VIŠA ŠKOLA ZA ORGANIZACIJU RADA U BEOGRADU

Č. Čepinac
V. Popović
D. Simeunović

MATEMATIKA

PRIRUČNIK ZA PRIPREMANJE PRIJEMNOG ISPITA

Beograd, 1967.

S A D R Ž A J

Strana

P R E D G O V O R

Priručnik je sastavljen prema Programu za polaganje prijemnog ispita i sadrži najvažnije stavove iz srednjoškolskog gradiva, propraćene primerima i zadacima. Izlaganje je usklađeno uzrastu kandidata i služi kao repetitorij, a ne kao udžbenik u kome se gradivo izlaže aksiomatski i drukčijim redom nego što je izloženo u ovom Priručniku.

Relativno kratak rok za izradu Priručnika zahtevao je saradnju više autora. Autori ovog Priručnika su:

I DEO i II DEO - GLAVE 1-6 .... Č.Čepinac

II DEO - GLAVE 7-10 i III Deo ...... V.Popović

IV DEO i V DEO .... D.Simeunović

Slike su obeležene rednim brojevima, i to posebno za svaki deo, a ponegde gde nije potrebno one nisu ni numerisane. Eventualna neujednačenost stila i eventualne slabosti ovog Priručnika mogle bi se otkloniti u narednom izdanju, ako do njega dođe.

Autori

I DEO

ARITMETIKA

I GLAVA

BROJ

1. Računske radnje celim brojevima

1.1. Sabiranje i oduzimanje

Rezultat sabiranja i oduzimanja celih brojeva uvek je ceo broj. Sabiranje višecifrenih brojeva obavlja se najlakše ako se brojevi potpisuju, pazeći pri tome da se jedinice potpišu ispod jedinica, desetice ispod desetica itd.

Ako jednovremeno nekoliko brojeva i sabiramo i oduzimamo, odvojeno se saberu brojevi sa znakom + (plus), a odvojeno sa znakom - (minus), pa se sa rezultatima odvojenih zbirova obavi radnja oduzimanja kao sa dva broja.

Radi preglednog računanja višecifreni brojevi pišu se sa malim razmakom izmedju grupa od po tri cifre, tako da je stavljanje tačaka i zareza, radi odvajanja tih grupa, nepotrebno.

Na primer: 53 010 219 (pedeset tri miliona deset hiljada dve stotine devetnaest), ili 30 000 000 (trideset miliona).

1.2. Množenje

Rezultat množenja celih brojeva uvek je ceo broj. Računska radnja množenja obeležava se tačkom u visini sredine cifre, npr. 5·7, što je praktičnije od znaka x (puta), koji u algebri može da predstavlja i slovo "iks".

Broj koji množimo zove se množenik, a broj kojim množenik množimo zove se množilac. S obzirom na osobinu komutativnosti množenja, svejedno je koji će od dva broja biti množenik, a koji množilac. Ipak, radi preglednijeg računanja, za množenik uzima se broj koji ima više cifara.

Množenje višecifrenih brojeva obavlja se najlakše na načine izložene u primeru:

4257 · 357	ili	4257 · 357
12771.		29799
21285.		21285.
29799		12771.
1519749		1519749

Prvim načinom množili smo broj 4 257 redom brojevima 3,5,7, i rezultate potpisivali pomerene po jedno mesto udesno; drugim načinom množili smo isti broj redom brojevima 7,5,3 i rezultate potpisivali pomerene po jedno mesto ulevo. Bilo jednim, bilo drugim načinom, dobija se isti rezultat: 1 519 749.

Postoje još neki načini množenja, no ovde ne možemo da se upuštamo u to izlaganje.

Množenje celog broja sa 10,100,1000 itd. izvodi se dopisivanjem množeniku jedne, dve, tri nule itd. Npr. 35 · 100 = 3 500.

Ako se unutar skupa cifri množioca nalazi 0 (nula), onda se naredni rezultat pomeri, ne za jedno mesto, nego za dva mesta udesno (odnosno ulevo); ako se nalaze, jedna do druge, dve nule - pomeri se za dva mesta itd.

Na primer:

4257 · 3507	ili	4257 · 3507
12771.		29799
21285..		21285..
29799		12771.
14929299		14929299

```
 42507 · 30057          ili          42507 · 30057
127521...                             297549
  212535.                            212535.
   297549                           127521...
1277632899                          1277632899
```

Ako množilac ima na početku (ili na završetku) cifru 1 množenik se ne podvlači, već se njegove cifre pridružuju potpisanim ciframa. Npr.:

```
256 · 12
 512
3072
```

1.3. Deljenje

Podeliti dva broja znači naći treći broj (količnik) koji pomnožen drugim (deliocem) daje prvi broj (deljenik).

Rezultat deljenja dva cela broja biće ceo broj samo onda kad je deljenik sadržilac delioca, tj. kad se delilac sadrži u deljeniku bez ostatka. Ako deljenik nije sadržilac delioca, količnik je ili pravi razlomak (ako je deljenik manji od delioca) ili mešoviti broj (ako je deljenik veći od delioca).

Cifre količnika dobijaju se procenjivanjem, a provera procene množenjem i izvodjenjem (oduzimanjem) ostatka koji mora da bude uvek manji od delioca.

Na primer:

```
 858384 : 432 = 1987
-432
 4263
-3888
  3758
 -3456
   3024
  -3024
      0
```

Kad se ostatku dopiše naredna cifra deljenika, dobijeni broj može da bude manji od delioca. U tom slučaju u količniku se upisuje 0, a ostatku se dopiše još jedna, naredna cifra deljenika, i tako redom sve dok dobijeni broj ne postane veći od delioca.

Na primer:

```
 1087629 : 543 = 2003
-1086
    1629
   -1629
       0
```

Navedimo neka pravila za deljivost brojeva bez ostatka. Deljivi su:

sa 2 - svi parni brojevi;

sa 4 - svi parni brojevi čije poslednje dve cifre sačinjavaju broj deljiv sa 4;

sa 8 - svi parni brojevi čije poslednje tri cifre sačinjavaju broj deljiv sa 8;

sa 3 - svi brojevi čiji je zbir cifara deljiv sa 3;

sa 9 - svi brojevi čiji je zbir cifara deljiv sa 9;

sa 6 - svi parni brojevi koji su deljivi i sa 3;

sa 5 - svi brojevi čija je poslednja cifra 0 ili 5;

sa 7 - svi brojevi čiji je zbir svih desetica i upetostručenih jedinica deljiv sa 7 (npr., broj 203 deljiv je sa 7 jer je zbir $20 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35$ deljiv sa 7).

Primedba: Za deljivost brojeva sa 3, 9 i 7, ako posle prvog koraka (zbira) ne može da se odredi deljivost, postupak se ponavlja sa dobijenim brojem.

1.4. Prosti i složeni brojevi

Brojevi koji su deljivi bez ostatka samo sa 1 ili sa samim sobom zovu se prosti, a svi ostali brojevi su složeni. Jedino broj 1 ne spada ni u proste, ni u složene brojeve.

Pronalaženje prostih brojeva nije jednostavan posao, ali može da se olakša tako što se brojevi, počevši od broja 2, upisuju redom po kolonama u tabelu sa šest vrsta (I - VI):

I	$\underline{2}$	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	...
II	$\underline{3}$	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	...
III	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	...
IV	$\underline{5}$	$\underline{11}$	$\underline{17}$	$\underline{23}$	$\underline{29}$	35	$\underline{41}$	$\underline{47}$	$\underline{53}$	$\underline{59}$	65	$\underline{71}$	77	...
V	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	...
VI	$\underline{7}$	$\underline{13}$	$\underline{19}$	25	$\underline{31}$	$\underline{37}$	$\underline{43}$	49	55	$\underline{61}$	$\underline{67}$	$\underline{73}$	$\underline{79}$	...

Prosti brojevi su podvučeni. Zapažamo da su u I, II i V vrsti svi brojevi parni, dakle, deljivi sa 2, a u II vrsti da su deljivi sa 3. Prema tome, sa izuzetkom brojeva 2 i 3, prosti brojevi mogu da se nadju samo u IV i VI vrsti.

Rastaviti dati broj na proste činioce (proste faktore) znači pronaći sve proste brojeve čiji je proizvod jednak datom broju. Npr., $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ itd.

Zajednički delilac za dva ili više brojeva je svaki prost ili složen broj sa kojim su dati brojevi deljivi (bez ostatka). Ako brojevi nemaju zajedničkog delioca, npr., brojevi $14 (= 2 \cdot 7)$ i $51 (= 3 \cdot 17)$, zovu se medjusobno (relativno) prosti brojevi.

Za brojeve 12 i 102 su zajednički delioci brojevi 2, 3 i $6 (= 2 \cdot 3)$. Najveći zajednički delilac im je broj 6 ili, kraće, NZD = 6.

Za brojeve:

$$24 = \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3}$$
$$54 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 3$$
$$66 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 11$$
$$84 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot 7$$
$$90 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 5$$

zajednički delioci su brojevi 2 i 3, kao i njihov proizvod $2 \cdot 3 = 6$ koji je ujedno i NZD .

Za brojeve:

$$72 = \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3}$$
$$162 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 3$$
$$198 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 11$$
$$252 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 7$$
$$270 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 5$$
$$\text{NZD} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

Zajednički sadržilac za dva ili više brojeva je svaki broj u kome se dati brojevi sadrže bez ostatka. Tako su, npr., za brojeve 3,4 i 5 zajednički sadržioci brojevi 60(= 3 · 4 · 5), 120(= 2 · 60), 180(= 3 · 60) itd. Od neograničenog broja zajedničkih sardržilaca jedan je najmanji NZS. U našem primeru NZS = 60.

Za proste i medjusobno proste brojeve NZS jednak je njihovom proizvodu. Za ostale brojeve izvodi se postupno deljenje datih brojeva njihovim činiocima, od manjih ka većim, sve dok se ne dobijaju kao količnici jedinice. Ako se NZD traži po uobičajenoj priloženoj shemi, brojevi koji nisu deljivi nekim činiocem samo se potpisuju.

Primer: Odrediti NZS za brojeve 24, 54, 66, 84 i 90.

24;	54;	66;	84;	90	2
12	27	33	42	45	2
6	27	33	21	45	2
3	27	33	21	45	3
1	9	11	7	15	3
	3	11	7	5	3
	1	11	7	5	5
		11	7	1	7
		11	1		11
		1			

NZS $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, tj. jednak je proizvodu činilaca sa kojima smo delili (desno od linije).

Primedba: Ovaj postupak može da se i skrati, ali u suštini ne menja se.

1.5. Stepenovanje

Ako je neki broj jednak proizvodu dvaju ili više jednakih činilaca, onda se za takav broj kaže da je stepen (potencija) onog broja koji je uzet kao činilac i onog reda koliko puta se taj činilac javlja u proizvodu.

Na primer, $256 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, odnosno $256 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$, odnosno $256 = 16 \cdot 16$. Prema tome, broj 256 je osmi stepen broja 2, odnosno četvrti stepen broja 4, odnosno drugi stepen (ili: kvadrat) broja 16. Isto tako, za broj 64 reći ćemo da je šesti stepen broja 2, odnosno treći stepen (ili: kub) broja 4, odnosno drugi stepen (kvadrat) broja 8. Ili, kraće: $256 = 2^8 = 4^4 = 16^2$; $64 = 2^6 = 4^3 = 8^2$.

Izraz 2^8 zove se stepen; broj 2 je osnova (baza) stepena, a broj 8 je izložilac (eksponent).

Stepenovanje višecifrenih brojeva, kao i stepenovanje brojeva izložiocem većim od 2, izvodi se logaritmovanjem. Stoga ćemo se na ovome mestu zadržati samo na:

a) - stepenima sa osnovom 10;

b) - stepenovanju brojeva izložiocem 2 - dizanjem brojeva na kvadrat;

c) - stepenovanju dvocifrenih brojeva izložiocem 3 - dizanjem na kub.

Primedba: Kvadrati i kubovi dvocifrenih, pa često i trocifrenih brojeva mogu da se nađu u svim školskim tablicama.

a) - Prema definiciji stepena, brojevi 100(= 10 · 10), 1000(= 10 · 10 · 10 · 10), 10 000(= 10·10·10·10) itd. mogu da se pišu u obliku stepena osnove 10, redom: 10^2, 10^3, 10^4 itd. Broj nula koji sadrže brojevi 100, 1000, 10 000 itd. podudara se sa izložiocem odgovarajućeg stepena. Milion je, dakle, isto što i 10^6. Stepen 10^9 je isto što i milijarda itd.

256 miliona može da se predstavi proizvodom broja 256 i stepena 10^6, tj. 256 000 000 = 256 · 10^6. Ili, na primer, 183 · 10^5 = 18 300 000. Kilometar ima milion ili 10^6 milimetara, 24 kilometara imaju 24 · 10^6 milimetara itd.

b) - Dizanje na kvadrat višecifrenog broja može da se izvede množenjem broja samim sobom, ali može da posluži i ovaj postupak, po vrstama:

- u prvoj vrsti ispišu se redom, s leva na desno, kvadrati za sve cifre datog broja; pri tome ćemo pisati $1^2 = 01$, $2^2 = 04$, $3^2 = 09$, a umesto 0^2 pisaćemo 00;

- u drugu vrstu upisujemo udvostručene proizvode prve desne cifre datog broja sa prethodnim po redu s desna u levo, upisujući pri tome samo broj jedinica, dok se broj desetica dodaje narednom udvostručenom proizvodu;

- u treću vrstu upisujemo udvostručene proizvode druge desne cifre datog broja sa prethodnim, kao i u drugoj vrsti;

- četvrtu vrstu obrazujemo množenjem treće desne cifre datog broja, petu vrstu - četvrte cifre itd.;

- drugu vrstu potpisujemo pod prvu, ali pomerenu za jedno mesto ulevo, a svaku narednu vrstu ispod prethodne, ali pomerenu za dva mesta ulevo (ako je cifra 0, pomera se za 4 mesta);

- konačno, rezultat je zbir brojeva u svim vrstama.

Primer 1. Izračunati 7 296 043^2.

```
               7 2 9 6 0 4 3²
              ───────────────
              49048136001609
                    4377624.
                   583680..
                 8748....
               1296..
               28..
              ───────────────
Rezultat:     53232243457849
```

U prvu vrstu upisivali smo, zdesna ulevo: $3\cdot4\cdot2=$ $=(2)4$, $3\cdot0\cdot2+2 = 2$, $3\cdot6\cdot2=(3)6$, $3\cdot9\cdot2+3 = (5)7$, $3\cdot2\cdot2+5 =$ $=(1)7$, $3\cdot7\cdot2+1 = 43$. Slično smo obrazovali i ostale vrste i najzad ih sabrali.

Primer 2. Izračunati 217^2.

```
              2 1 7²
             ───────
             40149
              294.
              4..
             ───────
Rezultat:    47089
```

Primer 3. Izračunati 86^2.

```
              8 6²
             ─────
             6436 . . .   ( = 8²; 6²)
             96. . . .    ( = 6·8.)
             ─────
Rezultat:    7396
```

Brojevi koji se završavaju cifrom 5 mogu da se "podignu" na kvadrat tako što se proizvodu broja svih desetica i narednog broja dopiše 25.

$$
\begin{aligned}
15^2 &= 1 \cdot 2\ (25) = 225\\
25^2 &= 2 \cdot 3\ (25) = 625\\
35^2 &= 3 \cdot 4\ (25) = 1225\\
45^2 &= 4 \cdot 5\ (25) = 2025\\
55^2 &= 5 \cdot 6\ (25) = 3025\\
65^2 &= 6 \cdot 7\ (25) = 4225\\
75^2 &= 7 \cdot 8\ (25) = 5625\\
85^2 &= 8 \cdot 9\ (25) = 7225\\
95^2 &= 9 \cdot 10\ (25) = 9025\\
105^2 &= 10 \cdot 11\ (25) = 11025 \quad \text{itd.}
\end{aligned}
$$

(Broj 75, na primer, ima 7 desetica, naredni broj iza 7 je 8, dakle proizvodu 7·8 dopišemo 25.)

c) - Dizanje na kub dvocifrenog broja može da se izvede na ovaj način:

- u prvu vrstu upišu se jedan do drugog kubovi broja desetica i broja jedinica;

- u drugu vrstu upiše se utrostručen proizvod broja desetica, broja jedinica i datog dvocifrenog broja; pri tome se druga vrsta pomeri za jedno mesto ulevo od prve;

- rezultat se dobije sabiranjem ovih dveju vrsta.

Primer: Izračunati 87^3.

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{87^3} & \\
 & 512343 \ \ldots & (= 8^3;\ 7^3) \\
 & \underline{14616\ \ldots}\ \ldots & (= 8\cdot 7\cdot 87\cdot 3) \\
\text{Rezultat:} & 658503 &
\end{array}
$$

Dodatak: Kubovi brojeva 1 - 9.

$1^3 = 1$	$4^3 = 64$	$7^3 = 343$
$2^3 = 8$	$5^3 = 125$	$8^3 = 512$
$3^3 = 27$	$6^3 = 216$	$9^3 = 729$

1.6. Korenovanje

Korenovanje je računska radnja obrnuta (inverzna) stepenovanju.

Izračunavanje bilo kog korena nekog broja izvodi se logaritmovanjem. Stoga ćemo se na ovom mestu zadržati samo na izračunavanju drugog – kvadratnog korena, kod kojeg se korenov izložilac u pisanju izostavlja. Postupak je ovaj:

a) Ako je broj pod znakom $\sqrt{}$ (radikand) višeci – fren, prvo se podeli u grupe po dve cifre, zdesna ulevo; ako je broj cifara neparan, poslednja leva grupa sadrži samo jednu cifru. Npr.:

$$\sqrt{62\ 72\ 64} = \qquad \text{ili} \qquad \sqrt{9\ 98\ 56} =$$

b) Zatim se s desne strane znaka jednakosti upiše broj čiji je kvadrat manji (ili najviše jednak) od brojeva koji sačinjavaju cifre prve leve grupe. Npr.:

$$\sqrt{62\ 72\ 64} = 7 \qquad \text{ili} \qquad \sqrt{9\ 98\ 56} = 3$$

c) Kvadrat tog upisanog broja potpiše se ispod broja prve grupe, oduzme se, rezultatu oduzimanja dopišu se cifre naredne grupe, i tako dobijeni broj podeli se udvostručenom vrednošću broja upisanog s desne strane znaka jednakosti. Npr.:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{62\ 72\ 64} = 7 & \\ \underline{-49} & \\ \ 1372 & : 14 \end{array} \qquad \text{ili} \qquad \begin{array}{ll} \sqrt{9\ 98\ 56} = 3 & \\ \underline{-9} & \\ 0\ 98 & : 6 \end{array}$$

d) Deliocu 14, odn. 6, koji predstavlja broj desetica, treba da se dopiše cifra jedinica (j), ali tako da proizvod $14j \cdot j$, odn. $6j \cdot j$, bude što veći, ali manji (ili najviše jednak) od deljenika 1372, odn. 98; tražena cifra jedinica (j) procenjuje se tako što se samo broj svih desetica deljenika deli deliocem, tako da je u prvom primeru ($137 : 14 = 9$) tražena cifra jedinica $j=9$, a u drugom primeru ($9 : 6 = 1$) ona je $j=1$; proizvod $149 \cdot 9 = 1341$, odnosno

61·1 = 61, potpiše se pod deljenik i oduzme od njega; ovom ostatku dopišu se ("spuste se") cifre naredne grupe, a vrednost za j dopiše se prvoj cifri rezultata. Npr.:

$\sqrt{62\ 72\ 64} = 79$
-49
13 72 : 149·9
-13 41
3164

ili

$\sqrt{9\ 98\ 56} = 31$
-9
0 98 : 61·1
- 61
37 56

ako bi rezultat oduzimanja bio negativan, znači da cifra jedinica nije dobro procenjena, te se umanji za jedinicu i ponovi postupak.

e) Novi deljenik (3164, odn. 3756) deli se udvostručenim brojem u rezultatu (79·2 = 158, odn. 31·2 = 62); do udvostručene vrednosti rezultata (79·2, odn. 31·2) može se doći i kada se u proizvodu 149·9, odn. 61·1, znak množenja · zameni znakom sabiranja +, tj. 149 + 9 = 158, odnosno 61 + 1 = 62.

f) Zatim se postupak nastavlja kao pod d.

U celini, račun izgleda ovako:

$\sqrt{62\ 72\ 64} = 792$
-49
13 72 : 149·9
-13 41
31 64 :1582·2
-31 64
0

$\sqrt{9\ 98\ 56} = 316$
-9
0 98 : 31·1
- 61
37 56 :626·6
-37 56
0

Četvrti koren ($\sqrt[4]{\ }$) nekog broja računa se tako što se prvo izračuna kvadratni koren, pa se iz rezultata ponovo izračuna kvadratni koren.

Npr.: $\sqrt[4]{614656} = \sqrt{\sqrt{614556}} = \sqrt{784} = 28.$

<u>Primedba</u>: Kvadratni i kubni koreni brojeva 1-100, a često i 1-1000, dati su u svim školskim tablicama.

2. Računske radnje razlomcima

Razlomkom je određen broj izvesnih jednakih delova neke jedinice. Npr.: $\frac{3}{5}$ su tri peta dela jedinice - tri petine, ili $\frac{8}{3}$ su osam trećih delova jedinice - osam trećina. Broj iznad razlomačke linije zove se brojilac (brojnik), a ispod linije - imenilac (nazivnik). Ako je brojilac manji od imenioca, razlomak se zove pravi, npr. $\frac{3}{5}$, a ako je veći od imenioca, razlomak se zove nepravi, npr. $\frac{8}{3}$. Kako nepravi razlomak sadrži i celih jedinica, npr. $\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$, može da se piše i u obliku mešovitog broja, npr.: $2\frac{2}{3}$.

Vrednost razlomka se uveća kad se uveća brojilac ili umanji imenilac, a vrednost razlomka se umanji kad se umanji brojilac ili uveća imenilac.

2.1. Upoređivanje razlomaka

Razlomci mogu da se upoređuju ako imaju jednake ili brojioce ili imenioce. Na primer, za razlomke $\frac{3}{11}$ i $\frac{3}{20}$ utvrđujemo da je vrednost razlomka $\frac{3}{11}$ veća od $\frac{3}{20}$, ili $\frac{3}{11} > \frac{3}{20}$, jer je imenilac drugog razlomka veći od imenioca prvog.

Ili, na primer, vrednost razlomka $\frac{2}{7}$ manja je od vrednosti razlomka $\frac{5}{7}$, ili $\frac{2}{7} < \frac{5}{7}$, jer je brojilac prvog razlomka manji od brojioca drugog.

Razlomke različitih brojilaca i imenilaca moramo prethodno da proširimo (da pomnožimo i brojilac i imenilac istim brojem) da bismo ih sveli ili na zajednički brojilac ili na zajednički imenilac, pa tek tada da ih uporedimo. U tom slučaju zajednički brojilac (imenilac) treba da bude zajednički sadržilac brojilaca (imenilaca) razlomaka koje upoređujemo , najpraktičnije najmanji zajednički sadržilac (NZS) .

Na primer, za razlomke $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{11}{15}$ NZS imenilaca je broj 60. Proširenjem datih razlomaka svešćemo ih na zajednički imenilac $\frac{3\cdot 15}{4\cdot 15}$, $\frac{4\cdot 12}{5\cdot 12}$, $\frac{7\cdot 5}{12\cdot 5}$, $\frac{11\cdot 4}{15\cdot 4}$, te ćemo uporediti njihove brojioce, koji su redom: 45, 48, 35, 44. Kako je $35<44<45<48$, to i za date razlomke utvrđujemo ovu relaciju:

$$\frac{7}{12}<\frac{11}{15}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}\,.$$

Do istog rezultata došli bismo i svođenjem razlomaka na zajednički brojilac.

2.2. Sabiranje i oduzimanje

Razlomci jednakih imenilaca sabiraju se i oduzimaju tako što im se saberu i oduzmu brojioci, a imenilac ostaje nepromenjen. Na primer, $\frac{2}{11}+\frac{8}{11}-\frac{3}{11}+\frac{4}{11}-\frac{1}{11}=$
$=\frac{2+8-3+4-1}{11}=\frac{10}{11}$.

Razlomke različitih imenilaca moramo prethodno da svedemo (proširivanjem) na zajednički imenilac, pa tek tada da ih sabiramo i oduzimamo. Od bezbroj zajedničkih imenilaca izabraćemo najmanji NZI , u stvari NZS svih imenilaca. Na primer:

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{11}{15}-\frac{7}{12}=\frac{4\cdot 12-3\cdot 15+11\cdot 4-7\cdot 5}{60}=\frac{48-45+44-35}{60}=\frac{8}{60}$$

Ako brojilac i imenilac sadrže neke zajedničke činioce, onda se razlomak <u>skrati</u> (podele se i brojilac i imenilac istim brojem).

Tako, na primer, rezultat u prethodnom primeru može da se napiše

$$\frac{8}{60}=\frac{2\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{2}{15}\,,$$

gde smo i brojilac i imenilac razlomka $\frac{8}{60}$ podelili zajedničkim činiocem, brojem 4.

Za razlomke koji nemaju zajedničkih činilaca u brojiocu i imeniocu kaže se da su <u>nesvodljivi</u>. Razlomak $\frac{8}{60}$ je svodljiv, ali razlomak $\frac{2}{15}$ je nesvodljiv.

Za sabiranje i oduzimanje razlomaka i celih brojeva potrebno je da se celi brojevi prethodno prošire zajedničkim imeniocem datih razlomaka. Na primer:

a) $1 - \frac{7}{9} = \frac{9}{9} - \frac{7}{9} = \frac{9-7}{9} = \frac{2}{9}$

b) $\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + 1 - \frac{11}{15} + \frac{7}{12} = \frac{45-48+60-44+35}{60} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{11}{15} + \frac{7}{12} - 2 = \frac{45+48+44+35-120}{60} = \frac{52}{60} = \frac{13}{15}$

Mešoviti brojevi sabiraju se i oduzimaju tako što se posebno saberu ili oduzmu celi brojevi, a posebno razlomljeni (posebno računanje može da se naznači i stavljanjem zagrada), pa se na kraju posebni rezultati saberu ili oduzmu. Npr.:

$$\frac{31}{3} - \frac{27}{5} + \frac{41}{20} = 10\frac{1}{3} - 5\frac{2}{5} + 2\frac{1}{20} = (10-5+2) + (\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{20}) =$$

$$= 9 + \frac{20-24+3}{60} = 9 - \frac{1}{60} = \frac{540-1}{60} = \frac{539}{60},$$

ili:

$$9 - \frac{1}{60} = (8+1) - \frac{1}{60} = 8+(1 - \frac{1}{60}) = 8+ \frac{60-1}{60} = 8+\frac{59}{60} = 8\frac{59}{60}.$$

2.3. Množenje

Razlomak i ceo broj množe se tako što se brojilac pomnoži celim brojem. Npr.:

$$\frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}.$$

No, ako ceo broj i imenilac datog razlomka imaju zajedničkih činilaca, pre radnje množenja korisno je izvršiti prethodno skraćivanje. Npr.: $\frac{3}{16} \cdot 24 = \frac{3}{2 \cdot 8} \cdot 3 \cdot 8 = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$, što može da se izvede i ovako: $\frac{3}{16} \cdot 24 = \frac{3 \cdot 24}{16} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$.

Razlomci se uzajamno množe tako što se pomnože posebno brojioci, a posebno imenioci. Npr.:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{11} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{24}{385}.$$

Ako ma koji brojilac ima zajedničkih činilaca ma sa kojim imeniocem, korisno je i ovde izvršiti prethodno skraćivanje. Npr.:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{21},$$

što može da se izvede i ovako:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{4}{21}.$$

Proizvod razlomka i njegove recipročne vrednosti uvek je jednak 1 :

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = 1.$$

Mešoviti broj množi se celim brojem lakše ako se posebno izvrši množenje celog broja, a posebno razlomljenog celim brojem. Npr.:

$$\frac{263}{11} \cdot 5 = 23\frac{10}{11} \cdot 5 = (23 + \frac{10}{11}) \cdot 5 = 23 \cdot 5 + \frac{10}{11} \cdot 5 = 115 + $$
$$+ \frac{50}{11} = 119\frac{6}{11}.$$

2.4. Deljenje

Deljenje ma kog broja (celog ili razlomljenog) datim razlomkom svodi se na množenje broja recipročnom vrednošću datog razlomka. Npr.:

$$\frac{3}{25} : \frac{4}{7} = \frac{3}{25} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{100},$$

ili, npr.:

$$7 : \frac{3}{5} = 7 \cdot \frac{5}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}.$$

Deljenje mešovitim brojem izvodi se na isti način, pošto se prethodno mešoviti broj izrazi nepravim razlomkom. Npr.:

$$2 : 5\frac{3}{8} = 2 : \frac{43}{8} = 2 \cdot \frac{8}{43} = \frac{16}{43}.$$

Razlomak se deli celim brojem tako što se brojilac podeli celim brojem - ako je deljiv, a ako nije, imenilac se pomnoži celim brojem.

Na primer:

$$\frac{18}{117} : 6 = \frac{18 : 6}{117} = \frac{3}{117}; \quad \frac{5}{9} : 2 = \frac{5}{9 \cdot 2} = \frac{5}{18}.$$

Međutim, uvek je moguće postupiti slično kao i kod deljenja razlomkom: umesto da delimo celim brojem, množimo njegovom recipročnom vrednošću. Npr.:

$$\frac{18}{117} : 6 = \frac{18}{117} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{117}; \quad \frac{5}{9} : 2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18},$$

jer broj 6, odn. 2, mogu da se prikažu kao prividni razlomci: $6 = \frac{6}{1}$, odn. $2 = \frac{2}{1}$.

Ako su brojilac ili imenilac ili oba, već i sami razlomci, onda se takav izraz zove složeni razlomak. Npr.:

$$\frac{\frac{2}{5}}{3}; \quad \frac{4}{\frac{1}{3}}; \quad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{14}{17}};$$

treba da se pazi na to koja je tzv. glavna razlomačka linija. Složeni razlomak pojednostavi se tako što se proširi najmanjim zajedničkim sadržiocem imenilaca svih razlomaka, i onih iznad, i onih ispod glavne razlomačke linije. Npr.:

$$\frac{\frac{2}{5} \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}; \quad \frac{4 \cdot 3}{\frac{1}{3} \cdot 3} = \frac{12}{1} = 12; \quad \frac{\frac{3}{5} \cdot 5 \cdot 17}{\frac{14}{17} \cdot 17 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 17}{14 \cdot 5} = \frac{51}{70}.$$

(NZI = 5) (NZI = 3) (NZI = 5 · 17)

I u slučaju složenijih izraza postupak je isti. Npr.:

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{35}}{\frac{3}{7} + \frac{4}{5}} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - \frac{2}{35} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{\frac{3}{7} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + \frac{4}{5} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 7 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{29}{129};$$

(NZI = 3·5·7);

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}} \cdot \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 4 - 3}{3 \cdot 4 + 2} = \frac{5}{14}; \text{ (NZI } = 3 \cdot 4).$$

2.5. Stepenovanje i korenovanje

Razlomak se stepenuje ili korenuje tako što se posebno stepenuje ili korenuje brojilac, a posebno imenilac. Npr.:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64};$$

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5};$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}.$$

Stepenovanje i korenovanje mešovitih brojeva izvodi se na isti način, pošto se prethodno mešoviti broj izrazi nepravim razlomkom. Npr.:

$$\sqrt{5\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

3. Računske radnje decimalnim brojevima

Decimalni broj je svaki razlomak čiji je imenilac ma koji stepen broja 10. Npr.: $\frac{7}{100} = 0{,}07$; $3\frac{7}{10} = 3{,}7$; $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = 2 + \frac{5}{10} = 2\frac{5}{10} = 2{,}5.$

Često je potrebno da se obični razlomak izrazi decimalnim i obrnuto. Korisno je upamtiti da je:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{3} = 0{,}333\,3\ \ldots\ldots$
$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{2}{3} = 0{,}666\,6\ \ldots\ldots$
$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	$\frac{1}{6} = 0{,}166\,6\ \ldots\ldots$

Broj nula napisan iza poslednje vrednosne cifre u decimalama ne utiče na računanje, pa se i ne piše.

Npr.: 73,200 = 73,2.

Deljenjem brojioca imeniocem dobijamo decimalni broj. Taj broj može da ima beskonačno mnogo decimala samo ako se medju činiocima imenioca nalazi ma i jedan činilac različit od brojeva 2 i 5. Npr.:

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{3\cdot2\cdot5} = 0{,}033\ 3\ \ldots\ldots$$

U protivnom, broj decimala je konačan. Npr.:

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 0{,}04;\quad \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 0{,}062\ 5;\quad \frac{1}{400} = \frac{1}{2^4\cdot 5^2} = 0{,}002\ 5.$$

Ako se deljenjem dva cela broja dobija neograničeni decimalni broj (sa beskonačno mnogo decimala), taj decimalni broj je <u>periodični</u>; naime, cifra ili skup nekoliko cifara, pri deljenju stalno se ponavlja. Npr.: $1 : 3 = 0{,}3333\ldots\ldots = 0{,}\dot{3}$; ovde se trojka stalno ponavlja, te se obeležava tačkom iznad cifre. Ili, npr.: $2 : 7 = 0{,}285714\ 285714\ 285714\ \ldots\ldots = 0{,}\dot{2}8571\dot{4}$;ovde se skup cifara 28514 stalno ponavlja, te se obeleže tačkom iznad prve i poslednje cifre periodičnog skupa.

Ili, na primer, $3 : 14 \quad 0{,}2142857\ 142857\ 142857\ldots\ldots = 0{,}2\ \dot{1}4285\dot{7}$; ovde se, posle 0,2, periodično ponavlja skup 142857, što je i označeno tačkom iznad prve i poslednje cifre periodičnog skupa.

Svaki periodični decimalni razlomak može da se predstavi kao obični (vidi primer 20. u poglavlju: Rešavanje linearnih jednačina s jednom nepoznatom).

3.1. <u>Sabiranje i oduzimanje</u>

Za ove dve računske radnje važno je da se cifre ispravno potpišu, jedinice ispod jedinica, desetice ispod desetica itd., deseti delovi ispod desetih, stoti delovi ispod stotih itd. Dakle, bitno je da se decimalni zarezi nalaze jedan ispod drugog.

Na primer:

123,75	ili	43,701
8		
+ 4,012		- 2,15
135,762		41,551

Pogrešno bi, na primer, bilo ovakvo potpisivanje:

123,75	ili	43,701
8		
+ 40,12		- 215

3.2. Množenje

Množenje decimalnog broja obavlja se kao i množenje celih brojeva, samo u proizvodu mora da se nalazi onoliko decimala koliko ih ima ukupno u činiocima. Npr.:

34,72 · 2,3	ili	623,75 · 23
69 44		1247 50
10 416		187 125
79,856		14346,25

U prvom slučaju jedan činilac sadrži dve decimale, a drugi jednu, ukupno ih je tri decimale; stoga i proizvod sadrži tri decimale. U drugom primeru samo je jedan činilac decimalni broj, i to sa dve decimale; stoga i proizvod ima samo dve decimale.

Množenjem decimalnog broja sa 10, 100, 1000 itd. samo se smanjuje broj decimalnih, odnosno povećava broj dekadnih mesta, i to za jedno mesto, dva, tri itd. Npr.:

$34,271 \cdot 10 = 342,71$
$34,271 \cdot 100 = 3427,1$
$34,271 \cdot 1000 = 34271$
$34,271 \cdot 10000 = 342710$

3.3. Deljenje

Ako količnik dva cela broja nije ceo broj, deljenje se nastavlja kao da su iza cifre jedinice deljenika dopisane nule, ali se u količniku stavlja decimalni zarez čim se dovrši deljenje jedinica, to jest čim se "spusti" prva, prividno dopisana nula. Npr.:

```
  472  :  5 = 94,4
 -45
   22
  -20
    20
   -20
     0
```

Ako je deljenik decimalni broj, postupak je isti kao prethodni, tj. čim završimo deljenje jedinica, odnosno čim "spustimo" prvu decimalu, u količniku stavljamo decimalni zarez, te nastavljamo deljenje. Npr.:

```
1243,51  :  72 = 17,27097 ......... itd.
-72
 523
-504
  19 5
 -14 4
   5 11
  -5 04
      700
     -648
       520
      -504
        160
       ...... itd.
```

Ako je delilac decimalni broj, tada se najpre i deljenik i delilac proširе sa 10, ili 100, ili 1000 itd., već prema tome da li delilac ima jednu decimalu ili dve ili tri itd. Bitno je, dakle, da se podesi da delilac bude ceo broj, bez obzira na to da li je to i deljenik. Tek tada se pristupa radnji deljenja. Npr.:

23 : 1,57 (proširićemo sa 100)

2300 : 157 ;

ili, na primer,

34,72 : 0,531 (proširićemo sa 1 000)

34720 : 531 ;

ili, na primer,

37,2125 : 2,32 (proširićemo sa 100)

3721,25 : 232.

3.4. Stepenovanje

Prilikom stepenovanja decimalnog broja izložiocem 2 (kvadriranje), dati broj se stepenuje, a broj decimalnih mesta se udvostruči. Npr.:

$2,5^2 = 6,25$; $3,75^2 = 14,0625$;

$0,1^2 = 0,01$; $0,2^2 = 0,04$; $0,4^2 = 0,16$

$0,01^2 = 0,0001$; $0,002^2 = 0,000004$; $0,09^2 = 0,0081$

Prilikom stepenovanja decimalnog broja izložiocem 3 (kubiranje), dati broj se stepenuje, a broj decimalnih mesta se utrostruči. Npr.:

$2,1^3 = 9,261$; $5,24^3 = 143,877\ 824$

$0,1^3 = 0,001$; $0,5^3 = 0,125$

$0,01^3 = 0,000\ 001$; $0,04^3 = 0,000\ 064$

$0,007^3 = 0,000\ 000\ 343$

3.5. Korenovanje

Pre nego što se započne korenovanje, izvrši se podela cifara na grupe, i to na levo i na desno od decimalnog zareza.

Za kvadratni koren odvajaju se grupe po dve cifre, za kubni koren po tri cifre itd.; no, zaustavićemo se samo na kvadratnom korenu. Npr.:

$\sqrt{47\ 35,62\ 1}$ ili $\sqrt{5\ 11\ 27,35\ 42}$

Zatim se radnja korenovanja obavlja kao da korenujemo ceo broj pazeći na to da se u rezultatu zapiše decimalni zarez čim se "spusti" grupa neposredno iza decimalnog zareza. Ako poslednja grupa na desnoj strani sadrži jednu cifru, dopiše se nula. Pošto se iscrpu sve cifre u radikandu, ostacima dopisujemo po dve nule. Npr.:

```
√47 35,62 10      6,88158 ....... itd.
-36
 11 35          :  128 · 8
-10 24
  1 11 62       :  1368 · 8
 -1 09 44
     2 18 10    :  13761 · 1
    -1 37 61
       80 49 00 :  137625 · 5
      -68 81 25
       11 67 7500: 1376308 · 8
      -11 01 0464
          66 7036  itd.
```

Bez ikakvog postupka lako je izračunati da je, na primer:

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$	$\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$
$\sqrt{0{,}000\ 1} = 0{,}01$	$\sqrt[3]{0{,}000\ 001} = 0{,}01$
$\sqrt{0{,}000\ 001} = 0{,}001$	$\sqrt[3]{0{,}000\ 000\ 001} = 0{,}001$
$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$	$\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$
$\sqrt{0{,}000\ 9} = 0{,}03$	$\sqrt[3]{0{,}064} = 0{,}4$
$\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$	$\sqrt[3]{0{,}000\ 027} = 0{,}03$
$\sqrt{0{,}122\ 5} = 0{,}35$	$\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$
$\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$	$\sqrt[3]{0{,}000\ 343} = 0{,}07$,

što je lako proveriti obrnutom računskom radnjom, tj. stepenovanjem rezultata. Često kandidati greše u korenovanju. Stoga navedimo nekoliko takvih primera:

$\sqrt{0{,}1} \neq 0{,}1$	$\sqrt[3]{0{,}1} \neq 0{,}1$
$\sqrt{0{,}025} \neq 0{,}5$	$\sqrt[3]{0{,}01} \neq 0{,}1$
$\sqrt{0{,}001} \neq 0{,}1$	$\sqrt[3]{0{,}8} \neq 0{,}2$
$\sqrt{2{,}5} \neq 0{,}5$	$\sqrt[3]{0{,}27} \neq 0{,}3$

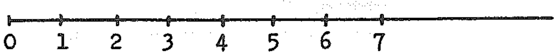
$\sqrt{0,81} \neq 0,09$ $\qquad$ $\sqrt[3]{1,25} \neq 0,5$

$\sqrt{6,4} \neq 0,8$ $\qquad$ $\sqrt[3]{6,4} \neq 0,4$

Proverom, utvrdićemo lako grešku, ako uzmemo u obzir da se kvadriranjem broj decimala udvostruči , a kubiranjem - utrostruči.

4. Brojna linija

Na polupravoj obeležimo niz tačaka na proizvoljnom, ali međusobno jednakom rastojanju i početnoj tački pridružimo broj nulu (0), narednoj desnoj tački broj 1, narednoj tački broj 2, zatim opet narednoj - broj 3 itd.



Na taj način uređena poluprava predstavlja nam brojnu liniju.

Brojevi 1,2,3,4,5.......(celi, pozitivni) pripadaju skupu <u>prirodnih brojeva</u>.

Svakom prirodnom broju odgovara jedna određena tačka na brojnoj liniji. Ukoliko je broj veći, utoliko mu je odgovarajuća tačka više udaljena od početne tačke.

Prema tome, za dva različita broja: većem od njih pripada tačka desno od one koja pripada manjem broju, i obrnuto, manjem broju pripada tačka levo od one koja pripada većem broju. Isto tako, za dve tačke: levoj tački pridružen je manji broj, a desnoj - veći.

Razlomcima takođe mogu da se odrede odgovarajuće tačke na brojnoj liniji. Npr.: razlomku $\frac{2}{3}$ odredićemo odgovarajuću tačku tako što ćemo duž između tačaka sa pridruženim brojevima 0 i 1 podeliti na 3 jednaka dela (trećine) i od početne tačke odbrojati dva takva dela (dve trećine).

Razlomku $\frac{53}{8} = 6\frac{5}{8}$ odredićemo odgovarajuću tačku tako što ćemo duž između tačaka pridruženih brojevima 6 i 7 podeliti na 8 jednakih delova (osmine) i od tačke pridružene broju 6 odbrojati 5 takvih delova (pet osmina).

Decimalnom broju određuje se odgovarajuća tačka na brojnoj liniji tako što se duž između dve tačke koje su pridružene uzastopnim celim brojevima podeli na 10, 100, 1000 itd. jednakih delova, već prema tome koliko dati broj ima decimalnih mesta. Npr. broju 2,77 odgovara tačka između tačaka pridruženih brojevima 2 i 3, i to udaljena od tačke pridružene broju 2 za 77 stotih delova udesno.

Beskonačni periodični decimalni brojevi uvek mogu da se izraze običnim razlomkom, odnosno mešovitim brojem, te, prema tome, i ovi brojevi mogu da se predstave na brojnoj liniji.

Svi brojevi: celi, razlomljeni, mešoviti, konačni decimalni i beskonačni periodični decimalni - pripadaju skupu takozvanih <u>racionalnih brojeva</u>. Međutim, beskonačni decimalni brojevi koji nisu periodični, kao što su, na primer, $\sqrt{2} = 1,414....$, $\sqrt{3} = 1,732.....$, pripadaju skupu <u>iracionalnih brojeva</u>. Postoji bezbroj beskonačnih decimalnih brojeva koji ne predstavljaju rezultat nijedne algebarske operacije (deljenja ili korenovanja), kao što je Arhimedov broj $\pi = 3,14159......$, koji pripadaju skupu <u>transcendentnih brojeva</u>.

Razlika između iracionalnih i transcendentnih brojeva je u tome što se na brojnoj liniji, konstruktivnim putem, mogu predstaviti: prvi - tačno, a drugi - samo približno. Svi racionalni, iracionalni i transcendentni brojevi pripadaju skupu <u>realnih brojeva</u>. Prema tome, svaki realni broj može da se predstavi na brojnoj liniji i, obrnuto, svakoj tački brojne linije pridružen je neki realan broj.

II GLAVA

MERENJE I MERE

1. Osnovne i izvedene jedinice merenja

Izmeriti neku veličinu znači uporediti je sa drugom veličinom koja je izabrana za jedinicu merenja. Ako je veličina veća od jedinice kojom se meri, merni broj veličine veći je od 1, a ako je manja, merni broj je pravi razlomak.

Izvedene jedinice su umnošci i podeoci osnovnih jedinica. Za izvedene jedinice, veće od osnovne, umnošci su:

deka	da	$= 10^{1}$	jedinica
hekto	h	$= 10^{2}$	"
kilo	k	$= 10^{3}$	"
mega	M	$= 10^{6}$	"
giga	G	$= 10^{9}$	"
tera	T	$= 10^{12}$	"

Za izvedene jedinice, manje od osnovne, podeoci (delovi) su:

deci	d	$= \frac{1}{10}$	deo	jedinice
cenli	c	$= \frac{1}{10^{2}}$	"	"
mili	m	$= \frac{1}{10^{3}}$	"	"
mikro	μ	$= \frac{1}{10^{6}}$	"	"
nano	n	$= \frac{1}{10^{9}}$	"	"
pico	p	$= \frac{1}{10^{12}}$	"	"

2. Jedinice za merenje dužine

Osnovna jedinica za merenje dužine je metar (1 m). Metar je definisan prototipom šipke od legure platine i iridijuma koja se čuva u Međunarodnom birou za mere i težine.

Navedimo neke izvedene jedinice:

a) veće od 1 m - dekametar (1 dam = 10 m), hektometar (1 hm = 100 m), kilometar (1 km = 1 000 m);

b) manje od 1 m - decimetar (1 dm = 0,1 m, odnosno 1 m = 10 dm), centimetar (1 cm = 0,01 m, odn. 1 m = 100 cm), milimetar (1 mm = 0,001 m, odn. 1 m = 1 000 mm).

Pretvaranje jednih jedinica u druge izvodi se množenjem:

a) sa 10, 100, 1 000 itd. ako veću jedinicu treba da izrazimo pomoću manje;

b) sa 0,1; 0,01; 0,001 itd. ako manju jedinicu treba da izrazimo pomoću veće.

Na primer:

8,32 m = 8,32 · 10 dm = 83,2 dm
8,32 m = 8,32 · 100 cm = 832 cm
8,32 m = 8,32 · 1 000 mm = 8320 mm

83 mm = 83 · 0,1 cm = 8,3 cm
83 mm = 83 · 0,01 dm = 0,83 dm
83 mm = 83 · 0,001 m = 0,083 m
33 m = 33 · 10 dm = 330 dm
2320 m = 2320 · 0,001 km = 2,32 km.

3. Jedinice za merenje površine

Površina se meri takozvanim kvadratnim jedinicama. Nazivi jedinica su isti kao i za dužinu, samo sa dodatkom "kvadratni" i obeležavaju se kvadratnim simbolom m^2, cm^2 ...

Kvadratna jedinica predstavlja kvadrat čija je stranica jednaka dužini jedinice kojom se meri. Tako, npr., površina od 1 m^2 predstavljena je kvadratom čija je stranica dužine 1 m.

Kvadrat čija je dužina stranice 5 m imaće površinu $5 \cdot 5\ m^2 = 5^2\ m^2 = 25\ m^2$. Uopšte, merni broj površine kvadrata dobije se kad se podigne na kvadrat merni broj dužine stranice.

Pretvaranje jednih jedinica u druge izvodi se množenjem:

a) sa 10^2, 100^2, $1\ 000^2$ itd. ako veću jedinicu treba da izrazimo pomoću manje;

b) sa $0,1^2$; $0,01^2$; $0,001^2$ itd. ako manju jedinicu treba da izrazimo pomoću veće.

Na primer:

$$14\ m^2 = 14 \cdot 10^2\ dm^2 = 1400\ dm^2$$
$$14\ m^2 = 14 \cdot 100^2\ cm^2 = 140\ 000\ cm^2$$
$$53\ cm^2 = 53 \cdot 10^2\ mm^2 = 5\ 300\ mm^2$$
$$35\ 625\ m^2 = 35\ 625 \cdot 0,001^2\ km^2 = 0,035\ 625\ km^2$$
$$37\ 930\ mm^2 = 37\ 930 \cdot 0,1^2\ cm^2 = 379,30\ cm^2$$
$$37\ 930\ mm^2 = 37\ 930 \cdot 0,01^2\ dm^2 = 3,793\ 0\ dm^2$$

U poljoprivredi i šumarstvu u upotrebi su još i ove jedinice: ar ($1\ a = 100\ m^2$) i hektar ($1\ ha = 10^4\ m^2$).

Na primer:

$$40\ a = 40 \cdot 0,000\ 1\ ha = 0,004\ ha$$
$$0,35\ ha = 0,35 \cdot 100\ a = 35\ a,$$

ili:

$$796\ m^2 = 796 \cdot 0,01\ a = 7,96\ a$$
$$796\ m^2 = 796 \cdot 0,000\ 1\ ha = 0,079\ 6\ ha.$$

4. Jedinice za merenje zapremine

Zapremina se meri takozvanim kubnim jedinicama. Nazivi jedinica su isti kao za dužinu, samo se obeležavaju kubnim simbolom m^3, cm^3 ...

Kubna jedinica predstavlja kocku (na latinskom:

cubus) čija je ivica jednaka dužini jedinice kojom se meri. Tako, npr., zapremina od 1 m^3 predstavljena je kockom čija je ivica dužine 1 m.

Kocka, čija je dužina ivice 5 m imaće zapreminu $5 \cdot 5 \cdot 5\ m^3 = 5^3\ m^3 = 125\ m^3$. Uopšte, merni broj zapremine kocke dobije se kad se podigne na kub merni broj dužine ivice.

Pretvaranje jednih jedinica u druge izvodi se množenjem:

a) sa 10^3, 100^3, $1\ 000^3$ itd. ako veću jedinicu treba da izrazimo pomoću manje;

b) sa $0{,}1^3$; $0{,}01^3$; $0{,}001^3$ itd. ako manju jedinicu treba da izrazimo pomoću veće.

Na primer:

$12\ m^3 = 12 \cdot 10^3\ dm^3 = 12\ 000\ dm^3$

$12\ m^3 = 12 \cdot 100^3\ cm^3 = 12\ 000\ 000\ cm^3$

$0{,}135\ m^3 = 0{,}135 \cdot 10^3\ dm^3 = 135\ dm^3$

$25\ cm^3 = 25 \cdot 0{,}1^3\ dm^3 = 0{,}025\ dm^3$

$335\ 720\ m^3 = 335\ 720 \cdot 0{,}001^3\ km^3 = 0{,}000\ 335\ 72\ km^3$

$27\ 500\ mm^3 = 27\ 500 \cdot 0{,}1^3\ cm^3 = 27{,}5\ cm^3$

$27\ 500\ mm^3 = 27\ 500 \cdot 0{,}01^3\ dm^3 = 0{,}027\ 5\ dm^3$

5. Jedinice za merenje težine

Merenje težina svodi se na upoređivanje masa. Osnovna jedinica za merenje mase je kilogram (1 kg). Kilogram je definisan prototipom koji se, kao i prototip metra, čuva u Međunarodnom birou za mere i težine.

Navedimo neke izvedene jedinice:

a) veće od 1 kg : metrička centa (1 q = 100 kg), tona (1 t = 1 000 kg); megatona (1 Mt = 1 000 000 t);

b) manje od 1 kg : gram (1 g = 0,001 kg, odnosno 1 kg = 1 000 g), dekagram (1 dkg = 10 g = 0,01 kg), miligram (1 mg = 0,001 g, odnosno 1 g = 1 000 mg).

Pretvaranje jednih jedinica u druge izvodi se množenjem:

a) za 10, 100, 1 000 itd. ako veću jedinicu treba da izrazimo pomoću manje;

b) sa 0,1; 0,01; 0,001 itd. ako manju jedinicu treba da izrazimo pomoću veće.

Na primer:

250 kg = 250 · 0,001 t = 0,25 t
250 kg = 250 · 0,01 q = 2,5 q
0,35 t = 0,35 · 1 000 kg = 350 kg
0,35 t = 0,35 · 10 q = 3,5 q
27,5 q = 27,5 · 100 kg = 2 750 kg
27,5 q = 27,5 · 0,1 t = 2,75 t
3,5 kg = 3,5 · 1 000 g = 3 500 g
3,5 kg = 3,5 · 100 dkg = 350 dkg
750 g = 750 · 0,001 kg = 0,75 kg
750 g = 750 · 0.1 dkg = 75 dkg

6. Jedinice za merenje količine tečnosti

Osnovna jedinica za merenje količine tečnosti je litar (1 ℓ). Litar tečnosti zauzima prostor koji se neznatno razlikuje od zapremine 1 dm^3, tačnije, 1 ℓ = 1,000 028 dm^3. Stoga se jedinicom za merenje tečnosti - litrom izražavaju i zapremine sudova (bojleri, lonci, kazani, burad itd.).

Navedimo neke izvedene jedinice:
hektolitar (1 hℓ = 100 ℓ), decilitar (1 dℓ = 0,1 ℓ, odnosno 1 ℓ = 10 dℓ), centilitar (1 cℓ = 0,01 ℓ, odn. 1 ℓ = 100 cℓ).

Pretvaranje jednih jedinica u druge izvodi se množenjem:

a) sa 10, 100 - ako veća jedinica treba da se izrazi pomoću manje;

b) sa 0,1; 0,01 - ako manja jedinica treba da se izrazi pomoću veće.

Na primer:

$3{,}45\ h\ell = 3{,}45 \cdot 1\ 000\ \ell = 3\ 450\ell$

$4\ 712\ell = 4\ 712 \cdot 0{,}01\ h\ell = 47{,}12\ h\ell$

$3{,}25\ \ell = 3{,}25 \cdot 10\ d\ell = 32{,}5\ d\ell$

$3{,}25\ \ell = 3{,}25 \cdot 100\ c\ell = 325\ c\ell$

$75\ d\ell = 75 \cdot 0{,}1\ell = 7{,}5\ell$

$3\ 170\ c\ell = 3\ 170 \cdot 0{,}01\ell = 31{,}7\ell$.

7. Jedinice za merenje uglova

Ugao je deo ravni koji obrazuju dve poluprave povučene iz zajedničke tačke. Te poluprave zovu se kraci, a zajednička tačka - teme ugla. Ako opišemo kružnicu i podelimo je na 360 jednakih delova, onda mera ugla čije je teme u središtu kružnice i čiji kraci prolaze kroz dve uzastopne podeone tačke na kružnici - iznosi 1 stepen (1°).

Dve poluprave sa zajedničkom polaznom tačkom obrazuju u ravni dva ugla : manji, ispupčen (konveksan) i veći, udubljen (konkavan). Stoga dve uzajamno normalne poluprave obrazuju dva ugla, jedan od 90° (pravi ugao) i drugi od 270°. Ako kraci ugla obrazuju pravu liniju, oba ugla koji oni obrazuju iznose po 180° (opruženi ugao).

60 puta manja jedinica od stepena je minuta ($1' = \frac{1}{60}{}^\circ$, odnosno $1^\circ = 60'$), a 60 puta manja jedinica od minute je sekunda ($1'' = \frac{1}{60}{}'$, odnosno $1' = 60''$).

Pretvaranje jednih jedinica u druge izvodi se množenjem:

a) sa 60, odn. sa 60^2 ($= 3\ 600$) ako veća jedinica treba da se izrazi pomoću manje;

b) sa $\frac{1}{60}$, odn. sa $\frac{1}{60^2}$ ($= \frac{1}{3600}$) ako manja jedinica treba da se izrazi pomoću veće.

Na primer:

$2^\circ = 2 \cdot 60' = 120'$

$2^\circ = 2 \cdot 60 \cdot 60'' = 7\ 200''$

$6' = \frac{1}{60} \cdot 6^\circ = 0^\circ{,}1$

$$12'' = 12 \cdot \frac{1'}{60} = 0',2 = \frac{1'}{5}$$

$$15'' = 15 \cdot \frac{1^\circ}{60^2} = 0^\circ{,}004\dot{1}\dot{6}$$

Primeri računskih radnji uglovima:

Primer 1.

$$\begin{array}{r} 37^\circ 12' 43'' \\ + \underline{\ \ 5^\circ\ 6' 12''} \\ 42^\circ 18' 55'' \end{array}$$

Primer 2.

$$\begin{array}{r} 37^\circ 12' 43'' \\ - \underline{\ \ 5^\circ\ 6' 12''} \\ 32^\circ\ 6' 31'' \end{array}$$

Primer 3.

$$\begin{array}{r} 24^\circ 17' 39'' \\ + \underline{305^\circ 49' 23''} \\ 329^\circ 66' 62'' = \\ = 329^\circ 67'\ 2'' = \\ = 330^\circ\ 7'\ 2'' \end{array}$$

Primer 4.

$$\begin{array}{r} 47^\circ 12'\ 5'' \\ - \underline{33^\circ 40' 16''} \end{array} \quad \text{ili} \quad \begin{array}{r} 46^\circ 71' 65'' \\ - \underline{33^\circ 40' 16''} \\ 13^\circ 31' 49'' \end{array}$$

Primer 5.

$$(12^\circ 43' 15'') \cdot 3 = 36^\circ 129' 45'' = 38^\circ 9' 45''.$$

Primer 6.

$$(43^\circ 17' 26'') : 4.$$

Prvo delimo stepené sa 4, ostatku, pretvorenom u minute, dodamo broj minuta i taj zbir delimo sa 4, zatim ostatku, pretvorenom u sekunde, dodamo broj sekundi i taj zbir delimo sa 4.

$$\begin{array}{l} 43^\circ : 4 = 10^\circ \\ \underline{-40} \\ \ \ 3^\circ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3^\circ = 180' \\ + \underline{17'} \\ 197' : 4 = 49' \\ \underline{-16} \\ 37 \\ \underline{-36} \\ 1' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1' = 60'' \\ + \underline{26''} \\ 86'' : 4 = 21'',5 \\ \underline{-8} \\ 06 \\ \underline{-4} \\ 20 \end{array}$$

Prema tome, $(43^\circ 17' 26'') : 4 = 10^\circ 49' 21'',5$.

Primer 7. Naći ugao β komplementan (dopunski do 90°)uglu $\alpha = 32^\circ\ 16' 42''$.

$\beta = 90^\circ - \alpha$

$$\begin{array}{r} 90^\circ \\ \underline{-32^\circ 16' 42''} \end{array} \quad \text{ili} \quad \begin{array}{r} 89^\circ 59' 60'' \\ \underline{-32^\circ 16' 42''} \\ \beta = 57^\circ 43' 18'' \end{array}$$

Primer 8. Naći ugao γ suplementan (dopunski do 180°) uglu $\delta = 93^\circ 25' 14''$.

$\gamma = 180^\circ - \delta$

$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ \underline{-\ 93^\circ 25' 14''} \end{array} \quad \text{ili} \quad \begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ \underline{-\ 93^\circ 25' 14''} \\ \gamma = 86^\circ 34' 46'' \end{array}$$

Ako kružnicu podelimo na 400 jednakih delova, onda mera ugla čije je teme u središtu kružnice i čiji kraci prolaze kroz dve uzastopne podeone tačke na kružnici - iznosi 1 gradus (1^g) (francuska mera). Pravi ugao, prema tome, iznosi 100^g.

Ako opišemo kružnicu i na kružnici odaberemo luk koji je po dužini jednak poluprečniku te kružnice, onda mera ugla čije je teme u središtu kružnice i čiji kraci prolaze kroz krajnje tačke određenog luka - iznosi 1 radijan (1 rad $\approx 57^\circ$). Uglu od 180° odgovara ugao od π radijana (π - Arhimedov broj).

Pretvaranje radijana u stepene izvodi se množenjem sa $\frac{180^\circ}{\pi}$, a pretvaranje stepena u radijane množenjem $\frac{\pi}{180}$.

Na primer:

$$15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

$$30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$120^\circ = 120 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$145^\circ = 145 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \pi \text{ rad}$$

$$270^\circ = 270 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$
$$360^\circ = 360 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 2\pi \text{ rad};$$

obrnuto:

$$\frac{\pi}{12} \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 15^\circ$$
$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ \quad \text{itd.}$$

8. Jedinice za merenje vremena

Osnovna jedinica za merenje vremena je tropska godina 1900.0. Izvedene jedinice su: sekunda (1 s = = 1/31556925,975 pomenute godine), minuta (1 min = 60 s), čas (1 h = 60 min), dan (1 d = 24 h), sedmica (7 dana), godina (1 a = 365,242 198 78 d), vek ili stoleće (100 godina); mesec (12 meseci = 1 godina) ima ili 30, ili 31 dan, a februar 28, ili, u prestupnoj godini, 29 dana; u računanju godina, meseci i dana (npr., za radni staž) uzima se da mesec ima 30 dana (1 mes = 30 d).

Pretvaranje časova u minute i minuta i sekunde izvodi se množenjem sa 60.

Npr.: 3 h = 3 · 60 min = 180 min
3 h = 3 · 60 · 60 s = 1 080 s
15 min = 15 · 60 s = 900 s

Pretvaranje sekundi u delove minute i minuta u delove časa izvodi se deljenjem sa 60.

Npr.:
$15 \text{ min} = 15 : 60 = \frac{1}{4} \text{ h}$
$45 \text{ s} = 45 : 60 = \frac{3}{4} \text{ min}$
$30 \text{ s} = 30 : (60 \cdot 60) = \frac{1}{120} \text{ h}$

Pretvaranje dana u časove izvodi se množenjem sa 24.

Npr.: $2\frac{1}{2}$ dana iznosi $\frac{5}{2} \cdot 24 \text{ h} = 60 \text{ h}$.

Pretvaranje časova u delove dana izvodi se deljenjem sa 24. Npr.: 20 h iznosi $20 : 24 = \frac{4}{5}$ dana.

Primeri računskih radnji mera za vreme:

Primer 1.

$$\begin{array}{rrl} & 13\ d & 6\ h \\ + & \underline{18\ d} & \underline{22\ h} \\ & 31\ d & 28\ h = 32\ d\ 4\ h = 1\ mes\ 2\ d\ 4\ h \end{array}$$

Primer 2.

$$\begin{array}{rrr} & 12\ d & 7\ h \\ - & \underline{9\ d} & \underline{9\ h} \end{array} \quad \text{ili} \quad \begin{array}{rrr} & 11\ d & 31\ h \\ - & \underline{9\ d} & \underline{9\ h} \\ & 2\ d & 22\ h \end{array}$$

Primer 3.

$$(5\ d\ \ 11\ h) \cdot 6 = 30\ d\ \ 66\ h = 30\ d + (2 \cdot 24 + 18)\ h =$$
$$= 32\ d\ \ 18\ h = 1\ mes\ 2\ d\ 18\ h$$

Primer 4.

$$(15\ d\ 16\ h) : 6 = \left[(12 + 3)\ d\ 16\ h\right] : 6 =$$
$$= \left[12\ d\ (3 \cdot 24 + 16) h\right] : 6 = (12\ d\ 88\ h) : 6 =$$
$$= (12 : 6) d (88 : 6) h = 2\ d\ 14\tfrac{2}{3}\ h = 2\ d\ 14\ h\ 40\ min$$

Primer 5.

$$\begin{array}{rrrrl} & 5\ h & 12\ min & 43\ s & \\ + & \underline{12\ h} & \underline{49\ min} & \underline{28\ s} & \\ & 17\ h & 61\ min & 71\ s & = \\ = & 17\ h & 62\ min & 11\ s & = \\ = & 18\ h & 2\ min & 11\ s & \end{array}$$

Primer 6.

$$\begin{array}{rrrr} & 3\ h & 0\ min & 12\ s \\ - & & \underline{7\ min} & \underline{43\ s} \end{array} \quad \text{ili} \quad \begin{array}{rrrr} & 2\ h & 59\ min & 72\ s \\ - & & \underline{7\ min} & \underline{43\ s} \\ & 2\ h & 42\ min & 29\ s \end{array}$$

Primer 7. Obračunati radni staž za lice koje je bilo u radnom odnosu od 12. marta 1949. do 18. jula 1963.

	1962 god.	6 mes.	18 d.	... (18.VII 1963)
–	1948 god.	2 mes.	12 d.	... (12.III 1949)
Radni staž:	14 god.	4 mes.	6 d.	

III GLAVA

RAZMERE I PROPORCIJE

1. Upoređivanje veličina

Dve ili više veličina mogu međusobno da se uporede samo ako su iste vrste, ili sve neimenovani brojevi. Npr., mogu da se uporede predmeti ili samo prema težini, ili samo prema visini, ili samo prema zapremini. Ne mogu da se upoređuju predmeti ako se za jedan uzme u obzir njegova težina, za drugi - visina, za treći - zapremina.

Upoređenje može da bude dvojako:

a) na pitanje za koliko je jedna veličina veća, odnosno manja od druge veličine - obrazuje se razlika tih veličina i odgovor je rezultat oduzimanja manje veličine od veće; ako su veličine imenovane, i rezultat je imenovana veličina, a ako su neimenovane, i rezultat je neimenovani broj;

b) na pitanje koliko puta je jedna veličina veća, odnosno manja od druge veličine - obrazuje se količnik tih veličina i odgovor je neimenovan broj koji predstavlja količnik mernih brojeva tih veličina. Taj količnik zove se razmera.

Npr., u jednom preduzeću ima 70 kvalifikovanih i 20 nekvalifikovanih radnika. Na pitanje za koliko ima kvalifikovanih radnika više nego nekvalifikovanih - računamo 70 - - 20 = 50 i odgovor je: za 50 radnika. Isti se račun obavi i isti se odgovor dobija i na pitanje za koliko ima nekvalifikovanih radnika manje od kvalifikovanih. Međutim, na pitanje koliko puta ima kvalifikovanih radnika više nego nekvalifikovanih - računamo $70 : 20 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ i odgovor je: ima ih $\frac{7}{2}$ ili $3\frac{1}{2}$ puta više. Isti se račun obavi i isti se odgovor dobija na pitanje koliko puta ima nekvalifikovanih manje nego kvalifikovanih radnika.

Pogrešno je reći za koliko puta je neka veličina veća ili manja od druge. Ili: za koliko (oduzimanje), ili: koliko puta (deljenje), a nikako: za koliko puta!

2. Razmera

Kao što je rečeno, broj koji kazuje koliko je puta jedna veličina sadržana u drugoj, zove se razmera. Razmera ima sve osobine količnika, tj. može i da se proširi i da se skrati. Npr., razmera 10 : 2 skraćena sa 2 glasi 5 : 1, ili proširena sa 50 glasi 500 : 100; ili, npr., razmera 3 : 1 proširena sa 5 glasi 15 : 5 itd.

Razmera može da se piše i u obliku razlomaka: $\frac{10}{2}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{500}{100}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{3}{1}$ itd.

3. Proporcija

Ako su vrednosti dveju razmera jednake, npr., vrednosti razmera $\frac{10}{2}$ i $\frac{500}{100}$, onda se izraz $\frac{10}{2} = \frac{500}{100}$, odnosno $10 : 2 = 500 : 100$, zove proporcija; čitamo: 10 prema 2 odnosi se kao 500 prema 100. Brojevi 10, 2, 500 i 100 su redom, prvi, drugi, treći i četvrti član proporcije. Prvi i četvrti član su spoljašnji, a drugi i treći su unutrašnji članovi proporcije.

Navedimo neka osnovna pravila koja važe za proporcije:

Proizvod spoljašnjih članova jednak je proizvodu unutrašnjih članova ($10 \cdot 100 = 2 \cdot 500$).

Ma koji spoljašnji član jednak je proizvodu unutrašnjih podeljenom drugim spoljašnjim članom ($10 = \frac{2 \cdot 500}{100}$; $100 = \frac{2 \cdot 500}{10}$).

Ma koji unutrašnji član jednak je proizvodu spoljašnjih podeljenom drugim unutrašnjim članom ($2 = \frac{10 \cdot 100}{500}$; $500 = \frac{10 \cdot 100}{2}$).

Ako spoljašnjim (unutrašnjim) članovima promenimo mesta, dobija se opet proporcija (100 : 2 = 500 : 10 ; 10 : 500 = 2 : 100).

Ako unutrašnje članove zamenimo spoljašnjim, a spoljašnje unutrašnjim, dobija se opet proporcija (2 : 10 = = 100 : 500).

Zbir prvog i drugog člana prema njihovoj razlici odnosi se kao zbir trećeg i četvrtog prema njihovoj razlici ($\frac{10 + 2}{10 - 2} = \frac{500 + 100}{500 - 100}$).

Odvojene proporcije 10 : 2 = 5 : 1 i 500 : 100 = = 5 : 1 mogu da se slože u jednu, produženu, 10 : 2 = 500 : : 100 = 5 : 1, ili u obliku produžene razmere, 10 : 500 : 5= = 2 : 100 : 1.

4. Proporcionalne veličine

Ma koje dve vrednosti neke veličine i dve odgovarajuće vrednosti druge veličine mogu da obrazuju proporciju. Za odnose "koliko puta više - toliko puta više" i "koliko puta manje - toliko puta manje" obrazuje se upravna(direktna)proporcija.

Npr., za 12 sanduka neke robe plaća se prevoz 30 dinara, a za 20 sanduka 50 dinara. Za brojeve 12, 20, 30 i 50 obrazujemo proporciju:
12 sanduka : 20 sanduka = 30 dinara : 50 dinara,
odnosno: 12 : 20 = 30 : 50.

Proporcija je upravna (direktna), jer je cena prevoza veća ukoliko ima više sanduka.

Za odnose "koliko puta više - toliko puta manje" i "koliko puta manje - toliko puta više" obrazuje se obrnuta (indirektna) proporcija.

Npr., 3 traktora preoru zadružne njive za 8 dana. Sa 6 traktora posao bi bio završen za 4 dana. Za brojeve 3, 6, 8 i 4 obrazujemo proporciju:
3 traktora : 6 traktora = 4 dana : 8 dana,
odnosno: 3 : 6 = 4 : 8

Proporcija je obrnuta (indirektna), jer sa više traktora posao se obavi za manje dana.

Ima problema za koje nema smisla da se obrazuje proporcija. Npr., jedan časovničar opravi neki određeni kvar na ručnom časovniku za 2 časa. Četiri časovničara, prema obrnutoj proporciji, provela bi na istoj opravci $\frac{1}{2}$ časa, ali račun nema smisla ni započinjati, jer nad jednim ručnim časovnikom nema mesta ni za dvojicu, a kamoli za četvoricu.

5. Prosto pravilo trojno

Od četiri člana neke proporcije jedan može da bude nepoznat (x). Prema pravilima o izračunavanju ma kog spoljašnjeg ili unutrašnjeg člana proporcije, nepoznati član može da se izračuna pomoću ostala tri poznata člana. Stoga se pravilo za izračunavanje nepoznatog člana proporcije i zove pravilo trojno.

Npr., iz proporcije $x : 2 = 3 : 5$ sledi $x = \frac{2 \cdot 3}{5}$, ili iz proporcije $5 : 3 = x : 7$ sledi $x = \frac{5 \cdot 7}{3}$ itd.

6. Procent

U razlomku, čiji je imenilac 100, brojilac izražava vrednost tog razlomka u stotim delovima, dakle u procentima, koji se obeležavaju znakom %. Znači, $\frac{9}{100}$ ili 0,09 isto je što i 9%. Ili, npr., $\frac{9}{10\,000} = \frac{0,09}{100}$ isto je što i 0,09%. Obrnuto, 15% isto je što i $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$. Ili, npr., $3\frac{1}{2}\% = \frac{7}{2}\%$ isto je što i $\frac{\frac{7}{2}}{100} = \frac{7}{200}$; $50\% = \frac{1}{2}$; $25\% = \frac{1}{4}$; $75\% = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{3} = 33,\dot{3}\% \approx 33\%$; $\frac{2}{3} = 66,\dot{6}\% \approx 67\%$.

Ako treba da izračunamo vrednost datog procenta neke veličine, onda tu veličinu pomnožimo razlomkom čiji je brojilac jednak datom procentu, a imenilac je 100. Npr., 6% od 1 700 je $1\,700 \cdot \frac{6}{100} = 102$. Ili, npr., 97% nekih proizvoda je ispravno, znači, na 73 200 završenih primeraka tog proizvoda ima 73 200 $\cdot \frac{97}{100}$ = 732 $\cdot$ 97 = 71 004 ispravna, odnosno ima 3% neispravnih, što iznosi 73 200 $\cdot \frac{3}{100}$ = 732 $\cdot$ 3 = = 2 196 primeraka.

7. Prost interesni račun

Novčani ulozi u bankama (štednja) povećaju se za interes. Isto tako, i zajmovi koje daju banke (krediti) vraćaju se bankama sa interesom. Banke posluju po složenom interesnom računu: jednogodišnje kamate dodaju se ulogu, odnosno oduzimaju se od kredita, na kraju svake godine. U našim primerima, međutim, pretpostavićemo da posluju po prostom interesnom računu.

Interes je, u stvari, određeni procent uložene sume za izvesno vreme, najčešće za godinu dana.

Na primer, neko uloži svotu od 300 000 dinara sa interesom od 7% godišnje. 7% od 300 000 iznosi 300 000 $\cdot \frac{7}{100}$ = = 21 000. Znači da se ulog za godinu dana poveća za 21 000 dinara, tj. ulagač posle godinu dana raspolaže svotom od 321 000 dinara. Za 6 godina interes se poveća 6 puta, tj. za 6 $\cdot$ 21 000 = 126 000 dinara. Znači, posle 6 godina ulagač ima ukupno 426 000 dinara.

Ili, na primer, neko dobije kredit u iznosu od 250 000 dinara, na tri godine, sa 8% godišnjeg interesa. Dakle, zajmodavcu treba da se vrati posle tri godine ukupno 250 000 + 250 000 $\cdot \frac{8}{100} \cdot$ 3 = 250 000 + 60 000 = 310 000 dinara.

U zadacima interesnog računa može da bude poznato:

1) Ulog, procent i vreme - traži se interes.

Interes se dobija kad se proizvod uloga, procenta i vremena podeli sa 100.

Npr., izračunati interes na uloženu svotu od 43 000 din. uz 8% interesa godišnje, na 6 godina.

Odgovor: interes $i = \frac{43\,000 \cdot 8 \cdot 6}{100} = 20\,640$ din.

2) Ulog, interes i vreme – traži se procent.

Procent se dobija kad se interes pomnoži sa 100, a zatim podeli proizvodom uloga i vremena.

Npr., na ulog od 43 000 din. ulagač je posle 6 godina dobio interes u iznosu od 20 640 din. izračunati procent interesa za godinu dana.

Odgovor: procent $p = \frac{20\ 640 \cdot 100}{43\ 000 \cdot 6} = 8.$

3) Procent, interes i vreme – traži se ulog.

Ulog se dobija kad se interes pomnoži sa 100, a zatim podeli proizvodom procenta i vremena.

Npr., na uloženu svotu, uz 8% interesa godišnje, interes je posle 6 godina iznosio 20 640 din. izračunati ulog.

Odgovor: ulog $u = \frac{20\ 640 \cdot 100}{8 \cdot 6} = 43\ 000$ din.

4) Ulog, procent i interes – traži se vreme.

Vreme se dobija kad se interes pomnoži sa 100, a zatim podeli proizvodom uloga i procenta.

Npr., na ulog od 43 000 din. uz 8% interesa godišnje, interes je iznosio 20 640 din, izračunati vreme na koje je suma bila uložena.

Odgovor: vreme $t = \frac{20\ 640 \cdot 100}{43\ 000 \cdot 8} = 6$ god.

8. Promil

Sve što je rečeno o procentu, odnosi se i na promil, samo je razlika u tome što se procent deli sa 100, a promil sa 1 000. Promil se obeležava znakom ‰. Na primer, 1% isto je što i 10‰, ili, na primer, 1,5% isto je što i 15‰, ili 0,35% isto je što i 3,5‰ itd.

Izračunavanje određenog promila neke svote svodi se na množenje svote i razlomka čiji je imenilac 1 000, a brojilac broj promila.

Na primer, 7‰ od 10 800 je $10\ 800 \cdot \frac{7}{1\ 000} = 10{,}8 \cdot 7 = 75{,}6.$

II DEO

$\boxed{\text{A L G E B R A}}$

I G L A V A

POZITIVNI I NEGATIVNI (RELATIVNI) BROJEVI

Ako brojnu liniju (I Deo, Glava I) neograničeno produžimo na drugu, levu stranu, dobijamo brojnu osu. Svakoj tački produžetka možemo da pridružimo broj na isti način na koji se pridružuju brojevi na brojnoj liniji, i to levo od tačke kojoj smo pridružili broj 0. Za razliku od brojeva na desnoj strani brojne ose, koji su označeni znakom + (koji se, međutim, najčešće u pisanju izostavlja), brojevi na levoj strani označeni su znakom -.

-5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5

Uopšte, dvema tačkama simetričnim prema nuli (0) pridruženi su brojevi koji se razlikuju samo po znaku. Za takva dva broja, koji se zovu suprotni brojevi, kaže se da su jednaki po apsolutnoj vrednosti, što se označava vertikalnim zagradama. Npr., $|-3| = |+3| = 3$, što znači da se tačke kojima su pridruženi brojevi -3 i +3 nalaze na jednakom rastojanju (3 jedinice) od početne tačke (0).

Stoga se brojna osa deli na dve poluose: desnu - pozitivnu i levu - negativnu. Zajednički naziv za pozitivan i negativan broj je: relativan broj.

Ma koja dva relativna broja određena su na brojnoj osi dvema tačkama. Većem broju pripada tačka koja se nalazi desno od one tačke koja pripada manjem broju, odnosno manjem broju pripada tačka koja se nalazi levo od one koja pripada većem broju. I obrnuto, za dve tačke na brojnoj osi desnoj je pridružen veći, a levoj manji broj. (Znak za veće: $>$; znak za manje $<$.)

Tako je, npr., $+8 > +3$, $+15 < +20$, $+7 > -2$, $-7 < -2$; $-7 > -12$.

Svaki pozitivan broj veći je od nule, a svaki negativan broj manji je od nule. Na primer, $+7 > 0$, $-3 < 0$.

1. Sabiranje i oduzimanje

Zbir pozitivnih brojeva je pozitivan, zbir negativnih – negativan, a apsolutna vrednost zbira jednaka je zbiru apsolutnih vrednosti svih sabiraka. Na primer :

$(+8) + (+2) + (+11) = +21;\quad |+21| = 21;$

$(-8) + (-2) + (-11) = -21;\quad |-21| = 21;\quad 8+2+11 = 21.$

Zbir pozitivnih i negativnih (relativnih) brojeva jednak je razlici apsolutnih vrednosti zbira pozitivnih i zbira negativnih sabiraka. Rezultat ima znak onog zbira čija je apsolutna vrednost veća. Npr.:

$$(+8) + (-2) + (-3) + (+10) + (-22) + (+11) + (-12) =$$
$$= \left[(+8) + (+10) + (+11)\right] + \left[(-2) + (-3) + (-22) + (-12)\right] =$$
$$= (+29) + (-39) = -10.$$

Znak – je stoga što je $|-39| > |+29|$.

Oduzeti pozitivan broj ili sabrati negativan – svejedno je. Na primer:

$$+14 - (+6) = +14 + (-6) = +8$$

odnosno

$$14 - 6 = 8.$$

Rastojanje među tačkama brojne ose, mereno jedinicama, predstavlja razliku brojeva koji su pridruženi tim tačkama. Prema tome, razlika ma koja dva relativna broja može da se predstavi mernim brojem rastojanja odgovarajućih tačaka na brojnoj osi. No, pri tome moramo da vodimo računa o tome da se mernom broju rastojanja dodeljuje znak " + " ako se manji ("levi") broj oduzima od većeg ("desnog"), a znak " – " ako se veći ("desni") broj oduzima od manjeg ("levog"). Na primer:

(od većeg oduzima se manji)	(od manjeg oduzima se veći)
$(+8) - (+5) = +3$	$(+6) - (+13) = -7$
$(+8) - (-2) = +10$	$(-2) - (+7) = -9$
$(-5) - (-8) = +3$	$(-8) - (-3) = -5$

$(+\frac{3}{8}) - (+\frac{2}{15}) = +\frac{29}{120}$ $\quad$ $(+\frac{3}{4}) - (+\frac{4}{5}) = -\frac{1}{20}$

$(+\frac{1}{2}) - (-2\frac{2}{3}) = +3\frac{1}{6}$ $\quad$ $(-12\frac{1}{5}) - (-4\frac{1}{2}) = -7\frac{7}{10}$

2. <u>Množenje i deljenje</u>

Proizvod, kao i količnik, dva relativna broja biće pozitivan (>0) ako su oba broja istog znaka. Na primer: $(+4)\cdot(+3) = +12$; $(-7)\cdot(-2) = +14$; $(+18):(+6) = +3$; $(-21):(-3) = +7$.

Ako su u proizvodu, kao i u količniku, dva relativna broja brojevi različitog znaka, rezultat je negativan (<0). Npr.: $(+4)\cdot(-3) = -12$; $(-7)\cdot(+8) = -56$; $(+44):(-11) = -4$; $(-24):(+3) = -8$.

Prema tome, ako proizvod više relativnih brojeva sadrži paran broj negativnih činilaca, rezultat je pozitivan, a ako sadrži neparan broj negativnih činilaca, rezultat je negativan. Na primer:

$(-7)\cdot(+2)\cdot(-3) = +42$; $\quad(+2)\cdot(-3)\cdot(+4)\cdot(-5)\cdot(+6)\cdot(-7) = -5\,040$;

$\frac{(+4)\cdot(-3)\cdot(+2)}{(+5)\cdot(-7)\cdot(+6)} = \frac{-24}{-210} = +\frac{4}{35}$; $\quad\frac{(-4)\cdot(+3)\cdot(-2)}{(+5)\cdot(-7)\cdot(+6)} = \frac{+24}{-210} = -\frac{4}{35}$.

3. <u>Stepenovanje</u>

Ma koji stepen pozitivnog broja uvek je pozitivan. Npr.: $(+2)^2 = +4$; $(+2)^3 = +8$; $(+3)^5 = +243$.

Svaki <u>parni</u> stepen negativnog broja takođe je uvek pozitivan (jer odgovarajući proizvod sadrži paran broj negativnih činilaca). Npr.: $(-3)^2 = +9$; $(-3)^4 = +81$; $(-2)^2 = +4$; $(-2)^4 = +16$.

Međutim, <u>neparni</u> stepen negativnog broja uvek je negativan (jer odgovarajući proizvod sadrži neparan broj negativnih činilaca). Npr.: $(-2)^3 = -8$; $(-2)^5 = -32$; $(-3)^3 = -27$.

4. Korenovanje

Ako je korenov izložilac paran broj, potkorena veličina - radikand, mora da bude pozitivan broj (ili 0) da bi rezultat bio realan /jer ma koji relativan broj, stepenovan parnim izložiocem, daje pozitivan rezultat/. Parni koren iz nekog broja (obavezno pozitivnog) može da bude i pozitivan i negativan. Npr.: $\sqrt{4} = 2$ ili $\sqrt{4} = -2$, što se piše kraće: $\sqrt{4} = \pm 2$, jer je i $/+2/^2 = 4$, kao što je i $(-2)^2 = 4$. Isto tako je, npr., $\sqrt{25} = \pm 5$; $\sqrt[4]{16} = \pm 2$; $\sqrt[4]{81} = \pm 3$; $\sqrt[10]{1024} = \pm 2$; $\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$; $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm \frac{2}{3}$ itd.

Apsolutna vrednost rezultata korenovanja zove se aritmetička vrednost korena, a uzeta sa znakom - algebarska vrednost korena.

Prema tome, parni koren (iz pozitivnog broja) ima dve algebarske vrednosti, pozitivnu i negativnu.

Ne postoji nijedna realna vrednost parnog korena iz negativnog broja, npr., $\sqrt{-16}$; $\sqrt[4]{-81}$; $\sqrt[6]{-64}$, jer je $(\pm 4)^2 = +16$; $(\pm 3)^4 = +81$; $(\pm 2)^6 = +64$.

Koren neparnog izložioca, međutim, može da se primeni i na pozitivne i na negativne brojeve (radikande). Ako je radikand pozitivan biće i rezultat pozitivan, a ako je radikand negativan i rezultat je negativan (jer je neparni stepen pozitivnog broja pozitivan, a negativnog - negativan). Npr.: $\sqrt[3]{8} = +2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[5]{-32} = -2$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}$.

Dodatak.

$$\sqrt{1} = \sqrt[4]{1} = \sqrt[6]{1} = \sqrt[8]{1} = \ldots\ldots = \pm 1$$
$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[5]{1} = \sqrt[7]{1} = \sqrt[9]{1} = \ldots\ldots = 1$$
$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[5]{-1} = \sqrt[7]{-1} = \sqrt[9]{-1} = \ldots\ldots = -1$$
$$\sqrt{0} = \sqrt[3]{0} = \sqrt[4]{0} = \sqrt[5]{0} = \ldots\ldots = 0.$$

II GLAVA

OPŠTI BROJEVI

1. Monomi

Pod opštim brojem podrazumeva se ma koji broj. Za oznake opštih brojeva uzimaju se najčešće mala slova latinske azbuke, nekad i velika štampana, katkad i slova grčke azbuke.

Primer. Neka je n ma koji prirodan broj; ma koji paran broj biće tada $2n$, a ma koji neparan: $2n + 1$ ili $2n - 1$.

Izraz $2n$ predstavlja monom u kome je broj 2 - koeficijent kojim se množi opšti broj n - glavna količina. Znak za množenje se izostavlja. Ako opšti broj n zamenjujemo posebnim brojevima 1, 2, 3, 4....., dobijamo odgovarajuće brojne ili numeričke vrednosti monoma $2n$: 2,4,6,8...

Izrazi $2n + 1$ i $2n - 1$ predstavljaju algebarske izraze jer sadrže, pored monoma, $2n$ još i sabirke. Zamenjujući u izrazu, npr., $2n - 1$ opšti broj n posebnim brojevima 1,2, 3,4..., dobijamo odgovarajuće brojne ili numeričke vrednosti algebarskog izraza $2n - 1$: 1,3,5,7...

Brojna vrednost izraza:

$a - 3b + 2c - 4d$ za $a = 3$, $b = 5$, $c = -1$ i $d = -2$

iznosi: $3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) = 3 - 15 - 2 + 8 = -6$.

Kad se opšti broj zamenjuje posebnim pozitivnim brojem znak pred monomom ostaje nepromenjen, a kad se zamenjuje negativnim posebnim brojem znak pred monomom se menja.

1.1. Sabiranje i oduzimanje

Monomi $2n$, $5n$, $-8n$, koji se međusobno razlikuju samo po koeficijentu, zovu se slični monomi.

Sabirati i oduzimati mogu se samo slični monomi. Pri tome se sabiraju i oduzimaju koeficijenti, a rezultat se množi glavnom količinom.

Npr.: $5a + 7a - 4a + 3a - a = (5 + 7 - 4 + 3 - 1)a = 10a$.

Monomi koji nisu slični, npr., $5x$, $7x^2$, $5y$ ne mogu da se saberu ili oduzmu.

Opšti broj može da sadrži kako pozitivan, tako i negativan znak, te se sabiranje i oduzimanje opštih brojeva zove zajedničkim imenom: <u>algebarsko sabiranje</u> ili <u>algebarski zbir</u>.

1.2. Množenje i deljenje

Množenje, odn. deljenje monoma izvodi se tako što se proizvod, odn. količnik njihovih koeficijenata pomnoži proizvodom, odn. količnikom njihovih glavnih količina. Npr., $7a \cdot 3b = 21ab$; $3x \cdot (-5y) \cdot 7z = -105xyz$; $3 \cdot 2v = 6v$; $(-1) \cdot 3t = -3t$; $15a : 5b = 3 \cdot \frac{a}{b}$ ili $\frac{3a}{b}$; $14c : 21d = \frac{14}{21} \cdot \frac{c}{d} = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{d}$ ili $\frac{2c}{3d}$.

Količnik dva slična monoma uvek je poseban broj koji je jednak količniku njihovih koeficijenata.

Npr., $15a : 3a = 5$; $a : 5a = \frac{1}{5}$; $7a : 3a = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$;

$14a : a = 14$; $\underline{a : a = 1}$; $a^2 : a^2 = 1$;

1.3. Stepenovanje

Množenjem sličnih monoma dobija se monom čija je glavna količina stepen opšteg broja. Npr., $2x \cdot 3x \cdot 4x = 24x^3$; $4a \cdot 3a \cdot 2 = 24a^2$. Proizvod koeficijenata se tada pomnoži stepenom opšteg broja čiji izložilac pokazuje koliko se puta opšti broj sadrži kao činilac.

Stepenovanje monoma izvodi se tako što se stepen koeficijenta pomnoži stepenom glavne količine. Npr., $(3x)^2 = 9x^2$; $(-3a)^3 = -27a^3$. Važno je da se monom zagradi, jer $3x^2 \neq (3x)^2$.

Parni stepen ma kog broja uvek je pozitivan (GLA-

VA I). Stoga je, npr.:

$(3a)^2 > 0$; $(-5a)^4 > 0$; $(6a)^6 > 0$; $(-7a)^8 > 0$.

Izuzetno, za $a = 0$, ovi izrazi ne bi bili pozitivni, nego 0. Stoga se pored tih izraza stavlja kao primedba u zagradi $(a \neq 0)$.

1.4. NZS monoma

Zajednički sadržilac za dva ili više datih monoma jednak je proizvodu zajedničkog sadržioca koeficijenata i glavnih veličina. Zajedničkih sadržilaca ima beskonačno mnogo, no jedan je najmanji.

Primeri: Naći NZS za monome:

1/ $5a$, $3b$, 15 i $2ab$; NZS $= 30ab$

2/ $3x^2$, $5xy$ i $30y^2$; NZS $= 30x^2y^2$

3/ $2a$, $5x$, $3y$ i $2b$; NZS $= 30abxy$

4/ a, a^2, a^3 i a^4 ; NZS $= a^4$

5/ $2x$, $2y$, $2x^2$ i $2y^2$; NZS $= 2x^2y^2$

1.5. Korenovanje

Naglašeno je (GLAVA I, t.4) da vrednost korena parnog izložioca postoji samo ako radikand nije negativan. Stoga se uz izraze, kao što su: $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{3a}$, $\sqrt[6]{64a}$, $\sqrt[2n]{a}$ (n - prirodni broj), stavlja kao primedba, u zagradi $a \geq 0$. Npr.: Izračunati $\sqrt[4]{81a}$; $(a \geq 0)$.

Često, da bi se izbegle nesuglasice ili da bi se izbeglo pisanje primedbe $(a \geq 0)$, u radikandu se piše kvadrat opšteg broja koji je uvek pozitivan /ili nula ako je taj broj nula/. Npr., $\sqrt[8]{6a^2}$; $\sqrt[2n]{a^2}$.

Za korene neparnog izložioca radikandu se ne isključuje negativna vrednost. Stoga je (n ; prirodni broj):

$$\sqrt[2n+1]{a} > 0 \quad \text{za} \quad a > 0,$$

odnosno

$$\sqrt[2n+1]{a} < 0 \quad \text{za} \quad a < 0,$$

dok je $\sqrt[2n+1]{a^2} > 0$ za svako $a \neq 0$.

Monom se korenuje tako što se koren iz njegovog koeficijenta pomnoži korenom iz njegove glavne količine.

Parni koren monoma ima dve algebarske vrednosti, npr.: $\sqrt[4]{16a} = \pm 2\sqrt[4]{a}$; $(a > 0)$, dok neparni ima samo jednu, npr.: $\sqrt[5]{32a} = 2\sqrt[5]{a}$; $\sqrt[5]{-32a} = -2\sqrt[5]{a}$.

Koreni jednakih izložilaca mogu da se saberu i oduzmu samo ako su im i radikandi jednaki. Npr., $2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ ili $3\sqrt[3]{2x} - 2\sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{2x}$ ili $3\sqrt[5]{a^3} + 20\sqrt[5]{a^3} - 9\sqrt[5]{a^3} = 14\sqrt[5]{a^3}$ i sl.

Ne mogu da se saberu i oduzmu koreni različitih izložilaca ili potkorenih veličina, kao što su, npr., $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt{a}$ ili $\sqrt[4]{x} \pm \sqrt[4]{y}$ ili $2\sqrt{a} \pm 2\sqrt{b}$ i sl.

Proizvod i količnik korenuju se tako što se pomnože koreni pojedinih činilaca, odn. podele koreni deljenika i delioca:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{odn.} \quad \sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

$$\text{ili} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

I obrnuto:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{odnosno} \quad \sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

$$\text{ili} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Korenovanje zbira ili razlike izvodi se tek po izvršenoj radnji sabiranja ili oduzimanja; npr.:

$$\sqrt{16 + 9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

$$\sqrt[3]{a \pm b} \neq \sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \quad \text{itd.}$$

jer što važi za činioce, u ovom slučaju, ne važi za sabirke.

2. P o l i n o m i

Algebarski zbir monoma ili monoma i posebnih brojeva zove se polinom (dva sabirka: binom tri: trinom).

Binomi su, na primer, izrazi: $a + b$; $3a - 4b$; $5a + 3$; $-6 + 5a$; $a - 1$, $a + a^2$; $a^3 - a^2$; $a^2 + 1$; $a^2 - 1$; $\frac{3}{5}x - y$; $\frac{7}{8}a + \frac{3}{5}b$ itd.

Trinomi su, na primer, izrazi: $a^2 + a + 1$; $a + b + c$; $\frac{3}{5}a^2 - \frac{2}{3}b + c$ itd.

Algebarski sabirci polinoma zovu se još i članovi polinoma.

2.1. Neke osobine sabiranja i množenja

a) Zbir je nezavisan od rasporeda sabiraka - osobina komutativnosti sabiranja: $a + b + c = a + c + b = b + a + c \ldots$

b) Neki broj može da se doda zbiru brojeva tako što može da se doda bilo kojem sabirku - osobina asocijativnosti zbira : $(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c) = a + b + c$.

c) Proizvod ne zavisi od rasporeda činilaca - osobina komutativnosti množenja: $abc = acb = bca \ldots$

d) Neki broj može da se pomnoži proizvodom tako što može da se pomnoži bilo kojim činiocem - osobina asocijativnosti množenja : $(abc)d = (ad)\,bc = a\,(bd)\,c = ab\,(cd) = abcd$.

e) Zbir može da se pomnoži nekim brojem tako da se svaki član zbira pomnoži tim brojem i proizvodi saberu - osobina distributivnosti množenja: $(a + b)\,c = ac + bc$.

2.2. Algebarsko sabiranje

Da bi se izvršilo algebarsko sabiranje polinoma, od kojih je svaki za sebe zagrađen, treba prvo da se izvrši radnja oslobađanja zagrada, pa tek onda da se članovi sabiraju,

ukoliko su slični monomi. Npr., sabrati polinome :
$(3x + 5y - 7z + 11) + (2x - 3z + 1) - (5y + 3) - (-6z + a)$

Pred svakim polinomom stoji znak + ili -, izuzev što je pred prvim znak + izostavljen. Ako se usvoji da znak + zamenjuje činilac $\underline{+1}$ a znak - činilac $\underline{-1}$ (jedinica se kao činilac inače ne piše isto kao što se 0 ne piše kao sabirak), onda se na osnovu osobine distributivnosti množenja dati izraz može shvatiti kao zbir polinoma:

$$(1\cdot 3x + 1\cdot 5y - 1\cdot 7z + 1\cdot 11) + (1\cdot 2x - 1\cdot 3z + 1\cdot 1) +$$
$$+ (-1\cdot 5y - 1\cdot 3) + (1\cdot 6z - 1\cdot a),$$

tako da možemo da uklonimo zagradu:

$$3x + 5y - 7z + 11 + 2x - 3z + 1 - 5y - 3 + 6z - a =$$
$$= 5x + 10z - a + 9.$$

Konstatujemo da smo članove onih polinoma pred kojima je bio znak - sabrali sa promenjenim znakom.

Ako je algebarski zbir složen, tj. sastavljen od sabiraka koji svaki ponaosob predstavljaju algebarski zbir, upotrebljavaju se pored male ( ), još i srednja [ ] i velika zagrada { }. Oslobađamo se prvo male, pa srednje a na kraju i velike zagrade. Na primer:

$$\begin{aligned}
& 2x - \{3y + 2 + [-2z + 3 - (x + y + z + 1)]\} = \\
= {} & 2x - \{3y + 2 + [-2z + 3 - x - y - z - 1]\} = \\
= {} & 2x - \{3y + 2 + [-3z + 2 - x - y]\} = \\
= {} & 2x - \{3y + 2 - 3z + 2 - x - y\} = \\
= {} & 2x - \{2y + 4 - 3z - x\} = \\
= {} & 2x - 2y - 4 + 3z + x = 3x - 2y + 3z - 4.
\end{aligned}$$

2.3. Množenje polinoma monomom

Na osnovu osobine komutativnosti množenja izraz $5x(2a + 3b - c)$ isto je što i izraz $(2a + 3b - c)\cdot 5x$. Proizvod polinoma i monoma, na osnovu osobine distributivnosti množenja, jednak je zbiru proizvoda monoma i svakog člana polinoma. Npr.:

$$(2a + 3b - c)\cdot 5x = 10ax + 15bx - 5cx.$$

2.4. Množenje polinoma polinomom

Proizvod dva polinoma jednak je zbiru proizvoda svakog člana množenika sa svakim članom množioca. Npr.:

$(a + 2b - c)(3a - d) = 3a^2 + 6ab - 3ac - ad - 2bd + cd$.

Ukoliko među sabircima ima sličnih monoma, oni se saberu. Npr.:

$(a + 2b - c)(2a - 3b + c) = 2a^2 + 4ab - 2ac - 3ab - 6b^2 +$
$+ 3bc + ac + 2bc - c^2 = 2a^2 - 6b^2 - c^2 + ab - ac + 5bc$.

Navedimo još nekoliko primera:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ /tzv. razlika kvadrata/

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ /tzv. zbir kubova/

$(a - b)(a^2 + ab - b^2) = a^3 - b^3$ /tzv. razlika kubova/

2.5. Deljenje polinoma monomom

Deliti nekim brojem ili množiti njegovom recipročnom vrednošću - isto je. Prema tome, izraz:

$$(15x^2 + 3y^2 - 12xy) : 3xy$$

isto je što i izraz

$$(15x^2 + 3y^2 - 12xy) \cdot \frac{1}{3xy} .$$

dalje je, prema osobini distributivnosti množenja:

$$\frac{15x^2}{3xy} + \frac{3y^2}{3xy} - \frac{12xy}{3xy} = \frac{5x}{y} + \frac{3y}{x} - 4.$$

Na deljenju polinoma monomom zasnovano je izdvajanje zajedničkih činilaca ispred ili iza zagrade. Naime, dati polinom uvek može da se proširi (jednovremeno da se pomnoži i podeli) istom veličinom. Ta veličina treba da je zajednički činilac svih članova polinoma. Npr.: za članove polinoma

$$2x^3 + 4x^2y - 8xy + 16x$$

zajednički činilac je $2x$; pomnožimo li polinom sa $2x$, tj.:

$$2x(2x^3 + 4x^2y - 8xy + 16x),$$

moramo i da ga podelimo sa $2x$,

$$2x\left[(2x^3 + 4x^2y - 8xy + 16x) : 2x\right],$$

da se vrednost polinoma ne bi promenila; znači da je

$$2x^3 + 4x^2y - 8xy + 16x = 2x\,(x^2 + 2xy - 4y + 8).$$

Primeri:

1) $a^2b + ab^2 = ab\left[(a^2b + ab^2) : ab\right] = ab\,(a + b)$

2) $a^3b + ab^3 = \frac{ab}{ab} \cdot (a^3b + ab^3) = ab \cdot \frac{a^3b + ab^3}{ab} = ab\,(a^2 + b^2)$

3) $ax - x = x \cdot \frac{ax - x}{x} = x\,(a - 1)$

4) $-2a^2 - 3ab = -a\,(2a + 3b)$

5) $-x - y = -(x + y).$

U ovom poslednjem primeru binom smo proširili sa -1.

Obično se deljenje ne naznači, nego, pošto se zajednički činilac izdvoji, polinom se upisuje već podeljen tim zajedničkim činiocem. Testovima je utvrđeno da se često greši pri "izdvajanju" zajedničkih činilaca van zagrade baš zbog toga što se izostavlja radnja deljenja polinoma monomom koji je izdvojen.

2.6. Deljenje polinoma polinomom

Postupak deljenja dva polinoma istovetan je postupku deljenja dva posebna broja.

Primer 1. Podeliti binom $a^5 - b^5$ binomom $a - b$.

Rezultat deljenja biće opet polinom, a njegov prvi član biće količnik prvih članova deljenika i delioca, tj.:

$a^5 : a = a^4$.

Dakle,

$(a^5 - b^5) : (a - b) = a^4$

zatim se a^4 pomnoži deliocem i taj proizvod se potpiše pod deljenik, oduzme od deljenika a sa ostatkom se postupak izvodi kao na početku.

Evo postupka u celini :

$$(a^5 - b^5) : (a - b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

$$\underline{a^5 \mp a^4b} \qquad (a^4b:a)$$

$$a^4b - b^5 \qquad (a^3b^2:a)$$

$$\underline{a^4b \mp a^3b^2} \qquad (a^2b^3:a)$$

$$a^3b^2 - b^5 \qquad (ab^4:a)$$

$$\underline{a^3b^2 \mp a^2b^3}$$

$$a^2b^3 - b^5$$

$$\underline{a^2b^3 \mp ab^4}$$

$$ab^4 - b^5$$

$$\underline{ab^4 \mp b^5}$$

$$0$$

Primer 2.

$$(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2$$

$$\underline{a^3 \pm a^2b}$$

$$-a^2b + b^3$$

$$\underline{\mp a^2b \mp ab^2}$$

$$ab^2 + b^3$$

$$\underline{ab^2 \pm b^3}$$

$$0$$

Primer 3.

$$(x^2 - 1) : (x + 1) = x - 1$$

$$\underline{x^2 \pm x}$$

$$- x - 1$$

$$\underline{\mp x \mp 1}$$

$$0$$

Primer 4.

$$(x^3 - 4x) : (x^2 + 1) = x + \frac{-5x}{x^2+1} = x - \frac{5x}{x^2+1}$$
$$\underline{\underline{x^3}\ \underline{\pm x}}$$
$$-5x$$

Primedba: Ovde je ostatak 5x, a kako je delilac višeg stepena, deljenje se završava. Slično imamo i u narednom primeru.

Primer 5.

$$(x^3 - 4) : (x^2 + 1) = x + \frac{-x-4}{x^2+1} = x + \frac{-x-4}{x^2+1} = x - \frac{x+4}{x^2+1}$$
$$\underline{\underline{x^3}\ \underline{\pm x}}$$
$$- x - 4$$

Ako se u algebarskom zbiru javljaju kao sabirci proizvodi ili količnici, onda se prvo izvrše radnje množenja i deljenja, pa tek onda se pristupa sabiranju i oduzimanju. Npr.:

$$23a - 3a\cdot 5 - 10b : 5 + 4b + 2c - 3c\cdot 7 + 11 =$$
$$= 23a - 15a - 2b + 4b + 2c - 21c + 11 =$$
$$= 8a + 2b - 19c + 11.$$

2.7. Stepenovanje

Primer 1.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

dakle, $\underline{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Primer 2.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

dakle, $\underline{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

Primer 3.

$$(-a - b)^2 = (-a - b)(-a - b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

dakle, $(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$

Primer 4.

$(-a+b)^2 = (-a+b)(-a+b) = a^2 - ab - ab + b^2$

dakle, $(-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$

Primer 5.

$(3x+5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$;

rezultat je izveden po pravilu kvadratiranja zbira dva broja, tj. ako u prvom primeru uvedemo smene $a = 3x$ i $b = 5y$.

Primer 6.

$(4x-7y)^2 = 16x^2 - 56xy + 49y^2$;

rezultat je izveden po pravilu kvadratiranja razlike dva broja, tj. ako u drugom primeru uvedemo smene $a = 4x$ i $b = 7y$.

Primer 7.

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

dakle, $\underline{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$.

Primer 8.

$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)^2(a-b) =$
$= (a^2 - 2ab + b^2)\cdot(a-b) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

dakle, $\underline{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$.

Primer 9.

$(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$;

rezultat je izveden po pravilu kubiranja zbira dva broja, tj. ako u sedmi primer uvedemo smene $a = 2x$ i $b = 3y$.

Primer 10.

$(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$;

rezultat je izveden po pravilu kubiranja razlike dva broja, tj. ako u osmi primer uvedemo smene $a = 3x$ i $b = 2y$.

Primer 11.

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ab +$
$+ b^2 + bc + ac + bc + c^2$;

dakle, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Primer 12.

$(a - b + c)^2 = (a - b + c)(a - b + c) = a^2 - ab + ac - ab +$
$+ b^2 - bc + ac - bc + c^2$;

dakle, $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.

2.8. Korenovanje

Polinom može da se korenuje samo ako je radikand stepen nekog drugog polinoma, i to ako je izložilac stepena sadržilac izložioca korena. Navedimo samo nekoliko jednostavnih primera.

1/ $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a + b)^2} = \pm(a + b)$

2/ $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a - b)^2} = \pm(a - b)$

3/ $\sqrt{9x^2 + 30xy + 25y^2} = \sqrt{(3x + 5y)^2} = \pm(3x + 5y)$

4/ $\sqrt{16x^2 - 56xy + 49y^2} = \sqrt{(4x - 7y)^2} = \pm(4x - 7y)$

5/ $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = \sqrt[3]{(a + b)^3} = a + b$

6/ $\sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} = \sqrt[3]{(a - b)^3} = a - b$

7/ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc} = \sqrt{(a + b + c)^2} =$
$= \pm(a + b + c)$.

Primedba:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$
$$\sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b$$
$$\sqrt[3]{a^3 + b^3} \neq a + b$$
$$\sqrt[3]{a^3 - b^3} \neq a - b.$$

3. Rastavljanje algebarskih izraza na činioce

Rastaviti algebarski izraz na činioce znači rastaviti ga na nove izraze kao činioce, među kojima može da bude i monoma. Neke primere(vidi: GLAVA II, t.2.5.). Međutim, kandidati vrlo često rastavljaju na činioce monome koje sadrži algebarski izraz, umesto da rastave sam izraz. Npr., ako se napiše da je $16a^2 - 9b^2 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot a\cdot a - 3\cdot3\cdot b\cdot b$, to ne znači da je binom $16a^2 - 9b^2$ rastavljen na činioce; rastavljeni su samo monomi. A pomenuti binom rastavlja se na izraze kao razlika kvadrata (vidi: GLAVA II, t.2.4.):

$$16a^2 - 9b^2 = (4a)^2 - (3b)^2 = (4a + 3b)(4a - 3b).$$

Slično je i sa rastavljanjem na činioce zbira i razlike kubova:

$$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$$

$$8a^3 - 27b^3 = (2a)^3 - (3b)^3 = (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2),$$

a ne:

$$8a^3 \pm 27b^3 = 2\cdot2\cdot2\cdot a\cdot a\cdot a \pm 3\cdot3\cdot3\cdot b\cdot b\cdot b \ !$$

Primeri rastavljanja na činioce razlike kvadrata i zbira i razlike kubova:

1/ $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ ili $(x - 3)(x + 3)$ (svejedno je, s obzirom na osobinu komutativnosti množenja).

2/ $16 - x^2 = (4 + x)(4 - x)$

3/ $4a^2 - 81x^2y^2 = (2a + 9xy)(2a - 9xy)$

4/ $256x^4y^2 - 225a^2b^4 = (16x^2y + 15ab^2)(16x^2y - 15ab^2)$

5/ $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

6/ $a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^4 - b^4) = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

7/ $(a + b)^2 = (x + y)^2 = [(a + b)+(x + y)]\,[(a + b) - (x + y)] = (a + b + x + y) : (a + b - x - y)$

8/ $4 - (a - x)^2 = [2 + (a - x)]\,[2 - (a - x)] =$

$= (2 + a - x)(2 - a + x)$

9/ $\frac{4}{25}u^2 - 9v^2 = (\frac{2}{5}u + 3v)\,(\frac{2}{5}u - 3v)$

10/ $0{,}25 - 0{,}16x^2 = (0{,}5 + 0{,}4x)\,(0{,}5 - 0{,}4x)$

11/ Izračunati $48^2 - 44^2$ i $378^2 - 377^2$. Rastavljanjem razlike kvadrata na činioce račun je kraći nego kvadratiranjem i oduzimanjem:

$48^2 - 44^2 = (48 + 44)\,(48 - 44) = 92 \cdot 4 = 368$

$378^2 - 377^2 = (378 + 377)\,(378 - 377) = 755$

12/ $x^3 - 64 = (x - 4)\,(x^2 + 4x + 16)$

13/ $125 + x^3 = (5 + x)\,(25 - 5x + x^2)$

14/ $8a^3 + 27x^3y^3 = (2a + 3xy)\,(4a^2 - 6axy + 9x^2y^2)$

15/ $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)\,(a^4 - a^2b^2 + b^4)$

16/ $a^6 - b^6 =$ (razlika kubova brojeva a^2 i b^2)

$= (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)\,(a^4 + a^2b^2 + b^4) =$

$= (a + b)\,(a - b)\,(a^4 + a^2b^2 + b^4)$

$a^6 - b^6 =$ (razlika kvadrata brojeva a^3 i b^3)

$= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)\,(a^3 - b^3) =$

$= (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)\,(a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$.

Rezultati dobijeni rastavljanjem, bilo kao razlike kubova, bilo kao razlike kvadrata, kao izrazi ekvivalentni su jer je:

$(a^2 - ab + b^2)\,(a^2 + ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$

17/ $0{,}001 + 0{,}343a^3 = (0{,}1 + 0{,}7a)\,(0{,}01 - 0{,}07a + 0{,}49a^2)$

18/ $0{,}064x^3 - 0{,}000\,027 = (0{,}4x - 0{,}03)\,(0{,}16x^2 + 0{,}012\,x +$
$+ 0{,}000\,9)$

19/ $\frac{x^3}{27} + \frac{y^3}{8} = (\frac{x}{3} + \frac{y}{2})\,(\frac{x^2}{9} - \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{4})$

20/ $\frac{1}{125} - \frac{a^3}{729} = (\frac{1}{5} - \frac{a}{9})\,(\frac{1}{25} + \frac{a}{45} + \frac{a^2}{81})$

21/ $8 - \frac{x^3y^3}{8} = (2 - \frac{xy}{2})(4 + xy + \frac{x^2y^2}{4})$

Međutim, zbir kvadrata ne može da se rastavi na (realne činioce:

$a^2 + b^2$; $4a^2 + 9b^2 = (2a)^2 + (3b)^2$; $16x^2 + 25y^2 = (4x)^2 + (5y)^2$; $\frac{1}{4} + \frac{x^2}{9} = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{x}{3})^2$; $0{,}000\,9\,x^2 + 2{,}25y^2 = (0{,}03x)^2 + (1{,}5y)^2$ i sl.

Za složenije izraze traže se, pored monoma, zajednički binomi i trinomi. Navedimo neke primere:

22/ $a + b + a^2 - b^2 = (a + b) + (a^2 - b^2) = (a + b) + (a + b)\cdot(a - b) = (a + b)\left[1 + (a - b)\right] = (a + b)\cdot(1 + a - b)$

23/ $a - b + a^2 - b^2 = (a - b) + (a^2 - b^2) = (a - b) + (a + b)(a - b) = (a - b)\left[1 + (a + b)\right] = (a - b)(1 + a + b)$

24/ $a - b - a^2 + b^2 = (a - b) - (a^2 - b^2) = (a - b) - (a + b)(a - b) = (a - b)\left[1 - (a + b)\right] = (a - b)(1 - a - b)$

25/ $a + b - a^2 + b^2 = (a + b) - (a^2 - b^2) = (a + b) - (a + b)(a - b) = (a + b)\left[1 - (a - b)\right] = (a + b)(1 - a + b)$

26/ $a + b + a^3 + b^3 = (a + b) + (a^3 + b^3) = (a + b) + (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)\left[1 + (a^2 - ab + b^2)\right] = (a + b)(1 + a^2 - ab + b^2)$

27/ $a - b + a^3 - b^3 = (a - b) + (a^3 - b^3) = (a - b) + (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)\left[1 + (a^2 + ab + b^2)\right] = (a - b)(1 + a^2 + ab + b^2)$

28/ $1 + a + a^2 + a^3 = (1 + a) + (a^2 + a^3) =$

$= (1 + a) + a^2(1 + a) = (1 + a)(a + a^2)$

29/ $1 - a - a^2 + a^3 = (1 - a) + (-a^2 + a^3) + (1 - a) -$

$- (a^2 - a^3) = (1 - a) - a^2(1 - a) = (1 - a^2)(1 - a) =$

$= (1 - a)(1 + a)(1 - a) = (1 - a)^2(1 + a)$

30/ $x^3 + 2ax^2 + a^2x = x(x^2 + 2ax + a^2) = x(x + a)^2$

31/ $(a - x)^2 - (b - x)^2 = [(a - x) + (b - x)]\,[(a - x) -$

$- (b - x)] = [a - x + b - x]\,[a - x - b + x] =$

$= (a + b - 2x)(a - b)$

32/ $(x + y)^2 - (x - y)^2 = [(x + y) + (x - y)]\,[(x + y) -$

$- (x - y)] = [x + y + x - y]\,[x + y - x + y] = 2x \cdot 2y =$

$= 4xy.$

4. Algebarski razlomci

Ako razlomak, pored posebnih brojeva, sadrži i opšte brojeve, razlomak se zove algebarski.

Važno je da se uoči da imenilac razlomka ne može da bude 0 jer nulom ne može da se deli ili, kako se to još kaže, operacija deljenja nulom nije definisana. Stoga uz algebarske razlomke, kao primedba, u zagradi, naglašeno je da je imenilac različit od nule. Npr., $\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$; $\frac{2a}{bc}$ $(bc \neq 0)$; $\frac{2x + 3y}{x - y}$ $(x - y \neq 0$ ili $x \neq y)$; $\frac{2a}{b} + \frac{3c}{d}$ $(b \neq 0,\ d \neq 0$ ili $bd \neq 0)$ itd. Za razlomke čiji je imenilac zbir kvadrata $(a^2 + b^2)$ ili zbir četvrtih, šestih, uopšte parnih stepena $(x^{2n} + y^{2n})$ nije potrebna nikakva primedba te vrste, jer su takvi izrazi uvek pozitivni /ako su brojevi a,b,x,y,.. realni i različiti od nule/.

Algebarski razlomak može da se proširi ili skrati kako posebnim, tako i opštim brojevima ili algebarskim izrazima.

Na primer:

1/ $\frac{2a}{a + b} \cdot \frac{3c}{3c} = \frac{6ac}{3c(a + b)}$

2/ $\frac{a^2 - b^2}{3c(a + b)} = \frac{(a + b)\,(a - b)}{3c\,(a + b)} = \frac{a - b}{3c}$

3/ $\frac{a + b - c}{a + b - c} = 1$

4/ $\frac{a - b}{b - a} = -1 \quad \left(\frac{7 - 3}{3 - 7} = \frac{4}{-4} = -1\right)$

5/ $\frac{3x - 4y}{4y - 3x} = -1$

4.1. Algebarsko sabiranje

Da bi se algebarski razlomci algebarski sabrali, neophodno je da se kao i obični razlomci dovedu na zajednički imenilac, NZI koji je NZS imenilaca svih razlomaka algebarskog zbira.

Imenioci algebarskih razlomaka mogu u opštem slučaju da budu algebarski izrazi koje prethodno treba rastaviti na činioce, pa tek tada pristupiti iznalaženju NZI.

Na primer:

$$\frac{2}{a + b} - \frac{3a}{a^2 - b^2} - \frac{c}{a - b} = \frac{2}{a + b} + \frac{3a}{/a + b/\;/a - b/} - \frac{c}{a - b}$$

NZI $= (a + b)\,(a - b)$ ili $a^2 - b^2$, no bolje je ostaviti zajednički imenilac u obliku rastavljenom na činioce.

Svaki razlomak u zbiru treba da se proširi količnikom zajedničkog imenioca i imenioca odgovarajućeg razlomka. Tako ćemo razlomak $\frac{2}{a + b}$ proširiti količnikom $\frac{(a + b)\,(a - b)}{a + b} = a - b$; drugi razlomak $\frac{3a}{(a + b)\,(a - b)}$ ne proširujemo, jer je njegov imenilac i uzet za zajednički; treći razlomak $\frac{c}{a - b}$ proširićemo količnikom $\frac{(a + b)\,(a - b)}{a - b} = a + b$; znake ispred razlomačkih linija ne menjamo ali ih dodeljujemo proširenim brojevima.

Dakle, dobićemo razlomak $\frac{2(a-b)+3a-c(a+b)}{(a-b)(a-b)}$, koji dalje sređujemo

$$\frac{2a-2b+3a-ac-bc}{a^2-b^2}=\frac{5a-2b-ac-bc}{a^2-b^2}.$$

Navodimo još neke primere:

1/ $$\frac{3a}{x+y}-\frac{4b}{y-x}+\frac{5c}{x^2-y^2}=\frac{3a}{x+y}-\frac{4b}{y-x}+\frac{5c}{/x+y//x-y/}$$

U ovom primeru prvi razlomak proširićemo količnikom $\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}=x-y$, drugi količnikom $\frac{(x+y)(x-y)}{y-x}=-(x+y)$, jer je $\frac{x-y}{y-x}+-1$, a treći ne proširujemo.

Prema tome, rezultat je:

$$\frac{3a(x-y)+4b(x+y)+5c}{(x+y)(x-y)}.$$

2/ $$\frac{a^2+ab+b^2}{2ab}-\frac{a+b}{a-b}+\frac{1}{a+b}=$$

$$=\frac{(a^2+ab+b^2)(a-b)(a+b)-(a+b)\cdot 2ab(a+b)+2ab(a-b)}{2ab(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{(a^3-b^3)(a+b)-2ab(a+b)^2+2ab(a-b)}{2ab(a^2-b^2)}$$

Sređivanjem brojioca rezultat može da se pojednostavi, a ako ne može, ostavlja se u ovakvom obliku.

4.2. Množenje i deljenje

Za ove dve računske radnje algebarskih razlomaka treba prethodno algebarske izraze u brojiocima i imeniocima rastaviti na činioce radi eventualnog skraćivanja pre množenja. Deljenje razlomkom izvodimo, kao i kod običnih razlomaka, množenjem recipročnom vrednošću razlomka - delioca. Npr.

1) $$\frac{2(a^3-b^3)}{3(x+y)}\cdot\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}{3(x+y)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{a-b}=\frac{2(a^2+ab+b^2)(x-y)}{3}$$

2) $\frac{3\ (x^3 + y^3)}{a^4 - b^4} : \frac{2(x + y)}{a^2 + b^2} = \frac{3(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(a^2)^2 - (b^2)^2} : \frac{2(x + y)}{a^2 + b^2}$

$= \frac{3(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(a^2 + b^2)\ (a^2 - b^2)} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2(x + y)} = \frac{3(x^2 - xy + y^2)}{2(a^2 - b^2)}$

4.3. Složeni razlomak

Ako su brojilac ili imenilac ili jednovremeno i brojilac i imenilac nekog razlomka takođe razlomci, onda se takav razlomak zove složeni. Svođenje složenih razlomaka na obične postiže se proširivanjem složenog razlomka brojem koji je NZI za sve razlomke koji se javljaju u složenom razlomku.

Primeri. /U zagradi dati su brojevi kojima se složeni razlomak proširuje./

1/ $\frac{1}{\frac{a + 3}{b}} = (b) = \frac{b}{a + 3}$

2/ $\frac{\frac{x + 2}{3}}{a} = (3) = \frac{x + 2}{3a}$

3/ $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = (\ \text{NZI} = ab) = \frac{b + a}{b - a}$

4/ $\frac{2 + \frac{x}{3}}{3 - \frac{x}{2}} = (\ \text{NZI} = 2\cdot 3 = 6) = \frac{12 + 2x}{18 - 3x} = \frac{2(6 + x)}{3(6 - x)}$

5/ $\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}} = (\ \text{NZI} = 3\cdot 4 = 12) = \frac{8 - 3}{12 + 2} = \frac{5}{14}$

6/ $\frac{\frac{2}{a} + \frac{3}{b} - 4}{\frac{1}{c} - \frac{5}{d} + 2} = (\ \text{NZI} = abcd) = \frac{2bcd + 3acd - 4abcd}{abd - 5abc + 2abcd} =$

$$= \frac{cd\,(2b + 3a - 4ab)}{ab\,(d - 5c + 2cd)}$$

7/ $$\frac{\frac{1}{x - a}}{\frac{2}{y + b}} = \left[\ \text{NZI} = (x-a)(y+b)\right] = \frac{y + b}{2(x - a)}$$

8/ $$\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1} = (\ \text{NZI} = x^2y^2) = \frac{y^2 + xy^2 + x^2y^2}{x^2 + x^2y + x^2y^2} =$$

$$= \frac{y^2\,(1 + x + x^2)}{x^2\,(1 + y + y^2)}\ .$$

4.4. Stepenovanje i korenovanje

I algebarski razlomci stepenuju se i korenuju kao i obični razlomci: posebno se vrše radnje sa brojiocima, posebno sa imeniocima.

III GLAVA

FUNKCIJA

1. Pojam funkcije jedne nezavisno promenljive

Primer 1. Rezultati žetve, mereni količinom žitarica, zavise od raznih uticaja: od klimatskih uslova, od broja oranja ili okopavanja, od kvaliteta zemljišta, od vrste zasejanog semena, od količine i kvaliteta đubriva itd. Matematički formulisano rezultat žetve je funkcija (zavisno promenljiva veličina) nekoliko argumenata (nezavisno promenljivih veličina). Pretpostavimo da su na jednom poljoprivrednom imanju poljoprivrednici pod jednakim uslovima obradili dve susedne njive, samo što su ih zasejali pšenicom različitog kvaliteta. Prinos u tom slučaju zavisi samo od kvaliteta semena. Dakle, tada je rezultat žetve funkcija samo jedne nezavisno promenljive veličine - kvaliteta semena.

Primer 2. U zakonima kretanja tela, pređen put (s) izražen je kao funkcija vremena (t) : $s = f(t)$. Oblik funkcije - f zavisi od vrste kretanja : jednakog, jednako ubrzanog ili usporenog, nejednakog, nejednako ubrzanog ili usporenog, harmonijskog itd.

Zakon puta za jednako kretanje (konstantne brzine c) glasi: $s = c \cdot t$. Nezavisno promenljiva t javlja se u ovoj funkciji na prvom stepenu; stoga se za jednako kretanje kaže da je put linearna funkcija vremena.

Zakon puta za slobodno padanje tela glasi: $s = \frac{1}{2}g \cdot t^2$; kako je veličina g konstantna (ubrzanje sile teže) to je put funkcija samo jedne nezavisno promenljive veličine - vremena t. S obzirom da se veličina t javlja u funkciji na drugom stepenu, kaže se da je put kvadratna funkcija vremena.

Primer 3. Površina sobe pravougaonog oblika jednaka je proizvodu dužine i širine. Ako se za konstantnu površinu sobe P menjaju dimenzije dužine (a) i širine (b), onda promena, recimo, dužine (a) može da se izrazi kao funkcija širine (b). Oblik funkcije $a = \frac{P}{b}$ zove se <u>funkcija obrnute proporcionalnosti</u>; naime, koliko je puta soba uža, toliko je puta duža i obrnuto koliko je puta šira, toliko je puta kraća.

2. <u>Izražavanje funkcije</u>

Funkcija može da se izrazi: analitički, tablično i grafički. Analitički izrazi su, npr.: $s = c \cdot t$, $s = \frac{1}{2}gt^2$, $a = \frac{P}{b}$.

U našim primerima argumentu – vremenu t, odnosno širini sobe b, možemo da dodelimo proizvoljan broj različitih vrednosti; za svaku proizvoljnu vrednost argumenta izračunaćemo vrednost funkcije – puta s, odn. dužine sobe a. Proizvoljne vrednosti (argument) i vrednosti izvedene iz analitičkog izraza (funkcija) mogu da se utabliče:

t		
s		

odnosno

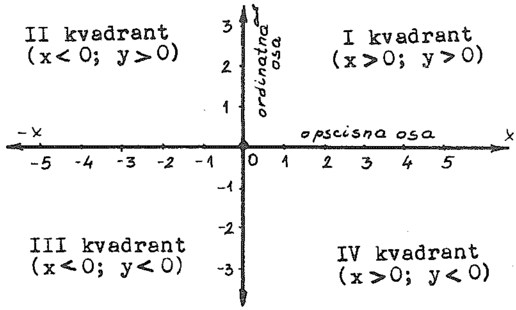
b		
a		

U tablici dati su parovi brojnih vrednosti.

Da bi funkcija mogla da se predstavi i grafički treba da se odredi tzv. sistem referencije, odn. koordinatni sistem: da mu se zna početak i orijentacija.

U matematici, tehnici, statistici i drugim naučnim disciplinama koje koriste dijagrame, primenjuju se razni sistemi grafičkog predstavljanja pojava i zakona.

U matematici najčešće se primenjuje tzv. Dekartov pravougli koordinatni sistem. Ovaj sistem sačinjavaju koordinatna ravan i u njoj dve uzajamno normalne, orijentisane koordinatne ose: <u>apscisna</u> i <u>ordinatna osa</u>. Presek ovih osa zove se <u>koordinatni početak</u> (Q – slovo).



U matematici nezavisno promenljiva veličina obeležava se slovom x, a zavisno promenljiva - slovom y. Stoga se koordinatne ose nazivaju kraće: osa Ox i osa Oy. Odgovarajući analitički izraz funkcije $y = f(x)$ zavisi od oblika funkcije f.

Tačkama na koordinatnim osama pridruženi su realni brojevi, kao i na brojnoj osi, i to: početnoj tački O pridružen je broj 0, na osi Ox - desno od tačke O pozitivni, levo - negativni brojevi, a na osi Oy - iznad tačke O pozitivni, ispod - negativni brojevi. Strelice pokazuju smer rašćenja brojeva pridruženih tačkama koordinatnih osa.

Svakom paru vrednosti argumenta x i funkcije y, iz tabličnog izraza date funkcije, može da se odredi odgovarajuća tačka koordinatne ravni, koju koordinatne ose dele u četiri kvadranta. I obrnuto, svakoj tački koordinatne ravni pridružen je određen par vrednosti. Položaj tačke određen je koordinatama: apscisom (x) i ordinatom (y). Npr., oznaka A (5,3), koja se čita: tačka A sa koordinatama 5 i 3, znači da tačka A ima koordinate: apscisu $x = 5$ i ordinatu $y = 3$. Prvi broj u zagradi pripada apscisi, a drugi ordinati izvesne tačke. Izbor jedinice je proizvoljan i jednak za obe ose (mada ovo poslednje nije obavezno).

Sve tačke desno od ose Oy imaju pozitivne, a levo - negativne apscise. Za tačke na osi Oy je apscisa $x = 0$

(jednačina ose Oy). Sve tačke iznad ose Ox imaju pozitivne, a ispod - negativne ordinate. Za tačke na osi Ox je ordinata $y = 0$ (jednačina ose Ox).

Pošto je koordinatni sistem određen, ucrtavaju se tačke koje odgovaraju parovima vrednosti iz tabličnog izraza date funkcije. Povezivanjem tačaka izvodi se približno dijagram - geometrijska interpretacija analitičkog izraza date funkcije.

Često je u praksi put obrnut. Na osnovu merenja obrazuje se tablica vrednosti, zatim se skicira odgovarajući dijagram kome se tada prilagođava što jednostavniji analitički izraz.

3. Linearna funkcija

Najjednostavniji oblik linearne funkcije dat je analitičkim izrazom:

$$y = x.$$

Sastavimo tablicu:

(argument :)	x	0	1	2	$\frac{7}{3}$	...	-1	-2	$-\frac{7}{3}$	...
(funkcija :)	y	0	1	2	$\frac{7}{3}$	...	-1	-2	$-\frac{7}{3}$	...

U koordinatnom sistemu obeležimo tačke čije su koordinate: (0,0); (1,1); (-1,-1); (2,2); (-2,-2); $(\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$; $(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{3})$ ... i povežimo ih. Sve se one nalaze na pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak i koja predstavlja simetralu I i III kvadranta. Jednačina simetrale I i III kvadranta je dakle: $y = x$.

Za funkciju $y = -x$ lako ćemo utvrditi da predstavlja jednačinu simetrale II i IV kvadranta.

Predstavimo sada tablično i grafički funkcije čiji su analitički izrazi

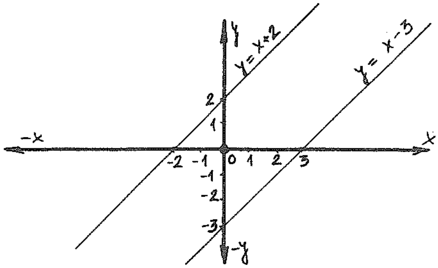
$$y = x - 3 \quad \text{i} \quad y = x + 2 .$$

Tablica :

x	0	1	2	3	4	5	...
y	-3	-2	-1	0	1	2	...

x	0	-1	-2	-3	...
y	2	1	0	-1	...

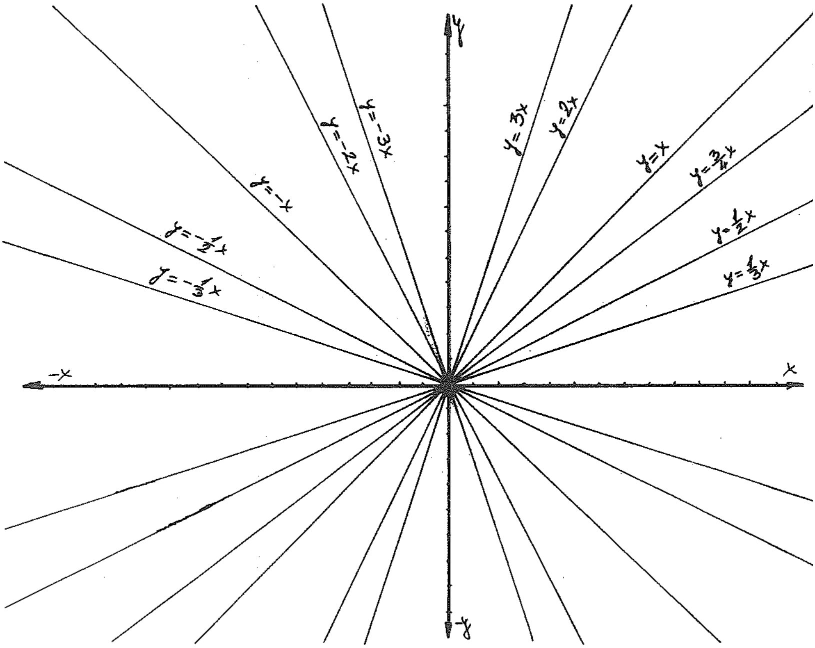
Dijagram :



Uveravamo se da su dovoljna dva para vrednosti za svaku funkciju, jer linearna funkcija geometrijski predstavlja pravu liniju (prava je određena dvema tačkama). Prava $y = x - 3$ seče osu Ox u tački $x = 3$, a prava $y = x + 2$ u tački $x = -2$, dok prave $y = x$ i $y = -x$ seku osu Ox u tački $x = 0$. Ako u tablicama potražimo vrednosti odgovarajućih funkcija za navedene vrednosti argumenta x, uočićemo da je za sve njih $y = 0$. Ako vrednost argumenta x, za koju se vrednost funkcije y poništi ($y = 0$), nazovemo <u>nulom funkcije</u>, onda možemo reći: vrednost 3 je nula funkcije $y = x - 3$, vrednost -2 je nula funkcije $y = x + 2$, a vrednost 0 je nula funkcija $y = x$ i $y = -x$. Uopšte, može se reći da je nula funkcije brojno jednaka apscisi presečne tačke dijagrama odgovarajuće linije sa osom Ox.

Ucrtajmo u zajednički koordinatni sistem dijagrame funkcija :

$$y = \frac{1}{3}x, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad y = \frac{3}{4}x, \quad y = x, \quad y = 2x \text{ i } y = 3x.$$



Nula svih ovih funkcija je x = 0, što znači da sve prolaze kroz koordinatni početak samo pod različitim nagibnim uglovima prema pozitivnom smeru ose Ox; manjem koeficijentu uz x odgovara prava sa manjim, a većem - sa većim nagibnim uglom.

Dijagrami funkcija: $y = -\frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{2}x$, $y = -\frac{3}{4}x$, $y = -x$, $y = -2x$ i $y = -3x$ predstavljaju takođe prave koje prolaze kroz koordinatni početak kao i prethodne, ali za razliku od njih grade tupe uglove sa pozitivnim smerom ose Ox.

Funkcije - koje se međusobno razlikuju samo po znaku koeficijenta uz x - predstavljaju prave linije čiji su nagibni uglovi prema pozitivnom smeru ose Ox suplementni (dopunjuju se do 180°).

Za prave sa oštrim nagibnim uglovima prema pozitivnom smeru ose Ox ordinate tačaka, posmatrano sleva udesno, povećavaju se, a za prave sa tupim nagibnim uglovima - ordinate se smanjuju. Stoga se funkcija:

$$y = ax$$

za $a>0$ zove <u>rastuća</u>, a za $a<0$ <u>opadajuća</u>.

Dijagrami funkcija koje ne zavise od x, na primer, $y = 3$ ili $y = -2$, predstavljaju prave paralelne sa osom Ox, a osu Oy seku u tačkama $y = 3$, odn. $y = -2$. Ordinate tačaka ne menjaju se, te funkcije nisu ni rastuće ni opadajuće nego <u>konstantne</u>.

Linearna funkcija u kojoj ne figuriše linearni član ax nego samo slobodni član b, tj.:

$$y = b$$

grafički predstavlja pravu paralelnu osi Ox na rastojanju od nje za b jedinica, i to iznad ose Ox ako je $b>0$, a ispod - ako je $b<0$.

Ako linearna funkcija sadrži i linearni i slobodni član, tj. ako je data svojim <u>potpunim oblikom</u>:

$$y = ax + b$$

<u>parametri</u> a i b zadržavaju svaki svoje geometrijsko tumačenje:

<u>parametrom a</u> - koeficijentom uz x određen je nagibni ugao prave prema pozitivnom smeru ose Ox; stoga se ovaj parametar zove: <u>koeficijent pravca</u> prave;

<u>parametrom b</u> - slobodnim članom određena je ordinata presečne tačke prave sa osom Oy; naime, za $x = 0$

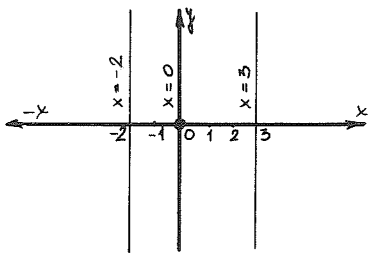
vrednost funkcije $y = ax + b$ svodi se na vrednost slobodnog člana $y = b$.

Prema tome, skup funkcija sa zajedničkim koeficijentom uz x a različitim slobodnim članovima geometrijski predstavlja skup međusobno paralelnih pravih, dok skup funkcija sa zajedničkim slobodnim članom a različitim koeficijentima uz x, geometrijski predstavlja pramen pravih sa zajedničkom tačkom na ordinatnoj osi.

Ako funkcija ima beskonačno mnogo vrednosti za određenu vrednost argumenta, onda je takav analitički izraz oblika:

$$x = C$$

gde je C data konstantna vrednost, a geometrijski predstavlja pravu normalnu na osu Ox koju seče u tački apscise date vrednosti C. Npr.:



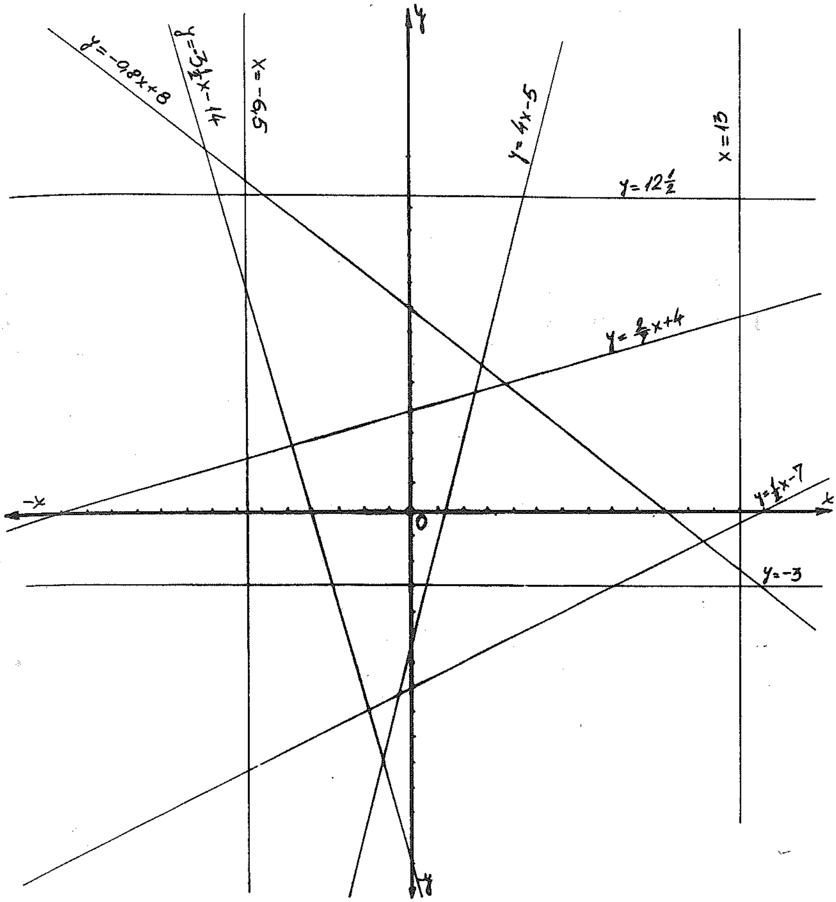
Primeri: Grafički predstaviti funkcije:

$y = \frac{2}{7}x + 4$; $y = 4x - 5$; $y = \frac{1}{2}x - 7$; $y = -3\frac{1}{2}x - 14$;

$y = -0,8x + 8$; $y = 12\frac{1}{2}$; $y = -3$; $x = 13$; $x = -6,5$

(u istom koordinatnom sistemu).

Rešenje:



4. Kvadratna funkcija

Najjednostavniji oblik kvadratne funkcije dat je analitičkim izrazom:

$$y = x^2.$$

Sastavimo tablicu:

argument:	x	0	1	2	3	...	-1	-2	-3	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$	...	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	..
funkcija:	y	0	1	4	9	...	1	4	9	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{81}{16}$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{81}{16}$	..

U koordinatnom sistemu obeležimo tačke čije su koordinate date parovima vrednosti u tablici, tj.: (0,0); (1,1); (2,4) .... i spojimo ih. Sve se one nalaze na krivoj liniji koja se zove <u>parabola</u> sa <u>temenom</u> u koordinatnom početku, a čija je osa simetrije prava $x = 0$ (osa Oy).

Predstavimo sada tablično i grafički funkcije čiji su analitički izrazi:

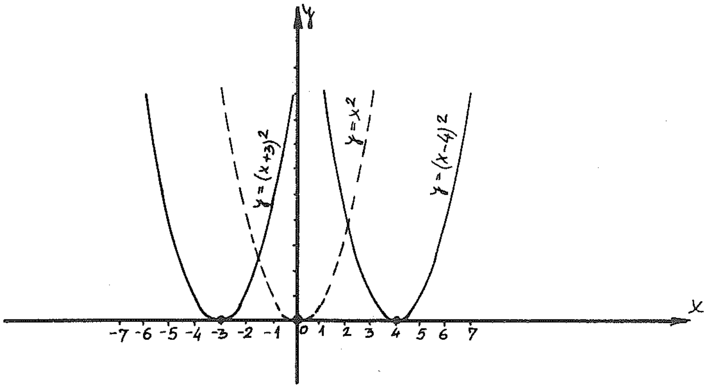
$$y = (x - 4)^2 \quad \text{i} \quad y = (x + 3)^2$$

Tablica :

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Dijagram :



Uporedimo li dijagrame datih funkcija sa dijagramom funkcije $y = x^2$, uočićemo da su parabole istog oblika, da su im ose simetrije paralelne i da im temena leže na osi Ox, što znači da dijagrami datih funkcija mogu da se dobiju translatornim pomeranjem parabole $y = x^2$: za 4 jedinice udesno - za funkciju $y = (x - 4)^2$, odn. za 3 jedinice ulevo - za funkciju $y = (x + 3)^2$.

Dijagram funkcije:

$$y = (x - \alpha)^2$$

istog je oblika kao i funkcija $y = x^2$, no translatorno pomeren za α jedinica: desno od ose Oy ako je $\alpha > 0$, odn. levo od ose Oy ako je $\alpha < 0$.

Predstavimo sada tablično i grafički funkcije :

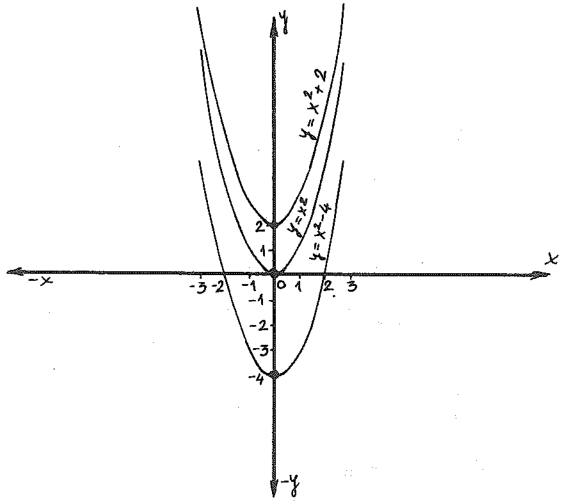
$$y = x^2 + 2 \qquad i \qquad y = x^2 - 4.$$

Tablica :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	11	6	3	2	3	6	11

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Dijagram :



Uporedimo li dijagrame datih funkcija sa dijagramom funkcije $y = x^2$, uočićemo da su parabole istog oblika i da im je osa simetrije zajednička, što znači da dijagrami datih funkcija mogu da se dobiju translatornim pomeranjem parabole $y = x^2$: za 2 jedinice nagore - za funkciju $y = x^2 + 2$, odn. za 4 jedinice nadole - za funkciju $y = x^2 - 4$.

Dijagram funkcije:

$$y = x^2 + \beta$$

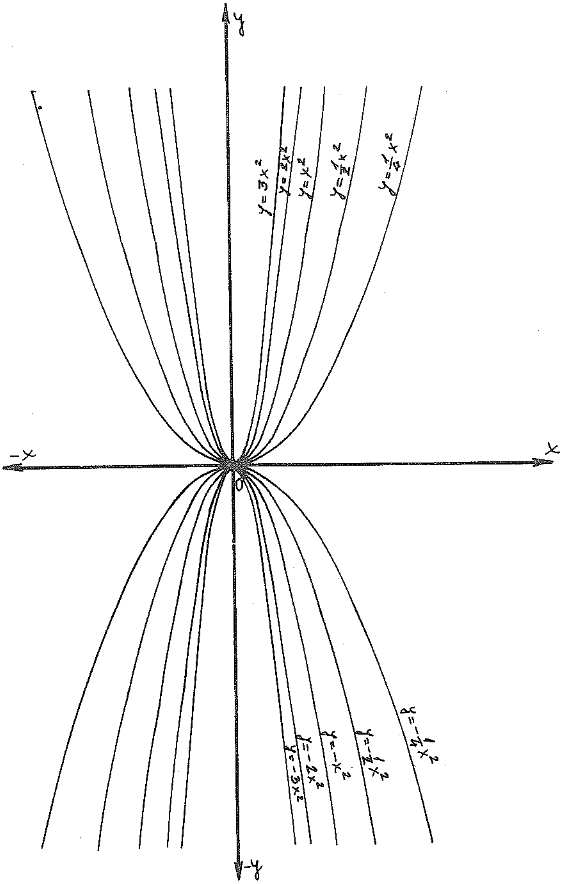
istog je oblika kao i funkcija $y = x^2$, no translatorno pomeren za β jedinica: iznad ose Ox - ako je $\beta > 0$, odn. ispod ose Ox - ako je $\beta < 0$.

Slaganjem translatornih kretanja parabole $y = x^2$ pravcima osa Ox i Oy dobija se parabola jednačine (analitičkog izraza):

$$y = (x - \alpha)^2 + \beta$$

u kojoj parametri α i β geometrijski predstavljaju koordinate temena $T(\alpha,\beta)$ parabole.

Ucrtajmo sad u zajednički koordinatni sistem dijagrame funkcija: $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$; zatim $y = -\frac{1}{4}x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -3x^2$ – pošto ih prethodno izrazimo tablično. Primetićemo da su izrazi $(-x)^2$ i $-x^2$ jednaki samo po apsolutnoj vrednosti, ali po znaku različiti: $(-x)^2 = x^2 > 0$, dok je $-x^2 < 0$; npr.: $(-3)^2 = +9$, $-3^2 = -9$, $-(-3)^2 = -9$.



Funkcije sa pozitivnim koeficijentom uz x^2 predstavljaju parabole sa granama usmerenim nagore, a sa negativnim - nadole. Zatim, ukoliko je apsolutna vrednost tog koeficijenta veća, utoliko je otvor među granama parabole uži, a ukoliko je manja - otvor je širi.

Dakle, u jednačini parabole:

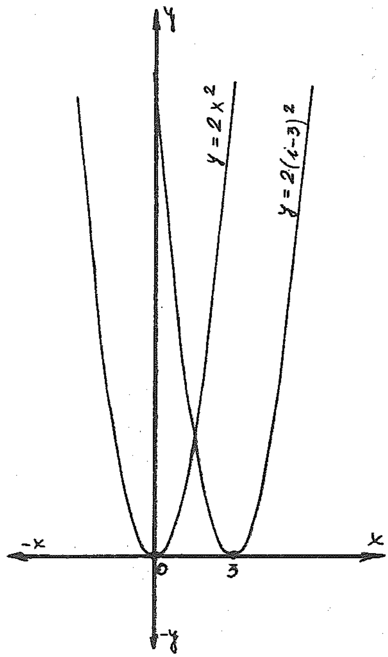
$$y = Ax^2$$

koeficijent uz x^2 - parametar A - utiče na orijentaciju i oblik parabole.

Predstavimo, najzad, tablično i grafički funkciju

$$y = 2(x - 3)^2.$$

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	32	18	8	2	0	2	8	18	32



Uporedimo li je sa dijagramom funkcije $y = 2x^2$, uočićemo da su istog oblika, iste orijentacije, sa paralelnim osama simetrije i da im temena leže na osi Ox što znači da dijagram date funkcije može da se dobije translatornim pomeranjem parabole $y = 2x^2$ za 3 jedinice udesno.

Ako je kvadratna funkcija data u potpunom obliku:

$$y = A(x - \alpha)^2 + \beta$$

koji se naziva <u>kanonski oblik</u>, parametri A, α i β zadržavaju svaki svoje geometrijsko tumačenje:

parametrom A određen je oblik parabole i njena orijentacija;

parametar α predstavlja apscisu temena parabole;

parametar β predstavlja ordinatu temena parabole.

Dijagrami kvadratnih funkcija pokazuju da ordinate tačaka odgovarajućih parabola, posmatrajući sleva udesno:

za $A>0$ – opadaju, u temenu dostižu <u>minimum</u>, a zatim rastu;

za $A<0$ – rastu, u temenu dostižu <u>maksimum</u>, a zatim opadaju.

Za minimum i maksimum zajednički je naziv <u>ekstremum</u>, a za minimalnu i maksimalnu vrednost funkcije zajednički je naziv <u>ekstremna vrednost</u> funkcije.

Ekstremna vrednost kvadratne funkcije brojno je jednaka ordinati temena parabole koja tu funkciju grafički predstavlja. Naime, u analitičkom izrazu:

$$y = A(x - \alpha)^2 + \beta$$

za vrednost argumenta $x = \alpha$, vrednost funkcije svodi se na $y = \beta$. Priroda ekstremuma određena je znakom parametra A (za $A>0$ – minimum, za $A<0$ – maksimum).

Ako u kanonskom obliku kvadratne funkcije $y = A(x - \alpha)^2 + \beta$ izvršimo naznačenu radnju stepenovanja binoma:

$$y = A(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta$$

i dobijeni izraz sredimo po opadajućim stepenima argumenta x:

$$y = A x^2 - 2A\alpha x + A\alpha^2 + \beta,$$

te koeficijent uz x i slobodni član zamenimo novim parametrima B i C:

$$-2A\alpha = B \qquad A\alpha^2 + \beta = C$$

dobićemo kvadratnu funkciju u tzv. <u>opštem obliku</u>:

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Parametar A ima isto geometrijsko značenje kao i u kanonskom obliku. Veza između parametara α i β, s jedne, i parametara A, B i C, s druge strane, data je izrazima:

$$\alpha = -\frac{B}{2A} \qquad \beta = \frac{4AC - B^2}{4A}$$

koji proizilaze iz navedenih zamena. Stoga pomoću ovih izraza kvadratna funkcija može da se prevede iz opšteg u kanonski oblik.

<u>Primer.</u> Funkciju $y = 2x^2 - 3x + 5$ prevesti u kanonski oblik.

Za datu funkciju $A = 2$, $B = -3$, $C = 5$, te je, dalje:

$$\alpha = -\frac{-3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}, \qquad \beta = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 - (-3)^2}{4 \cdot 2} = \frac{31}{8}.$$

Dakle:

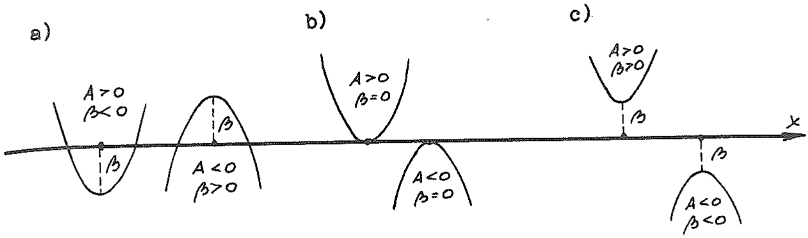
$$y = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}.$$

Nule kvadratne funkcije, kao i svake druge funkcije, to su one vrednosti argumenta za koje se funkcija poništi. Ako uspostavimo vezu između analitičkog izraza kvadratne funkcije i njenog dijagrama, možemo reći da su nule kvadratne funkcije brojno jednake apscisama zajedničkih tačaka odgovarajuće parabole i ose Ox. Pri tome mogu da nastupe ova tri slučaja:

a) parabola seče osu Ox u dve tačke - funkcija ima dve realne nule (različite); tada je $A \cdot \beta < 0$;

b) parabola dodiruje osu Ox - funkcija ima jednu realnu nulu (dvostruku); tada je $\beta = 0$;

c) parabola nema zajedničkih tačaka sa osom Ox - funkcija nema realnih nula; tada je $A \cdot \beta > 0$.



Primeri: Grafički predstaviti funkcije:

1) $y = 3x^2 + 12x + 9$

2) $y = -x^2 + 6x - 7$

3) $y = -2x^2 - 4x - 6$

4) $y = 2x^2 - 12x + 21$

5) $y = \frac{1}{2}x^2 + 10x + 42$

6) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 24$

Rešenja : $\left(\alpha = -\frac{B}{2A}\right)$; $\left(\beta = \frac{4AC - B^2}{4A}\right)$

1) $\alpha = -\frac{12}{2\cdot 3} = -2;$ $\beta = \frac{4\cdot 3\cdot 9 - 12^2}{4\cdot 3} = -3;$

$y = 3(x+2)^2 - 3;$

2) $\alpha = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = 3;$ $\beta = \frac{4\cdot(-1)\cdot(-7) - 6^2}{4\cdot(-1)} = 2;$

$y = -(x-3)^2 + 2;$

3) $\alpha = \frac{-4}{2\cdot(-2)} = -1;$ $\beta = \frac{4\cdot(-2)\cdot(-6) - (-4)^2}{4\cdot(-2)} = -4;$

$y = -2(x+1)^2 - 4;$

4) $\alpha = -\frac{-12}{2\cdot 2} = 3;$ $\beta = \frac{4\cdot 2\cdot 21 - (-12)^2}{4\cdot 2} = 3;$

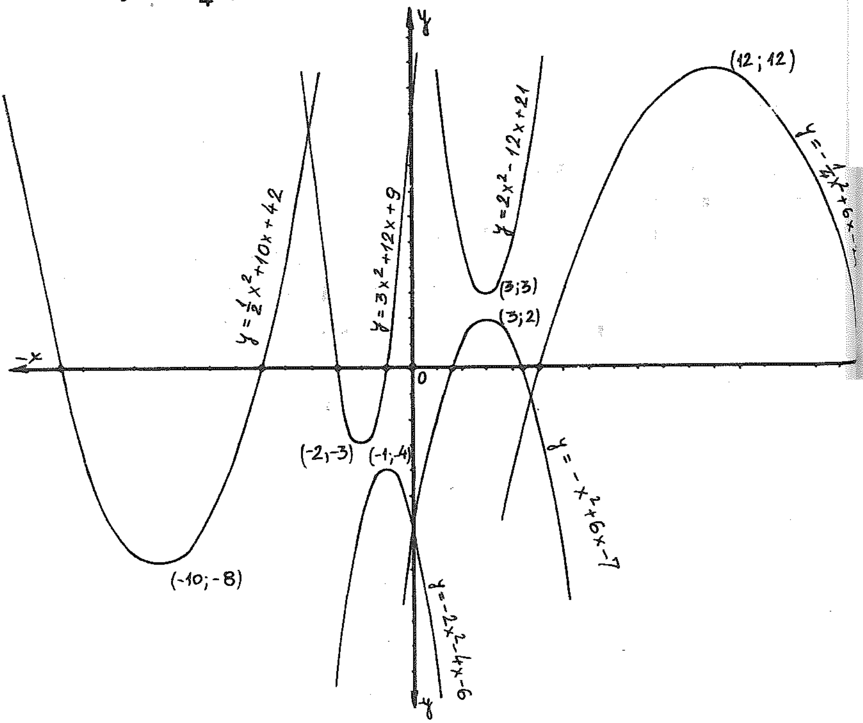
$y = 2(x-3)^2 + 3;$

5) $\alpha = -\frac{10}{2\cdot\frac{1}{2}} = -10;$ $\beta = \frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot 42 - 10^2}{4\cdot\frac{1}{2}} = -8$

$$y = \frac{1}{2}(x + 10)^2 - 8$$

6) $\alpha = -\dfrac{6}{2(-\frac{1}{4})} = 12;$ $\beta = \dfrac{4\cdot(-\frac{1}{4})\cdot(-24) - 6^2}{4\cdot(-\frac{1}{4})} = 12$

$$y = -\frac{1}{4}(x - 12)^2 + 12$$



5. Funkcija obrnute proporcionalnosti

Najjednostavniji oblik funkcije obrnute proporcionalnosti dat je analitičkim izrazom

$$y = \frac{1}{x}.$$

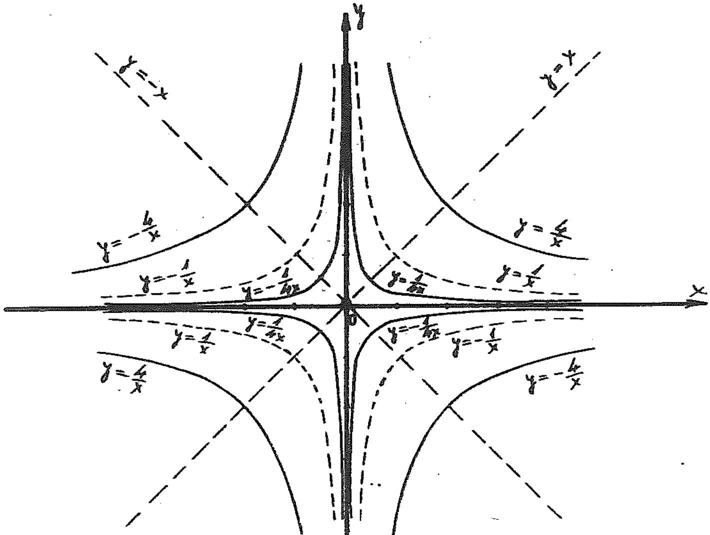
Sastavimo tablicu:

argument:	x	1	2	3	4	...	10	100	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	...
funkcija:	y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	...	2	3	4	...	10	100	...

Ako vrednostima argumenta promenimo znak, promeniće se i znak vrednosti funkcije.

U koordinatnom sistemu obeležimo tačke čije su koordinate: $(1,1)$; $(2,\frac{1}{2})$ .... i spojimo ih. Sve se one nalaze na krivoj liniji koja se zove hiperbola i koja se sastoji od dve odvojene grane.

Učinimo li to isto i sa funkcijama: $y = -\frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = -\frac{4}{x}$, $y = \frac{1}{4x} = \frac{\frac{1}{4}}{x}$, $y = -\frac{1}{4x} = -\frac{\frac{1}{4}}{x}$, dijagrami ovih funkcija prikazaće nam izvesne zajedničke osobine.



Dijagram funkcije obrnute proporcionalnosti, čiji je analitički izraz

$$y = \frac{k}{x}$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti, pripada hiperbola sa granama:

za $k > 0$ - u I i III kvadrantu i sa osom simetrije - pravom $y = x$;

za $k < 0$ - u II i IV kvadrantu i sa osom simetrije - pravom $y = -x$.

Dijagrami funkcija, čiji se koeficijenti proporcionalnosti razlikuju samo svojim znakom, dovode se do podudaranja rotacijom za pravi ugao oko koordinatnog početka.

Argumentu x može da se dodeli svaki broj, sem nule /deljenje nulom nije definisano/. Sem toga, ni funkcija ne može da se poništi, što znači da funkcija nema nula i da dijagram nema zajedničkih tačaka ni sa jednom koordinatnom osom. Za veoma male, kao i za veoma velike vrednosti argumenta, grane hiperbole samo se približavaju osama Ox i Oy kao svojim asimptotama.

Što je apsolutna vrednost koeficijenta k veća, to je veće i rastojanje među temenima hiperbole, a što je manja, to je i rastojanje kraće. Temena hiperbole su presečene tačke krive sa njenom osom simetrije.

Sa raščenjem argumenta, posmatrano sleva udesno, funkcija je: za $k > 0$ opadajuća, a za $k < 0$ rastuća, u oba slučaja prekinuta za vrednost $x = 0$.

U udžbeniku fizike nailazimo na dijagram funkcije obrnute proporcionalnosti u geometrijskoj interpretaciji Bojl-Mariotovog zakona: $P \cdot V = C$ - proizvod pritiska i zapremine gasa je konstantan. Izražen oznakama x, y i k, umesto P, V i C, Bojl-Mariotov zakon glasi $x \cdot y = k$, odakle je $y = \frac{k}{x}$. Dijagramom je data samo jedna grana hiperbole /u I kvadrantu/, jer se pritisak i zapremina gasa uzimaju samo kao pozitivne veličine.

IV GLAVA

LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

1. Jednačine prvog stepena s jednom nepoznatom

1.1. Identičnost, jednačina, ekvivalentna jednačina

Jednakosti algebarskih izraza, kao što su:

1/ $2a + 5a = 7a$

2/ $15x^3 : 3x = 5x^2$

3/ $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$

4/ $(a^m)^n = a^{mn}$

5/ $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

6/ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

7/ $(a + x)^2 - a^2 = 2ax + x^2$ i sl.

koje su zadovoljene kad se opšti brojevi zamene bilo kojim brojem - zovu se identičnosti.

Međutim, jednakosti algebarskih izraza, koje su zadovoljene samo za izvesne određene vrednosti opšteg broja, zovu se jednačine. Npr.:

1/ $x - 3 = 0$; $(x = 3)$

2/ $y + a = 0$; $(y = -a)$

3/ $\frac{z + 5}{z - 3} = 0$; $(z = -5)$

4/ $x - 7 = k$; $(x = k + 7)$

5/ $3y : 5 = 8$; $(y = \frac{40}{3})$

6/ $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1$; $(x = \frac{60}{47})$

7/ $3z - 7 = z + 5$; $(z = 6)$

8/ $\sqrt{x - 3} = 7$; $(x = 52)$

9/ $\sqrt[3]{9y} = m$; $(y = \frac{m^3}{9})$

10/ $\frac{x}{3} = 0$; $(x = 0)$

Opšti broj kome se određuje vrednost zove se nepoznata veličina ili kraće: <u>nepoznata</u>. Ako se nepoznata javlja u jednačini na prvom stepenu, jednačina se zove linearna, na drugom - kvadratna, na trećem - kubna, na četvrtom - jednačina četvrtog stepena itd. Vrednost nepoznate zove se <u>rešenje</u> ili <u>koren</u> date jednačine.

Razlikujemo numeričke i algebarske jednačine: u numeričkim - vrednosti nepoznate su posebni brojevi, a u algebarskim - nepoznata je funkcija opštih brojeva koji se zovu <u>parametri</u> (u primerima 2, 4 i 9 - parametri su redom a, k, m).

Za dve ili više jednačina, koje imaju jednaka rešenja, kaže se da su <u>ekvivalentne</u>. Tako su, npr., ekvivalentne jednačine:

1/ $2x - 8 = 0$ i $x - 4 = 0$; $(x = 4)$

2/ $\frac{3x}{5} - \frac{2x}{7} = 1$ i $21x - 10x = 35$; $(x = \frac{35}{11})$

3/ $\sqrt{x + 7} = 9$ i $x + 7 = 81$; $(x = 74)$

4/ $4x - 8a = 10b$ i $2x - 4a = 5b$; $(x = \frac{4a + 5b}{2})$

5/ $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 2$ i $(a + b)x = 2ab$; $(x = \frac{2ab}{a + b})$

1.2. <u>Osobine jednakosti</u>

I/ Svaka veličina jednaka je samoj sebi - osobina refleksivnosti.

II/ Ako je izraz na levoj strani znaka jednakosti (L) jednak izrazu na desnoj strani (D), tj. ako je L = D, onda je i D = L - osobina simetričnosti.

III/ Ako su dve veličine ponaosob jednake trećoj, onda su i međusobno jednake; tj. ako je A = C i B = C, onda je i A = B - osobina tranzitivnosti.

IV/ Ako se izrazima na obema stranama znaka jednakosti jednovremeno dodaju ili oduzmu jednake veličine, znak jednakosti se ne menja. Npr., ako je $L = D$, biće i $L + a = D + a$, odnosno $L - a = D - a$.

V/ Ako se izrazi na obema stranama znaka jednakosti jednovremeno pomnože ili podele jednakim brojem, znak jednakosti se ne menja. Npr., ako je $L = D$ biće i $L \cdot a = D \cdot a$ odnosno $L : a = D : a$ ili $\frac{L}{a} = \frac{D}{a}$.

VI/ Ako su dve veličine jednake, one ostaju jednake i kad im se jednovremeno promeni predznak, tj. ako je $L = D$, onda je i $-L = -D$ (što sledi iz osobine V ako se obe strane jednakosti pomnože ili podele brojem -1).

VII/ Ako su dve veličine jednake, jednake su im i recipročne vrednosti, tj. ako je $L = D$, onda je i $\frac{1}{L} = \frac{1}{D}$.

1.3. Osnovno pravilo rešavanja jednačina

Jednačine se rešavaju primenom navedenih osobina.

Npr.:

1/ $x - 3 = a$. Dodajmo broj 3 i levoj i desnoj strani date jednačine (IV osobina): $x - 3 + 3 = a + 3$. Pošto se na levoj strani suprotni brojevi $+3$ i -3 ponište (potiru), rešenje je $x = a + 3$.

2/ $x + 3 = a$. Oduzmimo broj 3 i levoj i desnoj strani date jednačine (IV osobina): $x + 3 - 3 = a - 3$. Pošto se na levoj strani suprotni brojevi -3 i $+3$ ponište /potiru/, rešenje je $x = a - 3$.

3/ $x : 3 = a$ ili $\frac{x}{3} = a$. Pomnožimo i levu i desnu stranu date jednačine deliocem 3 (V osobina): $(x : 3) \cdot 3 = a \cdot 3$ ili $\frac{x}{3} \cdot 3 = a \cdot 3$. Pošto se količnik na levoj strani skrati, rešenje je $x = 3a$.

4/ $3x = a$. Podelimo i levu i desnu stranu date jednačine množiocem 3 (V osobina): $3x : 3 = a : 3$ ili $\frac{3x}{3} = \frac{a}{3}$. Pošto se količnik na levoj strani skrati, rešenje je $x = a : 3$ ili $x = \frac{a}{3}$.

U navedenim primerima uočavamo: broj 3 koji u datim jednačinama figuriše na levoj strani, u rešenjima figuriše na desnoj strani znaka jednakosti, no sa oznakom suprotne računske radnje. Prema tome, osnovno pravilo za rešavanje jednačina glasi:

Veličine se prenose s jedne strane jednačine na drugu stranu tako što im se menja računska radnja: ako se na jednoj strani sabiraju, na drugoj se oduzimaju, ako se na jednoj njima množi, na drugoj se s njima deli i obrnuto.

1.4. Rešavanje linearnih jednačina

Formalna primena ovog osnovnog pravila za rešavanje jednačina suvišna je u posebnim primerima, kao što su: $7x = 0$; $4ax = 0$, $(a \neq 0)$; $\frac{x}{3} = 0$ ili $x : 3 = 0$, $\frac{2x}{5} = 0$ ili $2x : 5 = 0$.

Naime, prostim zaključivanjem da je vrednost proizvoda jednaka nuli, kad je bar jedan od činilaca jednak nuli, a da je vrednost količnika (razlomka) jednaka nuli samo onda ako je deljenik (brojilac) jednak nuli, dolazimo do rešenja $x = 0$.

Jednačina oblika, npr.:

$$-x + 3 = a, \quad -x - 3 = -a, \quad -\frac{x}{3} = a, \quad -\frac{x}{3} = -\frac{2}{5}$$

mogu, primenom VI osobine, prethodno da se svedu na ekvivalentne jednačine $x - 3 = -a$, $x + 3 = a$, $\frac{x}{3} = \frac{2}{5}$, koje dalje rešavamo po pravilu.

Rešenja jednačina, kao što su npr.:

$$\frac{1}{x} = 3; \quad \frac{2}{x} = \frac{3}{5}; \quad \frac{4}{x - a} = 9; \quad \frac{1}{2x + 3} = \frac{3}{x - 7} \quad \text{i sl.}$$

dobijamo primenom VII osobine ili direktno $x = \frac{1}{3}$ ili pošto ih svedemo na ekvivalentne jednačine: $\frac{x}{2} = \frac{5}{3}$, $\frac{x - a}{4} = \frac{1}{9}$, $2x + 3 = \frac{x - 7}{3}$ itd., tako da je formalna primena osnovnog pravila u ovakvim primerima - suvišna.

Jednačine u kojima je nepoznata x data na desnoj strani, npr.:

$$a = x - 3, \quad \frac{3}{5} + b = x + a, \quad a = \frac{x}{3}$$

primenom II osobine dovode se na uobičajen poredak (nepoznata s leve strane): $x - 3 = a, x + a = \frac{3}{5} + b$, $\frac{x}{3} = a$, te je i u ovakvim primerima suvišna primena osnovnog pravila.

Osnovno pravilo za rešavanje jednačina primenjuje se u složenim oblicima datih jednačina.

Primer 1. Rešiti jednačinu:

$$2(x + 3) - 7(x + 1) = 3(x + 2) - 20x.$$

Pošto se izvrši naznačeno množenje:

$$2x + 6 - 7x - 7 = 3x + 6 - 20x$$

i pošto se prenesu članovi sa nepoznatom x na jednu stranu (obično na levu, mada ne mora) a slobodni članovi na drugu stranu jednačine:

$$2x - 7x - 3x + 20x = 6 - 6 + 7$$

dobije se ekvivalentna jednačina

$$8x = 7$$

odakle je

$$x = \frac{7}{8}.$$

Primer 2. Rešiti linearnu jednačinu (prividno kvadratnu):

$$(2x - 3)^2 = 4(x^2 - 3) + 1.$$

Pošto se izvrši stepenovanje binoma (na levoj strani) i množenje (na desnoj strani):

$$4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 - 12 + 1$$

i pošto se članovi sa nepoznatom x prenesu na levu, a slobodni članovi na desnu stranu:

$$4x^2 - 12x - 4x^2 = -12 + 1 - 9$$

dobije se ekvivalentna jednačina:

$$-12x = -20$$

odnosno, na osnovu osobine VI:

$$12x = 20,$$

odakle je

$$x = \frac{20}{12}, \quad \text{ili} \quad x = \frac{5}{3}, \quad \text{ili} \quad x = 1\frac{2}{3}.$$

Primer 3. Rešiti jednačinu:

$\frac{x-7}{2} = \frac{x+3}{7}$ ili u drukčijem obliku $(x - 7) : 2 = (x + 3) : 7$

Jednačine date u obliku proporcije svodimo na ekvivalentne prema pravilu da je proizvod spoljašnjih članova proporcije ($x - 7$ i 7) jednak proizvodu unutrašnjih članova (2 i $x + 3$):

$$7(x - 7) = 2(x + 3).$$

Pošto se izvrši množenje:

$$7x - 49 = 2x + 6$$

i prenesu odgovarajući članovi na odgovarajuće strane

$$7x - 2x = 6 + 49$$

dobije se ekvivalentna jednačina

$$5x = 55$$

odakle je

$$x = 11.$$

Primer 4. Rešiti jednačinu:

$$(a - bx)c = (a + bx)d.$$

Pošto se izvrši naznačeno množenje:

$$ac - bcx = ad + bdx$$

i pošto se članovi sa nepoznatom x prenesu na jednu, a slobodni članovi na drugu stranu:

$$-bcx - bdx = ad - ac$$

primenom VI osobine dobije se ekvivalentna jednačina

$$bcx + bdx = ac - ad$$

jer je $-(ad - ac) = ac - ad$, u kojoj se i jedna i druga strana, kad god je to moguće, rastave na činioce:

$$b\,(c + d)\,x = a\,(c - d),$$

odakle je

$$x = \frac{a\,(c - d)}{b\,(c + d)}.$$

Primer 5. Rešiti jednačinu:

$\frac{x - 5}{a} = \frac{x + a}{4}$ ili u drukčijem obliku $(x - 5) : a = (x - a) : 4$. (Vidi: primer 3)

$$4\,(x - 5) = a\,(x + a)$$

$$4x - 20 = ax + a^2$$

$$4x - ax = a^2 + 20$$

$$(4 - a)\,x = a^2 + 20$$

$$x = \frac{a^2 + 20}{4 - a}$$

Primer 6. Rešiti jednačinu:

$$\frac{x + 3}{c} = \frac{c + x}{3}$$

(Vidi : primer3)

$$3\,(x + 3) = c\,(c + x)$$

$$3x + 9 = c^2 + cx$$

$$3x - cx = c^2 - 9$$

$$(3 - c)\,x = (c - 3)\,(c + 3)$$

$$x = \frac{(c - 3)\,(c + 3)}{3 - c}$$

$$x = -(c + 3)$$

jer je $\frac{c - 3}{3 - c} = -1.$

Primer 7. Rešiti jednačinu:

$$\frac{ax - b}{cx - d} = \frac{a + b}{c + d}.$$

(Vidi: primer 3)

$$(c + d)(ax - b) = (a + b)(cx - d)$$

$$acx + adx - bc - bd = acx - bcx - ad - bd.$$

I levoj i desnoj strani oduzmimo veličinu acx a dodajmo veličinu bd (IV osobina), te je dalje:

$$adx - bcx = bc - ad$$

$$(ad - bc)x = bc - ad$$

$$x = \frac{bc - ad}{ad - bc}$$

$$x = -1.$$

Jednačine date u obliku razlomaka prethodno se svode na ekvivalentne jednačine bez razlomaka. Osloboditi se razlomaka znači pomnožiti obe strane jednačine (V osobina) najmanjim zajedničkim imeniocem svih razlomaka koji figurišu u datoj jednačini.

Suvišno je dovoditi date razlomke na zajednički imenilac da bi ga se tek tada oslobodili kad to može da se postigne već u prvom koraku.

Naročito treba da se pazi na one razlomke koji se u datoj jednačini oduzimaju (ispred kojih je znak $-$) jer najčešće se greši baš na tom mestu. Stoga, pri svođenju date jednačine sa razlomcima na ekvivalentnu jednačinu bez razlomka, preporučuje se upotreba zagrade.

Primer 8. Pojednostaviti jednačinu:

$$\frac{x - 7}{2} + \frac{x + 3}{3} - \frac{2x - 1}{4} = \frac{3(x - 1)}{5} + 2.$$

NZI $= 60$. Množimo i levu i desnu stranu sa 60 što se, kako je uobičajeno, naznači pored jednačine odvojeno kosom ili uspravnom linijom. Računamo $60 : 2 = 30$, pišemo $30(x - 7)$, $+$, računamo $60 : 3 = 20$, pišemo $20(x + 3)$, $-$, računamo $60 : 4 = 15$, pišemo $15(2x - 1) =$, računamo $60 : 5 = 12$, pišemo $12 \cdot 3(x - 1)$, $+$, $60 \cdot 2$, tj.:

$$30(x - 7) + 20(x + 3) - 15(2x - 1) = 36(x - 1) + 120.$$

Primer 9. Pojednostaviti jednačinu :

$$\frac{x - 3}{2} - \frac{2x + 1}{8} + 3 = \frac{2 - x}{4} .$$

NZI = 8. Množimo i levu i desnu stranu sa 8. Računamo 8 : 2 = 4, pišemo 4 (x - 3), - , računamo 8 : 8 = 1, činilac 1 ne pišemo, ali zato pišemo (2x + 1) u zagradi (!!), + , 8·3, = , računamo 8 : 4 = 2, pišemo 2 (2 - x), tj.:

$$4 (x - 3) - (2x + 1) + 24 = 2 (2 - x).$$

Primer 10. Pojednostaviti jednačinu :

$$\frac{4 - x}{3} - \frac{x - 2}{5} + 4 = 0 .$$

N Z I = 15. Množimo levu stranu sa 15, a na desnoj strani je i tako 0, pa je i proizvod 15·0 = 0 (ne : 15·0 = 15, česta omaška!). Računamo 15 : 3 = 5, pišemo 5 (4 - x), - , računamo 15 : 5 = 3, pišemo 3 (x - 2), + , 15·4, = , 0, tj.:

$$5 (4 - x) - 3 (x - 2) + 60 = 0.$$

Primer 11. Rešiti jednačinu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{p} . \qquad (apx \neq 0)$$

NZI = apx. Množimo i levu i desnu stranu sa apx. Računamo apx : a = px, pišemo px, + , računamo apx : x = ap, pišemo ap, = , računamo apx : p = ax, pišemo ax, tj.:

$$px + ap = ax.$$

Dalje je:

$$px - ax = - ap$$

$$(p - a) x = - ap$$

$$x = - \frac{ap}{p - a} \quad \text{ili}$$

$$x = \frac{ap}{a - p}$$

jer je $- (p - a) = a - p$.

Primer 12. Rešiti jednačinu :

$$\frac{ab}{cx} + \frac{ac}{bx} + \frac{bc}{ax} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} . \qquad (abcx \neq 0)$$

$NZI = a^2b^2c^2x^2$. Množimo, dakle, obe strane sa $a^2b^2c^2x$. Računamo $a^2b^2c^2x : cx = a^2b^2c \cdot ab$, pišemo a^3b^3c, +, računamo $a^2b^2c^2x : bx = a^2bc^2$, $a^2bc^2 \cdot ac$, pišemo a^3bc^3, +, itd., te dobijamo ekvivalentnu jednačinu:

$$a^3b^3c + a^3bc^3 + ab^3c^3 = b^2c^2x + a^2c^2x + a^2b^2x,$$

tj.:

$$abc\ (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)\ x.$$

Posle deobe obeju strana trinomom u zagradi (V osobina), dobijamo:

$$abc = x$$

a odavde, na osnovu II osobine (simetričnosti), rešenje je

$$x = abc.$$

<u>Primer 13.</u> Rešiti jednačinu:

$$\frac{ax}{a - b} - \frac{bx}{a + b} = a^2 + b^2. \quad (a-b \neq 0; \quad a+b \neq 0)$$

$$NZI = (a - b)\ (a + b) = a^2 - b^2.$$

$$(a + b)\ ax - (a - b)\ bx = (a^2 + b^2)\ (a^2 - b^2)$$

$$a^2x + abx - abx + b^2x = (a^2 + b^2)\ (a^2 - b^2)$$

$$a^2x + b^2x = (a^2 + b^2)\ (a^2 - b^2)$$

$$(a^2 + b^2)\ x = (a^2 + b^2)\ (a^2 - b^2)$$

Podelimo obe strane binoma $(a^2 + b^2)$, te je rešenje:

$$x = a^2 - b^2.$$

<u>Primer 14.</u> Rešiti linearnu (prividno kvadratnu) jednačinu:

$$\frac{2ax + a^2}{x + b} - \frac{4b^2 - 6ab + a^2}{x - b} = 2a + \frac{2a^2b}{x^2 - b^2}. \quad (x+b \neq 0;\ x-b \neq 0)$$

$$NZI = x^2 - b^2.$$

$$(x - b)\ (2ax + a^2) - (x + b)\ (4b^2 - 6ab + a^2) =$$
$$2a\ (x^2 - b^2) + 2a^2b$$

$2ax^2 - 2abx + a^2x - a^2b - 4b^2x - 4b^3 + 6abx + 6ab^2 - a^2x -$
$- a^2b \; = \; 2ax^2 - 2ab^2 + 2a^2b.$

I levoj i desnoj strani jednačine oduzmimo veličinu $2ax^2$, dok se članovi a^2x i $- a^2x$ na levoj strani potiru.

Dalje je:

$- 2abx - 4b^2x + 6abx \; = \; - 2ab^2 + 2a^2b + a^2b + 4b^3 - 6ab^2 +$
$+ a^2b$

$$4abx - 4b^2x \; = \; - 8ab^2 + 4a^2b + 4b^3.$$

Podelimo obe strane sa $4b$ $(b \neq 0)$:

$$ax - bx \; = \; - 2ab + a^2 + b^2$$

$$(a - b)\, x \; = \; (a - b)^2 .$$

Podelimo obe strane sa $a - b$ $(a - b \neq 0)$:

$$x = a - b.$$

<u>Primer 15</u>. Rešiti jednačinu:

$$\frac{1}{8}\left(7x + \frac{10}{3}\right) = \frac{1}{9}\left(5x + \frac{17}{3}\right) .$$

NZI = 72.

$$9\left(7x - \frac{10}{3}\right) = 8\left(5x + \frac{17}{3}\right)$$

$$63x + 30 \; = \; 40x + \frac{136}{3}$$

$$63x - 40x \; = \; \frac{136}{3} - 30$$

$$23x \; = \; \frac{136 - 90}{3}$$

$$23x \; = \; \frac{46}{3}$$

$$x \; = \; \frac{46}{3 \cdot 23} \quad \text{ili}$$

$$x \; = \; \frac{2}{3}$$

Primer 16. Rešiti jednačinu:

$$\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]+8\right\}=1$$

Prvo sredimo izraz u maloj zagradi :

$$\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{x+2+12}{3}+6\right]+8\right\}=1$$

$$\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{x+14}{15}+6\right]+8\right\}=1$$

a zatim u srednjoj:

$$\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\cdot\frac{x+14+90}{15}+8\right\}=1$$

$$\frac{1}{9}\left\{\frac{x+104}{105}+8\right\}=1$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{x+104+840}{105}=1$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{x+944}{105}=1$$

$$\frac{x+944}{945}=1$$

$$x+944=945$$

$$x=1.$$

Međutim, rešenje se lakše izračuna uzastopnim množenjem obeju strana jednačine, prvo brojem 9, zatim 7, pa 5 i, najzad, brojem 3:

$$\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]+8\right\}=1.$$

Množimo sa 9 i jednovremeno se oslobađamo velike zagrade:

$$\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]+8=9$$

odnosno: $\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\ (\frac{x+2}{3}+4)\ +6\right]=1$

zatim množimo sa 7 i oslobađamo se srednje zagrade:

$$\frac{1}{5}\ (\frac{x+2}{3}+4)\ +6\ =\ 7$$

odnosno:

$$\frac{1}{5}\ (\frac{x+2}{3}+4)\ =\ 1;$$

sada množimo sa 5 i oslobađamo se male zagrade:

$$\frac{x+2}{3}+4\ =\ 5$$

odnosno:

$$\frac{x+2}{3}\ =\ 1$$

odnosno:

$$x+2\ =\ 3$$

odakle je

$$x\ =\ 1.$$

Primer 17. Pojednostaviti jednačinu :

$$\frac{3x+1}{4x-10}+\frac{5x-1}{6x-15}-\frac{7x+4}{10x-25}=4\frac{2}{3}.$$

Pre svega, rastavimo imenioce na činioce, a mešoviti broj predstavimo nepravim razlomkom:

$$4x-10\ =\ 2\ (2x-5)$$

$$6x-15\ =\ 3\ (2x-5)$$

$$10x-25\ =\ 5\ (2x-5)$$

$$4\frac{2}{3}\ =\ \frac{14}{3}$$

$$\text{NZI}\ =\ 2\cdot3\cdot5\ \ (2x-5).$$

Množenjem dobijamo ekvivalentnu jednačinu :

$$15\ (3x+1)\ +10\ (5x-1)-6\ (7x+4)\ =\ 140\ (2x-5).$$

Primer 18. Pojednostaviti jednačinu :

$$\frac{\frac{x}{4}+4}{\frac{x}{8}+7}=\frac{\frac{x}{3}+2}{\frac{x}{6}+6}.$$

Za složeni razlomak na levoj strani NZI = 8, a na desnoj strani – NZI = 6. Proširimo li složene razlomke – na levoj strani sa 8 a na desnoj sa 6, dobićemo pojednostavljenu ekvivalentnu jednačinu :

$$\frac{2x+32}{x+56}=\frac{2x+12}{x+36}.$$

Primer 19. Rešiti jednačinu:

$$\frac{\frac{3x-6a}{4}-\frac{x-9a}{6}}{\frac{x}{x-2a}-\frac{2a}{x+2a}}:\frac{\frac{7x}{4a}-\frac{7a}{x}}{x+\frac{4a^2}{x}}=\frac{2a}{3}.$$

Prenesimo razlomak – delilac na desnu stranu, te dobijamo ekvivalentnu jednačinu :

$$\frac{\frac{3x-6a}{4}-\frac{x-9a}{6}}{\frac{x}{x-2a}-\frac{2a}{x+2a}}=\frac{2a}{3}\cdot\frac{\frac{7x}{4a}-\frac{7a}{x}}{x+\frac{4a^2}{x}}$$

u kojoj proširujemo složene razlomke, na levoj strani sa NZI = 12 (x – 2a) (x + 2a) = 12 (x^2 – $4a^2$) , a na desnoj sa NZI = 4ax:

$$\frac{3(x^2-4a^2)(3x-6a)-2(x^2-4a^2)(x-9a)}{12x(x+2a)-24a(x-2a)}=$$

$$=\frac{2a}{3}\cdot\frac{7x^2-28a^2}{4ax^2+16a^3}$$

rastavljanjem na činioce brojilaca i imenilaca :

$$\frac{(x^2-4a^2)\left[3(3x-6a)-2(x-9a)\right]}{12\left[x(x+2a)-2a(x-2a)\right]}=\frac{2a}{3}\cdot\frac{7(x^2-4a^2)}{4a(x^2+4a^2)}$$

i deljenjem obeju strana sa $(x^2 - 4a^2)$, uz usputno sređivanje, dobijamo ekvivalentnu jednačinu:

$$\frac{9x - 18a - 2x + 18a}{12\left[x^2 + 2ax - 2ax + 4a^2\right]} = \frac{7}{6\,(x^2 + 4a^2)}$$

odnosno:

$$\frac{7x}{12\,(x^2 + 4a^2)} = \frac{7}{6\,(x^2 + 4a^2)}$$

množenjem obeju strana sa $6\,(x^2 + 4a^2)$ i deljenjem sa 7 dobijamo da je:

$$\frac{x}{2} = 1$$

odakle je:

$$x = 2.$$

Primer 20. Periodični decimalni razlomak $0,\dot{3}1\dot{5}$ izraziti običnim razlomkom.

$$0,\dot{3}1\dot{5} = 0,315\ 315\ 315\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Stavimo: $x = 0,315\ 315\ 315\ \ldots\ldots\ldots\ldots$

Pomnožimo obe strane jednakosti sa 10^3:

$$1\,000x = 315,\ 315\ 315\ \ldots\ldots\ldots$$

$$1\,000x = 315 + 0,315\ 315\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1\,000x = 315 + x$$

$$999x = 315$$

$$x = \frac{315}{999}$$

ili, pošto skratimo sa 9:

$$x = \frac{35}{111}.$$

Dakle, $0,\dot{3}1\dot{5} = \frac{35}{111}.$

2. Skup linearnih jednačina sa dve nepoznate

Ako analitički izraz linearne funkcije

$$y = ax + b$$

posmatramo kao jednačinu sa dve nepoznate veličine, x i y, uočavamo da postoji beskonačno mnogo parova vrednosti sa x i y koje zadovoljavaju dati izraz. Stoga je jednačina sa dve nepoznate <u>neodređena</u>.

Dijagrami dveju linearnih funkcija mogu da imaju jednu zajedničku tačku (prave se seku), ili da imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka (prave se podudaraju), ili da nemaju zajedničku tačku (prave su paralelne).

Kako skup dvaju analitičkih izraza može da se posmatra kao skup dveju jednačina sa dve nepoznate, skup se zove:

<u>određen</u> - ako postoji jedan par rešenja za x i y (geometrijsko tumačenje: prave se seku);

<u>neodređen</u> - ako postoji beskonačno mnogo parova rešenja koja zadovoljavaju jednačine (geometrijsko tumačenje: prave se podudaraju);

<u>nemoguć</u> - ako ne postoji nijedan par rešenja za x i y (geometrijsko tumačenje: prave su paralelne).

Primer za određeni skup. Jednačine:

$$y = \frac{2}{5}x + 5$$

i

$$y = 3x - 8$$

geometrijski predstavljaju skup dve prave koje se seku u tački $M(5,7)$. I obrnuto, vrednosti $x = 5$ i $y = 7$ zadovoljavaju obe jednačine, i to su jedine vrednosti koje ih jednovremeno zadovoljavaju.

Primer za neodređen skup. Jednačine:

$$y = 6x - 15$$

i

$$\frac{2y}{3} = 4x - 10$$

geometrijski predstavljaju jednu te istu pravu, u stvari dve koje se podudaraju, te su im sve tačke zajedničke, a ima ih beskonačno mnogo; i obrnuto, za beskonačno mnogo vrednosti nepoznate x postoji beskonačno mnogo odgovarajućih vrednosti za y koje jednovremeno zadovoljavaju obe jednačine, a koje su ekvivalentne (množenjem prve jednačine sa $\frac{2}{3}$ dobija se druga).

Primer za nemoguć skup. Jednačine:

$$y = 3x + 5$$

i

$$y = 3x - 7$$

geometrijski predstavljaju dve paralelne prave, bez ijedne zajedničke tačke; i obrnuto, ne postoji nijedan par vrednosti koji bi jednovremeno zadovoljio obe jednačine; sem toga, skup ovakva dva izraza u suprotnosti je sa III osobinom jednakosti, jer im desne strane očigledno nisu jednake.

Na međusobnoj vezi između analitičkog i geometrijskog izražavanja funkcija zasnovana je grafička metoda rešavanja skupa dve jednačine sa dve nepoznate. Metoda se sastoji u tome što se date jednačine, svaka za sebe, reše po y; dobijenim analitičkim izrazima, $y = f(x)$, ucrtaju se u zajednički koordinatni sistem odgovarajući dijagrami: koordinate zajedničke tačke za ta dva dijagrama ujedno su i zajednička rešenja datog skupa jednačina.

Tačnost očitovanja koordinata zajedničke tačke zavisi od razmere samog dijagrama, kao i od preciznosti konstrukcije. No, i u najpovoljnijim okolnostima, očitovanja su samo približno tačna, te stoga grafička metoda pripada metodama određivanja približnih rešenja skupa jednačina.

Primer. Grafički rešiti skup jednačina:

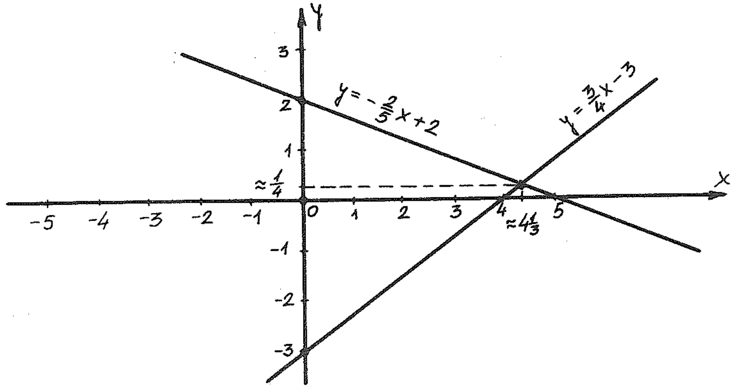
$$3x - 4y = 12$$
$$2x + 5y = 10.$$

Rešimo obe jednačine po y:

$$y = \frac{3}{4}x - 3$$

$y = -\frac{2}{5}x + 2.$

Dobijene izraze linearne funkcije predstavimo grafički:



Očitane koordinate presečne tačke ove dve prave, odnosno procenjena rešenja datog skupa jesu: $x \approx 4\frac{1}{3}$, $y \approx \frac{1}{4}$ (Tačne vrednosti rešenja su: $x = 4\frac{8}{23}$, $y = \frac{6}{23}$).

Primeri: Grafički rešiti skupove jednačina sa dve nepoznate:

1/ $7x - 4y = 0$
$x + 2y = 18$

2/ $x - 3y + 12 = 0$
$x - y + 8 = 0$

3/ $x - 3y + 12 = 0$
$x + 2y = 18$

4/ $7x - 4y = 0$
$y + 7 = 0$

5/ $3x + y = 21$
$3x - y = 27$

6/ $3x + y = 21$
$x - 7y - 7 = 0$

7/ $x + 8y = 72$
$x + 8 = 0$

8/ $x - 7y + 7 = 0$
$x - 7y - 7 = 0$

Rešenja:

1/ $y = \frac{7}{4}x$

$\underline{y = -\frac{1}{2}x + 9}$

$x = 4$

$y = 7$

2/ $y = \frac{1}{3}x + 4$

$\underline{y = x + 8}$

$x = -6$

$y = 2$

3/ $y = \frac{1}{3}x + 4$

$\underline{y = -\frac{1}{2}x + 9}$

$x = 6$

$y = 6$

4/ $y = \frac{7}{4}x$

$\underline{y = -7}$

$x = -4$

$y = -7$

5/ $y = -3x + 21$

$\underline{y = 3x - 27}$

$x = 8$

$y = -3$

6/ $y = -3x + 21$

$\underline{y = \frac{1}{7}x - 1}$

$x = 7$

$y = 0$

7/ $y = -\frac{1}{8}x + 9$

$\underline{x = -8}$

$x = -8$

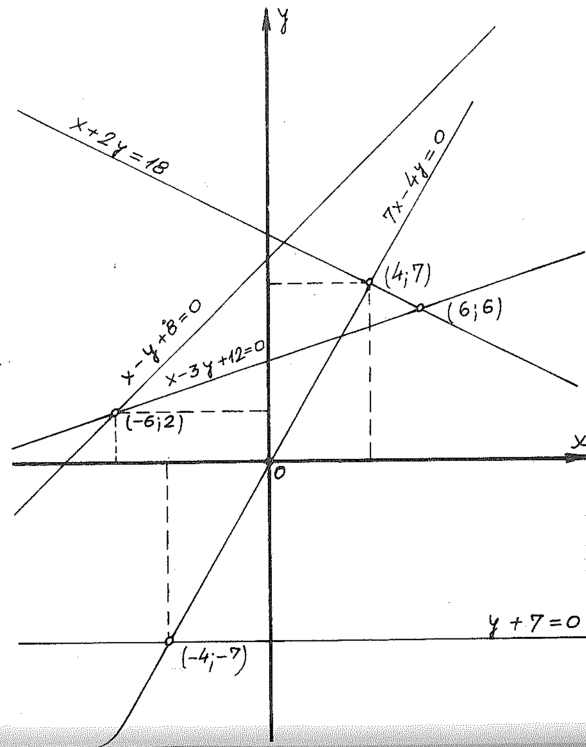
$y = 10$

8/ $y = \frac{1}{7}x + 1$

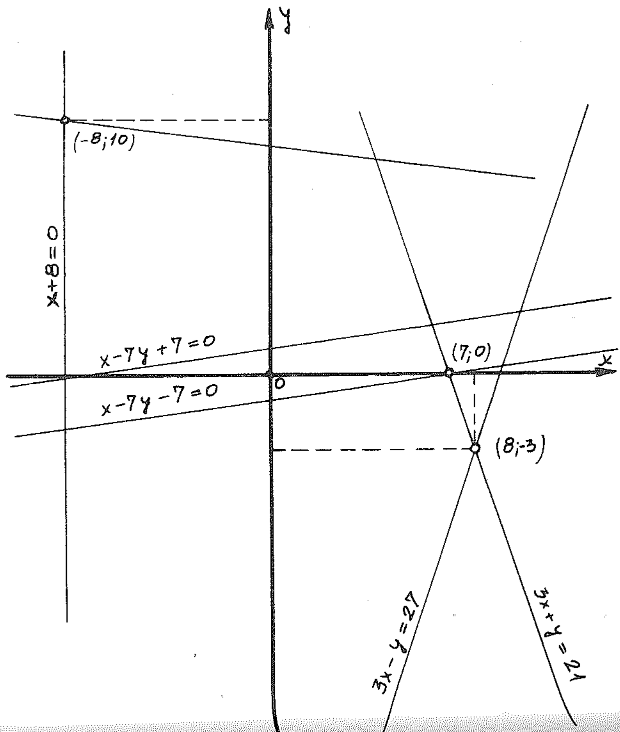
$\underline{y = \frac{1}{7}x - 1}$

(skup nema rešenja - prave su paralelne)

Primeri od 1. do 4:



Primeri od 5. do 8:



Skup dve linearne jednačine oblika:

$$A_1x + B_1y = C_1$$

$$A_2x + B_2y = C_2$$

gde su A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 posebni ili opšti brojevi parametri, rešava se svođenjem na jednu jednačinu s jednom nepoznatom, ili sa x, ili sa y.

Svođenje na jednu jednačinu postiže se:

metodom zamene - jedna nepoznata (ili x ili y) izrazi se u funkciji pomoću druge u jednoj jednačini, te se tim izrazom smenjuje u drugoj jednačini; ili,

metodom jednakih ili suprotnih koeficijenata - množenjem ili deljenjem leve i desne strane jedne jednačine izvesnom veličinom dobija se ekvivalentna jednačina u kojoj se jedan od koeficijenata izjednači sa odgovarajućim koeficijentom druge jednačine sa istim ili sa suprotnim znakom; primenom II i IV osobine jednakosti algebarski zbir levih strana dveju jednačina jednak je zbiru desnih strana jednakosti; u algebarskom sabiranju se članovi sa nepoznatom x ili sa nepoznatom y potiru.

Formalna primena ovih metoda suvišna je ako su obe date jednačine u eksplicitnom obliku, rešene ili po x ili po y.

Npr., jednačine su date eksplicitno rešene po y:

$$y = 3x - 1$$
$$y = -x + 2;$$

upoređenjem levih i desnih strana zaključujemo da mora da bude:

$$3x - 1 = -x + 2$$

tj.:

$$4x = 3$$

odakle je:

$$x = \frac{3}{4}.$$

Zamenom ove vrednosti za x, bilo u prvoj bilo u drugoj jednačini, dobije se vrednost druge nepoznate: $y = \frac{5}{4}$.

Ili, na primer, jednačine su date eksplicitno rešene po x:

$$x = 3y + 5$$
$$x = 2y - 7.$$

S obzirom da su im leve strane jednake, to mora da budu i desne:

$$3y + 5 = 2y - 7$$

odnosno:

$$y = -12.$$

Zamenom ove vrednosti za y, bilo u kojoj od datih jednačina, dobija se vrednost druge nepoznate: $x = -31$.

Metoda zamene podesna je ako je neki od koeficijenata uz x ili y u datim jednačinama jednak jedinici (da bi se, eventualno, izbegli razlomci).

Metoda jednakih ili suprotnih koeficijenata efikasna je, pogotovu za rešavanje algebarskih jednačina. Za množioce datih jednačina, radi primene metode jednakih ili suprotnih koeficijenata, uzimaju se činioci čiji je proizvod najmanji zajednički sadržilac za dva koeficijenta uz nepoznatu x, odnosno uz nepoznatu y.

Primer 1. Rešiti skup jednačina:

$$3x - y = 7$$
$$2x + 3y = 5.$$

a/ Metodom zamene: iz prve jednačine je:

$$-y = 7 - 3x,$$

odnosno:

$$y = 3x - 7;$$

dobijeni izraz za y zamenimo u drugoj jednačini:

$$2x + 3(3x - 7) = 5;$$

dalje je:

$$2x + 9x - 21 = 5$$

odnosno:

$$11x = 26$$

odakle je

$$x = \frac{26}{11};$$

vrednost druge nepoznate (y) nalazimo zamenom vrednosti $x = \frac{26}{11}$ u bilo kojoj od datih jednačina ili, najpodesnije, u izrazu eksplicitnom po y:

$$y = 3x - 7$$

$$y = 3 \cdot \frac{26}{11} - 7$$

$$y = \frac{78 - 77}{11}$$

tj.: $$y = \frac{1}{11},$$

b/ metodom jednakih ili suprotnih koeficijenata: za koeficijente uz x najmanji zajednički sadržilac – NZS = $= 2 \cdot 3 = 6$. Prvu jednačinu pomnožimo sa $6 : 3 = 2$, drugu sa $6 : 2 = 3$, pa imamo:

$$6x - 2y = 14$$
$$6x + 9y = 15;$$

oduzmimo ili donju od gornje ili gornju od donje; članovi sa x potiru se, a sa y algebarski sabiraju:

$$11y = 1$$
$$y = \frac{1}{11};$$

zamenom $y = \frac{1}{11}$ u bilo kojoj od datih jednačina dobije se vrednost nepoznate

Međutim, metoda može da se ponovi, samo sada za eliminisanje nepoznate y; pomnožimo prvu jednačinu sa 9, drugu sa 2 (NZS = 18), te dobijemo ekvivalentne jednaćine:

$$54x - 18y = 126$$
$$12x + 18y = 30$$

iz kojih proizilazi algebarskim sabiranjem:

$$66x = 156$$
$$x = \frac{156}{66}$$

odnosno:

$$x = \frac{26}{II}.$$

Primer 2. Rešiti jednačine:

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = 17$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 19.$$

Prethodno se oslobađamo razlomaka, množenjem prve jednačine sa 15, druge sa 12:

$$10x + 9y = 255$$
$$9x + 8y = 228.$$

a/ Metodom zamene: iz prve jednačine:

$$y = \frac{255 - 10x}{9}$$

zamenimo u drugoj:

$$9x + 8 \cdot \frac{255 - 10x}{9} = 228;$$

množenjem sa 9 dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$81x + 8\,(255 - 10x) = 2\,052$$
$$81x + 2040 - 80x = 2\,052$$
$$x = 12;$$

zamenimo li ove vrednosti u izrazu:

$$y = \frac{255 - 10x}{9}$$

dobijamo

$$y = \frac{255 - 120}{9}$$

$$y = \frac{135}{9} \quad \text{ili} \quad y = 15.$$

b/ Metodom jednakih ili suprotnih koeficijenata: prvu pomnožimo sa 9, drugu sa 10:

$$90x + 81y = 2\,295$$
$$90x + 80y = 2\,280$$

i oduzmimo donju od gornje:

$$y = 15;$$

primenimo ponovo ovu metodu, samo na drugu nepoznatu; prvu jednačinu pomnožimo sa 8, drugu sa 9 :

$$80x + 72y = 2\,040$$
$$81x + 72y = 2\,052$$

i oduzmimo gornju od donje:

$$x = 12.$$

Primer 3. Rešiti skup jednačina

$$\frac{x}{y} = \frac{11}{19}$$

$$2x - 3y = 10$$

metodom jednakih ili suprotnih koeficijenata.

Prethodno sredimo prvu jednačinu;

$$19x = 11y$$

odnosno:

$$19x - 11y = 0$$

i potpišemo drugu $2x - 3y = 10$;

množenjem gornje sa 3, donje sa 11 dobijamo

$$57x - 33y = 0$$
$$22x - 33y = 10;$$

oduzmimo donju od gornje:

$$35x = -10$$

$$x = -\frac{10}{35} \quad \text{ili} \quad x = -\frac{2}{7} \text{ itd.}$$

Primer 4. Svesti na jednu jednačinu sa jednom nepoznatom skup jednačina;

$$\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = 2a$$

$$\frac{ax}{a+b} + \frac{by}{a-b} = a^2 + b^2.$$

Prvo se oslobađamo razlomaka množenjem prve jedna-
čine sa $a(a - b)$, a druge sa $(a + b)$:

$$ax + \frac{a(a - b)y}{a + b} = 2a^2 (a - b)$$

$$ax + \frac{b(a + b)y}{a - b} = (a^2 + b^2)(a + b).$$

Oduzimanjem, recimo, donje od gornje dobijamo jednu jednači-
nu s nepoznatom y :

$$\frac{a(a - b)y}{a + b} - \frac{b(a + b)y}{a - b} = 2a^2 (a - b) - (a^2 + b^2)(a + b)$$

<u>Primer 5.</u> Pojednostaviti skup jednačina :

$$\frac{24}{x} + \frac{33}{y} = 15$$

$$\frac{36}{x} - \frac{9}{y} = 3.$$

Smenama $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ dati skup svodi se na ekvi-
valentni:

$$24u + 33v = 15$$
$$36u - 9v = 3.$$

Pošto se odrede u i v rešenja datog skupa biće

$$x = \frac{1}{u} \qquad \text{i} \qquad y = \frac{1}{v}.$$

3. <u>Skup linearnih jednačina sa tri nepoznate</u>

Da bi se odredile tri nepoznate skup mora da sa-
drži tri jednačine koje se rešavaju, kao i jednačine sa dve
nepoznate, metodom zamene i metodom jednakih ili suprotnih
koeficijenata.

Izrazimo li u jednoj jednačini jednu od nepoznatih
pomoću druge dve, i te izraze zamenimo u drugim dvema jedna-
činama, skup se svodi na skup od dve jednačine sa dve nepo-
znate. Npr., od skupa jednačina :

$$x + y + z = 136$$
$$x + y - z = 4$$
$$x - y + z = 56$$

izaberemo jednu, recimo prvu, i izrazimo nepoznatu x pomoću nepoznatih y i z :

$$x = 136 - y - z$$

pa je zamenimo u druge dve jednačine:

$$136 - y - z + y - z = 4$$
$$136 - y - z - y + z = 56$$

iz kojih određujemo vrednosti za y i z, a zatim pomoću zamene:

$$x = 136 - y - z$$

odredimo i vrednost nepoznate x.

Međutim, može jedna od nepoznatih, recimo z, da se pridruži slobodnom članu kao parametar, i to u dve jednačine, pa pošto se x i y izraze pomoću z te izraze zamenimo u trećoj jednačini s jednom nepoznatom z.

Npr., u skupu jednačina:

$$2x - 3y + 4z = 16$$
$$6x + 3y + 2z = 16$$
$$x + 8y - 6z = 43$$

odaberimo prvu i drugu:

$$2x - 3y = 16 - 4z$$
$$6x + 3y = 16 - 2z .$$

Sabiranjem dobijamo:

$$8x = 32 - 6z$$

odnosno: $$x = \frac{16 - 3z}{4}$$

a množenjem gornje sa 3 i oduzimanjem od donje dobijamo:

$$12y = 10z - 32$$

odnosno: $$y = \frac{5z - 16}{6}.$$

Zamenom ovih izraza u trećoj jednačini dati skup svodi se na jednačinu s jednom nepoznatom:

$$\frac{16 - 3z}{4} + 8 \cdot \frac{5z - 16}{6} - 6z = 43.$$

4. Nejednačine prvog stepena s jednom nepoznatom

Upoređivanjem veličina utvrđuje se da su one jednake (=) ili različite ($\neq$), odnosno da je jedna veća ($>$) ili manja ($<$) od druge. Upoređivanjem brojeva ili numeričkih i algebarskih izraza utvrđuju se iste relacije, tj. njihova međusobna jednakost ili nejednakost.

Ako u nejednakosti dva algebarska izraza figuriše jedna promenljiva veličina na prvom stepenu, nejednakost se zove - linearna nejednačina. Rešiti nejednačinu znači odrediti skup vrednosti koje bi, zamenjujući ih umesto nepoznate, zadovoljavale datu nejednačinu.

4.1. Osobine nejednakosti

I/ Ako je $L > D$, onda je i $D < L$.

II/ Ako se izrazima na obema stranama znaka nejednakosti jednovremeno dodaju ili oduzmu jednake veličine, znak nejednakosti se ne menja. Npr., ako je $L > D$, biće i $L + a > D + a$, odn. $L - a > D - a$, a ako je $L < D$, biće i $L + a < D + a$, odn. $L - a < D - a$.

III/ Ako se izrazi na obema stranama znaka nejednakosti pomnože ili podele <u>pozitivnim</u> brojem, znak nejednakosti <u>ne menja se</u>. Npr., ako je broj p pozitivan ($p > 0$) i ako je $L > D$, biće i $L \cdot p > D \cdot p$, odn. $L : p > D : p$, ili $\frac{L}{p} > \frac{D}{p}$, a ako je $L < D$, biće i $L \cdot p < D \cdot p$, odn. $L : p < D : p$, ili $\frac{L}{p} < \frac{D}{p}$.

IV/ Ako se izrazi na obema stranama znaka nejednakosti pomnože ili podele <u>negativnim</u> brojem, znak jednakosti <u>menja se</u>. Npr., ako je broj n negativan ($n < 0$) i ako je $L > D$, biće $L \cdot n < D \cdot n$, odn. $L : n < D : n$, ili $\frac{L}{n} < \frac{D}{n}$, a ako je $L < D$, biće $L \cdot n > D \cdot n$, odn. $L : n > D : n$, ili $\frac{L}{n} > \frac{D}{n}$.

V/ Ako se izrazima na obema stranama znaka jednakosti jednovremeno promeni predznak, menja se i znak nejednakosti, tj. ako je $L > D$, onda je $-L < -D$, a ako je $L < D$, onda je $-L > -D$ (što sledi iz IV osobine, ako se obe strane nejednakosti pomnože ili podele brojem -1).

VI/ Ako se izrazi u nejednakosti zamene njihovim recipročnim vrednostima, znak nejednakosti se menja, tj. ako je $L > D$, biće $\frac{1}{L} < \frac{1}{D}$, a ako je $L < D$, biće $\frac{1}{L} > \frac{1}{D}$.

4.2. Rešavanje linearnih nejednačina

Nejednačine se rešavaju primenom navedenih osobina nejednakosti, a po istom pravilu po kome se rešavaju i jednačine (vidi: Glava 4.t.13) no sa dodatkom:

Ako su množilac (brojilac) ili delilac (imenilac), koji se prenose s jedne strane nejednačine na drugu, negativne veličine, menja se znak nejednakosti (IV osobina nejednakosti).

Nejednačina, na primer, $\frac{x}{a} > 3$, može da ima dva rešenja: jedno za $a > 0$, $x > 3a$ i drugo za $a < 0$, $x < 3a$. Prema tome, množenje ili deljenje nejednačine opštim brojem ili izrazom izvodljivo je samo uz pretpostavku da je taj broj, odnosno izraz ili pozitivan ili negativan. Stoga nejednačine često množimo ili delimo kvadratima opštih brojeva ili izraza, jer je kvadrat svakog (realnog) broja (sem 0) pozitivan. Npr., nejednakost $\frac{a+b}{c+d} > 0$, gde je $c + d \neq 0$, možemo da pomnožimo sa $(c + d)^2$, bez obzira na to da li je $c + d$ pozitivna ili negativna veličina, jer je $(c + d)^2 > 0$, te dobijamo umesto date novu nejednakost: $(a + b)(c + d) > 0$.

Primer 1. Rešiti nejednačinu:

$2 > x - 3$.

Primenimo najpre I osobinu:

$x - 3 < 2$

a zatim je, po pravilu:

$$x < 2 + 3$$

tj.:

$$x < 5.$$

Rešenju, dakle, pripada skup svih vrednosti manjih od 5, što može da se prikaže i grafički na brojnoj osi:

Primer 2. Rešiti nejednačinu:

$$3 - 4x < 5x + 11.$$

Prenesemo li 5x sa desne na levu stranu a 3 sa leve na desnu stranu nejednačine:

$$-4 - 5x < 11 - 3$$

$$-9x < 8,$$

podelimo li obe strane sa -9 (IV osobina), rešenje je:

$$x > -\frac{8}{9}$$

tj. skup vrednosti većih od $-\frac{8}{9}$; grafički:

Primer 3. Rešiti nejednačinu:

$$x - 3 < x - 2.$$

Prema II osobini (oduzima se x) dobijamo:

$$-3 < 2.$$

Kako je poslednja relacija ispravna, rešenje date nejednačine je: skup svih realnih vrednosti.

Primer 4. Rešiti nejednačinu:

$$5 - 2x > 11 - 2x.$$

Prema II osobini (dodaje se 2x) dobijamo:

$$5 > 11.$$

Kako je ova relacija neispravna, data nejednačina nema rešenja.

Primer 5. Rešiti nejednačinu:

$$\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} + \frac{3x}{10} < 2.$$

NZI $= 30$. Pomnožimo obe strane date nejednačine sa 30 (III osobina):

$$10x - 12x + 9x < 60$$

$$7x < 60.$$

Rešenje je:

$$x < \frac{60}{7}$$

ili grafički:

Primer 6. Rešiti linearnu (prividno kvadratnu) nejednačinu:

$$(2x + 3)^2 > 4x\,(x - 5).$$

Izvršimo naznačene radnje stepenovanja na levoj i množenja na desnoj strani:

$$4x^2 + 12x + 9 > 4x^2 - 20x$$

i primenimo II osobinu (oduzimanjem člana $4x^2$):

$$12x + 9 > - 20x,$$

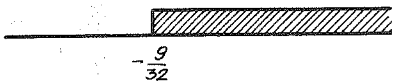
odnosno:

$$32x > - 9$$

odakle je rešenje

$$x > - \frac{9}{32}$$

ili grafički:



Primer 7. Rešiti nejednačinu:

$$ax + 4 < 2x - b$$

$$ax - 2x < -b - 4$$

$$(a - 2)x < -(b + 4)$$

ili (V osobina):

$$(2 - a)x > b + 4.$$

a/ Ako je $2 - a > 0$, tj. $2 > a$, odn. (I osobina) $a < 2$, rešenje date nejednačine je:

$$x > \frac{b + 4}{2 - a}.$$

b/ Ako je $2 - a < 0$, tj. $2 < a$ ili $a > 2$, rešenje date nejednačine je:

$$x < \frac{b + 4}{2 - a}.$$

Primer 8. Rešiti nejednačinu:

$$\frac{x}{a^2 + b^2} + \frac{3}{a^2b^2} < \frac{2}{a^2} - \frac{x}{b^2}.$$

NZI $= a^2b^2(a^2 + b^2)$. NZI > 0, jer su mu činioci kvadrati brojeva a i b i zbir njihovih kvadrata, te možemo datu nejednačinu da množimo sa NZI bez promene znaka nejednakosti.

$$a^2b^2x + 3(a^2 + b^2) < 2b^2(a^2 + b^2) - a^2(a^2 + b^2)x$$

$$a^2b^2x + a^2(a^2 + b^2)x < 2b^2(a^2 + b^2) - 3(a^2 + b^2)$$

$$a^2\left[b^2 + (a^2 + b^2)\right]x < (a^2 + b^2)(2b^2 - 3)$$

$$a^2(a^2 + 2b^2)x < (a^2 + b^2)(2b^2 - 3).$$

Rešenje je:

$$x < \frac{(a^2 + b^2)(2b^2 - 3)}{a^2(a^2 + 2b^2)}$$

4.3. Skup linearnih nejednačina s jednom nepoznatom

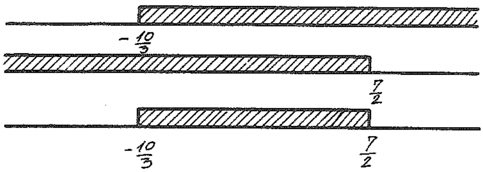
Skup linearnih nejednačina najlakše se rešava grafički pomoću brojnih osa. Za svaku nejednačinu posebno na brojnoj osi naznači se skup vrednosti koje je zadovoljavaju, a zatim na posebnoj zajedničkoj brojnoj osi naznači se skup vrednosti koje jednovremeno zadovoljavaju sve nejednačine datog skupa.

Primer 1. Rešiti skup nejednačina:

$$\frac{3}{2}x + 5 > 0$$

$$2x - 7 < 0.$$

Rešenja datih nejednačina su: za prvu $x > -\frac{10}{3}$ a za drugu $x < \frac{7}{2}$.



Prema tome, zajedničkim rešenjima datih nejednačina pripada skup vrednosti između $-\frac{10}{3}$ i $\frac{7}{2}$, što može da se napiše:

$$x \in (-\frac{10}{3}, \frac{7}{2}) \qquad \text{ili} \qquad -\frac{10}{3} < x < \frac{7}{2}$$

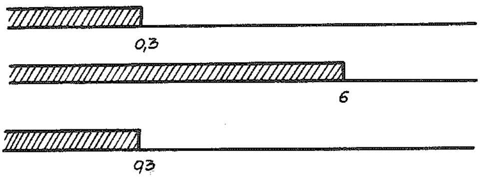
($\in$ - pripada).

<u>Primer 2.</u> Rešiti skup nejednačina :

$2x - \frac{3}{5} < 0$

$3 - \frac{x}{2} > 0.$

Rešenja nejednačina su: za prvu $x < 0,3$, za drugu $x < 6$.



Zajedničko rešenje je skup vrednosti manjih od o,3, tj.:

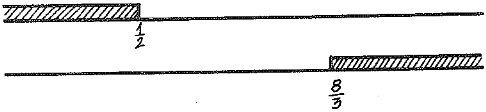
$x < 0,3.$

<u>Primer 3.</u> Rešiti skup nejednačina :

$2x - 1 < 0$

$3x - 8 > 0.$

Rešenja datih nejednačina su: za prvu $x < \frac{1}{2}$, za drugu $x > \frac{8}{3}$.



Dakle, skup datih nejednačina nema zajedničkog rešenja.

Primer 4. Rešiti nejednačinu:

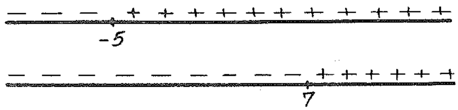
$$\frac{x+5}{x-7} > 0 .$$

Nejednačina je data u obliku razlomka, a kako razlomak ima pozitivnu vrednost samo ako su i brojilac i imenilac jednakog znaka (ili oba pozitivna ili oba negativna), na posebnim brojnim osama naznače se oblasti u kojima su brojilac i imenilac pozitivni i negativni.

Izraz u brojiocu pozitivan je $(x + 5 > 0)$ za $x > -5$, a negativan $(x + 5 < 0)$ za $x < -5$; izraz u imeniocu pozitivan je $(x - 7 > 0)$ za $x > 7$, a negativan $(x - 7 < 0)$ za $x < 7$:

(znak za x + 5):

(znak za x - 7):



Rešenja date nejednačine su skupovi vrednosti:

$x < -5$ i $x > 7$

Primedba: Pogrešno bi bilo da se rešenje napiše u obliku $-5 > x > 7$ jer je -5 manje od 7 a ne veće.

Primer 5. Rešiti nejednačinu:

$$\frac{2-x}{x+3} > 2 .$$

Prethodno prenesemo broj 2 s desne na levu stranu:

$$\frac{2-x}{x+3} - 2 > 0$$

a zatim dovedemo na zajednički imenilac:

$$\frac{2 - x - 2(x+3)}{x+3} > 0$$

$$\frac{-3x-4}{x+3} > 0,$$

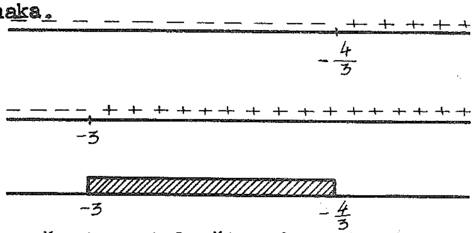
ili na osnovu V osobine :

$$\frac{3x+4}{x+3} < 0.$$

Vrednost razlomka negativna je ako su brojilac i imenilac suprotnog znaka.

(znak za $3x + 4$):

(znak za $x + 3$):



Prema tome, rešenje nejednačine dato je skupom vrednosti između -3 i $\frac{4}{3}$, što može da se napiše:

$$x \in \left(-3, -\frac{4}{3}\right) \qquad \text{ili} \qquad -3 < x < -\frac{4}{3}.$$

<u>Primer 6.</u> Rešiti nejednačinu :

$$(x + 5)(x - 7) > 0.$$

Proizvod dva činioca pozitivan je ako su oba činioca istog znaka (ili oba pozitivna ili oba negativna).

Prema tome, dalji postupak kao i rešenje nejednačine dato je u primeru 4.

V GLAVA

STEPENOVANJE I KORENOVANJE

Ako se broj a u nekom proizvodu javlja kao činilac n puta, $\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a \cdot a}_{n \text{ činilaca}}$, taj proizvod piše se kraće: a^n. Izraz a^n zove se stepen, a je osnova (baza) a n je izložilac (eksponent). Ovakva definicija stepena ima smisla dogod je izložilac ceo pozitivan, dakle, prirodan broj.

1. Sabiranje i oduzimanje

Stepeni mogu da se sabiraju i oduzimaju samo ako su jednakih osnova i izložilaca, dakle, samo ako predstavljaju slične monome. Npr.:

$$5a^7 + 4a^7 = 9a^7 \quad \text{ili} \quad 20a^5 - 14a^5 = 6a^5.$$

Ne mogu da se sabiraju ili oduzimaju monomi koji nisu slični, npr.:

$9a^5 + 3a^4$ ili $11a^4 - 5a^2$ niti možemo da sabiramo (oduzimamo) stepene različitih osnova, makar bili i jednakih izložilaca, kao npr.:

$$a^3 + b^3 \quad \text{ili} \quad a^2 - b^2.$$

2. Množenje

Primer:

$$a^7 \cdot a^4 = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{7 \text{ činilaca}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ činioca}} = a^{11}$$

dakle, $a^7 \cdot a^4 = a^{7+4}$

Pravilo: stepeni jednakih osnova množe se tako što se osnova stepenuje zbirom izložilaca.

$$\underline{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

3. Deljenje

Primer:

$$a^7 : a^4 = \frac{a^7}{a^4} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a} = a^3,$$

dakle, $$a^7 : a^4 = \frac{a^7}{a^4} = a^{7-4}$$

Pravilo: Stepeni jednakih osnova dele se tako što se osnova stepenuje razlikom izložilaca:

$$a^m : a^n \quad \text{ili} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

4. Stepenovanje

Primer:

$$(a^7)^4 = a^7\cdot a^7\cdot a^7\cdot a^7 = a^{7+7+7+7} = a^{7\cdot 4} = a^{28}$$

dakle, $$(a^7)^4 = a^{7\cdot 4}$$

Pravilo: Stepen se stepenuje tako što se osnova stepenuje proizvodom izložilaca:

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

5. Korenovanje

Zapazimo prethodno: kad se stepeni množe i dele izložioci im se sabiraju i oduzimaju. Dakle, sa izložiocima se izvodi računska radnja nižeg reda (ranga) od one koja se izvodi sa stepenima. Zatim, suprotna radnja množenju je deljenje, suprotna sabiranju - oduzimanju.

Isto tako, množenje je računska radnja nižeg reda (ranga) u odnosu na stepenovanje, stoga stepenovanju stepena odgovara množenje izložilaca.

Suprotna radnja stepenovanju je korenovanje, suprotna množenju je deljenje. Prema tome, biće:

$$\sqrt[4]{a^7} = a^{7:4} \quad \text{ili} \quad a^{\frac{7}{4}}$$

Pravilo: Stepen se korenuje tako što se osnova stepenuje količnikom, pri čemu je deljenik (ili brojilac) stepenov izložilac, a delilac ili imenilac korenov izložilac.

6. Posledice pravila za deljenje stepena jednakih osnova

I/ - Podelimo a^5 sa a^5 po pravilu o deljenju stepena jednakih osnova:

$$a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0.$$

S druge strane, deliti a^5 sa a^5 znači deliti broj samim sobom, a to znači da je količnik

$$a^5 : a^5 = 1.$$

Prema tome, stepenovanje nulom, u stvari je deljenje broja samim sobom.

Stoga je uvek $\underline{a^0 = 1}$ ma kakvo bilo $\underline{\underline{a}}$ (izuzev 0).

Ovo pravilo važi i ako je osnova najkomplikovaniji izraz. Npr.:

$$\left(\frac{a+b-c}{\sqrt{a^2-b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{3x-y\sqrt{2}}{a^x c^y}} \right)^0 = 1$$

jer svaki izraz podeljen samim sobom daje za količnik jedinicu.

II/ - Podelimo $a^3 : a^7$ po pravilu za deljenje stepena jednakih osnova:

$$a^3 : a^7 = a^{3-7} = a^{-4}.$$

S druge strane je:

$$a^3 : a^7 = \frac{a^3}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^4}.$$

Dakle, $a^{-4} = \dfrac{1}{a^4}$

Posledica: Stepen sa negativnim izložiocem jednak je recipročnoj vrednosti stepena sa pozitivnim izložiocem:

$$\underline{a^{-n} = \frac{1}{a^n}.}$$

I ovo pravilo važi za svaku osnovu (izuzev 0), pa i kad je osnova više ili manje komplikovan izraz. Za razlomljenu osnovu je:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Važi i obrnuto: svaki stepen pozitivnog izložioca može da se predstavi sa recipročnom osnovom i sa negativnim izložiocem.

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

ili $$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}.$$

Ako je $n = 1$, umesto, npr., razlomka $\frac{1}{3}$, može da se napiše 3^{-1}. Često, da bi se izbeglo pisanje razlomačke linije, koristi se negativan izložilac. Npr., pri nabrajanju jedinica za merenje (I Deo - Gl.2) umesto $\frac{1}{10^3}$ ili 0,001 može da se stavi 10^{-3}, ili umesto 0,035 l može da se napiše $351 \cdot 10^{-4}$ itd. Tako je:

$1\text{m} = 10^{-3}$ km

$1 \text{ mm} = 10^{-1}$ cm

$1 \text{ mm} = 10^{-2}$ dm

$1 \text{ mm} = 10^{-3}$ m

$1 \text{ m} = 10^{-6}$ km itd.

(Vežbanje: U primerima pretvaranja manjih jedinica u veće primeniti stepen osnove 10 sa negativnim izložiocem.)

Primer: U datom razlomku:

$$\frac{a^{-7} \cdot b^{-3} \cdot c^{-1} \cdot d \cdot e^{3}}{f^{-1} \cdot g^{2} \cdot h^{-4} \cdot i^{-5} \cdot j}$$

stepene predstaviti samo sa pozitivnim izložiocima.

(Rešenje: $\frac{f \cdot h^4 \cdot i^5 \cdot d \cdot e^3}{a^7 \cdot g^2 \cdot b^3 \cdot c \cdot j}$).

Primedba: $\frac{a^{-3} - b^{-3}}{a^{-2} - b^{-2}} \neq \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}$, jer što važi za činioce u ovom slučaju ne važi za sabirke. U ovom primeru mogli bismo da postupimo ovako:

$$\frac{a^{-3} - b^{-3}}{a^{-2} - b^{-2}} = \frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$; dobijeni složeni razlomak proširimo sa a^3b^3, pa dobijamo:

$$\frac{a^{-3} - b^{-3}}{a^{-2} - b^{-2}} = \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} = \frac{(b - a)(b^2 + ba + a^2)}{(b - a)(b + a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

7. Posledice pravila za korenovanje

I/ - Primenimo pravila za korenovanje stepena na izraze:

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b^1} = b^{\frac{1}{3}}$$
$$\sqrt{a^2 - b^2} = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}}$$

i obrnuto,

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad \text{itd.}$$

Primenimo još i stepene sa negativnim izložiocem na izraze:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}} = b^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} = (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{a}{b}}} = \frac{1}{(\frac{a}{b})^{\frac{1}{5}}} = (\frac{b}{a})^{-\frac{1}{5}},$$

i obrnuto :

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{itd.}$$

<u>Posledica</u>: Znak za korenovanje ($\sqrt[m]{\ }$) može da se zameni razlomljenim izložiocem ($\frac{1}{m}$) i, obrnuto, razlomljen izložilac može da se zameni znakom za korenovanje.

II/ - Odgovoriti na pitanja:

da li je $\sqrt[3]{a^2}$ isto što i $(\sqrt[3]{a})^2$ i

da li je $\sqrt[4]{a^3}$ isto što i $(\sqrt[4]{a})^3$.

Odgovor na prvo pitanje glasi: jeste. Naime, primenom pravila o stepenovanju i korenovanju stepena i primenom razlomljenog izložioca, dolazimo do istog rezultata:

$$\sqrt[3]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{2\cdot\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$(\sqrt[3]{a})^2 = (a^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{1}{3}\cdot 2} = a^{\frac{2}{3}},$$

jer su proizvodi $2\cdot\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{3}\cdot 2$, na osnovu osobine komutativnosti množenja jednaki.

Odgovor na drugo pitanje glasi: jeste, ali pod uslovom da je $a \geqslant 0$ (parni koren iz negativnog broja ne postoji u skupu realnih brojeva).

Posledica: Ako radikand parnog korena nije negativan, svejedno je da li se prvo izvrši radnja stepenovanja pa onda korenovanja, ili obrnuto.

Međutim, pri izračunavanju brojnih primera lakše se dođe do rezultata ako se izvrši prvo radnja korenovanja a zatim stepenovanja. Npr., bez teškoća izračunamo :

$$8^{\frac{7}{3}} = (\sqrt[3]{8})^7 = 2^7 = 128$$

ali, obrnuto, bilo bi nesrazmerno teže: $8^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{8^7}$, jer bi trebalo prvo izračunati sedmi stepen broja 8, a zatim kubni koren iz dobijenog velikog broja, mada bi rezultat bio isti, tj. 128.

III/ - Mnogobrojni zadaci iz oblasti korenovanja, kao što je, npr.: uprostiti izraz:

$$\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt{x - y}}}$$

primenom razlomljenog izložioca i pravila za stepenovanje stepena lako se rešavaju:

$$\left\{\left[(x -)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^{\frac{1}{7}} = (x - y)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}} = (x - y)^{\frac{1}{70}} = \sqrt[70]{x - y}.$$

Ako ne bismo ovako postupili, mogli bismo da koristimo pravilo za korenovanje korena: Koren se korenuje tako što se potkorena veličina (radikand) korenuje korenom čiji je izložilac jednak proizvodu izložilaca naznačenih korena.

U našem primeru imali bismo:

$$\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt{x - y}}} = \sqrt[7\cdot 5\cdot 2]{x - y} = \sqrt[70]{x - y}.$$

Primeri: Uprostiti date izraze:

1/ $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^7}}{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{a^3}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{7}{5}}}{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{7}{5}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{40+84-15-90}{60}} =$

$= a^{\frac{19}{60}} = \sqrt[60]{a^{19}}$. $(a > 0)$

2/ $\dfrac{\sqrt[3]{x^7} : \sqrt{x^5}}{\sqrt[4]{x^3} : \sqrt[6]{x}} = \dfrac{x^{\frac{7}{3}} : x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{x^{\frac{7}{3}-\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}} = x^{\frac{7}{3}-\frac{5}{2}-(\frac{3}{4}-\frac{1}{6})} =$

$= x^{\frac{7}{3}-\frac{5}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{28-30-9+2}{12}} = x^{-\frac{9}{12}} = x^{-\frac{3}{4}} =$

$= \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. $(x > 0)$

3/ $\dfrac{\sqrt{x} - 5x + 3x^2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}} - 5x + 3x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} - 5x^{1-\frac{1}{3}} +$

$+ 3x^{2-\frac{1}{3}} = x^{\frac{3-2}{6}} - 5^{\frac{3-1}{3}} + 3x^{\frac{6-1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{5}{3}} =$

$= \sqrt[6]{x} - 5\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x^5}$. $(x > 0)$

IV/ – Ako je razlomljeni izložilac nepravi razlomak, onda može da se predstavi kao proizvod dva stepena: jednog sa celim izložiocem i drugog sa razlomljenim. Npr.:

$x^{\frac{7}{3}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}$ (jer je $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$), odnosno: $x^2\sqrt[3]{x}$.

V/ – Ako izložioci stepena i korena imaju zajedničkih činilaca, možemo da ih skratimo.

Na primer:

$$\sqrt[42]{x^8} = \sqrt[21]{x^4}$$

gde smo 42 i 8 skratili sa 2. Naime, $\sqrt[42]{x^8} = 8^{\frac{8}{42}} = x^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{x^4}$.

8. Racionalisanje imenilaca

Da bi se izbeglo deljenje iracionalnim brojem, količnik se transformiše tako da umesto deljenja izvodimo množenje iracionalnim brojem. U stvari, količnik se proširi iracionalnim brojem koji se nalazi u imeniocu ili njegovim stepenom. Npr.:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}; \qquad \frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5\cdot(\sqrt[3]{2})^2}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Transformacija, kojom smo postigli da se iracionalni broj "premesti" iz imenioca u brojilac, zove se racionalisanje imenioca.

Primedba: Na isti način može da se racionališe brojilac. Npr.:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Primeri:

1/ $$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

2/ $$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a}$$

3/ $$\frac{5(x+y)}{\sqrt{x-y}} = \frac{5(x+y)\cdot\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x-y}} = \frac{5(x+y)\sqrt{x-y}}{x-y}$$

4/ $$\frac{a\sqrt{5}}{b\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{b\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{3b}$$

5/ $$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

6/ $$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$$

7/ $$\frac{a}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \frac{a\sqrt[3]{a^2}}{a} = \sqrt[3]{a^2}$$

8/ $$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{x\sqrt[3]{x}}{x} = \sqrt[3]{x}$$

9/ $$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

<u>Primedba:</u> U pr. 6 - 9 primenjeno je pravilo:

$$(\sqrt[3]{n})^2 = \sqrt[3]{n^2}.$$

Racionalisanje imenilaca (algebarskih izraza), ukoliko je izvodljivo, izvodi se proširenjem razlomaka takvim činiocem da u imeniocu ostane racionalan izraz (bez znaka korenovanja). Pri tome koriste se identičnosti:

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})\,(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$... razlika kvadrata: $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$

$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})\,(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$ ... zbir kubova: $(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3$

$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})\,(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$ ... razlika kubova: $(\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3$

<u>Primeri:</u>

10/ $$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

11/ $$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b}$$

12/ $$\frac{3}{2+\sqrt{x}} = \frac{3\cdot(2-\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})\cdot(2-\sqrt{x})} = \frac{3\,(2-\sqrt{x})}{4-x}$$

13/ $$\frac{a^2x+b^2y}{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}} = \frac{(a^2x+b^2y)(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})}{(a\sqrt{x}-b\sqrt{y})\cdot(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})} =$$

$$= \frac{(a^2x+b^2y)\cdot(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})}{a^2x-b^2y}$$

14/ $$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(x+h)-x} = \frac{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h} =$$

$$= \sqrt{x+h}+\sqrt{x}$$

15/ $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{1\cdot(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$$

16/ $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{1\cdot(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

17/ $$\frac{1}{2+\sqrt[3]{x}} = \frac{1\cdot(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{8-x}$$

18/ $$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{1\cdot(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y}$$

19/ $$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1\cdot(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a+b}$$

20/ $$\frac{h}{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}=\frac{h\left[\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\frac{h\left[\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}{(x+h)-x}=$$

$$=\frac{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}{h}=$$

$$=\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}$$

21/ $a=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{d\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{d\sqrt{2}}{2}$ (stranica kvadrata izražena pomoću dijagonale kvadrata)

22/ $a=\frac{D}{\sqrt{3}}=\frac{D\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{D\sqrt{3}}{3}$ (ivica kocke izražena pomoću dijagonale kocke)

23/ $$x=\frac{H\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}=\frac{H\sqrt{B_1}\cdot(\sqrt{B}+\sqrt{B_1})}{(\sqrt{B}-\sqrt{B_1})\cdot(\sqrt{B}+\sqrt{B_1})}=\frac{H\,(\sqrt{BB_1}+\sqrt{B_1})}{B-B_1}$$

(Visina dopune zarubljene piramide ili kupe izražena pomoću njene visine i njenih osnova.)

VI GLAVA

KOMPLEKSNI BROJ

1. Imaginarna jedinica

Ranije je već rečeno (u t. 1.5. II GLAVA - II deo) da vrednost korena parnog izložioca a negativnog radikanda ne pripada skupu realnih brojeva. Takvi brojevi zovu se imaginarni. Ako uvedemo oznaku

$$i^2 = -1,$$

onda će biti, npr., $\sqrt{-25} = \sqrt{25i^2} = \pm 5i$, gde je i tzv. imaginarna jedinica, data izrazom:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Stepeni imaginarne jedinice:

$$\begin{array}{lll} i^0 = 1 & i^4 = 1 & i^8 = 1 \ldots \\ i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i \ldots \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & \ldots\ldots\ldots \\ i^3 = -i & i^7 = -i & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Posle svakog četvrtog prirodnog broja, kao izložioca stepena imaginarne jedinice - vrednost stepena se ponavlja. Uopšteno:

$$\begin{aligned} i^{4k} &= i^0 = 1 \\ i^{4k+1} &= i^1 = i \\ i^{4k+2} &= i^2 = -1 \\ i^{4k+3} &= i^3 = -i \qquad (k = 0,1,2,3\ldots) \end{aligned}$$

Primer. Naći i^{139}. Podelimo 139 : 4 (dovoljno je da se podeli samo 39 - bez stotica). Ostatak je 3 (količnik nije važan). Dakle,

$$i^{139} = i^3 = -i.$$

2. Imaginarni broj

Proizvod realnog broja i imaginarne jedinice zove se <u>imaginarni broj</u>, npr., $5i$, $-8i$, ai, $\frac{2}{5}i$ itd.

Imaginarni brojevi sabiraju se i oduzimaju kao slični monomi. Npr., $7i + 2i = 9i$, $3i - 2i = i$, $ai + bi = (a + b)i$, $3i - 3i = 0$ itd.

Imaginarni brojevi se množe kao i slični monomi, s tim što se stepen imaginarne jedinice zameni odgovarajućom vrednošću. Proizvod parnog broja imaginarnih činilaca je realan broj, a neparnog - imaginaran.

<u>Primeri:</u>

1/ $2i \cdot 5i = 10i^2 = -10$

2/ $2i \cdot 3i \cdot 4i = 24i^3 = -24i$

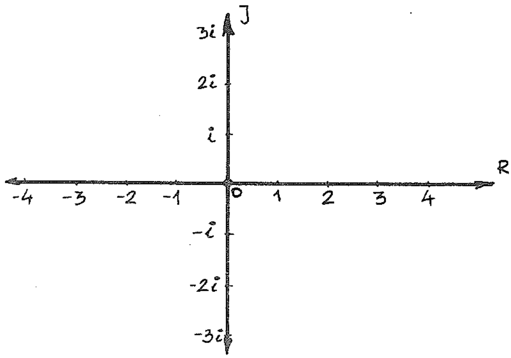
3/ $2i \cdot 3i \cdot 4i \cdot 5i = 120i^4 = 120$

4/ $2i \cdot (-3i) = -6i^2 = 6.$

Količnik dva imaginarna broja, je realni broj, jednak količniku realnih koeficijenata uz <u>i</u>. Npr.:

$$\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}$$

Kako imaginarnim brojevima ne može da se pridruži nijedna tačka realne brojne ose, za njihovo grafičko predstavljanje uvedena je imaginarna osa. Imaginarna osa (J) stoji normalno na realnoj osi (R) i seče je u tački kojoj je pridružen broj 0, a orijentisana je "nagore", dakle kao i ordinatna osa Dekartovog pravouglog sistema.



3. Kompleksni broj

Algebarski zbir realnog i imaginarnog broja zove se <u>kompleksni broj</u>. Npr.,

$3 + 2i, \quad -4 + i, \quad 5 - \frac{1}{2}i, \quad 2 + i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{3} - i, \quad a + bi,$

$x - yi$ i sl.

Realni sabirak zove se <u>realni deo</u>, realni koeficijent uz imaginarnu jedinicu - <u>imaginarni deo</u> kompleksnog broja; u kompleksnom broju $a + bi$ $\underline{a}$ je realni, $\underline{b}$ je imaginarni deo.

Kompleksni brojevi koji se međusobno razlikuju samo po znaku imaginarnog dela zovu se <u>konjugovano kompleksni</u> brojevi. Npr.,

$3 + 2i$ i $3 - 2i$; $-4 + i$ i $-4 - i$;

$a + bi$ i $a - bi$ itd.

Kompleksni brojevi se sabiraju i oduzimaju tako što se saberu ili oduzmu posebno realni, a posebno imaginarni delovi.

Primeri:

$$\begin{array}{r} 2 + 3i \\ + \ 4 - 5i \\ \hline 6 - 2i \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 - i \\ - \ 4 + 2i \\ \hline -1 - 3i \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 + 4i \\ + \ 3 - 4i \\ \hline 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 - 2i \\ + \ -4 + i \\ \hline - i \end{array}$$

Dakle, sabiranjem ili oduzimanjem kompleksnih brojeva dobije se ili kompleksni, ili realni, ili imaginarni broj.

Međutim, zbir konjugovano kompleksnih brojeva uvek je realni broj, a razlika - uvek imaginarni broj:

$$\begin{array}{r} a + bi \\ + \ a - bi \\ \hline 2a \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + bi \\ - \ a - bi \\ \hline 2bi \end{array}$$

Kompleksni brojevi množe se kao i binomi.

Na primer:

1/ $(2 + 3i)\cdot(5 - 2i) = 10 + 15i - 4i - 6i^2 = 16 + 11i$

2/ $(1 + i)\cdot(-2 + 3i) = -2 - 2i + 3i + 3i^2 = -5 + i$

3/ $(2 + i)\cdot(4 + 8i) = 8 + 4i + 16i + 8i^2 = 20i$

4/ $(a + bi)\cdot(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac + bd) + (bc + ad)i$

(Primedba: $i^2 = -1$.)

Proizvod kompleksnih brojeva je opet kompleksan broj (ili imaginaran - kada je realni deo proizvoda jednak nuli).

Međutim, <u>proizvod konjugovano kompleksnih brojeva uvek je realni broj, i to jednak zbiru kvadrata realnog i imaginarnog dela</u>:

$$\underline{(a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 + b^2.}$$

Prema tome, zbir kvadrata dva realna broja - za koji je ranije rečeno da ne može da se rastavi na (realne) činioce (II deo, II GL., t.3) - pošto se uvede pojam imaginarne jedinice, može da se rastavi na činioce, ali: konjugovano kompleksne:

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi).$$

Na primer:

$$4a^2 + 9b^2 = (2a + 3i)(2a - 3i) \;;$$

$$16x^2 + 25y^2 = (4x + 5yi)(4x - 5yi) \quad \text{i sl.}$$

Primeri:

1/ $(3 + 2i)\cdot(3 - 2i) = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

2/ $(5 + i)\cdot(5 - i) = 5^2 + 1^2 = 25 + 1 = 26$

3/ $(x + yi)\cdot(x - yi) = x^2 + y^2$

4/ $(\sqrt{2} + 3i)\cdot(\sqrt{2} - 3i) = (\sqrt{2})^2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$

5/ $(\sqrt{3} + \sqrt{5}i)\cdot(\sqrt{3} - \sqrt{5}i) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 3 + 5 = 8$

6/ $(-1 + 2i)\cdot(-1 - 2i) = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

7/ $(-p + qi)\cdot(-p - qi) = p^2 + q^2$

8/ $(a + 3i)\cdot(a - 3i) = a^2 + 9$

9/ $(\frac{1}{2} + i)\cdot(\frac{1}{2} - i) = (\frac{1}{2})^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

10/ $(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\cdot(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i) = (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$

Deljenjem kompleksnog broja realnim brojem dobija se opet kompleksni broj - čiji su realni i imaginarni deo količnici realnog i imaginarnog dela kompleksnog deljenika i realnog delioca. Na primer:

$$(4 + 8i) : 2 = (4 : 2 + 8i : 2) = 2 + 4i \;;$$

$$\frac{3 + 9i}{3} = 1 + 3i; \qquad \frac{2 - 5i}{7} = \frac{2}{7} - \frac{5}{7}i \quad \text{i sl.}$$

Deljenje imaginarnim ili kompleksnim brojem svodi se na proširivanje količnika takvim brojem da se delilac transformiše u realni broj (slično postupku racionalisanja imenilaca).

Primeri:

11/ $\frac{2}{3i} = \frac{2 \cdot i}{3i \cdot i} = \frac{2i}{3i^2} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i \;; \qquad (i^2 = -1)$

12/ $\frac{5}{7i^3} = \frac{5 \cdot i}{7i^3 \cdot i} = \frac{5i}{7i^4} = \frac{5i}{7} = \frac{5}{7} i$; $(i^4 = 1)$

13/ $\frac{a + bi}{a + bi} = 1$

14/ $\frac{x + yi}{a + bi} = \frac{(x + yi)\cdot(a - bi)}{(a + bi)\cdot(a - bi)} = \frac{(x + yi)\cdot(a - bi)}{a^2 + b^2}$;

15/ $\frac{i}{2 + i} = \frac{i \cdot (2 - i)}{(2 + i)\cdot(2 - i)} = \frac{2i - i^2}{4 + 1} = \frac{2i - 1}{5} =$

$= - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} i$

16/ $\frac{5}{\sqrt{2} + i\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (\sqrt{2} - i\sqrt{3})}{(\sqrt{2} + i\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2} - i\sqrt{3})} = \frac{5(\sqrt{2} - i\sqrt{3})}{2 + 3} =$

$= \frac{5(\sqrt{2} + i\sqrt{3})}{5} = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$

17/ $\frac{a}{- x - yi} = \frac{a(- x + yi)}{(- x - yi)\cdot(- x + yi)} = \frac{a(- x + yi)}{x^2 + y^2}$

ili $- \frac{a(x - yi)}{x^2 + y^2}$

(Primedba: U primerima 14-17 proširivanje smo izvršili kompleksnim brojevima koji su konjugovani imeniocima datih razlomaka.)

Kompleksnom broju može da se nađe odgovarajuća tačka u kompleksnoj ravni, određenoj realnom i imaginarnom osom, kao koordinatnim osama. Apscisa tačke odgovara realnom, a ordinata - imaginarnom delu kompleksnog broja. Npr., tačka M(2,5) pridružena je kompleksnom broju $z_1 = 2 + 5i$, tačka N(-2, -1) - broju $z_2 = -2 - i$ i sl. I obrnuto, svaki kompleksni broj oblika

$$z = x + yi$$

predstavljen je tačkom u kompleksnoj ravni, čija je apscisa x, a ordinata y.

Dok za dva realna broja uvek može da se utvrdi koji je veći, a koji manji, dotle za kompleksne brojeve ovakvo poređenje nema smisla. Stoga realni brojevi predstavljaju uređen skup, a kompleksni - neuređen skup.

VII GLAVA

JEDNAČINE DRUGOG STEPENA SA JEDNOM NEPOZNATOM

Jednačina u kojoj se nepoznata javlja najviše na drugom stepenu zove se jednačina drugog stepena sa jednom nepoznatom ili kraće kvadratna jednačina. Takve su jednačine:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$Ax^2 + Bx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$Ax^2 + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$Ax^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Jednačina (1) se zove potpuna kvadratna jednačina i ona ima kvadratni član (Ax^2), linearni (Bx) i slobodni član (C). Jednačine (2), (3) i (4) zovu se nepotpune kvadratne jednačine.

1. Rešavanje nepotpunih kvadratnih jednačina

a) Rešavanje jednačine oblika $Ax^2 + C = 0$

$$Ax^2 + C = 0$$

$$Ax^2 = - C,$$

$$x^2 = - \frac{C}{A},$$ a odavde se korenovanjem dobija

$$x = \pm\sqrt{- \frac{C}{A}}, \quad x_1 = +\sqrt{- \frac{C}{A}}, \quad x_2 = -\sqrt{- \frac{C}{A}}.$$

Ako su koeficijenti A i C suprotnog znaka, tada će izraz pod znakom kvadratnog korena ($- \frac{C}{A}$) biti pozitivan, pa će oba rešenja biti realna; ako su, pak, koeficijenti A i C istog znaka izraz pod kvadratnim korenom će biti negativan, pa će u tom slučaju rešenja biti imaginarna.

1. primer: Rešiti jednačinu $2x^2 - 8 = 0$.

$$2x^2 - 8 = 0$$
$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}, \quad \text{tj. } x_1 = +2, \quad x_2 = -2.$$

Proverićemo oba rešenja:

$$2 \cdot 2^2 - 8 = 0 \qquad\qquad 2 \cdot (-2)^2 - 8 = 0$$
$$2 \cdot 4 - 8 = 0 \qquad\qquad 2\,(+4) - 8 = 0$$
$$8 - 8 = 0 \qquad\qquad 8 - 8 = 0$$
$$0 = 0 \qquad\qquad 0 = 0$$

Dakle, oba rešenja zadovoljavaju datu jednačinu.

2. primer: Rešiti jednačinu $3x^2 + 27 = 0$.

$$3x^2 + 27 = 0$$
$$3x^2 = -27 \;/ :3$$
$$x^2 = -9$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-9}$$
$$x_{1,2} = \pm 3i, \quad \text{tj. } x_1 = 3i, \quad x_2 = -3i.$$

Rešenja ove jednačine su imaginarna.

b) Rešavanje jednačine oblika $Ax^2 + Bx = 0$

$Ax^2 + Bx = 0$, izvlačenjem zajedničkog činioca pred zagradu dobijamo

$$x\,(Ax + B) = 0$$

Proizvod $x(Ax + B)$ biće jednak nuli ako je jedan od činilaca jednak nuli, tj.

$x = 0$ i $Ax + B = 0$. Prema tome, data kvadratna jednačina se svodi na rešavanje dve linearne jednačine. Iz poslednjih jednačina dobijamo

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad Ax = -B, \quad \text{tj.}$$

$$x_2 = -\frac{B}{A}.$$

Kao što se vidi, rešenja kvadratne jednačine oblika $Ax^2 + Bx = 0$ su realna i jedno rešenje je $x = 0$.

1. primer: Rešiti jednačinu $3x^2 - 5x = 0$.

$$3x^2 - 5x = 0$$
$$x(3x - 5) = 0, \text{ tj.}$$
$$x = 0, \quad 3x - 5 = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad 3x = 5$$
$$x_2 = \frac{5}{3}.$$

2. primer: Rešiti jednačinu: $mx^2 + 2x = 0$.

$$mx^2 + 2x = 0$$
$$x(mx + 2) = 0$$
$$x = 0, \quad mx + 2 = 0, \text{ tj.}$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{2}{m}, \quad (m \neq 0).$$

c) Rešavanje jednačine oblika $Ax^2 = 0$

$$Ax^2 = 0$$
$$x^2 = 0, \text{ tj.}$$
$$x_{1,2} = 0$$

Znači, oba rešenja jednačine oblika $Ax^2 = 0$ su $x = 0$.

1. primer: Rešiti jednačinu $5x^2 = 0$.

$$5x^2 = 0$$
$$x^2 = 0$$
$$x = \sqrt{0}, \text{ tj.}$$
$$x_1 = x_2 = 0.$$

2. Rešavanje potpunih kvadratnih jednačina

Ako je trinom na levoj strani jednačine (1) potpun kvadrat, onda je njeno rešavanje jednostavno. Na primer, rešićemo jednačinu: $x^2 - 6x + 9 = 0$. Kako je $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, imamo

$(x - 3)^2 = 0$, ili korenovanjem:

$\pm (x - 3) = 0$, tj.

$x_1 = x_2 = 3$.

Dakle, oba rešenja su realna i jednaka.

Ako kvadratni trinom nije potpun kvadrat, onda levoj strani jednačine treba dodati i oduzeti po kvadrat polovine koeficijenta linearnog člana i rešavanje je slično prethodnom slučaju. Na primer, rešićemo jednačinu: $x^2 - 8x + 15 = 0$. Ako levoj strani jednačine dodamo i oduzmemo po $(\frac{8}{2})^2$ odnosno po 16, jednačina se neće promeniti, pa imamo:

$x^2 - 8x + 16 - 16 + 15 = 0$. Prva tri člana čine potpun kvadrat, tj. $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$ i prethodna jednačina postaje

$(x - 4)^2 - 1 = 0$,

$(x - 4)^2 = 1$, a odavde se korenovanjem leve i desne strane dobija $x - 4 = \pm 1$, tj.

$x - 4 = 1$ i $x - 4 = -1$ ili

$x_1 = 5$ i $x_2 = 3$.

Na sličan način se rešava i opšti oblik kvadratne (potpune) jednačine:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad /: A$$

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} = 0$$

$$(x + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A} = 0$$

$$(x + \frac{B}{2A})^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2},$$ a korenovanjem obeju strana imamo:

$$x + \frac{B}{2A} = \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$ ili

$$x = - \frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$ tj.

$$x = \frac{- B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$ ili

$$x_1 = \frac{- B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{- B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Primenom poslednjih obrazaca može se rešiti svaka kvadratna jednačina.

1. primer: Rešiti jednačinu $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

Ovde je $A = 3$, $B = -4$ i $C = 1$. Primenjujući prethodne obrasce za rešenja dobijamo:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \quad , \quad \text{tj.}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2. primer: Rešiti jednačinu $\frac{x - 3}{x - 2} = x + 1$.

Posle množenja obeju strana date jednačine sa $x - 2 \neq 0$, dobijamo

$$x - 3 = (x + 1)(x - 2)$$

$$x - 3 = x^2 - 2x + x - 2,$$ posle uređivanja dobijamo:

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2},$$ a odavde se vidi da su oba rešenja jednaka, tj.

$$x_1 = x_2 = 1.$$

3. primer: Rešiti jednačinu $\frac{x^2 + 2}{x} = 2.$

Posle množenja date jednačine sa $x \neq 0$, dobijamo:

$$\frac{x^2 + 2}{x} = 2 \quad /\cdot x$$

$$x^2 + 2 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2(1 \pm i)}{2} = 1 \pm i, \quad \text{tj.}$$

$$x_1 = 1 + i, \qquad x_2 = 1 - i.$$

3. Priroda rešenja kvadratne jednačine

Iz prethodna tri primera videli smo da priroda rešenja kvadratne jednačine zavisi od vrednosti potkorenog izraza koji se javlja u obrascu za rešavanje kvadratne jednačine i zove se diskriminanta kvadratne jednačine, a obeležavaćemo je sa D, tj. $D = B^2 - 4AC$. Prema tome, postoje tri slučaja:

1) Ako je $D > 0$, tj. $B^2 - 4AC > 0$, koreni (rešenja) kvadratne jednačine su realni i različiti.
2) Ako je $D = 0$, tj. $B^2 - 4AC = 0$, koreni su realni i jednaki.
3) Ako je $D < 0$, tj. $B^2 - 4AC < 0$, koreni su imaginarni, odnosno kompleksno konjugovani brojevi.

1. primer: Prirodu korena kvadratne jednačine $2x^2 - 5x + 4 = 0$ ispitaćemo pomoću iznalaženja vrednosti za diskriminantu date jednačine: $D = B^2 - 4AC = 25 - 32 = -7 < 0$, što znači da su koreni kompleksno konjugovani brojevi.

2. primer: Ispitati prirodu korena jednačine $x^2 - 6x + 9 = 0$. Kako je $D = 36 - 36 = 0$, zaključujemo da su rešenja realna i jednaka.

3. primer: Ispitati prirodu korena jednačine $5x^2 - 10x + 1 = 0$. Kako je $D = 100 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 100 - 20 = 80 > 0$, znači da su koreni realni i različiti.

4. primer: U jednačini $x^2 - 2(m-1)x + 2m + 1 = 0$ odrediti parametar m tako da koreni budu realni i jednaki.

Uslov da koreni kvadratne jednačine budu realni i jednaki je da je diskriminanta jednaka nuli, tj.

$$D = 0$$

$B^2 - 4AC = 0$, odnosno, kako je $A = 1$, $B = -2(m-1)$ i $C = 2m + 1$, dobijamo:

$$[-2(m-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m + 1) = 0$$

$$4(m^2 - 2m + 1) - 8m - 4 = 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 - 8m - 4 = 0, \quad \text{tj.}$$

$$4m^2 - 16m = 0 \;/ : 4$$

$$m^2 - 4m = 0,$$

$$m(m - 4) = 0$$

$$m = 0, \quad m - 4 = 0$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 4.$$

Posle zamenjivanja dobijenih vrednosti za m u datoj jednačini i posle uređivanja dobijaju se sledeće kvadratne jednačine čiji su koreni jednaki:

za $m = 0$ dobijamo $x^2 + 2x + 1 = 0$ čiji su koreni $x_1 = x_2 = 1$,

za $m = 4$ dobijamo $x^2 - 6x + 9 = 0$ čiji su koreni $x_1 = x_2 = 3$.

4. Veze između korena i koeficijenata kvadratne jednačine (Vietova pravila)

Videli smo da su koreni kvadratne jednačine $Ax^2 + Bx + C = 0$ .... (1)

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad i \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad .... \quad (2)$$

Sabiranjem jednačina (2) dobijamo:

$$x_1 + x_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC} - B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \quad .... \quad (3)$$

tj. zbir korena kvadratne jednačine jednak je količniku koeficijenta linearnog člana sa promenjenim znakom i koeficijenta kvadratnog člana.

Množenjem jednačina (2) dobijamo:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \cdot \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{B^2 - (B^2 - 4AC)}{4A^2}, \text{ ili}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} \quad .... \quad (4)$$

tj. proizvod korena kvadratne jednačine jednak je količniku slobodnog člana i koeficijenta kvadratnog člana.

Jednačine (3) i (4) izražavaju vezu između korena i koeficijenata kvadratne jednačine.

Koristeći jednačine (3) i (4) možemo sastaviti kvadratnu jednačinu ako su nam dati koreni jednačine. Iz jednačine (3) i (4) imamo:

$B = -A(x_1 + x_2)$ i $C = Ax_1x_2$; zamenom ovih vrednosti za B i C u jednačini (1) dobijamo:

$$Ax^2 - A(x_1 + x_2)x + Ax_1x_2 = 0 \quad /:A$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \text{ .... } (5)$$

Iz jednačine (5) se vidi kako se sastavlja kvadratna jednačina čiji su koreni x_1 i x_2 dati.

1. primer: Ne rešavajući jednačinu odrediti korene kvadratne jednačine $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Prema vezama između korena i koeficijenata kvadratne jednačine je $x_1 + x_2 = 5$ i $x_1x_2 = 6$, što znači da su koreni x_1 i x_2 takva dva broja čiji je zbir 5 a proizvod 6. To su očigledno brojevi 2 i 3, pa je $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$.

2. primer: Sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rešenja $x_1 = 7$ i $x_2 = 1$.

Prema jednačini (5) imamo:

$$x^2 - (7 + 1)x + 7 \cdot 1 = 0, \quad \text{tj.}$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

3. primer: U jednačini $x^2 - 7x - m = 0$ odrediti parametar m ako je jedan koren za 3 veći od drugoga.

Prema Vietovim pravilima imamo:

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}, \quad \text{tj.}$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 \cdot x_2 = -m$$

Kako je prema uslovu zadatka $x_1 = 3 + x_2$, imamo

$$3 + x_2 + x_2 = 7$$

$$(3 + x_2)x_2 = -m$$

Iz prve od poslednjih jednačina dobijamo $x_2 = 2$ i zamenom te vrednosti u drugoj jednačini dobijamo

$$(3 + 2)2 = -m, \quad \text{tj.} \quad m = -10.$$

4. primer: U jednačini $3y^2 - 10y + m = 0$ odrediti parametar m ako se zna da je jedan koren jednak recipročnoj vred-

nosti drugoga.

Prema uslovu zadatka je $y_1 = \frac{1}{y_2}$, a prema (4) $y_1 \cdot y_2 = \frac{C}{A}$, tj. $y_1 \cdot y_2 = \frac{m}{3}$. Ako u poslednjoj jednačini stavimo $y_1 = \frac{1}{y_2}$, dobićemo:

$$\frac{1}{y_2} \cdot y_2 = \frac{m}{3}, \text{ a odavde } \quad m = 3.$$

Prema tome, tražena jednačina glasi $3y^2 - 10y + 3 = 0$. Njeni koreni su 3 i $\frac{1}{3}$.

5. Rastavljanje kvadratnog trinoma na linearne činioce

Trinom $Ax^2 + Bx + C$ se zove kvadratni trinom. Rastaviti kvadratni trinom na linearne činioce znači napisati ga u obliku proizvoda dva činioca prvog stepena.

Ako su x_1 i x_2 nule datog trinoma (rešenja odgovarajuće kvadratne jednačine $Ax^2 + Bx + C = 0$), onda je:

$$B = -A(x_1 + x_2) \quad \text{i} \quad C = Ax_1x_2, \quad \text{pa je}$$

$$Ax^2 + Bx + C = Ax^2 - A(x_1 + x_2)x + Ax_1x_2,$$

$$Ax^2 + Bx + C = A(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2),$$

$$Ax^2 + Bx + C = A\left[x(x-x_1) - x_2(x-x_1)\right],$$

$$Ax^2 + Bx + C = A(x-x_1)(x-x_2).$$

Poslednji izraz pokazuje kako se kvadratni trinom rastavlja na linearne činioce.

Ako je $x_1 = x_2$, tada je

$$Ax^2 + Bx + C = A(x-x_1)^2.$$

<u>1. primer</u>: Rastaviti kvadratni trinom $2x^2 - 3x + 1$ na linearne činioce.

Iz $2x^2 - 3x + 1 = 0$ nalazimo nule trinoma $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{1}{2}$, pa je $2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)(x-\frac{1}{2})$.

2. primer: Skratiti razlomak $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$.

Pošto se trinomi iz brojioca i imenioca rastave na linearne činioce, dobiće se:

$$\frac{(x - 1)\cdot(x + 2)}{(x + 2)\ (x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3}.$$

Z A D A C I :

Rešiti kvadratne jednačine:

1. a) $3x^2 - 27 = 0$, b) $\frac{1}{4}x^2 = 1$, c) $\frac{2}{5}x^2 + 40 = 0$

2. a) $ax^2 - c = 0$, b) $\frac{x^2}{a} - a = 0$, c) $\frac{x^2}{m-n} = m - n$

3. a) $4x^2 - x = 0$, b) $mx^2 + nx = 0$, c) $ax^2 + 2x - bx = 3x$

4. a) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0$, b) $\frac{x-1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x}$,

5. a) $\frac{x - a}{2} + \frac{1}{x - a} = \frac{a^2 + 2}{2(x - a)}$, b) $x(2x+1) = 3x(x-1)+5x^2$

6. a) $3x(x + 5) - 15x = 0$, $2mx^2(m + 1) = \frac{m + 1}{2m}$

7. a) $x^2 - 4x + 3 = 0$, b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$, c) $\frac{x}{x+1}\quad\frac{x}{x-1} = 2\frac{2}{3}$

8. a) $x^2 - 7x + 12 = 0$, b) $3x^2 - 4x + 1 = 0$, c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

9. a) $x^2 - 2x + 2 = 0$, b) $(x-a)^2 = a^2$, c) $\frac{2x}{x-3} = 3x - 10$

10. a) $\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$, b) $(x - 2)(x + 5) = 8$

11. $\frac{x}{x + 2a} + \frac{2x}{x - 2a} = \frac{5a^2}{-4a^2 + x^2}$

12. $\frac{3}{x - 2} - \frac{4}{x - 1} = \frac{1}{x - 4} - \frac{2}{x - 3}$

13. a) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$, b) $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$, c) $x^2 - 4ax + 4a^2 = b^2$

14. $\frac{y}{y+2a} + \frac{2y}{y-2a} = 0$

15. $\frac{2y-a}{b} = \frac{4y-b}{2y+a}$

16. $\frac{5-y}{2y-1} = \frac{15-4y}{3y+1}$

17. $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x-2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$

18. $\frac{x\sqrt{5}}{2x-\sqrt{5}} = \frac{2x}{x\sqrt{5}-3}$

19. $(ax-b)^2 + (a-bx)^2 + 4abx = 2(a^2+b^2)x$

20. $\frac{2}{x} - \frac{a^2+b^2}{ab} - 2 + \frac{a^2+b^2}{abx} + x = 0.$

21. Sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rešenja data:

a) $x_1 = 5$ i $x_2 = -7$; b) $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{1}{2}$;

c) $x_1 = 4$ i $x_2 = -\frac{1}{4}$; d) $x_1 = \frac{2}{3}$ i $x_2 = \frac{3}{2}$;

e) $x_1 = -3$ i $x_2 = -5$; f) $x_1 = 2+\sqrt{3}$ i $x_2 = 2-\sqrt{3}$.

22. Sastaviti kvadratnu jednačinu ako su rešenja data:

a) $x_1 = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$; b) $x_1 = 1+i$ i $x_2 = 1-i$;

c) $x_1 = a$ i $x_2 = \frac{1}{a}$; d) $x_1 = \frac{1}{2a}$ i $x_2 = \frac{1}{a}$;

e) $x_1 = 1+i\sqrt{3}$ i $x_2 = 1-i\sqrt{3}$; f) $x_1 = \frac{1}{a}$ i $x_2 = \frac{1}{b}$

23. Odrediti usmeno korene kvadratnih jednačina:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $x^2 + 5x + 6 = 0$

c) $x^2 - 4x - 5 = 0.$

24. Ispitati prirodu rešenja ne rešavajući jednačinu:

a) $2x^2 - 6x - 1 = 0$; b) $x^2 - 10x + 25 = 0$;

c) $3x^2 + 4x + 1 = 0$; d) $5x^2 - 12x + 5 = 0$;

e) $\frac{x^2}{4} + 2x - 3 = \frac{1}{3}$; f) $(2x-3)(3x+1) = 4x^2 - 9$.

25. U jednačini $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$ odrediti parametar $\underline{a}$ tako da koreni budu realni i jednaki.

26. U jednačini $(m - 3)x^2 - 2(3m - 4)x + 7m - 6 = 0$ odrediti parametar m tako da koreni budu realni i jednaki.

27. Ispitati prirodu korena kvadratne jednačine

$3mx^2 - 2(3m - 2)x + 3(m - 1) = 0$ u zavisnosti od parametra $\underline{m}$.

28. Data je kvadratna jednačina $(n - 2)x^2 - 2nx + 2n - 3=0$. Za koje vrednosti parametra $\underline{n}$ su koreni realni?

29. U jednačini $8x^2 - 6x + m^2 = 0$ odrediti parametar $\underline{m}$ tako da je jedan koren kvadrat drugog.

30. U jednačini $x^2 + ax + 2 = 0$ odrediti parametar $\underline{a}$ tako da razlika korena bude 1.

31. Naći kvadratnu jednačinu čiji će koreni biti za po 2 veći od korena jednačine: $x^2 - 8x + 12 = 0$.

32. U jednačini $x^2 + kx + 12 = 0$ odrediti parametar $\underline{k}$ tako da razlika korena bude 1.

33. U jednačini $(m + 1)y^2 + 2my + m + 2 = 0$ odrediti parametar m tako da koreni budu jednaki.

34. Za koje vrednosti $\underline{k}$ jednačina $x^2 + 2kx\sqrt{k^2 - 3} + 4 = 0$ ima jednake korene?

35. U jednačini $px^2 + 3px + 2p + 1 = 0$ odrediti $\underline{p}$ tako da koreni budu jednaki.

36. Za koje vrednosti parametra m su koreni jednačine
$2my^2 - 4my + 2m - 1 = 0$ realni?

37. Diskutovati prirodu korena kvadratne jednačine
$px^2 - (1 + 2p)x + p - 1 = 0$
u zavisnosti od parametra p.

38. Zbir dva broja je 75, a zbir njihovih kvadrata je 2925. Koji su to brojevi?

39. Zbir dva broja je 16, a razlika njihovih kvadrata je 32. Naći te brojeve.

40. Broj $\frac{3}{4}$ podeli na dva sabirka tako da njihov proizvod bude $\frac{5}{36}$.

41. Zbir cifara dvocifrenog broja je 10. Ako cifre promene mesta, dobija se broj koji pomnožen prvim brojem daje 2701. Koji su to brojevi?

42. Obim pravougaonika je 28m, a dijagonala 10m. Naći stranice pravougaonika.

43. Dve cevi napune bazen za 6 časova ako ga istovremeno pune. Za koje će vreme svaka od njih sama napuniti bazen ako se zna da ga samo prva napuni za 5 časova pre nego sama druga?

44. Kod koga mnogougla je broj dijagonala za 12 veći od broja stranica?

VIII GLAVA

EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA I EKSPONENCIJALNE JEDNAČINE

1. Eksponencijalna funkcija i njeno grafičko predstavljanje

Vrednost stepena zavisi od osnove i izložioca. Međutim, ako je osnova stalna veličina, a izložilac promenljiva veličina, tada vrednost stepena zavisi samo od izložioca. Ako sa a označimo osnovu stepena, sa x izložilac stepena, a sa y vrednost stepena, onda se ova zavisnost izražava funkcijom

$$y = a^x \qquad (1)$$

Za proučavanje funkcije (1) uvodimo sledeće pretpostavke:

1. Osnova a mora biti različita od 1, jer ako je $a = 1$, tada je vrednost stepena a^x jednaka jedinici nezavisno od vrednosti izložioca x. Na primer: za $a = 1$ i $x = 5$ imamo $y = a^x = 1^5 = 1$, tj. $y = 1$.

2. Osnova a mora biti pozitivna, jer ako bi a bilo negativno, onda bi postojale i neke vrednosti x za koje bi vrednost stepena a^x bila imaginarna. Npr.: za $a = -25$, a $x = \frac{1}{2}$, $a^x = (-25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-25} = 5i$.

3. Ako je izložilac x razlomak, tada se stepen a^x može izraziti korenom (npr., $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$) i u tom slučaju uzimamo samo aritmetičku vrednost korena.

Da bismo ispitali i grafički predstavili funkciju $y = a^x$, imajući u vidu prethodne uslove, nacrtaćemo na istom grafiku tri eksponencijalne funkcije:

$$y = 2^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$y = 10^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Osnove svih ovih funkcija su, kao što se vidi, pozitivne. a u funkcijama (2) i (4) su veće i od 1, dok je u funkciji (3) osnova manja od 1, tj. $a = \frac{1}{2}$.

Da bismo nacrtali grafike funkcija $y = 2^x$ i $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, za nezavisnu promenljivu veličinu x uzimamo nekoliko negativnih i nekoliko pozitivnih vrednosti i za svaku tako uzetu vrednost izračunavamo y.

Tabela izgleda ovako:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$y = (\frac{1}{2})^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Za tabelu funkcije $Y = 10^x$ nezavisno promenljivoj x dajemo druge vrednosti, jer bi uzimanjem, recimo, vrednosti $x = 2$ za y dobili veliki broj, tj. $y = 10^2 = 100$, pa bi crtanje grafika bilo otežano. Ako za x uzmemo redom ove vrednosti: $-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1$, za y dobijamo,i to:

$$\text{za } x = -1, \quad y = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$\text{za } x = -\frac{1}{2}, \quad y = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3{,}162} \approx 0{,}32$$

$$\text{za } x = -\frac{1}{4}, \quad y = 10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{10}}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}162}} =$$

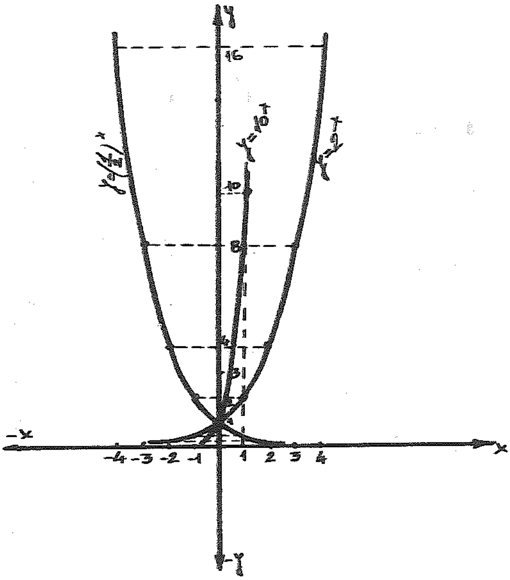
$$= \frac{1}{1{,}77} \approx 0{,}56$$

za $x = 0$, $y = 10^0 = 1$ itd.

Prema tome, tabela izgleda ovako:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$y = 10^x$	0,1	0,32	0,56	1	1,78	3,16	10

Grafici ovih triju funkcija dati su na sledećoj slici



Iz ove slike vidimo:

1/ da su sve tri krive iznad x-ose i da joj se približavaju sve više što je x veće po apsolutnoj vrednosti, ali one neće nikad dodirnuti x-osu. Za takvu pravu, kao što je ovde apscisna osa, kažemo da je <u>asimptota</u> krive. Dakle, ako je osnova a pozitivna, grafik funkcije se nalazi iznad x-ose, što znači da je funkcija a^x pozitivna, tj. $y > 0$. Iz slike se takođe vidi da sve tri krive seku y-osu u istoj tački $y = 1$;

2/ ako je $a > 1$ /gledaj grafik $y = 2^x$ i $y = 10^x$/, tada je funkcija a^x veća od 1 za $x > 0$, a manja od 1 za $x < 0$. Za $x = 0$ biće $a^x = 1$;

3/ ako je $a < 1$ /gledaj grafik $y = (\frac{1}{2})^x$/, tada je funkcija a^x veća od 1 za $x < 0$, manja je od 1 za $x > 0$ i jednaka 1 za $x = 0$;

4/ funkcija $y = a^x$ biće rastuća ako je $a > 1$, a opadajuća ako je $a < 1$;

5/ ako je $x = 0$, $y = a^x = 1$ za svaku vrednost osnove a.

2. Eksponencijalne jednačine

Jednačine u kojima se nepoznata javlja u eksponentu stepena zovu se eksponencijalne jednačine. Takve su jednačine

$$2^x = 16, \quad 0{,}5^{\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{4}, \quad 3^{\frac{x+1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 1.$$

Sa rešavanjem eksponencijalnih jednačina upoznaćemo se na primerima:

1. primer: Rešiti jednačinu $2^x = 16$.

Kako je $16 = 2^4$, data jednačina se može napisati

$$2^x = 2^4$$

Stepeni 2^x i 2^4 imaju jednake osnove (2) i da bi bili jednaki, potrebno je da su i njihovi izložioci jednaki, odakle zaključujemo da je

$$x = 4.$$

Provera: $2^x = 16$ za $x = 4$ imamo

$2^4 = 16$, tj.

$16 = 16$, što znači da je rešenje zaista $x = 4$.

2. primer: Rešiti jednačinu $0{,}5^{\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{4}$.

Kako je $0{,}5 = \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$, data jednačina se može napisati:

$(\frac{1}{2})^{\frac{x+1}{2}} = (\frac{1}{2})^2$, a odavde

$\frac{x+1}{2} = 1$,

$x + 1 = 2$

$x = 1$.

3. primer: Rešiti jednačinu:

$3^{\frac{x+1}{x}} \cdot (\frac{1}{3})^{x+1} = 1$.

Kako je $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ i $1 = 3^0$, data jednačina se može napisati:

$3^{\frac{x+1}{x}} \cdot (3^{-1})^{x+1} = 3^0$ ili

$3^{\frac{x+1}{x}} \cdot 3^{-x-1} = 3^0$ ili

$3^{\frac{x+1}{x} - x-1} = 3^0$, odavde

$\frac{x+1}{x} - x - 1 = 0$ $/\cdot x$

$x + 1 - x^2 - x = 0$, ili

$x^2 = 1$, tj. $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$.

Provera: Za $x = 1$ imamo:

$3^2 \cdot (\frac{1}{3})^2 = 1$

$9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

$1 = 1$

a za $x = -1$

$$3^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$1 = 1$, što znači da data jednačina ima dva rešenja.

4. primer: Rešiti jednačinu:

$$a^{1-3x} \cdot 2^{1+x} = 2^{1-3x} \cdot a^{1+x}$$

Deljenjem obeju strana date jednačine sa

$2^{1+x} \cdot 2^{1-3x}$ dobijamo:

$$\frac{a^{1-3x} \cdot 2^{1+x}}{a^{1+x} \cdot 2^{1-3x}} = \frac{2^{1-3x} \cdot a^{1+x}}{2^{1+x} \cdot 2^{1-3x}} \quad \text{ili}$$

posle skraćivanja razlomaka dobijamo:

$$\frac{a^{1-3x}}{2^{1-3x}} = \frac{a^{1+x}}{2^{1+x}} \quad \text{ili}$$

$\left(\frac{a}{2}\right)^{1-3x} = \left(\frac{a}{2}\right)^{1+x}$, a odavde

$1 - 3x = 1 + x$, tj.

$$4x = 0$$

$$\underline{x = 0}$$

ZADACI:

1/ Nacrtati grafike eksponencijalnih funkcija:

a/ $y = 4^x$; b/ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; c/ $y = 3^x$; d/ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2/ Nacrtati grafike funkcija:

a/ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$; b/ $y = 2^x - 3$.

Rešiti eksponencijalne jednačine:

3/ $4^{x+1} + 3 = 19$

4/ $3^{\frac{x+1}{2}} + 5 \cdot 3^{\frac{y+1}{2}} = 18$

5/ $8^{\frac{x-1}{2}} = 0{,}25 \cdot 32^{\frac{2x+1}{5}}$

6/ $(0{,}4)^{y+3} = (\frac{2}{5})^{3y-5}$

7/ $(\frac{1}{m})^{x+\frac{5}{x}} = m^{-3(\frac{x+1}{x})}$

8/ $16^{\frac{x-2}{3}} = 0{,}25 \cdot 64^{\frac{x+1}{5}}$

9/ $(0{,}6)^{y-1} = (\frac{5}{3})^{2y-5}$

10/ $3^{x+2} - 25 \cdot 2^{x+1} = 7 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+3}$

11/ $2^{\frac{x+1}{x}} \cdot (\frac{1}{2})^{x+1} = 1$

12/ $a^{x} \cdot (\frac{1}{a})^{\frac{5x-4}{x}} = 1$

13/ $8 \cdot 5^{x-2} + 2^{x+2} = 4 \cdot 5^{x-2} + 5 \cdot 2^{x}$

14/ $m^{y-1} \cdot (\frac{1}{m})^{\frac{4-y}{y}} = 1.$

IX GLAVA

LOGARITMOVANJE

1. Pojam logaritma

Do sada smo se upoznali sa operacijama stepenovanja i korenovanja. Videli smo da se stepenovanjem izračunava vrednost stepena ako su poznate osnova i izložilac stepena. Neka je, na primer, b vrednost stepena a^n, tj. $b = a^n$. Ako su osnova a i izložilac n poznati, na primer, $a = 5$ i $n = 3$, za vrednost stepena dobijamo:

$$b = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

Ako je poznata vrednost stepena b i izložilac n, tada za iznalaženje osnove stepena a primenjujemo korenovanje. Na primer, ako je $b = 16$ i $n = 2$, osnovu a dobijamo korenovanjem, tj.

$$a^n = b, \quad a^2 = 16, \quad a = \sqrt{16}, \quad a = \pm 4$$

Međutim, kada je poznata osnova stepena a i vrednost stepena b, za iznalaženje izložioca n primenjujemo operaciju logaritmovanje. Ako je, na primer, osnova stepena $a = 2$ i vrednost stepena $b = 8$, onda imamo $a^n = b$, tj. $2^n = 8$. Ovde je očigledno izložilac $n = 3$, jer je $2^3 = 8$. Tada za izložilac $n = 3$ kažemo da je logaritam broja 8 za osnovu 2 i pišemo $\log_2 8 = 3$. Poslednja jednakost se čita: logaritam broja 8 za osnovu 2 jednak je 3. Broj 8 se zove numerus ili logaritmand, broj 2 logaritamska osnova ili baza, a broj 3 je logaritam broja 8 za osnovu 2. Prema tome, možemo dati sledeću definiciju: logaritam datog broja N za datu bazu B je takav broj L kojim treba stepenovati bazu da se dobije numerus, tj.

$$\log_B N = L, \quad \text{ako je} \quad B^L = N.$$

Na osnovu date definicije logaritma mogu se za neke brojeve izračunavati logaritmi. Evo nekoliko primera.

$$\log_6 36 = 2 \qquad \text{jer je} \qquad 6^2 = 36,$$

$$\log_3 81 = 4 \qquad \text{jer je} \qquad 3^4 = 81$$

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25} = 2 \qquad \text{jer je} \qquad \frac{1}{5}^{\,2} = \frac{1}{25}$$

U složenijim slučajevima dati logaritam izražavamo logaritamskom jednačinom, a ovu transformišemo u eksponencijalnu koju je lako rešiti.

<u>1. primer</u>: Izračunati $\log_2 \frac{1}{16}$.

Ako traženi logaritam označimo sa x, dobićemo logaritamsku jednačinu

$\log_2 \frac{1}{16} = x$, a ova se izražava na osnovu definicije logaritma sledećom eksponencijalnom jednačinom

$2^x = \frac{1}{16}$, čije rešavanje nije teško, tj.:

$$2^x = \frac{1}{2^4}$$

$$2^x = 2^{-4}, \qquad x = -4\,.$$

Znači, $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, a odavde je $2^{-4} = \frac{1}{16}$, ili

$\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$, tj. $\frac{1}{16} = \frac{1}{16}$, što znači da je rešenje tačno.

<u>2. primer</u>: Izračunati $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

Postupajući kao u prethodnom zadatku dobijamo:

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = x$$

$$(\sqrt[3]{2})^x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$(2^{\frac{1}{3}})^x = (\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{3}}$$

$$2^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$2^{\frac{x}{3}} = (2^{-2})^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$x = -2$$

2. Logaritamska funkcija

Pod logaritamskom funkcijom podrazumeva se funkcija koja je definisana jednačinom

$$y = \log_a x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Na osnovu definicije logaritma funkcija (1) se može napisati

$$x = a^y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Jednačina (2) predstavlja poznatu eksponencijalnu funkciju koja je u ovom slučaju rešena eksplicitno po x. Za ispitivanje i grafičko predstavljanje logaritamske funkcije (1) poslužićemo se eksponencijalnom funkcijom (2) u kojoj ćemo $\underline{y}$ smatrati kao nezavisnu promenljivu veličinu a $\underline{x}$ kao funkciju.

Predstavićemo grafički sledeće funkcije:

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$y = \log_{10} x$$

Najpre ćemo funkciju 3 izraziti ovako

$$x = 2^y$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$x = 10^y$$

Zatim ćemo za nezavisno promenljivu veličinu $\underline{y}$ davati proizvoljne vrednosti, a $\underline{x}$ ćemo izračunavati iz jednačine (4). Tako, na primer, za funkciju $y = \log_2 x$ iz odgovarajuće funkcije $x = 2^y$ imamo za $y = -4$, $x = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$,

$$\text{za } y = -2, \quad x = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Za funkcije (3) odnosno (4) tablice su:

$$y = \log_2 x, \quad \text{tj.} \quad x = 2^y$$

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

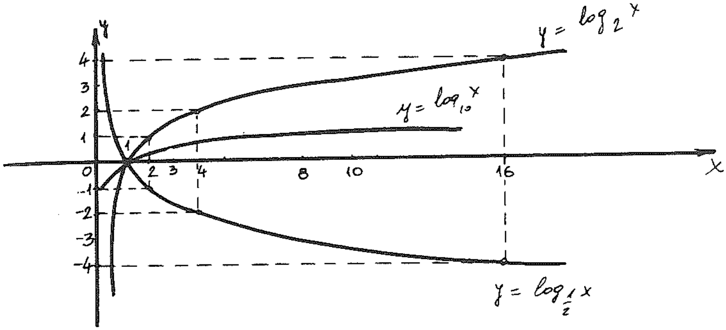
$$y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad \text{tj.} \quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$y = \log_{10} x, \quad \text{tj.} \quad x = 10^y$$

y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
x	0,1	0,32	0,56	1	1,78	3,16	10

Sva tri grafika nacrtana su na istom crtežu:



3. Osobine logaritama

Iz grafika logaritamske funkcije i na osnovu definicije logaritma izvešćemo neke osobine logaritama.

1/ Ako je logaritamska osnova pozitivna, negativni brojevi nemaju logaritama.

Ova osobina se iz grafika logaritamske funkcije jasno vidi pošto se sva tri grafika nalaze u prvom i trećem kvadrantu, tj. sve tri funkcije nisu definisane za $x < 0$ i $x = 0$, što znači: ako je broj x manji ili jednak nuli, tada ne postoji njegov logaritam y. Ovu osobinu možemo dokazati i na sledeći način.

Ako sa $-x$ $(x > 0)$ označimo negativan numerus, sa a logaritamsku osnovu $(a > 0)$, pokazaćemo da ne postoji ni pozitivan ni negativan broj n koji bi predstavljao $\log_a(-x)$.

a/ Ako bi postojao broj $n > 0$, tako da je:

$\log_a(-x) = n$, tada bi bilo

$$a^n = -x.$$

Međutim, kako su po pretpostavci a i n pozitivni brojevi, vrednost stepena a^n ne može biti negativna. Odavde zaključujemo da ne postoji broj $n > 0$ koji predstavlja $\log_a(-x)$.

b/ Ako bi postojao negativan broj $\underline{n} = -m$ $(m > 0)$, tako da je:

$$\log_a(-x) = -m, \quad \text{tada bi bilo}$$

$$a^{-m} = -x, \quad \text{tj.}$$

$$a^{\frac{1}{m}} = -x.$$

Međutim, pošto razlomak $a^{\frac{1}{m}}$ ne može biti negativan, jer su $\underline{a}$ i $\underline{m}$ pozitivni, znači da ne postoji ni negativan broj $n = -m$ $(m > 0)$ koji predstavlja logaritam negativnog broja, tj. $\log_a(-x)$.

2/ <u>Logaritam broja 1 za ma koju osnovu jednak je nuli</u>.

Iz grafika logaritamske funkcije se zaista vidi da sve tri logaritamske krive seku x-osu u tački čija je apscisa 1, tj. za $x = 1$ $y = 0$ za ma koju osnovu $\underline{a}$.

Neka je $\log_a 1 = m$, tj. pretpostavili smo da je logaritam broja 1 za ma koju osnovu $\underline{a}$ jednak nekom broju $\underline{n}$. Međutim, iz prethodne jednakosti imamo

$$a^n = 1 \quad \text{ili}$$

$$a^n = a^0, \quad \text{tj.} \quad n = 0,$$

što znači da je $\log 1_a = 0$, tj. da je logaritam jedinice za ma koju osnovu jednak nuli.

3/ A k o j e l o g a r i t a m s k a o s n o v a v e ć a o d j e d i n i c e $(a>1)$, o n d a s u l o g a r i t m i b r o j e v a v e ć i h o d 1 p o z i t i v n i a m a n j i h o d 1 n e g a t i v n i

Posmatrajmo grafike funkcija $y = \log_2 x$ i $y = \log_{10} x$ čije su logaritamske osnove veće od 1. Vidimo da su ordinate ovih krivih pozitivne za vrednosti $x>1$, što znači da su logaritmi brojeva većih od 1 pozitivni. Dalje vidimo da su ordinate ovih krivih negativne za $0<x<1$, tj. logaritmi brojeva manjih od 1 a većih od 0 su negativni. Ova osobina se može pokazati i ovako

Neka je $\log_a x = n$ gde je $x > 1$ i $a > 1$, tada je $a^n = x$, a odavde je jasno da će vrednost stepena a^n biti veća od 1 ako je $a > 1$ i izložilac n pozitivan. Pošto je po pretpostavci $x > 1$ i $a > 1$, to n mora biti pozitivan broj, tj.

$$\log_a x > 0 \quad \text{za} \quad x > 1 \quad \text{i} \quad a > 1.$$

Neka je sada opet $\log_a x = n$, a $x < 1$ i $a > 1$. Tada imamo $a^n = x$, a odavde se lako zaključuje da je $n < 0$, jer je samo tada vrednost stepena $a^n < 1$, pošto su po pretpostavci $x<1$ i $a > 1$, tj.

$$\log_a x < 0 \quad \text{za} \quad x < 1 \quad \text{i} \quad a > 1.$$

Iz grafika funkcija $y = \log_2 x$ i $y = \log_{10} x$ čije su logaritamske osnove veće od 1, vidi se da većoj apscisi odgovara veća ordinata, što znači da za logaritamsku osnovu $a > 1$, većem broju odgovara veći logaritam i obratno, manjem broju odgovara manji logaritam.

Međutim, iz grafika funkcije $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, čija je logaritamska osnova manja od 1, vidi se da većoj apscisi odgovara manja ordinata i obratno manjoj apscisi odgovara veća ordinata, što znači da za logaritamsku osnovu $a < 1$, većem broju odgovara manji logaritam i obratno, manjem broju odgovara veći logaritam.

4/ A k o j e n u m e r u s s t e p e n č i j a j e o s n o v a j e d n a k a l o g a r i t a m s k o j o s n o v i, o n d a ć e l o g a r i t a m t o g a b r o j a b i t i j e d n a k i z l o ž i o c u i s t o g s t e p e n a.

Neka je $\log_a a^n = m$. Dokazaćemo da je tada $m = n$. Iz $\log_a a^n = m$ imamo $a^m = a^n$, a odavde sledi zaključak $m = n$, tj. $\log_a a^n = n$.

Ako je $n = 1$, tada će biti $\log_a a = 1$, što znači: logaritam broja koji je jednak sa logaritamskom osnovom jednak je 1. Tako će, na primer, biti:

$\log_5 5 = 1$ jer je $5^1 = 5$,

$\log_{103} 103 = 1$, jer je $103^1 = 103$ itd.

4. Pravila logaritmovanja

a/ Logaritam proizvoda

Da bismo izračunali logaritam proizvoda $M \cdot N$ za datu osnovu a, potrebno je da znamo logaritme činilaca M i N za istu osnovu.

Neka je: $\log_a M = m$ .... (1)

i $\log_a N = n$ .... (2)

Iz jednakosti (1) i (2) sledi:

$a^m = M$ .... (3)

$a^n = N$ 4

Množenjem poslednjih dveju jednakosti dobijamo

$M \cdot N = a^m \cdot a^n$, tj.

$M \cdot N = a^{m+n}$.

Ako sada logaritmujemo levu i desnu stranu poslednje jednakosti uzimajući za logaritamsku osnovu broj a, dobićemo

$$\log_a(M\cdot N) = \log_a a^{m+n},$$ a pošto je $\log_a a^{m+n} = m+n$,

dobijamo $\log_a(MN) = m + n$ i s obzirom na (1) i (2) imamo

$$\log_a(M\cdot N) = \log_a M + \log_a N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Obrazac (5) predstavlja pravilo za logaritam proizvoda koje glasi: logaritam proizvoda za datu osnovu jednak je zbiru logaritama pojedinih činilaca za istu osnovu. Tako će, na primer, biti:

$$\log_t(P\cdot Q\cdot R\cdot S) = \log_t P + \log_t Q + \log_t R + \log_t S.$$

b/ Logaritam količnika

Za izračunavanje logaritma količnika $\frac{M}{N}$ za datu osnovu a potrebno je znati logaritam brojioca i logaritam imenioca za istu osnovu.

Zadržavajući prethodne jednakosti (1), (2), (3) i (4) i deleći levu stranu jednakosti (3) levom stranom jednakosti 4 , kao i deljenjem njihovih desnih strana, dobijamo:

$$\frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n},$$

$$\frac{M}{N} = a^{m-n}.$$

Ako levu i desnu stranu poslednje jednakosti logaritmujemo za osnovu a, dobićemo:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a a^{m-n}, \quad \text{tj.}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = m - n, \quad \text{jer je} \quad \log_a a^{m-n} = m - n.$$

Zamenjujući vrednosti za m i n iz (1) i (2), dobijamo:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Obrazac (6) predstavlja pravilo za logaritam količnika /razlomka/ i glasi: logaritam razlomka za datu osnovu jednak je razlici logaritma brojioca i logaritma imenioca za istu osnovu. Tako je, na primer:

$$\log_t \frac{2a}{3b} = \log_t(2a) - \log_t(3b) = \log_t 2 + \log_t a -$$

$$-(\log_t 3 + \log_t b) = \log_t 2 + \log_t a - \log_t 3 - \log_t b .$$

Iz ovog primera zaključujemo: ako se u brojiocu i imeniocu razlomka nalaze proizvodi, tada se logaritam takvog razlomka dobija tako što se od zbira logaritama svih činilaca brojioca oduzmu logaritmi svih činilaca imenioca.

c/ Logaritam stepena

Za izračunavanje logaritma stepena za datu osnovu potrebno je znati logaritam osnova toga stepena za istu logaritamsku osnovu.

Neka je $\log_a M = m$, tj. $M = a^m$. Stepenovanjem poslednje jednakosti sa n dobijamo $M^n = a^{nm}$. Potražimo logaritam stepena M^n, tj.

$$\log_a M^n = \log_a a^{nm}, \quad \text{i pošto je} \quad \log_a a^{nm} = nm ,$$

imamo

$$\log_a M^n = nm \quad \text{ili stavljajući} \quad m = \log_a M$$

$$\log_a M^n = n \cdot \log_a M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Obrazac (7) predstavlja pravilo za logaritam stepena: logaritam stepena za neku datu logaritamsku osnovu jednak je proizvodu izložioca toga stepena i logaritma njegove osnove.

Na primer: $\log_a x^3 = 3 \cdot \log_a x$.

Logaritam stepena se može naći i pomoću pravila za logaritam proizvoda. Na prethodnom zadatku to izgleda ovako:

$$\log_a x^3 = \log_a (x \cdot x \cdot x) = \log_a x + \log_a x + \log_a x = 3 \cdot \log_a x.$$

d/ Logaritam korena

Pošto se svaki koren može izraziti u obliku stepena, pravilo za logaritam korena izvešćemo koristeći se tom osobinom korena.

Kako je $\sqrt[n]{M^p} = M^{\frac{p}{n}}$, za logaritam korena imamo:

$$\log_a \sqrt[n]{M^p} = \log_a M^{\frac{p}{n}} = \frac{p}{n} \cdot \log_a M, \qquad \text{tj.}$$

$$\log_a \sqrt[n]{M^p} = \frac{p}{n} \cdot \log_a M = \frac{\log_a M^p}{n} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Obrazac (8) predstavlja pravilo za logaritam korena: logaritam korena za datu logaritamsku osnovu jednak je količniku logaritma potkorenog izraza za istu logaritamsku osnovu i korenovog izložioca.

Tako je, na primer:

$$\log_a \sqrt[3]{x^2} = \frac{\log_a x^2}{3} = \frac{2 \cdot \log_a x}{3}.$$

Napomene:

1. Pošto obrasci (5), (6), (7) i (8) vrede za svaku osnovu, ovu osnovu možemo izostaviti. Tada bi, na primer, obrazac (5) glasio:

$$\log M \cdot N = \log M + \log N.$$

2. Logaritam zbira se ne može izraziti pomoću logaritama pojedinih sabiraka.

3. Logaritam razlike se ne može izraziti pomoću logaritma umanjenika i logaritma umanjioca.

5. Antilogaritmovanje. Logaritamske jednačine

Koristeći se obrascima (5), (6), (7) i (8) možemo naći nepoznati algebarski izraz ako je poznat njegov logaritam. Ovo iznalaženje algebarskog izraza čiji je logaritam poznat naziva se <u>antilogaritmovanje.</u>

<u>1. primer</u>: Odrediti algebarski izraz čiji je logaritam: $\log a + \log b + \log 5$. Ako sa x označimo traženi algebarski izraz, prema uslovu zadatka imamo:

$$\log x = \log a + \log b + \log 5.$$

Desnu stranu ove jednakosti možemo prema obrascu (5) napisati kao $\log 5ab$, pa imamo:

$$\log x = \log 5ab, \quad \text{tj.}$$
$$x = 5ab.$$

<u>2. primer</u>: Naći nepoznat algebarski izraz x iz jednačine:

$$2\log x + \log a = \log b - 3\log c + \log x.$$

Rešenje: $2\cdot\log x - \log x = \log b - 3\log c - \log a$

$$\log x = \log b - \log c^3 - \log a$$
$$\log x = \log b - (\log c^3 + \log a)$$
$$\log x = \log b - \log ac^3$$
$$\log x = \log \frac{b}{ac^3}, \quad \text{tj.}$$
$$x = \frac{b}{ac^3}.$$

<u>3. primer</u>: Rešiti logaritamsku jednačinu:

$$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 5) = 3$$

Rešenje: Primenjujući obrazac 5 data jednačina postaje:

$\log_2(x-3)(x-5) = 3$ ili prema definiciji logaritma

$$(x - 3)(x - 5) = 2^3,$$
$$x^2 - 3x - 5x + 15 = 8$$
$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

Rešenja poslednje kvadratne jednačine su $x_1 = 7$ i $x_2 = 1$.

Sada treba još proveriti da li ova rešenja zadovoljavaju i datu logaritamsku jednačinu.

Za $x = 7$ imamo:

$$\log_2(7-3) + \log_2(7-5) = 3$$

$$\log_2 4 + \log_2 2 = 3$$

$$2 + 1 = 3, \qquad (\log_2 4 = 2, \ \log_2 2 = 1)$$

$$3 = 3$$

Znači, rešenje $x = 7$ je rešenje date logaritamske jednačine. Drugo rešenje $x = 1$ odbacujemo, jer ono ne zadovoljava datu logaritamsku jednačinu (proveri!).

6. Logaritamski sistemi. Dekadni logaritamski sistem

Pod logaritamskim sistemom podrazumeva se sistem brojeva koji obrazuju logaritmi svih pozitivnih brojeva za jednu istu osnovu. Ranije smo videli da logaritamska osnova mora biti pozitivna i različita od 1. Prema tome, moguće je obrazovati logaritamske sisteme sa raznim pozitivnim osnovama. Od svih logaritamskih sistema najpogodniji je tzv. dekadni ili Brigsov /Briggs/ sistem koji sačinjavaju logaritmi svih pozitivnih brojeva izračunatih za osnovu 10. Dekadni logaritmi brojeva izračunati su i sređeni u tzv. logaritamske tablice odakle se logaritmi brojeva mogu pročitati. Sa načinom upotrebe tablica čitalac će se detaljno upoznati iz samih tablica, gde su data objašnjenja.

Objasnićemo samo neke osobine dekadnih logaritama. Najpre ćemo izračunati logaritme dekadnih jedinica.

$\log_{10}10 = x, \quad 10^x = 10, \quad x = 1, \quad$ tj. $\log_{10}10 = 1$.

$\log_{10}100 = x, \quad \log_{10}10^2 = x, \quad 10^x = 10^2, \ x=2,$ tj. $\log_{10}100=2$.

$\log_{10}1000= x, \ \log_{10}10^3= x, \ 10^x=10^3, \ x=3,$ tj. $\log_{10}1000=3$ itd.

$\log_{10}0{,}1 = x, \ \log_{10}\frac{1}{10} = x, \ \log_{10}10^{-1}=x, \ 10^{-1}=10^x, \ x = -1,$

tj. $\log_{10}0{,}1 = -1$.

$\log_{10}0,01 = x$, $\log_{10}10^{-2} = x$, $10^{-2} = 10^{x}$, $x = -2$, tj.

$\log_{10}0,01 = -2$.

$\log_{10}0,001 = x$, $\log_{10}10^{-3} = x$, $10^{-3} = 10^{x}$, $x = -3$, tj.

$\log_{10}0,001 = -3$ itd.

Prema tome, logaritmi dekadnih jedinica 10, 100, 1000, ... imaju redom sledeće logaritme 1,2,3... Dakle, logaritam dekadne jedinice jednak je broju nula od kojih je ona sastavljena /na primer, 100 ima dve nule, a videli smo da je $\log_{10}100 = 2$/.

Ako je dekadna jedinica manja od 1, tada je, kao što smo videli, njen logaritam negativan i jednak je opet broju nula računajući i onu nulu koja je na mestu celih ako je broj manji od jedan. Videli smo da je, na primer, $\log 0,001 = -3$. Isto tako će biti $\log 0,0001 = -4$.

Iz prethodnih primera zaključujemo: logaritmi dekadnih jedinica su celi pozitivni ili negativni brojevi, u zavisnosti od toga da li je dekadna jedinica veća ili manja od 1.

Logaritmi brojeva koji se mogu napisati u obliku $10^{\frac{p}{q}}$, gde su p i q celi brojevi, biće racionalni razlomci, tj.

$$\log_{10}10^{\frac{p}{q}} = x, \quad 10^{x} = 10^{\frac{p}{q}}, \quad x = \frac{p}{q}, \quad \text{tj.} \quad \log_{10}10^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}.$$

Na primer: $\log_{10}\sqrt[3]{100} = \log_{10}\sqrt[3]{10^2} = \frac{2}{3}\log_{10}10 = \frac{2}{3}$.

Logaritmi svih ostalih pozitivnih brojeva su iracionalni. Pošto iracionalni brojevi imaju beskonačno mnogo decimala, u praksi smo prinuđeni da ih zaokružujemo. Tako su u tablicama koje ćemo mi koristiti svi logaritmi zaokruženi na pet decimala. Cifre celih mesta u logaritmu nekog broja čine karakteristiku logaritma, a sve decimale mantisu. Karakteristiku određujemo sami, a mantisu nalazimo u logaritamskim tablicama. Uobičajeno je da se logaritamska osnova 10 izostavlja. Tako, na primer, umesto $\log_{10} 6$ pisaćemo samo log 6. Karakteristika svakog jednocifrenog broja je 0. Ako treba naći, na primer, log 6, karakteristika će biti 0, jer je

$$1 < 6 < 10$$

$$\log 1 < \log 6 < \log 10$$

$$0 < \log 6 < 1,$$ a odavde zaključujemo da je karakteristika 0, tj. log 6 = 0,....., jer se prema poslednjoj nejednakosti log 6 nalazi između 0 i 1.

Koristeći se logaritamskim tablicama nalazimo mantisu 77815, pa je log 6 = 0, 77815.

Pokazaćemo da je karakteristika svakog celog dvocifrenog broja 1. Na primer, ako treba naći log 38, karakteristika će biti 1, jer je

$$10 < 38 < 100$$

$$\log 10 < \log 38 < \log 100$$

$$1 < \log 38 < 2,$$ tj. $\log 38 = 1{,}57978$.

Na sličan način može se pokazati da je karakteristika svakog celog trocifrenog broja 2. Na osnovu toga možemo izvesti sledeći zaključak: karakteristika ma kog broja većeg od 1 za 1 je manja od broja njegovih cifara na mestu celih. Tako će, na primer, karakteristika za log 3340,5 biti 3, jer dati broj ima 4 cifre na mestu celih, znači log 3340,5 = 3,52381.

Za određivanje karakteristike brojeva manjih od 1 poslužićemo se sledećim primerima.

Potražimo logaritme brojeva 0,18, 0,07, 0,003. Ako pođemo od nejednakosti

$$0{,}1 < 0{,}18 < 1$$

$$0{,}01 < 0{,}07 < 0{,}1$$

$$0{,}001 < 0{,}003 < 0{,}01$$ i sve ih logaritmujemo, dobićemo :

$$\log 0{,}1 < \log 0{,}18 < \log 1$$

$$\log 0{,}01 < \log 0{,}07 < \log 0{,}1$$

$$\log 0{,}001 < \log 0{,}003 < \log 0{,}01,$$ tj.

$$-1 < \log 0{,}18 < 0$$

$$-2 < \log 0{,}07 < -1$$
$$-3 < \log 0{,}003 < -2 \qquad \text{ili}$$
$$\log 0{,}18 = -1 + 0{,}\ \ldots\ldots$$
$$\log 0{,}07 = -2 + 0{,}\ \ldots\ldots$$
$$\log 0{,}003 = -3 + 0{,}\ \ldots\ldots$$

Odavde vidimo da se logaritmi brojeva manjih od 1 sastoje od negativne karakteristike i pozitivne mantise.

Poslednje logaritme pišemo kraće ovako:

$$\log 0{,}18 = \bar{1}{,}25527$$
$$\log 0{,}07 = \bar{2}{,}84510$$
$$\log 0{,}003 = \bar{3}{,}47712$$

Prema tome, možemo izvesti sledeći zaključak: karakteristika logaritma broja manjeg od 1 negativna je i ima onoliko jedinica koliko uzastopnih nula ima dati broj počev sleva nadesno računajući i nulu ispred zareza.

Na primer: $\log 0{,}00025 = \bar{4}{,}39794 = -4 + 0{,}39794 = -3{,}60206$

7. Primena logaritama

Logaritmi imaju mnogobrojne praktične primene. Mi ćemo ovde pokazati kako se oni koriste za izračunavanje vrednosti brojnih izraza čije je izračunavanje primenom osnovnih računskih operacija prilično sporo i otežano.

1. primer: Naći vrednost izraza $x = \sqrt[3]{528{,}3}$

Logaritmovanjem datog izraza dobijamo

$$\log x = \frac{1}{3} \cdot \log 528{,}3 .$$

Pošto usmeno odredimo karakteristiku (2) za log 528,3, a mantisu pročitamo iz tablica, imamo

$$\log x = \frac{1}{3} \cdot 2{,}72288 = 0{,}90763.$$

Pošto je karakteristika log x jednaka 0, zaključujemo da je traženi broj x manji od 10 a veći od 1. Znači, traženi broj na mestu celih ima samo jednu cifru. Pošto se iz tablica odredi numerus čija je mantisa 90763, odvojićemo u njoj zarezom samo prvu cifru. Tako dobijamo $x = 8{,}084$.

2. primer: Izračunati vrednost izraza $x = \dfrac{785{,}2^3 \cdot 0{,}8^2}{35\sqrt{15{,}1}}$.

$$\log x = 3 \log 785{,}2 + 2 \log 0{,}8 - \log 35 - \frac{1}{2} \log 15{,}1$$

$$\log x = 3 \cdot 2{,}89498 + 2 \cdot \bar{1}{,}90309 - 1{,}54407 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}17898$$

$$\log x = 8{,}68494 + 2 \cdot (-1+0{,}90309) - 1{,}54407 - 0{,}58949$$

$$\log x = 8{,}68494 - 2 + 1{,}80618 - 1{,}54407 - 0{,}58949$$

$$\log x = 6{,}35756 .$$

Pošto je karakteristika 6, zaključujemo da traženi broj x ima sedam cifara na mestu celih. Primenom tablica određujemo numerus čija je mantisa 35756 i dobijamo $x = 2278100$.

ZADACI:

1/ Odrediti vrednosti sledećih logaritama:

a/ $\log_2 8$, b/ $\log_5 25$, c/ $\log_4 64$, d/ $\log_2 \frac{1}{8}$

2/ Odrediti vrednosti sledećih logaritama

a/ $\log_5 \frac{1}{5}$, b/ $\log_5 \sqrt{5}$, c/ $\log_9 27$

d/ $\log_9 \frac{1}{27}$, e/ $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

3/ Izračunati logaritamsku osnovu iz sledećih jednačina:

a/ $\log_x 64 = 3$, b/ $\log_x 36 = 2$

c/ $\log_2 32 = 5$, d/ $\log_y 7 = 1$

e/ $\log_z 12 = 1$, f/ $\log_y 27 = -\frac{3}{4}$

4/ Izračunati numerus iz jednačina:

a/ $\log_2 x = 5$, b/ $\log_{\frac{1}{2}} y = 1$

c/ $\log_{64} z = -\frac{1}{2}$, d/ $\log_{20} x = 2$

Rešiti sledeće logaritamske jednačine:

5/ $\log_3 (x - 3) = 2$

6/ $\log_4 (x^2 - 9) = 2$

7/ $\log (2x - 3) - \log 3 = \log (x - 2)$

8/ $\log (x^2 - 15) = 0$

9/ $\log (2x^2 - 5x + 4) = 0$

10/ $\dfrac{\log (8 - x^3)}{\log (2 - x)} = 3$

11/ $\log_2 \left[\log_3 (\log_4 y)\right] = 0$

12/ Bez upotrebe tablica izračunati vrednost izraza

a/ $10^{1-\log 5} + 10^{2-\log 20} - 10^{3-\log 500}$

b/ $1000^{-\frac{1}{2}\log 3} \cdot 100^{\frac{2}{3}\log 2 - \log 6}$

13/ Nacrtati grafike sledećih funkcija:

a/ $y = \log_3 x$; b/ $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; c/ $y = \log(x+4)$

14/ Nacrtati grafike sledećih funkcija:

a/ $y = \log_2 x + 2$; b/ $y = \log_2 x - 3$

15/ Logaritmovati sledeće izraze:

a/ $25\, a^3$; b/ $\dfrac{3a^4 b}{5ax^3 y}$; c/ $\dfrac{12a^3 b \sqrt{x}}{4x^3\, ab^5}$

16/ Logaritmovati sledeće izraze:

a/ $\frac{8(x+y)^2}{3(x-y)}$; b/ $\frac{3x\sqrt{2a}\sqrt[3]{2y}}{5ab\sqrt[4]{3ay}}$; c/ $\frac{5a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}}{2\sqrt{a}\sqrt[4]{b}}$

17/ Odrediti izraz x čiji je logaritam dat:

a/ $\log x = \log m + \log n$;

b/ $\log x = 2\log a - 3\log b$;

c/ $\log x = \frac{1}{2}\log c - \frac{2}{3}\log d$;

d/ $\log x = \frac{1}{2}(\log p - \log r) - \frac{1}{3}(\log a - 2\log b)$.

18/ Naći iz logaritamskih tablica logaritme sledećih brojeva:

a/ 25; b/ 354,6; c/ 0,56; d/ 0,035543;

e/ 0,0000 38354; f/ 1; g/ 100.

19/ Naći pomoću logaritamskih tablica brojeve čiji su logaritmi dati:

a/ 1,354; b/ 0,2405; c/ 0,26068; d/ 2,357;

e/ − 0,8347; b/ − 1,35406; g/ $\bar{1},35406$; h/ −3,00053728.

20/ Koristeći se logaritamskim tablicama odrediti vrednost izraza:

a/ $\sqrt{528,34}$; b/ $\sqrt[6]{52\sqrt{0,35359}}$;

c/ $\frac{0,324 \cdot 0,0068 \cdot 3254}{2354 \cdot \sqrt[3]{23,15}}$.

X GLAVA

ARITMETIČKE I GEOMETRIJSKE PROGRESIJE

ARITMETIČKE PROGRESIJE

1. Definicija aritmetičke progresije. Opšti član

Niz brojeva u kome je razlika između ma koga člana i njegovog prethodnog člana stalna naziva se aritmetička progresija.

Takve su progresije:

$$5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ \ldots \qquad (1)$$

$$20,\ 24,\ 28,\ 32,\ \ldots \qquad (2)$$

$$18,\ 13,\ 8,\ 3,\ -2,\ -7,\ \ldots \qquad (3)$$

$$1\tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ 0,\ -\tfrac{1}{2},\ -1,\ \ldots \qquad (4)$$

Brojevi koji obrazuju progresiju zovu se članovi progresije. Progresije kod kojih je svaki sledeći član veći od prethodnog zovu se r a s t u ć e. Takve su progresije (1) i (2). Progresije su o p a d a j u ć e ako je svaki njen član manji od prethodnog. Takve su progresije (3) i (4). Ako je progresija rastuća, tada je pomenuta stalna razlika ili diferencija pozitivna, a ako je opadajuća, onda je diferencija negativna. Na primer, u progresiji (1) razlika je $8 - 5 = 3$, dakle, pozitivna, dok je u progresiji (3) razlika $13 - 18 = - 5$, dakle, negativna.

Niz brojeva

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n\ \ldots \qquad (5)$$

predstavljaće aritmetičku progresiju ako je

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$, gde je razlika ili diferencija d stalna. Broj a_1 je prvi član te progresije, a_2 njen drugi član, a_3 – treći itd. Član a_n se naziva opšti član, a broj n predstavlja rang člana (pokazuje koji je po redu počev od prvog člana).

Na osnovu definicije aritmetičke progresije imamo:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

Na osnovu poslednjih jednakosti za opšti član a_n imamo:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Obrazac (6) upotrebljavamo ako treba napisati bilo koji član neke progresije čiji su prvi član i diferencija poznati.

1. primer: Napisati dvadeset peti član progresije 2,5,8,11,...
Kako je $a_1 = 2$ i $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$, primenom obrasca (6) dobijamo: $a_{25} = 2 + (25-1)3 = 74$.

2. primer: Napisati nekoliko članova aritmetičke progresije ako je $a_1 = 4$ i $a_9 = 44$.

Iz $a_9 = a_1 + 8d$ imamo

$44 = 4 + 8d$ ili

$8d = 40$, tj.

$d = 5$.

Tražena progresija glasi: 4, 9, 14, 19. ....

3. primer: Napisati nekoliko članova progresije ako je zbir drugog i petog člana 35, a zbir trećeg i osmog člana 15.

Prema uslovu zadatka je $a_2 + a_5 = 35$ i $a_3 + a_8 = 15$. Ako a_2, a_3, a_5 i a_8 izrazimo pomoću a_1 i d, poslednje dve jednačine postaju:

$$(a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 35$$

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 7d) = 15$$

i posle uređivanja ovog sistema od dve jednačine sa dve nepoznate dobijamo sistem

$$2a_1 + 5d = 34$$

$$2a_1 + 9d = 15,$$

čija su rešenja $a_1 = 30$ i $d = -5$. Prema tome, progresija je opadajuća i glasi: 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, −5, −10,... odakle se vidi da je zbir $a_2 + a_5 = 25 + 10 = 35$ i $a_3 + a_8 = 20 + (-5) = 15$.

2. Osobine aritmetičke progresije

a) Z b i r   s v a k a   d v a   s i m e t r i č n a   č l a n a   a r i t m e t i č k e   p r o g r e s i j e   j e d n a k   j e   z b i r u   k r a j n j i h   č l a n o v a

Neka je data progresija

$$5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7)$$

Zbirovi simetričnih članova su: 7+17 = 24, 9 + 15 = 24, 11 + 13 = 24, a isto toliko je i zbir krajnjih članova 5 + 19 = 24.

Uopšte, u progresiji

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$

simetrični su članovi a_1 i a_n, a_2 i a_{n-1}, a_3 i a_{n-2},.... i a_k i $a_{n-(k-1)}$. Ove poslednje možemo izraziti ovako:

$$a_k = a_1 + (k - 1)d,$$

$$a_{n-(k-1)} = a_1 + (n - k)d.$$

Sabiranjem ovih članova dobija se:

$a_k + a_{n-(k-1)} = 2a_1 + (k-1+n-k)d = 2a_1 + (n-1)d = a_1 + a_1 +$
$+(n-1)d = a_1 + a_n,$

tj.

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n.$$

b) <u>Svaki član aritmetičke progresije jednak je aritmetičkoj sredini članova koji su od njega podjednako udaljeni</u>

Ako u progresiji (7) uočimo četvrti član (11) i drugi (7) i šesti (15) koji su od njega podjednako udaljeni, tada je zaista:

$$11 = \frac{7 + 15}{2}.$$

Uopšte, ako u progresiji (8) označimo sa a_k ma koji njen član, onda će članovi a_{k-r} i a_{k+r} biti podjednako udaljeni od člana a_k.

Kako je:

$a_{k+r} = a_k + rd$ i

$a_{k-r} = a_k - rd$, tada se sabiranjem ovih jednakosti dobija:

$$a_{k+r} + a_{k-r} = 2a_k, \quad \text{tj.}$$

$$a_k = \frac{a_{k+r} + a_{k-r}}{2}.$$

Ako je $r = 1$, biće:

$a_k = \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2}$, što znači: od tri uzastopna člana (a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) srednji član a_k jednak je aritmetičkoj sredini susednih članova.

Lako je dokazati i sledeću osobinu aritmetičke progresije: <u>U aritmetičkoj progresiji sa neparnim brojem članova srednji član jednak je aritmetičkoj sredini krajnjih članova.</u>

3. Zbir članova aritmetičke progresije

Ako sa S_n označimo zbir svih n članova progresije $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$, dobijamo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \ldots\ldots \quad (9)$$

Pošto se zbir ne menja ako sabirci promene mesta, za gornji zbir se može napisati:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1 \ldots\ldots \quad (10)$$

Sabiranjem jednakosti (9) i (10) dobijamo:

$$2S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots +$$

$$+ (a_3+a_{n-2}) + (a_2+a_{n-1}) + (a_1 + a_n).$$

Na desnoj strani poslednje jednakosti dobili smo n parova koje smo stavili u zagrade. Kako je svaki od ovih parova jednak sa zbirom (a_1+a_n) (proveri!), poslednja jednakost se može napisati:

$$2S_n = (a_1+a_n) + (a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n),$$

tj. $\quad 2S_n = n\cdot(a_1 + a_n), \quad$ ili

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Poslednja jednakost predstavlja obrazac za izračunavanje zbira <u>n</u> članova aritmetičke progresije. Ovaj obrazac koristićemo onda kada su dati a_1 i a_n.

Ako se u obrascu (11) stavi $a_n = a_1 + (n - 1)d$, dobijamo:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right], \quad \text{tj.}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Ovaj obrazac upotrebljavaćemo kada izračunavamo zbir n članova aritmetičke progresije ako su dati a_1 i d.

1. primer: Izračunaj zbir prvih 20 članova progresije 5,11, 17,23,... U ovom slučaju je: $a_1 = 5$, $d = 11 - 5 = 6$. Primenom obrasca (12) dobijamo:

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\cdot 5 + (20-1)5\right] = 10(10+19\cdot 5) = 10 \cdot 105 = 1050 .$$

2. primer: Izračunati S_{36} ako je $a_1 = 2$ i $a_{36} = 142$.

Primenom obrasca (11) dobijamo:

$$S_{36} = \frac{36}{2}(2 + 142) = 18(144) = 2592.$$

4. Interpolacija kod aritmetičke progresije

Ako između dva broja a_1 i a_2 treba umetnuti izvestan broj članova tako da ovi sa datima obrazuju aritmetičku progresiju, tada se ovo umetanje članova naziva interpolacija aritmetičke progresije.

Neka r predstavlja broj umetnutih članova, a_1 i a_2 dva uzastopna člana neke aritmetičke progresije čija je diferencija $d = a_2 - a_1$. Tada nova progresija ima $r+2$ člana i ako njenu diferenciju označimo sa d_1, prema obrascu za opšti član imamo:

$$a_2 = a_1 + (r + 2 - 1)d_1, \quad \text{ili}$$

$$a_2 - a_1 = (r+1)d_1, \quad \text{ili}$$

$$d = (r+1)d_1, \quad \text{tj.}$$

$$d_1 = \frac{d}{r+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

1. primer: Između brojeva 8 i 26 umetnuti 5 članova tako da oni sa datima obrazuju progresiju.

Kako je $d = 26 - 8 = 18$ i $r = 5$, primenom obrasca (13) za d_1 dobijamo:

$$d_1 = \frac{d}{r+1} = \frac{18}{5+1} = \frac{18}{6} = 3.$$

Članovi progresije su:

$$a_1 = 8,$$
$$a_2 = a_1 + d_1 = 8 + 3 = 11,$$
$$a_3 = a_2 + d_1 = 11 + 3 = 14,$$
$$a_4 = a_3 + d_1 = 14 + 3 = 17 \quad \text{itd.}$$

Prema tome, progresija glasi: 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26.

Z A D A C I :

1/ Data je aritmetička progresija 8, 11, 14, ... Naći njen dvadeseti član i zbir prvih dvadeset članova.

2/ Napisati nekoliko članova aritmetičke progresije ako je $a_1 = 10$ i $d = 4$.

3/ Naći zbir prvih dvanaest članova aritmetičke progresije 45, 39, 33, 27, ...

4/ Dato je $a_1 = 50$ i $a_9 = 26$:

a) napisati tu progresiju;
b) naći S_{20};
c) koliko članova treba sabrati pa da se dobije 798?

5/ Napisati prvih nekoliko članova aritmetičke progresije ako je njen opšti član dat izrazom $a_n = 2n - 3$.

6/ Da li je 1361. član aritmetičke progresije 1, 5, 9, 13, ...? Ako jeste, koji je po redu, a ako nije, između kojih se članova nalazi?

7/ Zbir prvog i drugog člana aritmetičke progresije je 36, a zbir drugog i trećeg je 44. Naći zbir od 15 članova te progresije.

8/ Naći zbir svih parnih dvocifrenih brojeva.

9/ Razlika prvog i trećeg člana aritmetičke progresije je 10, a zbir petog i sedmog 150. Napisati tu progresiju i naći njen dvadeseti član.

10/ Naći zbir svih neparnih brojeva koji se nalaze između 0 i 100.

11/ Zbir prvog, četvrtog i jedanaestog člana aritmetičke progresije je 35, a zbir trećeg i šestog je 20. Napisati prvih osam članova te progresije.

12/ Ako brojevi a+x, b+x i c+x čine tri uzastopna člana aritmetičke progresije, dokazati da su i brojevi a, b i c tri uzastopna člana aritmetičke progresije.

13/ Zbir prva dva člana aritmetičke progresije iznosi 15, a zbir njihovih recipročnih vrednosti $\frac{15}{44}$. Naći prvi član i diferenciju progresije.

14/ Naći zbir svih dvocifrenih brojeva.

15/ Naći zbir svih dvocifrenih brojeva deljivih sa 6.

16/ Dokazati da izrazi $(a+x)^2$, $a^2 + x^2$, $(a - x)^2$ čine aritmetičku progresiju.

17/ Naći zbir prva četiri člana progresije $2 + \sqrt{3}$, 4, $6 - \sqrt{3}$.

18/ Stranice pravouglog trougla čine tri uzastopna člana aritmetičke progresije sa diferencijom $d = 1$. Naći obim trougla.

19/ Između brojeva 3 i 47 umetnuti deset drugih brojeva, tako da svi zajedno čine aritmetičku progresiju.

20/ Između brojeva 5 i 23 umetnuti pet drugih brojeva tako da svi zajedno čine aritmetičku progresiju.

21/ Koliko brojeva treba umetnuti između 20 i 40 pa da se dobije aritmetička progresija sa diferencijom 4?

22/ Sumu od 56700 dinara treba podeliti na 6 delova tako da je najveći deo 10700 din., a svaki sledeći deo za isti broj dinara manji od prethodnog. Naći te delove ako je najmanji deo 8200 dinara.

23/ Jedna fabrika planirala je da proizvede ove godine 15000 komada neke robe, a svake sledeće godine da poveća proizvodnju za 500 komada. Posle koliko godina će moći da proizvede u toku jedne godine 20000 komada?

24/ Koliko će se platiti za kopanje bunara dubokog 16 m, ako se za prvi metar kopanja plaća 2500 dinara, a za svaki sledeći metar po 800 dinara više?

25/ Koju sumu novca treba podeliti na 10 lica tako da prvo dobije 95800, a svako sledeće po 5000 dinara manje?

GEOMETRIJSKE PROGRESIJE

1. Definicija geometrijske progresije. Opšti član

Niz brojeva u kome je količnik ma koga člana i njegovog prethodnog člana stalan naziva se geometrijska progresija. Takve su progresije:

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$40,\ 20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \ldots\ldots \qquad (2)$$

$$3,\ -6,\ 12,\ -24,\ 48,\ \ldots\ldots \qquad (3)$$

Brojevi koji obrazuju geometrijsku progresiju zovu se članovi te progresije. Ako sa q označimo stalan količnik, onda je za progresiju (1) $q = \frac{18}{6} = 3$, za progresiju (2) $q = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, a za progresiju (3) $q = \frac{12}{-6} = -2$. Vidimo da u progresiji (1) u kojoj je $q > 1$ članovi rastu, a takva progresija naziva se rastuća geometrijska prog r e s i j a. Ako je $q < 1$, progresija(2), članovi progresije opadaju, pa takvu progresiju nazivamo o p a d a j u - ć o m. Progresija (3) čiji su članovi naizmenično pozitivni ima $q < 0$ i ona nije ni rastuća ni opadajuća.

Niz brojeva:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_{n-1}, b_n \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

predstavljaće geometrijsku progresiju ako je:

$\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{b_4}{b_3} = \ldots \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = q$, gde q predstavlja stalni količnik, b_1 - prvi član, b_2 - drugi član itd., b_n - opšti (n-ti) član.

Na osnovu definicije geometrijske progresije, imamo

$$\frac{b_2}{b_1} = q, \text{ tj. } b_2 = b_1 q$$

$$\frac{b_3}{b_2} = q, \text{ tj. } b_3 = b_2 q = b_1 q^2$$

$$\frac{b_4}{b_3} = q, \text{ tj. } b_4 = b_3 q = b_1 q^3$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = q, \text{ tj. } b_n = b_{n-1} q = b_1 q^{n-1}.$$

Izraz $b_n = b_1 q^{n-1}$ .... (5)

predstavlja obrazac za opšti član geometrijske progresije.

<u>1. primer:</u> Napisati dvanaesti član progresije

$$4, 12, 36, 108, \ldots$$

Kako je ovde $b_1 = 4$, a $q = \frac{12}{4} = 3$, primenom obrasca (5) imamo:

$$b_{12} = b_1 q^{11} = 4 \cdot 3^{11} = 4 \cdot 177147 = 708588.$$

2. primer: Napisati geometrijsku progresiju ako je $b_1 = 16$ i $b_7 = \frac{1}{4}$

$$b_7 = b_1 q^6$$

$$\frac{1}{4} = 16 \cdot q^6$$

$$\frac{1}{4.16} = q^6$$

$$q^6 = \frac{1}{2^2 \cdot 2^4}$$

$$q^6 = \frac{1}{2^6}$$

$$q = \sqrt[6]{\frac{1}{2^6}}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

Progresija glasi: $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

2. Osobine geometrijske progresije

a) Proizvod simetričnih članova geometrijske progresije jednak je proizvodu prvog i poslednjeg člana.

U progresiji

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots b_{n-3}, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n$$

simetrični članovi su

$$b_1 \text{ i } b_n,\ b_2 \text{ i } b_{n-1},\ b_3 \text{ i } b_{n-2}, \ldots b_k \text{ i } b_{n-(k-1)}.$$

Prema obrascu (5) imamo:

$$b_k = b_1 q^{k-1}$$

$$b_{n-(k-1)} = b_1 q^{n-(k-1)-1} = b_1 q^{n-k},$$ a odavde

množenjem ovih jednakosti imamo ;

$$b_k \cdot b_{n-(k-1)} = b_1^2\, q^{k-1+n-k}$$

$$b_k \cdot b_{n-(k-1)} = b_1 \cdot b_1 q^{n-1} \quad \text{ili}$$

$$\underline{b_k \cdot b_{n-(k-1)} = b_1 \cdot b_n}\,.$$

b) <u>M a k o j i č l a n g e o m e t r i j s k e p r o g r e s i j e j e g e o m e t r i j s k a s r e d i n a č l a n o v a k o j i s u o d n j e g a p o d j e d n a k o u d a l j e n i</u>.

Neka je b_k ma koji član, tada su članovi b_{k+r} i b_{k-r} podjednako udaljeni od njega.

Kako je

$$b_{k+r} = b_k \cdot q^r \quad \text{i}$$

$$b_{k-r} = b_k q^{-r} = \frac{b_k}{q^r}\,,$$ množenjem ovih članova dobijamo:

$$b_{k+r} \cdot b_{k-r} = b_k^2 \,, \quad \text{tj.}$$

$$b_k = \sqrt{b_{k+r} \cdot b_{k-1}}\,,$$ što je i trebalo dokazati.

Za tri uzastopna člana b_{k-1}, b_k i b_{k+1} će prema tome biti

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}\,.$$

Recimo, kod progresije 2, 6, 18, 54, ... je

$$6 = \sqrt{2 \cdot 18}, \qquad 18 = \sqrt{6 \cdot 54}.$$

3. Zbir članova konačne geometrijske progresije

Ako sa S_n označimo zbir n članova geometrijske progresije, tj.

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n$$ i ako sve članove izrazimo pomoću b_1 i q, dobijamo:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-3} + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1} \ldots \quad (6)$$

Množenjem jednakosti (6) sa q dobijamo

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1} + b_1q^n \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Oduzimanjem jednakosti (6) od jednakosti (7) dobijamo

$S_nq - S_n = b_1q^n - b_1$, $\quad S_n(q-1) = b_1(q^n - 1)$, tj.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ili

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Obrazac (9) se dobija iz obrasca (8) proširivanjem razlomka na desnoj strani sa -1. Prvi obrazac se upotrebljava ako je progresija rastuća, tj. $q > 1$, a drugi ako je progresija opadajuća, tj. $q < 1$.

1. primer: Izračunati zbir prvih 12 članova geometrijske progresije 1, 3, 9, 27, 81...

2. primer: Koliko članova progresije treba sabrati da zbir bude 6138, ako je $b_1 = 6$ i $q = 2$?

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$6138 = \frac{6 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \quad /:6$$

$$1023 = 2^n - 1$$

$$2^n = 1024$$

$$2^n = 2^{10}, \text{ tj.}$$

$$\underline{n = 10}.$$

Rešenje 1. primera:

Kako je $b_1 = 1$, $q = \frac{9}{3} = 3$,

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(3^{12} - 1)}{3 - 1}$$

$$S_n = \frac{531441 - 1}{2} = 265720.$$

3. primer: Zbir drugog i četvrtog člana geometrijske progresije je 50, a zbir trećeg i petog 25. Napisati nekoliko prvih

članova te progresije.

Prema uslovu zadatka je:

$$b_2 + b_4 = 50$$
$$\underline{b_3 + b_5 = 25} \quad \text{ili}$$

$$b_1q + b_1q^3 = 50$$
$$\underline{b_1q^2 + b_1q^4 = 25}$$

$$b_1q\,(1 + q^2) = 50 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$
$$\underline{b_1q^2\,(1 + q^2) = 25} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

a odavde se deljenjem jednačina (10) i (11) dobija

$$\frac{b_1q\,(1+q^2)}{b_1q^2(1+q^2)} = \frac{50}{25} \quad \text{ili posle skraćivanja}$$

$$\frac{1}{q} = 2\,, \text{ tj.}$$

$q = \frac{1}{2}$; iz jednačine (10) dobijamo

$$b_1 = \frac{50}{q \cdot (1+q^2)} = \frac{50}{\frac{1}{2} \cdot (1+\frac{1}{4})} = 80$$

Progresija je 80, 40, 20, 10, 5, $\frac{5}{2}$, ...

4. Interpolacija kod geometrijske progresije

Ako između dva broja b_1 i b_2 treba umetnuti izvestan broj članova tako da ovi zajedno sa datima čine geometrijsku progresiju, tada se ovo umetanje članova zove interpolacija.

Neka r predstavlja broj umetnutih članova, b_1 i b_2 dva uzastopna člana neke geometrijske progresije čiji je količnik q. Tada nova progresija ima $r + 2$ člana i ako njen količnik označimo sa q_1, prema obrascu za opšti član geometrijske progresije imamo:

$$b_2 = b_1 q_1^{r+2-1} \quad \text{ili}$$

$$\frac{b_2}{b_1} = q_1^{r+1} \quad \text{i kako je} \quad \frac{b_2}{b_1} = q$$

$$q = q_1^{r+1}, \quad \text{tj.}$$

$$q_1 = \sqrt[r+1]{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

<u>1. primer</u>: Između brojeva 3 i 243 umetnuti tri broja tako da ovi sa datima obrazuju geometrijsku progresiju. Prema obrascu (12) imamo

$$q_1 = \sqrt[3+1]{81}, \quad \text{gde je stavljeno} \quad r = 3 \quad \text{i} \quad q = \frac{243}{3} =$$

$= 81$. Za q_1 dalje dobijamo

$$q_1 = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3.$$

Prema tome, tražena progresija je 3, 9, 27, 81, 243.

5. <u>Zbir beskonačne opadajuće geometrijske progresije</u>

Beskonačna opadajuća geometrijska progresija je takva geometrijska progresija čiji se članovi stalno smanjuju tako da se za neki njen član čiji je rang dovoljno veliki može reći da je manji od nekog ma koliko malog pozitivnog broja.

Takva je, na primer, progresija:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots. \quad \text{tj. progresija}$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Kako je za opadajuću geometrijsku progresiju zbir

$S_n = b_1 \frac{(1 - q^n)}{1 - q}$ i kako je $0 < q < 1$, tada izraz q^n teži nuli kada $\underline{n}$ neograničeno raste. Stoga za zbir beskonačne opadajuće geometrijske progresije imamo:

$$S_n = \frac{b_1}{1 - q} \quad \text{.............................} \quad (14)$$

1. primer: Izračunati zbir progresije (13). Kako je u datoj progresiji $b_1 = 1$ i $q = \frac{1}{3}$, primenjujući obrazac (14) dobijamo

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} .$$

2. primer: Izračunati zbir progresije

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots \frac{1}{2^n}$$

Ovde je $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Z A D A C I :

1/ Peti član geometrijske progresije je 80 a količnik 2. Napisati nekoliko članova te progresije.

2/ Drugi član geometrijske progresije je 4 a količnik $\frac{1}{3}$. Naći njen peti član.

3/ Prvi član geometrijske progresije je 81 a količnik $\frac{1}{3}$. Da li je broj 1 član te progresije? Ako jeste, koji je po redu?

4/ Izračunati zbir 12 članova geometrijske progresije 2, 4, 8, 16,...

5/ U geometrijskoj progresiji je $b_1 = 1$ i $q = 5$. Naći b_{10} i S_{10}.

6/ U geometrijskoj progresiji je $S_5 = 4\frac{13}{27}$ i $q = 3$. Naći b_1, b_8 i S_8.

7/ Zbir prvog i trećeg člana geometrijske progresije je 17, a zbir drugog i petog 260. Napisati nekoliko prvih članova te progresije.

8/ Prvi član geometrijske progresije je 1, a zbir trećeg i petog člana je 90. Napisati nekoliko prvih članova te progresije.

9/ Naći četiri broja koji čine geometrijsku progresiju ako je zbir prvog i četvrtog 27, a zbir drugog i trećeg 18.

10/ Između brojeva 3 i $\frac{1}{27}$ umetnuti tri druga broja tako da ovi sa datima obrazuju geometrijsku progresiju.

11/ Koliko brojeva treba umetnuti između 1 i 243 pa da se dobije geometrijska progresija sa količnikom 3? Koji su ti brojevi?

12/ Naći zbir beskonačne opadajuće geometrijske progresije $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

13/ Naći zbir $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots$

14/ Naći zbir beskonačne opadajuće geometrijske progresije čiji je prvi član 4, a razlika trećeg i petog člana $\frac{32}{81}$.

15/ Pretvoriti u razlomke brojeve:
a) 0,272727..... b) 1,4666666....

16/ U krug poluprečnika r upisan je kvadrat, u kvadrat krug, u taj krug kvadrat itd. Naći zbir površina svih kvadrata i svih krugova.

17/ U kvadrat stranice a upisan je drugi kvadrat tako da su mu temena na sredinama stranica prvog. U ovaj drugi kvadrat upisan je na isti način treći kvadrat itd. Naći zbir površina svih kvadrata.

18/ Godine 1960. bilo je u jednom mestu 30 000 stanovnika. Koliko će to mesto imati stanovnika 1970. godine ako je stopa godišnjeg porasta stanovništva 3%?

19/ Dug od 416 000 d treba isplatiti u tri rate tako da svaka rata bude tri puta veća od prethodne. Kolike su rate?

20/ Iznos od 182 000 d treba podeliti na tri lica tako da svako sledeće lice dobije 20% više od prethodnog. Koliko će primiti svako lice?

21/ Aritmetička i geometrijska progresija imaju prve članove 3 i jednake treće članove. Naći te progresije ako je drugi član aritmetičke progresije za 6 veći od drugog člana geometrijske progresije.

22/ Tri broja čiji je zbir 93 obrazuju geometrijsku progresiju. Oni mogu biti i prvi, drugi i sedmi član aritmetičke progresije. Naći te brojeve.

23/ Dokazati da izrazi $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1+x}{1+x}$ čine tri uzastopna člana geometrijske progresije.

24/ Naći zbir prvih pet članova geometrijske progresije čiji su prvi, drugi i treći član dati izrazima

$$\frac{1}{1-x^2}, \frac{1}{1-x}, \frac{1+x}{1-x}.$$

25/ Ako su brojevi a, b i c tri uzastopna člana geometrijske progresije, dokazati da je

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

III DEO

PLANIMETRIJA I STEREOMETRIJA

I GLAVA

OSNOVNI GEOMETRIJSKI OBLICI

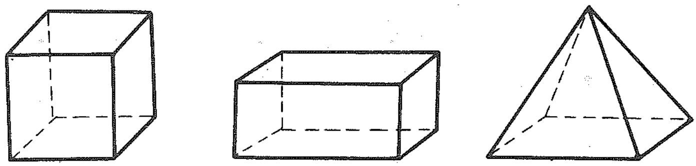
1. Telo, površina, linija i tačka

Razne predmete kao što su: sto, stolica, peć, olovka, knjiga, sveska itd. nazivamo telima. Tela imaju mnogobrojne osobine. Neke od ovih osobina su zajedničke za sva tela. Tako, na primer, sva tela imaju težinu, oblik i veličinu, svako telo zauzima određen pložaj u prostoru (položaj), neka su toplija, druga hladnija (temperatura) itd. Od svih osobina geometrija proučava samo o b l i k, v e l i č i n u i p o l o ž a j. Ove tri osobine se zovu g e o m e t r i j s k e o s o b i n e t e l a. Međutim, ne postoji nijedno telo koje ima samo ove tri osobine. Takvo telo se može samo zamisliti. Tako zamišljeno telo, odnosno deo prostora ograničen sa svih strana, zove se g e o m e t r i j s k o t e l o. Dakle, geometrijska tela ne postoje nego se samo mogu zamisliti. U geometriji se za proučavanje geometrijskih tela služimo tzv. m o d e l i m a geometrijskih tela koji su najčešće napravljeni od kartona, drveta, lima ili žice. Geometrijsko telo možemo predstaviti i crtežom.

Najjednostavnija geometrijska tela su kocka, kvadar, piramida, valjak, kupa i lopta. Telo je odvojeno od ostalog prostora granicom koju nazivamo <u>površ</u> tela. Površi mogu biti ravne i krive. Ravnu površ zovemo <u>ravan.</u> Za model ravni može nam poslužiti nesavijen list hartije ili kartona, tanak i ravan komad lima i dr. Inače, ravan je neograničena a predstavljamo je kao na sl. 1. Ravni obeležavamo grčkim slovima azbuke α (alfa), β (beta), γ (gama), δ (delta) itd.

Slika 1

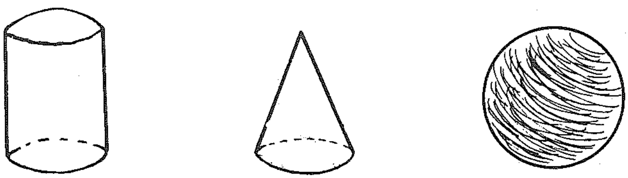
Sva geometrijska tela koja su ograničena samo ravnim površima zovu se rogljasta geometrijska tela. Kocka, kvadar i piramida spadaju u rogljasta geometrijska tela (sl. 2). Geometrijska tela koja su ograničena ravnim i krivim površima ili samo krivim po-



Kocka Kvadar Piramida

Slika 2

vršima zovu se obla geometrijska tela. Valjak, kupa i lopta spadaju u obla geometrijska tela (sl. 3).

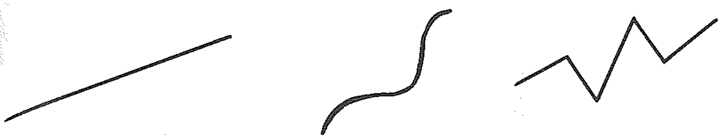


Valjak Kupa Lopta

Slika 3

Valjak je ograničen sa dva jednaka kruga (delovi ravnih površi) i jednom krivom (valjkastom) površi. Kupa je ograničena jednim krugom i jednom krivom (kupastom) površi. Lopta je ograničena samo jednom krivom (sfernom) površi. Delovi površi koji ograničavaju telo zovu se strane tela. Tako je, na primer, kocka ograničena sa šest strana. Ona strana kocke na kojoj je ona postavljena i ona odozgo zovu se osnovne strane (osnove ili baze), a strane koje ograničavaju kocku s boka su bočne strane. Osnove ili baze valjka su dva jednaka kruga, a kupa ima za osnovu samo jedan krug.

Granica dveju površi je linija, tj. dve površi se seku po liniji. Linija može biti prava, kriva ili izlomljena. Granicu dveju susednih strana kocke (kvadra, piramide) određuje p r a v a   l i n i j a ili kraće prava. U stvari, ovo je samo deo prave linije, jer je uopšte uzev prava neograničena sa obe strane. Granica osnove kupe (valjka) i bočne površi je kriva linija koja se zove kružnica. Na sl. 4 predstavljene su prava, kriva i izlomljena linija.



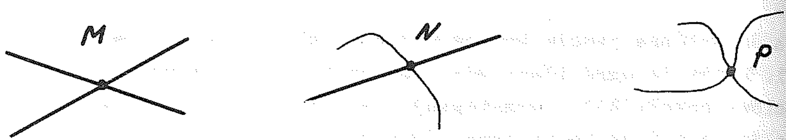
Prava Kriva Izlomljena

Slika 4

Delovi pravih linija koje omeđuju pojedine strane rogljastog tela zovu se ivice tela. Ivice koje ograničavaju osnovu tela zovu se osnovne ivice, a ivice duž kojih se sastaju po dve bočne strane zovu se bočne ivice.

Videli smo da se dve površi mogu seći i da je njihov presek linija. Isto tako se i dve linije mogu seći. Zajedničko mesto dveju linija koje se seku je njihov presek i zove se tačka. Tačke obeležavamo velikim slovima latinice (sl. 5).

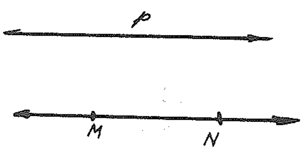
Svako telo ima tri dimenzije: dužinu, širinu i visinu. Površi imaju samo dve dimenzije: dužinu i širinu, a linija samo jednu: dužinu. Tačka nema dimenzija.



Slika 5

2. Prava, poluprava i duž

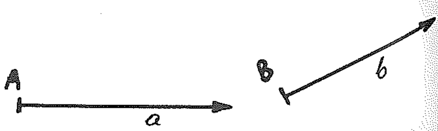
Rekli smo da se prava linija kraće zove prava. Prava se obeležava pomoću malog slova latinice ili pomoću dvaju velikih slova latinice koja označavaju dve tačke prave. Na slici 6 nacrtane su prava p i prava MN.



Slika 6.

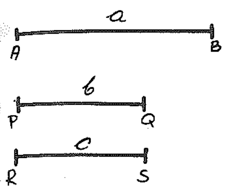
Uočimo tačku A prave a (sl. 7). Svaka tačka A prave a određuje dve poluprave posmatrane prave. Poluprave se obeležavaju, kao i prave, malim slovima latinice i početnom tačkom (sl. 8).

Slika 7



Slika 8

Deo prave između dve utvrđene tačke te prave zove se duž. Duž obeležavamo jednim malim slovom latinice ili sa dva velika slova koja označavaju krajeve duži. Na sl. 9 nacrtane su i obeležene tri duži. Za svaku duž se merenjem može naći dužina duži. Upoređivanje dveju datih duži vrši se tako što se jedna duž postavi na drugu da im se po



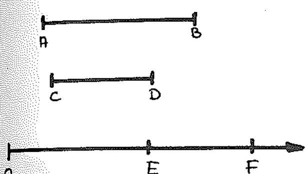
Slika 9

jedna krajnja tačka poklopi. Ako se pri tom poklope i druge dve krajnje tačke, onda su te dve duži jednake (sl. 9, duži PQ i RS), dok su inače nejednake (AB i RS, sl. 9).

U prvom slučaju zapisujemo: PQ = RS ili b = c, što se čita "duž PQ jednaka je duži RS" ili "a jednako je b". U drugom slučaju zapisujemo AB > RS ili a > c, što se čita "duž AB veća je od duži RS", ili "a je veće od c". Ovo se može izraziti i ovako: RS < AB ili c < a, što se čita "duž RS manja je od duži AB" ili "b je manje od a".

3. Grafičko sabiranje i oduzimanje duži

Da bismo sabrali dve date duži AB i CD (sl. 10), potrebno je najpre da prenesemo jednu duž na proizvoljno nacrtanu polupravu. Ovo prenošenje se vrši tako što se, na primer, duž AB (sl. 10) obuhvati šestarom i ne menjajući otvor šestara zabodemo vrh u početak poluprave O, pa opišemo luk do presečne tačke E sa polupravom. Tada je OE = AB pa je izvršeno prenošenje duži AB. Da bi se dobio zbir duži AB i CD potrebno je da još duž CD prenesemo



Slika 10

u istom smeru počev od tačke E. Na taj način se dobija tačka F tako da je EF = CD. Ovako konstruisana duž OF predstavlja zbir duži AB i CD, što zapisujemo:

$$OF = OE + EF \quad \text{ili} \quad OF = AB + CD.$$

Razlika dveju duži AB i CD dobija se tako što se najpre na polupravu prenese veća duž AB = OK (sl. 11), pa se od tačke K, no sada u suprotnom smeru, prenese duž CD = KL. Duž OL je tražena razlika duži AB i CD.

Slika 11

Z A D A C I :

1/ Nacrtaj dve proizvoljne duži a i b ($a > b$), a potom konstruiši duži: $a + b$, $a - b$, $2b$, $2a - b$.

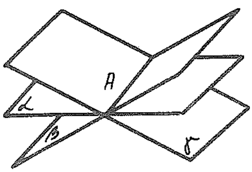
2/ Nacrtaj tri proizvoljne duži a, b i c ($a > b > c$), a potom konstruiši duži: $a + b + c$; $a + b - c$; $2a + 3b - 2c$.

II GLAVA

POLOŽAJ PRAVIH I RAVNI U PROSTORU

1. Horizontalne i vertikalne ravni i prave

Ravan koja ima položaj mirne vode zove se h o r i z o n t a l n a ili v o d o r a v n a ravan. Takav položaj imaju ravan poda i tavanice u sobi, ravan stola i dr. Horizontalnost ravni se ispituje pomoću l i b e l e. Kroz jednu tačku se može postaviti beskonačno mnogo ravni ali samo jedna od njih je horizontalna. Znači, k r o z j e d n u t a č k u p r o l a z i s a m o j e d n a h o r i z o n t a l n a r a v a n (ravan α na sl. 12).

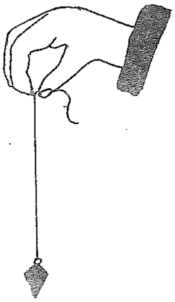


Slika 12

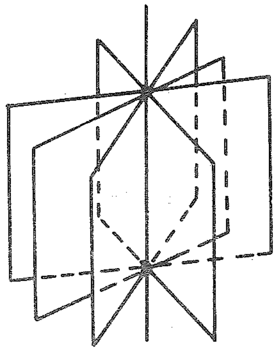
Ako je ravan horizontalna tada je svaka prava, koja je u toj ravni, horizontalna prava. Kroz jednu tačku može se povući beskonačno mnogo horizontalnih pravih.

Pogledaj kanap viska koji miruje. Za takav kanap kažemo da se nalazi u vertikalnom položaju. Prava koja se nalazi u vertikalnom položaju zove se vertikalna prava. Kroz jednu tačku može se povući samo jedna vertikalna prava.

Sve ravni koje prolaze kroz jednu vertikalnu pravu su vertikalne ravni (sl. 14). Za ravan koja nije ni vertikalna ni horizontalna kažemo da je kosa. Isto tako, prava je kosa ako nije ni vertikalna ni horizontalna.



Slika 13

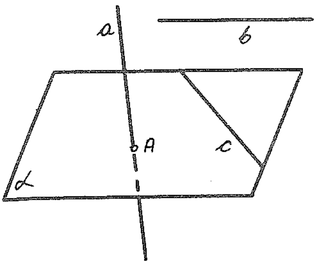


Slika 14

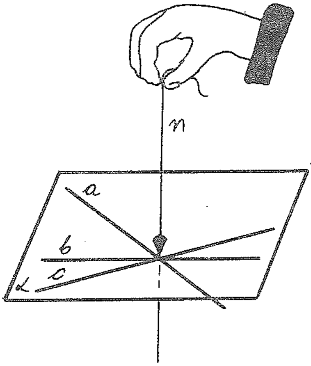
2. Uzajamni položaj dveju pravih, prave i ravni i uzajamni položaj dveju ravni

Dve prave mogu da se seku, da su paralelne, da se poklapaju ili da su mimoilazne. Ako se dve prave seku, onda je presečna tačka zajednička za obe prave i obe leže u istoj ravni i obratno: ako dve prave imaju jednu zajedničku tačku onda se one seku i obe leže u istoj ravni. Ako su prave paralelne, onda one nemaju zajedničkih tačaka i obe leže u jednoj ravni i obratno: ako dve prave leže u istoj ravni i nemaju zajedničkih tačaka onda su one paralelne. Ako dve prave imaju dve zajedničke tačke, tada su im i sve ostale tačke zajedničke i prave se poklapaju. Ako dve prave nemaju zajedničkih tačaka i pored toga ne leže u jednoj ravni, prave su mimoilazne. Kao primer mimoilaznih pravih može nam poslužiti pravac mosta i pravac toka reke i dr.

Prava i ravan mogu imati jednu zajedničku tačku. Tada kažemo da prava seče (prodire) ravan, a zajednička tačka je prodor prave u ravni. Ako je prava svuda podjednako udaljena od ravni, tada one nemaju zajedničkih tačaka i kažemo da je prava paralelna sa ravni. Znak za paralelnost je " $\parallel$ ". Ako prava ima dve zajedničke tačke sa ravni, tada su i sve ostale tačke prave zajedničke i za ravan i kažemo da prava pripada ravni. Na sl. 15 predstavljena su sva tri položaja prave prema ravni: prava a prodire ravan α u tački A, prava b je paralelna sa ravni α ($b \parallel \alpha$), prava c leži u ravni α.

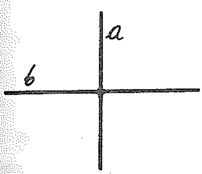


Slika 15

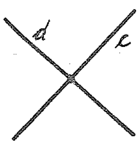


Slika 15a

Ako pomoću libele dovedemo ravan α u horizontalan položaj (sl. 15a) i iznad ravni umirimo visak tako da on dodiruje ravan, tada pravac viska određuje jednu pravu n za koju kažemo da je normalna na ravan α i pišemo $n \perp \alpha$ (čita se: n normalno na α).



Slika 15b



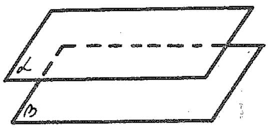
Slika 15c

Ako kroz dodirnu tačku P (podnožje viska) povučemo prave u ravni α, tada će prava n biti normalna na svakoj od povučenih pravih ($n \perp a$, $n \perp b$, $n \perp c$). Jasno je da prava može biti normalna i na ravan koja nije horizontalna. Na primer, kod kocke svaka ivica je normalna na dve strane (ravni) kocke ma kako kocku okrenuli.

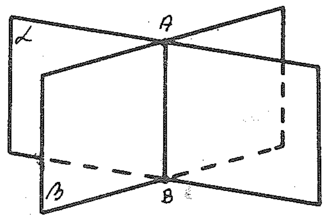
Na sl. 15b i 15c nacrtane su po dve uzajamno normalne prave.

Dve ravni mogu biti paralelne i u tom slučaju nemaju zajedničkih tačaka (sl. 16).

Dve ravni se mogu seći i tada imaju zajedničku pravu preseka. Za dve ravni koje se seku, od kojih je jedna horizontalna a druga vertikalna, kažemo da su normalne ili upravne ili da su uzajamno normalne. Takav položaj imaju, recimo, ravan poda i ravan zida u učionici. Međutim, dve ravni mogu biti uzajamno normalne a da jedna nije horizontalna a druga vertikalna. Potrebno je samo da one imaju međusobni položaj kao između horizontalne i vertikalne ravni. Na primer, ravni dvaju susednih zidova u učionici su uzajamno normalne. Zatim, dve strane kocke sa zajedničkom ivicom su uvek uzajamno normalne ma kako kocku namestimo.



Slika 16

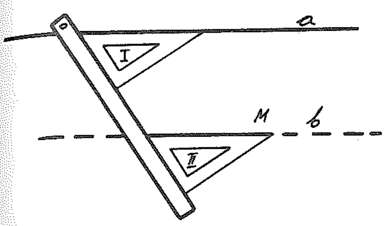


Slika 17

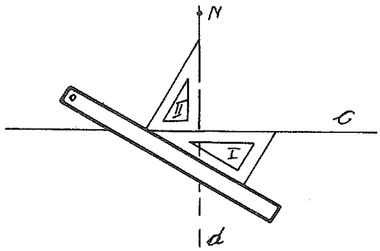
3. Crtanje paralelnih i normalnih pravih pomoću lenjira i trougla

Neka je data prava <u>a</u> i tačka M van ove prave. Da bismo kroz tačku M nacrtali paralelnu pravu datoj pravoj, postupamo ovako: najpre se postavi trougao svojom jednom stranicom po datoj pravoj, a potom se uz drugu stranicu trougla prisloni lenjir (ili drugi trougao) koji se sada drži čvrsto, a trougao pomeramo dok ne dođe u položaj II tako da mu ista stranica prođe kroz tačku M. Najzad se povuče prava <u>b</u>

koja će biti paralelna sa datom pravom a (sl. 18).



Slika 18



Slika 19

Neka je data prava c i tačka N van ove prave. Da bismo kroz tačku N nacrtali normalnu pravu na datu pravu c postupamo ovako: postavi se trougao svojom najdužom stranicom (hipotenuzom) po datoj pravoj (položaj II na sl. 19), a uz drugu kraću stranicu trougla (katetu) čvrsto prisloni lenjir. Zatim se trougao okrene u položaj II i klizi uz pričvršćeni lenjir dok mu hipotenuza ne prođe kroz tačku N. Najzad se povuče prava a koja će biti normalna na datu pravu c.

ZADACI:

1/ Pokažite horizontalne i vertikalne ravni u svojoj učionici ili sobi.

2/ Pokažite gde se u vašoj okolini mogu videti horizontalne, vertikalne i kose prave? Koje su od njih paralelne, koje normalne a koje mimoilazne?

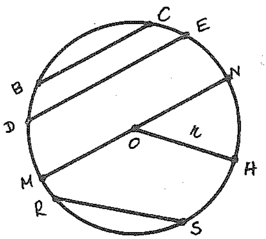
3/ Data je prava a i tačka A izvan nje. Nacrtati pravu koja prolazi kroz datu tačku a paralelna je datoj pravoj.

4/ Data je prava a, na njoj tačka A i van nje tačka B. Kroz tačke A i B nacrtati po jednu pravu, tako da su obe normalne na datu pravu a.

III G L A V A

KRUŽNICA I KRUG

Kružnica je zatvorena kriva linija čije su sve tačke podjednako udaljene od jedne utvrđene tačke koja se naziva središte ili centar kružnice. Kružnica se crta pomoću šestara. Deo ravni ograničen kružnicom naziva se krug (sl. 20).



Slika 20

Ako se bilo koja tačka kružnice spoji sa centrom dobija se duž koja se zove poluprečnik kružnice i obeležava se obično sa <u>r</u>.

Duž koja spaja bilo koje dve tačke na kružnici naziva se tetiva. Ukoliko je tetiva bliža centru, utoliko je ona veća. Najveća tetiva kružnice je ona tetiva koja prolazi kroz centar i naziva se prečnik, a obeležavamo je obično sa 2r. Na slici 20 nacrtana je kružnica, jedan poluprečnik OA = r, tri tetive BC, RS i DE i prečnik MN = 2r.

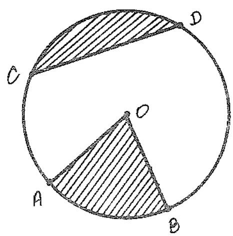
Deo kružnice između dveju tačaka kružnice je kružni luk. Na primer, deo kružnice (sl. 20) između tačaka C i N je kružni luk i obeležava se sa $\overset{\frown}{CN}$, a čita se "luk CN". Ponekad se kružni luk obeležava pomoću tri slova, na primer, $\overset{\frown}{CEN}$. Ovo se čini stoga jer je kružnica uvek dvema tačkama podeljena na dva kružna luka. Na primer, tačke C i N dele kružnicu na dva kružna luka: $\overset{\frown}{CEN}$ i $\overset{\frown}{CMN}$. Na slici 20 vidimo da većoj tetivi odgovara veći kružni luk i obratno: većem luku u istom krugu (ili krugovima jednakih poluprečnika) odgovara veća tetiva. Jednakim tetivama u istom krugu odgovaraju jednake tetive i obratno.

1. Kružni isečak, kružni odsečak i kružni prsten

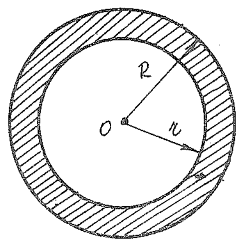
Deo kruga ograničen sa dva poluprečnika (OA i OB, sl. 21) i odgovarajućim lukom ($\widehat{AB}$ na sl. 21) naziva se kružni isečak. Ovaj luk $\widehat{AB}$ naziva se lukom kružnog isečka.

Kružni odsečak je deo kruga ograničen tetivom (CD) i odgovarajućim lukom ($\widehat{CD}$) sl. 21.

Na sl. 22 nacrtane su dve kružnice sa zajedničkim centrom O. Kružnice koje imaju zajednički centar nazivaju se koncentrične kružnice. Deo većeg kruga između dveju koncentričnih kružnica naziva se kružni prsten (sl. 22).



Slika 21

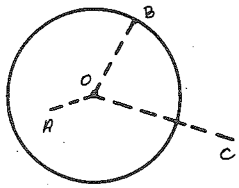


Slika 22

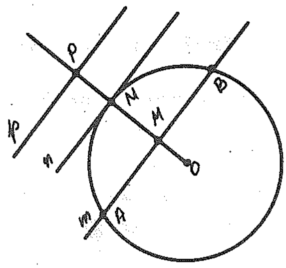
2. Položaj tačke i prave prema kružnici

Tačka se može nalaziti na kružnici, u kružnici i van kružnice (sl. 23). Rastojanje tačke od centra kružnice naziva se centralno (središno) rastojanje. Ako je tačka u kružnici, onda je njeno centralno rastojanje manje od poluprečnika ($OA < r$). Centralno rastojanje tačke koja je na kružnici jednako je poluprečniku ($OB = r$). Ako je tačka van kružnice, tada je njeno centralno rastojanje veće od poluprečnika ($OC > r$).

Prava može seći kružnicu u dve tačke, dodirivati je u jednoj tački, a može biti i izvan kružnice (sl. 24). Prava m na sl. 24, koja seče kružnicu u dve tačke



Slika 23



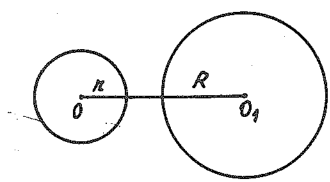
Slika 24

A i B zove se sečica, a prava n koja dodiruje kružnicu u tački N naziva se dirka ili tangenta kružnice. Prava p koja je izvan kružnice nema sa njom zajedničkih tačaka.

Na slici 24 prave m, n i p su paralelne. Ako se iz centra O povuče zajednička normala pravih m, n i p, onda su OM, ON i OP centralna rastojanja ovih pravih. Iz slike se može videti da je $OM < r$, $ON = r$ i $OP > r$. Dirka kružnice uvek je normalna na poluprečnik koji prolazi kroz dodirnu tačku.

3. Uzajamni položaj dve kružnice

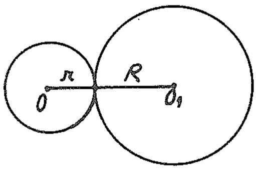
Rastojanje od centra jedne kružnice do centra druge kružnice zove se centralno ili središno rastojanje.



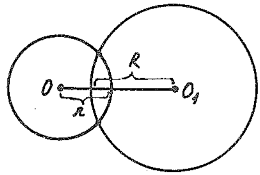
Slika 25

Dve kružnice mogu biti jedna izvan druge. Tada one nemaju zajedničkih tačaka i njihovo centralno rastojanje je veće od zbira poluprečnika, tj. $OO_1 > R + r$ (sl. 25).

Dve kružnice se mogu dodirivati spolja. Tada one imaju jednu zajedničku tačku i centralno rastojanje jednako zbiru poluprečnika, tj. $OO_1 = R + r$ (sl. 25a).



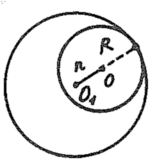
Slika 25a



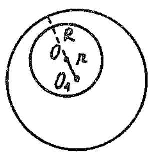
Slika 25b

Dve se kružnice mogu seći. Tada one imaju dve zajedničke tačke i centralno rastojanje je manje od zbira poluprečnika, a veće od njihove razlike, tj. $R - r < OO_1 < R+r$ (sl. 25b)

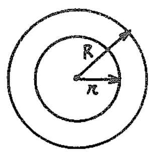
Dve se kružnice mogu dodirivati iznutra. Tada one imaju jednu zajedničku tačku a centralno rastojanje je jednako razlici poluprečnika, tj. $OO_1 = R - r$ (sl. 26).



Slika 26



Slika 27



Slika 28

Dve kružnice mogu biti jedna u drugoj sa različitim centrima. Za takve kružnice kažemo da su ekscentrične. Ekscentrične kružnice nemaju zajedničkih tačaka i njihovo centralno rastojanje je manje od razlike poluprečnika, tj. $OO_1 < R - r$ (sl. 27)

Dve kružnice mogu biti jedna u drugoj i sa zajedničkim centrom. Za takve kružnice kažemo da su koncentrične. Koncentrične kružnice nemaju zajedničkih tačaka i njihovo centralno rastojanje je nula (sl. 28).

Z A D A C I :

1/ Kakva je razlika između kružnice i kruga?

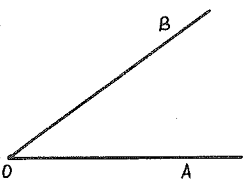
2/ Dati su poluprečnici dveju kružnica R = 3 cm i r = 2 cm. Kakav je njihov međusobni položaj ako je njihovo centralno rastojanje: a) 1 cm, b) 4 cm, c) 7 cm, d) 5 cm, e) 0,8 cm i f) 0.

IV GLAVA

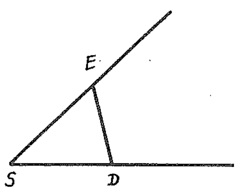
U G A O

1. Pojam ugla

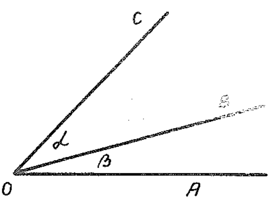
Geometrijska figura koju obrazuju dve poluprave sa zajedničkom početnom tačkom naziva se <u>ugao</u>. Ta zajednička tačka se naziva <u>teme</u> ugla, a poluprave <u>kraci</u> ugla (sl. 29). Kraci ugla dele ravan u kojoj je ugao nacrtan na dva dela - dve oblasti. Jedna oblast je <u>unutrašnja</u> a druga <u>spoljašnja</u>. Ako na kracima ugla uzmemo dve proizvoljne tačke D i E (sl. 30) i spojimo ih dobijamo duž DE. Onu oblast u kojoj leži duž DE nazivamo unutrašnjom, a ona druga je spoljašnja.



Slika 29



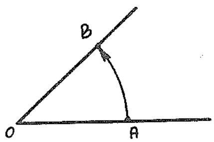
Slika 30



Slika 31

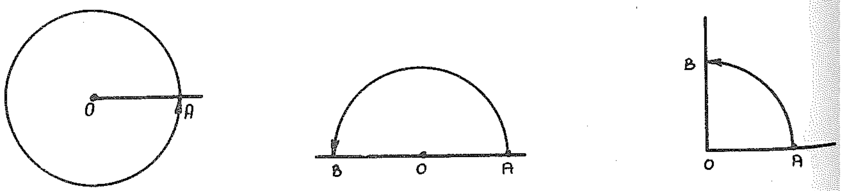
Uglove obeležavamo na nekoliko načina. Jedna od oznaka za ugao je "∡". Ovaj znak stavljamo ispred slova koje označava teme ugla. Tako, na primer, za ugao na sl. 29 pišemo ∡ O, i čitamo: ugao O. Uglove obeležavamo i pomoću tri slova. Ovo činimo onda kada je jedna tačka zajedničko teme za više uglova. U ovom slučaju slovo koje označava teme stavljamo u sredinu, a s kraja slova kojima je obeležena po jedna tačka na kracima. I u ovom slučaju služimo se istim znakom za ugao. Tako ćemo, na primer, obeležiti uglove na sl. 31: $\sphericalangle$ COB, $\sphericalangle$ BOA i $\sphericalangle$ COA. Uglove obeležavamo još i pomoću grčkih slova koja se zapisuju između krakova ugla, na primer, α i β na sl. 31. U ovom slučaju obično ne stavljamo znak za ugao.

Postanak ugla možemo zamisliti tako što se jedna poluprava obrće oko svoje početne tačke. Tako je, na primer, $\sphericalangle$ AOB na sl. 32 nastao obrtanjem poluprave OA oko temena O u smeru naznačenom strelicom do novog položaja OB.



Slika 32

Ako poluprava OA načini u smeru strelice pun obrt i dođe ponovo u svoj početni položaj dobija se <u>pun ugao</u> (sl. 33a). Ako poluprava načini polovinu punog obrtaja, tako da su tačke O, A i B na istoj pravoj liniji, dobija se opruženi ugao (sl. 33b). Ako, pak, poluprava OA dođe u položaj OC tako da stoji normalno na svoj početni položaj dobijamo <u>pravi ugao</u> (sl. 33c).



a) Pun ugao b) Opruženi ugao c) Pravi ugao

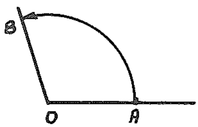
Slika 33

Pomoću ove tri vrste uglova definišemo i ostale vrste uglova:

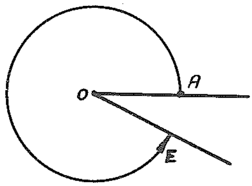
- Ugao koji je manji od pravog ugla naziva se <u>oštar ugao</u> (sl. 32).

- Ugao koji je veći od pravog ugla a manji od opruženog naziva se <u>tup ugao</u> (sl. 34a).

- Ugao koji je veći od opruženog ugla a manji od punog ugla naziva se <u>ispupčeni ugao</u> (sl. 34b).



a) Tup ugao

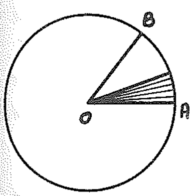


b) Ispupčen ugao

Slika 34

2. <u>Merenje uglova stepenima</u>

Ugao koga obrazuju ma koja dva poluprečnika kruga naziva se centralni ugao kruga (sl. 35). Zamislimo sada da smo puni ugao čije je teme centar kruga (sl. 35) podelili na 360 jednakih centralnih uglova. Svaki takav centralni ugao (tridesetšesti deo punog ugla) uzima se za jedinicu merenja uglova i naziva se ugaoni stepen. Stepen se označava malim kružićem koji se zapisuje desno iznad broja koji označava broj stepeni.

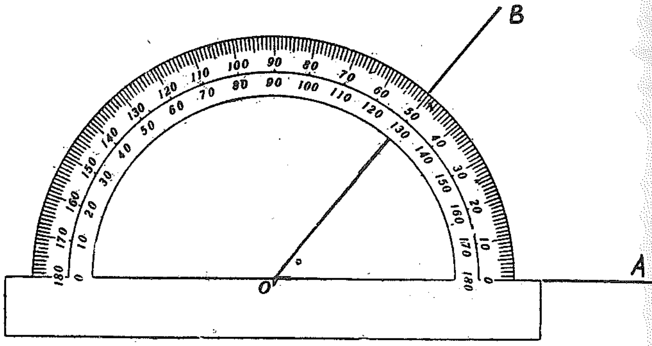


Slika 35

Na osnovu izloženog zaključujemo da puni ugao ima 360°, opruženi 180°, a prav 90°. Postoje i manje jedinice od stepena: minuti i sekunde. Minuta je šezdeseti deo stepena i obeležava se jednom crticom desno iznad broja. Sekunda je šezdeseti deo minute i obeležava se sa dve crtice desno iznad broja. Na primer, $30^\circ\ 25'\ 36''$ čitamo: 30 stepeni, 25 minuta i 36 sekundi.

Uglovi se mere uglomerom (sl. 36).

Pri merenju nekog ugla uglomer postavljamo tako da mu centar koji je označen padne u teme ugla (sl. 36), a ivi-



Slika 36

ca OA poklopi jedan krak. Drugi krak OB pokazuje na uglomeru broj stepeni. Na slici 36 nacrtani ugao ima 50°.

Z A D A C I :

1/ Nacrtati po jedan ugao od svake vrste, pa ih potom izmeriti uglomerom.

2/ Pretvoriti u minute: 2°, 35°, 145°.

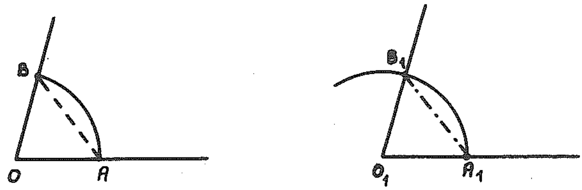
3/ Pretvoriti u sekunde: 3°, $2^\circ 35'$.

4/ U koju vrstu uglova spadaju sledeći uglovi: $\alpha = 856'84''$, $\beta = 38568''$, $\gamma = 854618''$.

3. Grafičko sabiranje i oduzimanje uglova

Ako je dat ili nacrtan ugao mi možemo konstruisati koliko god hoćemo uglova koji su njemu jednaki (podudarni). Na sl. 37 dat je ugao O. Da bi konstruisali ugao O_1 koji je jednak sa datim uglom postupamo ovako:

Iz tačke O_1 povuče se poluprava, pa se proizvoljnim otvorom šestara opišu lukovi jednakih poluprečnika oko temena O i O_1. Luk opisan oko temena O seče krake ugla O u tačkama A i B. Sada uzmemo u otvor šestara veličinu tetive AB i iz tačke A_1 opišemo luk do preseka B_1 sa ranije opisanim lukom oko temena O_1. Najzad treba povući polupravu O_1B_1 koja će predstavljati drugi krak ugla sa temenom u O_1, a koji je jednak sa uglom O. Ova konstrukcija je izvršena na os-

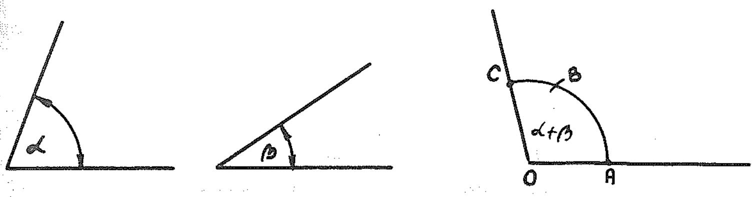


Slika 37

novu toga što u jednakim krugovima jednakim tetivama (AB = A_1B_1) odgovaraju jednaki lukovi, odnosno jednaki odgovarajući centralni uglovi.

Neka su sada dati uglovi α i β ($\alpha > \beta$) sl. 38, konstruisaćemo njihov zbir $\alpha + \beta$ i njihovu razliku $\alpha - \beta$.

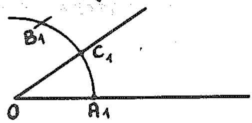
Za konstrukciju zbira datih uglova treba na proizvoljno nacrtanoj polupravoj OX preneti jedan od datih uglova, recimo α. Ovom uglu odgovara luk AB. Sada počev od tač-



Slika 38

ke B, u istom smeru, nanesemo luk BC drugog ugla β koji je opisan istim poluprečnikom. Poluprava OC predstavlja drugi krak traženog ugla $\alpha + \beta$. Pošto je množenje u stvari sabiranje jednakih sabiraka, lako možemo pomnožiti neki ugao celim brojem.

Da bismo konstruisali razliku datih uglova α i β (sl. 39), treba na proizvoljnu polupravu najpre preneti veći ugao α. Tako dobijamo luk A_1B_1. Sada počev od tačke B_1, ali u suprotnom smeru, nanesemo luk B_1C_1 manjeg datog ugla β. Poluprava O_1C_1 predstavlja drugi krak traženog ugla $\alpha - \beta$ (sl. 39).



Slika 39

ZADACI:

1/ Nacrtaj tri proizvoljna oštra ugla α, β i γ $(\alpha>\beta>\gamma)$ i konstruiši uglove:
a) $\alpha+\beta+\gamma$, b) $\alpha+\beta-\gamma$, c) $2\alpha+2\beta-3\gamma$.

2/ Nacrtaj jedan oštar ugao α i jedan tup ugao β, a potom konstruiši uglove:
a) $\alpha+\beta$, b) $\alpha-\beta$, c) 3α.

3/ Nacrtaj dva oštra ugla α i β $(\alpha<\beta)$, a potom konstruiši uglove:
a) $2\alpha+\beta$, b) $4\beta-3\alpha$.

4/ Dati su uglovi $\alpha = 85^\circ 52'$ i $\beta = 34^\circ 26' 36''$. Izračunati $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, 3β,

5/ Dati su uglovi $\alpha = 83^\circ\ 45'$ i $\beta = 25^\circ\ 32' 47''$. Izračunati $\alpha + 2\beta$, $2\alpha - 3\beta$, $\alpha : 5$, $\frac{2\beta}{3}$.

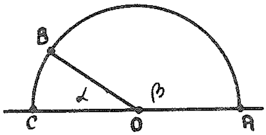
5. Komplementni i suplementni uglovi. Uporedni i unakrsni uglovi. Transverzalni uglovi

Komplementni uglovi. Za dva ugla čiji je zbir 90° kažemo da su komplementni. Tako su, na primer, uglovi od 35° i 55° komplementni.

Suplementni uglovi. Za dva ugla čiji je zbir 180° kažemo da su suplementni. Tako su uglovi $\alpha = 120^\circ$ i $\beta = 60^\circ$

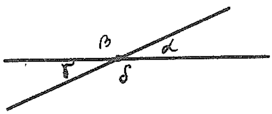
suplementni.

<u>Uporedni uglovi</u>. Dva ugla koji imaju zajedničko teme i jedan zajednički krak, a drugi kraci su poluprave iste prave, nazivaju se <u>uporedni uglovi</u> (sl. 40). Očigledno je da su uporedni uglovi suplementni, jer je $\alpha + \beta = 180^\circ$ (sl. 42).



Slika 40

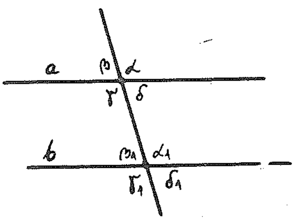
<u>Unakrsni uglovi</u>. Dve prave koje se seku obrazuju dva para u n a k r s n i h u g l o v a. Na sl. 41 jedan par unakrsnih uglova je α i γ, a drugi par β i δ.



Slika 41

Dokazaćemo sada da su unakrsni uglovi jednaki. Uglovi α i β su dva uporedna ugla, pa su i suplementni, tj. $\alpha + \beta = 180^\circ$. S druge strane su i uglovi γ i β dva uporedna ugla, pa i suplementni, tj. $\gamma + \beta = 180^\circ$. Iz ovih dveju relacija zaključujemo da su i uglovi α i γ jednaki. Na sličan način se može pokazati i da je $\beta = \delta$.

<u>Transverzalni uglovi</u>. Ako se dve prave preseku trećom, tada dobijamo tri vrste transverzalnih uglova: saglasni, naizmenični i suprotni. Za nas su od interesa uglovi koji se dobijaju presecanjem dveju paralelnih pravih trećom pravom (transverzalom). Na sl. 42 nacrtane su dve paralelne prave <u>a</u> i <u>b</u> i transverzala <u>c</u>. Uglovi α, β, γ i δ imaju zajedničko teme M, a uglovi α_1, β_1, γ_1 i δ_1 zajedničko teme N. Uglovi β, γ, β_1 i γ_1 nalaze se sa



Slika 42

jedne strane transverzale, a ostala četiri sa druge strane transverzale. Uglovi γ, β, β_1 i α_1 nalaze se između paralelnih pravih i nazivamo ih unutrašnjim uglovima. Uglove, pak, koji su izvan ovih paralelnih nazivamo spoljašnjim.

<u>Saglasni uglovi</u> su jedan spoljašnji i jedan unutrašnji ugao sa iste strane transverzale i sa raznim temenima (α i α_1, β i β_1, γ i γ_1 i δ i δ_1).

Pravu <u>a</u> možemo translatorno pomeriti (paralelnu samoj sebi) tako da tačka M padne u tačku N. Tada će se i prave <u>a</u> i <u>b</u> poklopiti, a kako su drugi kraci uglova α i α_1 na istoj pravoj <u>c</u>, to znači da smo mogli i ceo ugao α translatornim pomeranjem dovesti do poklapanja sa uglom α_1. Na ovaj način smo pokazali da su saglasni uglovi α i α_1 jednaki, tj. $\alpha = \alpha_1$. Isto tako su i ostali saglasni uglovi jednaki.

<u>Naizmenični uglovi</u> su dva unutrašnja ili dva spoljašnja ugla sa raznih strana transverzale i sa raznim temenima (δ i β_1, γ i α_1, α i γ_1 i β i δ_1). Naizmenični uglovi su jednaki. Ovo ćemo dokazati za uglove δ i β_1:

$\beta = \delta$ kao unakrsni uglovi

$\beta = \beta_1$ kao saglasni uglovi.

Kako su leve strane gornjih jednakosti jednake, to i desne strane moraju biti jednake, tj. $\delta = \beta_1$.

<u>Suprotni uglovi</u> su dva spoljašnja ili dva unutrašnja ugla sa iste strane transverzale i sa raznim temenima. (β i γ_1, α i δ_1 i δ i α_1).

Suprotni uglovi su suplementni, tj. $\beta + \gamma_1 = 180^\circ$, $\alpha + \delta_1 = 180^\circ$, $\gamma + \beta_1 = 180^\circ$ i $\delta + \alpha_1 = 180^\circ$. Dokazaćemo prvu od ovih relacija: kako su uglovi β i γ dva uporedna ugla (sl. 42), to je:

$\beta + \gamma = 180^\circ$, dalje je

$\gamma = \gamma_1$ (kao saglasni uglovi).

Ako sad u prvoj jednakosti stavimo γ_1 umesto γ, dobijamo $\beta + \gamma_1 = 180^\circ$.

Z A D A C I :

1/ Dat je ugao $\alpha = 83^\circ\ 25'42''$. Naći njegov komplementan i njegov suplementan ugao.

2/ Dat je ugao $\alpha = 54^\circ\ 25''$. Naći njegov komplementan i njegov suplementan ugao.

3/ Da li se za svaki dati oštar ugao može izračunati njegov komplementan i suplementan ugao? A za tup ugao? Zašto?

4/ Jedan ugao između dve prave koje se seku je 40°. Izračunati ostale uglove.

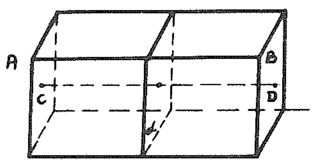
V GLAVA

S I M E T R I J A

1. Pojam simetrije

Postoje tri vrste simetrije: simetrija u odnosu na ravan, simetrija u odnosu na pravu (osu) i simetrija u odnosu na tačku.

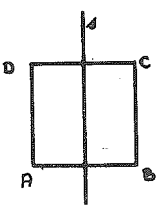
Na slici 43. nacrtan je kvadar koji je ravni α podeljen na dva jednaka dela. Svakoj tački sa jedne strane ove ravni odgovara po jedna tačka sa druge strane ravni (tački A odgovara B, a tački C tačka D itd.). Za kvadar u ovom slučaju kažemo da je simetričan u odnosu na ravan simetrije α. Međutim, ova ravan simetrije nije jedina za kvadar na sl. 43 (koje su druge?).



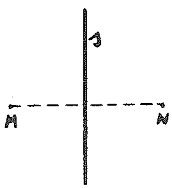
Slika 43

Za valjak je svaka ravan koja prolazi kroz osu valjka ravan simetrije, a svaka ravan koja prolazi kroz centar lopte je ravan simetrije za loptu itd.

Razne figure mogu biti simetrične u odnosu na osu. Na sl. 44. nacrtan je kvadrat i jedna njegova osa simetrije (on ih ima ukupno 4). Ako bi se ovaj kvadrat presavio po osi simetrije, njegova leva strana bi se poklopila sa desnom (tačka A bi se poklopila sa B, a tačka D sa C).



Slika 44

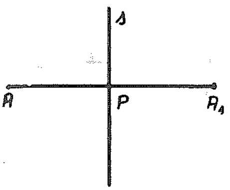


Slika 45

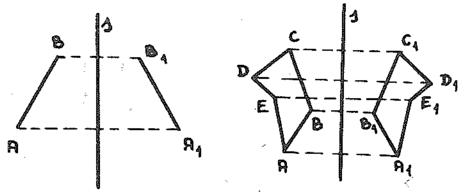
Uopšte, za tačke M i N kaže se da su simetrične u odnosu na osu s (sl. 45) ako su podjednako udaljene od ose i ako je duž koja ih spaja normalna na osi ($MN \perp s$).

Sada možemo rešiti sledeći zadatak: konstruisati simetričnu tačku za datu tačku A u odnosu na datu osu s.

Najpre treba nacrtati normalu AP (sl. 46) iz date tačke na datu osu i produžiti je sa druge strane ose za dužinu $PA_1 = AP$. Tako dobijena tačka A_1 je simetrična sa tačkom A u odnosu na osu s. Na sličan način se crtaju i simetrične duži ili bilo kakve figure u odnosu na osu (sl. 47).



Slika 46

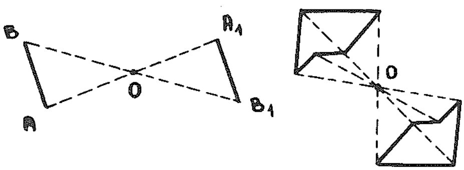


Slika 47

Ako bismo crteže sa sl. 47 presavili po osama, tada bi se simetrične duži i čitave figure poklopile. Odavde se izvodi zaključak da su simetrične duži jednake.

Za dve tačke P i Q kažemo da su simetrične u odnosu na centar simetrije O (sl. 48) ako sve tri tačke leže na istoj pravoj i ako je PO = OQ.

Slika 48

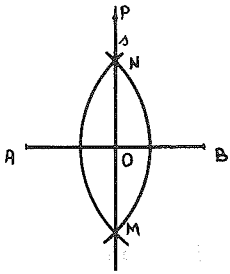


Slika 49

Na sl. 49 nacrtane su simetrične duži i bilo kakva figura u odnosu na centar simetrije O.

2. Simetrala duži

Konstruisati simetralu date duži znači u stvari konstruisati osu simetrije za datu duž. Konstrukcija simetrale duži se izvodi ovako: Otvorom šestara (većim od polovine date duži) opišu se kružni lukovi iz obeju krajnjih tačaka date duži. Prava koja prolazi kroz preseke (M i N) ovih lukova je simetrala duži AB (sl. 50).



Slika 50

Pored toga što simetrala duži polovi duž i stoji normalno na njoj, ona ima još jednu važnu osobinu: svaka tačka na simetrali duži podjednako je udaljena od krajeva duži. Npr. tačka P je podjednako udaljena od tačaka A i B (sl. 50). Ova činjenica je posledica toga što su duži AP i BP (koje radi preglednosti slike nisu izvučene) simetrične u odnosu na osu simetrije s.

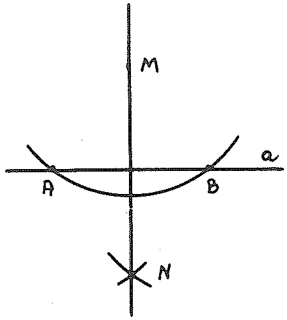
Pomoću simetrale duži rešićemo nekoliko važnih zadataka:

1. Datu duž podeliti na 2, 4, 8, 16 itd. jednakih delova. Ako za datu duž AB (sl. 50) konstruišemo simetralu, tada je tačkom O duž AB podeljena na dva jednaka dela (AO = = OB). Ako sada za duži AO i BO konstruišemo simetrale, tada će duž AB ovim simetralama i tačkama O biti podeljena na 4 jednaka dela itd.

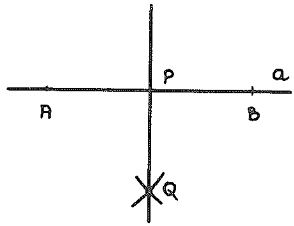
2. Iz date tačke M konstruisati normalu na datu pravu a. Iz date tačke M treba šestarom opisati luk tako da datu pravu seče u dvema tačkama A i B (sl. 51). Zatim za duž AB treba konstruisati simetralu i to samo pomoću tačke N, jer drugu tačku M već imamo. Prava MN je tražena normala.

3. Iz date tačke (P) na datoj pravoj (a) konstruisati normalu.

Na pravoj a nacrtamo istim proizvoljnim otvorom



Slika 51

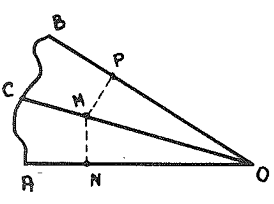


Slika 52

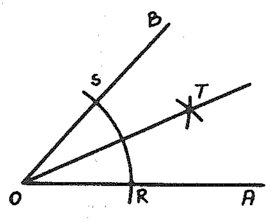
šestara, levo i desno od tačke P, tačke A i B. Zatim konstruišemo simetralu duži AB i to samo pomoću jedne tačke (Q), jer drugu tačku (P) već imamo. Simetrala PQ je tražena normala (sl. 52).

3. Simetrala ugla

Ako od hartije ili kartona isečemo model ugla AOB (sl.53) i presavijemo ga tako da se kraci OA i OB poklope, tada poluprava OC duž koje smo ga presavili, deli ugao na dva jednaka ugla. Poluprava OC se zove simetrala ugla.



Slika 53



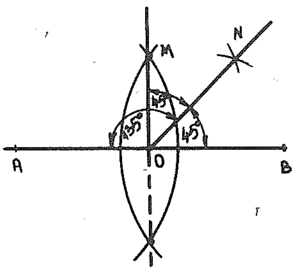
Slika 54

Simetrala ugla se konstruiše ovako: proizvoljnim otvorom šestara opiše se luk oko temena O (sl. 54). Neka on seče krake u R i S, sa kracima ugla OA i OB. Zatim se u oblasti ugla istim (ili drugim) otvorom šestara opišu lukovi iz tačaka R i S. Presek ovih lukova (T) i teme O određuju simetralu ugla (OT).

Pored toga što simetrala ugla deli ugao na dva jednaka dela, ona ima još jednu važnu osobinu: svaka tačka na simetrali ugla podjednako je udaljena od krakova ugla. U ispravnost ovog tvrđenja možemo se za sada uveriti merenjem dužina normala MN i MP na sl. 53.

4. Konstrukcije uglova od 90°, 45°, 135°, 60° i 30°

Ugao od 90° može se konstruisati tako što se konstruiše simetrala proizvoljne duži (sl. 55). Tada je $\sphericalangle MOB = \sphericalangle MOA = 90^\circ$.

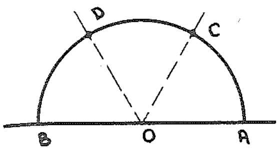


Slika 55

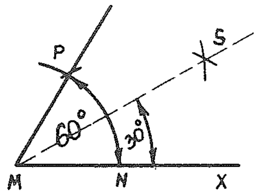
Ugao od 45° se može konstruisati tako što se za prav ugao konstruiše simetrala ON (sl. 55). Tada je $\sphericalangle NOB = \sphericalangle NOM = 45^\circ$.

Kako je $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, ugao od 135° se može konstruisati tako što se od opruženog ugla AOB (sl. 55) oduzme $\sphericalangle BON = 45^\circ$. Prema tome konstrukcija je ista kao na sl. 55, tj. $\sphericalangle AON = 135^\circ$.

Na sl. 56 nacrtan je opruženi ugao sa temenom u tački O. Proizvoljnim otvorom šestara oko tačke O opisana je polukružnica koja seče krake ravnog ugla u tačkama A i B. Ako sada otvorom šestara dužine OA prenesemo redom lukove $\widehat{AC}$, $\widehat{CD}$ i $\widehat{DB}$, videćemo da je na taj način polukružnica podeljena na tri jednaka luka. Prema tome je i centralni ugao od 180° podeljen na tri jednaka ugla od po 60°. Znači, ugao od 60° možemo ovako kraće konstruisati: oko tačke M proizvoljne poluprave (MX) opiše se luk koji seče ovu polupravu u tački N. Sada se oko N opiše luk (istim otvorom šestara MN) do



Slika 56



Slika 57

do preseka P sa prvim lukom (sl. 57). Tada je $\measuredangle$ PMX = 60°.

Na sl. 57 je konstruisana simetrala za PMX = 60° i tako je dobijen ugao od 30°, tj. $\measuredangle$PMS = $\measuredangle$SMX = 30°.

Z A D A C I :

1/ Nacrtaj proizvoljnu duž a i potom konstruiši duži: $\frac{a}{2}$, $\frac{3}{4}a$ i $\frac{3}{2}a$.

2/ Date su dve prave a i b koje se seku i tačka M van ovih pravih. Konstruisati normale iz tačke M na obe prave.

3/ Date su dve prave m i n koje se seku u tački N. U tački N konstruiši normale na obe prave.

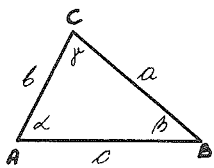
4/ Konstruisati uglove od: 15°, 7° 30′, 22° 30′, 75°, 150° i 225°.

VI GLAVA

TROUGAO

1. Pojam, elementi i vrste trouglova

Na sl. 2. nacrtana je piramida. Tada smo videli da piramida ima jednu osnovnu i više bočnih strana. Geometrijska figura (slika) koja ima oblik jedne bočne strane piramide naziva se trougao. Tri duži koje obrazuju trougao zovu se stranice trougla, a tačke u kojima se sastaju po dve stranice su temena trougla. Stranice trougla obrazuju tri ugla trougla. Na sl. 58 nacrtan je jedan trougao. Trougao obeležavamo tako što njegova temena obeležimo velikim slovima.



Slika 58

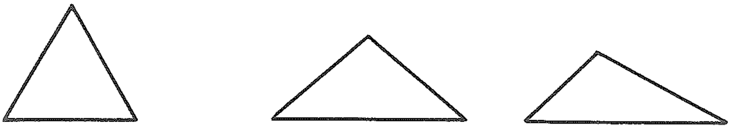
Stranice trougla obeležavamo malim slovima latinice, i to tako da stranicu koja je naspram temena A obeležavamo sa a, naspram temena B sa b i stranicu naspram temena C sa c. Ugao kod temena A obeležavamo sa α, ugao kod temena B sa β, a kod temena C sa γ.

Stranice i uglovi trougla su elementi trougla.

Trouglove delimo prema stranicama i prema uglovima. Prema stranicama trouglovi mogu biti:

- jednakostranični (ravnostrani) kada su sve tri stranice jednake (sl. 59a);
- jednakokraki (ravnokraki) kada su dve stranice jednake. Ove dve stranice nazivaju se kracima trougla, a treća stranica je osnovica (sl. 59b);
- raznostranični (raznostrani) kada su sve tri stranice različite (sl. 59c).

a) b) c)

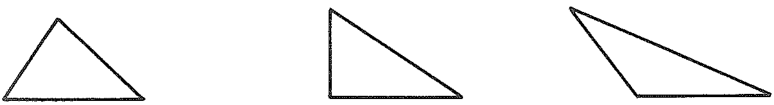


Slika 59

Prema uglovima trouglovi mogu biti:

- <u>oštrougli</u>, kada su sva tri ugla oštra (sl.60a),
- <u>pravougli</u>, kada je jedan ugao prav (sl. 60b). Stranice koje grade prav ugao zovu se katete, a stranica koja je naspram pravog ugla-hipotenuza;
- <u>tupougli</u>, kada je jedan ugao tup (sl. 60c).

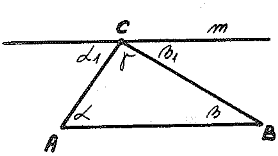
a) b) c)



Slika 60

2. <u>Unutrašnji i spoljašnji uglovi trougla</u>

a/ <u>Zbir unutrašnjih uglova trougla iznosi 180°</u>.



Slika 61

Da bismo ovo dokazali povucimo kroz teme C pravu <u>m</u> paralelnu sa stranicom AB (sl. 61). Prava <u>m</u> gradi ugao α_1 sa stranicom AC, a sa stranicom BC ugao β_1. Uglovi α_1, γ i β čine opruženi ugao, tj.:

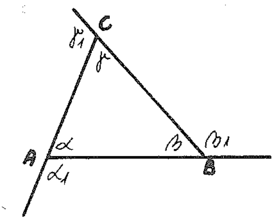
$$\alpha_1 + \gamma + \beta_1 = 180^\circ.$$

Ako u ovoj jednakosti stavimo α umesto α_1 i β umesto β_1, jer je $\alpha = \alpha_1$ i $\beta = \beta_1$ kao naizmenični uglovi ($\underline{m} \parallel AB$), dobijamo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

b/ <u>Zbir spoljašnjih uglova trougla iznosi 360°</u>.

Ako se stranice trougla ABC (sl. 62) produže, tada se uglovi α_1, β_1 i γ_1 nazivaju spoljašnjim uglovima trougla. Uglovi α i α_1 su uporedni. Isto tako su uporedni i uglovi β i β_1, kao i γ i γ_1, pa je:

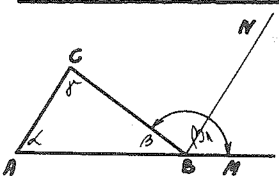


Slika 62

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$$
$$\beta + \beta_1 = 180^\circ$$
$$\gamma + \gamma_1 = 180^\circ.$$

Prema tome, zbir svih spoljašnjih i svih unutrašnjih uglova iznosi $3 \cdot 180^\circ$, tj. $\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 + \gamma + \gamma_1 = 3 \cdot 180^\circ$. Međutim, kako je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, to je $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

c/ <u>Svaki spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva unutrašnja ugla koji sa njim nemaju zajedničko teme</u>.



Slika 63

Ako produžimo stranicu trougla AB preko B (sl. 63), onda je $\sphericalangle MBC = \beta_1$ jedan spoljašnji ugao trougla.

Kako je: $\beta_1 + \beta = 180^\circ$ i

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

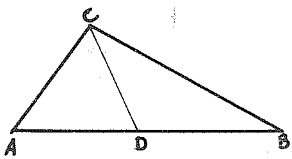
Imamo: $\beta_1 = \alpha + \gamma$

za druga dva spoljašnja ugla i biće:

$$\alpha_1 = \beta + \gamma$$
$$\gamma_1 = \alpha + \beta.$$

3. Odnos izmedju stranica i uglova trougla i odnos stranica trougla

a/ Naspram veće stranice u trouglu je veći ugao.

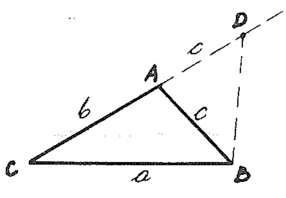


Slika 64

Neka je u trouglu ABC (sl. 64) AB > AC, treba dokazati da je $\sphericalangle$ACB > $\sphericalangle$ ABC.

Prenesimo AD = AC na veću stranicu,pa će biti $\sphericalangle$ACD = $\sphericalangle$ADC i $\sphericalangle$ ADC > $\sphericalangle$ ABC (ugao ADC je spoljašnji ugao trougla BCD). Kako je $\sphericalangle$ACB > $\sphericalangle$ACD, to je i $\sphericalangle$ ACB > $\sphericalangle$ ABC.

b/ Svaka stranica trougla manja je od zbira, a veća od razlike druge dve stranice.



Slika 65

Neka je,na primer, a > b > c (sl. 65). Prenesimo AD = AB na produžetak stranice CA. Tada je $\sphericalangle$CDB > $\sphericalangle$ABD a $\sphericalangle$CBD > $\sphericalangle$ABD, pa je i $\sphericalangle$CBD > $\sphericalangle$CDB. Na osnovu prethodne teoreme u trouglu BCD će naspram manjeg ugla CDB biti manja stranica nego naspram većeg ugla CBD, tj. a < b + + c. Oduzimanjem b ili c od obe strane ove nejednakosti dobija se:

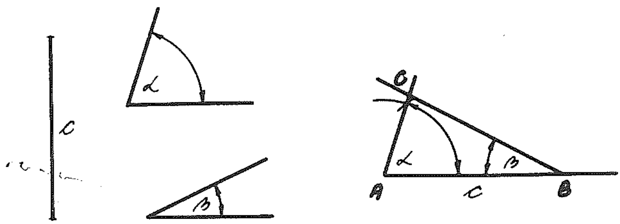
$$a - b < c, \qquad a - c < b.$$

4. Osnovne konstrukcije trougla

Konstruisati trougao znači nacrtati trougao pomoću pribora za crtanje (šestar, trougao i lenjir). Trougao se može uvek konstruisati ako su data tri njegova elementa (ima ih svega šest: tri stranice i tri ugla), izuzimajući slučaj kad su data sva tri ugla jer je tada trougao neodređen. Rešićemo tri osnovna konstruktivna zadatka:

(1) Konstruisati trougao kad je poznata jedna stranica i na njoj dva nalegla ugla.

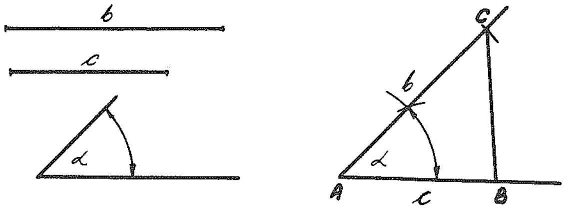
Neka je data stranica c i uglovi α i β (sl. 66). Na jednu polupravu, počev od njenog početka A, prenesemo datu stranicu c = AB. Zatim kod temena A prenesemo dati ugao α, a kod temena B drugi dati ugao β, kako je učinjeno na sl. 66. Drugi kraci ovih uglova seku se u tački C koja predstavlja treće teme trougla ABC.



Slika 66

(2) Konstruisati trougao ako su poznate dve stranice i njima zahvaćeni ugao.

Neka je dat ugao α i stranice b i c (sl. 67). Na proizvoljno mesto prenesemo dati ugao α i na jedan njegov krak, počev od temena A, prenesemo stranicu b = AC, a na drugi stranicu c = AB. Najzad spojimo B i O i tako dobijemo traženi trougao ABC.

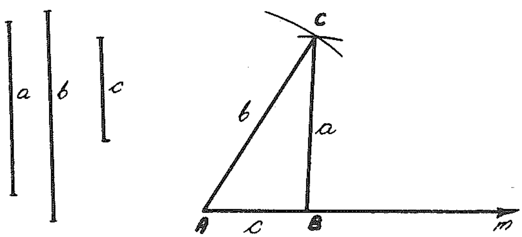


Slika 67

(3) Konstruisati trougao ako su date sve tri stranice.

Neka su date stranice a, b i c (stranice treba nacrtati tako da je zbir bilo koje dve uvek veći od treće ili razlika bilo koje dve uvek manja od treće).

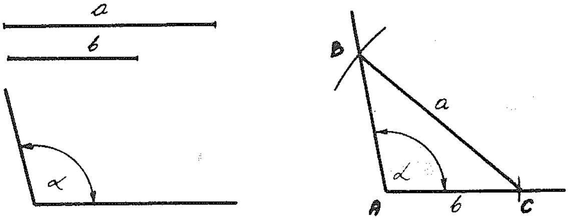
Na jednu polupravu m prenese se jedna od datih stranica, na primer, AB = c (sl. 68). Zatim oko tačke A opiše se kružni luk poluprečnika druge date stranice b, a oko tačke B kružni luk poluprečnika treće stranice a. Presek ovih lukova određuje treće teme C traženog trougla ABC.



Slika 68

(4) Konstruisati trougao ako su date dve stranice i ugao naspram veće od njih.

Neka su date stranice a i b i ugao α naspram veće stranice. Da bi se konstruisao traženi trougao treba nacrtati ugao α, zatim počev od temena A (sl. 69) na jedan krak preneti stranicu $b = AC$. Najzad se iz tačke C kao centra opiše kružni luk čiji je poluprečnik data stranica a u preseku ovog luka sa drugim krakom ugla α dobija se treće teme B traženog trougla ABC.



Slika 69

5. Podudarnost trouglova

Za dva trougla ABC i $A_1B_1C_1$ (sl. 70) kažemo da su podudarni ako se pomeranjem mogu dovesti do poklapanja. U tom slučaju su sva tri ugla jednog trougla jednaka odgovarajućim uglovima drugog trougla i sve tri stranice jednoga jednake su odgovarajućim stranicama drugog trougla:

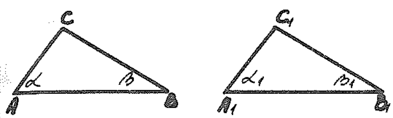
$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1; \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1 \quad \text{i}$$

$$\gamma = \gamma_1.$$

Slika 70

Podudarnost trouglova obeležavamo ovako: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. Medutim, na utvrdivanje podudarnosti dva trougla dovoljno je da utvrdimo jednakost triju elemenata od kojih nisu sva tri uglovi. Postoje četiri pravila (stava) o podudarnosti trouglova:

a) <u>Dva su trougla podudarna ako imaju jednaku po jednu stranicu i po dva nalegla ugla.</u>



Slika 71

Neka je u trouglima ABC i $A_1B_1C_1$; $AB = A_1B_1$, $\alpha = \alpha_1$ i $\beta = \beta_1$ (sl. 71). Ako izvršimo pomeranje trougla $A_1B_1C_1$ tako da poklopimo stranice A_1B_1 i AB teme A_1 će pasti na teme A, a teme B_1 na teme B jer je $AB = A_1B_1$. No kako je ugao α_1 jednak sa uglom α, kraci A_1C_1 i AC će se poklopiti. Isto tako će se poklopiti i kraci B_1C_1 i BC jer je $\beta_1 = \beta$. Prema tome, moraju se poklopiti i treća temena C_1 i C. Dakle, sva tri temena trougla $A_1B_1C_1$ poklapaju se sa temenima trougla ABC. Odavde sledi zaključak: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$.

b) <u>Dva su trougla podudarna ako imaju jednake po dve stranice i njima zahvaćene uglove.</u>

Neka je u trouglima ABC i $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ i $\alpha = \alpha_1$ (sl. 71). Trougao $A_1B_1C_1$ možemo pomeriti tako da se teme A_1 poklopi sa temenom A i da se kraci uglova α_1 i α poklope jer su uglovi α i α_1 jednaki. Kako je $A_1B_1 = AB$, poklopiće se i temena B_1 i B. Isto tako će se poklopiti i temena C i C_1 jer $A_1C_1 = AC$. Pošto se sva tri temena trougla $A_1B_1C_1$ poklapaju sa odgovarajućim temenima trougla ABC, to je:

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$$

Navešćemo još dva stava podudarnosti:

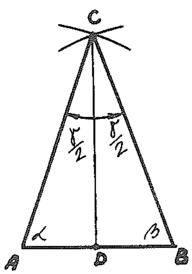
c) <u>Dva su trougla podudarna ako imaju po dve stranice i jednake uglove naspram većih stranica.</u>

d) <u>Dva su trougla podudarna ako su sve tri stranice jednoga trougla jednake odgovarajućim stranicama drugog trougla</u>

Za podudarnost pravouglih trouglova dovoljna su po dva podatka iz ovih stavova, jer je treći podatak u stvari unapred dat (svi pravougli trouglovi imaju po jedan ugao od 90°). Za podudarnost jednokrakih trouglova isto tako su dovoljna dva podatka, a za podudarnost jednakostraničnih trouglova dovoljna je jednakost po jedne stranice.

Pravila podudarnosti trouglova imaju veliku primenu u rešavanju raznih zadataka i dokazivanju raznih pravila u geometriji.

Primenom podudarnosti trouglova dokazaćemo da su <u>uglovi na osnovici jednakokrakog trougla jednaki.</u>



Slika 72

Neka je dat jednakokraki trougao ABC sa osnovicom AB i kracima AC = BC (sl. 72). Povucimo simetriju ugla γ. Ona seče osnovicu AB u tački D. Dobili smo dva trougla: $\triangle$ ADC i $\triangle$ BCD. Ova dva trougla imaju jednaka sledeća tri elementa:

AC = BC (kraci trougla ABC).

CD = CD (zajedničke stranice),

$\measuredangle ACD = \measuredangle BCD = \frac{\gamma}{2}$.

Dakle, prema drugom stavu podudarnosti trouglova, ova dva trougla su podudarna, tj.:

$\triangle ADC \cong \triangle BCD$.

Pošto su trouglovi podudarni, jednaki su i odgovarajući uglovi (naspram zajedničke stranice CD), tj.:

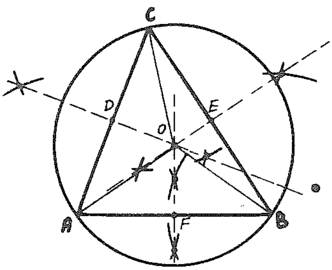
$\alpha = \beta$.

6. Značajne tačke trougla

Značajne tačke trougla su: centar opisane kružnice, centar upisane kružnice, težište i ortocentar.

(1) Centar opisane kružnice trougla

Centar opisane kružnice trougla je tačka u kojoj se seku sve tri simetrale trouglovih stranica. Na sl. 73 to je tačka O. Dokazaćemo da su duži AO, BO i CO jednake, odnosno da predstavljaju poluprečnike opisane kružnice.



Slika 73

$\triangle AOD \cong \triangle COD$, jer je:

OD = OD (zajednička kateta)

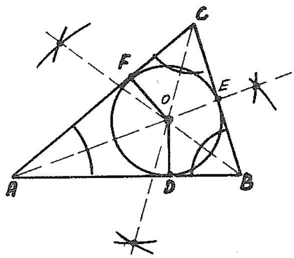
AD = CD (jer simetrale polove stranicu AC)

$\measuredangle ADO = \measuredangle CDO = 90^\circ$ (jer je simetrala normalna na stranicu AC). Prema tome su i treće stranice trouglova AOD i COD jednake, tj. AO = CO. Na sličan način se iz podudarnosti trouglova BOE i COE zaključuje da je BO = CO, a iz AO = CO i BO = CO sleduje:

AO = BO = CO.

(2) <u>Centar upisane kružnice trougla</u>

<u>Centar upisane kružnice je tačka u kojoj se seku sve tri simetrale uglova trougla</u>. Na sl. 74 to je tačka O.



Slika 74

Neka krug sa centrom u tački O dodiruje stranice trougla ABC u tačkama D, E i F. Dokazaćemo da su duži OE, OF i OD jednake, odnosno da predstavljaju poluprečnike upisane kružnice.

Trouglovi ADO i AFO imaju zajedničku stranicu AO, zatim je ugao DAO jednak uglu FAO jer je AO simetrala ugla A. Osim toga to su pravougli trouglovi jer poluprečnik i tangenta stoje normalno u dodirnoj tački, tj. $OD \perp AB$ i $OF \perp AC$. Stoga je $\triangle ADO \cong \triangle AFO$, a odavde sleduje: $OD = OF$.

Slično, posmatrajući $\triangle BOD$ i $\triangle BOE$ imamo:

$BO = BO$, $\measuredangle OBD = \measuredangle OBE$ i $\measuredangle ODB = \measuredangle OEB = 90^\circ$, tj.

$\triangle BOD \cong \triangle BOE$ pa je $OD = OE$.

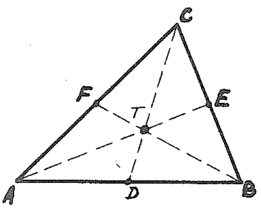
Iz $OD = OF$ i $OD = OE$ zaključujemo:

$\underline{OD = OE = OF}$.

(3) <u>Težište trougla</u>

<u>Težišna linija trougla</u> je duž koja spaja teme sa sredinom suprotne strane. Trougao ima tri težišne linije. Tačke u kojoj se seku sve tri težišne linije zove se <u>težište</u>. Na sl. 75 to je tačka T. Svaka od težišnih linija je težištem T podeljena na dva dela koji stoje u odnosu 2:1 računajući od temena. To znači da je, na primer:

$$AT : TE = 2 : 1.$$



Slika 75

Znači, odstojanje od temena do težišta iznosi $\frac{2}{3}$ odgovarajuće težišne linije, a od težišta do sredine suprotne stranice $\frac{1}{3}$ iste težišne linije, tj.

$AT = \frac{2}{3} AE$ i $TE = \frac{1}{3} AE$

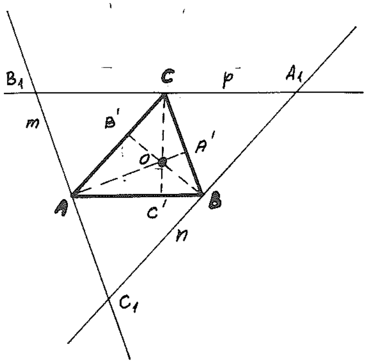
$BT = \frac{2}{3} BF$ i $TF = \frac{1}{3} BF$

$CT = \frac{2}{3} CD$ i $TD = \frac{1}{3} CD$.

(4) Ortocentar

Visina trougla je normala spuštena od temena trougla na suprotnu stranicu. Svaki trougao, prema tome, ima tri visine. Sve tri visine trougla seku se u jednoj tački koja se zove ortocentar.

Na sl. 76 nacrtan je trougao ABC i povučene su njegove visine AA', BB' i CC'. Zatim se kroz temena trougla ABC povučene prave m, n i p paralelne naspramnim stranicama i tako se dobija trougao $A_1B_1C_1$. Dokazaćemo najpre da su visine trougla ABC simetrale stranica trougla $A_1B_1C_1$. Na primer, za visinu AA' imamo: $AA' \perp BC$ a kako je $m \parallel BC$, to je $AA' \perp m$. Četvorougli AC_1BC i $ABCB_1$ su paralelogrami (zašto?), pa je $AC_1 = BC_1$ i $AB_1 = BC$, a odavde imamo: $AC_1 = AB_1$. Na osnovu: $AC_1 = AB_1$ i $AA' \perp m$ zaključujemo da je visina AA' trougla ABC simetrala stranice B_1C_1 trougla $A_1B_1C_1$. Na sli-



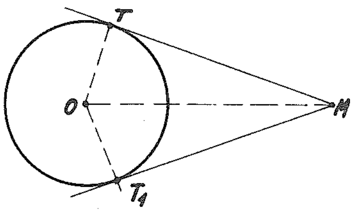
Slika 76

čan način se može ovo dokazati i za druge dve visine BB′ i CC′. Prema tome, visine datog trougla su simetrale stranica drugog trougla i kao takve seku se u jednoj tački.

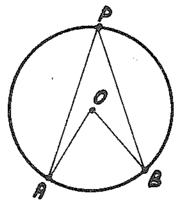
7. Tangente kruga. Odnos centralnog i periferijskog ugla

Odsečak tangente kruga od spoljašnje tačke do dodirne tačke zove se tangentna duž. Dokazaćemo da su tangentne duži povučene iz spoljašnje tačke do kruga jednake. Na sl. 77 povučene su tangentne duži MT_1 i MT na krug sa centrom u tački O. Trouglovi MOT i MOT_1 su podudarni (dokaži), pa je otuda

$$MT = MT_1.$$



Slika 77

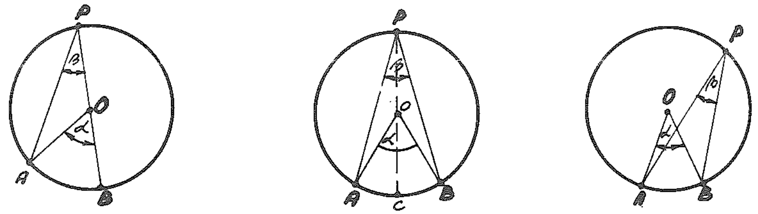


Slika 78

Ugao čiji su kraci dva poluprečnika a teme centar kruga zove se centralni ugao (sl. 78). Ovom uglu odgovara luk $\overset{\frown}{AB}$. Ugao čije se teme nalazi na kružnici a kraci su mu dve tetive zove se periferijski ugao. Tako je ugao APB periferijski ugao nad lukom AB koji odgovara centralnom uglu AOB (sl. 78).

Dokazaćemo sada sledeću teoremu: <u>periferijski ugao jednak je polovini centralnog ugla nad istim lukom</u>.

Na slici 79a nacrtan je centralni ugao α i periferijski ugao β tako da je jedan krak periferijskog ugla prečnik PB.



a) b) c)

Slika 79

Trougao AOP je jednakokraki (AO = PO su poluprečnici), pa je i $\measuredangle$ OAP = β (uglovi na osnovici jednakokrakog trougla). Kako je ugao α spoljašnji ugao trougla OAP, to je $\alpha = 2\beta$ ili $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Ovim je teorema dokazana. Ako periferijski ugao obuhvata ili ne obuhvata centar kruga, takođe je teorema u važnosti. Na primer, na sl. 79b najpre treba povući prečnik PC koji deli periferijski ugao APB na dva druga periferijska ugla APC i BPC za koje važi navedena osobina, jer oba odgovaraju prvom slučaju, tj.

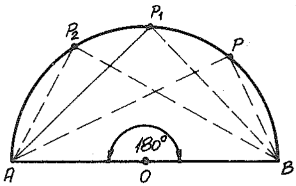
$\measuredangle$ AOC = 2 $\cdot$ $\measuredangle$ APB i $\measuredangle$ BOC = 2 $\cdot$ $\measuredangle$ BPC. Sabiranjem poslednjih jednakosti dobijamo:

$$\measuredangle AOB = 2 \cdot \measuredangle APB \quad \text{ili} \quad \alpha = 2\beta \quad \text{ili} \quad \beta = \frac{\alpha}{2}.$$

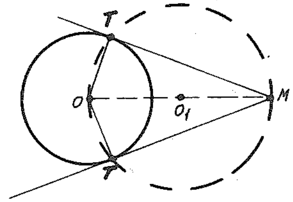
Kao posledicu ove teoreme imamo: periferijski uglovi konstruisani nad prečnikom su pravi, jer svakom od njih odgovara centralni ugao od 180° (sl. 80).

Na osnovu ove osobine moguće je rešiti i sledeći zadatak: iz tačke van kruga konstruisati tangentu na dati krug. Neka je dat krug sa centrom u tački O i tačka M iz koje treba konstruisati tangentu (sl. 81).

Dodirne tačke T i T_1 dobijamo u preseku date kružnice i kružnice čiji je centar tačka O_1 – sredina rastojanja



Slika 80

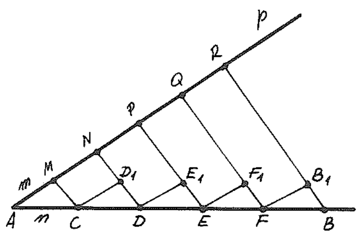


Slika 81

OM. Tada su uglovi MTO i MTO_1 pravi kao periferijski uglovi nad prečnikom OM.

8. Deljenje duži na jednake delove

Neka je data duž AB (sl. 82) koju treba podeliti, na primer, na 5 jednakih delova.



Slika 82

Počev od jedne krajnje tačke date duži povucimo polupravu p pod proizvoljnim uglom i prenesimo na nju 5 puta jednu proizvoljno odabranu duž (AM = MN = = NP = PQ = QR). Spojimo zatim R sa B i povucimo MC ‖ ND ‖ EP ‖ QF ‖ RB i $CD_1 \parallel DE_1 \parallel EF_1 \parallel FB_1 \parallel AR$. Ovako dobijeni četvorougli CD_1NM, DE_1PN, EF_1QP i FB_1RQ su paralelogrami. Trouglovi ACM, CDD_1, DEE_1, EFF_1 i FBB_1 su podudarni jer je $AM = CD_1 = DE_1 = EF_1 = FB_1$ i odgovarajući nalegli uglovi na ovim stranicama su jednaki, tj. jednaki su među sobom uglovi sa temenima u tačkama A, C, D, E, F i B, a jednaki su među sobom i uglovi sa temenima u tačkama M, D_1, E_1, F_1 i B_1 (zašto?). Pošto su ovih pet trouglova podudarni, jednake su među sobom i pet njihovih homolognih stranica: AC = CD = DE = EF = = FB. Prema tome, duž AB podeljena je na pet jednakih delova.

9. Proporcionalne (srazmerne) duži

Označimo sa AM = m i AC = n (sl. 82). Tada je AM = = MN = NP = PQ = QR = m i AC = CD = DE = EF = FB = n. Razmera dveju duži AP i PQ na jednom kraku ugla A je: $\frac{AP}{AQ} = \frac{3m}{4m} = \frac{3}{4}$, a srazmera duži AE i AF na drugom kraku je: $\frac{AE}{AF} = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$. Pošto su ove dve razmere jednake možemo napisati: $\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AF}$ ili AP : AQ = AE : AF . Ovaj izraz se zove <u>geometrijska proporcija (srazmera)</u>, a za ove četiri duži kažemo da su <u>proporcionalne (srazmerne)</u>.

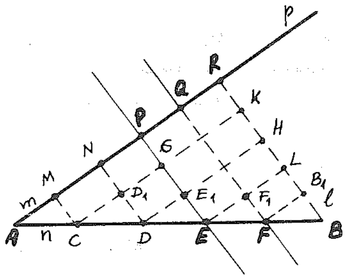
Ako je geometrijska proporcija neprekidna, tj. ako je za duži <u>a</u>, <u>b</u> i <u>x</u> važeća proporcija

a : x = x : b ili x : a = b : x , tada se duž

$x = \sqrt{a\,b}$ zove srednja geometrijska proporcionala ili geometrijska sredina za duži a i b.

Ako na sl. 82 produžimo CD_1 preko D_1, DE_1 preko E_1 i EF_1 preko F_1 dobićemo presek G na pravoj PE i preseke K, H i L na pravoj RB (sl. 83).

Na kraku BR ugla ABR javljaju se među sobom jednake duži $BB_1 = B_1L = LH = HK = KR = \ell$. Razmera duži BH i BK je $\frac{BH}{BK} = \frac{3\ell}{4\ell} = \frac{3}{4}$. Kako je BH = EP i BK = FQ (zašto?), to je i $\frac{EP}{FQ} = \frac{3}{4}$. Ova razmera jednaka je sa ranije posmatranim razmerama, pa se može napisati: $\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AF} = \frac{EP}{QF}$. Poslednja proporcija predstavlja tzv. <u>Talesovu teoremu</u> koju možemo ovako definisati: <u>ako se kraci</u>



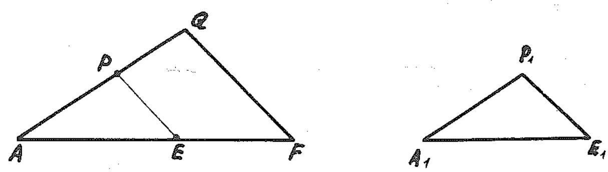
Slika 83

<u>nekog ugla preseku paralelnim pravama tada su odsečci na jed nom kraku proporcionalni odgovarajućim odsečcima na drugom kraku i ovi proporcionalni odgovarajućim odsečcima koje kra ci odsecaju na paralelnim pravama.</u>

10. Sličnost trouglova

Za dva trougla kažemo da su slična ako je redom svaki ugao u jednom trouglu jednak sa po jednim uglom u dru gom trouglu i ako su im homologne stranice proporcionalne.

Posmatrajmo trouglove AFQ i AEP(sl.84).Oni se mogu dobiti iz slike 83 ako se zadrže duži AE, AF, AP, AQ, E



Slika 84

i FQ a sve ostalo izostavi. Kako je $PE \parallel FQ$, onda je $\measuredangle E = \measuredangle F$ i $\measuredangle P = \measuredangle Q$. Osim toga $\measuredangle A$ je zajednički za oba posmatrana trougla, dakle ovi trouglovi imaju jednake uglove. Međutim, utvrđeno je (prema sl. 83) da je: $\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AF} = \frac{PE}{QF}$, tj. stranice ovih trouglova su proporcionalne. Prema tome, trouglovi AEP i AFQ su slični, što zapisujemo na sledeći način: $\triangle AEP \cong \triangle AFQ$.

Ako posmatramo trouglove $A_1E_1P_1$ i AEP koji imaju po jednu stranicu jednaku ($A_1E_1 = AE$) i jednake uglove ($\measuredangle A = \measuredangle A_1$, $\measuredangle E = \measuredangle E_1$, $\measuredangle P = \measuredangle P_1$), vidimo da su oni podudarni i da se prema tome trougao $A_1E_1P_1$ može dovesti do poklapanja sa trouglom AEP. Na osnovu ovoga zaključujemo da je i trougao $A_1E_1P_1$ sličan sa trouglom A E P.

Da bi dva trougla sa različitim stranicama bila slična dovoljno je da imaju po dva ugla jednaka (jer su im u tom slučaju i treći uglovi svakako jednaki). Prema tome, imamo sledeći stav: dva su trougla slična ako imaju po dva ugla jednaka i tada su im homologne stranice proporcionalne. Od ostalih stavova sličnosti pomenućemo sledeći: dva su trougla slična ako je jedan ugao u jednom trouglu jednak sa jednim uglom u drugom trouglu i ako su homologne stranice koje obrazuju ove uglove proporcionalne.

Napomena: Za dva mnogougla sa istim brojem stranica kažemo da su slični ako je svaki ugao u jednom mnogouglu jednak sa po jednim uglom u drugom, idući istim redom, i ako su im homologne stranice proporcionalne.

11. Odnos visina, obima i površina sličnih trouglova

Neka su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ slični (sl. 85), dokazaćemo da su:

1) njihove homologne visine proporcionalne homolognim stranicama;

2) njihovi obimi proporcionalni njihovim homolognim stranicama;

3) njihove površine proporcionalne kvadratima homolognih stranica.

Slika 85

1) Iz sličnosti posmatranih trouglova imamo:

$$\measuredangle A = \measuredangle A_1 \quad \text{i} \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Kako je i $\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1$, onda je i:

$\frac{h}{h_1} = \frac{b}{b_1}$ pa je, s obzirom na prethodnu proporciju:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

2) Kako je $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ iz $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$ imamo:

$a = a_1k$, $b = b_1k$, $c = c_1k$, a odavde se sabiranjem dobija:

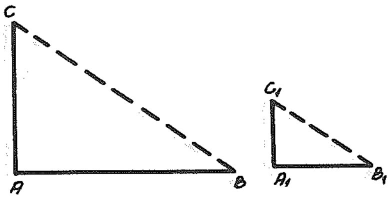
$a + b + c = k(a_1 + b_1 + c_1)$, tj. stavljajući $a + b + c = O$ i $a_1 + b_1 + c_1 = O_1$ dobijamo $O = kO_1$ ili $\frac{O}{O_1} = k$, odnosno:

$$\frac{O}{O_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

3) Površine trouglova na sl. 85 su $P = \frac{c\,h}{2}$ i $P_1 = \frac{c_1h_1}{2}$, a odavde se deobom dobija $\frac{P}{P_1} = \frac{c \cdot h}{c_1 \cdot h_1}$ ili kako je $\frac{c}{c_1} = \frac{h}{h_1}$, $\frac{P}{P_1} = \frac{c^2}{c_1^2}$, gde P i P_1 predstavljaju površine posmatranih trouglova.

Napomena: Kod sličnih mnogouglova stavovi 2) i 3) su takođe u važnosti. Rešićemo nekoliko primera:

1. primer: Izračunati visinu dalekovodnog stuba čija je senka duga 45 m, ako istovremeno vertikalan štap dužine 2 m baca senku od 2,5 m.



Slika 86

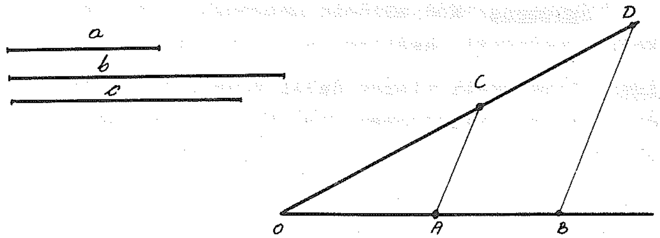
Neka je AC visina stuba, a AB njegova senka, zatim neka A_1C_1 predstavlja visinu vertikalnog štapa, a A_1B_1 dužinu njegove senke (sl. 86). Stub i njegova senka obrazuju prav ugao. Isto tako i štap i njegova senka obrazuju prav ugao. Sunčevi zraci CB i C_1B_1 su paralelni, pa su uglovi ABC i $A_1B_1C_1$ jednaki. Dakle, pravougli trougao ABC i $A_1B_1C_1$ su slični. Pošto su trouglovi slični, stranice su im proporcionalne, tj.:

$$\frac{AC}{A_1C_1} \text{ ili } \frac{AC}{45} = \frac{2}{2{,}5} \text{ tj. } AC = \frac{2}{2{,}5} \cdot 45 = 36.$$

Znači, visina dalekovodnog stuba je 36 m.

2. primer: Date su tri duži a, b i c. Konstruisati njihovu četvrtu proporcionalu.

Na krake proizvoljno nacrtanog ugla (sl. 87) nanesimo OA = a, OB = b i OC = c. Zatim spojimo A sa C i kroz B povučemo BD ∥ AC. Tako dobijena duž OD = x je tražena duž, jer je OA : OB = OC : OD.



Slika 87

<u>3. primer</u>: Date su stranice trougla $a = 3$ cm, $b = 5$ cm i $c = 7$ cm. Izračunaj druge dve stranice drugog trougla koji je sličan sa datim ako je njegova najveća stranica $c_1=21$ cm.

Pošto su prema uslovu zadatka ova dva trougla slična, onda su njihove odgovarajuće stranice proporcionalne, tj.:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \quad \text{ili} \quad \frac{3}{a_1} = \frac{5}{b_1} = \frac{7}{21}.$$

Iz proporcije $\frac{3}{a_1} = \frac{7}{21}$ dobijamo: $a_1 = 9$ cm, a iz $\frac{5}{b_1} = \frac{7}{21}$ dobijamo $b_1 = 15$ cm.

Z A D A C I :

1/ Nacrtaj od svake vrste trouglova po jedan.

2/ Izračunati treći ugao trougla ako su data dva druga: a) 28° i 59°, b) $35^\circ25'48''$ i $85^\circ30''$.

3/ Jedan oštar ugao pravouglog trougla iznosi $63^\circ12''$. Koliki je drugi oštar ugao?

4/ Ako su dva ugla trougla $\alpha = \beta = 60^\circ$, koliki je treći ugao? U koju vrstu trouglova spada ovaj trougao?

5/ Ugao pri vrhu jednakokrakog trougla iznosi 38°. Koliki su uglovi na osnovici? Izračunaj i spoljašnje uglove ovog trougla.

6/ Može li se konstruisati trougao od sledećih stranica: a) 3 cm, 5 cm i 1 cm; b) 3 cm, 5 cm i 2 cm; c) 3 cm, 5 cm i 4 cm; d) 8 cm, 4,5 cm i 3,9 cm.

7/ Konstruiši trougao ako je dato: a) sve tri stranice; b) dve stranice i njima zahvaćen ugao; c) jedne stranice i dva ugla od kojih je jedan nalegli na njoj.

8/ Konstruiši pravougli trougao ako je dato: a) obe katete; b) jedna kateta i jedan oštar ugao; c) kateta i hipotenuza.

9/ Dokazati stav: U jednakokrakom trouglu visina spuštena iz vrha polovi osnovicu.

10/ Konstruiši jednakokraki trougao ako je dato: a) osnovica i ugao na njoj; b) osnovica i ugao pri vrhu; c) krak i ugao pri vrhu.

11/ Konstruiši jednakostraničan trougao čija je stranica 4 cm.

12/ Nacrtaj jedan tupougli i jedan pravougli trougao, a potom konstruiši za svaki sve četiri značajne tačke trougla. Gde se nalazi svaka od konstruisanih tačaka za oba trougla?

13/ Nacrtaj proizvoljnu duž pa je podeli na: a) 3 jednaka dela; b) 7 jednakih delova; c) 8 jednakih delova.

14/ Date su tri duži: $a = 2$ cm, $b = 5$ cm i $c = 8$ cm. Naći četvrtu duž koja će biti proporcionalna sa datim dužima.

15/ Reši prethodni zadatak za proizvoljne tri duži.

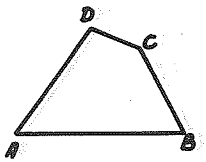
16/ Date su stranice jednoga trougla $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 3$ cm i najkraća stranica drugog trougla $c_1 = 6$ cm. Izračunaj druge dve stranice drugog trougla ako se zna da je on sličan prvome.

VII G L A V A

Č E T V O R O U G A O

1. Pojam, elementi i vrste četvorouglova

Geometrijska slika koju čini zatvorena izlomljena linija od četiri duži zove se **četvorougao**. Te četiri duži su stranice četvorougla. Stranice četvorougla obrazuju četiri ugla četvorougla (sl. 88). Stranice i uglovi četvorougla su elementi četvorougla. Četvorougao ima četiri temena. Četvorougao koji ima dva para paralelnih stranica zove se paralelogram. Četvorougao koji ima jedan par paralelnih stranica je trapez, a četvorougao koji nema paralelnih stranica je trapezoid.

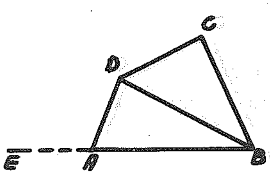


Slika 88

2. Uglovi četvorougla

Ako povučemo dijagonalu (duž koja spaja dva suprotna temena) četvorougla, ona ga deli na dva trougla ABD i BCD (sl. 89). Pošto je zbir uglova trougla 180°, zbir uglova u četvorouglu iznosi 360°.

Na sl. 89. je nacrtan spoljašnji ugao EAD. Pošto je zbir jednog spoljašnjeg i jednog (susednog) unutrašnjeg ugla 180°, zbir

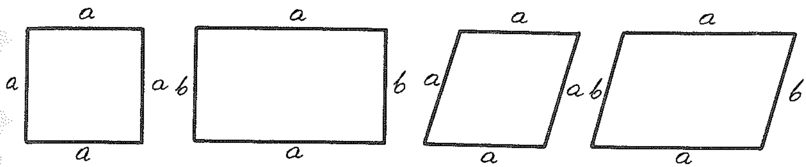


Slika 89

svih spoljašnjih i svih unutrašnjih je $4 \cdot 180^\circ$, odnosno 720°. Ako od tog zbira oduzmemo 360° (zbir unutrašnjih uglova), proizlazi da je zbir spoljašnjih uglova 360°.

3. Paralelogrami i njihove osobine

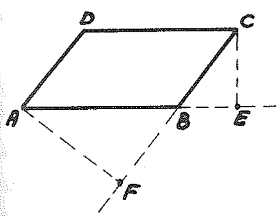
Paralelograme delimo na pravougle i kosougle. Pravougli paralelogrami su oni koji imaju sva četiri ugla prava, a to su kvadrat i pravougaonik, a kosougli su romb i romboid (sl. 90).



Slika 90

Paralelogrami čije su sve stranice jednake zovu se jednakostranični. To su kvadrat i romb. Pravougaonik i romboid su raznostranični.

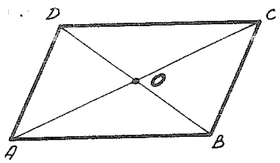
Duž koja predstavlja rastojanje između paralelnih strana zove se visina. Osnovicom paralelograma nazivamo onu stranicu na kojoj on leži. Osnovica može biti ma koja stranica. Na sl. 91 povučene su obe visine paralelograma. Visina CE predstavlja rastojanje između paralelnih stranica AB i CD, a druga visina AF je rastojanje između drugih dveju stranica AD i BC.



Slika 91

Kod svakog paralelograma su: naspramne stranice jednake, suprotni uglovi jednaki i dijagonale se uzajamno polove.

Dijagonala BD (sl. 92) deli paralelogram na dva trougla: ABD i BCD. Ovi trouglovi imaju zajedničku stranicu BD. Osim toga oni imaju jednaka i po dva nalegla ugla na zajedničkoj stranici: ∡ ADB = ∡ CDB (AB ∥ CD, a BD je transverzala) i ∡ ADB = ∡ CBD (AD ∥ BC, a BD je opet transverzala). Prema prvom stavu podudarnosti ovi trouglovi su podudarni, tj. △ ABD ≅ △ BCD, a pošto su podudarni, onda su ostali odgovarajući elementi jednaki: AB = CD (leže naspram jednakih uglova ADB i BCD), AD = BC (leže naspram jednakih uglova ABD i BDC). Naspram zajedničke stranice BD leže jednaki uglovi: ∡ BAD = ∡ BCD. Dakle, <u>naspramne stranice su jednake</u> (AB = CD i AD = BC) i <u>suprotni uglovi su jednaki</u> (∡ BAD = ∡ BCD. Isto tako je: ∡ ABC = ∡ ADC.



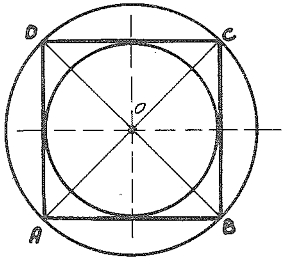
Slika 92

Na sl. 92 povučene su obe dijagonale AC i BD. Presek dijagonala je tačka O. Trouglovi ABO i CDO su podudarni jer imaju jednaku po jednu stranicu (AB = CD) i na njima jednake nalegle uglove (∡ OAB = ∡ OCD – naizmenični uglovi i ∡ OBA = ∡ ODC – isto naizmenični između paralela AB ∥ CD). Prema tome su i odgovarajuće stranice (naspram jednakih uglova) OB = OD i OA = OC. Znači, <u>dijagonale se polove</u>.

Pored navedenih zajedničkih osobina pojedini paralelogrami imaju i svoje posebne osobine.

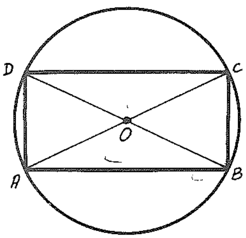
<u>Kvadrat</u> – Dijagonale kvadrata AC i BD su jednake (sl. 93), polove se, stoje normalno jedna na drugoj i u njihovom preseku nalazi se centar opisane i upisane kružnice. Da su dijagonale jednake dokazuje se iz podudarnosti jednakokrako pravouglih trouglova: △ ABD ≅ △ BAC (AB je zajednička stranica, AD = BC, ∡ A = ∡ B = 90°). Iz ove podudarnosti sledi AC = BD, tj. <u>dijagonale su jednake</u>. Pošto se dijagonale svakog paralelograma polove, to je AO = OC = OB = OD, a Kvadrat je osno simetrična slika (dve ose su dijagonale,

druge dve prolaze kroz O i paralelne su stranicama). Otuda zaključujemo da su dijagonale normalne. Prečnik opisane kružnice jednak je sa dijagonalom, a prečnik upisane kružnice jednak je stranici kvadrata (vidi sl. 93).



Slika 93

Pravougaonik (sl. 94) ima takođe jednake dijagonale, ali one ne stoje normalno jedna na drugoj. Trouglovi ABC i ABD su podudarni jer je BC = AD i AB je zajednička stranica pa zaključujemo: AC = BD, tj. dijagonale su jednake.

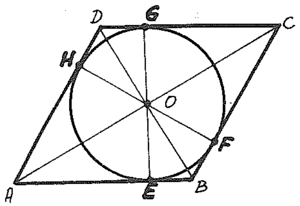


Slika 94

Pošto se dijagonale polove, a jednake su, njihov presek (O) je podjednako udaljen od svih temena pravougaonika, znači: oko pravougaonika se može opisati kružnica (sl. 94).

U pravougaonik se ne može upisati kružnica (zašto?).

Romb je osno simetrična slika. Njegove ose simetrije su dijagonale (sl. 95). Na primer, dijagonala AC deli romb na dva podudarna jednokraka trougla ($\triangle ABC \cong \triangle ACD$ jer je AC zajednička stranica a kraci su im jednaki pošto su stranice romba jednake). Znači, obrtanjem trougla ABC oko dijagonale AC za 180° ovaj se može i poklopiti sa trouglom ACD. Sve se ovo može zaključiti i za drugu dijagonalu. Prema tome, romb je osno simetričan paralelogram pa su njegove dijagonale uzajamno normalne ($AC \perp BD$). Dijagonale romba nisu jednake, pa prema tome ni njihov presek (O) nije pod-



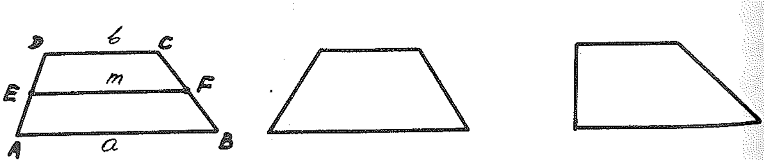
Slika 95

jednako udaljen od temena što znači da se oko romba ne može opisati krug.

Ako se iz preseka dijagonala romba povuku normale na stranice, tada su ove normale jednake (dokaži!), tj. OE = OF = = OG = OH, što znači da se u romb može upisati krug. Pored toga iz osne simetrije romba izlazi i da su dijagonale simetrale suprotnih uglova.

4. Trapez

Četvorougao koji ima jedan par paralelnih stranica zove se trapez (sl. 96). Ove paralelne stranice su osnovice trapeza, a ostale dve stranice su kraci. Ako su kraci jednaki, trapez je jednakokraki. Ako jedan krak stoji normalno na



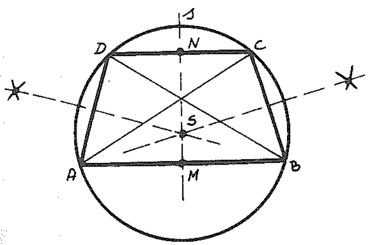
a) Trapez b) Jednakokraki trapez c) Pravougli trapez

Slika 96

osnovicama, trapez je pravougli. Duž koja spaja sredine krakova zove se srednja linija trapeza. Srednja linija (m) trapeza paralelna je osnovicama (a i b) i jednaka njihovom poluzbiru, tj.

$$m = \frac{1}{2}(a + b), \quad (\text{sl. } 96a)$$

Ako se spoje sredine osnovica (M i N) jednakokrakog trapeza (sl. 97) i ako deo trapeza AMND obrnemo oko MN za 180°, tada će se tačka A poklopiti sa tačkom B, a tačka D sa tačkom C, odnosno poklopiće se oba dela trapeza. Ovim smo pokazali da je MN osa simetrije trapeza. Kako se i kraci AD i BC poklapaju, zaključujemo da su i uglovi DAB i ABC jednaki, tj. uglovi na osnovici jednakokrakog trapeza su jednaki. Isto tako je i $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD$.



Slika 97

Na sl. 97 povučene su dijagonale AC i BD. Trouglovi ABD i ABC su podudarni jer je AD = BC, AB = AB i $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC$. Odavde se izvodi zaključak da su i treće stranice ovih trouglova jednake (AC = BD), tj. d i j a g o n a l e j e d n a k o k r a k o g t r a p e z a s u j e d n a k e.

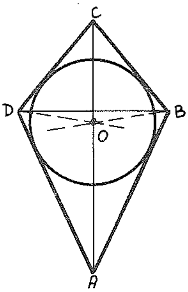
Na sl. 97 povučene su simetrale krakova AB i BC jednakokrakog trapeza. Ove simetrale seku se u tački S na osi simetrije s. Tačka S je podjednako udaljena od svih temena trapeza jer se nalazi u preseku simetrala krakova i simetrale osnovica. Zbog toga je SA = SB = SC = SD, što znači da je tačka S c e n t a r o p i s a n o g k r u g a j e d n a k o k r a k o g t r a p e z a.

5. Trapezoid

Već je rečeno da je trapezoid četvorougao koji nema paralelnih stranica. Od svih trapezoida izdvaja se jedan koji ima dve susedne stranice jednake. To je deltoid (sl.98).

Na sl. 98 je AD = AB i CD = CB. Kako je još AC zajednička stranica za trouglove ADC i ABC, to su oni podudarni, tj. $\triangle ADC \cong \triangle ABC$. Stoga je: $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$ i $\measuredangle DCA =$

= $\sphericalangle$ BCA i $\sphericalangle$ DAC = $\sphericalangle$ BAC. Znači: 1. uglovi koje obrazuju po dve nejednake stranice deltoida su jednaki ($\sphericalangle D = \sphericalangle B$); 2. dijagonala koja spaja zajednička temena jednakih stranica (AC) simetrala je uglova čija temena spaja. Osim toga ona je i simetrala drugoj dijagonali pa i celom deltoidu. Odavde se može zaključiti da su dijagonale uzajamno normalne ($AC \perp BD$).

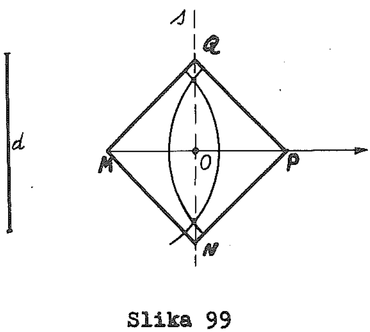


Slika 98

Ako se povuku simetrale jednakih uglova deltoida, one će se seći u tački O na dijagonali koja je simetrala deltoida. Stoga je tačka O podjednako udaljena od svih stranica deltoida, a to znači da se u deltoid može upisati krug i da mu je centar u preseku simetrala jednakih uglova.

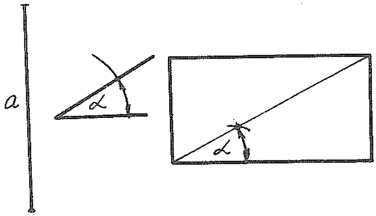
6. Konstrukcije četvorouglova

(1) Konstruisati kvadrat ako je data dijagonala. Neka je data duž D koja predstavlja dijagonalu kvadrata. Na proizvoljnu polupravu prenese se data dijagonala $\underline{d}$ = MP i konstruiše njena simetrala $\underline{s}$, (sl. 99). Sada od preseka O prenosimo sa jedne i druge strane ove simetrale po polovinu dijagonale. Na osnovu osobina kvadrata četvorougao MNPQ je kvadrat.



Slika 99

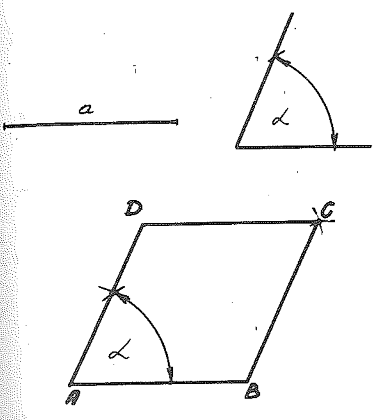
(2) Konstruisati pravougaonik ako je poznata jedna stranica i ugao koji dijagonala gradi sa tom stranicom.



Slika 100

Neka je data stranica a i ugao α (sl. 100). Da bi se konstruisao pravougaonik, najpre se konstruiše pravougli trougao čija je poznata stranica AB i ugao α. Sada su nam poznata tri temena pravougaonika (A, B, C). Četvrto teme (D) dobijamo u preseku luka opisanog oko tačke A poluprečnika BC i luka opisanog oko C poluprečnika AB.

(3) Konstruisati romb ako je data stranica i jedan oštar ugao romba.

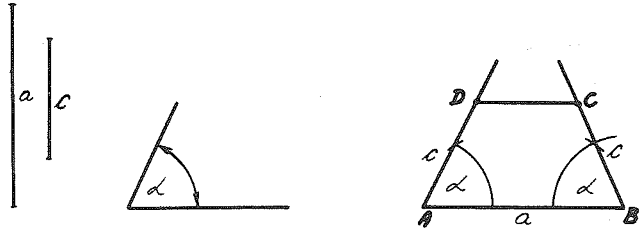


Slika 101

Najpre se prenese dati ugao, pa se na jednom i drugom kraku prenese data stranica (sl. 101). Tako se dobiju tri temena tomba (A, B i D). Četvrto teme (C) dobijamo u preseku lukova kružnica opisanih iz tačaka B i D kao centara čiji su poluprečnici jednaki datoj stranici.

(4) Konstruisati jednakokraki trapez ako je poznata veća osnovica a, ugao na njoj α i krak c.

Na proizvoljnu polupravu prenese se data osnovica i u njenim krajevima (A i B) konstruiše dati ugao kako je učinjeno na sl. 102. Zatim se na drugim kracima ovih uglova prenesu dužine datog kraka. Spajanjem tačaka C i D dobija



Slika 102

se traženi trapez.

Iz navedenih primera se vidi da je za konstrukciju kvadrata potreban jedan elemenat, za konstrukciju pravougaonika ili romba dva elementa, a za konstrukciju jednakokrakog trapeza tri elementa. Za konstrukciju trapeza u opštem slučaju potrebna su četiri elementa.

ZADACI:

1/ Tri ugla četvorougla su: $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 35^\circ$ i $\gamma = 82^\circ$. Izračunati četvrti ugao δ.

2/ Iz proizvoljne tačke ugla $\alpha = 30^\circ$ spuštene su normale na krake ugla. Izračunati ugao između ovih normala.

3/ Kakvi su ostali uglovi paralelograma koji ima jedan ugao: a) oštar, b) prav, c) tup.

4/ Jedan ugao paralelograma je: a) 45°, b) $38^\circ 25'$ c) $54^\circ 25' 36''$. Izračunati ostale uglove paralelograma.

5/ Koji paralelogrami imaju jednake dijagonale?

6/ Koji paralelogrami imaju normalne dijagonale?

7/ Konstruiši kvadrat stranice 4,8 cm, pa mu opiši i upiši krug. Koliki je poluprečnik upisanog kruga?

8/ Konstruiši pravougaonik ako je data dijagonala i ugao između dijagonala. Opiši krug oko tog pravougaonika.

Za konstrukciju pravilnog šestougla treba kružnicu podeliti na 6 jednakih lukova, kojima odgovaraju 6 jednakih centralnih uglova. Kako svaki taj centralni ugao ima po 60° ($360^\circ : 6 = 60$). Za konstrukciju pravilnog šestougla (sl. 107) treba po kružnici počev od jedne tačke A prenositi poluprečnik kao tetivu unaokolo dok se ne dođe u početnu tačku A. Tako se dobijaju tačke A, B, C, D, E, F koje predstavljaju temena pravilnog šestougla. Trouglovi AOB, BOC, COD, DOE, EOF i FOA su jednakostranični (zašto?). Pravilni šestougao ima 6 osa simetrija (koje su?).

U svakom pravilnom mnogouglu se može opisati i upisati kružnica. Centar opisane i upisane kružnice je ista tačka koja se zove centar mnogougla.

Z A D A C I :

1/ Izračunaj broj dijagonala 15-tougla, 18-tougla i 20-tougla.

2/ Koliki je zbir uglova u 15-touglu?

3/ Koliki je jedan ugao pravilnog petougla, a koliki pravilnog šestougla?

4/ Konstruiši pravilan petougao čija je stranica 4 cm.

5/ Konstruiši pravilan šestougao čija je stranica 3 cm.

IX GLAVA

IZRAČUNAVANJE OBIMA I POVRŠINA RAVNIH GEOMETRIJSKIH FIGURA

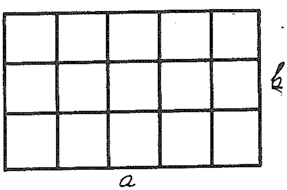
1. Pojam obima i površine geometrijske figure

Obim ravne geometrijske figure dobija se ako se saberu dužine stranica te figure. Pošto je obim dužina, on se meri dužinskim merama (m, cm, dm, km itd.).

Površina ravne geometrijske figure je veličina dela ravne površi ograničena stranicama. Površinu merimo površinskim merama (mm^2, cm^2, dm^2, m^2, a, ha, km^2).

2. Obim i površina pravougaonika

Ako sa a i b označimo dužinu stranica pravougaonika (sl. 108), onda se obim (O) izračunava po obrascu: $O = 2a + 2b$ ili $O = 2(a + b)$ jer pravougaonik ima dva para jednakih stranica.



Slika 108

Ako su dužina i širina izražene recimo centimetrima, tada, prema sl. 108, u prvom redu pravougaonika ima a cm^2, a pošto ima b takvih redova ukupna površina (P) pravougaonika će biti $a \cdot b$ cm^2, dakle:

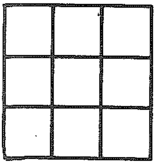
$$P = a \cdot b.$$

Napomena: U daljem izlaganju obim ćemo obeležavati sa O, a površinu sa P.

3. Obim i površina kvadrata

Kako su kod kvadrata sve četiri stranice jednake i ako označimo dužinu jedne sa a, obim se izračunava po obrascu

$$O = 4a.$$



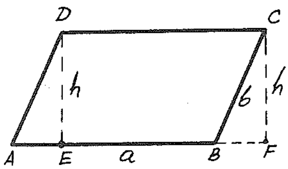
Slika 109

Pošto su dužina i širina jednake i iznose, recimo, po a cm tada se u prvom redu (sl. 109) nalazi a cm^2, a kako ima a takvih redova ukupna površina kvadrata iznosi $a \cdot a$ cm^2, dakle:

$$P = a \cdot a = a^2.$$

4. Obim i površina romboida i romba

Ako sa a i b označimo dužine stranice romboida (sl. 110), tada se obim izračunava po obrascu $O = 2a + 2b$ ili $O = 2(a + b)$. Ako se iz temena C i D spuste normale na osnovicu tada se romboid ABCD pretvara u pravougaonik EFCD iste površine jer su trouglovi AED i BFC podudarni (zašto?). Ako dužinu visine DE označimo sa h tada je površina pravougaonika $P = a \cdot h$.



Slika 110

Kako je površina romboida jednaka sa površinom pravougaonika, za površinu romboida imamo obrazac:

$$P = a \cdot h_a,$$

gde je h_a dužina visine romboida koja odgovara stranici a. Ako sa h_b označimo dužinu visine stranice b, za površinu dobijamo:

$$P = b \cdot h_b .$$

Pošto romb ima sve četiri stranice jednake obim se izračunava po obrascu:

$\underline{O = 4a}$, a površina

$\underline{P = a \cdot h}$, gde je $\underline{h}$ dužina visine romba.

5. Obim i površina trougla

Ako sa $\underline{a}$, $\underline{b}$ i $\underline{c}$ označimo dužine stranica trougla, ta da se obim izračunava po obrascu:

$$O = a + b + c.$$

Ako je trougao jednakokraki, onda se obim izračunava po obrascu:

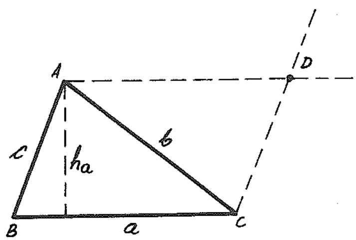
$$O = a + 2b,$$

gde je $\underline{a}$ dužina osnovice a $\underline{b}$ dužina kraka.

Ako je trougao jednakostraničan, onda se obim izračunava po obrascu:

$$O = 3a,$$

gde je $\underline{a}$ dužina stranice jednakostraničnog trougla.



Slika 111

Ako se kroz teme A trougla ABC (sl. 111) povuče poluprava paralelna sa osnovicom BC a kroz teme C paralelna sa stranicom AB dobija se paralelogram ABCD. Stranica b = AC je u stvari dijagonala paralelograma i kako smo ranije videli deli paralelogram na dva podudarna trougla. Prema tome, površina trougla ABC iznosi polovinu površine paralelograma ABCD koji sa njim ima istu osnovicu (a) i visinu (h_a), tj.

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a.$$

9/ Konstruiši romb ako je poznata stranica i jedna dijagonala. Upiši krug u taj romb.

10/ Konstruiši romboid ako je dat jedan ugao i stranice romboida.

11/ Konstruiši trapez ako su date sve četiri njegove stranice.

12/ Konstruiši jednakokraki trapez ako je data jedna osnovica, krak i dijagonala i opiši krug oko njega.

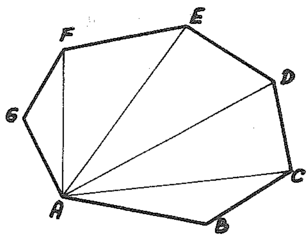
13/ Konstruiši deltoid ako su date dve stranice i ugao između njih, a potom upiši krug.

VIII G L A V A

M N O G O U G A O

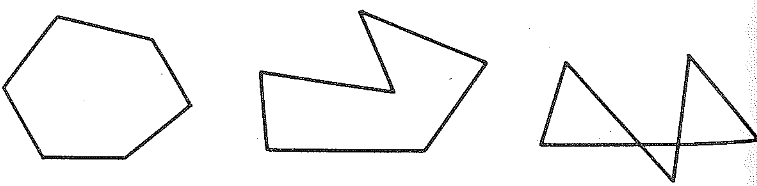
1. Pojam, elementi i vrste mnogouglova

Zatvorena izlomljena linija u ravni zove se mnogougao. Tačke A, B, C .... (sl. 103) su temena mnogougla, duži AB, BC, CD, ... su stranice mnogougla, a uglovi: ∢ A, ∢ B, ∢ C, ... su uglovi mnogougla. Duži AC, AD, AE,... su dijagonale mnogougla. One spajaju temena koja ne pripadaju istoj stranici.



Slika 103

Mnogougao može biti ispupčen, udubljen ili složen (sl. 104). U daljem izlaganju proučavaćemo samo ispupčene mnogouglove.



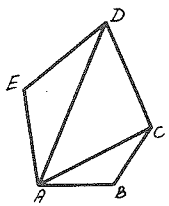
Ispupčen mnogougao Udubljen mnogougao Složen mnogougao

Slika 104

Prema broju uglova, temena ili stranica mnogougao se zove: trougao, četvorougao, petougao, šestougao itd. Ako mnogougao ima sve stranice i sve uglove jednake, onda je on pravilan. Mnogougao koji nije pravilan zove se nepravilan.

2. Zbir uglova mnogougla i broj dijagonala mnogougla

Svaki se mnogougao povlačenjem dijagonala iz jednog temena može podeliti na trouglove (sl. 103). Ovih trouglova ima uvek za dva manje od broja temena mnogougla. Ako imamo petougao (sl. 105), on se povlačenjem dijagonala iz jednog temena razlaže na tri ($5 - 2 = 3$) trougla, šestougao na četiri ($6 - 2 = 4$) trougla itd., n-tougao na $(n - 2)$ trougla. Zbir unutrašnjih uglova petougla, pošto je on razložen na 3 trougla, iznosiće $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ (jer je zbir uglova jednog trougla 180°). Zbir unutrašnjih uglova šestougla iznosiće $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ = itd. Zbir unutrašnjih uglova n-tougla iznosiće $(n - 2) \cdot 180^\circ$, gde n predstavlja broj temena, uglova ili stranica. Na primer, za dvanaestougao zbir uglova računamo ovako: pošto je $n = 12$, to je zbir uglova $(12 - 2) \cdot 180^\circ = 10 \cdot 180^\circ = 1800^\circ$.



Slika 105

Ako je još mnogougao pravilan, onda jedan njegov ugao se izračunava po obrascu

$$\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} .$$

Na primer, za dvanaestougao smo izračunali da je zbir svih unutrašnjih uglova 1800°. Ako je još sada dvanaestougao pravilan, tada jedan njegov ugao ima

$$\frac{1800^\circ}{12} = 150^\circ.$$

Iz jednog temena petougla mogu se povući 2 dijagonale (sl. 105), a iz jednog temena sedmougla (sl. 103) mogu se povući 4 dijagonale. Dakle, broj dijagonala koje se mogu povući iz jednog temena mnogougla je za 3 manji od broja stranica. Ako mnogougao ima n stranica, iz svakog njegovog temena će se moći da povuče po (n - 3) dijagonale. Iz svih $\underline{n}$ temena moguće je, znači, povući n(n - 3) dijagonala. Međutim, pošto je u tom slučaju svaka dijagonala dva puta računata, broj dijagonala je

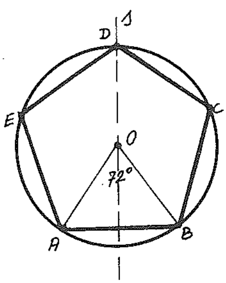
$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Na primer, broj dijagonala dvanaestougla je:

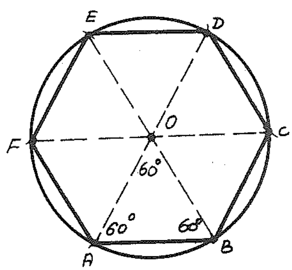
$$\frac{n(n-3)}{12} = \frac{12(12-3)}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54.$$

3. Konstrukcija pravilnih mnogouglova

Pravilan trougao i pravilan četvorougao smo već upoznali i znamo kako se oni konstruišu. To su u stvari jednakostraničan trougao i kvadrat. Za konstrukciju pravilnog petougla čiji je poluprečnik opisanog kruga dat (sl.106) treba najpre izračunati centralni ugao koji odgovara jednoj stranici. On iznosi petinu punog ugla, tj. $360^o : 5 = 72^o$. Pošto se nacrta krug, onda se uglomerom nacrta centralni ugao od 72^o. Kraci ovog ugla seku kružnicu u tačkama A i B. Tetiva AB je stranica traženog petougla. Ostaje još da se šestarom duž AB prenese po kružnici još 4 puta. Pravilni petougao ima 5 osa simetrija. Na sl. 106. je povučena samo jedna.



Slika 106



Slika 107

Ako se za osnovicu uzme stranica b, odnosno c za površinu istog trougla imamo:

$$P = \frac{1}{2} b \cdot h_b \text{ odnosno } P = \frac{1}{2} c \cdot h_c .$$

Znači, da bismo izračunali površinu nekog trougla treba da znamo jednu stranicu i visinu koja odgovara istoj stranici.

Kod nejednakostraničnog trougla sve tri visine su različite, kod jednakokrakog dve visine su jednake (one koje odgovaraju kracima a treća je različita), a kod jednakostraničnog trougla sve tri visine su jednake.

Površina trougla se može izračunati i kada su date sve tri stranice trougla. Neka su a, b i c dužine stranica trougla a:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

poluobim trougla. Ne upuštajući se u izvođenje navešćemo tzv. Heronov obrazac za izračunavanje površine trougla:

$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} .$$

Rešićemo nekoliko zadataka:

1) Izračunati površinu trougla čija je stranica $c = 8$ cm i njena visina $h_c = 50$ mm.
   Pošto se visina izrazi centimetrima $c = 5$ cm, za površinu dobijamo:

$$P = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20, \text{ tj.}$$

$$P = 20 \text{ cm}^2.$$

2) Izračunati obim i površinu pravouglog trougla čije su katete $a = 6$ cm, $b = 8$ cm i hipotenuza $c = 10$ cm .
   Za obim imamo:

$$O = a + b + c, \quad \text{tj.}$$
$$O = 6 + 8 + 10,$$
$$\underline{O = 24 \text{ cm}}.$$

Kako je dati trougao pravougli, jedna kateta je visina za drugu katetu pa za površinu imamo:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24, \text{ tj. } \underline{P = 24 \text{ cm}^2}.$$

3) Izračunati obim jednakokrakog trapeza ako je njegova površina 12 cm^2, krak $b = 5$ cm i visina koja odgovara osnovici $h_a = 4$ cm.

Osnovicu **a** izračunavamo iz date površine primenom obrasca $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$. Ako u ovom obrascu zamenimo vrednost za P i h_a dobićemo:

$$12 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 \quad \text{ili}$$

$$12 = 2a, \quad \text{tj.} \quad a = 6 \text{ cm}.$$

Za obim imamo:

$$O = a + 2b$$
$$O = b + 2 \cdot 5$$
$$O = 6 + 10$$
$$O = 16 \text{ cm}.$$

4) Izračunati površinu trougla čije su stranice $a = 9$ cm, $b = 12$ cm i $c = 15$ cm.

Primenom Heronovog obrasca imamo:

$$P = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} =$$
$$= \sqrt{2^2 \cdot 9^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 9 \cdot 3 = 54, \quad \text{tj.} \quad P = 54 \text{ cm}^2.$$

5) Izračunati površinu trougla i visinu h_a ako su stranice date: $a = 8$ cm, $b = 12$ cm i $c = 16$ cm.

Kako je poluobim $s = \frac{8 + 12 + 16}{2} = 18$, primenom Heronovog obrasca za površinu dobijamo:

$$P = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-16)} = \sqrt{18 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2} =$$
$$= \sqrt{(6 \cdot 6)(2 \cdot 2)(3 \cdot 5)} = \sqrt{6^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5} = 6 \cdot 2\sqrt{15} = 12\sqrt{15} =$$
$$= 12 \cdot 3{,}8730 = 46{,}476 \quad \text{tj.} \quad P = 46{,}476 \text{ cm}^2.$$

Iz obrasca $P = \frac{1}{2} a\, h_a$ zamenom vrednosti za P i a dobijamo: $46{,}476 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h_a$, a odavde je $h_a = 11{,}619$ cm.

6. Obim i površina trapeza

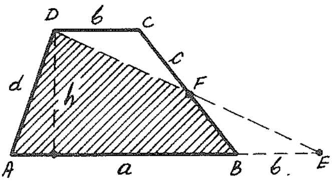
Ako sa a, b, c i d označimo dužine stranica trapeza (sl. 112), tada se obim izračunava po obrascu:

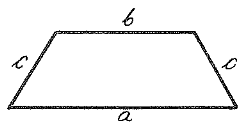
$$O = a + b + c + d.$$

Ako je trapez jednakokraki ($c = d$) za obim imamo (sl. 113):

$$O = a + b + 2c.$$

Ako produžimo osnovicu $AB = a$ za dužinu $BE = DC = b$ i spojimo E i D dobijamo trougao AED. Osnovica ovog trougla je $AE = AB + BE = a+b$, tj. jednaka je zbiru osnovica trapeza. Visina h je zajednička za trapez i trougao AED.





Slika 112

Slika 113

Trouglovi BEF i CDF su podudarni jer je $BE = DC$, $\measuredangle FBE = \measuredangle DCF$ (naizmenični) i $\measuredangle BEF = \measuredangle CDF$ (naizmenični).

Ako se trapezoidu ABFD (iscrtani deo slike) doda trougao FOC dobija se trapez ABCD, a ako se istom delu doda trougao BEF dobija se trougao ABD. Kako su površine trouglova FCD i BEF jednake jer su podudarni, to je površina trapeza ABCD jednaka sa površinom trougla AED, jer u oba slučaja istom (iscrtanom delu) dodajemo jednake površine podudarnih trouglova FCD i BEF. Prema tome, površina trapeza ABCD jednaka je sa površinom trougla AED čija je osnovica jednaka zbiru osnovica trapeza a visina im je zajednička, tj.:

$$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}.$$

Na primer, izračunati obim i površinu jednakokrakog trapeza čije su osnovice $\underline{a} = 16$ cm i $\underline{b} = 4$ cm, krak $\underline{c} = 10$ cm i visina $h = 8$ cm.

$$O = a+b+2c = 16+4+2\cdot 10 = 40, \quad \text{tj.}$$
$$O = 40 \text{ cm}.$$

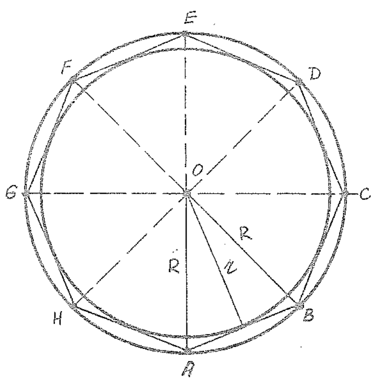
Za površinu dobijamo:

$$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2} = \frac{(16+4)\cdot 8}{2} = \frac{20\cdot 8}{2} = 80, \quad \text{tj.}$$
$$P = 80 \text{ cm}^2.$$

7. Obim i površina pravilnog mnogougla

Ako sa $\underline{a}$ označimo dužinu stranice pravilnog mnogougla a sa $\underline{n}$ broj njegovih stranica, tada se obim izračunava po obrascu:

$$O = n \cdot a.$$



Slika 114

Na sl. 114 nacrtan je pravilan osmougao. On se sastoji od osam podudarnih jednakokrakih trouglova. Površina jednog takvog trougla je $\frac{a\cdot r}{2}$, gde je $\underline{a}$ osnovica trougla (stranica osmougla), a $\underline{r}$ visina koja joj odgovara (poluprečnik upisanog kruga u osmouglu). Površina osmougla je $P = 8 \cdot \frac{a\cdot r}{2}$ jer ima osam jednakih trouglova.

Ako imamo pravilan mnogougao od $\underline{n}$ stranica dužine $\underline{a}$, njegova površina će biti:

$$P = n \cdot \frac{a \cdot r}{2}, \text{ ili}$$

kako je $n \cdot a = O$ za površinu dobijamo:

$$P = \frac{O \cdot r}{2},$$

gde je O obim mnogougla a r poluprečnik upisanog kruga. Prema tome, površina pravilnog mnogougla dobija se kad se proizvod obima i poluprečnika podeli sa dva.

Pravilan mnogougao je odreden svojom stranicom (a) ili poluprečnikom upisane kružnice (R). U priloženoj tablici nalaze se zavisnosti izmedu tih elemenata:

Ime mnogougla	R-poluprečnik opisane kružnice	r-poluprečnik upisane kružnice	a stranica		P površina	
trougao	0,577a	0,289a	1,732R	3,463r	$0,433a^2$	$1,299R^2$
kvadrat	0,707a	0,500a	1,414R	2,000r	$1,000a^2$	$2,000R^2$
petougao	0,851a	0,695a	1,176R	1,453r	$1,721a^2$	$2,378R^2$
šestougao	1,000a	0,866a	1,000R	1,155r	$2,598a^2$	$2,598R^2$
osmougao	1,307a	1,208a	0,765R	0,828r	$4,828a^2$	$2,828R^2$
dvanaestougao	1,920a	1,866a	0,518R	0,536r	$11,190a^2$	$3,000R^2$

Izračunati, na primer, obim i površinu pravilnog osmougla čija je stranica $a = 2$ cm.

Za obim imamo: $O = 8 \cdot a = 8 \cdot 2 = 16$ cm.

Za površinu iz tablica nalazimo:

$P = 4,828a^2 = 4,828 \cdot 2^2 = 4,828 \cdot 4 = 19,312\ cm^2.$

Iz iste tablice se mogu naći i poluprečnici opisane i upisane kružnice:

$R = 1,307 \cdot a = 1,307 \cdot 2 = 2,614$ cm.

$r = 1,208 \cdot a = 1,208 \cdot 2 = 2,416$ cm.

U tablicama su većinom date približne vrednosti, ali za praktične potrebe tačnost je dovoljna.

8. Izračunavanje obima i površine nepravilnog mnogougla

Na slici 115 dat je nepravilan mnogougao čije su dužine stranica a, b, c, d, e i f. Za obim imamo:

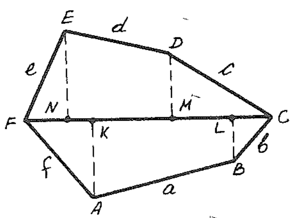
$$O = a + b + c + d + e + f.$$

Ako povučemo njegovu najveću dijagonalu FC i iz ostalih temena spustimo na nju normale AK, BL, DM i EN, mnogougao je podeljen na trougle AKF, BCL, CDM, EFN i trapeze ABLK i EDMN. Površina mnogougla je jednaka zbiru površina ovih figura, tj.:

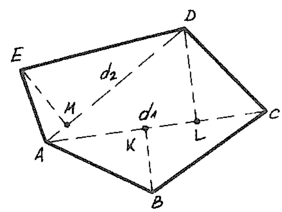
$$P = \frac{1}{2} AR \cdot FK + \frac{1}{2} BL \cdot CL + \frac{1}{2} DM \cdot CM + \frac{1}{2} EN \cdot FN + \frac{1}{2} (AK + bL) \cdot$$

$$\cdot KL + \frac{1}{2} (EN + DM) \cdot MN.$$

Mnogougao se može razložiti na trouglove povlačenjem svih dijagonala iz jednog temena (sl. 116).



Slika 115



Slika 116

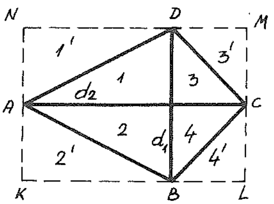
Neka su d_1 i d_2 dijagonale povučene iz temena A petougla ABCDE. Neka je dalje $BK = h_1$ visina trougla ABC, $DL = h_2$ visina trougla AED. Površina petougla jednaka je zbiru površina ovih triju trouglova, tj.:

$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot h_1 + \frac{1}{2} d_2 \cdot h_3.$$

9. Izračunavanje površine četvorouglova sa normalnim dijagonalama

Kvadrat, romb i deltoid su četvorouglovi sa normalnim dijagonalama.

Ako se kroz temena A i C deltoida povuku paralelne sa dijagonalom BD = d_1, a kroz temena B i D paralelne sa drugom dijagonalom AC = d_2 dobija se pravougaonik KLMN (sl. 117) čije su stranice KN = ML = d_1 i KL = MN = d_2. Prema tome, površina pravougaonika je: $d_1 \cdot d_2$, a kako je površina deltoida polovina površine pravougaonika (jer su trouglovi 1 i 1', 2 i 2', 3 i 3' i 4 i 4' jednaki), za površinu deltoida imamo:



Slika 117

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Ako sa d_1 i d_2 označimo dužine dijagonala romba, tada pored ranije datog obrasca (P = a·h) za površinu romba važi isti obrazac, tj.:

$$P = \frac{d_1 d_2}{2}$$

što se može dokazati na isti način kao i na deltoidu.

Kako su kod kvadrata obe dijagonale jednake, pored ranije datog obrasca ($P = a^2$) za površinu imamo sledeći obrazac:

$$P = \frac{d \cdot d}{2} \quad \text{ili} \quad P = \frac{d^2}{2}.$$

10. Izračunavanje obima kruga (dužine kružnice) i površine kruga

Ako uzmemo neki kotur ili kakav valjkasti predmet (lonac, šerpu, sulundar itd.) i izmerimo centimetarskom pantljikom dužinu kružnice na tom predmetu, broj dobijenih cm predstavlja obim toga kruga.

Neka je, na primer, dobijen obim od 66 cm. Ako izmerimo prečnik istog predmeta dobićemo približno 21 cm. Ako uporedimo ove dužine uzimajući dužinu prečnika za mernu jedinicu dobijamo:

$$66 \text{ cm} : 21 \text{ cm} = 66 : 21 = 3\frac{3}{21} = 3\frac{1}{7} = 3{,}14\ldots$$

Prema tome, prečnik ovog predmeta se sadrži u obimu:

$$3\frac{1}{7} \quad \text{ili} \quad 3{,}14\ldots \text{ puta.}$$

Ako ovaj eksperiment ponovimo na različitim valjkastim predmetima, videćemo da ćemo za odnos obima i prečnika kruga dobijati uvek broj približno oko 3,14... (proveri!)

Dakle, količnik obima i prečnika kruga je uvek isti konstantan (stalan) broj. Ovaj stalan broj obeležavamo sa malim grčkim slovom π (pi). Broj π je decimalan broj koji ima beskonačno mnogo decimala koje se ne ponavljaju periodično. Ovakvi brojevi se zovu iracionalni brojevi. Na primer, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ itd. su iracionalni brojevi.

Znači, utvrđeno je da je:

$$\frac{\text{Obim kruga}}{\text{Prečnik kruga}} \approx 3{,}14 \quad \text{ili}$$

$\frac{O}{2r} = \pi$, gde je O - obim, 2r - prečnik

i $\pi \approx 3{,}14$ (znak "$\approx$" čita se: približno jednako). Iz poslednjeg izraza dobijamo obrazac za obim kruga:

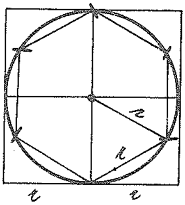
$$O = 2r\pi$$

Ako oko kruga poluprečnika r opišemo kvadrat a upišemo pravilan šestougao (sl. 118) vidimo da je obim kruga manji od obima kvadrata a veći od obima šestougla, tj.:

$$6r < O < 8r \quad \text{ili}$$

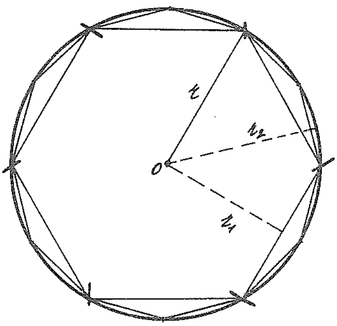
$$(2r)\cdot 3 < O < (2r)\cdot 4.$$

Iz poslednje nejednakosti proizilazi da se broj kojim treba pomnožiti prečnik (2r), da bi se izračunao obim kruga, nalazi između 3 i 4. Ovo potvrđuje rezultate do kojih smo došli merenjem.



Slika 118

Videli smo da se površina pravilnog mnogougla izražava obrascem $P = \frac{O \cdot r}{2}$, gde smo sa O označili obim mnogougla a sa r poluprečnik upisanog kruga. Na sl. 119 upisan je u krugu šestougao i dvanaestougao, a zatim zamislimo i mnogougao sa 24 stranice itd. Primećujemo da se površine tako upisanih mnogouglova sve manje razlikuju od površine kruga, a da se poluprečnici r_1, r_2... njihovih upisanih krugova sve manje razlikuju od poluprečnika kruga r.



Slika 119

Ako zamislimo da se ovo upisivanje mnogouglova neograničeno nastavlja (pri stalnom udvajanju broja stranica mnogougla), tada se površina upisanog mnogougla sve više približava površini kruga a obim mnogougla obimu kruga.

Drugim rečima, površina kruga se može dobiti kada se u obrascu za površinu pravilnog mnogougla stavi $O = 2r\pi$, tj.:

$$P = \frac{2r\pi \cdot r}{2} \quad \text{ili}$$

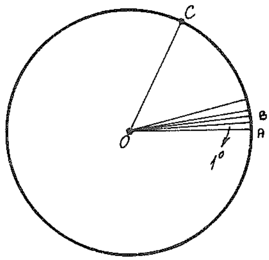
$$P = r^2\pi$$

<u>Znači, površina kruga jednaka je proizvodu broja π i kvadrata poluprečnika.</u>

11. Dužina luka kružnice

Neka je $\ell_1 = AB$ luk koji odgovara centralnom uglu od 1° (sl. 120). Tada je luk ℓ_1 360-ti deo dužine kružnice, tj.:

$$\ell_1 = \frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}.$$



Slika 120

Luk ℓ_2 koji odgovara centralnom uglu od 2° biće:

$$\ell_2 = \frac{r\pi}{180} \cdot 2.$$

Za luk ℓ_3 čiji je centralni ugao 3° dobijamo:

$$\ell_3 = \frac{r\pi}{180} \cdot 3 \text{ itd.}$$

Za luk $\ell = AC$ čiji je centralni ugao α° imamo:

$$\ell = \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha.$$

12. Površina kružnog isečka

Površina kružnog isečka čiji je centralni ugao 1° (sl. 120) je 360-ti deo površine kruga, tj. $\frac{r^2\pi}{360}$. Površina isečka čiji je centralni ugao 2° biće $\frac{r^2\pi}{360} \cdot 2$ itd. Prema tome, površina kružnog isečka čiji je centralni ugao α° biće

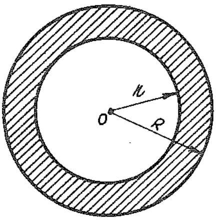
$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}.$$

Ovaj se obrazac može ovako transformisati $P = \frac{r\pi\alpha}{180}$ a pošto je $\frac{r\pi\alpha}{180} = \ell$ (luk čiji je centralni ugao α), za površinu isečka imamo:

$$P = \ell \cdot \frac{r}{2} \quad \text{ili}$$

$$P = \frac{\ell \cdot r}{2}.$$

13. Površina kružnog prstena



Slika 121

Neka je R poluprečnik većeg, a r poluprečnik manjeg od dva koncentrična kruga (sl. 121). Površina kružnog prstena (osenčeni deo sl. 121) se dobija kao razlika površine većeg kruga i površine manjeg kruga, tj.:

$$P = R^2\pi - r^2\pi \quad \text{ili}$$

$$P = \pi(R^2 - r^2).$$

ZADACI:

1/ Pretvoriti u cm^2:

a) $2m^2$, b) $3\ m^2\ 12\ dm^2\ 5\ cm^2$, c) $85\ mm^2$.

2/ Pretvoriti u dm^2, a potom u m^2:

a) 2a, b) 3a $15\ m^2$, c) 8a $2\ m^2\ 3\ dm^2$, d) $85\ dm^2$,

e) $8\ dm^2\ 5\ cm^2$, f) $18\ dm^2\ 4\ mm^2$.

3/ Pretvoriti u are:

a) $3\ km^2$, b) 18 ha 84 a, c) $1o8\ m^2$, d) $84\ dm^2$.

4/ Pretvoriti u ha:

a) $3\ km^2$, b) $2\ km^2$ 3 ha 81 a, c) $1256\ m^2$.

5/ Izračunaj obim i površinu pravougaonika čije su stranice a i b:

a) a = 2 cm, b = 5 cm; b) a = 8 cm, b = 15 mm;

c) a = 3,5 dm, b = 14,8 cm.

6/ Sa 75o komada pločica dužine 2 dm i širine 8 cm popločan je pod kuhinje. Koliko bi komada pločica kvadratnog oblika dužine 1 dm bilo potrebno za popločavanje iste kuhinje?

7/ Izračunaj obim i površinu kvadrata čija je stranica a: a) a = 6 cm, b) a = 4,2 dm, c) a = $5\frac{1}{2}$ dm, d) a = = 2 m 5 cm.

8/ Izračunaj površinu romboida ako su date stranice i njegova visina:
a) a = 5 dm h_a = 3 dm, b) a = 4,2 dm h_a = 25 cm,
c) b = 13 cm h_b = 0,8 cm, d) b = 0,5 dm h_b = 5,4 cm.

9/ Izračunaj obim i površinu romba ako je data stranica a i visina h:
a) a = 2,5 m h = 14 dm, b) a = 3 dm h = 0,8 m,
c) a = 0,005 km h = 0,02 km.

10/ Izračunati obim trougla čije su stranice a, b i c:
a) a = 8 m, b = 0,4 dkm, c = 58 dm ,
b) a = 0,002 km, b = 0,02 hm c = 0,2 dkm. Kakav je taj trougao?

11/ Izračunati površinu trougla ako je data stranica i odgovarajuća visina:
a) a = 5 m h_a = 0,4 dkm, b) b = 4,8 dm h_b = 3,5 dm ,
c) a = 0,05 dm h_a = 120 mm, d) c = $2\frac{1}{2}$ m h_c = $21\frac{3}{5}$ dm.

12/ Izračunati površinu trougla ako su date stranice :
a) a = 12 cm b = 13 cm i c = 5 cm ,
b) a = 15 cm b = 16 cm i c = 17 cm .

13/ Izračunati površinu trougla i sve tri njegove visine ako su date stranice:
a = 13 cm b = 14 cm i c = 15 cm.

14/ Izračunati površinu trapeza ako su mu paralelne stranice: a = 1o dm, b = 2,5 dm i visina h = 4o cm.

15/ Izračunati površinu i obim jednakokrakog trapeza ako su paralelne stranice: a = 1o cm, b = 4 cm, krak c = = 5 cm i visina h = 4 cm.

16/ Obim jednakokrakog trapeza je O = 52 cm, veća paralelna strana a = 22 cm i krak c = 10 cm. Izračunati njegovu površinu.

17/ Obim jednakokrakog trapeza je $O = 28$ cm, a visinu $h = 3$ cm. Izračunati njegovu površinu ako se zna da je veća paralelna strana $a = 13$ cm i da je manja paralelna strana $\underline{b}$ jednaka sa krakom $\underline{c}$.

18/ Primenom tablice (t.7, glava 9) izračunaj površine pravilnog petougla, šestougla i osmougla ako su im stranice jednake:
a) $a = 4$ dm, b) $a = 5$ cm, c) $a = 0{,}08$ km.
Izračunaj i njihove obime.

19/ Nacrtaj jedan nepravilan mnogougao pa mu (merenjem) izračunaj obim i površinu.

20/ Izračunaj površinu deltoida čije su dijagonale:
$d_1 = 6$ cm i $d_2 = 10$ cm.

21/ Izračunaj obim romba ako su date njegove dijagonale i visina: $d_1 = 8$ cm $d_2 = 6$ cm i $h = 4\frac{4}{5}$.

22/ Izračunaj površinu i obim kvadrata čija je dijagonala 2,82 cm.

23/ U kvadratu čija je stranica $a = 4$ cm upisan je krug. Izračunati obim i površinu kvadrata i kruga.

24/ Od kvadratnog komada lima stranice 6 dm treba napraviti maksimalnu kružnu ploču. Koliko će biti otpadaka?

25/ Izračunaj dužinu kružnog luka kružnice čiji je poluprečnik $r = 3$ dm a centralni ugao $\alpha = 45^\circ$.

26/ Centimetarskom pantljikom izmeren je obim stabla bukve $O = 18{,}84$ dm. Koliki je prečnik bukve?

27/ Izračunaj površinu kružnog isečka ako je poluprečnik kruga $r = 8$ cm a centralni ugao $\alpha = 60^\circ$.

28/ Izračunaj površinu kružnog isečka ako je prečnik kruga 4 dm a odgovarajući centralni ugao 75°.

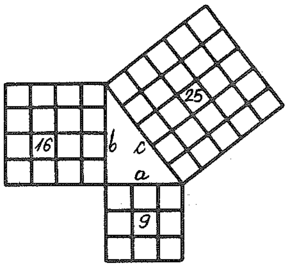
29/ Od kružne ploče prečnika 20 cm treba načiniti kružni prsten debljine 4 cm. Kolika je težina otpadaka, a kolika težina prstena ako 1 cm^2 lima teži 0,8 g?

X GLAVA

PITAGORINA TEOREMA

Ako konstruišemo trougao čije su katete $a = 3$ cm i $b = 4$ cm i izmerimo hipotenuzu $\underline{c}$ videćemo da je ona duga 5 cm.

Konstruišimo sada kvadrate nad katetama $\underline{a}$ i $\underline{b}$ i nad hipotenuzom $\underline{c}$ (sl. 122). Površina kvadrata nad hipotenuzom je 25 cm^2, a kvadrati nad katetama imaju površine od 9 cm^2 i 16 cm^2.



Slika 122

Vidimo da se površina kvadrata nad hipotenuzom $\underline{c}$ dobija kada se saberu površine kvadrata nad katetama $\underline{a}$ i $\underline{b}$ (25 cm^2 = 9 cm^2 + 16 cm^2) ili zapisano opštim brojevima:

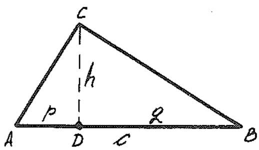
$$\underline{c^2 = a^2 + b^2}.$$

Ovo je Pitagorina teorema ili pravilo koje izražavamo ovako: <u>K v a d r a t n a d h i p o t e n u z o m j e d n a k j e z b i r u k v a d r a t a n a d k a t e t a m a</u>.

Odavde neposredno sleduje:

<u>K v a d r a t n a d j e d n o m k a t e t o m j e d n a k j e r a z l i c i k v a d r a t a n a d h i p o t e n u z o m i k v a d r a t a n a d d r u g o m k a t e t o m</u>.

Pokazaćemo sada da Pitagorino pravilo važi za svaki pravougli trougao a ne samo za trougao čije su stranice 3 cm, 4 cm i 5 cm.



Slika 123

Ako iz temena pravog ugla (C) pravouglog trougla ABC (sl.123) spustimo visinu, dobijamo druga dva pravougla trougla : $\triangle$ ADC i $\triangle$ BDC.

Trouglovi ADC i ABC su slični jer su to dva pravougla trougla, a jedan oštar ugao ($\measuredangle$ A) im je zajednički pa su im drugi oštri uglovi jednaki (zašto?). Iz sličnosti ta dva trougla sleduje proporcionalnost stranica:

$b : c = p : b$, a odavde

$b^2 = c \cdot p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$

Trouglovi BDC i ABC su (iz istih razloga) slični pa imamo:

$a : c = q : a$, tj.

$a^2 = c \cdot q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$

Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo:

$a^2 + b^2 = cq + cp$, tj.

$a^2 + b^2 = c(q + p)$ ili kako je $q + p = c$

$a^2 + b^2 = c \cdot c$, tj.

$a^2 + b^2 = c^2$.

Poslednji obrazac predstavlja Pitagorino pravilo koje, dakle, važi za svaki pravougli trougao.

Iz sličnosti trouglova ACD i BCD imamo:

$h : p = q : h$ ili $h^2 = pq$, tj. $h = \sqrt{pq}$,

što znači da je hipotenuzina visina geometrijska sredina odsečaka (p i q) na koje ona deli hipotenuzu.

P r i m e r i :

(1) Katete pravouglog trougla su $a = 6$ cm i $b = 8$ cm. Izračunati hipotenuzu $\underline{c}$.

Prema Pitagorinoj teoremi imamo:

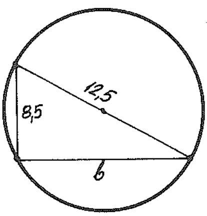
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 6^2 + 8^2$$
$$c^2 = 36 + 64$$
$$c^2 = 100$$
$$c = \sqrt{100}$$
$$c = 10 \text{ cm.}$$

(2) Jedna kateta pravouglog trougla je 12 cm, a hipotenuza 13 cm. Odrediti drugu katetu.

Ako drugu katetu označimo sa x, prema Pitagorinoj teoremi imamo:

$$x^2 = 13^2 - 12^2$$
$$x^2 = 169 - 144$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{25}, \quad \text{tj.}$$
$$x = 5 \text{ cm.}$$

(3) Hipotenuza pravouglog trougla iznosi 12,5 dm, a jedna kateta 8,5 dm. Izračunaj obim i površinu trougla i obim i površinu kruga opisanog oko trougla.



Slika 124

Ako drugu katetu označimo sa b (sl. 124), tada je:

$$b^2 = 12{,}5^2 - 8{,}5^2$$
$$b^2 = 156{,}25 - 72{,}25$$
$$b^2 = 84$$
$$b = \sqrt{84}$$
$$b = 9{,}16 \text{ dm.}$$

Za površinu i obim trougla dobijamo:

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{8{,}5 \cdot 9{,}16}{2} = 38{,}93, \quad \text{tj.} \quad P = 38{,}93 \text{ dm}^2.$$

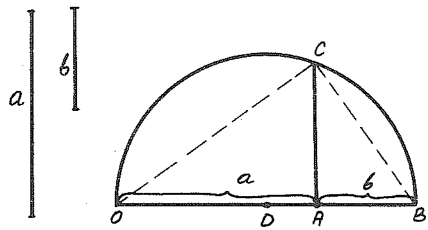
$$O = a + b + c = 8{,}5 + 9{,}16 + 12{,}5 = 30{,}16, \text{ tj. } O = 30{,}16 \text{ dm.}$$

Pošto je poluprečnik opisanog kruga pravouglog trougla jednak polovini hipotenuze, tj. $r = \frac{12,5}{2} = 6,25$ za obim i površinu kruga imamo:

$$O = 2r\pi = 2 \cdot 6,25 \cdot 3,14 = 39,25 \text{ dm}$$

$$P = r^2\pi = 6,25^2 \cdot 3,14 = 39,0625 \cdot 3,14 = 122,66 \text{ dm}^2.$$

(4) Konstruisati geometrijsku sredinu za date duži $\underline{a}$ i $\underline{b}$. Neka su date duži $\underline{a}$ i $\underline{b}$ (sl. 125), Ako na duž $OB = OA + AB = a + b$ konstruišemo polukrug i iz tačke A povučemo normalu $AC \perp OB$, tada je duž AC tražena geometrijska sredina za date duži a i b, jer je trougao OBC pravougli i njegova visina koja odgovara hipotenuzi je geometrijska sredina hipotenuzinih odsečaka, tj.: $AC = \sqrt{ab}$.



Slika 125

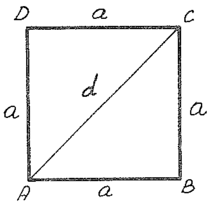
1. Primena Pitagorine teoreme

a) Primena na kvadratu

Dijagonala $\underline{d}$ deli kvadrat ABCD na dva jednakokraka pravougla trougla i predstavlja hipotenuzu za oba trougla (sl. 126). Primenom Pitagorine teoreme, recimo na trougao ABC, dobijamo:

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$
$$d = \sqrt{2a^2}$$
$$\underline{d = a\sqrt{2}} \quad (\text{približna vrednost } \sqrt{2} \approx 1,41).$$

Prema tome, dijagonalu kvadrata dobijamo ako datu stranicu kvadrata pomnožimo sa $\sqrt{2}$. Na primer: naći dijagonalu kvadrata čija je stranica $a = 8$ cm..



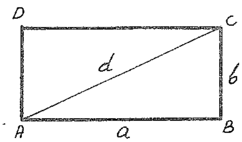
$$d = a\sqrt{2}$$
$$d = 8 \cdot \sqrt{2}$$
$$d \approx 8 \cdot 1,41$$
$$\underline{d \approx 11,28}.$$

Slika 126

b) <u>Primena na pravougaoniku</u>

Pošto dijagonala (d) pravougaonika ABCD deli pravougaonik na dva podudarna pravougla trougla, primenom Pitagorine teoreme za dijagonalu dobijamo (sl. 127):

$$d^2 = a^2 + b^2.$$



Slika 127

Na primer: neka su stranice pravougaonika $a = 6$ cm i $b = 4$ cm. Izračunati dijagonalu:

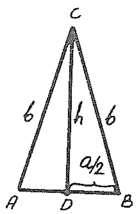
$$d^2 = a^2 + b^2$$
$$d^2 = 6^2 + 4^2$$
$$d^2 = 36 + 16$$
$$d^2 = 52$$
$$d = \sqrt{52} \quad (\sqrt{52} \text{ nalazimo iz tablica})$$
$$d = 7,2111$$

c) Primena na jednokrakom trouglu

Neka je dat jednakokraki trougao ABC sa osnovicom AB = a i kracima AC = BC = b (sl. 128). Visina h koja odgovara osnovici može se izraziti primenom Pitagorine teoreme na pravouglom trouglu BCD, gde je poznata hipotenuza b i kateta $\frac{a}{2}$:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$



Slika 128

Na primer, izračunati površinu jednakokrakog trougla čija je osnovica a = 8 cm i krak b = 5 cm.

Primenom gornjeg obrasca za visinu h imamo:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 5^2 - 4^2$$

$$h^2 = 25 - 16$$

$$h^2 = 9$$

$$h = \sqrt{9}$$

$$h = 3 \text{ cm}.$$

Prema tome, za površinu trougla dobijamo:

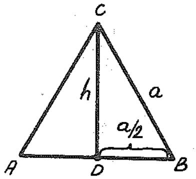
$$P = \frac{a \cdot h}{2}, \quad P = \frac{8 \cdot 3}{2} = 4 \cdot 3 = 12, \quad \text{tj.}$$

$$P = 12 \text{ cm}^2.$$

d) Primena na jednakostraničnom trouglu

Neka je dat jednakostraničan trougao ABC (sl.129) čija je stranica a data. Primenom Pitagorine teoreme na pravouglom trouglu BCD za visinu h dobijamo:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



Slika 129

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}, \quad \text{tj.}$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad \text{ili}$$

$$\underline{\underline{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}} \quad (\sqrt{3} \approx 1{,}73).$$

Prema tome, visina jednakostraničnog trougla se može izračunavati ako je poznata stranica.

Za površinu jednakostraničnog trougla imamo:

$$P = \frac{1}{2}\, a \cdot h, \quad P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \underline{\underline{P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}}.$$

Na primer, izračunati visinu i površinu jednakostraničnog trougla čija je stranica $a = 10$ cm.

Primenom izvedenih obrazaca dobijamo:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = \frac{10 \cdot 1{,}73}{2} = 5 \cdot 1{,}73 = 8{,}65 \text{ cm}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = \frac{100 \cdot 1{,}73}{4} = \frac{173}{4} = 43{,}2 \text{ cm}^2.$$

e) Primena na pravilnom šestouglu

Pravilan šestougao (sl.107) je dijagonalama podeljen na šest jednakostraničnih trouglova. Visina bilo kog od ovih trouglova je u stvari poluprečnik (r) upisanog kruga, tj. $h = r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ gde je a stranica šestougla. Površina šestougla se dobija ako se površina jednog jednakostraničnog trougla pomnoži sa 6, tj.:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \quad \text{ili} \quad P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Z A D A C I :

1/ Izračunati dijagonalu kvadrata čija je stranica $a = 15$ cm.

2/ Izračunati obim i površinu pravougaonika čija je dijagonala $d = 13$ cm a jedna stranica $b = 5$ cm.

3/ Obim jednakokrakog trougla je 32 cm, a krak 10 cm. Izračunati njegovu površinu.

4/ Osnovica jednakokrakog trougla je $a = 18$ cm, a njena visina $h = 12$ cm. Izračunati obim i površinu trougla.

5/ Izračunati obim, visinu i površinu jednakostraničnog trougla stranice $a = 12$ dm.

6/ Data je stranica $a = 4$ cm pravilnog šestougla. Izračunati njegov obim i površinu, a zatim izračunati obim i površinu opisanog i upisanog kruga toga šestougla.

7/ U krugu poluprečnika $r = 2{,}5$ cm povučen je prečnik AB i tetiva BC = 3 cm. Izračunati dužinu tetive AC i izračunati površinu trougla ABC.

8/ Nacrtaj proizvoljno dve duži m i n, a potom konstruiši njihovu aritmetičku i geometrijsku sredinu.

2. Mešoviti zadaci

1/ Data je duž $\overline{a}$.
a) konstruiši simetralu date duži;
b) konstruiši duž koja je četiri puta manja od date duži;
c) konstruiši duž $\frac{3}{2}a$.

2/ Duž AB podeljena je tačkom C u odnosu 5 : 7, a tačkom D u odnosu 5 : 11. Odrediti dužinu duži AB ako je rastojanje između C i D 10 cm.

3/ Dati su oštri uglovi α i β $(\alpha > \beta)$. Konstruiši uglove $2\alpha + \beta$, $2\alpha - \beta$, $\frac{\alpha}{2} + \beta$, $4\alpha - 2\beta$.

4/ Dati su uglovi $\alpha = 62^\circ\ 38'\ 45''$ i $\beta = 38^\circ\ 28'\ 56''$
Izračunati: $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, 3α, $\frac{\beta}{4}$.

5/ Konstruiši uglove od: 60°, 120°, 75°, 225°, 135°, $277^\circ 3($

6/ Naći komplementan i suplementan ugao datom uglu $\alpha = 48^\circ\ 28'\ 28''$.

7/ Dužina jedne stranice jednakokrakog trougla iznosi 25 mm, a druge 10 mm. Koja od njih može biti osnovica jednakokrakog trougla?

8/ Uglovi na osnovici jednakokrakog trougla su jednaki. Dokazati.

9/ Krak jednakokrakog trougla je 5 cm. Iz proizvoljne tačke na osnovici povučene su dve prave paralelne kracima trougla. Izračunati obim dobijenog paralelograma.

10/ Na datoj pravoj naći tačku koja je podjednako udaljena od dveju datih tačaka izvan date prave.

11/ Konstruisati jednakostranični trougao ako je data visina.

12/ Konstruisati jednakokraki trougao ako je dato:
a) osnovica i ugao pri vrhu ;
b) krak i ugao na osnovici ;
c) osnovica i ugao na njoj .

13/ Konstruisati pravougli trougao ako je dato:
a) zbir kateta i hipotenuza ;
b) razlika kateta i hipotenuza ;
c) jedna kateta i jedan oštar ugao .

14/ Konstruisati trougao ako je dato:
a) dve stranice i zahvaćeni ugao ;
b) jedna stranica i dva ugla ;
c) sve tri stranice ;
d) dve stranice i ugao naspram veće stranice .

15/ Konstruisati trougao kad je data jedna stranica, ugao na njoj i težišna linija koja odgovara datoj stranici.

16/ Konstruisati trougao kad su date dve stranice i težišna linija treće stranice.

17/ Konstruisati pravougaonik kad je data dijagonala i zbir dužine i širine pravougaonika.

18/ Konstruiši kvadrat kad je dato:
a) dijagonala;
b) zbir dijagonale i stranice;
c) razlika dijagonale i stranice.

19/ Konstruiši romb ako je dato:
a) visina i dijagonala;
b) obim i jedna dijagonala;
c) stranica i zbir ili razlika dijagonala.

20/ Konstruisati trapez ako su date osnovice i dijagonale.

21/ Konstruisati jednakokraki trapez ABCD pomoću osnovica AB i CD i dijagonale AC.

22/ Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz dve date tačke A i B a centar joj je na datoj pravoj a.

23/ Konstruisati krug koji dodiruje krake datog ugla a poluprečnik mu je data duž.

24/ Konstruisati kružnicu datog poluprečnika koja dodiruje datu pravu i prolazi kroz datu tačku.

25/ Izračunati obim i površinu pravouglog trougla ako je hipotenuza za 2 cm veća od jedne katete, a druga kateta je 6 cm.

26/ U kvadratu je upisan drugi kvadrat tako da su mu temena u sredinama stranica prvoga. Kako se odnose površine ovih kvadrata?

27/ Paralelne stranice trapeza su 18 cm i 4 cm, a neparalelne 13 cm i 15 cm. Izračunati površinu trapeza.

29/ Na kom rastojanju od vrha jednakokrakog trougla treba preseći trougao pravom paralelno osnovici, tako da odnos površina dobijenog jednakokrakog trougla i jednakokrakog trapeza bude 1 : 5?

30/ Odrediti stranice trougla sličnog trouglu sa stranicama 20, 15 i 10 cm.

31/ U jednakokrakom trouglu ugao pri vrhu je 45°, a osnovica 3 cm. Konstruisati trougao sličan datom trouglu sa osnovicom $3\sqrt{2}$ cm.

32/ Izračunati katete pravouglog trougla kad su dati odsečci 2 cm i 18 cm, na koje hipotenuzina visina deli hipotenuzu.

33/ U jednakostraničnom trouglu čija je stranica 10 cm, upisan je maksimalan kvadrat. Izračunati površinu kvadrata.

34/ Stranica pravilnog šestougla je 2 cm. Naći razliku površina opisanog i upisanog kruga datog šestougla.

35/ Konstruisati pravilan osmogao čija je stranica 2 cm.

36/ Date su duži a i b. Konstruiši duž:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}.$$

37/ Date su duži a i b. Konstruiši duž:

a) $x = \sqrt{ab}$;

b) $y = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$;

c) $z = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{ab}$.

38/ Konstruiši duži: $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

XI GLAVA

IZRAČUNAVANJE POVRŠINE I ZAPREMINE GEOMETRIJSKIH TELA

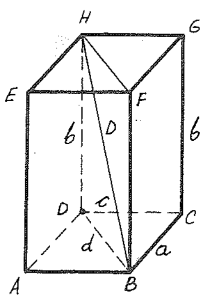
1. Pojam površine i zapremine geometrijskog tela

Površina tela se izračunava tako što se najpre izračunaju površine svih površi kojima je telo ograničeno pa se dobijene površine saberu. Tako, na primer, površina kocke se dobija kao zbir površina šest jednakih kvadrata kojima je kocka ograničena.

Izračunati zapreminu nekog tela znači odrediti koliko se puta neka druga zapremina koja je izabrana za jedinicu sadrži u telu čiju zapreminu merimo.

2. Kvadar

Mnogi predmeti koji nas okružuju imaju oblik kvadra (kutija za šibice, razni sanduci, knjige, ormari i dr.). Kvadar ili pravougli paralelepiped, ograničen je sa šest pravougaonika, od kojih su po dva naspramna podudarna. Kvadar ima dve osnovne strane (ABCD i EFGH), a ostale četiri su bočne (sl. 130). Kvadar ima 8 temena i 12 ivica (8 osnovnih i četiri bočne). Tri ivice koje polaze iz jednog temena predstavljaju dimenzije kvadra (dužina, širina i visina), na primer AD = a, AB = b i AE = c. Ove ivice su međusobno normalne.



Slika 130

Mreža kvadra predstavljena je na sl. 131. Ako ovu mrežu nacrtamo na kartonu ili krućoj hartiji i sastavimo je savijanjem po dužima koje su izvučene crticama, dobićemo model kvadra. Ako dimenzije kvadra obeležimo sa <u>a</u>, <u>b</u> i <u>c</u>, a njegovu površinu sa P, imamo:

$$P = 2ab + 2ac + 2bc \quad \text{ili}$$
$$P = 2(ab + ac + bc),$$

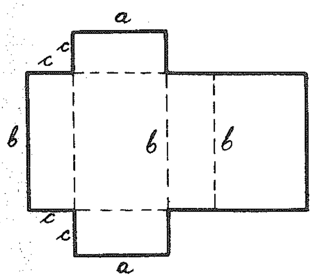
jer su po dva pravougaonika podudarna, a površina jednog jednaka je proizvodu njegovih dimenzija.

Zapremina (V) kvadra jednaka je proizvodu njegovih dimenzija, tj.

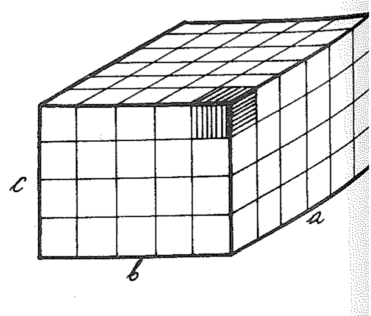
$$V = abc.$$

Da je ovaj obrazac tačan pokazaćemo sledećim primerom: neka su a = 6 m, b = 5 m i c = 4 m dimenzije jedne sobe. Treba naći zapreminu sobe.

Uz ivicu <u>a</u> sobe (sl. 132) može se postaviti 6 kocki zapremine 1 m^3, a čitav pod bi se pokrio sa 5 ovakvih redova, tj. $6 \cdot 5 = 30\ m^3$. Od poda do tavanice bi imalo svega 4 ovakva sloja, tj. $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120\ m^3$. Dakle, merni broj zapremine sobe dobija se kada se pomnože merni brojevi dimenzija sobe. Znači, zapremina kvadra jednaka je proizvodu njegovih dimenzija.



Slika 131.



Slika 132

Iz pravouglog trougla HDB koji se nalazi u dijagonalnom preseku kvadra za dijagonalu D imamo:

$D^2 = b^2 + d^2$, i pošto je $d^2 = a^2 + c^2$, dobijamo

$D^2 = b^2 + a^2 + c^2$, tj.

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

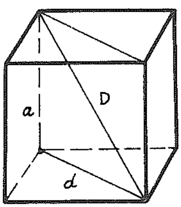
Primer: Izračunati površinu i zapreminu kvadra čije su dimenzije a = 0,5 dm, b = 18 cm i c = 15 cm.

Rešenje: Najpre treba sve dimenzije izraziti istim jedinicama, na primer, centimetrima. U tu svrhu dovoljno je samo prvu dimenziju pretvoriti u cm, tj. a = 0,5 dm = 5 cm. Druge dve dimenzije već su date centimetrima.

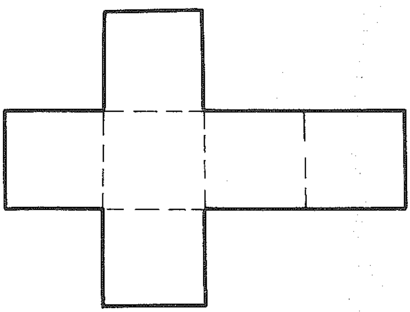
$P = 2\,(ab + ac + bc) = 2\,(5 \cdot 18 + 5 \cdot 15 + 18 \cdot 15) =$
$= 870$, tj.
$P = 870\ cm^2$
$V = abc = 5 \cdot 18 \cdot 15 = 1350$, tj.
$V = 1350\ cm^3$.

3. Kocka

Kocka je geometrijsko telo koje je ograničeno sa 6 podudarnih kvadrata (sl. 133). Mreža kocke je predstavljena na sl. 134.



Slika 133



Slika 134

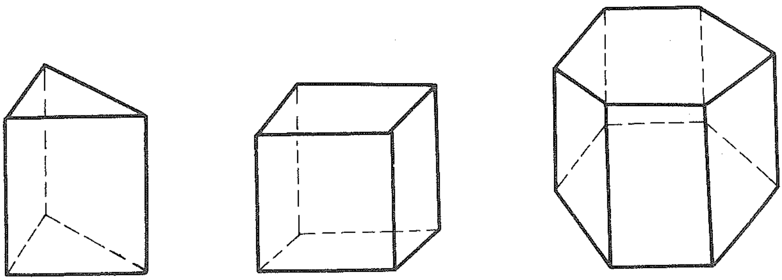
Pošto je kocka ograničena sa 6 jednakih kvadrata, njena površina je $P = 6a^2$, gde <u>a</u> predstavlja ivicu kocke. Pošto su sve tri dimenzije kocke jednake, njena zapremina se izračunava po obrascu:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Za dijagonalu kocke D imamo: $D^2 = a^2 + d^2$, $D^2 = a^2 + 2a^2$ (jer je $d^2 = a^2 + a^2$), $D^2 = 3a^2$, $D = a\sqrt{3}$.

4. Prizma

Na sl. 135 predstavljene su tri prizme. Prva od njih ima za osnovu trougao i zove se trostrana prizma; druga ima za osnovu četvorougao i zove se četvorostrana prizma, a treća ima za osnovu šestougao pa se zove šestostrana.



Slika 135

Znači, prema broju stranica mnogougla osnove prizme mogu biti trostrane, četvorostrane, petostrane itd.

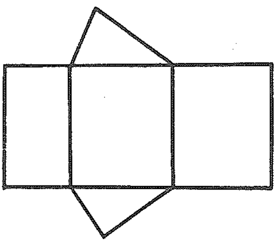
Ako su bočne ivice prizme normalne na ravni osnove, prizma je prava. Ako,pak,bočne ivice nisu normalne na ravni osnove,prizma je kosa. Prava prizma koja za osnovu ima pravilan mnogougao zove se pravilna prizma.

Na sl. 136 predstavljena je mreža prave trostrane prizme. Ona se sastoji od tri pravougaonika različitih osnovica i jednakih visina i od dva podudarna trougla čije su stranice jednake osnovicama pravougaonika. Ova dva trougla su osnove ili baze prizme a sva tri pravougaonika čine omotač prizme.

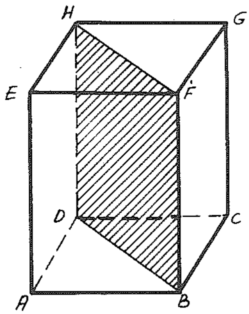
Ako površinu osnove prizme obeležimo sa B, a površinu omotača sa M, za površinu prizme imamo $P = 2B + M$.

Prema tome, površina svake prizme jednaka je zbiru površina dveju njenih baza i omotača.

Ako kroz dijagonale BD i HF kvadra ABCDEFGH (sl. 137) postavimo jednu ravan, tada ona deli kvadar na dve jednake trostrane prizme.



Slika 136



Slika 137

Kako je $a \cdot b \cdot c$ zapremina kvadra čije su ivice a, b i c, zapremina jedne ove trostrane prizme jednaka je polovini zapremine kvadra, tj. $\frac{abc}{2}$. Vrednost $\frac{ab}{2}$ predstavlja površinu pravouglog trougla ABD ili BCD a $\underline{c}$ visinu prizme. Prema tome, zapremina prizme jednaka je proizvodu p površine osnove $(\frac{ab}{2})$ i visina (c).

Ako sa B označimo površinu osnove bilo koje prizme, a sa H njenu visinu, opšti obrazac za zapreminu prizme izražava se ovako:

$$V = B \cdot H$$

Ovaj obrazac se može primeniti za izračunavanje zapremine svake prizme, samo treba voditi računa o tome da je visina kose prizme različita od bočne ivice (visina je kraća). Inače, kod pravih prizmi visina je jednaka sa bočnom ivicom.

Primer 1. Izračunati površinu i zapreminu prave trostrane prizme čije su osnovne ivice $a = 40$ cm, $b = 13$ cm, $c = 37$ cm i visina $H = 50$ cm.

Rešenje: Primenom Heronovog obrasca za površinu osnove B dobijamo: $s = \frac{a + b + c}{2} = 45$

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$B = \sqrt{45 \cdot (45-40)(45-13)(45-37)}$$

$$B = \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 32 \cdot 8} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 8^2}$$

$$B = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 = 240, \text{ tj.}$$

$$B = 240 \text{ cm}^2.$$

Omotač M se sastoji od tri pravougaonika pa je njegova površina:

$$M = aH + bH + cH$$

$$M = 40 \cdot 50 + 13 \cdot 50 + 37 \cdot 50 = 2000 + 650 + 1850, \text{ tj.}$$

$$M = 4500 \text{ cm}^2.$$

Za površinu prizme imamo:

$$P = 2B + M = 2 \cdot 240 + 4500 = 4980, \text{ tj.}$$

$$P = 4980 \text{ cm}^2 = 49,8 \text{ dm}^2.$$

Za zapreminu prizme imamo:

$$V = B \cdot H$$

$$V = 240 \cdot 50$$

$$V = 12000 \text{ cm}^3 = 12 \text{ dm}^3$$

Primer 2. Izračunati težinu gvozdene šipke dužine $H = 1,2$ m čiji poprečni presek ima oblik pravilnog šestougla stranice $a = 1,2$ cm (specifična težina gvožđa je $s = 7,8$).

Rešenje: Težina tela (T) izračunava se po obrascu $T = V \cdot s$, gde je V zapremina tela a s specifična težina materijala.

Ova šipka ima oblik pravilne šestostrane prizme. Njena zapremina je:

$$V = B \cdot H = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 6 \cdot \frac{1,2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 120 =$$

$= 6 \cdot 1{,}44 \cdot 1{,}73 \cdot 30$, tj.

$V = 448{,}416\ cm^3$

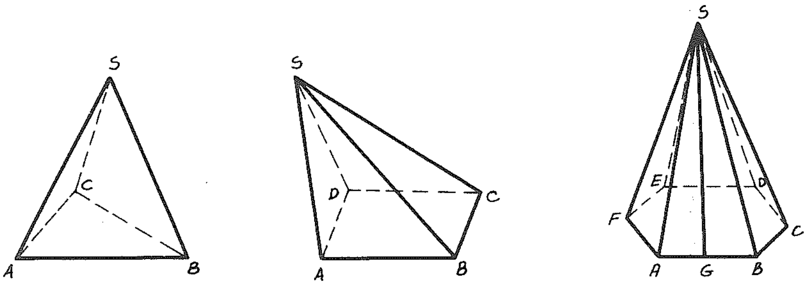
Za težinu imamo: $T = 448{,}416 \cdot 7{,}8 = 3497{,}6448$ ili

$T \approx 3{,}5$ kg.

5. Piramida

Prema broju stranica osnove piramide mogu biti trostrane, četvorostrane, petostrane itd.

Na sl. 138 nacrtane su jedna trostrana, jedna četvorostrana i jedna šestostrana piramida.



Slika 138

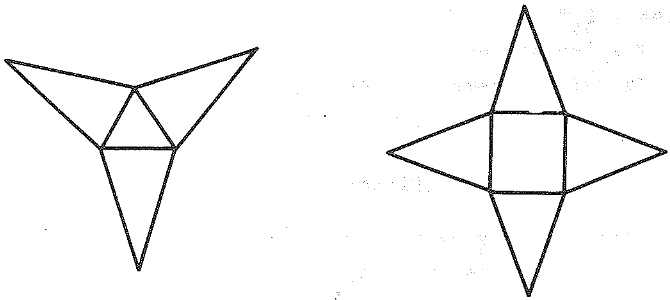
Ako su bočne ivice piramide jednake, njen omotač sačinjavaju jednakokraki trouglovi, a osnova je tzv. tetivni mnogougao (mnogougao oko koga se može opisati krug). U tom slučaju podnožje visine se nalazi u centru toga kruga.

Piramida čije su sve bočne ivice jednake a osnova joj je pravilan mnogougao zove se pravilna piramida. Omotač svake pravilne piramide sastoji se od podudarnih jednakokrakih trouglova. Visina jednog od ovih trouglova se zove apotema.

Na sl. 139 predstavljene su mreže pravilne trostrane i pravilne četvorostrane piramide.

Površina svake piramide jednaka je zbiru površine osnove i površine omotača, tj.

$$P = B + M$$



Slika 139

Da bismo odredili zapreminu piramide, poslužićemo se ovim eksperimentom. Uzmemo model ma kakve prizme i model piramide koja sa prizmom ima jednaku osnovu i visinu. Piramidu napunimo peskom ili vodom i prespemo u prizmu. Videćemo da će biti potrebno da to isto tri puta učinimo da bismo napunili prizmu. Iz ovoga zaključujemo da je zapremina piramide jednaka trećini zapremine prizme koja sa njom ima jednaku osnovu i visinu, tj.

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H,$$

gde je B površina osnove, a H visina piramide.

Primer 1. Izračunati površinu pravilne četvorostrane piramide čija je osnovna ivica $a = 6$ cm i bočna ivica $b = 5$ cm.

Rešenje: Osnova piramide je kvadrat stranice a, a omotač zbir četiri podudarna jednakokraka trougla sa osnovicom a i krakom b. Prema tome je:

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{ah}{2} = a^2 + 2ah = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot h,$$ gde

je h apotema piramide. Merenjem možemo naći da je $h = 4$ cm (h se može izračunati primenom Pitagorine teoreme), pa je

$$P = 36 + 12 \cdot 4 = 84, \quad \text{tj.}$$
$$P = 84 \text{ cm}^2.$$

Primer 2. Osnova trostrane piramide je pravougli trougao sa katetama $a = 7$ cm i $b = 10$ cm. Izračunati zapreminu piramide ako je njena visina $H = 15$ cm.

Rešenje: Kako je osnova pravougli trougao sa katetama a i b, njegova površina je $B = \frac{ab}{2}$.

Za zapreminu piramide imamo:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot H \quad \text{ili}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 10}{2} \cdot 15 = 175, \quad \text{tj.}$$

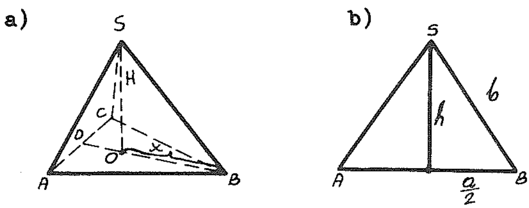
$$\underline{V = 175 \text{ cm}^3}.$$

Primer 3. Izračunati površinu i zapreminu pravilne trostrane piramide čija je osnovna ivica $a = 12$ cm, a bočna ivica $b = 10$ cm.

Rešenje: Osnova piramide je jednakostraničan trougao stranice a. Za površinu osnove imamo:

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} = 36 \cdot 1{,}73 = 62{,}28, \text{ tj.}$$

$B = 62{,}28 \text{ cm}^2$.



Slika 140

Omotač piramide čine tri jednakokraka trougla sa osnovicom a i krakom b. Apotemu h piramide izračunavamo iz jednog od ovih jednakokrakih trouglova (sl. 140b).

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 10^2 - 6^2$$

$$h^2 = 64$$

$h = \sqrt{64}$

$h = 8$ cm.

Za površinu omotača imamo:

$M = 3 \cdot \frac{ah}{2} = 3 \cdot \frac{12 \cdot 8}{2} = 144$, tj.

$M = 144$ cm^2.

Površina piramide će biti:

$P = B + M = 62,28 + 144$,

$P = 206,28$ cm^2.

Primenom Pitagorine teoreme na trougao SOB (sl. 140a) imamo:

$$H^2 = b^2 - x^2.$$

Pošto je $\underline{BD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ visina i ujedno težišna linija jednakostranične trougla ABC, to je $x = \frac{2}{3}BD$, tj. $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pa imamo:

$$H^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 10^2 - \left(\frac{12\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 100 - (4\sqrt{3})^2 =$$

$$= 100 - 48 = 52$$

$H^2 = 52$, $H = \sqrt{52}$, tj. $H = 7,21$.

Za zapreminu V dobijamo:

$V = \frac{1}{3} B \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot 62,28 \cdot 7,21$, tj.

$V = 149,68$ cm^3.

Primer 4. Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane piramide čija je osnovna ivica $a = 12$ cm i visina $H_s = 8$ cm.

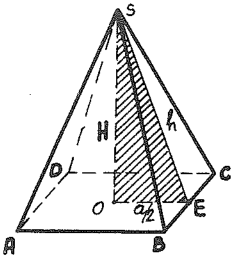
Rešenje: Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao SOE (sl. 141) za apotemu $\underline{h}$ imamo:

$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = 8^2 + 6^2$

$h^2 = 100$

$h = 10$ cm.



Slika 141

Za površinu imamo:

$P = B + M = a^2 + 4 \cdot \frac{ah}{2} = a^2 +$

$+ 2ah = 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 10 =$

$= 144 + 240$, tj.

$P = 384\ cm^2$.

Za zapreminu imamo:

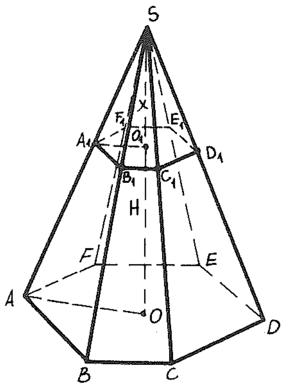
$V = \frac{1}{3}\ B \cdot H = \frac{1}{3}\ a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 =$

$= \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8$, tj.

$V = 384\ cm^3$.

6. Paralelni preseci piramide. Zarubljena piramida

Ako se piramida (sl. 142) preseče jednom ravni paralelno osnovi, tada se dobijeni presek naziva paralelnim presekom piramide. Dokazaćemo sledeću teoremu:



Slika 142

Paralelan presek piramide je mnogougao koji je sličan sa mnogouglom osnove, a površine ovih mnogouglova odnose se kao kvadrati njihovih rastojanja od vrha piramide.

Prema sl. 142. imamo:

$\measuredangle A = \measuredangle A_1$, $\measuredangle B = \measuredangle B_1$, $\measuredangle C = \measuredangle C_1$, $\measuredangle D = \measuredangle D_1$ itd.

(uglovi sa paralelnim kracima). Dalje je prema Talesovoj teoremi

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \ldots\ldots = \frac{SF_1}{SF} = k$$

$$\frac{SA_1}{SA} \quad \frac{A_1B_1}{AB} \quad \frac{B_1C_1}{BC} = \ldots\ldots = \frac{A_1F_1}{AF} = k \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Na osnovu (1) i (2) mnogouglovi ABCDEF i $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ su slični.

Neka su P_1 i P površine paralelnog preseka i osnove piramide. Iz sličnosti trouglova SA_1B_1 i SAB, kao i iz sličnosti trouglova SA_1O_1 i SAO sledi

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{SO_1}{SO} \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

Pošto se posmatrani mnogouglovi slični, njihove površine se odnose kao kvadrati njihovih homolognih stranica, tj.

$$\frac{P_1}{P} = \frac{{A_1B_1}^2}{AB_2^2} \quad \text{ili prema (3) dobijamo:}$$

$$\frac{P_1}{P} = \frac{{SO_1}^2}{SO^2}, \quad \text{što je i trebalo dokazati.}$$

Ako se piramida SABCDEF (sl. 142) preseče ravni paralelno osnovi i ako se odbaci tako dobijena manja piramida $SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (dopuna prvobitne piramide), dobija se zarubljena piramida $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ABCDEF. Prema broju stranica osnove zarubljene piramide mogu biti trostrane, četvorostrane, petostrane itd. Zarubljena piramida ima dve osnove (donju i gornju). Omotač zarubljene piramide se sastoji od trapeza, a osnove (baze) su dva slična mnogougla. Ako su osnove zarubljene piramide pravilni mnogouglovi, zarubljena piramida je pravilna. U tom slučaju se omotač sastoji od jednakokrakih trapeza.

Ako sa B i B_1 označimo površine donje i gornje osnove, a sa M površinu omotača zarubljene piramide, njena površina P data je obrascem:

$$P = B + B_1 + M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

Ako sa V označimo zapreminu zarubljene piramide $A_1B_1C_1D_1E_1F_1ABCDEF$, sa H njenu visinu ($H = OO_1$) (sl. 142), sa V_2 zapreminu piramide $SABCDEF$, sa V_1 zapreminu dopune (piramide $SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$) i njenu visinu sa $x = SO_1$, tada je:

$$V = V_2 - V_1$$

$$V = \frac{B(H + x)}{3} - \frac{B_1x}{3}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

gde B i B_1 predstavljaju površine osnova zarubljene piramide. Pošto se površine osnova odnose kao kvadrati rastojanja od vrha, imamo:

$$\frac{B}{B_1} = \frac{(H + x)^2}{x^2} \quad \text{ili}$$

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}} = \frac{H + x}{x}, \text{ a odavde se za x dobija}$$

$$x = \frac{H\sqrt{B_1}}{\sqrt{B} - \sqrt{B_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Zamenom (6) u (5) za zapreminu zarubljene piramide dobijamo

$$V = \frac{H}{3}\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Primer 1. Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane zarubljene piramide ako su date stranice osnova $a = 8$ dm, $b = 5$ dm i visina $H = 10$ dm.

Rešenje: Osnove su kvadrati, pa imamo:

$$B = a^2 = 8^2 = 64, \qquad B_1 = b^2 - 5^2 = 25.$$

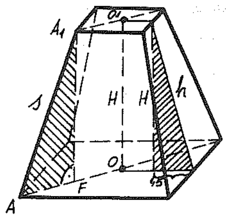
Omotač se sastoji od četiri podudarna jednakokraka trapeza čije su osnovice $a = 8$ dm i $b = 5$ dm. Visina h jednog od ovih trapeza je (sl. 143):

$$h^2 = H^2 + 1,5^2$$

$$h^2 = 100 + 2,25$$

$$h^2 = 102,25$$

$$h = \sqrt{102,25}$$



Slika 143

$h = 10{,}11$, a njegova površina

$$\frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{8+5}{2} \cdot 10{,}11 =$$

$$= \frac{13}{2} \cdot 10{,}11 = 65{,}715.$$

Površina ove piramide je:

$$P = B + B_1 + M$$

$$P = 64 + 25 + 4 \cdot 65{,}715$$

$$P = 351{,}86 \text{ dm}^2$$

Zapremina je:

$$V = \frac{H}{3}(B + B_1 + \sqrt{BB_1})$$

$$V = \frac{10}{3}(64 + 25 + \sqrt{64 \cdot 25})$$

$$V = \frac{10}{3}(64 + 25 + 8 \cdot 5), \quad \text{tj.}$$

$$V = \frac{10}{3} \cdot 129 = 430 \text{ dm}^3.$$

Primer 2. Površina osnove piramide je 150 cm^2, a površina paralelnog preseka 54 cm^2. Njihovo rastojanje je 14 cm. Naći visinu piramide.

Površina preseka i površina osnove piramide proporcionalni su kvadratima njihovog rastojanja od vrha, tj.

$\frac{54}{150} = \frac{x^2}{(14+x)^2}$, gde je x rastojanje od preseka do vrha piramide. Rešavajući poslednju jednačinu dobijamo $x = 21$ cm. Visina piramide je $14 + x = 35$ cm.

Primer 3. Visina pravilne četvorostrane zarubljene piramide je 7 cm a osnovne ivice 10 cm i 2 cm. Naći bočnu ivicu piramide.

U dijagonalnom preseku ove piramide imamo pravougli trougao AFA_1 (vidi sl. 143) sa pravim uglom u temenu F. Kateta FA_1 jednaka je sa visinom zarubljene piramide, tj. $FA_1 = H = 7$ cm. Druga kateta $FA = OA - OF = OA - O_1A_1$, jer je $OF = O_1A_1$. Međutim, OA je polovina dijagonale veće osnove piramide, a O_1A_1 polovina dijagonale manje osnove. Kako su ove osnove kvadrati, njihove dijagonale su $10\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$, pa je

$$OA = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \quad \text{i} \quad O_1A_1 = OF = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$FA = OA - O_1A_1 = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Primenom Pitagorine teoreme na trougao AFA_1 dobijamo:

$$AA_1^{\,2} = AF^2 + A_1F^2$$

$$A_1A^2 = (4\sqrt{2})^2 + 7^2$$

$$A_1A^2 = 16 \cdot 2 + 49$$

$$A_1A^2 = 32 + 49$$

$$A_1A = \sqrt{81}$$

$$A_1A = 9 \text{ cm.}$$

Znači, bočna ivica AA_1 zarubljene piramide je 9 cm.

7. Valjak

Valjak je geometrijsko telo ograničeno sa dva kruga (dve osnove) i jednom valjkastom površi (omotač). Prava koja prolazi kroz centre obeju osnova zove se osa (osovina) valjka (sl. 144). Ako osa valjka stoji normalno na ravni osnove, valjak je prav (sl. 144a), a ako je osa kosa prema ravni osnove, valjak je kos (sl. 144b).

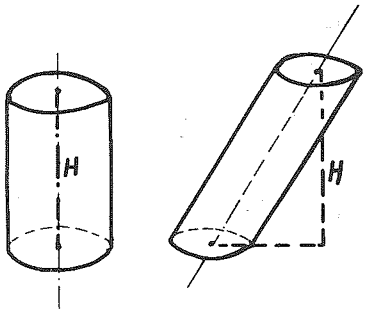
Mreža pravog valjka je data na sl. 145. Ona se sastoji od dva kruga (osnove) i jednog pravougaonika (omotača) čije su dimenzije obim osnove ($2r\pi$) i visina valjka H.

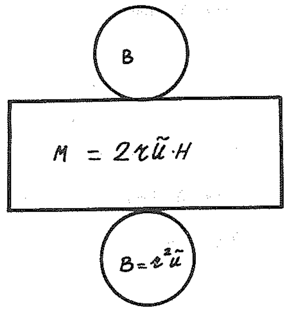
Površina valjka se izračunava po obrascu

$P = 2B + M$, gde je B površina osnove a M površina omotača, tj.

$$P = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot H$$

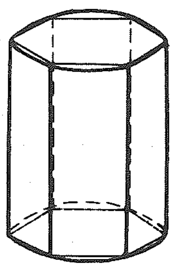
$P = 2r\pi(r + H)$, gde je r polupečnik osnove a H visina valjka.





Slika 144 Slika 145

Na slici 146 nacrtan je valjak u kome je upisana pravilna šestostrana prizma.



Slika 146

Ako sada zamislimo da su u istom valjku upisane pravilne prizme sa 12, 24, 48 strana itd., tada broj stranica upisanog mnogougla u krugu neprestano raste i približava se obimu kruga, a površina mnogougla sve se više približava površini kruga. Zbog toga će se i zapremina upisane prizme sve više približavati zapremini valjka u kome je upisana.

Na osnovu toga vidimo da se zapremina valjka može izračunati kao i zapremina prizme tako da se površina osnove pomnoži visinom, tj.

$V = B \cdot H$ ili

$B = r^2\pi$ imamo

$V = r^2\pi \cdot H$

Primer: Izračunati površinu i zapreminu valjka ako je prečnik osnove $2r = 16$ cm i visina $H = 12$ cm.

Rešenje:

$P = 2r\pi (r + H)$ $\quad$ $V = r^2\pi \cdot H$

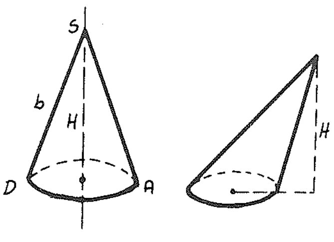
$P = 16 \cdot 3{,}14\ (8 + 12)$ $\quad$ $V = 8^2 \cdot 3{,}14 \cdot 12$

$P = 16 \cdot 3{,}14 \cdot 20$ $\quad$ $V = 64 \cdot 3{,}14 \cdot 12$

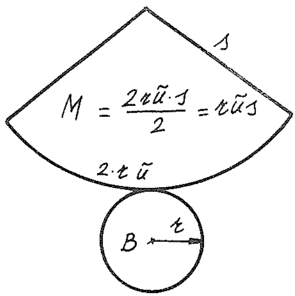
$P = 1004{,}8\ cm^2$ $\quad$ $V = 2411{,}52\ cm^3$

8. Kupa

Kupa je geometrijsko telo koje je ograničeno jednim krugom (osnova) i jednom kupastom površi (omotač). Prava koja prolazi kroz vrh kupe i centar osnove zove se osa kupe(sl. 147). Ako je osa kupe normalna na ravni osnove, kupa je prava (sl. 147a), a ako ję osa kosa prema ravni osnove, kupa je kosa (sl. 147b). Kod prave kupe visina je deo ose između vrha kupe i ravni osnove. Duž koja spaja vrh kupe sa bilo kojom tačkom na kružnici u osnovi zove se izvodnica. Na primer SD = s.



Slika 147



Slika 148

Na sl. 148. nacrtana je mreža prave kupe. Ona se sastoji iz jednog kruga (osnova B) i jednog kružnog isečka (omotač M) čiji je poluprečnik jednak izvodnici kupe s, a luk toga isečka jednak je obimu kruga osnove $2\ r\pi$.

Površina kupe se izračunava po obrascu:

$P = B + M$, gde je B površina osnove i M površina omotača. Kako je $B = r^2\pi$ i $M = \frac{2r\pi \cdot s}{2} = r\pi s$, za površinu imamo:

$$P = r^2\pi + r\pi s, \quad \text{ili}$$

$$P = r\pi \cdot (r + s)$$ gde je r poluprečnik osnove a s izvodnica kupe.

Za izračunavanje zapremine kupe poslužićemo se ovi eksperimentom. Uzmemo model jednog pravog valjka i model je dne kupe koja sa valjkom ima jednaku osnovu i visinu. Kupu napunimo peskom ili vodom i prespemo u valjak. Videćemo da ć biti potrebno da to isto učinimo tri puta da bismo napunili valjak. Iz ovoga zaključujemo: zapremina kupe jednaka je tre ćini zapremine valjka koji sa njom ima jednaku osnovu i visi nu, tj.

$V = \frac{1}{3} B \cdot H$, gde je B površina osnove a H visina kupe, ili

$V = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot H$ gde je r poluprečnik osnove, a H visina kupe.

Primer: Izračunati površinu i zapreminu prave kupe čiji je poluprečnik osnove r = 6 cm i visina kupe H = 8 cm.

Rešenje: Množenjem nalazimo da je s = 10 cm (ili primenom Pitagorine teoreme $s^2 = H^2 + r^2$, $s^2 = 8^2 + 6^2$ itd. pa imamo

$P = r\pi(r + s)$

$P = 6 \cdot 3{,}14\ (6 + 10)$

$P = 6 \cdot 3{,}14 \cdot 16$

$P = 151{,}44\ cm^2$

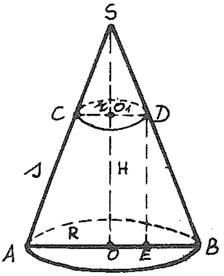
$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot H$

$V = \frac{1}{3} 6^2 \cdot 3{,}14 \cdot 8$

$V = 151{,}44\ cm^3$

9. Preseci kupe. Zarubljena kupa

Od preseka kupe pomenućemo osni i paralelan presek. Osni presek se dobija ako se kupa preseče ravni koja prolazi kroz osu kupe. Osni presek prave kupe je jednakokraki trougao, čija je osnovica prečnik kruga osnove a kraci su mu jednaki sa izvodnicom kupe (sl. 149). Pod paralelnim presekom podrazumevamo presek kupe ravni koja je paralelna sa ravni osnove. Ako je kupa prava, za paralelan presek se dobija krug (sl. 149). Kada se kupa preseče jednom ravni paralelno osnovi i ako se odbaci tako dobijena manja kupa (dopuna), preostalo geometrijsko telo naziva se zarubljena kupa. Zarubljena kupa je ograničena jednim većim i jednim manjim krugom (osnove) i jednım isečkom kružnog prstena (omotač). Duž OO_1 (sl. 149) je visina zarubljene kupe. U stvari to je ujedno i visina jednakokrakog trapeza ABCD koji predstavlja osni presek zarubljene kupe. Krak AC = BD = s predstavlja izvodnicu zarubljene kupe.



Slika 149

Ako sa B i B_1 označimo površine donje i gornje osnove zarubljene kupe a sa M površinu omotača, za površinu P zarubljene kupe imamo

$$P = B + B_1 + M$$

Pošto su osnove krugovi čije ćemo poluprečnike označiti sa R i r, površine osnova su:

$$B = R^2\pi \qquad \text{i} \qquad B_1 = r^2\pi.$$

Površinu omotača zarubljene kupe M možemo izraziti kao razliku površine omotača cele kupe i površine omotača dopune. Ako sa <u>s</u> označimo izvodnicu zarubljene kupe, i sa <u>y</u> izvodnicu dopune, izvodnica cele kupe je (s + y). Za omotač M imamo:

$$M = R\pi(s + y) - r\pi y$$
$$M = R\pi s + R\pi y - r\pi y$$
$$M = R\pi s + \pi y (R - r)$$

Iz sličnosti trouglova AOS i CO_1S imamo:

$\frac{R}{r} = \frac{s + y}{y}$, a odavde se za y dobija

$$y = \frac{rs}{R - r}.$$

Zamenjujući ovu vrednost y za M dobijamo:

$$M = R\pi s + \pi \cdot \frac{rs}{R - r}(R - r),$$ a odavde se posle skraćivanja dobija

$$M = R\pi s + \pi rs, \quad \text{tj.}$$

$$\underline{M = \pi s\,(R + r).}$$

Za površinu zarubljene kupe imamo:

$$P = B + B_1 + M = R^2\pi + r^2\pi + \pi s\,(R + r), \quad \text{tj.}$$

$$\underline{P = \pi\left[R^2 + r^2 + s\,(R + r)\right].}$$

Zapreminu zarubljene kupe možemo izračunati kao razliku zapremina cele kupe i dopune. Ako sa $\underline{x}$ obeležimo visinu dopune, tj. $SO_1 = x$ (sl. 149), sa H visinu zarubljene kupe, tada je visina cele kupe $H + x$. Tada je

$V = V_2 - V_1$, gde je V zapremina zarubljene kupe, V_2 i V_1 zapremine pravih kupa .

$$V = \frac{1}{3}R^2\pi\,(H + x) - \frac{1}{3}r^2\pi x$$

Međutim, iz sličnosti trouglova AOS i CO S_1 imamo

$$\frac{R}{r} = \frac{H + x}{x}, \quad \text{a odavde} \quad x = \frac{rH}{R - r}.$$

Ako se ova vrednost x zameni u gornjoj jednakosti, dobijamo obrazac za zapreminu zarubljene kupe:

$$\underline{V = \frac{\pi H}{3}\,(R^2 + Rr + r^2).}$$

<u>Primer 1.</u> Izračunati površinu i zapreminu zarubljene kupe ako su poluprečnici osnova R = 9 cm i r = 6 cm, a izvodnica s = 5 cm.

<u>Rešenje:</u>

$$P = \pi\left[r^2 + R^2 + s\,(r + R)\right]$$

$$P = \pi\left[36 + 81 + 5\,(15)\right]$$

$$P = 192\pi \ cm^2$$

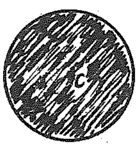
Visinu zarubljene kupe izračunavamo iz pravouglog trougla BDE (sl. 149), gde je $BE = R - r$.

$$DE^2 = BD^2 - BE^2$$
$$H^2 = s^2 - (R - r)^2$$
$$H^2 = 25 - 9$$
$$H^2 = 16$$
$$H = 4$$

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$
$$V = \frac{4\pi}{3}(81 + 54 + 36)$$
$$V = 228\pi \ cm^3$$

10. Lopta

Lopta je geometrijsko telo ograničeno jednom sfernom (loptastom) površi (sl. 150). Sferu možemo definisati kao ukupnost tačaka podjednako udaljenih od jedne utvrđene tačke - centra.



Slika 150.

Površina lopte se izračunava po obrascu:

$\underline{P = 4R^2\pi}$, gde je R poluprečnik lopte.

Za izračunavanje zapremine lopte poslužićemo se ovim eksperimentom.

Načinićemo šuplju poluloptu i šuplju kupu čija je osnova jednaka osnovi polulopte, a visina poluprečniku lopte. Ako kupu napunimo peskom ili vodom i prespemo je u polouloptu, videćemo da je potrebno da još jednom to isto učinimo ako želimo da polouloptu napunimo. Znači, zapremina polulopte je dva puta veća od zapremine ove kupe, a zapremina lopte je, prema tome, 4 puta veća od zapremine iste kupe.

Zapremina ove kupe je: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot R =$

$= \frac{1}{3} R^3\pi$, a zapremina lopte

$$\underline{V = \frac{4}{3} R^3\pi.}$$

Primer: Izračunati površinu i zapreminu lopte čiji je poluprečnik R = 10 cm.

Rešenje:

$$P = 4R^2\pi = 4 \cdot 10^2\pi = 400\,\pi\ cm^2$$

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}\cdot 10^3\pi = \frac{4000\pi}{3}\ cm^3.$$

Z A D A C I :

1/ Izračunati površinu i zapreminu kvadra čije su dimenzije 5 cm, 4 cm i 8 cm.

2/ Izračunati površinu i zapreminu kocke čija je ivica 8 cm.

3/ Osnova prave prizme je pravougli trougao čije su katete 6 cm i 8 cm. Izračunati površinu i zapreminu ove prizme ako je njena visina 10 cm.

4/ Visina pravilne četvorostrane piramide je 7 cm a stranica osnove 8 cm. Odrediti bočnu ivicu.

5/ Izračunati površinu i zapreminu pravilne šestostrane piramide čija je osnovna ivica 5 cm a visina 12 cm.

6/ Izračunati površinu omotača pravilne trostrane piramide ako je njena visina 4 cm a apotema 8 cm.

7/ Osnovne ivice pravilne četvorostrane zarubljene piramide su 56 cm i 24 cm. Izračunati površinu i zapreminu ove piramide ako je njena visina 63 cm.

8/ Izračunati površinu pravilne trostrane zarubljene piramide čije su osnovne ivice 12 cm i 6 cm a visina 1 cm.

9/ Izračunati površinu i težinu gvozdenog valjka čiji je poluprečnik 12 mm a visina 15 mm.

10/ Izračunati površinu i zapreminu prave kupe čija je izvodnica 13 cm a visina 12 cm.

11/ Izračunati površinu i zapreminu zarubljene kupe čija je visina 4 dm a poluprečnici osnova 5 dm i 2 dm.

12/ Od drvene lopte poluprečnika 5 dm treba istesati maksi -

malnu kocku. Kolika je težina otpadaka ako je specifična težina drveta 0,38.

13/ Osnova prave četvorostrane prizme je pravougaonik sa stranicama 4 cm i 6 cm. Naći površinu i zapreminu prizme ako je visina 10 cm i izračunati dijagonalu prizme.

14/ Naći površinu i zapreminu pravilne trostrane jednakoivične prizme ako je ivica 8 cm.

15/ Prava prizma ima za osnovu jednakokraki trapez sa osnovicama a = 10 cm i b = 4 cm i krakom c = 5 cm. Naći površinu i zapreminu prizme ako je visina prizme tri puta veća od visine trapeza.

16/ Površina osnove prave trostrane prizme je 4 dm^2, a površine bočnih strana su 9 dm^2, 10 dm^2 i 17 dm^2. Izračunati zapreminu prizme.

17/ Zapremina kocke je 125 dm^3. Izračunati površinu kocke.

18/ Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane piramide čija je visina 4 cm, a apotema je za 1 cm manja od osnovne ivice.

19/ Izračunati površinu i zapreminu pravilne četvorostrane jednakoivične piramide čija je ivica $\underline{a}$.

20/ Osnovna ivica pravilne četvorostrane piramide je 12 cm a visina 8 cm.

a) Izračunati površinu i zapreminu piramide.

b) Na kom rastojanju od vrha treba preseći piramidu paralelno osnovi da bi površina preseka bila 4 puta manja od površine osnove.

21/ Visina pravilne zarubljene četvorostrane piramide je 3 cm, a osnovne ivice a = 10 cm i b = 2 cm. Izračunati površinu i zapreminu ove piramide.

22/ Površina pravilne četvorostrane zarubljene piramide je 168 cm^2, veća osnovna ivica 8 cm i apotema 5 cm. Izračunati zapreminu ove piramide.

23/ Ivica pravilnog tetraedra je 6 cm. Izračunati njegovu površinu i zapreminu.

24/ Izračunati površinu i zapreminu pravog valjka ako je poluprečnik osnove $R = 20$ cm, a visina je $H = \frac{3}{5} R$.

25/ Izračunati površinu i zapreminu obrtnog tela koje nastaje obrtanjem pravougaonika sa stranicama $a = 5$ cm i $b = 8$ cm oko veće stranice.

26/ Izračunati površinu i zapreminu prave kupe ako je poluprečnik osnove $R = 6$ cm a visina $H = 8$ cm.

27/ Izračunati površinu i zapreminu prave kupe čija je visina za 1 cm kraća od izvodnice a poluprečnik osnove $r = 3$ cm.

28/ Izračunati površinu i zapreminu obrtnog tela koje nastaje obrtanjem jednakostraničnog trougla stranice $\underline{2a}$ oko ose koja prolazi kroz jedno teme trougla a normalna je na stranici trougla.

29/ U pravoj kupi upisati kocku. Naći zapreminu kocke ako je poluprečnik osnove kupe 10 cm a visina 12 cm.

30/ Izračunati površinu i zapreminu zarubljene kupe ako je njena visina za 1 cm kraća od izvodnice, a poluprečnici osnova 5 cm i 2 cm.

31/ Koliko se lopti poluprečnika 1 cm može izliti od olovne lopte čiji je poluprečnik 5 cm?

32/ Površine osnova prave zarubljene kupe su 4 cm^2 i 25 cm^2. Visina je podeljena na tri jednaka dela ravnima paralelnim osnovama. Naći površine preseka.

33/ Naći visinu prave zarubljene kupe ako je njena površina 572π cm^2, a poluprečnici osnova 6 cm i 14 cm.

34/ Ako se svaka ivica kocke poveća za 2 cm, onda se njena zapremina poveća za 98 cm^3. Naći ivicu kocke.

35/ Površine osnova zarubljene piramide su 245 cm^2 i 80 cm^2, a visina 35 cm. Naći zapreminu piramide.

36/ Oko lopte poluprečnika r opisana je pravilna trostrana prizma. Naći površinu i zapreminu prizme.

37/ Kvadrat stranice a obrće se oko normale povučene na njegovu dijagonalu kroz krajnju tačku dijagonale. Naći površinu i zapreminu dobijenog obrtnog tela.

38/ U pravilnu trostranu prizmu upisana je lopta poluprečnika R. Izračunati odnos površina lopte i prizme.

39/ Na kom rastojanju od centra treba preseći loptu poluprečnika 5 cm pa da površina dobijenog preseka bude 9π cm^2?

IV DEO

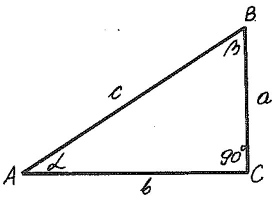
TRIGONOMETRIJA

I GLAVA

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

1. Definicija trigonometrijskih funkcija na pravouglom trouglu

Odnosi ili razmere strana pravouglog trougla ABC (sl. 1) jesu funkcije ma kog oštrog ugla posmatranog trougla i, obrnuto, mogu se uglovi smatrati kao funkcije tih razmera. Između strana pravouglog trougla ABC moguće su ove razmere:



Slika 1

$\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ i recipročne:

$\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{b}{a}$.

Ove razmere zavise samo od uglova, pa se zato mogu upotrebiti kao njihove mere i zovu se trigonometrijske funkcije uglova. Za trigonometrijske funkcije oštrog ugla u pravouglom trouglu imamo sledeće definicije:

1/ Sinus je odnos suprotne katete prema hipotenuzi, i to: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

2/ Kosinus je odnos nalegle katete prema hipotenuzi, i to: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$.

3/ Tangens je odnos suprotne katete prema nalegloj kateti, i to: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}$.

4/ Kotanges je odnos nalegle katete prema suprotnoj kateti, i to: $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\mathrm{cotg}\beta = \frac{a}{b}$.

5/ Sekans je odnos hipotenuze prema nalegloj kateti, i to: $\sec\alpha = \frac{c}{b}$, $\sec\beta = \frac{c}{a}$.

6/ Kosekans je odnos hipotenuze prema suprotnoj kateti, i to: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$, $\operatorname{cosec}\beta = \frac{c}{b}$.

Odnosi strana pravouglog trougla ne menjaju se ako se ugao ne menja, a strane se menjaju. Sve ove posmatrane funkcije su neimenovani brojevi. Katete su uvek manje od hipotenuze, pa sinus i cosinus ne mogu biti brojevi veći od jedan, sekans i kosekans nisu manji od jedan, a tangens i kotangens mogu biti veći, manji ili jednaki jedinici.

U pravouglom trouglu ABC ugao $\beta = 90^\circ - \alpha$. Iz toga sledi:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\sec(90^\circ - \alpha) = \frac{c}{a} = \operatorname{cosec}\alpha, \quad \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \frac{c}{b} = \sec\alpha$$

Kad se dva ugla dopunjuju do 90°, onda su funkcije jednoga (sinus, tangens, sekans) jednaka kofunkcijama (kosinus, kotangens, kosekans) drugoga.

Primer:

1/ Dat je pravougli trougao čije su kateta $a = 3$ cm, $b = 4$ cm. Izračunati vrednosti svih trigonometrijskih funkcija uglova α i β.

Po Pitagorinoj teoremi:

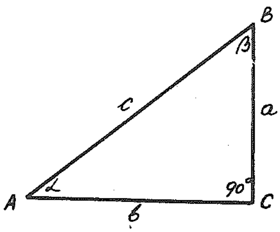
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ cm}.$$

Iz definicije trigonometrijskih funkcija:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$$



$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\quad \operatorname{cotg}\beta = \frac{3}{4}$

$\sec\alpha = \frac{5}{4}$, $\quad \sec\beta = \frac{5}{3}$

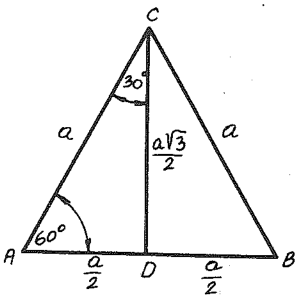
$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$, $\quad \operatorname{cosec}\beta = \frac{5}{4}$,

što je jasno sa slike br. 2.

Slika 2

2. Trigonometrijske funkcije uglova od 30°, 45° i 60°

Radi izračunavanja funkcija ugla od 30°, kao i funkcija ugla od 60° treba posmatrati jednakostranični trougao ABC (sl. 3). Spustimo jednu njegovu visinu. Tako dobijamo dva pravougla trougla ACD i BCD. Iz trougla ADC imamo:



Slika 3

$$a)\ \sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sec 60^\circ = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2;$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

b) $\sin 30^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

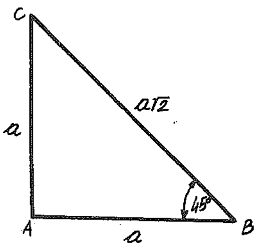
$\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{cotg} 30^\circ = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$;

$\sec 30^\circ = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{cosec} 30^\circ = \dfrac{a}{\frac{a}{2}} = 2.$

Posmatranjem funkcija uglova, tj. njihovih vrednosti vidimo da je:

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg} 30^\circ$,
$\operatorname{cotg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ$, $\sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ$, $\operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ$.

Za izračunavanje funkcije ugla od 45° konstrišemo jednakokraki pravougli trougao ABC, kod koga su oštri uglovi po 45°. Iz trougla ABC (sl. 4) sledi:



Slika 4

$\sin 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{tg} 45^\circ = \dfrac{a}{a} = 1$;

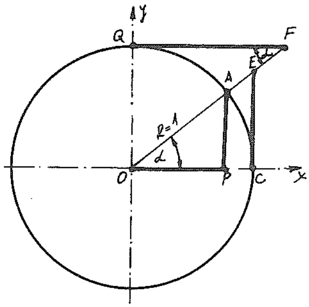
$\operatorname{cotg} 45^\circ = \dfrac{a}{a} = 1$;

$\sec 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$;

$\operatorname{cosec} 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

3. Trigonometrijski krug

Kod trigonometrijskog kruga centar ose poklapa se sa koordinatnim početkom pravouglog koordinatnog sistema, a poluprečnik r mu je jednak jedan. Koordinate ma koje tačke na periferiji kruga i njen poluprečnik grade pravougli trougao. Ugao između poluprečnika i apscisne osovine je ugao α. Iz toga sledi:



Slika 5

$$\sin\alpha = \frac{AP}{OA} = \frac{AP}{1} = AP;$$

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OA} = \frac{OP}{1} = OP.$$

Iz sličnosti trouglova (sa sl. 5) OAP, OEC i OFQ imamo:

$$\frac{AP}{OP} = \frac{EC}{OC}; \quad \frac{OA}{OP} = \frac{OE}{OC}; \quad \frac{OP}{AP} = \frac{QF}{OQ} \text{ i}$$

$\frac{OA}{AP} = \frac{OF}{OQ}$. Iz ovih odnosa sledi:

1/ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AP}{OP} = \frac{EC}{OC} = \frac{EC}{1} = EC;$

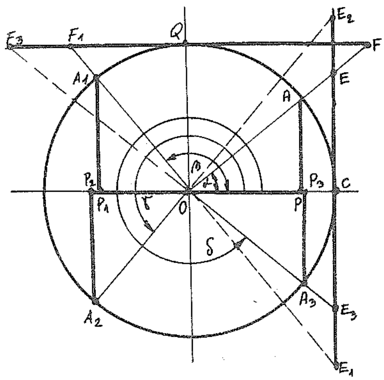
2/ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{OP}{AP} = \frac{QF}{OQ} = \frac{QF}{1} = QF;$

3/ $\sec\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{1} = OE$ i

4/ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{OA}{AP} = \frac{OF}{OQ} = \frac{OF}{1} = OF.$

Ordinata tačke na kružnoj periferiji sa poluprečnikom 1 je sinus, a apscisa je kosinus ugla α koji grade poluprečnik i apscisna osa. Tangens je ona tangenta koja je povučena iz tačke C do preseka sa produženim poluprečnikom koji gradi ugao α. Kotangens je tangenta povučena iz tačke Q do preseka sa istim poluprečnikom. Sekans je odsečak poluprečnika od koordinatnog početka do preseka sa tangentom. Kosekans je odsečak poluprečnika od koordinatnog početka do preseka sa kotangentom.

Trigonometrijske funkcije mogu se definisati kao funkcije tupog ugla β u drugom kvadrantu kao funkcije tupoispupčenog ugla γ u trećem kvadrantu i najzad kao funkcija oštroispupčenog ugla δ u četvrtom kvadrantu. Te su duži date na slici 6.



Slika 6

1/ $\sin\alpha = AP$
$\cos\alpha = OP$
$\mathrm{tg}\,\alpha = CE$
$\mathrm{cotg}\,\alpha = QF$
$\sec\alpha = OE$
$\mathrm{cosec}\,\alpha = OF$

2/ $\sin\beta = A_1P_1$
$\cos\beta = -OP_1$
$\mathrm{tg}\,\beta = CE_1$
$\mathrm{cotg}\,\beta = OE_1$
$\sec\beta = OE_1$
$\mathrm{cosec}\,\beta = OF_1$

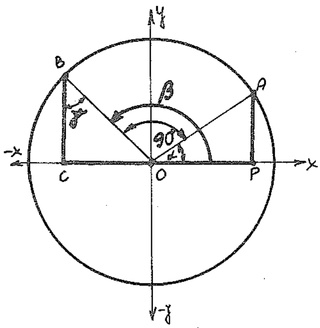
3/ $\sin\gamma = -A_2P_2$
$\cos\gamma = -OP_2$
$\mathrm{tg}\,\gamma = CE_2$
$\mathrm{cotg}\,\gamma = QF_2$
$\sec\gamma = QF_2$
$\mathrm{cosec}\,\gamma = -OF_2$

4/ $\sin\delta = -A_3P_3$
$\cos\delta = OP_3$
$\mathrm{tg}\,\delta = -CE_3$
$\mathrm{cotg}\,\delta = -QF_3$
$\sec\delta = OE_3$
$\mathrm{cosec}\,\delta = -OF_3$

4. Svođenje trigonometrijskih funkcija na oštar ugao

Posmatrajmo sl. 7. U drugom kvadrantu je tup ugao β. Njegove se trigonometrijske funkcije mogu izraziti pomoću oštrog ugla α iz prvog kvadranta. Posmatramo trouglove OBC i OAP. Oni su podudarni jer je $OA = OB = 1$; $\gamma = \alpha$ kao uglovi sa normalnim kracima. Iz toga sledi:

$BC = OP$ i $OC = AP$, pa je:



Slika 7

$$\sin\beta = \sin(90^\circ + \alpha) = BC = OP = \cos\alpha \;;$$

$$\cos\beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -OC = -AP = -\sin\alpha \;;$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{\cos(90^\circ+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\mathrm{cotg}\,\alpha \;;$$

$$\mathrm{cotg}\,\beta = \mathrm{cotg}\,(90^\circ + \alpha) = \frac{\cos(90^\circ+\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha .$$

Pomoću ovih obrazaca funkcije tupih uglova pretvaramo u funkcije oštrih uglova.

Primeri:

1/ $\sin 125^\circ = \sin(90^\circ + 35^\circ) = \cos 35^\circ$

2/ $\cos 155^\circ = \cos(90^\circ + 65^\circ) = -\sin 65^\circ$

3/ $\mathrm{tg}\,137^\circ = \mathrm{tg}\,(90^\circ + 47^\circ) = -\mathrm{cotg}\;47^\circ$

4/ $\mathrm{cotg}\,128^\circ\,17'\,36'' = \mathrm{cotg}\,(90^\circ + 38^\circ\,17'\,36'') = -\mathrm{tg}\,38^\circ\,17'\,36''$.

Na sličan način može se pokazati da kada od 180° oduzmemo oštar ugao α dobijamo za tupe uglove iste obrasce.

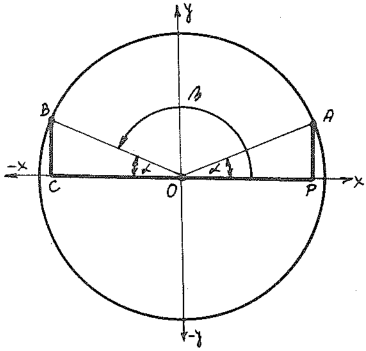
Na slici 8 su dva podudarna trougla OBC i OAP. Iz podudarnosti sledi: BC = AP i OC = OP. Stoga je:

$$\sin\beta = \sin(180^\circ - \alpha) = BC = AP = \sin\alpha \;;$$

$$\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -OC = -OP = -\cos\alpha \;;$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha \;;$$

$$\mathrm{cotg}\,\beta = \mathrm{cotg}\,(180^\circ - \alpha) = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\mathrm{cotg}\,\alpha .$$



Slika 8

Primeri:

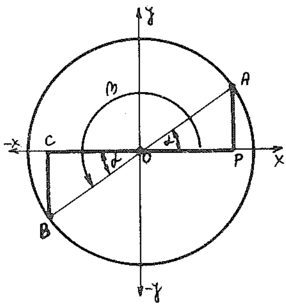
1) $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) =$
$= \sin 40^\circ$;

2) $\cos 157^\circ 30' = \cos(180^\circ - 22^\circ 30') =$
$= - \cos 22^\circ 30'$;

3) $\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) =$
$= - \operatorname{tg} 30^\circ$;

4) $\operatorname{cotg} 175^\circ = \operatorname{cotg}(180^\circ - 5^\circ) =$
$= - \operatorname{cotg} 5^\circ$.

Uglovi koji se nalaze u trećem kvadrantu su tupoispupčeni. Oni se mogu prikazati kao zbir ugla od 180° i jednog oštrog ugla. To prikazuje slika 9. Iz podudarnosti trouglova OBC i OAP izlazi da je BC = AP i OC = OP, pa je:



Slika 9

$\sin\beta = \sin(180^\circ + \alpha) = - BC = - AP =$
$= - \sin\alpha$;

$\cos\beta = \cos(180^\circ + \alpha) = - OC = - OP =$
$= - \cos\alpha$;

$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \dfrac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} =$
$= \dfrac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}(180^\circ + \alpha) = \dfrac{\cos(180^\circ + \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha)}$
$= \dfrac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$.

Pomoću ovih obrazaca funkcije tupoispupčenih uglova pretvaramo u funkcije oštrih uglova.

Primeri:

1) $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = - \sin 30^\circ$;

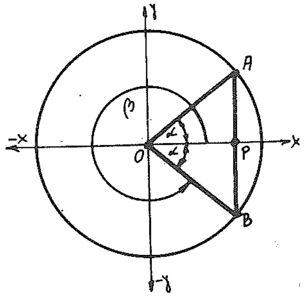
2) $\cos 245^\circ = \cos(180^\circ + 65^\circ) = - \cos 65^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 235^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 55^\circ) = \operatorname{tg} 55^\circ$;

4) $\operatorname{cotg} 193^\circ = \operatorname{cotg}(180^\circ + 13^\circ) = \operatorname{cotg} 13^\circ$.

Isti obrasci se mogu dobiti ako tupoispupčene uglove predstavimo kao razliku ugla od 270° i odgovarajućeg oštrog ugla α.

Može se pokazati odnos funkcija dva ugla koji se dopunjuju do 360°. Iz podudarnosti trouglova OAP i OBP (sl. 10) izlazi da je BP = AP, pa je :



Slika 10

$\sin\beta = \sin(360^\circ - \alpha) = -BP = -AP =$
$= -\sin\alpha;$

$\cos\beta = \cos(360^\circ - \alpha) = -OP = \cos\alpha;$

$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}(360^\circ - \alpha) = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha;$

$\mathrm{cotg} \quad = \mathrm{cotg}(360^\circ - \alpha) = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} =$
$= -\mathrm{cotg}\,\alpha.$

Pomoću ovih obrazaca funkcije oštroispupčenih uglova pretvaramo u funkcije oštrih uglova.

Primeri:

1) $\sin 350^\circ = \sin(360^\circ - 10^\circ) = -\sin 10^\circ$

2) $\cos 280^\circ = \cos(360^\circ - 80^\circ) = \quad \cos 80^\circ$

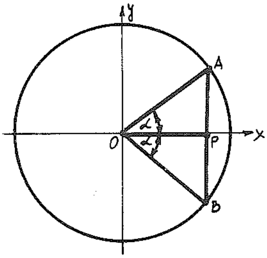
3) $\mathrm{tg}\, 320^\circ = \mathrm{tg}(360^\circ - 40^\circ) = -\mathrm{tg}\, 40^\circ$

4) $\mathrm{cotg}\, 326^\circ = \mathrm{cotg}(360^\circ - 34^\circ) = -\mathrm{cotg}\, 34^\circ$

Oštroispupčene uglove možemo prikazati kao zbir ugla od 270° i oštrog ugla α. Obrasci tako dobijeni isti su sa prethodnim obrascima.

5. Trigonometrijske funkcije negativnog ugla

Tačka se kreće po kružnoj periferiji u pozitivnom smislu ako je njeno kretanje suprotno kretanju kazaljke na satu, a u negativnom smislu ako je njeno kretanje zajedno sa kretanjem kazaljke na satu. Na isti način kretanjem utvrđenog zraka u jednoj tački postaju pozitivni i negativni uglovi. Posmatrajmo sliku 11. Iz podudarnosti trouglova OAP i OBP je:



Slika 11

BP = AP. Stoga je :

$\sin(-\alpha) = -BP = -AP = -\sin\alpha$,

$\cos(-\alpha) = OP = \cos\alpha$,

$\mathrm{tg}(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$

$\mathrm{cotg}(-\alpha) = \dfrac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} =$

$= -\mathrm{cotg}\,\alpha$.

Primeri:

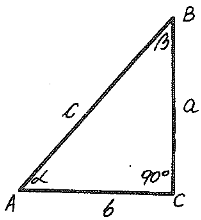
1) $\sin(-40^\circ) = -\sin 40^\circ$

2) $\cos(-50^\circ) = \cos 50^\circ$

3) $\mathrm{tg}(-32^\circ) = -\mathrm{tg}\,32^\circ$

4) $\mathrm{cotg}(-56^\circ) = -\mathrm{cotg}\,56^\circ$.

6. Izražavanje ostalih trigonometrijskih funkcija pomoću jedne od njih



Slika 12

Iz pravouglog trougla ABC (sl. 12) sledi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Podignemo li na kvadrat leve i desne strane i saberemo dobijamo:

$\sin^2 + \cos^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{c^2}$.

Po Pitagorinoj teoremi je $c^2 = a^2 + b^2$ pa se dobija:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{c^2}{c^2} = 1$.

Iz ove veze je:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Iz istog pravouglog trougla ABC je:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Veze: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ i $\mathrm{soc}\alpha = \frac{b}{c}$ daju:

$a = c \sin\alpha$ i $b = c \cos\alpha$, pa je posle smene

$$\mathrm{tg} = \frac{c \sin\alpha}{c \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad a \quad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{c \cos\alpha}{c \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Lako se nalazi da je $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{cotg}\alpha}$ ili $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} \quad \text{ili} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2\alpha}}$$

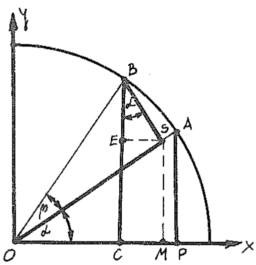
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} \quad \text{ili} \quad \cos\alpha = \frac{\mathrm{cotg}\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2\alpha}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} \quad \text{ili} \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \quad \text{ili} \quad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}.$$

7. Trigonometrijske funkcije zbira i razlike dva ugla

Neka su uglovi α i β oštri i neka ispunjavaju uslov da je njihov zbir manji od 90°. Posmatramo sliku 13.



Slika 13

$BS \perp OA$, $SM \perp Ox$ i $SE \parallel Ox$. Onda je: $AP = \sin\alpha$, $OP = \cos\alpha$, $BS = \sin\beta$ i $OS = \cos\beta$.

$BC = \sin(\alpha + \beta)$; $OC = \cos(\alpha + \beta)$.

Iz ovoga sledi:

1) $\sin(\alpha + \beta) = BC = CE + BE = MS + BE$;

2) $\cos(\alpha + \beta) = OC = OM - CM = OM - ES$.

Za određivanje $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$ treba naći vrednosti količina: MS, BE, OM i ES.

Iz trouglova OMS i BES imamo:

a) $\frac{MS}{OS} = \sin\alpha, \quad MS = \sin\alpha \cdot OS = \sin\alpha \cos\beta$

b) $\frac{OM}{OS} = \cos\alpha, \quad OM = \cos\alpha \cdot OS = \cos\alpha \cos\beta$

c) $\frac{BE}{BS} = \cos\alpha, \quad BE = \cos\alpha \cdot BS = \cos\alpha \sin\beta$

d) $\frac{ES}{BS} = \sin\alpha, \quad ES = \sin\alpha \cdot BS = \sin\alpha \sin\beta.$

Zamenom ovih vrednosti u jednačinama 1) i 2) dobijamo:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Obrasce za $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ i $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)$ dobijamo na sledeći način:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Ako podelimo brojilac i imenilac ovog razlomka sa $\cos\alpha \cos\beta$ dobijamo:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Ako podelimo i brojilac i imenilac ovog razlomka sa $\sin\alpha \sin\beta$, dobijamo:

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}.$$

Obrasci za funkcije zbira dva ugla važe za ma kakve uglove, a ne samo za uslov $\alpha+\beta < 90^\circ$. Trigonometrijske funkcije razlike dva ugla lako se dobijaju iz obrazaca za zbir dva ugla, ako se svuda ugao $+\beta$ zameni uglom $-\beta$. Na taj način dobijamo:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \text{i}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}$$

Primeri:

1) Naći sin 75° i cos 75°, kad se zna da je $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

2) Kad je $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ i $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, naći $\sin 12^\circ$:

$$\sin 12^\circ = \sin(30^\circ - 18^\circ) = \frac{1}{2} \cos 18^\circ - \cos 30^\circ \sin 18^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \; \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)}{8}$$

jer je $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}} =$

$$= \sqrt{\frac{16 - 5 + 2\sqrt{5} - 1}{16}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}}$$

Iz priloženih primera se vidi kako se sve trigonometrijske funkcije mogu lako izračunati, ako se uglovi podesno rastave na zbir ili razliku uglova čiji su sin, cos, tg i cotg poznati.

8. Trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla i polovine ugla

U prethodnim obrascima smo videli kako se izračunavaju sin, cos, tg i cotg zbira i razlike dva ugla. Ponovimo te obrasce:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$,

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$ i $\mathrm{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{cotg}\alpha\cdot\mathrm{cotg}\beta -}{\mathrm{cotg}\beta + \mathrm{cotg}}$

Kada se u ovim obrascima stavi da je $\beta=\alpha$ dobija se:

$\sin(\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2 \sin\alpha$

$\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\alpha) = \mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} \quad \text{i}$$

$$\mathrm{cotg}(\alpha+\alpha) = \mathrm{cotg}\, 2\alpha = \frac{\mathrm{cotg}\alpha\cdot\mathrm{cotg}\alpha - 1}{\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\alpha} = \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{cotg}\alpha} .$$

Iz ovih obrazaca mogu se naći funkcije dvostrukog ugla, ka
su poznate funkcije prostog ugla.

Primer:

1) Naći funkciju ugla 2α kada je $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, a ugao
oštar.

Upotrebom osnovnih obrazaca najpre nalazimo:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ i $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{4}{3}$. Zamenom ov
vrednosti u obrascima za funkcije dvostrukog ugla dobijamo:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} ;$$

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = 3\frac{3}{7} \quad \text{i}$$

$$\mathrm{cotg}\, 2\alpha = \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{cotg}\alpha} = \frac{\frac{16}{9} - 1}{2\cdot\frac{4}{3}} = \frac{7}{24} .$$

Po prvom osnovnom obrascu imamo:

$$1 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} ;$$

a prema drugom obrascu iz funkcija dvostrukih uglova imamo:

$$\cos\alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} .$$

Sabiranjem ovih dveju jednačina dobijamo:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{, a odavde } \cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

dok oduzimanjem druge od prve daje:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \text{, a odavde } \sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} ,$$

tada je:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \quad \text{i}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} .$$

Pred korenom uzimamo ili samo pozitivan ili samo negativan znak. To jedino zavisi od ugla $\frac{\alpha}{2}$. Ako je $\frac{\alpha}{2}$ u I kvadrantu, onda uzimamo samo pozitivne znakove; ako je ugao $\frac{\alpha}{2}$ u II kvadrantu, tada je $\sin \frac{\alpha}{2}$ pozitivan a za ostale funkcije znak je negativan; ako je $\frac{\alpha}{2}$ u III kvadrantu onda se za $\sin \frac{\alpha}{2}$ i $\cos \frac{\alpha}{2}$ uzima negativan a za $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ pozitivan znak; ako je ugao $\frac{\alpha}{2}$ u IV kvadrantu, onda se uzima za $\cos \frac{\alpha}{2}$ pozitivan a za ostale funkcije negativan znak.

<u>Primeri:</u>

1) Kad je $\cos\alpha = 0{,}4$, naći $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ sa 3 decimale. Ugao α je oštar.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = +\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = +\sqrt{\frac{1 - 0{,}4}{1 + 0{,}4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}6}{1{,}4}} = 0{,}428 .$$

2) Kad je $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ naći $\sin 15^\circ$ i $\cos 15^\circ$.

Znamo da je $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Iz obrasca $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$

lako računamo $\sin 15^\circ = +\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$,

$\cos 15^\circ = +\sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$.

Prema uslovu zadatka $\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} =$
$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. Pretvaranje zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod

Pretpostavimo da je $\measuredangle a + \measuredangle b = \alpha$ i $\measuredangle a - \measuredangle b = \beta$. Sabiranjem i oduzimanjem ovih dveju jednačina dobijamo:

$$a = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{i} \quad b = \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \text{tada je:}$$

1) $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(a + b) + \sin(a - b) =$
$= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b =$
$= 2 \sin a \cdot \cos b = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Primer: $\sin 60^\circ + \sin 10^\circ = 2 \sin 35^\circ \cos 25^\circ$.

2) $\sin\alpha - \sin\beta = \sin(a + b) - \sin(a - b) =$
$= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b =$
$= 2 \cos a \cdot \sin b = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Primer: $\sin 70^\circ - \sin 40^\circ = 2 \cos 55^\circ \sin 15^\circ$.

3) $\cos\alpha + \cos\beta = \cos(a + b) + \cos(a - b) =$
$= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b =$
$= 2 \cos a \cdot \cos b = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Primer: $\cos 80^\circ + \cos 20^\circ = 2\cos 50^\circ \cos 30^\circ$.

4) $\cos\alpha - \cos\beta = \cos(a+b) - \cos(a-b) =$

$= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b - \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b =$

$= -2\sin a \cdot \sin b = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Primer: $\cos 80^\circ - \cos 120^\circ = -2\sin 100^\circ \sin(-40^\circ) =$

$= 2\cos 10^\circ \cdot \sin 40^\circ$ zato što je $\sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) =$

$= \cos 10^\circ$, a $\sin(-40^\circ) = -\sin 40^\circ$.

5) $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} =$

$= \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$;

Primeri:

1) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 30^\circ \cdot \cos 20^\circ}$

2) $\operatorname{tg} 47^\circ - \operatorname{tg} 17^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 47^\circ \cdot \cos 17^\circ}$

3) $\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \pm \frac{\cos\beta}{\sin\beta} =$

$= \frac{\sin\beta\cos\alpha \pm \cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

Primeri:

1) $\operatorname{cotg} 20^\circ + \operatorname{cotg} 42^\circ = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \sin 42^\circ}$

2) $\operatorname{cotg} 40^\circ - \operatorname{cotg} 75^\circ = \frac{\sin 35^\circ}{\sin 40^\circ \cdot \sin 75^\circ}$

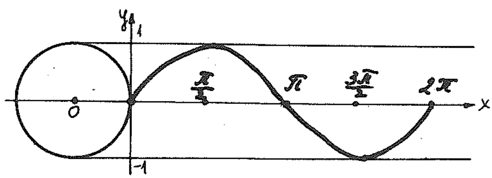
10. Grafičko predstavljanje trigonometrijskih funkcija

Pre nego što grafički predstavimo trigonometrijske funkcije podsetimo se brojnih vrednosti trigonometrijskih funkcija uglova od 0°, 90°, 180°, 270° i 360°. Te vrednosti date su u tabeli 1, a lako se dobijaju sa trigonometrijskog kruga (sl. 6).

Tabela 1. (u zagradi su uglovi izraženi u radijanima)

α	$0^\circ(0)$	$90^\circ(\frac{\pi}{2})$	$180^\circ(\pi)$	$270^\circ(\frac{3\pi}{2})$	$360^\circ(2\pi)$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

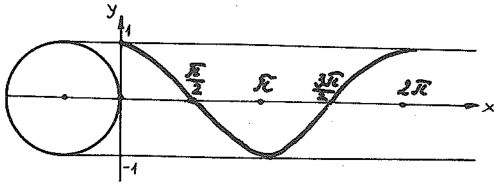
Trigonometrijske funkcije $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$ i $y = \mathrm{cotg}\, x$, grafički su predstavljene na sledeći način u pravouglom koordinatnom sistemu. Za funkciju $y = \sin x$, periferiju trigonometrijskog kruga prenosimo kao pravu liniju na apscisnu osu, a ordinate koje odgovaraju tačkama 0°, 90°, 180° itd. dobijamo kao brojne vrednosti funkcije $y = \sin$, za odgovarajuće vrednosti uglova iz tabele 1.



Slika 14

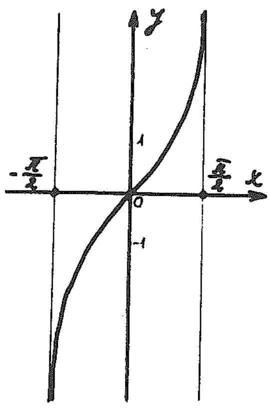
Kako se periferija trigonometrijskog kruga može prenositi na apscisnu osu u pozitivnom i u negativnom smeru koliko se puta hoće, to je kriva linija funkcije $y = \sin x$ neograničena. Kažemo da se periodično ponavlja sa periodom od 360°.

Na isti način se grafički predstavlja funkcija y = cos x. Grafik funkcije je isti kao i funkcija y = sin x, samo što je pomeren u levo za 90 stepeni. Perioda funkcije y = cos x je 360 stepeni. Vidi sl. 15.

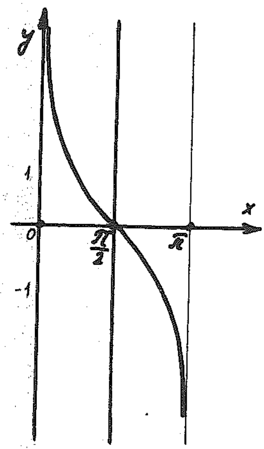


Slika 15

Uzimajući u obzir vrednosti trigonometrijskih funkcija y = tg x i y = cotg x iz tabele 1 za uglove od 0^o, 90^o, 180^o, 270^o i 360^o dobijamo grafike na slikama 16 i 17. Periodično ponavljanje kod funkcije y = tg x i y = cotg x je 180^o.



Slika 16



Slika 17

11. Rešavanje prostijih trigonometrijskih jednačina

Jednačine u kojima se nalaze trigonometrijske funkcije nepoznatih uglova zovu se trigonometrijske jednačine. Ako se u jednačini nalazi samo jedan nepoznati ugao, onda treba jednačinu tako transformisati da se u njoj nalazi samo jedna funkcija tog ugla. Ako u jednačini ima više nepoznatih uglova, onda je treba tako transformisati da se u njoj nazi samo jedna funkcija svakog nepoznatog ugla ili njihovog zbira ili razlike.

Primeri:

1) $2\cos x = \operatorname{cotg} x$. Kad zamenimo

$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ dobijamo:

$$2\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{ili}$$

$$2\cos x - \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\cos x\left(2 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0 \quad \text{pa je :}$$

$\cos x = 0$ ili $2 - \frac{1}{\sin x} = 0$, $\sin x = \frac{1}{2}$, a time je ugao x određen. Iz $\sin x = \frac{1}{2}$ izlazi $x = 30^\circ$.

U drugom kvadrantu ugao od 150° ima isto sin jednak $\frac{1}{2}$, pa je i to vrednost ugla x. Isto tako se iz $\cos x = 0$ dobijaju rešenja $x = 90^\circ$ i 270°. Ako se pojam o uglu proširi i na uglove veće od 360° i na negativne uglove, onda x ima više rešenja, odnosno bezbrojno mnogo vrednosti.

2) Rešiti jednačinu: $a\sin x + b\cos x = c$.

Podelimo jednačinu sa a i dobijemo:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}.$$

Sada uvedimo pomoćni ugao α tako da je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, onda je:

$$\sin x + \operatorname{tg}\alpha \cos x = \frac{c}{a} \quad \text{ili}$$

$$\sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha = \frac{c}{a}\cos\alpha,$$

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha .$$

Kako je α poznat ugao, iz ove jednačine može se odrediti vrednost $x+\alpha$, a tako i ugao x.

3) Date su dve jednačine:

$$\text{I} \quad \sin^2 x + \cos^2 y = a$$

$$\text{II} \quad \cos^2 x - \sin^2 y = b .$$

Ako u drugoj jednačini $\cos^2 x$ zamenimo sa $1 - \sin^2 x$, a $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ dobija se ovaj sistem:

$$\text{I} \quad \sin^2 x + \cos^2 y = a$$

$$\text{II} \quad 1 - \sin^2 x - 1 + \cos^2 y = b .$$

Kada I i II saberemo i oduzmemo, dobijamo:

$$\text{I} \quad 2\cos^2 y = a + b$$

$$\text{II} \quad 2\sin^2 x = a - b .$$

Rešenja su: iz I i II:

$$\cos y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)} ; \qquad \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-b)} .$$

II G L A V A

PRIMENA U GEOMETRIJI

1. Prirodne vrednosti trigonometrijskih funkcija

Za četiri osnovne trigonometrijske funkcije: sin, cos, tg i cotg, izračunate su i utabličene vrednosti za uglove 0° - 45°, za svakih $10'$ (u nekim tablicama i za svaku minutu).

Skupom utabličenih vrednosti sadržane su ujedno i funkcije uglova većih od 45°, naime:

za funkcije komplementnih uglova važe relacije

$\sin\alpha = \cos(90^\circ-\alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ-\alpha)$, $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}(90^\circ-\alpha)$

$\mathrm{cotg}\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)$, (npr., $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$);

funkcije uglova većih od 90° uvek mogu da se svedu na funkcije oštrih uglova (npr., $\mathrm{tg}\ 160^\circ = -\mathrm{tg}\ 20^\circ$; $\cos 200^\circ = -\cos 20^\circ$).

Izvod iz tablice (po O. Schlömilchu i J. Majcenu):

G.	M.	Sinus	D.1'	Tang	D.1'	Cotg	D.1'	Cosin	D.1'	/	0
25	0	0,42 262		0,46 631		2,1445		0,90 631		0	65
			26,3		35,5		16,2		12,3		
	10	0,42 525		0,46 985		2,1283		0,90 507		50	
	:									:	
27	:									:	
	20	0,45 917		0,51 688		1,9347		0,88 835		40	
			25,8		36,9		13,7		13,4		
	30	0,46 175		0,52 057		1,9210		0,88 701		30	
	:									:	62
29	:									:	
	20	0,48 989		0,56 194		1,7796		0,87 178		40	
			25,3		38,3		12,1		14,3		
	30	0,49 242		0,56 577		1,7675		0,87 036		30	
										:	(60)
0	/	Cosin	D.1'	Cotg	D.1'	Tang	D.1'	Sinus	D.1'	M.	G.

(U originalu su neke cifre poslednje decimale podvučene, no o tome ne treba da vodimo računa.)

Argumentima leve kolone (stepenima - G. i minutima - M.) odgovaraju funkcije navedene u gornjem zaglavlju, a argumentima desne kolone - u donjem zaglavlju. U kolonama pod D.1′ date su minutne promene za svaku funkciju posebno, u jedinicama poslednje decimale, radi interpolacije za uglove i funkcije unutar desetminutnog razmaka.

Primeri:

1) Odrediti sin $27^\circ 20'$. - Argumentu $27^\circ 20'$ u levoj koloni i funkciji Sinus u gornjem zaglavlju pripada broj 0,45 917. Dakle,

$$\sin 27^\circ 20' = 0{,}45\,917 \approx 0{,}46.$$

2) Odrediti cos $62^\circ 40'$. - Argumentu $62^\circ 40'$ u desnoj koloni i funkciji Cosin u donjem zaglavlju pripada broj 0,45 917. Dakle,

$$\cos 62^\circ 40' = 0{,}45\,917 \approx 0{,}46,$$

tj. ista vrednost kao i u prethodnom primeru, jer su dati uglovi komplementni: $27^\circ 20' + 62^\circ 40' = 90^\circ$.

3) Odrediti tg $27^\circ 24' 17''$. - Prvo podelimo $17'' : 60 \approx 0',28$. Minutna promena funkcije Tang u razmaku između $27^\circ 20'$ i $27^\circ 30'$ iznosi: D,1′ = 36,9. Za $4',28$ promena iznosi $4{,}28 \cdot 36{,}9 \approx 158$ jedinica poslednje decimale. Kako je tg $27^\circ 20' <$ tg $27^\circ 30'$, to za tg $27^\circ 24',28$ važi relacija

$$\operatorname{tg} 27^\circ 20' < \operatorname{tg} 27^\circ 24',28 < \operatorname{tg} 27^\circ 30'.$$

Dakle,

$$\begin{array}{rll} & 0{,}51\,688 \;\ldots\ldots\ldots\ldots & (= \operatorname{tg} 27^\circ 20') \\ & \underline{+ \quad\quad 158} \;\ldots\ldots\ldots\ldots & (= 4{,}28 \cdot D.1') \\ \operatorname{tg} 27^\circ 24' 17'' = & 0{,}51\,846 \approx 0{,}52\,. & \end{array}$$

4) Odrediti cotg $60^\circ 37' 27''$. - Prvo podelimo $27'' : 60 \approx 0',45$. Minutna promena funkcije Cotg u razmaku između $60^\circ 30'$ i $60^\circ 40'$ iznosi: D.1′ = 38,3. Za $7',45$ promena iznosi $7{,}45 \cdot 38{,}3 \approx 285$ jedinica poslednje decimale. Kako je cotg $60^\circ 30' >$ cotg $60^\circ 40'$, to za cotg $60^\circ 37',45$ važi relacija:

$$\operatorname{cotg} 60^\circ 30' > \operatorname{cotg} 60^\circ 37',45 > \operatorname{cotg} 60^\circ 40'.$$

Dakle,

$$
\begin{array}{rll}
 & 0,56\ 577 \ldots\ldots\ldots\ldots & (= \operatorname{cotg} 60^\circ 30') \\
 & -\quad 285 \ldots\ldots\ldots\ldots & (= 7,45 \cdot D.1') \\
\hline
\operatorname{cotg} 60^\circ 37' 27'' = & 0,56\ 292 \approx 0,56\,. &
\end{array}
$$

Međutim, kako je $37',45$ bliže ka $40'$ nego ka $30'$ $(40' - 37',45 = 2',55)$, račun može da se izvede i ovako:

$$
\begin{array}{rll}
 & 0,56\ 194 \ldots\ldots\ldots\ldots & (= \operatorname{cotg} 60^\circ 40') \\
 & +\quad 98 \ldots\ldots\ldots\ldots & (= 2,55 \cdot D.1') \\
\hline
\operatorname{cotg} 60^\circ 37' 27'' = & 0,56\ 292\,. &
\end{array}
$$

5) Odrediti $\operatorname{cotg} 25^\circ 8' 46''$. - Prvo podelimo $46'' : 60 \approx \approx 0',77$. Minutna promena funkcije Cotg u razmaku između $25^\circ 0'$ i $25^\circ 10'$ iznosi: $D.1' = 16,2$. Za $8',77$ promena iznosi $8,77 \cdot 16,2 \approx 142$ jedinice poslednje decimale. Kako je $\operatorname{cotg} 25^\circ 0' > \operatorname{cotg} 25^\circ 10'$, to za $\operatorname{cotg} 25^\circ 8',77$ važi relacija

$$\operatorname{cotg} 25^\circ 0' > \operatorname{cotg} 25^\circ 8',77 > \operatorname{cotg} 25^\circ 10'.$$

Dakle,

$$
\begin{array}{rll}
 & 2,1445 \ldots\ldots\ldots\ldots & (= \operatorname{cotg} 25^\circ 0') \\
 & -\quad 142 \ldots\ldots\ldots\ldots & (= 8,77 \cdot D.1') \\
\hline
\operatorname{cotg} 25^\circ 8' 46'' = & 2,1303 \approx 2,13\,. &
\end{array}
$$

Međutim, kako je $8',77$ bliže ka $10'$ nego ka $0'$ $(10' - 8',77 = 1',23)$, račun može da se izvede i ovako:

$$
\begin{array}{rll}
 & 2,1283 \ldots\ldots\ldots\ldots & (= \operatorname{cotg} 25^\circ 10') \\
 & +\quad 20 \ldots\ldots\ldots\ldots & (= 1,23 \cdot D.1') \\
\hline
\operatorname{cotg} 25^\circ 8' 46'' = & 2,1303\,. &
\end{array}
$$

6) Odrediti ugao α ako je $\sin\alpha = 0,45\ 917$ (zadatak obrnut primeru 1). - U koloni funkcije Sinus nalazimo vrednost 0,45 917. Kako se oznaka kolone Sinus nalazi u gornjem zaglavlju, funkciji pripada argument leve kolone : $27^\circ 20'$. Dakle,

$$\alpha = 27^\circ\ 20'.$$

7) Odrediti ugao β ako je $\cos\beta = 0,45\ 917$ (zadatak obrnut primeru 2). - U koloni funkcije Cosin nalazimo vrednost 0,45 917. Kako se oznaka kolone Cosin nalazi u donjem zaglavlju, funkciji pripada argument desne kolone :

$62^\circ 40'$. Dakle,

$$\beta = 62^\circ 40'.$$

8) Odrediti ugao γ ako je $\text{tg}\,\gamma = 0{,}51\ 846$ (zadatak obrnut primeru 3). - U koloni Tang nalazimo da je vrednost 0,51 846 interpolovana između vrednosti 0,51 688, kojoj pripada argument $27^\circ 20'$, i vrednosti 0,52 057, kojoj pripada argument $27^\circ 30'$. Minutna promena u tom razmaku iznosi: $D.1' = 36{,}9$.

Relaciji među funkcijama

$$0{,}51\ 688 < 0{,}51\ 846 < 0{,}52\ 057$$

odgovara relacija pripadajućih argumenata:

$$27^\circ\ 20' < \gamma < 27^\circ\ 30'.$$

Razlici date vrednosti funkcije i one susedne utabličene koja je <u>bliža</u> datoj:

$$\begin{array}{r} 0{,}51\ 846 \\ \underline{-0{,}51\ 688} \\ \Delta = \quad 158 \end{array}$$

odgovara promena argumenta (količnik razlike i minutne promene, $\Delta : D.1'$):

$$158 : 36{,}9 \approx 4{,}28.$$

Dakle,

$$\begin{array}{r} 27^\circ\ 20' \\ \underline{4'{,}28} \\ \gamma = 27^\circ\ 24'{,}28 \end{array}$$

odnosno, kad delove minute izrazimo sekundama,

$$0'{,}28 \cdot 60 = 16''8 \approx 17'',$$

$$\gamma = 27^\circ\ 24'\ 17''.$$

2. <u>Logaritmi trigonometrijskih funkcija</u>

Kao i za prirodne vrednosti trigonometrijskih funkcija, izračunati su i utabličeni logaritmi tih vrednosti, i to za svaku minutu. Stoga su u kolonama sa oznakom D.1 date sekundne promene, i to za funkcije log sin i log cos posebne, a za funkcije log tang i log cotg zajedničke.

U t a b l i č e n i m   v r e d n o s t i m a   l o g a r i t a m a   t r i g o n o m e t r i j s k i h   f u n k c i j a   t r e b a   d a   s e   o d u z m e   10.

Na primer,

$$\log \sin 37^\circ 32' = 9{,}78\,478 - 10 \quad \text{odnosno}$$
$$= 0{,}78\,478 - 1, \quad \text{ili}$$
$$= \bar{1}{,}78\,478,$$

ili, na primer:

$$\log \operatorname{cotg} 37^\circ 32' = 10{,}11\,450 - 10, \quad \text{odnosno}$$
$$= 0{,}78\,478,$$

ili, na primer:

$$\log \operatorname{tg} 0^\circ 12' = 7{,}54\,291 - 10, \quad \text{odnosno}$$
$$= 0{,}54\,291 - 3, \quad \text{ili}$$
$$= \bar{3}{,}54\,291.$$

Inače, način upotrebe ovih tablica istovetan je sa načinom izloženim u primerima upotrebe tablica prirodnih vrednosti.

Primeri:

9) Odrediti $\log \operatorname{tg} 27^\circ 24' 17''$. - Sekundna promena u razmaku između $27^\circ 24'$ i $27^\circ 25'$ iznosi: $D.1'' = 0{,}52$. Za $17''$ promena iznosi $17 \cdot 0{,}52 \approx 9$ jedinica poslednje decimale. Kako je $\log \operatorname{tg} 27^\circ 24' < \log \operatorname{tg} 27^\circ 25'$, to za funkciju $\log \operatorname{tg} 27^\circ 24' 17''$ važi relacija

$$\log \operatorname{tg} 27^\circ 24' < \log \operatorname{tg} 27^\circ 24' 17'' < \log \operatorname{tg} 27^\circ 25'.$$

Dakle,

$$\bar{1}{,}71\,462 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (= \log \operatorname{tg} 27^\circ 24')$$
$$+ \qquad 9 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (= 17 \cdot D.1'')$$

$$\log \operatorname{tg} 27^\circ 24' 17'' = \bar{1}{,}71\,471 .$$

10) Odrediti ugao δ ako je $\log \sin \delta = \bar{1}{,}90\,334$, ili $9{,}90\,334 - 10$. - U koloni log sin (donje zaglavlje) nalazimo da je vrednost 9,90 334 (-10) interpolovana između vrednosti 9,90 330 (-10), kojoj pripada argument (desne kolone) $53^\circ 10'$, i vrednosti 9,90 339 (-10), kojoj pripada argument $53^\circ 11'$. Sekundna promena u tom razmaku iznosi: $D.1'' = 0{,}16$.

Relaciji među funkcijama

$$9{,}90\ 330 < 9{,}90\ 334 < 9{,}90\ 339$$

odgovara relacija pripadajućih argumenata:

$$53^{\circ}10' < \delta < 53^{\circ}11'.$$

Razlici date vrednosti funkcije i one susedne u-tabličene koja je bliža datoj:

$$\begin{array}{r} 9{,}90\ 334 \\ -\ 9{,}90\ 330 \\ \hline \Delta = \quad 4 \end{array}$$

odgovara promena argumenta (količnik razlike i sekundne promene, $\Delta : D.1''$):

$$4 : 0{,}16 = 25$$

Dakle,

$$\begin{array}{r} 53^{\circ}10' \\ +\quad 25'' \\ \hline \delta = 53^{\circ}10'25''. \end{array}$$

3. Rešavanje trougla

Da bi trougao bio određen, potrebno je da su poznata tri elementa, od kojih bar jedna stranica (III DEO, VI GLAVA). Ostala tri elementa mogu da se odrede ili konstrukcijom ili računom.

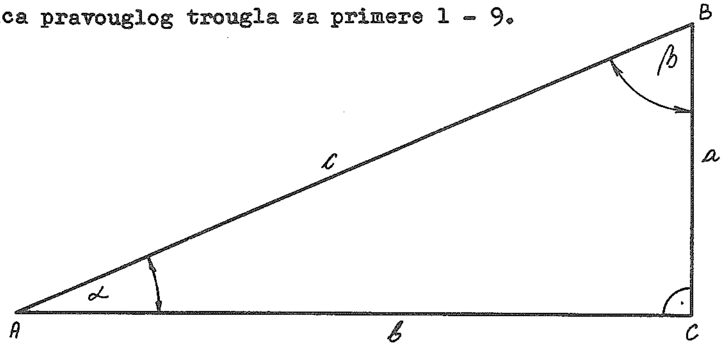
Rešavanje trougla, to jest izračunavanje nepoznatih elemenata trougla pomoću podataka o datim elementima, izvodi se primenom trigonometrijskih funkcija i tablica.

a) Pravougli trougao

Termin "pravougli" sadrži već jedan poznati element - pravi ugao. Prema tome, za rešavanje pravouglog trougla treba da su zadana još samo dva elementa: stranica i ugao, ili dve stranice.

Primeri:

Skica pravouglog trougla za primere 1 - 9.



1) Rešiti pravougli trougao kad su mu poznate katete $a = 40$ i $b = 120$.

Hipotenuzu izračunavamo pomoću Pitagorine teoreme:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Dakle,

$$c = \sqrt{40^2 + 120^2} = \sqrt{1\,600 + 14\,400} = \sqrt{16\,000} = \sqrt{1\,600 \cdot 10} =$$
$$= 40\sqrt{10}.$$

U tablici kvadratnih korena brojeva 1-100 nalazimo da je $\sqrt{10} = 3{,}16\,228$. Prema tome,

$$c \approx 126{,}49 .$$

Ugao α odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} .$$

Dakle,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} = 0{,}33\,333.$$

U tablici prirodnih vrednosti trigonometrijskih funkcija nalazimo da datoj vrednosti funkcije odgovara argument

$$\alpha = 18^\circ 26' 6'' \approx 18^\circ 26'.$$

Ugao β komplementan je uglu α ($\beta = 90^\circ - \alpha$):

$$\beta = 71^\circ 33' 54'' \approx 71^\circ 34'.$$

2) Rešiti pravougli trougao ako su poznate kateta $a = 40$ i hipotenuza $c = 126{,}49$.

Ugao α odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Dakle,

$$\sin\alpha = \frac{40}{126{,}49} = 0{,}31\,623.$$

U tablici prirodnih vrednosti trigonometrijskih funkcija nalazimo da datoj funkciji odgovara argument

$$\alpha = 18^\circ 26' 7'' \approx 18^\circ 26'.$$

Ugao β komplementan je uglu α:

$$\beta = 71^\circ 33' 53'' \approx 71^\circ 34'.$$

Katetu b mogli bismo da odredimo pomoću Pitagorine teoreme

$$b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

ali s obzirom da je hipotenuza data višecifrenim brojem, katetu b odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha,$$

odakle je

$$b = a \cdot \operatorname{cotg}\alpha.$$

U tablici nalazimo da je

$$\operatorname{cotg} 18^\circ 26' 7'' = \operatorname{cotg} 18^\circ 26'{,}117 = 3{,}00\,000 = 3.$$

Dakle,

$$b = a \cdot 3,$$
$$b = 40 \cdot 3 = 120.$$

3) Rešiti pravougli trougao ako je poznata hipotenuza $c = 126{,}49$ i jedan oštar ugao, recimo $\alpha = 18^\circ 26' 7''$.

Ugao $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 18^\circ 26' 7'' = 71^\circ 33' 53''$.

Katetu a odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha,$$

odakle je,

$$a = c \cdot \sin\alpha .$$

Kako je $\sin\alpha = \sin 18^\circ 26' 7'' = \sin 18^\circ 26',117 = 0,31\,623$, to je

$$a = 126,49 \cdot 0,31623,$$

tj.

$$a = 40.$$

Katetu b možemo da odredimo pomoću ugla α i izračunate katete a. Naime,

$$\frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha ,$$

odakle je

$$b = a \cdot \operatorname{cotg}\alpha .$$

Kako je $\operatorname{cotg}\alpha = 3$, to je kateta

$$b = 40 \cdot 3 = 120 .$$

4) Rešiti pravougli trougao ako je poznata jedna kateta, recimo $b = 120$, i jedan oštar ugao, recimo $\alpha = 18^\circ 26' 6''$.

Drugu katetu odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha ,$$

odakle je

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha .$$

Kako je $\operatorname{tg}\alpha = 0,33\,333$, to je

$$a = 120 \cdot 0,33\,333 = 40.$$

Hipotenuzu c odredićemo pomoću Pitagorine teoreme (v.pr.1):

$$c = \sqrt{120^2 + 40^2} = 126,49.$$

5) Vertikalni štap (a) dužine 40 cm baca senku (b) dugu 120 cm. Odrediti visinu Sunca (α - ugao pod kojim Sunčevi zraci padaju na horizontsku ravan).

Odgovor: $\alpha = 18^\circ 26' 6''$ (vidi primer 1).

6) Kretanjem po strmoj ravni (c) dužine 126,49 m, telo dostigne visinu (a) 40 m iznad osnove (AC) strme ravni. Odrediti ugao nagiba (α) strme ravni.

Odgovor: $\alpha = 18^\circ 26' 7''$ (v.pr.2).

7) Nagibni ugao strme ravni $\alpha = 18^{\circ}26'7''$. Dužina strme ravni (c) iznosi 1264,9 m. Za krajnju tačku (B) uspona odrediti visinu (a) nad osnovom (AC) strme ravni.

<u>Odgovor:</u> a = 400 m (v.pr. 3).

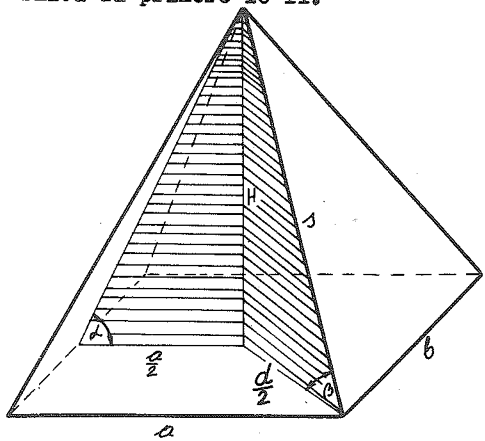
8) Avion (B) osmotren je iz mesta A pod elevacionim uglom (merenim od horizontske ravni posmatrača naviše) $\alpha = 18^{\circ}26'6''$, a u trenutku kad se avion nalazio vertikalno iznad mesta C, udaljenog od mesta A za 12 km. Odrediti visinu (a) na kojoj leti avion.

<u>Odgovor:</u> a = 4 000 m (v.pr. 4).

9) Iz aviona (B) koji leti vertikalno iznad mesta C, osmotren je, sa visine (a) od 4 000 m, aerodrom A pod depresionim uglom (merenim od horizontske ravni posmatrača naniže) $\alpha = 18^{\circ}26'6''$. Odrediti udaljenost (b) aerodroma A od mesta C.

<u>Odgovor:</u> $b = a \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha = 12$ km. Na skici, ugao komplementan je uglu β. (v.pr. 4 i 3).

Skica za primere 10–11.



10) Za četvorostranu piramidu visine H = 24 i jednakih bočnih ivica, čija je osnova pravougaonik stranice a = = 14 i dijagonale d = 20, odrediti: a) nagibni ugao (α)

bočne strane (osnovne ivice b), i b) nagibni ugao (β) bočne ivice (s) - prema ravni osnove piramide.

Rešenje:

(a) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{2H}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{48}{14}$$

Možemo da primenimo i logaritamski račun:

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log 48 - \log 14$$

$$\begin{array}{r} \log 48 = 1{,}68\,124 \\ -\log 14 = -1{,}14\,613 \\ \hline \log \operatorname{tg} \alpha = 0{,}53\,511, \end{array}$$

odnosno,

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 10{,}53\,511 \quad (-10).$$
$$\alpha = 73^\circ 44' 23''.$$

(Najbliža tablična vrednost funkciji log tg α je 10,53 493, razlika 18 : 0,78 = 23.)

(b) $$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{\frac{d}{2}} = \frac{2H}{d}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{48}{20}$$

$$\log \operatorname{tg} \beta = \log 48 - \log 20$$

$$\begin{array}{r} \log 48 = 1{,}68\,124 \\ -\log 20 = -1{,}30\,103 \\ \hline \log \operatorname{tg} \beta = 0{,}38\,021, \end{array}$$

odnosno

$$\log \operatorname{tg} \beta = 10{,}38\,021 \quad (-10)$$
$$\beta = 67^\circ 22' 48''.$$

11) Za četvorostranu piramidu jednakih bočnih ivica, $s = 26$, nagnutih prema ravni osnove pod uglom $\beta = 67^\circ 22',8$, odrediti visinu H.

Rešenje:

$$\frac{H}{s} = \sin\beta ,$$

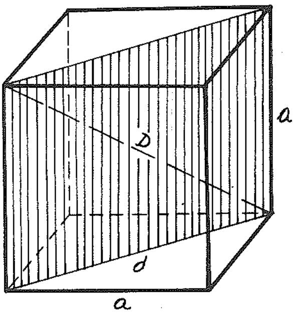
$$H = s \cdot \sin\beta ,$$

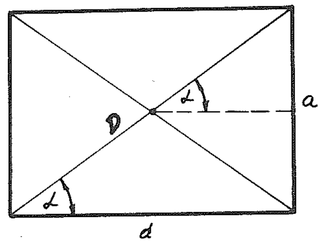
$$H = 26 \cdot \sin 67^{\circ}22',8$$

($\sin 67^{\circ}20' = 0,92\,276$; $2,8 \cdot 19,7 \approx 55$;
$26 \cdot \sin 67^{\circ}22',8 = 24,00\,606$)

$$H = 24.$$

12) Odrediti oštar ugao pod kojim se seku dijagonale kocke.





Dijagonalni presek kocke je pravougaonik osnove $d = a\sqrt{2}$ (dijagonala kvadrata) i visine a (ivica kocke).

Polovinu ugla preseka odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

$$\log \operatorname{tg}\alpha = \log 1 - \log 2 = \log 1 - \frac{1}{2}\log 2$$

$$\log 1 = (1)\ 0,00\,000 \quad (-10)$$

$$-\frac{1}{2}\log 2 = -0,15\,052$$

$$\log \operatorname{tg}\alpha = 9,84\,948 \quad (-10)$$

$$\alpha = 35^{\circ}15'51''$$

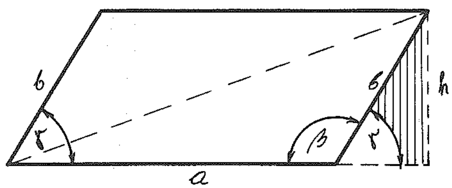
$$2\alpha = 70^{\circ}31'42''.$$

Dakle, dijagonale kocke seku se pod uglom $70^\circ31'42''$ (a ne pod pravim uglom, - kao što se često, u testovima, pogrešno odgovara).

13) Odrediti nagibni ugao dijagonale kocke prema ravni osnove.

<u>Odgovor:</u> $\alpha = 35^\circ15'51''$ (v.pr.12).

14) Izvesti trigonometrijske obrasce za površine romboida i trougla.



Površina romboida jednaka je proizvodu osnovice i visine:

$$P = ah .$$

Kako je, prema skici,

$$\frac{h}{b} = \sin\gamma ,$$

odnosno $$h = b \cdot \sin\gamma ,$$

to je $$\underline{P = ab \sin\gamma},$$

tj. <u>površina romboida jednaka je proizvodu dveju susednih stranica i sinusa ugla među njima.</u>

Ako je zahvaćeni ugao tup (suplementan oštrom uglu), obrazac $P = ab \sin\beta$ ekvivalentan je prethodnom obrascu, jer su sinusi suplementnih uglova jednaki.

Kako je romboid dijagonalom podeljen na dva jednaka trougla, to je

$$P_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma ,$$

tj. <u>površina trougla jednaka je</u>

p o l u p r o i z v o d u m a k o j e d v e s t r a n i c e i s i n u s a u g l a m e đ u n j i m a.

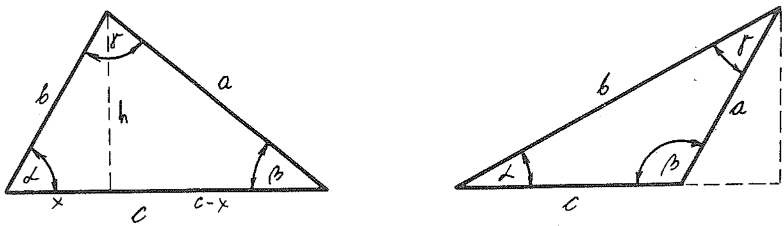
(Obrazac za površinu P razlike isečka i odsečka kruga poluprečnika r i zajedničkog centralnog ugla α :

$$P = \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha .)$$

b) Kosougli trougao

Kosougli trougao rešava se primenom trigonometrijskih teorema: sinusne, ili kosinusne, ili tangensne, u zavisnosti od elemenata koji su poznati.

Skice kosouglog trougla.



(1) Sinusna teorema

Iz trigonometrijskog obrasca za površinu trougla (v.pr. 14) primenjenog na sva tri ugla, tj.

$$P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma ,$$

$$P = \frac{1}{2} ac \sin\beta ,$$

$$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha ,$$

izvodimo relacije:

$$\frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} ac \sin\beta ,$$

$$\frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} bc \sin\alpha ,$$

$$\frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} bc \sin\alpha ,$$

iz kojih se, posle skraćivanja, izvode proporcije

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},$$

koje mogu da se napišu u obliku produžene proporcije

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

koja predstavlja sinusnu teoremu.

Sinusna teorema može da se izrazi i odnosom

$$\boxed{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma}$$

tj.: s t r a n i c e t r o u g l a o d n o s e s e k a o s i n u s i n a s p r a m n i h u g l o v a.

(2) Kosinusna teorema

Visina trougla, koja odgovara osnovici, obrazuje sa datim trouglom (vidi skicu) dva pravougla trougla. Primenom Pitagorine teoreme, visinu h možemo da izrazimo

$$h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

i

$$h^2 = b^2 - x^2$$

odakle je

$$a^2 - (c - x)^2 = b^2 - x^2 ;$$

dalje je

$$a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx .$$

Kako je

$$\frac{x}{b} = \cos\alpha ,$$

odnosno

$$x = b \cos\alpha ,$$

dobićemo

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha} ,$$

tj. kosinusnu teoremu kojom se jedna stranica izražava pomoću dveju drugih i ugla među njima.

Sličnim postupkom dobijamo još dva odgovarajuća izraza:

$$\boxed{\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma \end{aligned}} .$$

U slučaju kad je ugao među stranicama tup (kosinus tupog ugla je negativan), proizvod 2bc cos α (2ac cos β, 2ab cos γ) ne oduzima se, već se dodaje zbiru kvadrata stranica.

Prema tome, kosinusna teorema može da se izrazi rečima:

<u>Kvadrat ma koje stranice trougla jednak je zbiru kvadrata drugih dveju stranica algebarski umanjenom za njihov proizvod sa udvostručenom vrednošću kosinusa ugla među njima.</u>

<u>Primedba:</u> Ako je ugao među dvema stranicama prav, recimo ugao $\gamma = 90^\circ$, s obzirom da je $\cos 90^\circ = 0$, kosinusna teorema poistovećuje se sa Pitagorinom teoremom

$$c^2 = a^2 + b^2 ;$$

dakle, Pitagorina teorema predstavlja poseban slučaj opštije kosinusne teoreme.

(3) <u>Tangensna teorema</u>

Ako na sinusnu teoremu (za dva para elemenata)

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

primenimo stav o proporcijama

$$\frac{a+b}{a-b} \quad \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta},$$

i ako zbir i razliku sinusa uglova α i β transformišemo u proizvod,

$$\frac{a+b}{a-b} \quad \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

dobićemo proporciju

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}}$$

kojom je izražena tangensna teorema i koja može da se iskaže:

Zbir ma koje dve stranice trougla odnosi se prema njihovoj razlici kao tangens poluzbira naspramnih uglova prema tangensu njihove polurazlike.

Primena:

Kosinusna teorema primenjuje se ako su date dve stranice i ugao među njima, ili ako su date tri stranice (nije podesna za logaritamski račun).

Tangensna teorema primenjuje se uglavnom umesto kosinusne ako su podaci o stranicama dati višecifrenim brojevima (podesna za logaritamski račun).

U svim ostalim slučajevima primenjuje se sinusna teorema.

Primeri:

15) Rešiti trougao ako su mu poznate dve stranice, $a = 17$, $b = 10$ i ugao među njima, $\gamma = 25^{\circ}3'27''$.

U kosinusnoj teoremi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

zamenimo date vrednosti

$$c^2 = 17^2 + 10^2 - 2 \cdot 17 \cdot 10 \cdot \cos 25^\circ 3' 27''$$

$\cos\gamma = 0{,}90\ 589$; $\quad 2 \cdot 17 \cdot 10 \cdot \cos\gamma = 308$;

$$c^2 = 289 + 100 - 308 = 81$$

$$c = 9.$$

Ugao, recimo β, odredićemo pomoću sinusne teore me

$$c : b = \sin\gamma : \sin\beta \ ;$$

iz ove proporcije biće

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c},$$

ili, logaritamski,

$$\log\sin\beta = \log b + \log\sin\gamma - \log c,$$

odnosno

$$\log\sin\beta = \log 10 - \log\sin 25^\circ 3' 27'' - \log$$

$$\begin{array}{lrr}
 & \log 10 = 1 & \\
+ & \log\sin\gamma = +9{,}62\ 688 & -10 \\
\hline
(\text{zbir}) & \Sigma = 10{,}62\ 688 & -10 \\
 & -\log 9 = -0{,}95\ 424 & \\
\hline
 & \log\sin\beta = 9{,}67\ 264 & -10 \\
 & \beta = 28^\circ 4' 21'' &
\end{array}$$

Ugao $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$;

$$\alpha = 126^\circ 52' 12''.$$

Međutim, pošto je izračunata stranica c, ugao, r cimo β, mogli smo da odredimo ponovo primenom kosinusne te reme:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

odakle je

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

odnosno

$$\cos\beta = \frac{17^2 + 9^2 - 10^2}{2\cdot 17\cdot 10} = \frac{27}{34}\ .$$

Pomoću tablica prirodnih vrednosti trigonometrijskih funkcija, ili pomoću logaritama dobili bismo već nađenu vrednost.

16) Date su dve stranice trougla, $a = 13$, $c = 4$ i ugao među njima $\beta = 112^\circ 37' 12''$. Odrediti treću stranicu.

Rešenje:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$b^2 = 13^2 + 4^2 - 2\cdot 13\cdot 4\cdot \cos 112^\circ 37' 12''.$$

$\cos 112^\circ 37' 12'' = -\cos 67^\circ 22' 48'' = -0{,}38\ 462.$

$$b^2 = 169 + 16 + 40 = 225$$

$$b = 15.$$

17) Rešiti trougao ako su mu poznate dve stranice, $a = 2\ 890$, $b = 2\ 500$ i ugao među njima $\gamma = 17^\circ 35' 40''$.

Primenićemo tangensnu teoremu:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}\ .$$

Zbir $\alpha+\beta = 180^\circ - \gamma$, a poluzbir $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 81^\circ 12' 10''$$

$$a + b = 5\ 390$$

$$a - b = 390.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Logaritmovanjem,

$$\log\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \log(a-b) + \log\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \log(a+b)$$

i zamenom datih vrednosti dobijamo

$$\log\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}66\ 982 \quad -10\ ,$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 25^\circ 3' 29''\ ,$$

$$\alpha - \beta = 50^\circ 6' 58''$$
$$\alpha + \beta = 162^\circ 24' 20''$$
$$2\alpha = 212^\circ 30' 78''$$
$$\alpha = 106^\circ 15' 39''$$
$$\beta = 56^\circ 8' 41''$$

Stranicu c odredićemo pomoću sinusne teoreme

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$$

odnosno

$$\log c = \log b + \log \sin\gamma - \log \sin\beta \,.$$
$$\log c = 2{,}95\ 904,$$
$$c = 91.$$

18) Osmatrači iz dva mesta, udaljena jedno od drugog ($c =$) 17 km, osmotrili su neki objekt na horizontu pod uglovima $\alpha = 73^\circ 44' 23''$ i $\beta = 67^\circ 22' 48''$, merenim prema pravoj liniji koja spaja mesta osmatrača. Odrediti: 1) za koliko je osmotreni objekt bliži jednom osmatraču i 2) udaljenost objekta od linije koja spaja osmatrače.

1) $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$; $\quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$; $\quad b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$

$$\gamma = 38^\circ 52' 49''$$

$\log a = 1{,}41\ 497$; $\quad \log b = 1{,}39\ 794$

$a = 26$ km $\qquad b = 25$ km

Objekt je za 1 km bliži onom osmatraču koji je izmerio veći ugao (prema većem uglu leži duža strana, a prema manjem kraća).

2) Visina trougla (v.skicu)

$$h : a = \sin\beta$$
$$h = a \cdot \sin\beta \,.$$

Udaljenost objekta od date linije iznosi:

$$h = 24 \text{ km}.$$

V DEO

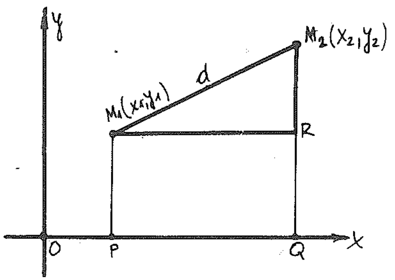
ANALITIČKA GEOMETRIJA

I GLAVA

TAČKA I PRAVA

1. Rastojanje dveju tačaka

Neka su date dve tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ (sl. 1) čije ćemo rastojanje označiti sa d. Sa slike vidimo da je:



Slika 1

$PM_1 = y_1$; $QM_2 = y_2$

$M_1R = PQ = x_2 - x_1$

$RM_2 = y_2 - y_1$

Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao M_1RM_2 dobićemo:

$M_1M_2^2 = M_1R^2 + RM_2^2$, tj.

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

odakle je:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Obrazac (1) služi za izračunavanje rastojanja tačaka $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$.

Primer 1.

Naći rastojanje tačaka $M_1(2,3)$ i $M_2(5,7)$.

Ovde je $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 5$, $y_2 = 7$, pa prema obrascu (1) imamo da je:

$$d = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 .$$

Primer 2.

Naći rastojanje tačaka A(-1,0) i B(11,5).

Ovde je $x_1 = -1$, $y_1 = 0$; $x_2 = 11$, $y_2 = 5$. Prema obrascu (1) sada je:

$$d = \sqrt{11 - (-1)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Primer 3.

Naći dužine strana trougla čija su temena A(1,3), B(-1,1) i C(3,1).

Ovde imamo prema obrascu (1) da je:

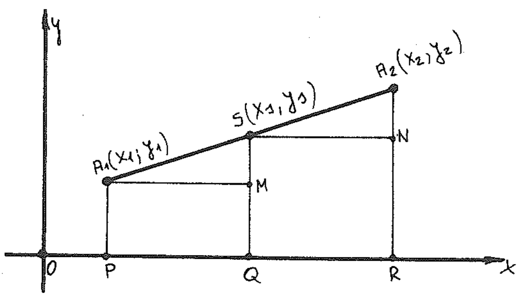
$$AB = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$BC = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$CA = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

2. Koordinate sredine date duži

Neka je data duž d čije su krajnje tačke $A_1(x_1,y_1)$ i $A_2(x_2,y_2)$. Odredimo koordinate sredine duži A_1A_2. Neka je $S(x_s,y_s)$ tačka koja polovi duž A_1A_2 (sl. 2).



Slika 2

Sa slike 2 je:

$OP = x_1$, $OQ = x_s$, $OR = x_2$, $PA_1 = QM = y_1$,

$QS = RN = y_s$, $A_1M = x_s - x_1$, $MS = y_s - y_1$,

$SN = x_2 - x_s$, $NA_2 = y_2 - y_s$.

Iz podudarnosti trouglova A_1MS i SNA_2 je:

$$A_1M = SN; \quad MS = NA_2 \ , \quad \text{tj.}$$

$$x_s - x_1 = x_2 - x_s; \quad y_s - y_1 = y_2 - y_s,$$

odakle dobijamo koordinate sredine duži A_1A_2

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_s = \frac{y_1 + y_2}{2} . \qquad (2)$$

Primer 1.

Naći koordinate sredine duži čije su krajnje tačke $A_1(2,5)$ i $A_2(1,3)$.

Prema obrascima (2) imaćemo:

$x_s = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$; $y_s = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$, pa je sredina duži A_1B_1 tačka $S(\frac{3}{2}, 4)$.

Primer 2.

Naći dužinu težišne linije trougla $A(1,-1)$, $B(0,3)$ i $C(4,1)$ koja odgovara njegovoj strani BC.

Ako sredinu strane BC obeležimo sa A_1, težišna linija čiju dužinu tražimo biće duž AA_1. Koordinate tačke A znamo, a koordinate tačke B naći ćemo kao koordinate sredine duži BC prema obrascima (2). U našem slučaju biće:

$$x_s = \frac{0 + 4}{2} = 2; \quad y_s = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

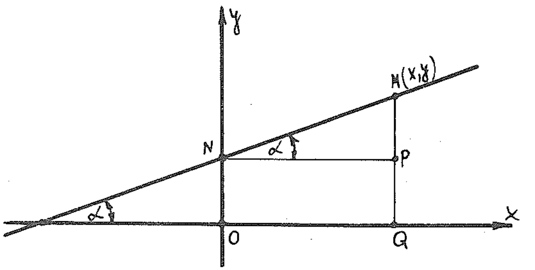
Sada smo zadatak sveli na određivanje rastojanja tačaka $A(1,-1)$ i $A_1(2,2)$. Prema obrascu (1) imamo:

$$AA_1 = \sqrt{(2 - 1)^2 + [2 - (-1)]^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$$

3. Jednačina prave

a) Eksplicitni oblik jednačine prave

Položaj prave u koordinatnom sistemu XOY određen je odsečkom ON = b koji ona odseca na osi OY i uglom α koji prava gradi sa pozitivnim smerom OX ose (sl. 3).



Slika 3

Neka je M(x,y) ma koja tačka prave; tada se iz tro ugla NPM dobija:

$$ON = QP = b$$

$$PM = y - b,$$

$$NP = OQ = x, \quad \text{pa je}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y - b}{x},$$

odakle

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + b, \quad \text{ili}$$

ako stavimo $\operatorname{tg}\alpha = k$, gde je k koeficijent pravca prave, imaćemo odavde:

$$y = kx + b. \qquad (4)$$

Jednačina (4) predstavlja eksplicitni oblik jednačine prave. Ona se često naziva i glavni oblik jednačine prave.

Primer 1.

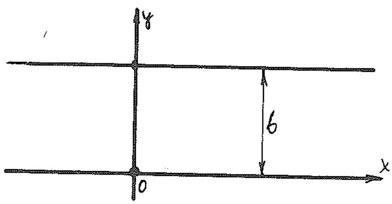
Jednačina $y = \sqrt{3}\ x + 2$ predstavlja pravu koja sa pozitivnim smerom ose OX obrazuje ugao od 60° ($k = \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$), a na osi OY gradi odsečak koji iznosi 2.

Primer 2.

Jednačina $y = -x - 3$ predstavlja pravu liniju koja sa pozitivnim smerom ose OX gradi ugao od 135° ($k = \text{tg } 135^\circ = -1$) a prolazi kroz tačku $(0,-3)$ na osi OY.

Jednačina

$$y = b$$



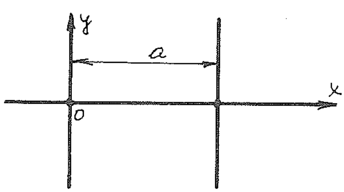
Slika 4

predstavlja pravu paralelnu osi OX na rastojanju b (sl. 4). Ako je $b = 0$, prava se poklapa sa osom OX, što znači da je jednačina OX ose

$$y = 0.$$

Jednačina

$$x = a$$



Slika 5

predstavlja pravu paralelnu osi OY na rastojanju a (sl. 5). Ako je $a = 0$, onda se prava poklapa sa osom OY, što znači da je jednačina OY ose

$$x = 0.$$

b) Opšti oblik jednačine prave

Jednačina oblika:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5)$$

predstavlja pravu. Uz pretpostavku da je $B \neq 0$, jednačina (5) rešena po y daje:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad . \qquad (6)$$

Ako se stavi $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$, dobiće se iz (6) jednačina:

$$y = kx + b,$$

a to je, kao što smo videli, jednačina prave.

Ako je u jednačini (5) $A = 0$, prava je paralelna osi OX, a ako je $B = 0$, prava je paralelna osi OY. Ako je $C = 0$, prava prolazi kroz koordinatni početak.

Primer.

Jednačinu prave $2x - 3y - 5 = 0$ datu u opštem obliku napiši u glavnom obliku.

Iz jednačine prave $2x - 3y - 5 = 0$ date u opštem obliku, rešavanjem po y dobijamo njemu jednačinu u glavnom obliku:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \; .$$

c) Jednačina prave kroz jednu tačku

Neka je data tačka $M_1(x_1,y_1)$ i prava čija je jednačina:

$$y = kx + b \; . \qquad (7)$$

Da bi prava čija je jednačina (7) prolazila kroz tačku $M_1(x_1,y_1)$, koordinate ove tačke moraju da zadovolje jednačinu (7), pa ćemo dobiti

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Oduzimanjem ove poslednje jednačine od jednačine (7), dobićemo:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \; . \qquad (8)$$

Jednačina (8) predstavlja pramen pravih kroz tačk $M_1(x_1,y_1)$, pošto se u njoj javlja koeficijent k koji može u zimati razne vrednosti. Ovo je jasno jer se, kao što znamo, kroz datu tačku može povući bezbroj pravih.

Primer.

Napiši jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M_1(2,5)$ a sa pozitivnim smerom ose OX gradi ugao od 30°.

U ovom slučaju je $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pa prema (8) imamo traženu jednačinu:

$$y - 5 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2).$$

d) Jednačina prave kroz dve tačke

Jednačina prave koja prolazi kroz tačku $M_1(x_1, y_1)$, kao što smo videli, ima oblik:

$$y - y_1 = k(x - x_1) . \qquad (8)$$

Da bi ova prava prolazila i kroz tačku $M_2(x_2, y_2)$, koordinate ove tačke moraju da zadovolje jednačinu:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

odakle je

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

pa jednačina (8) postaje:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} . \qquad (9)$$

Poslednja jednačina je jednačina prave kroz dve tačke.

Primer 1.

Naći jednačinu prave koja prolazi kroz tačke $M_1(1,5)$ i $M_2(3,9)$.

Prema (9) tražena jednačina glasi:

$$y - 5 = \frac{9-5}{9-1}(x - 1), \quad \text{tj.}$$

$$y - 5 = 2(x - 1) \quad \text{ili}$$

$$y = 2x + 3.$$

Primer 2.

Jednačina prave koja prolazi kroz tačke (2,0) i (1,-1) glasi:

$$y = \frac{-1}{1-2}(x-2), \qquad \text{tj.}$$

$$y = x - 2.$$

e) Ugao između dve prave

Neka su date prave ℓ_1 i ℓ_2 čije su jednačine:

$$y = k_1x + b_1$$

$$y = k_2x + b_2 \quad \text{(sl. 6)}.$$

Iz trougla P_1P_2S ugao između pravih

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$$

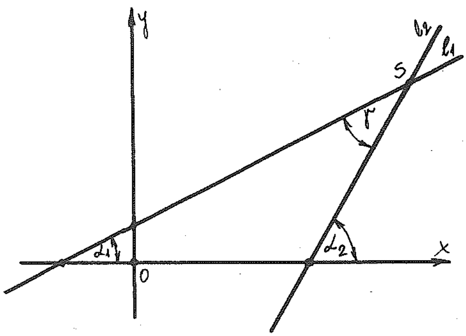
odakle je:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_1}.$$

Kako je $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, to je:

$$\boxed{\operatorname{tg}\gamma = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}} \quad (9).$$



Slika 6

Ako su prave ℓ_1 i ℓ_2 paralelne, ugao između njih je jednak nuli, tj. $\gamma = 0$, pa je i $\operatorname{tg}\gamma = 0$. U tom slučaju iz (9) se dobija:

$$k_2 = k_1, \qquad (10)$$

što predstavlja uslov paralelnosti pravih ℓ_1 i ℓ_2.

Primer 1.

Prave čije su jednačine $y = 2x + 3$ i $y = 2x + 2$

su paralelne, jer imaju jednake koeficijente pravca ($k_1 = 2$, $k_2 = 2$).

Primer 2.

U jednačini prave $y = (2 + m)x - 5$, odredi m tako da ova prava bude paralelna pravoj $y = 6x - 1$.

Ovde je $k_1 = 6$, $k_2 = 2 + m$, pa prema uslovu (10) imamo da je:

$$2 + m = 6, \text{ odakle}$$

$$m = 4.$$

Kada su prave ℓ_1 i ℓ_2 upravne, ugao između njih iznosi 90°; $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$.

Prema obrascu (9) ovo će biti ispunjeno ako je

$$1 + k_2 k_1 = 0, \text{ tj. ako je}$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \tag{11}$$

što predstavlja uslov upravnosti pravih ℓ_1 i ℓ_2.

Primer.

Napiši jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $A(1,-2)$ a upravna je na pravoj $y = 3x + 4$.

Jednačina prave kroz tačku A glasi:

$$y + 2 = k(x - 1).$$

Da bi prava predstavljena poslednjom jednačinom bila upravna na pomenutoj pravoj, treba da bude prema (11) $k = -\frac{1}{3}$, pa tražena jednačina ima oblik:

$$y + 2 = -\frac{1}{3}(x - 1), \quad \text{tj.}$$

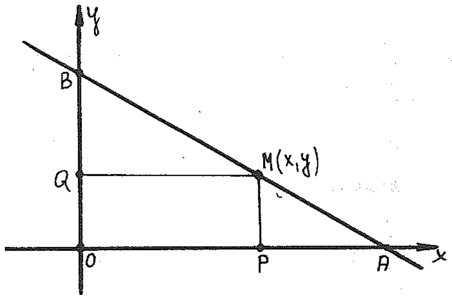
$$x + 3y + 5 = 0.$$

f) Segmentni oblik jednačine prave

Prava je određena odsečcima koje gradi na koordinatnim osama. Ove odsečke obeležavamo sa a, odnosno sa b (sl. 7). Sa slike se vidi da je:

$$OP = QM = x, \quad PM = OQ = y$$

$$PA = OA - OP = a - x$$



Slika 7

$QB = OB - OQ = b - y.$

Iz sličnosti trouglova PAM i QMB je:

$$\frac{x - a}{x} = \frac{x}{b - y},$$

odakle $bx + ay = ab$, što posle podele sa ab daje:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (12)$$

Jednačina (12) predstavlja segmentni oblik jednačine prave.

Primer 1.

Napiši jednačinu prave koja odseca na osi OX odsečak 3, a na osi OY odsečak 5.

Prema (12) imamo:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1.$$

Primer 2.

Jednačinu prave $Ax + By + C = 0$ date u opštem obliku napiši u segmentnom obliku.

Ovde ćemo datu jednačinu napisati u obliku $Ax + By = - C$ i podeliti je sa $- C$, $(C \neq 0)$, posle čega dobijamo:

$$\frac{A}{-C} x + \frac{B}{-C} = 1 \quad \text{ili}$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

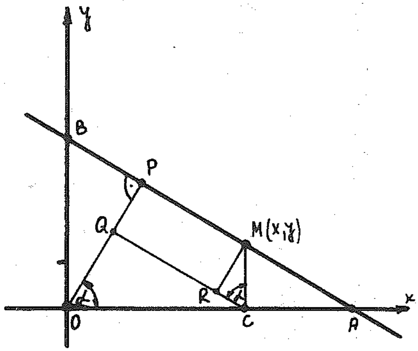
gde je prema (12) $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Na taj način jednačina prave $2x - 3y - 5 = 0$ napisana u segmentnom obliku bila bi:

$$\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{-\frac{5}{3}} = 1 .$$

g) Jednačina prave u normalnom obliku

Položaj prave u koordinatnom sistemu XOY određen je njenim normalnim rastojanjem p od koordinatnog početka i uglom α što ovo rastojanje gradi sa pozitivnim smerom apscisne ose (sl. 8).



Slika 8

Sa slike (8) je:

$OP = p$, $OC = x$, $CM = y$

$QP = RM$, $OP = OQ + QP =$ $= OQ + RM$, tj.

$p = OC \cos\alpha + CM \sin\alpha$, ili

$p = x \cos\alpha + y \sin\alpha$, što se obično piše u obliku

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p, \qquad (13)$$

što predstavlja jednačinu prave u normalnom obliku.

Primer.

Napiši jednačinu prave ako njeno normalno rastojanje od koordinatnog početka iznosi 5, a ugao što ga ovo rastojanje obrazuje sa pozitivnim smerom ose OX 60°.

Prema (13) imamo:

$x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ = 5$, odnosno

$x + \sqrt{3}\, y = 10.$

h) Rastojanje tačke od prave

Data je tačka $M_1(x_1, y_1)$ i prava ℓ (sl. 9) čija je jednačina:

$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0.$

Jednačina prave ℓ_1 kroz tačku M_1 a koja je paralelna pravoj ℓ glasi:

$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p+d$

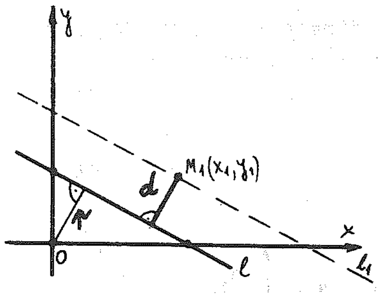
odakle se dobija:

$d = x \cos\alpha + y \sin\alpha - p,$

gde je d rastojanje prave ℓ_1 od prave ℓ.

Pošto prava ℓ_1 prolazi kroz tačku $M_1(x_1 y_1)$ biće:

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p \qquad (14)$$



Slika 9.

ako se tačka M_1 i koordinatni početak nalaze sa raznih strana prave ℓ. Ako se tačka M_1 i koordinatni početak nalaze sa iste strane prave ℓ, onda se rastojanje tačke M_1 od prave ℓ dobija po obrascu:

$$d = p - (x_1 \cos\alpha + y \sin\alpha) . \qquad (15)$$

Na osnovu (14) i (15) vidi se da se rastojanje tačke $M_1(x_1,y_1)$ od prave $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ dobija po obrascu

$$d = | x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p | . \qquad (16)$$

Da bismo odredili rastojanje tačke $M_1(x_1,y_1)$ od prave čija je jednačina data u opštem obliku:

$$Ax + By + C = 0 , \qquad (17)$$

prvo se mora ova jednačina napisati u normalnom obliku:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 . \qquad (18)$$

Da bi jednačine (17) i (18) predstavljale jednu pravu, potrebno je da bude:

$$\cos\alpha = A\lambda, \quad \sin\alpha = B\lambda, \quad -p = C\lambda, \tag{19}$$

gde je λ koeficijent proporcionalnosti.

Kvadriranjem i sabiranjem prvih dveju jednačina od (19) dobićemo:

$1 = \lambda^2(A^2 + B^2)$ odakle dobijamo

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{20}$$

U (20) se uzima od dva znaka onaj koji je suprotan znaku koeficijenta C iz jednačine (17) da bi p dato u (19) bilo pozitivno.

Ako se $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ i $-p$ dato u (19) i vodeći računa o (20) zamene u (18), dobiće se jednačina:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \tag{21}$$

koja predstavlja traženi normalni oblik jednačine (17).

Rastojanje tačke $M_1(x_1, y_1)$ od prave čija je jednačina (17) dobija se sada po obrascu:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \tag{22}$$

Primer 1.

Jednačinu prave $3x - 4y - 2 = 0$ napiši u normalnom obliku.

Prema (21) normalni oblik date jednačine glasi:

$$\frac{3x - 4y - 2}{\pm\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 0, \quad \text{odnosno}$$

$$\frac{3x - 4y - 2}{5} = 0, \quad \text{ili}$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0 .$$

Primer 2.

Nađi rastojanje tačke $M_1(1,2)$ od prave $5x + 12y -$

$- 3 = 0$. Prema obrascu (22) je traženo rastojanje:

$$d = \left| \frac{5 \cdot 1 + 12 \cdot 2 - 3}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{5 + 24 - 3}{\sqrt{169}} \right| = \frac{26}{13} = 2.$$

II G L A V A

KRIVE DRUGOG STEPENA

Opšta jednačina drugog stepena:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (23)$$

može predstavljati krug, elipsu, hiperbolu, parabolu ili skup pravih linija. Svaka od ovih linija može se dobiti kada se konusna površ preseca raznim ravnima.

1. Jednačina kruga

Krug je geometrijsko mesto tačaka u ravni koje su podjednako udaljene od jedne stalne tačke koju nazivamo centar kruga.

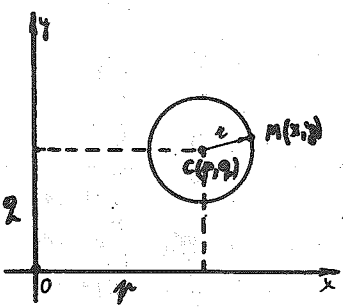
Proizvoljnu tačku pomenutog geometrijskog mesta obeležavamo sa $M(x,y)$, a stalnu tačku (centar kruga) sa $C(p,q)$ (sl. 10). Ako se sa $\underline{r}$ označi rastojanje tačaka C i M, na osnovu obrasca (1) za rastojanje dveju tačaka biće:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \quad (24)$$

što predstavlja jednačinu kruga sa centrom u tački $C(p,q)$ i poluprečnikom $\underline{r}$.

Ako se centar kruga nalazi u koordinatnom početku, jednačina kruga (24) postaje:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



Slika 10

Primer 1.

Napiši jednačinu kruga čiji je centar tačka C(3,2) a poluprečnik mu je 8.

Prema (24) imaćemo:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 64.$$

Jednačina (24) može se napisati u obliku:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \qquad (25)$$

Ako jednačinu (25) uporedimo sa (23) dobićemo da je $A = C = 1$

$B = 0$, $D = -p$, $E = -q$, $p^2 + q^2 - r^2 = F$.

Primer 2.

Odredi poluprečnik kruga i koordinate njegovog centra ako je jednačina kruga:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0.$$

Ako ovu jednačinu uporedimo sa (25) imaćemo:

$-2p = -6$; $-2q = 2$; $p^2 + q^2 - r^2 = 6$, odakle je:

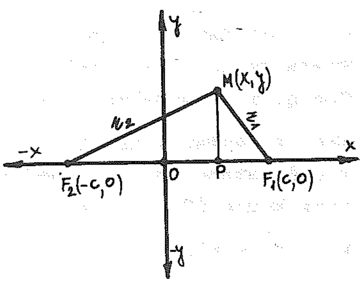
$p = 3$, $q = -1$, $9 + 1 - r^2 = 6$, tj. $r^2 = 4$.

2. Jednačina elipse

Elipsa je geometrijsko mesto tačaka u ravni kod kojih je zbir rastojanja od sveju datih tačaka stalna veličina.

Iz date tačke uzimamo $F_1 = (-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ a tačku elipse obeležimo sa $M(x,y)$ (sl. 11). Stalne tačke F_1 i F_2 nazivamo žiže elipse. Sa slike 11 je:

$OP = x$, $OF_1 = c$, $PF_1 = c - x$, $PM = y$, $F_2M = r_2$, $F_1M = r_1$.



Slika 11

Iz pravouglog trougla F_2PM je:

$$r_2^2 = (c + x)^2 + y^2, \qquad (26)$$

a iz pravouglog trougla PF_1M je:

$$r_1^2 = (c - x)^2 + y^2. \qquad (27)$$

Neka je $r_2 + r_1 = 2a$, gde je $\underline{a}$ stalan broj. Na osnovu (26) i (27) dobijamo:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4\,cx \quad \text{ili}$$

$$(r_2 - r_1)\,(r_2 + r_1) = 4cx, \text{ što zbog (28)}$$

daje:

$$2a\,(r_2 - r_1) = 4cx, \text{ odakle je:}$$

$$r_2 - r_1 = \frac{2c}{a}\,x. \qquad (29)$$

Iz (28) i (29) dobijamo:

$$r_2 = a + \frac{c}{a}\,x\,; \qquad r_1 = a - \frac{c}{a}\,x.$$

Ako nađenu vrednost za r_2 zamenimo u jednačini (26), dobićemo:

$$\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 = (c + x)^2 + y^2, \text{ odakle posle sre-}$$

điv anja imamo:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (30)$$

Stavljajući:

$$a^2 - c^2 = b^2 \qquad (31)$$

jednačina (30) postaje:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \qquad (32)$$

koja se posle deljenja sa a^2b^2 može napisati u obliku:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (33)$$

što predstavlja traženu jednačinu elipse.

Ako se jednačina (32) reši po $\underline{y}$ dobiće se:

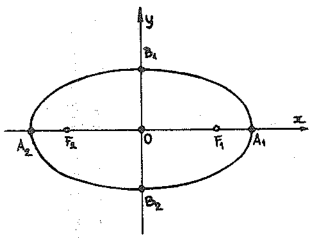
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \tag{34}$$

a ako se reši po $\underline{x}$ daće:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \tag{35}$$

odakle se vidi da je elipsa simetrična u odnosu na obe koordinatne ose.

Iz (34) se za $x = a$ dobija $y = 0$, a za $x = 0$, da je $y = \pm b$, dok se iz (35) za $y = b$ dobija $x = 0$, a za $y = 0$ da je $x = \pm a$. Tačke $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ i $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ nazivaju se temena elipse, dok su $\underline{a}$ i $\underline{b}$ njene poluose (sl.12).



Slika 12

Primeri: Napisati jednačinu elipse ako je data:

1) Poluosa $a = 3$ i $b = 2$.

Rešenje: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

2) Poluosa $a = 10$ i rastojanje među žižama $2c = 12$.

Rešenje: Kako je $a^2 - b^2 = c^2$, to je $b^2 = a^2 - c^2$, odnosno zamenom datih vrednosti $b^2 = 100 - 36 = 64$ dobijamo: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

3) Tačke $M_1(6,4)$ i $M_2(-8,3)$ kroz koje prolazi elipsa.

Rešenje: U jednačini elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ koordinate x i y zamenimo jedanput koordinatama tačke M_1, drugi put koordinatama tačke M_2, te dobijemo dve jednačine sa dve nepoznate a^2 i b^2:

$$36b^2 + 16a^2 = a^2b^2$$
$$64b^2 + 9a^2 = a^2b^2.$$

Oduzimanjem jedne jednačine od druge dobijamo:

$$-28b^2 + 7a^2 = 0$$

odakle je: $$a^2 = 4b^2.$$

Zamenom u jednoj od dve jednačine, recimo u drugoj, dobijamo:

$$64b^2 + 36b^2 = a^2b^2.$$

Deobom sa b^2 dolazimo do vrednosti veličine a^2:

$$a^2 = 100$$

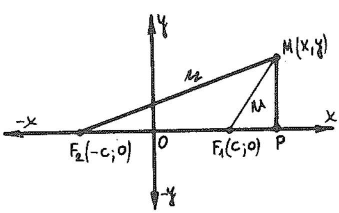
a zatim: $$b^2 = 25.$$

Dakle, jednačina tražene elipse je:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

3. Jednačina hiperbole

Hiperbola je geometrijsko mesto tačaka u ravni kod kojih je razlika rastojanja od dveju datih tačaka stalna veličina.



Slika 13

Za date tačke uzmimo $F_1(-c,0)$ i $F_2(c,0)$, a tačku elipse obeležimo sa $M(x,y)$ (sl. 13). Stalne tačke F_1 i F_2 nazivaju se žiže hiperbole.

Sa slike 13 je:

$OP = x$, $OF_1 = c$, $F_1P = x - c$, $PM = y$

$F_2M = r_2$, $F_1M = r_1$.

Iz pravouglog trougla F_2PM je:

$$r_2^2 = (c + x)^2 - y^2 \tag{36}$$

a iz pravouglog trougla F_1PM je:

$$r_1^2 = (x - c)^2 + y^2. \tag{37}$$

Neka je:

$$r_2 - r_1 = 2a \tag{38}$$

gde je $\underline{a}$ stalan broj.

Na osnovu (36) i (37) oduzimanjem dobijamo

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx$$

ili

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4cx$$

što zbog (38) daje: $2a\,(r_2 + r_1) = 4cx$

odakle je: $$r_2 + r_1 = \frac{2c}{a}\,x. \tag{39}$$

Iz (38) i (39) dobijamo:

$$r_2 = \frac{c}{a}\,x + a, \quad r_1 = \frac{c}{a}\,x - a$$

Ako nađenu vrednost za r_2 zamenimo u jednačini (36), dobićemo:

$$\left(\frac{c}{a}\,x - a\right)^2 = (c + x)^2 + y^2$$

odakle, posle sređivanja, imamo

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2). \tag{40}$$

Stavljajući:

$$c^2 - a^2 = b^2 \tag{41}$$

jednačina (40) postaje:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \tag{42}$$

koje se posle deljenja sa a^2b^2 može napisati u obliku:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{43}$$

što predstavlja traženu jednačinu hiperbole.

Ako se jednačina (42) reši po y, dobiće se:

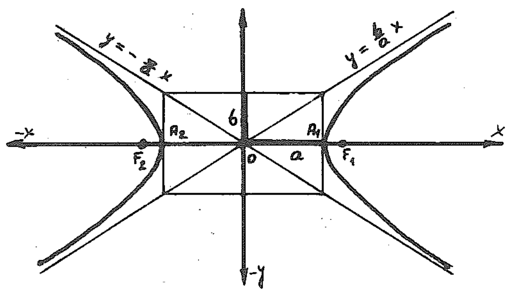
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (44)$$

a ako se reši po x, daće:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2} \qquad (45)$$

odakle se vidi da je hiperbola simetrična u odnosu na obe koordinatne ose.

Iz (44) se za $x = a$ dobije $y = 0$. Tačke $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ nazivaju se temenima hiperbole, dok su a i b njene poluose, i to: a je realna, b je imaginarna poluosa. Prave $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote hiperbole (asimptote - prave kojima se grane krive približavaju da bi se u beskonačnosti dodirnule) (sl. 14).



Slika 14

Primeri: Napisati jednačinu hiperbole ako je dato:

1) Poluose $a = 2$ i $b = \sqrt{3}$.

Rešenje: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

2) Poluosa $a = 15$ i rastojanje među žižama $2c = 34$.

Rešenje: Kako je $a^2 + b^2 = c^2$, to je $b^2 = c^2 - a^2$, odnosno zamenom datih vrednosti $b^2 = 17^2 - 15^2 = (17 + 15)(17 - 15) = 32 \cdot 2 = 64$, dakle:

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

3. Tačke $M_1(4,3)$ i $M_2(14,-12)$ kroz koje prolazi hiperbola.

Rešenje: U jednačini hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ koordinate x i y zamenimo jedanput koordinatama tačke M_1, drugi put koordinatama tačke M_2, te dobijamo dve jednačine sa dve nepoznate a^2 i b^2:

$$16b^2 - 9a^2 = a^2b^2$$

$$196b^2 - 144a^2 = a^2b^2.$$

Oduzimanjem jedne jednačine od druge dobijamo

$$180b^2 - 135a^2 = 0$$

odakle je:

$$b^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Zamenom u jednoj od dve jednačine, recimo u prvoj, dobijamo

$$12a^2 - 9a^2 = a^2b^2.$$

Deobom sa a^2 dolazimo do vrednosti veličine b^2:

$$b^2 = 3$$

a zatim

$$a^2 = 4.$$

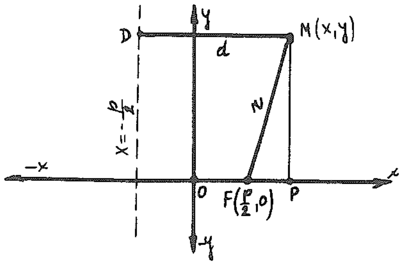
Dakle, jednačina tražene hiperbole je:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

4. Jednačina parabole

Parabola je geometrijsko mesto tačaka u ravni kod kojih su rastojanja od date tačke i date prave jednaka.

Za datu tačku uzmimo $F(\frac{p}{2},0)$, za datu pravu $x = -\frac{p}{2}$ a tačku parabole obeležimo sa $M(x,y)$ (sl. 15). Stalna tačka F naziva se žiža parabole, a stalna prava direktrisa parabole.



Slika 15

Sa slike 15 je

$$OP = x, \quad OF = \frac{p}{2}, \quad FP = x - \frac{p}{2}, \quad PM = y$$
$$DM = d.$$

Iz pravouglog trougla FPM je

$$r^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2. \qquad (46)$$

Kako je $r = d$ (prema definiciji parabole) i kako je:

$$d = x + \frac{p}{2} \qquad (47)$$

smenom u (46) dobija se:

$$y^2 = 2px$$

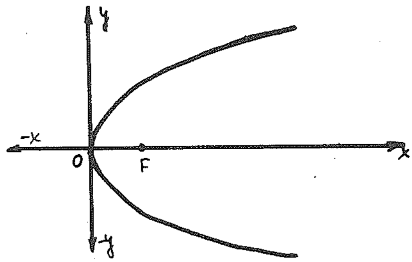
što predstavlja traženu jednačinu parabole.

Ako se jednačina (48) reši po y, dobiće se

$$y = \pm \sqrt{2px}$$

odakle se vidi da je parabola simetrična u odnosu na osu Ox, a da se nalazi samo s jedne strane Oy (sl. 16). Tačka O naziva se teme parabole, a veličina p - parametar parabole.

Primeri: Napisati jednačinu parabole ako je dato:



Slika 16

(1) Dužina tetive koja prolazi kroz žižu parabole i koja je normalna na osi simetrije parabole, tj. dvostruka vrednost parametra parabole: $2p = 6$.

Rešenje: $y^2 = 2px$, dakle: $y^2 = 6x$.

(2) Tačka $M(9,6)$ kroz koju prolazi parabola.

Rešenje: U jednačini parabole $y^2 = 2px$ koordinate x i y zamenimo koordinatama tačke M, te dobijamo jednačinu sa nepoznatom veličinom p:

$$36 = 9p$$

odakle je $p = 4$. Dakle, jednačina tražene parabole je:

$$y^2 = 8x.$$