UNIVERZITET U BEOGRADU

D. SIMEUNOVIĆ
B. VULIČEVIĆ
V. PAVLOVIĆ
M. IVOVIĆ

MATEMATIKA II
II deo

Ekonomski fakultet
TANJUG - Redakcija ekonomskih informacija

Beograd, 1978.

UNIVERZITET U BEOGRADU

D. SIMEUNOVIĆ
B. VULIČEVIĆ
V. PAVLOVIĆ
M. IVOVIĆ

MATEMATIKA II
II deo

Ekonomski fakultet
TANJUG - Redakcija ekonomskih informacija

Beograd, 1978.

RECENZENTI: KOVINA RAKOČEVIĆ
Dr. MIODRAG IVOVIĆ

Štampa: GIP »GRAFOSREM« — Šid

S A D R Ž A J

G l a v a III

G l a v a IV

P R E D G O V O R

Matematika II, II deo, sadrži izabrana i nešto skraćena poglavlja priručnika Matematika II - zadaci i osnovi teorije - od D. Simeunovića, B. Vulićevića, V. Pavlovića, M. Ivovića i M. Andjelković, V izdanje, Beograd, 1976. godine. Poglavlja su odabrana tako da II deo čini celinu sa I delom (Matematika II, I deo, od B. Vulićevića) i da odgovara postojećem programu za predmet Matematika II na Ekonomskom fakultetu u Beogradu.

I glavu je napisao D. Simeunović, II- V. Pavlović, III- M. Ivović i IV- B. Vulićević i V. Pavlović.

Autori se zahvaljuju J. Crnkoviću koji im je pomagao pri ispravkama primećenih grešaka i realizaciji ovoga izdanja.

1.IV.1978.god.
Beograd

A u t o r i

G l a v a I

DIFERENCIJALNE I DIFERENCNE JEDNAČINE

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Jednačina oblika

(1) $$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

gde je $y = y(x)$ funkcija nezavisne promenljive x a $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ prvi, drugi, odnosno n-ti izvod ove funkcije po promenljivoj x naziva se <u>diferencijalna jednačina</u> n-toga reda.

Red diferencijalne jednačine odredjuje najviši izvod koji se u njoj pojavljuje. Tako, na primer, jednačina

(a) $$y' + xy - x = 0$$

je diferencijalna jednačina prvoga reda, dok jednačina

(b) $$y''' - 5y'' + 4y - 10x = 0$$

predstavlja diferencijalnu jednačinu trećeg reda. Jednačina (a) može se napisati i u obliku

$$\frac{dy}{dx} + xy - x = 0,$$

a jednačina (b) u obliku

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 5\frac{d^2y}{dx^2} + 4y - 10x = 0$$

Diferencijalne jednačine javljaju se pri rešavanju raznih problema. One se javljaju i kao posledica eliminacije proizvoljnih parametara $c_1, c_2, \ldots, c_n$ iz funkcije oblika

$$y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

i njenih izvoda $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Primer. Posmatrajmo funkciju

$$\text{(c)} \qquad y = ax^2 + 2x - 3,$$

odakle je

$$y' = 2ax + 2.$$

Ako se iz poslednje jednačine odredi a, pri čemu je

$$a = \frac{y' - 2}{2x},$$

i ova vrednost zameni y (c), dobiće se diferencijalna jednačina

$$\text{(d)} \qquad xy' - 2y + 2x - 6 = 0$$

Jednačina (d) pretstavlja diferencijalnu jednačinu familije krivih (c).

Svaka funkcija $y = f(x)$ koja identički zadovoljava jednačinu (1) predstavlja jedno njeno rešenje.

Funkcija

$$\text{(2)} \qquad y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

gde su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ n proizvoljnih i medjusobno nezavisnih konstanti, a koja identički zadovoljava jednačinu (1) naziva se njeno opšte rešenje ili njen opšti integral. Funkcija (2) u koordinatnoj ravni xoy odredjuje jednu familiju krivih linija. Ove linije nazivaju se integralne krive diferencijalne jednačine (1). Ako se u funkciji (2) proizvoljnim konstantama $c_1, c_2, \ldots, c_n$ daju odredjene vrednosti $c_{1o}, c_{2o}, \ldots, c_{no}$ dobiće se jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine (1). Ako jednačina (1) ima i takvo rešenje $y = f(x)$ koje se ne može dobiti iz njenog opšteg rešenja (2) dajući proizvoljnim konstantama $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ma koje vrednosti, tada se ovo rešenje naziva njenim singularnim rešenjem.

Diferencijalne jednačine prvog reda.

To su jednačine oblika

$$F(x, y, y') = 0.$$

Mi ćemo ovde posmatrati samo neke tipove ovih jednačina.

1) Jednačina koja razdvaja promenljive.

To je jednačina oblika

$$Q(y)\, y' + P(x) = 0.$$

Ona se može napisati i u obliku

$$Q(y)\, dy + P(x)\, dx = 0,$$

odakle se integracijom dobija njeno opšte rešenje

$$\int Q(y)dy + \int P(x)dx = C,$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Primer 1.

Rešiti diferencijalnu jednačinu

(1) $\quad yy' - x + 2 = 0$

Rešenje

Data jednačina može se napisati u obliku

$$y \frac{dy}{dx} = x - 2,$$

odnosno u obliku

$$ydy = (x - 2)dx$$

gde su razdvojene promenljive, odakle je

$$\int ydy = \int (x-2)dx,$$

tj.

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2x + c_1$$

ili

$$y^2 = x^2 - 4x + c \qquad (c = 2c_1),$$

što pretstavlja opšte rešenje jednačine (1).

Primer 2.

Naći opšte rešenje jednačine

(2) $$xdy - (xy + y)dx = 0.$$

Rešenje

Jednačina (2) može se napisati u obliku

$$xdy - y(x + 1)dx = 0$$

ili u obliku

$$\frac{dy}{y} = \frac{x + 1}{x}\,dx,$$

što pretstavlja jednačinu sa razdvojenim promenljivima. Njenom integracijom dobija se

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1 + \frac{1}{x})dx,$$

tj.

$$\ln y = x + \ln x + c$$

i to je opšte rešenje jednačine (2).

Primer 3.

Rešiti jednačinu

(3) $$y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$$

Rešenje

Ovde je $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, odakle razdvajanjem promenljivih imamo

$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$. Integracijom ove poslednje jednačine dobija se

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}, \quad \text{tj.}$$

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + c = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} c_1,$$

odakle je

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} c_1) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} c_1)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} c_1)},$$

odnosno

$$y = \frac{x + c_1}{1 - c_1 x},$$

što pretstavlja opšte rešenje jednačine (3).

Primer 4.

Jednačina

$$(4) \qquad y' = \frac{x + xy^2}{y + x^2 y}$$

može se napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)},$$

odakle je

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{xdx}{1+x^2}$$

Dalje je

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{1+x^2},$$

tj.

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln c_1,$$

odnsno

$$\ln(1+y^2) = \ln c_1(1+x^2).$$

Antilogaritmovanjem poslednje jednačine dobija se

$$1 + y^2 = c_1(1 + x^2),$$

što pretstavlja opšte rešenje jednačine (4).

Zadaci:

a) $xy' = y$, b) $xyy' = x + 1$, c) $xydx - (y - 2)\,dy = 0$

Rešenja:

a) $y = cx$, b) $y^2 = 2x + 2\ln x + c_1$, c) $x^2 - 2y + 4\ln y = c$.

2) Homogena jednačina

To je jednačina oblika

(a) $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Smenom $\frac{y}{x} = u$ (u je nova funkcija promenljive x), odakle je $y = ux$ i $y' = u'x + u$, jednačina (a) postaje

$$u'x + u = f(u),$$

koja se može napisati u obliku

$$\frac{du}{dx}\,x = f(u) - u,$$

ili u obliku jednačine

(a′) $$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

u kojoj su promenljive razdvojene. Ako je opšte rešenje jednačine (a′) $u = \varphi(x, c)$, tada je, zbog $y = ux$, opšte rešenje jednačine (1) $y = x\,\varphi(x, c)$.

Primer 1

Jednačina $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$

je homogena. Smenom $\frac{y}{x} = u$, odakle je $y = ux$ i $y' = u'x + u$ ona postaje

$$u'x + u = u^2 + u,$$

odakle je

$$x\frac{du}{dx} = u^2, \text{ tj. } \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Integracijom ove jednačine dobijamo $-\frac{1}{u} = \ln x + c$, odakle zamenjujući u sa $\frac{y}{x}$ imamo

$$y = -\frac{x}{\ln x + c}$$

__Primer 2.__

Jednačina

$$(2) \qquad y' = \frac{y}{x-y}$$

posle deljenja brojitelja i imenitelja njene desne strane sa x svodi se na homogenu jednačinu

$$(2') \qquad y' = \frac{y/x}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Smenom $y = ux$, odakle je $y' = u'x + u$, jednačina (2′) postaje

$$u'x + u = \frac{u}{1-u}, \text{ odnosno } u'x = \frac{u^2}{1-u} \text{ ili}$$

$$\frac{1-u}{n^2}\,du = \frac{dx}{x}, \text{ odakle je } \int\frac{1-u}{u^2}\,du = \int\frac{dx}{x},$$

odnosno $-\frac{1}{u} - \ln u = \ln x + c$. Zamenjujući u sa $\frac{y}{x}$ poslednja jednačina se svodi na $\frac{x}{y} + \ln\frac{y}{x} + \ln x + c = 0$ ili na

$$\frac{x}{y} + \ln y + \ln c_1 \qquad (c = \ln c_1),$$

tj. na

$$\frac{x}{y} + \ln c_1 y = 0, \text{ odakle je}$$

$$x = -y \ln c_1 y.$$

Primer 3.

Jednačina

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}.$$

posle skraćivanja njene desne strane sa x^2 postaje

(3′) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Smenom $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ jednačina (3′) se svodi na jednačinu

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1 + 3u^2}{2u}, \quad \text{odakle je } x\frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{2u}$$

Poslednju jednačinu možemo napisati u obliku

$$\frac{2udu}{1+u^2} = \frac{dx}{x}, \quad \text{odakle je } \int\frac{2udu}{1+u^2} = \int\frac{dx}{x},$$

odnosno $\ln(1+u^2) = \ln x + \ln c$, tj. $\ln(1+u^2) = \ln cx$.

Antilogaritmovanjem poslednje jednačine i zamenom u sa $\frac{y}{x}$ dobija se $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx$, odnosno

$$x^2 + y^2 - cx^3 = 0,$$

što pretstavlja opšte rešenje jednačine (3).

Zadaci:

a) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, b) $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

Rešenja:

a) $y' = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x}$, $y^2 = 2x^2 \ln cx$, b) $y = x\,\mathrm{tg}(\ln cx)$.

c) Naći krive kod kojih je otsečak što ga tangenta gradi na y osi jednaka apscisi njene dodirne tačke.

Rešenje

Jednačina tangente krive čija je jednačina $y = y(x)$ u njenoj tački $M(x, y)$ glasi (t) : $Y - y = y'(X - x)$, gde su X i Y tekuće koordinate, x i y koordinate dodirne tačke a y' koeficijent pravca tangente. Za $X = 0$ iz (t) je $Y = y-xy'$ pa prema uslovu zadatka imamo

$$y - xy' = x,$$

odakle je

(a) $$y' = \frac{y}{x} - 1.$$

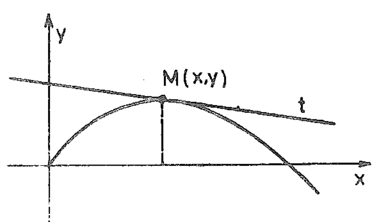
Jednačina (a) je homogena diferencijalna jednačina prvog reda. Smenom $y = ux$, $y' = u'x+u$ ona postaje $u'x + u = u - 1$, odakle je $du = -\frac{dx}{x}$. Integracija ove poslednje jednačine daje $u = c - \ln x$, odakle je

(b) $$y = x\,(c - \ln x).$$

Sa (b) data je familija krivih sa gore navedenom osobinom, pošto c može uzeti proizvoljne vrednosti. Da se iz (b) odredi kriva koja, na primer, prolazi kroz tačku M (2,1) treba odrediti konstantu c za date vrednosti $x = 1$ i $y = 2$. U ovom slučaju iz (b) imamo $2 = 1.(c-\ln 1)$, tj. $2 = c$, pa naša tražena kriva je

$$y = x(2-\ln x)$$

prikazana na slici.



3) Linearna jednačina

To je jednačina oblika

(a) $$y' + P(x)y = Q(x).$$

Njen homogeni deo je jednačina

$$y' + P(x)y = 0$$

čije je rešenje

(+) $$y = ce^{-\int P(x)dx}$$

Smenom

(b) $$y = ue^{-\int P(x)dx}$$ (u je funkcija uzeta mesto c u (+)),

odakle je

$$y' = u'e^{-\int P(x)dx} - P(x)ue^{-\int P(x)dx}$$

jednačina (a) svodi se na jednačinu

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

odakle je

$$u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Integracijom poslednje jednačine dobija se

$$u = c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Prema (b) je sada

(c) $$y = (c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)e^{-\int P(x)dx}$$

Izraz (c) pretstavlja opšte rešenje jednačine (a).

Primer 1.

Rešiti jednačinu

(1) $$y' - \frac{1}{x}y = x^4$$

Rešenje.

Homogeni deo jednačine (1) je jednačina $y' - \frac{1}{x}y = 0$ čije je rešenje $y = cx$. Smenom $y = ux$, odakle je $y' = u'x + u$, jednačina (1) svodi se na jednačinu $u'x = x^4$, odakle je $u = c + \frac{x^4}{4}$. Stoga je $y = ux$, tj.

$$y = x(c + \frac{x^4}{4})$$

opšte rešenje jednačine (1).

Primer 2.

Jednačina

(2) $$xy' + y = \sqrt{x}$$

Posle deljenja sa x postaje

$$y' + \frac{1}{x}\,y = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Njen homogeni deo je jednačina $y' + \frac{1}{x}\,y = 0$ čije je rešenje $y = \frac{c}{x}$. Smenom $y = \frac{u}{x}$, odakle je $u' = \frac{u'x - u}{x^2}$, jednačina (2) svodi se na jednačinu $\frac{u'}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ odakle je $u = c + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Stoga je $y = \frac{u}{x}$, tj.

$$y = \frac{c}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x}$$

opšte rešenje jednačine (2).

Primer 3.

Jednačina

$$(3) \qquad y'\cos x + y\sin x - \cos^2 x = 0$$

može se napisati u obliku

$$(3') \qquad y' + \frac{\sin x}{\cos x}\,y = \cos x$$

Njen homogeni deo je jednačina $y' + \frac{\sin x}{\cos x}\,y = 0$ čije je rešenje $y = c\cos x$. Smenom $y = u\cos x$, odakle je $y' = u'\cos x - u\sin x$, jednačina (3′) svodi se na jednačinu $u'\cos x = \cos x$ odakle je $u = c + x$. Stoga je $y = u\cos x$, tj.

$$y = (c + x)\cos x$$

opšte rešenje jednačine (3′), odnosno jednačine (3).

Primer 4.

Jednačina

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3}$$

može se napisati u obliku $\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^3}{y}$, odnosno u obliku

$$(4') \qquad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}\,x = y^2$$

Jednačina (4′) je linearna po funkciji x. Njen homogeni deo je jednačina $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = 0$ čije je rešenje $x = cy$. Smenom $x = u(y)y = uy$, odakle je $\frac{dx}{dy} = y\frac{du}{dy} + u$, jednačina (4′) postaje $y\frac{du}{dy} = y^2$ odakle je $u = c + \frac{y^2}{2}$.

Zato je $x = uy$, tj.

$$x = y\left(c + \frac{y^2}{2}\right)$$

opšte rešenje jednačine (4′), odnosno jednačine (4).

Rešenje linearne jednačine (a) može se dobiti primenom obrasca (c). Tako je u primeru 1 $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^4$; $\int P(x)dx = -\int\frac{dx}{x} = -\ln x$, $\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx = \int x^4 e^{-\ln x}dx = \int x^4\frac{1}{x}dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. Sada nalazimo opšte rešenje jednačine (1) po obrascu (c)

$$y = \left(c + \frac{x^4}{4}\right)e^{\ln x} = x\left(c + \frac{x^4}{4}\right).$$

Ovde smo koristili jednakosti

$$e^{\ln A} = A \quad i \quad e^{-\ln A} = \frac{1}{A}$$

<u>Zadaci</u>:

a) $y' - 2y + 4x = 0$, b) $y' + y = \sin x$, c) $x^2y' + x^3y - x^2 + 1 = 0$,

d) $xy' - 2y + 2x - 6 = 0$

<u>Rešenja</u>:

a) $y = ce^{-2x} + 2x + 1$, b) $y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$,

c) $y = ce^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{x}$, d) $y = cx^2 + 2x - 3$

c) Naći ono rešenje diferencijalne jednačine $y' - y = x$ koje za $x = 0$ dobija vrednost $y = 3$.

<u>Rešenje</u>

Prvo nalazimo opšte rešenje date jednačine koje glasi $y = ce^x - x - 1$. Sada odredjujemo konstantu c za $x = 0$ i $y = 3$. Imamo $3 = c - 1$, odakle je $c = 4$, pa je traženo rešenje $y = 4e^x - x - 1$.

4) Bernulijeva jednačina

To je jednačina oblika

(a) $$y' + P(x)y = Q(x)\, y^s.$$

Za $s = 0$ ona postaje linearna diferencijalna jednačina, a za $s = 1$ ona se može napisati u obliku

$$\frac{y'}{y} = Q(x) - P(x)$$

tj. svodi se na jednačinu sa razdvojenim promenljivima. Zato ćemo posmatrati slučajeve kada je $s \neq 0$ i $s \neq 1$. U ovim slučajevima Bernulijeva jednačina (a) smenom

(b) $$y = Z^{\frac{1}{1-s}},$$

odakle je $y' = \frac{1}{1-s} Z^{\frac{s}{1-s}} Z'$, svodi se na linearnu jednačinu po Z tj. na jednačinu

$$Z' + (1-s)\, P(x)\, Z = (1-s)\, Q(x)$$

Primer 1.

Jednačina

(1) $$y' - \frac{1}{x}\, y = x^3 y^2 \qquad (s = 2)$$

smenom $$y = Z^{\frac{1}{1-2}} = \frac{1}{Z}, \qquad y' = -\frac{Z'}{Z^2}$$

svodi se na jednačinu

(1′) $$Z' + \frac{1}{x}\, Z = -x^3.$$

Jednačina (1′) je linearna po funkciji Z. Njeno rešenje je $Z = \frac{1}{x}\left(c - \frac{x^5}{5}\right)$, a opšta rešenja jednačine (1) zbog $y = \frac{1}{Z}$ je

$$y = \frac{5x}{5c-x^5} = \frac{5x}{c_1-x^5} \qquad (5c = c_1)$$

Primer 2.

Jednačina

(2) $$\sqrt{y}\, y' - y\sqrt{y} - 3x = 0$$

može se napisati u obliku

(2') $$y' - y = \frac{3x}{\sqrt{y}} \qquad (s = -\frac{1}{2}).$$

Smenom

$$y = Z^{\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = Z^{\frac{2}{3}}, \qquad y' = \frac{2}{3} Z^{-\frac{1}{3}} Z'$$

jednačina (2') svodi se na jednačinu

$$Z' - \frac{2}{3} Z = \frac{9}{2} x$$

čije je opšte rešenje

$$Z = Ce^{\frac{3}{2}x} - 3x - 2,$$

a opšte rešenje jednačine (2) je

$$y = (Ce^{\frac{3}{2}x} - 3x - 2)^{\frac{2}{3}}$$

Zadaci: a) $xy' - y = x^2y^3$, b) $y' - y = y^2\sin x$

Rešenja:

a) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{c+3x^5}}$ b) $y = \dfrac{2e^x}{x+e^x(\cos x-\sin x)}$

5) Rikatijeva jednačina

To je jednačina oblika

(a) $$y' + P(x)\, y^2 + Q(x)\, y + R(x) = 0$$

Ona se u opštem slučaju može rešiti kvadraturama ako se zna jedan njen partikularni integral. Zapravo, ako je y_p njen partikularni integral, tada se smenom

(b) $$y = \frac{1}{z} + y_p \qquad (z \text{ je nova funkcija})$$

jednačina (a) svodi na linearnu jednačinu po z.

Primer 1

Rikatijeva jednačina

(1) $$y' + 2y^2 - \frac{1}{x^2} = 0$$

ima partikularno rešenje $y_p = \frac{1}{x}$. Smenom $y = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}$, odakle je $y' = -\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x^2}$, jednačina (1) svodi se na linearnu jednačinu

$$z' - \frac{4}{x} z = 2$$

čije je opšte rešenje

$$z = \frac{c_1 x^4 - 2x}{3}$$

Stoga je opšte rešenje jednačine (1) $y = \frac{1}{z} + y_p$, tj.

$$y = \frac{c_1 x^3 + 2}{c_1 x^4 - 2x}$$

Diferencijalne jednačine višeg reda

1) Diferencijalne jednačine drugog reda koje se svode na diferencijalne jednačine prvog reda.

Ovde ćemo posmatrati jednačine oblika:

(a) $$F(x, y', y'') = 0,$$

(b) $$\Phi(y, y', y'') = 0.$$

Jednačina (a) smenom $y' = p$, $y'' = p'$ svodi se na jednačinu prvog reda

(a') $$F(x, p, p') = 0.$$

Ako je opšti integral jednačine (a')

$$p = \varphi(x, c_1),$$

tada je zbog $y' = p$

$$y' = \varphi(x, c_1)$$

odakle je

$$y = \int (x, c_1)dx + c_2,$$

što pretstavlja opšti integral jednačine (a).

<u>Primer 1.</u>

Jednačina

(1) $$xy'' - y' = x^2$$

smenom $y' = p$, $y'' = p'$ svodi se na jednačinu $xp' - p = x^2$, odnosno na jednačinu

$$p' - \frac{1}{x} p = x^2$$

koja je linearna diferencijalna jednačina prvog reda po funkciji p. Njen opšti integral je

$$p = c_1 x + x^2.$$

Zbog $y' = p$ je $y' = c_1 x + x^2$, odakle je

$$y = \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c_2,$$

što pretstavlja opšti integral jednačine (1).

Jednačina (b) smenom

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \text{ odakle je } y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

svodi se na diferencijalnu jednačinu prvog reda funkcije p po nezavisno promenljivoj y

(b') $$\phi(y, p, \frac{dp}{dy} \cdot p) = 0$$

Ako je njen opšti integral

$$p = \varphi(y, c_1)$$

tada je zbog $y' = p$

$$y' = \varphi(y, c_1)$$

odnosno

$$\frac{dy}{\varphi(y,c_1)} = dx,$$

odakle je

(c) $$\int \frac{dy}{(y,\ c_1)} = x + c_2$$

Posle integracije leve strane (c) dobiće se

$$f(y,\ c_1) = x + c_2$$

što pretstavlja opšte rešenje jednačine (b).

Primer 1.

Jednačina

(1) $$2yy'' - y'^2 - 1 = 0$$

smenom $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ svodi se na jednačinu

$$2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1,$$

ili

$$\frac{2pdp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y},$$

odakle je

$$\int \frac{2pdp}{1 + p^2} = \int \frac{dy}{y},$$

tj.

$$\ln(1 + p^2) = \ln c_1\ y,$$

odnosno

$$1 + p^2 = c_1\ y.$$

Zbog $p = y'$ iz poslednje jednačine je

$$y' = \sqrt{c_1\ y - 1},$$

odakle je

$$\frac{dy}{\sqrt{c_1 y - 1}} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c_1\ y - 1}} = x + c_2,$$

odnosno

$$\frac{2}{c_1}\sqrt{c_1 y - 1} = x + c_2,$$

što pretstavlja opšti integral jednačine (1).

2) Linearna diferencijalna jednačina n-toga reda.

To je jednačina oblika

$$(a) \qquad a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_o(x)y = f(x)$$

Kada je $f(x) \not\equiv 0$ jednačina (a) zove se nehomogena, a kada je $f(x) \equiv 0$ jednačina (a) zove se homogena. Ako su koeficijenti $a_{n-k}(x)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ konstante jednačina (a) zove se linearna diferencijalna jednačina n-toga reda sa konstantnim koeficijentima.

Prvo ćemo posmatrati slučaj homogene linearne diferencijalne jednačine što znači kada je y (a) $f(x) = 0$, tj. posmatraćemo jednačinu

$$(a_1) \qquad a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\,y' + a_o(x)\,y = 0.$$

Ako levu stranu jednačine (a_1) označimo sa $L(y)$ onda se ona može napisati u obliku

$$(a_2) \qquad L(y) = 0.$$

Ako je $y = y_o(x) \equiv y_o$ rešenje jednačine (a_2) biće tada

$$L(y_o) \equiv 0.$$

Važi teorema. Ako su funkcije $y_1, y_2, \dots, y_n$ rešenja jednačine (a_2) tada je njeno rešenje takodje i funkcija

$$(b) \qquad y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n,$$

gde su $c_1, c_2, \dots, c_r$ proizvoljne konstante.

Dokaz. Iz (b) je

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n',$$

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \dots + c_n y_n'',$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)}.$$

Zamenom ovih vrednosti i vrednosti (b) u jednačinu (a_2) njena leva strana može se napisati u obliku

(c) $$L(y) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) + \dots + c_n L(y_n).$$

Kako je $L(y_k) \equiv 0$ za svako $k = 1, 2, \dots, n$, to je i $L(y) \equiv 0$ za y dato u (b).

<u>Opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine (a_1).</u> Prema diferenciji, opšte rešenje diferencijalne jednačine n-toga reda je funkcija oblika.

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

gde su $c_1, c_2, \dots, c_n$ n proizvoljnih i medjusobno nezavisnih konstanti. Zato, ako su

(d) $$y_1, y_2, \dots, y_n$$

n linearno nezavisnih rešenja jednačine (a_1) tada je

(e) $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

opšte rešenje jednačine (a_1), gde su $c_1, c_2, \dots, c_n$ n proizvoljnih i medjusobno nezavisnih konstanti.

Da bi funkcije $y_1, y_2, \dots, y_n$ bile linearno nezavisne, treba da je

$$w(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Znači, da bismo našli opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine (a_1) treba da odredimo njenih n linearno nezavisnih rešenja (d) i da obrazujemo njihovu linearnu kombinaciju (e). Za razliku od drugih rešenja jednačine (a_1), njena rešenja (d) zvaćemo <u>osnovna rešenja</u>.

Što se tiče opšteg rešenja nehomogene linearne jednačine (a), koju možemo napisati u obliku

(f) $\quad L(y) = f(x)$

ona se dobija kao zbir opšteg rešenja y_h jednačine

(g) $\quad L(y) = 0$

i partikularnog rešenja y_p jednačine (f),
tj. ono je

(h) $\quad y = y_h + y_p,$

pri čemu je $L(y_h) \equiv 0$ i $L(y_p) \equiv f(x)$

Pošto izraz (h), pored promenljive x sadrži i n proizvoljnih i medjusobno nezavisnih konstanti i kako je

$L(y) = L(y_h) + L(y_p) = L(y_p) \equiv f(x),$ jer je

$L(y_h) \equiv 0$ i $L(y_p) \equiv f(x)$, to je (h)

zaista opšte rešenje jednačine (a), odnosno jednačine (f).

Znači, pri rešavanju jednačine (f), prvo se nalazi opšte rešenje njenog homogenog dela (g) a zatim njeno partikularno rešenje i ova dva rešenja saberu.

<u>Homogena linearna diferencijalna jednačina n-toga reda sa stalnim koeficijentima</u>.

To je jednačina oblika

(A_1) $\quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_o y = 0,$

u kojoj su koeficijenti a_{n-k} $(k = 0, 1, \ldots, n)$ realne konstante. Za nalaženje osnovnih rešenja jednačine (A_1) uvodi se smena

(B) $$y = e^{rx},$$

odakle je

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}, \ldots, y^{(n)} = r^n e^{rx}.$$

Zamenom ovih vrednosti y (A_1) i posle deljenja dobijene jednačine sa e^{rx} dobija se jednačina

(c) $$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_o = 0.$$

Jednačina (c) je algebarska jednačina n-toga stepena i naziva se karakteristična jednačina diferencijalne jednačine (A_1). Ona može imati:

1^o Sve korene realne i različite, oni su dakle $r_1, r_2, \ldots, r_n$. U ovom slučaju osnovna rešenja jednačine (A_1) prema (B) su $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$, a njeno opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}.$$

2^o Sve korene realne medju kojima može biti i višestrukih. Ako je njen koren r_1 višestrukosti k, tada ovom korenu odgovara k osnovnih rešenja jednačine (A_1):

$$e^{r_1 x}, \ xe^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{r_1 x}.$$

3^o Neke ili sve korene konjugovano kompleksne medju kojima može biti i višestrukih. Ako je njen koren r_1 oblika $\alpha + \beta i$, ona ima takodje i koren $r_2 = \alpha - \beta i$. Ako je r_1 pri tome višestruki koren višestrukosti k, tada je i r_2 njen višestruki koren višestrukosti k. Ovim korenima odgovara 2k osnovnih rešenja jednačine (A_1):

$$e^{\alpha x} \cos\beta x, \ xe^{\alpha x} \cos\beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos\beta x;$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Linearna diferencijalna jednačina drugog reda.

Homogena jednačina. Prvo ćemo posmatrati homogenu jednačinu sa konstantnim koeficijentima. To je jednačina oblika

(D) $\qquad ay'' + by' + cy = 0$ (a, b i c su konstante i $a \neq 0$).

Njena karakteristična jednačina je

(E) $\qquad ar^2 + br + c = 0.$

Ako su koreni karakteristične jednačine (E) realni i različiti (oni su r_1 i r_2), tada su osnovna rešenja jednačine (D)

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad i \quad y_2 = e^{r_2 x},$$

a njeno opšte rešenje je

(E_1) $\qquad y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

Primer 1.

Rešiti jednačinu

(1) $\qquad y'' - 5y' + 6y = 0.$

Rešenje.

Karakteristična jednačina jednačine (1) je

$$r^2 - 5r + 6 = 0, \text{ odakle je}$$

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Njeni koreni su $r_1 = 3$ i $r_2 = 2$. Oni su realni i različiti. Osnovna rešenja jednačine (1) su $y_1 = e^{r_1 x} = e^{3x}$ i $y_2 = e^{r_2 x} = e^{2x}$, njeno opšte rešenje prema (E_1) je

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

Ako su koreni karakteristične jednačine (E) realni i jednaki (oni su $r_1 = r_2 = r$), tada su osnovna rešenja jednačine (D)

$$y_1 = e^{rx} \quad i \quad y_2 = xe^{rx},$$

a njeno opšte rešenje je

$$(E_2) \qquad y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx},$$

<u>Primer 2.</u>

Jednačina

$$(2) \qquad y'' - 4y' + 4y = 0$$

ima karakterističnu jednačinu

$$r^2 - 4r + 4 = 0, \text{ odakle je } r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

Njeni koreni su realni i jednaki, dakle $r_1 = r_2 = r = 2$. Osnovna rešenja jednačine (2) su $y_1 = e^{rx} = e^{2x}$ i $y_2 = xe^{rx} = xe^{2x}$, a njeno opšte rešenje prema (E_2) je

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}.$$

Ako su koreni karakteristične jednačine (E) konjugovano kompleksni, dakle $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, tada su osnovna rešenja jednačine (D)

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad i \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

a njeno opšte rešenje je

$$(E_3) \qquad y = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

<u>Primer 3.</u>

Rešiti jednačinu

$$(3) \qquad y'' - 6y' + 13y = 0$$

<u>Rešenje</u>

Karakteristična jednačina jednačine (3) je

$$r^2 = 6r + 13 = 0, \text{ odaakle je } r_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i.$$

Njeni koreni su konjugovano kompleksni, tj. $r_1 = 3 + 2i$ i $r_2 = 3 - 2i$ ($\alpha = 3$, $\beta = 2$). Zato su osnovna rešenja jednačine (3)

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x = e^{3x} \cos 2x \quad \text{i} \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x = e^{3x} \sin 2x,$$

a njeno opšte rešenje prema (E_3) je

$$y = c_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x.$$

U slučaju da je $\alpha = 0$, (E_3) se svodi na

$$(E_3') \qquad y = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x.$$

<u>Primer 3'</u>.

Rešiti jednačinu

$$(3') \qquad y'' + 16y = 0.$$

<u>Rešenje</u>

Karakteristična jednačina jednačine (3') je

$$r^2 + 16 = 0, \text{ odakle je } \quad r^2 = -16, \text{ tj.}$$

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-16} = \pm 4i \quad (\alpha = 0, \beta = 4).$$

U ovom slučaju osnovna rešenja jednačine (3') su

$y_1 = \cos\beta x = \cos 4x$ i $y_2 = \sin\beta x = \sin 4x$, a njeno opšte rešenje prema (E_3') je

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x.$$

<u>Primer a)</u>.

Jednačina

$$2y'' + 3y' + y = 0$$

ima karakterističnu jednačinu $2r^2 + 3r + 1 = 0$, čiji su koreni $r_1 = -1$, $r_2 = -\frac{1}{2}$. Zato je prema (E_1) njen opšti integral

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x/2}$$

<u>Primer b)</u>.

Naći ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$9y'' - 6y' + y = 0$ koje za $x = 0$ ima maksimum koji iznosi $y = 3$.

Rešenje

Karakteristična jednačina date jednačine je $9r^2 - 6r + 1 = 0$; njen dvostruki koren je $r = -\frac{1}{3}$. Zato je prema (E_2) opšte rešenje date diferencijalne jednačine

$$y = c_1\, e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{3}x}$$

Prema uslovu zadatka je $y = 3$ za $x = 0$ i $y' = 0$ za $x = 0$. Kako je

$$y' = -\frac{1}{3}\, c_1\, e^{-\frac{1}{3}x} + c_2\, e^{-\frac{1}{2}x} + -\frac{1}{3}\, c_2\, x e^{-\frac{1}{2}x}$$

to za $x = 0$ odavde i iz opšteg rešenja imamo

$0 = -\frac{1}{3}\, c_1 + c_2$, $3 = c_1$, što znači da je

$c_1 = 3$, $c_2 = -1$, pa je traženo partikularno rešenje

$$y = 3e^{-\frac{1}{3}x} - xe^{-\frac{1}{3}x}$$

Primer c).

Rešiti jednačinu

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Rešenje

Karakteristična jednačina date jednačine je $r^2 + 4r + 5 = 0$. Njeni koreni su $r_{1,2} = -2 \pm i$ ($\alpha = -2$, $\beta = 1$). Zato je prema (E_3) opšti integral date diferencijalne jednačine

$$y = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2\, e^{-2x} \sin x.$$

Zadaci:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$, b) $y'' + 3y' + 2y = 0$

c) $2y'' - 5y' + 2y = 0$, d) $4y'' - 4y' + y = 0$,

e) $y'' + 2y' + y = 0$ f) $y'' - 8y' + 16y = 0$,

g) $y'' - 2y' + 5y = 0$, h) $y'' - 6y' + 10y = 0$,

i) $4y'' + y = 0$, k) $y'' + y = 0$,

l) $y'' - 2y' = 0$, m) $3y'' + 5y' = 0$.

Rešenja

a) $y = c_1e^{2x} + c_2e^x$, b) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

c) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{\frac{x}{2}}$, d) $y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2xe^{\frac{x}{2}}$,

e) $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$, f) $y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x}$,

g) $y = c_1e^x\cos 2x + c_2e^x\sin 2x$, h) $y = c_1e^{3x}\cos x + c_2e^{3x}\sin x$,

i) $y = c_1\cos\frac{x}{2} + c_2\sin\frac{x}{2}$, k) $y = c_1\cos x + c_2\sin x$,

l) $y = c_1 + c_2e^{2x}$, m) $y = c_1 + c_2e^{-\frac{5}{3}x}$

Nehomogena jednačina

Videli smo da se opšte rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine dobija kao zbir opšteg rešenja y_h njenog homogenog dela i njenog partikularnog rešenja y_p, tj.

(G) $$y = y_h + y_p.$$

Mi ćemo ovde posmatrati jednačine oblika

(H) $$ay'' + by' + cy = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_o,$$

(J) $$ay'' + by' + cy = Ae^{px},$$

(K) $$ay'' + by' + cy = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

i pokazaćemo kako se dobijaju njihova partikularna rešenja.

Slučaj jednačine (H). Za jednačinu (H), u kojoj je desna strana polinom stepena n, partikularno rešenje y_p traži se i dobija u obliku polinoma stepena n, tj.

$$(L) \qquad y_p = A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \dots + A_o$$

ako je $c \neq 0$.
Ako je u (H) $c = 0$, uzima se

$$(L_1) \qquad y_p = A_n X^{n+1} + A_{n-1} X^n + \dots + A_o X.$$

Primer 1.

Rešiti jednačinu

$$(1) \qquad 2y'' - 5y' + 2y = 4x^2 - 2x + 3$$

Rešenje

Homogeni deo jednačine (1) je jednačina

$$2y'' - 5y' + 2y = 0$$

a njeno opšte rešenje je

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{\frac{x}{2}}.$$

Desna strana jednačine (1) je polinom drugog stepena. Zato se njeno partikularno rešenje traži u obliku polinoma drugog stepena

$$(1') \qquad y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_o,$$

odakle je $y_p' = 2A_2 x + A_1$, $y_p'' = 2A_2$. Zamenjujući y (1) y, y' i y'' odgovarajućim vrednostima za y_p, y_p' i y_p'' dobijamo identičnost

$$4A_2 - 5(2A_2 x + A_1) + 2(A_2 x^2 + A_1 x + A_o) \equiv 4x^2 - 3x + 3,$$

tj.

$$2A_2 x^2 + (-10A_2 + 2A_1)x + (4A_2 - 5A_1 + 2A_o) \equiv 4x^2 - 2x + 3.$$

Iz ove identičnosti slede jednačine

$$(1'') \qquad 2A_2 = 4, \quad -10A_2 + 2A_1 = -2, \quad 4A_2 - 5A_1 + 2A_o = 3$$

koje su dobijene izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x njene leve i desne strane. Rešenje sistema (1") je $A_2 = 2$, $A_1 = 9$, $A_o = 20$, pa prema (1′) partikularno rešenje jednačine (1) je

$$y_p = 2x^2 + 9x + 20.$$

Zato je, prema (G), opšte rešenje jednačine (1)

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{\frac{x}{2}} + 2x^2 + 9x + 20.$$

Primer 2.

Rešiti jednačinu

(2) $$y'' - 2y' = 6x - 1$$

Rešenje

U jednačini (2) koeficijent uz y je $c = 0$. Zato je njen partikularni integral prema (L_1) oblika

(2′) $$y_p = A_1x^2 + A_ox,$$

odakle je $y_p' = 2A_1x + A_o$, $y_p'' = 2A_1$.

Zamenom ovih vrednosti y (2) dobija se identičnost

$$2A_1 - 2(2A_1x + A_o) \equiv 6x - 1,$$

tj. $$-2A_1x + (2A_1 - 2A_o) \equiv 6x - 1,$$

odakle slede jednačine

$$-2A_1 = 6, \quad 2A_1 - 2A_o = -1$$

čija su rešenja $A_1 = -3$, $A_o = -\frac{5}{2}$. Zato je, prema (2′), partikularni integral jednačine (2)

$$y_p = -3x^2 - \frac{5}{2}x.$$

Kako je opšte rešenje homogenog dela jednačine (2) $y_h = c_1+c_2e^{2x}$, pa je, prema (G), njen opšti integral

$$y = c_1 + c_2e^{2x} - 3x^2 - \frac{5}{2}x$$

Primer 3.

Za jednačinu

(3) $\qquad y'' + 4y' + 4y = 8$

Opšte rešenje njenog homogenog dela je $y_h = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$. Njen partikularni integral je $y_p = A_o$, odakle je $y_p' = 0$, $y_p'' = 0$, što zamenom u jednačinu (3) daje $4A_o = 8$, odakle je $A_o = 2$. Zato je $y_p = 2$ partikularni integral jednačine (3) a njen opšti integral je

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + 2.$$

Slučaj jednačine (J).

Za nalaženje partikularnog rešenja y_p jednačine (J) posmatraćemo izraze

$$\varphi(r) = ar^2 + br + c, \ \varphi'(r) = 2ar + b, \quad \varphi''(r) = 2a.$$

Pri tome:

1) Ako je $\varphi(p) \neq 0$, tada je $y_p = \frac{A}{\varphi(p)} e^{px}$

2) Ako je $\varphi(p) = 0$ i $\varphi'(p) \neq 0$, tada je $y_p = \frac{Ax}{\varphi'(p)} e^{px}$

3) Ako je $\varphi(p) = 0$ i $\varphi'(p) = 0$, tada je $y_p = \frac{Ax^2}{\varphi''(p)} e^{px}$.

Primer 1.

Rešiti jednačinu

(1) $\qquad y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}$

Rešenje

U (1) je $A = 5$, $p = 3$, $\varphi(r) = r^2 - 3r + 2$.

Kako je $\varphi(p) = \varphi(3) = 3^2 - 3.3 + 2 = 2 \neq 0$, to je prema 1)

$$y_p = \frac{A}{\varphi(p)} e^{px} = \frac{5}{2} e^{3x}$$

partikularno rešenje jednačine (1). Opšte rešenje njenog homogenog dela je $y_h = c_1e^{2x} + c_2e^x$. Zato je njeno opšte rešenje

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^x + \frac{5}{2} e^{3x}$$

Primer 2.

U jednačini

(2) $$y'' - 6y + 8y = 6e^{2x}$$

je $A = 8$, $p = 2$, $\varphi(r) = r^2-5r + 6$, $\varphi'(r) = 2r - 6$. Kako je $\varphi(p) = \varphi(2) = 0$ i $\varphi'(p) = \varphi'(2) = -2 \neq 0$, to je prema 2)

$$y_p = \frac{Ax}{\varphi'(p)}\, e^{px} = \frac{6xe^{2x}}{-2} = -3xe^{2x}$$

partikularno rešenje jednačine (2). Pošto je $y_h = c_1e^{4x} + c_2e^{2x}$ opšte rešenje njenog homogenog dela, to je

$$y = c_1e^{4x} + c_2e^{2x} - 3xe^{2x}$$

opšte rešenje jednačine (2).

Primer 3.

U jednačini

(3) $$y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$$

je $A = 3$, $p = -2$; $\varphi(r) = r^2+4r+4$, $\varphi'(r) = 2r + 4$, $\varphi''(r) = 2$. Kako je $\varphi(p) = \varphi(-2) = 0$, $\varphi'(p) = \varphi'(-2) = 0$ i $\varphi''(p) = \varphi''(-2) = 2$, to je prema 3)

$$y_p = \frac{Ax^2}{\varphi''(p)}\, e^{px} = \frac{3}{2}\, x^2\, e^{-2x}$$

partikularno rešenje jednačine (3). Pošto je opšte rešenje homogenog dela jednačine (3) $y_h = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$, to je njen opšti integral

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{3}{2}\, x^2e^{-2x}$$

Primedba.

Homogeni deo jednačine (J) je

(J_1) $$ay'' + by' + cy = 0$$

čija je karakteristična jednačina

(J_2) $$ar^2 + br + c = 0$$

sa korenima r_1 i r_2. Pri tome partikularno rešenje jednačine (J) može se dobiti u obliku:

1) $y_p = \lambda e^{px}$, ako p nije koren karakteristične jednačine (J_2)

2) $y_p = \lambda xe^{px}$, ako je p jednostruki koren karakteristične jednačine (J_2),

3) $y_p = \lambda x^2e^{px}$, ako je p dvostruki koren karakteristične jednačine (J_2).

Tako, u primeru 1 je $p = 3$, a koreni odgovarajuće karakteristične jednačine su $r_1 = 2$ i $r_1 = 1$, što znači da je $p \neq r_1$ i $p \neq r_2$. Zato se uzima da je $y_p = \lambda e^{3x}$, odakle je $y_p' = 3\lambda e^{3x}$, $y_p'' = 9\lambda e^{3x}$. Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (1) dobijamo $9\lambda e^{3x} - 9\lambda e^{3x} + 2\lambda e^{3x} \equiv 5e^{3x}$, odnosno $2\lambda e^{3x} \equiv 5e^{3x}$, što znači da je $2\lambda = 5$, tj. $\lambda = \frac{5}{2}$. Zato je $y_p = \frac{5}{2} e^{3x}$ partikularno rešenje jednačine (1). U primeru 2 je $p = 2$, a koreni odgovarajuće karakteristične jednačine su $r_1 = 2$ i $r_2 = 1$, što znači da je $p = r_1$ i $p \neq r_2$. Zato uzimamo da je $y_p = \lambda xe^{2x}$, odakle je $y' = \lambda e^{2x} + 2\lambda xe^{2x}$, $y'' = 4\lambda e^{2x} + 4\lambda xe^{2x}$. Zamenjujući ove vrednosti u jednačini (2) dobija se identičnost

$$4\lambda e^{2x} + 4\lambda xe^{2x} - 6(\lambda e^{2x} + 2\lambda xe^{2x}) + 8\lambda xe^{2x} \equiv 6e^{2x},$$

odnosno identičnost

$$-2\lambda e^{2x} \equiv 6e^{2x},$$

odakle je

$$-2\lambda = 6, \text{ tj. } \lambda = -3.$$

Zato je $y_p = -3\, xe^{2x}$ partikularno rešenje jednačine (2).

U primeru 3 je $p = -2$, a koreni odgovarajuće karakteristične jednačine su $r_1 = r_2 = -2 = p$, što znači da je p njen dvostruki koren. Zato uzimamo u ovom slučaju da je $y_p = \lambda x^2e^{-2x}$, odakle je $y_p' = 2\lambda xe^{-2x} - 2\lambda x^2e^{-2x}$, $y_p'' = 2\lambda e^{-2x} - 8\lambda xe^{-2x} + 4\lambda x^2e^{-2x}$ Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (3) dobijamo identičnost

$$2\lambda e^{-2x} - 8\lambda xe^{-2x} + 4\lambda x^2e^{-2x} + 4(2\lambda xe^{-2x} - 2\lambda x^2e^{-2x}) + 4\lambda x^2e^{-2x} \equiv 3e^{-2x},$$

odnosno identičnost $2\lambda e^{-2x} \equiv 3e^{-2x}$, što znači da je $2\lambda = 3$, tj. $\lambda = \frac{3}{2}$. Zato je partikularno rešenje jednačine (3)

$$y_p = \frac{3}{2} x^2 e^{-2x}.$$

Slučaj jednačine (K): Za jednačinu (K) partikularno rešenje y_p odredjuje se u obliku

$$y_p = M\cos\beta x + N \sin\beta x$$

kada $\pm\beta i$ nisu koreni karakteristične jednačine njenog homogenog dela. Ako su $\pm\beta i$ koreni pomenute karakteristične jednačine tada se uzima

$$y_p = x(M\cos\beta x + N \sin \beta x).$$

Primer 1.

Rešiti jednačinu

(1) $$y'' + 3y' + 2y = 5 \sin 3x$$

Rešenje

U jednačini (1) karakteristična jednačina njenog homogenog dela je

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

čiji su koreni $r_1 = -1$ i $r_2 = -2$. U jednačini (1) je $\beta = 3$, dakle $\pm 3i$, nisu koreni pomenute karakteristične jednačine. Zato je

(1') $$y_p = M\cos 3x + N \sin 3x$$

odakle je

$$y_p' = -3M\sin 3x + 3N\cos 3x, \quad y_p'' = -9M\cos 3x - 9N\sin 3x.$$

Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (1) dobijamo identičnost

$$-9M\cos 3x - 9N\sin 3x + 3(-3M\sin 3x + 3N\cos 3x) + 2(M\cos 3x + N\sin 3x) \equiv 5\sin 2x,$$

tj. identičnost

$$(-7M+9N)\cos 3x + (-7N-9M)\sin 3x \equiv 5\sin 3x,$$

odakle slede jednačine

$$-7M + 9N = 0, \qquad -7N - 9M = 5$$

čija su rešenja $M = -\frac{9}{26}$, $N = -\frac{7}{26}$.
Zato je prema (1′) partikularno rešenje jednačine (1)

$$y_p = -\frac{9}{26}\cos 3x - \frac{7}{26}\sin 3x.$$

Kako je opšte rešenje homogenog dela jednačine (1) $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$, to je njeno opšte rešenje

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} - \frac{9}{26}\cos 3x - \frac{7}{26}\sin 3x.$$

Primer 2.

Rešiti jednačinu

(2) $\qquad y'' + 9y = 8\cos 3x$

Rešenje

Karakteristična jednačina homogenog dela jednačine (2) je $r^2+9=0$, a njeni koreni su $r_{1,2} = \pm 3i$. Kako je y (2) $\beta = 3$ i kako su $\pm\beta i$ tj. $\pm 3i$ koreni pomenute karakteristične jednačine, to je u ovom slučaju partikularno rešenje jednačine (2)

(2′) $\qquad y_p = x\,(M\cos 3x + N\sin 3x)$,

odakle je

$$y_p' = M\cos 3x + N\sin 3x + x(-3M\sin 3x + 3N\cos 3x),\quad y_p'' = -6M\sin 3x + 6N\cos 3x - 9x(M\cos 3x + N\sin 3x)$$

Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (2) dobija se identičnost

$$-6M\sin 3x + 6N\cos 3x - 9x(M\cos 3x + N\sin 3x) - 9x(M\cos 3x + N\sin 3x) \equiv 8\cos 3x,$$

tj. identičnost

$$-6M\sin 3x + 6N\cos 3x \equiv 8\cos 3x,$$

odakle je

$$-6M = 0,\ 6N = 8,\ \text{tj. } M = 0,\ N = \frac{4}{3}.$$

Zato je, prema (2′), partikularno rešenje jednačine (2)

$$y_p = \frac{4}{3}x\sin 3x,$$

a njeno opšte rešenje je

$$y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{4}{3}x\sin 3x,$$

jer je opšte rešenje homogenog dela posmatrane jednačine

$$y_h = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x.$$

Napomena.

Kod nehomogene jednačine oblika

$$ay'' + by' + cy = s_1(x) + s_2(x)$$

njeno partikularno rešenje y_p može se odrediti u obliku zbira

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

gde je y_{p_1} partikularno rešenje jednačine

$$ay'' + by' + cy = s_1(x),$$

a y_{p_2} partikularno rešenje jednačine

$$ay'' + by' + cy = s_2(x).$$

Primer

Rešiti jednačinu

$$\text{(P)} \qquad y'' - y' - 2y = 5e^{4x} + 8x - 5.$$

Rešenje

Karakteristična jednačina homogenog dela jednačine (P) je $r^2-r-2=0$ čiji su koreni $r_1 = 2$ i $r_2 = -1$. Partikularno rešenje y_p jednačine (P) je $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, gde je y_{p_1} partikularno rešenje jednačine

$$(P_1) \qquad y'' - y' - 2y = 5e^{4x},$$

a y_{p_2} partikularno rešenje jednačine

$$(P_2) \qquad y'' - y' - 2y = 8x - 5.$$

Partikularna rešenja y_{p_1} i y_{p_2} jednačina (P_1) i (P_2) nalazimo na ranije opisani način, pri čemu se dobija

$$y_{p_1} = \frac{5}{4} e^{4x}, \quad y_{p_2} = - 4x + \frac{9}{2}.$$

Stoga je partikularno rešenje jednačine (P)

$$y_p = \frac{5}{4} e^{4x} - 4x + \frac{9}{2},$$

a njeno opšte rešenje je

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{5}{4}e^{4x} - 4x + \frac{9}{2}$$

Zadaci:

a) $y'' - 3y' + 2y = 5$, b) $2y'' - 3y' + y = 6x - 2$

c) $y'' - 4y' + 5y = 10x^2+2x - 3$, d) $y'' - 3y' = 2x - 1$

e) $2y'' + 5y' + 2y = e^x$, f) $y'' - 4y' + 3y = 2e^{3x}$

g) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$ h) $y'' - 4y = 3\sin x$,

i) $y'' - 8y' + 20y = 5\cos 3x$ k) $y'' + y = 2\sin x$,

l) $y'' + 4y = 6\cos 2x$, m) $y'' - y = e^x - x^2$

n) $y'' - y' = e^{2x} + \cos x$

Rešenja:

a) $y = c_1e^{2x} + c_2e^x + \frac{5}{2}$, b) $y = c_1e^x + c_2e^{\frac{x}{2}} + 6x + 16$

c) $y = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x + 2x^2 + \frac{18}{5}x + \frac{37}{25}$,

d) $y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x$,

e) $y = c_1e^{-x/2} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{9}e^x$, f) $y = c_1e^{3x} + c_2e^x + xe^{3x}$,

g) $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + 2x^2e^{3x}$, h) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{3}{5}\sin x$,

i) $y = c_1e^{4x}\cos 2x + c_2e^{4x}\sin 2x + \frac{11}{31}\cos 2x - \frac{24}{31}\sin 2x$,

k) $y = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x$, l) $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{3}{2}x\sin 2x$,

m) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x + x^2+2$

n) $y = c_1 + c_2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$.

o) Naći ono rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine

$$y'' - 4y = e^x - 2x$$

koje za $x = 0$ dobija vrednost $y = \frac{2}{3}$ i $y' = \frac{1}{2}$

Rešenje

Opšte rešenje date jednačine je

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{2}x, \tag{q}$$

odakle je

(r) $\qquad y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{2}$

Za $x = 0$ je $y = \frac{2}{3}$ i $y' = 1$, pa se tada iz (q) i (r) dobija sistem jednačina po c_1 i c_2

$$\frac{2}{3} = c_1 + c_2 - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} = 2c_1 - 2c_2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2},$$

odnosno sistem $c_1 + c_2 = 1$, $c_1 - c_2 = \frac{1}{6}$ čija su rešenja $c_1 = \frac{7}{12}$, $c_2 = \frac{5}{12}$. Zamenom ovih vrednosti za c_1 i c_2 u (q) dobijamo traženo rešenje

$$y(x) = \frac{7}{12}e^{2x} + \frac{5}{12}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{2}x.$$

Napomena

Jednačine oblika

(x) $\qquad ay'' + by' + cy = e^{px}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$

(y) $\qquad ay'' + by' + cy = e^{px}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

smenom

$$y = u(x)e^{px} = ue^{px}$$

posle sredjivanja svode se redom na jednačine po funkciji u

(X_1) $\qquad au'' + (2ap + b)u' + (ap^2 + bp + c)u = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

(Y_1) $\qquad au'' + (2ap + b)u' + (ap^2 + bp + c)u = A\cos\beta x + B\sin\beta x.$

Jednačina (X_1) je oblika jednačine (H), a jednačina (Y_1) je oblika (K) za koje smo videli kako se rešavaju.

Primer 1.

Rešiti jednačinu

(1) $\qquad 2y'' - 3y' + y = e^{2x}(9x + 12)$

Rešenje

Smenom

(a) $\qquad y = ue^{2x}$

odakle je $y' = u'e^{2x} + 2ue^{2x}$, $y'' = u''e^{2x} + 4u'e^{2x} + 4ue^{2x}$ jednačina (1) posle sredjivanja i skraćivanja sa e^{2x} postaje

(1′) $$2u'' + 5u' + 3u = 9x + 12$$

Opšte rešenje jednačine (1′) je

$$u = c_1e^{-x} + c_2e^{-\frac{3}{2}x} + 3x - 1.$$

sada je, prema (a), opšte rešenje jednačine (1)

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{\frac{1}{2}x} + e^{2x}(3x-1)$$

Primer 2.

Rešiti jednačinu

(2) $$y'' - 4y = e^{3x}(\cos x - \sin x)$$

Rešenje

Smenom

(b) $$y = ue^{3x},$$

odakle je

$$y' = u'e^{3x} + 3ue^{3x}, \quad y'' = u''e^{3x} + 6u'e^{3x} + 9ue^{3x},$$

jednačina (2) posle sredjivanja i skraćivanja sa e^{3x} postaje

(2′) $u'' + 6u' + 5u = \cos x - \sin x.$

Opšte rešenje jednačine (2′) je

$$u = c_1e^{-x} + c_2e^{-5x} + \frac{5}{26}\cos x + \frac{1}{26}\sin x.$$

Sada je, prema (b), opšte rešenje jednačine (2)

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + e^{3x}\left(\frac{5}{26}\cos x + \frac{1}{26}\sin x\right).$$

Postupak za nalaženje partikularnog rešenja nehomogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda opšteg oblika. Do sada smo posmatrali neke posebne oblike nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda i videli smo kako se u tim slučajevima nalaze njihova partikularna rešenja. Posmatrajmo sada opšti oblik nehomogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda

(1) $$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \qquad (a(x) \not\equiv 0).$$

Neka su $y_1 = y_1(x)$ i $y_2 = y_2(x)$ osnovna rešenja homogenog dela jednačine (1), u ovom slučaju jednačine

(2) $$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

Tada je opšte rešenje jednačine (2)

(3) $$y_h = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Ako je y_p partikularno rešenje jednačine (1), tada je njeno opšte rešenje

$$y = y_h + y_p$$

Neka su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ dve funkcije takve da izraz

(4) $$y_p = uy_1 + vy_2$$

pretstavlja partikularno rešenje jednačine (1). Tada je, s obzirom na (3),

(5) $$y = c_1y_1 + c_2y_2 + uy_1 + vy_2$$

opšte rešenje jednačine (1).

Za odredjivanje funkcija u i v potrebna su dva uslova. Jedan od ta dva uslova možemo uzeti proizvoljno, dok će drugi pri tome biti strogo odredjen. Iz (5) je

(6) $$y' = c_1y_1' + c_2y_2' + u'y_1 + v'y_2 + uy_1' + vy_2'$$

Za jedan od uslova za odredjivanje funkcija u i v u (4) stavimo

(7) $$u'y_1 + v'y_2 \equiv 0.$$

Tada se (6) svodi na

(6′) $$y' = c_1y_1' + c_2y_2' + uy_1' + vy_2',$$

odakle je

(8) $$y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + uy_1'' + vy_2'' + u'y_1' + v'y_2'$$

Zamenom vrednosti za y, y′ i y″ iz (5), (6′) i (8) u jednačinu (1), posle sredjivanja i vodeći računa o (3), dobija se identičnost

(9) $$\left[a(x)y_h'' + b(x)y_h' + c(x)y_h\right] + u\left[a(x)y_1''+b(x)y_1' + c(x)y_1\right] +$$
$$+v\left[a(x)y_2''+b(x)y_2'+c(x)y_2\right] + a(x)(u'y_1'+v'y_2') \not\equiv f(x),$$

odnosno identičnost

(10) $$a(x)\ (u'y_1' + v'y_2') \not\equiv f(x)$$

pošto su sva tri izraza u srednjim zagradama u (9) identički jednaka nuli, jer su y_h, y_1 i y_2 rešenja jednačine (2).

Tako, za odredjivanje funkcija u i v imamo dva uslova, (7) i (10), koje ćemo napisati u obliku

(11) $$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

(12) $$u'y_1' + v'y_2' = \frac{f(x)}{a(x)}$$

Na taj način smo dobili sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate u' i v'.

<u>Primer:</u>

Rešiti jednačinu

(a) $$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

<u>Rešenje</u>

Homogeni deo jednačine (a) je jednačina

(b) $$y'' + y = 0$$

Njena osnovna rešenja su $y_1 = \cos x$ i $y_2 = \sin x$, a njeno opšte rešenje je $y_h = c_1\cos x + c_2\sin x$.

Uslovi (11) i (12) za odredjivanje funkcija u i v u ovom slučaju glase

(c) $$u'\cos x + v'\sin x = 0$$

(d) $$-u'\sin x + v'\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

Jednačine (c) i (d) su obične linearne jednačine po u' i v'.
Njihova rešenja su $v' = 1$ i $u' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, odakle integracijom do-

bijamo $v = x$ i $u = \ln\cos x$. Zato je prema (4)

$$y_p = (\ln \cos x)\cos x + x\sin x$$

partikularno rešenje jednačine (a), a njeno opšte rešenje je

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + (\ln\cos x)\cos x + x\sin x.$$

Sistemi diferencijalnih jednačina

Ovde ćemo posmatrati samo homogeni sistem od dve linearne diferencijalne jednačine dveju funkcija jedne nezavisne promenljive oblika

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a_1x + b_1y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

gde su a_1, b_1, a_2 i b_2 realne konstante. Sistem (A) je normalan sistem.

Rešenje sistema (A) svodi se na rešavanje homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Ako prvu jednačinu sistema (A) pomnožimo sa b_2, a drugu sa $(-b_1)$, ukoliko je $b_1 \neq 0$ i $b_2 \neq 0$ i tako dobijene jednačine saberemo dobićemo

$$\text{(B)} \qquad b_2 \frac{dx}{dt} - b_1 \frac{dy}{dt} + (a_1b_2 - a_2b_1)x = 0$$

Dalje, diferenciranjem prve jednačine sistema (A) imamo

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 \frac{dy}{dt} = 0$$

Ako jednačinu (B) saberemo sa jednačinom (C) dobićemo jednačinu

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + (a_1 + b_2) \frac{dx}{dt} + (a_1b_2 - a_2b_1)x = 0$$

Jednačina (D) je homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njenim rešenjem dobija se nepoznata funkcija $x(t)$.

Da bismo našli nepoznatu funkciju y(t), zamenićemo nadjenu vrednost nepoznate funkcije x(t) i vrednost njenog prvog izvoda $\frac{dx}{dt}$ u prvu jednačinu sistema (A) i iz tako dobijene jednačine odredićemo traženu funkciju y(t).

Primer 1:

Rešiti sistem jednačine

$$(A_1) \qquad \frac{dx}{dt} - 2x - 6y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - x - y = 0$$

Rešenje

Ako drugu jednačinu sistema (A_1) pomnožimo sa (-6) i tako dobijenu jednačinu saberemo sa prvom jednačinom sistema (A_1) dobićemo

$$(B_1) \qquad \frac{dx}{dt} - 6\frac{dy}{dt} + 4x = 0$$

Diferenciranjem prve jednačine sistema (A_1) dobija se jednačina

$$(C_1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 6\frac{dy}{dt} = 0.$$

Ako sada jednačinu (B_1) oduzmemo od jednačine (C_1) dobićemo jednačinu

$$(D_1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0$$

Opšte rešenje jednačine (D_1) je

$$(a_1) \qquad x = c_1e^{4t} + c_2e^{-t},$$

odakle je

$$\frac{dx}{dt} = 4c_1e^{4t} - c_2e^{-t}$$

Zamenjujući ove vrednosti za x i $\frac{dx}{dt}$ u prvu jednačinu sistema (A_1) imaćemo

$$4c_1e^{4t} - c_2e^{-t} - 2c_1e^{4t} - 2c_2e^{-t} + 6y = 0$$

odakle dobijamo

$$(b_1) \qquad y = -\frac{c_1}{3}e^{4t} + \frac{c_2}{2}e^{-t}$$

Prema (a_1) i (b_1) imamo opšte rešenje sistema (A_1)

$$x = c_1e^{4t} + c_2e^{-t}, \qquad y = -\frac{c_1}{3}e^{4t} + \frac{c_2}{2}e^{-t}.$$

Primer 2.

Rešiti sistem jednačina

$$(A_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

Rešenje

Ako drugu jednačinu sistema (A_2) pomnožimo sa 2 i tako dobijenu jednačinu saberemo sa prvom jednačinom datog sistema dobićemo jednačinu

$$(B_2) \qquad \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = 5x$$

Diferenciranjem prve jednačine sistema (A_2) po t dobija se jednačina

$$(C_2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt}$$

Eliminišući $\frac{dy}{dt}$ iz jednačina (B_2) i (C_2) dobija se jednačina

$$(D_2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0,$$

čije je opšte rešenje

$$(a_2) \qquad x = c_1e^t\cos 2t + c_2e^t\sin 2t.$$

Iz (a_2) je

$$\frac{dx}{dt} = (c_1+2c_2)e^t\cos 2t + (c_2-2c_1)e^t\sin 2t.$$

Zamenom ovih vrednosti za x i $\frac{dx}{dt}$ u prvu jednačinu sistema (A_2) dobijamo

$$(c_1+2c_2)e^t\cos 2t + (c_2-2c_1)e^t\sin 2t = c_1e^t\cos 2t + c_2e^t\sin 2t - 2y$$

odakle je

$$(b_2) \qquad y = -c_2e^t\cos 2t + c_1e^t\sin 2t$$

Prema (a_2) i (b_2), opšte rešenje sistema (A_2) je

$$x = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t,$$

$$y = - c_2 e^t \cos 2t + c_1 e^t \sin 2t.$$

DIFERENCNE JEDNAČINE

Konačne razlike. Za funkciju f(x) izrazi

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x); \qquad \Delta_h^0 f(x) \equiv f(x)$$

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

$$\vdots$$

$$\Delta_h^n f(x) = \Delta_h^{n-1} f(x+h) - \Delta_h^{n-1} f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$$

nazivaju se konačne razlike prvoga, drugoga, odnosno n-toga reda.

Za $h = 1$ je

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

$$\vdots$$

(1) $$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$$

Obrascem (1) data je konačna razlika reda n funkcije f(x) pomoću njenih vrednosti u tačkama x, x+1, x+2,..., x+n. Medjutim, nije teško utvrditi da važi obrazac

(2) $$f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(x)$$

kojim se izražava vrednost funkcije f(x) u tački x+n pomoću njenih konačnih razlika od nultog do n-tog reda.

Diferencna jednačina. Jednačina

(3) $$F\big(x, f(x), \Delta f(x), \ldots, \Delta^n f(x)\big) = 0$$

gde je f(x) nepoznata funkcija promenljive x, a $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, ..., $\Delta^n f(x)$ njene konačne razlike prvog, drugog, odnosno n-tog reda naziva se diferencna jednačina.

Jednačina (3) s obzirom na obrasce (1) može se napisati u obliku

(4) $\quad \phi(x,\ f(x),\ f(x+1),\ \ldots,\ f(x+n)) = 0.$

Jednačina (4) je diferencna jednačina reda n ako sadrži $f(x+n)$.

Svaka funkcija $f(x)$ koja identički zadovoljava jednačinu (4) je jedno njeno rešenje.

Funkcija

(5) $\quad f(x) = \varphi(x,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$

gde su $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ proizvoljne i medjusobno nezavisne konstante, i koja identički zadovoljava jednačinu (4) naziva se njenim opštim rešenjem.

Linearne diferencne jednačine

Jednačina

(6) $\quad a_0(x)\ \Delta^n f(x) + a_1(x)\ \Delta^{n-1} f(x) + \ldots + a_n(x)\ f(x) = Q(x)$

gde su $Q(x)$ i $a_i(x)$ $(i = 0,1,2,\ldots,\ n)$ date funkcije od x, a $f(x)$ tražena funkcija naziva se linearna diferencna jednačina n-tog reda. Ako je $Q(x) \equiv 0$ ona je homogena, a ako je $Q(x) \not\equiv 0$ ona je nehomogena.

Jednačina (6) na osnovu jednakosti (1) može se napisati u obliku

(7) $\quad b_0(x)\ f(x+n) + b_1(x)\ f(x+n-1) + \ldots + b_n(x)\ f(x) = Q(x).$

Homogeni deo jednačine (7) je jednačina

(8) $\quad b_0(x)\ f(x+n) + b_1(x)\ f(x+n-1) + \ldots + b_n(x)\ f(x) = 0.$

Ako je $f_1(x)$ rešenje diferencne jednačine (8), tada je njeno rešenje i $c_1 f_1(x)$ gde je c_1 proizvoljna konstanta. Zaista, zamenjujući $f(x)$ sa $c_1 f_1(x)$ jednačina (8) postaje

$$c_1 \left[b_0(x)\ f_1(x+n) + b_1(x)\ f_1(x+n-1) + \ldots + b_n(x)\ f_1(x)\right] \equiv c_1 \cdot 0 \equiv 0,$$

pošto je izraz u srednjoj zagradi identički jednak nuli jer je $f_1(x)$ rešenje jednačine (8).

Isto tako, ako su $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ rešenja jednačine (8), tada je njeno rešenje i

(9) $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$

gde su c_1, $c_2, \ldots, c_n$ proizvoljne konstante.

Ako su $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ medjusobno nezavisna rešenja jednačine (8) i ako su c_1, $c_2, \ldots, c_n$ proizvoljne i medjusobno nezavisne konstante, tada funkcija $f(x)$ data izrazom (9) pretstavlja opšte rešenje linearne homogene diferencne jednačine (8).

Za nehomogenu diferencnu linearnu jednačinu (7) opšte rešenje je zbir opšteg rešenja $\Psi(x)$ njenog homogenog dela i njenog partikularnog rešenja $P(x)$, tj.

(10) $f(x) = \Psi(x) + P(x)$

što se dokazuje neposrednim proveravanjem.

Ako su u jednačini (8) koeficijenti $b_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ konstante, jednačina (8) je oblika

(11) $b_o\, f(x+n) + b_1\, f(x+n-1) + \ldots + b_n\, f(x) = 0$

i naziva se homogena linearna diferencna jednačina sa konstantnim koeficijentima. Za nalaženje njenog opšteg rešenja uvodi se smena

(12) $f(x) = \lambda^x$,

odakle je

$$f(x+k) = \lambda^{x+k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

i jednačina (11) postaje

$$b_o \lambda^{x+n} + b_1 \lambda^{x+n-1} + \ldots + b_{n-1} \lambda^{x+1} + b_n \lambda^x = 0,$$

koja se posle skraćivanja sa λ^x svodi na jednačinu

(13) $b_o \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0$

Jednačina (13) je algebarska jednačina n-tog stepena po nepoznatoj λ i naziva se <u>karakteristična jednačina</u> jednačine (11). Ona može imati:

1^o Sve korene realne i različite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. U ovom slučaju osnovna rešenja jednačine (11) prema (12) su

$$f_1(x) = \lambda_1^x,\ f_2(x) = \lambda_2^x,\ \ldots,\ f_n(x) = \lambda_n^x,$$

a njeno opšte rešenje je

$$f(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \ldots + c_n \lambda_n^x.$$

2^o Sve korene realne, medju kojima može biti i višestrukih. Ako je njen koren λ_1 višestrukosti k, tada ovom korenu odgovara k osnovnih rešenja jednačine (11):

$$\lambda_1^x,\ x\lambda_1^x,\ \ldots,\ x^{k-1}\lambda_1^x.$$

3^o Neke ili sve korene konjugovano kompleksne medju kojima može biti i višestrukih. Ako je njen koren $\lambda_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, onda ona ima takodje i koren $\lambda_2 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$. Ako je λ_1 pri tome višestruki koren višestrukosti k, tada je i λ_2 njen višestruki koren višestrukosti k. Ovim korenima odgovara 2k osnovnih rešenja jednačine (11):

$$\rho^x \cos\theta x,\quad x\rho^x\cos\theta x,\quad \ldots,\quad x^{k-1}\rho^x\cos\theta x$$
$$\rho^x \sin\theta x,\quad x\rho^x\sin\theta x,\quad \ldots,\quad x^{k-1}\rho^x\sin\theta x.$$

<u>Primer 1.</u>

Rešiti diferencnu jednačinu

(a) $\quad f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = 0$

pri čemu je $f(o) = 1$ i $f(1) = -4$.

<u>Rešenje.</u>

Jednačina (a) ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

čiji su koreni $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 2$. Zato su osnovna rešenja jednačine (a)

$$f_1(x) = \lambda_1^x = 3^x \quad \text{i} \quad f_2(x) = \lambda_2^x = 2^x,$$

a njeno opšte rešenje je

(b) $\quad f(x) = c_1 3^x + c_2 2^x.$

Kako je za $x = 0$, $f(o) = 1$ i za $x = 1$, $f(1) = -4$, to iz (b) imamo sistem jednačina

$$1 = c_1 + c_2$$
$$-4 = 3c_1 + 2c_2$$

čija su rešenja $c_1 = -6$, $c_2 = 7$. Zato je traženo rešenje jednačine (a)

$$f(x) = -6.3^x + 7.2^x$$

Primer 2.

Jednačina

(c) $\quad f(x + 2) - 4f(x + 1) + 4f(x) = 0$

ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

čiji su koreni $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 2$, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$. Zato su osnovna rešenja jednačine (c)

$$f_1(x) = \lambda^x = 2^x, \quad f_2(x) = x\lambda^x = x2^x,$$

a njeno opšte rešenje je

$$f(x) = c_1 2^x + c_2 x 2^x.$$

Primer 3.

Rešiti jednačinu

(d) $\quad f(x+2) - 2f(x+1) + 4f(x) = 0.$

Rešenje

Karakteristična jednačina jednačine (d) je

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

Njeni koreni su $\lambda_1 = 1+i\sqrt{3}$ i $\lambda_2 = 1-i\sqrt{3}$, tj.

$$\lambda_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \text{ i } \lambda_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Zato su osnovna rešenja jednačine (d)

$$f_1(x) = 2^x\cos\frac{\pi}{3}x \quad \text{i} \quad f_2(x) = 2^x\sin\frac{\pi}{3}x,$$

a njeno opšte rešenje je

$$f(x) = c_1 2^x\cos\frac{\pi}{3}x + c_2 2^x\sin\frac{\pi}{3}x.$$

Primer 4.

Odrediti niz brojeva a_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ koji zadovoljava jednačinu

(e) $\quad a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10\,a_n = 0$

Rešenje

Jednačina (e) je homogena diferencna jednačina drugog reda sa stalnim koeficijentima, gde je $f(n) = a_n$, $f(n+1) = a_{n+1}$, $f(n+2)=a_{n+2}$. Njena karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,$$

čiji su koreni $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = 2$. Zato su osnovna rešenja jednačine (e)

$$(a_n)_1 = 5^n \quad \text{i} \quad (a_n)_2 = 2^n,$$

a njeno opšte rešenje je

$$a_n = c_1 5^n + c_2 2^n; \quad n = 0, 1, 2,\ldots$$

Primer 5.

Odrediti niz brojeva a_n koji zadovoljavaju relaciju

(f) $\quad 3a_{n+1} - 2a_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$

ako znamo da je $a_3 = 8$.

Rešenje

Stavimo $a_n = f(n)$, $a_{n+1} = f(n+1)$. Tada jednačina (f) glasi

(g) $$3f(n+1) - 2f(n) = 0$$

Jednačina (g) je diferencna jednačina prvog reda. Njena karakteristična jednačina je

$$3\lambda - 2 = 0$$

odakle je $\lambda = \frac{2}{3}$. Zato je opšte rešenje jednačine (g)

$$f(n) = c.(\frac{2}{3})^n,$$

tj.

(h) $$a_n = c.(\frac{2}{3})^n$$

Kako je $a_3 = 8$, to iz (h) imamo

$$8 = c(\frac{2}{3})^3,$$

odakle je $c = 27$. Zato je traženi niz brojeva oblika

$$a_n = 27(\frac{2}{3})^n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Napomena

Niz brojeva

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

koji ispunjava uslov

(14) $$a_{n+1} = qa_n + d$$

gde su q i d date konstante naziva se progresija. Za $q = 1$ (14) se svodi na

(15) $$a_{n+1} = a_n + d$$

i pretstavlja aritmetičku progresiju.

Za $d = 0$ i $q \neq 1$ (14) se svodi na

(16) $$a_{n+1} = q\, a_n$$

i pretstavlja geometrijsku progresiju. Jednačinu (14) napišimo u obliku

(17) $$a_{n+1} - q\, a_n = d.$$

Ona je linearna nehomogena diferencna jednačina prvoga reda. Njeno opšte rešenje je

(18) $$a_n = cq^n + \frac{d}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Za $d = 0$ i $q \neq 1$ iz (18) se dobija opšte rešenje jednačine (16)

$$a_n = cq^n$$

Za $q = 1$ jednačina (17) svodi se na jednačinu (15) čije je opšte rešenje

$$a_n = c + nd.$$

<u>Primer</u>

Za $q = 2$ i $d = 1$ jednačina (17) glasi

$$a_{n+1} - 2a_n = 1,$$

a njeno opšte rešenje, prema (18) je

$$a_n = c.2^n - 1.$$

L I T E R A T U R A

1. T.Pejović: Diferencijalne jednačine, Beograd, 1960.
2. R.Kašanin: Viša matematika I, Sarajevo, 1969.
3. R.Kašanin: Viša matematika II, - knjiga II, Beograd, 1950.
4. Ž.Marković: Uvod u višu analizu - II dio, Zagreb 1952.
5. P.Miličić: Diferencijske jednačine, Matematička biblioteka sveska 39, Beograd, 1969.

Glava II

NESVOJSTVENI INTEGRAL, GAMA I BETA FUNKCIJA, FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH I VIŠESTRUKI INTEGRAL

NESVOJSTVENI INTEGRAL

Odredjeni integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

definiše se pod sledećim predpostavkama

1) Interval $[a,b]$ je konačan

2) podintegralna funkcija

$$y = f(x)$$

je na tom odsečku neprekidna.

Medjutim, to nije uvek slučaj. Može se desiti da interval nije konačan, ili da funkcija u tom intervalu ima prekide, specijalno da teži beskonačnosti. Takvi integrali zovu se nesvojstveni s obzirom na razmak, ili s obzirom na funkciju. Posmatraćemo oba ta slučaja.

1. Nesvojstveni integral s obzirom na razmak.

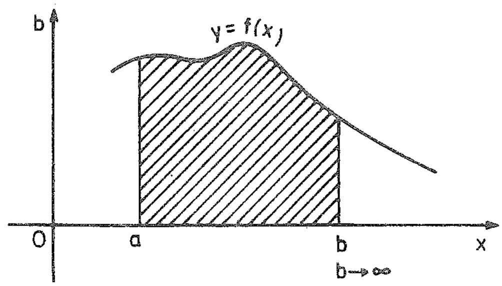
Nesvojstveni integral neprekidne funkcije $y = f(x)$ u razmaku $[a, +\infty)$, u oznaci

$$\int_o^{+\infty} f(x)dx,$$

definiše se kao granična vrednost odredjenog integrala $\int_a^b f(x)dx$, kada $b \to \infty$, tj.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Ako postoji ta granična vrednost, tada se kaže da nesvojstveni integral postoji, ili konvergira (v.sl. 1.)



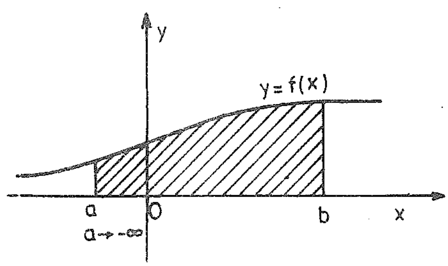
S l i k a 1.

Analogno se definiše i

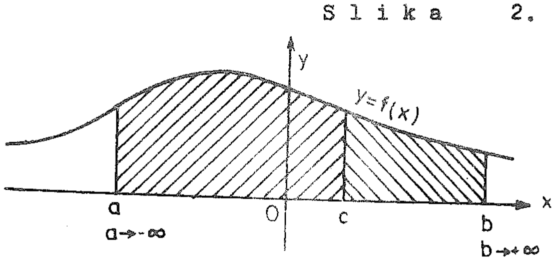
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{-c}^{+\infty} f(x)dx$$

gde je-c bilo koji realan broj (v.sl. 2 i 3).



S l i k a 2.



S l i k a 3.

Primeri i zadaci

Zadatak 1.

Naći $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$

Rešenje

Kako je za $\alpha \neq -1$

$$\int \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \int x^{-\alpha}\,dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

to je

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left| \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha} \right|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left[b^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha} \right] =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 0 \\ +\infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

To znači da za $\alpha > 1$ integral postoji i jednak je $\dfrac{1}{\alpha-1}$, a za $\alpha < 1$ ne postoji.

Za $\alpha = 1$ imamo

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \Big| \ln x \Big|_1^{\infty} = \lim_{a\to\infty} (\ln x - \ln 1) = \infty$$

tj. integral ne postoji.

Znači

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \qquad \text{za } \alpha > 1 \text{ postoji i}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}, \qquad \alpha > 1,$$

a za $\alpha \leqslant 1$ ne postoji.

Zadatak 2.

Naći
$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx.$$

Rešenje
$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-\alpha x}\, dx =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left| -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right|_0^b = \frac{-1}{\alpha} \lim_{b\to\infty} (e^{-b\alpha} - e^0) =$$
$$= -\frac{1}{\alpha} \lim_{b\to\infty} (e^{-b\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \alpha > 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Znači
$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx$$
za $\alpha > 0$ postoji i
$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha > 0;$$
za $\alpha < 0$ ne postoji

za $\alpha = 0$ ne postoji jer je
$$\int_0^{\infty} e^0\, dx = \int_0^{\infty} dx = \Big| x \Big|_0^{\infty} = \infty$$

Zadatak 3.

Naći
$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}\, dx$$

Rešenje:

Smenom $x = -t$

svodi se na predhodni zadatak.

Zadatak 4.

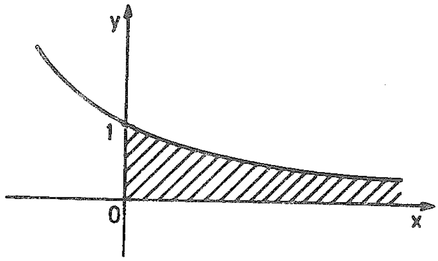
Naći površinu izmedju krive
$$y = e^{-x} \text{ i x ose u prvom kvadrantu.}$$

Rešenje:

Ako se funkcija $y = e^{-x}$ predstavi grafički dobija se da je

$$P = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$$

(vidi sl. 4).



S l i k a 4.

Tada je, prema predhodnom zadatku

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{1} = 1$$

jer je $\alpha = 1$. Zadatak se može rešiti i neposredno

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left|-e^{-x}\right|_0^b = -\lim_{b\to\infty}\left|e^{-x}\right|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left|e^{-b} - 1\right| = -(-1) = 1$$

jer je

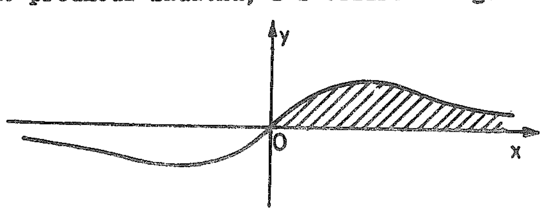
$$\lim_{b\to\infty} e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Zadatak 5.

Naći površinu izmedju krive $y = xe^{-x}$ i x ose u prvom kvadratu.

Rešenje:

Analogno predhodi zadatku, i s obzirom na grafik funkcije $y=xe^{-x}$



S l i k a 5.

imamo

$$P = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\Big|-(1+x)e^{-x}\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty}\left[(1+b)e^{-b}-1\right]$$

$= 1$, jer je

$$\lim_{b\to\infty}(1+b)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1+b}{e^{+b}} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{+e^{b}} = +\frac{1}{\infty} = 0.$$

(primenom Lopitalovog pravila).

Zadatak 6.

Pokazati da je

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-n}\,dx = n!$$

Zadatak 7.

Naći

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x}\,dx$$

Rešenje

$$J = \pi$$

Zadatak 8.

Naći $J = \int_0^{\infty}\sin x\,dx$

Rešenje: Ne postoji.

Zadatak 9.

Naći

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx dx$$

Rešenje:

$$I = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Zadatak 10.

Naći

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$$

Rešenje:

$$I = \frac{a}{a^2+b^2}$$

2. Integral nesvojstven s obzirom na funkciju

Ako je interval integracije a, b konačan a funkcija u jednoj od granica intervala, na primer b, beskonačna, tj.

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \pm \infty$$

tada se nesvojstveni integral, u oznaci

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

definiše pomoću graničnog procesa: (vidi sliku 2)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

Ako je

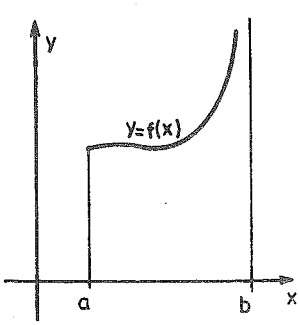
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm \infty$$

tada

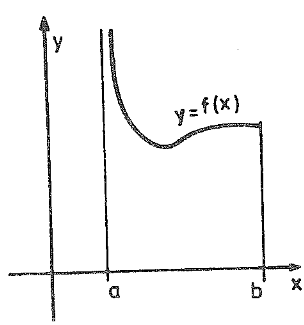
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx$$

(vidi sliku 4)

Oznaka $x \to b-0$ znači da x teži broju b s leve strane, a $x \to a+0$, znači da x teži broju a s desne strane. (Vidi sliku 2) i (sliku 3)



S l i k a 6.

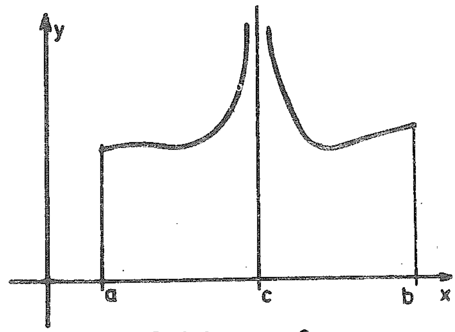


S l i k a 7.

Može se desiti slučaj da

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm \infty$$

pri čemu je $a < c < b$ (vidi sliku 8)



S l i k a 8.

Tada se nesvojstveni integral u $[a, b]$ definiše sa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

<u>Primeri i zadaci</u>

Zadatak 11.

Naći

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Kako je

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

to je ovaj integral nesvojstven s obzirom na funkciju (razmak je konačan - 0,1) u tački a = 0, pa je

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{+\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} \right|_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left| 2\sqrt{x} \right|_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon \to 0} (\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon}) = 2 \lim_{\varepsilon - 0} (1-\sqrt{\varepsilon}) = 2.(1-0) = 2$$

Znači dati integral postoji - konvergira.

Zadatak 12.

Naći $\int_0^3 \frac{1}{3 - x}\, dx$

Ovaj integral je nesvojstven s obzirom na funkciju u gornjoj granici jer

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-(3-0)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

pa je

$$\int_0^3 \frac{1}{3-x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{1}{3-x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left| -\ln(3-x) \right|_0^{3-\varepsilon} =$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \ln \varepsilon - \ln 3 \right| = - (-\infty - \ln 3) = \infty$$

Znači integral ne postoji - divergira.

Zadatak 13.

Naći $\int_4^5 \frac{1}{(x-4)^3}\, dx$

Zadatak 14.

Naći $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\, dx$

Zadatak 15.

Naći $\int_1^2 \frac{1}{x \ln}\, dx$

Zadatak 16.

Naći
$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

Zadatak 17.

Naći
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} \, dx$$

Zadatak 18.

Naći
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx$$

Za razne vrednosti parametra α .

GAMA FUNKCIJA

Gama funkcija, $\Gamma(x)$, definiše se obrascem

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt, \qquad x > 0$$

a u intervalu $-n < x < -n+1$, $n \in N$ definiše se sa

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$$

Zadatak 19.

Izračunati funkciju $\Gamma(x)$ za $x=n$, tj. za $x=1,2,3,4,\ldots.$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} \, dt.$$

Jednostavnosti radi izračunaćemo

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} \, dt$$

Primenom postupka parcijalne integracije dobijamo

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = -t^n e^{-t} \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt =$$

$$= - \lim_{x \to \infty} t^n e^{-t} + n \Gamma(n)$$

gde smo stavili

$$n = t^n \qquad dv = e^{-t} dt$$

$$dn = nt^{n-1} \qquad v = -e^{-t}$$

Primenom Lopitalovog pravila, dobijamo

$$\lim_{t \to \infty} t^n e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^n}{e^t} = \lim_{t \to \infty} \frac{nt^{n-1}}{e^t} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)t^{n-2}}{e^t} = \dots . = \lim_{t \to +\infty} \frac{n!}{e^t} = 0,$$

te je

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n), \qquad n = 1,2,\dots .$$

Ako primenimo gornju formulu za

$$n = 1, 2, \dots , n$$

dobijamo

$$\Gamma(n) = (n - 1) \Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n - 2) \Gamma(n - 2)$$

$$\Gamma(3) = 2 \Gamma(2)$$

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1)$$

Množenjem levih i desnih strana ovih jednakosti i skraćivanjem dobijamo

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \dots . 2.\Gamma(1)$$

Kako je $\Gamma(1) = 1$

to je

$$\Gamma(n) = (n - 1)(n - 2) \dots 2.1$$

odnosno

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Zadatak 20.

Pokazati da je

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \qquad x > 0$$

Rešenje

Primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t}\,dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt =$$

$$= x\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt = x\,\Gamma(x)$$

pri čemu je

$$u = t^x, \qquad dv = e^{-t}\,dt$$

$$du = xt^{x-1}, \qquad v = -e^{-t}$$

U primenama gama funkcije važnu ulogu igra formula dopunjenja

$$\Gamma(x)\,.\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Zadatak 21.

Naći $\Gamma(\frac{1}{2})$

Ako u gornjoj formuli stavimo $x = \frac{1}{2}$ dobijamo

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,.\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

tj. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Ovaj rezultat nam omogućava da izračunamo integral Puasona

$$I = \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du$$

Zadatak 22.

Izračunati $I = \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du$

Rešenje

Ako u $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$

uvedemo smenu

$$t = u^2, \quad tj. \quad u = \sqrt{t}$$

$$dt = 2u\ du$$

i za $t = 0,\ u = 0;$

$t = \infty,\ u = \infty,$

dobijamo

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{2x-2}\, e^{-u^2} . 2u\ du$$

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty u^{2x-1}\, e^{-u^2}\ du$$

Za $x = \frac{1}{2}$ imamo

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\ du = 2I$$

$$I = \frac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

tj.

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\ du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Deo prrethodnog zadatka formulisaćemo kao poseban

<u>Zadatak 23.</u>

Pokazati da se gama funkcija može predstaviti u obliku

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, u^{2x-1}\ du.$$

<u>Zadatak 24.</u>

Naći $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

<u>Rešenje</u>

Koristiti smenu $t = \frac{x^2}{2}$; rezultat $I = 1$.

<u>Zadatak 25.</u>

Pokazati da je za $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$$\Gamma(n + \tfrac{1}{2}) = \frac{1.3.5\ \ldots\ldots\ (2n-1)}{2^n}\,\sqrt{\pi}$$

Rešenje

Kako je $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$,

prema zadatku 20, za n vrednosti x - a:

$$x = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \ldots .\ (n + \frac{1}{2})$$

imamo

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2} + 1) = \frac{3}{2}\,\Gamma(\frac{3}{2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{2n-1}{2} + 1) = \frac{2n-1}{2}\,\Gamma(\frac{2n-1}{2})$$

ili

$$\Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\Gamma(\frac{3}{2} + 1) = \frac{3}{2}\,\Gamma(\frac{3}{2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Gamma(\frac{2n-1}{2} + 1) = \frac{2n-1}{2}\,\Gamma(\frac{2n-1}{2})$$

Množenjem ovih $\underline{n}$ jednačina medju sobom i skraćivanjem dobijamo:

$$\Gamma(\frac{2n-1}{2} + 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})$$

ili

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{1.3.\ \ldots .(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\ .$$

BETA FUNKCIJA

Beta funkcija, u oznaci $B(x,y)$, x 0, y 0, definiše se sa

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Zadatak 26.

Naći $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Rešenje

za $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, iz predhodnog obrasca dobijamo

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$$

Integral rešavamo smenom

$$t = \sin^2 u$$

$$dt = 2\sin u \cos u \, du$$

i smenom granica

za $t = 0$, $u = 0$;

za $t = 1$, $u = \pi/2$

pa imamo

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 u(1-\sin^2 u)}} 2 \sin u \cos u \, du =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u \cos u}{\sin u \cos u} du = 2 \int_0^{\pi/2} du = 2(\frac{\pi}{2}) = \pi$$

tj. $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$

Veza izmedju $B(x,y)$ i $\Gamma(x)$

data je relacijom

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Zadatak 27.

Naći $\Gamma(\frac{1}{2})$, koristeći rezultat

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$$

Rešenje

Kako je, prema predhodnoj formuli, za

$$x = y = \frac{1}{2}$$

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$$

to je $\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2 = \pi$

ili $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Zadatak 28.

Pokazati da je

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\varphi \ \sin^{2y-1}\varphi \ d\varphi$$

Rešenje

U izrazu

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

uvesti smenu

$$t = \cos^2\varphi$$

Zadatak 29.

Izračunati

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^5 x \, dx$$

Rešenje

Smenom

$$t = \sin^2 x$$

$$dt = 2\sin x \cos x \, dx$$

tj.

$$\sin x = \sqrt{t}, \quad \cos^2 x = 1-t, \quad \cos x = \sqrt{1-t};$$

$$dx = \frac{dt}{2 \sin x \cos x}$$

i

$$\text{za} \quad x = 0, \quad t = 0;$$

$$\text{za} \quad x = \pi/2, \quad t = 1,$$

dobijamo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^5 x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{t})^3 (\sqrt{1-t})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{3-1}{2}}(1-t)^{\frac{5-1}{2}} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{3+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{5+1}{2}-1} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{2-1}(1-t)^{3-1} dt = \frac{1}{2} B(2,3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

Jer, koristeći vezu izmedju B i Γ funkcije

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

dobijamo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^5 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sqrt{t})^3 (\sqrt{1-t})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{3-1}{2}} (1-t)^{\frac{5-1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{3+1}{2}-1} (1-t)^{\frac{5+1}{2}-1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{2-1} (1-t)^{3-1} dt = \frac{1}{2} B(2,3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

Jer, koristeći vezu izmedju B i   funkcije

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x) . \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

dobijamo $B(2,3) = \frac{\Gamma(2).\Gamma(3)}{\Gamma(5)} = \frac{1.2!}{4!} = \frac{\cancel{2}}{4.3.\cancel{2}} = \frac{1}{12}$.

Zadatak 30.

Naći
$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \, dx$$

Rešenje

Isto kao u predhodnom zadatku, smenom $t = \sin^2 x$; dobijamo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \, dx = \frac{\Gamma(\frac{5}{2}).\Gamma(\frac{7}{2})}{2\,\Gamma(6)} =$$

$$= \frac{\Gamma(2+\frac{1}{2}) . \Gamma(3+\frac{1}{2})}{2.5!} = \frac{\frac{1.3}{4}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1.3.5}{8}\sqrt{\pi}}{2.5.4.3.2.1} =$$

$$= \frac{3}{512}\pi$$

gde smo koristili obrazac

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1.3.5. \dots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

Zadatak 31.

Dokazati da je

$$\int_0^{\pi/2} \sin \; x \cos \; x \, dx = \frac{1}{2} B(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{B+1}{2})$$

$\alpha > -1$, $\beta > -1$;

ili koristeći vezu izmedju B i Γ funkcije

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin\ x \cos\ x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}$$

Rešenje:

Koristiti smenu

$$t = \sin^2 x$$

L I T E R A T U R A

1. I.A.Kaplan: Praktičeskie zanatija po viššej matematike, čast III i čast IV, Harkov, 1971.

2. Sbornik zadač i upražnenij po specialnim glavam viššej matematiki, pod ob.red. G.I.Kručkoviča, Moskva 1970.

3. B.Ivanović, Matematika za ekonomiste, Beograd, 1966.

4. Zadači i upražnenija po matematičeskom analizu, pod red. B.P.Demidoviča, Moskva 1963.

5. Mathelmatical Handbook for scientists and engineers, New York 1961.

FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

1. Definicija funkcije više promenljivih i njena geometrijska interpretacija.

Veličina $z \in R$, je funkcija dve veličine $x \in R$ i $y \in R$, ako svakom uredjenom paru (x,y), iz neke oblasti, dela $R \times R$, odgovara jedna odredjena vrednost veličine z.

Veličine x i y nazivaju se nezavisnim promenljivim a veličina z - funkcijom.

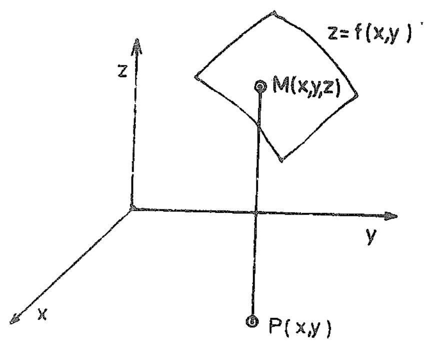
Označava se sa:

$$z = f(x,y) \quad \text{ili} \quad F(x, y, z) = 0$$

Vrednost funkcije $z = f(x,y)$, u tački $P(a,b)$, tj. za $x = a$ i $y = b$ označava se sa

$$z(a,b) = f(a,b) = f(P).$$

Geometrijski predstavnik funkcije $z = f(x,y)$ i Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu u prostoru Oxyz je neka površina (vidi sl. 1).



S l i k a 1.

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z = f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Naći

$$f(1,2); \quad f(2,3), \quad f(0, -1).$$

Rešenje:

Zamenom datih vrednosti $x = 1$ i $y = 2$ dobijamo

$$f(1,2) = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$f(2,3) = \frac{2+3}{2-3} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$f(0, -1) = \frac{0-1}{0-(-1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

Zadatak 2.

Odrediti one vrednosti x i y za koje je funkcija $z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ jednaka 0.

Rešenje

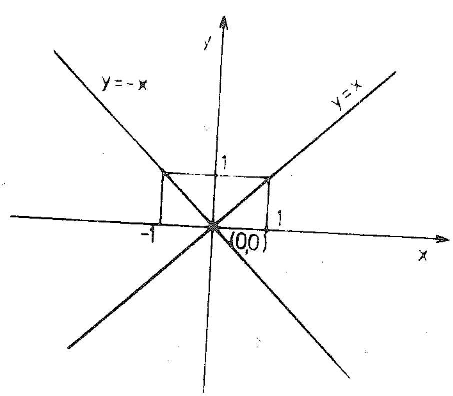
$$z = 0, \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0 \qquad x^2 - y^2 = 0$$

$$(x - y)(x + y) = 0$$

$$x - y = 0, \quad x + y = 0$$

$$y = x, \quad y = -x$$

Ako to predstavimo grafički dobijamo:



S l i k a 2.

Zadatak 3.

Naći sve vrednosti x i y za koje je funkcija $z = x^3 - y^3$ jednaka 0.

2. Oblast definisanosti funkcije $z = f(x, y)$ je podskup skupa $R \times R$, na kome je data funkcija odredjena.

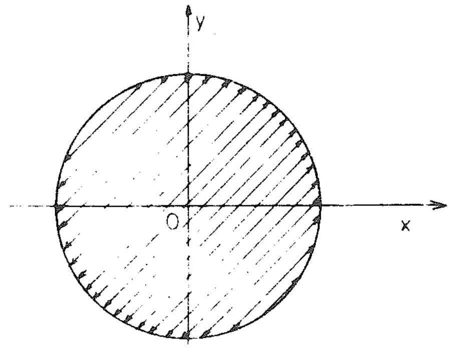
Zadatak 4.

Naći oblast definisanosti funkcije

$$z = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

Rešenje:

S obzirom da jednačina $9-x^2-y^2 = 0$, tj. $x^2+y^2 = 9$, predstavlja krug i s obzirom, da je funkcija $z = 9-x^2-y^2$, u tački $M(0,0)$, $z(0,0) = 9 > 0$, to je oblast definisanosti unutrašnjost kruga $x^2+y^2 = 9$ ne uključujući i njegovu periferiju.



S l i k a 3.

Zadatak 5.

Naći oblast definisanosti sledećih funkcija

a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; b) $= \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y}$;

c) $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$; d) $z = \frac{1}{x+y+1}$

e) $z = \sqrt{xy}$ f) $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

3. Neprekidnost

3.1. Granična vrednost funkcije.

Broj A je granična vrednost funkcije $z = f(x,y)$ kada tačka $P'(x,y)$ teži ka tački $P(a,b)$, ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji takav broj $\delta(\varepsilon) > 0$, da za svako x, y za koje je

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \qquad (1)$$

važi

$$|f(x,y)-A| < \varepsilon$$

Označava se sa

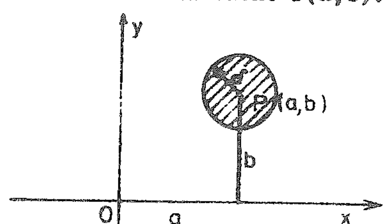
$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = A$$

<u>Primedba 1°.</u>

Izlaz $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ predstavlja rastojanje tačke $P'(x,y)$ do tačke $P(a,b)$, tj. nejednačinu (1) zadovoljavaju sve tačke $P'(x,a)$ koje se nalaze u krugu poluprečnika δ oko tačke $P(a,b)$.

Krug poluprečnika δ oko tačke $P(a,b)$ zove se " δ okolina" tačke $P(a,b)$.

Izraz (1) predstavlja otvorenu okolinu tačke $P(a,b)$. (Sl. 4.)



S l i k a 4.

3.2. **Neprekidnost i prekidne tačke.**

Funkcija $z = f(x,y)$ je neprekidna u tački $P(a,b)$ ako je

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

Funkcija, neprekidna u svakoj tački neke oblasti, je neprekidna u toj oblasti.

Prekidna tačka neke funkcije je tačka u kojoj funkcija nije neprekidna. Prekidne tačke mogu biti izolovane ili mogu obrazovati razne geometrijske oblike (linija prekida).

Zadatak 6.

Naći tačke prekida funkcije.

$$z = \frac{xy + 2}{x^2 - y}$$

Rešenje:

Funkcija nije definisana za sve one tačke ravn. Oxy za koje je imenitelj jednak nuli, tj.

$$x^2 - y = 0$$
$$y = x^2$$

Sve te tačke leže na paraboli.

Zadatak 7.

Naći granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x + 1}{y + 2}$, (odg. $\frac{1}{2}$)

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin y}{y}\right)$; (odg. 2)

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$ (odg. 0)

d) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$; (odg. 0).
(preći na polarne koordinate)

Zadatak 8.

Naći prekidne tačke sledećih funkcija:

a) $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ (Odg. linija prekida krug $x^2+y^2=1$)

b) $z = \sqrt{x + y}$

4. Parcijalni izvodi

4.1. Definicija

Ako je $z = f(x,y)$ funkcija dve nezavisne promenljive, tada se parcijalni izvod funkcije z po nezavisnoj promenljivoj x, u oznaci $\frac{\partial z}{\partial x}$, definiše kao izvod funkcije $z = f(x,y)$, po nezavisnoj promenljivoj x, smatrajući y kao konstantu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f'_x(x,y)$$

Analogno se definiše parcijalni izvod funkcije z po y: izvod funkcije $z = f(x+y)$ po y, smatrajući x kao konstantu:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta x) - f(x,y)}{\Delta y} = f'_y(x,y)$$

Radi kratkoće često se upotrebljavaju i oznake: z'_x tj z'_y.
Oba ova izvoda su prvi parcijalni izvodi funkcije $z = f(x,y)$.

Naći parcijalne izvode sledećih funkcija:

Zadatak 9. $z = x^2 + y^2$

" 10. $z = x^3 + y^4$

" 11. $z = 5x^2 + 6y^3$

" 12. $z = x^5 + x^2y^2 + y^5$

" 13. $z = x^3 + 3x^2y^2 + 5x^2y + 2xy^2 + 2y^3$

" 14. $z = x^5 + 4x^3y^2 + 4x^2y^3 + y^5$

" 15. $z = \frac{x}{y}$

" 16. $z = \frac{x^2}{y^2}$

" 17. $z = \frac{x^2}{y^3}$

" 18. $z = \frac{x^3}{y}$

Zadatak 19. $z = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$

" 20. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

" 21. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

" 22. $z = \dfrac{x}{x+y}$

" 23. $z = \dfrac{x}{x - y}$

" 24. $z = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

" 25. $z = \dfrac{x^2 y^2}{x - y}$

" 26. $z = \dfrac{xy}{x+y}$

" 27. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

" 28. $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

" 29. $z = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$

" 30. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

" 31. $z = x\, e^y$

" 32. $z = e^x \sin y$

" 33. $z = x^2\, e^y$

" 34. $z = e^x \sin y$

Zadatak 35. $z = e^x(\sin x + \sin y)$

" 36. $z = x \sin y$

" 37. $z = x^2 \sin y$

" 38. $z = x \sin^2 y$

" 39. $z = \sin x + \sin y$

" 40. $z = x^3 \cos y$

" 41. $z = e^{2x} \sin 3y$

" 42. $z = (\sin x + \sin y)^2$

" 43. $z = \sin x \cdot \sin y$

" 44. $z = x^2 \sin 3y$

" 45. $z = e^{x^2+y^2}$

" 46. $z = e^{\sin x + \cos y}$

" 47. $z = e^{(x-y)^2}$

" 48. $z = (x^2-y^2)^3 \, e^{3(x+y)}$

" 49. $z = \ln (x^2 - y^2)$

" 50. $z = \ln (x + \sqrt{x^2 + y^2})$

" 51. $z = (x^2 + y^2) \ln (x^2+y^2)$

" 52. $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$

" 53. $z = x^y$

" 54. $z = x \sin y$

" 55. $z = (\sin x)^{\sin y}$

" 56. $z = x \ln y$

" 57. Pokazati da je $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$ ako je
$z = \ln (x^2 + xy + y^2)$

" 58. Pokazati da funkcija $z = \ln(e^x + e^y)$ zadovoljava relaciju

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Zadatak 60. Pokazati da je

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

ako je

$$z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$$

3.2. Parcijalni izvodi višeg reda.

Definicija:

Parcijalni izvodi drugog reda definišu se relacijama:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Često se upotrebljavaju oznake, redom, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}.

Analogno se definišu parcijalni izvodi viših redova. Na primer

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \qquad \text{itd.}$$

Ako su parcijalni izvodi neprekidni tada rezultat više uzastopnih diferenciranja ne zavisi od redosleda diferenciranja te je, npr.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Zadatak 32. Naći parcijalne izvode drugog reda funkcije
$z = \text{arc tg} \frac{x}{y}$

Zadatak 61. $z = \ln (x^2 + y^2)$

" 62. $z = xy + x^2y^2 + x^2 + y^2$

" 63. $z = \sin (xy)$

" 64. $z = x^y$

" 65. Pokazati da funkcija $z = xf(\frac{y}{x}) + g(\frac{y}{x})$

zadovoljava relaciju

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

" 66. $z = \ln \sqrt{e^x + e^y}$

4.3. Totalni diferencijal I reda funkcije

$z = f(x,y)$, dz, definiše se:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Diferencijal drugog reda funkcije $z = f(x,y)$, d^2z, je diferencijal diferencijala prvog reda te funkcije:

$$d^2z = d\,(dz)$$

Analogno se definišu i diferencijali višeg reda:

$$d^3z = d(d^2z)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$d^nz = d(d^{n-1}\,z).$$

Ako se izvrše gore naznačena diferenciranja, vodeći računa da su dx i dy konstante, dobijaju se sledeći obrasci:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

ili, simbolički napisano

$$d^2z = (\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy)^{(2)}$$

koji se, formalno, razvija po binomnom obrascu. U opštem slučaju imamo

$$d^n z = \binom{n}{o} \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{{}^n z}{x^{n-1}} dx^{n-1} dy +$$

$$+ \dots + \binom{n}{k} \frac{\partial^n z}{x^{n-k} y^k} dx^{n-k} dy^k + \dots + \binom{n}{n} \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n, \text{ ili,}$$

simbolički $\quad d^n z = (\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy)^{(n)}$

Zadatak 67. Naći totalne diferencijale prvog i drugog reda funkcije $z = 2x^2 - 3xy - y^2$

Rešenje: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = - 3x - 2y$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (4x - 3y)dx - (3x + 2y)dy.$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - 2$$

te dobijamo: $\quad d_z^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 =$

$$= 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2.$$

Zadatak 68. Izračunati $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$, $\frac{\partial 2z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial 2z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial 2z}{\partial y^2}$, ako je

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Rešenje: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{abc\ y^2}{(b^2x^2 + a^2y^2)^{3/2}};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - \frac{abc\ xy}{(b^2x^2 + a^2y^2)^{3/2}} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{abc\ x^2}{(b^2x^2 + a^2y^2)^{3/2}}$$

Zadatak 69. Izračunati $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ za

$z = \ln (x^2 + y)$

Rešenje

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2+ y/2)}$$

Zadatak 70.

Izračunati $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, za $z = \sqrt{2xy + y^2}$

Rešenje:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{(2xy + y^2)^{3/2}}$$

Zadatak 71. Pokazati da funkcija $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu Laplasa

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$$

Zadatak 72. Naći totalni diferencijal funkcije

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Zadatak 72. Naći totalni diferencijal sledećih funkcija:

a) $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

b) $z = \sin^2 x + \sin^2 y$

c) $z = yx^y$

d) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

(Odg. $dz = \frac{2}{x \sin \frac{2y}{x}}(dy - \frac{y}{x}\, dx)$)

5. Tajlorova i Maklorenova formula

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima u okolini tačke $m_o(x_o y_o)$ neprekidne parcijalne izvode svih redova do (n+1) zaključno, tada važi Tajlorova formula:

$$z = f(x,y) = f(x_o,y_o) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial z}{\partial_x(mo)}(x-x_o) + \frac{\partial z}{\partial y(mo)}(y-y_o)\right]^{(1)} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial t}{\partial x(mo)}(x-x_o) + \frac{\partial x}{\partial y(mo)}(y-y_o)\right]^{(2)} + \dots\dots\dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial z}{\partial x(mo)}(x-x_o) + \frac{\partial z}{\partial y(mo)}(y-y_o)\right]^{(n)} + R_n(x,y) \quad \text{gde je}$$

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial z}{\partial_x(mo)}(x-x_o) + \frac{\partial z}{\partial_y(mo)}(y-y_o)\right]^{(n+1)},$$

pri čemu tačka mo ima koordinate:

$$mo\left[x_o + \theta(x-x_o),\quad y_o + \theta(y-y_o)\right], \qquad 0<\theta<1.$$

Ako tačka mo ima koordinate $x_o = y_o = 0$ onda se taj specijalni slučaj Tajlorove formule zove Maklorenova formula.

Zadatak 74. Na funkciju

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

primeniti Tajlorovu formulu u okolini tačke mo (-2; 1).
(Odgovor: $f(x,y) = 1-(x+2)^2 + 2(x+2)(y-1)x\ 3(y-1)^2$.

Zadatak 75. Na funkciju

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

primeniti Maklorenovu formulu za $n = 3$.
(Odgovor:

$$f(x,y) = y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!}\ ))$$

Zadatak 76. Na funkciju

$$z = \cos x \cos y$$

primeniti Maklorenovu formulu za $n = 4$.

(Odgovor: $z = 1 - \frac{x^2+y^2}{2!} + \frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$)

Zadatak 77. Na funkciju

$$f(x,y) = y^x$$

primeniti formulu Tajlora u okolini tačke mo (1,1) za n = 2

(Odgovor: $f(x,y) = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1)$)

Zadatak 78. Na funkciju

$$z = e^{x+y}$$

primeniti formulu Tajlora u okolini tačke mo(1; -1) za n = 3.

(Odgovor:

$$z = 1+\left[(x-1)+(y+1)\right] + \frac{\left[(x-1)+(y+1)\right]^2}{2!} + \frac{\left[(x-1)+(y+1)\right]^3}{3!}$$)

Zadatak 79. Na funkciju

$$z = e^{x^2+y^2}$$

primeniti Maklorenovu formulu za n = 4.

Zadatak 80. Na funkciju

$$z = x \sin y$$

primeniti Maklorenovu formulu za n = 2.

Zadatak 81. Na funkciju

$$f(x,\ y) = (x+1)e^y$$

Primeniti Maklorenovu formulu za n = 3.

(Odg.

$$(x+1)e^y = 1+x+y + \frac{y(2x+y)}{2} + \frac{y^2(3x+y)}{6} + \frac{\ldots\theta xy+y)e^{\theta}}{24}$$

$$0 < \theta < 1.$$

6. Ekstremi funkcije dve promenljive.

6.1. Definicija

Funkcija $z = f(x,y)$ ima maksimum (minimum) u tački $M(a,b)$ ako postoji takva okolina tačke $M(a,b)$, da je za sve tačke $M'(x,y)$ iz te okoline, ispunjena nejednakost.

$$f(a,b) > (x,y)$$

(tj. $f(a,b) < (x,y)$)

6.2. Potrebni uslovi ekstrema (zajednički naziv za maksimum i minimumi). Tačke, u kojima diferencijalna funkcija $z = f(x,y)$, može da ima ekstrem (tzv. stacionarne tačke) nalaze se rešavanjem sistema jednačina:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

(Potrebni uslovi ekstrema)

6.3. Dovoljni uslovi ekstrema: neka je $x = a$, $y = b$ jedno rešenje sistema jednačine (1), tj. neka je $\frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)=0$.

Neka je $\quad A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

i neka je $\Delta = B^2 - AC$.

Tada funkcija $z = f(x,y)$ u tački $P(a,b)$ dostiže svoj maksimum ako je $\Delta(a,b) < 0$ i $A < 0$(ili $C < 0$); b) minimum ako je $\Delta(a,b) < 0$ i $A > 0$(ili $C > 0$)

2. Ako je $\Delta > 0$ funkcija $z = f(x,y)$ u tački $P(a,b)$ ne dostiže ni maksimum ni minimum.

3. Ako je $\Delta = 0$ problem je za sada nerešen (potrebno je dalje ispitivati).

Zadatak 82. Naći ekstreme funkcije

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Rešenje: Ako rešimo sistem jednačina (potrebni uslovi):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

....

ili ekvivalentan sistem

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$\underline{xy - 2 = 0}$$

dobijamo četiri stacionarne tačke:

$$P_1(1;2) \quad P_2(2;1) \quad P_3(-1;-2) \quad P_4(-2;-1)$$

Ako izvršimo ispitivanje pomoću dovoljnih uslova dobijamo:

1. u tački P_1 nema ekstrema
2. u tački P_2 funkcija ima minimum ($z_{min} = -28$);
3. u tački P_3 nema ekstrema;
4. u tački P_4 funkcija ima maksimum ($z_{max} = 28$).

Zadatak 83. Naći ekstreme funkcije

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \qquad r > 0$$

(Odgovor: $a = 0$, $b = 0$, $z_{max} = r$).

Zadatak 84. Naći ekstreme funkcije

$$z = x^3 - 6xy + y^3$$

(Odgovor $P_1(0,0)$ - nema ekstrema
$P_2(2,2)$ - minimum (-8).

Zadatak 85. Podeliti datu duž dužine C na tri dela tako da proizvod dužina tih delova bude maksimalan
(Odgovor: $P_1(0,0)$, $P_2(0,\ell)$, $P_3(\ell,0)$, $P_4(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ stacionarne tačke. Maksimum je u P_4).

Zadatak 86. Od svih pravouglih paralelopipeda date zapremine V, naći onaj koji ima najmanju površinu.

(Odgovor: kocka).

6.4. Najveća i najmanja vrednost funkcije. Funkcija, koja je diferencijalna u konačnoj zatvorenoj oblasti dostiže svoju najveću (najmanju) vrednost ili u stacionarnoj tački ili u nekoj tački na granici oblasti.

Zadatak 87. Od svih trouglova konstantnog obima (2s) naći onaj koji ima najveću površinu.
(Odg. ravnostrani trougao).

Zadatak 88. Naći pravougli paralelopiped date površine s, koji ima najveću zapreminu.
(Odgovor: kocka)

Zadatak 89. U ravni xOy naći tačku M(x,y) sa osobinom da je zbir kvadrata rastojanja te tačke od tri prave u ravni xOy: x=0, y=0 i x-y+1=0, minimalan.
(Odgovor. $M(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Zadatak 99. U kojoj tački elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tangenta obrazuje sa koordinatnim osama trougao najmanje površine?
(Odgovor: $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}$).

Zadatak 91. Tokovi dveju reka imaju približan oblik parabole $y=x^2$ i prave x-y-2=0. Spojiti ih pravolinijskim kanalom najmanje dužine. Kroz koje tačke na datim krivim linijama on prolazi?
(Odgovor: $M_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ - na paraboli; i
$M_2(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8})$ na pravoj).

Zadatak 92. Naći najkraće rastojanje od tačke M(1,2,3) do prave

$$\frac{x}{1} - \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$$

(Odgovor: $\frac{1}{14}\sqrt{2730}$).

Zadatak 93. Date su dve prave u prostoru

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$$

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{2}$$

Odrediti njihovo najkraće rastojanje.

Uputstvo: uvesti dva parametra $\underline{u}$ i $\underline{v}$.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} = \tilde{u}$$

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{2} = \tilde{v}$$

tj. $x = 2u + 1, \quad y = 3u - 1, \quad z = u$

$x = v - 3, \quad y = 4x + 2, \quad z = 2v.$

Zadatak se svodi na traženje ekstrema funkcije

$$D(u, v) = d^2(u, v) = \left[u = -\frac{7}{2} \; v = -\frac{17}{6} \text{ (Odgovor)}\right]$$

$=(2u - v+4/2 + (3u - 4v - 3)^2+(u-2v)^2$

Naći ekstreme sledećih funkcija:

Zadatak 94. $z = (x-1)^2 + 2y^2$

" 95. $z = (x-1)^2 - 2y^2$

" 96. $z = x^2+xy + y^2-2x-y$

" 97. $z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

" 98. $z = (2x-y-1)^2 + (x-2y-10)^2$

" 99. $z = (x-3y-4)^2 + 4y^2 + 6$

" 100. $z = xy\,(6-x-y)$

" 101. $z = 2x^3 - 2xy + y^2 + 1$

" 102. $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + x - 9y + 1$

Zadatak 103. $z = 2(1+x-y) - (x^2 + y^2)$

" 104. $z = \sqrt{2(1+x-y)-(x^2+y^2)}$

" 105. $z = \dfrac{1 + x - y}{\sqrt{1+x^2 + y^2}}$

" 106. $z = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$ $(x > 0,\ y > 0)$

" 107. $z = e^{x-y}(x^2-2y^2)$

" 108. $z = e^{x-y}(x^2 + y^2)$

Rešenje

Zadatak 94. $z_{min} = 0$, u $(1,0)$;

" 95. Nema ekstrema

" 96. $z_{min} = -1$, u $(1,0)$;

" 97. $z_{min} = 0$, u $(0,0)$, maksimum koji nije strog

$z = \dfrac{1}{e}$ u tačkama kruga $x^2+y^2 = 1$;

" 98. $z_{min} = 0$, u $(2,3)$

" 99 $z_{min} = 6$, u $(4,0)$

" 100. $z_{max} = 8$, u $(2,2)$, u $(0,0)$, $(6,0)$ i $(0,6)$ nema ekstrma

" 101. Stacionarne tačke: $(0,0)$; $(3,3)$

" 102. Stacionarne tačke: $(1, 3)$;$(1,-3)$;$(-1,3)$; $(-1,-3)$.

" 103. $z_{max} = 4$, u $(1,-1)$

" 104. $z_{max} = 2$, u $(1, -1)$

" 105. $z_{max} = \sqrt{3}$, u $(1, -1)$

" 106. $z_{min} = 6$, u $(4, 2)$

" 107. $z_{max} = 8e^{-2}$, u $(-4, -2)$; u $(0,0)$ nema ekstrema;

" 108. z_{min}, u $(0,0)$; u $(-1, 1)$ nema ekstrema .

6.5. Uslovni ekstremi. U najprostijem slučaju uslovi ekstremne funkcije $z = f(x,y)$ je maksimum ili minimum te funkcije, koji se dostiže pri uslovu da su x i y vezani relacijom $f(x,y)=0$ (jednačine veze). Da bi našli uslovni ekstrem funkcije $z = f(x,y)$ pri uslovu (vezi) $(x,y) = 0$ formiramo tzv. funkciju Lagranža

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$$

gde je $\lambda = \text{const}$, i tražimo običan ekstrem te pomoćne funkcije. Potrebni uslovi za to su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (1) \\ \varphi(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Iz ovog sistema jednačina možemo naći nepoznate x, y, λ.
Pitanje prirode uslovnog ekstrema rešava se ispitivanjem znaka drugog diferencijala funkcije Lagranža

$$d^2F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2,$$

za nadjene vrednosti x, y, λ, iz (1), pri uslovu koji vezuje dx i dy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

$$(dx^2 + dy^2 \neq 0).$$

Funkcija $f(x,y)$ ima uslovni maksimum, ako je $d^2F \leq 0$ i uslovni minimum, ako je $d^2F \geq 0$.
Specijalno, ako je diskriminanta D za funkciju $F(x,y)$ u stacionarnoj tački negativna, tada je u toj tački uslovni maksimum, ako je $A < 0$ (ili $C < 0$), ili uslovni minimum, ako je $A > 0$ (ili $C > 0$).

Zadatak 109. Naći ekstreme funkcije

$$z = 6 - 4x - 3y$$

pri uslovu $x^2 + y^2 = 1$

Rešenje

Geometrijski se zadatak svodi na traženje ekstremnih vrednosti visine z ravni $z = 6 - 4x - 3y$ u tačkama preseka te ravni sa cilindrom $x^2 + y^2 = 1$.

Funkcija Lagranža je

$$F(x,y) = 6-4x-3y + \lambda(x^2+y^2-1).$$

Dobijamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y,$$

tj.

$$-4 + 2\lambda x = 0$$

$$-3 + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Rešenja su

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \quad x_1 = \frac{4}{5}, \quad y_1 = \frac{3}{5} \qquad (2)$$

i

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{4}{5}, \quad y_2 = -\frac{3}{5} \qquad (3)$$

Pošto je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$$

tj.

$$d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$$

Za (2) imamo $d^2F > 0$ te je u toj tački uslovni minimum: $z_{min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$. Za (3) $d^2F < 0$ te je u toj tački uslovni maksimum:

$$z_{max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11.$$

Zadatak 110. Data je gornja polusfera

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Od svih tačaka prave u ravni xOy čija je jednačina

$$x + y = r$$

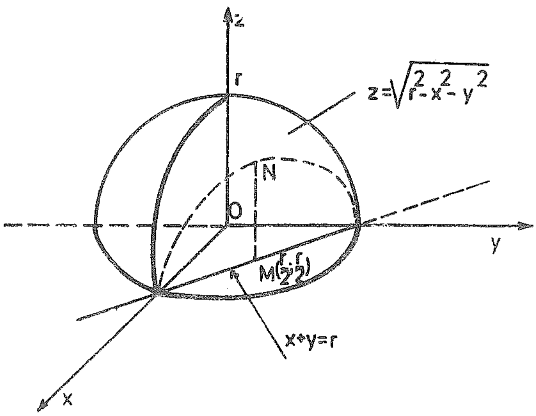
odrediti onu kojoj odgovara tačka na sferi sa maksimalnom visinom.

Rešenje: Problem se svodi na odredjivanje maksimuma funkcije

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

pri čemu se promenljive x i y vezane relacijom

$$x + y = r \quad \text{(vidi sl.)}$$



Lagranžeova funkcija je:

$$F(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + \lambda\,(x+y-r). \text{ Odatle:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\lambda - \sqrt{r^2-x^2-y^2} - x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\lambda - \sqrt{r^2-x^2-y^2} - y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\varphi(x, y) = x + y - r$$

Sistem jednačine je

$$x - \lambda\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = 0$$

$$y - \lambda\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = 0$$

$$x + y - r = 0$$

ili

$$x - y = 0$$

$$x + y = r$$

čije je rešenje $x = \frac{r}{2}$, $y = \frac{r}{2}$, $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Iz slike se vidi da je u pitanju maksimum

$$z_{max} = \sqrt{r^2 - (\frac{rz}{r})^2 - (\frac{r}{2})^2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Naći uslovni ekstrem sledećih funkcija.

Zadatak 111. $z = xy$ za $x + y = 1$.

(Odgovor $z_{max} = \frac{1}{4}$, u $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Zadatak 112. $z = x + 2y$ za $x^2 + y^2 = 5$.

(Odgovor $z_{max} = 5$, u $(1,2)$

Zadatak 113. $z = x^2 + y^2$ za $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

$z_{min} = \frac{36}{13}$, u $(\frac{18}{13}, \frac{12}{13})$

Zadatak 114. Naći ose elipse

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

(Odgovor: Velika osa $2a = 6$, mala osa $2b = 2$.

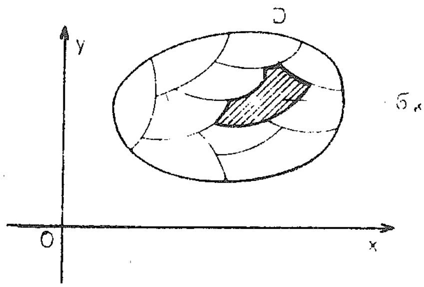
Uputstvo: Kvadrat rastojanja tačke (x,y) od njenog centra (koordinatnog početka) je $x^2 + y^2$ - zadatak se svodi na traženje ekstrema funkcije $z = x^2 + y^2$ pri uslovu

$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$).

7. DVOJNI INTEGRALI I PRIMENA

7.1. Dvojni integrali

7.1.1. Definicija dvojnog integrala



Neka je D oblast u ravni, zatvorena, ograničena i čija površina ima jednu odredjenu vrednost, neka je

$$z = f(x, y)$$

funkcija dve promenljive, neprekidna i definisana u oblasti D.

Dvojni integral funkcije $z = f(x,y)$ po oblasti D, koji se označava sa

$$I = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy$$

definiše se pomoću graničnog procesa

Oblast integracije D se podeli na konačan broj delova, od kojih svaki ima odredjenu površinu, a čija unija predstavlja oblast D. Inače, podela je proizvoljna kao i broj delova. Delovi se numerišu od 1 do n, gde je n broj delova. Neka k-ti deo ima površinu σ_k; u njemu uočimo proizvoljnu tačku (ξ_k, η_k). To učinimo u svakom delu i formiramo sumu

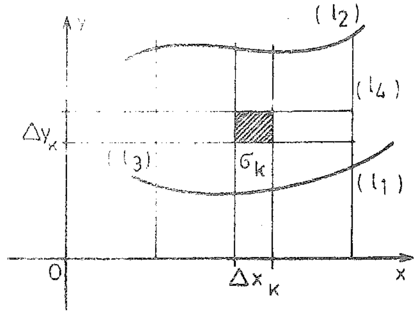
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \sigma_k$$

Ako postoji granična vrednost te sume, kada broj delova, n, teži beskonačnosti a najveća od površina σ_k teži nuli, onda ta granična vrednost predstavlja dvojni integral funkcije $z = f(x,y)$ po oblasti D:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\sigma_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\sigma_k$$

7.1.2. Izračunavanje dvojnog integrala u pravouglim koordinatama

Oblast



Neka je oblast D iz predhodne tačke ograničena linijama (l_1), (l_2) koje mogu biti krive ili prave, i dvema vertikalnim pravama (l_3) i (l_4) čije su jednačine

$$(l_1) \quad : \quad y = y_1(x)$$
$$(l_2) \quad : \quad y = (y_2(x)$$
$$(l_3) \quad : \quad x = a$$
$$(l_4) \quad : \quad x = b$$

Ako oblast D podelimo na pravougaonike čije su strane Δx_k i Δy_k, onda se primenjujući postupak kao u predhodnoj tački, dolazi do obrasca kojim se dvojni integral pretvara u ponovljeni.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\ dxdy = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy.$$

U integralu

$$\int\limits_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

x igra ulogu parametra.

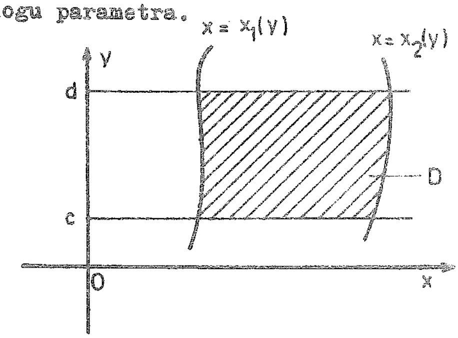
Ako x i y medju sobom promene mesta, tada dobijamo obrazac, kod koga je "promenjen red integracije"

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

U delu

$$\int\limits_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

y igra ulogu parametra.



U koliko je oblast integracije D složenija, onda se ona razvija na konačan broj oblasti navedenog tipa, integracija se vrši na svakoj oblasti posebno a dobijeni rezultati saberu. To je moguće uraditi zbog osobina dvojnog integrala, koje izlažemo u sledećoj tački.

7.1.3. Osobine dvojnog integrala

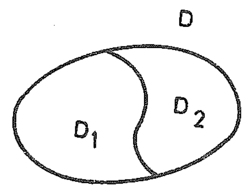
U predhodnoj tački koristili smo osobinu integrala koju možemo iskazati na sledeći način:

1) Ako se oblast integracije D rastavi na dve oblasti D_1 i D_2 tada važi

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)$$

ili kraće

$$\iint\limits_{D} = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2}$$



2) Konstanta se može izvući ispred znaka integrala, tj.

$$\iint\limits_{D} k.f(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$$

3) Dvojni integral zbira dve funkcije jednak je zbiru dvojnih integrala tih funkcija

$$\iint\limits_{D} \left[f(x,y) + g(x,y)\right] dx\,dy =$$
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D} g(x,y)\,dxdy.$$

4) Ako je $f(x,y) = 1$ tada je dvojni integral te funkcije jednak površini oblasti integracije D, u oznaci P(D):

$$\iint\limits_{(D)} dx\,dy = P(D)$$

Ova osobina sledi neposredno iz definicije dvojnog integrala.

5) Ako je $f(x,y) \geqslant 0$, za svaku tačku $(x,y) \in D$, tada je

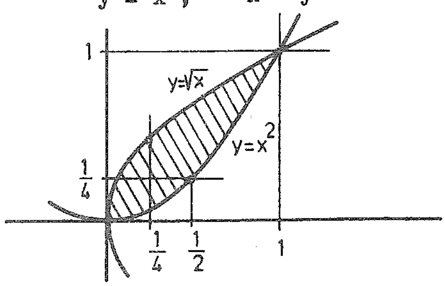
$$\iint_D f(x,y) \geqslant 0$$

ili rečima: dvojni integral nenegativne funkcije je nenegativan.

Primer. Naći $\iint_D xy\,dx\,dy$, gde je

D oblast ogrenična linijama

$$y = x^2, \qquad x = y^2$$



$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 xdx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} ydy =$$

$$= \int_0^1 xdx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^5)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right)_0^1 = \frac{1}{12}$$

Zadaci i primena dvojnog integrala

Zadatak 114

Izračunati integral $I = \int_0^1 dx \int_x^1 (x + y)\, dy$

Rešenje

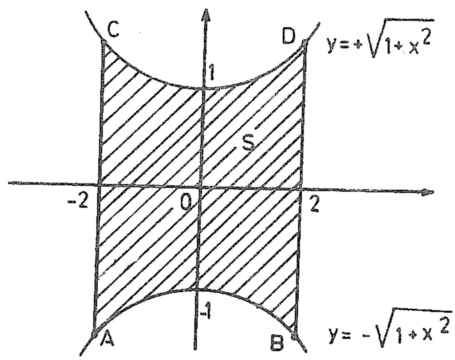
$$I = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{y=x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\right] dx = \frac{1}{2}$$

Zadatak 115

Odrediti granice integracije integrala

$$\iint_{(S)} f(x,y)\, dx\, dy,$$

kod koga je oblast integracije (S) (Sl. 1), ograničena hiperbolom $y^2 - x^2 = 1$ u dvema pravama $x = 2$ i $x = -2$ i sadrži tačku O(0,0).



S l i k a 1.

Rešenje

Oblast integracije ABCD je ograničena pravim linijama $x = -2$ i $x = 2$ i dvema granama hiperbole.

$$y = \sqrt{1+x^2} \quad \text{i} \quad y = -\sqrt{1 + x^2}$$

te imamo

$$\iint_{(S)} z(x,y)\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\, dy$$

Izračunati sledeće integrale:

Zadatak 116.

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)\,dx$$

Rešenje $4\frac{2}{3}$

Zadatak 117.

$$\int_{3} dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$$

Rešenje $\ln\frac{25}{24}$

Zadatak 118.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy$$

Rešenje: $\frac{\pi}{12}$

Zadatak 119.

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2\,dy}{y^2}$$

Rešenje: $\frac{9}{4}$

Zadatak 120.

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy$$

Rešenje: $\frac{\pi}{6}$

Napisati jednačine linija, koje ograničavaju oblasti integracije, i nacrtati ih.

Zadatak 121.

$$\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx$$

Rešenje

$$x = \frac{y^2}{4} - 1,\quad x=2-y,\qquad y= -6,\ y=2.$$

Zadatak 122.

$$\int_{1}^{3} dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$$

Rezultat $\quad y = x^2,\ y = x + 9,\quad x = 1,\quad x = 3.$

Zadatak 123.

$$\int_{0}^{3} dx \int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy$$

Rezultat:

$$y = 0,\quad y = \sqrt{25-x^2},\quad x = 0,\quad x = 3.$$

Napisati granice integrala za oba poretka integracije u dvojnom integralu $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy,$

Za date oblasti S.

Zadatak 124.

S - pravougaonik stemenima O(0,0).

A(2,0) B(2,1) C(0,1)

Rezultat:

$$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{2} (f(x,y)\,dx = \int_{0}^{2} dx \int_{0}^{1} f(x,y)\,dy)$$

Zadatak125.

S-trougao sa temenima O(0,0), A(1,0), B(1,1)

Rezultat: $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^x (x,y)\,dy$

Zadatak 126.

S-trapez sa temenima O(0,0), A(2,0), B(1,1) C(0,1).

Rezultat:

$$\int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x,y)d_x = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy + $$
$$+ \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

Zadatak 127.

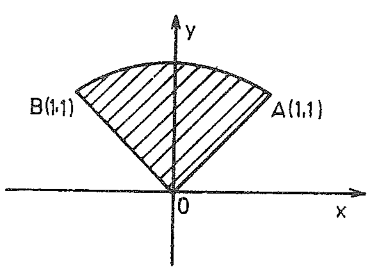
S- paralelogram s temenima A(1,2), B(2,4), C(2,7), D(1,5)

Rezultat:

$$\int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} f(x,y)\,dy = \int_1^{y/2} f(x,y)\,dx + \int_n^5 dy \int_1^2 +(x,y)\,dx + $$
$$+ \int_5^7 dy \int_{y-3}^2 f(x,y)\,dx).$$

Zadatak 128.

S-kružni isečak s centrom u tački O(0,0), s krajevima tetive u tačkama A(1,1) i B(-1, 1) (vidi sliku).



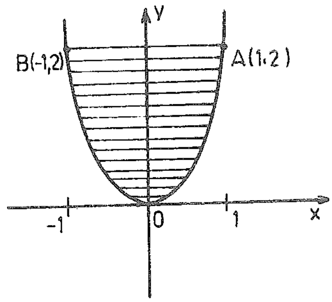
Odgovor:

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y/dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$$

Zadatak 129.

S- Segment parabole $y = 2x^2$, AOB, ograničen parabolom BOA: odsečkom prave BA, koji spaja tačke B(-1,2) u -A(1, 2)



Odgovor:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} (x,y)dy = \int_{0}^{2} dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{+\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dx).$$

Zadatak 130.

S - ograničena hiperbolom $y^2-x^2 = 1$ i krugom $x^2+y^2=9$, pri čemu O(0,0) (S).

Odgovor:

$$\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x,y)dy + \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\ dy +$$

$$+ \int_{2}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-\ 5}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx +$$

$$+ \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} (x,y)dx + \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx +$$

$$+ \int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\ dx).$$

Promeniti poredak integracije u sledećim dvojnim integralima:

Zadatak 131.

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\, dy.$$

Odgovor

$$\int_0^{48} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\, dx$$

Zadatak 132.

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2yx-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy$$

Odgovor:

$$\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx +$$

$$+ \int_0^{2\sqrt{2a}} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x,y)\,dx.$$

Zadatak 133.

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

Odgovor:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy.$$

Izračunati sledeće dvojne integrale:

Zadatak 134.

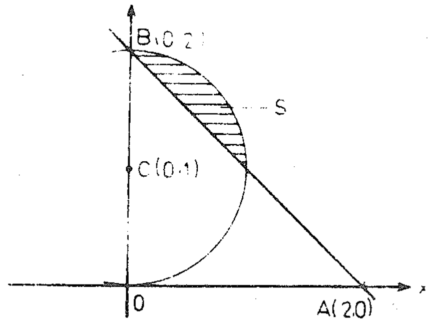
$$S = \iint_{(s)} x\,dx\,dy,$$ gde je S - trougao sa temenima

O(0,0), A(1,1), B(0,1)

Odgovor: $\frac{1}{6}$

Zadatak 135.

$I=\iint x\,dx\,dy$, gde je S ograničena pravom koja prolazi kroz tačke A(2,0), B(0,2) i delom kruga čiji je centar u tački C (0, 1), a poluprečnik r = 1, iznad prave.



Odgovor: $\frac{1}{6}$

Zadatak 136.

$$\iint\limits_{(s)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

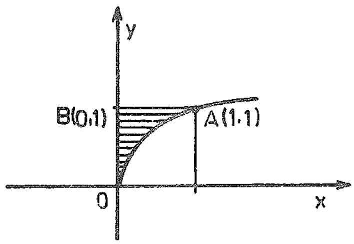
gde je s deo kruga u prvom kvadratu poluprečnika a, sa centrom u tački O(0,0), r = a

(Uputstvo. Smena $\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} = t$; rezultat $\frac{\pi}{2}$ a)

Zadatak 137. $\iint\limits_{(s)} \sqrt{x^2-y^2}\;dx\,dy$ – gde je s trougao sa temenima O(0,0, A(1, -1) i B(1,1).

Odgovor: $\frac{\pi}{6}$

Zadatak 138. $\iint\limits_{(s)} e^{x/y}\,dx\,dy$, gde je s – krivolinijski trougao AOB ograničen parabolom $y^2 = x$ i pravim linijama $x=0$, $y=1$.



Odgovor: $\frac{1}{2}$

Zadatak 139.

$$\iint\limits_{(s)} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$ gde je s - segment parabole, ograničen delom parabole

$$y = \frac{x^2}{2}$$ i pravom $y = x$.

Odgovor: ln 2.

Zadatak 140

$$\iint\limits_{(s)} xy^2\,dx\,dy,$$ gde je s oblast ograničena parabolom $y^2=2px$ i pravom $x=p$.

Odgovor: $\frac{8\sqrt{2}}{21}\,p^5$.

Zadatak 141.

$$\iint\limits_{(s)} xy\,dx\,dy$$ - gde je s ograničena osom Ox i gornjim polukrugom $(x-2)^2 + y^2 = 1$

Odgovor: $\frac{4}{3}$

Zadatak 142.

$$\iint\limits_{(s)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}},$$ gde je s krug poluprečnika, a koji dodiruje koordinate ose i leži u prvom kvadratu.

Odgovor: $\frac{8}{3}\,a\sqrt{2a}$.

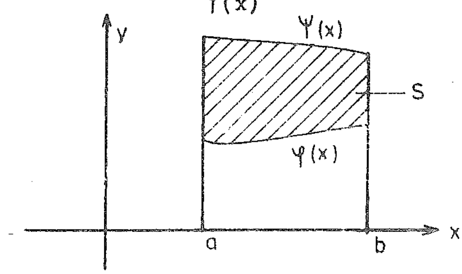
7.2. Izračunavanje površine figura u ravni xOy. Površina ravne oblasti S, u ravni xOy data je sa

$$P_{(s)} = \iint\limits_{(s)} dx\, dy \qquad (1)$$

Ako je oblast (s) odredjena nejednačinama

$a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, obrazac ( ) postaje

$$P(s) = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy$$



Zadatak 143

Nacrtati oblasti (s), čije se površine izražavaju integralima:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} dy$; b) $\displaystyle\int_{0}^{a} dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$

Izračunajte te površine i izmenite poredak integracije.

Odgovor

a) $4\frac{1}{2}$; b) $\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$.

Zadatak 144.

Izračunati površinu ograničenu pravim linijama

$x = y$, $x = 2y$, $x+y = a$, $x+3y = a$ $(a > 0)$.

Odgovor: $\frac{7a^2}{120}$

Zadatak 145.

Izračunati površinu, koja leži iznad Ox ose, ograničenu delom te ose, parabolom $y^2=4ax$ i pravom $x+y = 3a$.

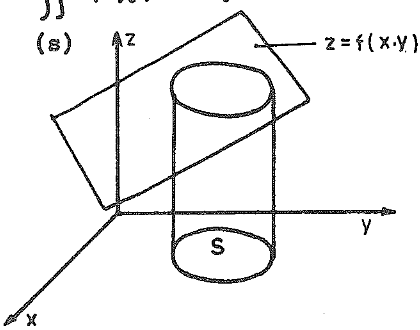
Odgovor:

$$\frac{10}{3}a^2.$$

7.3. Izračunabanje zapremine tela

Zapremina cilindra, koji je ograničen s gornje strane neprekidnom površinom $z = f(x,y)$, s donje strane ravni $z = 0$, a omotač mu je prava cilindrična površina, koja seče u ravni xOy oblast (S), data je izrazom

$$V = \iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy$$



U sledećim zadacima predstaviti u koordinatnom sistemu Oxyz tela čije se zapremine traže.

Zadatak 146.

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy.$$

Zadatak 147.

$$\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4-x-y)\,dy$$

Zadatak 148.

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)\,dy.$$

Zadatak 149.

Nacrtati telo, čija je zapremina izražena integralom

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dy, \text{ i}$$

geometrijskim putem naći vrednost tog integrala.

Odgovor

$$\frac{\pi a^3}{6}$$

Zadatak 150.

Naći zapreminu tela, ograničenu eliptičbim paraboloidom

$$z = 2x^2 + y^2 + 1,$$

ravni $x+y = 1$ i koordinatnim ravnima.

Odgovor: $\frac{3}{4}$

Zadatak 151.

Telo je ograničeno hiperboličnim paraboloidom $z = x^2-y^2$ i ravnima $y=0$, $z=0$, $x=1$. Izračunati njegovu zapreminu.

Odgovor:

$$\frac{1}{6}$$

Zadatak 152.

Telo ograničeno cilindrom $x^2 + z^2 = 9$ i ravnima $y = 0$, $z = 0$, $y = x$. Naći njegovu zapreminu.

Odgovor:

$$\frac{a^3}{3}$$

L I T E R A T U R A

1. Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu, red. B.P. Demidovič, Moskva, 1963.

2. B.Ivanović: Matematika za ekonomiste, Beograd, 1966.

3. Ispitni zadaci iz Matemamatike II na Ekonomskom fakultetu u Beogradu.

G l a v a III

R E D O V I

BROJNI REDOVI

Definicija 1. Neka je dat beskonačni niz realnih ili konpleksnih brojeva $u_o, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Izraz

$$u_o + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} u_n$$

nazivamo beskonačnim brojnim redom, gde su $u_o, u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_n, \ldots$ članovi taga reda, a u_n njegov opšti član.

Svi članovi reda $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ mogu se dobiti iz njegovog opšteg člana u_n tako što ćemo indeksu n davati redom vrednosti o,1, 2, 3, ..., n, ...

Primeri brojnih redova:

1. Dat je red $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Kod njega su $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ članovi, a $u_n = \frac{1}{2^n}$ je opšti član. Ako indeksu n dajemo redom vrednosti o, 1, 2,..., n, ... dobićemo redom članove reda, tj.

$$u_o = \frac{1}{2^o} = 1, \quad u_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \ldots, \quad u_n = \frac{1}{2^n}, \ldots$$

2. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

ima opšti član $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Članove $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}$, ..., ..., $\frac{1}{n(n+1)}$, ... dobijamo iz opšteg člana $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ kada za n dajemo redom vrednosti 1, 2, 3, 4, ..., n, ...

<u>Definicija 2</u>. Ako od članova reda $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ formiramo niz $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ gde je

$$
\begin{aligned}
s_0 &= u_0 \\
s_1 &= u_0 + u_1 \\
s_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
s_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

tada niz $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ nazivamo nizom delimičnih suma reda $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

<u>Definicija 3</u>. Brojni red $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ nazivamo konvergentnim, ako njegov niz delimičnih suma $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ teži konačnoj graničnoj vrednosti, tj. ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S.$$

Tada broj S nazivamo zbirom ili sumom toga reda. Ako pak ne postoji $\lim_{n\to\infty} s_n$ tada kažemo da red $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ divergira.

<u>Stav 1</u>. Ako niz delimičnih suma $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ reda $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, monotono raste i ako je ograničen tada red $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ konvergira.

Dokaz ovoga stava sledi na osnovu poznatog stava za konvergenciju nizova, tj. da svaki monoton i ograničen niz konvergira, pa je dalji dokaz posledica definicije 3.

Primer:

3. Ispitati konvergenciju geometrijskog reda

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0.$$

Njegov niz delimičnih suma je

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

koji predstavlja zbir prvih n članova geometrijske progresije.

a) Za $|q| < 1$, sledi da $q^n \to 0$ kada $n \to \infty$ pa je tada:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

što znači da red $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ konvergira i da mu je suma $S = \frac{a}{1-q}$.

b) Za $|q| > 1$, sledi da $q^n \to \infty$ kada $n \to \infty$ pa je tada

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty,$$

odakle proizilazi da red $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ divergira.

c) Za $q=1$, red ima niz delimičnih suma $s_n = a\cdot n$ kod koga je $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\cdot n = \infty$. Znači, da red divergira.

d) Za $q=-1$, niz delimičnih suma je $s_n = a-a+a-a+\dots$, gde je

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = 0, \quad a \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = a$$

pa red divergira jer mu niz delimičnih suma nema granicu. Na osnovu predhodnog razmatranja proizlazi da geometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ konvergira za svako $|q| < 1$, a divergira za svako $|q| \geq 1$.

OSOBINE KONVERGENTNIH REDOVA

Stav 2. Ako redu $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ dodamo ili oduzmemo konačan broj novih članova tada se njegova konvergencija ili divergencija neće menjati, tj. konvergentni red ostaje konvergentan a divergentni ostaje divergentan.

Dokaz: Neka je s_n zbir n prvih članova datoga reda, a $\bar{s}_k$ suma k odbačenih ili dodatih članova. Jasno je da je za dovoljno veliko n zbir odbačenih ili dodatih članova $\bar{s}_k$ manji od s_n. Ako je $\bar{s}_{n\mp k}$ suma članova reda s_n kome su odbačeni ili dodati članovi $\bar{s}_k$, tada je

$$s_n = \bar{s}_{n\mp k} \pm \bar{s}_k .$$

Kako je $\bar{s}_k$ broj koji ne zavisi od n, vidimo da iz postojanja $\lim_{n\to\infty} s_n$, sledi postojanje i $\lim_{n\to\infty} \bar{s}_{n\mp k}$ i obrnuto, odakle je uslov stava 3 očigledan.

Stav 3. Ako sve članove nekog reda $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ pomnožimo brojem k ($k \neq o$) dobijamo red $\sum_{n=o}^{\infty} ku_n$ koji ostaje konvergentan ili divergentan prema tome da li je i predhodni red $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ bio konvergentan ili divergentan.

Ako je suma reda $\sum_{n=o}^{\infty} u_n = S$ tada je suma reda $\sum_{n=o}^{\infty} ku_n = kS$.

Dokaz: Neka red $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ konvergira i neka mu je suma S. Tada njegov niz delimičnih suma

$$s_n = u_o + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

ima graničnu vrednost S, tj. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Neka je $\bar{s}_n = ku_o+ku_1+\dots+ku_n = k(u_o+u_1+u_2+\dots+u_n) = ks_n$ niz delimičnih suma reda $\sum_{n=o}^{\infty} ku_n$. Tada granična vrednost niza $\bar{s}_n$ je:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = \lim_{n\to\infty} ks_n = k\cdot\lim_{n\to\infty} s_n = kS,$$

pa red $\sum_{n=0}^{\infty} ku_n$ konvergira i suma mu je kS.

Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ divergira, tada ne postoji granična vrednost njegovog niza delimičnih suma s_n, pri $n\to\infty$, a samim tim ni granična vrednost niza ks_n, pri $n\to\infty$, pa red $\sum_{n=0}^{\infty} ku_n$ divergira.

<u>Stav 4.</u> Ako redovi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ konvergiraju i ako su im sume S, odnosno P tada će konvergirati i red $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ i njegova će suma biti $S\pm P$.

Dokaz: Kako dati redovi konvergiraju i kako je $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$ i $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = P$, sledi da njihovi nizovi delimičnih suma S_n, odnosno P_n imaju granične vrednosti, kada $n\to\infty$, jednake S, odnosno P, tj.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} P_n = P.$$

Neka je $\bar{s}_n = (s_n \pm P_n)$ niz delimičnih suma reda $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n \pm v_n)$.

Na osnovu poznatih stavova o graničnoj vrednosti je

$$\lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = \lim_{n\to\infty}(s_n \pm P_n) = \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} P_n = S \pm P.$$

Ovo znači, na osnovu definicije 3 da red $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ konvergira i da mu je suma $S\pm P$.

ZADACI ZA VEŽBU

4. Ispitati konvergenciju reda

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Rešenje: Ovaj red ima niz delimičnih suma

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} .$$

Kako $(\frac{1}{2})^{n+1} \longrightarrow 0$ kada $n \to \infty$, dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Znači, red konvergira i ima sumu $S = 2$.

5. Ispitati konvergenciju sledećih redova i naći im sumu S:

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$;

b) $\frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \dots + (\frac{2}{3})^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$;

c) $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{3}{2^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$;

d) $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \dots + \frac{a}{2^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{2^n}$.

Rešenja:

a) Konvergira, suma mu je $S = \frac{3}{2}$; b) konvergira, $S = 2$;
c) konvergira, $S = 6$; d) konvergira, $S = 2a$.

6. Za koje vrednosti x konvergiraju sledeći redovi:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1} + \dots$.

Rešenja:

a) Konvergira za $|x| < 1$, a suma mu je $S = \frac{1}{1-x}$;

b) konvergira za $|x| < 2$, $S = \frac{2}{2-x}$;

c) konvergira za $|x| < 1$, $S = \frac{x}{1-x^2}$.

7. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Rešenje: Niz delimičnih suma datoga reda je

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

kako je

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\ ; \quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ ; \quad \ldots\ ; \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

sledi da je

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + \ldots +$$

$$+ (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

odakle se dobija

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

Znači, red konvergira i suma mu je $S = 1$.

8. Ispitati konvergenciju sledećih redova i naći im sumu S :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+2)} + \ldots$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(4n+4)} = \frac{1}{4\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 12} + \ldots + \frac{1}{4n(4n+4)} + \ldots$

Rešenja:

a) Konvergira, $S = \frac{1}{2}$; b) konvergira, $S = \frac{1}{4}$;

c) konvergira, $S = \frac{1}{3}$; d) konvergira, $S = \frac{1}{16}$.

9. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Rešenja:

a) Red divergira, jer mu je niz delimičnih suma

$$s_n = (\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = 1 - \sqrt{n+1}\ , \quad a$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \sqrt{n+1}) = -\infty .$$

b) Red konvergira, jer je

$$s_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad a$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1.$$

Suma reda je $S = 1$.

c) Kod ovoga reda niz delimičnih suma monotono raste jer je $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!}$. Zatim on je i ograničen što se vidi iz

$$s_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} <$$

$$< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + \dots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdots 2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \text{ tj. } s_n < 2.$$

Znači , niz delimičnih suma s_n monotono raste pa kako je i ograničen na osnovu stava 2, sledi da dati red konvergira.

d) Red divergira, jer je

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \quad a$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty .$$

e) Red konvergira, jer je $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, a

$$s_n = (1 - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9}) + \dots + (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2},$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = 1.$$

Suma reda je $S = 1$.

OPŠTI KOŠIJEV KRITERIJUM KONVERGENCIJE

Stav 5. (Košijev opšti kriterijum konvergencije)
Da bi red $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ bio konvergentan potrebno je i dovoljno da svanom $\varepsilon > 0$ (te prema tome i proizvoljno malom $\varepsilon > 0$) odgovara ceo pozitivan broj $N_{(\varepsilon)}$, takav da je

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

za svako $n > N_{(\varepsilon)}$ i svaki pozitivan broj p.

Dokaz da je uslov potreban: Neka $s_n \to S$, kada $n \to \infty$. Tada za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N_{(\varepsilon)}$, takav da je

$$|s_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{za svako } n > N_{(\varepsilon)}.$$

Za $n > N_{(\varepsilon)}$ i proizvoljan ceo broj $p > 0$ je takođe

$$|s_{n+p} - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Iz zadnje dve nejednakosti proizlazi

$$|s_{n+p} - s_n| = |(s_{n+p} - S) + (S - s_n)| \leq |s_{n+p} - S| + |S - s_n| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ tj.}$$

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon,$$

za $n > N_{(\varepsilon)}$ i svaki $p > 0$, što predstavlja dokaz potrebnosti uslova.

Dokaz da je uslov dovoljan: Neka za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N_{(\varepsilon)}$ takav da je za $n > N_{(\varepsilon)}$ i proizvoljan ceo broj $p > 0$ ispunjen uslov $|s_{n+p} - s_n| \leqslant \varepsilon$. Tada je za svako $n > N_{(\varepsilon)}$ i proizvoljan ceo broj $p > 0$ ispunjen uslov

$$s_n - \varepsilon < s_{n+p} < s_n + \varepsilon .$$

Za $p = 1, 2, \ldots$ dobijamo odavde

$$\begin{gathered} s_n - \varepsilon < s_{n+1} < s_n + \varepsilon \\ s_n - \varepsilon < s_{n+2} < s_n + \varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n - \varepsilon < s_{n+p} < s_n + \varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

što znači da skoro svi članovi niza s_{n+p} $(p=1,2, \ldots, n, \ldots)$ pripadaju intervalu $(s_n - \varepsilon, s_n + \varepsilon)$.

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan mali broj možemo uzeti da $\varepsilon \to 0$, pa tada dužina intervala $(s_n - \varepsilon, s_n + \varepsilon)$ teži nuli i ovaj interval se svodi na tačku S, gde je $S = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$, a time je

$$\lim_{n \to \infty} s_{n+p} = \lim_{n \to \infty} s_n = S$$

što je trebalo i dokazati.

<u>Stav 6</u>. Potreban uslov za konvergenciju reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ je da opšti član $u_n \to 0$, kada $n \to \infty$. Međutim, ovo nije i dovoljan uslov (vidi zadatak 10).

Dokaz: Neka red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ konvergira i neka mu $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = S$, gde je S (konačan broj) suma datog reda. Tada je i

$$\lim_{n \to \infty} s_{n-1} = S .$$

Odavde proizlazi i da $\lim\limits_{n \to \infty} s_n - \lim\limits_{n \to \infty} s_{n-1} = 0$, odnosno

$$\lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

kako je $s_n - s_{n-1} = u_n$, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, što je trebalo i dokazati.

<u>Posledica 1</u>. Ako opšti član reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ ne teži nuli, kada $n\to\infty$, tada red divergira.

ZADACI ZA VEŽBU

10. Da li konvergira harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Rešenje:

Formirajmo izraz $|s_{n+p} - s_n|$. Za $p=n$ imamo:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+n}| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right| >$$

$$> \left|\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| = \left|n\cdot\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2}\text{, tj.}$$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}| > \frac{1}{2}.$$

Odavde vidimo da je $|s_{n+p} - s_n| > \varepsilon$ za svako $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Dakle, red divergira. Kod ovog reda opšti član $\frac{1}{n} \to 0$, kada $n\to\infty$, ali red divergira. Ovaj primer pokazuje da ako opšti član teži nuli je samo potreban ali ne i dovoljan uslov za konvergenciju reda.

11. Ispitati konvergenciju hiperharmonijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rešenje:

Red konvergira, jer je

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}| = \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| <$$

$$< \left|\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| =$$

$$= \left|\frac{p}{n(n+p)}\right|.$$

Odavde se vidi da se zadnji izraz može učiniti proizviljno malim za dovoljno veliko n i za svako $p>0$. Znači, red konvergira.

12. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira

Rešenje:

Konvergira, jer je $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| =$

$$= \left| \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \right| < \varepsilon$$

za dovoljno veliko n i za svaki prirodan broj p.

13. Na sličan način pokazati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+2)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(4n+4)}$.

14. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Rešenje:

Kako je

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}| = \left| \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} \right| =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left| 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right| = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1-(1/2)^p}{1-\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

za svaki prirodan broj p i dovoljno veliko n, što znači da red konvergira.

15. Na sličan način pokazati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{3^n}$.

16. Košijevim opštim kriterijumom konvergencije dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$ divergira.

REDOVI SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

Redovi sa pozitivnim članovima su redovi čiji su svi članovi pozitivni, tj. $u_n > o$, za svako n.

Stav 7. Red sa pozitivnim članovima biće konvergentan, ako je njegov niz delimičnih suma s_n ograničen za svako n, odnosno ako je $s_n \leqslant M$ za svako n (M je pozitivan konačan broj).

Dokaz ovoga stava sledi neposredno iz stava 1 jer iz $u_n \geqslant o$ za svako n, sledi da je $s_{n+1} = s_n + u_{n+1}$, odnosno da je niz delimičnih suma monotono rastući.

Stav 8. Ako članovi redova $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ i $\sum_{n=o}^{\infty} v_n$ počev od izvesnog ranga n zadovoljavaju uslov, $u_n \leqslant v_n$. Tada iz:

(a) konvergencije reda $\sum_{n=o}^{\infty} v_n$ sledi konvergencija red $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$;

(b) divergencije reda $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ sledi divergencija reda $\sum_{n=o}^{\infty} v_n$.

Dokaz: (a) Neka je $\bar{s}_n$ niz delimičnih suma reda $\sum_{n=o}^{\infty} v_n$, a s_n niz delimičnih suma reda $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$. Kako red $\sum_{n=o}^{\infty} v_n$ po uslovu konvergira, sledi da postoji $\lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = P$, i kako su članovi toga reda pozitivni, sledi da je za svako n veće od nekoga N, niz $\bar{s}_n < P$. Kako je po uslovu $u_n \leqslant v_n$ za svako $n > N$, proizlazi da je $s_n \leqslant \bar{s}_n$ za svako $n > N$. Odavde je sada jasno da za svako $n > N$ je $s_n \leqslant \bar{s}_n < P$, odnosno da je red $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ na osnovu stava 7 konvergentan.

(b) Ako red $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ divergira tada je $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, pa na osnovu nejednakosti $u_n \leqslant v_n$ sledi da i $\lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = \infty$, odnosno da i red $\sum_{n=o}^{\infty} v_n$ divergira.

Stav 9. Ako članovi redova $\sum_{n=o}^{\infty} u_n$ i $\sum_{n=o}^{\infty} v_n$ zadovoljavaju relaciju $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ ($k \neq o$ i $k \neq \pm\infty$), tada su oba reda konvergentna ili oba reda divergentna.

Dokaz: Prema definiciji granične vrednosti, iz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, sledi $\left|\frac{u_n}{v_n} - k\right| < \varepsilon$ za $n > N_{(\varepsilon)}$, odakle je sada

$$k - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < k + \varepsilon ,$$

odnosno

$$(k - \varepsilon)v_n < u_n < (k + \varepsilon)v_n .$$

Ako konvergira red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$, na osnovu stava 3 konvergiraće red $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(k + \varepsilon)v_n$, a na osnovu stava 8 konvergiraće i red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.
Ako pak konvergira red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, na osnovu stava 8 konvergiraće red $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(k-\varepsilon)v_n$, a na osnovu stava 3 konvergiraće red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$.
Na isti način se vidi da divergencija jednog reda povlači divergenciju drugog reda.

ZADACI ZA VEŽBU

17. Da li konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$?

Rešenje:
Red divergira na osnovu stava 8, jer ako ga uporedimo sa harmonijskim redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dobijamo da za članove reda važi relacija $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, divergiraće i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

18. Da li konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$?

Rešenje:
Red konvergira na osnovu stava 8, jer ovde postoji relacija $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$, znači članovi reda su manji od članova konvergentnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

19. Na sličan način ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$; b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sin^2 n}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.}{n^2 \cdot \log n}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$.

Rešenja:

a) Konvergira, jer je $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2}$ za svako $n \geqslant 3$;

b) divergira, jer je $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

c) konvergira, jer je $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$;

d) divergira, jer je $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^2+1}$;

e) konvergira, jer je $\frac{1}{n^2+\sin^2 n} < \frac{1}{n^2}$;

f) konvergira, jer je $\frac{1}{n^2 \cdot \log n} < \frac{1}{n^2}$ za svako $n > 10$;

g) konvergira, jer je $\ln n < n$, odnosno $\frac{\ln n}{n^3} < \frac{1}{n^2}$.

20. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$.

Rešenje:

Konvergira na osnovu stava 9. Upoređivanjem sa hiperharmonijskim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}=1.$$

21. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(e^{1/n}-1)^2$.

Rešenja:

a) Divergira, jer upoređivanjem sa harmonijskim redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ dobijamo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$

b) Konvergira, jer upeđeđivanjem sa hiperharmonijskim redom dobijamo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{\frac{1}{(5n-1)(4n-1)}}=20.$

c) Konvergira, jer upoređivanjem sa konvergentnim redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ dobijamo da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}=1.$

d) Divergira, jer je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 1/n}{1/n}=1.$

e) Konvergira, jer je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=1$.

f) Divergira, jer je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = 1.$

g) Konvergira, jer je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1.$

h) Divergira, jer je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(e^{1/n}-1)^2}{1/n} = 1.$

KRITERIJUMI KONVERGENCIJE

Stav 10. Košijev kriterijum konvergencije.

Ako je dat red sa pozitivnim članovima $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ i ako za $n\to\infty$ postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, gde je k konačan ili beskonačan, tada za $k<1$ dati red je konvergentan, a za $k>1$ je divergentan. Za $k = 1$ pitanje konvergencije ostaje nerešeno.

Dokaz: Predpostavimo da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k<1$, tada, počev od izvesnog ranga n pa nadalje možemo odabrati $\varepsilon>0$, tako da je

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant k + \varepsilon = k_1 < 1,$$

odnosno

$$u_n \leqslant k_1^n.$$

odavde proizlazi da je:

$$u_n \leqslant k_1^n,\ u_{n+1} \leqslant k_1^{n+1},\ u_{n+2} \leqslant k_1^{n+2},\ \ldots,\ u_{n+p} \leqslant k_1^{n+p}.$$

Sabiranjem ovih nejednačina dobijamo

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots \leqslant k_1^n(1 + k_1 + k_1^2 + \ldots).$$

Što znači da su članovi reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, počev od izvesnog ranga n, manji od konvergentnog geometrijskog reda, pa na osnovu stava 8 red konvergira.

Ako je $k>1$, tada je $u_n>1$, i opšti član u_n ne teži nuli kada $n\to\infty$, i red divergira.

U slučaju da je k =1 pitanje konvergencije i divergencije ostaje nerešeno te se mora ispitivati nekom drugom metodom.

Stav 11. Dalamberov kriterijum konvergencije.

Ako je dat red sa pozitivnim članovima $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ i ako za $n\to\infty$ postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, gde je k konačan ili beskonačan, tada je za $k<1$ dati red konvergira, a za $k>1$ divergira. Za $k=1$ pitanje konvergencije ostaje nerešeno.

Dokaz: Predpostavimo da postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1$. Tada počev od izvesnog ranga n pa nadalje možemo odabrati $\varepsilon > 0$, tako da je $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k+\varepsilon = k_1 < 1$, odnosno $u_{n+1} < k_1 u_n$.

Odavde se dobija:

$$u_{n+1} \leqslant k_1 u_n,\ u_{n+2} \leqslant k_1 u_{n+1} \leqslant k_1^2 u_n,\ \ldots,\ u_{n+p} \leqslant k_1^p u_n,$$

sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots \leqslant k_1 u_n (1 + k_1 + k_1^2 + \ldots).$$

Odavde vidimo da su članovi reda $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ počev od izvesnog n manji od konvergentnog geometrijskog reda, pa red na osnovu stava 8 konvergira.

Ako je $k>1$, tada je $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, odnosno $u_{n+1} > u_n$. Znači, članovi reda ne opadaju a njegov opšti član ne teži nuli, red divergira.

Za $k=1$ kao i u predhodnom slučaju pitanje konvergencije ostaje nerešeno.

Stav 12. Košijev integralni kriterijum konvergencije.

Neka je dat red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n > 0)$ čiji su članovi vrednosti neprekidne funkcije $u_n = f(x)$ za cele vrednosti x, i neka $f(x)$ monotono opada za $x \in (1, +\infty)$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira ako konvergira nesvojstveni integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$, a divergira ako ovaj integral divergira.

Napomena: Suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ne mora biti jednaka sa integralom $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Znači, ovaj kriterijum ne daje postupak za nalaženje sume reda već samo utvrđuje egzistenciju konvergencije.

ZADACI ZA VEŽBU

22. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Rešenje:

Konvergira, Na osnovu stava 10 dobijamo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$.

23. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$.

Rešenje:

1° Za $a > 1$ divergira, jer je $k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} = a$;

2° za $a < 1$ konvergira, jer je $k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} = a$;

3° za $a=1$ je $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ i red divergira prema stavu 6.

Međutim, na osnovu stava 10 ne možemo ništa zaključiti.

24. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{3n^2-2}\right)^n$;

Rešenja:

a) Konvergira, jer je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

b) divergira, jer je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n} = e > 1$;

c) konvergira, jer je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$;

d) konvergira, jer je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2}{3n^2-2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-2} = \frac{1}{3} < 1$.

25. Da li konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$?

Rešenje:

Ne, red divergira, jer je na osnovu stava 11

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n2^n}{(n+1)2^n}=2.$$

26. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^3}$.

Rešenja:

a) Konvergira, jer je $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}.$$

b) Konvergira, jer je $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 n!}{(n+1)!n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0.$$

c) Divergira, jer je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^3}}{\frac{n!}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^3}{n!(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^3}{(n+1)^3}=\infty.$$

27. Na sličan način dokazati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

28. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ divergira.

29. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rešenje:
Red konvergira što je utvđeno u zadatku 13. Ako bismo po Dalamberovom kriterijumu hteli da utvrdimo konvergenciju

dobili bi $k = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$,

pa se po njemu to ne može zaključiti.

30. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ za različite vrednosti parametra α .

Rešenje:
Ispitivanje se može izvesti na osnovu Košijevog integralnog kriterijuma konvergencije. Neka je $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ i $\alpha \neq 1$.

Tada je $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{b \to \infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \to \infty} (b^{1-\alpha} - 1)$.

Ovaj integral konvergira za $\alpha > 1$, jer $\lim_{b \to \infty} b^{1-\alpha} = 0$,
te je
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} .$$

Ako $\alpha < 1$ tada integral divergira, jer $\lim_{b \to \infty} b^{1-\alpha} = \infty$.

Za $\alpha = 1$, integral takođe divergira jer $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \ln x \Big|_1^b = \infty$.

Znači za $\alpha > 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira, a za $\alpha \leq 1$ red divergira (za $\alpha = 1$ red postaje harmonijski te je poznat od ranije odnosno divergentan).

31. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln^2 n)}$;

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

Rešenja:

a) Konverira, jer je $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

b) Konvergira, jer je $\lim\limits_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln 3.$

c) Divergira, jer je $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to\infty} \ln(1+x^2)\Big|_1^b =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to\infty} \ln(1+b^2) - \frac{1}{2}\ln 2 = \infty .$

d) Konvergira, jer je

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} .$$

e) Divergira, jer je

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 2) = \infty .$$

REDOVI SA ČLANOVIMA PROIZVOLJNOG ZNAKA

Ako članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ naizmenično menjaju znak onda se ti redovi nazivaju alternativnim (naizmeničnim).

Stav 13. (Lajbnic-ov stav)

Ako apsolutne vrednosti članova naizmeničnor reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$

opadaju i teže nuli kada $n\to\infty$, red je konvergentan, pri čemu njegov zbir ima znak prvog člana, a apsolutna vrednost mu nije veća od apsolutne vrednosti prvog člana. Ostatak reda je istog znaka kao prvi izostavljeni član, a njegova apsolutna vrednost manja je od apsolutne vrednosti izostavljenog člana.

Dokaz: Kako članovi reda zadovoljavaju uslov
$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots \quad (u_1 > 0)$,
tada zbir parnog broja članova $n = 2m$ je

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Kako su svi sabirci u zagradama pozitivni sledi da je $s_{2m} > 0$.
Ako sada zbir s_{2m} transformišemo i napišemo u obliku

$$s_{2m} = u_1 - \left[(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m}\right],$$

tada iz uslova da je $s_{2m} > 0$ zaključujemo da je zbir u srednjoj zagradi manji od prvog člana u_1, kao i da se zbir s_{2m} povećava povećavanjem broja članova i da je pri tome on uvek manji od u_1, što znači da s_{2m} teži konačnoj vrednosti kada $m\to\infty$, tj. da postoji

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = S.$$

Ako sada uzmemo zbir neparnog broja članova, odnosno da je $n=2m+1$, tada je

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1},$$

pa je granična vrednost sume s_{2m+1} jednaka:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(s_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S.$$

Što znači da teži istoj graničnoj vrednosti kao i s_{2m}, jer je $\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$ po uslovu. Na osnovu svega ovoga proizlazi da red konvergira i da mu je zbir S manji od u_1.
Ako se pri sabiranju reda zaustavimo na n-tom članu, tada će ostatak reda biti

$$R_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \dots,$$

koji takođe predstavlja za sebe naizmenični red, koji po gore dokazanom konvergira, a njegov zbir ima isti znak kao prvi izostavljeni član u_{n+1}, a od njega je po apsolutnoj vrednosti manji.

Definicija 4. Red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sa članovima proizvoljnog znaka nazivamo apsolutno konvergentnim, ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, koji obrazuju apsolutne vrednosti članova datoga reda.

Stav 14. Ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ apsolutno konvergentan on je konvergentan i u običnom smislu.

Dokaz: Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ po uslovu konvergira, sledi da mu je Košijev ostatak

$$R_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon .$$

Konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sledi iz

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}| < |u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Za redove čiji su članovi proizvoljnog znaka važe ranije dokazani kriterijumi konvergencije (Košija i Dalambera) za radove sa pozitivnim članovima, koji sada imaju sledeći oblik:

Stav 15. (Kriterijum Košija).

Ako je dat red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sa članovima proizvoljnog znaka i ako postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = k$, tada će za $k<1$ red apsolutno konvergirati, a za $k>1$ divergirati. Za $k=1$ pitanje konvergencije ostaje opet nerešeno.

Stav 1?. (Kriterijum Dalambera).

Ako je d.. red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sa članovima proizvoljnog znaka i ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k,$$

tada će za $k<1$ red apsolutno konvergirati a za $k>1$ divergirati. Za $k=1$ pitanje konvergencije ostaje nerešeno.

Definicija 5.. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira, a red $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ apsolutnih vrednosti njegovih članova divergira, onda se red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ naziva uslovno konvergentnim (semi konvergentnim, neapsolutno konvergentnim).

ZADACI ZA VEŽBU

32. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Rešenje:
Red konvergira na osnovu stava 13, jer mu članovi po apsolutnoj vrednosti opadaju i opšti član $u_n = \frac{1}{n}$ teži nuli kada $n \to \infty$. Red apsolutnih vrednosti članova ovoga reda divergira, pa red nije apsolutno već samo semi konvergetan.

33. Ispitati konvergenciju alternativnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Rešenje:
Red apsolutno konvergira, jer je red čiji su članovi apsolutne vrednosti članova datoga reda konvergentan, tj. red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

a ovo je hiperharmonijski red koji konvergira.

34. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n-3)^3}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\ln(n+1)}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{2^n}$.

Rešenja:
a) Apsolutno konvergira ; b) uslovno konvergira ;
c) apsolutno konvergira ; d) neapsolutno konvergira ;
e) neapsolutno konvergira ; f) apsolutno konvergira.

FUNKCIONALNI I POTENCIONALNI (STEPENI) REDOVI

Definicija 6. Funkcijonalnim redom nazivamo red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

čiji su članovi $u_n(x)$, $n=1, 2, 3, \dots$ funkcije od x definisane za svako $x \in [a,b]$.

Delimičnim ~~sumama funkcionalnog~~ reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ nazivamo

$$s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad , n=1,2,\dots$$

Definicija 7. Za funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ kažemo da konvergira za $x=x_0$ (u tački x_0), ako u toj tački konvergira niz delimični suma

$$s_1(x_0),\ s_2(x_0),\ \dots,\ s_n(x_0),\ \dots ,$$

drugim rečima, red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira u tački $x=x_0$, ako konvergira brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Suma toga reda je granična vrednost njegovog niza delimičnih suma. Skup svih vrednosti za x, za koje konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ nazivamo oblast konvergecije reda.

Stav 17. Funcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uniformno konvergira u intervalu $[a,b]$, ako proizvoljno malom $\varepsilon>0$ odgovara takav pozitivan broj $N_{(\varepsilon)}$ nezavisan od x, tako da je

$$|R_n(x)| < \varepsilon \; ,$$

za svako $n>N_{(\varepsilon)}$ i za svako $x \in [a,b]$, gde je

$$|R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)|.$$

Znači, i na funkcionalne redove možemo primeniti opšti Košijev kriterijum konvergencije.

Stav 18. Vajerštrasov kriterijum uniformne konvergencije.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ biće uniformno konvergentan u segmentu $[a,b]$ ako su apsolutne vrednosti njegovih članova za sve vrednosti $x \in [a,b]$ manje ili jednake od članova istog ranga konvergentnog reda sa konstantnim i pozitivnim članovima, tj. ako je $|u_n(x)| \leqslant c_n$, gde je red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentan.

Dokaz: Kako po uslovu red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira sledi da je

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon,$$

za svako $n > N_{(\varepsilon)}$ i ceo broj $p > 0$.

Posmatrajmo ostatak $R_n(x)$ reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$; on ima svojstvo da je

$$|R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| \leqslant c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon.$$

za svako $x \in [a,b]$, pa na osnovu Košijevog kriterijuma uniformne konvergencije sledi da red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uniformno konvergira.

ZADACI ZA VEŽBU

35. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$.

Rešenje:
Ostatak datoga reda je

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)} + \frac{1}{(x+n+2)(x+n+3)} + \dots + \frac{1}{(x+n+p-1)(x+n+p)} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{(x+n+1)(x+n+p)} \right| < \varepsilon ,$$

za svako dovoljno veliko n i svako $\varepsilon > 0$ i $p > 0$ pa red uniformno konvergira.

36. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Rešenja:

a) Uniformno konvergira u svakom razmaku $[a,b]$ na osnovu stava 18, jer je $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

b) Uniformno konvergira u svakom razmaku $[a,b]$, jer je

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} .$$

c) Uniformno konvergira u svakom razmaku $[a,b]$, jer je

$$\left|\frac{\sin nx}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!} .$$

d) Uniformno konvergira u svakom razmaku $[a,b]$, jer je

$$\frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} .$$

e) Uniformno konvergira u razmaku $[a,b]$, gde je $a > 1$, jer je

$$\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a} .$$

POTENCIJALNI (STEPENI) REDOVI

<u>Definicija 8</u>. Funkcionalnim stepenim redom nazivamo red oblika

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n ,$$

gde su a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... konstante. (znači, a_n ne zavisi od x).

<u>Stav 19</u>. Ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za $x=x_0$, on je apsolutno konvergentan za svako x za koje je $|x| < |x_0|$; ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergentan za $x=x_0$, on je divergentan za svako $|x| > |x_0|$.

Dokaz: Kako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za $x=x_0$ sledi da njegov opšti član $a_n x_0^n \to 0$, kada $n \to \infty$, odnosno sledi da su tada svi članovi toga reda manji od nekog fiksiranog broja k, tj, da su

$$|a_n x_0^n| < k, \ n=0, 1, 2, \ldots$$

Pa je tada $|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq k \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$, za $n= 0, 1, 2, \ldots$

Odavde proizlazi da su članovi reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ manji od članova geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} k \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$,

koji konvergira za $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, odnosno $|x| < |x_0|$. Znači da dati red apsolutno konvergira za svako $|x| < |x_0|$.

Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergira za $x=x_0$ divergiraće i za svako $|x| > |x_0|$, jer ako bi za neko $|x_t| > |x_0|$ bio konvergentan onda bi na osnovu predhodnog stava konvergirao i za $x=x_0$, što protivureči uslovu.

Na kraju možemo zaključiti da za svaki stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_a x^n$, postoji pozitivan broj R, takav da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ apsolutno konvergira za svako $x \in (-R,R)$, tj, $|x| < R$ (R nazivamo poluprečnikom konvergencije). Za $|x| = R$ pitanje konvergencije ostaje otvoreno i treba ga posebno ispitati. Za $R=\infty$ red konvergira za svako x, a kada je $R=0$ red divergira za svako $x \neq 0$.

Poluprečnik konvergencije R dobija se iz izraza

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{k} \quad \text{ili} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}^{\,n}} .$$

Potencijalne redove možemo integraliti i diferencirati član po član i tada važe čledeći stavovi:

Stav 20. Svaki potencijalni red konvergentan za $x \in (-R,R)$ može se integraliti član po član u segmentu $[o,x]$. gde je $|x|<R$ i tada je integral zbira jednak zbiru integrala njegovih članova, tj.

$$\int_0^x \sum_{n=o}^{\infty}(a_n x^n)\,dx = \sum_{n=o}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx, \quad \text{za } |x|<R.$$

Dokaz: Neka je dat red

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

kome je R poluprečnik konvergencije. Kako red uniformno konvergira za svako $x \in [o,x]$, gde je $|x|<R$ i kako su mu članovi integrabilne funkcije, tada je

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x (a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)\,dx + \int_0^x R_n(x)\,dx ,$$

gde je

$$R_n(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \dots ,$$

pa je odavde

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_o x + \frac{a_1 x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x R_n(x)\,dx.$$

Kako iz uniformne konvergencije datog reda imamo da je $|R_n(x)|<\varepsilon$ za $n>N_{(\varepsilon)}$ i svako $|x|<R$, dobijamo da je

$$\left|\int_0^x R_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^x |R_n(x)|\,|dx| \leqslant \varepsilon\int_0^x |dx| = \varepsilon|x|,$$

za svako $n>N_{(\varepsilon)}$ i za svako $|x|<R$, gde $\varepsilon\to o$ kada $n\to\infty$.
Na osnovu predhodnog je

$$\int_0^x f(x)dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

za svako $|x| < R$. Pri tome integrisani red ima isti poluprečnik konvergencije.

Stav 21. Svaki potencijalni red konvergentan za $x \in (-R,R)$ može se diferencirati u segmentu $[0,x]$, gde je $|x| < R$ i tada je izvod zbira jednak zbiru izvoda njegovih članova, tj.

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_nx^n), \quad \text{za } |x| < R.$$

Red dobijen diferenciranjem ima isti poluprečnik konvergencije.

ZADACI ZA VEŽBU

37. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Rešenje:

Red konvergira za $-1 < x < 1$ a poluprečnik konvergencije je $R=1$, za $x = \pm 1$ red divergira.

38. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Rešenje:

Red konvergira za $-1 < x < 1$, jer po Dalamberovom kriterijumu konvergencije imamo $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = |x| < 1$.

Poluprečnik konvergencije je $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|} = 1$.

39. Ispitati konvergenciju i naći poluprečnik konvergencije sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^n$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n}$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

Rešenja:

a) Konvergira za $-1 \leqslant x < 1$, $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|} = 1$;

b) konvergira pri $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $R = 1$;

c) konvergira za svako x, jer je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0, \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|} = \infty \quad ;$$

d) konvergira za $-3 < x < 3$, $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$;

e) konvergira za $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $R=1$;

f) konvergira za $-1 < x \leqslant 1$, $R=1$;

g) konvergira za $-1 \leqslant x < 1$, $R=1$;

h) konvergira za $-\infty < x < +\infty$, $R=\infty$;

i) konvergira za $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $R=1$;

j) konvergira za $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $R=1$;

k) konvergira za $-3 \leqslant x < 3$, $R=3$;

l) divergira za svako x sem za $x=0$, poluprečnik konvergencije mu je $R=0$, ovo se vidi prema Dalamberovom kriterijumu, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty .$$

40. Naći zbir (sumu) sledećih redova:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ za $|x| < 1$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ za $|x| < 1$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ za $|x| < 1$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$ za $|x| < 1$,

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (n-1)nx^n$ za $|x| < 1$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ za $|x| < 1$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ za $|x| < 1$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n(2n+2)}$ za $|x| < 1$.

Rešenja:

a) Stavimo da je

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

nda diferenciranjem dobijamo

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} ,$$

a odavde je suma reda $\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x|$.

b) Stavimo da je

$$f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$$

deljenjem sa x dobijamo

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

Integraljenjem dobijamo

$$\int_0^x \frac{f(x)}{x}dx = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x},$$

odave sada imamo:

$$\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

odnosno

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

što predstavlja sumu reda.

c) Stavimo da je

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots,$$

pa je dalje

$$\int_0^x f(x)dx = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x}, \text{ a}$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$ što predstavlja sumu reda.

d) Stavimo da je

$$f(x) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1} + \ldots,$$

posle dve uzastopne integracije u granicama (o,x) dobijamo

$$\int_0^x dx \int_0^x f(x)dx = x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x^2}{1-x}.$$

Sada posle dva uzastopna diferenciranja dobijamo da je suma

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

e) Stavimo da je

$$f(x) = 1\cdot 2x^2 + 2\cdot 3x^3 + \ldots + (n-1)nx^n + \ldots$$

Odavde je

$$\frac{f(x)}{x^2} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots + (n-1)nx^{n-2} + \ldots;$$

posle dve uzastopne integracije dobijamo:

$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{f(x)}{x^2}dx = x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x^2}{1-x},$$

a posle dva uzastopna diferenciranja dobijamo

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$ što predstavlja sumu reda.

f) Stavimo da je

$$f(x) = \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots$$

pa je

$$xf(x) = \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \dots$$

Ako sada dva puta uzastopno diferenciramo ovaj red član po član dobijamo:

$$(xf(x))'' = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x},$$

a dalje integraljenjem dobijamo

$$xf(x) = (1-x)\ln|1-x| + x,$$

odnosno

$$f(x) = \frac{1-x}{x}\ln|1-x| + 1, \text{ što daje sumu reda.}$$

g) Stavimo da je

$$f(x) = \frac{x^3}{1\cdot 3} - \frac{x^5}{3\cdot 5} + \frac{x^7}{5\cdot 7} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+} + \dots,$$

diferenciranjem dobijamo:

$$f'(x) = \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1} + \dots,$$

$$\frac{f'(x)}{x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} +$$

$$\left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odavde je sada:

$$\frac{f'(x)}{x} = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x,$$

odnosno

$$f(x) = \int_0^x x\operatorname{arctg} x\, dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}.$$

h) Stavimo da je

$$f(x) = \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{4\cdot 6} + \dots + \frac{x^{2n+2}}{2n(2n+2)} + \dots$$

Tada je:

$$f'(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4} + \frac{x^7}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n} + \dots,$$

$$\frac{f'(x)}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \dots,$$

$$\left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} + \ldots = \frac{x}{1-x^2},$$

integraljenjem dalje se dobija:

$$\frac{f'(x)}{x} = \int_0^x \frac{x}{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2|,$$

odnosno

$$f'(x) = -\frac{x}{2}\ln|1-x^2|.$$

Sada još jednom integracijom dobijamo sumu reda

$$f(x) = -\int_0^x \frac{x}{2}\ln(1-x^2)dx = \frac{1}{4}(1-x^2)\left|\ln|1-x^2| - 1\right|.$$

41. Pomoću redova izračunati ln2.

Rešenje:

Ako pođemo od reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

pa ga integralimo član po član, jer je konvergentan za svako $|x| < 1$, dobićemo:

$$\int_0^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{1/2} x^n dx = \int_0^{1/2}\frac{dx}{1-x},$$

odnosno

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^{1/2} = -\ln(1-x)\Bigg|_0^{1/2} = \ln 2,$$

tj.

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3.2^n} + \ldots + \frac{1}{n.2^n} + \ldots$$

RAZVIJANJE FUNKCIJE U RED

Do sada smo imali slučajeve gde je bio dat red i određivali smo mu sumu, tj. $f(x)$. Sada ćemo se pozabaviti obrnutim pitanjem, tj. ako je data suma stepenog reda $f(x)$, naći stepeni red kome je $f(x)$ suma.

42. Razviti u stepeni red sledeće funkcije:

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ za $|x|<1$;

b) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ za $|x|<1$;

c) $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$ za $|x|<1$;

d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ za $|x|<1$;

e) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ za $|x|<1$.

Rešenja:

a) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$;

b) $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$;

c) $\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$;

d) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$;

e) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

43. Razviti u stepeni red sledeće funkcije:

a) $f(x) = \ln(1+x)$ za $|x|<1$;

b) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ za $|x|<1$;

c) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$ za $|x|<1$;

d) $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$ za $|x|<1$;

e) $f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)}$ za $|x|<1$;

f) $f(x) = \frac{3}{2-4x}$ za $|x|<1$.

Rešenja:

a) Iz $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$

integraljenjem sledi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

b) Iz slučaja pod (a) imamo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

pa je sada

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n} .$$

c) Ako izvršimo transformaciju datog izraza dobićemo:

$$\frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{2-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} .$$

Kako je

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

diferenciranjem dobijamo:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

Sada data funkcija je

$$\frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = 2\left[1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots\right] -$$

$$- \left[1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\right] = 1+3x+5x^2+\ldots+(2n-1)x^{n-1}+\ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{n-1}.$$

d) Kako je

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right),$$

a od ranije znamo

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \quad \text{i} \quad \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots,$$

dobijamo da je

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left|1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots -(1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}(2+2x^2+2x^4+\ldots+2x^{2n}+\ldots) = 1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots$$

Ovaj rezultat smo mogli dobiti i na sledeći način:

Ako napišemo da je

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

tada je

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 +\ldots+ x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

e) Kako je

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x},$$

a znamo da je

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots \quad \text{za } |x|<2,$$

sledi da je i

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} +\ldots+\frac{x^n}{2^{n+1}} +\ldots,$$

a dati izraz je

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = (1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots) -$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} +\ldots+\frac{x^n}{2^{n+1}} +\ldots = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x +\ldots+ \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n+\ldots =\right.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\, x^n$$

f) Kako je

$$\frac{3}{2-4x} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-2x} = \frac{3}{2}\left[1+2x+(2x)^2+\ldots+(2x)^n+\ldots\right] =$$

$$= \frac{3}{2} + 3x + 3\cdot 2x^2 + 3\cdot 2^2x^3 + \ldots + 3\cdot 2^{n-1}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 3\cdot 2^{n-1}x^n$$

ovaj rezultat važi za svako $|x| < \frac{1}{2}$.

44. Razvijanjem podintegralne funkcije u red naći $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$.

Rešenje:

Ako funkciju $f(x) = \frac{1}{1+x}$ za $|x| < 1$ razvijemo u red dobić

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Dalje integraljenjem dobijamo:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Ovaj rezultat može se dobiti i iz $\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)$, pa i iz zadatka 43_a znamo da je

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad \text{za } |x| <$$

što je jednako predhonom rezultatu.

45. Razviti u red funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Rešenje:

Počimo od rezultata

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x,$$

i razvijanjem u red dobijamo:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + .$$

za svako $|x| < 1$.

MAKLORENOV I TAJLOROV RED

Ako je data funkcija $f(x)$, definisana u okolini tačle $x=o$, i koja u okolini te tačke ima sve izvode, tada se ona u okolini tačke $x=o$, može razviti u red

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1!}f'(o) + \frac{x^2}{2!}f''(o) + \frac{x^3}{3!}f'''(o) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(o) + \ldots$$

nazivamo Maklorenovim redom.

Ako je data funkcija $f(x)$, definisana u okolini tačke $x=a$, i koja u toj okolini ima sve izvode, tada se ona u okolini tačke $x=a$, može razviti u red

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

koji nazivamo tajlorovim redom.

ZADACI ZA VEŽBU

46. Razviti u Maklorenov red funkcije u okolini tačke $x=o$:

a) $f(x) = e^x$, b) $f(x) = e^{-x}$,

d) $f(x) = e^{x^2}$, d) $f(x) = xe^x$.

Rešenja:

a) Kako je $f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$

dobijamo da je

$$f(o) = f'(o) = f''(o) = \ldots = f^{(n)}(o) = e^o = 1,$$

pa je traženi red

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Od ranije znamo da ovaj red konvergira za svako x i poluprečnik konvergencije mu je $R=\infty$.

b) Kako je $e^t = \sum\limits_{n=o}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ zamenom $t = -x$ dobijamo red

$$e^{-x} = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \text{ koji konvergira za } -\infty < x < +\infty.$$

c) Kako je $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ i zamenimo li $t=x^2$ dobićemo

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!},$$ koji konvergira za svako x.

d) Iz $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sledi da je $xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$

koji konvergira za svako x.

47. **Pomoću Maklovenovog reda dokazati sledeće jednakosti:**

a) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty$;

b) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty$;

c) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$;

d) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$

e) $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$;

f) $(1-x)^m = 1 - \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$

48. **Razviti u red sledeće funkcije:**

a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, b) $f(x) = a^x \quad (a > 0)$,

Rešenja:

a) Kako je $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sledi da će

$$\frac{\sin x}{x} = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$ za $x \neq 0$,

b) Kako je $a^x = e^{x\ln a}$, a $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, sled da je

$$a^x = \sum_{n=0} \frac{x^n \ln^n a}{n!} \qquad \text{za svako } -\infty < x < +\infty .$$

49. Razviti u red funkciju $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ za $|x| < 1$.

Rešenje:

Kako je $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, a iz zadatka 47 imamo rezultate razvoja za $\ln(1+x)$ i $\ln(1-x)$, to zamenom njihovih vrednosti u predhodnom rezultatu dobijamo da je

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots) - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots) =$$

$$= 2\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

50. Razviti u Tajlorov red u okolini tačke $x=1$ funkciju $f(x)=e^x$.

Rešenje:

Kako je

$$f(x) = f\,(x)' = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$$

sledi da je

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = \ldots = f^{(n)}(1) = e^1 = e,$$

pa je Tajlirov red

$$e + \frac{x-1}{1!}e + \frac{(x-1)^2}{2!}e + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!}e + \ldots = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} .$$

51. Koristeći redove naći integral $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Rešenje:

Prvo treba funkciju $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ razviti u red (ovaj rezultat imamo iz zadatka 48_a) pa to zameniti umesto podintegralne funkcije gde dobijamo:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} .$$

52. Koristeći redove naći sledeći integral $\int_0^x e^{-x^2}dx$.

Rešenje:

Ako funkciju $f(x)$ razvijemo u red, dobićemo

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

pa je zatim integralimo dobićemo

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} + \ldots$$

za svako $-\infty < x < +\infty$.

LITERATURA

1. Tadija Pejović - Matematička analiza III, Beograd 1956.
2. N.S.Piskunov - Differencial'noe i integral'noe isčislenija, Moskva, 1963.
3. V.A.Il'in, Z.G.Poznjak - Osnovu matematičeskcgo analiza, Moskva, 1965.
4. A.F.Bermant - Kratkij kurs matematičeskogo analiza, Moskva, 1961.
5. A.V.Ignat'eva, T.I. Krasnošekova, V.F.Smirnov - Kurs vissej matematiki, Moskva, 1964.
6. B.P. Demidovič, Sbornik zadači upražnenij po matematičeskomu analizu - Moskva, 1962.

G l a v a IV

TEORIJA VEROVATNOĆE

U teoriji verovatnoće eksperimenat i dogadjaj su osnovni pojmovi i ne definišu se.

Neki dogadjaji se obavezno realizuju prilikom obavljanja izvesnih eksperimenata i takvi se dogadjaji nazivaju pouzdani ili izvesni. Ako se dogadjaj sigurno ne realizuje pri nekom eksperimentu, tada se kaže da je to nemoguć dogadjaj. Dogadjaj je slučaj ako se, pri realizaciji nekog eksperimenta njegova pojava ne može pouzdano predvideti.

Dogadjaji se, obično, obeležavaju latinskim slovima, A, B, C,...; pouzdan dogadjaj slovom U, a nemoguć slovom V.

Da bismo videli kakvi odnosi postoje izmedju dogadjaja koristićemo se analogijom izmedju dogadjaja i skupova, tj. veze izmedju dogadajaj izražavaćemo relacijama odgovarajućih skupova.

Zbir dva dogadjaja A i B, u oznaci $A + B$ (koristi se i oznaka $A \cup B$, A "unija B), je dogadjaj koji se realizuje kada se realizuje bilo koji od njih, tj. bilo A, bilo B, bilo A i B zajedno. Uopšte je zbir konačnog broja dogadjaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dogadjaj $\sum_{i=1}^{n} A_i$, (ili $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$), koji se realizuje pojavom bar jednog od njih.

Očigledno je $$A \cup V = A$$

i $$U \cup V = U.$$

Primer 1. Ako pri bacanju numerisane kocke pojavu neparnog broja označimo sa A, a sa E_1, E_3, E_5 pojave brojeva 1, 3, 5; tada je

$$A = E_1 \cup E_3 \cup E_5.$$

Ovde bi pouzdan dogadjaj bio

$$= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6.$$

Proizvod dva dogadjaja A i B, u oznaci AB (ili $A \cap B$, A "presek" B) naziva se dogadjaj koji se realizuje kada se realizuje i dogadjaj A i dogadjaj B. I uopšte, proizvod konačnog broja dogadjaja A_1, A_2, ..., A_n, je dogadjaj $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, (ili $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$), koji se realizuje istovremenom pojavom
svih posmatranih dogadjaja.
Jasno je da je

$$A \cap V = V$$

i

$$U \cap V = V.$$

Primer 2. Ako pri bacanju numerisane kocke sa A označimo pojavu parnog broja, a sa B pojavu broja deljivog sa tri, tada je

$$A \cap B = E_6$$

Ovde je $A \cap B = E_6$, jer se dogadjaj E_6 (pojava broja 6) sadrži u dogadjaju A. Tada se kaže da je dogadjaj E_6 deo dogadjaja A i označava se sa $A \supset E_6$ (čita se A "sadrži" E_6 ili E_6 "pripada" A)

Primer 3. Pri jednom bacanju metalnog novca pojava jedne strane G (grb) isključuje pojavu druge strane P (pismo), pa je

$$G \cap P = V,$$

t.j. ne mogu se istovremeno ostvariti. U tom slučaju se kaže da su dogadjaji G i P inkopatibilni ili da se uzajamno isključuju.

Važe i sledeće relacije

$$A \cup A = A \qquad \text{(idempotentnost)}$$

$$A \cap A = A \qquad (\quad " \quad)$$

$$A \cap U = A,$$

$$A \cap B \subset A$$
$$A \cap B \subset B$$
$$A \cap B \subset A \cup B,$$

$$A \subset A \cup B$$
$$B \subset A \cup B.$$

Ako je $C \subset A$ i $C \subset B$, odatle sledi da je $C \subset A \cap B$. Ako je $A \subset C$ i $B \subset C$, odatle sledi da je $A \cup B \subset C$

Razlika dva dogadjaja A i B, u oznaci $A-B$, (ili $A \setminus B$) je dogadjaj koji se sastoji od dogadjaja koji pripadaju dogadjaju A, ali ne pripadaju dogadjaju B.

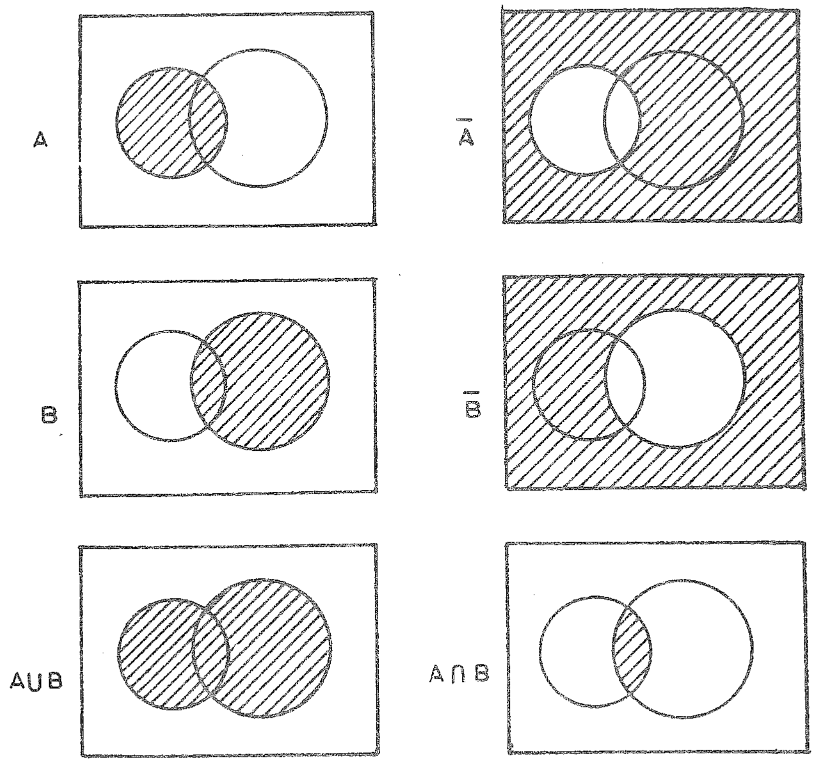
Svakom dogadjaju A odgovara komplementaran (suprotan) dogadjaj $\bar{A}$ koji se sastoji od svih dogadjaja koji ne pripadaju A u odnosu na neki skup (prostor) dogadjaja kome pripada dogadjaj A.

Očevidno je

$$A = \bar{\bar{A}}$$
$$A \cup \bar{A} = U$$
$$A \cap \bar{A} = V.$$

Venov dijagram Neka se skup uslova G sastoji u tome da se unutar kvadrata (Sl. 1) bira tačka na sreću. Neka dogadjaj A označava da se izabrana tačka nalazi u levom krugu, a dogadjaj B da se izabrana tačka nalazi u desnom krugu. Tada se dogadjaji A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$ sastoje u tome da se izabrana tačka nalazi u unutrašnjosti "išrafiranih" oblasti u odgovarajućim figurama.

Dalje, za slučajne dogadjaje važe sledeći zakoni



S l i k a   1.

1. Komutativni $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

2. Asocijativni $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. Distributivni $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. De Morgan-ovi zakoni (dualnost)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

5. Zakon apsorpcije

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

Klasična (Laplace-ova) definicija verovatnoće

Neka je S prostor od n inkopatibilnih dogadjaja. Neka je, dalje, realizacija svakog od tih dogadjaja podjednako moguća i ako realizacija m ($o \leqslant m \leqslant n$) tih dogadjaja znači da se realizovao dogadjaj A, tada se pod verovatnoćom dogadjaja A podrazumeva količnik

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

broja povoljnih (m) i ukupnog broja svih mogućih dogadjaja (n) iz prostora S.

Kako je $m \leqslant n$, to P(A) može uzimati vrednosti samo iz segmenta $[0,1]$,, t.j.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Ako je m = 0, dogadjaj je nemoguć (A = V), t.j. verovatnoća nemogućeg dogadjaja jednaka je nuli

$$P(V) = 0.$$

Za slučaj m = n, dogadjaj A je pouzdan ($A = U$), pa je verovatnoća pouzdanog dogadjaja jednaka jedinici

$$P(U) = 1.$$

Ako se dogadjaj A ostvaruje kada se ostvari ili dogadjaj A_1, ili dogadjaj A_2, koji su inkopatibilni, pri čemu je u datom eksperimentu m_1 povoljnih slučajeva za dogadjaj A_1 i m_2 povoljnih slučajeva za dogadjaj A_2, tada je

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2)$$

I uopšte, ako se dogadjaj A ostvaruje kada se ostvari jedan od A_1, A_2, ..., A_n inkopatibilnih dogadjaja ($A_r \cap A_s = V$, $r \neq s$), tada je

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Kada je $\quad A \cup \bar{A} = \quad$ i $\quad A \cap \bar{A} = V$, to je

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Primer 4.

Kolika je verovatnoća da će pri jednom bacanju numerisane kocke pasti

a) četvorka,

b) paran broj,

c) broj deljiv sa tri?

Rešenje: Ovde je $n = 6$

a) $m_1 = 1$

$$P_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{6}$$

b) $m_2 = 3 \quad (2, 4, 6)$

$$P_2 = \frac{m_2}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c) $m_3 = 2 \quad (3, 6)$

$$P_3 = \frac{m_3}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Primer 5.

Igrač A ima tri loza, a igrač B sedam lozova od ukupno 1000 lozova sa podjednakim šansama na dobitak za svaki loz. Kolika je verovatnoća da će dobiti

a) igrač A,

b) igrač B,

c) igrač A ili igrač B?

Rešenje:

a) $m_1 = 3, \quad n = 1000$

$P(A) = 0{,}003$

b) $m_2 = 7$

$P(B) = 0{,}007$

c) Dogadjaji su inkopatibilni, pa je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}01.$$

Primer 6.

U kutiji se nalaze 4 bele i 6 crvenih kuglica. U jednom izvlačenju na slučaj, izvučene su dve kuglice. Kolika je verovatnoća

a) da su obe bele,

b) da su obe crne,

c) da je jedna bela a jedna crna?

Rešenje:

a) $n = \binom{10}{2} = \frac{10.9}{2} = 45$

$m_1 = \binom{4}{2} = \frac{4.3}{2} = 6$

$P_1 = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

b) $m_2 = \binom{6}{2} = \frac{6.5}{2} = 15$

$P_2 = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

c) $m_3 = 4.6 = 24$ (svaka bela sa svakom crvenom)

$P_3 = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$,

jasno je da mora biti $P_1 + P_2 + P_3 = 1$.

VEROVATNOĆA ZBIRA DOGADJAJA

Verovatnoća dogadjaja $A \cup B$ data je obrascem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (*)$$

(koji se često naziva teorema totalne verovatnoće).

Teorema se lako pokazuje. Zaista, neka je n_1 broj povoljnih slučajeva pri kojima se ostvaruje samo dogadj A, n_2 broj povoljnih slučajeva pri kojima se ostvaruje samo dogadjaj B a n_{12} broj povoljnih slučajeva pri kojima se ostvaruje samo dogadjaj A B, tada je (prema klasičnoj definiciji verovatnoće)

$$P(A \cup B) = \frac{n_1 + n_{12} + n_2}{n}$$

(jer $m = n_1 + n_{12} + n_2$ predstavlja broj svih povoljnih slučajeva za dogadjaj $A \cup B$, a n broj svih mogućih slučajeva).

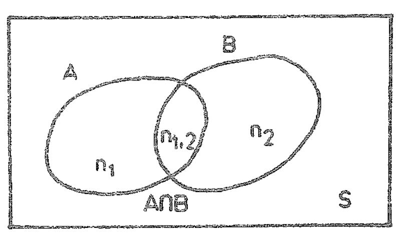
Dalje je

$$P(A \cup B) = \frac{n_1 + n_{12} + n_2 + n_{12} - n_{12}}{n} =$$

$$= \frac{n_1 + n_{12}}{n} + \frac{n_2 + n_{12}}{n} - \frac{n_{12}}{n} =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Odgovarajući Venov dijagram je



S l i k a 2.

Formula (*) predstavlja teoremu totalne verovatnoće: Verovatnoća da će se ostvariti ili dogadjaj A ili dogadjaj B jednaka je zbiru verovatnoća ostvarenja tih dogadjaja umanjenom za verovatnoću njihovog istovremenog ostvarenja.

U slučaju tri dogadjaja A, B, i C verovatnoća zbira je

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),$$

a u opštem slučaju za n dogadjaja A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} (A_k \cap A_j) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} P(A_k \cap A_j \cap A_i) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

VEROVATNOĆA PROIZVODA DOGADJAJA

Verovatnoća dogadjaja $A \cap B$ data je obrascem

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A). \qquad (**)$$

Verovatnoća $P(B/A)$ zove se uslovna ili relativna verovatnoća i predstavlja verovatnoću ostvarenja dogadjaja B pod uslovom da se već ostvario dogadjaj A.

Zaista, ako je m_1 broj svih povoljnih slučajeva pri kojima se ostvaruje dogadjaj A, n_{12} broj povoljnih slučajeva pri kojima se ostvaruje dogadjaj $A \cap B$ a n broj svih mogućih slučajeva, tada je

$$P(A \cap B) = \frac{n_{12}}{n} = \frac{n_{12}}{n} \cdot \frac{m_1}{m_1} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{n_{12}}{m_1} = P(A) \cdot P(B/A)$$

Može se reći da

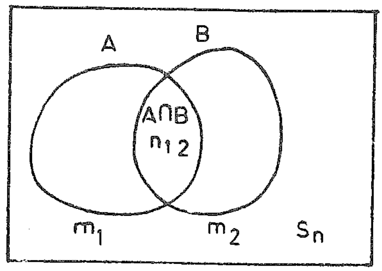
$$P(B/A) \overset{\text{def}}{=} \frac{n_{12}}{m_1} \text{ definiše uslovnu verovatnoću.}$$

u terminima klasične verovatnoće.

Ako sa m_2 označimo broj svih povoljnih slučajeva pri kojima se ostvaruje dogadjaj B dobijamo simetričan obrazac

$$P(A \cap B) = \frac{n_{12}}{n} = \frac{n_{12}}{n} \cdot \frac{m_2}{m_2} = \frac{m_2}{n} \cdot \frac{n_{12}}{m_2} = P(B)\ P(A/B).$$

Odgovarajući Venov dijagram je



S l i k a 3.

Formula (* *) se često zove verovatnoća proizvoda, jer se umesto znaka "$\cap$" tj. $A \cap B$ upotrebljava znak "." tj. A.B ili kratko AB.

Često se iskazuje rečima: Verovatnoća dogadjaja $A \cap B$ jednaka je proizvodu verovatnoće dogadjaja A i verovatnoće dogadjaja B pod uslovom da se već ostvario dogadjaj A.

U slučaju tri dogadjaja A, B i C verovatnoća proizvoda je

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$$

i uopšte

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots P\left(A_n/\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right).$$

Zavisni i nezavisni dogadjaji

Ako je za dva dogadjaja A i B

$$P(B/A) = P(B) \qquad (***)$$

tj. ako je uslovna verovatnoća dogadjaja B jednaka verovatnoći dogadjaja B, tada dogadjaj B ne zavisi od dogadjaja A. U tom slučaju je i $P(A/B) = P(A)$.

Zaista, kako je

$$P(A) = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(B/A)}$$

obzirom na (***) imamo

$$P(A) = P(A/B),$$

te i dogadjaj A ne zavisi od dogadjaja B, tj. dogadjaji A i B su uzajamno nezavisni.

U suprotnom slučaju, tj. kada je

$$P(A/B) \neq P(A),$$

kaže se da izmedju A i B postoji <u>stohastička</u> zavisnost.

<u>Primer 7</u>.

U jednoj kutiji se nalazi 100 kuglica, od kojih je 60 belih a 40 crnih; 18 belih kuglica su šuplje, kao i 12 crnih. Iz kutije se izvlači jedna kuglica.

a) Naći verovatnoću da je ona šuplja

b) Naći verovatnoću da je ona šuplja ako je bela

<u>Rešenje</u>

Ako sa A označimo dogadjaj da je kuglica šuplja, a sa A/B dogadjaj da je kuglica šuplja pod uslovom da je bela, imamo

$$P(A) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$P(A/B) = \frac{18}{60} = 0,3$$

Vidimo da je

$$P(A) = P(A/B)$$

tj. dogadjaj da je kuglica šuplja ne zavisi od toga da li je ona bela. To je posledica proporcionalnog rasporeda šupljih kuglica prema belim i crnim kuglicama. (Vidi sliku 4.)

Primer 8

U jednoj kutiji se nalazi 100 kuglica od kojih su 60 bele a 40 crne; 6 belih su šuplje, kao i 24 crnih.

a) Naći verovatnoću da je kuglica šuplja

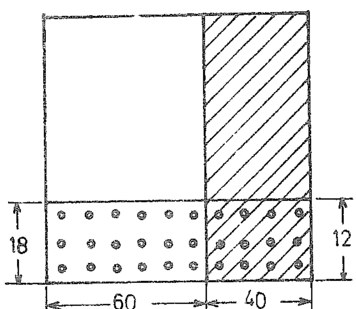
b) Naći verovatnoću da je kuglica šuplja ako je bela.

Sa istim oznakama kao u predhodnom primeru, imamo

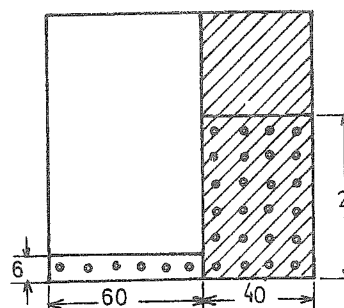
$$P(A) = \frac{6+24}{100} = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$P(A/B) = \frac{6}{100} = 0,06$$

Kako je $P(A) \neq P(A/B)$ to dogadjaj da li je kuglica šuplja ili ne zavisi od toga kakve je ona boje. To je posledica neproporcionalnog rasporeda šupljih kuglica u odnosu na boje (Vidi sliku 5).



S l i k a 4.



S l i k a 5.

Primer 9.

Kuglica se baca dva puta uzastopce.

a) Kolika je verovatnoća da će prilikom drugog bacanja pasti paran broj.

b) Kolika je verovatnoća da će prilikom drugog bacanja pasti paran broj ako je prilikom prvog bacanja pala šestica.

Ukupan broj mogućih slučajeva je:

$$n = V_2^p(6) = 6^2 = 36$$

ili šematski:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

S l i k a 6.

Povoljnih slučajeva za dogadjaj iz a), A, ima 18 (zaokruženi na slici 6), te je

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

povoljni slučajevi za dogadjaj iz b), A/B, su

62, 64, 66

a svi mogući 61, 62, 63, 64, 65, 66,

te je

$$P(A/B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Pošto je

$$P(A) = P(A/B) = \frac{1}{2}$$

to su dogadjaji A i B nezavisni, tj. padanje parnog broja ne zavisi od toga da li je predhodno pala šestica (cifra 6) ili nije.

VEROVATNOĆA UZROKA - BAJESOVA FORMULA

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ inkopatibilni dogadjaji:

$$A_i \cap A_k = V \quad \text{za svaki par} \quad i \neq k \quad i$$

i čija je unija izvesan dogadjaj U:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U$$

i neka je $P(A_i) \neq 0$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.

Neka je B neki dogadjaj, $B \subset U$, tada važi

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).$$

Zaista, B se može predstaviti kao unija n inkopatibilnih dogadjaja

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \ldots \cup (B \cap A_n).$$

Lako se vidi da su dogadjaji $B \cap A_i$ medjusobom inkopatibilni, jer je

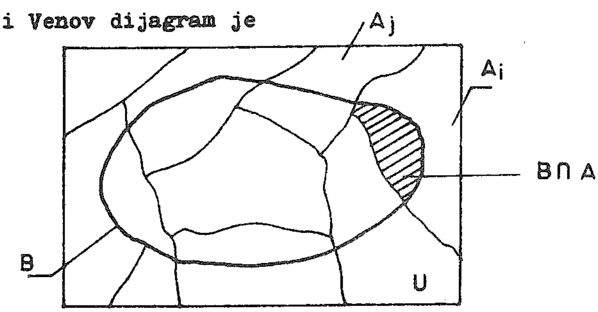
$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = B \cap V = V$$

S obzirom na predhodno, uopštena teorema o verovatnoći zbira nam daje

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A) \qquad (1)$$

Odgovarajući Venov dijagram je



Na kome se jasno vidi razlaganje dogadjaja B.

Neka je $P(B) > 0$

S obzirom da je

$$P(A_i/B) = P(A_i)P(B/A_i)$$

ili

$$P(A_i/B) = P(B).P(A_i/B)$$

. $$P(B)P(A_i/B) = P(A_i)P(B/A_i), \qquad (2)$$

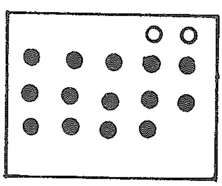
je
$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$$

li
$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)} \qquad (3)$$

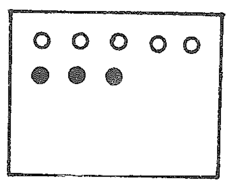
Obrazac (3) predstavlja verovatnoću uzorka A_i i poznat je pod nazivom Bajesova formula.

Primer 10.

Od dve kutije na slučaj se bira jedna a iz nje kuglica, koja ispadne bela. Pri tome je poznato da je verovatnoća izbora svake kutije 1/2, a u prvoj kutiji se nalaze dve bele i 14 crnih kuglica; u drugoj 5 bele i 3 crne kuglice. Kolika je verovatnoća da je bela kuglica izvučena iz prve, odnosno iz druge kutije (vidi sliku).



I kutija (16 kuglica)



II kutija (8 kuglica)

Neka je: A_1 dogadjaj da je izabrana prva kutija
A_2 dogadjaj da je izbrana druga kutija
B dogadjaj da je izvučena bela kuglica.

Imamo

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$$
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$$

tj. $$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)$$

te je

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

Kako je

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1).P(B/A_1) = P(B).P(A_1/B)$$

imamo

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{A(B)}$$

i

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2).P(B/A_2)}{P(B)}$$

te je

$$P(A_1/B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_2/B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{8}$$

BINOMNA VEROVATNOĆA

Posmatrajmo dogadjaj A koji se javlja u nizu medjusobno nezavisnih eksperimenata, u svakom od njih sa stalnom verovatnoćom $p=P(A)$ koja ne zavisi od mesta eksperimenta u nizu.

Tada njegov suprotan dogadjaj $\bar{A}$ ima verovatnoću $P(\bar{A}) = 1-p$ koju označavamo sa q.

Takva šema dogadjaja zove se Bernoulli-eva šema (1654-1705).
Da bi našli verovatnoću da se dogadjaj A u n eksperimenata, koji zadovoljavaju uslove Bernoulli-eve šeme, ostvari tačno m puta (m=n), u oznaci $P_n(m)$, naći ćemo prvo verovatnoću da se dogadjaj A ostvari u m odredjenih eksperimenata (na pr. u eksperimentima sa indeksima 1, 2, ..., m).

S obzirom na teoremu proizvoda verovatnoća nezavisnih dogadjaja ta verovatnoća je jednaka $p^m q^{n-m}$.

S druge strane, s obzirom na teoremu zbira verovatnoća, tražena verovatnoća $P_n(m)$ jednaka je zbiru verovatnoća za sva moguća javljanja dogadjaja A tačno m puta u n eksperimenata.
Takvih javljanja ima $C_m(n) = \binom{n}{m}$, jer od n eksperimenata, m odredjenih, samo kojima se javlja dogadjaj A predstavljaju kombinacije m-te klase od n elemenata. Na osnovu toga dobijamo

$$P_n(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

Kako su svi mogući rezultati n eksperimenata medjusobom nezavisni i sastoje se od pojavljivanja dogadjaja A, tačno 0, 1, 2, ...,n puta, to je

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1,$$

tj.

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} = 1.$$

Rezultat se može dobiti neposredno iz binomnog obrasca

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} = (p + q)^n.$$

Kako je $p + q = 1$, to je

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} = 1^n = 1.$$

Neposredno se uočava da je verovatnoća $P_n(m)$ jednaka koeficijentu uz x^m u razvoju binoma $(q + px)^n$ po stepenima od x. Zbog toga se ta verovatnoća zove binomna verovatnoća. Zaista

$$(q + px)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (px)^m q^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} x^m.$$

Binomnu verovatnoću je lako uopštiti za slučaj da se u jednom eksperimentu javlja k nezavisnih dogadjaja A_i, sa verovatnoćama $P(A_i) = p_i$. Tada je verovatnoća ostvarenja u n eksperimenata dogadjaja A_1 tačno m_1 put, A_2 tačno m_2 puta, ..., A_k tačno m_k puta, $(m_1 + m_2 + \dots + m_k = n)$, jednaka

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!}\, p_1^{m_1}\, p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} . \qquad (4)$$

Nije teško videti da je ta verovatnoća (4) jednaka koeficijentu uz $x_1^{m_1}\, x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ u razvoju polinoma

$$(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_kx_k)_n \quad \text{po } x_i.$$

Primer 11.

Metalni novac baca se 6 puta. Kolika je verovatnoća da će glava pasti 4 puta a pismo 2 puta?

Rešenje.

Kako je $p = \frac{1}{2}$, a 6 bacanja metalnog novca predstavlja niz medjusobno nezavisnih dogadjaja, to je

$$P_6(4) = \binom{6}{4} p^4q^2 = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{6.5}{2} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{15}{2^6} = \frac{15}{64}$$

Primer 12.

Kocka čije su strane numerisane brojevima od 1 do 6 se baca 5 puta. Kolika je verovatnoća da će se jedinica pojaviti tri puta?

Rešenje

Kako je $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, a pet bacanja kocke predstavlja niz medjusobno nezavisnih dogadjaja, to je

$$P_5(3) = \binom{5}{3} p^3q^2 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5.2.}{2} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5^2}{6^2} = \frac{5^3}{6^5} = \frac{125}{7776}$$

Primer 13.

Kocka čije su dve strane obojene plavo a četiri belo baca se tri puta. Količa je verovatnoća da plava strana padne dva puta?

Rešenje

Kako je $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $q = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, to je

$$P_3(2) = \binom{3}{2} p^2 q^1 = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = 3.\frac{1}{9}\,.\,\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Primer 14.

Metalni novac baca se šest puta. Kolika je verovatnoća da će se glava pojaviti najmanje četiri puta.

Rešenje

Kako je $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, a dogadjaj čija se verovatnoća traži: $A_4^6 + A_5^6 + A_6^6$, gde nam A_i^n $(i \leq n)$, označava dogadjaj da se u n opita dogadjaj A ostvario tačno i puta, i kako su svi dogadjaji A_i^n medjusobno inkopatibilni, to je

$$P(A_4^6 + A_5^6 + A_6^6) = P(A_4^6) + P(A_5^5) + P(A_6^6) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) =$$

$$= \binom{6}{4}.\,\frac{1}{2^4}\,.\frac{1}{2^2} + \binom{6}{5}.\,\frac{1}{2^5}.\,\frac{1}{2^1} + \binom{6}{6}.\,\frac{1}{2^6}\,.\,\frac{1}{2^0} =$$

$$= \frac{15}{2^6} + \frac{6}{2^6} + \frac{1}{2^6} = \frac{22}{2^6} = \frac{11}{32}.$$

Primer 15.

Pravilan oktaedar koji ima četiri strane obojene plavo, tri strane crveno, a jednu belo, baca se šest puta. Kolika je verovatnoća da plava strana padne tri puta, crvena dva puta, a bela jedanput?

Rešenje

Ovde je $p_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{3}{8}$, $p_3 = \frac{1}{8}$, pa se, verovatnoća traženog dogadjaja izražava sa

$$P_n(m_1, m_2, m_3) = \frac{n!}{m_1!\ m_2!\ m_3!}.\ p_1^{m_1}.\ p_2^{m_2}\ .\ p_3^{m_3},$$

tj.

$$P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3!.2!.1!} \cdot (\tfrac{1}{3})^3.(\tfrac{3}{8})^2.(\tfrac{1}{8})^1 = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.2.1} \cdot \frac{1}{2^3}.\frac{3^2}{8^2}.\frac{1}{8} =$$

$$= \frac{15.9}{2.8^3} = \frac{135}{1024}$$

Primer 16.

Strane dodekaedra (pravilno rogljasto telo ograničeno sa dvanaest pravilnih petouglova) numerisane su brojevima od jedan do dvanaest. Dodekaedar se baca osam puta. Naći verovatnoću da jedinica padne tri puta, dvojka dva puta, dvanaestica dva puta i desetka jedanput!

Rešenje

Prema uslovima zadatka imamo

$$p_1 = \frac{1}{12},\ p_2 = \frac{1}{12},\ p_3 = \frac{1}{12},\ p_4 = \frac{1}{12}.$$

Verovatnoća traženog dogadjaja je

$$P_n(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4) = \frac{n!}{m_1!m_2!m_3!m_4!} \cdot p_1^{m_1}.p_2^{m_2}.p_3^{m_3}.p_4^{m_4},\ \text{tj.}$$

$$P_8(3,2,2,1) = \frac{8!}{3!.2!.2!.1!}.(\tfrac{1}{12})^3.(\tfrac{1}{12})^2.(\tfrac{1}{12})^2.(\tfrac{1}{12})^1 = \frac{35}{3.12^6}\ .$$

AKSIOMATSKO ZASNIVANJE TEORIJE VEROVATNOCE

Pored klasične definicije pojma verovatnoće postoje i druge, tako na primer postoji i statistička definicija pojma vero-vatnoće ali najopštija definicija verovatnoće je aksiomatska definicija.

Posmatra se skup (konačan ili beskonačan) slučajnih dogadjaja A, B,..., - takozvano polje dogadjaja S, koji sadrži izvestan dogadjaj U, nemoguć dogadjaj V, "uniju" i"presek" bilo kog svog podskupa i suprotne dogadjaje $\overline{A}$, $\overline{B}$,..., svih svojih elemenata.

Verovatnoća dogadjaja A, P(A) definiše se sledećim aksiomama:

Aksioma 1. Svakom dogadjaju A iz polja dogadjaja S odgovara broj

$P(A) \geqslant 0$, koji se zove verovatnoća dogadjaja A.

Aksioma 2. $P(U) = 1$.

Aksioma 3. (Aksioma zbira). Ako su sa A i B inkopatibilni dogadjaji tada je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(Odavde sledi da je za bilo koji konačan broj uzajamno inkopatibilnih dogadjaja

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Aksioma 4. (proširena aksioma zbira). Ako je $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ - dogadjaj koji se realizuje realizacijom bar jednog od $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ uzajamno inkopatibilnih dogadjaja, onda je

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$

Aksioma 4 je potrebna zato što se u teoriji verovatnoće posmatraju i dogadjaji sastavljeni od beskonačno mnogo dogadjaja. Tako, na primer, jedan od nedostataka klasične definicije verovatnoće je taj što je u njoj polje dogadjaja <u>konačno</u>.

Kako je $A \cup \bar{A} = U$ i A i $\bar{A}$ su inkopatibilni dogadjaji to je prema aksiomi 2 i 3.

$$1 = P(U) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

a prema aksiomi 1.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leqslant 1,$$

tj. za svaki dogadjaj A je

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Iz $U = U \cup V$ sledi

$$P(U) = P(U \cup V) = P(U) + P(V) = 1,$$

odakle je

$$P(V) = 0.$$

PRIMERI I ZADACI

1) Kolika je verovatnoća da prilikom bacanja kocke padne

a) cifra 6,

b) cifra 5 ili 6?

Rešenje

a) Broj svih mogućih slučajeva je $n = 6$, a broj povoljnih $m = 1$, te je $P = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

b) Broj povoljnih slučajeva je 2, to je $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Da ne bi, u složenijim slučajevima, tražili broj povoljnih slučajeva, koristićemo teoremu totalne verovatnoće. Neka: A_6 označava dogadjaj da padne cifra 6, A_5– cifra 5, onda je

$$P(A_5) = \frac{1}{6},\ P(A_6) = \frac{1}{6},$$

$$P(A_5 \cup A_6) = P(A_5) + P(A_6) - P(A_5 \cap A_6) =$$

$$= P(A_5) + P(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

jer je $P(A_5 \cap A_6) = 0$, pošto su dogadjaji A_5 i A_6 inkopatibilni.

2) Bacaju se dve kocke. Kolika je verovatnoća

a) da padnu jednake cifre,

b) da zbir cifara bude 5

c) da razlika cifara bude 3?

Rešenje

Zadatak možemo rešiti neposredno ako nadjemo broj svih mogućih slučajeva n i broj svih povoljnih m.

Ovde je $n = V_2^p(6) = 6^2 = 36$,

što se može predstaviti šemom:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Za tačku a) m = 6 (slučajevi 11, 22, 33, 44, 55, 66), pa je

$$P_{(a)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Za tačku b) m = 4 (slučajevi 41, 32 23, 14), pa je

$$P_{(b)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Za tačku c) m = 6 (slučajevi 41, 52, 63, 14, 25, 36), pa je

$$P_{(c)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Zadatak možemo rešiti i preko složene verovatnoće, tako na pr. za tačku a) je

$$P_{(a)} = P(11 \cup 22 \cup 33 \cup 44 \cup 55 \cup 66) =$$

$$= P(11)+P(22)+P(33)+P(44)+P(55)+P(66) =$$

$$= P(1).P(1/1)+P(2).P(2/2)+..+P(6).P(6/6) =$$

$$= P(1).P(1)+P(2).P(2)+...+P(6).P(6) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= 6.\ \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

Gornja relacija važi jer su svi dogadjaji 11, 22, 33, ..., 66 inkopatibilni i nezavisni.

Pokažimo, na pr. da je P(1/1) = P(1). $P(1) = \frac{1}{6}$, m = 1, n = 6 (zbog toga što su svi mogući, n, 1 , 2, 3, 4, 5, 6; a povoljni slučaj, m, je 1),
$P(1/1) = \frac{1}{6}$, m = 1, n = 6 (zbog toga što su svi mogući slučajevi 11 , 12, 13, 14, 15, 16; a povoljan slučaj 11).

Kratkoće radi, dogadjaj da padne cifra 1 označili smo sa 1 itd., a proizvod dva dogadjaja, na pr. $1 \cap 1$ sa 11 itd.

3) Bacaju se istovremeno tri kocke. Kolika je verovatnoća da će
   a) pasti tri šestice,
   b) pasti zbir četiri,
   c) pasti zbir pet,
   d) pasti zbir šest?

Rešenje

U svim slučajevima broj svih mogućih slučajeva

$$n = V_3^p(6) = 6^3 = 216$$

a) Broj povoljnih slučajeva $m_a = 1$ (slučaj 6, 6, 6), te je
$$P_{(a)} = \frac{1}{216}$$

b) Povoljni slučajevi su

1	1	2
1	2	1
2	1	1

te je $m_6 = 3$, odnosno
$$P_{(b)} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}.$$

c) povoljni slučajevi su

1	2	2	1	1	3
2	1	2	1	3	1
2	2	1	3	1	1

tj. $m_c = 6$, te je

$$P_{(c)} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

d) Povoljni slučajevi su

1	1	4	1	2	3	2	2	2
1	4	1	1	3	2			
4	1	1	2	1	3			
			2	3	1			
			3	1	2			
			3	2	1			

tj. $m_d = 10$, te je $P_{(d)} = \frac{10}{216}$

4) Biblioteka poseduje šest knjiga iz jedne oblasti od kojih su tri na stranom jeziku. Bibliotekar uzima na slučaj dve knjige. Kolika je verovatnoća da obe uzete knjige budu na stranom jeziku?

Rešenje

Neka A označava dogadjaj da je prva uzeta knjiga na stranom jeziku, B-da je druga uzeta knjiga na stranom jeziku, tada je

$$P(A) = \frac{1}{6},$$

$$P(B/A) = \frac{2}{5}$$

i $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}2.$

5) U nekom mestu prosečan broj oblačnih dana u julu je 6. Naći verovatnoću da prvog i drugog jula ne bude oblačan dan!

Rešenje

$$P = \frac{25}{31} \cdot \frac{24}{30} = \frac{20}{31} .$$

6) U jednom pogonu radi sedam radnika i tri radnice. Na slučaj se odabiraju tri osobe. Naći verovatnoću da oni svi budu radnici!

Rešenje

Neka A označava da odabrana osoba bude radnik. Tada je

$$P(A) = \frac{7}{10},$$

$$P(A/A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$P(A/AA) = \frac{5}{8},$$

te je

$$P(AAA) = P(A).P(A/A).P(A/AA) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24},$$

gde smo sa AA, kratko označili $A \cap A$.

7) U kutiji se nalazi deset kuglica od kojih su šest plave. Na slučaj se izvlače četiri kuglice. Kolika je verovatnoća da

a) sve četiri kuglice budu plave,

b) da samo prva i druga budu plave?

Rešenje

a) $P = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$

b) Neka A označava dogadjaj da izvučena kuglica bude plava, tj. $\bar{A}$ označava dogadjaj da izvučena kuglica ne bude plava (suprotan dogadjaj). Tada je dogadjaj čija se verovatnoća traži

$$AA\bar{A}\bar{A}$$

a njegova verovatnoća

$$P(AA\bar{A}\bar{A}) = P(A).P(A/A).P(\bar{A}/AA).P(\bar{A}/AA\bar{A}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}.$$

8) U kutiji se nalazi dvanaest kuglica od kojih su četiri plave. Na slučaj se izvuku tri kuglice. Naći verovatnoću da medju njima budu samo dve plave.

Rešenje

Sa oznakama kao u predhodnom zadatku imamo:

$$P(AA\bar{A} \cup A\bar{A}A \cup \bar{A}AA) = P(AA\bar{A}) + P(A\bar{A}A) + P(\bar{A}AA) =$$

$$= P(A).P(A/A).P(\bar{A}/AA) + P(A).P(\bar{A}/A).P(A/A\bar{A}) + P(\bar{A}).P(\bar{A}/A).P(A/\bar{A}A) =$$

$$= \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} =$$

$$= 3 \cdot \frac{3}{55} = \frac{9}{55}$$

Ovde smo koristili činjenicu da su dogadjaji $AA\bar{A}$, $A\bar{A}A$ i $\bar{A}AA$ medjusobno inkopatibilni, što se lako pokazuje.

9) U kutiji se nalaze 5 kuglica numerisanih brojevima od 1 do 5. Na slučaj se izvlači tri puta po jedna kuglica bez vraćanja. Naći verovatnoću:

a) da se izvuku kuglice numerisane sa 1, 4, 5 i u tom redosledu

b) da se izvuku kuglice numerisane sa 1, 4, 5 bez obzira na redosled.

Rešenje

a) $P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$

b) $P = \frac{P(3)}{V_3(5)} = \frac{3.2.1}{5.4.3} = \frac{1}{10}$

10) U jednoj kutiji se nalazi 6 belih i 4 crne kuglice. Na slučaj se izvlače 2 kuglice. Kolika je verovatnoća.

a) da su obe bele

b) da su obe crne

c) da je jedna bela, a jedna crna?

Rešenje

a) $n = \binom{10}{2} = 45$, $m_a = \binom{6}{2} = 15$, $P_{(a)} = \frac{1}{3}$

b) $m_b = \binom{4}{2} = 6$, $P_{(b)} = \frac{2}{15}$

c) $m_c = \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} = 6.4 = 24$ i $P_{(c)} = \frac{8}{5}$

11) U jednoj kutiji se nalaze četiri bele i dve crne kuglice. Kuglice se na slučaj izvlače jedna za drugom bez vraćanja, dok se sve ne izvuku. Kolika je verovatnoća da prve četiri izvuče-

ne kuglice budu bele, a poslednje dve crne?

Rešenje

$n = P(6) = 6!$

$m = P(4).P(2) = 4!.2!$

$$P = \frac{4!.2!}{6!} = \frac{1}{15}.$$

12) U jednoj kutiji nalazi se 8 kuglica od kojih su tri crne i pet bele. Na slučaj se izvlači jedna kuglica bez vraćanja dva puta. Naći verovatnoću

a) da drugi put bude izvučena crna kuglica

b) da drugi put bude izvučena crna kuglica, ako je prvi put izvučena crna kuglica.

Rešenje

a) Broj svih mogućih slučajeva

$$n = V_2\ (8) = 8.7 = 56$$

Pošto je druga izvučena kuglica crna, to znači da druga izvučena kuglica može biti jedna crna od tri date crne, tj. imamo $k_1(3)$ slučajeva; pri svakom izvlačenju crne kuglice drugi put, prvi put je mogla biti izvučena bilo koja kuglica od preostalih sedam (kuglice se izvlače bez vraćanja), tj. imamo $k_1(7)$ slučajeva, te je

$$m_a = k_1(3)\ .\ k_1(7) = 3.7 = 21$$

imamo

$$P(a) = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}.$$

Zadatak se može rešiti na drugi način. Označimo sa C dogadjaj da je izvučena crna kuglica, sa E dogadjaj da je izvučena jedna kuglica (bilo koja - izvesan dogadjaj - tj. $P(E) = 1$).

Tada je dogadjaj čija se verovatnoća traži, da je drugi put izvučena crna kuglica:

$$E \cap C = EC$$

Kako je

$$E = C \cup \bar{C} = C + \bar{C}$$

imamo $P(EC)=P\left[(C+\bar{C}).C\right] = P(CC)+P(\bar{C}C) = P(CC)+P(\bar{C}C) =$

$= P(C).P(C/C) + P(\bar{C}).P(C/\bar{C}) =$

$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{8.7}(2+5) = \frac{3}{8}.$

b) $n = V_2(8) = 8 \cdot 7 = 56$

$m_b = V_2(3) = 3.2 = 6$

$P_{(b)} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

ili

$P(CC) = P(c).P(C/C) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

13) Iz špila od 52 karte izvlače se pet karte. Kolika je verovatnoća da se izvuku

a) četiri keca

b) četiri keca i jedna devetka

Rešenje

a) $n = V_5(52) = 52.51.50.49.48$ $\quad m_a = K_1(48).K_4(4).P(5) =$

$= 48,5.4.3.2.1.$

$P_a = \frac{48.5.4.3.2.1.}{52.51.50.49.48} = \frac{1}{13.17.5}$

Ili, ako sa K označimo dogadjaj izvlačenje keca, imamo:

$P(KKKK\bar{K} + KKK\bar{K}K + KK\bar{K}KK + K\bar{K}KKK + \bar{K}KKKK) =$

$= P(KKKK\bar{K}) + P(KKK\bar{K}K) + P(KK\bar{K}KK) + P(K\bar{K}KKK) + P(\bar{K}KKKK) =$

$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{48}{48} .5 = \frac{1}{13.17.5}$

b) $n = V_5(52) = 52.51.50.44.48$

$m_b = K_4(4).K_1(4).P(5) = 1.4.5.4.3.2.1$

$P_{(b)} = \frac{4.5.4.3.2.1.}{52.51.50.49.48}$

Ili, ako sa D označimo dogadjaj izvlačenje devetke:

$$P(KKKKD + KKKDK + KKDKK + KDKKK + DKKKK) =$$

$$= P(KKKKD) + P(KKKDK) + P(KKDKK) + P(KDKKK) + P(DKKKK) =$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{4}{48} \cdot 5 = \frac{4.5.4.3.2.1}{52.51.50.49.48}$$

14) Objasniti šta predstavljaju jednakosti

a) $A \cap B \cap C = A$

i b) $A \cup B \cup C = A$,

Ako su A, B i C slučajni dogadjaji.

<u>Rešenje</u>

a) $A \subset B \cap C$, tj. $B \cap C$ se realizuje svaki put kada se realizuje A,

b) $B \subset A$ i $C \subset A$, tj. A se realizuje uvek kada se realizuje ili B ili C.

15) Pokazati da je dogadjaj

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

nemoguć.

16) Dokazati da je

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

17) Na šta se svode izrazi:

a) $A \cap B$,

b) $A \cup B$,

c) $A \cap B \cap C$,

d) $A \cup B \cup C$,

Ako je $A \subset B$.

18) Uprostiti izraze

a) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$,

b) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$.

19) Ako je $A\cap C = B\cap C$ pokazati da važi

$$\overline{(A\cup B)}\cap C = \bar{A}\cap C\cup\bar{B}\cap C.$$

20) Pod kojim uslovima, za posmatrane dogadjaje, su moguće jednakosti:

a) $A\cup B = A\cap B$,

b) $A\cup B = \bar{A}$,

c) $A\cap B = \bar{A}$?

21) Dokazati da iz $A\cap B = C\cap D$ sledi $A\cap C = B\cap C$.

22) Ako je $\overline{X\cup A} \cup \overline{X\cup\bar{A}} = B$

naći dogadjaj X.

23) Odrediti dogadjaj X iz

a) $A\cup X = A\cup B$

b) $A\cap B\cup X = (A\cup C)\cap(B\cup C)$.

24) Dogadjaji A i B su nezavisni a verovatnoće realizacije svakog od njih su redom p_1 i p_2. Kolika je verovatnoća da se:

a) realizuje oba dogadjaja zajedno,

b) ne realizuje nijedan,

c) realizuje samo A,

e) ne realizuje bar jedan?

Rešenje

a) p_1p_2,

b) $(1-p_1)(1-p_2)$

c) $p_1(1-p_2)$

d) $1-(1-p_1)(1-p_2)$

e) $1-p_1p_2$

25) Lutrija ima 1000 lozova i to: 1 čija je vrednost 100000 din, čija je vrednost 10000 din, 50 čija je vrednost 1000 din i 100 čija je vrednost 100 dinara a ostali lozovi su prazni. Ako se kupi jedan loz kolika je verovatnoća da se dobije:

a) najmanje 100 dinara,

b) najmanje 1000 dinara?

Rešenje

a) p=0,161,

b) p = 0,061.

26) Četiri broda saobraćaju izmedju dva grada. Ako putnik nezna njihov red vožnje, kolika je verovatnoća da će u odlasku i povratku koristiti:

a) Isti brod,

b) različite brodove?

Rešenje

a) p = 0,25,

b) p = 0,75.

27) Verovatnoća da se jednim hicem iz jednog orudja pogodi cilj je 4/9. Naći najverovatniji broj pogodaka ako se uzastopce ispali 13 hitaca.

Rešenje $p = 6.$

28) Kolika je verovatnoća da se iz kutije, koja sadrži sedam belih, jedanaest crnih i tri plave, izvuče plava kuglica?

Rešenje $p = \frac{1}{7}.$

29) Ako je verovatnoća da strelac pogodi metu jednaka 0,9, kolika je verovatnoća da će sa tri hica tri puta pogoditi metu?

Rešenje $p = 0,729.$

30) Dogadjaji A, B i C su nezavisni, a verovatnoće njihove realizacije redom p_1, p_2 i p_3. Kolika je verovatnoća da će se realizovati:

a) sva tri dogadjaja,

b) A-ne, B-da i C-da,

c) A-da, B-ne, i C-ne,

d) A-ne, B-ne, i C-ne,

e) bar jedan od tri dogadjaja,

f) da se bar jedan neće realizovati?

Rešenje

a) $p_1p_2p_3$,

b) $(1-p_1)p_2p_3$,

c) $p_1(1-p_2)(1-p_3)$,

d) $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$,

e) $1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$,

f) $1-p_1p_2p_3$.

31) Verovatnoća da strelac pogodi cilj je 0,7. Koliko hitaca treba ispaliti da najverovatniji broj pogodaka bude 16?

Rešenje

22 ili 23.

32) Kocka čije su površi obojene izdeljena je na hiljadu kocaka jednakih dimenzija. Tako dobijene kocke su dobro izmešane. Odrediti verovatnoću da će kocka, izvučena nasumice, imati dve površi obojene!

Rešenje

Ovde je $m = 96$ a $n = 1000$, te je $p = 0,096$.

33) Iz špila od 52 karte izvlači se pet karata. Naći verovatnoću da je:

a) izvučen tačno jedan kec,

b) izvučen najmanje jedan kec?

Rešenje

a) $p = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}}$, b) $p = 1 - \dfrac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$

jer je $\dfrac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$ verovatnoća suprotnog dogadjaja, tj. dogadjaja da nema keca u 5 izvučenih karata.

34) U delegaciji jedne države nalazi se 6 ekonomista, 4 inženjera i 2 tehničara. Na slučajan način biraju se tri predstavnika. Kolika je verovatnoća da medju njima budu:

a) jedan ekonomista, jedan inženjer, jedan tehničar,

b) tri ekonomista,

c) dva ekonomista i jedan inženjer?

Rešenje

a) $p = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{12}{3}} = \dfrac{6.4.2}{\frac{12.11.10}{3.2}} = \dfrac{12}{55}$,

b) $p = \dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{12}{3}} = \dfrac{6.5.4}{12.11.10} = \dfrac{1}{11}$,

c) $p = \dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \dfrac{6.3.2}{12.11} = \dfrac{3}{11}$

35) Turista posećuje Dubrovnik sa verovatnoćom od 90%, a Split sa verovatnoćom od 80%. Kolika je verovatnoća da će posetiti bar jedan od ta dva grada, ako poseta jednom gradu ne utiče na posetu drugom gradu?

Rešenje

Neka D označava dogadjaj da će turista posetiti Dubrovnik, S da će posetiti Split; tada je dogadjaj da će posetiti bar jedan od dva grada

$$D \cup S,$$

pa je
$$P(D\cup S) = P(D) + P(S) - P(D \cap S),$$

prema teoremi totalne verovatnoće.

Kako je

$$P(D \cap S) = P(D).P(S/D) = P(D).P(S) = \frac{90}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{72}{100}$$

to je tražena verovatnoća

$$P(DUS) = \frac{90}{100} + \frac{80}{100} - \frac{72}{100} = \frac{98}{100} = 98\%.$$

36) U jednom ispitnom roku polagalo je ispit iz matematike 70% studenata sa završenom srednjom školskom i 30% sa gimnazijom. Od kandidata sa srednjom školom položilo je 1/8, a sa gimnazijom 1/2. Odrediti verovatnoću da je slučajno izabrani student položio matematiku!

Rešenje

Neka je S dogadjaj da je izabrani student sa srednjom školom, G dogadjaj da je izabrani student sa gimnazijom, M dogadjaj da je student položio matematiku. Kako je dogadjaj da je izabran student: SUG to je dogadjaj čija se verovatnoća traži da je izabrani student položio matematiku $(SUG) \cap M = (S \cap M) \cup (S \cap M) = SM + GM$. S obzirom da su dogadjaji SM i GM inkopatibilni, jer su dogadjaji S i G inkopatibilni, to je

$$P(SM+GM) = P(SM) + P(GM) = P(S)P(M/S)+P(G)P(M/G) = \frac{70}{100} \cdot \frac{1}{8} +$$

$$+ \frac{30}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{400} + \frac{30}{200} = \frac{95}{400} = \frac{23,75}{100} = 23,75\%.$$

37) Populacija jednog naselja ima 60% ženskih stanovnika i 40% muških. 1% ženskih stanovnika se bavi sportom i 20% muških stanovnika. Kolika je verovatnoća da se slučajno izabrani stanovnik toga naselja bavi sportom?

Rešenje

Neka je M dogadjaj da je izabran muški stanovnik, F dogadjaj da je izabran ženski stanovnik, a S dogadjaj da je stanovnik sportista. Tada je M+F dogadjaj da je izabran stanovnik te populacije, a (M+F).S dogadjaj da je izabran stanovnik koji se bavi sportom, te je

$$P[(M+F).S] = P(MS+FS) = P(MS) + P(FS) = P(M)P(S/M)+P(F)P(S/F) =$$

$$= P(M)P(S/M) + P(F)P(S/F) = \frac{40}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{14}{100}$$

38) U kutiji se nalaze pet belih i pet crnih kuglica. Izvlači se po jedna kuglica pet puta, tako da se posle svakog izvlačenja vraća natrag u kutiju. Kolika je verovatnoća da će prve tri izvučene kuglice biti bele a poslednje dve crne.

Rešenje

Broj svih mogućih slučajeva na $V_3^p(5) = 5^3$ načina.

Dve crne kuglice na poslednja dva mesta mogu biti izvučene na $V_2^p(5) = 5^2$ načina. Svako izvlačenje bele kuglice može se kombinovati sa svakim izvlačenjem crne kuglice, pa je broj povoljnih slučajeva jednak proizvodu brojeva tih izvlačenja:

$$m = V_3^p(5) \cdot V_2^p(5) = 5^3.5^2 = 5^5.$$

tada je

$$p = \frac{m}{n} = \frac{5^5}{10^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

39) Kolika je verovatnoća da će kod jednog bacanja numerisane kocke pasti paran broj ili broj deljiv sa tri. Zadatak rešiti neposredno preko definicije verovatnoće i preko teoreme totalne verovatnoće!

Rešenje

Neposredno dobijamo:

$n = 6$, (slučajevi: 1, 2, 3, 4, 5 i 6),

$m = 4$, (slučajevi: 2, 4, 6 i 3), te je $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Sa druge strane ako je dogadjaj A padanje parnog broja: 2, 4, 6; dogadjaj B padanje broja deljivog sa tri: 3, 6; tada je $A \cap B$ dogadjaj da će pasti paran broj deljiv sa tri (6), a $A \cup B$ dogadjaj čija se verovatnoća traži - padanje parnog broja ili broja deljivog sa tri, pa je:

$$P(A) = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{1}{3},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

i $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} =$

$$= \frac{3 + 2 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

40) Dva puta se baca numerisana kocka. Kolika je verovatnoća da će prilikom drugog bacanja pasti paran broj, pod uslovom da je kod prvog bacanja pao broj pet?

Rešenje

Ukupan broj slučajeva je

$$n = V_2^p(6) = 6^2 = 36,$$

koji se mogu predstaviti shematski

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Povoljni slučajevi su 52, 54, 56, te je

$$m = 3,$$

a

$$p = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Zadatak se može rešiti i preko verovatnoće proizvoda. Neka: A označava dogadjaj da je pala petica, B dogadjaj da je pao paran broj, tada je A B dogadjaj čija se verovatnoća traži, pa je

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(B/A) = \frac{1}{2},$$

(jer su svi mogući slučajevi: 51
52
53
54
55
56,

a svi povoljni 52, 54, 56)

i $$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

41) Bacaju se dve kocke. Kolika je verovatnoća da će pasti brojevi čiji je zbir pet ili čiji je proizvod šest?

Rešenje

Neka: A označava dogadjaj da će pasti cifre čiji je zbir pet, tj.: 14, 23, 32, 41; B dogadjaj da će pasti cifre čiji je proizvod šest, tj.: 23, 32.

Tada je $$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

$$P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

$$P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$ (povoljni slučajevi: 23, 32;

a svi mogući: 14, 23, 32, 41), i

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B/A) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}.$$

Zadatak se može rešiti i neposredno, jer su povoljni slučajevi: $\{14, 23, 32, 41\} \cup \{23, 32\} = \{14, 23, 32, 41\}$, $m = 4$ a svi mogući: $V_2^p(6) = 6^2 = 36$, $n = 36$, pa je

$$p = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

42) U električno kolo vezana su tri elementa na red, koji rade ne zavisno jedan od drugoga. Verovatnoće, da se pokvari prvi, drugi, treći, iznose, respektivno,

$$p_1 = 0,1; \quad p_2 = 0,15; \quad p_3 = 0,2.$$

Naći verovatnoću da u električnom kolu nema toka struje.

Rešenje

Pošto su elementi uključeni u kolo struje na red, to struje u kolu neće biti (dogadjaj A), ako se pokvari bar jedan od ta tri elementa, pa je

$$P(A) = 1-q_1.q_2.q_3 = 1-(1-0,1)(1-0,15)(1-0,2) = 0,388.$$

43) Da bi se srušio neki most dovoljno je da bude pogodjen jednom bombom iz aviona. Naći verovatnoću, da će most biti srušen, ako su na njega bačene četiri avionske bombe, čije su verovatnoće pogodka, respektivno, 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

<u>Rešenje:</u> $P = 0{,}95$

44) Verovatnoća bar jednog pogodka u cilj od tri gadjanja iznosi 0,875. Naći verovatnoću pogodka u cilj pri jednom gadjanju.

<u>Rešenje</u>

Verovatnoća bar jednog pogodka u cilj pri tri gadjanja (dogadjaja A) je

$$P(A) = 1-q^3$$

gde je q - verovatnoća promašaja.

Prema zadatku je

$$P(A) = 0{,}875, \text{ te je}$$

$$1-q^3 = 0{,}875$$

tj.

$$q^3 = 1-0{,}875 = 0{,}125$$

ili

$$q = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$$

pa je tražena verovatnoća

$$p = 1-q = 1-0{,}5 = 0{,}5$$

45) U jednoj bolnici nalazi se, u proseku, bolesnika obolelih od bolesti A:50%, od bolesti B: 30%, od bolesti C: 20%. Verovatnoća izlečenja od bolesti A je 0,7%, za bolest B: 0,8%, za bolest C: 0,9%. Naći verovatnoću da je izlečen bolesnik bolovao od bolesti A.

<u>Rešenje</u> $P = \frac{5}{11}$

46) Dva ravnopravna protivnika igraju šah. Šta je verovatnije dobiti: dve partije od četiri ili tri partije od 6?

<u>Rešenje</u>

$$p = \frac{1}{2}$$

kao i drugog $$q = \frac{1}{2}$$

Kako ta ravnopravnost ostaje tokom svih partija, to je u pitanju niz nezavisnih dogadjaja, te imamo: za verovatnoću da se od četiri partije dobiju dve

$$P_4(2) = \binom{4}{2}p^2q^2 = \frac{6}{16},$$

a za verovatnoću da se od šest partije dobiju tri:

$$P_6(3) = \binom{6}{3}\, p^3q^3 = \frac{5}{16}$$

Kako je $$P_4(2) > P_6(3)$$
$$\frac{6}{16} > \frac{5}{16}$$

to znači da je veća verovatnoća od četiri partije dobiti dve, nego od šest tri, pri uslovu da su igrači ravnopravni i da ne menjaju formu tokom igranja.

47) U kutiji se nalazi 5 belih i 4 crne kuglice. Odrediti verovatnoću, da se u tri uzastopna izvlačenja po jedne kuglice bez vraćanja, izvuku

a) jedna bela i dve crne,

b) sve tri crne kuglice

c) sve tri bele kuglice

48) U kutiji se nalazi 7 belih i 1 crna kuglica. Uzastopno i bez vraćanja izvlače se tri kuglice. Kolika je verovatnoća da sve tri izvučene kuglice budu bele?

49) U kutiji se nalazi 7 belih i 1 crna kuglica. Izvlači se po jedna kuglica i posle izvlačenja vraća nazad u kutiju. Odrediti verovatnoću da se u tri uzastopna izvlačenja sva tri puta izvuče bela kuglica.

50) Stranice kocke su numerisane sa 1, 2, 3, 4, 5, 6. Odrediti verovatnoću da se

a) pri jednom bacanju okrene strana sa brojem manjim od 5

b) u seriji od tri bacanja bar jedanput okrene strana sa brojem manjim od 5.

51) U seriji od 10 bacanja kocke odrediti verovatnoću da se

a) šestica pojavi najmanje dva puta

b) paran broj pojavi bar jedanput.

52) Pet strana jedne kocke obojene su plavom a jedna crvenom bojom. Odrediti verovatnoću da se u seriji od 4 bacanja plava strana okrene tačno tri puta.

53) Četiri strane kocke su obojene crveno a dve plavo. Odrediti verovatnoću da se

a) bar jednom u toku dva bacanja okrene crvena strana

b) u tri bacanja dobije sledeći red strana: crvena, plava, crvena.

c) u tri bacanja padnu dve crvene i jedna plava strana.

54) U jednoj kutiji nalazi se deset kuglica od kojih su 8 bele; u drugoj 20 kuglica, od kojih su četiri bele. Na slučaj se iz svake kutije izvlači po jedna kuglica, a zatim od te dve kuglice uzima jedna. Naći verovatnoću da je ona bela

<u>Rešenje</u> $P = 0,5$

55) U jednom magacinu nalazi se 12 proizvoda fabrike A, 20 proizvoda fabrike B, 18 proizvoda fabrike C. Verovatnoća da je proizvod fabrike A odličnog kvaliteta je 0,9; fabrike B je 0,6; fabrike C je 0,9. Na slučaj se uzima jedan proizvod. Naći verovatnoću da je on odličnog kvaliteta.

Rešenje P = 0,78

56) Pet strana jedne kocke obojene su plavom a jedna crvenom bojom. Odrediti verovatnoću da se u seriji od 4 bacanja plava strana okrene tačno tri puta.

57) U kutiji se nalaze 3 bele, 2 plave, 3 crvene i 4 zelene kuglice. Odrediti verovatnoću da se u četiri uzastopna izvlačenja bez vraćanja ni jedanput ne izvuče zelena kuglica.

58) U jednoj kutiji se nalazi 8 crvenih, 7 plavih i 5 belih kuglica. Tri puta se izvlači po jedna kuglica bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da se izvuče plava kuglica samo u prvom izvlačenju a crvena samo u trečem izvlačenju.

59) Verovatnoća da će na tržištu biti zastupljen artikal A je 95%, artikal B 90%, artikal C 80%. Odrediti verovatnoću da na tržištu

a) bude zastupljen bar jedan od artikala A ili B.

b) bude zastupljen bar jedan od sva tri artikla.

c) budu zastupljena sva tri artikla.

60) Na jednom fakultetu ima 40% studentkinja. Znajući da se 50% studenata bavi sportom a samo 15% studentkinja, odrediti verovatnoću da je neko lice sa ovog fakulteta (student ili studentkinja) sportista.

61) Jedan student priprema tri ispita u jednom ispitnom roku. Verovatnoća da će položiti prvi je 80%, drugi 60% a treći 50%. Odrediti verovatnoću

a) da će položiti samo prvi ispit

b) da će pasti samo na trećem ispitu.

LITERATURA

1. B.V. Gnedenko: Kurs teorii verojatnostei, Moskva, 1969.
2. E.S.Ventcel': Teorija verojatnostei, Moskva 1962.
3. V.R.Ževeržeev, L.A.Kal'nickij, N.A.Sapogov: Special'nij kurs viššei matematiki dlja vtuzov, Moskva 1970.
4. A.A.Glagolev, G.V.Solnceva: Kurs viššej matematiki, Moskva, 1965.
5. L.Z.Rumšiskij: Elementi teoriji verojatnostei, Moskva 1970.
6. M.Marić: Zbirka zadataka iz matematike, Beograd, 1967.
7. B.Ivanović: Matematika za ekonomiste, Beograd, 1965.
8. Jacques neveu: Bases mathematiques du calcul des proba bilités, Paris, 1964.
9. V.E.Gmurman: Rukovodstvo k rešeniu zadač po teorii verojatno-stei i matematičekoj statistike, Moskva 1970.
10. M.Andjelković, V.Pavlović, M.Marjanović, B.Vulićević, N.Marić, M.Ivović: Zbirka zadataka iz matematike II, za studente Ekonomskog fakulteta, Beograd, 1969.