_j)$. Зато приступамо сукцесивним апроксимацијама на почетку интеграционе схеме, полазећи од $\mathbf{r}(t_j) \approx \mathbf{r}_K(t_j)$.

Посредни начин нумеричког интеграљења диференцијалне једначине (1) је претходна примена Лагранжеве методе варијације константи. Нека су

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_K(t;\ \mathbf{C}_1,\ \mathbf{C}_2), \qquad \mathbf{v}_K = \mathbf{v}_K(t;\ \mathbf{C}_1,\ \mathbf{C}_2) \tag{6}$$

интеграли диференцијалне једначине Кеплерова кретања (4), са две независне векторске интеграционе константе, $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$. Њих усвајамо за функције времена у стварном кретању и једначину другог реда (1) сводимо на систем једначина првог реда

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}_1}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{C}_1'(t;\ \mathbf{C}_1,\ \mathbf{C}_2), \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}_2}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{C}_2'(t;\ \mathbf{C}_1,\ \mathbf{C}_2).$$

Методе нумеричког интеграљења примењујемо на овај систем, ради добивања бројних вредности за

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1(t), \qquad \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2(t),$$

а потом користимо (6).

Ниједна од неколико варијанти оба ова начина интеграљења нема изразитих предности над другима. Но нешто им је свима заједничко. Свака захтева претходно познавање Кеплерова кретања небеског тела, да га искористи било ради почетне нумеричке апроксимације стварног кретања, било и у аналитичком смислу.

Због ових разлога видимо да ћемо за сваку новопронађену малу планету или комету у сваком случају морати конструисати прво Кеплерову путању, да бисмо могли приступити изучавању њена стварног кретања.

Историјски ток развоја налажења правих путања небеских тела и закона кретања ишао је тим истим путем. Кеплер је, почетком XVII-ог века, својим законима планетског кретања, садржаним у диференцијалној једначини (4), дао висок степен апроксимације кинематичке слике Сунчева система и оставио слутњу да је Сунце извор сила под чијим се дејством крећу планете. Ову претпоставку је потврдио Њутн, крајем истог века, генералишући идеју о међусобном привлачењу на све масе у васиони. Њутн је начелно решио динамичко питање кретања, показавши да се оно не може вршити под дејством привлачне силе само средишњег тела; сва она међусобно делују једно на друго. Овакво хелиоцентрично кретање следује из диференцијалне једначине (1).

Из тог времена преостао нам је назив *непоремећено кретање* за кретање какво би било да се врши под дејством привлачне силе само централног тела; данас га најчешће зовемо *Кеплеровим кретањем*. А дејства свих других узрока, који ремете такво кретање, носе назив — из још старијих времена — *поремећаји* (одступања, неједнакости, аномалије). Тако стварно кретање још и данас често зовемо — *поремећено кретање*. Из истих разлога се величина **F** из (3), други члан десне стране једначине (1), зове *йоремећајно убрзање*. А за интеграљење исте једначине, уз познато Кеплерово кретање тела у питању, опште је прихваћен назив — *рачун йоремећаја*. И то за аналитичко интеграљење — *рачун айсолуйних йоремећаја*, а за нумеричко — *рачун сйецијалних йоремећаја*.

Сада можемо скицирати поступак за конструисање праве путање планетоида или комете.

Пре свега, потребно је одредити непоремећену путању тела око Сунца. Задатак, очигледно, нема јединствено решење; разни делови стварне путање могу се апроксимирати различитим Кеплеровим орбитима. Зато претпостављамо да у време првих посматрања тела не постоји „поремећајна сила", која би објекту саопштавала убрзање (3). То другим речима значи да потребан број првих посматраних положаја прихватамо као положаје тела на Кеплеровој путањи.

Та путања биће потпуно одређена нумеричким значењима константи интеграљења — $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ у једначини (6) — у интегралима диференцијалне једначине Кеплерова кретања (4). Ове константе се одређују помоћу почетних услова кретања; рецимо помоћу хелиоцентричних положаја $\mathbf{r}_K(t_1)$ и $\mathbf{r}_K(t_2)$, у тренуцима t_1 и t_2; или помоћу $\mathbf{r}_K(t_0)$ и $\mathbf{v}_K(t_0)$, то јест положаја и брзине у тренутку t_0. Одређивање ових почетних услова (а затим интеграционих константи) из података посматрања чини *рачун орбийа*. То је, дакле, одређивање Кеплерове путање мале планете или комете.

Немогућност добивања апсолутно тачних података из посматрања, основа за рачун орбита, повлачи за собом потребу поправљања првобитно израчунате непоремећене путање. А осим овог, да тако кажемо, чисто техничког разлога, постоје и други, начелни, који захтевају примену *рачуна йойравки йуйања* и у току конструисања праве, поремећене, путање.

Најзад, главну етапу рада чини *рачун сйецијалних йоремећаја*, или, како већ рекосмо, нумеричко интеграљење диференцијалне једначине (1). Основа тога рачуна је Кеплерова путања тела. На тај начин долазимо до низа положаја објекта на стварној путањи, у прошлости или будућности, а разлике између посматраних и рачунатих положаја говоре о тачности целог нашег рада.

3. ЈЕДИНИЦЕ ЗА МАСУ, ДУЖИНУ И ВРЕМЕ.

Пре него што пређемо на проучавање Кеплерова кретања, обрадићемо укратко нека општа питања, односно подсетити се на неке чињенице, већ познате из Опште или Положајне астрономије.

3.1. Јединица за масу. — За јединицу масе усвојена је маса Сунца, дакле у свим потребним једначинама стављамо да је $M = 1$. У тим јединицама изражене, масе великих планета (заједно са њиховим атмосферама и сателитима) су:

Меркур,	$m_1 = 1 : 6\,000\,000$	$= 0.0000\,00167$,
Венера,	$m_2 = 1 : \quad 408\,000$	$= 0.0000\,02451$,
Земља,	$m_3 = 1 : \quad 329\,390$	$= 0.0000\,03036$,
Марс,	$m_4 = 1 : 3\,093\,500$	$= 0.0000\,00323$,
Јупитер,	$m_5 = 1 : \quad 1\,047.355$	$= 0.0009\,54786$,
Сатурн,	$m_6 = 1 : \quad 3\,501.6$	$= 0.0002\,85584$,
Уран,	$m_7 = 1 : \quad 22\,869$	$= 0.0000\,43727$,
Нептун,	$m_8 = 1 : \quad 19\,314$	$= 0.0000\,51776$,
Плутон,	$m_9 = 1 : 4\,000\,000$	$= 0.0000\,00250$.

Ове вредности одређиване су различитим поступцима, са неједнаком тачношћу, па се сви бројеви из ове таблице не могу сматрати за дефинитивне износе. Но овде су нам оне потребне као масе главних *поремећајних тела*, дакле за рачун стварног кретања малих планета или комета, а за те сврхе су саопштени бројеви довољно тачни. Једино бисмо ипак додали да су највећа одступања могућа код масе Меркура и Плутона. Шта више, из кретања неких малих планета и комета настоји се побољшати износ за масу Меркура, док о Плутону, као поремећајном телу у кретању планетоида и комета, скоро да уопште и не водимо рачуна.

Што се тиче маса малих планета и комета, оне су толико мале у поређењу са масама великих планета (а, тим пре, и у поређењу са Сунчевом!), да се практично у свим случајевима могу занемарити. Па ипак, ми ћемо у овом курсу задржати, код свих важнијих релација, фактор који садржи масу тела. Прелаз на одговарајуће једначине, у којима се маса сме занемарити, неће никад представљати тешкоће, нити губитак времена.

3.2. Јединица за дужину. — Одавно се небеска растојања упоређују са Земљиним даљином од Сунца, но тек почетком прошлог века приступило се тачнијем дефинисању јединице за дужину у Астрономији. Да би израчунао вредност гравитационе константе f, *C. F. Gauss* је применио тачан облик Трећег Кеплерова закона

$$4\,\pi^2\,a^3 = f\,(M+m)\,P^2$$

на кретање Земље. У његово време биле су познате вредности масе Земље и трајања њене сидеричке револуције око Сунца

$$m_3 = M : 354\,710, \qquad P = 365.256\,3835 \text{ дана.}$$

Масу Сунца је усвојио за јединицу ($M = 1$), а за јединицу дужине усвојио је велику полуосу Земљине хелиоцентричне путање, то јест ставио да је $a = 1$. Тако је онда из горње једначине добио да је

$$\sqrt{f} = 2\,\pi\,a^{3/2}\,(M+m_3)^{-1/2}\,P^{-1} = k = 0.017\,2020\,9895,$$

одакле се изводи и

$$k^\circ = 0^\circ.985\,6077 \quad \text{и} \quad k'' = 3548''.18761.$$

Константа k, са димензијом

$$[k] = L^{3/2}\,M^{-1/2}\,T^{-1},$$

названа је *Гаусова константа.*

Међутим, током XIX-ог века одређени су тачније износи и за m_3 и за P, што је за собом повлачило потребу промене износа константе k, уколико се жели задржати горња дефиниција јединице за дужину. А како је, у међувремену, обављен био веома велик број рачуна кретања небеских тела са Гаусовом вредношћу за k, одустало се од њене промене, већ је напуштена дефиниција јединице за дужину помоћу велике полуосе Земљине путање. Та дефиниција је замењена следећом: *астрономска јединица* (скраћено: a.j.) за дужину биће она, у којој ће бити изражена велика полуоса Земљине елиптичке хелиоцентричне путање, a, када се израчуна помоћу Трећег Кеплерова закона, у коме $k^2=f$ има оригиналну Гаусову вредност

$$k=0.017\,2020\,9895,$$

а m_3 и P — најпоузданије савремене вредности. Тако је, на пример, крајем прошлог века *S. Newcomb* добио да је

$$a=1.0000\,0023 \text{ a.j.},$$

што је и данас усвојена вредност.

Данас познате вредности масе система Земља+Месец и трајања његове револуције око Сунца свакако ће се поправити, у ближој или даљој будућности, ма да ће те поправке бити веома мале. Па ипак, да би се избегла свака неодређеност и начелно одбацила потреба вођења рачуна о поремећајним дејствима других тела и узрока, астрономска јединица се данас дефинише као полупречник Кеплерове кружне путање тела занемарљиво мале масе, чија револуција око Сунца траје

$$\frac{2\pi}{k} \text{ ефемеридских дана } = 365.25689\,83263 \text{ ефемеридских дана.}$$

Гаусова константа k има сада фиксирану вредност

$$k=0.017\,2020\,9895\,0000\ldots.$$

Дужина астрономске јединице је 149.67×10^6 km.

3.3. Јединица за време. — До 1960. године јединица за време у Астрономији је била секунда средњег времена, то јест 86400-ти део времена интервала између двају узастопних (горњих) пролаза средњег Сунца кроз меридијан. Дефиниција је, дакле, била везана за ротацију Земље. Одавно се знало да ротација Земље нипошто не мора бити униформна; још је Њутн у својим „*Принципима*“ написао да је „могуће да не постоји једнолико кретање којим би се време могло тачно мерити“. Па ипак, тек су се у првој половини овог века неједнакости у Земљиној ротацији установиле са колико-толиком извесношћу, из простог разлога што су оне веома мале. Математичка анализа Земљине ротације је врло сложена, због великог броја фактора који на њу утичу, а који још нису испитани са потребном тачношћу (наведимо само питање унутрашњег састава Земље, сезонског кретања ледених, водених и ваздушних маса на њеној површини, као и Месечево дејство).

Због тог данас доказаног неједноликог трајања Земљине ротације, јединица за време дефинише се као део трајања Земљине револуције око Сунца. Узимајући за основу Newcomb-ову теорију Земљина кретања, *ефемеридска секунда*, јединица за време у Астрономији од 1960. године, дефинише се као

$$1 : 31\,556\,925.9747$$

дужине трајања тропске године у тренутку 1900, јануар 0, 12^h ET. Трајање тропске године није константно, и то због поремећајног дејства великих планета на кретање Земље, па је зато фиксирано на који тренутак се то трајање односи. Употребљена скраћеница ET односи се на тзв. *ефемеридско време*, чија је јединица управо ефемеридска секунда. Назив је изабран из чисто практичних разлога, да се не би потезала филозофска питања о времену „које тече једнолико" и слично. Данас се ефемеридско време одређује посредно, помоћу светског времена (UT), првенствено из посматрања Месечева кретања. Веза између ова два времена је

$$UT = ET - \Delta T, \qquad \text{односно} \qquad ET = UT + \Delta T.$$

Поправка ΔT позната је, са довољном тачношћу, за XIX-ти и прву половину овог века. За будућност се само могу екстраполирати њене више или мање
13 поуздане вредности, а за прошлост исто тако.

По аналогији са светским временом, 60 ефемеридских секунди чини ефемеридску минуту, 3600 ефемеридских секунди — ефемеридски час, а 86400 ефемеридских секунди — ефемеридски дан. Или, како се још каже, минуту или час или дан ефемеридског времена.

Но како се посматрања још увек обављају у односу на светско време, а прелаз на ефемеридско врши тек накнадно, то ћемо у овом курсу врло често још употребљавати светско време.

3.4. Гаусов дан. — Својеврсну „јединицу" за време добивамо настојећи да нумеричке рачуне што више упростимо. Ако, наиме, у диференцијалној једначини Кеплерова кретања

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2} = -\mu r^{-3} \mathbf{r}, \quad \text{где је} \quad \mu = k^2 (1+m),$$

извршимо смену

$$\tau = \sqrt{\mu}\, t,$$

биће

$$d\tau = \sqrt{\mu}\, d t, \qquad d\tau^2 = \mu\, d t^2,$$

па она постаје

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d \tau^2} = -r^{-3} \mathbf{r}.$$

Тако се, онда, ни у њеним интегралима неће више појављивати константа $\mu = k^2(1+m)$. Очигледно је, међутим, да нови аргумент τ нема димензију времена; то је само помоћна величина, са димензијом

$$[\tau] = [k \sqrt{1+m}\, t] = L^{3/2} M^{-1/2} T^{-1} \cdot M^{1/2} \cdot T = L^{3/2}.$$

Времени интервал од $t_b - t_a$ средњих (или ефемеридских) дана износи

$$\tau = k\sqrt{1+m}\ (t_b - t_a)$$

средњих (или ефемеридских) *Гаусових дана.* Један средњи (или ефемеридски) Гаусов дан износи, стога,

$$\frac{1}{k\sqrt{1+m}} = \frac{58.13244\,08670}{\sqrt{1+m}} \text{ средњих (или ефемеридских) дана.}$$

А у нашем случају изучавања кретања малих планета или комета, где можемо да занемаримо масу тела ($m=0$), биће средњи (или ефемеридски) Гаусов дан бројно једнак, просто,

$$\frac{1}{k} = 58.13244\,08670 \text{ средњих (или ефемеридских) дана.}$$

После оваквог увођења „јединице за време" видимо да у свим изразима у којима се појављује константа μ (и где смемо ставити да је $m=0$), можемо узети да је $\mu=1$, што за собом повлачи да су сви времени интервали у тим једначинама изражени у средњим (или ефемеридским) Гаусовим данима. О томе морамо нарочито повести рачуна код извода по времену свих величина, јер је, према дефиницији,

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{k}\frac{dU}{dt}, \quad \text{дакле и} \quad \frac{dU}{dt} = k\frac{dU}{d\tau},$$

и уопште

$$\frac{d^n U}{d\tau^n} = k^{-n}\frac{d^n U}{dt^n}, \qquad \frac{d^n U}{dt^n} = k^n \frac{d^n U}{d\tau^n}.$$

4. **КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ И КООРДИНАТЕ НЕБЕСКИХ ТЕЛА.** Положаје тела, чије кретање проучавамо, представљамо у неком одабраном координатном систему. Најчешће ћемо користити два координатна система: екваторски и еклиптички. Основна раван првог система је раван небеског екватора за утврђену епоху, а основни правац — правац од Сунца, координатног почетка, ка пролећној еквинокцијској тачки за исту епоху. Основна раван другог система је раван еклиптике, такође фиксирана за одређену епоху, а дефиниција основног правца остаје непромењена.

Помоћу ових основних равни и праваца у њима дефинишемо правоугле праволинијске и сферне координате тела. У хелиоцентричном екваторском систему оперишемо искључиво са правоуглим координатама. За позитивни део x-осе таквог система усвајамо основни правац ка γ-тачки. Y-оса лежи у равни екватора; позитивни део јој је онај који са позитивним делом x-осе заклапа средишњи угао од 90°, рачунат у директном смеру. Z-оса је нормална на екваторској равни, а позитивни смер јој је смер ка северном небеском полу. Координате у овом систему означаваћемо са x, y и z, па је вектор положаја тела

$$\mathbf{r} = \{x,\ y,\ z\} \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$$

где су $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ јединични вектори оса координатног система.

Данас се скоро искључиво користи епоха астрономског (*Besselovog*) почетка (тропске) 1950. године, дакле тренутак 1950, јануар 0.9234 *ET*, такозвани нормални еквинокцијум, са ознаком 1950.0. Уколико желимо да пређемо на неку другу епоху, координате за 1950.0, са ознакама x_0, y_0 и z_0, трансформишемо по обрасцима

$$\begin{aligned} x &= X_x x_0 + Y_x y_0 + Z_x z_0, \\ y &= X_y x_0 + Y_y y_0 + Z_y z_0, \\ z &= X_z x_0 + Y_z y_0 + Z_z z_0, \end{aligned}$$

у координате x, y и z за жељену епоху. Вредности прецесионих величина S_s $(S = X,\ Y,\ Z;\ s = x,\ y,\ z)$ налазимо из посебних таблица, које су састављене на основи редова

$$\begin{aligned} X_x &= 1.0000\,0000 - 0.0002\,9697\,T^2 - 0.0000\,0013\,T^3, \\ Y_x = -X_y &= -0.0223\,4988\,T - 0.0000\,0676\,T^2 + 0.0000\,0221\,T^3, \\ Z_x = -X_z &= -0.0097\,1711\,T + 0.0000\,0207\,T^2 + 0.0000.0096\,T^3, \\ Y_y &= 1.0000\,0000 - 0.0002\,4976\,T^2 - 0.0000\,0015\,T^3, \\ Y_z = Z_y &= - 0.0001\,0859\,T^2 - 0.0000\,0003\,T^3, \\ Z_z &= 1.0000\,0000 - 0.0000\,4721\,T^2 + 0.0000\,0002\,T^3, \end{aligned}$$

одакле их и израчунавамо, уколико немамо таблице при руци. T је времени интервал, изражен у јулијанским столећима (од по 36525 дана), а рачунат од 1950.0. — За обрнути прелаз, од неке епохе на 1950.0, користимо

$$\begin{aligned} x_0 &= X_x x - Y_x y - Z_x z, \\ y_0 &= -X_y x + Y_y y + Z_y z, \\ z_0 &= -X_z x + Y_z y + Z_z z. \end{aligned}$$

Јасно је да све што је овде речено за вектор положаја тела, вреди и за произвољни вектор

$$\mathbf{A} = \{A_1,\ A_2,\ A_3\}, \quad \text{односно} \quad \mathbf{A} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k}.$$

На сличан начин дефинишемо хелиоцентричне правоугле еклиптичке координате, у односу на основну раван и основни правац тога система. За координате тела користићемо ознаке

$$\mathbf{r} = \{x_e,\ y_e,\ z_e\}, \quad \text{односно} \quad \mathbf{r} = x_e\,\mathbf{i}_e + y_e\,\mathbf{j}_e + z_e\,\mathbf{k}_e,$$

то јест, за произвољни вектор **A**,

$$\mathbf{A} = \{A_{e1},\ A_{e2},\ A_{e3}\}, \quad \text{или} \quad \mathbf{A} = A_{e1}\,\mathbf{i}_e + A_{e2}\,\mathbf{j}_e + A_{e3}\,\mathbf{k}_e.$$

Познате су везе између координата ових двају система:

$$\begin{aligned} A_{e1} &= A_1, & A_1 &= A_{e1}, \\ A_{e2} &= A_2 \cos\varepsilon + A_3 \sin\varepsilon, & A_2 &= A_{e2} \cos\varepsilon - A_{e3} \sin\varepsilon, \\ A_{e3} &= -A_2 \sin\varepsilon + A_3 \cos\varepsilon, & A_3 &= A_{e2} \sin\varepsilon + A_{e3} \cos\varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

где је ε нагиб еклиптике. Он се даје у астрономским годишњацима, заједно са својим гониометријским функцијама. Средњи нагиб еклиптике је

$$\varepsilon = 23°27'08.''26 - 46.''845\,T - 0.''0059\,T^2 + 0.''00181\,T^3,$$

где је сада T времени интервал рачунат од 1900, јануар 0.5 $ET = J.D.$ 2 415 020.0, а изражен опет у јулијанским столећима. За 1950.0 одавде налазимо да је

$$\varepsilon = 23°26'44.''84 = 23.°44579,$$

дакле и

$$\sin\varepsilon = 0.3978\,8118,\quad \cos\varepsilon = 0.9174\,3695.$$

Јасно је да се у свим рачунима епоха нагиба еклиптике мора поклапати са епохом координатног система.

Као контролу рачуна по једначинама (1) увек користимо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_{e1}^2 + A_{e2}^2 + A_{e3}^2.$$

Од хелиоцентричних сферних координата у употреби су само еклиптичке: лонгитуда (l) и латитуда (b), за одређену епоху (координатног система), већ дефинисане у Положајној астрономији (прва — као угао, рачунат у директном смеру, између равни $X_e OZ_e$ и равни нормалне на $X_e O Y_e$, која садржи вектор $\mathbf{r}$; друга, као угао између равни $X_e O Y_e$ и вектора $\mathbf{r}$, позитиван ка северном полу еклиптике, негативан ка јужном). Ако је позната и даљина тела од Сунца, овим координатам се додаје и трећа: радијусвектор (r). Саме лонгитуда и латитуда дефинишу једино правац ка небеском телу. Тако, онда, за прелаз са сферних на правоугле координате, и обрнуто, користимо изразе

$$\begin{aligned} x_e &= r\cos b\cos l, & \qquad & \operatorname{tg} l = y_e : x_e,\\ y_e &= r\cos b\sin l, & \text{односно}\qquad & \operatorname{tg} b = z_e : \sqrt{x_e^2 + y_e^2},\\ z_e &= r\sin b, & & r = \sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2}. \end{aligned}$$

Квадрант лонгитуде и латитуде одређујемо према предзнацима од x_e, y_e и z_e, имајући на уму да је

$$0° \leqslant l < 360°, \qquad -90° \leqslant b \leqslant 90°.$$

Дејство прецесије на ове координате изводи се у Положајној астрономији, но потребне обрасце нећемо овде понављати, јер ове координате нећемо овде практично ни користити.

Означимо геоцентрични вектор положаја небеског тела са $\boldsymbol{\rho}$, а јединични са $\boldsymbol{\rho}_0$. Нека су његове екваторске правоугле координате ξ, η и ζ, то јест ставимо $\boldsymbol{\rho}_0 = \{\xi, \eta, \zeta\}$. Зато је увек

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Њих зовемо „косинуси праваца", јер су то, очигледно, косинуси углова између $\boldsymbol{\rho}$ и оса координатног система. Са тим ознакама ће правоугле екваторске геоцентричне координате небеског тела бити $\rho\xi$, $\rho\eta$ и $\rho\zeta$; ρ је геоцентрична даљина тела, интензитет вектора $\boldsymbol{\rho}$.

Сферне екваторске геоцентричне координате су ректасцензија (α) и деклинација (δ), којима додајемо и геоцентричну даљину (ρ). Дефиниција и ових сферних координата позната је из Положајне астрономије (и аналогна је оној за l и b). И овде је данас најчешће у употреби епоха 1950.0, а за прелаз са неке друге епохе на 1950.0 користимо обрасце

$$a = \alpha + \zeta_0,$$

$$\cos\delta_0 \sin a' = \cos\delta \sin a,$$

$$\cos\delta_0 \cos a' = \cos\delta \cos a \cos\theta - \sin\delta \sin\theta,$$

$$\sin\delta_0 = \cos\delta \cos a \sin\theta + \sin\delta \cos\theta,$$

$$\alpha_0 = a' + z.$$

Прецесионе величине ζ_0, θ и z узимамо из посебних таблица, састављених по редовима

$$\zeta_0 = -2304''997\, T - 1''093\, T^2 - 0''0192\, T^3,$$

$$\theta = -2004.298\, T + 0.426\, T^2 + 0.0416\, T^3,$$

$$z = -2304.997\, T - 0.302\, T^2 - 0.0179\, T^3.$$

За обрнут прелаз, са епохе 1950.0 (α_0, δ_0) на неку другу епоху (α, δ), користимо исте формуле, с тим што α_0, δ_0 смењујемо са α, δ, затим ζ_0 са $-z$, z са $-\zeta_0$ и θ са $-\theta$.

Везе између сферних и правоуглих координата у овом систему су

$$\rho\xi = \rho\cos\delta\cos\alpha, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \eta : \xi,$$

$$\rho\eta = \rho\cos\delta\sin\alpha, \qquad \text{односно} \qquad \operatorname{tg}\delta = \zeta : \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

$$\rho\zeta = \rho\sin\delta, \qquad \rho = \sqrt{(\rho\xi)^2 + (\rho\eta)^2 + (\rho\zeta)^2},$$

Контрола: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$.

Сферне еклиптичке геоцентричне координате, лонгитуду (λ) и латитуду (β), само ћемо поменути, пошто се оне данас ретко користе у изучавању кретања малих планета и комета. Са познатом ректасцензијом и деклинацијом тела, ове координате израчунавамо по обрасцима

$$\cos\lambda\cos\beta = \cos\delta\cos\alpha,$$

$$\sin\lambda\cos\beta = \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon,$$

$$\sin\beta = -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon,$$

док за обрнути прелаз имамо

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\beta\cos\lambda,$$

$$\sin\alpha\cos\delta = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon,$$

$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon.$$

Хелиоцентричне и геоцентричне координате небеског тела можемо међусобно повезати чим уведемо координате Сунца у геоцентричном, односно координате Земље у хелиоцентричном систему. Нека је **R** геоцентрични вектор положаја Сунца. Тада је

$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}+\mathbf{R}, \qquad \text{односно} \qquad \mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}-\mathbf{R}. \tag{2}$$

А ако је у екваторском систему $\mathbf{R}=\{X,\ Y,\ Z\}$, биће

$$\rho\xi=x+X, \qquad \rho\eta=y+Y, \qquad \rho\zeta=z+Z. \qquad (3)$$

У хелиоцентричном екваторском систему су Земљине координате, очигледно, $-X,\ -Y,\ -Z$; у астрономским годишњацима се дају, за сваки дан или за сваких пола дана, вредности координата Сунца X, Y и Z, тако да ћемо **R** сматрати познатим за сваки тренутак. Исто тако су утабличене и геоцентричне даљине Сунца, R,

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Ове координате и даљине дају се у астрономским јединицама.

За геоцентричне еклиптичке сферне координате Сунца уобичајене су ознаке L за лонгитуду, а B за латитуду. Како је

$$X_e=R\cos B\cos L, \qquad Y_e=R\cos B\sin L, \qquad Z_e=R\sin B,$$

то прва једначина 3 (8) може да се пише, за еклиптички координатни систем, и у облику

$$\rho\cos\lambda\cos\beta=r\cos l\cos b+R\cos L\cos B,$$
$$\rho\sin\lambda\cos\beta=r\sin l\cos b+R\sin L\cos B,$$
$$\rho\sin\beta=r\sin b+R\sin B.$$

Без тешкоћа се могу одмах исписати и одговарајуће једначине за екваторски систем, уводећи ректасцензију и деклинацију Сунца, као и сферне хелиоцентричне координате тела. Међутим, како смо већ навели, у екваторском систему ћемо највише користити правоугле координате.

Најзад, посматрања се обављају са неке тачке Земљине површине, а не из њена средишта. Зато уводимо и тзв. топоцентричне координатне системе. Дефиниције основних равни и основних праваца ранијих система остају непромењене, само за координатни почетак усвајамо место посматрања. Користићемо искључиво екваторски топоцентрични систем. Ако је вектор топоцентричног положаја небеског тела $\boldsymbol{\rho}_T$, а **d** вектор геоцентричног положаја места посматрања, имаћемо да је

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_T+\mathbf{d}, \qquad \text{односно} \qquad \boldsymbol{\rho}_T=\boldsymbol{\rho}-\mathbf{d}, \tag{3}$$

у чему је садржано *дејство паралаксе* на положај тела.

Сферне екваторске геоцентричне координате места посматрања на Земљиној површини дефинисаћемо по аналогији са овим координатама небеских тела. Прва координата θ нека је угао између полуравни меридијана γ-тачке и полуравни меридијана места на Земљи — то је, дакле, часовни угао γ-тачке, или месно (локално) звездано време. Друга координата φ' нека је угао између вектора **d** и екваторске равни; позитивна од екваторске равни (0°) ка северном полу (+90°), а негативан — од исте равни ка јужном полу (—90°). То је геоцентрична ширина тачке на Земљи. Зато пишемо

$$\mathbf{d} = \{d \cos \varphi' \cos \theta, \quad d \cos \varphi' \sin \theta, \quad d \sin \varphi'\};$$

d је интензитет вектора **d**, даљина места посматрања од Земљина средишта. Међутим, из чисто рачунских разлога уводимо вектор топоцентричног положаја Земљина средишта,

$$\Delta \mathbf{R} = \{\Delta X, \ \Delta Y, \ \Delta Z\} = -\mathbf{d} = \{C' \cos \varphi', \ C' \sin \varphi', \ C''\}, \tag{4}$$

где је

$$C' = -d \cos \varphi', \qquad C'' = -d \sin \varphi',$$

за које величине се често користе и ознаке Δ_{XY} и Δ_Z. Оне су, очигледно, константне за свако поједино место посматрања. Изражавају се у астрономским јединицама и дају у годишњацима за сваку опсерваторију. За Београд је, на пример,

$$C' = -0.000\,0303, \quad C'' = -0.000\,0299.$$

Тако онда из једначина (2), (3) и (4) произилази

$$\mathbf{r} = \rho_T - (\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}) = \mathbf{r}_T - \mathbf{R}_T, \tag{5}$$

чиме непосредно повезујемо топоцентрична посматрања положаја тела

$$\rho_T = \{\rho_T \cos \alpha_T \cos \delta_T, \quad \rho_T \sin \alpha_T \cos \delta_T, \quad \rho_T \sin \delta_T\},$$

са хелиоцентричним положајима $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$. Топоцентричне положаје Сунца, $\mathbf{R}_T = \mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}$, видимо да добивамо алгебарским додавањем паралактичких поправки (4), тј.

$$\Delta X = C' \cos \theta, \qquad \Delta Y = C' \sin \theta, \qquad \Delta Z = C'',$$

на геоцентричне координате Сунца X, Y и Z из годишњака:

$$X_T = X + \Delta X, \qquad Y_T = Y + \Delta Y, \qquad Z_T = Z + \Delta Z.$$

Топоцентричну даљину Сунца морамо сада израчунавати из

$$R_T = \sqrt{X_T^2 + Y_T^2 + Z_T^2}.$$

На тај начин узимамо у обзир дејство паралаксе код новопронађених малих планета или комета, кад у први мах не знамо њихове даљине од Земље. Уколико се ради о телу позната кретања, дакле познатих даљина ρ, паралаксу можемо обрачунати и непосредно по (приближним) обрасцима Положајне астрономије

$$\alpha = \alpha_T + \Delta \alpha, \qquad \delta = \delta_T + \Delta \delta,$$

$$\Delta \alpha = \frac{\pi}{\rho} (d \cos \varphi') \sin H \sec \delta,$$

$$\Delta \delta = \frac{\pi}{\rho} [(d \sin \varphi') \cos \delta - (d \cos \varphi') \cos H \sin \delta],$$

који су довољно тачни за велику већину малих планета и комета. Овде је π паралакса Сунца, а H часовни угао тела, дакле $H = \theta - \alpha$.

ГЛАВА ПРВА

КЕПЛЕРОВО КРЕТАЊЕ

У Уводу смо већ довољно истакли не само потребу, него и неопходност претходног конструисања Кеплерове путање мале планете или комете, којој желимо да изучавамо стварно кретање. Први корак ка том циљу је интеграљење диференцијалне једначине непоремећена кретања, то јест једначине 2 (4) Увода. Тај део рада обављен је већ у Небеској механици. Но ми ћемо га овде ипак поновити, у најкраћим потезима, колико да читаоца на то потсетимо, толико и да свим потребним релацијама дамо онај облик, који ћемо у овом курсу користити.

5. **ИНТЕГРАЛИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КЕПЛЕРОВА КРЕТАЊА.** Кеплерово кретање небеских тела, описано диференцијалном једначином

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2} = -\mu r^{-3} \mathbf{r}, \qquad \mu = k^2 (1+m), \tag{1}$$

поседује, као централно кретање, *интеграл* (двоструке) *секторске брзине*

$$[\mathbf{r}\,\mathbf{v}] = \mathbf{C} = \mathrm{const}, \tag{2}$$

што елементарним путем изводимо множећи (1) векторски са $\mathbf{r}$ и пишући да је

$$\left[\mathbf{r}\,\frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2}\right] = \left[\mathbf{r}\,\frac{d \mathbf{v}}{d t}\right] = \frac{d}{d t}[\mathbf{r}\,\mathbf{v}] = 0,$$

што после интеграљења даје (2), са интеграционом константом $\mathbf{C}$. Једначина (2) представља Други Кеплеров закон планетског кретања и изражава чињеницу да се оно врши у непокретној равни, која пролази кроз Сунце. Непромењиви вектор **C** нормалан је на путањској равни.

Да бисмо добили други векторски интеграл од (1), помножићемо ту једначину векторски са **C**:

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}\, t^2}\, \mathbf{C}\right] = -\mu r^{-3} [\mathbf{r}\, \mathbf{C}]. \tag{3}$$

Леву страну пишемо, због (2), као

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}\, t^2}\, \mathbf{C}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}\, \mathbf{v}}{\mathrm{d}\, t}\, \mathbf{C}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} [\mathbf{v}\, \mathbf{C}],$$

а десну као

$$-\mu r^{-3} [\mathbf{r}\, \mathbf{C}] = -\mu r^{-3} [\mathbf{r}\, [\mathbf{r}\, \mathbf{v}]] = -\mu r^{-3} (\mathbf{r}\, \mathbf{v})\, \mathbf{r} + \mu r^{-1}\, \mathbf{v}.$$

Из $(\mathbf{r}\,\mathbf{r}) = r^2$ следује да је $(\mathbf{r}\,\mathbf{v}) = r \dfrac{\mathrm{d}\, r}{\mathrm{d}\, t}$, па ћемо приметити да је

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} (\mu r^{-1}\, \mathbf{r}) = -\mu r^{-2} \frac{\mathrm{d} r}{\mathrm{d}\, t}\, \mathbf{r} + \mu r^{-1}\, \mathbf{v} =$$
$$= -\mu r^{-3} (\mathbf{r}\, \mathbf{v})\, \mathbf{r} + \mu \mathbf{r}^{-1}\, \mathbf{v} = -\mu r^{-3} [\mathbf{r}\, \mathbf{C}].$$

Тако видимо да се (3) своди на

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} [\mathbf{v}\, \mathbf{C}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} (\mu r^{-1}\, \mathbf{r}), \text{ то јест } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} ([\mathbf{v}\, \mathbf{C}] - \mu r^{-1}\, \mathbf{r}) = 0.$$

После интеграљења добивамо тзв. *Laplace-ов интеграл*

$$[\mathbf{v}\, \mathbf{C}] - \mu r^{-1}\, \mathbf{r} = \mathbf{D} = \mathrm{const}, \tag{4}$$

са интеграционом константом **D**. Није тешко проверити, развијајући векторски производ $[\mathbf{v}\, \mathbf{C}]$, да овај вектор **D** лежи у путањској равни, то јест да је

$$(\mathbf{C}\, \mathbf{D}) = 0. \tag{5}$$

Или, другим речима, интеграли **C** и **D** нису независни; шест њихових компоненти, C_i и D_i, $i = 1, 2, 3$, дају само пет независних скаларних константи интеграљења диференцијалне једначине (1). Зависна скаларна константа увек се може израчунати из (5), тј.

$$C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3 = 0.$$

До шесте скаларне константе доћи ћемо нешто заобилазнијим путем: одредићемо прво једначину путање небеског тела. Зато помножимо (4) скаларно са **r**, па ћемо добити, према (2), да је

$$(\mathbf{D}\, \mathbf{r}) = (\mathbf{r}\, [\mathbf{v}\, \mathbf{C}]) - \mu r = (\mathbf{C}\, [\mathbf{r}\, \mathbf{v}]) - \mu r = C^2 - \mu r.$$

С друге стране је

$$(\mathbf{D}\,\mathbf{r}) = D\,r\,\cos\,v,$$

а v је угао између $\mathbf{D}$ и $\mathbf{r}$, дакле — у путањској равни. Зато је

$$C^2 - \mu\,r = D\,r\cos v \quad \text{или} \quad r = \frac{\dfrac{C^2}{\mu}}{1 + \dfrac{D}{\mu}\cos v} \tag{6}$$

Једначина конусног пресека ексцентричности e, велике полуосе a и параметара $p = a\,(1 - e^2)$, у поларним координатама r и v, је

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}.$$

Поређењем ове са једначином (6) закључујемо:

а) да једначина (6) изражава Први Кеплеров закон;

б) да је константни вектор $\mathbf{D}$ усмерен ка перихелу путање (пошто смо поређење извршили са једначином конусног пресека у којој се угао v рачуна од правца ка темену криве);

в) да је интензитет константног вектора $\mathbf{C}$

$$C = \sqrt{\mu\,p} = \sqrt{\mu\,a\,(1 - e^2)}\,; \tag{7}$$

г) да је интензитет константног вектора $\mathbf{D}$

$$D = \mu\,e. \tag{8}$$

Угао v је *права аномалија* тела.

Уведимо сада правоугли (хелиоцентрични) координатни систем у равни путање. Јединични вектор ξ-осе нека буде $\mathbf{D} : D$; полажемо је, дакле, у апсидну линију путање, а усмеравамо ка перихелу. Праву аномалију v рачунамо од те осе у директном смеру. Тело пролаи кроз η-осу, и то кроз њен позитивни део, у тренутку када му је права аномалија $v = 90°$. Зато је јединични вектор η -осе $[\mathbf{C}\,\mathbf{D}] : C\,D$. Уобичајене ознаке су

$$\frac{\mathbf{D}}{D} = \mathbf{P}, \quad \frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{D}]}{C\,D} = \mathbf{Q}, \quad \frac{\mathbf{C}}{C} = \mathbf{R},$$

тако да је за ове јединичне векторе

$$[\mathbf{P}\,\mathbf{Q}] = \mathbf{R}, \quad [\mathbf{Q}\,\mathbf{R}] = \mathbf{P}, \quad [\mathbf{R}\,\mathbf{P}] = \mathbf{Q}$$

и

$$(\mathbf{P}\,\mathbf{Q}) = (\mathbf{Q}\,\mathbf{R}) = (\mathbf{R}\,\mathbf{P}) = 0.$$

Координате ξ и η тела су

$$\xi = r\cos v, \quad \eta = r\sin v, \tag{9}$$

а вектор положаја

$$\mathbf{r} = \xi\,\mathbf{P} + \eta\,\mathbf{Q}. \tag{10}$$

За брзину небеског тела налазимо

$$\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}\,\mathbf{P}+\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}\,\mathbf{Q}=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}\cos\nu-r\,\frac{\mathrm{d}\,\nu}{\mathrm{d}\,t}\sin\nu\right)\mathbf{P}+\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}\sin\nu+r\,\frac{\mathrm{d}\,\nu}{\mathrm{d}\,t}\cos\nu\right)\mathbf{Q}. \tag{11}$$

Једначине (10) и (11) представљају нам формалне интеграле наше диференцијалне једначине (1). А ефективно ће то бити чим представимо праву аномалију тела као функцију времена. Тада ћемо моћи непосредно користити (6) и (9), да бисмо применили (10) и (11). Пет независних скаларних константи интеграљења садржане су у **P**, **Q** и једначини (6); шеста ће се стога, очигледно, садржавати у траженој релацији између праве аномалије и времена.

Да ову везу нађемо, формирајмо диференцијалну једначину за праву аномалију. Помоћу последњих двеју једначина израчунајмо векторски производ између вектора положаја и брзине тела. Добићемо да је

$$[\mathbf{r}\,\mathbf{v}]=\left(\xi\,\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}-\eta\,\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}\right)[\mathbf{P}\,\mathbf{Q}],$$

дакле за интензитет двоструке секторске брзине можемо писати

$$C=\xi\frac{\mathrm{d}\,\eta}{\mathrm{d}\,t}-\eta\,\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t}, \tag{12}$$

или, у поларним координатама,

$$C=r\,\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}\sin\nu\cos\nu+r^2\,\frac{\mathrm{d}\,\nu}{\mathrm{d}\,t}\cos^2\nu-$$

$$-\,r\,\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}\sin\nu\cos\nu+r^2\,\frac{\mathrm{d}\,\nu}{\mathrm{d}\,t}\sin^2\nu=r^2\,\frac{\mathrm{d}\,\nu}{\mathrm{d}\,t}. \tag{13}$$

То је тражена диференцијална једначина за праву аномалију: добро познати израз за константну двоструку секторску брзину тела при централном кретању. — Радијусвектор r нам је већ познат као функција праве аномалије — то је једначина путање (6). Елиминишући, дакле, r из (6) и (13), лако ћемо доћи до диференцијалне једначине са раздвојеним промењљивим

$$\frac{\mathrm{d}\,\nu}{\left(1+\dfrac{D}{\mu}\cos\nu\right)^2}=\frac{\mu^2}{C^3}\,\mathrm{d}t.$$

После интеграљења налазимо

$$\int\frac{\mathrm{d}\,\nu}{\left(1+\dfrac{D}{\mu}\cos\nu\right)^2}=\frac{\mu^2}{C^3}\,(t-T). \tag{14}$$

Тако смо добили, засад само формално, и шесту скаларну константу интеграљења T, независну од **C** и **D**.

Израчунавање интеграла на левој страни једначине (14) зависи од вредности константе $D:\mu$ — ексцентричности конусног пресека. Из (6) знамо да ће путања бити

$$\text{круг, за } \frac{D}{\mu}=0;$$

$$\text{елипса, за } 0<\frac{D}{\mu}<1;$$

$$\text{парабола, за } \frac{D}{\mu}=1;$$

$$\text{хипербола, за } \frac{D}{\mu}>1.$$

По каквој ће се путањи тело кретати, тј. какву ће вредност имати величина $\frac{D}{\mu}$, зависи, како видимо из (2) и (4), од вредности почетних услова

$$\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t_0), \quad \mathbf{v}_0=\mathbf{v}(t_0),$$

за произвољни тренутак t_0. Но непосреднији критеријум за зависност врсте путање од почетних услова кретања извешћемо на следећи начин.

Из (4) рачунамо квадрат интензитета Лапласова интеграла:

$$D^2=(\mathbf{D}\,\mathbf{D})=([\mathbf{v}\,\mathbf{C}]\,[\mathbf{v}\,\mathbf{C}])-2\,\mu\,r^{-1}(\mathbf{r}\,[\mathbf{v}\,\mathbf{C}])+\mu^2\,r^{-2}\,(\mathbf{r}\,\mathbf{r})=$$
$$=C^2\,v^2-2\,\mu\,C^2\,r^{-1}+\mu^2,$$

одакле је

[illegible] $\longrightarrow$
$$v^2-2\,\mu\,r^{-1}=\frac{1}{C^2}(D^2-\mu^2)=h=\text{const}. \tag{15}$$

Ово је тзв. *интеграл живе силе*. Константу h изражавамо, једначинама (7) и (8), помоћу геометријских елемената путање:

$$h=\frac{1}{C^2}\;(D^2-\mu^2)=\frac{1}{\mu\,p}\;(\mu^2\,e^2-\mu^2)=\frac{\mu\,(e^2-1)}{a\,(1-e^2)}=-\frac{\mu}{a}\,.$$

Тако се интеграл живе силе може писати и у облику

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right). \tag{16}$$

Коначно, критеријум за врсту путање сада можемо изрећи и овако:

кретање по кругу — за $v^2=\frac{\mu}{a}=\text{const}$,

кретање по елипси — за $h<0$,

кретање по параболи — за $h=0$,

кретање по хиперболи — за $h>0$.

Ако су нам, дакле, дати почетни услови кретања $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{v}_0=\mathbf{v}(t_0)$ за произвољни тренутак t_0,

$$\mathbf{r}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\},\qquad \mathbf{v}_0=\{x_0',\ y_0',\ z_0'\},$$

израчунаћемо, према (15),

$$h=x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2-2\,\mu\,(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{-1/2},$$

па применити наведени критеријум. За кретање по кругу потребно је да буде

$$x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2=\mu\,(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{-1/2}$$

за свако t_0.

6. **КЕПЛЕРОВЕ ПУТАЊЕ.** Од почетних услова зависи, како видимо, по каквој врсти путање ће се небеско тело кретати око Сунца, под претпоставком да у простору постоје само ова два тела. У овом курсу ћемо се ограничити на три врсте непоремећених путања: кружне, елиптичке и параболичке.

6.1. Кретање по кругу. — У случају кретања по кругу имамо да је

$$D=\mu\,e=0,\qquad C=\sqrt{\mu\,p}=\sqrt{\mu\,a},\qquad r=a=\text{const}.$$

И вектор **D** је једнак нули (перихел путање је неодређен), па конвенцијом усвајамо неки константни јединични вектор **P** у путањској равни, од кога рачунамо *аргументе латитуде тела*, угао u:

$$(\mathbf{r}\,\mathbf{P})=r\ \cos\ u=a\ \cos\ u.$$

Зато ће бити

$$\mathbf{r}=a\,(\cos\ u\ \mathbf{P}+\sin\ u\ \mathbf{Q}),$$

при чему је јединични вектор **Q** нормалан на **P**, а лежи у путањској равни. Везу између угла u и времена добивамо из (14), што се сада своди на

$$\int\limits_{u_0}^{u} du=\mu^2\,(\mu\,a)^{-3/2}\,(t-t_0),$$

то јест, на

$$u=u_0+n\,(t-t_0).$$

Овде смо увели (константно) *средње сидеричко дневно кретање* тела

$$n=\sqrt{\mu}\ a^{-3/2}.$$

u_0 је договорно усвојена вредност аргумента латитуде за епоху t_0. Константну брзину кретања у овом случају смо већ нашли из интеграла живе силе:

$$v=\sqrt{\mu\,a^{-1}}.$$

Најзад, диференцирањем израза за вектор положаја лако налазимо и

$$\mathbf{v} = -a\,n\,(\sin u\,\mathbf{P} - \cos u\,\mathbf{Q}).$$

6.2. Кретање по елипси. — При кретању по елипси константа h из интеграла живе силе (15) је увек негативна. Зато ћемо, уместо ње, увести позитивну константу ε:

$$\varepsilon^2 = -h = (\mu^2 - D^2)\,C^{-2} = \mu\,a^{-1}, \tag{1}$$

па одмах прећи на извођење једначине (14).

Да израчунамо интеграл на левој страни те једначине, где је сад $0 < \dfrac{D}{\mu} < 1$, увешћемо нову променљиву E сменом

$$\left(1 + \frac{D}{\mu}\cos v\right)^{-1} = \frac{\mu}{C^2\varepsilon^2}(\mu - D\cos E). \tag{2}$$

Одавде је, прво,

$$\cos v = \frac{-D + \mu\cos E}{\mu - D\cos E}, \tag{3}$$

где смо користили и (1), а, затим,

$$\sin v = \sqrt{1 - \cos^2 v} = \frac{C\,\varepsilon\sin E}{\mu - D\cos E}. \tag{4}$$

Потом диференцирамо (2) по времену и добивамо, после нешто сређивања,

$$\left(1 + \frac{D}{\mu}\cos v\right)^{-2}\sin v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu^2}{C^2\varepsilon^2}\sin E\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},$$

или, са (4),

$$\frac{\mathrm{d}v}{\left(1 + \dfrac{D}{\mu}\cos v\right)^2} = \frac{\mu^2}{C^3\varepsilon^3}(\mu - D\cos E)\,\mathrm{d}E.$$

После интеграљења и замене леве стране помоћу 5 (14), коначно ћемо добити

$$\mu E - D\sin E = \varepsilon^3\,(t - T), \tag{5}$$

као везу између нове променљиве E и времена. То је позната *Кеплерова једначина*, са *ексцентричном аномалијом* E. С обзиром на 5(7), 5(8) и (1), тј.

$$\frac{D}{\mu} = e, \quad \frac{\varepsilon^3}{\mu} = \sqrt{\mu}\,a^{-3/2},$$

Кеплерову једначину (5) користићемо и у класичном облику

$$E - e\sin E = n\,(t - T), \tag{6}$$

са *средњим сидеричким дневним кретањем* тела

$$n=\frac{\varepsilon^3}{\mu}=\sqrt{\mu}\,a^{-3/2}. \tag{7}$$

Величина

$$M=\frac{\varepsilon^3}{\mu}(t-T)=n(t-T) \tag{8}$$

је *средња аномалија* тела, а рачуна се од тренутка T пролаза кроз перихел (када је $M=0$). Но може се дати и *средња аномалија* M_0 *за епоху* t_0; како се M мења пропорционално времену, биће

$$M=M_0+\frac{\varepsilon^3}{\mu}(t-t_0)=M_0+n(t-t_0). \tag{9}$$

Тако је, коначно,

$$\mu E-D\sin E=\mu M \quad \text{или} \quad E-e\sin E=M, \tag{10}$$

а M рачунамо по (8) или (9).

Сад можемо наћи и интеграле облика 5(10) и 5(11). Прво ћемо, користећи 5(6), 5(7), 5(8) и (3), лако извести, елиминисањем праве аномалије, да је

$$r=\varepsilon^{-2}(\mu-D\cos E)=a(1-e\cos E). \tag{11}$$

После тога, по 5(9) са (3), (4) и (11) налазимо

$$\begin{aligned}\xi&=\varepsilon^{-2}(\mu\cos E-D)=a(\cos E-e),\\ \eta&=C\varepsilon^{-1}\sin E \qquad =a\sqrt{1-e^2}\sin E,\end{aligned} \tag{12}$$

па опет можемо користити

$$\mathbf{r}=\xi\,\mathbf{P}+\eta\,\mathbf{Q}.$$

Да бисмо добили вектор брзине тела, диференцираћемо по времену једначине (12)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi=-\mu\varepsilon^{-2}\sin E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-a\sin E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta=C\varepsilon^{-1}\cos E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=a\sqrt{1-e^2}\cos E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

Из Кеплерове једначине у облику (5) произилази

$$(\mu-D\cos E)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\varepsilon^3,$$

или, помоћу (11),

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon}{r}=\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{r}. \tag{13}$$

Кад ово сменимо у изразе за изводе правоуглих координата ξ и η у равни путање, лако ћемо доћи до вектора брзине:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\xi\cdot\mathbf{P}+\frac{d}{dt}\eta\cdot\mathbf{Q}=\\ &= -\frac{\mu}{\varepsilon r}\sin E\cdot\mathbf{P}+\frac{C}{r}\cos E\cdot\mathbf{Q}=\\ &= \frac{\sqrt{\mu a}}{r}\sin E\cdot\mathbf{P}+\frac{1}{r}\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos E\cdot\mathbf{Q}.\end{aligned} \tag{14}$$

Интензитет брзине кретања тела најнепосредније добивамо опет из интеграла живе силе:

$$v^2=\frac{2\mu}{r}-\varepsilon^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right). \tag{15}$$

У једначинама (13), (14) и (15) задржали смо радијусвектор r као параметарску промењиву, просто ради једноставнијег писања. Видимо, наиме, да интеграле диференцијалне једначине непоремећена кретања по елипси не можемо експлицитно, у коначном облику, представити као функције времена. Стога смо принуђени да користимо, посредно, неку другу промењиву, а њу да изражавамо као функцију времена. Коју ћемо изабрати — зависи од конкретног рачуна који вршимо. Но најчешће ће то бити ексцентрична аномалија и то колико због релативне једноставности израза у којима она фигурише, толико и због једноставности њене везе са временом.

Ексцентрична и права аномалија повезане су, како смо видели, једначинама (3) и (4):

$$\begin{aligned}\cos v &= \frac{-D+\mu\cos E}{\mu-D\cos E}=\frac{-e+\cos E}{1-e\cos E},\\ \sin v &= \frac{C\varepsilon\sin E}{\mu-D\cos E}=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E},\end{aligned} \tag{16}$$

одакле без тешкоћа добивамо и

$$\begin{aligned}\cos E &= \frac{D+\mu\cos v}{\mu+D\cos v}=\frac{e+\cos v}{1+e\cos v},\\ \sin E &= \frac{C\varepsilon\sin v}{\mu+D\cos v}=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin v}{1+e\cos v}.\end{aligned} \tag{17}$$

Ако помоћу прве једначине (16) израчунамо

$$1-\cos v=\frac{(\mu+D)(1-\cos E)}{\mu-D\cos E}=\frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E},$$

$$1+\cos v=\frac{(\mu-D)(1+\cos E)}{\mu-D\cos E}=\frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E},$$

видимо да деобом добивамо

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}E=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v. \tag{18}$$

6.3. Кретање по параболи. — Ако су почетни услови кретања такви да из њих прозилази да је

$$\frac{D}{\mu}=e=1, \qquad \varepsilon=0, \qquad C=\sqrt{\mu p}=\sqrt{2\mu q},$$

непоремећена путања тела око Сунца биће парабола са *йерихелском даљином*

$$q=\frac{1}{2}p.$$

То је радијусвектор тела у тренутку пролаза кроз перихел (тј. за $v=0$). Помоћу горњих вредности за ексцентричност и параметар, једначина 5(14) постаће

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{(1+\cos v)^2}=\sqrt{\mu}(2q)^{-3/2}(t-T).$$

Како је

$$(1+\cos v)^{-2}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\sec^4\frac{1}{2}v\,\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\sec^2\frac{1}{2}v\cdot\sec^2\frac{1}{2}v\,\mathrm{d}v=$$

$$=\frac{1}{4}\sec^2\frac{1}{2}v\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}v\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\sec^2\frac{1}{2}v\,\mathrm{d}v+\frac{1}{4}\sec^2\frac{1}{2}v\cdot$$

$$\cdot\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}v\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}v\right)+\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}v\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}v+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}v\right),$$

то видимо да после кратког рачуна добивамо везу између праве аномалије и времена у облику

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\,q^{-3/2}(t-T). \tag{19}$$

Из једначине 5(6) је сада

$$r=\frac{2q}{1+\cos v}=q\sec^2\frac{1}{2}v, \tag{20}$$

што ће за правоугле координате тела у равни путање дати

$$\xi = r\cos v = q\sec^2\frac{1}{2}v\cos v = q\sec^2\frac{1}{2}v\left(1-2\sin^2\frac{1}{2}v\right)=$$

$$=q\left(\sec^2\frac{1}{2}v-2\,\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}v\right)=q\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}v\right);$$

$$\eta = r\sin v = q\sec^2\frac{1}{2}v\sin v = 2\,q\sec^2\frac{1}{2}v\sin\frac{1}{2}v\cos\frac{1}{2}v=$$

$$=2\,q\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}v.$$

Помоћу смене

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}v = V$$

можемо, дакле, горње једначине писати у облику

$$r=q(1+V^2),\qquad V+\frac{1}{3}V^3=\sqrt{\frac{\mu}{2}}q^{-3/2}(t-T), \tag{21}$$
$$\xi = q(1-V^2),\qquad \eta = 2\,qV,$$

па за радијусвектор искористити, као и раније,

$$\mathbf{r}=\xi\,\mathbf{P}+\eta\,\mathbf{Q}.$$

Одавде неће бити тешко да се добије и израз за вектор брзине кретања небеског тела по параболичкој путањи, но он нам неће бити потребан у овом курсу. А интензитет брзине опет даје интеграл живе силе:

$$v^2=\frac{2\,\mu}{r}=\frac{2\,\mu}{q}\cos^2\frac{1}{2}v. \tag{22}$$

7. ЕЛЕМЕНТИ КРЕТАЊА. Интеграљење диференцијалне једначине Кеплерова кретања доводи, у општем случају, до две векторске или шест скаларних константи интеграљења. Оне се могу једнозначно одредити из потребног броја почетних услова, чиме је потпуно одређено непоремећено кретање изабрана небеског тела. Тих шест независних величина карактеришу кретање тела, па се стога зову *елементи кретања* (или *путање*).

Начелно није важно како ћемо одабрати константе интеграљења. Шта више, некад ће бити погодније да оперишемо и са више од шест константи, али тада оне нису независне. Ако их је m на броју, између њих мора да постоји $m-6$ релација, тако да је само 6 независних.

У овом курсу ћемо паралелно користити два система елемената кретања: векторски и класични скаларни. Први од њих је често погоднији у чисто рачунском смислу, док други даје прегледнији увид у геометријско-кинематичку слику кретања.

7.1. Класични астрономски елементи. — Без обзира на врсту Кеплерове путање, елементе делимо у четири групе: *а*) оне који одређују раван кретања, *б*) оне који одређују оријентацију путање у равни кретања, *в*) оне који одређују димензије путање, и *г*) оне који дефинишу положај тела на путањи у неком тренутку.

а) У класичном систему астрономских елемената положај путањске равни у простору одређује се у односу на хелиоцентрични еклиптички координатни систем помоћу два угла: *лонгитуде узлазног чвора* и *нагиба путањске равни.*

Путањска раван тела сече раван еклиптике дуж праве која се зове *чворна линија.* Она сече путању у две тачке које зовемо *чворови*; *узлазни* (☊) и *силазни* (☋). Први од њих је онај кроз који тело пролази при кретању са јужне стране еклиптике на северну. *Лонгитуда узлазног чвора* је угао (у равни еклиптике) између хелиоцентричних праваца ка пролећној еквинокцијској тачки и ка узлазном чвору, рачунајући од првог правца. Означава се знаком чвора, ☊, или великим грчким омега, Ω, па је $0° \leqslant ☊ < 360°$. Или, другим речима, то је хелиоцентрична лонгитуда пројекције узлазног чвора на небеској сфери.

Други елемент који одређује положај равни кретања је угао између еклиптичке равни и равни путање: *нагиб путањске равни.* Рачуна се од еклиптичке равни, а означава са i. Уколико је кретање тела директно, биће $0° \leqslant i \leqslant 90°$, а у случају ретроградног кретања узима се да је $90° < i < 180°$.

Из овакве дефиниције елемната ☊ и i следује да на њих делује прецесија, па се њихови нумерички износи увек дају у односу на неку утврђену епоху. Такође је јасно да су они независни од врсте путање.

б) За одређивање положаја елипсе или параболе у својој путањској равни довољна је једна величина. У ту сврху се усваја елемент *аргумент латитуде перихела*, то јест угао између хелиоцентричних праваца ка узлазном чвору и ка перихелу путање, рачунајући од оног првог правца. То је, дакле, угао између чворне и апсидне линије (осе симетрије конусног пресека, која пролази кроз перихел). Означава се са ω: $0° \leqslant \omega < 360°$. Понекад се овај елемент замењује збиром ☊ $+ \omega$, који се назива *лонгитуда перихела*, а означава са $\tilde{\omega}$ или π. То, у ствари, и није лонгитуда, пошто је само ☊ у равни еклиптике, док је ω у равни путање. И овај елемент је везан, како видимо, за неки координатни систем, па се и он увек даје у односу на неку епоху. Уобичајено је да се елементи ☊, i и ω дају увек за исту епоху.

Нека индекс „нула“ означава вредности елемената за епоху 1950.0, а без индекса нека су елементи за неку другу епоху. Ако времени интервал између поменутих епоха није велик, могу се користити обрасци

$$\Omega = \Omega_0 + a - b \sin(\Omega_0 + c) \operatorname{ctg} i_0,$$

$$i = i_0 + b \cos(\Omega_0 + c),$$

$$\omega = \omega_0 + b \sin(\Omega_0 + c) \operatorname{cosec} i_0.$$

За свођење на епоху 1950.0 служе обрасци

$$\Omega_0 = \Omega - a + \sin(\Omega + c') \operatorname{ctg} i,$$

$$i_0 = i - b \cos(\Omega + c'),$$

$$\omega_0 = \omega - b \sin(\Omega + c') \operatorname{cosec} i.$$

Вредности прецесионих величина a, b, c и c' дају се у астрономским годишњацима. Уколико је времени интервал већи, или се тражи висок степен тачности, користиће се специјалне таблице за редукцију ових путањских елемената.

Ове елементе смо везали, како смо видели, за еклиптичку раван. Но некад ће бити згодније да их дефинишемо на исти начин, али у односу на раван небеског екватора. Означимо цртицом такве „екваторске“ елементе, па потражимо везе између њих и класичних еклиптичких.

Замислимо на небеској сфери лук екватора и еклиптике, наравно за исту епоху. Та два лука се секу у пролећној еквинокцијској тачки. Пресецимо ова два лука трећим, који нека је велики круг пресека путањске равни тела и небеске сфере. Тако смо добили сферни троугао, чија су темена: γ-тачка, пројекција (на небеску сферу) екваторског чвора и пројекција еклиптичког чвора. Од првог до другог темена је, по дефиницији, екваторска лонгитуда узлазног чвора, од првог до трећег — лонгитуда еклиптичког узлазног чвора, а од другог до трећег — разлика између аргумената латитуде перихела за екватор и еклиптику (пројекција лука путање). Стране овог сферног троугла су, дакле, Ω', Ω и $\omega' - \omega = \sigma$. Такође ћемо врло лако закључити да су углови овог сферног троугла: ε (нагиб еклиптике), $180° - i'$ и i. Тако онда применом Гаусове групе основних образаца Сферне тригонометрије имамо да је:

$$\sin \Omega' \sin i' = \sin \Omega \sin i,$$

$$\cos \Omega' \sin i' = \cos \Omega \sin i \cos \varepsilon + \cos i \sin \varepsilon,$$

$$\cos i' = -\cos \Omega \sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon,$$

$$\sin \sigma \sin i' = \sin \Omega \sin \varepsilon,$$

$$\cos \sigma \sin i' = \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon,$$

$$\omega' = \omega + \sigma,$$

односно

$$\sin \Omega \sin i = \sin \Omega' \sin i',$$

$$\cos \Omega \sin i = \cos \Omega' \sin i' \cos \varepsilon - \cos i' \sin \varepsilon,$$

$$\cos i = \cos \Omega' \sin i' \sin \varepsilon + \cos i' \cos \varepsilon,$$

$$\sin \sigma \sin i = \sin \Omega' \sin \varepsilon,$$

$$\cos \sigma \sin i = -\cos \Omega' \cos i' \sin \varepsilon + \sin i' \cos \varepsilon,$$

$$\omega = \omega' - \sigma.$$

Такође можемо користити и резултате примене Гаусових (специјалних) образаца, што ће дати:

$$\cos \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\Omega' + \sigma) = \cos \frac{1}{2} (i - \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega,$$

$$\cos \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2} (\Omega' + \sigma) = \cos \frac{1}{2} (i + \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega,$$

$$\sin \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\Omega' - \sigma) = \sin \frac{1}{2} (i - \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega,$$

$$\sin \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2} (\Omega' - \sigma) = \sin \frac{1}{2} (i + \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega,$$

$$\omega' = \omega + \sigma,$$

односно

$$\sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\Omega + \sigma) = \sin \frac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega',$$

$$\sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\Omega + \sigma) = \sin \frac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega',$$

$$\cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\Omega - \sigma) = \cos \frac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega',$$

$$\cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\Omega - \sigma) = \cos \frac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega',$$

$$\omega = \omega' - \sigma.$$

в) Облик елипсе одређују две независне величине. Најчешће се користе *велика полуоса* a и *ексцентричност* e. Уместо њих се некад употребљавају *средње сидеричко дневно кретање* n и *угао ексцентричности* φ. Из тачног облика Трећег Кеплерова закона

$$4 \pi^2 a^3 = k^2 (1 + m) P^2$$

следују везе између a и n:

$$\frac{2\pi}{P}=n=k\sqrt{1+m}\,a^{-3/2},\quad \text{одн.}\quad a=[k^2(1+m)\,n^{-2}]^{1/3}. \tag{1}$$

Средње кретање се изражава у степенима и децималним деловима, или у лучним секундама, или у радијанима, па се онда на исти начин изражава и Гаусова константа k. Велика полуоса се даје у а.ј., док се угао ексцентричности дефинише помоћу

$$\varphi=\arcsin e. \tag{2}$$

Парабола и круг су одређени једном величином. За параболу је то *параметар* p *или*, чешће, *перихелска даљина* $q=1/2\,p$. Круг је одређен *полупречником* a, а може се усвојити и средње кретање, потпуно исто као код елипсе. — Сви ови елементи не зависе од избора координатног система, па прецесија на њих не делује.

i) Положај тела на путањи у неком тренутку одређен је, рецимо, његовим поларним координатама r и Φ у путањској равни, за неки тренутак. Међутим, ако је познат облик путање и њене димензије (помоћу елемената из претходне групе), то јест — ако је позната једначина $r=r(\Phi)$, довољно је дати поларни угао Φ_0 за неки тренутак t_0. Код кретања по елипси улогу поларног угла најчешће игра *средња аномалија* M_0 *за епоху* t_0. Понекад се као елемент ове групе наводи тзв. *средња лонгитуда*, $L_0=\Omega+\omega+M_0$, такође за утврђену епоху t_0.

Други начин дефинисања положаја тела на путањи је навођење *тренутка пролаза кроз перихел*, T. Ако је он дат код кретања по елипси, онда непосредна примена обрасца 6(8) даје средњу аномалију M за сваки тренутак t. — Код кретања по параболи редовно се наводи T као елемент, пошто та величина директно улази у основну једначину — 6(19) или 6(21) — за одређивање праве аномалије v за тренутак t.

Најзад, положај тела на кругу одређен је *аргументом латитуде* u_0 *за тренутак* t_0 (в. стр. 21). Избор тог елемента је произвољан, а касније ћемо видети како га у пракси најчешће усвајамо.

Да резимирамо: код кретања по елипси служићемо се астрономским елементима

$$\Omega,\quad i,\quad \omega(\tilde{\omega}),\quad a(n),\quad e(\varphi),\quad M_0,\quad t_0(T);$$

код кретања по параболи — елементима

$$\Omega,\quad i,\quad \omega,\quad q(p),\quad T;$$

а код кретања по кругу — елементима

$$\Omega,\quad i,\quad a(n),\quad u_0,\quad t_0.$$

7.2. Векторски елементи. — У претходном поглављу смо стално користили два векторска елемента кретања, две векторске константе интеграљења диференцијалне једначине Кеплерова кретања. То су били вектори $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$, двострука секторска брзина кретања тела и тзв. Лапласов интеграл.

Но одмах смо и установили да та два вектора нису међусобно независни, нормални су један на другом, па се стога ни не могу користити као елементи кретања. Но, да не бисмо компликовали ствари тражећи два независна вектора, ми ћемо онима **C** и **D** додати и скалар T, тренутак пролаза тела кроз перихел путање, тако да међу седам скаларних величина

$$C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad T$$

постоји само једна релација

$$C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3 = 0,$$

то јест — шест их је независних. Тако ћемо у овом курсу користити не чисто векторски систем путањских елемената, него векторско-скаларни, који чине елементи **C**, **D** и T.

Поновићемо оно најважније о овим величинама.

Интеграл секторске брзине,

$$\mathbf{C} = [\mathbf{r}\,\mathbf{v}],$$

нормалан је на путањској равни тела, а интензитет му је

$$C = \sqrt{\mu p} = k\sqrt{1+m}\sqrt{p}, \qquad p = a(1-e^2) = a\cos^2\varphi.$$

Његове правоугле еклиптичке компоненте су, према дефиниционој једначини,

$$\begin{aligned} C_{e1} &= y_e z'_e - y'_e z_e, \\ C_{e2} &= z_e x'_e - z'_e x_e, \\ C_{e3} &= x_e y'_e - x'_e y_e, \end{aligned} \tag{3}$$

док екваторске компоненте можемо одавде добити применом једначина 4(1). Јасно је да ћемо помоћу горњих једначина добити екваторске компоненте од **C**, ако на десним странама рачунамо се екваторским компонентама вектора положаја и брзине тела.

Лапласов интеграл

$$\mathbf{D} = [\mathbf{v}\,\mathbf{C}] - \mu r^{-1}\mathbf{r}$$

представља вектор који лежи у путањској равни, а оријентисан је ка перихелу. Интензитет му је

$$D = \mu e = k^2(1+m)e = k^2(1+m)\sin\varphi.$$

Његове еклиптичке компоненте су

$$\begin{aligned} D_{e1} &= y'_e C_{e3} - z'_e C_{e2} - \mu r^{-1} x_e, \\ D_{e2} &= z'_e C_{e1} - x'_e C_{e3} - \mu r^{-1} y_e, \\ D_{e3} &= x'_e C_{e2} - y'_e C_{e1} - \mu r^{-1} z_e. \end{aligned} \tag{4}$$

Овде можемо, даље, искористити (3) и $r = \sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2}$.

Тренутак пролаза кроз перихел јавља се непосредно у Кеплеровој једначини

$$\mu E - D \sin E = \varepsilon^3 (t - T),$$

при чему је константа ε одређена интензитетима векторских елемената **C** и **D**:

$$\varepsilon^2 = C^{-2} (\mu^2 - D^2).$$

Како после пуног обиласка тела око Сунца по елипси (или кругу) оно поново пролази кроз перихел своје путање, то је времени интервал између два узастопна пролаза кроз перихел одређен једначином

$$n^\circ (T_{k+1} - T_k) = 360^\circ.$$

То ће рећи да ако произвољан тренутак пролаза кроз перихел означимо са T_0, онда ћемо све остале пролазе, раније или касније, добити из

$$T_i = T_0 + \frac{2\, i\, \pi}{n}, \quad \text{за} \quad i = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

где је средње сидеричко дневно кретање изражено у радијанима.

Не треба посебно ни наглашавати да се увек мора навести за коју се епоху дају елементи **C** и **D**. Обрачун дејства прецесије на њих врши се на исти начин као и у раније наведеном случају вектора положаја небеског тела.

7.3. Прелаз са једног система елемената на други. — Како смо већ навели, ми ћемо се у овом курсу користити и једним и другим системом елемената, кад нам који буде погоднији. Сваки од њих има, у односу на други, и предности и недостатака, па не можемо инсистирати на само једном. Зато је неопходно да одмах установимо везе између ова два система константи, помоћу којих можемо прелазити с једног на други.

Већ смо видели како интензитете вектора **C** и **D** изражавамо помоћу геометријских величина, које карактеришу димензије путање. То су велика полуоса (или полупречник) и ексцентричност. Такође већ познајемо и везу између тренутка пролаза кроз перихел и средње аномалије за неку епоху, у случају кретања по елипси. Средње сидеричко дневно кретање, које фигурише у поменутој једначини, може да се изрази помоћу **C** и **D** — односно, помоћу a. Стога нам је још само преостало да видимо у каквој су вези компоненте вектора **C** и **D** са астрономским елементима који одређују положај путањске равни и оријентацију путање у њој.

Замислимо зато опет небеску сферу у чијем средишту је почетак еклиптичког хелиоцентричног правоуглог координатног система. Продори оса овог система кроз небеску сферу нека су тачке X, Y и Z. Прва се поклапа са положајем γ-тачке за епоху система, трећа је северни еклиптички пол, а кроз прве две пролази велики круг — еклиптика. На истом великом кругу налази се и ☊, то јест пројекција узлазног чвора путање небеског тела, тако да лук γ ☊ одговара лонгитуди узлазног чвора.

Поставимо сада почетак вектора **C** у координатни почетак, средиште небеске сфере. Његов продор кроз небеску сферу нека је тачка C. Зато је та тачка пол великог круга пресека путањске равни тела са небеском сфером, па је лук $C\Omega = 90°$. Еклиптичке компоненте вектора **C** су његове пројекције на осе x, y и z координатног система. Да те пројекције добијемо, замислићемо три сферна троугла, који имају једну заједничку страну: лук $C\Omega$, односно — два заједничка темена: тачке C и Ω. Треће теме ових троуглова нека буду тачке X, Y и Z респективно. Сви ови сферни троуглови су квадрантни, а за пројектовање вектора **C** потребне су нам њихове стране CX, CY и CZ, па кад још приметимо да угао код Ω у њима можемо увек изразити помоћу нагиба путањске равни, i, одмах можемо исписати једначине

$$
\begin{aligned}
C_{e1} &= C \sin\Omega \sin i, \\
C_{e2} &= -C \cos\Omega \sin i, \\
C_{e3} &= C \cos i.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Сличну конструкцију ћемо извести да бисмо добили и компоненте вектора **D**. Ако и њему поставимо почетак у средиште небеске сфере и његов продор кроз њу означимо са D, опет ћемо конструисати три сферна троугла: $D\Omega X$, $D\Omega Y$ и $D\Omega Z$. Како је тачка D истовремено пројекција перихела путање, то је заједничка страна ових сферних троуглова лук $D\Omega = \omega$. Угао код темена Ω опет изражавамо помоћу нагиба i. За пројекције су нам потребне стране DX, DY и DZ, које налазимо помоћу косинусних образаца Сферне тригонометрије. Тако долазимо до израза:

$$
\begin{aligned}
D_{e1} &= D(\cos\Omega \cos\omega - \sin\Omega \sin\omega \cos i), \\
D_{e2} &= D(\sin\Omega \cos\omega + \cos\Omega \sin\omega \cos i), \\
D_{e3} &= D \sin\omega \sin i.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Тако, најзад, можемо исписати све потребне једначине за једнозначни прелаз са система астрономских елемената на систем векторско-скаларних елемената које ћемо овде користити:

$$\mu = k^2(1+m), \quad C = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = \sqrt{\mu a}\cos\varphi,$$

$$C_{e1} = C\sin\Omega \sin i, \quad C_{e2} = -C\cos\Omega \sin i, \quad C_{e3} = C\cos i,$$

$$\text{Контрола:}\ C_{e1}^2 + C_{e2}^2 + C_{e3}^2 = C^2.$$

$$D = \mu e = \mu \sin\varphi,$$

$$
\begin{aligned}
D_{e1} &= D(\cos\Omega \cos\omega - \sin\Omega \sin\omega \cos i), \\
D_{e2} &= D(\sin\Omega \cos\omega + \cos\Omega \sin\omega \cos i), \\
D_{e3} &= D \sin\omega \sin i,
\end{aligned}
$$

$$\text{Контрола:}\quad D_{e1}^2 + D_{e2}^2 + D_{e3}^2 = D^2, \quad C_{e1}D_{e1} + C_{e2}D_{e2} + C_{e3}D_{e3} = 0,$$

$$T = t_0 - \frac{M_0}{n}.$$

Како су путањски елементи независни од времена, а у средње сидеричко дневно кретање n улази, по дефиницији, средњи (или ефемеридски) дан, то ћемо и времени интервал $T-t_0$ добити у средњим (одн. ефемеридским) данима, и у свим једначинама моћи да ставимо да је $\mu=1$, уколико још само занемаримо масу тела.

Добивене компоненте вектора **C** и **D** су еклиптичке, како смо то и означили, и за исту ону епоху, за коју су дати елементи Ω, ω и i. Екваторске компоненете добивамо, уколико су нам потребне, применом образаца 4(1). Јасно је да њих добивамо применом и горњих образаца, уколико у те релације унесемо екваторске елементе Ω', ω' и i'.

Читаоцу неће бити тешко да помоћу наведених образаца изведе, као вежбу, следеће једначине, које ћемо користити за налажење класичних астрономских елемената, када су нам познати векторско-скаларни:

$$\operatorname{tg}\Omega=-C_{e1}:C_{e2} \qquad (\sin\Omega \text{ има исти предзнак као } C_{e1}),$$

$$\operatorname{tg} i=\sqrt{C_{e1}^2+C_{e2}^2}:C_{e3} \qquad (\text{уколико је } C_{e3}<0, \text{ кретање је ретроградно, тј. } 90°<i<180°),$$

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{D_{e3}\operatorname{cosec} i}{D_{e1}\cos\Omega+D_{e2}\sin\Omega} \qquad (\sin\omega \text{ има исти предзнак као и } D_{e3}),$$

$$C^2=C_{e1}^2+C_{e2}^2+C_{e3}^2, \qquad D^2=D_{e1}^2+D_{e2}^2+D_{e3}^2,$$

$$\varepsilon^2=(\mu^2-D^2):C^2,$$

$$a=\mu:\varepsilon^2, \qquad e=D:\mu,$$

$$\text{Контрола:} \quad C^2=\mu\, a\,(1-e^2),$$

$$M_0=\frac{\varepsilon^3}{\mu}(t_0-T).$$

И у овим једначинама ћемо ставити да је $\mu=1$, уколико занемаримо масу тела, што ћемо најчешће радити. Но тада морамо времени интервал t_0-T изразити у средњим Гаусовим данима.

8. **ПОЧЕТНИ УСЛОВИ.** У претходним одељцима нашли смо интеграле диференцијалне једначине Кеплерова кретања за оне врсте непоремећених путања небеских тела, којима ћемо се позабавити у овом курсу. Да бисмо нађене изразе могли ефективно користити за израчунавање положаја и брзине објекта, потребно је познавање вредности интеграционих константи, то јест — путањских елемената.

Као што је познато, константе интеграљења налазимо из почетних услова интеграљења. У овом курсу ћемо користити два система почетних услова, како смо још у Уводу напоменули. Први ће да чине вектори положаја и брзине тела, дакле $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$, за тренутак t_0. Други систем сачињаваће два хелиоцентрична вектора положаја тела, $\mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}(t_3)$, за тренутке t_1 и t_3. Напоменимо одмах да овакве индексе дајемо имајући на уму каснију употребу ових почетних услова кретања. — У овом одељку постављамо задатак да са сваким од ових система изразимо скуп путањских елемената.

8.1. Систем почетних услова $\mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{v}(t_0)$. — Нека су нам, дакле, познати вектори

$$\mathbf{r}(t_0)=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}=\mathbf{r}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(t_0)=\{x_0',\ y_0',\ z_0'\}=\mathbf{v}_0 \tag{1}$$

и тренутак t_0 на који се односе. Овај систем почетних услова користићемо искључиво код кретања по елипси. Како до њега ефективно долазимо — оставићемо овде по страни. Први задатак нам је да са (1) израчунамо наше векторско-скаларне елементе кретања $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ и T.

8.1.1. *Налажење векторских елемената помоћу* $\mathbf{r}_0$ *и* $\mathbf{v}_0$. — Векторске елементе $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ налазимо непосредно из

$$\mathbf{C}=[\mathbf{r}_0\,\mathbf{v}_0], \qquad \mathbf{D}=[\mathbf{v}_0\,\mathbf{C}]-\mu\, r_0^{-1}\,\mathbf{r}_0,$$

пошто они не зависе од времена. За налажење скаларног елемента T искористићемо Кеплерову једначину, одакле је

$$T=t_0-\varepsilon^{-3}(\mu\, E_0-D\sin E_0),$$

што ће рећи да прво морамо наћи вредност ексцентричне аномалије E за тренутак t_0. Из једначине путање

$$r=\varepsilon^{-2}(\mu-D\cos E)$$

можемо наћи $\cos E_0$, пошто ε знамо да изразимо помоћу $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, применом интеграла живе силе

$$v^2=2\,\mu\, r^{-1}-\varepsilon^2,$$

али остаје непотпуно одређен квадрант ексцентричне аномалије. Стога ћемо потражити израз за $\sin E$ у функцији од $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

Позовимо се на интеграле облика 5(10) и 5(11),

$$\mathbf{r}=\xi\,\mathbf{P}+\eta\,\mathbf{Q}, \qquad \mathbf{v}=\xi'\,\mathbf{P}+\eta'\,\mathbf{Q},$$

па образујмо њихов скаларни производ. Позивајући се на особине јединичних вектора $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, одмах ћемо добити да је

$$(\mathbf{r}\,\mathbf{v})=\xi\,\xi'+\eta\,\eta'.$$

Са 6(12) и 6(14) имамо да је

$$(\mathbf{r}\,\mathbf{v}) = -\frac{\mu\cos E - D}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\mu}{\varepsilon\, r}\sin E + \frac{C}{\varepsilon}\sin E\cdot\frac{C}{r}\cos E =$$

$$= -\frac{\mu^2}{\varepsilon^3\, r}\sin E\cos E + \frac{\mu\, D}{\varepsilon^3\, r}\sin E + \frac{C^2}{\varepsilon\, r}\sin E\cos E =$$

$$= \frac{\sin E}{\varepsilon^3\, r}\,[\mu\, D - (\mu^2 - C^2\,\varepsilon^2)\cos E].$$

Како је

$$C^2\,\varepsilon^2 = \mu^2 - D^2 \quad \text{и} \quad \varepsilon^2\, r = \mu - D\cos E, \tag{2}$$

то видимо да ће коначно бити

$$(\mathbf{r}\,\mathbf{v}) = \frac{D}{\varepsilon}\sin E, \tag{3}$$

што нам је и било потребно. Тако смо сакупили све релације помоћу којих можемо израчунати **C**, **D** и T са датим почетним условима.

Преглед образаца

I. $\mathbf{C} = [\mathbf{r}_0\,\mathbf{v}_0], \quad r_0^2 = (\mathbf{r}_0\,\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{D} = [\mathbf{v}_0\,\mathbf{C}] - \mu\, r_0^{-1}\,\mathbf{r}_0,$

Контрола: $(\mathbf{C}\,\mathbf{D}) = 0,$

$$C^2 = (\mathbf{C}\,\mathbf{C}), \quad D^2 = (\mathbf{D}\,\mathbf{D}),$$

Контрола: $C^2 = (\mathbf{r}_0\,\mathbf{r}_0)\,(\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_0) - (\mathbf{r}_0\,\mathbf{v}_0)^2;$

II. $\varepsilon^2 = 2\,\mu\, r_0^{-1} - (\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_0), \quad$ Контрола: $\varepsilon^2 = (\mu^2 - D^2)\, C^{-2},$

$$D\sin E_0 = \varepsilon\,(\mathbf{r}_0\,\mathbf{v}_0), \qquad D\cos E_0 = \mu - \varepsilon^2\, r_0,$$

Контрола: $D^2 = (\mathbf{r}_0\,\mathbf{v}_0)^2\,\varepsilon^2 + (\mu - \varepsilon^2\, r_0)^2,$

$$T = t_0 - \varepsilon^{-3}\,(\mu\, E_0 - D\sin E_0).$$

Не морамо посебно ни наглашавати да ће компоненте вектора **C** и **D** бити изражене у оном истом координатном систему, у односу на који су дате компоненте вектора **r** и **v**. Исто тако, ако занемаримо масу тела, опет ћемо за μ усвајати вредност k^2 или 1, већ према томе да ли нам је јединица времена средњи или средњи Гаусов дан. Наравно да морамо припазити на то, у којим јединицама времена су дате компоненте вектора брзине тела.

8.1.2. ***Налажење скаларних елеменаша крешања йомоћу*** $\mathbf{r}_0$ ***и*** $\mathbf{v}_0$. — Уколико су нам потребни класични астрономски скаларни елементи кретања, очигледно је да њих можемо добити из векторских, како смо раније показали. Међутим, у неким случајевима биће згодније да ове скаларне елементе не налазимо таквим посредним путем, него директно помоћу $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$.

Осим тога што смо већ напоменули да радимо само са елиптичким путањама, додаћемо овде одмах још да усвајамо да је $m=0$ и средњи Гаусов дан јединица времена, што се све своди на $\mu=1$.

На тај начин интеграл живе силе 6(15) даје велику полуосу путање,

$$a=1:\left[\frac{2}{r_0}-(\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_0)\right],$$

док раније изведене једначине за синус и косинус ексцентричне аномалије сада постају

$$e\sin E_0=\frac{(\mathbf{r}_0\,\mathbf{v}_0)}{\sqrt{a}},\qquad e\cos E_0=1-\frac{r_0}{a}.$$

Помоћу њих налазимо ексцентричност путање и вредност ексцентричне аномалије за епоху рачуна. Потом Кеплерова једначина

$$M_0=E_0-e\sin E_0$$

даје средњу аномалију за исти тренутак. Преостаје нам, дакле, да још одредимо вредности елемената ☊, ω и i. То ћемо учинити посредно, преко векторских елемената $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

$\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ нису ништа друго него јединични вектори $\mathbf{D}:D$ и $[\mathbf{C}\,\mathbf{D}]:CD$, што ће рећи да их можемо израчунавати по обрасцима претходног одељка. Међутим, показаћемо овде и друкчији начин налажења $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, који је некад погоднији за рад.

Позовимо се опет на једначине

$$\mathbf{r}=\xi\,\mathbf{P}+\eta\,\mathbf{Q},\qquad \mathbf{v}=\xi'\,\mathbf{P}+\eta'\,\mathbf{Q},$$

па их решимо по $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Резултат ће бити

$$\mathbf{P}=\frac{\eta'\,\mathbf{r}-\eta\,\mathbf{v}}{\xi\,\eta'-\xi'\,\eta},\qquad \mathbf{Q}=\frac{\xi\,\mathbf{v}-\xi'\,\mathbf{r}}{\xi\,\eta'-\xi'\,\eta}.$$

Једначина 5(12) показује да је именитељ ових разломака

$$\xi\,\eta'-\xi'\,\eta=C=\sqrt{p}=\sqrt{a}\cos\varphi.$$

С друге стране, једначине 6(12) и 6(14) сада постају

$$\xi=a(\cos E-e),\qquad \eta=a\cos\varphi\sin E,$$

$$\xi'=-\frac{k}{r}\sqrt{a}\sin E,\qquad \eta'=\frac{k}{r}\sqrt{a}\cos\varphi\cos E.$$

Тако коначно изразе за јединичне векторе $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ можемо средити у

$$\mathbf{P}=\alpha_1\,\mathbf{r}+\alpha_2\,\mathbf{v},\qquad \mathbf{Q}=(\beta_1\,\mathbf{r}+\beta_2\,\mathbf{v})\sec\varphi,$$

где је

$$\alpha_1 = \frac{1}{r}\cos E, \qquad \beta_1 = \frac{1}{r}\sin E,$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{a}\sin E, \quad \beta_2 = \sqrt{a}(\cos E - e).$$

Да бисмо сад добили еклиптичке елементе ☊, ω и i довољно би било да су компоненте 8(1) дате у том систему. Но ми ћемо се овде ограничити на случај који је у пракси најчешћи: $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ су дати у екваторском, а траже се наведени скаларни елементи у еклиптичком координатном систему.

У екваторском систему уобичајене су ознаке

$$\mathbf{P} = \{P_x, P_y, P_z\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Q} = \{Q_x, Q_y, Q_z\},$$

док ћемо за еклиптички систем употребљавати ознаке

$$\mathbf{P} = \{P_{ex}, P_{ey}, P_{ez}\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Q} = \{Q_{ex}, Q_{ey}, Q_{ez}\}.$$

Једначине 7(5) и 7(6) показују у каквој су вези тражени скаларни елементи ☊, ω и i са еклиптичким компонентама јединичних вектора $\mathbf{R} = \mathbf{C} : C$ и $\mathbf{P} = \mathbf{D} : D$. Овакве једначине потребне су нам и за еклиптичке компоненте јединичног вектора $\mathbf{Q} = [\mathbf{C}\,\mathbf{D}] : CD$. Да њих изведемо, извршићемо исту онакву геометријску конструкцију, какву смо извели за векторе $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$. Дакле: замислимо да почетак вектора $[\mathbf{C}\,\mathbf{D}]$ доведемо у средиште небеске сфере и да тачка Q представља продор тог вектора кроз небеску сферу. Та тачка лежи на великом кругу пресека путањске равни са небеском сфером и то тако да је лук $DQ = 90°$. То значи да је лук ☊ $DQ = \omega + 90°$. Опет замишљамо три сферна троугла, X ☊ Q, Y ☊ Q и Z ☊ Q, па помоћу косинусног обрасца изводимо да је

$$\begin{aligned} Q_{ex} &= -\cos ☊ \sin\omega - \sin ☊ \cos\omega\cos i, \\ Q_{ey} &= -\sin ☊ \sin\omega + \cos ☊ \cos\omega\cos i, \\ Q_{ez} &= \cos\omega\sin i. \end{aligned} \tag{4}$$

Пошто смо $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ добили у екваторском систему, користићемо овде и једначине 4(1), које сада гласе:

$$\begin{aligned} P_{ex} &= P_x, & Q_{ex} &= Q_x, \\ P_{ey} &= P_y\cos\varepsilon + P_z\sin\varepsilon, & Q_{ey} &= Q_y\cos\varepsilon + Q_z\sin\varepsilon, \\ P_{ez} &= -P_y\sin\varepsilon + P_z\cos\varepsilon, & Q_{ez} &= -Q_y\sin\varepsilon + Q_z\cos\varepsilon. \end{aligned}$$

С обзиром да је

$$P_{ez} = \sin\omega\sin i \quad \text{и} \quad Q_{ez} = \cos\omega\sin i,$$

а још је увек $\sin i > 0$, то непосредно имамо једначине

$$\sin\omega\sin i = -P_y\sin\varepsilon + P_z\cos\varepsilon,$$

$$\cos\omega\sin i = -Q_y\sin\varepsilon + Q_z\cos\varepsilon,$$

за једнозначно одређивање аргумента латитуде перихела, ω, док за нагиб путањске равни добивамо i и $180° - i$.

Обратимо се сада једначинама

$$P_{ey} = \quad \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i = P_y \cos \varepsilon + P_z \sin \varepsilon,$$

$$Q_{ey} = -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i = Q_y \cos \varepsilon + Q_z \sin \varepsilon.$$

Из претходних налазимо да је

$$P_z = (P_{ez} + P_y \sin \varepsilon) \sec \varepsilon = (\sin \omega \sin i + P_y \sin \varepsilon) \sec \varepsilon,$$

$$Q_z = (Q_{ez} + Q_y \sin \varepsilon) \sec \varepsilon = (\cos \omega \sin i + Q_y \sin \varepsilon) \sec \varepsilon,$$

па ће бити

$$\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i - \sin \omega \sin i \operatorname{tg} \varepsilon =$$

$$= P_y (\cos \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \sec \varepsilon) = P_y \sec \varepsilon,$$

$$-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i - \cos \omega \sin i \operatorname{tg} \varepsilon =$$

$$= Q_y (\cos \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \sec \varepsilon) = Q_y \sec \varepsilon.$$

После множења прве једначине са $\cos \omega$, друге са $-\sin \omega$ и сабирања, као резултат ћемо добити

$$\sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon.$$

Да бисмо Ω одредили једнозначно, позваћемо се на

$$P_{ex} = P_x = \quad \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i,$$

$$Q_{ex} = Q_x = -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i,$$

одакле добивамо, као и у претходном случају, да је

$$\cos \Omega = P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega.$$

А ако једначине које су послужиле за извођење ове последње помножимо са $\sin \omega$, односно са $\cos \omega$ па их саберемо, наћи ћемо да је

$$-\sin \Omega \cos i = P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega.$$

Ову релацију ћемо користити како за контролу целог рачуна елемената Ω, ω и i, тако и за одређивање квадранта у коме се налази i.

Прѐглед образаца

I. $r_0^2 = (\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_0), \quad a = 1 : \left[\dfrac{2}{r_0} - (\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) \right],$

$$e \sin E_0 = \frac{(\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0)}{\sqrt{a}}, \quad e \cos E_0 = 1 - \frac{r_0}{a},$$

Контрола: $p = a(1 - e^2) = (\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_0)(\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) - (\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0)^2;$

$$\text{II.}\quad M_0 = E_0 - e\sin E_0, \qquad n = \frac{k}{a\sqrt{a}}; \qquad \sin\varphi = e,$$

$$\text{III.}\quad \alpha_1 = \frac{1}{r_0}\cos E_0, \qquad \beta_1 = \frac{1}{r_0}\sin E_0,$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{a}\sin E_0, \qquad \beta_2 = \sqrt{a}(\cos E_0 - e),$$

Контрола: $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \dfrac{1}{r_0^2}, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = \dfrac{r_0^2}{a} + (\mathbf{r}_0\,\mathbf{v}_0)^2, \qquad \alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 = -\dfrac{(\mathbf{r}_0\,\mathbf{v}_0)}{r_0},$

$$\mathbf{P} = \alpha_1\,\mathbf{r}_0 + \alpha_2\,\mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{Q} = (\beta_1\,\mathbf{r}_0 + \beta_2\,\mathbf{v}_0)\sec\varphi,$$

Контрола: $(\mathbf{P}\,\mathbf{P}) = (\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}) = 1, \qquad (\mathbf{P}\,\mathbf{Q}) = 0.$

$$\begin{aligned} \text{IV.}\quad \sin\omega\sin i &= -P_y\sin\varepsilon + P_z\cos\varepsilon,\\ \cos\omega\sin i &= -Q_y\sin\varepsilon + Q_z\cos\varepsilon,\\ \sin\Omega &= (P_y\cos\omega - Q_y\sin\omega)\sec\varepsilon,\\ \cos\Omega &= P_x\cos\omega - Q_x\sin\omega. \end{aligned}$$

Контрола: $-\sin\Omega\cos i = P_x\sin\omega + Q_x\cos\omega.$

8.1.3. ***Непосредно налажење вредности интеграла* $\mathbf{r}$ *и* $\mathbf{v}$ *помоћу* $\mathbf{r}_0$ *и* $\mathbf{v}_0$.** — Већ смо у уводу овог одељка навели да одређивању путањских елемената на основи почетних услова кретања приступамо с циљем како бисмо познате аналитичке изразе за интеграле диференцијалне једначине Кеплерова кретања могли и ефективно користити за израчунавање положаја и брзине небеског тела. Међутим, са истим почетним условима могу се и непосредно израчунати вредности интеграла, то јест положај и брзина кретања тела у неком датом тренутку.

Да бисмо доказали ово тврђење, приметимо да се линеарна зависност компланарних вектора $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ може изразити једначином

$$\mathbf{r} = f\,\mathbf{r}_0 + g\,\mathbf{v}_0. \tag{5}$$

Постављени задатак ће бити решен у потпуности када скаларе f и g прикажемо као функције времена и почетних услова кретања $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ и t_0, пошто из (5) следује и

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_0 + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_0. \tag{6}$$

У том циљу пођимо од Тејлорова реда за вектор положаја $\mathbf{r}$ у тренутку $t = t_0 + \tau$, блиском тренутку t_0, епохи почетних услова кретања:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\tau^i}{i!}r^{(i)}(t_0) = \mathbf{r}(t_0) + \tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t_0) + \frac{\tau^2}{2!}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}(t_0) + \frac{\tau^3}{3!}\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\mathbf{r}(t_0) + \cdots \tag{7}$$

На десној страни су нам нулти и први извод познати: то су $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$. Вредност другог извода вектора положаја, за тренутак t_0, непосредно добивамо из диференцијалне једначине кретања:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\mathbf{r}(t_0) = -\mu\, r_0^{-3}\,\mathbf{r}_0. \tag{8}$$

А из ове исте једначине, за тренутак t, произилазе, диференцирањем по времену, и изводи вишег реда, који су нам потребни за (7). При томе одмах закључујемо да их све можемо добити у облику

$$\frac{\mathrm{d}^i\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,t^i} = \mathbf{r}^{(i)} = f_i\,\mathbf{r} + g_i\,\mathbf{v}, \tag{9}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

пошто ћемо, чим нам се приликом диференцирања појави други извод од $\mathbf{r}$, њега сменити са $-\mu\, r^{-3}\,\mathbf{r}$. Зато ће скалари f_i и g_i из (9) зависити од радијус-вектора r и његових извода по времену. То узастопно диференцирање

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,t^2} = -\mu\, r^{-3}\,\mathbf{r},$$

да бисмо добили потребне изводе за (7), није тешко извести, али се рад може још олакшати, тако да диференцирамо само скаларне изразе. Циљ нам је да одредимо f_i и g_i, пошто уношењем (9) у (7) добивамо да је

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\tau^i}{i\,!}(f_i\,\mathbf{r} + g_i\,\mathbf{v})_{t=t_0} = \mathbf{r}_0\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\tau^i}{i\,!}f_i(t_0) + \mathbf{v}_0\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\tau^i}{i\,!}g_i(t_0),$$

што поређењем са (5) доводи до израза за тражене функције f и g у облику бесконачних редова

$$f = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\tau^i}{i\,!}f_i(t_0), \qquad g = \sum_{i=0}^{8}\frac{\tau^i}{i\,!}g_i(t_0). \tag{10}$$ ∞

Основна променљива, време, садржана је имплицитно у временом интервалу $\tau = t - t_0$.

Преостаје нам још да одредимо, како рекосмо, f_i и g_i. У том циљу ћемо поћи од (9), примећујући да исто тако можемо написати и да је

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = f_{i+1}\,\mathbf{r} + g_{i+1}\,\mathbf{v}. \tag{11}$$

Међутим је

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{r}^{(i)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f_i\,\mathbf{r} + g_i\,\mathbf{v}) =$$

$$= f_i'\,\mathbf{r} + f_i\,\mathbf{v} + g_i'\,\mathbf{v} - \mu\, r^{-3}\,g_i\,\mathbf{r} =$$

$$= (f_i' - \mu\, r^{-3}\,g_i)\,\mathbf{r} + (f_i + g_i')\,\mathbf{v}.$$

Поређењем овог резултата са (11) добивамо рекурзивне обрасце за налажење f_i и g_i:

$$f_{i+1} = f_i' - \mu r^{-3} g_i, \quad g_{i+1} = f_i + g_i'. \tag{12}$$

Прве вредности су, према (9) и (8), очигледне (нулти, први и други извод од $\mathbf{r}$):

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = -\mu r^{-3},$$
$$g_0 = 0, \qquad g_1 = 1, \qquad g_2 = 0.$$

Зато ћемо добити, стављајући редом у једначине (12) $i=2, 3, \ldots$, да је

$$f_3 = 3\mu r^{-4} r', \qquad g_3 = -\mu r^{-3},$$
$$f_4 = -12\mu r^{-5} r'^2 + 3\mu r^{-4} r'' + \mu^2 r^{-6}, \qquad g_4 = 6\mu r^{-4} r',$$

и тако даље. Но да бисмо ове изразе могли искористити за (10), то јест (5), морамо још да установимо како ћемо срачунавати изводе радијусвектора r за тренутак $t = t_0$, дакле помоћу $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$.

У ту сврху уводимо скаларну функцију времена

$$s = (\mathbf{r}\,\mathbf{v}). \tag{13}$$

Из $r^2 = (\mathbf{r}\,\mathbf{r})$ диференцирањем добивамо да је $r\,r' = (\mathbf{r}\,\mathbf{v})$, дакле

$$r' = r^{-1} s, \tag{14}$$

што се једноставно израчунава за $t = t_0$ са $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$, помоћу (13). Стога је, даље,

$$r'' = -r^{-2} r' s + r^{-1} s' = -r^{-3} s^2 + r^{-1} s'.$$

Први извод од s произилази из (13):

$$s' = (\mathbf{v}\,\mathbf{v}) - \mu r^{-1}, \tag{15}$$

па се и његова вредност за $t = t_0$ добива помоћу $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$, што ће рећи и вредност за r''.

Потражимо још други извод од s, који ће се јавити у изразу за r''', коришћењем (15), (13) и (14). Добићемо да је

$$s'' = -2\mu r^{-3} (\mathbf{r}\,\mathbf{v}) + \mu r^{-2} r' = -2\mu r^{-3} s + \mu r^{-3} s = -\mu r^{-3} s.$$

Функција s, дефинисана помоћу (13), задовољава, дакле, диференцијалну једначину

$$s'' = -\mu r^{-3} s.$$

Одатле ћемо извести закључак да све изводе од s можемо изразити само помоћу r, s и s'. А то онда важи и за изводе од r. Чим нам се, дакле, приликом диференцирања f_i и g_i у (12) појави r', ми ћемо га сменити са r и s, помоћу (14). Када се, при даљем диференцирању, појави s', њега ћемо задржати као помоћну величину. Даље ћемо добити s''; њега одмах смењујемо са $-\mu r^{-3} s$.

Као пример оваквог рада наставимо налажење f_i и g_i полазећи од

$$f_3 = 3\mu\, r^{-5} s, \qquad g_3 = -\mu r^{-3}.$$

Једноставан рачун ће нам дати да је

$$f_4 = -15\mu r^{-7} s^2 + 3\mu r^{-5} s' + \mu^2 r^{-6}, \quad g_4 = 6\mu r^{-5} s,$$

$$f_5 = 105\mu r^{-9} s^3 - 30\mu r^{-7} ss' - 15\mu r^{-7} s'^2 - 15\mu^2 r^{-8} s,$$

$$g_5 = -45\mu r^{-7} s^2 + 9\mu r^{-5} s' + \mu^2 r^{-6},$$

и тако даље. Тако закључујемо да f_i и g_i имају коначан број сабирака општег облика

$$A\, \mu^{\alpha} r^{-\beta} s^{\gamma} s'^{\delta};$$

A је цео број, позитиван или негативан, а α, β, γ и δ су такође цели бројеви, позитивни или нуле. Израчунавање појединих фактора за $t{=}t_0$, помоћу почетних вредности $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$, вршимо помоћ

$$r_0^2 = (\mathbf{r}_0\, \mathbf{r}_0), \quad s_0 = (\mathbf{r}_0\, \mathbf{v}_0), \quad s'_0 = (\mathbf{v}_0\, \mathbf{v}_0) - \mu r_0^{-1}.$$

Најзгодније је користити средњи Гаусов дан као времену јединицу, дакле $\tau{=}k(t{-}t_0)$, $\mu{=}1$, обративши пажњу на компоненте брзине $\mathbf{v}_0$.

Испитивање конвергенције редова (10) је прилично компликовано, а добивени резултати нису тако једноставни да би се непосредно користили у пракси. Но практичну им употребу још више ограничава релативно спора конвергенција и у случајевима када је она обезбеђена. У пракси их користимо само за краће временe интервале τ, а нешто ширу примену су им омогућили савремени електронски аутомати за рачунање.

Постоји читав низ различитих трансформација горњих редова за функције f и g, како их је Лагранж увео у теорију планетског кретања. Увођењем нових параметара настојало се доћи до израза у којима се поједини чланови формирају на прегледнији начин. Ми ћемо овде још извести изразе за Лагранжеве функције f и g у коначном облику, но помоћу неких других основних променљивих, имајући на уму наше касније потребе.

Помножимо (5) векторски са $\mathbf{v}_0$, односно са $\mathbf{r}_0$. Резултат ће бити

$$[\mathbf{r}\, \mathbf{v}_0] = f\, [\mathbf{r}_0\, \mathbf{v}_0] = f\, \mathbf{C}, \qquad \text{односно} \qquad [\mathbf{r}_0\, \mathbf{r}] = g\, [\mathbf{r}_0\, \mathbf{v}_0] = g\, \mathbf{C}.$$

Векторске производе на левим странама израчунавамо помоћу

$$\mathbf{r} = \xi\, \mathbf{P} + \eta\, \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{r}_0 = \xi_0\, \mathbf{P} + \eta_0\, \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{v}_0 = \xi'_0\, \mathbf{P} + \eta'_0\, \mathbf{Q},$$

па добивамо да је

$$[\mathbf{r}\, \mathbf{v}_0] = (\xi\eta'_0 - \xi'_0\eta)\, [\mathbf{P}\, \mathbf{Q}] = (\xi\eta'_0 - \xi'_0\eta)\, \mathbf{R},$$

$$[\mathbf{r}_0\, \mathbf{r}] = (\xi_0\, \eta - \xi\eta_0)\, [\mathbf{P}\, \mathbf{Q}] = (\xi_0\, \eta - \xi\eta_0)\, \mathbf{R}.$$

С обзиром на $\mathbf{C} = C\mathbf{R}$, закључујемо да за Лагранжеве функције f и g можемо написати изразе

$$f = \frac{1}{C}(\xi\eta'_0 - \xi'_0\, \eta), \qquad g = \frac{1}{C}(\xi_0\, \eta - \xi\eta_0). \tag{16}$$

Изразе у заградама срачунаћемо, у функцији ексцентричних аномалија, користећи 6(12) и 6(14):

$$\xi\eta_0' - \xi_0'\eta = \frac{1}{\varepsilon^2}\,(\mu\cos E - D)\,\frac{C}{r_0}\cos E_0 + \frac{\mu}{\varepsilon r_0}\sin E_0\,\frac{C}{\varepsilon}\sin E =$$

$$= \frac{C}{\varepsilon^2 r_0}\,[\mu\,(\cos E\cos E_0 + \sin E\sin E_0) - D\cos E_0] =$$

$$= \frac{C}{\varepsilon^2 r_0}\,(\mu\cos 2\,G - D\cos E_0).$$

Овде смо увели ознаку

$$2G = E - E_0,$$

коју ћемо и касније користити.

Даље је, на исти начин,

$$\xi_0\eta - \xi\eta_0 = \frac{1}{\varepsilon^2}\,(\mu\cos E_0 - D)\,\frac{C}{\varepsilon}\,\sin E - \frac{1}{\varepsilon^2}(\mu\cos E - D)\,\frac{C}{\varepsilon}\sin E_0 =$$

$$= \frac{C}{\varepsilon^3}\,[\mu\,(\sin E\cos E_0 - \cos E\sin E_0) - D\,(\sin E - \sin E_0)] =$$

$$= \frac{C}{\varepsilon^3}\,[\mu\sin 2\,G - D\,(\sin E - \sin E_0)].$$

Оба ова израза за интензитете векторских производа моћи ћемо поједноставити ако се позовемо на једначину за радијусвектор, одакле је

$$-D\cos E_0 = \varepsilon^2 r_0 - \mu,$$

као и на разлику двеју Кеплерових једначина, за тренутке t и t_0, што доводи до

$$-D\,(\sin E - \sin E_0) = \varepsilon^3\,(t - t_0) - \mu\,(E - E_0) = \varepsilon^3\,(t - t_0) - 2\,\mu\,G.$$

На тај начин можемо писати да је

$$\xi\eta_0' - \xi_0'\eta = \frac{C}{\varepsilon^2 r_0}\,(\mu\cos 2\,G + \varepsilon^2 r_0 - \mu) = \left[1 - \frac{\mu}{\varepsilon^2 r_0}\,(1 - \cos 2\,G)\right]C,$$

$$\xi_0\eta - \xi\eta_0 = \frac{C}{\varepsilon^3}\,[\mu\,(\sin 2\,G - 2\,G) + \varepsilon^3\,(t - t_0)].$$

Тако коначно једначине (16) сводимо на

$$f = 1 - \frac{2\,\mu}{\varepsilon^2 r_0}\sin^2 G, \qquad g = t - t_0 - \frac{\mu}{\varepsilon^3}\,(2\,G - \sin 2\,G). \tag{17}$$

Ово су тражени изрази за Лагранжеве функције f и g, са новом промењљивом G, полуразликом ексцентричних аномалија. Но поред ње се експлицитно јавља и времени интервал t—t_0.

Искористимо одмах изведене једначине (17), како бисмо дошли до још неких релација, које ћемо касније користити.

Квадрирањем једначине $g\,\mathbf{C}=[\mathbf{r}_0\,\mathbf{r}]$ налазимо да је

$$g^2 C^2=([\mathbf{r}_0\,\mathbf{r}]\,[\mathbf{r}_0\,\mathbf{r}])=r_0^2 r^2-(\mathbf{r}_0\,\mathbf{r})^2=$$

$$=[r_0\,r+(\mathbf{r}_0\,\mathbf{r})]\,[r_0\,r-(\mathbf{r}_0\,\mathbf{r})],$$

па погледајмо како се изражавају фактори на десној страни помоћу ексцентричних аномалија. Искористићемо прво израз за радијусвектор, па ћемо помоћу њега израчунати да је

$$r_0\,r=\frac{1}{\varepsilon^2}\,(\mu-D\cos E_0)\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,(\mu-D\cos E)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^4}\,[\mu^2-\mu\,D\,(\cos E+\cos E_0)-D^2\cos E\cos E_0].$$

Потом рачунамо

$$(\mathbf{r}_0\,\mathbf{r})=((\xi_0\,\mathbf{P}+\eta_0\,\mathbf{Q})\,(\xi\mathbf{P}+\eta\,\mathbf{Q}))=\xi_0\,\xi+\eta_0\,\eta=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^4}\,(\mu\cos E-D)\,(\mu\cos E_0-D)+\frac{C^2}{\varepsilon^2}\sin E\sin E_0=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^4}\,[\mu^2\cos E\cos E_0-\mu\,D\,(\cos E+\cos E_0)+D^2]+$$

$$+\frac{C^2}{\varepsilon^2}\sin E\sin E_0.$$

Ако сада образујемо збир ових једначина, дакле $r_0\,r+(\mathbf{r}_0\,\mathbf{r})$, одмах ћемо закључити да је он прилично компликован израз. Зато ћемо га оставити непромењеног и означити са $\varkappa^2$, дакле

$$\varkappa^2=r_0\,r+(\mathbf{r}_0\,\mathbf{r}). \tag{18}$$

Међутим, разлика горњих једначина се лако трансформише у

$$r_0\,r-(\mathbf{r}_0\,\mathbf{r})=\frac{1}{\varepsilon^4}\,[\mu^2-D^2-(\mu^2-D^2)\cos E\cos E_0+C^2\,\varepsilon^2\sin E\sin E_0].$$

Но како је

$$\mu^2-D^2=C^2\,\varepsilon^2,$$

то ће бити

$$r_0\,r-(\mathbf{r}_0\,\mathbf{r})=\frac{C^2}{\varepsilon^2}\,[1-\cos(E-E_0)]=\frac{2\,C^2}{\varepsilon^2}\sin^2 G.$$

Вратимо ли се сада полазној једначини, која даје g^2, и искористимо ознаку (18), непосредно долазимо до резултата

$$g=\sqrt{2}\,\frac{\varkappa}{\varepsilon}\sin G. \tag{19}$$

Елиминишемо ли одавде и из праве једначине (17) sin G, добићемо релацију

$$f = 1 - \frac{\mu g^2}{\varkappa^2 r_0}, \tag{20}$$

коју ћемо касније такође користити.

8.2. Систем почетних услова $\mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}(t_3)$. — Пређимо сада на други систем почетних услова, то јест претпоставимо да су нам познати, за тренутке t_1 и t_3, хелиоцентрични вектори положаја небеског тела, $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}(t_3) = \mathbf{r}_3$. И овде ћемо претпоставити да су нам ти вектори дати у екваторском координатном систему, ма да то начелно није важно, а ограничићемо се, искључиво, на налажење само астрономских скаларних елемената, и то како елиптичке, тако и кружне и параболичке путање.

8.2.1. ***Кретање по кругу.*** — Полупречник кружне путање небеског тела имамо непосредно из

$$a^2 = (\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_1) = (\mathbf{r}_3\, \mathbf{r}_3),$$

па је средње кретање

$$n = \frac{k}{a\sqrt{a}}.$$

Разлику аргумената латитуде, $u_3 - u_1$, добивамо из

$$(\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_3) = a^2 \cos(u_3 - u_1).$$

Међутим, касније ћемо видети да је у пракси, при примени ових једначина, поменути угао често врло мали; стога ћемо га тачније израчунати помоћу

$$\sin^2 \frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \frac{1}{2}[1 - \cos(u_3 - u_1)] = \frac{1}{2a^2}[a^2 - (\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_3)].$$

Средње сидерично дневно кретање можемо сада проконтролисати помоћу

$$n = \frac{u_3 - u_1}{t_3 - t_1}.$$

Позовимо се, затим, на једначине

$$\frac{\mathbf{r}_1}{a} = \cos u_1\, \mathbf{P} + \sin u_1\, \mathbf{Q}, \qquad \frac{\mathbf{r}_3}{a} = \cos u_3\, \mathbf{P} + \sin u_3\, \mathbf{Q}.$$

У њима нисмо прецизирали правац од ког рачунамо аргументе u; засад нам је довољно да су $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ два јединична вектора, међусобно нормална, а оба су у путањској равни тела. Аргументе u рачунамо од правца $\mathbf{P}$. — Збир и разлика ове две једначине дају:

$$\frac{1}{a}(\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1)=(\cos u_3+\cos u_1)\,\mathbf{P}+(\sin u_3+\sin u_1)\,\mathbf{Q},$$

$$\frac{1}{a}(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=(\cos u_3-\cos u_1)\,\mathbf{P}+(\sin u_3-\sin u_1)\,\mathbf{Q}.$$

Ставимо ли да је

$$\frac{1}{2}(u_3+u_1)=X, \qquad \frac{1}{2}(u_3-u_1)=U,$$

горње једначине лако доводимо на облик

$$\frac{1}{2\,a}(\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1)=\cos X\cos U\,\mathbf{P}+\sin X\cos U\,\mathbf{Q},$$

$$\frac{1}{2\,a}(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=-\sin X\sin U\,\mathbf{P}+\cos X\sin U\,\mathbf{Q}.$$

Замислимо сада да вектор $\mathbf{P}$ поставимо у правац вектора положаја тела у тренутку $\frac{1}{2}(t_3+t_1)$; тај правац нека нам дефинише „перихел" кружне путање. Како је кретање по кругу једнолико, биће за тај тренутак $X=\frac{1}{2}(u_3+u_1)=0$. С таквом дефиницијом „перихела" горње једначине постају:

$$\mathbf{P}=\frac{1}{2\,a}(\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1)\sec U, \qquad \mathbf{Q}=\frac{1}{2\,a}(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)\operatorname{cosec} U.$$

Сад више не постоје никакве запреке да по раније изведеним једначинама израчунамо елементе Ω, ω и i. Геометријско значење „елемента" ω нам је сад познато: то је угао (у равни кружне путање) од чворне линије до правца ка положају тела у тренутку $t_0=\frac{1}{2}(t_3+t_1)$. Тај тренутак је „епоха елемената", за коју је $u_0=0$.

Нисмо посебно нагласили да смо за јединицу времена усвојили средњи дан, и занемарили масу тела; то се, уосталом, види из коришћеног израза за средње сидерично дневно кретање.

Нећемо губити време ни заузимати простор исписујући преглед образаца за израчунавање елемената кружне путање помоћу почетних услова. То ћемо дати на свом месту, када горње обрасце будемо стварно користили.

8.2.2. ***Кретање по елипси.*** — Исти задатак постављамо сада за случај кретања небеског тела по елипси. Међутим, погледаћемо, исто тако, како можемо изразити интеграле кретања $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ са почетним условима $\mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}(t_3)$.

8.2.2.1. *Налажење скаларних елемената.* — Помоћу познатих почетних услова кретања $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}_3=\mathbf{r}(t_3)$ извешћемо класичне астрономске елементе кретања по елипси на следећи начин.

До сада смо често користили правоугли хелиоцентрични координатни систем у путањској равни небеског тела, где су јединични вектори координатних оса били $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. У њему је

$$\frac{\mathbf{r}_j}{r_j}=\cos v_j\,\mathbf{P}+\sin v_j\,\mathbf{Q} \tag{21}$$

за сваки вектор положаја $\mathbf{r}_j$, па и за наше почетне услове кретања, за које је $j=1$ и 3. Сада имамо пред собом обрнути задатак: да са датим $\mathbf{r}_j$ одредимо $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, одакле после налазимо Ω, ω и i, на познати начин. Зато ћемо улоге вектора у (21) заменити; помоћу $\mathbf{r}_j$ конструисаћемо нов координатни систем, па потражити изразе за представљање $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ у њему.

Тај нови координатни систем нека је опет хелиоцентрични правоугли, у равни путање тела. Основна оса нека му је одређена јединичним вектором $\mathbf{r}_1/r_1$. Јединични вектор друге осе, нормалне на основној (у смеру директног кретања), означимо са $\mathbf{r}_0/r_0$. Њега можемо да одредимо са датим почетним условима кретања $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$. Наиме, векторски производ $[\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3]$ је нормалан на путањској равни тела; образујемо ли нов векторски производ

$$[[\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3]\,\mathbf{r}_1]=r_1^2\mathbf{r}_3-(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)\mathbf{r}_1=r_1^2\left[\mathbf{r}_3-\frac{(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)}{r_1^2}\mathbf{r}_1\right],$$

одмах ћемо закључити да је он колинеаран са траженом другом осом новог координатног система. Зато ћемо $\mathbf{r}_0$ увести помоћу

$$\mathbf{r}_0=\mathbf{r}_3-\sigma\,\mathbf{r}_1,\qquad \sigma=\frac{(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)}{r_1^2}. \tag{22}$$

Оваква дефиниција $\mathbf{r}_0$ ће се касније показати као најпогоднија.

Са тако усвојеним осама новог координатног система, $\mathbf{r}_1/r_1$ и $\mathbf{r}_0/r_0$, јединичне векторе $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ из (21) можемо сад приказати у њему аналогним једначинама

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&=\cos v_1\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}-\sin v_1\frac{\mathbf{r}_0}{r_0},\\ \mathbf{Q}&=\sin v_1\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}+\cos v_1\frac{\mathbf{r}_0}{r_0}.\end{aligned} \tag{23}$$

Одатле ћемо их и ефективно израчунавати, чим одредимо праву аномалију v_1.

Разлику правих аномалија, угао $v_3 - v_1$, добивамо из

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3) &= r_1\,r_3 \cos(v_3 - v_1),\\
[\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3] &= r_1\,r_3 \sin(v_3 - v_1)\,\mathbf{R}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Квадрирање друге једначине даје

$$([\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3]\,[\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3]) = r_1^2\,r_3^2 - (\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)^2 = r_1^2\,r_3^2 \sin^2(v_3 - v_1).$$

Изразимо ли овде скаларни производ $(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)$ помоћу σ другом једначином (22), добићемо да је

$$r_1^2\,(r_3^2 - \sigma^2\,r_1^2) = r_1^2\,r_3^2 \sin^2(v_3 - v_1).$$

Међутим је, према дефиницијама (22),

$$
\begin{aligned}
r_0^2 = r_3^2 - 2\,\sigma\,(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3) + \sigma^2\,r_1^2 = r_3^2 - 2\sigma^2\,r_1^2 + \sigma^2\,r_1^2 =\\
= r_3^2 - \sigma^2\,r_1^2.
\end{aligned}
$$

Исти скаларни производ $(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)$ ћемо и у првој једначини (24) сменити са σ, па тако долазимо до израза за одређивање угла $v_3 - v_1$ (када је он мањи од 180°, што је у пракси редован случај):

$$\sin(v_3 - v_1) = \frac{r_0}{r_3}, \qquad \cos(v_3 - v_1) = \sigma\,\frac{r_1}{r_3}. \tag{25}$$

Једноставност ових израза је последица дефинисања вектора $\mathbf{r}_0$ управо једначинама (22).

Да бисмо добили и појединачне вредности правих аномалија, дакле v_1 и v_3, позваћемо се на једначину путање

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}.$$

Она ће нас довести до израза

$$e\cos v_1 = q_1 \qquad \text{и} \qquad e\cos v_3 = q_3, \tag{26}$$

ако уведемо ознаке

$$q_j = \frac{p}{r_j} - 1, \qquad j = 1 \text{ и } 3. \tag{27}$$

Претпоставимо да нам је познат параметар елиптичке путање, p. Онда су познате и величине q_j из (27), па помоћу идентичности

$$v_3 = v_1 + (v_3 - v_1) \tag{28}$$

рачунамо:

$$
\begin{aligned}
e\cos v_3 = e\cos[v_1 + (v_3 - v_1)] = e\cos v_1\,\cos(v_3 - v_1) -\\
- e\sin v_1 \sin(v_3 - v_1).
\end{aligned}
$$

Овде ћемо искористити (25) и (26), па долазимо до

$$q_3 = q_1 \sigma \frac{r_1}{r_3} - e \sin v_1 \frac{r_0}{r_3}.$$

Стога

$$e \sin v_1 = \frac{1}{r_0} (\sigma r_1 q_1 - r_3 q_3),$$

$$e \cos v_1 = q_1,$$

представљају једначине за одеђивање ексцентричности путање e и праве аномалије v_1, у тренутку t_1. *Потом из* (28) *налазимо и* v_3. Сад можемо применити и (23), како бисмо добили **P** и **Q**, а помоћу њих, ако је потребно, и ☊, ω и i.

Претпоставка о познавању вредности параметра путање p омогућује и налажење велике полуосе путање, a:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}.$$

Ексцентричне и средње аномалије за оба тренутка, t_1 и t_3, срачунавамо по

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_j = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_j, \qquad M_j = E_j - e \sin E_j,$$

па

$$n = \frac{M_3 - M_1}{t_3 - t_1}$$

даје средње сидеричко дневно кретање тела, чију вредност контролишемо помоћу

$$n = k\, a^{-3/2}.$$

Преостаје нам још да утврдимо како добивамо параметар елиптичке путање, p, *помоћу* почетних услова кретања, $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$. Међутим, веза између ове три величине је далеко компликованија, но што је то случај са другим елементима кретања. Ради се о неколико трансцедентних релација из којих се, формално говорећи, елиминисањем неких параметарских величина, долази до решења задатака. Но у стварном рачуну се не може избећи поступак узастопних апроксимација. *Имајући на уму и касније потребе*, параметар путање ћемо повезати са једним новим појмом, односом површина сектора и троугла.

Двострука *површина елиптичког сектора, који* је ограничен радијусвекторима r_1 и r_3 и луком путање који тело пређе од тренутка t_1 до тренутка t_3, пропорционална је времену (Други Кеплеров закон):

$$2 P_{\text{sektora}} = C (t_3 - t_1) = \sqrt{\mu p}\, (t_3 - t_1).$$

С друге стране, двострука површина троугла чије су стране радијусвектори r_1 и r_3 и тетива путање која спаја положаје тела у тренуцима t_1 и t_3 је

$$2 P_{\text{trougla}} = |[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3]| = r_1 r_3 \sin (v_3 - v_1).$$

Зато је однос површина сектора и троугла, за који уводимо ознаку y,

$$y = \frac{\sqrt{p}\,\tau}{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)}, \tag{29}$$

где смо занемарили масу тела, а времени интервал изразили у средњим Гаусовим данима:

$$\tau = k\,(t_3 - t_1).$$

Касније ћемо видети како се y стварно израчунава са датим почетним условима; засад ћемо се задовољити чињеницом да параметар елиптичке путање, p, добивамо из (29), што са првом једначином (25) даје

$$\sqrt{p} = r_0 r_1 \frac{y}{\tau}.$$

Преглед образаца

I. $r_1^2 = (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1), \quad r_3^2 = (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3), \quad \sigma = (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3)\, r_1^{-2}, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_3 - \sigma\,\mathbf{r}_1;$

II. $\sin(v_3 - v_1) = r_0\, r_3^{-1}, \quad \cos(v_3 - v_1) = \sigma\, r_1\, r_3^{-1};$

III. $\tau = k\,(t_3 - t_1), \quad \sqrt{p} = r_0 r_1\, y\, \tau^{-1};$

IV. $q_1 = p r_1^{-1} - 1, \quad q = p r_3^{-1} - 1,$

$e \sin v_1 = (\sigma\, r_1\, q_1 - r_3\, q_3)\, r_0^{-1}, \quad e \cos v_1 = q_1,$

$a = p\,(1 - e^2)^{-1}, \quad v_3 = v + (v_3 - v_1);$

V. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_j = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_j, \quad M_j = E_j - e \sin E_j, \quad j = 1,\ 3,$

$n = (M_3 - M_1)\,(t_3 - t_1)^{-1},$ контрола: $n = k\, a^{-3/2};$

VI. $\mathbf{P} = \cos v_1\, r_1^{-1}\, \mathbf{r}_1 - \sin v_1\, r_0^{-1}\, \mathbf{r}_0,$

$\mathbf{Q} = \sin v_1\, r_1^{-1}\, \mathbf{r}_1 + \cos v_1\, r_0^{-1}\, \mathbf{r}_0,$

контрола: $(\mathbf{PP}) = (\mathbf{QQ}) = 1, \quad (\mathbf{PQ}) = 0;$

VII. $\sin\omega \sin i = -P_y \sin\varepsilon + P_z \cos\varepsilon,$

$\cos\omega \sin i = -Q_y \sin\varepsilon + Q_z \cos\varepsilon,$

$\sin \Omega = (P_y \cos\omega - Q_y \sin\omega) \sec\varepsilon,$

$\cos \Omega = P_x \cos\omega - Q_x \sin\omega,$

контрола: $-\sin \Omega \cos i = P_x \sin\omega + Q_x \cos\omega.$

8.2.2.2. *Налажење вредности интеграла* **r** *и* **v**. — Као год што смо раније утврдили могућност непосредног изражавања вектора положаја и брзине тела помоћу почетних услова $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$, исто тако ћемо сада потражити начин за представљање **r** и **v** помоћу почетних услова $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$. Поћи ћемо опет од линеарне зависности три (компланарна) вектора положаја, коју ћемо сада написати у облику

$$\mathbf{r} = n_1 \mathbf{r}_1 + n_3 \mathbf{r}_3, \tag{30}$$

па потражимо значења скаларних функција n_1 и n_3.

У том циљу помножимо горњу једначину векторски са $\mathbf{r}_1$, односно са $\mathbf{r}_3$. Резултат ће бити:

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}] = n_3 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3], \quad [\mathbf{r}\, \mathbf{r}_3] = n_1 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3].$$

То значи да је

$$n_1 = \frac{|[\mathbf{r}\ \mathbf{r}_3]|}{|[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3]|}, \qquad n_3 = \frac{|[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}\ ]|}{|[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3]|}. \tag{31}$$

Наведени интензитети ових векторских производа једнаки су двоструким површинама троуглова чије су стране два вектора положаја, који улазе у векторски производ, и одговарајућа тетива путање (права која спаја крајеве поменутих вектора). За те двоструке површине увешћемо ознаке

$$|[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}]| = [r_1, r], \quad |[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3]| = [r_1, r_3], \quad |[\mathbf{r}\, \mathbf{r}_3]| = [r, r_3].$$

Функције n_1 и n_3 су, према (31), односи површина троуглова, па ћемо потражити могућности њихова представљања помоћу почетних услова. — Напоменимо одмах да из (30) следује и

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\, n_1}{\mathrm{d}\, t} \mathbf{r}_1 + \frac{\mathrm{d}\, n_3}{\mathrm{d}\, t} \mathbf{r}_3,$$

но на овој релацији нећемо се касније задржавати.

Одаберимо сада неку епоху t_2, тако да је

$$t_1 < t_2 < t_3,$$

а времене интервале између ове епохе и тренутака t_1 и t_3 изразимо у средњим Гаусовим данима, са ознакама

$$\tau_1 = k\,(t_3 - t_2), \quad \tau_3 = k\,(t_2 - t_1).$$

Нека се вектор положаја из (30) односи на тренутак t_2, а замислимо да за исти тренутак $\mathbf{v}_2$ представља брзину тела. Позваћемо се на једначину (5), која примењена на тренутке t_1 и t_3, а са t_2 као полазном епохом, даје

$$\mathbf{r}_1 = f(-\tau_3)\,\mathbf{r}_2 + g(-\tau_3)\,\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{r}_3 = f(\tau_1)\,\mathbf{r}_2 + g(\tau_1)\,\mathbf{v}_2. \tag{32}$$

Векторским множењем обе ове једначине са $\mathbf{r}_2$ добићемо

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] = -g(-\tau_3)\,\mathbf{C} \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3] = g(\tau_1)\,\mathbf{C},$$

док векторским множењем једначина (32) долазимо до

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3] = [f(-\tau_3)\, g(\tau_1) - g(-\tau_3)\, f(\tau_1)]\,\mathbf{C}.$$

Према томе, са раније уведеним ознакама за двоструке површине троуглова, закључујемо да је

$$
\begin{aligned}
&[r_1,\ r_2] = -g(-\tau_3)\, C,\\
&[r_2,\ r_3] = g(\tau_1)\, C,\\
&[r_1,\ r_3] = [f(-\tau_3)\, g(\tau_1) - g(-\tau_3)\, f(\tau_1)]\, C.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Раније изведени редови за функције f и g дају у овом случају

$$
\begin{aligned}
f(\tau_1) &= \quad 1 - \frac{1}{2}\, r_2^{-3}\, \tau_1^2 + \frac{1}{2}\, r_2^{-5}\, s_2\, \tau_1^3 + \cdots,\\
f(-\tau_3) &= \quad 1 - \frac{1}{2}\, r_2^{-3}\, \tau_3^2 - \frac{1}{2}\, r_2^{-5}\, s_2\, \tau_3^3 + \cdots,\\
g(\tau_1) &= \quad \tau_1 - \frac{1}{6}\, r_2^{-3}\, \tau_1^3 + \frac{1}{4}\, r_2^{-5}\, s_2\, \tau_1^4 + \cdots,\\
g(-\tau_3) &= -\tau_3 + \frac{1}{6}\, r_2^{-3}\, \tau_3^3 + \frac{1}{4}\, r_2^{-5}\, s_2\, \tau_3^4 + \cdots.
\end{aligned}
$$

Унесемо ли ово у (33), добићемо редове за двоструке површине троуглова:

$$
\begin{aligned}
[r_1,\ r_2] &= C\, \tau_3 \left(1 - \frac{1}{6}\, r_2^{-3}\, \tau_3^2 - \cdots\right),\\
[r_2,\ r_3] &= C\, \tau_1 \left(1 - \frac{1}{6}\, r_2^{-3}\, \tau_1^2 + \cdots\right),\\
[r_1,\ r_3] &= C\, \tau_2 \left(1 - \frac{1}{6}\, r_2^{-3}\, \tau_2^2 - \cdots\right),
\end{aligned}
$$

где смо у последњој једначини увели ознаку

$$
\tau_2 = k\,(t_3 - t_1) = \tau_1 + \tau_3.
$$

Деобом одговарајућих редова добивамо, према (31), редове за тражене односе површина троуглова:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{1}{6}\, \tau_3\, (\tau_1 + \tau_2)\, r_2^{-3} + \cdots\cdots\right],\\
n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 + \frac{1}{6}\, \tau_1\, (\tau_2 + \tau_3)\, r_2^{-3} + \cdots\cdots\right].
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Чланови вишег реда, који овде нису исписани, функције су следећих аргумената: τ_1, τ_2, τ_3, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_2$. Тако видимо да изразима (34) нисмо решили постављени задатак приказивања скаларних величина n_1 и n_3 као функција почетних услова $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$, то јест да произвољно $\mathbf{r}_2$ рачунамо са $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$ посредством једначине (30).

Међутим, већ сада нам је јасно да би такво решење задатка било исувише компликовано за практичну употребу. Зато ћемо се задовољити познавањем облика прва два члана у редовима (34), јер ћемо њих стварно и користити.

О конвергенцији тих редова не можемо рећи ништа прецизније од онога што смо рекли за редове за f и g. Шта више, (34) смо извели оперишући са неким редовима као да су апсолутно конвергентни, а то у општем случају не мора бити. Све су то разлози који нас нагоне да потражимо и неки други начин изражавања односа површина троуглова, n_1 и n_3, макар и са њима не решили у потпуности првобитно постављени задатак.

Сетимо ли се раније дефинисаног појма односа површина сектора и троугла, одмах можемо писати да је

$$y_1 = \frac{C\tau_1}{[r_2, r_3]}, \quad y_2 = \frac{C\tau_2}{[r_1, r_3]}, \quad y_3 = \frac{C\tau_3}{[r_1, r_2]},$$

па је

$$y_2 : y_1 = \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{[r_2, r_3]}{[r_1, r_3]} = \frac{\tau_2}{\tau_1} n_1,$$

$$y_2 : y_3 = \frac{\tau_2}{\tau_3} \frac{[r_1, r_2]}{[r_1, r_3]} = \frac{\tau_2}{\tau_3} n_3,$$

дакле

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{y_2}{y_1}, \quad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{y_2}{y_3}. \tag{35}$$

Већ смо раније навели да односе површина сектора и троугла, y_i, можемо да израчунамо са датим $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_k$, t_j и t_k $(i, j\ k = 1,\ 2,\ 3)$. За ефективно израчунавање односа површина троуглова користићемо једначине (35).

8.2.3. ***Кретање по параболи.*** — У случају кретања небеског тела по параболи и познавања почетних услова $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}(t_3)$, очигледно је да разлику правих аномалија у тренуцима t_1 и t_3 можемо да израчунамо на исти начин као и у случају кретања по елипси. Иста ствар је и са векторским константама $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, одакле изводимо елементе Ω, ω и i. Разлика настаје тек тамо где се позивамо на једначину путање. Сада је

$$r = q \sec^2 \frac{1}{2} v,$$

одакле је

$$\sqrt{r_1 : r_3} = \cos \frac{1}{2} v_3 \sec \frac{1}{2} v_1 .$$

Ради нешто краћег писања увешћемо ознаке

$$F=\frac{1}{2}(v_3+v_1), \quad f=\frac{1}{2}(v_3-v_1),$$

па ће бити

$$v_1=F-f, \qquad v_3=F+f.$$

Зато претходна једначина прелази у

$$\sqrt{r_1:r_3}=\cos\frac{1}{2}(F+f)\sec\frac{1}{2}(F-f)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}F\operatorname{tg}\frac{1}{2}f}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}F\operatorname{tg}\frac{1}{2}f}.$$

Одавде налазимо да је

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}F=\frac{\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1}}{(\sqrt{r_3}+\sqrt{r_1})\operatorname{tg}\frac{1}{2}f}.$$

Унесемо ли ово у

$$\operatorname{tg}F=\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}F}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}F}$$

и средимо, добићемо и израз за збир правих аномалија:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_3+v_1)=\frac{(r_3-r_1)\sin\frac{1}{2}(v_3-v_1)}{2\sqrt{r_1r_3}-(r_1+r_3)\cos\frac{1}{2}(v_3-v_1)},$$

што нам са вредношћу разлике правих аномалија омогућује да нађемо и v_1 и v_3. Помоћу њих добивамо перихелску даљину из

$$q=r_1\cos^2\frac{1}{2}v_1=r_3\cos^2\frac{1}{2}v_3.$$

Сада израчунавамо помоћне величине M_j,

$$M_j=\frac{\sqrt{2}}{k}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_j+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}v_j\right), \qquad j=1,\ 3,$$

па је тренутак пролаза кроз перихел одређен са

$$T=t_1-M_1q^{3/2}=t_3-M_3q^{3/2}.$$

Прегледобразаца

I. $r_1^2 = (\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_1), \quad r_3^2 = (\mathbf{r}_3\,\mathbf{r}_3), \quad \sigma = (\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)\,r_1^{-2}, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_3 - \sigma\,\mathbf{r}_1.$

II. $\operatorname{tg}(v_3 - v_1) = \dfrac{r_0}{\sigma\,r_1},$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(v_3 + v_1) = \frac{(r_3 - r_1)\sin\frac{1}{2}(v_3 - v_1)}{2\sqrt{r_1 r_3} - (r_1 + r_3)\cos\frac{1}{2}(v_3 - v_1)}$$

III. $q = r_1\cos^2\dfrac{1}{2}v_1 = r_3\cos^2\dfrac{1}{2}v_3,$

$$M_j = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_j + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}v_j\right), \quad j = 1,\ 3,$$

$$T = t_1 - M_1\,q^{3/2} = t_3 - M_3\,q^{3/2}.$$

IV. $\mathbf{P} = \cos v_1\,r_1^{-1}\,\mathbf{r}_1 - \sin v_1\,r_0^{-1}\mathbf{r}_0,$

$\mathbf{Q} = \sin v_1\,r_1^{-1}\,\mathbf{r}_1 + \cos v_1\,r_0^{-1}\,\mathbf{r}_0.$

контрола:

$(\mathbf{P}\,\mathbf{P}) = (\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}) = 1,$

$(\mathbf{P}\,\mathbf{Q}) = 0.$

V. $\sin\omega\sin i = -P_y\sin\varepsilon + P_z\cos\varepsilon,$

$\cos\omega\sin i = -Q_y\sin\varepsilon + Q_z\cos\varepsilon,$

$\sin\Omega = (P_y\cos\omega - Q_y\sin\omega)\sec\varepsilon,$

$\cos\Omega = P_x\cos\omega - Q_x\sin\omega,$

контрола: $-\sin\Omega\cos i = P_x\sin\omega + Q_x\cos\omega.$

9. ОДНОС ПОВРШИНА СЕКТОРА И ТРОУГЛА. Видели смо да се параметар елиптичке путање може једноставно израчунати кад је позната вредност односа површина сектора и троугла, које образују два радијусвектора тела са луком, односно тетивом, путање. Такође смо видели да се односи површина троуглова исто тако једноставно израчунавају са познатим односима површина сектора и троугла. Зато је неопходно да том односу, за који смо увели ознаку y, посветимо посебну пажњу.

Да поновимо. На хелиоцентричној (непоремећеној) елиптичкој путањи небеског тела замишљамо два његова положаја, у тренуцима t_1 и t_3. Радијусвектори су му тада r_1 и r_3. Елиптички сектор ограничен је овим радијусвекторима и луком путање тела, које оно пређе од тренутка t_1 до тренутка t_3. Троугао је ограничен истим радијусвекторима и тетивом путање, која спаја поменута два положаја тела. Темена су му, дакле, Сунце и два положаја тела. Однос површина ових двају ликова, неименована величина y, увек је већи од јединице, јер је површина сектора увек већа од површине троугла. Поред тога, ми ћемо се још ограничити на случајеве кад је средишњи угао, разлика правих аномалија, $v_3 - v_1$, мањи од 180°. Шта више, видећемо да у пракси врло често долазе случајеви када је $v_3 - v_1$ мали угао — десетак степени, па и мање — то јест, када је y тек нешто већи од јединице.

Формулација нашег задатка у овом одељку гласи: извести изразе за одређивање односа површина сектора и троугла при кретању по елипси, са познатим $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}(t_3) = \mathbf{r}_3$, t_1 и t_3.

Постоји неколико решења овог задатка, боље речено неколико варијанти основног Гаусовог решења, које ћемо управо изложити. Осим тога, приказаћемо и један приближни поступак, због његове честе употребе у рачуну одређивања непоремећене путање новопронађена планетоида.

9.1. Гаусов поступак. — Основа Гаусова поступка је формирање две релације између датих величина задатка, тражена односа површина сектора и троугла и полуразлике ексцентричних аномалија као помоћног параметра. Његовим елиминисањем из те две релације, формално говорећи, долази се до решења. Но стварно се решење добива ипак посредством поменута параметра, али на начин који је веома погодан за практичну употребу.

Први задатак нам је, дакле, да изведемо основне две Гаусове параметарске једначине. Дефинициону једначину 8(29) односа површина сектора и троугла написаћемо у облику

$$|[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3]|\, y = C\, t_{31}, \qquad t_{31} = t_3 - t_1,$$

што после множења са јединичним вектором нормале на путањску раван $\mathbf{R}$ постаје

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3]\, y = \mathbf{C}\, t_{31}. \tag{1}$$

Међутим, из

$$\mathbf{r}_3 = f\, \mathbf{r}_1 + g\, \mathbf{v}_1, \tag{2}$$

где су f и g функције од $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_1$ и t_{31}, лако изводимо да је

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3] = g\, \mathbf{C}.$$

Поређење са (1) доводи нас до закључка да је

$$g\, y = t_{31}. \tag{3}$$

Друга једначина 8(17) даје g помоћу параметра $G = (E_3 - E_1) : 2$, али уводи и нову непознату константу ε:

$$g = t_{31} - \mu \varepsilon^{-3} (2\, G - \sin 2\, G). \tag{4}$$

Њу ћемо елиминисати једначином 8(19),

$$g=\sqrt{2}\,\frac{\varkappa}{\varepsilon}\sin G, \tag{5}$$

пошто је у нашем задатку

$$\varkappa^2=r_1 r_3+(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3) \tag{6}$$

позната величина. Дакле, из (5) је

$$\mu\varepsilon^{-3}=\frac{\mu}{2\sqrt{2}}g^3\varkappa^{-3}\operatorname{cosec}^3 G,$$

па (4) постаје

$$g=t_{31}-\frac{\mu}{2\sqrt{2}}g^3\varkappa^{-3}(2\,G-\sin 2\,G)\operatorname{cosec}^3 G.$$

Ако овде искористимо (3) за елиминисање g, добићемо

$$y^3-y^2=m\,(2\,G-\sin 2G)\operatorname{cosec}^3 G \tag{7}$$

као прву параметарску једначину за y, где су све познате величине садржане у

$$m=\frac{\mu\,t_{31}^2}{2\sqrt{2}\,\varkappa^3}. \tag{8}$$

Другу параметарску једначину за y извешћемо полазећи од (2). Њен квадрат ћемо написати у облику

$$g^2 v_1^2=r_3^2-2f(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)+f^2 r_1^2.$$

Једначином 8(20), то јест

$$f=1-\frac{\mu\,g^2}{r_1\varkappa^2},$$

избацујемо из рачуна f:

$$g^2 v_1^2=r_3^2-2\,(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)+\frac{2\,\mu\,g^2}{r_1\varkappa^2}(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3)+r_1^2-\frac{2\,\mu\,g^2}{\varkappa^2}+\frac{\mu^2 g^4}{\varkappa^4}.$$

Скаларни производ $(\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_3)$ изражавамо помоћу $\varkappa^2$ из (6), па је

$$g^2 v_1^2=r_3^2-2\,\varkappa^2+2\,r_1\,r_3+\frac{2\,\mu\,g^2}{r_1}-\frac{2\,\mu\,g^2}{\varkappa^2}\,r_3+r_1^2-$$

$$-\frac{2\,\mu\,g^2}{\varkappa^2}\,r_1+\left(\frac{\mu\,g^2}{\varkappa^2}\right)^2=$$

$$=(r_3+r_1)^2-2(r_3+r_1)\frac{\mu\,g^2}{\varkappa^2}+\left(\frac{\mu\,g^2}{\varkappa^2}\right)^2+\frac{2\,\mu\,g^2}{r_1}-2\,\varkappa^2=$$

$$=\left(r_3+r_1-\frac{\mu\,g^2}{\varkappa^2}\right)^2+\frac{2\,\mu\,g^2}{r_1}-2\,\varkappa^2. \tag{9}$$

Квадрат брзине кретања тела у тренутку t_1 изражавамо интегралом живе силе, једначином 6(15),

$$v_1^2 = \frac{2\mu}{r_1} - \varepsilon^2,$$

где ε опет елиминишемо помоћу (5). Зато рачунамо

$$v_1^2 = \frac{2\mu}{r_1} - 2\frac{\varkappa^2}{g^2}\sin^2 G,$$

дакле

$$g^2 v_1^2 = \frac{2\mu g^2}{r_1} - 2\varkappa^2 \sin^2 G.$$

Ово са једначином (9) даје

$$\left(r_3 + r_1 - \frac{\mu g^2}{\varkappa^2}\right)^2 = 2\varkappa^2 - 2\varkappa^2 \sin^2 G.$$

то јест

$$r_3 + r_1 - \frac{\mu g^2}{\varkappa^2} = \sqrt{2}\,\varkappa \cos G.$$

Ставимо ли да је

$$\cos G = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} G \quad \text{и} \quad l = \frac{r_1 + r_3}{2\sqrt{2}\,\varkappa} - \frac{1}{2}, \tag{10}$$

последња једначина ће се, уз помоћ (3) и (8), редуковати на

$$y^2 = \frac{m}{l + \sin^2 \frac{1}{2} G}. \tag{11}$$

То је друга параметарска једначина за y, са новом константом задатка l, одређеном другом једначином (10).

Даљи задатак нашег рада је извођење поступка за налажење y помоћу (7) и (11). У том циљу ћемо прво увести нове функције $x = x(G)$ и $X = X(G)$ параметра G помоћу

$$x = \sin^2 \frac{1}{2} G = \frac{1}{2}(1 - \cos G), \tag{12}$$

$$X = (2G - \sin 2G)\operatorname{cosec}^3 G, \tag{13}$$

тако да основне једначине (7) и (11) постају

$$y^3 - y^2 = m X, \qquad y^2 = \frac{m}{l + x}. \tag{14}$$

Затим ћемо потражити зависност $X = X(x)$. Као најпогодније се показује да се тај посао обави интеграљењем диференцијалне једначине

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dG} \cdot \frac{dG}{dx} = F(x, X), \tag{15}$$

образоване, како је назначено, помоћу (12) и (13), пошто $F(x, X)$ неће експлицитно зависити од G. Заиста, из (12) и (13) је

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin G\,\mathrm{d}G,$$

$$\mathrm{d}X = [2\,(1-\cos 2\,G)\operatorname{cosec}^3 G - 3\,(2\,G - \sin 2\,G)\operatorname{cosec}^4 G\cos G]\,\mathrm{d}G.$$

Другу једначину сређујемо помоћу (13) и $1-\cos\,2\,G = 2\sin^2 G$ у

$$\mathrm{d}X = (4-3\,X\cos G)\operatorname{cosec} G\,\mathrm{d}G.$$

Тако за диференцијалну једначину (15) добивамо

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = 2\,(4-3\,X\cos G)\operatorname{cosec}^2 G.$$

Међутим је, из (12),

$$\cos G = 1-2\,x, \quad \text{дакле} \quad \sin^2 G = 1-\cos^2 G = 4\,x\,(1-x),$$

па је коначно

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \frac{4-3\,X(1-2\,x)}{2\,x\,(1-x)}. \tag{16}$$

Интеграл ове диференцијалне једначине потражићемо у облику бесконачног реда

$$X = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n + \cdots. \tag{17}$$

Одавде је

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \cdots + n\,a_n\,x^{n-1} + \cdots.$$

Уношењем овога и (17) у (16) добивамо да је

$$\begin{aligned}&(2\,x-2\,x^2)\,(a_1+2\,a_2\,x+3\,a_3\,x^2+\cdots+n\,a_n\,x^{n-1}+\cdots) = \\ &= 4-(3-6\,x)\,(a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\cdots+a_n\,x^n+\cdots).\end{aligned} \tag{18}$$

Одавде ћемо одредити коефицијенте a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$, потребне за интеграл (17), изједначујући факторе уз једнаке степене једине променљиве x на обема странама. Урадимо то одмах за n-ти степен од x:

$$2\,n\,a_n - 2\,(n-1)\,a_{n-1} = -3\,a_n + 6\,a_{n-1}.$$

Ово се своди на

$$a_n = \frac{2\,n+4}{2\,n+3}\,a_{n-1}. \tag{19}$$

Из (18) одмах видимо да је

$$0 = 4-3\,a_0, \quad \text{дакле} \quad a_0 = \frac{4}{3},$$

па (19) даје, за $n=1, 2, 3, \ldots, i$,

$$a_1=\frac{4\cdot 6}{3\cdot 5},\quad a_2=\frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7},\quad \ldots\ldots\ldots,\quad a_i=\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(2i+4)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2i+3)}\ .$$

Тако смо интеграл (17) добили у облику

$$X=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(2i+4)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2i+3)}\,x^i. \tag{20}$$

Сада смо у могућности, начелно говорећи, да параметар G у основним једначинама (7) и (11) сменимо параметром x, посредством (14) и (20). Но шта тиме добивамо?

Већ смо на почетку овог одељка навели да у практичној примени поступка за одређивање односа површина сектора и троугла најчешће налазимо случајеве када је разлика ексцентричних аномалија мали угао. То ће рећи да је и параметар G мали угао. Ако га усвојимо за малу величину првог реда, онда ће нови параметар x бити, према својој дефиниционој једначини (12), мала величина другог реда. То ће рећи да тако можемо доћи до приближних образаца једноставна облика, но који у пракси дају висок степен тачности.

Тако једну приближну релацију између X и x налазимо у једноставној рационалној функцији

$$X^0=\frac{4}{3\left(1-\frac{6}{5}x\right)}\,.$$

Како је, наиме,

$$\left(1-\frac{6}{5}x\right)^{-1}=1+\frac{6}{5}x+\frac{6\cdot 6}{5\cdot 5}x^2+\cdots,$$

то ћемо без тешкоћа израчунати, позивајући се на (20), да је

$$X-X^0=-\frac{16}{175}x^2+\cdots.$$

Или друкчије речено: апроксимација бесконачног реда X са једноставном рационалном функцијом X^0 тачна је до малих величина четвртог реда у односу на основни параметар G. То нас наводи на идеју да уведемо нову параметарску промењљиву $\xi(x)$ и то помоћу

$$X=\frac{4}{3\left[1-\frac{6}{5}(x-\xi)\right]}, \tag{21}$$

с тим да X има тачно значење (20). Одавде ћемо и ефективно одредити $\xi=\xi(x)$, пошто знамо зависност $X=X(x)$. Написаћемо, наиме, (21) у облику

$$X-\frac{6}{5}Xx+\frac{6}{5}X\xi=\frac{4}{3},$$

па овамо унети (17) и

$$\xi = b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots, \tag{22}$$

ради одређивања коефицијената b_i. Према томе, имамо да је

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots - \frac{6}{5}(a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^n + \cdots) +$$

$$+ \frac{6}{5}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots)(b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots) = \frac{4}{3}.$$

Изједначујући коефицијенте уз x^n на обема странама, долазимо до

$$a_n - \frac{6}{5} a_{n-1} + \frac{6}{5}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_2) = 0.$$

Очигледно је да се коефицијенти b_i не одређују онако једноставно као у случају a_i, за ред $X = X(x)$. Због тога ћемо се задовољити да у последњу релацију ставимо редом да је $n = 2, 3, 4, \ldots$, то јест да из условних једначина

$$a_2 - \frac{6}{5} a_1 + \frac{6}{5} a_0 b_2 = 0,$$

$$a_3 - \frac{6}{5} a_2 + \frac{6}{5}(a_1 b_2 + a_0 b_3) = 0,$$

$$a_4 - \frac{6}{5} a_3 + \frac{6}{5}(a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

одредимо, користећи познате вредности a_i из (20), првих неколико b_i. Тако ћемо за (22) добити

$$\xi = \frac{2}{35} x^2 + \frac{52}{1575} x^3 + \frac{1384}{67375} x^4 + \cdots. \tag{23}$$

На основи овог реда састављене су таблице, па можемо сматрати да нам је познато ξ за свако x.

Вратимо се сад једначини (21), то јест

$$\left[1 - \frac{6}{5}(x - \xi)\right] X = \frac{4}{3}.$$

Овамо ћемо унети, према (14), да је

$$X = \frac{1}{m}(y^3 - y^2), \quad x = \frac{m}{y^2} - l,$$

па ће бити

$$\left[1-\frac{6}{5}(m\,y^{-2}-l-\xi)\right](y^3-y^2)=\frac{4}{3}\,m.$$

Овај израз коначно трансформишемо у

$$y^3-y^2-h\,y-\frac{1}{9}\,h=0, \tag{24}$$

где је

$$h=\frac{m}{\frac{5}{6}+l+\xi}. \tag{25}$$

Тако смо формирали потребан број образаца да саставимо веома погодан поступак за одређивање односа површина сектора и троугла са датим $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3$ и $t_{31}=t_3-t_1$, са свом жељеном тачношћу, коју нам једино ограничава тачност основних података рачуна, почетних услова кретања.

С тим датим величинама израчунавамо прво константе задатка m и l, према једначинама (6), (8) и (10). Потом прву апроксимацију започињемо одређивањем вредности h, из (25), али са $\xi=0$. Једначина (24) омогућава налажење прве приближне вредности y. Затим из друге једначине (14) произилази одговарајућа вредност за x. Са њом израчунавамо ξ по (23), па можемо започети другу апроксимацију, у којој h има поправљену вредност, са $\xi\neq0$. У пракси рачуна прве путање новооткривеног планетоида овакав поступак веома брзо доводи до коначног резултата за y, због врло мале вредности ξ.

Није тешко показати да је $h>0$ за $v_3-v_1<180°$, то јест да кубна једначина (24) има само један реалан и позитиван корен y: тражени однос површина сектора и троугла. Њега дају и специјалне таблице, са аргументом h, састављене на основи (24).

Овај Гаусов поступак примењује се само у случајевима дужих времених интервала t_{31}, или када се тражи изузетно висока тачност. Но за велику већину случајева праксе рачуна орбита он се успешно замењује једноставнијим методама, које се из њега изводе.

9.2. Хансенов поступак. — За разлику од Гаусова поступка, Хансенов начин одређивања односа површина сектора и троугла је у својој основи апроксимативан. Прилагођен је потребама рачуна у случајевима када је времени интервал t_3-t_1 мали, што ће рећи тамо где је угао v_3-v_1 (дакле и E_3-E_1) мали.

У тим случајевима ће површине сектора и троугла бити приближно једнаке, па ћемо њихов однос моћи представити са

$$y=1+\eta, \tag{26}$$

а η ће бити мала позитивна величина. Унесемо ли ово у Гаусову једначину (24) за однос површина сектора и троугла и решимо је по h, добићемо

$$h=\frac{\eta(1+\eta)^2}{\frac{10}{9}+\eta}, \quad \text{дакле} \quad \frac{10}{9}h=\frac{\eta(1+\eta)^2}{1+\frac{9}{10}\eta}.$$

За трансформисање последње једначине искористићемо очигледну идентичност

$$(1+\eta)^2=\left(1+\frac{11}{10}\eta\right)\left(1+\frac{9}{10}\eta\right)+\frac{1}{100}\eta^2,$$

па ћемо је моћи написати као

$$\frac{10}{9}h=\eta\left(1+\frac{11}{10}\eta\right)+\frac{\eta^3}{100\left(1+\frac{9}{10}\eta\right)}.$$

Други члан десне стране ћемо потпуно занемарити, због мале величине η. Тако се једначина за одређивање η своди на

$$\eta\left(1+\frac{11}{10}\eta\right)=\frac{10}{9}h. \tag{27}$$

То је прво одступање од тачних израза у Хансенову поступку. Друго се састоји у занемаривању величине ξ, дакле у израчунавању h по обрасцу

$$h=m\left(\frac{5}{6}+l\right)^{-1}. \tag{28}$$

Тако се цео поступак за налажење y своди на коришћење једначина (26), (27) и (28). Међутим, стварни рачун се може још више убрзати ако се квадратна једначина (27) по η не решава на уобичајени начин, него развије у верижни разломак. Наиме, (27) се може написати у облику

$$\eta=\frac{\frac{10}{9}h}{1+\frac{11}{10}\eta},$$

одакле непосредно произилази верижни разломак

$$\eta=\cfrac{\frac{10}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cdots}}}$$

Тиме се, у ствари, једначина (27) решава по η узастопним апроксимацијама на веома брз и прегледан начин. Осим тога, користећи раније изразе за m и l, одмах израчунавамо

$$\frac{11}{9}h=\frac{\frac{11}{9}\tau^2}{\varkappa^2\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\,\varkappa+r_1+r_3\right)}, \quad \varkappa^2=r_1 r_3+(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_3),$$

$$\tau=k\,(t_3-t_1),$$

$$\frac{10}{11}=0.909\,0909, \quad \frac{11}{9}=1.222\,2222, \quad \frac{2}{3}\sqrt{2}=0.942\,8090.$$

Потом из (26) произилази решење у облику

$$y=1+\frac{10}{11}\cdot\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cdots}}}$$

10. ТЕТИВА ПАРАБОЛИЧКЕ ПУТАЊЕ. У методи за израчунавање непоремећене параболичке путање која је данас у највећој употреби, коју ћемо касније приказати, велику улогу игра тетива путање — дуж која спаја два положаја тела, рецимо у тренуцима t_1 и t_3. Означимо ли је са s, одмах можемо писати једначину

$$s^2=r_1^2+r_3^2-2\,r_1\,r_3\cos 2f, \tag{1}$$

где су r_1 и r_3 радијусвектори тела у тренуцима t_1 и t_3, а $2f$ разлика правих аномалија, дакле v_3-v_1, коју ознаку смо већ и раније користили. Једначина (1) важи, очигледно, за сваку врсту путање; ми ћемо овде потражити њен нарочити облик, имајући у виду да се тело креће по параболи.

Горњу једначину лако сводимо на

$$(r_1+r_3)^2-s^2=4\,r_1\,r_3\cos^2 f,$$

па ако уведемо ознаке

$$m=r_1+r_3+s, \quad n=r_1+r_3-s, \tag{2}$$

биће

$$m\,n=4\,r_1\,r_3\cos^2 f,$$

дакле

$$\pm\sqrt{m\,n}=2\sqrt{r_1\,r_3}\cos f. \tag{3}$$

Горњи знак важи у случају кад је $\cos f>0$, тј. $v_3-v_1<180°$, а доњи знак кад је $\cos f<0$, тј. $v_3-v_1>180°$.

Да би једначина (1), трансформисана у (3), добила облик који важи само за кретање по параболи, сменићемо у њој радијусвекторе изразима који следују из закона кретања по тој врсти Кеплерове путање. Дакле:

$$r = q \sec^2 \frac{1}{2} v = q \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v\right).$$

Ради једноставнијег писања усвојићемо и овде већ раније уведену ознаку

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = V, \tag{4}$$

па ће бити

$$r = q(1 + V^2) \tag{5}$$

и

$$\sqrt{r_1 r_3} = q\sqrt{(1+V_1^2)\,(1+V_3^2)}. \tag{6}$$

Даље имамо да је

$$\cos f = \cos \frac{1}{2}(v_3 - v_1) = \cos \frac{1}{2} v_3 \cos \frac{1}{2} v_1 + \sin \frac{1}{2} v_3 \sin \frac{1}{2} v_1.$$

Према (4) је

$$\sin \frac{1}{2} v = V(1 + V^2)^{-1/2}, \quad \cos \frac{1}{2} v = (1 + V^2)^{-1/2},$$

што са горњим даје

$$\cos f = (1 + V_1 V_3)\,[(1 + V_1^2)\,(1 + V_3^2)]^{-1/2}.$$

Сменимо ли ово у једначину (3) и искористимо (6), добићемо

$$\pm\sqrt{m n} = 2\, q\, (1 + V_1 V_3). \tag{7}$$

Права аномалија тела које се креће по параболи функција је времена која се приказује једначином

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v = \frac{k}{\sqrt{2}} (t - T)\, q^{-3/2}.$$

Разлика ових једначина за тренутке t_3 и t_1, са ознакама (4), је

$$V_3 - V_1 + \frac{1}{3}(V_3^3 - V_1^3) = \frac{k}{\sqrt{2}}(t_3 - t_1)\, q^{-3/2}. \tag{8}$$

Ову једначину ћемо искористити да тетиву s, имплицитно садржану — преко m и n — у (7), прикажемо као функцију временог интервала

$$\tau = k\,(t_3 - t_1),$$

као и радијусвектора r_1 и r_3.

Зато пођимо од идентичности

$$\frac{1}{2}(\sqrt{m} \mp \sqrt{n})^2 = \frac{1}{2}(m + n) \mp \sqrt{mn}.$$

Други члан на десној страни већ је одређен једначином (7), а први формирајмо помоћу (2) и (5):

$$\frac{1}{2}(m+n)=r_1+r_3=q(2+V_1^2+V_3^2).$$

Стога је

$$\frac{1}{2}(\sqrt{m}\mp\sqrt{n})^2=q\,(2+V_1^2+V_3^2)-2\,q\,(1+V_1V_3)=$$
$$=q\,(V_3-V_1)^2,$$

што сводимо на

$$(2\,q)^{-1/2}\left(\sqrt{m}\mp\sqrt{n}\right)=V_3-V_1. \tag{9}$$

Дигнимо ову једначину на трећи степен:

$$(2\,q)^{-3/2}\,(m^{3/2}\mp 3\,m\sqrt{n}+3\sqrt{m}\,n\mp n^{3/2})=$$
$$=V_3^3-V_1^3-3\,V_1V_3\,(V_3-V_1),$$

па је поделимо са три и прегрупишимо чланове на левој страни:

$$\frac{1}{3}(2\,q)^{-3/2}\,(m^{3/2}\mp n^{3/2})\mp(2\,q)^{-3/2}\,(m\sqrt{n}\mp\sqrt{m}\,n)=$$
$$=\frac{1}{3}(V_3^3-V_1^3)-V_1V_3\,(V_3-V_1). \tag{10}$$

Производ и разлику величина V_3 и V_1 изражавамо помоћу једначина (7) и (9). Дакле:

$$-V_1V_3\,(V_3-V_1)=\left(1\mp\frac{\sqrt{m\,n}}{2\,q}\right)(\sqrt{m}\mp\sqrt{n})\,(2\,q)^{-1/2}=$$
$$=(2\,q)^{-3/2}\,(2\,q\mp\sqrt{m\,n})\,(\sqrt{m}\mp\sqrt{n})=$$
$$=(2\,q)^{-3/2}\,[2\,q\,(\sqrt{m}\mp\sqrt{n})\mp(m\sqrt{n}\mp\sqrt{m}\,n)].$$

Први члан десне стране је, према (9), једнак V_3-V_1. Зато закључујемо да је

$$-V_1V_3\,(V_3-V_1)=V_3-V_1\mp(m\sqrt{n}\mp\sqrt{m}\,n)\,(2\,q)^{-3/2},$$

па једначина (10) постаје

$$\frac{1}{3}(2\,q)^{-3/2}\,(m^{3/2}\mp n^{3/2})=\frac{1}{3}\,(V_3^3-V_1^3)+V_3-V_1.$$

Најзад, ако искористимо (8) и (2), последња једначина прелази у

$$(r_1+r_3+s)^{3/2}\mp(r_1+r_3-s)^{3/2}=6\,\tau. \tag{11}$$

Тиме смо добили тражену везу између радијусвектора, тетиве путање и временог интервала. То је *Euler-Lambert*-ова једначина. Она је специјални случај једног општег израза, који вреди за све врсте Кеплерових путања, но у коме фигурише и велика полуоса (одн. полупречник) путање. Тај општи израз није нашао примене у пракси, због своје компликованости, и на њему се овде нећемо задржавати. Пређимо одмах на следећи задатак — решавање једначине (11) по s, са датим τ, r_1 и r_3.

Пре свега, у Ојлер-Ламберовој једначини ћемо се ограничити само на горњи знак, пошто у пракси долазе у обзир само случајеви када је $v_3 - v_1$ мање од 180°. Зато једначину (11) напишимо у облику

$$\left(1+\frac{s}{r_1+r_3}\right)^{3/2}-\left(1-\frac{s}{r_1+r_3}\right)^{3/2}=6\,\tau\,(r_1+r_3)^{-3/2}, \tag{12}$$

па приметимо да је увек $s:(r_1+r_3)<1$. Стављајући, дакле, да је

$$\frac{s}{r_1+r_3}=\sin\gamma, \tag{13}$$

задатак ће бити решен кад одредимо помоћни угао γ, који се — због мале дужине тетиве у пракси рачуна параболичке путање — увек налази у првом квадранту. Са сменом (13), једначина (12) постаје

$$(1+\sin\gamma)^{3/2}-(1-\sin\gamma)^{3/2}=6\,\tau\,(r_1+r_3)^{-3/2}. \tag{14}$$

Међутим, како је

$$1\pm\sin\gamma=\left(\cos\frac{1}{2}\gamma\pm\sin\frac{1}{2}\gamma\right)^2,$$

то добивамо да је

$$(1+\sin\gamma)^{3/2}-(1-\sin\gamma)^{3/2}=\left(\cos\frac{1}{2}\gamma+\sin\frac{1}{2}\gamma\right)^3-$$
$$-\left(\cos\frac{1}{2}\gamma-\sin\frac{1}{2}\gamma\right)^3.$$

Када дигнемо на трећи степен биноме десне стране и образујемо разлику, видећемо да ћемо добити да је та десна страна једнака

$$6\cos^2\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\gamma+2\sin^3\frac{1}{2}\gamma=6\left(1-\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right)\sin\frac{1}{2}\gamma+$$
$$+2\sin^3\frac{1}{2}\gamma=6\sin\frac{1}{2}\gamma-4\sin^3\frac{1}{2}\gamma.$$

На тај начин једначина (14) постаје

$$6\sin\frac{1}{2}\gamma-4\sin^3\frac{1}{2}\gamma=6\,\tau\,(r_1+r_3)^{-3/2}.$$

Уведимо сада нову промењиву, угао α, помоћу

$$\sin\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{2}\sin\alpha, \tag{15}$$

па ће претходна једначина постати

$$3\cdot 2\sqrt{2}\sin\alpha - 4\cdot 2\sqrt{2}\sin^3\alpha = 6\tau(r_1+r_3)^{-3/2},$$

дакле,

$$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 6\tau[2(r_1+r_3)]^{-3/2}.$$

Позивајући се на познати гониометријски образац

$$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha,$$

видимо да је

$$\sin 3\alpha = 6\tau[2(r_1+r_3)]^{-3/2},$$

што ће рећи да угао α можемо одредити са датим величинама нашег задатка, а онда — помоћу (15) — и угао γ, чиме је проблем решен, применом једначине (13). Ради једноставнијег рачуна изводимо угао θ из

$$\sin\theta = 6\tau[2(r_1+r_3)]^{-3/2}, \tag{16}$$

па пошто је $\alpha = \frac{1}{3}\theta$, једначина (15) даје

$$\sin\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{2}\sin\frac{1}{3}\theta.$$

Ако ово унесемо у

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma,$$

одмах добивамо да је

$$\sin\gamma = 2\sqrt{2}\sin\frac{1}{3}\theta\sqrt{1-2\sin^2\frac{1}{3}\theta} =$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\frac{1}{3}\theta\sqrt{\cos\frac{2}{3}\theta}.$$

Тако помоћу једначине (13) имамо решење задатка у облику

$$s = 2\sqrt{2}(r_1+r_3)\sin\frac{1}{3}\theta\sqrt{\cos\frac{2}{3}\theta}, \tag{17}$$

при чему θ израчунавамо по обрасцу (16). За тај угао θ такође усвајамо да је у првом квадранту.

Уколико је времени интервал τ мали, решење се може дати у облику реда који брзо конвергира, па ће и ефективно израчунавање дужине тетиве бити краће, него ли при коришћењу једначина (16) и (17).

Развијање чланова леве стране једначине (12) у биномни ред даје

$$\left(1 \pm \frac{s}{r_1+r_3}\right)^{3/2} = 1 \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{r_1+r_3} + \frac{3}{8}\left(\frac{s}{r_1+r_3}\right)^2 \pm \frac{1}{16}\left(\frac{s}{r_1+r_3}\right)^3 + \cdots$$

па једначину (12) сређујемо у

$$2\,\tau\,(r_1+r_3)^{-3/2} = \frac{s}{r_1+r_3} - \frac{1}{24}\left(\frac{s}{r_1+r_3}\right)^3 - \frac{1}{128}\left(\frac{s}{r_1+r_3}\right)^5 + \cdots.$$

Ставимо ли да је

$$\eta = 2\,\tau\,(r_1+r_3)^{-3/2}, \tag{18}$$

што се може израчунати са датим величинама овог рачуна, инверзија горњег реда даје

$$\frac{s}{r_1+r_3} = \eta + \frac{1}{24}\eta^3 + \frac{5}{384}\eta^5 + \frac{59}{9216}\eta^7 + \cdots,$$

дакле решење можемо писати у облику

$$s = \eta\,(r_1+r_3)\left(1 + \frac{1}{24}\eta^2 + \cdots\right).$$

Овај образац је веома згодан за употребу када имамо на расположењу таблице са аргументом η које дају величину

$$\mu = 1 + \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{5}{384}\eta^4 + \frac{59}{9216}\eta^6 + \cdots.$$

Тада је решење дато са

$$s = \eta\mu\,(r_1+r_3), \qquad \text{где је} \qquad \eta = 2\,\tau\,(r_1+r_3)^{-3/2}. \tag{19}$$

Предност оваквог начина решавања, то јест увођења функције μ, састоји се у томе што је у пракси η обично мала величина, па се μ мало разликује од јединице. Чест је случај да се четврти степен од η може занемарити.

ГЛАВА ДРУГА

РАЧУН ЕФЕМЕРИДА

Када смо у Уводу скицирали поступак одређивања стварне путање мале планете или комете, „рачун ефемерида" нисмо ни поменули као посебан одељак рада. И заиста, начелно говорећи, он и није неопходан. Међутим, посматрано са чисто техничке стране целог рачуна, састављање ефемериде планетоида или комете у великој мери олакшава конструисање путања ових небеских тела, па ћемо томе послу посветити довољну пажњу.

11. **ЕФЕМЕРИДЕ МАЛИХ ПЛАНЕТА И КОМЕТА.** Познавање аналитичких израза за интеграле Кеплерова кретања, као и константи интеграљења — путањских елемената, наведених у претходном поглављу, омогућује нам да израчунамо положај небеског тела у произвољном тренутку прошлости или будућности.

Овакво израчунавање положаја тела зове се, у ширем смислу, *рачун ефемерида*. Ефемерида је списак положаја тела у сферном екваторском геоцентричном координатном систему — дакле, његових ректасцензија и деклинација за утврђену епоху — у еквидистантним тренуцима. Тако уређен списак омогућује да се одреде, једноставном интерполацијом, и положаји у тренуцима за које нису непосредно рачунати; наравно, у временом распону ефемериде. Осим поменутих координата, ефемериде малих планета и комета — о којима ће овде једино бити говора — често садрже и неке друге податке: геоцентричну даљину, привидну величину, и сл., већ према специјалној намени ефемериде. У ужем смислу је рачун ефемерида — састављање ефемериде, то јест систематског, дужег или краћег, списка положаја на небеској сфери. Одређивање једног изолираног положаја тела, или неколико временски нееквидистантних (рецимо ради идентификовања појаве неке комете у прошлости), зове се, просто, израчунавање положаја, или представљање положаја.

Ефемеридама се доста често назива и систематски списак каквих других променљивих величина, потребних за посматрање небеских тела. Но ми ћемо овај назив користити само у поменутом смислу. С друге стране, у овом поглављу се ограничавамо само на ефемериде Кеплерова кретања. У рачуну стварних положаја тела, дакле у случају „поремећена" кретања, суштина рачуна ефемерида је непромењена, а разлику у ефективном раду нагласићемо на свом месту.

Два су главна разлога за састављање ефемерида малих планета и комета, који им уједно одређују облик и назив.

Приближне ефемериде састављају се само са циљем да се на небеској сфери *пронађе* небеско тело о коме се ради. Огромна већина малих планета и комета су телескопски објекти. Такав рачун се изводи чим се дође макар и до само приближних елемената кретања, да би се тело могло посматрати догод то услови посматрања допуштају. А како су први елементи кретања по непоремећеној путањи, изведени из првих неколико посматрања, као по правилу мале тачности (разлоге за ово видећемо касније), то нема смисла представљати будуће положаје тела са неком великом прецизношћу. Иста је ствар и са положајима у прошлости, када се покушавају пронаћи ранија и незапажена посматрања тела. У таквим ефемеридама малих планета и комета ректасцензија се рачуна са тачношћу од $\pm 0^m\!.1$, а деклинација — са тачношћу од $\pm 1'$.

Осим тога, овакве приближне ефемериде се рачунају и за тела са врло добро познатим кретањем, уколико треба да послуже само за прикупљање положаја тела — другим речима, за оријентисање инструмента за посматрање. То су, у случају малих планета, такозване *опозицијске ефемериде*. То су, махом, краћи пописи — од десетак положаја, са временим интервалом од 10 дана између сваког — чији средњи датум одговара тренутку довољно блиском (до на неколико дана) датуму геоцентричне опозиције мале планете у ректасцензији.

Другу групу чине тзв. *прецизне ефемериде*. Оне се рачунају на $0^s\!.01$ у ректасцензији и $0''\!.1$ у деклинацији и служе за поређење посматраних положаја са овако рачунатим, ради поправљања путањских елемената, на основи којих је ефемерида састављена. Зато се овакав рачун ефемерида предузима у два случаја. Или је у питању састављање комплетне теорије кретања мале планете или комете, или се то ради у очекивању „повратка" периодичне комете. У оба случаја ће тело, врло вероватно, бити посматрано са више опсерваторија, у релативно ограниченом временом интервалу. Тада ће прецизна ефемерида омогућити брзо поређење већег броја посматраних положаја са рачунатим.

Напоменимо, ипак, да овакав начин рада није свуда усвојен; неки астрономи сматрају да је боље посебно представљати сваки посматрани положај, него ли рачунати прецизну ефемериду, па из ње — интерполацијом — добивати рачунати положај.

Друга је ствар са неколико изабраних малих планета, чије је кретање данас познато исто онако тачно, као и кретање великих планета. За њих се систематски рачунају прецизне координате — но не на основи Кеплерове, него стварне путање. Зато ово питање остављамо тренутно по страни.

Основни тренуци за које се ефемериде рачунају, без обзира на њихову врсту и намену, увек су поноћ (0^h *ET* или *UT*) тзв. *стандардних ефемеридских датума*. То су дани чији је број у Јулијанској периоди дељив са 10 без остатка. Наравно, уколико је потребно, ефемериде се рачунају „гушће" или „ређе", али све у односу на ове основне тренутке. Уобичајено је да се константни времени интервал ефемерида (изражен у средњим или ефемеридским данима) означава са w, па кажемо да се ефемериде састављају са $w=1$, 2, 5 или 10, односно са $w=20$, 40 или 80. Настоји се, дакле, да се основни интервал од 10 дана или множи или дели са два, четири, итд. — то јест, неки времени интервал удвостручује или преполовљава. Колико ће w стварно бити, зависи колико од брзине кретања објекта, толико и од намене ефемериде. Настоји се да се омогући линеарна интерполација, но не по сваку цену. Стандардни интервал опозицијских ефемерида малих планета је, како рекосмо, 10 дана. Код неких интересантних објеката — рецимо малих планета које могу да се знатно приближе Земљи — тај интервал се снижава на $w=5$, 2 или чак 1, све у зависности од брзине привидног кретања тела по небеској сфери. Слична ствар је и са кометама, чије је кретање у близини перихела релативно врло брзо. — Напоменимо да је овакав начин одабирања тренутака за рачун ефемерида управо узрок оном раније поменутом непоклапању датума опозиције мале планете са средишњим датумом њене опозицијске ефемериде.

12. ПОСТУПЦИ САСТАВЉАЊА ЕФЕМЕРИДА.

Аналитички изрази за рачун ефемерида већ су нам познати. То су једначине помоћу којих представљамо хелиоцентрични вектор положаја небеског тела као функцију времена, а затим, једначине за трансформацију овог вектора положаја у геоцентрични вектор положаја и, коначно, обрасци за израчунавање сферних координата. Па ипак, мораћемо се нешто задржати и код ових познатих израза, да детаљније упознамо њихову практичну примену у рачуну ефемерида. С друге стране, мораћемо обрадити нека питања с којима се досад нисмо срели.

12.1. Одређивање датума опозиције.

— Најпогодније време за посматрање мале планете је време око њене опозиције са Сунцем. Због слаба сјаја ових тела, то време око опозиције, дуже или краће, најчешће је и једино могуће време посматрања. То значи да и ефемериду има смисла састављати само за ово време. Другим речима: први поступак у рачуну ефемерида малих планета је одређивање датума опозиције. Рачунање тренутка опозиције у дотичном дану, без обзира са каквом тачношћу, очигледно нема смисла.

Пре свега, прецизираћемо да се ради о геоцентричној опозицији у ректасцензији. Тај тренутак је довољно близак (бар за потребе посматрања) тренутку најмање даљине планетоида од Земље. Тренутком опозиције зваћемо, дакле, тренутак када је разлика ректасцензија мале планете и Сунца једнака 12^h (180°). Видимо да је за започињање рачуна ефемерида потребан његов коначни резултат, координате тела. Зато ово питање решавамо индиректним путем, у зависности од степена познавања кретања тела.

Претпоставимо, прво, да познајемо претходни тренутак опозиције, то јест да састављамо ефемериду за малу планету посматрану бар у две опозиције. У томе случају ћемо тренутак наредне опозиције добити ако на претходни додамо износ синодичке револуције тела

$$S = \frac{360^\circ}{n_z - n_p}$$

где је $n_z = 0\overset{\circ}{.}9856$ средње сидеричко дневно кретање Земље, а n_p исти елемент кретања планетоида. Но, тако добивени тренутак је само приближан и може да се од стварног разликује и за двадесетак дана, па се мора поправити. У ту сврху се израчунају, поступком који ћемо управо изложити, два положаја тела, и то за тренутке који су за 20 или 30 дана ранији и каснији у односу на онај приближно нађени тренутак опозиције. Потом из алманаха узмемо, за тако добивена два датума, ректасцензије Сунца и образујемо функције $\alpha - \alpha_\odot - 12^h$ (довољна је тачност од $0\overset{m}{.}1$). Обрнутом линеарном интерполацијом (или екстраполацијом) одређујемо затим датум кад се ова функција анулира. Тако добивамо знатно тачнији датум опозиције. Тачан, наравно, није — али ће у великој већини случајева бити довољан да у односу на њега одредимо аргументе ефемериде, како смо раније навели. А кад ефемериду саставимо — можемо тај датум проконтролисати.

У случају да датум претходне опозиције не познајемо, дакле да састављамо опозицијску ефемериду, за наредну опозицију, управо пронађене планете, принуђени смо да овај тренутак макар и грубо проценимо. То можемо да учинимо упоређујући ректасцензије тела из посматрања, на основи којих су изведени елементи кретања, са ректасцензијама Сунца у истим тренуцима, да бисмо дошли до датума опозиције у години посматрања. А када до њега дођемо — онда даље поступамо као у претходном случају. Датум опозиције у години посматрања обично је близак времену посматрања, јер се нове мале планете најчешће и проналазе у време своје опозиције са Сунцем — када су највећег сјаја.

Најзад, непосредно после проналаска нове мале планете и одређивања елемената њена непоремећеног кретања, рачуна јој се и приближна ефемерида кретања, како би се могла што дуже пратити у будућности, или потражити на ранијим снимцима истог дела неба, у прошлости. Такву ефемериду не морамо везивати за тренутак опозиције. Једино ћемо за аргументе ипак употребити стандардне ефемеридске датуме.

Следећи задатак је одређивање распона ефемериде, временог интервала w и довођење једног аргумента ефемериде до поклапања са стандардним датумом за рачун ефемерида.

За прва два од ових задатака не могу се дати нека одређена и увек важећа правила. Већ смо навели да се опозицијске ефемериде малих планета рачунају са $w=10$, а обухватају око 2—2.5 месеца. Код новопронађена тела времени распон је мањи. Таква ефемерида треба да послужи посматрачу тек толико да посматрано тело не изгуби, услед облачности или пуна месеца, а одступање посматраних од рачунатих, ефемеридом представљених, положаја показаће му да ли је потребно пре приступити поправљању првобитно нађене путање или продужавању ефемериде; или њеној емпиријској поправци. Уколико се рачуна ефемерида са већом тачношћу у координатама, очигледно је да w мора бити мањи; рецимо пет дана. А ако је објект сјајнији — распон ефемериде може бити већи. Све ће то зависити од стварног стања ствари и спретности калкулатора.

Пошто се реше ова питања, одреди се стандардни ефемеридски датум који је најближи нађеном датуму опозиције, па означе дани који су за w, $2w$, $3w$, ... ранији и каснији од оног стандардног датума. То ће бити дани за које ћемо рачунати ефемериду. Таква два између којих падне датум опозиције — биће средишњи датуми ефемериде. Симетрично у односу на њих одреде се почетни и крајњи датум, у зависности од жељена распона.

У случају састављања ефемериде кретања комете, ствар је нешто друкчија. Основни физички тренутак, у односу на који се рачунају положаји ових тела, није тренутак опозиције, већ тренутак пролаза кроз перихел. Најчешће у то време је комета највећег сјаја, па је приступачнија посматрањима са Земље у време перихелског пролаза, него ли у време опозиције са Сунцем. Међутим, на овом месту, то јест у рачуну ефемерида кретања по Кеплеровој путањи, узећемо у обзир само ефемериде које се састављају непосредно по проналаску нове комете. А те се начелно не разликују од одговарајућих за мале планете. Једино се рачунају са $w=5$, 2 или 1, због обично брзог кретања тела. Циљ такве ефемериде је да се прикупи што већи број посматрања комете, како би се могло приступити поправци њене првобитно нађене путање.

12.2. Израчунавање положаја. — Пошто смо одредили тренутке за које ћемо рачунати положаје тела при састављању ефемериде, прелазимо на налажење тих положаја. Најпрегледније је поделити тај посао на три етапе: *а*) рачунање правоуглих координата у равни путање, *б*) рачунање правоуглих екваторских хелиоцентричних координата, и *в*) прелаз на сферне геоцентричне координате.

а) Израчунавање правоуглих координата у равни путање је једини део рачуна ефемерида где се мора повести рачуна о врсти путање. На овом месту ће бити довољно да кажемо да се стварно кретање мале планете апроксимира или Кеплеровим кретањем по кругу или по елипси, а стварно кретање комета у близини перихела — кретањем по параболи. За израчунавање поменутих координата ξ и η користимо раније изведене изразе:

— код кретања по кругу:

$$u = u_0 + n(t - t_0), \qquad \xi = a\cos u, \qquad \eta = a\sin u,$$

контрола: $\xi^2 + \eta^2 = a^2$;

— код кретања по елипси:

$$M=M_0+n(t-t_0), \qquad E-e\sin E=M,$$

$$\xi=a(\cos E-e)=a(\cos E-\sin\varphi),$$

$$\eta=a\sqrt{1-e^2}\,\sin E=a\cos\varphi\sin E,$$

$$\text{контрола:}\ \ \xi^2+\eta^2=a^2(1-e\cos E)^2;$$

— код кретања по параболи:

$$M=\frac{k}{\sqrt{2}}(t-t_0)\,q^{3/2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}v+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}v=V+\frac{1}{3}V^3=M,$$

$$r=q\sec^2\frac{1}{2}v=q(1+V^2),$$

$$\xi=r\cos v=q(1-V^2), \quad \eta=r\sin v=2qV,$$

$$\text{контрола:}\ \ \xi^2+\eta^2=r^2=q^2(1+V^2)^2.$$

Као што видимо, у сва три случаја је први корак формирање неке функције времена.

Код кретања по кругу — то је аргумент латитуде, u; његово израчунавање за дати тренутак је елементарно.

Код кретања по елипси у питању је израчунавање ексцентричне аномалије E за сваки дати тренутак. Или, другим речима, решавање Кеплерове једначине. Њеном решавању, од Кеплерова времена па до данас, посвећено је скоро две стотине радова. Сви се они могу поделити у пет класа, у поступке графичке (и номограмске), инструментске („механичке"), табличне, сукцесивне апроксимације и развијање у редове. Прва два начина дају, очигледно, само приближно решења; трећи даје приближна решења, али и веома високог степена тачности, што све зависи од конструкције таблица; најзад, примена два последња начина решавања не поставља никаква ограничења у погледу тачности.

Због великог броја начина решавања ове славне једначине — у зависности од средстава за рачунање којима калкулатор располаже, од величине ексцентричности путање, од жељене тачности, па, најзад, и од субјективних склоности калкулатора — очигледно је да не можемо предложити овде један поступак, којим би сви били задовољни. Но, ако је у питању мала или умерена ексцентричност, дакле као код велике већине малих планета, решавање Кеплерове једначине узастопним апроксимацијама у облику

$$E_{i+1}=M+e\sin E_i,$$

уз познавање почетне вредности E_0, довешће до циља и довољно брзо и довољно једноставно, не чинећи притом никаква ограничења у погледу тачности. За почетну вредност E_0 може се усвојити вредност средње аномалије M, или, боље, M: $(1-e)$. Но најбоље је да за ову сврху калкулатор састави и користи духовити *Radau*-ов дијаграм, који је без премца међу средствима за приближно решавање Кеплерове једначине.

Међутим, како је у овом нашем рачуну у питању систематско одређивање ексцентричних аномалија за еквидистантне тренутке, то смо већ самим тим добили знатну олакшицу за решавање Кеплерове једначине. Та олакшица се састоји у следећем.

За прва два тренутка ефемериде израчунамо, рецимо по горњем поступку, одговарајуће ексцентричне аномалије, E_1 и E_2. Затим почињемо да састављамо таблицу вредности ове функције E и њених разлика:

$$\begin{array}{lll} t_1 \cdots\cdots E_1 & & \\ & D_1^1 & \\ t_2 \cdots\cdots E_2 & & \end{array}$$

Са овом једном једином разликом (првог реда) извршићемо екстраполацију за тренутак t_3. Јасно је да ће тако добивена вредност $E_2+D_1^1$ бити само приближна, али је можемо усвојити као почетну вредност за решавање Кеплерове једначине за тренутак t_3. Кад тако нађемо тачно решење, одмах проширујемо нашу таблицу:

$$\begin{array}{lll} t_1 \cdots\cdots E_1 & & \\ & D_1^1 & \\ t_2 \cdots\cdots E_2 & & D_1^2 \\ & D_2^1 & \\ t_3 \cdots\cdots E_3 & & \end{array}$$

Сада ће почетна вредност за решавање Кеплерове једначине за тренутак t_4 бити $E_3+D_2^1+D_1^2$. Чим до тачне вредности дођемо, опет продужавамо и употпуњавамо таблицу ексцентричних аномалија и њихових разлика. Тако ћемо најзад доћи до практично константних разлика, па ће екстраполиране вредности ексцентричне аномалије бити веома блиске тачним решењима Кеплерове једначине. А то решавање ће се у ствари свести на контролисање екстраполиране вредности E. Поред тога, формирање таблице за E истовремено представља и врло добру контролу рачуна (тзв. контролисање разликама). — Уопште је препоручљиво да се све величине које се рачунају за еквидистантне тренутке, а за које немамо контролне обрасце, контролишу разликама.

У случају кретања по параболи, основна функција времена је права аномалија v. У рачуну ефемерида, дакле тамо где је потребно налазити низ вредности праве аномалије тела које се креће по параболичкој путањи, најбоље је и најекономичније користити специјалне таблице за налажење v, са неким аргументом који се претходно израчунава са датом перихелском даљином q и временим интервалом $t—T$. Постоји неколико типова таквих таблица, које се међусобно разликују у основном аргументу $M(q,\ t—T)$ и у томе, да ли дају директно праву аномалију v, или функцију $\operatorname{tg} v/2$ (коју у овом курсу означавамо са V). Но, искористићемо ову прилику да покажемо један од начина решавања једначине за везу између v и t, коју смо принуђени да користимо ако не располажемо поменутим таблицама.

Увешћемо смену

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = 2\operatorname{ctg} 2\gamma,$$

па приметити да је

$$2\operatorname{ctg} 2\gamma = (\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\operatorname{cosec}\gamma\sec\gamma = \operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma.$$

Са овом сменом биће

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\nu=(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma)+\frac{1}{3}(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma)^3=\frac{1}{3}(\operatorname{ctg}^3\gamma-\operatorname{tg}^3\gamma).$$

Сад ћемо увести опет нову променљиву, β, и то помоћу

$$\operatorname{tg}\gamma=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta},$$

па ће бити

$$\frac{1}{3}(\operatorname{ctg}^3\gamma-\operatorname{tg}^3\gamma)=\frac{1}{3}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\beta-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)=\frac{2}{3}\operatorname{ctg}\beta.$$

Ово са једначином за праву аномалију даје

$$\frac{2}{3}\operatorname{ctg}\beta=\frac{k}{\sqrt{2}}(t-T)\,q^{-3/2},$$

што ће рећи да помоћни параметар β можемо израчунати са датим $t-T$ и q помоћу једначине

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{(2\,q)^{3/2}}{3\,k\,(t-T)}=54.80779\,(t-T)^{-1}\,q^{3/2}.$$

Затим налазимо праву аномалију помоћу

$$\operatorname{tg}\gamma=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\nu=2\operatorname{ctg}2\gamma.$$

Напоменимо само да сви овде поменути поступци за налажење ν са датим q и $t-T$ отказују, када је права аномалија блиска 180°. За те случајеве — који се у пракси рачуна непоремећене параболичке путање не јавља ју — постоје нарочити поступци, на којима се овде нећемо ни мало задржавати.

б) Када смо за све тренутке ефемериде израчунали координате ξ и η, можемо добити хелиоцентрични вектор положаја тела помоћу

$$\mathbf{r}=\xi\,\mathbf{P}+\eta\,\mathbf{Q}.$$

Цео рачун ефемерида изводимо у екваторском координатном систему. Зато компоненте векторских константи, у функцији путањских елемената Ω, ω и i, рачунамо по једначинама:

$$P_x=\cos\Omega\cos\omega-\sin\Omega\sin\omega\cos i,$$

$$P_y=(\sin\Omega\cos\omega+\cos\Omega\sin\omega\cos i)\cos\varepsilon-\sin\omega\sin i\sin\varepsilon,$$

$$P_z=(\sin\Omega\cos\omega+\cos\Omega\sin\omega\cos i)\sin\varepsilon+\sin\omega\sin i\cos\varepsilon;$$

$$Q_x = -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i,$$

$$Q_y = (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) \cos \varepsilon - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon,$$

$$Q_z = (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) \sin \varepsilon + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon;$$

контрола: $\quad (\mathbf{P}\,\mathbf{P}) = (\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}) = 1, \quad (\mathbf{P}\,\mathbf{Q}) = 0.$

Ове једначине смо извели користећи 7(6), 8(4) и 4(1). А ако познајемо векторске елементе **C** и **D** (тј. њихове екваторске компоненте), онда имамо просто да је

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} : D, \qquad \mathbf{Q} = [\mathbf{C}\,\mathbf{D}] : C\,D.$$

Искористићемо ову прилику да укратко прикажемо класични Гаусов поступак израчунавања хелиоцентричних правоуглих координата тела, са познатим поларним координатама r и v. Такав начин састављања ефемерида није данас у употреби, захваљујући данашњим средствима за рачунање, али се изведени изрази могу згодно користити у друге сврхе.

Зато замислимо опет небеску сферу са Сунцем S у средишту, правоугли еклиптички хелиоцентрични координатни систем $SXYZ$ и велики круг на небеској сфери — пресек путањске равни тела са небеском сфером. Тада имамо да су еклиптичке координате тела

$$x_e = r \cos XSP, \qquad y_e = r \cos YSP, \qquad z_e = r \cos ZSP; \tag{1}$$

са P смо означили тачку продора кроз небеску сферу вектора положаја тела. Косинусе наведених углова налазимо по обрасцима Сферне тригонометрије из сферних троуглова $X\Omega P$, $Y\Omega P$ и $Z\Omega P$. То су они сферни троуглови помоћу којих смо одређивали компоненте перихелског вектора **P** (одн. **D**), само што је сад у њима страна ΩP продужена од пројекције перихела до пројекције положаја тела. Тај продужетак је управо права аномалија тела, v. Зато, помоћу (1), одмах можемо писати да је

$$\begin{aligned} x_e &= r(\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i) \\ y_e &= r(\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i) \\ z_e &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \tag{2}$$

Са u смо означили збир аргумената латитуде перихела и праве аномалије, $u = \omega + v$.

Да би се ове једначине (2) прилагодиле логаритамском рачунању, уводе се тзв. *Гаусове* (еклиптичке) *констиане* a, A, b и B једначинама

$$\begin{aligned} &\sin a \sin A = \cos \Omega, && \sin b \sin B = \sin \Omega, \\ &\sin a \cos A = -\sin \Omega \cos i, && \sin b \cos B = \cos \Omega \cos i, \\ &\sin a > 0, && \sin b > 0, \end{aligned}$$

помоћу којих (2) прелази у

$$x_e = r\sin a\sin(A+\omega+v),$$
$$y_e = r\sin b\sin(B+\omega+v),$$
$$z_e = r\sin i\sin(\omega+v),$$

где смо сада *и* исписали експлицитно, помоћу ω и v, да бисмо показали да је у заградама променљива само v.

Ништа нам не стоји на путу да изведемо одговарајуће изразе за екваторски координатни систем. Служећи се једначинама 4(1), уводимо *Гаусове* (екваторске) *константе* a', A', b', B', c' и C', помоћу

$$a' = a, \qquad A' = A;$$
$$\sin b'\sin B' = \sin ☊ \cos\varepsilon,$$
$$\sin b'\cos B' = \cos ☊ \cos\varepsilon\cos i - \sin\varepsilon\sin i,$$
$$\sin b' > 0;$$
$$\sin c'\sin C' = \sin ☊ \sin\varepsilon,$$
$$\sin c'\cos C' = \cos ☊ \sin\varepsilon\cos i + \cos\varepsilon\sin i,$$
$$\sin c' > 0.$$

Тако једначине (2) постају

$$\begin{aligned} x &= r\sin a'\sin(A'+\omega+v),\\ y &= r\sin b'\sin(B'+\omega+v),\\ z &= r\sin c'\sin(C'+\omega+v). \end{aligned} \tag{3}$$

Да би се сви обрасци прилагодили логаритамском рачунању, уводе се помоћне величине n и N:

$$n\sin N = \sin i, \qquad n\cos N = \cos i\cos ☊, \qquad n>0,$$

па се Гаусове константе згодно рачунају из

$$\sin a'\sin A' = \cos ☊,$$
$$\sin a'\cos A' = -\sin ☊ \cos i,$$
$$\sin b'\sin B' = \sin ☊ \cos\varepsilon,$$
$$\sin b'\cos B' = n\cos(N+\varepsilon),$$
$$\sin c'\sin C' = \sin ☊ \sin\varepsilon,$$
$$\sin c'\cos C' = n\sin(N+\varepsilon).$$

Као контролу рачуна користимо

$$\sin b' \sin c' \sin (B' - C') = -\sin a' \cos A' \operatorname{tg} i.$$

в) Када смо израчунали екваторске компоненте вектора положаја тела за све тренутке ефемериде, преостаје нам да нађемо његове ректасцензије и деклинације. За тај прелаз смо већ раније навели обрасце. Прво рачунамо геоцентричне екваторске правоугле координате

$$\rho\,\xi = x + X, \quad \rho\,\eta = y + Y, \quad \rho\,\zeta = z + Z.$$

X, Y и Z су екваторске координате Сунца, које узимамо из астрономског алманаха. Ту није потребна никаква интерполација, пошто положаје тела рачунамо за исте тренутке у дану, за које се дају Сунчеве координате (0^h *ET* или *UT*). У овом делу рачуна морамо обратити пажњу да се ове Сунчеве координате односе на исти координатни систем на који се односе компоненте векторских константи **P** и **Q**. Другим речима — да је епоха Сунчевих координата истоветна са епохом путањских елемената ☊, ω и i, као и нагиба еклиптике ε. — Овде, наравно, нећемо мешати исте ознаке ξ и η са координатама у равни путање.

Пошто израчунамо компоненте геоцентричног вектора ρ, ректасцензију, деклинацију и даљину тела рачунамо по

$$\operatorname{tg} \alpha = (\rho\,\eta) : (\rho\,\xi), \quad \operatorname{tg} \delta = (\rho\,\zeta) : \sqrt{(\rho\,\xi)^2 + (\rho\,\eta)^2},$$

$$\rho = \sqrt{(\rho\,\xi)^2 + (\rho\,\eta)^2 + (\rho\,\zeta)^2}.$$

Епоха ових координата биће, очигледно, епоха елемената путање тела, што нећемо заборавити да у ефемериди означимо. — Квадрант ректасцензије и деклинације одређујемо према предзнацима компонената вектора ρ.

13. САСТАВЉАЊЕ ЕФЕМЕРИДЕ НУМЕРИЧКИМ ИНТЕГРАЉЕЊЕМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА. Рачун ефемерида је, како видимо по управо изложеном, начелно веома једноставан. Рачун приближних ефемерида може се још више упростити коришћењем разних специјалних таблица, састављених управо за ову сврху. Тако, на пример, постоје таблице које дају величине

$$C = \frac{r}{a} \cos v, \quad S = \frac{r}{a} \sin v,$$

са аргументима M и e, па после њихова коришћења одмах имамо

$$\mathbf{r} = Ca\,\mathbf{P} + Sa\,\mathbf{Q},$$

где је a велика полуоса путање. Па ипак, ако је потребно да ефемерида обухвати већи времени интервал, или да се положаји тела дају са малим w, или се рачуна прецизна ефемерида, горњи поступак ће захтевати доста рачуна.

У тим је случајевима често економичније применити други један поступак рачуна ефемерида. Он се састоји у непосредном нумеричком интеграљењу диференцијалне једначине Кеплерова кретања.

Видимо да се та једначина, то јест

$$\mathbf{r}'' = -\mu r^{-3}\mathbf{r},$$

своди на систем три скаларане диференцијалне једначине облика

$$x'' = F(x, y, z), \quad y'' = G(x, y, z), \quad z'' = H(x, y, z),$$

пошто је $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Ако, дакле, ставимо да је

$$w^2\mu = w^2k^2(1+m) \approx w^2k^2,$$

за нумеричко интеграљење имаћемо систем

$$w^2 s'' = -w^2k^2r^{-3}s, \quad s = x, y, z.$$

То значи да рачунамо вредности функција

$$f_s(a+iw) = -w^2k^2(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^{-3/2}s_i, \qquad s = x, y, z, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

па на њих примењујемо поступке нумеричког интеграљења. Очигледно је да се то интеграљење не може спровести непосредно, то јест у смислу да помоћу (4) одмах израчунамо $f_s(a+iw)$ за све тренутке ефемериде. Поступак интеграљења спроводимо „корак по корак“, на следећи начин.

Раније описаним поступком израчунавамо хелиоцентричне правоугле екваторске координате тела за тренутке t_i уз $i=-1, 0, 1$ или $i=-2, -1, 0, 1, 2$. Дакле, за непаран број тренутака, тако да се средњи, t_0, поклапа са првим тренутком ефемериде. Помоћу тих вредности координата s_i, $s=x$, y, z, започињемо таблице интеграљења и то посебно за сваку координату. Са њима израчунавамо, према (4), основне функције тих таблица, тј. $f_s(a+iw)$. Образујемо разлике тих функција, па примењујући

$$'f_s\left(a-\frac{1}{2}w\right) = s_0 - s_{-1} - \frac{1}{12}f_s'\left(a-\frac{1}{2}w\right) + \frac{1}{240}f_s^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}w\right) - \cdots,$$

$$''f_s(a) = s_s - \frac{1}{12}f_s(a) + \frac{1}{240}f_s''(a) - \cdots,$$

израчунавамо почетне чланове низа првог и другог збира. Потом попунимо колоне првог и другог збира докле имамо вредности f_s.

Овако попуњене интеграционе таблице сигурно садрже тачне вредности функција f_s и њихових разлика. А да ли ће и у колонама првог и другог збира бити тачне вредности, зависи од тога да ли су разлике с којима располажемо довољне за тачно израчунавање почетних чланова $'f_s\left(a-\frac{1}{2}w\right)$ и $''f_s(a)$. Уколико рачунамо дугу ефемериду, можемо на самом почетку израчунати координате за довољан број тренутака, тако да су почетни чланови оних збирова тачни. У неким случајевима ће, можда, бити економичније да се на поправљање њихових вредности вратимо касније, после краћег продужетка рачуна. Све ће то зависити и од спретности и искуства калкулатора — да на почетку рачуна одабере интервал w.

Даљи ток рачуна представља продужење таблица интеграљења, и то екстраполирањем помоћу разлика највишег реда, односно оних које су практично константне. Са тако екстраполираним елементима таблица израчунаћемо по

$$s_i = {}''f_s(a+iw) + \frac{1}{12} f_s(a+iw) - \frac{1}{240} f_s''(a+iw) + \cdots \tag{5}$$

приближну вредност координата s за први тренутак за који их нисмо непосредно рачунали, дакле за тренутак t_2 (три почетне вредности) или t_3 (пет почетних вредности). Тако добивене координате су, у општем случају, приближне, колико због саме екстраполације, толико и због тога што чланови низа првог и другог збира не морају бити тачни. Зато са овако добивеним координатама улазимо у (4), како бисмо добили поправљене вредности за f_s, основне елементе наших интеграционих таблица. Њих уносимо у таблице на место оних екстраполираних, поправљамо све разлике које од тих функција зависе, па проконтролишемо да ли се са овим новим разликама мењају вредности почетних чланова првог и другог збира. По потреби извршимо те поправке.

Даље поступамо на исти начин: екстраполирамо разлике, f_s, $'f_s$ и $''f_s$ за следећи тренутак, обављамо интеграљење помоћу (5), поправљамо f_s помоћу (4), поправљамо разлике и функције, итд. У сваком случају ћемо тако доћи до разлика неког реда које ће бити приближно константне — уколико нам само интервал w није превелик. Он треба да одговара интервалу ефемериде, који је у овим случајевима обично довољно мали. А када једном дођемо до практично константних разлика, онда ће даље екстраполирање бити знатно поузданије но раније. У сваком случају разлика између екстраполираних f_s и израчунатих по (4) говори о поузданости целог рачуна.

Када смо на тај начин попунили интеграционе таблице за x, y и z, применом обрасца (5), у који ће по потреби ући и чланови вишег реда, израчунавамо ове координате. Даљи прелаз на топоцентричне и сферне обављамо на исти начин као и у случају класичног рачуна ефемерида.

Постоји неколико варијанти интеграљења, осим овде описане, но оне су нешто компликованије у примени, ма да у неким случајевима брже доводе до циља. Као у сваком рачуну, тако ће и овде избор поступка да зависи од средстава за рачунање којима располажемо. Зато ћемо се овде задовољити изложеним општим поступком нумеричког интеграљења.

14. ПОРЕЂЕЊЕ ПОСМАТРАНИХ И РАЧУНАТИХ ПОЛОЖАЈА.

Већ смо раније неколико пута навели да је један од разлога састављања ефемерида небеских тела поређење тих рачунатих положаја тела са стварно посматраним. То поређење се врши ради провере изграђене теорије кретања тела и њене поправке, уколико се то покаже потребно. Јасно је да разлика између посматраних и рачунатих положаја мора бити у границама оних неизбежних „грешака“ у посматрањима, уколико располажемо тачном теоријом кретања објекта, на основи које смо положаје рачунали, за тренутке посматрања. А ако се у том поређењу појави разлика већа од оне коју очекујемо према квалитету наших посматрања — онда њен износ морамо ставити на терет недовољно тачне теорије кретања тела.

Посматране положаје тела, дакле његову ректасцензију и деклинацију, морамо пре свега свести на епоху астрономског почетка године посматрања, или неки стандардни еквинокцијум (данас скоро искључиво на 1950.0). То ће рећи да посматрања морају бити сведена на привидне положаје за епоху коју смо одабрали, тј. морају се обрачунати дејства аберације, нутације и прецесије, у зависности од начина на који смо до координата дошли (апсолутна или релативна посматрања, епоха каталога упоришних звезда, итд.). Сви ти поступци описују се и изучавају у Положајној астрономији, па се овде не морамо на њима задржавати.

Међутим, и тако добивене привидне положаје за епоху — макар она и била идентична са епохом ефемериде — не можемо непосредно упоређивати. За то постоје два разлога.

Пре свега, ефемеридски положаји су геоцентрични, како смо то видели у начину њихова израчунавања, а наша посматрања су топоцентрична; у разлици између посматраних и рачунатих положаја садржано је, дакле, дејство паралаксе. Да ли ћемо се овог дејства ослободити свођењем ефемеридских (рачунатих) геоцентричних положаја на топоцентричне, или посматраних топоцентричних положаја на геоцентричне — начелно је свеједно. Па ипак, било ефемериду, било мањи низ и нееквидистантних (временски) положаја, увек рачунамо као геоцентричне положаје, да би се њима могли служити и други посматрачи. Зато ће сваки посматрач обрачунавати дејство своје (локалне) паралаксе на тај начин, што ће своја посматрања сводити на геоцентар. Практично се то обавља рачуном паралактичких поправки ректасцензије и деклинације, како смо то навели на крају одељка 4. *Увода*. За тај рачун потребно је познавање даљине тела од посматрача, која се са довољном тачношћу може заменити даљином тела од Земљина средишта. Зато се та даљина, за коју смо користили ознаку ρ, наводи у ефемериди тела и израчунава и ако дајемо појединачне положаје тела. Тако долазимо до геоцентричних посматрања.

Друга коректура коју је потребно извршити у овако редукованим положајима тиче се дејства тзв. *планетарне аберације*. Положаји тела рачунају се независно од посматрача. Међутим, да бисмо га видели, светлости је потребно извесно време да превали пут од небеског тела до нас. Другим речима: ако тело у тренутку t има координате α ,δ, ми ћемо га у том положају видети *касније*, и то онолико времена касније, колико је светлости требало да пређе пут од тела до нас. Светлост превали једну астрономску јединицу за време од $A = 0^d_{.}005768$. Зато можемо казати и обрнуто: на положају α, δ ми тело видимо *раније*, рецимо у тренутку t°, и то раније за исто онолико времена, колико светлост употреби да пређе растојање од ρ а.ј. — од небеског тела до нас. Зато је веза између тренутка t° посматрана положаја и тренутка t рачуната *истог* положаја α, δ следећа:

$$t^\circ = t - A\,\rho. \qquad (6)$$

Ако нам $p(t)$ формално означава положај тела у тренутку t, онда имамо да је

$$p_{\text{posm.}}(t) = p_{\text{rač.}}(t - A\,\rho) = p_{\text{rač.}}(t^\circ).$$

Практично то значи да ако смо тело посматрали у тренутку t, ми нећемо интерполирати за тај тренутак у ефемериди да бисмо добили рачунату ректасцензију и деклинацију, него за тренутак t°, израчунат помоћу (6). Тако добивене рачунате положаје поредимо са посматраним.

С обзиром на мали износ величине A, видимо да нам за ову поправку није потребно познавање топоцентричне даљине објекта са неким високим степеном тачности. Зато је најчешће замењујемо са геоцентричном даљином тела, која се и због тога разлога даје у ефемериди. А у приближним ефемеридама, где се уопште не тражи нека висока тачност, занемарује се, често, промена геоцентричне даљине тела током времена распона ефемериде, па се наводи само ова даљина ρ за средишњи тренутак ефемериде, или се даје тзв. *аберационо време* $0^d\!.00577\,\rho$, такође за исти тренутак, које се са довољном тачношћу може сматрати за константно у целом временом интервалу ефемериде.

Напоменимо да се приликом састављања ефемериде могу одмах рачунати тзв. *астрометријски положаји* објекта. У њих су већ укључена дејства звездане и планетарне аберације, па се посматрања, чим се сведу на епоху ефемериде и поправе за паралаксу, могу поредити са оваквим рачунатим положајима.

ГЛАВА ТРЕЋА

РАЧУН ОРБИТА

Предмет рачуна орбита је израчунавање Кеплерових путања малих планета и комета. Таква путања је одређена када познајемо њене елементе, то јест константе интеграљења у изразима за $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$. Ове интеграционе константе одређујемо из почетних услова кретања, како смо видели у одељку 8. Тако се рачун орбита своди, у крајњој линији, на налажење почетних услова кретања, и то помоћу података посматрања небеског тела са Земље.

15. ИЗРАЧУНАВАЊЕ НЕПОРЕМЕЋЕНИХ ПУТАЊА МАЛИХ ПЛАНЕТА И КОМЕТА.

Пре него што пређемо на проучавање овог питања, дефинишимо шта ћемо подразумевати под „подацима посматрања" објекта. У овом курсу ће за нас „посматрање" бити скуп од три независне величине: топоцентричне ректасцензије (α) и деклинације (δ) тела, као и тренутка (t) када је тело посматрано на положају α, δ. Из посебно изведених посматрања могу се добити промене ових координата у некој јединици времена (рецимо, тзв. дневне промене ректасцензије и деклинације). Проучавање спектра довољно сјајна објекта може дати радијалну брзину извора. Све су то подаци који се дају искористити, и понекад се искоришћавају, у циљу одређивања путање тела, но ми ћемо се ограничити искључиво на податке о положају, како смо навели. Ефективно добивање тих координата, ректасцензије и деклинације, представља један од задатака Положајне астрономије, па се на њему нећемо овде задржавати.

Видели смо раније да од почетних услова зависи по каквом ће се Кеплеровом орбиту тело кретати. Но те почетне услове управо желимо да одредимо. Па ипак, ово питање врло лако решавамо.

Већ при проналаску прве мале планете, пре више од 170 година, одмах је прихваћена претпоставка о њеном кретању по елипси, при отсутности свих других привлачних дејстава осим Сунчева. И то просто по аналогији са кретањем великих планета. Претпоставка се показала као тачна. Стварне путање свих малих планета можемо апроксимирати — са већим или мањим степеном тачности, за дуже или краће врме — елиптичким путањама. И то путањама мале или умерене ексцентричности; средња вредност за око 1500 малих планета је приближно $e=0.15$ (тј. $\varphi=8\overset{\circ}{.}7$). Одавде закључујемо да ће грубља апроксимација путање бити — круг. Велике полуосе тих елиптичких путања, односно полупречници кружних, износе — за највећи број малих планета, тачније за 97% познатих — између 2.2 и 3.6 а.ј. (средња сидеричка дневна кретања између 1100″ и 510″). Нагиби путањских равни, у односу на раван еклиптике, мали су или умерени; ретко прелазе 25°. Највећи број путања има нагибе између 2° и 15°, а средња вредност је око $9\overset{\circ}{.}5$.

Са кометама је ситуација нешто друкчија. Због њихове изненадне појаве, а потом често брза нестанка, још су стари астрономи претпостављали да се оне крећу по некој отвореној кривој; претпостављали су, дакле, да ова тела нису стални чланови Сунчева система. Кеплерове путање су им стога могле бити параболе или хиперболе. Но од средине XVIII-ог века па надаље доказано је за неке старе, као и за неке новопронађене, да се периодично враћају у Сунчеву близину. Путање тих тзв. *периодичних комета* могу се опет апроксимирати елипсама, но елипсама велике ексцентричности: око 0.5, и више. А непериодичним кометама најбоље одговара хиперболичка путања, али ексцентричности, као по правилу, тек нешто веће од јединице. То ће рећи да у грубом просеку перихелским деловима путања, где се велика већина комета једино и може посматрати са Земље, најбоље одговара Кеплерова путања јединичне ексцентричности — парабола. Зато се приликом проналаска нове комете у сваком случају прво рачуна њена параболичка путања. Даља посматрања ће затим показати да ли ову путању треба поправити у елиптичку или хиперболичку, то јест — да ли је у питању периодична или непериодична комета.

Тако смо једноставно решили питање — коју врсту Кеплерове путање ћемо рачунати за новопронађено небеско тело. Зато можемо одмах поставити питање стварног одређивања ове три врсте путања, на основи раније дефинисаних посматрања.

У претходном поглављу, посвећеном рачуну ефемерида, управо смо решили обрнути задатак. Тамо смо изложили како се на основи познатих елемената кретања одређују положаји небеских тела. А сада је потребно да са познатим положајима нађемо елементе путање. Погледајмо зато како ћемо те претходне једначине искористити за решавање новог задатка. —

Суштину рачуна ефемерида можемо представити познатим скаларним једначинама за прелаз са правоуглих хелиоцентричних на сферне геоцентричне координате тела:

$$\begin{aligned} \rho\cos\delta\cos\alpha &= x(t;\quad c_1, c_2, \ldots, c_n)+X(t), \\ \rho\cos\delta\sin\alpha &= y(t;\quad c_1, c_2, \ldots, c_n)+Y(t), \\ \rho\sin\delta &= z(t;\quad c_1, c_2, \ldots, c_n)+Z(t). \end{aligned}$$

Правоугле хелиоцентричне координате x, y и z тела, компоненте вектора хелиоцентричног положаја $\mathbf{r}$, функције су времена и константи интеграљења c_1, c_2, ..., c_n, како смо у горњим једначинама и назначили. Тих константи, елемената кретања или путање, има четири независне у случају кретања по кругу, пет независних ако се тело креће по параболи, односно шест независних — за кретање по елипси. X, Y и Z су увек познате функције времена, Сунчеве координате. Што се тиче ρ, то јест геоцентричне даљине објекта, видели смо да њу израчунавамо управо горњим једначинама, ако познајемо путањске елементе тела. Желимо ли, дакле, да те једначине искористимо за налажење путањских елемената са познатим положајима тела, мораћемо његову геоцентричну даљину ρ да сматрамо за независну променљиву. У формулацији задатка рачуна ефемерида у тим трима једначинама има три непознате, α, δ и ρ, али уз обавезну претпоставку о познавању функција $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$. Међусобна даљина двају небеских тела зависи од елемената кретања оба, а у овом случају претпостављамо да познајемо кретање Земље. То познавање је садржано у познавању функција $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$.

Тако смо видели да у три горе исписане једначине рачуна ефемерида има исто толико непознатих: α, δ и ρ. То изражава добро познату чињеницу да геоцентрични положај тела може израчунати за свако t, ако познајемо елементе c_1, ..., c_n и кретање Земље. А у рачуну орбита исте једначине нам показују да за свако посматрање, како смо га раније описали, имамо седам непознатих у случају кретања по елипси (6 елемената кретања и једна геоцентрична даљина), или шест непознатих за кретање по параболи (5 елемената и једна геоцентрична даљина), или пет непознатих за кретање по кругу (4 елемента и једна геоцентрична даљина). С једним посматрањем, дакле, не можемо израчунати ни једну врсту Кеплерове путање.

Зато замислимо да имамо на расположењу два посматрања тела, тј. у два различита тренутка, t_1 и t_2. То ће рећи да имамо шест једначина: три у којима ће се јављати α_1, δ_1, ρ_1 и t_1, и још три у којима ће исте величине имати индекс „2". Ради се о посматрању истог објекта; зато је број константи c_i непромењен. У тих шест једначина има сада $2+n$ непознатих: две геоцентричне даљине и n елемената кретања. Одмах закључујемо да из два посматрања можемо извести само ону путању која има највише 4 елемента. То је кружна путања.

Истим резоновањем закључујемо да са три посматрања имамо на расположењу девет једначина, у којима је $3+n$ непознатих: три геоцентричне даљине и n елемената кретања. Зато са три посматрања можемо израчунати и елиптичку, и параболичку путању.

Међутим, стварно израчунавање Кеплерових путања је показало, а анализа тих ефективних поступака доказала, да су наведени бројеви посматрања за рачун ових путања у општем случају само потребни, а не и довољни. Разлог за то лежи и у чисто техничким детаљима поступака. Срећом, ти изузеци су у пракси прилично ретки, па се на њих нећемо посебно освртати. Другим речима, прихватићемо да су горе наведени бројеви посматрања не само потребни, него и довољни.

Када смо овако установили колики је број посматрања потребан за рачун одговарајуће непоремећене путање, лако ћемо закључити да не вреди ни помишљати о могућности стварног решавања оних шест или девет једначина по непознатим елементима c_i, где би се ти елементи представљали као експлицитне функције датих величина рачуна. Довољно нам је да се сетимо веза између координата тела и времена. Једна последица оваквог стања ствари је и то, што нећемо непосредно тражити путањске елементе, него почетне услове кретања. Међутим, и у том случају је поступак сукцесивних апроксимација једини економичан поступак.

Потребно је да стално имамо пред очима две чињенице. Прво, да у овом курсу рачун орбита за нас представља само рачун апроксимативне путање тела, прве основе за изградњу стварне путање. И друго, да рачун орбита, посматран у целини, зависи од стварног стања ствари у сваком практичном случају.

Ову последњу чињеницу, то јест да се не може изградити неки општи поступак који би у свим случајевима, без изузетака, давао најбоље резултате, лако ћемо разумети ако сад проблем посматрамо са чисто практичне стране. Запитајмо се, на пример, да ли за рачун орбита значе исто три посматрања небеског тела која обухватају времени интервал од месец дана, и три посматрања обављена исте вечери? Очигледно су то сасвим различите ствари, чим имамо на уму практични рачун. Временски блиска посматрања одговарају блиским положајима тела на путањи — релативно, наравно — то јест положајима чији радијусвектори међусобно заклапају мале углове. Или, другим речима, у тим случајевима се ради о малом луку путање. А тачност конструисања целе путање на основи њена малог лука свакако је врло мала. Аналитичко испитивање овог проблема, тачност одређивања елемента кретања у зависности од времена интервала који обухватају посматрања, исувише је компликовано да би дало поуздана решења за све случајеве. Међутим, током последњих сто шездесет и више година, израчунато је — да грубо наведемо — десетак хиљада Кеплерових путања небеских тела, па из тог огромног материјала следују неки емпиријски закључци. Њих ћемо имати у виду код приказивања сваке методе.

Исто тако, није ни мало тешко закључити да тачност добивених елемената зависи у великој мери од тачности посматрања. Бесмислено је спроводити иоле ригорознији рачун са посматрањима мале или несигурне тачности.

Потсетимо се, такође, да су наша посматрања топоцентрична, а да се тренуци посматрања не могу поправити за дејство планетарне аберације на почетку рачуна орбита, док не познајемо даљину тела. Као што смо раније видели, дејство паралаксе можемо елиминисати и без познавања геоцентричне даљине, коришћењем у рачуну топоцентричних координата Сунца. Тако нам преостаје да рачун орбита започнемо са тренуцима посматрања онаквим какве имамо, а да их поправљамо касније, када дођемо до даљине тела.

Рачун орбита можемо геометријско-кинематички формулисати на следећи начин. Како смо раније већ навели, ректасцензија и деклинација тела дефинишу један правац у простору: правац од посматрача ка небеском телу. Аналитички израз за тај правац је

$$\frac{x+X}{\cos\delta\cos\alpha}=\frac{y+Y}{\cos\delta\sin\alpha}=\frac{z+Z}{\sin\delta},$$

што добивамо из основних једначина рачуна ефемерида елиминисањем даљине ρ. x, y и z су текуће координате посматрана тела. Свако посматрање представљено нам је тако једним правцем. Тражи се да се конструише конусни пресек са једном жижом у координатном почетку, који ће сећи све правце посматрања, а да кроз те тачке пресека пролази тело, крећући се по кривој по закону површина (Другом Кеплеровом закону).

16. **ИЗРАЧУНАВАЊЕ КРУЖНЕ ПУТАЊЕ.** Кружну Кеплерову путању мале планете рачунамо као најгрубљу апроксимацију њеног стварног кретања. Првенствени задатак таквог рачуна је да што пре доведе до путањских елемената новопронађена тела, ма и мање тачности, како би се што пре могла саставити ефемерида његова кретања у ближој будућности. Таква ефемерида, иако приближна, може врло добро да помогне у прикупљању даљих посматрања тела, која ће обухватити већи времени интервал и омогућити касније рачунање поузданије, елиптичке, путање. Не смемо изгубити из вида да су мале планете које се проналазе у данашње време објекти врло слаба сјаја, који се лако могу „изгубити".

Због тога није био редак случај — нити имамо разлога да не верујемо да тако неће бити и у будућности — да од новопронађене мале планете остану само два посматрања. Тада израчунавање кружне путање добива други задатак. Кружни елементи су мале тачности, но у просеку су још најтачнији они који одређују путањску раван: лонгитуда узлазног чвора и нагиб. Зато ћемо, чим до ових елемената дођемо, погледати да ли нека од познатих малих планета има сличне ове елементе. Другим речима, покушаћемо да помоћу елемената кружне путање нове мале планете извршимо тзв. идентификацију објекта: није ли, можда, овај „нови" планетоид већ раније посматран. Ако овакво препознавање не успе, још увек има наде да кружни елементи помогну у идентификацији у будућности.

Питање времена интервала обухваћена посматрањима није ни овде безначајно. Ако је он мањи од око десет дана, резултати рачуна могу бити врло сумњиви. То ће зависити и од употребљене методе. Дуги времени интервали исто тако могу да доведу до непоузданих елемената, тачније речено — до елемената који ће се знатније разликовати од елиптичких. Уопште можемо рећи да је времени интервал од 10—20 дана још понајбољи.

Постоји неколико метода за израчунавање кружних путања малих планета. Овде ћемо изложити само једну, чије основе потичу од Гауса и Енкеа, и која је у пракси показала веома добре резултате.

Основе Гаус-Енкеове методе састоје се у следећем.

Видели смо раније, у одељку 6.1, да за разлику аргумената латитуде тела у тренуцима t_1 и t_2 и за средње сидеричко дневно кретање имамо једначине

$$u_2 - u_1 = n\,(t_2 - t_1), \quad n = k\,a^{-3/2},$$

где, наравно, занемарујемо масу тела. Ако времени интервал изразимо у средњим Гаусовим данима, тј. ставимо да је

$$\tau = k\,(t_2 - t_1),$$

горње две једначине дају

$$u_2 - u_1 = \tau\, a^{-3/2}. \tag{1}$$

С друге стране, за исти овај угао $u_2 - u_1$ извели смо, у одељку 8.2.1, израз

$$\sin^2 \frac{1}{2}(u_2 - u_1) = \frac{1}{2a^2}[a^2 - (\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_2)]. \tag{2}$$

Једначину (1) звaћемо „динамичком", пошто је изведена у складу са динамичким законима кретања. Једначина (2) је „геометријска": она важи без обзира на законе кретања. Тако видимо да угао $U = 1/2\,(u_2 - u_1)$ можемо израчунати на два начина. Једначине (1) и (2) морају дати исти угао U ако радијусвектори r_1 и r_2 одговарају тренуцима t_1 и t_2. То је основа методе коју излажемо.

Да бисмо у рачун увели координате посматрана тела, позовимо се на једначине

$$\mathbf{r}_i = \rho_i\, \rho_{0i} - \mathbf{R}_i, \quad i = 1,\, 2, \tag{3}$$

где је

$$\rho_{0i} = \{\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i\}, \quad \mathbf{R}_i = \{X_i,\ Y_i,\ Z_i\},$$

$$\xi_i = \cos\delta_i \cos\alpha_i, \quad \eta_i = \cos\delta_i \sin\alpha_i, \quad \zeta_i = \sin\delta_i.$$

Помоћу (3) рачунамо:

$$-(\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_2) = A\,\rho_1\,\rho_2 + B\,\rho_1 + C\,\rho_2 + D,$$

$$A = -(\rho_{01}\,\rho_{02}), \quad B = (\rho_{01}\, \mathbf{R}_2), \quad C = (\rho_{02}\, \mathbf{R}_1),$$

$$D = -(\mathbf{R}_1\, \mathbf{R}_2).$$

Сви ови скаларни производи су функције познатих величина рачуна: посматраних координата тела (ректасцензија и деклинација у тренуцима t_1 и t_2) и координата Сунца. То ће рећи да у две једначине (1) и (2) имамо четири непознате: угао $u_2 - u_1 = 2U$, *полупречник путање* a, *и геоцентричне даљине тела*, ρ_1 и ρ_2, у тренуцима посматрања. Да бисмо проблем решили, морамо формирати још две једначине са истим непознатим.

Потражимо, зато, везу *између геоцентричне даљине и полупречника* путање. Замислимо раван троугао Сунце (S) — Земља (Z) — мала планета (P). Стране овог троугла су: $SZ = R$ (геоцентрична даљина Сунца), $SP = a$ (*полупречник кружне путање мале планете*) и $ZP = \rho$ (геоцентрична даљина мале планете). Угао код Земље, тј. угао SZP, означимо са ϑ. Ако је тачка A подножје нормале спуштене из S на страну ZP, имаћемо

$$\begin{aligned} ZP &= PA + AZ, \\ PA^2 &= SP^2 - SA^2, \\ AZ &= SZ \cos SZP, \\ SA &= SZ \sin SZP. \end{aligned}$$

То значи да је

$$AZ = R\cos\vartheta, \quad SA = R\sin\vartheta, \quad PA^2 = a^2 - (R\sin\vartheta)^2,$$

и, коначно,

$$\rho=\sqrt{a^2-(R\sin\vartheta)^2}+R\cos\vartheta, \tag{4}$$

чиме смо постављени задатак решили. Наиме, угао ϑ нам је познат; њега можемо добити из

$$(\rho_0\,\mathbf{R})=R\cos\vartheta.$$

Применимо ли релацију (4) на тренутке t_1 и t_2, видимо да смо тако добили четири везе између раније наведене четири непознате, па је израчунавање кружне путање начелно решено. Међутим, погледајмо како ћемо ефективно доћи до те четири непознате.

За нас је најважније да дођемо до геоцентричних даљина ρ_1 и ρ_2 пошто нам онда једначине (3) дају почетне услове $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а са њима знамо да израчунамо путањске елементе (одељак 8.2.1.).

Да би стварни рачун био што једноставнији, поступамо на следећи начин. Са једном претпоставком о износу полупречника путање a рачунамо, према (4), одговарајуће вредности геоцентричних даљина ρ_1 и ρ_2. Са тако добивеним вредностима из једначине (1) рачунамо угао U_d, а из једначине (2) — U_g, то јест, исти угао $2U=u_2-u_1$ по „динамичкој" и „геометријској" једначини. Да је претпоставка за a била тачна, добили бисмо да је $U_g-U_d=0$. У општем случају, наравно, неће ова функција бити једнака нули; зато цео рачун понављамо са неком другом претпоставком за a. Добићемо неку другу вредност за U_g-U_d, па ћемо a варирати дотле, док се ова функција не анулира. С обзиром на раније наведене вредности за велике полуосе путања малих планета, овај рачун започињемо рачунајући одмах, паралелно, са $a=2$ и $a=3$ а. ј. Тако ћемо одмах добити две одговарајуће разлике U_g-U_d, па примена *regula falsi* доводи до знатно бољег значења за a. Најчешће ће бити довољно да овај рачун поновимо 3 до 4 пута. На његову завршетку добивамо, дакле, a и u_2-u_1, а ρ_1 и ρ_2 из последњег понављања рачуна усвајамо за геоцентричне даљине тела у оба посматрања.

Потом применом једначина (3) налазимо почетне услове $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а са њима рачунамо преостале елементе ☊, ω и i, како смо раније показали.

Рачун водимо са пет децимала; већа тачност је непотребна. А ако се сетимо да паралактичке поправке Сунчевих координата износе највише око 2—3 јединице пете децимале (то можемо закључити по износима константи C' и C'' (стр. 15), видимо да у рачуну кружне путање не морамо водити бригу о дејству паралаксе, то јест можемо топоцентрична посматрања усвојити за геоцентрична. А што се тиче дејства планетарне аберације, једначина (1) показује да и њега можемо занемарити у току рачуна варијације полупречника a. Имали бисмо, наиме, да је

$$t_1^0=t_1-A\,\rho_1,\quad t_2^0=t_2-A\,\rho_2,$$

па би било

$$\tau^0=k\,(t_2^0-t_1^0)=k\,(t_2-t_1)-k\,A\,(\rho_2-\rho_1).$$

Како се ради о релативно малом временом интервалу између посматрања, то ће се за то време геоцентрична даљина тела мало променити, па ће други члан у последњој једначини бити занемарљиво мали у односу на први члан. Међутим, када будемо рачунали епоху „елемента" ω, као и средње сидеричко дневно кретање и када будемо представљали посматране положаје са нађеним елементима, ипак ћемо повести рачуна и о дејству планетарне аберације. Разлоге за ово није тешко наћи.

Када смо израчунали све елементе, приступамо представљању оба посматрана положаја мале планете помоћу њих. То је завршна контрола рачуна. Обављамо је по познатом једначинама рачуна ефемерида (одељак 12).

Прeглед образаца

I. Константне величине:

$$\xi_i = \cos\delta_i \cos\alpha_i, \quad \eta_i = \cos\delta_i \sin\alpha_i, \quad \zeta_i = \sin\delta_i.$$

Контрола:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Из астрономског алманаха: X_i, Y_i, Z_i и R_i.

$$R_i \cos\vartheta_i = (\rho_{0i}\,\mathbf{R}_i), \qquad (R_i \sin\vartheta_i)^2 = R_i^2 - (R_i\cos\vartheta_i)^2,$$

$$A = -(\rho_{01}\,\rho_{02}) \qquad B = (\rho_{01}\,\mathbf{R}_2), \qquad C = (\rho_{02}\,\mathbf{R}_1),$$

$$D = -(\mathbf{R}_1\,\mathbf{R}_2).$$

Контрола:

$$(\xi_1 + \xi_2 - X_1 - X_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2 - Y_1 - Y_2)^2 + (\zeta_1 + \zeta_2 - Z_1 - Z_2)^2 = 2 + R_1^2 + R_2^2 - 2(A + B + C + D) - 2(R_1\cos\vartheta_1 + R_2\cos\vartheta_2).$$

Свуда је $i = 1$ и 2.

$$\frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2}k(t_2 - t_1), \qquad \frac{1}{2}k = 0^\circ\!.49280.$$

II. Израчунавање полупречника путање и разлике аргумената латитуде за тренутке посматрања:

$$\rho_i = \sqrt{a^2 - (R_i \sin\vartheta_i)^2} + R_i\cos\vartheta_i,$$

$$i = 1 \text{ и } 2,$$

$$\sin^2 U_g = \frac{1}{2a^2}(a^2 + A\,\rho_1\,\rho_2 + B\,\rho_1 + C\,\rho_2 + D),$$

$$U_d = \frac{1}{2}\tau\, a^{-3/2} = \frac{1}{2}\,\frac{\tau}{a\sqrt{a}}.$$

У овим једначинама варирамо a док не добијамо да је апсолутна вредност разлике $U_g - U_d$ највише око 1—2° × 10^{-4}. Почетне вредности рачуна су $a=2$ ($a\sqrt{a}=2.82843$) и $a=3$ ($a\sqrt{a}=5.19615$).

III. Израчунавање вектора положаја тела:

$$\mathbf{r}_i = \rho_i \, \rho_{0i} - \mathbf{R}_i, \quad i = 1 \text{ и } 2$$

Контрола: $(\mathbf{r}_i \, \mathbf{r}_i) = a^2$.

IV. Израчунавање елемената:

$$t_1^0 = t_i - A \, \rho_i, \quad A = 0.00577 \text{ (у ср. данима).}$$

Средње сидеричко дневно кретање:

$$n = (u_2 - u_1) : (t_2^0 - t_1^0),$$

Контрола: $n = \dfrac{k^\circ}{a\sqrt{a}}, \quad k^\circ = 0\overset{\circ}{.}98561.$

Векторске константе $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2a}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1) \sec \frac{1}{2}(u_2 - u_1),$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2a}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(u_2 - u_1),$$

контрола: $(\mathbf{P}\,\mathbf{P}) = (\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}) = 1, \quad (\mathbf{P}\,\mathbf{Q}) = 0.$

Уколико смо кружну путању мале планете рачунали само ради састављања привремене ефемериде њена кретања, можемо се зауставити на овом месту рачуна, па прећи на представљање посматрања. Уколико желимо да добијемо и класичне елеменете кретања, рачун настављамо:

$$\sin i \sin \omega = P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon,$$

$$\sin i \cos \omega = Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon,$$

$$\sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon,$$

$$\cos \Omega = P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega,$$

контрола: $P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega = -\cos i \sin \Omega$.

V. Представљање посматраних положаја:

епоха елемената: $t_0 = \dfrac{1}{2}(t_1^0 + t_2^0).$

За тренутке посматрања t рачунамо:

$$t^\circ = t - A\rho, \quad u = n(t^\circ - t_0),$$

$$\rho\cos\delta\cos\alpha = a\cos u\, P_x + a\sin u\, Q_x + X,$$

$$\rho\cos\delta\sin\alpha = a\cos u\, P_y + a\sin u\, Q_y + Y,$$

$$\rho\sin\delta = a\cos u\, P_z + a\sin u\, Q_z + Z.$$

На овакав начин ћемо представити сва посматрања. Може се догодити да у кратком временом интервалу имамо и више посматрања; тада крајња користимо за рачун путање, а остала на овакав начин користимо као контролу нађених елемената.

На завршетку овог одељка напоменимо да се може догодити да једначине (1) и (2) доведу до имагинарних решења, то јест да се помоћу два посматрања не може конструисати кружна путања. Но, такви случајеви су у пракси ретки, па се на њима нећемо задржавати.

17. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ЕЛИПТИЧКЕ ПУТАЊЕ. Израчунавање елиптичке путање мале планете суштински се не разликује од конструисања кружне путање. Користећи разне облике интеграла кретања по елиптичком орбиту настоји се прикупити довољан број једначина, из којих се могу добити одабране непознате. Рачун је, наравно, дужи и компликованији, пошто се сад тражи шест непознатих, шест компонената вектора које одабиремо за почетне услове. У крајњој линији, основни проблем сваке варијанте рачуна орбита је налажење геоцентричних даљина објекта. Када су те даљине познате, онда елементарним путем долазимо до вектора хелиоцентричних положаја — почетних услова кретања.

Па ипак, постоји велик број метода рачуна непоремећене елиптичке путање, или — боље речено — велик број варијанти два основна типа. Можемо их назвати Гаусовим и Лагранжевим типом. Првоме је основа веза између три хелиоцентрична вектора положаја тела и одговарајућих односа површина троуглова,

$$\mathbf{r}_2 = n_1\mathbf{r}_1 + n_3\mathbf{r}_3,$$

док је основа другог — изражавање вектора положаја помоћу почетних услова $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$ и функција f и g:

$$\mathbf{r} = f\,\mathbf{r}(t_0) + g\,\mathbf{v}(t_0).$$

Разлог за постојање великог броја варијанти рачуна елиптичких путања лежи у томе, што је највећи њихов број састављен у време када су калкулатору на расположењу стајале, као једино средство рачунања, логаритамске таблице и, у мањој мери, ручне машине за рачунање. Другим речима, стваране су и разрађиване те методе у време када се морало много водити рачуна о уложеном времену и труду. За данашњу електронску рачунску машину практично уопште није важно по каквом ће поступку рачунати елиптичку путању. Рачун ће обавити за једну минуту, или и мање. Просто речено: рачун једне елиптичке путање исувише је мали за једну такву машину, и ниуком случају се не исплати вршити га појединачно. Исплатиће се тек кад у блиској будућности дођемо до знатно мањих и у погону знатно економичнијих електронских рачунских аутомата.

С друге стране, већ смо напоменули да нема методе која би у сваком случају, који се појави у пракси, најекономичније водила до циља. Различити су времени интервали између посматрања, различити су елементи путања; у неким случајевима ће једна метода дати боље резултате, у другим друга. Зато ћемо се у овом курсу задржати на три методе. Све су оне много пута проверене у пракси. Прилично се разликују једна од друге, али им је нешто заједничко. Све су састављене за рачун путање новопронађене мале планете, дакле за релативно мале времене интервале између посматрања. То не значи да се не могу употребити и када су ти интервали већи, али за такве случајеве постоје боље, специјалне, методе. Но питање је да ли је препоручљиво њих користити. Тада пре долази у обзир рачун поправке путање, израчунате на основи посматрања временски релативно блиских. До такве путање настојимо увек да што пре дођемо, било због ефемериде кретања тела у ближој будућности, било због евентуалне идентификације „новог“ објекта.

17.1. Гаус-Енкеова метода. — Од Гауса потиче прва мзтода за израчунавање Кеплерове елиптичке путање небеског тела на основи три посматрања која је одмах била у потпуности разрађена за примену у пракси. Оригинална метода је касније претрпела неке измене, све у циљу поједностављења и убрзавања ефективног рачуна. То је метода за коју се може рећи да је највише била у стварној употреби.

17.1.1. *Основе методе.* — Основе Гаус-Енкеове методе чине две релације. То је, с једне стране, веза између геоцентричних (одн. топоцентричних) даљина тела у тренуцима посматрања и односа површина троуглова, и, с друге стране, зависност између односа површина троуглова и односа површина сектора и троугла.

Прву релацију добивамо врло једноставно. Раније смо видели да између три хелиоцентрична вектора положаја тела — у нашем случају: за тренутке посматрања, t_1, t_2 и t_3 — постоји веза

$$\mathbf{r}_2 = n_1 \mathbf{r}_1 + n_3 \mathbf{r}_3, \tag{1}$$

где су n_1 и n_3 односи површина одговарајућих троуглова. Изразимо ли овде векторе положаја помоћу геоцентричних вектора положаја тела, ρ_i, и Сунца, $\mathbf{R}_i$, дакле

$$\mathbf{r}_i = \rho_i \rho_{0i} - \mathbf{R}_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

добићемо да је

$$n_1 \rho_1 \rho_{01} - \rho_2 \rho_{02} + n_3 \rho_3 \rho_{03} = n_1 \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + n_3 \mathbf{R}_3. \tag{3}$$

Како су компоненте јединичних вектора геоцентричних положаја тела познати „косинуси праваца“, познате функције посматраних ректасцензија и деклинација тела, то у три скаларне једначине (3) има пет непознатих: два односа површина троуглова (n_1 и n_3) и три геоцентричне даљине (ρ_1, ρ_2 и ρ_3).

Везе између односа површина троуглова и односа површина сектора и троугла смо већ раније извели. То су једначине 8(35):

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{y_2}{y_1}, \quad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\frac{y_2}{y_3}. \tag{4}$$

Времене интервале између посматрања изразили смо, као и раније, у средњим Гаусовим данима; и то су познате величине нашег рачуна:

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2), \quad \tau_2 = k(t_3 - t_1), \quad \tau_3 = k(t_2 - t_1). \tag{5}$$

Односе површина сектора и троугла можемо израчунати, како смо раније видели, када познајемо $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ и тренутке на које се ови вектори односе, тј. тренутке посматрања. А ове векторе добивамо из (2), чим дођемо до геоцентричних даљина ρ_i. Према томе, у пет једначина (3) и (4) имамо једнак број непознатих: n_1, n_3, ρ_1, ρ_2 и ρ_3. Даље се, дакле, ради само о ефективном решавању наведених једначина.

Основне непознате у Гаус-Енкеовој методи су, у ствари, односи површина троуглова, n_1 и n_3. Када њих одредимо, геоцентричне даљине ρ_i следују из (3), па из (2) добивамо почетне услове кретања $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$. Са њима изводимо елементе кретања на већ познати начин. Сетимо ли се начина израчунавања y_i помоћу $\mathbf{r}_i$ и t_i, лако ћемо доћи до закључка да је најпогодније цео рачун изводити сукцесивним апроксимацијама. Сада нам није тешко да њихов ток скицирамо. За односе површина троуглова позовимо се на једначине 8 (34):

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{1}{6}\tau_3(\tau_1+\tau_2)\, r_2^{-3} + \cdots\right], \\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 + \frac{1}{6}\tau_1(\tau_2+\tau_3)\, r_2^{-3} + \cdots\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Како у почетку рачуна не знамо ништа приближније о вредности средњег радијусвектора r_2, нити других величина које улазе у горње редове, изузев времених интервала, то ћемо n_1 и n_3 апроксимирати првим члановима у (6), дакле

$$n_1 \approx \tau_1 : \tau_2, \qquad n_3 \approx \tau_3 : \tau_2. \tag{7}$$

С овим вредностима добивамо, посредством једначине (3), приближне вредности геоцентричних даљина ρ_i, с њима — помоћу (2) — $\mathbf{r}_i$, па неким од изложених поступака израчунавамо y_i. Потом нам једначине (4) омогућавају израчунавање поправљених вредности односа n_1 и n_3. Са њима започињемо рачун друге апроксимације, од једначина (3). Цео поступак, дакле, можемо схематски приказати на следећи начин:

$$n_1, n_3 \to \rho_i \to \mathbf{r}_i \to y_i \to n_1, n_3.$$

Када се постигне сагласност између n_1 и n_3 са почетка и краја извесне апроксимације, са жељеном тачношћу, рачун је завршен, па са $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$ из те последње апроксимације рачунамо елементе кретања.

17.1.2. Прве приближне вредности средњих даљина. — Изложени поступак добивања n_1 и n_3 знатно ће се убрзати ако се, већ на почетку рада, узму у рачун и други чланови у редовима (6), то јест они који зависе и од средње хелиоцентричне даљине тела, r_2. Но та даљина је непозната, па се поменути чланови користе посредно, на следећи начин.

Замислимо да смо наведене редове за n_1 и n_3, са по прва два члана у сваком, унели у једначину (3). Добили бисмо три скаларне једначине са четири непознате: ρ_i $(i=1, 2, 3)$ и r_2. Две можемо елиминисати; нека то буду ρ_1 и ρ_3. Резултат ће бити једна једначина са две непознате: геоцентричном и хелиоцентричном даљином тела, ρ_2 и r_2, за средњи тренутак посматрања, t_2. То ће нам бити такозвана „динамичка" једначина. „Геометријска" веза између истих непознатих је косинусни образац равне тригонометрије примењен на троугао Сунце-Земља-мала планета у тренутку t_2:

$$r_2^2=\rho_2^2+R_2^2-2\,(\boldsymbol{\rho}_{02}\,\mathbf{R}_2)\,\rho_2. \tag{8}$$

И у овој једначини јављају се исте непознате. Према томе, решавањем динамичке и геометријске једначине, добивамо прве приближне вредности за хелиоцентричну и геоцентричну даљину мале планете у тренутку t_2. Тако добивене даљине су приближне зато што је динамичка једначина само приближна релација између r_2, ρ_2 и основних података рачуна; добили смо је помоћу апроксимација за n_1 и n_3. Па ипак, са тако добивеним r_2 ће (6) дати тачније односе површина троуглова, но што су оне најгрубље апроксимације (7). Затим из (3) добивамо ρ_1 и ρ_3, што ће рећи да сад можемо све временске интервале поправити за дејство планетарне аберације (ма и само приближно), па прелазимо на рачунање хелиоцентричних координата тела, и тако даље, како смо већ навели.

Да бисмо извели динамичку једначину, елиминисаћемо ρ_1 и ρ_3 на следећи начин. Помножићемо ту једначину (3) векторски са $\boldsymbol{\rho}_{01}$, па резултат

$$\begin{aligned}-\rho_2\,[\boldsymbol{\rho}_{01}\,\boldsymbol{\rho}_{02}]+n_3\,\rho_3\,[\boldsymbol{\rho}_{01}\,\boldsymbol{\rho}_{03}]&=\\&=n_1\,[\boldsymbol{\rho}_{01}\,\mathbf{R}_1]-[\boldsymbol{\rho}_{01}\,\mathbf{R}_2]+n_3\,[\boldsymbol{\rho}_{01}\,\mathbf{R}_3],\end{aligned}$$

помножити скаларно са $\boldsymbol{\rho}_{03}$. Добићемо тако једначину

$$D\,\rho_2=d_1\,n_1-d_2+d_3\,n_3,$$

са коефицијентима које можемо израчунати са датим величинама рачуна:

$$D=(\boldsymbol{\rho}_{01}\,[\boldsymbol{\rho}_{02}\,\boldsymbol{\rho}_{03}]),\quad d_i=(\mathbf{R}_i\,[\boldsymbol{\rho}_{01}\,\boldsymbol{\rho}_{03}]),$$

$$i=1,\ 2,\ 3.$$

Зато пишемо да је

$$\rho_2=\frac{1}{D}\,(d_1\,n_1-d_2+d_3\,n_3). \tag{9}$$

Ова једначина је тачна, никакве апроксимације нисмо у њој вршили. Том послу сад приступамо. За односе времених интервала (7) уводимо ознаке

$$n_1^0 = \tau_1 : \tau_2, \qquad n_3^0 = \tau_3 : \tau_2, \tag{10}$$

а, према томе, познате факторе из (6) уз r_2^{-3} пишемо као

$$\nu_1^0 = \frac{1}{6}(1 + n_1^0)\tau_1\tau_3, \qquad \nu_3^0 = \frac{1}{6}(1 + n_3^0)\tau_1\tau_3.$$

Зато односе површина троуглова апроксимирамо са

$$n_1 = n_1^0 + \nu_1^0 r_2^{-3}, \qquad n_3 = n_3^0 + \nu_3^0 r_2^{-3}. \tag{11}$$

Уношење ових приближних израза у једначину (9) доводи до тражене динамичке једначине, коју пишемо у облику

$$\rho_2 = k^0 - l^0 r_2^{-3}. \tag{12}$$

Коефицијенти у њој су познати:

$$k^0 = \frac{1}{D}(d_1 n_1^0 - d_2 + d_3 n_3^0), \qquad l^0 = -\frac{1}{D}(d_1 \nu_1^0 + d_3 \nu_3^0). \tag{13}$$

Геометријска једначина (8) и динамичка једначина (12) представљају *Лагранжев систем једначина* одакле добивамо ρ_2 и r_2.

Овај систем једначина се лако даје редуковати, елиминисањем ρ_2, на једначину осмог степена по r_2:

$$r_2^8 - (k^{02} + R_2^2 + Lk^0) r_2^6 + l^0 (2k^0 + L) r_2^3 - l^{02} = 0,$$

где смо ради краћег писања увели ознаку $L = -2(\rho_{02} \mathbf{R}_2)$. Колико има реалних (и то позитивних) корена ова једначина? Подесним сменама може се она свести на нешто простији облик и показати да постоји или једно, или два решења. Даља, детаљнија, анализа доводи до закључка да је у време опозиције мале планете са Сунцем могуће само једно решење, догод имамо посла са „просечном" малом планетом. Другим речима, двострука решења горње једначине ретко се јављају у пракси рачуна орбита.

Како ћемо до тог решења доћи? Најбоље је вратити се полазном систему, па га решавати узастопним апроксимацијама. Са претпоставкама $r_2 = 2$ и $r_2 = 3$ а.ј. добивамо, из динамичке једначине (12), одговарајуће вредности за ρ_2. Ако помоћу њих израчунамо r_2 из геометријске једначине (8), добићемо хелиоцентричне даљине тела које ће се више или мање разликовати од првобитно претпостављених, 2 одн. 3 а.ј. Помоћу тих разлика, применом поступка *regula falsi*, налазимо ону даљину r_2 која се више неће мењати. Јасно је да тако долазимо и до ρ_2. Поступак је начелно истоветан са оним за налажење полупречника кружне путање, како смо раније видели. Сам рачун је утолико олакшан, што нема смисла изводити га са неком високом тачношћу, јер су коефицијенти у динамичкој једначини само приближни. Та једначина је само апроксимација тачне релације (9)

Када смо овако одредили, ма и само приближну, средњу хелиоцентричну даљину тела, једначине (11) омогућују да већ прву апроксимацију започнемо тачнијим износима за n_1 и n_3, него што бисмо их добили из (7).

17.1.3. Ток апроксимација. — Када смо овако добили даљине тела у тренутку t_2, израчунаћемо, како смо већ навели, те даљине и за остале тренутке посматрања, t_1 и t_3. Пошто срачунамо и сва три хелиоцентрична вектора положаја, прелазимо, по назначеној схеми, на израчунавање односа површина сектора и троугла. Не морамо посебно ни наглашавати да тренутке посматрања поправљамо за дејство планетарне аберације чим дођемо, макар и до приближних, геоцентричних даљина:

$$t_i^0 = t_i - A\,\rho_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

У пракси рачуна прве путање новопронађене мале планете времени интервал t_3—t_1 ретко кад прелази месец и по дана. Најчешће је то 25 до 35 дана. А за тако мале времене интервале Хансенов поступак израчунавања y, иако у суштини само приближан, даје веома добре резултате. Уосталом, ништа нас начелно не спречава да употребимо и неки други поступак за израчунавање односа површина сектора и троугла, само ће тада рачун бити, скоро увек, непотребно дуг. Гаусов поступак, на пример, употребићемо само у оним ретким случајевима већих времених интервала, када се Хансенов покаже као недовољно тачан.

Када тако нађемо y_i, са овим односима рачунамо поправљене n_1 и n_3; они ће се свакако разликовати, више или мање, од вредности добивених на почетку ове прве апроксимације помоћу једначина (11). Зато започињемо другу апроксимацију. Међутим, нећемо је започети на тај начин да у једначине (3) уносимо поправљене n_1 и n_3, ради добивања ρ_i, итд. Једноставна анализа показује, како ћемо касније видети, да ће цео поступак брже водити ка коначним значењима ових односа површина троуглова, ако другу апроксимацију започнемо враћањем на Лагранжев систем једначина.

Приближну динамичку једначину (12) добили смо из тачне (9) на тај начин што смо у изразима за n_1 и n_3 узели у рачун само прва два члана. Онолико колико их је исписано у (6). Међутим, ако једначине (4) напишемо, помоћу (10), у облику

$$n_j = n_j^0 \frac{y_2}{y_j} = n_j^0 \frac{y_2}{y_j} + n_j^0 - n_j^0 = n_j^0 + \left(\frac{y_2}{y_j} - 1\right) n_j^0 =$$

$$= n_j^0 + \left(\frac{y_2}{y_j} - 1\right) n_j^0 r_2^3 r_2^{-3} = n_j^0 + \nu_j r_2^{-3}, \qquad j = 1,\ 3,$$

што ће рећи и да смо увели ознаке

$$\nu_1 = \left(\frac{y_2}{y_j} - 1\right) n_j^0 r_2^3, \qquad j = 1,\ 3,$$

па то уведемо у једначину (9), она ће постати

$$\rho_2 = k - l\,r_2^{-3},$$

са коефицијентима

$$k = \frac{1}{D}(d_1 n_1^0 - d_2 + d_3 n_3^0), \qquad l = -\frac{1}{D}(d_1 \nu_1 + d_3 \nu_3).$$

Другим речима, добили смо формално непромењену динамичку једначину, што ће рећи да другу апроксимацију можемо започети опет решавањем Лагранжева система једначина.

О корисности таква начина рада можемо се уверити посматрајући грађу коефицијената једначина тога система. Коефицијенти геометријске једначине, R_2^2 и $-2(\rho_{02}\,\mathbf{R}_2)$, уопште се не мењају током рачуна. А у динамичкој једначини се k, у односу на k^0 из (13), променило једино због обрачунавања дејства планетарне аберације на времене интервале τ_i; то закључујемо из (10). Величине D и d_i се не мењају. Највише ће се променити коефицијент l; у њега улазе, посредством ν_1 и ν_3, сви чланови редова (6), изузев првих. Но тај коефицијент се у динамичкој једначини множи релативно малом величином r_2^{-3} па његове промене не долазе толико до изражаја. Све нам ово показује да ће се после малог броја апроксимација — две или три, у највећем броју случајева у пракси — доћи до Лагранжева система једначина, чија ће решења ρ_2 и r_2 бити довољно тачна. Њихову тачност ће у пракси једино ограничавати обично мали број вредносних цифара у детерминанти D. То је, како смо је раније дефинисали, шестострука запремина тетраедра са странама ρ_{0i} из једног темена. А углови између тих страна, због малих времених интервала τ_i, у пракси су обично врло мали.

Јасно је да се са овим побољшаним решењима ρ_2 и r_2, са почетка друге апроксимације, не враћамо више на једначине (11). Оне су одиграле своју улогу у првој апроксимацији, да бисмо већ у њој оперисали са што бољим вредностима за n_1 и n_3.

Постигли смо, дакле, да у свим апроксимацијама изузев прве оперишемо са аналитички тачним изразима: (2), (3), (10), (4), (8) и (9). Једини изузетак је израчунавање односа површина сектора и троугла, а и то је изузетак само теоријски посматрано. Тај однос можемо у пракси израчунати са свом жељеном тачношћу.

Пракса је показала да је најбоље изводити рачун са шест децимала; константне величине D и d_i можемо рачунати са седам децимала, а исто тако и односе површина сектора и троугла. Лагранжеве једначине решавамо у првој апроксимацији рачуном са четири децимале, а у осталим — са пет или шест.

17.1.4. ***Представљање положаја.*** — Претпоставимо да смо описаним током рада коначно дошли до вредности односа површина троуглова, које се више не мењају, и што нам означава завршетак рачуна апроксимација. Међутим, већ на овом месту можемо извршити веома добру контролу дотадашњег рачуна. Ту могућност нам пружа једначина (1), која заједно са (2) даје

$$\rho_2\,\rho_{02} = n_1\,\mathbf{r}_1 + n_3\,\mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_2;$$

вредности на десној страни (изузев $\mathbf{R}_2$, наравно) узимамо из последње апроксимације. То ће рећи да можемо добити *рачунаш положај* тела, тј. *рачунаше координаше* (α_2) и (δ_2) за тренутак t_2^0 помоћу

$$\rho_2 \cos(\alpha_2)\cos(\delta_2) = n_1 x_1 + n_3 x_3 + X_2,$$

$$\rho_2 \sin(\alpha_2)\cos(\delta_2) = n_1 y_1 + n_3 y_3 + Y_2,$$

$$\rho_2 \sin(\delta_2) = n_1 z_1 + n_3 z_3 + Z_2.$$

Поређење са *йосматраним йоложајем*, то јест координатама α_2 и δ_2, показује поузданост хелиоцентричних координата тела у тренуцима t_1 и t_3, помоћу којих изводимо путањске елементе. Разлике $O-C$, дакле

$$\alpha_2 - (\alpha_2) \qquad \text{и} \qquad \delta_2 - (\delta_2),$$

потребно је да буду занемарљиво мале, тачније речено — у границама тачности посматрања.

Ако је ова контрола добро задовољена, можемо са вредностима почетних услова $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$ из последње апроксимације прећи на налажење путањских елемената. То изводимо по обрасцима на стр. 51. Но јасно је да тамо морају бити тренуци t_1 и t_3 поправљени за дејство планетарне аберације; у тач. III. и V. рачунамо са t_1^0 и t_3^0 из последње апроксимације. Ознака y у тач. III. односи се на y_2.

Када израчунамо путањске елементе, завршну контролу рачуна орбита изводимо, као и увек, представљањем посматраних положаја.

Тих посматраних положаја може да буде, наравно, и више од три. Ако их је више, на самом почетку рачуна потребно је одабрати три, која ћемо користити. Најбоље је одабрати таква три посматрања, да су времени интервали t_2-t_1 и t_3-t_2 што приближније једнаки. А уз то, наравно, да интервал између t_1 и t_3 буде што већи. За неискоришћена посматрања координате Сунца узимамо за тренутке посматрања t, док положаје тела рачунамо, са нађеним елементима, за тренутке $t^0 = t - A\,\rho$. Но ту су даљине ρ непознате. Зато прибегавамо приближној аналитичкој или графичкој конструкцији параболе $A\,\rho = f(t)$, помоћу познатих вредности аберационих поправки $A\,\rho_i$ за тренутке t_i $(i=1, 2, 3)$ посматрања. Тако можемо брзо добити, интерполацијом или екстраполацијом, довољно тачне износе поправки тренутака посматрања за почетак рачуна представљања положаја. А кад на његову завршетку добијемо даљине ρ, проверићемо раније усвојене вредности $A\,\rho$ и по потреби рачун поновити. Но у највећем броју случајева таква потреба се неће јавити.

Преглед образаца

Константне величине

I. Косинуси праваца:

$$\xi_i = \cos\delta_i \cos\alpha_i, \qquad \eta_i = \cos\delta_i \sin\alpha_i, \qquad \zeta_i = \sin\delta_i.$$

Рачунамо их са седам децимала (ако су посматрања дата на $0^s\!.01$ и $0''\!.1$) за сва три посматрања (i=1, 2, 3). Контрола:

$$\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2=1.$$

То су компоненте јединичних вектора ρ_{0i}.

II. Координате Сунца:

из астрономског алманаха X_i, Y_i, Z_i, R_i.

И ове координате узимамо на седам децимала. Контрола:

$$X_i^2+Y_i^2+Z_i^2=R_i^2.$$

То су геоцентричне координате. Поправљамо их за дејство паралаксе:

$$\Delta X_i=C'\cos\theta_i,\qquad \Delta Y_i=C'\sin\theta_i,\qquad \Delta Z_i=C''.$$

C' и C'' су паралактичке поправке за место посматрања (из алманаха), а θ_i месна звездана времена посматрања. Топоцентричне координате Сунца:

$$X_i+\Delta X_i,\qquad Y_i+\Delta Y_i,\qquad Z_i+\Delta Z_i.$$

То су координате топоцентричних вектора $\mathbf{R}_i$. Њихове интензитете рачунамо из

$$R_i=\sqrt{X_i^2+Y_i^2+Z_i^2}.$$

III. Помоћне величине:

$$D=(\rho_{01}\,[\rho_{02}\,\rho_{03}]),\qquad d_i=(\mathbf{R}_i\,[\rho_{01}\,\rho_{03}]).$$

И њих рачунамо са седам децимала.

$$L_2=-2\,(\rho_{02}\,\mathbf{R}_2).$$

Прва айроксимација

IV. Времени интервали:

$$\tau_1=k\,(t_3-t_2),\qquad \tau_2=k\,(t_3-t_1),\qquad \tau_3=k\,(t_2-t_1).$$

Тренутке посматрања изражавамо у дану и децималним деловима дана (са пет децимала), а времене интервале рачунамо на шест децимала.

$$k=0.017\,2021.\qquad \text{Контрола: } \tau_1+\tau_3=\tau_2.$$

V. Помоћне величине:

$$n_1^0=\tau_1:\tau_2,\qquad n_3^0=\tau_3:\tau_2.\qquad \text{Контрола: } n_1^0+n_3^0=1.$$

$$\nu_j^0=\frac{1}{6}\,(1+n_j^0)\,\tau_1\,\tau_3,\quad j=1,\,3.\quad \text{Контрола: } 2\,(\nu_1^0+\nu_3^0)=\tau_1\,\tau_3$$

Све ове величине рачунамо са шест децимала. На четири децимале рачунамо

$$k^0 = \frac{1}{D}(d_1 n_1^0 - d_2 + d_3 n_3^0), \qquad l^0 = -\frac{1}{D}(d_1 \nu_1^0 + d_3 \nu_3^0).$$

VI. Решавање Лагранжева система једначина по ρ_2 и r_2:

$$\rho_2 = k^0 - l^0 r_2^{-3},$$

$$r_2^2 = R_2^2 + L_2 \rho_2 + \rho_2^2.$$

Примењујемо поступак *regula falsi*, стављајући у прву једначину $r_2=2$ и 3 (a.j.). Резултат на четири децимале.

VII. Односи површина троуглова:

$$n_j = n_j^0 + \nu_j^0 r_2^{-3}, \qquad j = 1, 3,$$

(шест децимала).

VIII. Прва и трећа топоцентрична даљина:

$$n_1 \xi_1 \rho_1 + n_3 \xi_3 \rho_3 = \xi_2 \rho_2 + n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3$$

$$n_1 \eta_1 \rho_1 + n_3 \eta_3 \rho_3 = \eta_2 \rho_2 + n_1 Y_1 - Y_2 + n_3 Y_3$$

$$n_1 \zeta_1 \rho_1 + n_3 \zeta_3 \rho_3 = \zeta_2 \rho_2 + n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3$$

Из две једначине (са највећим коефицијентима уз непознате ρ_1 и ρ_3) израчунавамо прву и трећу топоцентричну даљину тела, а трећу једначину користимо за контролу. И овде рачун изводимо са шест децимала.

IX. Поправка времених интервала и помоћне величине:

$$t_i^0 = t_i - A\rho_i, \qquad A = 0.00577, \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$\tau_1^0 = k(t_3^0 - t_2^0), \qquad \tau_2^0 = k(t_3^0 - t_1^0), \qquad \tau_3^0 = k(t_2^0 - t_1^0),$$

$$n_1^0 = \tau_1^0 : \tau_2^0, \qquad n_3^0 = \tau_3^0 : \tau_2^0.$$

X. Хелиоцентричне координате:

$$\mathbf{r}_i = \begin{cases} x_i = \xi_i \rho_i - X_i, \\ y_i = \eta_i \rho_i - Y_i, \\ z_i = \zeta_i \rho_i - Z_i. \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3.$$

XI. Однос површина сектора и троугла (Хансенов поступак):

$$\varkappa_i^2 = r_j r_k + (\mathbf{r}_j \mathbf{r}_k). \qquad \frac{11}{9} h_i = \frac{\frac{11}{9} \tau_i^{02}}{\varkappa_i^2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \varkappa_i + r_j + r_k \right)},$$

$$y_i = 1 + \frac{10}{11} \cdot \cfrac{\frac{11}{9} h_i}{1 + \cfrac{\frac{11}{9} h_i}{1 + \cfrac{\frac{11}{9} h_i}{1 + \cdots}}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.942809, \qquad \frac{11}{9} = 1.222222, \qquad \frac{10}{11} = 0.909091.$$

XII. Однос површина троуглова:

$$n_1 = n_1^0 (y_2 : y_1), \qquad n_3 = n_3^0 (y_2 : y_3).$$

Друīа и осūале аūроксимације

V/2. Помоћне величине:

$$\nu_j = n_j^0 (y_2 : y_j - 1) r_2^3, \qquad j = 1, 3.$$

Даље се рачун понавља, са изузетком тач. VII.

Предсūављање средњеī ūосмаūрања

$$\rho_2 \cos(\alpha_2) \cos(\delta_2) = n_1 x_1 + n_3 x_3 + X_2,$$
$$\rho_2 \sin(\alpha_2) \cos(\delta_2) = n_1 y_1 + n_3 y_3 + Y_2,$$
$$\rho_2 \sin(\delta_2) = n_1 z_1 + n_3 z_3 + Z_2.$$

Извођење елеменаūа

Са вредностима почетних услова $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$ из последње апроксимације изводимо елементе како смо показали на стр. 51. Напоменимо само да можемо користити и обрасце

$$e \cos v_1 = q_1, \qquad e \sin v_1 = [q_1 \cos(v_3 - v_1) - q_3] \operatorname{cosec}(v_3 - v_1)$$

у тач. IV., а као контролу,

$$p = r_3 (1 + e \cos v_3).$$

А пошто у овом случају израчунавамо сва три односа површина сектора и троугла, у тач. III. можемо као контролу користити и

$$\sqrt{p}=\frac{r_1 r_0}{\overset{0}{\tau}_1} n_1 y_1=\frac{r_1 r_0}{\overset{0}{\tau}_3} n_3 y_3 .$$

Представљање свих посматраних положаја

Са нађеним елементима кретања израчунавамо положаје тела за тренутке свих посматрања, и оних која нису искоришћена за рачун орбита. Претходно тренутке посматрања поправљамо за дејство планетарне аберације, како смо раније навели (стр. 102). Користимо класичне једначине рачуна ефемерида.

17.2. Laplace-Leuschner-ова метода. — Основна Лапласова идеја рачуна непоремећене путање небеског тела старија је од Гаусове, али није била својевремено разрађена у детаљима за практичну примену. Зато се различите њене варијанте користе тек од краја прошлог века. Овде ћемо приказати једну од њих.

17.2.1. Основе методе. — Пођимо од једначине

$$\rho\,\rho_0=\mathbf{r}+\mathbf{R} \tag{14}$$

за произвољни тренутак t, па је двапут диференцирајмо по времену (временa јединица нека је средњи Гаусов дан):

$$\rho'\,\rho_0+\rho\,\rho_0'=\mathbf{r}'+\mathbf{R}', \tag{15}$$

$$\rho''\,\rho_0+2\,\rho'\,\rho_0'+\rho\,\rho_0''=\mathbf{r}''+\mathbf{R}''. \tag{16}$$

За трансформисање десне стране последње једначине искористимо диференцијалне једначине кретања мале планете и Земље и (14):

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''&=-r^{-3}\,\mathbf{r}=-r^{-3}(\rho\,\rho_0-\mathbf{R}),\\ \mathbf{R}''&=-R^{-3}\,\mathbf{R}.\end{aligned} \tag{17}$$

Тако (16) прелази у

$$(\rho''+r^{-3}\rho)\,\rho_0+2\,\rho'\,\rho_0'+\rho\,\rho_0''=(r^{-3}-R^{-3})\,\mathbf{R} \tag{18}$$

После векторског множења са ρ_0' имамо

$$(\rho''+r^{-3}\rho)\,[\rho_0'\,\rho_0]+\rho\,[\rho_0'\,\rho_0'']=(r^{-3}-R^{-3})\,[\rho_0'\,\mathbf{R}],$$

а после скаларног множења овога са ρ_0 добивамо

$$\rho\,(\rho_0''\,[\rho_0\,\rho_0'])=(r^{-3}-R^{-3})\,(\mathbf{R}\,[\rho_0\,\rho_0']).$$

Ставимо ли да је

$$D=(\rho_0''[\rho_0\,\rho_0']),\qquad d=(\mathbf{R}[\rho_0\,\rho_0']),$$

$$k=-\frac{d}{D}R^{-3},\qquad l=-\frac{d}{D},$$

коначно ћемо на овај начин добити динамичку једначину

$$\rho=k-lr^{-3}, \tag{19}$$

истог облика као у Гаус-Енкеовој методи. Пошто нам је геометријска једначина за исти тренутак t

$$r^2=\rho^2-2(\rho_0\mathbf{R})\rho+R^2 \tag{20}$$

увек на расположењу, то изводимо следећи закључак. Ако за произвољни тренутак познајемо не само јединични геоцентрични вектор положаја тела (ρ_0), него и његов први и други извод по времену (ρ_0' и ρ_0''), онда помоћу (19) и (20) можемо израчунати геоцентричну и хелиоцентричну даљину тела за тај тренутак. Осим тога, тада једначина (18) даје први и други извод геоцентричне даљине (ρ' и ρ''), једначина (14) — вектор хелиоцентрична положаја тела, $\mathbf{r}$, а једначина (15) — хелиоцентричну брзину, $\mathbf{v}=\mathbf{r}'$.

Или, другим речима: ако познајемо ρ_0, ρ_0' и ρ_0'' за неки тренутак t_n, лако можемо израчунати почетне услове кретања $\mathbf{r}(t_n)$ и $\mathbf{v}(t_n)$, чиме је проблем одређивања путање решен. Шта више, као што смо из досад изложеног видели, нигде се унапред не поставља услов — по каквој путањи се тело креће. То се закључује по познатом критеријуму на основи добивених вредности за почетне услове, па се према томе прелази на извођење елемената.

Како ћемо овај закључак да искористимо за праксу рачуна орбита? Са подацима посматрања, како смо их раније дефинисали, непосредно можемо израчунати само косинусе праваца, тј. компоненте вектора ρ_0. Међутим, ако имамо три посматрања, можемо израчунати, рецимо, $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$ и $\xi(t_3)$. Са ове три вредности конструисаћемо параболу другог реда $\xi=\xi(t)$, па неким од поступака нумеричког диференцирања (за нееквидистантан распоред аргумената) извести нумеричке вредности за $\xi'(t_2)$ и $\xi''(t_2)$. На једнак начин ћемо поступити и са преосталим компонентама вектора ρ_0, тј. η и ζ. Тако ћемо добити — наравно, само приближно — ρ_0' и ρ_0'' за тренутак средњег посматрања, t_2. Даље можемо рачунати како смо навели, али ће и добивени почетни услови бити само приближни.

Срећом, степен те приближности можемо оценити чим израчунамо први и други извод вектора ρ_0. Како је у сваком случају

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$

то диференцирањем ове једначине добивамо

$$\begin{gathered}\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'=0,\\ \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2+\xi\xi''+\eta\eta''+\zeta\zeta''=0.\end{gathered} \tag{21}$$

Уколико су ове једначине боље задовољене, утолико су нам вредности првих и других извода тачније. Мерило, наравно, није апсолутно, али нам већ на самом почетку рачуна нешто говори о тачности основних података.

Но нешто друго, и то много важније, закључујемо чим смо видели како можемо доћи до првих и других извода косинуса праваца. Често имамо на расположењу више од три посматрања небеског тела, али у малом временом интервалу. Ако бисмо желели да путању таквог тела рачунамо Гаус-Енкеовим поступком, узели бисмо у рачун прво и последње посматрање, и неко средње. А овако можемо *сва* посматрања, и она временски врло блиска, неупотребљива за непосредни рачун орбита, искористити да дођемо и до веома тачних вредности првог и другог извода косинуса праваца за неки средњи тренутак. Једначине (21) могу бити врло добро задовољене. То је главна предност варијанти Лапласове методе, у односу на Гаус-Енкеову.

Међутим, ако и искористимо више посматрања за израчунавање поменутих извода, ипак морамо претпоставити да у великом броју случајева у пракси нисмо постигли онолику тачност, колику дају посматрања, или колику би дала примена, рецимо, Гаус-Енкеове методе. Другим речима, не смемо се зауставити на онако добивеним почетним условима, већ морамо потражити начин за њихово поправљање, користећи посматрања небеског тела. Такав рачун поправки, само једном изведен, биће знатно боља контрола тачности извода косинуса правца, но што су то биле једначине (21), и у оним случајевима када је тачност извода висока. А када то није случај, онда ће нас рачун поправки коначно довести до онолико тачних путањских елемената тела, колико то посматрања могу да дају.

Но пре него што пређемо на скицирање једне варијанте рачуна поправки, приметимо да би друга диференцијална једначина (17) морала да се односи на кретање барицентра система Земља-Месец око Сунца. То јест, **R** би морао бити барицентрични вектор положаја Сунца. Данас имамо на расположењу таблице које дају барицентричне координате Сунца, па би било потребно, за елиминисање дејства паралаксе, извршити још прелаз са барицентра на топоцентар. Како је ова трансформација координата компликованија од оне за прелаз са геоцентра на топоцентар, поставља се питање целисходности њена извођења у рачуну путање новопронађене мале планете, из ограничена броја посматрања. Ми о тој трансформацији нећемо овде водити рачуна, имајући пре свега на уму да је Кеплерова путања само апроксимација стварног кретања, и да ћемо елементе и такве приближне путање у сваком случају морати још поправљати.

17.2.2. ***Рачун поправки.*** — Претпоставићемо да у временом интервалу од око месец до два дана имамо више посматрања небеског тела. Одабраћемо три посматрања, у тренуцима t_1, t_2 и t_3, а сва посматрања искористити за налажење нумеричких вредности компонената извода вектора геоцентричног положаја тела, $\rho_0'(t_2)$ и $\rho_0''(t_2)$. Потом, како смо већ навели, рачунамо: из једначина (19) и (20) — r_2 и ρ_2; из једначина (18) — ρ_2' и ρ_2''. После овога, рачунамо времене интервале (у односу на средњи t_2):

$$\tau_1 = k(t_1 - t_2), \quad \tau_3 = k(t_3 - t_2). \tag{22}$$

Сада ћемо се позвати на Тејлоров ред

$$\rho_j = \rho_2 + \rho_2' \tau_j + \frac{1}{2} \rho_2'' \tau_j^2, \quad j = 1, 3,$$

како бисмо дошли, макар и само до приближних, геоцентричних даљина тела у тренуцима првог и трећег посматрања. То значи да после тога можемо доћи и до вектора хелиоцентричних положаја за t_1 и t_3, и то помоћу једначина (14). Имамо, дакле, хелиоцентричне координате у сва три тренутка.

Међутим, ми ћемо ове координате за први и трећи тренутак израчунати на други начин, како бисмо све нетачности у добивеним резултатима приказали као последицу нетачности почетних услова $\mathbf{r}(t_2)$ и $\mathbf{v}(t_2)$ — то јест, као последицу нетачности коефицијената у динамичкој једначини (19), или, још друкчије речено, као последицу нетачности у изводима косинуса праваца. Зато ћемо, прво, помоћу нађених геоцентричних даљина поправити тренутке посматрања за дејство планетарне аберације, а са њима и времене интервале (22). Са тим временим интервалима и вредностима $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_2$ налазимо функције $f(\tau_j)$ и $g(\tau_j)$ — узимајући у рачун прва три или четири члана. Претходно смо искористили (15) да добијемо $\mathbf{r}_2' = \mathbf{v}_2$; компоненте брзине привидна Сунчевог кретања налазимо неким поступком нумеричког диференцирања. Коначно је

$$\mathbf{r}_j = f(\tau_j)\,\mathbf{r}_2 + g(\tau_j)\,\mathbf{v}_2. \quad j = 1,\ 3. \tag{23}$$

Сада ћемо искористити једначине (14), и то да добијемо *рачунате* косинусе праваца за t_1 и t_3:

$$(\rho_{0j}) = \frac{1}{\rho_j}(\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j), \quad j = 1,\ 3,$$

а помоћу њих добивамо *рачунате* ректасцензије и деклинације:

$$\cos(\alpha_j)\cos(\delta_j) = (\xi_j),$$
$$\sin(\alpha_j)\cos(\delta_j) = (\eta_j),$$
$$\sin(\delta_j) = (\zeta_j).$$

Да су почетни услови $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_2$ били тачни, могли бисмо и функције f и g израчунати са свом жељеном тачношћу, па би било

$$\alpha_j - (\alpha_j) = 0, \quad \delta_j - (\delta_j) = 0.$$

При томе морамо претпоставити да су раније наведена три члана у редовима за ρ_j довољни за тачно израчунавање ових даљина. Међутим, у општем случају неће доћи до поклапања посматраних и рачунатих вредности координата тела; интензитет разлика

$$\alpha_j - (\alpha_j), \quad \delta_j - (\delta_j), \quad j = 1,\ 3,$$

мерило је тачности целог досадашњег рачуна. Ако помоћу веза између посматраних и рачунатих косинуса праваца и сферних координата израчунамо изразе

$$\eta(\xi) - \xi(\eta) \quad \text{и} \quad \zeta - (\zeta),$$

видећемо да је

$$\eta_j(\xi_j)-\xi_j(\eta_j)=\cos\delta_j\cos(\delta_j)\sin[\alpha_j-(\alpha_j)],\qquad \zeta_j-(\zeta_j)=\sin\delta_j-\sin(\delta_j)=$$

$$=2\cos\frac{1}{2}[\delta_j+(\delta_j)]\sin\frac{1}{2}[\delta_j-(\delta_j)].$$

Па ипак, оправдано смемо претпоставити да ће бити

$$\alpha_j\approx(\alpha_j),\qquad \delta_j\approx(\delta_j),$$

па из горњих једначина изводимо

$$\begin{aligned}[\alpha_j-(\alpha_j)]''&=206265''\,[\eta_j(\xi_j)-\xi_j(\eta_j)]\sec^2\delta_j,\\ [\delta_j-(\delta_j)]''&=206265''\,[\zeta_j-(\zeta_j)]\sec\delta_j.\end{aligned}\tag{24}$$

На тај начин можемо да оценимо нетачност целог рачуна помоћу разлика између посматраних и рачунатих координата.

Пракса је показала да се елементи могу извести са задовољавајућом тачношћу ако су разлике у координатама у границама око $\pm 2''$. Како да даље поступамо ако ове разлике буду веће?

Усвојићемо, пре свега, да је једини узрок великих одступања у једначинама (24) недовољно тачна вредност средње геоцентричне даљине, ρ_2. Јер да њу знамо у тачном износу, геометријска једначина (20) би дала тачно r_2, и тако даље. Нека је, дакле, $\Delta\rho$ „нетачност" у геоцентричној даљини за произвољни тренутак t и нека је то $\Delta\rho$ мало. Тада из једначине (14) произилази

$$\Delta\rho\cdot\boldsymbol{\rho}_0+\rho\,\Delta\boldsymbol{\rho}_0=\Delta\mathbf{r},\tag{25}$$

што нам показује какве нетачности у косинусима правца и вектора положаја проузрокује $\Delta\rho$. Овде морамо претпоставити да је $\Delta\boldsymbol{\rho}_0\neq 0$, имајући у виду на какав начин рачунамо косинусе праваца, посредством хелиоцентричних координата (23), а нетачност у ρ проузрокује нетачности у вредностима функција f и g. — Даље, из (14) је

$$\rho^2=((\mathbf{r}+\mathbf{R})\,(\mathbf{r}+\mathbf{R})),$$

а одавде је

$$\rho\,\Delta\rho=((\mathbf{r}+\mathbf{R})\,\Delta\mathbf{r})=(\boldsymbol{\rho}\,\Delta\mathbf{r})=\rho\,(\boldsymbol{\rho}_0\,\Delta\mathbf{r}),$$

дакле

$$\Delta\rho=(\boldsymbol{\rho}_0\,\Delta\mathbf{r}).$$

Са једначином (25) ово доводи до

$$\rho\,\Delta\boldsymbol{\rho}_0=\Delta\mathbf{r}-(\boldsymbol{\rho}_0\,\Delta\mathbf{r})\,\boldsymbol{\rho}_0.\tag{26}$$

Овом једначином изражавамо зависност између нетачности у косинусима праваца и нетачности у хелиоцентричним координатама. Раније смо видели како долазимо до

$$\Delta\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{\rho}_0-(\boldsymbol{\rho}_0),$$

то јест до рачунатих косинуса праваца, тако да $\Delta\boldsymbol{\rho}_0$ можемо сматрати за познато. Тако нам једначине (26) дају износе поправки хелиоцентричних координата тела. Међутим, нама је важно, у крајњој линији, да поправимо почетне услове $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_2$. Зато ћемо једначине (26) искористити на други начин. Задатак можемо свести на налажење поправки $\Delta\rho_2$ и $\Delta\mathbf{v}_2=(\Delta x_2', \Delta y_2', \Delta z_2')$, пошто са тачним ρ_2 из (14) добивамо и тачно $\mathbf{r}_2$. Погледајмо, стога, како изгледају наши ранији резултати, примењени на тренутак t_2.

На првом месту примећујемо да мора бити

$$\Delta\rho_{02}=\rho_{02}-(\rho_{02})=0.$$

За тренутак t_2 немамо могућности рачуна косинуса правца независно од једначине (14); њу смо већ искористили у динамичкој једначини (19) за налажење ρ_2. Тако (25) постаје

$$\Delta\rho_2\,\rho_{02}=\Delta\mathbf{r}_2. \tag{27}$$

А да бисмо проблем пребацили на налажење поправки координата брзине $\mathbf{v}_2$, задовољићемо се развојем у ред

$$\mathbf{r}_j=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_2'\,\tau_j^0+\frac{1}{2}\,\mathbf{r}_2''\,\tau_j^{02},\quad j=1,\ 3.$$

Одавде је

$$\Delta\,\mathbf{r}_j=\Delta\,\mathbf{r}_2+\Delta\,\mathbf{v}_2\,\tau_j^0+\frac{1}{2}\,\Delta\,\mathbf{r}_2''\,\tau_j^{02}. \tag{28}$$

Ову једначину ћемо искористити да повежемо усвојене непознате поправке са познатим разликама $\Delta\rho_{0j}=\rho_{0j}-(\rho_{0j})$.

Како већ имамо изразе за $\Delta\,\mathbf{r}_j$, $\Delta\,\mathbf{r}_2$ и $\Delta\,\mathbf{v}_2$ (усвојене непознате) то још само треба да нађемо $\Delta\,\mathbf{r}_2''$. У том циљу полазимо од диференцијалне једначине кретања, прве (17), одакле је

$$\Delta\,\mathbf{r}_2''=3\,\mathbf{r}_2^{-4}\,\Delta\,r_2\,\mathbf{r}_2-r_2^{-3}\,\Delta\mathbf{r}_2,$$

док из геометријске једначине (20) налазимо да је

$$r_2\,\Delta r_2=\left(\rho_2+\frac{1}{2}L_2\right)\Delta\rho_2,$$

где смо користили, као и раније, ознаку $L_2=-2(\rho_{02}\,\mathbf{R}_2)$. Стога је, после коришћења (27) и сређивања,

$$\Delta\,\mathbf{r}_2''=\mathbf{r}_2^{-3}\,\mathbf{H}\,\Delta\rho_2,$$

$$\mathbf{H}=3\left(\rho_2+\frac{1}{2}L_2\right)\,r_2^{-2}\,\mathbf{r}_2-\rho_{02}.$$

На тај начин, после поновне употребе и (27), добићемо из (28):

$$\Delta\mathbf{r}_j=\mathbf{G}_j\,\Delta\rho_2+\tau_j^0\,\Delta\,\mathbf{v}_2, \tag{29}$$

$$\mathbf{G}_j=\rho_{02}-\frac{1}{2}\,\tau_j^{02}\,r_2^{-3}\,\mathbf{H}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\,\tau_j^{02}\,r_2^{-3}\right)\rho_{02}+\frac{3}{2}\,\tau_j^{02}\left(\rho_2+\frac{1}{2}L_2\right)\,r_2^{-5}\,\mathbf{r}_2.$$

Сада ћемо се позвати на једначине (26), примењене на тренутке t_1 и t_3:

$$\rho_j \Delta \rho_{0j} = \Delta \mathbf{r}_j - (\rho_{0j} \Delta \mathbf{r}_j) \rho_{0j}.$$

Кад у њих унесемо једначине (29) и средимо по усвојеним непознатим, добићемо да је

$$\rho_j \Delta \rho_{0j} = \mathbf{S}_j \Delta \rho_2 + \tau_j^0 [\rho_{0j} [\Delta \mathbf{v}_2 \rho_{0j}]], \qquad (30)$$
$$\mathbf{S}_j = [\rho_{0j} [\mathbf{G}_j \rho_{0j}]].$$

Прва скаларна једначина која одавде следује, рецимо за тренутак t_1, је

$$\rho_1 \Delta \xi_1 = S_{1x} \Delta \rho_2 + \tau_1^0 [(1 - \xi_1^2) \Delta x_2' - \xi_1 \eta_1 \Delta y_2' - \xi_1 \zeta_1 \Delta z_2'].$$

Тако закључујемо да су разлике између посматраних и рачунатих косинуса праваца у тренуцима t_1 и t_3 линеарне хомогене функције усвојених непознатих поправки $\Delta\rho_2$, $\Delta x_2'$, $\Delta y_2'$ и $\Delta z_2'$. Но на расположењу имамо шест скаларних једначина (30), по три за оба тренутка посматрања. Зато ћемо их кондензовати у четири једначине, у којима ћемо моћи користити већ израчунате величине.

Без икаквих тешкоћа ћемо моћи показати да је

$$\begin{gathered} \rho_j (\eta_j \Delta \xi_j - \xi_j \Delta \eta_j) = - \rho_j [\eta_j (\xi_j) - \xi_j (\eta_j)], \\ \rho_j \Delta \zeta_j = \rho_j [\zeta_j - (\zeta_j)], \\ j = 1,3. \end{gathered} \qquad (31)$$

Тако смо најзад добили четири скаларне једначине, одакле ефективно израчунавамо поменуте четири непознате. Леве стране у (31) формирамо помоћу (30), а десне стране једноставно срачунавамо помоћу величина већ познатих из (24).

Кад на овај начин дођемо до вредности поправки средње геоцентричне даљине тела и компонената његове брзине, добивамо поправљене почетне услове $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_2$. Са њима даље поступамо као на почетку рада: рачунамо нове, поправљене, „рачунате" косинусе праваца за први и трећи тренутак, па једначинама (24) проверавамо до колике сагласности са посматрањима нас је довела поправка почетних услова. Уколико са разликама између посматраних и рачунатих координата тела још нисмо задовољни, поново приступамо, на исти начин, поправљању ρ_2 и $\mathbf{v}_2$.

Морамо приметити да овако скицирани поступак крије у себи две нетачности, посматрано са аналитичке стране. Геоцентричне даљине тела у тренуцима t_1 и t_3 рачунамо помоћу редова од само три члана. Исто тако, у рачуну поправки представљамо $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$ редовима са само три прва члана. (дакле, врло слабим апроксимацијама за функције f и g). Зато можемо закључити да се изложена метода тешко може применити у случајевима дужих времених интервала. Но у сваком случају, на завршетку сваке апроксимације увек јасно видимо са коликом тачношћу представљамо два посматрања. С друге стране, методу има смисла примењивати, како смо већ довољно нагласили, у случајевима када располажемо са више временски блиских посматрања, неупотребљивих за друге методе, тако да већ прву апроксимацију можемо започети са довољно тачним вредностима почетних услова кретања.

Пре̄глед образаца

Конс̄тан̄тне величине

I. Косинуси праваца:

$$\xi_k = \cos\delta_k \cos\alpha_k,$$
$$\eta_k = \cos\delta_k \sin\alpha_k,$$
$$\zeta_k = \sin\delta_k;$$

рачунају се за сва посматрања (k=1, 2, 3, ...),. Контрола:

$$\xi_k^2 + \eta_k^2 + \zeta_k^2 = 1.$$

II. Одаберу се три посматрања па се за тренутак средњег израчунају (неким поступком нумеричког диференцирања за нееквидистантне аргументе) први и други изводи косинуса праваца. То су компоненте јединичних вектора ρ_{02}' и ρ_{02}''. Контрола:

$$\xi_2 \xi_2' + \eta_2 \eta_2' + \zeta_2 \zeta_2' = 0,$$
$$\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 + \xi_2 \xi_2'' + \eta_2 \eta_2'' + \zeta_2 \zeta_2'' = 0.$$

III. Координате Сунца: топоцентричне — као у Гаус-Енкеовој методи. Исто тако и топоцентричне даљине. Ове координате и даљине — за сва три тренутка посматрања.

IV. Неким поступком нумеричког диференцирања израчунају се изводи координата и даљина Сунца за средњи тренутак (еквидистантни аргументи — из астрономског алманаха). Јединица времена: средњи Гаусов дан. Занемарујемо разлику између извода геоцентричних и топоцентричних координата и даљина. Контрола:

$$X_2 X_2' + Y_2 Y_2' + Z_2 Z_2' = R_2 R_2'.$$

Са геоцентричним координатама контрола мора бити строго задовољена.

V. Помоћне величине:

$$D = (\rho_{02}'' [\rho_{02} \rho_{02}']), \qquad d = (\mathbf{R}_2 [\rho_{02} \rho_{02}']),$$
$$k = -\frac{d}{D} R_2^{-3}, \qquad l = -\frac{d}{D},$$
$$L_2 = -2 (\rho_{02} \mathbf{R}_2).$$

Прва а̄проксимација

VI. Решавање система Лагранжевих једначина:

$$\rho_2 = k - l r_2^{-3},$$
$$r_2^2 = \rho_2^2 + L_2 \rho_2 + R_2^2.$$

Систем решавамо на исти начин као у Гаус-Енкеовој методи.

VII. Изводи геоцентричне даљине ρ_2:

$$(\rho_2'' + r_2^{-3}\rho_2)\,\rho_{02} + 2\rho_2'\rho_{02}' + \rho_2\rho_{02}'' = (r_2^{-3} - R_2^{-3})\,\mathbf{R}_2.$$

За непознате усвајамо $\rho_2'' + r_2^{-3}\rho_2$ и ρ_2', које налазимо из две једначине са највећим коефицијентима уз ове непознате, а трећу једначину користимо за контролу. Потом израчунавамо ρ_2'' из прве непознате.

VIII. Брзина тела у средњем тренутку:

$$\mathbf{v}_2 = \rho_2'\rho_{02} + \rho_2\rho_{02}' - \mathbf{R}_2'.$$

IX. Времени интервали:

$$\tau_j = k\,(t_j - t_2), \quad j = 1,\ 3, \quad k = 0.0172021.$$

X. Топоцентричне даљине у првом и трећем тренутку:

$$\rho_j = \rho_2 + \tau_j\rho_2' + \frac{1}{2}\tau_j^2\rho_2''.$$

XI. Поправка времених интервала за дејство планетарне аберације:

$$t_i^0 = t_i - A\,\rho_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \quad A = 0^{d}\!.00577.$$

$$\tau_j^0 = k\,(t_j^0 - t_2^0), \quad j = 1,\ 3.$$

Уколико су ове промене велике, враћајо се на тач. X, ради поправљања вредности топоцентричних даљина ρ_1 и ρ_3.

XII. Функције f и g:

$$a_2 = \frac{1}{2}r_2^{-3}, \quad a_3 = \frac{1}{2}r_2^{-5}(\mathbf{r}_2\mathbf{v}_2), \ \ldots\ \ldots,$$

$$b_3 = \frac{1}{3}a_2, \ \ldots\ \ldots,$$

$$f(\tau_j) = 1 - a_2\tau_j^{02} + a_3\tau_j^{03} + \cdots,$$

$$g(\tau_j) = \tau_j^0 - b_3\tau_j^{03} + \cdots, \quad j = 1,\ 3.$$

XIII. Хелиоцентричне координате тела у тренуцима првог и трећег посматрања:

$$\mathbf{r}_j = f(\tau_j)\,\mathbf{r}_2 + g(\tau_j)\,\mathbf{v}_2, \quad j = 1,\ 3.$$

XIV. Рачунати косинуси праваца:

$$(\rho_{0j}) = \frac{1}{\rho_j}(\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j), \quad j = 1,\ 3.$$

Контрола: $(\xi_j)^2 + (\eta_j)^2 + (\zeta_j)^2 = 1.$

XV. Представљање првог и трећег посматрања:

$$U_j=\eta_j(\xi_j)-\xi_j(\eta_j), \quad W_j=\zeta_j-(\zeta_j),$$

$$\left.\begin{aligned}[\alpha_j-(\alpha_j)]''&=206265''\,U_j\sec^2\delta_j,\\ [\delta_j-(\delta_j)]''&=206265''\,W_j\sec\delta_j.\end{aligned}\right\}\quad j=1,\,3.$$

Друга апроксимација

XVI. Помоћне величине:

$$\mathbf{G}_j=\left(1-\frac{1}{2}\tau_j^{02}r_2^{-3}\right)\boldsymbol{\rho}_{02}+\frac{3}{2}\tau_j^{02}\left(\rho_2+\frac{1}{2}L_2\right)r_2^{-5}\mathbf{r}_2,$$

$$\mathbf{S}_j=[\boldsymbol{\rho}_{0j}[\mathbf{G}_j\boldsymbol{\rho}_{0j}]]=\mathbf{G}_j-(\boldsymbol{\rho}_{0j}\mathbf{G}_j)\boldsymbol{\rho}_{0j}, \quad j=1,\,3.$$

XVII. Поправке правоуглих координата:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_j&=G_{jx}\Delta\rho_2+\tau_j^0\Delta x_2',\\ \Delta y_j&=G_{jy}\Delta\rho_2+\tau_j^0\Delta y_2',\\ \Delta z_j&=G_{jz}\Delta\rho_2+\tau_j^0\Delta z_2'.\end{aligned}\right\}\quad j=1,\,3.$$

Овамо само уносимо нумеричке вредности компонената вектора $\mathbf{G}_j$ и времени интервал.

XVIII. Исто тако, уносимо познате нумеричке вредности на десне стране једначина

$$\left.\begin{aligned}\rho_j\Delta\xi_j&=\Delta x_j-(\xi_j\Delta x_j+\eta_j\Delta y_j+\zeta_j\Delta z_j)\xi_j,\\ \rho_j\Delta\eta_j&=\Delta y_j-(\xi_j\Delta x_j+\eta_j\Delta y_j+\zeta_j\Delta z_j)\eta_j,\\ \rho_j\Delta\zeta_j&=\Delta z_j-(\xi_j\Delta x_j+\eta_j\Delta y_j+\zeta_j\Delta z_j)\zeta_j.\end{aligned}\right\}\quad j=1,\,3.$$

И ове једначине сређујемо по усвојеним непознатим.

XIX. Једначине за одређивање непознатих:

$$\eta_j\rho_j\Delta\xi_j-\xi_j\rho_j\Delta\eta_j=-\rho_jU_j, \quad \rho_j\Delta\zeta_j=\rho_jW_j, \quad j=1,\,3.$$

Десне стране рачунамо са величинама из XV., а леве сређујемо по непознатим поправкама, рачунајући их помоћу XVIII. Поправљене вредности:

$$\rho_2+\Delta\rho_2, \quad x_2'+\Delta x_2', \quad y_2'+\Delta y_2', \quad z_2'+\Delta z_2'.$$

XX. Поправљени хелиоцентрични положај тела у тренутку t_2

$$\mathbf{r}_2=\rho_2\boldsymbol{\rho}_{02}-\mathbf{R}_2.$$

XXI.=VII. Изводи средње геоцентричне даљине.

XXII.=X. Топоцентричне даљине за t_1 и t_3.

XXIII.=XI. Поправка времених интервала за дејство планетарне аберације.

XXIV.=XII. Функције f и g.

XXV.=XIII. Хелиоцентричне координате тела за t_1 и t_3.

XXVI.=XIV. Рачунати косинуси праваца.

XXVII.=XV. Представљање првог и трећег посматрања.

Трећа и даље апроксимације

Понављање рачуна из тач. *XVI.—XXVII.*

Извођење елемената

Са вредностима почетних услова $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_2$ из последње апроксимације изводимо елементе кретања како је показано на стр. 36 (векторски елементи) или 39—40 (скаларни елементи).

Представљање посматраних положаја

Са изведеним елементима представљамо све посматране положаје тела, на исти начин као у Гаус-Енкеовој методи.

17.3. Väisälä-ова метода. — Väisälä-ов поступак израчунавања непоремећене елиптичке путање небеског тела спада у групу најновијих метода рачуна орбита и лако се може прилагодити за коришћење савремених рачунских аутомата. Она представља скуп једноставних алгебарских операција, где се итеративним поступцима добивају све боље вредности одабраних почетних услова кретања.

17.3.1. *Основе методе.* — Метода је Лагранжева типа: израчунавају се почетни услови $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ за тренутак средњег посматрања и то помоћу функција f и g за тренутке првог и трећег посматрања.

Са извесном претпоставком $(\rho_2)_1$ о износу геоцентричне даљине тела у тренутку t_2 може се израчунати њен хелиоцентрични вектор положаја,

$$\mathbf{r}_2 = (\rho_2)_1 \boldsymbol{\rho}_{01} - \mathbf{R}_1,$$

а са њиме и приближне вредности функција f и g:

$$f(\tau_j) = 1 - \frac{1}{2} r_2^{-3} \tau_j^2, \qquad g(\tau_j) = \tau_j - \frac{1}{6} r_2^{-3} \tau_j^3, \qquad \tau_j = k(t_j - t_2), \qquad j = 1,\ 3.$$

Узимамо у обзир, дакле, оне чланове који не зависе од $\mathbf{v}_2$. Тако имамо

$$\mathbf{r}_j = f(\tau_j)\mathbf{r}_2 + g(\tau_j)\mathbf{v}_2 = \rho_j \boldsymbol{\rho}_{0j} - \mathbf{R}_j, \qquad j = 1,\ 3.$$

У последњим једначинама остале су непознате две геоцентричне даљине, ρ_1 и ρ_3, и брзина тела у тренутку t_2, тј. $\mathbf{v}_2$. Другим речима: у шест скаларних једначина имамо пет непознатих — ρ_1, ρ_3, x_2', y_2' и z_2'. Зато поступамо на следећи начин. Из четири једначине налазимо ρ_1, ρ_3, x_2' и y_2'; из пете и шесте добићемо, затим, две вредности за z_2'. Означимо их са $(z_2')_1$ и $(z_2')_3$. Да су вредности $(\rho_2)_1$, $f(\tau_j)$ и $g(\tau)_j$ биле тачне, добили бисмо да је $(z_2')_3-(z_2')_1=0$. Но како то у првој апроксимацији није случај, стварно ћемо добити да је $(z_2')_3-(z_2')_1=D_1\neq 0$.

Исти поступак ћемо поновити полазећи од неке друге претпоставке за ρ_2, тј. полазећи од $(\rho_2)_2$. Резултат рачуна ће бити величина $D_2\neq D_1\neq 0$. Према томе, варирањем ρ_2 долазимо до оног износа за средњу геоцентричну даљину тела за који је $D=0$.

Међутим, овај резултат $D_n=0$, после n-тог варирања ρ_2, није знак да смо коначно дошли до стварне даљине тела од Земље у тренутку средњег посматрања, исто тако као што резултати $D\neq 0$ не значе да још нисмо дошли до тачног ρ_2. Два су узрока непоклапања z-компоненти брзине: нетачности у ρ_2 и недовољно тачни изрази по којима рачунамо f и g. Зато се морају поправљати и вредности тих функција, истовремено са поправљањем ρ_2. То се постиже узимањем у рачун и чланова вишег реда, то јест оних који зависе и од $\mathbf{v}_2$, чије компоненте добивамо током рачуна са све већом тачношћу. Када, дакле, оваквим паралелним, истовременим, поправљањем вредности за ρ_2, $f(\tau_j)$ и $g(\tau_j)$ добијемо да D_n износи само неколико јединица последње децимале (обично се рачуна са шест децимала), вредности $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_2$ из те последње апроксимације можемо усвојити за почетне услове кретања, помоћу којих изводимо елементе.

17.3.2. ***Ток айроксимација.*** — Основе методе су, као што смо видели, веома једноставне. Зато је једино потребно да видимо како се из једначина

$$f(\tau_j)\,\mathbf{r}_2+g(\tau_j)\,\mathbf{v}_2=\rho_j\,\boldsymbol{\rho}_{0j}-\mathbf{R}_j\,,$$

то јест

$$f(\tau_j)\,x_2+g(\tau_j)\,x_2'=\rho_j\,\xi_j-X_j,$$

$$f(\tau_j)\,y_2+g(\tau_j)\,y_2'=\rho_j\,\eta_j-Y_j,$$

$$f(\tau_j)\,z_2+g(\tau_j)\,z_2'=\rho_j\,\zeta_j-Z_j,$$

стварно одређују ρ_j, x_2', y_2', и z_2'. У ту сврху ћемо из прве две једначине елиминисати ρ_j; резултат ће бити

$$\eta_j\,x_2'-\xi_j\,y_2'=A_j,$$

где се A_j може израчунати са датим величинама:

$$A_j=\frac{1}{g(\tau_j)}\,[(\xi_j\,y_2-\eta_j\,x_2)\,f(\tau_j)+B_j],$$

$$B_j=\xi_j\,Y_j-\eta_j\,X_j\,,\qquad j=1,\ 3.$$

Стављајући у горње једначине да је $j=1$ и 3, једноставно ћемо добити

$$x'_2 = (A_1 \xi_3 - A_3 \xi_1)\, C^{-1},$$
$$y'_2 = (A_1 \eta_3 - A_3 \eta_1)\, C^{-1},$$
$$C = \eta_1 \xi_3 - \eta_3 \xi_1 .$$

Потом можемо израчунати прву и трећу геоцентричну даљину из

$$\rho_j = \frac{1}{\xi_j}\, [f(\tau_j)\, x_2 + g(\tau_j)\, x'_2 + X_j],$$

z_j из

$$z_j = \rho_j \zeta_j - Z_j,$$

па је

$$(z'_2)_j = \frac{1}{g(\tau_j)}\, [z_j - f(\tau_j)\, z_2], \qquad j = 1,\ 3.$$

Но из ових двеју последњих једначина видимо да ће утолико боље бити задовољена једначина

$$g(\tau_3)\,(z'_2)_3 - g(\tau_1)\,(z'_2)_1 = [g(\tau_3) - g(\tau_1)]\, z'_2,$$

уколико су $(z'_2)_1$ и $(z'_2)_3$ приближнији тачној вредности z'_2. Унесемо ли овамо

$$(z'_2)_1 = (z'_2)_3 - D \qquad \text{или} \qquad (z'_2)_3 = (z'_2)_1 + D,$$

добићемо да је

$$z'_2 = (z'_2)_1 + \frac{g(\tau_3) \cdot D}{g(\tau_3) - g(\tau_1)}$$

или

$$z'_2 = (z'_2)_3 + \frac{g(\tau_1) \cdot D}{g(\tau_3) - g(\tau_1)},$$

што нам служи за израчунавање z-компоненте брзине тела у тренутку t_2.

Све остале детаље тока апроксимација не морамо посебно наводити; о њима смо већ довољно казали раније.

Преглед образаца

Константне величине

I. Косинуси праваца:

$$\xi_i = \cos\delta_i \cos\alpha_i, \quad \eta_i = \cos\delta_i \sin\alpha_i, \quad \zeta_i = \sin\delta_i,$$
$$i = 1,\ 2,\ 3.$$

Контрола: $\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 = 1$.

II. Топоцентричне координате Сунца за сва три тренутка посматрања — као у Гаус-Енкеовој методи.

III. Помоћне величине:

$$B_j = \xi_j Y_j - \eta_j X_j, \qquad C = \eta_1 \xi_3 - \eta_3 \xi_1,$$
$$j = 1,\ 3.$$

Прва айроксимација

Са усвојеним претпоставкама $\rho_2 = 2$ и $\rho_2 = 3$ a.j. паралелно се изводе следећи рачуни.

IV. Хелиоцентричне координате и даљине за t_2:

$$\mathbf{r}_2 = \rho_2 \boldsymbol{\rho}_{02} = \mathbf{R}_2,$$
$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

V. Времени интервали:

$$\tau_j = k(t_j - t_2), \qquad j = 1,\ 3, \qquad k = 0.0172021,$$
$$\tau_1 < 0, \qquad \tau_3 > 0.$$

Контрола: $\tau_3 - \tau_1 = k(t_3 - t_1) > 0.$

VI. Функције f и g:

$$a_2 = \frac{1}{2} r_2^{-3}, \qquad b_3 = \frac{1}{3} a_2,$$
$$f(\tau_j) = 1 - a_2 \tau_j^2, \qquad g(\tau_j) = \tau_j - b_3 \tau_j^3,$$
$$j = 1,\ 3.$$

VII. Компонента брзине у тренутку t_2:

$$A_j = \frac{1}{g(\tau_j)} [\xi_j y_2 - \eta_j x_2) f(\tau_j) + B_j], \ j = 1,\ 3,$$
$$x_2' = (A_1 \xi_3 - A_3 \xi_1) C^{-1}.$$

VIII. z-компоненте брзине и њихова разлика:

$$\rho_j = \frac{1}{\xi_j} [f(\tau_j) x_2 + g(\tau_j) x_2' + X_j],$$
$$z_j = \rho_j \zeta_j - Z_j,$$
$$(z_2')_j = \frac{1}{g(\tau_j)} [z_j - f(\tau_j) z_2], \qquad j = 1,\ 3,$$
$$D = (z_2')_3 - (z_2')_1.$$

Друīа аīроксимација

Помоћу разликâ D које одговарају претпостављеним средњим геоцентричним даљинама тела одреди се, поступком *regula falsi*, нова, побољшана, даљина ρ_2 и с њоме се рачуна друга апроксимација, по горњим обрасцима. При томе се сад рачунају све три компоненте брзине $\mathbf{v}_2$: тач. VII се допуњује са

$$y_2' = (A_1\,\eta_3 - A_3\,\eta_1)\,C^{-1},$$

а тач. VIII. се допуњује са

$$z_2' = (z_2')_j + \frac{g(\tau_k)\cdot D}{g(\tau_3) - g(\tau_1)}, \qquad j = 1,\ 3, \qquad k = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad j = 3 \\ 3 & \text{за} \quad j = 1 \end{cases}$$

Трећа и даље аīроксимације

Рачун се опет започиње одређивањем нове геоцентричне даљине ρ_2, на основи ранијих њених вредности и одговарајућих разлика D. Поступак се даље изводи као у другој апроксимацији, али са следећим допунама.

V. Времени интервали се поправљају за дејство планетарне аберације:

$$t_i^0 = t_i - A\,\rho_i, \qquad A = 0.00577, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

$$\tau_j^0 = k\,(t_j^0 - t_2^0), \qquad j = 1,\ 2.$$

Контрола: $\tau_3^0 - \tau_1^0 = k\,(t_3^0 - t_1^0)$.

У овом рачуну се користе ρ_1 и ρ_3 из друге апроксимације, а ρ_2 — са почетка треће апроксимације.

VI. Редови за функције f и g допуњују се и члановима вишег реда. Зато прво рачунамо

$$v_2^2 = (\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_2), \qquad s_2 = (\mathbf{r}_2\,\mathbf{v}_2),$$

са вредности $\mathbf{v}_2$ из друге апроксимације.

$$c_1 = s_2\,r_2^{-2}, \qquad c_2 = \frac{1}{4}\,(v_2^2 - r_2^{-1} - s_2^2\,r_2^{-2})\,r_2^{-2},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\,r_2^{-3}, \qquad a_3 = c_1\,a_2, \qquad a_4 = a_2\left(\frac{1}{2}\,b_3 + c_2 - c_1^2\right),$$

$$a_5 = -c_1\,(2\,c_1\,a_3 + 3\,a_4), \ \dots\ \dots\ \dots,$$

$$b_3 = \frac{1}{3}\,a_2, \qquad b_4 = \frac{1}{2}\,a_3, \qquad b_5 = \frac{1}{5}\,(3\,a_4 - a_2\,b_3), \ \dots,$$

$$f(\tau_j) = 1 - a_2\,\tau_j^{02} + a_3\,\tau_j^{03} + a_4\,\tau_j^{04} + a_5\,\tau_j^{05} + \cdots,$$

$$g(\tau_j) = \tau_j^0 - b_3\,\tau_j^{03} + b_4\,\tau_j^{04} + b_5\,\tau_j^{05} + \cdots,$$

$$j = 1,\ 3.$$

Апроксимације се даље понављају уз поправљање времених интервала и вредности функција f и g, догод се разлика D на крају апроксимације не сведе на неколико јединица шесте децимале.

Представљање посматрања

Са вредностима функција f и g из последње апроксимације представљамо сва три посматрања:

$$\rho_i \cos \alpha_i \cos \delta_i = f(\tau_i)\, x_2 + g(\tau_i) x_2' + X_i,$$

$$\rho_i \sin \alpha_i \cos \delta_i = f(\tau_i)\, y_2 + g(\tau_i) y_2' + Y_i,$$

$$\rho_i \sin \delta_i = f(\tau_i)\, z_2 + g(\tau_i) z_2' + Z_i.$$

Вредности компонената брзине $\mathbf{v}_2$ такође су из последње апроксимације. Јасно је да ће бити $f(\tau_2)=1$ и $g(\tau_2)=0$.

Извођење елемената

Са почетним условима $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_2$ из последње апроксимације изводе се елементи као у *Laplace-Leuschner*-овој методи.

Представљање посматрања

Са изведеним елементима представљају се сва посматрања — као и у ранијим методама.

18. **ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПАРАБОЛИЧКЕ ПУТАЊЕ.** Већ смо раније навели (стр. 87) да се за новопронађене комете увек прво рачуна параболичка путања. Оне се у време проналаска скоро увек посматрају на малом луку перихелског дела своје путање, а тај лук се, у просеку, најбоље апроксимира луком параболе. Параболички непоремећени орбит комете има исту ону посредну и помоћну улогу у изучавању стварна кретања ових небеских тела као кружна путања малих планета. Главни му је циљ, дакле, да послужи као основа за састављање ефемериде кометина кретања у ближој будућности. Због брза кретања и сложених физичко-хемијских процеса у самој комети привидни сјај ових тела се брзо, па и неправилно, мења. Често је и привидна близина Сунца узрок тешкоћама у посматрањима. Зато ће ефемерида њена кретања, макар и само приближна, много помоћи да се посматрања протегну на што дуже време.

С друге стране, за разлику од малих планета, лик огромне већине комета на фотографској плочи је расплинута, дифузна мрља. Онај који мери координате оваква објекта на плочи, често ће бити приморан да субјективно оцењује положај тежишта ове мрље, или њена најсјајнијег дела („језгро“ комете). Просто речено: координате комете одређују се обично са мањом тачношћу, него ли координате малих планета. И то је један разлог да се од методе за израчунавање прве приближне путање комете захтева да њена примена буде брза, чак и на рачун тачности. Овај захтев се још више постављао у време када су посматрања била искључиво визуална.

Постоји приличан број метода рачуна параболичке путање и њихових варијанти. Ми ћемо се овде зауставити на само једној. То је *Olbers*-ова *метода*, разрађена последњих година XVIII-ог века, а касније нешто усавршена и прилагођена савременим средствима за рачунање.

18.1. Основа методе. — Основа Олберсова поступка састоји се у примени приближне релације између геоцентричних даљина у тренуцима првог и трећег посматрања, облика

$$\rho_3 = M\,\rho_1, \tag{1}$$

где се M може израчунати са подацима посматрања. Тако су хелиоцентрични положаји комете

$$\mathbf{r}_j = \rho_j\,\boldsymbol{\rho}_{0j} - \mathbf{R}_j, \qquad j = 1,\ 3 \tag{2}$$

функције само једне непознате, ρ_1, па ће иста ствар бити и са тетивом путање

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1. \tag{3}$$

Међутим, дужину ове тетиве можемо израчунати и користећи динамичку *Euler-Lambert*-ову једначину

$$(r_1 + r_3 + s_2)^{3/2} - (r_1 + r_3 - s_2)^{3/2} = 6\,k\,(t_3 - t_1),$$

пошто је сад и у њој, посредством (2), само једна, иста, непозната ρ_1. Према томе, за сваку усвојену претпоставку о геоцентричној даљини комете у тренутку првог посматрањак добијамо две вредности тетиве. И то „геометријску“ вредност s_g из једначине (3), и „динамичку“ вредност s_d из *Euler-Lambert*-ове једначине. Зато ћемо ρ_1 дотле варирати, док не добијемо да је

$$s_g - s_d = 0.$$

Са таквим ρ_1 добивамо из (1) и ρ_3, па једначине (2) дају почетне услове кретања $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$. Помоћу њих изводимо путањске елементе.

Као што видимо, метода је у својој основи само приближна, и то због основне релације (1). Па ипак, она је у великом броју случајева давала врло добре резултате, захваљујући обично малим временим интервалима између посматрања. С друге стране, метода има и ту добру страну, што се претпоставка (1) може накнадно побољшати, уколико се укаже потреба.

18.2. Детаљи методе. — Изведимо прво једначину (1).

Ако у једначину 8(30), то јест — у нашем случају — у

$$n_1\,\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + n_3\,\mathbf{r}_3 = 0 \tag{4}$$

унесемо

$$\mathbf{r}_i = \rho_i \boldsymbol{\rho}_{0i} - \mathbf{R}_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

добићемо

$$n_1 \rho_1 \boldsymbol{\rho}_{01} - \rho_2 \boldsymbol{\rho}_{02} + n_3 \rho_3 \boldsymbol{\rho}_{03} = n_1 \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + n_3 \mathbf{R}_3,$$

што смо већ користили у Гаус-Енкеовој методи. После векторског множења са $\boldsymbol{\rho}_{02}$ имаћемо да је

$$n_1 \rho_1 [\boldsymbol{\rho}_{01} \boldsymbol{\rho}_{02}] - n_3 \rho_3 [\boldsymbol{\rho}_{02} \boldsymbol{\rho}_{03}] =$$

$$= n_1 [\mathbf{R}_1 \boldsymbol{\rho}_{02}] - [\mathbf{R}_2 \boldsymbol{\rho}_{02}] + n_3 [\mathbf{R}_3 \boldsymbol{\rho}_{02}],$$

чиме смо елиминисали ρ_2, које се не јавља у (1). А после скаларног множења добивеног резултата са $\mathbf{R}_2$ и увођења ознака

$$D_j = (\mathbf{R}_j [\boldsymbol{\rho}_{02} \mathbf{R}_2]), \qquad d_j = (\boldsymbol{\rho}_{0j} [\boldsymbol{\rho}_{02} \mathbf{R}_2]),$$

$$j = 1,\ 3,$$

добићемо да је

$$n_1 d_1 \rho_1 + n_3 d_3 \rho_3 = n_1 D_1 + n_3 D_3,$$

или

$$\rho_3 = -\frac{n_1 d_1}{n_3 d_3} \rho_1 + \frac{n_1 D_1}{n_3 d_3} + \frac{D_3}{d_3}. \tag{5}$$

Међутим, у случају кретања Земље једначина (4) прелази у

$$N_1 \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + N_3 \mathbf{R}_3 = 0,$$

где смо са N_i означили одговарајуће односе површина троуглова. Одавде је

$$\mathbf{R}_3 = \frac{1}{N_3} \mathbf{R}_2 - \frac{N_1}{N_3} \mathbf{R}_1,$$

па је

$$D_3 = (\mathbf{R}_3 [\boldsymbol{\rho}_{02} \mathbf{R}_2]) = \frac{1}{N_3} (\mathbf{R}_2 [\boldsymbol{\rho}_{02} \mathbf{R}_2]) - \frac{N_1}{N_3} (\mathbf{R}_1 [\boldsymbol{\rho}_{02} \mathbf{R}_2]) =$$

$$= -\frac{N_1}{N_3} (\mathbf{R}_1 [\boldsymbol{\rho}_{02} \mathbf{R}_2]) = -\frac{N_1}{N_3} D_1.$$

Зато једначина (5), после увођења ознака

$$-\frac{n_1 d_1}{n_3 d_3} = M, \qquad \frac{D_1}{d_3} \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3} \right) = m, \tag{6}$$

постаје

$$\rho_3 = M \rho_1 + m. \tag{7}$$

Ова релација (7) је тачна и не зависи од врсте путање. Раније смо видели да је

$$n_j \approx \tau_j : \tau_2, \qquad N_j \approx \tau_j : \tau_2, \qquad j = 1,\ 3,$$

са временим интервалима

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2), \qquad \tau_2 = k(t_3 - t_1), \qquad \tau_3 = k(t_2 - t_1).$$

Ако, дакле, смемо усвојити да су односи површина троуглова једнаки односима времених интервала — с обзиром на блиске тренутке посматрања t_i, онда ће бити $m=0$, па (6) и (7) дају тражену приближну релацију

$$\rho_3 = M\rho_1, \quad \text{са} \quad M = -\frac{\tau_1}{\tau_3}\cdot\frac{d_1}{d_3}.$$

Ова приближна веза између прве и треће геоцентричне даљине тела није нашла примену у методама за израчунавање елиптичке путање. Тамо времени интервали нису толико мали да би се просто могли заменити односи површина троуглова са односима тих времених размака. То смо већ видели у Гаус-Енкеовој методи: такав однос времених интервала био је исувише груба апроксимација за n_1 и n_3, чак и у првом приближном рачуну. А овде, у рачуну параболичке путање, тренуци посматрања су обично толико блиски (неколико дана), да се таква апроксимација сме прихватити.

Преостаје нам још само да изведемо елементарни образац за израчунавање „геометријске" тетиве, која спаја положаје тела у тренуцима првог и трећег посматрања.

Из (3), (2) и (1) изводимо

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = (M\boldsymbol{\rho}_{03} - \boldsymbol{\rho}_{01})\rho_1 - (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1) = \rho_1\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{R},$$

са

$$\boldsymbol{\rho}_0 = M\boldsymbol{\rho}_{03} - \boldsymbol{\rho}_{01}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1,$$

па ће бити

$$s_2^2 = ((\boldsymbol{\rho}_0\rho_1 - \mathbf{R})(\boldsymbol{\rho}_0\rho_1 - \mathbf{R})) = A + B\rho_1 + C\rho_1^2,$$

где је

$$A = R^2, \quad B = -2(\boldsymbol{\rho}_0\mathbf{R}), \quad C = \rho_0^2.$$

За израчунавање „динамичке" тетиве користимо неки од поступака наведених на стр. 68—70.

Навели смо већ на почетку да се основна претпоставка Олберсове методе, једначина (1), може побољшати. Један начин је да се узму у рачун и други чланови у редовима за n_1, n_3, N_1 и N_3, они који зависе од $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{R}_2$. Хелиоцентричну даљину у тренутку другог посматрања можемо израчунати кад познајемо елементе кретања, дакле на крају рачуна са претпоставком (1). Тако бисмо не само побољшали вредност за M, него узели у обзир и $m \neq 0$. Тако има смисла радити кад имамо посматрања раздвојена већим временим интервалом и када се покаже да је ексцентричност путање комете заиста блиска јединици. Но у таквим случајевима ће често бити боље да се рачуна елиптичка или хиперболичка путања.

Преглед образаца

Константне величине

I. Косинуси праваца:

$$\xi_i = \cos\delta_i\cos\alpha_i, \quad \eta_i = \cos\delta_i\sin\alpha_i, \quad \zeta_i = \sin\delta_i,$$

за сва три посматрања ($i=1, 2, 3$). Контрола:

$$\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2=1.$$

II. Координате Сунца: као у претходним методама. Уколико рачун изводимо са пет децимала, можемо рачунати непосредно са геоцентричним координатама (дакле, без прелаза на топоцентар, као при израчунавању кружне путање).

III. Времени интервали:

$$\tau_1=k(t_3-t_2),\quad \tau_2=k(t_3-t_1),\quad \tau_3=k(t_2-t_1),$$

$$k=0.0172021.\quad \text{Контрола: } \tau_1+\tau_3=\tau_2.$$

Ове времене интервале не морамо током апроксимација поправљати за дејство планетарне аберације — као приликом рачунања кружне путање.

IV. Помоћне величине:

$$d_j=(\rho_{0j}[\rho_{02}\mathbf{R}_2]),\quad j=1, 3,$$

$$M=-\frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{d_1}{d_3},$$

$$\rho_0=M\rho_{03}-\rho_{01},\quad \mathbf{R}=\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_1,$$

$$A=R^2,\quad B=-2(\rho_0\mathbf{R}),\quad C=\rho_0^2,$$

$$L_j=-2(\rho_{0j}\mathbf{R}_j),\quad j=1, 3.$$

Рачун айроксимација

V. Са почетним претпоставкама $\rho_1=1$ и $\rho_1=2$ а.ј. паралелно рачунамо „геометријску" и „динамичку" тетиву:

$$s_g^2=A+B\rho_1+C\rho_1^2,$$

$$r_1^2=R_1^2+L_1\rho_1+\rho_1^2,\quad r_3^2=R_3^2+ML_3\rho_1+M^2\rho_1^2,$$

$$\eta=2\tau_2(r_1+r_3)^{-3/2},\quad s_d=\eta\mu(r_1+r_3),$$

μ из таблица са аргументом η, или из реда са стр. 70.

Са добивеном разликом s_g-s_d налазимо поправљену вредност за ρ_1, па рачун понављамо догод разлику не сведемо на око $1-2\times10^{-5}$.

Извођење елеменаша

VI. Почетни услови: са ρ_1 из последње апроксимације рачунамо

$$\rho_3=M\rho_1,\quad \mathbf{r}_j=\rho_j\rho_{0j}-\mathbf{R}_j,\quad j=1, 3.$$

Са овим почетним условима изводимо елементе по обрасцима са стр. 56. Пре рачунања тренутка T пролаза кроз перихел, тренутке посматрања поправљамо за дејство планетарне аберације:

$$t_j^0 = t_j - A\,\rho_j, \quad A = 0.00577, \quad j = 1,\ 3.$$

Представљање посматрања

Са изведеним елементима представљамо сва посматрања по обрасцима рачуна ефемерида. Претходно поправљамо тренутке посматрања за дејство планетарне аберације, како је наведено код ранијих метода.

ГЛАВА ЧЕТВРТА

РАЧУН ПОПРАВКИ ПУТАЊА

У Уводу смо већ напоменули да се елементи Кеплерове путање небеског тела, израчунати на основи посматрања, не могу непосредно користити у даљем раду на конструисању његове стварне путање — дакле, у рачуну поремећаја — догод се на неки начин не поправе. Тамо смо укратко и навели разлоге за потребу овог поправљања. Сада ћемо ово питање детаљније обрадити, као следећи корак у изучавању стварног кретања малих планета и комета.

19. ПОПРАВЉАЊЕ КЕПЛЕРОВИХ ПУТАЊА.

Рачун поправки путања има два задатка. Први је — поправљање елемената непоремећене путање небеског тела, или величина помоћу којих ове елементе изводимо, и то „прве" путање, дакле путање новопронађена објекта. Други је — поправљање посебне врсте путање, која служи у рачуну поремећаја. На тај други задатак рачуна поправки вратићемо се касније; овде ћемо се позабавити засад само поправљањем првих путања. Начелних разлика између та два задатка, у ствари, нема.

Претпоставимо да смо неком од раније описаних метода рачуна орбита израчунали непоремећену путању мале планете или комете. Добро представљање оног малог броја посматрања, помоћу којих смо извели елементе кретања, уверило нас је да у рачуну орбита нисмо начинили никакву грешку. Замислимо да са тим системом елемената представљамо све каснија и каснија посматрања тела. Као по неком правилу, одступања „$O-C$", то јест разлике између посматраних и рачунатих ректасцензија и деклинација тела, постајаће по апсолутној вредности све већа и већа, што год идемо даље од времена интервала који обухвата посматрања на основи којих су елементи изведени. Шта више, често ће се догодити да те разлике нису занемарљиво мале чак ни за посматрања у поменутом временом размаку, која нису искоришћена у рачуну орбита.

Како имамо посла са две координате, ректасцензијом и деклинацијом, а разлике могу имати и позитиван и негативан предзнак, дефининишимо, прво, неку величину која ће нам једнозначно говорити о квалитету представљања посматрана положаја. Најприродније је да то буде *сферна даљина*, s, између посматрана и рачуната положаја. Нека су координате посматрана положаја α, δ, а рачуната — (α), (δ). Поменута сферна даљина s је лук великог круга, на привидној небеској сфери, који спаја ова два положаја. Јасно је да ће представљање бити тим боље, што је овај лук мањи, без обзира на његову оријентацију у односу на посматрани положај. Изразимо дужину тога лука помоћу посматраних и рачунатих сферних координата.

Пре свега, претпоставићемо да разлике између посматраних и рачунатих положаја нису велике; уколико то јесу — најпре ће бити случај да представљамо посматрање неког другог тела! Замислимо да од рачуната положаја повучемо лук меридијана до паралела посматрана положаја. Дужина тог лука меридијана је, очигледно, $\delta-(\delta)$. Дужина лука паралела, од поменуте тачке пресека с меридијаном па до посматрана положаја, је $[\alpha-(\alpha)]\cos\delta$. Ова два лука, меридијана и паралела, заједно са сферном даљином положаја s, чине троугао који можемо да сматрамо за раван, због близине посматрана и рачуната положаја. Он је правоугли, са хипотенузом s. Зато је

$$s^2=[\alpha-(\alpha)]^2\cos^2\delta+[\delta-(\delta)]^2. \tag{1}$$

Јасно је да је овде свеједно да ли ћемо употребити косинус посматране или рачунате деклинације тела.

Размотримо сада разлоге зашто приликом представљања посматраних положаја, помоћу система „првих“ елемената, добивамо $s\neq 0$.

На првом месту ћемо приметити да су посматрани положаји у ствари положаји тела на апроксимативној, непоремећеној, путањи. Међутим, ово дејство поремећаја је обично мало, бар код већине малих планета, за умерене времене интервале, па чини само мали део износа разлика $O-C$ у координатама тела.

С друге стране, већ смо навели да апсолутно тачних посматрања нема, нити може бити. Према томе, све случајне „грешке“ у посматрањима преносе се и у рачун орбита, дакле и на путањске елементе — и у рачунате координате. Но, захваљујући данашњој техници посматрања, и овај извор нетачности је обично мали; нешто већи може бити само код комета.

Највећи износ разлика $O-C$ потиче из чињенице да смо Кеплерову путању објекта израчунали, рачуном орбита, на основи њена врло малог лука. Ево једног примера: између првог и трећег посматрања једне мале планете протекло је округло 33 дана. Израчуната је њена елиптичка путања и добивено средње сидеричко дневно кретање $n=631''\!.8$ $(a=3.16$ a.j.). Периода њена обиласка око Сунца је, стога, $P=2\pi:n=1296000'':631''\!.8=2051$ дан. Током посматрања је мала планета превалила, дакле, једва шездесети део своје путање. И на основи тог малог дела, ми смо конструисали целу елипсу. То је главни разлог за постојање разлика између посматраних и рачунатих положаја.

Начелно говорећи, ми чинимо „грешке“ и током прилично дугог рачуна орбита, употребљавајући приближне обрасце и заокругљавајући бројеве на извесан број децимала. Но ефект овог узрока на разлике $O-C$ је скоро увек занемарљиво мали, бар при рачуну елиптичке путање.

Имајући све ово у виду, можемо закључити да би тачност одређивања координата небеског тела и мерења времена морала бити знатно већа но што је данас, да би се на основи малог лука путање могла конструисати она цела. Реално је данас, дакле, да очекујемо разлике $O-C$ у координатама објекта, па постављамо задатак: како да искористимо сва расположива посматрања тела ради конструкције најбоље могуће Кеплерове путање?

Ово „најбоље могуће“ је свакако релативан појам. С друге стране, разлике $O-C$, односно раније дефинисани лук s, једино је мерило квалитета израчунате непоремећене путање, апстрахујући дејство поремећаја — које реално постоји. Зато ћемо „најбољу могућу“ Кеплерову путању дефинисати *у смислу методе најмањих квадрата:* најбоља путања биће она са чијим елементима добивамо такве рачунате положаје, да је збир квадрата одступања између посматраних и рачунатих положаја минималан. Ако, према томе, израчунамо израз

$$\sum_{i=1}^{n}\{[\alpha_i-(\alpha_i)]^2+[\delta_i-(\delta_i)]^2\},$$

он ће за најбољу путању имати минималну вредност. Другим речима, елементе кретања треба варирати дотле, док не буде испуњен постављени захтев. У том циљу користимо *сва* расположива посматрања небеског тела, дајући им одговарајуће „тежине“, уколико нису једнаке тачности. Уобичајено је, међутим да се не користе непосредно разлике између посматраних и рачунатих координата, као у горњој једначини, него величине

$$[\alpha_i-(\alpha_i)]\cos\delta_i \quad \text{и} \quad \delta_i-(\delta_i),$$

које се често називају „разлике у координатама“. Видели смо њихово геометријско тумачење — зато су тако и уведене — па ћемо у даљем раду постављати захтев да величина

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^2, \tag{2}$$

са s из (1), има минималну вредност.

Пре но што пређемо на извођене таквих елемената за које ће (2) имати минималну вредност, поменимо један претходни поступак рачуна поправки путања, који се раније много користио, а који ни данас није сасвим ван употребе.

Замислимо да се ради о поправци путање неке нарочито интересантне мале планете или било које периодичне комете. Тада ће, у времену могућих посматрања, бити прикупљен већи број посматраних положаја овог тела. И то са разних опсерваторија, разним инструментима и приборима, и разним посматрачима. Тачност ових посматрања биће, стога, различита. Зато се — а и да рачун поправки елемената не постане прекомерно обиман — приступа сажимању, кондензовању, временски блиских посматрања у тзв. *нормална места*. Овакав фиктивни положај тела формира се на следећи начин.

Претпоставимо да у релативно кратком временом интервалу $t_n - t_1$ имамо на расположењу n посматрања тела:

$$t_1(\alpha_1, \delta_1), \quad t_2(\alpha_2, \delta_2), \; \ldots \ldots \ldots, \quad t_n(\alpha_n, \delta_n).$$

За сваки од ових тренутака израчунаћемо — помоћу елемената које желимо да поправимо — рачунате положаје тела:

$$t_1((\alpha_1), (\delta_1)), \quad t_2((\alpha_2), (\delta_2)), \; \ldots, \; t_n((\alpha_n), (\delta_n)),$$

па затим формирати разлике у смислу $O - C$:

$$t_1 \cdots \begin{matrix} \alpha_1 - (\alpha_1) \\ \delta_1 - (\delta_1) \end{matrix}, \; \ldots \ldots \ldots, \; t_n \cdots \begin{matrix} \alpha_n - (\alpha_n) \\ \delta_n - (\delta_n) \end{matrix}$$

Потом образујемо аритметичке средине ових разлика:

$$\Delta \alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i - (\alpha_i)], \quad \Delta \delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\delta_i - (\delta_i)],$$

као и аритметичку средину тренутака посматрања:

$$t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Пошто одредимо 0^h ET (или UT) одговарајућег датума као тренутак t_N који је најближи тренутку t, израчунајмо, опет са непоправљеним елементима кретања тела, положај

$$t_N \cdots \alpha_N, \delta_N.$$

Онда су, по дефиницији,

$$\alpha = \alpha_N + \Delta \alpha, \quad \delta = \delta_N + \Delta \delta,$$

координате нормалног места за тренутак t_N. — Напоменимо да онакав избор тренутка t_N није обавезан; може се рачунати и са t, како је управо нађено, само ће у оном првом случају рачун бити нешто олакшан. — Овако израчунато нормално место третирамо као „посматрани" положај тела у тренутку t_N (односно t). Разлике између ова посматрана и рачуната положаја су, очигледно, $\Delta \alpha$ и $\Delta \delta$. Није тешко закључити да овакав начин образовања нормалног места има смисла примењивати када се разлике између посматраних и рачунатих координата мењају пропорционално (или бар приближно пропорционално) времену.

Да још једном формулишемо наш непосредни задатак поправке путање Са датим системом елемената, који желимо да поправимо, израчунавамо положаје тела за тренутке посматрања и формирамо разлике у координатама. Затим тражимо такав нов систем елемената, да се збир квадрата сферних одступања s из (1) сведе на минимум.

20. **ВАРИЈАЦИЈА ПУТАЊСКИХ ЕЛЕМЕНАТА.** Постоји неколико начина да се реши овако формулисани задатак рачуна поправки путања. Два основна су у најчешћој употреби: варијација геоцентричних даљина и варијација путањских елемената. Ми ћемо овде обрадити само други поступак, као аналитички непосреднији, а рачунски нешто краћи и директнији.

Основа ове методе варијације елемената може се приказати на следећи начин.

Претпостављамо да је постојање резидуума

$$\alpha-(\alpha)=\Delta\alpha\neq 0, \quad \delta-(\delta)=\Delta\delta\neq 0$$

код сваког посматрања резултат нетачности у елементима кретања E_1, $E_2, \ldots, E_6$, помоћу којих смо рачунали положаје (α), (δ). Сферне координате α и δ су функције елемената, па можемо повезати промене ових величина

$$\Delta\alpha=f(\Delta E_1,\ \Delta E_2,\ \ldots,\ \Delta E_6),$$
$$\Delta\delta=g(\Delta E_1,\ \Delta E_2,\ \ldots,\ \Delta E_6).$$

Под извесним претпоставкама ове релације ће бити линеарне:

$$\begin{aligned} a_1\,\Delta E_1+a_2\,\Delta E_2+\cdots+a_6\,\Delta E_6&=\Delta\alpha\cdot\cos\delta,\\ b_1\,\Delta E_1+b_2\,\Delta E_2+\cdots+b_6\,\Delta E_6&=\Delta\delta, \end{aligned}\tag{1}$$

са множитељима a_i и b_i $(i=1, 2, \ldots, 6)$ који се могу израчунати. Образује ли се за n посматрања $2n$ једначина (1), из њих се методом најмањих квадрата може израчунати шест непознатих поправки ΔE_i елемената, које збир квадрата резидуума — десних страна у (1) — своде на минимум. Поправљене вредности елемената биће онда $E_i+\Delta E_i$.

За елементе E_i усвојићемо

$$\Omega,\ \omega,\ i,\ n,\ \varphi,\ M_0.$$

Ограничавамо се, дакле, на класичне елементе кретања. Извођење одговарајућих једначина (1) разбићемо на неколико делова, ради боље прегледности.

Прво ћемо извести везу између „промена" сферних координата α и δ и „промена" правоуглих координата (екваторских) x, y и z. Но стално ћемо претпостављати да су све ове промене мале. Стога, диференцирајући скаларне једначине које произилазе из

$$\mathbf{r}=\rho\,\boldsymbol{\rho}_0-\mathbf{R},$$

добивамо да је

$$\begin{aligned} \Delta x&=\cos\delta\cos\alpha\cdot\Delta\rho-\rho\sin\delta\cos\alpha\cdot\Delta\delta-\rho\cos\delta\sin\alpha\cdot\Delta\alpha,\\ \Delta y&=\cos\delta\sin\alpha\cdot\Delta\rho-\rho\sin\delta\sin\alpha\cdot\Delta\delta+\rho\cos\delta\cos\alpha\cdot\Delta\alpha,\\ \Delta z&=\sin\delta\cdot\Delta\rho+\rho\cos\delta\cdot\Delta\delta. \end{aligned}\tag{2}$$

Координате Сунца, наравно, не зависе од промена координата тела.

Ове три једначине можемо свести на две, из којих ће бити елиминисана промена геоцентричне даљине, $\Delta\rho$. Затим ћемо их решити по $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$. Но, истовремено ћемо оба ова посла обавити ако прву једначину у (2) помножимо са $-\sin\alpha$, а другу са $\cos\alpha$, па их саберемо. Резултат ће бити

$$\rho\cos\delta\cdot\Delta\alpha=-\sin\alpha\cdot\Delta x+\cos\alpha\cdot\Delta y. \tag{3}$$

На сличан начин множењем прве једначине у (2) са $-\sin\delta\,\cos\alpha$, друге са $-\sin\delta\,\sin\alpha$, а треће са $\cos\delta$, њихов збир ће дати

$$\rho\cdot\Delta\delta=-\sin\delta\cos\alpha\cdot\Delta x-\sin\delta\sin\alpha\cdot\Delta y+\cos\delta\cdot\Delta z. \tag{4}$$

Тако смо једначинама (3) и (4) завршили прву етапу нашег посла. Следећа је: успостављање веза између промена правоуглих координата и усвојених елемената путање. Када то урадимо, имаћемо и зависност између промена елемената и сферних координата — управо тражене једначине (1).

Међутим, пре него што пређемо на тај посао, приметићемо да се у једначинама (3) и (4) јављају промене екваторских координата, док су прва три усвојена елемента кретања, које желимо да поправљамо, дефинисана у односу на еклиптички координатни систем. Начелно нам је свеједно у ком систему ћемо радити; ми ћемо се овде определити за еклиптички. Зато ћемо одмах промене екваторских координата изразити помоћу промена еклиптичких. Веза између координата у ова два система дата нам је већ једначинама 4(1), друга група. Зато прво из њих изводимо да је

$$\begin{aligned}\Delta x&=\Delta x_e,\\ \Delta y&=\Delta y_e\cos\varepsilon-\Delta z_e\sin\varepsilon,\\ \Delta z&=\Delta y_e\sin\varepsilon+\Delta z_e\cos\varepsilon,\end{aligned}$$

па ове једначине уносимо у (3) и (4) и сређујемо их у

$$\begin{aligned}\rho\cos\delta\cdot\Delta\alpha&=-\sin\alpha\Delta x_e+\cos\alpha\cos\varepsilon\,\Delta y_e-\cos\alpha\sin\varepsilon\Delta z_e,\\ \delta\cdot\Delta\delta&=-\sin\delta\cos\alpha\,\Delta x_e+\\ &+(\cos\delta\sin\varepsilon-\sin\delta\cos\varepsilon\sin\alpha)\,\Delta y_e+\\ &+(\cos\delta\cos\varepsilon+\sin\delta\sin\varepsilon\sin\alpha)\,\Delta z_e.\end{aligned} \tag{6}$$

Тако сад можемо даљи рад наставити искључиво у еклиптичком координатном систему.

Промена хелиоцентричног положаја тела, $\Delta\mathbf{r}=\{\Delta x_e,\ \Delta y_e,\ \Delta z_e\}$, последица је промене елемената путање, то јест функција је величина $\Delta\omega$, $\Delta\Omega$, $\ldots\ldots$, ΔM_0. Ту зависност ћемо приказати једначином

$$\Delta\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\omega}\Delta\omega+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\Omega}\Delta\Omega+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial i}\Delta i+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial n}\Delta n+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\Delta\varphi+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial M_0}\Delta M_0, \tag{7}$$

претпостављајући, дакле, да су све промене елемената мале, што ће рећи да се могу занемарити њихови квадрати и виши степени. Заменимо ли у (6) промену вектора положаја са (7), добићемо тражену зависност између $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ с једне стране и одговарајуће промене елемената с друге. Та зависност ће бити изражена линеарним једначинама по променама како ректасцензије и деклинације, тако и елемената кретања. За ефективну примену тих једначина потребно је још израчунати парцијалне изводе вектора положаја по усвојеним елементима, дакле коефицијенте уз непознате поправке елемената у (7).

У ту сврху ћемо искористити, као најпогоднији, израз

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{P} + \eta \mathbf{Q}, \tag{8}$$

представљајући правоугле координате у равни путање, ξ и η, као функције ексцентричне аномалије:

$$\xi = a(\cos E - \sin\varphi), \qquad \eta = a\cos\varphi \sin E, \tag{9}$$

$$e = \sin\varphi.$$

У (8) су елементи ω, Ω и i садржани само у $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, а елементи n, φ и M_0 — само у ξ и η. Дакле:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} = \xi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \omega} + \eta \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \omega}, && \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} = \frac{\partial \xi}{\partial n}\mathbf{P} + \frac{\partial \eta}{\partial n}\mathbf{Q},\\
&\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Omega} = \xi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \Omega} + \eta \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \Omega}, && \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\mathbf{P} + \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}\mathbf{Q},\\
&\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial i} = \xi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial i} + \eta \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial i}, && \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial M_0} = \frac{\partial \xi}{\partial M_0}\mathbf{P} + \frac{\partial \eta}{\partial M_0}\mathbf{Q}.
\end{aligned} \tag{10}$$

На основи израза, у еклиптичком координатном систему,

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i,\\ \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i,\\ \sin\omega\sin i, \end{cases}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{cases} -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i,\\ -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i,\\ \cos\omega\sin i, \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \sin\Omega\sin i,\\ -\cos\Omega\sin i,\\ \cos i, \end{cases}$$

рачунамо

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \omega}=\left\{\begin{array}{l} -\sin\omega\cos\Omega-\cos\omega\sin\Omega\cos i, \\ -\sin\omega\sin\Omega+\cos\omega\cos\Omega\cos i \\ \cos\omega\sin i \end{array}\right\}=\mathbf{Q},$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \omega}=\left\{\begin{array}{l} -\cos\omega\cos\Omega+\sin\omega\sin\Omega\cos i \\ -\cos\omega\sin\Omega-\sin\omega\cos\Omega\cos i \\ -\sin\omega\sin i \end{array}\right\}=-\mathbf{P},$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \Omega}=\left\{\begin{array}{l} -\cos\omega\sin\Omega+\sin\omega\cos\Omega\cos i \\ \cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega\cos i \\ 0 \end{array}\right\}=(-P_{ey},\ P_{ex},\ 0),$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \Omega}=\left\{\begin{array}{l} \sin\omega\sin\Omega-\cos\omega\cos\Omega\cos i \\ -\sin\omega\cos\Omega-\cos\omega\sin\Omega\cos i \\ 0 \end{array}\right\}=(-Q_{ey},\ Q_{ex},\ 0),$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial i}=\left\{\begin{array}{l} \sin\omega\sin\Omega\sin i \\ -\sin\omega\cos\Omega\sin i \\ \sin\omega\cos i \end{array}\right\}=\sin\omega\,\mathbf{R},$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial i}=\left\{\begin{array}{l} \cos\omega\sin\Omega\sin i \\ -\cos\omega\cos\Omega\sin i \\ \cos\omega\cos i \end{array}\right\}=\cos\omega\,\mathbf{R}.$$

Стога можемо писати да је

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega}=\xi\,\mathbf{Q}-\eta\,\mathbf{P},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Omega}=\xi\,[\mathbf{N}\,\mathbf{P}]+\eta\,[\mathbf{N}\,\mathbf{Q}]=[\mathbf{N}\,\mathbf{r}]=\{-y_e,\ x_e,\ 0\},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial i}=(\xi\sin\omega+\eta\cos\omega)\,\mathbf{R},$$

где је $\mathbf{N}=\{0,\ 0,\ 1\}$ јединични вектор нормале на еклиптичку раван (оријентисан ка северном полу еклиптике).

Да бисмо израчунали преостале парцијалне изводе из (10) — правоуглих координата ξ и η по елементима n, φ и M_0 — позваћемо се на једначине (9), но имајући у виду да је ексцентрична аномалија функција од n, φ и M_0, имплицитно одређена Кеплеровом једначином

$$E - \sin\varphi \sin E = M_0 + n(t - t_0).$$

Стога ћемо одавде одмах наћи да је

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \frac{a}{r}(t - t_0), \qquad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{b}{r}\sin E, \qquad \frac{\partial E}{\partial M_0} = \frac{a}{r}, \tag{11}$$

где смо користили и једначине за радијусвектор и малу полуосу путање:

$$r = a(1 - \sin\varphi \cos E), \qquad b = a\cos\varphi. \tag{12}$$

Још ћемо приметити да из $n = ka^{-3/2}$ изводимо да је

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial n} = -\frac{2}{3}\frac{a}{n}\frac{\partial u}{\partial a},$$

за произвољну функцију $u = u(a)$.

Тако сад можемо, полазећи од (9) и користећи (11) и (12), рачунати:

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = -\frac{2}{3}\frac{a}{n}\frac{\partial \xi}{\partial a} - a\sin E\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{2}{3}\frac{a}{n}(\cos E - \sin\varphi) -$$

$$- a\sin E\frac{a}{r}(t - t_0) = -\frac{2}{3}\frac{\xi}{n} - \frac{a^2}{r}(t - t_0)\sin E;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = -\frac{2}{3}\frac{a}{n}\frac{\partial \eta}{\partial a} + a\cos\varphi\cos E\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{2}{3}\frac{a}{n}\cos\varphi\sin E +$$

$$+ a\cos\varphi\cos E\frac{a}{r}(t - t_0) = -\frac{2}{3}\frac{\eta}{n} + \frac{ab}{r}(t - t_0)\cos E.$$

На сличан начин ћемо наћи, без икаквих тешкоћа, да је и

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = -b\left(1 + \frac{a}{r}\sin^2 E\right), \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = a\sin E\left(\frac{b}{r}\cos\varphi\cos E - \sin\varphi\right),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial M_0} = -\frac{a^2}{r}\sin E, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial M_0} = \frac{ab}{r}\cos E.$$

На тај начин смо добили изразе за ефективно израчунавање свих парцијалних извода који се јављају на десним странама једначина (10). Тако добивене вредности левих страна (10) уносимо у (7), па промене координата уводимо у две једначине (6), где смо претходно израчунали коефицијенте уз промене координата, као и леве стране. Таквим поступком нас свако посматрање доводи до две једначине облика (1). У њима је шест непознатих: поправке шест усвојених елемената кретања, ΔE_i. Када формирамо свих $2n$ таквих једначина, за n посматрања, методом најмањих квадрата одређујемо оне вредности поправки елемената, које збир квадрата резидуума — разлика између посматраних и рачунатих сферних координата — своде на минимум. Те поправке додајемо алгебарски полазним вредностима (непоправљених) елемената.

Већ смо раније напоменули да у случају већих разлика *O—C* приступамо сукцесивним апроксимацијама. Другим речима, једном поправљене елементе поново усвајамо за приближне, помоћу њих представљамо све посматране положаје, поново формирамо једначине (1), налазимо нове поправке, итд.

Нема никаквих тешкоћа да саставимо изразе помоћу којих бисмо могли приступити поправци елемената параболичке путање. За такав рачун би нам били потребни једино још парцијални изводи правоуглих координата по елементима q и T; одбацили бисмо, наравно, чланове који зависе од парцијалних извода по n, φ и M_0. Све остало остаје непромењено. Међутим, уколико располажемо са више посматрања комете, у дужем временом интервалу, обично ће бити боље да покушамо да израчунамо њену елиптичку или хиперболичку путању, него ли да поправљамо прву параболичку. Но, све ће то зависити од стварног стања ствари.

Питање поправљања кружне путање постављало би се само у случају када бисмо у кратком временом интервалу располагали са више посматрања мале планете. И за такве случајеве не би било ни мало тешко образовати изразе за поправку путање, одговарајуће раније изложеним за кретање по елипси. Па ипак, и ту ће се поставити питање целисходности таква рада. Он најчешће — да не кажемо увек — неће долазити у обзир. Ако је времени интервал између првог и последњег посматрања мали, кружна путања ће добро представљати и сва „средња“, временски врло блиска посматрања.

21. **ПОПРАВКА ПОЧЕТНИХ УСЛОВА КРЕТАЊА.** У неким случајевима ће бити згодније да се не поправљају директно елементи кретања, него почетни услови, па са њима изведу поправљени елементи. Рецимо да је у питању дужи времени интервал, са већим бројем посматрања. Тада се рачунати положаји могу изводити нумеричким интеграљењем диференцијалне једначине кретања, а тај поступак користити и за израчунавање свих помоћних величина овог рачуна.

Приказаћемо *Sitarski*-ев поступак поправке почетних услова кретања $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$, који се врло лако може искористити и за налажење поправки почетних услова $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}(t_3)$. Та метода не зависи од врсте Кеплерове путање.

Нека смо рачуном орбита извели елементе кретања, тј. константе интеграљења диференцијалне једначине

$$\mathbf{r}'' = -\mu r^{-3}\mathbf{r}. \tag{1}$$

Ти елементи су оптерећени већим или мањим „грешкама“, како смо раније видели. Да су они тачни, тачне вредности за $\mathbf{r}(t)$ следовале би из

$$\mathbf{r}_v'' = -\mu\, r_v^{-3}\, \mathbf{r}_v, \tag{2}$$

за разлику од (1). Последица нетачних елемената је да у сваком тренутку рачунатим векторима положаја тела $\mathbf{r}$ треба додати неку поправку $\Delta\,\mathbf{r}$, да би се добили тачни $\mathbf{r}_v$:

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r} + \Delta\,\mathbf{r}. \tag{3}$$

Ова поправка $\Delta\,\mathbf{r}$ је функција времена, па ћемо прво извести њену диференцијалну једначину, а затим је интегралити.

Диференцирамо ли двапут једначину (3), па искористимо (1) и (2), добићемо

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\Delta\,\mathbf{r} = -\mu\,(r_v^{-3}\,\mathbf{r}_v - r^{-3}\,\mathbf{r}). \tag{4}$$

Претпоставићемо да је $\Delta\,\mathbf{r}$ мала величина; ако стварно није, цео поступак ћемо изводити, као и раније, сукцесивним апроксимацијама. Са том претпоставком квадрирање једначине (3) доводи до

$$r_v^2 = r^2 + 2\,(\mathbf{r}\,\Delta\,\mathbf{r}),$$

дакле

$$r_v = r\,[1 + 2\,r^{-2}\,(\mathbf{r}\,\Delta\,\mathbf{r})]^{1/2},$$

одакле је

$$r_v^{-3} = r^{-3}\,[1 + 2\,r^{-2}\,(\mathbf{r}\,\Delta\,\mathbf{r})]^{-3/2}.$$

Други члан у средњој загради је, по нашој претпоставци, мали. Стога ћемо ту заграду развити у биномни ред и, из истог разлога, задовољити се са

$$r_v^{-3} = r^{-3}\,[1 - 3\,r^{-2}\,(\mathbf{r}\,\Delta\,\mathbf{r})].$$

Када ово и (3) унесемо у (4), добивамо — занемарујући према раније реченом члан $(\mathbf{r}\,\Delta\,\mathbf{r})\,\Delta\,\mathbf{r}$ — тражену диференцијалну једначину

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\Delta\,\mathbf{r} = -\mu\,r^{-3}\,\Delta\,\mathbf{r} + 3\,\mu\,r^{-5}\,(\mathbf{r}\,\Delta\,\mathbf{r})\,\mathbf{r}. \tag{5}$$

Њеним интеграљењем добивамо поправку $\Delta\,\mathbf{r}$ као функцију времена.

Да бисмо овај посао спровели, потражићемо интеграл у облику

$$\Delta\,\mathbf{r} = a\,\mathbf{r} + b\,\mathbf{v} + c\,[\mathbf{r}\,\mathbf{v}], \tag{6}$$

на који се може свести свака векторска функција од $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. Тако нам се задатак своди на налажење функција времена a, b и c. И за њих ћемо прво формирати диференцијалне једначине, па њихове интеграле уврстити у (6), чиме ће задатак бити решен.

Из (6) следује

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\Delta\,\mathbf{r} = (a'' - \mu\, r^{-3}\, a - 2\,\mu\, r^{-3}\, b' + 3\,\mu\, r^{-4}\, r'\, b)\,\mathbf{r} +$$
$$+ (2\,a' + b'' - \mu\, r^{-3}\, b)\,\mathbf{v} + c''\,\mathbf{C},$$

као и

$$(\mathbf{r}\,\Delta\,\mathbf{r}) = ar^2 + b\,(\mathbf{r}\,\mathbf{v}) = ar^2 + brr',$$

што са (6) своди диференцијалну једначину (5) на

$$\varphi\,\mathbf{r} + \chi\,\mathbf{v} + \psi\,\mathbf{C} = 0.$$

Но како су вектори **r**, **v** и **C** линеарно независни, то мора бити

$$\varphi = \chi = \psi = 0,$$

па на тај начин долазимо до система диференцијалних једначина за функције a, b и c:

$$\begin{aligned} a'' - 3\,\mu\, r^{-3}\, a - 2\,\mu\, r^{-3}\, b' &= 0, \\ 2\,a' + b'' &= 0, \\ c'' + \mu\, r^{-3}\, c &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

одакле их и одређујемо.

Одмах ћемо приметити да из друге једначине (7) произилази

$$\begin{aligned} b' &= -2\,a + K_3, \\ b &= -2\int a\,\mathrm{d}\,t + K_3\,(t - t_0) + K_4, \end{aligned} \tag{8}$$

са константама интеграљења K_3 и K_4. Зато прва једначина (7) постаје

$$a'' + \mu\, r^{-3}\, a = 2\,K_3\,\mu\, r^{-3}. \tag{9}$$

Општи интеграл ове нехомогене диференцијалне једначине другог реда једнак је збиру од општег интеграла хомогене једначине

$$a'' + \mu\, r^{-3}\, a = 0 \tag{10}$$

и партикуларног интеграла нехомогене (9). Нека је a_1 партикуларни интеграл диференцијалне једначине (10); тада је општи

$$k_1\, a_1 + k_2\, a_2, \quad \text{са} \quad a_2 = a_1 \int a_1^{-2}\,\mathrm{d}\,t,$$

и интеграционим константама k_1 и k_2. С друге стране, лако ћемо приметити да функција $a_1 + 2\,K_3$ задовољава диференцијалну једначину (9) — да је њен партикуларни интеграл. Зато она има општи интеграл

$$a = (k_1\, a_1 + k_2\, a_2) + (a_1 + 2\,K_3) = K_1\, a_1 + k_2\, a_2 + 2\,K_3.$$

Са овим по (8) рачунамо b:

$$b = -2K_1 \int a_1 \, \mathrm{d}\, t - 2k_2 \int a_2 \, \mathrm{d}\, t - 3K_3 (t - t_0) + K_4,$$

док из треће једначине (7) следује, по аналогији са (10), интеграл

$$c = K_5 a_1 + k_6 a_2,$$

са константама интеграљења K_5 и k_6.

На тај начин смо формално интегралили систем диференцијалних једначина (7). Стварно решење зависи сад само од функције a_1. Међутим, одмах ћемо се сетити да смо раније, на стр. 42, видели да величина

$$(\mathbf{r}\,\mathbf{v}) = r\,r' = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,r^2$$

задовољава диференцијалну једначину облика (10). Зато усвајамо да је

$$a_1 = (\mathbf{r}\,\mathbf{v}) = r\,r',$$

одакле одмах имамо

$$\int a_1 \, \mathrm{d}\, t = \frac{1}{2}\, r^2.$$

А да бисмо израчунали $\int a_1^{-2} \, \mathrm{d}\, t$, користимо једначине 5 (6) и 5 (13):

$$r = p\,(1 + e\cos v)^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, t} = \sqrt{\mu\, p}\; r^{-2}.$$

Зато је, прво,

$$r' = p e\,(1 + e \cos v)^{-2} \sin v \cdot v' = \frac{e}{p}\, r^2 \sin v \frac{\sqrt{\mu\, p}}{r^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e \sin v,$$

а, затим,

$$\int a_1^{-2} \, \mathrm{d}\, t = \int r^{-2} r'^{-2} \, \mathrm{d}\, t = \frac{1}{\sqrt{\mu\, p}} \int r'^{-2} \, \mathrm{d}\, v = \mu^{-3/2} p^{1/2} e^{-2} \int \operatorname{cosec}^2 v \, \mathrm{d}\, v =$$

$$= -\mu^{-3/2} p^{1/2} e^{-2} \operatorname{ctg} v.$$

Са овим резултатом рачунамо, даље,

$$a_2 = a_1 \int a_1^{-2} \, \mathrm{d}\, t = r\,r' \,(-\mu^{-3/2} p^{1/2} e^{-2} \operatorname{ctg} v) =$$

$$= p\,(1 + e \cos v)^{-1} \cdot \mu^{1/2} p^{-1/2} e \sin v \cdot (-\mu^{-3/2} p^{1/2} e^{-2} \operatorname{ctg} v) =$$

$$= -\frac{p}{\mu\, e}\,\frac{\cos v}{1 + e \cos v}.$$

У свим овим изразима врста путање зависи само од вредности константе e, о којој не чинимо никакве претпоставке. — Међутим, како је

$$r-p=-\frac{pe\cos v}{1+e\cos v},$$

то је коначно

$$a_2=\frac{1}{\mu e^2}(r-p)$$

и

$$\int a_2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\mu e^2}\int(r-p)\,\mathrm{d}t=\frac{P}{\mu e^2}.$$

Зато за функције a, b и c коначно имамо изразе:

$$\begin{aligned}
a&=K_1(\mathbf{r}\,\mathbf{v})+K_2(r-p)+2K_3,\\
b&=-K_1r^2-2K_2P-3K_3(t-t_0)+K_4,\\
c&=K_5(\mathbf{r}\,\mathbf{v})+K_6(r-p).
\end{aligned}$$

Величине $K_1,\ldots,K_6$ су константе интеграљења система диференцијалних једначина (7), то јест — диференцијалне једначине (5). Унесемо ли ове резултате за функције a, b и c у једначину (6), добићемо коначни израз за поправку $\Delta\,\mathbf{r}$. Он ће постати нешто простији ако спојимо прва два члана у коефицијентима уз векторе $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. Тако ћемо моћи писати да је

$$\begin{aligned}
\Delta\,\mathbf{r}=&[\mathbf{r}\,\mathbf{C}]K_1+[(r-p)\,\mathbf{r}-2P\,\mathbf{v}]K_2+\\
&+[2\,\mathbf{r}-3(t-t_0)\,\mathbf{v}]K_3+\mathbf{v}K_4+(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,\mathbf{C}K_5+\\
&+(r-p)\,\mathbf{C}K_6.
\end{aligned}\tag{11}$$

Све функције уз непознате константе интеграљења K_i, $i=1,\ldots,6$, можемо израчунати за сваки тренутак посматрања t. Величину

$$P=\int(r-p)\,\mathrm{d}t$$

налазимо нумеричким интеграљењем, уз $P(t_0)=0$. Ако те изразе за поправке правоуглих координата, $\Delta\,x$, $\Delta\,y$ и $\Delta\,z$, унесемо у једначине 20 (3) и 20 (4), добићемо опет $2n$ условних једначина, одакле методом најмањих квадрата налазимо шест непознатих константи K_i.

Када знамо вредности ових константи, онда једначину (11) можемо да искористимо било за налажење поправки почетних услова $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$, било за поправке почетних услова $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$.

У првом случају ћемо приметити да је

$$\Delta\,\mathbf{v}=\mathbf{v}_\nu-\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_\nu-\mathbf{r})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\,\mathbf{r},$$

па диференцирањем (11) изводимо

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v} = [\mathbf{v}\,\mathbf{C}]\,K_1 + [(r' - 2\,\mu\,r^{-3}P)\,\mathbf{r} - (r-p)\,\mathbf{v}]\,K_2 + \\ + [3\,(t-t_0)\,\mu\,r^{-3}\,\mathbf{r} - \mathbf{v}]\,K_3 - \mu\,r^{-3}\,\mathbf{r}\,K_4 + \\ + (v^2 - \mu\,r^{-1})\,\mathbf{C}\,K_5 + r'\,\mathbf{C}\,K_6.\end{aligned} \tag{12}$$

За тренутак $t=t_0$ једначине (11) и (12) прелазе у

$$\Delta \mathbf{r}_0 = [\mathbf{r}_0\,\mathbf{C}]\,K_1 + (r_0 - p)\,\mathbf{r}_0\,K_2 + 2\,\mathbf{r}_0\,K_3 + \mathbf{v}_0\,K_4 + (\mathbf{r}_0\,\mathbf{v}_0)\,\mathbf{C}\,K_5 + (r_0 - p)\,\mathbf{C}\,K_6,$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}_0 = [\mathbf{v}_0\,\mathbf{C}]\,K_1 + [r_0'\,\mathbf{r}_0 - (r_0 - p)\,\mathbf{v}_0]\,K_2 - \mathbf{v}_0\,K_3 - \\ - \mu\,r_0^{-3}\,\mathbf{r}_0\,K_4 + (v_0^2 - \mu\,r_0^{-1})\,\mathbf{C}\,K_5 + r_0'\,\mathbf{C}\,K_6.\end{aligned}$$

Како су нам константе K_i сад познате, из последњих једначина израчунавамо поправке почетних услова кретања, тј. Δx_0, Δy_0, Δz_0, $\Delta x_0'$, $\Delta y_0'$ и $\Delta z_0'$. Поправљени почетни услови су

$$\mathbf{r}_0 + \Delta\,\mathbf{r}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_0 + \Delta\,\mathbf{v}_0.$$

па са њима прелазимо на израчунавање поправљених елемената кретања.

У другом случају довољно је да у једначину (11) унесемо вредности промењивих величина за тренутке $t=t_1$ и $t=t_3$, па да одмах добијемо поправке $\Delta\,\mathbf{r}_j$, $j=1$ и 3:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r}_j = [\mathbf{r}_j\,\mathbf{C}]\,K_1 + [(r_j - p)\,\mathbf{r} - 2\,P_j\,\mathbf{v}]\,K_2 + \\ + [2\,\mathbf{r}_j - 3\,(t_j - t_0)\,\mathbf{v}_j]\,K_3 + \mathbf{v}_j\,K_4 + \\ + (\mathbf{r}_j\,\mathbf{v}_j)\,\mathbf{C}\,K_5 + (r_j - p)\,\mathbf{C}\,K_6.\end{aligned}$$

Поправљени услови су, опет,

$$\mathbf{r}_j + \Delta\,\mathbf{r}_j, \qquad j = 1,\ 3,$$

и са њима прелазимо на извођење елемената.

Поступак је погодан за примену када, како рекосмо, ефемериду рачунамо нумеричким интеграљењем диференцијалне једначине Кеплерова кретања. Када комплетирамо интеграционе таблице, из њих рачунамо и компоненте брзине. Посебна интеграциона схема даће нам временски еквидистантне вредности величине P. Потом интерполацијом налазимо координате тела у тренуцима посматрања, ради образовања $\Delta\,\alpha$ и $\Delta\delta$, као и свих промењивих величина, потребних за формирање условних једначина (11), за налажење најбољих вредности константи K_i. Исто тако поступамо и за тренутак t_0 — односно, за тренутке t_1 и t_3 — ради израчунавања поправки усвојених почетних услова кретања.

Напоменимо још једном да је приказани поступак општи; он се може применити на сваку врсту Кеплерове путање. Ако промењиве величине изразимо као функције времена по законима кретања по одговарајућој путањи, добићемо специјалне методе.

ГЛАВА ПЕТА

РАЧУН СПЕЦИЈАЛНИХ ПОРЕМЕЋАЈА

Рачун специјалних поремећаја обухвата, како смо у *Уводу* навели, поступке за нумеричко интеграљење диференцијалне једначине стварног („поремећеног“) кретања небеског тела. Тамо смо већ скицирали његов главни ток и основне елементе две главне групе поступака. За све те начине рада основу представља непоремећена, Кеплерова, путања тела, конструисана на основи посматрања и поправљена тако да што боље представља посматране положаје мале планете или комете. Тако можемо рећи да рачун поремећаја представља прелаз од Кеплерове на стварну путању тела.

22. СТВАРНО КРЕТАЊЕ МАЛИХ ПЛАНЕТА И КОМЕТА.

У *Уводу* смо већ дефинисали шта подразумевамо под „стварним кретањем“ малих планета и комета. То је, просто, хелиоцентрично кретање какво следује из диференцијалне једначине за хелиоцентрични вектор положаја тела 2(1):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2} = -k^2 (1+m) r^{-3} \mathbf{r} + k^2 \sum_{i=1}^{n} m_i (\rho_i^{-3} \boldsymbol{\rho}_i - r_i^{-3} \mathbf{r}_i). \qquad (1)$$

Да још једном поновимо: m је маса небеског тела, планетоида или комете, коју ћемо редовно занемаривати. Хелиоцентрични вектор положаја му је $\mathbf{r}$, а m_i и $\mathbf{r}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ су масе, односно хелиоцентрични вектори положаја „поремећајних тела“ — великих планета. Њихов релативни положај у односу на посматрано тело је $\boldsymbol{\rho}_i$, дакле $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}$. Гаусову константу означавамо, као и увек, са k. Временска јединица је ефемеридски дан.

Да бисмо увек имали пред очима разлику између Кеплерова и стварног кретања, величину

$$\mathbf{F} = k^2 \sum_{i=1}^{n} m_i (\rho_i^{-3} \boldsymbol{\rho}_i - r_i^{-3} \mathbf{r}_i) \tag{2}$$

ћемо звати *поремећајно убрзање*. Тако онда диференцијална једначина Кеплерова кретања гласи

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_K}{\mathrm{d}\, t^2} = -k^2 r_K^{-3} \mathbf{r}_K, \tag{3}$$

а стварног кретања —

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}\, t^2} = -k^2 r^{-3} \mathbf{r} + \mathbf{F}. \tag{4}$$

Разлика је, дакле, само у присуству величине **F**. Најчешће је она врло мала, због малих износа маса поремећајних тела, m_i (у односу на јединичну, Сунчеву, масу). Међутим, уколико мала планета или комета пролази близу неке велике планете, растојање ρ ће бити мало, дакле ρ^{-3} велико, па ће и апсолутна вредност **F** да постане велика. А уколико је још у питању пролаз поред неке масивне планете — Јупитера или Сатурна — може чак да се догоди да апсолутна вредност **F** постане већа од апсолутне вредности првог члана десне стране диференцијалне једначине (4), дакле од $k^2\ r^{-3}\ \mathbf{r}$. Другим речима, поремећаји могу да буду и веома велики. Стога кретање по Кеплеровој путањи може да буде и веома добра, а и веома лоша апроксимација стварног кретања. Све зависи од положаја мале планете или комете у односу на велике планете.

Интеграли диференцијалних једначина (3) и (4), то јест

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_K(t) \quad \text{и} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

суштински се разликују по својим аналитичким изразима, али формално можемо писати да је

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_K(t) + \Delta\, \mathbf{r}(t),$$

где је $\Delta\, \mathbf{r}(t)$ тзв. *дејство поремећаја на вектор положаја тела*. Према раније реченом, тај члан може да има врло различите вредности — и занемарљиво мале, и веома велике. Рецимо да смо израчунали путању небеског тела на основи посматрања, дакле Кеплерову путању, и са тако добивеним елементима кретања одредили његов положај $\mathbf{r}_K(t)$ за неки каснији тренутак t. Но како се тело у том тренутку стварно налази на положају $\mathbf{r}(t)$, питање је дејства поремећаја да ли ћемо објект уопште пронаћи у близини положаја $\mathbf{r}_K(t)$. Ако су поремећаји иоле већи, а тело слаба сјаја (као огромна већина малих планета и комета), неће бити редак случај да се тело — „изгуби".

Колике поремећаје можемо очекивати код малих планета и комета?

Узмимо у разматрање случај просечне мале планете, дакле оне чија је велика полуоса Кеплерове елипсе једнака око 3 а.ј., а ексцентричност мала, око 0.1. Таква мала планета креће се, дакле, између путања Марса (a=1.52) и Јупитера (a=5.20 а.ј.). Нагиби путањских равни ових великих планета су мали, мањи од 2°, а није велик ни нагиб путањске равни просечне мале планете. Тако онда можемо закључити да је минимална даљина овог планетоида око 1.5. а.ј. од Марса или око 2.2 а.ј. од Јупитера; у овој грубој процени не морамо узимати у обзир ексцентричности путања великих планета (0.09 одн. 0.05). Минималне даљине овакве мале планете од других великих планета још су веће. Зато дејства поремећаја, чак и Јупитера, нису велика, догод се не ради о дугим временим интервалима.

Са ретким изузецима у породици малих планета је друкчији случај. Ако су им ексцентричности путања веће, оне могу да се приближе Марсу, Земљи, Венери, па и Меркуру, на знатно мања растојања, па и поремећаји могу да буду велики — и поред малих маса поменутих великих планета.

Слично је стање и са кретањем већине периодичних комета. Ту су свакако најинтересантније комете „Јупитерове породице", дакле оне са великим полуосама непоремећених елиптичких путања око 5 до 6 а.ј. Оне могу да се веома приближе најмасивнијој великој планети Сунчева система, Јупитеру. А како су им ексцентричности путања велике, између 0.5 и 0.8, то су могући и блиски пролази поред Марса, Земље и Венере. Тако у кретању периодичних комета можемо очекивати и веома велике поремећаје. Непериодичне комете прођу, практично, кроз цео Сунчев систем; начелно се, дакле, могу наћи у великој близини било које велике планете. Зато су комете најинтересантнији објекти и за теорију и за праксу рачуна поремећаја.

Вратимо се зато опет на случај када се комета или мала планета толико приближи великој планети да убрзање које јој ова саопштава постане веће од убрзања које јој непосредно саопштава Сунце. Ради се, дакле, о таквој међусобној даљини ових тела, да је

$$|m_i(\rho_i^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_i - r_i^{-3}\,\mathbf{r}_i)| \geqslant |r^{-3}\,\mathbf{r}|.$$

Аналитички израз који описује површину која обухвата простор око велике планете, у чијој је свакој тачки испуњена горња неједнакост, прилично је компликован. Зато се он апроксимира једним приближним изразом, који даје полупречник сфере, описане око средишта велике планете, тако да је у свакој тачки простора те сфере сигурно задовољена поменута неједнакост. То је *„сфера дејства"* велике планете; њен полупречник је

$$r_i\, m_i^{2/5} \;\; a.\,j.,$$

ако даљину од Сунца, r_i, изразимо у а.ј., а масу велике планете, m_i, у јединицама Сунчеве масе. Са познатим масама великих планета (стр. 7) и њиховим средњим даљинама од Сунца можемо израчунати полупречнике сфере дејства великих планета:

Меркур	0.001 а.ј.	Јупитер	0.32 а.ј.
Венера	0.004	Сатурн	0.36
Земља	0.006	Уран	0.34
Марс	0.004	Нептун	0.58

Приђе ли, рецимо, комета Јупитеру на растојање мање од 1/3 астрономске јединице, његово поремећајно убрзање надјачаће убрзање у кретању комете које изазива Сунчева привлачна сила. Тада можемо ствар посматрати и са другог становишта: можемо, наиме, узети да се комета креће око Јупитера под његовим привлачним дејством, а да Сунце преузима улогу поремећајног тела. Диференцијална једначина таквог кретања начелно се ништа не мења. Почетни услови кретања комете при уласку у Јупитерову сферу дејства обично су такви да би она наставила да се око ове велике планете креће по хиперболи, када би престало да делује привлачење од стране Сунца. Но, било како да описујемо кретање комете у таквим случајевима, чињеница је да су ту поремећаји веома велики и да ту не помаже апроксимација Кеплеровим кретањем.

Нумеричко интеграљење диференцијалне једначине кретања (1) доводи нас, како знамо, до дискретног низа неких величина, помоћу којих можемо израчунати положај тела на стварној путањи у сваком тренутку временог интервала, који је обухваћен рачуном поремећаја. Рецимо да смо неку малу планету могли посматрати око њене опозиције укупно два месеца. На основи прикупљених посматрања израчунали смо и поправили њену Кеплерову елиптичку путању око Сунца. Поново ћемо је опет моћи посматрати кад дође у опозицију са Сунцем, кроз приближно годину дана. Према томе, рачун поремећаја ћемо морати спровести за то време од једне до друге опозиције, од једног до другог времена могућих посматрања. Иста је ствар и са рачуном специјалних поремећаја код кретања комета — мислимо на периодичне — само што њих најчешће посматрамо око пролаза кроз перихел. Ту ћемо рачун поремећаја морати спроводити од једног до другог пролаза кроз перихел, дакле током целе периоде обиласка око Сунца периодичне комете. Та периода износи, за већ помињане комете Јупитерове породице, око 5 до 7 година, а за друге комете и знатно више. Позната *Халејева комета* једном обиђе око Сунца за око 76 година. То не значи ништа друго, него да рачун поремећаја у кретању такве једне периодичне комете морамо водити „корак по корак“ током целе периоде њена обиласка око Сунца, да бисмо у наредној појави комете могли да упоредимо њене посматране и рачунате положаје. Шта више, у време када су поремећаји у кретању комете највећи, када се она приближи Јупитеру или Сатурну, ми је са Земље најчешће не можемо посматрати, због велике даљине од нас. Не остаје нам ништа друго него да се ослонимо искључиво на рачун њена кретања, па да проверу тога рачуна оставимо до наредне појаве комете. Зато се дешавало и да се периодична комета „изгуби“, нарочито ако је слаба сјаја. То је на првом месту била последица недовољно тачних елемената кретања на почетку рачуна поремећаја.

По овоме што смо досад изложили није тешко закључити да у току једног обиласка мале планете или комете око Сунца дејство поремећаја може да буде врло различито — нарочито код комета. Зато је стварна путања ових тела Сунчева система просторна крива. Она није затворена — кретање по њој није периодично — али за већину малих планета, где су поремећаји мали или умерени, можемо замислити да се увек налази у једном кружном торусу, описаном око Сунца, а чија раван не одступа много од равни еклиптике. Слично можемо замислити и за путање комета, само би за њих, врло често, пресек таквог торуса морао бити већи. То је засада све што можемо казати о стварним путањама ових небеских тела.

23. **НУМЕРИЧКО ИНТЕГРАЉЕЊЕ**. Укратко ћемо овде поновити и потсетити се на поступке нумеричког интеграљења оних типова диференцијалних једначина првог и другог реда, са којима ћемо имати посла у овом курсу. Један такав поступак смо већ користили у одељку 13.

а) Основу за интеграљење диференцијалних једначина првог реда чини поступак налажења нумеричких вредности интеграла $x_i = x(t_i)$, $i=0, 1, 2, \ldots$, најједноставнијег типа диференцијалних једначина

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = F(t), \tag{1}$$

уз познавање почетног услова $x_0 = x(t_0)$. Поступак се састоји у томе да за еквидистантне вредности аргумента t,

$$t_{i+1} - t_i = w = \text{const}, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,$$

у нешто ширем интервалу аргумента за који тражимо вредности интеграла $x_i = x(t_i)$, израчунавамо

$$f(a + iw) = w\,F(t_i), \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots\ , \tag{2}$$

а потом разлике ових вредности — првог, другог, итд. реда, до оних практично константних. Све то сложимо у Гаус-Енкеову схему функција и разлика. Потом помоћу њих рачунамо почетни члан низа првог збира из

$$'f\left(a - \frac{1}{2}\,w\right) = x_0 - \frac{1}{2}\,f(a) + \frac{1}{12}\,f'(a) - \frac{11}{720}\,f^{\mathrm{III}}(a) +$$
$$+ \frac{191}{60480}\,f^{\mathrm{V}}(a) - \frac{2497}{3628800}\,f^{\mathrm{VII}}(a) + \cdots\ , \tag{3}$$

а затим израчунавамо и све остале чланове тога низа. Онда вредности интеграла налазимо по

$$x_i = {}'f(a + iw) - \frac{1}{12}\,f'(a + iw) + \frac{11}{720}\,f^{\mathrm{III}}(a + iw) -$$
$$- \frac{191}{60480}\,f^{\mathrm{V}}(a + iw) + \frac{2497}{3628800}\,f^{\mathrm{VII}}(a + iw) - \cdots\ . \tag{4}$$

Јасно је да можемо поступати и тако да из (3) бришемо члан x_0; тада нам (4) даје разлику $x_i - x_0$.

б) Исте обрасце користимо и у случају диференцијалне једначине

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = F(t,\ x), \tag{5}$$

али сада на посебан начин, пошто не можемо одмах наћи све вредности

$$f(a + iw) = w\,F(t_i,\ x_i). \tag{6}$$

Зато ћемо у пракси рачуна интеграљења (5) разликовати три случаја.

I) *Рачун сукцесивних поправки.* Ако се F уопште споро мења у жељеном интервалу $t_n - t_0$, или се споро мења са променом x, ставићемо у F у (5) просто да је $x = x_0$, па извршити интеграљење као раније, тј. непосредно применити (6), (3) и (4). Ако су разлике $x_i - x_0$ за свако i довољно мале, ствар је у реду, па се на томе можемо и зауставити. То је тзв. „рачун првог реда". Он се нарочито често примењује када се не тражи велика тачност вредности интеграла.

Ако се, међутим, покаже да разлике $x_i - x_0$ нису прихватљиво мале, ми ћемо резултат рачуна првог реда — означимо га са $(x_i)_1$ — унети у (6), то јест помоћу

$$f(a+iw) = wF(t_i,\ (x_i)_1), \qquad i=1,\ 0,\ 2,\ \ldots$$

саставити нову, поправљену, интеграциону таблицу, комплетирати је са (3), па применити (4), ради добивања поправљених вредности интеграла x_i, које ћемо означавати са $(x_i)_2$. Видимо, дакле, да овакав поступак можемо понављати догод разлике $(x_i)_{j+1} - (x_i)_j$, и то за свако i, не постану занемарљиво мале; j је редни број апроксимације.

Поступак је, начелно, врло прост; осим тога, видимо да у ствари не захтева познавање тока промена F, јер поменути износ разлика $(x_i)_{j+1} - (x_i)_j$ довољно речито говори о потреби продужетка рачуна или његову заустављању. Овако, дакле, можемо интегралити сваку диференцијалну једначину облика (5). Међутим, код брзих промена F рачун може да буде дуготрајан, па је тада препоручљиво употребљавати друге методе.

II) *Рачун повремених поправки.* Са почетном вредношћу интеграла $x_0 = x(t_0)$ израчунамо неколико вредности F после t_0, рецимо

$$F(t_0,\ x_0),\quad F(t_1,\ x_0),\quad F(t_2,\ x_0),\ \ldots,\quad F(t_p,\ x_0).$$

Помоћу тих вредности саставимо малу интеграциону таблицу, извршимо интеграљење са (3) и (4), тј. добијемо

$$x_0,\quad (x_1)_p,\quad (x_2)_p,\ \ldots,\ (x_p)_p; \qquad p<n,$$

све као на почетку рачуна првог реда. Затим све понављамо на следећем одсечку размака $t_n - t_0$: рачунамо, наиме,

$$F(t_{p+1},\ (x_p)_p),\quad F(t_{p+2},\ (x_p)_p),\ \ldots,$$

рецимо до

$$F(t_{p+q},\ (x_p)_p),\quad p+q<n.$$

Из таквог продужетка интеграционе таблице налазимо

$$(x_{p+1})_{p+q},\quad (x_{p+2})_{p+q},\quad (x_{p+3})_{p+q},\ \ldots,\ (x_{p+q})_{p+q}.$$

За следећих неколико аргумената, $t_{p+q+1},\ t_{p+q+2},\ \ldots,$ рецимо до t_{p+q+r} $(p+q+r<n)$, рачунамо F са последњом вредношћу x из претходне серије, то јест са $(x_{p+q})_{p+q}$. Тако поступамо догод не исцрпимо цео интервал $t_n - t_0$.

Овакав начин може да буде рачунски знатно краћи од претходног, али захтева увежбаног и спретног калкулатора, који ће моћи да оцени докле сме рачунати F са непромењеном вредношћу x_m. Путоказ за то су му промене F.

III) *Рачун сукцесивних екстраполација.* Почетак је једнак рачуну првог реда: са $x=x_0$ израчунамо $F(t_i,\ x_0)$ за, рецимо, $i=-2,\ -1,\ 0,\ 1$ и 2. Тако састављамо малу интеграциону таблицу, с којом поступамо као у I). Понављамо рачун дотле док се вредности интеграла $x(t_{-1})$ и $x(t_1)$ више не мењају (односно — док се одговарајуће вредности F више не мењају). Циљ нам је очигледан: желимо да дођемо до тачних вредности оних елемената интеграционе схеме, помоћу којих израчунавамо почетни члан низа првог збира. Зато ће, наравно, некад бити потребно да тај уводни рачун изводимо и у ширем интервалу аргумента око t_0, али то вршимо увек симетрично у односу на тај t_0.

Тако ћемо, понављањем рачуна потребан број пута, „стабилизовати" почетак наше интеграционе таблице. Претпоставимо да се у њој показало да су практично константне разлике трећег реда, f^{III}. Зато екстраполирамо њихове вредности један до два „корака" даље, па са тим претпостављеним вредностима израчунавамо одговарајуће разлике f'' и f', као и функције f и $'f$. Вредност f се односи на t_3. Зато по (4) можемо наћи x_3. То је само приближна вредност интеграла за t_3, јер смо је рачунали са екстраполираним разликама и функцијама, а не са тачним. Па ипак, тако добивено x_3 је довољно тачно да бисмо добили тачно $F(t_3, x_3)$. Одавде следује и поправљено $f(a+3w)=wF(t_3, x_3)$. Бришемо из схеме, дакле, раније екстраполирано f, па на његово место уписујемо оно поправљено, $wF(t_3, x_3)$. Одмах затим поправљамо и све (раније екстраполиране) разлике и $'f$. Сад погледамо какав је ток трећих разлика; ако су остале практично константне, опет их екстраполирамо један до два „корака" w даље, с њима рачунамо одговарајуће разлике другог и првог реда, функцију $f(a+4w)$ као и $'f$. С овим интегралимо и добивамо приближно x_4; с њим рачунамо поправљено $f(a+4w)=wF(t_4, x_4)$, уписујемо га — заједно са новим разликама и $'f$ — на место раније екстраполираних елемената схеме — и тако даље. Тек кад тако попунимо целу интеграциону таблицу — онда прелазимо на тачно израчунавање x_t по обрасцу (4). Цео поступак се, дакле, састојао у добивању тачних елемената f наше схеме.

Увежбани калкулатор ће најчешће примењивати овакав поступак нумеричког интеграљења диференцијалне једначине облика (5). Најважније му је да већ на почетку рачуна успе да оцени колико w да усвоји, како би му практично биле константне разлике трећег, четвртог или петог реда. Но, све ће то зависити од стварног стања ствари; не морају, наравно, током целог интервала интеграљења да буду константне стално разлике једног истог реда. А тачност целог рачуна ће се најбоље видети по разликама између екстраполираних и израчунатих вредности f. Рачун смемо продужавати догод су те разлике довољно мале.

в) Све што смо досада рекли за интеграљење диференцијалне једначине (5) важи — *mutatis mutandis* — и за поступке интеграљења система диференцијалних једначина првог реда

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F_x(t;\, x,\, y,\, \dots),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=F_y(t;\, x,\, y,\, \dots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

уз познавање почетних услова $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0), \ldots \ldots$. Наравно, аргумент t се не мора експлицитно јављати на десним странама једначина овакве система, као и у претходном случају једне диференцијалне једначине. Рачун је једино дужи утолико што састављамо онолико посебних интеграционих таблица колико има непознатих функција $x, y, \ldots$. А сам поступак морамо водити паралелно, пошто нам је за налажење, рецимо, F_x, потребно познавање свих функција $x, y, \ldots$. Ту се може догодити да се једна од функција мења толико споро, да бисмо њене вредности могли налазити рачуном првог реда. Па ипак, да бисмо избегли могуће забуне и грешке, рачун ћемо увек водити истим поступком, уз коришћење истог интервала w за све интеграционе таблице.

ī) За нумеричко интеграљење најпростије диференцијалне једначине другог реда,

$$\frac{d^2 x}{d t^2}=F(t), \tag{7}$$

претпоставићемо да познајемо почетне услове

$$x_{-1}=x(t_{-1}) \quad \text{и} \quad x_0=x(t_0).$$

Интеграциону таблицу састављамо са основним елементима

$$f(a+iw)=w^2 F(t_i),$$

почетни члан низа првог збира је

$$'f\left(a-\frac{1}{2}w\right)=x_0-x_{-1}-\frac{1}{12}f'\left(a-\frac{1}{2}w\right)+\frac{1}{240}f^{\text{III}}\left(a-\frac{1}{2}w\right)-$$
$$-\frac{31}{60480}f^{\text{V}}\left(a-\frac{1}{2}w\right)+\cdots, \tag{8}$$

почетни члан низа другог збира рачунамо из

$$''f(a)=x_0-\frac{1}{12}f(a)+\frac{1}{240}f''(a)-\frac{31}{60480}f^{\text{IV}}(a)+\cdots, \tag{9}$$

па ћемо вредности интеграла добити из

$$x_i={}''f(a+iw)+\frac{1}{12}f(a+iw)-\frac{1}{240}f''(a+iw)+$$
$$+\frac{31}{60480}f^{\text{IV}}(a+iw)-\cdots. \tag{10}$$

g) За интеграљење диференцијалних једначина другог реда облика

$$\frac{d^2 x}{d t^2}=F(t, x),$$

односно система ових једначина

$$\frac{d^2 x}{d\,t^2}=F_x(t;\, x,\, y,\, \dots),$$

$$\frac{d^2 y}{d\,t^2}=F_y(t;\, x,\, y,\, \dots),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

важи све што смо навели за интеграљење једначина и система првог реда, уз коришћење образаца (8), (9) и (10). Примену таквих поступака смо већ видели у одељку 13.

ђ) У рачуну специјалних поремећаја показаће се потреба за израчунавањем нумеричке вредности двоструког интеграла

$$J=\iint\limits_{t_0}^{t_n} F(t)\,d\,t^2,$$

при чему је $J(t_0)=0$. У том случају интеграциону таблицу састављамо са вредностима функција

$$f(a+iw)=w^2 F(t_i), \qquad i=0,\, 1,\, 2,\, \dots,\, n,$$

почетни члан низа првог збира рачунамо из

$$'f\left(a-\frac{1}{2}\,w\right)=-\frac{1}{2}\,f(a)+\frac{1}{12}\,f'\,(a)-\frac{11}{720}\,f^{\mathrm{III}}\,(a)+\cdots,$$

почетни члан низа другог збира је

$$''f(a)=-\frac{1}{12}\,f(a)+\frac{1}{240}\,f''\,(a)-\frac{31}{60480}\,f^{\mathrm{IV}}\,(a)+\cdots,$$

па је вредност двоструког интеграла

$$J=''f\,(a+iw)+\frac{1}{12}\,f\,(a+iw)-\frac{1}{240}\,f''\,(a+iw)+\cdots.$$

24. **РАЧУН СПЕЦИЈАЛНИХ ПОРЕМЕЋАЈА У ПРАВОУГЛИМ КООРДИНАТАМА.** На основи онога што смо у претходном одељку рекли о нумеричком интеграљењу система диференцијалних једначина другог реда видимо да описане поступке такорећи непосредно можемо применити на интеграљење диференцијалне једначине стварног кретања мале планете

или комете, тј. диференцијалне једначине 22(1). Масу тела ћемо да занемаримо, па поменута једначина прелази у систем скаларних једначина

$$w^2 \frac{d^2 s}{d t^2} = -w^2 k^2 r^{-3} s + F_s, \qquad s = x, y, z;$$

$$r^{-3} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2},$$

$$F_s = w^2 k^2 \sum_{i=1}^{n} m_i (\rho_i^{-3} \rho_{is} - r_i^{-3} s_i),$$

$$\rho_{is} = s_i - s, \qquad r_i^{-3} = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{-3/2},$$

$$\rho_i^{-3} = [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2]^{-3/2}.$$

За почетак интеграционих таблица — посебно за сваку координату x, y и z — израчунавамо непаран број, пет или седам, хелиоцентричних вектора положаја тела, **r**, и то са елементима Кеплерове путање. Времени интервал w између тренутака на које се ти положаји односе, бирамо у зависности од врсте небеског тела о чијем кретању се ради, од жељене тачности (то јест, од начина интеграљења, како смо у претходном одељку описали) и од износа дејства поремећаја — компонената F_s.

Свакако је корисно, пре почетка рачуна, нацртати кружне путање поремећајних тела која ћемо узимати у обзир — велике планете — у размери њихових даљина од Сунца, па у ту скицу унети и путању мале планете односно комете, непоремећену, наравно. Означимо ли на тим путањама, према подацима из астрономских годишњака, положаје тела у тренутку почетне епохе рачуна поремећаја, t_0, имаћемо добар приказ њихових међусобних даљина, па можемо грубо контролисати износе поремећаја које добивамо током рачуна. Оваква је скица нарочито корисна код рачуна поремећаја у кретању периодичних комета, да бисмо ма и грубо установили могућности њихова приближавања великим планетама.

Ако је у питању нека мала планета и ако оваквом скицом установимо да се она не налази „близу" Јупитера, можемо усвојити w=20 или 40 дана. Претпостављамо да јој координате рачунамо на 7 или 8 децимала; рачун тада морамо изводити на 8 или 9 децимала. Видели смо да вредности интеграла израчунавамо помоћу чланова низа првог и другог збира, који се образују сабирањем одговарајућих чланова схеме. Другим речима, у овим збировима се све више нагомилавају, током процеса интеграљења, разне „грешке" и одступања у нумеричким вредностима — на првом месту оне услед заокругљавања децимала — па се све оне преносе и у вредности интеграла. Зато рачун морамо водити са већим бројем децимала но што нам је стварно потребно.

Уколико приступамо нумеричком интеграљењу диференцијалне једначине кретања периодичне комете, видимо лако да је ту питање избора интервала w за почетак рачуна још компликованије. На перихелском делу своје путање таква комета је релативно близу Венере и Земље, па макар и поремећајно дејство ових планета у стварном случају и не било велико, опет морамо усвојити мало w. Сад се ради о томе да се координате поменутих поремећајних тела брзо мењају са временом, па да бисмо обезбедили колико-толико „гладак" ток разлика у схемама интеграљења, „корак" w не сме бити дуг. Средња његова вредност је 10 дана, а може бити и 5, па и мање (већа близина неком поремећајном телу). — Најзад, најсигурнију представу о интервалу w добићемо кад израчунамо елементе интеграционих таблица за неколико тренутака око t_0. Тада ћемо стећи представу и о износима компонената F_s, што ће нам такође бити један од критеријума за избор врсте методе нумеричког интеграљења.

Рачун изводимо у екваторском хелиоцентричном координатном систему (за неку утврђену епоху), првенствено стога што се координате поремећајних тела, великих планета, у посебним зборницима дају у поменутом координатном систему. Данас су у употреби два главна извора за поменуте координате великих планета. Један чине неколико свезака публикација под заједничким називом „*Astronomical Papers*" вашингтонске Поморске опсерваторије и уреда алманаха „*Astronomical Ephemeris*". Други је повремена публикација „*Planetary Co-ordinates*" гриничког „*Nautical Almanac*"-а. Први извор даје непосредно координате великих планета. Други даје, осим ових координата, и величине

$$-10^7 w^2 k^2 m_i r_i^{-3} s, \qquad s = x,\ y,\ z,$$

дакле други члан у изразу за поремећајно убрзање **F**, у јединицама седме децимале, и то са $w=10$ дана за планете од Венере до Сатурна, а са $w=40$ дана за Урана и Нептуна. — Осим тога ове таблице, а и многе друге, дају утабличене вредности r^{-3} са аргументом r^2.

Израчунали смо, дакле, како рекосмо, известан непаран број хелиоцентричних положаја тела — на Кеплеровој путањи — и то временски симетрично у односу на почетну епоху рачуна, t_0. Са познатим координатама поремећајних тела можемо, онда, по наведеним обрасцима, израчунати и вредности основних елемената интеграционе схеме

$$f_s(a+iw) = -w^2 k^2 r_i^{-3} s_i + F_{si},$$

$$s = x,\ y,\ z,$$

за оне исте тренутке. Те вредности нису једнаке другом изводу вектора положаја тела на стварној путањи, пошто смо их рачунали са положајима на непоремећеној путањи. Зато применом образаца 23(8), 23(9) и 23(10) вршимо интеграљење у тим почетним деловима интеграционих таблица. Вршимо, другим речима, рачун сукцесивних апроксимација, догод интеграљењем не добијемо управо оне вредности координата, помоћу којих смо израчунали њихове друге изводе.

Када на такав начин „осигурамо" тачан почетак интеграционих таблица за све три координате, онда даље рачун настављамо неким од раније описаних поступака.

„Рачун првог реда", или — како овде кажемо: „рачун специјалних поремећаја првог реда", састојао би се у систематском коришћењу положаја тела на Кеплеровој путањи ради израчунавања $f_s(a+iw)$, дакле током целог временог интервала интеграљења. Тако ћемо поступати када не захтевамо велику тачност, када времени интервал није дуг, и када нам почетак рачуна покаже да су компоненте F_s мале. Јасно је да ћемо поремећаје првог реда рачунати и онда када су нам путањски елементи Кеплерове елипсе мале тачности. То ће бити увек када смо те елементе извели из малог броја посматрања, а поремећаји нису велики.

Овакав начин интеграљења диференцијалне једначине кретања је свакако најдиректнији. С друге стране, његов резултат су координате тела, помоћу којих врло лако долазимо до привидних, геоцентричних положаја, што ће рећи да њиховим поређењем са посматраним положајима одмах можемо установити тачност целог рачуна. Овакав рачун није дакле ништа друго него рачун ефемериде стварног кретања мале планете или комете.

Напоменимо да поменуте једначине 23(8), 23(9) и 23(10) нипошто нису једине помоћу којих се може спровести нумеричко интеграљење диференцијалне једначине стварног кретања небеског тела. Постоји читав низ њихових варијанти, које у специјалним случајевима дају и боље резултате, но ми ћемо се овде задовољити општим поступком, пошто се данас — уосталом, као и увек — обрасци за рачунање прилагођују средствима за ефективно обављање нумеричких рачуна, која нам стоје на расположењу.

Приметимо још да је врло корисно да неке величине овог рачуна контролишемо разликама, пошто других начина за контролу, како видимо, немамо. То могу да буду величине r^{-3}, r_i^{-3} и ρ_i.

25. РАЧУН СПЕЦИЈАЛНИХ ПОРЕМЕЋАЈА ПРАВОУГЛИХ КООРДИНАТА.

Наведимо и лоше стране управо описана поступка рачуна специјалних поремећаја. Главна је лоша страна у томе што координате тела рачунамо у пуном износу. Морамо, дакле, рачунати са великим бројем вредносних цифара, са великим бројем децимала. А тада интервал w мора да буде релативно кратак, како бисмо обезбедили колико-толико правилан ток разлика у интеграционим таблицама. Чест ће бити случај, нарочито код планетоида, да су износи поремећаја мали, па је боље да потражимо неки начин њихова непосредног израчунавања.

Желимо ли да и у таквом случају рачунамо стварне правоугле координате тела, природно је да настојимо да добијемо разлику између непоремећених и поремећених координата. Нека су, као и раније, $\mathbf{r}$ вектори положаја тела на стварној путањи, а $\mathbf{r}_K$ вектори положаја на непоремећеној путањи, онда ћемо потражити поступак за израчунавање

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_K, \tag{1}$$

тј. вектора

$$\mathbf{R} = \{\xi, \ \eta, \ \zeta\},$$

који је, како смо већ раније видели, тзв. дејство поремећаја у положају тела. Једна варијанта оваквог рачуна је *Encke*-ов поступак специјалних поремећаја.

Да бисмо дошли до диференцијалне једначине за $\mathbf{R}$, довољно је да двапут диференцирамо (1) по времену и потом искористимо диференцијалне једначине Кеплерова и стварног кретања — дакле, једначине 22(3) и 22(4). Добићемо

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{d t^2} = -k^2 (r^{-3} \mathbf{r} - r_K^{-3} \mathbf{r}_K) + \mathbf{F}. \tag{2}$$

Ради једноставнијег рачуна, израз у загради ћемо трансформисати на следећи начин:

$$-(r^{-3}\,\mathbf{r}-r_K^{-3}\,\mathbf{r}_K)=(\mathbf{r}-\mathbf{R})\,r_K^{-3}-r^{-3}\,\mathbf{r}=(\mathbf{r}-\mathbf{R}-r_K^3\,r^{-3}\,\mathbf{r})\,r_K^{-3}= \\ =[(1-r_K^3\,r^{-3})\,\mathbf{r}-\mathbf{R}]\,r_K^{-3} \tag{3}$$

На овај начин смо постигли да одмах рачунамо са малим величинама. Даље је:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_K+\mathbf{R}, \quad \text{дакле,} \quad r^2=r_K^2+2\,(\mathbf{r}_K\,\mathbf{R})+R^2,$$

а одавде

$$r^2\,r_K^{-2}=1+2\,r_K^{-2}\,(\mathbf{r}_K\,\mathbf{R})+R^2\,r_K^{-2}=1+2\,r_K^{-2}\left[(\mathbf{r}_K\,\mathbf{R})+\frac{1}{2}\,R^2\right]=1+2\,q,$$

где смо увели ознаку

$$q=\left[(\mathbf{r}_K\mathbf{R})+\frac{1}{2}\,R^2\right]r_K^{-2}. \tag{4}$$

Ова је величина свакако мала. — Из

$$r^2\,r_K^{-2}=1+2\,q \quad \text{следује да је} \quad r^{-3}\,r_K^3=(1+2\,q)^{-3/2},$$

па развијањем у биномни ред добивамо

$$r_K^3\,r^{-3}=1-qf, \tag{5}$$

где смо са f означили ред

$$f=3\left(1-\frac{5}{2}\,q+\frac{35}{6}\,q^2-\frac{315}{24}\,q^3+\cdots\right), \tag{6}$$

и за који су састављене специјалне таблице са аргументом q.

Тако са (2), (3) и (5) коначно добивамо тражену диференцијалну једначину:

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{R}}{\mathrm{d}\,t^2}=k^2\,(qf\,\mathbf{r}-\mathbf{R})\,r_K^{-3}+\mathbf{F}.$$

За ефективну примену пишемо је у облику

$$w^2\,\frac{\mathrm{d}^2\,\sigma}{\mathrm{d}\,t^2}=w^2\,k^2\,(qf\,s-\sigma)\,r_K^{-3}+F_s, \tag{7}$$

$$\sigma=\xi,\ \eta,\ \zeta, \qquad s=x,\ y,\ z.$$

У њој се, дакле, јавља и вектор стварног положаја тела, $\mathbf{r}$, али се он множи малом величином qf — односно, јавља се у поремећајном убрзању $\mathbf{F}$, где се множи малим масама m_i, тако да није потребно познавање његових компонената са високим степеном тачности.

Нумеричко интеграљење система диференцијалних једначина (7) тече сада овим редом.

Како у почетку рачуна не знамо ништа о износима поремећаја **R**, осим да су они мали, то састављамо провизорне интеграционе таблице са

$$w^2 \frac{\mathrm{d}^2 \sigma}{\mathrm{d}\, t^2} = w^2 F_s = w^2 k^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\rho_i^{-3} \rho_{is} - r_i^{-3} s_i\right); \qquad \sigma = \xi,\ \eta,\ \zeta;$$

просто одбацујемо први члан десне стране у (7), а компоненте поремећајног убрзања рачунамо са $\mathbf{r}_K$. Такве таблице састављамо опет за извесан непаран број тренутака око t_0. После интеграљења добивамо **R**, тачније речено — његове приближне компоненте. Стога сад можемо наћи, за сваки аргумент привремених таблица, помоћу (4) величину q, а помоћу (6) — или одговарајућих Енкеових „f-таблица" — и величину f. Мада смо у почетку рачуна нашли само приближне вредности компонената **R**, ипак ће оне у већини случајева бити довољне за прелаз на коришћење тачних једначина (7).

Видимо да је овакав начин интеграљења диференцијалне једначине кретања компликованији и рачунски посреднији од претходно описана, али у њему цео рачун можемо изводити са знатно мањим бројем вредносних цифара. С друге стране, он нам даје много бољи увид у величину дејства поремећаја. Разуме се само по себи да ћемо пре почетка интеграљења израчунати, неким од поступака рачуна ефемерида, координате тела на Кеплеровој путањи, са свом жељеном тачношћу. Током интеграљења те вредности користимо за $\mathbf{r}_K$, а по завршетку рачуна примењујемо једначину (1), да бисмо добили стварно $\mathbf{r}$, за све тренутке рачуна, или само оне које ћемо искористити за поређење посматраних и рачунатих положаја.

Постоји неколико варијанти и овог начина интеграљења, но изложени поступак је аналитички најдиректнији.

26. ПОРЕМЕЋАЈИ ЕЛЕМЕНАТА КРЕТАЊА. У *Уводу* смо већ навели (в. стр. 5) да постоји и посредни начин интеграљења диференцијалне једначине стварног кретања небеског тела. Он се своди на примену Лагранжеве методе варијације константи за интеграљење диференцијалних једначина. Но ми, у ствари, применом ове Лагранжеве методе не интегралимо једначину кретања, него јој снижавамо ред. Друкчије речено, ми од система од три скаларне диференцијалне једначине другог реда 22(1) прелазимо на систем од шест скаларних диференцијалних једначина првог реда.

На поменутом месту *Увода* смо навели да за тих шест скаларних функција времена усвајамо елементе кретања. Наравно, у питању могу бити и две векторске величине, уколико су независне, а и више од шест скаларних, само је тада међу њима шест независних.

Начин увођења елемената Кеплерова кретања у рачун поремећаја састоји се у следећем.

Замислимо да је у неком тренутку t вектор положаја тела на стварној путањи $\mathbf{r}$, а брзина кретања да му је тада $\mathbf{v}$. Раније смо видели (одељак 8.) да са познатим векторима положаја и брзине — $\mathbf{r}_K$ и $\mathbf{v}_K$ — на непоремећеној путањи можемо да једнозначно одредимо елементе те Кеплерове путање.

Каква ће она бити — зависи од почетних услова, дакле опет само од $\mathbf{r}_K$ и $\mathbf{v}_K$ за исти тренутак t. Шта ћемо добити ако векторе $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ стварног кретања усвојимо за одговарајуће векторе кретања по некој Кеплеровој путањи? Ако ставимо да је

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_K(t) \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_K(t), \tag{1}$$

моћи ћемо, очигледно, да израчунамо једну, потпуно одређену, непоремећену путању. Та путања, због друге једначине (1), има заједничку тангенту са стварном путањом тела — друкчије речено, те две путање се додирују у тачки чији је вектор положаја одређен са $\mathbf{r}(t)$.

Кеплеров орбит небеског тела, одређен из услова (1), назива се *оскулациона путања за тренутак t*.

Нека су њени елементи $E_1(t)$, $E_2(t)$, ..., $E_6(t)$. Сад замислимо да смо исту конструкцију извели и за неки други, ранији или каснији, тренутак t_k:

$$\mathbf{r}(t_k)=\mathbf{r}_K(t_k), \quad \mathbf{v}(t_k)=\mathbf{v}_K(t_k).$$

Са векторима $\mathbf{r}_K(t_k)$ и $\mathbf{v}_K(t_k)$ израчунавамо елементе оскулационе путање за тренутак t_k и добивамо величине $E_1(t_k)$, $E_2(t_k)$, ..., $E_6(t_k)$. У општем случају ће бити

$$E_i(t_k)\neq E_i(t), \quad i=1, 2, \ldots, 6.$$

Оскулациона путања је за сваки тренутак равна крива, док стварна путања то није. Раван кретања тела по оскулационој путањи је одређена векторима $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, а како они не леже стално у истој равни, јасно је да различите оскулационе путање леже у различитим равнима. Једноставно речено, идући од тачке до тачке стварне путање, ми горњом конструкцијом добивамо различите оскулационе путање. Уочимо ли, дакле, било који елемент оскулационог орбита, он ће мењати своју вредност у зависности од тренутка t. Тако долазимо до *елемената кретања као функција времена*:

$$E_i=E_i(t), \qquad i=1, 2, \ldots, 6. \tag{2}$$

Стварну путању тела можемо схватити као обвојницу оскулационих путања, па елементе кретања по њима — у Кеплерову кретању константне величине — сада третирамо као променљиве параметре, функције времена.

Потребно је да увек имамо јасно пред очима разлику између оскулационе путање и путање какву конструишемо, рачуном орбита, на основи посматраних положаја тела. Та друга путања је геометријско-кинематичка апроксимација неког лука стварне путање; посматрани положаји припадају стварној путањи, која свакако није конусни пресек, какав изводимо рачуном орбита. Та „*рачунска путања*", да је тако назовемо, може да додирује стварну путању, може да је сече, но најчешће неће имати с њом ни једне заједничке тачке. Њу изводимо под претпоставком непостојања поремећајних дејстава, док је постојање различитих оскулационих путања управо последица поремећаја — последица чињенице да стварна путања није Кеплеров консуни пресек, са константним елементима.

Начелно говорећи, оскулациону путању не можемо добити из посматрања, рачуном орбита. Можемо добити тек неку њену апроксимацију, бољу или лошију. А ако познајемо оскулациони орбит за неки тренутак, онда за тај тренутак знамо и стварни положај и стварну брзину кретања небеског тела; довољно је да са елементима оскулационе путање израчунамо положај и брзину тела за епоху оскулације, па нам једначине (1) говоре да смо управо добили **r** и **v**. Закони кретања по оскулационој путањи идентични су, наравно, законима кретања по „рачунској путањи". Само што ми користимо „рачунску путању" у дужим или краћим временим интервалима са непромењеним елементима, а оскулациона путања се мења од тренутка до тренутка. Да се мало слободније изразимо, небеско тело, крећући се по својем стварном орбиту, вуче за собом оскулациону путању, која се стално мења. А од сваке те оскулационе путање ми стварно користимо само једну једину тачку — тачку додира, оскулације, са стварном путањом.

Знамо већ да врста непоремећене путање зависи од почетних услова кретања — у нашем случају од **r** и **v**. Како стварно ту врсту одређујемо, наћи ћемо на стр. 20—21. Тако онда тачке стварне путање тела можемо класификовати у елиптичке, параболичке или хиперболичке тачке, већ према томе да ли једначине (1) и поменути критеријум за врсту путање доводи до Кеплерове елипсе, параболе или хиперболе као оскулационе путање у посматраним тачкама стварног орбита тела. Одмах напоменимо да ћемо надаље стално сматрати да су све тачке стварне путање — елиптичке, како је у ствари случај са огромном већином путања малих планета и периодичних комета.

Сада нам је јасан разлог инсистирања на детаљном познавању закона кретања по Кеплеровим путањама; оне за нас нису само помоћне конструкције за апроксимативно приказивање веома компликована стварног кретања небеских тела, него и суштински важни појмови, помоћу којих управо и конструишемо ту стварну путању. Њу ћемо познавати чим знамо скуп свих оскулационих путања у посматраном временом интервалу. Друкчије речено, и опет поновљено, стварну путању ћемо знати чим добијемо једначине (2). Тада за сваки дати тренутак имамо вредности елемената оскулационе путање, а са њима — по познатим једначинама Кеплерова кретања — израчунавамо **r** и **v**, то јест положај и брзину кретања тела по стварној путањи.

Зато „*рачун специјалних поремећаја у елементима кретања*" и не морамо да схватимо друкчије, него као поступак извођења једначина (2) — то јест као поступак за налажење елемената оскулационих путања за дати тренутак.

Једначине (2) не можемо непосредно извести. Једноставно долазимо до диференцијалних једначина за ове елементе, тачније речено — до система диференцијалних једначина првог реда, облика

$$\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t} = G_i(t;\ E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_6),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6. \tag{3}$$

Интеграљењем тог система добили бисмо (2), но то интеграљење не можемо извести директно. Принуђени смо да користимо поступке нумеричког интеграљења, како смо у Уводу навели. То је управо случај *в*) одељка 23.

У наредним одељцима извешћемо овакве системе диференцијалних једначина, за разне врсте усвојених елемената E_i, а о ефективном интеграљењу знамо углавном све што нам је потребно. Зато погледајмо одмах како на овај начин узимамо у рачун дејство поремећаја.

У претходна два одељка видели смо како можемо доћи непосредно до стварних положаја тела у простору, другим речима, до произвољно „густог" низа тачака стварне путање. Такав рачун поремећаја је заиста најдиректнији у смислу конструисања стварне путање небеског тела, али нам — у неку руку — даје врло непрегледну слику о особинама саме путање. Из низа бројева, координата небеског тела, ми не видимо када путања има већу кривину, а када мању; колико се дуго она „држи" једне равни (наравно, у границама тачности нашег рачуна) и сл. Такву представу много боље добивамо ако рачун поремећаја спроводимо у елементима оскулационих путања. Добро знамо шта је Кеплеров орбит и како се тело по њему креће, што није случај са стварном путањом. А Кеплерова оскулациона путања је свакако боља апроксимација за стварно кретање, него ли она „рачунска путања": са стварном има у сваком случају једну заједничку тачку, тачку оскулације, а у њеној околини је свакако ближа стварној кривој кретања, од „рачунске путање". Зато нас ништа не смета да оскулациону криву користимо и за апроксимацију стварне путање у дужем или краћем времену око епохе оскулације. Све су то разлози зашто рачун поремећаја у координатама нема толико изразитих предности над рачуном поремећаја у елементима, да би га могао потпуно истиснути из употребе.

Претпоставимо да смо на основи низа посматраних положаја небеског тела израчунали Кеплеров орбит и поправили га тако да он што боље представља све посматране положаје. То је „рачунска путања", јер смо при њеној конструкцији потпуно апстраховали дејство поремећаја, али пошто она — претпостављамо — добро репрезентује посматране положаје тела (на стварној, поремећеној, путањи), свакако да много не одступа од неке оскулационе путање у временом интервалу посматрања. Уочимо неки елемент ове „рачунске путање" и означимо га са (E_i).

Резултат рачуна специјалних поремећаја у елементима кретања нека је, према (3), за уочени елемент E_i,

$$E_i(t_n) = E_i(t_0) + \int_{t_0}^{t_n} \frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

То нам, формално, представља једначину (2) за уочени i-ти елемент оскулационе путање. Другим речима, помоћу једначине (4) одређујемо оскулациони елемента E_i за епоху t_n, ако је позната вредност истог елемента за епоху t_0.

Нека је тренутак t_0 садржан у временом интервалу у коме су била посматрања небеског тела, одакле је изведена „рачунска путања". Нека је то била епоха елемената (E). Потребно је да рачун поремећаја спроведемо до тренутка t_n, то јест до поновног доласка у опозицију са Сунцем мале планете, или поновног повратка у перихел периодичне комете (када се ова тела могу посматрати са Земље). Зато ће нам послужити једначина (4) и њој одговарајуће за преостале оскулационе елементе. Међутим, ми не знамо оскулациону путању за епоху t_0, већ само „рачунску". Морамо, дакле, ставити да је

$$E_i(t_0) = (E_i). \tag{5}$$

Међутим, смемо очекивати — како смо раније навели — да ће ова апроксимација бити добра; шта више, да ће бити и потпуно довољна, у рачунском смислу, за израчунавање одређеног интеграла у (4) (рачун специјалних поремећаја првог реда). Но, ако је чак и тако, ипак ће цела разлика између „рачунског" елемента (E_i) и оскулационог за епоху t_0, тј. $E_i(t_0)$, ући у оскулациони елемент $E_i(t_n)$ за завршну епоху рачуна t_n. Строго, дакле, говорећи—$E_i(t_n)$ уопште и неће бити оскулациони елемент. Он ће то бити само ако је и $E_i(t_0)$ оскулациони, а ту вредност не познајемо.

У решавању овог проблема долази до изражаја она већ раније помињана примена рачуна поправки путања и у рачуну поремећаја, а не само у поправљању прве, „рачунске" путање. Другим речима, наизменичном применом рачуна поправки ми у ствари вршимо прелаз од „рачунских" елемената на оскулационе, за које важи једначина (4). То је својеврсни рачун сукцесивних апроксимација. Када смо, са претпоставком (5), израчунали „оскулационе" елементе за епоху t_n, применом једначина (4), онда ћемо са њима представљати посматране положаје тела. Или, радити још прецизније: за епоху сваког посматрања, t_{n+k}, $k=\ldots, -1, 1, 2, \ldots$, блиског епохи t_n, извести оскулационе елементе по (4), па са њима представити положаје тела. Разлике у координатам које се појаве биће, у највећој мери, последица недовољно тачног „оскулационог" елемента (E_i) из (5). Било како да радимо, добивене разлике између посматраних и рачунатих положаја ћемо искористити да поправимо елементе $E_i(t_n)$. У принципу је ствар врло једноставна: ако на неки систем елемената додамо дејства поремећаја и добијемо елементе са којима добро репрезентујемо посматране положаје тела, онда је полазни систем био — оскулациони. Тај једноставни закључак изводимо из (4).

Рецимо да смо у нашем замишљеном примеру поправили елементе $E(t_n)$, помоћу посматрања у близини тренутка t_n. Да ли је ова поправка била довољна, то јест — да ли су сада елементи $E(t_n)$ оскулациони? Немамо другог начина да ово проверимо него да погледамо како са тим поправљеним елементима представљамо иста посматрања. Уколико разлике $O—C$ у сферним координатама леже у границама могућих одступања, већ према тачности и рачуна и посматрања, наведене поправљене елементе можемо усвојити за оскулационе за епоху t_n. Да ли су они то заиста — показаће нам тек посматрања мале планте у наредној опозицији, или комете у наредном пролазу кроз перихел. А ако установимо веће разлике, не преостаје нам ништа друго него да примимо као чињеницу да поправљени елементи $E(t_n)$ још нису оскулациони. Тада наш рачун сукцесивних поправки настављамо тако, да спроведемо рачун поремећаја „унатраг": са елементима $E(t_n)$ као полазним рачунамо поремећаје од тренутка t_n до тренутка t_0. Додавањем њихова износа елементима $E(t_n)$ — са одговарајућим предзнаком, наравно — добићемо елементе за епоху t_0. Са њима представљамо посматрања из времена те епохе, поправљамо елементе $E(t_0)$, њих усвајамо за полазне у поновном рачуну поремећаја од t_0 до t_n — и тако даље. Јасно се види шта овим желимо да постигнемо; желимо да добијемо такве елементе, за произвољну епоху, на које је потребно додати само износе поремећаја, како бисмо дошли до елемената са којима добро представљамо посматрања. Такви елементи су онда оскулациони.

Наравно, овакав ток рачуна конструисања стварне путање небеског тела је само идеализована схема. Идеализована утолико, што нема апсолутно тачних посматрања, нити апсолутно тачног рачуна. С друге стране, користили смо претпоставку да су разлике између „рачунских" и оскулационих елемената мале. Просто речено, пракса рачуна стварних путања захтева велик нумерички рад, а „изненађења" своје врсте нису немогућа. Па ипак, елементи његова тока изложени су овим приказом.

Преостаје нам још у овом поглављу да видимо како ћемо изводити диференцијалне једначине (3) оскулационих елемената.

Увођењем појма оскулационих путања остале су у важности све релације Кеплерова кретања, али су сада у њима путањски елементи функције времена. То значи да извод произвољне величине U морамо да тражимо по обрасцу

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial U}{\partial E_i}\,\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t},$$

што пишемо у облику

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\delta U}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

Први члан представља, очигледно, извод по времену, какав би важио у случају кретања по непоремећеној путањи, дакле путањи са константним елементима. Други члан, такозвана *варијација од U*, тј.

$$\frac{\delta U}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial U}{\partial E_i}\,\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t},$$

не представља ништа друго него промену величине U узроковану искључиво променом елемената оскулационе путање, који су сада функције времена, $E_i=E_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, 6$. Одавде можемо одмах да закључимо: ако је U константа у Кеплерову кретању (дакле неки елемент или функција елемената), онда је

$$\frac{\partial U}{\partial t}=0, \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{\delta U}{\mathrm{d}t}\neq 0.$$

А ако је U променљива величина и у Кеплерову кретању — рецимо права аномалија, или брзина кретања, и сл. — онда је

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\delta U}{\mathrm{d}t}\neq 0.$$

Помоћу ових основних закључака извешћемо диференцијалне једначине оскулационих елемената.

Елементе кретања у сваком случају можемо да израчунамо помоћу почетних услова — у нашем случају помоћу **r** и **v**, дакле помоћу истих оних величина, помоћу којих дефинишемо оскулациону путању, и то једначинама (1). Ако, дакле, диференцирамо изразе којима представљамо елементе кретања као функције почетних услова **r** и **v** — и при томе поведемо рачуна о управо изведеним закључцима — добићемо тражене диференцијалне једначине. Стога је прво потребно да видимо како изгледају изводи ових основних величина, **r** и **v**, у случају поремећена кретања.

Пођимо од вектора положаја **r**. То је променљива величина и у Кеплерову кретању. Зато за њега морамо писати, према (6), да је

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\frac{\delta \mathbf{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

Први члан десне стране је, како смо већ рекли, извод вектора положаја по времену, какав би био у Кеплерову кретању. Он, дакле, није ништа друго него — брзина тела у непоремећеном кретању, $\mathbf{v}_K$. Исто тако, лева страна једначине (7) је извод по времену вектора положаја, што ће рећи — брзина стварног кретања тела. Тако (7) прелази у

$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\mathrm{d}\, t} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_K. \tag{8}$$

Тиме је одређена варијација вектора положаја.

Слично поступамо и за налажење варијације брзине; полазимо од једначине (6), која у овом случају даје

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\delta \mathbf{v}}{\mathrm{d}\, t}.$$

Користећи диференцијалне једначине непоремећена и поремећена кретања, рачунамо:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\, t} = -\mu\, r^{-3}\,\mathbf{r} + \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_K}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{r}_K}{\mathrm{d}\, t^2} = -\mu\, r_K^{-3}\,\mathbf{r}_K.$$

То ће рећи да је

$$\frac{\delta \mathbf{v}}{\mathrm{d}\, t} = -\mu\,(r^{-3}\,\mathbf{r} - r_K^{-3}\,\mathbf{r}_K) + \mathbf{F}. \tag{9}$$

Међутим, суштина појма оскулационе путање састоји се у усвајању вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ стварна кретања за одговарајуће векторе оскулационе путање: то нам казују основне једначине (1). Ако дакле њих искористимо у (8) и (9), добићемо основне једначине рачуна поремећаја у елементима кретања, у диференцијалном облику, као

$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\mathrm{d}\, t} = 0, \qquad \frac{\delta \mathbf{v}}{\mathrm{d}\, t} = \mathbf{F}. \tag{10}$$

Оне значе исто што и једначине (1).

Сада видимо да је начелно извођење извода оскулационих елемената врло просто. Потребно их је представити као функције од $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, па потражити варијацију тих израза. Она је идентички једнака изводу тог елемента — сада елемента оскулационе путање — а за варијације $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ искористити једначине (10).

Напоменимо, на завршетку овог одељка, да се за оскулациону путању често у литератури користи и назив *тренутна путања*, а за њене елементе — *тренутни елементи*. Називи су потпуно оправдани, јер су у питању промењиве величине, па се мора увек тачно фиксирати — на који тренутак времена се односе.

27. **РАЧУН СПЕЦИЈАЛНИХ ПОРЕМЕЋАЈА ВЕКТОРСКИХ ЕЛЕМЕНАТА.** За векторске елементе непоремећена кретања усвојили смо раније двоструку секторску брзину кретања тела, вектор $\mathbf{C}$, затим Лапласов интеграл дифренцијалне једначине Кеплерова кретања, вектор $\mathbf{D}$, и — због зависности поменутих вектора — још и скалар T, тренутак пролаза тела кроз перихел своје путање. Усвојимо сада ове елементе за параметре који одређују оскулациону елиптичку путању, па потражимо њихове диференцијалне једначине. Њиховим (нумеричким) интеграљењем добићемо их као функције времена.

27.1. Диференцијалне једначине. — Вектор $\mathbf{C}$ смо дефинисали једначином 5(2):

$$\mathbf{C}=[\mathbf{r}\,\mathbf{v}].$$

Њена варијација је

$$\frac{\delta\,\mathbf{C}}{\mathrm{d}\,t}=\left[\frac{\delta\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{v}\right]+\left[\mathbf{r}\,\frac{\delta\,\mathbf{v}}{\mathrm{d}\,t}\right],$$

а према 26(10) и чињеници да је $\mathbf{C}$ константа у Кеплерову кретању, добићемо

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}}{\mathrm{d}\,t}=[\mathbf{r}\,\mathbf{F}]. \tag{1}$$

$\mathbf{F}$ је поремећајно убрзање, дакле величина дата са 22(2). Зато можемо вектор $\mathbf{C}$, као елемент тренутне путање, писати као

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}_0+\int[\mathbf{r}\,\mathbf{F}]\,\mathrm{d}\,t,$$

а вредност интеграла потражити нумеричким поступцима. Но на то ћемо се вратити касније.

Потражимо сада извод вектора $\mathbf{D}$. Он је био дефинисан једначином 5(4):

$$\mathbf{D}=[\mathbf{v}\,\mathbf{C}]-\mu\,r^{-1}\,\mathbf{r}$$

Варијација радијусвектора r је такође једнака нули, што одмах закључујемо из $r^2=(\mathbf{r}\,\mathbf{r})$. Зато врло лако налазимо да је

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}=[\mathbf{F}\,\mathbf{C}]+\left[\mathbf{v}\,\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}}{\mathrm{d}\,t}\right]=[\mathbf{F}\,\mathbf{C}]+[\mathbf{v}\,[\mathbf{r}\,\mathbf{F}]]=$$
$$=2\,(\mathbf{v}\,\mathbf{F})\,\mathbf{r}-(\mathbf{r}\,\mathbf{F})\,\mathbf{v}-(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,\mathbf{F}. \tag{2}$$

Налажење извода тренутка пролаза кроз перихел је нешто компликованије, и то утолико, што ту величину нисмо представили непосредно као функцију почетних услова кретања $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, него посредно, помоћу ексцентричне аномалије.

Прво ћемо се позвати на Кеплерову једначину, и то у облику прве једначине 6(10):

$$\mu\,M=\mu\,E-D\sin E.$$

Варијација ове једначине је

$$\mu \frac{\delta M}{\mathrm{d}\, t} = (\mu - D \cos E) \frac{\delta E}{\mathrm{d}\, t} - \sin E \frac{\mathrm{d}\, D}{\mathrm{d}\, t},$$

или, користећи 6(11),

$$\mu \frac{\delta M}{\mathrm{d}\, t} = \varepsilon^2 r \frac{\delta E}{\mathrm{d}\, t} - \sin E \frac{\mathrm{d}\, D}{\mathrm{d}\, t}. \tag{3}$$

Варијацију интензитета вектора $\mathbf{D}$ можемо добити помоћу (2) и $D^2 = (\mathbf{D}\mathbf{D})$, али како нам је овде потребна и варијација ексцентричне аномалије, то ћемо оба ова извода потражити истовремено, и то помоћу једначина којима ексцентричну аномалију представљамо као функцију од $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. То су биле једначине 8(2) и 8(3):

$$\varepsilon^2 r = \mu - D \cos E \quad \text{и} \quad (\mathbf{r}\,\mathbf{v}) = D\, \varepsilon^{-1} \sin E. \tag{4}$$

У њима се јавља и константа ε, а да нађемо њену варијацију, позваћемо се на интеграл живе силе:

$$(\mathbf{v}\,\mathbf{v}) = 2 \mu\, r^{-1} - \varepsilon^2.$$

Одавде је одмах

$$\frac{\mathrm{d}\, \varepsilon}{\mathrm{d}\, t} = -\varepsilon^{-1} (\mathbf{v}\,\mathbf{F}). \tag{5}$$

Зато ћемо резултат диференцирања (4) моћи средити у

$$\begin{aligned} \cos E \frac{\mathrm{d}\, D}{\mathrm{d}\, t} - D \sin E \frac{\delta E}{\mathrm{d}\, t} &= 2\, \mathbf{r}\, (\mathbf{v}\,\mathbf{F}), \\ \sin E \frac{\mathrm{d}\, D}{\mathrm{d}\, t} + D \cos E \frac{\delta E}{\mathrm{d}\, t} &= \varepsilon\, (\mathbf{r}\,\mathbf{F}) - \varepsilon^{-1} (\mathbf{r}\,\mathbf{v})(\mathbf{v}\,\mathbf{F}). \end{aligned} \tag{6}$$

Ако прву једначину помножимо са $\cos E$, другу са $\sin E$ па их саберемо и у том збиру елиминишемо гониометријске функције ексцентричне аномалије помоћу (4), тј.

$$\sin E = \varepsilon\, D^{-1} (\mathbf{r}\,\mathbf{v}), \qquad \cos E = D^{-1} (\mu - \varepsilon^2 r)$$

добићемо за извод интензитета вектора $\mathbf{D}$

$$D \frac{\mathrm{d}\, D}{\mathrm{d}\, t} = \varepsilon^2 (\mathbf{r}\,\mathbf{v})(\mathbf{r}\,\mathbf{F}) + (C^2 - \varepsilon^2 r^2)(\mathbf{v}\,\mathbf{F}). \tag{7}$$

На сличан начин, тј. множењем прве једначине (6) са $-\sin E$, а друге са $\cos E$ и сабирањем налазимо и варијацију ексцентричне аномалије, која нам је потребна за једначину (3); и ту такође елиминишемо $\sin E$ и $\cos E$, као и раније:

$$D^2 \frac{\delta E}{\mathrm{d}\, t} = \varepsilon\, (\mu - \varepsilon^2 r)(\mathbf{r}\,\mathbf{F}) - \varepsilon^{-1} (\mu + \varepsilon^2 r)(\mathbf{r}\,\mathbf{v})(\mathbf{v}\,\mathbf{F}). \tag{8}$$

Ако сад (7) и (8) унесемо у (3) и средимо, доћи ћемо најзад до варијације средње аномалије:

$$\mu\varepsilon^{-1} D^2 \frac{\delta M}{\mathrm{d}\, t} = \varepsilon^2 (C^2 - \mu\, r)(\mathbf{r}\,\mathbf{F}) - (C^2 + \mu\, r)(\mathbf{r}\,\mathbf{v})(\mathbf{v}\,\mathbf{F}). \tag{9}$$

Сада се можемо позвати на дефиницију средње аномалије,

$$\mu\, M = \varepsilon^3 (t - T),$$

одакле је

$$\frac{\mathrm{d}\, T}{\mathrm{d}\, t} = \varepsilon^{-3} \left[3\, \varepsilon^2 (t - T) \frac{\mathrm{d}\, \varepsilon}{\mathrm{d}\, t} - \mu \frac{\delta M}{\mathrm{d}\, t} \right],$$

што ће са (5) и (9) коначно дати

$$\frac{\mathrm{d}\, T}{\mathrm{d}\, t} = -D^{-2} (C^2 - \mu\, r)(\mathbf{r}\,\mathbf{F}) + \varepsilon^{-2} [D^{-2} (C^2 + \mu\, r)(\mathbf{r}\,\mathbf{v}) - 3\,(t - T)]\,(\mathbf{v}\,\mathbf{F}). \tag{10}$$

Тако смо добили диференцијалне једначине векторско-скаларних елемената **C**, **D** и T — као оскулационих елиптичких елемената.

27.2. Поступак рачуна поремећаја. — Изведене диференцијалне једначине оскулационих елемената чине основу рачуна поремећаја. Потребно је још само да их нешто трансформишемо и то искључиво из техничких разлога рачунања.

Обратимо прво пажњу на поремећајно убрзање. Како изводе на које примењујемо поступке нумеричког интеграљења множимо интервалом w, и како су ти изводи хомогене функције поремећајног убразања, то ћемо тим истим временим интервалом „корака“ интеграљења помножити и $\mathbf{F}$. С друге стране, систематски ћемо занемаривати масу мале планете или комете, што значи да ћемо стављати да је

$$\mu = k^2 (1 + m) \approx k^2.$$

Због тога ће се показати као најзгодније да за „поремећајно убрзање“ усвојимо величину

$$\mathbf{F}_i = k w m_i (\rho_i^{-3}\, \boldsymbol{\rho}_i - r_i^{-3}\, \mathbf{r}_i),$$

$$\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}.$$

То је, наравно, израз за дејство једне, i-те, поремећајне велике планете. Но за укупно дејство нећемо формирати збир оваквих израза, него ћемо рачун обављати посебно за свако поремећајно тело. Произвољни оскулациони елемент E рачунаћемо по

$$E = E_0 + \sum_i \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\mathrm{d}\, E}{\mathrm{d}\, t} \right)_i \mathrm{d}\, t.$$

Другим речима, прво ћемо обавити нумеричко интеграљење, па онда сабрати добивене износе промена оскулационих елемената. Тиме се добива јаснији преглед тока промене сваког елемента, што је важно како за контролисање рачуна разликама, тако и за указивање на потребу промене првобитно усвојене вредности за w. Наиме, када бисмо већ у **F** сабрали дејства свих поремећајних тела, велика промена извода неког тренутног елемента нагнала би нас да скраћивањем интервала w рачунамо „гушће" све потребне величине — чак и за она тела, чија су дејства мала. А овако се интервал w интеграције — који више не мора да буде јединствен — може рационално прилагодити величини дејства сваке велике планете посебно.

Уобичајено је да када се током рачуна покаже да је првобитно w исувише велико — да се приступи преполовљавању тог интервала. А ако дејство неког поремећајног тела толико ослаби да се покаже да је неекономично наставити рачун са почетним w — онда се тај интервал удвостручи. Критеријуми за промену w у току рачуна су различити и практично зависе од конкретног случаја. Један добар критеријум се састоји у томе да увек настојимо да су нам треће разлике у интеграционим таблицама практично константне; наравно, њега се не можемо увек круто држати.

За коначни резултат рачуна ништа нас неће сметати што ћемо за различите поремећајне велике планете рачунати са различитим w. Интерполацијом можемо увек добити довољно тачне износе прираштаја оскулационих елемената.

Начелно је свеједно у ком ћемо координатном систему изводити рачун, но практично ће то увек бити екваторски систем, због координата великих планета, како смо већ раније напоменули. — Морамо обратити пажњу и на то, да у рачуну поремећаја елемената постоје две основне епохе: једно је епоха координатног система (астрономски почетак неке године, или стандардни еквинокцијум), а друго је епоха оскулације — тренутак на који се односе оскулациони елементи. За ту епоху тренутне путање увек усвајамо неки стандардни ефемеридски датум (стр. 73).

Из изведених израза за изводе оскулационих елемената **C**, **D** и T видимо да ћемо за сваки тренутак интеграљења морати рачунати **r** и **v**. За то имамо познате обрасце рачуна ефемерида, па се на овим питањима не морамо задржавати.

Преглед образаца

Векторски елементи

Ако су нам дати класични скаларни елементи кретања, онда раније изведене релације (стр. 33) прилагођавамо потребама овог рачуна:

$$R_x = \sin \Omega \sin i,$$

$$R_y = -\cos \Omega \sin i \cos \varepsilon - \cos i \sin \varepsilon,$$

$$R_z = -\cos \Omega \sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon;$$

компоненте јединичних вектора **P** и **Q** рачунамо по обрасцима на стр. 78—79 (екваторски координатни систем). Контрола:

$$(\mathbf{P\,P})=(\mathbf{Q\,Q})=(\mathbf{R\,R})=1, \quad (\mathbf{P\,Q})=(\mathbf{Q\,R})=(\mathbf{R\,P})=0.$$

$$C=\sqrt{p}, \quad D=e, \quad \mathbf{C}=C\,\mathbf{R}, \quad \mathbf{D}=D\,\mathbf{P}, \quad [\mathbf{C\,D}]=CD\,\mathbf{Q};$$

Контрола: $(\mathbf{C\,D})=(\mathbf{C}\,[\mathbf{C\,D}])=(\mathbf{D}\,[\mathbf{C\,D}])=0.$

$$\sum C_i^2=p, \quad \sum D_i^2=e^2, \quad \sum [\mathbf{C\,D}]_i^2=pe^2.$$

$$\varepsilon^2=(1-D^2)\,C^{-2}=a^{-1}.$$

Положај и брзина поремећеног тела и помоћне величине

$$k\,\varepsilon^3\,(t-T)=E-D\sin E,$$

$$\xi=(D\,\varepsilon^2)^{-1}(\cos E-D), \quad \eta=(D\,\varepsilon)^{-1}\sin E,$$

$$r=C^2-D^2\,\xi,$$

$$\xi'=-\eta\,r^{-1}, \quad \eta'=(Dr)^{-1}\cos E,$$

$$\mathbf{r}=\xi\,\mathbf{D}+\eta\,[\mathbf{C\,D}], \quad \mathbf{v}=\xi'\,\mathbf{D}+\eta'\,[\mathbf{C\,D}];$$

Контрола: $(\mathbf{r\,r})=(C^2-D^2\,\xi)^2, \quad (\mathbf{r\,v})=D^2\,\eta, \quad (\mathbf{v\,v})=2\,r^{-1}-\varepsilon^2.$

$$B=\varepsilon^{-2}\,[(C^2+r)\,\eta-3\,k\,(t-T)]\,,$$

$$\mathbf{W}=-\xi\,\mathbf{r}+B\,\mathbf{v}.$$

Величине E, r и B контролишемо разликама. — Рачун горњих величина изводимо за сваки тренутак интеграљења, са константним елементима кретања у случају рачуна поремећеја првог реда, или са променљивим, какве добивамо током интеграљења.

Поремећајно убрзање

$$\rho_i^2=(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+(z_i-z)^2,$$

$$\boldsymbol{\rho}_i=\mathbf{r}_i-\mathbf{r},$$

$$U_i=k\,w\,m_i, \quad \mathbf{F}_i=U_i\,(\rho_i^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_i-r_i^{-3}\,\mathbf{r}_i).$$

Координате великих планета (екваторски координатни систем) узимамо из поменутих извора (стр. 152), а тренутке за које рачунамо вредности извода оскулационих елемената бирамо тако да се по могућности поклопе са тренуцима за које се дају координате великих планета. ρ_i^{-3} и r_i^{-3}можемо налазити из посебних таблица, са аргументом — збиром квадрата координата (ρ_i^2, одн. r_i^2). У величину U_i улазе $k=0.0172020\ldots$, w у ефемеридским (или средњим) данима и m_i у јединицама Сунчеве масе (стр. 7).

Диференцијалне једначине оскулационих елемената

$$w\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}}{\mathrm{d}\,t}=[\mathbf{r}\,\mathbf{F}_i], \quad w\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}=[\mathbf{F}_i\,\mathbf{C}]+\left[\mathbf{v}\,w\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}}{\mathrm{d}\,t}\right], \quad k\,w\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,t}=(\mathbf{W}\,\mathbf{F}_i).$$

Како смо раније видели, средњу аномалију рачунамо по

$$M=k\,\varepsilon^3\,(t-T).$$

Но $t-T$ може да буде велик број, па би се све нетачности у израчунавању средњег дневног сидеричког кретања ($k\,\varepsilon^3$), помоћу **C** и **D**, преносиле и у средњу аномалију — дакле у положај поремећеног тела. Стога је препоручљиво, у случају великог временог интервала интеграљења, или далеког тренутка пролаза кроз перихел, да се средње кретање усвоји као независни тренутни елемент. Његову диференцијалну једначину није тешко извести на основи (5):

$$w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}k\,\varepsilon^3=-3\,k\,\varepsilon\,(\mathbf{v}\,\mathbf{F}_i).$$

Тада није потребно израчунавање све три компоненте од **C** и **D**, али у случају тачнијег рачуна боље је све их одређивати, па после сваког „корака" у интеграљењу користити контролу

$$(\mathbf{C}\,\mathbf{D})=0.$$

Нумеричко интеграљење обављамо по неком од поступака описаних на стр. 145—150. Често се полазна вредност оскулационог елемента не уноси у почетни члан низа првог збира, него додаје накнадно, пре рачунања положаја и брзине тела за наредни тренутак интеграционе схеме, како би се у сваком тренутку видео износ дејства поремећаја на оскулационе елементе. То је потребно ради евентуалне промене w током рада.

28. **РАЧУН СПЕЦИЈАЛНИХ ПОРЕМЕЋАЈА СКАЛАРНИХ ЕЛЕМЕНАТА.** Од низа величина које могу да играју улогу елемената Кеплерова кретања по елипси — које, дакле, могу бити усвојене за тренутне елементе поремећена кретања — у овом одељку усвојићемо следеће:

а) Средње сидеричко дневно кретање: $n=ka^{-3/2}$,
б) угао ексцентричности путање: $\varphi=\arcsin e$,
в) лонгитуду узлазног чвора: Ω,
г) нагиб путањске равни: i,
д) лонгитуду перихела: $\tilde{\omega}=\Omega+\omega$,
ђ) средњу аномалију: M_0 (за иницијалну епоху рачуна t_0).

Разлог за усвајање ових скаларних елемената је у томе, што се сви они изражавају на исти начин: неком мером за углове (користимо или лучне секунде и децималне делове, или степене и децималне делове). А разлог за усвајање лонгитуде перихела уместо аргумента латитуде перихела видећемо касније.

И овде нам је главни задатак извођење диференцијалних једначина ових скаларних елемената. О њиховој практичној примени нећемо морати рећи начелно ништа више од онога што смо навели за интеграљење система векторско-скаларних елемената. — Извођење диференцијалних једначина усвојених скаларних елемената је сада суштински врло просто: познајемо везе између векторских и ових елемената, а познајемо изводе векторских. Но сам рачун је доста компликован, па ћемо га ради боље прегледности поделити на неколико делова.

28.1. Посредне диференцијалне једначине. — Извешћемо прво изразе за изводе горе наведених скаларних оскулационих елемената у којима ће још фигурисати и векторско-скаларни елементи **C**, **D**, ε итд., а поремећајно убрзање ће се јављати у облику својих скаларних функција (**r F**), (**v F**), и сл. То ће нам бити „посредне диференцијалне једначине“, а касније ћемо размотрити могућности њихова поједностављења и трансформисања на изразе погодније за практичну употребу.

а) Средње сидерично дневно кретање. — Према 6(7) је

$$n=\frac{1}{\mu}\varepsilon^3 \quad \text{дакле} \quad \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{\mu}\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t},$$

а како већ знамо извод оскулационог елемента ε — то је дато једначином 27(5) — одмах имамо да је

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=-\frac{3}{\mu}\varepsilon(\mathbf{v}\,\mathbf{F}). \tag{n}$$

Поремећајно убрзање **F** представљамо општим обликом 22(2), као што ћемо и даље у овом одељку чинити.

б) Угао ексцентричности оскулационе путање. — По својој дефиницији и вези са векторским елементима је

$$e=\sin\varphi=\frac{D}{\mu},$$

дакле

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mu}\,\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\sec\varphi.$$

Извод интензитета вектора D дат је једначином 27(7), па је

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mu D}[\varepsilon^2(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,(\mathbf{r}\,\mathbf{F})+(C^2-\varepsilon^2 r^2)\,(\mathbf{v}\,\mathbf{F})]\sec\varphi. \tag{φ}$$

в) Лонгитуда узлазног чвора. — За налажење извода елемената позваћемо се на изразе за правоугле еклиптичке хелиоцентричне компоненте секторске брзине тела, тј. на једначине 7(5):

$$C_{e1}=(\mathbf{C}\,\mathbf{i})=C\sin\Omega\sin i,$$
$$C_{e2}=(\mathbf{C}\,\mathbf{j})=-C\cos\Omega\sin i.$$

Овде су **i** и **j** (и касније **k**) јединични вектори оса поменута координатног система. Варијација ових једначина даје

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{i}\right)=\sin\Omega\,\sin i\,\frac{\mathrm{d}\,C}{\mathrm{d}\,t}+C\cos\Omega\,\sin i\,\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,t}+C\sin\Omega\,\cos i\,\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{j}\right)=-\cos\Omega\,\sin i\,\frac{\mathrm{d}\,C}{\mathrm{d}\,t}+C\sin\Omega\,\sin i\,\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,t}-C\cos\Omega\,\cos i\,\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}.$$

Сада ћемо прву једначину помножити са $\cos\Omega$, другу са $\sin\Omega$ и сабрати их. Резултат решавамо по траженом изводу и користимо 27(1):

$$\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{C}\left[([\mathbf{r}\,\mathbf{F}]\,\mathbf{i})\cos\Omega+([\mathbf{r}\,\mathbf{F}]\,\mathbf{j})\sin\Omega\right]\operatorname{cosec} i.$$

Међутим, ако уведемо вектор

$$\mathbf{N}=\cos\Omega\,\mathbf{i}+\sin\Omega\,\mathbf{j},$$

добићемо коначни израз за извод у облику

$$\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{C}([\mathbf{r}\,\mathbf{F}]\,\mathbf{N})\operatorname{cosec} i. \qquad (\Omega)$$

Без икаквих тешкоћа ћемо закључити да је **N** јединични вектор правца чворне линије (ка узлазном чвору). Он, дакле, лежи и у еклиптичкој и у тренутној путањској равни.

i) *Нагиб путањске равни.* — Трећа компонента секторске брзине

$$C_{e\,3}=(\mathbf{C}\,\mathbf{k})=C\cos i$$

диференцирањем даје

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}}{\mathrm{d}\,t}\mathbf{k}\right)=\cos i\,\frac{\mathrm{d}\,C}{\mathrm{d}\,t}-C\sin i\,\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}.$$

Но како је

$$C^2=(\mathbf{C}\,\mathbf{C}), \qquad \text{то је} \qquad C\frac{\mathrm{d}\,C}{\mathrm{d}\,t}=\left(\mathbf{C}\,\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{C}}{\mathrm{d}\,t}\right)=(\mathbf{C}\,[\mathbf{r}\,\mathbf{F}]),$$

па за извод нагиба путањске равни добивамо

$$\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{C}\left[\frac{1}{C}\,(\mathbf{C}\,[\mathbf{r}\,\mathbf{F}])\cos i-([\mathbf{r}\,\mathbf{F}]\,\mathbf{k})\right]\operatorname{cosec} i. \qquad (i)$$

g) *Лонгитуда перихела.* — Како је

$$\frac{\mathrm{d}\,\tilde{\omega}}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,t}+\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t}, \qquad (\tilde{\omega})$$

то је потребно да нађемо извод елемента ω, аргумента латитуде перихела. За то ћемо поћи од треће једначине 7(6):

$$D_{e_3} = (\mathbf{D}\,\mathbf{k}) = D \sin\omega \sin i.$$

Она диференцирањем даје

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}\,\mathbf{k}\right) = \sin\omega \sin i\,\frac{\mathrm{d}\,D}{\mathrm{d}\,t} + D\cos\omega\sin i\,\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t} + D\sin\omega\cos i\,\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}.$$

Овде су нам већ познати изрази за извод Лапласова интеграла $\mathbf{D}$, једначина 27(2), извод његова интензитета, једначина 27(7), као и извод нагиба путањске равни, једначина (i). Међутим, коришћењем тих једначина дошли бисмо до прилично компликована израза за $\dfrac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t}$. Касније ћемо видети како га можемо знатно упростити, па ћемо се на овом месту задовољити једначином

$$\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{D}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}\,\mathbf{k}\right) - \sin\omega\sin i\,\frac{\mathrm{d}\,D}{\mathrm{d}\,t} - D\sin\omega\cos i\,\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}\right]\sec\omega\ \mathrm{cosesc}\ i. \qquad (\omega)$$

ђ) *Средња аномалија.* — Средња аномалија M је променљива величина и у Кеплерову кретању, па као елемент непоремећена кретања можемо усвојити само неку њену вредност M_0 за фиксирани тренутак t_0 (епоха елемената). Но, као и за сваку другу величину, и за њу важи општа релација 26(4):

$$M = M_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t. \qquad (1)$$

Међутим за подинтегралну функцију — извод средње аномалије у поремећеном кретању — морамо користити израз 26(6):

$$\frac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial\,M}{\partial\,t} + \frac{\delta\,M}{\mathrm{d}\,t}. \qquad (2)$$

Први члан десне стране је, како знамо, извод средње аномалије по времену, добивен из релација Кеплерова кретања, са константним елементима кретања. Зато из

$$M = M_0 + n(t - t_0)$$

изводимо да је

$$\frac{\partial\,M}{\partial\,t} = n. \qquad (3)$$

Међутим, у стварном кретању је сад и n променљива величина, а како (3) треба да користимо у изразима (2) и (1) за стварно кретање, то и за средње сидеричко дневно кретање n морамо усвојити једначину облика (1). Зато (3) прелази у

$$\frac{\partial\,M}{\partial\,t} = n = n_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t.$$

Уносећи ово у (2) рачунамо:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial\,M}{\partial\,t} + \frac{\delta\,M}{\mathrm{d}\,t}\right)\mathrm{d}\,t = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\,M}{\partial\,t}\,\mathrm{d}\,t + \int_{t_0}^{t} \frac{\delta\,M}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \int_{t_0}^{t} n_0\,\mathrm{d}\,t + \int_{t_0}^{t}\!\!\int \frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}t^2 + \int_{t_0}^{t} \frac{\delta\,M}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t.$$

Тако коначно (1) прелази у израз за налажење средње аномалије у поремећеном кретању:

$$M = M_0 + n_0\,(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\delta\,M}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t + \int_{t_0}^{t}\!\!\int \frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t^2. \qquad (M)$$

За разлику од других оскулационих елемената, средњу аномалију ћемо рачунати по обрасцу (M), како видимо, у пуном износу, док за друге елементе тражимо само прираштаје, њихове промене (услед дејства поремећаја) за временски интервал t—t_0.

У том изразу (M) познајемо све величине. Прва два члана чине средњу аномалију како би она изгледала у Кеплерову кретању, дакле са константним средњим кретањем n_0. У нашем случају је то сад вредност оскулационог елемента n за епоху оскулације t_0. У трећем члану се јавља варијација средње аномалије, а за њу смо већ извели једначину 27(9). Најзад, четврти члан — двоструки интеграл од извода средњег кретања — појавио се као последица чињенице што је средња аномалија променљива величина и у непоремећеном кретању. Ту сад видимо и разлог зашто смо за оскулациони елемент увели средње кретање, а не велику полуосу елиптичке путање — поред оног поменутог, чисто техничког разлога рачунања. Ми ћемо, дакле, у рачуну специјалних поремећаја са усвојеним елементима, рачунати како једноструки интеграл извода средњег кретања — ради налажења вредности оскулационог елемента n — тако и двоструки интеграл исте функције — ради налажења средње аномалије за сваки тренутак рачуна. Оба та рачуна изводићемо у истој интеграционој схеми функције $\dfrac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t}$.

28.2. Поремећајно убрзање. — Изведене једначине показују да се изводи класичних астрономских елемената путање у функцији поремећајног убрзања **F** не одликују неком нарочитом једноставношћу. Зато ћемо увести један посебан координатни систем и **F** разложити у компоненте дуж оса тога система. На тај начин ћемо посредне диференцијалне једначине оскулационих елемената моћи прилично упростити.

Покретни координатни систем уводимо на следећи начин. Основна раван нека му је тренутна путањска раван поремећена тела. Систем је хелиоцентрични; ξ-оса нека се поклапа са вектором положаја мале планете или комете (позитивно у смеру од Сунца ка телу), η-оса нека лежи у тренутној путањској равни а нека је уперена ка тачки на тренутној путањи чија је права аномалија једнака $v+90°$. ζ-оса ће тада имати правац нормале на (тренутну) путањску раван. Тако видимо да се овај координатни систем креће у складу са стварним кретањем тела. Без тешкоћа закључујемо да су јединични вектори координатних оса овога система

$$\frac{\mathbf{r}}{r},\quad \frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]}{Cr},\quad \frac{\mathbf{C}}{C}.$$

Што се тиче правоуглих еклиптичких компонената ових вектора, њих можемо одмах исписати, чим приметимо да нови систем добивамо из оног са јединичним векторима оса **P**, **Q** и **R**, када га обрнемо (у директном смеру) за угао између **P** и **r**, дакле v, око заједничке осе $\mathbf{C}:C=\mathbf{R}$. То ће рећи да у изразима за компоненте јединичних вектора **P**, **Q** и **R** — једначине 7(6), 8(4) и 7(5) — треба само угао ω сменити углом за v већим, дакле углом $\omega+v=u$. Ако ставимо да је

$$\frac{\mathbf{r}}{r}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\},\quad \frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]}{Cr}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\},$$

$$\frac{\mathbf{C}}{C}=\{c_1,\ c_2,\ c_3\},$$

онда ћемо, према реченом, имати да је

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i,\\
a_2 &= \sin\Omega\cos u+\cos\Omega\sin u\cos i,\\
a_3 &= \sin u\sin i;\\[4pt]
b_1 &= -\cos\Omega\sin u-\sin\Omega\cos u\cos i,\\
b_2 &= -\sin\Omega\sin u+\cos\Omega\cos u\cos i,\\
b_3 &= \cos u\sin i;\\[4pt]
c_1 &= \sin\Omega\sin \mathrm{i},\\
c_2 &= -\cos\Omega\sin i,\\
c_3 &= \cos i.
\end{aligned}$$

$$u=\omega+v.$$

Правоугле координате тела у овом покретном систему можемо израчунати помоћу

$$\begin{aligned}
\xi &= a_1x_e+a_2y_e+a_3z_e,\\
\eta &= b_1x_e+b_2y_e+b_3z_e,\\
\zeta &= c_1x_e+c_2y_e+c_3z_e,
\end{aligned}$$

ако знамо његове еклиптичке правоугле координате x_e, y_e и z_e. Те изразе ћемо користити за налажење положаја поремећајних тела у покретном систему:

$$\mathbf{r}_i = \{\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i\}. \tag{4}$$

А како смо покретни координатни систем везали за поремећено тело, то ће његов вектор положаја, у том систему, бити

$$\mathbf{r} = \{r,\ 0,\ 0\}. \tag{5}$$

Најзад, са F_1, F_2 и F_3 означимо компоненте поремећајног убрзања $\mathbf{F}$ у покретном систему. То значи да за $\mathbf{F}$ усвајамо израз

$$\mathbf{F} = F_1 \frac{\mathbf{r}}{r} + F_2 \frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]}{C r} + F_3 \frac{\mathbf{C}}{C}. \tag{6}$$

Раније смо већ навели да у ефективном рачуну специјалних поремећаја обрачунавамо посебно дејство сваке велике планете на оскулационе елементе, па те ефекте после сабирамо. Зато је довољно да у обзир узмемо дејство само једног поремећајног тела, то јест — да уместо 22(2) пишемо да је

$$\mathbf{F} = k^2 m_i (\rho_i^{-3} \boldsymbol{\rho}_i - r_i^{-3} \mathbf{r}_i) = k^2 m_i (K_i \mathbf{r}_i - \rho_i^{-3} \mathbf{r}), \tag{7}$$

са

$$K_i = \rho_i^{-3} - r_i^{-3}, \qquad \rho_i = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|.$$

Једначине (4) и (5) казују нам како изгледају компоненте вектора који се јављају у (7), у покретном координатном систему. Зато пројектовање $\mathbf{F}$ из (7) на осе покретног система доводи до

$$F_1 = k^2 m_i (K_i \xi_i - \rho_i^{-3} r),$$
$$F_2 = k^2 m_i K_i \eta_i,$$
$$F_3 = k^2 m_i K_i \zeta_i.$$

То су компоненте поремећајног убрзања (једног поремећајног тела) у једначини (6). Осим тога, међусобну даљину поремећеног и поремећајног тела сада изражавамо једноставно са

$$\rho_i^2 = (\xi_i - r)^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2.$$

Сада можемо све функције поремећајног убрзања $\mathbf{F}$, које се јављају у „посредним" диференцијалним једначинама оскулационих елемената, једноставно да изразимо помоћу компонената F_1, F_2 и F_3.

Тако, на пример, помоћу (6) сад лако рачунамо да је

$$[\mathbf{r}\,\mathbf{F}] = \frac{r}{C} F_2\, \mathbf{C} + \frac{1}{C} F_3 [\mathbf{r}\,\mathbf{C}],$$

$$[\mathbf{F}\,\mathbf{C}] = \frac{1}{r} F_1 [\mathbf{r}\,\mathbf{C}] + \frac{C}{r} F_2\, \mathbf{r}, \tag{8}$$

$$(\mathbf{r}\,\mathbf{F}) = r\,F_1,$$

$$(\mathbf{v}\,\mathbf{F}) = \frac{1}{r}\,(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,F_1 + \frac{C}{r}\,F_2,$$

и сл. А што се тиче пројекција неких вектора на осе **i**, **j** и **k** (еклиптичког координатног система), довољно ће нам бити да приметимо да раније дефинисани скалари a_i, b_i и c_i ($i=1, 2, 3$) нису ништа друго него косинуси углова између оса покретног система и оса **i**, **j** и **k** еклиптичког система.

Сада имамо углавном све припремљено за извођење система диференцијалних једначина усвојених оскулационих елемената.

28.3. Диференцијалне једначине. — Да бисмо добили диференцијалне једначине тренутних елемената у коначном облику, позиваћемо се на одговарајуће „посредне" једначине и наведено разлагање поремећајног убрзања **F**. Такође свуда прелазимо на класичне елементе кретања.

а) Средње сидерично дневно кретање. — Из једначина (n) и (8) одмах добивамо

$$\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{3\,\varepsilon}{\mu\,r}\,[(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,F_1 + C F_2],$$

па ако се још позовемо на

$$(\mathbf{r}\,\mathbf{v}) = \frac{D}{\varepsilon}\sin E \quad \text{и} \quad \sin v = \frac{C}{\varepsilon\,r}\sin E,$$

добићемо

$$\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{3\,\varepsilon}{\mu}\left(\frac{D}{C}\sin v\cdot F_1 + \frac{C}{r}\,F_2\right).$$

Сада прелазимо на скаларне елементе и занемарујемо масу мале планете или комете:

$$C^2 = \mu\,p = \mu\,a\cos^2\varphi, \quad D = \mu\sin\varphi, \quad \varepsilon^2 = \mu\,a^{-1}, \quad \mu = k^2,$$

па после нешто сређивања изводимо

$$\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{3\sqrt{p}}{p\sqrt{a}}\sin\varphi\sin v\cdot F_1 - \frac{3\sqrt{p}}{r\sqrt{a}}\,F_2\,. \tag{9}$$

б) Угао ексцентричности тренутне путање. — Заменом скаларних функција поремећајног убрзања које се јављају у (φ) помоћу (8), долазимо до

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = \frac{C}{\mu\,D}\left[\frac{C}{r}\,(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,F_1 + \left(\frac{C^2}{r} - \varepsilon^2\,r\right)F_2\right]\sec\varphi.$$

Затим ово трансформишемо, на сличан начин као и раније у

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = \frac{C}{\mu}\,[\sin v\cdot F_1 + (\cos v + \cos E)\,F_2]\sec\varphi,$$

где смо се позвали и на

$$\varepsilon^2 r = \mu - D \cos E, \quad r^{-1} = C^{-2} (\mu + D \cos v).$$

Зато је извод угла ексцентричности

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\sqrt{p}}{k} [\sin v \cdot F_1 + (\cos v + \cos E) F_2] \sec \varphi. \tag{10}$$

в) *Лонгитуда узлазног чвора.* — У једначини (☊) јавља се функција поремећајног убрзања ([**r F**] **N**). Према првој једначини (8) биће

$$([\mathbf{r}\,\mathbf{F}]\,\mathbf{N}) = r F_2 \left(\frac{\mathbf{C}}{C}\,\mathbf{N}\right) - r F_3 \left(\frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]}{C r}\,\mathbf{N}\right).$$

Први члан је једнак нули, **C** и **N** су међусобно нормални вектори. Оба вектора у другом скаларном производу су у тренутној путањској равни, а лако ћемо закључити да је међу њима угао $90° + \omega + v = 90° + u$. Стога је

$$([\mathbf{r}\,\mathbf{F}]\,\mathbf{N}) = r F_3 \sin u.$$

Тако једначина (☊) прелази у

$$\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,t} = \frac{r}{C} \frac{\sin u}{\sin i} F_3,$$

дакле,

$$\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,t} = \frac{r}{k\sqrt{p}} \frac{\sin u}{\sin i} F_3. \tag{11}$$

г) *Нагиб тренутне путањске равни.* — У једначини (*i*) имамо две скаларне функције од **F**. Прво рачунамо, као и раније,

$$([\mathbf{r}\,\mathbf{F}]\,\mathbf{C}) = r C F_2, \quad ([\mathbf{r}\,\mathbf{F}]\,\mathbf{k}) = r F_2 \left(\frac{\mathbf{C}}{C}\,\mathbf{k}\right) - r F_3 \left(\frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]}{C r}\,\mathbf{k}\right).$$

Међутим, према ономе што смо раније навели о осама покретног и еклиптичког координатног система, одмах видимо да је

$$\left(\frac{\mathbf{C}}{C}\,\mathbf{k}\right) = c_3 = \cos i, \quad \left(\frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]}{C r}\,\mathbf{k}\right) = b_3 = \cos u \sin i.$$

Због свега овог (*i*) прелази у

$$\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{r}{C} \cos u \cdot F_3,$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{r}{k\sqrt{p}} \cos u \cdot F_3. \tag{12}$$

g) *Лонгитуда перихела.* — Према једначини ($\tilde{\omega}$) прво морамо наћи извод аргумента латитуде перихела, тј. да обрадимо једначину (ω).

Да бисмо израчунали $\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}\,\mathbf{k}\right)$, полазимо од извода Лапласова интеграла, то јест од једначине 27(2):

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}=[\mathbf{F}\,\mathbf{C}]+[\mathbf{v}\,[\mathbf{r}\,\mathbf{F}]].$$

Применимо ли овде потребне једначине (8), овај извод прелази у

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}=-\,CF_1\,\frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]}{C\,r}+CF_2\,\frac{\mathbf{r}}{r}-(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,F_3\,\frac{\mathbf{C}}{C}+\frac{r}{C}\,F_2\,[\mathbf{v}\,\mathbf{C}].$$

Да бисмо и последњи члан свели на векторе дуж оса покретног координатног система, позваћемо се на

$$[\mathbf{r}\,\mathbf{C}]=(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,\mathbf{r}-r^2\,\mathbf{v},\quad \text{одакле је}\quad \mathbf{v}=r^{-2}\,[(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,\mathbf{r}+[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]],$$

дакле

$$[\mathbf{v}\,\mathbf{C}]=\frac{C^2}{r}\,\frac{\mathbf{r}}{r}-\frac{C}{r}\,(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,\frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]}{C\,r}.$$

Зато је коначно

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}=2\,CF_2\,\frac{\mathbf{r}}{r}-[CF_1+(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,F_2]\,\frac{[\mathbf{C}\,\mathbf{r}]}{C\,r}-(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,F_3\,\frac{\mathbf{C}}{C}.$$

Ту се сад јављају само јединични вектори оса покретног система. Помножимо ли ову једначину скаларно са $\mathbf{k}$, на левој страни добивамо тражено $\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}\,\mathbf{k}\right)$, а на десној су скаларни производи, респективно, a_3, b_3 и c_3. Зато је

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t}\,\mathbf{k}\right)=-\,C\cos u\sin i\cdot F_1+[2\,C\sin u-(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\cos u]\sin i\cdot F_2-$$
$$-(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\cos i\cdot F_3.$$

Извод скалара D смо већ нашли када смо формирали једначину (10):

$$\frac{\mathrm{d}\,D}{\mathrm{d}\,t}=C\sin v\cdot F_1+C\,(\cos v+\cos E)\,F_2.$$

Најзад, и последњи члан у (ω) познајемо; то је

$$\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}=\frac{r}{C}\cos u\cdot F_3.$$

Сад још само преостаје да ове три последње једначине помножимо одговарајућим факторима, према (ω), и да резултат средимо по компонентама поремећајног убрзања F_1, F_2 и F_3. Резултат тога рада биће диференцијална једначина за оскулациони елемент ω у облику:

$$\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t}=-\frac{C}{D}(\cos u+\sin\omega\sin v)\sec\omega\cdot F_1+$$
$$+\frac{1}{D}\left[2\,C\sin u-(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\cos u-C(\cos v+\cos E)\sin\omega\right]\sec\omega\cdot F_2-$$
$$-\frac{1}{D}\left[(\mathbf{r}\,\mathbf{v})+\frac{D}{C}r\sin\omega\cos u\right]\sec\omega\operatorname{ctg}i\cdot F_3.$$

На сличан начин као и раније одавде ћемо извести

$$\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t}=-\frac{C}{D}\cos v\cdot F_1+\frac{C^2+\mu\,r}{C\,D}\sin v\cdot F_2-\frac{r}{C}\operatorname{ctg}i\sin u\cdot F_3,$$

то јест

$$\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t}=-\frac{\sqrt{p}}{k}\,\frac{\cos v}{\sin\varphi}\,F_1+\frac{p+r}{k\sqrt{p}}\,\frac{\sin v}{\sin\varphi}\,F_2-\frac{r}{k\sqrt{p}}\operatorname{ctg}i\sin u\cdot F_3. \tag{13}$$

Додамо ли овамо, према ($\tilde{\omega}$), извод лонгитуде узлазног чвора, (11), добићемо

$$\frac{\mathrm{d}\,\tilde{\omega}}{\mathrm{d}\,t}=-\frac{\sqrt{p}}{k}\,\frac{\cos v}{\sin\varphi}F_1+\frac{p+r}{k\sqrt{p}}\,\frac{\sin v}{\sin\varphi}F_2-\frac{r}{k\sqrt{p}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,i\sin u\cdot F_3. \tag{14}$$

Сада видимо зашто смо инсистирали на употреби $\tilde{\omega}$ као оскулационог елемента, а не ω. За велику већину малих планета је нагиб путањске равни мали, па бисмо трећи члан у (13) морали делити малим бројем tg i. Употребом елемента $\tilde{\omega}$ смо ту незгоду врло лако уклонили, јер једначина (14) није ништа компликованија од оне (13). — Овакво решење потиче, наравно, из времена када се искључиво радило у еклиптичком координатном систему, дакле са елементима ☊, ω и i, дефинисаним у односу на раван еклиптике. А ако данас рачун изводимо у екваторском систему — са елементима ☊$'$, ω' и i' — можемо користити и ω, тј. једначину (13).

ђ) *Средња аномалија.* — За примену једначине (M) потребно је још само да уведемо компоненте поремећајног убрзања F_1, F_2 и F_3 као и скаларне елементе, у једначину за варијацију средње аномалије, тј. 27(9).

Помоћу (8) прво имамо да је

$$\mu\varepsilon^{-1}D^2\frac{\delta M}{\mathrm{d}\,t}=[(C^2-\mu\,r)\,\varepsilon^2 r-(C^2+\mu\,r)(\mathbf{r}\,\mathbf{v})^2 r^{-1}]\,F_1-$$
$$-C(C^2+\mu\,r)(\mathbf{r}\,\mathbf{v})\,r^{-1}F_2.$$

Сређујући ово извешћемо

$$\frac{\delta M}{\mathrm{d}\,t}=\frac{C^2\varepsilon}{\mu\,D}\left(\cos v-2\,\frac{D}{C^2}r\right)F_1-\frac{\varepsilon}{\mu\,D}(C^2+\mu\,r)\sin v\cdot F_2,$$

где смо користили, осим раније употребљених релација, и

$$C^2 = r^2 v^2 - (\mathbf{r}\,\mathbf{v})^2 = 2\,\mu\, r - \varepsilon^2 r^2 - (\mathbf{r}\,\mathbf{v})^2.$$

Потом уводимо скаларне елементе и налазимо, уз примену и

$$\varepsilon = C^{-2}(\mu^2 - D^2)^{1/2} = \frac{k}{\sqrt{p}} \cos\varphi,$$

варијацију средње аномалије

$$\frac{\delta M}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\sqrt{p}}{k}\left(\frac{\cos v}{\sin\varphi} - 2\,\frac{r}{p}\right)\cos\varphi \cdot F_1 - \frac{\sqrt{p}}{k}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\operatorname{ctg}\varphi \sin v \cdot F_2. \qquad (15)$$

Као што видимо, у свим једначинама за усвојене оскулационе елементе — (9), (10), (11), (12), (14) и (15) — појављује се квадратни корен параметра елиптичке путање, а, са изузетком прве, и Гаусова константа k. С друге стране, већ смо поменули да су изводи тренутних елемената хомогене функције поремећајног убрзања, односно његових компонената. Најзад, све ове изводе потребно је помножити временим интервалом w, ради примене раније описаних поступака интеграљења. Зато се показало као најзгодније да се компоненте поремећајног убрзања F_1, F_2 и F_3 смене величинама S, T и W на следећи начин:

$$F_1 = \frac{k}{w\sqrt{p}}\,S, \quad F_2 = \frac{k}{w\sqrt{p}}\,T, \quad F_3 = \frac{k}{w\sqrt{p}}\,W.$$

Тако ћемо доћи до коначног облика система диференцијалних једначина оскулационих елемената, на који непосредно примењујемо поступке нумеричког интеграљења:

$$w^2 \frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{3\,kw}{p\sqrt{a}} \sin\varphi \sin v \cdot S - \frac{3\,kw}{r\sqrt{a}}\,T,$$

$$w\,\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\sin v}{\cos\varphi}\,S + \frac{\cos v + \cos E}{\cos\varphi}\,T,$$

$$w\,\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,t} = \frac{r}{p}\,\frac{\sin u}{\sin i}\,W,$$

$$w\,\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{r}{p}\cos u \cdot W,$$

$$w\,\frac{\mathrm{d}\,\tilde{\omega}}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{\cos v}{\sin\varphi}\,S + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{\sin v}{\sin\varphi}\,T - \frac{r}{p}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,i \sin u \cdot W,$$

$$w\,\frac{\delta M}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{\cos v}{\sin\varphi} - 2\,\frac{r}{p}\right)\cos\varphi \cdot S - \left(1 + \frac{r}{p}\right)\operatorname{ctg}\varphi \sin v \cdot T.$$

Овај систем допуњујемо изразом за рачунање средње аномалије:

$$M = M_0 + n_0 (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\delta M}{\mathrm{d}\, t} \mathrm{d}\, t + \int_{t_0}^{t}\!\!\int \frac{\mathrm{d}\, n}{\mathrm{d}\, t} \mathrm{d} t^2.$$

Средње сидеричко дневно кретање n и двоструки интеграл извода тог средњег кретања рачунамо, како смо већ на свом месту поменули, по заједничкој интеграционој схеми, са основном функцијом $w^2\ \mathrm{d}n/\mathrm{d}t$. Но, морамо увек имати у виду да њеном једноструком интеграцијом добивамо $w(n - n_0)$, а не $n - n_0$.

Преглед образаца

У извођењу потребних једначина користили смо, како смо видели, еклиптички координатни систем. Међутим, у случајевима малог нагиба тренутне путањске равни, препоручљиво је радити у екваторском систему. За то је довољно да одмах на почетку рачуна пређемо на елементе Ω', ω' и i' — дакле у односу на екваторску раван (стр. 28—29) — па ће тиме отпасти и прерачунавање екваторских координата поремећајних тела у еклиптичке.

Положај тела на тренутној путањи

$$M = E - \sin\varphi \sin E, \qquad a^3 = \frac{k^2}{n^2}, \qquad p = a \cos^2 \varphi,$$

$$r \sin v = a \cos\varphi \sin E, \qquad r \cos v = a (\cos E - \sin\varphi).$$

Контрола: $r = a(1 - \sin\varphi \cos E)$.

Осим тога, контролисање разликама E, v и r.

Помоћне величине

$$u = \omega + v,$$

$$a_1 = \cos\Omega \cos u - \sin\Omega \sin u \cos i,$$
$$a_2 = \sin\Omega \cos u + \cos\Omega \sin u \cos i,$$
$$a_3 = \sin u \sin i;$$

$$b_1 = -\cos\Omega \sin u - \sin\Omega \cos u \cos i,$$
$$b_2 = -\sin\Omega \sin u + \cos\Omega \cos u \cos i,$$
$$b_3 = \cos u \sin i;$$

$$c_1 = \sin\Omega \sin i,$$
$$c_2 = -\cos\Omega \sin i,$$
$$c_3 = \cos i.$$

Контрола: збир квадрата компонената једнак јединици, скаларни производи једнаки нули. Поред тога, и контролни листови за све ове величине (тј. контролисање разликама).

$$(\Omega:W)=\frac{r}{p}\,\frac{\sin u}{\sin i}, \qquad (\tilde{\omega}:W)=\frac{r}{p}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,i\sin u,$$

$$(i:W)=\frac{r}{p}\cos u, \qquad (n:S)=-\frac{3\,kw}{p\sqrt{a}}\sin\varphi\sin v,$$

$$(\varphi:S)=\frac{\sin v}{\cos\varphi}, \qquad (n:T)=-\frac{3\,kw}{r\sqrt{a}},$$

$$(\varphi:T)=\frac{\cos v+\cos E}{\cos\varphi}, \qquad (M:S)=\left(\frac{\cos v}{\sin\varphi}-2\,\frac{r}{p}\right)\cos\varphi,$$

$$(\tilde{\omega}:S)=-\frac{\cos v}{\sin\varphi}, \qquad (M:T)=-\left(1+\frac{r}{p}\right)\operatorname{ctg}\varphi\sin v.$$

$$(\tilde{\omega}:T)=\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin v}{\sin\varphi},$$

Поремећајно убрзање

Правоугле координате поремећајног тела у покретном систему:

$$\xi_i=a_1\,x_i+a_2\,y_i+a_3\,z_i,$$

$$\eta_i=b_1\,x_i+b_2\,y_i+b_3\,z_i,$$

$$\zeta_i=c_1\,x_i+c_2\,y_i+c_3\,z_i.$$

Координате x_i, y_i и z_i су еклиптичке или екваторске, већ према томе који смо систем усвојили на почетку рачуна.

$$\rho_i^2=(\xi_i-r)^2+\eta_i^2+\zeta_i^2,$$

$$K_i=\rho_i^{-3}-r_i^{-3}, \quad N_i=k\,w\,m_i\sqrt{p},$$

$$S=N_i\,(K_i\,\xi_i-\rho_i^{-3}\,r),$$

$$T=N_i\,K_i\,\eta_i,$$

$$W=N_i\,K_i\,\zeta_i.$$

Диференцијалне једначине и средња аномалија

$$w\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\,t}=(\Omega:W)\,W, \qquad w\frac{\mathrm{d}\,\tilde{\omega}}{\mathrm{d}\,t}=(\tilde{\omega}:S)\,S+(\tilde{\omega}:T)\,T+(\tilde{\omega}:W)\,W,$$

$$w\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}=(i:W)\,W, \qquad w^2\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t}=(n:S)\,S+(n:T)\,T,$$

$$w\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t}=(\varphi:S)\,S+(\varphi:T)\,T, \qquad w\frac{\delta M}{\mathrm{d}\,t}=(M:S)\,S+(M:T)\,T,$$

$$M=M_0+n_0\,(t-t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\delta M}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t+\iint\limits_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t^2.$$

29. **ОСВРТ НА НУМЕРИЧКИ ДЕО РАЧУНА СПЕЦИЈАЛНИХ ПОРЕМЕЋАЈА.** Нумерички део рачуна специјалних поремећаја састоји се, како смо видели, у израчунавању износа извода функција које тражимо (координата или елемената) и у нумеричком интеграљењу. Обрасци по којима се израчунавања врше су аналитички једноставни, али их је велик број, нарочито ако тражимо оскулационе елементе. Већ смо навели да ефективни рачун може да обухвата и дуге времене интервале. Просто речено, рачун специјалних поремећаја захтева често веома обимна нумеричка израчунавања. Без тешкоћа ћемо закључити да је иста ствар и са рачуном поправки путања.

Због тог разлога се овај начин конструисања стварне путање небеских тела прилагођавао, колико је било могуће, средствима за рачунање, све у циљу смањивања нумеричког дела рачуна. Тако су били увођени различити оскулациони елементи, без обзира на своје геометријско или кинематичко тумачење, како би се добиле што једноставније диференцијалне једначине. Но тим путем се није дошло до осетнијег смањења нумеричког рачуна. Исто тако, предлагани су разни поступци у којима основни аргумент диференцијалних једначина није било време, него нека друга променљива величина (рецимо ексцентрична или права аномалија), па се после уводила веза тог новог аргумента са временом. Ни истраживања у том правцу нису довела до приметнијег смањења рачуна.

Током прошлог века ефективни рачун се изводио скоро искључиво помоћу логаритама. Управо су астрономски рачуни увели у широку употребу тзв. адиционе и суптракционе логаритме, тачније речено таблице које дају логаритам збира одн. разлике, са датим логаритмима појединих чланова. У то време су се користиле сферне еклиптичке координате и класични астрономски елементи. Везе између њих су релативно једноставне и погодне — било непосредно, било увођењем једноставних смена — за рачун помоћу логаритама. Почетком овог века добили су калкулатори ново средство за рачунање: механичке рачунске машине, прво на ручни, а потом и на електрични погон. Засноване на веома простом принципу бројања обртаја, оне су се временом развиле у компликоване уређаје, но још увек само механичке, способне за узастопно вршење неколико рачунских операција. Такве машине су представљале велик корак напретка у техници астрономских рачуна. Захваљујући њима се прешло на сферне екваторске координате — у којима се посматрања непосредно и обављају — а и отпала је употреба разних помоћних величина, уведених искључиво ради трансформације израза на облик погодан за логаритамско рачунање. Такође се све више примењује векторски и матрични начин писања у аналитичком рачуну, због могућности непосредног рачунања.

Од пре тридесетак година почиње развој великих аутомата за рачунање. У њима врло брзо налази своје место и електроника, што је у великој мери повећало брзину обављања рачунских операција. Такви уређаји се развијају у чисто електронске рачунске машине, чији принцип није више механички, него се заснива на пролазу електричних импулса кроз кола са различитим електронским елементима. Паралелно се развија неколико основних типова ових аутомата. Један од њих, тзв. дигиталне електронске рачунске машине, чија се основа рада своди, најгрубље речено, на пребројавање електричних импулса, представља — педесетих година овог века — већ веома компликоване и гломазне уређаје, са стотинама, па и хиљадама, електронских цеви. Главна карактеристика њихова рада је брзина и способност рачунања са великим бројем цифара.

Природно је да су такви уређаји за рачунање нашли своју примену и у Астрономији. Специјално у свим поступцима рачуна поремећаја. Сада се обрасци за рачунање прилагођавају принципима рада машине, а њене могућности су толике, да се практично не поставља питање једноставности аналитичких израза. Специјално — нумеричко интеграљење се врши потпуно аутоматски; машина се, на пример, подеси да „сама" промени „корак" интеграљења, времени интервал w, када се за то укаже потреба. Обрасци за интеграљење су, често, различити од оних најједноставнијих, које смо у овом курсу користили, пошто се — нагласимо то још једном — све формуле претходно прилагођавају „језику" машине, то јест прилагођавају принципима њена рада. Друкчије речено, месеци напорног рада калкулатора са ручном машином за рачунање сведени су сада на један или два часа рада овакве електронске машине.

Последњих година врши се убрзани развој електронских рачунских аутомата у којима су електронске цеви замењене полупроводничким елементима, транзисторима и диодама различитих типова и конструкција. Тиме је истовремено знатно смањена и запремина уређаја и потрошња електричне енергије. Такорећи сваки напредак електронике, необично брз у наше време, оставља свој траг и у машинама за рачунање. Све нам то даје реалне наде да ће у блиској будућности електронска рачунска машина великог капацитета и велике брзине рада постати исто онако обичан и приступачан уређај, као што је данас то најбољи модел механичко-електричне рачунске машине.

Најзад, поменимо овде и рад на прилагођавању електронских рачунских аутомата за вршење аналитичких рачуна. На проблемима ове врсте данас се такође убрзано ради; међу првим експериментима ове врсте успешно је обављено развијање у ред функција f и g, а у току су знатно компликованији радови из теорије планетског кретања. Тако ће ове електронске машине наћи и у Астрономији још ширу примену, но што је данас имају.

ДОДАТАК

НУМЕРИЧКО ИНТЕГРАЉЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА НЕБЕСКИХ ТЕЛА

Извешћемо овде у најкраћим цртама основе поступака за нумеричко интеграљење диференцијалних једначина првог и другог реда и то само оних типова који се јављају у овом курсу. Примену тих поступака смо већ изложили на стр. 81—83 и 145—150. О нумеричком интеграљењу диференцијалних једначина постоји веома обимна литература, са детаљно разрађеним и испитаним поступцима. Рад у тој области нумеричке математике постао је поново интензиван са појавом великих електронских аутомата за рачунање. Међутим, ми смо се задржали на само једном поступку за нумеричко интеграљење диференцијалних једначина кретања небеских тела. Он је изграђен управо за те потребе, најдуже је био у астрономској пракси — показавши тамо веома добре резултате — а његовој примени се лако прилагођавају како велики, тако и мали, џепни, електронски рачунари.

1. ИНТЕРПОЛАЦИЈА. — Нека су нам за дискретни низ вредности аргумента t

$$t_a, \ldots, t_{-2}, \quad t_{-1}, \quad t_0, \quad t_1, \quad t_2, \ldots, t_b \tag{1}$$

познате одговарајуће нумеричке вредности функције $f=f(t)$:

$$f_a, \ldots, f_{-2}, \quad f_{-1}, \quad f_0, \quad f_1, \quad f_2, \ldots, f_b. \tag{2}$$

Интерполација је поступак за налажење $f=f(t_n)$ када се t_n не поклапа ни са једним аргументом из низа (1), али је $t_a<t_n<t_b$. Најчешће је у употреби полиномска интерполација. Она конструише, на основи вредности из (1) и (2), аналитички израз за полином одговарајућег реда, који пролази кроз тачке

$$M_i(t_i,\, f_i), \quad i=a, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, b.$$

Такав израз се назива интерполациони образац. Нека је његова једначина $F=F(t)$. Он апроксимира непознату функцију $f=f(t)$,

$$F(t_k)\begin{cases}=f(t_k) & \text{за } t_k \text{ из низа } (1),\\ \approx f(t_k) & \text{за } t_k \text{ које није у } (1),\ t_a<t_k<t_b;\end{cases}$$

апроксимација је утолико боља, уколико је низ (1) „гушћи". Тако нам интерполација, у ширем смислу те речи, омогућава да оперишемо са познатим аналитичким изразом $F(t)$ уместо непознатог $f(t)$, но имајући увек на уму да радимо са приближним величинама, већег или мањег степена тачности.

Ми ћемо овде оперисати само са еквидистантним распоредом аргумената из (1); то ће рећи да је

$$t_{i+1}-t_i=w=\text{const}, \qquad i=\cdots, -1, 0, 1, \ldots .$$

Тада је најзгодније да се конструкција интерполационог полинома обави помоћу вредности f_i функције f из (2) и њихових *разлика.*

„*Разлике првог реда*" (или „прве разлике") вредности f_i су

$$f^1_{i+1/2}=f_{i+1}-f_i, \qquad i=\cdots, -1, 0, 1, \ldots;$$

„*разлике другог реда*" („друге разлике") су прве разлике првих разлика:

$$f^2_i=f^1_{i+1/2}-f^1_{i-1/2};$$

„*разлике трећег реда*" („треће разлике") су прве разлике других:

$$f^3_{i+1/2}=f^2_{i+1}-f^2_i;$$

и тако даље. Све разлике, дакле, означавамо са два индекса. Горњи означава ред разлике (прва, друга, трећа, . . .), а доњи њено место у Гаус-Енкеовој схеми (таблици) вредности функције и њених разлика, како је састављамо за практичну употребу. У основну колону схеме, колону вредности f_i, уписујемо нумеричке вредности функције f, па потом рачунамо и уписујемо у схему колоне разлика:

$$
\begin{array}{lllll}
\cdots\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots \\
t_{-2}\cdots\cdot f_{-2} & & f^2_{-2} & & f^4_{-2}\cdots\cdot \\
 & f^1_{-3/2} & & f^3_{-3/2} & \cdots\cdot \\
t_{-1}\cdots\cdot f_{-1} & & f^2_{-1} & & f^4_{-1}\cdots\cdot \\
 & f^1_{-1/2} & & f^3_{-1/2} & \cdots\cdot \\
t_0\cdots\cdot f_0 & & f^2_0 & & f^4_0\cdots\cdot \\
 & f^1_{1/2} & & f^3_{1/2} & \cdots\cdot \\
t_1\cdots\cdot f_1 & & f^2_1 & & f^4_1\cdots\cdot \\
 & f^1_{3/2} & & f^3_{3/2} & \cdots\cdot \\
t_2\cdots\cdot f_2 & & f^2_2 & & f^4_2\cdots\cdot \\
\cdots\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots
\end{array}
$$

На „*главним хоризонталама*" схеме налазе се вредности функције f_i и њене разлике парног реда. Елементе схеме на тим хоризонталама карактерише цео број као доњи индекс; горњи индекс је паран број. Разлике непарног реда су на хоризонталама које су, геометријски, на половини пута између главних хоризонтала. Зато елементи на њима имају доњи индекс $(2\,i+1)/2$.

На тај начин су сви елементи схеме — вредности функције и њихове разлике — распоређени као поља исте боје на шаховској плочи. То су *главни елементи*. *Помоћне* или *изведене елементе* (који би у схеми заузели досада празна места између главних елемената) дефинишемо аритметичком средином суседних главних елемената исте колоне:

$$f_{i+1/2}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_i),$$

$$f^1_i=\frac{1}{2}(f^1_{i+1/2}+f^1_{i-1/2}),$$

$$f^2_{i+1/2}=\frac{1}{2}(f^2_{i+1}+f^2_i),$$

и тако даље. Доњи индекс је у складу са положајем елемента у схеми, мада га тамо не уписујемо. Лако је показати да и за ове изведене елементе важи основна дефиниција разлика. На пример:

$$f_{i+1/2}-f_{i-1/2}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_i)-\frac{1}{2}(f_i+f_{i-1})=$$

$$=\frac{1}{2}(f_{i+1}-f_i)+\frac{1}{2}(f_i-f_{i-1})=\frac{1}{2}(f^1_{i+1/2}+f^1_{i-1/2})=f^1_i\,.$$

Напоменућемо овде да се у пракси нумеричког интеграљења, где се користи Гаус-Енкеова схема вредности функције и њених разлика, колоне разлика најчешће пишу с леве стране од основне колоне f_i.

Помоћу основне дефиниције разлика (која нам даје вредност разлике два узастопна елемента на истој вертикали схеме) можемо извести и став о разлици два елемента на истој вертикали, али који нису узастопни. Одредимо, рецимо, разлику

$$f_i - f_0.$$

По дефиницији ће бити:

$$f^1_{1/2} = f_1 - f_0,$$

$$f^1_{3/2} = f_2 - f_1,$$

$$f^1_{5/2} = f_3 - f_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^1_{i-3/2} = f_{i-1} - f_{i-2},$$

$$f^1_{i-1/2} = f_i - f_{i-1}.$$

Збир ових једначина даје тражену разлику:

$$f^1_{1/2} + f^1_{3/2} + \cdots + f^1_{i-3/2} + f^1_{i-1/2} = f_i - f_0.$$

Очигледно је да овај резултат можемо одмах и генералисати: разлика две разлике реда r једнака је збиру свих разлика реда $r+1$, које се у схеми налазе између уочених двеју разлика реда r. При томе саме функције сматрамо за њихове разлике нултог реда. Разумљиво је да овај став важи и у систему помоћних (изведених) елемената схеме.

У ранијем одељку о нумеричком интеграљењу диференцијалних једначина кретања небеских тела користили смо оригиналне ознаке Гаус-Енкеове схеме $f^{(n)}(a+r\,w)$, но овде употребљавамо, ради краћег писања и сажетијег извођења, скраћене ознаке

$$f^n_r = f^{(n)}(a+r\,w).$$

За разлике негативног реда користићемо ознаке

$$f^{-n}_r = {}^{(n)}f(a+r\,w).$$

Вратимо се сада на непосредни задатак интерполације.

Са састављеном схемом датих вредности f_i из (2) и њихових разлика приступамо коришћењу неког интерполационог обрасца. Нека се тражи $f(t)$. Доње индексе елемената схеме одредићемо тако да буде $t_0 < t < t_1$, па ће бити и $f_0 < f(t) < f_1$, уколико само познајемо довољно „густо" вредности f_i, то јест ако је схема састављена са довољно малом константном разликом wизмеђу аргумената t_i. За нову променљиву усвајамо неименовани број

$$n = \frac{1}{w}(t - t_0). \tag{3}$$

Са свим овим ознакама Њутнов (силазни) интерполациони образац гласи:

$$f(t)=f_n=f_0+\frac{1}{1!}\,n\,f^1_{1/2}+\frac{1}{2!}\,n\,(n-1)\,f^2_1+$$

$$+\frac{1}{3!}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,f^3_{3/2}+\cdots.$$

Но погледамо ли како у схеми стоје разлике које се у овом обрасцу јављају, закључићемо да он не користи вредности функције f_i за $i<0$. Због те његове једностраности он се практично и не употребљава, већ се из њега изводе други интерполациони обрасци, који се користе у пракси. Такав је, на пример, Стирлингов интерполациони образац

$$f_n=f_0+\frac{1}{1!}\,n\,f^1_0+\frac{1}{2!}\,n^2 f^2_0+\frac{1}{3!}\,n\,(n^2-1^2)\,f^3_0+$$

$$+\frac{1}{4!}\,n^2\,(n^2-1^2)\,f^4_0+\frac{1}{5!}\,n\,(n^2-1^2)\,(n^2-2^2)\,f^5_0+$$

$$+\frac{1}{6!}\,n^2\,(n^2-1^2)\,(n^2-2^2)\,f^6_0+\cdots. \tag{4}$$

Све његове разлике су, дакле, на хоризонтали $i=0$; оне непарног реда су стога изведени елементи схеме (аритметичке средине).

Беселов интерполациони образац

$$f_n=f_{1/2}+\frac{1}{1!}\left(n-\frac{1}{2}\right)f^1_{1/2}+\frac{1}{2!}\,n\,(n-1)\,f^2_{1/2}+$$

$$+\frac{1}{3!}\,n\,(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)f^3_{1/2}+\frac{1}{4!}\,n\,(n^2-1^2)\,(n-2)\,f^4_{1/2}+$$

$$+\frac{1}{5!}\,n\,(n^2-1^2)\,(n-2)\left(n-\frac{1}{2}\right)f^5_{1/2}+$$

$$+\frac{1}{6!}\,n\,(n^2-1^2)\,(n^2-2^2)\,(n-3)\,f^6_{1/2}+\cdots \tag{5}$$

користи разлике на хоризонтали $i=1/2$, па су разлике парног реда изведени елементи схеме.

При ефективном коришћењу интерполационих образаца имамо на уму један став из нумеричке математике, који се лако доказује: r-те разлике полинома реда r су све међусобно једнаке, па су све разлике реда већег од r једнаке нули, и то независно од величине интервала w. Наша непозната функција $f=f(t)$ најчешће није полином, но у схеми њених вредности и њихових разлика приметићемо да су разлике неког реда, рецимо k, практично међусобно једнаке. Још боље ћемо то приметити у релативно брзој промени предзнака разлика реда $k+1$. То значи да нам интерполациони образац, који користи све разлике закључно са k-тим, представља аналитички израз за полином реда k, којим апроксимирамо функцију $f(t)$. Смањивањем интервала w аргумента t долазимо у могућност да апроксимацију извршимо и полиномом нижег реда, све у зависности од степена тачности с којим рачунамо. Ове основне чињенице имају своје значење и у поступку нумеричког интеграљења, па стога подсећамо на њих.

2. НУМЕРИЧКО ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ. — Интерполациони обрасци нам омогућују да нађемо нумеричку вредност извода функције $f(t)$, чији низ (2) нумеричких вредности познајемо, за неки дати аргумент t. Поменути обрасци се могу написати у општем облику

$$f_n = \varphi_0(n) f_a + \varphi_1(n) f_b^1 + \varphi_2(n) f_c^2 + \cdots; \tag{6}$$

променљива t је садржана у $\varphi_i(n)$, посредством (3). Стога је први извод по t једначине (6)

$$f_n' = f_a \frac{d}{dt}\varphi_0(n) + f_b^1 \frac{d}{dt}\varphi_1(n) + f_c^2 \frac{d}{dt}\varphi_2(n) + \cdots.$$

Међутим је, према (3),

$$\frac{d}{dt}\varphi_i(n) = \frac{d}{dn}\varphi_i(n) \cdot \frac{dn}{dt} = \frac{1}{w}\frac{d}{dn}\varphi_i(n),$$

па је

$$w f_n' = f_a \frac{d}{dn}\varphi_0(n) + f_b^1 \frac{d}{dn}\varphi_1(n) + f_c^2 \frac{d}{dn}\varphi_2(n) + \cdots.$$

Овај резултат се може генералисати у

$$w^k f_n^{(k)} = f_a \frac{d^k}{dn^k}\varphi_0(n) + f_b^1 \frac{d^k}{dn^k}\varphi_1(n) + \cdots,$$

за извод произвољног реда ($k = 1, 2, 3, \ldots$) по аргументу t.

На пример, у Беселовом интерполационом обрасцу (5) је

$$\varphi_0(n) = 1, \quad \varphi_1(n) = n - \frac{1}{2}, \quad \varphi_2(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n),$$

$$\varphi_3(n) = \frac{1}{6}\left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right), \text{ итд.},$$

одакле диференцирањем по n изводимо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,n}\varphi_0(n)=0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,n}\varphi_1(n)=1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,n}\varphi_2(n)=\frac{1}{2}(2\,n-1), \ \ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,n^2}\varphi_0(n)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,n^2}\varphi_1(n)=0, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,n^2}\varphi_2(n)=1, \ \ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,n^3}\varphi_0(n)=\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,n^3}\varphi_1(n)=\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,n^3}\varphi_2(n)=0, \quad \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,n^3}\varphi_3(n)=1, \ \ldots,$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

На тај начин долазимо до образаца за нумеричко диференцирање:

$$w f_n'=f_{1/2}^1+\left(n-\frac{1}{2}\right)f_{1/2}^2+\frac{1}{2}\left(n^2-n+\frac{1}{6}\right)f_{1/2}^3+\cdots,$$

$$w^2 f_n''=f_{1/2}^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)f_{1/2}^3+\cdots,$$

$$w^3 f_n'''=f_{1/2}^3+\cdots,$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

За нумеричко интеграљење биће нам потребни ови изрази за диференцирање не за неку произвољну вредност аргумента t, између t_0 и t_1, већ управо за аргумент који је у низу (1). Њега ћемо онда усвојити за t_0, па (3) даје $n=0$. Уношењем овог у претходне изразе добивамо да је

$$w f_0'=f_{1/2}^1-\frac{1}{2}f_{1/2}^2+\frac{1}{12}f_{1/2}^3+\frac{1}{12}f_{1/2}^4-\frac{1}{120}f_{1/2}^5+\cdots,$$

$$w^2 f_0''=f_{1/2}^2-\frac{1}{2}f_{1/2}^3-\frac{1}{12}f_{1/2}^4+\frac{1}{24}f_{1/2}^5+\cdots,$$

$$w^3 f_0'''=f_{1/2}^3-\frac{1}{2}f_{1/2}^4+\cdots,$$

$$w^4 f_0^{\mathrm{IV}}=f_{1/2}^4+\cdots,$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

На исти начин изводимо овакве изразе полазећи и од других интерполационих образаца.

3. **НУМЕРИЧКО ИНТЕГРАЉЕЊЕ.** *А) Диференцијалне једначине првог реда. Основа поступка.* — Нека нам је дата најједноставнија диференцијална једначина првог реда

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=F(t), \tag{7}$$

непознате функције

$$x=x\,(t) \tag{8}$$

и нека је познат почетни услов интеграљења

$$x_0=x\,(t_0). \tag{9}$$

Интеграл од (7) је

$$x\,(t)=x\,(t_0)+\int_{t_0}^{t} F(t)\,\mathrm{d}\,t, \tag{10}$$

но подинтегрална функција $F(t)$ може да је таква облика да је непосредно интеграљење немогуће, а развијање у ред скопчано са својеврсним тешкоћама. Тада приступамо нумеричком интеграљењу диференцијалне једначине (7). Тражимо, наиме, поступке за ефективно (нумеричко) израчунавање дискретног низа вредности интеграла (8), то јест

$$x_i=x\,(t_i) \tag{11}$$

за еквидистантне аргументе

$$t_{i+1}-t_i=w=\text{const}, \qquad i=\ldots,\,-1,\,0,\,1,\,\ldots,$$

у границама интеграљења, од $t=t_a$ до $t=t_b$. Уобичајено је да се доња граница интеграљења усваја за t_0.

Израчунаћемо

$$f_i=w\,F(t_i) \quad \text{за} \quad i=0,\,1,\,2,\,\ldots, \tag{12}$$

па са f_i саставити Гаус-Енкеову таблицу тих вредности и њихових разлика. Ако помоћу њих успемо да израчунамо величине

$$\Delta_{i+1/2}=x_{i+1}-x_i \quad \text{за свако} \quad i=0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

наш задатак нумеричког интеграљења (7) биће решен. Наиме, низ једначина

$$\begin{aligned}
\Delta_{1/2}&=x_1-x_0,\\
\Delta_{3/2}&=x_2-x_1,\\
\Delta_{5/2}&=x_3-x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_{i-1/2}&=x_i-x_{i-1},\\
\Delta_{i+1/2}&=x_{i+1}-x_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

омогућава нам тада да израчунамо, полазећи од познате почетне вредности (9), корак по корак, све вредности x_1, x_2, x_3, . . . , x_i, . . . интеграла (8), односно (11).

Да бисмо израчунали $\Delta_{i+1/2}$, полазимо од развијања у Тејлоров ред интеграла $x(t_{i+1})$:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + w) = x(t_i) + \frac{w}{1!} x'(t_i) + \frac{w^2}{2!} x''(t_i) + \cdots .$$

Но како је

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x_{i+1} - x_i = \Delta_{i+1/2},$$

то је

$$\Delta_{i+1/2} = \frac{w}{1!} x'(t_i) + \frac{w^2}{2!} x''(t_i) + \frac{w^3}{3!} x'''(t_i) + \cdots . \tag{13}$$

Међутим, с обзиром на (7) и уведене ознаке (12), видимо да је

$$w\, x'(t_i) = f_i,$$

па ће даље бити

$$w\, x''(t_i) = f_i', \quad w\, x'''(t_i) = f_i'', \quad w\, x^{\mathrm{IV}}(t_i) = f_i''', \ \ldots,$$

Тако (13) постаје

$$\Delta_{i+1/2} = f_i + \frac{w}{2!} f_i' + \frac{w^2}{3!} f_i'' + \frac{w^3}{4!} f_i''' + \cdots .$$

Изводе који се овде јављају изразићемо помоћу образаца за нумеричко диференцирање који произилазе из Беселова интерполационог полинома. Дакле:

$$\Delta_{i+1/2} = f_i + \frac{1}{2!}\left(f^1_{i+1/2} - \frac{1}{2} f^2_{i+1/2} + \frac{1}{12} f^3_{i+1/2} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(f^2_{i+1/2} - \frac{1}{2} f^3_{i+1/2} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{1}{4!}\left(f^3_{i+1/2} - \cdots\right) + \cdots .$$

Осим тога, да би сви елементи били на хоризонтали $i+1/2$, искористићемо и

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i), \quad f^1_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i;$$

одавде је, елиминисањем f_{i+1},

$$f_i = f_{i+1/2} - \frac{1}{2} f^1_{i+1/2}.$$

Тако после сређивања добивамо да је

$$\Delta_{i+1/2} = f_{i+1/2} - \frac{1}{12} f^2_{i+1/2} + \frac{11}{720} f^4_{i+1/2} - \cdots . \tag{14}$$

У овом изразу ће се јављати само разлике парног реда. Зато смо управо и користили обрасце за нумеричко диференцирање који следују из Беселова интерполационог полинома, а не из неког другог.

Обрасцем (14) смо решили наш задатак налажења интеграла x_i како смо раније поменули. Ипак ћемо овај поступак још трансформисати, да бисмо омогућили налажење x_i без потребе за претходним израчунавањем свих ранијих вредности $x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_2, x_1$. Тиме ћемо смањити нагомилавање „грешака" у резултату.

У том циљу формирајмо i једначина (14), за $i=0, 1, 2, \ldots, i-1$. Њихов збир је

$$\begin{aligned}\Delta_{1/2}+\Delta_{3/2}+\cdots+\Delta_{i-1/2}&=f_{1/2}+f_{3/2}+\cdots+f_{i-1/2}-\\&-\frac{1}{12}\left(f^2_{1/2}+f^2_{3/2}+\cdots+f^2_{i-1/2}\right)+\\&+\frac{11}{720}\left(f^4_{1/2}+f^4_{3/2}+\cdots+f^4_{i-1/2}\right)-\cdots.\end{aligned}\tag{15}$$

Сетимо ли се дефиниционих једначина за $\Delta_{i+1/2}$, лако ћемо извести да је

$$\Delta_{1/2}+\Delta_{3/2}+\Delta_{5/2}+\cdots+\Delta_{i-1/2}=x_i-x_0.$$

То и није ништа друго него онај познати став о збиру разлика истог реда. А на основи њега можемо одмах писати да је

$$f^2_{1/2}+f^2_{3/2}+\cdots+f^2_{i-1/2}=f^1_i-f^1_0,$$

$$f^4_{1/2}+f^4_{3/2}+\cdots+f^4_{i-1/2}=f^3_i-f^3_0,$$

и тако даље.

Преостаје нам још да видимо како ћемо представљати збир вредности f_i функције f. Ту ћемо поступити у пуној аналогији са дефиницијом разлика и састављањем схеме. Наиме, f_i ћемо третирати као разлике функције нултог реда. *Разлике „минус првог реда"* ће онда бити величине, чије су прве разлике управо вредности функција:

$$f^{-1}_{i+1/2}-f^{-1}_{i-1/2}=f_i, \qquad i=\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Доњи индекс им означава положај у схеми, на истим хоризонталама где су и све разлике непарног реда. Колону f^{-1} уписујемо у схему поред колоне f, с друге стране од колона разлика позитивног реда. Већ смо навели да се у случају нумеричког интеграљења разлике (позитивног реда) исписују лево од основне колоне f. Тако ћемо и ми овде поступати, па би схема — сада интеграциона схема или таблица — добила овакав изглед:

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & & f^{1}_{-3/2} & & f^{-1}_{-3/2} \\
\cdots\cdots & f^{2}_{-1} & & f_{-1} & \\
\cdots\cdots & & f^{1}_{-1/2} & & f^{-1}_{-1/2} \\
\cdots\cdots & f^{2}_{0} & & f_{0} & \\
\cdots\cdots & & f^{1}_{1/2} & & f^{-1}_{1/2} \\
\cdots\cdots & f^{2}_{1} & & f_{1} & \\
\cdots\cdots & & f^{1}_{3/2} & & f^{-1}_{3/2} \\
\cdots\cdots & f^{2}_{2} & & f_{2} & \\
\cdots\cdots & & f^{1}_{5/2} & & f^{-1}_{5/2} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

Но из дефиниције ових нових елемената схеме, једначина (16), произилази да су све њихове вредности неодређене, пошто у свакој од једначина (16) знамо само f_i. Према томе ако произвољно фиксирамо било који елемент f^{-1}, сви остали постају одређени. Уобичајено је да се договорно утврди вредност за $f^{-1}_{-1/2}$, па је онда, према (16),

$$f^{-1}_{1/2}=f_0+f^{-1}_{-1/2}, \quad f^{-1}_{3/2}=f_1+f^{-1}_{1/2}. \quad \text{и тако даље;}$$

очигледно је да овако налазимо и елементе f^{-1} са негативним доњим индексом. Другим речима речено, све елементе тога низа добивамо једноставним сабирањем са вредностима из колоне функције f. Стога се он често и назива *низ првог збира*. $f^{-1}_{-1/2}$ је почетни члан низа првог збира.

Јасно је да смо оваквим увођењем у рачун елемената првог збира оставили у важности све раније особине разлика и за ове нове разлике. Зато ћемо за потребе трансформисања једначине (15) одмах писати да је

$$f_{1/2}+f_{3/2}+\cdots+f_{i-1/2}=f^{-1}_{i}-f^{-1}_{0}.$$

Но пошто смо за први члан усвојили $f^{-1}_{-1/2}$ као главни елемент схеме, а не изведени, аритметичку средину,

$$f^{-1}_{0}=\frac{1}{2}\left(f^{-1}_{1/2}+f^{-1}_{-1/2}\right),$$

то ћемо се позвати на ову једначину и на одговарајућу (16),

$$f_0=f^{-1}_{1/2}-f^{-1}_{-1/2},$$

како бисмо добили да је

$$f_0^{-1}=f_{-1/2}^{-1}+\frac{1}{2}f_0,$$

то јест

$$f_{1/2}+f_{3/2}+\cdots+f_{i-1/2}=-\frac{1}{2}f_0-f_{-1/2}^{-1}+f_i^{-1}.$$

Сад се можемо вратити једначини (15), па је свести на

$$x_i=x_0-\frac{1}{2}f_0-f_{-1/2}^{-1}+\frac{1}{12}f_0^1-\frac{11}{720}f_0^3+\cdots+$$

$$+f_i^{-1}-\frac{1}{12}f_i^1+\frac{11}{720}f_i^3-\cdots. \qquad (17)$$

Почетни члан низа првог збира, $f_{-1/2}^{-1}$, још је неодређен. Израз (17) ћемо највише упростити ако $f_{-1/2}^{-1}$ одредимо из услова да је

$$x_0-\frac{1}{2}f_0-f_{-1/2}^{-1}+\frac{1}{12}f_0^1-\frac{11}{720}f_0^3+\cdots=0,$$

то јест

$$f_{-1/2}^{-1}=x_0-\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{12}f_0^1-\frac{11}{720}f_0^3+\cdots,$$

јер се тада (17) своди на једноставни израз

$$x_i=f_i^{-1}-\frac{1}{12}f_i^1+\frac{11}{720}f_i^3-\cdots,$$

где су сви елементи на i-тој хоризонтали схеме.

Тако смо, коначно, добили поступак за нумеричко интеграљење диференцијалне једначине $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=F(t)$, који користи само величине из таблице вредности функције f из (12) и њених разлика. Поступак се састоји у овим радњама:

1) Израчунавамо нумеричке вредности $F(t_i)$ за $i=0, 1, 2, \ldots$, са одабраним интервалом w аргумента t; тај интервал, „корак интеграљења", бира се тако да су практично константне разлике неког непарног реда вредности

$$f_i=wF(t_i).$$

Ове вредности израчунавамо, слажемо у интеграциону таблицу заједно са разликама $f^1, f^2, f^3, \ldots$.

2) Почетни члан низа првог збира израчунавамо по обрасцу

$$f_{-1/2}^{-1}=x_0-\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{12}f_0^1-\frac{11}{720}f_0^3+\frac{191}{60480}f_0^5-\frac{2497}{3628800}f_0^7+\cdots,$$

уписујемо га на одговарајуће место у схеми, па потом израчунамо и упишемо у њу и остале чланове низа f^{-1}.

3) У овако комплетираној интеграционој таблици имамо све величине за израчунавање произвољне вредности интеграла x_i по обрасцу

$$x_i = f_i^{-1} - \frac{1}{12} f_i^1 + \frac{11}{720} f_i^3 - \frac{191}{60480} f_i^5 + \frac{2497}{3628800} f_i^7 - \cdots. \tag{19}$$

Примећујемо да у ствари морамо израчунати и неколико вредности f пре f_0, и неколико вредности f после f_i, како бисмо имали потребне разлике за поуздано одређивање $f_{-1/2}^{-1}$ и x_i. То је мана овог поступка нумеричког интеграљења: интеграциона таблица мора да обухвати нешто шири интервал аргумента t, но што га одређују границе интеграљења t_0 и t_i. Но у астрономској пракси ова мана не чини велике потешкоће у раду.

Овај основни поступак интеграљења примењује се, како смо раније описали, и на интеграљење диференцијалних једначина облика

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x;\ t), \quad \text{уз познато} \quad x_0 = x(t_0), \tag{20}$$

а исто тако и на интеграљење система диференцијалних једначина, које се могу експлицитно решити по изводу непознатих функција, рецимо

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x,\ y,\ z;\ t), \quad &&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = G(x,\ y,\ z;\ t), \quad &&\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = H(x,\ y,\ z;\ t), \\ &x_0 = x(t_0), &&y_0 = y(t_0), &&z_0 = z(t_0). \end{aligned} \tag{21}$$

Такође се на основи истог поступка изводи и образац за израчунавање вредности одређеног интеграла.

Б) Нумеричко интеграљење диференцијалних једначина другог реда. Основа поступка. — За нумеричко интеграљење диференцијалних једначина другог реда облика

$$x'' = F(t), \tag{22}$$

уз познате почетне услове

$$x_{-1} = x(t_{-1}) \quad \text{и} \quad x_0 = x(t_0), \tag{23}$$

применићемо поступак аналоган оном за интеграљење диференцијалних једначина првог реда. То ће рећи да ћемо сад потражити две узастопне разлике (првог реда) непознатих вредности интеграла $x=x(t)$ од (22), дакле

$$\Delta_{i-1/2}^1 = x_i - x_{i-1}, \tag{24}$$

$$\Delta_{i+1/2}^1 = x_{i+1} - x_i, \tag{25}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

да бисмо помоћу њих образовали разлику другог реда

$$\Delta_i^2 = \Delta_{i+1/2}^1 - \Delta_{i-1/2}^1 = x_{i+1} - 2\,x_i + x_{i-1}. \tag{26}$$

Представимо ову разлику Δ_i^2 помоћу

$$f_i = w^2 F(t_i) \tag{27}$$

из (22) и њених разлика.

Полазимо опет од развоја $x_{i-1}=x(t_{i-1})$ и $x_{i+1}=x(t_{i+1})$ у близини аргумента $t=t_i$:

$$x_{i-1} = x(t_i - w) = x(t_i) - \frac{w}{1!}x'(t_i) + \frac{w^2}{2!}x''(t_i) - \cdots,$$

$$x_{i+1} = x(t_i + w) = x(t_i) + \frac{w}{1!}x'(t_i) + \frac{w^2}{2!}x''(t_i) + \cdots.$$

Помоћу овога и (26) формирамо

$$\Delta_i^2 = 2\frac{w^2}{2!}x''(t_i) + 2\frac{w^4}{4!}x^{\mathrm{IV}}(t_i) + 2\frac{w^6}{6!}x^{\mathrm{VI}}(t_i) + \cdots.$$

Овај резултат сводимо на

$$\Delta_i^2 = f_i + \frac{w^2}{12}f_i'' + \frac{w^4}{360}f_i^{\mathrm{IV}} + \cdots,$$

пошто је, према (22) и (27),

$$w^2 x'' = f, \quad w^2 x''' = f', \quad w^2 x^{\mathrm{IV}} = f'', \text{ и тако даље.}$$

За изводе који се овде јављају искористићемо оне изразе за нумеричко диференцирање који се изводе из Стирлингова интерполационог обрасца (4), дакле

$$w^2 f_i'' = f_i^2 - \frac{1}{12}f_i^4 + \frac{1}{90}f_i^6 - \cdots,$$

$$w^4 f_i^{\mathrm{IV}} = f_i^4 - \frac{1}{6}f_i^6 + \cdots,$$

$$w^6 f_i^{\mathrm{VI}} = f_i^6 - \cdots,$$

и тако даље, како би се у резултату јављале само разлике парног реда:

$$\Delta_i^2 = f_i + \frac{1}{12}f_i^2 - \frac{1}{240}f_i^4 + \cdots. \tag{28}$$

И даље ћемо поступати као што смо радили код диференцијалних једначина првог реда. Исписаћемо i једначина (28), од $i=0$ до $i-1$, па их сабрати:

$$\begin{aligned}\Delta_0^2 + \Delta_1^2 + \cdots + \Delta_{i-1}^2 &= f_0 + f_1 + \cdots + f_{i-1} + \\ &+ \frac{1}{12}(f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_{i-1}^2) - \frac{1}{240}(f_0^4 + f_1^4 + \cdots + f_{i-1}^4) + \cdots\end{aligned} \tag{29}$$

Збир i једначина (26), за исте вредности индекса, одмах се своди на

$$\Delta_0^2+\Delta_1^2+\cdots+\Delta_{i-1}^2=\Delta_{i-1/2}^1-\Delta_{-1/2}^1 .$$

Даље је, као што већ знамо,

$$f_0+f_1+\cdots+f_{i-1}=f_{i-1/2}^{-1}-f_{-1/2}^{-1},$$

$$f_0^2+f_1^2+\cdots+f_{i-1}^2=f_{i-1/2}^1-f_{-1/2}^1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

па (29) постаје

$$\Delta_{i-1/2}^1=\Delta_{-1/2}^1-f_{-1/2}^{-1}-\frac{1}{12}f_{-1/2}^1+\frac{1}{240}f_{-1/2}^3-\cdots+$$

$$+f_{i-1/2}^{-1}+\frac{1}{12}f_{i-1/2}^1-\frac{1}{240}f_{i-1/2}^3+\cdots .$$

Почетни члан низа првог збира одредићемо из услова да се анулира алгебарски збир свих чланова у којима фигуришу разлике са доњим индексом —1/2. Узимајући у обзир и да је $\Delta_{-1/2}^1=x_0-x_{-1}$, што даје једначина (24) за $i=0$, имаћемо да је

$$f_{-1/2}^{-1}=x_0-x_{-1}-\frac{1}{12}f_{-1/2}^1+\frac{1}{240}f_{-1/2}^3-\cdots, \tag{30}$$

па се последња једначина своди на

$$\Delta_{i-1/2}^1=f_{i-1/2}^{-1}+\frac{1}{12}f_{i-1/2}^1-\frac{1}{240}f_{i-1/2}^3+\cdots$$

А да бисмо прешли од $\Delta_{i-1/2}^1$ на x_i, опет ћемо формирати i ових једначина, од $i=1$ до i, па их сабрати:

$$\Delta_{1/2}^1+\Delta_{3/2}^1+\cdots+\Delta_{i-1/2}^1=$$

$$=f_{1/2}^{-1}+f_{3/2}^{-1}+\cdots+f_{i-1/2}^{-1}+\frac{1}{12}(f_{1/2}^1+f_{3/2}^1+\cdots+f_{i-1/2}^1)-$$

$$-\frac{1}{240}(f_{1/2}^3+f_{3/2}^3+\cdots+f_{i-1/2}^3)+\cdots . \tag{31}$$

Помоћу једначина (25) изводимо да је

$$\Delta_{1/2}^1+\Delta_{3/2}^1+\cdots+\Delta_{i-1/2}^1=x_i-x_0,$$

док за остале збирове одмах можемо писати да је

$$f_{1/2}^{-1}+f_{3/2}^{-1}+\cdots+f_{i-1/2}^{-1}=f_i^{-2}-f_0^{-2},$$

$$f_{1/2}^{1}+f_{3/2}^{1}+\cdots+f_{i-1/2}^{1}=f_i-f_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Прва од ових једначина је очигледна последица проширења појма разлика негативног реда. „*Разлике минус другог реда*", f_i^{-2}, уводимо помоћу

$$f_i^{-2}-f_{i-1}^{-2}=f_{i-1/2}^{-1}, \qquad i=\cdots,\,-1,\,0,\,1,\,\ldots,$$

па се и код њих срећемо с чињеницом да су неодређене, догод се не фиксира вредност било ког члана из тога низа f^{-2}; наравно, под претпоставком да је низ f^{-1} већ некако одређен. Заиста је

$$f_i^{-2}=f_{i-1/2}^{-1}+f_{i-1}^{-2};$$

и ти елементи се, дакле, добивају сабирањем са елементима низа f^{-1}. Зато говоримо о f_i^{-2} као елементима „*низа другог збира*". f_0^{-2} је почетни његов члан. Проширена схема изгледа сад овако:

$$\begin{array}{lcccccc}
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\cdots & f_{-3/2}^{3} & & f_{-3/2}^{1} & & f_{-3/2}^{-1} & \\
\cdots & & f_{-1}^{2} & & f_{-1} & & f_{-1}^{-2}\\
\cdots & f_{-1/2}^{3} & & f_{-1/2}^{1} & & f_{-1/2}^{-1} & \\
\cdots & & f_{0}^{2} & & f_{0} & & f_{0}^{-2}\\
\cdots & f_{1/2}^{3} & & f_{1/2}^{1} & & f_{1/2}^{-1} & \\
\cdots & & f_{1}^{2} & & f_{1} & & f_{1}^{-2}\\
\cdots & f_{3/2}^{3} & & f_{3/2}^{1} & & f_{3/2}^{-1} & \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

И у низу f^{-2} дефинишемо аритметичке средине,

$$f_{i+1/2}^{-2}=\frac{1}{2}\,(f_{i+1}^{-2}+f_i^{-2}),$$

и све остале операције са разликама, у пуној аналогији са разликама осталих редова.

Вратимо се сад једначини (31). Она постаје

$$x_i = x_0 - f_0^{-2} - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \cdots +$$

$$+ f_i^{-2} + \frac{1}{12} f_i - \frac{1}{240} f_i^2 + \cdots .$$

Почетни члан низа другог збира одређујемо опет помоћу

$$f_0^{-2} = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^4 + \cdots , \tag{32}$$

како би било

$$x_i = f_i^{-2} + \frac{1}{12} f_i - \frac{1}{240} f_i^2 + \frac{31}{60480} f_i^4 - \cdots . \tag{33}$$

На тај начин смо саставили комплетан поступак за нумеричко интеграљење диференцијалне једначине (22), са датим почетним условима (23):

1) Саставимо таблицу са $f, f^1, f^2, \ldots$ на основи

$$f_i = w^2 F(t_i).$$

2) Почетни члан низа првог збира одређујемо помоћу (30), тј.

$$f_{-1/2}^{-1} = x_0 - x_{-1} - \frac{1}{12} f_{-1/2}^1 + \frac{1}{240} f_{-1/2}^3 - \frac{31}{60480} f_{-1/2}^5 + \cdots ,$$

па потом израчунамо и остале чланове.

3) Почетни члан низа другог збира израчунавамо по обрасцу (32), а онда одредимо и остале његове чланове.

4) Нумеричку вредност интеграла $x = x(t)$ за аргумент $t = t_i$ израчунавамо по обрасцу (33).

То је основни поступак за нумеричко интеграљење диференцијалних једначина кретања небеских тела. У ранијем тексту смо изложили његову примену на интеграљење система диференцијалних једначина

$$x'' = F(x, y, z; t), \quad y'' = G(x, y, z; t) \quad z'' = H(x, y, z; t).$$

Тај поступак је и основа за израчунавање вредности двоструког одређеног интеграла.

ВАЖНИЈА ЛИТЕРАТУРА

J. Bauschinger — Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Verlag W. Engelmann, Leipzig, 1928.

H.C. Plummer — An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, Dover Publ. Inc., New York, 1960.

М.Ф. Субботин — Курс небесной механики. Т. I, Гос. техн.-теор. изд., Москва — Ленинград, 1933; Т. II, ОНТИ НКТП, Москва-Ленинград 1937.

G. Stracke — Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Verlag J. Springer, Berlin, 1929.

P. Herget — The Computation of Orbits, Publ. priv. by the author, Cincinnati, 1948.

D. Brouwer and *G. Clemence* — Methods of Celestial Mechanics, Academic Press, New York — London, 1961.

Г.А. Чеботарев — Аналитические и численные методы небесной механики, Акад. наук СССР, Инст. теор. астр., Москва — Ленинград, 1965.

The Explanatory Supplement..., H. M. Stationery Office, London, 1961.

Planetary Co-ordinates for the Years 1960—1980, H.M. Stationery Office, London, 1958.

J. Bauschinger, G. Stracke — Tafeln zur Theoretischen Astronomie, Verlag W. Engelmann, Leipzig, 1934.