D-r J. KARAMATA

ELEMENTI MATEMATIČKE ANALIZE

Naučna knjiga
IZDAVAČKO PREDUZEĆE NARODNE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD, 1950

ELEMENTI MATEMATIČKE ANALIZE

I. Funkcija

II. Granica

III. Polinom

IV. Racionalna funkcija

V. Algebarska funkcija

VI. Trigonometriske funkcije

G L A V A I

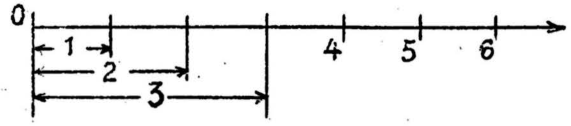
F U N K C I J A

1.1. Broj

(i) Niz celih brojeva

1,2,3.........m,.........n,..........

zovemo **prirodni niz** ili **niz prirodnih brojeva.**



Sl.1.

Uzastopnim prenošenjem jedne te iste duži na neku pravu dobijamo niz tačaka koje pretstavljaju niz prirodnih brojeva. Početna tačka odgovara nuli (v.sl.1).

Ako u prirodnome nizu broj m predhodi broju n, kažemo da je m manji od n i pišemo

$$m < n$$

ako broj n sledi broj m, kažemo da je n veći od m i pišemo

$$n > m$$

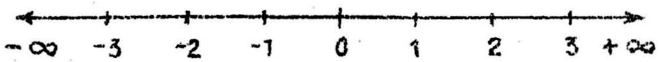
U nizu prirodnih brojeva nema najvećeg broja. Ovo izražavamo ukratko time što kažemo da je niz prirodnih brojeva neograničen ili beskonačan, pojam za koji upotrebljavamo znak ∞.

Ako prirodnom nizu dodamo nulu i negativne cele brojeve dobijamo niz

......-n,......-3,-2,-1,0,1,2,3.....n,....

Prenošenjem jedinične duži u oba smera

jedne prave linije i orijentisanjem ove prave znakom − na levo i znakom + na desno dobijemo t. zv. <u>brojnu liniju</u> (v.sl.2).



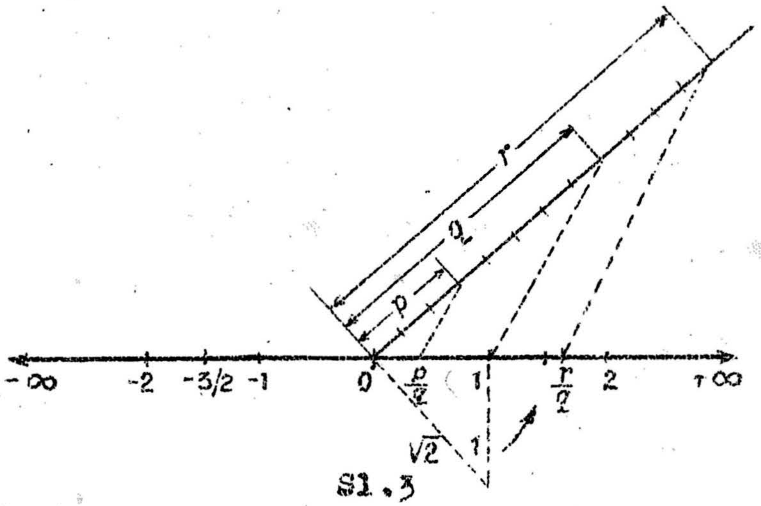
Sl.2.

Negativan broj $-n$ nalazi se levo, a pozitivan broj n desno od nule, t.j.

$$-n < 0 \quad \text{a} \quad n > 0$$

Niz pozitivnih i negativnih celih brojeva je <u>neograničen za obe strane</u>: ovo izražavamo i time što kažemo da brojevi ovoga niza mogu uzeti sve vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$.

(ii) Količnik dva cela broja p i q, t.j. broj $\frac{p}{q}$ zovemo <u>razlomljen broj</u> ili <u>razlomak</u>. Svakom pozitivnom i negativnom razlomku odgovara takođe jedna tačka na brojnoj liniji, koja dobijamo konstrukcijom pokazanom na sl.3.



Sl.3

Ako se tačka koja odgovara razlomku $\frac{p'}{q'}$ nalazi levo od tačke koja odgovara razlomku $\frac{p}{q}$ kažemo da je razlomak $\frac{p'}{q'}$ manji od razlomka $\frac{p}{q}$ i pišemo

$$\frac{p'}{q'} < \frac{p}{q}$$

Kako je

$$\frac{p}{q} = \frac{pq'}{qq'}, \text{ i } \frac{p'}{q'} = \frac{p'q}{q\,q'},$$

to će $\frac{p}{q}$ biti manje od $\frac{p'}{q'}$ ako je

$$pq' < p'q.$$

Razlomak $\frac{p}{q}$ je <u>pravi razlomak</u>, ako je brojitelj p manji od imenitelja q, t.j. ako je

$$\frac{p}{q} < 1;$$

u suprotnom razlomak je <u>složen</u>, napr. $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$

Pozitivne i negativne cele brojeve, nulu, pozitivne i negativne razlomke nazivamo <u>racionalnim brojevima</u>.

Znači svaki racionalan broj ima oblik $\frac{p}{q}$, gde je p pozitivan ili negativan ceo broj, ili nula a q jedan broj prirodnog niza.

Imenitelj q ne može biti nula

$$q \neq 0,$$

jer <u>deliti nulom nema smisla</u>.

Svaki onaj broj koji se ne može napisati u gornjem obliku zove se iracionalan broj, napr.

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{4}, \text{ log } 3, \pi, \text{ i t.d.}$$

Svakom od ovih brojeva odgovara takodje odredjena tačka brojne linije; tako, na pr. broju $\sqrt{2}$ odgovara tačka koju dobijamo konstrukcijom izvedenom na sl. 3.

Racionalni i iracionalni brojevi nazivaju se zajedničkim imenom <u>realni brojevi</u>.

(iii) Pod $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$, i t.d. podrazumeva se ma koji realan broj, zato se slovima označeni brojevi zovu <u>opšti brojevi</u>, za razliku od <u>posebnih brojeva</u>, kao na pr.

$$-2\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ \log.2\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \text{i t.d.}$$

Ovakve posebne vrednosti nekog opšteg broja $\underline{a}$ zovu se još i njegove pojedine <u>numeričke vrednosti</u>.

Opšti broj koji u toku računa zadržava stalno odredjenu vrednost zove se <u>konstanta</u>.

Broj koji u toku računa uzima više, ili sve moguće vrednosti, t.j. onaj koji se u toku računa može menjati zove se <u>promenljiva</u>.

Konstante obično obeležavamo početnim (a, b, ...), a promenljive krajnjim (x, y, z, t.....) slovima abecede.

(iv) Neka je $\underline{a}$ proizvoljan realan broj, tada je ili $\underline{a}$ ili $\underline{-a}$ pozitivan broj. Ovaj pozitivan broj obeležavamo sa

$$|a|$$

i nazivamo <u>apsolutna vrednost</u> od $\underline{a}$.

Dakle je

$$|a| = \begin{cases} a & \text{kad je } a \geq 0 \\ -a & \text{"} \quad \text{"} \quad a < 0 \end{cases}$$

Tako je, na pr.

$$|4| = 4,\ |-3| = 3,\ |0| = 0,\ |-1{,}5| = 1{,}5, \text{ i t.d.}$$

Napomena 1°. Znak $\geq$ se čita <u>veće ili jednako</u>, a znak $\leq$ <u>manje ili jednako</u>, tako da

$$b \leq c$$

znači da $\underline{b}$ ne može biti veće od $\underline{c}$.

2°. Broj $|a|$ je merni broj otstojanja tačke a od tačke 0; a broj $|a-b|$ je merni broj duži $\overline{ab}$.

3°. Budući da svakom realnom broju odgovara odredjena tačka brojne linije, to možemo od sada reč broj zameniti sa reči t a č k a i obratno.

<u>Zadaci</u>.

<u>1.</u> Napiši u obliku razlomka brojeve: 0,5; -0,25; 1,3; 0,012; 0,1; 0,01; 0,001.

<u>2.</u> Da li 0,333 i 1/3 pretstavljaju isti broj?

<u>3.</u> Napiši u obliku decimalnih razlomaka brojeve: $1/5$; $7/10$; 10^{-2}; 10^{-3}; $3\cdot 10^{-2}$; $\frac{1}{2}10^{-2} - 5.10^{-3}$; $1/3$; $1/6$; 10^{-n}; 2^{-n}; 5^{-n}.

<u>4.</u> Ako su a i b dva racionalna broja, tada su i brojevi

$$a+b,\ a-b,\ a\cdot b \ \text{ i } \ a/b,\ (b \neq 0)$$

racionalni.

<u>5.</u> Koji je od brojeva

$$2,\ \left(\frac{41}{29}\right)^2 \ \text{ i } \ \left(\frac{99}{70}\right)^2$$

najveći, a koji najmanji ?

<u>6.</u> Svaki konačan ili periodični decimalni razlomak pretstavlja racionalan broj i obratno.

<u>7.</u> Pokaži da je: 1° kvadrat celog broja ceo broj; 2° kvadrat razlomka razlomak; otuda zaključi da kvadratni koreni brojeva

2,3,5,6,7,8,10,11,12,........

ne mogu biti racionalni brojevi.

<u>8.</u> Ako su a i b dva proizvoljna realna broja pokaži da je uvek

$$a \leq |a| \quad \text{i} \quad |a+b| \leq |a| + |b|.$$

<u>9.</u> Šta pretstavljaju izrazi

$$\frac{a+|a|}{2} \quad i \quad \frac{a}{|a|},\ a \neq o$$

kada je a pozitivan ili negativan broj ?

10. Ako su a i b dva pozitivna broja, pokaži da je

$$A = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

uvek jednak većem od njih, t.j. da je

$$a \leqslant A \quad i \quad b \leqslant A.$$

1.2. Funkcija.

(i) Dve promenljive zavise jedna od druge, kad su promenama jedne uslovljene promene druge, t.j. kada datim vrednostima jedne promenljive odgovaraju odredjene vrednosti druge promenljive; u tom slučaju kažemo da je jedna promenljiva funkcija druge.

Onu promenljivu y, čije su vrednosti odredjene vrednostima promenljive x, zovemo zavisna promenljiva, za razliku od nezavisne promenljive x, čije vrednosti po volji biramo:

Na primer: Površina kvadrata je funkcija njegove strane; obratno, strana kvadrata je funkcija njegove površine. Zapremina lopte je funkcija njenog poluprečnika. Privlačna sila dvaju tela je funkcija njihovih otstojanja. Zapremina gasa je funkcija pritiska i temperature. Kvadrat, kub, kvadratni koren, kubni koren, logaritam i t.d. nekog broja su funkcije toga broja.

(ii) Činjenicu da y zavisi od x obeležavamo sa

$$y = f(x), \text{ (čitaj: } y \text{ jednako } f \text{ od } x \text{).}$$

i kažemo ukratko da je y funkcija od x, ili funkcija x-a.

Umesto slova f može se upotrebiti i svako drugo slovo za medjusobno razlikovanje pojedinih funkcija, napr.:

$$y = F(x),\ y=g(x),\ y=G(x),\ y=\varphi(x),\ y=\phi(x).$$

Neka je a odredjen broj: $F(a)$ označava vrednost funkcije koju ova uzima za $x = a$.

Pr. (1). Neka je $f(x) = x^2+3x+2$,

odredi $f(1)$, $f(o)$ i $f(-1)$. Uredi $f(1+h)$ po opadajućim stepenima od h.

Imamo

$$f(1) = 1^2+3\cdot1+2 = 6;$$
$$f(o) = o^2+3\cdot o+2 = 2;$$
$$f(-1) = (-1)^2+3(-1)+2 = o.$$
$$f(1+h) = (1+h)^2+3(1+h)+2 = 1+2h+h^2+3+3h+2$$
$$\therefore \quad f(1+h) = h^2+5h+6.$$

Napomena. Znak $\therefore$ kazuje da dobiveni obrazac ili rezultat sleduje neposredno iz prethodnog.

Pr. (2). Neka je

$$g(x) = \frac{x}{2x-3};$$

odredi $g(2)$, $g(-3/2)$ i $g(1/x)$. Šta biva sa $g(x)$ kad je $x = 3/2$?

Imamo

$$g(2) = \frac{2}{2\cdot2-3} = 2 ;$$

$$g(-3/2) = \frac{-\frac{3}{2}}{2(-\frac{3}{2})-3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} ;$$

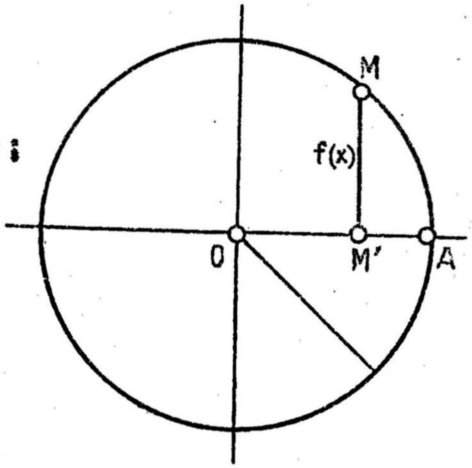
$$g(1/x) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-3} = \frac{1}{2-3x}$$

Za $x=3/2$ imenitelj funkcije $g(x)$ postaje jednak nuli t.j.

$$2x-3 = o \quad za \quad x = 3/2.$$

Kako sa nulom ne možemo deliti funkcija $g(x)$ nije odredjena za $x = 3/2$; ovu činjenicu izražavamo na taj način, što kažemo da funkcija $g(x)$ nije definisana za $x = 3/2$.

Pr. (3). Neka je $f(x) = \sin x$, tj. $f(x)$ je funkcija luka $\overline{AM} = x$, definisana dužinom $\overline{MM'} = f(x)$; poluprečnik kruga $\overline{OA} = 1$. (v. sl. 4).



Sl. 4

Odrediti: $f(\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{3}), f(\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{6}), f(o)$ i $f(\pi)$.

$f(\frac{\pi}{2}) = \sin 90^\circ = 1,$

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2},$

$f(o) = \sin 0^\circ = 0.$ $\quad f(\frac{\pi}{3}) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3},$

$f(\frac{\pi}{6}) = \sin 30^\circ = 1/2,$ $\quad f(\pi) = \sin 180^\circ = 0,$

Napomena. Kraćeg pisanja radi kvadrat broja $f(a)$ pišemo $f^2(a)$, t.j.

$$f^2(a) = \{f(a)\}^2.$$

Isto je tako na pr.

$$f^3(a) = \{f(a)\}^3 \quad \text{ili} \quad \sin^2 x = \{\sin x\}^2$$

i t.d.

Zadaci. Izračunaj $f(3), f(2), f(1), f(1/2)$, i $\sqrt{f^2(3/2) - f^2(1)}$, kada je -

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; 2. $f(x) = \sqrt{2x}$.

3. Pokazi da je
$f(2) = 3f(1), f(-1) = f(o)$ i $2f(-2) = -f(1)$,
kad je
$$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 6.$$
Koliko je $f(o)$, $f(\frac{\pi}{4})$, $f(\frac{\pi}{3})$, $f(\frac{\pi}{2})$ i $f(\pi)$,
kad je

4. $f(x) = \cos x$, 5. $f(x) = \sin^2 x$; 6. $f(x) = \sin 2x$?

Koliko je $f(x^2)$ ako je

7. $f(x) = ax + bx\sqrt{x}$; 8. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$?

1.3. Jednačina.

(i) Ako tražimo one vrednosti od x, za koje funkcija $f(x)$ uzima datu vrednost a, stavljamo
$$f(x) = a.$$

Ovaj izraz nazivamo jednačina, a vrednosti promenljive x, za koje je ova jednačina zadovoljena (za koje $f(x)$ postaje jednako a) nazivamo rešenjima ili korenima te jednačine. Rešiti jednačinu znači odrediti, t.j. izračunati njene korene.

Pr. (1). Reši jednačinu $f(x) = 3$, gde je $f(x) = 2x - 3$.

Imamo
$$2x - 3 = 3$$
$$\therefore \quad 2x = 3 + 3 = 6$$
$$\therefore \quad x = 6/2 = 3.$$

Pr. (2). Reši jednačinu $f(x) = 0$, gde je

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Imamo

$$x^2-3x+2=0$$

$$\therefore\ x^2-2\tfrac{3}{2}x+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2=\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-2,$$

$$\therefore\ \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2=1/4$$

$$\therefore\ x-\tfrac{3}{2}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}}=\pm\tfrac{1}{2},$$

$$\therefore\ x=\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{1}{2}=\tfrac{3\pm1}{2};$$

koreni su $x=\frac{3+1}{2}=2$ i $x=\frac{3-1}{2}=1$.

Pr.(3). Reši jednačinu $f(x)=f(3)$ kad je $f(x)=x^3-7x$.

Jednačina glasi

$$x^3-7x=3^3-7\cdot3=6.$$

t.j.

$$f(x)-f(3)=x^3-7x-6=0.$$

Jedan njen koren je $x=3$, jer je $f(3)=f(3)$; zaista je

$$3^3-7\cdot3-6=27-21-6=0.$$

Ako datu jednačinu napišemo u obliku

$$f(x)-f(3)=x^3-7x-3^3+7\cdot3=(x^3-3^3)-7(x-3)=0$$

i izvadimo $x-3$ kao zajednički faktor, dobijamo

$$f(x)-f(3)=(x-3)\left\{(x^2+3x+3^2)-7\right\}=(x-3)(x^2+3x+2)=0,$$

$$\therefore\ x-3=0\quad\text{ili}\quad x^2+3x+2=0.$$

Dakle data jednačina ima tri korena i to

$$x=3,\ x=-2\ \text{i}\ x=-1.$$

(ii) Koreni jednačine

$$f(x)=0$$

zovu se nule funkcije $f(x)$. Tako su, na pr.

$$x=1\ \text{i}\ x=2$$

nule funkcije

$$f(x)=x^2-3x+2;$$

$$x=-2,\ x=-1\ \text{i}\ x=3$$

nule funkcije

$$g(x)=f(x)-f(3)=x^3-7x-6.$$

Pr.(4). Nule funkcije

$$f(x)=\sin x$$

su

$$x=0,\pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\ldots\ldots$$

Napomena. 1°. $x=a$ je uvek jedan koren jednačine $f(x)=f(a)$; tada je obično $x-a$ faktor izraza

$$f(x)-f(a).$$

t.j. ovaj izraz je obično deljiv sa $x-a$.

2°. Ako je $x-a$ faktor izraza $f(x)$, tada je $x-a$ nula funkcije $f(x)$; ako je $x=a$ nula funkcije $f(x)$, obično je $f(x)$ deljivo faktorom $x-a$.

Zadaci.

Reši jednačine:

1. $f(x)=1$ kad je $f(x)=(x^2-x-1)^2$.
$f(x)=f(1)$ kad je
2. $f(x)=4x^3-7x$; 3. $f(x)=x^5-x^4-x^3+x^2+1$.
4. $xg(x)-g^2(x)=0$, gde je $g(x)=x^2-2$;
5. $f(x)=5$, za $f(x)=4x^2+3x-2$.

Odredi nule funkcija:

6. $F(x)=x^3-x$; 7. $F(x)=x^4-4x^2$; 8. $F(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$;

9. $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$; 10. $f(x)=\cos x$.

11. Neka je $f(x)=x^2+\sqrt{x-1}$. Jednačina $f(x)=f(1)$ ima koren $x=1$, ali izraz $f(x)-f(1)$ nije deljiv sa $x-1$.

1.4. T a b l i c a.

Proučiti datu funkciju $f(x)$ ili ispitati njen tok znači ispitati način na koji se ona menja kad se x menja.

Ovo se, donekle, postizava t.zv. numeričkim tablicama. Jedna takva numerička tablica za funkciju

$$f(x)=\frac{2-x}{1+x^2}$$

data je pod I.

Iz tablice I vidimo da $f(x)$ najpre raste do neke vrednosti izmedju $x=-1$ i $x=0$; zatim opada do nule. Za $x=2$ je $f(x)=0$; zatim postaje negativna i produži da opada sve dok x ne dostigne neku vrednost izmedju $x=4$ i $x=5$; zatim ponovo raste, ostajući negativna.

Tablica I.

x	f(x)
-3	0,50
-2	0,80
-1	1,50
0	2,00
1	0,50
2	0,00
3	-0,10
4	-0,12
5	-0,12
6	-0,11
7	-0,10

Tablica II.

x	f(x)
-1	1,50
-0,9	1,60
-0,8	1,71
-0,7	1,81
-0,6	1,91
-0,5	2,00
-0,4	2,07
-0,3	2,11
-0,2	2,12
-0,1	2,08
-0	2,00

Precizniji tok dobivamo ako tablicu upotpunimo uzimajući gušće vrednosti za x; tako tablica II upotpunjuje tablicu I za vrednosti x-a između -1 i 0. Iz nje vidimo, napr. da funkcija $f(x)$ prestaje da raste za neku vrednost x-a, koja se nalazi u blizini vrednosti $x=-0,2$.

Napomena: Logoritamska tablica, tablice trigonometriskih funkcija, kvadrata, kubova, kvadratnih i kubnih korenova, su primeri numeričkih tablica.

Zadatak.

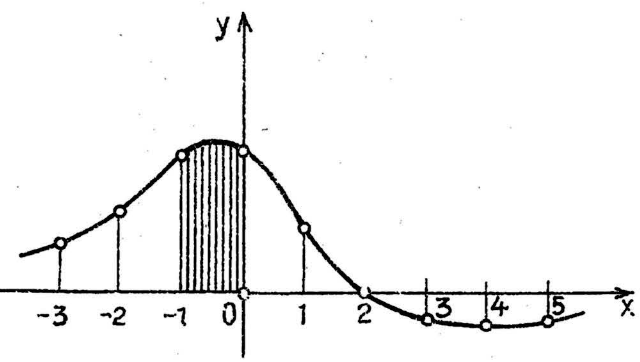
1. Obrazovati tablicu za funkciju

$$f(x)=\frac{x^3+10x}{x^2+1}$$

sa $x=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$; tamo gde funkcija menja raščenje obrazovati tablice za vrednosti od x, koje su deset puta gušće.

1.5. D i a g r a m.

Pregledniji tok funkcije dobijamo ako tablice grafički pretstavimo. Iz gornjih tablica prenosimo vrednosti x na X-osu, a odgovarajuće vrednosti funkcije $y=f(x)$, na Y-osu. Time dobijamo niz tačaka, koje spajanjem daju krivu liniju. Ova se kriva zove diagram funkcije $f(x)$.



Sl.5

Obratno, kažemo da je <u>$y = f(x)$ jednačina dotične krive linije</u>.

Slika 5 pretstavlja diagram funkcije

$$f(x) = \frac{2-x}{1+x^2}$$

Često nije potrebna tako precizna slika diagrama; važnije je istaći najbitnije podatke o toku funkcije i to: kada je funkcija jednaka nuli, kada je ona pozitivna ili negativna, kada raste ili opada i t.d. U tome slučaju, u koliko se prave numeričke tablice, u njih treba uneti pored istaknutih vrednosti x-a i y-a samo one, koje su potrebne da se diagram upotpuni.

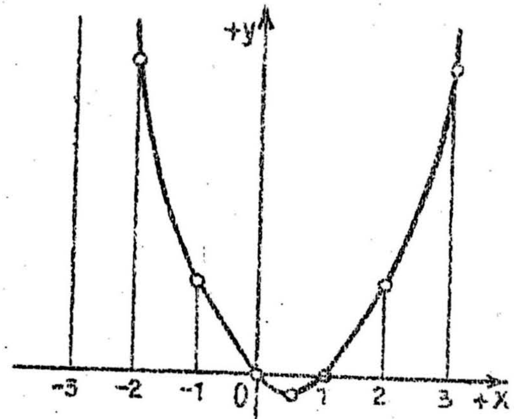
<u>Napomena</u>. Jedinica u pravcu X-ose, t.j. apscise i ordinate ne moraju imati istu razmeru.

<u>Primeri</u>. Konstruiši diagrame sledećih funkcija:

(1) $x(x-1)$; (2) x^2+1; (3) $\frac{1}{x^2+1}$;

(4) $\sqrt{x}$; (5) $\sqrt{x(2-x)}$.

<u>Pr.(1)</u>. Vidi sl.6. Neka je $y = x(x-1)$;



Sl.6

Uočimo najpre da je

1° $y = 0$ kad je $x=0$ i $x=1$;

2° $y > 0$ kad je $x < 0$ i $x > 1$;

3° $y < 0$ kad je $0 < x < 1$;

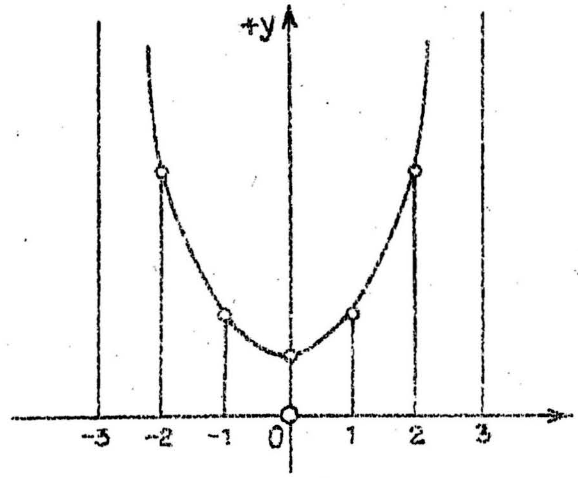
4° za velike pozitivne i negativne vrednosti x-a, y je veliko.

x	-10	-2	-1	0	1/2	1	2	3	10
y	110	6	2	0	1/4	0	2	6	90

Diagram je parabola čija je osovina paralelna Y-osi.

<u>Pr.(2)</u>. Vidi sl.7. Funkcija

$$y = x^2+1$$



Sl.7

ima sledeće osobine:

1° y je stalno pozitivno i ≥ 1;

2° y je veliko za velike pozitivne i negativne vrednosti od x;

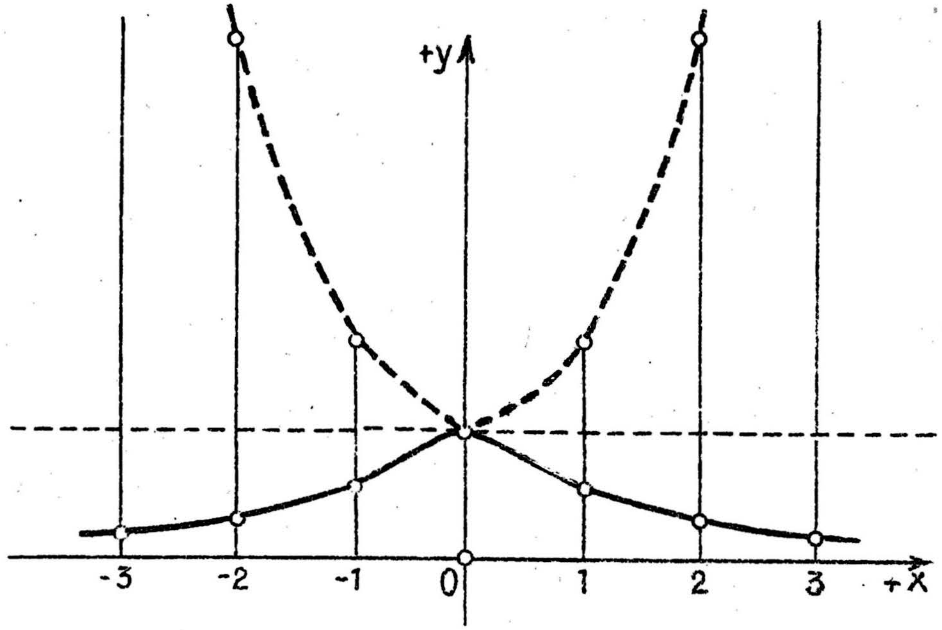
3° y raste kad x raste, bilo u pozitivnom, bilo u negativnom pravcu.

x	-10	-1	0	1	10
y	101	2	1	2	101

Diagram je parabola čija je osovina Y-osa.

Pr.(3). Vidi sl.8. Imamo

$$y = \frac{1}{x^2+1};$$



Sl.8

ako stavimo $u = x^2+1$ biće $y = \frac{1}{u}$.

Crtasto izvučena kriva pretstavlja diagram funkcije $u = x^2+1$, a y-i su recipročne vrednosti od u.

1° y je > 0 i ≤ 1 za sve x;

2° za velike pozitivne i negativne vrednosti x-a,

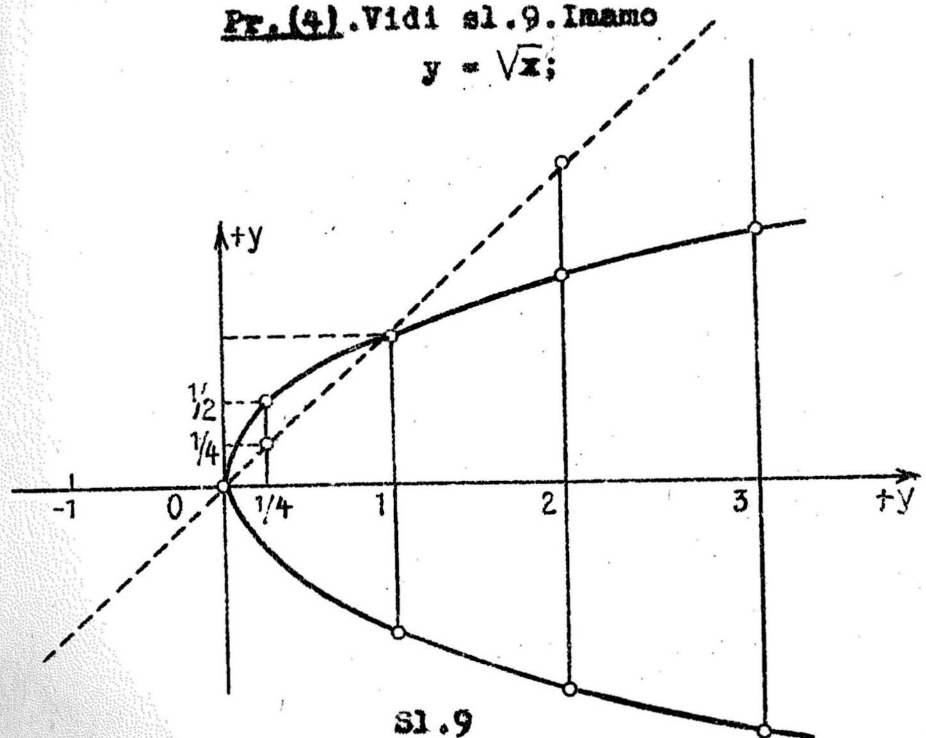
y je malo, jer je u veliko.

3° y opada kad x raste u pozitivnom i negativnom pravcu.

x	-10	-1	0	1	10
u	101	2	1	2	101
y	0,01	0,5	1	0,5	0,01

Pr.(4). Vidi sl.9. Imamo

$$y = \sqrt{x};$$



Sl.9

stavimo $u = x$; tada je $y = \sqrt{u}$. Crtasto izvučena kriva (prava linija) pretstavlja diagram funkcije $u = x$; y-i su kvadratni koreni iz u.

1° y je definisano samo za pozitivno x;

2° $y = 0$ za $x = 0$; za x veliko, y je veliko;

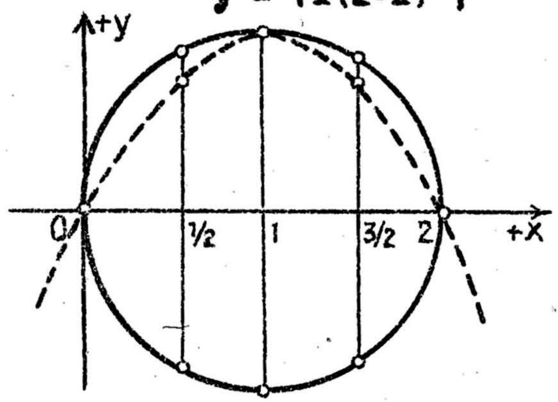
3° $u \leq u$ za $0 < x \leq 1$; $y > u$ za $x > 1$;

u = x	0	1/4	1	9/4
y	0	±1/2	1	±3/2

Diagram je parabola sa temenom u početku koordinatnog sistema, a osovina joj je X-osa.

Pr.(5).Vidi sl.10.Imamo

$$y = \sqrt{x(2-x)} ;$$



Sl.10

Stavimo $v = x(2-x)$; tada je $y = \sqrt{v}$. Crtasto izvučena kriva (parabola) pretstavlja diagram funkcije $v = x(2-x)$.

1^o y je definisano samo za $v \geq 0$, t.j. za $0 \leq x \leq 2$

2^o $y = 0$ za $x = 0$ i $x = 2$;

3^o $y > v$ za $0 < x < 2$, jer je $v < 1$ za $0 < x < 2$;

x	0	1/2	1	3/2	2
v	0	3/4	1	3/4	0
y	0	$+\frac{1}{2}\sqrt{3}$	+1	$+\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0

Diagram je krug sa središtem u tački $x=1$, $y = 0$ i poluprečnikom 1.

Zadaci.

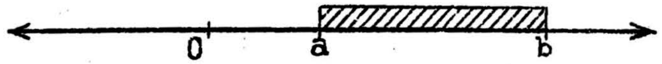
Nacrtaj diagrame funkcija:

1. $y=(x-1)(6x-3)$; **2.** $y=x^2-2x+2$; **3.** $y=x^3$;

4. $y = \frac{4}{x^2+2}$; **5.** $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(x-1)(2-x)}$; **6.** $y=\pm\sqrt{x^2-1}$.

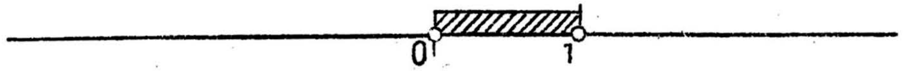
1.6. R a z m a k.

(i) Data su dva broja a i b, $b > a$. Sve brojeve koji se nalaze izmedju a i b ili sve tačke koje se na brojnoj liniji nalaze izmedju tačaka a i b nazivamo razmak (interval) i označavamo ga sa (a,b), (v.sl.11).



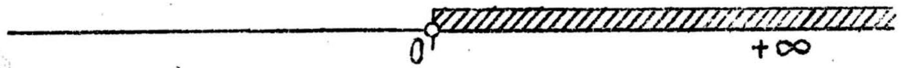
Sl.11

Pr.(1). Vidi sl.12. Razmak $(0,1)$ pretstavlja sve pozitivne brojeve manje od 1.



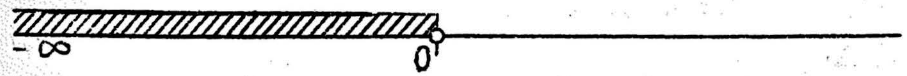
Sl.12

Pr.(2). Vidi sl.13.Razmak $(0,\infty)$ pretstavlja sve pozitivne brojeve.



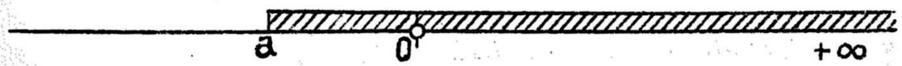
Sl.13

Pr.(3). Vidi sl.14.Razmak $(-\infty,0)$ pretstavlja sve negativne brojeve.



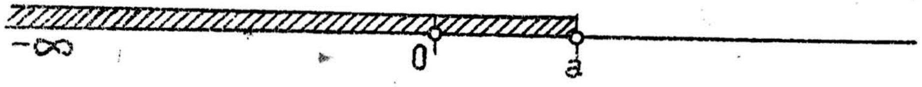
Sl.14

Pr.(4).Vidi sl.15. Razmak (a,∞) pretstavlje sve brojeve veće od a.



Sl.15

Pr.(5). Vidi sl.16. Razmak $(-\infty,a)$ pretstavlja sve brojeve manje od **a**.



Sl.16

Pr.(6). Razmak $(-\infty,+\infty)$ pretstavlja sve brojeve, t.j. sve tačke brojne linije.

(ii) Funkcija nije uvek odredjena za sve vrednosti od **x**, t.j. nije uvek **definisana** u celom razmaku $(-\infty,\infty)$.

Pr.(7). Funkcije

$$\sqrt{x} \quad i \quad \log x$$

su definisane samo u razlomku $(0,\infty)$

Pr.(8). Funkcije

$$\sqrt{x(3-x)} \quad i \quad \log x(3-x)$$

su definisane u razlomku $(0,3)$.

Pr.(9). Funkcija

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}$$

je definisana u razmaku (a,b).

Pr.(10). Funkcija

$$\sqrt{(x-1)(x-2)}$$

je definisana u razmacima $(-\infty,1)$ i $(2,\infty)$.

Pr.(11). Funkcije

$$x^2,\ x(x-1)(x-3) \quad i \quad x^2+1$$

su definisane u celom razlomku $(-\infty,\infty)$.

Zadaci.

1. Nacrtaj razmak $(1-h,1+h)$ za $h=1/2,1,3/2$ i 2.

2. Pokaži da tačka $x=\frac{a+b}{2}$ polovi razlomak (a,b).

3. Pokaži da tačke $x_1=\frac{2a+b}{3}$ i $x_2=\frac{a+2b}{3}$ dele razlomak (a,b) na tri jednaka dela.

4. Pokaži da se tačka $x=\frac{pa+qb}{p+q}$ uvek nalazi u razmaku (a,b) ma kakvi bili pozitivni brojevi p i q.

5. Tačka $x=a+\Theta(b-a)$ se nalazi u razmaku (a,b) kadgod je $0<\Theta<1$.

6. Tačka $x=\frac{a+b}{2}+\eta(b-a)$ se nalazi u razmaku (a,b) kadgod je $-\frac{1}{2}<\eta<\frac{1}{2}$.

U kome se razmaku nalazi tačka **x** kad je

7. $|x|\le 1$; 8. $|x-1|\le\frac{1}{2}$; 9. $x-a<1$?

U kojim su razmacima definisane funkcije:

10. $\sqrt{x(x-1)(x-2)}$; 11. $\sqrt{1-\frac{2x^2}{x^2+1}}$; 12. $\frac{\sqrt{1-x}}{2+\sqrt{x}}$;

13. $\sqrt{2-\sqrt{x}}$; 14. $\sqrt{\sin x}$; 15. $\sqrt{1-\sin x}$; 16. $\sqrt{\sin x-1}$?

1.7. Nejednačina.

Kad tražimo one vrednosti **x**-a za koje je funkcija $f(x)$ veća od neke date vrednosti **a**, pišemo

$f(x)>a$ (čitaj $f(x)$ veće od **a**)

ili

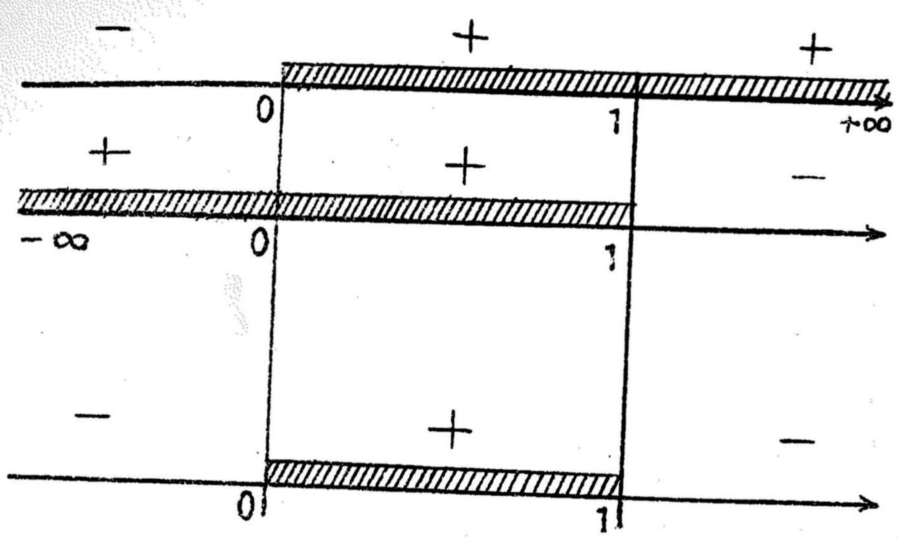
$a<f(x)$ (čitaj **a** manje od $f(x)$).

Ovaj se izraz naziva **nejednačina**, a vrednosti od **x**, za koje je ona zadovoljena **rešenja**.

Pr.(1). Nejednačina

$$x(1-x)>0$$

je zadovoljena za sve vrednosti **x** razmaka $(0,1)$. (v.sl.17).



Sl.17

$x > 0$ u razmaku $(0,\infty)$,

$1-x > 0$ " " $(-\infty,1)$,

$\therefore x(1-x) > 0$ " " $(0,1)$.

Pr.(2). Nejednačina

$$\frac{2x}{x^2+1} < 1$$

je zadovoljena za svako x.

Gornja nejednačina se svodi na

$$2x < x^2+1,$$

$$\therefore 0 < x^2+1-2x = (x-1)^2.$$

Pr.(3). Nejednačina

$$x - \frac{1}{x-1} > 1.$$

je zadovoljena kada se x nalazi u razmacima $(0,1)$ i $(2,+\infty)$.

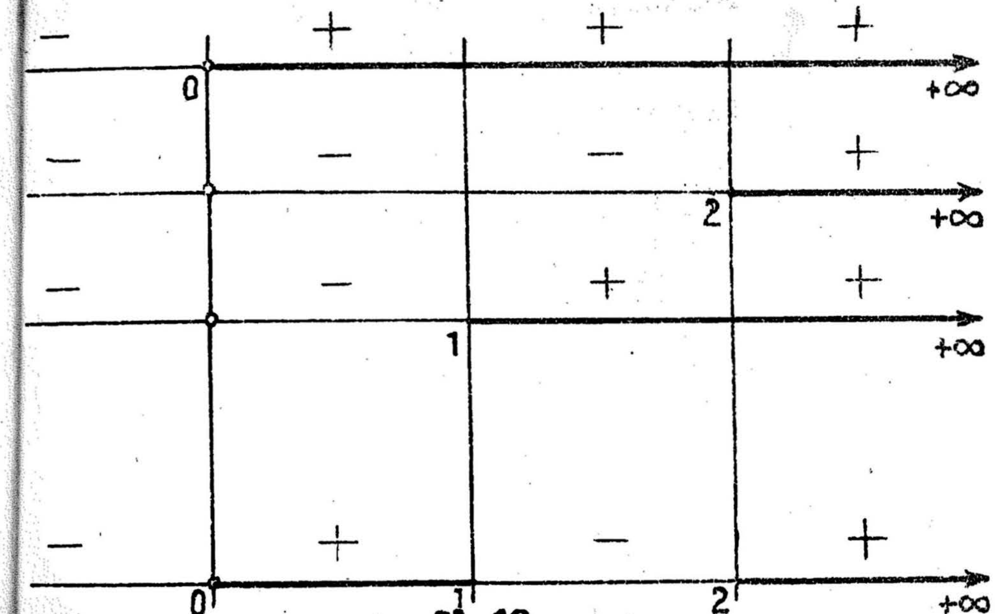
Data nejednačina se svodi na

$$x-1-\frac{1}{x-1} > 0,$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2-1}{x-1} > 0,$$

$$\therefore \frac{x(x-2)}{x-1} > 0.$$

Dalje (v.sl.18)



Sl.18

$x > 0$ u razmaku $(0,\infty)$,

$x-2 > 0$ " " $(2,\infty)$;

$x-1 > 0$ " " $(1,\infty)$,

$\therefore \frac{x(x-2)}{x-1} > 0$ u razmaku $(0,1)$ i $(2,\infty)$.

Zadaci.

Reši nejednačine:

1. $x(x-1)(2-x) > 0$; 2. $x(x^2-1) < 0$;

3. $\frac{2x}{x^2+1} < \frac{3}{5}$; 4. $\frac{x+1}{1-x} > 1$; 5. $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-3} < 0$;

6. $x + |x| < 1$; 7. $x - |x| > -2$.

1.8. P a r n e i n e p a r n e f u n k c i j e

(i) Ako $f(x)$ ne menja svoju vrednost kad x zamenimo sa $-x$, t.j. kad je

$$f(-x) = f(x)$$

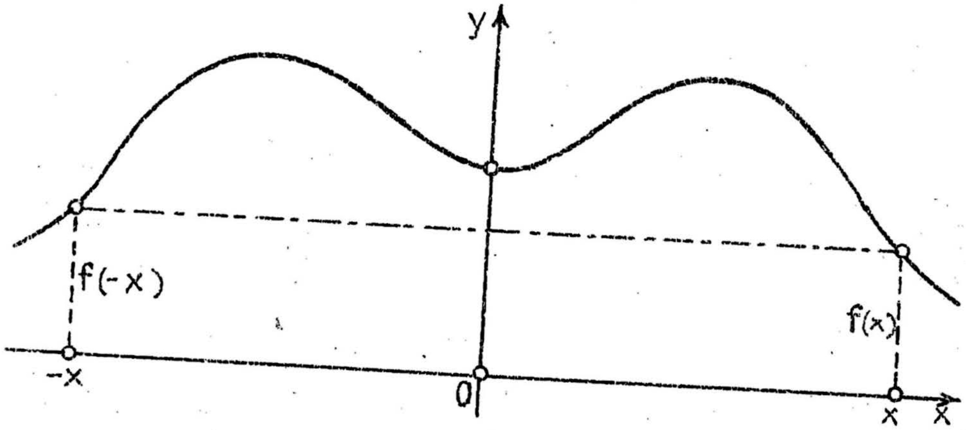
za svako x, tada kažemo da je funkcija $f(x)$ parna.

Pr.(1). Funkcija x^4 je parna, jer je $(-x)^4 = x^4$.

Pr.(2). Funkcija $\cos x$ je parna, jer je $\cos(-x) = \cos x$.

Funkcije čiji su diagrami prikazani na slikama 7 i 9 su parne.

Ako je $f(x)$ parna funkcija Y-osa je osovina simetrije njenog diagrama. (v.sl.19.)



Sl.19

(ii) Ako $f(x)$ promeni svoj znak kad x promeni znak, t.j. ako je

$$f(-x) = -f(x),$$

kažemo da je funkcija $f(x)$ neparna.

Neparne su funkcije:

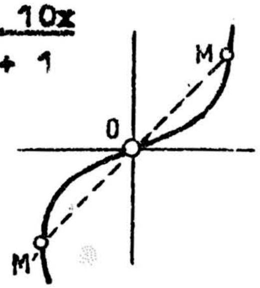
Pr.(3). $f(x) = x^3$, jer je $(-x)^3 = -x^3$.

Pr.(4). $f(x) = \sin x$, jer je $\sin(-x) = -\sin x$.

Pr.(5). Funkcija data u zadatku 1.4.1 je neparna, jer je

$$\frac{(-x)^3+10(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{x^3+10x}{x^2+1}$$

Diagram neparne funkcije ima koordinatni početak kao središte simetrije. (v.sl.20).



Sl.20

Zadaci. Ispitaj da li su navedene funkcije parne ili neparne ?

1. $\frac{1}{a+x^2}$; 2. $\frac{x^3}{a+x^2}$; 3. x^{2k}; $k=1,2,3,\ldots\ldots$

4. x^{2k+1}, $k=0,1,2,\ldots\ldots$; 5. $\frac{\sin x}{x}$; 6. $x \cos x$;

7. $\operatorname{tg} x$; 8. $|x|$; 9. $x\,|x|$.

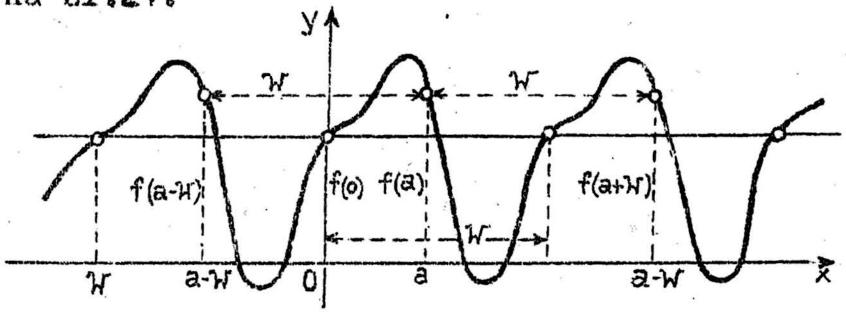
1.9. P e r i o d i č n e f u n k c i j e.

Ako se vrednosti funkcije ponavljaju pošto x predje neki odredjeni razmak dužine ω t.j. ako je

$f(x+\omega) = f(x)$ i to za sve vrednosti x-a, tada kažemo da je funkcija $f(x)$ periodična. Veličina ω zove se perioda funkcije $f(x)$.

Funkcije $\sin x$ i $\cos x$ su periodične sa periodom 2π, jer je $\sin(x+2\pi) = \sin x$ i $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

Diagram neke periodične funkcije prikazan je na sl.21.



Sl.21

Zadaci: Kolike su periode funkcija:

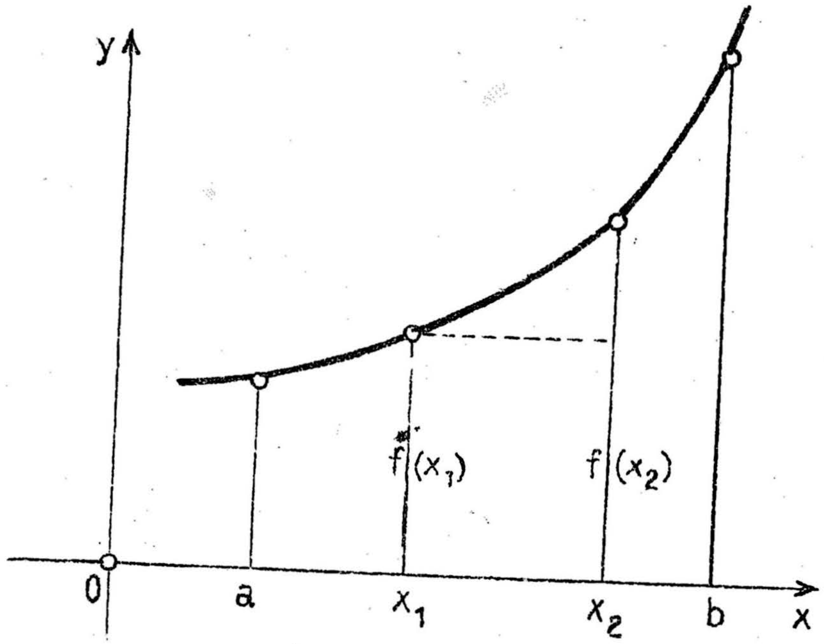
1. $\operatorname{tg} x$; 2. $\sin^2 x$; 3. $\cos^2 x$; 4. $\sin 2x$;

5. $\sin \frac{x}{2}$; 6. $\sin \pi x$; 7. $\sin^2 \frac{x}{2}$

1.10. Monotone funkcije

(i) Za funkciju $f(x)$ kažemo da monotono raste u razmaku (a,b) ako se vrednosti funkcije povećaju dok x raste u tome tazmaku; t.j. ako je

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ za } x_2 > x_1 \quad \text{(v.sl.22).}$$



Sl.22

Drugim rečima, funkcija $f(x)$ monotono raste u razmaku (a,b) ako je $f(x+h) - f(x) > 0$, za $h > 0$.

Pr.(1). Funkcija x^2 monotono raste za $x > 0$.

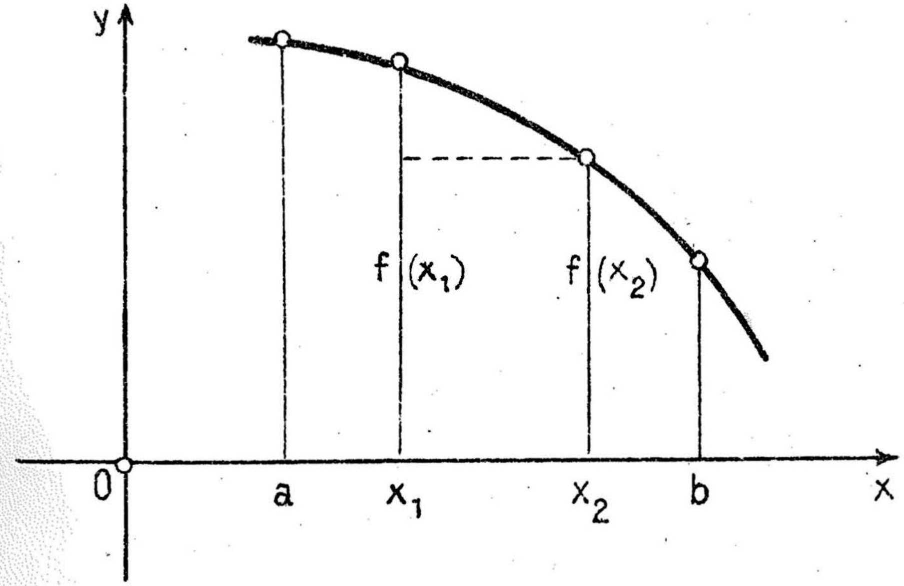
Imamo

$$f(x+h)-f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2hx + h^2,$$

$$f(x+h)-f(x) = h(2x+h) > 0 \quad \text{za} \quad x > 0 \text{ i } h > 0$$

(ii) Funkcija $f(x)$ monotono opada u razmaku (a,b) ako se vrednosti funkcije smanjuju dok x raste u tome razmaku, t.j. ako je

$$f(x_2) < f(x_1) \text{ za } x_2 > x_1 \text{ .(v.sl.23).}$$



Sl.23

Drugim rečima, funkcija $f(x)$ monotono opada u razmaku (a,b) ako je

$$f(x+h) - f(x) < 0 \quad \text{za} \quad h > 0.$$

Pr.(2). x^2 monotono opada za $x \quad 0$.

Imamo
$$f(x_2)-f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2-x_1)(x_2+x_1),$$
$\therefore f(x_2)-f(x_1) < 0$, jer je $x_2-x_1 > 0$ a $x_2 < 0$ i $x_1 < 0$.

(iii) Ukratko kažemo da je funkcija $f(x)$ monotona u nekom razmaku ako ona u tome razmaku ili stalno opada ili stalno raste.

Pr.(3). Funkcija
$$f(x) = mx+p$$
je monotona u celom razmaku $(-\infty,+\infty)$.

Za $h > 0$ imamo
$$f(x+h)-f(x) = m(x+h)+p-(mx+p) = mh,$$
$$\therefore f(x+h)-f(x) \begin{cases} > 0 & \text{ako je } m > 0 \\ < 0 & \text{ako je } m < 0, \end{cases}$$
i to za svako x.

Prema tome $mx+p$ monotono raste ako je $m>0$, a monotono opada ako je $m < 0$

(iv) Neka funkcija $u(x)$ monotona raste u razmaku (a,b) tada:

$\frac{1}{u(x)}$ monotono opada u razmaku (a,b),

$-u(x)$ " " " " (a,b),

$\sqrt{u(x)}$ " raste " " (a,b),

$u^2(x)$ " " " " (a,b).

Ako funkcije $u(x)$ i $v(x)$ monotono rastu u razmaku (a,b) tada

$u(x)+v(x)$ monotono raste u razmaku (ab)

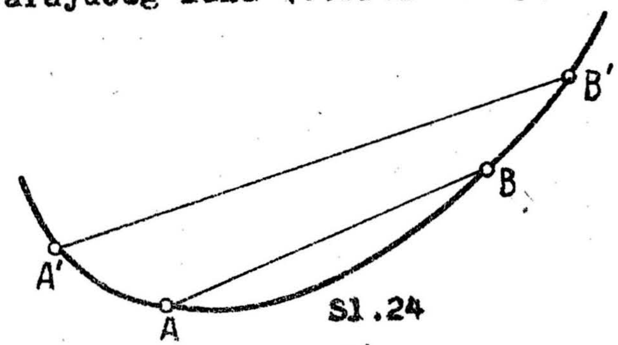
$u(x)\cdot v(x)$ " " " " (ab)

Zadaci. Kako se u pogledu monotonije ponašaju funkcije:

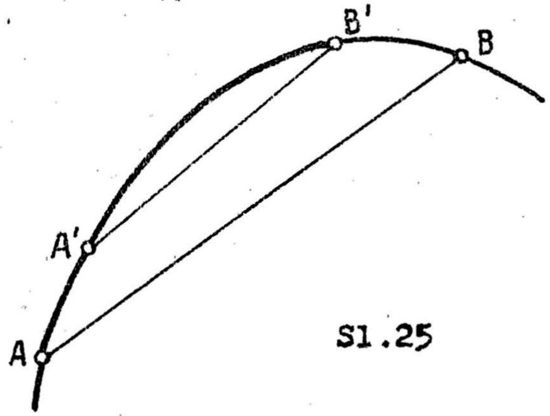
1. x^3; 2. x^4; 3. $x+x^3$; 4. $\frac{1}{x^2+1}$; 5. x^2-2ax;
6. $\sqrt{x}$; 7. $\sin x$; 8. $\cos x$; 9. $\operatorname{tg} x$; 10. $\sqrt{x^2+1}$;
11. $\sqrt{x}\ \ x$; 12. x^2+x^4; 13. $\sqrt{1+x^2+x^4}$; 14. $x+\sqrt{x}$.

1.11. Konveksna funkcija.

Luk $\widehat{AB}$ neke krive je konveksan ako svaka njegova tetiva leži sa iste strane njoj odgovarajućeg luka (v.sl.24 i 25).



Sl.24



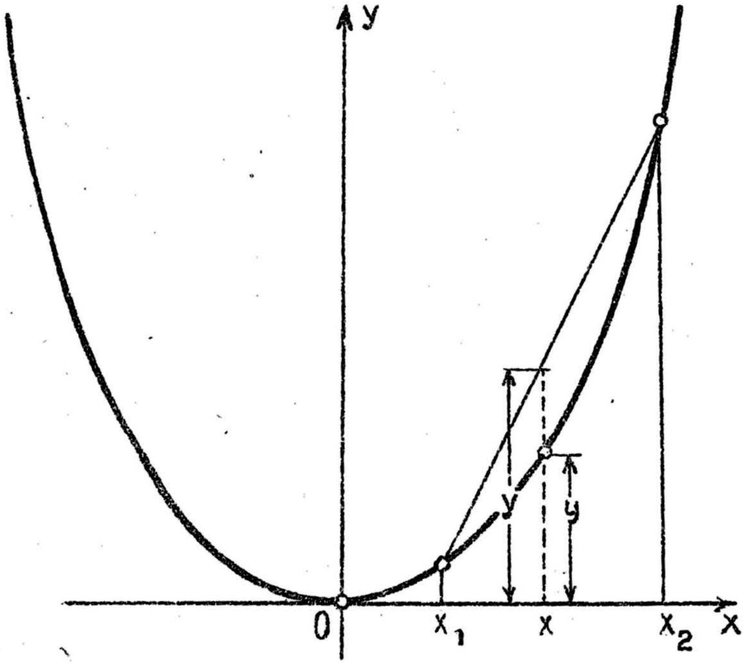
Sl.25

Za funkciju $y=f(x)$ kažemo da je <u>konveksna</u> u nekom razmaku, ako je odgovarajući luk njenog diagrama u tom razmaku konveksan, i to: funkcija je <u>konveksna prema dole</u>, ako se luk njenog diagrama nalazi ispod odgovarajuće tetive (v.sl.24), a <u>konveksna prema gore</u>, ako je luk iznad odgovarajuće tetive (v.sl.25).

<u>Pr.(1)</u>. Funkcija

$$f(x) = x^2$$

je konveksna prema dole u celom razmaku $(-\infty,\infty)$ (v.sl.26).



Sl.26

Neka su <u>A</u> i <u>B</u> krajnje tačke proizvoljne tetive diagrama te funkcije sa koordinatama:

$$x_1,\ y_1 = x_1^2 \quad i \quad x_2, y_2 = x_2^2$$

Ako obeležimo sa <u>Y</u> ordinatu one tačke tetive, čija je apscisa <u>x</u> tada je jednačina tetive

$$\frac{Y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1} = x_2+x_1$$

t.j.

$$Y - x_1^2 = (x-x_1)(x_1+x_2),$$

$$\therefore \quad Y = (x_1+x_2)x-x_1x_2 .$$

Pošto ordinata date funkcije u tački <u>x</u> iznosi

$$y = x^2$$

to je

$$Y - y = (x_1+x_2)x - x_1x_2-x^2 =$$

$$= (x_2-x)(x-x_1) > 0 ,$$

za svako $x_1 < x < x_2$; drugim rečima funkcija $f(x) = x^2$ je konveksna prema dole za svako <u>x</u>, t.j. za ceo razmak $(-\infty, \infty)$.

<u>Zadaci</u>. <u>1.</u> Funkcija $f(x) = ax+b$, nije konveksna ni prema gore ni prema dole.

Ispitaj konveksitet funkcija:

<u>2.</u> x^2-x+1; <u>3.</u> $2x-x^2$; <u>4.</u> x^3.

<u>1.12. I n v e r s n a   f u n k c i j a.</u>

(i) Neka je <u>y</u> funkcija $x=a$, $y = f(x)$, tada je i <u>x</u> neka funkcija $y=a$, t.j. $x=g(y)$. Funkciju $g(x)$ nazivamo <u>inversnom funkcijom funkcije $f(x)$</u>, i često je označavamo sa $f^{(-1)}(x)$. Dakle iz

$$y = f(x) \quad \therefore \quad x = f^{(-1)}(y).$$

<u>Pr.(1)</u>. Inversna funkcija funkcije $f(x)=x^2$ je $f^{(-1)}(x) = \sqrt{x}$.

Iz

$$y = x^2 \quad \therefore \quad x = \sqrt{y} .$$

Pr.(2). Inversna funkcija funkcije $f(x) = \sqrt[q]{x}$ je $\overset{(-1)}{f}(x) = x^q$.

Iz

$$y = \sqrt[q]{x} \quad .\dot{}. \quad x = y^q .$$

Pr.(3). Inversna funkcija funkcije

$$\frac{1+x}{1-x} \text{ je } -\frac{1-x}{1+x} .$$

Iz

$$y = \frac{1+x}{1-x} \quad .\dot{}. \quad x = \frac{y-1}{y+1} = -\frac{1-y}{1+y}$$

(ii) Neka je $y = g(x)$ inversna funkcija funkcije $y = f(x)$, t.j. iz

$$y = f(x) \quad .\dot{}. \quad x = g(y) .$$

Uočimo tačku A diagrama funkcije $f(x)$ sa koordinatama a i $b = f(a)$; otuda sledi da je $a = g(b)$, prema tome tačka A' sa apscisom b, i ordinatom a, leži na diagramu inversne funkcije $y = g(x)$. Kako (v.sl.27) tačke A i A' leže simetrično u odnosu na pravu $y = x$, t.j. simetralu prvog i trećeg kvadranta, i kako ovo važi za svaku tačku diagrama funkcija $f(x)$ i $g(x)$, to će diagram funkcije $g(x)$ biti simetrična slika diagrama funkcije $f(x)$ u odnosu na pravu $y = x$.

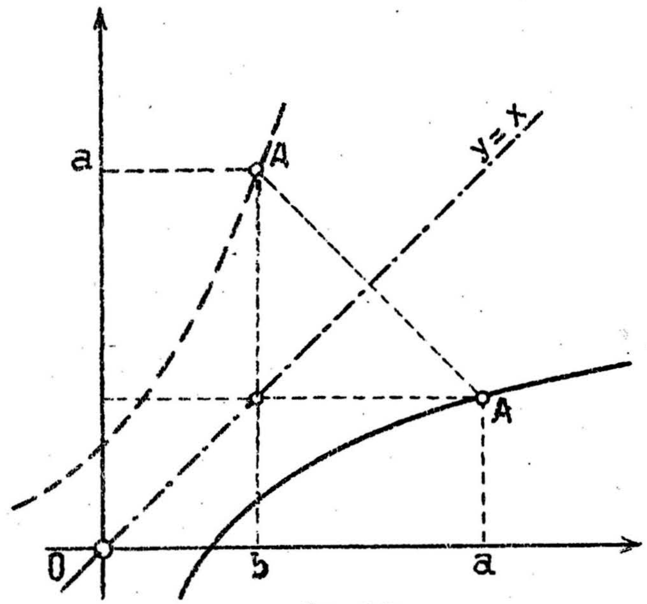
Pr.(4). Nacrtaj diagram funkcije x^2 i njene inversne funkcije.

Inversna funkcija funkcije x^2 je $\sqrt{x}$; oba diagrama su parabole (v.sl.28).

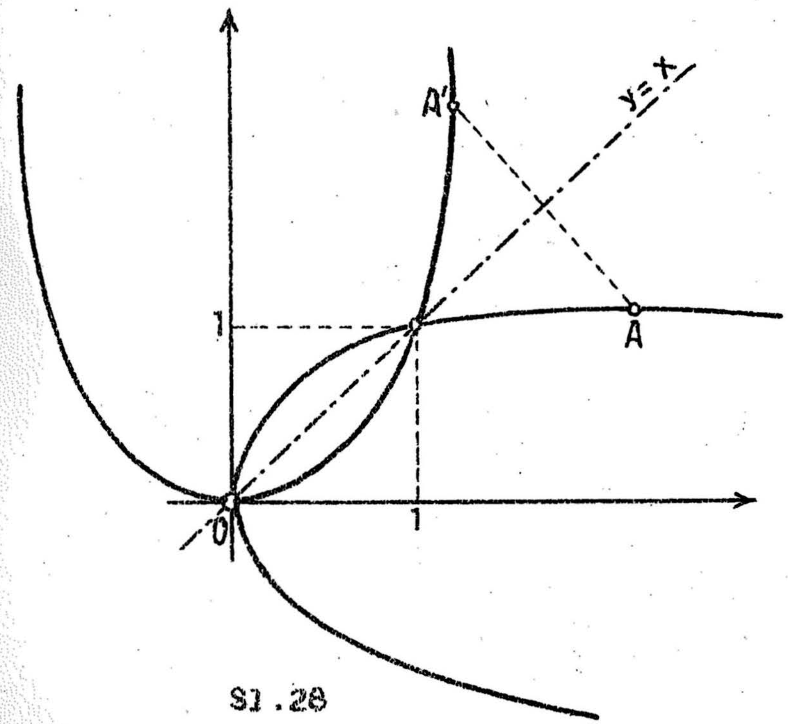
Zadaci.

Pokazi da je

1. $1 + \sqrt{1+x}$ inversna funkcija funkcije $x^2 - 2x$.



Sl.27



Sl.28

2. $\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$ inversna funkcija funkcije $\dfrac{x}{1+x^2}$;

3. $2x\sqrt{1-x^2}$ " " " $\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$

4. $1/x$ " " " $1/x$;

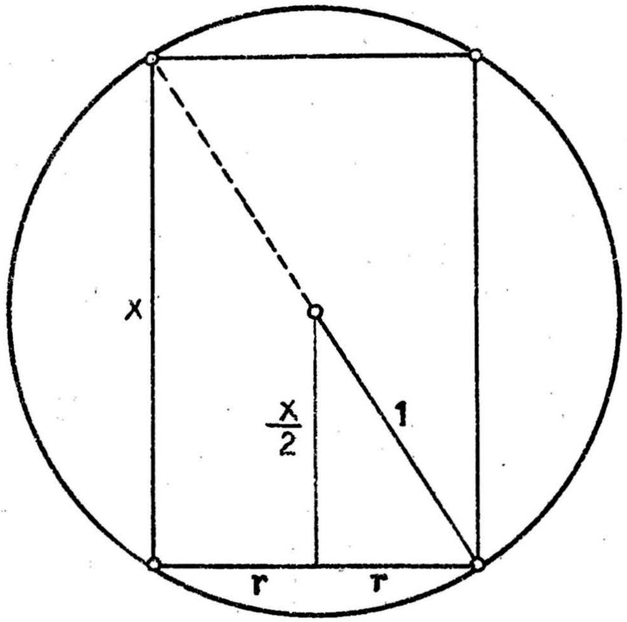
5. Kakvu osobinu ima diagram funkcije $f(x)$ ako je

$$f^{(-1)}(x) = f(x) .$$

1.13. Obrazovanje funkcija

Geometriski problemi pružaju mogućnost za obrazovanje najraznovrsnijih funkcija.

Pr.(1). Valjak visine x upisan je u loptu poluprečnika 1; odredi zapreminu V valjak kao funkciju visine (v.sl.29).



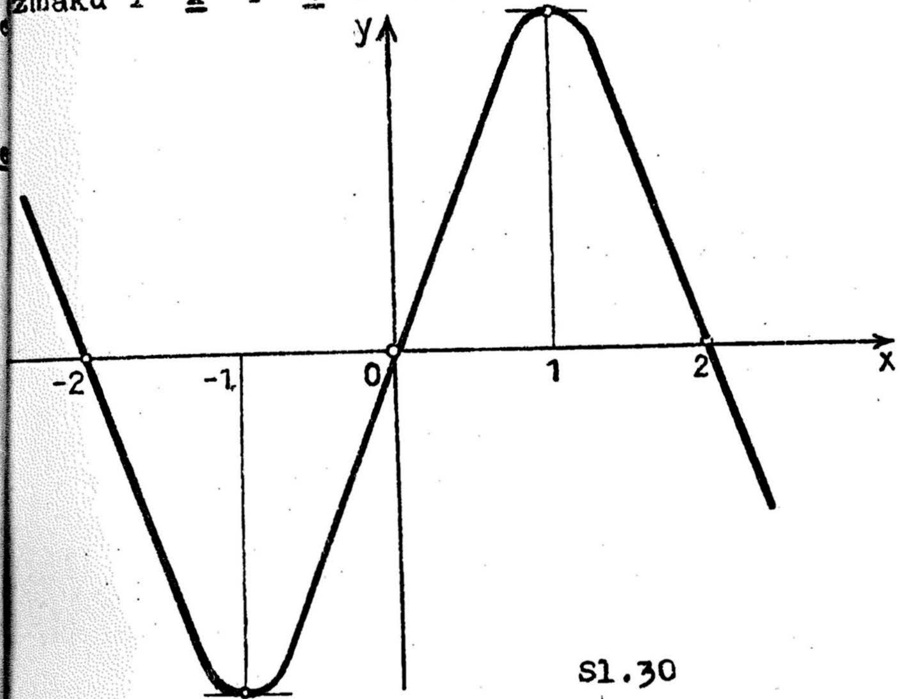
Sl.29

Neka je x poluprečnik osnove valjka; tada

$$V = \pi r^2 x \quad i \quad r^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 .$$

$$\therefore \quad V = \frac{\pi}{4}x(4-x^2) .$$

Diagram ove funkcije dat je na sl.30. Postavenom geometriskom zadatku odgovara deo diagrama ji se nalazi u razmaku (0,2), jer su samo u tome zmaku i x i $V > 0$.



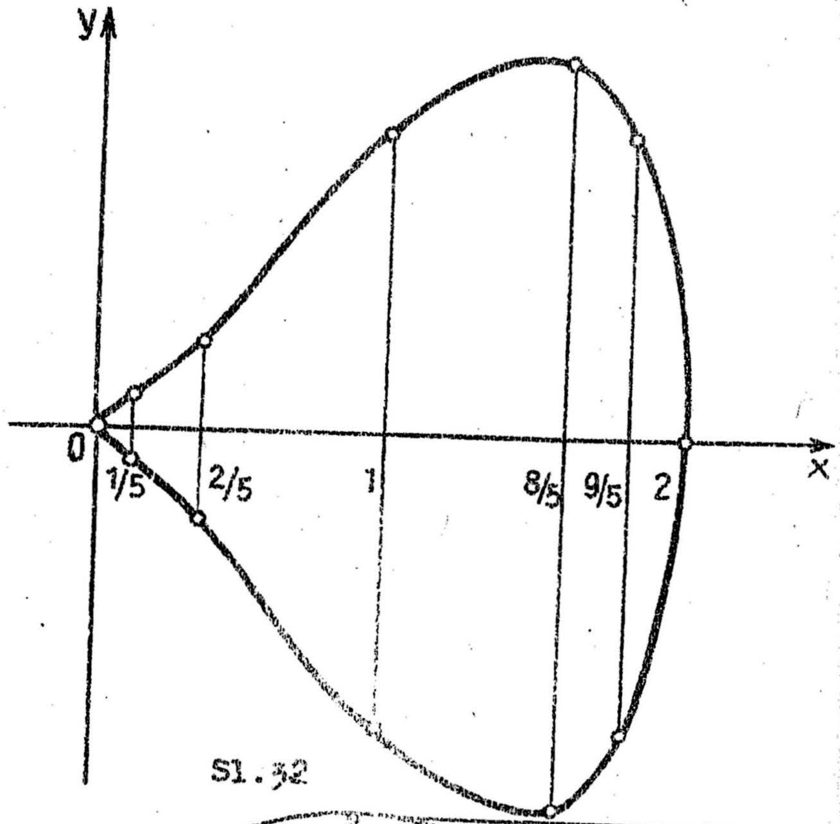
Sl.30

Pr.(2). U krugu poluprečnika 1 upisan je avnokrak trougao visine x . Odredi njegovu povrinu P kao funkcija visine (v.sl.31).

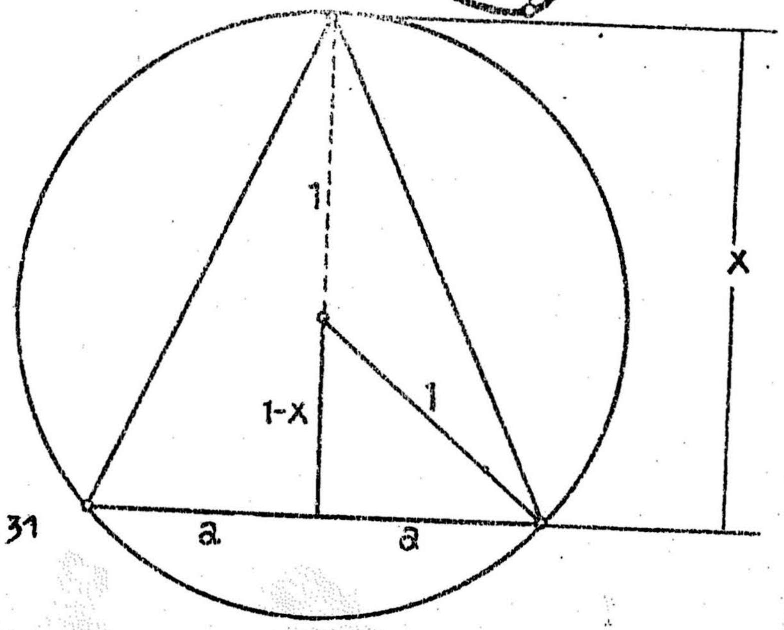
Neka je a poluosnova trougla; tada je $P=ax$

1 $a^2+(x-1)^2 = 1 \;\therefore\; a=\sqrt{x(2-x)}$ i $P=\sqrt{x(2-x)}$.

Diagram ove funkcije, prikazan na sl.32, dobiven je na osnovu sledećega:



Sl.32



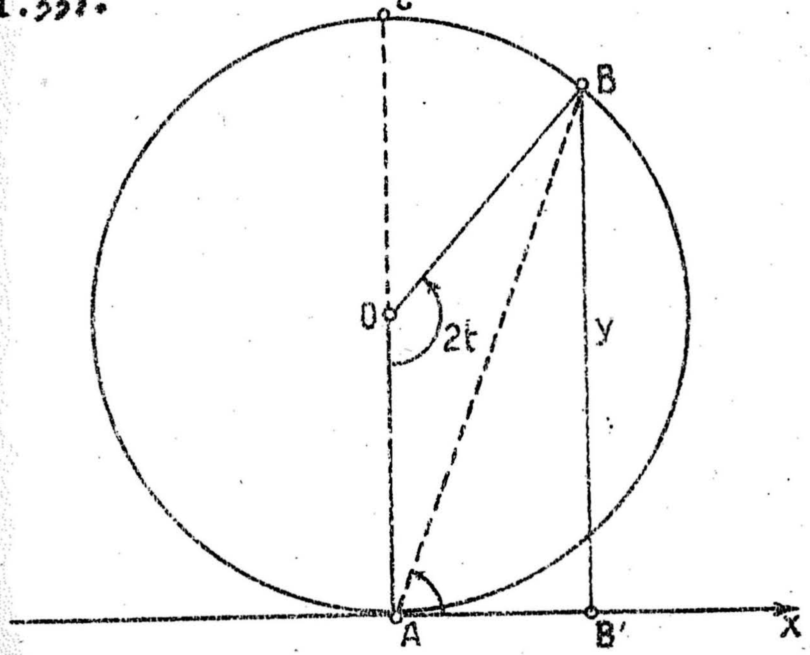
Sl.31

P je definisano samo u razmaku (0,2), jer je $(2-x) < 0$ za $x < 0$ i $x > 2$;

x	0	0,2	0,4	1	1,6	1,8	2
p	0	0,12	0,32	1	1,28	1,08	0

Negativna strana ne odgovara postavljenom zadatku.

Pr.(3). Neka je O središte kruga poluprečnika 1 i AOB sektor sa središnim uglom AOB = 2t u lučnoj meri. Odredi otstojanje y tačke B od tangente na krug u tački A kao funkciju luka t. (v.sl.33).



Sl.33

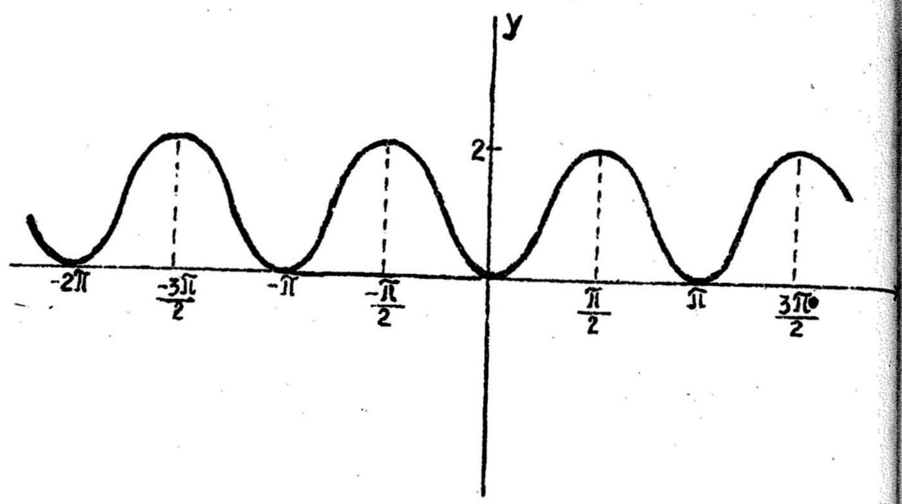
Neka je $y = BB'$, tada je $\measuredangle\, BAB' = t$,

$AB = \sin t$ i $y = AB \sin t$,

$\therefore\ y = 2 \cdot \sin^2 t$.

Dok t varira od 0 do π, tačka B polazi od tačke A, opisuje ceo krug i vraća se u tačku A; za to vreme y raste od 0 do 2 (kad.

se $\underline{B}$ poklopi sa $\underline{C}$, t.j. za $t = \frac{\pi}{2}$), zatim opad
do $\underline{O}$ (za $t = \pi$). funkcija $\underline{y}$ ima periodu $\underline{\pi}$; nj
je diagram dat na sl.34.



Sl.34

Zadaci.

1. Zapremina kutije sa kvadratnom osnov
koja je gore otvorena, iznosi 5 cm^3. Neka je $\underline{x}$
dužina ivice osnove. Odredi njenu površinu $\underline{P}$ k
funkciju od $\underline{x}$.

2. Kupa visine 4 cm. i poluprečnikom os
ve 2 cm. presečena je na visini $\underline{x}$ horizontaln
ravni. Odredi poluprečnik i površinu osnove ka
zapreminu novo dobivene kupe kao funkcije od $\underline{x}$

3. Trapez sa osnovama 5 cm. i 3 cm. i vis
nom 2 cm. presečen je pravom paralelnom osnovama
na otstojanju $\underline{x}$ od veće osnove. Izračunaj povr
šine $\underline{P}$ i $\underline{Q}$ tako dobivena dva trapeza kao funkci
od $\underline{x}$.

Neka je $\underline{M}$ pokretna tačka na pravoj
$y = x+2$, a $\underline{O}$ početak koordinatnog sistema. Odredi
veličinu $r=\overline{OM}$ kao funkciju apscise tačke $\underline{M}$.

5. U trouglu ABC date su strane $\overline{AB} = 6$ cm.
i $\overline{AC} = 8$ cm. Odredi stranu $BC = y$ i površinu $\underline{P}$,
kao funkciju $\sphericalangle BAC = \Theta$. Kada je površina najveća,
a kada najmanja ?

6. U trouglu ABC date su strane $\overline{AC} = 6$ cm.
i $\overline{BC} = 8$ cm. Odredi površinu $\underline{P}$ trougla kao funk-
ciju strane $\overline{AB} = 2x$.

1.14. V e ž b e.

1. Pokaži da se svaki racionalan broj može
napisati u obliku

$$a + \frac{b}{1\cdot 2} + \frac{c}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{l}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

gde su $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \ldots\ldots \underline{l}$ celi brojevi i
$0 \leq a$, $0 \leq b < 2$, $0 \leq c < 3, \ldots\ldots 0 < l < n$.

2. Uredi $f(x+h)$ po rastućim stepenima od $\underline{h}$,
gde je 1° $f(x) = x^3-3x+1$; 2° $f(x) = x^4$; 3° $f(x)=x^5$.

3. Neka je $F(x) = x + \frac{1}{x}$; pokaži da je :

1° $F(x) = F(\frac{1}{x})$; 2° $F^2(x) = 2+F(x^2)$; 3° $F^3(x) =$
$= 3F(x) + F(x^3)$.

4. Pokaži da je $g(\frac{1}{x}) = g(1-x)$ kad je

$$g(x) = \frac{x^3-3x^2+1}{x(1-x)}.$$

5. Neka je $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$; pokaži da je

$$f(-x) = f(\frac{1}{x}).$$

6. Neka je $f(x) = tg\, x$, izrazi $f(x+y)$ po-
moću $f(x)$ i $f(y)$.

<u>7.</u> Neka je $f(x) = \log x$; izrazi $f(x^n)$ pomoću $f(x)$.

<u>8.</u> Neka je $p(x) = ax + bx^2 + cx^3$, $p(1) = 2$, $p(2) = 2$ i $p(3) = -6$; odredi a, b, c, i $p(-2)$.

<u>9.</u> Neka je $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $g(-1) = \frac{1}{2}$, $g(\frac{1}{2}) = -4$ i $g(2) = 5$; koliko je $g(4)$?

<u>10.</u> Koje su nule funkcije $f(x) = \frac{x^2-2ax+a^2+b^2}{(x-a)(x-b)}$?

<u>11.</u> Neka je $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ i $g(x) = x-2$; kada će biti $f(x) = g(x)$?

<u>12.</u> Neka je $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$; kada će biti $f(x) + f(0) = 0$?

<u>13.</u> Nacrtaj diagrame sledećih funkcija: $1^\circ\ (x-a)(x-b)$; $2^\circ\ x^2-2ax+a^2+b^2$; $3^\circ\ \frac{1}{x^2+a^2}$; $4^\circ\ \sqrt{(x-a)(x-b)}$; $5^\circ\ \sqrt{(b-x)(x-a)}$.

<u>14.</u> U kojim su razmacima zadovoljene nejednačine: $1^\circ\ \frac{(x-2)(x^4-2x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} > 0$; $2^\circ\ \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-3)} > 1$; $3^\circ\ \frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} > 0$; $4^\circ\ \frac{x-a}{x-b} - \frac{x-b}{x-a} < 0$; $5^\circ\ |x-1| + |x-1| < 2$; $6^\circ\ \sin x < \frac{1}{2}$; $7^\circ\ |\sin x| < \frac{1}{2}$?

<u>15.</u> Za koje vrednosti od <u>a</u> nejednačine $\frac{x-2}{(x-1)^2} > \frac{1}{2a}$ nema rešenja ?

<u>16.</u> Koje su od dole navedenih funkcija parne a koje neparne ? $1^\circ\ a+bx^2+cx^4$; $2^\circ\ ax+bx^3+cx^5$; $3^\circ\ x^2-x^{-2}$; $4^\circ\ x^3-x^{-3}$; $5^\circ\ a^x \pm a^{-x}$; $6^\circ\ \sec x$; $7^\circ\ \sin ax$; $8^\circ\ \sin x \sin 2x$; $9^\circ\ |\sin x|$; $10^\circ\ \sin|x|$; $11^\circ\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$; $12^\circ\ |1+x| + |1-x|$; $13^\circ\ f(|x|)$; $14^\circ\ |x+1| - |x-1|$; $15^\circ\ \frac{|x+1| - |x-1|}{2x}$.

<u>17.</u> Funkcija $f(x) = h(x)+h(-x)$ je parna, a funkcija $g(x) = h(x)-h(-x)$ neparna; proveri na funkcijama: $1^\circ\ h(x) = a+bx+cx^2$; $2^\circ\ h(x) = \frac{1}{a+x}$; $3^\circ\ h(x) = \frac{\sin x}{1+x}$; $4^\circ\ h(x) = \log(1+x)$.

<u>18.</u> Ako je $f(x)$ parna, a $g(x)$ neparna funkcija, koje su od dole navedenih funkcija parne, a koje neparne: $1^\circ\ xf(x)$; $2^\circ\ xg(x)$; $3^\circ\ f(x)g(x)$; $4^\circ\ g^2(x)$; $5^\circ\ g^3(x)$; $6^\circ\ f(x+a)-f(x-a)$; $7^\circ\ g(x+a)-g(x-a)$?

<u>19.</u> Ako je $f(1+x) = f(1-x)$, ima li diagram funkcije $f(x)$ osovinu simetrije ? Proveri na funkciji $f(x) = 2x^2-4x+5$.

<u>20.</u> $F(x+\frac{1}{2})$ je parna funkcija; koja je osovina simetrije diagrama funkcije $F(x)$.

<u>21.</u> Ako je $f(x) = f(\frac{1}{x})$ i ako se diagram funkcije $f(x)$ u razmaku $(0,1)$ poklapa sa diagramom funkcije $\sqrt{x(2-x)}$, nacrtaj diagram funkcije $f(x)$ u razmaku $(1, \infty)$.

<u>22.</u> Kolike su periode funkcija:

1° $\sin x \cos x$; 2° $\operatorname{tg} 2x$; 3° $[x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ (v.2.3., definicija).

<u>23.</u> Pokazi da su sledeće funkcije monotone

1° $x + \sin x$; 2° $x - \sin x$; 3° $x + \cos x$; 4° $x - 2\sin\frac{x}{2}$; 5° 2^x .

<u>24.</u> Neka je diagonala kvadrata duga 3 cm. izrazi njegovu površinu kao funkciju zbira stran

<u>25.</u> Neka je <u>x</u> visina kupe opisane oko lopte poluprečnika r; kako se menja njena zapremina ?

<u>26.</u> U trouglu ABC data je strana $\overline{AB} = 4$ cm i ugao $ACB = 30^\circ$. Odredi strane $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$ i površinu <u>S</u> kao funkciju ugla $ABC = \Theta$.

<u>27.</u> U prethodnom zadatku stavi $\overline{AC} = 4$, a $\overline{AB} = x$.

<u>28.</u> Neka je $f(x) = x^n$; izraz $f(x) - f(a)$ je deljiv sa $x-a$. Odredi količnik.

<u>29.</u> Nejednačina $(1+h)^n \geq 1+nh$ vazi za sve h 1 i $n = 0,1,2,\ldots$ (Stavi u prethodnom zadatku $x = 1+h$ i $a = 1$) .

<u>30.</u> Nejednačina $\sqrt[n]{1+x} \leq 1+\frac{h}{n}$ važi za sve $h \geq 0$ i $n = 1,2,3,\ldots$ (Zameni u prethodnom zadatku h za $\frac{h}{n}$.) . .

<u>31.</u> Reši jednačine : 1° $f(x) + f(2x) = a$ kad je $f(x) = \sqrt{1+x}$; 2° $f(x) = f(1)$ kad je $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2}$; 3° $f(x) - \frac{4}{f(x)} = 3$ kad je $f(x) = 2^x$.

<u>32.</u> Na otstojanju <u>a</u> od stola nalazi se izvor svetlosti, a izmedju njih na odstojanju <u>x</u> od stola nalazi se horizontalna površina veličine <u>A</u> . Odredi veličinu senke kao funkciju <u>x</u>-a.

<u>33.</u> Pokazi da tačke

$\frac{(n-1)a+b}{n}$, $\frac{(n-2)a+2b}{n}$, $\frac{(n-3)a+3b}{n}$ . . . . . $\frac{2a+(n-2)b}{n}$

i $\frac{a+(n-1)b}{n}$ dele razmak (a,b) na <u>n</u> jednakih delova.

<u>34.</u> Odredi brojeve <u>A</u> i <u>B</u> tako da

$$y = Ax + B$$

1° predje razmak $(2,4)$ dok x predje razmak $(1,2)$;

2° " " (c,d) " x " " (a,b).

<u>35.</u> Ako postoje dve konstante <u>a</u> i <u>b</u> takve da je funkcija

$$b + f(x+a)$$

neparna tada diagram funkcije $f(x)$ ima središte simetrije u tački $x = a$, $y = b$.

<u>36.</u> Diagram funkcije

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

ima središte simetrije, ma kakve bile konstante A, B, C i D.

<u>37.</u> Ako je $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ 0 & 2A' & B' \end{vmatrix} = 0$ i $A' = 0$,

diagram funkcije

$$f(x) = \frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'}$$

ima centar simetrije.

38. Nadji inverzne funkcije funkcija:

1° $2x+\sqrt{x^2-1}$; 2° $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}+\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}\right)$.

39. Pokaži da je

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$$

inverzna funkcija funkcije $\frac{1}{2}(3x+x^3)$.

40. Pokaži da je

$$f^{(-1)}(x) = f(x)$$

kad je 1° $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$; 2° $f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$.

41. Ako je a hipotenuza, a b i c katete pravouglog trougla tada je

$$\sqrt{\frac{a+c}{2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{a-b}$$

1° za $a=2$, $b=1$ i $c=3$ dobijamo

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+3}$$

2° za $a=1$ i $b=x$ dobijamo da iz

$$y = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$$

$$\therefore \quad x = 2y\sqrt{1-y}$$

t.j. da je

$2x\sqrt{1-x}$ inverzna funkcija funkcije

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

42. Ako je funkcija $f(x)$ konveksna u nekom razmaku, funkcija $\frac{1}{f(x)}$ ne mora biti konveksna. Posmatraj diagram funkcija

$$f(x) = 1 + x^2 \text{ i } g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

43. Ako je funkcija $f(x)$ konveksna prema dole i monotono raste u nekom razmaku, tada je njena inverzna funkcija $g(x)$ konveksna prema gore i monotono raste u tome razmaku; ako $f(x)$ monotono opada tada je $g(x)$ takodje konveksna prema dole i monotono raste.

44. Pokazi da će funkcija $f(x)$ biti konveksna prema dole u razmaku (a,b) ako je

$$f(x+2h)-2f(x+h)+f(x) \geqslant 0.$$

za svako $h>0$ i $a \leqslant x \leqslant x+h \leqslant b$.

G L A V A II.

G R A N I C A

2.1. Granica beskonačno : $x \to \infty$

(i) Kad x dobiva niz sve većih i većih vrednosti, tako da postaje veće od ma kako velikog unapred datog broja, kažemo: x neograničeno raste ili x teži beskonačnosti i pišemo

$$x \to \infty \quad \text{ili} \quad x \to +\infty$$

Ako je medjutim x negativno a njegova apsolutna vrednost postaje veća od ma kako velikog broja pišemo

$$x \to -\infty .$$

(ii) Kad je x veliko, x^2 je još veće dakle x i x^2 teže istovremeno beskonačnosti. Ovo pišemo:

$$x^2 \to \infty \text{ kad } x \to \infty$$

Isto tako

$$ax^2 \to \infty \text{ kad } x \to \infty, \text{ ako je } a > 0$$
$$ax^2 \to \infty \text{ kad } x \to \infty, \text{ ako je } a > 0 .$$

Pr.(1) $\sqrt{x} \to \infty$ kad $x \to \infty$

Pr.(2). $x^2 - 2x \to \infty$ kad $x \to \infty$

jer je $x^2 - 2x = x(x-2)$, a x i $(x-2)$ su veliki kad je x veliko.

Pr.(3). $p(x) = x^3 - 00x^2 - 10.000 \to \infty$ kad $x \to \infty$

Ako je $x > 101$ imamo

$$p(x) = x^3 - 100x^2 - 10.000 = x^2(x-100) - 10.000 > x^2 - 10.000$$

$\therefore \quad p(x) > x - 10.000,$

rema tome, ma kako bio velik unapred dati broj M, ko izaberemo x tako da bude

$$x - 10.000 > M \text{ t.j. } x > M + 10.000$$

iće

$$p(x) > M.$$

Ako je $u(x) < v(x)$ i ako je $u(x) \to \infty$ tada i $v(x) \to \infty$.

(iii) Za dovoljno veliko x možemo $\frac{1}{x}$ učiniti roizvoljno malo, t.j. kad x neograničeno raste $\frac{1}{x}$ opada i približava se nuli. U ovakvom slučaju ažemo da $\frac{1}{x}$ teži nuli kad x teži beskonačnosti i pišemo

$$\frac{1}{x} \to 0 \text{ kad } x \to \infty .$$

Pr.(4). $\frac{1}{x^2} \to 0$ kad $x \to \infty$.

Pr.(5). $\frac{2x}{x^2+1} \to 0$ kad $x \to \infty$.

Imamo

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{2}{x + 1/x} < \frac{2}{x} \to 0 \qquad x \to \infty$$

Pr.(6). $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ kad $x \to \infty$

Budući da $\sqrt{x} \to \infty$ kad $x \to \infty$

$\therefore \ \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0.$

Pr.(7). $\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \to 0$ kad $x \to \infty$

Ako je $0 < u(x) < v(x)$ i ako $v(x) \to 0$ tada i $u(x) \to 0$.

(IV) Izraz $t = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ se u toliko manje razlikuje od jedinice u koliko x biva veće i teži ka jedinici kad x teži beskonačnosti.

Ovo pišemo:

$$t = \frac{x+1}{x} \longrightarrow 1 \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow \infty$$

Pr.(8). $t = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \longrightarrow 1$ kad $x \to \infty$

Pr.(9). $\frac{2x^2+3x+4}{x^2} \longrightarrow 2$ kad $x \longrightarrow \infty$

Imamo

$$\frac{2x^2+3x+4}{x^2} = 2 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \longrightarrow 2 \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow \infty$$

Pr.(10). $\sqrt{4+\frac{1}{x}} \to \sqrt{4} = 2$ kad $x \to \infty$

Zadaci.

Kad $x \to \infty$ čemu teže izrazi:

1. $\frac{2x^2}{x^3+1}$; 2. $\frac{1-x}{2+x^2}$; 3. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 4. $x - \sqrt[3]{x}$

Kad $x \to \infty$ čemu teže izrazi :

5. x^3; 6. $\sqrt{x^2+2x}$; 7. $\sqrt{1+x^2}$; 8. $\sqrt{\frac{1-x}{x}}$; 9. $\sqrt{\frac{1+x^2}{x}}$

2.2. Granica $x \to a$.

(i) Nezavisna promenljiva x može uzeti neku vrednost a, t.j. možemo staviti $x=a$, a toj vrednosti možemo se i približavati preko vrednosti manjih ili većih od a t.j. sa njene leve ili desne strane. U oba ova slučaja kažemo: x teži a i pišemo

$$x \longrightarrow a.$$

Stavimo $x = a+h$ i pustimo da $h \to 0$; tada će

$x \longrightarrow a$ sa leve ili sa desne strane, prema tome da li je h pozitivno ili negativno. Ako je $h > 0$, t.j. ako $h \to 0$ preko pozitivnih prednosti pišemo simbolički

$$h \longrightarrow +0;$$

ako je $h < 0$, t.j. ako $h \to 0$ preko negativnih vrednosti, stavljamo

$$h \longrightarrow -0.$$

Dakle će $x = a+h$ težiti ka a, sa desne ili sa leve strane prema tome da li $h \to +0$ ili $h \to -0$, a što simbolički pišemo

$$x \to a+0 \quad \text{ili} \quad x \to a-0, \quad \text{ili zajednički} \quad x \to a \pm 0$$

(ii) Ako u izrazu kojim je definisana funkcija $f(x)$ pustimo da se x postepeno približava vrednosti a, taj se izraz može približavati nekoj vrednosti A; u tom slučaju kažemo: $f(x)$ teži ka A kad x teži ka a i pišemo:

$$f(x) \longrightarrow A \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow a.$$

Pr.(1). Čemu teži $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ kad $x \longrightarrow 1$?

Stavimo $x = 1+h$; biće

$$f(1+h) = \frac{(1+h)^2+1}{1+h+1} = \frac{2+2h+h^2}{2+h} \longrightarrow \frac{2}{2} = 1 \quad \text{kad} \quad h \longrightarrow \pm 0 \ ?$$

$$\therefore \ f(x) \longrightarrow 1 \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow 1 \pm 0.$$

Primetimo da je i $f(1) = 1$

Pr.(2). Čemu teži $f(x) = \sqrt{x} - 2$ kad $x \longrightarrow 4$?

Stavimo $x = 4+h$; tada je za $h > 0$.

$$f(4+h) = \sqrt{4+h} - 2 = \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{\sqrt{4+h}+2} =$$

$$= \frac{h}{2+\sqrt{4+h}} < \frac{h}{2+\sqrt{4}} = \frac{h}{4} \longrightarrow 0 \quad \text{kad} \quad h \longrightarrow 0,$$

$$f(x) \longrightarrow 0 \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow 4.$$

Primetimo da je i $f(4) = 0$

<u>Pr.(3)</u>. $\sin x \to 0$ kad $x \to 0$; $\sin 0x = 0$, (v.sl.4).

(iii) izraz $\frac{1}{x}$ je u toliko veći u koliko je <u>x</u> manje, i postaje proizvoljno velik kad je <u>x</u> dovoljno malo:

za $x = 0{,}1$ biće $\frac{1}{x} = 10$, za $x = 0{,}01$ biće $\frac{1}{x} = 100$

za $x = 0{,}001$ biće $\frac{1}{x} = 1000$ i t.d.

$\frac{1}{x}$ <u>teži beskonačnosti kad</u> <u>x</u> teži ka nuli i to:

$$\frac{1}{x} \to +\infty \text{ kad } x \to +0,$$

i

$$\frac{1}{x} \to -\infty \text{ kad } x \to -0.$$

<u>Pr.(4)</u>. Čemu teži $f(x) = \frac{1}{x-1}$ kad $x \to 1$?

Stavimo $x = 1+h$; biće

$$f(1+h) = \frac{1}{1+h-1} = \frac{1}{h} \to \pm\infty \text{ kad } h \to \pm 0 ;$$

$\therefore$ $f(x) \to \pm\infty$ kad $x \to 1 \pm 0$, t.j. sa desne ili leve strane.

<u>Pr.(5)</u>. Čemu teži $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ kad $x \to 2$?

Stavimo $x = 2+h$; biće

$$f(2+h) = \frac{1}{4-(2+h)^2} = \frac{1}{-4h-h^2} = \frac{-1}{h(4+h)} \to \mp\infty$$

kad $h \to \pm 0$,

$\therefore$ $f(x) \to \mp\infty$ kad $x \to 2\pm 0$.

<u>Pr.(6)</u>. $f(x) = \operatorname{tg} x \to \pm\infty$ kad $x \to \frac{\pi}{2} \mp 0$.

Stavimo $x = \frac{\pi}{2} + h$; biće

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)} = \frac{\cos h}{-\sin h} =$$

$$= \frac{-\cos h}{\sin h} \to \pm\infty \qquad \text{kad } h \to \mp\infty$$

<u>(iv).</u> Činjenicu da $f(x) \to A$ kad $x \to a$, pišemo još i ovako $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Čitaj: limes od $f(x)$ kad $x \to a$ jednak je <u>A</u>.

Na primer: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$;

$\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$; $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}-2 = 0$;

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

<u>Zadaci</u>. Izračunaj granične vrednosti:

<u>1.</u> $\lim\limits_{x\to 1} \{f(x)-f(1)\}$ kad je 1° $f(x) = \sqrt{x}$;

2° $f(x) = x^2-1$; 3° $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$; 4° $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$;

5° $f(x) = \cos(x-1)$.

<u>2.</u> $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x^2-3x+2}$; <u>3.</u> $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1}$

<u>4.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cotg} x$. <u>5.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x}$. <u>6.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

2.3. N e p r e k i d n o s t .

Za funkciju f(x) kažemo da je <u>neprekidna</u> (kontinuirana) za x=a ako f(x) malo otstupa od f(a) kad se <u>x</u> nalazi u blizini tačke t.j. vrednosti <u>a</u>; preciznije ako

$f(x) \to f(a)$ kad $x \to a+0$, tj. kad $x \to a$ i s leve i sa desne strane.

Ovo možemo još i ovako pisati :

$$f(a+x)-f(a) \to 0 \quad \text{kad } h \to \pm 0$$

Funkcija je neprekidna u nekom razmaku, ako je neprekidna u svim tačkama toga razmake.

<u>Pr.(1)</u>. Funkcija $\sqrt{x}$ je neprekidna u tač[ki] $x = 1$.

Stavimo $x=1+h$ sa $h > 0$, tada je

$$\sqrt{1+h}-\sqrt{1} = \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{1+h+1} = \frac{h}{1+\sqrt{1+h}}$$

$$\therefore \quad 0 < \sqrt{1+h} - \sqrt{1} < \frac{h}{2}$$

tj. $\quad \sqrt{1+h} \to 1$ kad $h \to 0$.

<u>Pr.(2)</u>. Funkcija x^2 je neprekidna za sve x[.] Imamo

$$(x+h)^2-x^2 = h(2x+h) \to 0, \text{kad } h \to \pm 0.$$

<u>Pr.(3)</u>. Funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ima prekid u tački $x=0$, jer u toj tački ona nije definisana.

<u>Definicija</u>. Označimo sa $[a]$ najveći ceo broj koji je $\leq a$;

tako je $[2] = 2$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[\pi] = 3$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$,

$[-2] = -2$, $[-\sqrt{2}] = -2$, $[-\pi] = -4$, $\left[-\frac{1}{2}\right] = -1$.

[U]opšte imamo:

$[x] = 0$ za $0 \leq x < 1$, $[x] = 1$ za $1 \leq x < 2$, itd

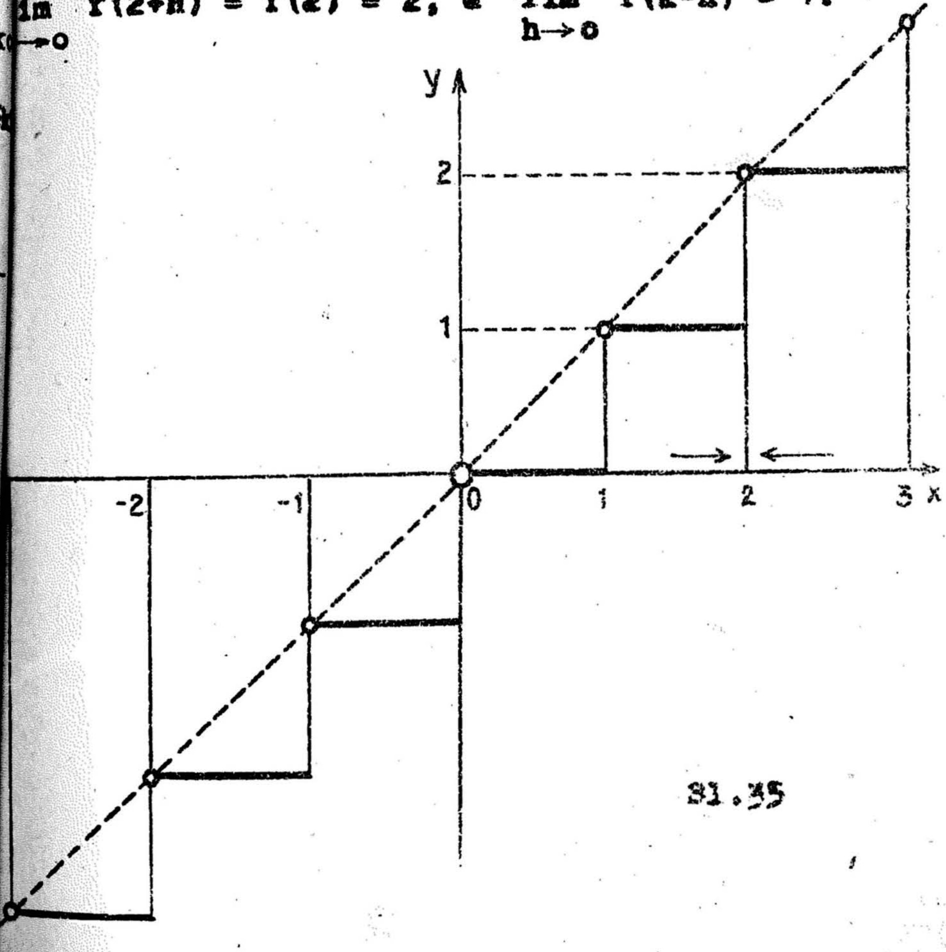
Izraz $a - [a]$ pretstavlja razlomljeni ili [de]cimalni deo broja <u>a</u>.

<u>Pr.(4)</u>. Funkcija $f(x) = [x]$ ima prekid kad [j]e <u>x</u> ceo broj.

Neka je <u>h</u> malo i > 0; za $x = 2$ imamo:

[f]$(2+x) = [2+h] = 2$ dok je $f(2-h) = [2-h] = 1$, tj.

$\lim_{h\to 0} f(2+h) = f(2) = 2$, a $\lim_{h\to 0} f(2-h) = 1$.



Sl.35

Slika 35 daje diagram funkcije $y = [x]$.

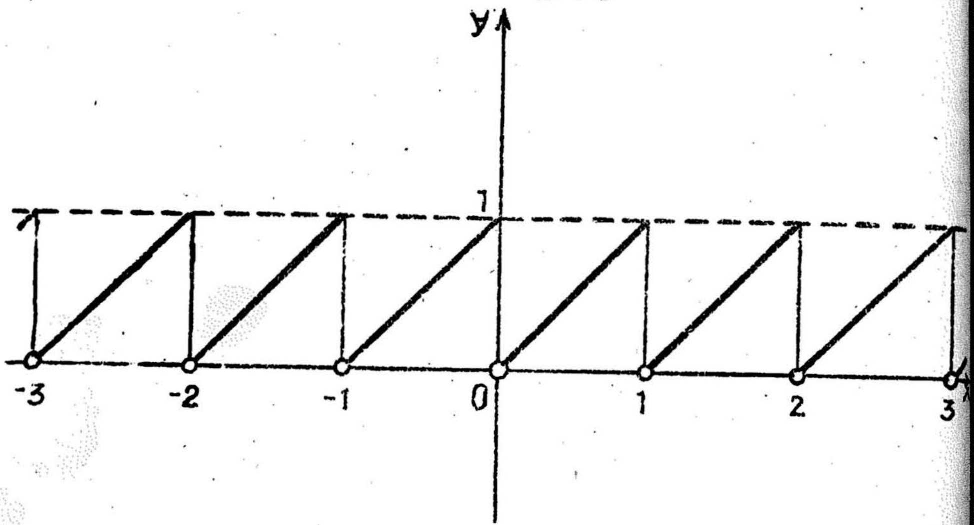
Pr.(5). Funkcija $g(x) = x-[x]$ ima prekid kad je x = celom broju.

Neka je h malo $i > 0$, a n ceo broj; imamo

$$g(n+h) = n+h-[n+h] = n+h-n = h \to 0 \text{ kad } h \to 0,$$

$$g(n-h) = n-h-[n-h] = n-h-(n-1) = 1-h \to 1 \text{ kad } h \to 0$$

$$\lim_{h\to 0} g(n+h) = g(n) = 0 \text{ a } \lim_{h\to 0} g(n-h) = 1.$$



Sl.36

Slika 36 daje diagram funkcije $y=x-[x]$; ona je periodična sa periodom $\omega = 1$.

Pr.(6). Funkcija $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{kad je } x > 0, \\ 0 & \text{"} \quad \text{"} \quad x = 0, \end{cases}$

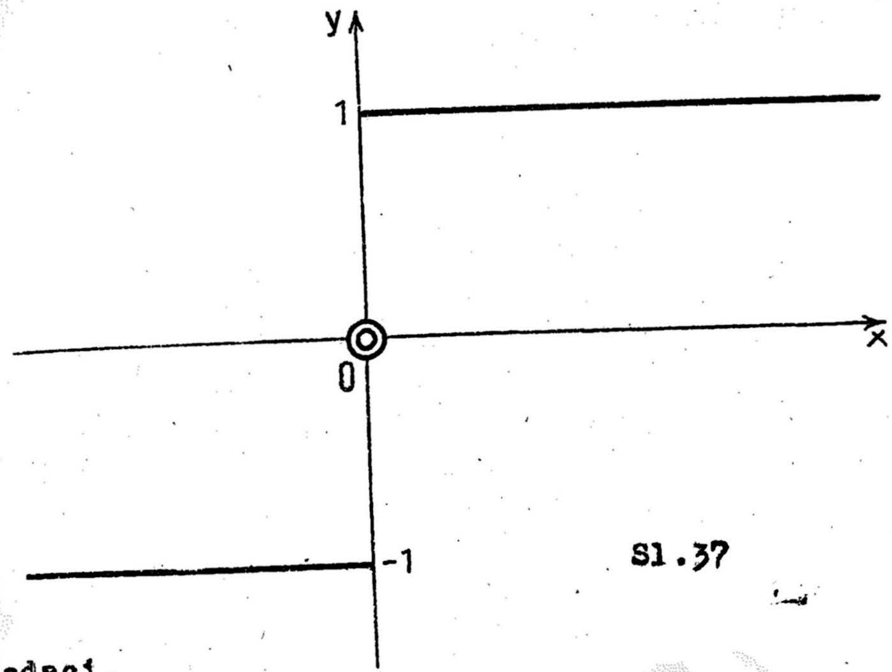
je prekidna u tački $x=0$.

Imamo

$$g(x) = 1 \quad \text{za} \quad x > 0,$$

$$g(x) = -1 \quad \text{"} \quad x < 0.$$

Diagram funkcije $y = \frac{x}{|x|}$ dat je na slici 37 ona pretstavlja "znak od x".



Sl.37

Zadaci.

Nacrtaj diagrame sledećih funkcija i vidi u kojim su tačkama one prekidne:

1. $[2x]$; 2. $[x^2]$; 3. $x^2-[x^2]$; 4. $x+[x]-[2x]$;
5. $|x|$; 6. $|x-1|$; 7. $\frac{|x+1|-|x-1|}{2}$; 8. $\frac{|x+1|-|x-1|}{2x}$;
9. $\left|\frac{[2x-1]}{2}\right|$; 10. $\cos\pi\,[2x]$; 11. $\cos\pi\,[x]$.

2.4. Mesta gde funkcija nije definisana.

(i) Neka je funkcija $f(x)$ data u obliku količnika $\frac{u(x)}{v(x)}$. Kako se nulom ne može deliti, funkcija $f(x)$ ovim izrazom nije definisana za sve one vrednosti od x za koje imenitelj postaje jednak nuli, tj. za sve nule imenitelja $v(x)$.

Pr.(1). Funkcija

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x}{x^2-3x+2}$$

nije definisana za $x=1$ i $x=2$, jer je $v(1)=v(2)=0$.

Pr.(2). Funkcija

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x-2}{x^2-4}$$

nije definisana za $x = \pm 2$, jer je $v(\pm 2) = 0$.

Pr.(3). Funkcija

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$$

nije definisana za $x=0$ jer je $v(0) = 0$.

Pr.(4). Funkcija

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

nije definisana za $x = 0, \pm \pi \pm 2\pi$, ...jer je $v(0) = v(\pm\pi) = v(\pm 2\pi) = v(\pm 3\pi) = \ldots\ldots = 0$.

Pr.(5). Funkcija

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

nije definisana za $x = 0$.

(ii) Ako je $v(a) = 0$ tada je obično

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \pm\infty,$$

kao što je slučaj kod gore navedenih primera (1), (2) i (4).

Pr.(1).

$$f(x) = \frac{x}{x^2-3x+2} \longrightarrow \pm\infty \text{ kad } x \to 1 \pm 0$$

$$f(x) \longrightarrow \pm\infty \text{ kad } x \to 2 \pm 0.$$

Pr.(2).

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \longrightarrow \pm\infty \text{ kad } x \to -2 \pm 0 .$$

Pr.(4). $f(x) = \operatorname{cotg} x \to \pm\infty$ kad $x \to \pm 0$, $\pm\pi \pm 0, \pm 2\pi \pm 0 \ldots\ldots$

(iii) Može se desiti da funkcija $f(x)$ ne bude definisana za $x = a$, a da ipak teži odredjenoj vrednosti kad $x \to a$, kao što je to slučaj u gore navedenim primerima (2),(3) i (5).

Pr.(2). $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \to \frac{1}{4}$ kad $x \to 2 \pm 0$.

Stavimo $x = 2+h$; biće

$$f(2+h) = \frac{2+h-2}{(2+h)^2-4} = \frac{h}{4h+h^2} = \frac{1}{4+h} \to \frac{1}{4}$$

kad $h \to \pm 0$, $\therefore \frac{x-2}{x^2-4} \to \frac{1}{4}$ kad $x \to 2 \pm 0$.

Pr.(3).

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} \to 2 \quad \text{kad} \quad x \to 0$$

Imamo

$$f(x) = \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)} =$$

$$= \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1} = \sqrt{1+x^2}+1 \to 2 \text{ kad } x \to \pm 0$$

Pr.(5). $\frac{\sin x}{x} \to 1$ kad $x \to 0$

Na slici 38 je $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$, luk $\widehat{BC} = x$ $\overline{AC} = \sin x$, $\overline{OA} = \cos x$, $\overline{BD} = \operatorname{tg} x$. Uporedjujući površine trougla OAC i OBD sa površinom sektora BOC vidimo da je

$$\frac{1}{2}\sin x \cos x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x ;$$

deobom sa $\frac{1}{2}\sin x$ (>0) dobijemo

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} ;$$

$$\therefore \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Kad je x malo, spoljne strane ove nejednačine se malo razlikuju od jedinice, prema tome se i izraz u sredini malo razlikuje od 1, t.j.

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{kad} \quad x \to 0.$$

Zadaci.

Izračunaj granične vrednosti :

1. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{10x}{x^2+2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$

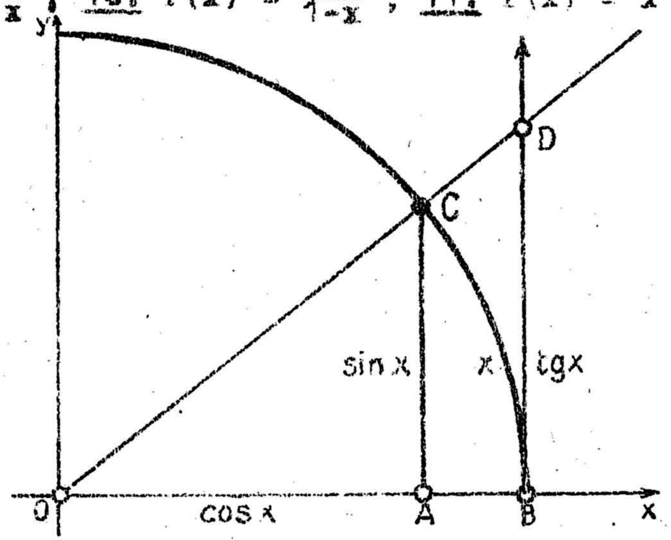
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-1)^4-1+4x}{x}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+4)^3-(x-8)^2}{x(x-3)}$;

6. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2+6x+8}$; 7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}$, 8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(stavi $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$);

Koliki je $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ kad je

9. $f(x) = \frac{1}{x}$; 10. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, 11. $f(x) = x$



Sl.38

12. Čemu teži $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x-a}$ kad $x \to a$.

Kad $x \to 0$ čemu teže funkcije:

13. $\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$; 14. $\frac{\sin x^2}{x \sin x}$; 15. $\sqrt{\frac{\sin x}{\sin \sqrt{x}}}$.

2.5. Prividno neodredjeni izrazi

(i) Izraz oblika $\frac{u(x)}{v(x)}$ može težiti odredjenoj granici i kad $v(x) \to 0$; zato izraze ove nazivamo prividno neodredjenim izrazima.

Kako u tom slučaju i $u(x)$ mora da $\to 0$, to kažemo da se taj izraz javlja u neodredjenom obliku "$\frac{0}{0}$" .

Pr.(1). Izraz $\frac{\sin x}{x}$, koji $\to 1$ kad $x \to 0$, javlja se u neodredjenom obliku "$\frac{0}{0}$".

Pr.(2). Izraz

$$\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = f(x)$$

se javlja u neodredjenom obliku "$\frac{0}{0}$" kad $x \to \infty$, a $f(x) \to 2$.

Stavimo $t = \frac{x+1}{x-1}$, tada $t \to 1$ kad $x \to \infty$,

$$f(x) = \frac{t-\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} = \frac{t^2-1}{t-1} = t+1 \to 2 \quad \text{kad} \quad x \to \infty.$$

Ako brojitelj i imenitelj nekog izraza teže nuli, taj izraz ne mora uvek da teži odredjenoj granici.

Pr.(3). $\frac{\sin x}{x^2} \to \infty$ kad $x \to 0$.

(ii) Ako u izrazu $\frac{u(x)}{v(x)}$ brojitelj i imenitelj $\longrightarrow\infty$, kažemo da se izraz javlja u <u>neodredjenom</u> obliku "$\frac{\infty}{\infty}$"; pri tome taj izraz može težiti odredjenoj granici.

<u>Pr.(4)</u>. Funkcija $f(x) = \frac{3x^2+2x+6}{x^2}$ javlja se u neodredjenom obliku „$\frac{\infty}{\infty}$" kad $x\longrightarrow\infty$. Medjutim je

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}$$

$$\therefore f(x)\longrightarrow 3 \quad \text{kad} \quad x\longrightarrow\infty$$

<u>Pr.(5)</u>. Funkcija

$$f(x) = \frac{1-2x^{-2}}{1+x^{-3}+3x^{-3}}$$

javlja se u neodredjenom obliku „$\frac{\infty}{\infty}$" kad $x\to 0$. Medjutim je

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+x+3}$$

$$\therefore f(x)\longrightarrow -\frac{2}{3} \quad \text{kad} \quad x\longrightarrow \pm 0$$

oblika (iii) Neka je funkcija $F(x)$ data izrazom

$$F(x) = f(x)-g(x);$$

ako i $f(x)$ i $g(x)$ teže beskonačnosti kažemo da se taj izraz javlja u <u>neodredjenom obliku</u> „$\infty-\infty$". I u ovom slučaju $F(x)$ može težiti odredjenoj granici.

<u>Pr.(6)</u>. Izraz

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$$

javlja se u neodredjenom obliku „$\infty-\infty$" kad $x\longrightarrow 1$. Medjutim je

$$F(x) = \frac{2x-(1+x)}{x^2-1} = \frac{1}{1+x},$$

$$\therefore \quad F(x)\longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{kad} \quad x\longrightarrow \pm 1$$

<u>Pr.(7)</u>. Izraz

$$F(x) = 1+x^2-x$$

se javlja u neodredjenom obliku „$\infty-\infty$" kad $x\to\infty$

Medjutim

$$F(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$\therefore \quad F(x)\longrightarrow 0 \quad \text{kad} \quad x\longrightarrow\pm\infty.$$

<u>Zadaci.</u> Ispitaj neodredjene izraze:

<u>1.</u> $\frac{1-x}{2-x}$, $(x\to\infty)$; <u>2.</u> $\frac{1+x^2}{x}$, $(x\to\infty)$;

<u>3.</u> $\frac{(1+\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{x}$ $(x\to\infty)$; <u>4.</u> $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, $(x\to\infty)$

<u>5.</u> $\sqrt[3]{\frac{x^2+2}{x}}$, $(x\to\infty)$; <u>6.</u> $\sqrt[3]{x}\,\frac{(1+\sqrt[3]{x})(x+2\sqrt[3]{x})}{x}$, $(x\to\infty)$

<u>7.</u> $\frac{\frac{(x+1)^4}{4}}{x+1}$, $(x\to\infty)$; <u>8.</u> $(2x+\frac{1}{x})^2-(x-\frac{1}{x})^2$, $(x\to\infty)$;

<u>9.</u> $\sqrt{x^2+x}-x$, $(x\to\infty)$; <u>10.</u> $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$, $(x\to\infty)$.

<u>2.6. Asimptotska jednakost</u>

Za dve funkcije $f(x)$ i $g(x)$ kažemo da su <u>asimptotski jednake</u> kad $x\to a$, ako

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad \text{kad} \quad x\to a.$$

Ovo kraće pišemo

$$f(x)\sim g(x) \quad \text{kad} \quad x\to a$$

i kažemo

<u>$f(x)$ je asimptotski jednako $g(x)$</u>

kad $x\to a$.

Ako je

$$f(x) \sim g(x) \text{ kad } x \longrightarrow \infty \text{ odnosno kad}$$

$x \longrightarrow 0$, kažemo još da se funkcija $f(x)$ za velike, odnosno male vrednosti od $\underline{x}$ <u>ponaša kao</u> $g(x)$.

<u>Pr.(1)</u>. Za male vrednosti $\underline{x}$-a, $2x+3x^3$ se ponaša kao $\underline{2x}$, tj.

$$2x+3x^3 \sim 2x \quad \text{kad} \quad x \to 0$$

Imamo

$$\frac{2x+3x^3}{2x} = 1 + \frac{3}{2}x^2 \to 1 \text{ kad } x \to 0.$$

<u>Pr.(2)</u>. Za velike vrednosti $\underline{x}$-a, $(x+1)(x-2)$ se ponaša kao x^2, tj.

$$(x+1)(x-2) \sim x^2 \text{ kad } x \longrightarrow \infty.$$

Imamo

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x^2} = 1-x^{-1}-2x^{-2} \longrightarrow 1 \text{ kad } x \longrightarrow \infty.$$

<u>Pr.(3)</u>.

$$\frac{x^2+2x+3}{x^2} \sim \frac{3}{x^2} \quad \text{kad } x \to 0.$$

Imamo

$$\frac{x^2+2x+3}{x^2} : \frac{3}{x^2} = \frac{3+2x+x^2}{3} \longrightarrow \quad x \to 0.$$

Napomena 1°. U slučaju da je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ konačno i različito od nule, tj. $A \neq 0$, možemo pisati

$$\frac{f(x)}{A} \longrightarrow 1 \quad \text{kad} \quad x \to a,$$

tj.

$$f(x) \longrightarrow A \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow a.$$

Medjutim se u ovom slučaju upotrebljava znak $\underline{\lim}$ ili $\underline{\longrightarrow}$, a znak $\underline{\sim}$ se zadržava isključivo za slučaj kad se uporedjuju dve funkcije koje obe teže ili ka $\underline{0}$ ili ka $\underline{\infty}$.

2°. Veze oblika

$$f(x) \longrightarrow a \quad \text{ili} \quad f(x) \sim g(x)$$

nazivamo <u>asimptotskim relacijama</u>.

<u>Zadaci.</u> Proveri sledeće asimptotske relacije:

<u>1.</u> $3x^2-4x^3+x^4 \sim \begin{cases} 3x^2, (x \to 0); \\ x^4, (x \to \infty); \end{cases}$

<u>2.</u> $x(x-1)(2x+3) \sim \begin{cases} -3x, (x \to 0) \\ 2x^3, (x \to \infty). \end{cases}$

<u>3.</u> $(x-3)^2(x-5) \sim \begin{cases} 4(x-5), (x \to 5) \\ -2(x-3)^2, (x \to 3) \\ x^3, (x \to \infty) \end{cases}$

<u>4.</u> $\frac{x^3+2x+3}{2x^2+x} \sim \frac{3}{x}, (x \to 0)$; <u>5.</u> $2x^4+x^3+5x \sim 2x^4, (x \to \infty)$

<u>6.</u> $\frac{x-1}{x-3} \sim \begin{cases} \frac{2}{x-3}, (x \to 3) \\ \frac{1-x}{2}, (x \to 1) \end{cases}$; <u>7.</u> $x^2(1-2x)^3 \sim -8x^5, (x \to \infty)$

<u>8.</u> $\frac{x+1}{x-1} - 1 \sim \frac{2}{x}, (x \longrightarrow \infty)$; <u>9.</u> $x^2+1 \sim x^2, (x \longrightarrow \infty)$;

<u>10.</u> $\sqrt{x^3-3} \sim x\sqrt{x}, (x \to \infty)$; <u>11.</u> $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}, (x \to 0)$;

<u>12.</u> $\sin x \sim x, (x \to 0)$; <u>13.</u> $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, (x \to 0)$.

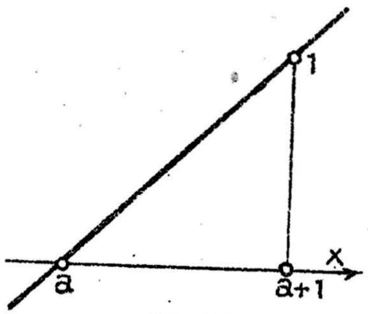
<u>2.7. Višestruke nule.</u>

(1) Učimo funkcije

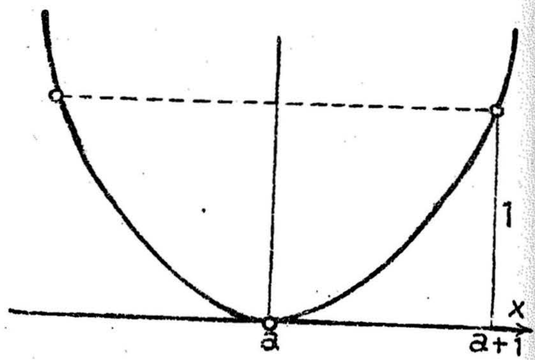
$$x-a,\ (x-a)^2,\ (x-a)^3,\ (x-a)^4 \ldots\ldots$$

čiji su dijagrami prikazani na slikama 39 - 42.

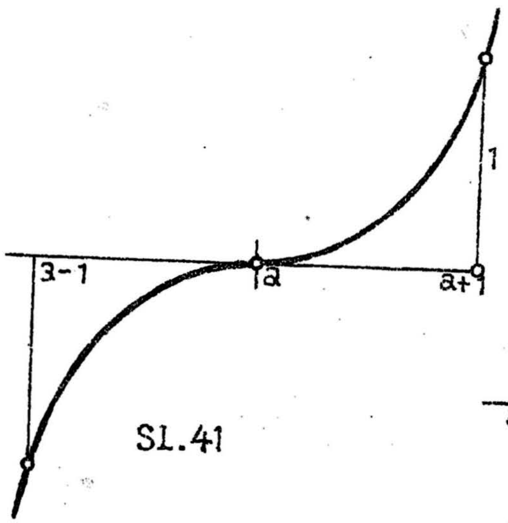
Vrednost $\underline{x}$-a je nula svih ovih funkcija.



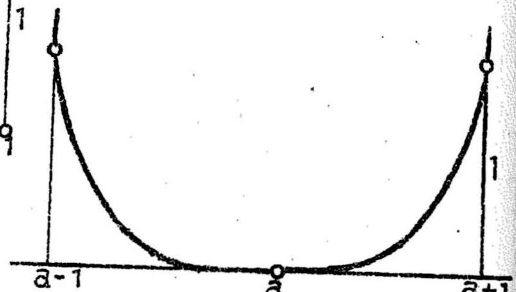
Sl.39



Sl.40



Sl.41



Sl.42

Za funkciju

$$f(x) = x-a$$

Kažemo da je <u>$x = a$ nula prvoga reda.</u>

Za funkciju

$$f(x) = (x-a)^2$$

Kažemo da je <u>$x = a$ nula drugoga reda.</u>

Uopšte kažemo da je <u>$x = a$ višestruka</u>

<u>nula</u> funkcije

$$f(x) = (x-a)^k, \quad k=1,2,3,\ldots\ldots$$

i to <u>nula k-tog reda.</u>

<u>Funkcija menja znak kad x prolazi kroz jednu nulu 1-og, 3-ćeg i uopšte neparnog reda; ona ne menja svoj znak kad x prolazi kroz nulu parnog reda.</u>

U koliko je red nule veći u toliko je funkcija po apsolutnoj vrednosti manja kad se <u>x</u> nalazi u blizini te nule.

<u>Pr.(1).</u> $x = 2$ je nula drugog reda funkcije

$$f(x) = 2x^2-8x+8,$$

jer je

$$f(x) = 2(x-2)^2 .$$

<u>Pr.(2).</u> Ako je

$$b^2-4ac = 0 \quad i \quad a \neq 0$$

tada je

$$x = -\frac{b}{2a}$$

nula drugog reda funkcije

$$f(x) = ax^2+bx+c.$$

(ii) Opštije kažemo da je <u>$x = a$ nula k-tog reda</u> funkcije $f(x)$, ako izraz kojim je definisana funkcija $f(x)$ sadrži faktor oblika

$(x-a)^k$, gde je <u>k</u> ceo broj, tj.

ako je

$$f(x) = (x-a)^k \, g(x)$$

i ako je $g(a)$ konačno i $\neq$ <u>0.</u>

<u>Pr.(3).</u> $x = 1$ je nula drugog reda funkcije

$$f(x) = x^3-3x+2,$$

jer je

$$f(x) = (x-1)^2(x+2).$$

Pr.(4). $x = 1$ je nula drugog reda funkcije

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 1 - x.$$

Zaista je

$$f(x) = \frac{(2\sqrt{x}-1-x)(2\sqrt{x}+1+x)}{2\sqrt{x}+1+x} = \frac{4x-(1+x)^2}{2\sqrt{x}+1+x} = \frac{-(x-1)^2}{2\sqrt{x}+1+x}.$$

Dakle je

$$f(x) = (x-1)^2\, g(x)$$

sa

$$g(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}+1+x} \quad \text{i} \quad g(1) = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

(iii) Ako je

$$f(x) = (x-a)^k\, g(x) \text{ sa } g(a) \neq 0,$$

tada je

$$f(x) \backsim g(a)\cdot(x-a)^k \text{ kad } x \to a.$$

Uopšte kažemo da je $x = a$ nula k-tog reda funkcije $f(x)$ ako je

$$f(x) \sim A(x-a)^k \text{ kad } x \to a \pm 0,$$

gde je $A \neq 0$ i k ceo pozitivan broj.

Pr.(5). $x = 0$ je nula prvog reda funkcije

$$\sin x$$

jer je

$$\sin x \backsim x \text{ kad } x \to 0.$$

Pr.(6). $x = 0$ je nula drugog reda funkcije

$$1 - \cos x$$

jer je

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \text{ kad } x \to 0.$$

U koliko je red nula funkcije $f(x)$ veći u toliko je i njen diagram u blizini te nule više priljubljen uz X-osu, pa je funkcija po apsolutnoj vrednosti u toliko manja.

Ako je red nule neparan, diagram funkcije preseca X-osu, ako je red nule paran diagram funkcije ostaje iznad ili ispod X-ose, prema tome da li je $A > 0$ ili je $A < 0$.

Napomena: Vidi zadatak 1.3.11.

Zadaci.

Pokaži da je $x = 0$:

1. nula 3-ćeg reda funkcije $4x^5-2x^3$;
2. " 1-og " " $\sqrt{1+x}-1$;
3. " 2-og " " $\sqrt{4+x^2}-2$;
4. " 1-og " " $\operatorname{tg} x$;
5. " 3-ćeg " " $2\sin x - \sin 2x$;

Koga je reda $x = 1$ nula funkcija:

6. $x = \sqrt{x}$; 7. $1+x-2\sqrt{x}$; 8. $\sin \pi x$; 9. $1-\sin\frac{\pi}{2}x$

Nacrtaj približno diagrame gornjih funkcija u blizini ovih nula.

2.8. Približna vrednost

(i) Numerička vrednost je apsolutno tačna samo kad je data kao ceo broj, razlomak ili konačan decimalni razlomak, t.j. kad je broj racionalan, na primer:

$$2,\ \frac{1}{3},\ 1,6, \text{ itd.}$$

U svakom drugom slučaju služimo se isključivo približnim vrednostima; na primer:

umesto $\frac{1}{3}$ uzimamo 0,3 ili 0,33 ili 0,333

umesto 2 uzimamo 1,4 ili 1,41 ili 1,414

umesto uzimamo 3,1 ili 3,14 ili 3,142 ili 3,1416

Vrednosti 0,33 , 1,41 odnosno 3,14 su prib-lične vrednosti brojeva $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, odnosno π ;ovo o-značavamo stavljajući

$$\frac{1}{3} \approx 0{,}33 \; , \; \sqrt{2} \approx 1{,}41 \; ,\text{odnosno } \pi \approx 3{,}14$$

i kažemo da je $\frac{1}{3}$ <u>približno jednaka</u> broju 0,33 itd.

(ii) Približnim vrednostima se možemo služiti ako znamo za koliko one <u>otstupaju</u> od tačne vrednosti, tj. sa kolikom <u>tačnošću</u> one odredjuju posmatrani broj.

Razliku izmedju tačne vrednosti a i jedne njene približne vrednosti a' nazivamo <u>otstupanje</u> i obično ga beležimo sa <u>Δa</u>, tj.

$$\Delta a = a - a' \; .$$

Često se otstupanje naziva <u>greška</u>, naročito ako je približna vrednost dobivena iz posmatranja tj. merenjem.

Kad je približna vrednost data decimalnim razlomkom, tačnost je data samim brojem decimala, zato kažemo da je n.pr. $\frac{1}{3}$ data brojem 0,333 <u>sa tri tačne decimale.</u>

<u>Pr.(1)</u>. 3,14 odredjuje broj sa otstupanjem koje je manje od

$$10^{-2}.$$

Imamo

$$\Delta\pi = \pi - 3{,}14 \quad 3{,}15 - 3{,}14 = 0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}.$$

<u>Pr.(2)</u>. Kad je broj a dat sa 4 tačne decimale, otstupanje je manje od 10^{-4}.

Neka je

$$a \approx a' = d,d_1,d_2,d_3,d_4 \; .$$

$$\Delta a = a - a' = a - d,d_1d_2d_3d_4 <$$

$$< d,d_1d_2d_3(d_4+1) - d,d_1d_2d_3d_4 =$$

$$< 0{,}0001 = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

<u>Pr.(3)</u>. Koliko je otstupanje ako broj $a = \frac{317}{633}$ zamenimo brojem $a = \frac{1}{2}$?

$$\Delta a = a - a = \frac{317}{633} - \frac{1}{2} = \frac{634-633}{2\cdot 633} = \frac{1}{1266}$$

$$< \frac{1}{1250} = 8\cdot 10^{-4} < 10^{-3} \; ,$$

$$\therefore \; \frac{317}{633} \approx \frac{1}{2}$$

sa otstupanjem koje je manje od 10^{-3}.

<u>Napomena</u>. Netačno je pisati $\frac{317}{633} = \frac{1}{2}$, a isto tako je netačno stavljati $\pi = 3{,}14$ ili $\sqrt{2} = 1{,}4142$. Medjutim možemo pisati $\pi = 3{,}14\ldots$, ili $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$ gde tačkice kazuju da decimalni razlomak nije završen.

(iii) Prilikom zanemarivanja decimala obično se poslednja decimala koja se zadržava povećava za 1, ako je prva zanemarena cifra ≥ 5. U tom slučaju kažemo da je približna vrednost data <u>na n decimala tačno</u>, za razliku od slučaja kada je približna vrednost data <u>sa n tačnih decimala</u>, što znači da su kod približne vrednosti prvih n decimala tačno.

Ako približna vrednost data <u>sa</u> n tačnih decimala, ona je uvek manja od tačne vrednosti, u kom slučaju kažemo da ona pretstavlja jednu <u>sniženu približnu vrednost</u>. Ako je približna vrednost data na n decimala tačno, ona može biti manja ili veća od tačne vrednosti. Ako je ona veća kažemo da pretstavlja jednu <u>povišenu približnu vrednost</u>.

U koliko nije poznato da li je a' snižena ili povišena približna vrednost broja a, otstupa nje se meri apsolutnom vrednošću razlike $a-a'$ tj uzima se

$$\Delta a = |a-a'| .$$

Jednu gornju granicu za apsolutnu vrednost otstupanja možemo uvek dobiti ako se i tačna i približna vrednost nalaze izmedju dva poznata br

Pr.(4). Neka je $a = 0,d_1d_2d_3$ jedna približ vrednost broja a na 3 decimale tačno; kol ko je otstupanje ?

Neka je tačna vrednost

$$a=0,d_1d_2d_3d'd''\ldots;$$

tada je

$$d_3 = d' \text{ ako je } d'' < 5,$$

$$d_3 = d'+1 \text{ ako je } d \geqslant 5.$$

Prema tome je ili

$$a < 0,d_1d_2d_3 + 0,0005$$

ili

$$a > 0,d_1d_2d_3 = 0,0005 \ a,$$

a otuda sledi (v.sl.43) da je

$$a-a' \leqslant 0,0005 = 5\cdot10^{-4} = \frac{1}{2}\cdot10^{-3}.$$

Dakle je apsolutna vrednost otstupanja ma od polovine zaokrugljene decimale.

(iv) Ako apsolutna vrednost otstupanja ni veća od

$$\frac{1}{2}10^{-k} = 5\cdot10^{-(k+1)}$$

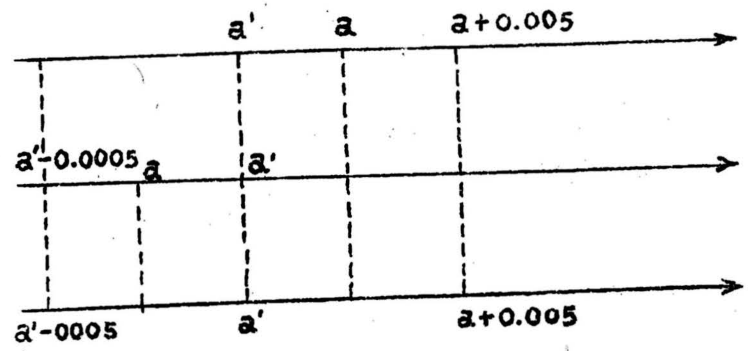
tj. ako je

$$a-a' \leqslant 5\cdot10^{-(k+1)},$$

tada kažemo takodje da približna vrednost a' da broj a na k decimala tačno.

Tada kažemo takodje da približna vrednost a' daje broj a na k decimala tačno.

Napominjemo da se pri tome ni prve decimale tačne i približne vrednosti ne moraju podudarati.



Sl.43

Pr.(5). Koliko otstupa broj $a = 2$ od broja $a' = 1,995$.

Imamo

$$a-a' = 0,005 = 5\cdot10^{-3} = \frac{1}{2}10^{-2}.$$

Znači da $a = 1,995$ daje broj $a = 2$ na dve decimale tačno, i ako se ova dva broja ne podudaraju ni u jednoj decimali.

(v) Tačnu vrednost iracionalnog broja ne možemo nikada dobiti u obliku običnog ili konačnog decimalnog razlomka. U koliko se on javlja računamo isključivo sa njegovim približnim vrednostima.

Jedan broj, bio on racionalan ili iracionalan smatramo da je potpuno odredjen ako njegovu približnu vrednost možemo izračunati sa onolikom tačnošću koliko želimo.

Svaki iracionalan broj je definisan izvesnim postupkom; taj ga postupak dakle potpuno određuje, ako njime možemo sa proizvoljnom tačnošću odrediti njegove približne vrednosti.

Tako se n.pr. $\sqrt{2}$ ili $\sqrt{3}$ dobija poznatim postupkom korenovanja, koji omogućava postepeno izračunavanje onolikog broja decimala koliko želimo.

Pr.(6). Neka je $a' = \frac{p}{q}$ jedna približna vrednost broja $a = \sqrt{2}$. Ako je razlika

$$p - q\sqrt{2}$$

dovoljno mala, stepenovanjem možemo dobiti približne vrednosti broja $\sqrt{2}$ sa proizvoljnom tačnošću.

Neka je $a = \frac{3}{2}$ tada je

$$0 < 3-2\sqrt{2} = \frac{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}} = \frac{9-8}{3+2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{3+2\sqrt{2}} < \frac{1}{3+2};$$

$$\therefore\ 0 < 3-2\sqrt{2} < \frac{1}{5}.$$

1° Kvadriranjem ove nejednačine dobijamo

$$0 < 9-12\sqrt{2}+8 < \frac{1}{25}$$

$$\therefore\ 0 < 17-12\sqrt{2} < \frac{1}{25}$$

$$\therefore\ 0 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} < \frac{1}{17\cdot 25} = \frac{1}{425}$$

Dakle je

$$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12},$$

što daje jednu povišenu približnu vrednost sa otstupanjem koje je manje od

$$\frac{1}{425} = \frac{1000}{425}\cdot 10^{-3} < 3\cdot 10^{-3}$$

2° Ako gornju nejednačinu dignemo na kub dobijamo

$$0 < (3-2\sqrt{2})^3 < \frac{1}{125}$$

$$\therefore\ 0 < 3^3-3\cdot 3^2\cdot 2\sqrt{2}+3\cdot 3(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^3 < \frac{1}{125}$$

$$\therefore\ 0 < 99 - 70\sqrt{2} < \frac{1}{125}$$

$$\therefore\ 0 < \frac{99}{70} - \sqrt{2} < \frac{1}{70\cdot 125} = \frac{1}{8750}$$

Dakle $\frac{99}{70}$ pretstavlja jednu povišenu približnu vrednost za $\sqrt{2}$, sa otstupanjem koje je manje od

$$\frac{1}{8750} = \frac{1000}{875}\ 10^{-4} < 2\cdot 10^{-4}$$

Zadaci.

Neka je a tačna, a' jedna približna vrednost; odredi jednu gornju granicu otstupanja kad je:

1. $a = 0,9999$, $a' = 1$; 2. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i 1° $a' = 0,7$ 2° $a' = 0,71$. 3° $a' = 0,707$; 3. $a = \sqrt{102}$, $a' = 10,1$, (v.2.9 pr.(6) i (7); 4. $a = \sin(0,02)$, $a = 0,02$ (v.2.9 pr.(5));

5. $a = \cos(0,01)$, $a' = 1$ (v.2.9 pr.(3)).

6. Odredi nekoliko približnih vrednosti broja $\sqrt{3}$ (v.2.8 pr.(6)).

2.9 Aproksimacija.

(1) Asimptotska relacija

$$f(x) \sim A \quad \text{kad} \quad x \to a$$

kazuje da A proizvoljno malo otstupa od $f(x)$

ako je samo x dovoljno blisko vrednosti a. Znači da A možemo smatrati kao jednu od približnih vrednosti funkcije $f(x)$ kad se x nalazi u blizini tačke a i pisati

$$f(x) \approx A \quad \text{kad je} \quad x \approx a$$

U ovom slučaju kažemo da A aproksimira funkciju $f(x)$ u blizini tačke $x=a$, ili da je A jedna aproksimacija, a u prenosnom smislu i približna vrednost funkcije $f(x)$.

Pr.(1).

$$f(x) = \frac{2+x^3}{1-2x^2} \approx 2 \quad \text{kad je} \quad x \approx 0.$$

Budući da

$$f(x) \to 2 \quad \text{kad} \quad x \to 0$$

to je za malo x izraz

$$f(x) = \frac{2+x^3}{1-2x^2}$$

približno jednak vrednosti 2; zaista je

$$f(0{,}1) = \frac{2{,}001}{0{,}98} \approx 2{,}0418 \text{(na četiri decimala tačno)}$$

$$f(0{,}01) = \frac{2{,}000001}{0{,}9998} \approx 2{,}000401 \text{ (na šest decimala tačno)}$$

Pr.(2).

$$\sqrt{x} \approx 1 \quad \text{kad je} \quad x \approx 1.$$

Za vrednost x-a blizu 1, $\sqrt{x}$ je približno jednak 1.

Zaista je $\sqrt{1{,}0201} = 1{,}01$, $\sqrt{1{,}002001} = 1{,}001$

Pr.(3).

$$\cos x \approx 1 \quad \text{kad je} \quad x \approx 0.$$

Za male lukove cosinus se malo razlikuje od 1.

Iz tablica prirodnih vrednosti trigonometriskih funkcija dobijamo da je

$\cos 0{,}1 \approx 0{,}995003$, (na šest decimala),
$\cos 0{,}01 \approx 0{,}999950$, (" " "),
$\cos 0{,}001 \approx 0{,}999999$, (" " ").

Napomenimo da lukovima veličine $0{,}1$, $0{,}01$ i $0{,}001$ odgovaraju uglovi veličine

$$5^\circ\, 43'\, 46''{,}6 \;,\quad 34'\, 22''{,}7 \;,\quad 1\; 3'\, 50''{,}7 \;.$$

(ii) U slučaju kad $f(x)$ i $g(x)$ teže ka nuli iz asimptotske relacije

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{kad} \quad x \to a$$

sleduje da $g(x)$ pretstavlja jednu približnu vrednost za funkciju $f(x)$ u blizini tačke $x = a$. Možemo dakle staviti da je

$$f(x) \approx g(x) \quad \text{kad je} \quad x \approx a,$$

i tada kažemo da funkcija $g(x)$ aproksimira funkciju $f(x)$ u blizini tačke $x = a$.

Pr.(4).

$$F(x) = \frac{2+x^3}{1-2x^2} - 2 \approx 4x^2 \quad \text{kad je} \quad x \approx 0.$$

Imamo

$$\frac{F(x)}{4x^2} = \frac{2+x^3-2(1-2x^2)}{4x^2(1-2x^2)} = \frac{1+x/4}{1-2x^2} \to 1$$

kad $x \to 0$.

Za male lukove (uglove) sinus možemo zameniti lukom; ukoliko je luk manji utoliko je otstupanje manje. Zaista iz tablica prirodnih vrednosti trigonometriskih funkcija dobijamo

$\sin 0{,}1 \approx 0{,}09984$ (na pet decimala),
$\sin 0{,}05 \approx 0{,}04998$ (" " "),
$\sin 0{,}01 \approx 0{,}009999$ (" šest "),

$$\therefore\ x - \sin x < 2\cdot 10^{-4},\quad \text{za } x = 0{,}1,$$
$$< 2\cdot 10^{-5},\quad \text{za } x = 0{,}05,$$
$$< 10^{-6},\quad \text{za } x = 0{,}01.$$

(iii) Neka je data funkcija $f(x)$ i jedna njena približna vrednost t.j. aproksimacija; ovu često možemo poboljšati i naći drugu, bolju aproksimaciju. Tako smo u primeru (1) videli da je

$$f(x) = \frac{2+x^3}{1-2x^2} \approx 2 \quad \text{kad je} \quad x \approx 0,$$

a u primeru (4) da je za tu istu funkciju $f(x)$

$$F(x) = f(x)-2 \approx 4x^2 \quad \text{kad je} \quad x \approx 0.$$

Možemo dakle staviti da je

$$f(x) = \frac{2+x^3}{1-2x^2} \approx 2+4x^2 = g(x) \text{ kad je } x \approx 0,$$

gde funkcija $g(x)$ pretstavlja bolju aproksimaciju za $f(x)$ nego sama vrednost 2

$$g(0{,}1) = 2{,}04 \quad \text{dok je} \quad f(0{,}1) \approx 2{,}0418$$

(na četiri decimale);

$$g(0{,}01) = 2{,}0004 \text{ dok je } f(0{,}01) \approx 2{,}000401$$

(na šest decimala).

Pr. (6). $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ kad je $x \approx 0$.

Imamo

1^0 $\sqrt{1+x} \to 1$ kad $x \to 0$;

2^0 $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ kad $x \to 0$,

jer je

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \to \frac{1}{2} \quad \text{kad} \quad x \to 0.$$

Dakle za male vrednosti x-a izraz $\sqrt{x+1}$ možemo zameniti sa $1 + \frac{x}{2}$.

Pr. (7). Nadji jednu približnu vrednost za $\sqrt{101}$.

Imamo $\sqrt{101} = \sqrt{10^2+1} = 10\sqrt{1+10^{-2}} \approx$

$$\approx 10(1 + \tfrac{1}{2}\,10^{-2}) = 10{,}05,$$

dok je $\sqrt{101} \approx 10{,}0498$ za 4 tačne decimale; dakle otstupanje je manje od $2\cdot 10^{-4}$.

Zadaci.

Pokaži da je : 1° u blizini tačke $x = 0$:

1. $(1+x)^3 \approx 1+3x$; **2.** $\frac{1-x}{1+x} \approx 1-x$; **3.** $\sqrt{1-x} \approx 1-\frac{x}{2}$;

4. $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{3}$; **5.** $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \approx 2+\frac{x^2}{8}$;

6. $\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} \approx 1+\sqrt{x}+2x$; **7.** $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)$;

8. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)$;

2° u blizini tačke $x = 1$;

9. $x^4 \approx -3+4x$; **10.** $\frac{1}{\sqrt{x}} \approx 1+\frac{1-x}{2}$;

11. $a+bx+cx^2 \approx a-c+(b+2c)x$; **12.** $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x} \approx \frac{x-1}{6}$;

13. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x} \approx \frac{x-1}{6}$;

14. Pokaži da je za $x \geq 0$

$$0 \leq \sqrt{1+x}-1 \leq \frac{x}{2} ;$$

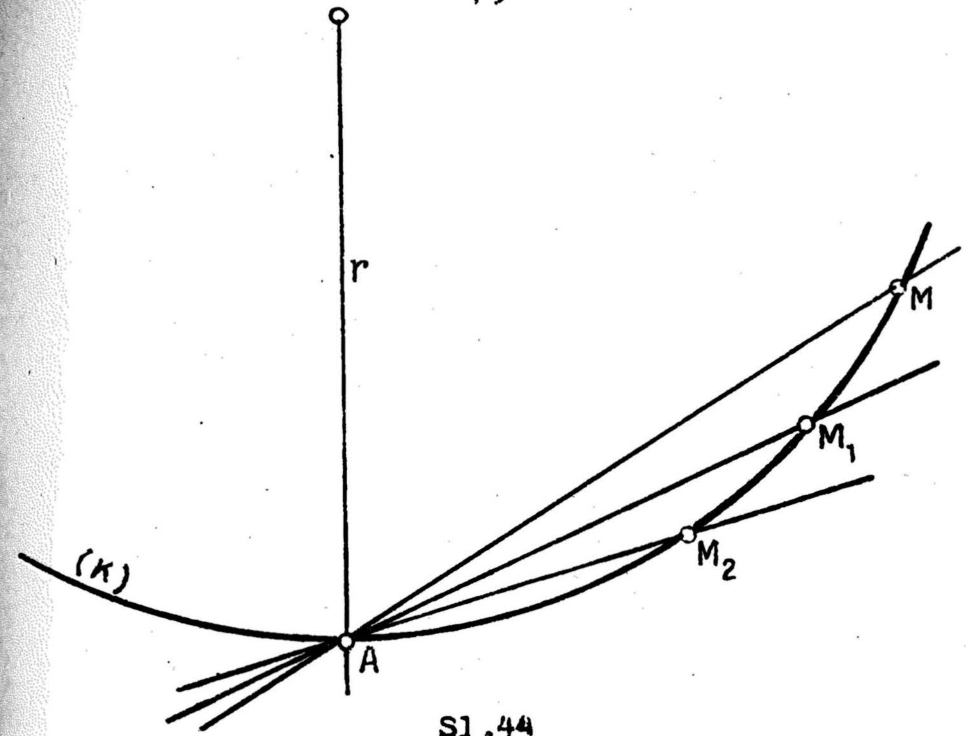
dizanjem na 3-ći stepen ove nejednačine vidi kojom se funkcijom može aproksimirati $\sqrt{1+x}$ i odredi jednu gornju granicu za otstupanje. Pokaži da ovo otstupanje nije veće od

$$\frac{1}{20} = 5\cdot 10^{-2}$$

kad se x nalazi u razmaku $(0,1)$, niti veće od

$$\frac{1}{410} < 2\cdot 10^{-3}$$

kad se x nalazi u razmaku $(0, \frac{1}{5})$.



Sl.44

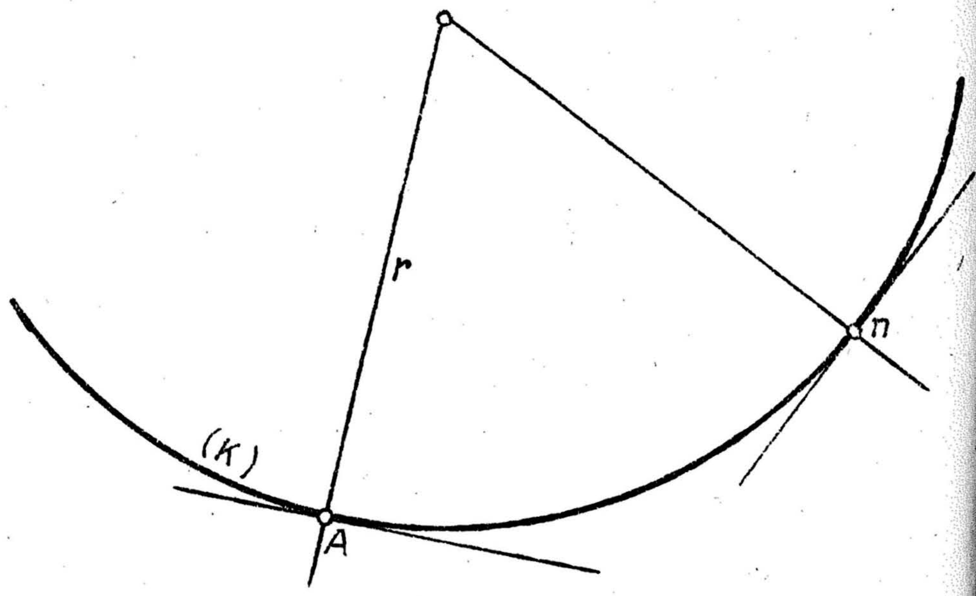
2.10. Granica u geometriji

(i) Neka je A stalna tačka na krivoj, a M pokretna (v.sl.44). Svakom položaju $M, M_1, M_2, \ldots$ tačke M odgovara po jedna tetiva $\overline{AM}, \overline{AM}_1 \ldots \overline{AM}_2 \ldots$ sem kad se tačka M poklopi sa tačkom A. Graničan položaj AT tetive $\overline{AM}$ kad $M \to A$, ako postoji je <u>tangenta krive u tački</u> A. Drugim rečima, kad $M \to A$ tetiva AM se približava tangenti AT i od nje otstupa koliko god želimo malo, ako je M dovoljno blisko tački A.

(ii) Neka je $\overline{AM}$ dužina tetive a $\widehat{AM}$ dužina luka krive k .

Kad $M \to A$, $\overline{AM} \to 0$ i $\widehat{AM} \to 0$. Uopšte je

$$\widehat{AM} \sim \overline{AM}, \text{tj. } \frac{\widehat{AM}}{\overline{AM}} \to 1 \quad \text{kad } M \to A .$$



Sl.45

Pr.(1). Kod kruga se ova činjenica svodi na $\sin x \sim x$ kad $x \to 0$, jer je

$$\sin x = \frac{\overline{AM}}{2}, \quad a \quad x = \frac{\widehat{AM}}{2}.$$

(iii) Normala AN krive k u tački A (v.sl.44) je prava koja stoji normalno na tangenti u tački A.

Neka je N tačka preseka normala AN i MN (v.sl.45). Granični položaj C tačke N kad $M \to A$ naziva se središte krivine, a duž AC poluprečnik krivine krive k u tački A.

Pr.(2). Kod kruga se sve normale seku u središtu, a poluprečnik krivine je u svim tačkama jednak poluprečniku kruga.

2.11. Podela funkcija.

(i) Funkcije se klasificiraju bilo prema svojim osobinama, na pr.: neprekidne funkcije, monotone funkcije, konveksne funkcije, periodične funkcije itd., bilo prema analitičkom izrazu kojim su one definisane. Ova druga klasifikacija je za sad za nas važnija.

Obično su funkcije definisane analitičkim izrazima u kojima pored osnovnih računskih radnja (+,-,x,:) figurišu izvesni znakovi čiji je smisao potpuno i jednoznačeno definisan. Na pr.: lg, , sin, cos, | |, [ ], itd.

Klasifikaciju tj. podelu funkcija vršimo prema prirodi tih analitičkih izraza, tj. prema operacijama koje se u ovim izrazima javljaju.

(ii) Polinom. Ako se javljaju samo operacije sabiranja, oduzimanja i množenja primenjene na nezavisnu promenljivu x, dobiveni analitički izraz nazivamo polinom na pr.

$$1+x,\ x^3-2x,\ x^2-x\sqrt{2}+1,\ (x-1)(x-3),$$

$$x^4+3x-x^2+5x-2,\ x^5-x+1,\ (x+1)(2x+3)(3x-2) \text{ itd.}$$

(iii) Racionalna funkcija. Ako se pored pomenutih operacija javlja i deljenje, tj. ako se analitički izraz sastoji iz količnika od dva polinoma ili iz zbira istih, tada on definiše jednu racionalnu funkciju; na pr.

$$\frac{x^2}{1+x},\quad \frac{x^5-x^3}{(x-1)^2},\quad 1+x^2+\frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{2x^3}{x+2}+\frac{x^2+2x-1}{x^3-3x+1}$$

Napomena. Polinom je specijalan slučaj racionalne funkcije kada je imenitelj konstantan, zato se on često zove cela racionalna funkcija.

(iv) Algebarska funkcija. Ako se u posmatranom analitičkom izrazu javlja pored osnovne četiri računske radnje još i korenovanje tada on definiše jednu algebarsku funkciju; na pr.

$$\sqrt{1+x^2}\,,\ \sqrt{x}+\sqrt[3]{x+1}\,,\ \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}\,,\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,,$$

$$x+\sqrt{1+\sqrt{x}}\quad \text{itd.}$$

(v) Sve ostale funkcije, dakle sve one koje nisu ni racionalne ni algebarske, nazivamo transcendentnim funkcijama. Dve glavne grupe transcendentnih funkcija su

1) Trigonometrijske funkcije i to

$$\sin x \quad \text{i} \quad \cos x,$$

kao i njihove kombinacije, na pr.

$$\text{tg } x,\ \text{cotg } x,\ \sin^2 x,\ \sin x + 2\sin 2x,\ \text{itd.}$$

2) Eksponencijalne i logaritamske funkcije i to

$$10^x\,,\ 2^x \quad \text{i} \quad \lg x\,,$$

kao i njihove kombinacije, na pr.

$$2^x+2^{-x}\,,\ 2^{x^2} \ \text{ili}\ \lg^2 x\,,\ \lg\lg x \ \text{itd.}$$

Napomena. Analitički izraz u kome se pored racionalnih i algebarskih funkcija javljaju transcendentne funkcije definiše funkciju koja pripada klasi transcendentnih funkcija; na pr.

$$\frac{\sin x}{x}\,,\ \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\,,\ x+\sqrt{\cos x}\,,\ \frac{\lg x}{1+x^2}\,,$$

$$2^{-x}\sin x,\ x\,2^x,\ \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}\quad \text{itd.}$$

2.12. V e ž b e

Odredi granične vrednosti :

1. $\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+1}}-x,\ (x\to\infty)$; 2. $x\left\{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right\},\ (x\to\infty)$; 3. $\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+4}-2},\ (x\to 0)$; 4. $\dfrac{8\sqrt{x^4+x^3}-8x^2-4x-1}{9\sqrt{x^6+x^5}-9x^2-3x+1},\ (x\to\infty)$; 5. $\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2},\ (x\to 0)$; 6. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1},\ (x\to 1)$; 7. $\dfrac{\sin ax}{\sin x},\ (x\to 0)$; 8. $\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a},\ (x\to a)$; 9. $\dfrac{\cos x}{2x-\pi},\ (x\to\frac{\pi}{2})$; 10. $(x-\frac{\pi}{2})\,\text{tg } x,\ (x\to\frac{\pi}{2})$;

11. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$, (v. vežbu 1,14.28);

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^p-1}{x^2-1}$, (podeli i pomnoži sa $x-1$);

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[p]{x}}{1-x}$, (stavi $\sqrt[p]{x}=t$); 14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}$, (vidi vežbu 1,14,30); 16. $\log x$ kad $x\to\infty$ i $x\to 0$. 17. Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački $x=-1$; čemu teži

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1} \quad \text{kad} \quad x\to -1 \ ?$$

Proveri asimtotske relacije:

18. $(x-1)^2(x+2)^3\sim x^5$, $(x\to\infty)$; 19. $(x^2+a^2)^n\sim x^{2n}$, $(x\to\infty)$; 20. $(x-a)^q(x+a)^q\sim x^{p+q}$, $(x\to\infty)$;

21. $\sqrt[p]{x^p+ax^{p-1}+bx^{p-2}}\sim x$, $(x\to\infty)$;

22. $\sqrt[p]{x^q+ax^{q-1}}\sim\sqrt[p]{x^q}$, $(x\to\infty)$;

23. $\sqrt[n]{\dfrac{(x^2-a^2)^p(x+b)^q}{(x+c)^r}}\sim\sqrt[n]{x^{2p+q-r}}$ $(x\to\infty)$;

24. $\dfrac{1}{\sin x}\sim\dfrac{1}{x}$, $(x\to 0)$; 25. $\operatorname{tg} x\sim\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$, $(x\to\frac{\pi}{2})$.

26. Sa kolikom je tačnošću broj $2^{\sqrt{2}}$ odredjen približnim vrednostima

1° 2, 2° $2^{1,4}$, 3° $2^{1,42}$?

27. $\sqrt{2}$ možemo ovako izračunati (v.2.9.pr.(6)i(7));

1° $\sqrt{2}=\sqrt{4-2}=2\sqrt{1-\frac{1}{2}}\approx 1,5$;

2° $\sqrt{2}=\sqrt{2,25-0,25}=\sqrt{(1,5)^2-0,25}=$

$=1,5\sqrt{1\ \frac{0,25}{2,25}}\ldots\ldots$;

sa kojom tačnošću je dat $\sqrt{2}$ približnom vrednošću koju dobijamo posle trećeg ovakvog postupka ?

28. Dati su brojevi a i $b>a$ Neka je $A=\frac{a+b}{2}$ aritmetička, a $G=\sqrt{ab}$ geometriska sredina; pokaži:

1° da je $a<G<A<b$,

2° da A otstupa od G za manje od 10^{-1}, ako je $b-a=1$ i $a\geq 1$.

Proveri sledeće aproksimacije :

29. $\sqrt{3+\sqrt{1+x}}\approx 2+\frac{x}{8}$ $(x\approx 0)$;

30. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\approx 2\sqrt{x}+\dfrac{(x-1)^2}{9}$, $(x\approx 1)$;

31. $\sqrt[4]{2x-x^2}\approx 1-\dfrac{(1-x)^2}{4}$, $(x\approx 1)$;

32. $\dfrac{2(b+1)x+a-1}{x^2+2bx+a} \approx 2x-x^2$, $(x \approx 1)$.

Odredi koeficiente a i b tako, da u bli- zini tačke $x = 0$ funkcija $g(x) = a+bx$ aproksimi- ra sledeće funkcije:

33. $\sqrt{3+\sqrt{1+x}}$; **34.** $\dfrac{1+x}{1-x}$; **35.** $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

36. Krug sa središtem u tački O dodiruje duž $\overline{AB} = a$ u tački B; prava OA preseca krug u tački C, a tangenta na krug u toj tački preseca pravu AB u tački D. Kad poluprečnik kruga $\overline{OB} = x \to \infty$ čemu te- že duži:

1° $y = \overline{AC}$, 2° $z = \overline{CD}$, 3° $t = \overline{AD}$ i 4° $x^2(t-z)$?

37. Krug sa središtem u tački O i poluprečnikom r dodiruje pravu AT u tački A; neka je Q jedna tač- ka kruga a x dužina luka $\widehat{AQ}$. Ako razvijemo taj luk na tangentu AT od tačke A do tačke R, $\overline{AR} = x$, a prave OR i OA produžimo do preseka C čemu će težiti duž $\overline{AC}$ kad $x \to 0$?

38. Na prečnik $\overline{AB} = 2r$ datog kruga prenosimo duž $\overline{BC} = r$, spojimo jednu tačku M kruga sa tačkom C i pravu CM produžimo do tačke preseka N sa tangen- tom na krug u tački A. Pokaži da je za male lukove luk $\widehat{AM} \approx \overline{AN}$.

39. Na simetrali duži $\overline{AB} = a$ data je tačka C na otstojanju h od te duži, a van nje pokretna tačka M. Neka je N tačka preseka simetrale ugla AMB sa simetralom duži; koji je granični položaj tačke N kad tačka $M \to C$?

40. Na dnu suda koji je napunjen tečnošću do visine h nalazi se predmet A; posmatran iz tač- ke O van tečnosti, taj se predmet vidi u položaju A'. Koji je granički položaj slike A' kad se pred- met A posmatra vertikalno ?

41. Nadji diagrame sledećih funkcija i vidi da li su prekidne :

1° $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{x-a}{|x-a|}+\dfrac{x-b}{|x-b|}\right\}$; 2° $\cos\,[kx]\,\pi$;

3° $\dfrac{p}{2}(x-a+|x-a|)+\dfrac{q-p}{2}(x-b+|x-b|)$ gde

je $p = \operatorname{tg}\alpha$ i $q = \operatorname{tg}\beta$.

42. Odredi jednu gornju granicu otstupanja za $\sqrt{2}$ ako se postupi kao u primeru 2.8(6) i n puta stepe- nuje.

43. Kako bi izgledao postupak iz primera 2.8(6) za odredjivanje približnih vrednosti bro- ja $\sqrt[3]{2}$?

44. Ako je $x = 1$ nula k-tog reda funkcije $g(x)$ koji je red nula funkcije:

1° $g^2(x)$; 2° $g(x^2)$; 3° $g^3(x)$; 4° $g(x^3)$;

5° $\dfrac{g^2(x)}{g(x^2)}$; 6° $\sin g(x)$; 7° $g(x^2)-g(x)$?

GLAVA III.

POLINOM

3.1. Stepen i nule polinoma

(i) Stepen polinoma je najveći stepen x-a koji se u tom

Polinomi

$$3x+4 \quad \text{ili} \quad 2x+\sqrt{2}$$

ili uopšte

$$ax+b$$

su polinomi prvog stepena,a zovu se još i linearn funkcije.

Polinomi

$$x^2+1, \quad x^2+x+1$$

ili oni koji se dobijaju kao proizvod iz dva linearna faktora,na pr.

$$(3x+4)(4x-1) = 12x^2+13x-4,$$

$$(x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1) = 2x^2-1,$$

$$(2x-1)^2 = 4x^2-4x+1,$$

su polinomi drugog stepena ili kvadratne funkcij

Polinomi

$$x^3-2, x^3-2x+3, 2x^3+x^2-2x+1,$$

ili oni koji nastaju iz proizvoda jednog linearnog i jednog kvadratnog faktora,na pr.

$$(x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1,$$

$$(x-2)(x^2+x+1) = x^3-x^2-x-2,$$

ili naposletku oni koji se dobivaju kao proizvod iz tri linearna faktora,na pr.

$$(x-1)(x+1)(2x+1) = 2x^3+x^2-2x-1.$$

$$(x+1)(x+2)(x+3) = x^3+6x^2+11x+6.$$

$$(x+1)(x+2)^2 = x^3+5x^2+8x+4$$

$$(2x-3)^3 = 8x^3-36x^2+54x-27,$$

su polinomi trećeg stepena itd.

(ii) Ako je polinom f(x) dat u obliku proizvoda linearnih ili drugih faktora nule pojedinih faktora su istovremeno nule polinoma.

Na primer,neka je

$$f(x) = (2x-1)(x+1)(x^2+1) = 2x^4+x^3+x^2+x-1,$$

tada je

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1 = 0,$$

jer je

$$2x-1 = 0 \quad \text{za} \quad x = \frac{1}{2};$$

ili

$$f(-1) = 2-1+1-1-1 = 0,$$

jer je

$$x+1 = 0 \text{ za } x = -1.$$

Ako se linearni faktor javlja na izvesnom stepenu, odgovarajuća nula je višestruka i stepen linearnog faktora odredjuje red nule.

Tako je, na primer $x = 2$ nula drugog reda polinoma 4-og stepena:

$$x^4-4x^3+6x^2-8x+8 = (x-2)^2(x^2+1),$$

a $x = 1$ nula 3-ćeg reda polinoma 5-og stepena

$$x^5+4x^4+7x^3+7x^2+4x+1 = (x+1)^3(x^2+x+1).$$

Zadaci.

Odredi stepen i red pojedinih nula sledećih polinoma:

1. $x^2(x-1)^2-(x^2-1)^2$; 2. $x(x^3-1)-3x^2(x-1)$;

3. $(x^6-1)-(x^2-1)^3$; 4. $4(x^3+1)-3(x-1)(x^2-1)$.

3.2. Rastavljanje polinoma na faktore

(i) Za polinome važi i obratno tj. ako je $x = x_0$ nula polinoma $f(x)$, polinom je deljiv linearnim faktorom $x-x_0$.

Opštije, neka je a proizvoljan broj i $f(x)$ polinom n-tog stepena, tada je

$$f(x)-f(a)$$

deljivo sa $x-a$, a količnik $q(x)$ je neki polinom $(n-1)$-og stepena.

(ii) Neka je, najpre

$$f(x) = x^n,$$

tada je

$$f(x)-f(a) = x^n-a^n.$$

Deobom ovog binoma sa $x-a$ dobivamo

$$(x^n-a^n):(x-a) = x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots\dots+a^{n-2}x+a^{n-1},$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^n-ax^{n-1}}\\
0\quad ax^{n-1}-a^n\\
\quad\underline{ax^{n-1}-a^2x^{n-2}}\\
\quad 0\qquad a^2x^{n-2}-a^n\\
\qquad\quad\underline{a^2x^{n-2}-a^3x^{n-3}}\\
\qquad\quad 0\qquad a^3x^{n-3}-a^n\\
\qquad\qquad\qquad\dots\dots\dots\\
\qquad\qquad\qquad\quad\dots\dots\dots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad a^{n-2}x^2-a^n\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\underline{a^{n-2}x^2-a^{n-1}x}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0\quad a^{n-1}x-a^n\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\underline{a^{n-1}x-a^n}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0\quad 0
\end{array}$$

tj.

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}$$

Napomena. 1° Za n=2 je $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$; za n=3 je $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$ itd.

2° Ako stavimo a = 1 dobivamo

$$1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1},$$

koji izraz pretstavlja obrazac za zbir geometrijske progresije.

(iii) Neka je $f(x)$ proizvoljan polinom, na primer

$$f(x) = 2x^3+3x^2-x+4;$$

tada je

$$f(x)-f(a) = 2(x^3-a^3)+3(x^2-a^2)-(x-a).$$

Kako je svaki od izraza u zagradama deljiv sa x-a, ma kakvi bili koeficienti 2,3 i -1 i ma koliko takvih članova bilo, to je ceo izraz $f(x)-f(a)$ deljiv sa x-a, a stepen količnika

$$q(x) = 2(x^2+ax+a^2)+3(x+a)-1 =$$

$$= 2x^2+(2a+3)x+2a^2+3a-1$$

je za jedinicu manji od stepena polinoma $f(x)$.

Dakle je

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = q(x)$$

ili

$$f(x) = (x-a)q(x)-f(a),$$

gde je stepen polinoma $q(x)$ za jedinicu manji od stepena polinoma $f(x)$.

(iv) Ako je a nula polinoma $f(x)$, tj. ako je $f(a) = 0$, tada je

$$f(x) = (x-a)q(x)+f(a) = (x-a)q(x);$$

dakle je polinom $f(x)$ deljiv linearnim faktorom x-a.

Taj se linearni faktor zove još i koreni činilac jednačine $f(x) = 0$.

Kako polinom n-tog stepena ne može imati više od n linearnih faktora to polinom n-tog stepena može imati najviše n nula.

Pr. (1). Rastavi polinom

$$f(x) = 3x^2-2x-1$$

na linearne faktore.

Kako su nule datog polinoma koreni jednačine

$$3x^2-2x-1 = 0$$

dakle

$$\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{1+3}) = \frac{1\pm2}{3} = \begin{cases}1\\-\frac{1}{3}\end{cases}$$

to su njeni koreni činioci

$$x+\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad x-1,$$

pa je

$$f(x) = 3(x+\frac{1}{3})(x-1) = (3x+1)(x-1)$$

Pr.(2). Polinomi

$$x^2+1 \quad \text{i} \quad x^2+x+1$$

se ne mogu rastaviti na linearne faktore,jer je

$$x^2+1 > 0 \quad \text{i} \quad x^2+x+1 > 0 \quad \text{za svako } x,$$

a odgovarajuće jednačine

$$x^2+1 = 0 \quad \text{i} \quad x^2+x+1 = 0$$

nemaju realnih korena .

Pr.(3). Rastavi na faktore polinom

$$x^4-1.$$

Nule datog polinoma su ± 1,pa je,

$$x^4-1 = (x+1)(x-1)(x^2+1).$$

Pr.(4). Odredi koeficiente A i B tako da polinom

$$Ax^4+Bx^3+1$$

bude deljiv polinomom $(x-1)^2$.

Ako dati polinom podelimo sa

$$(x-1)^2 = x^2-2x+1$$

biće

$$(Ax^4+Bx^3+1):(x^2-2x+1) = Ax^2+(2A+B)x+3A+2B$$

$$\underline{Ax^4-2Ax^3+Ax^2}$$

$$(2A+B)x^3-Ax^2+1$$

$$\underline{(2A+B)x^3-2(2A+B)x^2+(2A+B)x}$$

$$(3A+2B)x^2-(2A+B)x+1$$

$$\underline{(3A+2B)x^2-2(3A+2B)x+3A+2B}$$

Da bi deoba bila bez ostataka mora biti

$$2(3A+2B) = 2A+B \quad \text{i} \quad 3A+2B = 1,$$

$$A = 3, \quad B = -4.$$

Prema tome količnik iznosi

$$3x^2+2x+1,$$

tako da je

$$3x^4-4x^3+1 = (x-1)^2(3x^2+2x+1).$$

Zadaci.

1. Odredi nule polinoma

$$f(x) = x^4-7x^2+10$$

stavljajući $x^2 = z$.

Rastavi na faktore polinome:

2. x^4-x^2-2 ; 3. $x^4-4x^2+4x-1 =$

$$= (x-1)^2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}).$$

Odredi nule polinoma:

4. ax^3+bx^2+bx+a ; 5. ax^3+bx^2-bx-a .

Stavljajući

$$x+\frac{1}{x}=t \quad i \quad x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2,$$

odredi nule sledećih polinoma:

6. $x^4-7x^3-10x^2-7x\ 1$; 7. x^4-10x^2-1;

Zadatak 7 reši i stavljajući $x^2=z$; uporedi rezultate.

Podeli sledeće polinome sa x^2+x+1:

8. x^4+x^2+1 ; 9. x^8+x^4+1.

Za koje će vrednosti x-a biti

10. $6x^4-5x^2-7<0$;

11. $\dfrac{x^4-6x^2+8}{x^4-3x^2+1}>0$?

3.3. Racionalne nule polinoma.

(1) Da bi smo rastavili polinom $f(x)$ na linearne faktore treba da prethodno nađemo njegove nule, tj. da rešimo algebarsku jednačinu

$$f(x)=0$$

Ako su koeficienti polinoma $f(x)$ celi brojevi, njegove racionalne nule možemo uvek naći.

Neka je na pr. dat polinom

$$f(x)=3x^4+5x^3-8x^2-10x+4$$

Ako on ima racionalnih nula, tj. nula oblika $\frac{p}{q}$ gde su p i q celi brojevi, mora

$$f(\tfrac{p}{q})=3(\tfrac{p}{q})^4+5(\tfrac{p}{q})^3-8(\tfrac{p}{q})^2+10(\tfrac{p}{q})+4=0.$$

$$\therefore\quad 3p^4+5p^3q-8p^2q^2-10pq^3+4q^4=0$$

$$\therefore\quad p(3p^3+5p^2q-8pq^2-10q^3)=4q^4$$

Kako su leva i desna strana ove jednačine celi brojevi i kako broj na levoj strani sadrži faktor p, to mora i $4q^4$ biti deljiv sa p. Pošto q nije deljiv sa p, jer pretpostavljamo da smo u razlomku $\frac{p}{q}$ skratili sve zajedničke faktore, to mora 4 biti deljiv sa p , tj. p može biti samo jedan od brojeva

$$-1,+1,-2,+2,-4 \text{ ili } +4.$$

Na isti način vidimo kad gornju jednačinu napišemo u obliku

$$-3p^4 = q(5p^3-8p^2q-10pq^2+4q^3),$$

da q mora biti faktor broja 3 ,tj. ili 1 ili 3.

Dakle jedine racionalne nule koje može imati dati polinom su

$$+1,-1,+2,-2,+4,-4,+\frac{1}{3},-\frac{1}{3},+\frac{2}{3},-\frac{2}{3},+\frac{4}{3} \text{ ili } -\frac{4}{3}.$$

Uvrštavanjem ovih brojeva u polinom $f(x)$ neposredno proveravamo koji od njih zadovoljava jednačinu

$$f(x) = 0.$$

Ovo uvrštavanje postizavamo najbrže tako što dati polinom

$$f(x) = (3x^4+5x^3-8x^2-10x+4$$

napišemo u obliku

$$f(x) = \left\{\left[(3x+5)x-8\right] x-10\right\} x+4$$

i pojedine računske radnje vršimo postepeno redom koji je ukazan zagradama. Tako je, na primer, za $x=2$

$$3x+5 = 3\cdot2+5 = \underline{11}$$

$$11x-8 = 11\cdot2-8 = \underline{14}$$

$$14x-10 = 14\cdot2-10 = \underline{18}$$

$$18x+4 = 18\cdot2+4 = 40,$$

$$\therefore\ f(2) = 40.$$

Za ostale vrednosti dobijamo na sličan način

$$f(1) = -6,\ f(-1) = 4,\ f(-2) = 0,\ f(\tfrac{1}{3}) = 0,$$

$$f(-\tfrac{1}{3}) = \frac{180}{27},\ f(\tfrac{2}{3}) = -\frac{112}{27},\ f(-\tfrac{2}{3}) = \frac{56}{9},$$

$$f(\tfrac{4}{3}) = -\frac{20}{9},\ f(-\tfrac{4}{3}) = \frac{20}{27}.$$

Znači dati polinom ima samo dve racionalne nule i to

$$-2 \quad \text{i} \quad \frac{1}{3};$$

prema tome je on deljiv faktorima

$$x-\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad x+2,$$

tj. faktorom

$$(3x-1)(x+2) = 3x^2+5x-2,$$

Posle izvršene deobe

$$3x^4+5x^3-8x^2-10x+4 : 3x^2+5x-2 = x^2-2$$

dobijamo

$$3x^4+5x^3-8x^2-10x+4 = (3x-1)(x+2)(x^2-2).$$

Otuda vidimo da su još i $\pm\sqrt{2}$ nule datog polinoma tako da su njegove četiri nule

$$\frac{1}{3},\ -2,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2}$$

<u>Pr.(1)</u>. Odredi racionalne nule polinoma

$$f(x) = x^3-2x^2+12x-24.$$

Kako je koeficient od x^3 jednak jedinici, to mora biti $q = 1$, tj. racionalne nule datog polinoma mogu biti samo celi brojevi i to delitelji broja 24, dakle brojevi

$$+1,-1,+2,-2,+3,-3,+4,-4,+6,-6,+8,-8,+12,-12,$$
$$+24,-24.$$

Uvrštavanjem ovih vrednosti u $f(x)$ vidimo da je samo

$$f(+2) = 0$$

deobom korenim činiocem $x-2$ dobivamo

$$x^2-2x^2+12x-24 = (x-2)(x^2+12).$$

<u>Pr.(2)</u>. Odredi racionalne nule polinoma

$$f(x) = x^4-5x^2+6$$

Racionalne nule datog polinoma mogu biti samo celi brojevi i to faktori broja 6, tj. brojevi

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6.$$

Kako je

$$f(\pm 1)=2,\ f(\pm 2)=2,\ f(\pm 3)=42,$$
$$f(\pm 6)=1122$$

to polinom

$$f(x) = x^4-5x^2+6$$

nema racionalnih nula.

Ako stavimo

$$x^2 = z$$

i rešimo kvadratnu jednačinu

$$z^2-5z+6 = 0$$

vidimo da su nule datog polinoma

$$+\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ +\sqrt{3}\ \text{ i }\ -\sqrt{3}$$

<u>(ii)</u> Racionalne nule polinoma $f(x)$ sa celim koeficientima mogu biti samo oni pozitivni ili negativni razlomci $\frac{p}{q}$ čiji je imenitelj q faktor koeficienta uz najveći stepen x-a, a brojitelj p faktor stalnog člana.

Ako je koeficienat najvećeg stepena x-a jednak jedinici, racionalne nule polinoma $f(x)$ mogu biti samo celi brojevi.

Ako ni jedan od ovih brojeva ne zadovoljava jednačinu $f(x) = 0$ dati polinom nema racionalnih nula.

<u>Zadaci</u>.

Odredi racionalne nule polinoma:

<u>1.</u> x^3+3x^2+3x+9 ; <u>2.</u> $6x^4-5x^3+7x^2-5x+1$;

3. $2x^5-x^4-x^3-2x^2+x+1$; 4. $4x^4-9x^3-27x^2-27x+27$.

3.4. O s o b i n e p o l i n o m a.

(i) Polinom je definisan za sve vrednosti x-a i pretstavlja jednu neprekidnu funkciju od x.

Neka je

$$f(x) = x^n;$$

tada je

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n=h\{x^{n-1}+(x+h)^{n-2}+\ldots(x+h)^{n-1}$$

$$\therefore \quad (x+h)^n-x^n \to 0 \quad \text{kad } h\to\pm 0.$$

Prema tome je monom x^n neprekidna funkcija x-a za svako $n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$

Kako je polinom zbir članova oblika ax^n, a zbir neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija, to je svaki polinom neprekidna funkcija.

(ii) Za velike pozitivne vrednosti x-a polinom se ponaša kao član sa najvećim stepenom x-a.

Pr.(1). $f(x) = 2x^3-30x^2+2x-40 \sim 2x^3, x\to\pm\infty$

jer je

$$\frac{f(x)}{2x^x} = 1-15x^{-1}+x^{-2}-20x^{-3} \to 1$$

kad $x\to\pm\infty$.

(iii) Za male vrednosti x-a polinom se ukoliko nema stalnog člana, ponaša kao član sa najmanjim stepenom x-a.

Pr.(2). $f(x) = x^5-5x^3+2x^2 \sim 2x^2,\ x\to\pm 0.$

jer je

$$\frac{f(x)}{2x^2} = 1-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}x^3 \to 1 \text{ kad } x\to\pm 0.$$

Zadaci. Kako se ponašaju sledeći polinomi kad $x\to\pm\infty$?

1. $3x^5-100x^3+1$;
2. $x^3(x^2-1)^2$;
3. $(x^3+1)(x^4-1)$;
4. $(x^3+3)(x-2)^3$.

Kako se ponašaju sledeći polinomi kad $x\to\pm 0$?

5. $(x^2+1)^3-1$;
6. $(3x+1)^5-(5x^2+5x+1)^3$.

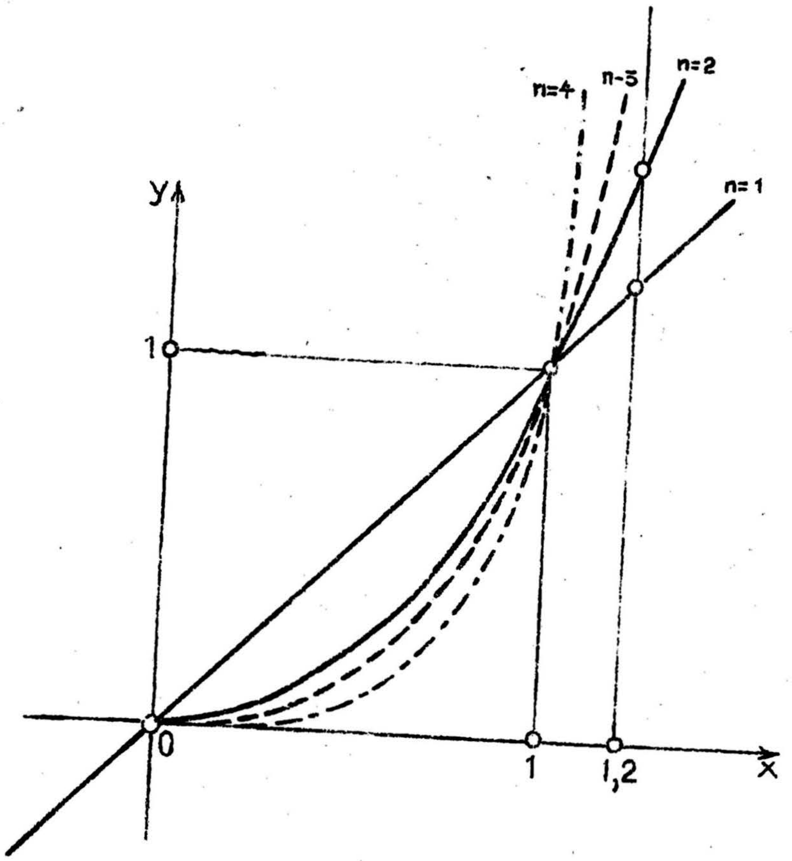
3.5. D i a g r a m i f u n k c i j a x^n i $(x-a)^n$

(i) Prilikom konstrukcije diagrama treba pored istaknutih vrednosti navedenih u tački 1.5. obratiti pažnju na ponašanje funkcije kad $x\to\pm\infty$, tj. na tok njenog diagrama za velike vrednosti x-a.

Pr.(1). Kakav je medjusobni položaj diagrama funkcija $y(x) = x^n$ za pozitivne vrednosti x-a kad je $n = 1,2,3,\ldots$?

1° $y = x$ je prava, simetrala I i III kvadranta.

2° $y = x^2$ je parabola sa temenom u početku i Y-osom kao osom simetrije:



Sl.46

$$x^2 < x \quad \text{za} \quad 0 < x < 1$$

a

$$x^2 > x \quad \text{za} \quad x > 1$$

3^o $y = x^3$ je tako zvana kubna parabola; ona stalno raste, ali je

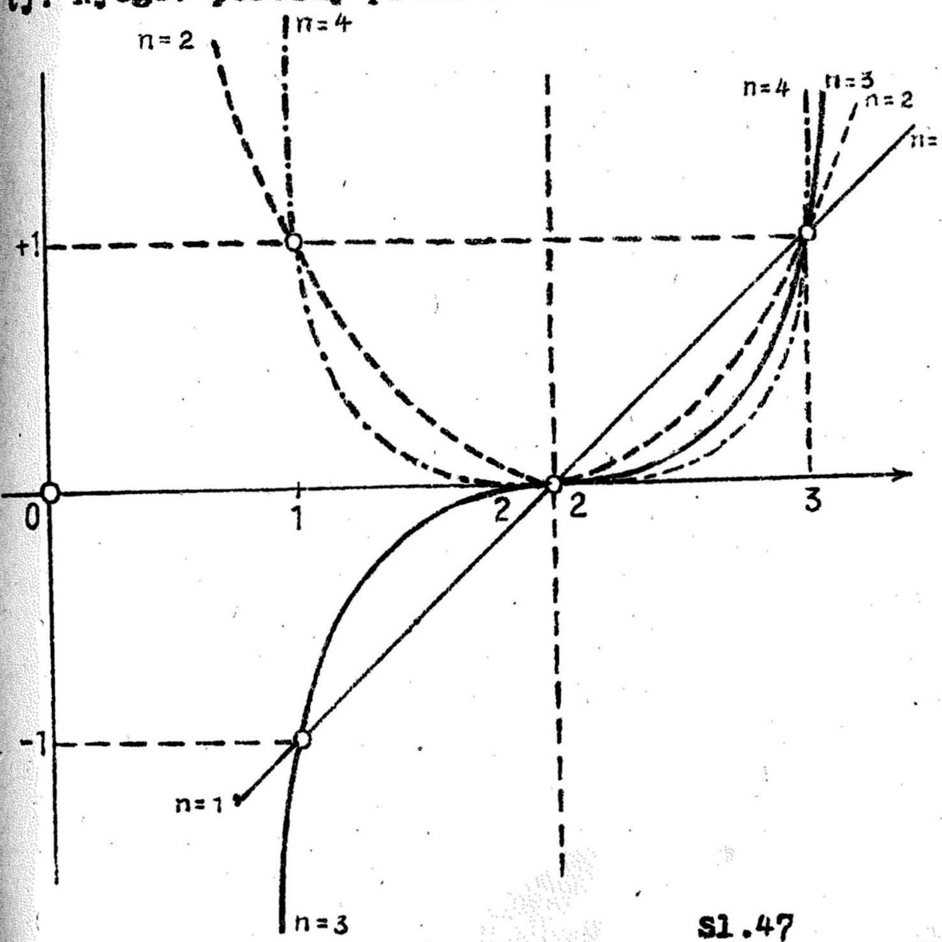
$$x^3 < x^2 \text{ za } 0 < x < 1, \text{ a } x^3 > x^2 \text{ za } x > 1.$$

4^o $y(x) = x^n$: diagram stalno raste i $x^n < x^{n-1}$ za $0 < x < 1$. $x^n > x^{n-1}$ za $x > 1$.

Diagram funkcije x^n je za $x > 1$ utoliko strmije u koliko je n veće.

5^o Za svakako $n = 1,2,3,4....$je $y(o)=0$ i $y(1) = 1$.(v.sl.46).

(ii) Od naročite je važnosti da se ispita tok diagrama u blizini nula odgovarajuće funkcije, tj. njegov položaj prema X-osi.



Sl.47

Pr.(2). Kakav je medjusobni položaj diagrama funkcija

$$f(x) = (x-2)^n$$

u razmaku $(1,3)$ kad je $n = 1,2,3,\ldots$? (v.sl.47).

$$f(2) = 0 \text{ za svako } n = 1,2,3,\ldots;$$

tačka $x = 2$ je nula svih ovih funkcija i to n-tog reda.

$$f(3) = 1 \quad \text{za svako } n = 1,2,3,\ldots$$

$$f(1) = \begin{cases} +1 & \text{za } n = 2,4,6,\ldots \\ -1 & \text{za } n = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$

1° $n = 1$. Diagram funkcije

$$y = x-2$$

je prava koja seče X-osu u tački $x = 2$ pod uglom od 45°.

2° $n = 2$. Diagram funkcije

$$y = (x-2)^2$$

je parabola sa temenom u tački $x = 2, y = 0$ i osom $x = 2$ (paralelnom Y-osi). On dodiruje X-osu u tački $x = 2$ i nalazi se stalno iznad nje, jer je

$$(x-2)^2 \geqslant 0 \quad \text{za svako } \underline{x}.$$

3° $n = 3$. Diagram funkcije

$$y = (x-2)^3$$

je kubna parabola sa središtem simetrije u tački $x = 2$. On dodiruje i preseca X-osu u toj tački, jer je

$$(x-2)^3 \begin{cases} \leqslant 0 & \text{za } x \leqslant 2 \\ \geqslant 0 & \text{za } x \geqslant 2. \end{cases}$$

4° $n = 4$. Diagram funkcije

$$y = (x-2)^4$$

dodiruje X-osu u tački $x = 2$ i nalazi se stalno iznad nje, jer je

$$(x-2)^4 \geqslant 0 \quad \text{za svako } x;$$

ali je u blizini nule $x = 2$ više priljubljena uz X-osu parabole, jer je

$$(x-2)^4 \leqslant (x-2)^2 \quad \text{za} \quad 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

5° Uopšte diagram funkcije

$$y = (x-2)^n, \quad n = 1,2,3,4,\ldots$$

prolazeći kroz nulu $x = 2$ preseca X-osu kad je $n = 1$, preseca je i dodiruje kad je $\underline{n}$ neparan broj, a dodiruje je kad je $\underline{n}$ paran broj; pri tome je diagram u toliko više priljubljen uz X-osu u blizini nule, u koliko je $\underline{n}$ veće.

(iii) Ako je

$$f(x) \sim Ax^n \quad \text{kad} \quad x \to \infty$$

tada je $\underline{n}$ stepen polinoma $f(x)$ i njegov diagram je za velike vrednosti $\underline{x}$-a u toliko strmiji ukoliko je $\underline{n}$ veće.

Dakle, kad $x \to \pm\infty$

$$f(x) \to \pm\infty$$

gde ovaj poslednji znak zavisi od znaka broja A i od toga da li je stepen n paran ili neparan broj.

(iv) Ako je

$$f(x) \sim A(x-a)^k \quad \text{kad} \quad x \to a \text{ i } A \neq 0,$$

tada je $x = a$ nula k-tog reda polinoma $f(x)$.

Diagram te funkcije preseca, preseca i dodiruje ili dodiruje X-osu prema tome, da li je $k=1$, odnosno da li je k neparan ili paran broj. Pri tome se ovaj diagram u toliko više priljubi X-osi u blizini te nule, u koliko je red nule veći.

Zadaci.

Kakav je za $n = 1,2,3,\ldots\ldots$, medjusobni položaj diagrama funkcija:

1. $(x-1)^n$; 2. x^n-1; 3. x^{n+1}; 4. $(x-1)^2x^n$?

Koliki je red nule $x = 1$ sledećih funkcija i kakav je polozaj njihovih diagrama u blizini te nule:

5. $2x^2-4x+2$; 6. $3x^3-9x^2+9x-3$; 7. x^3-2x^2+x ?

3.6. Diagram polinoma

Za velike vrednosti x-a polinom se ponaša kao član sa najvećim stepenom od x (v.3.4(ii)); u koliko je stepen polinoma veći, u toliko je njegov diagram za veliko x strmiji.

Ako je $x = a$ nula k-tog reda toga polinoma, on se u blizini te nule ponaša kao

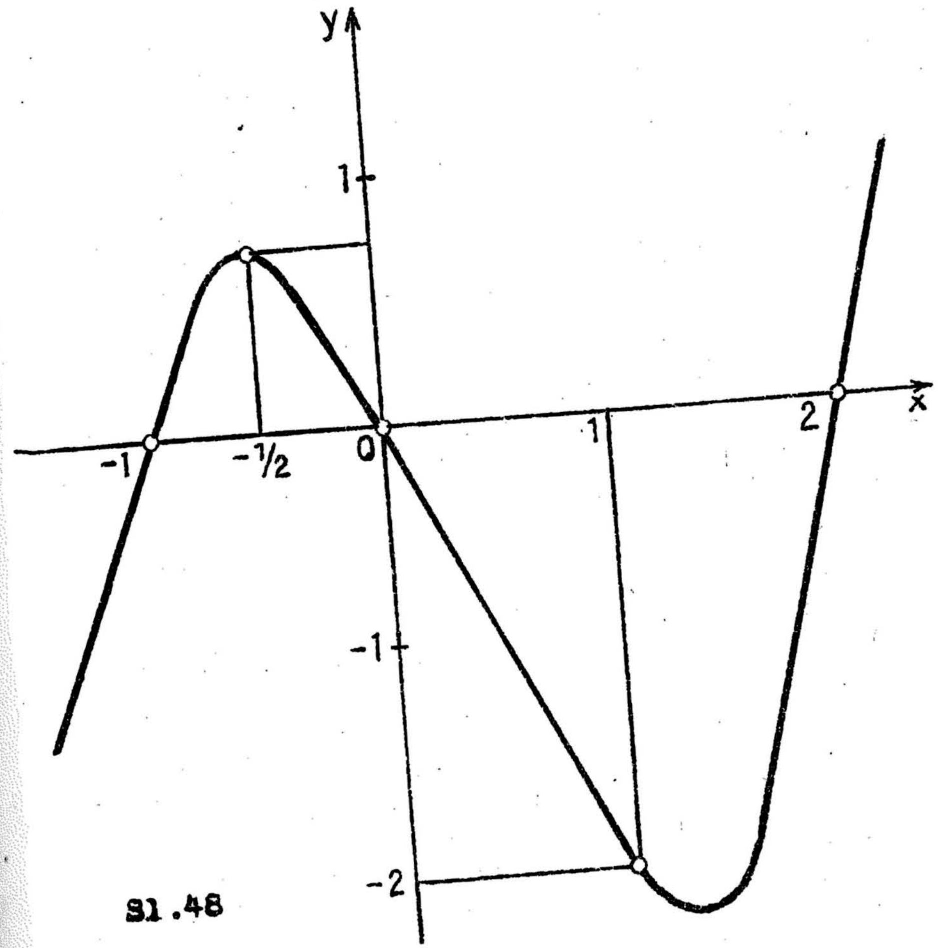
$$A(x-a)^k,$$

prema tome će se i njegov diagram u blizini te nule u toliko više priljubiti uz X-osu, u koliko je

k veće i presecaće je ili ne, prema tome da li je red nule k neparan ili paran broj.

Pr.(1). Skiciraj diagram funkcije

$$y = x(x+1)(x-2)$$



Sl.48

1° $y = 0$ za $x = -1$, $x = 0$ i $x = 2$; sve su ove nule prvog reda, prema tome u ovim tačkama diagram preseca X-osu.

2° $y \sim x^3$ kad $x \to \pm\infty$; znači za velike negativne vrednosti x-a y je veliko, negativno, a za velike pozitivne vrednosti x-a y je veliko, pozitivno.

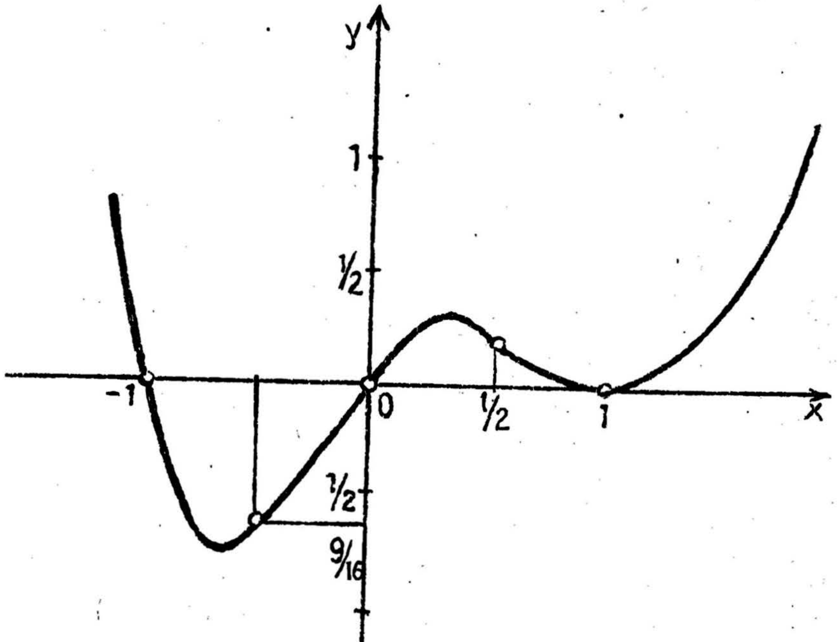
3° Diagram posmatrane funkcije dolazi iz $-\infty$, preseca X-osu u tačkama

$x = -1$ i $x = 0$ i $x = 2$, pa se udaljuje u $+\infty$. (v.sl.48)

x	$-\infty$	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	1	2	$5/2$	3	$+\infty$
y	$-\infty$	-8	$-25/8$	0	$5/8$	0	-2	0	$35/8$	12	$+\infty$

Pr.(2). Skiciraj diagram funkcije

$$y = x(x+1)(x-1)^2.$$



Sl.49

1° $y = 0$ za $x = -1$, $x = 0$ i $x = 1$

pri tome su $x = -1$ i $x = 0$ nule prvog reda, a $x = 1$ nula drugog reda; znači diagram preseca X-osu u tačkama $x = -1$ i $x = 0$, a dodiruje je u tački $x = 1$.

2° $y \sim x^4$ kad $\to \pm\infty$; znači da je y veliko pozitivno kad je x veliko pozitivno ili negativno.

3° Diagram date funkcije dolazi iz $+\infty$, preseca X-osu u tačkama $x = -1$ i $x = 0$, dodiruje je u tački $x = +1$ ostajući iznad nje i udaljuje se u $+\infty$; (v.sl.49).

x	$-\infty$	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2	$+\infty$
y	$+\infty$	18	0	$-9/16$	0	$3/16$	1	6	$+\infty$

Pr.(3). Skiciraj diagram funkcije

$$y = x(x+1)(x-1)^3.$$

1° $y = 0$ za $x = -1, +1$ i 0;

nula $x = +1$ je 3-ćeg reda.

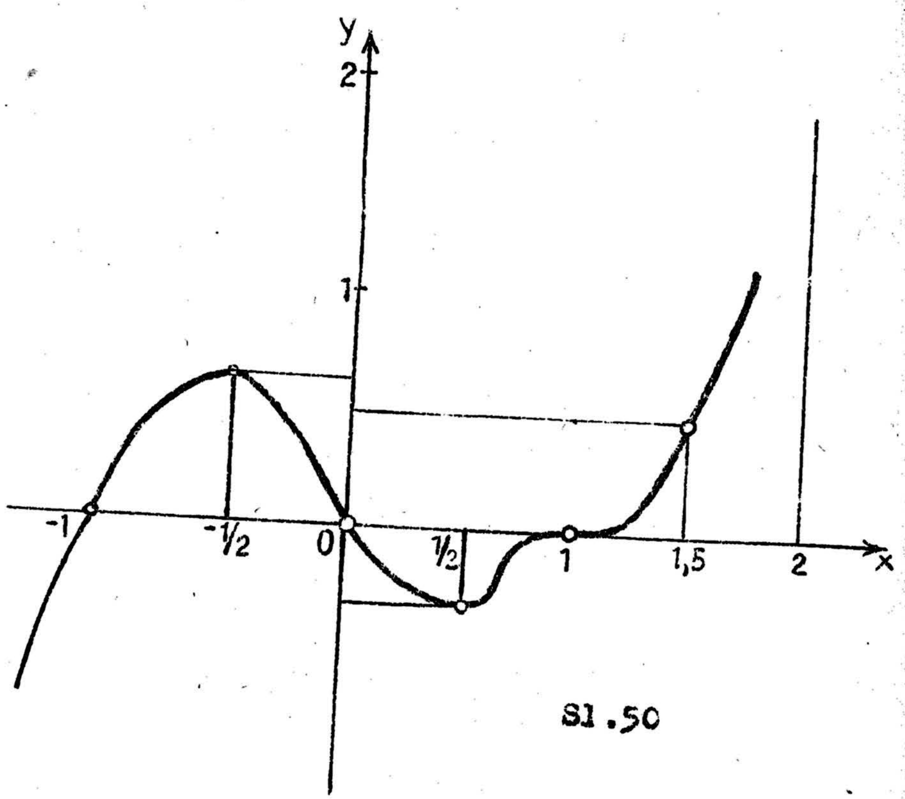
2° $y \sim x^5$ kad $x \to \pm\infty$;

tj.

$y \to \pm\infty$ kad $x \to \pm\infty$;

(vidi sliku 50).

x	$-\infty$	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2	∞
y	$-\infty$	-27	0	$27/32$	0	$-3/32$	0	6	∞



Sl.50

<u>Napomena</u>. Ako polinom pored linearnih faktora ima i kvadratnih koji se ne mogu rastaviti na linearne, u njegovom se diagramu mogu pojaviti talasi koji ne presecaju X-osu; v.pr.3.7.(1), sl.51 i pr.3.7.(2) sl.52.

Zadaci

Skiciraj diagrame sledećih funkcija:

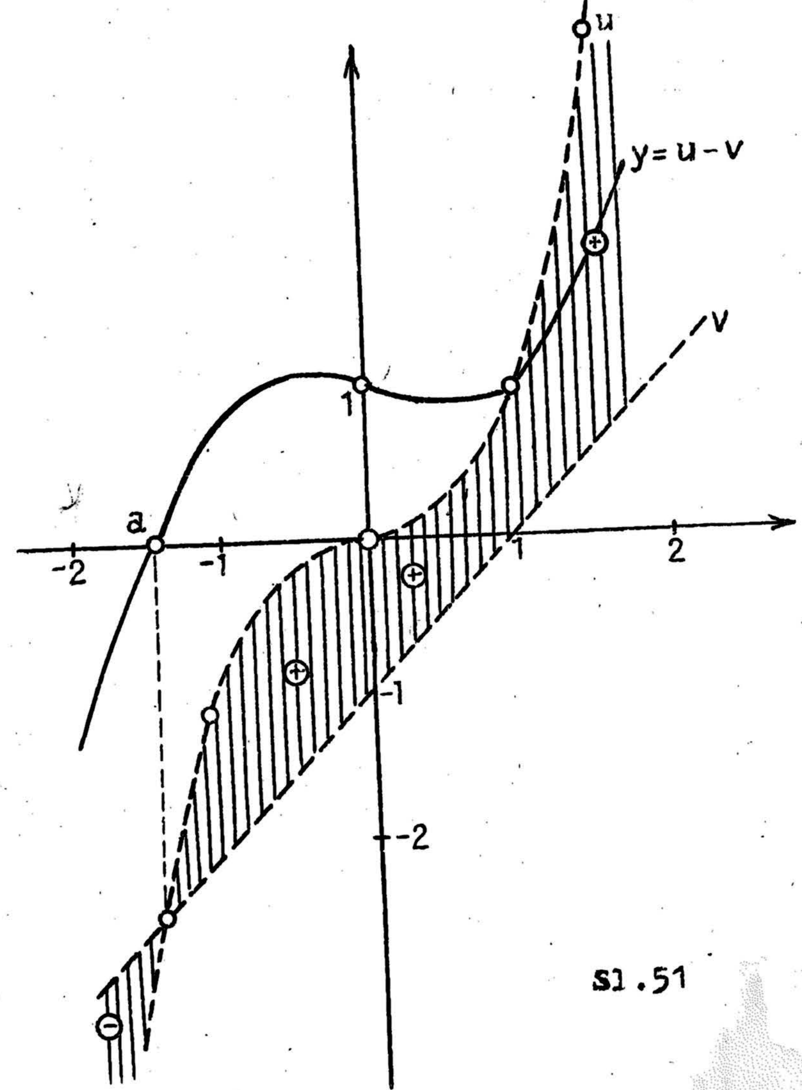
1. $x(x-3)^2$; **2.** $(x-1)(x-2)^3$; **3.** x^2-x^4 ;

4. $(x+1)(x-1)^3$; **5.** $x^3(x-1)$; **6.** $x(x^2-1)$;

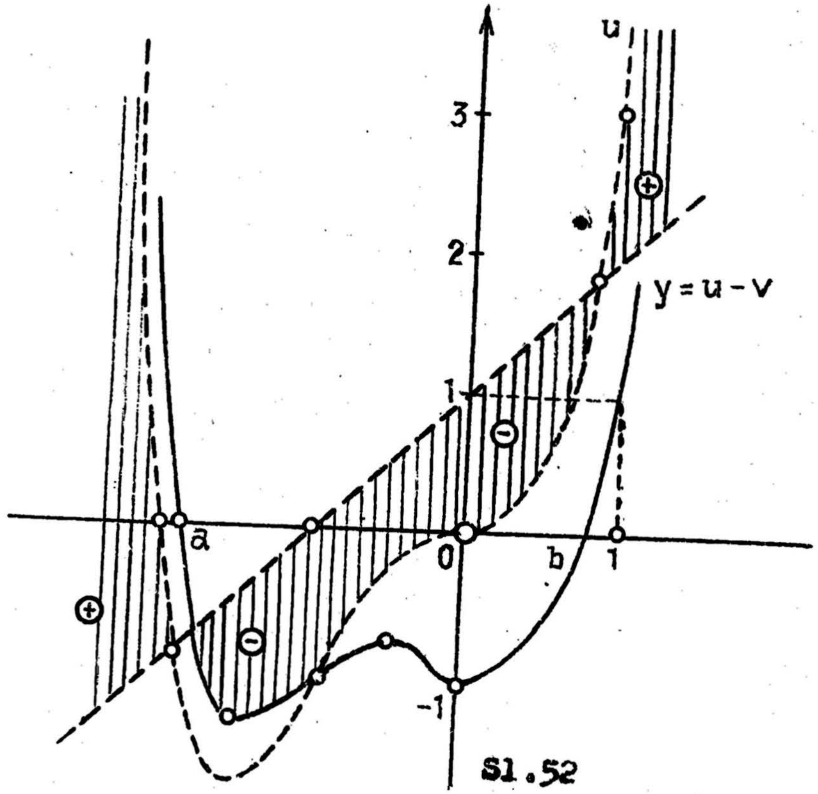
7. $x(x-1)(x-2)(x-3)$; **8.** $x^3(x-2)^2$;

9. $(x^2-1)^3$; **10.** $x(x-2)(x+1)^3$;

11. $(2x-1)^2(x+1)^3$; **12.** $(3x-2)^2(2x-3)^2$.



Sl.51



Sl.52

3.7. D i a g r a m   p o l i n o m a (nastavak)

Ako je polinom dat u razvijenom obliku i ne možemo ga napisati kao proizvod faktora nižeg stepena, postupamo kao u sledećim primerima.

Pr.(1). Skiciraj diagram funkcije

$$y = x^3 - x + 1.$$

Stavimo $u = x^3$ i $v = x-1$, $y = u-v$.

Diagrami funkcije $u(x)$ i $v(x)$ su na sl.51 izvučeni crtičasto. Razlika ordinata $u-v = y$, na slici šatirana, prenesena na X-osu daje diagram funkcije Y.

U tački $x = a$ je $u = v$ $\therefore$ $y = 0$.

tj. diagram seče X-osu; za $x > a$ je $u > v$ $\therefore$ $y > 0$; za $x < a$ je $u < v$ $\therefore$ $y < 0$.

Pr.(2). Skiciraj diagram funkcije

$$y = x^4 + 2x^3 - x - 1$$

Stavimo

$$u = x^4 + 2x^3 = x^3(x+2), \quad v = x+1.$$

Diagram funkcije u i v izvučeni su crtičasto na sl.52.

$u < v$ kad je $a < x < b$,

$u > v$ " " $x < a$ i $x > b$;

dakle je razlika

$$y = u-v$$

> ili < od 0, prema tome da li se x nalazi izvan ili u razmaku (a,b). Kad ovu razliku prenesemo na X-osu dobivamo traženi diagram. On seče X-osu u tačkama $x = a$ i $x = b$.

Zadaci.

Skiciraj diagrame sledećih funkcija:

1. $y = x^4 - x^2 + x$; 2. $y = x^5 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2$, $(u = x^5, v = \frac{1}{4}(x^3+x^2))$; 3. $y = x^6 + x^4 - 4x^2$, $(u = x^4, v = 4x^2 - x^6)$; 4. $y = x^2 + ax + b$; 5. $y = x^3 + px + q$.

3.8. G r a f i č k o   i s p i t i v a n j e

(i) Ako je $x = a$ nula funkcije $f(x)$ t... $f(a) = 0$, tada njen diagram seče ili dodiruje X-osu u tački $x = a$ i obratno. Prema tome t... preseka diagrama funkcije $f(x)$ sa X-osom daj... približan položaj nula date funkcije.

Pr.(1). Odredi približan položaj nula p... noma

$$f(x) = x^3-4x+2.$$

Diagram polinoma

$$p(x) = x^3-4x = x(x^2-4)$$

je na sl.53 izvučen crtičasto. Ako svakoj ordi... tog diagrama dodamo 2, tj. ako ga translatorn... pomerimo za dve jedinice u pozitivnom pravcu Y... dobivamo diagram datog polinoma

$$f(x) = p(x)+2.$$

On seče X-osu na tri mesta, znači da dati polin... ima tri nule i to jednu izmedju -3 i -2, jed... izmedju 0 i 1, a jednu izmedju 1 i 2.

(ii) Ako datu funkciju $f(x)$ napišemo u obliku

$$f(x) = u(x)-v(x)$$

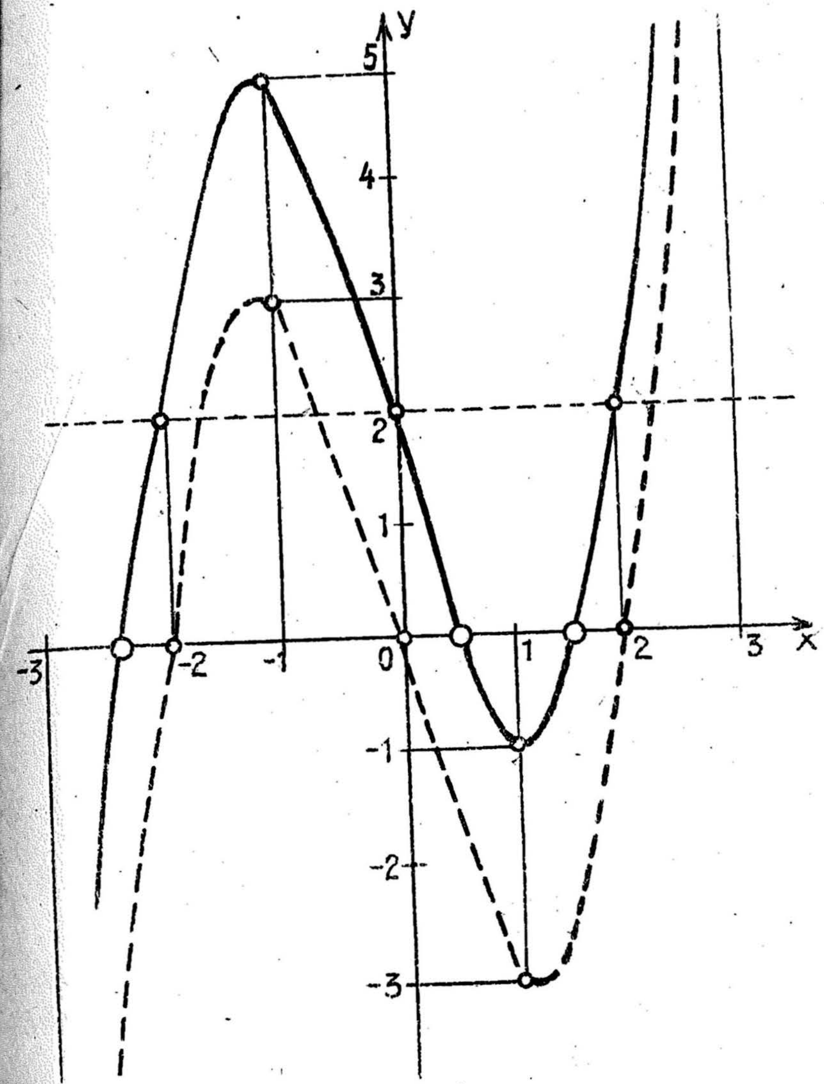
i ako je $x = a$ njena nula, tada je

$$u(a)-v(a) = f(a) = 0$$

$$\therefore \quad u(x) = v(a).$$

Nule funkcije

$f(x) = u(x)-v(x)$ možemo dobiti i... kao apscise tačaka preseka diagrama funkcija u... i $v(x)$.



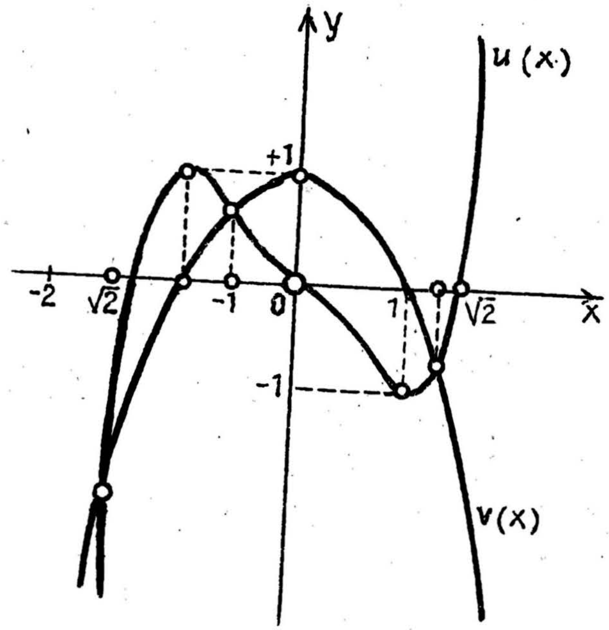
Sl.53

Pr.(2). Odredi približan položaj nula poli-
noma

$$f(x) = x^5-2x^3-x^2-1$$

Stavimo

$$f(x) = u(x)-v(x).$$



Sl.54

sa

$$u(x) = x^5-2x^3 = x^3(x^2-2)$$

i

$$v(x) = 1-x^2 .$$

Iz sl.54 vidimo da se diagrami funkcije $u(x)$ i $v(x)$ seku na tri mesta; polinom $i(x)$ ima tri nule i to jednu izmedju $\underline{-2}$ i $-\underline{\sqrt{2}}$, jednu izmedju $\underline{-1}$ i $\underline{0}$, i jednu izmedju $\underline{1}$ i $\underline{\sqrt{2}}$.

__Napomena__. Prilikom odredjivanja racionalnih nula treba uzeti u obzir samo one koje padaju u ovako dobivene razmake.

__Zadaci__.

Odredi grafički približan položaj nula poli-

noma navedenih u zadacima 3.7.__1-3__ i polinoma

__4.__ $f(x) = x^4+x^2-2x-3$.

Pokaži da se u ovom poslednjem slučaju nule polinoma $f(x)$ mogu dobiti i kao apscise tačaka preseka parabole $y = x^2$ i kruga $y^2+(x-1)^2 = 4$.

__5.__ Pokaži da su nule polinoma

$$4x^6-32x^5+96x^4-124x^3+49x^2+14-4$$

mogu dobiti kao apscise tačaka preseka diagrama funkcije

$$y = 2x(x-2)^2$$

i kruga

$$(x-1)^2+(y+2)^2 = 9.$$

__3.9. V e ž b e.__

__1.__ Odredi polinom drugog stepena $p(x)$ tako da bude

$$1^\circ \; p(-1) = a, \; p(0) = b \;\; i \;\; p(1) = c,$$

$$2^\circ \; p(1) = a, \; p(2) = b \;\; i \;\; p(3) = c.$$

__2.__ Odredi polinom trećeg stepena $q(x)$ tako da bude

$$q(-2) = q(-1) = a \;\; i \;\; q(1) = q(2) = b,$$

i rastavi polinom

$$q(x) - a$$

na linearne faktore.

__3.__ Pokaži da je

$$x^3-(1+p^2)x+p = (x-p)(x^2+px+1).$$

4. Odredi nule polinoma

$$ax^4+2bx^2+c: \quad (\text{Stavi } x^2 = z).$$

5. Odredi nule polinoma

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a.$$

(Podeli sa x^2 i stavi $x+\frac{1}{x} = z$ i $x^2+\frac{1}{x^2} = z^2-2$).

6. Izrazi

$$x^n+x^{-n}, \quad n = 2,3,4,5.$$

kao polinom od $z = x+\frac{1}{x}$.

7. Neka je

$$f(x) = a+bx+\dots\dots\dots+x^n$$

polinom n-tog stepena sa celim koeficientima. Ako su a i b deljivi brojem p a a nije deljiv sa p^2, p ne može biti koren jednačine $f(x) = 0$. U primeru 3.3.(1) je $a = -24$, $b = 12$, prema tome ni jedan od brojeva ± 3, ± 4, ± 6, ± 12 ne mogu biti nule toga polinoma, jer kvadrati gornjih brojeva nisu delitelji broja 24.

8. Neka je $f(x)$ polinom sa celim koeficientima; $\frac{p}{q}$ može biti nula polinoma $f(x)$ samo ako je

$$f(1) \text{ deljivo sa } p-q$$

ili ako je

$$f(-1) \text{ deljivo sa } p+q.$$

Pr. $F(x) = 2x^5-3x^4-6x^3+9x^2+12x-18$; nacrtaj diagram ovog polinoma.

9. Ostatak deobe polinoma $f(x)$

1° sa $(x-a)(x-b)$ je

$$f(a)\,\frac{b-x}{b-a} + f(b)\,\frac{x-a}{b-a},$$

2° sa $(x-a)(x-b)(x-c)$ je

$$f(a)\,\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\,\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + f(c)\,\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

10. Pokaži da su polinomi

1° $f(x) = x^{3p}+x^{3q+1}+x^{3v+2}$,

2° $g(x) = x^{2m}+x^m+1$, sa $m = 3k \pm 1$,

deljivi sa x^2+x+1.

11. Pokaži da je izraz

$$(x+a+b)^{2k+1} - x^{2k+1} - a^{2k+1} - b^{2k+1}$$

deljiv sa $(x+a)(x+b)(a+b)$.

12. Odredi A i B tako da polinom

$$Ax^n + Bx^{n-1} + 1$$

bude deljiv sa $(x-1)^2$.

13. Ako se polinom $f(x)$ napiše u obliku

$$f(x) = p(x^2)+xq(x^2)$$

pokaži da je

$$p(-1)+xq(-1)$$

ostatak deobe toga polinoma sa x^2+1.

14. Pokaži da su

$$x^{n+2}-1 \quad i \quad x^n-1$$

faktori polinoma

$$(1+x+x^2+\dots\dots\dots+x^n)^2-x^n.$$

15. Pokaži da je polinom

$$(x-2)^{2n}+(x-1)^n-1$$

deljiv sa x^2-3x+2 i odredi količnik.

16. Ako polinom sa racionalnim koeficientima ima nulu oblika

$3+\sqrt{2}$, pokaži da on mora imati i nulu oblika $3-\sqrt{2}$.

17. Rastavi polinom

$$2(x^4+a^4+b^4)-(x^2+a^2+b^2)^2$$

na linearne faktore i nacrtaj njegov diagram.
$(x-a-b,\ x+a+b,\ x-a+b\ \text{ i }\ x+a-b)$.

18. Pokaži da je

$$x^3-3abx+a^3+b^3=\frac{1}{2}(x+a+b)\left\{(x-a)^2+(x-b)^2+(a-b)^2\right\}.$$

19. Neka je

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d);$$

ako je

$$x+y=a+b+c+d$$

i

$$x^3+y^3=a^3+b^3+c^3+d^3,$$

pokaži da je

$$f(x)=f(y).$$

20. Pokaži da je

$$x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n-n^2x^{n-1}+1$$

deljiv sa $(x-1)^4$.

21. Skiciraj diagrame polinoma iz vežbi 14,15 i 20, za $n = 2,3,4$ i 5 i odredi približan položaj ostalih nula.

22. Pokaži da se polinom

$$f(x)=x^4+px^2+q$$

može uvek rastaviti na proizvod od dva kvadratna faktora. (Ako je $p^2-4q>0$, rešavanjem jednačine $f(x)=0$, a ako je $p^2-4q<0$, stavljajući

$$x^4+q=(x^2+\sqrt{q})^2-2\sqrt{q}\,x^2).$$

Pr. 1° x^4+1; 2° x^4+x^2+1; 3° x^4-x^2+1;

4° x^4-x^2-6; 5° x^4-6x^2+8; 6° x^4+4.

23. Skiciraj diagrame polinoma iz vežbe 22 1°-6°, kao i sledećih:

7° $x(1-x^2)$; 8° $x(1-x^2)(1-\frac{x^2}{4})$;

9° $x(1-x^2)(1-\frac{x^2}{4})(1-\frac{x^2}{9})$.

24. Pokaži da se nule polinoma

$$x^3+px+q$$

mogu dobiti grafičkim presekom parabole

$$y = x^2$$

i kruga

$$x^2+y^2+qx+(p-1)y = 0$$

25. Pokaži da se nule polinoma

$$x^4+px^2+qx+r$$

mogu dobiti presekom parabole

$$y = x^2$$

i kruga

$$x^2+y^2+qx+(p-1)y+r = 0.$$

GLAVA IV.

RACIONALNA FUNKCIJA

4.1. Opšti oblik.

(i) Svaka se racionalna funkcija može napisati u obliku količnika dva polinoma.

Pr.(1). Izrazi u obliku količnika funkciju

$$f(x) = x^2-x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+1}$$

Svodjenjem na zajednički imenitelj

$$(x-1)(x^2+1) = x^3-x^2+x-1$$

dobijamo

$$f(x) = \frac{(x^2-x+1)(x^3-x^2+x-1)+(x^2+1)+(2x+1)(x-1)}{x^3-x^2+x-1} =$$

$$= \frac{x^5-2x^4+3x^3+x-1}{x^3-x^2+x-1}$$

(ii) Ako je stepen brojitelja racionalne funkcije veći od stepena imenitelja, možemo je napisati u obliku zbira jednog polinoma i jedne racionalne funkcije kod koje je stepen brojitelja manji od stepena imenitelja.

Pr.(2). Izrazi funkciju

$$f(x) = \frac{x^6-2x^4}{x^3-2x+1}$$

u obliku zbira jednog polinoma i jedne racionalne funkcija čiji je stepen brojitelja manji od 3.

Deobom dobivamo

$$\begin{array}{l} x^6-2x^4 \;:\; x^3-2x+1 = x^3-1 \\ \underline{x^6-2x^4+x^3} \\ \quad 0 \quad 0 \; -x^3 \\ \qquad \underline{-x^3+2x-1} \\ \qquad\quad 0 \; -2x+1 \end{array}$$

Količnik deobe je $\underline{x^3-1}$ a ostatak $\underline{-(2x-1)}$, prema tome je

$$f(x) = x^3-1-\frac{2x-1}{x^3-2x+1}$$

Zadaci.

Svedi sledeće funkcije na racionalne kod kojih je stepen brojitelja manji od stepena imenitelja:

1. $\frac{x^4+1}{x+1}$; 2. $\frac{x^4+1}{x^2+1}$; 3. $\frac{x^4+1}{x^3+1}$; 4. $\frac{x^4+x^2+1}{x+1}$;

5. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$; 6. $\frac{x^8+1}{x^3+1}$; 7. $\frac{x^3(x^2-1)}{x^2+x+1}$

4.2. Rastavljanje racionalnih funkcija

(i) Ako je imenitelj racionalne funkcije dat u obliku proizvoda, a stepen brojitelja manji od stepena imenitelja, datu racionalnu funkciju

možemo napisati u obliku zbira racionalnih funkcija čiji su imenitelji pojedini faktori imenitelja date racionalne funkcije.

(ii) Neka su faktori imenitelja linearni.

Pr. (1). Rastavi racionalnu funkciju

$$f(x) = \frac{5x^2-12x+7}{(x+1)(x-2)(x-3)}$$

na zbir jednostavnih racionalnih funkcija.

Stavimo

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

i pomnožimo obe strane ove jednačine sa

$$(x+1)(x-2)(x-3);$$

biće

$$\begin{aligned} 5x^2-12x+7 &= A(x-2)(x-3)-B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2) = \\ &= A(x^2-5x+6) + B(x^2-2x-3) + C(x^2-x-2) = \\ &= (A+B+C)x^2-(5A+2B+C)x+(6A-3B-2C). \end{aligned}$$

Da bi obe strane bile jednake mora biti

$$\begin{aligned} A+B+C &= 5, \\ 5A+2B+C &= 12 \\ 6A-3B-2C &= 7. \end{aligned}$$

Ako sve tri jednačine saberemo dobivamo

$$12\,A = 24, \quad \therefore \; A = 2$$

prema tome je

$$\begin{aligned} B+C &= 3, \\ 2B+C &= 2, \end{aligned} \qquad \therefore \qquad B = -1 \quad \text{i} \quad C = 4.$$

Dakle je

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x-3}.$$

<u>Pr.(2)</u>. Rastavi funkciju

$$f(x) = \frac{2x^3-11x^2-10x-5}{(x-3)(x-1)(x+1)(x+2)}$$

na zbir jednostavnih racionalnih funkcija.

Stavimo

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2}.$$

Koeficiente <u>A</u>,<u>B</u>,<u>C</u> i <u>D</u> možemo i ovako odrediti. Pomnožimo najpre obe strane sa $(x-3)$,

$$\frac{2x^3-11x^2-10x-5}{(x-1)(x+1)(x+2)} = A + (x-3)\left\{\frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2}\right\}$$

stavljajući $x = 3$, poslednji izraz isčezava usl faktora $(x-3)$, što daje neposredno

$$A = \frac{2\cdot 3^3-11\cdot 3^2-10\cdot 3-5}{2\;4.5} =$$

$$\frac{\{(2\cdot 3-11)3-10\}3-5}{40} = \frac{-80}{40} = -2.$$

Na isti način, množenjem sa $(x-1)$, $(x+1)$ i $(x+2)$ i stavljajući uzastopoe $x = 1$, $x = -1$ i $x = -2$ dobivamo

$$B = -2, \quad C = -1 \quad \text{i} \quad D = 3.$$

Prema tome je

$$f(x) = \frac{-2}{x-3} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}.$$

(iii) Neka imenitelj sadrži pored linearnih faktora i faktore višeg stepena.

<u>Pr.(3)</u>. Rastavi funkciju

$$f(x) = \frac{2x^3+5x^2+1}{x^4-1}$$

na zbir jednostavnih racionalnih funkcija.

Kako je

$$x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1),$$

stavljamo

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Koeficiente <u>A</u> i <u>B</u> možemo odrediti kao i u prethodnom primeru množenjem sa $(x-1)$, odnosno sa $(x+1)$ i stavljanjem $x = 1$, odnosno $x = -1$; tako dobijamo da je

$$A = 2 \quad \text{i} \quad B = -1.$$

Prema tome je

$$\frac{2x^3+5x^2+1}{x^4-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}. \tag{1}$$

Iz ovog izraza koeficiente <u>C</u> i <u>D</u> možemo dobiti ovako

$$\frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{2x^3+5x^2+1}{x^4-1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} =$$

$$= \frac{x^3+2x^2-x-2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x+2}{x^2+1},$$

tj.

$$C = 1 \quad i \quad D = 2,$$

pa je

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+1} .$$

U datom slučaju koeficiente $\underline{C}$ i $\underline{D}$ možemo i ovako odrediti. Stavimo u izrazu (1) $x = 0$; tada dobivamo, neposredno

$$-1 = -2-1+D, \quad .\because. \quad D = 2;$$

pomnožimo zatim izraz (1) sa $\underline{x}$ i pustimo da $x \to \infty$; tada dobivamo

$$2 = 2-1+C , \quad .\because. \quad C = 1.$$

<u>Pr.(4)</u>. Rastavi funkciju

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{(x^2+1)(x^3+x+1)}$$

na zbir jednostavnih racionalnih funkcija.

Stavimo

$$f(x) = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Množenjem obe strane sa

$$(x^2+1)(x^3+x+1)$$

dobivamo

$$x^3+x^2 = (A+D)x^4+(B+E)x^3+(A+C+D)x^2+$$
$$+(B+D+E)x+(C+E).$$

Prema tome će obe strane biti jednake, ako je

$$A+D = 0,$$
$$B+E = 1,$$
$$A+C+D = 1,$$
$$B+D+E = 0,$$
$$C+E = 0.$$

Iz prve i treće jednačine dobivamo $C = 1$, iz pete $E = -1$, iz druge $B = 2$, iz četvrte $D = -1$, i naposletku iz prve $A = 1$.

Prema tome je

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^3+x+1} - \frac{x + 1}{x^2+ 1}$$

<u>Pr.(5)</u>. Rastavi funkciju

$$f(x) = \frac{13x^2-16x}{(x^2+2)(x-1)^3}$$

na jednostavne racionalne funkcije.

U ovom slučaju treba smatrati faktor (x
kao polinom trećeg stepena i staviti

$$f(x) = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2}.$$

Množenjem sa $(x-1)^3(x^2+2)$ i uporedjivanj koeficienata leve i desne strane dobivamo

$$A+D = 0,$$
$$B-3D+E = 0,$$
$$2A+C+3D-3E = 13,$$
$$2B-D+3E = 16,$$
$$2C-E = 0.$$

Eliminisanjem D i E iz prve i posled jednačine i zamenom u preostale tri dobivamo

$$3A+B+2C = 0,$$
$$A+5C = -13,$$
$$A+2B+6C = -16.$$

Eliminisanjem A iz druge jednačine i za nom u preostale dve, dobivamo

$$B-13C = 39,$$
$$2B+C = -3, \quad \therefore \quad C = -3,\ B = 0;$$

Prema tome je $A = 2$, $D = -2$ i $E = -6$, pa je

$$f(x) = \frac{2x^2-3}{(x-1)^3} - \frac{2x+6}{x^2+2},$$

(iv) Neka je imenitelj racionalne funkcije
stepen linearnog faktora; takvu funkciju mo-
rastaviti na zbir racionalnih funkcija čiji
rojitelji konstante, a imenitelji pojedini ste-
teg linearnog faktora.

Pr.(6). Rastavi funkciju

$$f(x) = \frac{2x^2-3}{(x-1)^3}$$

zbir jednostavnih racionalnih funkcija.

Zamenimo $x-1$ sa t, tj. stavimo

$$x-1 = t \quad \therefore \quad x = 1+t$$

Ako polinom brojitelja uredimo po stepenima t biće

$$2x^2-3 = 2(1+t)^2-3 = 2t^2+4t-1 =$$
$$= 2(x-1)^2+4(x-1)-1.$$

Deobom sa $(x-1)^3$ dobivamo

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3}.$$

adaci.

Rastavi sledeće funkcije na jednostavne racionalne funkcije:

1. $\frac{12x^2-70x+98}{(x-2)(x-3)(x-4)}$; 2. $\frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+3)}$; 3. $\frac{ax+b}{x^2-1}$;

4. $\frac{x^2+1}{x^3-1}$; 5. $\frac{x^5-1}{(x-1)^5}$; 6. $\left(\frac{x^3}{x^3+1}\right)^3$; 7. $\frac{x^n}{x^4-1}$

za $n = 0,1,2,3,4,5$.

8. Na osnovu zadatka 7. rastavi sledeću racionalnu funkciju na zbir polinoma i jednostavnih racionalnih funkcija

$$\frac{ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f}{x^4-1}.$$

9. Neka je

$$f(x) = x^4-2x^3+3x^2-4 ;$$

pokaži da je

$$\frac{f(x)}{(x-1)(x-4)} = q(x) - \frac{f(1)}{3(x-1)} + \frac{f(4)}{3(x-4)},$$

gde je $q(x)$ polinom drugog stepena.

4.3. Osobine racionalnih funkcija

(i) Racionalna funkcija je definisana za sve vrednosti x-a, osim za nule imenitelja.

Kad x teži jednoj nuli imenitelja racionalna funkcija obično teži $\pm\infty$, a ponaša se u blizini te vrednosti kao odgovarajući faktor koji

nulira imenitelj.

Pr.(1). Pokaži da je

$$f(x) = \frac{x^2-x+4}{(x-2)(x^2+1)} \sim \frac{6}{5(x-2)} \to \pm\infty$$

kad $x \to 2 \pm 0$.

Imamo

$$\frac{5}{6}(x-2)f(x) = \frac{5(x^2-x+4)}{6(x^2+1)} \to 1$$

kad $x \to 2 \pm 0$.

Pr.(2). Pokaži da je

$$f(x) = \frac{x^3-3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} \sim -\frac{2}{3(x-1)^2} \to -\infty$$

kad $x \to 1 \pm 0$.

imamo

$$-\frac{3}{2}(x-1)^2 f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+x+1} \to 1$$

kad $x \to 1 \pm 0$.

(ii) Racionalna funkcija je neprekidna za sve vrednosti x-a za koje je ona definisana. Količnik dve neprekidne funkcije je neprekidna funkcija.

Nule racionalne funkcije su nule brojitelja i to istog reda, ukoliko se one ne poklapaju sa nulama imenitelja.

(iii) Za velike vrednosti x-a racionalna funkcija se ponaša kao količnik članova najvećeg stepena brojitelja i imenitelja.

Pr.(3). Pokaži da je

$$f(x) = \frac{3x^5-4x^3+7x-3}{4x^2-2x+5} \sim \frac{3x^5}{4x^2} = \frac{3}{4}x^3$$

kad $x \longrightarrow \pm\infty$.

Imamo

$$\frac{4}{3x^3}f(x) = \frac{\dfrac{3x^5-4x^3+7x-3}{3x^5}}{\dfrac{4x^2-2x+5}{4x^2}} =$$

$$= \frac{1-\frac{4}{3}x^{-2}+\frac{7}{3}x^{-4}-x^{-5}}{1-\frac{1}{2}x^{-1}+\frac{5}{4}x^{-2}} \longrightarrow 1 \text{ kad } x \to \pm\infty$$

Pr.(4). Pokaži da je

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+10}{3x^4+1} \sim \frac{x^3}{3x^4} = \frac{1}{3x}$$

kad $x \longrightarrow \pm\infty$.

Imamo

$$3xf(x) = \frac{\dfrac{x^3+2x^2+3x+10}{x^3}}{\dfrac{3x^4+1}{3x^4}} =$$

$$= \frac{1+2x^{-1}+3x^{-2}+10x^{-3}}{1+\frac{1}{3}x^{-4}} \longrightarrow 1$$

kad $x \longrightarrow \pm\infty$.

Pr.(5). Pokaži da je

$$f(x) = \frac{4x^3+x-2}{2x^2-x+1} \sim \frac{4x^2}{2x^2} = 2 \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty,$$

tj.

$$f(x) \longrightarrow 2 \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow \pm\infty.$$

Imamo

$$f(x) = \frac{(4x^2+x-2):x^2}{(2x^2-x+2):x^2} =$$

$$= \frac{4+x^{-1}+2x^{-2}}{2-x^{-1}+2x^{-2}} \to \frac{4}{2} = 2$$

kad $x \longrightarrow \pm\infty$.

Zadaci.

Neka je

$$g(x) = x^3+x^2+1 \quad \text{i} \quad f(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2(x-3)^3};$$

pokaži da je

1. $f(x) \sim -\frac{g(1)}{8}\,\frac{1}{(x-1)^2}, \quad (x \to 1);$

2. $f(x) = \frac{g(3)}{4}\,\frac{3}{(x-3)^3}, \quad (x \to 3);$

3. $f(x) \sim x^{-2}, \ (x \to \infty);$ **4.** $f(x)-x^{-2} \sim 12x^{-3}, (x \to \infty)$

Ako je

$$g(x) = 2x^5+2x^4$$

i

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3(x+2)^2},$$

pokaži da je

5. $f(x) \sim \frac{g(1)}{3^2}\,\frac{1}{(x-1)^3}$ kad $x \to 1 \pm 0;$

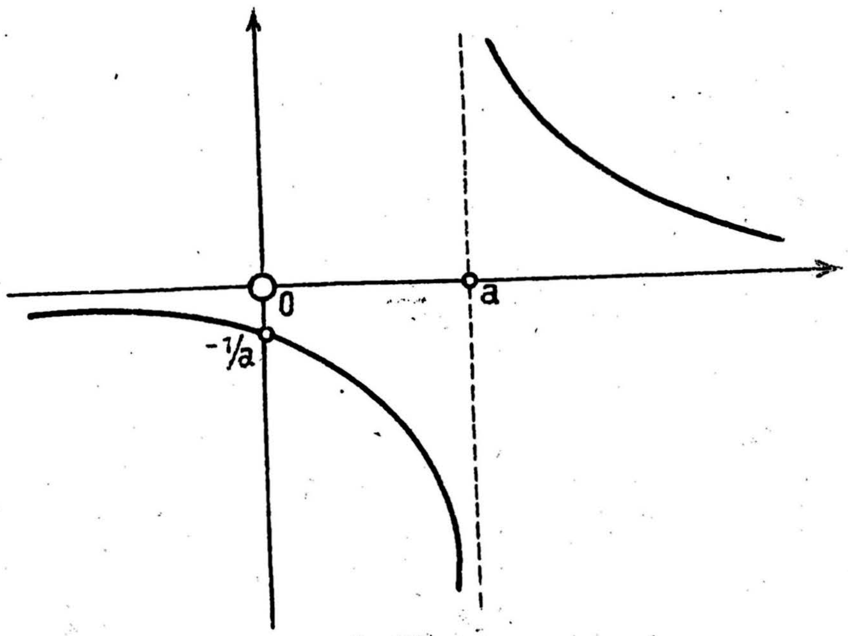
6. $f(x) \sim \frac{g(-2)}{(-3)^3}\,\frac{1}{(x+2)^2}$ kad $x \to -2 \pm 0;$

7. $f(x)-2 \sim \frac{12}{x^2}$ kad $x \to \pm\infty$

4.4. Vertikalne i horizontalne asimptote.

(i) Neka je $a > 1$ i $y = \frac{1}{x-a}$

$$y \to \begin{cases} \pm 0 & \text{kad } x \to \pm\infty, \\ \pm\infty & \text{"} \quad x \to a \pm 0; \end{cases}$$



Sl.55

pri tome je

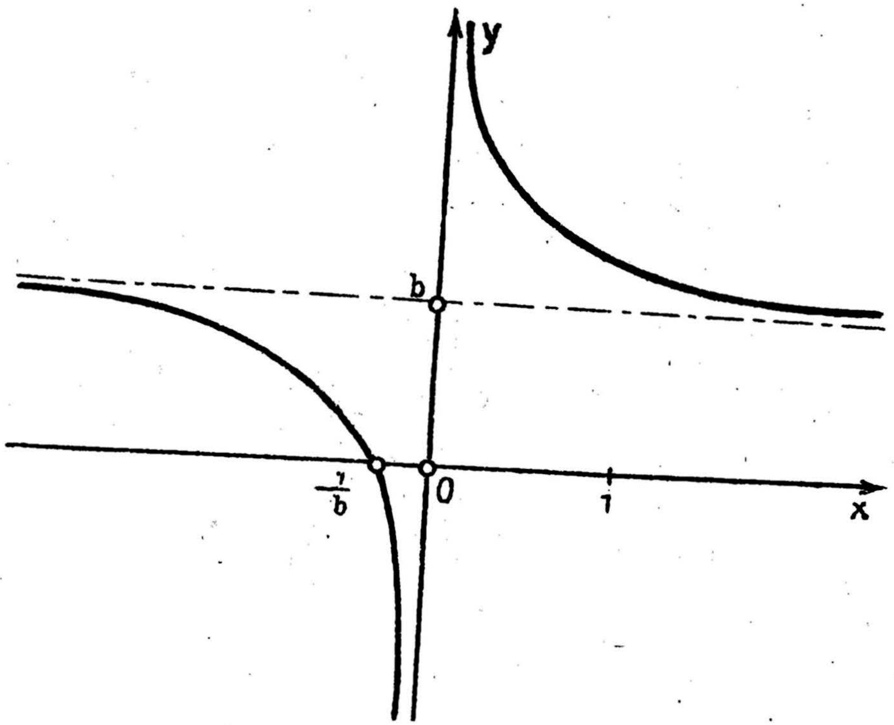
$$y \begin{cases} >0 & \text{kad je} \quad x > a, \\ >0 & \text{" \quad "} \quad x < a. \end{cases}$$

Diagram ove funkcije dat je na sl.55; on pretstavlja hiperbolu sa središtem u tački (a,o).

Dve grane diagrama se u toliko više približavaju X-osi, u koliko je $|x|$ veće, a druge dve grane pravoj $x = a$ u koliko je $x-a$ manje.

(ii) Za jednu pravu kažemo da je <u>asimptota</u> neke grane diagrama, ako joj se ova približava tako da rastojanje te grane od asimptote teži ka nuli kad se po asimptoti udaljujemo u $\underline{\infty}$.

Diagram funkcije $\frac{1}{x-a}$ ima dve asimptote i to: <u>horizontalnu asimptotu $y = 0$</u> i <u>vertikalnu asimptotu $x = a$.</u>



Sl. 56

(iii) Neka je $b > 1$ i

$$y = \frac{bx+1}{x} = b + \frac{1}{x};$$

$$y \to \begin{cases} b \pm 0 & \text{kad} \quad x \to \pm\infty, \\ \pm\infty & \text{"} \quad x \to \pm 0; \end{cases}$$

pri tome je

$$y \begin{cases} > b & \text{kad je} \quad x > 0, \\ < b & \text{" "} \quad x < 0. \end{cases}$$

Diagram ove funkcije ima kao horizontalnu asimptotu pravu $y = b$; Y-osa je vertikalna asimptota. (v.sl.56).

Ovo je takodje hiperbola sa središtem u tački (o,b).

(iv) Neka je $f(x)$ racionalna funkcija; ako

$$f(x) \to A \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty,$$

gde A može biti jednak i nuli, tada je prava

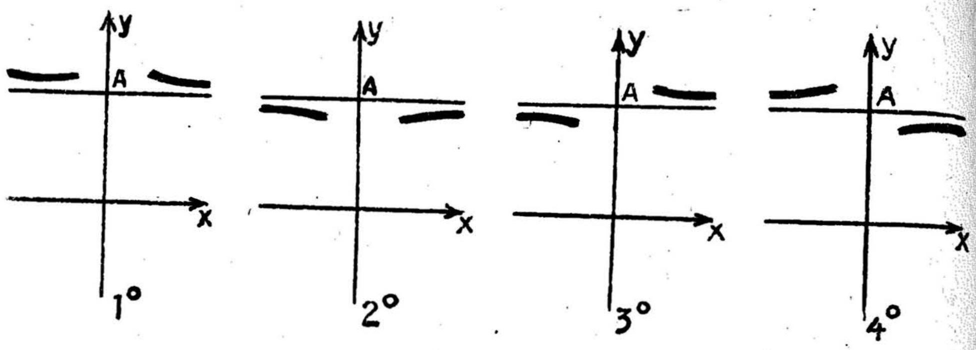
$$y = A$$

horizontalna asimptota njenog diagrama.

Ako je pored toga

$$f(x) - A \sim \frac{B}{x^n} \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty,$$

tada položaj odgovarajućih grana diagrama prema asimptoti $y = A$ zavisi od znaka koeficienta $\underline{B}$ i od toga da li je $\underline{n}$ paran ili neparan broj. (v.sl.57).



Sl.57

1° $B > 0$, $n = 2k$; 2° $B < 0$, $n = 2k$;

3° $B > 0$, $n = 2k+1$; 4° $B < 0$, $n = 2k+1$.

(v) Neka je racionalna funkcija oblika

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

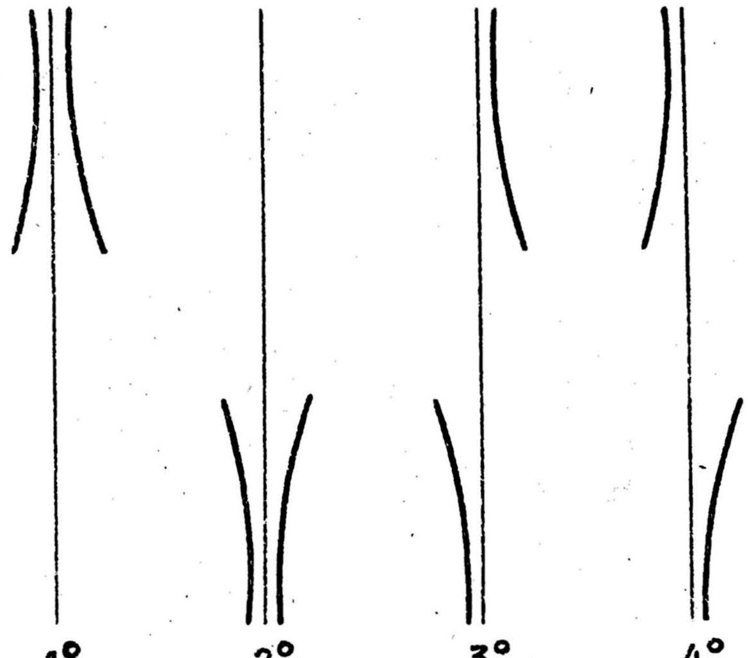
i neka je $x = a$ nula $\underline{k}$-tog reda imenitolja $v(x)$. Tada je

$$f(x) \sim \frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{kad} \quad x \to a \pm 0,$$

i prava $x = a$ pretstavlja jednu vertikalnu asimptotu diagrama funkcije $f(x)$. Položaj pojedinih grana diagrama prema asimptoti zavisi od znaka koeficienta $\underline{A}$ i od toga da li je broj $\underline{k}$ paran ili neparan. (v.sl.58).

1° $A > 0$, $k = 2p$; 2° $A > 0$, $k = 2p$;

3° $A > 0$, $k = 2p+1$; 4° $A < 0$, $k = 2p+1$.



Sl.58

Zadaci. Odredi asimptote diagrama sledećih funkcija :

1. $\frac{x}{x-1}$; 2. $\frac{x-1}{2x-1}$; 3. $\frac{1}{x^2+1}$; 4. $\frac{x}{x^2+1}$; 5. $\frac{x^2}{x^2+1}$;

6. $\frac{1}{x^2-1}$; 7. $\frac{x}{x^2-1}$; 8. $\frac{x^2}{x^2-1}$; 9. $\frac{1}{x(x-1)}$;

10. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

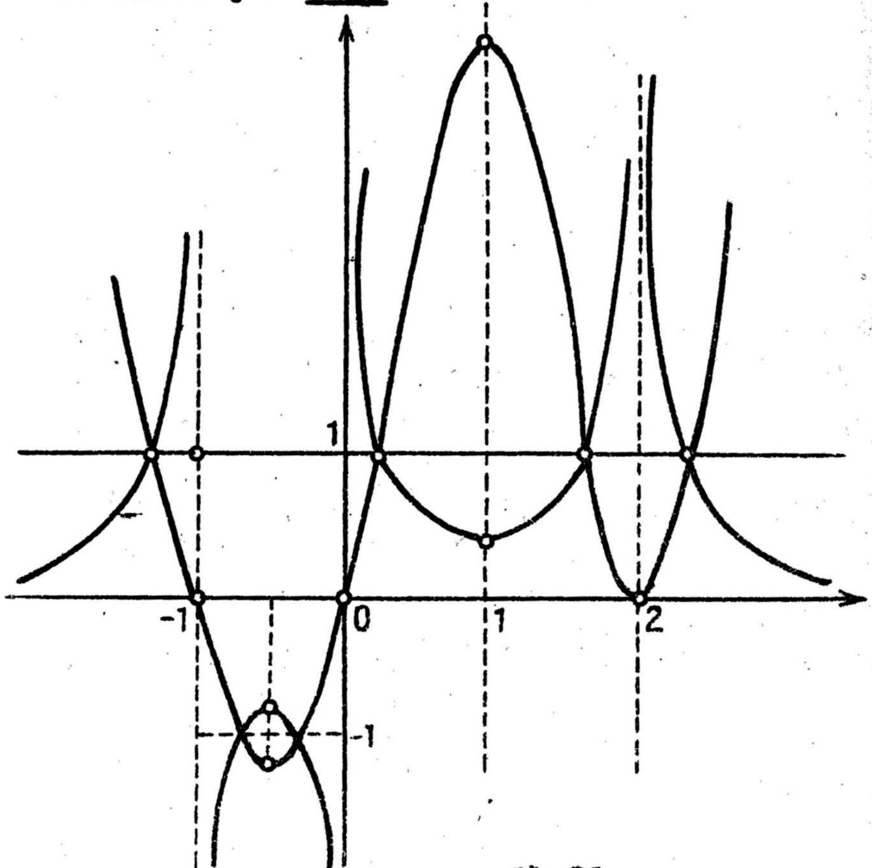
4.5. D i a g r a m   r e c i p r o č n e   v r e d n o s t i   p o l i n o m a.

Neka je $y = \frac{1}{u(x)}$ gde je $\underline{u(x)}$ neki polinom.

Funkcija

$$y \longrightarrow \pm 0 \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow \pm\infty,$$

a $y \longrightarrow \pm\infty$ kad se $\underline{x}$ približava jednoj nuli imenitelja, tj. polinoma $\underline{u(x)}$. Prema tome će diagram te funkcije imati jednu horizontalnu asimptotu, tj. samu X-osu i onoliko vertikalnih asimptota koliko ima nula funkcija $\underline{u(x)}$.



Sl.59

Pr.(1). Skiciraj diagram funkcije

$$y = \frac{1}{2(x+1)x(x-2)^2}.$$

Neka je

$$u(x) = 2x(x+1)(x-2)^2,$$

tada je

$$y = \frac{1}{u(x)}$$

Na sl.59 crtičasto izvučena kriva je diagram funkcije $u(x)$.

1^0 $\underline{y}$ i $\underline{u}$ su > 0 za $x < -1$ i $x > 0$.

2^0 $\underline{y}$ i $\underline{u}$ su < 0 za $-1 < x < 0$.

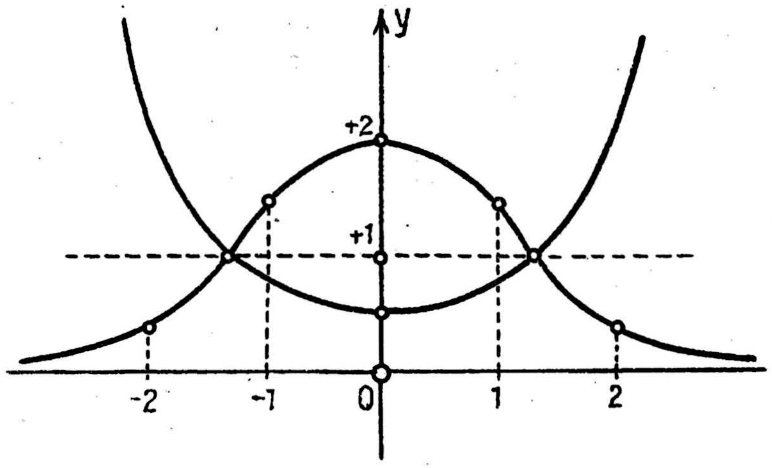
3^0 $y \to \mp\infty$ kad $x \to -1 \pm 0$;

$\to \mp\infty$ " $x \to \pm 0$;

$\to +\infty$ " $x \to 2 \pm 0$.

4^0 $y \sim \frac{1}{2}x^4$ " $x \to \pm\infty$.

x	$-\infty$	-2	$1-0$	$1+0$	$-1/2$	-0	$+0$	1	20	-3	$+\infty$
u	$+\infty$	64	$+0$	-0	$-9/8$	-0	$+0$	4	$+0$	24	$+\infty$
y	$+0$		$+\infty$	$-\infty$	$-8/9$	$-\infty$	$+\infty$	$1/4$	$+\infty$	$1/24$	$+0$



Sl.60

Pr.(2). Skiciraj diagram funkcije

$$y = \frac{4}{x^4+2}$$

Stavimo

$$u = \frac{x^4+2}{4} \quad \therefore \quad y = \frac{1}{u};$$

(v.sl.60).

1° y i u su >0 za sve x.

2° diagram nema vertikalnih asimptota, jer u nema nula.

3° $y \sim 4 \cdot x^{-4}$ kad $x \to \pm\infty$

4° y je parna funkcija

x	0	1	2	+∞
y	2	4/3	2/9	+0

Zadaci. Skiciraj diagrame sledećih funkcija:

1. $\frac{1}{x^2(x^2-1)}$; 2. $x^{-2}(x-1)^{-2}$; 3. $\frac{1}{x^2-x+1}$;

4. $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$; 5. $(x^2-1)^{-2}$; 6. $x^{-2}(1-x)^{-3}$

7. $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$; 8. $\frac{1}{(1+x)(1+x^3)}$, 9. $\frac{1}{x^3-3x-1}$

4.6. Kosa asimptota

(i) Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \frac{9(4x^2-1)}{32(3x-2)} = \frac{9(2x-1)(2x+1)}{32(3x-2)} =$$

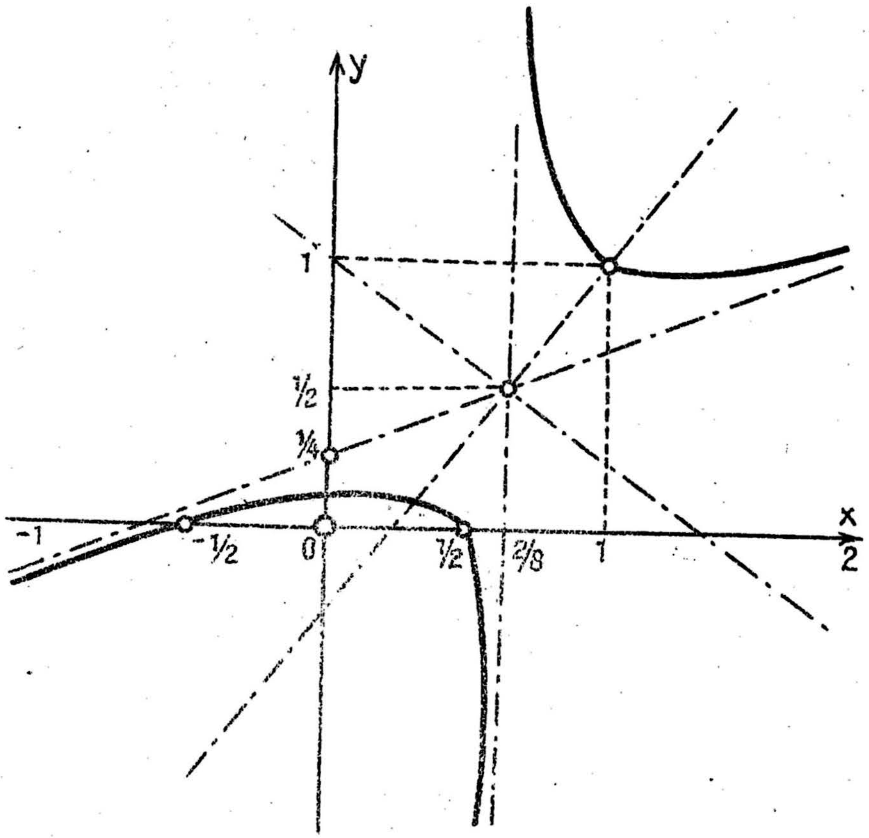
$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32(3x-2)} .$$

Za velike vrednosti x-a je

$$f(x) \sim \frac{3x}{8}, \quad \text{jer}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{36-9x^{-2}}{96-64x^{-1}} \longrightarrow \frac{36}{96} = \frac{3}{8}$$

kad $x \to \pm\infty$.



Sl.61

Razlika $f(x) - \frac{3x}{8}$ teži takodje odredjenoj granici kad $x \to \pm\infty$.

Imamo

$$f(x) - \frac{3x}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32(3x-2)} \to \frac{1}{4} \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty.$$

Prema tome

$$f(x) - \left(\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\right) \to 0 \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty,$$

tj.ordinate diagrama funkcije f(x) se u toliko

manje razlikuje od ordinate prave $y = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}$ u koliko se x više udaljuje u pozitivnom ili negativnom pravcu. Prava $y = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}$ je <u>kosa asimptota</u> diagrama funkcije $f(x)$ i dve njegove grane joj se približavaju kad $x \to \pm\infty$.

Ostali tok diagrama dobivamo iz sledećeg (v.sl.61):

1° $f(x) = 0$ za $x = \pm\frac{1}{2}$, obe nule su prvog reda.

2° $f(x) \to \pm\infty$ kad $x \to \frac{2}{3} \pm 0$, prava $x = \frac{2}{3}$ je vertikalna asimptota.

3° $f(x) \sim \frac{7}{32(3x-2)}$ kad $x \to \frac{2}{3} \pm 0$,

dakle je u blizini tačke $x = \frac{2}{3}$ funkcija

$f(x) > 0$ za $x > \frac{2}{3}$ a $f(x) < 0$ za $x < \frac{2}{3}$.

Diagram je hiperbola sa središtem u tački $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ i asimptotama $x = \frac{2}{3}$ i $8y = 3x+2$.

(ii) Diagram racionalne funkcije $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ima kosu asimptotu ako je stepen brojitelja $u(x)$ za jedinicu veći od stepena imenitelja. Deobom dobijamo tada

$$\frac{u(x)}{v(x)} = ax+b+\frac{r(x)}{v(x)}$$

gde je stepen ostatka $r(x)$ manji od stepena imenitelja $v(x)$ i gde prave

$$y = ax+b$$

pretstavlja asimptotu diagrama.

Zadaci.

Odredi asimptote diagrama sledećih funkcija:

1. $\frac{x^2}{1+x}$; 2. $\frac{4x^2-1}{12x-9}$; 3. $\frac{x^3}{1+2x^2}$;

4. $x+\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 5. $x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$; 6. $x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$

4.7. Diagram racionalnih funkcija

(1) Ako su imenitelj i brojitelj racionalne funkcije sastavljeni iz proizvoda faktora, ili se na takav oblik mogu svesti, njen diagram dobijamo ispitivanjem ponašanja funkcije u blizini nula brojitelja i imenitelja.

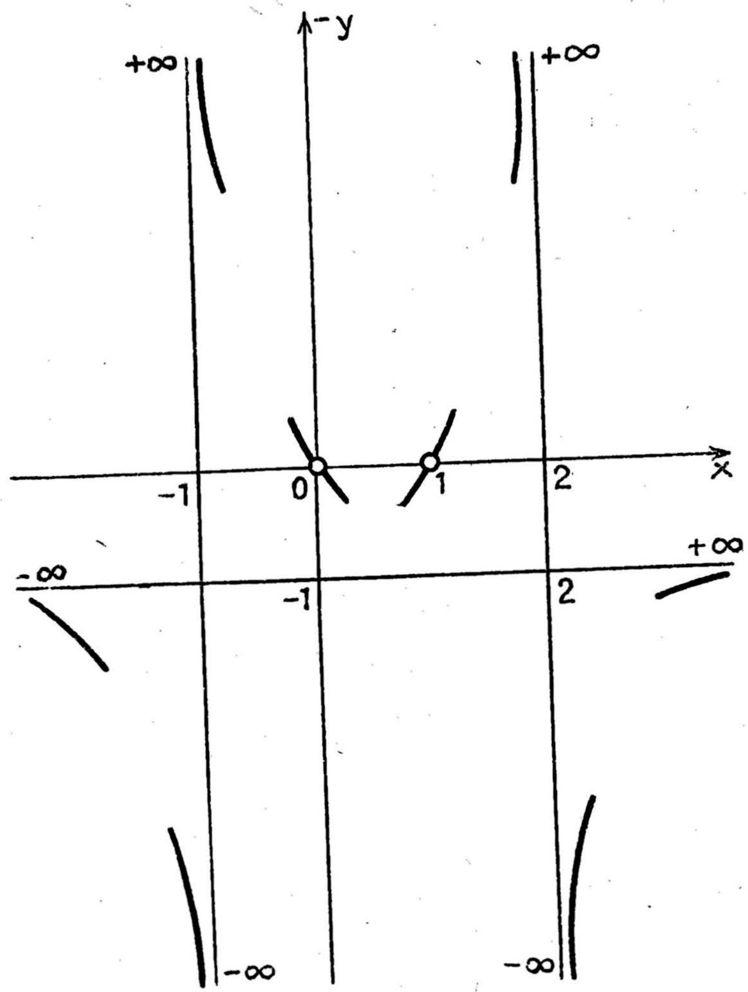
Pr.(1). Skiciraj diagram funkcije

$$F(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)(2-x)} = -1+\frac{2}{(x+1)(2-x)}$$

1^0 $F(x) = 0$ za $x = 0$ i $x = 1$, obe nule su prvog reda;

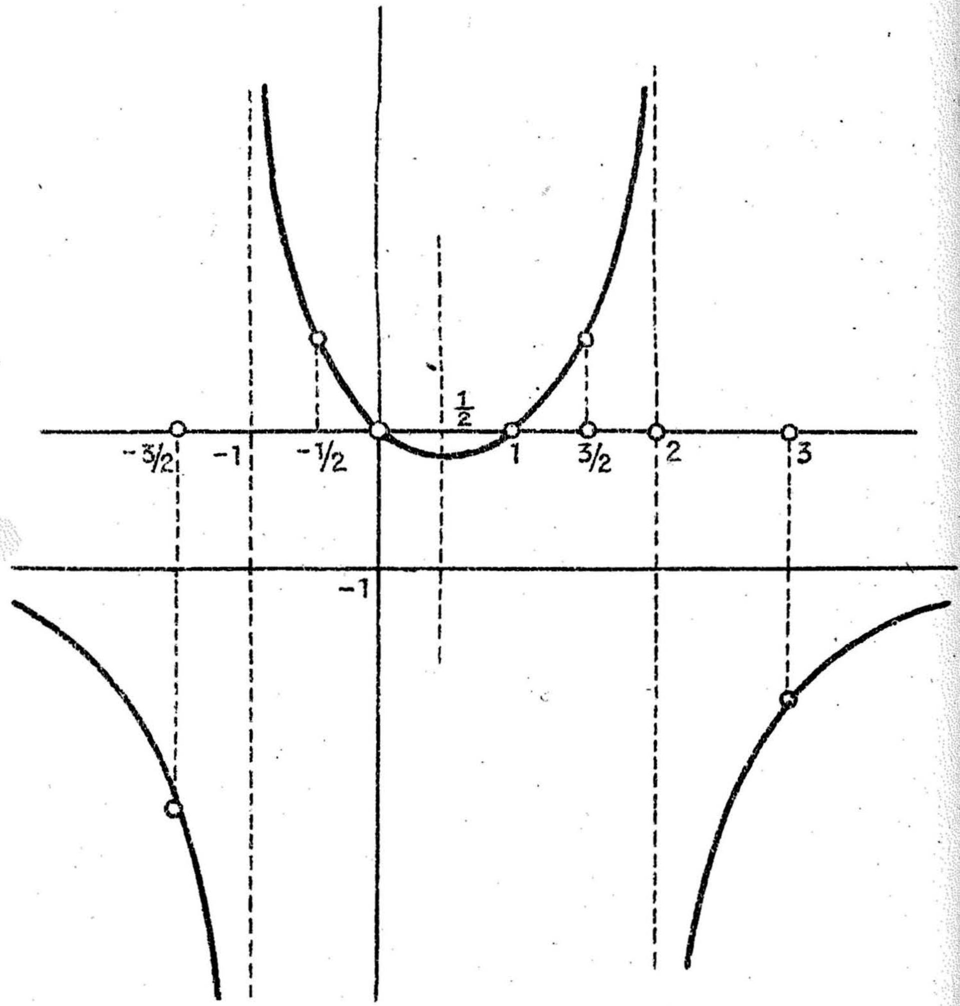
2^0 $F(x) \approx -1 - \frac{2}{x^2}$ kad je x veliko,

$\therefore$ $F(x) \to -1-0$ kad $x \to \pm\infty$;



Sl.62

$$F(x) \sim \begin{cases} \dfrac{2}{3(x+1)} & \text{kad} \quad x \to -1, \\[2ex] \dfrac{2}{3(x-2)} & \text{kad} \quad x \to 2. \end{cases}$$



Sl.63

$$\therefore \quad F(x) \to \begin{cases} \pm\infty & \text{kad} \quad x \to -1 \pm 0 \\[2ex] \mp\infty & \text{kad} \quad x \to 2 \pm 0 \end{cases}$$

Dakle (v.sl.62) diagram polazi ispod horizontalne asimptote $y = -1$, teži $-\infty$ uz vertikalnu asimptotu $x = -1$, vraća se sa suprotne strane (iz $+\infty$), preseca X-osu u tački $x = 0$, ponovo je preseca u tački $x = 1$, teži ka $+\infty$ uz vertikalnu asimptotu $x = 2$, vraća se sa suprotne strane (iz $-\infty$), prilazi horizontalnoj asimptoti ostajući ispod nje.

Spajanjem ovih crta (v.sl.63) dobijamo diagram date funkcije.

Sledeće numeričke vrednosti odredjuju precizniji položaj diagrama.

x	0	1/2	1	3/2	2-0	2+0	3	$+\infty$
y	0	-1/9	0	3/5	$+\infty$	$-\infty$	-2	-1-0

Prava $x = \frac{1}{2}$ je osa simetrije diagrama, jer je $F(x + \frac{1}{2})$ parna funkcija.

Pr.(2). Skiciraj diagram funkcije

$$f(x) = \frac{x^3}{4x^2-1} = \frac{x^3}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{x}{4} + \frac{x}{4(4x^2-1)} =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{16(2x+1)} + \frac{1}{16(2x-1)}$$

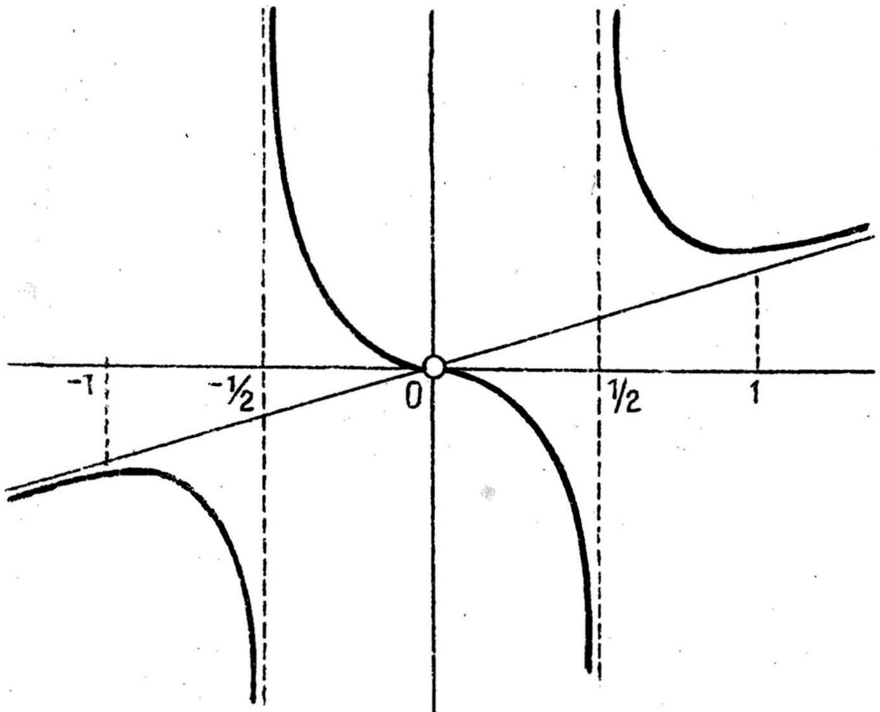
1° $f(0) = 0$, tačka $x = 0$ je nula trećeg reda,

2° $f(x) \approx \frac{x}{4} + \frac{1}{16x}$ za veliko x,

$\therefore$ $f(x)$ je ispod asimptote $y = \frac{x}{4}$, kad $x \to -\infty$, a iznad nje kad $x \to +\infty$;

3°

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{16(2x+1)} & \text{kad} \quad x \to -\frac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{1}{16(2x-1)} & \text{kad} \quad x \to \frac{1}{2} \end{cases}$$



Sl.64

$$f(x) \to \begin{cases} \pm\infty & \text{kad} \quad x \to -\frac{1}{2} \pm 0 \\[2mm] \pm\infty & \text{kad} \quad x \to \frac{1}{2} \pm 0 \end{cases}$$

Nacrtaj slici 62 odgovarajuću sliku, pre slike 64.

y je neparna funkcija.

x	0	1/4	1/2 −0	1/2 +0	3/4	1	$+\infty$
y	0	−1/48	$-\infty$	$+\infty$	27/80	1/3	$+\infty$

(ii) Ako je stepen brojitelja za dve ili više jednačine veći od stepena imenitelja diagram ima krivoliniskih asimptota.

pr.(3). Skiciraj diagram funkcije

$$g(x) = \frac{9x^3(x-2)}{(3x-1)^2} = x^2 - \frac{4}{3}x - 1 - \frac{14x-3}{3(3x-1)^2}$$

1° $g(x) = 0$ za $x = 0$ i $x = 2$,

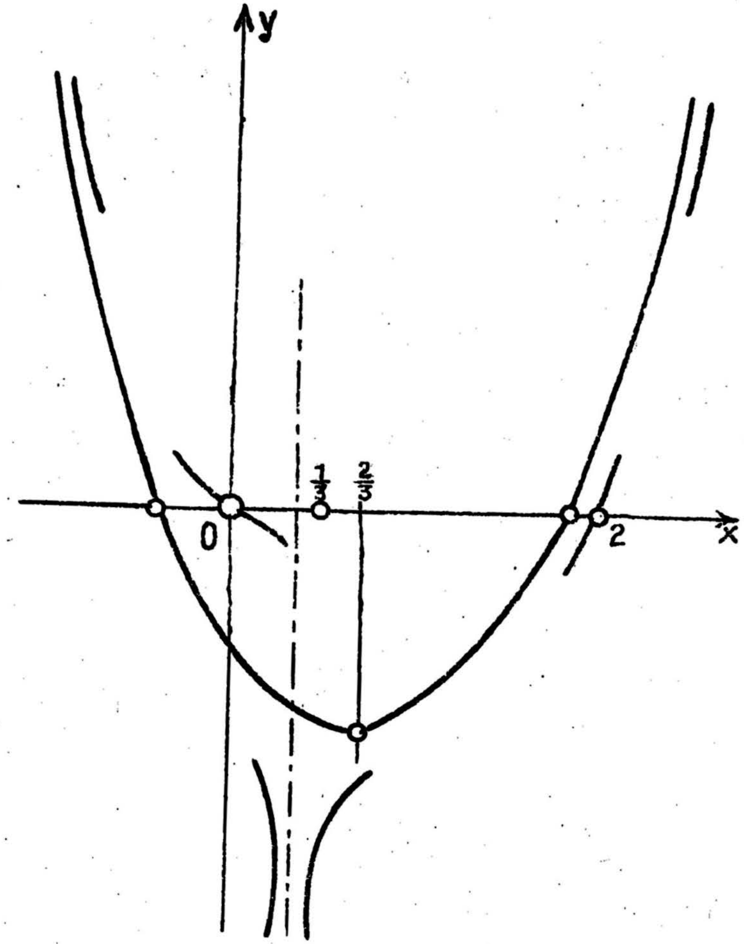
$x = 2$ je nula prvog, a $x = 0$ je nula trećeg reda.

2° $g(x) \approx x^2 - \frac{4}{3}x - 1 - \frac{14}{27x}$ za veliko x

otuda sledi da se diagram date funkcije u toliko više približava paraboli

$$y = x^2 - \frac{4}{3}x - 1 = p(x),$$

u koliko je $|x|$ veće i da se leva grana $(x \to -\infty)$ nalazi iznad, a desna $(x \to +\infty)$ ispod te parabole;

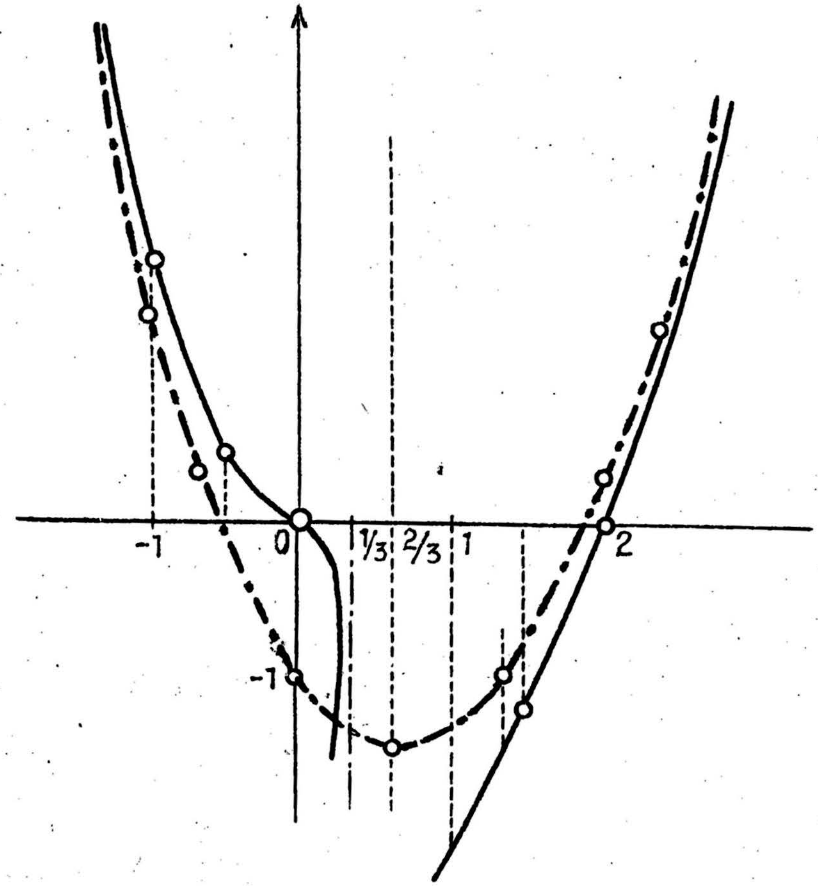


Sl.65

3°

$$g(x) = \frac{5}{9(3x-1)^2}$$

kad $x \to \frac{1}{3}$, $\therefore$ $g(x) \to -\infty$ kad $x \to \frac{1}{3} \pm 0$.



Sl.66

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	0	$1/3 \pm 0$	$2/3$	1	2	$+\infty$
g	$+\infty$	$4/3$	$-1/12$	-1	$-4/3$	$-13/9$	$-4/3$	$1/3$	$+\infty$
y	$+\infty$	$27/16$	$9/20$	0	$-\infty$	$-32/9$	$-9/4$	0	$+\infty$

Ovo je pokazano na sl.65,a cela kriva je data na sl.66.

Napomena. Ako se dve grane neke krive asimptotski približavaju paraboli,tada ovu poslednju nazivamo asimptotskom parabolom.

Zadaci.

Skiciraj diagrame funkcija i njihovih recipročnih vrednosti:

1. $\frac{x^2}{x-1}$; 2. $\frac{x^3}{x-1}$; 3. $\frac{x^3}{x^2-1}$; 4. $\frac{x^4}{x^2-1}$

5. $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2$; 6. $\frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$; 7. $\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3}$;

8. $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$;

Odredi grafički približan položaj nula polinoma

$$u(x) = x^3-3x-1 \quad i \quad v(x) = x^3-3x+1$$

zatim konstruiši diagram funkcije:

9. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$; 10. $g(x) = \frac{u^2(x)}{v(x)}$

11. Nacrtaj diagram funkcije $\frac{x^3(x-2)}{(x-a)^2}$ za razne vrednosti a

(Za slučaj $a = \frac{1}{3}$ vidi pr.4.7.(3)).

4.8. Diagram racionalnih funkcija. (nastavak)

Ako se u brojitelju i imenitelju racionalne funkcije javljaju pored linearnih faktora i kvadratni faktori koji se ne mogu rastaviti na linearne, ili se javljaju samo takvi faktori, tada njen diagram može imati talasast oblik i između nula brojitelja i imenitelja, tako da za odredjivanje

njegovog toka moramo pribeći drugim postupcima.

Pr.(1). Nacrtaj diagram funkcije

$$g(x) = \frac{(x-5)(2x^2-2x+1)}{2x} =$$

$$= x^2-6x+\frac{11}{2}-\frac{5}{2x}$$

1° $g(x) = 0$ samo za $x = 5$, jer je

$$2x^2-2x+1 > 0 \quad \text{za sve } x \text{ ;}$$

2° Iz drugog izraza za funkciju $g(x)$ vidimo da je

$$p(x) = x^2-6x+\frac{11}{2}$$

asimptotska parabola njenog diagrama i da je

$$g(x) \begin{cases} \text{iznad} & p(x) \quad \text{kad} \quad x \to -\infty, \\ \text{ispod} & \quad \phantom{\text{kad}} \quad x \to +\infty; \end{cases}$$

3°

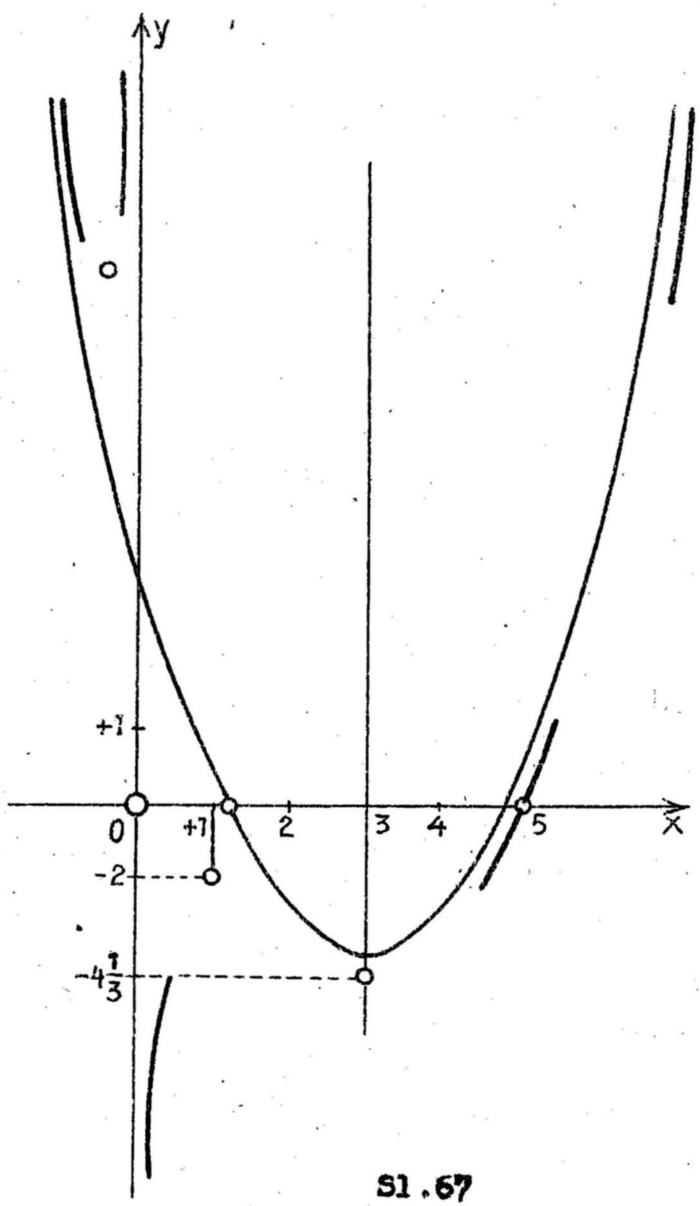
$$g(x) \sim -\frac{5}{2x} \quad \text{kad} \quad x \to \pm 0$$

Y-osa je vertikalna asimptota.

Ako gornje rezultate naznačimo u sl.67 mogli bi smo ove crte jednostavno spojiti kad u izrazu funkcije $g(x)$ ne bi bio faktor

$$2x^2-2x+1$$

koji nema nule;

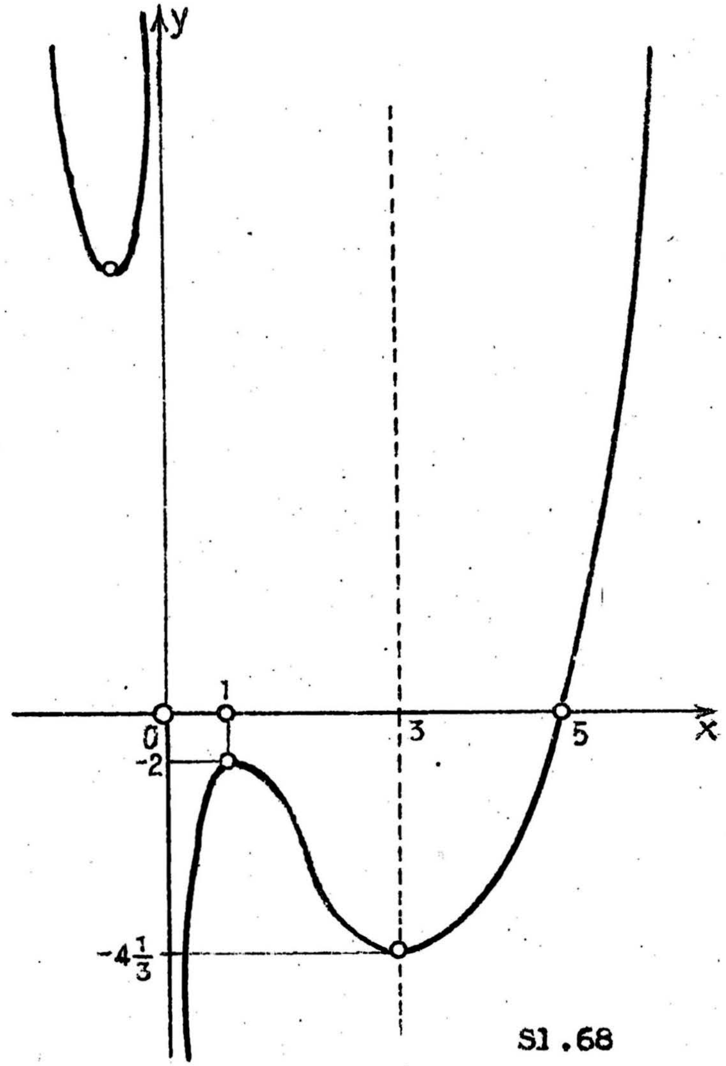


Sl.67

kako je

$$g(+1) = -2 \quad a \quad g(3) = -4\frac{1}{3} < g(1),$$

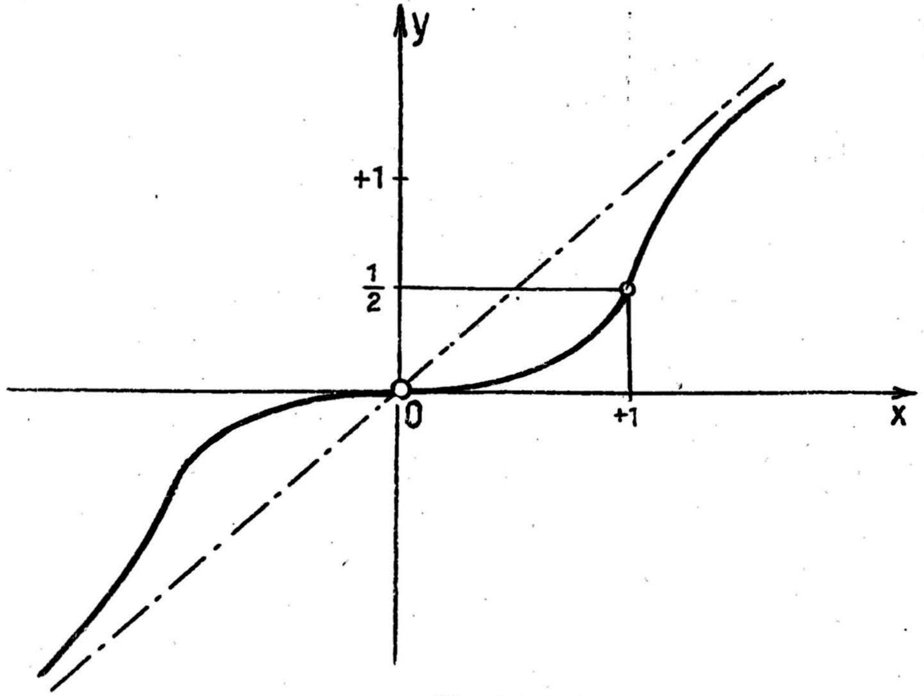
vidimo da se u razmaku (0,5) mora pojaviti jedan talas tako da diagram date funkcije ima oblik sl.68.



Sl.68

x	$-\infty$	$-1/2$	-0	$+0$	1	3	5	$+\infty$
y	$+\infty$	$13\frac{3}{4}$	$+\infty$	$-\infty$	-2	$-4\frac{1}{3}$	0	$+\infty$

Na sl.67 i 68 je jedinica u pravcu Y-ose uzeta u pola manja od jedinice u pravcu X-ose.



Sl.69

Pr.(2). Skiciraj diagram funkcije

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

1° $f(x) = 0$ za $x = 0$, ova nula je trećeg reda;

2° $f(x) \approx x - \frac{1}{x}$ za veliko x, prava $y = x$ je asimptota i $f(x)$ se nalazi iznad nje kad $x \to -\infty$, a ispod nje kad $x \to +\infty$;

3° vertikalnih asimptota nema, jer je $x^2+1 > 0$ za svako x.

4° funkcija je neparna ;

5° za $x > 0$, $f(x)$ monotono raste, jer se

$$f(x+h) - f(x) > 0$$

svodi na

$$x^2(x^2+3)+x(2x^2+3)h+(x^2+1)h^2 > 0$$

a koja je nejednačina zadovoljena za svako $x > 0$ i $h > 0$; znači da se u diagramu ne pojavljuju talasi.(sl.69).

Zadaci.

Skiciraj diagrame sledećih funkcija:

1. $\frac{(x-4)(3x^2-2x+1)}{3x}$; 2. $\frac{x^2}{x^2+1}$; 3. $\frac{x^4}{x^2+1}$;

4. $\frac{x^2+1}{x^2+2}$; 5. $\frac{x^2+1}{x^2-4}$; 6. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 7. $\frac{x}{2}+1+\frac{2x}{x^2-1}$.

4.9. V e ž b e.

1. Rastavi sledeće racionalne funkcije na zbir od dve racionalne funkcije, čiji su imenitelji kvadratni polinomi:

1° $\frac{x^n}{x^4+4}$; 2° $\frac{x^n}{x^4+1}$; 3° $\frac{x^n}{x^4+x^2+1}$;

4° $\frac{x^n}{x^4-x^2+1}$, $n = 0,1,2,3$

2. Pokaži da se racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x^2+ax+b)^n}$$

može napisati u obliku

$$f(x) = q(x) + \frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b)^n}$$

gde su $p(x)$ i $q(x)$ polinomi.

Koeficienti A_1 i B_1 i polinom $q(x)$ mogu se odrediti ako se stavi $z = x^2+ax+b$ i u polinomu $p(x)$ zamenjuje x^2 sa $z-ax-b$ sve dogod se pojavljuje x^2 ,tj.dok ne preostane samo x na prvom stepenu.(Tako dobiveni izraz dobijamo i kao ostatak deobe polinoma $p(x)$ sa $x^2+ax+b-z$). Traženi rezultat se dobija ako se tako dobiveni izraz uredi po stepenima od z i podeli se z^n

Pr. 1° $\frac{x^7}{(x^2+x+1)^3}$; Pr.2° $\frac{x^6+8x-8}{(x^2-2x+2)^2}$;

zašto se u ovom poslednjem slučaju neće pojaviti u rezultatu član

$$\frac{Ax+B}{(x^2-2x+2)^2} \quad ?$$

3. Može li racionalna funkcija imati: 1° dve asimptote paralelne X-osi ; 2° dve kose asimptote ?

4. Neka je $f(x)$ racionalna funkcija i $f(x) \sim ax$ kad $x \to \infty$; njen diagram uvek ima jednu kosu asimptotu.

5. Neka je $f(x)$ racionalna funkcija i $f(x) \sim ax^2$; njen diagram uvek ima paraboličnu asimptotu.

6. Neka je $f(x)$ racionalna funkcija i $f(x) \sim ax^3$; tada postoji kubna parabola kojoj će se dve grane njenog diagrama asimptotski približavati.

7. Nacrtaj diagram funkcije koje su date u prvoj vezbi,kao i funkcije

$$\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+b'x+c'}$$

8. Pokaži da se nule polinoma

$$x^3+ax^2+bx+c$$

mogu dobiti presekom krivih

$$y = x^2 \quad \text{i} \quad y = -\frac{bx+c}{x+a}$$

9. Pokaži da se nule polinoma

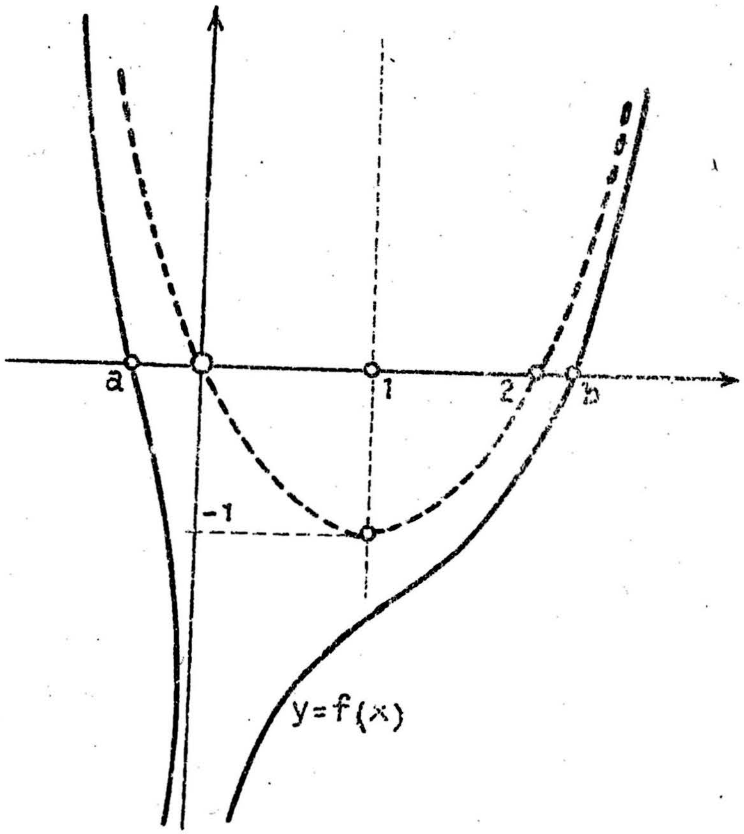
$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

dobivaju presekom krivih

$$y = x^3 \quad \text{i} \quad y = -\frac{bx^2+cx+d}{z+a}$$

ili krivih

$$y = x^2 \quad \text{i} \quad y = -\frac{cx+d}{x^2+ax+b}$$



Sl.70

10. Odredi što jednostavniju funkciju čiji će diagram imati otprilike oblik krive pretstavljene slikom 70. Crtasto izvučena kriva je asimptotska parabola, a Y-osa asimptota.

11. Ako u gornjem zadatku uzmemo za traženu funkciju, racionalnu funkciju čiji je brojitelj polinom četvrtog, a imenitelj polinom drugog stepena, kakva veza mora postojati izmedju nula a i b te funkcije ?

GLAVA V.

ALGEBARSKA FUNKCIJA

5.1. Definicije.

(i) Algebarska funkcija nastaje ako se pored racionalnih operacija (+,-,x,:) pojavljuje još i korenovanje.

Pr.(1). $y = \sqrt{x}$; (2) $y = \dfrac{2}{1+\sqrt{x(x-1)}}$;

(3) $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$; (4) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$.

U ovim slučajevima kažemo da je algebarska funkcija data u eksplicitnom obliku.

(ii) Podesnim stepenovanjem koren se može uvek ukloniti.

Pr.(1).

$$y = \sqrt{x}.$$

Kvadriranjem dobijamo

$$y^2 = x, \quad \therefore \quad y^2 - x = 0.$$

Pr.(2).

$$y = \frac{2}{1+\sqrt{x(x-1)}} ;$$

$$\therefore \quad \frac{2}{y} = 1 + \sqrt{x(x-1)} ,$$

$$\therefore \quad \frac{2-y}{y} = \sqrt{x(x-1)} ,$$

$$\therefore \quad \frac{(2-y)^2}{y^2} = x(x-1),$$

$$\therefore \quad (2-y)^2 = y^2(x^2-x),$$

$$\therefore \quad (x^2-x-1)y^2+4y-4 = 0.$$

Pr.(3).

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} .$$

Kvadriranjem dobijamo

$$y^2 = 1+2\sqrt{x(1-x)}.$$

$$\therefore \quad y^2-1 = 2\sqrt{x(1-x)} ,$$

$$\therefore \quad (y^2-1)^2 = 4x(1-x),$$

$$\therefore \quad y^4-2y^2+1+4x-4x^2 = 0 .$$

Pr.(4).

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} ;$$

$$y - \sqrt{x} = \sqrt[3]{x^2} .$$

Dizanjem na treći stepen dobivamo

$$(y-\sqrt{x})^3 = y^3-3y^2\sqrt{x}+3xy-x\sqrt{x} = x^2$$

$$\therefore \quad y^3-3y^2\sqrt{x}+3xy-x\sqrt{x} = x^2$$

$\therefore\quad y^3+3xy-x^2 = (3y^2+x)\sqrt{x}\,,$

$\therefore\quad (y^3+3xy-x^2)^2 = (3y^2+x)^2 x\,,$

$\therefore\quad y^6-3xy^4-2x^2y^3-6x^3y+x^4-x^3 = 0$

Za algebarsku funkciju izraženu u ovako transformisanom obliku kažemo da je data u implicitnom obliku.

(iii) Algebarska funkcija može biti data u implicitnom obliku, a da se pri tome ne može eksplicitno izraziti.

Pr.(5). $y^5-5y-4x = 0$;

Pr.(6). $y^6+2xy^3+x^2y-x^2 = 0.$

U opšte pod algebarskom funkcijom podrazumevamo svaku onu funkciju $y(x)$ gde su x i y dati vezom oblika

$$P(x,y) = 0.$$

a gde je P polinom po x i po y.

Pr.(7). $(x-1)y^4+(x^2+1)y^3+(x^2+2x-1)y^2+$

$+(x^4+x^2+x)y+(2x^3+x+3) = 0.$

Zadaci.

Izrazi implicitno sledeće algebarske funkcije:

1. $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{2x+2}$; $y^4-2(x+1)^2y^2+(x+1)^2(x-3)^3=0$

2. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$; $(x-1)^3y^6-2x(3x+1)y^3-x^2 = 0$

3. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{x}}$; $y^4-4xy^2-4x^2y-x^3 = 0$

4. $y = \sqrt[3]{x}$; $\sqrt[3]{x^2}$; $y^3-3xy-(x-x^3) = 0$

Izrazi eksplicitno sledeće algebarske funkcije:

5. $y^2-2xy+(x-1)^2 = 0$; $y = x+\sqrt{2x-1}$.

6. $(x+1)y^2-2xy+(1-x) = 0$; $y = \dfrac{x+\sqrt{2x^2-1}}{x+1}$

7. $y^4-4y^2+4x^2 = 0$; $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

8. Za koje će vrednosti x-a biti

$$\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{5-8x^2} > \sqrt{4x^2+7}\quad ?$$

5.2. Osobine algebarske funkcije

(i) Polinom je definisan za sve x ; racionalna funkcija za sve x izuzev za nulu imenitelja; kod algebarske funkcije mogu postojati i celi razmaci u kojima ona nije definisana.

Pr.(1). Funkcija

$$y = \sqrt{x-1}$$

je definisana samo u razmaku $(1,\infty)$.

<u>Pr.(2)</u>. Funkcija

$$y = \sqrt[3]{1+2x} \quad \text{ili} \quad \sqrt{1+x^2}$$

su definisane u celom razmaku $(-\infty, +\infty)$.

(ii) Polinom i racionalna funkcija uzimaju za svaku vrednost x-a samo jednu vrednost; algebarska funkcija može uzeti i više vrednosti. U prvom slučaju kažemo da je funkcija <u>jednoznačna</u> (uniformna), a u drugom da je <u>višeznačna</u> (multiformna).

<u>Pr.(3)</u>. Funkcija

$$y = \sqrt{x-1}$$

uzima za sve x razmaka $(1, \infty)$ dve vrednosti i to $+\sqrt{\ }$ i $-\sqrt{\ }$.

<u>Pr.(4)</u>. Funkcija

$$y = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2-1}$$

uzima za sve x razmaka $(-2,-1)$ i $(1,2)$ četiri vrednosti i to:

$$+\sqrt{\ }+\sqrt{\ },\ +\sqrt{\ }-\sqrt{\ },\ -\sqrt{\ }+\sqrt{\ },\ -\sqrt{\ }-\sqrt{\ }.$$

<u>Pr.(5)</u>. Funkcija

$$\sqrt[3]{1+2x}$$

uzima za sve x razmaka $(-\infty, +\infty)$ samo jednu vrednost.

<u>Pr.(6)</u>. Funkcija

$$y = x + \sqrt{5+2\sqrt{2+x}}$$

uzima četiri vrednosti za sve x razmaka $(-2, \frac{17}{4})$

a dve vrednosti za sve x razmaka $(\frac{17}{4}, \infty)$, jer je za $x > \frac{17}{4}$

$$5-2\sqrt{2+x} < 0.$$

Na primer, za $x = 2$ imamo četiri vrednosti i to:

$$2 \pm \sqrt{5 \pm 2\sqrt{4}}, \text{ tj. } -1, +1, +3, \text{i } +5;$$

a za $x = 7$ imamo samo dve vrednosti i to:

$$7 \pm \sqrt{5+2\sqrt{9}} = 7 \pm \sqrt{11}.$$

<u>Pr.(7)</u>. Funkciju $y(x)$ definisanu jednačinom

$$y^5-5y-4x = 0$$

ne možemo eksplicitno izraziti. Medjutim je njena inversna funkcija

$$\frac{x^5-5x}{4} = \frac{x(x^4-5)}{4}$$

jer iz

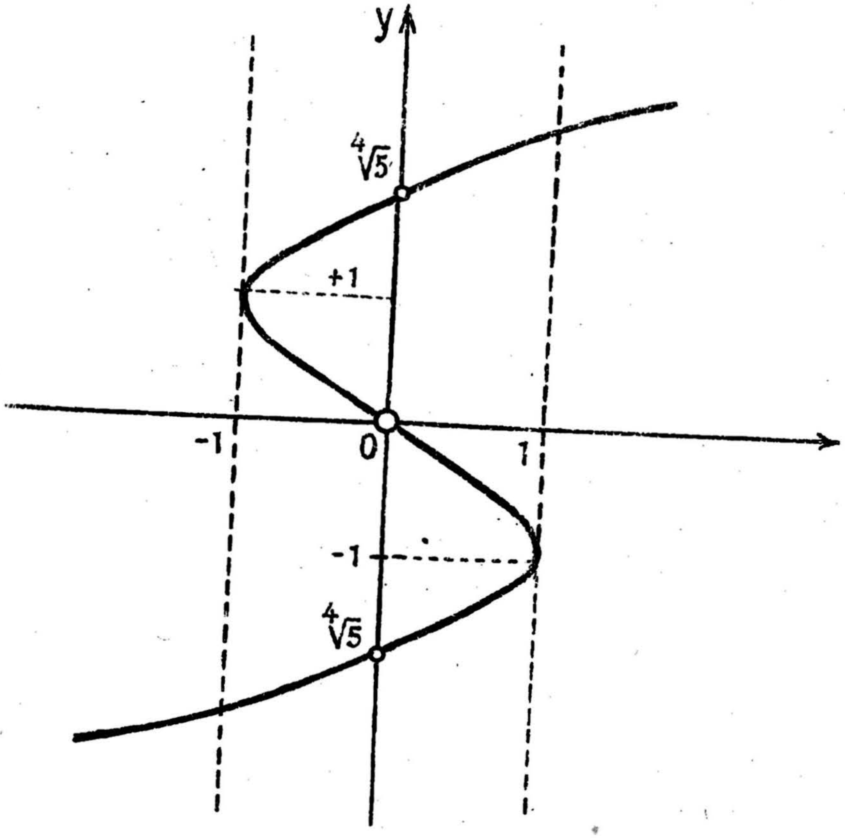
$$y^5-5y-4x = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{y^5-5y}{4}.$$

Kako diagram inversne funkcije možemo lako konstruisati, to iz njega dobijamo neposredno i diagram same funkcije $y(x)$, koji je dat slikom 71. Iz ovog diagrama vidimo da posmatrana funkcija uzima jednu vrednost u razmacima $(-\infty, -1)$ i $(1, \infty)$, a tri vrednosti u razmaku $(-1, +1)$.

<u>Zadaci</u>.

U kojim su razmacima definisane i koliko imaju vrednosti sledeće algebarske funkcije:

<u>1.</u> $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$; <u>2.</u> $y = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$;



Sl.71

3. $y = \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$; 4. $y = \sqrt{x(x^2-1)}$;

5. $y = \sqrt{12x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; 6. $y^3+3y-2x = 0$;

7. $y^3-3y-2x = 0$?

Pokaži da je funkcija 6 data izrazom

8. $$y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2+1}}$$

a funkcija 7. izrazom

9. $$y(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2-1}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2-1}}.$$

10. Ovaj poslednji izraz ne definiše funkciju $y(x)$ kad je $|x| < 1$. Ako medjutim u 7. stavimo

$$x = \cos\varphi \quad \text{tada je} \quad y(x) = 2\cos\frac{\varphi}{3}$$

5.3. Osobine (nastavak)

(i) Algebarska funkcija je u razmacima u kojima je ona definisana neprekidna.

Pr.(1). Funkcija

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

je neprekidna za svako $x > 0$.

Imamo, za $h > 0$,

$$0 < f(x+h)-f(x) = \sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x} =$$
$$= \sqrt[n]{x}\left\{\sqrt[n]{1+\frac{h}{x}} - 1\right\}.$$

Kako je (v.vežbu 1.14.30)

$$\sqrt[n]{1+t} - 1 < \frac{1}{n}t,$$

to je za $t = \frac{h}{x}$,

$$0 < f(x+h)-f(x) < \sqrt[n]{x}\,\frac{h}{nx} \to 0 \quad \text{kad} \quad h \to 0,$$

$.\raisebox{.5ex}{.}.\quad f(x+h)-f(x)\longrightarrow 0$ kad $h\longrightarrow +0$

Na isti se način pokazuje da

$$f(x+h)-f(x)\longrightarrow 0 \text{ i kad } h\longrightarrow -0.$$

Prema tome su stepeni i sve racionalne kombinacije od x kao i svi algebarski izrazi, neprekidne funkcije.

(ii) U koliko je jedna algebarska funkcija definisana za velike vrednosti x-a ona se asimptotski ponaša kao izraz oblika

$$A\sqrt[q]{x^p} \quad \text{tj. kao} \quad Ax^{\lambda}, \quad \lambda = p/q,$$

gde je λ pozitivan ili negativan racionalan broj.

Ako je algebarska funkcija data u obliku zbira od dva ili više korena, ona se za velike vrednosti x-a ponaša kao onaj član, čiji je eksponent $\frac{p}{q}$ najveći, ili ako ih ima više jednakih, kao zbir tih članova.

Pr. (2). Neka je algebarska funkcija $f(x)$ data u obliku

$$f(x) = u(x)+v(x),$$

gde je

$$u(x) = \sqrt[4]{x^3+5x+1} \quad i \quad v(x) = \sqrt[3]{8x^2+2x+3}\ ;$$

tada je

$$f(x)\sim\sqrt[4]{x^3}, \quad x\longrightarrow\infty.$$

Kako je

$$u(x)\sim\sqrt[4]{x^3} \quad i \quad v(x)\sim 2\sqrt[3]{x^2}, \quad x\longrightarrow\infty,$$

i kako

$$\frac{v(x)}{\sqrt[4]{x^3}}\longrightarrow 0,\ x\longrightarrow\infty,\ \therefore\ f(x)\sim u(x)\sim\sqrt[4]{x^3}$$

Pr. (3). Neka je

$$f(x) = u(x)+v(x)+w(x)$$

gde je

$$u(x) = \sqrt[3]{2x^4+5}, \quad v(x) = \sqrt[6]{4x^8-2x^4+7} \quad i \quad w(x)=9x+12;$$

tada je

$$f(x)\sim 2\sqrt[3]{2x^4}, \quad x\longrightarrow\infty.$$

Kako je

$$u(x)\sim\sqrt[3]{2(x)^4}\sim\sqrt[6]{4x^8} = \sqrt[3]{2x^4}$$

$$w(x)\sim 9x, \quad x\longrightarrow\infty,$$

i

$$u(x)\sim v(x)\sim\sqrt[3]{2x^4},$$

a

$$\frac{w(x)}{\sqrt[3]{2x^4}}\longrightarrow 0 \text{ kad } x\longrightarrow\infty$$

$$\therefore\quad f(x)\sim 2u(x)\sim 2\sqrt[3]{2x^4}, \quad x\longrightarrow\infty$$

Ako je algebarska funkcija data u obliku razlike dva korena, koji se asimptotski ponašaju na isti način, tada se ona za velike vrednosti x-a javlja u neodredjenom obliku „$\infty-\infty$".

U tom slučaju postupamo na sledeći način:

Pr.(4). Neka je

$$f(x) = u(x)-v(x),$$

gde je

$$u(x) = \sqrt{x^2+3x+\sqrt{x}} \quad \text{i} \quad v(x) = \sqrt{x^2+1}\ ;$$

tada je

$$f(x) \to \frac{3}{2}\sqrt{x}\,, \quad x \to \infty .$$

Kako je

$$u(x) \sim v(x) \sim x\,, \quad x \to \infty,$$

to ćemo ovako postupiti:

$$f(x) = u-v = \frac{u^2-v^2}{u+v} = \frac{3x\ \sqrt{x-1}}{u+v}\,,$$

a kako je

$$u(x)+v(x) \sim 2x\,, \quad x \to \infty,$$

$$\therefore\ f(x) \sim \frac{3x\sqrt{x}}{2x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,, \quad x \to \infty .$$

Pr.(5). Neka je

$$f(x) = u(x)-v(x),$$

gde je

$$u(x) = \sqrt{4x^2+3x+2} \quad \text{i} \quad v(x) = 2\sqrt{x^2+1}\,,$$

tada

$$f(x) \to \frac{3}{4}\,, \quad x \to \infty .$$

Kako je

$$u(x) \sim v(x) \sim 2\sqrt{x^2} = 2x, \quad x \to \infty,$$

to je

$$f(x) = u-v = \frac{u^2-v^2}{u+v} = \frac{3x+1}{u+v}$$

$$\therefore\ f(x) \sim \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}\,, \quad x \to \infty .$$

Pr.(6). Neka je

$$f(x) = u(x)-v(x)$$

sa

$$u(x) = \sqrt[3]{x^2+x} \quad \text{i} \quad v(x) = \sqrt[3]{x^2+1}\ ;$$

tada je

$$f(x) \quad \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad x \to \infty .$$

Kako je

$$u(x) \sim v(x) \sim \sqrt[3]{x^2}\,, \quad x \to \infty,$$

stavimo

$$f(x) \quad u-v = \frac{u^3-v^3}{u^2+uv+v^2} = \frac{x-1}{u^2+uv+v^2}\ ;$$

tada iz

$$u^2 \sim uv \sim v^2 \quad (\sqrt[3]{x^2})^2\, x\sqrt[3]{x} \quad x\,, \quad x \to \infty,$$

$$\therefore \quad f(x) \quad \frac{x}{3x\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad x \to \infty .$$

(iii) U blizini jedne nule $x = a$ algebarska funkcija se ponaša kao

$$A(x-a)^{\mu}\,,$$

gde je $\mu = \frac{p}{q} > 0$.

Pr.(7). Funkcija

$$f(x) = \sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}$$

se u blizini nule $x = 0$ ponaša kao

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\, x^{3/2}\ , \text{ kad } x \to 0$$

Imamo

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+x^2}} =$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{1+x})} = \frac{x^{3/2}}{1+\sqrt{1+x}} \sim \frac{1}{2}\, x^{3/2} \text{ kad } x \to 0$$

Pr.(8). Pokaži da je $x = 1$ nula 3-deg reda funkcije

$$g(x) = \sqrt[3]{1-3x+3x^2} - x.$$

Zaista je

$$g(1) = \sqrt[3]{1-3+3} - 1 = 0$$

tj. $x = 1$ je nula funkcije $g(x)$.

Stavimo kratkoće radi

$$u = \sqrt[3]{1-3x+3x^2}\ , \text{ tj. } u^3 = 1-3x+3x^2 .$$

Tada je

$$g(x) = u-x = \frac{(u-x)(x^2+ux+u^2)}{x^2+ux+u^2} = \frac{u^3-x^3}{x^2+ux+u^2} =$$

$$= \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^2+ux+u^2} = \frac{(1-x)^3}{x^2+ux+u^2} \sim$$

$$\sim \frac{1}{3}(1-x)^3 \text{ kad } x \to 1.$$

jer

$$u(x) \to 1 \quad \text{kad} \quad x \to 1.$$

(iv) Ako za izvesnu vrednost $x = a$ algebarska funkcija teži beskonačnosti ona se ponaša kao

$$A(x-a)^{-\nu}\ , \text{gde je } \nu = \frac{p}{q} > 0$$

Pr.(9). Kojom brzinom teži beskonačnosti funkcija

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{1-x^2}}{1-\sqrt[4]{x^3}} \quad \text{kad} \quad x \to 1\ ?$$

Imamo

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{1-x^2}\,(1+\sqrt[4]{x^3})}{(1-\sqrt[4]{x^3})(1+\sqrt[4]{x^3})} = \frac{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)}\,(1+\sqrt[4]{x^3})}{1-\sqrt{x^3}} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{1-x}\,\sqrt[4]{1+x}\,(1+\sqrt[4]{x^3})(1+\sqrt{x^3})}{(1-\sqrt{x^3})(1+\sqrt{x^3})} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{1-x}}{1-x^3}\ \sqrt[4]{1+x}\,(1+\sqrt[4]{x^3})(1+\sqrt{x^3}) =$$

$$= \frac{(1-x)^{1/4}}{1-x} \cdot \frac{\sqrt[4]{1+x}\,(1+\sqrt[4]{x^2})(1+\sqrt{x^3})}{1+x+x^2}$$

$$\therefore\ f(x) \sim (1-x)^{-3/4} \cdot \frac{\sqrt[4]{2}\cdot 2\cdot 2}{3}$$

$$\therefore\ f(x) \sim \frac{4}{3}\sqrt[4]{2}\ \frac{1}{(1-x)^{3/4}} \text{ kad } x \to 1.$$

<u>Zadaci</u>. Kako se ponašaju sledeće algebarske funkcije za velike vrednosti x-a ?

<u>1.</u> $\dfrac{(x-3)\sqrt[3]{x^5+4}}{(x^2-6x+2)\sqrt{x^3-1}}$; <u>2.</u> $\sqrt{\dfrac{x-1}{1+x\sqrt{x}}}\;\sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}}$

<u>3.</u> $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt[4]{x}$, (stavi $\sqrt{x}=t$);

<u>4.</u> $\sqrt[3]{x^6+x^4}-\sqrt{x^4+1}$,(najpre pomnoži i podeli sa $\sqrt[3]{\;\;}+\sqrt{\;\;}$);

<u>5.</u> $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$,(stavi $x=t^6$,dodaj i oduzmi t i posmatraj zasebno izraze

$$\sqrt{1+t^2}-t \quad \text{i} \quad \sqrt[3]{1+t^3}-t);$$

<u>6.</u> $\left(\sqrt[3]{x^2}+x\right)^2-\sqrt[3]{x^4+1}$;

<u>7.</u> $\sqrt[3]{x+6\sqrt[3]{x^2}}-\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2$?

Kako se ponašaju sledeće funkcije kad $x\to 0$?

<u>8.</u> $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[4]{x^3}}$; <u>9.</u> $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{x^4}}$; <u>10.</u> $1+x-\sqrt[3]{1+x}$;

<u>11.</u> $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{x}}{2+x\sqrt{x}}}-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}}$; <u>12.</u> $\dfrac{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{x}}-\sqrt{1-\sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}}$

Kako se ponašaju sledeće funkcije kad $x\to 1$;

<u>13.</u> $\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$; <u>14.</u> $\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^3}$;

<u>15.</u> $\dfrac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{1-\sqrt[3]{x}}$; <u>16.</u> $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-\sqrt{x}}}}{\sqrt{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}}$

<u>5.4. Dijagrami funkcija $(x-a)^\lambda$</u>

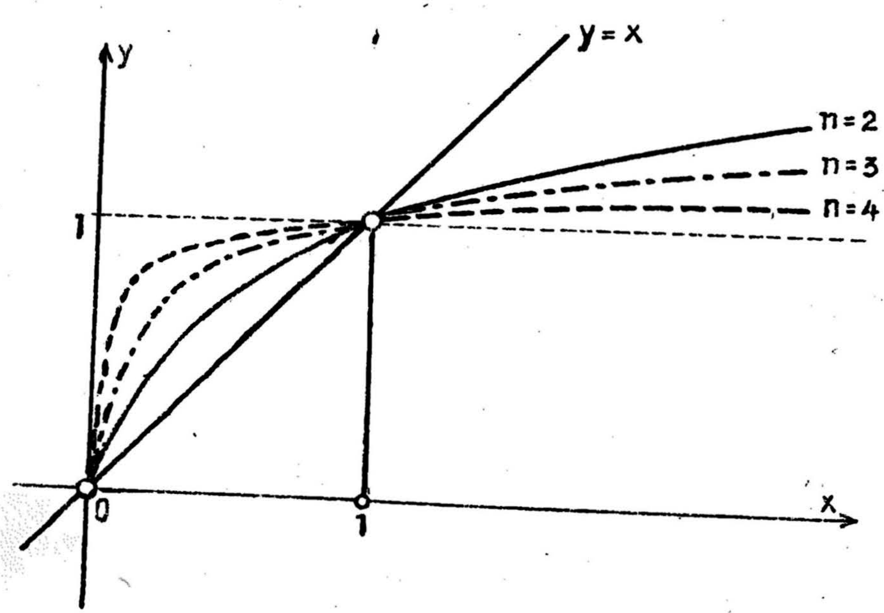
(1) Položaj diagrama algebarskih funkcija prema X-osi ili za velike vrednosti <u>x</u>-a dobijamo ispitivanjem funkcije oblika $(x-a)^\lambda$,gde je λ neki racionalan broj.

<u>Pr.(1)</u>. Ispitaj medjusobni položaj diagrama funkcija

$$\sqrt[n]{x} \quad \text{za} \quad n=2,3.... \quad \text{i} \quad x>0.$$

Kako je $\sqrt[n]{x}$ inversna funkcija x^n , to diagrame funkcija $\sqrt[n]{x}$, $n=2,3,......$dobijamo (v.t.1.12) kao simetrične slike diagrama funkcija

x^n, $n = 2,3,\ldots\ldots$, u odnosu na pravu $y = x$; na osnovu slike 46 t.3.5. ovi diagrami imaju oblik sl.72.



Sl.72

Prema tome je

$$\sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} \quad \ldots\ldots \text{ za } \quad 0 < x < 1,$$

$$\sqrt{x} > \sqrt[3]{x} \quad \sqrt[4]{x} \quad \ldots\ldots \text{ za } \quad x > 1.$$

$\sqrt[n]{x}$ u toliko sporije teži beskonačnosti u koliko je n veće.

Diagram funkcije

$$\sqrt[n]{x-a}\;, \quad n = 2,3,\ldots\ldots\ldots$$

za $x \geq a$ dobijamo ako krive slike 72 translatorno pomerimo u pravcu X-ose za dužinu a.

Sve ove krive u tački $x = a$ seku X-osu pod pravim uglom.

(ii) Kakav je medjusobni položaj diagrama funkcija $(x-a)^{\lambda}$ i $(x-a)^{\lambda'}$ gde su λ i λ' dva medjusobno različita racionalna broja ?

Pr.(2). Nacrtaj diagrame funkcije

$$\sqrt[3]{x^n}$$

za $n = 1,2,3,\ldots\ldots$ i $x \geq 0$.

Kako je

$$\sqrt[3]{x^n} = x^{\frac{n}{3}} = (x^{1/3})^n\,,$$

to je

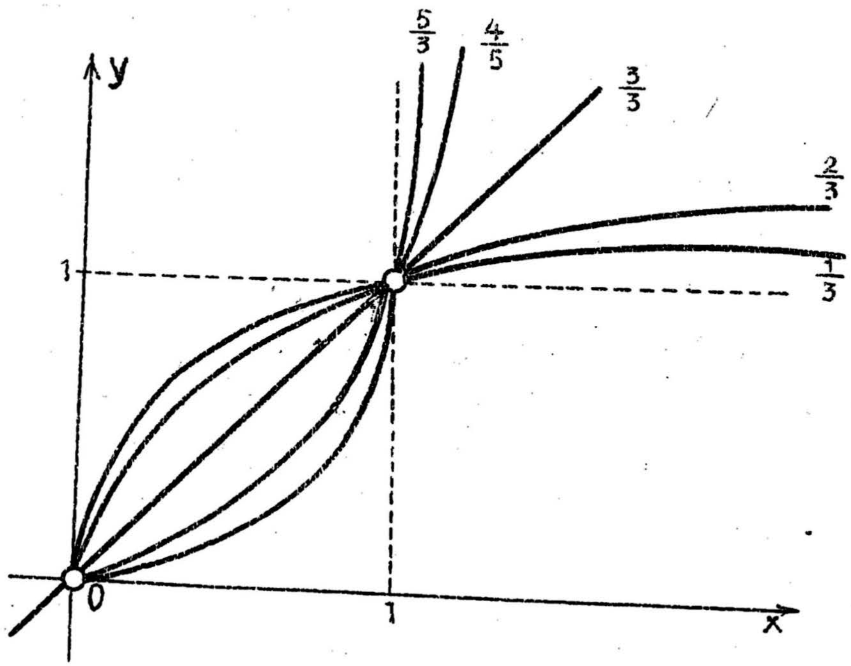
$$\sqrt[3]{x} > \sqrt[3]{x^2} > \sqrt[3]{x^3} = x > \sqrt[3]{x^4} \ldots\ldots \text{za } 0 < x < 1$$

a

$$\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x^2} < \sqrt[3]{x^3} = x < \sqrt[3]{x^4} \ldots\ldots \text{za } x > 1;$$

diagrami ovih funkcija su dati na sl.73.

Dakle, za $x \geq 0$ 1° diagram funkcije x^{λ} je konveksan prema gore, ako je $\lambda < 1$, a prema dole ako je $\lambda > 1$; 2° diagram dodiruje X-osu u tački $x = 0$, ako je $\lambda > 1$, a seče je pod pravim uglom ako je $\lambda < 1$; 3° funkcija x utoliko brže teži beskonačnosti kad $x \to \infty$ ukoliko je λ veće i 4° utoliko brže teži nuli kad $x \to 0$, ukoliko je λ veće.



Sl.73

Zadaci.

Koji je medjusoban položaj diagrama sledećih funkcija za $x > 0$:

1. $A\sqrt[4]{x^3}$ za $A = \frac{1}{2}, 1, 2,$;

2. $A\sqrt[3]{x^4}$ za $A = \frac{1}{2}, 1, 2,$;

3. $\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^5}$ i $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$;

4. $(1-\sqrt{x})^n$, $n = 1,2,3,4,$?

5.5. Asimptote algebarskih funkcija

(1) Neka je $f(x)$ algebarska funkcija; ako

$$f(x) \longrightarrow \pm\infty \text{ kad } x \longrightarrow a,$$

tada je prava

$$x = a$$

jedna vertikalna asimptota njenog diagrama.

Iz asimptotskog ponašanja funkcije $f(x)$ u blizini tačke $x = a$, tj. iz

$$f(x) \sim \frac{A}{(x-a)^{\lambda}} \quad , \quad x \longrightarrow a,$$

možemo zaključiti položaj dotičnih grana diagrama prema toj asimptoti.

Pr. (1). Kakav je položaj pojedinih grana diagrama funkcije

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}\,(\sqrt{x}-1)}$$

prema asimptoti $x = 1$?

Data funkcija je dvoznačna i svaka od ovih vrednosti se u blizini tačke $x = 1$ ponaša kao

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}\,(\sqrt{x}-1)} \sim \frac{1}{(x-1)^{4/3}}$$

kad $x \to 1 \pm 0$,

i $$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt{x-1}} \sim -\frac{1}{2(x-1)^{1/3}} \quad \text{kad} \quad x \to 1 \pm 0.$$

Prema tome sa desne strane asimptote jedna grana diagrama teži $+\infty$, a jedna $-\infty$, dok sa leve strane asimptote obe grane teže $+\infty$.

(ii) Ukoliko je algebarska funkcija $f(x)$ definisana za velike vrednosti od x njen diagram će imati horizontalnu asimptotu ako

$$f(x) \to A \quad \text{kad} \quad x \to \infty$$

ova se asimptota

$$y = A$$

svodi na X-osu ako je $A = 0$.

Položaj dotične grane prema asimptoti dobijamo aproksimacijom funkcije $f(x)$ za velike vrednosti x-a, tj. iz asimptotske relacije oblika

$$f(x) \approx A + Bx^{-\lambda} \quad \text{za velike } x.$$

Pr.(2). Kakav položaj zauzima diagram funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$

prema horizontalnoj asimptoti

Očevidno

$$f(x) \to 1 \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty ;$$

kako je

$$f(x)-1 = \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x}-1}{1+\sqrt[3]{x}} \sim \frac{-1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{kad} \quad x \to \pm\infty$$

tj.

$$f(x) \approx 1 - x^{-1/3}$$

za veliko pozitivno ili negativno x, to se data funkcija nalazi iznad asimptote $y = 1$ kad $x \to -\infty$, a ispod nje kad $x \to +\infty$.

(iii) Ako algebarska funkcija $f(x)$ teži beskonačnosti kad $x \to \infty$, njen diagram ima kosih ili krivoliniskih asimptota.

On će imati pravoliniskih asimptota kadgod je

$$f(x) \approx ax+b+\frac{c}{x^{\lambda}}, \quad \text{za } \lambda \to 0 \text{ i veliko } x$$

Koeficiente a i b dobijamo ako postoje sledeće granične vrednosti:

$$1^\circ \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a,$$

$$2^\circ \quad \lim_{x \to \infty} \left\{ f(x) - ax \right\} = b,$$

Pr.(3). Odredi asimptotu diagrama funkcije

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}$$

Imamo

$$1^\circ \quad \frac{f(x)}{x} = \sqrt{1+x^{-1}} + \sqrt{1+x^{-2}} \to 2,$$

$$x \to \infty ,$$

$$2^\circ \quad f(x)-2x = \sqrt{x^2+x} - x + \sqrt{x^2+1} - x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \to \frac{1}{2} \text{ kad } x\to\infty$$

$$\therefore \quad f(x) \approx 2x + \frac{1}{2} \text{ za veliko } x.$$

Da bi smo odredili položaj diagrama prema asimptoti $y = 2x + \frac{1}{2}$ imamo

$$f(x)-(2x+\tfrac{1}{2}) = \frac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \frac{-x}{(x+\sqrt{x^2+x})^2} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{-1}{4x} + \frac{1}{2x} =$$

$$= \frac{1}{4x} \text{ kad } x\to\pm\infty,$$

$$\therefore \quad f(x) \to 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} \ ;$$

dakle je za veliko pozitivno x diagram iznad, a za negativno x ispod asimptote.

Napomena. Granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ može postojati a da diagram funkcije nema pravolinickih asimptota; (v.zadatke 5.5.7 i 5.5.8).

(iv) U svim ostalim slučajevima diagram algebarske funkcije ima krivolinickih asimptota. Tako,na primer,ako postoje granice

$$1^\circ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = a, \quad 2^\circ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-ax^2}{x} = b$$

$$3^\circ \lim_{x\to\infty} \{f(x) - (ax^2+bx)\} = c$$

tada je

$$y = ax^2+bx+c$$

paraboliska asimptota

Pr.(4). Odredi paraboliska asimptotu diagrama funkcije

$$f(x) = \sqrt{x^4-2x^3+x}$$

Imamo

$$1^\circ \quad f(x) \sim x^2 \quad \text{kad} \quad x\to\pm\infty \ ;$$

$$2^\circ \quad f(x)-x^2 = \frac{-2x^3+x}{x^2+\sqrt{x^4-2x^3+x}} \sim -x \quad \text{kad } x\to\pm\infty$$

$$3^\circ \quad f(x)-x^2+x = x\,\frac{\sqrt{x^4-2x^3+x}-x^2+1}{x^2+\sqrt{x^4-2x^3+x}} =$$

$$= x\,\frac{x-1}{(x^2+\sqrt{x^4-2x^3+x})(\sqrt{x^4-2x^3+x}+x^2-1)} \sim$$

$$\sim \frac{x^2}{2x^2\cdot 2x^2} = \frac{1}{4x^2} \text{ kad } x\to\pm$$

$$\therefore \quad f(x) \approx x^2-x+\frac{1}{4x^2}$$

Dakle diagram funkcije ima paraboličku asimptotu.

$$y = x^2 - x$$

i nalazi se iznad nje kad $x \to \pm\infty$.

Napomena. Granice

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = a \quad i \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-ax}{x} = b$$

mogu postojati a da diagram date funkcije $f(x)$ nema paraboliskih asimptota; (v. zadatak 5.5.12).

Pr. (5). Odredi krivoliniske asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$$

Imamo

$$f(x) \sim x^{2/3} \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty;$$

$$f(x) - x^{2/3} = \frac{x - \sqrt[3]{x^3+x^2}}{\sqrt[3]{1+x}} =$$

$$= \frac{-x^2}{\sqrt[3]{1+x}\left\{x^2 + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + (\sqrt[3]{x^3+x^2})^2\right\}} \sim$$

$$\sim \frac{-x^2}{\sqrt[3]{x} \cdot 3x^2} = -\frac{1}{3}x^{-1/3} \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty.$$

$$\therefore \; f(x) \approx \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Diagram date funkcije ima krivoliniska asimptotu

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

i nalazi se ispod nje kad $x \to +\infty$, a iznad nje kad $x \to -\infty$.

Zadaci.

Odredi asimptote diagrama funkcija:

1. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}}$; 2. $\frac{x}{x+1}\sqrt{x^2+1}$;

3. $\sqrt{x^2+1}$; 4. $\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x+1}$;

5. $\sqrt[4]{x^2+1}$; 6. $\sqrt[3]{8x^3+6x^2}$; 7. $x+\sqrt{x}$;

8. $\frac{x\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$; 9. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{(\sqrt{x}-1)^2}$; 10. $\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2+1}$;

11. $\sqrt{x^4+8x}$; 12. $\sqrt{x^4+2x^3+3}$; 13. $\frac{x^3+x\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$;

14. $\sqrt[3]{x^6+1}$; 15. $\frac{x}{x+1}\sqrt{x}$; 16. $\frac{x}{x+\sqrt{x}}$;

17. $\frac{x^3+\sqrt{x}}{2x+1}$; 18. $\frac{x^2+\sqrt{x}}{x+1}$.

5.6. Diagram kvadratnog korena racionalne funkcije

(i) Neka je data racionalna funkcija $u(x)$

$$y^2 = u(x),\ tj.\ y = f(x) = \sqrt{u(x)}$$

Diagram funkcije $f(x)$ dobijamo kad nacrtamo diagram funkcije $u(x)$ i zatim prenosimo kvadratni koren njegovih ordinata u pozitivnom i negativnom pravcu Y-ose. Otuda sledi:

1° X-osa je osa simetrije diagrama funkcije $f(x)$;

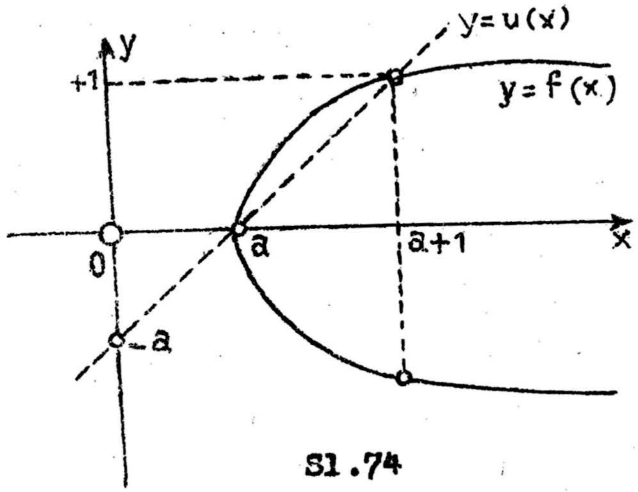
2° Za one vrednosti x-a za koje je $u(x)$ negativno nema diagrama funkcije $f(x)$, jer za te vrednosti funkcija $f(x)$ nije definisana.

3° Horizontalne i vertikalne asimptote diagrama funkcije $u(x)$ ostaju horizontalne i vertikalne asimptote diagrama funkcije $f(x)$ ukoliko je ona za te vrednosti definisana.

4° Kosa asimptota $y = ax+b$ prelazi u paraboličku, a parabolička $y = ax^2+bx+c$ u kosu pravolinisku asimptotu.

Posmatrajmo najpre sledeća tri specijalna slučaja

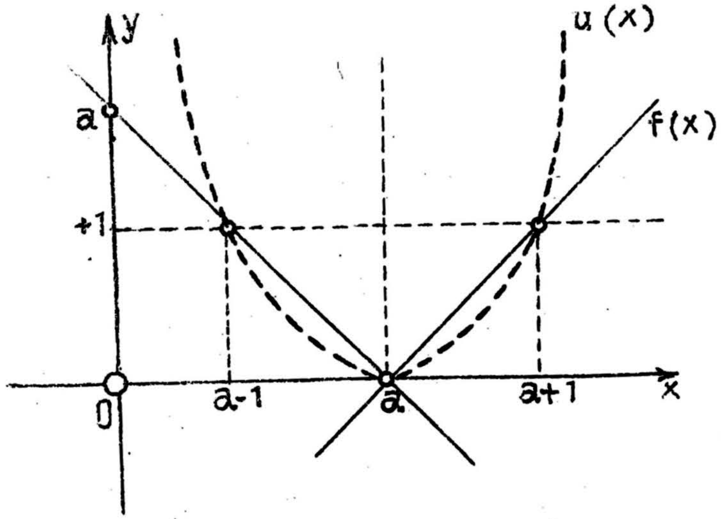
(ii) $y^2 = x-a$ (v.sl.74). Diagram funkcije $u(x) = x-a$ je prava, na slici izvučena crtasto,



Sl.74

a diagram funkcije $f(x) = \pm\sqrt{x-a}$ je parabola sa temenom u tački (a,o) i X-osom kao osovinom.

Kad diagram funkcije $u(x)$ <u>preseca</u> X-osu diagram funkcije $f(x)$ <u>je seče pod pravim uglom</u>.



Sl.75

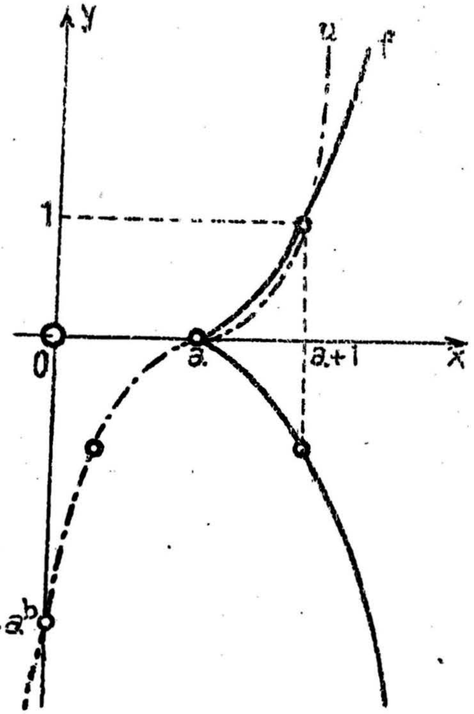
(iii) $y^2 = (x-a)^2$ (v.sl.75).

Crtasto izvučen diagram funkcije $u(x) = (x-a)^2$ je parabola sa temenom u tački $(a,0)$ i osovinom $x = a$. Diagram funkcije $f(x)$ sastoji se iz dve prave $y = \pm(x-a)$.

U tački gde diagram funkcije $v(x)$ <u>dodiruje</u> X-osu, <u>dve grane</u> funkcije $f(x)$ <u>je presecaju</u>.

Tačka u kojoj se dve grane diagrama seku zove se dvojna tačka.

(iv) $y^2 = (x-a)^3$, (v.sl.76).



Sl.75

Diagram funkcije $u(x) = (x-a)^3$ je crtasto izvučena kubna parabola, koja u tački $x = a$ preseca i dodiruje X-osu. Diagram funkcije

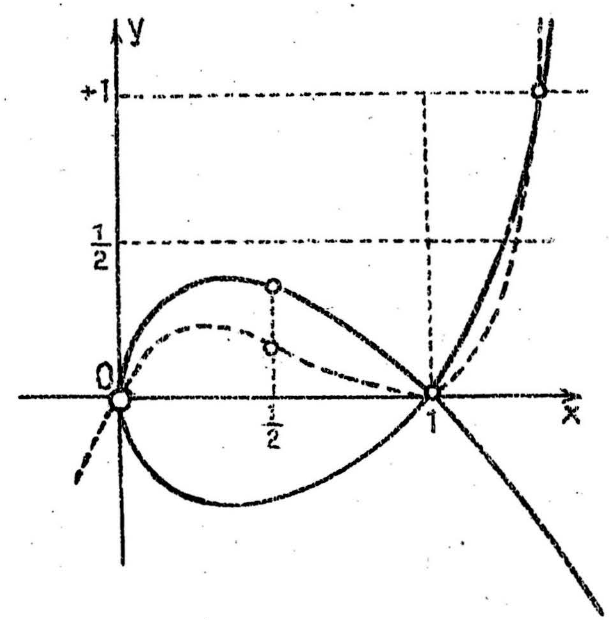
$$f(x) = \pm(x-a)\sqrt{x-a}$$

ima u tački $x = a$ dve grane koje se dodiruju, a X-osa im je zajednička tangenta.

Tačka ove vrste zove se <u>povratna tačka.</u>

Tačke u kojima diagram funkcije $u(x)$ <u>dodiruje i preseca</u> X-osu su <u>povratne tačke</u> diagrama funkcije $f(x)$.

<u>Pr.(1)</u>. $y^2 = x(x-1)^2$, (v.sl.77).



Sl.77

Crtasto izvučena kriva je diagram funkcije $u(x) = x(x-1)^2$.

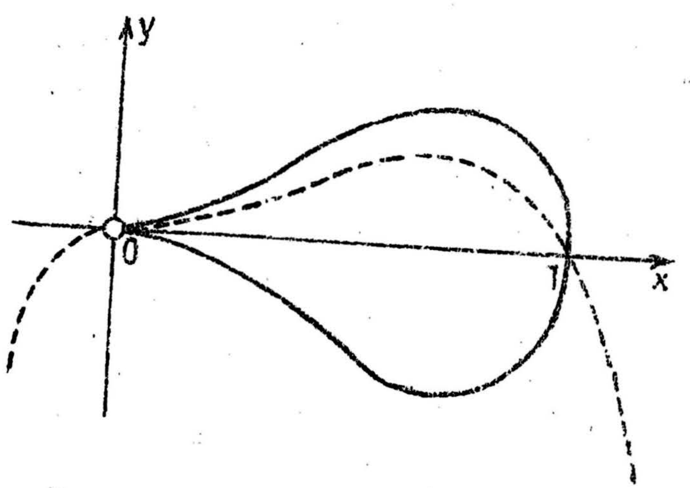
1° y je definisano samo za $x \geqslant 0$;

2° diagram funkcije $y(x)$ seče u početku X-osu pod pravim uglom jer je diagram funkcije $u(x)$ preseca u toj tački;

3° $x = 1$ je dvojna tačka diagrama funkcije $y(x)$, jer diagram funkcije $u(x)$ dodiruje X-osu u toj tački;

4° $y(x) \sim x\sqrt{x}$ kad $x \to \infty$.

Deo krive kao ovaj koji se nalazi u razmaku $(0,1)$ zvaćemo **omča**.



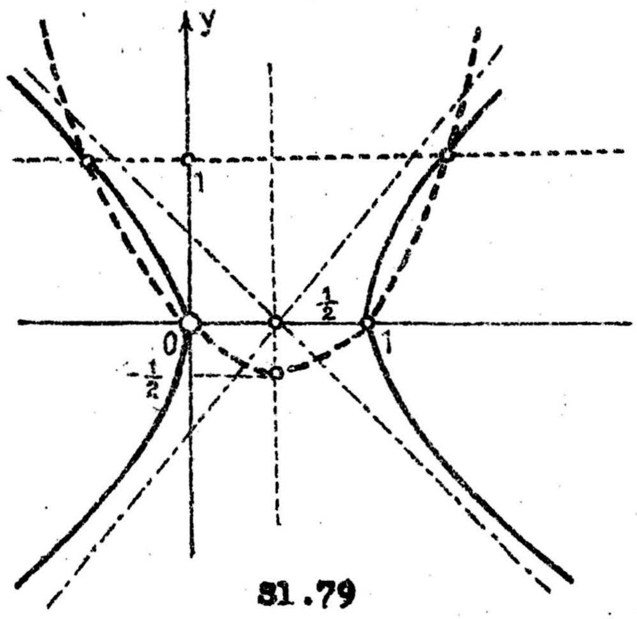
Sl.78

Pr.(2). $y^2 = u(x) = x^3(1-x)$. (v.sl.78 i uporedi sa primerom 1.12(2)).

Crtičasto izvučena kriva je diagram funkcije $u(x)$ a diagram funkcije y sastoji se samo od jedne omče, jer je $u < 0$, za $x < 0$ i $x > 1$.

Tačka $x = 0$ je povratna, jer diagram funkcije $u(x)$ preseca i dodiruje X-osu u početku.

Pr.(3). $y^2 = u(x) = x(x-1)$, (v.sl.79).



Sl.79

Crtasto izvučena parabola je diagram funkcije $u(x)$.

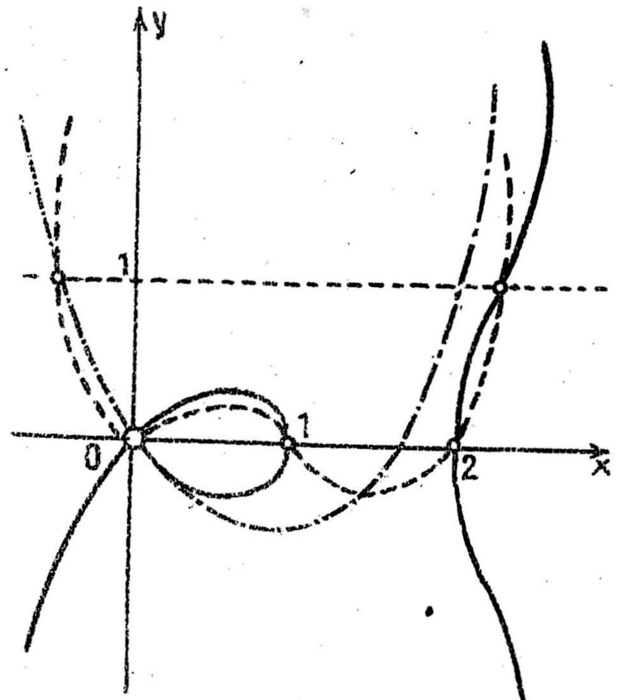
1° $y(x)$ je definisano za $\left| x - \frac{1}{2} \right| \geqslant \frac{1}{2}$.

2° diagram funkcije $y(x)$ seče X-osu pod pravim uglom u tačkama $x = 0$ i $x = 1$;

3° $y(x) \sim x$ i $y - x \to -\frac{1}{2}$ kad $x \to \infty$;

4° diagram funkcije $y(x)$ je hiperbola sa centrom u tački $x = \frac{1}{2}$ osama $y = 0$ i $x = \frac{1}{2}$ i asimptotama $y = \pm(x - \frac{1}{2})$.

Pr.(4). $y^2 = u(x) = x^2(x-1)(x-2)$. (v.sl.80)



Sl.80

Crtasto izvučena kriva je diagram funkcije $u(x)$; a kriva izvučena sa -.-.-.-.- je asimptotska parabola.

1° $y(x)$ je definisano za $\left| x - \frac{3}{2} \right| \geqslant \frac{1}{2}$.

2° Početak je dvojna tačka;

3° $y(x) \sim x^2$, $y - x^2 \sim -\frac{3}{2}x$ i

$$y - x^2 + \frac{3}{2}x \to -\frac{1}{8} \text{ kad } x \to \pm\infty;$$

diagram ima paraboličnu asimptotu

$$y = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}.$$

Zadaci.

Nacrtaj diagrame funkcija:

1. $y^2 = x^2 - x^{-2}$; 2. $y^2 = x^{-2} - x^2$;

3. $y^2 = x^2(1-x^2)$; 4. $y^2 = (x^2-1)(x^2-2)$;

5. $y^2 = \frac{x^5}{x-1}$; 6. $y^2 = \frac{x}{x+1}$;

7. $y^2 = \frac{(x^2-1)x}{x+2}$.

5.7. D i j a g r a m k u b n o g k o r e n a r a c i o n a l n e f u n k c i j e

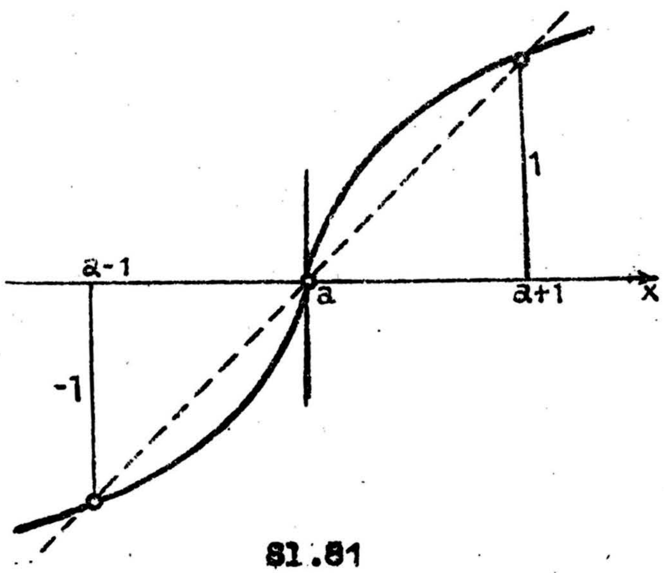
(i) Neka je $u(x)$ racionalna funkcija i

$$y^3 = u(x) \quad \text{tj.} \quad y = f(x) = \sqrt[3]{u(x)}\ .$$

Funkcija $f(x)$ je jednoznačna i definisana je za sve vrednosti x-a osim za nule imenitelja funkcije $u(x)$.

Horizontalne ili vertikalne asimptote dijagrama funkcije $u(x)$ ostaju horizontalne ili vertikalne asimptote i funkcije $f(x)$, dok se krivolinijske asimptote menjaju; na primer, kubna asimptota prelazi u kosu pravolinijsku asimptotu.

Bliže o položaju dijagrama funkcije $f(x)$ prema X-osi u blizini njenih nula dobijamo iz sledeća pet specijalna slučaja:

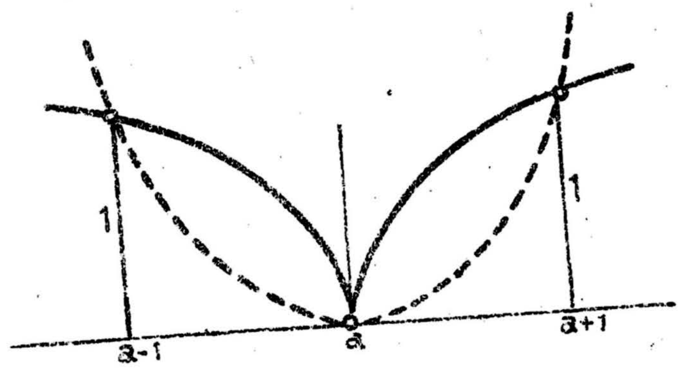


Sl.81

(ii) $y^3 = x-a$, (v.sl.81)

Diagram funkcije $u(x) = x-a$ je prava, na slici izvučena crtasto, a diagram funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x-a}$ je kubna parabola sa središtem simetrije u tački ($a = o$). Diagram funkcije $f(x)$ seče X-osu pod pravim uglom.

(iii) $y^3 = (x-a)^2$, (v.sl.82).



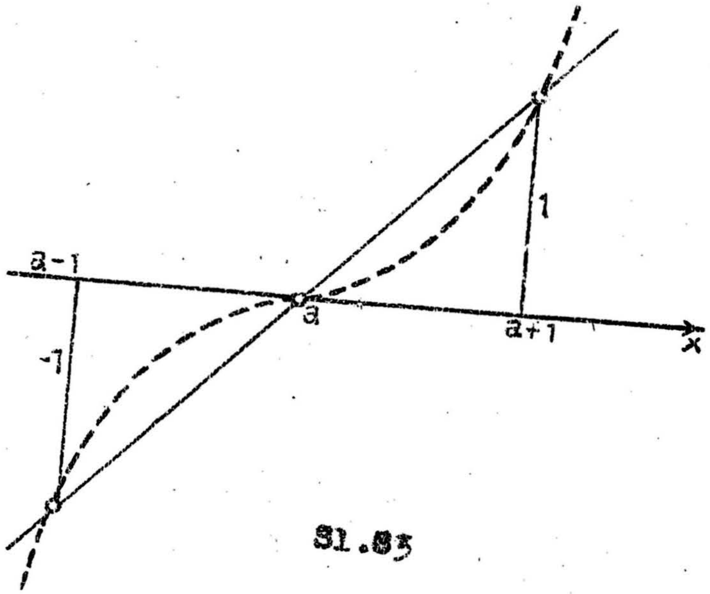
Sl.82

Diagram funkcije $u(x) = (x-a)^2$, je parabola na slici izvučena crtasto, a diagram funkcije $f(x) = \sqrt[3]{(x-a)^2}$ ima za $x = a$ povratnu tačku sa vertikalnom tangentom.

(iv) $y^3 = (x-a)^3$ (v.sl.83).

$$\therefore\ y = x-a.$$

Diagram funkcije $f(x)$ je prava linija.

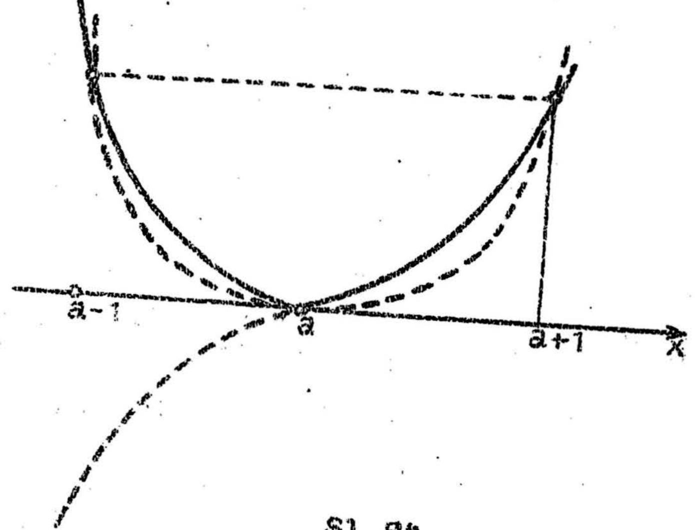


Sl.83

(v) $y^3 = (x-a)^4$,(v.sl.84).

Diagram funkcije

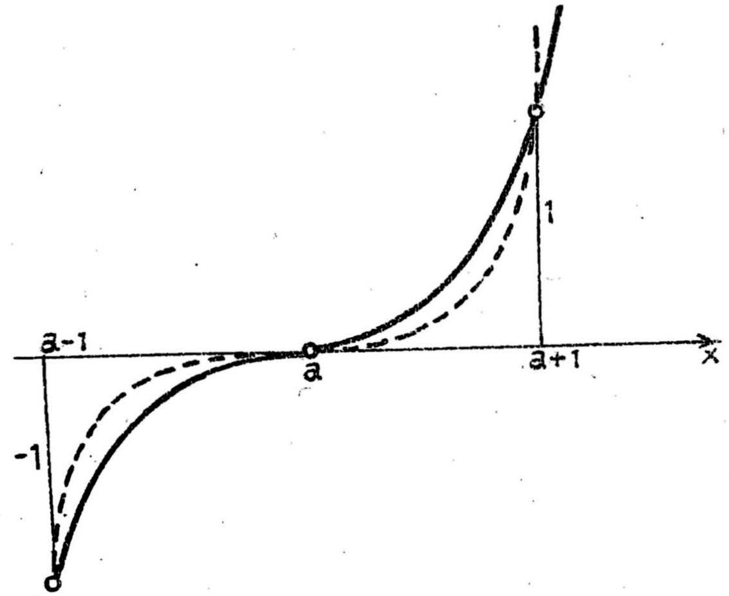
$$f(x) = \sqrt[3]{(x-a)^4}$$



Sl.84

dodiruje X-osu u tački $x = a$, ostajući iznad X-ose.

(vi) $y^3 = (x-a)^5$,(v.sl.85).



Sl.85

Diagram funkcije

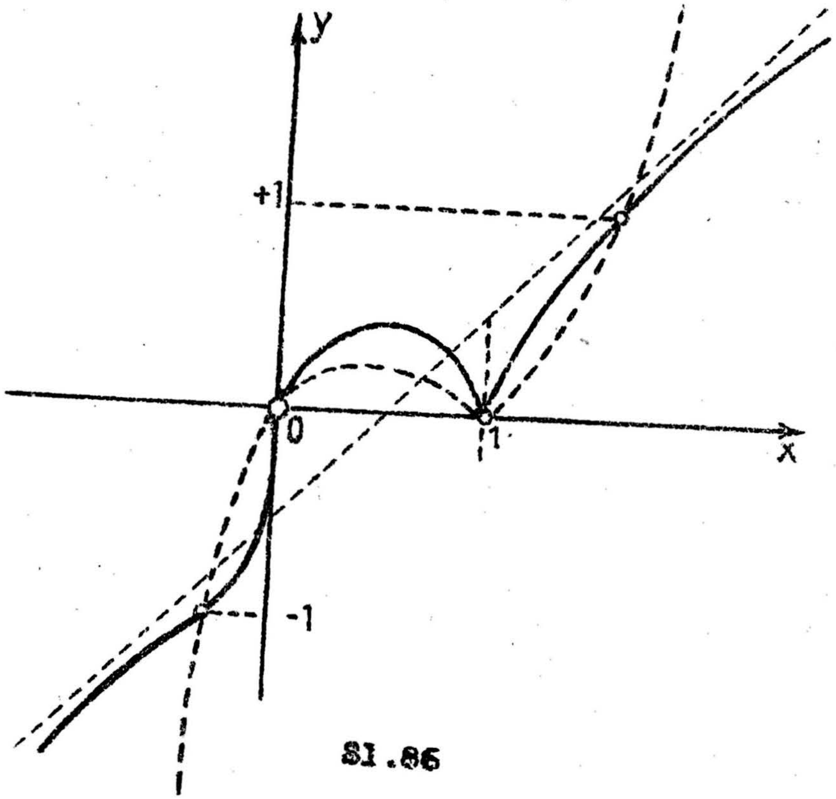
$$f(x) = \sqrt[3]{(x-a)^5}$$

dodiruje i preseca X-osu u tački $x = a$.

Pr.(1).Nacrtaj diagram funkcije

$$y^3 = u(x) = x(x-1)^2$$

(v.sl.86).



Sl.86

Crtaste izvučena kriva je diagram funkcije

$$u(x) = x(x-1)^2$$

1° diagram funkcije $y(x)$ seče X-osu u početku pod pravim uglom;

2° tačka $x = 1$ je povratna sa vertikalnom tangentom;

3° $y(x) \sim x$ kad $x \longrightarrow \infty$,

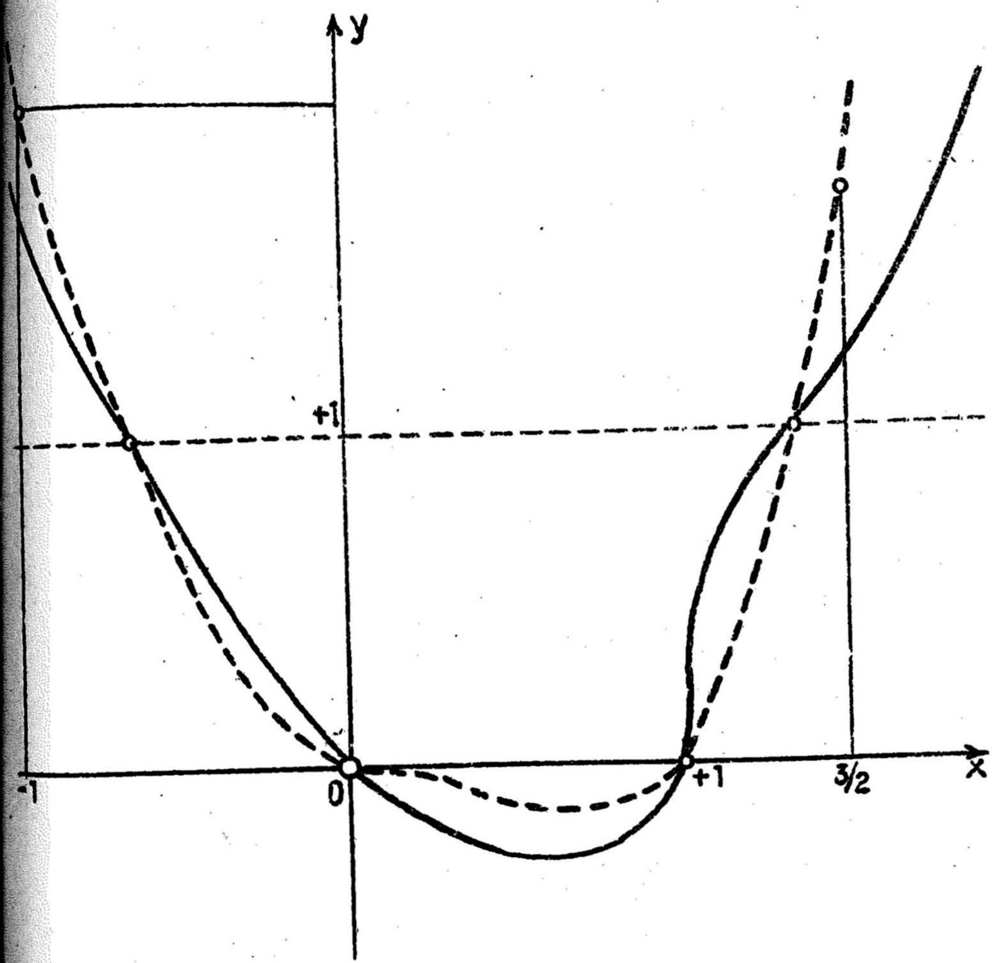
$$y(x) - x \longrightarrow -\frac{2}{3},$$

otuda sledi da je prava $y = x - \frac{2}{3}$ kosa asimptota diagrama funkcije.

Pr.(2). Nacrtaj diagram funkcije

$$y^3 = u(x) = x^3(x-1).$$

(v.sl.87).



Sl.87

Crtasto izvučena kriva je diagram funkcije

$$u(x) = x^3(x-1)$$

1° Diagram funkcije $y(x)$ preseca X-osu u početku pod kosim uglom, a u tački $x = 1$ pod pravim uglom.

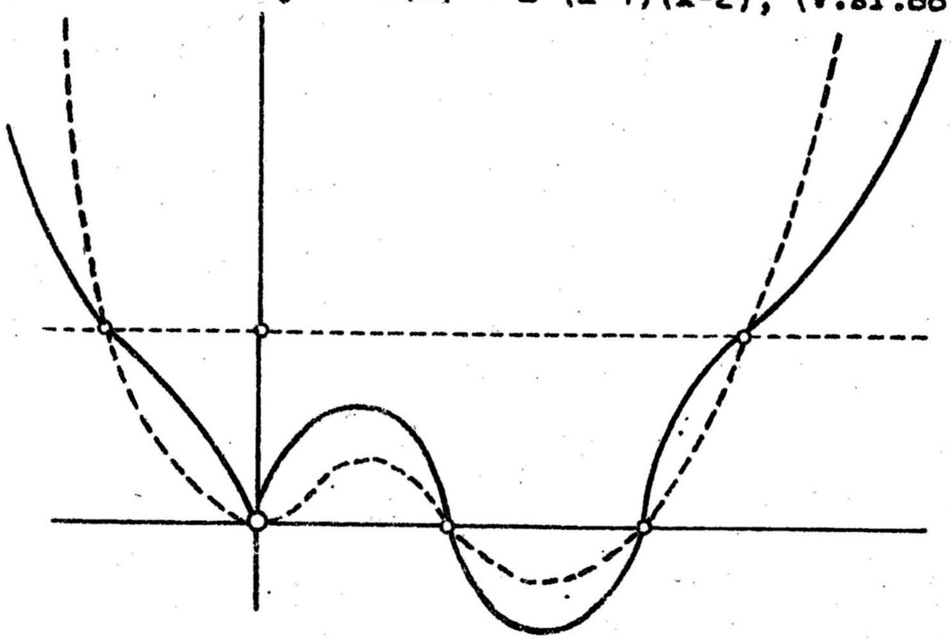
2° $y(x) \sim x^{4/3}$ kad $x \to \pm\infty$,

$$y(x) \approx x^{4/3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} \quad \text{za veliko } x$$

dakle diagram date funkcije ima krivolinijsku asimptotu i nalazi se ispod nje za veliko pozitivno x, a iznad nje za veliko negativno x.

Pr.(3). Nacrtaj diagram funkcije

$$y^3 = u(x) = x^2(x-1)(x-2), \quad (\text{v.sl.88}).$$



Sl.88

Crtasto izvučena kriva je diagram funkcije $u(x)$.

1° Diagram funkcije $y(x)$ preseca X-osu pod pravim uglom u tački $x = 1$ i $x = 2$, a $x = 0$ je povratna tačka sa vertikalnom tangentom;

2° $y(x) \sim x^{4/3}$ kad $x \to \pm\infty$ i

$$y(x) \approx x^{4/3} - x^{-1/3} \quad \text{za veliko } x,$$

znači da je $y = x^{4/3}$

krivolinijska asimptota i diagram funkcije $y(x)$ se nalazi ispod nje za veliko pozitivno x, a iznad nje za veliko negativno x.

Zadaci.

1. $y^3 = x^2(x^2-1)$; 2. $y^3 = x(x-1)(x-2)$; 3. $y^3 = \frac{x^2}{x-1}$;

4. $y^3 = \frac{x^3}{x-1}$; 5. $y^3 = \frac{x^2}{x^2-1}$; 6. $y^3 = \frac{x^3}{x^2-1}$;

7. $y^3 = \frac{x^4}{x^2-1}$; 8. $y^3 = \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$;

9. $y^3 = \frac{x}{(x-1)^2}$; 10. $y^3 = \frac{x(x-1)^2}{x+1}$

5.8. V E Ž B E.

1. Izrazi implicitno sledeće algebarske funkcije:

1° $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$; 2° $y = \sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{\ }}$

2. Izrazi eksplicitno sledeće algebarske funkcije. Vidi za koje vrednosti x-a su one definisane i kako se one ponašaju za velike vrednosti x-a.

1° $y^4-2xy^2-x^2=0$; 2° $y^3-2xy^2-2xy+1=0$;

3° $y^4-4y^3+2(3-2x)y^2-4y+1=0$;

4° $y^4-2(x+a)y^2-(1-a)^2x=0$.

3. Kako se ponašaju sledeće funkcije za velike vrednosti x-a ?

1° $\sqrt[p]{x^{rp}+ax^{r(p-1)}} - \sqrt[q]{x^{rq}+bx^{r(q-1)}}$;

2° $\sqrt[p]{1+\sqrt[q]{x}} - \sqrt[q]{1+\sqrt[p]{x}}$;

3° $\sqrt[p]{x^q \dfrac{pqx^q}{\sqrt[p]{x}}} - (\sqrt[p]{x}+1)^q$.

4° Pokaži da iz

$$(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=c$$

sledi

$$(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3+27a^2b^2c^4x^2y^2=0.$$

5. Odredi medjusobni položaj diagrama funkcija:

1° $y = \dfrac{1}{(x^2+n)}$; $n = 0,1,2,\ldots\ldots$;

2° $y = \dfrac{\sqrt[q]{x}}{x-1}$; 3° $y = (x-1)\sqrt[q]{x}$;

4° $y = (x-1)^2\sqrt[q]{x}$, $q = 2,3,4,\ldots\ldots$

6. Ako je $f(x) = ax+b+t(x)$ i $t(x)\to 0$, kad $x\to\infty$, prava $y = ax+b$ je asimptota diagrama funkcije $f(x)$.

7. Odredi asimptote diagrama funkcije

$$\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}\ .$$

8. Ako $t(x)\to 0$ kad $x\to\infty$, sledeće funkcije imaju parabolične asimptote:

1° $ax^2+bx+c+t(x)$; 2° $a\sqrt{x}+b+t(x)$;

3° $ax+b\sqrt{x}+c+t(x)$.

9. Odredi paraboličnu asimptotu funkcije

$$\sqrt{\frac{x^5+ax^3}{x+b}}$$

10. Nacrtaj diagrame sledećih funkcija:

1° $y^2 = x(x^2-2^2)$; 2° $y^2 = x(x^2-2^2)(6x^2-3^2)$;

$3^0 \quad y^2 = x(x^2-2^2)(x^2-3^2)(x^2-4^2)$;

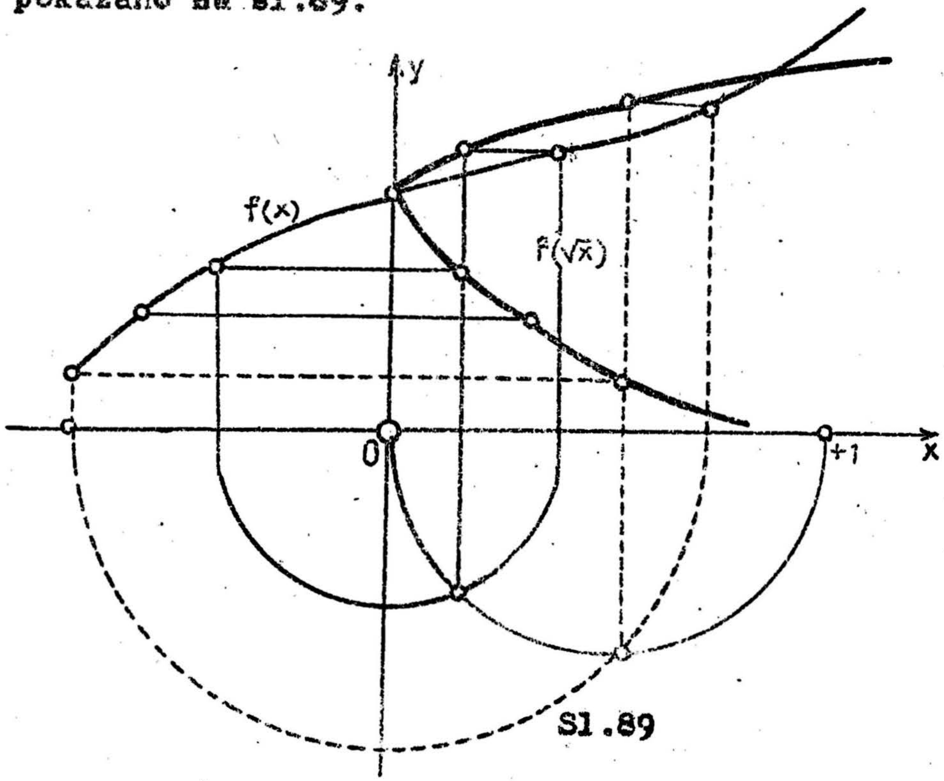
$4^0 \quad y = \sqrt{x^4 + \lambda^3 x} - x^2$.

11. Ako su poznati diagrami funkcija $f(x)$ i $g(x)$ nacrtaj diagrame funkcija:

$1^0 \quad \dfrac{f(x)+g(x)}{2}$; $\quad 2^0 \quad \dfrac{f(x)+2g(x)}{3}$;

$3^0 \quad \sqrt{f(x)g(x)}$.

12. Neka je poznat diagram funkcije $f(x)$ u razmaku $(-1,+1)$. Pokaži da se diagram funkcije $f(\sqrt{x})$ za $0 \leq x \leq 1$, dobija tačku po tačku kao što je to pokazano na sl.89.



Sl.89

G L A V A VI.

T R I G O N O M E T R I J S K E F U N K C I J E

6.1. L u č n a m e r a

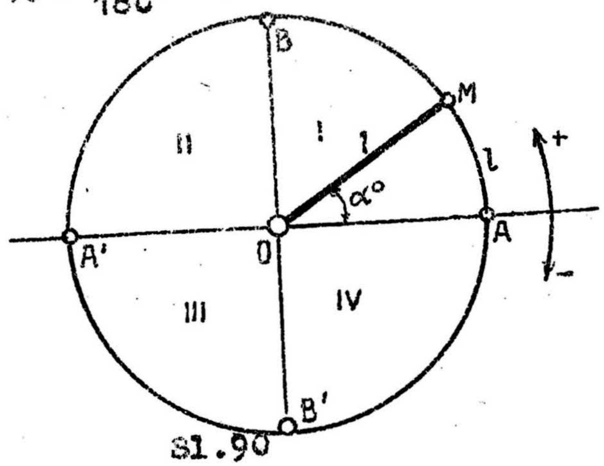
(i) U analizi uglovi se mere **lučnom merom**, tj.dužinom luka kruga čiji je poluprečnik jednak **jedinici**, a središte mu je u temenu ugla.

Ako je α° ugaona mera ugla AOM, tj. izražena u stepenima, a ℓ lučna mera istog ugla, tj. dužina luka $\widehat{AM}$ (v.sl.90), tada je

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\ell}{\pi} ,$$

$$\therefore \alpha^\circ = \frac{\ell}{\pi} 180^\circ ,$$

ili $\quad \ell = \dfrac{\alpha^\circ}{180^\circ} \pi$.



Sl.90

Jediničnom luku,tj.luku koji je jednak poluprečniku $l = 1$ odgovara ugao čija vrednost u stepenima iznosi

$$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44{,}80''.$$

to je jedinica lučne mere ugla i zove se radian. Tako,na primer,uglovima od

$$0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$$

odgovaraju lukovi od

$$0\,,\ \frac{\pi}{12}\,,\ \frac{\pi}{6}\,,\ \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{3}\,,\ \frac{5\pi}{12}\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ \pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}\,,\ 2\pi \text{ radiana.}$$

(ii) Krug poluprečnika 1,se zove trigonometriski krug ako je on orijentisan,tj.ako su na njemu odredjeni početak i pozitivan i negativan smer.Obično se za pozitivan smer uzima smer suprotan kretanju skazaljke na satu (v.sl.90).

Na primer,luku $\frac{\pi}{2}$ odgovara tačka B, a luku $-\frac{\pi}{2}$ tačka B'; ili ako se tačka M kreće ka tački A, ona opisuje ugao veličine $-\alpha^\circ$ ili $-l$ radiana (v.sl.90).

Svakom pozitivnom ili negativnom luku odgovara jedna i samo jedna tačka na trigonometrijskom krugu;obratno,jednoj tački,na primer M,odgovaraju više lukova i to pored luka l i lukovi

$$l+2\pi,\ l+4\pi,\ \ldots\ldots\ l+2k\pi\ \ldots\ldots$$

$$l-2\pi,\ l-4\pi,\ \ldots\ldots\ l-2k\pi\ \ldots\ldots$$

tj.uopšte tački M odgovaraju lukovi

$$l \pm 2k\pi\ ,\ k = 0,1,2,\ldots\ldots$$

Zadaci.

1. Pored lučne i ugaone mere u stepenima, uglovi se mere i u gradima. Grad je 100-ti deo pravog ugla.Nadji vezu izmedju stepena,radiana i grada.

2. Koliko stepena,a koliko radiana iznose uglovi od 10,25,30 i 50 gradi ?

3. Ako tački M odgovaraju lukovi $l+2k\pi$, $k = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots$,gde se nalaze tačke koje odgovaraju $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ i uopšte n-tom delu svih lukova ?

Koja veza postoji izmedju lukova koji imaju istu početnu tačku A, a kod kojih su krajnje tačke M i M' simetrično raspoređjene u odnosu na pravu:

4. A'OA gde je O središte kruga ;

5. B'OB $\perp$ A'OA ; 6. simetrali $\measuredangle$ AOB ;

7. simetrali $\measuredangle$ AOB'

Kad k uzima vrednosti k = 1,2,...koliko ima različitih tačaka na trigonometrijskom krugu koje odgovaraju lukovima:

8. $\pm\frac{k\pi}{5}$; 9. $\pm\frac{k\pi}{7}$

Svedi sledeće uglove na I kvadrant :

10. 8542° ; 11. $-\frac{22\pi}{3}$; 12. 1547,25 G ;

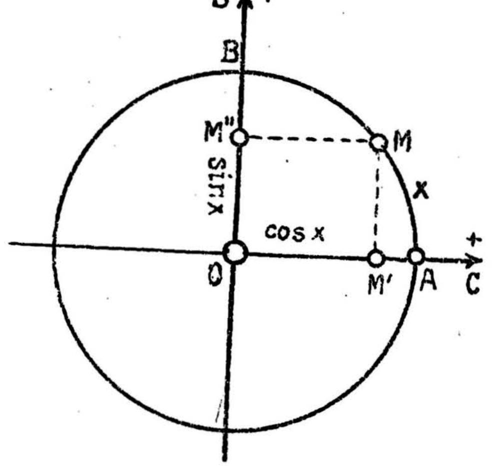
13. -4059° ; 14. $\frac{37\pi}{9}$; 15. -3159,29 G .

6.2. F u n k c i j e sinus i cosinus.

(i) cosinus luka x je algebarska vrednost duži OM' tj.

$$\cos x = \overline{OM'}$$

M' je projekcija tačke M na orijentisanu pravu OAC, a M ona tačka na trigonometrijskom krugu koja se nalazi na lučnom otstojanju x od početka A (v.sl.91).



Sl.91

sinus luka x je algebarska vrednost duži OM'' tj.

$$\sin x = \overline{OM''}$$

M'' je proekcija tačke M na orijentisanu pravu OBS koja stoji normalno na pravu OAC (v.sl.91).

(ii) Iz ovih dveju definicija sledi:

1° Iz pravouglog trougla $OM'M$ (v.sl.91) dobijamo vezu između sinusa i cosinusa istog luka x

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Otuda sledi da je, na primer,

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x},$$

tj. cosinus-i svih lukova sa istim sinus-om imaju svega dve različite vrednosti koje su suprotno označene.

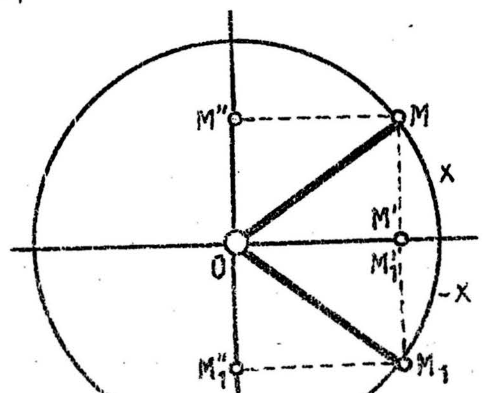
2° Funkcije $\sin x$ i $\cos x$ su periodične funkcije (1.9.) sa periodom 2π, tj.

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x,$$

jer lukovima x i $x+2\pi$ odgovara ista tačka M.

3° $\cos x$ je parna, a $\sin x$ neparna funkcija.

Projekcija M' tačke M luka x poklapa se sa projekcijom M_1' tačke M luka $-x$, (v.sl.92), tj.



Sl.92

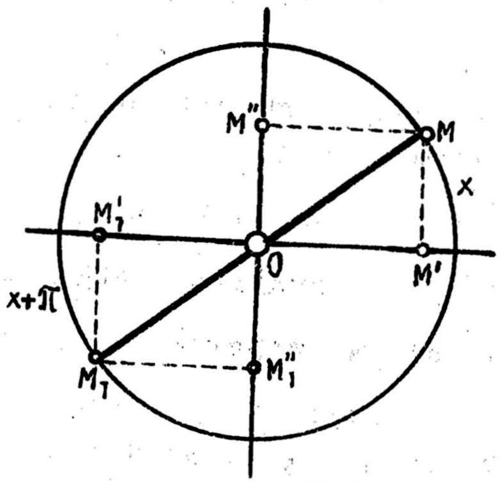
$OM' = OM_1'$ dok je $OM'' = -OM_1''$.

4^o $\sin(x+\pi) = \sin x$,

$\cos(x+\pi) = \cos x$.

Izmedju projekcije tačke **M** luka **x** i tačke **M_1** luka **$x+\pi$** .(v.sl.93) postoje sledeće veze:

$OM_1' = -OM'$ i $OM_1'' = -OM''$.



Sl.93

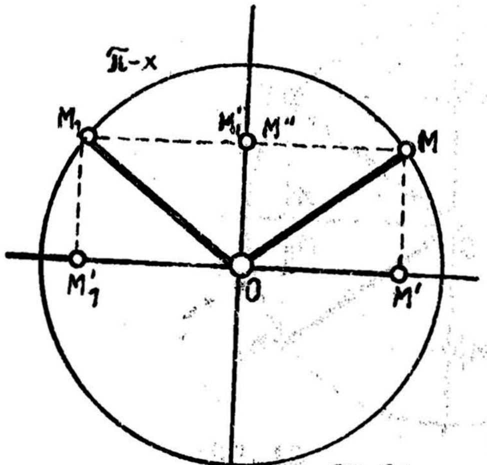
5^o $\sin(\pi-x) = \sin x$,

$\cos(\pi-x) = -\cos x$.

Izmedju projekcija tačke **M** luka **x** i tačke **M_1** luka **$\pi-x$** (vidi sl.94) postoje sledeće veze:

$OM_1'' = OM''$ i

$OM_1' = -OM'$.



Sl.94

6^o $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$,

$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$.

Izmedju projekcija tačke **M** luka **x** i tačke **M_1** luka $x+\frac{\pi}{2}$ (v.sl.95) postoje sledeće veze:

$OM_1'' = OM$ i $OM_1' = -OM''$

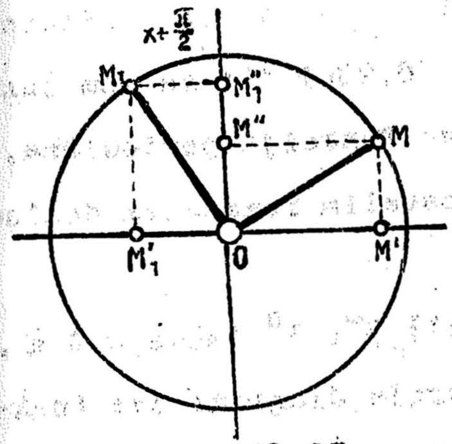
Zadaci.

Odredi **sinus** i **cosinus** od:

1. $\frac{\pi}{4}$ iz kvadrata; **2.** $\frac{\pi}{3}$ i **3.** $\frac{\pi}{6}$ iz istostranog trougla; **4.** $\frac{\pi}{10}$ iz trougla čiji su uglovi 36^o, 72^o i 72^o ; **5.** 1050^o; **6.** 2,1,; **7.** -1782^o ; **8.** Znajući da je $\cos a = \frac{2}{3}$ izračunaj $\sin a$ na 2 decimale tačno; **9.** Ako je

$$\sin x = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

koliki je $\cos x$?



Sl.95

Ako je dat luk **a** nadji sve lukove čiji je sinus jednak:

10. sin a ; **11.** -sin a ;

12. cos a ; **13.** -cos a

i sve lukove čiji je **cosinus** jednak ;

14. cos a ; **15.** -cos a ;

16. sin a ; **17.** -sin a .

Izrazi pomoću **sin x** i **cos x** sinus-e i cosinus-e sledećih lukova:

18. $\frac{\pi}{2} - x$; **19.** $\frac{3\pi}{2} + x$; **20.** $\frac{3\pi}{2} - x$;

21. $x+3\pi$; **22.** $x + \frac{5\pi}{2}$; **23.** $x - \frac{7\pi}{2}$;

24. $-x+2\pi$; 25. $-x-\frac{5\pi}{2}$.

Ako broju k dodamo vrednosti $k = 0,1,2,\ldots$ koliko različitih vrednosti imaju sinus-i i cosinus-i sledećih lukova i koje su to vrednosti:

26. $\frac{k\pi}{3}$; 27. $\frac{k\pi}{4}$; 28. $\frac{k\pi}{5}$; 29. $\frac{k\pi}{6}$;

30. $\frac{k\pi}{8}$; 31. $\frac{k\pi}{10}$;

32. Na krugu poluprečnika 1 konstruiši luk čija je tetiva jednaka njegovom cosinus-u.

6.3. Diagram funkcija sin x i cos x

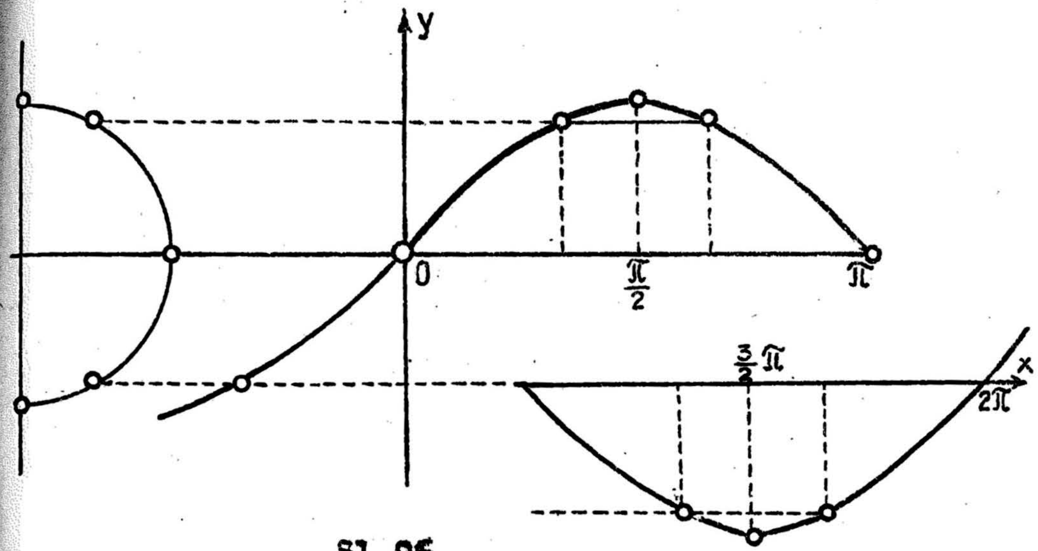
(i) $y = \sin x$. Dovoljno je nacrtati diagram funkcije $\sin x$ u razmaku $(0,2\pi)$ ili ma kom razmaku dužine 2π, jer je ova funkcija periodična, tako da se njen diagram u ostalim razmacima dužine 2π kongruentno ponavlja.

Prema osobinama 6.2(ii) 3^0 i 4^0 tačke $0, \pm\pi$, $\pm 2\pi, \ldots$ su središta simetrije diagrama ove funkcije, tj. delovi luka ispod X-ose su podudarni sa delovima luka diagrama iznad X-ose.

Prema osobini 6.2.(ii) 5^0 vertikalne prave koje prolaze kroz tačke $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$ ...... su ose simetrije diagrama, tj. deo lukova za vrednosti

x razmaka $(0,\frac{\pi}{2})$ podudaran je sa odgovarajućim lukovima razmaka $(\frac{\pi}{2},\pi)(\pi,\frac{3\pi}{2})$ ....

Prema tome dovoljno je nacrtati diagram samo u razmaku $(0,\frac{\pi}{2})$ i kongruentno ga prenositi (vidi sliku 96).



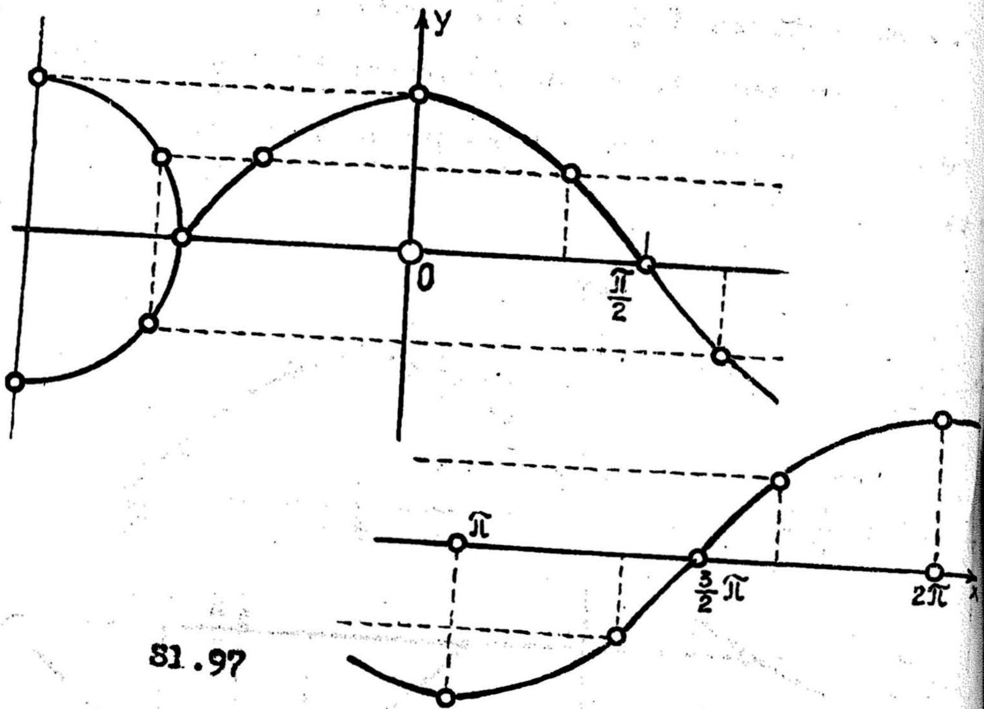
Sl.96

Diagram funkcije $y = \sin x$ zove se sinusoida.

(ii) $y = \cos x$. Slično se dobija i diagram funkcije $\cos x$. Medjutim iz osobine 6.2.(ii)6^0 sledi da je diagram ove funkcije sinusoida translatorno pomerena za $\frac{\pi}{2}$ u levo ili za $\frac{3\pi}{2}$ u desno (v.sl.97)

(iii) $y = A\sin(ax+b)$. Stavimo

$$a = \frac{2\pi}{T} \text{ i } b = -2p\pi,\ T > 0,\ 0 \leqslant p < 1.$$



Sl.97

Funkcija

$$A \sin(ax+b) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{T} - p\right)$$

je periodična sa periodom **T**, tj. **dužine talasa T**; $\frac{1}{T}$ daje **broj talasa** u jedinici dužine. Visina talasa iznosi **A** i zove se **amplituda**. Talas počinje od tačke **x = pT** i završava se u tački **x = pT+T**; $\frac{x}{T}$ je **faza**, a **p** **fazno pomeranje**. Diagram ove funkcije dat je na sl.98 sa $A = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{3}$ i $T = \frac{1}{2}$.

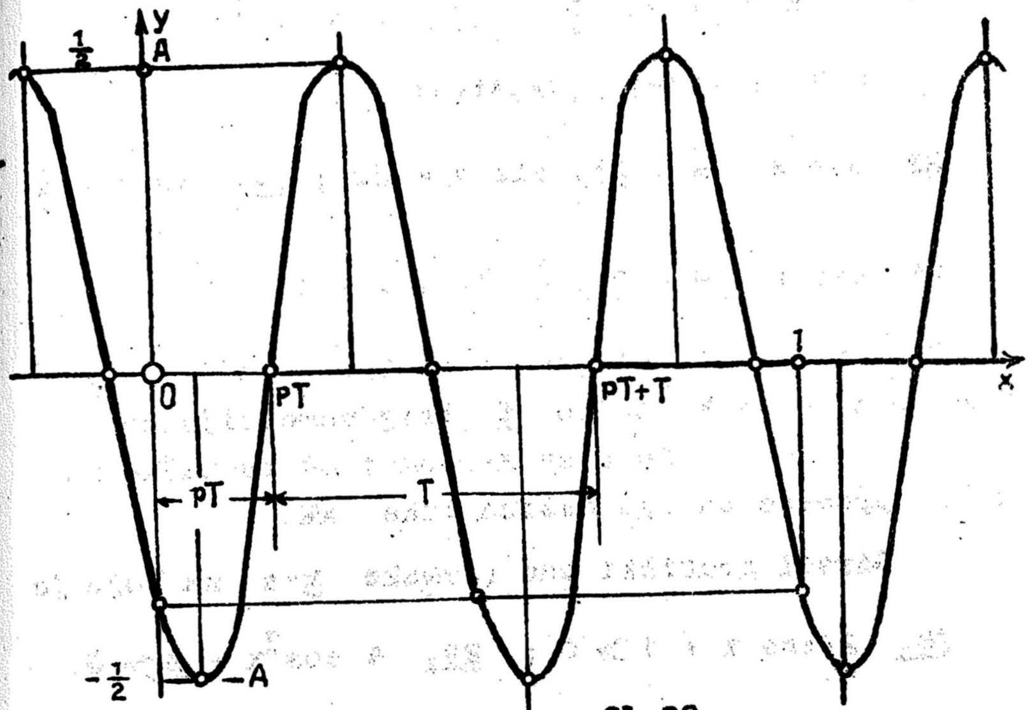
Zadaci.

Konstruiši diagrame funkcija:

1. $3 \sin x$; **2.** $\sin 2x$; **3.** $\sin \frac{x}{2}$;

4. $\sin(x + \frac{\pi}{4})$; **5.** $\cos(x - \frac{3\pi}{4})$; **6.** $5 + 3 \sin x$.

7. Pokaži da su sve nule funkcija **sin x** i **cos x** prvog reda.



Sl.98

Pokaži da su sve nule funkcija

8. $\sin^2 x$; **9.** $\cos^2 x$; **10.** $1 - \sin x$; **11.** $1 - \cos x$ drugog reda.

Vodeći računa o prethodnim zadacima konstruiši diagrame funkcija:

12. $\sin^2 x$; **13.** $\cos^2 x$; **14.** $\sqrt{\sin x}$; **15.** $\sqrt{\cos x}$;

16. $\sqrt{1-\sin x}$; 17. $\sqrt{1-\cos x}$; 18. $\sqrt{2-\sin x}$;

19. $5+3\sin x \ \sin^2 x$.

Sabiranjem ordinata skiciraj diagrame funkcije

20. $\sin 2x + \sin \frac{x}{2}$; 21. $\sin 3x + \cos \frac{x}{3}$.

Reši grafički jednačine:

22. $\sin x = \frac{1}{2}$; 23. $\sin x = 2x$; 24. $\sin x = \frac{x}{2}$

25. $\sin x = \frac{x}{4}$; 26. $\frac{1}{2} \sin x = x-1$.

27. Konstruiši diagram funkcije koja nastaje kad se kroz svaku tačku M trigonometrijskog kruga povuče paralela sa X-osom i od te tačke na desno prenese na nju dužina luka AM.

Odredi grafički one razmake x-a za koje je

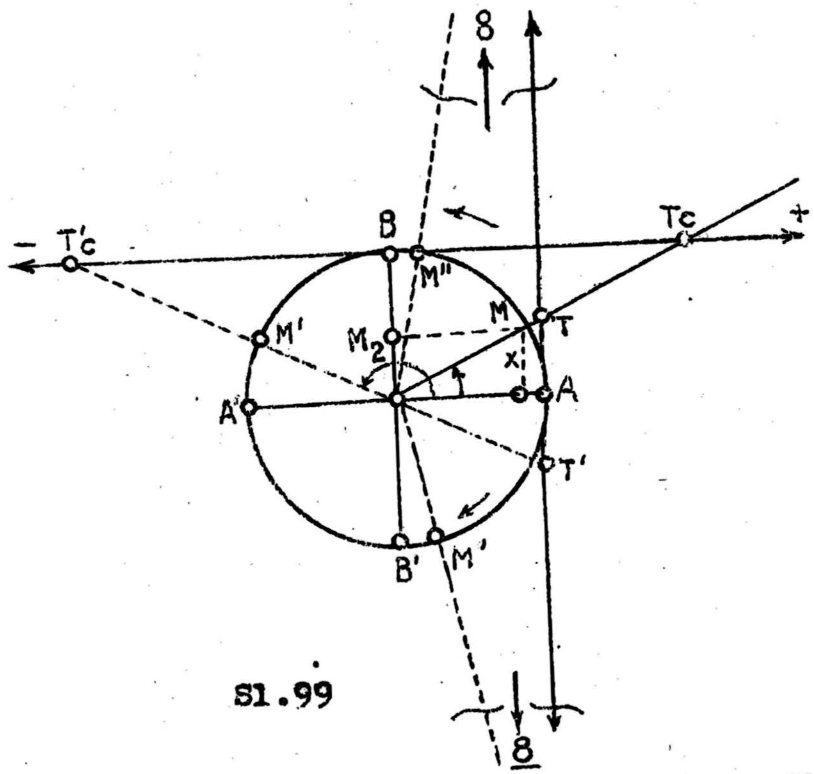
28. $2\cos x + 1 > 0$; 29. $4\cos^2 x - 3 > 0$.

6.4. F u n k c i j e tangens i cotangens.

(i) tangens luka x je algebarska vrednost duži AT, tj.

$$\operatorname{tg} x = AT$$

Pri tome je luk $AM = x$, a T je tačka preseka produženog poluprečnika OM sa orijentisanom pravom AT koja dodiruje trigonometrijski krug u početku A (v.sl.99).



Sl.99

Ako se tačka M nalazi u položaju M' poluprečnik OM' se produži u suprotnom pravcu do preseka T' sa pravom AT.

cotangens luka x je algebarska vrednost odsečka BT_c dobivenog presekom produženog poluprečnika OM i tangente u tački B :

$$\operatorname{cotg} x = BT_c$$

(ii) Iz ovih definicija sledi:

1° Funkcija tg x nije definisana za $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$,... a cotg x za 0, π, 2π, ...Pri tome (v.sl.99) tačke M'' i M''' se približavaju tačkama B odnosno B'

$$\operatorname{tg} x \to \pm\infty \text{ kad } x \to \frac{\pi}{2} \pm 0 \text{ ili } -\frac{\pi}{2} \pm 0,$$

$$\operatorname{cotg} x \to \pm\infty \text{ kad } x \to \pm 0 \text{ ili } \pi \pm 0.$$

2^0 Iz sličnosti trouglova OAT i OMM_1 kao i trouglova OBT_c i OMM_2 sledi

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

a otuda

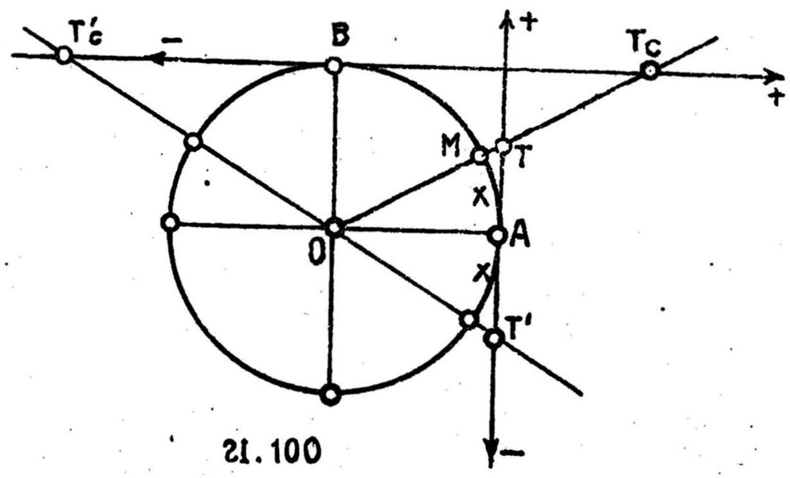
$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$$

3^0 Funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{cotg} x$ su periodične sa periodom π:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x,$$

jer se tačke sa lučnim otstojanjem x i $x+\pi$ nalaze na istom prečniku trigonometrijskog kruga.



Sl.100

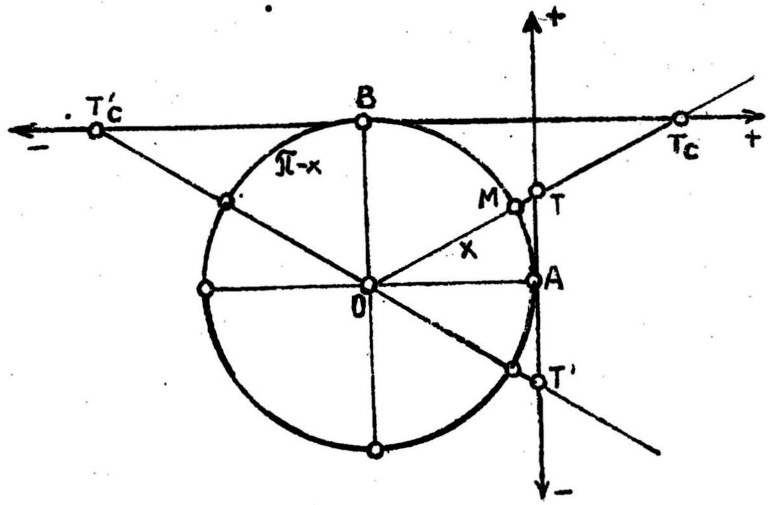
4^0 Funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{cotg} x$ su neparne funkcije:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

Ovo sledi iz osobina 2^0 kao i iz sl.100, jer je

$$AT = -AT' \quad \text{i} \quad BT_c = -BT'_c$$

5^0 $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x.$



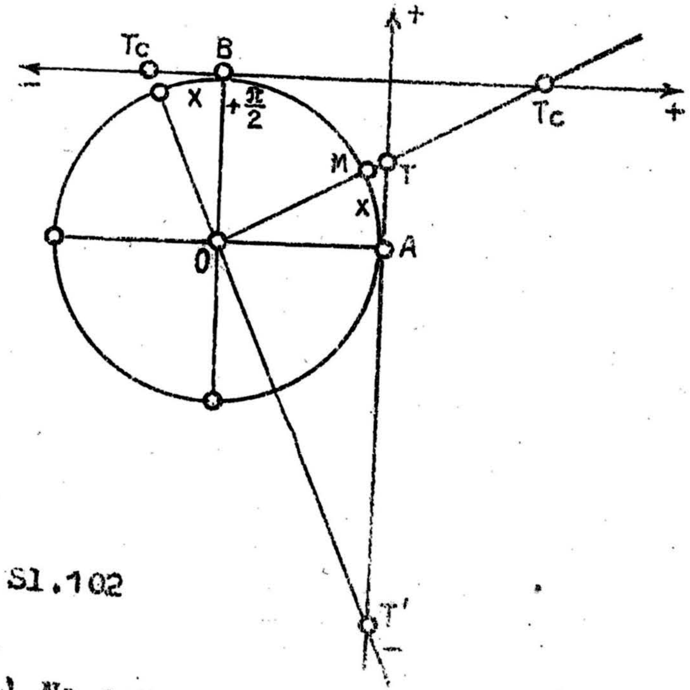
Sl.101

Ove veze slede iz osobina 2^0 i 6.2.(ii) 5^0 kao i iz slike 101, jer je

$$AT' = -AT \quad \text{i} \quad BT'_c = -BT_c$$

6^0 $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{cotg}(x+\frac{\pi}{2}) = \operatorname{tg} x.$

Ove veze slede iz osobina 2^0 i 6.2.(ii) 6^0 kao i iz sl.102, jer je $AT' = -BT_c$ i $BT'_c = -AT$



Sl.102

(iii) Na osnovu veza

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \ \text{ i } \ \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

mogu se sve trigonometrijske funkcije izraziti kao funkcije jedne od njih. Na primer, ako stavimo

$$\operatorname{tg} x = t$$

dobijamo

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ \text{ i}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{t}.$$

Zadaci.

1-7 U zadacima 6.2.1-7 zameni sin i cos sa tg i cotg. 8. Ako je $\cos a = \frac{2}{3}$ odredi tg a i cotg a na dve decimale tačno.

9. Odredi tg x i cotg x ako je $\sin x = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$

10. U zadacima 6.2, 10-31 zameni svagde sin sa tg i cos sa cotg.

31. Na krugu poluprečnika 1 odredi luk čija je tetiva jednaka njegovom cotangens-u.

6.5. Dijagrami funkcija tg x i cotg x

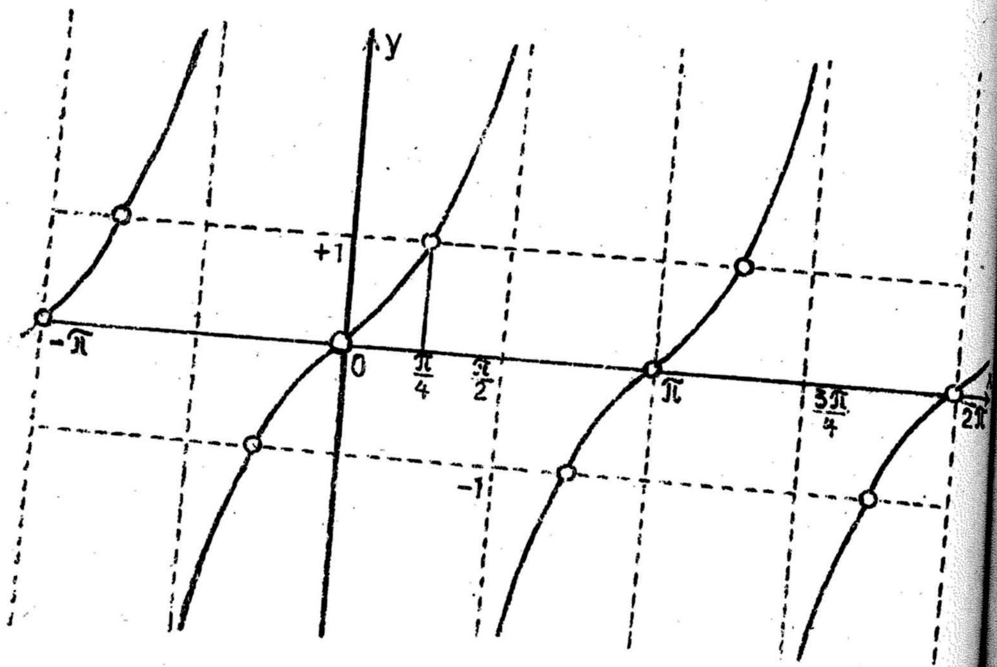
(i) $y = \operatorname{tg} x$. Kako je perioda funkcije tg x jednaka π, to je dovoljno konstruisati dijagram ove funkcije u jednom razmaku dužine , na primer u razmaku $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Iz osobina 6.4.(ii) 4° i 5° sledi da su tačke $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\ldots$ središta simetrije dijagrama. Prema tome dovoljno je konstruisati dijagram samo u razmaku $(0, \frac{\pi}{2})$.

U razmaku $(0,\frac{\pi}{2})$ funkcija <u>tg x</u> monoton[o] raste od <u>0</u> do $\underline{+\infty}$.

$$\operatorname{tg} 0 = 0,\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,\quad \operatorname{tg} x \to \infty \text{ gad } x \to \frac{\pi}{2} - \ldots$$

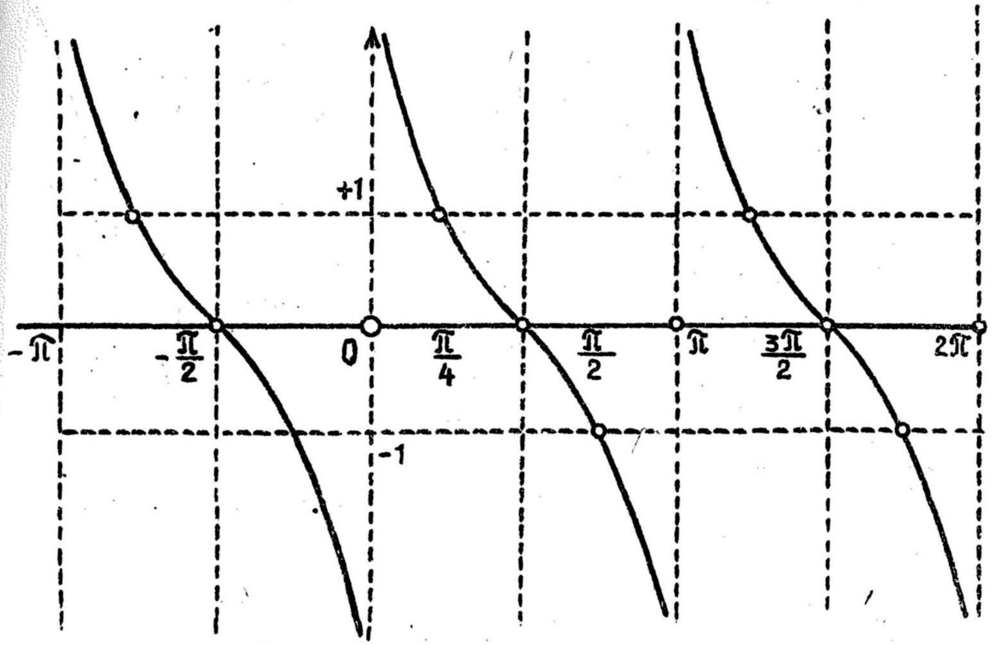
U tačkama $\pm\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$, ...ona nije defi[ni]sana, a prava $x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots\ldots$ su vertikalne asimptote diagrama (v.sl.103).



Sl.103

<u>(ii) y = cotg x</u>. Na osnovu osobina 6.4.(ii)6° sledi da se diagram funkcije <u>cotg x</u> dobija iz diagrama funkcije <u>tg x</u>, ako se ovaj

translatorno pomeri za $\frac{\pi}{2}$ u desno i nacrta njemu simetrična kriva u odnosu na X-osu (v.sl.104).

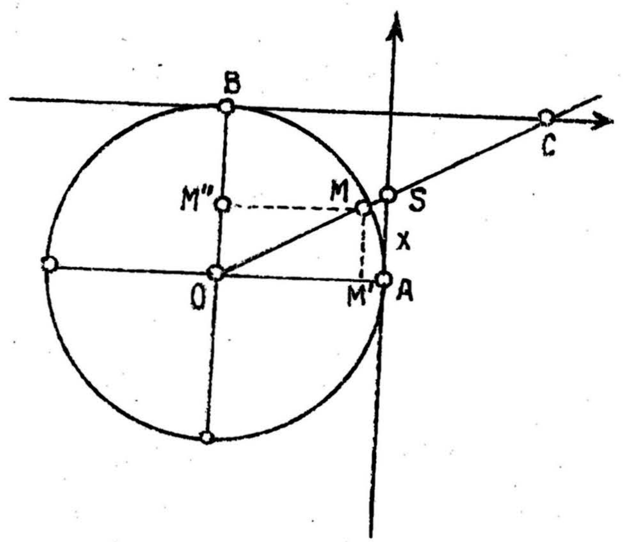


Sl.104

Prema tome prave $x = \pm k\pi$, $k = 0,1,2$, su vertikalne asimptote diagrama funkcije <u>cotg x</u>, a sama funkcija monotono opada od $\underline{+\infty}$ do $\underline{-\infty}$ dok <u>x</u> raste od <u>0</u> do π.

(iii) $y = \frac{1}{\cos x}$ Recipročne vrednosti funkcija <u>cos x</u> i <u>sin x</u> zovu se <u>secans</u> i <u>cosecans</u> i označavaju se sa

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$



Sl.105

I za njih možemo na trigonometrijskom krugu naći odgovarajuce duži. Tako je (v.sl.105)

$OS = \sec x$, a $OC = \operatorname{cosec} x$; ovo sledi iz sličnosti trouglova OMM' i OSA odnosno OMM'' i OCB.

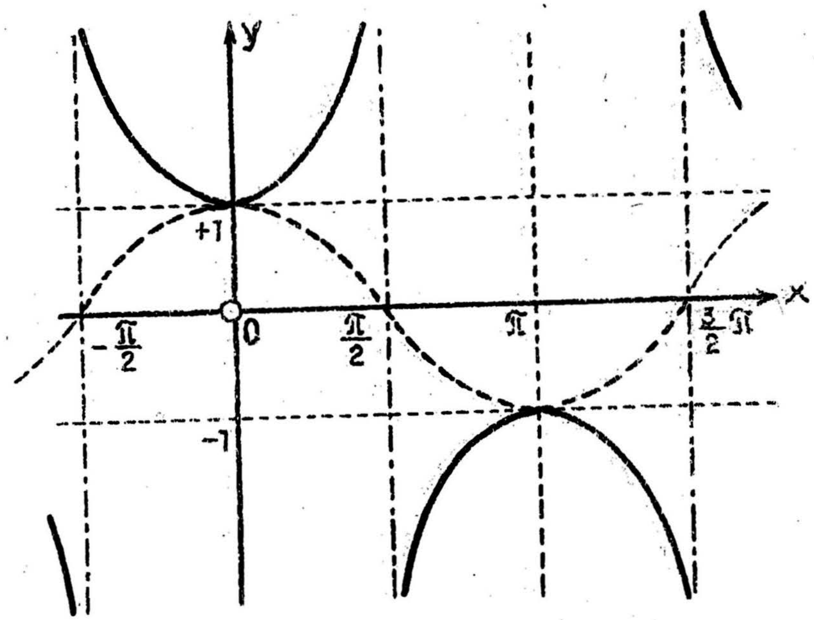
Ako pustimo da se tačka M kreće po trigonometrijskom krugu, na osnovu gornjeg dobijamo neposredno diagram funkcije

$$y = \sec x$$

koji ima oblik slike 106. Prave $x = \pm\frac{\pi}{2}\ \pm\frac{3\pi}{2}\ ......$ su njegove vertikalne asimptote.

Ovaj diagram mozemo uostalom dobiti i iz veze

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$



Sl.106

Zadaci. Pokaži da je

1. $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$; 2. $\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x = 1$;

3. Izrazi $\sec x$ i $\operatorname{cosec} x$ kao funkcije od $t = \operatorname{tg} x$

4. Koji je medjusobni položaj diagrama funkcija

$y = \operatorname{tg} x$, i $y = \sec x$

u razmaku $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$? Nacrtaj ih na istoj slici.

Konstruiši diagrame sledećih funkcija:

5. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 6. $\operatorname{tg} 2x$; 7. $\operatorname{tg}^2 x$; 8. $\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

9. $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$; 10. $\operatorname{cotg} 2x$; 11. $\operatorname{cotg}^2 x$;

12. $\sqrt{\operatorname{cotg} x}$; 13. $\sec\frac{x}{2}$; 14. $\sec 2x$;

15. $\sec^2 x$; 16. $\sqrt{\sec x}$; 17. $\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$;

18. $\sqrt{\operatorname{cosec} 2x}$; 19. $\operatorname{cosec}^2 x$; 20. $\sqrt{\operatorname{cosec} x}$;

21. $\frac{1}{1-\sec x}$; 22. $\frac{1}{1-\sin x}$; 23. $\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$; 24. $\frac{1}{2-\sin x}$

25. Ispitaj grafički rešenja jednačine $\operatorname{tg} x = x$.

6.6. Adicione teoreme $\sin x$ i $\cos x$

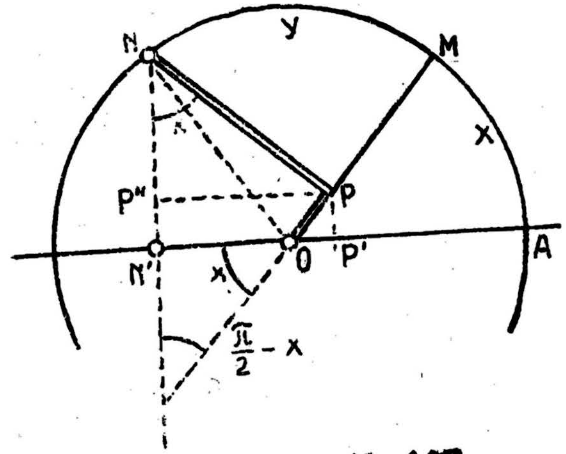
(i) Obrasci koji izražavaju sinus i cosinus zbira lukova $x+y$ pomoću sinus-a i cosinus-a lukova x i y zovu se adicione teoreme funkcija $\sin x$ i $\cos x$.

Označimo sa x luk AM a sa y luk MN (v.sl.81). Bez ograničenja možemo pretpostaviti da se ovi lukovi nalaze izmedju 0 i $\frac{\pi}{2}$, jer na osnovu osobina funkcija sin i cos navedenih u 6.2. možemo uvek trigonometrijske funkcije negativnih lukova većih od $\frac{\pi}{2}$ svesti na trigonometrijske funkcije lukova koji se nalaze izmedju 0 i $\frac{\pi}{2}$.

Iz trouglova OPN i ONN' (v.sl.107) sledi

$$OP = \cos y\ ,\ NP = \sin y\ ,$$

$$NN' = \sin(x+y) \quad \text{i} \quad ON' = \cos(x+y).$$



Sl.107

Dalje je

$$NN' = NP'' + P''N' = NP\cos x + OP\sin x =$$
$$= \sin y\cos x + \cos y\sin x\ ,$$
$$ON' = OP' - P'N' = OP\cos x - PN\sin x =$$
$$= \cos y\cos x - \sin y\sin x\ ,$$

što daje adicione teoreme funkcija $\sin x$ i $\cos x$;

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x\ ,$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y\ .$$

(ii) Ako u gore dobivenim vezama zamenimo y sa $-y$ iz

$$\cos(-y) = \cos y \quad \text{i} \quad \sin(-y) = -\sin y$$

slede obrasci za razliku lukova koji glase:

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y.$$

(iii) Ako stavimo $y = x$ obrasci iz (i) daju funkcije tzv. dvostrukih uglova i to:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

(iv) Iz ovog poslednjeg obrasca

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

i

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

$$\therefore \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

i

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Ako u ovim obrascima zamenimo x sa $\frac{x}{2}$ dobijamo tzv. funkcije poluuglova i to:

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

Zadaci.

Znajući sin i cos od 30° i 45° izračunaj:

1. $\sin 15^\circ$; 2. $\cos 15^\circ$; 3. $\sin 75^\circ$; 4. $\cos 75^\circ$;

Dokaži sledeće obrasce:

5. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - x)$;

6. $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin (\frac{\pi}{4} - x)$;

7. $1 + \sin x = 2 \sin^2 (\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$;

8. $1 - \sin x = 2 \sin^2 (\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$;

9. $\sin (\frac{\pi}{6} + x) \sin (\frac{\pi}{6} - x) = \cos x$;

10. $\cos (\frac{\pi}{6} - x) + \cos (\frac{\pi}{6} + x) = \sin x$;

11. $\cos (\frac{\pi}{3} + x) + \cos (\frac{\pi}{3} - x) = \cos x$;

12. $\sin (\frac{\pi}{3} + x) - \sin (\frac{\pi}{3} - x) = \sin x$;

13. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$;

14. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$;

15. $4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x$;

16. $4 \cos^3 x = \cos 3x + 3 \cos x$;

Ako je $x+y+z = \pi$, dokaži da je:

17. $\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$;

18. $\cos x + \cos y + \cos z = 1+4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}$

19. $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z = 2 + 2 \cos x \cos y \cos z$;

20. $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z = 1-2\cos x \cos y \cos z$;

21. $\sin x + \sin y - \sin z = 4 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$;

22. $\cos x + \cos y - \cos z = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$;

23. Ako stavimo $2\cos x = t+\frac{1}{t}$ pokaži da je

$$2\cos 2x = t^2+\frac{1}{t^2} \quad \text{i} \quad 2\cos 3x = t^3+\frac{1}{t^3}$$

6.7. Adicione teoreme

tg x i cotg x

(i) Iz veze 6.4.(i) 2°

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{i} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

i adicionih teorema 6.6.(i) sin x i cos x

$$\therefore \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x \sin y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y}$$

$$\therefore \operatorname{cotg}(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x\cos y - \sin x\sin y}{\sin x\cos y + \cos x\sin y}$$

$$\therefore \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \quad \text{i}$$

$$\operatorname{cotg}(x+y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}$$

(ii) Ako u gornjim obrascima zamenimo y sa $-y$ dobijamo obrasce za razliku lukova:

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\text{i} \quad \operatorname{cotg}(x-y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}$$

(iii) Ako u obrascima dobivenim iz (i) stavimo $y = x$ dobijamo obrasce za dvostruke lukove:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \quad \text{i} \quad \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg} x - 1}{2\operatorname{cotg} x}.$$

Zadaci.

Znajući tg od 30°, 45° i 60° izračunaj:

1. tg 15° ; 2. cotg 15° ; 3. tg 75° ;

4. cotg 75° . 5. Pokaži da se sin x, cos x, tg x, cotg x, sec x i cosec x mogu racionalno izraziti pomoću $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Dokaži da je:

6. $$\operatorname{tg} x \sim \begin{cases} & ,\quad \text{kad } x \to \pm 0 \\ \dfrac{1}{-x+\frac{\pi}{2}} & ,\quad \text{kad } x \to \frac{\pi}{2} \pm 0, \end{cases}$$

7. $\operatorname{cotg} x \sim \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{kad } x \to \pm 0, \\ \frac{1}{-x+\pi} & \text{kad } x \to \pi \pm 0. \end{cases}$

Izvedi sledeće obrasce:

8. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2 \operatorname{cosec} 2x$;

9. $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = 2 \operatorname{cotg} 2x$;

10. $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$;

11. $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$;

12. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

13. $\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}$

Ako je $x+y+z = \pi$, pokazati da je :

14. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$;

15. $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \operatorname{cotg} z$.

6.8. Diagrami složenih trigonometrijskih funkcija

(1) Ako je neka funkcija data u obliku zbira ili proizvoda dveju periodičkih funkcija sa istom periodom, dovoljno je konstruisati njen diagram za jednu periodu. Pri tome treba najpre ispitati da li se izraz kojim je data funkcija može uprostiti, u suprotnom slučaju se diagram date funkcije konstruiše iz diagrama njenih sabiraka ili faktora.

Pr.(1). $y = a \sin x + b \cos x$

Iz sl.108, gde je $OM = a$, $MN = b$, $\sphericalangle AOM = x$ i $MN \perp OM$ sledi da je

$c \sin(x+\alpha) = ON' = OM' + M'N' = a \sin x + b \cos x$,

gde je

$$c = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

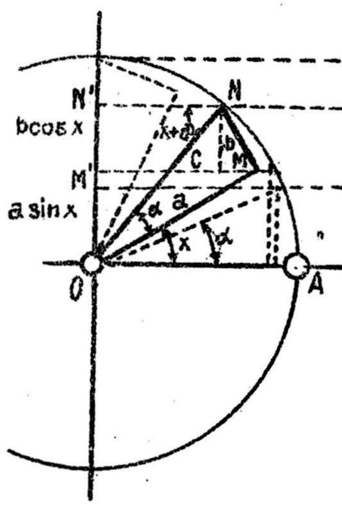
Dakle je diagram date funkcije takodje sinusoida sa amplitudom $\sqrt{a^2+b^2}$ i faznom razlikom $-\frac{\alpha}{2\pi}$. Njen tok dobijamo (v.sl.109) ako pustimo da se trougao OMN obrće oko tačke O.

Pr.(2). $y = \frac{1}{2+\cos x} + \frac{3}{2} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

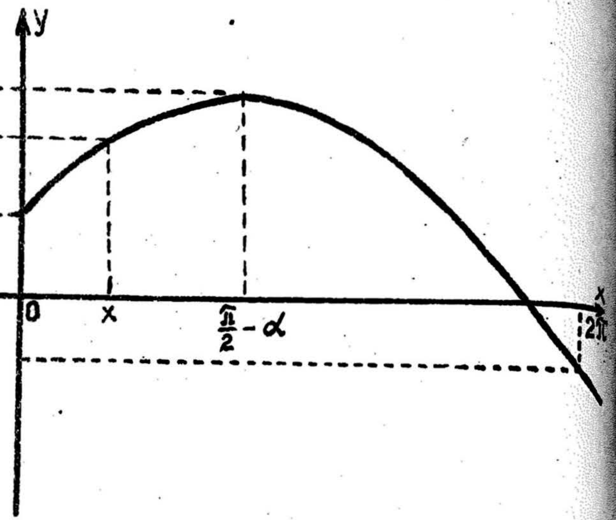
Stavimo

$$u = 2+\cos x \quad \text{i} \quad v = -\frac{3}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

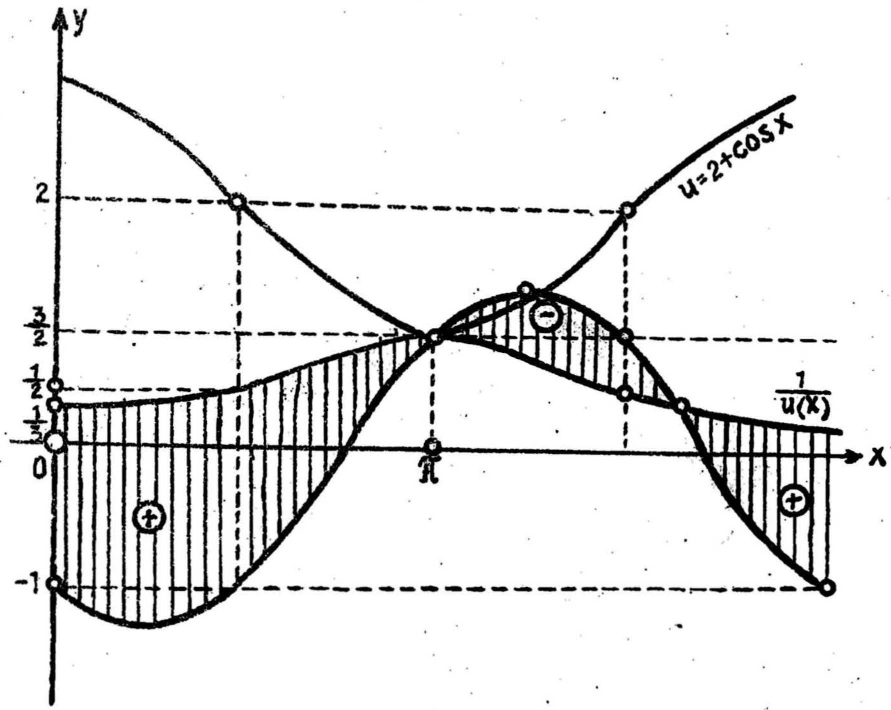
$$\therefore \quad y = \frac{1}{u} - v .$$



Sl.108



Sl.109



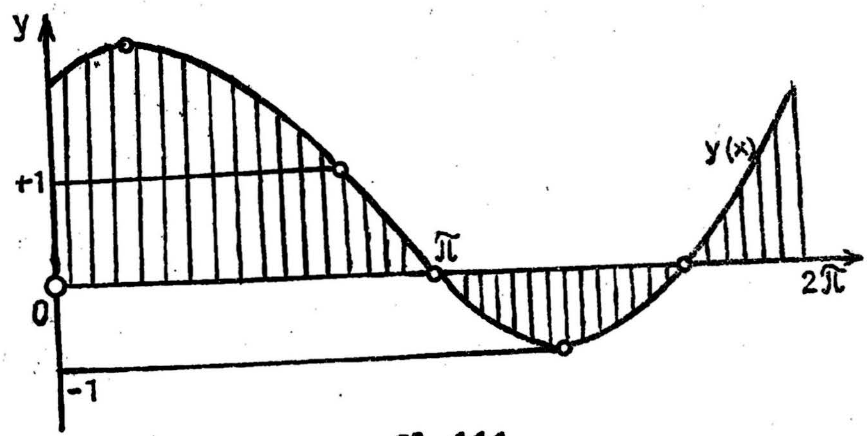
Sl.110

Na sl.110 dati su diagrami funkcija

$$u(x),\ \frac{1}{u(x)} \quad i \quad v(x)$$

Šatirani deo izmedju diagrama funkcija

$\frac{1}{u(x)}$ i $v(x)$ sveden je u sl.111 na X-osu što daje diagram funkcije $y(x)$.



Sl.111

Pr.(3). $y = 4 \sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Iz obrazaca 6.6.(i) i (ii) za cos zbira i razlike lukova sledi oduzimanjem

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b).$$

Prema tome je

$$y = 4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x = 2\cos\frac{\pi}{3} - 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right),$$

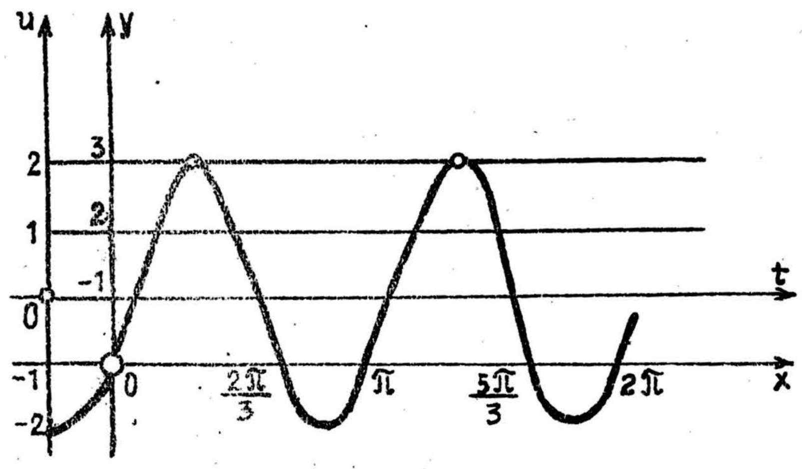
$$\therefore \quad y = 1 - 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Stavljajući

$$u = y - 1 \quad i \quad t = x + \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad u = -2 \cos 2t$$

Diagram funkcije $u(t)$ dat je na slici 112 a iz njega neposredno dobijamo diagram funkcije $y(x)$ translacijom koordinatnog sistema za $\frac{\pi}{6}$ na desno i za $\underline{1}$ na dole.



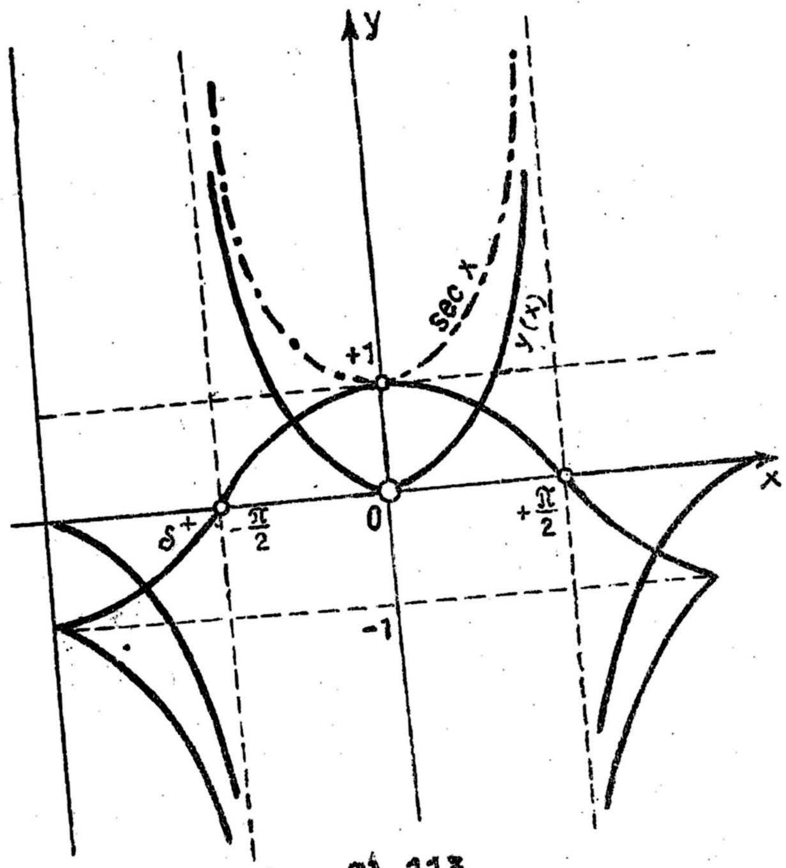
Sl.112

<u>Pr.(4)</u>. <u>$y = \sin x \operatorname{tg} x$</u>.

Kako je

$$y = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \sec x - \cos x$$

to se diagram date funkcije u razmaku $(-\pi, +\pi)$ dobiva kao što je to prikazano na sl.113. Primetimo da je $y(x)$ parna, a $y(x-\frac{\pi}{2})$ neparna funkcija, tj. X-osa je osa simetrije, a tačka $x = \frac{\pi}{2}$ je središte simetrije njenog diagrama.



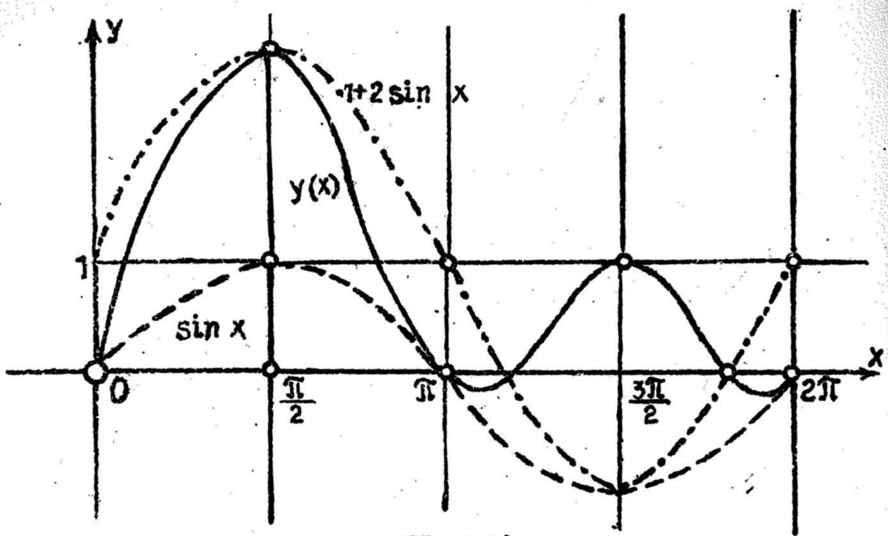
sl.113

<u>Pr.(5)</u>. <u>$y = \sin x(1+2\sin x)$</u>.

Na sl.114 izvučeni su crtasto diagrami funkcija $\sin x$ i $1 + 2 \sin x$, iz kojih neposredno sledi diagram njihova proizvoda.

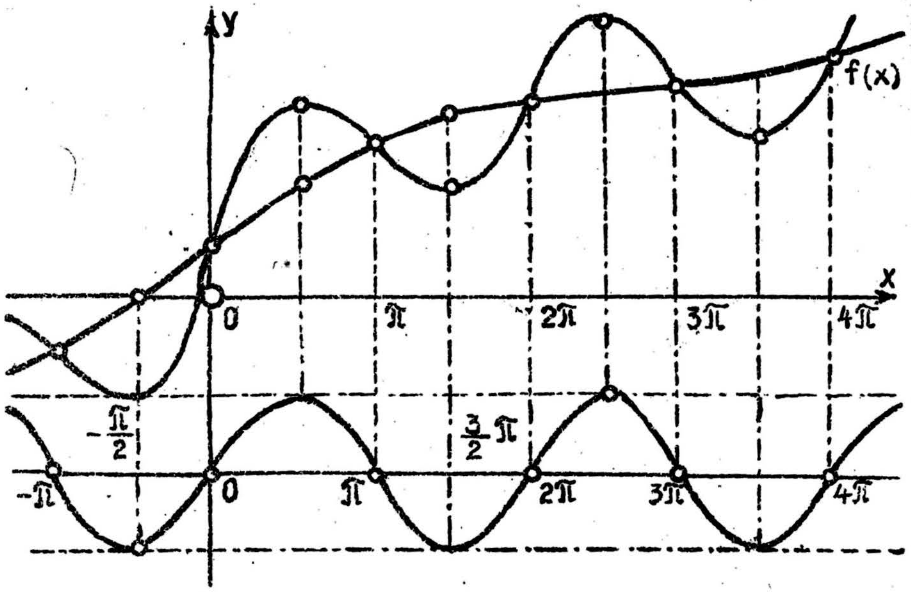
<u>(11)</u>. <u>$y = f(x) + \sin x$</u>.

Ako je data funkcija u obliku zbira jedne periodične i jedne neperiodične funkcije, ili dve



Sl.114

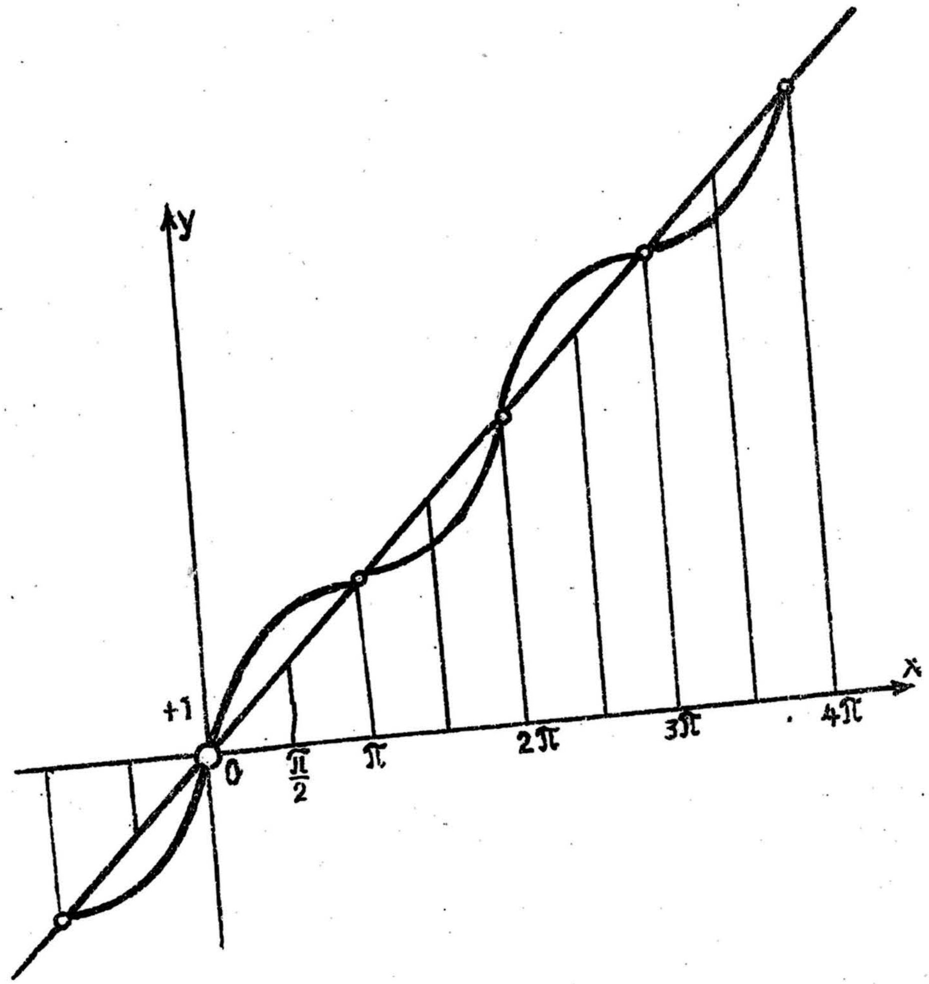
periodične funkcije sa raznim periodama,treba najpre konstruisati diagram neperiodične funkcije,odnosno one periodične funkcije čija je perioda veća i njene ordinate periodično povećavati,odnosno smanjivati za ordinate druge funkcije(v.sl.115).



Sl.115

Pr.(6). $y = x + \sin x.$

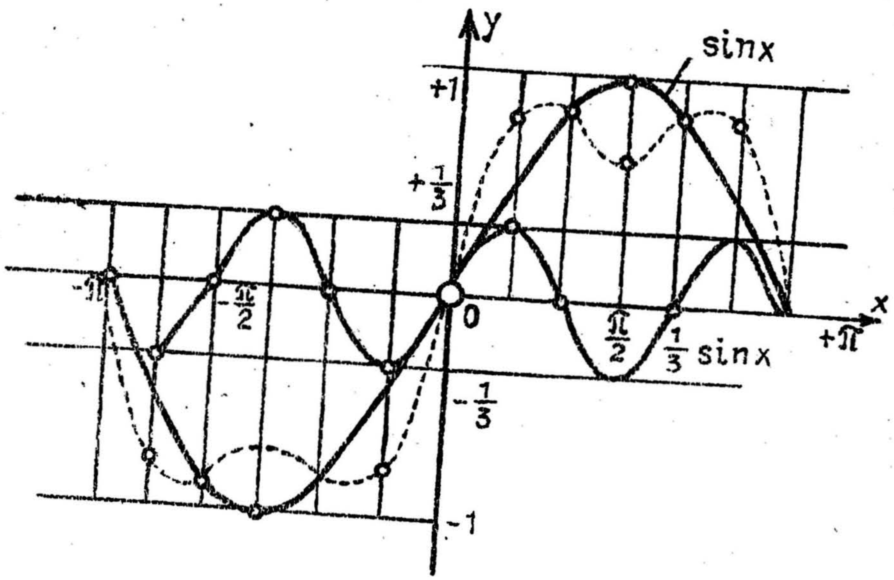
Diagram ove funkcije je talasasta kriva koja se obvija oko prave $y = x$, presecajući je u tačkama $x = \pm k\pi$, $k = 0,1,2,........$(vidi sl.115).



Sl.116

Pr.(7). $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x.$

Kako funkcija $u(x) = \sin x$ ima periodu 2π, a funkcija $v(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$ ima periodu $\frac{2\pi}{3}$ te će i funkcija $y(x)$ biti periodična sa periodom 2π. Ona je neparna, jer su $u(x)$ i $v(x)$ neparne funkcije i njen diagram u razmaku $(-\pi, +\pi)$ dobijamo ako ordinatama diagrama funkcije $u(x)$ dodamo ordinate diagrama funkcije $v(x)$ (v.sl.117)



Sl.117

(iii) $y = f(x)\sin x.$

Kako je

$$|\sin x| < 1$$

i

$$\sin(\pm k\pi) = 0, \quad \sin(\pm 2k\pi + \tfrac{\pi}{2}) = 1$$

$$\sin(\pm 2k\pi + 3\tfrac{\pi}{2}) = -1 \text{ za svako } k = 0,1,2,\ldots..$$

te je

$$|y(x)| \leq |f(x)|$$

i

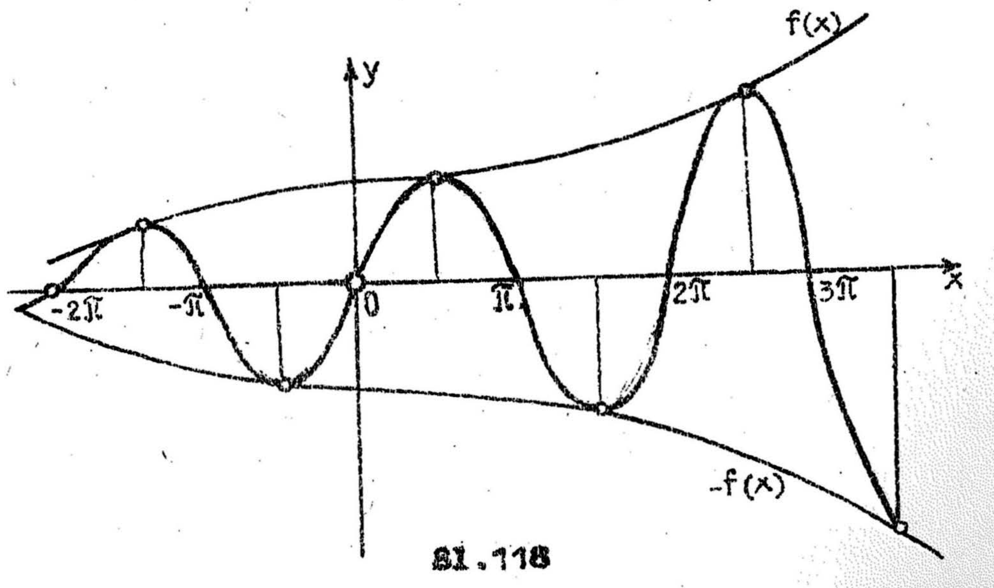
$$y(\pm k\pi) = 0, \quad y(\pm 2k\pi + \tfrac{\pi}{2}) = f(\pm 2k\pi + \tfrac{\pi}{2})$$

$$y(\pm 2k\pi + 3\tfrac{\pi}{2}) = -f(\pm 2k\pi + 3\tfrac{\pi}{2}) \text{ za } k = 0,1,2,..$$

Prema tome diagram funkcije $y(x)$ se stalno nalazi izmedju diagrama funkcija $f(x)$ i $-f(x)$, dodiruje čas jedan čas drugi diagram u tačkama

$x = \pm 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ i $x = \pm 2k\pi + 3\frac{\pi}{2}$ presecajući X-osu

u tačkama $x = \pm k\pi$, $k = 1,2,3,\ldots\ldots$(v.sl.118)



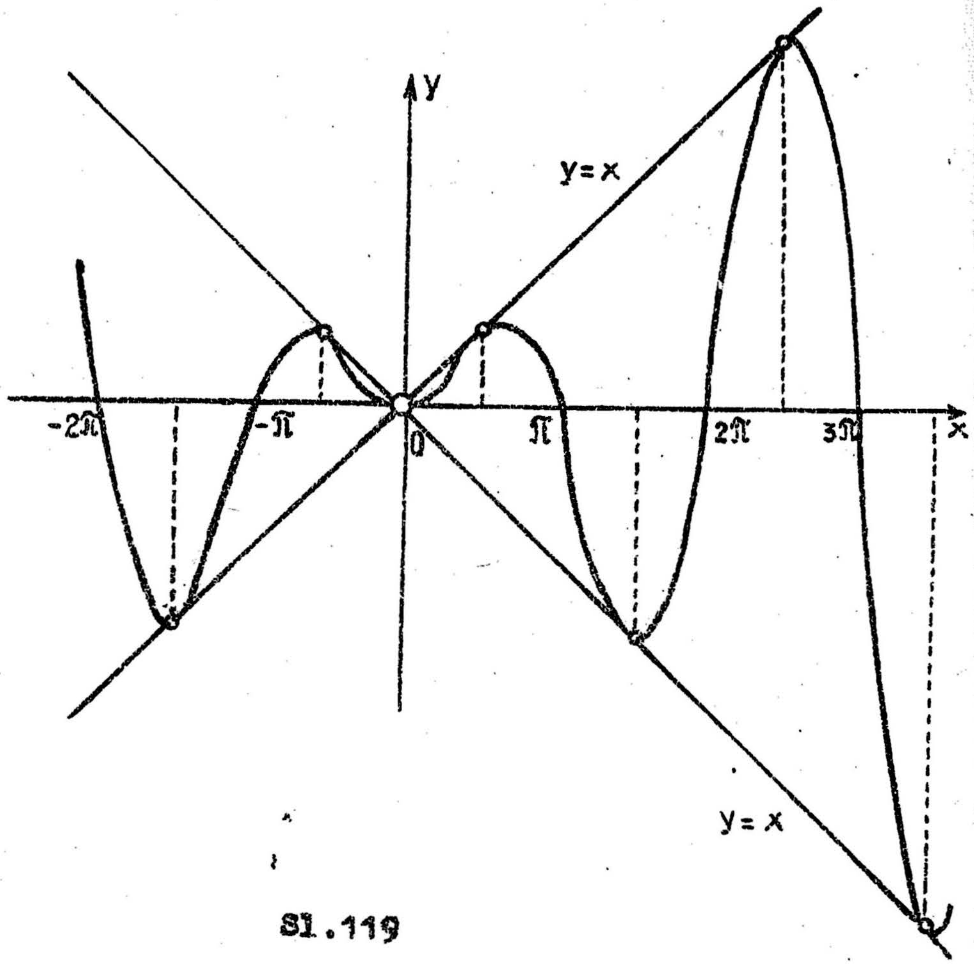
Sl.118

Pr.(8). $y = x \sin x.$

$y(x)$ je parna funkcija. Kako je

$$y(x) \sim x^2, \quad x \to \pm 0,$$

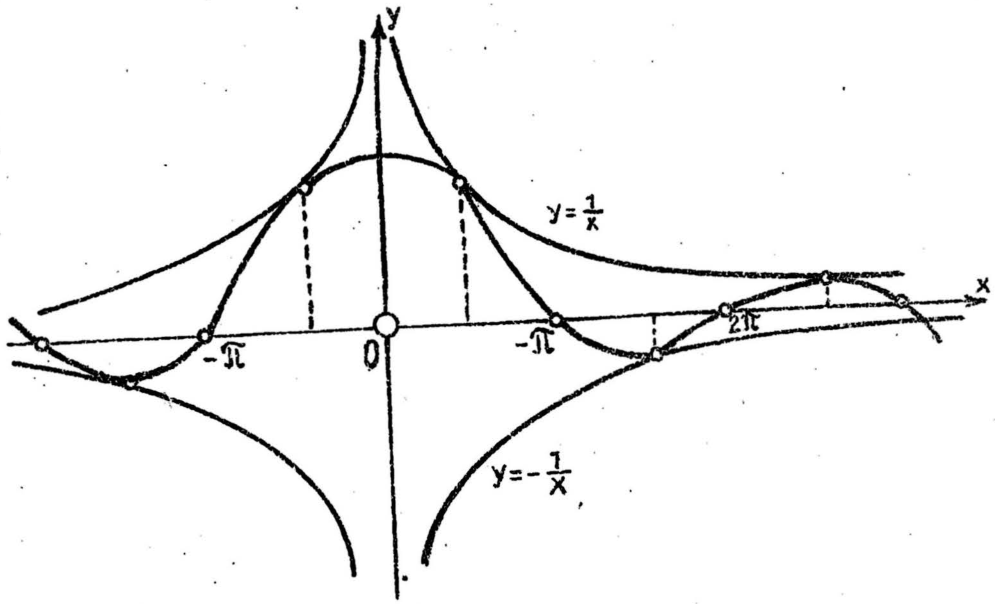
to je $x = 0$ nula drugog reda, tako da diagram te funkcije dodiruje X-osu u početku, nalazeći se pri tome stalno izmedju pravih $y = x$ i $y = -x$ (v.sl.119).



Sl.119

Pr.(9). $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

$y(x)$ je parna funkcija. Kako je $|y(x)| < 1$ i $y(x) \to 1$, $x \to \pm 0$, to njen diagram preseca Y-osu za $y = 1$, nalazeći se za ostalo x izmedju hiperbola $y = \dfrac{1}{x}$ i $y = -\dfrac{1}{x}$ (v.sl.120).



Sl.120

Zadaci.

Skiciraj diagrame funkcija :

1. $\sin^2 x \cos x$; 2. $3 \cos x + 4 \sin x$;

3. $\sin x + \cos x$; 4. $3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x$;

5. $\sin x \cos^3 x$; 6. $\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x$;

7. $\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$; 8. $\sin^2 x - 2\cos x$;

9. $\cos x \cos(x + \frac{\pi}{3})$; 10. $-\cos x \operatorname{cotg} x$;

11. $\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; 12. $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$; 13. $\sec x + \operatorname{cosec} x$;

14. $\frac{\sin x \cos x + 1}{\cos x}$;

15. $\sin x + \cos x + \sin x \cos x =$

$= (1+\sin x)(1+\cos x) - 1$;

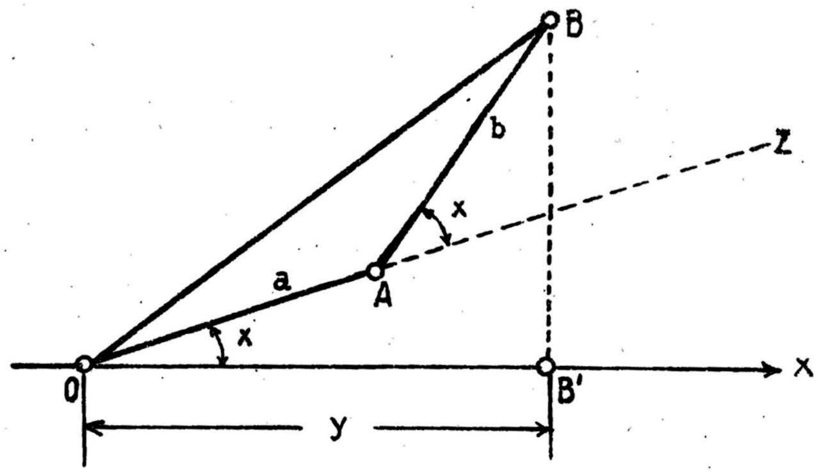
16. $2\sin x + \sin 2x$; 17. $3\sin x + \cos 2x$;

18. $x + \cos x$; 19. $\sqrt{x}\sin x$; 20. $\frac{x}{1+x^2}\sin x$;

21. $x - \operatorname{tg} x$; 22. $\frac{\sin x}{1+x^2}$; 23. $x\cos x - \sin x$;

24. $\sin^2 x(1+\cos^2 x)$; 25. $\sqrt{x \sin x}$.

26. Iz tačke O povučena je duž $OA = a$ koja zaklapa ugao x sa orientisanom pravom OX. Iz tačke A povučena je duž $AB = b$, koja zaklapa ugao x sa produženjem duži OA. Ispitaj kako se menja projekcija $y(x)=OB'$ duži OB, na orientisanu pravu OX, dok x varira od 0 do 2π. (vidi vežbu 6.11.9.) (vidi sliku 121).



Sl.121

6.9. Funkcije arcus sinus i arcus cosinus

(1) Inverzna funkcija $f(x)$ funkcije $\sin x$ definisana je jednačinom

$$\sin y = x ,$$

zove se arcus sinus i označava sa

$$y = \arcsin x \quad \text{ili} \quad y = \sin^{(-1)}x ,$$

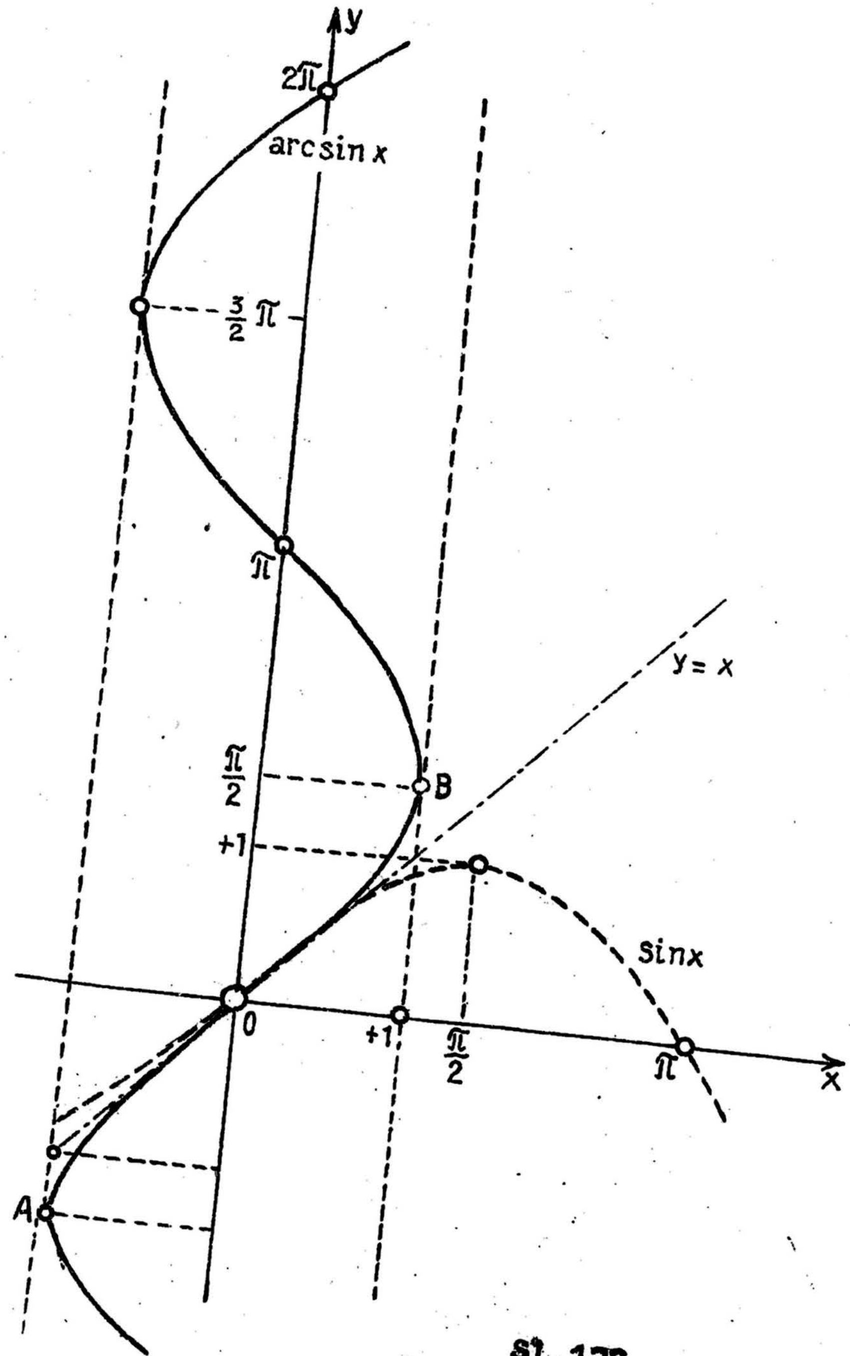
tj. iz

$$\sin y = x \quad \therefore \quad y = \arcsin x .$$

y je luk čiji je sinus jednak x.

Diagram funkcije $\arcsin x$ dat je na slici 122. To je kriva koja je simetrična sinusoidi u odnosu na pravu $y = x$.

Iz sl.122 vidimo da je funkcija $\arcsin x$ definisana samo u razmaku $(-1,+1)$ i da za svako x



Sl.122

oveg razmaka ona uzima beskrajno mnogo vrednosti od kojih se samo dve nalaze izmedju <u>0</u> i <u>2π</u>, a ostale se razlikuju od ovih vrednosti za $\pm 2k\pi$, $k = 1,2,3,\ldots\ldots$

Od ovih lukova svega se jedan nalazi izmedju $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$. Taj luk je odredjena i neprekidna funkcija <u>x</u>-a u razmaku $(-1,+1)$, koja monotona raste od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$ dok <u>x</u> raste od -1 do $+1$, i zove se <u>glavna vrednost funkcije</u> <u>arc sin x</u>. To je ona funkcija koja se obično podrazumeva pod znakom <u>arc sin x</u>, a njen diagram je pretstavljen na slici 122 lukom od tačke <u>A</u> do tačke <u>B</u>.

<u>Pr.(1)</u>. Koje vrednosti ima funkcija

$$y = \arcsin x \quad \text{za}$$

$$1^\circ\ x = 0\ ;\quad 2^\circ\ x = 1\ ;\quad 3^\circ\ x = \frac{1}{2}\quad ?$$

1° $\arcsin 0 = \pm k\pi,\quad k = 0,1,2,\ldots\ldots;$

glavna vrednost je $y = 0$.

2° $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\quad k = 0,1,2,\ldots\ldots;$

glavna vrednost je $y = \frac{\pi}{2}$.

3°

$$\arcsin\frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ \frac{5\pi}{6} \pm 2k\pi, \end{cases} \qquad k = 0,1,2,\ldots\ldots;$$

glavna vrednost je $y = \frac{\pi}{6}$

(ii) Inversna funkcija $y(x)$ funkcije $\underline{\cos x}$ definisana je jednačinom

$$\cos y = x$$

i obeležava se sa

$$y = \operatorname{arc} \cos x \quad \text{ili} \quad y = \cos^{(-1)} x \;;$$

dakle iz

$$\cos y = x \quad \therefore \quad y = \operatorname{arc} \cos x .$$

Njen diagram dat je na sl.123.Otuda sledi da je i funkcija $\underline{\operatorname{arc} \cos x}$ definisana samo u razmaku $(-1,+1)$ i da za sve $\underline{x}$ toga razmaka ima beskrajno mnogo vrednosti.Njena **glavna vrednost** nalazi se izmedju $\underline{0}$ i $\underline{\pi}$; to je najmanja pozitivna vrednost od $\underline{\operatorname{arc} \cos x}$. Ona monotono opada od $\underline{\pi}$ do $\underline{0}$ dok $\underline{x}$ raste od -1 do $+1$. To je deo diagrama na sl.123,koji se nalazi izmedju tačaka $\underline{A}$ i $\underline{B}$.

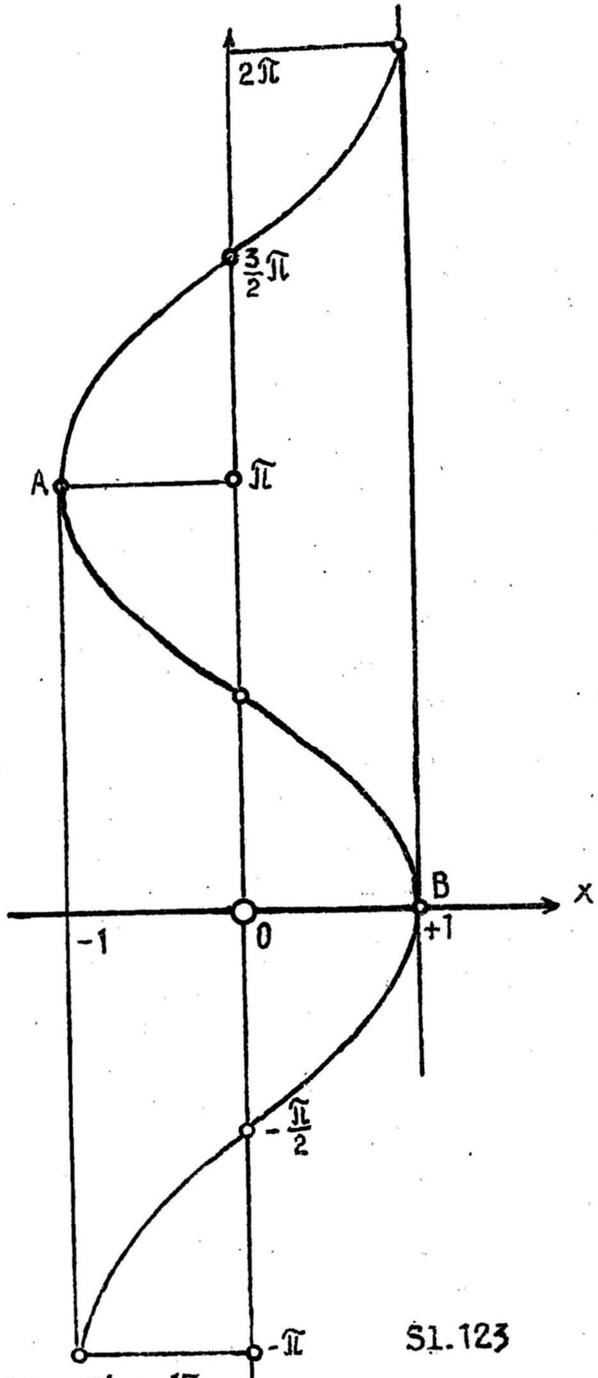
(iii) Iz jednačine

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y = x$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} - y = \operatorname{arc} \cos x \quad \text{i} \quad y = \operatorname{arc} \sin x ,$$

otuda

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} .$$



Sl.123

Dakle izmedju glavnih vrednosti ovih funkcija postoji veza

$$\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin } x.$$

(v.sl.124).

Zadaci.

Pokaži da je

1. $2 \text{ arc sin } x = \text{arc sin } (2x\sqrt{1-x^2})$ za $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\text{arc sin } \frac{24}{25} = 2 \text{ arc sin } \frac{3}{5}$;

3. $\text{arc sin } x \sim x$ kad $x \to \pm 0$;

4. $\text{arc cos } x \sim \sqrt{2}\,(1-x)^{1/2}$ kad $x \to 1$.

Koje su od sledećih funkcija parne, a koje neparne :

5. arc sin x ; 6. $\text{arc cos } x - \frac{\pi}{2}$; 7. x arc sin x

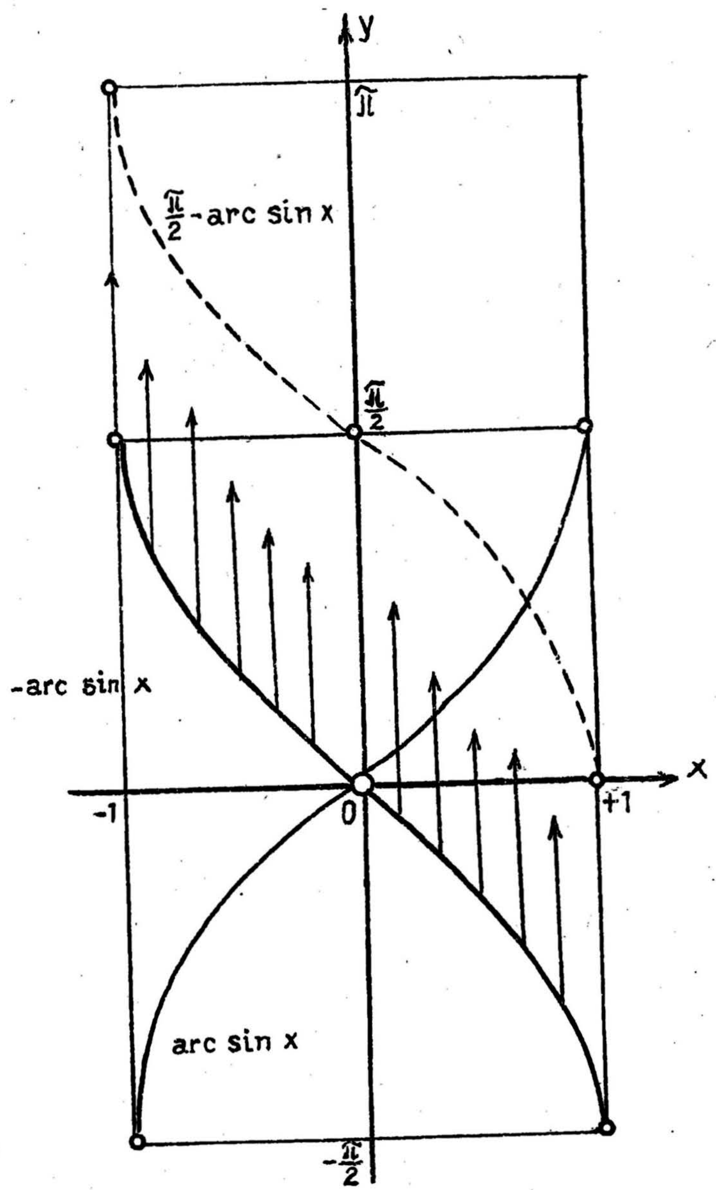
Nacrtaj diagrame funkcija:

8. $\sqrt{\text{arc cos } x}$; 9. $(1-x^2)\text{arc sin } x$;

10. $\text{arc sin}^2 x$; 11. x arc sin x .

6.10. Funkcije arcus tangens i arcus cotangens

(1) Inversna funkcija $y(x)$ funkcije tg x definisana je jednačinom $\text{tg } y = x$.



Sl.124

Ona se zove **arcus tangens** i označava sa

$$y = \text{arc tg } x \quad \text{ili} \quad y = \text{tg}^{(-1)}x$$

tj.iz

$$\text{tg } y = x \quad .\dot{.}. \quad y = \text{arc tg } x.$$

Iz diagrama funkcije **tg x** vidimo da diagram funkcije **arc tg x** ima oblik slike 125. Otuda sledi da je funkcija **arc tg x** definisana za sve vrednosti **x**-a i da ima beskrajno mnogo vrednosti koje se sve medjusobno razlikuju za $\pm k\pi$, $k = 1,2,\dots\dots\dots$, ona koja je po apsolutnoj vrednosti najmanja nalazi se izmedju $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$. To je **glavna vrednost** funkcije **arcus tg x**; ona monotono raste od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$ dok **x** raste od $-\infty$ do $+\infty$, a prave $y = \pm\frac{\pi}{2}$ su horizontalne asimptote njenog diagrama.

(ii) Inversna funkcija y(x) funkcije **cotg x** je definisana jednačinom

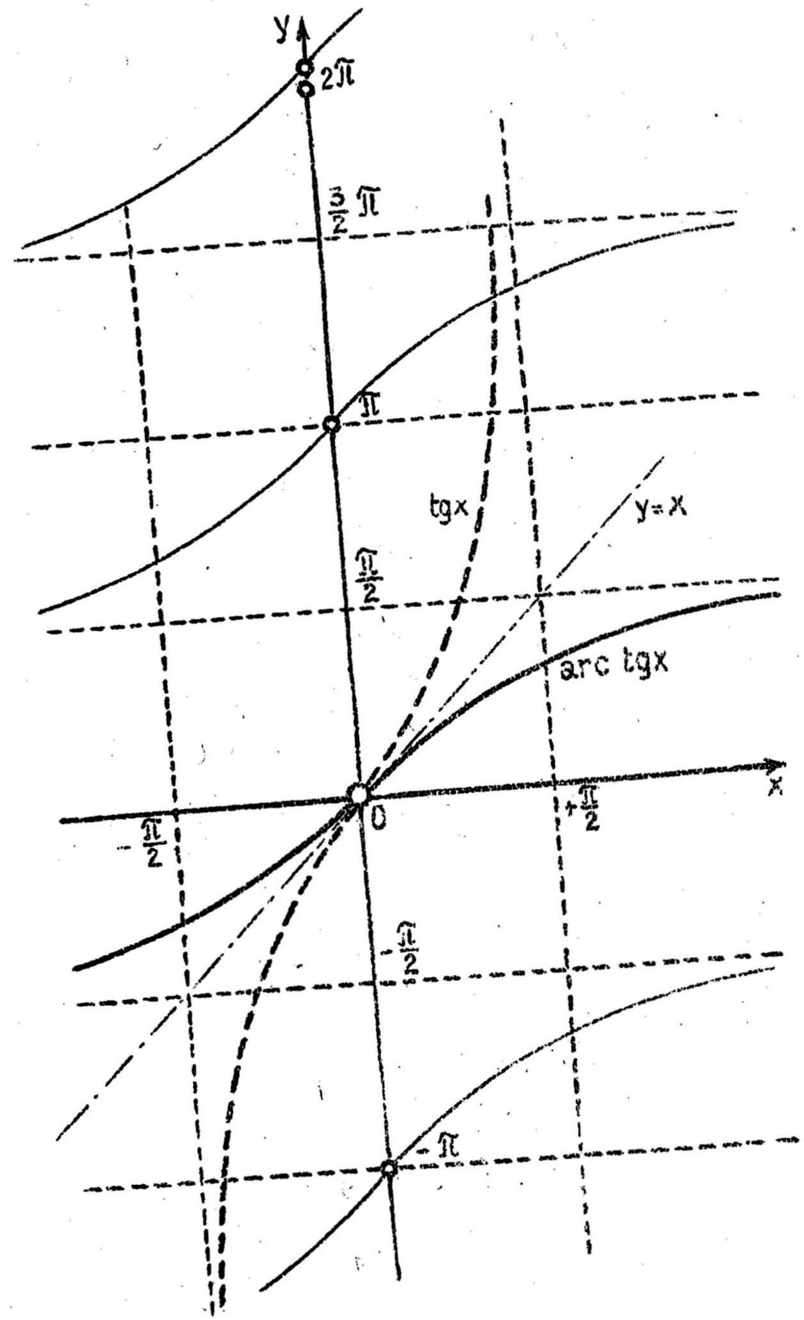
$$\text{cotg } y = x ;$$

ona se zove **arcus cotangens** i obeležava sa

$$y = \text{arc cotg } x \quad \text{ili} \quad y = \text{cotg}^{(-1)}x,$$

tj.iz

$$\text{cotg } y = x \quad .\dot{.}. \quad y = \text{arc cotg } x .$$



Sl. 125

Diagram ove funkcije dat je na sl.126. Ona ima beskrajno mnogo vrednosti, a njena glavna vre nost je ona koja se nalazi izmedju 0 i π. Ona monotono opada od π do 0 dok x raste od $-\infty$ do $+\infty$.

(iii) Iz jednačine

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \operatorname{tg} y = x$$

dobijamo vezu izmedju glavnih vrednosti funkcije arc tg x i arc cotg x koja glasi

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x .$$

Zadaci.

Pokaži da je:

1. $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$;

2. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$;

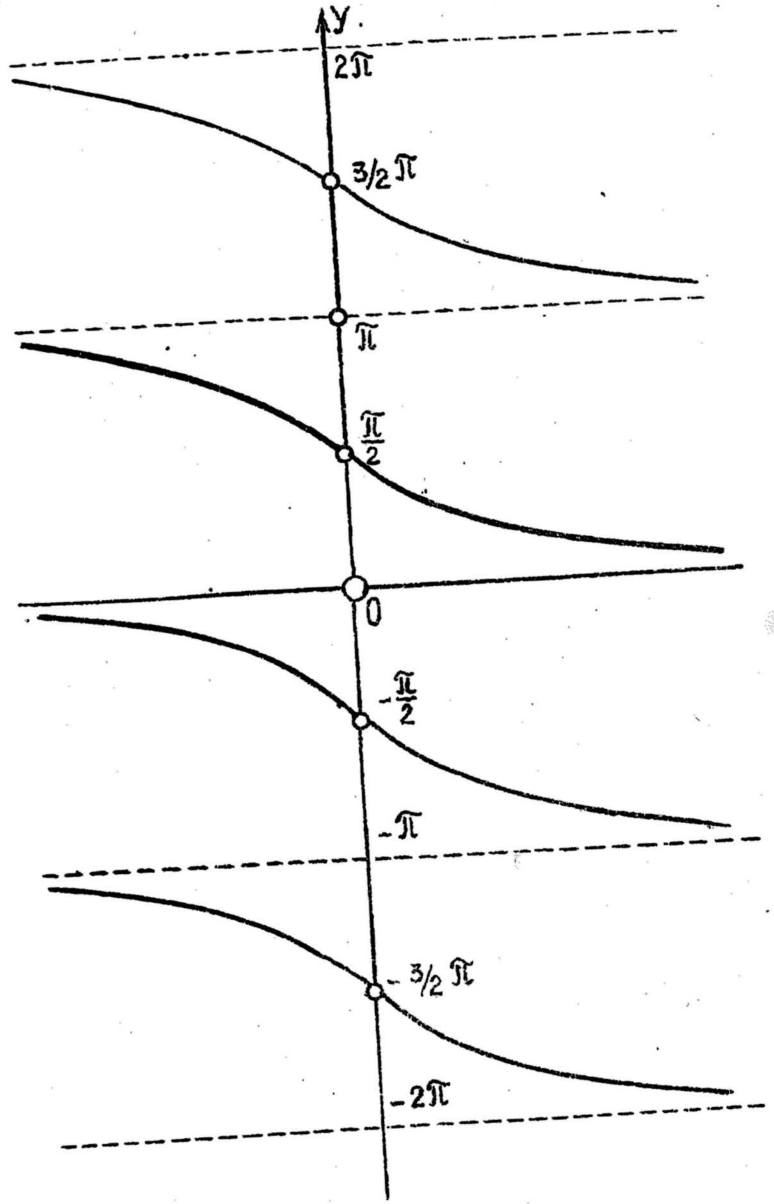
3. $\operatorname{arc\,tg} x \to x$ kad $x \to 0$;

4. $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$;

5. $\operatorname{arc\,tg} x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$ za veliko x .

Koje su od funkcija parne a koje neparne:

6. $\operatorname{arc\,tg} x$; 7. $x \operatorname{arc\,tg} x$?



Sl.126

Nacrtaj diagram sledećih funkcija :

8. $\frac{\text{arc tg } x}{x}$; 9. arc $tg^2 x$; 10. arc tg

11. sin x arc tg x .

6.11. V e ž b e.

Pokaži da je

1. $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$; $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$; $tg\frac{\pi}{8}$

2. $\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{8}$; $\cos^2\frac{\pi}{12} =$

$= \frac{(1-\sqrt{3})^2}{8}$; $tg\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$;

3. $\cos\frac{\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24} = \frac{3+\sqrt{2}}{4}$; $\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{24} =$

$\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$; $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24} =$

$tg\frac{\pi}{24} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-2)$; $tg\frac{\pi}{24} = (\sqrt{2}-1)($

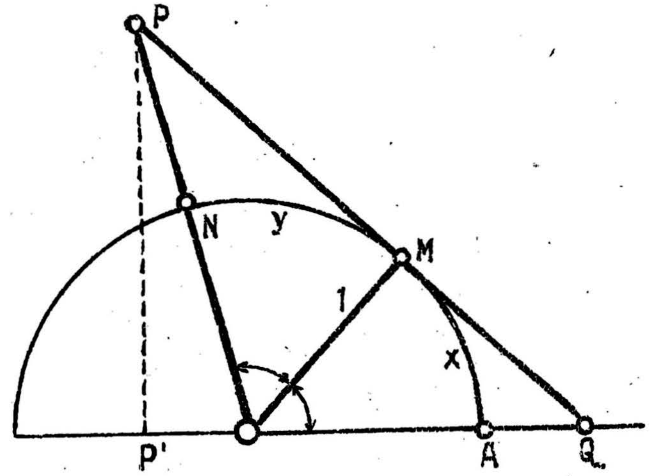
4. Izvedi obrasce

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$



Sl.127

5. Na sl.125 je OM = 1, $\measuredangle$ AOM = x i $\measuredangle$ MON = y ; izražavajući površinu trougla OPQ na dva načina, pokaži da je

$$tg\, x + tg\, y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

Na sličan način izvedi analogne obrasce za zbir i razliku tangensa i cotangensa lukova x i y

6. Pokaži da je

$$tg(a+b) = k(tg\, a + tg\, b)$$

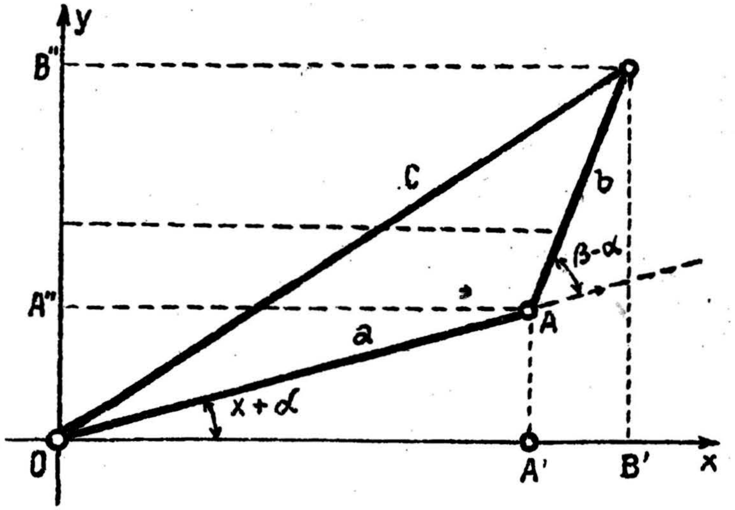
gde je

$$2k = 1 + \frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)}$$

7. Ako su strane trougla ABC date izrazima

$$AB = 1+2x,\ BC = 1+x+x^2 \text{ i } CA = x^2-1,$$

pokaži da za svako $x > 1$ ugao BAC iznosi 120°.



Sl.128

8. Duž OA = a zaklapa ugao $x+\alpha$ sa orientisanom pravom OA', a duž AB = b zaklapa ugao $\beta-\alpha$ sa produženjem prave OA (v.sl.128). Projektujući najpre duž OC = c, a zatim duži OA i AB na orientisane prave OA' i OA'' pretvori izraze

$$a\cos(x+\alpha)+b\cos(x+\beta)$$

i $$a\sin(x+\alpha)+b\sin(x+\beta)$$

Puštajući da x varira od 0 do 2π, nacrtaj diagrame ovih funkcija.

9. Stavljajući

$$x=\sin t \quad i \quad y=\sin\frac{t}{2}$$

pokaži da iz

$$\sin t=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \quad i \quad 1=\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}.$$

$$\therefore \quad 2y(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$$

Na osnovu ovih veza i upotrebom trigonometrijskog kruga konstruiši tačku po tačku diagrama funkcije $y(x)$. (v.zad.6.8.26).

Skiciraj diagrame sledećih funkcija:

10. $\sin x\sin 3x$; 11. $\sin x\sin nx$; 12. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$;

13. $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$; 14. $\cos x\cos(x-a)$, gde je a oštar ugao ;

15. $\sin^2 x+\sin^2(x-a)$, gde je a oštar ugao ;

16. $6\cos^2 x-4\sin x\cos x+3\sin^2 x$. Ovaj izraz pretvori najpre u $(2\cos x-\sin x)^2+2$;

17. $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(x+a)}$, gde je a oštar ugao ;

18. $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$;

19. $2\sec x-\operatorname{tg} x$; 20. $a\sin x+\sin 3x$, $a>0$;

21. $x^2\sin x$; 22. $x^2-2\sin x$; 23. $x^2\dfrac{\sin x}{1+x^2}$

24. $x\sin x+4\cos x$; 25. $x\sin\frac{1}{x}$;

26. Neka je $y(\operatorname{tg} x)=\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$; stavljajući $\operatorname{tg}x=t$ skiciraj diagram funkcije $y(t)$.

27. Pokaži da iz

$$a = \frac{\sin x}{\sin y} \quad i \quad x + y = \alpha,$$

$$\therefore \quad tg\frac{x-y}{2} = \frac{a-1}{a+1}\, tg\frac{\alpha}{2}.$$

Na osnovu ovoga izračunaj x i y kad je

$$\sin x = 2 \sin y \quad i \quad x+y = 120^0$$

28. Pokaži da je za $0 \leq x \leq \pi$

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0.$$

29. Čemu teži $tg\, x\, tg\, 2x$ kad $x \to \frac{\pi}{2} \pm 0$?

30. Pokaži da je za male lukove x

$$tg\, 2x \approx 2\; tg\, x + 2\; tg^3 x \quad i$$

$$tg\frac{x}{2} \approx \frac{1}{2}\, tg\, x - \frac{1}{8}\, tg^3 x.$$

Šta se dobija ako se u drugom obrascu zameni x sa $2x$, a zatim $tg\, 2x$ i $tg^3 2x$ zamene sa približnim vrednostima koje dobijamo iz prvog obrasca .

31. Ako je $\sin x > 0$ i ako se stavi

$$\sin_1 x = \sin x, \quad \sin_2 x = \sin(\sin x),$$

$$\sin_3 x = \sin_2(\sin x), \text{ i uopšte}$$

$$\sin_n x = \sin_{n-1}(\sin x), \quad n = 2,3,\ldots\ldots$$

pokaži da

$$\sin_n x \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

32. Polazeći od identiteta

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2\sin\frac{a}{2}}$$

vidi čemu teži izraz

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\ldots\cos\frac{a}{2^n} \quad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

Šta dobivamo kad je $a = \frac{\pi}{2}$?

33. Pokaži da

$$\left(1-tg^2\frac{a}{2}\right)\left(1-tg^2\frac{a}{2^2}\right)\ldots\left(1-tg^2\frac{a}{2^n}\right) \to \frac{a}{tg\, a}$$

$$\text{kad} \quad n \to \infty.$$

Nacrtaj diagrame sledećih funkcija:

34. $f(x)\, \sin^2 x$; 35. $f(x)\, \cos^2 x$; 36. $\frac{f(x)}{1+\sin^2 x}$

37. Ako u jednačini

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} a = \operatorname{arc\,tg} \frac{ax}{1-ax}$$

pustimo da $a \to \frac{1}{x} \pm 0$, dobijamo

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$$

38. Pokaži da je

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} .$$

GLAVA VII

EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA.

7.1. Definicija.

(i) Eksponencijalna funkcija

$$f(x) = a^x$$

sa osnovom (bazom) a za koju pretpostavljamo uvek da je pozitivna definisana je na sledeći način:

1°
$$a^x = \begin{cases} \overbrace{a \cdot a \ldots\ldots\ldots a}^{n} & \text{kad je } x=n \text{ ceo broj} \\ 1 & \text{kad je } x=0 \text{ ;} \end{cases}$$

2° $a^x = \sqrt[q]{a^p}$ kad je $x = \frac{p}{q}$ racionalan broj;

Ako x nije racionalan broj tada je

3° $a^x \approx a^{\xi}$ kad je $x \approx \xi$.

tj. svaka približna vrednost ξ broja x daje i jednu približnu vrednost a^{ξ} broja a^x ; ako je x negativan broj tada je

4° $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ $x < 0$

Ovim je eksponencijalna funkcija definisana za svaku pozitivnu osnovu a i svako x razmaka $(-\infty + \infty)$.

(ii) Iz ove definicije sledi osnovna osobina eksponencijalne funkcije tj.njena <u>adiciona teorema</u> koja glasi:

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{za svako } \underline{x} \text{ i } \underline{y}.$$

A otuda

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \text{za svako } \underline{x} \text{ i } \underline{y}.$$

(iii) Proizvod eksponencijalnih funkcija različitih osnova $\underline{a}$ i $\underline{b}$ je eksponencijalna funkcija čija je osnova jednaka proizvodu ab osnova, tj.

$$a^x b^x = (ab)^x \quad \text{za svako } x \text{ i } a > 0,\ b > 0.$$

(iv) Bez ograničenja možemo uvek uzeti da je osnova eksponencijalne funkcije veća od jedinice; jer ako je, na primer,

$$b < 1,$$

tada je

$$a = \frac{1}{b} > 1,$$

$$\therefore \quad b^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}.$$

Dakle se eksponencijalna funkcija sa osnovom manjom od 1 može uvek svesti na eksponencijalnu funkciju sa osnovom većom od 1, ali sa negativnim eksponentom.

<u>Zadaci</u>.

Kolika je osnova sledećih eksponencijalnih funkcija:

<u>1.</u> 2^{2x} ; <u>2.</u> $2^{x/2}$; <u>3.</u> $\dfrac{3^{2x}}{2^{3x}}$;

<u>4.</u> $\dfrac{a^{x/2}}{a^{x/3}}$; <u>5.</u> $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}\right)^{x\sqrt{2}}$?

<u>6.</u> Zašto se u definiciji eksponencijalne funkcije mora pretpostaviti da je ona pozitivna?

Da li se sledeće funkcije mogu smatrati kao eksponencijalne :

<u>7.</u> a^{x^2} ; <u>8.</u> $a^{1/x}$; <u>9.</u> $\dfrac{(\sqrt{3}+1)^x}{2^x}$ uporedi

sa $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\right)^x$?

<u>7.2. Osobine eksponencijalne funkcije</u>

(i) Ako je $a > 1$, eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$ <u>monotono raste</u> u celom razmaku $(-\infty, +\infty)$

Iz

$$a > 1,$$

$$\therefore \quad a^h > 1 \quad \text{za svako } h > 0;$$

Prema tome je

$$f(x+h) - f(x) = a^{x+h} - a^x =$$

$$= a^x(a^h - 1) > 0 \quad \text{za } h > 0.$$

(ii) Prema definiciji je

$$a^0 = 1,$$

ali i

$$a^x \to 1 \quad \text{kad} \quad x \to \pm 0,$$

za svako $a > 0$.

Kako je

$$(1+h)^{1/n} \leq 1 + \frac{h}{n}$$

(v.vežbu 1.14.30) to je za

$$1 < a = 1+h \quad \text{i} \quad 0 < x < \frac{1}{n}$$

uvek

$$1 \leq a^x \leq a^{1/n} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$$

Ako $x \to +0$ možemo pustiti da $n \to \infty$, prema tome će

$$a^x \to 1 \quad \text{kad} \quad x \to +0.$$

Slično dobijamo da će

$$a^x \to 1 \quad \text{i kad} \quad x \to -0.$$

(iii) Eksponencijalna funkcija

$$f(x) = a^x$$

je <u>neprekidna za svako x</u>.

Prema prethodnom je

$$f(x+h) - f(x) = a^{x+h} - a^x =$$

$$= a^x(a^h - 1) \to 0 \quad \text{kad} \quad h \to \pm 0.$$

(iv) Funkcija $f(x) = a^x$ je <u>konveksna prema dole</u> za svako x i $a > 0$.

Jedna funkcija je konveksna prema dole (v.vežbu 1.14.44.) ako je

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \geq 0;$$

u našem slučaju je

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = a^{x+2h} - 2a^{x+h} + a^x =$$

$$= a^x(a^{2h} - 2a^h + 1) =$$

$$= a^x(a^h - 1)^2 > 0,$$

dakle je

$$a^{x+2h} - 2a^{x+h} + a^x > 0$$

za svako x, h i $a > 0$.

(v) Za $a > 1$ eksponencijalne funkcija

$$a^x \to \infty \quad \text{kad} \quad x \to +\infty$$

i to brže od ma kog stepena od x, tj.kad $x \to \infty$ i

$$\frac{a^x}{x} \to \infty \quad \text{i} \quad \frac{a^x}{x^2} \to \infty \quad \text{itd.}$$

Prema vežbi 1.14.29 je

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \quad \text{za} \quad h > -1;$$

ako stavimo $1+h = a$ biće u toliku pre

$$n(a-1) < a^n.$$

Neka je $x > n$ tada je

$$n(a-1) < a^n < a^x$$

i kad $x \to \infty$ možemo pustiti da i $n \to \infty$, dokle će

$$a^x \to \infty \text{ kad } x \to \infty .$$

Ako u nejednačini (1) zamenimo a sa $a^{1/2}$ ili $a^{1/3}$, ili sa $a^{1/4}$ itd. i tako dobivenu jednačinu dignemo na drugi, treći, četvrti stepen, istim rezonovanjem dobijamo da će uopšte

$$\frac{a^x}{x^k} \to \infty \text{ kad } x \to \infty .$$

i to za svako k.

(vi) Za $a > 1$ eksponencijalna funkcija a^x teži nuli kad $x \to -\infty$, i to brže od ma kog negativnog stepena x-a tj. kad $x \to -\infty$,

$$a^x \to 0 \quad \text{i} \quad xa^x \to 0 \quad \text{i} \quad x^2a^x \to 0 \quad \text{itd.}$$

Iz nejednačine (1) dobijamo da je

$$a^{-n} < \frac{1}{a-1}\,\frac{1}{n} ,$$

Otuda istim postupkom kao u prethodnoj tački dobijamo da

$$x^k a^{-x} \to 0 \quad \text{kad} \quad x \to \infty ,$$

ma kakav bio broj k.

Zadaci.

Pokaži da je počev od neke vrednosti x-a stalno:

1. $x^{100} < 2^x$; 2. $x^{-10} > (0,9)^x$.

Dokaži da

3. $x\, 2^{-\sqrt{x}} \to 0$ kad $x \to \infty$; 4. $x\, 2^{-\sqrt[3]{x}} \to 0$ kad $x \to \infty$;

5. $2^x + 3^{\sqrt{x}} \sim 2^x$ kad $x \to \infty$.

7.3. Diagram eksponencijalne funkcije

(i) Prema napred navedenim osobinama eksponencijalne funkcije

$$f(x) = a^x$$

je za $a > 1$,

1^o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$;

2^o funkcija $f(x)$ monotono raste ostajući konveksna prema dole, tako da diagram eksponencijalne funkcije ima oblik za $a > 1$ kao na sl. 129.

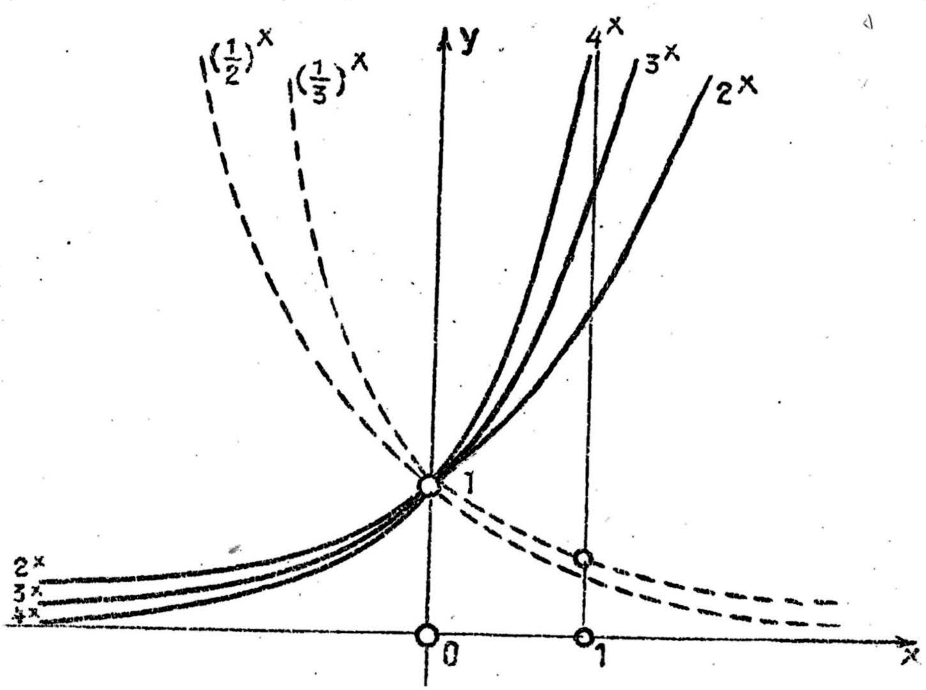
Negativni deo X-ose je asimptota diagrama a ceo diagram se nalazi izmedju nje, jer je

$$a^x > 0 \quad \text{za svako} \quad x .$$

Eksponencijalna funkcija nema nula.

Pr. (1). Kakav je medjusobni položaj diagrama funkcija

$$f(x) = a^x$$



Sl.129

za razne vrednosti osnove $\underline{a}$? (v.sl.129).

1° Kako je

$$f(o) = 1 \quad \text{za svako } \underline{a}$$

to svi ovi diagrami prolaze kroz tačku $x = 0, y = 1$.

2° Iz

$$a > b,$$

$$\therefore \quad a^x > b^x \quad \text{kad je} \quad x > 0,$$

$$\text{i} \quad a^x < b^x \quad \text{kad je} \quad x < 0.$$

3° Ako je osnova $\underline{c}$ manja od 1, eksponencijalna funkcija monotono opada, i ako stavimo

$$c = \frac{1}{a} \quad \text{biće} \quad a > 1$$

$$c^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

Dakle su diagrami funkcija $\underline{c}^x$ i $\underline{a}^x$ simetrični u odnosu na $\underline{X}$-osu.

4° Diagram funkcije $\underline{a}^x$ se svodi na pravu

$$y = 1 \quad \text{kad je} \quad a = 1$$

(ii) Ako je neka funkcija složena iz eksponencijalnih i algebarskih funkcija njen diagram se obično dobija iz diagrama njenih sastavnih funkcija.

Pr.(2). Nacrtaj diagram funkcije

$$f(x) = x\,2^x .$$

Množenjem ordinata diagrama funkcija

$$\underline{x} \quad \text{i} \quad \underline{2}^x ,$$

dobijamo diagram date funkcije (v.sl.130) ako pri tome vodimo računa još i o sledećem.

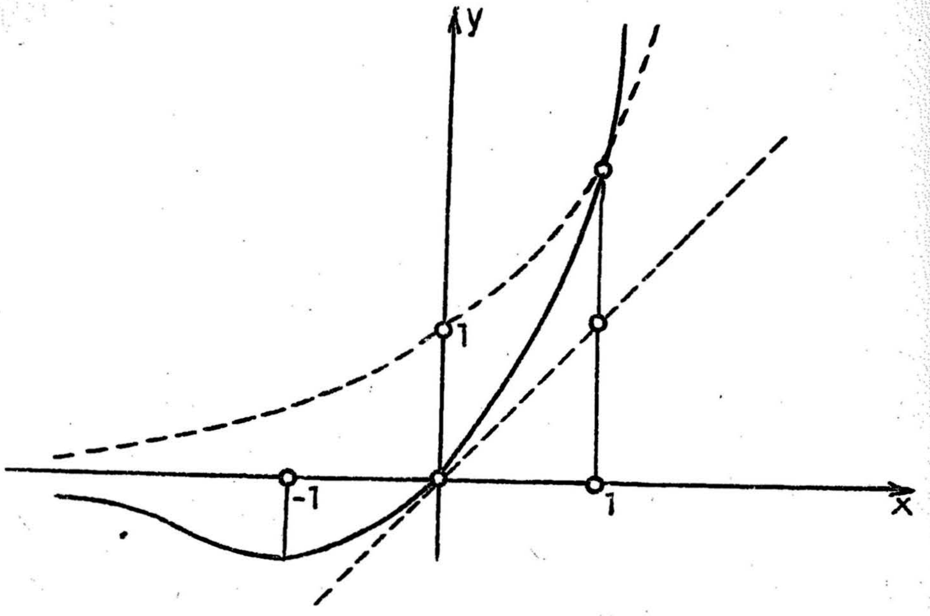
1°
$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{za} \quad x < 0, \\ = 0 & \text{za} \quad x = 0, \\ > 0 & \text{za} \quad x > 0; \end{cases}$$

2°
$$f(x) \longrightarrow \infty \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow \infty ,$$

i monotono raste kad je $x > 0$, jer $\underline{x}$ i $\underline{2}^x$ monotono rastu;

3°
$$f(x) = x \quad 2^x \longrightarrow -0 \quad \text{kad} \quad x \longrightarrow -\infty .$$

(v.7.2.(vi)), dakle je negativni deo $\underline{X}$-ose asimptota i odgovarajuća grana diagrama joj se približava ostajući stalno ispod nje.



Sl.130

4° da prava $y = x$ i diagram funkcije $f(x)$ nemaju drugih zajedničkih tačaka osim tačke $x = 0$ vidimo rešavanjem jednačine

$$x = x\,2^{x}\ ,\ \text{tj.}\ \ x\,2^{x} - x = 0\ ;$$

$$\therefore\ \ x(2^{x} - 1) = 0\ ;$$

$$\therefore\ x = 0\ \ \text{i}\ \ 2^{x} = 1,\ \text{tj.}\ x = 0\ .$$

Zadaci.

Skiciraj diagrame sledećih funkcija:

1. $2^{x} - 1$; **2.** $2-2^{x}$; **3.** $x+2^{x}$; **4.** $2^{x} - x$;

5. $x\,2^{-x}$; **6.** $x^{2} + 2^{x}$; **7.** $x^{2}2^{x}$; **8.** $\dfrac{2^{x} - 2^{-x}}{2}$

9. $\dfrac{2^{x}+2^{-x}}{2}$; **10.** $\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{2^{x}+2^{-x}}$; **11.** $\dfrac{2^{x}}{x^{2}-1}$; **12.** $(x^{2}-1)2^{x}$.

Reši grafički jednačine:

13. $2^{-x} = x$; **14.** $2^{x} = 2x$.

7.4. L o g a r i t a m s k a   f u n k c i j a.

(i) Logaritam broja x je onaj broj kojim treba stepenovati dati broj a da bi smo dobili x; prema tome logaritamska funkcija $y(x)$ je definisana jednačinom

$$a^{y(x)} = x\ .$$

Ova se funkcija zove logaritamska funkcija sa osnovom a i obeležava se sa

$$y(x) = \lg_{a}x.$$

Dakle je logaritamska funkcija inversna funkcija eksponencijalne, tj iz

$$a^{y} = x\quad \therefore\quad y = \lg_{a}x.$$

Pri tome osnova a može biti svaki pozitivan broj $\neq 1$, na primer $10, 2, 3, \sqrt{2}, \frac{1}{2}$, itd.

Logaritmi sa osnovom 10 označavaju se ukratko sa

log

i zovu se dekadni ili **Briggs**-ovi logaritmi.

(ii) Iz definicija sledi:

1° Logaritamska funkcija $\lg_a x$ nije definisana za $x \leq 0$; samo pozitivni brojevi imaju logaritme.

2° $\lg_a 1 = 0$ i $\lg_a a = 1$ i to za svako $a > 0$ i $\neq 1$.

3° Ako je $a > 1$, tada je

$$\lg_a x \begin{cases} > 0 & \text{za} \quad x > 1 \\ < 0 & \text{za} \quad x < 1; \end{cases}$$

brojevi veći od $\underline{1}$ imaju pozitivne, a manji od $\underline{1}$ negativne logaritme.

Ako je osnova $a < 1$, tada je obratno

$$\lg_a x \begin{cases} < 0 & \text{za} \quad x > 1 \\ > 0 & \text{za} \quad x < 1. \end{cases}$$

Zadaci.

Koliko je

1. $\lg_2 \frac{1}{4}$; 2. $\lg_2 \frac{1}{2}$; 3. $\lg_2 1$; 4. $\lg_2 2$;

5. $\lg_2 4$; 6. $\lg_{0,5} \frac{1}{4}$; 7. $\lg_{0,5} \frac{1}{2}$; 8. $\lg_{0,5} 1$;

9. $\lg_{0,5} 2$; 10. $\lg_{0,5} 4$. 11. Pokaži da je

$$\lg_{\sqrt{2}} x = 2 \lg_2 x .$$

7.5. Osobine logaritamske funkcije

Sve dole navedene osobine su neposredna posledica činjenice da je logaritamska funkcija inversna funkcija eksponencijalne.

1° Funkcija

$$f(x) = \lg_a x$$

je definisana samo za $x > 0$ i u tom je razmaku ona neprekidna.

2° Ona monotono raste kad je $a > 1$ a monotono opada kad je $a < 1$ i to za sve $x > 0$.

3° Ona je konveksna prema gore kad je $a > 1$, a prema dole kad je $a < 1$ i to za sve $x > 0$.

4° Ako je $a > 1$,

$$\lg_a x \to \infty \quad \text{kad} \quad x \to \infty ,$$

ali sporije od ma kog korena iz $\underline{x}$ tj.

$$\frac{\lg_a x}{\sqrt{x}} \to 0$$

ili

$$\frac{\lg_a x}{\sqrt[3]{x}} \to 0,$$

ili uopšte

$$\frac{\lg_a x}{\sqrt[n]{x}} \to 0 \quad \text{kad} \quad x \to \infty$$

i to za svako $\underline{n}$.

5^0 Ako je $a > 1$

$$\lg_a x \to -\infty \qquad \text{kad} \qquad x \to +0,$$

i to sporije od recipročne vrednosti ma kog korena iz **x**, tj.

$$\sqrt{x}\,\lg_a x \to 0,$$

ili

$$\sqrt[3]{x}\,\lg_a x \to 0,$$

ili uopšte

$$\sqrt[n]{x}\,\lg_a x \to 0, \quad \text{kad} \quad x \to +0,$$

za kako bilo velik broj **n**.

Zadaci.

1. Za dovoljno veliko x je $(\log x)^{100} < x$.

2. Za dovoljno malo x je $x(\log x)^{10} < 1$.

Pokaži da

3. $\frac{1}{x}\lg_2(1+x^2) \to 0$, $(x \to \infty)$; 4. $\sqrt{x}\,\lg_3 \sin x \to 0$, $(x \to +0)$; 5. $\lg_2(1+2^x) \sim x$, $(x \to \infty)$;

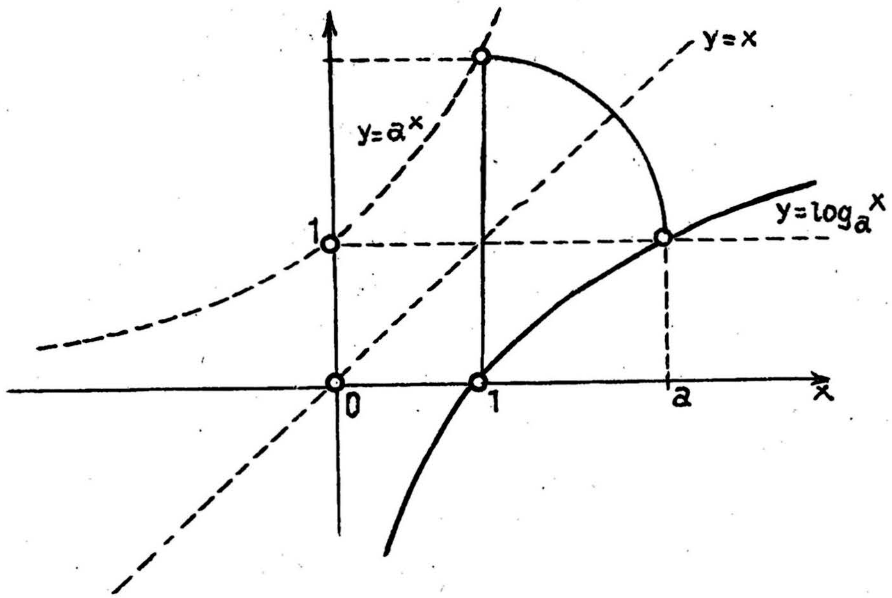
6. $\lg_2 x + \lg_3 x \sim \lg_2 x$, $(x \to \infty)$;

7. $\lg_2(1+x^3) \sim 3\lg_2 x$, $(x \to \infty)$.

7.6. Diagram logaritamske funkcije

(i) Iz gore navedenih osobina kao i iz činjenice da je $\lg_a x$ inversna funkcija funkcije a^x,

dobijamo neposredno diagram funkcije $\lg_a x$ (v.sl.131)



Sl.131

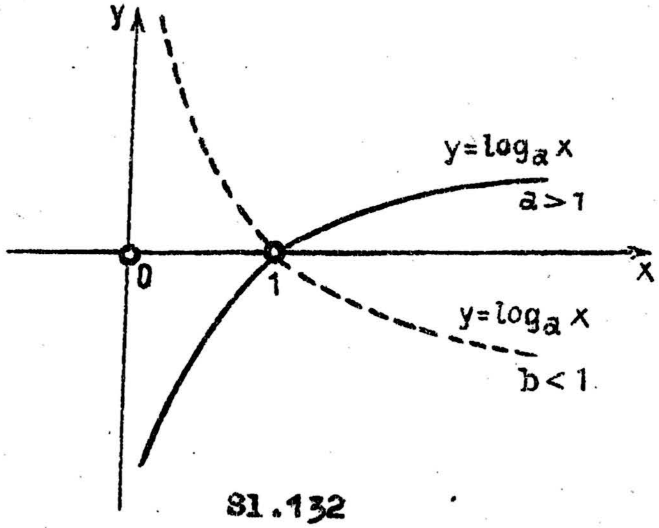
Negativan deo Y-ose je vertikalna asimptota diagrama ako je $a > 1$, a pozitivni deo, ako je $a < 1$.

(ii) Medjusobni položaj diagrama funkcija $\lg_a x$ i $\lg_b x$ dobijamo iz medjusobnog položaja diagrama funkcija a^x i b^x (v.sl.132).

Diagrami logaritma svih osnova prolaze kroz tačku $x = 1$, $y = 0$, jer je

$$\lg_a 1 = 0 \quad \text{za svako} \quad a > 0 \;;$$

to je jedina nula logaritamske funkcije.



Sl.132

Kako je

$$\frac{1}{a^y} = a^{-y} ,$$

to su diagrami funkcija

$$y = lg_a x \quad i \quad y = lg_{\frac{1}{a}} x$$

simetrični u odnosu na X-osu.

Zadaci.

Nacrtaj diagrame sledećih funkcija:

1. $\log x - 1$; 2. $lg_2 x - 2$; 3. $x + lg_2 x$;

4. $x - lg_2 x$; 5. $x\, lg_3 x$.

Reši grafički jednačine:

6. $x = -\log x$; 7. $lg_2 x = (x-1)^2$.

7.7. Pravila za logaritmi - ranje.

(i) Neka su y i Y logaritmi brojeva x i X, tada je po definiciji

$$x = a^y \quad i \quad X = a^Y , \qquad (1)$$

$$xX = a^{y+Y} ,$$

tj.

$$lg_a xX = y+Y$$

ili

$$lg_a xX = lg_a x + lg_a X.$$

Logaritam proizvoda jednak je zbiru logaritama pojedinih faktora.

(ii) iz (1) dobijamo deobom

$$\frac{X}{x} = \frac{a^Y}{a^y} = a^{Y-y}$$

$$\therefore \quad lg_a \frac{X}{x} = Y - y$$

ili

$$lg_a \frac{X}{x} = lg_a X - lg_a x .$$

(iii) Kad prvu od jednačina (1) stepenujemo sa n dobijamo

$$x^n = a^{ny}$$

$$\therefore \lg_a x^n = ny$$

ili

$$\lg_a x^n = n \lg_a x$$

(iv) Logaritmi različitih osnova istoga broja x su proporcionalni,tj.njihov odnos ima stalnu vrednost nezavisnu od x.

Neka je

$$y = \lg_a x \quad \text{i} \quad z = \lg_b x,$$

tj.

$$a^y = x \quad \text{i} \quad b^z = x,$$

tada je

$$a^y = b^z,$$

$$\therefore y = \lg_a b \; z.$$

akle je

$$\lg_b x = \frac{\lg_a x}{\lg_a b}.$$

Ovim se obrascem pretvaraju logaritmi jedne snove u logaritme druge osnove.

adaci.

Pokaži da je:

1. $\lg_a b = \frac{1}{\lg_b a}$; 2. $\lg_{a^k} x = \frac{1}{k} \lg_a x$;

3. $\frac{1}{\log x} = \frac{1}{\lg_2 x} + \frac{1}{\lg_5 x}$.

Nacrtaj diagrame sledećih funkcija:

4. $\log x^k$; 5. $\sqrt{x} + \log x$; 6. $\sqrt{x} \log x$;

7. $x^2+\log(2x-3)$; 8. $\log(x+1) + \log(x-1)$;

9. $\log \frac{x}{1+x^2}$.

Reši grafički jednačine:

10. $x \log x = 1$; 11. $\lg_2 x = 1 + \lg_3 x$.

7.8. Diagrami složenih transcendentnih funkcija.

Za konstrukciju diagrama složenih transcendentnih funkcija služimo se pomoćnim diagramima njihovih pojedinih sastavnih delova,kao i osobinama istih.Pri tome treba uvek odrediti:

1° Razmake gde je funkcija definisana;

2° tačne ili približne vrednosti njihovih nula kao i njihov red;

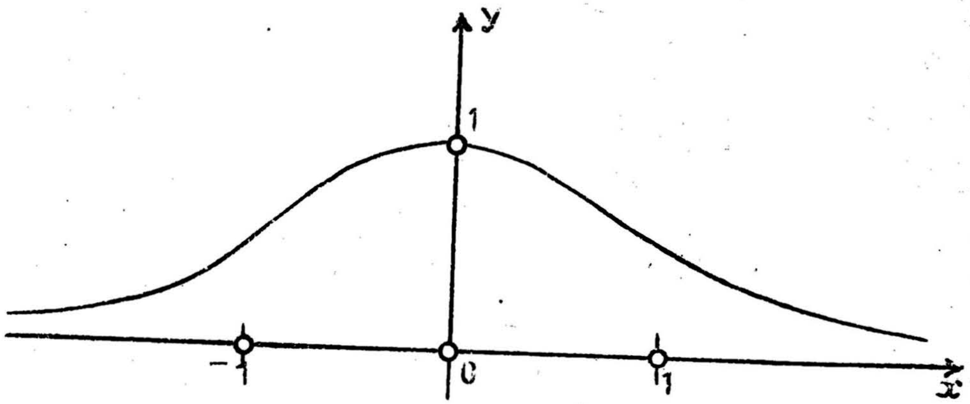
3° ponašanje funkcije za velike vrednosti x-a tj.njenu asimptotsku vrednost;

4° Vertikalne asimptote,kao i njeno ponašanje u blizini istih;

5° njene osobine,pozivitet,monotonost i drugo.

Pr.(1).

$f(x) = 2^{-x^2}$, (v.sl.133).



Sl.133

Funkcija je definisana za sve vrednosti od x, ona je parna i stalno pozitivna.

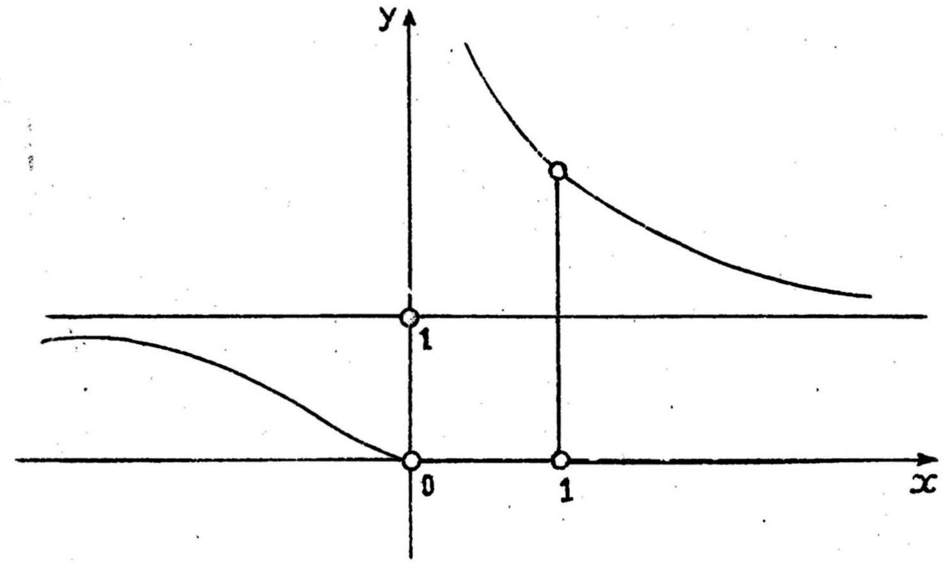
Kako $-x^2$ monotono teži ka $\to -\infty$ kad $x \to \pm\infty$, to će $f(x)$ težiti ka nuli monotono opadajući; najveća ordinata diagrama je 1 i to za $x = 0$.

X-osa je asimptota.

Pr.(2).

$f(x) = 2^{1/x}$, (v.sl.134).

1° Funkcija je definisana za sve vrednosti x-a osim za $x = 0$ i uvek je pozitivna;



Sl.134

2°

$$f(x) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{kad} \quad x \to +0, \\ +0 & \text{kad} \quad x \to -0; \end{cases}$$

3° $f(x) \to 1 \pm 0$ kad $x \to \pm\infty$;

$f(x)$ je u prvom slučaju iznad, a u drugom ispod prave $y = 1$.

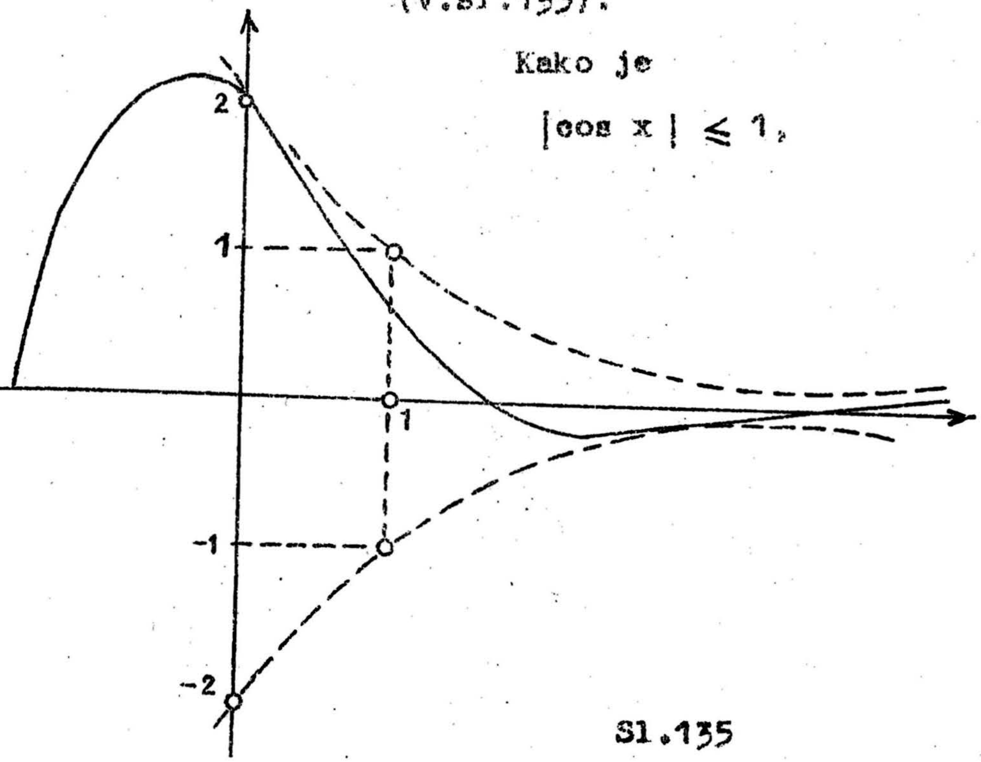
Dakle diagram ima dve asimptote i to $x = 0$ i $y = 1$.

Pr.(3). $f(x) = 2^{1-x} \cos x$

(v.sl.135).

Kako je

$|\cos x| \leq 1,$



Sl.135

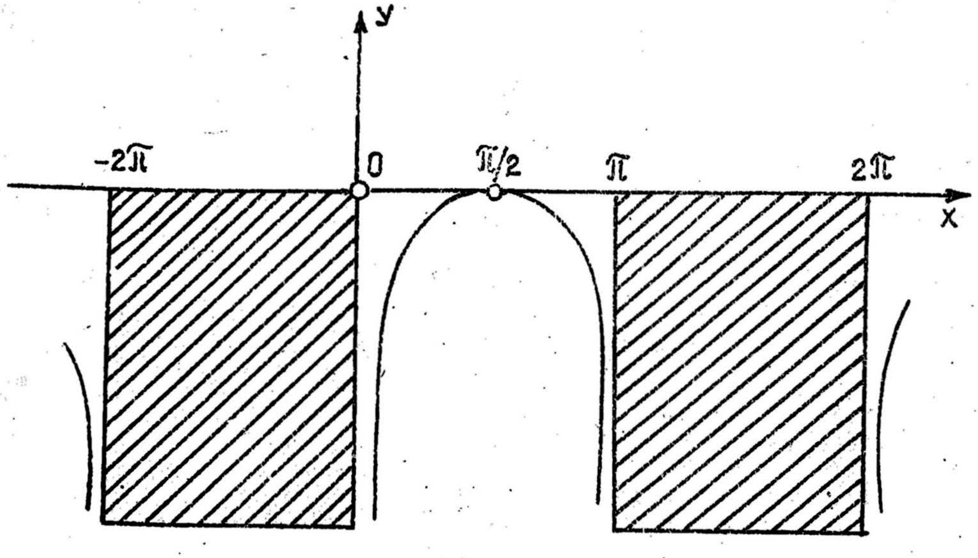
to je

$$|f(x)| \leq 2^{1-x} ;$$

prema tome funkcija $f(x)$ varira izmedju -2^{1-x} i 2^{1-x}, tj.njen diagram je ograničen diagramima ovih funkcija;

2^0 $f(x) = 0$ samo kad je $\cos x = 0$, jer je $2^{-x} \neq 0$ za svako konačno x ;

3^0 Diagram dodiruje diagrame funkcija $\pm 2^{1-x}$ kad je $\cos x = \pm 1$.



Sl.136

Pr.(4). $f(x) = \log \sin x$. (v.sl.136).

1^0 Data funkcije nije definisana u razmacima $\ldots(-3\pi, -2\pi), (-\pi, 0), (\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi)\ldots;$ jer je u njima $\sin x < 0$;

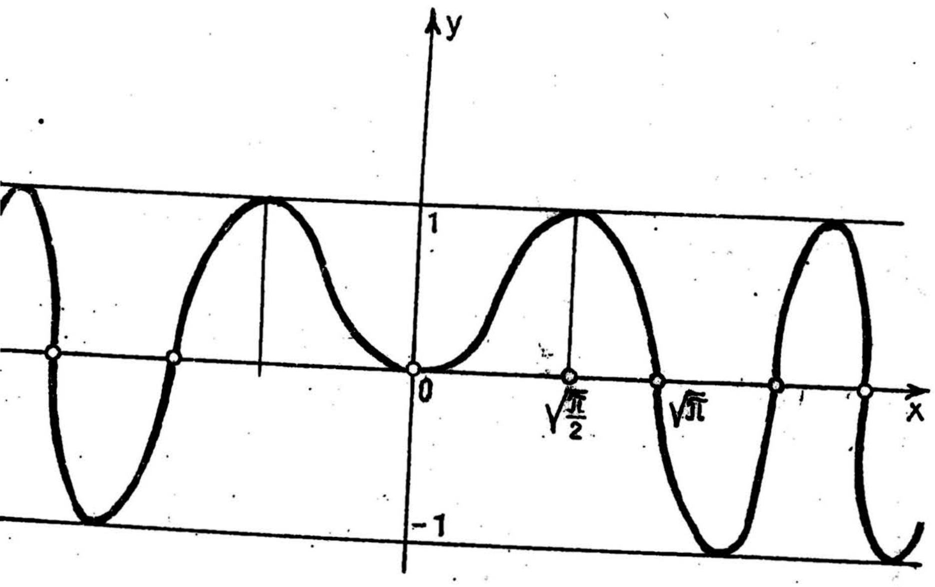
2^0 dovoljno je nacrtati diagram samo u jednom razmaku, na primer $(0, \pi)$, jer je data funkcija periodična, pa se u ostalim razmacima $(2\pi, 3\pi), (4\pi, 5\pi)\ldots$ ona ponavlja;

3^0 $f(x) = 0$ za $x = \frac{\pi}{2}$;

4^0 $f(x) \to -\infty$ kad $x \to +0$ i kad $x \to \pi - 0$;

5^0 kako je $\sin x < 1$, to je stalno $f(x) < 0$.

Tačne vrednosti ove funkcije za razmak $(0, \frac{\pi}{2})$ date su u logaritamskim tablicama trigonometrijskih funkcija.



Sl.137

Pr.(5). $f(x) = \sin x^2$, (v.sl.137).

$|f(x)| \leq 1$ za sve x;

$f(x) = 0$ kad je $x^2 = k\pi$, $k = 0,1,\ldots,$

za

$$x = \pm\sqrt{k\pi},$$

mak izmedju pojedinih nula biva sve manji uko-
o je k veće, $x = 0$ je nula drugog reda;

$f(x) = 1$ za $x = \pm\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$,

$f(x) = -1$ za $x = \pm\sqrt{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}$

data funkcija je parna.

Slično izgledaju i diagrami funkcija

$$\sin x^3, \quad \sin x^4, \ldots\ldots$$

ili

$$\sin 2^x;$$

s tom razlikom što im se talasi za veliko x još više zgušnjavaju i to u toliko više u koliko funkcije x^3, x^4 .... ili 2^x brže rastu.

Zadaci.

Konstruiši diagrame sledećih funkcija:

1. $x\,2^{1/x}$; 2. $(x+a)2^{1/x}$; razlikuj četiri slučaja i to:

1° $a < -\frac{1}{2}$, 2° $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4}$, 3° $-\frac{1}{4} < a < 0$, 4° $a > 0$;

3. $2^{-x}\sin x$; 4. $2^{\sin x}$; 5. $\sin\sqrt{x}$;

6. $\sin \lg_2 x$; 7. $2^{\frac{x}{1-x}}$; 8. $\frac{x\log x}{x^2-1}$;

9. $\frac{\log x - x^2 - 1}{x}$; 10. $\frac{\log x}{1+x-\log x}$.

7.9. VEŽBE

1. Nacrtaj diagrame sledećih funkcija:

1° $2^{\operatorname{tg} x}$; 2° $\frac{1}{1+2^{\lg x}}$; 3° $\lg_a \lg_a x$;

^{o} $\lg_a\left[\lg_a(\lg_a x)\right]$; 5^o $x \lg_a \lg_a x$; 6^o $x^2 2^{-n}$;

^{o} $x^{-n}\lg_2 x$; 8^o $x^n(1-n \log x)$; 9^o $p\,2^{-qx}-q\,2^{-px}$.

Čemu teži

$$\frac{1}{2-2^{1/x}} \quad \text{kad} \quad x \to \pm 0 \ ?$$

Konstruiši diagram ove funkcije.

. Polazeći od

$$\left|\log(x+h)-\log x\right|.$$

kaži neposredno da je funkcija $\log x$ neprekid-, tj. da

$$\log x \to \log a \quad \text{kad} \quad x \to a \pm 0 .$$

Pokaži da je

$$\frac{h}{1+h} \leqslant \log(1+h) \leqslant h \quad \text{za svako} \quad h > -1.$$

Neka je $a > 1$, pokaži da je

$$\frac{a^n-1}{n} < \frac{a^{n+1}-1}{n+1}$$

kad je <u>n</u> pozitivan ceo broj.

kad je <u>n</u> negativan ceo broj $i \neq -1$.

Stavljajući u prethodnoj vežbi <u>$a^{1/m}$</u> mesto <u>a</u>

pokaži da funkcija

$$f(x) = \frac{a^x-1}{x}$$

monotono raste u celom razmaku $(-\infty\ +\infty)$. Konstruiši diagram ove funkcije.

<u>7.</u> Na osnovu prethodne vežbe pokaži da postoji granična vrednost

$$\lim_{h\to\pm 0}\frac{x^h-1}{h} \quad \text{za svako} \quad x > 0.$$

<u>8.</u> Pokaži da funkcija $g(x)$ definisana graničnom vrednošću

$$g(x) = \lim_{h\to\pm 0}\frac{x^h-1}{h},$$

zadovoljava jednačinu

$$g(xy) = g(x) + g(y) \quad \text{za svako} \quad x > 0 \ \text{i} \quad y > 0 .$$

<u>9.</u> Na osnovu prethodne vežbe zaključi da je funkcija $g(x)$ neki logaritam čija je osnova <u>e</u> definisana jednačinom

$$g(e) = 1,$$

tj. relacijom

$$\frac{e^h-1}{h} \approx 1 \quad \text{kad je} \quad h \approx \pm 0$$

a otuda pokaži da je

$$e \approx (1+h)^{1/h} \quad \text{kad je} \quad h \approx \pm 0 .$$

ISPRAVKE

(36^5 znači 36 strana 5 red odozgo, a 36_5 znači 36 strana 5 red odozdo)

3_2 stoji: $\frac{p}{q}$ treba da stoji: $\frac{p'}{q'}$

4_6 " : $a =$ " " " : $|a| =$

17_3 " : $u \leq u$ za $0 < x \leq 1$; $y > u$
treba da stoji: $y \geq u$ za $0 < x \leq 1$; $y < u$

$20^{10,\, 13,\, 22}$ stoji: razlomku
treba da stoji: razmaku

$20_{3,\, 1}$ stoji: razlomak treba da stoji: razmak

24^{11} stoji: 7 i 9 treba da stoji: 7 i 8

28^1 " : x 0. " " " : $x < 0$.

30_2 " : $\underline{\gamma}$ " " " : Y

34_2 stoji: valjak treba da stoji: valjka

37_6 " : je $\underline{x}$ BAB' = t,

treba da stoji: je ugao BAB' = t,

37_5 stoji: AB = sin t treba: AB = 2 sin t

46_9 " : $ax^2 \to \infty$ kad $x \to \infty$, ako je $a > 0$.

treba da stoji: $ax^2 \to -\infty$ kad $x \to \infty$, ako je $a < 0$.

46_4 stoji: $x^3 - 00x^2$ treba da stoji: $x^3 - 100x^2$

8^4 " : = 1 = " " " : = 1 +

0^2 " : sin 0x = " " " : sin 0 =

1^4 " : $h \to \mp\infty$ " " " : $h \to \mp 0$

1^7 " : $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ " " " : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

$_5$ " : $\{f(x) - f(1)\}$ " " " : $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x) - f(1)\}$

51_2 stoji: $\lim\limits_{\to 2}$, $\lim\limits_{\to 1}$ treba: $\lim\limits_{x\to 2}$, $\lim\limits_{x\to 1}$

52^6 " : $x \to a+0$ " : $x \to a \pm 0$

52^9 " : f(a-x) " : f(a+x)

52_{13} " : $\dfrac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{1+h+1} =$

treba: $\dfrac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{\sqrt{1+h}+1} =$

54_8 stoji: kad je $x > 0$, treba: kad je $x \neq 0$.

59^{10} " : mora da 0, " : mora da $\to 0$,

60^{10} " : $f(x) = \dfrac{1-2x^{-2}}{1+x^{-3}+3x^{-3}}$

treba: $f(x) = \dfrac{1-2x^{-2}}{1+x^{-1}+3x^{-2}}$

60_5 stoji: f(x) = treba: F(x) =

60_2 " : $= \dfrac{2x-(1+x)}{x-1} =$ " : $= \dfrac{2x-(1+x)}{x^2-1} =$

61^2 " : $F(x) = 1+x^2-x$ " : $F(x) = \sqrt{1+x^2} - x$

62_{10} stoji: $\longrightarrow x \longrightarrow 0$ treba: $\longrightarrow 1,\ x \longrightarrow 0.$

66^{13} " : $= a - a.$ " : $= a - a'.$

68_8 " : broj sa " : broj π sa

68_5 " : $\triangle\pi = \pi - 3{,}14 \quad 3{,}15 - 3{,}14 =$

treba: $\triangle\pi = \pi - 3{,}14 < 3{,}15 - 3{,}14 =$

69^6 stoji: $= 1 = \frac{1}{2} =$ treba: $- \frac{1}{2} =$

70^{13} " : $a = 0{,}d_1d_2d_3d'd''\ldots\ldots;$

treba: $a = 0{,}d_1d_2d'd''\ldots\ldots;$

70^{16} stoji: $d \geqslant 5.$ treba: $d'' \geqslant 5.$

70_{12} " : $a > 0{,}d_1d_2d_3 = 0{,}0005\,a,$

treba: $a > 0{,}d_1d_2d_3 - 0{,}0005,$

$70_{10,3}$ stoji: $a - a'$ treba: $|a-a'|$

72_{13} " : $a = \frac{3}{2}$ " $a' = \frac{x}{2}$

73^{11} " : a $\underline{a}$ jedna " a $\underline{a'}$ jedna

88^5 stoji: koji se u tom

treba: koji se u tom polinomu javlja.

109^4 stoji: $v =$ treba: $y =$

117_3 " : -1 " : $+1$

142_2 " : $2^\circ\ A > 0,$ " : $2^\circ\ A < 0,$

145^{12} " : $\longrightarrow \mp\infty$ " : $\longrightarrow \pm\infty$

148 na sl.61 umesto 2/8 stavi 2/3

175^2 stoji: $= \sqrt[3]{x} + \overline{x^2+1} +$

treba: $= \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2+1}} +$

179^7 stoji: $f(x)$ treba: $f(x) \sim$

179_6 stoji: $v^2\ (\sqrt[3]{x^2})^2\ x\ \sqrt[3]{x}\quad x,$

treba: $v^2 \sim (\sqrt[3]{x^2})^2 = x\sqrt[3]{x},$

181^6 stoji: $v - \frac{p}{q}$ treba: $v = \frac{p}{q}$

184_5 " : $\sqrt[3]{x}\ \sqrt[4]{x}$ " : $\sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x}$

186^2 " : $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}\ \sqrt{x-1}}$ " : $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(\sqrt{x}-1)}}$

188_3 stoji : asimptoti treba : asimptoti $y = 1$.

210_5 " : $\sqrt[p]{x^q \; \frac{pqx^q}{\sqrt[p]{x}}}$ " : $\sqrt[p]{x^q + \frac{pqx^q}{\sqrt[p]{x}}}$

214^2 " : $1 = 1$ " : $\ell = 1$

215 u zadatku 1 dodaj: 1 grad se deli na sto minuta grada, a 1 minuta grada deli se na 100 sekundi grada.

218^2 stoji : $= \sin x$, treba : $= - \sin x$,

218^3 " : $= \cos x$. " : $= - \cos x$.

224^2 " : $5 + 3 \sin x \sin^2 x$. treba: $5 + 3\sin^2 x$.

$226^{1,2}$ svuda umesto ± 0 stavi ∓ 0.

227_2 stoji : $= \operatorname{tg} x$ treba : $= - \operatorname{tg} x$

229_6 " : dužine , na " : dužine π , na

264_1 " : $= 2 \sin$ " : $= - 2 \sin$

277_6 " : nalazi izmedju nje,

treba : nalazi iznad nje,