РАЦИОНАЛНА МЕКАНИКА

НАПИСАО

Мијалко В. Ћирић

ПРОФЕСОР РАЦИОНАЛНЕ МЕКАНИКЕ НА ВЕЛИКОЈ ШКОЛИ

Dis ce que tu sais, fais ce que dois;
advienne que pourra.

СВЕСКА ПРВА

УВОД. — ПРЕТХОДНИ ГЕОМЕТРИЈСКИ ПОЈМОВИ. — КИНЕМАТИКА.

ИЗДАЊЕ КР. СРП. ДРЖ. ШТАМПАРИЈЕ

У БЕОГРАДУ

ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ

1897

ЦЕНА 6 ДИНАРА

ПРЕДГОВОР

Нико и никад не може тврдити да зна целу науку. Свака нова истина може изазвати нове дедукције и увећати број комбинација, које могу образовати нових питања. Уџбеници не морају имати баш за предмет да нас упознају са свим оним, што се у тој науци зна. Полазећи од основних појмова, они треба и морају нас упознати са свима оним ставовима, чија је примена понајчешћа, и са свима главним и најопштијим методама за решавање разних питања које наука може представити. Оквир, у који таква дела морају бити уоквирена, није добро одређен.

Од првога дана, када сам био одређен да у природно-математичком одсеку философскога факултета на Великој Школи заменим мога поштованог наставника *Господина Љубомира Клерића* у предавањима *Рационалне Меканике*, ја сам непрестано мислио да напишем за штампу такав уџбеник за ову науку. Моја осмогодишња предавања служила су за основу овоме делу, које овом свеском почињем објављивати.

Морам признати, да штампање овога мога дела није толико изазвала прека потреба, колико ме је на то нагнала, на првом месту, моја наставничка дужност, за тим, напредак науке последње деценије и, најзад, да одговорим оној највећој жељи па и дужности свакога наставника:

да спремим себи бољу, јачу и многобројнију замену. Имајући ово на уму, латио сам се овога тешкога и одговорности пуног посла.

Да бисмо представили ову науку на ономе ступњу, на којем се она данас находи, ми смо се неколико пута повраћали у Париз и у богатим париским библиотекама, тим ризницама свију богастава ума људскога, по више месеци прибирали и срећно прибрали потребни материјал за ову нашу зграду. Из тога огромног материјала ми смо одабрали онај, што је од веће вредности, за који смо нашли да може и да би корисно било да уђе у дело ове врсте. То је и допринело, да ће ово дело бити већег обима него што би, можда, требало да буде. Али, знајући да је просечно знање страних језика доста слабо у наших слушалаца, а знајући и то да се ниједна наука не може студирати на страном језику, ако је човек принуђен да, за сваку страну књиге, отвара речник по више пута, — ми верујемо да нам нико неће замерити, што смо оволиког материјала пружили својим слушаоцима на нашем језику.

Остали материјал, опет од велике вредности, моћи ћемо почети да објављујемо тек онда, кад се буде остварила давнашња жеља професора̂ Велике Школе: кад почне излазити један часопис Велике Школе.

Меканика, у опште, није низ апстрактних ставова; на против, она је наука која има најмногобројније примене; кад бисмо је систематички ограничавали на просте спекулације Геометрије и Анализе, значило би непознавати карактер и пространство њено. Одавна је речено: „теорија без примене мртво је слово на хартији“, а и са̂ми смо лично уверени, да се до потпуног и тачног сазнавања и разумевања какве теорије може доћи само онда, кад је она, као што треба и колико треба, примерима расветљена и разјашњена; за то смо и ми, поред теорије, изнели решења великог броја најразличнијих и у исто време најинтересантнијих меканичких проблема. Најзад, на крају сваког већег одељка, ставили смо по један низ проблема за вежбање; сваки читаоц, који их буде радио, увидеће и сâм колико су они били нужни, јер ће, на сваком даљем кораку, осећати где постаје у теорији чвршћи и у њезином примењивању вештији. Ми смемо тврдити: што је физичару физички кабинет, хемичару лабораторија, па чак, ако хоћете, што је природњаку природњачки музеј и природа, — то су за Меканику, у опште, ти меканички проблеми.

„Они, који воле Анализу, као што Лагранж лепо вели, видиће са задовољством да јој је Меканика постала једном новом граном, и биће ми захвални што сам, на тај начин, проширио област Анализе“.

У свем излагању нашем ми смо гледали да теореме и ставове исказујемо тачно, јасно и што краће, и да буде методичке везе између разних делова науке; трудили смо се нарочито да расветлимо основне принципе, који за основу служе и Примењеној Меканици, у опште, и Небесној Меканици, на по се. На сликама смо узимали иста писмена, која се и у тексту находе, што је много боље; јер, читајући текст, слике се одмах и лако разумевају. Најзад, на крају сваког већег одељка, ми смо спомињали главније писце.

Издајући ову моју Рационалну Меканику на свет, био сам рад да пружим једно дело, у којем ће и моји слушаоци и сви они, који би желели свестраније проучити Рационалну Меканику, наћи у довољној опширности готово све оно, што у ову науку спада. Највећма сам желео: да упознам моје слушаоце са оним главним методама, које ће их доцније моћи руководити у њиховим самосталним радовима. Да ту жељу што сигурније постигнем, ја се нисам устезао да се често повраћам на извесна питања, и да покажем по неколико различних начина рада, помоћу којих се до њихових решења долази. У осталом, задржавајући се на једном истом ставу и проучавајући га сваки пут са нове тачке гледишта, ученик ће открити оне везе, које везују једне за друге различне делове науке, и на крају крајева схватиће њихово јединство. Укратко, желео сам да доведем моје слушаоце на мету, на којој се наша наука данас находи и са које им ваља поћи напред са њом. Ја ћу себе у сретне наставнике убројати, ако ово моје дело онако намењеној цељи одговори, како и колико то ја желим.

* * *

Неколико речи *о научној терминологији.*

Од првог дана наставничког рада, сваки је од нас осетио сиромаштво у научној терминологији по свима гранама науке. И ако је терминологија математичких наука прилично створена, ипак она је још доста сиромашна.

Ја сам још одавна приступио прибирању и одабирању термина за математичке науке, и већ сам их почео употребљавати у овој првој свесци, додајући им француску и немачку терминологију. Али, како је то огроман посао, ја сам пре две године, у једном извештају (*Просветни Гласник*, Децембар, 1895), поред осталога, упутио једну врсту позива: „*Научна терминологија* створиће се када свака наставничка колегија, у околини своје школе, буде прикупила народне термине, па, према томе и према своме знању, буде израдила терминологију за све науке, које се у гимназији или реалци предају. Све те нацрте и сву грађу за научну терминологију скупити и предати Академијском Савету професора Велике Школе и Академији наука, те да ова два највиша научна тела, споразумно, израде већ једном дефинитивну научну терминологију, које ћемо се сви држати“.

На жалост, томе се послу нико није одао, нити има наде да ће се који год скоро њему одати. На против, свакога дана и готово по свима гранама науке, ми видимо неко новачење и ковање често бесмислених речи; многи траже славе баш у ономе, у чему би требало прекор и осуду да получе. Тим новачењем и ковањем речи ми ћемо, бој се, зидати кулу Вавилонску, бићемо пометени и нећемо се више разумети! Престанимо већ један пут!

Ја понова позивам све оне који се, било по занимању, било по укусу, баве којом граном математичких наука, — позивам их да заједнички израдимо *научну терминологију математичких наука*, којом ћемо се сви безусловно служити. Урадимо оно, што је у срећним земљама већ одавно урађено. Неурадимо ли пак то, настаће дан у који се ми, који смо разних школа а и разних погледа, не ћемо више моћи разумети!

Све пријатеље, који прихвате овај мој позив, нарочито молим: да сваки у своме крају прикупи народне називе, како за цело тако и за поједине делове ових направа: колâ, воденице, ваљавице, разбоја, витла, бунара итд., итд.; да их нацртају, да означе функцију сваког њиховог дела и смисао кретања, кад је он у кретању. Ето корисногa и плоднога рада за свакога од нас! — Од одзива и од прикупљеног материјала зависиће кад ћемо се састати и о овоме предмету договорити.

*
*   *

Као предговор, ка овој првој свесци, нека послуже ове напомене:

Прве године мога наставничког рада ја сам био спремио за штампу превод дела: **Cinématique**, par *E. Villié*, 1888, Paris, кад у тај мах изађоше још нека дела по томе предмету, међу којима и *Puiseux*-ова Кинематика. То ме одлучи да одустанем од штампања тога превода и да приступим изради ове моје Кинематике. Године 1894 дао сам дело у штампу, када ме мој пријатељ млади научник *G. Koenigs* писмом извести да је и он дао у штампу његову Кинематику (n° 61), од које је други део изашао тек пре неколико месеци. То нас је и задржало, и штампање ове свеске продужило се толико дуго. Међер многобројних и разних тешкоћа има при штампању делâ!

Познато је: да и у изучавању наукâ има извеснога реда, и да многе науке не можемо са успехом изучавати, ако се, пре тога, нисмо упознали са оним наукама, које овима претходе. То нас је и навело, да у *Уводу*, прво, подсетимо чиме треба да је упознат сваки онај, који Механици приступа, тј. хтели смо да покажемо природни пут, који Механици води. У том реду појмова, са којима се сваки механичар мора претходно упознати, скренућемо пажњу читаоца на мемоар *H. Poincaré-а*: **L'Espace et la Géométrie**, прештампан из *Revue de méthaphysique et de morale,* свеска за Новембар 1895. Друго, за тим смо се упознали кратком историјом Механике, са њеном поделом и њеним појединим деловима. Ако смо, где-где, и скренули са тога пута, та су скретања незнатна а и неизбежна при писању свакога дѐла овога обима.

После увода ми смо, у одељку *о претходним геометријским појмовима*, развили апстрактну и чисто геометријску теорију потегâ. То је било потребно учинити, пошто та теорија још није продрела у основну наставу. Што се онога мишљења тиче, по коме би требало помешати ту теорију са самим излагањем кинематичких факата, постоји иста незгода као и код мишљења онога, по коме би требало Кинематику уметнути у Динамику, као што је се то дуго практиковало. Геометар треба не само да открије нових факата, него још да класификује стечене истине и да групише уједно идеје једног истог рода. Теорија потегâ припада Геометрији; она има у Кинематици и Статици две важне примене, она их може имати и других. Та теорија потеґâ корисно ће послужити и нашим физичарима.

На послетку смо приступили излагању *Кинематике*, отпочевши са излагањем *Кинематике тачке*, чији ће наставак бити у другој свесци.

23 Априла 1897 год.
(Ђурђев-дан)
у Београду.

Мијалко В. Ћирић
професор рационалне механике на Великој Школи.

ШТАМПАНА ДЕЛА И СПИСИ ПО ПРЕДМЕТУ МЕКАНИКЕ

Ми ћемо, на овоме месту, објављивати све оно што је до сада и све што буде од сада штампано на српском или хрватском језику по предмету Меканике, у опште. У тој цељи молимо свакога, коме је какав спис ове врсте познат, да нам достави: тачан назив списа, име писца, годину и место штампања, како бисмо објавили у следећим свескама. За сада отпочињемо са објавом ових дела:

1. *Стеван Здравковић*: **Основна Меканика**; I део: ***Кинематика,*** 1875, Београд.
   ——— II и III део: ***Динамика*** и ***Статика,*** 1877, Београд.
   ——— IV, V и VI део: ***Хидростатика, Хидродинамика*** и ***Хидраулични мотори,*** 1880, Београд.
2. *Љубомир Клерић*: **Теоријска Меканика**; Прва свеска: ***Форономија, Меканика, Статика черстих тела, отпори трења и крутост ужета,*** 1880, Београд.
   ——— Друга свеска: ***Наука о еластичности и јачини черстих тела,*** 1883, Београд.
   ——— Трећа свеска: ***Динамика черстих тела,*** 1888, Београд.
3. ——— ***Садашњи резултати у Кинематици,*** 1882, Београд.

САДРЖАЈ СВЕСКЕ ПРВЕ

УВОД

СТРАНА

СТРАНА

СТРАНА

КИНЕМАТИКА

ПРВИ ДЕО

ЧИСТА КИНЕМАТИКА

I

Кинематика тачке

РАЦИОНАЛНА МЕКАНИКА

СВЕСКА ПРВА

УВОД

Dis ce que tu sais, fais ce que dois;
advienne que pourra.

I. О науци у опште. — По *Литреу*[1] (који ће нам и у будуће, при дефиницијама, врло корисно послужити): наука је знање које се има о нечему. Или, још, наука је скуп, систем знања о једном предмету (о једној материји). Знање, пак, задобива се читањем и расуђивањем (размишљањем).

Спенсер[2] вели: „треба дати речи наука њен прави смисао, тј. да она означава скуп позитивног и одређеног знања реда који влада међу појавима, који нас окружују“. (р. 90).

Ма какве да су ствари, које се посматрају, скуп неопходних (нужних) односа који потичу из њихове природе образује оно што ћемо звати *наука* о овим стварима. Ова дефиниција, по *Дихамелу*[3] (чије ће нам дело много користити при изради целог предмета), може бити формулисана на овај начин:

Наука о једној ствари јесте скуп закона о тој ствари.

---

[1] *É. Littré,* Dictionnaire de la langue française, 4 vol., 1863-1874, Paris.

[2] *H. Spencer,* Les Premiers Principes; traduit de l'anglais par E. Cazelles; cinquième éd., 1888, Paris.

[3] *J. — M. — C. Duhamel,* Des Méthodes dans les sciences de raisonnement, 5 vol., Paris.

Према томе, *наука о бројевима* биће скуп закона о бројевима; *наука о просторности* биће скуп закона о просторности; *наука о кретању,* скуп закона о кретању; итд. (I vol., p. 29).

Права функција науке јесте систематизација знања. Систематизирати знање, то је груписати, то је везати једну за другу све серије познате или које имају да се познају, по општим принципима, и привезати их за најопштији принцип; у кратко, то је свести разноврсност на јединство. Основни поступци (проседеи) науке јесу *анализа* и *синтеза,* које ум човечиј зна и прокламује од толиких векова.

Наука напредује групишући посебне односе појава под законе; за тим групишући ове специјалне законе под општије и општије законе, и њен напредак састоји се, нужно, у томе да се открију све општији и општији узроци.

Све науке, које су основане на искуству и закључивању, морају се увећати да постану савршене; стари су их нашли само започете, а ми ћемо их оставити, онима који ће после нас доћи, у савршенијем стању него што смо их наследили. Науке, безгранична као природа, увећавају се у бескрајност радовима поступних генерација. *Даламбер*[1] вели: „науке су нека врста великог здања на коме више лица споразумно раде; једни, у зноју свога тела, ваде камен из камених мајдана; други га, с муком, вуку до здања; трећи га пак, силом својих рӯку и махина, подижу; али ономе, који га спреми и постави, припада заслуга конструкције“. Благо ономе ко успе, да својим радовима учини толико, да се може сматрати ако не више а оно бар као једно зрно песка у малтеру употребљеном при зидању тога великога здања, на чијем подизању суделују, са више или мање успеха, сви образовани народи.

Истине постоје саме по себи; закључивање и метод само су средства (начини) које човек употребљује да те

---

[1] *D'Alembert,* Eléments de philosophie, ch. 21.

истине открије и да их упозна. Има истина чија је очевидност јасна за све умове, и њих треба узети за полазну тачку: методима је главни предмет да послуже овим истинама те да се открију друге, које производе у човеку исто осећање очевидности.

Једно откриће у једној науци проузрокује одмах „одговарајући“ напредак у више других наука; једна празнина у једној науци спречава развитак свију оних наука које морају да чекају док се ова празнина не попуни. „Да се учини једно добро посматрање у једној чисто природној науци, потребна је припомоћ од пола туцета наука“.[1]

Напоменимо, узгред, кад је реч о науци у опште, да је дуго постојала једна стара традиција, прешла из Египта у Грчку, по којој је неки бог, непријатељ мира и покоја људи, био проналазач наука.

Напомена. — И у развитку наука има реда, и ми многе науке не можемо са успехом изучавати, ако се, пре тога, нисмо добро упознали са наукама које им претходе. Зато сам, да бих увео моје слушаоце и читаоца у поље Меканике, и изабрао овај пут, на коме ћемо се, најпре, упознати са неким појмовима и терминима, са којима ћемо се чешће у самој Меканици сусретати.

Нека ми се не замери, што сам изабрао овај пут као најподеснији. Ја, никада, нисам губио из вида ни тешкоће па ни несавладљивост препрека, на које ћемо, на том путу, наићи. Многе непролазне од тих препрека вековима су стајале на том путу; многе ће, по свој прилици, још дуго, а неке и вечито, на њему остати. Нисам губио из вида ни моју неспремност, када сам тај пут изабрао; али нисам могао одолети а да баш њим не поведем свакога онога који се реши да овом мом раду поклони мало своје пажње.

---

[1] *Herbert Spencer,* Essays: Genesis of Science.

2. Појав. Закон. — *Појав* (*феномен* од *φαινόμενον*, оно што се појављује) назив (термин) у философији и у науци у опште, означава све што се јавља нашим чулима, све што може утицати којим било начином на осетљивост нашу, било у физичком, било у моралном погледу.

Да би се сазнали појави, није свакада довољно само посматрати; треба још употребити и подесна средства да се они приближе, да се одвоје од свега онога што их скрива, да буду на домаку нашем погледу. Протумачити један појав, значи изнаћи његове односе са стварима што на њ утичу или на које он има каква утицаја.

У обичном говору, реч *феномен* означава све што се јавља изванредно у простору, сваки необичан појав, као нпр. комете, метеори итд., и све што је ретко и што изненађује.

Закон, у домену наука, значи неопходни услови који одређују појаве, сталан и непроменљив однос између појава или између разних фаза једног истог појава. Такви су, нпр., закон атракције, закон кретања, закон преламања и одбијања зракова итд.

Дихамел[1] вели: „Истина, у чије стварање и састав улази расматрање неке ствари, зове се *особином* те ствари.

„Израз какве било истине може се, у опште, назвати именом *става (пропозиције)*.

„Истина, у чије стварање и састав улази расматрање више ствари, називље се *односом* између тих ствари.

„Неопходни односи који потичу из природе ствари зову се *законима* тих ствари“.

Када *Монтескије,* пошто је рекао да закони у најширем значењу јесу неопходни односи који потичу из природе *ствари,* хоће да даде примере за ствари које имају своје законе, он се овако изражава: „Божанство има своје законе, материјални свет има своје законе, духовна бића

---

[1] *Duhamel,* op. cit., I vol., p. 16.

узвишенија од човека имају своје законе, животиње имају своје законе, човек има своје законе“. *Ствари* овде јесу: божанство, материјални свет, духовна бића узвишенија од човека, животиње, човек.

На послетку, *Огист Конт (Politique positive t. II, p. 41)* вели: „филозофски појам природнога закона састоји се увек у томе да се схвати сталност у разноврсности“.

Да напоменемо овде и то: када је природа једне ствари потпунце одређена, било њеном дефиницијом, било ма на који други начин, сви њени закони биће такође одређени. При одредби природе једне ствари, научник образује скуп опсервација добро координисаних; и њему додаје врло прикладна објашњења и једну елегантну синтезу.

3. Хипотеза. Метафизика. — *Хипотеза* је претпоставка о некој ствари што може или не може бити, из које се изводи каква последица. Или, хипотеза је скуп више ствари, које се замишљају, да би се постигло тумачење извесних појава̑. Хипотеза је филозофски термин.

Има хипотеза што се могу оверити, то су оне што се узимљу у каквој области, у коју се може продрети искуством, посматрањем, индукцијом, и да се, на тај начин, може утврдити да ли постављена хипотеза стоји или је погрешна.

Има хипотеза што се не даду оверити, то су оне што припадају области у коју се не може продрети ни искуством, ни посматрањем.

Општа метода за тумачење и одредбу појава, којом се Њутн послужио за астрономију, и која се, сматрана са опште тачке гледишта, састоји у томе да се пође од појава ка узроцима, за тим да се, из ових узрока, изведу сви закони о посматраним појавима, усвојена је са ревношћу од научара и настављена је са особитом наклоношћу од француских геометара. На жалост, појави не воде увек са истом тачношћу, ка открићу елементарног узрока, који је неопходно нужан податак при одредби и тумачењу појава. Тада смо приморани да прибегнемо једној новој методи, оној о *хипотезама*. Та је метода, увек, основана на посматрањима и искуству, али на искуству недовољном за потпуно сазнање узрока; и може се попунити овај недостатак података само тиме ако се узме као стварно једно стање ствари које је, може бити, само привидно, тј. постављају се хипотезе да нешто заиста постоји, и из истих изводе се закључци рачуном или логиком. Ти хипотезни закључци састављају *теорију*, којом се тумаче узроци појединих посматраних појава. Према томе, хипотеза и њена теорија нису неке позитивне истине, већ само вероватан замишљај узрока посматраних појава.

Ове се хипотезе не постављају случајно; треба да су оне сагласне са свима познатим фактима, и тада је вероватно да ће оне бити сагласне и са много других факата који се не знају; и како класа појава, за коју су постављене, постаје на тај начин једна наука резоновања, сви закони могу бити отуда изведени, и моћи ће се оверити да ли су потврђени искуством. Ако се ова сагласност непрестано одржава, умесност хипотеза задобиће све већу и већу вероватност; и теорија, која ће бити образована, и која већ има ту корист што веже међу собом сва позната факта, моћи ће, са вером, бити употребљена на предвиђање нових факата. Али ако, као што се по неки пут догађа, предвиђена факта нису оверена искуством, онда смо приморани да променимо хипотезе, и да нађемо, ако се може, нових хипотеза које ће бити сагласне са скупом свију познатих појава. — У осталом, непостижна је крајна цељ наша: одредити прави узрок свему што јесте и што бива.

Метафизика је део философије који је, према различним епохама, различно и дефинисан: у старо доба, она је била наука о бићу или о суштини ствари, сматрана независно од посебних особина или одређених начина који чине разлику између предмета и предмета; по *Канту*, она је систематски скуп свију оних умних тековина што произлазе из чистог ума, тј. скуп идеја и принципа које разум изводи из себе са̑ма без припомоћи искуства; на послетку, данас, она је наука о принципима, виша (узвишенија) и општија но остале, и од које све знање доводи своју извесност и своје јединство.

Метафизика није још толико срећна да ступи на сигуран пут науке. Међу тим, она је старија него све остале науке, и она ће увек постојати, чак и онда када би ове све скупа заједно ишчезле у каквом вртлогу варварства.

4. Аксиома. Теорема. Проблем. — *Аксиоме* су ставови који су сами по себи јасни и извесни (евидентни); који се не изводе из других каквих ставова, и који се, отуда, ничим не доказују. То су крајне истине научне, које другима за потврду служе, јер се у сагласности ових са њима и са општим, неопходним законима мишљења, по којима се оне из аксиома изводе и састоји тачност и извесност њихова.

Оваквих општих и крајњих истина код којих се мисао зауставља, има у свима наукама, па и у Математици, и у наукама што су с њоме у вези, или се на њој оснивају. Таква је једна крајња истина или аксиома, нпр., став: *да је цело веће од свога дела.* Та се истина ничим не доказује, она се ни на каквој другој не оснива него је, сама по себи, извесна.

Теореме су, према аксиомама, истине другога реда. Оне не носе у себи самима своју извесност него им ова долази од аксиома на којима се оснивају. Њихову истинитост, отуда, не увиђамо непосредно, него је тек треба доказати; а она се доказује тиме што се изводи да се оне следују, према неопходним законима мишљења, као неминовна логичка последица из аксиома. Разуме се по себи да се не доказују све теореме непосредно аксиомама. Теорема има општијих и мање општих; и ове мање опште доказују се општијима од њих, које се опет могу, са своје стране, оснивати на другим још општијим. Али, пошто се ове најопштије оснивају на аксиомама непосредно, то се и мање опште, које се на оним најопштијим оснивају, оснивају посредно и у крајњој анализи на њима. Пут којим се теореме доказују из аксиома, у исто време је и пут којим се оне изводе. Пример за теорему имамо у ставу: *у сваком правоуглом троуглу, квадрат начињен на хипотенузи раван је збиру квадрата начињених на катетама.*[1]

Уз теореме, као опште ставове који изражавају какве било бројне или просторне односе, иду, врло често, и ставови мање општности, који из њих излазе као непосредна *последица* њихова, или им служе као *допуна.* Такви се ставови називљу *короларни* ставови или *короларије* теоремâ.

Примедба. Под теоремом се у излагању називље и сваки постављени став који треба доказати.

Проблеми су још нерешена, отворена питања науке. Свако питање, — у коме се означује резултат који ће се добити и у коме се траже начини да се до резултата дође; или, свако питање, у коме су показани начини а тражи резултат, — зове се *проблем.* Под проблемима се, још, врло често, разумеју и ставови чија је истинитост под питањем (*проблематични* ставови). Као проблеми означавају се, на послетку, нарочито у математичким наукама, задаци који се за решење задају.

5. Наука о бројевима. — Према нашој општој дефиницији (n° 1), *наука о бројевима јесте скуп свију неопходних односа или закона који потичу из природе бројева.*

Идеја о бројевима тако је проста, да се аксиоме, које се на њих односе, своде скоро на ништа, и у ствари су само природни развитак ове саме идеје. Према томе, наука о бројевима почива на самом појму броја, она је прва међу математичким наукама; она је, још, најпростија и најсавршенија наука, јер су нужни подаци, које она од спољнег света позајмљује, најпростији и најсигурнији, још и у нај-

[1] Питагорина теорема.

мањем броју. Није ни чудо, што смо се увек, као и данас, трудили да све друге науке сведемо на науку о бројевима.

Упознајмо се, сада, ближе, са неким терминима који долазе у науку о бројевима.

Количина јесте математички термин, и каже се о свему оном што може бити мерено или бројено, о свему оном што може бити увећано или умањено.

Јединица је принцип броја. То је количина, произвољно узета, да служи као термин за поређење количи́на̄ исте врсте. Јединица је, дакле, оно што образује једно потпуно цело у својој врсти, као: један човек, једна кућа, један коњ, једно дрво итд.

Број. Јединица, збир јединица, делови јединице јесу бројеви. Евклид је дефинисао број: збир јединица исте врсте. Цифре служе за писање бројева.

Да напоменемо само: онај део математичких наука који се бави својствима бројева јесте *теорија* (наука) *бројева*. — Систем старих грчких философа који претпостављаху да је васиона управљана бројевима, и који придаваху извесним бројевима мистериозна својства, сачињавао је *доктрину бројева*.

Ми ћемо образовати све *множине* полазећи од једног самог предмета који нам не даје идеју о множини, него о ономе што зовемо *јединица*, по том додајући му један други предмет, за тим још један нов, и тако до у бесконачност. И, како ми зовемо *бројевима (целим)* све ове разне множине, разумевајући у бројеве и саму јединицу, види се да је след бројева неограничен, да је најмањи јединица, или број *један*, и да се сви други бројеви постепено образују сталним додавањем јединице ка последњеобразованоме.

Бесконачно каже се о ономе што није коначно, што је безгранично, бескрајно; каже се, још, о ономе чему се не могу означити границе; као један бесконачан простор, једно бесконачно трајање. Бесконачно, као математички термин, означава име које се придаје количинама адбисмо означили њихову величину. Првим корацима, који се учине у геометрији, налази се бесконачност, коју су, од најстаријих времéнâ, геометри назирали.

[1] „Кад каква променљива количина добива све веће и веће бројне вредности, тако, да она поступно постаје већа од сваког па ма колико великог броја, онда се каже, да она расте бесконачно. Кад пак променљива количина добива све мање и мање вредности тако, да она поступно постаје мања од сваког па ма како малог броја, онда се каже, да она опада или да се умањава бесконачно. Краткоће ради, зову се количине, које бесконачно расту, *бесконачно велике количине*, а оне, које се бесконачно умањавају, *бесконачно мале количине.*

„Казати, дакле, да је та и та количина бесконачно велика или бесконачно мала, значи толико, колико казати, да она расте или се умањава бесконачно тако, да у првом случају она може постати и постаје већа од ма како великог а у другом мања од ма како малог броја.

„Према томе, не треба дакле сматрати бесконачно велике и мале количине као одређене и непроменљиве, јер суштина истих, према ономе што мало час рекосмо, и састоји се баш у томе, да их можемо замислити и то прве веће од ма како великог броја а друге мање од ма како малог броја“.

Кад кажемо: след бројева јесте *бесконачан*, брзина једног кретања може се *бесконачно* увећати, шта значе ови изрази, ако не то, ма колико велики био неки број, да је увек могуће замислити један већи, и, ма како брзо било неко кретање, да се увек може замислити једно брже?

Најпростији односи међу људима изазивали су, кроз сва времена, нужност употребе бројева. У мери у којој су се ови односи компликовали, у којој су промети поста-

---

[1] *Димитрије Нешић,* Алгебарска анализа, књ. I, стр. 15; 1883. Београд.

јали многобројнији и разноврснији услед напретка индустрије, у мери у којој су се саобраћаји међу народима све више ширили, у тој мери употреба бројева постајала је све већма и већма неопходно нужна, и чак се може рећи да би, без њих, готово сви комерсијални односи били немогући.

Чим се осетила потреба да се морају употребити бројеви, у тим односима између људи и нарôдâ, одмах се морало занимати начинима како ћемо разликовати бројеве и како ћемо их саопштити другима. По неки пут, то се чинило показујући ма какве предмете у равном броју ономе који се хтело означити; прсти на рукама извесно су служили, и још и данас врло често служе, за ту употребу. Но ми се нећемо, даље, упуштати у никакво археолошко истраживање у томе погледу.

Примедба. — Ми изражавамо кратко и прецизирамо све наше идеје помоћу форама, идеалних конструкција, без којих ми не бисмо успели да их фиксирамо, да их видимо чисто; и рекло би се да, управо, у оној мери у којој њихова асимилација у слике успева да у тој мери можемо од њих чинити објекат (предмет) позитивних знања.

На пример, идеја о времену не представља нам се без оне о кретању, тј. о једном путу који би једна тачка описала, ма да осећамо да је она од ове различна. Тако исто, ми не мислимо чисто о бројевима, а да у том тренутку разне тачке или расејани предмети, од којих нам свака (сваки) представља једну јединицу или једну групу, не дођу да се поставе пред умно око.

Исто тако, ми никада, чини нам се, не размишљамо јасно о континуарној алгебарској количини, а да у том тренутку не видимо једно протезање (простирање) које нам је представља, на име најпростије од протезања, тј. протезање у једној димензији, праву линију. Ова права линија, претпостављена да почиње у бесконачности и продужена, најпре, до једног повољно-изабратог почетка, може бити, полазећи по том од овог почетка, увећана или умањена ма каквим дужинама. Ове дужине јесу управо за нас природне слике свију количина, позитивних или негативних. Што је чиста анализа, теорија о количини (релној) у опште, простија, униформнија у својим начинима рада (проседеима), него обична геометрија, то управо долази отуда што се ова количина може изразити једном линијом, и, према томе, што она има само једну димензију или се мења само у једном смислу и у супротном смислу, на место три димензије протезања и бесконачне множине односа које оне собом носе.

6. Наука о просторности. — *Наука о просторности* (étendue), која се такође и *Геометрија* зове, *јесте скуп свију неопходних односа који потичу из природе просторности.*

Ова је природа, за нас, одређена малим бројем основних појмова, из којих сви закони о просторности јесу нужне последице, и које ми задобивамо искуством, посматрањима и расуђивањима о којима смо ми изгубили траг, али који су оставили у нама потпуно осећање очевидности.

После науке о бројевима, Геометрија је најсавршенија и најпростија наука, јер су нужни подаци, којима се она служи, најпростији и најсигурнији. Ове две науке, као најпростије и најсавршеније, морају бити проучене пре свију других, јер се у овима последњима појмови о бројевима и они о просторности нужно увлаче као познати. Обе ове науке, наука о бројевима и Геометрија, сједињене сачињавају оно што се зове *чиста математика.*

Ми рекосмо да је Геометрија мање проста наука од оне о бројевима; то долази отуда што се у Геометрију, поред појма о броју, увлачи још један нов појам — *појам о простору,* о коме ћемо мало после (n° 7) опширније говорити. И заиста, идеја коју ми себи стварамо о просторности или о простору, било бесконачном, било ограниченом, износи нам пред очи, осим идеје о бројевима, још оне о облику, о величини, о положају; тако да је нужно извући из посматрања, поткрепљеног размишљањем и закључивањем, опште појмове који потпунце одређују природу ствари обухваћених идејом о просторности. Број ових првобитних појмова врло је ограничен и, чим су они усвојени, сви закони о просторности могу бити отуда изведени самим закључивањем. Наука задржава себи право да, по неки пут, уводи и нове принципе које напредак науке собом донесе. Да напоменемо још да број геометријских истина различних не може бити означен, и никада се не може имати претензије да се зна цела наука. Свака нова истина, која се открије, може дати места новим дедукцијама, и повећати број комбинација из којих се могу саставити нова питања; тако да се не појима могућност да се материја науке икада исцрпи. Науке, дакле, имају обим коме је не могуће одредити границе, а међу тим им се знају основи; све што оне обухватају виртуелно је обухваћено у том малом броју принципа о којима човек јасно и разговетно има свести.

Најпростији појмови што тела, која нас окружују, чине да се рађају у нама јесу они о просторности и о множини или броју. Једно тело, посматрано са̂мо, даје нам појам о просторности и о форми. Различна тела, а исте врсте, дају нам појам о *множини* или *броју*. Радови *Дишмена*[1] послужиће нам врло корисно при посматрању појма о просторности.

Просторност (étendue) јесте оно својство те́ла̂ које може бити сматрано, ако не као битно (есенциално), оно бар као првобитно (примордиално) и основно; оно је, у ствари, прво које се примећује нашим чулима. Кад погледамо спољне предмете, ми добивамо утисак, рецимо, од једне бојадисане слике, и ова слика има карактер просторности. Од свију

---

[1] *R. Duchemin,* Essai d'une explication rationnelle et scientifique de l'attraction universelle, 1891, Paris.

особина тела просторност је она која изгледа да је најбоље позната. Она је била проучавана кроз сва времена; из ових проучавања поникло је више наука које су нам помогле да задобијемо врло велики број знања јасних, поузданих, савршено тачних и прецизних.

Сколастици су посматрали, у опште, просторност као један универсални атрибут телесних супстанција. Просторност је једино својство тéлâ које се не може ни променити нити ишчезнути: оно је самим тим, у неку руку, подлога свију других својстава, и, према томе, мора бити, оп Декарту, сама супстанција тéлâ. Питање бејаше ту, када Лајбниц дође да тврди да просторност не само није супстанција тела него ни атрибут ове супстанције.

Могло би се мислити да је један појам, тако драгоцен и тако плодан у научним резултатима, као што је појам о просторности, сâм по себи најлакше појмљив. То би била једна илузија. Мало је философских појмова који су изазвали толиких контроверза, као што је овај. Најславнији философи: Аристотело, Декарт, Лајбниц, Кант, Спенсер, и толики други, имају најдивергентније погледе на интимну природу просторности и психолошко порекло овога појма. Ми не ћемо да улазимо у испитивање релативне вредности ових теориiа различних а често и супротних, ми помињемо само ове контроверзе те да покажемо тешкоћу овога проблема.

Без да се задржавамо више на овим посматрањима метафизичкога реда, примимо обичан појам о просторности кога, у опште, дефинишу: *један ограничени део простора*, и видимо: 1° да ли је ово својство битно свима телима?; 2° да ли је за једно и исто тело оно увек непромењиво тј. једно тело, остајући идентички исто, заузима ли увек и нужно једнак део простора, или ово запремање простора може бити увећано и умањено?

Ми смо далеко од тога да хоћемо да идентификујемо просторност са суштином (есенцијом) тела; ми морамо, међу тим, признати да ово својство изгледа да је нераздвојно од материје и од концепције коју о њој имамо. Нужност да се заузме један део простора јесте очевидна за сва тела опипљива и видљива, чак и за најмање молекуле. У најмањем делу молекуларном налазе се сви елементи просторности: једност, множина делова, њихови узајамни односи, и једна слика опажања (перцепције) објекта виђењем или додиром. Да ли је исто случај и са осталима, основним и саставним елементима молекула? Да ли су атоми просторни, или су они само геометријске тачке без димензија?

Далеко би нас одвело, ако бисмо предузели детаљније расматрање и извођење одговора на постављена питања. Ми ћемо изнети само закључке до којих смо дошли. Они су:

1° Појам о просторности има, за наш ум, једну мрачну страну. Не зна се, у којој је мери слика, коју дају оптичка и тактилна осећања, представа спољних стварности.

2° Мора се признати свима телима, па чак и једном простом атому, особина простирања тј. да заузимају један одређени део простора: *сва су тела просторна.*

3° Део простора заузет једним телом није природно, ни нужно, непроменљив.

Први појам о просторности, кога примамо од чврстих тела, није једини о коме нам она дају идеју. Границе њихове просторности (границе простирања тела), или њихова *површина,* образује једну другу врсту просторности са свим различите природе, пошто унутрашњости тела, која је посматрана у првом појму, нема у овоме. На послетку, ако се посматра један део површине једнога тела, он је ограничен оним што се зове једна *линија;* и линија даје идеју о једној новој врсти просторности потпунце различне од двеју других. Ако се посматра један део линије, границе њене просторности, или њени екстремитети, не дају нам идеју о никаквој врсти просторности и зову се *тачке.* Ове поменуте три врсте просторности познате су под именима: просторност по *запремини* или *волумену,* просторност по *површини* и просторност по *дужини* или по *линији*. Све ове три врсте просторности разумевају се под општим именом *геометријских величина.*

Површине, линије и тачке находе се на телима, и на њима се линије добивају као *пресеци површина* (ивице), а тачке као *пресеци линија.*

Ми ћемо, сада, рећи само неколико речи о просторности или о фигури у најпростијем случају — у случају линија.

Најпростија од свију линија, она о којој се расматрање представља понајчешће у геометрији, јесте *права линија:* о којој су дате доста различне дефиниције.

Најславнији писци наших дана зову правом линијом *најкраћу линију која може бити повучена од једне тачке ка некој другој.* Ова је дефиниција доста незгодна, јер се њом своди један појам на друге који се немају и који су, у многоме, мање прости од првога. Какав се појам може створити о овој дефиницији, датој у самом почетку Науке, када се још не зна шта су то *линије једнаких дужина?! Дихамел,*[1] у сагласности са Евклидом, зове *правом линијом једну бесконачну линију такву, да се кроз две дате тачке може повући само једна једина.* Ова дефиниција има ту превагу над првом, што даје потпуно чист појам о тој врсти линија.

Свака линија која није права, ни састављена од правих линија, зове се *крива линија.*

Најпростија и најважнија од кривих линија јесте *круг.*

Приметимо још, што је врло важно и за Меканику, да се, почев од једне тачке неке праве линије, могу посматрати две различне стране дајући места ономе што називамо *супротни правци* праве у овој тачци. Природна тежња човечија, да однесе све на себе сâма, често чини

---

[1] *Duhamel,* op. cit., t. II, p. 8—9.

те се ова два правца означавају именима *лево* и *десно*, и, у извесним случајевима, ова слика много доприноси да се може дати један јасан појам о положајима или о кретањима.

Предмети, који нас окружују, чине те се стварају у нама појмови о величини, о облику, о положају, о множини, о отпору, о боји и о још толико других особина. Способност што можемо да не водимо рачуна о некима од ових особина, и која нам је способност природна, дозвољава нам да се бавимо одвојено са једном или више од ових особина, што нам у многоме олакшава њихово проучавање.

Геометријско тело назива се један ма колики део празнога простора, замишљено да је ограничен са свију страна. *Геометријска тела, дакле, не постоје у природи; она се само замишљају.* Између свију оних особина, што их имају природна (физичка) тела, код геометријских тела постоје само ове две: *просторност* (запремање) и *дељивост*. Па и те су две особине, у геометрији, друкчије замишљене: у простору једнога геометријскога тела може се замислити, у исти мах, више других тела, што код физичких тела то не може никако бити; осим тога, што се тиче дељивости, нема тако малог простора или тела, које се не би могло још и даље делити, док Физика има своје механички недељиве *молекуле*, а Хемија своје *атоме*. Геометријска тела немају *материје*, па с тога код њих не може ни бити говора о другим особинама: о боји, о тврдоћи, тежини, еластичности, инерцији, итд., које код физичких тела проучавамо.

Свако је тело, као што смо казали, па и геометријско тело ограничено површинама. Границе површинâ јесу линије, а границе линија — тачке.

Но површине, линије и тачке могу се и *самостално замишљати*, и то: површине одвојене од тела, линије одвојене од површина, а тачке одвојене од линија. На такав се начин оне, обично, и посматрају у Геометрији.

У простору се разликују *само три правца простирања*, или *само три димензије*, а то су: *дужина, ширина* и *висина*.

Тело има све три димензије; површина има две: дужину и ширину; линија има само дужину.

Тело, површина и линија, између својих граница, имају одређену *величину*. Тако, као што знамо, величина тела назива се запремина; величина површине — површина, а величина линије назива се дужина.

И тело, и површина, и линија могу се *мерити* својим деловима; дакле, могу се представити именованим бројевима: с тога су они *количине*, и за разлику од других количина називају се: *просторне* или *геометријске количине*.

Не улазећи дубље у Геометрију и не упуштајући се у даље излагање геометријских истина, ми ћемо још изложити предмет ове науке.

Геометрија је наука која се бави изучавањем просторних количина. Остављајући спекулативној Философији да решава питање: како постаје представа (појам) о простору, Геометрија ставља себи у задатак да опише основна својства простора и да испита све облике, који се у њему могу замислити. Она, у главноме, проучава питања о величини, о облику и о положају просторних количина и показује нам њихове особине и међусобне везе.

Један од првих и главних предмета ове науке јесте мерење и израчунавање величине или простирања просторних количина, тј. одредба њихових бројних односа са једном величином њихове врсте, узете за јединицу; другим речима, то је израз ових разних величина у бројевима. Али, не треба мислити да Геометрија нема другог предмета и да све пропозиције морају тежити ка овом јединoм циљу; и писци, који јој дају ту дефиницију, ограничавају је и сувише.

Геометрија проучава још: кретања тела; кретања површина, које при свом кретању описују тела; кретања линија, које при свом кретању описују површине; кретања тачака, које описују линије. Сва ова кретања Геометрија проучава независно од *појма о времену*, у коме се врше ова кретања.

Геометрија не може тачно да опише ни бројеве, ни простор, ни кретање; а, међу тим, ове три ствари јесу оне, које она посебице посматра.

Примедба. — У једном од својих многобројних и значајних мемоара *Мансион*[1] вели: „У Геометрији, многа лица, довољно необавештена о стварној важности дискусија које се односе на постулат Евклидов, уображавају, немајући право, да су ове дискусије поколебале основе математичкој извесности. Ми ћемо, у овоме што иде, показати да од тога ничега нема. Ми разликујемо физичку или експерименталну Геометрију од идеалне Геометрије или *Метагеометрије*, и ми ћемо показати како је ова допунила Евклидову Геометрију тако да ју је учинила апсолутно ненападљивом са логичке тачке гледишта.

„*О философској важности Метагеометрије.* У једној скорашњој беседи *M*^gr^ *d'Hulst-a*, находи се овај навод, у коме учени ректор Парископ Универзитета окривљује модерне геометре неком врстом скептицизма:

„„Пређе, узимало се за основ опште геометрије стварни простор, са законима које искуство даје, са три димензије којима су потчињена сва тела која примећујемо нашим чулима. Данас, геометри се ослобођавају од ових обичних услова; они претпостављају различне просторе, са четири, пет, шест или више димензија; на ове фантастичке хипотезе они примењују математичку анализу, и ево их одоше, у неки уображени свет, тражећи закључке по све логички изведене, али пред којима се ум губи.

---

[1] *P. Mansion*, Sur les Principes fondamentaux de la Géométrie, de la Mécanique et de l'Astronomie, 1893, Paris.

„„По том, када се они поврате на овај стари традиционални простор, у чијој средини ми живимо, они тврде да његови закони немају, пред разумом, веће вредности од чудноватих простора у којима је збир углова једног троугла мањи или већи од два права угла, у којима једна крива линија може служити као паралелна једној правој линији. Резултат ове необузданости анализе јесте математички скептицизам““.

„Ово је мишљење, великога аутора од *Mélanges philosophiques*, основано на једном неспоразуму кога треба отклонити и на једном непотпуном познавању математичких истраживања на принципима Геометрије. На првом месту, простори са више од три димензије, којима се математичари баве, немају ничега фантастичког, ни хипотетичног. То су просто групе од четири, пет или једног већег броја променљивих на које они примењују једну терминологију подражавану оној у аналитичкој геометрији са три димензије.

„Ова је терминологија веома корисна, јер се лакше прате закључивања која се односе на четири, пет или већи број променљивих, када се употреби говор, који непрестано подсећа на слична закључивања о трима променљивим, која могу бити геометријски преведена, ако се три променљиве посматрају као координате једне тачке.

„Само у ствар непосвећени уображавају да математичари придају геометријски значај просторима са више од три димензије. Ствар је, при свем том, могућа, али у једном другом смислу а не у оном кога означисмо, па чак и не излазећи при том из равне Геометрије. Тако, скуп од пет променљивих може бити геометријски представљен коничним влаком имајући ове променљиве за коефициенте своје једначине; што ће се изразити, на скраћени начин, рекав да сви конични влаци једне равни представљају један простор са пет димензија.

„На другом месту, традиционални простор, тј. простор Евклидов, није ни више ни мање чудноват од простора Лобачевскијевих или Римановах. У ниједном од ових простора, геометри не кажу да је паралелна једној правој једна крива линија. У Римановим Геометријама, праве се увек секу; у Лобачевскијевим, паралелне једној правој јесу праве. M^{gr} d'Hulst je, без сумње, помешао равноодстојност од једне праве са паралелношћу са правом....

„Далеко од тога да су поколебали основе математичкој извесности, геометри су их, у последња времена, боље рећи, учврстили. Стварајући Метагеометрију, они су доказали да је постулат једине паралелне сагласан са класичком дефиницијом праве, и, према томе, они су учинили Евклидову Геометрију ненападљивом са гледишта тачности. Утврђујући једнаку логичку вредност Геометрија Евклидове, Лобачевскијевих и Римановах, показујући да оне објашњавају исто тако добро једно као друго од својстава стварнога простора, они су непобитније доказали, него што је то Гаус учинио (*Werke*, II, p. 167, note), некорисност Кантовог појимања простора, посматран као урођена форма ума. У осталом, нигде, у ниједном одељку било Метагеометрије, било физичке Геометрије, они немају потребе да прибегавају произвољним тврђењима, или синтетичким суђењима *a priori* у смислу Кантовом".

7. Рефлексије о појму простора. — Ево нас да размишљамо и говоримо о *појму простора*, о коме смо већ, у напред, неколико речи казали. Ма да ћемо, у овоме што следује, изложити некоје мисли познатих светских философа о томе појму, ипак можемо рећи: узалудно је што се наука хвалише да може објаснити *свако непознато;* њена освојења, ма колико велика да их претпостављамо, оставиће увек недирнут *вечити проблем:* појам о простору. Суђено је вери и науци да живе дотле — докле и свест.

Фај,[1] на првој страни прве свеске, вели: „Звезде, које видимо да сијају на небу, јесу права сунца као наше. Сунце нема ничега што га физички разликује од безбројних звезда којима је овај простор насељен, али, за нас, оно има ту особеност да му ми припадамо; оно је центар једне групе малих тела мрачних и ладних, међу којима наш глобус, Земља, заузима своје место; ови глобуси примају од њега светлост и топлоту; они га прате у његовом транслационом кретању. Скуп свију звезда или сунаца јесте *васиона*".

По *Литреу*, васиона је неограничени систем планета, комета, сателита, сунаца, звезда, расејаних у простору, систем који изгледа да се око нас окреће; у кратко, васиона је скуп свију створених бића. Тај је скуп систематичан или хармоничан; у васиони се, дакле, не находи један једини део који не би имао свој разлог у целоме.

Примитивном човеку, као и сваком детету данас рођеном, ставља се са̂м по себи проблем о васиони: Шта је то васиона? И откуда она долази? — Ова питања заповедно траже неко решење, кад год се, од времена на време, моћ уображења издигне над просташтвом живота.

О пореклу васионе могли бисмо учинити три претпоставке. Можемо рећи: 1° да она постоји сама по себи, или 2° да се ствара сама собом, или 3° да је створена неком спољном моћи. Није потребно, овде, да истражујемо која је од ових трију претпоставака највероватнија. Да напоменемо само, да се, у опште, узима прва претпоставка као највероватнија.

„Је ли васиона бесконачна?, кажу ми то, вели Волтер, али ко ће ми то доказати?" — По којим законима уређује ум своје представе, да би дошао до појма васионе, и откуда долазе ови закони?

Фај[2] вели: „Васиона образује, вероватно, једну целину чије нам границе умичу; ако је она управљана за-

---

[1] *H. Faye,* Cours d'Astronomie, I et II vol., 1881–1883, Paris.

[2] *H. Faye,* op. cit., t. I, p. 1–4.

конима у својој целини, ти су нам закони непознати; никако нема наде да ће се ум човечиј икада до њих подићи. На против, сунчев систем је једно цело ограничено, добро обележено; својом простотом, сретним скупом повољних прилика, њихова унутрашња кретања приступачна су анализи: наука о овим кретањима јесте прост меканички проблем и овај је проблем тако потпуно решен, да је Астрономија, данас, у стању не само да себи верно представи своја претходна стања, него још и да предскаже, са чудноватом прецизношћу, своје будуће стање за неки ма који датум“.

Васиона, у својој целини исто тако као и у чудноватој разноврсности својих појединости, подиже се пред нама као нека загонетка. Најмоћнији умови били су занети неком неодољивом силом да истражују томе објашњења. У свима епокама историје, било је религиозних или научних доктрина, посвећивања у тајне или списе *De naturâ rerum*, које су хтели сматрати као неки разлог ствáрû које, тада, сачињаваху свет испитивања. Број до сада учињених опита, оних који се још и данас чине, казују довољно да проблем није никако решен. Може ли бити?!....

Три се питања могу још поставити: који је првобитни узрок, или који су првобитни узроци света? Какав је свршетак, шта је *зашто* толиких ствари као и скупа ствари? Каква су средства, шта је *како* ових ствари и њиховог скупа, тј. који је ред по коме се узастопна стања ређају? — Критика је, држимо, дефинитивно показала немоћ науке да простре светлост на ове регионе. Сви они, који су упознати са правим стањем философије, знају врло добро да то није нека криза кроз коју она пролази, откуда она може изаћи поткрепљена новим силама: она је позвана да призна радикалну немоћ ума човековог да сазна истину о овим питањима, која су, кроз сва времена, сматрана као основна!

Треба примити *a priori* извесне појмове, извесне идеје, њиховим простим исказом или простим именовањем којим се они означавају. Тако, нпр., ми ћемо се добро чувати да објашњујемо оно шта разумемо под једном *истином*, оно шта је то *бити* или *егзистирати*, било материјално било интелектуално. Ми не ћемо покушавати да дефинишемо ни *простор* ни *време*, јер то су два од оних појмова које је довољно само исказати па да их ум јасно појми; које свако дете врло добро појима чим је одрасло, и чим је упознало узастопност у појавима, али које ће моћи, доцније, да постану за њега мрачне, ако се тражи да му се ти појмови дефинишу.

Представа, коју нам дају тела као просторне величине, јесте чисто једна конструкција ума, и то је та представа која је, за нас, прави почетак појма о простору. И заиста, материјална тела дају нам појмове о просторности, о облику, о положају једних наспрам других; и, као што смо казали, наш ум може да чини апстракцију од свега онога што чини њихову материјалну природу, и у њима да гледа само њихову фигуру. Наш ум замишља у њима једну непрекидност и једну правилност, што је далеко од тога да их она заиста имају, и дајући им то идеално савршенство он их потчињава својим истраживањима и образује науку која се Геометрија зове.

Дихамел[1] вели: У природи је човечијег духа да, увек, иде ван онога што му чула представљају. Тако исто, ма да помоћу њих познаје само тела врло ограничена, појима ли он могућности да ове границе буду много мање стешњене, и не види ли чак он никакву одређену границу њиховог простирања, било идеалну, било чак и материјалну.

Појам о просторности чини те се, код већине људи, ствара мишљење да заиста и постоји оно што називљу *бес-*

---

[1] *Duhamel*, op. cit., t. II, p. 4—6.

коначан простор, и то да постоји независно од егзистенције ма каквога тела, и да би он постојао и после потпуног поништења свега онога што сада постоји, материјално или спиритуално. Замишљајући границе простирања тела, која постоје или која могу постојати у васиони, одмакнуте у бесконачност ми стварамо себи појам о бесконачном простору. Самим тим што се узима могућност тела, ми представљамо себи и то, да се мора узети да, у њему, има и места да та тела у се прими; и, чистом апстракцијом која нам чини да појимамо материју и фигуру способне за безграничну просторност, ми стварамо себи појам о стварности нечега, што зовемо *простор*. Тешко је ићи даље; и то је, међу тим, тако природно да ће са свим мало људи бити, с почетка, нашега мишљења о овој тачци, која је већ била предмет многих контроверза.

Али, ако се претпостави за један тренутак да ништа не постоји и да једно тело буде створено, на какву би препреку могло наићи? Шта се мисли, кад се каже да је потребно једно место да се оно прими? Чим је створено, оно има једну просторност; може се, без сумње, чинити апстракција о његовој материјалности и гледати само његова фигура: тако се има идеја о просторности која би се могла сачувати и по уништењу целе материје. На тај начин, путем апстракције, узев простор независно од садржине, ми стварамо себи појам о *празноме простору;* али то би био један прост појам који постоји у нашем духу а који нема никакве реалности у спољнем свету.

Пошто се, већ, створило веровање у реалност тога фантома, који називамо бесконачним празним простором, заблуда нас и даље води: да ми тај празан простор можемо себи да представимо и независно од свакога спољнега утицаја. Они, који тако мисле, губе, дакле, из вида да је празан простор производ човечијег уображења. Овај фантастички простор (простор лишен свега што је материјално, тј. оно што замишљају под бесконачним празним простором и чему многи, погрешно, придају реалност), за кога држе да је опредељен да прима ове предмете, или чак просто њихове фигуре, није *нешто:* то је *одсуство свачега* и значи апсолутно то исто што и *ништа.*

Ми не можемо, никада, себи представити са̂м простор, нити дати дефиницију његову. Рекав, са *Ларусом*,[1] да је простор неопредељена просторност места или времена; или рекав, по *Литреу*, да је простор место које садржава тела, универсални садржатељ (réceptacle), као што су га сколастици звали, — ми немамо никакве претензије да дајемо о њему један појам (идеју) тачнији од онога који је у свима умовима.

Простор, сматран као аритметичка величина, био је опредељен у геометрији. Он се мери стављањем једно до другога (јукстапозицијом) тела̂, која не остављају између себе никакав размак. Према њиховој природи, ова тела моћи ће бити узета као јединице дужине, површине или запремине.

О представи, која се у нама ствара о спољнем свету, *Динан*[2] вели: „Има доктрина, као што је *идеализам*, које су, изгледа, апсолутна негација реалности спољњега света. Идеализам, у осталом, ма какве биле његове заслуге, у овом је случају једна доктрина, коју треба одбацити. И заиста, како ћемо усвојити мишљење по све чудовишно (монструозно), по коме би наша интуиција о спољнем свету била права илузија, тако да бисмо ми били жртве вечите обмане (халуцинације)? Теорија Беркелејева (Berkeley), треба признати, иде дотле. Свест људска протествује свом енергијом противу таквих доктрина, и овде, као увек, свест људска има право.

„Уображавају ли да ће идеализам лакше бити примљен тврдећи, са Кантом, да у ствари ми не опажамо ни-

---

[1] *P. Larousse,* Dictionnaire complet de la langue française, 1885, Paris.

[2] *Charles Dunan,* Essai sur les Formes a priori de la Sensibilité, 1884, Paris.

чега стварнога и да живимо у свету привидности̂, али, бар, ове су привидности потпуно основане, пошто оне изражавају интелектуалну конституцију човечијег духа. Не мање смо у обмани ако ми видимо спољни свет (ствари) са свим друкчији него што је он у ствари, као и онда ако верујемо да видимо оно што у ствари не постоји. За то треба, по нашем скромном мишљењу, узети за апсолутно подозриву, у опште, доктрину, данас тако распрострањену, и коју су назвали *велика догма релативности сазнања.*

„Ми узимамо, дакле, апсолутно, стварну егзистенцију спољњега света; и о томе се не може појавити никаква сумња, пошто је спољни свет — свет супстанција̂ и узрока̂, и пошто супстанцијалитет и узрочност јесу битни карактери, не привидне и феноменалне него релне и апсолутне егзистенције. И спољни свет не само стварно постоји, него је он апсолутно такав каквога ми познајемо“. (р. 172 до 175).

На послетку, да наведемо, у кратко, мишљења двају философа о појму простора, дајући Канту завршну реч о томе.

Бусинеск[1] *о појму простора.* — Цео свет узима да се идеални смисао простора и фигура̂ могао развити у нама само услед опсервација, које су пробудиле нашу интелектуалну активност.

Геометријски смисао показује нам, у ствари, простор као нешто бесконачно, непроменљиво, нешто што претходи (логично) свима фигурама, које уображење види у њему насликане, као и свима телима, која заузимају делове истога и која се у њему крећу. Ми представљамо себи простор да увек постоји, и да би постојао чак и онда када би се уништила сва бића, која у њему видимо или која у њему замишљамо.

---

[1] *M. J. Boussinesq,* Etude sur divers points de la Philosophie des Sciences, 1879, Paris.

Најпростије је и најпаметније узети простор за оно што нам га даје геометријски смисао, једини компентентан у томе погледу толико колико то допушта наша природа.

У осталом, са свим је појмљиво, да ова сагласност не треба да нас спречава да сумњамо па чак и да узмемо да постоје врло мале разлике између идеалног простора на тај начин појмљеног и стварнога простора у коме су тела, ма да ми не можемо да фиксирамо ове разлике. Ми, у осталом, осећамо да је наша наука несавршена у свему, па чак и у стварима оним у које ми најјасније гледамо.

Одрецимо се, дакле, да до краја испитујемо појам простора, пошто се то не може чинити а да се не изађе из поља које нам је приступачно; а, нарочито, не приближавајмо га идејама о супстанцији и начину, о којима је дубока помрчина један доказ да су оне мало својствене форми нашега схватања.

Зна се да је Лајбниц, да би објаснио простор, начинио од њега једну форму телâ, и објаснио га као однос или ред коегзистенција. Али простор, такав какво га ми својевољно појимамо, није управо то, знајући да нам га интуиција показује логично да претходи телима па чак и свима фигурама које се могу у њему обележити. Простор је место у коме се развија извесан ред коегзистенција. Наше искуствене или рационалне моћи (способности) показују нам да је само један једини ред коегзистенција, и да је то онај ред који се развија у простору. На тај начин, ми се опет налазимо на полазној тачци, и појам о простору јесте такав да се не може свести на простији облик.

Нашто, у осталом, тражити да се определи појам простора, када цео свет узима у практици да је он оно што је најјасније, или када свака наука достиже свој максимум прецизности и јасности чим се она на њ сведе, чим она узме геометријску форму. (р. 19—23).

Кант[1] *о простору. Метафизички претрес појма о простору.* — Спољним чулом, које је особина нашега духа, ми представљамо себи извесне предмете ван нас, а ове све скупа у простору. У њему је одређен или се њиме може одредити њихов облик, њихова величина и однос њихов једних према другима. Унутарње чуло, којим дух сама себе или своје унутарње стање опажа, истина не даје никакву интуицију о души самој као објекту; али опет има један одређен облик под којим је једино интуиција њеног унутарњег стања могућа тако да све што спада у њена унутарња определења, представљено је у односима времена. С поља се време не може опазити, као што се ни простор не може опазити као нешто у нама. Шта су дакле простор и време? Јесу ли они стварна бића? Јесу ли они само определења или су и прости односи ствари? И ови односи јесу ли такви који би им и самим по себи припадали чак и тада када се не би опажали? Или су такви да су везани само за облик интуиције и тиме и за субјективни склоп нашега духа, без којег се ови предикати никаквој ствари не би могли придавати? Да ће о овим питањима обавестимо претрешћемо најпре појам о простору. А под претресом *(expositio)* разумем јасну представу (и ако не и опширну) онога што каквом појму припада; метафизички је претрес када садржи оно што показује појам *a priori* дат.

1. Простор није никакав емпирички појам, који би се могао из спољних искустава извести. И заиста, да би се извесни осећаји могли односити на нешто ван мене (тј. на нешто на другом ком месту у простору а не оном на коме се ја налазим) као и да бих могао себи представити ствари једне ван других и поред других, и по томе не само као различне, него и на различним местима, — за то мора

---

[1] *E. Kant,* Critique de la raison pure; traduit de l'allemand par J. Barni; t. I, 1869, Paris.

већ бити у мени представе о простору. Према томе, ова представа о простору не може бити позајмљена искуством из односа спољних појава; него ово спољне искуство тек може постати могућим са овом представом.

2. Простор је неопходна представа, *a priori*, која служи као основ свима спољним интуицијама. Немогуће је себи представити да никако нема простора, ма да се може врло добро замислити да у њему нема никаквих предмета. Он се, дакле, сматра као услов могућности појава, а не као опредељење које би од њих зависило и он је представа *a priori*, која по неопходности служи као основ спољним појавима.

3. Простор није дискурзиван појам, или, како се вели, општи појам о односима ствари у опште, но једна чиста интуиција. И заиста, прво можемо себи представити само један једини простор; а кад говоримо о више простора, онда под тим разумемо само делове једнога истога и јединога простора. Ови делови не могу ни претходити јединим простору који све обухвата, у неку руку, као саставни делови његови (из којих би се он могао састављати); него се могу, на против, само у њему замишљати. Он је суштаствено један; разноврсност коју ми у њему познајемо, и по томе и општи појам о просторима у опште оснива се једино на ограничењима. Отуда излази да интуиција *a priori* (која није емпиричка) служи као основ свима појмовима, које ми о њему образујемо. Тако се и сви геометријски основни ставови (принципи), као што је овај, нпр., да су, у једном троуглу, две стране скупа узете веће но трећа, не изводе никако из општих појмова о линији и троуглу, него из интуиције, и то интуиције *a priori* са њиховом аподиктичном извесношћу.

4. Простор се представља као једна дата бесконачна величина. Оно истина, мора се сваки појам замислити као једна представа која је сâма у бесконачној множини различних могућих представа (као њихово заједничко обележје)

садржана и по томе их под собом обухвата; а никакав појам, као такав, не може се тако замислити као да би он у себи садржавао бесконачну множину представа. Међу тим, тако се замишља простор (јер сви делови простора постоје истовремено до у бесконачност). Дакле је првобитна представа о простору интуиција *a priori*, а не појам. (p. 76—79).

Ми упућујемо читаоца на само дело (p. 80—85), те да проучи *Кантов трансцендентни претрес појма о простору*, и *последице из тих претреса изведене.*

8. Рефлексије о појму времена. — Основни подаци првих двеју наука, науке о бројевима и науке о просторности, ма да су, до једне извесне тачке, прибављени посматрањем природних објеката, независни су од врсте материје која их сачињава, и која може варирати од једнога предмета ка другоме: они (подаци) се односе само на разликовање и на просторност ових објеката. При томе се чини апстракција од саме материје, и живи се у идеалном свету величине, фигуре и броја, о којима би осећање могло у нама остати чак и онда када би се материјални свет, који нам га је дао, нашао уништен.

Али први подаци, откуда резултују закони о том идеалном свету, били би недовољни за одредбу законâ *материјалног* света, у чијој средини ми живимо. Науке које од ових зависе биће основане на принципима који ће моћи бити добивени само посматрањем природе, пошто овај свет нема ничега нужнога, и могао би бити створен са свим друкчији него што је у ствари.

У овом проучавању истинскога света, умесно је бавити се, најпре, најпростијим и најопштијим својствима материје. Између њих има једно својство које је заједничко свима телима, ма каква била особена природа материје која их сачињава: то је *покретљивост;* она игра једну улогу у већине појава, и, према томе, општи закони, којима она даје места, траже да буду проучени пре оних који се односе на појаве који зависе од разних врсти материје. Проучавање ових закона јесте предмет једне науке, а њихов скуп сачињава оно што се зове *наука о силама.* У овој се науци находе разматрања која не представљају наука о бројевима и она о просторности: тј. разматрања о *времену, кретању* и *узроку,* о којима ћемо, мало ниже, редом говорити. Појам о узроцима који производе кретање резултује из нашег сопственог искуства и напрезања која чинимо да померимо тела; он није потчињен никаквој тешкоћи; али два друга појма, појам о времену и кретању, као год и појам о простору, дала су места многим дискусијама између филозофа или софиста.

Следовање наших осећања, и догађаја који су их произвели, јесте неоспоримо за све људе. Али, између овог осећања и мисли да има једно биће у коме се врши ово следовање, постоји једна провала. *Време* нема стварнију егзистенцију од простора; оно је, може бити, још мање схватљиво. Ова два тобожња бића јесу фантастичка створења човечијег уображења, који хоће увек да иде ван онога што може да осети, схвати и да разуме. Али, како следовање догађаја игра велику улогу у природи и у људском животу, од највеће је важности увести у њој реда и прецизности; а то је што се у том прво учинило сравњујући разне догађаје са сукцесивним догађајима који јако падају у очи, као, нпр., повраци сунца над хоризонтом. Пошто је ово ређање догађаја помоћу дáнâ, на скоро, постало недовољно, требало их је сравнити са међувременима, и то се назвало *поделити време у интервале:* фигуративни говор који је свршио тим да се створи веровање да је време једна величина, дељива као и геометријске величине, и на коју се постављаају све епоке, као деоне тачке на једној линији.

Метафизичари су рекли, да је време место појавâ, а простор место тéлâ, чинећи на тај начин да изађе аналогија која постоји између ова два појма. Има, међу тим, између њих разлике. Тако, будуће време ми не можемо да појмимо као да постоји: то је један појам апсолутно фиктиван. На против, неограничени простор појмљен је у ствари као постојећи. Шта више, простор има три димензије, тј. три су броја нужна те да се у њему утврди положај једне тачке. Време има само једну димензију.

Са рачунског гледишта, може се посматрати време као аналогно простору рачунатом на једној бесконачној правој почев од једног извесног почетка. Природно је тада посматрати интервале (размаке) времена као позитивне или негативне, према томе да ли су рачунати у будућности или прошлости, почев од изабраног почетка. Најчешће, у Механици, дају се почетни услови и не бави се о ономе времену што је у напред прошло, за то што то чини некорисним посматрање одречних времена. У Астрономији, изабере се једна почетна епока одређена једним тачно посматраним појавом и рачунају се времена као позитивна или негативна према томе да ли претходе или следују епоци посматраног појава.

Пелис,[1] на страни 133—134 свога дела, вели ово: „Не само ум човечиј не би могао изићи ван простора ни времена, него већ бесконачности ових двају појмова стављају му моћне препреке и чудновате противречности (антиномије). Примери су, у томе погледу, многобројни. Један од најкарактеристичнијих јесте онај о бесконачном броју; за тим, чудновата концепција умова за које је бесконачност прошлог времена једна количина мање неограничена него бесконачност која настаје. Међу тим, почев од једне тачке положене на једној линији, може се подједнако ићи у бесконачност у два супротна правца; два су дела праве исте природе и вечито су симетрични. Бесконачност прошлости, без сваке сумње, сада је остварена, али ако је окончана или свршена, она није међу тим једна коначна количина, која се може изразити једним бројем; овај број претпо-

[1] *Edouard Pellis,* La Philosophie de la Mécanique; 1888, Paris.

ставио би један латентан почетак од којега ум човечиј не успева да се отресе при свим својим напрезањима. Бесконачност прошла јесте свршена, али она никада није почела; бесконачност будућа почиње, али се никада неће свршити. Аналогија је потпуна. Једна бесконачност сада остварена није нова ствар: *није никада другаче ни било у трајању*".

За простор и време ми не можемо тврдити ни да су ограничени, нити пак да су неограничени. Ми смо потпуно неспособни да, у памети, створимо себи једну слику о простору без граница, а тако исто потпуно смо неспособни да замислимо границе ван којих не би више било простора. Тако исто, ако пређемо од бесконачно великога ка бесконачно малом, не могуће нам је да замислимо границу дељивости простора, а исто тако не могуће нам је појмити га дељива до у бесконачност. Без да је нужно набрајати, види се, да смо подложни сличним неспособностима и кад је реч о времену. Простор је перманентна (стална) и непрекидна количина; а време је непрекидна количина и још сукцесивна. Ми смо приморани да замишљамо простор и време као ствари које постоје, а међу тим ми не можемо да их сведемо на услове под којима су њихове егзистенције представљене.

Велики део наших концепција, разумевајући међу њима и најопштије, јесу символичке концепције. Велике просторности, велика трајања, велики бројеви, нису, ни једни ни други, појмљени у истини (ефективно), него на неки начин више или мање символичан.

Из *Литреа* вадим неколико дефиниција, ако их тако смем назвати, о времену. Тако: 1° Време је трајање ства̂ри̑ у толико у колико је оно измерено или мерљиво; ова мера обележена је нарочито кретањем и привидним окретањем сунца. — 2° Време са филозофског гледишта. По *Лајбницу:* време је ред сукцесивних егзистенција. — Време је и овако дефинисано: Идеја која у нама резултује из упоређења сукцесивног стања и стања коегзистенције, стања о којима нам памћење даје осећање, обележавајући у нашем уму ред и следовање физичких и моралних утисака које смо ми искусили, дуго после тога пошто су догађаји, који су их произвели, престали да постоје. — Има доста различних мишљења која се тичу есенције времена; тако једни веле да је то кретање, једне створене ствари; други, мера кретања *(Pasc., Espr. géom. 1)*. — Време нема друге мере него само сукцесивност наших идеја *(Buff., De la vieillesse et de la mort)*. — Време је мера кретања које се односи на приоритет и постериоритет *(Dider., Opin. des ans. philos.)*. — Време је један део измереног трајања; идеја о времену јесте, дакле, образована од идеје већ апстрактне и опште о трајању, комбинисана са оном о кретању *(Destuttracy, Instut. Mém. scienc. mor. et pol. t. I, p. 213)*. — Време је, за нас, утисак који нам оставља у памети једна след догађаја код којих смо извесни да је егзистенција била узастопна *(Laplace, Exp. I, 3)*. — 3ᵉ Као меканички термин: у Меканици, време је трајање које изискује један појав да се произведе. — 4° Време је след да́на̂, са́ти̂, тренутака, у односу на радове, занимање.

Протествујући, у напред, противу усвојења једног бића *време* назвато, ми ћемо употребити обичан говор; ми ћемо поређати узастопне догађаје помоћу онога што ћемо звати *интервалима* (размацима) времена, које ћемо изразити бројевима, пошто смо им са прецизношћу одредили *једнакост* и *збир;* што ће бити могуће тек по увођењу једног другог општег појма, онај о кретању.

Кант[1] *о времену. Метафизички претрес овога појма.* — 1° Време није емпирички појам или који би се могао извести из каква год искуства. И заиста, истовременост или следовање само не би долазило у опажање, да нема представе о времену *a priori* као основи. Само са претпоставком исте (представе о времену) можемо себи представити да

[1] *Kant*, op. cit., p. 85—87.

једна ствар постоји у истом времену са неком другом (као истовремена са њом) или у различном времену (као претходећи је или следујући јој).

2° Време је неопходна представа која свима интуицијама за основу служи. У погледу појава, у опште, ми не можемо време сâмо уклонити и ако можемо врло добро да уклонимо појаве из времена (у мислима). Време је, дакле, *a priori* дато. У њему је једино могућа сва стварност појава. Ове могу све скупа отпасти, само се оно само (као општи услов њихове могућности) не може уклонити.

3° На овој неопходности такође *a priori* оснива се могућност аподиктичких основних ставова о односима времена, или аксиома о времену у опште. Време има само једну димензију; различна времена нису заједно (истовремена), но једна за другим, дакле се следују (док, међу тим, различни простори нису једни за другим, него су заједно). Ови се основни ставови не могу извести из искуства, јер ово нити би давало апсолутне општности, ни аподиктичке извесности. Ми бисмо само могли рећи: тако нас учи обично опажање, али не да тако мора бити. Ови основни ставови важе као правила по којима једино може бити искустава; и поучавају нас пре њих а не њима.

4° Време није никакав дискурзиван, или, како се каже, општи појам, него само чисти облик чулне интуиције. Различна су времена само делови једног истог времена. Представа која се може дати само једним једитим предметом то је интуиција. Исто тако не би се могао ни став, да различна времена не могу бити заједно, из општег појма извести. Тај је став синтетичан, и не може потицати једино из појмова. Он је, дакле, непосредно у интуицији и у представи времена садржан.

5° Бесконачност времена не значи ништа друго, но да је свака одређена величина времена могућа само ограничењима једног јединог времена које му за основу служи. Отуда, дакле, мора првобитна представа времена бити дата као неограничена. А од чега се делови сами, и свака величина предмета могу представити само по средством ограничења, онда ту и цела представа не може бити дата појмовима (јер они само садрже делимичке представе), него им за основу мора служити непосредна интуиција.

И овде, кад је реч о времену, упућујем читаоца на Кантово дело да проучи *трансцендентни претрес о времену*, на страни 87 и онима до 109.

Динан[1] *о простору и времену*. — Теорија осећања обухвата, за нас, проучавање двају питања:

1° Да ли време и простор постоје или не, апсолутно и по себи?

2° Време и простор, претпостављајући при том да немају апсолутне егзистенције, јесу ли или нису ли то форме које дух намеће *a priori* појавима, и по којима он ствара своје властито знање?

Доктрина, по којој време и простор не би никако имали апсолутне стварности, није мање стара од противне доктрине. Она је била проповедана великим бројем филозофа из старине. Налазимо је код Елеата, код Платона, а тако исто и код Аристотела, а доцније у неоплатоничкој школи у Александрији. Заједничка мисао, коју прихватише, у овом питању, разне филозофске школе које именовасмо и још неки последоватељи, беше: време и простор немају, у ствари, никако апсолутне егзистенције; али, међу тим, они морају имати толико стварности колико и човек и све контингентне ствари.

После Александринаца, треба доћи до Лајбница па да наиђемо на нове погледе о питању које нас занима, и на једну по све озбиљну дискусију о објективној стварности времена и простора.

Да ли су време и простор, у ствари, непрекидни? — Ми имамо у виду време и простор онакве какве их ми

---

[1] *Charles Dunan*, op. cit., кратки извод.

себи представљамо. Непобитно је, да су време и простор, када се тако схвате, непрекидни.

Ми мислимо, као и Кант, да су простор и време чисти подаци представљања, и да немају егзистенције у апсолутном смислу речи, било као атрибути, било као субјекти.

Време и простор јесу представе, бар логички, раније од свакога искуства.

Интуиција времена дата је истовремено са оном о простору: оне, дакле, имају једно и исто порекло. Време је, нужно, елеменат представе простора; или, ако се можемо, овде, послужити једним алгебарским термином, интуиција простора нужно је *функција* оне времена. Овај став изгледа нам да је сасвим очевидан.

Појам времена није урођен као ни појам простора; интуиција о томе дата нам је, не *a priori*, као што то Кант вели, него самим искуством.

Ми држимо, противно мишљењу Кантову, да су идеје о времену и простору заиста појмови (концепти), а не интуиције *a priori* осећања.

Је ли свет актуално бесконачан простором или није? Је ли свет, до овог момента, трајао бесконачни број дана, година, столећа, или није? — И ако је то питање факта, бесконачност или небесконачност света, ипак, као питање, има особени карактер да улази не у астрономију или у ма коју другу науку о природи, већ у метафизику. Очевидно је, да је то једино ствар метафизичара који може решити то питање, ако оно, у опште, није по својој природи нерешиво.

Што се тиче простора, Ренувије и многи други философи мисле да се мора порицати бесконачност света, јер, веле, та бесконачност противречна је, јер она претпоставља остварен бесконачан број.

Узима се, да је свет бесконачан простором; тако да, нпр., ван ових звезда које гравитују на милијарде миља од нас, мора их имати других толико удаљених од првих као што су ове од наше земље; по том ван ових других још друге и друге и тако до у бесконачност. Наши астрономи могу, дакле, усавршавати њихове телескопе и инструменте који им служе за мерење углова; природа ће, увек, држати у резерви тајне које им она неће предати. Са гледишта науке, неоспорно је да свет није никада имао почетка, тј. *да је бесконачан по прошлости.*

Спенсер[1] *о простору и времену.* — Природа нашега мишљења јесте таква да ми свакада мислимо само у односима (релацијама). Све што знамо, знамо само у односу. Однос или релација је, дакле, општи и основни облик мишљења.

Релација, међу тим, има двојаких: има релација следовања и релација коегзистенције; прве су основне а друге изведене. Апстрактни појам свега следовања је *време*, а апстрактни појам свега што коегзистује је *простор*. Отуда, што је у мишљењу време нераздвојно од следовања, а простор од коегзистовања, ми овде не изводимо да су време и простор првобитни облици свести, у којој су следовања и коегзистенције позната, него изводимо да су појмови о времену и простору изведени, као што се и друге апстракције изводе, из конкретности.

Анализа потврђује синтезу. Кад имамо свести о простору, ми имамо свести о коегзистентним положајима. Ми можемо појмити један ограничени део простора само представљајући себи његове границе као коегзистентне у извесним релативним положајима. Не улазећи у ближе извођење о томе како се ствара појам о простору, не можемо да пропустимо а да не нагласимо: да су искуства, којима се до њега долази и из којих се он изводи, искуства о утрошку мишићног рада, тј. *силе*. Оно што зовемо положајем, то је извесна корелација наших мишићних сила; њихов је еквиваленат отпор по којем познајемо да постоји нешто у

---

[1] *Spencer,* op. cit., p. 142—145.

том простору. Наша свест о простору ствара се, дакле, из искуства о силама које се на различне начине у корелацији находе.

Тако нам се представља простор, како својом формацијом тако и својом дефиницијом, као нешто чисто релативно. Да ли има апсолутна простора чија је представа, у неку руку, релативни простор? Да ли је простор сâм по себи један облик или услов апсолутне егзистенције, који би у нашој свести производио један облик или услов релативне егзистенције? — То су питања на која нема одговора. Све што можемо тврдити, то је да је простор нешто релативно стварно; да наша интуиција о овој непроменљивој релативној стварности садржава у себи (инволвује) апсолутну стварност, исто тако непроменљиву за нас, и да се ова релативна стварност, може слободно примити као важећа основа за сва наша умовања која ће нас, ако се добро упуте, одвести истинама које ће имати исто тако релативне стварности, — а те су истине једине које постоје за нас и које ми можемо знати.

Све што важи о простору, важи и о времену релативном и апсолутном. И сувише је очевидно, да није потребно да улазимо у појединости.

Бур,[1] на првој страни свога дела, вели: „Ми сви знамо шта је то кретање; ми сви такође знамо шта је то *време* и *простор;* а, међу тим, може се тврдити да је немогуће јасно одредити ова два основна појма, чија комбинација производи појам о кретању.

„„Скупите, вели Шарл Нодије, Орфеја, Епикура, Демокрита, Аристотела, Хипократа, Архимеда, Марка Аурелија, Цицерона, Монтења, Бакона, Локеа, Лајбница, Босиета, Канта, Жоржа Кивија, и ти такође, мој драги Баланшу; дајте им за известиоца тог доброг принца од Мирандоле,

---

[1] *Edm. Bour,* Cours de Mécanique et Machines; premier fascicule Cinématique, deuzième edition, 1887, Paris.

који се био заузео да брани једну тезу противу кога било, *de omni re scibili,* и питајте те људе да ли знају шта је то време и простор: одговориће вам да они то не знају, да човек не може то да зна.““

„Да ли ћемо покушати да кажемо, са Лајбницом, да је простор *ред ствари које коегзистују*, а време, *ред узастопних егзистенција.* Али је очевидно, не само да нисмо ништа објаснили, да нисмо ништа одредили, него да смо погрешно умовали, пошто идеја узастопности произлази нужно из оне о времену“.

* * *

Напомена. — И ако су непотпуне ове моје рефлексије о појму простора и појму времена, овде изложене, ипак их предајем јавности задовољан у толико што први, у нашој литератури, покрећем наш научни свет на размишљање о тим основним питањима, која је сваки свесан човек, више пута, морао себи постављати. Ја се, *за сада,* нисам смео дубље упуштати у посматрање онога, што је вековима мутило умове највећих светских мислилаца и што баца у несвест свакога који се усуди да пође изван ових граница. Ја сам, више, у неку руку, изложио историјски преглед о овим основним појмовима. Остављам да и доцније, још, више пута, проучавам и размишљам о идејама које сам себи створио приликом проучавања ових основних појмова, из којих ћу, може бити, створити себи јасније појмове о простору и времену. Ја ћу, ове моје рефлексије о појму простора и времена, овде да завршим, по примеру оних који, у незнању порекла толиких ствари, веле: „У почетку (?) створи Бог небо и земљу.[1] За тим је Бог створио светлост и за шест дана створио све што видимо и не видимо“.

9. Дефиниција кретања. — Ми смо почели искључиво да посматрамо множину или број, пошто је то један

[1] *Свето писмо,* Прва књига Мојсијева, стр. 1—2.

појам најпростији и један елеменат неопходно нужан при проучавању свију других; ми смо показали прве појмове који нужно прате онај о бројевима, и ми смо образовали елементе науке о бројевима.

Ми смо, за тим, прешли на проучавање тела посматрана само са гледишта просторности. Ми смо утврдили прве појмове од којих сви закони о просторности јесу нужне последице, и који резултују из искуства, проматрања и рефлексија о којима смо изгубили траг, али који су оставили у нама потпуно осећање очевидности. Ови појмови, ма да многобројнији од оних у науци о бројевима, јесу, међу тим, доста ограничени. Треба им додати неколико других, ако се хоће да се посматрају тела са гледишта њихових узајамних акција и кретања која отуда могу следовати; и још много других ако би се хтело да се сматрају са свима њиховим природним својствима. Али ова наука о просторности мора бити проучена, као и она о бројевима, пре свију других, јер се у ове последње нужно увлаче идеје о броју и просторности. Зато смо и ми, истина у кратко, најпре и говорили о двема поменутим наукама [n° 5 и n° 6].

Ми смо, према општој дефиницији (n° 1), казали да скуп закона о кретању сачињава *науку о кретању*. Наука о кретању тражи још већи број првобитних принципа него две претходне науке — наука о бројевима и наука о просторности. Она, прво, има потребу од свију оних који се односе на ове две, јер кретање претпоставља, као познато, простор и све што од њега зависи. Али у нашем светском систему, чији би закони могли бити различни од онога што су, и у коме тела нису више само симболички представљена, као што их Геометрија претпоставља, него материјална, неопходно је нужно тражити у посматрању и искуству извесне односе између ефеката и узрока или сила, који, уопштени хипотезама врло-вероватним, одређују природу свију ствари које могу бити посматране у појавима кретања. Усвојив ове првобитне принципе као извесне, сви се закони кретања отуда изводе као нужне последице. Али не треба заборавити, пошто принципи имају нечега хипотетичног, да ће то исто бити и са последицама; и да ови принципи, само са сагласношћу резултата добивених размишљањем и закључивањем са онима који су добивени искуством, теже све више и више да произведу у нама осећање извесности.

Ми смо казали (n^0 8) да, између најпростијих и најопштијих својстава материје, има једно својство које је заједничко свима телима, ма каква била особена природа материје која их састављa: то је *покретљивост*. Ово својство игра велику улогу у већине појава, које нам дају тела. Из својства покретљивости материје стварамо себи *појам о кретању*.

Кад се одстојање двеју тачака мења непрекидно, онда се каже да су ове две тачке *у кретању* једна спрам друге и, у опште, кад се одстојања једне тачке од разних тачака једног чврстог система мењају непрекидно, или, другим речима, када се положај ове тачке наспрам овога система мења непрекидно, онда се каже да је ова тачка *у кретању у односу на овај систем*. Геометријско место ових релативних положаја посматране тачке, наспрам овог система, зове се њена *путања (пут)*, или, још, *трајекторија у односу на овај систем*. Ова је тачка у *релативном миру*, наспрам овога система, када њена одстојања остају константна.

Напоменимо још и то, што је врло важно, да је кретање тачке битно *непрекидно (континуарно)*, тј. кад једна тачка пређе из једног положаја у други, да она нужно пролази кроз све тачке праве или криве линије која везује два посматрана положаја њена.

Ако, место једне тачке, имамо један ма колики број тачака које образују један чврст систем, рећи ћемо да је овај систем у кретању наспрам првога система, када се релативни положаји његових тачака, у односу на први систем, мењају непрекидно. Или, у опште, ми кажемо да је једно тело *у кретању*, када видимо да оно поступно заузима разне положаје у простору; у противном случају, оно је *у миру*. Кретање, пак, једног тела биће потпуно одређено када се, у сваком тренутку, зна положај сваке његове тачке.

Ми, под кретањем (франц. mouvement; нем. Bewegung) и миром, нећемо никада разумети друго што — него то.

Соне[1] (који ће нам и у будуће користити) вели: *„кретање* је стање једног тела које мења положај у простору“.

По *Литреу:* кретање је акција којом једно тело или један од његових делова прелази с једног места на друго, из једног положаја у други. — Као *Механички термин:* кретање је мена којом је једно тело сукцесивно присутно у разним деловима простора; то је стање једног тела чије се одстојање у односу на једну непокретну (фиксну) тачку непрестано мења.

Појам о кретању није основни (први) појам; он следује из појма о простору и појма о времену. И заиста, сва се кретања врше у простору. Даље, појам о времену не јавља нам се без онога о кретању, тј. о путу који би једна тачка описала, ма да осећамо да су ова два појма један од другога различни. Колико има лица, која верују да су дефинисали време, када су казали: да је време мера за трајање некога кретања, остављајући му међу тим његов обичан смисао?! При свем том они су само учинили један предлог (пропозицију) а нису, никако, дали дефиницију.

Појам о кретању не јавља нам се, никако, без појма о ономе што се креће, а то је *материја* о чијем ћемо појму, мало ниже, говорити.

Спенсер[2] *о кретању.* — Појам о кретању, који се јавља или који се представља свести, садржава у себи

---

[1] *H. Sonnet*, Dictionnaire des Mathématiques appliquées, 1884, Paris.

[2] *Spencer,* op. cit., p. 146—147.

(инволвује) појмове о простору, времену и о материји. Нешто што се креће, један низ положаја који се поступно заузимљу, и једна група коегзистентних положаја које свест уједињује са онима који се поступно заузимљу, такви су саставни делови (елементи) овога појма. А пошто је, као што смо видели, сваки од ових елемената резултат искустава о *сили* датој у извесним корелацијама, то отуда излази да се даљом синтезом оваких искустава добија *појам о кретању*. Има такође у овом појму један други елеменат који је релно основни елеменат (нужност у којој се находи тело у кретању да мења своје положаје); овај елеменат резултује непосредно из наших првих искустава о сили. Кретања различних делова организма, у релацијама један с другим, јесу прва која се представљају свести. Кретање, како га познајемо, може се, дакле, свести као друге научне и крајне идеје на искуства о сили.

10. О различи кретања апсолутних и кретања релативних. — Кад се каже да је једно тело у миру или у кретању, тада се увек подразумева да је овај мир или ово кретање у односу на извесна друга тела. Посматрајмо два система тачака S и S_1. Узмимо, нпр., у систему S три координатне осе и однесимо на ове осе тачке система S_1. Ми ћемо казати да је систем S_1 *у миру* у односу на систем S, када координате свију тачака система S_1, у односу на осе узете у систему S, остају непроменљиве; у противном случају, казаћемо да је систем S_1 *у кретању* наспрам система S.

Ако је систем S *у апсолутном миру*, онда кретање система S_1, наспрам система S, зваћемо *апсолутним кретањем.* Ако ли је, пак, и сâм систем S у кретању, онда кретање система S_1, наспрам система S, зовемо *релативно кретање.* Дакле, у опште, казаћемо релативно кретање једног тела јесте кретање тога тела посматрано у односу на друга тела, која такође имају своја кретања. Тако, непокретни предмети на површини земље, као једно дрво, једна кућа, јесу у миру у односу на земљу; земља пак сâма јесте у кретању наспрам сунца, итд. Другим речима, можемо рећи, да ми у природи посматрамо само релативна кретања.

Међу тим, ми можемо претпоставити три координатне осе које ћемо сматрати као *апсолутно непокретне (фиксне)* и проучавати кретање једне тачке или једног тела наспрам тих оса; ми ћемо, тада, казати да је једна тачка (једно тело) у апсолутном миру или у апсолутном кретању, наспрам ових оса, према томе да ли она (оно), у току времена, заузима исти положај или различне положаје наспрам тих непокретних координатних оса. Апсолутно кретање, као год и апсолутни мир, јесте чиста апстракција; јер не постоји, може бити, ниједна тачка у васиони која би у истини била непокретна, и на коју би се могао однети положај других тачака, те да се, на тај начин, може створити појам о њиховом апсолутном (стварном) кретању или миру. Али, пошто релативна кретања могу увек бити сведена на апсолутна кретања, и пошто су ова последња потчињена најпростијим законима, то је и врло корисно проучавање апсолутних кретања. Поред тога, проучавање апсолутног кретања неопходно је нужно и за извођење основних (првих) појмова у Механици.

Напоменимо само, узгред, да ће покретна тачка при свом кретању, наспрам непокретних координатних оса, описивати путању (трајекторију) коју ћемо звати њена *апсолутна путања (трајекторија)*. Ако се узме да су координатне осе покретне, онда је кретање тачке, наспрам тих оса, релативно кретање њено; при том кретању тачка ће описивати, наспрам покретних оса, путању коју ћемо звати њена *релативна путања (трајекторија)*.

Бусинеск[1] *о разлици кретања апсолутних и релативних.* — У Механици, у главном, кад се хоће да се определи апсолутни мир и апсолутно кретање, геометри

[1] *Boussinesq*, op. cit., p. 23—26.

могу бити у забуни због појма о простору. Са једним апсолутним простором, апсолутни мир јесте одсуство свакога померања у томе простору. Само, ми не познајемо никаквог непокретног знака (белегу), нити пак тела за која бисмо имали каквог мотива претпоставити да су потпуно у миру; ми, увек, посматрамо само релативне мирове или релативна кретања, тј. неосетне или коначне промене одстојања између телâ у кретању. И нарочито та немогућност наша да констатујемо и да меримо права кретања тела, допринела је те извесан број геометара одриче и да има апсолутних кретања и да је прави простор нешто што представља извесну реалност. Ови геометри одбацују, на тај начин, због једног чисто негативног разлога, и жртвују, бар у принципу, једну од најјаснијих идеја: они заборављају колико смо сиромашни у таквим идејама, колико морамо бити тврдице у истима.

Рационална посматрања, без којих ниједна наука не би постојала, дозвољавају, у осталом, да дођемо до правих општих закона апсолутних кретања, па и ако је немогуће да посматрамо таква кретања. Диференцијалне једначине Динамике добивају, као што ћемо видети, максимум упрошћења за које су способне, тек када се кретања однесу на извесне координатне осе *oxyz*. Има, другим речима, један начин да се протумаче посматрана релативна кретања, који је што је могуће простији, који, на име, не чини да зависе убрзања од брзинâ, и овај се начин може извести из примене рачуна на саме податке опсервације. И, чим се узме да постоји један апсолутни простор, права кретања јесу кретања однесена на овај простор; и та су кретања, а не релативна кретања, управљана законима *општим* или за њих су најпростије диференцијалне једначине добивене: јер здрав разум каже да комбинишући више ствари ми их замршујемо (сем у случајевима невероватним, у осталом *особеним)*, и да се, према томе, апсолутна кретања морају покоравати општим законима онако исто простим или још простијим као и кретања која резултују из њиховог слагања. У ствари, једна униформна транслација саопштена координатним осама не би замрсила законе и не би при том ништа променила; али другачије стоји ствар, као што ћемо видети, код једне ротације.

У практичким проблемима, могу се велика тела претпоставити као непокретна, са толико већом приближношћу што су она већа, док се проучавају кретања, која извршују у њиховој унутрашњости, или близу њихових површина, друга много мања тела. То ће рећи узима се да су велике масе, у природи, обдарене само са врло слабим транслационим и ротационим брзинама или, бар, врло неосетно променљивим, у поређењу са онима што их имају наспрам њих мала тела, која су у додиру са овима великим; тако да је дозвољено придати законима релативног кретања ових исту простоту као и законима апсолутних кретања, чинећи при том само погрешке једва приметне помоћу најделикатнијих пробања. На тај начин, са знатном приближношћу, можемо претпоставити земљу као непокретну, у односу на тела која се крећу на њеној површини. Још већа приближност добива се ако се претпостави да су земља и планете у кретању око тежишта сунчевог система, тј., готово око центра сунчевог. На послетку, са највишом приближношћу, са којом бисмо могли данас тврдити, сматра се као непокретно само скуп видних звезда и етера који нам спроводи њихову светлост.

Здрав разум кроз сва времена, имао је потпуно право што је лакше придавао кретање малим телима него великим. Погрешној примени која је пређе чињена од тога закона, у неку руку инстинктивног, када су извели хипотезу о непокретљивости земље у простору и апсолутном кретању звезда око ње, лежао је прави узрок у непознавању растојања и правих величина ових звезда. Да би остао веран овоме принципу, он није могао а да не узме да се пре земља окреће него ли сунце и звезде, чим је постало очигледно да су сунце и звезде много веће од земље. Погрешка о којој је реч, највећа може бити коју је учинило опште осећање, само је, дакле, у основу, једна материјална погрешка; и она никако не спречава да мислимо да је ово опште осећање, повољно испитано, још, од свију философских или научних критериума, онај који најмање обмањује.

Примедба. — Кретање и мир, као што смо их дефинисали, јесу битно релативни; но може ли се придати миру или кретању један смисао *апсолутан?*

На то питање *Дихамел*[1] одговара: „Има, без сумње, још философа који верују у егзистенцију онога што се зове *апсолутни простор*, независно од свију створених бића, који је постојао пре њих и који би постојао још и онда када би она била уништена. Они кажу овај непокретни простор, јер не би било никаквог разлога да се он помери пре на једну *страну* него ли на другу, и никако не траже да даду себи рачуна о ономе шта разумеју под *апсолутним правцем.* Свака тачка овога бесконачног бића (безграничног простора) има, за њих, једну стварност, у неку руку *личну (сопствену)*, коју вечито задржава са својом непокретљивошћу; и са овим тачкама, које они зову *непокретне*, они сравњују све тачке свију створених бића. Апсолутно кретање једне материјалне тачке састоји се, за њих, у њеном узастопном (сукцесивном) подударању са разним тачкама непокретнога простора. Или, што је исто, једна материјална тачка јесте у *апсолутном кретању* када се њена одстојања од разних тачака овога простора мењају; на против, она је у *апсолутном миру* када се ова одстојања не мењају.

„Али шта би то била апсолутна непокретљивост тачака простора, дајући им чак ову врсту особности (персоналности)? — Било би, са свим тако исто, немогуће објаснити и дефинисати је за ове уображене тачке као и за

[1] *Duhamel,* op. cit., t. IV, p. XVIII—XIX; p. 224—225.

истинске тачке. За нас, према томе, апсолутни мир није више једна ствар коју је немогуће упознати, него просто једна бесмислица; јер би то било подударање са истим непроменљивим тачкама простора, којима ми не дајемо никакву егзистенцију, и чија тврђена непокретљивост јесте једна шимера, чији се прост појам не би могао ни дефинисати ни осетити, тј. не би се могао задобити ни умом ни чулима. И заиста, апсолутна непокретљивост ових тачака могла би се дефинисати само узимајући да она већ постоји код других (тачака), тј. помоћу погрешног умовања.

„Рећи ће се, може бити, да је то један појам који се не може свести на никакав други, и који је очевидан сâм по себи. Ми ћемо на то одговорити, да прве ствари које се, на тај начин, усвајају морају бити јасно видљиве, очевидне сâме по себи. Но сасвим је то другојачије овде, пошто људи примећују само релативне мирове или релативна кретања; тако да би појам о апсолутном миру или кретању, далеко од тога да може бити уврштен међу основне (прве) идеје, усвојене осећањем очевидности, био празна сањарија чији би основ био погрешно умовање.

„Напустимо, дакле, овај погрешан појам, чија је некорисност, у осталом, очевидна; јер би сви принципи који би се поставили, усвајајући овај појам, могли бити основани само на посматрањима и релативним искуствима. Па и нашто нам поћи од релативног те да индукцијом утврдимо уображену апсолутност, из које бисмо извукли принципе применљиве на релативност, која је једино стварна? Није ли боље, пошто смо поставили принципе који се односе на релативност, применити их непосредно на стварност, без да идемо ка некој фантастичкој апсолутности, па да је одмах занемаримо“.

11. Принцип мерења времена. Јединица времена. — Појам о времену, који улази у онај о кретању, јесте један од оних које ми имамо независно од сваке дефиниције: он нам је дат сукцесивношћу појава који се пред нашим очима збивају. Протествујући, у напред, противу усвојења једног бића *време* названо, ми ћемо употребити обичан говор, ми ћемо поделити у класе узастопне догађаје оним што ћемо звати *интервалима*, које ћемо изразити бројевима, пошто смо, да бисмо могли мерити време, прецизно одредили *једнакост* и *збир* времена.

Ми ћемо рећи: ***два интервала времена јесу једнака кад два идентична тела, постављена под идентичним условима у почетку свакога од овиx интервала, и потчињена истим акцијама и утицајима сваке врсте, буду прешла на крају овиx интервала идентичне просторе, у односу на један чврст систем на који се односе сви положаји.*** Или, краће, два су времена једнака кад су она трајање двају идентичних појава.

Овај је став више исказ једног факта него ли једна дефиниција. Ма како било, полазећи од тога факта или од те дефиниције, долази се до мерења времена. Ако се замисли један суд пун воде задржавајући непрестано исти ниво, и ако се начини на доњем делу суда један отвор, количина истекле воде за неко извесно време моћи ће послужити за мерење овог времена, јер факат отицања једног литра воде јесте један појав који је идентичан самом себи и који, према томе, потребује исто време за своје извршење. Ми можемо узети за јединицу времена време употребљено док истече један литар воде; време t биће тада време које прође док истекне t литара воде.

Природа нам пружа извесне појаве, који нам служе за мерење времена; такви су појави, нпр., пролаз једне звезде кроз меридијан. Интервал времена двају од ових узастопних пролаза чини јединицу времена названу сидерални дан. Треба моћи поделити ову јединицу, тј. треба наћи један нов тренутни појав чија би периода трајања била аликвотни део трајања првога појава. За то се служимо малим осцилацијама клатна (шеталице), која су изохрона.

Ако се узме да се земља непрестано налази под идентичним условима, њени повратци у исти положај у односу на звезде вршили би се у једнаким интервалима времена. Али, кретање, које може да се најлакше произведе под идентичним условима, јесте оно једног клатна. Једно клатно скренуто за дати угао од вертикале, и изложено у разним епокама идентичним акцијама, враћало би се у положај вертикале у интервалима времена које смо назвали *једнаким,* и, дајући клатну једну повољну дужину, моћи ће се дати трајању његове осцилације однос који се хоће са трајањем сидералнога дана, који је — дан — интервал између два узастопна повратка земљиног глобуса у исти положај у односу на звезде, које образују један систем најзнатнији и најсталнији који је дато човеку да познаје.

На овај последњи систем, на систем звезда, који се без икаквих незгода може сматрати као непроменљив, добро је односити велика кретања, као што су земљина и других планета. Али, за све оно што има за предмет рад или потребе људске, или извршење опита којима је циљ да нас одведу општим својствима или посебним сазнањима, треба да се кретања односе на систем предмета који су у непроменљивој вези са земаљским глобусом; и на тај начин треба разумети она кретања о којима ћемо доцније говорити, сем ако изрично не нагласимо да хоћемо да водимо рачуна о померању саме земље у односу на звезде, и да и сама релативна кретања на земљи морају бити посматрана у односу на систем звезда.

Ако, после одредбе једног интервала, један други почиње и свршава се, онда се каже да од почетка првог до краја другог интервала има један интервал раван суми обојих.

Пошто смо, на тај начин, одредили једнакост и збир интервала, изабраћемо, за члан сравњења, један извесни интервал, који је природно узети у односу са трајањем дана; и све интервале или сва трајања моћи ћемо представити целим бројевима или разломцима, подразумевајући увек при том једнака пододељења јединице, према општој дефиницији о једнакости. На тај начин, времена ће се увек моћи изразити бројевима, као кад би она била праве количине.

Да напоменемо да је $n^{ти}$ део једног времена увек једно време, као год што је $n^{ти}$ део једне ма какве дужине опет једна стварна дужина, па ма колико било n.

Инструменти, употребљени за мерење времена, као што су: сатови, кронометри и клатна, јесу справе које најбоље остварују узастопност непрекидних идентичних појава имајући исто трајање, и они су у физици описани. У опште, справе сајџилука, тако исто и оне које се у домаћем животу употребљују, као и оне које служе за прецизна испитивања, удешене су у ствари према небеским појавима. Астрономија нам показује, како се овим справама мери време.

Јединица времена. Кад је један одређен интервал времена изабран за јединицу, онда сваки други интервал времена биће представљен бројем који мери његов однос наспрам усвојене јединице. Избор ове јединице јесте сасвим произвољан, и теорије у Механици нужно су независне од тога избора. Али, у обичној употреби и за примене, као јединица времена узима се *једна секунда средњег сунчаног времена* тј. $86400^{ти}$ део средњег сунчаног дана одређеног астрономским посматрањима на звездарницама.

Оно време, које протече од једног подна до другог, тј. између два узастопна пролаза сунчева кроз меридијан, зове се прави *сунчани дан.* Средња вредност из свију различитих правих сунчаних дана зове се *средњи сунчани дан.*

Средњи сунчани дан дели се на 24 сата, сат на 60 минута, а минут на 60 секунада. Наши сатови раде по средњем сунчаном времену.

У Геодезији, може се указати потреба, да се послужимо *правим временом* или *сидералним временом.*

Примедба. — Кад претпоставимо да познајемо начине рада за мерење простора и времена, онда је лако одредити и дефинисати кретање једне тачке или једног тела. Избере се један систем координатних оса и одређује се положај тачке у овом систему оса. Ако тачка заузима различне положаје, у разним временима, онда се каже да је тачка у кретању наспрам оса; и њене три координате јесу функције времена, које је сматрано као независно променљива количина. Може се, такође, у неким особеним случајевима, време сматрати као четврта координата а узети за независно променљиву количину једна од првобитних координата. Тако је радио Лаплас у теорији месеца где је лонгитуда независно променљива количина.

12. О материји. Дељивост материје. — Ма да сам сагласан са Спенсером у томе: да је природније говорити прво о материји, па тек после тога о кретању, као једној особини материје; ипак сам говорио најпре о кретању с тога, што ми је потребно било, да бих завршио моје *рефлексије о појму простора,* да изнесем *принцип мерења времена* а то нисам могао учинити без појма о кретању и његовој дефиницији.

Ми не можемо ни замислити кретање а да, у исто време, не замислимо и *нешто* што се креће.

Материја је, тако исто, апсолутно непојмљива по својој унутрашњој (битној) природи као год простор и време. Ма какве претпоставке чинили, ми налазимо, анализујући их, да нам оне остављају само избор између супротних апсурдности. И појам о материји, као год и појмови о простору, времену и кретању, јесте крајна идеја науке.

Материја је непоништива, кретање је непрекидно: универсалне истине. Из различне комбинације ова два елемента — материје и кретања — следују сви појави космоса. Свака мена, па ма каква била заплетеност коју нам она представља, јесте, за нас, нека модификација материје и нека модификација кретања. У свима тим менама телесног света количина материје остаје непроменљива.

Уништење материје исто је тако непојмљиво као што је и постанак материје непојмљив. Непоништивост материје, тачно говорећи, јесте једна истина *a priori*.

Као што видимо да свет, образован кретањем материје и лишен интелигенције, постоји увек, то треба да његова кретања имају непроменљиве законе.

Спенсер[1] *о појму материје*. — „Наша концепција материје, када се доведе на најпростији облик, своди се на коегзистентне положаје који дају неки отпор; то је најпростија идеја коју можемо себи о њој да створимо; ми је, на тај начин, разликујемо од наше концепције простора у којем коегзистентни положаји не дају никаква отпора. Ми замишљамо тело као ограничено површинама које дају отпора и као сложено потпуно из делова који такође дају отпора. Ако бисмо у мислима апстраховали коегзистентне отпоре, и интуиције о телу нестаје, остаје само интуиција о простору. Представа о материји састављa се, на тај начин, из два неразлучна елемента од којих је отпор један а простирање други. Од ова два неразлучна појма, један је — отпор — примарни, а други — просторност — секундарни. Простирање је само други израз за простор, а о простору смо показали да и он, у крајној анализи, са своје стране, претпоставља низ небројених искустава, што долазе од утисака које добијамо од отпора на које тело наше наилази. Отуда излази јасно да се наша идеја о материји доводи од искустава о *сили*, силе које стоје у извесним корелацијама чине сву њену садржину“.

Г. С. М. Лозанић, у почетку свог монументалног дела, у својој Хемији,[2] вели: „Све што око нас виђамо и што

[1] *Spencer*, op. cit., p. 145—146.

[2] *С. М. Лозанић*, *Хемија* са гледишта модерних теорија, први део, *Неорганска Хемија*, треће издање, 1893, Београд.

нашим чулима као нешто стварно осећамо, називамо *тело*; оно пак из чега се тела састоје, зовемо *материја*. Наша опажања, било на земаљским, било на васионским телима, називамо *природни појав*“.

Он, даље, вели: „Још су стари Грци, у давној прошлости, развили дубоке философске теорије о суштини материје и бићу природних појава; и, што је веома значајно, те теорије служише науци кроз дуги низ векова, а неке још и данас служе.

„Сва она тела, као што су водоник, хлор, кисеоник, азот итд., која се не могу данашњим силама у простија тела раставити, сматрају се као недељива, и зову се *елементи* (стихије, основице). Противно томе, сва она тела, која можемо у оваква најпростија тела раставити, зову се *сложена тела* или *једињења*. Досадашњим испитивањем нађено је шесет осам елемената.

„Питање о најпростијим хемијским телима — елементима, покренуто је још у најстаријој хемијској прошлости, старо је толико исто, колико је и сама наука стара; оно је претресано живо кроз сва времена до данас. Још најстарији грчки философи, на пет векова пре Христа, узели су, да су ватра, ваздух, вода и земља једина проста тела, из којих је све остало састављено. Ти су елементи, са извесним модификацијама, задржати до краја прошлог века, када је постављен појам наших данашњих елемената. Са развитком аналитичке хемије расо је број ових елемената, а и данас се још непрестано проналазе. Докле ће расти број наших елемената, о томе се не може ништа рећи.

„Нашав се овде пред питањем о последњим састојцима тела — о елементима, сваки ће се запитати: *да ли је наш данашњи појам елемената коректан?* да ли су наши елементи од иста најпростија тела? Ако погледамо на пут којим долазимо до ових елемената, то у њему самом нећемо наћи одговор на та питања. Ми узесмо да су наши елементи недељива тела с тога, што их ми не можемо нашим данашњим силама у простија тела разлагати; но из тога не смемо извести закључак, да ће они и пред будућим напретком физике и хемије остати недељива тела. Ако пак напоменем, да су алкални оксиди пре употребе галванске струје као елементи сматрани, онда је тиме наговешћена могућност анализе наших елемената при употреби интензивнијих и нових сила. Да ли је дакле коректан појам наших данашњих елемената, то ће решити будући напредак физике и хемије. Али и данас још, са чисто философског гледишта, можемо посумњати у коректност нашег поимања суштине материје. Ми имамо сада шесет осам елемената, и тај ће се број, на сваки начин, новим проналасцима увећавати; он се може удвојити, па и више пута увећати, али ће остати непрестано неки произвољан број. Сама та произвољност броја елемената улива у нас неку сумњу у правилност њиховог поимања; јер не можемо никакав философски разлог да дамо, зашто је укупна материја наше земље, а и целе васионе, састављена из тако произвољног броја елемената. Са чисто философског гледишта највероватније је, да постоји или бескрајње много елемената, или један једити. Ово последње било би најприродније, ставив се на гледиште јединства силе и материје. Стари грчки философ *Леукип* изнео је свој замишљај о јединству материје у његовој атомској теорији још на четири и по века пре Христа. Тако *Прут* је још 1815. г. обратио пажњу на то, да су атомске тежине многих елемената цели бројеви, кад се узме водоник за јединицу. Он је држао, да би ту правилност показали и сви остали елементи, само кад би им се знале тачне атомске тежине. Из тога је Прут извео закон: *да су атомске тежине елемената неки мултипл водоникове атомске тежине*, а то га је опет навело на мисао о јединству материје, *где је водоник праматерија, из које су сви елементи састављени.* Но тачним одредбама атомских тежина би оборено тврђење Прутово. За тим су Dalton, Faraday, Gladstone, Brodie, Graham, Mills, Stokes, Lockyes, Crookes и други велики људи изјављивали сумњу о простоти наших елемената, и изнели су своје замишљаје о суштини једне једите прама-материје. *Менделев* и *Мајер* пак показаше својим периодним законом, да сви елементи стоје међусобно у неком генетичком односу. Најновија опажања *Локија*, да спектри елемената велике атомске тежине постају простији на вишој температури, и *Нилзон Круксово* чланеење спектара неких елемената у више нових спектара, јесу може бити неки опитни зрачак, који ће озарити питање јединства материје. Но за сада је јединство материје прост философски замишљај без икаквог опитног доказа; на против појам наших данашњих елемената изведен је из опита". У кратко: „питање о хемијским елементима стоји нерешено и пред данашњом хемијом.

„На овом месту јавља нам се питање: *да ли ови исти наши елементи састављају и остала васионска тела?* Питање је дрско, али благодарећи данашњем напретку физике и хемије, можемо са великом вероватности тврдити, да ови исти наши елементи састављају и сва васионска тела. Ми знамо како је помоћу спектроскопа доказано, да у атмосфери сунца, и других неких непокретних звезда има од ових истих наших елемената. Осим тога анализано је до сада око три стотине метеорита, који су такође васионска тела, па ни у једноме од њих није нађен неки нови елеменат. Све ово тврди, да је цела васиона из исте материје састављена. Овим не мислимо да кажемо то, да је бројем наших елемената исцрпљен број васионских елемената; на против, може се са разлогом веровати, да већа васионска тела, добив у део знатнију количину некадашње опште васионске масе, могу имати и већи број елемената, но што их има наша мајушна земља" (страна 15--19; за тим 115 и 188).

Питање о хемијском саставу тела у опште, а васионских тела посебице, врло је важно и с тога ћу, у допуну овога што довде рекосмо, из темата: *о спектралној анализи и њеним најважнијим применама*, који сам 1884. године, о св. Сави, израдио, исписати ово што иде:

Светлосни појави дају нам најважније средство за распознавање конституције разних тела. Ови нам појави дају могућности да распознамо положај молекула у телу и начин како је исто тело састављено — да дознамо, дакле, да ли је тело кристалисано и на који начин?, или је некристалисано; даље, да дознамо како су молекули састављени из атома, и, у опште, да дознамо хемијску природу тела.

Питање о *спектралној анализи* једно је од најважнијих дневних питања, којим се бави врло велики број научара. „Спектралној анализи, веле *Kirchhoff* и *Bunsen* (1860), задатак је да нам представи начин добијања и разликовања добивених спектара од разних светлосних извора, и да нам покаже примену коју отуда добивамо“.

Да би се тела могла проучавати, помоћу спектралне анализе, потребно је да су светла или другим светлим телима осветљена. „Светлост, вели *Jamin* (1883), зовемо оног чиниоца (агенса) који нам тела виднима чини“.

Ја се нећу дубље упуштати у излагање теорије о спектралној анализи (о спектроскопији), већ ћу се ограничити и само поменути да је спектрална анализа један од најђенијалнијих проналазака нашега столећа и да је ретко која друга научна дисциплина, за тако кратко време свога делања, постигла толико успеха као што је то постигла спектрална анализа. Ја ћу, овде, сасвим укратко, изнети њене најважније примене у астрономији и хемији.

Прва и најважнија примена спектралне анализе находи се у астрономији. Помоћу ње пронађена су средства, помоћу којих можемо чинити опите и са оним телима, која су билионима миља од нас удаљена, као да су та тела у нашем лабораторијуму.

За испитивање земаљских тела има више путева и начина да им се човек може приближити; али за испитивање природе небеских тела ми смо упућени само на један једини пут, а постоји и само један предмет који нас са њима спаја: то је само светлост и ништа више.

Сама и једина светлост која, од ових небеских тела, к нама долази, јесте летећи весник који нам доноси вести: о бићу, хемијском саставу, облику и боји тих тела. У опште, светлост небеских тела даје нам могућности да одредимо њихов хемијски састав и физички склоп.

Помоћу спектралне анализе, можемо проучити и права кретања небесних тела.

Друга, не мање важна, примена спектралне анализе находи се у хемији. Поред великог броја реакција, помоћу којих можемо сваки елеменат распознати, добит у спектралној анализи јесте врло велика — неоцењена; помоћу ње можемо *врло лако* и *брзо*, у више случајева, да изведемо квантитативну анализу неког тела; осим тога, добит је у *невероватној осетљивости* спектрално-аналитичких реакција, које је Бунзен измерио. Он је нашао да се $\frac{1}{3,000.000}$ део m. gr. од натриума, метут у пламен, јавља жутом линијом у спектру. Најзад, помоћу спектралне анализе пронађено је више нових елемената.

Локије (Lockyer) се много бавио спектралном анализом. Он је испитивао спектре разних тела на различним темперама. Он је увидео да се спектри, са повишавањем температуре, мењају — бивају простији. Он је снимио фотографије спектара свију познатих елемената; при упоређивању ових фотографија, он нађе да је велики број спектралних линија заједнички, које он назва *базисне линије*. Отуда он закључи да наши хемијски елементи, у ствари, нису проста тела, него се на вишим температурама могу још даље раздвајати. Ова мисао, и ако подесна за објашњење појава, ипак је нашла много противника.

Локије не сматра калијум за никакав елеменат, јер је успео да за њ, при дестилацији у вакуму на разним температурама, и различне спектре добије.

Поред осталих разлога и овај факат што спектри неких елемената, који су изложени вишим температурама, постају простији, нагони нас на замишљај *јединства материје.*

Дељивост материје. — „Сви физички појави доводе нас до закључка, да *материја тела није једноставна,* већ се састоји из неких веома ситних честица, зване *молекули* (molecula, диминутив од moles значи маса). Молекули тела *не додирују се* међусобно, већ су на неком извесном растојању размакнути један од другога, с тога материја тела *не испуњава* потпуно простор који запрема. Физичари узимљу да су та међуместа међ молекулима испуњена неким немерљивим и чулно неосетљивим флуидом, звани *етар.* Узима се даље, да су молекули *мекинички недељиви.* И при умишљеном меканичком делењу тела, дошли би најзад до неке међе, преко које то делење не би могли продужити, а то су молекули тела. Искључена је дакле бескрајна дељивост тела.

„И ако се молекули не могу делити меканички, опет зато нису они просте јединке, већ се узима, да су састављени из два или више делића — *атома* (грчка реч значи неделим). Атоми су најмање и апсолутно *недељиве* јединке; то су најмањи *елементарни* делићи материје, и по томе колико елемената имамо толико врсти атома постоји. — Атомска поставка изведена је из принципа: „ништа не може прећи у ништа, нити ишта може постати из ничега“, који беху аксиоме старих грчких философа. Кад би се дозволила дељивост тела до бескрајности, веле атомистичари, тада би било могуће претворити их у ништа, а то значи да су била састављена из ничега. С тога је узето да материја тела није бескрајње дељива, већ је састављена из стварних недељивих честица — атома.

„Кад усвојисмо поставку, да су тела састављена из молекула, а ови из атома, онда се по себи јавља питање: шта држи молекуле у телима и атоме у молекулима у међусобној вези, те се све то не распадне у тај ситан атомски прах? Сила и материја јесу два неразлучна појма; ми не знамо каква би изгледала материја без силе, и како би се сама сила без материје јављала. Мора се узети да је сила урођена особина материје, и та је сила узрок међусобном привлачењу атома и молекула“.[1]

Спенсер[2] вели: „Материја је дељива до у бесконачност, или она то није: трећа претпоставка није могућа. Коју ћемо ми усвојити? Ако кажемо да је материја дељива до у бесконачност, ми се уплећемо у једну претпоставку коју не можемо себи представити. Ми можемо пресећи једно тело на двоје, по том сваку од половѝна̂ још на двоје, и тако докле не будемо свели делове на дебљину коју није више могуће делити физички, а по том ми још можемо продужити исту операцију без краја. Али не лежи у томе појмити бесконачну дељивост материје, то је само да се образује једна симболичка концепција, коју не можемо, развијајући је, учинити стварном, и која нема другог начина верификације. У ствари, појмити бесконачну дељивост материје, то је у памети продужити делење у бесконачност, али би за то требало бесконачно време. С друге стране, тврдити да материја није бесконачно дељива, то је тврдити да се она састоји из делова међу којима никаква појмљива сила не може извршити делење; и та усмена претпоставка не може више бити заступљена од друге; јер сваки од ових елементарних делова, ако их има, мора имати горњу и доњу страну, десну и леву страну, као што их имају већи комади. Но, немогуће је замислити да стране овог елементарног дела буду тако приближене да се не може провући између њих једна пресечна раван; и, ма каква била кохезиона сила која им се претпоставља, немогуће је искључити идеју о једној већој сили која може над овом одржати победу. На тај начин за људску памет

---

[1] *Лозанић*, стр. 51—52, 191—192 и 247.

[2] *Spencer*, op. cit., p. 44.

једна хипотеза не вреди више него друга, а међу тим немогуће је не мислити да се једна или друга морају слагати са фактима".

13. Дефиниција силе. — Лако се увиђа да, најобичније, померање једног ма каквог дела материје не долази само од себе него од нечега што је ван тога дела. Тако, када се у једном ма каквом систему тела, која су у вези или не, није извршила за једно извесно време никаква промена у релативним положајима, и када се у једном извесном тренутку види да се једно од тих тела померило наспрам осталих, која су остала у истим међусобним положајима, онда се признаје, у опште, да је ту морало бити *нечега* што је са свим различно од померенога тела: и, ма какве природе било то нешто, зваћемо га *узроком* овога померања. Да овакви опити буду што је могуће мање изложени поремећајима или случајевима проузрокованим чак и начинима рада као и апаратима експериментисања, добро је узети најпространији систем, код којег би релативна непокретљивост његових делова била најбоље осигурана дугим трајањем; а то је земаљски глобус, сâмог њега најбоље је изабрати. Ма да су предмети на земној површини подложни хиљадама релативних померања, велике масе које се на њој распознају, планине, велика здања, дају нам релативну непокретност која дозвољава да се њихов систем узме као непроменљив, и подесан је, у осталом без могућег поремећаја, за све опите које људи могу предузети. И по неки пут, краткоће говора ради, ми ћемо звати *непокретним* тела, линије или тачке које ћемо претпоставити да се не могу померати у односу на овај систем.

Ово посматрање једног узрока који производи неко релативно померање поновљено велики број пута, као и природна тежња човечија ка генерализацији, чине те човек верује да ће то увек тако бити; тако да, чак у случајевима у којима не примећује „нешто" страно, кад нам је, дакле, овај узрок скривен, човек узима да тај узрок постоји и он поставља општи принцип: да кад се једна материјална тачка, која чини део неког непромењивог система, помери наспрам других тачака, да је то морало бити услед акције неког страног узрока; и ово је померањеназвато *ефекат* овог *узрока*.

Каква је сада природа ове акције? Да ли би она могла, нпр., произлазити од просте воље неког вишег бића? — То није дато човеку да темељно испита, и мора се ограничити да је проучи на са̂мом себи. Померајући са̂м тела, која сачињавају део неког непромењивог система, човек задобива свест о напрезању; и он дознаје, у исто време, да би напрезање које је померило једно тело могло бити уништено неким другим напрезањем које би га са̂мо померило у супротном смислу. Тако да човек има свести о напрезању, чак и онда када отуда не следује померање. Ове узроке кретања, које налазимо у нама самима, и којих смо увек свесни кад год померамо једно тело, ми ћемо звати *силе*.

Кад се, у једном непромењивом систему, једно од тела̂ релативно помера, и када се не примећује узрок овога померања, опет се признаје да би се то померање могло спречити једним напрезањем које би га, са̂мо, померило у супротном смислу; и природно је узети по аналогији да се на̂ ово тело врши једно напрезање које би било поништено оним које би спречило то померање. Тако о једном телу коме се неда да сиђе правцем вертикале, помоћу неког напрезања о коме се има свести, узеће се као да је оно непрестано под утицајем неке невидљиве силе која га ґура у том смислу: сила која ће моћи варирати од једног тела ка другом. Исто тако, присуство једног магнета у једном систему тела у коме би био један комад гвожђа, који комад, с почетка држан, поставши слободан, произвешће померање неко које би се могло спречити једним повољно-управљеним напрезањем. Тако, напрезање које човек или каква животиња учини на једно тело, да би га померили у извесном правцу, јесте једна сила, која се, специјално, зове *мишићна сила,* или још и *животињска сила,* или, најобичније, *снага*; ређе се зове *моћ*. Притисак који нека течност или гас чини на дуварове суда, који их садржи, јесте једна сила. Привлачења или одбијања електрична или магнетска јесу извесне силе. Усвојивши поставку: да су сва тела састављена из молекула, а ови из атома, онда се, по себи, јавља питање: шта држи молекуле у телима и атоме у молекулима у међусобној вези, те се све то не распадне у тај ситан атомски прах?! — сила; и та сила, којом се молекули тела узајамно привлаче (држе), зове се *кохезија*; сила, пак, којом се привлаче атоми у молекулима, зове се *афинитет*. Еластичност разних тела јесте једна сила. Разни отпори јесу извесне силе; итд., итд. — Разни опити добро потврђени и често поновљени, као и већ стечено искуство, дају нам, у опште, *појам о сили,* толико чист колико опити и искуство то могу учинити.

Додајмо и то да се *силе* (франц. *force*, од латинског *forcia, fortia*, реч произведена од лат. *fortis*; нем. *Kraft*) показују, по својој природи, врло различне, као: мишићна сила, електрична сила, гравитациона сила, еластична сила итд., итд. — Свакидашње искуство ствара нам познатим појам о свакој од тих сила.

У опште, и саглашавајући се у томе са обичним говором, *ми ћемо дати име сила (или акција) сваком узроку који производи или који може (или тежи) да произведе неко кретање, или, који може да промени неко кретање једне материјалне тачке (једног материјалног тела).* Укратко, *даћемо име сила сваком узроку, који мења или који тежи да промени стање мира или кретања једне материјалне тачке.*

Једна сила може, такође, имати за предмет да заустави кретање једне материјалне тачке, или и једног већег тела, и да произведе мир. Са тога гледишта, нарочито, стари су и проучавали Меканику.

Кад једна сила производи или мења кретање једне материјалне тачке, казаћемо, како кад, *тачка је покренута силом;* или, *тачка је нападнута или гурнута силом;* или *тачка је под утицајем силе*; или, понајчешће, *сила дејствује на тачку*. Материјална тачка зове се, тада, *нападна тачка* силе.

Сила, или, још боље, егзистенција сила̂, нема ничега хипотетичног. Нпр., једно тело, које ми престанемо држати, ставља се у кретање — пада. Узрок овога кретања, према нашој дефиницији, јесте једна сила: то је она сила, која је добила име *тежа*. Сада, који је узрок теже? Ако одговоримо да је то привлачење земље, питаће нас који је узрок привлачењу, и тако редом. И ми ћемо се, са највећом пажњом, уздржати од сваке дискусије, која би се односила на питања овога рода. Ми нећемо тражити да упознамо суштину силе, као што нећемо тражити да упознамо ни суштину саме материје; ови проблеми не могу добити, бар у овом тренутку, једно решење основано на искуству и размишљању (расуђивању). Напоменимо и то да се ни сила ни материја не могу ничим, па ни хемијским процесима, поништити нити пак створити, већ се могу само, на један или други начин, променити; да се, нпр., сила или материја једне врсте претвори у силу или материју друге врсте.

Како је уништење материје тако исто непојмљиво, као што је непојмљив и постанак материје (n° 12), то је, отуда, изведен *принцип конзервације материје*, принцип основни у свима природним наукама.

Исто тако, постављен је *принцип јединства силе;* јер, од радова, које рачунају међу најлепшим у савременој науци, јесу они којима су распрострли идеју: да силе меканичке, електричне, магнетске, топлота, светлост, хемијске акције, виталне акције, молекуларне акције, сила што чини да сва физичка тела теже да се крећу ка тежишту земљином, силе произведене течним и гасним токовима, и све оне које би се још могле побројати, да се све те силе не разликују са гледишта Динамике, и да су оне, за нас, толико манифестација једне и исте силе која се квантитативно преобраћа од једне у другу.

Ми смо, још, казали да су сила и материја два неразлучна појма; ми не знамо каква би изгледала материја без силе и како би се сама сила јављала без материје. Мора се узети да је сила урођена особина материје, и та је сила узрок међусобном привлачењу атомâ у молекули и међусобном привлачењу молекулâ у једном телу.

Како можемо разумети ову везу између силе и материје? — Материја нам је позната само манифестацијама силе: последњи доказ, који имамо о егзистенцији материје, то је што је она способна да даје отпора. Уништите отпор, не остаје више ништа до један празан простор. Међу тим, с друге стране, отпор одвојен од материје, тј. одвојен од нечега просторнога, непојмљив је.

Ми ћемо, овде, рећи само неколико речи *о подели сила*. У једном материјалном систему независном од сваког другог или претпостављено да је једини у простору, ми ћемо често имати да посматрамо, понаособ, једно или више означених тела, тј. извесне групе тачака више или мање распрострте. Тада ће скуп свију ових тачака састављати један *парцијелни систем;* њихове узајамне акције и реакције, две и две једнаке а супротнога смисла, биће оно што ћемо ми звати *унутарњим силама,* док међу тим акције извршене на ове тачке од стране других тачака општега система и које, према томе, неће имати својих *реципрочних* у парцијелном систему, биће назвате *спољњим акцијама* или *силама.*

За једно материјално тело казаћемо да је *слободно,* када није потчињено никаквом услову; или, што је исто, казаћемо да је слободно, кад се може померати у свима правцима у простору, када, дакле, нема никакве препреке (препоне) која би га сметала у тим могућим кретањима.

Да бисмо почели најпростијим разматрањима, ми ћемо замислити да су материјална тела, на која дејствују силе, сведена на тачке без осетног простирања — сведена на *материјалне тачке*, о којима ћемо, мало доцније, говорити.

Кад једна сила почне дејствовати на неку слободну материјалну тачку, она ставља ту тачку у кретање. Али, када на једну слободну материјалну тачку, претпостављено да је у миру, дејствују, у исто време, више сила, она (тачка) се *нужно* не ставља у кретање: то је познати факат свакодневног искуства. Дакле, више сила, дејствујући на једну исту материјалну тачку, могле би се узајамно поништити, и материјална тачка не би се померила; у том случају, каже се да су ове *силе у равнотежи*, или, *материјална је тачка у равнотежи под утицајем ових сила*.

Кад на једну материјалну тачку, која је већ у кретању, пустимо да дејствују више сила, и када јој оне (силе) не поремете њено кретање, онда ћемо опет рећи да су ове силе у равнотежи.

Као што видимо, појам о равнотежи не повлачи за собом, нужно, онај о миру; јер, кад се каже да су силе, које дејствују на једну материјалну тачку, у равнотежи, то значи само то да оне нису промениле њено стање, а не и да је та материјална тачка у миру.

Ми узимамо да је дејство једне силе на једну слободну материјалну тачку да промени стање мира или кретање те тачке. И заиста, замислимо да се, у једном маком тренутку, пусти једна сила да дејствује на једну материјалну тачку слободну. Њено стање мира или кретања биће промењено; јер, кад не би било промењено, оно би било исто са силом или без силе; ова (сила) би била еквивалента одсутности силе, тј. као кад не би постојала.

Може се, међу тим, десити и то да једна сила, дејствујући на једну материјалну тачку, не ставља исту у кретање. То и бива, ако се какве препреке противе томе кретању; јер, ове препреке производе једну другу силу која је у стању да поништи ефекат прве. Тако, нпр., једна материјална тачка тешка (једно тело), положена на једну фиксну хоризонталну раван, опет је тешка и увек под утицајем акције своје тежине; и, при свем том, она, опет, не пада; јер, раван, на којој је, ствара једну силу једнаку али која дејствује супротно првој. Акција тежине ове тачке не ставља исту у кретање, већ производи друго дејство, она чини да препрека (раван) трпи *притисак (pression)*. — Други пример: ако би, пак, једна материјална тачка тешка (једно тело) била обешена о какав конац (уже), кога је један крај утврђен, онда ће та тачка, слично ономе у првом примеру, својом тежином произвести *истезање (tension)* конца.

Може се десити, још и то, да акција једне силе на једно материјално тело не мења, бар у спољашњем изгледу, његово стање мира или кретања: то је случај, нпр., да се може учинити извесно напрезање на један терет без да се успе да се подигне.

Напоменимо само, овде, да проучавање равнотеже може бити посматрано као један особени случај проучавања кретања. Скуп законâ о кретањима и равнотежама, тј. неопходно нужни односи који следују из акције силâ на тела, или, још краће, скуп законâ о силама сачињава *науку о силама* (n° 8).

Да наука о силама постане науком умовања, треба, као што смо поменули, упознати *природу* силâ, тј. треба упознати доста њихових својстава, па да сва њихова дејства (акције) буду отуда изведене као нужне последице. Ова се основна својства, која виртуелно садрже целу науку, могу добити само посматрањем појава; јер, материјални свет могао би бити потчињен друкчијим законима а не онима који га управљају, и, према томе, ови закони не могу бити откривени човечим умом, који би се ставио ван овога стварнога света.

Код једне силе, да би она била потпунце одређена, има *четири* ствари да се разликују и да се упознају, на име:

1°. *Њена нападна тачка*, тј. геометријски положај материјалне тачке на коју посматрана сила дејствује. Тај положај материјалне тачке одређен је њеним координатама x, y, z.

2°. *Њен правац*. Ми ћемо звати *правац једне силе*, која дејствује на једну материјалну тачку (једно тело), онај правац којим би се материјална тачка померила у непромењивом систему, када би она била у њему потпуно слободна и када не би била под утицајем никакве друге силе. Правац једне силе дат је углима α, β, γ које она гради са координатним осама.

3°. *Њен смисао*. Ми смо већ приметили (на страни 16) да се, почевши од једне тачке неке праве линије, могу посматрати две различне стране те праве, које називамо *супротним правцима* праве у овој тачци. Тако исто, правац силе, као год и правац кретања, почевши од нападне тачке има две стране, тј. има два *смисла*, који су *супротни*. Тако, нпр., кад се каже да је правац силе хоризонталан, тај правац има два смисла: на десно или на лево од нападне тачке; кад се, пак, каже да је правац силе вертикалан, и тај правац има два смисла: на више или на ниже; исто тако сила, која би била правцем меридијана, имала би два смисла: северни или јужни; итд. — Према свему овом, да би једна сила била потпунце одређена, треба, поред осталога, упознати и њен смисао. *Смисао једне силе* јесте исти као год и смисао кретања саопштеног том силом њеној нападној тачци, претпоставивши ову тачку потпуно слободну и у миру.

Да бисмо разликовали, један од другога, ова два супротна смисла, ми ћемо звати један *позитиван*, а други *негативан смисао*. Према овоме, да бисмо разликовали, једну од друге, две једнаке силе, које дејствују истим правцем а у супротном смислу, даваћемо једној сили знак позитиван, а другој знак негативан. Тако, нпр., силе $+ F$ и $- F$ јесу две једнаке силе, које дејствују у супротном смислу. Ово означавање силâ слично је означавању странâ (правацâ) једнога координатнога система у аналитичкој геометрији у равни или у простору.

Напомињемо, овде, да већина писаца, под правцем силе, често подразумевају не само правац оне праве правцем које сила дејствује на тачку, него и смисао у коме она дејствује. То је гледиште *погрешно*, нарочито онда када, што је врло често случај, може бити двосмислености.

4°. *Њен интензитет,* на послетку, који је дат у броју. Ми знамо јасно да једна сила може бити увећана и смањена, и да је она, према томе, математичка величина која се може мерити исто онако као простор, време итд., тј. и силе се могу представљати бројевима, помоћу једне конвенционалне јединице. Величина једне силе зове се, обично, *њен интензитет,* или *апсолутна величина,* или просто *величина* силе; или још, ређе, *јачина* силе. Интензитети силâ изражавају се, обично, у килограмима.

Силе су од оних појмова (ствари) који не могу бити одређени (дефинисани). Казати да су то узроци кретања, није то што и стварно их одредити, пошто ови узроци нису у напред познати; то би било само заменити једну реч неком другом. Данас је усвојена мисао о јединству силе, као што ће се, може бити, доказати и јединство материје.

Како ми ценимо силе само са гледишта ефеката, које оне производе, то и сваки појам о силама мора бити црпен из посматрања кретањâ произведених овим силама. Али, што је главно, то је да треба тачно одредити *једнакост силâ* и њихову *суму*.

Узимајући, према опитима, да би померање једне материјалне тачке, које је произвела једна сила извеснога смисла, могло бити спречено једном другом силом супротнога смисла, ми ћемо рећи да је ова друга сила *једнака* са првом; или, другим речима, ако су две силе, супротнога смисла, које дејствују на једну исту материјалну тачку, у равнотежи, онда се каже да су те *две силе једнаке* или да су *истог интензитета.* Или, још, за две силе казаћемо да су једнаке међу собом кад, дејствујући, наизменце, на једну исту материјалну тачку, под истим условима, саопште јој потпунце исто кретање, тј. када произведу исти ефекат. На тај ће начин бити одређена (дефинисана) *једнакост сила̂*, која је први неопходно нужан појам за упоређивање количина̂.

Из појма о једнакости сила̂ изводимо: 1°. Две једнаке силе производе и једнаке ефекте (дејства). — 2°. Две једнаке силе а супротнога смисла, дејствујући у исто доба на једну исту материјалну тачку у миру, *поништавају се;* исто тако, две једнаке силе а супротнога смисла, дејствујући у исто доба на једну исту материјалну тачку у кретању, *не мењају* кретање ове тачке. Према томе, очевидно је, да се могу, без да се промени стање мира или кретања једне материјалне тачке, *увести* или *изоставити* две силе једнаке а супротнога смисла, као год што се у алгебри, у извесним случајевима, уводе или изостављају два члана једнака а супротно означена. Ми ћемо у Меканици често употребљавати овај начин рада, да бисмо упростили демонстрације

То разматрање једнакости сила̂ дозвољава нам да сравнимо терете међу собом помоћу теразија; за тим, да сравнимо силе са теретима помоћу специјалних инструмената *динамометри* назвати, чиј се опис у свакој физици находи. Кад се силе не могу непосредно сравњивати са теретима, онда их сравњујемо међу собом кретањима која оне производе.

То разматрање једнакости сила̂ даје нам, још, могућности да одредимо *јединицу силе* и *да меримо силе;* јер, да бисмо измерили једну силу, биће довољно изабрати за јединицу силе једну добро одређену силу. Интензитет једне ма какве силе биће представљен бројем који мери њен однос ка интензитету силе узете за јединицу.

Ми ћемо, у доцнијем излагању, на своме месту, *опширније* изложити наше погледе на *мерење* и *поделу сила̂*, као и на *одредбу јединице силе.*

Други неопходно нужан појам, а који допуњује податке нужне за упоређивање и мерење количина̂, јесте *појам о суми сила̂.* Ми ћемо рећи: две се силе *сабирају*, када оне дејствују правцем исте праве и у истом смислу на једну исту материјалну тачку. Опит би имао показати, да се сме узети, да ће се померање једне слободне материјалне тачке извршити, под утицајем двеју сила, у истом смислу и правцу у коме би се оно постигло под утицајем сваке од њих понаособ; да ће ово померање моћи бити спречено, као што смо то већ казали, једном силом супротнога смисла. Отуда следује да би две силе, које дејствују на једну исту материјалну тачку у једном истом смислу, могле бити замењене једном једином силом, и ова последња сила биће равна њиховој суми и зваће се *сума (резултанта)* двеју сила. — У опште, ми ћемо рећи: две, три, . . . , n сила̂ сабирају се, када оне дејствују правцем исте праве и у истом смислу на једну исту материјалну тачку. И у овом општем случају рећи ће се, нпр., да је једна сила F *сума* више других сила̂ F_1, F_2, . . ., F_n, када она чини равнотежу свима овим силама које дејствују у истом времену када и F, али у супротном смислу од онога силе F, на једну исту материјалну тачку слободну и у миру.

Одредивши, на тај начин, једнакост и суму двеју сила, а према томе и једног ма ликог броја сила̂: одузимање, множење и делење сила̂ следују отуда. Упоређење сила̂ и њихов израз у бројевима такође следују отуда, и не остаје нам ништа више него само да нађемо практичке начине, помоћу којих ћемо то извршити.

Пошто се силе могу, на тај начин, представљати бројевима, а са̂ми пак бројеви могу бити представљени правим линијама, то ће се и силе моћи *графички (геомет-*

ријски) представљати правим линијама, што се готово увек и чини. Тако, нпр., да се једна сила, која дејствује на једну материјалну тачку, графички представи, треба радити овако: повуче се, почевши од нападне тачке дате силе, једна права у правцу и смислу те силе; на овој правој, почевши од нападне тачке, пренесе се једна дужина, која ће својим односом ка јединици дужине представљати однос дате силе ка оној сили која је била узета за јединицу. Тада се каже: *сила је представљена правом, по величини, правцу и смислу.*

Тај начин представљања сила̂, помоћу правих линија, од врло велике је помоћи у Меканици, јер он даје геометријско тумачење главних релација што их силе могу међу собом имати, и често води конструкцијама које могу корисно заменити рачун.

Најзад, напоменимо и то да се сила, у Меканици, обично, означава са F или са P, кад је једна; означавају се са F_1, F_2, F_3, . . ., F_n, или са P_1, P_2, P_3, . . ., P_n, кад их је више.

Мансион[1] *о дефиницији силе* вели: „1. Од Њутна *(Principia,* definitio IV), математичари зову *силом*, у метафизичком смислу, *сваки узрок промене кретања* (релативног) *праволинијског и једнаког.*

„Кад се једна тачка креће у односу на један чврст систем, они не зову, дакле, *силом* узрок *тоталног* појава посматранога кретања, него узрок *једног дела* тога појава, узрок који чини да се, у сваком тренутку, мења брзина у посматраном кретању, по величини или по правцу, или, у исто доба, и по величини и по правцу.

„На тај начин, према овој дефиницији, једна тачка, која има кретање једнако и праволинијско, није изложена утицају никакве силе; међу тим, по принципу узрочности, њено се кретање врши очевидно, у сваком тренутку, под

[1] *P. Mansion*, op. cit., p. 7—8.

непрекидним утицајем једног извесног узрока [Grassmann (1844), Pirmez (1881)].

„2. Геометри употребљују, још, реч сила у једном другом смислу, у чисто математичком смислу. Нека једна тачка А пролази извесну криву линију, и претпоставимо да, дошавши у М, она има извесну брзину v. У времену Δt, она ће доћи у положај М', док међу тим нека друга тачка В пролазећи тангентом повученом кроз М, почевши од М, са брзином v, дошла би у m. Дуж mM' јесте, по величини и правцу, *скретање* тачке М за време Δt. *Сила* покретне тачке у М *јесте*, у математичком смислу, *граница односа између скретања и половине квадрата времена* Δt, *кад* Δt *има нулу за границу*. Правац силе јесте граница правца скретања.“

Спенсер [1] *о сили.* — Сила је, међу овим крајним појмовима, крајна. Ма да су појмови о простору, времену, кретању и материји, по изгледу, сви неопходна дата разума, једна психолошка анализа показује нам да су ти појмови створени са искуствима о сили, или да су из ових изведени апстракцијом. Кретање и материја, такве какве их ми познајемо, јесу манифестације силе различно условљене. Простор и време, такви какве их познајемо, показују се у исто време кад и ове различне манифестације силе, као услови под којима су оне представљене. Сви се ови појмови могу довести из искустава о сили, али искуства о сили не могу се ни откуда довести.

Ако бисмо, да то илуструјемо по примеру алгебре, кретање, материју и силу представили символима x, y, z, онда бисмо могли изнаћи вредност за x и y и изразити их у функцији од z; али вредност за z не можемо никада изнаћи: z је непозната количина, која ће на свагда и остати непозната, из простог разлога што нема ничега у функцији чега би се могла вредност његова изразити. Ми

[1] *Spencer*, op. cit., p. 147—149.

можемо све више и више упрошћавати једначине свију појава, све док се символи, који их представљају, не сведу на извесне функције овог крајњег символа; али, кад смо то постигли, онда смо дошли до оне границе која за навек дели знано од незнанога.

* * *

Напомена. — Пре него што бисмо напустили ова досадања излагања и ушли у поље Меканике, учинимо ову напомену.

Ми изнесмо, истина врло укратко, наше рефлексије о појмовима простора и времена; говорисмо и представисмо појмове о кретању, материји и сили. То смо учинили једино с тога, да означимо природан пут којим треба проћи, и да покажемо којим појмовима треба сваки да се упозна пре него што би ушао у поље Меканике. Искрено признајемо, да нисмо успели да одговоримо тој нашој жељи. Једина утеха, *а смемо се тиме тешити*, остала нам је још та што су се овим стварима, до сада, бавили највећи умови и, по нашем мишљењу, нико, па чак ни Кант, није могао дати јасних и стварних објашњења о свакоме од ових појмова.

При проучавању појмова о простору, времену, кретању, материји и сили могу се постављати, још, небројена питања, која се на ове појмове односе. Таква су, нпр., питања:

1°. Међу овим појмовима, који је појам крајњи, из кога сви остали појмови потичу као нужне последице? — Једни, већина, веле да је појам о простору — крајњи појам; други, опет, да је то појам о сили; трећи, појам о материји; итд.

2°. Шта је у прапочетку свега (свију ствари) било? — Једни веле у прапочетку свега био је простор; други, веле, материја; трећи, сила; неки, опет, кретање; итд.

3°. Ако је овога прапочетка кад год и било, шта је пре њега било?

4°. Претпостављајући, чак, да почетак васионе може бити у ствари замишљен као производ неке спољне моћи, тајна би, као и пре тога, била исто толико велика, јер би се могло запитати: откуда долази егзистенција те спољне моћи?!

5°. Има философа који тврде да је овај простор ограничен! — Ако би то стојало, онда шта настаје иза граница овога простора?!

Итд., итд., итд.

Морам признати, да сам се, увек, при размишљању о овим и сличним питањима, као готово и сви други научници, налазио у неком лавиринту без изласка. Кад год се поведе реч о овим основним проблемима, о овим кроз све векове отвореним питањима науке, одмах се покаже сво несавршенство човека! При свем том, кад је реч о првом питању, ја се не бојим да изнесем једну мисао, која, може бити, и није нова; која ми се увек наметала и која ме и овога пута гони да је кажем: крајњи појмови (дакле два а не један појам) јесу појам о простору и појам о материји, из чије комбинације потичу сви остали појмови као природне и нужне последице.

Сваки онај, који се овим проблемима бави, зажалиће: *зашто природа човечија није таква, да на сва питања, која човек може поставити, да може дати и јасног и стварног одговора!* Колико ли би се, тек тада, увећало пространство људских знања, када би, којом срећом, и у томе могло бити равнотеже?!

Ми ћемо се, кад је реч о овим основним проблемима, придружити онима који веле: „ти ће проблеми, као најтежи проблеми, остати на решавање будућим поколењима!“ — Да ли ће их она решити?! Питање без одговора!

Остављајући онима, који су позванији од мене, да у нашој литератури воде прву реч о овим проблемима, ми ћемо прећи на наш предмет — на Меканику. Ра̏до се користим овом приликом, те да се захвалим моме поштованом колеги, Господину Д-ру Љубомиру Недићу, који ми је, на многа моја питања, увек, давао корисних обавештења.

14. Дефиниција Меканике. Њен предмет. — Готово сви писци, одмах у почетку својих дела, дају дефиниције и излажу предмете оних наука које су у тим делима изложене, без да, унапред, спреме читаоца како би му и дефиниција и предмет једне науке били разумљиви. Тако су, до сада, чинили и сви писци Меканикâ, што је, по мом мишљењу, бар што се Меканике тиче, неприродно и нелогично. Природније је да то чине на крају својих дела.

Ми смо пошли са нарочите тачке, са које ниједан од писаца Меканике није полазио, и изабрали смо нарочити пут, истина веома тегобан али природан пут, којим смо повели своје слушаоце и читаоца ка Меканици. На томе путу, ми смо упознали наше пратиоце са кретањима (n^0 9 и n^0 10) и силама (n^0 13), и, упознав их са кретањима и силама, ми смо их самим тим и увели у поље Меканике, јер: скуп свију закона о кретањима и силама сачињава ону науку коју *Мекаником* зовемо. Дакле, *Меканика је наука о кретањима и силама.*

Поље меканичке науке врло је пространо; ако није са свим тачно испитано, ми не сумњамо да је оно цело целцато приступачно.

Реч *Меканика* (франц. *Mécanique*; нем. *Mechanik*; латински *mechanica*, од грчког *μηχανική*, где се подразумева *τέχνη*, вештина) произлази од грчке речи *μηχάνη*, која значи машина; по томе се може мислити да се Меканика, као наука, у почетку занимала само машинама. Да напоменемо, овде, још и то: многи од писаца, *говорећи о Меканици у опште,* придају Меканици реч (епитет) *општа (générale, allgemeine)*; многи, пак, придају јој реч *теоријска (théorique, theoretische)*. Ми то не ћемо чинити, већ ћемо задржати само реч Меканика.

Да се, сада, упознамо, мало изближе, са предметом Меканике.

„Кретање и његова општа својства, вели Д'Аламбер, јесу први и главни предмет Меканике“. Ми ћемо се, у доцнијем нашем излагању, још боље, упознати са кретањем, као и са разним врстама кретања. Напоменимо само, кад је реч о кретању, да постоји један врло важан принцип, створен без сумње из тога факта што се у Васиони саопштава кретање од једнога тела другоме без да икада коначно ишчезне, да је тај принцип Декартом био назрет, по том Лајбницом развијен: то је *принцип о извесној конзервацији кретања.*

Ми смо (n^0 6) казали да Геометрија ставља себи у задатак да опише основна својства простора и да испита све облике, који се могу у њему замислити.

И у Геометрији се, врло често, говòри о кретању, кад хоћемо извесне геометријске теореме да докажемо и неке дефиниције да поставимо. Тако се у Геометрији проучавају: кретања тела; за тим, кретања површинâ, које при свом кретању описују тела; кретања линијâ, које при свом кретању описују површине; кретања тачака, као најпростијих елемената, које при свом кретању описују све могуће линије и да је, управо, свака линија пут или траг који је нека тачка, за време кретања, за собом оставила. На тај начин, Геометрија је образовала нарочиту методу — *методу кретања,* по којој постају геометријски облици у простору.

Помоћу методе кретања Геометрија проучава разне облике кривих линија, површинâ и телâ. *Огист Конт* [1] вели: „Што се кривих линија тиче, посматрајући их као да су произведене кретањем једне тачке, кретањем које је потчињено једном извесном закону, јасно је да ћемо, у

[1] *Auguste Comte,* Cours de Philosophie positive, vol. I—VI; t. I, p. 269—270; 1864, Paris.

оппте, имати толико различних кривих линија колико различних закона будемо претпоставили за то кретање, које се, очевидно, може извршити под бесконачно различним условима, ма да се може, случајно, по каткад десити да нове генерације произведу већ добивене криве линије. Тако, ограничавајући се само на криве линије у равни, ако се једна тачка креће тако да непрестано остаје на истом одстојању од једне сталне тачке, она ће описати (произвести) један круг; ако ли је, пак, сума или разлика одстојања покретне тачке од две сталне тачке непрестано стална, описата крива линија биће елипса или хипербола; ако ли је производ тих одстојања сталан, имаћемо неку другу — са свим различну криву линију;“ итд. Помоћу методе кретања можемо добити и друге криве линије, као што су: парабола, циклоида, епициклоида, разне врсте спирала и друге.

„Што се површина̂ тиче, вели Конт, њихови су облици нужно још разноврснији, посматрајући их као да су произведене кретањем линија̂. И заиста, облик се може, тада, мењати не само посматрајући при том, као и код кривих линија, различне законе бесконачне по броју под које може бити потчињено кретање линије производнице (генератрисе), него тако исто претпостављајући при том да и сама ова линија промени природу своју, чега аналогнога нема у кривих линија, пошто тачке, које их описују, не могу имати никакву јасну фигуру. Две класе врло различних услова могу, дакле, чинити да се мењају облици површина̂, док, међу тим, постоји само једна једина за криве линије. Било би бескорисно, да нарочито помињемо једну серију примера, којом бисмо оверили ову дуплобесконачну многострукост, која се примећује међу површинама . . . . Што се запремина̂ тиче, нема места никаквом специјалном посматрању, пошто се оне међу собом разликују само површинама које их граниче.“

Споменимо још и ово: могла би се дефинисати површина свере, рекавши да су све њене тачке на једнаком одстојању од једне унутрашње тачке *центар* назвате. Али, када се ова иста површина посматра као да је постала *кретањем* једне полупериферије, која се око свога пречника окреће, слика постаје много и много чистија, много јаснија: одмах имамо пред очима одређен предмет, и знали бисмо по потреби да то извршимо. Човек није више збуњен, кад наиђе у Геометрији на дефиниције, такве као што је она о хелиси, основане на више или мање заплетеним комбинацијама кретања. И, најпосле, ове позајмице науке о простору оној о кретању, и обратно, не чине ни најмањих незгода, пошто никако не треба да уводимо нових принципа, и што оне представљају нашем уму слике са врло великом јасности, пошто је појам о кретању један од оних који су нам извесно најфамилијарнији.

Ова поменута метода кретања, којом се Геометрија врло често служи, и чини оно блиско сродство које опажамо између Геометрије и Меканике. Услед сличности појмова ових двеју наука у стању смо и да решавамо меканичка питања геометријским путем; или, да их, као геометријска питања, решавамо помоћу Анализе.

Сва ова кретања Геометрија проучава независно од појма о времену, у коме се врше ова кретања. При тим кретањима Геометрија посматра само пређени простор. Меканика, пак, уводи још један нов појам — појам о времену (n^{0} 8), које протече док покретна тела, којима се занимамо, прелазећи из једног положаја у други, пређу извесни пут у простору; она, дакле, изучава сва кретања у њиховим односима са временом. Уводећи још појам о времену, Меканика постаје због тога комплекснија наука од Геометрије.

Очевидно је, да се могу проучавати *општа својства кретања* једнога тела опсервацијом, која би била удружена са појмовима Геометрије, и то без да је нужно уводити ма какав нов појам. Али, од оног тренутка, кад зажелимо да дознамо: како се то догађа да кретање једнога тела следи по том и том особеном закону?; или, још општије, кад зажелимо да дознамо: који су физички узроци кретањâ?, — тада морамо прибећи новим појмовима. То су питања, о којима сâма Геометрија не може ничему да нас научи; и то су та питања која се, такође, морају сматрати као први проблеми и главни предмети који, право речено, Меканици припадају.

Меканика се бави и силама (n^0 13), као узроцима промене стања мира или кретања једне материјалне тачке (једнога тела). За ову науку није нужно да познајемо природу силâ; довољно је да се могу сравњивати међу собом, тј. да се могу *мерити*. У осталом, треба и овде приметити: да је немогуће открити праве узроке физичких појава, и да се задовољавамо тиме што замењујемо праве (реалне) узроке, који производе те појаве, другим фиктивним узроцима, *силама* названи, који су у стању да произведу исте ефекте. Сила нам се представља само својим ефектом, и, помоћу њеног ефекта само, ми је и можемо мерити. — Геометрија се не бави силама.

Према свему овом, научни сипериоритет Геометрије долази, у опште, отуда што су појави, које она посматра, нужно, најуниверсалнији и најпростији од свију. Не само да се, над свима телима у природи, могу, очевидно, чинити геометријска истраживања као год и меканичка, него, још више, геометријски појави постојали би чак и онда, када би сви делови васионе били претпостављени да су непокретни. Дакле, Геометрија је, по својој природи, општија и савршенија наука од Меканике. У исто време, геометријски су појави простији, јер су, очевидно, независни од меканичких појава, док се ови последњи увек компликују геометријскима, пошто облик тела мора, неизбежно, утицати на појаве кретања и равнотеже. — У томе лежи разлика између Геометрије и Меканике, и зато изучавање Геометрије мора претходити изучавању Меканике.

Наука о силама (узроцима), које су у стању да произведу кретања, и истраживању релација, које постоје између ових сила и кретања произведених, од врло велике је важности са гледишта применâ. И заиста, тачним познавањем ових узрока мотора можемо, употребивши их како треба, добити у нашим мануфактурама она кретања која су нам потребна; а, на против, избећи она која би била некорисна или и шкодљива. То проучавање јесте други предмет, којим Меканика има да се бави.

Укратко, Меканика има за предмет да реши ова два проблема:

1°. Наћи кретање које узима једно тело или систем тела под утицајем датих сила. — И обратно,

2°. Наћи силе које ће бити у стању да једном телу или систему тела саопште једно дато кретање.

Оба ова проблема могу се резимирати у овај једини:

Наћи односе који постоје између силâ, које дејствују на једно тело или на систем тела, и кретања које оне производе.

Примедба. — Има писаца, међу које неки рачунају и *Kirchhoff-a*, који веле: „Меканика је наука о кретању; њен је задатак да нам опише и представи, на најсавршенији и најпростији начин, сва кретања која се у природи појављују“. — Они, тиме, и сувише ограничавају предмет Меканике.

15. Тело. Материјална тачка. — Ми знамо да су наша чула једина средства којима општимо са природом.

Ми смо (n° 12) казали: све што око нас виђамо и што нашим чулима као нешто стварно осећамо, називамо *тело* (франц. *corps*, од латинског *corpus*; нем. *Körper*; санскритски *kripita*). Или, по Литреу, краће: тело је све оно што утиче на наша чула специјалним својствима. —

Са геометријског гледишта, тело је скуп бесконачно много тачака, које испуњују један ограничени део простора.

Оно, пак, из чега се састоје сва тела зове се *материја*. Према томе, може се још рећи: тело је део материје ограничене са свију страна. Тако, нпр., ваздух, вода, камен, дрво, коњ, итд., итд., јесу тела. Сунце, некретнице, планете, сателити, комете, и то су опет, за разлику од поменутих, небеска тела.

Сви физички појави доводе нас до закључка да *материја тела није једноставна (континуарна)*, већ се састоји из неких веома ситних, меканички недељивих, честица — *молекули* назване. Према томе, тело је скуп молекулâ. Молекули тела *не додирују се* међусобно, већ су на неком извесном растојању један од другога постављени, и на том су растојању држани силама које, произлазећи од свакога молекула, дејствују на друге привлачно или одбојно.

Ове привлачне или одбојне силе, управљене правцем праве која саставља њихове нападне тачке, јесу, узете две и две, једнаке а супротнога смисла.

Тела нам се јављају у природи у *три* разна стања: *чврста, течна* и *гасовита тела*.

1°. *Чврста тела* обдâрена су одређеним обликом. То долази отуда, што је, код чврстих тела, привлачење молекулâ (кохезија) јаче од њиховог одбијања; с тога молекули, у чврстих тела, стоје непрестано у неком *одређеном и сталном равнотежном положају*. Да се промену релативни положаји ових молекула, треба учинити да на ове молекуле дејствују веће или мање силе: ако деформација не прелази извесну границу, молекули се враћају у своје првобитне положаје, чим силе, које су их померилe, престану дејствовати. Чврста су тела: камен, дрво, метал итд.

2°. *Течна тела* су скуп молекула обдарених једном, већом или мањом, покретљивошћу и који се померају под утицајем врло слабих напрезања. Зато молекули течних тела *не стоје* међусобно *у неком сталном положају*, и, према томе, течна тела немају одређеног облика. Код течних тела привлачење молекула парализано је њиховим одбијањем; али се они, још, налазе под привлачењем укупне масе, с тога се и држе у некој извесној заједници. Или, меканички речено, код течних тела резултанте молекуларних акција, ма да привлачне, готово су равне нули. Течна су тела: вода, шпиритус, зејтин, жива итд.

3°. *Гасовита тела* су она у којима су молекули преко мере покретљиви: најмањи узрок помера их са њихових положаја, и ма колико слабо било то померање, оно не тежи да ишчезне у исто време када и узрок који га је произвео. Покретљивост молекулâ, код гасовитих тела, много је већа од оне код течних тела. Код гасовитих тела одбијања молекула већа су од њихових привлачења; другим речима, код гасовитих тела резултанте молекуларних акција одбојне су. Гасовита су тела: ваздух и сва друга гасна тела.

Због своје велике покретљивости, течна и гасовита тела зову се, често, заједничким именом *флуиди*. Отуда, у неким делима (физикама), сва тела разликују на *чврста* и *флуиде;* а ова последња деле на *течне* и *еластичне флуиде*.

Течна и гасовита тела показују узастопце најразноврсније облике, али нарочито оне (облике) чврстих тела која их додирују.

Приметимо, на послетку, да многа тела једнога стања могу, лакше или теже, прелазити из свога стања у једно друго или и у оба друга стања.

Материјална тачка. — Ми ћемо изнети, овде, дефиницију једне материјалне тачке, пошто смо се тим термином већ у напред служили, и што ћемо се и у будуће, при излагању самога предмета, готово непрестано њиме служити.

Мало је од већих писаца, који се слажу у дефиницији једне материјалне тачке. Готово сваки, на свој начин, појима једну материјалну тачку, и готово сваки јој и даје друкчију дефиницију. Сви су сложни у томе, да је једна материјална тачка нешто бесконачно мало, — оно што се појима као најмањи део просторности. У геометрији, *тачка* (франц. *point*, од латин. *punctum*; нем. *Punkt*), тј. овај најмањи део, што је могуће појимити, посматран је, апстракцијом, као без просторности. У материјалним стварима, вели *Паскал* (*Pens.* I. 1. éd. Havet), ми зовемо недељивом тачком ону ван које наша чула не примећавају више ништа.

Ми ћемо, сада, изнети ону дефиницију једне материјалне тачке, која нам се чини као најбоља, и коју смо, према томе, и ми усвојили.

Један део материје довољно мали, толико мали да се може, без осетне погрешке, одредити његов положај као и положај једне геометријске тачке; један такав део *зваћемо једна материјална тачка.*

Ми ћемо, по том, сматрати свако материјално тело као скуп врло великог броја материјалних тачака, којих се одстојања могу и мењати.

Нека ми се не замери, што ћу, поред ове дефиниције, коју смо ми усвојили, поменути још неколико, које заслужују пажње и од којих свака има доста својих присталица.

1°. Материјалном тачком зове се једна геометријска тачка, којој се придају сва својства материје.

До концепције једне материјалне тачке долази се: или чинећи апстракцију о непробојности тела, и кондензујући при том, у мислима, материју једнога тела у једну геометријску тачку; или, делећи једно материјално тело на доста мале делове, тако мале да се може чинити апстракција и о њиховим облицима и о њиховим димензијама, и сматрати их као просте материјалне тачке.

2°. Једна материјална тачка јесте једно материјално тело, чије су све димензије бесконачно мале, толико мале да можемо упоредити то тело са једном геометријском тачком. Облик материјалне тачке индиферентан је.

3°. Материјалном тачком зове се једно материјално тело, чије су све димензије врло мале, тако мале, да се може узети, при кретању, као да се све геометријске тачке, обухваћене његовом запремином, крећу по једном и истом путу (по једној јединој линији).

Сва се материјална тела могу, у мислима, разложити у бесконачно мале елементе (стр. 61—63), од којих сваки (елеменат) може бити упоређен са једном материјалном тачком. Али, специјално се и даје то име једном од ових елемената, када је издвојен и у кретању.

Овом дефиницијом материјалне тачке изгледа да стварамо од материјалне тачке једно биће које само разум појми, јер се добро зна да природна тела, ма да дељива на бесконачно мале честице, ипак нису бескрајње дељива. Али ми ћемо, доцније, показати да постоји, у једном ма каквом материјалном систему, једна тачка чије је кретање исто као кад би цела материја посматраног система била кондензована у њој; посматрајући само ову тачку, једно тело ма каквих димензија, па било то сунце или нека звезда још много веће запремине, постаје једна проста материјална тачка. Појам материјалне тачке изгубиће, на тај начин, оно што на први поглед изгледа да има нешто мало апстрахнога. У осталом, тај је појам врло користан по томе што допушта да упростимо проблем, врло компликован, који се састоји да нађемо кретање једног тела под утицајем датих узрока; занемаривши димензије тела и створивши, на тај начин, себи идеју о његовом померању у својој целини, моћи ћемо предузети питање те да видимо како се индивидуално крећу разни делови који сачињавају цело.

4°. Има писаца који узимљу сваки молекул материјалнога тела за једну материјалну тачку. Има их, још који, узимљући молекуле тела за материјалне тачке, чине апстракцију о димензијама ових молекула.

5°. *Лоран* [1], у првој свесци своје Рационалне Меканике, а на 88 страни, вели: „Ако замислимо једну сверу испуњену ма каквом материјом, и ако, у мислима, бесконачно смањујемо полупречник ове свере, наступиће један тренутак у ком ће полупречник *проћи* кроз нулу и у ком ће се свера свести на једну просту тачку; ако посматрамо ову сверу у тренутку када је нестаје (кад се своди на тачку), ми добивамо оно што се може назвати једном *материјалном тачком*. Материјална је тачка, дакле, заиста различна од физичаревог молекула, који има једну запремину, један одређен облик; појам материјалне тачке, као што се види, независан је од сваке хипотезе о саставу материје, која може бити континуарна или дисконтинуарна, без да, у Рационалној Меканици, имамо потребу да се о томе бавимо“.

6°. *M. J. Boussinesq* [2], у одељку „*Атомска хипотеза о саставу тела; материјалне тачке*“, вели: „Још у почетку сваког проучавања које се односи на дати систем телâ и на њихова кретања, геометар осећа нужност да себи добро представи и да одреди предмете којима ће се бавити. Но он долази до жељене јасности, у овој идеалној конструкцији појавâ и у њиховом аналитичком изражају, само тада ако при томе сматра свако тело као скуп *атома* без простирања и без димензија, *материјалне тачке* названи, од којих он види свакога да заузима у сваком тренутку, у простору, један *одређени положај*; и он одређује *квантитативно* сâм овај положај, помоћу његових трију координата x, y, z у односу на један систем фиксних правоуглих оса.

„Оно што га принуђава да, на тај начин, дође до елемената без простирања, до *тачака*, то је што су, управо,

---

[1] *H. Laurent*, Traité de Mécanique rationnelle, 2 vol., 1889, Paris.

[2] *M. J. Boussinesq*, Leçons synthétiques de Mécanique générale, p. 5—6, 1889, Paris.

тачке једина геометријска бића чиј је положај прецизан, или се може изразити јасно помоћу трију *простих количина*, трију *дужина x, y, z*. Другим речима, *одстојање*, које је par excellence, у појавима, ствар мерљива, има смисла само онда када саставља две тачке. То је, види се, једна логичка нужност нераздвојна од саме природе човечијег духа, који нам чини да на тај начин *идеалишемо* материјалне елементе. Побуђени, инстиктивном тежњом, да сведемо непознато на познато, тамно на јасно, ми се користимо сличношћу спољних предмета са геометријским облицима те да их са њима идентификујемо: наша интуиција о геометријским облицима (фигурама) представља, у истини, највиши степен јасности, док, међу тим, о спољним предметима имамо само један нејасан (конфузан) појам.

„Тако исто више геометара, P. Boscovich, Ampère, Cauchy, de Saint-Venant, итд., да ли су сматрали ову концепцију атома без простирања као стварну, као потпуно сагласну са правом структуром материје. Без да идемо дотле (јер би то било претпоставити сагласност са свим чудновату, потпуно савршену, између идеалног света *постигнутог* умом геометра и физичкога света опаженог нашим чулима), ми ћемо приметити да опсервациони начини рада, у моментима њихових највећих напредака, нису никада увидели погрешку у последицама које резултују из примене наших геометријских појмова на ствари: доказ да ови појмови нису престали бити узвишенији, за практичку тачност, од најпрецизнијих начина мерења, и да несагласности могуће или чак и вероватне између њих и предметâ, или имено између хипотетичких материјалних тачака, атома без простирања, и истинских елемената материје, налазе се метнуте у сферу, она о бесконачно малим количинама у природи, неприступачну нашим интелигенцијама и вероватно суђена да нам увек умиче“.

Примедба. — Ми ћемо, доцније, казати како ћемо замишљати ова природна тела, кад их са гледишта Рационалне Меканике будемо посматрали.

Приметимо, још, да нам је, готово, немогуће непосредно почети проучавање кретања једног ма каквог материјалног тела, јер бисмо се морали бавити не само његовим општим кретањем, него и његовом ротацијом, или, чак, и релативним померањима његових делова. У осталом, кад се неко материјално тело креће у простору, свака од његових тачака јесте и сама у кретању; претпоставивши сада да су нам позната кретања његових појединих тачака, биће нам, самим тим, познато кретање и целога тела. Отуда је, очевидно, и природно и логично почети најпростијим проблемом, почети најпре проучавање кретања једне материјалне тачке.

Кад будемо, на своме месту, расветлили главна питања, која се односе на кретања једне материјалне тачке, тек ћемо онда прећи на проучавање кретањâ једног ма каквог материјалног тела коначних димензија, сматрајући, при томе, то тело као скуп или систем материјалних тачака.

Из тих разлога ми смо, и преко наше воље, изнели неколико дефиниција о материјалној тачци, да би се сваки могао, што боље, упознати појмом о њој.

Кад смо створили себи појам о једној материјалној тачци, онда можемо отпочети проучавање основних принципа на којима почива не само Меканика једне материјалне тачке, него тако исто и Меканика система материјалних тачака, а, према томе, апсолутно ма каквога материјалнога тела.

16. Принципи Меканике. — Све што зависи од броја и фигуре (облика) не тражи никакво знање о особеним својствима материје; и у овом проучавању могли бисмо апстраховати саму материју и створити идеални свет величине, фигуре и броја, о којима би *осећање* могло остати у нама чак и онда када би материјални свет, који нам га је дао, био уништен.

Ми ћемо, сада, ући у реалност овога света, држећи се, при томе, само најопштијег и најпростијег својства, које се находи у свима природним појавима, и које, према томе, мора бити проучено пре свију других.

Да једна наука постане оно што се назива *науком умовања*, треба познавати доста општих принципа на ствари којима се она бави, те да сви односи, у чија стварања и састав улази разматрање тих ствари, потичу из њих као нужне последице. Ови принципи, ови први подаци, обухватају виртуелно целу науку. Али, наука неће бити створена самим тим што ће се знати ови принципи, јер су њихове последице бесконачне по броју и по различности, и што је наука скуп свију ових последица.

Ови принципи, за једну науку која зависи од материјалнога света, моћи ће се добити само посматрањем природе, пошто закони материјалнога света немају ничега нужнога, и могли би бити са свим друкчији него што су. Да би се дошло брже и са већом прецизношћу до сазнања истинâ које се траже, не треба увек чекати да нам их природа пружи, треба изазивати њене одговоре, стварајући при том најповољније прилике које ће их значајним учинити, тј. додати *непосредном посматрању* оно што се *опитима* зове; и потребно је много, па да се задобије право, те да се сме прокламовати једна општа истина: неће се чак никада бити насигурно да ће један однос, оверен у огромном броју аналогних случајева, постојати и у неком новом случају истога жанра; али ћемо, неизбежно, бити наведени да верујемо да ће постојати, — наведени колико силом аналогије толико и природном потребом човека да позна и да утиче на чињенице да дођу.

Подаци, који ће, на тај начин, сачињавати науку умовања, имаће, ипак, нечега неизвеснога; тако исто да ли ће бити згодно да им оверавамо, толико колико ће се то моћи чинити, удаљене последице. Али, кад год се буде увек нашло да су ове последице сагласне са непосредно посматраном реалношћу, наука ће се много приближавати савршенству Геометрије и Науке о бројевима, и моћи ће се безбрижно веровати у тачност решења̂, која ће она дати. Човек не може ићи даље; али, то му је довољно у пракtици, и његов ум мора бити задовољен, пошто има свести да је чинио све оно што његова природа допушта.

Кад смо већ упознали извесан број истина, онда можемо, комбинишући их, извести из њих нове истине, о којима нисмо имали никаква појма, и које можемо сачувати ако нам се учине да имају какве вредности. Многа од корисних открића учињена су и чиниће се на тај начин; то је један начин за проширење науке, који не треба занемарити, и ма да тај начин не може бити управљан правилном методом, ипак све није морало бити случајно у резултатима којима он води.

Напоменимо и то, кад је реч о принципима науке у опште, да наука задржава себи права да, по неки пут, уводи и нових принципа, које би напредак науке собом донео.

Меканика, исто тако, почива на малом броју принципа, који, како се често вели, морају бити сматрани као својине материје. Дуго искуство, толико разноврсно и толико прецизно колико је год могуће, учинило је да усвојимо те принципе. Ти се принципи не могу непосредно оверити ни доказати, а на њих смо били наведени дугим низом индукција: последице, више или мање удаљене, које се из њих изводе помоћу тачних умовања, оверене су посматрањем природних појава. Прва идеја о овим принципима датира од Галилеја, који је, при проучавању закона̂ о паду тешких тела (стрма раван, клатно, параболичко кретање), увукао појмове о инерцији, убрзању и слагању кретања. Хигенс је био следбеник Галилејев у теорији кретања једне материјалне тачке: он је први проучио и кретање једног материјалног система. На послетку, Њутн прошири поље Меканике открићем закона о универсалној атракцији: он формулиса експлицитно принципе, на којима цела Меканика почива, у *три* става, који сада носе имена: *принцип инерције*, *принцип једнакости акције и реакције* и *принцип релативних кретања.*

Ми не ћемо моћи, као што већ рекосмо, дати непосредан доказ о овим трима принципима: то би било предузети један посао немогућ; моћни геније, који су привезали своја имена за ове принципе, нису их никада доказали; рећи ћу још више, они их нису исказази у јасној форми — у форми под којом их ми данас познајемо. И ако се ови принципи не могу актуално доказивати ни умовањем ни непосредним експерименталним путем, ми се задовољавамо да их искажемо, сматрајући их као *postulata* усвојена *a priori.*

Тачност ових принципа оснива се на потпуној сагласности између последица, које из њих потичу, и посматраних догађаја. Свака од меканичких примена моћи ће да нас одведе на експерименталну верификацију тачности ових принципа. Најбољи доказ о тачности ових принципа налази се у потпуној сагласности, која постоји између кретања небеских тела и оних закона о овим кретањима који су добивени ослањајући се на ове принципе. — Ови ће принципи наћи свој доказ, тако рећи *a posteriori*, у томе што ћемо, наслањајући се једино на ове принципе, рационалним путем наћи ставове (пропозиције) које будемо открили експерименталним путем.

Према свему досадањем: ови су принципи, на крају крајева, само хипотезе (n^0 3) које су без сумње, у умовима њихових проналазача, начиниле места великом броју других хипотеза којима се не тумаче тако добро посматрани догађаји. Ја кажем да су ови принципи само хипотезе, јер никакав непосредни опит не може дати доказа о њима; али, све последице до сада изведене из ових принципа, последице чиј број из дана у дан расте, биле су признате за тачне, кад год су могле бити потчињене контроли најделикатнијег пробања.

I. Принцип инерције. — Ми смо усвојили, као општи резултат посматрања, да кад се једно тело, с почетка непокретно у средини непромењивог система земаљских предмета, помери у односу наспрам њих, да има неког спољњег узрока који је на њ дејствовао у овом тренутку; ако пак никаква сила не дође да подејствује на тело, које је у миру, оно ће вечно остати у оном положају који је заузело.

Шта више, разноврсни опити, хиљадама пута поновљени, стално су показали: када узроци, који су померили једно тело, престану на њ да дејствују и када се неизбежни отпори све више и више смањују, онда његово кретање тежи све више и више да постане праволинијско и једнако; а отуда се, природно, морало закључити: кад би се могао са свим уништити ефекат трењâ, околног ваздуха и ма каквих других отпора, онда би кретање тога тела тачно било праволинијско и једнако.

Из скупа опита ове врсте и из искуства кога имамо о тачности оваких опита изведен је *принцип инерције* материје, који је, без икаквог изузетка, био потврђен са потпуном сагласношћу последицâ које су из њега добивене и факата који резултују из непосредних опита, или из посматрања у светском систему. Принцип инерције материје састоји се из два дела и може се исказати на овај начин:

1°. Кад је једна материјална тачка у миру, она ће остати непрестано у миру ако никаква спољна сила (акција) на њ не подејствује. — Још општије,

2°. Кад је једна материјална тачка у кретању, и ако никаква спољна сила на њ не дејствује, њено је кретање праволинијско и једнако.

Према томе, сваки пут, кад видимо да је једна материјална тачка у миру или у праволинијском и једнаком кретању, ми ћемо рећи да на њ никаква спољна сила (акција) не дејствује.

Под речи *инерција* не треба разумети да једно тело нема никаквог удела у продукцији сила̂, које могу на њ дејствовати, тј. не треба разумети да је материја инактивна. На против, скуп природних појава показује да се ове силе стварају (рађају) услед узајамне акције овога тела и других тела. Инерција се, дакле, састоји у томе што једна материјална тачка не може са̂ма собом да промени своје стање мира или кретања једнаког и праволинијског, но да је за то увек потребна егзистенција и акција материјалних тачака (једне или више њих). На тај ћемо начин, помоћу ове хипотезе, попунити принцип инерције материје, — кога неки зову *лењивост*, други, пак, *тромина материја*, а неки га, чак, зову *лењост?!*

Први део принципа инерције толико је добро познат, да нам се, увек, показује очевидан са̂м по себи. Изгледа да је тај први део принципа био познат још у прастара времена.

Што се другога дела тиче, ми ћемо напоменути да извесна факта *изгледају* да стоје у противуречности са тим другим делом принципа инерције. Наведимо овај класички пример: кад се једна кугла баци на равну хоризонталну површину, видеће се да та кугла описује једну праву линију; али, ма да акција, која је произвела кретање, не дејствује више на куглу, ипак њена брзина (односно њено кретање) поступно опада и сврши чак с тим да постане нула. Ово опадање брзине произлази отуда, што сам факат кретања чини да се рађају друге акције, које се на кугли врше, као што су трење и отпор ваздуха.

Врло велики број појава објашњује се помоћу принципа инерције. Ми ћемо, из свакидашњег искуства, навести само два — три појава, који, строго узевши, ако не служе као доказ самога принципа инерције, они бар служе као доказ тачности између последицâ из овога принципа изведене и посматраних факата. Тако: 1°. Кад кола, и путници на њима, мирно стоје, па кола нагло појуре, тела путникâ, по принципу инерције, тежиће да остану у миру и у истом положају, и за то ће посрнути натраг. — 2°. Кад се кола нагло зауставе, тела путникâ, који су на колима, пошто се заједно са колима крећу, тежиће, услед инерције, да продуже своје кретање и посрнуће у напред тј. у правцу у ком су кола јурила. — 3°. Услед инерције, дешавају се на жељезницама најужаснији догађаји. Ако се локомотива нагло заустави, сви ће вагони, услед добивене брзине, тежити да продуже свој пут и — разбиће се један о други.

„Њутн (Newton, *Principia,* axiomata sive leges motus. Lex I) је исказао принцип инерције овако: *једно тело у кретању, које није изложено утицају никакве силе, кретаће се бесконачно по правој линији са сталном брзином.* Овај принцип има, очевидно, исту вредност са дефиницијом силе. За онога, који зна смисао речи сила, он излази на ову истоветност (идентичност): једно тело, које није изложено утицају никаквог узрока који би мењао његово кретање праволинијско и једнако, остаће вечито у том кретању“ [1].

Са свим је очигледно, да принцип инерције, у основу, излази на дефиницију силе и због тога многи га писци и зову: *дефиниција силе или принцип инерције.* И заиста, из принципа инерције следује: ако се једна материјална тачка, првобитно у миру, у једном датом тренутку стави у кретање, или, још општије, ако једна материјална тачка није у једнаком и праволинијском кретању, — онда, баш на основу принципа инерције, можемо рећи да су извесне акције, које су ван те тачке, дејствовале на њу. А тим акцијама, које производе или мењају кретање једне материјалне тачке, дајемо име *сила* и кажемо да је материјална тачка изложена утицају силâ, или, још, да силе на

[1] *P. Mansion,* op. cit, p. 8.

њу дејствују: материјална тачка назвата је тада *нападна тачка* сила̂. Без сваке је сумње, да се не тиче првобитних узрока̂, на основу којих се врше кретања, него бројне вредности напрезања̂, која би била у стању да их произведу (n^0 13).

Свакодневно искуство чини нам обичним појам о разним силама.

II. Принцип једнакости акције и реакције. — Појимимо један коначан систем материјалних тачака, кога ћемо замислити, одмах, да је доста удаљен од сваког другог те да га можемо претпоставити да је са̂м у простору. Означимо са: P_1, P_2, $\cdot \cdot \cdot$, P_p, $\cdot \cdot \cdot$, P_q, $\cdot \cdot \cdot$, P_n оних n тачака, које га сачињавају. — Нека су: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\cdot \cdot \cdot$, (x_p, y_p, z_p), $\cdot \cdot \cdot$, (x_q, y_q, z_q), $\cdot \cdot \cdot$, (x_n, y_n, z_n) њихове координате у епоци t, у односу на један систем фиксних координатних оса. — Нека је r_{pq} узајамно одстојање двеју ма којих између њих P_p, P_q, одстојање које одређује њихов релативни положај и чиј је општи израз дат са

$$r_{pq} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}.$$

Најзад, нека су a_{pq}, b_{pq}, c_{pq} косинуси углова ове праве, сматрана повучена од P_p ка P_q, косинуси углова чије су вредности:

$$a_{pq} = \frac{x_q - x_p}{r_{pq}}, \quad b_{pq} = \frac{y_q - y_p}{r_{pq}}, \quad c_{pq} = \frac{z_q - z_p}{r_{pq}}.$$

Помоћу координата ових разних тачака P, у једној посматраној епоци t, биће одређен аналитички, тј. *квантитативно*, положај или, како се каже, *статичко стање* система у епоци t, оно стање које са̂ме тачке P, претпостављене дате у простору, *геометријски* одређују.

Узевши две *ма које* материјалне тачке, принцип једнакости акције и реакције може се исказати овако:

Ако једна материјална тачка P врши једну акцију на неку другу материјалну тачку P_1, ова је акција управљена правцем праве PP_1; обратно, и друга тачка P_1 врши на прву P једну акцију (реакцију) једнаку и супротног смисла оној од P на P_1, и ова је управљена правцем исте праве.

Тако, нпр., ако материјална тачка P привлачи неку другу материјалну тачку P_1, тачка P_1 привлачиће тако исто тачку P: ове су две акције једнаке а супротног смисла, тежиће да приближе једну ка другој ове две материјалне тачке и зову се *привлачне* акције. На против, ако две акције дејствују тако да ове две тачке удаље једну од друге, оне ће се звати *одбојне* акције.

Било би некорисно да сада дајемо примерâ о овом принципу: наћи ћемо их довољно при излагању Динамике.

Овај је принцип други од оних којима ћемо се служити без да их доказујемо. Њутн га је први исказао и увео у науку, и од тада је усвојен као аксиома (n^0 4). Њутн је први и дао имена једној од акција — *акција,* а другој акцији — *реакција*; и на тај начин може се овај принцип, кога често зову *Њутнов принцип*, исказати овако: *акција је равна и супротна*[1] *реакцији.*

Како силе, које дејствују на једну ма коју тачку, морају увек произлазити од других тачака, то се, отуда, закључује да једна сила никада не постоји сâма у природи; свакој сили (акцији) одговара једна реакција једнака а супротнога смисла.

Примедба. — И поред добрих термина у нас: *дејство* и *противдејство*, место *акција* и *реакција*, ја сам ипак задржао ове последње, и радије их употребљавам што су они, како ми се чини, постали космополитски називи.

Да напоменемо, на послетку, овде, да има писаца који не стављају овај принцип једнакости акције и реакције међу опште принципе Меканике па ни међу опште

[1] тј. *супротнога смисла*, или, како се често вели, *противположена.*

принципе Рационалне Меканике; њима се чини да он пре припада Физичкој Меканици.

III. Принцип релативних кретања. — Ми ћемо се, сада, упознати са трећим и последњим принципом, на који су стари били наведени мноштвом посматрања и опитâ, и који је увек био оверен сталном сагласношћу, која постоји између резултата којима, усвојивши га, он води, и резултата које добивамо из непосредног посматрања појавâ. То је *принцип релативних кретања*, чиј први појам дугујемо Галилеју и који се исказује на овај начин:

Кад, под утицајем извесних сила, један систем материјалних тачака, независне једне од других, имају неко заједничко транслационо кретање у простору, ако једна нова сила подејствује на једну од тачака, релативно кретање, које узима ова тачка у систему, независно је од заједничког транслационог кретања система, тј. оно је исто као када би систем био у миру.

Лако се дâ увидети, којом би се врстом опита могла познати истинитост овога принципа, упоређујући, увек, положаје покретног система са непокретним предметима на површини земље.

Узмимо, нпр., један систем материјалних тачака: A, B, C, D, · · ·, потпунце слободне, тј. независне једне од других и претпоставимо их да су у заједничком транслационом кретању; њихов релативни расположај остаће исти. Ако само на једну од ових тачака, нпр. на тачку A, пустимо да дејствује нека нова сила F, она (тачка A) ће, наспрам тачака B, C, D, · · ·, заузети *релативно кретање независно од заједничког транслационог кретања*, тј. тачка A заузеће исто кретање као када би тачке B, C, D, · · ·, полазиле из мира. — Ми бисмо поновили исте опите: 1° учинивши да сила F, која само на тачку A дејствује и саопштава овој извесно релативно кретање, мења свој правац и интензитет; или, 2° мењајући заједничко транслационо кретање, а оставивши силу F непромењиву да на тачку А дејствује. Посматрајући релативно кретање тачке А, увидели бисмо да је оно потпунце независно од заједничког транслационог кретања система, и исто као да ово последње и не постоји.

Поменимо, најзад, овај пример којим се, често, доказује истинитост овога принципа: ако, са истог места, пуштамо једну куглу да пада у једном вагону, када је он у миру и у кретању, падна тачка кугле увек је иста, па био вагон *у миру* или *у једнаком кретању*.

Далеко је од тога да је овај принцип очигледан; али је извесно немогуће да дамо о њему једну чисто рационалну демонстрацију. Ми ћемо се задовољити тиме што можемо да оверимо последице, више или мање непосредне, које из њега потичу и које ће нам дати Анализа.

Ми ћемо узети да овај принцип релативних кретања постоји у свој својој општности, па и ако признајемо да нам он, као сви ставови изведени из искуства, не даје такву извесност, која би нас сваке верификације ослобођавала. То је, ако се хоће, једна хипотеза преко мере вероватна, која може служити за основ једној науци умовања, али која тражи да буде оверена сагласношћу њених најудаљенијих последица и посматраних факата.

Напоменимо да неки писци, као и *J. Boussinesq*, зову овај трећи принцип: *принцип независности једновремених кретања*. Неки га, пак, писци, као и *J. Graindorge* у својој *Аналитичкој Меканици* [1], зову: *принцип независности ефекта једне силе и кретања раније задобивеног*, и исказују га на овај начин: *ефекат произведен једном силом, дејствујући на једну материјалну тачку, независан је од кретања раније задобивеног том тачком*.

Ми ћемо, доцније, опширније говорити о овом принципу релативних кретања, па и о свима главнијим после-

---

[1] *J. Graindorge*, Cours de Mécanique analytique, 2 vol., t. I, p. 165, 1888, Mons.

дицама, које се из њега изводе. Овде, учинимо, још, ове примедбе.

Примедба I. — Приметимо, прво, да је као врло проста и непосредна последица принципа релативних кретања и *став (или закон) независности ефеката једновремених сила.* Тај се став независности ефеката једновремених сила исказује на овај начн: *кад две или више сила дејствују једновремено*[1] *на једну исту материјалну тачку, свака од њих дејствује као да друге силе и не постоје и као да материјална тачка полази из мира.*

Ми ћемо се, у Динамици, врло често позивати на овај став; и тамо ћемо, и о њему и о његовим последицама, опширније говорити.

Има писаца који састављају уједно овај став независности ефеката једновремених сила са принципом релативних кретања, под именом: *принцип релативних кретања и независности ефеката сила.* Има, пак, доста писаца који узимљу овај став за трећи мекански принцип, — они га узимљу место принципа релативних кретања.

Мансион[2] вели: „III. *Дефиниција суме двеју сила, или принцип независности ефеката силâ.* — 1. Према дефиницији једне математичке силе (стр. 75), једна тачка изложена је увек само једној јединој математичкој сили, пошто она (тачка) има само једно једино кретање и једно једино скретање у односу на један чврст систем.

„2. *Конвенционално,* ипак, у место да се каже да је једна тачка под утицајем једне силе AB, каже се да је она под утицајем двеју сила AC, AD, ако је ABCD један паралелограм који има AB за дијагоналу. Познавање силâ AC, AD еквивалентно је познављу оне AB, њихова *резултанта*назвата. Може се тако исто заменити свака од сила AC, AD двема другим, и тако редом, за тим скупити више од добивених фиктивних сила у једну резултанту по

---

[1] тј. *у исто време*, неки веле *истовремено.*

[2] *P. Mansion*, op. cit., p. 8—9.

правилу о паралелограму, као што то доказује геометријска теорија о пројекцијама и слагању правих.

„Претходна конвенција основна о смислу израза: *тачка изложена утицају двеју или више сила* које дејствују једновремено на њу, може се метути под разне форме, и зове се *принцип независности ефеката сила*.

„3. У експерименталној меканици, кад се зна ефекат двеју сила, у метафизичком смислу, тј. двају узрока који мењају кретање праволинијско и једнако, свака дејствујући одвојено, знају се такође математичке силе које им одговарају, према томе, и резултанта ових. Једновремена акција двају узрока који мењају кретање праволинијско и једнако може бити једнака са скретањем које одговара резултанти о којој беше речи, или може бити различна. У последњем случају, каже се да једновремена акција двеју сила, у метафизичком смислу, производи једну трећу силу такву да је *принцип независности ефеката сила* (метафизичких) оверен".

Примедба II. — Има писаца таквих који држе да Меканика почива на *четири*, а не на три, основна принципа. Неки од њих, као што је и *Грендорж* [1], узимљу *став независности ефеката једновремених сила* за четврти меканички принцип. Неки, пак, као што је *Мансион* [2] узимљу за четврти меканички принцип: *дефиницију унутарњих и спољних сила једнога система или општи принцип аналитичке меканике*, о чему ћемо доцније говорити.

* * *

Напомена. — Кад у још мрачним деловима Науке наиђемо на појаве, о којима нам недостаје *идеја мати*, или кад нам неки појави изгледају да нису последица ниједнога од трију посматраних принципа, — никако не

---

[1] *J. Graindorge*, op. cit., p. 162, et p. 169.

[2] *P. Mansion*, op. cit., p. 9.

треба закључити да је оскудица у општности тих принципа, него треба, од познијих прогреса Науке, очекивати објашњење несагласностй, чисто привидних без сумње. Ништа непаметније не би било него узети да нам такви неразмршени појави могу служити да помрче оно што је Наука, већ од два столећа стекла, као најјасније; на име, стекла та три принципа који, са својим непосредним последицама, као и са последицама које добивамо из разних могућих комбинација ових трију принципа, својим скупом и сачињавају предмет Меканике.

17. Маса тела. Густина. — Има још један појам нужан да се уведе у науку о кретању, а који се не находи у науци о равнотежи: то је *појам о маси* (франц. *masse*, од латинског *massa;* грчки $\mu\breve{\alpha}\xi\alpha$; нем. *Masse*).

Напоменимо, одмах, да има врло мало физичара, а још мање меканичара, који су се, озбиљније, бавили појмом о маси, ма да то баш у њихов делокруг спада. И физичари и меканичари, већином, своде појам о маси на нејасан и доста неодређен значај *количине материје*, и дају за масу ову дефиницију: „одређена количина материје, која извесно материјално тело образује, зове се *маса.*" Према томе, веле они, разлика између појма о маси и појма о материји иста је онаква, каква је разлика између појма о запремини и онога о простору.

По *Литреу*: маса је укупност (цело) једне ствари чиј су делови исте природе.

Неки, опет, писци дефинишу масу на овај начин: „постоји једно извесно својство по коме разна материјална тела (разне материјалне тачке) попуштају лакше или теже акцији силâ. Ово својство, које чини те се материјална тела разликују једна од других, јесте оно што се *масом* назива."

И ми ћемо, *за сада*, покушати да бар покажемо пут којим треба ићи те да сваки, како се нама чини, који тим путем пође, може створити себи појам о маси.

Из искуства знамо, а и опити показују, да једна иста сила не производи исто кретање када она дејствује на тела образована из исте супстанције, имајући различне запремине, и, према томе, обухватајући различне количине материје. Исто тако, из искуства знамо и то да једна иста сила не производи, увек, идентичко кретање, када она дејствује на различна тела. Тај факат чини те ми стварамо себи један нов појам — појам о маси.

Али, како се не може придати никакав прецизан смисао сравњивању количинâ материје садржаних у телима различите врсте, ни нарочито извући отуда икакву последицу која би се односила на ефекте сила, и како није наш предмет да водимо рачуна о тачном саставу телâ, него само о начину на који су она стављена у кретање помоћу силâ, ми сматрамо као идентична, у томе погледу, два тела која, изложена утицају једне исте силе, узимљу исто кретање. Тада се каже, не да тела садрже исту количину материје, него да имају *исту (једнаку) масу*. Или, што је исто, краће, за два тела, ма какве врсте, каже се да имају једнаку масу, када једнаке силе производе идентична кретања на овим телима, која су слободна и полазе из мира.

Ако се два тела саставе уједно, образује се из њих једно ново тело чија је маса назвата *сума маса* двају других. Кад два тела произлазе из скупа других тела, која имају једнаке масе, онда се каже да су масе тих двају тела у односу респективних бројева од ових парцијелних тела.

Неки писци мисле да дају дефиницију масе једног материјалног тела, исказујући ову истину: *маса једног ма каквог материјалног тела јесте сума масâ материјалних тачака, које састављају то тело.*

Ми ћемо, потпуности ради, одмах, навести: *маса једне материјалне тачке јесте сталан однос, који постоји* *између интензитета једне силе и убрзања које она саопштава материјалној тачци.* — Опит показује да се тај однос (маса) мења прелазећи од једне материјалне тачке ка некој другој. Његова вредност сачињава, дакле, за сваку материјалну тачку, једно особено својство, једну врсту карактера којим се разликује, — карактера основаног на начину на који ова тачка допушта да јој се саопшти једно убрзање.

Ако претпоставимо да две, три, четири, $\cdot \cdot \cdot$, n материјалних тачака имају једнаке масе, и ако их спојимо уједно, добићемо материјално тело, које ће имати два пута, три пута, четири пута, $\cdot \cdot \cdot$, n пута већу масу, него што је маса сваке поједине материјалне тачке.

Појам о једнаким масама води нас ка појму о масама које стоје у ма каквом односу; и масе свију материјалних тела могу бити представљене бројевима, ако их сравњујемо са масом једне одређене запремине, неке по вољи изабрате материје. Отуда се види да тела, образована од једне исте хомогене супстанције, имају масе сразмерне својим запреминама и, према томе, сразмерне количинама материје које оне обухватају.

Ако две материјалне тачке, имајући једнаке масе, полазе из мира, и ако су под утицајем једнаких и паралелних сила, оне ће заузети идентичка кретања, и, према томе, неће се ништа променити у њиховом стању, претпоставивши да су оне (тачке) у непроменљивој вези једна са другом везане, и да њихов систем буде под утицајем двогубе силе која је резултанта двеју других, и која, према томе, дејствује на тежиште двеју материјалних тачака. Исто би при томе било за један ма колики број материјалних тачака, тако: ако две масе стоје у односу као m ка n, и ако су под утицајем силâ које су у истом односу, а које дејствују на њихова респективна тежишта, ове две масе узеће идентичка кретања, и све њихове тачке описиваће паралелне праве.

Ако би једна од двеју маса била под утицајем мање или веће силе, него што је она која резултује из горње сразмере, она (маса) би, очевидно, имала кретање различно од кретања друге масе. Откуда следује, обратно, да ако две неједнаке масе имају истоветно кретање, силе, које на њих дејствују, сразмерне су овим масама.

Према свему томе изводимо: два тела, изложена утицајима сила̂ сразмерних њиховим масама, узимљу исто кретање, јер разлажући их на делове једнаке њиховој заједничкој мери, све су ове једнаке масе изложене утицајима једнаких сила. И обратно, ако су кретања двају тела иста, силе су у сразмери њихових маса. Отуда следује прост начин сравњивања маса̂.

Опитима је доказано да сва тела, остављена у празном простору под слободним утицајем теже (тј. сва тела изложена са̂мој акцији теже), узимљу идентичка кретања, па ма каква била њихова величина, њихова врста и, према томе, ма каква била њихова маса. Отуда се мора закључити: масе појединих тела сразмерне су силама које на њих дејствују, тј. масе су сразмерне њиховим тежинама.

Маса једног материјалног тела (једне материјалне тачке) *не мења се* на разним местима, — маса је, дакле, једна иста на свима тачкама земље, у њој и ван ње; или краће, маса не зависи од латитуде — ма да се тежина тела мења. Вулгаран појам о тежини тела био је, вероватно, неопходно нужан те да дођемо до великог *принципа конзервације масе*. У већине људи̂, чак у људи од науке, појам о маси, сведен на нејасан значај количине материје, врло се често меша са појмом о тежини; али, треба се врло добро чувати да се маса једног тела не меша са његовом тежином, јер: *маса једног тела сразмерна је*, а не равна, *његовој тежини*.

Опитом се лако доказује да је тежина једног тела иста, па било оно у миру или у кретању. Према томе, масе тела сразмерне су њиховим тежинама у стању мира;

и како имамо инструмената помоћу којих можемо врло лако мерити и сравњивати тежине тела, то ће ти инструменти послужити и за одредбу односа масâ тих тела, и масе свију тела моћи ћемо представити бројевима, сравњујући их са једним телом чију ћемо масу узети за *јединицу масе.*

Пре Галилејевих опита о падању тешких тела, није се могло знати да су масе тела сразмерне њиховим тежинама; и то би било са свим друкчије када би тежа била, нпр., једна сила жанра магнетских привлачења која се не врше на свима супстанцијама, и, чак, која се врше неједнако на оне које су изложене њихову утицају.

Појам о маси пружа ову битну разлику, која постоји између њега и појма о сили: што се појам о маси задобива само кретањем, док се појам о сили може задобити, било производећи једно кретање, било спречавајући га да се произведе.

Обично, маса једне материјалне тачке означава се са m; а масе појединих (кад је више) материјалних тачака означавају се са m_1, m_2, m_3, . . . , m_n., Маса, пак, једног материјалног тела означава се са M, а масе појединих тела, кад их је више, са M_1, M_2, M_3, . . ., M_n.

Кад се, доцније, будемо упознали са *убрзањем (акцелерацијом),* моћи ћемо, после тога, у Динамици, опширније говорити: *о маси, о једнакости и суми маса, о маси једне материјалне тачке, о јединици масе, о тежини тела,* као год и *о тежини тела која одговара јединици масе.* Том приликом, решићемо велики број интересантних проблема, који нам се, свакодневно, у животу намећу.

Густина (франц. *densité,* од латинског *densitas* од *densus* густ; нем. *Dichtigkeit*) јесте својство онога што је густо, често. Ова реч означава разне количине различне [1]. — Као физички термин, вели *Литре,* густина је однос масе једног

[1] *La grande Encyclopédie,* t. 14.

тела ка његовој запремини, или, другим речима, густина је количник од масе подељене са запремином.

Густина једног тела зависи од броја његових материјалних тачака обухваћених једном датом запремином (*Лаплас, Exp.* III, 3).

Тела су, по саставу, *хомогена* или *хетерогена.*

За једно тело каже се да је хомогено, кад оно представља, у свима правцима, идентичан физички састав. У противном случају, тело је хетерогено. Према томе, да ли је једно тело хомогено или хетерогено и густина му је *једнака* или *неједнака.*

Кад је једно тело хомогено, једнаке (елементарне) запремине његове имају једнаке тежине; за два тела хомогена а различите врсте, тежина је различна за једнаке запремине њихове.

Густина једног хомогеног тела зове се маса обухваћена у јединици запремине; према томе, густина једног хомогеног тела јесте однос између масе обухваћене једном ма каквом запремином и ове запремине. Тако, ако са ϱ означимо густину једног хомогеног тела, са M масу његову, а са V његову запремину, имаћемо:

$$\varrho = \frac{M}{V}, \text{ откуда је } M = V\varrho.$$

Код хомогених тела ϱ (тј. густина) је стално. Кад знамо густину једног хомогеног тела, множећи запремину његову са густином добићемо масу тога тела.

Једно тело јесте хетерогено кад се густина мења, прелазећи од једног елемента његове запремине ка другом. Према томе, једнаке (елементарне) запремине његове немају једнаке тежине; тежина, дакле, није сразмерна запремини.

Густина једног хетерогеног тела, у једној ма којој од његових тачака $x, y, z,$ зове се средња густина једног елемента тела, бесконачно малог у свима правцима, у коме се находи ова тачка; или, другим речима, густина једног хетерогеног тела јесте граница односа масе обухваћене у овом елементу тела ка запремини овога елемента, када она (та запремина) тежи ка граници нула. Ова ће се граница морати употребити на исти начин као густина у хомогеним телима, кад се жели да се израчуна маса једног коначног дела неког нехомогеног тела, с тим да се тај део раздели на елементе бесконачно мале у свима правцима. И због тога је разлога деноминација густине морала бити распрострта на ову границу.

Напоменимо, на послетку, да је густина једног хетерогеног тела у једној тачци x, y, z, извесна функција координата ове тачке. За тела хомогена ова се функција своди на једну константну.

Примедба. — У практици се, немајући право, врло често мешају међу собом густина и *специфична тежина*. О томе ћемо, доцније, опширно говорити.

Бројна вредност густине једног тела зависи од усвојених јединица за масу и за запремину.

18. Метарски систем мера. — Мерити неку количину значи сравнити је са једном другом количином исте врсте, чија се величина сматра као позната. Ова позната количина зове се *јединица исте врсте* у којој је изражена мерена количина. Оваким сравнењем, нађени однос између задате количине, која има да се измери, и усвојене јединице представљен је извесним *бројем*, и овај број даће нам *меру (величину)* задате количине. За мерење свију количина или величина, које су човеку корисне или му могу послужити за предмет ма каквих посматрања и испитивања, постојало је, а негде и данас постоје, у разних народа и разни системи мерâ.

Французи су (1791) створили *метарски систем мера*, којим се, данас, готово сви образовани народи служе и у науци и у приватном животу. Код нас, закон о метарском систему мера, донесен 1 Децембра 1873 године, ступио је дефинитивно у живот и постао обавезан за свакога у Краљевини Србији још 1 Маја 1883 године. Ипак, имаће још доста да се уради, те да стари систем мера са свим пређе у заборав, и да се овај метарски систем мера тачно употребљује. Тога ради, а и потпуности нашега предмета ради, ми смо и узели да о тим мерама, овде, врло укратко проговоримо.

Метарском систему мера основа је линеарна јединица, звана *метар,* који је десет-милионити део четвртине земљиног меридијана. Овај је систем мера назван *метарски,* јер све мере овога система произлазе од метра.

Кад је изнађена основна или главна јединица мере за дужине — *метар,* лако је било извести из њега: главну јединицу мере за површине — *квадратни метар* названа, то ће рећи квадрат коме је страна један метар дугачка, и главну јединицу мере за запремине — *кубни метар* названа, а то је куб — коцка — којег су ивице (оштрице) један метар дугачке.

Као главна јединица мере за површине у пољу узет је квадрат са страном од 10 метара под именом *Ар.* Куб — коцка —, којег је свака ивица равна десетом делу метра (дакле, кубни десиметар), узет је као главна јединица мере за течности, жита, варива итд., под именом *Литар.* Куб са ивицама од једног метра узет је као главна јединица мере за дрва под именом *Стер.*

Но са свим је друкчије стајало са главном јединицом мере за тежине, *Грам* назвата; његова одредба зависила је од многих и тешких опита и свакојаких свођаја. Грам је тежина једног милионитог дела кубног метра (један кубни сантиметар) дестилисане воде од $+ 4^0$ C.

Множећи и делећи ове јединице са 10, 100, 1000 итд., добићемо подесне мере за сва могућа мерења, и то како за највећа астрономска, тако и за најмања микроскопска мерења.

Колико је прост овај метарски систем мера, толико је проста и номенклатура његова. Имена мера већих и мањих од главних метарских јединица нису произвољно узета. При грађењу имена̂ за те мере гледало се да број произвољних имена буде што мањи, а да се, међу тим, начине сложена имена која би односима, које показују, памћење олакшала. Имена мера̂, које су 10, 100, 1000, 10.000 пута веће од главних јединица, добивају се кад се пред именима главних јединица метну из старогрчког језика позајмљена имена броја, који је множитељ: *дека* (десет), *хекто* (сто), *кило* (хиљада) и *мирија* (десет хиљада). Имена, пак, мера̂ које су 10, 100, 1000 пута мање од главних јединица, добивају се кад се пред именима главних јединица метну из латинског језика узети слогови: *деси* (десети део), *санти* (стоти део) и *мили* (хиљадити део).

Упућујем читаоца на врло опширно дело о Метарским мерама од *Димитрија Нешића*[1], које је, до сада, доживело више издања и које је много користило нашему народу, а ја ћу изнети потпун преглед свију мера метарског система у овој таблици:

ТАБЛИЦА МЕРА И СКРАЋЕНИ ЗНАЦИ ЊИХОВИХ ИМЕНА

1. Мере за дужине

Јединица 1 *метар*

Метар	(м)...	1 метар	Метар	(м)...	1 мет.
Декаметар	(Дм)	10 „	Десиметар	(дм)	0·1 „
Хектометар	(Хм)	100 „	Сантиметар	(см)	0·01 „
Километар	(Км)	1000 „	Милиметар	(мм)	0·001 „
Миријаметар	(Мм)	10.000 метара.			

[1] *Димитрије Нешић,* Метарске мере, 1874 Београд.

Свака од ових јединица мере употребљује се према потреби. Али је уобичајено да се неке извесне од ових мера најрадије употребљују; тако, обична линеарна мерења исказују се *метрима;* физичари, који имају обично посла са малим дужинама, исказују исте са *милиметрима;* већа, пак, линеарна растојања исказују се *километрима.*

2. Мере за површине

а). *Опште мере:* Јединица 1 *квадратни метар*

Квадратни	миријаметар	(кв. Мм)...	сто милиона кв. мет.
„	километар	(кв. Км)...	милион „ „
„	хектометар	(кв. Хм)...	десет хиљада кв. мет.
„	декаметар (ар)	(кв. Дм)...	сто кв. метара
„	метар	(кв. м)...	један кв. метар
„	десиметар	(кв. дм)...	стоти део кв. метра
„	сантиметар	(кв. см)...	десет хиљадити део квадратног метра
„	милиметар	(кв. мм)...	милионити део кв. м.

б). *Пољске мере:* Јединица 1 *ар* = 100 кв. метара

Ар	(Ар)...	1 ар	Ар	(ар)...	1 ар
Декар	(Дар)...	10 „	Десиар	(дар)...	0·1 „
Хектар	(Хар)...	100 „	Сантиар	(сар)...	0·01 „
Килар	(Кар)...	1000 „	Милиар	(мар)...	0·001 „
Миријар	(Мар)...	10.000 „			

Мање површине мере се, обично, *квадратним метром,* а веће (нпр. поља) *хектаром,* а још веће *квадратним километром.*

3. Мере за запремине

а). *Опште мере:* Јединица 1 *кубни метар* = 1 стер

Кубни	миријаметар	(кб. Мм)...	трилион куб. метара
„	километар	(кб. Км)...	билион „ „

Кубни	хектометар	(кб. Хм). . .	милион куб. метара
„	декаметар	(кб. Дм). . .	хиљада „ „
„	метар (стер)	(кб. м). . .	један „ „
„	десиметар	(кб. дм)...	хиљадити део куб. мет.
„	сантиметар	(кб. см). . .	милионити део „ „
„	милиметар	(кб. мм). . .	билионити део „ „

б). *Мере за течности:* Јединица 1 *литар* = 1 кубни десимет.

Литар	(л)...	1 лит.	Литар	(л)...	1 лит.
Декалитар	(Дл)...	10 „	Десилитар	(дл)...	0·1 „
Хектол.	(Хл)...	100 „	Сантилитар	(сл)...	0·01 „
Килол.	(Кл)...	1000 „	Мililитар	(мл)...	0·001 „
Миријалитар	(Мл)...	10.000 литара			

Запремине чврстих тела (нарочито дрво, песак, камен) мере се *стером (кубним метром)*, чије су веће множине *декастер* од десет стера, а делови *десистер* тј. десети део стера. Запремине течности мере се, обично, и то мање са *литром* а веће са *хектолитром.*

4. Мере за тежине

Јединица 1 *грам*

Грам	(г)	1 гр.	Грам	(г)	1 гр.
Декаграм	(Дг)	10 „	Десиграм	(дг)	0·1 „
Хектограм	(Хг)	100 „	Сантигр.	(сг)	0·01 „
Килограм	(Кг)	1.000 „	Милиграм	(мг)	0·001 „
Миријаграм	(Мг)	10.000 „			

Мање тежине исказују се, обично, у *милиграмима* и *грамовима,* а веће тежине у *килограмима*, још веће у *центама (метарским)* и *тонама.* Једна цента има 100, а једна тона 1000 килограма.

Из ове таблице најбоље се види, у свему, несравњена правилност, простота и јасност метарског система мера.

Усвојивши овај систем мера, корист, коју отуда имамо, врло је велика, нарочито у индустрији, занатима, трговини и саобраћају; корист је и у науци.

19. Апсолутне јединице. — Добро је, кад је већ реч о метарском систему мера, ући овде у неке појединости односно избора јединицâ при мерењу величинâ. Мерење (оцењивање) ма какве величине ради се помоћу неке друге познате величине исте врсте, која се *јединицом* назива. Међу величинама, што имамо да меримо, има их таквих чије се мере могу извести из мерâ других величина различите врсте: такве су величине, нпр., површине и запремине у геометрији, чија мера произлази из мере дужинâ. Због тога површине и запремине назвате су *изведеним величинама*, док су дужине назвате *основним величинама.*

У Механици се налазе *три* основне величине, а то су: *дужине, масе* и *времена;* све друге величине, као: силе, брзине, убрзања итд., могу бити сматране као из ових изведене. Према томе, мерење величинâ, које налазимо у Механици, зависи од избора трију основних (примитивних) јединица: јединице дужине, јединице масе и јединице времена. Одредити и утврдити ове јединице помоћу елемената природних и толико непроменљивих колико је то могуће, значи изабрати један *систем апсолутних јединица.*

Сходно принципима усвојеним Британском комисијом у 1871 години, за тим конгресом електричара од 1881 године, систем апсолутних јединица састоји се из универсално-усвојених апсолутних јединица: сантиметар — грам — секунда (C. G. S. = centimètre — gramme — seconde).

У овом систему апсолутних јединица:

1°. *Јединица дужине* јесте *сантиметар,* тј. стоти део метра (прототип метра) који се чува у државној архиви у Паризу и који је готово раван десет милионитом делу четвртине земљиног меридијана.

2°. *Јединица масе* јесте *грам-маса,* тј. маса једног кубног сантиметра дестилисане воде на $+ 4^{\circ}$ С., и чија је тежина у Паризу, у празноме простору, готово хиљадити део килограма (прототип килограма) који се, такође, чува у поменутој архиви.

3°. *Јединица времена* јесте *једна секунда средњег сунчаног времена* (n° 11).

У овом систему апсолутних јединица (сантиметар — грам — секунда), маса једног тела изражена је истим бројем којим је изражена његова релативна тежина у грамовима.

Примедба. — Остављајући да, доцније, на своме месту, опширније говоримо о овим апсолутним јединицама, као и *о јединици силе*, ми ћемо приметити овде: ако је, *за примене*, неопходно нужно изабрати један систем одређених јединица, није нужно то чинити и за теорију; теорије у Меканици нужно су независне од тога избора. Шта више, у теоријским истраживањима, много је боље оставити основне јединице неодређене, како би се добивене формуле могле примењивати на сваки могући систем јединица.

* *
*

Напомена. — Као што смо већ казали, готово сви образовани народи (цео свет) усвојили су *метарски систем мера;* сви су усвојили и овај *систем апсолутних јединица.* Тако исто, бар у колико то ми знамо, многи европски народи, сем Француза и још неких, усвојили су *средње-европско време,* које смо и ми Срби усвојили почетком прошле године. — Све је то, у многоме, припомогло те су се међународни саобраћаји увећали, и тиме постигло да се индустрија, занати, трговина, па и наука, много лакше и брже разграњавају и шире! Томе би још већма припомогло, када би се сви образовани народи споразумели и усвојили: *један светски календар* и *један исти систем но-*

вца! У тој цељи, кад се већ осећа нека тежња ка општности, добро би било:

1°. Да се образује једна међународна научна комисија, која би, споразумно са владама појединих народа, спремила све оно што би претходило усвојењу светског календара и исти израдила, у колико то већ није учињено, на научној основи. Истина је, да би се тај светски споразум о једном јединим календару (о истом датуму) постигао, било би нужно да многи народи, па чак и читаве расе, напусте доста од давно укорењених и вековима освештаних предрасуда и навика својих. Ми и не сумњамо да ће, на крају крајева, одржати победу она огромна, она проста и тачна а према томе и моћна наука — астрономија —, она наука, најстарија међу наукама, којом се, озбиљније или тек узгредно, више или мање, до сада бавило свако интелигентно лице!

2°. Лакшег и већег међународног саобраћаја ради, пронађени су и народима на расположење стављени: пароброди, парне па и електричке жељезнице, телеграфи, телефони и још толика друга средства, начињени су разни међународни уговори, а још није пронађен начин и пут, како да се створи и усвоји *један једини систем новца,* којим би се цео свет служио?!

Разни системи златног и сребрног новца, у појединих народа, као нпр. рубље, форинте, марке, франак, динар итд., итд., највећма и задају муке и у многоме отежавају лак и брз међународни саобраћај. И заиста, свакоm путнику и трговцу врло је добро познато коликим је преварама изложен, шта и колико губи при размени новца, и колико сваки од свог „драгоценог“ времена око тога утроши, а, богме, и „време је новац“!

За то, што пре то боље, треба образовати једну међународну комисију, којој би се ставило у задатак, да пронађе пута и начина, како би се, у будуће, сви народи служили једним истим системом новца.

При стварању тога система новца треба се руководити великом мишљу: створити један такав систем новца, који би могао бити примљен од свију народа, и да на тај начин постане *светски*. Односно назива, ако се не би што боље нашло и усвојило, њих би требало изабрати из старих класичких и свима образованим народима разумљивих језика, тј. из старогрчког или из латинског. Тиме би се избегао повод свакој суревњивости појединих народа. У опште, при изради тога новца, треба тежити ка што је могуће већој простоти, ка што правилнијој и што практичнијој подели; јер то, на послетку, и преовлађује.

Ја се надам, да ће се, одмах у почетку идућег века, приступити решењу тога тако значајнога питања, *питања о новцу*, ако још овај век, поред толиких великих радова, решењем тога питања не круните свој свршетак!

Усвојивши један исти систем новца неминовно би се смањио број превара и обмана (да не кажем то драстичније: смањиле би се „пљачке“), а увећао би се морал! Тиме би се, још, створио бржи, лакши и већи међународни саобраћај, а последице тога биле би напредак и ширење индустрије, заната, трговине и наукâ.

Наука је расадница (генератриса) сваког морала, она сâма даје ту моћ прилагођивања (адаптације) на нова стања, које одговара општем развићу (еволуцији) ствари̑ и друштава. Тај морал, на научној основи, мора, изузев тајанствености и чудâ, уредити људске односе, он мора донети братство међу народима у исто време кад и универсалну солидарност међу индивидуама, уништењем свију предрасуда.

Најзад, ја не сумњам ни у то да ће јединство мерâ, јединство апсолутних мера, јединство календара и јединство новца крчити пута и у далекој, врло далекој будућности, одвести друштво ка *јединству књижевнога језика!* Од тадашњих књижевних језика, при решавању тога питања, највећи број гласова а, по својој прилици, и пресудно решење имаће онај између њих који, тада, буде најизрађенији, најпростији и најлакши. — Тај светски књижевни језик одвешће, пак, друштво ка . . . . ; зажелимо нека га одведе ка потпунијој образованости и срећи свију и свакога!

Божиј народ не би ни знао за разне језике, да није предузимао у земљи Сенарској[1] да сазида себи града и куле „Вавилонске“!

20. Историја Меканике. — Ми смо се, довде, упознали са неколико основних појмова, са којима ћемо, при самом излагању теорије, врло често имати посла, и о којима ћемо, нарочито о кретањима, силама и масама, тамо опширније говорити. Напоменимо само, да кад су ови основни појмови, довде изложени, задобивени, ми бисмо могли показати како се експерименталним путем постављају основни закони кретања произвиденог силама.

Кад сам предузео да пишем о појмовима, који, строго узевши, и не спадају у Меканику, ја сам врло добро знао, да је то веома неблагодаран посао. Још је неблагодарнији посао, кад се тиче појмова, о којима сваки умни човек може имати свога сопственога мишљења. О некима од ових појмова писало се много, и сувише много; али је врло мало списа̂, којима је призната научна вредност. Па и у тим списима „од научне вредности“ говорило се много, а на крају крајева „готово се ништа не каже“. — И ако сам све то добро знао, ипак сам предузео овај посао са свом вољом, да покренем и наше књижевнике и све умне људе на размишљање о овим појмовима, и држим да досадашње излагање ових неколиких претходних посматрања неће изгледати сувише бескорисно ни нама меканичарима, јер, треба, пре него што се кренемо у једно поље толико пространо и тако обрађено, као што је меканичко поље, јасно знати одакле се полази и куда се иде.

---

[1] *Свето писмо*, стари завјет, прва књига Мојсијева, глава 11.

између њих који, тада, буде најизрађенији, најпростији и најлакши. — Тај светски књижевни језик одвешће, пак, друштво ка . . . . ; зажелимо нека га одведе ка потпунијој образованости и срећи свију и свакога!

Божиј народ не би ни знао за разне језике, да није предузимао у земљи Сенарској[1] да сазида себи града и куле „Вавилонске“!

20. Историја Меканике. — Ми смо се, довде, упознали са неколико основних појмова, са којима ћемо, при самом излагању теорије, врло често имати посла, и о којима ћемо, нарочито о кретањима, силама и масама, тамо опширније говорити. Напоменимо само, да кад су ови основни појмови, довде изложени, задобивени, ми бисмо могли показати како се експерименталним путем постављају основни закони кретања произвиденог силама.

Кад сам предузео да пишем о појмовима, који, строго узевши, и не спадају у Меканику, ја сам врло добро знао, да је то веома неблагодаран посао. Још је неблагодарнији посао, кад се тиче појмова, о којима сваки умни човек може имати свога сопственога мишљења. О некима од ових појмова писало се много, и сувише много; али је врло мало списа̂, којима је призната научна вредност. Па и у тим списима „од научне вредности“ говорило се много, а на крају крајева „готово се ништа не каже“. — И ако сам све то добро знао, ипак сам предузео овај посао са свом вољом, да покренем и наше књижевнике и све умне људе на размишљање о овим појмовима, и држим да досадашње излагање ових неколиких претходних посматрања неће изгледати сувише бескорисно ни нама меканичарима, јер, треба, пре него што се кренемо у једно поље толико пространо и тако обрађено, као што је меканичко поље, јасно знати одакле се полази и куда се иде.

---

[1] *Свето писмо*, стари завјет, прва књига Мојсијева, глава 11.

Историја наукâ, исто тако као год и историја народâ (царстава), има своје почетке завијене тамом и неизвесношћу. Први кораци ума људског, слаби и нејасни, побудили су били толико мало пажње у оних, који им беху сведоци, да се никако не треба чудити што су његови трагови готово потпунце избрисани; к томе разлогу придружује се, по нашем мишљењу, и онај о удаљености временâ, на која се ти трагови односе. Кад нам, ван извесних епока, недостаје политичка историја, која је увек брижљивије била пренашана на потомство, зар се можемо чудити што је историја наукâ и вештинâ готово са свим била занемарена, и што се губи у баснама и претпоставкама?! У таким приликама, дужност једног историчара састоји се у томе, да уме да оцени сведочанства и знаке, и да разликује оно што носи утисак лаковерности или незнања од онога што изгледа основано на сталним темељима.

I

Човек није, у свима временима, постојао на земљи. Све докле год је земљин глобус био у усијаном и течном стању, ни биљни ни животињски свет нису могли на њему постојати; тек пошто је овај глобус по својој површини очврснуо и довољно се охладио, егзистенција биља, а за тим животиња па и човека, била је могућа.

Ако би се хтело почети посматрање још од првих почетака људских знања, требало би се, у мислима, пренети у епоку човечијег појава на земљи. Ово би посматрање и истраживање зависило од стања у ком бисмо га претпоставили у тренутку његовог постанка, и било би са свим некорисно због неизвесности података. Паметније је посматрати човека, таквог какав је данас, рађајући се у средини људи̑, који су доспели до извесног ступња ма какве цивилизације, живећи и развијајући се, њиховом помоћу, како морално тако и физички. Ми присуствујемо сваког дана том постепеном развитку, и његово проучавање, које је већ било предмет размишљања толиких филозофа, доста је лако ономе који му поклони мало озбиљније пажње.

Без сваке сумње, један од призора најдостојнији да привуче филозофско око јесте онај о развитку ума људскога и разних његових знања. Славни канцелар Бакон приметио је то у своје време и сравнио историју, ону каква је дотле писана, са једним стаблом лишено својих најлепших делова, са једном статуом лишена једнога ока. Ја не знам, међу тим, којом је судбином овај део историје био готово са свим занемарен, све до свршетка прошлог века. Наше су библиотеке, и данас, препуњене одвећ пространим (опширним) причама, опсадама, биткама, револуцијама. Колико је јуначких живота, који су се прославили само траговима крви, које су оставили на своме пролазу?! Једва се налази, као што то Плинијус са жаљењем примећује, неколико писаца, којима је пало на памет, да потомству предаду имена оних добротвора рода људскога, који су радили, једни да подмире његове потребе својим корисним проналасцима, други опет да прошире моћи његова ума својим посматрањима и размишљањима и својим истраживањима. Још их има мање, који су мислили да представе слику (преглед) прогреса̂ ових проналазака, или да прате ум људски у његову ходу и његову развоју. Зар би једна таква слика била мање интересантна него што су слике о крвавим сценама, које непрестано производи амбиција, неваљалство и пакост људска?!

Ја не мислим овим рефлексијама да омаловажавам историју политичких догађаја. Али, чак, и сами панегиричари (говорници похвалних беседа) не би могли спорити, да је та историја, за већи број читалаца, пре један предмет радозналости, него ли извор поуке.

Историја једне науке, признајемо, била би од врло мале користи, када би се она састојала у историји оних који су обрађивали ту науку, и у набрајању њихових дела; када би се, по примеру неких аутора, бавили тиме да изложимо бесплодну научност о фактима мало интересантним, као што би био тачан датум, место рођења или смрти једног научника. Највише би се нашло одобравања код оних лица, за која је откриће назива неке ретке књиге, или неке ретке и незнане анекдоте, драгоценије него ли откриће једне истине.

Али, када би неко, пошав од постанка једне науке, пратио развој њен из периоде у периоду, и представио слику и дух свију открића, који су је (науку) узастопно обогаћавали, и тим начином показао део славе или поште што дугујемо свакоме од оних који су је обрађивали; када би неко, идући тим путем, показао читаоцу најбоље изворе из којих он мора црпсти знања, када би га (читаоца), добрим излагањем ових открића, и погледâ који су га к њима водили, често ослободио потребе да прибегава овим изворима, ко би онда могао сумњати, да тиме не би била учињена знатна услуга свима онима, који су се одали изучавању те науке?! Читаоци би, на тај начин, били одведени пријатним и лаким путем на међу којој су тежили; на послетку, штедиле би се, тако рећи, њихове силе и били би стављени у могућност да лакше пођу даље. — То је једна истина, коју је више просвећених људи признало, и која је створила у њима жеље за таквим предузећем!

Историјско знање факата и открића служи да нас руководи у нашим радовима; оно нам уштеђује труда и времена, кога бисмо употребили, може бити без успеха (увек некорисно), да отворимо и прокрчимо себи путове већ трасиране, онде где нам треба само ићи даље; оно осигурава проналазачима славу проналаска; оно одузима славе онима, који су је неправедно или из оскудице светлости присвојили; најзад, оно нас чува од сличне илузије, која је увек сматрана као сујета или незнање. Ти исти разлози пали су у очи и славном Жаку Бернуљију и навели су га да изискује од математичара или физичара знање о ономе што је пре њега учињено, тј. да зна, до извесне тачке, историју математике и физике.

Неоспоримо је, дакле, да је историја једне науке, сматране као што напред рекосмо, корисно дело и у стању је много да допринесе њеним напретцима; а да и не говоримо о задовољству, које ће окусити сваки философски ум кад посматра њен постанак, њено увећање, њене револуције итд. У осталом, ако је стидно за некога што не зна историју своје отаџбине, зар мора бити мање стидно, за онога који обрађује једну науку, а не зна којим се степеницама она попела на ону тачку на којој ју је нашао, и не познаје радове којима она дугује своје напредовање.

То су, без сумње, биле побуде које су, у почетку прошлог века, навеле *M. de Montmort-а* на мисао да пише историју геометрије. Начин, на који се он изражава о том предмету, добро је дошао кад је реч о историји Меканике. „Било би веома корисно, писао је он у једном писму Николи Бернуљију *(Analyse des jeux de hasard*, seconde édition, p. 399), кад би неко хтео да се потруди те да нам покаже како и у ком су реду следовала једно за другим математичка открића, и коме смо за њих обавезни? Писане су историје о сликарству, музици, медицини. Једна добра историја математике, а понаособ геометрије, била би дело много ређе и корисније. Какво би се задовољство осетило, кад би се видела веза методâ, ланац разноврсних нових теорија, почевши од првих времена до нашега, у ком се ова наука налази подигнута на тако високи ступањ! Чини ми се, да би се једно такво дело, добро написано, могло, у неку руку, сматрати као историја ума људскога, пошто је у овој науци, више него у свакој другој, човек показао узвишеност интелигенције, коју му је Бог дао, да би га издигао над свима осталим створењима“.

Од свију наука, математика је била она чији су кораци, у истраживању истине, кроз сва времена, били најсигурнији. Често се видело да она напредује полако; она је била по неки пут, па чак и читава столећа, у стационарном стању, хоћу да речем била је заустављена у ходу (напредовању), и није чинила никакав осетан напредак; али је истина и то, да је она, мање од сваке друге науке, била ретроградна (виђена да иде назад), тј. да усваја погрешку за истину. Јер у ходу људскога ума, једна погрешка јесте корак у назад. Па и ово се тиче само математичких делова примењени на друге науке, оних делова, који су, њиховим савезом са физиком, морали да осете слабост и погрешке ове последње. Али није исти случај са чистом математиком: њен ход није никада био прекидан тим стидним назатцима, о којима сви други делови наших знања дају толико примера који понижавају! Чега подеснијег да интересује један философски ум, и да му улије највећу пошту за ову науку?!

Лако је појмити све тешкоће, које бих имао да савладам, кад бих предузео да пишем потпуну историју Механике. Колику би ми грдну множину делâ било нужно читати, правити из њих изводе, прелиставати и сравњивати међу собом, да бих сакупио материјал за моју зграду! — зграду, у толико теже подићи, пошто још нико није отпочињао извршење датога плана. К томе ћу додати нужност знања главних европских језика, да би се могло консултирати мноштво још непреведених књига. Поред тога, за предузеће таквог рада, нужно је бити са седиштем у оним местима, у којима се находе најбогатије светске библиотеке. Ја, још ништа, не кажем о нужности темељитог познавања свију математичких делова, којих је систем тако разноврсан и толико пространи! Па и то још није све; кад би материјали за ту зграду били сакупљени, требало би их уредити и из њих створити једно цело, чији би делови имали везе међу собом.

Имајући у виду, с једне стране, све тешкоће које би ми требало савладати и, с друге стране, моћи којима ја располажем, слободан сам да се послужим речима славнога *Волфа* и да кажем да писање потпуне историје Меканике одлажем *ad graecas calendas*. То је његов израз. — Па ипак, целине предмета ради, ја сам покушао, не у истини да пишем историју Меканике, историју тако потпуну, која не би ништа оставила да се каже после мене, него сам само покушао да скренем пажњу на главне плодове, који би се могли очекивати од таквога дела.

Ми ћемо се, најпре, винути толико високо ка постанку Меканике, колико нам мрачност времена̂ буде дозволила. Одатле, редом, прећи ћемо да дамо рачуна о њеним напретцима у свима добима (периодама), показавши нарочито властита открића свакога радника на том пољу, или она чије су прве клице представили [1]. Ма да нисам ставио себи у дужност да пишем историју оних који су обрађивали Меканику, ипак тај део нисам са свим занемарио.

Приметимо и то, да не треба очекивати од ове кратке историје, да ће се у њој наћи потпуно поменути сви они који су обрађивали целу Меканику или поједине делове њене. Ја нисам толико сујетан да мислим, да није ништа изостављено, што би заслуживало да уђе у ову историју. Без сумње, више интересантних факата могли су ми умаћи из вида. У осталом, ја задржавам себи права, да, и при самом излагању теорије, у неколико допуњујем њену историју, ако би само јасност излагања теорије то захтевала.

---

[1] *Примедба.* — Кад је реч о избору пута за проучавање историје ма које од старих наука, приметимо да би за то проучавање поред овога пута, кога смо усвојили, био врло подесан и овај: узети и проучити, у једном истом времену, нпр. за две-три године, ступањ развитка једне од тих наука код свију народа који постоје, почевши од дивљачког па до најобразованијег народа у свету. Такво једно проучавање дало би нам историју те науке. Таква би проучавања у многоме расветлила тамне почетке свију старих наука. — Ето путницима, поред уживања, и пространога поља за рад!

Сада, сâм сам био принуђен да, из сакупљеног материјала, издвојим и знатно скратим неке важне и потпунце спремљене делове; јер, кад бисмо све то унели у историју, требало би умножити свеске. Можда ће се, чак, и поред мога труда да будем што краћи, опет наћи да сам требао бити још краћи.

Меканика стоји у ближим и даљим односима са многим наукама, а у најближим односима са математиком, физиком, астрономијом и тако редом. Према томе, са свим је позната ствар, да је немогуће писати, ма то било и кратку историју Меканике, а не дотаћи се, где-где, бар у неколико, и појединих момената тих других, Меканици помоћних и блиских наука. Зато, надам се, неће изненадити читаоца многи мањи одељци, који су ушли у историју Меканике а који, на први поглед, можда изгледају да не би требали ући.

II

У једном истом простору и у свима временима производили су се, око нас, појави (феномени) и привлачили су на себе врло велику пажњу. Ови појави чине један непрекидни ланац ме́нâ у стварима света. Тај је ланац, велим, непрекидан, јер се један појав рађа само под непосредним притиском (утицајем) претходнога појава. Циљ науке јесте, пре свега, сазнање општих закона, који управљају овим појавима. Али, ум човечиј није никада дошао најпростијим начинима и најкраћим путевима до сазнања истинâ, па ма кога порекла оне биле.

У унутарњем као и у спољњем свету, човек од науке види се окружен вечитим менама, којима не може да открије ни почетак ни завршетак. Из већ потврђеног закона узрочности (каузалитета), који гласи: *свака промена има свога узрока,* ми изводимо да се ништа не може догодити *случајно* у динамо-материјалном свету. *Случајност* нема никаквог места у науци; она не може бити један узрок; она нам излази пред очи само да замени праве узроке. Појам о случајности, практички, вреди међу умовима потпуно немоћним и незналачким, и случајност је израз ове једнакости њиховог несавршенства. Случајност је права сујеверица за науку.

Из свију факата излази једна основна мисао, а то је, са свим просто, позната аксиома старих грчких филозофа: „ништа не може прећи у ништа, нити ишта може постати из ничега“. Наука суверена не може усвојити, нпр., ни рађање сила ни њихов изненадни постанак; у органском као год и у анорганском свету једна сила производи се само под утрошком неке друге силе; никада није било стварања ни силе ни кретања, ни у биљкама, нити пак у животињама. Наука усваја само преображај (трансформацију) силâ и прокламује перманентност њихове количине. Ништа се не поништава (ничега нестаје) у васиони, ниједан атом материје, ниједан делић дејства кретања; све се само преображава. Ови непрестани преображаји материје и кретања производе небројене појаве, којима се ми дивимо. Човек још, обдарен радозналом интелигенцијом, нарочито обдарен способностима памћења и пажње, ра̏д је да упозна порекло ствари̑ и појава, који га окружују и утичући на њ чине те се у њему рађа жеља за објашњењем истих и изазивају у њему непрекидна питања. Са постепеним објашњавањем тих ствари и појава, и науке су, које се њима занимају, корачале у напред.

Сви људски радови јесу или спекулација или акција. Према томе, најопштија подела наших стварних знања састоји се у томе да их разликујемо на теоријска и практичка знања.

Научна спекулација јесте најплеменитији труд човеков и најбољи доказ о надмоћности његове природе. Хтети забра̀нити научну спекулацију, то би било хтети забранити саму мисао.

Од свију наука најстарија је *астрономија*; она је стара исто толико, колико и род људски. Прошлост астрономије, према аутентичним документима, који се, често, још и данас корисно употребљују, датира приближно од три[1] хиљаде година, а њена историја, од првог доба па до модерних времена, износи нам пред очи једну серију фа́за̂ паралелних секуларном развитку ума људскога.

Без да говоримо у басни, може се претпоставити да први људи нису били без извесних знања астрономских, макар то било да су покушали да рачунају време са ма каквом правилношћу. У осталом, не би се могло веровати да велелепност неба није имала за њих исте чари као и за њихове следбенике; али хтети погодити докле су они ушли у астрономију, то би било предузети нешто што надмаша наше моћи.

Астрономија је од свију знања оно, о којем има најмање сагласности међу писцима; томе се не треба чудити. Небесни појави и правилност која се примећује у кретањима звезда, морали су, готово у исто време, побудити радозналост у свију људи. Па и находе се трагови проучавања неба готово код свију старих народа; они народи, који су уживали име учевних, нису били једини осетљиви на овај лепи призор природе!

Пошто је, како се са свим може веровати, Индија била прва колевка рода људског, то се може мислити да су у Индији и постале вештине, науке и посебице астрономија, и тамо учиниле своје прве напретке. Али, све је то данас покривено густим тамама; и као год што би било немогуће писати историју једне вароши, помоћу неколиких одломака из натписа̂ нађених у њеним развалинама, није ли још мање могуће, помоћу неколико зракова пропуштених кроз ову дубоку помрчину, одредити докле су Индијанци допрли у овој последњој науци?!

---

[1] *H. Faye*, op. cit., t. I, p. V—VI.

На послетку, у свију народа, астрономија је била готово прва наука. За њу је и постала Геометрија; за њене потребе створена је модерна Анализа са својим моћним изворима.

Математика је, данас, толико пространа да готово нико не познаје потпуно чак ни једну од њених грана; и једно специјално питање може дуго да заустави неког научника првог реда, ако ова специјалност излази из обичног кадра његових редовних проучавања, док би, међу тим, оно било само играчка за неког другог.

Астрономија пружа прве почетке меканичке, а тако исто и њене најлепше развоје. Помоћу астрономије и успела је Меканика да изађе на прави пут науке. Најзад, у астрономији и треба тражити и научити прави научни метод!

Мора се веровати, да је се код старих народа налазила скица од свију математичких знања, која могу да прибаве роду људском осетних користи. Природа би и сувише сурово поступала са човеком, кад би га приморавала да прибегава дугим размишљањима, и да темељно испитује природу предметâ који га окружују, пре него што би их могао употребити за своје потребе. Не треба се, дакле, никако зачудити, кад бисмо у највишој стародревности нашли трагова од једне врло развијене Меканике. Ми ћемо се ограничити на неколико примера, који јако падају у очи. Оне огромне камене масе, што нагомила сујета Египатских краљева у долинама Мемфиса, они обелисци што подигоше разни принчеви, још пре Тројанског рата, нису се могли пренети и наместити без врло-моћних меканичких помоћи. Но, без да идемо у Египат, било је, код свију цивилизованих народа, знатних здања, вештинâ које су, у сваком тренутку, тражиле помоћ меканичку. На послетку, ако се хоће да се мало философски посматра постанак ове вештине, лако би се увидело да најзнатније силе које улазе у конструкцију машинâ, као *полуга, стрма раван, чекрк* и друге, нису могле остати људима скривене; а да то потврдимо, ми држимо да треба да покажемо начин, на који је учињено прво посматрање (опсервација) о неколикима од њих.

Тако, морало се опазити дејство (сила) полуге, одмах после првих напрезања, која су учињена, када се хтело подићи или покренути знатне масе. Замислимо једну стену, која почива на земљи, и коју желимо да померимо. Природни нагон (инстинкт) навешће нас да се постарамо те да оздо увушнемо крај неког дугачког оруђа и тако да одвојимо њену основу од земље. То учињено, исти нагон упутиће нас: или да подигнемо други крај оруђа, или да подметнемо под ово оруђе, што је могуће ближе стени, коју имамо да подигнемо, ма какво тело, које ће послужити за ослонац и око кога ће се оруђе окретати за време док спуштамо онај други крај. Први, који су радили овај посао, морали су с дивљењем увидети да се најогромније масе нису противиле томе начину померања; и у колико је оруђе било дуже, и у колико је ослонац, који су му они подметали, био ближи терету (маси), да је у толико и мање силе било потребно да се тај терет подигне. Такво посматрање није могло остати бесплодно; одмах су га распрострли, толико колико је год било могућно, на све случајеве у којима је требало савлађивати велике отпоре. — Такво је било порекло *полуге (le levier, der Hebel)*, коју једни зову: *озиб;* други: *кретка* или *дизаљка;* а кад је од дрвета, у Левчу је зову: *лос!*

Што се посматрања *стрме равни* тиче, оно је толико исто стародревно. Кад се, у почецима архитектуре, имале подићи знатне масе на осредње висине, без сумње је морало пасти на ум, да их на ове висине преносе помоћу зидарских скела, или помоћу нагнутог земљишта. Но, морало се тако исто приметити, да су их преносили са толико мање тешкоћа, у колико је тај нагиб земљишта био блажији и узет поиздаље. Све је то, готово у напред, природом означено. Људи, оштроумнији једни од других, измислили су по том, у извесним случајевима, да подметну стрму раван под терет, који има да се подигне или заљуља. Отуда је постао *увртањ*[1]) *(la vis, die Schraube)*, који неки зову: *завртањ* или *завртка;* или, како наш народ понајчешће каже: *шраф,* — и који није ништа друго до стрма раван, обавијена око једног цилиндра. Што се *клина (le coin, der Keil)* тиче, ничега природнијег од његовог постанка. Кад је требало расцепити неко тело, први начин, који се представља, јесте овај: да се потрудимо те да на телу начинимо један расцеп, ударајући исто о какво оштро оруђе, и да тај расцеп проширимо набијајући га (тело) све више и више. Но, кад је клин, чиј врх (тањи крај) може најпре да прокрчи себи пута, учинио делење странâ, онда он раздваја све више и више те делове међу које се силом увлачи.

Слично бисмо посматрање могли учинити и о постанку и првој употреби *котура (la poulie, die Rolle)*, који, једни, разликују на *котур*, кад је сталан, и на *колотур*, кад је покретан; други пак разликују га на *котур са утврђеном осом, стални котур* или чешће *сироводни котур;* у Левчу, због шкрипања, нпр. на разбоју, зову га: *шкрипушка.* Готово на истој основи почива и *чекрк.* — Али, било би излишно да више продужавамо ово развијање постанка наших меканичких моћи. Ма да није остао никакав споменик, који би био у стању да нам даде довољно светлости о начину на који су стари комбинисали те моћи, вероватно је да је исти нагон, — који је руководио у њиховом проналаску, потпомогнут оним генијем кога виђамо по неки пут да се појави у простих људи, — морао произвести у старини више врло вешто измишљених машина.

Ово што рекосмо о Меканици или науци о кретању чврстих тела, примењује се тако исто и на Хидраулику, а специјално на Хидростатику. Кроз сва времена, друштвене потребе приморавале су људе да граде канале, да одводе

[1]) *Увртањ,* оно што се уврће; *навртањ,* оно што се наврће; а скупа заједно чине *завртањ.*

воду разним средствима, с једнога места на друго. Могли су, дакле, кроз сва времена, бити опажени основни закони о кретању ове течности. Приметило је се да је вода увек стајала на једној истој висини; да је тежила да ову достигне истицајући са јачином, кад је излазила кроз отвор који стоји испод њеног нивоа; да је ударала са силином о тела која би се противила њеном кретању. Није било потребно више од тога, те да приволи људе, обдарене памећу и у осталом заоштрене потребама, да отуда извуку доста корисних употреба. Али, помрчина, која покрива све ове проналаске, ослобођава нас да се више задржавамо на том предмету.

III

Са свим је јасно и појмљиво да постанак Меканике није продукат једног ума нити једног момента, већ је та наука поступно ницала, а изазивале су је потребе људске. Ма да се Меканика, као и све друге науке, није на један пут развила, ипак се она није ни са свим поступно развијала. Позната истина да: *„у природи нема скокова“*, не важи кад је реч о напредовању једне науке.

Меканика, у опште, обухвата два битно врло различна дела: *теорију* и *практику*. Први, теоријски део Меканике, обухвата принципе, рачуне и све оно што се на равнотежу и кретање чврстих тела и течностй односи. Други, примењени или практички део Меканике, обухвата у главном машине, које су најважнији меканички део у погледу потреба друштвених.

Примењени (практички) део Меканике почео се развијати још у преисторијским временима. Свима је нама, из историје културног развитка, познато да је Египат био центар наукâ, вештинâ и индустрије прастарог доба. Ма да се постанак свију других старих наука, као: астрономије, аритметике, хемије итд., па и постанак примењеног дела Меканике, губи у тами давне прошлости, ипак се, према сачуваним подацима, може доста поуздано тврдити да је Египат његова колевка.

Мисирска образованост, како историци тврде, постала је на пет хиљада година пре Христа; дакле, много раније но што су остали народи изашли из дивљачкога стања. Доказ су за то, поред осталога, они многобројни споменици, које је она оставила после себе у Ниловој долини, од којих се неки, од времена на неколико хиљада година пре Христа, још и сада тамо налазе, и којима се и данас не могу довољно да надиве путници. У те споменике долазе: *обелисци*, на којима је изрезана (исписана) историја владавинâ појединих краљева; *храмови* или *палате*, чији су зидови, споља и изнутра, покривени бојадисаним сликама: представљајући историјске или религиозне сцене; *свинкси*; разни алати и многи други предмети представљени на сликама египатским; они *идоли* од злата или позлаћени; они *саркофази* или у камену изрезане гробнице, у којима су сахрањивали своје мртваце; оне простране подземне сале, у које остављаху тела мртваца (hypogées [1] назване), побожно сачувана и увијена, — а то су *мумије*. И дан дањи, мумије сачуване из тога доба и разни предмети у Египту израђени красе све веће музеје у главним градовима европским. Многи пак од тих предмета, постављени на јавним местима тих великих градова, украшавају их и заустављају пролазнике да им се диве! Шта да речемо о пирамидама мисирским, међу којима је највиша она краља Хеопса (146 метара)?! — Оно правило, којим се тврди да *све пролази*: људи, друштва, народи пропадају; најумније научне теорије и најлепши текнички проналасци застаревају; слике, статуе, палате нестају једна по једна; ни саме развалине, као што знамо, не трају вечито. То правило, изгледа, не

---

[1]) *Louis Cons*, Biographies d' hommes illustres, des temps anciens et modernes, 1881, Paris.

вреди кад је реч о пирамидама; јер „док се све друге ствари боје времена, како вели један средњевековни арабљански писац, време се боји пирамидâ!“ — Те величанствене пирамиде остаће вечито да причају млађим покољењима о великој и старој култури мисирској!

Становништва Египта гледала су оживотворена бића и богове свуда у природи, чак и у животињама и биљкама. То је и навело Bossuet-а да каже: „У Египту све беше Бог, изузев самога Бога“. Египатски свештеници уредили су им веру, и над овим вулгарним боговима поставили су обожавање највишег Бога: *Сунца*, које даје живот целој природи. Они су дали првим Египћанима веома мудре законе о моралу. Најзад, ови су свештеници били прве архитекте оних споменика од којих се данас диже, за нас, сјај египатске цивилизације.

Сви ти египатски и асирски споменици служе нам као доказ, да је се примењени део Меканике у велике био развио пре Гркâ.

На основима две велике источне обрaзованости: мисирске и халдејско-асирске поникла је грчко-римска образованост. А ова, опет, грчко-римска образованост извела је Европу из варварства и поставила је темељ образованости данашњих народа.

Ми додирујемо, најзад, једно доба у које долазе гушћи светлосни зраци да разагнају ону таму по којој смо довде лутали. Знаменитости, које смо наследили од Египћана и Халдејаца, нису довољне, да бисмо могли чега извеснога утврдити о напрецима, које су они учинили у астрономији, математици, физици, меканици и другим наукама. Истина, с једне стране, види се да Грци одлазе, више столећа, у Египат да се уче; али, с друге стране, види се опет и то да ови исти Грци, ма да обдарени бистрим умом, још дуго сричу најелементарније истине.

У Грчкој се, мало по мало, јављају људи, који су се одавали изучавању свију наука и који су тежили да упознају природне законе и да ове објасне. Те су људе називали *философима* тј. пријатељима науке или мудрости. Први философи били су они, које су звали *седам мудраца грчких*. — Грчка је постала славна, не само својим писцима, својим вештацима, својим државницима, својим великим капетанима, него још и својим философима.

По једногласном веровању и ми морамо сматрати да су први грчки философи ишли Египћанима и у њих црпли своја математичка знања. Они су, по повритку у Грчку, поставили темељ математичким наукама, и оставили после себе врло чисте и врло узвишене моралне максиме.

Талес Милећанин (640—550, пре Христа), прозват Милећанин по месту рођења, најстарији и први од седам мудраца грчких, ишао је у Египат да изучи прве појмове из свију наука, а нарочито из математичких наука. Страсно одан изучавању природе, а немајући помоћи у својој отаџбини, он је прешао ка Египћанима, веле, у добу доста зрелом. Прилика је била повољна; јер, ови народи, дотле затворени у својој земљи, као што су до скора били Хинези у њиховој, отворили су је најзад странцима. Талес је отишао тамо и проводио време са свештеницима, готово јединим чуварима наука у њих, и учинио је велике напретке. Поред осталога, он је научио да мери пирамиде и обелиске, помоћу њихових сенака. Држи се: да је од Египћана научио да предскаже помрачења сунца и месеца, и да је знао и узроке овим помрачењима. По свој прилици, знање о електричком својству жутог ћилибара стекао је у Египту.

Цивилна година у Египћана састојала се из дванаест месеци, сваки од тридесет дана; и они су јој додавали допуну од пет дана. Готово сви модерни народи дугују Египћанима за поделу године у седмице, или периоде од седам дана, и наименовање данâ, из којих је седмица састављена. И дан и ноћ делили су они на дванаест сати.

Знали су да повуку меридијан и познавали су два сунчева кретања: дневно и годишње. Сви су писци сагласни да је Геометрија пореклом из Египта.

По повратку у Грчку, Талес је саопштио својим земљацима она знања, која је стекао, било на својим путовањима, било својим сопственим размишљањима. Он их је упознао астрономијом; и својим астрономским знањима највећма је и изазвао дивљења у њих. Неки писци иду тако далеко, да тврде да им је Талес говорио и о округлини земље! По повратку његовом, било је могућно утврдити у Грчкој почетак праве Геометрије, док се, пре њега, имао врло слаб појам о тој науци.

Изненађени Талесовим знањем, више његових земљака ставили су се под његову управу и, по његовим упутима, образовали су *Јонску* школу. То је био почетак грчке философије. Вероватно је, да је већина ученика Талесових била геометри.

Анаксимандер (610—547) је наследио Талеса у правцу Јонске школе, и потврдио је теорије свога учитеља и земљака. Њему се приписују разни и знатни проналасци тога времена. Географске карте и сунчани сатови, два су проналаска следбеника Талесових; а неки писци приписују их Анаксимандру.

Док су се следбеници Талесови прослављали у Грчкој, једна славна школа, отворена у Италији, одала је се истим истраживањима са великим успесима. То је *Питагорина* школа, у којој су нађене клице толиких лепих и корисних открића.

Питагора (569—470), рођен на Самосу, био је код Талеса у Грчкој, а за тим је провео двадесет и седам година у Египту, међу свештеницима и научницима тамошњим. Ту је се био посветио у халдејске науке. По повратку, он је основао школу, која је била колевка врло многих сретних идеја, чије су тачности време и искуство доказали. Између осталих, таква је била она идеја о кретању земље. Геометрија је се проширила заузимањем Питагоре, који је поставио познату нам теорему из правоуглог троугла: *квадрат хипотенузе раван је збиру квадрата оба катета*, и која му је и име овековечила. Питагорејци су, без бојазни, посматрали комете, те предмете страха и ужаса код простакâ. Они су их сматрали као звезде, толико старе колико и васиона. — Из Питагорине школе изашао је велики број философа и славних математичара.

Платон (430—347) је учинио многа открића у Геометрији. Он је се, не само, трудио да оснује меканичку теорију, него је био и вешт у изналажењу машинâ. Стари свет с дивљењем говори о некаквој вештачкој голубици, коју је он начинио, и чиј је меканизам тако вешто комбинован, да је подржавала лету природних. Он је основао школу у Атини, по његовом имену названа *Платонска* школа, која је учинила многих открића у Геометрији. Код Платонаца остала је Астрономија готово у истом стању, у коме су је они и наследили. И друге науке, као: Физика, Меканика, Хемија итд., за њихово време, нису учиниле напретке сразмерне онима геометријским.

Евдокије из Книде (409—356, рођен у Книди, умро у Египту) био је један од највећих пријатеља и најславнијих савременика Платонових. Он је, поред осталога, нашао да година има 365 дана и 6 сати, и уопштио је велики број геометријских теорема.

Аристотело (384—322) је рано ступио у Платонску школу и двадесет је година посећивао исту. Он је се одвојио од свога учитеља са жаљењем, али: *Amicus Plato, sed magis amica veritas*. Око 335 године он се настанио у Атини и основао *перипатетичку* школу. Ту је саставио већину својих списа, чије опширно излагање не можемо овде износити. Напоменућемо, поименце, да је оставио *Збирку Проблема* из Физике и неколико дела из Меканике и Геометрије. Аристотелови списи из Оптике и Меканике сматрају се, данас, само као груба скица ових наука; тек су од његова доба и рачунате ове две науке у математичке науке: пошто су били размршени неколики закони о простирању светлости, о визији и о равнотежи. Његова *Меканичка Питања* и *Збирка Меканичких Задатака* били су они списи, који су му створили толике славе и части у његово доба, али му нису могли сачувати исте хвале код модерних меканичара. Ови су, без сумње, нашли да је већина његових објашњења погрешна, па чак и смешна. — У Меканичким Питањима находи се овај важан став: судари двају тела производе исти ефекат, ако су ова тела обрнуто сразмерна својим брзинама.

Општи систем математичких наука састојао се, у Аристотелова доба, из шест делова: Геометрије и Аритметике, Музике и Астрономије, Оптике и Меканике. Тај систем није се умножио у старих народа.

Ма да још у четвртом веку пре Христа налазимо Платона, Аристотела и многе друге учевне људе тога доба, који су се бавили проучавањем неких кретања, ипак је теоријском делу Меканике Архимед први поставио темељ.

IV

Архимед је рођен у вароши Сиракузи, у Силицији, око 287 године пре Христа; по Плутарку, био је рођак краљу Хијерону (Hiéron). Још као младић, Архимед је ишао у Александрију, где је слушао учитеља *Евклида* (315—255) и друге тамошње научнике. По повратку своме посветио је се својим студијама, и одмах се почео одликовати својим проналасцима. Име Архимедово постаде знаменито код свију оних, који су располагали каквим било знањем из историје и наукâ; његов математички дар био је предмет дивљења за потомство!

Ма да су сви делови математичких наука јако занимали Архимеда, ипак Геометрија и Меканика били су они делови у којима, у главноме, блиста ум његов. Он је толико био заузет тим наукама, да је, вели се, заборављао на потребу да једе и да пије; и његове слуге биле су принуђене да га подсете, па готово и приморају на то.

И ако су његова истраживања већином тежила ка корисном завршетку, ипак је он, увек, сматрао практику као понизнога роба теорије; и све његове вештачке машине, које су му одбрана његове отацбине или друге прилике учиниле да их измисли, биле су, по његовом мишљењу, само геометријске играчке, о којима је мрзео да оставља описе. Та његова обазривост, за коју му не можемо бити захвални, лишила нас је мноштва проналазака, о којима не постоје сада никакви трагови. — Невероватно је, што неки писци веле, да има још у богатим библиотекама у рукопису, на оријенталским језицима, различних дела, која носе име Архимедово.

У Геометрији, Архимед је се одао на проширивање границâ ове науке. Његови списи из Геометрије доста су многобројни; као што су: две књиге *о свери и цилиндру*, једна књига *о мерењу круга* и још други списи. Архимед се бавио и старим питањем о дефиницији праве линије (n^o 6), и ставио је у број принципа: да је права линија најкраћа између свију оних линија, које имају исте крајне тачке, и да је конкавна линија краћа од сваке друге линије, која је обвија. Но, међу геометријским открићима Архимедовим нема ниједнога, које би му чинило толике славе код модерних геометара, као откриће *о квадратури параболе*, и оно *о својствима спиралâ*. Ма да је спиралу пронашао *Конон* из Самоса (рођен 320), пријатељ Архимедов, ипак је та крива линија задржала Архимедово име. — У опште, Архимед је обогатио Геометрију новим начинима истраживања, много озбиљнијим од дотадашњих.

Архимед је се одавао и новим спекулацијама: *истражујући тежишта различитих облика (фигура).* Он је поставио теорију тежишта и исто одредио код паралелограма, троугла, трапеза, једног одсечка параболиног и код других облика. Начин, на који је одредио тежиште параболе, достојан је овога великога генија и у исто време показује: што није ишао даље, да није био узрок тешкоће, која би га на том путу заустављала, него што је више желео да скрене своја истраживања на другу корнснију страну.

Као год у Геометрију, Архимед је унео исте светлости и у Меканику; може се, чак, рећи да је *он био творац њен;* јер, пре њега, ничега незнатнијега није било од овог дела математичких наука; а оно, што нам дају Аристотелови списи о овом предмету, може се сматрати само као груба скица једне науке, која почиње да се ствара. Архимеду дугујемо праве принципе из *Статике;* дакле, *он је творац Статике,* онога дела Меканике у коме се проучавају закони о равнотежи силâ (n° 13). Статика је најстарији део Меканике.

Равнотежа настаје кад се пониште дејства више силâ, које се боре и које узајамно поништавају акцију, коју оне врше једне на друге. Цељ је Статике да нам дâ оне законе, по којима се то поништавање врши. Ови су закони основани на општим принципима, *принципи Статике* названи, који се могу свести на три: *принцип о полузи, принцип о слагању сила* и *принцип виртуелних брзина,* — о којима ћемо, редом, говорити.

Пре но што бисмо прешли на принцип о полузи, напоменимо: као год што цела Меканика почива на три своја принципа (n° 16), тако исто и поједини делови њени почивају на извесном броју својих принципа, нпр. Статика почива на три своја горе поменута принципа. Напоменимо и то да су они принципи, на којима Меканика почива, општији од оних на којима почивају поједини делови њени, и да се ови последњи изводе из оних првих општијих.

Архимед је сâм од старих, који нам је оставио теорију о равнотежи силâ у својим двема књигама *de Æquiponderatibus* или *de Planorum aequilibris*. Његова Статика основана је на оштроумном појму тежишта; основана је на оном појму, чиј је први ауктор био сâм Архимед и чијом је честом употребом у Меканици створен један од најопштијих начина за истраживања. — Архимед је творац чувеног *принципа о полузи,* који се, као што то сви меканичари знају, састоји у овоме: *ако је једна права полуга оптерећена двама ма каквим теретима, постављени с једне и с друге стране од тачке ослонца* [1]*), на одстојањима од ове тачке обрнуто сразмерним са истим теретима, та ће полуга остати у равнотежи, а њена тачка ослонца биће оптерећена сумом обају терета.*

Архимед је врло вешто извео овај свој принцип о полузи из најпростијег случаја, тј. из случаја када су терети једнаки и постављени на једнаким одстојањима од тачке ослонца; а овај, опет, случај узео је он као једну аксиому у Меканици, која је сâма по себи очевидна, јер нема разлога да један од терета претегне други, пошто је све подједнако и с једне и с друге стране од тачке ослонца. На овај прост и примитиван случај он је свео онај случај неједнаких терета, замишљајући ове терете, кад су мерљиви, подељене у више међу собом једнаких делова и претпостављајући да делови свакога терета буду одвојени и пренесени, с једне и с друге стране од тачке ослонца, на исту полугу, на једнаким одстојањима, тако да се полуга находи оптерећена са више малих а једнаких терета и положених на једнаким одстојањима од тачке ослонца. Он је, за тим, доказао истинитост овога принципа и за немерљиве терете.

Неколико доцнијих ауктора, као Стевин у својој Статици и Галилеј у својим Дијалозима о кретању, упро-

[1]) Тачку ослонца можемо, просто, звати: *ослонац*. Неки је зову *прекрет* или *обртна тачка*.

стили су Архимедов доказ, претпостављајући да терети обешени о полугу буду два хоризонтална паралелопипеда, обешени својим срединама, и чије су ширине и висине једнаке, али чије су дужине два пута веће од кракова полуге који им обрнуто одговарају. Јер, на тај начин, два су паралелопипеда у обрнутој сразмери њихових кракова, и у исто време они се находе постављени крај до краја, тако да образују само један једини паралелопипед, чија средина управо одговара тачци ослонца полуге. Архимед је био већ употребио слично разматрање при одредби тежишта једне величине, која је састављена из двеју параболичких површина, — у другој књизи о равнотежи равнӣ.

Други ауктори, на против, држали су да има непотпуности, па чак и погрешака, у Архимедовом доказу, и покушавали су на разне начине да га учине тачнијим; али се мора признати: мењајући простоту овога доказа, они нису готово ништа додали са стране тачности.

Принцип о полузи може се веома лако опитом оверити. Тај је принцип служио као полазна тачка првим истраживањима, која су чињена у Механици. Из њега се изводи и то: да је се Архимед непосредно бавио *слагањем* и *равнотежом двеју паралелних сила*, али није знао слагање *конкурентних сила*, тј. силâ, којих се правци секу у једној тачци. — Истина, има писаца, као што је и Огист Конт, који веле да је се Архимед трудио да сведе, колико је год било могућно, на овај једини принцип и тражење условâ равнотеже свију других система силâ!

Стари приписују Архимеду четрдесет меканичких проналазака; али се од истих налазе само неколико њих, нејасно писцима означени. Између осталих, такав је проналазак *Архимедов бескрајни увртањ (Vis d'Archimède* или *limace),* чудновата машина: састављена из једног шупљег цилиндра покретног око једне осе, која је нагнута према хоризонту, и у коме је урезан један спирални канал; доњи крај цилиндра замочен је у течност и један ма какав део те течности, ушавши у цилиндар, пење се у оној мери у којој се та машина обрће око своје осе, и излази кроз горњи отвор. Заиста, та машина има тога значајнога што, у неку руку, сопствена тежина течности и њена тежња да падне изгледају да су употребљене на то да је попну; та машина и данас носи име Архимедово. Diodore прича да је Архимед изнашао свој бескрајни увртањ, кад је био у Египту, да би становницима тога места показао начин на који би могли лакше црпсти воду, која се налазила после поплаве у ниским местима. По Athénée-у, бродари су такође указали почаст Архимеду, за проналазак ове машине, коју су корисно употребљавали при избацивању воде из својих бродова. Бескрајни увртањ и умножење котура сматрају се за Архимедове проналаске; а може бити да је он први измислио и покретни котур.

Сваки зна, колико је Архимед веровао у силу полуге, кад је рекао краљу Хијерону, задивљеном пред чудовиштима, која је производио својим меканичким проналасцима: *Da mihi ubi consistam, et terram loco dimovebo.* (*Дај ми место где да станем, па ћу и земљу из њеног положаја покренути)!* И заиста, према његовим принципима, може се замислити таква машина којом бисмо, по теорији, најмањом датом силом могли савладати највећи отпор. — По Папусу, то је био четрдесети његов проналазак.

Величина генија Архимедова, кога је Цицерон божанским назвао, најбоље се даје увидети из ових Лајбницевих речи: „Они, који могу да разумеју Архимеда, говорио је Лајбниц често, диве се мање открићима највећих модерних научника“.

И сувише је познато питање краља Хијерона, упућено на Архимеда: „Да ли је награђена круна сва од сувога злата, или је вештак заменио сребром неки део датог му злата?“ То је питање и навело Архимеда на хидростатичка открића. И заиста, ми и дугујемо Архимеду прве принципе из *Хидростатике* или *Статике течних тела* о равнотежи течности. Дело његово *De insidentibus humido*, на грчком, није до нас дошло; био је само један доста лош латински превод од Тарталеа; али га је Командин обновио и белешкама расветлио и 1565 издао под насловом *De iis quae vehuntur in aqua*.

Ово дело, што се може сматрати као један од најдрагоценијих остатака из старине, подељено је у две књиге. У првој књизи Архимед је поставио ова два принципа, које је сматрао као принципе искуства, и на којима је основао целу своју теорију: 1°. Природа је течности таква, да су мање притиснути делови (честице) одгурани онима више притиснутим, и да је сваки део увек притиснут целом тежином стуба који му вертикално одговара. — 2°. Свако тело, које је потиснуто на више једном течношћу, увек је потиснуто правцем перпендикуларне, која пролази кроз његово тежиште.

Из првога принципа Архимед је, најпре, закључио да површина неке течности, чиј су сви делови претпостављени да теже ка центру земљином, мора бити сверична, па да течност буде у равнотежи. За тим је доказао: да се једно тело, толико тешко колико је тешка једнака запремина течности, мора потпунце у њу загњурити; јер, посматрајући две једнаке пирамиде од течности, која је претпостављена да је у равнотежи око центра земљиног, она пирамида, у коју би се тело само делимички загњурило, чинила би већи притисак него друга пирамида на центар земљин или, у опште, на ма какву сверичну површину, коју бисмо замислили око овога центра. На исти начин, он је доказао да тела, лакша од једнаке запремине течности, могу у ову потонути само дотле — докле потопљени део заузима место једне запремине течности толико тешке колико је тешко цело тело; отуда је извео ове две хидростатичке теореме: 1°. Тела лакша од једнаких запремина неке течности, када су у ову загњурена, потиснута су оздо на више једном силом, која је равна вишку тежине померене (истиснуте) течности од тежине загњуренога тела. — 2°. Свако тело, потопљено у неку течност, губи од своје тежине део раван тежини њиме истиснуте течности, — то је *Архимедов закон.*

Архимед се, за тим, послужио својим другим принципом, те је поставио законе о равнотежи телâ, која пливају по некој течности.

У другој књизи Архимед је дао, према истим принципима, законе о равнотежи разних чврстих тела, која су постала обртањем коничких пресека, и која су загњурена у течности које су теже од ових тела. У кратко, он је се бавио многим врло тешким питањима о положају и стабилности потопљених тела. Већина његових решења изазива у нама дивљење о величини и дубини његова генија. — Ова је књига један од најлепших споменика генија Архимедова и садржи теорију стабилности пловних тела, ка којој су модерни научници мало додали.

Остаје нам још да представимо Архимеда бранећи своју отаџбину, помоћу своје Меканике! Наследник краља Хијерона био се завадио са Римљанима, и ови улучише ту прилику да се дочепају Сицилије, па због разних користи опседнуше Сиракузу. Становници њени били су упрепашћени брзином опсаде и именом римскога оружја; али их је Архимед охрабрио и постао душа једне од најжешћих одбрана, које историја помиње. Све своје знање и сав свој ум посветио је овај велики геније одбрани своје отаџбине, коју је био опсео чувени римски конзул Марцелус. Три пуне године, генијалност и наука једног самог човека заустављале су и сузбијале непобедну римску војску. Час је, својим меканичким справама, дизао у вис непријатељске лађе, па их је пуштао да се покрхају о стење и камење; час је, неким машинама, бацао стреле и камење на доста велика одстојања. Чак се прича, да је и неким огледалима потпаљивао римске лађе! Али, поред свега тога, Римљани су продрли у град. Занесен решавањем једног геометријског проблема, Архимед није знао за то, док није ушао к њему један од војника и позвао га да пође за њим. Архимед га замоли да причека докле доврши започети проблем, али га овај, немајући времена да га чека, прободе мачем 212 године пре Христа.

После Архимеда, све до краја трећег века по Христу, јављају се за теоријски део Механике раденици од много мање важности. Од тих раденика ми ћемо споменути *Ктезибијуса* (рођен у Александрији око 180 пре Христа), кога славе због његових генијалних проналазака меканичких. Између осталих, вели се да је, помоћу ваздуха и воде, пронашао хидрауличке оргуље. Њему приписују и проналазак разних врсти шмркова, од којих један носи чак и његово име. — *Херон* (рођен у Александрији око 155 пре Христа) и његов учитељ Ктезибијус, обојица из Александрије, радили су заједно на многим проналасцима. Херон нам је оставио дело у три књиге, у коме се находе врло оштроумне меканичке забаве. У том делу, он је опширно изложио различне меканичке моћи, које је сводио на полугу, по већ усвојеном појимању од стране математичара; те је моћи на разне начине комбиновао, како би их на разне потребе живота применио. Херон је све задивио својим воденим сатовима, својим аутоматима и својим ветрењачама. Он је пронашао чудновату справу, познатâ по његовом имену Херонова чесма. Херон је се бавио и кретањем бачених тела (пројектилâ). — *Филон* (око 150 пре Христа), савременик Херонов, написао је једно меканичко дело, чиј је предмет био исти који и у Хероновог дела; и то дело познато нам је у толико, у колико га Папус помиње. — *Витрувије* (85—26 пре Христа), који је служио под Цезарем у Галији и за кога је и ратне машине градио, оставио нам је дело из Архитектуре, у десет књига, од којих три последње, посвећене Гномоници, Хидраулици и Примењеном делу Меканике, имају научне историјске вредности. У том свом делу описао је Витрувије главније радове својих претходника Ктезибијуса и других, као и све машине које су ови били измислили.

Познато нам је, из црквене историје, од коликог је значаја био по род људски силазак на земљу сина Божијег *Исуса Христа*, са својом божанском науком. Једна од најлепших и најузвишенијих између поучних и моралних максима била је ова божанска: *„Ради, непрестано ради; али, не чини другоме оно, што ниси рад да теби други чини“*. — Дан његова силаска на земљу узели су хришћански народи за почетак од кога рачунају године.

Три пуна века, по Христу, протекла су не давши на меканичком пољу ниједног озбиљнијег радeника, чиј би рад био помена достојан. Сви су се бавили само проучавањем радовâ својих претходника. — Изучавање математике, које изгледаше да чами за време првог века, постало је мало живље у другом.

У другом веку, по Христу, јавио је се *Птоломеј* (128 до 168) са својим великим делом из Астрономије: *Композиција* или *Математичка Синтакса (Алмагеста* названа Арабљанима). У старини, било је врло мало таквих људи, као што је био Птоломеј; његов огроман пројекат о Алмагести, такав је пројекат, за који је, изгледа, једва довољан живот једног човека! Неки писци помињу и неколико меканичких дела од Птоломеја. — Већи део живота свога провео је Птоломеј у Александрији.

V

Завршујући историју ове славне периоде, улазимо у периоду мрака и научног опадања; улазимо у периоду која траје од краја трећег века па све до краја петнаестог века, дакле, пуних дванаест векова. Ова периода од дванаест векова, која раздваја Папуса од Виета (Viète, 1540—1603), Декарта и Галилеја, и која се одликује умном слабошћу и тамним и замршеним појмовима, може се сматрати као једна дуга ноћ и с правом назвати *стационарном периодом наукâ* у опште.

Астрологија, или вештина предсказивања догађаја у људском животу по звездама, та најстарија празноверица, тек је у средњем веку потпунце завладала; исто тако, појавила су се веровања у духове, мађије, врачарство и друге опскурне науке, које се могу сматрати за рођаке астрологијне. Чак су у њих веровали и научно изображени људи! — У какве се бесмислице веровало, навешћу само један пример, из кога ће се јасно увидети заблуда, која је владала у овој периоди. Тако, веровало се да су неке звезде мушке а друге женске; месец и Венус, нпр., сматрани су као женске звезде! Таквих бесмислица било је и сувише у овој периоди.

При крају трећег века по Христу јавила је се и *алхемија*, којом су се, већином, бавили све до краја прошлог (осамнаестог) века; дакле, пуних петнаест векова. Алхемичарима је био главни задатак да пронађу *камен мудрости*, коме су придавали разну чудотворну моћ: да може излечити сваку болест, продужити век, подмладити старе, придавали су му и трансмутациону моћ, тј. да може живу и све растопљене просте метале претворити у сребро и злато, итд., итд. Укратко, веровали су да би се свако благо овога и онога света могло постићи каменом мудрости; и због тога су алхемичари, удаљени од света, по скривеним лабораторијама, били посветили цео свој живот тражењу камена мудрости!

Као год што су се алхемичари бавили проналаском камена мудрости, тако су се, у овој периоди, а и доцније, философи били одали на решавање питањâ о простору, времену итд.; а многи од математичара на *питање о квадратури круга*. Питање о квадратури круга, напомињемо, исто је толико старо колико је стâра и историја човечијега духа; њиме су се бавили и позвани и непозвани још од две хиљаде година, па се и данас многи баве њиме.

Све је ово у многоме допринело научноме мртвилу ове периоде. Но, поред ових, још један битни узрок тога мртвила лежао је у томе: што су и услови за развитак ма које науке били много тежи и неповољнији. Наука је сматрана као неко предање, које нико није смео испитивати. Попови и феудални господари не само што су на супрот стајали развитку сваке науке, него су и сва научна испитивања оглашавали за безбоштво и јерес, и строго кажњавали све оне, који су се тим испитивањима бавили. Они су, још, уништили и последње остатке египатско-грчке науке: рушећи школе и лабораторије и палећи библиотеке, те ризнице од бесконачно велике вредности, у које су била прикупљена сва богаства ума људскога, и чији је губитак морао свакоме причинити толике жалости.

И заузеће Александрије Арабљанима (641 године) сматрано је увек као смртоносни ударац, који је довршио пропаст свију знања, не само у овој славној престоници, него и у целом грчком царству. Ова несрећна варош, дотле седиште наукâ, морала је да сноси јарам калифâ једног фанатичког народа, за време чије управе срушени су били сви споменици учевне старине. Узалуд је се молило и преклињало да се бар библиотека поштеди; командант, несмејући ништа учинити без наредбе свога господара, писао му је за то; али, *Омар* је послао одговор јединствен по својем дивљаштву: „*Књиге,* писао је он, *о којима ми говориш, или су сагласне, или противне корану; у првом случају треба их спалити као непотребне; у другом, треба их спалити као гнусне и опасне.*“ Наредба је била одмах извршена!

Науке у Римљана нису никада учиниле онакве напретке какви беху у Гркâ. Овим освајачима света, заузети једино бригом да прошире своју власт, врло је доцкан пала на памет тежња за славом научникâ и просвећених народа. Било је чак, у више прилика, протеривања из Рима оних философа, који су доносили науке из Грчке у ту престоницу.

У место оригиналних радова, у овој се периоди јављају само *писци тумачи*, писци који само објашњавају. Писци пак ове врсте, кад су сâми у једном веку, обично предсказују скори повратак времена мрака и незнања. — Поменимо најзнатније моменте из ове дуге периоде.

Папус (рођен, вероватно, у Александрији око 340) је у својих осам књига *Математичких Збирака* изнео до кога су степена доспеле математичке науке у његова доба. Он је сакупио, расветлио и попунио многа места главних списа најславнијих математичара: Аполонија, Архимеда, Евклида, Теодосија и других. Без тога дела Папусовог ми не бисмо знали имена многих старих писаца. Нарочито његов предговор ка седмој књизи од велике је вредности, јер нам је сачувао од заборава велики број аналитичких дела од старих писаца. Кратки преглед, који нам је дао о многим списима, омогућава нас, с времена на време, да наставимо прекинути конац историје геометријне; он служи још и на то да нам даде много бољи појам о старим геометрима, него што бисмо га могли имати по њиховим делима, која су до нас доспела. У тој седмој књизи находимо прву идеју, и то доста развијену идеју, о једном открићу, које је допринело велике славе доцнијем геометру Гулдену, који га је обновио: а то је употреба тежишта за димензију фигурâ. — У својој осмој књизи изложио је Папус све оно, што је до њега урађено на Меканици. У истој књизи находи се и овај проблем: знајући силу, која може да креће једно тело по хоризонталној равни, наћи ону која би га кретала по стрмој равни. Још се Папус занимао разним кретањима и проблемима, из којих се може лако увидети, каква је замршеност и нејасност појмова владала у његова доба.

Пети, шести и седми век дали су нам мање математичара него филолога, који су, тек узгредно, писали и о математичким наукама.

Ова дуга периода од дванаест векова, од којих многи, у погледу радова ума људскога, могу бити сравњени са једном тавном ноћи, није међу тим била неплодна у разним врло корисним проналасцима. Теорија полуге, Архимедом дата, распрострта је и на *вратила* (на бунару на која се конопац увија). Примећује се у неколико и усавршавање машинâ. У том размаку времена находимо, нпр., проналазак *ветрењаче,* тако корисне машине по друштво и за једну од првих потреба у човечијем животу. Витривује описао је доста добро *воденицу,* која је вероватно била грчки проналазак; међу тим није ништа помињао о ветрењачи, коју би, без сваке сумње, такође био описао да је била позната у његово време. Али, како ова последња машина постоји од више векова у Холандији, где је, по свејој готово апсолутно нужној употреби, постала домаћа, ми мислимо да смо у праву веровати: да је она ту и била пронађена у осмом, деветом или десетом веку. У овом времену пронађена је још и *воденица за тестерисање мрамора. Оргуље,* које се у неким црквама употребљавају, такође су проналазак осмога или деветога века.

Арабљани, о којима, у опште, имамо неповољно мишљење, нису остали на свагда неосетљиви наспрам дражи наукâ и књижевности. Као и сваки други народ, и они су имали своја времена варварства и дивљаштва; али су се, после тих времена, толико изобразили и угладили, да је мало народâ који би могли показати тако светлу и толико ревносну славу за лепе вештине (знања), колико су Арабљани за њих показивали за више векова. Укус Арабљана за наукама расао је све више и више. Око 807 године, међу многобројним поклонима, што их је Багдадски калифа *Харун Ал Рашид* (Харун Праведни) послао хришћанском краљу *Карлу Великом,* био је и један вештачки израђени сахат, најсавршеније меканичко дело, које је задивило цео запад у то време. Тај је сахат показивао 12 часова, који су избијали помоћу извесних кугала, што су падале у један суд од туча. На истом сахату могло је се видети још и 12 коњаника, који су излазили на толико врата, колико су затварали према броју протеклих часова.

Док су науке пале у заборав у Грка̂ и постојале још само у библиотекама, Арабљани су их привукли к себи и дали им часно прибежиште. Најзад, Арабљани су били једини чувари њихови за доста дуго време; и трговини једино, коју смо ш њима водили, дугујемо прве зраке, који су прекидали таму једанаестог, дванаестог и тринаестог века.

У Меканици дали су нам Арабљани само неколико превода, као што је, нпр., превод књиге о ратним машинама, итд. Има једно арабљанско дело под називом *Вештачке (ингениозне) машине,* које се сматра као компилација Пневматика̂ и Хидраулика̂ од Ктезибијуса и Херона. — И у другим гранама математичких наука нису учинили Арабљани већих напредака од Грка̂. Они су остали на истој висини, на којој су били стари.

Дванаести век, при свем општем незналаштву, чије су магле покривале Европу, ипак је дао неколико математичара.

Тринаести век био је готово светло доба, у поређењу са претходним веком. Он ће се сматрати као почетак зоре оног лепог дана, који нас осветљава има 300 година, ако би се гледало: на број научника, што га је он дао, и на подстицање на обрађивање наука̂, које је потицало од тадашњих владара. И ако тринаести век није био век генијалности, он је ипак значајан, поред осталога, и корисним открићем: *откриќем стакла за наочаре.*

Свршетак тринаестог и четрнаести век дали су нам неколико Грка, љубитеља математичких наука, који су били покушали да ове унапреде. Једно од најзнатнијих открића прославило је почетак четрнаестог века; то је *откриће бусоле,* око 1302 године. Познато нам је, од колике је користи бусола по мореловство. У четрнаестом веку пронађена је *воденица за прављење хартије;* тај се проналазак приписује *Улману Стремеру*, али је са свим сигурно да је и пре њега прављена хартија.

Све машине до сада поменуте, изгледа, имале су воду за мотора; оне пак, које ћемо сада споменути, изгледа, биле су прве овога рода, које су биле покретане теретима или опругама (федерима).

Меканика је се, у почетку четрнаестог века, обогатила *сатовима*[1]) *са точкићима;* сатовима и сталним и онима које можемо носити. Вештина сајџилука постигла је велико савршенство у ово време. Све оне чувене творевине, које су, у своје време, стварале толике славе својим аукторима, не постоје више. По разним кретањима и броју представа, данас је у Европи најчувенији сахат на катедрали Страсбуршкој, начињен 1580 године, по плану математичара *Конрада Дазиподијуса.*

Као што рекосмо, у тринаестом и четрнаестом веку почеле су се математичке науке полако подизати из оне таме, у коју су толико дуго биле забачене. Петнаести век представља нам још веће напретке у њима. Ако и не находимо великих открића, као што су она што карактеришу седамнаести век, ми находимо бар људи̑, који излазе на добар пут и који су својски радили на обновлењу наука̑; чак би и неправо било, кад бисмо им са свим одрекли заслугу: да су припомогли њиховом увећању. Крајем петнаестог века обогаћена је Европа са више дела од грчких математичара.

И Астрономија је се прилично увећала у овоме добу.

Јован Региомонтанус (рођен близу Кенигсберга 1436, умро у Риму 1476) постао је чувен и славан по својим меканичким радовима. Њему се приписују тако чуд-

---

[1]) Проналазак сатова био је предмет једне комедије о паразитима и прождрљивцима, од које нам је остао само један одломак. Прождрљивац је се горко јадао на овај „гадни“ проналазак: „некад је се, говорио је он, јело кад се огладнело, свачиј стомак био је сахат; данас се једе тек онда, када је сунцу по вољи!“

новати радови, да надмашују најизредније производе наших модерних меканичара. Такав је његов рад, нпр., једна вештачка мува, која, излазећи из руку свога творца, обиђе цео астал и дође да стане на исто место са кога је и пошла! Исто тако, с дивљењем се говори о некаквом орлу његовом, што је излазио у сусрет цару и овога пратио до уласка у варош! Он је почео да израђује једну машину, коју је *астраријумом* назвао; а то је, по свој прилици, *планетар* (справа којом се представља планетски систем).

Јован Гутенберг (1400—1468) родио се у граду Мајенцу; припадао је доста богатој породици, која га је упутила на златарску радњу. Приморан да бега из своје отаџбине, у својој дванаестој години, он се склонио у Страсбург, где је, радећи као златар, непрестано размишљао о разним меканичким проналасцима, а нарочито о конструкцији пресова за штампање. После разних покушаја и дуге борбе, вратио је се у место свога рођења, у коме је 1450 године подигао прву штампарију, у којој је штампана прва књига *Biblia latina*. — Исцрпљен дугом и тешком борбом, Гутенберг је умро око 1468 године.

Благодарећи проналаску штампарије: жеље за знањима биле су увећане, књиге умножене и било је у изобилности литерарних урнек-дела грчких и римских; наука је се свуда лакше распростирала и великим проналасцима и многобројним открићима био је означен долазак модерних времена.

Готово одмах у Срба̂, пре него у многих других народа, јавили су се људи, који су знали ту штампарску вештину, и подигли су уређене српске штампарије, у којима су штампане српске књиге. Два места — *Обод* и *Цетиње* [1]) — оба у Црној Гори, оба наблизу једно другом, помињу се као прва, у којима се та нова вештина први пут јавила међу Србима. Прву од књига, штампаних у

(1 *М. Ђ. Милићевић*, Јавор бр. 11 и 12, 1893.

Ободској штампарији, ми данас имамо: *Октоих — Осмогласник* са четири прва гласа од године 1493.[1] И данас се находе темељи те прве српске штампарије до цркве у граду Ободу. На Србе су се угледали и други народи и почели подизати штампарије.

Може се узети да је вештина писања најважнији између свију светских проналазака. Одмах за овим, опет као један од највећих и најкориснијих проналазака ума људскога, долази проналазак штампарске вештине, јер је она помогла да се људска знања врло брзо рашире и да постану општа својина; укратко, штампарска вештина потпомогла је да људство коракне џиновским кораком из средњевековне грубоће и мртвила. — И данас, кад ко хоће да представи утицај штампарије на друштво, често ће употребити познату нам фразу: *„Штампарија је једна полуга, којом се може свет подићи!“*

VI

Напуштајући ову врло дугу периоду мрака и незнања, уђимо у периоду рада и обновлена наукâ у опште; уђимо у периоду која обухвата *шеснаести и седамнаести век.*

Семење математичких наука посејано Региомонтанусом и другима, за време петнаестог века, почело је обећавати обилату жетву, још првих година шеснаестога века. Први кораци ка обновљењу наукâ били су: прибирање и проучавање радовâ знатних претходника. И крајем петнаестог века чињени су неколики покушаји у томе погледу; али се са већим успехом на томе радило од почетка шеснаестог века, почињући са изучавањем знањâ из грчких извора. Ма да ни Виет, ни Декарт, ни Галилеј, нити други из ове периоде, нису имали на расположењу других извора, сем оних

[1]) Године 1893 прославило је *Српство*, уз суделовање свега Словенства и многих других образованих народа, навршетак четврте стогодишњице ове прве српске штампарије.

које је и Папус у своје време имао, и ма да су се ови налазили још у средини неповољнијој по развитак ма које науке, ипак је се ова периода обогатила многим веома важним радовима. Поменимо и овде да су, поред осталога, у овој периоди поникле: *Алгебра, Аналитичка Геометрија* и *Динамика*.

Ма да је готово немогућно, кад је реч о историји које од старих наука, поставити тачну границу између појединих научничких радова и тачно казати шта и колико коме веку дугујемо, ми ћемо, ипак, покушати да у овом одељку изнесемо у главном радове из шеснаестог века. За тим ћемо посветити седамнаестом веку два засебна одељка и њима завршити ову периоду.

Шеснаести век. После застоја средњега века, пробудио је се понова дух људски у шеснаестом веку и многе од наука добиле су новог полета.

1. Астрономија је почела, за време шеснаестог века, да оживљује у Немачкој, у којој је обрађивана са великим успехом. Бацивши један поглед на историју ове науке, не може се порећи да је Немачка, готово за триста година, била једина земља, која нам је давала најславније астрономе.

Историја Астрономије, у овом веку, представља нам две знамените епоке. Једно је епока Коперника, а друго епока Тихо-Брахе-а. Коперник, обдарен оном душевном силом, која је нужна да се стресе јарам старинских предрасуда, умео је да размрси право уређење васионе и поставио је Астрономији праве основе. *Тихо-Брахе* (1546—1601), не мање, припомогао је напретку Астрономије; ревноснији и тачнији посматрач од Коперника, он је усавршио у разним тачкама особену теорију о планетама, а између осталих и ону о месецу.

Може се рећи да општи дух шеснаестог века није био дух открићâ. То је био век Коперника, Тихо-Брахе-а и других астронома.

Коперник (*Никола*, 1473—1543) се јавља својим радовима, којима је преобразио и обновио целу Астрономију.

И данас, планете, посматране са земље, показују нам врло неправилан ход. Изгледа да се оне померају, час у истом смилу у коме се и сунце помера, а час у супротном смислу, пошто су се појавиле неко време као да су стационарне. Ова су планетска кретања била представљана старим астрономима помоћу заплетених комбинација кружних кретања.

Док су на све стране радили да Астрономија цвета, али без да су се удаљавали од онога пута, који су стари били прокрчили, славни Коперник смишљао је један кориснији пројекат за ову науку. Слободан од свих старинских предрасуда, под које су људски духови толико дуго времена били потчињени, он је устао противу старог геоцентричког погледа на свет, и први се усудио да подвргне анализи оне разлоге, који су били створили дотадашње веровање: да је наша Земља средиште васионе и небеских кретања, и да је све човека ради саздано. Узбуђен слабошћу ових разлога и безбројних незгода, које су потицале из претпоставке о непокретности Земље, Коперник је отпочео смишљати да постави прави светски систем, који би имао симетрије и реда.

Прво је отпочео да тражи у списима философâ, да ли неће наћи каквог разумнијег и савршенијег уређења васионе. *Плутарк* му је дао прву идеју за његов систем, упознав̀ га како су неколико Питагорејаца, између осталих *Филолаус* (рођен око 450 пре Христа), узимали Сунце за средиште васионе и стављали Земљу у кретање око ове звезде; други, пак, узимали су да се Земља окреће око своје осе, а одрицали су небеским телима ово дневно кретање, које изгледа да га имају. Ова последња идеја опчарала је Коперника својом простотом, она га је већ ослободила и незгодне претпоставке: да се цела небеска машина креће са непојмљивом брзином, како би задовољила дневно кретање.

Коперник се није зауставио на томе; ма како да је била повољна ова идеја, он је осетио, да је нужно да она буде сагласна, не само са општим појмовима, него још и са свима особеним. Ови су га погледи нагнали, те је предузео дуга посматрања, која је продужио скоро кроз тридесет и шест година, пре него што би јавно предложио свој нови систем, доцније назват по његовом имену *Коперников систем.* Све до 1543 године чувао је Коперник свој спис као опасну књигу и тек те године усудио је се да га објави, не гледећи на парадоксални изглед, који га прати у очима простака, и на противуречности, које је предвиђао. Био је на својој самртничкој постељи, кад су му га донели штампаног под насловом *de Revolutionibus Celestibus*, у шест књига, у којима је овај славни и велики научник, према својој ранијој хипотези, објавио свету своју нову науку о кретањима небеских тела, и њоме оборио стари геоцентрички поглед на свет, — а тим је преобразио целу Астрономију.

Коперник није смео да предложи свој систем као какву физичку истину, него само као хипотезу, којом је најлакше представио небеска кретања. Та Коперникова хипотеза и начин на који она објашњава небеске појаве тако су познати, да је са свим излишно да их ми овде излажемо у појединостима.

И други су људи увидели да не могу изаћи на крај, те да објасне небеска кретања, узимајући да се цела множина звезда окреће око Земље; зато су и они, као и Коперник, потражили да ли не би било боље претпоставити да се Земља окреће, а да звезде остају непокретне. Најзад, пало је људима на памет и то: да размисле, какве би изгледале планете, па и са̂ма Земља, једном посматрачу кога би претпоставили да се находи у центру сунчевом; и простота њихових релативних кретања учинила је те је усвојен Коперников систем, а занемарен онај Птоломејев. Већ од половине седамнаестог века, па и пре, није било готово ниједног философа ни астронома, који не би био сматрао кретање Земље као доказану истину, или, бар, као хипотезу подеснију од сваке друге да објасни небеске појаве. — Човек радо верује, да је он све и сва, и да је сав свет њега ради; требало је много времена да прође, док су се људи навикли на мисао, да је наша Земља само један сићушни атом у бескрајној пучини светској!

Не могу да прећутим значајан мемоар данашњег научника *П. Мансиона*[1]), у коме он, обраћајући се једино оним читаоцима, који су добро упознати теоријом релативног кретања, вели: „У Астрономији, једна обмана врло призната јесте ова: Коперник је, први, доказао *да се Земља окреће око Сунца, а не Сунце око Земље.* У истини, ни Коперник, нити ико после њега, није доказао оно што му приписују, пошто су два тврђења: Земља се окреће око Сунца, Сунце се окреће око Земље, противуречна само у очима простака. Са гледишта математичке Астрономије, она не представљају никакву противуречност; она сачињавају два начина потпунце еквивалентна да се изрази један једини факат. Оно што сачињава заслугу Коперникову, то је што је написао хелиоцентричку Астрономију, која је, у исто доба, простија и до најмањих ситница тачнија од геоцентричке Астрономије Птоломејеве, а не што је учинио крај питању о непокретности Земље или Сунца.

„У старини, у средњем веку и за Коперникова доба, ово питање није припадало Астрономији, науци о небеским појавима, него делу Философије, Физиком назват Аристотелом, Природном Философијом или Космологијом назват модернима. Па и Коперник је се њиме бавио тек у своме делу *de Revolutionibus Celestibus.* На против, на овом питању Космологије у главном оснива се процес Галилејев пред римским Конгрегацијама, и немогућно је свестрано разумети историју овога славнога спора ако се меша, као што се то често чинило, Астрономија са Природном Философијом.

[1]) *P. Mansion, op. cit., p. 2 et 11—16.*

„Од Птоломеја до XVII века најмање, наставили су философи и астрономи да сматрају астрономске теорије као просте фикције, које објашњавају ствар. И Коперник је делио мишљене других астронома о хипотетичком карактеру астрономских теорија. Само у двама одељцима свога дела, Коперник је напустио терен Астрономије да би приступио ономе Физике, у смислу Аристотеловом, т. ј. Космологије. У једном одељку (lib. I, c. 7), он је изложио Птоломејеве разлоге у корист непокретности Земље; у другом (c. 8), он је покушао да покаже како су они мало доказни, стављајући се на гледиште Физике. Он је скромно закључио: „*Vides ergo quod ex his omnibus,* probabilior *sit mobilitas terrae quam ejus quies, praesertim in quotidiam revolutione, tanquam terrae maxime propria*“.

„Али у целом остатку дела, он је писао са гледишта појавнога; он се задовољио да даде систематско тумачење небеских кретања, *solis immobilitate concessa,* или *per assumptam telluris mobilitatem,* као што је то казао у толико прилика.

„Поштоваоци Коперникови мислили су да ће га уздићи, приписујући му више од једног кинематичког тумачења о светском систему. Они су га пре понизили, јер, у наше време, славни геометри (de Saint Venant, Jacobi, Kirchoff, Poincaré) све више и више посматрају рационалну Меканику и математичку Физику са тога чисто кинематичког гледишта. Последњи је, у једном славном предговору, доказао чак ову теорему: „Ако један појав дозвољава једно потпуно меканичко тумачење, дозволиће их бесконачно других, која би исто тако дала рачуна о свима особеностима, откривене испитивањем“. (*Électricité et Optique,* 1890, Paris, Carré). „Математичке теорије, вели он на другом месту, имају за једину цељ да доведу у ред физичке законе, које нам испитивање показује“. *(Théorie mathématique de la lumière,* 1889, Préf., p. 1)-

„У *XVI* и *XVII* веку, пре и после процеса Галилејевог, научницима је било познато разликовање између кинематичког тумачења и философског тумачења астрономских појава; у овој епоци, услед овог разликовања, потпунце се разумело да је Галилеј био осуђен у име Философије, без да је то ма у чему спречило астрономска истраживања“.

2. *Друге науке*, на које је математика примењена, биле су, у шеснаестом веку, готово исте судбине, какве су биле и у старих народа. Меканика и Оптика почеле су се најспорије увећавати у првим годинама обновлења наукâ.

Научни радови из Меканике, у овом веку, састојали су се готово искључиво из одвећ пространих тумачења *Меканичких Питања* Аристотелових. Сви ти радови, пошто нису додали ни најмању истину ка мало темељној доктрини старога философа, достојни су заборава у коме су данас.

Теорија Статике била је још врло слаба у ово време. *Кардан* (1501—1576) је испитивао, у својем делу *de Ponderibus et Mensuris*, која је сила потребна да држи неки терет на стрмој равни, и он ју је узимао да је сразмерна оном углу, који гради раван са хоризонтом. Ослањајући се на то, он је веровао, када је тај угао нула, тј. кад је раван хоризонтална, да није потребна никаква сила за држање терета, а да му (углу) је равна кад је угао прав!

Меканичари овога времена ватрено су потрзали питање: Шта ће бити са теразијама једнаких кракова и оптерећене једнаким теретима, када бисмо их извели из хоризонталног положаја? Да ли ће се вратити сâме собом у хоризонтални положај, или ће остати у овом новом положају? — Мишљења су била подељена, па су и она била у многоме погрешна.

Не треба тражити међу физичарима овога века ниједну праву идеју о законима кретања. Зашто један бачени камен продужава да се креће још дуже времена, пошто смо га пустили из руке? Веровало се, са Аристотелом, да му ваздух, који га остраг прати, саопштава кретање! Тадашњи меканичари били су сви далеко од помисли: да је свако кретање по својој природи праволинијско, и да би се камен кретао вечито у истом правцу и са истом брзином, кад се никаква препрека не би томе противила. По Аристотеловој доктрини, једино кружна кретања сматрана су као савршена кретања; праволинијска кретања, пак, сматрана су као ефекат неког *appetitus-a* извесних тела да се скупе у центрум васионе, или да се од овога удале, што је чинило тежину или лакоћу тела. Исто тако, дељена су сва кретања на природна и неприродна; итд. — То је готово кратки садржај старе физике, па и оне шеснаестог века о кретању.

Наука о кретању бачених тела (пројектила̑) занимала је такође неколико меканичара шеснаестога века; али, немајући темељних принципа о кретању, они су чинили саме погрешке. Први, који су се тим питањем бавили, замишљали су да ће једно тело, бачено са силином, као нпр. једно топовско ђуле, описивати праву линију све дотле, док се то његово кретање није са свим поништило, а после тога оно пада вертикално! Находи се чак, у неколико ауктора овога века, нека теорија о артиљерији основана на овом смешном принципу!

При свем том, праведно је споменути да је *J. B. de Benedictis,* или *Benedetti* (1530—1590), имао у Меканици бољих појмова од већине његових савременика. Ми га видимо, у његовом делу *J. B. Benedicti diversarum speculationum math. et phys. liber,* 1585, како боље од свију његових савременика расуђује о многим стварима, које су биле за математичаре још као нека загонетка. Тако, тежњи тела да се крећу правом линијом, он је приписивао центрифугалну силу, која чини да тела, остављена са̑ма себи, бегају тангентом. Он је врло добро одредио меру силе код *полуге на лакат;* и, помоћу тога принципа, он је доказао лоша резоновања многих савременика у извесним случајевима код теорије теразија. Не обзирући се на Аристотелов aукторитет, он је доказао неоснованост његових решења у извесним меканичким питањима. Ми верујемо да је Бенедети имао здраве погледе на небески систем.

Врло је могућно, да су чисти појмови Бенедетија били клица за појмове Стевинове, Галилејеве и других.

Маркиз *Гидо Убалди (del Monte,* 1545—1607) размрсио је неколико статичких питања у своме делу *Mecanicorum liber,* које је штампано 1577. О многим стварима садржи ово дело темељних и оштроумних доктрина. Убалди је био употребио већ познату методу старих меканичара, на име: сводио је све машине на полугу, и применио је срећно на неколико меканичких моћи, између осталих на котуре, чије је многе комбинације он брижљиво испитао. У осталом и то његово дело није без погрешака.

Архимедов увртањ био је предмет особеног дела Гида Убалдија. Убалди је испитао ефекат и разна друга својства ове машине и описао их је у том делу свом, које је смеша Меканике и чисте Геометрије.

Стевин (Stevin Simon, 1548—1620, по некима † 1633), инжињер насипа у Холандији, показао је своју генијалност, у главном, у Меканици. Он је отишао много даље од Убалдија, и у делу, које је објавио 1585 године, обогатио је и Статику и Хидростатику великим бројем нових истина. Поменули смо већ да су Стевин у својој Статици и Галилеј у својим Дијалозима о кретању, упростили Архимедов доказ о полузи, узевши да су терети обешени о полугине крајеве два хоризонтална паралелопипеда.

Однос између силе и терета на једној стрмој равни био је, за дуго време, важан проблем међу модерним меканичарима. Стевин га је, први, врло добро решио; али је његово решење било основано на непосредном посматрању и независном од теорије полуге.

Стевин је посматрао један чврст троугао (тело) положен на своју хоризонталну основу, тако да две његове стране образују две стрме равни; и замислио је да једне бројанице начињене од више једнаких терета, који су на конац уденути на једнаким одстојањима, или боље рећи један ланац (синџир) једнаке дебљине, буду метнуте на две стране овога троугла, тако да се сав горњи део находи положен на две стране троуглове, а да доњи део виси слободно испод основе, као кад би био привезан за два краја ове основе.

Но Стевин је приметио, претпостављајући да ланац може слободно клизити по троуглу, да он међу тим мора стојати у миру; јер, кад би сâм собом почео клизити у једном смислу, он би требао да продужи клизање увек, пошто би увек и исти узрок кретања постојао, јер се ланац, због једноликости својих делова, налази увек постављен на исти начин на троугао; откуда би следовало неко вечито кретање, што је апсурд.

Постоји, дакле, нужно равнотежа између свију делова ланца; и део, што виси испод основе троуглове, може се сматрати да је већ у равнотежи сâм по себи. Дакле треба напрезање свију терета наслоњених на једну од странâ да држи у равнотежи напрезање теретâ наслоњених на другу страну; али је сума једних наспрам суме других у истом односу, у ком су односу дужине странâ на које су они наслоњени. Дакле, требаће увек иста сила да држи један или више терета метнутих на једну стрму раван, кад је целокупни терет сразмеран дужини равни, претпостављајући исту висину: али, кад је раван вертикална, сила је једнака са теретом; дакле, на свакој стрмој равни, сила је према терету као што је висина равни ка њеној дужини.

Ја сам изнео овај Стевинов доказ, јер је веома оштроуман, и што је, у осталом, мало познат. Најзад, Стевину је пала на памет срећна мисао, те је из ове теорије извео ону о равнотежи трију сила, које дејствују на једну исту тачку, и нашао: *да ће бити равнотеже кад су силе паралелне и сразмерне трима странама једног ма каквог праволинијског троугла.* (Видети *Éléments de Statique* и *Additions à la Statique* од овога ауктора, у *Hypomnemata mathematica*, штампана у Leyde 1605, и у Стевиновим *Делима*, преведена на француски и штампана 1634). Али, морамо приметити да је ова основна теорема у Статици, ма да је сагласно приписивана Стевину, доказана, међу тим, овим ауктором само у случају оном, када правци двеју сила граде међу собом прав угао. — Стевин је овом теоремом својом попунио ону празнину у Статици, коју је за собом оставио Архимедов принцип. Лако је било извести из ове теореме ону о слагању ма коликог броја конкурентних сила.

Стевин је разложно приметио да се један терет наслоњен на једну стрму раван и држан једном силом, која је паралелна са равни, налази у истом положају (стању) као када би био држан двама концима (канапима или конопцима) од којих је један управан на раван, а други паралелан са равни; и, својом теоријом стрме равни, он је нашао: да је однос терета ка сили паралелној са равни исти као што је однос хипотенузе ка основи једног правоуглог троугла, који је образован на равни двема правима, једна вертикална а друга управна на раван. Стевин се, за тим, задовољио да распростре ову сразмеру на случај у коме би конац, што држи терет на стрмој равни, био такође нагнут према овој равни, конструишући један аналоги троугао са истим линијама, једна вертикална, друга управна на раван, и узимајући основу троугла у правцу конца; али би за то требало да је био доказао да иста сразмера постоји у случају равнотеже једног терета држаног на стрмој равни једном силом, која је коса на раван, што се не може извести из посматрања замишљеног ланца од стране Стевина.

Стевин је се показао не мање оригиналан и у својој Хидростатици, која чини део његове Меканике.

Ма да, после онога што је Архимед био доказао, није било тешко одредити притисак неке течности на дно или на бокове (дуварове) суда, у коме се она налази, Стевин је, при свем том, био први који је предузео то истраживање и који је открио хидростатички парадокс: да једна течност може учинити (произвести) на дно суда много већи притисак него што је њена сопствена тежина. Он га је доказао на два начина: и опитом и резоновањем, које је основано на природи течности. У трећој свесци *Hypomnemata mathematica*, 1608, находи се Стевинова хидростатичка теорија. Пошто је доказао да једно чврсто тело, ма каквог облика а исте тежине које и вода, може стојати у њој у ма којем положају, пошто оно заузима исто место и тежи толико као кад би то била вода, Стевин је замислио један правоугаони суд напуњен водом и лако показао да његово дно мора сносити целокупну тежину воде, која испуњава суд. За тим је претпоставио да се у овај суд загњури једно чврсто тело ма каког облика а исте тежине које и вода; јасно је да ће притисак остати исти; тако, ако се загњуреном телу дâ такав облик да остане само један канал од течности ма каквог облика, притисак канала на дно суда биће опет исти и, према томе, раван тежини једног вертикалног стуба воденог, који би имао ово исто дно. Али, Стевин је приметио, претпостављајући ово чврсто тело заустављено стално на своме месту, да отуда не може следовати никаква промена у акцији воде на дно суда; дакле, притисак на ово дно биће увек раван тежини истог воденог стуба, па ма какав био облик суда.

Стевин је, одатле, прешао да одреди притисак воде на вертикалне или нагнуте бокове суда; он је делио њихову површину хоризонталним линијама на више малих делова и показао да је сваки део већма притиснут него кад би био хоризонталан и на висини његовог вишег краја, али, у исто време, да је мање притиснут него кад би био положен хоризонтално на висини његовог нижег краја. Откуда, смањујући ширину делова а увећавајући њихов број у бесконачност, он је доказао, помоћу граничне методе, да је притисак на један раван а нагнути бок суда једнак са тежином једног воденог стуба, коме би овај бок био основа а чија би висина била половина висине стуба.

Он је, за тим, одредио притисак на један ма који део неког равног а нагнутог бока суда, и нашао га да је раван тежини једног воденог стуба, који би био образован повлачећи управно кроз сваку тачку овога дела праве једнаке са дубином ове тачке под водом. Пошто је ова теорема тако доказана за равне површине, које су положене како се год хоће, Стевин ју је распрострео и на криве површине; али му, на жалост, они закључци, које је извео за притисак течности на једну криву површину, нису тачни.

Поред ових радова, Стевин је решавао још и многа друга меканичка питања. Њему приписују проналазак неких кола са једром, која су, на уједињеним и равним обалама Холандије, ишла брже од најбоље запрегнутих кола.

Ми жалимо што, у француским и латинским издањима Стевинове Меканике, нисмо нашли два одељка, које сâм он именује у почетку шесте књиге, под насловом: *de l'attraction de l' eau*, и *du poids ou de la Statique de l'air*. Изгледа да је овај математичар знао за тежину ваздуха; али ће пре бити да је било питање о акцији овога флуида на једрила, воденичка крила, итд. — Стевин је имао много списа, али од свију њих његова Меканика заслужује највећу пажњу; његова *фортификација бранама* и данас је једно дело достојно пажње.

VII

Међу вековима, који су узастопно доприносили напредовању наукâ, шеснаести век мора, без сумње, довде држати први ранг. Ми смо далеко од тога да тврдимо:

да смо поставили границе духу човечијем; ко ће још знати, које су последње међе знања̂, до којих он (дух) може доспети?! Сваки дан додаје открићима претходнога дана; и не признавати то, значило би неправедно одрећи већини наших славних савременика заслужену хвалу и признање, што им дугујемо.

Седамнаести век дао нам је доста велики број умова првога реда, који су својим радовима и проналасцима науку знатно у напред покренули, и који су доцнијим научарима са свим нове стазе и путеве испитивања открили. Кад се обрати пажња на веома велики полет, који су све науке у опште, а математичке науке посебице, узеле у седамнаестом веку, онда се морамо сложити у овоме: ма какво савршенство постигле науке у вековима, који овоме следују, велики део славе мора припасти седамнаестом веку, који им је тако срећно отворио каријеру!

Пре но што бисмо приступили подробнијем излагању историје Меканике и меканичких открића, у седамнаестом веку, ми мислимо да треба бацити један општи поглед на поједине науке, почевши са посматрањем математичких открића у опште, са опште тачке гледишта.

Какав величанствен призор, као што је онај што нам га математичка открића представљају; како је диван и чаробан за филозофско око! Ако погледамо на чисту математику, наћи ћемо, још првих година седамнаестог века, да је Геометрија учинила неколико напредака, који заслужују пажње. Такав је оштроумни и још кориснији *проналазак логаритама* од *Непера* (1550—1617), чије ће име остати бесмртно међу људима, докле год буду обрађиване егзактне науке. За тим, видимо да су открића *Хариотова* (1560—1621), Декартова, Њутнова и других из овог века, припомогла те је алгебарска анализа или, боље рећи, теорија решавања једначина̂ учинила велики корак. У рукама *Кавалеријевим* (1598—1647) постала је једна нова Геометрија, која се, обрађивана и другим математичарима, уздигла на много виша истраживања, него што су била она, којима су се научници у старини занимали. Међу тим, Декарт је предузео други пут и, примењујући анализу на своју Геометрију, дао је теорији кривих линија пространство и лакоћу, које она није била имала; он је пронашао разне методе за решавање, сигурним путем, најтежих проблема што су могли бити постављени у том роду. *Ферма* (1601—1655), супарник и савременик Декартов, ишао је истим путем и тако исто учинио је проналазака, који су били врло развијена клица нових рачуна. Валис и други обогатили су Геометрију мноштвом нових метода и открића. Најзад, Њутн је створио ову узвишену Геометрију, за коју је оно, што је дотле стȁло толика труда и муке, само једна играчка, и која је једина у стању да отвори приступа у тешким истраживањима, којима се наши геометри и физичари данас баве. — „У поменутом размаку времена математичар се сусреће са светлим сликама бесмртног Декарта и Паскала, Кавалера, Ферме и Робервала, славног и Архимедовог скоро такмаца Хигенса, Барова, Валиса и L'hopital-a, браће Јакова и Јована Бернули итд. Али међу свима овим сјајним звездама блистају неугасном светлошћу звезде првог реда Њутн и Лајбниц, творци инфинитезималног рачуна.“ [1])

Ако бацимо један поглед на друге гране математичких наука, на науке на које се математика примењује, ми ћемо такође бити задовољни са увећањем, које су оне учиниле у овом веку.

Механика ће нам показати: откриће законâ о кретању и његовом саопштавању (комуникацији), законе о убрзању тешких тела, закон о путу пројектилâ, законе о узајамној акцији и кретању течности. Видићемо и то како се Механика увећава са више темељних теорија, као што су

---

[1]) *Димитрије Нешић*, Борба Њутна и Лајбница за приоритет проналаска инфинитезималног рачуна. — *Беседа о Св. Сави 1893.* — *Јавор* бр. 1, стр. 17—22, 1893.

оне о осцилационим центрима, о отпору течности, о централним силама, итд.

Астрономија је, довде, била чисто геометријска. Пре седамнаестог века није се никако веровало, да кретања небеских тела, тако савршена и апсолутно вечита, могу ући у област Меканике земаљских тела. Земља није ништа друго до једна планета, а сунчани систем, чиј је саставни део сâма она, само је веома мали део васионе. Коперник, Кеплер, Галилеј и Хигенс ослободили су нас свију заблуда старих астронома. Ничега интересантнијег него видети да се, крајем седамнаестог века, Меканика увлачи у Астрономију и ову преображава.

Природне науке узеле су реалнији правац: опажани су природни појави систематски, па су из тих опажања извођени закони; нису више тражене позитивне истине у књигама старих грчких философа, већ у књигама природе.

Прва половина седамнаестог века одликује се открићем инструмената: дурбина и микроскопа; у том времену постављен је закон рефракције и објашњени су многи други појави. Све до појава инструмената сматрана су небеска тела као какви божански предмети, а мишљења о њиховој природи оснивала су се на многобројним спекулативним хипотезама. Није се ништа знало о сићушним живим створовима, нити о њиховим органима итд. Помоћу дурбина и микроскопа отворена су нам врата од два нова до тада са свим непозната света.

Меканика је постала оном науком, чији принципи изгледају најпростији и најчистије интелектуални. То је истина не само у Статици и Хидростатици, којима је Архимед поставио темеље о чистим и апстрактним појмовима о равнотежи, појмови толико исто очевидни и неоспорни колико и они на којима Геометрија почива. Ту корист деле у Меканици и друге гране њене, као што су: теорија убрзаних или успорених кретања, закони о судару тела, о централним силама, итд. Гидо Убалди и Стевин били су први, који су додали нечега ка ономе мало што је Меканика дотле садржавала.

Поред многих других својих радова, *Торичели* (1608 до 1647) је показао да је анвелоп (обвојница)свију кривих линија, које би описивала тешка тела, бацана од исте тачке у свима правцима са истом брзином, један параболоид ван кога ниједно тело не може изаћи. *Паскал* (1623—1662) је основао Хидростатику и изнашао хидрауличку пресу. У своме *делу о кретању водâ (Traité du mouvement des eaux)*, а нарочито у експерименталној Меканици, *Мариот* (1620 до 1684) је се бавио многим питањима, која се Хидростатике и Хидродинамике тичу. — У ово време дата је и теорија текућих вода.

Јован Кеплер (1571—1630) обогатио је Астрономију у почетку седамнаестог века открићима, којима је обесмртио име своје и која чине једну од најзнаменитијих епока у историји ове науке. Као што смо већ рекли, Коперник је положио темеље сталној Астрономији; Тихо-Брахе је, поред осталога, усавршио практичку Астрономију, нагомилао је безбројна посматрања и исправио у разним тачкама појмове својих претходника. Али је било резервисано за Кеплера да упозна прави ход планетâ, облик кривих путања, које оне описују, и законе по којима се оне крећу.

И заиста, Кеплер је се први усудио да предузме општи проблем о планетским кретањима. Узевши у помоћ Тихо-Брахе-ова посматрања и после седамнаестогодишњих трудних посматрања својих, он је успео да упозна и да формулише законе о кретању планетâ. Ти закони, познати у науци под именом *Кеплерових закона*, учинили су огромних користи Меканици, а још више Астрономији. Њих има три на броју и најбоље је исказати их у овој форми:

1°. *Свака планета, сматрана као проста материјална* *тачка* (центар сваке планете), *описује једну елипсу око сунца, а у једној од њених жижа налази се сунце.*

2°. *У овој елипси потег (radius vector), који полази од центра сунчевог ка планети, описује површине сразмерне временима.*

3°. *Квадрати временâ сидералних окретања око сунца, двеју ма којих планета, имају се међу собом као кубни степени великих оса њихових путања.*

Ови су закони увек овераване, и могу бити сматрани као сигурни и од сваке хипотезе независни. Они сачињавају општа факта, са којима су све теорије сагласне, и која су довољна да се постави једна једина теорија, којом бисмо тумачили све појаве, што се односе на кретање небеских тела.

Први закон потиче из факта да се планете не удаљују од сунца ван сваке границе, већ описују елипсе. Ове чувене криве линије, дате пресеком равни и конуса, предмет ревносних посматрања у старини, пре него што су заузеле место у њиховој геометрији, имале су много важније место на небу. — Да ли је брзина планетâ на њиховој путањи ма каква, као што је, нпр., она једног помамног тркачког коња, остављен његовој ћуди? Постављено у жижи сваке елипсе, сунце умерава акцију на сваку планету; отуда потиче други закон.

Прва два закона Кеплерова општи су. Он их је открио експерименталним путем у почетку седамнаестег века; њихов доказ следује из сталне сагласности њихове са посматрањима у целом пространству сунчаног система, и они су *природни закони.* Њихов смисао био је за Кеплера чисто геометријски; њихово меканичко тумачење било је упознато тек доцније, доста година после смрти овог великог астронома.

Трећи Кеплеров закон сретно је допунио теорију елиптичког кретања. Он потиче из факта што планетска кретања нису независна једна од других.

И ако су ови закони о планетским кретањима врло важни, ипак простор места не дозвољава нам да дамо, ма то било и укратко, идеју о оним методама, које су учиниле да се они открију. Ми не ћемо говорити овде ни о *Кеплеровом проблему*. Али ћемо доцније, при излагању теорије, опширније говорити о самим законима и подврћи ћемо их анализи, да бисмо отуда извели израз за силе, које производе ова планетска кретања.

Да завршимо о овом предмету са питањем: „Да ли су равни планетских путања потпунце сталне? Мало нагнуте једне према другима, оне осцилују око средњих положаја. Ова сидерална клатна имају своја клаћења тако исто правилна као што су она земаљских клатна. Ова последња бију секунде, прва бију столећа, или, боље, стотине столећâ, ова фиксирају прецизно велике периоде васионе, она, ефемерно трајање егзистенције човекове. Научници, радујте се, никоји од ваших напора није био изгубљен, јер сте ви увидели да је природа као и лепота ћерка хармоније!“[1])

Меканика, као што знамо (n° 16), почива на *трима* принципима, које нам је дуго искуство, толико разноврсно и толико прецизно колико је год могућно, учинило да их усвојимо; то је искуство попуњено, у његовим неизбежним непотпуностима, природним веровањем у разлог простих правилности или једног јасног поретка у свима стварима.

Један од тих прицнпа, *принцип инерције материје*, што служи као основ Динамици, први је Кеплер поставио у почетку седамнаестог века. Овај се принцип састоји из два дела, и ми га исказујемо данас на овај начин:

1°. *Кад је једна материјална тачка у миру, она ће остати непрестано у миру ако никаква спољна сила (акција) на њ не подејствује.* — Још општије.

2°. *Кад је једна материјална тачка у кретању, и ако никаква спољна сила на њ не дејствује, њено је кретање праволинијско и једнако.*

---

[1]) *L'Abbé Aoust,* Discours d' ouverture, p. 6—7, 1867, Marseille.

Први део принципа инерције толико је добро познат, да нам се он, увек, показује очевидан са̂м по себи. Он је био познат још у прастара времена. Напоменимо, овде, да неки од писаца исказују тај први део принципа инерције у овој форми: *„Стање кретања или мировања једне материјалне тачке може бити промењено само посредовањем (интервенцијом) једне силе“*.[1])

Из другог дела принципа, који и чини највећу славу Кеплеру, изводимо: ако кретање једне материјалне тачке није праволинијско и једнако, то долази отуда што на њ извесна сила дејствује. — Истина, ми и не налазимо нигде у природи такво тело чије би кретање било праволинијско и једнако, а то с тога, што нам није могућно отклонити све друге стра̂не силе, које на физичко тело дејствују у супротном смислу, тј. ми нисмо у стању да изолишемо материју од дејства и других страних сила.

Последице су принципа инерције многобројне; готово на сваком кораку и сваког тренутка наилазимо на њих; о њима ћемо доцније опширније говорити.

Место речи *принцип* Конт радо употребљује реч *закон*, и он налази да „утицај метафизичкога духа излази на видело нарочито у начину на који је овај закон у опште представљен“.[2])

Галилео Галилеј (1564—1642) у својој шеснаестој години ступио је, по жељи свога оца, на универзитет у Пизи, на коме је слушао предавања из философије и медецине; а под философијом, у то време, разумевали су скуп физичких и природних наука. У својој деветнаестој години он је учинио свој први проналазак. Једног дана, у цркви, спазио је Галилеј како црквењак, палећи једно кандило ужетом обешено о свод, саопшти истом једно осцилаторно кретање. Галилеју се учини да види да осцилације подједнако трају,

1) *X. Antomari*, Leçons de Cinématique et de Dynamique, p. 83, 1892, Paris.

2) *Auguste Comte*, op. cit., t. I, 403—404.

ма да је њихова амплитуда (пуноћа) опадала мало по мало. Немајући другог кронометра на расположењу, он се послужио ударима пулса, те је оверио тачност факта. Размишљајући о томе, он је дошао на сретну мисао да клатно употреби за мерење времена. Пронашав клатно, којим се данас тако лако служимо да тачно меримо време, он му је објаснио његове законе и извео читаву теорију о њему. Он је констатовао изокронизме малих осцилација клатна.

Дуго је одрицана Галилеју слава да је он, први, дао идеју да се време мери помоћу осцилација једнога клатна; али, дискусија је показала, чини нам се, да се није имало право. У осталом, необоримо је, да су га његова лепа открића у Динамици морала природно на то навести.

Остали главнији радови Галилејеви односе се на Меканику и Астрономију. Његови меканички радови, а они су из Статике, Хидростатике и Динамике, својом множином и својом вредношћу равнају се са радовима његовим из Астрономије.

У *Меканикама* Галилејевим, публиковане најпре на француском од P. Mersenne-а 1634, равнотежа на стрмој равни сведена је на равнотежу једне полуге на лакат са два једнака крака, од којих је један крак претпостављен управан на раван и оптерећен једним теретом, који је наслоњен на раван, а други је крак хоризонталан и оптерећен једним теретом, еквивалентан сили, која је потребна да задржи терет на равни; за тим је ова равнотежа сведена на равнотежу једне праве и хоризонталне полуге, посматрајући терет привезан за нагнути крак, као да је обешен о хоризонтални крак образујући праву полугу са хоризонталним краком полуге на лакат. На тај начин, терет је ка сили, која га држи на стрмој равни, у обрнутој размери ових двају кракова праве полуге; а лако је доказати да су ови краци међу собом, као што је висина равни ка њеној дужини.

Може се рећи да је то први непосредни доказ, који смо имали о равнотежи на стрмој равни. После тога, Галилеј је се служио њиме да би тачно доказао једнакост брзинâ задобивених са тешким телима, силазећи с једне исте висине по различно нагнутим равнима, једнакост за коју се био задовољио да је претпостави у првом издању својих Дијалога.

Лако је било Галилеју да реши и онај случај када сила, која држи терет, има кос правац према равни; али је овај нови корак учињен тек после неког времена, Робервалом, у делу *Traité de Mécanique*, штампано 1636, у *Harmonie universelle* од Мерсена.

Стари су знали нешто о слагању кретања, као што се то види из неколико одељака у Аристотеловим Меканичким Питањима. Геометри су га нарочито употребљавали за описивање кривих линија, као Архимед за спиралу, Никомед за конхоиду, итд.; а, од доцнијих математичара, Роберрвал је извео отуда једну оштроумну методу за повлачење тангената на криве линије, које се могу сматрати као да су описате двама кретањима, чији су закони дати; али, Галилеј је био први, који је употребио у Меканици посматрање сложеног кретања, да би одредио криву линију описату тешким телом.

У другом ставу четвртога дана својих Дијалога, Галилеј је доказао да једно тело, које би се кретало двема једнаким брзинама, једна хоризонтална, друга вертикална, мора узети једну брзину представљену хипотенузом троугла, чије су стране једнаке са овим двема брзинама; али изгледа, у исто време, да Галилеј није познао сву важност ове теореме у теорији о равнотежи; јер, у трећем Дијалогу, у коме говори о кретању тешких тела по стрмим равнима, у место да је употребио свој принцип о слагању кретања, те да непосредно одреди релативну тежину једног тела на стрмој равни, он је радије извео ову одредбу из теорије о равнотежи на стрмим равнима, по ономе што је пре тога утврдио у свом делу *Della Scienza mecanica,* у коме је свео стрму раван на полугу.

Хидростатика дугује Галилеју више нових истина. Теорије о равнотежи и притиску течности на бокове суда, које смо код Стевина изложили, као што се лако може увидети, потпунце су независне од општих принципа Статике, пошто су основане само на особеним принципима искуства о течностима; и овај начин доказивања хидростатичких закона, изводећи, из искуственог знања о неколикима од ових закона, онај закон, који резултује из свију других, био је усвојен од већине модерних ауктора и начинио је од Хидростатике једну науку потпунце различну и од Статике независну.

Међу тим, са свим је било природно потражити начина како да се вежу ове две науке уједно и да се учини да оне зависе од једног јединог и истог принципа. Но, међу разним принципима, што могу служити Статици за основ, видићемо да постоји само *принцип виртуелних брзина,* који се природно примењује на равнотежу течностû. И Галилеј, ауктор овога принципа, служио се подједнако њиме те да докаже главне теореме из Статике и Хидростатике.

У свом делу *Discorso intorno alle cose che stanno su l'acqua, o che in quella si muovono,* он је извео, непосредно из овог принципа, равнотежу воде у једном сифону, показав, ако се претпостави течност на истој висини у двема гранама, да она не би могла сићи у једној а попети се у другој грани, ако (статички) моменти нису једнаки у делу течности што силази и у ономе што се пење. На сличан начин, Галилеј је доказао равнотежу течностû са чврстим телима, која су у ове утопљена; истина је да ови докази нису са свим тачни, и, ма да се покушало да се они попуне у белешкама које су додане издању оном од 1728, ипак може се рећи да тим доказима још много фали. Декарт и Паскал употребили су у Хидростатици, тако исто, принцип виртуелних брзина; нарочито је последњи чинио велику употребу овога принципа у своjем *делу о равнотежи течности̂ (Traité de l' équilibre des liqueurs)*, и њиме се послужио да докаже основну особину течности̂: да се један ма какав притисак, саопштен једној тачци њихове површине, подједнако простире на све друге тачке.

Да бисмо нашли решење првога *динамичког* проблема, треба само учинити један скок од осамнаест векова и прећи од осниваоца Статике, Архимеда, до осниваоца *Динамике*, Галилеја; јер, по Лагранжу, размак времена, који раздваја ова два велика генија, ишчезава у историји Меканике. — Ми ћемо, у даљем излагању историје Меканике, покушати да изложимо и оне принципе, који служе Динамици за основ, и да представимо след и поступност (градацију) идеја, које су највише припомогле да се развије и усаврши ова наука.

Динамика је онај део Меканике у коме се проучавају односи (релације), који везују силе за кретања, која оне производе. По Лагранжу, Динамика је наука о убрзавним (убрзавајућим) и успоравним (успоравајућим) силама и о промењљивим кретањима, која оне морају произвести. Та је наука потпунце разрађена модернима, а Галилеј је онај који јој је поставио прве основе. Пре њега посматране су само оне силе, које дејствују на тела у равнотежном стању; и ма да нису могли приписивати убрзање (акцелерацију) тешких тела и криволинијско кретање пројектила̂ ничему другом до сталној акцији теже, ипак још нико није био успео да одреди законе ових свако-дневних појава, према једном тако простом узроку. Галилеј је први учинио тај важан корак и тиме отворио нову и неизмерну каријеру напредовању Меканике. То је откриће обрађено и изложено у делу *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, које је, први пут, изашло у Leyde 1638. Оно није допринело Галилеју, за живота, толико славе колико су му створила открића, која је учинио на небу; али, данас, оно чини најсталнији и најстварнији део славе овога великог човека.

Теорија променљивих кретања и убрзавних сила, које их производе, основана је на овим општим законима: да је свако кретање, саопштено једном телу, по својој природи, једнако и праволинијско; и да се различна кретања, саопштена у исто време или узастопце једном истом телу, слажу тако да се тело у сваком тренутку налази у истој тачци простора у којој би се морало налазити, у истини, по комбинацији ових кретања, кад би свако од њих постојало стварно и понаособ у телу. Ова два закона сачињавају познате принципе: *принцип о сили инерције* и *принцип о слагању кретања.* Галилеј је, први, приметио ова два принципа и из њих извео законе о кретању пројектилâ, слажући косо кретање, тј. ефекат потиска саопштеног телу, са његовим вертикалним падом, који произлази од утицаја теже.

Појам о убрзању, у најпростијем случају, припада Галилеју. Што се тиче законâ о убрзању тешких тела, они се природно изводе из посматрања сталне и једнаке (униформне) акције теже, на основу које, тела примајући у једнаким тренуцима једнаке степене брзине у истом правцу, тотална брзина задобивена на крају ма ког времена мора бити сразмерна томе времену; и јасно је да овај стални однос брзинâ ка времену мора сâм он бити сразмеран интензитету силе, коју тежа врши да покреће тело; тако да, у кретању по стрмим равнима овај однос не мора бити сразмеран апсолутној сили теже, као у вертикалном кретању, него њеној релативној сили, која од нагиба равни зависи и која се одређује по правилама Статике; што, опет, даје лак начин да сравњујемо међу собом кретања телâ, која силазе по различно нагнутим равнима.

Међу тим, не изгледа да је Галилеј на тај начин открио законе о паду тешких тела. На против, он је почео и поставио појам о једном једнако-убрзаном кретању, у којем кретању брзине расту као времена; он је отуда геометријски извео основна својства ове врсте кретања, а нарочито закон о увећању просторâ у размери квадратâ временâ; за тим се, опитима, уверио да овај закон доиста и постоји у кретању телâ, која падају вертикално или по ма каквим стрмим равнима. Али, да би могао сравнити међу собом кретања по различним стрмим равнима, он је био најпре принуђен да усвоји овај принцип зависан, да су задобивене брзине при силажењу са једнаких вертикалних висина такође увек једнаке; и готово пред смрт, и после публикације својих Дијалога, он је нашао доказ овога принципа помоћу посматрања релативне акције теже по стрмим равнима, доказ који је за тим био унесен у друга издања овога дела.

Пре Галилеја, стваране су све могуће хипотезе о закону мењања брзине при паду тешких тела. Тако, неки су, дотле, држали да је задобивена брзина сразмерна већ пређеном путу; други су веровали, да једно тело десет пута теже мора, за исто време, прећи и десет пута већи пут; трећи су тврдили, да су брзине у истом односу као тежине тела; итд. — Закони о кретању тела под утицајем сâме теже били су предмет првих и дугих испитивања Галилејевих. Јавним експериментима Галилеј је доказао огромне погрешке у оним доктринама, које су пре њега предаване, и, као што мало час видесмо, поставио је праве законе о паду тешких тела, којих има два на броју, и од којих је један последица другога. Ти су закони:

1°. *Пређени путеви једним телом, које полази из мира а под утицајем је сâме теже, расту као квадрати времена.*

2°. *Брзине расту као и времена.*

Пре Галилеја веровали су и у то: да се косо бачено тело креће по правој линији све дотле, докле његова брзина не постане равна нули, а тада вертикално пада. Галилеј је доказао да је путања, тако баченог тела, једна *парабола* којој је он и параметар одредио. То је откриће највише и допринело славе имену Галилејеву.

Та његова јавна предавања са експериментима о паду тешких тела и кретању пројектилâ, држана пред својим колегама на универзитету, створила су му од пређашњих учитеља и колега непомирљиве непријатеље.

Пре ових опита Галилејевих о паду тела, није се ни могло знати да су масе тела сразмерне тежинама тих тела. Појам о маси (n^0 17) није још био пречишћен у време Галилеја; то је, у осталом, у толико мање чудновато, пошто маса не игра никакву улогу у питањима Статике, којом су се дотле научари бавили. Са свију страна стешњена метафизиком, наука се кретала у оним границама, које јој је ова поставила; требало је дуге борбе да се наука уздигне над метафизиком и да у људском уму стече себи права на самостални опстанак, да уклони с пута метафизику и да створи слободан пролаз своме развијању. Оног дана, кад се појам о маси прецизно образовао у човечијем уму, тога дана и наука се проширила на рачун метафизике.

Галилеј је знао *о тежини ваздуха*, и у својим Дијалозима изложио је два начина, на које можемо да је докажемо и меримо. Он је имао са свим чисте и тачне појмове о трењу и отпору ваздуха. Он је први поставио темеље једној новој теорији, теорији о отпору чврстих тела. Вивијани приписује Галилеју проналазак *микроскопа*.

О сили судара Галилеј је одбацио Аристотелова тумачења и предложио нова, међу којима нема довољних елемената за постављање једне прецизне формуле, већ је то само један прост покушај. Галилеј је први решио питање о кретању једне слободне материјалне тачке, на коју дејствује нека сила стална по величини и по правцу.

Прва идеја о принципима, на којима цела Механика почива, датира од Галилеја, који је, при проучавању законâ о паду тешких тела, увукао појмове о инерцији, убрзању и о слагању кретања. Специјално, Галилеју дугујемо први појам *о принципу релативних кретања* (n° 16).

Кад се добро размисли о начинима, на које је Галилеј применио Геометрију на Меканику и Физику, а нарочито на доказ закона о убрзаном паду тешких тела, не може да се не увиди кључ свију открића модерних геометара о кретањима, која се мењају по ма каквом закону; не може човек да се уздржи, а да не призна: да је Галилеј добро познавао основне законе кретања. Према томе, Галилеј конкурише Декарту, бар у томе погледу. Смем да кажем: ако ко год заслужује име весника Њутнова, то ће бити пре Галилеј, него ли Декарт; јер, ја не делим мишљење неких научника: „да Њутна не би било, да није Декарта било, који му је претходио“. Нека се, после овога, нико не изненади кад би нашао, да је Декарт писао Мерсену, како је видео дела Галилејева, али да није ничега нашао у њима, чега би желео сâм бити ауктор!

У Астрономији Галилеј је, не само, предузео Коперникове радове, већ је и даље од њега отишао. Астрономски радови допринели су Галилеју, за живота, највеће славе. Путовања Христифора Колумба, Васка Де-Гама и других путника показала су нам облик и простирање земље; други су пак, у ово време, почели да проучавају њену формацију; али, Галилеј је показао место, које она заузима у сунчаном систему.

Открића Јупитерових сателита, Венусових мена, сунчаних пега, итд., очекивала су само телескопе и захтевала су усталачки рад; али је требало необичног генија па да размрси и објасни природне законе оних појава, које смо увек имали пред очима, али чија су тумачења, при свем том, увек умицала истраживањима филозофâ. Знање о небеским ротацијама почело је открићем, које је Галилеј учинио о сунчевој ротацији, од свију најлакша да се одреди, и која није могла да промаши а да не повуче за собом готово одмах и проналазак телескопа. Телескоп за Галилеја није остао предмет саме радозналости. Галилеј је 1609 године конструисао телескоп са великим увећањем (30 пута), и откриће Јупитерових сателита било је први астрономски резултат проналаска овога инструмента. Данас се они могу видети и једним простим оперским двогледом, што није случај са сателитима других планета, јер ови изискују моћније двогледе. Тим проналаском добила је Астрономија са свим новог полета.

Имајући телескопе на расположењу Галилеј је могао лако појмити растојања и величину сунца и појединих планета. Са тим инструментом, он је први видео на месецу брда и долине, да нам месец увек окреће исту страну, итд., итд. Ова су му открића створила у почетку доста противника, али је на скоро настало у целој Европи опште одушевљење и сваки је тражио телескопе од Галилеја; јер они у Холандији прављени нису још давали довољног увећавања, да би се помоћу њих могла оверити његова открића. Објава ових открића, која је од чести са̂м Галилеј учинио у своме *Nuntius Sidereus,* може се сматрати као значајна епока триумфа астрофизике над предрасудама старе филозофије.

Судбина је већине значајних проналазака, да се о њих отимљу више претендената; проналасци Галилејеви били су исте среће, и Галилеј је нашао више супарника који су себи присвајали: једни, откриће сунчаних пега; други, откриће Јупитерових сателита; неки ово, а неки оно откриће.

Својим радовима стекао је Галилеј врло велики број непријатеља. Најжешћи непријатељ његових радова било је свештенство. Он је, за време својих академијских ферија, одлазио у Рим са својим инструментима и тамо проводио дане и ноћи да кардиналима покаже чудеса, која је открио. У ово време, црква је имала све у својим рукама, требало је дакле и њу приволети новим идејама. Но није могао успети у томе. Због тога што је бранио Коперниково тврђење: да сунце стоји непомично у васиони, а да се земља окреће око сунца, ухвате га и баце у тамницу, и забране сва дела у којима се доказивало окретање земљино око сунца. Петог Марта 1615 године Конгрегација индекса забранила је Коперникову књигу, док не би била поправљена и, у опште, обуставила је штампање свију дела, у којима се говорило о окретању земљином. На скоро за тим, били су оглашени за јерес Коперникови и Галилејеви радови. Међу тим је Галилеј у тишини радио на своме делу *Systema Cosmicum*, које је било потпуна одбрана (апологија) Коперникових радова. Због тога, и још више због велике заузимљивости око разношења и распростирања нових идеја, Галилеј буде оптужен и притворен. При свем том, што се Галилеј налазио у канџама најсуровије власти, опет није се могао уздржати, усред покајништва пред језуитским судом, да не стисне песницу и да не прогунђа оне славне речи: „*E pur si muove*“ *(И опет се окреће)*; које су речи јачим гласом изговорене следећим столећима! За то буде понова враћен у тамницу. Овај великан, који је обдарио човечанство толиким проналасцима и толиким радовима, оглунуо је и ослепио, па умро у 78 години своје старости близу Флоренце, куда је по милости папиној премештен био.

Списи и осуда Галилејева били су знаци рата, што се распалио међу философима, у погледу окретања земље; рат, који је трајао скоро пола столећа. Мучења Галилеја праведно су изазвала у многих људи оваква негодовања: „Само се са жалошћу гледа да свет, старећи, не постаје ни бољи, ни паметнији“.

Гулден (1577—1643) нам је познат у Меканици својим значајним теоремама. Теорија тежишта равних фигура и кривих линија била је, у неку руку, претходник Гулденове теорије. Две прве књиге његових *Centrobaryca* или *de Centro gravitatis* садрже одредбу тежишта кружних лукова, исечка и сегмената како кружних тако и елептичких. Главно Гулденово откриће састоји се у оној примени, коју је чинио са тежиштем; то је откриће исказано први пут 1635 године у поменутом делу, у овој форми: „Свака фигура, вели Гулден, образована окретањем једне линије или једне површине око једне непокретне осе, равна је производу из количине производнице (генератрисе) и пута њенога тежишта“.

Још је Папус, у предговору ка својим Математичким Збиркама, приметио ово својство тежишта; али је Гулден први дао о њему, ако не аналитички доказ, оно бар један довољно прецизан исказ, који је, подељен у два дела, познат у науци под именом Гулденових теорема. Први тачан доказ о њима налази се у *Exercitationes geometricae* од *Cavalieri-a*.

И данас врло је мало дела, у којима су *Гулденове теореме* правилно и тачно исказане. Прави исказ њихов био би овај:

Прва Гулденова теорема. — Површина произведена окретањем равне криве линије око једне осе положене у њеној равни, и не секући ту осу, равна је производу из дужине те криве линије и периферије круга, коју описује тежиште те линије претпостављене хомогена.

Друга Гулденова теорема. — Запремина произведена обртањем ма какве равне површине око једне осе положене у њеној равни, и не секући ту осу, равна је производу из дате површине и периферије круга, коју описује тежиште те површине претпостављене хомогена.

О овим теоремама, као и о обилатој примени њиховој, говорићемо опширније на своме месту; за сада, да поменемо само, као уопштење друге Гулденове теореме, значајна истраживања Г. Кенигса [1]) о запреминама, произведене једним контуром; истраживања, која дају једну нову примену теорије потега.

---

[1]) *M. G. Koenigs*, Journal de Mathématiques, t. V, p. 321—343, 1889.

Декарт (*Descartes*, 1596—1650) је, својим геометријским радовима, стекао себи најсталнији део славе, који му је најмање спорен. Декартово откриће првога реда, које је основа свију других, била је примена алгебре на Геометрију кривих линија, коју је он учинио. После тога, Геометрија је узела са свим нов изглед, у коме се мора огледати права клица свију потоњих великих напредака њених. Зближење, које је Декарт поставио између Геометрије и алгебарске анализе, учинило је те су се појавиле разне узвишене теорије, из којих је Геометрија извукла за себе све користи. Пре Декарта нико није ни помишљао да даде једначину праве линије. Обдарен метафизичким духом, као што је био, Декарт је поставио значај знакова *plus* и *minus*, што се односе на смисао дужинâ однесених на једну бесконачну праву; и то је један од најдивнијих створова Декартова генија, то је и темељ *Аналитичке Геометрије*, којој је Декарт први дао великог полета.

Најправичнија идеја дала би се о епоци Декарта у модерној Геометрији, сравњујући је са епоком Платона у старој Геометрији. Као год што је Платон својим открићем спремио открића Архимедова, Аполонијева и других, може се рећи да је Декарт положио темеље оним открићима, са којих данас светле имена Њутна, Лајбница и толиких других геометара.

У Меканици, пак, Декарт није имао пречишћених појмова о многим стварима. Врло велико поверење, које је у метафизичке идеје имао, навело је Декарта на погрешке. Декарт није имао *о сили* онај прецизан појам, који јој данас ми придајемо (n° 13); и држимо, кад год се употреби реч *сила*, неопходно је нужно узети њену научну дефиницију; јер, без те обазривости, не би се више могли разумети људи разних школа. Та напомена вреди и за друге научне термине.

Декарт је подражавао Галилеју и свео Статику на један једини и општи принцип; свео на принцип: да треба толико силе, тј. иста количина напрезања, да се подигне један терет на извесну висину, колико је потребно да се подигне два пут већи терет на половину висине. Јер, вели он, подићи сто фуната на висину од једне стопе, и још сто фуната на исту висину, иста је ствар што и подићи двеста фуната на висину од једне стопе, или сто фуната на висину од две стопе; на тај начин, ефекат је исти, и према томе потребна је иста количина акције.

Декарт је узимао за принципе целе своје меканичке Физике: 1^0. Кретање постоји у једном телу са истом брзином и истим правцем све дотле, докле га никакво противдејсто не уништи, или му не промени ову брзину и овај правац. — 2^0. Да се свако кретање, по својој природи, врши само по правој линији. — 3^e. Да се једно тело креће по кривој линији само зато, што нека препрека непрестано мења његов правац, без које би препреке тело отишло правцем тангенте, која је повучена кроз тачку у којој би ове препреке нестало.

О судару тела поставио је Декарт ова два принципа: 1^0. При судару телâ остаје увек иста количина кретања. — 2^0. Тело има једну силу, којом тежи да се одржи у оном стању у коме се находи, било то стање кретања, било мировања; даље, наставио је он: Једно кретање у супротном правцу није никакво супротно стање!

Оба су ова принципа погрешни; а други у толикој мери погрешан, да је мало достојно једног метафизичара.

Из ових погрешних принципа извео је Декарт и погрешне законе о судару апсолутно тврдих (чврстих) тела, од којих да поменемо ове:

1. Ако се два тела са једнаким брзинама сударе, она ће се одбити натраг, свако са својом брзином.

2. Ако је једно од двају тела веће од другога, а брзине су им једнаке, одбиће се само мање тело, и обадва ће отићи на исту страну са оном брзином, коју су имала пре судара.

3. Ако се сударе два једнака тела, имајући неједнаке брзине супротнога смисла, биће одвучено оно тело, које се

лакше кретало; а њихова заједничка брзина биће равна половини суме оних, које су тела имала пре судара.

4. Ако је једно од двају тела у миру, па га друго мање од њега удари, ово ће се, вели Декарт, одбити без да му саопшти икакво кретање.

У Декартовим правилама има још недостатака у аналогији и вези. Ево примера: Кад се сусретну два тела покренута са једнаким брзинама, она се одбију, вели Декарт, једно и друго; али смањите врло мало једно од двају тела, тада ће се мање тело одбити са свом својом брзином, а веће тело продужиће са свом његовом брзином!

Међу тим, према Декартовим писмима, изгледа да је по неки пут схватао врло правилно неке ствари. Тако о судару, у 44 писму друге свеске, он је исказао прави закон, у случају кад је једно тело ударило ма какво друго у миру.

VIII

Друга половина седамнаестог века богатија је у научним радовима од прве половине. Ми ћемо, најпре, споменути неколико главнијих радова из Статике и Динамике, који се нас меканичара највише тичу. За тим ћемо рећи неколико речи о проналаску инфинитезималног рачуна и онда завршити овај одељак, а и ову периоду која обухвата шеснаести и седамнаести век, са кратким излагањем главнијих меканичких радова од неколико писаца из овога доба.

1. Међу онима, коју су покушавали да допуне Архимедов доказ о равнотежи полуге, морамо одликовати Хигенса, од кога имамо мали спис са насловом: *Demonstratio aequilibrii bilancis,* и штампан 1693 у Збирци старих *Мемоара Академије Наука.*

Хигенс држи да је Архимед прећутно претпостављао, ако су више једнаких терета обешени о једну хоризонталну полугу, на једнаким одстојањима једни од других, да они производе (врше) исту силу да нагне полугу, било да се сви находе на једној истој страни од тачке ослонца, било да су једни на једној а други на другој страни од тачке ослонца; и, да би избегао ову несигурну претпоставку, у место да распореди, као Архимед, аликвотне делове двају мерљивих терета на исту полугу, с једне и с друге стране од тачака о које су цели терети сматрани као да су обешени, он их распоређује на исти начин, али на две друге хоризонталне полуге, које су постављене управно на крајеве главне полуге, у облику од Т: на тај начин, имамо једну хоризонталну раван оптерећену са више једнаких терета, и која је очевидно у равнотежи на линији прве полуге, јер су терети раподељени подједнако и симетрички с обе стране ове линије. Али Хигенс доказује да је раван такође у равнотежи на једној правој, која је нагнута према овој, и која пролази кроз тачку што дели првобитну полугу на делове реципрочно сразмерне теретима са којима је претпостављена оптерећена, јер је показао да се мали терети находе такође постављени на једнаким одстојањима с једне и с друге стране од исте праве: откуда је закључио да раван а према томе и задата полуга морају бити у равнотежи на истој тачци.

Овај је доказ оштроуман, али он не допуњује потпунце у ономе што се може, у ствари, желети у оном Архимедовом доказу.

2. Равнотежа једне праве и хоризонталне полуге, чији су крајеви оптерећени једнаким теретима, и чија је тачка ослонца у средини полуге, сâма је по себи очевидна истина, јер нема разлога да један од терета претегне други, пошто је све подједнако с једне и с друге стране од тачке ослонца. Није тако исто и са претпоставком да је терет ослонца раван суми обају терета. Изгледа да су је сви меканичари узели као резултат свакодневног искуства, које показује да тежина једног тела зависи само од његове це-

локупне масе, а никако од његовог облика.[1]) При свем том, може се извести ова истина из прве, посматрајући, као Хигенс, равнотежу једне равни на једној линији.

За то, замислимо само једну троугаону раван оптерећену двама једнаким теретима на двама крајевима њене основе (базе), а двогубим теретом на њеном темену. Ова ће раван, очевидно, бити у равнотежи, пошто је наслоњена на једну праву линију или фиксну осу, која пролази кроз средине двеју страна троуглових; јер се свака од ових страна може сматрати као једна полуга која је оптерећена, на својим двама крајевима, двама једнаким теретима и која има своју тачку ослонца на оси која пролази кроз њену средину. Сада се може посматрати ова равнотежа на други начин, сматрајући саму основу троуглову као једну полугу чији су крајеви оптерећени двама једнаким теретима, и замишљајући једну трансверзалну полугу, која саставља теме троуглово са средином његове основе у облику од Т, чиј је један крај оптерећен двогубим теретом постављен на темену, а други крај служи за тачку ослонца полузи која образује основу. Очевидно је да ће ова последња полуга бити у равнотежи на трансверзалној полузи, која је држи у њеној средини, и да ће ова, према томе, бити у равнотежи на оси на којој је раван већ у равнотежи. Но, како оса пролази кроз средине двеју страна троуглових, она ће такође нужно проћи кроз средину праве повучене од темена троугловог ка средини његове основе; дакле, трансверзална полуга имаће своју тачку ослонца у средини и, према томе, мораће бити оптерећена подједнако на оба краја: дакле, терет који сноси тачка ослонца полуге, која чини основу троугла, и која је оптерећена на својим двама

---

[1]) Лагранж мисли да је Даламбер био први, који је покушао да докаже ову поставку; али доказ, који је дао у *Мемоарима Академије Наука* 1769, није потпунце довољан. Онај доказ, што га је по том дао Фурије у V свесци *du Journal de l' École Polytechnique,* тачан је и врло оштроуман; али није узет из полугине природе.

крајевима једнаким теретима, биће раван двогубом терету темена а, према томе, раван је суми обају терета.

Ако би се, место једног троугла, посматрао један трапез оптерећен на своја четири темена (угла) са четири једнака терета, нашло би се, на исти начин, да две полуге неједнаких дужина, образујући паралелне стране трапезове, производе једнаке силе на своје тачке ослонца.

3. Ова поставка једном утврђена, јасно је да се може, као што је то Архимед радио, заменити један терет, који је у равнотежи на полузи, двама једнаким теретима, сваки раван половини овога терета, и постављени на исту полугу, на једнаким одстојањима с једне и с друге стране од тачке за коју је терет привезан; јер, акција овога терета иста је као акција једне полуге обешене својом средином о исту тачку и оптерећена, на својим двама крајевима, двама једнаким теретима, сваки раван половини истога терета; и очевидно је да ништа не спречава приближити ову последњу полугу ка првој, тако да она постане саставни део њен. Или још, што је може бити очигледније, има се само сматрати ова последња полуга као да је држата у равнотежи једном силом, која дејствује на њену средину, управљена оздо на више и равна терету чије су две половине сматране као да дејствују на њене крајеве; тада, полажући ову полугу у равнотежи на прву полугу, која је претпостављена да је у равнотежи на њеној тачци ослонца, тотална равнотежа постојаће увек, и, ако се полагање учини тако да се средина друге полуге поклопи са крајем једнога од кракова прве полуге, сила која држи другу полугу моћи ће бити сматрана као да дејствује на сâми терет којим је овај крак оптерећен, и који, пошто је држан, неће више дејствовати на полугу, али ће се на тај начин наћи замењен двама једнаким теретима, сваки раван његовој половини, и постављени с једне и с друге стране од овога терета на прву полугу

продужену. Ова је суперпозиција о равнотежама, у Механици, тако исто плодан принцип као што је, у Геометрији, суперпозиција фигура.

4. Може се дакле сматрати равнотежа једне праве и хоризонталне полуге, оптерећене двама теретима који су у обрнутој размери њихових одстојања од полугине тачке ослонца, као једна тачно доказана истина; и, помоћу принципа суперпозиције, лако је распрострети је на једну ма какву полугу на лакат, чија би тачка ослонца била у углу и чији би краци били вучени у супротном смислу са силама управним на њихове правце. И заиста, очевидно је да ће једна полуга на лакат са једнаким крацима, и покретна око темена угла, бити држана у равнотежи двема једнаким силама, које дејствују управно на крајеве двају кракова, и тежећи да их обрну у супротном смислу. Ако дакле имамо једну праву полугу у равнотежи, чиј је један од кракова једнак са крацима полуге на лакат и да је оптерећен на свом крају једним теретом који је еквивалентан свакој од силâ које дејствују на полугу на лакат, пошто је други крак оптерећен нужним теретом за равнотежу, и ако се ставе једна на другу ове две полуге тако, да теме угла једне полуге падне на тачку ослонца друге, и да се једнаки краци једне и друге полуге поклопе и направе само један крак, сила која дејствује на крак полуге на лакат држаће терет обешен о једнаки крак праве полуге, тако да ће се моћи апстраховати један и други, и претпоставити крак образован скупом ових двају уништених. Равнотежа ће, дакле, још постојати између двају других кракова, који образују једну полугу на лакат, и на чијим крајевима дејствују силе управне и у обрнутој размери са дужинама кракова, као код праве полуге.

Но једна сила може бити сматрана као да дејствује на ма коју тачку, која је на њеном правцу. Дакле, две силе, које дејствују на ма које тачке једне равни која је утврђена једном сталном тачком, и које су управљене како се год хоће у овој равни, јесу у равнотежи кад су међу собом у обрнутој размери са управнима спуштеним из ове тачке на њихове правце; јер се ове управне могу сматрати као да образују једну полугу на лакат чија је тачка ослонца она фиксна тачка равнина: то је што се сада назива *принципом момената*, подразумевајући под моментом производ једне силе и крака полуге, на који она дејствује.

Овај општи принцип довољан је за решавање свију проблема из Статике. Посматрање *сираве* или *машине за дизање терета (le treuil, die Winde, точак на вратилу, витао,* како је неки зову) учинило је те он примећен на првим корацима, који су учињени после Архимеда, у теорији простих машина, као што се то може видети у поменутом делу *Mecanicorum liber* од Гида Убалдија; али овај писац није знао да примени на стрму раван, па ни на друге машине које од ове зависе, као клин и уртањ, о којима је дао мало тачну теорију.

5. Ако је какав природни појав побудио радозналост механичара то је, без сумње, *судар тела* и *комуникација кретања*, која отуда следује. Нема ничега општијег, ничега што би се чешће збивало пред нашим очима; кад се промисли о томе, признаће се да је стидно за филозофију, што је тако доцкан обратила пажњу на тај појав и што се тако доцкан почела њиме занимати.

Изгледа да је славни Декарт први опазио да има одређених и сталних закона, што управљају том комуникацијом кретања. Он је такође први покушао и да их одреди, али није успео. И многи други физичари покушавали су, истина безуспешно, да их одреде. Али, краљевском друштву у Лондону дугујемо, у неку руку, прва темељна открића законâ о судару телâ. Пошто је више пута потрзало овај предмет на својим седницама, ово га је друштво предложило оним својим члановима, који су се највећма били одали на Меканику, позивајући их да га испитају и проуче и да седници поднесу извештај о томе. Три славна геометра *Валис* (1616—1703), *Врен* (1632—1723) и *Хигенс* решили су са успехом то питање, и њима припада слава за открићем. Валис је први саопштио свој спис, за тим Врен, а мало доцније и Хигенс.

Метода доктора Валиса најнепосреднија је. У првом спису свом он говори само о законима судара између апсолутно тврдих и меких тела; али је, после тога, у своме делу *De motu*, штампано 1670, распрострео своју теорију и на еластичка тела.

Да би се могли поставити закони о комуникацији кретања, треба најпре разликовати две врсте тела: прво, тела обдарена том особином и моћи да заузимљу свој првобитни облик, кад су га изгубила услед судара са неким другим телом; друго, тела која немају те особине и моћи. Ово је разликовање тела врло нужно, јер су закони о судару и комуникацији кретања веома различни код једних и других тела. Одредба законâ, у случају друге врсте тела, лакша је и први је корак, који има да се учини при решавању општега проблема.

За први принцип овога решења Валис узимље: Једна сила, која има да стави једно тело у кретање, саопштиће овоме у толико мању брзину у колико је оно веће. Он прећутно претпоставља да је реакција равна акцији, тј. једно ударено тело поништава у телу, које је судар учинило, онолико од кретања колико му је ово од истога саопштило. — Усвојивши ове принципе, Валис је посматрао разне случајеве: 1°. Једно тело, покретано извесном брзином, ударило је друго тело у миру; специјални случај, када је тело у миру два пута мање од тела које га је ударило. — 2°. Једно тело стигло је друго тело у кретању и ударило се ш њим. — 3°. Судар двају тела у кретању, кад се крећу истим правцем а у супротном смислу; и још више других случајева.

Из знања законâ о судару телâ ове врсте потиче познавање законâ о судару еластичких тела. Валис је и за та тела проучио разне случајеве: 1°. Једно еластичко тело сударено је другим. — 2°. Два еластичка тела, са једнаким брзинама, крећу се у супротном смислу и сударе се; специјални случај, кад су им брзине различне. — 3°. Једно еластичко тело стигло је друго тело у кретању и ударило се ш њим; итд. — Неки тврде да је Валис поставио и *принцип консервације количине кретања.*

Вренов спис потпунце се подудара са оном теријом, коју је Валис поставио; разлика је само у томе, што Врен говори у свом спису само о еластичким телима. Његово излагање законâ о судару еластичких тела значајно је својом краткоћом и општношћу.

Начин, пак, на који је Хигенс изложио законе о судару тела, апсолутно је исти и исте елеганције као и онај Вренов. И Хигенс је, као и Врен, посматрао само еластичка тела, и која је назвао тврдим телима. Метода, коју је Хигенс употребио при постављању својих закона о судару тела, није непосредна, као она Вренова. Ту Хигенсову методу находимо у његовом посмртном делу *De motu corporum ex percussione.* Изгледа да је се Хигенс бојао да уђе у физичку анализу онога, што се дешава при судару телâ. У место да је употребио ту методу, он је пошао од неколико експерименталних истина, које је вешто комбиновао, и отуда извукао своје доказе. Ми не ћемо, овде, да говоримо о начину његовог умовања, нити о његовим законима о судару телâ; него ћемо само напоменути да су теорије о судару телâ основане на искуству и опитима. Списи Валиса, Врена и Хигенса тек су онда били објављени, пошто су физичари измислили разне начине да те теорије докажу и да их очигледнима учине.

При судару еластичких тела јавља се један веома важан појав, који је Хигенс први приметио и посматрао. Тај је појав: сума производа сваке масе и квадрата њене брзине иста је пре и после судара. Неколико физичара назвали су овај закон *принцип консервације живих сила;* јер је славни Лајбниц мерио силу телâ у кретању са производом масе и квадрата брзине, и он је назвао ту силу: *жива сила.* — У делима Галилејевим, Декартовим и Торичелијевим налазимо рудиментарне исказе принципа живих сила; али, код Хигенса, тај принцип има много већу важност.

Мариот, обрађујући брижљиво експерименталну физику, предузео је у исто време и тај предмет о судару телâ. Први одељак његовог дела *de la Percussion,* 1677, садржи доказе о законима при судару телâ.

6. *Олаф Ремер (Roemer,* † 1710), дански астроном, посматрајући помрачења првога пратиоца Јупитерова 1675, нашао је да би светлост прешла размак између сунца и земље за 8 минута и 17,8 секунада; нашао је, дакле, да је брзина светлости 300 милиуна метара у секунди. Данас можемо, по познатим нам начинима из физике, наћи брзину сваког светлосног зрака.

7. Проматрање бесконачно-малих количина био јо предмет студирања математичарâ XVII века. Оно је и претходило проналаску *Инфинитезималног рачуна.* Енглеска је земља мати овога новог рачуна и свију других величанствених новости из Анализе и Геометрије.

Кад је већ реч о проналаску Инфинитезималног рачуна, упутићу читаоца на споменуту *Св. Савску беседу г. Димитрија Нешића* од 1893, из које ћу и ја овде позајмити већи део материјала. Тако: „Лајбниц је 1684 године у лајпцишким *Acta eruditorum* изашао на среду са једним својим чланчићем од три листа а са насловом: *Nova methodus pro maximis et minimis, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* То значи нова метода о максимима и минимима, којој не задају муке ни разломљене ни ирационалне количине и особити начин рачунања са истима.

„На три године после прве појаве поменутог Лајбницовог чланчића, дакле 1687 излази Њутн на среду са својим бесмртним принципима природне философије, у којима он први пут открива божанствене законе опште гравитације. У том свом делу, које би већ само собом довољно било, да га обесмрти, Њутн је на свој начин и под именом методе флуксија изложио прве основе инфинитезималног рачуна“.

После овога и у почетку идућег — осамнаестог — века, *Њутн*, *Лајбниц* (1646—1716) и браћа *Јаков* (1654—1705) и *Јован Бернули* (1667—1748) образовали су систематичку доктрину под именом: *Инфинитезималног рачуна* или *Теорије функција*, која надмашује својом важношћу све проналаске овога века укупно узети.

Кад су Њутн и Лајбниц увидели важност свога проналаска, онда је се између њих отворила *„борба за приоритет проналаска инфинитезималног рачуна“*, из које, по оцени потомства, излази: „Њутн и Лајбниц, ова два скоро највећа генија свију векова и времена, могли би се обојица сматрати као проналазачи инфинитезималног рачуна; и обојици великана припада подједнако слава најславнијег проналаска“.

Док је већина геометара живо радила на изучавању новог рачуна, било их је других, који су му објавили рат, и који су се трудили свим силама да га оборе и униште. Али је нови рачун био сличан јасноћи јутарње зоре, која растерује ноћне таме и опсене.

Овај су нови рачун опширно обрадили и различне и многобројне примене његове показали браћа Бернули и L' Hospital, савременици Њутна и Лајбница, и математичари осамнаестог и деветнаестог века, следбеници њихови. Поменимо само да је *L' Hospital* (*Лопитал*, рођен у Паризу 1661—1704), поред осталога, дао правило за изналажење праве вредности израза, који се јављају у неодређеним облицима.

„Успеси новог инфинитезималног рачуна при решавању најразноврснијих и најтежих задатака, не дуго после прве појаве његове, били су тако велики и неочекивани, да су научари у првом заносу и одушевљењу мислили, да је математика већ достигла жељени последњи ступањ савршенства и да ће дакле она у стању бити, да савлада сваку рачунску тешкоћу, која би се при проучавању природних појава могла појавити. Али то је био само један лепи сан, који није дуго трајао. Јер су новим методама почела на скоро излазити на сусрет све тежа и тежа питања, која су све веће и веће напоре духа изискивала“.

Колико су остали Лајбницови радови, као и његова филозофија, користили Математици, није наше да излажемо овде. Али не можемо прећутати, па макар нам се и замерило, а да не поновимо речи г. Нешића: „Са Лајбницом се дичи и поноси сва Немачка, јер је у њојзи и рођен. Али он је у истини чедо оног јуначког српског народа, чија је једна половина пре 12 столећа оставила своја прадедовска огњишта и сишла у наше питомије крајеве, да ту себи нову отаџбину оснује. И та половина то су Срби ових наших покрајина, то смо ми. Браћа наша, која су остала тамо на својим старим седиштима, и из чије је средине поникао славни Лајбниц, била су кроз дуги низ векова својој источнијој браћи Пољацима и Русима тврди бедем против силне навале немачке. На обалама Сале и Лабе, Спреве и Одра текла је кроз векове и потоцима њихова племенита српска крв. Поља Лужице и Бранибора, Пруске и Померанције засута су и пресута њиховим јуначким српским костима. Али тај бедем од српских груди сада је на жалост са свим пропао, и његове последње остатке на скоро ће, и то пред очима стомилионитог Словенства, прогутати и поклопити бесни таласи немачкога бурног и незајажљивог мора“.

Роберват (1602—1675) је, *у Статици*, посматрао такође терет наслоњен на једну стрму раван као да је привезан за крак једне полуге управне на раван, и сматрао је силу као једну силу, која дејствује на исти крак, у датом правцу; на тај начин он је имао једну полугу са једним јединим краком, чиј је један крај сталан, а други је крај вучен двема силама, она терета и она силе која га држи. Он је, за тим, заменио ову полугу са једном полугом на лакат, чија су два крака управна на правце двеју сила, и која има исту сталну тачку за тачку ослонца, и претпоставио је две силе да дејствују на краке ове полуге у њиховим сопственим правцима, што му је дало за равнотежу однос терета ка сили, у обрнутој размери двају кракова полуге на лакат, тј. управних повучених из сталне тачке на правце терета и силе.

Отуда је Робервал извео равнотежу једног терета држаног двама конопцима (ужетима), који граде међу собом ма какав угао, замењујући полугу управну на раван једним конопцем, који је привезан за тачку ослонца полуге, а силу једним другим конопцем, који је вучен једном силом у правцу замењене силе; и, разним конструкцијама и мало компликованим аналогијама, он је дошао до овога закључка: ако се од ма које тачке, која је узета на вертикали терета, повуче једна паралелна са једним од конопаца, до пресека са другим конопцем, троугао образован на тај начин имаће своје стране сразмерне терету и силама које дејствују у правцу истих страна, што је, као што се види, теорема коју је дао Стевин. То је први тачан доказ Стевинове теореме.

Ми смо, довде, улазили у појединости, које се односе на теорију полуге, да бисмо показали како треба пратити поступно развијање људскога духа у наукама, и да бисмо показали оне путеве, којих су се проналазачи држали, и непосредније путеве, којих би се били могли држати.

Статичка дела, која су се појавила после Робервалової дела, до епоке открића о слагању сила, нису ништа додала ка овом меканичком одељку; у њима се само находе већ позната својства о полузи и стрмој равни, и њихова примена на друге просте машине; још се находи међу њима неколико дела, која садрже мало тачних теорија, као што је оно од *Лами-а* о равнотежи чврстих тела, у коме је дао погрешну размеру терета ка сили, која га држи на једној стрмој равни. Ја не говорим овде о Декарту, Торичелију и Валису, јер су они усвојили за равнотежу један принцип, који се односи на принцип виртуелних брзина, а о коме нису имали доказа.

И за *Динамику* има Робервал својих заслуга. — Кад су тела састављена уједно, тако да се не могу слободно покоравати примљеним потисцима и убрзавним силама, којима су покретана, онда ова тела нужно врше једна на друга непрекидне притиске, који мењају њихова кретања и отежавају одредбу ових (кретања).

Први и најпростији проблем ове врсте, којим су се геометри бавили, јесте проблем о осцилационом центру. Овај је проблем био врло знаменит, по покушајима и напорима, која су чинили највећи геометри да би изашли ш њим на крај; и како су, у главном, ови покушаји и допринели те је Динамика по том учинила огромне напретке, ја мислим да треба дати о њима кратку историју овде, те да тако покажемо којим је се степеницама попела ова наука до онога савршенства, до кога је, изгледа, доспела у последња времена.

Писма Декартова дају прве трагове о истраживањима осцилационог центра. У њима се види да је Мерсен био предложио геометрима да одреде величину, коју мора имати једно тело ма каквог облика, па да оно, обешено о једну тачку, гради своје осцилације за исто време за које и један конац од дате дужине и оптерећен на своме крају једним јединим теретом. Декарт, Робервал па и са̂м Хигенс, ма да још врло млад, били су нарочито позвани на ова истраживања.

Декарт је приметио да ово питање има неког односа са питањем о тежишту и као год што у једном тешком телу,. које пада слободно, има једно тежиште око кога су напрезања тежине свију делова тела у равнотежи, тако да ово тежиште силази на исти начин као када би остатак тела био уништен или као када би био концентрисан у истом тежишту; тако, у тешким телима, која се обрћу око једне сталне осе, мора бити једног центра, који је он назвао *агитационим центром*, око кога се *агитационе* силе свију делова тела држе у равнотежи, тако да овај центар, пошто је слободан од акције ових сила, може бити покретан као што би био кад би сви други делови тела били уништени или концентрисани у овом истом центру; према томе, сва тела, у којима ће овај центар бити подједнако удаљен од ротационе осе, чиниће своје вибрације за исто време.

После овога појма о агитационом центру, Декарт је дао једну општу методу помоћу које можемо да га одредимо у телима ма каквог облика; ова се метода састоји у тражењу тежишта агитационих сила од свију делова тела, ценећи ове силе са производима из масâ помножене са брзинама, које су овде сразмерне одстојањима од ротационе осе, и претпостављајући да делови тела буду пројектовани на раван, што пролази кроз његово тежиште и кроз ротациону осу, тако да они (делови) задржавају своја одстојања од ове осе.

Ово је Декартово решење постало предметом препирања између њега и Робервала. Робервал је тврдио да је оно добро само онда, када су сви делови тела у истини или могу бити сматрани као постављени на једну исту раван која пролази кроз ротациону осу, да је у свима другим случајевима требало посматрати само кретања управна на раван, која пролази кроз ротациону осу и тежиште тела, и да је требало упоредити сваку честицу са тачком у којој је се ова раван сусрела са правцем кретања ове честице, правац који је увек управан на раван повучену кроз ову честицу и кроз ротациону осу. Али, лако је доказати да су, у односу на ротациону осу, моменти силâ, на тај начин оцењене, увек равни моментима силâ оцењених по Декартовој методи. — Ова напомена тврди да Робервалова замерка није била основана; али, био је бар у праву да тврди да је Декартово правило погрешно кад се не односи на једну равну фигуру, која се окреће око једне осе положене у њеној равни. Мора се чак додати да је Роберવал показао без доказа тачан положај агитационог центра једног кружног исечка, који се окреће око једне управне на његову раван, управне повучене кроз центар исечка. *(Oeuvres de Descartes,* t. IX, p. 521; издање од M. Cousin-a).

Роберវал је тврдио, са више основа, да је Декарт тражио само перкусиони центар, око кога су судари или моменти перкусија једнаки, и, да би се нашао прави осцилациони центар неког тешког клатна, требало би такође имати у виду акцију теже, на основу које се клатно креће. Али, пошто је ово истраживање узвишеније од Меканике тога времена, геометри су продужили да прећутно претпостављају да је перкусиони центар исти што и осцилациони центар, и Хигенс је био први који је посматрао овај последњи центар са његове праве тачке гледишта; тако исто сматрао је да се мора узети овај проблем као са свим нов и, пошто није могао да га реши помоћу познатих закона о кретању, он је пронашао један нов, али посредан принцип који је по том постао веома славан под именом *принципа консервације живих сила.*

Хигенс (*Huygens,* 1629—1695) је онај коме Меканика, после Галилеја и Њутна, највише дугује за своје напредовање у седамнаестом веку. Изгледа да је било суђено Хигенсу да усаврши и да попуни већину проналазака својих претходника, па и оне Галилејеве. Као што смо већ казали, Хигенс је се, у свом малом спису *Demonstratio aequilibrii bilancis* од 1693, одликовао међу онима, који су покушавали да допуне Архимедов доказ о равнотежи полуге; тако исто, у његовом посмртном делу *De motu* *corporum ex percussione*, налазимо методу по којој је поставио законе о судару телâ. Галилеј је се бавио истраживањем фигуре равнотежног положаја једне тешке и хомогене *верижнице* (*la chaînette, die Kettenlinie*), коју неки *ланчаницом* називљу, и држао је да је та фигура била једна парабола; ту Галилејеву омашку исправио је Хигенс. Поред тога, Хигенс је показао примену клатна на сатове; њему дугујемо ретко откриће о изокронизму осцилација циклоидалног клатна. Хигенс је, истина без доказа, дао важних ставова о кретању једне тачке, која мора непрестано да остаје на једном датом кругу; прве црте из теорије о централним силама и, најзад, теорија осцилационог центра, биле су најглавнији механички радови Хигенса. — Ми ћемо, врло укратко, изложити у неколико тачака најглавније радове његове.

1. Међу механичким открићима Хигенсовим ми примећујемо једно као главно, и које је, изгледа, било побуда и узрок свију других; то је оно откриће о примени клатна на регулисање кретања код сатова.

Једнакост трајања између осцилација једнога клатна био је појав већ врло добро познат, кад је се Хигенс одао на математичке науке. Галилеј, који је први посматрао тај појав, имао је такође намеру да га примени на мерење времена; и помогнут од свога сина, био је скицирао једну машину за то, — али ова Галилејева намера није допринела астрономији никаквих користи. Приметив користи, које би астрономија могла имати од клатна, Хигенс је се одао изучавању његовом. Подједнако обдарен генијем Механике и Геометрије, Хигенс је, крајем 1656, измислио једну лепу конструкцију сата; и већ око средине 1657 године поднео је држави један сахат своје нове конструкције, коју је одмах после тога објавио једним особеним списом и која је била универсално усвојена. Његово чувено дело *Horologium oscillatorium,* објављено 1673, у коме је изнео своја темељна и суптилна истраживања за једну исту цељ, може служити као најзначајнији пример специјалних истраживања, што нам је довде дала историја свега ума људскога.

Посматрајући осцилације свога клатна под разним околностима, Хигенс је дошао на мисао да реши овај проблем: Одредити дуж које криве линије мора се котрљати један терет да би, од ма које тачке почињало његово падање, дошао за исто време у најнижу тачку. Хигенс је тражио и нашао да циклоида има ту особину. Ова лепа истина, при свем том што је њено откриће било врло тешко, може се врло лако доказати. Краткоће говора ради, геометри су дали томе својству име *таутокронизам (le tautochronisme, die Gleichzeitigkeit)*, што ће рећи *идентичност* или *једнакост времена* међу падовима. Из истог разлога, називљу се *таутокроним линијама* или, као именица, *таутокронама*[1], оне криве линије, које имају исто својство у извесним приликама и под различним претпоставкама. Циклоида је таутокрона линија у безваздушном простору и под претпоставком једнаког убрзања тешких тела и паралелних праваца. Али, ако претпоставимо да се ови правци секу у једној тачци (конвергују), и да се сила теже мења као одстојање од центра, таутокрона линија биће једна епициклоида. Ову елегантну и значајну истину доказао је Њутн.

Показавши да је нужно, да терет клатна описује једну циклоиду, па да његове ма какве осцилације подједнако трају, Хигенсу је остало да изради овај меканизам. За то је, са много оштроумности, Хигенс изнашао да би свака крива линија могла бити описана развијањем неке друге, тако да је потребно, да би центар клатна описао једну циклоиду, одредити ову другу криву линију и учинити да се конац од клатна полаже по њој у његовим кретањима. Ово је било порекло његове славне теорије о девелопама. Ми ћемо се о томе ограничити овде и само приметити да

---

[1]) Долази од *Ταὐτὸ*, исти, -о (од *τὸ* тај, то, и *αὐτὸ* исти, -о), и *χρονος*, време.

је Хигенс нашао, да је крива линија, по којој се мора положити конац од клатна, опет била једна циклоида једнака са првом, а само положена у супротном смислу.

2. Хигенс је прецизирао појмове о маси и сили, и тиме је много допринео, те је се Динамика почела повољније развијати. Маса и сила не стварују се, нити се икада губе; ми их налазимо непромењиве по количини, и без њихове константности и њихове целости не бисмо никако ни имали науке.

И ако први појам о принципу релативних кретања (n° 16) дугујемо Галилеју, ипак се може сматрати Хигенс као прави творац његов. И једначине у Динамици, или, боље рећи, законе у Динамици, било је могућно поставити полазећи од извесног броја принципâ или основних истина, чије је упознавање црпено у посматрању факата.

Разлагање убрзања на тангенцијалну и нормалну компоненту први је извршио Хигенс. Он је опширно писао и о принципу рада.

3. Један од појава, одавна познат физичарима, био је овај: тела, која се кружно крећу, теже да се удале од центра њиховог кретања. Опит са праћком свакоме је познат. Водене капљице, кад падну на површину глобуса, који се брзо окреће око своје осе, одлетиће далеко са глобуса. Једно тело привезано за конац, и метнуто на хоризонталну површину која се брзо окреће око једне тачке, затегнуће овај конац, па ће га чак и прекинути, ако је сила, коју му на супрот ставља, мања од напона што га сноси.

Узрок овога појава изводи се из законâ о кретању. Свако тело у кретању тежи за праволинијским правцем; и ако га каква препрека примора да узме криволинијски пут, одмах чим се ослободило ње, оно продужава свој пут по правој линији, која је тангента повучена кроз тачку у којој је препрека престала. Могло би се то лако доказати, кад не бисмо о томе били убеђени. Кад се једно тело привезано, нпр., за један конац, кружно креће, оно тежи свакога тренутка да побегне тангентом. Али, не би се могло одвојити једно тело од свога природног правца, па ни ставити у кретање, а да се при том не претрпи неки отпор у супротном смислу. Конац, о који је тело привезано и који га држи на кружној периферији, вукући тело ка центру, претрпиће дакле неко супротно напрезање, тј. у правцу од центра ка периферији. Ако, у место једног конца, претпоставимо једну ма какву силу, која дејствује на ово тело гурајући га на периферију, лако је увидети да ће бити иста ствар; ова ће сила претрпети од стране тела једну реакцију, или једно напрезање у супротном смислу. Ово напрезање, сматрано као ефекат инерције тела и као тежња да га удали од центра, названо је *центрифугалном силом*. Противположена сила, која га непрестано доводи на криволинијски пут, названа је *центрипеталном силом*. Писци им дају опште име, име *централних сила*. У кружном кретању, оне су једнаке; јер, пошто се тело не приближује центру, нити од овога удаљује, нужно је да су једна и друга сила непрестано у равнотежи, тј. да су једнаке; али, у кретањима по другим кривим линијама, оне се наизменички надвлађују, и ту лежи узрок периодичких приближавања и удаљавања извесних тела, као што су планете, од центра њихових кретања.

Знање о центрифугалној сили датира из дубоке старине, али Декарт и Галилеј били су први који су дали о њој праве појмове. При свем том ови филозофи, славни по другим радовима, остали су у овоме на једној незнатној скици. Хигенсу дугујемо за најозбиљнија истраживања на овом интересантном предмету. Ми ћемо то укратко представити и изнети преглед основних истина, које је он открио и које је објавио у петом одељку свога *Horologium oscillatorium*, под називом: *Theoremata de vi centrifugâ*.

Сталан однос који мора постојати, код једнако-убрзаних кретања, између брзинâ и временâ, или између просторâ и квадратâ временâ, може бити узет за меру убрзавне силе, која непрекидно дејствује на покретно тело (тачку); јер, у истини, ова сила може бити одређена само ефектом, који она производи у телу и који се састоји у произведеним брзинама или у пређеним просторима за дата времена.

На тај начин довољно је, за ту одредбу силâ, посматрати кретање произведено за ма које време, коначно или бесконачно мало, претпоставивши силу као сталну за то време; према томе, ма какви да су кретање тела и закон његовог убрзања, пошто се акција сваке убрзавне силе, по природи диференцијалног рачуна, може сматрати као стална, за бесконачно мало време, моћи ће се увек одредити вредност силе која дејствује на тело у сваком тренутку, сравњујући произведену брзину у овом тренутку са трајањем истога тренутка, или сравњујући простор пређен за време истог тренутка са квадратом трајања тога тренутка; и чак није ни нужно да је овај простор стварно био пређен телом, довољно је да може бити сматран као да је био пређен једним сложеним кретањем, пошто је ефекат силе исти и у једном и у другом случају, према принципима кретања.

На тај начин, Хигенс је нашао да су центрифугалне силе телâ, која се крећу по круговима са сталним брзинама, као квадрати брзинâ подељени са полупречницима кругова; и могао је сравнити ове силе са привлачном силом на површини земље, чијом се комбинацијом производи једна врста осцилације, коју је Хигенс проучио у свом делу и из које потичу више изредних ставова.

Прве истине, које потичу из теорије о центрифугалним силама, представљају се доста природно. Тако, претпостављајући исту брзину, у колико је мањи круг, који ће описивати покретно тело, у толико ће бити већа његова центрифугална сила. Тако исто, узевши исти круг, центрифугална сила биће у толико већа, у колико ће брзина бити већа.

Хигенс је решио и овај важан проблем: Какав је, под овим различним околностима, однос центрифугалних сила? Тако исто, важно је знати апсолутну количину ове силе у једном телу, које се креће са одређеном брзином. То је посматрање једно од најделикатнијих и најсуптилнијих у Хигенсовој теорији.

Комбинишући ову теорију о центрифугалним силама са теоријом о девелопама, чији је ауктор био такође Хигенс, и који је сводио на кружне луке сваки бесконачно мали део једне ма какве криве линије, било му је лако да је распростре на све криве линије. Али је било резервисано за Њутна да учини овај нов корак и да допуни науку о променљивим кретањима и о убрзавним силама, које могу да их произведу. Ова се наука, сада, састоји само из неколико врло простих диференцијалних формула; али Њутн је се непрестано служио геометријском методом, а, ако је се по неки пут и служио аналитичким рачуном, тада је једино методу о серијама (редовима) употребљавао, која се метода мора разликовати од диференцијалне методе, ма да је лако било да се оне зближе и да се сведу на један исти принцип.

Геометри, који су, после Њутна, обрађивали теорију о убрзавним силама, готово сви су се задовољили да уопште ове теореме и да их преведу у диференцијалне изразе. Отуда различних образаца о централним силама, што се находе у више меканичких дела, али који се више никако не употребљују; јер су се примењивали само на криве линије, за које би се претпоставило да су описате под утицајем једне једине силе која тежи ка једном центру, и што сада имамо општих образаца за одредбу кретања̂, која су произведена ма каквим силама.

4. Што је тежиште у Статици, то је, са више тачака гледишта, осцилациони центар у Динамици. Многобројна

питања, што се односе на кретање тела, изискују знање о овоме центру.

Као што смо видели, Декарт је дао правилно решење за случај кад једна равна фигура осцилише *in planum,* у равни; али је се преварио у другим случајевима, нпр., кад се тиче осцилационих центара код чврстих тела, јер су ови случајеви тежи од онога који је он решио. Робервал је, истина, ишао даље од Декарта, али је се и он преварио у неким случајевима. За Хигенса је било резервисано да посматра осцилациони центар са правог гледишта и да он теорији осцилационог центра, једној од најделикатнијих и најсуптилнијих теорија у Меканици, постави темељ, достојан творца неимара — Хигенса.

Један конац, сматран као једна крута (невитка) линија без тежине и без масе, привезан једним крајем за једну сталну тачку и оптерећен, на другом крају, једним малим теретом који се може сматрати као да је сведен на једну тачку, образује оно што се *простим клатном (шеталицом)* називље; и закон клаћења овога клатна зависи једино од његове дужине, тј. од одстојања терета од тачке вешања. Али, ако се о овај конац привеже још један или више терета, на разним одстојањима од тачке вешања, тада ће се добити једно сложено клатно чије ће кретање морати држати извесну средину између кретањâ од разних простих клатна, која бисмо имали кад би сваки од ових терета био сâм обешен о конац. Јер, привлачна сила тежећи, с једне стране, да учини да подједнако сиђу сви терети за исто време, а с друге стране, крутост конца приморавајући их да опишу за ово исто време лукове неједнаке и сразмерне њиховом одстојању од тачке вешања, мора се начинити између ових терета нека врста изравнања и расподела њихових кретања; тако да ће терети, који су најближи тачци вешања, убрзати клаћења оних најудаљенијих, а ови ће, на против, успоравати клаћења првих. На тај начин биће на концу једне тачке у коју, ставивши једно тело, његово кретање не би било ни убрзавано нити успоравано другим теретима, него би било исто као када би било оно са̂мо обешено о конац. Ова ће тачка, дакле, бити прави центар осцилације сложеног клатна, и један такав центар мора се такође налазити у сваком чврстом телу, ма каквог облика оно било, које осцилује око неке хоризонталне осе.

Хигенс је увидео, да је немогућно тачно одредити овај центар, ако се не зна закон по коме разни терети сложеног клатна узајамно мењају кретања што тежа тежи да им саопшти у сваком тренутку; али, место да је тражио да изведе овај закон из основних меканичких принципа, он је се задовољио да ове замени једним посредним принципом, који се састоји у томе: да се претпостави, ако више терета, повезани како се хоће за једно клатно, силазе под утицајем једине акције теже, и да, у једном ма ком тренутку, буду одрешени и раздвојени једни од других, сваки од њих моћи ће, на основу задобивене брзине за време свога пада, да се попне на такву висину да ће се заједничко тежиште наћи попето на исту висину са које је било сишло. У истини, Хигенс није поставио овај принцип одмах, него га је извео из двеју хипотеза, за које је мислио да морају бити усвојене као захтеви Меканике: једна хипотеза, да се тежиште једног система тешких тела не може никад попети на већу висину од оне са које је оно пало, ма каква промена да се учини у узајамном расположају тела̂, јер у противном случају вечито кретање не би више било немогућно; друга хипотеза, да се сложено клатно може увек са̂мо собом попети на исту висину са које је слободно сишло. У осталом, Хигенс је приметио да исти принцип постоји код кретања тешких тела, која су повезана уједно на ма какав начин, као год и код кретања течности̑.

Не би се могло погодити, шта је дало идеју овом ауктору за такав принцип; али се може претпостављати да је на њ био наведен теоремом коју је Галилеј био доказао о паду тешких тела, која (тела), било да силазе вертикално или по стрмим равнима, увек задобивају брзине, које су у стању да их понова попну на исте висине са којих су била пала. Ова теорема, уопштена и примењена на тежиште једног система тешких тела, даје Хигенсов принцип.

Ма како то било, овај принцип даје једну једначину између вертикалне висине, са које је сишло тежиште система за ма које време, и разних вертикалних висина на које би се тела, што састављају систем, могла попети са својим задобивеним брзинама, и које су, према Галилејевим теоремама, као квадрати ових брзина. Но, код једног клатна, које осцилује око једне хоризонталне осе, брзине разних тачака сразмерне су њиховим одстојањима од осе; на тај начин, може се једначина свести на две са̂ме (једине) непознате, од којих једна нека буде силазак тежишта клатновог за ма које време, а друга нека буде висина на коју би се могла попети једна дата тачка овога клатна са својом задобивеном брзином. Али силазак тежишта одређује онај сваке друге тачке клатна; дакле, имаћемо једну једначину између висине, са које је једна ма која тачка клатнова сишла, и оне висине на коју би се могла попети са својом брзином, која произлази од овог пада. У осцилационом центру, ове две висине морају бити једнаке, пошто се слободна тела могу увек попети на исту висину са које су пала; и једначина показује да ова једнакост може постојати само у једној тачци линије која је управна на ротациону осу и која пролази кроз тежиште клатна, које (тежиште) нека буде удаљено од ове осе за количину која произлази множећи све терете, што сачињавају клатно, са квадратима њихових одстојања од осе и делећи суму ових производа са масом клатна умножена још са одстојањем његовог тежишта од исте осе. Ова ће количина изразити дакле дужину једног простог клатна чије би кретање било једнако са оним сложеног клатна.

Ова је Хигенсова теорија изложена у *Horologium oscillatorium* и пропраћена је великим бројем научних примена. Она не би ни у чему оскудевала, кад не би била основана на једном несигурном принципу; и остало је увек да се докаже овај принцип па да је отклоњен од ње сваки напад.

У 1681 години појавиле су се, у *Journal des Savants de Paris*, неколико лоших примедаба противу ове теорије, на које је Хигенс одговорио нејасно и површно. Но овај спор, скренувши пажњу Јакова Бернулија, дао му је прилике да темељно испита Хигенсову теорију и да покуша да је сведе на прве динамичке принципе. Он је, прво, посматрао само два једнака терета која су привезана за једну круту и праву линију, и приметио је да брзина коју задобива први терет, тј. онај који је ближи тачци вешања, описујући један ма какав лук, мора бити мања од оне брзине коју би задобио описујући слободно исти лук, и да у исто време задобивена брзина другим теретом мора бити већа од оне коју би задобио прелазећи слободно исти лук. Брзина изгубљена првим теретом саопштена је дакле другом, и како се ово саопштење чини по средством једне полуге, која је покретна око једне сталне тачке, оно се мора покоравати закону о равнотежи силâ, које дејствују на ову полугу; тако да губитак брзине првога терета буде ка добитку брзине другога терета у обрнутој размери кракова, тј. одстојањâ од тачке вешања. Отуда, а и због тога што реалне брзине морају оне сâме бити у правој размери ових одстојања, лако се одређују ове брзине а, према томе, и кретање клатна.

Такав је био први корак, који је учињен ка непосредном решењу овога значајнога проблема. Да се са полугом упореде силе које резултују од добивених или изгубљених брзина од стране терета, врло је фина идеја и она пружа кључ од праве теорије; али је се Јаков Бернули преварио посматрајући задобивене брзине за једно ма какво коначно време, у место да је посматрао само елементарне брзине задобивене за време једног тренутка, и да их је сравнио са онима што тежа тежи да саопшти за време истог тренутка. То је Лопитал и учинио после тога у једном спису, штампан у *Journal de Rotterdam* 1690. Он је претпоставио два ма каква терета привезана за крут конац, што чини сложено клатно, и поставио је равнотежу између изгубљених или добивених количинâ кретања овим теретима за ма који тренутак, тј. између диференцијâ количинâ кретања што терети стварно задобивају за овај тренутак, и оних што тежа тежи да им саопшти. На тај начин, он је одредио однос моментаног убрзања свакога терета ка оном убрзању које сâма тежа тежи да му саопшти и нашао осцилациони центар тражећи ону тачку клатна за коју би ова два убрзања била једнака. За тим је распрострео своју теорију на већи број терета; али је за то посматрао прве као скупљене узастопно у њиховом осцилационом центру, што није више тако непосредно, нити може бити усвојено без доказа. Може се чак додати да ова метода води нетачним резултатима.

Ова је анализа повратила Јакова Бернулија на своју, те је, на послетку, овај аналиста успео да даде прво непосредно и тачно решење проблема о осцилационим центрима, решење које заслужује у толико више пажње од стране геометара, у колико оно садржи клицу оног динамичког принципа, који је постао тако плодан у рукама Даламбертовим.

Ауктор је посматрао заједно кретања, која саопштава тежа у сваком тренутку телима што сачињавају клатно, и, како ова тела, због њихове везе, не могу да их врше (продуже), он је замислио кретања, што их тела морају узети, као сложена из саопштених кретања и других кретања, доданих или одузетих, која се морају држати у равнотежи, и на основу којих клатно мора стајати у равнотежи. На тај начин, проблем је сведен на статичке принципе и не тражи више ничега до помоћи од анализе. Јаков Бернули је нашао, тим путем, опште формуле за осцилационе центре телâ ма каквог облика, и показао сагласност са Хигенсовим принципом и доказао идентичност осцилационих центара и центара перкусије. Ово је решење било отпочето, од 1691, у *Actes de Leipsick;* али је дато потпуно тек 1703, у *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris.*

Додајући теорији о убрзању тешких тела ону теорију о кретању клатнâ и о центрифугалним силама, Хигенс је спремио пут великом открићу универсалне гравитације. У Њутновим рукама Меканика је постала новом науком, и његови Математички Принципи, објављени први пут 1687, били су епока ове револуције.

5. Хигенсови радови на *Геометрији* врло су важни; али су још много важнији они на Физици, а специјално они на *Оптици.* Да напоменемо само, да је он поставио вибрациону или ундулациону теорију светлости (1691).

Простор овога места не дозвољава нам да опширније излажемо радове великог научника, Хигенса, кога је Њутн звао: *„Summus Hugenius“*.

Њутн (Isaac Newton, 1642—1727) у својој дванаестој години био је слат у Grantham, да учи латински. Сâм он прича о себи да је у почетку био врло непажљив и један од последњих ученика у своме разреду. Тога немара и мртвила отресао је се једино за то, да би отео првенство једном од својих колега, који га је тукао. Све време проводио је Њутн у забави да конструише разне врсте машина. Вежбао се тако исто и у цртању и у сликању, за које је вештине увек имао нарочитог укуса. По саветима свога ујака Њутн је у својој деветнаестој години отишао у колеж Свете Тројице у Камбрицу. Ту је посећивао часове професора Барова, и одмах је прешао на дела узвишене

Геометрије, на дела таква као што су Декартова *Геометрија* и Валисова *Arithmetica infinitorum*.

У својој двадесет трећој години Њутн је био већ први европски геометар, пошто је до тога доба био открио више својих узвишених аналитичких метода, а између осталих и основе диференцијалног и интегралног рачуна. Мало година после тога, он је анализирао светлост и у двадесет осмој години објавио своју научну теорију. Мало је предмета, који су толико дуго занимали физичаре, као *боје тела*, и оне којима, изгледа, призма боји предмете и светлосне зраке. Та тако тешка загонетка да се одгонетне, била је резервисана за Њутнову оштроумност. Геније овога бесмртнога човека јавља се и овде у свој својој величини. Његово бесмртно дело *Принципи Природне Филозофије*, штампано 1687, у неколико је производ младићског доба његовог. У том добу, он је и појмио план овога огромнога и дивнога здања; више обичних живота били би једва довољни да прикупе и обраде многобројне материјале, што их је он за то употребио, и које је извукао из Геометрије и најсуптилније Меканике.

У светској историји тешко је наћи Њутну равнога са његове универсалности и неисказане плодности, као што ће се то моћи увидети и из овога краткога и непотпунога излагања његових главнијих радова.

Пут, којим је Њутн у свом бесмртном делу Принципима ишао, толико је прост колико је год било могућно. Пошто је, *у првој књизи*, изложио опште принципе из Диники, до којих је дошао посматрањем инфинитезималне Геометрије, он је ка овим принципима додао, истина без доказа, принцип консервације кретања тежишта. У истој књизи изложио је Њутн, на врло прост начин, веома важан *принцип површинâ*, ма какав био закон мењања централне силе. Овај принцип није нико пре њега био исказао; сâм је Њутн био творац његов; он га је, непосредно, применио на планете, посматрајући их као просте материјалне тачке. Јер, кретање једне планете истоветно је као када би се кретало само њено тежиште, у којем би била концентрисана цела маса планете, и све силе, које на планету дејствују, биле пренесене паралелно саме себи у ту тачку.

Имајући у виду нарочито планетска кретања, Њутн је се бавио кретањем, које је произведено једном силом, чиј правац пролази кроз једну сталну тачку. Он је, из тога проучавања, нȁјпре, извео принцип површина; а за тим је нашао: *значајан израз за силу, која је управљена ка једном сталном центру, помоћу извесних инфинитезималних елемената који зависе од криве линије коју тачка описује*. Овај је инфинитезимални образац једно од најважнијих открића Њутнових, јер га је оно одвело на откриће универсалне гравитације.

Доказ принципа површинâ није био основан на општим једначинама кретања, које нису биле познате, а није Њутн ни случајно на њ наишао. Његов геније скренуо му је пажњу те је приметио: пошто сила, која вуче тачку у правцу потега, може да промени своје кретање само паралелно овом потегу, то је троугао описан потегом морао имати исту површину као да та сила није дејствовала, и принцип површинâ цео целцат јесте у овом првом начину посматрања.

Њутн је, обратно, доказао да је сила непрестано управљена ка центру површинâ, у целом кретању ма каквом у осталом, када се принцип површинâ примењује. За тим је он израчунао убрзавну силу у случају елиптичког кретања, при коме се принцип површинâ примењује у односу на жижу, и нашао је да се ова сила мења обрнуто сразмерно квадрату потега; најзад, преокрећући овај проблем, он је одредио законе кретања једне материјалне тачке привлачене сталним центром са силом, обрнуто сразмерна квадрату њеног одстојања од центра, и нашао је да је путања тачке један од коничких влакова.

Ова теорија, тако проста, дивна је у свима својим тачкама; али, право је, одајући част Њутну, коју заслужује, поменути овде и Хигенса, чија је теорија о централној сили, код једнаког кружног кретања, у неколико отклонила тешкоће.

У другој књизи Њутн је изложио питање о кретању тела у медијуму који даје отпора. То је питање мање интересантно.

У трећој књизи Њутн је применио на светски систем оне принципе,исказане у првој. Нема довољно речи, којима бисмо могли исказати хвалу коју потомство дугује Њутну; и појамно је одушевљење које је захватило све па и Волтера, који посвећује Њутну неколико строфа у којима га велича и сравњује са вишим бићима. Халеј *(Halley)* је право рекао, да нема никога, који се приближује више божанству од научника Њутна.

Nec propius fas est mortalem attingere divos.

У истој трећој књизи, он покреће питање о одредби маса̂ сунца, планета̂ и њихових сателита.

Астрономија је, пре Њутна, дуго била само једна опсервациона наука. Кеплерови закони били су полазна тачка за Њутна, и он је свео Астрономију толико да је постала само једна проста грана науке о силама; њене границе биле су границе ове последње науке, чије су опет границе — границе науке о бројевима и науке о просторности. За овај велики резултат дугујемо Њутну; он га је постигао, усавршивши најпре општу науку о силама и претпоставивши за тим да је материја, која сачињава небеска тела, потчињена истим општим законима кретања, којима је потчињена материја земаљских тела. — Коперник је учио о кретању планета око сунца; Кеплер је нашао законе, по којима оне оптичу; а Њутн је открио силу, која управља тим кретањима.

Један појав, који се непрестано јавља и који од колевке непрестано виђамо да се јавља, изгледа нам са свим природан. Такав појав, који нас не стаје личног напрезања, изгледа нам да се развија сâм од себе и без узрока. Тако, изгледа нам са свим природна и без узрока чудновата и гигантска акција сунца. Пред тим и таквим природним појавима човек мора да се заустави да их сравни, да их мери ако је могућно, да би дошао до закона који њима управљају. Тако је, једног дана, Њутн посматрао пад једне јабуке. Ничега простијег од тога појава, па му за то, пре Њутна, нису ни тражили узрока. Али Њутн није био задовољан само тим посматрањем; он је почео озбиљније да размишља о томе појаву, како би пронашао узрок и тако открио закон тога појава. Била ова анекдота истинита или не, она показује, ако се узме да је била истинита, да најобичнији појави, они који изгледају да не траже никаквог објашњења већ као да се морају сâми по себи збивати, то су баш ти појави који често највећма и забуњују научењачки ум. Ка концепцији материје јабукине Њутн је додао концепцију силе, која је ставила јабуку у кретање. Пад јабуке био је последица атракције извршене између јабуке и земље. Њутн је распрострео идеју те силе и на сунце, планете и њихове сателите, и показао је да су сва њихова кретања била само нужне и природне последице дејства ове исте привлачне силе.

Слични појави, који се свакодневно производе на површини земљиној, показали су да се, у извесним приликама, поставља између телâ једна сила, која тежи да их приближи или да их удали једна од других. Промене релативних положаја небеских тела навеле су да се узме да има нека узајамна тежња свију честица материје једних ка другима; ова привлачна сила, међу двама бесконачно малим молекулима, управљена је правцем праве која их саставља и једнака је за оба молекула; и било би равнотеже између ових двеју сила, ако би ова права постала чврста. Но како ми немамо за предмет: упознавање свију ставова, који се односе на привлачење и који би могли корисно послужити при проучавању небеских појава, то ћемо ми узети да је маса тела везана за моћ привлачења; у елементу масе смештен је елеменат привлачне силе, па тицало се масе једног чврстог тела или гаса, простог тела или комплексне хемијске комбинације. Атракција је дакле независна од физичког или хемијског стања тела. Ова привлачна сила, како Фај вели, долази од неког узрока који продире до центра сунца и планета, без да ишта губи од своје активности; она не дејствује према величини површине, као меканички узроци, него према количини материје, и њена акција простире се на све стране безграничног простора.

Пре Њутна Кеплер је открио права кретања планета. Ова кретања Кеплером пронађена, просто као факта, била су позната Њутну. Цео свет их је знао после Кеплера. Али то није било довољно; требало је знати и узроке тим фактима. То је за Њутна и било право питање, и велико питање на коме се концентрисао његов велики научењачки ум, и, решив га, он је обесмртио име и славу своју. Он је доказао да планетска кретања, опсервацијама дата, била су тачно она и онаква, која и какава треба да буду, усвајајући принцип да, у сунчаном систему, сваки елеменат материје једног молекула привлачи сваки елеменат материје других молекула са силом, чиј је интензитет обрнуто сразмеран квадрату одстојања елемената. Та сила,која постоји између небеских тела и која, у неку руку, чини цемент материјалне васионе, назвата је *гравитационом силом.* Овај Њутнов принцип универсалне гравитације последица је Кеплерових закона. Њутн је увидео да се Кеплерови закони простиру и на кретања сателита око њихових главних планета; отуда излази да је привлачење једне планете на један од својих разних сателита сразмерно њиховим масама а обрнуто сразмерно квадрату сателитовог одстојања од планете. Кеплер је открио законе о кретању планета, али није ништа знао о путањама комета. Њутн је проучио путање и тих небеских тела; он је распрострео ове законе и на периодичке комете, чије су путање елипсе имајући сунце за жижу. За извесне комете, чија периода није могла бити посматрана, може се узети да је парабола њихова путања. Не може се више рећи да се последњи Кеплеров закон примењује, али му се може дати други облик, који ће се простирати на параболичке па и на хиперболичке путање. Двојне звезде управљају се такође по Кеплеровим законима. — Сва та факта навела су Њутна на хипотезу о универсалној атракцији: *Две ма какве материјалне тачке (честице) привлаче се узајамно сразмерно производу њихових маса а у обрнутој размери квадрата њиховог одстојања.* Ову хипотезу неки зову *закон атракције*, или *закон универсалне гравитације*, или још и *природни закон привлачења*.

Потрзано је и питање о распростирању атракције. Неки мисле да се она не распростире поступно у простору као звук, светлост и топлота, него тренутно. Лаплас је доказивао, ако атракција има неку брзину, да је ова сто милиуна пута већа од брзине светлости! Ја мислим да о распростирању атракције не може ни бити говора, него само о њеној величини. Пошто се ниједан делић материје не ствара нити поништава у васиони, то и атракција непрестано постоји међу појединим материјалним телима и само се мења по величини са променом масâ и одстојања међу телима. Друга је ствар распростирање звука, светлости и топлоте, које ми можемо производити.

Напреци науке дозволили су нам да се приближимо врло близу ка извору множине великих појава, који су дуго стајали без објашњења, тј. нису били везани за један општи факат, посматран као њихов узрок. Тако падање тела на површину земљину, кретање планета око сунца и сателита око својих планета била су сведена на један општи факат, који је међусобна атракција свију материјалних елемената. Тај је факат био усвојен као последица других факата на које су применили законе о силама, које је искуство открило на површини земљиној; и он је постао општи узрок, производећи сва позната кретања и доприносећи да се предвиде она о којима се није слутило. Неугасна радозналост човекова навела га је да потражи узрока овога великога факта о атракцији, али му је до сада било немогућно да се ближе приближи.

Њутн је, завршујући своје бесмртно дело, своје Принципе, наговестио читаоцу да је он говорио о атракцији само као о једном факту, о једној сили чији су егзистенција и закони констaнтовани и доказани посматрањем.

После Њутна, чувени енглески хе́мичар и физичар *Кавендиш (Cavendish,* 1731—1810) опитом је доказао привлачење материје материјом и тако је извукао гравитацију из области хипотезâ и свео на факат. Међусобно привлачење тела у нашем сунчаном систему такође је факат, а никако хипотеза. Њутнова атракција јесте факат, као атракција или репулсија полова једнога магнета, као атракција или репулсија двају електричких тела; хипотеза наступа тек онда кад узмемо да објашњавамо та факта. Између два тела А и В, која теже једно ка другом, има нечега што одређује ту тежњу. Ми знамо да нема никакве сличности између онога што сачињава масу тела А и В, и онога што чини да тело А тежи ка телу В. Ако назовемо *материјом* оно што сачињава масу тела А и В, с потпуним правом можемо назвати *силом* оно што креће ове масе у извесном специјалном односу и потврдити да сила има реалну и различну егзистенцију од материје.

На питање: „Како сте открили гравитацију?“, одговорио је Њутн са свим смерно: „Мислећи непрестано о њој“!

Многи писци исказују закон универсалне гравитације у ове четири тачке:

1°. *Све материјалне честице, распрострте у васиони, привлаче се узајамно силом, која је сразмерна њиховим масама а обрнуто сразмерна квадрату њихових одстојања.*

2°. *Та је сила независна од времена; она дејствује на све супстанције, ма каква била њихова природа и њихово стање мира или кретања.*

3^{e}. *Кад се два сверна тела привлаче, привлачење се врши исто онако као кад би цела маса свакога тела била концентрисана у центру сваке свере, и, према томе, као кад би свако од тела било састављено само из једне једине материјалне тачке (честице).*

4°. *Два сверна тела, покоравајући се закону привлачења, крећу се тако да свако од њих описује око њиховог заједничког тежишта криве линије које припадају коничким влацима (пресецима).*

Посматрања су доказала да ови закони, исказани у ове четири тачке, управљају нашим сунчаним системом.

У својим Принципима Њутн је био наведен на појам компонената: *тангенцијалног и нормалног убрзања,* толико година пре разлагања убрзања на компоненте правцем координатних оса, које је Маклорен извршио.

Њутн је формулисао експлицитно она три принципа на којима цела Меканика почива (n° 16). Он је допунио науку о променљивим кретањима и о убрзавним силама, које могу да их произведу. Хигенс, Њутн и њихови следбеници, развијајући идеје Галилејеве, решили су већину проблема, који се односе на кретање тела под утицајем датих сила.

У даљем излагању, ми ћемо имати прилике да опширније говоримо још о некима од Њутнових радова.

Меканички радови Њутна, Лајбница и браће Јакова и Јована Бернули-а, при крају седамнаестог века. — 1. Ако се лепота једног открића мери са узвишеношћу предметâ на које се оно примењује, мало их је у Меканици тако дивних као што је оно откриће о којем ћемо сада да говоримо. Треба само бити посвећен у модерну философију, па да се познају велике светлости, што их је теорија криволинијских кретања и централних сила прибавила физичкој астрономији. Тој смо теорији и дужни за доказ важних истина, које је Кеплер опсервацијом научио. Она нам је и ставила на расположење оппти закон, који влада међу небеским телима и који их приморава на кретања која ми посматрамо. Најзад, од ње се са основом очекује решење најтежег астрономског проблема, на име кретање месеца, чије су неправилности толико дуго и тако бескорисно занимале астрономе.

Цела теорија криволинијских кретања сводила је се, пре Њутна, на оно што је Галилеј био доказао о кривини пута пројектилâ, и на оно што је Хигенс знао о централним силама код кружних кретања. Али, Њутн је посматрао проблем о криволинијским кретањима у много већој општности и, вођен темељном геометријом, он је поставио законе по којима се она врше. Један одељак његовог бесмртног дела *Принципи Природне Философије* садржи њихово излагање, и они су основа свију његових открића о физичком систему васионе. Ми ћемо учинити о њима само ово неколико напомена.

Кад је једно тело бачено у извесном правцу и са извесном брзином, оно би ишло, као што је то често казивано, правом линијом, кад би било потпунце слободно и ослобођено сваке спољне акције. Али, ако оно трпи акцију неке силе која дејствује у одређеном правцу, оно ће очевидно бити принуђено да свакога тренутка скреће са свога правца; оно ће, најзад, описати једну криву линију, која ће се мењати према интензитету и правцу силе, коју ће у свакој тачци трпити, и према брзини и почетном правцу његовог бацања.

У свима криволинијским кретањима, која су произведена акцијом једне силе која привлачи ка једној тачци, влада један општи закон, који смо показали. Тај закон, већ посматран Кеплером у планетским кретањима, и који је Њутн први доказао *a priori,* састоји се у сталној сразмерности временâ са површинама, које су описате телима око центра силâ. — И обратно: ако се примети да једно покретно тело описује око једне тачке површине сразмерне времену, мораће се отуда закључити да је његово кретање произведено једном силом, која га одбија од ове тачке или га привлачи ка њој.

Из овог основног принципа потичу природно неколико других истина; тако, нпр., што је тело ближе центру силâ, то ће оно већма убрзати своје кретање, у толико ће лук, који ће прећи, бити већи.

Сада бисмо могли објаснити како се одређује закон по коме мора расти или опадати центрипетална сила, па да примора једно тело да прелази одређену криву линију. За то би требало испитати у опште, шта бива кад је једно тело, гурнуто једном сличном силом која је комбинисана са косим имплусом, описало ма какав лук криве линије? Њутн је нашао и дао тај општи израз за тражени закон. Он је проучио разне врсте кривих линија и показао по коме се закону мора управљати централна сила па да примора једно тело да их пређе. Ми ћемо се ограничити у главном на коничке пресеке, који дају најзнатније и најкорисније истине за васионски систем. Идући поменутим путем, налази се да је сила, која чини да неко тело описује један од коничких влакова, одбијајући га или га привлачећи ка једној од жижа, у обрнутој размери квадрата одстојања. И обратно, увек, кад је једно тело нападнуто, ка једној тачци, једном силом која је у обрнутој размери квадрата одстојања, оно ће добити импулс (потисак) кос на правац ове силе, а крива линија, коју ће описати, биће један од коничких влакова.

Али, који су случајеви, у којима ће један од коничких влакова бити описан пре него ли који други? Кад ће путања бити један круг, елипса, парабола, или хипербола? — Њутн је и на ова питања одговорио.

Довде је било само питање о природи кривих линија, које описују тела под утицајем централних сила у обрнутој размери квадрата одстојања. Треба да поменемо још једно знатно својство ових кретања. Ако више тела, која су привлачена ка једном центру силом која дејствује по горњем закону, описују елипсе у разним одстојањима, квадрати њихових периодичких времена јесу као кубови њихових средњих одстојања. То је други део знаменитог открића Кеплеровог, о елиптичком кретању планета. Но ово Кеплерово откриће било је само плод његових посматрања. Њутн му је дао нову извесност, и тако рећи нову сјајност, доказав да су ово елиптичко кретање и овај однос између одстојања и периодичких времена нужне последице једног јединог принципа.

Елипса може још бити описана једним телом, које се креће око једне тачке из које потиче једна сила која га привлачи сразмерно одстојању. Али, у овом случају, сила није у једној од жижа, она је у самом центру. Закон периодичких времена значајан је у истом случају. На ма каквом одстојању била тела, која се крећу, ма какве биле величине елиптичких путања, које она описују, времена њихових окретања јесу једнака. Кад би такав закон владао у нашем систему, све би планете употребиле исто време да учине своја окретања.

Иста метода, која је послужила Њутну да размрси закон силâ, које чине да једно тело описује један од коничких влакова, послужила му је да упозна онај закон по коме је једна сила учинила да тело опише друге познате криве линије. То је лако осетити, пошто се има само размрсити однос извесних линија, које су дате, чим су облик и њихова својства познати. Тако је доказао, да је једно тело, које описује логаритамску спиралу око једне тачке, држано на овој кривој линији једном силом, која је у обрнутој размери куба одстојања. Да се опише круг, кад је центар силâ на периферији, требало би да закон централне силе буде у обрнутој размери петог степена овога одстојања.

Но ово су само почеци једног општијег проблема, који је Њутн поставио у истом делу: Какву ће криву линију описати једно тело, које је бачено у одређеном правцу и са одређеном брзином, и које је нападнуто ка једној тачци централном силом, која дејствује по извесном закону? Проблем, тако посматран, много је тежи. Њутн га је решио околишним путем, решив један простији проблем.

У овом другом проблему треба одредити закон убрзања по коме ће непосредно пасти једно тело, које је под утицајем једне променљиве силе. Као што се зна, Галилеј је посматрао непосредно падање тела, претпоставив тежу једнаку, и његово је откриће познато свету. Њутн је бескрајно уопштио питање, показујући начин како да се одреди оно што мора наступити у свима врстама хипотезâ, које се могу поставити о акцији теже или централне силе на различним одстојањима од центра. Њутн је решио неколико случајева овога проблема, на веома оштроуман начин.

У свима случајевима и под свима хипотезама, које се могу чинити о закону централне силе, Њутн је одредио просторе, времена и респективне брзине код праволинијских падања.

Ко би желео више појединости о свима овим истинама, морао би консултирати изврсно дело: *Exposition des découvertes philosophiques de Newton,* од славнога Маклорена.

2. У свему оном што је довде казано о кретању и о појавима, који потичу из његовог слагања, није се обраћала никаква пажња на отпор средине, у којој се кретање врши. Било је нужно, најпре отклонити од питања ту околност, која много увећава тешкоћу, задржавши право да се повратимо на њу, пошто смо потпунце сазнали шта би било, кад она не би никако ни постојала. Сличном поступношћу (градацијом) морао је се понашати људски дух те да би се уздигао до сазнања природних појава. Требало му је, у неку руку, разчланити његов предмет, посматрати

га у најпростијем виду, спријатељити се, тако рећи, са првим тешкоћама, пре него што би предузео да савлада највеће тешкоће. Помоћу овог мудрог и разумног хода, математичке су науке, пењући се од истраживања на истраживање, достигле ону висину на коју су данас оне доспеле.

Први оснивачи науке о кретању, такви као што су били Галилеј и Торичели, увек су апстраховали отпор средине. То није било с тога, што они нису добро били предвидели да би отпор морао донети какву измену у њиховим одредбама; него што још није било време да се човек ода на ово тешко истраживање, и што Меканика није била стекла довољно снаге да се отуда са успехом извуче. За то је Галилеј, примењујући на практику своју теорију о кретањима пројектилâ, претпостављао да бачена тела имају приметну масу и много већу густину од густине ваздуха. — Било је доста меканичара, који су имали и доста погрешних мишљења о томе отпору.

Њутну и Валису дугујемо прва дубока истраживања о отпору, што га средине чине на супрот кретању. Њутн је први у својим Принципима објавио своја истраживања о томе предмету. Он је њиме заузео готово целу другу књигу, и изложио га са оном дубином, која карактерише све његове списе. Валис је се, са своје стране, бавио истим предметом и своја размишљања о истом саопштио краљевском друштву, и ово их је штампало у *Transactions* од 1687. Валис се ограничио само на посматрање случаја, кад је отпор средине сразмеран брзини. За тим су се јавили Лајбниц, у *Actes de Leipsick*, и Хигенс, у делу *Traité de la pesanteur* 1690, на овом питању. Али, све што су ови писци доказали или без доказа исказали, израдио је, помоћу модерних рачуна, Варињон и штампао у *Мемоарима* од 1707—1710.

За тим су Лајбниц, Њутн и други проучавали, специјално, и отпоре течностî. Проучавање отпорâ, што течности чине кретању, повлачи за собом грдну множину дубоких и корисних истраживања. Анализа ове врсте кретања и начин примене рачуна на њих нису скопчани са тешкоћама за оне, којима су познâти хидраулички закони и који су довољно упућени у рачуну и анализи.

3. При крају седамнаестог века постављали су геометри једни другима разне меканичке проблеме, као знаци зачикивања. Пошто су ти проблеми у многоме припомогли напретку анализе и интересују радозналост, то заслужују и овде кратка помена.

Први од тих проблема, предложен Лајбницом, био је проблем *о изокроној кривој линији (isochrone*[1]*).* Зна се да једно тело под утицајем своје тежине прелази у једнаким временима, било по управној, било по ма каквој стрмој равни, у толико веће просторе, у колико се оно више удаљује од оне тачке од које је почело његово падање. Зна се тако исто да једно тело употреби у толико више времена да пређе исту линију са одређеном брзином, у колико је она ближа хоризонтали. Има, дакле, једна таква крива линија, пошто нагнутост њених разних делова изравњава брзину са којом би били пређени, да ће се покретно тело удаљавати једнако (униформно) од хоризонтале, или ће прелазити једнаке просторе узете у вертикалном смислу: та је крива линија она, коју је Лајбниц назвао *изокроном*, и наћи њену природу сачињава проблем о коме говоримо. Лајбниц га је поставио 1687, у намери да смањи веру у неколико Картезијеваца који су, сувише везани за Геометрију свога учитеља, мало показивали поште према новим рачунима. Он је позвао ове аналисте да на овом његовом проблему окушају њихове силе и изворе њихове методе.

Што је Лајбниц предвиђао, то се и догодило: нико од ових и сувише сервилних обожаваоца Декартових производа није решио проблем. Само су Хигенс и он сâм

[1]) Долази од *'Ισόχρονος*; од *ἴσος*, једнак, и *χρονος*, време. *Isochronisme*, као меканички термин, значи: *једнакост трајања*. Изокронизам осцилацијâ клатна.

дали решења на време. Хигенс није употребио, у истини, диференцијални рачун; али је овај геније, дубок и плодан у изворима, знао да прокрчи себи пута те да дође до решења тога проблема. Они су показали да је тражена крива линија једна од кубичких парабола, на име она у којој је квадрат апсцисе помножен са параметром раван кубу ординате. После неког времена, Јаков Бернули решио је овај проблем помоћу новог рачуна.

Овај је проблем изазвао један други, који је такође Лајбниц предложио. Није се више тражило да се одреди крива линија дуж које би се морало кретати једно тело па да за једнака времена учини једнаке падове у вертикалном смислу. Лајбниц је тражио дуж које би криве линије морало падати једно тело па да се удаљава од једне дате тачке сразмерно времену; због тога јој је он дао име *парацентричка изокрона крива линија (Isochrone paracentrique*[1]*)*. Ова промена услова учинила је овај проблем много тежим, и како се Лајбниц није пожурио да открије своје решење, то је протекло више година без икаквог решења. Тек 1694 године, старији од славне браће Бернули решио га је, а одмах за њим Лајбниц и млађи Бернули решили су га такође.

Док је проблем о парацентричкој кривој линији био на дневном реду, други један проблем, који је дао Јаков Бернули, дражио је тако исто истраживања главних европских геометара: то је тако познати проблем под именом *верижнице (ланчанице)*. Бернули је тражио какву би кривину заузео један ланац, или једно бесконачно витко уже, обешен млитаво својим крајевима? Овај је проблем пређе побудио радозналост Галилејеву, али он није успео да га реши. — Природа проблема није уливала наде да ћемо видети многобројне геометре да се утркују за част око решења тога

---

[1]) *Paracentrique*, као геометријски термин, значи такву криву линију, ако једно тешко тело силази слободно дуж ове криве линије, да се оно удаљује или се приближује подједнако, за једнака времена, од једног датог центра или једне дате тачке.

проблема; само их је било четворица: Јаков Бернули, који га је и поставио, његов брат Јован, Лајбниц и Хигенс. Они су објавили своја решења у *Actes de Leipsick* 1691, али без анализе. Далеко би нас одвело да излажемо суптилну методу, коју је о томе дао Јован Бернули у својим *Lectiones calculi integralis (Operum* t. III).

Обичај је геометара да се пењу од тешкоће на тешкоћу, па чак и да непрестанце стварају себи нових тешкоћа, те да створе себи задовољства савлађујући те тешкоће. Бернули, и ако још није био решио проблем о верижници, сматран у најпростијем случају, почео је да посматра друге много сложеније случајеве. Он се питао, нпр., шта ће бити ако уже није свуда једнаке тежине, или ако је неједнако оптерећено на свима својим деловима; у ком би односу требала да буде та неједнакост па да кривина буде дате врсте; каква би била ова кривина, кад би уже било истегљиво својом сопственом тежином? — Он је дао решења за све те случајеве.

За тим је Јаков Бернули поставио више других проблема. Први је проблем о еластичкој кривој линији; други се тиче кривине једног платна напуњено течношћу; трећи, најзад, каква ће бити кривина једног једрила, или једне бесконачно витке површине, која је, заустављена са двеју страна, надувана ветром? — Све је ове проблеме Бернули решио. У последњем проблему разликовао је још два случаја; први, ако је ветар, пошто је ударио о једрила, одмах нашао излазак, крива линија је иста као она верижнице; други случај, ако ветар остаје унутра, крива линија биће кружна.

Међу проблемима, који су занимали геометре при крају седамнаестог века, мало их је који су лепши и достојнији помена, него што је проблем *о линији најбржега пада (de la courbe de la plus courte descente)*. Јован Бернули поставио је 1696 овај проблем: Дате су две тачке, које нису ни на истој вертикали, нити на истој хоризонтали, наћи линију дуж које би једно тело, котрљајући се од једне тачке до друге, употребило за то што је могућно мање времена. Бернули је дао тој линији име *брахистокрона линија (brachystochrone*[1]*)*; име произведено од грчког, и које значи најкраће време. Могао би човек, с почетка, бити наведен на помисао да је та линија она права повучена од једне тачке ка другој; али би се преварио.

То је још један од оних проблема, које је Галилеј покушавао да реши. Бернули га је знао решити, пре него што га је поставио. Лајбниц, опчаран његовом лепотом, није могао да га се отресе, и ако је био заузет другим послом; и није дуго прошло он га је решио. У продуженом року од шест месеци, решили су га Њутн и брат предлагачев, Јаков Бернули, а за овима и Лопитал. На тај начин Енглеска, Француска и Немачка конкурисале су за част тако лепога и тако тешкога открића. Јован Бернули, ауктор овога проблема, дао је два решења, једно посредно, друго непосредно. Сви су нашли да је тражена крива линија једна циклоида.

Посматрање криволинијских кретања телâ води нас разним другим проблемима истога рода, као што је претходни, који су такође били покретани браћом Бернули. Могло би се, нпр., питати: *Од свију циклоида повучених од једне дате тачке на хоризонтали, ка једној вертикалној линији, која би од њих произвела најбржи пад тела од ове тачке ка овој вертикали?* Ово је питање поставио Јаков Бернули, и оно је било узрок заваде међу браћом. Јован Бернули решио је горњи проблем, пошто га је уопштио, и нашао је да је то она циклоида која сече вертикалу под правим углима.

Јован Бернули није се зауставио на томе; један проблем, много тежи од претходних, био је овај: *Од свију сличних кривих линија конструисаних на једној истој хо-*

---

[1]) Долази од βράχιστος, најкраћи,-е, и χρονος, време.

ризонталној оси и имајући исто теме, која је она крива линија, чиј је део, који се налази између овог темена и једне линије дате положајем, пређен за најмање време?

Ево још једног доста чудноватог проблема, предложен у Француској у ово време. Претпоставља се један покретни мост привезан једним од својих крајева за једно уже које се, пролазећи преко једног котура, свршава једним теретом; *одредити дуж које би се криве линије морао котрљати овај терет, па да буде увек у равнотежи са покретним мостом, у свима својим положајима?* Овај је проблем, чија се корист у милитарној архитектури лако увиђа, побудио радозналост маркиза Лопитала, који му је и нашао решење и објавио га 1695. Млађи Бернули учинио је о овом предмету једну значајну примедбу. Он је приметио да је тражена крива линија једна епициклоида.

Морамо споменути један интересантан проблем, ма да се у многоме разликује од претходних. То је проблем о чврстом телу најмањег отпора. Тражи се каква је кривина, коју би требало дати једном коноиду одређене основице и висине, па да ово чврсто тело покретано у једном флуиду, у правцу његове осе, трпи у њему мањи отпор него свако друго тело од истих димензија? Њутн је дао идеју о овом преблему; он га је, узгредно, решио у својим Принципима, дајући једно од својстава ове ку̑рве, на име оно о њеној тангенти. Али то је било и сувише укратко.

Због тога Фатио (Fatio) је предузео тај проблем и дугим путем дошао до решења. За њим су, краћим путем, Лопитал и Јован Бернули решили исти проблем.

Подражавајући проблему о чврстом телу најмањег отпора, могло би се доћи на мисао и тражити која би линија на једној основи и на датој оси образовала равну фигуру, која би, покретана у правцу њене осе, претрпела својим странама најмањи отпор?

4. Године 1685 потрже Лајбниц фамозно питање о мери силе код телâ у кретању. Ово је питање изазвало неку врсту грађанског рата, који је владао неко време међу меканичарима.

Енглеска нам даје неколико меканичара, који су се бавили усавршавањем морепловства и који су обрадили многа питања, која се на примењени део Меканике односе. Ми ћемо поменути само доктора *Hook*-а и Врена. Последњи није се одликовао међу меканичарима само својим открићем законâ о судару телâ; он је дао општу теорију кретањâ; разна истраживања о отпору флуида на тела која кроз њих пролазе; о конструкцији лађâ, о акцији весала, једрилâ итд.; дао је изредна посматрања о кретању клатнâ, и доста аналогних идеја онима од Hook-а о меканичком узроку кретања небеских тела; мноштво нових инструмената било оптичких, било астрономских; итд., итд.

И друге земље, као Француска, Италија и Немачка, показале су светлих раденика на меканичком пољу, при крају овога (17) века. Да поменемо овде само Варињона, Француза, о коме ћемо мало ниже говорити.

IX

Ми смо, у последња два одељка, изложили кратку историју Меканике у седамнаестом веку. *Осамнаести век* отишао је даље; и, пре него што бисмо приступили Меканици овога века, ми ћемо дати врло кратку идеју о неким радовима, које су научници овога века учинили на пољима других наука.

1. Међу свима деловима, у којима се вежба радност човекова, нема данас ниједног који би се могао проћи без *паре*. Индустрија, трговина, морепловство, међусобни односи људски, па и сама земљорадња чине све већу и већу употребу парних машина. То огромно кретање имало

је за полазну тачку радове *Папена (Denis Papin,* 1647—1714), човека који је умро у највећем сиромаштву и непознат! Он је се био одао на Физику и Механику; он је први и појмио могућност да се сила компримисане (сабијене) паре употреби на покретање једне машине. Године 1707 он је направио једну лађу са точковима, која је могла да се креће, по Везеру, без помоћи једрила нити весала. Друштво једно, које је имало право пловидбе, мислећи да ће га овај проналазак упропастити, конфисковало је ову лађу и исту исекло. То је био смртоносни ударац за несретна Папена, који је умро 1710 или 1714, потпунце занемарен од свију; а са њим нестало је и парне машине.

Развој велике модерне индустрије учинио је конструкцију машинâ неопходно нужном. Услед све живље и живље 'рговине, раденичке руке нису биле довољне за фабрикацију 'ликих производа, који су распрострирани у све делове света. Д би се машинама помогло човеку, чињени су скупоцени и неавршени покушаји. Права парна машина била је најзад створена генијем *Вата* (1736—1819). Године 1784 била је направљена *парна машина,* таква каква је данас. Могло јој с по нешто и додавати у појединостима, али она остаје увек своjим основним деловима *Ватова машина.*

2. За *природне науке* био је осамнаести век једна епока громнога напретка. Док су Бифонови радови богатили природну историју, а Франклинови физику, Лавоазије створио је хемију.

Бифон (1707—1788) је казао да земља има своју историју, као год што човечанство има своју. Испреметали су земљу, да с испитали формацију земљишта, да би нашли у њој остатк ишчезлих раса у великим превратима, који су изменили оврпшину земљину. Извукло се из заборава, из ових архив које је земља у својим недрима скривала, све оно што је могло да обнови њену толико стару и тако тајанствену историју. Успех, који је крунисао покушаје чињене у тој цељи, учинио је славним име *Кивија* (1769—1832).

3. Диференцијални и интегрални рачун учинили су огромних напредака у овом веку. Далеко би нас одвело, кад бисмо хтели излагати све оно што нам ови рачуни представљају најинтересантнијег и најнаучнијег, као и веома значајну историју разних проблема, који се на ове рачуне односе и који су били потрзани од стране првих европских геометара. Ови проблеми, које су коловође ових рачуна узајамно себи задавали да окушају своје силе, били су најбоља средства да највише и припомогну развитку нових рачуна почетком осамнаестог века. Постављена су општа правила о диференцијалењу и интегралењу.

Диференцијални рачун, лакши и подеснији од интегралног рачуна, морао је природно ићи брже ка свом усавршењу. *Тејлор* (1685—1731) нам је открио познати *Тејлоров образац*, по коме се једна функција може развити у ред.

У напредовање интегралног рачуна долази интегралење диференцијалних образаца са једном променљивом, а за тим интегралење једначина̂ са више променљивих. Интегралење једначина̂ са парцијелним диференцијалима у толико је интересантнија грана интегралног рачуна у колико су, независно од њене тешкоће, највећи и најкориснији физичко-математички проблеми обично везани за ову врсту једначина̂; такви су проблеми: о вибришућим ужетима, о простирању звука, о равнотежи и кретању течности, чувени проблем о таутокранама у отпорној средини, и још неколико других проблема.

Из ових првих рачуна појавили су се разни нови рачуни; такви су: рачун о коначним диференцијама, онај о кружним, логаритмичким и уображеним количинама; рачун о границама; о аналитичким функцијама; о варијацијама;

онај о парцијелним диференцијалима; теорија бесконачних редова, о елиминацијама, о интерполацијама, о непрекидним разломцима, итд.

Међу новим рачунима, који су поникли у овом веку и који су знатно проширили границе Геометрије, мора се узети рачун о мери и односима угаоних количина, а специјално онај о диференцијалима и интегралима синусâ, косинусâ и тангената лукова. Примена анализе на велика питања из физичке астрономије била је прилика за то. — Мало је теорија у математичким наукама у којима извори аналитичког духа блистају више него што то бива у теорији о вероватноћи.

Геометрија је учинила знатних напредака. Теорија кривих линија била је неисцрпни предмет спекулација и истраживања за геометре. *Монж* (1746—1818) се може узети као творац дескриптивне геометрије.

4. *Оптика*, та грана математичких наука, тако интересантна сâма по себи и по открићима која нам је дала у физичком свету, није учинила готово ни најмањег напретка у току овога века.

Међу проблемима непосредне Оптике има један проблем чувен по одавна, а који је до последњих времена остао нерешен. Постоји једна врста ове тако познате нам привидности, по којој нам два паралелна реда дрветâ изгледају да се непрестано сужавају. Такав је случај и са зидовима једне дугачке галерије, или са таваном ове исте галерије, који изгледа да се спушта и саставља са патосом. Питало се, дакле, како би требало радити и правцем којих би линија требало садити ова дрвета, па да два реда изгледају паралелни?

У овом веку пронађени су астрономски дурбини.

5. Са новом вољом прихваћена је Астрономија; и како су геометрија и анализа учиниле знатних напредака,

Астрономија је, потпомогнута овим новим моћима, успела да темељно изложи појаве, који су пређе са̀мо назрети били, па чак и нових да открије. У овом веку проучавали су сунце, месец, Сатурн и, у опште, звезде; дата је теорија о сунцу, или о кретању земље; астрономски је посматрано кретање месеца; дата је физичка теорија о кретању месеца; итд. *Хершел* (1738—1822) је изложио (1783) транслационо кретање сунчаног система.

6. До осамнаестога века, *у Меканици* се само истраживало и разрађивани су поједини предмети. Овај осамнаести век, век је генерализације, класификације, сређивања и уређивања. После Коперника, Галилеја, Кеплера, бесмртног Декарта, Хигенса, Њутна, Лајбница и браће Јакова и Јована Бернулија наука прибира своја нова богаства, уређује их, издваја их од оних без икакве вредности и попуњава оне празнине које су дотле биле непопуњене. Решени су проблеми о *брахистокрону* и *верижници (ланчаници)*. Решено је и питање о равнотежи једног фуникуларног полигона. Примењујући статичке принципе, доказане су важне теореме, које се односе на теорију трансверзала̂.

Најзад, проналазак инфинитезималног рачуна дао је геометрима могућности да сведу законе о кретању тела на аналитичке једначине; и истраживање сила̂ и кретања̂ која отуда резултују постало је, од тада, главним предметом њихових радова.

Вариньон (1654—1722) је постао славним нарочито по својим меканичким радовима; мало је математичара који су толико радили на теоријском делу Меканике колико је Вариньон на њему радио. Он је унео у ову науку онај дух општности који га карактерише; он је у њој упростио разне принципе, и решио је множину питања, која још никако нису била обрађивана. Тако је он, у својој *Новој Меканици*, изложио *теорију момената конкурентних* *сила.* Веома је значајан начин, на који је Варињон поставио своју теорију у случају двеју компонената, откуда одмах потиче и општи случај. Из те теорије момената извео је ову теорему, данас позната под именом *Варињонове теореме:* Моменат резултанте више сила, које дејствују на једну исту тачку, у односу на једну осу раван је алгебарској суми момената компонената.

Многи од Варињонових мемоара односе се на науку о кретању, било једнаком, или о кретању које се мења по ма каквом закону, било, пак, да се кретање врши у празном простору или у некој отпорној средини. Ова је материја обрађена са великом општношћу. У његовом *Пројекту Нове Меканике* находи се цела Статика изведена из једног јединог и јасног принципа, из принципа о слагању сила, универсално познат под именом *Варињоновог принципа.*

Многи од савременика Варињонових оставили су важнијих радова из разних тешких делова Меканике, али ниједан између њих није допринео више од њега да се расветле меканички принципи и да се упрости њихово излагање.

Ајлер (Euler, 1707—1783) је дао најопштије једначине из Хидродинамике. Он је дао диференцијалне једначине за кретање једног чврстог тела у простору, које је изложено утицају ма каквих сила. И ако му Меканика дугује за лепу кинематичку теорију о ротацији једног чврстог тела око једне сталне тачке, ипак он није био успео да објасни све деликатне тачке, на које наилазимо у тој теорији; тек је Поансо разагнао таму са тога питања.

Све оне принципе и законе, које је Меканика опитима сазнала, требало је рачуном доказати и дати им најопштији облик. Ајлер се одао и томе врло корисном раду и, благодарећи његовој генијалности, успешно га свршио. На истом послу радили су Њутн, Клеро, Даламбер, Лагранж, Коши и многи други научници, чији се радови продужују и у прву половину деветнаестог века.

Ајлер је дао, 1744 године, једно приближно решење проблема коміта; али је његова метода изискивала више лажних претпоставака и употребу четврте опсервације. *Ламберт* је, мислим, први који је свео проблем комета, сматран на приближан али тачан начин, на једну једину једначину само са једном непознатом. Он је дао решење тога проблема у своме специјалном делу: *Insigniores orbitae cometarum proprietates,* које датира од 1761 године.

Даламбер (D'Alembert, 1717—1783) је упростио истина врло генијалан доказ о паралелограму сила, али врло дуг и компликован, који је пре њега постојао. Даламбер је био први, који је нашао законе о равнотежи више сила, које дејствују на један систем тачака непромењивог облика, у својим *Recherches sur la précession des équinoxes*. Он је то постигао на врло компликован начин, помоћу слагања и разлагања сила. Од тога доба, ти су закони доказани на простији начин разним aукторима; али Лагранжови обрасци имају превагу што воде непосредно тим законима.

Око половине осамнаестог века, Даламбер и Ајлер, готово у исто време, али помоћу различних метода, први су изложили питање о кретању једног чврстог тела у простору. Даламбер је, помоћу свога принципа, свео одредбу кретања једног ма каквог система на посматрање равнотеже тог истог система, тј. он је свео најопштије питање из Динамике на одговарајуће питање из Статике.

Лагранж (de la Grange, 1736—1812) је, у својој *Аналитичкој Механици* штампаној први пут 1788 године, свео све проблеме на опште обрасце, чије развијање даје све једначине које су нужне за решавање свакога проблема; он је скупио под једну исту тачку гледишта различне принципе, који су нађени да би се олакшало решење меканичких питања, показујући њихову везу и зависност, и да би се учинило да се цени о њиховој истинитости и њиховом пространству.

Ми ћемо их изложити по Лагранжу[1]; у осталом, не би се ни могао наћи сигурнији вођа ни озбиљнији (дубљи) историчар; у толико више јер он није никако занемарио историју и научност, што се односе на делове које је изложио.

Статика. — 1. Као што смо казали, закони Статике основани су на општим принципима, који се своде на три: *принцип равнотеже код полуге*, који смо изложили, *принцип о слагању силâ* и *принцип о виртуелним брзинама.*

Други основни принцип Статике, *принцип о слагању силâ,* основан је на овој претпоставци: ако две силе дејствују у исто време на једно тело (једну материјалну тачку) у разним правцима, ове су силе тада еквивалентне једној јединој сили, која је у стању да саопшти телу исто кретање које би му саопштиле ове две силе дејствујући посебице. Дакле, једно тело, које се покрене једнаким кретањем у двама различним правцима у исто време, прелази нужно дијагоналу паралелограма, чије би стране било прешло посебице на основу свакога од двају кретања. Откуда се закључује да су две ма какве силе, које дејствују заједно на једно исто тело, еквивалентне једној јединој која је представљена, по својој величини и свом правцу, дијагоналом паралелограма чије стране представљају понаособ величине и правце двеју датих сила. У томе се састоји принцип, који зову *принципом слагања сила.*

Овај је принцип сâм довољан да одредимо законе о равнотежи у свима случајевима; јер, на тај начин, слажући постепено све силе две и две, доћи ћемо до једне

[1]) *Oeuvres de Lagrange,* t. XI et t. XII; *Mechanique Analytique,* par M. de la Grange, 1788, Paris.

јединине силе која ће бити еквивалентна свима овим силама, и која ће, према томе, морати бити равна нули у случају равнотеже, ако у систему нема никакве сталне тачке; али, ако има једне такве тачке, требаће правац ове јединине силе да пролази кроз ту сталну тачку. То се може видети у свима статичким делима, а особито у *Новој Меканици* од *Варињона*, у којој је теорија о машинама изведена једино из принципа о коме говоримо. — J. Bertrand је приметио да горње тврђење није тачно: две силе које нису у истој равни немајући резултанте, горња напомена не може чак ни бити примењена, у опште, на случај једног чврстог система.

Очевидно је, да је Стевинова теорема о равнотежи трију сила, које су паралелне и сразмерне трима странама једног ма каквог троугла, једна са свим непосредна и нужна последица принципа о слагању сила, или, боље, она није ништа друго до сâм тај принцип представљен у другом облику. Али овај принцип има корист да је основан на простим и природним појмовима, док је Стевинова теорема основана само на посредним посматрањима.

2. Стари су познавали слагање кретања; али је, као што смо казали, Галилеј први употребио у Меканици посматрање сложеног кретања.

За тим се находи теорија сложеног кретања у списима Декартовим, Роберваловим, Мерсеновим, Валисовим, итд.; али, до године 1687, које су године изашли Њутнови *Математички Принципи* и Варињонов *Пројекат Нове Меканике*, није се никако мислило да се замењују, у слагању кретањâ, силе са кретањима која оне могу произвести и да се одређује сложена сила, резултанта двеју датих сила, као што се одређује сложено кретање из двају датих праволинијских и једнаких кретања.

У другом короларе трећег закона о кретању, Њутн је показао, са мало речи, како се лако изводе закони о равнотежи из слагања и разлагања сила̂, узимајући дијагоналу једног паралелограма за силу, што је сложена из двеју сила које су представљене његовим странама; али је овај предмет детаљније израђен у Varињоновом делу, и његова *Нова Меканика*, која је штампана на три године после смрти његове, 1725 године, садржи потпуну теорију о равнотежи сила̂, која је изведена из самог посматрања о слагању или разлагању сила̂. Варињон је први показао употребу ове теорије у делу: *Равнотежа различних машина*.

3. Принцип слагања сила даје одмах услове равнотеже између трију сила̂ које дејствују на једну тачку, што је се могло извести из равнотеже полуге само помоћу једног низа закључака. Али, с друге стране, кад се хоће да се, помоћу овог принципа, нађу услови равнотеже између двеју паралелних сила које дејствују на крајеве једне праве полуге, онда смо принуђени да употребимо посредна посматрања, замењујући праву полугу са једном полугом на лакат, као што су то Њутн и Даламбер и чинили, или додајући две стра̂не силе које се узајамно потиру, али које, сложене са датим силама, чине њихове правце конкурентнима, или, најзад, замишљајући да се продужени правци сила секу у бесконачности, и доказујући да сложена сила мора пролазити кроз тачку ослонца: то је начин којим се Варињон послужио у својој Меканици. На тај начин, ма да, на крају крајева, два принципа: принцип о полузи и принцип о слагању сила̂ воде нас увек истим резултатима, значајно је да најпростији случај за један од ових принципа постаје најсложенији за други принцип.

4. Али, може се поставити једна непосредна веза између ова два принципа, помоћу теореме коју је дао Варињон у својој *Новој Меканици* (Section I, Lemme XVI), а која се састоји у овоме: ако се од једне ма које тачке, узете у равни једног паралелограма, спуштају управне на дијагоналу и на обе стране што обухватају ову дијагоналу,

производ из дијагонале и њене управне раван је суми производа из двеју страна и њихових респективних (дотичних) управних, ако тачка пада ван паралелограма, или раван је њиховој разлици, ако она пада у паралелограм. Варињон је показао, врло простом конструкцијом, да образујући троуглове који имају дијагоналу и две стране за основе, а дату тачку за заједничко теме, троугао образован на дијагонали, у првом случају, раван је суми а, у другом случају, раван је разлици двају троуглова што су образовани на странама; што је сама по себи једна лепа геометријска теорема, независна од њене примене у Механици.

Ова би теорема тако исто постојала и доказ би био исти, кад би се на продужењу дијагонале и странâ узели, свуда где се хоће, делови једнаки са овим линијама; и пошто се свака сила може претпоставити да дејствује на ма коју тачку њеног правца, то се може закључити, у опште, да две силе, представљене по величини и по правцу двема правима постављеним у једној равни, имају једну сложену или једну резултанту представљену по величини и по правцу једном правом, која је постављена у истој равни, која продужена пролази кроз пресечну тачку двеју правих, и која је таква, да узевши једну ма коју тачку у овој равни, и спустивши из ове тачке управне на ове три праве, које се могу продужити ако је нужно, да је производ из резултанте и њене управне раван суми или разлици респективних производа из двеју компонентних сила и њихових управних, према томе да ли ће тачка, из које се спуштају три управне, бити узета ван правих или између правих које представљају компонентне силе.

Кад је претпостављено да ова тачка пада на правац резултанте, ова сила не улази више у једначину, и имаћемо једнакост између двају производа из компонената и њихових управних; то је случај сваке полуге праве и на лакат, чија је тачка ослонца иста као и тачка о којој је реч, пошто је тада акција резултанте уништена отпором ослонца.

Ова теорема, коју је дао Вариньон, основа је готово свију модерних Статика, у којима она сачињава општи принцип, *принцип момената* назват. Његова велика корист састоји се у томе што су слагање и разлагање силâ сведени на сабирања и одузимања; тако, ма колики број сила био, које имају да се сложе, може се лако наћи резултујућа сила, која мора бити равна нули у случају равнотеже.

5. Ја сам придодао епоку Вариньоновог открића оној о публикацији његовог Пројекта, ма да је се у огласу, који је на челу *Нове Меканике*, тврдило да је он дао пре две године, у *Histoire de la Republique des Lettres*, један мемоар о котурима, у коме је се служио са сложеним кретањем те да одреди све оно што се ове машине тиче; али се мора приметити да тај чланак није тачан. Тај мемоар, о коме је реч, о котурима, находи се тек у *Nouvelles de la Republique des Lettres* од месеца Маја 1687, под насловом *Nouvelle démonstration générale de l'usage des poulies à moufle*. Ауктор посматра у њему равнотежу једног терета који је држан једним ужетом, које пролази преко једног котура и чија два краја нису паралелни. Он у истом није никако употребио нити поменуо принцип о слагању силâ, али је употребио већ познате теореме о теретима који су држани ужетима, и цитирао Pardis-ову и Dechales-ову *Статику*. У једном другом доказу, он је свео питање на полугу, посматрајући праву, која саставља две тачке у којима уже оставља котур, као једну полугу оптерећену теретом који дејствује на котур, и чији су крајеви вучени двама крајевима ужета које држи котур.

Да не би се ништа изоставило од онога што се односи на историју открића о слагању силâ, морамо рећи коју реч о једном малом спису, који је Ламн објавио 1687, под насловом *Nouvelle manière de démontrer les principaux* *théorèmes des éléments des mécaniques.* Аuктор држи, ако је једно тело гурнуто двема силама у два различна правца, да ће оно нужно ићи једним средњим правцем; тако, ако му је пут у том правцу затворен, оно ће остати у миру, и две ће силе бити у равнотежи. Но он је одредио средњи правац слажући два кретања која би тело учинило у првом тренутку под утицајем сваке од двеју сила, када би оне посебице дејствовале, што му је дало дијагоналу паралелограма чије би две стране биле пређени простори у истом времену под утицајем двеју сила и, према томе, сразмерне силама. Отуда је одмах извео теорему: да су две силе међу собом у обрнутој размери синусâ углова што их њихови правци граде са средњим правцем који би тело узело када не би било заустављено, и исту је теорему применио на стрму раван и на полугу, кад су њени крајеви вучени силама, чији правци граде један угао; али, за случај кад су ови правци паралелни, он је употребио површно и мало убедљиво резоновање.

Сагласност принципа, који је Лами употребио, са оним Варињоновим навела је аукторa од *Histoire des Ouvrages des Savants* (Април 1688) да каже како му изгледа да први дугује последњем за откриће свога принципа. Лами је се оправдао од овога окривљавања, у једном писму које је штампано у *Journal des Savants* од 13 Септембра 1688, на које је журналиста одговорио месеца Децембра исте године; али овај спор, у коме Варињон није никако суделовао, није даље ишао, и Ламијев спис, изгледа, пао је у заборав.

У осталом, простота принципа о слагању силâ и лакоћа да се исти примени на све проблеме о равнотежи учиниле су те је био од меканичарâ усвојен одмах после његовог открића, и може се рећи да он служи за основ готово свима статичким делима, која су после тога изашла.

6. Међу тим мора се признати да принцип о полузи, он једини има корист да је основан на природи равнотеже

посматрана сâма по себи, и као једно стање независно од кретања; у осталом, има једна битна разлика у начину оцењивања силâ које су у равнотежи у ова два принципа; тако, ако се не би успело да се они вежу резултатима, онда би се могло са разлогом сумњати да ли је дозвољено да заменимо основни принцип полуге са оним који резултује из страног посматрања сложених кретања.

И заиста, при равнотежи полуге, силе су терети или могу бити посматране као такви, и једна сила сматра се да је двогуба или трипла од неке друге само дотле, док је образована скупом двеју или трију једнаких сила, свака равна оној другој сили. Али, тежња за кретањем претпостављена је иста код сваке силе, ма какав био њен интензитет; док се, код принципа о слагању силâ, цени вредност силâ степеном брзине који би оне саопштиле телу на које дејствују, кад би свака била слободна да дејствује посебице, и може бити та је разлика у начину појимања силâ и спречавала дуго меканичаре да употребе познате законе о слагању кретања у теорији о равнотежи, чији је најпростији случај онај о равнотежи тешких тела.

7. После тога тражило се да се принцип о слагању силâ учини независним од посматрања кретања, и да се исти постави једино на истинама које су очевидне сâме по себи. *Данијел Бернули* (1700—1782) први је дао, у *Commentaires de l' Académie de Pétersbourg*, свеска прва, врло генијалан доказ о паралелограму силâ, али дуг и компликован доказ, који је за тим Даламбер мало упростио у првој свесци својих делâ. — Исти је доказ извео и упростио Еме (Aimé) у Лијувиловом *Journal de Mathématiques*, I série, t. I, p. 335.

Овај је доказ основан на овим двама принципима:

1°. Ако две силе дејствују на једну исту тачку у разним правцима, оне имају за резултанту једну једину силу која дели на два једнака дела онај угао који се находи између њихових праваца, кад су две силе једнаке, и која је равна њиховој суми када је овај угао нула, или њиховој разлици кад је овај угао од два права. — 2°. Јенаки број пута узете исте силе, или ма какве силе које су им сразмерне, имају једну резултанту једнаки број пута узета њихова резултанта или сразмерна овој резултанти, углови остајући исти.

Овај је други принцип очевидан, посматрајући силе као количине које се могу сабирати или одузимати.

Што се првога принципа тиче, њега доказују посматрајући кретање које мора узети једно тело, које је гурнуто двема силама које нису у равнотежи, и које кретање, пошто је нужно једино, може бити приписано једној јединој сили која на њ дејствује у правцу његовог кретања. На тај начин, може се рећи да овај принцип није потпунце изузет од посматрања кретања.

Што се тиче правца резултанте у случају једнакости двеју сила, јасно је да нема никаквог разлога да она буде више нагнута према једној него ли према другој од ових двеју сила, и да, према томе, она мора сећи угао њихових праваца на два једнака дела.

За тим су превели на анализу основ овога доказа, и дали су му различне више или мање просте облике, посматрајући резултанту као функцију од компонентних сила и од угла који се находи између њихових праваца. *(Видети* другу свеску од *Mélanges de la Société de Turin, Mémoires de l' Académie des Sciences*, од 1769, шесту свеску Даламбертових *Opuscules*, итд.). Али треба признати, двојећи на тај начин принцип о слагању силâ од принципа о слагању кретања, да му се тиме причињава да изгуби своје главне користи, очевидност и простоту, и да се своди да постане само један резултат геометријских посматрања или анализе.

8. Долазимо, најзад, на трећи принцип Статике, на *принцип о виртуелним брзинама.* Под *виртуелном брзином*

мора се разумети она брзина коју је једно тело у равнотежи расположено да прими, у случају кад би се равнотежа пореметила, тј. брзина коју би ово тело стварно узело у првом тренутку његовог кретања; и принцип, о коме је реч, састоји се у томе да су силе у равнотежи када су оне у обрнутој размери њихових виртуелних брзина, цењене у правцима ових сила.

Мало ако се испитају услови о равнотежи код полуге и код других машина, лако је познати истинитост овога принципа; међу тим не изгледа да су геометри, што су Галилеју претходили, знали што год о томе. Гидо Убалди је може бити први који га је приметио код полуге и код покретних котурова. Лагранж мисли да може Галилеју да припише његово откриће, који га је опазио код стрмих равни и код машина које зависе од ове, и који га је у свом делу *Della scienza mecanica* сматрао као једно опште својство о равнотежи машинâ. (*Видети* његово *меканичко дело* и белешку о другом ставу трећега Дијалога у Болоњском издању од 1655). Међу тим, може бити, није било немогућно наћи о овом принципу неку нејасну идеју још у Аристотеловим делима!

Галилеј је подразумевао под *моментом* једног терета, или једне силе која дејствује на једну машину, напрезање, акцију, енергију, *моћ (impetus)* ове силе за кретање машине, тако да постоји равнотежа између двеју сила, кад њихови моменти за кретање машине у супротном смислу буду једнаки; и он је показао да је моменат увек сразмеран сили помноженој са виртуелном брзином, која брзина зависи од начина на који сила дејствује.

Овај је појам момената био такође усвојен од Валиса, у његовој Меканици штампаној 1669. Аукtor је у њој ставио принцип једнакости момената за основ Статике, и отуда је на дугачко извео теорију о равнотежи у главним машинама.

Данас, обичније, под *моментом* разуме се само производ једне силе и одстојања њеног правца од једне тачке, или једне праве, или једне равни, тј. производ једне силе и крака полуге којим она дејствује; али изгледа да је појам *момента*, који су Галилеј и Валис дали, много природнији и општији; и не види се разлог зашто је занемарен и замењен једним другим који изражава само вредност момента у извесним случајевима, као код полуге, итд.

Декарт је тако исто свео целу Статику на један једини принцип који, у основу, излази на онај Галилејев, али који је представљен на један мање општи начин. Ово је тај принцип, да није потребно ни више ни мање силе те да се подигне један терет на извесну висину, него што би је требало да се подигне један тежи терет на толико мању висину, или један лакши терет на толико већу висину. (*Видети* 73 писмо из прве свеске објављене 1657, и *Traité de Mécanique* штампано у посмртним делима). Отуда следује да ће бити равнотеже између двају терета, када су они расположени тако да перпендикуларни путеви, које они могу прећи заједно, буду у обрнутој размери терета̂. Али, у примени овога принципа на разне машине, треба посматрати само пређене просторе у првом тренутку кретања, и који су сразмерни са виртуелним брзинама, другачије не би се имало правих закона о равнотежи.

У осталом, било да се принцип о виртуелним брзинама сматра као једно опште својство равнотеже, као што је то Галилеј чинио, било да се жели узети га са Декартом и Валисом за прави узрок равнотеже, треба признати да он има сву простоту која се може захтевати од једног основног принципа; и ми ћемо мало ниже видети колико је овај принцип препоручљив својом општношћу.

Торичели, чувени ученик Галилејев, ауктор је једног другог принципа, који такође зависи од принципа виртуелних брзина; тај је, принцип: када су два терета везана заједно и постављена тако да њихово тежиште не може силазити, да су они у равнотежи у овом положају. Торичели га је применио само на стрму раван, али је лако да се убедимо да он не мање постоји и код других машина. *(Видети* његово дело *De motu gravium naturaliter descendentium*, које је изашло 1664).

Торичелијев принцип учинио је да се јави један други принцип, који су неколико ауктора употребили за лакше решавање разних статичких питања; то је овај: у једном систему тешких тела, која су у равнотежи, тежиште је што је могућно ниже. И заиста, по теорији максима и минима зна се да је оно најниже кад је диференцијал његовог силажења раван нули, или, што на исто излази, кад се ово тежиште нити пење нити силази, док међу тим систем бесконачно мало промени место.

9. Принцип виртуелних брзина може се уопштити на овај начин:

Ако је један ма какав систем тела или тачака, свако од њих вучено ма каквим силама, у равнотежи, и ако се овом систему даде једно ма какво мало померање, на основу којег свака тачка прелази један бесконачно мали простор који ће изражавати њену виртуелну брзину, сума производâ, из сваке силе помножене са простором који тачка, на коју она дејствује, прелази у правцу ове саме силе, та сума производâ биће увек равна нули; сматрајући као положне, мале просторе који су пређени у смислу силâ, а као одречне, просторе пређене у супротном смислу.

Јован Бернули је уопштио Галилејев став и први је, у колико се зна, приметио ову велику општност принципа виртуелних брзина, и његову корист за решавање статичких проблема. Бернули се задовољио да искаже овај општи став, али га није никако доказао. Вероватно је да је до истог става дошао посматрајући компликованије случајеве него што је то Галилеј чинио, и да га је уопштио простом индукцијом. То се види из једног од његових писама писатих Варињону, датирано 1717, које је овај последњи ставио на челу деветог одељка његове Нове Меканике, одељак употребљен цео да се помоћу разних примена покаже истинитост и универсална употреба принципа виртуелних брзина. Варињон је први дао општи исказ тога принципа.

Овај исти принцип изазвао је за тим онај, који је *Мауиертијус* (1698—1759) предложио у *Мемоарима Париске Академије Наука* за годину 1740, под именом *Закон мировања (Loi des Repos)*, и који је Ајлер више развио и уопштио у *Мемоарима Берлинске Академије* за 1751 годину. Најзад, то је још исти принцип који служи за основ ономе принципу што га је маркиз Куртиврон дао у *Мемоарима Париске Академије Наука* за 1748 и 1749 годину.

Лагранж узима овај принцип за базис своје Аналитичке Меканике и цени да сви општи принципи што би се, може бити, могли још открити у науци о равнотежи биће само исти принцип виртуелних брзина, различно посматран, и од кога ће се разликовати само у изразу. Према томе, Лагранж сматра овај принцип као једну *врсту меканичке аксиоме*.

У осталом, овај је принцип не само сâм по себи врло прост и врло општ; он има још, више, драгоцену и јединствену корист да може да се преведе у један општи образац, који обухвата све проблеме што се могу поставити о равнотежи тела. Лагранж је изложио овај образац у свем његовом пространству. Он га је чак представио на још општији начин, него што се чинило пре њега, и дао је нових примена за један ма какав систем силâ, у његовој *Аналитичкој Меканици*.

Тек после публикације овог великог Лагранжовог дела, јавио се први општи доказ овога принципа од *Фурија* (1768—1830) и датира тек од 1797. За тим се јавио велики број других доказа; и сâм је Лагранж мислио да треба да предложи један у другом издању своје Аналитичке Меканике. За тим га је дао Поансо и још неколико других писаца.

Хидростатика. — 1. Као што смо казали, Галилеј, Декарт и Паскал служили су се принципом виртуелних брзина да би доказали главне теореме у Хидростатици. Али су ове примене принципа виртуелних брзина још биле и сувише хипотетичке и, тако рећи, и сувише лабаве да би могле послужити за постављање тачне теорије о равнотежи течностӣ. Тако исто, овај је принцип био после тога напуштен од већине ауктора, који су обрађивали Хидростатику, а нарочито од оних који су били предузели да прошире границе ове науке, тражећи законе о равнотежи хетерогених течности, чији су сви делови били покретани ма каквим силама; истраживање врло корисно и врло важно по вези коју оно има са чувеним питањем о облику земље.

Хигенс је узео у овом истраживању, за принцип равнотеже, перпендикуларитет (одвесност) теже на површину. Њутн је пошао од принципа једнакости тежинâ централних стубова. *Буге* (1698—1758) је, за тим, приметио (1734) да, често, ова два принципа нису давали исти резултат, и отуда је закључио, да би било равнотеже у једној течној маси, требало би да ова два принципа постоје у исто доба и да се слажу и да дају исти облик на површини течности. Али, *Клеро* (1713—1765) је доказао још више, да може при том бити случајева, у којима та сагласност постоји, а у којима међу тим не би никако било равнотеже. *Маклорен* (1698—1746) је уопштио Њутнов принцип, доказујући да свака честица, у једној течној маси која је у равнотежи, мора бити подједнако стиснута свима праволинијским течним стубовима, који се наслањају на ову честицу а завршују се на површини; а Клеро га је учинио још општијим, показав да равнотежа једне течне масе изискује да се напони (напрезања) свију течних делова, који су затворени у један ма какав канал, који се простире до површине или улази у њу саму, да се ти напони узајамно ниште. Најзад, он је први извео из овога принципа праве и основне законе о равнотежи једне течне масе, чији су сви делови покретани ма каквим силама, и нашао је једначине са парцијелним диференцијалима, којима се могу изразити ови закони; откриће, које је изменило изглед Хидростатике, и створило од ње као неку нову науку.

2. Клеротов принцип само је природна последица принципа једнакости притиска у свима правцима, и могу се одмах из овога извести исте једначине које резултују из равнстеже каналâ. Јер, посматрајући притисак као једну силу која дејствује на сваку честицу, и која може да се изрази неком функцијом од координатâ, које одређују положај честице у течној маси, разлика притисака што она трпи (сноси) на двема супротним и паралелним странама даје силу која тежи да је креће управно на ове стране, и која мора бити поништена убрзавним силама којима је ова честица покретана; тако да односећи све ове силе на правце трију правоуглих координатних оса, и претпостављајући течну масу подељену на мале правоугле паралелограме, који имају за стране елементе ових координата, добивају се непосредно три једначине са парцијелним диференцијалима између притиска и датих убрзавних сила, које једначине служе да одредимо вредност самога притиска и однос који мора постојати између ових сила. Овај прост начин изналажења општих хидростатичких закона дугујемо Ајлеру (*Mémoires de Berlin* од 1755) и он је био усвојен готово у свима делима ове науке.

3. Принцип једнакости притиска у свима правцима јесте, дакле, довде основ теорије о равнотежи течностû, и мора се признати да овај принцип обухвата, у ствари, најпростије и најопштије својство, што нам га је опит открио код течностû у равнотежном стању. Али, је ли знање овога својства неопходно потребно у истраживању законâ о равнотежи течностû? И зар се не могу извести ови закони непосредно из саме природе течностû, посматране

као скуп молекула врло витких, независних једни од других и потпунце покретљивих у свима правцима? — На та питања и још на многа друга одговорићемо у самој Хидростатиц.

Динамика. — 1. Ако се замисли да су кретање једног тела и силе, које на њ дејствују, разложене правцем трију правих линија управних међу собом, онда могу бити посебице посматрана кретања и силе што се односе на сваки од ових трију праваца. Јер, због управности праваца, очевидно је да свако од ових парцијелних кретања може бити сматрано као независно од двају других и да оно може бити преиначено само од стране оне силе, која дејствује у правцу овога кретања; откуда се може закључити да се ова три кретања морају покоравати, свако од њих посебице, законима праволинијских кретања, која су убрзана или успорена датим силама. Но, пошто се у праволинијском кретању ефекат убрзавне силе састоји само у томе да промени брзину тела, то ова сила мора бити мерена односом између увећања или умањења брзине за ма који тренутак и трајања тога тренутка, тј. диференцијалом брзине подељен са диференцијалом времена; а, како је сâма брзина изражена, у променљивим кретањима, са диференцијалом простора подељен са диференцијалом времена, то отуда следује да ће сила, о којој је реч, бити мерена другим диференцијалом простора подељен са квадратом првога диференцијала времена, претпостављен сталан. Дакле, и други диференцијал простора што тело прелази, или што је сматран као пређен, у правцу свакога од трију управних праваца, подељен са квадратом сталног диференцијала времена, изражаваће убрзавну силу којом тело мора бити покретано у том истом правцу и мораће, према томе, бити изједначен са актуалном силом, која је претпостављена да дејствује у том правцу. То сачињава тако познати принцип о убрзавним силама.

Није нужно да три правца, на које се односи моментано кретање тела, буду апсолутно фиксни, довољно је да такви буду за време трајања једног тренутка. На тај начин, у кретањима по кривој линији, у сваком тренутку могу се узети ови правци, један правцем тангенте а друга два правцем управних на криву линију. Тада ће убрзавна сила, која дејствује правцем тангенте и коју *тангенцијалном силом* зову, бити сва употребљена да преиначи апсолутну брзину тела и биће изражена елементом те брзине подељен са елементом времена, тј. биће изражена са $\frac{dv}{dt}$.

Нормалне силе, на против, промениће само правац тела и зависиће од кривине линије коју оно описује. Сводећи нормалне силе на једну једину, ова се сложена сила мора налазити у равни кривине и бити изражена квадратом брзине подељен са полупречником кривине, тј. изражена са $\frac{v^2}{\varrho}$, пошто у сваком тренутку тело може бити сматрано као да се креће по оскулаторном кругу.

На тај су начин нађени познати обрасци о тангенцијалним и нормалним силама, којима је се дуго служило при решавању проблемâ о кретању телâ, која су покретана датим силама. *Ајлерова Меканика*, која је 1736 изашла, и која се мора сматрати као прво велико дело у коме је анализа била примењена на науку о кретању, још је цела основана на овим обрасцима; али су од тада готово били занемарени, пошто је био нађен један простији начин да се изрази ефекат убрзавних сила на кретање телâ.

Тај се начин састоји у томе, да се однесу кретање тела и силе које на њ дејствују на сталне правце у простору. Тада, употребљујући, за одредбу места тела у простору, три правоугле координате, које имају те исте правце, промене ових координатâ представљаће очевидно телом пређене просторе у правцима ових координата; према томе, њихови други диференцијали, подељени са квадратом сталног диференцијала времена, изражаваће убрзавне силе које морају дејствовати правцем ових истих координата. На тај начин, изједначавајући ове изразе са изразима од датих сила по природи проблема, имаћемо три сличне једначине, које ће нам служити да одредимо све околности кретања. Овај начин, да се одреди кретање једног тела, које је покретано ма каквим убрзавним силама, сводећи га на праволинијска кретања, својом простотом, бољи је од свију других; требало га је представити најпре, али изгледа да га је Маклорен први употребио у свом делу: *Traité des Fluxions*, које је изашло 1742 на енглеском; тај је начин сада универсално усвојен.

2. Помоћу изложених принципа могу се, дакле, одредити закони кретања једног слободног тела под утицајем ма каквих сила, само ако се то тело буде сматрало као једна тачка.

Могу се такође применити ови принципи на истраживање кретања више телâ која врше једна на друга узајамну атракцију, по једном закону који је позната функција одстојањâ; најзад, није тешко распрострети их на кретања која се врше у срединама које чине отпора, као и на она која се врше на датим кривим површинама, јер отпор средине није ништа друго до једна сила која дејствује у супротном правцу од онога у ком се тело креће; и кад је једно тело приморано да се креће по датој површини, онда нужно има једна сила управна на површину, која га на њој задржава, и чија се непозната вредност може одредити према условима који потичу из саме природе површине.

Али, ако се тражи кретање више тела која дејствују једна на друга потиском или притиском, било непосредно као при обичном судару, или помоћу конаца или крутих полуга о које су тела привезана, или, у опште, каквим било другим начинима, тада је питање вишег реда и претходни принципи нису довољни да га реше. Јер су овде силе, што дејствују на тела, непознате, и треба извести ове силе из акције коју тела морају међу собом вршити, према њиховој узајамној диспозицији. Нужно је дакле прибећи једном новом принципу, који служи да одредимо силу телâ у кретању, водећи рачуна о њиховој маси и о њиховој брзини.

3. Овај се принцип састоји у томе, да би се једној датој маси саопштила извесна брзина, у ма ком правцу, било да је ова маса у миру или у кретању, потребна је једна сила чија је вредност[1] сразмерна производу масе са брзином и чиј би правац био исти као и правац ове брзине. Овај се производ из масе једног тела и његове брзине зове у опште *количина кретања овога тела*, јер у истини то је сума кретањâ свију материјалних делова тела. На тај начин, силе се мере количинама кретања, које су оне у стању произвести, и обратно количина кретања једнога тела јесте мера силе коју је тело у стању да произведе противу неке препоне, и која се *перкусијом* зове. Откуда следује, ако се два нееластичка тела сударе непосредно у супротном смислу са једнаким количинама кретања, њихове силе морају бити у равнотежи и поништавати се; према томе, тела се морају зауставити и остати у миру. Али, ако се судар изврши по средством једне полуге, требало би, за уништење кретања телâ, да се њихове силе покоравају познатом закону о равнотежи полуге.

Изгледа да је Декарт први приметио овај принцип, што га изложисмо; али, он је се преварио у његовој примени на судар телâ, пошто је држао да се иста количина апсолутног кретања морала увек одржавати. J. Bertrand, пак, примећује: да се у ниједном од многобројних списа Декартових не налази чист и разумљив исказ овога принципа.

---

[1]) Треба овде под *вредношћу* једне силе разумети производ из ове силе и времена за које она дејствује, или, општије, интеграл производа из елемента времена и интензитета силе. Реч *сила* узео је Лагранж у истом смислу у коме и Декарт. Данас се под силом разуме једно напрезање, које се може изразити у килограмима.

Што се применâ тиче, погрешке, које је учинио, много су веће него што се мислило. Декарт је тврдио, између осталих погрешних ставова, да једно тело, које судари неко друго, може овоме саопштити од кретања само онда ако има већу масу од његове; у сваком другом случају, сударајуће тело биће одбијено и сударено тело не ће се маћи. (Издање Кузена, t. IX, p. 195).

Валис је у ствари први, који је имао чист појам о овом принципу, и који је се успешно њиме служио да открије законе о комуникацији кретања при судару чврстих или еластичких тела, као што се то види у *Transactions philosophiques* од 1669, и у трећем одељку његовог дела *de Motu*, штампано 1671.

Као год што производ масе и брзине изражава коначну силу једног тела у кретању, исто тако производ масе и убрзавне силе, коју смо видели да је представљена елементом брзине подељен са елементом времена, изражаваће елементарну силу или силу која се ствара; и ова количина, ако се сматра као једна мера напрезања што тело може учинити на основу елементарне брзине, коју је узело или коју тежи да узме, сачињава оно што се *пресијом* зове; али, ако се сматра као мера силе или моћи која је потребна да саопшти ову исту брзину, она је тада оно што се *моторном силом* зове. На тај начин, пресије или моторне силе поништаваће се или ће градити равнотежу ако су једнаке а супротнога смисла, или ако се, примењене на једну ма какву машину, покоравају законима о равнотежи ове машине.

4. Да бисмо изнели у целости историју проблема о осцилационом центру, о којем смо код Хигенса говорили, ми ћемо поменути решење које је Јован Бернули дао о њему у *Мемоарима Париске Академије Наука* и које је, пошто га је и Тејлор готово у истом времену био дао у делу званом *Methodus incrementorum*, било узрок жестоке препирке између ова два геометра; али, ма како била оштро-

умна идеја на којој је основано ово ново решење и које се састоји у томе да се сведе на један пут сложено клатно на просто клатно, замењујући његове разне терете другим теретима који су скупљени у једну једину тачку, са фиктивним масама и тежинама, таквим да они производе иста угаона убрзања и исте моменте у односу на ротациону осу и да целокупна тежина скупљених терета буде једнака са њиховом природном тежином, опет зато мора се признати да ова идеја није ни тако природна ни толико јасна као што је она о равнотежи између задобивених и изгубљених количина кретања.

У *Хермановој* (*Hermann*, 1678—1733) *Phoronomia*, штампана 1716, находи се још један нов начин помоћу кога се решава исти проблем, а који је основан на овом другом принципу, да су моторне силе, са којима терети, што образују клатно, морају бити покретани те да би могли бити заједнички покретани, да су те моторне силе еквивалентне онима које произлазе од акције теже; тако да прве, пошто су претпостављене да су управљене у супротном смислу, морају чинити равнотежу са овима последњим.

Овај принцип, у основу, само је принцип Јакова Бернулија представљен на сложенији начин, и лако их је сводити један на други помоћу статичких принципа. Ајлер га је уопштио и њиме се служио да одреди осцилације витких тела, у једном мемоару штампаном 1740, у VII свесци старих *Commentaires de Pétersbourg*.

Било би и сувише дуго да говоримо о другим динамичким проблемима, којима су геометри вежбали своју оштроумност, после овога проблема о осцилационом центру и пре но што је вештина за његово решавање била сведена на стална правила. Ови се проблеми, што су их браћа Бернули, Клеро и Ајлер узајамно себи задавели, находе распрострањени у првим свескама од *Mémoires de Pétersbourg* и *de Berlin*, у *Mémoires de Paris* (1736 и 1742 године), у *Делима* Јована Бернулија и у Ајлеровим *Opuscu-*

les. Они се састоје у томе да се одреде кретања више тела, тешких или не, која се гурају или се вуку помоћу конаца или крутих полуга за које су чврсто привезана, или дуж којих она могу слободно тећи, и која су, пошто су примила ма какве импулсе, остављена самима себи, или су приморана да се крећу по датим кривим линијама или површинама.

Хигенсов принцип био је готово увек употребљаван при решавању ових проблема; али, како овај принцип даје само једну једину једначину, то су тражене друге једначине, посматрајући непознате силе са којима су замишљали да се тела морају гурати или вући, и које су сматрали као еластичке силе дејствујући тако исто у супротном смислу. Употреба ових сила ослобођавала је вођења рачуна о вези тела и допуштала је да се употребе закони о кретању слободних тела; за тим су услови, који су по природи проблема морали постојати између кретања разних тела, послужили да се одреде непознате силе, које су у рачун увучене. Али је увек требало особите вештине, те да се у сваком проблему размрсе све силе о којима је било нужно водити рачуна, што је причињавало да су ови проблеми пикантни и да могу да побуде на такмичење.

5. *Динамичко дело (Traité de Dynamique)* од *Даламберта*, које је изашло 1743, учинило је крај овим врстама зачикивања, дајући једну непосредну и општу методу за решавање, или бар за стављање у једначине, свију динамичких проблема, што се могу замислити и поставити. Ова метода своди све законе о кретању тела на законе о њиховој равнотежи и, на тај начин, своди Динамику на Статику. Ми смо већ приметили да је онај принцип, који је Јаков Бернули употребио при истраживању осцилационог центра, имао ту корист да је чинио зависним ово истраживање од услова равнотеже полуге; али је било резервисано за Даламберта да размотри овај принцип у опште и да му даде сву простоту и плодност, што је год било могућно.

Пре но што приступимо том Даламбертовом раду, напоменимо: кад су тела једног система изложена извесним везама (условима), онда им силе, које на њих дејствују, не саопштавају исто кретање, које би им саопштиле када би она била потпунце изолисана и слободна; али, кад бисмо могли одредити силе, које од ових веза произлазе, онда додајући их за свако тело оним силама које непосредно на њ дејствују, могли бисмо сматрати сва тела као потпунце слободна и изолисана.

Ако се више телима саопште кретања, која она морају променити због њихове узајамне акције, јасно је да се могу ова кретања сматрати као да су сложена из оних кретања што ће их тела стварно узети, и из других кретања која су уништена; откуда следује да ова последња морају бити таква, да тела, обдарена овим јединим кретањима, чине међу собом равнотежу.

Такав је принцип, познат у науци под именом *Даламбертовог принципа,* који је Даламбер дао у свом Динамичком делу и којим је се сретно послужио у више проблема. Овај принцип не даје одмах нужне једначине за решавање динамичких проблема, али он нас учи да их сведемо на услове о равнотежи. На тај начин, комбинишући овај принцип са обичним статичким принципима о равнотежи полуге или о слагању силâ, могу се увек наћи једначине за сваки проблем, помоћу неколиких више или мање сложених конструкција. На тај је начин и употребљаван, довде, у применама овај принцип; али тешкоћа да се одреде силе које морају бити поништене, као и закони о равнотежи ових сила, често чини ову примену овога принципа незгодном и тешком; и решења, која отуда резултују, готово увек су дужа него кад би била изведена из принципâ, мање простих и мање непосредних, као што се сваки може о томе уверити у другом одељку истог Динамичког дела. Што још причињава да се ова решења компликују, то је што је аукtор избегавао да учини елементе времена dt сталним, као што он сâм о том јавља (art. 94).

6. Ако би се желело избећи разлагање кретањâ које овај принцип изискује, требало би одмах само поставити једначину између силâ и произведених кретања, али ова узета у супротним правцима. Јер, ако се замисли да се сваком телу саопшти, у супротном правцу, кретање које оно мора узети, јасно је да ће систем бити сведен на мировање; према томе, требаће да ова кретања поништавају она која су тела била примила и којим би се она кретала кад не би било њихове међусобне акције; дакле, мора бити равнотеже између свију ових кретања, или између силâ које могу да их произведу.

Овај начин да се закони Динамике сведу на законе из Статике, у истини, мање је непосредан, него што је онај који резултује из Даламбертовог принципа, али он пружа више простоте у применама; он излази на онај Херманов и Ајлеров, који га је употребио при решавању многих меканичких проблема, и који се находи у неким меканичким делима под именом Даламбертовог принципа.

7. Лагранж је се, у првом одељку свога дела, служио принципом виртуелних брзина да би могао свести целу Статику на један једини општи образац, који даје законе о равнотежи једног ма каквог система телâ, који је вучен са толико сила колико се год хоће. Моћи ће се, дакле, и цела Динамика свести на један општи образац; јер, да би се на кретање једног система тела применио образац о његовој равнотежи, довољно ће бити увести у овај оне силе, које произлазе из менâ кретања свакога тела и које морају бити поништене. На тај начин, добиће се један општи образац за кретање система телâ, који обухвата решење свију динамичких проблема. Развијање овога обрасца, водећи рачуна о условима који зависе од природе система, даће све потребне једначине за одредбу кретања

свакога тела, и остаће само да се интеграле те једначине, што је ствар анализе. Да бисмо, пак, дознали да ли једнома које решење одговара једном меканичком проблему, очевидно, довољно је потражити да ли то решење оверава диференцијалне једначине кретања.

8. Али, једна од највећих користи тога обрасца, на који се може свести цела Динамика, јесте та што он непосредно даје опште једначине које обухватају принципе или теореме познате под именима: *принцип консервације живих сила*, *принцип консервације кретања тежишта*, *принцип консервације момената ротационог кретања* или *принцип површинâ*, и *принцип најмање количине акције*. Ови принципи морају бити сматрани пре као општи резултати динамичких закона, него ли као првобитни принципи ове науке; али, пошто су често као такви употребљени при решавању проблемâ, ми држимо да треба о њима говорити овде, показавши у чему се они састоје и којим aукторима дугујемо за њих, да не бисмо ништа омашили у овом претходном излагању динамичких принципа.

9. Први од ових четири принципа, које поменусмо, *принцип консервације живих сила*, изнашао је био Хигенс, али у мало друкчијем облику од онога облика који му се сада даје; и ми смо га већ помињали говорећи о проблему осцилационих центара. Овај принцип, такав какав је био употребљен при решавању овога проблема, састоји се у једнакости између силажења и пењања тежишта од више тешких тела која заједнички силазе, а која се за тим одвојено пењу, пошто је свако од њих одбијено на више са брзином коју је било задобило. Но, према познатим својствима тежишта, пут пређен овим тежиштем, у ма ком правцу, изражен је сумом производâ из масе свакога тела и пута који је прешло у истом правцу, подељена са сумом масâ. С друге стране, према Галилејевим теоремама, вертикални пут пређен једним тешким телом сразмеран је

квадрату брзине, коју је оно задобило силазећи слободно, и са којом би могло да се попне на исту висину. На тај начин, Хигенсов принцип своди се на то да је, у кретању тешких тела, сума производâ из масâ и квадратâ брзинâ у сваком тренутку иста, било да се тела крећу заједнички на ма какав начин, било да слободно прелазе исте вертикалне висине. То је такође Хигенс, сâм он, приметио у мало речи, у једном малом спису, који се односи на методе Јакова Бернулија и Лопитала за осцилационе центре.

Ми ћемо, мало ниже, рећи о овом принципу коју реч више.

10. Други принцип, *принцип консервације кретања тежишта,* дугујемо Њутну, који је, у почетку својих Математичких Принципа, доказао да стање мира или кретања тежишта од више тела никако није промењено преципрочном акцијом ових тела, па ма каква она била; тако да је тежиште телâ, која дејствују једна на друга на ма који начин, било помоћу конаца или полуга, или помоћу законâ атракције итд., без да на њега има икакве акције нити икакве спољне препреке, да је то тежиште увек у миру или се креће једнаким кретањем по правој линији.

Даламбер је за тим, у свом Динамичком делу, дао овом принципу веће пространство, показав, ако је свако тело нападнуто једном сталном убрзавном силом, и која дејствује правцем паралелних линија, или која би била управљена ка једној сталној тачци и која дејствује сразмерно одстојању, да тежиште мора описивати исту криву линију као кад би тела била слободна; ка чему се може додати да је кретање овога тежишта, уопште, исто као кад би све силе телâ, ма какве оне биле, на њих нападале, свака у свом сопственом правцу.

Очигледно је, да овај принцип служи за одредбу кретања тежишта независно од респективних кретања телâ, и да на тај начин он може увек дати три коначне једначине између координата тела̂ и времена, које ће бити интеграли диференцијалних једначина проблема. — Треба међу тим ставити овде то ограничење, да силе, што нападају ова тела, не зависе од њиховог непознатог положаја.

11. Трећи принцип, *принцип консервације момената ротације* или *принцип површина̂*, није толико стар као два претходна принципа, и изгледа да је био откривен у исто време од Ајлера, Данијела Бернулија и од каваљера d'Arcy-а, али у разним облицима.

По првој двојици, овај се принцип састоји у овоме, у кретању више тела око једног сталног центра, сума производа̂ масе свакога тела са његовом циркулационом брзином око центра и његовим одстојањем од истог центра, увек је независна од узајамне акције коју тела могу да изврше једна на друга, и иста се сума консервише све дотле, докле нема при томе никакве акције нити икакве спољне препреке. Данијел Бернули изложио је овај принцип у првој свесци *Мемоара Берлинске Академије*, која је штампана 1746, а Ајлер га је дао исте године у првој свесци својих *Opuscules;* и исти их је проблем на њ и навео; на име, проблем, тражење кретања више покретних тела у једној цеви датога облика, и која може само да се окреће око једне тачке или око једног фиксног центра.

Принцип d' Arcy-а, такав каквог га је он дао Париској Академији Наука, у *Мемоарима* од 1747, који су изашли тек 1752, јесте да је сума производа̂ из масе свакога тела и површине, коју његов потег описује око једног сталног центра на једној истој пројекционој равни, увек сразмерна времену. Види се да је овај принцип једно уопштење лепе Њутнове теореме о површинама, које су описате под утицајем ма каквих центрипеталних сила; и да би се приметила аналогија или чак и идентичност са принципом од Ајлера и Данијела Бернулија, имало би се само сматрати да је циркулациона брзина изражена са елементом кружног лука подељен са елементом времена, и да први од ових елемената, помножен са одстојањем од центра, даје елеменат површине описате око овога центра; откуда се види да овај последњи принцип није ништа друго до диференцијални израз принципа од d'Arcy-a.

Овај је аyктор за тим представио свој принцип у другом облику, који га више приближује ка претходноме, и који се састоји у томе да је сума производâ масâ са брзинама и управним, које су повучене из центра на правце тела, стална количина.

Са тога гледишта, он је наградио од истога чак једну врсту метафизичког принципа, који је назвао *консервацијом акције*, на супрот или чак да њим замени онај *о најмањој количини акције;* као кад би површни и произвољни називи чинили есенцију природних закона и као кад би могли, на основу неке тајне особине, подићи у крајне узроке просте резултате познатих закона Меканике.

Ма како било, принцип о коме је реч постоји у опште за све системе телâ, која дејствују једна на друга на ма какав начин; било помоћу конаца, крутих линија, законâ атракције итд., и која су поред тога нападнута ма каквим силама управљеним ка једном фиксном центру, било да је систем у осталом потпунце слободан, или да је приморан да се креће око овог истог центра. Сума производâ масâ и површинâ, које су описате око овога центра и пројектоване на једну ма коју раван, увек је сразмерна времену; тако, односећи ове површине на три равни, које су управне међу собом, имамо три диференцијалне једначине првога реда између времена и координата кривих линија, које су тела описала; и управо у овим једначинама и састоји се природа принципа о коме говорисмо.

12. Најзад, долазимо на четврти принцип, који Лагранж зове *принцип најмање акције*, по аналогији са оним што га је Маупертијус дао под овим именом, и који су

принцип списи више славних аукторa за тим учинили тако чувеним, и о коме ћемо опширније говорити мало ниже. Овај принцип, аналитички посматран, састоји се у томе да је, у кретању телâ која дејствују једна на друга, сума производâ масâ са брзинама и са пређеним просторима један *минимум*. Аукторје отуда извео законе о рефлексији и рефракцији светлости, као и закон о судару телâ, у двама мемоарима који су читани, један у Париској Академији Наука 1744, а други, после две године, у Берлинској Академији Наука.

Али, треба признати, ове су примене и сувише особене да би могле послужити те да се постави истина о једном општем принципу; у осталом оне имају нечега површнога и произвољнога, што може само чинити неизвесним последице, које би се могле отуда извући за тачност самога принципа. Тако исто, не би било добро, изгледа ми, ставити овај принцип, на тај начин представљен, на исту линију са онима које изложисмо. Али има један други начин да га посматрамо, начин општији и тачнији, и који једино и заслужује пажњу геометара. Ајлер је први дао идеју о њему на крају свога дела *Traité des Isopérimètres*, штампано у Лозани 1744; показав при том да, код кривих линија које су описате централним силама, да интеграл брзине помножене са елементом криве линије увек чини један *максимум* или један *минимум*.

Ово својство, што га је Ајлер нашао у кретању изолисаних тела, и које је изгледало ограничено на ова тела, Лагранж га је распрострео, помоћу консервације живих сила, на кретање свакога система тела која дејствују једна на друга на ма какав начин; и отуда је следовао овај нови општи принцип, да је сума производâ из масâ са интегралима од брзинâ помножене са елементима пређених простора, непрестано један *максимум* или један *минимум*.

Такав је принцип, коме је Лагранж, ма да несвојствено, дао име *најмање акције* и који он сматра, не као један метафизички принцип, него као прост и општи резултат меканичких закона. Може се видети, у другој свесци од *Mémoires de Turin*, употреба коју је Лагранж чинио са њим при решавању више тешких динамичких проблема. Овај принцип, комбинисан са оним о консервацији живих сила и развијен по правилама варијационог рачуна, даје непосредно све нужне једначине за решавање свакога проблема; и отуда се ствара једна метода подједнако проста и општа за обрађивање питањâ, која се односе на кретање телâ; али, ова сама метода само је један королер од оне методе која чини предмет Динамике, и која, у исто време, има корист да буде извучена из првих принципа Меканике.

Философска Меканика грађанина *Пронија (Prony*, 1755—1839) од 1799 садржи све обрасце, све теореме и све проблеме што су их трансцендентна Геометрија и модерна открића пружили Меканици и Хидродинамици, употребе које су чињене од претходних принципа и примена теорије на кретање машинâ. У овом Пронијевом делу налази се један методичан преглед резултатâ, одвојен од одељка што садржи доказе и посредне рачуне, који је одељак апсолутно потребан само за прва проучавања; он је се ограничио да покаже дух методâ и да покаже главне алке или траг ланца који везује међу собом ставове, олакшавајући начине за добро схватање целине и сагласности разних делова науке, без да умори пажњу и без да претовари своје памћење оним што није неопходно нужно, те да се до те цељи доспе.

Принцип консервације живих сила. — Ми смо напред дали, по Лагранжу, појам о принципу консервације живих сила; али неће бити бескорисно да уђемо по том предмету у неке појединости. Меканика често пружа проблемâ који би нас, анализирани непосредно и по обичним принципима, бацили у несавладљиве тешкоће. Геније знао је, по кад кад, да себи отвори особених путева. Принцип, о коме говоримо, даје пример за то. Он се састоји у томе да у свакој акцији телâ једних на друга, било да се она сударе, само у овом случају нека су потпунце еластичка, било да су међу собом повезана крутим шипкама или концима, помоћу којих она саопштавају себи кретање, да сума масâ помножене са квадратима апсолутних брзина, остаје увек непроменљива.

Ми смо видели да откриће овога принципа, који је успешно примењен на разна истраживања, која би, без њега, била одвећ трновита, управо дугујемо Хигенсу, који је био предузео да докаже, ако више терета везани заједно падају са извесне висине, и дошавши у најнижу тачку њиховог пада, да они буду слободни да се попну сваки од њих на одређену висину са својом задобивеном брзином, тежиште ових тела попеће се на исту висину као што је она са које је било сишло, кад су сва ова тела била заједно повезана. Но, квадрати брзинâ, са којима се ова тела пењу, имају се као висине на које се морају попети. На тај начин, пошто је производ масâ, са овим висинама, непрестано исти, јер се заједничко тежиште пење на исту висину, следује отуда да производ масâ са квадратима брзинâ, који су *живе силе*, према Лајбницовом говору, остаје непроменљив. Отуда, име овоме принципу усвојено чак од оних, који никако не усвајају Лајбницово разликовање између живих сила и мртвих сила.

Хигенсов доказ добро доказује, ма да на посредан начин, да се тежиште тела не би могло попети више него што је сишло; али други део овога доказа, чиј је предмет да нам покаже да се оно неће попети ни мање високо, не повлачи за собом тако исто убеђење. Такође, и овај принцип био је спорен некада, али међу тим није се имало права; јер његова примена на све меканичке појаве, доказана је непосредно, и непрестано даје иста решења. Не може се дакле одрећи, да се сматра као један од основних природних принципа и један од динамичких кључева. Најзад, овај је закон, као што је то Бернули показао у своме *Discours sur la communication du mouvement*, chap. 10, нужна последица двају других од механичара већ усвојених закона; на име, 1°. При сваком судару еластичких тела, респективна брзина остаје иста пре и после судара. — 2°. Количина акције, тј., производ из масе телâ, која сударају и оних ударених, са брзином њиховог тежишта, опет је иста пре и после судара; јер ако се претпоставе два тела A и B да се сударе, са брзинама a и b, које ће се, после судара, променити у x и y, први закон биће $a-b=y-x$, а други даће $Aa+Bb=Ax+By$. И заиста, количина $Aa+Bb$ јесте производ сваке масе са њеном сопственом брзином, који је једнак са производом из скупљених маса, са брзином њиховог тежишта: јер прва једначина даје $y+b=a+x$, а друга даје $By-Bb=Aa-Ax$. На тај начин, множећи први члан једне са првим чланом друге, и други са другим, добићемо $Byy-Bbb=Aaa-Axx$, или $Aa^2+Bb^2=Ax^2+By^2$, што је производ сваке масе са квадратом њене брзине пре и после судара.

Овај доказ о истинитости овога закона изгледа ми још јачи од онога који је Бернули употребио у свом спису, а који је извео из појма о живој сили. Сваки усваја, вели он, као једну неоспорну аксиому да сваки узрок, који производи извесно дејство, не би могао пропасти ни у целости нити делимичкн, а да не произведе неки ефекат једнак са његовим губитком. Идеја о живој сили, у толико у колико она постоји у једном телу што се креће, јесте нешто апсолутно, независно и тако позитивно, да би она остала у овом телу чак и онда кад би васиона била уништена. Јасно је, дакле, да жива сила једног тела смањујући се или се увећавајући при судару са неким другим телом, жива сила овога другога мора се, у замену, увећати или смањити са истом количином. Што нужно повлачи за собом консервацију тоталне количине живих сила. Такође, ова је количина апсолутно непоништива при судару тела. Зар се не би могло рећи да је ово резоновање аналогно са оним, по коме је Декарт држао да је доказао да количина кретања мора бити непрестано иста у васиони, што међу тим није истина?

Ми смо приметили, да је Хигенсов принцип био проширен браћом Бернули; али је дотле био сматран само као једна проста меканичка теорема: кад је Јован Бернули био усвојио разликовање, које је Лајбниц утврдио, између мртвих сила или притисака (пресија), које дејствују без актуалног кретања, и живих сила које прате ово кретање, о чему ћемо говорити код Даламбертовог принципа, као и мера ових последњих са производима масâ и квадратâ брзинâ, он је гледао, у принципу о коме је реч, само једну последицу теорије живих сила, и један општи природни закон, по коме се сума живих сила од више тела консервише иста, док ова тела дејствују једна на друга простим пресијама, и непрестано је једнака са простом живом силом која резултује из акције актуалних сила које покрећу тела. Он је тако дао овом принципу име *принцип консервације живих силâ*, и служио се њиме успешно при решавању неколиких проблема, који још нису били решени, и са којима је било тешко изаћи на крај помоћу непосредних метода.

Данијел Бернули, његов син, дао је за тим више проширења овом принципу и извео је из овога принципа законе о кретању течностй у судовима, који предмет није био узимат у рад пре њега, сем површно и произвољно. Најзад, он је учинио овај исти принцип врло општим у *Mémoires de Berlin* за годину 1748, показав како се може применити на кретање телâ, која су покретана ма каквим узајамним атракцијама, или привлачена ка сталним центрима са силама које су сразмерне каквим било функцијама одстојањâ.

Велика корист овога принципа јесте та што одмах даје једну коначну једначину између брзинâ телâ и оних промењљивих које одређују њихов положај у простору; тако, кад се по природи проблема све ове промењљиве своде на једну једину, да ова једначина постаје довољна да га потпунце решимо, а то је случај проблема о осцилационим центрима. У опште, косервација живих сила даје увек први интеграл од разних диференцијалних једначина свакога проблема, што је врло корисно у више прилика.

Преварили бисмо се, кад бисмо мислили да је нужно требало прибећи овој посредној методи за решавање ових проблема. Буге, пре но што је постао чланом Академије, послао је решење једног доста тешког проблема, у *Journal des Savants*, Април 1728; то је решење основано једино на познатим законима о комуникацији кретања између еластичких тела при судару, и оно се потпунце слаже са оним Бернулијевим. Може се такође видети, у Даламбертовој Динамици, решење за више тешких проблема о међусобном судару више еластичких тела, као и у Фонтеновим мемоарима, штампани 1769, у којима је дао *принципе о вештини решавања проблемâ о кретању тела*. Ми спомињемо ту идентичност, јер је пријатно за математички дух да види тако различне методе, да теже да даду исте резултате, и да за оне, за које су математичке науке стране, нема ничега лакшег да им даде појам о извесности ових наука, но кад виде да се долази до исте тачке тако различним путевима.

Бернули се није задовољио да реши, према горњем принципу, проблеме које смо видели; он је поставио себи велики број других, које је решио и објавио у виду теорема, без да је дао анализу о њима, у *Петроградским Мемоарима*, свеска II.

Више других геометара користили су се истим принципом при решавању врло тешких динамичких проблема.

Да не продужујемо даље о овоме, ми ћемо још приметити да се овај принцип нарочито примењује при одредби кретања течности. Данијел Бернули служио је се њиме у својој Хидродинамици, 1738, али без да га је доказао; и Даламбер је, на крају свога Динамичког дела, 1743, био предузео да о њему даде, ако не један општи доказ, оно бар довољне принципе за изналажење доказа у сваком особеном случају.

Отуда следује да, у опште, консервација живих сила зависи од овога принципа, кад су силе у равнотежи, да су брзине тачака на које оне дејствују, цењене у правцу ових самих сила, у обрнутој размери ових истих сила. Овај је принцип, по одавна признат геометрима за основни принцип равнотеже; али, још није било доказано, у опште, нити показано да принцип о консервацији живих сила нужно следује отуда.

Даламбертов принцип за Динамику. — Ми смо већ рекли неколико речи о овом принципу; овде ћемо рећи још коју реч о њему.

У трансцендентним математичким наукама, не би се могли одвише намножити инструменти за истраживања, и ретко је, кад су ови нови инструменти руковани вешто, да не потеку нове светлости, а често и неочекиваних решења оних тешкоћа које су дотле заустављале. У осталом, отуда следује, у корист науке, нов степен извесности која веома задовољава. Јер, чега пријатнијег за један математички дух, или за онога који има укуса за истином, до видети више примордијалних појмова, који су изолисани и различни, да сви воде истом циљу? То је једна корист, треба то напоменути узгредно, у част математичких наука, која им је својствена, изузетно од сваке друге науке.

Даламберту дугујемо за откриће једног меканичког принципа те врсте, који се врло плодно примењује на најтежа меканичка питања. Тај је принцип основа његовог изврсног *Динамичког дела,* у коме се находи решење за мноштво проблемâ, који су били умицали истраживањима његових претходника. Тај исти принцип прокрчио му је пута ка решењу једног од најинтересантнијих и најтрновитијих проблема ове врсте, онај о кретању земље, које производи прецесију равнодневицâ; проблем рађен Њутном на један начин, који није био довољно убедљив, а који је Даламбер први потпунце решио 1749.

Ово је тај принцип: Узмимо више тела чија су кретања, тј. брзине A, B, C, D,..., као и правци дати, и која се сударају, привлаче или се одбијају на ма какав начин. Ова су кретања A, B, C, D,..., узајамно разложена у два друга кретања, таква као a и α, b и β, c и γ, d и δ, итд., која нека су таква да, кад би ова тела била имала само кретања a, b, c, d,..., да би она могла сачувати своја кретања без да узајамно сâма себи шкоде, а, кад би имала само она α, β, γ, δ,..., да би она остала у равнотежи, кретања a, b, c, d,..., биће она која ће тела узети услед њихове узајамне акције. Претпостављају се тела без еластичности; али се лако прелази од овога случаја ка случају еластичких тела.

Тај ће се принцип доказати испитујући га пажљиво; јер ће се лако видети да је он очевидна последица законâ о кретању и равнотежи; а за тим има корист да своди све динамичке проблеме на чисту геометрију, и на статику, јер је увек могућно, (не међу тим без доста оштроумности у више случајева), разложити свако од супротних кретања од више тела на два друга, таква, ако би свако од ових тела имало само једно од компонената кретања, да би она остала у равнотежи, или кретање би било нула. Тада имаће се, дакле, за кретања која су остала у свакоме од ових тела, друго од компонената кретања, на тај начин познаће се кретање система ових тела.

Или, ако је кретање ових тела дато после судара, или за један тренутак после њихове узајамне акције, и да се разложи кретање свакога тела на два, таква да кад би тела имала само прво, она би остала у миру, друго кретање биће оно које би свако тело морало имати пре судара, те да произведе дато кретање.

Фонтен (1705—1771) нас учи, на првим странама својих мемоара, да је он био имао ту идеју још 1739. Тако, на страни 3, у чланку о принципима вештине за решавање проблемâ о кретању тела, читамо овај став: „Они, који буду писали историју наукâ, мораће сматрати ове принципе овде такође као познате од 1739, као кад би били штампани те године; нарочито овај: *При судару више тела, ма какав узрок био томе, промене које ће наступити у стањима ових тела у простору биће такве, да ће силе, које су тела имала да то спрече, бити узајамно савлађане, или би биле у равнотежи.* И сви они принципи, које сам предложио, били су дати Академији 1739, а за тим саопштени свима геометрима које сам срео“. Али је лако видети аналогију или идентичност његовог принципа са Даламбертовим. Међу тим, баш признавајући Фонтену, чија је оштроумност била веома узвишена, част открића овога принципа, ми никако не мислимо да то мора смањити славу Даламбертову; он није још био постао чланом Академије, кад је Фонтен ову известио о принципима о којима говори. Овај није био штампао ништа што би могло извести Даламберта на пут; и велика употреба коју је Даламбер чинио од свога принципа осигурала му је својину.

Остављајући да о Даламбертовом принципу и о његовим многобројним последицама говоримо у потребној опширности на своме месту, ми ћемо још сада скренути пажњу на ову околност: треба се добро чувати да се, на тај начин, не учини да једна од двеју наука, Статика или Динамика, ишчезне у корист друге. Свака од њих има своје особене принципе, своју везу теорема, своје специјалне примене; једна ма која од њих има, дакле, исто право као год и друга на свој самостални опстанак, на своју независност!

Приметимо да Даламбертово дело, поред излагања и примене овога принципа, садржи још много других значајних ствари. Такве су, понаособ, рефлексије о меканичким принципима, које је он сводио на три: на силу инерције, сложено кретање и на равнотежу. Он је, у једној беседи, изложио своје погледе на овај предмет на начин, који свакога задивљује; али у првом одељку свога дела он предузима на ново тај предмет и разрађује га *more geometrarum*, утврђујући геометријски ове принципе на најјаснијим метафизичким појмовима. И заиста, ма да усвојени и узети од стране свију меканичара за основ својих резоновања, могло је се још желети да ови принципи искуства буду основани на метафизичкој извесности. То је Даламбер и учинио у овом првом одељку свога дела; и, према његовим доказима, могу се а и морају се сматрати ови принципи као потребе толико тачне, као што су то прве елементарне истине геометријске. При свем том, приметимо овде да је, пре Даламберта, Данијел Бернули имао сличан предмет бар што се слагања кретања тиче, који је он такође доказао *more geometrarum*, у Петроградским Мемоарима; али Даламбертов доказ, изгледа нам, има за неколико степени више концизности и јасности. Daviet de Foncenex предузимао је такође тај предмет, који је изложио на научан и јасан начин у једном мемоару, у другој свесци *Mémoires de Turin*, 1761.

Тако је исто било и са принципом консервације живих сила, као и са онима о равнотежи и о разлагању силâ. Ма да су га меканичари непрестано употребљавали, изгледа ми, био је више доказан сагласношћу, никад опровргнут својим последицама са опсервацијом меканичких појава, или са онима који су извучени из других доказаних принципа, него ли што је био доказан *a priori*, и метафизички. Требало је, у неку руку, утврдити ову основу, а то је Даламбер и учинио, као што смо видели. Најзад, може се рећи да је он, са тим и разним другим опсервацијама која се читају у овом делу и у разним другим од Даламбера, бацио велику светлост на ту грану наших знања, и растурио мале облачке који су још покривали неке делове.

Даламбер је разрадио још у издању од 1796 једно питање: *Да ли су меканички и статички закони нужне или контингентне истине?* Ово је питање јако занимало немачке метафизичаре. Најбоље дело о овом предмету, изгледа нам, да је оно од ученог физичара и дубоког математичара Булфингера. Он се није устезао да их сматра као нужне истине, тј. да би фиксирао стање питања, пошто је природа телâ таква какву је био поставио ауктор васионе, тј. обдарена непробојношћу, да су статички и меканички закони нужна последица ове, као год што својства простирања нужно прате све геометријске истине. Такво је исто и Даламбертово осећање, које је поставио на једном низу метафизичких, светлих и дубоких размишљања.

Питање о живим силама морало је нужно привући пажњу једног ауктора, који је писао о *Динамици*, или о *Науци о силама*. Даламбер се није могао ослободити а да и он о томе не говори; али он се није преварио; ући у ову дискусију у којој сваки противник црпе нових разлога у једној више или мање финој метафизици; то би било удалити се бескорисно од свога предмета, ма какав био начин ценења силâ телâ у кретању, принципи за решење Даламбертом постављени независни су од овога питања. Проблеми, које је анализирао и решио, своде се једино на одредбу брзинâ и праваца датих маса.

О питању живих сила. — Ретко је видети математичаре да се препиру око принципâ; то се међу тим видело, са неком врстом скандала, почетком осамнаестога века и за читавих четрдесет година. Предмет те препирке био је начин на који се морала ценити сила телâ у кретању коју је Лајбниц *живом силом* назвао, док је међу тим он дао име *мртве силе* оној сили телâ која су само у некој тежњи да се крећу, и дејствујући само својом пресијом. Тада се видело да се Европа, у неку руку, поделила; готово цела Немачка била је на страни Лајбница и Бернулија; Енглеска, верна старинској оцени, обарала је све разлоге првих са толиким успехом да је, видевши одговоре на разлоге који личаху на доказе, човек био са свим збуњен да се више није знало коме да се даде за право. Француска је била такође подељена између једне славне жене, која је држала страну Лајбницу, и једног славног академичара; Холандија била је у опште на страни немачког философа, као год и Италија. Чега је најчудноватијег било у овој препирци, то је што је исти проблем, решен геометрима обеју страна, имао исто решење; сви су усвајали исте законе о судару телâ, што је од тога доба могло дати идеју да је расправа била само једно метафизичко питање; те врсте препирака још су нека врста скандала у математици; али није више о томе питање; цене се силе како се хоће, или квадратом брзине, или простом брзином; закључци нису различни.

Начин да се цени сила телâ која, на основу њихове тежине, или неке пресије, теже да се крећу, није никада проузроковао расцеп: статички принципи доказују да је сила једног тела у том случају сразмерна брзини коју би оно имало, кад би његово кретање било извршено. Али, је ли то случај и са телима која су у актуалном кретању? Њихове силе, све остало подједнако узето, следују ли простом односу брзинâ као у претходном случају? Није се ни мислило да се у то посумња до 1686, када је Лајбниц држао да је опазио једну погрешку у општем веровању. Он је се трудио да докаже да, у овом случају, сила није као брзина, него као квадрат брзине. То је он објавио у Лајпцишким актима, под насловом: *Demonstratio erroris mémorabilis, cartesii et aliorum in aestimandis viribus motricibus corporum.* Ево тог Лајбницовог резоновања:

Кад једно тело пада са висине од четири стопе, оно задобија на крају свога пада два пута већу брзину од оне коју би задобило падајући са висине од једне стопе; и у исто време оно задобија силу да се подигне на ону висину са које је и пало; са двогубом брзином оно је, дакле, задобило силу да се подигне на висину четири пута већу од оне на коју би се попело помоћу брзине задобивене падајући са висине од једне стопе. Лако је увидети да би га трогуба брзина попела на висину девет пута већу, итд. Дакле, силе су као висине на које је се исти терет попео. Тако је Лајбниц закључио, једно тело покретано двогубом брзином покретано је четворогубом силом; откуда следује да су силе сразмерне квадратима брзинâ.

Мишљење Лајбницово имало је и сувише аналогије са фамозним принципом о консервацији узлазних сила од Хигенса. Међу тим ништа се не зна прецизно шта је мислио Хигенс о томе, али Лајбниц вели да му он није био противан; *Huygenius quoque à sententia mea non alienus.* Али, није тако било и са другим математичарима. Лајбниц је свуда сретао само противнике. Тек што је се његово мишљење појавило, напао га је Кателан свештеник, до обожавања ревносан картезијевац. Он је предузео да одговори Лајбницу. Он је тврдио, да је Лајбницово резоновање погрешно у томе, што није обратио никакву пажњу на време пењања тела. Истина је, говорио је он, како су чинили други противници живих сила, да се једно тело, које има двогубу брзину, пење на четворогубу висину, али оно се пење само у двогубом времену. Дакле, произвести један четворогуби ефекат, у двогубом времену, не значи имати четворогубу силу, него само двогубу.

Грађанин Лаланд, у својој *Astronomie,* примећује такође да пређени простор који показује силу јесте као проста брзина, ако се посматра пређени простор у једном одређеном времену; он је као квадрат брзине, ако се никако не тражи за колико је времена тај простор пређен.

Али му изгледа, да је природније посматрати силу у датом времену; без тога рекло би се да једна корњача има толико силе за трчање колико и један зец, јер, са временом, она ће прећи исти пут; једно дете имаће толико силе, колико онај што носи џак жита од 240 фуната, пошто би са временом и делимички дете однело сво жито. У осталом, кретање се продужава у бесконачност, тако као што би и свака сила била бесконачна, ако се не би водило рачуна о времену.

Папен, тако познат својом машином за умекшавање костију, био је такође Лајбницов противник; али, пошто је се партија овога увећала, сви су славни математичари били подељени међу собом на овом питању.

Јован Бернули усвојио је, најзад, Лајбницово мишљење и постао је његовим најревноснијим партизаном. Изгледа, да Лајбниц и Бернули нису много наваљивали да прибаве себи нових партизана, кад је Академија Наука предложила, 1724, за предмет једне од њених награда, питање *о комуникацији кретања*. То је питање имало врло велике везе са питањем о живим силама. Маклорен, и ако млад, напао је у својој дисертацији са свом силом Лајбницово мишљење; а Бернули је се трудио да га учврсти са свом силом, што је био кадар. И P. Mazeas, противник живих сила, био је награђен. Али и спис Бернулијев био је штампан.

Управо у то време и заподела се свађа између геометара метафизичара из Европе; јер, ма да спис Бернулијев није однео награду, његови разлози били су изложени у спису са толико силе да је, поред користи супротне стране, велики број славних људи био на његовој страни. Ако се на једној страни рачунају: Маклорен, Стирлинг, Кларке, Дезагилије и други Енглези; с друге стране, могу се цитирати: Бернули, Херман, Гравесанд, Мушенбрик, Полени, Волф, Булфингер и велики део научника са континента, нарочито из Немачке. Стављани су разлози противу разлога; опити најрешителнији у изгледу добили су објашњењâ која, самâ — она, не траже ничега вишег.

Докази, дати од стране Лајбница и његових партизана, могу се свести на две врсте, на име на опите, на основу којих они и резонују, и на метафизичка резоновања.

Први и најпростији од свију опита јесте онај да тела могу, на основу задобивене брзине једним падом, да се попну на исту висину, као што је она са које су и пала. Видели смо одговор.

У питање живих сила мешали су се и позвани и непозвани, и дошло је до речи и грдњи, које не доликују научним дискусијама. Сам Даламбер, у свом Динамичком делу, није оклевао да каже да га он сматра као чисто питање речи̑. То је питање и дошло од разног начина на који су једни и други разумевали реч сила. Природа силе мрачна је и метафизичка ствар; али је природно звати силом ефекат произведен у одређеном времену.

О принципу најмање акције. — Ми смо говорили о разним принципима које су меканичари дознали да постоје код свију кретања телâ; али, историчар мора одликовати између њих један принцип, који је био предмет једне свађе у толико славније, што се у њој видело да је се појавио најбољи ум Европе, и једног од њених највећих монарка (владалаца). То је онај принцип, који је Маупертијус изнео око 1744 и који зову *принципом најмање акције*. Ево у чему се он састоји.

Кад више тела, дејствујући једна на друга, претрпе неку промену у свом кретању, та је промена увек таква да количина акције употребљена природом да је произведе, јесте што је могућно мања; и та акција, по Маупертијусу, има за меру производ масе, простора и брзине.

Маупертијус је предложио први пут овај принцип Академији Наука 1744, и у мемоару, који је у њој читао, он је развио посматрања која су га на њ навела. Она су била, као што изгледа, само резултат његових напора да, у неку руку, помири противуречна објашњавања, која су Лајбниц и Ферма били дали о закону рефракције, употребљујући при том крајне узроке. Али, у *Мемоарима Берлинске Нове Академије Наука*, за 1746, он је распрострео ове примене на законе о кретању, и чак на законе о миру; и уопштавајући овај принцип, он је начинио један универсални принцип, од кога су они принципи закона о равнотежи, о једнаком кретању тежишта при судару тела, о консервацији живих сила, итд., само гране.

Маупертијус је био задовољан што је открио један принцип, који је општији од других и који их је везивао све, тако рећи, кад га *Кениг*, професор математике у Науе, нападе тврдећи да је доказао лажност тога принципа. Он је тврдио и то, да је тај принцип био познат Лајбницу; откуда се породи свађа и била је позвана Академија Наука да пресуди спор.

Открића Коперникова и Њутнова била су назирана; али, међу тим, нико им не одриче част открића ових великих истина. Чак се не зна да ли има неког важнијег открића, о коме неки човек није био схватио неку искру, док их није један виши ум прикупио, и из њих извукао једно потпуно откриће.

Кениг, увређен решењем Академије, вратио јој је своју академску диплому, и једним списом позвао је јавно мњење да пресуди о том спору. Маупертијус је одговорио; и у ту свађу умешају се многи, и звани и незвани; чак је краљ пруски узео удела у њој једним сопственим списом.

У основу питања, Кениг је тврдио да је доказао да је закон био потпунце лажан, и да га је требало заменити једним другим, помоћу кога је он био предузео да реши разне трновите проблеме из Динамике.

Ајлер је тврдио да је Маупертијус био први проналазач принципа, из кога се изводи цела Меканика; и да се принцип Кенигов своди на ништа.

Противу Маупертијусовог принципа устали су још d'Arcy, члан Академије, Мартенс, математичар холандски, и други; сви су њихови напади били безразложни.

Ма како било, принцип најмање акције, изгледа нам, није заслуживао сву важност, која му се придавала, и све време које се на њ утрошило, више је ствар самољубља, него ли ствар математике; али, *увређено самољубље не прашта никада.*

О проблему таутокроних кривих линија у отпорној средини. — Међу проблемима, који су највише занимали геометре и који су највећих помоћи тражили од анализе, јесте проблем који зову проблем о таутокронама или о кривим линијама чије луке прелази једно тело за исто време. Циклоида је она крива линија која има то својство у празном простору, као што смо већ казали, и то је једно од Хигенсових открића. Али, кад се у проблем увуче посматрање о отпору средине, то чини проблем једним од најтежих проблема трансцендентне Меканике.

Природно је видети да геометри траже да уопште питања, па им није могло умаћи ни то да траже која би била крива линија таутокрона, у случају у ком би правци тешких тела тежили ка једној истој тачци; јер Хигенс, као год Галилеј и Архимед претпостављали су, због бесконачног удалења центра земљиног, да су ови правци паралелни, и да је привлачна сила непрестано иста; али ова претпоставка није сагласна са правим стањем ствари. У осталом проблем посматран под овим новим условом конвергентних праваца и промењљиве привлачне силе, представља нов степен тешкоће, и видимо да су Њутн и Херман у његовој *Phoronomia,* L. 1, c. 3, поставили себи питање, ограничавајући га при свем том на случај у ком би привлачна сила била као одстојање од центра. Они доказују да ће, у овом случају, таутокрона курва бити једна епициклоида, описата унутарњим котрљањем једног круга по периферији неког другог круга, који има за центар средотежну тачку; епициклоида која се претвара у обичну циклоиду кад је ова средотежна тачка бесконачно удаљена. Треба још приметити да кад се, под овом претпоставком о привлачној сили, претпостави једно тело постављено на једну раван која пролази ван привлачног центра, и да се остави са̑мо себи, оно ће доћи у тачку те равни која је најближа центру за исто време, ма каква била полазна тачка. На тај начин, права линија такође је, у овом случају, обдарена својством таутокронизма. При свем том, остало је да се реши проблем за случај кад су правци теже конвергентни, тежа би била по ма каквом односу одстојања; али ми прелазимо на таутокроне у отпорној средини.

Овај случај проблема није Њутн са свим изгубио из вида, али он га је посматрао у најпростијем виду, хоћу рећи, претпостављајући да су и правци паралелни и отпор средине сразмеран брзинама, таутокрона се налази опет да је циклоида, кретање тела врши се при том само мало друкчије него што је у случају кад се врши у једној средини која не чини отпора; јер, у овом случају, тело се пење толико висико као што је тачка са које је пало, место што се у другом случају не пење толико високо, ма да за исто време, и пошто је свако од његових пењања мање од претходног падања, оно се најзад и заустави.

Ова претпоставка о отпору чисто је математичка. Отпор једног тела, које је покретано у некој течности, много је пре сразмеран квадрату брзине, али у Њутнова доба, анализа није била стекла довољних моћи да реши један проблем те природе.

Тек су се око 1729 и 1730 геометри њиме бавили; још, изгледа, да су Јован Бернули и Ајлер били једини за које је он био приступачан.

Анализа је одвела Бернулија на једну врло компликовану диференцијалну једначину, која изражава време, и чиј интеграл, према природи проблема, мора бити раван једној количини, или функцији апсцисе, која је увек иста, ма каква била апсциса, пошто, ма са које висине падало тело, треба да употребљено време до дна кӱрве буде исто. Најзад вештином рачуна, он је добио једну диференцијалну једначину између ординате и апсцисе кӱрвине, коју је конструисао помоћу квадратурâ.

Приметићемо, прво, да није овде као код таутокроних линија у празном простору где су две гране силажења и пењања сличне и једнаке. На другом месту, тачка највеће брзине, задобивена падајући, није најнижа тачка криве линије. Тело је задобило ту највећу брзину пре него што је доспело у најнижу тачку: то је Бернули доказао. Најзад, он је показао, ако се претпостави отпор нула, да крива линија, о којој је реч, постаје обична циклоида.

Ајлер је ишао другим мало различним путем, пут такође достојан анализте као што је он био. Он је био тако исто дошао до сличних резултата. Ми ћемо говорити само о неколиким посматрањима, што се на таутокроне у празном простору односе.

У обичном узимању таутокрона, тражи се да време силажења тела по једној од гранâ курве, буде једнако са временом пењана, а за тим време потоњег силажења једнако са последњим и са временом пењања у првој грани, и тако увек до краја кретања које, математички говорећи, не би требало никада да се уништи. Ајлер је проширио овај појам таутокронизма, тражећи које би кӱрве имале својство да граде да времена силажења и пењања, уједно састављена, буду увек иста. Таква кӱрва имала би исте користи које има циклоида за праву поделу времена, пошто би цела осцилација, састављена из једног силажења и једног пењања, увек подједнако трајала, ма да половина осцилације не би била равна следећој. Кад је чак једна кӱрва дата за осцилацију силажења, може се наћи она која би требала да задовољи овај услов. Најзад, што је важно, ова кӯрва, или ове кӯрве могу постати, у неколико случајева, чисто алгебарске; док међу тим све друге таутокроне јесу трансцендентне.

Бернулијев мемоар, о овом предмету, начинио је велику сензацију међу геометрима, и учинио је овај проблем веома славним. Фонтен је дао једно решење тога проблема, 1733, које има превагу над претходнима у томе што су решења, тражећи да се има израз брзине, примењлива само на случајеве у којима је диференцијална једначина ове брзине интегрива. За то су Бернули и Ајлер писали о овом проблему само у случају када је отпор сразмеран квадрату брзине. Ајлер је сâм признао да је, због тога, анализа била недовољна за неко општије решење проблема. Али, Фонтен је нашао једну методу која је независна од овога интегралења. Он је применио своју методу на решење проблема под разним претпоставкама, као што су претпоставке да је отпор сразмеран брзини, или да је сразмеран њеном квадрату, или сразмеран некој функцији, која је образована из брзине и квадрата ове.

Лагранж је посматрао питање о таутокронама са мало друкчијег гледишта, и дошао је до једног општег и врло простог обрасца, који даје израз за силу која је потребна да произведе таутокронизам, и који има ту корист да обухвата све случајеве који су већ решени и мноштво других случајева, у којима се сумњало да се проблем може решити.

Фонтен је, услед тога, дао Академији један нов мемоар о том предмету, у коме је изнео ново решење. Али, како је багателисао Лагранжово решење, овај је дао 1770 нових посматрања о овом проблему, и говорио је је доста оштро о новој методи Фонтеновој.

Даламбер је дао, одмах за Лагранжом, једну веома општу формулу која даје решење проблема, за случај у ком би се тицало учинити да су времена као ма каква функција лука; што обухвата таутокронизам чак као прост случај проблема.

Има још једна врста таутокронизма, коју је предложио Некер из Женеве. Он је тражио каква би била таутокрона кӱрва у случају у коме би отпор потицао само од трења. Увиђа се, прво, да ово трење има неки однос са притиском, и да је овај притисак ефекат центрифугалне силе, произведен кретањем тела по кӱрви, чиј израз зависи од брзине; употребив ове елементе и учинив трење сразмерно притиску, Некер је дошао до диференцијалне једначине криве линије, коју налази још да је једна изврнута циклоида, од димензије само мало различне од оне код простог таутокронизма. Он је за тим испитао и решио проблем, претпостављајући, независно од отпора трења, отпор средине у двогубој размери брзине, и чак по ма каквој функцији брзине, с тим да овај отпор буде врло мали.

Најзад, он је тражио кӱрву по којој би се тело кретало једнаким кретањем под усвојеном претпоставком за трење, и нашао је да би то била једна права линија, или једна проста стрма раван.

Ајлер је обрадио предмет таутокронизма, у својој меканици, у свем пространству, дубини и развијањима, које је овај велики геометар увек стављао у својим делима.

О проблему вибришућих ужета. — Предмет, о коме желимо да кажемо коју реч, најтежи је може бити између свију оних што их је Меканика посматрала, и то је онај предмет који је највише напора од анализе тражио, и у исто доба и највеће рутине. Тако исто њиме су се вежбала четири највећа геометра европска, и допринео је да се знатно размакну границе анализе.

Стари су знали да је звук једног уштинутог ужета произведен вибрацијама овога ужета; али, тек почетком осамнаестог века стекао је се појам да се испита природа овога кретања и његова брзина, као и да се одреди природа криве линије по којој се креће једно вибришуће уже. Овај је динамички проблем био постављен и решен први пут од Тејлора, енглеског геометра, у његовој књизи под називом: *Methodus incrementorum directa et inversa*, 1716.

Овај је проблем узбудио пажњу Јована Бернулија, који га је посматрао на особени начин, и дошао је до истих закључака, до којих је и Тејлор дошао. Даламбер је нашао да има бесконачно много кривих линија, које одговарају проблему. Ајлер је 1748 дао мало другачију методу од Даламбертове методе. Данијел Бернули је нашао да је крива линија ужета, које вибрише, једна продужена трохоида, или једна сложена линија од таквих трохоида, ма какви почетни облици били дати ужету. — Отуда се изродила свађа, коју је, најзад, Лагранж окончао.

О балистици, или о телима баченим у отпорну средину. — Балистика је онај део Меканике који се бави кретањем пројектилâ, а посебице оних пројектила који пролазе кроз једну отпорну средину, као што је ваздух. Балистика се јавила за време Галилеја, али је још много требало па да Меканика буде у стању посматрати кретање кроз отпорну средину; и Галилеј је, бар прећутно, претпостављао да један такав флуид, као што је ваздух, ставља на супрот само неосетан отпор једном телу које кроз њега пролази; али, пошто је ова наука учинила знатних напредака, геометри су се били усудили да посматрају проблем са нове тачке гледишта, и то је један од најтежих проблема из Меканике и Анализе, и у исто време он је и један од најкориснијих; али довде су теорије о артиљерији још биле основане на претпоставци параболичких путања.

Овим су се предметом бавили Роберт Андерсон 1674 и Блондел 1683; али је Робенс 1742 године уништио предресуде, које су владале међу тобџијама. Бавили су се главним питањем: *Наћи кўрву коју описује један пројектил у ваздуху, претпостављајући најпростији закон теже, тј. правац управан на хоризонат, а отпор сразмеран квадратима брзинâ,* — на ком су питању ридили Ајлер, Јован Бернули и други.

Истраживање угла бацања, за који домет постаје највећи, заслуживало је особиту пажњу. Најзад, d' Arcy, 1760, објавио је своје *Покушаје о теорији артиљерије*, у којима има интересантних опита о разним каквоћама барута, о разним брзинама, о дометима, о одбоју, итд.

О Хидродинамици. — Одредба кретања течностй јесте предмет Хидродинамике. Предмет практичке Хидраулике своди се на вештину спровођења вода̂ и на припрему да ове служе кретању махина̂. Ова је вештина морала бити култивисана од вајкада и у свако доба, за потребу која се увек осећала, и стари су се, може бити, одликовали у томе толико колико и ми, судећи по ономе што су нам они оставили у том роду.

Али, Хидродинамика је наука, која је постала у последњем — осамнаестом — веку; јер, пређе анализа није била довољна да је разрађује. И заиста, како је већ био неприступачан трансцендентној Механици проблем: Одредити кретање, које мора узети извесан број еластичких кугала које су сударене неком другом; каква тешкоћа мора бити онога проблема у коме је број ових тела, тако рећи, бесконачан, без да се зна њихов облик нити њихова природа, и, чак, без да се зна како она дејствују једна на друга. У том случају, требало је дакле прибећи општим или посредним принципима и вероватним претпоставкама. Њутн је први покушао да израчуна законе о кретању течностй помоћу механичких принципа; али, Даламбер је био први који је свео праве законе о њиховом кретању на аналитичке једначине; он је основао Хидродинамику, која је данас најразрађенији део физичке Механике. Архимед и Галилеј (јер, као што смо казали, интервал времена, што раздваја ова два велика генија, ишчезава у историји Механике) бавили су се само равнотежом течностй; нове теорије додале су ка томе само више општности и елеганције; тако Лагранж, у својој Аналитичкој Механици, извео је законе о равнотежи течностй из саме природе течности, посматране као гомиле молекула врло финих, независних једни од други и потпунце покретљивих у свима правцима; али, није тако исто и са кретањем течностӣ.

Торичели је започео да испитује кретање воде која излази из једног суда кроз врло мали отвор, и да при томе истражује неки закон. Дајући млазу воде вертикални правац, он је нашао да тај млаз увек достиже, врло приближно, ниво воде у суду; и како се може претпоставити да би га тачно и достигао, кад не би било отпора ваздуха и трењâ, Торичели је отуда закључио да је брзина воде, која отиче, иста као брзина коју би она задобила падајући слободно са висине нивоа, и, према томе, да је ова брзина сразмерна квадратном корену из исте висине.

Међу тим, немогући доспети до тачног доказа ове поставке, он је се задовољио да га даде као један принцип искуства, на крају свога малог дела *De Motu gravium naturaliter accelerato*, штампано 1643 године. Та је поставка начинила Хидраулику са свим новом науком.

По смрти Паскаловој, нађено је међу његовим хартијама једно дело о равнотежи течностӣ, које је штампано 1662. Ово дело, истина оригинално, прво је дело у коме су хидростатички закони били доказани до ситница, и на јасан а прост начин; али, није у њему говорио о кретању течностӣ. Међу писцима, који су се бавили тим предметом и који су употребили Торичелијеву поставку, Мариот заслужује особитог помена. Његов рад био је веома користан по практичку Хидраулику.

Али, Хидродинамика је била много тежа. Њутн је предузео да докаже Торичелијево правило, у другој књизи Математичких Принципа; али мора се признати да то место, у овом великом делу, најмање задовољава.

Ако се посматра један водени стуб, који пада слободно у празном (безваздушном) простору, лако је се убедити да он мора узети облик једног конопца, који је образован окретањем једне хиперболе четвртога реда око једне вертикалне осе; јер, брзина је сваког хоризонталног слоја, с једне стране, као квадратни корен из висине са које је слој сишао, и, с друге стране, она мора бити, према континуитету воде, у обрнутој размери са четвртим степеном ординате хиперболе производнице. Ако се, дакле, замисли један суд, који има облик овога коноида, и који би био увек одржаван пун водом, и да се претпостави да је кретање воде дошло у перманетно стање, јасно је да ће свака водена честица силазити као кад би била слободна, и да ће она, према томе, при излазу кроз отвор, имати брзину коју дугује висини суда са које је пала.

Но Њутн је замислио да се вода, која испуњава један вертикалан цилиндричан суд, пробушен на његовом дну једним отвором којим она истиче, природно дели у два дела, од којих је један једини део у кретању и има облик коноида о коме говоримо: то је што је он назвао *водопадом* (*катарактом*); други је део у миру, као кад би био залеђен. На тај начин, јасно је да вода мора отицати са једном брзином, која је једнака са оном коју би она задобила падајући са висине суда, као што је Торичели опитом нашао. Међу тим Њутн је, измерив количину истекле воде за дато време и сравнив је са величином отвора, био закључио, у првом издању својих *Принципа*, да је брзина, при изласку из суда, дугована само половини висине воде у суду. Ова је погрешка потицала отуда што није, с почетка, пазио на контракцију воденог млаза (вене); на то је обратио пажњу у другом издању, које је изашло 1714, и он је увидео да је најмањи пресек воденог млаза био, на отвору суда, готово као 1 ка $\sqrt{2}$; тако, узимајући овај пресек за прави отвор, да брзина мора бити увећана у истој размери од 1 ка $\sqrt{2}$ и, према томе, одговарати целој висини воде. На тај начин, његова теорија приближена је искуству, али она не постаје за то тачнијом; јер формација водопада или фиктивног суда у коме је претпостављено да се вода креће, док побочна вода остаје у миру, очевидно је противна познатим законима о равнотежи течности, пошто се вода која би у овом водопаду падала са свом силом своје тежине, не вршећи никакав побочни притисак, не би могла опирати притиску стајаће течности која је окружује.

Пре двадесет година, Варињон је дао Париској Академији Наука природније и вероватније објашњење овога појава. Приметив, кад вода отиче из једног цилиндричког суда малим отвором начињен на дну, да она има у суду само једно врло мало кретање и за све честице подједнако осетно, он је отуда закључио да се ту није начинило никаквог убрзања, и да је део течности, који отиче у сваком тренутку, добијао цело своје кретање од притиска, који је произведен тежином течнога стуба коме је он (део) основа. Тако ова тежина, која је као ширина отвора помножена са висином воде у суду, мора бити сразмерна количини произведеног кретања у честици која у сваком тренутку излази кроз исти отвор. Но, као што се зна, ова је количина кретања сразмерна брзини и маси, а маса је овде као производ из ширине отвора и малог простора који честица прелази у датом тренутку, простор који је очевидно сразмеран сâмој брзини ове честице; према томе, количина кретања, о којој је реч, сразмерна је ширини отвора помножена са квадратом брзине. Дакле, најзад, висина воде у суду сразмерна је квадрату брзине са којом она истиче, што је Торичелијева теорема.

При свем том, ово резоновање има нечега површног, јер се при том прећутно претпоставља да мала маса, која свакога тренутка отиче из суда, на један пут задобива сву своју брзину под притиском стуба који одговара отвору. Но зна се да један притисак не може на један пут произвести једну коначну брзину. Али претпостављајући, што је природно, да тежина стуба дејствује на честицу за све време које она употреби да изађе из суда, јасно је да ће ова честица примити убрзано кретање, чија ће количина, на крају ма ког времена, бити сразмерна притиску помноженом са временом. Дакле, производ тежине стуба са временом истицања честице биће једнак са производом масе ове честице и брзине коју је она задобила; а како је маса производ из ширине отвора и малог простора који честица описује излазећи из суда, простор који је, према природи једнако убрзаних кретања, као производ брзине са временом, то отуда следује да ће висина стуба бити на ново као квадрат задобивене брзине. Овај је закључак дакле тачан, с тим да се сагласимо да је свака честица, излазећи из суда, притиснута целом тежином целога течног стуба, који има ову честицу за основу; то ће и бити, у истини, ако би течност, која је у суду, била стајаћа, јер би тада њен притисак, на део дна где је отвор, био једнак са тежином стуба коме је он основа; али овај притисак мора бити различан, кад је течност у кретању. Међу тим јасно је, у колико ће се више течност приближавати стању мировања, у толико ће се више њен притисак на дно приближавати тоталној тежини вертикалног стуба; у осталом, опит показује да је кретање течности у суду у толико мање, у колико је отвор мањи. На тај начин, претходна теорија приближаваће се у толико више истини, у колико су димензије суда веће према отвору којим течност отиче, а то је што и опит потврђује.

На против, иста теорија постаје недовољна за одредбу кретања течности које теку цевима, чија је ширина доста мала и мало се мења. Тада треба посматрати у исто време сва кретања течних честица, и испитати како се она морају мењати и преиначавати са обликом канала. Но, опит показује, кад цев има правац који се мало разликује од вертикале, да разни хоризонтални слојеви течности задржавају приближно свој паралелизам, тако да један слој увек узима место онога који му претходи; откуда следује, због нестишљивости течности, да брзина сваког хоризонталног слоја, цењена у вертикалном смислу, мора бити у обрнутој размери са ширином овога слоја, ширина која је дата обликом суда.

Дакле, довољно је одредити кретање једног јединог слоја, и проблем је, на неки начин, аналог проблему о кретању сложеног клатна. На тај начин, како, по теорији Јакова Бернулија, задобивена или изгубљена кретања у сваком тренутку од стране разних терета што сачињавају клатно, граде међу собом равнотежу у полузи, мора тако исто бити равнотеже у цеви између разних течних слојева, сваки обдарен са задобивеном или изгубљеном брзином у сваком тренутку; а отуда, примењујући већ познате принципе о равнотежи течности, могло би се најпре одредити кретање једне течности у једној цеви, као што је било одређено кретање једног сложеног клатна. Али, ум људски никада није најпростијим и најнепосреднијим путевима дошао до истина, ма кога рода оне биле, и ова материја, о којој говоримо, даје један очигледан пример за то.

Ми смо изложили разне кораке, који су чињени те да се дође до решења проблема о осцилационом центру, и тамо смо видели да је праву теорију овога проблема открио тек Јаков Бернули дуго после тога, пошто га је Хигенс решио помоћу посредног принципа о консервацији живих сила. Исто је тако било и са проблемом о кретању течностӣ у судовима, и чудновато је да се није умело користити се, код овог проблема, оним знањима која су већ била стечена код другога проблема.

Исти принцип консервације живих сила даје још прво решење овога последњег проблема и служи за основ великом делу од Данијела Бернулија: *Hydrodynamica, seu de viribus et motibus fluidorum commentarii*, штампано 1738, дело које се у осталом одликује једном анализом тако елегантном у својој поступности као и простом у својим резултатима. Али неизвесност овога принципа, који још није био уопште доказан, морала је такође навести човека на ставове који из њега резултују, и створила је жељу за сигурнијом теоријом, која би била ослоњена једино на основне меканичке законе. Даламбер је учинио замерке Хидродинамици од Данијела Бернулија. Маклорен и Јован Бернули предузели су да даду једну теорију, први у свом делу *Traité des Fluxions*, а други у својој *Новој Хидраулици*, штампана као наставак његових дела. Њихове методе воде, ма да врло различно, истим резултатима којима води и принцип консервације живих сила; али, треба признати да Маклоренова метода није доста тачна и изгледа напред уређена, по резултатима који се желе добити; а што се методе Јована Бернулија тиче, без да се усвоје у целини тешкоће које јој је Даламбер на супрот ставио, морамо се сагласити да она још оскудева са стране јасности и прецизности.

Видели смо, како је Даламбер, уопштавајући теорију Јакова Бернулија о клатнима, био дошао до једног простог а општег динамичког принципа, који своди законе о кретању телâ на законе о њиховој равнотежи. Примена овога принципа на кретање течности јавља се сâма по себи иауктор је дао најпре један покушај о томе на крају своје Динамике, штампана 1743; он ју је за тим развио са свом прикладном опширношћу у своме делу *Traité des Fluides*, које је изашло идуће године, и које садржи тако исто непосредна као год и елегантна решења главних питања, која се могу поставити о течностима, која се крећу у судовима.

Али ова решења, као и она од Данијела Бернулија, ослањала су се на двема претпоставкама, које, у опште, нису истините: 1°. Да разни слојеви течности задржавају тачно свој паралелизам, тако да један слој увек заузима место онога слоја што му претходи; — 2°. Да се брзина свакога слоја никако не мења по правцу, тј. да је за све тачке једног истог слоја претпостављено да имају једнаку и паралелну брзину. Кад течност тече у судовима или у врло уским цевима, претпоставке, о којима је реч, врло су вероватне и изгледају да су потврђене опитом. Али, изузев овај случај, оне се удаљују од истинитости, и тада нема више другог начина да одредимо кретање течности до да испитамо оно кретање које свака честица мора имати.

Клеро је био дао, у својој *Théorie de la figure de la Terre*, штампана 1743, опште законе о равнотежи течностй, чије су све честице покретане ма каквим силама; и требало је дакле само прећи од ових закона на оне о њиховом кретању, помоћу принципа на који је Даламбер, у тој истој епоци, био свео целу Динамику. Овај је последњи, после неколико година, учинио тај важан корак, приликом награде коју је Берлинска Академија расписала 1750, *о теорији отпора течности*, и први је дао, 1752, у свом *Essai d'une nouvelle Théorie sur la resistance des fluides*, тачне једначине о кретању течностй, било нестишљивих, било стишљивих и еластичких, једначине које спадају у класу оних које зову *парцијелним диференцијалним једначинама*, пошто су оне између разних делова диференцијала који се односе на више променљивих. Али ове једначине још нису имале сву општност и простоту за које су биле способне. Ајлеру дугујемо прве опште обрасце за кретање течности, обрасце који су основани на законима њихове равнотеже, и представљени простом и јасном нотацијом парцијелних диференцијала. Тим открићем цела Меканика течностй била је сведена на једну једину тачку анализе, и ако се једначине, које је садржавају, могу интегралити, то би се могле, у свима случајевима, потпунце одредити околности кретања и акције једне течности која је покретана ма каквим силама; на жалост, оне су толико несавладљиве, да се, до сада, могло изаћи ш њима на крај само у случајевима врло ограниченим.

Дакле, у овим једначинама и у њиховом интегралењу и састоји се цела теорија Хидродинамике. Да би те једначине нашао, Даламбер је најпре употребио једну доста замршену методу; за тим је дао једну простију; али, пошто је ова метода основана на законима равнотеже, који су својствени течностима, то она гради од Хидродинамике једну науку одвојену од Динамике чврстих тела. Скуп који је Лагранж учинио, у првом делу своје Аналитичке Меканике, свију закона о равнотежи телâ како чврстих тако и течних у један исти образац, и примена коју је за тим он учинио са овим обрасцем на законе кретања, одвели су га природно да састави како Динамику тако и Хидродинамику као гране једног јединог принципа, и као резултате једног јединог општег обрасца.

О току рекâ. — Међу деловима Хидраулике и Хидродинамике, нема интересантнијег од онога који има за предмет ток речицâ и рекâ. Јер, ако су ови токови воде, који морају носити плодност у земље које наводњавају, нека природна благодет, колико ли пута они носе у исте земље опустошење и ожалошћење? Вештина да их, тако рећи, повежемо ланцима постала је једна нужна вештина у земљама, које су изложене тим опустошењима; требало је проучавати кретања тих великих водених маса, упознати ефекте њихових скупљених и раздвојених делова.

Овај део Хидраулике, о коме је реч, нарочито се појавио у Италији; јер овај део Европе прима са Апенина множину бујних потока који су, пре него што се сједине у реку По, у коју већином падају, пролазили кроз многе кнежине, од којих се свака трудила да од себе уклони беду која им је претила. Отуда су потицали стари и готово непрекидни спорови између варошî Болоње, Модене, Фераре и других, о којим споровима читаве свеске писане, већином некорисне или и штетне; јер су често биле дело незналицâ у овим питањима, и тек у доцније време почели су размршавати праве принципе, који нас морају при томе руководити.

О таласима и осцилацијама течностî. — Њутн је први отворио ову каријеру једним куриозним проблемом, који је био себи поставио, и који му је послужио да израчуна брзину морских таласа, помоћу времена које они употребе да се уздигну и да се спусте. За тим је Њутн извео кретање таласа, који су узбуњени ветром на мору или језеру, или оних таласа које производи бачени камен у воду. За тим су други геометри меканичари постављали и решавали многе аналоге проблеме. Било је лако, из тих њихових проучавања, одредити облик једног таласа.

Лагранж је покушао да одреди брзину таласа у једном каналу, и нашао је да је она иста као што је брзина коју би имало једно тешко тело силазећи са висине, која је равна половини дубине воде у овом каналу.

О примењеној или практичкој Меканици, или о машинама. — Примењеном или практичком Мекаником зовемо ону, која има за предмет да нас упозна са машинама корисним по друштво, и да на њих примени рационалне принципе меканичке, да управља њихову конструкцију (построј), тако да оне произведу највећи ефекат, који су у стању произвести. Ако овај део Меканике и не тражи од анализе тако моћне напоре као неколико других делова, проналазачки геније показао је се у истом на начин који изненађује; и корист овога дела стекла му је одлично место у прегледу прогресâ ума људскога за овај део наших знања.

Ми смо видели да су стари имали вешто-измишљених машина; пренос египатских обелисака, и чак пренос камена од 940 хиљада фунти у Равену показују нам средства, али која, може бити, не превазилазе наша, пошто смо видели да је пренесена једна стена која је тешка три милиуна.

Најпростије и најкорисније машине јесу старинске, полуга, стрма раван, уvртањ, чекрк (le cabestan), Ктезифонова (Ctesiphon) машина за пренос стубова котрљајући их, зупчасти точкови, машина за подизање терета, Архимедов увртањ, Ктезибијусове пумпе (шмркови), воденице, машине за бацање стрела и камена, машине за разбијање зидова, и све друге машине описате у другој књизи од Витрува, који је живео за владе Августа, још су машине, што их најбољих имамо; дакле, остало би још за нас да покажемо шта им је, у овом веку, додато најзначајнијег за средства, за примене, за појединости.

Кад бисмо се одали опширнијем излагању ове примењене или практичке Меканике, имали бисмо да излажемо шта је и колико је урађено на овим питањима: 1°. *О јачини човечијој и снаги коња.* — 2°. *О трењу код машина.* — 3°. *О крутости ужетâ код машина.* — 4°. *О Marly-јевој машини, и о другим машинама, које су покретане водом.* — 5°. *О машинама са ватром.* — 6°. *Друге машине за пењање воде.* — 7°. *О воденицама, ветрењачама и о ручним воденицама.* — 8°. *Разне машине за увећање силâ, за идење лађâ уз воду, или за произвођење нових ефеката. Аеростати, итд.* — 9°. *О машинама, које су употребљене у вештинама за плетење, предење, штампање итд.* — 10°. *О машинама у сајџилуку.* — 11°. *О аутоматима од Вокансона и других.* — 12°. *О вечитом кретању;* итд.

Пошто би нас то излагање одвело далеко, што простор места не дозвољава, то ћемо упутити читаоца на дело свима познатог славног историчара *Монтуклу* [1]) (1725—1799).

X

Деветнаести век наследио је: *потпуну религиозну слободу, потпуну философску слободу* и *потпуну научну слободу*. Од свију веровања, која су завештали философи последњега века нашем деветнаестом веку, као у замену за она веровања због којих су се они морали трудити да их искорене, ниједно од веровања није пустило тако дубоког корена као веровање у прогрес човечанства. Оно расте сваким даном и заслужује да буде сматрано као један од главних карактера мисли у деветнаестом веку.

---

[1]) *J. F. Montucla,* Histoire des Mathématiques, t. I—IV, 1799—1802, Paris.

У седамнаестом веку, као што смо видели, научници су се обраћали једни другима са неком врстом зачикивања. и сваки је крио своје методе; наука је се добро користила овим њиховим такмичењима. Данас су се услови изменили: наука се распрострла; открића свакога научника одмах су обзнањена по жељи самих проналазача; и нека врста колективног напора корисно је заменила индивидуални напор наших предака. Данас, у многим питањима, умножиле су се и тачке гледишта, које нису некорисне радозналости, хоћу рећи, лишене применâ.

Данас, нико не спори корист наукâ. Њихови су напреци тако велики; њихове примене, тако плодне; њихови резултати, тако сигурни, да се оне сâме собом намећу нашем дивљењу. Стварајући корисне индустрије, дајући човеку неисцрпних блага, ништећи растојања, оне су постале неопходно нужне; њихов језик постао је популаран, њихова влада, коначна.

Да ли су науке немоћне да морализују човека? После Евангелија, ја не познајем већу силу, која улива више морала, од силе наукâ. Оне откривају човеку, у исто време, и његову величину и његову немоћ (слабост); његову величину, јер науке стављају под његову управу све природне силе, за које га оне науче да себи потчини: моћ ветрова, морепловством; таласе океана, паром; ход звездâ, рачуном; гром, електрицитетом; простор, телеграфијом; оне му показују и његову немоћ, јер, од свију сила са којима слободно располаже, он не може да створи ни једну једину, — шта велим да створи, он не може ништа да уништи, ни оно најмање између кретањâ, ни оно најелементарније од атомâ.

Науке су принцип јединства и браства међу народима; оне не деле да владају. Ове гвоздене жице, што образују ову огромну мрежу на површини земљиној, ове лађе, које браздају сва мора, и све ове друге многобројне научне творевине везују народе међу собом. Крајни Исток, толико дуго упоран доброчинствима цивилизације, не може више да се опире; попуштајући узвишеним напорима наукâ, он прихваћа дарежљиву руку коју му пружа Запад. Најудаљенији народи и они који су највећма противположени знају да су њихови интереси заједнички; они се приближују, не да се туку, већ да се загрле у име правде и мира. *Justitia et pax osculatae sunt.*

Незнање и дивљаштво производе ропство, науке рађају слободу. Ствар врло поучна!, прво завојевање, најлакше, али и оно које највећма понижава, било је завојевање које је човек учинио над својим себи равним. Ланци, које је сурова сила наметнула бесмртним душама, биће увек гадни, мрски. Друго завојевање, племенитије, али и теже, било је завојевање које је човек учинио над животињама. Гајењем човек је и успео да их савлада и припитоми. Али, од свију завојевања, најмирније и најславније било је оно које је човек учинио помоћу наукâ над неорганизованом материјом. Завојевање меканичког рада много је допринело да се човек ослободи ропства, јер је овај рад пружио хиљаду пута више извора, него што би их могле дати хиљадама ропских руку. На тај су начин науке потпомогле хришћанску цивилизацију!

Задаћа је науке да испита, шта је у разним веровањима основано, а шта није, те да тако ослободи човека ропскога незнања и да га поведе *истини*, јер једино је она, а не слепа вера, која спасава.

Свака наука, која се може сматрати као примена Математике на појаве, ставља себи у задатак, најпре, да сведе конкретна питања на проблеме из Анализе, тј. да сведе *квалитативне* елементе стварѝ на *квантитативне* елементе, који су оно што је за наш ум најјасније.

Начин поступања, који су научници употребљавали при њиховим истраживањима, толико је прост колико и лак: узимати само посматрана факта, не објашњавати никада један природни факат са неким натприродним узроком, не чинити никакву претпоставку, или бар не намећати никакву. Ова се метода находи поменута у Њутновом делу Принципи. „Ја нисам могао, вели Њутн, извести из појава узрок универсалне гравитације, и ја не кујем хипотезе; јер све оно, што се не изводи из појавâ, зове се хипотеза; тајна својства, скривени узроци, физичке или метафизичке фикције нису дозвољени у природној филозофији, у њој се усвајају само ставови који су израз појава“. Од научног обновлења, сви су се научници управљали са свим тачно по овим правилама.

Сада видимо шта је ова спора а озбиљна метода произвела у проучавању факата, и у какво је стање поставила науку. Ево шта је научник открио, кад је, отварајући велику књигу природе, покушао да је чита помоћу ових начина поступања; он је открио хармонију у универсалности, простоту у разноврсности, јединство у многострукости.

После ових општих погледа на науку, бацимо један са свим кратки поглед на поједине науке и знатније радове, што нас меканичаре највећма интересују.

Поједине науке, у овом веку, обогаћавају се врло важним научним радовима и многим проналасцима. Научници овога века већ се нису више ограничавали на читање текстова старих писаца, него су се трудили да непосредно проуче појаве, било посматрањем, било пак експерименталним путем. Много великих проблема и тајанствених питања решени су у овом веку!

У овом веку јављају се са својим научним радовима најславнији људи, већином чеда друге половине прошлога века: *Фурије* и *Гаус* (1777—1855) за Анализу; *Коши* (1789—1857), *Понсле* и *Шал (Chasles)* за Анализу и Геометрију; *Лежандр* (1752—1833) за Теорију елиптичких функција, коју је теорију он и основао; *Јунг, Био* и *Малус* за Оптику; *Ампер* за Електрицитет и Кинематику; *Кивије* за Природну Историју; а за Меканику: *Карно, Поансо,* *Понсле* и многи други, са којима ћемо се упознати на своме месту.

Математика, сваким даном, корача гигантским кораком. Цео свет зна, колико се, данас, увећао број оних лица што се Математиком баве, било по занимању, било по укусу. Тако исто, цео свет зна, колико је се математичка наука разделила на многоструке гране и обогатила толиким резултатима.

Због ове крајне разноликости, следовала је и обвеза за већину од оних који је изучавају да се специјалишу; према томе, често се не зна шта се збива и шта се ради у једној грани, која је суседна оној којом се човек специјално бави; тако исто, једно питање, чије је решење потребно, може бити врло тешко за онога који жели то решење, или би од њега изискивало дуга истраживања и велики губитак времена, онда кад га неко друго лице сматра, и са свим разложно са његовог гледишта, као једно са свим просто питање.

Изгледа да се, данас, код математичарâ могу разликовати два различна правца духа. Једни се, у главном, баве да прошире поље познатих појмова (ноција); без да увек воде и бригу о тешкоћама, које за собом остављају, они се не боје да иду напред и да истражују нових предмета за проучавање. Други више воле да остану на том пољу, да га темељније испитају и проуче, у области боље обрађених појмова; они желе отуда исцрпно да извуку последице, и труде се да у решењу свакога питања ставе на видик праве елементе од којих оно зависи. Ова два правца математичког духа огледају се у разним гранама науке; при свем том, може се, у опште, рећи да се прва тежња сусреће понајчешће у радовима који задиру у интегрални рачун и у теорију функција; радови модерне алгебре и аналитичке геометрије подижу се нарочито од другога правца.

Наука је велики миротворац, агент најплеменитије и најмоћније цивилизације; математичка проучавања нарочито, тако примамљива и тако страсна за онога који им се посвети, у стању су да зближе у једну општу сагласност људе, који су одушевљени једнаком ревношћу за истраживањем истине.

Астрономија чини великих проналазака у овом веку; поједине гране њене толико се развијају да постају засебним наукама.

Математичка Астрономија проучава облик звезда и њихова кретања, независно од узрока њихових; то је Геометрија и Кинематика неба.

Небеска Меканика истражује ове узроке и прорачунава сва дејства. па чак и она која умичу најделикатнијим посматрањима; то је Статика и Динамика неба.

Физичка Астрономија истражује какав је физички и хемијски састав звезда и она доказује хемијску идентичност између звезда и земаљских елемената. Рођена од јуче, тако рећи, она се обогаћава сваким даном и већ је засебно обрађују и излажу.

Физика се, поред осталога, богати проналаском *спектралне анализе* (n° 12). До 1859 године био нам је телескоп једино средство, помоћу кога смо испитивали ова билионима миља од нас удаљена небеска тела; али су се та наша испитивања морала ограничити само на спољашњи облик, величину и боју тих тела. Сада, пак, кад нам спектрална анализа стоји на расположењу, можемо много више сазнати о тим телима. Сама светлост, која од ових небеских тела долази к нама као летећи весник, поред осталога, даје нам могућности да одредимо и хемијску конституцију и физички склоп тих тела. За испитивање некретница одликовали су се: Secchi, H. C. Vogel, а пре свију Хигенс.

Помоћу спектралне анализе, испитивани су и појави у атмосфери: *зодијачка светлост, муња и северна светлост* и *дуга;* проучаван је *месец и планете, комете, аеролити, метеорско камење* и *метеорско гвожђе.* Но, најинтересантнији податак јесте тај, што ми можемо, помоћу спектралне анализе, да проучимо *право кретање звездā,* које би, изгледа, иначе било увек непостижно. И *Airy* је изнашао (1881) брзину многих звезда. У томе и лежи неоцењена вредност спектралне анализе, а да и не говоримо о другим многобројним и разноврсним применама њеним.

Први је *Воластон (Wollaston),* 1802, добио *чист* спектар сунчане светлости, у коме су разне боје биле потпунце раздвојене. Он је први и приметио да тај спектар није непрекидан, него је испрекидан већим бројем финих црних линија, што се брзо заборавило. Тек је *Фраунхофер* (1787—1826), чувени минхенски оптичар, доцније (1814—1815) пажљиво проучио те линије у сунчаном спектру и нашао да су многе од њих постојане; те су линије назвате *спектралним* или *Фраунховеровим линијама.*

Меканика је, такође, у овом веку, учинила знатних напредака и задобила је и нових грана својих.

Ми смо у претходним одељцима, са свим укратко, изложили какво је и колико је имовно стање Меканике, што га је наш деветнаести век наследио од претходних векова. Овде би било на реду, да се одамо подробнијем проучавању и излагању меканичких тековина овога века. Али, пошто ће подробније излагање меканичког наслеђа и меканичких тековина овога века бити главни предмет нашега дела, то ћемо ми овде, на место опширне историје Меканике овога века, учинити само неколико напомена од историјске вредности.

Генералисање или уопштавање меканичких принципа дотерало је дотле, да се, данас, Меканика може потпунце сматрати као једна математичка дисциплина. *Лагранж* својом *Аналитичком Мекаником (Mécanique analytique),* коју су G. Darboux, J. Bertrand и други попуњавали разним белешкама, и *Јакоби (Jacobi,* 1790—1874) својим *Vorle-*

sungen über Dynamik начинили су од Меканике, тако рећи, једну грану математичке анализе, док је, пре њих, анализа била само помоћно средство Меканике.

На тај начин Меканика је изашла на прави пут науке, пошто је толико векова ишла само пипајући! Такву је са свим философску револуцију учинио Лагранж својим дивним делом Аналитичка Меканика, чија ће основна мисао увек служити геометрима за основ свима њиховим потоњим радовима о законима равнотеже и кретања, као год што велика идеја-мати Декартова мора вечито управљати свима геометријским спекулацијама.

Испитујући истраживања претходних геометара о својствима равнотеже, те да у њима нађе један непосредни принцип Статике, који би могао дати сву потребну општност, Лагранж је се зауставио и изабрао *принцип виртуелних брзина,* који је постао у будуће тако славан по огромној и главној употреби коју је од њега чинио, и о којем смо принципу напред говорили. Лагранж је био поставио себи у задатак да сведе овај принцип на једну општу формулу, која садржи решење свију проблема, који се могу поставити о равнотежи тела. Ова формула своди, у сваком случају, тражење једначинâ за равнотежу на проста и добро одређена рачунања, и која ће се извршити над једначинама које изражавају везе тачака у систему, где не ћемо никако имати да се бавимо са начином дејства силâ. То не ће више бити проблем из науке о силама, него проблем из науке о бројевима и науке о просторности. Прва наука биће сведена на две друге, о којима смо у почетку (n° 5 и 6) говорили. Постојаће још и ова корист, пошто је ова формула независна од особене природе везâ које постоје између тачака, биће могућно да изведемо из ње опште ставове, који ће бити примењиви на облике најразличнијих веза, и на питања која немају једна с другима никакве аналогије.

После Лагранжа, предложено је више доказа о принципу виртуелних брзина; један од најпознатијих био би

Амперов доказ; скоро је M. C. Neumann предложио један други доказ (*Berichte der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, Март 1886). Ми ћемо, на своме месту, говорити опширно о овоме принципу и изложићемо један класички доказ, који почива на анализи разних врсти простих веза.

Лагранж је, поред свега тога, дао *методу варијационог рачуна*, која представља једну од најлепших титула славе његове.

Атвуд (1745—1807) је изнашао машину, којом се оверавају познати закони о тежи: 1°. *Пређени простори расту као квадрати времена;* и 2°. *Брзине расту сразмерно временима*; од којих је један последица другога.

Опит нас је научио да сва тела, остављена у празном простору под слободним утицајем теже, узимљу истоветна (идентичка) кретања, ма какве биле њихова величина, њихова врста и, према томе, њихова маса. Отуда се мора закључити: *респективне силе којима су сва тела потчињена, за време њиховог кретања, под утицајем теже, или тежине ових тела, сразмерне су масама ових тела.*

Карно (1753—1823), поред других меканичких радова својих, дао је и значајну теорему о изгубљеној живој сили при судару.

Лаплас (1749—1827) је, својим радовима, највећма допринео обради *Небеске Меканике*, једне од најглавнијих грана примењеног дела Меканике.

Ампер (1775—1836), рођен у Лијону, савременик највећег природњака Кивија, може се сматрати као један од највећих физичара, који су постојали. *Он је*, као што ћемо видети, *творац Кинематике*. При крају свога живота, Ампер је предузео, у једном гигантском раду, класификацију свију људских знања, под називом: *Essai sur la Philosophie des Sciences*, или, *Exposition analytique d'une* *classification naturelle de toutes les connaissances humaines,* предузео је дело које је оставио недовршено.

Поасон (1781—1840) се одликовао радом на проблему о дискусији диференцијалних једначина кретања једне слободне материјалне тачке. На том проблему вежбао се геније и других великих геометара, као што су Лагранж, Јакоби и други. Ми ћемо имати прилике, у самом излагању дела, да се изближе упознамо са тим проблемом.

Коријолис (1792—1843) је израдио теорију сложеног кретања, кретања које је сложено из два друга, и ма да се до њега било дошло само до одредбе брзине резултујућег кретања, он је поставио теорему о тоталном убрзању и доказао да је оно геометријска сума (резултанта) из трију других убрзања. Узевши питање преокренуто, наћи ћемо одмах убрзање у релативном кретању. Пре њега нијсе ни могло обрађивати нити излагати питање о релатив ном кретању, просто за то, што је дата сила допуштала да се одреди само убрзање апсолутног кретања. Коријолисова теорема омогућила нас је да сведемо, на питања о апсолутном кретању, сва она тако важна питања што се односе на кретања, која су посматрана на површини земљиној.

Коријолису, поред тога, дугујемо и за многе лепе проналаске у областима теорије и практике.

Поансо (*Poinsot*, 1777—1859), геометар филозоф, писао је о најглавнијим меканичким предметима, чију јасност није лако говором имитирати. Он је, у својој *Статици*, дао једну генијалну *методу о слагању конкурентних сила.* Он је допунио геометријску теорију окретања једног чврстог тела и изкашао геометријски образац за закон кретања једног чврстог тела, које је остављено са̂мо себи.

Ја не бих веровао да сам пристојно карактерисао све главне филозофске појмове, који се односе на Статику, кад не бих сада посебице поменуо један нов и веома важан појам, који је Поансо увео у науку, и који ја сматрам као највеће усавршење које је, са философског гледишта, постигао општи систем Меканике, почевши од препорођаја који је Лагранж извршио, ма да овај појам није потпуно у истом правцу. Реч је, као што се види, *о оштроумној и јасној теорији спрегова,* коју је теорију Поансо тако сретно створио да њом непосредно усаврши Меканику, у њеним основним појмовима, и чија вредност, изгледа ми, није никако још у довољној мери оцењена од већине геометара. Две једнаке и паралелне силе, супротног смисла, али не непосредно супротне, кад дејствују на две тачке, које су у непроменљивој вези једна са другом, нису своддиве на једну једину силу, а нису ни у равнотежи. До Поансота се задовољавало том примедбом, и сматрало се то као нека врста статичког парадокса; али Поансо је од овога чудноватог скупа силâ начинио један главни елеменат теорије о равнотежи и кретању, — теорије врло простране и потпуно оригиналне, која се односи на трасформацију, на слагање и на употребу овога скупа силâ, који ћемо ми, са њим, означавати под именом *спрега.* Он је доказао да су спрегови обдарени тако значајним својствима са њиховом општношћу и њиховом простотом. Ова се основна својства у главном састоје: 1°. У погледу правца, у томе што ефекат једнога спрега зависи једино од правца његове равни или његове осе, а никако од положаја ове равни нити од положаја спрега у равни; 2°. Што се интензитета тиче, у томе што ефекат једног спрега не зависи чисто ни од вредности сваке од једнаких сила које га састављају, нити од крака полуге на коју оне дејствују, него једино од производа ове силе и тога одстојања, коме је производу Поансо, умесно, дао име *моменат спрега.*

Понсле (1788—1867) је био чувен и као математичар и као меканичар; и њему, као год и Кориjолису, припада заслуга за огромно упрошћавање, које је унесено у изучавање Рационалне Меканике.

У овом веку Меканика се обогатила још двема новим гранама: *Кинематиком* и *Индустријском Мекаником*, које су се, у овом доста кратком времену, од свога постанка до данас, толико развиле да су постале засебним наукама. У последње време, пак, образована је и *Кинематичка Геометрија*.

Кинематика. — Ми смо казали (n° 14) да је предмет Меканике изучавање *кретањâ* и *силâ*. Подела њена потиче са свим природно из ове дефиниције.

Изучавање кретањâ, сматрана самâ по себи, таква каква их посматрамо у телима која нас окружују, и специјално у справама, машинама назване, сачињава први део коме ћемо дати име *Кинематика*, према наименовању које је Ампер увео, и које је данас у опште усвојено.

Још је Даламбер био показао важност проучавања законâ кретања, кретања које је сматрано сâмо по себи. По Даламберту, битни карактер овога дела, Кинематике, у неку руку прелиминерног (претходног), јесте тај што он не изискује никакав нов принцип, што не призива у помоћ никакав факат из искуства, и што мора бити придодат пре Геометрији него ли Меканици.

Не само Кинематика проучава кретање као ефекат, без да тражи да идемо ка узроцима, него још она посматра једино геометријске елементе телâ, чинећи апстракцију о материји из које су она састављена. Тако исто теореме из Кинематике независне су од више или мање потпуног сазнања које можемо имати о саставу телâ, и оне имају сву вредност геометријских истина.

Човек улази стварно у област Меканике, наставља Даламбер, тек онда када се пита како то бива да кретање једног тела, које је постављено под одређеним условима, следи по таквом или таквом закону пре него ли по неком другом закону.

Но, ми ћемо видети, да ћемо, за решење овога проблема, морати постављати принципе, специјалне аксиоме, и обдарити материју, више или мање произвољно, извесним својствима, својствима таквим као што је својство инерције, о коме смо већ говорили; и појамно је, пре него што бисмо прибегли новим аксиомама, увек, у извесној мери хипотетичким, да се жели да човек буде на чисто са свим оним што не зависи од истинитости или лажности ових аксиома.

Карно је у више прилика показивао високу важност, и за Геометрију и за Меканику у исто доба, од изучавања *геометријских кретања,* на име у његовој *Géométrie de position,* p. 336:

„Изгледа ми, вели он, да се чак Геометрија никако не би требала на то да ограничи, и да би она могла обухватити кретања која не произлазе од акције и од реакције телâ једних на друга; јер, Меканика, право речено, није наука о кретању, него наука о комуникацији кретања.

„Идеја о кретању исто је тако проста као што је она о димензији и може бити нераздвојна је од ове. Први појмови из Геометрије уче нас да сматрамо линију као траг једне тачке која се креће, и овај је појам сагласан са материјалном операцијом којом се у истини повлачи једна линија на хартији, са једним пером или једном писаљком; они (појмови) нас тако исто уче да сматрамо једну површину као да је произведена кретањем једне линије, а чврсто тело као да је произведено кретањем једне површине. Зашто се не би ишло и даље, посматрајући шта производи, према томе, кретање једнога чврстог тела у простору? Није то кретање, сâмо собом, које чини предмет Меканике, него ефекат променâ (модификација) које оно трпи....“

И мало даље (p. 338): „Када би теорија геометријских кретања била темељно испитана, Меканика и Хидраулика биле би бескрајно упрошћене; оне би се сводиле на развијање општег принципа о комуникацији кретања, који није ништа друго до принцип да је реакција увек једнака а супротног смисла са акцијом. Велике аналитичке тешкоће, на које се наилази у науци о равнотежи и кретању, долазе у главном отуда што теорија геометријских кретања није никако створена: она заслужује, дакле, сву пажњу научникâ“.

Ампер је био први, који је (1834) показао потребу да се учини те да Динамици претходи теорија о геометријским ствојствима телâ у кретању. Ампер је био тај, који је коначно и образовао науку о геометријским кретањима, дефинишући је на прецизан начин, постављајући границе њене области, најзад дајући јој и једно име, које је сваки похитао да га усвоји. Четири године после свога постанка, Кинематика је (1838) била свечано отворена Понслеом на Сорбони, као засебни део Меканике.

У почетку, Понсле је имао у виду само геометријску теорију главних органа за трансмисију (пренашање) кретања; али, 1841, он је повећао круг геометријских појмова, који се односе на криволинијско кретање, и увео у науку основни појам о геометријским убрзањима. Укратко, он је на Париском факултету наука изложио геометријска својства телâ у кретању и, између осталога, њему дугујемо за тереме о непрекидном померању једног чврстог тела у простору, изузев појам о моментаној оси ротације и клизања, за који дугујемо Шалу. Обрасци, који дају промене координата тачака једног покретног чврстог тела у простору, датирају од Ајлера (*Académie de Berlin,* 1750).

Кинематика допушта многобројне геометријске примене: таква је метода конструкције тангената од Робервала; теорија моментаног центра ротације, за коју дугујемо Шалу и од које је један особени случај већ био дао Декарат, приликом повлачења тангенте на циклоиду; таква су још својства системâ правих, равнû и тачака, која је Шал привезао за кретање једног чврстог тела и која, на најпростији начин, воде нас ка појму комплекса правих првога реда. Шал, коме Геометрија кретања дугује један део од својих скорашњих напредака, дао је Кинематици једно место у својим предавањима о Машинама у Политекничкој Школи.

Године 1862, *M. H. Resal* штампао је једно дело под насловом *Чиста Кинематика*, која се, на тај начин, коначно образовала као засебна наука.

Данас жеља Карнотова са свим је остварена: створена је теорија геометријских кретања. Под именом *Кинематике* она образује једну науку другога реда, која има своје означено место између чисте Геометрије и Меканике у правом смислу.

Она позајмљује од Геометрије своје методе, и, са правом узајамношћу, она пружа Геометрији моћне помоћи за решавање њених најтрансцендентнијих проблема.

С друге стране, она се веже за Меканику, за чији се рачун она обвезује да расветли и објасни сва *нужна* својства кретања, она својства која су истога реда кога је реда теорема о квадрату хипотенузе, а која не би зависила, на никоји начин, ни од природе моторних узрока, нити од физичких услова за остварење кретања.

Пошто је реч *Кинематика* била усвојена, од стране разних аунтора који су се бавили том науком, добро је подсетити овде на дефиницију коју је Ампер дао овој науци.

„Кинематика, вели њен творац Ампер, мора обухватити све оно што би се имало казати о разним врстама кретања, независно од сила̂ које могу да их произведу.

„Она мора, прво, да се бави посматрањима што се односе на пређене просторе при разним кретањима, на употребљена времена за која су пређени, на одредбу брзина̂ према разним односима, који могу постојати између ових простора и ових времена.

„Она мора, за тим, да проучава разне инструменте, помоћу којих можемо да претварамо једно кретање у неко друго“.[1]

---

[1]) *Ampèr*, Essai sur la Philosophie des Sciences, p. 50, 1834.

Кинематици, дакле, припада познавање органâ или инструмената који служе за промену правца и брзине једног датог кретања, познавање које, више или мање инстинктивно код свију људи који су посвећени у примену машинâ, даје овима идеју о толиким оштроумним проналасцима. У томе погледу довољно је поменути вештину ткања, пронађена Jacquard-ом, вештину меканичког предења, шиваће машине, итд.

Отуда један одељак Кинематике, коме се, са Robert Willis-ом, може дати име *Теорија Меканизама*, одељак који има врло велику важност са практичког гледишта и који је од неког времена учинио доста знатнога напретка. Геометријска теорија меканизама учи нас да произведемо, помоћу једног датог мотора, најразличнија кретања; њена примена допушта доста велику прецизност. Постоји чак велики број машина, на име машине у сајџилику, за које је геометријско изучавање употребљених меканизама тако рећи са свим довољно, толико је споредно посматрање силâ које им морају дати кретање.

Међу тим, додајмо одмах да искључива употреба Кинематике излаже великим грешкама оне који се одаду истраживању нових меканичких комбинација, без да покушају да створе себи појам о силама, које ће им требати развити те да произведу она кретања која желе. Могло би се цитирати мноштво геометријских кретања, која нису корисно оствараљива, било због трењâ, било због знатних напрезања која се врше између разних делова, било најзад због великог броја других разлогâ које ћемо проматрати код свакога меканизма.

На пример: сваки зна шта је то увртањ, а шта је навртањ (l' écrou); сваки такође зна да уврћући увртањ, он се угурује у његов навртањ, који је претпостављен сталан. Геометријски, требало би дакле, гурајући увртањ у другом смислу, приморати га да се одврне („одшрафи“). Но, у опште, ово није могућно: на том је својству чак и основана машина са увртњем за сабијање телâ, у којој се, уврћући један увртањ, производи на једно тело знатно напрезање, без да реакција овога тела, ма како велика она била, може имати за ефекат да одврне увртањ, који је остављен са̂мом себи.

Други пример. Посматрајмо врло просту и добро познату комбинацију која образује прељину машину са точком за предење. Очевидно је, окрећући точак руком, да ће се учинити да подножник („педал“) узме осцилаторно кретање око тачке за коју је привезан. Следује ли отуда, саопштавајући непосредно ово кретање подножнику, да смо сигурни да ћемо произвести непрекидну ротацију машине са точком? То је једна ствар, која је са свим очевидна: она ће у истини постојати само под извесним условима, које навика брзо научи прење, али које ћемо имати темељно да проучимо, кад хтеднемо да применимо исти геометријски принцип на моћне машине.

Отуда прека потреба да се има тачан рачун о напрезањима која се врше између свију делова меканизама који се изучавају у Кинематици и, у опште, да се знају израчунавати силе које треба пустити да дејствују на једно дато тело, па да оно узме једно одређено кретање: такав је предмет Динамике.

Да завршим о Кинематици са овом напоменом: на обрађивању појединих делова Кинематике, а специјално на делу о померањима једног чврстог тела, чиј положај зависи од два или више независних параметара, одликовали су се у главноме ови: Schönemann, Mannheim, Ribaucour, Tait и Thomson. У најновије време Кинематику су обогатили својим научним радовима: Хамилтон, Пикар, Поенкаре и још многи други од млађих научника.

Индустријска Меканика. — Индустријска Меканика обухвата теорију моторних (покретачких) машина или рецептора̂; она има за предмет проучавање економских начина за произвођење сила̂, под условима, у опште, у напред означеним, под условима таквим као што је брзина или спорост кретања главнога дела, интензитет произведене силе, простор места којим се располаже, итд.

Индустријска Меканика јавља се тек почетком овога века, и тек помоћу радова генерала Понслеја почела је да напредује. Одмах за тим, генерал Понсле стекао је присталица, на путу који је био отворио Коријолис, Беланжер (1790—1874) и други, од када су и почели да сматрају Индустријску Меканику као засебан део Меканике. Узрок дугога детињства ове науке лежао је у томе, што је њен принцип, ма да обухваћен општим теоремама Рационалне Меканике, могао бити врло тешко одвојен од ове, неком врстом погађања.

Уводећи примењени део Меканике у индустрију, Понсле је увео појам о раду и, поред осталога, усавршио је конструкцију хидрауличких точкова.

Познавајући кретања разних меканизама, доспело се дотле да се, готово свуда, у нашим радионицама, замени раденичка рука слепим силама мртве природе. На тај начин, индустрија је се обогатила дивним справама, покорним слугама, које, *неуморно*, ткају наша одела, преносе тешке терете, израђују метале за најразноврсније употребе; једном речи врше све радње које су, до сада, зависиле од раденичких руку и од интелигенције раденика.

Кинематичка Геометрија. — У последње доба имамо доста радова из *Кинематичке Геометрије,* коју неки називају *Геометријом кретања;* ти су радови највише допринели те су, данас, и Геометрија и Кинематика коракнуле у напред. Да поменемо једно од најглавнијих дела о радовима те врсте: *Principes et Développements de Géométrie Cinématique, par A. Mannheim, 1894, Paris,* из којег ћемо извадити ово што следује (p. V):

„Међу својствима кретања, која се доказују у Кинематици, има их неколико у која се не меша ни време, нити икакав произвољни елеменат, који је стран покретној фигури. Пошто ме је, вели Манхаим, специјално проучавање које сам чинио о овим својствима и о својствима исте природе, чисто геометријским, одвело да знатно увећам њихов број, ја сам држао да би вредило да их скупим. Њихов скуп образује, на тај начин, ову особену грану Геометрије, коју у опште зову именом, које сам ја усвојио: *Кинематичка Геометрија.*

„Док Кинематика има за предмет проучавање кретања независно од силâ, Кинематичка Геометрија има за предмет проучавање кретања независно од силâ, *времена* и од сваког произвољног елемента, који је стрâн покретној фигури. Резервишући, са Ампером, име *померање* да означим једно кретање у коме се не посматра брзина, ја ћу дакле рећи, да бих боље прецизирао: *Кинематичка Геометрија проучава битна својства померањâ фигурâ.*"

— Деветнаести век, поред свега напред изложеног, значајан је и по томе, што се у овом веку чине велике геодетске операције. За тим, потреба једног инструмента, којим би се мерио рад произведен једном датом машином, подмирена је проналаском *динамометара* разне врсте, који се данас у практици употребљују.

Браћа *Монголфијери* пронашли су аеростате.

Лебон (1769—1804) је изнашао у индустрији *гасно осветлење* које, у најновије време, почињу свуда замењивати *електричким осветлењем.*

Нијепс (1765—1833) и *Дагер* (1789—1851) изнашли су принцип фотографије. Последњих година испитан је, помоћу фотографије, велики број спектара.

Тимоније (1793—1857) изнашао је *шиваћу машину.* То је дало идеју те је, до сада, пронађено много корисних машина за прерађевину сировинâ.

Ђорђе Стефенсон (*George Stephenson,* 1781—1848) први је изумео *локомотиву;* и 27 Септембра 1825 године било је њено свечано отварање између Darlington-a и Stockton-a.

Располажући двема природним силама, до тада непознатим или слабо познатим, *паром* и *електрицитетом*, наука је обдарила човечанство двема новим моћима. Она је обвијала земљину куглу (глобус) све гушћом и гушћом мрежом металне жице, којом циркулише с једног пола на други мисао људска, — дакле, *пронашла је телеграф*, — и дала је нашој планети, тако рећи, један нервни систем и једну душу. Данас, и површина земљина, и дубине океа̂на̂, избраздане су тим жицама, чији се број непрестано увећава. Научне па и све друге нови́нѐ стижу нам за неколико сахати из оних земаља, које је вишемесечно пловљење раздвајало Европу од њих, имаће четрдесет и неколико година!

Данас, употребљене су у нашу корист готово све природне силе, и стоје нам на расположењу усавршени: микроскоп, телескоп, штампарија, електрички телеграф, телефон, фотографија, бојне материје, терапетички агенти, пара, жељезница, методичка дирекција пловљења, правила хигијенска, итд., итд. У данима, које сада проводимо, осећа се веома жива, да не речем чак и нервозна журба око радова на свима научним пољима, а посебице на електротекничком пољу! Славни научници, Србин *Никола Тесла*, *Едизон* и други конкуришу на томе пољу. На свима странама, са неком узбуђеношћу која је помешана још и са неким страхом, очекују се нова и нова научна изненађења! Свуда се с дивљењем узвикује: „Боже мој, шта ли се још неће пронаћи?!“

Деветнаести век, у коме, по срећи или по несрећи, и ми живимо, можемо с правом назвати век великих проналазака. Овај је век дао човечанству: океански параброд, континенталну парну па и електричку жељезницу, свесветски телеграф, телефон, васељенску фотографију, спектралну анализу и многе друге више или мање корисне и благодетне проналаске!

XI

У досадањим одељцима, ми смо, у кратким потезима, описали пут којим је Меканика ишла од свога постанка до данас. Као што смо видели, тај је пут јако веругао и у многе странпутице заилазио, док се није управио својој правој мети. На том се путу и данас Меканика налази. Ми смо поменули све знатније научнике, а имало је да се помену још и многи други, нарочито неколико млађих, који су сви заједно својим научним радовима и допринели те је Меканика, до данас, учинила овај напредак и достигла овај ступањ савршенства на коме је ми сада налазимо, и подухватамо се да је изложимо. При том излагању, ми ћемо се трудити да решимо и исцрпно представимо најразноврсније и најинтересантније тешке проблеме меканичке, у којима једно решење има вредности тек онда, кад је оно потпуно и коначно. — Често су најтежи проблеми једне науке врло подесни да ову унапреде, јер примамљују стручњаке да се са истрајношћу посвете тој науци и да тако испитују њене дубине.

Имајући на расположењу више историјских дела, ми смо се трудили, показујући пут којим је Меканика корачала, да не учинимо неправде ниједноме научнику; трудили смо се да не додамо коме оно, што није његов труд, мука и зној, нити пак да одузмемо чију с муком стечену својину. Ако се, и поред те наше пажње, ипак нађе да смо учинили неправде некоме, она је нехотичка: јер, по принципу срца и душе наше, ми нисмо у стању учинити на жао ни живима, то ли ћемо узнемиривати и вређати сени оних трудбеника на пољу човечанске образованости и на пољу сазнања оних истина којима се, данас, наслађава душа свакога умнога човека!

Историја Меканике у нас Срба. — Остатак овога одељка посветићемо историји Меканике у нас Срба.

Сви су народи позвани да суделују на развијању појединих наука, јер сви се могу и да користе њима. Који се од народâ не одазове томе позиву и не врши ту дужност, тај народ још није ушао у оно друштво, које образују културни народи. Наш народ, према могућностима, увек је одговарао и тој дужности једног културног народа. Из историје културног развитка зна се да су, за време славне владе Немањића, поједине науке биле у нас Срба ако не на вишем, а оно бар на истом ступњу развитка, на којем су оне биле и у других образованих народа. Доказ су томе, поред осталога, и они дивни и величанствени споменици из тога доба, који и данас красе све српске земље, показујући свакоме величину и образованост српскога народа, а међу нама Србима стварајући и одржавајући једну врсту духовног јединства. Али, одмах после наше пропасти на Косову, и за Меканику као год и за све друге науке није било повољних услова за њихов развитак кроз више векова.

Наши праоци, који су живели пре пет стотина и више година, имали су других пречих дужности. Било им је суђено, овде на раскрсници Истока и Запада, да буду бедем свега хришћанства противу страшне османлијске поплаве; имали су да бране нашу драгу отаџбину од турског варварства, и том одбраном, у исто доба, штитили су и целу северо-западну Европу. Они су потпунце испунили ту своју дужност: сви су пали на Косову 15 Јуна 1389 године, вршећи своје дужности, и ништа друго до своје дужности. Пре неколико година, 15 Јуна 1889, при прослави пете стогодишњице, придружио се нама, потомцима тих славних предака, цео образовани свет, а нарочито братски нам народи великог племена словенског, и сви тако удружени одали смо достојну пошту тим нашим косовским див-јунацима. Та је прослава подсетила Европу и цео образовани свет на јуначки отпор, што га је Српство било истакло пред поплаву османлијску, отпор јединствен у светској историји, који је стао главе оба цара, — и српског и турског,

— који су својом крвљу подмерили очајност напада и још већу очајност отпора!

Они после њих, за читава четири века, имали су да се боре и од варварства сачувају и потомцима предаду неповређене: наш српски језик, православну веру, наше обичаје, све наше народне светиње и име српско. И они су савесно испунили ту своју дужност. Па и у том тако несретном времену, племе српско дало је доказа о своме суделовању на културном раду; у прилог к томе да поменемо само скорашње прославе: *прославу четврте стогодишњице Ободске штампарије* у Црној Гори и *прославу треће стогодишњице Гундулића* у српском Дубровнику.

Наши јуначки дедови, са својим витешким вођима *Кара-Ђорђем* и *Милошем*, проливали су своју драгоцену крв на толиким бојним пољима, и на својим јуначким и светим костима васкрсли су нам отаџбину, коју су очеви наши а и браћа наша проширили и извојевали јој независност па и титулу краљевску. И они су испунили своју дужност. Они су, на тај начин, створили и повољније услове за развитак појединих наука.

Знајући да у међународној утакмици, у којој појединиiнароди, доприносећи сваки свој део делу светскога напретка, прокрчују себи пут у бољу будућност, наш српски народ прионуо је на свима пољима да достигне друге образованије народе. Одмах, на појединим научним пољима, находимо научнике светскога гласа: *Јосипа Руђера Бошковића,* Србина из Дубровника, чије је научне услуге тражила Италија, Француска, па и Енглеска; за тим, *Доситеја, Симу Милутиновића — Сарајлију* из српске Босне поносне, *Вука Ст. Караџића*, *Даничића*, *Панчића* и друге.

На меканичком пољу налазимо драгоцене радове наших познатих радерика *Генерала г. Стевана Здравковића* и мог поштованог наставника *Професора Велике Школе г. Љубомира Клерића.* Они су нам својим значајним радовима наш пут не само добро образдили и прокрчили, него су нам га још и улепшали тако, да ћемо се, без икаквих препрека, моћи кренути за њима.

Драги моји ученици! Рационална Меканика, коју имам част предавати на нашем највишем просветном заводу и са којом ћу вас упознати у даљем мом излагању, учинила је великих напредака у последње време; али, ипак, има многих и многих делова њених, који су и до данас остали још довољно необрађени, а има их још и недирнутих! *Нама је пало у дужност да пренесемо и пресадимо у нашу слободну Краљевину све оно, што су други напреднији народи постигли на пољу поменуте науке, и још, по могућству, да припомогнемо да иста наука коракне који корак у напред.* За мене ће бити највећа срећа, ако моји драги ученици добију у мојим предавањима и у овом мом делу толико спреме, са којом бисмо, удружени, могли одговорити реченој дужности. Испунимо ли и ми нашу дужност, као што су и наши преци увек испуњавали своје, онда ћемо не само доказати образованоме свету да је наша млада нација кадра и на пољу науке да што уради за човечанство, него ћемо још отклонити и једну од главних препона *нашег свесрпског народног уједињења!*

Знајући Лафонтенову басну *о мраву и попцу*, угледајмо се на раднога мрава и, за бољи успех, сложимо се једном; јер *само рад и слога Србина спасавају*!

21. Предмет и подела Меканике. — После ових генерализација и класификација, срeђивања и уређивања, које су учињене у Меканици за време прошлога и овога века; и после ових увећања, што их је Меканика постигла у овоме веку (стр. 309), могао је се лакше и тачније увидети предмет Меканике, учинити подела њена и дати, посебице, дефиниција сваког дела њеног.

Предмет Меканике. — Ми смо (n° 14) већ изнели предмет Меканике; казали смо да је *Меканика наука о* довима наш пут не само добро образдили и прокрчили, него су нам га још и улепшали тако, да ћемо се, без икаквих препрека, моћи кренути за њима.

Драги моји ученици! Рационална Меканика, коју имам част предавати на нашем највишем просветном заводу и са којом ћу вас упознати у даљем мом излагању, учинила је великих напредака у последње време; али, ипак, има многих и многих делова њених, који су и до данас остали још довољно необрађени, а има их још и недирнутих! *Нама је пало у дужност да пренесемо и пресадимо у нашу слободну Краљевину све оно, што су други напреднији народи постигли на пољу поменуте науке, и још, по могућству, да припомогнемо да иста наука коракне који корак у напред.* За мене ће бити највећа срећа, ако моји драги ученици добију у мојим предавањима и у овом мом делу толико спреме, са којом бисмо, удружени, могли одговорити реченој дужности. Испунимо ли и ми нашу дужност, као што су и наши преци увек испуњавали своје, онда ћемо не само доказати образованоме свету да је наша млада нација кадра и на пољу науке да што уради за човечанство, него ћемо још отклонити и једну од главних препона *нашег свесрпског народног уједињења!*

Знајући Лафонтенову басну *о мраву и попцу*, угледајмо се на раднога мрава и, за бољи успех, сложимо се једном; јер *само рад и слога Србина спасавају*!

21. Предмет и подела Меканике. — После ових генерализација и класификација, сређивања и уређивања, које су учињене у Меканици за време прошлога и овога века; и после ових увећања, што их је Меканика постигла у овоме веку (стр. 309), могао је се лакше и тачније увидети предмет Меканике, учинити подела њена и дати, посебице, дефиниција сваког дела њеног.

Предмет Меканике. — Ми смо (n° 14) већ изнели предмет Меканике; казали смо да је *Меканика наука о* *кретањима и силама*. Очевидно, реч је *о кретањима ових природних или физичких тела*, и реч је *о силама* (n° 13). — Додајмо овде још ових неколиких напомена.

1ª. Нама најобичнија кретања јесу она, која ми, од нашег детињства а помоћу наших органа, свакодневно саопштавамо било нашем сопственом телу, било предметима који нас окружују. Непосредни узрок ових кретања јесте оно што зовемо нашом *мишићном силом*, чије развијање јесте неопходни услов манифестације појавâ, који нас зазанимају.

Човечија сила јесте први узрок кретања, који је био познат, и прва је била и употребљена за радове за живот најпотребније.

Али, није дуго времена протекло, а упознати су и употребљени и други природни агенти, који су у стању да допуне недостатак наше мишићне силе. Тако узете су у помоћ, најпре, *снага* (*сила*) животиња, пристојно управљана; за тим *сила* воде и ветра; по том, *сила* паре, која је, тако рећи, на наше очи учинила читаву револуцију у условима социјалног живота. Најзад, узета је у помоћ и електричка *сила*, која резервише, за нас или за оне који ће доћи после нас, трансформације може бити још неочекиваније.

2ª. Ми знамо да се положај једнога тела у простору одређује помоћу извесних геометријских количина, *координатама* назване. Ако посматрамо једно тело (које ћемо, упрошћења ради, свести на математичку тачку), и ако меримо њене координате у довољно блиским тренуцима, добићемо једну серију узастопних положаја ове тачке; из ових положаја конструисаћемо геометријско место — криву линију — покретне тачке (тела), *пут*, *путања*, или *трајекторија* названа. Довде је био посао Геометрије. Ако, поред тога, бележимо још и време, које протече између двају ма којих узастопних посматрања, упознаћемо се потпунце кретањем; издвојићемо га од свију других кретања, која се разликују, било што им путања није иста, *било што* *су једнаки простори пређени за различна времена.* О овој последњој тачци нисмо имали да се занимамо у Геометрији.

Све справе сајџилука удешене су према небеским појавима. У Астрономији се учи опис тих справа и начин мерења времена. Кад посматрамо, у исто време, и једно тело у кретању, и један сахат у секундима, па одредимо тим телом пређене просторе и за то употребљена времена, онда кажемо да знамо *закон кретања* тога тела. И у стању смо да решимо двогуби проблем:

Који положај заузима, у датом тренутку, једна покретна тачка у простору? — И обратно,

Одредивши посматрањем положај покретне тачке, које је време?

Знајући законе кретања звездâ, Астрономија може да нам означи ону тачку на небу на којој ће се налазити, у једној датој епоци, неко небеско тело; она израчунава, више година у напред, излазак и залазак сунца, месеца и планета; она предсказује помрачења, приливе и одливе и све појаве који, у различном степену, интересирају астронома, географа или морепловца.

Обрнуто, посматрање ових појава даје нам могућности да одредимо, са великом прецизношћу, било време места на коме се човек налази, било чак одговарајуће време неке друге тачке на глобу.

3ª. Кад је већ реч о кретању, да кажемо неколико речи *о перпетум мобиле (perpetuum mobile, вечито кретање).*

Као год што су се алхемичари бавили проналаском камена мудрости, а математичари квадратуром круга, тако су се исто и многи меканичари бавили овим шимеричким проблемом *перпетум мобиле.* У овом шимеричком проблему тражи се да се удеси једна машина, која би, једном стављена у кретање, вечито продужавала не само да се креће без помоћи икаквог мотора, него би чак производила и какав користан рад, као, нпр., да извлачи воду на извесну висину. Ми ћемо, доцније, очигледније доказати немогућност таквога кретања. Па и противу сваке очевидности, коју имамо из свакодневног искуства о немогућности таквога кретања, многи од раденика, интелигентних али мало учених, или хрђаво научених, што је горе, још жртвују на истраживање једне такве шимере: своје време, свој новац, па често чак и своје здравље! Искључиво посматрање Статике наводило их је често на овај погрешни пут.

Сваки од тих раденика био је тврдо убеђен, да је решење свога проблема довео већ врло близу краја; имао је још да отклони само неке омање сметње, па да му се точак сâм вечито окреће! Према таквом убеђењу, они су са највећим узбуђењем размишљали и радили на свом великом делу и услед тога добијаху неки карактеристичан изглед. Они су, већином, живели усамљено, и њихово бледо и замишљено лице казиваше, да их дуги рад и нека очајна чежња мори!

Подела Меканике. — Да рекнемо, прво, коју реч о подели наука, у опште. *Спенсер* не усваја мишљење да је могућно уредити науке у један серијски ред, који би изражавао, било њихову логичку зависност, било њихов историјски развитак. Ако би један такав ред био могућан, он би усвојио Контову класификацију. Конт, признавајући да су науке гране једног јединог стабла, изгубио је право да их уређује у редове. Он је увиђао истину, али је није увидео целу целцату. Науке нису само гране једног заједничког стабла, оне се наслањају једне на друге, помажу се, састављају се крајевима (анастомозирају се, како би рекао један анатомиста); оне не иду само у једном правцу, од простога ка сложеном, од веће општности ка мањој општности; оне иду и у супротном правцу (p. LVIII).

Што се, пак, специјално, поделе математичких наука тиче, *Монтукла* вели: „Математичке науке деле се природно у две класе; једна класа обухвата оне науке, које зову *чистим* и *апстрактним;* друга, пак, класа обухвата оне науке, које зову: науке које се служе математичким рачунима, или примењена математика на друге науке, или, најобичније, *физичко-математичке науке.*" [1] У ову другу класу спада и Меканика.

Поменимо, најзад, као ствар очигледну, да је свака поједина наука способна и за нарочиту примену; тако се, нпр., Меканика може употребити за састављање машинâ, итд. — И сада пређимо на *поделу Меканике.*

Према својој дефиницији, према природи предмета свога, *Меканика*, коју многи писци зову *Општом Мекаником,* а неки опет *Теоријском Мекаником* (n° 14), *дели се на три дела,* на: *Кинематику, Статику* и *Динамику.*

1°. *Кинематика је наука о кретањима, независно од сила, тј. независно од физичких узрока који та кретања производе или их промењују.* Дакле, Кинематика се бави кретањима као ефектима, без да истражује њихове узроке. Она посматра једино геометријске елементе телâ, чинећи апстракцију о материји из које су тела састављена; према томе, у Кинематици, ми можемо материјална тј. физичка тела сматрати као чисто геометријска тела. Кинематика, као год и Геометрија, основана је на тачном умовању и на аксиомама; она не потребује никакав нов, ни специјални принцип.

Као што смо већ казали, истине чисте Геометрије и Кинематике односе се на облике и кретања, која разум само замишља као могућна, али која, у опште, природа не остварује ни на приближан начин.

Поред појма о простору, који чини предмет Геометрије, Кинематика уводи још један нов појам, *појам о времену* (n° 8); због тога је Кинематика комплекснија наука од Геометрије, јер она проучава геометријска својства кретања у њиховим односима са временом.

---

[1]) *J. F. Montucla*, op. cit., t. I, p. 4.

Неки писци везују Кинематику за Геометрију и зову је: *Геометрија од четири димензије,* као год што је и *Лагранж*[1]) дао ово име, у опште, самој Меканици. Неки сматрају Кинематику као са свим засебну науку, и стављају је у средину између Геометрије и Меканике; неки, опет, стављају Кинематику у претходне појмове меканичке; а неки, најзад, сматрају Кинематику као неки увод у Меканику. И тако ови писци деле Меканику на *два* дела, на *Статику* и *Динамику,* што је неумесно по мојем мишљењу. Ми ћемо сматрати Кинематику као део Меканике, и то *као најпростији део њен,* — као што и јесте у ствари.

Реч *Кинематика* (фр. *Cinématique;* нем. *Kinématik* или и *Phoronomie*) узео је Ампер од грчке речи *Κινηματικὸς,* која долази од *κινημα,* која значи кретање.

Кинематика се дели на два дела, на *Чисту Кинематику* и на *Примењену Кинематику* тј. *Теорију Меканизама.*

Чиста Кинематика (које је име *M. H. Resal*[2] дао) *изучава кретања, ставивши се на гледиште апстрактне и спекулативне науке.* Чиста Кинематика, врста трансцендентне Геометрије у којој се изучава, као што је то Карно желео, *оно шта производи кретање једног чврстог тела у простору,* време понашајући се овде, тако рећи, као једна четврта ултра-геометријска димензија.

Примењена Кинематика или *Теорија Меканизама* обухвата примену теоремâ из Чисте Кинематике на геометријски нацрт машинских делова (органа); у њој се излажу разни меканизми и њихови делови, који су најобичније употребљени у практици и у индустрији, и који служе за трансмисију, трансформацију и за мерење кретања, али

---

1) „Како положај једне тачке у простору зависи од трију координата $x, y, z,$ ове ће координате у меканичким проблемима бити сматране као функције времена t. На тај начин, може се Меканика сматрати као Геометрија од четири димензије, а меканичка је анализа као проширење геометријске анализе“. — Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques,* § 185.

2) *Mallet-Bachelier,* I vol., 1862.

увек остављајући на страну посматрање силâ, које су употребљене.

2°. *Статика је наука о равнотежи силâ.* Лако је појмљиво, кад на једно тело, претпостављено примитивно у миру, дејствују две или више силâ у исто време, да се оно нужно не ставља у кретање, тј. стање мировања остаје и даље, и ако силе дејствују: то је факат свакодневног искуства. Још општије, кад је систем тела непокретан, онда имамо да тражимо какве морају бити узајамне зависности силâ, које дејствују на систем тела, па да тај систем, претпостављен примитивно у миру, остане опет у миру тј. у равнотежи. Тада се каже да су *силе у равнотежи*, или да је *тело*, или да су *тела у равнотежи* под утицајем датих сила. Исто је тако лако појмљиво, да силе, које дејствују на једно тело у кретању, могу такође бити у равнотежи, — што се познаје по томе, што се кретање тела није променило услед увођења ових сила. Део Меканике, који се бави овим и оваквим проблемима, тј. у коме се проучавају услови, које морају испунити силе које дејствују на једно тело или на систем тела, па да равнотежа постоји, зове се *Статика*.

Дакле, равнотежа следује из деструкције више силâ, које се боре и које узајамно поништавају дејство, које оне врше једне на друге; цељ је Статике да нам даде законе, по којима се ова деструкција врши. У равнотежном стању, сила нема актуалног покрета; она само производи просту тежњу за кретањем; али, морамо је увек мерити ефектом, који би она произвела, када не би била заустављена.

Статика се бави и са таквим проблемима, који се односе на *облик и положај тела,* какав и који ваља тело да заузме, па да буде у равнотежи под утицајем силâ, које на њ дејствују. Овај последњи род испитивања Статике најважнији је део њен, јер се на томе делу, који је *При-*

мењена Статика, и оснивају све инжињерске, машинске и архитектонске грађевине.

Статика, откривена тако рећи експериментално старим геометрима, логичка је последица нових принципа. Она има свој добро одређени предмет и своју особену методу; Статика почива на извесним принципима, *принципи Статике* названи, који се могу сматрати као праве аксиоме.

У Статику се уводи још један нов појам, *појам о сили* (n° 13); због тога је Статика сложенија наука од Кинаматике, али, као што ћемо видети, она је опет простија од Динамике. У осталом, наука о равнотежи силâ од врло велике је вредности, не само по корисним применама, које су људи чинили од ње, него још и по томе што је она базис решења свију питања о кретању; те и због тога истраживање законâ о равнотежи силâ мора бити предмет првих проучавања.

Реч *Статика* (фр. *Statique;* нем. *Statik*) произлази од грчке речи *Στατικὸς*, оно што је исправљено, од *στάω* и *στα*, латински *stare*, која значи стајати.

3°. *Динамика је онај део Меканике у коме се проучавају односи (релације), који постоје између силâ и кретањâ тела, која оне производе.* Дакле, Динамика има за главни предмет: проучавање силâ, њихове мере и начина на који оне производе или мењају кретање. „У једном ужем и више употребљеном смислу, Динамика је део Меканике који проучава разна кретања“. *(Литре).*

Динамика се ослања на принципе (n° 16), који су далеко од тога да буду очевидни *a priori*, сматрајући их као *postulata* посредно доказана са сагласношћу између њихових логичких последица и посматраних појава. „Помоћу ових принципа, може се учинити потпуно излагање Динамике и, као гранични случај, Статике; то је излагање основано једино на Кинематици, или чак на Геометрији, пошто појам о времену, који учествује у Кинематици, може бити замењен једним геометријским појмом. Излагање те врсте находи се у Kirchhoff-љевој *Mechanik* (Leipzig, Teubner), што нас ослобођава да улазимо овде у веће појединости“.[1])

Динамика обухвата скуп принципа и теорема, помоћу којих можемо да решимо ова два проблема:

I. *Дате су силе, које дејствују на једно ма какво тело, одредити кретање које ће се појавити, ако је то тело било у миру;* или пак, *у противном случају, наћи како ће се променити кретање, које је задобивено под утицајем ранијих узрока.* — И обратно,

II. *Знајући кретање једног покретног тела, наћи силе које актуално дејствују на то тело.* (Види стр. 83).

Питања што се односе на равнотежу сила̂, очевидно, могу бити обухваћена онима, што чине предмет Динамике; ова динамичка питања обухватају све случајеве у којима једно кретање престане постојати. Међу тим, ова су питања о равнотежи сила̂ одвећ важна, и због тога не можемо се ограничити на њихово више или мање олако излагање у једном одељку Динамике. Због тога смо и учинили једну специјалну поделу Меканике, и дали смо једном делу њеном име *Статика:* наука која излаже питања о равнотежи сила̂.

И заиста, вештина конструкције није ништа друго до тражење економских услова, под којима треба распоредити материјале у равнотежи, под утицајем сила̂ којима пројектовано здање мора бити потчињено; и, с друге стране, ма да су машине начињене да буду у кретању, начињене за рад, ми ћемо видети да они случајеви, у којима су оне у равнотежи, дају у реалности кључ свију појава нормалног функционисања.

Динамика се разликује од Статике увођењем више нових појмова, Статици са свии страних, као што су *појам о времену* (n° 8), *појам о маси* (n° 17) и *појам о кретању* (n° 9 и n° 10).

---

[1]) *P. Mansion*, op. cit., p. 10.

Пошто су услови о равнотежи силâ независни од појмова о времену, маси и о кретању, то је са свим и природно, а и сагласно је са логичким редом, проучити и изложити Статику пре Динамике. Поред тога, пошто је, као што смо казали, Статика базис решења свију питања о кретању, то она мора бити предмет првих проучавања. Нужни подаци за истраживање законâ о равнотежи силâ мање су многобројни од оних што их изискују закони о кретањима, која оне могу произвести; па и то је довољан разлог да теорији кретања претходи она о равнотежи силâ. Овај ред оправдан је и овим посматрањем, што се, благодарећи Даламбертовом принципу, стављање у једначину неког динамичког проблема може свести на решење једног статичког проблема; на тај начин проблем о кретању биће сведен на једно чисто рачунско питање. Најзад, и по историјском реду, Статика је најстарији део Меканике; Статика датира од Архимеда, а Динамика од Галилеја; — Кинематика је створена у првој половини нашега века.

Напоменимо још и то да има писаца, који, доста умесно, скуп Статике и Динамике зову: *наука о силама*. Има и таквих писаца, који опет, не са свим безразложно, деле Меканику на *два* дела, на: *Кинематику* и *Динамику;* они узимљу Статику као један део Динамике.

Реч *Динамика* (фр. *Dynamique;* нем. *Dynamik*) долази од грчке речи Δυναμικὸς, а ова опет од речи δυναμις, која значи силу.

— На тај начин, ми смо у Меканици, у науци о кретањима и силама, разликовали *три* велика дела:

1°. *Кинематика*, наука о кретањима, апстрахујући силе које могу да их произведу.

2°. *Статика*, наука о силама, апстрахујући кретања која оне могу произвести.

3°. *Динамика*, наука о начину акције силâ у односу на кретање, тј. о начину на који силе производе кретање или мењају оно које је раније задобивено.

У једном синтетичком дѐлу, у коме се прелази од простога ка сложеном, изгледа нам подесно а и логично почети са оним делом, у који улази најмањи број несводљивих појмова, а свршити са оним делом, у који улази највећи број тих појмова.

Ова три дела: *Кинематика, Статика* и *Динамика* сачињавају оно, што ћемо, у опште, звати: *Рационална Меканика,* — но о томе говорићемо мало ниже.

После ове прве и основне поделе Меканике, најглавнија разлика да се постави у Меканици састоји се у томе: *да се води рачуна о стањима телâ.* И како нам се тела јављају у природи у *три* разна стања: *чврста*, *течна* и *гасовита тела* (n^0 15), то ћемо и ми, при изучавању и излагању Статике и Динамике, морати водити рачуна о тим стањима тела. Отуда *Статика* и *Динамика* имају ове своје одељке:

1. *Статика чврстих тела* или *Геостатика* (долази од грчке речи Γῆ, земља, и од речи статика).

2. *Динамика чврстих тела* или *Геодинамика* (долази од Γῆ, земља, и од речи динамика).

3. *Статика течних тела* или *Хидростатика* (долази од *Hydr* или *Hydro,* предметак, од грчкога ὑδρ, еквивалентно са ὕδωρ, вода, и од статика). По *Литреу*, Хидростатика је део Меканике који се бави са равнотежом течностî, са условима њихове равнотеже и са притисцима које оне производе на дуварове судова; она је супротна Хидродинамици. — Хидростатика образује једну доста потпуну доктрину.

4. *Динамика течних тела* или *Хидродинамика* (од *Hydro* и од динамика). По *Литреу*, Хидродинамика, део Хидраулике супротан Хидростатици, наука је о кретању течностî и о законима њиховог притиска.

Хидростатика и Хидродинамика сачињавају *Хидраулику* (фр. *Hydraulique;* нем. *Hydraulik*) долази од Ὑδραυλὶς, од ὕδωρ, вода, и од αὐλὸς, цев. У својим почецима, Хидраулика је била само једна чисто емпиричка вештина. Права хидрауличка наука почиње тек од стотину година. По *Литреу*, Хидраулика је наука, вештина која учи да се одводе и пењу воде. У опште, то је део физике, који се бави са свима појавима, који се односе на кретања течности̂. — Неки писци веле: Хидродинамика је Хидраулика; неки, пак, веле: Хидраулика је примењена Хидродинамика.

5. *Статика гасовитих тела* или *Аеростатика* (долази од латинског *aer*, исто као и грчки *ἀήρ*, ваздух, и од статика). По *Литреу*, Аеростатика је део физике који истражује законе о равнотежи гасова, ппр. ваздуха.

6. *Динамика гасовитих тела* или *Аеродинамика* (долази од *aer*, и од динамика). По *Литреу*, Аеродинамика је део физике који се бави законима, који управљају кретањима гасовитих тела, или законима који одређују притисак што га производи спољни ваздух.

Аеростатика и Аеродинамика сачињавају *Пневматику* (фр. *Pneumatique;* нем. *Pneumatik*) долази од **Πνευματικός**, од **Πνεῦμα**, дах, дисање. По *Литреу*, Пневматика је наука која има за предмет физичка својства ваздуха и других перманентних гасова. — Неки писци веле: Аёродинамика је Пневматика.

Напоменимо и то, да има врло мало писаца који су начисто са овом поделом Статике и Динамике. Ма како битна била ова последња подела, ми је стављамо тек на друго место, и, према методи коју је Лагранж поставио, ова је подела потчињена оној претходној, оној првој. Основни принципи исти су за чврста тела и за течности; али, за течности, мора се само водити рачуна о њиховој промењљивости облика, што, очевидно, замршује решење проблемâ, нарочито у питањима о кретању.

Примедба. — Приметимо да има писаца, који, водећи рачуна о трима стањима природних тела (n° 15), деле Меканику и на ова *три* дела:

1°. *Меканика чврстих тела,* која се још особено зове *Геомеканика* (долази од *Γῆ*, земља, и речи меканика).

2°. *Меканика течних тела*, тј. Меканика воде и у опште свију течних тела, која се особено зове *Хидромеканика* (од *Hydro* и речи меканика), или је још и *Хидрауликом* зову.

3°. *Меканика гасовитих тела*, тј. Меканика ваздуха и у опште свију гасовитих тела, која се особено зове *Аеромеканика* (од *aer* и меканика), или је још и *Пневматиком* зову.

22. Рационална Меканика. — Поред оне поделе меканичке науке, која је потицала из саме дефиниције њене, и коју смо ми изложили у претходном одељку, Меканика се дели на *два* главна дела, на: *Рационалну Меканику* и *Примењену Меканику.* Има веома мало писаца, који деле Меканику на *три* главна дела, на: *Рационалну*, *Примењену* и *Практичку Меканику*; јер, већина писаца састављају уједно два последња дела, Примењену и Практичку Меканику, под именом *Примењене Меканике,* о којој ћемо рећи коју реч у следећем одељку.

Рационална Меканика. — Рационална меканика, *којом ћемо се ми и занимати,* јесте једна математичка, идеална и апстрактна наука, без нужног односа са реалношћу. Она је, тако рећи, рођена у наше дане, *Buff.*, Quadrup., t. IV, p. XLII. „Конкретни део математичких наука, вели Конт, састоји се из Геометрије и Рационалне Меканике.“[1]

Испитајмо, најпре, философску вештину (мајсторију) која је од највеће важности односно начина на који ће тела морати бити сматрана у Рационалној Меканици. Та концепција заслужује у толико више нашу пажњу, пошто је она, обично, још замотана једним густим метафизичким облаком, који причињава да не познајемо праву природу.

---

[1]) *A. Comte,* op. cit., t. I, p. 105—106.

Реч или епитет *рационална* (фр. *rationnelle;* нем. *abstracte, vernünftige)* дидактички је термин и представља оно што се само умом појми; овде, као епитет Меканике, показује да се меканичке спекулације примењују, *одмах*, само на тела која разум појми, тј. на чисто фиктивна тела, која разум појми, али која не постоје у природи.

Ми знамо (n° 15) да се молекули природних тела *не додирују међусобно*, већ су на неком извесном растојању један од другога постављени. Према томе, појамно је, зашто у природи не постоје математички (апсолутно) чврста тела или тела непроменљивог облика, зашто су сва природна тела више или мање витка, истегљива или стишљива под утицајем сила̂ које на њих дејствују.

Али, у Рационалној Меканици, природна чврста тела, таква као што су метали, камење, итд., ми ћемо сматрати као апсолутно чврста или тврда тела, тј. као тела непроменљивог облика, па ма каква била напрезања којима су она потчињена. Истина, чврста тела тако сматрана јесу једна апстракција, али има природних чврстих тела која им се много приближују; у осталом, ми их можемо појмити као геометријске фикције и тражити законе њихових померања. Често ћемо, још, природна чврста тела сматрати као да су потпунце глатка, па чак и без тежине. Ужета сматраћемо као потпуно витка (гипка) и неистегљива; код машина, пак, често не ћемо водити рачуна о трењу ужета или каиша, — и томе подобно.

Течности су, као што знамо, преко мере слабо стишљиве; тј. да би се произвела релативно мала смањења запремина̂ течности, требало би употребити грдно велике притиске. Течности, та природна тела, сматраћемо да су обдарене апсолутном нестишљивошћу и да између њихових молекула нема никакве кохезије; на тај начин, реалне течности, које су више или мање лепљиве, замениђемо са течностима које су назване *савршене* течности.

Перманентни гасови, најзад, потчињени су Мариотовом (или Бојловом) закону, тј. кад је температура стална, да се притисак мења обрнуто сразмерно запремини. За температуру, они се покоравају Гејлисаковом закону.

Приметимо, сада, да би било потпунце немогућно поставити ма какав општи став о апстрактним законима о равнотежи или кретању, када не бисмо сматрали тела, као што горе рекосмо.

Запитаће ко год, па на што та научна проучавања чисто уображених тела? На што сав тај трудбени скуп лажних умовања о *теоријским* појмовима, који су једино за то да изопаче идеје, о рачунима који налазе своју примену само на небу? Ова је примедба важна; она заслужује да се зауставимо један тренутак и да је продискутујемо, јер она додирује у једну од ствари̂ које су биле и које ће још дуго бити подједнако фаталне по прогресе нау̂ка и индустрије; хоћу да говорим о радикалном антагонизму који сувише често траже да поставе између онога што зову: *теорија* и *практика.*

Кад је Архимедова и Галилејева наука, горда што је потчинила себи небеске просторе и открила тајну кретања̂ каприциозних звезда у нашем сунчаном систему, кад је, велим, Меканика, силазећи с неба на земљу, хтела да примени своја моћна средства истраживања на питања текничке и индустријске практике, она је нашла у молекуларној конституцији материјалних тела, како толико нових светова очекују по своме реду једног легислатора.

„Врсте система̂, вели M. Biot[1], не мање чудновати као и планетски свет, али бескрајно више заплетени, у којима миријаде честица̂ које се не разликују, дејствујући и противдејствујући једне на друге на одстојањима која чикају најсавршеније начине посматрања, задају рачунцији несрављено већих тешкоћа него ли правилна кретања која се врше у усамљености небеса̂.“

[1]) *Biot,* Mélanges, t. I, p. 12.

Треба казати, да се још није успело да се најстрожије уведу математичка посматрања у изучавање овог новог реда појава. Чекајући на то, прогрес иде својим током: индустрија чини сваким даном нових открића, свуда су створене моћне машине, подижу се гигантске мануфактуре (фабрике), и наука, немоћна да доведе у ред полет практике, мора бар да учини све своје напоре те да заустави неизбежна одступања у границама, које су безопасне по развитак цивилизације. На тај су начин, Navier (1785—1836), Коријолис, Понсле и овима подобни, створили једну прелазну науку, ако се тако можемо изразити, створили су науку коју ћемо звати *Примењена Меканика*, на супрот *Рационалној Меканици*.

Наше дело треба да садржава, поред принципа Рационалне Меканике, који потичу из разума, и принципе једног са свим другог реда, који су нам показани једним пажљивим посматрањем појава̂, које представљају посматрана тела у односу на кретање.

Вреди, још од сада, да смо добро задахнути духом који ће нас руководити у оном одељку дѐла, који је посвећен применама Меканике.

Пошто смо одмах увидели немогућност, тако рећи апсолутну немогућност, за тачно решење ма и најпростијег између питања̂ ове врсте; додајмо одмах да би једно такво решење било тако исто некорисно са гледишта примена̂ (које нас сада занима) као што би тако могло бити у Геометрији тачно решење славнога проблема о квадратури круга, на пример. Све што је потребно, то је да тачност резултата̂ буде довољна за потребе у индустрији. Но то нас води са свим природно да појмимо практичку корист од спекулација, које се односе на бића која разум појми.

И заиста, пошто смо физички проучили тела која су изложена опиту и услове под којима су та тела постављена, ми ћемо замислити фиктивна тела, обдарена својствима која ћемо им придати, да бисмо упростили питање, при свем том удаљавајући се што је могућно мање од својстава која смо посматрањем открили код природних тела. Ова последња тачка јесте главна.

На ова хипотетичка тела, на ова бића која разум појми као добро одређена, применићемо рачун. Добивено решење, очевидно, не ће се применити на проблем који смо имали да решимо, пошто смо претпоставили тела различна од онога што су у природи; али, бар, то се решење не ће много разликовати од траженог решења, коме ће ово бити *прва приближност.*

За тим ће требати поправити ово решење, израчунавши бројно мале грешке, које произлазе из нетачности основних хипотеза. На послетку, прећи ћемо на верификацију коначних теоријских резултата; јер, не треба никада заборавити, да ће једно решење, које је добивено по овој изложеној методи, практички вредити тек онда пошто смо га подвргли санкцији опита и у границама у којима је експериментална верификација била.

У даљем излагању овога дѐла, ми ћемо наићи на известан број теорија, у којима потпуна сагласност рачуна и опита води ка резултатима који, без да имају претензије да апсолутно одговарају практици у правом смислу, ипак дају драгоцених упута архитекту, меканичару и инжињеру. И, ако у другим случајевима наши мање срећни напори не успу да савладају тешкоће једног проблема, који се не дâ савладати, требаће нам да се склонимо и слободно да признамо нашу немоћ и да се ограничимо те да упознамо и покажемо стене, често значајне по неком славном бродолому!

У осталом, увек је доста непријатна ствар видети да је чиста наука принуђена да се одрече управљања индустријском активности у једној епоци; јер, ово је ера пипањâ, грешакâ и обманâ; ово је ера узвишених напора и жалосних падова, Дедала и Икара, смели и несретни предвесници Монголфијера; ово је ера парне машине пре Вата, топлотних или електромагнетских машина још данас.

Најзад, учинимо и ову *напомену:* кад имамо да разрешимо какав механички проблем, то можемо извршити употребивши геометријска проматрања, или се можемо искључиво послужити аналитичким резоновањима. Меканичар треба да зна да докаже, у исто време и на оба ова начина, сва елементарна својства у Меканици; али, кад се тиче тешких питања, која повлаче за собом дуга рачунања, готово увек је корисније употребити само анализу. Решавање проблема помоћу анализе корисно је још и с тога што можемо, кад се један проблем не може тачно да реши, боље да оценимо оно што се занемарује, па ипак да добијемо тачност која се жели. Употреба анализе, при извођењу теоремâ и при решавању меканичких проблема, и учинила је те многи меканичари, доста умесно, зову Рационалну Меканику *Аналитичком Мекаником.*

Геометријска и меканичка резоновања имају често ту превагу, што су лакша за оне који се нису сродили са анализом. Али, за оне, који су вични у анализи, корисније је њу и употребити, за то што се сва питања обрађују и излажу на једнообразнији начин, ослањајући се на много мањи број принципа. Ми ћемо се, већином, држати овога другога пута и сва меканичка питања решаваћемо помоћу анализе. Кад је се, при крају прошлога века, појавило Лагранжово дело *Аналитичка Меканика,* тај је правац преовладао. Томе су правцу припомогли још и радови Поасона, Хамилтона, Јакобија и других меканичара.

Предмет Рационалне Меканике. — Пошто смо објаснили праву природу основне концепције односно стања у којем тела морају бити претпостављана у Рационалној Меканици, на реду је да изложимо предмет ове науке.

Рационална Меканика има такође за предмет изучавање кретањâ и силâ. Све, што смо казали (n° 14) за предмет Меканике, вреди и за предмет Рационалне Меканике; очевидно, сва је разлика у начину узимања телâ.

Принципи Рационалне Меканике. — Пошто смо, на овај начин, начисто појмили право и опште определење Рационалне Меканике, посматрајмо сада основне принципе на којима ова наука почива, тј. посматрајмо општа факта или *физичке законе кретања,* који могу дати стварну основу оним теоријама, из којих се ова наука састоји.

Они принципи Меканике, три на броју, које смо напред (n° 16) изложили, простиру се без муке, као што је то Јакоби приметио још 1825 године, и на Рационалну Меканику, у коју улазе и изводи виши од другога реда. Као што већ знамо, ови принципи морају бити сматрани као прости резултати посматрања, о којима је апсурдно хтети постављати *a priori* реалност, ма да је се то често покушавало. Њихов обичан појам још је битно метафизички.

Подела Рационалне Меканике. — И овде, кад је реч о подели Рационалне Меканике, у опште вреди све оно што смо о подели Меканике рекли (n° 21). Дакле, Рационална Меканика дели се на *три* дела, на: *Кинематику, Статику* и *Динамику*; ми ћемо је у том реду и излагати: најпре Кинематику, а за овом Статику, па онда Динамику У двама последњим деловима, у Статици и у Динамици, водећи рачуна о трима агрегатним стањима тела, имаћемо да изложимо: прво, Статику и Динамику чврстих тела; за тим, Статику и Динамику течних тела; и на послетку, Статику и Динамику гасовитих тела.

23. Примењена Меканика. — Ми смо већ видели (стр. 297) шта је се, до почетка нашега века, подразумевало под Примењеном Механиком, и какав је био предмет њен.

Рационална Меканика посматрајући само фиктивна бића, са својствима прецизним и простим, допушта потпуну тачност математичких посматрања. *Примењена Ме-*

каника, коју неки писци зову *Реалном Механиком*, бавећи се са природним телима, са телима таквим чија су својства често лоше одређена, мало позната и увек сложена, забрањује себи сваку теоријску концепцију и подиже се, помоћу методâ понајчешће елементарних, до општих принципа о кретању и до њихове примене на потребе човекове. Она примењује изворе анализе у исто доба кад и експерименталне резултате.

Развитак Примењене Меканике датира од скора и, да бисмо јој нашли почетак, довољно је вратити се натраг за мање од једног столећа. Она се јавља са Математичком Физиком, и ове две науке, рођене истога момента, образују се у исто доба; њихов ход за више од педесет година паралелан је, и мемоари Пронија, Навијера, Понслета, Кориjолиса и Клапејрона (1799—1864) једновремени су са мемоарима Лапласа, Фуријера, Ампера, Поасона и Коšија.

Није никако ту ефекат случаја; један виши разлог управља овим паралелизмом; Примењена Меканика и Математичка Физика имају више од једне заједничке тачке. Почињући да претреса питања у истом смислу, користећи се истим начинима рада, свака од њих употребљује методе чисте Математике, и свака од њих мора прибећи опиту те да овери добивене резултате.

У осталом, Примењена Меканика често налази у Математичкој Физици полазну тачку и један ослонац; оне се слажу у многобројним питањима и не раздвајају се никако начисто сем по цељи ка којој теже.

Примењена Меканика, према разним применама својим, *дели се на многе гране,* на: 1°. *Небеску Меканику,* или Меканика примењена на кретање небеских тела; 2°. *Физичку Меканику;* 3°. *Индустријску Меканику,* или Меканика примењена у индустрији; 4°. *Животињску Меканику*; итд. — Ми ћемо о овим гранама рећи по коју реч овде.

1°. *Небеска Меканика.* — Небеска Меканика је наука о кретањима небеских тела. Она је једна од најглавнијих грана Примењене Меканике. Декарт је први покушао да сведе на Меканику кретање небеских тела; али је Лаплас највише допринео обрађивању Небеске Меканике. Тврдо убеђење о непокретљивости наше земље спречавало је, за време од две хиљаде и више година, Небеску Меканику а према томе и обичну Меканику да се појаве у уму дубоких геометара из старине; то их је убеђење и одвело на један апсурдни систем!

Небеска Меканика и Рационална Меканика не проучавају никако од других реалних кретања сем кретања телâ, која су положена на приметним одстојањима једна од других и која се понашају, или као просте тачке, или као чврста тела непроменљивог облика. Класички принципи о количинама кретања и о моментима, примењени на свако тело понаособ, довољни су им за то: јер, први даје три једначине које одређују транслацију тела, тј. кретање његовог тежишта; а други даје, тако исто, три једначине које представљају његову ротацију око тежишта. Узајамне реакције разних делова тела елиминишу се сâме по себи, као што се зна, из ових шест једначина, ка којима се по неки пут додаје, да би се дошло брже до извесних резултата, употреба принципа живих сила или енергије.

Небеска Меканика представља један капитални пример обрнутог проблема (стр. 83, под *2°*), који се састоји у одредби силâ, које производе кретање планетâ око сунца, или сателита око планетâ.

Небеска Меканика је огромна наука, ако се, у исто време, посматра величина њеног предмета, простота њених метода и потпуна прецизност њених резултата; она је огромна наука, а међу тим, на крају крајева, она мора бити сматрана као најлакши део између свију делова Примењене Меканике, благодарећи: јасности условâ који су исказани у проблемима, старини посматрањâ којима се располаже, а нарочито оним моћним инструментима који нам дају могућности да распознамо најудаљеније звезде исто тако добро као и предмете, које можемо да опазимо нашим чулима.

2°. *Физичка Механика.* — Пошто су природни појави врло сложени, и, осим тога, пошто су наша знања о битном саставу телâ врло несавршена, то смо неизбежно били наведени, при изучавању њихових кретања, да учинимо, о томе саставу, само приближне претпоставке, при свем том врло драгоцене кад су оне просте и кад постоје случајеви, који се могу познати у напред, у којима их природа остварује врло приближно, Но ове претпоставке, довољне за објашњење извесних појава, апсолутно су у недостатку за друге појаве.

Претпоставимо, нпр., да промене једног чврстог тела, ма да врло мале, чак неприметне, достигну границе које производе *раскид (прелом)*. Шта ће бити, почев од тога момента, са претпоставком о апсолутној консервацији облика тела, кад је овај облик уништен? И како ћемо се задовољити са једном теоријом која, занемарујући апсолутно мале промене, од којих су велике промене честе последице, не допушта да предвидимо ове велике промене, тј. да предвидимо појав раскида, појав толико важан за инжињера који мора, пре свега, да сачува од истога своје конструкције? Па и сâм физичар врло је заинтересован да позна мале промене о којима је реч; јер то су оне које чине разлику телâ у погледу њихове веће или мање еластичности и тврдоће, то су такође оне које, производећи се у материјалним срединама које су различних природа, преносе и сачињавају звук, светлост, топлоту.

Што се течностû тиче, претпоставка о њиховој *савршеној покретљивости* јавља се толико исто недовољна у изучавању врло великог броја факата. Такав је факат, да цитирамо само најглавнији, отицање дуж водоводних цеви или у токовима воде. Нпр., једна река изишавши, као Рајна или Рона, из изворâ који су положени на висинама од 2000 и више метара, имала би према овој претпоставци, долазећи у долину, једну брзину $\sqrt{2gh}$ или $\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 2000}$, имала би од прилике брзину од 200 метара у секунди, којој не би противстали никакво дно и никаква обала. На тај начин, све би у природи било испреметано, кад би се појави управљали по основној претпоставци, коју усваја Рационална Меканика у теорији о кретању течностî.

Због тога је и било апсолутно нужно основати једну Меканику у којој ће се, чак по цену веће заплетености, па и чешћег позивања на посматрање да би се надокнадила по каткад недовољност анализе, водити рачуна о унутарњим малим променама чврстих тела и о малим отпорима што их течности претрпе при промени облика.

Кад год имамо да посматрамо друго што год, а не кретања целине, кад год хоћемо да уђемо у појединост релативних померања, која су претрпели материјални делићи, који су врло блиски једни другима и припадајући једној истој маси или масама које се додирују, одмах улазимо у област једне нове гране меканичке, улазимо у ону грану коју зовемо *Физичком Мекаником*. Физичка Меканика, коју неки зову *Земаљском Мекаником*, више је у хармонији са фактима, основана је на претпоставкама у неку руку мање рудиментарним.

Специјална цељ Физичке Меканике намеће јој дакле обвезу да се што мање одаје спекулативној тежњи, и да се држи ближе посматраних факата, него што то чини Рационална Меканика. Према томе, она ће морати прибегавати чешће искуству и опиту. Али, то ће чинити само онда кад жели да постави неколико врло простих принципа, готово очевидних на први пажљив поглед бачен на ствари̂. И она ће задржати доминирајући карактер математичке науке; јер ће она извести из ових неколиких примитивних факата, благодарећи плодном принципу континуитета са којим нас је сродила инфинитезимална анализа, цео огромни скуп особених и прецизних закона, које ће појави потврдити. На тај начин, она ће саградити оно што се може назвати *Геометријом Природе*, која је не мање лепа, чак са апстрактне тачке гледишта, као год и са свим идеална Геометрија правих аналиста.

Поред ових разлика Рационалне и Физичке Меканике, најбитнији принципи Рационалне Меканике, или они који образују оно што ми зовемо Мекаником у опште, послужиће тако исто за основ Физичке Меканике.

3°. *Индустријска Меканика.* — Као што смо рекли (стр. 314), Индустријска Меканика јавила се тек почетком овога века, услед Понслетових радова. Сви они, који су имали прилике да посете коју од већих светских изложаба, или коју од већих индустријских вароши, могли су стећи појма о оним огромним услугама, што их је Примењена Меканика учинила индустрији, а тиме и целом човечанству.

4°. *Животињска Меканика.* — Животињска Меканика (Mécanique animale) јесте примена меканичких принципа на проучавање кретања животиња̂ и њихових органа.

5°. Најзад, имали бисмо да поменемо још неке гране Примењене Меканике, као *Грађевинску Меканику*, итд. Али, ми ћемо то ређање прекинути и само, по имену, поменути ону грану коју зову *Хемијском Мекаником.* (Видети *P. Duhem,* славни професор математичке физике на факултету наука у Лилу: *Introduction à la Mécanique chimique*. Gand, Hoste, 1893).

24. Завршетак увода. — Ми се надамо, да ово неколико претходних посматрања неће бити и сувише некорисна; надамо се да смо, досадашњим нашим излагањима, у довољној мери упознали наше читаоце са Мекаником, у опште, и са Рационалном Мекаником, на по се. Било је вредно, пре него што бисмо се винули у једно поље толико пространо, као што је меканичко поље, јасно знати: *одакле се полази, куда се пролази и где се иде.*

То учињено, можемо се кренути на пут; али морамо водити озбиљну бригу да нам треба пажљиво посматрати поље кроз које идемо, како бисмо доцније нашли свој пут без оклевања, ма која била тачка на којој бисмо се случајно нашли пренесени, и да нам треба, по потреби, без вође поновити пут који ћемо прећи заједно.

У осталом, ми ћемо, у даљем излагању овога дѐла, врло често и тако рећи са задовољством наилазити на опште принципе, чију смо везу изложили, наилазићемо на принципе који ће се мало по мало расветлити врлином најмоћније од реторичких фигура, репетицијом. На послетку, кад последњи пут пређемо укра̑тко ове појмове, ми ћемо, надам се, бити потпунце у стању да једним погледом обухватимо хармонијско јединство теоријског и експерименталног дела Меканике, схваћајући како се на крају крајева све своди на мали број принципа, и на врло мали број основних последица, које су оно што нам нарочито треба упамтити.

Најзад на крају увода, који, у неку руку, сачињава неку засебну целину, биће добро именовати, поред већ поменутих дела, и ова дела која су нам при изради овога увода у многоме послужила:

M. Marie, Histoire des Sciences mathématiques 1—12 volumes, 1883—1888, Paris.

D^r. E. Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, 1887, Leipzig.

D^r. Ernst Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, 1889, Leipzig.

Примедба. — Пре него што бисмо приступили са читаоцима да разгледамо и проучавамо поље Рационалне Меканике, ми ћемо у одељку, који долази, изложити *претходне геометријске појмове,* којима ћемо се после често служити.

ПРЕТХОДНИ ГЕОМЕТРИЈСКИ ПОЈМОВИ

25. Претходни геометријски појмови. — За ове *претходне геометријске појмове*, које ћемо у овом одељку изложити и који се могу сматрати да припадају чистој Геометрији, у главном дугујемо: Poinsot-у, Chasles-у, Möbius-у, E. Sarrau-у, J. Massau-у, P. Appell-у, G. Koenigs-у и другима. Пошто се ови претходни геометријски појмови врло често и веома корисно примењују у више важних питања из Геометрије, Меканике и Физике, то ћемо их ми, у колико то потребе Рационалне Меканике захтевају, и изложити пре но што бисмо приступили излагању ове науке.

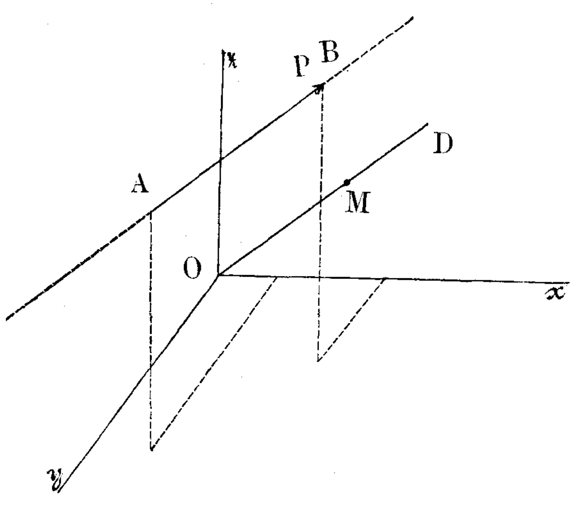
Међу величинама, које имамо у опште да посматрамо у Меканици и у Физици, једне су чисто *бројне величине*, као што су: трајање једног појава, површина једног геометријског облика, запремина, маса или густина једнога тела. Друге пак величине одређене су потпунце, тек када се одреди један правац у коме величина мора бити рачуната; такве су, нпр., величине: *брзине, убрзања, ротације* и *силе*, које су различне од оних величина што се у Геометрији представљају; то нису дужине, али се и оне могу представљати овима, тј. *потезима*. Количине, које су одређене у исто доба и по бројној величини и по правцу, могу бити означене под именом *геометријских величина*. Њих представљају једном правом истога правца а сразмерне дужине.

Једним потегом може се представити свака величина, било меканичка, било физичка, представљајући у исто време и једну количину и један правац.

26. О потегу. — Први од ових претходних геометријских појмова, којима хоћемо да се упознамо, јесте *појам о потегу.*

1. Потег *(radius vector)* и одредба његова. — *Потег је један сегменат (одсечак, део) праве* AB (сл. 1). Сваки сегменат праве AB може бити пређен једним покретним телом померајући се од тачке A ка B, или од тачке B ка A; кад се једно покретно тело крене из тачке A да дође у тачку B, тада се тачка A зове *почетак* а B *сврщетак* или *крај* сегмента; тачке A и B зову се још и *крајним тачкама* сегмента.

Да би се подсетило, које је почетак, а које свршетак једног сегмента, *усвојено је* да се сваки сегменат означава двама писменима, стављајући на прво место оно писмо, које је у почетку; тако, нпр., сегменат AB јесте један сегменат, који има за почетак тачку A, а за свршетак тачку



сл. 1

B; међу тим, мењајући почетак и свршетак сегменту AB, добићемо сегменат BA, који има за почетак B а за свршетак тачку A и који ћемо звати: *сегменат супротнога смисла* или *противположени сегменат*. Према томе, симболи BA и — AB имају исти значај; они представљају један сегменат, чиј је почетак B а свршетак A. Напоменимо још и то, да ћемо, понекад, означавати један сегменат и са једним јединим писменом P на пример, представљајући његову *дужину* или *величину*, и постављено на свршетку; овај последњи начин означавања обично се употребљује код означавања силâ.

Овај сегменат AB (сл. 1) одређен је са *четири* елемента, тј. одређен је кад знамо: 1° његов *почетак* или *нападну тачку* A; 2° његов *правац*, а то је правац бесконачне праве AB; 3^e његов *смисао*, а то је смисао кретања једног покретног тела, идући од почетка A ка свршетку B, и који се смисао обично, а нарочито код силâ, означава једном стрелицом која је постављена на свршетку; и 4° његову *величину* P, а то је дужина AB.

Приметимо, одмах, да многи писци *погрешно* тврде, да је један сегменат одређен са *три* елемента: његовим почетком, правцем и величином; или, кад су дати његов почетак и свршетак. — Они, тада, не воде рачуна о смислу сегмента!

Таква дужина сегмента AB, која се протеже у датом правцу и у одређеном смислу, зове се још *геометријска дуж* или *дужина*, а обичније *геометријска величина*.

Она бесконачна права, на коју је положен сегменат AB, зове се његова *акциона линија* (*sa ligne d' action*[1]).

Кад је један правац AB однесен на триједар координатних оса *Oxyz*, да бисмо аналитички одредили тај правац, повући ћемо кроз координатни почетак полу-праву[2] OD

[1] *J. Tannery*, Deux leçons de Cinématique, p. 4, 1886, Paris.

[2] Израз *полу-права (demi-droite)* употребљен је да означи једну праву, бесконачну у једном смислу, а ограничену с другога краја једном тачком. Једна полу-права одређује један правац.

паралелно правцу AB и узећемо једну ма коју тачку M на тој полу-правој; тада је правац AB исти као и правац сегмента OM. Дакле, ако су a, b, c координате тачке M, у односу на тријеdар координатних оса $Oxyz$, правац AB потпунце је одређен овим системом трију количина.

2. Оса. — На једној истој правој могу се замислити два супротна смисла, градећи међу собом угао од 180 степени, јер, као што смо већ рекли, једна права може бити пређена неком тачком у два супротна смисла; она права, на којој је био изабрат један смисао кретања (прелажења), зове се *оса*.

Почевши од једне тачке на једној правој можемо посматрати две различне стране; тако ћемо добити појам *о супротним правцима* праве у овој тачци.

3. Аналитичка одредба сегмента. Један сегменат AB одређен је аналитички са координатама x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 почетка и свршетка сегментовог у односу на три координатне осе; или, још, са координатама x_1, y_1, z_1 почетка и пројекцијама X, У, Z сегмента AB на три осе, ове пројекције имајући знаке, према обичним конвенцијама аналитичке Геометрије. Приметимо, у овом последњем случају, да координате x_1, y_1, z_1 одређују само почетак, а пројекције X, У, Z одређују величину и правац сегмента. Очевидно, ове су пројекције сегментове

$$X = x_2 - x_1, \quad У = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

4. Мерење сегмената. — Суперпозиција (полагање једно на друго) двају сегмената општа је метода да се уверимо о њиховој једнакости и, у опште, о једнакости геометријских величина. Према томе, за две геометријске величине, ма које врсте биле оне, казаће се да су *једнаке*, када се може пренети једна од двеју, не мењајући ничега у њој, тако да се она подудари (поклопи) потпунце са другом. Тај би пренос произвео тешкоћâ па чак и немогућности у случају чврстих тела, када се не би чинила

апстракција о њиховим материјалним својствима, а посебице о непробојности. Ми ћемо посматрати само облике телâ, површинâ и линијâ; и ове идеалне слике не могу чинити никакву препреку продирању.

Кад се нека количина састоји из једне количине, која је једнака са неком другом, и још из једног ма каквог остатка, онда се каже да је она *већа* од друге; за другу се количину каже да је *мања* од прве и зове се и *део* прве. Једна величина, у односу на делове из којих је она образована, зове се *цело*; њу зовемо *сумом* разних величина које је сачињавају.

На тај начин, према смислу који везујемо за речи *цело, део, веће, мање*, види се да је *цело веће од једнога свога дела*, или *део је мањи од целога*.

Нека је дат један сегменат АВ, од дужине l, чиј је почетак А а свршетак В, и претпоставимо да је овај сегменат однесен на једну осу $\varDelta$; узмимо да овоме сегменту одговара један *алгебарски* број λ, који је једнак са $+ l$, ако сегменат има смисао осе, а са $- l$, ако сегменат има супротан смисао.

Алгебарска количина λ, по Ossian Bonnet-у[1], зове се *број који мери дати сегменат (потег)*, који је назив J. Tannery понова био узео у својим лекцијама из Кинематике, или се, још обичније, зове *алгебарска вредност сегмента*.

Приметимо да се за дуго времена гледале тешкоће у доказу *теореме о пројекцијама*, о којој ћемо мало ниже говорити. Међу тим, ове тешкоће не постоје, ако се употреби тако прост појам, који је Bonnet увео у науку.

Кад су више сегмената паралелни једној истој правој, потребно је означити њихове дужине са знаком $+$ или са знаком $-$, према томе да ли су управљени у условљеном смислу или у смислу супротном. Дужина свакога сегмента, пред којом стоји знак $+$ или $-$, представљаће алгебарску вредност дотичнога сегмента. У осталом, ми

---

[1]) *O. Bonnet*, Mécanique élémentaire, chez Mallet-Bachelier, 1858.

ћемо звати *позитиван правац* сегмената, правац оних сегмената, чије су дужине означене са знаком $+$.

5. **Еквиполентни сегменти.** — За два сегмента AB и A_1B_1 казаћемо, кратко, да су *еквиполентни*[1], ако су њихове акционе линије паралелне, ако они имају исти смисао и, на послетку, ако су једнаки; и то, ма какав био њихов положај у простору, тако да се за почетак једног сегмента може узети ма која тачка; при свем том, у многим питањима, корисно је утврдити овај почетак, и ми ћемо то увек и чинити, кад будемо нашли за угодно.

Кад хоћемо да представимо, да су два сегмента AB и A_1B_1 еквиполентни, ми ћемо то, са J. Massau-ом, изразити геометријском једначином

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}.$$

Ако ли сегменти AB и A_1B_1 имају само исту величину, без да имају исти правац и смисао, ми ћемо то представити једначином

$$AB = A_1B_1.$$

Означавајући са n један положан или одречан број, ми ћемо са nAB представити један ма који од сегмената, који су еквиполентни сегменту AB′, имајући исту акциону линију коју и сегменат AB, исти смисао или смисао супротан, према томе да ли је број n положан или одречан, најзад такав да однос између дужинâ AB′ и AB буде раван апсолутној вредности броја n.

Ако је акциона линија једног сегмента паралелна једној правој OX, на којој је изабрат један позитиван *правац*, ако је поред тога изабрата једна јединица дужине, онда се овај сегменат и сви еквиполентни сегменти могу представити једним *бројем*, чија ће апсолутна вредност бити мера дужине посматраног сегмента, и са знаком $+$ или $-$, према томе да ли смисао овога сегмента јесте

[1]) *J. Tannery*, op. cit., p. 4.

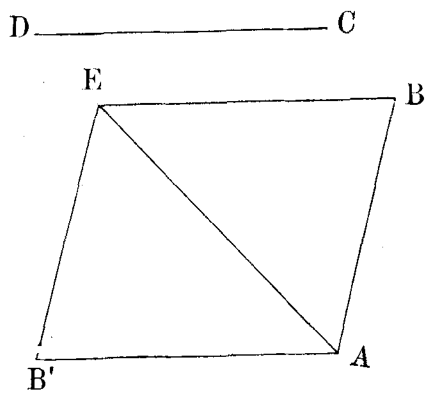
или није смисао позитивног правца. Ако је a број који, на тај начин, представља посматрани сегменат и ако је PQ један сегменат чија је акциона линија OX, чиј је смисао онај позитивног правца који је изабрат на OX, најзад који је раван јединици дужине, сегменти представљени према овим конвенцијама бројем a и симболом aPQ јесу еквиполентни. Број a представља на тај начин јединице једне особене врсте, које се не могу сводити са јединицама неке друге врсте. Ако a означава један ма какав број, положан или одречан, онда, говорећи о једном сегменту да је раван a однесен на један одређени правац или паралелно овоме правцу, треба разумети да је реч о једном сегменту AB који је, према претходним конвенцијама и узимајући посматрани правац као позитиван правац, представљен или *мерен* бројем a. Обратно, кад нема никакве двосмислености, може се означити са AB не са̂м сегменат, него положан или одречан број који га мери.

Један сегменат, чиј се почетак поклапа са свршетком назват је *нула;* његов правац није одређен; њега представљамо бројем нула.

27. Слагање и разлагање потега̂. — Слагање датих потега (геометријских величина) зове се операција, која се састоји у томе да се нађе *потег резултанта („резултујући“ потег)*, који се, простије, *резултантом* зове, или се, најобичније, зове *геометријском сумом* датога система потега̂; дати потези зову се *компонентни потези*, или, простије, *компонентама.* Разлагање, пак, једног датог потега на више других зове се операција, која се састоји у томе да се нађе један систем потега̂, који имају (дају) дати потег за потег резултанту. — Проучимо, најпре, слагање двају потега.

a). Слагање двају потега. — 1. Проблем: *Дата су два потега* AB *и* CD (сл. 2), *наћи њихову геометријску суму.*

Из крајне тачке B, потега AB, повуцимо сегменат BE еквиполентан потегу CD; за тим, саставимо почетак A првога потега са тачком E. Пра̀ва AE јесте *геометријска сума* двају датих потега AB и CD, што се, *символички*,



сл. 2

представља једначином

$$(AE) = (AB) + (CD),$$

или се, по некима, опет символички, представља једначином

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CD};$$

где заграде и цртице хоће да покажу да је реч о једној геометријској суми.

Напоменимо, са свим узгредно, да се изрази на десној страни претходних једначина зову *геометријски биноми*. Сваки члан за себе зове се *геометријски моном*.

Права AE још је и дијагонала паралелограма конструисаног на двама датим потезима AB и CD, и због тога је понекад зову *потег резултанта*, а чешће *резултантом* двају потега AB и CD, аналогно резултанти двеју сила. У том случају, потези AB и CD јесу *компонентни потези*, или, простије, *компоненте* резултанте AE.

Та дијагонала дели паралелограм на два троугла, чије стране представљају два дата потега и њихову резултанту, и чији су угли они угли које граде међу собом правци ових трију потега. Отуда следује да се разни проблеми, који се могу претпоставити о величинама и о правцима двају потега и о њиховој резултанти, своде непосредно на конструкцију и на израчунавање једнога троугла.

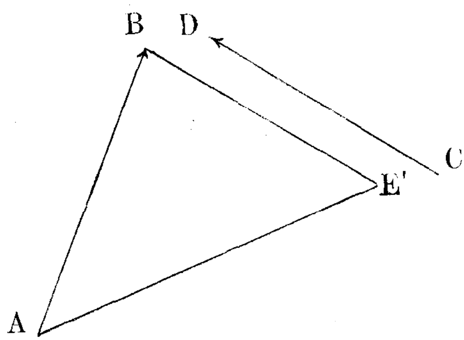
Приметимо, најзад, да смо до исте тачке E могли доћи, било по контуру ABE, било по контуру AB'E. То значи, ми можемо, десно, испремештати два члана геометријске суме, и, према томе, имаћемо

$$(AE) = (AB) + (CD) = (CD) + (AB).$$

Отуда изводимо став: *Резултанта двају потега независна је од реда слагања.*

2. Проблем: *Дата су два потега* AB *и* CD, *наћи њихову геометријску разлику.*

Узмимо опет два потега AB и CD; ако се из тачке B повуче права BE' (сл. 3) једнака и паралелна са CD, али супротнога смисла, и ако се састави A са E', онда



сл. 3

се дужина AE' назива *геометријском разликом* двају потега AB и CD, или се још зове и *геометријским вишком* потега AB над потегом CD, што се, симболички, представља једначином

$$(1) \qquad (AE') = (AB) - (CD).$$

Тако исто имамо и ову једначину

$$(2) \qquad (AE') = (AB) + (BE') = (AB) + (DC).$$

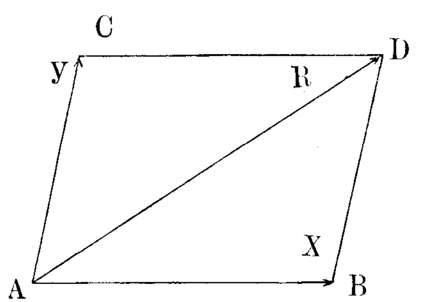
Ако, сада, сравнимо једначине под (1) и (2), увидићемо лако да се дуж CD мора сматрати да је једнака а супротнога знака са дужи DC, тј. имаћемо

$$(3) \qquad (CD) = -(DC).$$

3. **Примена.** — Као примену претходнога излагања, о слагању двају потега, решимо ова два проблема.

1°. **Проблем**: *Дата су два потега, који имају исти почетак, и угао који они граде међу собом; израчунати њихову геометријску суму.*

Кад имамо да сложимо два потега, који имају исти почетак, онда резултанта и две компоненте образују један троугао, или, још боље, резултанта је дијагонала паралелограма конструисаног на двема датим компонентама, однесене са њиховим правцима и смислом почевши од једне исте тачке, од почетка A.



сл. 4

И овде вреди став: *Резултанта је независна од реда слагања.*

Означимо резултанту AD са R, а дате компоненте AB са X, а AC са У (сл. 4). Ма какав био дати угао $BAC = (X,У) = \Theta$, двеју компонената, ми ћемо, на основу познатих теорема из Тригонометрије, увек имати из троугла ABD:

$$R^2 = X^2 + У^2 + 2XУ\cos\Theta.$$

Исти троугао даје:

$$\frac{X}{\sin(R,У)} = \frac{У}{\sin(R,X)} = \frac{R}{\sin(X,У)}.$$

Помоћу горњих образаца можемо одредити резултанту R и угле (R X) и (R,У), кад се знају компоненте X, У и угао (X,У), тј. угао који граде међу собом дати потези.

Као *особени случајеви* овога проблема јесу ови:

I. У случају управности датих потега X и У, треба ставити $\Theta = 90^0$, откуда следује:

$$X = R\cos(R,X),\ У = R\cos(R,У) = R\sin(R, X);$$

$$R = \sqrt{X^2 + У^2}.$$

Резултанта R мора се узети у апсолутној вредности; компоненте X, У имају, наизменце, знаке косинусâ који улазе у њихове вредности.

II. Ако је X = У, паралелограм постаје ромбом, и ми ћемо имати

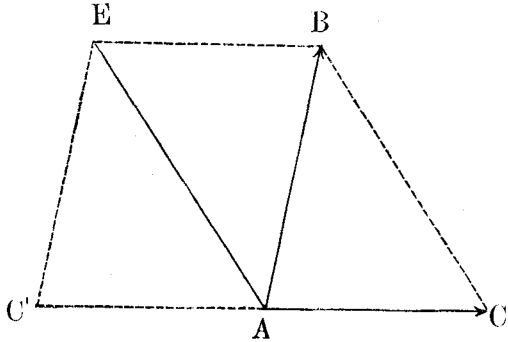
$$R = 2X\cos\frac{1}{2}\Theta.$$

III. У случају, кад је угао Θ раван нули или π, имаћемо

$$R = X + У.$$

2°. Проблем: *Дата су два потега, који имају исти почетак, израчунати њихову геометријску разлику.*

Ако бисмо имали да нађемо геометријску разлику двају датих потега AB и AC (сл. 5), коју ћемо разлику представити са (AB)—(AC), тј. ако бисмо имали да нађемо ону геометријску величину, која додана геометријски ка потегу AC даје управо потег AB, онда, да бисмо добили ту геометријску величину, треба продужити потег AC од почетка A за дуж AC′, која је дуж једнака са потегом AC а супротивнога смисла, и конструисати паралелограм на геометријским величинама AB и AC'. Ја кажем да је AE тра-



сл. 5

жена геометријска разлика двају датих потега AB и AC, што ћемо, симболички, представити једначинама:

$$(AE) = (AB) + (AC')$$

$$(AE) = (AB) - (AC).$$

Приметимо да се последња једначина може написати овако:

$$(AB) = (AC) + (AE);$$

према томе, геометријско одузимање може се сматрати као обрнута радња геометријског сабирања, јер разлика AE јесте онај потег који треба додати потегу AC те да се добије потег AB.

б). Разлагање једног потега на два друга. — Ми смо видели, да је знање компонената AB и AC еквивалентно знању резултанте AD. *Обратно*, кад је дат један потег AD, може се захтевати да га разложимо на друге потеге, који би имали тачку A за почетак, тј. може се захтевати да нађемо потеге, који сложени уједно дају за геометријску суму дати потег AD.

Проблем: *Разложити један потег на две компоненте; дати су правци двеју компонената.*

Кад је, нпр., дат потег AD (сл. 4), можемо га увек, помоћу једног паралелограма, разложити на два друга потега, који су управљени у двама датим правцима AB и AC, чија раван садржи AD. Довољно ће бити за то конструисати паралелограм, чија ће дијагонала бити AD, а чије су стране дате по правцу; или, још, конструисати троугао ABD познавајући једну страну и два угла. То је проблем: *О разлагању једног потега на два друга, који су положени у истој равни у којој је и дати потег.*

Исто тако, можемо сваки од потегâ AB и AC разложити на два друга, и тако редом, докле се хоће.

Као *особени случај,* кад су два дата правца управна, ми ћемо имати, означивши са R дати потег, а са X и У две компоненте, и са α угао датог потега R са компонентом X:

$$X = R\cos\alpha,$$

$$У = R\sin\alpha.$$

Као *пример за вежбање*: *Разложити један потег на две компоненте; дата је једна од компонената по величини и по правцу.*

Примедба. — Сваком проблему о конструкцији троугла ABD, познавајући страну AD, одговара један проблем о разлагању потега AD на два друга.

в). Слагање трију потега. — 1. Проблем: *Наћи геометријску суму трију потега, који имају исти почетак.*

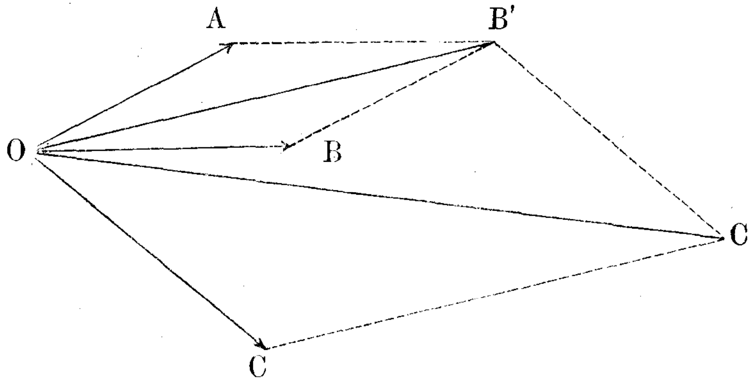
Код овога проблема имамо да разликујемо два случаја.

1°. Случај: *Кад су три дата потега* OA, OB *и* OC (сл. 6) *у једној истој равни.*

Геометријска сума потегâ OA и OB, према напред изложеном, јесте потег OB′, дакле, дијагонала паралелограма конструисаног на OA и OB; и ми имамо

$$(OB') = (OA) + (OB).$$

За тим, повуцимо из B' сегменат B'C' еквиполентан са потегом OC; саставимо O са C', па је OC' тражена гео-



сл. 6

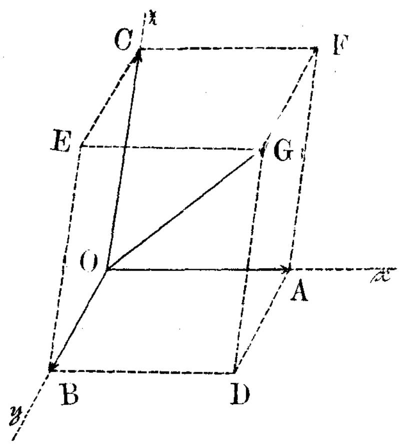
метријска сума трију датих потега OA, OB и OC; јер ћемо имати

$$(OC') = (OB') + (OC) = (OA) + (OB) + (OC).$$

Израз на десној страни последње једначине, састављен из три члана, зове се *геометријски трином*. Сличан израз, са више од три члана, зваће се *геометријски полином*.

2°. Случај: *Кад три дата потега, која имамо да сложимо, нису положени у једној истој равни, нити су паралелни једној истој равни.*

У том случају можемо, прво, извршити њихово слагање конструишући полигон OADG (сл. 7) помоћу правих однесене крај до краја, које су праве повучене еквиполентно са датим потезима, као што ћемо то видети код општег случаја. Тако ћемо добити геометријску суму OG. — До истог резултата долазимо и на овај други начин. Пренесу се три компоненте почевши од исте тачке O, тако добијамо OA, OB и OC; за тим се повуку три равни кроз ове праве узете две и две и три паралелне равни кроз крајне тачке A, B и C; тако добијамо паралелопипед OADBCFGE, чија ће дијагонала представљати по величини и по правцу тражену геометријску суму. Тај доказани факат исказујемо овим ставом: *Дијагонала једног паралелопипеда, констру-*



сл. 7

исаног на трима датим потезима, представља по величини и по правцу геометријску суму (резултанту) ових трију потега.

Можемо још приметити да су OA, OB и OC, наизменце, пројекције од OG на трима координатним осама Ox, Oy, Oz; пројекција на свакој оси учињена је паралелно равни двеју других. Дакле, сваки потег OG, чије су пројекције OA, OB и OC на трима координатним осама, може очевидно бити сматран као резултанта трију потега OA, OB, OC од истога почетка као и први; због тога се OA, OB, OC зову компонетни потези посматраног потега правцем осâ.

Као *особени случај*, претпоставимо да су координатне осе правоугле, паралелопипед је прав; и означимо са X, У, Z дужине компонената, узете са знаком $+$ или $-$, према томе да ли имају смисао позитивних координата или смисао супротан; даље, означимо са R дужину резултанте, која је узета у апсолутној вредности; означимо са α, β, γ угле једне линије, која има правац и смисао резултанте, са позитивним деловима координатних оса. Између ових количина имаћемо релације, које се лако изводе:

$$X = R\cos\alpha, \quad У = R\cos\beta, \quad Z = R\cos\gamma,$$

$$R = \sqrt{X^2 + У^2 + Z^2}.$$

И овде, резултанта R мора се узети у апсолутној вредности; дате компоненте X, У, Z имају, наизменце, знаке од $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$.

Најзад, ми ћемо доказати став: *Резултанта трију потега независна је од реда слагања тих потега.* За то треба доказати да је свршетак резултанте исти, па ма који били два потега са којима се слагање почине. Ако се слагање почне двама потезима OA и OB, свршетак резултанте јесте тачка G, а то је свршетак потега који је еквиполентан са потегом OC и чиј је почетак тачка D, четврто теме паралелограма конструисаног на OA и OB. Но, нека је E четврто теме паралелограма конструисаног на OB и OC; пошто су два потега BE и DG једнаки са OC, једнаки су и међу собом, отуда фигура DBEG јесте један паралелограм; отуда, опет, следује да је потег EG једнак са потегом BD а према томе и са потегом OA; дакле, ако се слагање почне са потезима OB и OC, налази се и онда исти свршетак за резултанту, — што доказује горњи став за три потега.

2. Проблем: *Наћи геометријску суму трију датих потега, који немају исти почетак.*

Ми смо видели како се ради кад имамо два потега; лако се може решити проблем кад су три потега. У осталом, мало доцније, видићемо општи случај, кад имамо више, нпр. n, потега да сложимо, од којега ће овај проблем бити специјални случај.

г). Разлагање једног потега на три друга. — Општи проблем о разлагању једног потега на три друга био би овај: *Разложити један потег на три компоненте; дати су правци трију компонената.*

Ми ћемо, овде, као специјални случај овога општега проблема решити овај проблем.

Проблем: *Разложити један потег, дат по величини и по правцу, на три друга са истим почетком познавајући њихове правце, који нису положени у једној истој равни.*

Нека је OG дати потег; нека су Ox, Oy, Oz дати правци трију тражених компонената (сл. 7). Проблем, очевидно, излази на то да се конструише један паралелопипед, коме ће дати потег OG бити дијагонала и чије су ивице дате по правцу. Конструишући контур OADG добићемо у OA, AD и DG дужине компонентних потега.

Посебице, ако су три дата правца управна међу собом, ми ћемо имати, означавајући са R дати потег, са X, У, Z његове компоненте правцем трију датих праваца, и са α, β, γ угле, које гради R са овим правцима:

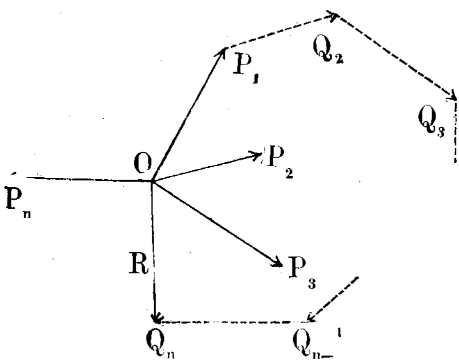
$$X = R\cos\alpha, \quad У = R\cos\beta, \quad Z = R\cos\gamma.$$

Ови нам обрасци показују да су три тражене компоненте пројекције од R на трима датим правцима.

д). Геометријска сума од више потега. — Имајући појма о геометријској суми двају и трију потега, ми ћемо показати начин, како се добија геометријска сума од четири, пет и више, нпр. n, потега. Опште правило о слагању више потега своди се на то: да се *сложи* први потег са другим, добивени потег са трећим и тако редом до последњега; очевидно, дате потеге можемо уредити како год хоћемо. — Решимо неколико проблема.

1. Проблем: *Наћи геометријску суму од n датих потега: P_1, P_2, P_3, . . ., P_n, који имају исти почетак* O, *и још су у једној истој равни.*

Из тачке P_1 повуцимо сегменат P_1Q_2 еквиполентан са другим потегом P_2; из крајне тачке Q_2 повуцимо сегменат Q_2Q_3 еквиполентан са трећим потегом P_3; и тако редом; најзад, из тачке Q_{n-1}, повуцимо један сегменат $Q_{n-1}Q_n$ еквиполентан са n-тим потегом P_n. На тај начин конструисани полигон $OP_1Q_2Q_3 \ldots Q_{n-1}Q_n$ (сл. 8) зове се *полигон геометријских величина* или *полигон потегâ;* геометријска величина OQ_n, имајући за почетак O а за свршетак Q_n, која затвара полигон, јесте *геометријска сума* или *резултанта* R од n датих потега: P_1, P_2, P_3, . . ., P_n, који су *компонентним потезима* или, простије, *компонентама* названи. Резултанта R потпунце је одређена; јер је



сл. 8

одређена по месту, по величини, правцу и смислу. Тај се факат изражава симболичком једначином:

$$(R) = (P_1) + (P_2) + (P_3) + \ldots + (P_n),$$

или, по некима, овом симболичком једначином:

$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \ldots + \overline{P}_n.$$

Учинимо ове две напомене. *Прво,* ако саставимо тачку O са Q_2, Q_3, . . . , Q_{n-1}, Q_n, то ће дуж OQ_2 бити резултанта двају потега P_1 и P_2; дуж OQ_3 биће резултанта двају потега OQ_2 и P_3, односно трију потега P_1, P_2 и P_3;

и тако редом, дуж OQ_{n-1} биће резултанта *n — 1* потега P_1, P_2, P_3, . . . , P_{n-1}; најзад, дуж OQ_n биће резултанта R задатих потега. — *Друго,* при конструкцији резултанте R, ми смо узели компоненте P_1, P_2, P_3, . . . , P_n у извесном реду. Очевидно је, да се могу, без промене резултанте, испремештати две узастопне геометријске величине у једној геометријској суми: *Резултанта је увек иста, ма какав био ред слагања.* То потиче непосредно из аналитичке одредбе резултанте.

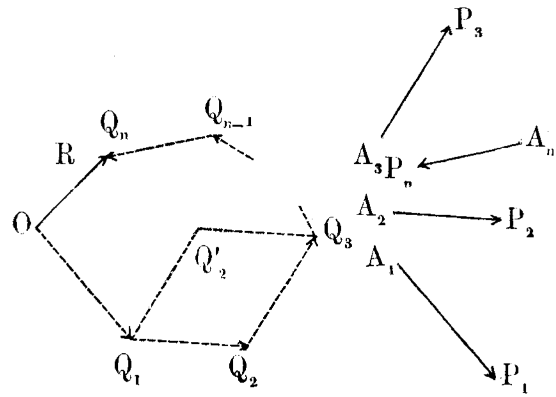
2. Проблем: *Наћи геометријску суму од n датих потега* P_1, P_2, . . . , P_n, *који имају заједнички почетак, а нису сви у једној истој равни.*

У овом случају, дате потеге треба слагати по принципу о слагању трију потега, који нису у једној истој равни, — дакле, треба их слагати по принципу паралелопипеда. У осталом, овај проблем може се узети као специјални случај најопштијега проблема о слагању потегâ, који је на реду.

3. Проблем: *Дат је у простору извесан број ма каквих потега* P_1, P_2, P_3,..., P_n, *одређени по величини, правцу и смислу, имајући тачке* A_1, A_2, A_3, ..., A_n *за своје почетке; наћи њихову геометријску суму.*

Изберимо једну произвољну тачку O простора; повуцимо сегменат OQ_1 еквиполентан потегу P_1; за тим, почевши од тачке Q_1, повуцимо сегменат Q_1Q_2 еквиполентан потегу P_2; и тако редом, док се дође до повлачења сегмента $Q_{n-1}Q_n$, који је еквиполентан потегу P_n. Смисао сваког сегмента означен је стрелицом (сл. 9). Сегменат OQ_n, који саставља почетак O са крајем Q_n, крајем на тај начин конструисаног полигона, представља тражену геометријску суму или резултанту датих потега P_1, P_2, P_3,..., P_n; смисао резултанте јесте од O ка Q_n. Дати потези P_1, P_2, P_3, . . . , P_n, пак, названи су *компонентним потезима* или *компонентама* резултанте OQ_n. Дакле, сегменат што затвара полигон OQ_1Q_2 . . . Q_n јесте Q_nO, а резултанта је OQ_n;

према томе, резултанта је једнака а супротнога смисла ономе сегменту што затвара полигон. У овом случају, ре-



сл. 9

зултанта је одређена по величини, правцу и смислу; али, пошто је тачка O произвољна, то она није одређена и по месту.

Кад бисмо из тачке O повукли сегменте еквиполентне са датим потезима, па овим сегментима одредили резултанту, очевидно је, да би смо добили ову исту резултанту OQ_n. Очевидно је и то, мењајући положај тачке O у простору, резултанта OQ_n остаје иста по величини и правцу, према самом начину на који је она одређена.

Правило о слагању потегâ не показује и ред, којим треба извршити ово слагање. Ми можемо испремештати два узастопна од датих потега, без да се крајна тачка Q_n полигона, то ће рећи без да се резултанта OQ_n промени. Ако, нпр., ставимо потег P_3 пре P_2, та ће смена имати за једину последицу то: да се у полигону узму две стране $Q_1Q'_2$ и Q'_2Q_3 на место странâ Q_2Q_3 и Q_1Q_2, које су им, наизменце, еквиполентне. Отуда следује, одмах, да се може постепено учинити да један ма који од датих потега P_1, P_2, P_3, . . . , P_n дође у такав ранг, какав се хоће, и, према томе, могу се учинити све могућне пермутације, без да се резултанта OQ_n промени. Откуда потиче општи став: *Резултанта је независна од реда слагања*.

Овај општи став можемо доказати и на овај начин, усвојити га за $n-1$ потег и доказати га за n. Нека је $P_1, P_2, \ldots, P_n$ један систем од n потега; очевидно: довољно је доказати да је њихова резултанта иста, па ма којим се потегом свршавало слагање.

Претпоставимо, дакле, да се слагање свршава најпре са потегом P_n, а за тим са P_{n-1}; у првом случају, тражи се прво резултанта система $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, и како је, према хипотези, ред слагања произвољан, може се конструисати најпре резултанта R_{n-3} од $n-2$ потега: P_1, $P_2, \ldots, P_{n-2}$, по том резултанта R_{n-2} од R_{n-3} и P_{n-1}, и најзад резултанта R од R_{n-2} и P_n. Резонујући тако исто у другом случају, очевидно, бићемо наведени да сложимо R_{n-3} са P_n, по том добивену резултанту сложити са P_{n-1}. У оба случаја, види се да је резултанта иста, као што је и она система трију потега R_{n-3}, P_{n-1} и P_n, — што доказује горњи став.

Најзад, напоменимо и овде: ако саставимо тачку O са тачкама $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$, то ће дуж OQ_2 бити резултанта R_1 двају потега P_1 и P_2; дуж OQ_3 биће резултанта R_2 трију потега P_1, P_2 и P_3; и тако редом; најзад, дуж OQ_n биће резултанта R задатих потега, што се симболички представља једначином

$$(R) = (P_1) + (P_2) + \ldots + (P_n);$$

која је једначина са свим различна од ове алгебарске једначине, која даје периметар p полигоналног контура:

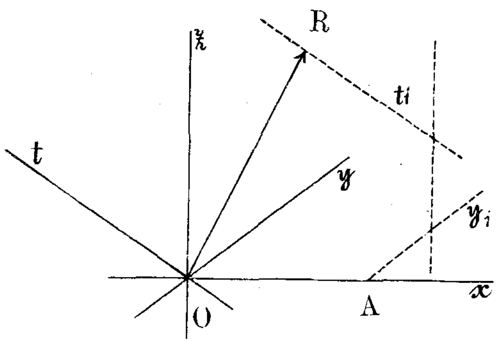
$$p = P_1 + P_2 + \ldots + P_n.$$

Примедба. — Кад се тачка Q_n поклопи са почетком O, онда се каже да потези OQ_1, $Q_1Q_2, \ldots, Q_{n-1}Q_n$ образују један *затворени систем.* Ако ли ови потези образују један полигон, овај је *полигон затворен.* И ми можемо исказати ове две теореме:

Теорема I. — *Ако се полигон потегâ затвара сâм собом, резултанта свију потега равна је нули.*

Теорема II. — *У сваком затвореном систему, један ма који потег јесте противположен резултанти свију осталих.*

е). Разлагање једног потега на више других. — У опште, разлагање једног датог потега на више других, чији су правци дати, јесте једна неодређена операција. Узмимо, нпр., да разложимо потег OR (сл. 10) на четири друга по-



сл. 10

тега имајући дате правце Ox, Oy, Oz и Ot. Нека је права Rt_1 паралелна са Ot повучена кроз тачку R; узмимо на Ox једну ма коју тачку A и повуцимо кроз ту тачку праву Ay_1 паралелно са Oy; да бисмо довршили полигон потега, требаће повући једну паралелну са Oz која би се ослањала на Ay_1 и на Rt_1 и, на тај начин, имаћемо прво решење проблема, или чак имаћемо и бесконачно много решења, ако су праве Ay_1 и Rt_1 у истој равни која је паралелна са Oz; у сваком случају, померајући тачку A по Ox, добићемо толико решења, колико год хоћемо.

ж). Кратки извод. — Из свега, што смо до сада казали о геометријској суми двају или више потега и о начинима слагања потегâ, можемо извести овај *кратки извод:*

Теорема I. — *Геометријска сума од n потега* P_1, P_2, . . . , P_n, *који имају или немају заједнички почетак, јесте један потег конструисан на овај начин: кроз једну произвољну тачку* O *простора треба повући сегменте наизменце еквиполентне са* P_1, P_2, . . . , P_n, *и овим сегментима одредити резултанту* R. *Ова резултанта* R *одређена је у простору само по величини, правцу и смислу; а пошто је њен почетак* O *произвољна тачка, то она није и по месту одређена.*

Теорема II. — *Геометријска сума не мења се, ако се промени ред потегâ при конструкцији полигона потегâ.*

Теорема III. — *Геометријска сума не мења се, ако се два или више потега замену њиховом нађеном геометријском сумом.*

У место да геометријски додамо једном потегу геометријску суму од више потега, ми му можемо постепено додавати ове различне потеге.

Напоменимо да претходне дефиниције и теореме не претпостављају на никоји начин да потези образују *прави* полигон у простору, и да све вреди и онда, кад сви дати потези имају један исти правац; тачке O, Q_1, Q_2, . . ., Q_n (сл. 9) биле би на правој линији.

Примедба. — Ми смо, до сада, при слагању известног броја потега, добивали једну геометријску величину, коју смо *геометријском сумом* звали. Ово се име оправдава са више аналогија, које постоје између *алгебарског сабирања* и оне операције, која се састоји у томе да се преносе линије крај до краја, задржавајући им њихов правац и њихов смисао, тј. *геометријског сабирања.* — *Прво*, нема никакве разлике између алгебарског и геометријског сабирања, када сви потези имају један исти правац; тада се геометријска сума подудара са алгебарском сумом, отуда и име *геометријској суми.* - *Друго,* могу се да́ти потези слагати по групама, у које долази један извесан број потега, и за тим тражити резултанта парцијелних резултаната; очевидно, то не мења ништа у тоталној пројекцији потега̂ на једну ма коју осу, а према томе не мења ни резултанту, као год што се и једна алгебарска сума не мења групишући њене чланове на разне начине. Обрнута операција, која се састоји у томе да се разложе извесни потези на више других потега, повукла би за собом са свим сличну опсервацију. — *Треће*, ако се једној геометријској суми дода један или више њених чланова, узети са супротним знаком, ови се додани чланови поништавају са онима који су већ били у суми, и једни и други ишчезавају из суме; то исто бива и у алгебарској суми. — *Четврто*, једнакост двеју геометријских сума не мења се додајући геометријски свакој од њих једну исту геометријску величину. — *Пето*, претпоставимо да два система потега̂

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n \quad \text{и} \quad p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,$$

имају геометријске суме једнаке; и преведимо тај факат једначином

$$(P_1) + (P_2) + \ldots + (P_n) = (p_1) + (p_2) + \ldots + (p_n),$$

где се заграде мећу за то да нас подсете да се тиче једног геометријског слагања или сумирања. Ако геометријски додамо двема странама горње једначине потег $-(P_1)$, који је једнак са (P_1) али супротног смисла, једначина постаје, на основу двеју претходних примедаба,

$$(P_2) + \ldots + (P_n) = (p_1) + (p_2) + \ldots + (p_n) - (P_1);$$

дакле, ми видимо да се може пренети један члан с једне стране једначине на другу страну, мењајући му његов знак; а тако се ради и код алгебарског сумирања. — *Шесто*, најзад, ако су $P_1, P_2, P_3, \ldots$, ма какви потези, и $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ма какви апстрактни бројеви, то ће симбол

$$(\alpha P_1) + (\beta P_2) + (\gamma P_3) + \ldots.$$

представљати геометријску суму потегâ: αP_1, βP_2, γP_3,..., који су одређени, као што је напред речено. Кад је дата једна геометријска једнакост (или еквиполенција), која изражава да је један извесни потег еквиполентан неком другом потегу или некој геометријској суми од више других, можемо увек пренети све чланове на једну исту страну, и на тај начин написати ту једнакост у облику

$$(1) \qquad (\alpha P_1) + (\beta P_2) + (\gamma P_3) + \ldots = 0;$$

она, тада, изражава да је један извесни полигон, чије су стране еквиполентне потезима αP_1, βP_2, γP_3, . . . , да је тај *полигон затворен*. Кад је, пак, та једначина истинита, то ће бити случај и са једначином

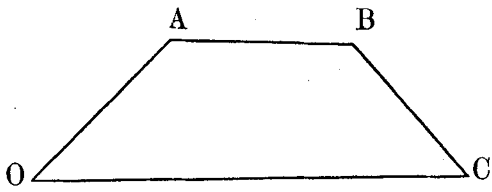
$$(\lambda\alpha P_1) + (\lambda\beta P_2) + (\lambda\gamma P_3) + \ldots = 0,$$

где λ означава један ма какав апстрактни број и где $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$, $\lambda\gamma$, . . . , означавају апстрактне бројеве, положне или одречне, који су добивени множећи, по правилима алгебре, бројеве α, β, γ, . . . , са λ; то следује из посматрања двеју хомотетичких фигура, директно или инверсно, према томе да ли је λ положно или одречно.

Таква једначина, као што је она под (1), има један чисто геометријски смисао; ако су акционе линије потега P_1, P_2, P_3, . . . , све паралелне једној истој правој, на којој је изабрат један позитиван правац, онда ће потези P_1, P_2, P_3, . . . , моћи бити представљени бројевима; замењујући P_1, P_2, P_3, . . . , овим бројевима, извршујући, у алгебарском смислу, множења и сабирања, једначина ће постојати у алгебарском смислу.

Приметимо још и то: да се геометријско сабирање може, у неку руку, сматрати као уопштење аритметичког сабирања. Нека имамо да решимо овај проблем: *Једно покретно тело креће се по једној правој, и првога дана опише 2 миље, другога 4 миље и трећега дана 3 миље; колико је тотално померање?* - *Одговор*: $2 + 4 + 3 = 9$ миља.

У ширем смислу, решимо овај проблем: *Једно покретно тело помера се наизменце ка северу 2 миље, ка северо-истоку 4 миље, и ка истоку 3 миље; колико је тотално померање?* — *Одговор:* Пут описат покретним те-



сл. 11

лом јесте полигон OABC (сл. 11); али учињено померање исто је, као кад би покретно тело ишло правом OC. Дакле, тотално померање јесте OC и оно је дато једначином

$$(OC) = (OA) + (AB) + (BC).$$

28. Геометријски производ двају потега. — 1. Ми ћемо звати *геометријским производом двају потега производ из њихових алгебарских вредности и косинуса једног ма којег од углова, које граде њихови позитивни правци.* Ми ћемо означавати геометријски производ двају потега: P_1 и P_2 са симболом $\mathfrak{G}(P_1 \cdot P_2)$; тј. ми ћемо ставити симболички:

$$\mathfrak{G}(P_1 \cdot P_2) = P_1 \cdot P_2 \cdot \cos(P_1, P_2) = P_1 P_2 \cos(P_1, P_2),$$

означавајући са симболом (P_1, P_2) један ма који од углова, које граде позитивни правци двају потега.

Из дефиниције и израза видимо да је геометријски производ *положан* или *одречан,* према томе да ли је угао (P_1, P_2) оштар или туп угао.

Геометријски производ двају потега: P_1 и P_2 можемо и овако написати:

$$\text{ĝ}(P_1 \cdot P_2) = P_1 \cdot P_2 \cos(P_1, P_2) = P_2 \cdot P_1 \cos(P_1, P_2);$$

откуда следује: *Геометријски производ двају потега зове се алгебарски производ једнога потега са ортогоналном пројекцијом другога потега на правац првога.*

2. На основу дефиниције, геометријски производ двају потега раван је нули у ова два случаја:

1° Кад је један ма који од потега нула;

2° Кад су два потега правоугли; тј. кад је $(P_1, P_2) = 90°$.

3. У специјалном случају, кад су два потега P_1 и P_2 паралелни једној истој правој, тада је геометријски производ

$$\text{ĝ}(P_1 \cdot P_2) = P_1 P_2 \cos 0 = P_1 P_2;$$

то ће рећи: *Геометријски производ двају потега истога правца раван је производу њихових алгебарских вредности.*

Ако су, поред тога, два потега још и једнаки, онда је

$$\text{ĝ}(P_1 \cdot P_1) = P_1^2.$$

4. Правила о множењу потегâ иста су као и правила о алгебарском множењу. Тако, на пример:

1° Геометријски производ не мења се, ма којим редом множили његове чинитеље;

2° Правило о знацима примењиво је;

3° Геометријски производ множи се или се дели неком алгебарском количином, кад му се помножи или подели ма који чинитељ са том количином; итд.

5. На основу напред изложеног о геометријском производу двају потега, можемо доказати две важне теореме.

1° Нека је R геометријска сума потегâ: $P_1, P_2, \ldots, P_n$, што се симболички представља једначином

$$(R) = (P_1) + (P_2) + \ldots + (P_n).$$

Пројектујмо ортогонално потеге $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и њихову геометријску суму R на један дати потег S_1, добићемо

$$R\cos(R, S_1) = P_1 \cos(P_1, S_1) + P_2 \cos(P_2, S_1) + \ldots + P_n \cos(P_n, S_1);$$

и множећи последњу једначину са S_1 добићемо

$$RS_1\cos(R,S_1) = P_1S_1\cos(P_1,S_1) + P_2S_1\cos(P_2,S_1) + \ldots + P_nS_1\cos(P_n,S_1),$$

или, што је исто, ову једначину

$$\text{ħ}(R\cdot S_1) = \text{ħ}(P_1\cdot S_1) + \text{ħ}(P_2\cdot S_1) + \ldots + \text{ħ}(P_n\cdot S_1),$$

из које се може извести:

Теорема I. — *Геометријски производ једне геометријске суме и једног потега раван је алгебарској суми геометријских производа из компонентних потега и овога потега.*

2° Нека је R геометријска сума потегâ: $P_1,P_2,\ldots,P_n$; а S нека је геометријска сума потегâ: $S_1,S_2,\ldots,S_k$. Пројектујмо ортогонално потеге $S_1,S_2,\ldots,S_k$ и њихову геометријску суму S на потег R; примењујући теорему о пројекцијама, имамо

$$S\cos(R,S) = S_1\cos(R,S_1) + S_2\cos(R,S_2) + \ldots + S_k\cos(R,S_k);$$

и, множећи с једне и с друге стране једначине са R, имаћемо

$$\text{ħ}(R\cdot S) = \text{ħ}(R\cdot S_1) + \text{ħ}(R\cdot S_2) + \ldots + \text{ħ}(R\cdot S_k).$$

Али, на основу ове једнакости, имамо тако исто:

$$\text{ħ}(R\cdot S_1) = \text{ħ}(P_1\cdot S_1) + \text{ħ}(P_2\cdot S_1) + \ldots + \text{ħ}(P_n\cdot S_1),$$

$$\text{ħ}(R\cdot S_2) = \text{ħ}(P_1\cdot S_2) + \text{ħ}(P_2\cdot S_2) + \ldots + \text{ħ}(P_n\cdot S_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{ħ}(R\cdot S_k) = \text{ħ}(P_1\cdot S_k) + \text{ħ}(P_2\cdot S_k) + \ldots + \text{ħ}(P_n\cdot S_k);$$

из којих једначина, очевидно, потиче ова:

$$\text{ħ}(R\cdot S) = \Sigma\text{ħ}(P_i\cdot S_j),$$

где се знак Σ простире на све геометријске производе, који се добивају дајући сказаљци i све вредности од 1 до n, а сказаљци j све вредности од 1 до к. Из последње једначине потиче:

Теорема II. — *Геометријски производ двеју геометријских сума раван је алгебарској суми геометријских производа: из компонентних потега једне са сваким од компонентних потега друге геометријске суме.*

3° Као *короларни став* (n° 4) последње теореме биће став о квадрату једног геометријског полинома.

Претпоставимо опет да је R геометријска сума потегâ: $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то је

$$(R) = (P_1) + (P_2) + \ldots + (P_n),$$

где десно имамо један геометријски полином. Ако, по показаном начину, образујемо геометријски производ потега R са самим собом, тј. ако подигнемо R на квадрат, добићемо једначину

$$R^2 = \Sigma P_i^2 + 2\Sigma P_i P_j \cos(P_i, P_j),$$

из које потиче:

Короларни став. — *Квадрат геометријске суме раван је суми квадратâ компонентних потега, увећана са двогубом сумом производâ: из компонентних потега два и два и косинуса угла који они граде.*

4° Најзад, као примену, нађимо *аналитички израз геометријског производа двају потега:* P_1 *и* P_2. За то узмимо три правоугле координатне осе; нека су X_1, $У_1$, Z_1 пројекције потега P_1, а X_2, $У_2$, Z_2 пројекције потега P_2. Имамо

$$(P_1) = (X_1) + (У_1) + (Z_1),$$

$$(P_2) = (X_2) + (У_2) + (Z_2).$$

Ако помножимо ове две једначине међу собом, водећи рачуна да су геометријски производи $\text{ꙋ}(X_2 \cdot У_1)$, $\text{ꙋ}(X_1 \cdot У_2)$, итд., равни нули, и да је $\text{ꙋ}(X_1 \cdot X_2) = X_1 X_2$, $\text{ꙋ}(У_1 \cdot У_2) = У_1 У_2$

и $\text{ћ}(Z_1 \cdot Z_2) = Z_1 Z_2$, добићемо аналитички израз за геометријски производ двају потега P_1 и P_2, дат овом једначином:

$$\text{ћ}(P_1 \cdot P_2) = X_1 X_2 + У_1 У_2 + Z_1 Z_2.$$

29. Теорија пројекцијâ. — И ако смо уверени, да је сваки у довољној мери упознат *теоријом пројекцијâ*[1], којом смо се ми на два-три места већ послужили, ипак држимо да треба овде подсетити, макар то било врло укратко, на елементе из те теорије, обративши нарочиту пажњу на оне елементе, којима ћемо се доцније често и корисно служити. На послетку, ми ћемо показати употребу пројекција у представљању потегâ у простору.

1. Идеја о пројекцији сва је геометријска. Узмимо једну раван π и један правац правих Δ; пројецирати један потег AB на раван π паралелно правој Δ, значи конструисати потег A'B', чији су почетак A' и свршетак B', наизменце, трагови двеју паралелних са Δ на равни π, паралелних које су повучене кроз почетак A и свршетак B потега AB.

Исто тако, може се пројецирати на једну праву Δ паралелно једној равни π. У том случају, пројецирати један потег AB на праву Δ паралелно равни π, значи конструисати потег A'B', који је добивен: узимајући трагове двеју равни на правој Δ, двеју равни које су паралелне са равни π и повучене кроз тачке A и B.

У оба случаја, казаћемо за пројекције да су *ортогоналне*, кад је раван π нормална на праву Δ.

Ако се пројецира ортогонално или косо једна дата геометријска дуж на неку раван или на неку праву, добија се једна друга геометријска дуж чиј је смисао потпунце одређен, ако јој се узме, за почетак, пројекција почетка дате дужи. У геометрији се доказује, кад две дате

[1] *Димитрије Нешић*, Тригонометрија, стр. 229, 1875, Београд.

праве имају исти правац, да и њихове пројекције имају међу собом исти правац и да су сразмерне дужинама датих правих.

То напоменуто, а знајући теорију слагања и разлагања потегâ (n° 27), очевидно, моћи ћемо исказати ове две теореме:

Теорема I. — *Пројекција једног затвореног система на једној равни јесте затворени систем.*

Теорема II. — *Пројекција једног затвореног система на једној правој јесте затворени систем.*

Ове две теореме воде непосредно ка овим ставовима:

Став I. — *Пројекције више потегâ у простору на једној равни имају за геометријску суму пројекцију геометријске суме потегâ у простору на овој равни.*

Став II. — *Пројекције више потегâ у простору на једној правој имају за геометријску суму пројекцију геометријске суме потегâ у простору на овој правој.*

Овај последњи став сачињава оно што ћемо ми звати *теоремом о пројекцијама*, и то је геометријски исказ њен. И заиста, ми смо довде имали да извршимо само геометријске конструкције; уводећи алгебарске количине, ми ћемо доћи до алгебарског исказа теореме о пројекцијама, који ће исказ бити облик под којим је ова теорема најпознатија.

2. Ми ћемо употребити појам о алгебарској вредности једног датог потега, који је на једној одређеној оси.

Посматрајмо једну осу X'X и више потега $P_1, P_2, \ldots, P_n$, који су на тој оси; нека је потег R, тако исто на тој оси, њихова геометријска сума; најзад, означимо са $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и са Λ алгебарске вредности ових потега и њихове геометријске суме. Имаћемо ову *основну* алгебарску формулу

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Најпре се, без муке, поставља ова формула за случај кад имамо само два потега; за тим се поступно долази и поставља за општи случај, кад имамо више потега.

Једном ова формула доказана, теорема о пројекцијама, у свом алгебарском облику, потиче отуда без муке.

И заиста, нека су $P_1, P_2, \ldots, P_n$ дати потези у простору, и R њихова геометријска сума; нека су $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ и R' пројекције ових потега и њихове геометријске суме на једној оси Δ. Према геометријском исказу теореме о пројекцијама, види се да је R' геометријска сума потега: $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$. Дакле, ако се означе са $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n$ алгебарске вредности ових последњих потега на оси Δ, и са Λ' алгебарска вредност њихове геометријске суме R', онда, према претходној формули, имамо:

$$\Lambda' = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \ldots + \lambda'_n,$$

и у томе се састоји алгебарски исказ теореме о пројекцијама, тј. оно што се, у опште, и зове *теоремом о пројекцијама*. Ово је та теорема:

Теорема III. — *Пројекција геометријске суме једног система потегâ на једној правој равна је алгебарској суми пројекцијâ компонентних потега.*

Слично теореми о пројекцијама, можемо исказати:

Теорема IV. — *Пројекција геометријске суме једног система потегâ на једној равни равна је геометријској суми пројекцијâ компонентних потега.*

Доказ ове последње теореме очевидан је; треба само пројецирати полигон потегâ на дату раван.

Најзад, напоменимо да то својство припада само геометријској суми; јер, два потега не могу непрестано имати своје пројекције једнаке, ако нису еквиполентни, тј. ако нису идентички по величини, правцу и смислу.

3. Посматрајмо две осе Δ и Δ_1 на којима су, наизменце, изабрата два позитивна правца; замислимо један

потег A_1B_1 раван јединици дужине, однесен на Δ и који има смисао који и оса Δ; нека је i положан или одречан број који мери пројекцију овога потега на Δ_1, која је пројекција добивена помоћу двеју равни, које су паралелне са једном фиксном равни π и повучене кроз тачке A_1 и B_1, и коју количину i професор *G. Koenigs* назива *пројекционим параметром* осе Δ у односу на осу Δ_1. Нека број a представља алгебарску вредност једног потега AB, који је однесен на осу Δ или паралелно са Δ; нека број a' представља алгебарску вредност пројекције овога потега на оси Δ_1, која је пројекција добивена паралелно са равни π; онда је број a' везан за број a овом релацијом:

$$a' = ai;$$

откуда потиче важан став:

Став III. — *Алгебарска вредност пројекције на Δ_1 једног потега* AB, *који је на Δ, равна је производу из алгебарске вредности потега* AB *на Δ и пројекционог параметра осе Δ у односу на осу Δ_1.*

У случају ортогоналних пројекција, пројекциони параметар осе Δ у односу на Δ_1 јесте један елеменат симетричан у односу на обе осе; тј. то је и пројекциони параметар осе Δ_1 у односу на осу Δ; то је што се зове *косинусом угла* двеју оса. Косинус угла двеју оса има, у ствари, једну потпунце одређену вредност, ма да угао двеју оса има бесконачно много одредаба.

Према овоме, код ортогоналног пројектовања, очевидне су и ове две теореме:

Теорема V. — *Пројекција сваког потега, на ма каквој оси, равна је производу из дужине истог потега и косинуса угла, који он гради са осом.*

Теорема VI. — *Површина пројекције једне равне слике, на ма каквој равни, равна је производу из површине те слике и косинуса угла, који гради раван слике са датом равни.*

4. Узмимо у простору три правоугле координатне осе Ox, Oy, Oz, и посматрајмо један ма какав потег AB у простору; говорећи о пројекцији потега AB на једној од ових оса, подразумева се да је ово пројектовање учињено помоћу равни, које су паралелне двема другим. Један ма какав потег AB јесте геометријска сума његових пројекција на ове три осе; ако су a, b, c три броја представљајући три потега који су однесени, наизменце, на правце Ox, Oy и Oz, геометријска сума ових трију потега јесте један потег еквиполентан потегу чији је почетак тачка O, а свршетак она тачка чије су координате a, b, c; говорећи о правцу, који је одређен трима бројевима a, b, c, подразумева се правац овога последњег потега. Сличне конвенције, на којима није потребно дуже задржавати се, усвојене су у равној Геометрији.

Као *примену* претходнога излагања решимо овај проблем:

Проблем. — *Дато је више потега у простору, наћи аналитички израз геометријске суме тих потега.*

Нека је дато n потегâ: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ у простору; нека су $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ косинуси углова које гради правац свакога потега са трима координатним осама. Означимо са α, β, γ косинусе углова које гради непознати правац геометријске суме са осама, и са R величину те суме. Дајући количинама: α, β, γ повољне знаке, моћи ћемо, на тај начин, учинити да R буде увек положна количина; јер два потега чији су косинуси углова α, β, γ и $-\alpha, -\beta, -\gamma$ јесу паралелни а супротног смисла, и према томе пренети R у једном смислу излази на то пренети $-R$ у супротном смислу. Ми имамо геометријску једначину:

$$(1) \qquad (R) = (P_1) + (P_2) + \ldots + (P_n).$$

Примењујући сада теорему о пројекцијама, наизменце, на три координатне осе, ова геометријска једначина може бити замењена овим трима (геометријским или алгебарским) пројекционим једначинама:

$$
(2)\quad \begin{cases} R\alpha = P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + \ldots + P_n\alpha_n = \Sigma P_i\alpha_i, \\ R\beta = P_1\beta_1 + P_2\beta_2 + \ldots + P_n\beta_n = \Sigma P_i\beta_i, \\ R\gamma = P_1\gamma_1 + P_2\gamma_2 + \ldots + P_n\gamma_n = \Sigma P_i\gamma_i; \end{cases}
$$

где сказаљци i треба давати вредности од 1 до n.

Посматрајући три последње једначине (2), можемо учинити ове три значајне напомене. — *Прво*, претпоставимо да се пројецира на три координатне осе, и да горње три једначине буду задовољене, тј. претпоставимо да је пројекција геометријске дужи R, на једној ма којој оси, равна алгебарској суми пројекција̂ потега̂: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ на тој истој оси, онда је, *обратно*, R геометријска сума потега̂: $P_1, P_2, \ldots, P_n$; укратко, једначине под (2) повлаче за собом првобитну једначину (1). Да би се то увидело, довољно је једначинама под (2) дати геометријско значење и сабрати их геометријски, приметивши да је геометријска сума потега̂ $R\alpha$, $R\beta$ и $R\gamma$ равна потегу R; геометријска сума потега̂ $P_1\alpha_1$, $P_1\beta_1$ и $P_1\gamma_1$ равна је потегу P_1; итд. — *Друго*, ма какав био ред узастопног слагања потега̂, алгебарска сума њихових пројекција на једној ма којој оси потпунце је независна од тога реда; према томе, ма какав ред слагања потега̂ био, добиће се увек једна иста геометријска сума. — *Треће*, најзад, посматрајући једначине под (2), лако се може увидети: да се на бесконачно различних начина може разложити један дати потег R на више од три друга дата правца.

Да бисмо добили аналитички израз за геометријску суму R, подигнимо на квадрат три последње једначине (2) и саберимо их; имаћемо

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_n^2 + 2P_1P_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) + \ldots$$

Но како је, у опште,

$$\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = \cos(P_i, P_j),$$

то је, према томе, квадрат геометријске суме:

$$(3) \qquad R^2 = \Sigma P_i^2 + 2\Sigma P_i P_j \cos(P_i, P_j);$$

као што смо то већ нашли (стр.374), и то је *аналитички израз* геометријске суме датих потега.

Пошто је R увек положно, то, без сумње, последња једначина одређује величину геометријске суме. Њен правац, пак, дат је овим једначинама:

$$(4) \qquad \alpha = \frac{\Sigma P_i \alpha_i}{R}, \quad \beta = \frac{\Sigma P_i \beta_i}{R}, \quad \gamma = \frac{\Sigma P_i \gamma_i}{R}.$$

Према овоме, кад је дат један потег AB само својим пројекцијама X, У, Z на трима координатним осама, онда тај потег није потпунце одређен у простору, јер исти елементи одговарају свима потезима, који су еквиполентни потегу AB; потег AB одређен је тада само по величини и по правцу. Ако би, поред потегових пројекција X, У и Z, биле познате и координате x_1, y_1, z_1 његовога почетка, онда би потег био одређен не само по величини и по правцу, него још и по положају.

Дакле, дати пројекције X, У, Z излази на то дати једну серију еквиполентних потега, чији је саставни део и потег AB.

Према томе, види се да саме пројекције не би биле довољне за одредбу положаја једног потега у простору.

Да би се то постигло, треба, поред пројекцијâ, увести један нов елеменат, *моменат*, о којем ћемо мало ниже говорити.

Као *специјални случај* овога проблема: *Да геометријска сума једног система потегâ буде равна нули, треба и довољно је алгебарска сума пројекцијâ компонентних потега на трима координатним осама да буде нула.*

Другим речима, да геометријска сума R буде нула, треба и довољно је да су:

$$\Sigma P_i \alpha_i = 0, \quad \Sigma P_i \beta_i = 0, \quad \Sigma P_i \gamma_i = 0.$$

И *обратно*, кад су ове три једначине задовољене, оне повлаче ову $(P_1) + (P_2) + \ldots + (P_n) = 0$, тј. $R = 0$. Тада да́ти потези $P_1, P_2, \ldots, P_n$ образују један затворени полигон.

5. Најзад, лако је доказати:

1°. *Алгебарска сума пројекција̂ страна̂ једног полигона потега̂, на једној ма каквој оси, јесте максимум, кад је геометријска сума потега̂ паралелна са том осом, и тај је максимум раван самој геометријској суми.*

2°. *Алгебарска сума пројекција̂ страна̂ једног полигона потега̂, на једној ма каквој оси, равна је нули, кад геометријска сума потега̂ стоји управно на ту осу.*

30. О ротационом смислу. — 1. За једну раван каже се да је *оријентисана* [1], кад је изабрат у овој равни један смисао за позитивне ротације. Узевши у равни једну произвољну тачку и посматрајући једну полу-праву, која је ограничена том тачком и која се окреће око ње остајући у равни, одређује се један од два смисла у којима се она може окретати као позитиван смисао; осим тога, условљено је да се каже о двема полу-правима положеним у истој равни које се окрећу око својих крајева, остајући паралелне и истога смисла, да се оне окрећу у истом смислу; тада је одређен смисао позитивних ротација за све тачке равнине. Ако се хоће, може се замислити један посматрач положен правцем управне на раван, са ногама наслоњеним на раван и посматрајући окретање једне полу-праве под његовим ногама; кад она пролази испред њега, она иде с његове десне на његову леву страну, или с његове леве на његову десну страну; један од ова два смисла одговара позитивним ротацијама. Ако се посматрач премести на неку другу тачку равни, остајући на истој

---

[1] Овај назив увео је *M. Darboux;* вредно је видети о овом предмету, у XXIII свесци *Mathematische Annalen*, један чланак од *M. Stephanos-a: Mémoire sur la représentation*, etc., p. 337.

страни од равни, смисао позитивних ротација остаје исти за њега.

Кад је дат у једној равни угао АОВ, ми ћемо звати смисао од ОА ка ОВ онај смисао у коме се једна полуправа ограничена у тачци О, поклапајући се најпре са ОА, мора окретати око тачке О да би дошла да се поклопи са ОВ, описујући угао АОВ (мањи од два права). Два угла АОВ, А'О'В', положени у истој равни, имају исту диспозицију кад је смисао од ОА ка ОВ исти као и смисао од О'А' ка О'В'; у том случају, може се угао А'О'В' померати и промењивати на непрекидан начин, без да он изађе из равни, без да се његови краци поставе један на други или један у продужењу другога, тако да се доведе да се поклопи са углом АОВ, крак О'А' поклапајући се са ОА, а крак О'В' са ОВ.

Кад је раван, која садржава угао АОВ, оријентисана, каже се да овај угао има *директну диспозицију* или *диспозицију инверсну* према томе да ли смисао од ОА ка ОВ јесте или није смисао позитивних ротација.

Кад је нека раван однесена на један систем координатних оса Ox, Oy, она је, самим тим, оријентисана; смисао позитивних ротација јесте смисао од Ox ка Oy. Ако су два правца ОА и ОА', чији се почетак поклапа са почетком координатних оса, ако су они одређени, као што је напред (n° 29) објашњено, са количинама a, b, са једне стране, и a', b', са друге стране, угао АОА' имаће директну диспозицију или диспозицију инверсну (диспозицију угла xOy или угла yOx) према томе да ли ће детерминанта $ab'-a'b$ бити положна или одречна.

У једној оријентисаној равни, површина ограничена једним контуром, који је пређен у једном извесном смислу, има знак $+$ или знак $-$, према томе да ли је смисао прелажења позитиван смисао или смисао негативан.

Ако су D и D_1 два правца положена у једној оријентисаној равни, да бисмо одредили угао (D,D_1) ових двају праваца, ради се овако: повуку се кроз једну произвољну тачку O равни две полу-праве OA, OB паралелне двама правцима D и D_1 и истога смисла; за тим се замисли једна полу-права имајући свој почетак у O и поклапајући се најпре са OA, и на тој полу-правој једна тачка M таква да сегменат OM има правац полу-праве OA и да је раван јединици дужине; ако се ова полу-права окреће увек у истом смислу око тачке O, и ако се заустави у тренутку кад се поклопи са правцем OB, број који мери дужину лука, који је тачка M описала, тај број, пред којим је знак $+$ или знак $-$, према томе да ли се окретала у позитивном смислу или у смислу негативном, јесте оно што се зове углом (D,D_1). Овај угао има бесконачно много одредаба; све ове одредбе образују једну аритметичку постепеност (ред), бескрајну у оба смисла, чија је разлика 2π; једна од њих по апсолутној вредности мања је од π; ова апсолутна вредност јесте мера угла двају праваца, таквога угла какав се посматра у Геометрији. Ја ћу употребити симбол (D,D_1) те да означим једну ма коју од одредаба напред одређених; имаћемо тада

$$(D,D_1) + (D_1,D) = 2n\pi,$$

означавајући са n један цео број положан или одречан.

Кад угао (D,D_1) није број више пута узето π, угао AOB, одређен горе и посматран са геометријског гледишта, има диспозицију директну или инверсну, према томе да ли је она од одредаба угла (D,D_1), која има најмању апсолутну вредност, да ли је она један број положан или одречан; тада се може рећи да угао (D,D_1), посматран не као један број, него као једна фигура, има, како кад, директну диспозицију или диспозицију инверсну.

Кад је дата фигура (D,D_1), тригонометријске линије угла (D,D_1) потпунце су одређене.

Посматрајући три ма каква правца D, D_1 и D_2 у једној оријентисаној равни, имамо

$$(D,D_1) + (D_1,D_2) + (D_2,D) = 2n\pi,$$

где је n један цео број положан или одречан.

Кад је једна раван (P) однесена на координатне осе Ox и Oy, онда се често упоређују правци, који су у тој равни, са правцем Ox; каже се, у том смислу, да је један правац OA одређен са углом θ, кад је угао (Ox,OA) раван θ.

Кад су два правца D и D_1, без да буду положени у једној оријентисаној равни, паралелни једној таквој равни, може се задржати, за угао (D,D_1) ових двају праваца, претходна дефиниција.

Кад, у простору, два правца D и D_1 нису паралелни једној оријентисаној равни, угао ових двају праваца мораће опет бити посматран као да има бесконачно много одредаба; добићемо их све оријентишући једну раван паралелну са овим двама правцима, најпре на један начин, по том на други; означавајући са α једну ма коју од ових одредаба, оне ће бити све обухваћене формулом

$$2n\pi \pm \alpha,$$

у којој број n мора узети све целе вредности положне или одречне. У том случају, немамо потребе да разликујемо угао двају праваца D и D_1 од угла двају праваца D_1 и D; косинус угла ових двају праваца, претпостављено дати, потпунце је одређен; синус и тангента одређени су по апсолутној вредности.

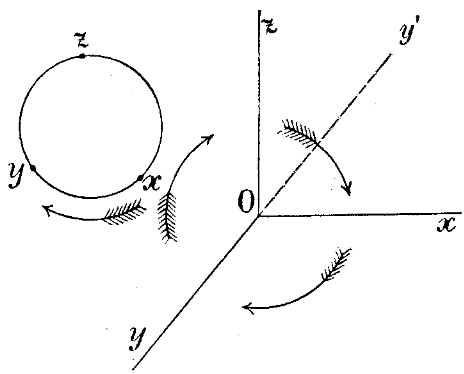
2. За простор каже се да је *оријентисан*, кад је изабрат један смисао за *директне ротације*.

Претпоставимо да је на једној правој изабрат један правац; замислимо једног посматрача положеног на праву, пробивен од ногу ка глави овим правцем и најзад једну полу-раван[1] ограничену са правом и окрећући се око ње; кад посматрач види да ова раван пролази испред њега, он

[1] Израз *полу-раван* означаваће један део равни, која се протеже у бесконачност на једну страну од једне праве.

је може видети да иде с његове десне стране ка његовој левој или са његове леве ка његовој десној страни; један од ова два смисла биће назват *директан смисао*. Чим је овај смисао изабрат, и кад је дат један ма какав правац на једној ма каквој правој, знаће се шта треба разумети под једном равни која се окреће око ове праве у директном смислу или у смислу индиректном, односно овога правца; кад се, на једној истој правој, посматрају два супротна правца, смисли директних ротација које им одговарају очевидно су супротни.

На трима ивицама једног угла триједра ми можемо одредити три правца Ox, Oy и Oz; поред тога, ми узимамо триједар располажући његове ивице у кружном реду. Замислимо једног посматрача положеног на једну ма коју ивицу, са ногама у O. Он ће видети ивицу, која следује за овом на којој је он постављен, да се креће ка трећој ивици у једном одређеном смислу; тај је смисао увек исти, ма која била ивицâ на којој се посматрач налази (сл. 12).

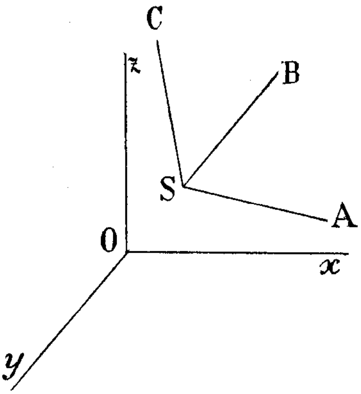


сл. 12

Посматрајмо, дакле, један триједар $Oxyz$, и замислимо једног посматрача са ногама у O, кроз кога од ногу ка глави иде правац Oz и који посматра страну xOy; замислимо, најзад, једну полу-раван ограничену бесконачном правом (z) на којој се находи правац Oz, и наслањајући се најпре на страну xOz; кад се ова раван окреће око праве (z) тако да дође да се поклопи са страном yOz описујући угао диједар Oz, мањи од два права, посматрач је види да се окреће у једном извесном смислу (с лева на десно или с десна на лево); то је смисао који ћемо звати смисао од Ox ка Oy за посматрача положеног правцем Oz. За истог посматрача, смисао од Oy ка Ox супротан је смислу од Ox ка Oy. За посматраче положене правцем Ox, Oy и Oz, дотични смисли од Oy ка Oz, од Oz ка Ox, и од Ox ка Oy јесу исти. Дакле, за три ивице постоји један исти смисао ротације; и кад је тај смисао исти, као што је и смисао сказаљака једнога сахата *(с лева на десно),* онда ћемо казати да триједар има *директан* или *позитиван смисао ротације*, или, краће, *триједар је директан* или *позитиван;* у противном случају, *триједар је инверсан* или *негативан*, нпр. триједар $Oxy'z$.

Приметимо да је у Меканици директан или позитиван смисао ротација онај с лева на десно; у Астрономији тај је смисао супротан (с десна на лево).

Два триједра $Oxyz$ и SABC имају исту диспозицију кад је, за посматрача положеног правцем Oz, смисао од Ox ка Oy исти као што је смисао од SA ка SB за посматрача положеног правцем SC. Кад триједар SABC има исту диспозицију коју и триједар $Oxyz$, онда га можемо померати и промењивати на континуалан начин, али без да он престане бити триједар, тј. без да се икада једна ивица постави у раван двеју других. Замислимо да се, променом тога рода, доведе триједар SABC да се поклопи са триједром $Oxyz$, да се S поклопи са O, SA да се поклопи са Ox, SB са Oy, и SC са Oz; тада ћемо рећи да триједар SABC има *исту диспозицију као и триједар* $Oxyz$; обратно, кад је ово поклапање могућно на тај начин, два триједра имају исту диспозицију (сл. 13). Ако би се, при тој промени, S поклопило са O, SA са Ox, SB са Oy, а SC са Oz', где је Oz' продужење од Oz, онда ћемо рећи да trijedar SABC има *инверсну диспозицију*.



сл. 13

Три триједра $Oxyz$, $Oyzx$, $Ozxy$ имају једну исту диспозицију, која је различна од диспозиције триједара $Oxzy$, $Ozyx$, $Oyxz$.

Кад је простор оријентисан, казаће се да триједар $Oxyz$ има директну или инверсну диспозицију, према томе да ли је, за посматрача положеног правцем Oz, смисао од Ox ка Oy директан или не.

Кад је простор однесен на три координатне осе Ox, Oy, Oz, он је, самим тим, и оријентисан; смисао директних ротација јесте смисао од Ox ка Oy, за посматрача положеног правцем Oz.

Ротациони смисао једног триједра распознаћемо сравнивши га са директним триједром правоуглих координатних оса: $Oxyz$. Према томе, један триједар SABC има директну или инверсну диспозицију, према томе да ли има или нема диспозицију триједра координатних оса: $Oxyz$. Свака од ових диспозиција одговара једном одређеном аналитичком услову. И заиста, означимо са α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ косинусе углова трију ивица триједрових: SA, SB и SC у односу на координатне осе, и посматрајмо ову детерминанту:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix};$$

диспозиција триједра SABC биће директна или инверсна према томе да ли ће детерминанта Δ бити положна или одречна. Претпоставимо да је триједар SABC директан; ако га померамо и промењујемо на непрекидан начин тако да се поклопи са триједром координатних оса $Oxyz$, детерминанта Δ мењаће се на континуалан начин. Претходна детерминанта моћи ће да промени знак и да постане равна нули само онда, кад су три ивице триједрове у једној истој равни, у ком случају, право речено, ми и немамо више посла са једним триједром. Дакле, детерминанта Δ задржаће исти знак, кад се три правца SA, SB и SC наизменце поклапају са Ox, Oy, Oz, и тај је знак, очевидно, положан, јер кад је поклапање извршено, онда имамо:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0;$$
$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \gamma' = 0;$$
$$\alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = 1;$$

и према томе, за триједар $Oxyz$, имамо детерминанту

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

која је количина увек положна.

С друге стране, детерминанта Δ инверсног триједра $Oxyz'$, (где је Oz' продужење од Oz) биће:

$$\Delta = -1.$$

Према томе, детерминанта Δ биће положна за сваки триједар који има диспозицију триједра координатних оса, а биће одречна за инверсну диспозицију; и обратно.

3. Претпоставимо простор увек оријентисан. Посматрајмо једну раван (P) и један правац (D), који није паралелан са равни; замислимо једну полу-раван ограничену правом на којој се налази правац (D) и окрећући се око ове праве, односно овога правца, у директном смислу; траг ове покретне равни на равни (P) окретаће се у једном извесном смислу око једне тачке равни (P); овај смисао моћи ћемо узети за смисао позитивних ротација у равни (P); кад је учињена ова погодба, рећи ће се да оријентација равни (P) одговара правцу (D). Најкориснији случај за посматрање јесте онај у коме је правац (D) управан на раван (P). На пример, могу се оријентисати све равни тангентне на једну сверу са овим условом да, за сваку од њих, оријентација одговара правцу који иде од центра свере ка додирној тачци.

Обратно, кад је дата једна оријентисана раван (P), моћи ће се, на свакој правој (d) која није паралелна са равни (P), изабрати један одређени правац (D), који одговара оријентацији равни. Ако се иде у таквом правцу полазећи од једне тачке равни (P), моћи ћемо казати да се иде над равни (P); два дела простора положени један над оријентисаном равни (P), други испод ње, на тај су начин начисто разликовани.

Кад су SA и SB два правца положени у једној оријентисаној равни (P), кад је SC један правац који одговара оријентацији равни (P), триједар SABC имаће или не директну диспозицију према томе да ли, у равни (P), угао ASB има или нема директну диспозицију.

И заиста, нека су дата два правца SA и SB, који граде међу собом оштар угао V. Кроз тачку пресека S ових двају праваца подигнимо једну управну на њихову раван; па се тражи да разликујемо два смисла ове управне.

Ми ћемо, нпр., тражити такав смисао праве SC, да триједар SABC има диспозицију триједра координатних оса $Oxyz$.

Нека су α,β,γ; α',β',γ' косинуси углова датих правих SA и SB; нека су $\alpha'',\beta'',\gamma''$ косинуси углова праве SC. Пошто је SC управно на SA и SB, то ћемо имати ове две једначине:

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0;$$

откуда изводимо:

$$\frac{\alpha''}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}=\frac{\beta''}{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}=\frac{\gamma''}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\frac{\pm 1}{\sqrt{(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}}.$$

Према познатој Лагранжовој једначини ови су односи, даље, једнаки са:

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2}}=\frac{\pm 1}{\sin V},$$

означавајући са V угао мањи од 180°, који граде међу собом две дате праве.

Једна нова комбинација претходних односа показује да су они још равни:

$$\frac{\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2}{\alpha''(\beta\gamma'-\gamma\beta')+\beta''(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')+\gamma''(\alpha\beta'-\beta\alpha')}=\frac{1}{\Delta};$$

откуда закључујемо да је:

$$\Delta = \pm \sin V.$$

Но, пошто триједар SABC има диспозицију триједра $Oxyz$, то ће лева страна последње једначине бити положна; десна страна мора тако исто бити положна, и за то, пошто је угао V мањи од 180°, треба узети знак + пред sinV. Према томе, без икакве двосмислености, имаћемо једначине:

$$\alpha'' = \frac{\beta\gamma' - \gamma\beta'}{\sin V},$$

$$\beta'' = \frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\sin V},$$

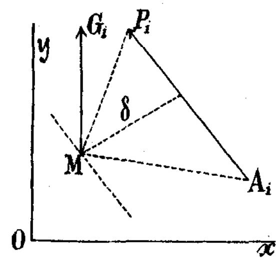
$$\gamma'' = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\sin V}.$$

4. Кад су дате две оријентисане равни (P) и (Q), које нису управне међу собом, казаћемо да су оријентације ових двеју равни исте, ако правци управни на равнима (P) и (Q), који одговарају оријентацијама ових равни, граде међу собом оштар угао.

31. О моментима. Моменат једног потега у односу на једну тачку. Геометријско представљање момената. — 1. Један нови и веома важан појам, који ћемо често употребљавати при излагању Рационалне Меканике, јесте *појам о моментима.*

2. Нека је A_1P_1 један потег, чију ћемо величину представљати са P_1, и нека је M једна тачка ван тога потега. У равни MA_1P_1, која пролази кроз тачку M и потег A_1P_1, узмимо две правоугле осе Ox и Oy (сл. 14). Нека су x,y координате тачке M; x_1, y_1 координате потеговог почетка A_1, а x_2, y_2 оне његовог свршетка P_1.

Моменат потега A_1P_1 *у односу на тачку* M *назива се ова детерминанта,* узета са својим знаком:



сл. 14

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

По апсолутној вредности, *моменат је раван двогубој површини троугла* MA_1P_1. И заиста, ако се x, y сматрају као текуће координате, једначина бесконачне праве A_1P_1 јесте:

$$\varDelta = 0.$$

Нека је δ одстојање тачке M од потега A_1P_1. Његова је вредност:

$$\delta = \pm \frac{\varDelta}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}} = \pm \frac{\varDelta}{P_1};$$

према томе је

$$\varDelta = \pm\, \delta \cdot P_1,$$

откуда потиче ова теорема:

Теорема. — *Моменат једног потега у односу на једну тачку, по апсолутној вредности, раван је производу из одстојања тачке од потега и тога потега.*

Пошто тај производ $\delta \cdot P_1$ представља двогубу површину троугла MA_1P_1, то можемо исказати овај став: *Апсолутна вредност момента једног потега у односу на једну тачку може бити представљена једном равном површином.*

Ова површина мора бити узета, како кад, са знаком $+$ или са знаком $-$. Ми ћемо одредити геометријске околности, које томе одговарају.

Детерминанта Δ мења се на непрекидан начин, задржавајући исти знак, докле год се тачка M помера у равни, али без да икада дође на правац потега A_1P_1, у ком би случају детерминанта Δ постала равна нули и за тим би променила знак. Претпоставимо, дакле, да се угао A_1MP_1 мења, без да се икада један крак његов постави у продужењу другога, и да се изврши промена таква, да тачка M дође у почетак O, а крак MA_1 на Ox осу; крак MP_1 моћи ћемо довести да се поклопи, било са Oy осом, било са Oy', која је продужење од Oy. — У првом случају, имаћемо: $x = 0$, $y = 0$; $x_1 > 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 > 0$; и детерминанта Δ постаје тада

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ 0 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 ,$$

дакле положна вредност, која показује да је детерминанта Δ пре тога имала знак $+$. Тада се каже да угао A_1MP_1 представља диспозицију угла xOy; један посматрач, чије би ноге биле у M на раван фигуре, а глава пред овом равни, учинио би да се MA_1 поклопи са MP_1 једном ротацијом у смислу од Ox ка Oy. — У другом случају, на против, имаћемо: $x=0$, $y=0$; $x_1>0$, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2<0$; и детерминанта Δ, чија је апсолутна вредност увек равна x_1y_2, биће одречна и равна $-x_1y_2$, и према томе она је имала знак $-$ пре тога. Тада, угао A_1MP_1 представља диспозицију угла yOx (или, што је исто, угла xOy').

Према овоме: моменат је позитиван ако угао A_1MP_1 има диспозицију угла xOy, а негативан ако угао A_1MP_1 има диспозицију угла yOx.

3. Моменат потега A_1P_1 у односу на тачку M, која је ван тога потега, *представља се геометријски* на овај начин: кроз тачку M повуче се један потег MG_1, чија је акциона линија управна на раван која пролази кроз тачку M и потег A_1P_1, чиј је правац такав да триједар $MA_1P_1G_1$ има директну диспозицију, најзад чија је дужина мерена једним бројем (положним) који је раван производу двају бројева (положних), који мере, један, дужину потега A_1P_1, а други, одстојање тачке M од акционе линије овога потега; и тај потег MG_1 назват је моменат потега A_1P_1 у односу на тачку M; исти назив примењује се на сваки потег, који је еквиполентан са потегом MG_1. Може се рећи да број (положан), који мери дужину MG_1, да је тај број раван двогубом броју који мери површину троугла A_1MP_1.

Најзад, приметимо да је Cauchy први употребио ово геометријско представљање момената.

4. После овога, учинимо неколико важних напомена:

Прво, према ономе што претходи, лако је наћи моменат потега A_1P_1 у односу на тачку O, почетак координатних оса Ox, Oy; треба само ставити $x=0$, $y=0$. Ако тај моменат означимо са N_1, онда је он:

$$N_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Тај се моменат може написати и у овом облику:

$$N_1 = x_1(y_2-y_1) - y_1(x_2-x_1) = x_1Y_1 - y_1X_1,$$

где су X_1 и Y_1 пројекције потега A_1P_1 на координатним осама.

Ако, опет, са δ означимо одстојање координатног почетка од потега, оно је

$$\delta = \pm \frac{x_1 У_1 - y_1 X_1}{P_1};$$

откуда је

$$(1) \qquad x_1 У_1 - y_1 X_1 = \pm \delta . P_1 .$$

На тај начин, имамо геометријско тумачење за израз $x_1 У_1 - y_1 X_1$. Једначина под (1) показује, дакле, да је $x_1 У_1 - y_1 X_1$ моменат потега $A_1 P_1$ у односу на почетак, моменат узет са знаком $+$ или са знаком $-$. Према томе имамо

$$(2) \qquad x_1 У_1 - y_1 X_1 = \pm N_1 .$$

Да бисмо разумели оно умовање, које нам је помогло да одредимо знак у једначини (2), нужно је сматрати N_1 као непрекидну функцију од x_1, $У_1$, y_1 и X_1, и да може променити знак само пролазећи кроз нулу.

Кад су дате пројекције $X_1, У_1$, потег $A_1 P_1$ одређен је по величини и по правцу.

Кад су дате $X_1, У_1$ и координате x_1, y_1 потеговог почетка, потег $A_1 P_1$ одређен је, не само по величини и по правцу, него и по положају.

Најзад, кад су дате X_1, $У_1$ и $x_1 У_1 - y_1 X_1$, потег $A_1 P_1$ дат је по величини и по правцу; што се његовог положаја тиче, он је неодређен, али је одређена она права, на којој се потег налази.

У Механици се, у врло великом броју случајева, посматра један потег са последње тачке гледишта, и количине X_1, $У_1$ и $x_1 У_1 - y_1 X_1$ три су *параметра*, по H. Laurent-у, који служе за његову одредбу.

Друго, моменти потегâ $A_1 P_1$ и $P_1 A_1$, у односу на једну исту тачку, јесу једнаки а супротно означени.

Претпоставимо да је на акционој линији потега $A_1 P_1$ изабрат позитиван правац; нека је a положан или одречан број који мери потег A_1P_1. Ако се из тачке M спусти управна MM' на акциону линију потега A_1P_1, по том нека се окрене полу-раван коју граничи ова линија и која садржи тачку M, за прав угао, око акционе линије потега A_1P_1, у директном смислу који одговара позитивном правцу изабратом на овој линији, онда ће потег M'M заузети положај $M'M_1$; моменат потега A_1P_1 у односу на тачку M биће еквиполентан потегу $a.M'M_1$.

Треће, моменат потега A_1P_1 у односу на једну тачку раван је нули, само у ова два случаја: 1° кад је одстојање δ тачке од потега равно нули, тј. кад је та тачка на акционој линији потега; или, 2° кад је потег A_1P_1 раван нули.

Четврто, моменат једног потега у односу на једну ма коју тачку *не мења се:* 1° кад се тај потег помера по својој акционој линији, у осталом остајући еквиполентан самом себи; 2° кад се та тачка помера по једној паралелној са тим потегом; и 3° кад се померају и потег по својој акционој линији и та тачка по паралелној са тим потегом.

Према томе, при померању једног потега по својој акционој линији, не мењају се: ни његов моменат, ни његове пројекције, нити број који мери тај потег.

Пето, моменат једног потега A_1P_1 у односу на тачку M, J. Tannery означава симболом (A_1P_1M), а неки писци симболом (A_1P_1,M), што је боље. Према томе, три потега (A_1P_1,M), (P_1M,A_1) и (MA_1,P_1) јесу еквиполентни; то је исто случај и са потезима (P_1A_1,M), (A_1M,P_1) и (MP_1,A_1), који су једнаки а противположени са претходнима.

Шесто, најзад, ону тачку, у односу на коју се узима моменат, J. Graindorge и J. Massau зову *центром момената.*

32. Моменат једног потега у односу на једну осу. — Нека су дати: један потег A_1P_1 и једна ма каква оса DD_1, на којој је изабрат позитиван смисао. Нека је a_1p_1

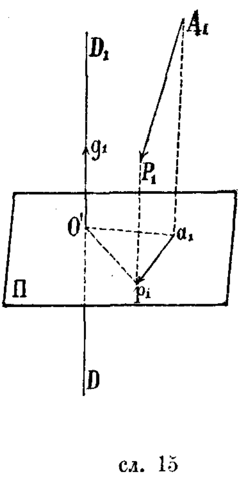
ортогонална пројекција датога потега A_1P_1 на једној ма којој равни П, која је повучена управно на дату осу DD_1. За тражени моменат можемо дати ову дефиницију:

Моменат потега A_1P_1 *у односу на једну ма какву осу* DD_1 *раван је моменту ортогоналне пројекције* a_1p_1 *потега* A_1P_1, *на једној ма којој равни повученој управно на ту осу* DD_1, *у односу на тачку* O' **траг** *осин на равни.*

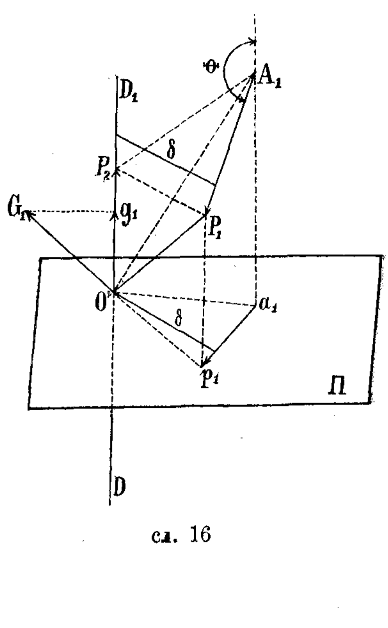
Моменат пројекције a_1p_1 у односу на тачку O' добићемо према претходној нумери (n° 31). Ако је на оси DD_1 изабрат позитиван смисао, онда ће моменат потега A_1P_1 у односу на осу DD_1 бити мерен једним положним или одречним бројем. Тај је моменат представљен са потегом $O'g_1$ однесен на осу DD_1 (сл. 15), у смислу који смо претходно одредили.

Теорема. — *Моменат једног потега* A_1P_1 *у односу на једну ма какву осу* DD_1 *раван је ортогоналној пројекцији, на тој оси, момента истога потега у односу на једну ма коју тачку осину.*

Очигледна еквиваленција ових двеју дефиниција показује заиста да је прва дефиниција, као год и друга, независна од положаја тачке O' на датој оси.



сл. 15



сл. 16

Да бисмо оправдали ову другу дефиницију, треба, као што смо казали, показати да је вредност коју она даје за моменат потега A_1P_1, у односу на осу, да је та вредност независна од избора тачке на тој оси. Нека су: A_1P_1 један потег, DD_1 једна ма каква оса и O' једна ма која тачка на тој оси. Повуцимо кроз тачку O' раван Π управно на осу, и нека је a_1p_1 ортогонална пројекција потега A_1P_1 на тој равни (сл. 16); нека дуж $O'g_1$ представља моменат потега A_1P_1 у односу на осу DD_1, а дуж $O'G_1$ нека представља моменат истог потега у односу на тачку O'; и означимо са i оштар угао двеју равни $A_1O'P_1$ и $a_1O'p_1$, а тај је угао раван углу њихових управних $O'G_1$ и $O'g_1$. Онда, између површина̂ троуглова $A_1O'P_1$ и $a_1O'p_1$ имамо овај однос:

$$a_1O'p_1 = A_1O'P_1 \cos i, \quad \text{или} \quad 2a_1O'p_1 = 2A_1O'P_1 \cos i.$$

Но како је моменат $O'g_1$ раван двогубој површини троугла $a_1O'p_1$, који је израз очевидно независан од избора тачке O' на оси, и како је моменат $O'G_1$ такође раван двогубој површини троугла $A_1O'P_1$, то ћемо, по замени, имати:

$$O'g_1 = O'G_1 \cos i,$$

која једначнна, са гледишта апсолутних вредности, показује да је $O'g_1$ заиста пројекција од $O'G_1$.

Остаје нам да покажемо да последња једначина постоји водећи рачуна о смислу потега̂ тј. да је знак пројекције $O'g_1$ такође независан од избора тачке O'. И заиста, за једног посматрача постављеног дуж потега $O'g_1$, угао $a_1O'p_1$ има диспозицију угла xOy: то је исто случај и са углом $A_1O'P_1$. Тај исти угао има диспозицију угла xOy за једног посматрача постављеног дуж потега $O'G_1$. Према томе, потези $O'g_1$ и $O'G_1$ положени су на истој страни од равни $A_1O'P_1$ и угао ових двају потега заиста је раван оштром углу двеју равни.

Отуда се закључују различни изрази за моменат једног потега A_1P_1 у односу на једну осу.

Означимо са δ најкраће одстојање датог потега од осе и са θ угао потега са осом; δ се пројектује у правој величини на равни II, пројекција a_1p_1 равна је $A_1P_1\sin\theta$, а моменат $\mathfrak{M}_1$ јесте:

$$\mathfrak{M}_1 = \pm p_1.\delta = \pm P_1\delta\sin\theta,$$

где треба узети знак $+$ или знак $-$, према томе да ли се једно покретно тело, прелазећи потег A_1P_1, окреће око осе DD_1 у позитивном смислу или у смислу негативном.

Узмимо на оси DD_1 у позитивном смислу један потег $O'P_2$ од дужине P_2, и означимо са запр. (P_1,P_2) запремину тетраедра који има A_1P_1 и $O'P_2$ као ивице противположене, узевши ову запремину положно или одречно, према томе да ли се једно покретно тело, прелазећи један од потегâ P_1 или P_2, од почетка ка свршетку, да ли се оно окреће око другога, у позитивном смислу или у смислу негативном. Тада је моменат потега A_1P_1 у односу на осу DD_1:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{6\ \text{запр.}(P_1,P_2)}{P_2}.$$

И заиста, једначина постоји и по знаку; она постоји и по апсолутној вредности, јер се запремина посматраног тетраедра не мења кад темена A_1 и P_1 клизе до у a_1 и p_1, што даје један нов тетраедар чија је запремина V трећина производа из P_2 и површине $a_1O'p_1$; апсолутна вредност момента, тј. двогуба површина $a_1O'p_1$, дакле равна је 6V подељено са P_2.

Примедба. — Узимајући моменат $\mathfrak{M}_1$ у облику $\pm P_1\delta\sin\theta$, види се да је он раван нули кад је један од трију чинитеља раван нули; тј. *моменат једног потега у односу на једну осу раван је нули:* 1° *кад је потег нула*, или 2° *кад је потег у једној истој равни са осом.* И заиста, кад је потег у једној истој равни са осом: он ће или сеħи осу, и тада је $\delta=0$, или ħе бити паралелан са осом, и тада је угао $\theta=0$, и $\sin\theta=0$.

Најзад, приметимо и овде: *Апсолутна вредност момента једног потега у односу на једну осу може бити представљена једном равном површином.*

Напомена. — Посматрајмо тетраедар $A_1P_1O'P_2$; нека је V његова запремина, ми ħемо алгебарски број $\pm V$ звати тетраедар конструисан на двама потезима A_1P_1 и $O'P_2$. Овај је број нула, кад су потези у једној истој равни.

Место тетраедра ми можемо посматрати паралелопипед конструисан на двама потезима: његова запремина равна је шест пута запремини тетраедра; њему се даје исти знак као и тетраедру. Паралелопипед (или шест пута тетраедар) конструисан на двама потезима зове се *моменат двају потега,* — о којем ħемо мало ниже говорити.

Посматрање тетраедара јавило се у првих ауктора *(Chasles, Sylvester, Möbius)*, који су писали о теорији потегâ.

За тим се увидело, да употреба паралелопипеда дозвољава да вежемо ово посматрање за посматрање момената, узети у односу на осе, чија је употреба у Механици много старија. Паралелопипеди или моменти двају потега допуштају, дакле, да спојимо у једну исту општу идеју стару теорију момената, узети у односу на осе, и својства тетраедара које је Шал у науку увео.

33. Моменат двају потега. — Нека су дата два потега A_1P_1 и $O'P_2$. *Моменат двају потега* A_1P_1 *и* $O'P_2$ *зове се количина* 6запр.(P_1,P_2), коју смо мало пре одредили (n° 32). Алгебарски израз ове количине добија се непосредно по елементарној формули из аналитичне Геометрије, која даје запремину једног тетраедра у функцији координатâ његових темена. Означимо са x_1,y_1,z_1 координате тачке A_1, а са X_1,Y_1, Z_1 пројекције потега A_1P_1 на трима осама, и ставимо:

$$L_1 = y_1 Z_1 - z_1 У_1, \qquad M_1 = z_1 X_1 - x_1 Z_1, \qquad N_1 = x_1 У_1 - y_1 X_1;$$

тако исто, означимо са x_2, y_2, z_2 координате тачке O', а са $X_2, У_2, Z_2$ пројекције потега $O'P_2$, и нека су L_2, M_2 и N_2 количине аналогне са L_1, M_1 и N_1 односно потега $O'P_2$:

$$L_2 = y_2 Z_2 - z_2 У_2, \qquad M_2 = z_2 X_2 - x_2 Z_2, \qquad N_2 = x_2 У_2 - y_2 X_2.$$

Претпостављајући осе Ox, Oy и Oz правоугле и оријентисане тако да се једном ротацијом од 90° у позитивном смислу око Oz осе доводи Ox на Oy, имаћемо по величини и знаку:

$$6 \text{запр.}(P_1, P_2) = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1 + X_1 & y_1 + У_1 & z_1 + Z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_2 + X_2 & y_2 + У_2 & z_2 + Z_2 & 1 \end{vmatrix};$$

развијајући, пошто смо одузели прву линију од друге и трећу од четврте, имамо:

$$6 \text{запр.}(P_1, P_2) = L_1 X_2 + M_1 У_2 + N_1 Z_2 + L_2 X_1 + M_2 У_1 + N_2 Z_1;$$

или, најзад, ако се примети да постоје идентичке једначине:

$$L_1 X_1 + M_1 У_1 + N_1 Z_1 = 0, \quad L_2 X_2 + M_2 У_2 + N_2 Z_2 = 0,$$

добијамо за моменат двају потега ову вредност:

$$6 \text{запр.}(P_1, P_2) = (L_1 + L_2)(X_1 + X_2) + (M_1 + M_2)(У_1 + У_2) + (N_1 + N_2)(Z_1 + Z_2).$$

Примедба. — Имајући појма о моменту двају потега, можемо доказати:

Теорема I. — *Моменат двају потега остаје непроменљив* (дакле, сталан), *кад се један од њих помера по својој акционој линији.*

Короларни став. — *Моменат двају потега не мења се, кад се сваки од њих помера произвољно по својој акционој линији.*

Теорема II. — *Нека су* A_1P_1 *и* A_2P_2 *два потега,* A_2X *једна управна на раван* $A_1P_1A_2$, *и нека је* $A_2P'_2$ *пројекција потега* A_2P_2 *на тој правој; онда, означавајући са моменат*(A_1P_1, A_2P_2) *моменат двају датих потега, имамо:*

$$\textit{моменат}(A_1P_1, A_2P_2) = \textit{моменат}(A_1P_1, A_2P'_2).$$

Отуда је, пак, лако извести овај корисан аналитички израз за моменат двају потега A_1P_1 и A_2P_2:

$$(1) \quad \text{моменат}(A_1P_1, A_2P_2) = \text{моменат}(A_1P_1, A_2P'_2)$$

$$= 2S\sigma',$$

где S означава површину троугла $A_1P_1A_2$, а σ' број који мери на A_2X оси пројекцију A_2P_2' потега A_2P_2.

За то довољно је доказати:

$$\text{тетраедар}(A_1P_1, A_2P_2) = \text{тетраедар}(A_1P_1, A_2P'_2)$$

$$= \frac{1}{3} S\sigma'.$$

Ова је једначина истинита по апсолутној вредности, јер апсолутна вредност од σ' управо је висина тетраедра. Она је истинита и по знаку.

34. Други израз за моменат двају потега. — Ми можемо наћи и *други израз за моменат двају потега,* на овај начин:

Нека су A_1P_1 и A_2P_2 два потега; померањем можемо довести почетке A_1 и A_2 ових двају потега у подножја заједничке управне на акционе линије потегâ A_1P_1 и A_2P_2, које их носе, тако да је A_1A_2 та заједничка управна. Нека је δ њена дужина. Подигнимо, као у теореми II (n^0 33), управну A_2X на раван $A_1P_1A_2$ и пројектујмо A_2P_2 у $A_2P'_2$ на A_2X. Према поменутој теореми II, имамо

$$\text{моменат}(A_1P_1, A_2P_2) = \text{моменат}(A_1P_1, A_2P'_2).$$

Но, лако је израчунати $\text{моменат}(A_1P_1, A_2P'_2)$ по апсолутној вредности. И заиста, ми имамо

$$\text{моменат}(A_1P_1, A_2P_2) = \pm 2A_1P_1A_2 \times A_2P'_2;$$

но, површина троугла $A_1P_1A_2$ равна је $\frac{1}{2}A_1P_1.\delta$; дакле

$$\text{моменат}(A_1P_1, A_2P_2) = \pm\delta.A_1P_1.A_2P'_2.$$

Нека је $A_2P''_2$ пројекција потега A_2P_2 на $A_1P_1A_2$ равни; права $A_2P''_2$ паралелна је правој A_1P_1 и јесте траг равни XA_2P_2 на равни $A_1P_1A_2$; означимо са θ оштар угао правих A_2P_2 и $A_2P''_2$; угао $P_2A_2P'_2$ јесте комплеменат угла $P_2A_2P''_2$ или угла θ, и ми имамо

$$A_2P'_2 = A_2P_2 \sin\theta;$$

дакле, најзад, *моменат двају потега дат је овим изразом:*

$$\text{моменат}(A_1P_1, A_2P_2) = \pm A_1P_1.A_2P_2.\delta.\sin\theta.$$

Кад су дате две праве у простору, њихов је угао неодређен, као што се зна, али синус њиховог угла има две вредности једнаке а супротно означене. Ми ћемо звати синус угла двеју правих онај од ових двају синуса који је положан[1].

Тада можемо исказати ову теорему:

Теорема. — *Апсолутна вредност момента двају потега равна је производу из њихових двеју дужина, по-*

---

[1] Иста примедба простире се на случајеве двеју оса. Косинус угла двеју оса одређен је, али синус не, који има две вредности јаднаке а супротно означене.

множен са њиховим најкраћим растојањем и са синусом угла њихових акционих линија.

Ова теорема, сама по себи, има извесну практичку вредност, али јој можемо дати прецизнији облик, уводећи моменте узете у односу на осе.

Примедбе. — 1. Да кажемо, прво, неколико речи *о јединичном потегу, који је на једној оси.*

Посматрајмо једну осу Δ; на тој оси има један значајан потег: *јединични потег* (потег од дужине 1), који има исти смисао као и оса Δ, тј. потег који је мерен бројем $+1$. Обратно, сваки јединични потег одређује без двосмислености ону осу, која га носи и која има исти смисао као и он. Ова напомена дозвољава нам да, у неку руку, мешамо појам о оси са појмом о јединичном потегу.

2. *Моменат једног потега у односу на једну осу.* Према томе, ми ћемо звати *моменат једног потега* A_1P_1 *у односу на једну осу* Δ, моменат потега A_1P_1 и јединичног потега који је на оси Δ.

3. *Моменат двеју оса.* Моменат двеју оса биће моменат њихових двају јединичних потега.

Пођимо од горње теореме, која нам даје за моменат двају потега A_1P_1 и A_2P_2 овај израз:

$$\text{моменат}(A_1P_1, A_2P_2) = \pm A_1P_1 . A_2P_2 . \delta \sin \theta .$$

Кад је A_1P_1 један јединични потег, који је на једној оси Δ, онда имамо

$$\text{моменат}(\Delta, A_2P_2) = \pm A_2P_2 . \delta \sin \theta ,$$

дакле исти израз, који смо и на страни 400 већ добили.

Најзад, кад су потези A_1P_1 и A_2P_2 оба јединични, и први је на оси Δ, а други на оси Δ', онда за моменат двеју оса имамо

$$\text{моменат}(\Delta, \Delta') = \pm \delta \sin \theta .$$

Другим речима: *Моменат двеју оса, по апсолутној вредности (au signe près), раван је производу из њиховог најкраћег растојања и синуса њиховога угла.*

4. *Општа формула за моменат двају потега.* Ми смо, сада, у стању да дамо један тачан аналитички израз за моменат двају потега A_1P_1 и A_2P_2.

И заиста, нека су $\varDelta$ и $\varDelta'$ две осе, које носе ове потеге, и означимо са σ и σ' оне бројеве који мере A_1P_1 на $\varDelta$ и A_2P_2 на $\varDelta'$; ја кажем да имамо:

$$\text{моменат}\,(A_1P_1, A_2P_2) = \sigma.\sigma'.\text{моменат}(\varDelta, \varDelta').$$

Приметимо, најпре, да у једначини

$$\text{моменат}(A_1P_1,\ A_2P_2) = \pm\ A_1P_1.A_2P_2.\delta \sin \theta,$$

производ $\delta \sin \theta$, по апсолутној вредности, представља моменат$(\varDelta, \varDelta')$, а да су A_1P_1 и A_2P_2 апсолутне вредности од σ и σ'. Дакле, може се написати

$$\text{моменат}(A_1P_1, A_2P_2) = \pm\ \sigma \cdot \sigma'.\text{моменат}(\varDelta, \varDelta').$$

Лако је доказати да једино знак $+$ одговара у свима случајевима. — И формула је онда доказана.

Добро је потврдити да је формула и онда истинита, кад је дужина једног од потега равна нули, или чак кад су они у једној истој равни.

Понаособ, нека је $\varDelta$ једна оса и A_2P_2 један потег носен једном осом $\varDelta'$ и мерен на тој оси бројем σ', имаћемо[1]:

$$\text{моменат}\,(\varDelta, A_2P_2) = \text{моменат}(\varDelta, \varDelta') \cdot \sigma'.$$

Кад бисмо хтели пројектовати овај потег A_2P_2 на

---

[1] Тако исто доказали бисмо, кад имамо два потега A_1P_1 и A_2P_2, овај последњи на једној оси $\varDelta'$, и имајући на њој за меру број σ', да имамо

$$\text{моменат}\,(A_1P_1,\ A_2P_2) = \text{моменат}\,(A_1P_1, \varDelta') \cdot \sigma'.$$

Та се формула може корисно употребити.

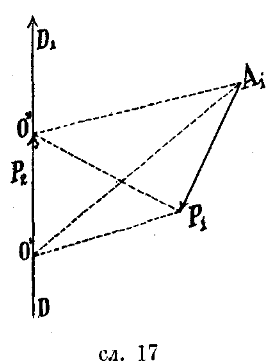
осу $\varDelta$, означавајући са $Pr.p.(\varDelta,\varDelta')$ пројекциони параметар (стр. 378) осе $\varDelta'$ на осу $\varDelta$, имали бисмо следећи израз броја који мери ту пројекцију:

$$\text{пројекција } (\varDelta, A_2P_2) = Pr.p.(\varDelta, \varDelta') \cdot \sigma'.$$

Зближењем ових двеју формула тежи се да се утврди извесна аналогија између пројекционог параметра и момента двеју оса. Стављајући се на пројекционо гледиште, потврђује се у истини: да је пројекциони параметар само један моменат извесне природе. О томе предмету може се консултирати један важан мемоар од *M. Lindemann-a* штампан у *Mathematische Annalen.*

35. Аналитички изрази момената. — 1. Нека је DD_1 једна оса (сл. 17), на којој је узет, као позитиван смисао, смисао O'O", пошавши од тачке O' чије су координате x',y',z' ка тачци O" чије су координате x'',y'',z''. Пројекције X_2, Y_2 и Z_2 потега O'O", који ће играти улогу потега P_2, и количине L_2, M_2, N_2 односно овога потега наизменце су:

$$x''-x',\ y''-y',\ z''-z';\ y'z''-z'y'',\ z'x''-x'z'',\ x'y''-y'x''.$$



сл. 17

Пошто је моменат $\mathfrak{M}_1$ потега P_1 у односу на осу DD_1 раван 6запр.(P_1,P_2) подељено са P_2, имамо:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{(x''-x')L_1+(y''-y')M_1+(z''-z')N_1+(y'z''-z'y'')X_1+(z'x''-x'z'')Y_1+(x'y''-y'x'')Z_1}{+\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}}.$$

Овај општи израз даје вредности за моменат потега P_1 у односу на три координатне осе. За Oz осу, на пример, довољно је претпоставити да су x', y', z', x'' и y'' равне нули, а $z''=1$, према примедбама у претходној нумери. Тада се налази вредност за моменат N_1. Тако исто, за осе Ox и Oy, нашли бисмо L_1 и M_1. На тај начин, моменти потега P_1 у односу на три координатне осе јесу количине означене са L_1, M_1 и N_1, у 33-ој нумери. Они су:

$$(\alpha) \quad L_1 = y_1Z_1 - z_1Y_1, \quad M_1 = z_1X_1 - x_1Z_1, \quad N_1 = x_1Y_1 - y_1X_1.$$

На тај начин решен је овај проблем: *Дат је један потег* A_1P_1; *кроз једну тачку* O *простора повуцимо три правоугле осе, наћи моменте датога потега* A_1P_1 *у односу на ове три осе.*

Очевидно, количина L_1 јесте моменат пројекције потега A_1P_1 на yOz равни узет у односу на координатни почетак; итд.

Моменат OG_1 потега P_1 у односу на координатни почетак O јесте један потег, који има за пројекције на трима осама количине L_1, M_1 и N_1, према самој дефиницији момента у односу на једну осу (n° 32). Лако је увидети да су координате тачке G_1 баш количине L_1, M_1, N_1.

Моменат једног потега P_1 у односу на једну тачку O јесте геометријска сума момената овога потега у односу на три правоугле праве, које пролазе кроз ту тачку.

2. Напоменимо, овде, да се обрасци под (α) могу лако утувити и написати на овај начин: треба написати x_1, y_1, z_1 на једној хоризонталној линији, а испод њих написати X_1, Y_1, Z_1 на другој хоризонталној линији:

$$\begin{matrix} x_1 \\ X_1 \end{matrix} > Oz < \begin{matrix} y_1 \\ У_1 \end{matrix} > Ox < \begin{matrix} z_1 \\ Z_1 \end{matrix} > Oy < \begin{matrix} x_1 \\ X_1 \end{matrix}$$

Сада, ако хоћемо, нпр. за Ox осу, да напишемо вредност за L_1, саставићемо једним крстом друга писмена а не x_1, нити X_1, и почевши с лева на десно, озго доле, па онда с десна на лево, опет озго доле, образовати производе, узевши први производ са знаком $+$, а други са знаком $-$, добићемо управо прву једначину под (α).

Напоменимо, још, да количине $X_1, У_1, Z_1, L_1, M_1$ и N_1 нису независне (стр. 402). И заиста, множећи једначине под (α), наизменце, прво са $X_1, У_1, Z_1$, па за тим са x_1, y_1, z_1, добићемо ове две једначине:

$$L_1 X_1 + M_1 У_1 + N_1 Z_1 = 0,$$
$$L_1 x_1 + M_1 y_1 + N_1 z_1 = 0.$$

Прва једначина изражава својство: да је потег OG_1 управан на потег P_1. Друга једначина изражава својство: да је тај исти потег OG_1 управан на OA_1. То је, у осталом, очевидно пошто је моменат OG_1 потега P_1 управан на раван, која иде кроз O и потег P_1.

3. Сада, лако ћемо решити овај проблем: *Дат је потег A_1P_1 са $X_1, У_1, Z_1, L_1, M_1$ и N_1 у односу на Ox, Oy и Oz осе, и дата је једна тачка O' са својим координатама; наћи моменат датога потега у односу на ову дату тачку.*

И заиста, ако се узме тачка O' чије су координате x', y', z', онда координате тачке A_1 у односу на нове осе, које су паралелне са првима, имајући за почетак тачку O', јесу $x_1 - x'$, $y_1 - y'$, $z_1 - z'$. Пројекције потега на овим осама остају $X_1, У_1$ и Z_1; његови моменти, у односу на нове осе, ако их означимо са L'_1, M'_1 и N'_1, постају:

$$(\beta)\left\{\begin{aligned} &L'_1 = (y_1 - y')Z_1 - (z_1 - z')У_1, \quad M'_1 = (z_1 - z')X_1 - (x_1 - x')Z_1, \\ &\qquad\qquad N'_1 = (x_1 - x')У_1 - (y_1 - y')X_1, \end{aligned}\right.$$

изрази који су добивени замењујући, у изразима за L_1, M_1 и N_1, количине x_1, y_1, z_1 са $x_1 - x'$, $y_1 - y'$, $z_1 - z'$. Моменат $O'G'_1$ потега P_1 у односу на O' јесте један потег који има за пројекције L'_1, M'_1, N'_1. Према вредностима за L_1, M_1 и N_1, под (α), може се такође написати:

$$(\gamma)\begin{cases} L'_1 = L_1 - (y'Z_1 - z'Y_1), \quad M'_1 = M_1 - (z'X_1 - x'Z_1), \\ \qquad\qquad N'_1 = N_1 - (x'Y_1 - y'X_1). \end{cases}$$

Ове су формуле битне.

Примедба. — Обратно, претпоставимо нека су дате шест произвољних количина X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1 и N_1 од којих три прве нису све три равне нули и које задовољавају идентичну једначину

$$(1) \qquad L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1 = 0,$$

доказати да тих шест количина одређују један потег P_1 (са приближношћу једног померања овога потега по његовој акционој линији).

Тада једначине:

$$L_1 = yZ_1 - zY_1, \quad M_1 = zX_1 - xZ_1, \quad N_1 = xY_1 - yX_1,$$

у којима x, y, z означавају текуће координате, представљају једну праву Δ, јер, на основу усвојене идентичне једначине, оне се своде на две различне. Нека је A_1 једна *произвољна* тачка узета на тој правој, потег P_1, чиј је почетак A_1 а пројекције X_1, Y_1, Z_1, управљен је правцем праве Δ и има за моменте, у односу на осе, количине L_1, M_1, N_1. Шест количина X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1 и N_1 јесу *координате праве* Δ, по Plücker-у. Ми ћемо звати те количине *координатама* или *параметрима потега* P_1.

Примена. – Као примену претходнога излагања, ми ћемо решити овај проблем: *Наћи израз за моменат двеју оса.*

Дата су два потега P_1 и P_2, чије су координате:

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ L_1,\ M_1,\ N_1,$$
$$X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ L_2,\ M_2,\ N_2\,;$$

моменат ових двају потега, у функцији њихових координата, изражен је изразом 6зaпр.(P_1, P_2), који смо напред (n° 33) одредили.

Узмимо случај осâ. Ми смо упоредили осе са јединичним потезима. Нека су: α, β, γ, λ, μ, ν координате једног јединичног потега; имамо:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$
$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0;$$

ових шест количина биће за нас координате осе Δ, која носи јединични потег и има исти смисао као он; види се да су α, β, γ косинуси углова осе, а λ, μ, ν њени моменти у односу на Ox, Oy, Oz осе.

Према дефиницији, коју смо дали за моменат једнога потега P_1 у односу на једну осу, овај израз

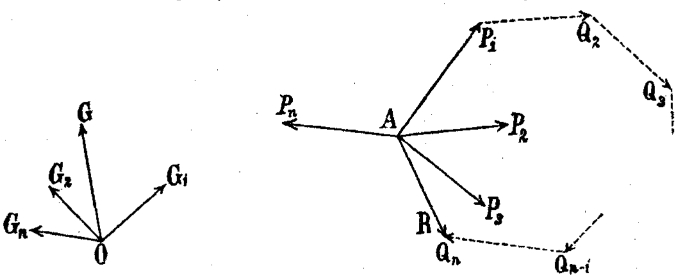
$$\lambda X_1 + \mu Y_1 + \nu Z_1 + \alpha L_1 + \beta M_1 + \gamma N_1$$

јесте вредност момента потега P_1 (X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1) у односу на осу Δ (α, β, γ, λ, μ, ν).

На исти начин, *моменат двеју оса:* Δ (α, β, γ, λ, μ, ν) *и* Δ' (α', β', γ', λ', μ', ν') *има за израз:*

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' + \lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma'.$$

36. Систем потега. Систем конкурентних потега. — Дати су n конкурентних потега $P_1, P_2, \ldots, P_n$, које можемо, померањем свакога по његовој акционој линији, довести да имају исти почетак A (n° 27). Нека је R њихова резултанта (сл. 18). Означимо са X_i, Y_i, Z_i пројекције потега P_i на три коор-



сл. 18

динатне осе Ox, Oy, Oz; нека су X, Y, Z пројекције резултанте R. Према теореми о пројекцијама имамо за пројекције резултанте:

$$(1)\quad X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \Sigma X_i, \qquad У = \Sigma У_i, \qquad Z = \Sigma Z_i.$$

Идентичке обрасце добијамо за моменте резултанте у односу на три координатне осе. Означимо са x,y,z координате тачке А. Моменти потега P_i, чије су пројекције $X_i, У_i, Z_i$, у односу на осе јесу:

$$L_i = yZ_i - zУ_i, \qquad M_i = zX_i - xZ_i, \qquad N_i = xУ_i - yX_i;$$

моменти резултанте у односу на исте осе јесу:

$$L = yZ - zУ, \quad M = zX - xZ, \quad N = xУ - yX,$$

који се изрази, као год и они под (α) из претходне нумере, могу лако утувити и по показаном начину написати.

Према горњим вредностима за X,У, Z под (1), очевидно имаћемо:

$$(2)\quad L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n = \Sigma L_i, \qquad M = \Sigma M_i, \qquad N = \Sigma N_i$$

Како се за координатну осу може узети таква оса. каква се хоће, ми изводимо из једначинâ (2) ову теорему, познату под именом *Varignon*-ове *теореме:*

Варињонова теорема. — *Моменат резултанте у односу на једну ма коју осу раван је суми момената компонентних потега у односу на ту исту осу.*

Отуда се закључује овај короларни став: *Моменат резултанте од више конкурентних потега у односу на једну ма коју тачку* О *јесте геометријска сума момената компонентних потега у односу на ту исту тачку.*

И заиста, узевши тачку О за почетак, количине L,M,N јесу пројекције, на три осе, момента OG резултанте у односу на ову тачку; количине L_i, M_i, N_i јесу пројекције момента OG_i потега P_i у односу на исту тачку О (сл. 18).

Претходне једначине (2) изражавају управо да је потег OG геометријска сума потегâ: $OG_1, OG_2, \ldots, OG_n$.

Обратно, кад је овај короларни став доказан, Варињонова теорема следује непосредно из њега.

Приметимо: да бисмо могли дати геометријски доказ ове теореме, који би био у геометријским изразима само исказ оних аналитичких трансформација, које смо горе извршили.

На послетку, приметимо да се Варињонова теорема може проширити и исказати у овом облику:

Теорема. — *Дати су n конкурентних потега* $P_1, P_2, \ldots, P_n$, које можемо, померањем, довести да имају исти почетак A, *и дат је један други потег* AB; *конструишимо резултанту* R *од првих n датих потега. Моменат резултанте* R *и потега* AB *раван је суми момената потегâ* P_i *и потега* AB.

Претпостављајући, у овој последњој теореми, да је потег AB јединични потег, ова теорема постаје у истини Варињоновм теоремом.

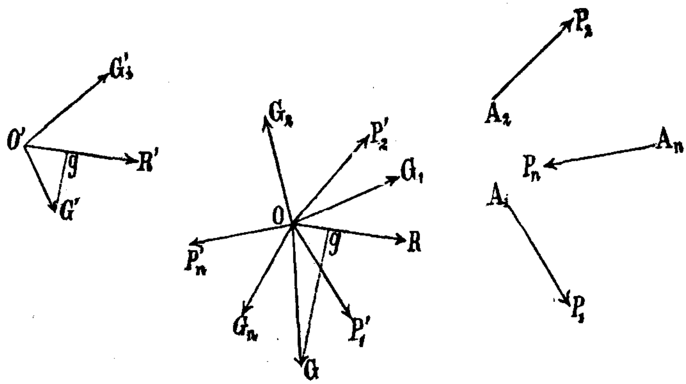
37. Систем ма каквих потега. Општа резултанта и резултујући моменат. — Нека су дати ма какви потези $P_1, P_2, \ldots, P_n$, чије су, наизменце, нападне тачке $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Изберимо једну произвољну тачку O простора, и ми ћемо звати:

1°. *Општа резултанта,* резултанту OR потегâ: OP'_1, $OP'_2, \ldots, OP'_n$, који имају тачку O за почетак и који су еквиполентни са датим потезима.

2°. *Резултујући моменат* у односу на тачку O, резултанту OG момената: OG_1, $OG_2, \ldots, OG_n$ датих потега у односу на ову тачку (сл. 19).

Кад се мења положај тачке O у простору, *општа резултанта* OR остаје иста по величини и по правцу, према самом начину на који је она одређена; на против, *резул-*

тујући моменат OG мења се, сем у случају: кад се тачка O помера по правој OR.



сл. 19

Узмимо за почетак тачку O, и означимо са x_i, y_i, z_i координате тачке A_i; са $X_i, У_i, Z_i$ пројекције потега P_i; са L_i, M_i, N_i његове моменте у односу на три осе претпостављене правоугле. С друге стране, нека су X,У,Z пројекције опште резултанте OR; а L, M, N пројекције резултујућег момента OG у односу на тачку O. Означавајући са знаком Σ једну суму, која је распрострта на све посматране потеге, имамо:

$$(R) \qquad X = \Sigma X_i, \quad У = \Sigma У_i, \quad Z = \Sigma Z_i;$$

$$(G) \qquad L = \Sigma L_i, \quad M = \Sigma M_i, \quad N = \Sigma N_i.$$

Нека су x', y', z' координате једне друге тачке O'; ми смо видели (n° 35) да резултујући моменат $O'G'_i$ једног таквог потега као што је P_i, у односу на тачку O', има за пројекције:

$$(G'_i) \qquad \begin{cases} L'_i = L_i - (y'Z_i - z'У_i), \qquad M'_i = M_i - (z'X_i - x'Z_i), \\ \qquad\qquad N'_i = N_i - (x'У_i - y'X_i). \end{cases}$$

Дакле, означавајући са X',У',Z' и L',M',N' пројекције од O'R' и O'G' на осе, имамо:

$$(\mathrm{R}') \qquad X' = \Sigma X_i = X, \quad У' = У, \quad Z' = Z;$$

$$(\mathrm{G}') \quad \begin{cases} L' = \Sigma L'_i = L - (y'Z - z'У), \quad M' = M - (z'X - x'Z), \\ \qquad N' = N - (x'У - y'X). \end{cases}$$

Помоћу ових формула, можемо израчунати R' и G' за све тачке O' простора, чим их знамо за једну тачку O. Ове формуле показују: *Резултујући моменат* O'G', *у односу на тачку* O', *јесте геометријска сума од резултујућег момента у односу на тачку* O *и момента, у односу на тачку* O', *опште резултанте* OR *у односу на тачку* O.

Примедба. — У погледу резултујућег момента можемо поставити једну теорему, која уопштава ону теорему, коју смо на страни 398 исказали. Ово је та теорема:

Теорема. — *Нека су* $\varDelta$ *једна оса, која иде кроз једну тачку* O, *и* OG *резултујући моменат једног система потегâ у односу на тачку* O; *ортогонална пројекција* OG' *потега* OG *на оси* $\varDelta$ *јесте резултујући моменат система у односу на осу* $\varDelta$.

И заиста, нека су OG_i моменат потега P_i у односу на тачку O, и OG'_i његова пројекција на оси $\varDelta$; ова пројекција OG'_i јесте моменат потега P_i у односу на осу $\varDelta$; геометријска сума OG' потегâ OG'_i представља дакле резултујући моменат датих потега у односу на осу; али, ова геометријска сума OG' очевидно је пројекција резултанте OG потегâ OG_i; — теорема је дакле доказана.

Отуда ћемо извести овај короларни став: *Нека су* Ox, Oy, Oz *три правоугле осе; резултујући моменти једног система потегâ у односу на ове осе представљају се трима потезима, који су пројекције на ове осе резултујућег момента у односу на почетак* O.

38. Промена опште резултанте и резултујућег момента. Инваријанте. Централна оса. — Претпоставимо, најпре, општу резултанту различну од нуле: тада је резултујући моменат G' различан од G, претпоставивши да тачка O' не буде положена на OR. Али, можемо доказати ову теорему:

Теорема. — *Пројекција резултујућег момента на правац опште резултанте јесте стална.*

И заиста, ми имамо:

$$R'G'\cos(R',G')=L'X'+M'У'+N'Z',$$

израз чија је десна страна, према вредностима за $X',У',Z'$ и L',M',N', једнака са $LX+MУ+NZ$, тј. *стална;* и, како је R' стална, имамо

$$G'\cos(R',G')=C^{te}=G\cos(R,G)\,,$$

што доказује теорему.

Према томе, ма какви били координатни почетак и правци правоуглих оса, количине:

$$X^2+У^2+Z^2 \qquad \text{и} \qquad LX+MУ+NZ$$

задржавају *непромењљиве вредности;* можемо их назвати *инваријанте* система потегâ.

Ако се, као што смо казали (n° 28), назове *геометријским производом* двају потега производ из ових двају потега и косинуса угла њиховог, онда се може рећи да је инваријанта $LX+MУ+NZ$ геометријски производ из опште резултанте и резултујућег момента за једну ма коју тачку простора. Ми ћемо, мало даље (n° 45), дати једно друго важно геометријско значење за другу инваријанту.

Пошто је општа резултанта претпостављена увек различна од нуле, то се може изабрати тачка O', чије су координате x',y',z', тако да резултујући моменат O'G' буде управљен правцем исте праве којом је управљена и општа резултанта O'R'. За то треба и довољно је да количине L',M',N' буду сразмерне са X,У,Z; тј. треба да постоје ове једнакости:

$$(1)\quad \frac{L-(y'Z-z'У)}{X}=\frac{M-(z'X-x'Z)}{У}=\frac{N-(x'У-y'Z)}{Z}.$$

Ове једначине, линеарне по x',y' и z', дају, као геометријско место тачке O', једну праву D'D паралелна правцу опште резултанте, праву коју зову *централном осом* (сл. 20). У једној тачци O' ове осе, резултанта и


сл. 20

резултујући моменат управљени су правцем осе, у истом смислу или у смислу супротном, према томе да ли је израз LX+MУ+NZ положан или одречан. Резултујући моменат g тада је *minimum*, јер се он поклапа са својом пројекцијом на општој резултанти.

У особеном случају, претпоставивши R различно од нуле, кад је инваријанта

$$LX + MУ + NZ$$

равна нули, пројекција резултујућег момента у односу на једну ма коју тачку на општој резултанти јесте нула; тај је моменат управан на резултанту, и моменат *minimum* O'g јесте *нула*.

Примедбе. — 1. Множећи и бројитеље и именитеље једначинâ под (1), наизменце, са X,У,Z и сабирајући бројитеље и именитеље, наћи ћемо, за заједничку вредност ових односа (1), ово:

$$(2) \qquad \frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2} = \frac{G\cos(R,G)}{R},$$

наћи ћемо вредност, која је равна нули кад је моменат minimum нула.

Кад је *општа резултанта равна нули*, формуле показују да су количине L',M',N' једнаке са L,M,N: тада је *резултујући моменат исти за све тачке простора.*

Посматрања, која воде ка појму централне осе, немају више смисла у овоме случају. Условљено је да се узме као централна оса једна произвољна права, која је паралелна резултујућем моменту.

2. Пошто су изрази $X^2 + Y^2 + Z^2$ и $LX + MY + NZ$ инваријанте система потегâ, то је и њихов количник

$$\frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{H}{R^2} = h$$

једна инваријанта. Тај количник представља једну линију, јер је R линија а H је запремина. Професор Koenigs даје количнику h име *параметар*.

39. Сума момената у односу на једну ма коју осу. Праве од момента нула. — Посматрајмо n потега у простору: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и један произвољни потег P. *Резултујући моменат* система потегâ P_i у односу на потег P зове се алгебарска сума момената потегâ P_i и потега P. Овај резултујући моменат јесте један број. Претпостављајући, сада, да је потег P јединични потег, он представља једну осу; ми ћемо одредити резултујући моменат посматранога система потегâ у односу на једну осу.

И заиста, нека је $\varDelta$ једна оса која саставља две тачке O', чије су координате x',y',z', и O'', чије су координате x'', y'', z''; моменат $\mathfrak{M}_i$ потега P_i, у односу на ову осу, дат је једном претходном формулом (n° 35).

Алгебарска сума момената $\mathfrak{M}_i$ свију потега у односу на ову исту осу јесте дакле

$$\mathfrak{M} = \Sigma\mathfrak{M}_i = \frac{(x''-x')\,L+(y''-y')\,M+(z''-z')N+(y'z''-z'y'')X+(z'x''-x'z'')Y+(x'y''-y'x'')Z,}{+\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}}$$

то је један број. Али представљање момената са потезима које дугујемо *Cauchy*-ју, допушта нам да појмимо и на други начин резултујући моменат једног система потегâ у односу на једну осу.

И заиста, посматрајмо моменат потега P_i у односу на осу Δ, овај се моменат може представити једним потегом G_i носен осом Δ, и тај је потег G_i мерен на оси Δ бројем $\mathfrak{M}_i$. Нађимо сада геометријску суму свију ових потега G_i носених осом Δ, нека је G добивени потег; овај потег G представљаће нам резултујући моменат система потегâ у односу на осу Δ.

Овај чисто *геометријски појам* сагласан је, у осталом, са *алгебарским појмом* резултујућег момента $\mathfrak{M}$, јер је број $\mathfrak{M}$ управо онај број што мери потег G на оси Δ.

И заиста, ми знамо, кад је потег G геометријска сума више других G_i које носи једна иста оса, да је број $\mathfrak{M}$ који мери G раван алгебарској суми бројева $\mathfrak{M}_i$ који мере потеге G_i.

Праве од момента нула зову се праве Δ у односу на које је сума момената датих потега равна нули. Ове су праве одређене једначином, која се добива стављајући бројитеља од $\mathfrak{M}$ раван нули; пошто је та једначина линеарна и хомогена у односу на шест координата: $x''-x'$, $y''-y'$, $z''-z'$, $y'z''-z'y''$, $z'x''-x'z''$, $x'y''-y'x''$ праве Δ по Plücker-у, то праве од момента нула образују један *ли-*

неарни комплекс, проучен први пут од стране Шала (Chasles-a). Ове су праве нормалне на резултујући моменат у односу на једну ма коју од њихових тачака. — Праве од момента нула увео је *Möbius*.

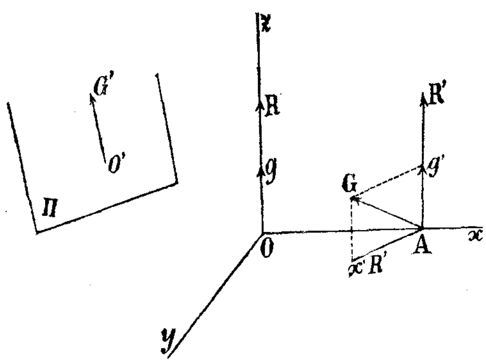
40. Сведене једначине. Комплекс Шалов. — Узмимо за осу Oz централну осу, изабравши као позитиван смисао смисао опште резултанте R. Означимо са g алгебарску вредност момента минимум, која је вредност цењена положно у смислу Oz. Тада имамо:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = R\,;\ L = 0,\ M = 0,\ N = g.$$

Резултујући моменат у односу на једну ма коју тачку O' (сл. 21) има за пројекције (стр. 415):

$$(O'G') \qquad L' = -y'R, \qquad M' = x'R, \qquad N' = g,$$

формуле које дозвољавају да проучимо размештај (поделу) резултујућих момената у простору. Како је резултујући



сл. 21

моменат исти у свима тачкама једне паралелне са Oz, и како је размештај резултујућих момената симетричан око Oz осе, почем су формуле независне од оријентације осâ xOy, довољно је проучити промену резултујућег момента AG у односу на све тачке A на Ox оси; ова промена потиче непосредно из горњих формула, у којима се претпостављa $y'=0$. Ми ћемо, при проучавању хеликоидалног кретања једног чврстог тела, добити једну врло просту слику (идеју) о овом размештају резултујућих момената у простору.

Једначина Шаловог комплекса, који је образован од правих од момента нула $\mathfrak{M}=0$, постаје

$$(z''-z')g+(x'y''-y'x'')\mathrm{R}=0.$$

Праве O'O'' овога комплекса, пролазећи кроз једну дату тачку O', производе једну раван Π, названа *фокална раван* или *поларна раван* тачке O', која је раван управна на резултујући моменат у односу на тачку O'. Обратно, праве комплекса положене у једној равни Π пролазе кроз једну тачку O' такву да је резултујући моменат у односу на ову тачку нормалан на раван. По Шалу, каже се да је тачка O' *жижа*, или по некима *пол*, равни Π: ова је жижа на коначном одстојању све дотле докле раван није паралелна са централном осом.

Можемо, још, исказати ова два става: 1° Кад се једна раван Π окреће око једне фиксне праве D, њена жижа описује једну спрегнуту праву Δ; и, обратно, 2° Кад се једна раван окреће око Δ, њена жижа описује праву D.

Лако је увидети шта бива са овим ставовима, кад су g или R равни нули.

41. Еквивалентни системи. Дефиниција еквиваленције. — За два система потегâ каже се да су *еквивалентни*, кад је геометријска сума потегâ једнога система еквиполентна геометријској суми потегâ другога, и кад је, поред тога, резултујући моменат једнога система у односу на једну тачку O еквиполентан резултујућем моменту другога у односу на ту исту тачку; тј., краће, за два система потегâ каже се да су *еквивалентни* када су њихове опште резултанте и њихови резултујући моменти у односу на једну тачку О простора *идентични*. Ова је дефиниција независна од избора тачке О. Кад су два система потегâ еквивалентни, тада су њихови резултујући моменти идентични у односу на сваку другу тачку простора; посебице, оба система имају исту централну осу и исти моменат минимум. На пример, један систем конкурентних потега еквивалентан је једном јединим потегу, који је назват *резултантом* система.

Нека су (S) и (S_0) два система потегâ; нека су X,У,Z,L,M,N пројекције, на три осе, опште резултанте и резултујућег момента система (S) у односу на почетак О, а X_0, $У_0$, Z_0, L_0, M_0 и N_0 аналогне количине односно система (S_0). Услови еквиваленције двају система (S) и (S_0) јесу ови:

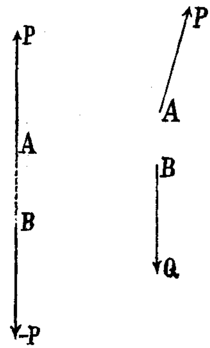
$$X=X_0,\quad У=У_0,\quad Z=Z_0;\quad L=L_0,\quad M=M_0,\quad N=N_0.$$

Примедба. — Називајући количине X, Y, Z, L, M, N *координатама* система потегâ (S), ми видимо, према последњим једначинама: *Два еквивалентна система имају исте координате.*

42. Систем потега еквивалентан нули. — За један систем (S) каже се да је *еквивалентан нули*, када су његова општа резултанта и његов резултујући моменат у односу на једну тачку равни нули. Тада су ове величине равне нули за сваку тачку простора. Тај факат изражава се са ових шест једначинâ:

$$X=0,\quad У=0,\quad Z=0;\quad L=0,\quad M=0,\quad N=0.$$

Узмимо, нпр., систем двају потега *једнаких а противположених*, тј. систем образован од два потега P и — P једнаки а управљени у супротном смислу, правцем праве AB, која саставља њихове нападне тачке (сл. 22); овај је систем, очевидно, еквивалентан нули. Обратно, можемо доказати став: *Кад је систем двају потега* P *и* Q *еквивалентан нули, ови су потези једнаки а противположени.*



сл. 22

И заиста, пошто општа резултанта мора бити нула, Q је једнако а противположено са P. Пошто резултујући моменат мора бити нула у односу на једну ма коју тачку, узмимо га у односу на нападну тачку A потега P. Моменат од P у односу на тачку A јесте нула: резултујући моменат своди се дакле на моменат од Q, и, како он мора бити нула, правац од Q пролази кроз A, што доказује горњи став.

Као год што у Алгебри две једнаке количине имају разлику равну нули, и обратно, кад две количине имају разлику равну нули, оне су једнаке, — у теорији потегâ имамо ову теорему:

Теорема. — *Да два система потегâ* (S) *и* (S_0) *буду* еквивалентни, *треба и довољно је: да систем образован потезима система* (S) *и онима система* (S_0) *са промењеним знаком да буде* еквивалентан нули.

И заиста, мењајући знаке потезима система (S_0), добија се систем $(-S_0)$ чија општа резултанта и резултујући моменат у односу на тачку O јесу елементи аналогни онима система (S_0) а супротних знакова. Општа резултанта и резултујући моменат тоталног система, који је образован скупом од (S) и $(-S_0)$, имају дакле за пројекције:

$$X - X_0, \quad Y - Y_0, \quad Z - Z_0; \quad L - L_0, \quad M - M_0, \quad N - N_0.$$

Да ова два система буду *еквивалентни*, треба и довољно је да ових шест количина буду *равне нули*, што доказује теорему.

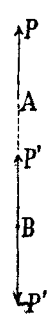
Ми ћемо у Статици дати најважнијих примера о системима потегâ, који су еквивалентни нули.

43. Елементарне радње (операције). — Добијају се системи, који су еквивалентни једном датом систему, помоћу ових елементарних операција:

1°. Додавањем или изостављањем двају једнаких а противположених потега; преносом једног потега у једну тачку његовог правца;

2°. Слагањем више конкурентних потега у један јединк потег; разлагањем једног потега на конкурентне потеге.

Пренос једног потега AP у једну тачку B његовога правца последица је прве операције; и заиста, узмимо, правцем праве AB, два једнака а противположена потега



сл. 23

P' и —P', са заједничким почетком у B, од којих је први, P', једнак са P и истога смисла као и P (сл. 23). За тим изоставимо два једнака а противположена потега P и —P'; остаје потег BP', који није ништа друго него потег AP пренесен у тачку B његовога правца.

Ми ћемо показати: да ове две елементарне операције не мењају *ни општу резултанту нити резултујући момент система у односу на једну ма коју тачку.*

Узевши ту тачку за почетак, треба потврдити да шест сума:

$$X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i,$$
$$L = \Sigma L_i, \quad M = \Sigma M_i, \quad N = \Sigma N_i,$$

остају непромењиве. И заиста, додати или изоставити два једнака а противположена потега, значи додати или изоставити у свакој суми два члана једнака а противно означена. Заменити више конкурентних потега са резултујућим потегом, значи заменити: у трима првим сумама суму пројекцијâ ових потега са пројекцијом њихове резултанте, а у трима другим сумама суму момената ових потега са моментом резултанте, што излази на то заменити више чланова у свакој суми са њиховом сумом. Из истог разлога разлагање једног потега на конкурентне потеге не мења шест сумâ.

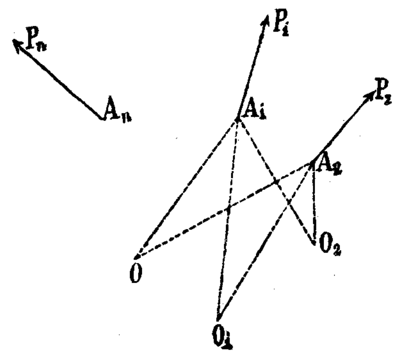
Тако исто, кад се једном ма каквом систему потегâ додаду два и два једнака а противположена потега, онда систем образован скупом ових двају системâ еквивалентан је првоме систему; јер геометријска сума додатог система и његов моменат у односу на једну ма коју тачку простора равни су нули.

Помоћу ових операција, може се захтевати да се замени један систем потегâ (S) са једним еквивалентним системом *простијим.*

44. Свођење једног система потегâ. Свођење на два потега. — Један систем потегâ може бити сведен на бесконачно много начина на два потега, од којих један пролази кроз једну произвољну тачку.

Ми ћемо, најпре, показати да је један систем потега $P_1, P_2, \ldots, P_n$ еквивалентан трима потезима, чије су нападне тачке O, O_1, O_2, узете по вољи, не на правој линији (сл. 24).

Разложимо потег P_1 на три друга, који су, наизменце, управљени правцем правих OA_1, O_1A_1 и O_2A_1, за тим, померајући нападну тачку свакога потега на његовом правцу, пренесимо ове компоненте, прву у тачку O, другу у тачку O_1, трећу у тачку O_2. Тако исто разложимо потег A_2P_2

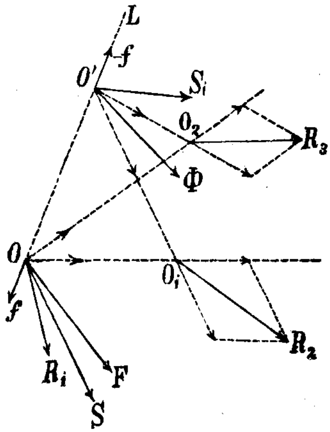


сл. 24

на три друга управљени правцем OA_2, O_1A_2 и O_2A_2, и пренесимо ове компоненте у O, O_1 и O_2; и тако редом. Потези, чији су почеци у O, имају једну резултанту R_1; потези, чији су почеци у O_1, имају једну резултанту R_2; а тако исто потези, чији су почеци у O_2, имају једну резултанту R_3. На тај начин, систем задатих потега замењен је системом трију потега R_1, R_2 и R_3, чије су нападне тачке у трима произвољним тачкама O, O_1 и O_2.

Ми смо разложили потег P_1 на три друга, управљени правцем правих OA_1, O_1A_1 и O_2A_1; ово је разлагање могућно сваки пут када тачка A_1 није положена у равни трију тачака O, O_1 и O_2; јер, тада, три праве образују један триједар. Када би тачка A_1 била положена у равни OO_1O_2, без да потег P_1 сâм-он буде у њој, онда бисмо померали нападну тачку овога потега по његовом правцу, дотле док је изведемо ван равни. Када би овај потег био положен у равни, онда бисмо га разложили на два потега који су управљени правцем правих OA_1 и O_1A_1.

Ми смо заменили задате потеге са трима потезима R_1,R_2 и R_3, чије су нападне тачке у трима произвољним тачкама O,O_1,O_2. Ево како се своде ова три потега на два. Нека је OL (сл. 25) пресечна права равни повучене

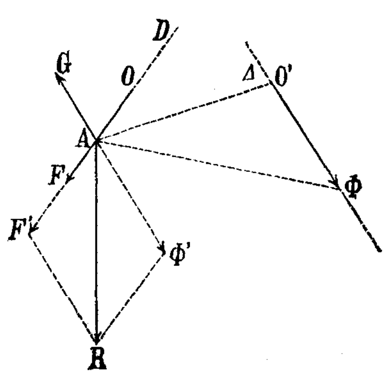


сл. 25

кроз тачку O и потег R_2 и равни повучене кроз тачку O и потег R_3. Узмимо једну тачку O' произвољно на овој правој. Потег R_2, положен у првој равни, може бити разложен на два потега, који су управљени правцем правих OO_1 и $O'O_1$; ми ћемо пренети ове две компоненте, једну у тачку O, другу у тачку O'. Тако исто, потег R_3, положен у другој равни, може бити разложен на два потега, који су управљени правцем правих OO_2 и $O'O_2$; ми ћемо пренети и ове две компоненте, једну у тачку O, другу у O'. Ми имамо сада три потега са нападним тачкама у O, и два потега са нападним тачкама у O'; три прва потега имају једну резултанту F, два друга имају резултанту Φ. На тај начин, систем трију потега R_1,R_2 и R_3, а према томе и систем задатих потега, замењени су са еквивалентним системом двају потега F и Φ. Кад би два потега R_2 и R_3 били положени у једној истој равни са тачком O, онда бисмо повукли кроз тачку O једну ма какву праву OL у тој равни.

Има бесконачно много начина да се сведе систем задатих потега на два потега. Ми прво примећујемо, без да се померају нападне тачке O и O' двају потега F и Φ, могу се мењати ова два потега. И заиста, замислимо да се на двама крајевима праве OO' додаду два потега једнака а противположени f и $-f$; два потега F и f, са нападним тачкама у O, дају једну резултанту S; два потега Φ и $-f$, са нападним тачкама у O', дају једну резултанту S_1; на тај начин, систем двају потега F и Φ замењен је са еквивалентним системом двају потега S и S_1. Резултанта S_1 положена је у једној одређеној равни, у равни повученој кроз тачку O и потег Φ. Нападна тачка O прве резултанте јесте једна произвољна тачка; остављајући ову тачку O фиксном, може се померати по вољи тачка O' по правој $O'S_1$ и, према томе, у равни OO'Φ, због произвољне величине $-f$. У опште, два потега F и Φ, еквивалентни свима задатим потезима, нису положени у једној истој равни.

Општа резултанта и резултујући моменат првобитног система у односу на једну ма коју тачку једнаки су са општом резултантом и са резултујућим моментом система двају потега F и Φ у односу на исту тачку (сл. 26). На пример, ако се узме једна тачка A на правцу од F, општа



сл. 26

резултанта AR у A добија се слажући један потег AF', једнак и паралелан са F, са једним потегом AΦ', једнак и паралелан са Ф; резултујући моменат AG, у односу на тачку A, раван је моменту од Ф, јер онај од F раван је нули; дакле, потег AG управан је на раван AO'Ф и тачка A јесте жижа равнина (n° 40).

Дакле, пошто се жижа једне равни, која пролази кроз један од потега F или Ф, налази на другом, ови су потези управљени правцем двеју спрегнутих правих D и *Δ*.

Једна права наслањајући се у исто доба на правце од F и Ф очевидно је једна *права од момента нула*; обратно, кад једна права од момента нула сече правац од F, она ће тако исто сећи и правац од Ф, на коначном или бесконачном одстојању, јер, пошто је моменат од F раван нули у односу на ову праву, онај од Ф мора бити нула такође.

Као вежбање, моћи ће се доказати: да се могу увек свести потези једног система на два, од којих је један, F, управљен правцем једне произвољне праве D', која није паралелна општој резултанти.

Напомена. — Опширније *о теорији праве* и *о примени теорије комплекса на системе потега* може читаоц врло корисно консултирати дело *M. G. Koenigs*-а (n°61).

45. Геометријско значење инваријанте LX+MY+NZ. — Означимо са X',У',Z'; L',M', N'; X",У",Z"; L", M", N" пројекције и моменте двају потега F и Ф, који су еквивалентни задатом систему. Имамо:

$$X=X'+X'', ..., ...; L=L'+L'', ..., ...;$$

позивајући се на израз за моменат двају потега, који је израз дат напред (n° 33), имамо дакле

$$LX+MУ+NZ=(L'+L'')(X'+X'')+...=6\text{запр.}(F,Ф),$$

што даје једно важно значење за инваријанту

$$LX+MУ+NZ.$$

Нека су сада $P_1, P_2, \ldots, P_n$ првобитни потези задатог система, имамо седам релација:

$$(1) \qquad X = \Sigma X_i, \ \ldots, \ldots; \ L = \Sigma L_i, \ \ldots, \ldots;$$

$$(2) \qquad L_i X_i + M_i Y_i + N_i Z_i = 0.$$

На основу релацијâ под (1) и идентичне једначине под (2), имамо такође:

$$LX + MY + NZ = \Sigma'(L_i X_k + M_i Y_k + N_i Z_k + L_k X_i + M_k Y_i + N_k Z_i),$$

последња сума Σ' простирући се на све комбинације сказаљака i и k. Но израз под знаком Σ' још је моменат двају потега P_i и P_k; према томе

$$LX + MY + NZ = 6\,\Sigma' \text{запр.}(P_i, P_k),$$

где је број чланова на десној страни раван $\frac{n(n-1)}{2}$. Ове формуле показују: *Ма какав био начин свођења потегâ* P_i *на два еквивалентна потега* F *и* Φ, *тетраедар* (F,Φ) *сталан је и раван алгебарској суми тетраедара добивених комбинишући два и два потеге* P_i (Chasles). Да два потега F и Φ буду у једној истој равни, треба и довољно је да Шалов тетраедар (F,Φ) буде нула.

46. Стварно свођење двају еквивалентних система један на други. — Нека је, најпре, један систем (S) еквивалентан нули: два потега F и Φ, на које се он може свести, такође су еквивалентни нули, тј. према ономе што смо видели (n° 42), *једнаки су а противположени*. Тада их можемо изоставити и стварно свести систем (S) на нулу.

Нека имамо сада два система потегâ (S) и (S_0), који су *еквивалентни*; можемо их стварно свести један на други помоћу елементарних операција. И заиста, пођимо од (S): додајмо ка (S) систем (S_0) $(-S_0)$ образован потезима од (S_0) и овим истим потезима са противним знаком; што је једна од елементарних операција поновљена извесан број пута. Скуп системâ (S) и ($-S_0$), пошто је еквивалентан нули, *своди се на нулу помоћу елементарних операција.* Остаје дакле систем (S_0), што доказује став.

Према досадашњем излагању, израз $LX + MY + NZ$ инваријанта је са више разлога:

1° Са гледишта трансформације координатâ;

2° Са гледишта замене задатог система са једним еквивалентним системом.

Дакле, ми можемо исказати ову теорему:

Теорема. — *Сума момената једнога система потегâ, узети два и два, не мења се кад се задати систем замени са једним еквивалентним системом.*

Говорећи о тетраедрима, место о моментима, можемо рећи:

Сума тетраедара конструисаних на потезима једнога система, узети два и два не мења се кад се задати систем замени са другим еквивалентним системом.

Шалова теорема, из претходне нумере, особени је случај ове теореме.

47. Спрегови. — Нека су A_1P_1 један потег, O и O' две ма које тачке. Можемо доказати став: *Геометријска разлика* $(A_1P_1, O') - (A_1P_1, O)$ *између момената једног истог потега* A_1P_1 *у односу на тачке* O' *и* O *равна је моменту* (OP'_1, O') *у односу на тачку* O' *једног потега* OP'_1, *еквиполентан са* A_1P_1 *и имајући тачку* O *за почетак.*

И заиста, нека је $A_1\omega$ један потег еквиполентан са OO' и имајући за почетак тачку A_1 (сл. 27); пошто је A_1O' резултанта двају потега $A_1\omega$ и A_1O, и дајући знацима $=$, $+$, $-$ геометријски смисао, имаћемо

$$(A_1O', P_1) = (A_1\omega, P_1) + (A_1O, P_1);$$

у осталом

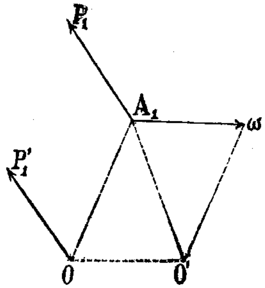
$$(A_1P_1, O') = -(A_1O', P_1),$$
$$(A_1P_1, O) = -(A_1O, P_1).$$

$$(A_1P_1,\omega)=-(A_1\omega,P_1):$$

дакле

$$(A_1P_1,O')-(A_1P_1,O)=(A_1P_1,\omega).$$

Али, како се може прећи са фигуре, која је образована са трима тачкама A_1,P_1 и ω, на фигуру образовану



сл. 27

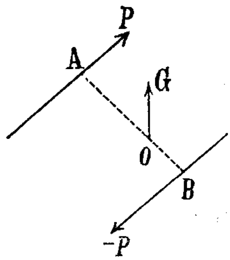
трима тачкама O, P'_1 и O' једном транслацијом која је равна A_1O, јасно је да је потег (A_1P_1,ω) еквиполентан потегу (OP'_1,O'), и став је доказан.

Отуда следује, кад се посматра један ма какав систем потегâ и две тачке O и O', да се може исказати ова теорема:

Теорема. — *Геометријска разлика између резултујућих момената овога система у односу на тачке* O' *и* O *биће равна моменту у односу на* O' *једног потега, који је еквиполентан геометријској суми елемената датога система и чија акциона линија пролази кроз тачку* O (стр. 415).

Посебице, кад је геометријска сума елемената датога система равна нули, резултујући моменат система у односу на једну тачку независан је од те тачке. То је што и бива, кад се задати систем своди на један *спрег* (фр. *couple;* нем. *Paar*).

По Поансоту, *спрегом* се зове скуп двају потега P, —P једнаких, паралелних а супротнога смисла (стр. 308). *Крак спрега* јесте најкраће одстојање AB (сл. 28) ових двају потега; *моменат спрега* јесте производ AB.P из крака спрега и једнога од потегâ. Кад је моменат спрега раван нули, спрег је еквивалентан нули; јер, или су оба потега равни нули, или је $AB=0$ и тада су два потега једнаки а *противположени (супротнога смисла)*.



сл. 28

Пошто је спрег један систем потегâ чија је општа резултанта *нула, резултујући моменат једног спрега сталан је по величини, правцу и смислу за све тачке простора*. Овај стални резултујући моменат зове се *осом спрега*. Дакле, оса једног спрега јесте један потег одређен по величини, правцу и смислу, али *чија нападна тачка може бити произвољно изабрата у простору*. Да се види који је овај потег, потражимо резултујући моменат у односу на једну тачку O крака AB, која је положена између A и B; моменти двају потега P и — P биће управљени управно на раван спрега, *у истом смислу*, јер два потега P и — P *имају исти ротациони смисао* око тачке O; резултујући моменат OG или *оса спрега* јесте, дакле, управан на раван овога спрега и раван је $P.OA+P.OB$, или раван је $P.AB$, тј. раван је моменту спрега.

Према томе, *два спрега од исте осе спрега јесу еквивалентни*, јер они оба имају општу резултанту равну нули и исти резултујући моменат. Они ће дакле моћи бити сведени један на други помоћу елементарних операција. Тако исто, два спрега, чије су осе еквиполентне, образују два система еквивалентна.

Моменат спрега представљен је потегом, чије су пројекције L, M, N на координатним осама. Да бисмо имали моменат једнога спрега у односу на једну осу Δ може се, према општој методи (n° 37 и n°39), узети моменат у односу на једну тачку O ове осе и пројектовати га на Δ. Дакле:

Моменат једнога спрега у односу на једну осу Δ добија се пројектујући на ту осу моменат спрега.

Отуда се закључује да су, за две осе паралелне и истога смисла, моменти једнога спрега једнаки.

Да моменат једнога спрега у односу на осу Δ буде нула, треба и довољно је, према ономе што претходи, да оса Δ гради прав угао са потегом који представља моменат тога спрега.

Раван која садржи спрег, и свака раван нормална на моменат спрега, зове се *раван спрега.*

48. Слагање спреговâ. — Посматрајмо случај двају спрегова:

$$0,\ 0,\ 0,\ L,\ M,\ N,$$
$$0,\ 0,\ 0,\ L',\ M',\ N'.$$

Резултујући систем јесте један спрег, чија је оса спрега геометријска сума осâ двају датих спрегова.

Тако се, на очигледан начин, долази на правило о слагању двају и више спрегова, правило које је Поансо исказао.

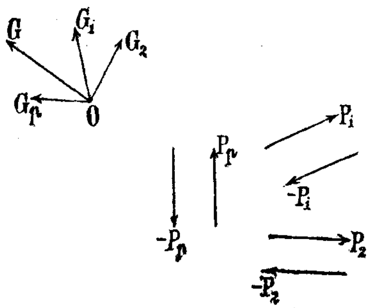
Узмимо општи случај.

Један ма колики број спрегова увек је еквивалентан једном једином спрегу, чија је оса спрега геометријска сума осâ компонентних спрегова.

И заиста, систем образован од p спрегова: P_1, $-P_1$; P_2, $-P_2$; ...; P_p, $-P_p$ јесте један систем потегâ чија је општа резултанта равна нули. Дакле, резултујући моменат овога система исти је у односу на све тачке простора (сл. 29).

Да добијемо овај резултујући моменат OG, у односу на тачку O, можемо поступити овако: узме се, најпре, резултујући моменат OG_1 од P_1 и $-P_1$, моменат који је раван оси првога спрега, по том резултујући моменат OG_2

од P_2 и — P_2, који је раван оси другога спрега, и тако редом до OG_p, који је раван оси последњега спрега; за тим се слажу међу собом сви ови компонентни моменти

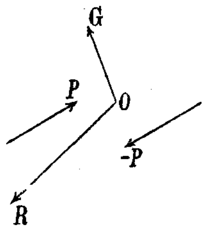


сл. 29

$OG_1, OG_2, \ldots, OG_p$. Посматрајмо тада један спрег чија је оса OG равна резултујућем моменту; овај једини спрег еквивалентан је систему датих спрегова, јер он има, као овај систем, општу резултанту равну нули, и један резултујући моменат раван OG. Помоћу елементарних операција, моћи ћемо свести дати систем спрегова на један једини спрег, чија је оса OG. Ако је $OG = 0$, једини крајни спрег еквивалентан је нули; задати систем тако исто.

Примедба. — Обратно, може се извршити *разлагање спрегова.* Тако, нпр., кад је дат један ма какав спрег, моћи ћемо га *разложити* у више других, и то на бесконачно много начина.

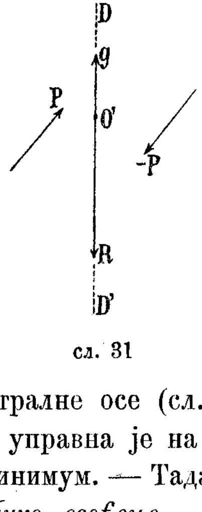
49. Свођење на један једини потег и један спрег. — Један ма какав систем потега еквивалентан је: једном једином потегу, који је раван (еквивалентан) општој резултанти, чија је нападна тачка једна произвољна тачка, и једном једином спрегу, чија је оса резултујући моменат система у односу на ову тачку. И заиста, нека су OR општа резултанта и OG резултујући моменат система у односу на једну произвољну тачку O. Нови систем, образован потегом R и једним спрегом (P,—P) чија је оса OG, еквивалентан је задатом систему, јер он има исту општу резултанту OR и исти резултујући моменат OG у односу на тачку O (сл. 30). Дакле, задати систем моћи ће бити сведен на систем R, P, —P помоћу елементарних операција.



сл. 30

Како је тачка O узета произвољно, има бесконачно много начина да се одреде један потег и један спрег, еквивалентни једном датом систему. Једном тачка O изабрата, спрег (P,—P) није потпунце одређен, пошто се може узети за овај спрег један ма који од спрегова по броју бесконачни имајући OG за осу.

Ако је тачка O узета на централној оси DD' у тачци O', општа резултанта O'R и резултујући моменат O'g управ-



сл. 31

љени су правцем централне осе (сл. 31); у том случају, раван спрега (P,—P) управна је на правац резултанте R а његова оса јесте минимум. — Тада, то свођење система потегâ зове се *канонично свођење*.

Најзад, ако ова тачка O може бити узета тако да резултујући моменат буде нула, онда је систем еквивалентан једном једином потегу R, који је назват резултантом система.

50. Торзер (torseur). — Теорију потегâ јако је био развио најпре *Möbius*, а доцније енглески геометар *Ball*.

У случају, кад потези представљају силе које дејствују на једно чврсто тело, енглески геометар Ball зове *torseur* или *torsion (упредање, увијање)*, а *Plücker* зове *dyname:* претходни систем образован једним потегом O'R (сл. 31) и једним спрегом чија је раван управна на овај потег. Тада, теорија потегâ постаје теоријом торзерâ или динамâ, чији принципи датирају од славног Поансотовог дѐла Статике.

Зове се *нападна тачка, правац, смисао* и *величина* торзера: нападна тачка, правац, смисао и величина потега O'R. *Стрелом* (*la flèche) f* торзера P. Appell зове однос величине осе спрега g ка величини потега R, тај је однос посматран као положан или одречан, према томе да ли су потези O'R и O'g истога смисла или смисла супротнога. Усвајајући ове називе види се: да је један ма какав систем потега еквивалентан једном торзеру, који је управљен правцем централне осе, имајући за величину и смисао величину и смисао опште резултанте, а за стрелу (flèche) количину

$$f = \frac{g}{R} = \frac{G\cos(R,G)}{R} = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

дакле, f је заједничка вредност, која је нађена за једнаке односе који фигуришу у једначинама централне осе (n°38).

Дати торзери у ма коликом броју слажу се увек у један једини торзер. И заиста, сваки дати торзер јесте један систем трију потега; дакле, скуп датих торзера јесте један известан систем потега који је, према напред датим правилима, еквивалентан једном једином торзеру, који знамо одредити.

51. Особени случајеви претходног свођења. — Може се, посебице, десити да један систем потегâ, који није еквивалентан нули, да буде еквивалентан *једном једином спрегу* или *једном једином потегу.*

Један систем еквивалентан је *једном јединим спрегу* кад је општа резултанта *равна нули.* Тада имамо: $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, без да количине L, M, N буду све равне нули.

Да један систем буде еквивалентан једном једином потегу, треба и довољно је да, пошто је општа резултанта различна од нуле, да *моменат минимум g* буде *нула,* тј. да моменат, у односу на једну ма коју тачку простора, буде *управан на правац опште резултанте.* И заиста, за један систем образован од једног јединог потега, централна оса поклапа се са тим потегом и моменат минимум јесте нула; обратно, ако је моменат минимум једног система раван нули, овај је систем еквивалентан једном јединим потегу, који је управљен правцем централне осе, пошто је спрег од осе минимум, који треба додати у општем случају, постао раван нули. Тада имамо $f=0$; тј. тада је $LX+MY+NZ=0$, без да су X, Y, Z сви равни нули.

52. Кратки извод. — У кратком изводу, имамо овај преглед:

$$LX+MY+NZ \gtrless 0. \left\{ \begin{array}{l} \text{Систем еквивалентан двама потезима,} \\ \text{који нису положени у једној истој равни; еквивалентан такође једном потегу,} \\ \text{који је управљен правцем централне осе,} \\ \text{и једном спрегу, чија је раван управна} \\ \text{на ову осу, тј. једном торзеру.} \end{array} \right.$$

<table>
<tr>
<td rowspan="3">$LX+MУ+NZ=0.$</td>
<td rowspan="3">Систем еквивалентан двама потезима, положеним у једној истој равни.</td>
<td>1° $X^2+У^2+Z^2>0.$</td>
<td>Систем еквивалентан једном јединном потегу, управљен правцем централне осе.</td>
</tr>
<tr>
<td>2° $\begin{cases} X=У=Z=0, \\ L^2+M^2+N^2>0. \end{cases}$</td>
<td>Систем еквивалентан једном јединном спрегу.</td>
</tr>
<tr>
<td>3° $\begin{cases} X=У=Z=0, \\ L=M=N=0. \end{cases}$</td>
<td>Систем еквивалентан нули.</td>
</tr>
</table>

53. Моменат двају система потегâ. — Дата су два система потегâ (S) и (S_0); скуп ових двају система образује један систем, који се зове *резултујући систем* двају других. У сваком од ових двају система узмимо по један потег и образујмо алгебарску суму момената свију могућих група од по два тако изабратих потега; према дефиницији, ова је сума *моменат двају система потегâ.* Наћи тај моменат.

Употребљујући означења из n°41, *моментом двају система потегâ* (S) *и* (S_0) зове се количина:

$$(1) \qquad LX_0+MУ_0+NZ_0+L_0X+M_0У+N_0Z,$$

чија је вредност независна од избора осâ. И заиста, можемо је написати у облику:

$$(L+L_0)(X+X_0)+(M+M_0)(У+У_0)+(N+N_0)(Z+Z_0)$$
$$-(LX+MУ+NZ)-(L_0X_0+M_0У_0+N_0Z_0),$$

у коме три члана јесу инваријанте за тотални систем (S)+(S_0) или за један од системâ (S) или (S_0). Према значењу ових трију инваријаната, таквом значењу какво потиче из n°45, моменат двају система (S) и (S_0) раван је шест пута сума запремина тетраедара добивених додајући све потеге из (S) ка свима онима из (S_0).

Означавајући са δ најкраће одстојање централних оса двају система, са α њихов угао, са R и R_0 опште резултанте управљене правцем ових оса, са g и g_0 моменте минима двају система цењени правцем резултаната, онда моменат двају система потегâ јесте:

$$(2) \qquad \pm RR_0\delta\sin\alpha+(gR_0+g_0R)\cos\alpha,$$

где је први члан моменат од R и R_0, као што се то непосредно оверава узимљући једну од централних оса за Oz осу (n° 40) и пазећи шта бива са изразом под (1).

Примедбе. — 1. Кад је моменат двају система потегâ раван нули, онда се каже да су ова два система *у инволуцији.*

2. Кад се претпостави да је систем (S_0) еквивалентан систему (S), тада се израз под (1) упрошћава и постаје

$$2\,(LX+MY+NZ)\,;$$

и тај се израз зове *аутомоменат* система (S).

Приметимо: кад је систем (S_0) потпунце идентичан систему (S), онда су потези P_j' система (S_0) исти са потезима P_i система (S), и у нашој оцени суме момената, сваки моменат јавља се два пута.

Дакле, сума момената потегâ P_i, узети два и два, равна је једино:

$$LM+MY+NZ.$$

3. Према самој дефиницији резултујућих момената, види се да је:

Резултујући моменат, у односу на једну осу, резултујућег система раван је суми резултујућих момената системâ (S) *и* (S_0) *у односу на ту исту осу.*

Резултујући моменат, у односу на једну тачку, резултујућег система раван је геометријској суми резултујућих момената системâ (S) *и* (S_0) *у односу на ту исту тачку.*

Тако исто: *Резултанта резултујућег система равна је геометријској суми резултаната системâ* (S) *и* (S_0).

Према томе:

Координате резултујућег система јесу суме координатâ, које одговарају системима (S) *и* (S_0).

54. Еквивалентни спрегови. — Ми ћемо у следећим трима нумерама скренути мало с пута елементарне теорије спрегова.

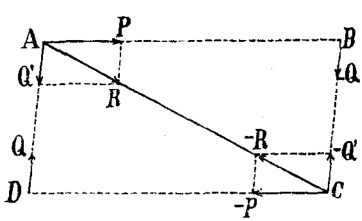
Ми смо извели теорију спрегова из општих теорема. Поансо ради на обратан начин, почињући са постављањем својстава спрегова, да би за тим отуда извео својства једног ма каквог система потегâ. Ми ћемо, као вежбање, показати ову методу са мало речи, позајмљујући неколико доказа у Möbius-а, да бисмо учинили теорију независном од оне паралелних потега.

Може се, помоћу елементарних операција, трансформисати један спрег у ма какав други од исте осе.

Ми ћемо разликовати у доказу два случаја:

1° Спрегови од исте осе, које хоћемо да трансформишемо један у други, положени су *у једној истој равни.*

Претпоставимо прво да потези двају спрегова нису паралелни, тада правци ових потега образују један паралелограм ABCD (сл. 32); па како се може пренети један потег у једну тачку његовог правца, може се учинити да



сл. 32

потези двају спрегова имају своје почетке у четири темена паралелограма, потези P и —P првога спрега у темена A и C, а потези Q и —Q другога спрега у темена D и B.

Моменат првога спрега има се ка површини паралелограма, као што се има AP ка AB; моменат другога спрега има се ка површини паралелограма, као што се има DQ ка DA; пошто су ови моменти једнаки, имамо:

$$\frac{P}{Q}=\frac{AB}{AD}. \tag{1}$$

Тада су осе двају спрегова једнаке и паралелне: да буду истога смисла (обе управљене пред равни фигуре), треба да потези буду распоређени у истом циркулационом смислу на периметру паралелограма.

То постављено, пођимо од спрега P,—P и додајмо, правцем стране AD, два потега једнака а противположена, потег Q и један потег Q' чиј је почетак у A; тако исто додајмо, правцем BC, два потега једнака а противположена —Q, —Q' са почецима у B и C. Ми ћемо имати један систем потегâ еквивалентан спрегу P,—P: али скуп потега P,—P, Q',—Q' еквивалентан је нули, јер два потега P и Q' имају једну резултанту R која је, према једначини (1), управљена правцем дијагонале AC, а два потега —P и —Q' имају једну резултанту —R управљену правцем CA, тј. једнаку а противположену са R; дакле ми можемо избрисати потеге P,—P, Q', —Q' који су еквивалентни нули, и остаје спрег Q, —Q који је еквивалентан првоме.

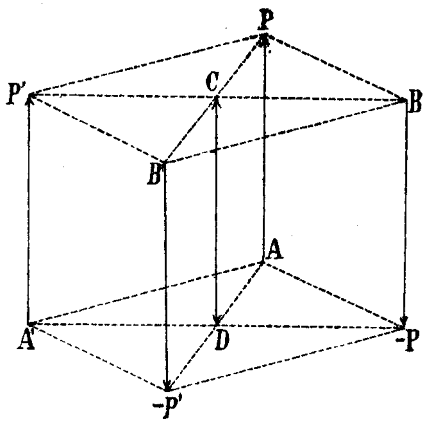
Кад су потези двају спрегова од исте осе P,—P, Q,—Q положени у једној истој равни, кад су они паралелни, претходно умовање не примењује се више; али кад се, у истој равни, посматра један помоћни спрег F,—F од исте осе као и два задата, имајући своје потеге косе на оне задатих, може се, према ономе што претходи, трансформисати P,—P у F,—F, по том F,—F у Q,— Q, тј. на крају крајева може се трансформисати P,—P у Q,—Q.

Укратко, може се пренети један спрег по вољи у његовој равни и променити његов крак спрега и његове потеге, под условом ако се његова оса не мења.

2° Докажимо, сада, да се може пренети један спрег у једну раван која је паралелна његовој и променити његов крак спрега и његове потеге, под условом ако се његова оса не мења.

За то, довољно је доказати да се може пренети један спрег паралелно себи самом, у једну раван која је паралелна његовој: једном спрег пренесен у ову раван, променићемо га сагласно правилима првога случаја.

Нека су P,—P (сл. 33) један спрег и P',—P' исти спрег пренесен паралелно себи самом ван његове равни:

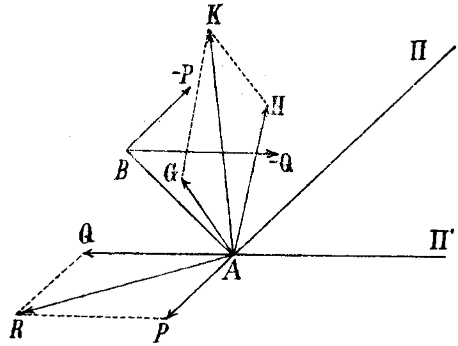


сл. 33

A,B,A',B' нападне тачке потегâ двају спрегова. Конструишимо један паралелопипед, који има ова четири потега за наспрамне ивице и узмимо пресечне тачке C и D дијагоналâ двеју страна PP'BB',—P—P'AA'. Пођимо од првога спрега P,—P и правцем CD додајмо два потега R,—R једнака а противположена и једнаки са CD, тј. са P. Спрег P,—R може бити замењен, према претходном случају, са спрегом R,—P', који је положен у истој равни као он; тако исто, спрег —P, R може бити замењен са —R, P': на тај начин првобитни спрег замењен је са два R,—P' и —R, P' који се очевидно своде на P',—P' изостављањем потегâ R,—R једнаких а противположених.

55. Непосредно слагање спрегова. — Ми ћемо показати непосредно да спрегови, у ма коликом броју, могу бити замењени једним јединим спрегом, чија је оса равна геометријској суми осâ компонентних спрегова. Очевидно, довољно је поставити теорему за два спрега.

Нека дакле имамо да сложимо два спрега чије су осе AG, AH. Ставимо се у општи случај, у коме су два правца AG и AH различни (сл. 34). Нека су П и П' две равни двају спрегова. На њиховом пресеку, узмимо једну дуж



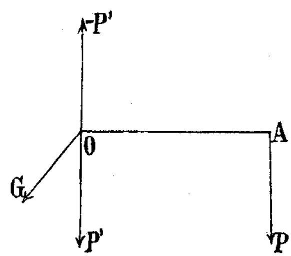
сл. 34

AB=1. Ми можемо, према напред постављеним теоремама, променити сваки од спрегова у његовој равни, тако да се његов крак спрега поклопи са AB. Нека су тада P,—P и Q,—Q два спрега. Ми ћемо повући осе кроз тачку A. То ће бити два потега AG и AH наизменце управни на равнима П и П' и једнаки са P и Q, пошто је заједнички крак спрегова раван јединици. Два конкурентна потега P и Q имају резултанту R, дијагонала њиховог паралелограма; тако исто, потези —P и —Q имају резултанту —R. Да имамо осу спрега R,—R, треба нам повући кроз A управно на раван R—R један потег AK чија би дужина била равна моменту R овога спрега; шест правих AP, AQ, AR, AG, AH, AK јесу, према ономе што претходи, у равни управној на AB у тачци A, и још више две и две су управне и једнаке. Отуда следује да се фигура AGHK изводи из фигуре APQR окренувши ову за прав угао око AB; према томе, оса AK резултујућег спрега јесте дијагонала паралелограма конструисаног на осама компонентних спрегова; — што је и требало доказати.

Ако би осе спрегова, које имамо да сложимо, имале исти правац, онда би једна ма која права у равни двају спрегова могла играти улогу пресека равнй П и П' у претходном доказу.

56. Непосредно свођење потегâ на један потег и један спрег. Поансотова метода. — Да би показао да је један ма какав систем потегâ еквивалентан једном спрегу и једном потегу, чија је нападна тачка једна произвољна тачка, Поансо је употребио једну методу која има за полазну тачку овај став:

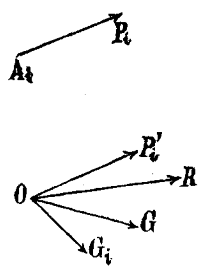
Може се пренети један потег у једну ма коју тачку O простора, додајући један повољан спрег чија је оса управна на потег. И заиста, узмимо два једнака а противположена потега P',—P', са нападним тачкама у O, који имају исту величину и правац као задати потег (сл. 35)



сл. 35

два потега P и —P' чине један спрег, чија је оса OG управна на P'. Дакле, ми видимо да је потег P замењен са потегом P' и спрегом G.

Обратно, скуп једног потега P' и једнога спрега, чија је оса OG управна на потег, своди се на један једини потег P, једнак и паралелан са P'. Раван спрега OG садржи потег P'; пренесимо овај спрег у његовој равни без да се промени његова оса и променимо га тако да један од његових потега —P' буде са нападном тачком у O, једнак а противположен са P'; потези P',—P' могу бити изостављени, и систем се своди на један једини потег P. То стављено, нека су $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (сл. 36) дати потези; изберимо



сл. 36

произвољно једну тачку O. Ми мало пре видесмо, да се сваки од потега P_i може заменити са једним потегом једнаким и паралелним OP'_i и једним спрегом G_i. Потези OP'_i имају једну резултанту OR, равна општој резултанти. Спрегови G_i имају такође један резултујући спрег G; — што доказује исказани став.

57. Паралелни потези. Примена општих теорема. — Кад су сви потези једнога система паралелни, овај је систем еквивалентан, или једној јединој резултанти, или једном једином спрегу, или нули. И заиста, пошто су сви компонентни моменти, у односу на једну тачку, управљени управно на заједнички правац потега̂, резултујући моменат, ако није нула, управан је на тај правац; општа резултанта, ако није нула, паралелна је томе правцу. Дакле, инваријанта $LX+MY+NZ$ јесте нула.

Нека су α, β, γ косинуси углова једне полу-праве паралелне заједничком правцу потега̂. Означимо са $P_1, P_2, \ldots, P_n$ величине потега̂, које су величине *цењене правцем ове полу-*

праве, тако да ће потези, који су управљени у смислу ове полу-праве, бити позитивни, а потези управљени у супротном смислу негативни. Означавајући са x_i, y_i, z_i координате нападне тачке потега P_i, са X_i, $У_i$, Z_i његове пројекције на координатним осама претпостављене правоугле, и са L_i, M_i, N_i његове моменте у односу на осе, имаћемо:

$$X_i = \alpha P_i, \quad У_i = \beta P_i, \quad Z_i = \gamma P_i;$$

$$L_i = P_i(\gamma y_i - \beta z_i), \qquad M_i = P_i(\alpha z_i - \gamma x_i), \qquad N_i = P_i(\beta x_i - \alpha y_i).$$

За тим, стављајући

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \Sigma P_i,$$

знак Σ показујући једну суму распрострту на све потеге; то ћемо, за пројекције опште резултанте и резултујућег момента, имати:

$$X = \alpha P, \quad У = \beta P, \quad Z = \gamma P;$$

$$L = \gamma \Sigma P_i y_i - \beta \Sigma P_i z_i, \quad M = \alpha \Sigma P_i z_i - \gamma \Sigma P_i x_i,$$

$$N = \beta \Sigma P_i x_i - \alpha \Sigma P_i y_i.$$

Одмах можемо оверити релацију

$$LX + MУ + NZ = 0.$$

Дакле, кад је:

1°. $P \gtrless 0$, систем је еквивалентан једном јединим потегу;

2°. $P = 0$, $L^2 + M^2 + N^2 > 0$, систем је еквивалентан једном јединим спрегу;

3°. $P = 0$, $L = M = N = 0$, систем је еквивалентан нули.

Нужни и довољни услови па да *систем буде еквивалентан нули* јесу дакле:

$$\Sigma P_i = 0, \quad \frac{\Sigma P_i x_i}{\alpha} = \frac{\Sigma P_i y_i}{\beta} = \frac{\Sigma P_i z_i}{\gamma}.$$

Примедба. — У особеном случају, у ком бисмо имали:

$$\Sigma P_i = 0, \ \Sigma P_i x_i = 0, \ \Sigma P_i y_i = 0, \ \Sigma P_i z_i = 0,$$

претходни услови били би оверени, па ма какви да су α, β, γ; систем би био еквивалентан нули, *ма какав био заједнички правац* који се даје паралелним потезима, под условом ако се не промену њихови односи између величинâ. Тада се каже да је систем паралелних потега *у астатичкој равнотежи.*

58. Центар паралелних потега. — Претпоставимо $P \gtrless 0$; систем је еквивалентан једном једином потегу, чија је алгебарска вредност P и чије су пројекције αP, βP и γP; тај је потег управљен правцем централне осе: ми ћемо га звати, краткоће ради, *резултујући потег система.*

Једначине централне осе сада су:

$$yZ - zY - L = 0, \quad zX - xZ - M = 0, \quad xY - yX - N = 0,$$

јер је заједничка вредност трију једнаких односа, који чине једначине ове осе, *равна нули.* Према претходним вредностима за X, Y, Z, L, M, N, ове једначине постају:

$$\gamma(Py - \Sigma P_i y_i) - \beta(Pz - \Sigma P_i z_i) = 0, \quad \ldots, \ \ldots;$$

које можемо написати у облику

$$\frac{Px - \Sigma P_i x_i}{\alpha} = \frac{Py - \Sigma P_i y_i}{\beta} = \frac{Pz - \Sigma P_i z_i}{\gamma},$$

или, стављајући

$$\text{(I)} \quad \xi = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i}, \quad \eta = \frac{\Sigma P_i y_i}{\Sigma P_i}, \quad \zeta = \frac{\Sigma P_i z_i}{\Sigma P_i},$$

можемо их написати у облику

$$\frac{x-\xi}{\alpha}=\frac{y-\eta}{\beta}=\frac{z-\zeta}{\gamma}.$$

Она тачка, која има за координате ξ, η и ζ, не зависи од α,β,γ, тј. не зависи од заједничког правца потегâ; она зависи само од њихових нападних тачака (x_i,y_i,z_i) и од односâ њихових величина, јер су изрази за ξ, η и ζ хомогени и нултога степена по P_1, P_2,...,P_n. Дакле, централна оса пролази кроз фиксну тачку, чије су координате ξ,η,ζ па ма какви били α,β,γ; и, како је резултујући потег P система потегâ управљен правцем централне осе, он пролази кроз тачку ξ,η,ζ.

Дакле, остављајући нападне тачке фиксне, кад се мења заједнички правац посматраних геометријских величина и кад се ове величине мењају сразмерно, њихова резултанта пролази кроз једну фиксну тачку ξ,η,ζ. Ова фиксна тачка зове се *центар паралелних потега*; он постоји сваки пут, кад је $\Sigma P_i \gtrless 0$.

Обично се ова тачка бира као нападна тачка резултујућег потега, што се може урадити преношајући овај потег у тачку ξ,η,ζ његовога правца.

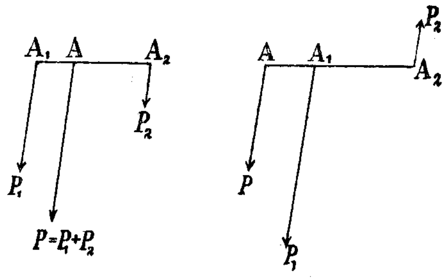
Проблем. — Налазе се, без муке, елементарна својства једног система двају паралелних потега, чије су нападне тачке A_1 и A_2 и који имају P_1 и P_2 за алгебарске вредности. Кад је P_1+P_2 различно од нуле, систем има један резултујући потег, тј. систем је еквивалентан једном јединoм потегу који има за алгебарску вредност

$$P=P_1+P_2,$$

а нападну тачку у тачци A (центар двâју паралелних потега), која је одређена релацијом

$$\frac{AA_1}{AA_2}=-\frac{P_2}{P_1},$$

у којој је, према уобичајеним погодбама Геометрије, однос двају сегмената AA_1 и AA_2 (сл. 37) положан или одречан,



сл. 37

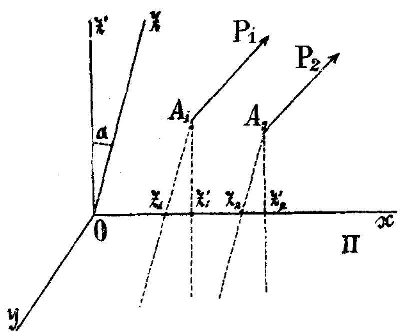
према томе да ли су ова два сегмента истога смисла или смисла супротнога.

У особеном случају, у ком би било $P_1+P_2=0$, два дата потега су једнаки а супротнога смисла; центар паралелних потега не постоји више. Два потега образују у опште један спрег, само ако не буду управо противположени и, према томе, еквивалентни нули.

59. Моменти паралелних потега у односу на једну раван. — Један систем паралелних потега, чија општа резултанта $P=\Sigma P_i$ није нула, еквивалентан је једном једином резултујућем потегу P, чија је *нападна тачка у центру* паралелних потега, према учињеној погодби горе. Формуле које дају координате ξ, η, ζ овога центра, кад се преведу на геометријски језик, воде ка теореми *момената у односу на једну раван.*

Кад је дата једна раван Π, која се може увек узети за xOy раван, и једна оса Oz (сл. 38) произвољнога правца, *моменат једне од паралелних геометријских величина у односу на ову раван* Π *зове се производ из алгебарске вредности* P_i *величине и координате* z_i *њене нападне тачке* (тј. и одстојања нападне тачке потега од равни): $P_i z_i$.

Моменат, дефинисан на тај начин, јесте једна количина положна, одречна или нула, чија вредност зависи од нападне тачке геометријске величине, тако да се овај моменат мења кад је (геометријску величину) пренесемо у



сл. 38

једну тачку њенога правца. Из ове дефиниције потиче ово основно својство:

Теорема. — *Кад паралелне геометријске величине имају једну резултанту, моменат ове резултанте, у односу на једну раван, раван је алгебарској суми момената компонената, — под условом да се узме, за нападну тачку резултанте, центар паралелних потега.*

Да докажемо ову теорему, претпоставимо најпре осу Oz управну на раван П; то је z центра паралелних потега дато овом једначином:

$$P\xi = \Sigma P_i z_i,$$

где је $P = \Sigma P_i$; но ова једначина изражава управо теорему коју хоћемо да докажемо.

Кад је оса Oz коса на раван П, узећемо једну помоћну осу Oz' нормалну на раван и градећи са Oz осом угао α. Означимо са $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, \xi'$ координате z нападних тачака, координате рачунате паралелно са овом новом осом тј. нормално на раван; према ономе што претходи, имаћемо

$$P\xi' = \Sigma P_i z'_i;$$

али координате z' и z везане су очевидним релацијама:

$$z'_1 = z_1 \cos\alpha, \quad z'_2 = z_2 \cos\alpha, \quad \ldots, \quad \xi' = \xi \cos\alpha;$$

замењујући, имамо релацију коју смо требали доказати:

$$P\xi = \Sigma P_i z_i.$$

Дакле, теорема момената доказана је у својој општности.

Примењујући је, наизменце, на три координатне равни претпостављене косе, добивају се, за одредбу координата ξ, η, ξ центра паралелних потега *са косоуглим осама*, исте формуле као и *са правоуглим осама.*

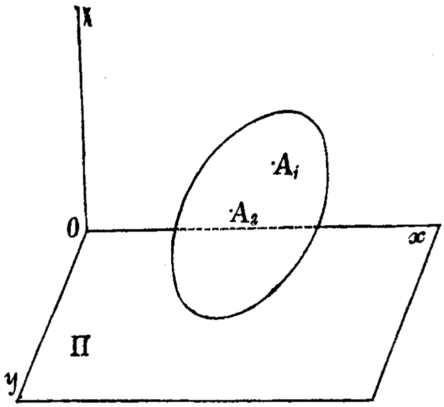
Примедба I. — Теорема момената у односу на једну раван може се применити само кад је $\Sigma P_i \gtrless 0$.

Кад је $\Sigma P_i = 0$, потези су еквивалентни једном спрегу или нули. Чак *у овом последњем случају*, теорема не може да се примени, јер ако је тада резултанта равна нули, центар паралелних потега јесте у бесконачности. Има изузетка само за још особенији случај у коме су потези, будући еквивалентни нули, у астатичкој равнотежи; *тада су ξ, η, ξ неодређене.*

Примедба II. — У особеном случају у коме су сви потези управљени у истом смислу, центар паралелних потега јесте у унутрашњости сваке конвексне површине која обухвата све нападне тачке компонената. И заиста, узмимо, за позитиван смисао, смисао датих потега $P_1, P_2, \ldots, P_n$, за xOy раван једну тангенцијалну раван П на ову површину, и за Oz осу једну управну на ову раван, положена са исте стране као и површина (сл. 39). Тада су z свију нападних тачака положни, и једначина

$$\xi = \frac{\Sigma P_i z_i}{\Sigma P_i}$$

показује да је ξ тако исто положно. Пошто се центар паралелних потега налази у односу на једну ма какву тангенцијалну раван на истој страни као и површина, он је положен у унутрашњости ове површине.



сл. 39

Примедба III. — У случају, кад је раван П паралелна заједничком правцу потегâ, онда *моменат једне од паралелних геометријских величина у односу на ову раван* П *раван је производу из алгебарске вредности* P_i *величине и њеног одстојања од равни.*

60. Проблеми за вежбање. — Главну примену излагања ових претходних геометријских појмова имаћемо у излагању самога предмета, нарочито у Статици. Овде ћемо само поставити неколико *проблема за вежбање.*

1. Посматрањем геометријских производа потегâ, доказати формулу

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

између странâ и угла A једнога троугла.

2. У једном троуглу ABC означимо са h висину спуштену из темена A и са β и γ сегменте које она одређује на супротној страни; доказати, помоћу геометријских производа потегâ, да имамо :

$$h^2 - \beta y = \mathrm{bc} \cos A.$$

3. Истим посматрањима геометријских производа потегâ, доказати формулу која даје квадрат одстојања двеју тачака у аналитичној Геометрији у простору.

4. Наћи косинус угла двају праваца, познавајући њихове параметре који их одређују у односу на три координатне осе.

5. Доказати основну формулу сверне Тригонометрије

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

6. Да један систем потега буде еквивалентан нули, треба и довољно је да резултујући моменат буде нула у односу на три тачке, које нису положене на правој линији.

7. *Дуалитет у теорији потегâ.* – Нека је једна замишљена свера са центром O, чија је једначина $x^2+y^2+z^2+1=0$, и један потег P_1 чије су пројекције X_1, Y_1, Z_1 а моменти L_1, M_1, N_1; на спрегнутој правој од P_1 у односу на сверу, узмимо један потег P'_1 чије су пројекције $X'_1=L_1$, $Y'_1=M_1$ и $Z'_1=N_1$, што је могућно, јер је правац L_1, M_1, N_1 нормалан на раван OP_1. Доказати да постоји реципроцитет између потегâ P_1 и P'_1, тј. да је P_1 управљено правцем спрегнуте праве од P'_1 и да су његове пројекције једнаке са моментима од P'_1, тј. да су $X_1=L'_1$, $Y_1=M'_1$, $Z_1=N'_1$ (дуалистичка трансформација од M. Klein-а у једном особеном случају, на који је M. Koenigs скренуо пажњу).

8. Према претходној трансформацији, једном систему потегâ (S) одговара један систем (S'). Доказати да је резултујући моменат једнога система у односу на тачку O раван општој резултанти другога система.

9. Кад се један од претходних система (S) или (S') своди на један спрег, други се своди на један потег који пролази кроз почетак, и обратно.

10. *Наћи криве линије у простору чије су тангенте праве од момента нула.* — Узимајући за осу z-ова централну осу система, диференцијална једначина ових кривих линија јесте ова:

$$fdz = xdy - ydx,$$

где је f стрела (flèche) торзера. Доказати да се једначине криве линије најопштије, оверавајући ову једначину, могу написати:

$$z = \varphi(\theta), \qquad x = \sqrt{f\varphi'(\theta)}\ \cos\theta, \qquad y = \sqrt{f\varphi'(\theta)}\ \sin(\theta),$$

где $\varphi(\theta)$ означава једну произвољну функцију од θ.

11. Доказати да оскулаторна раван на једну од кривих линија претходнога проблема има своју жижу у оскулационој тачци.

12. Могу се на бесконачно много начина образовати системи од два потега F и Φ еквивалентни једном систему датих потега и *такви да* F *и* Φ *буду правоугли.* Доказати да праве F и Φ образују један *комплекс другога реда.* Овај исти комплекс налази се тражећи комплекс образован из резултујућих момената у односу на све тачке простора.

13. Кад су два потега F и Φ еквивалентни једном датом систему, њихова заједничка управна сече нормално централну осу система.

14. Дато је више спрегова и резултујући спрег: доказати да пројекција, на једној ма каквој равни, паралелограма конструисаног на двама потезима резултујућег спрега, има једну површину која је еквивалентна суми пројекцијоних површина паралелограма̂ конструисаних на потезима компонентних спрегова.

15. Нека су P', P'', ..., $\mathrm{P}^{(k)}$ потези који образују један систем *еквивалентан нули,* и M', M'', ..., $\mathrm{M}^{(k)}$ одговарајући

моменти једног другог система потегâ (S) у односу на осе P', P'', ..., $P^{(k)}$. Доказати релацију

$$P'M' + P''M'' + \dots + P^{(k)}M^{(k)} = 0.$$

Најпре се доказује теорема, за један потег P система (S), примећујући да је сума момената потегâ P', P'', ..., $P^{(k)}$, у односу на P, равна нули.

16. *Möbius-ове барицентричне координате.* — Дат је један тетраедар $A_1A_2A_3A_4$: барицентричним координатама једне тачке M зову се алгебарске вредности P_1, P_2, P_3 и P_4 четирију паралелних потега, које треба додати у темена A_1, A_2, A_3 и A_4, па да се центар ових паралелних потега поклапа са M. Доказати да:

Свакој тачци M одговарају вредности од P_1, P_2, P_3 и P_4, које су одређене са приближношћу једног чинитеља (à un facteur près). Једна једначина линеарна и хомогена по P_1, P_2, P_3 и P_4 представља једну раван чија су одстојања од четири темена сразмерна сачиниоцима од P_1, P_2, P_3 и P_4. Кад су ови сачиниоци једнаки, једначина представља раван у бесконачности. Једна површина m-тога реда представљена је једном хомогеном једначином m-тога степена по P_1, P_2, P_3 и P_4.

17. *Наћи резултујући торзер двају правоуглих конкурентних торзера.*

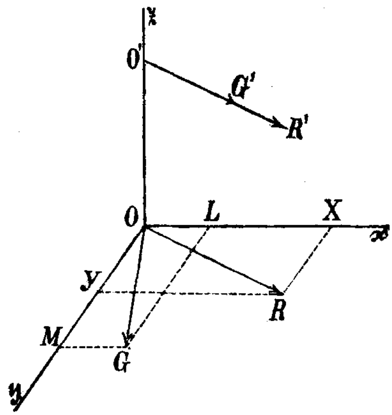
Решење. — Узмимо праве које носе те торзере за Ox и Oy осе, а једну управну на ове праве за Oz осу. Нека је X потег, L спрег торзера носен Ox осом, λ стрела (сл. 40), имаћемо $L = \lambda X$. Тако исто, означавајући са M, Y и μ количине аналогне за други торзер, имаћемо $M = \mu Y$. Нека су R резултанта од X и Y, а G резултанта од L и M.

Централна оса тоталног система има за једначину

$$\frac{\lambda X + zY}{X} = \frac{\mu Y - zX}{Y} = \frac{-xY + yX}{0};$$

она је паралелна са OR, и сече Oz осу у једној тачци O', која је дата са

$$z = \frac{(\mu - \lambda)\,XY}{X^2 + Y^2}.$$



сл. 40

Нека је O'R' ова оса. Означимо са R', G' општу резултанту система и резултујући моменат у O'. То је R' равно R; треба израчунати G', или боље однос $K = \frac{G'}{R'}$, тј. стрелу резултујућег торзера. Но однос између G' и R' раван је односу њихових пројекција L' и X на Ox оси. На тај начин налази се

$$L' = \lambda X + zY, \qquad K = \frac{\lambda X^2 + \mu Y^2}{X^2 + Y^2};$$

резултујући торзер потпунце је одређен.

18. Наћи место резултујућег торзера O'R'G' претходнога проблема, када стреле λ и μ компонентних торзера остају сталне и када су њихови интензитети X и Y промењиви.

Тражена површина јесте коноид

$$z\,(x^2 + y^2) = (\mu - \lambda)\,xy.$$

Овај је коноид добио од Cayley-a име *цилиндроид*, јер он има са цилиндрима ово својство: подножја нормала спуштених из једне ма које тачке јесу у једној истој равни. Уверавамо се, још више, да су она положена на једном коничном влаку, оверавајући да геометријско место пројекцијâ једне ма које тачке простора на производницама цилиндроида јесте један *коничан влак*.

19. Доказати у опште да резултујући торзер двају ма каквих торзера, сталних положаја, производи један цилиндроид када стреле компонентних торзера остају сталне, узевши да су њихови интензитети промењиви.

За Oz осу узећемо заједничку управну на два торзера.

20. Један систем ма каквих потега увек је еквивалентан са шест потега, који су управљени правцем шест ивица једнога тетраедра.

21. Нека је SABC тетраедар. Узмимо за позитиван смисао на ивицама које иду из S смисле од SA, SB и SC; за тим, на свакој ивици основе, таквој као што је AB, смисао позитивних ротација AB око наспрамне ивице SC, и означимо са ξ, η, ζ, λ, μ, ν алгебарске вредности од шест потега управљених правцем SA, SB, SC, BC, CA, AB. Доказати да инваријанта $LX + MY + NZ$ има за вредност

$$6V\left[\frac{\lambda}{BC}\,\frac{\xi}{CA}+\frac{\mu}{CA}\,\frac{\eta}{SB}+\frac{\nu}{AB}\,\frac{\zeta}{SC}\right],$$

где V означава запремину датога тетраедра.

22. Да систем потегâ буде еквивалентан нули, треба и довољно је да шест компонената ξ, η, ζ, λ, μ и ν буду равне нули.

23. Да један систем потегâ буде еквивалентан нули, треба и довољно је: сума момената у односу на сваку од шест ивица једног тетраедра да буде нула.

24. Један систем потегâ, сви положени у једној истој равни, еквивалентан је, или једној јединој резултанти, или једноме спрегу, или нули.

25. Један систем потегâ, сви положени у једној истој равни, еквивалентан је трима потезима, који су управљени правцем странâ једнога троугла произвољно изабратог у овој равни.

61. Литература. — Завршујући овај *одељак о претходним геометријским појмовима*, који ће нам са *уводом* служити као нека врста речника при излагању самога предмета, — ми ћемо још поменути главније писце и њихова дела, који су нам корисно послужили при изради овога одељка. Ти су писци:

P. Appell, Traité de Mécanique rationnelle, t. I, première fascicule, 1893, Paris.

G. Koenigs, Leçons de Cinématique, t. I, 1895—1897, Paris.

P. Puiseux, Leçons de Cinématique, 1890, Paris.

J. Massau, Cours de Mécanique, autogr. 1891, Gand.

L. Poinsot, Elements de Statique, 1877, Paris.

L. Cremona, Les Figures réciproques en Statique graphique, trad. L. Bossut, 1885, Paris.

L'abbé Moigno, Leçons de Mécanique analytique. Statique; 1 vol., 1868, Paris.

H. Laurent (стр. 88); *J. Graindorge* (стр. 100); *X. Antomari* (стр. 173); *J. Tannery* (стр. 348); *La grande Encyclopédie*; *É. Littré*; *E. Sarrau*; итд.

Консултирајући поменуте писце, читаоц ће наћи веома корисних допуна ових претходних геометријских појмова, које смо ми у овом одељку изложили.

*
* *

Прелазећи, сада, на излагање *Рационалне Механике*, ми ћемо се потрудити: да је представимо читаоцима на ономе ступњу, на коме се она и находи данас. На послетку, кад будемо сравнили њено стање данашње са стањима у претходним столећима (n°20), увидећемо лако: у чему су и у колико су наши претходници грешили!

ПРВИ ДЕО

ЧИСТА КИНЕМАТИКА

62. О кретању. — Посматрајући природне појаве, људски дух распознаје у овима, поред многих нејасних елемената које не може да размрси и да расветли, један елеменат јасан, који може по својој јасности да буде предмет доиста научних знања. То је геометријски елеменат, који се односи на локализацију предметâ у простору, и који допушта да их себи представимо, да их нацртамо или да их конструишемо на неки барем идеалан начин. Он је образован из димензијâ и обликâ телâ или системâ телâ, из онога што зову, једном речи, њихова *конфигурација* (*облик*) у једном датом тренутку. Ови облици, ове конфигурације, чији су мерљиви делови одстојања и угли, час се одржавају, барем на близу, за неко извесно време и чак изгледају да се одржавају у истим пределима простора (или у ономе који нам такав изгледа), да образују оно што се *миром* (фр. *repos*; нем. *Ruhe*) зове, час се мењају без престанка, али са континуитетом; и њихове промене места јесу оно што зову *локалним* (*месним*) *кретањем*, или просто *кретањем* (фр. *mouvement*; нем. *Bewegung*). Ми смо и напред (n° 9) дали *дефиницију кретања*.

За једну тачку M каже се да је *у кретању* наспрам неке друге тачке M', кад се одстојање ових двеју тачака мења са временом. Кад се пак ово одстојање њихово не мења са временом, онда се каже да тачке M и M' образују један *непромењиви систем.*

Још општије, зове се *непромењиви систем,* или, *тело непромењивог облика,* или, још, и *чврсто тело*: скуп тачака чија узајамна одстојања остају непромењива, стална, када се време мења. Напоменимо само да, строго узевши, у природи не постоје тела непромењивог облика, али има телâ која им се много приближују; у осталом, ми их можемо појмити као геометријске фикције и тражити законе њихових померања.

За једну тачку M казаћемо да је *у кретању* наспрам једног непромењивог система S, када се њена одстојања од појединих тачака тога система мењају са временом. На против, казаћемо да је тачка M *у непромењивој вези* са системом S, кад она образује са њим једно тело непромењивог облика, тј. кад су одстојања тачке M од појединих тачака система S стална.

Узмимо два непромењива система S и S_1; ми ћемо рећи да је систем S_1 *у кретању* наспрам система S, кад се одстојања појединих тачака система S_1 од тачака система S мењају са временом; у противном случају, казаћемо да је систем S_1 *у миру* у односу на систем S.

Појам о кретању јавља се, дакле, као битно релативан појам; јер, кад се каже да је једна тачка или један непромењиви систем *у кретању* или *у миру,* онда се увек подразумева да ово кретање или овај мир бива у односу на неки други непромењиви систем.

Најподеснији систем за упоређивање јесте један триједар трију координатних оса Ox,Oy,Oz, које ћемо сматрати као *апсолутно фиксне.* Једна тачка M покретна је у односу на те осе, кад се њене координате x,y,z, у односу на те осе, мењају са временом. На против, ако су ове координате непромењиве, ми ћемо рећи да је тачка M *у непромењивој вези* са осама. Када се координатама x,y,z дају све могућне сталне вредности, добиће се безбројна множина тачака, које ће испуњавати цео простор; али, да бисмо означили да су ове тачке у непромењивој вези са координатним осама, ми ћемо рећи да је простор, који оне испуњавају, у непромењивој вези са осама.

Тако исто, ми ћемо рећи да је неки непромењиви систем (неко тело) у миру или у кретању, према томе да ли тај систем (то тело), у следи времена, заузима исти положај или положаје различне у односу на те осе. Три тачке одређују положај једног непромењивог система; и заиста, једна ма која друга тачка тога система може бити сматрана као теме једног тетраедра сталног облика и сталних димензија, коме би троугао трију датих тачака био основа, — и, чим имамо положај основе, тим самим имаћемо и положај темена.

63. Врсте кретања. — Кад би један непромењиви систем S био *у апсолутном миру*, онда би кретање неке тачке M или неког другог непромењивог система S_1, наспрам система S, било *апсолутно кретање* (фр. *mouvement absolu;* нем. *absolute Bewegung*). Кад је пак и систем S *у кретању*, онда се кретање тачке M и кретање система S_1, наспрам система S, зове се *релативно кретање* (фр. *mouvement relatif;* нем. *relative Bewegung*). Како ми не познајемо а, може бити, и не постоји ниједна тачка у васиони, која би у истини била непокретна, која би дакле била у апсолутном миру, то ћемо мир или кретање једне тачке или једног тела односити на извесна друга тела, која су већ у кретању; тако, нпр., једно дрво, једна кућа јесу у миру наспрам земље; сама пак земља у кретању је наспрам сунца, итд. Другим речима: ми имамо у природи да посматрамо само *релативна кретања*. У осталом, ми смо напред (n^o 10) опширније изложили разлику између апсолутних и релативних кретања.

Кад се једна тачка (или једно тело) креће у простору, њено кретање битно је *непрекидно (континуално);* геометријско место узастопних положаја, које та тачка узастопно заузима при свом кретању, образује једну *праву линију (*фр. *ligne droite;* нем. *gerade Linie),* или једну *криву линију (*фр. *courbe;* нем. *krumme Linie, Curve),* — која се зове: *путања, пут*, или, још, *трајекторија (*фр. *trajéctoire;* нем. *Weg, Bahn)* покретне тачке.

Према томе, да ли је путања покретне тачке права линија или крива линија, и кретање те тачке зваће се *праволинијско кретање (*фр. *mouvement rectiligne;* нем. *geradlinige Bewegung),* или *криволинијско кретање (*фр. *mouvement curviligne;* нем. *krummlinige Bewegung).* Ово последње, криволинијско кретање, према природи путање, може бити *кружно, елиптичко, хиперболичко, параболичко,* итд., *кретање,* о којима ћемо на своме месту опширније говорити. — Дакле, у опште, сва се кретања могу поделити на две групе кретања̂, на *праволинијска кретања* и на *криволинијска кретања.* Ово би била једна могућна подела кретања̂.

Даље, не водећи рачуна о путањи покретне тачке, њено кретање може бити двојако: 1° *једнако кретање (*фр. *mouvement uniforme;* нем. *gleichförmige Bewegung),* или, 2° *неједнако* тј. *промељиво кретање (*фр. *mouvement varié*; нем. *veränderliche* oder *ungleichförmige Bewegung).* — Дакле, не водећи рачуна о путањи, у опште, сва се кретања могу опет поделити на две групе кретања̂, на *једнака кретања* и на *променљива кретања.* Ово би била друга могућна подела кретања̂.

За кретање једног тела казаћемо да је *једнако кретање,* када то тело за једнака времена прелази једнаке просторе, па ма колика била ова времена; другим речима, при једнаком кретању тела, пређени простори сразмерни су временима, за која су пређени. Једнака кретања можемо разликовати једна од других по просторима, који су пређени за једнака времена; и то посматрање ствара у нама *појам,* с почетка мало нејасан *појам о брзини.* Свако, пак, кретање тела које није једнако, — а по *Duhamel-y*: свако кретање које није ни једнако, нити сложено из више узастопних једнаких кретања, чија су трајања коначна[1], — зваћемо *неједнако* или *промењиво кретање*. Код промењивих кретања: пређени простори нису сразмерни временима, за која су пређени.

Промењива кретања могу бити до у бесконачност разнолика (различна). Ми ћемо, овде, споменути само њих неколико: 1°. *Убрзано кретање* (фр. *mouvement accéléré*; нем. *beschleunigte Bewegung); 2°. Једнако убрзано кретање* (фр. *mouvement uniformément accéléré;* нем. *gleichförmig beschleunigte Bewegung);* 3°. *Успорено кретање* (фр. *mouvement retardé;* нем. *verzögerte Bewegung);* 4°. *Једнако успорено кретање* (фр. *mouvement uniformément retardé;* нем. *gleichförmig verzögerte Bewegung);* итд., итд.

На своме месту, ми ћемо се упознати и опширније говорити и о тако званим: *простим, сложеним, периодичким,* итд., *кретањима*; поред тога, упознаћемо се и са узроцима немогућности *вечитога кретања (perpetuum mobile),* о којем смо кретању већ говорили (стр. 323—324).

Проучавање кретања у опште изискује посматрање двају елемената: *простор* (n° 7) и *време* (n° 8). Чим су нам познати начини мерења простора и времена, одмах је лако одредити и проучити кретање. Ми смо (n° 11) опширно изложили: *принцип мерења времена* и *одредбу јединице времена*. Што се мерења простора тиче, то нам је из Геометрије познато.

Да бисмо одредили онај тренутак, у који се један извесни појав збива, ми ћемо упоредити тај тренутак са једним одређеним тренутком, *почетни тренутак*[2] или *почетак времена̂* назват, и дати себи број који мери са једном извесном јединицом (секунда средњег сунчаног времена, на пример)

---

[1] *Duhamel*, op. cit., IV vol., p. 228.

[2] **Тренутак** у Механици нема трајања, то је оно што раздваја два узастопна времена; тренутак је времену оно што је, у Геометрији, тачка простору.

интервал времена, који је обухваћен између почетног тренутка и посматраног тренутка, саглашавајући се да се пред тим бројем стави знак + или знак —, према томе да ли је посматрани тренутак доцнији или ранији од почетног тренутка. Према овоме, кад говоримо о једном тренутку t, писме t означаваће један положан или одречан број секунада. Кад посматрамо два тренутка I и I', који су означени са t и t', онда тренутак I' у односу на I биће означен са $t'—t$ по величини и по знаку.

64. Кинематика. Њена подела. — Ми смо (n° 21 и n° 22) већ изнели *предмет и поделу Меканике* у опште, а *Рационалне Меканике* на по се. Тамо смо казали, да се *Рационална Меканика дели на три дела*, на: *Кинематику*, *Статику* и *Динамику*.

1° Кинематика, којом и почињемо излагање Рационалне Меканике и коју неки писци *Форономијом* зову, *јесте наука о кретањима, независно од силâ, тј. независно од физичких узрока који та кретања производе или их промењују*.

Кинематика, дакле, проучава кретања сâма по себи; и са те тачке гледишта, на коју се она ставља, она не води никаква рачуна о материјалним својствима телâ, о природним разликама, о тежинама, итд., већ посматра једино геометријске елементе телâ, која се померају, и њихов геометријски облик.

Поред појма о простору, који чини предмет Геометрије, Кинематика уводи још један нов појам, *појам о трајању* или *времену* (n° 8).

У Кинематици ми ћемо имати да посматрамо две нове величине, *брзину* и *убрзање*, које су различне од оних величина, што се у Геометрији представљају.

Ми смо, на страни 309—314, изложили кратку историју Кинематике, и изнели смо ону дефиницију коју јој је њен творац Ампер дао. Готово одмах за тим, на страни 315—316, са свим узгредно, ми смо казали и неколико речи *о Кинематичкој Геометрији.*

Подела Кинематике. — *Кинематика се дели на два дела,* први део: *Чиста Кинематика*, тј. *Кинематика* у ужем смислу, и други део: *Примењена Кинематика,* тј. *Теорија Механизама.* — Професор *G. Koenigs* саставља уједно оба ова дела Кинематике, под називом: *Теоријска Кинематика.*

Да бисмо следовали логичким редом, ми ћемо се, најпре, занимати првим делом Кинематике, Чистом Кинематиком, — као што смо напред (стр. 461) и ставили.

65. Чиста Кинематика. Њена подела. — *Чиста Кинематика* (које је име *M. H. Resal* дао) *изучава кретања ставивши се на гледиште апстрактне и спекулативне науке.*

Кад се једно тело коначних димензија креће у простору, свака од његових тачака јесте и сâма она у кретању. Кретање једног тела у простору биће потпунце одређено, кад у сваком тренутку познајемо положај сваке од његових тачака; другим речима, сваки покретни систем, био он променљив или непроменљив, може се сматрати као један систем покретних тачака, и кретање тога покретног система биће нам познато, кад знамо кретање појединих тачака његових. Према томе, са свим природно и логично, ми смо наведени на проучавање кретања једне тачке (геометријске); отуда и потиче подела Чисте Кинематике.

Подела Чисте Кинематике. — Према горњем, *Чиста Кинематика,* или, још боље, *Кинематика* у ужем смислу *дели се на два дела,* на: *I Кинематику тачке* и *II Кинематику система тачака.*

Приметимо да има мало писаца, који чине ову поделу Чисте Кинематике.

I

КИНЕМАТИКА ТАЧКЕ

ОДЕЉАК ПРВИ

О брзини

66. Једначине кретања. — 1. Да бисмо фиксирали идеје, узмимо три правоугле координатне осе Ox, Oy, Oz апсолутно фиксне; рачунајмо време почевши од извесног одређеног тренутка, *од почетног тренутка*, и означимо то време са t. Посматрајмо у простору једну тачку M. Положај ове тачке M у простору потпунце је одређен са њеним координатама x, y, z. Кретање пак тачке M, у односу на фиксне осе, биће познато када се може наћи њен положај у сваком датом тренутку; према томе, кад је тачка M у кретању, њене координате x, y, z мењаће се са временом, тј. њене координате биће функције времена t. Обратно, кад су нам дате једначине:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \pi(t), \end{aligned} \right.$$

у којима су функције $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\pi(t)$ познате функције времена t, онда *те ће једначине потпунце одредити кретање покретне тачке M у простору*, јер свакој вредности времена t одговара један одређени положај покретне тачке М у простору. Због тога се једначине (1) и зову: *једначине кретања тачке* М.

У опште, зове се *једначина кретања* или зову се *једначине кретања*, свака једначина или сваки систем једначинâ одређујући путању покретне тачке и разне елементе кретања: брзину, убрзање, итд. Ми ћемо видети да једначине (1) у ствари испуњавају те услове. И заиста, што се путање покретне тачке тиче, једначине (1) одређују ту путању помоћу једне помоћне променљиве t, и допуштају да фиксирамо у сваком тренутку положај покретне тачке на тој путањи. Обично, кад су нам дате координате једне покретне тачке у функцији времена t, као што је то случај са претходним једначинама, онда кажемо кратко: да знамо *закон кретања* те тачке (стр. 322—323).

Ако, између једначинâ (1), елиминишемо време t, добићемо две једначине између координатâ x, y, z, облика:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{f}_1(x, y, z) = 0, \\ \mathrm{f}_2(x, y, z) = 0; \end{cases}$$

које две једначине, узете заједно, морају у сваком тренутку бити задовољене координатама покретне тачке. У опште, оне представљају једну криву линију, *путања покретне тачке* названа.

Напоменимо, најзад, да се у оном тренутку, од којег се почне посматрати и проучавати кретање тачке М, да се њене координате зову *координате почетног положаја покретне тачке*, и да се означавају са x_0, y_0, z_0. Према томе, једначине:

$$(3) \qquad \begin{cases} x_0 = \varphi(0), \\ y_0 = \psi(0), \\ z_0 = \pi(0), \end{cases}$$

јесу *једначине почетног положаја покретне тачке* у почетку времена $t = 0$, и оне дају *координате покретне тачке у почетку времена*. Често се кретање рачуна од једног познатог тренутка t_0; у том случају, означавајући опет са

x_0, y_0, z_0 координате почетног положаја покретне тачке у том тренутку t_0, имаћемо једначине:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_0 = \varphi(t_0), \\ y_0 = \psi(t_0), \\ z_0 = \pi(t_0), \end{cases}$$

које дају координате покретне тачке у тренутку t_0.

2. Кад се кретање једне покретне тачке врши у једној равни, онда се једначине кретања своде само на две једначине, којима је закон кретања покретне тачке потпунце одређен. Ако ту раван узмемо за xOy раван, кретање тачке одређено је првим двема једначинама:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Последња од једначинâ (1) тада се своди на $z = 0$; у осталом немамо ни потребе да водимо рачуна о њој.

Елиминишући време t између ових двеју једначинâ (5), добићемо једначину облика:

$$(6) \qquad f(x, y) = 0,$$

која представља једначину путање покретне тачке на xOy равни.

Једначине: $x_0 = \varphi(0)$ и $y_0 = \psi(0)$ јесу једначине почетног положаја покретне тачке на xOy равни у почетку времена $t = 0$; а једначине: $x_0 = \varphi(t_0)$ и $y_0 = \psi(t_0)$ јесу једначине почетног положаја покретне тачке у тренутку t_0.

У опште, сваки пут кад је једна тачка приморана да се креће по једној познатој површини, довољне су две једначине за одредбу њеног кретања; тако, нпр., да бисмо проучили кретање једне тачке по површини једне свере, довољно је да су нам дате њена лонгитуда и њена латитуда у функцији времена.

Напоменимо још, што је веома важно, да једначине (5) одређују кретање пројекције на xOy равни од тачке М у простору; тада, кретање тачке М у простору може бити сматрано као резултујуће кретање из комбинисаних кретања њене пројекције на xOy равни и њене пројекције на Oz оси. Према томе, корисно је и проучавати кретање пројекције покретне тачке на једној равни.

3. Кад се кретање једне покретне тачке врши по једној правој, онда се једначине кретања своде само на једну једину једначину, којом ће закон кретања покретне тачке бити потпунце одређен. Ако ту праву узмемо за Ox осу, онда је кретање тачке одређено овом једначином:

$$(7) \qquad x = \varphi(t).$$

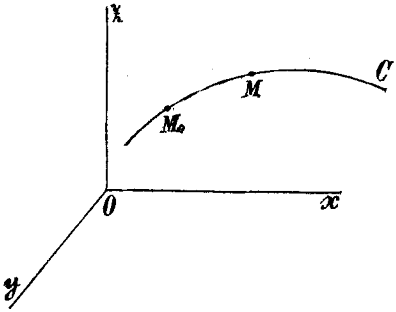
Последње две једначине под (1), тада се своде на $y = 0$ и $z = 0$; у осталом, немамо ни потребе да водимо каква рачуна о њима.

Једначина $x_0 = \varphi(0)$, или $x_0 = \varphi(t_0)$, одређује почетни положај покретне тачке у почетном тренутку $t = 0$, или у познатом тренутку t_0.

Напоменимо и овде да свака од једначинâ (1), узета засебно, одређује кретање пројекције, на једној од координатних оса, покретне тачке М у простору; тако, нпр., једначина $x = \varphi(t)$ одређује кретање пројекције тачке М на Ox оси. Према томе, кретање тачке М у простору произлази, у неку руку, из комбинисаних кретања трију других покретних тачака. Пошто су кретања ових трију последњих тачака праволинијска, то је и корисно проучавати праволинијска кретања пре свију других.

4. Кад је једна тачка приморана да се креће по једној *a priori* датој кривој линији С (сл. 41), опет једна једина једначина биће довољна за одредбу њенога кретања. И заиста, кретање тачке М потпунце је одређено, када се зна у сваком тренутку положај који она заузима на датој кривој линији. Узмимо на тој кривој линији тачку M_0 као

почетак лукова и фиксирајмо позитиван смисао прелажења, нпр., смисао M_0M; означимо са s променљиви лук, положан или одречан, пређен покретном тачком и рачунат



сл- 41.

почевши од тачке M_0. Јасно је, да ћемо знати у сваком тренутку положај покретне тачке на кривој линији, кад знамо релацију којом је везан лук s за време t, јер је крива линија C дата. Ова се релација, коју ћемо претпоставити да је дата у облику:

$$s = f(t), \tag{8}$$

зове *једначина кретања тачке* M *по својој путањи*, или, још, *формула простора*.

5. Приметимо да се једначине кретања не јављају увек у онако простом облику, као што је онај под (1), него у сложенијим облицима, чији су општи изрази дати овим једначинама:

$$\left\{\begin{aligned} F_1(x, y, z, t) &= 0, \\ F_2(x, y, z, t) &= 0, \\ F_3(x, y, z, t) &= 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Елиминишући време t између ових трију једначина, добићемо две једначине облика:

$$
(10) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0, \end{cases}
$$

које представљају једначине путање покретне тачке, и које су истога облика са једначинама под (2).

6. На послетку, додајмо ово: Не водећи рачуна о путањи покретне тачке, појмљиво је да ће једно кретање бити више или мање просто, према томе да ли је једначина кретања, она самâ, више или мање проста. Слична напомена вреди за једно кретање, кад је оно представљено двема или трима једначинама.

67. Праволинијско кретање тачке. — Свако кретање једне тачке, при коме је правац кретања непроменљив, или свако кретање, при коме покретна тачка описује праву линију, зваћемо *праволинијским кретањем* те тачке (n^0 63). Путања покретне тачке, права линија, одређује *правац* њеног померања или кретања. Приметимо да је назив *право кретање*, који се често у нас употребљује, да би се означило *праволинијско кретање*, са свим неподесан, јер често доводи човека у забуну.

Ми смо већ казали (n^0 66), да је свако праволинијско кретање одређено једном јединим једначином; нпр., једначином

$$
(1) \qquad x = \varphi(t),
$$

кад је путања покретне тачке узета за Ox осу. Напоменимо да би претпоставка $\varphi(t) = C^{te}$, сталној количини, одговарала $x = C^{te}$, тј. одговарала би непокретности тачке на Ox оси.

Праволинијско кретање може бити двојако: *једнако праволинијско кретање* или *променљиво (неједнако) праволинијско кретање*.

68. Једнако праволинијско кретање једне тачке. Брзина. — 1. Најпростије од праволинијских кретања једне тачке јесте *једнако праволинијско кретање* (фр. *mouvement rectiligne uniforme;* нем. *gleichförmig geradlinige Bewegung*). Једнако праволинијско кретање тачке јесте оно кретање при коме је: 1° правац кретања непроменљив; и 2° још је такво кретање, да су пређени путеви за једнака времена једнаки, — то ће рећи: да су пређени путеви сразмерни временима, за која су пређени.

2. Са свим је природно посматрати, у једнаком праволинијском кретању једне тачке, пут пређен за јединицу времена. Нека је Ox (сл. 42) она права, по којој се креће тачка M једнаким кретањем. Узмимо смисао од O ка x за

сл. 42.

позитиван смисао. Нека су M и M_1 положаји покретне тачке у временима t и $t + 1$; нека су x и x_1 одстојања тачака M и M_1 од сталне тачке O. Према дефиницији једнаког праволинијског кретања тачке, увећања од x сразмерна су увећањима времена t; отуда је јасно да је x линеарна функција времена t, дакле општа једначина (1) из претходне нумере овде постаје:

$$x = at + b, \tag{1}$$

где су a и b две ма какве сталне количине. У осталом, приметимо да стална количина b није ништа друго до особена вредност $x_{-\text{са}}$ за $t = 0$, тј. $x_0 = b$, која једначина одређује почетни положај M_0 покретне тачке у почетку времена.

На крају времена t пређени пут јесте

$$x = at + b,$$

а на крају времена $t + 1$ пређени пут јесте

$$x_1 = a\,(t + 1) + b;$$

пређени пут за јединицу времена јесте разлика путевâ пређених за $t+1$ и за t, он је представљен једначином:

$$(2) \qquad x_1 - x = a.$$

Пређени пут за јединицу времена, у једнаком праволинијском кретању једне тачке, зове се *брзина* (фр, *vitesse*; нем. *Geschwindigkeit, Schnelligkeit*) *кретања,* или *брзина покретне тачке,* коју обично означавамо са V или са v, како кад. Брзина се састоји у актуалној промени места.

Као што се из последње једначине (2) види: *У једнаком праволинијском кретању брзина покретне тачке јесте стална.*

Како је $x_1 - x = \mathrm{MM}_1$, то ће брзина v покретне тачке бити дужина MM_1 пред којом се ставља знак $+$ или знак $-$, према томе да ли се кретање тачке М врши у смислу од О ка x, или у смислу супротном. Отуда следује, да се брзина покретне тачке М може представити по величини и по знаку са потегом MM_1, дакле, може се представити са извесном геометријском величином, чија је алгебарска вредност иста као она брзине, и чији је правац исти као онај кретања, — под условом да изаберемо једну одређену јединицу времена. Очевидно је и то: што је брзина већа, то ће и покретна тачка прећи већи пут за дато време; то је сагласно са појмом, који изражава реч *брзина* у обичном говору.

3. Корисно је распрострети овај начин представљања брзине на променљива кретања, било праволинијска, било пак криволинијска.

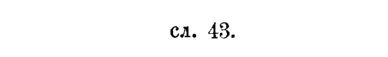
69. Променљиво праволинијско кретање једне тачке. Брзина. — 1. Свако праволинијско кретање једне тачке, које није једнако, зове се њено *променљиво праволинијско кретање* (фр. *mouvement rectiligne varié*; нем. *veränderlich geradlinige Bewegung*). Свако такво кретање представ-љено је једначином:

$$(1) \qquad x = \varphi(t),$$

у којој је функција $\varphi(t)$ ма каква функција времена, само не линеарна. Почетни положај M_0 покретне тачке, у почетном тренутку $t = 0$, одређен је једначином $x_0 = \varphi(0)$, а у тренутку $t = t_0$, овом једначином $x_0 = \varphi(t_0)$.

2. Да бисмо створили себи појам о променљивом праволинијском кретању једне тачке, природно је да га упоредимо са кретањем неке друге тачке, која би се кретала једнаким кретањем и која би прешла исти пут за исто време, као прва тачка. Одредимо и овде пут пређен за јединицу времена.

Претпоставимо да је у времену t покретна тачка у M, а у времену $t + \Delta t$ да је у M_1. Нека је $MM_1 = \Delta x$ пут пређен за време Δt. Узмимо, у смислу MM_1, геометријску величину MW једнаку са $\frac{MM_1}{\Delta t}$; потег MW, чија је алгебарска вредност $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, зове се *средња брзина покретне тачке* у интервалу времена Δt. То је брзина, коју би имала једна фиктивна покретна тачка, која би се кретала једнаким кретањем за време Δt, полазећи из M и дошавши у M_1 (сл. 43) у исти мах када и реална покретна тачка.



сл. 43.

Претпоставимо да је интервал времена Δt врло мали. Кад Δt тежи нули, потег MW, тј. средња брзина, тежиће ка једној одређеној граници, која се зове *брзина покретне тачке* M у времену t. Да бисмо нашли ту границу, ми ћемо тражити чему тежи количник $\frac{MM_1}{\Delta t}$, када Δt тежи ка нули. Имамо:

$$MM_1 = \Delta x = OM_1 - OM = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t);$$

откуда, делећи са Δt и узевши границу, добићемо за брзину v покретне тачке

$$(2) \qquad v = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t).$$

Дакле, *брзина је први извод пута по времену*. Као што се види, брзина је количник између пређеног простора (извесне дужине) и за то употребљеног времена, тј. и овде: брзина је пређени пут за јединицу времена; ми је представљамо са потегом Mv.

У овом кретању, брзина није више стална, него је извесна функција времена.

Проблем. — *Дато је кретање једначином*

$$x = at^2 + bt + c,$$

количине a, b, c представљајући три сталне количине; наћи брзину.

Брзина Mv покретне тачке у времену t, цењена правцем Ox осе, имаће за алгебарску вредност:

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b.$$

Промена брзине сразмерна је промени времена; или, ако се хоће, брзина добија увећања која су сразмерна увећањима времена. На тај начин одређено праволинијско кретање зове се праволинијско *једнако промењиво кретање* (фр. *mouvement uniformément varié*; нем. *gleichförmig veränderte Bewegung*).

3. Учинимо ову напомену: Кад бисмо тражили брзину онога кретања, које је дато једначином $x = at + b$ (n° 68), опет бисмо нашли да је она стална: $v = \frac{dx}{dt} = a$.

70. Криволинијско кретање једне тачке. — Свако кретање једне тачке, које није праволинијско, зове се *криволинијско кретање* те тачке. То је оно кретање тачке, при коме она описује једну криву линију (n^0 63). Ако се у ову криву линију упише једна полигонална линија, и ако се за тим замисли да стране те полигоналне линије теже ка нули, граница је независна од опадања странâ. Дакле, ми можемо сматрати да дужина једног лука криве линије има један потпуно одређени смисао.

Као год праволинијско кретање, и криволинијско кретање једне тачке може бити двојако: *једнако криволинијско кретање* или *променљиво (неједнако) криволинијско кретање.*

71. Једнако криволинијско кретање тачке. Брзина. — 1. Ако су, при криволинијском кретању једне тачке, пређени луци за једнака времена једнаки, онда ћемо рећи да имамо *једнако криволинијско кретање* (фр. *mouvement curviligne uniforme;* нем. *gleichförmig krummlinige Bewegung*). Према овоме, и ономе што смо о једнаком праволинијском кретању рекли (n^0 68), можемо исказати овај став, којим је дата дефиниција једнаког кретања у опште:

Став I. — *Свако кретање једне тачке,* било оно праволинијско или криволинијско, *зваћемо једнаким кретањем, кад покретна тачка прелази једнаке просторе за једнака времена, ма каква била ова времена;* или, другим речима, краће: *Свако кретање једне тачке јесте једнако, у којем су пређени простори сразмерни временима за која су пређени; — и обратно.*

Једнака кретања тачке могу се разликовати једна од других по просторима пређеним за једнака времена.

2. Нека је s_0 вредност пређеног лука s у почетку времена $t = 0$, или у времену $t = t_0$; разлика $s - s_0$ представљаће тада, по величини и по знаку, пређени лук покретном тачком за време t, или за време $t - t_0$. Означавајући са a једну сталну количину, за први случај имаћемо према горњем ставу:

$$(1) \qquad s - s_0 = at;$$

откуда је

$$(2) \qquad s = s_0 + at.$$

Ова се последња једначина зове *једначина једнаког кретања тачке*, или, још, *формула простора у једнаком кретању тачке.*

Приметимо да је ова последња једначина истог облика, као што је и једначина под (1) из n° 68.

3. И код овог једнаког криволинијског кретања тачке, потребно је дати тачну дефиницију о брзини покретне тачке.

У сваком једнаком кретању тачке, било праволинијском, било криволинијском, *брзином покретне тачке зове се пређени простор за јединицу времена*; или другим речима: *У сваком једнаком кретању неке тачке, брзином покретне тачке зове се количник између пређеног простора и употребљеног времена за његов прелаз.*

Означавајући са v брзину покретне тачке у једнаком кретању, а са $s - s_0$ пређени простор за време t, према горњој дефиницији имаћемо:

$$(3) \qquad v = \frac{s - s_0}{t};$$

из које једначине и оне под (1) излази да је брзина $v = a$, стална количина. Према томе, и ономе што смо рекли о брзини у једнаком праволинијском кретању (n° 68), можемо исказати овај став:

Став II. — *У сваком једнаком кретању једне тачке,* било праволинијском, било криволинијском кретању, *брзина покретне тачке јесте стална количина.*

Откуда опет, *обратно,* кад је у неком кретању једне тачке њена брзина *стална,* онда је то *једнако кретање* те тачке.

4. У кратком изводу, једначине сваког једнаког кретања једне тачке јесу ове две:

$$(4) \qquad \begin{cases} s = s_0 + at, \\ v = a. \end{cases}$$

5. Учинимо, најзад, неколико *примедаба:*

Прво, очевидно је да се не може сравњивати један простор са једним временом, него односи ових количина ка њиховим дотичним јединицама. Отуда следује да немамо јединицу брзине: брзина, као што смо је дефинисали, јесте један апстрактан број чија се величина мења са јединицом времена и јединицом дужине. Обично, време t сматра се као један апстрактан број. Тада, *брзина покретне тачке јесте једна дужина, један број метара* (пређених у једној секунди).

Друго, према томе она тачка, чија ће брзина бити изражена бројем 1, прелазиће јединицу дужине за јединицу времена.

Треће, према дефиницији брзине, види се да ће, у једном истом кретању, она количина, коју зовемо брзином покретне тачке, бити у толико већа у колико је јединица времена већа; али однос између брзинâ у двама различним кретањима потпунце је независан од тога: то је однос пређених простора у једном истом времену.

Још се види да се број, који изражава брзину покретне тачке, мења са јединицом дужине; он је у толико већи, у колико је ова јединица мања. Ове две примедбе о утицају разних јединица неопходно су нужне за познавање *једнородности* динамичких формула.

Четврто, најзад, приметимо да се брзини придаје *смисао* у коме се врши кретање. Она ће бити положна или одречна, према томе да ли се покретна тачка помера по путањи у смислу који је узет за позитиван смисао или у смислу супротном, тј. према томе да ли се кретање врши

ПОГРЕШКЕ

Страна	*Врста*	*Место*	*Треба*
4	13 оздо	расматрање	разматрање
4	10 »	»	»
10	1 озго	адбисмо	да бисмо
14	11 »	оп	по
14	8 оздо	кога	коју
15	12 озго	расматрање	разматрање
16	10 »	»	»
20	10 »	кога	који
20	7 оздо	»	»
23	5 озго	њихова	његова
23	9 »	своја	»
23	10 »	своје	његово
27	14 »	релне	реалне
54	15 оздо	*простора*	*времена*
72	10 »	чиј	чији
88	9 »	свакога да	да сваки
89	1 озго	чиј	чији
91	4 оздо	ком	ко
92	9 »	прициици	принципи
93	12 озго	исказази	исказали
94	2 »	чиј	чији
95	16 »	кога	који
95	17 »	*материја*	*материје*
99	На крају седме врсте оздо додати реч : *система,*		
101	6 оздо	познавлњу	познавању
103	5 озго	помрче	помраче
112	12 оздо	(Ар)	(ар)
118	16 озго	произвиденог	произведеног
121	2 »	би	бисмо
121	2 »	аутора	ауктора
122	1 »	Жаку Бернуљију	Јакову Бернулију
122	15 оздо	Бернуљију	Бернулију
131	3 озго	чечности	течности

Страна	*Врста*	*Место*	*Треба*
133	6 оздо	Истиил	Истина
134	9 озго	повритку	повратку
171	16 оздо	брзиил	брзина
171	10 »	седамнаестег	седамнаестог
172	11 »	прицила	принцила
172	9 »	принцит	принцип
172	5 »	После речи: општије, треба запета не тачка	
173	1 »	После t. I, треба ставити латинско p.	
178	8 »	После речи: равнима, долази запета	
183	10 »	распилио	распалио
188	14 озго	раван	ова раван
192	12 »	те	те је
194	10 озго	теријом	теоријом
195	16 оздо	јо	је
215	9 озго	површина	површинâ
218	17 оздо	до	до-
218	15 »	какава	каква
234	6 »	таутокранама	таутокронама
236	11 »	једначнне	једначине
246	3 озго	Јенаки	Једнакь
253	3 »	Хидростатиик	Хидростатици
263	6 оздо	уопште	у опште
271	5 озго	косервација	конзервација
276	1 »	Даламбера	Даламберта
283	14 оздо	висико	високо
287	2 »	ридили	радили
291	9 озго	подјед	подјед-
293	2 оздо	уопште	у опште
301	10 озго	правилама	правилима
307	15 »	иij-	није
307	16 »	релатив	релатив-
311	11 »	Понслеом	Понслетом
311	8 оздо	Декарат	Декарт
312	1 »	*Ampèr*	*Ampère*
315	5 озго	Послеја	Понслета
317	5 оздо	параброд	пароброд
322	9 озго	зазанимају	занимају
324	Слогови многих речи раздвојени су; то је погрешно.		
335	2 озго	ста лна	стална
342	12 »	После речи: приближно долази тачка	
349	14 оздо	аналити чке	аналитичке
363	На слици 8	$Q_{n-}{}^{1}$	Q_{n-1}
386	5 оздо	ивицâ	ивица
398	3 озго	ову	ову класичку
398	12 »	представљен	представљен
400	12 »	противположене	наспрамне

Страна	*Врста*	*Место*	*Треба*
406	1 оздо	употребиги	употребити
406	4 оздо	овај :	овај
412	15 »	$N = \Sigma N_i$	$N = \Sigma N_i$.
412	14 »	оса.	оса,
440	10 »	$LM + MY + NZ$·	$LX + MY + NZ$.
445	7 »	(сл. 35)	(сл. 35) ;