DRAGOMIR M. SIMEUNOVIĆ

O GRANICAMA KORENA ALGEBARSKIH JEDNAČINA I NEKIM NJIHOVIM PRIMENAMA

Doktorska disertacija

BEOGRAD, 1969

U V O D

1. Prema poznatoj teoremi algebre (ranije često zvana osnovna teorema algebre) svaki kompleksan polinom $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$ $(n \geq 1)$ ima bar jedan kompleksan koren, odnosno $(\exists z)(z \in C \wedge P(z)=0)$, ($C$ - skup kompleksnih brojeva). Ova teorema u čiji iskaz ulazi egzistencijalni kvantifikator je egzistencijalne prirode.

Prvi problem koji se prirodno nameće u vezi sa ovom teoremom je nalaženje postupka opisanog nekom formulom za računanje korena z.

Jedan od osnovnih rezultata teorije Galoisa je da se svi koreni polinoma prvog, drugog, trećeg i četvrtog stepena mogu izraziti formulama oblika $z_i = \phi_i(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ čije su desne strane ϕ_i $(i=1,2,3,4)$ algebarski gradjene, odnosno algebarski izrazi (termi), obrazovani pomoću simbola za sabiranje, oduzimanje, množenje, deljenje i korenovanje.

Dalje, postoje jednačine petog i višeg stepena za koje slične formule ne postoje. Kaže se i kraće da se svaka jednačina prvog, drugog, trećeg i četvrtog stepena može algebarski rešiti, dok postoje jednačine višeg stepena koje se ne mogu algebarski rešiti.

Slobodnije rečeno, pomoću koeficijenata jednačine i operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i korenovanja ne može se uvek obrazovati njeno rešenje. Medjutim, uz korišćenje graničnih procesa moguće je dobiti izvesne formule za nalaženje korena.

Značajan deo algebre i analize razmatra takve probleme; tu su poznate razne iterativne metode rešavanja jednačina, kao i metode koje daju rešenje pomoću beskonačnih redova. U vezi sa ovim problemom je takozvani problem lokalizacije nula polinoma, odnosno oblast algebre, takozvana geometrija polinoma (ranije zvana i analitička teorija polinoma). U ovoj teoriji utvrdjuju se razni rezultati koji daju vezu izmedju koeficijenata i nula polinoma, odnosno njihovim rasporedom u kompleksnoj ravni.

Dosadašnji razvitak geometrije polinoma dat je u monografijama J.Dieudonnéa [6] , J. Walsha [40] , W. Spechta [33] a naročito u monografiji M.Mardena [20] . Pregled velikog broja metoda ove vrste prikazan je i u radovima F. Heigla [11] i S.Zervosa [41] . Na našem jeziku najvažniji rezultati i metode geometrije polinoma dati su u [17] od Dj.Kurepe.

Od naših matematičara koji su se bavili ovom oblašću prvi je bio M.Petrović. U početku svoje naučne aktivnosti M.Petrović je dao zapažene rezultate iz oblasti geometrije polinoma i ukazao na čitavu jednu grupu problema koji se odnose na krug u kome polinom, odnosno funkcija predstavljena Taylorovim redom nema nula, a koji su od značaja ne samo za teoriju nula polinoma, već i za teoriju analitičkih funkcija uopšte. Problemima na koje je ukazao M.Petrović [32] bavili su se mnogi matematičari, medju kojima E. Landau [19] , J. Karamata [14], P.Montel [28], D.Marković [23] i S.Zervos [40].

Važne rezultate u geometriji polinoma dao je Dragoljub Marković, koji je ovoj oblasti posvetio gotovo celokupnu svoju naučnu aktivnost. Radovi D.Markovića odlikuju se i preciznošću i jednostavnošću i generališu mnoge poznate rezultate. Zbog toga su radovi D.Markovića privlačili pažnju matematičara i delovali na dalja istraživanja u ovoj oblasti.

Cilj ovog rada je, izmedju ostalog, nastavak istraživanja koja je pored drugih naznačio i D.Marković. Po svojim metodama i rezultatima ovaj rad predstavlja prilog geometriji polinoma.

2. Kod algebarske jednačine n-toga stepena, rešenje pomoću radikala za $n \geqslant 5$ u opštem slučaju nije moguće. Medjutim, poznatim iterativnim postupcima nule datog polinoma mogu se odrediti sa željenom tačnošću. Korišćenje ovih približnih metoda skoro uvek pretpostavlja prvo izvesnu ocenu razmaka u kojima se nalaze koreni. Ovaj problem se postavlja i kod mnogih primena algebarskih jednačina, naročito kod karakterističnih jednačina homogenih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Pri tome se obično postavlja pitanje odredjivanja najmanje oblasti u kompleksnoj ravni (najčešće kruga) u kojoj se nalaze sve nule datog polinoma, ili bar neke od njih. Problemima ove vrste bavili su se mnogi autori, što se iz navedenih monografija može videti, upotrebljavajući pri tome raznovrsne metode. Na taj način dobijeni su i različiti izrazi koji predstavljaju donju ili gornju granicu modula nula polinoma, odnosno modula korena odgovarajuće algebarske jednačine. Ovi izrazi, kao funkcije koeficijenata datog polinoma, najčešće su u odredjenom smislu neuporedivi. Zbog toga i usavršavanje neke od metoda kojom su dobijene granice za korene je takodje od velikev ažnosti, jer dovodi do preciznijih rezultata.

Ovaj rad, pored uvoda, sastoji se iz dva dela. U prvom delu daje se pregled najvažnijih poznatih rezultata i metoda koje se odnose na granice nula polinoma. Drugi deo predstavlja naša ispitivanja u ovoj oblasti i tu se daju proširenja iznetih rezultata i novi postupci za odredjivanje granica nula polinoma.

Prvi deo sastoji se iz dva poglavlja, A i B. U poglavlju A posmatraju se granice korena kao funkcije svih koeficijenata i tu su, pored ostalih, izneti rezultati i metode Cauchya, Montela, Fujiwarae, D.Markovića, matrična metoda,kao i neki rezultati M.Parodia i drugih autora. U poglavlju B daju se granice za pojedine korene, izvodi se klasična teorema Pelleta za p nula najmanjeg modula i jedna metoda Montela, koja se takodje odnosi na p nula najmanjeg modula i navodi rezultat W.Spechta za p nula najvećeg modula.

Drugi deo sastoji se iz šest odeljaka. - U prvom odeljku dato je uopštenje metode D. Markovića za odredjivanje granica korena algebarskih jednačina i na taj način dobijeno je više precizniјih rezultata. - U drugom odeljku izvodi se jedna nova nejednakost za nule polinoma. Primenom ove nejednakosti dobijen je veći broj poznatih i novih izraza za granice modula nula polinoma. - U trećem odeljku posmatraju se granice realnih korena jedne klase algebarskih jednačina sa realnim koeficijentima. U njemu su, izmedju ostalog, precizirane granice A. Hurwitza i D. Markovića za realne korene nekih algebarskih jednačina. - Četvrti odeljak odnosi se na kompoziciona polinome. U njemu je dokazano više teorema o kompozicionim polinomima pri čemu su, pored ostalog, uopšteni neki rezultati i postupci, kao što su metoda Fujiwarae, jedna teorema D. Markovića o kompozicionim polinomima, jedna teorema Cauchya i klasična teorema Pelleta. - U petom odeljku dat je jednostavan dokaz nekih teorema o nulama najmanjeg modula, kao što su jedna teorema G.Szegöa, zatim neki rezultati E. Landaua, A. Hurwitza i D.Markovića i dato je uopštenje jedne teoreme G. v. Sz. Nagya. - Šesti odeljak odnosi se na neke primene dobijenih rezultata. Metoda za odredjivanja granica modula nula polinoma izložena u odeljku 2 proširuje se na funkcije predstavljene Taylorovim redom. Pri tome se izvode nejednakosti za nule ovih funkcija i daju neki novi izrazi za donje granice modula tih nula. Pored toga, precizira se postupak D. Markovića za odredjivanje gornje granice pozitivnih korena algebarskih jednačina sa realnim koeficijentima. Dobijeni rezultat je primenjen za odredjivanje gornje granice modula nula polinoma i predstavlja uopštenje i poboljšanje rezultata H. Bella.

P R V I   D E O

A. GRANICE KORENA KAO FUNKCIJE SVIH KOEFICIJENATA

Ovde ćemo posmatrati granice nula z_k $(k=1,2,\ldots,n)$ polinoma

(1) $$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_o a_n \neq 0 \quad (|a_k| = A_k)$$

u zavisnosti od svih njegovih koeficijenata $a_o, a_1, \ldots, a_n$. Pri tome osnovni zadatak biće odredjivanje najmanjeg kruga koji sadrži sve nule polinoma (1), odnosno odredjivanje gornje granice modula nula datog polinoma. Klasično rešenje ovoga problema je rezultat koji potiče od A. Cauchya [5].

Svaka nula $\zeta = \rho e^{\theta i}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$ polinoma (1) zadovoljava jednačinu

(2) $$a_o + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1} + a_n\zeta^n = 0 \quad (|\zeta| = \rho)$$

pa prema tome i nejednačine

(3) $$A_n\rho^n \leqslant A_o + A_1\rho + \cdots + A_{n-1}\rho^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k\rho^k$$

i

(4) $$A_o \leqslant A_1\rho + A_2\rho^2 + \cdots + A_n\rho^n = \sum_{k=1}^{n} A_k\rho^k,$$

odakle sledi osnovna teorema Cauchya [5] :

Sve nule polinoma (1) leže u kružnom prstenu

(5) $$r \leqslant |z| \leqslant R,$$

gde su r i R redom (jedini) pozitivni koreni jednačina

$$(6) \qquad A_0 = A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n$$

$$(7) \qquad A_0 + A_1 z + \cdots + A_{n-1} z^{n-1} = A_n z^n .$$

Koristeći navedenu teoremu Cauchya da sve nule polinoma (1) leže u krugu $|z| \leq R$, gde je R jedini pozitivni koren jednačine (7), mogu se dobiti razni izrazi za gornju granicu modula svih nula datog polinoma $P(z)$. Ove granice izražene su kao funkcije svih koeficijenata posmatranog polinoma. Ovde navodimo neke od tih granica, pri čemu za pojedine od njih dajemo i načine na koji su one dobijene.

1. Iz nejednačine (3) A. Cauchy [5] je kao gornju granicu modula nula polinoma (1) dobio izraz

$$(8) \qquad R_1 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(1 + \frac{A_k}{A_n}\right).$$

2. Primenjujući na desnu stranu (3) nejednakost Hőldera

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^t\right)^{\frac{1}{t}}, \quad \alpha_k > 0, \ \beta_k > 0, \ \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1, \ s > 1,$$

Kuniyeda [16], Montel [27] i Tôya [37] dobili su za gornju granicu modula nula polinoma (1) izraz

$$(9) \qquad R_2 = \left\{ 1 + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{A_k}{A_n} \right)^s \right]^{\frac{t}{s}} \right\}^{\frac{1}{t}} .$$

Za $s = t = 2$ iz (9) se dobija

$$(9') \qquad R_2' = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{A_k}{A_n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

tj. rezultat Carmichael-Masona [4], Kellehera [15] i Fujiwarae [7].

Kada $s \longrightarrow 1$, tada $t \longrightarrow \infty$ i iz (9) se dobija

(9")
$$R_2'' = \max\left(1, \frac{A_0+A_1+\cdots+A_{n-1}}{A_n}\right),$$

a kada $s \longrightarrow \infty$, tada $t \longrightarrow 1$ i iz (9) se dobija

(9"')
$$R_2''' = \max_{0\leq k\leq n-1}\left(1 + \frac{A_k}{A_n}\right),$$

dakle, navedeni rezultat Cauchya.

3. Metoda Fujiwarae. Jednu metodu za odredjivanje granica korena algebarskih jednačina dao je M. Fujiwara [8], uvodeći jedan niz pozitivnih brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ takvih da je $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = 1$ i jedan pozitivan broj r pri čemu su ispunjene nejednakosti

(10)
$$\lambda_k A_n r^n \geqslant A_{n-k} r^{n-k}, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

odakle se sabiranjem po k dobija nejednačina

(11)
$$A_n r^n \geqslant A_0 + A_1 r + \cdots + A_{n-1} r^{n-1},$$

što prema (10) znači da je

(12)
$$R_3 = r = \max_{1\leq k\leq n}\left(\frac{1}{\lambda_k} \frac{A_{n-k}}{A_n}\right)^{\frac{1}{k}}$$

gornja granica modula nula polinoma (1).

Za $\lambda_k = \frac{1}{n}$ ($k = 1,2,\ldots,n$) iz (12) se dobija granica

(12')
$$R_3' = \max_{1\leq k\leq n}\left(n \frac{A_{n-k}}{A_n}\right)^{\frac{1}{k}},$$

koju je takodje izveo Cauchy [5], dok se za $\lambda_k = \frac{1}{2^k}$ $(k=1,2,\dots,n)$ iz (12) dobija granica

$$R''_3 = y \max_{1\le k\le n}\left(\frac{A_{n-k}}{A_n}\right)^{\frac{1}{k}}$$

gde je y pozitivni koren jednačine

$$y^n = y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1 \qquad (1 < y < 2),$$

(J.Dieudonné [6], str. 16).

4. <u>Montelov prsten za module korena.</u> Za polinom (1) neka je

$$M_s(P) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|P(e^{i\varphi})\right|^s d\varphi\right)^{\frac{1}{s}} \qquad (0 < s < \infty).$$

Za $M_s(p)$ važe relacije [10]:

$$M_r(P) \le M_t(P), \qquad 0 < r < t < \infty,$$

$$M_o(P) = \lim_{s\to 0} M_s(P) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|P(e^{i\varphi})\right| d\varphi\right),$$

$$M_\infty(P) = \lim_{s\to\infty} M_s(P) = \max_{|z|=1}|P(z)|.$$

P. Montel [28] je dokazao da sve nule polinoma (1) leže u kružnom prstenu

$$\frac{A_o}{M_s(P)} \le |z| \le \frac{M_s(P)}{A_n}. \tag{13}$$

Do ovog rezultata Montel je došao primenjujući na polinom (1) teoremu Jensena [36] iz teorije funkcija kompleksne promenljive koja glasi:

Neka je f(z) analitička funkcija za $|z| < R$. Pretpostavljamo da je $f(0) \ne 0$ i neka su $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ moduli nula od f(z) u krugu $|z| < R$, uredjenih u neopadajući niz. Ako je $r_n \le r \le r_{n+1}$, tada je

$$(14)\qquad \frac{r^n|f(0)|}{r_1r_2\ldots r_n} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|d\varphi\right).$$

Za s = 2 Montelov prsten (13) svodi se na

$$(15)\qquad \frac{A_o}{\left(\sum_{k=o}^{n} A_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leqslant |z| \leqslant \frac{\left(\sum_{k=o}^{n} A_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{A_n},$$

pošto je prema formuli Parsevala

$$M_2(P) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\varphi})|^2 d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=o}^{n} A_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Za dokaz Montelovog rezultata (13) dovoljno je dokazati da sve nule polinoma (1) leže u kružnom prstenu

$$(16)\qquad \frac{A_o}{M_o(P)} \leqslant |z| \leqslant \frac{M_o(P)}{A_n}.$$

Označimo sa r_1 najmanji moduo nule polinoma (1). Tada je na osnovu (14)

$$\frac{rA_o}{r_1} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|P(re^{i\varphi})|\, d\varphi\right);$$

gde je $A_o = |f(o)|$, odakle se za $r \leqslant 1$ dobija

$$\frac{rA_o}{r_1} \leqslant \frac{A_o}{r_1} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|P(e^{i\varphi})|\, d\varphi\right) = M_o(P),$$

odnosno

$$r_1 \geqslant \frac{rA_o}{M_o(P)},$$

što za r = 1 daje

$$(17)\qquad r_1 \geqslant \frac{A_o}{M_o(P)}.$$

Da bi se dobila gornja granica modula nula polinoma (1), uvedimo smenu $z = \frac{1}{u}$. Tada je

$$(18) \qquad P^*(u) = u^n P\left(\frac{1}{u}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} u^k .$$

Neka je ρ_1 najmanji moduo nula polinoma (18) i neka je $\rho_1 \leq \rho \leq 1$. Tada, na osnovu (17), u ovom slučaju je

$$(19) \qquad \rho_1 \leq \frac{A_n}{M_o(P)},$$

pošto je $M_o(P^*) = M_o(P)$. Kako je $|z| = \frac{1}{|u|}$ i ρ_1 najmanji moduo nule polinoma (18), to je $\frac{1}{\rho_1} = r_n$ najveći moduo nule polinoma (1) i iz (19) se dobija

$$(20) \qquad r_n \leq \frac{M_o(P)}{A_n} .$$

Iz (17) i (18) sledi (16), a odatle i (13).

5. <u>Metoda D. Markovića.</u> Za odredjivanje granica modula nula polinoma D. Marković [21], [22], [23] i [26] uzima jedan komparativni polinom, odnosno funkciju, pri čemu za izraz S oblika

$$(21) \qquad S = \frac{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n}{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \cdots + \beta_n \lambda_n},$$

gde su α_k realni a β_k i $\lambda_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ realni i pozitivni brojevi, koristi poznate nejednakosti

$$(22) \qquad \min_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right) \leq S \leq \max_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right).$$

Na taj način dokazuje više teorema o granicama modula nula polinoma, odakle slede i neke poznate teoreme, kao Cauchya [5] Landaua [19], Walsha [39], Birkhoffa [3] i drugih.

Ovde iznosimo metodu i neke rezultate D. Markovića u vezi sa odredjivanjem granica modula nula polinoma.

Nejednačinu (3) napišimo u obliku

$$A_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{n-k}}{\varrho^k} , \tag{23}$$

Uzmimo sada funkciju

$$Q_1(\varrho) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{n-k}}{\varrho^k} , \quad C_{n-k} > 0 \ (k=1,2,\ldots,n) \tag{24}$$

i ovom podelimo nejednačinu (23). Tada se na osnovu nejednakosti (22) koje važe za izraz oblika (21) dobija

$$\frac{A_n}{Q_1(\varrho)} \leq M,$$

odnosno

$$A_n \leq MQ_1(\varrho) \tag{25}$$

gde je

$$M = \max_{1\leq k\leq n}\left(\frac{A_{n-k}}{C_{n-k}}\right) , \tag{26}$$

odakle sledi teorema:

Gornja granica modula nula polinoma (1) je pozitivni koren jednačine

$$A_n = MQ_1(\varrho) .$$

Ako je u funkciji (24), tj. u funkciji $Q_1(\varrho)$, na primer, $C_{n-k}=\alpha^k$ ($\alpha > 0$) ($k=1,2,\ldots,n$) iz (25) se dobija

$$A_n \leq M(\alpha)\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^k$$

što za $\varrho > \alpha$ daje

$$A_n \leq M(\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^k ,$$

odakle se dobija

$$\rho \leq \alpha\left(1 + \frac{M(\alpha)}{A_n}\right), \tag{27}$$

gde je

$$M(\alpha) = \max_{1\leq k\leq n}\left(\frac{A_{n-k}}{\alpha^k}\right). \tag{28}$$

Za $\alpha=1$ iz (28) se dobija rezultat (8) Cauchya

$$\rho \leq 1 + \frac{\bar{M}}{A_n}, \qquad \bar{M} = \max_{1\leq k\leq n}(A_{n-k}).$$

Ako nejednačinu (4) podelimo funkcijom

$$Q_2(\rho) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\rho^k, \qquad c_k > 0 \ (k=0,1,\ldots,n-1),$$

na osnovu nejednakosti (22) biće

$$\frac{A_o}{Q_2(\rho)} \leq \mu,$$

odnosno

$$A_o \leq \mu\, Q_2(\rho) \tag{28'}$$

gde je

$$\mu = \max_{1\leq k\leq n}\left(\frac{A_k}{c_k}\right),$$

odakle sledi teorema:

Donja granica modula nula polinoma (1) je pozitivni koren jednačine

$$A_o = \mu Q_2(\rho).$$

Uzimajući, naprimer da je u funkciji $Q_2(\rho)$ $c_k = \frac{1}{t^k}$ $(t > 0)(k=1,2,\ldots,n)$ iz (28') se dobija

$$A_o \leq \mu(t) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\rho}{t}\right)^k,$$

što za $\rho < t$ daje

$$A_o \leq \mu(t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{t}\right)^k.$$

odakle se dobija rezultat E.Landaua [19] i J.Karamate [14]:

(29) $$\rho \geq \frac{A_o t}{A_o + \mu(t)}, \quad \mu(t) = \max_{1 \leq k \leq n}(A_k t^k).$$

Dajući druge oblike komparativnim funkcijama $Q_1(\rho)$ i $Q_2(\rho)$ mogu se dobiti i razni drugi izrazi za granice modula nula polinoma (1) u čemu se sastoji opštost metode D.Markovića.

6. Matrična metoda. Za kompleksnu matricu $A=(a_{ij})$ reda n, matrica $A-\lambda E$ (λ- kompleksan broj, E-jedinična matrica reda n) naziva se karakteristična matrica, a polinom $\det(A-\lambda E)=|A-\lambda E|$ po λ je njen karakteristični polinom, dok je jednačina $|A-\lambda E|=0$ njena karakteristična jednačina. Nule karakterističnog polinoma matrice A nazivaju se njenim karakterističnim vrednostima.

U matričnom smislu, svaka matrica je nula svog karakterističnog polinoma (teorema Cayley - Hamiltona).

Svaki normirani polinom (koeficijent uz njegov glavni član jednak jedinici)

(30) $$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_o$$

može se napisati u obliku

(30') $$P(z)=(-1)^n \begin{vmatrix} -z & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & 1 \\ -a_o & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & (a_{n-1}+z) \end{vmatrix}$$

i prema tome $P(z)$ je karakteristični polinom matrice

$$A(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

koja se naziva pridružena matrica polinoma $P(z)$.

Za kompleksnu matricu $A = (a_{ij})$ reda n, prema teoremi J. Hadamarda [30], je $\det A \neq 0$ ako je

$$|a_{ii}| > P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

ili

$$|a_{ii}| > Q_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Primenom ove Hadamardove teoreme na matricu $A-zE$ (z-kompleksan broj) dobija se teorema Gerschgorina [9] :

Karakteristične vrednosti matrice A leže u uniji krugova

$$C_i \; : \qquad |z - a_{ii}| \leq P_i,$$

odnosno u uniji krugova

$$C_i' \; : \qquad |z-a_{ii}| \leq Q_i, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Primenjujući prethodnu teoremu Gerschgorina na matricu $A(P)$ može se dobiti više rezultata u vezi sa položajem nula polinoma. Ovde navodimo jednu teoremu M. Parodia [30] :

Nule polinoma (3) leže u uniji krugova

$$|z| \leq 1, \quad |z+a_{n-1}| \leq \sum_{j=0}^{n-2} A_j \qquad (|a_j| = A_j),$$

odnosno u uniji krugova

$$|z| \leq \max_{1\leq j\leq n} (A_0,\ 1 + A_j),\ |z+a_{n-1}| \leq 1.$$

7. Ostale metode. Pored izloženih postoje i razne druge metode za odredjivanje granica korena algebarskih jednačina. Ovde navodimo metodu opadajućih funkcija S.Zervosa. Ovom metodom, koja je izložena u [41], S. Zervos je dobio za gornju granicu ξ modula korena algebarske jednačine

$$x^n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n, \qquad a_j > 0$$

izraz

$$\text{(Z)} \qquad \xi \leq \max\left\{M,\ \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\prod\limits_{ij\in I_j} M^{\theta_{ij}}}\right)^{\frac{1}{t}}\right\}$$

gde je

$$M = \max\{M_{ij}\},\ M_{ij} > 0;\ \theta_{ij} \geq 0,\ \sum_{ij}\theta_{ij}=j-t,\ 0<t\leq 1$$

i gde su $I_1, I_2, \dots, I_n$ proizvoljni skupovi indeksa.

Iz obrasca (Z) S. Zervos [41] je izveo veliki broj poznatih rezultata o gornjoj granici modula korena algebarskih jednačina, dajući parametrima M_{ij}, θ_{ij} i t razne oblike i vrednosti. Iz obrasca (Z) S.Zervos izvodi i neke nove rezultate.

B. GRANICE ZA POJEDINE KORENE

Do sada smo posmatrali sve nule polinoma (1) kao funkcije svih njegovih koeficijenata. Medjutim, često je potrebno da se ograničimo na lokalizaciju samo pojedinih korena date algebarske jednačine.

1. Granice za p nula najmanjeg modula. Uopštavajući osnovnu teoremu Cauchya da sve nule polinoma (1) leže u krugu $|z| \leq R$ gde je R pozitivni koren jednačine (3), Pellet [31] je dokazao teoremu:

Ako za polinom

$$f(z) = a_o + a_1 z + \cdots + a_p z^p + \cdots + a_n z^n, \quad a_p \neq 0$$

$$(|a_k| = A_k)$$

jednačina

$$(31) \quad F_p(z) \equiv A_o + A_1 z + \cdots + A_{p-1} z^{p-1} - A_p z^p + A_{p+1} z^{p+1} + \cdots + A_n z^n = 0$$

ima dva pozitivna korena r i R, $r < R$, tada f(z) ima tačno p nula u krugu $|z| \leq r$ i nema nula u oblasti $r < |z| < R$.

Dokaz teoreme Pelleta. Neka je $r < \rho < R$. Kako je $\operatorname{sg}F_p(z) = \operatorname{sg}F_p(+\infty) = 1$ za $R < z < \infty$ i kako je

$$(32) \quad F_p(\rho) < 0 \quad \text{za } r + \varepsilon \leq \rho \leq R - \varepsilon$$

to je iz (31) sada

$$(33) \quad A_p \rho^p > \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{n} A_j \rho^j .$$

Neka je

(34) $$P(z) = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq p}}^{n} a_j z^j \;, \qquad Q(z) = a_p z^p .$$

Na krugu $|z| = \rho$, s obzirom na (33), iz (34) se dobija

$$|P(z)| \leq \sum_{\substack{j=0\\ j\neq p}}^{n} A_j \rho^j < A_p \rho^p = |Q(z)| \neq 0,$$

odakle na osnovu teoreme Rouchéa sledi da u krugu $|z| < \rho$, $f(z)=P(z)+Q(z)$ ima isti broj nula kao i $Q(z)$, dakle p nula. Pošto je ρ, prema (32), proizvoljan broj takav da je $r < \rho < R$, sledi da funkcija $f(z)$ ima u krugu $|z| \leq r$ tačno p nula i da ona nema nula u oblasti $r < |z| < R$.

2. Jedna metoda Montela. Sada ćemo izložiti jednu metodu P. Montela [28] za odredjivanje kruga u kome se nalazi p nula polinoma

(35) $$f(z)=a_0+a_1 z+\dots+a_p z^p+\dots+a_{n-1} z^{n-1}+z^n .$$

Neka su nule polinoma (35) uredjene po apsolutnim vrednostima tako da je

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_p| = \rho \leq |z_{p+1}| \dots \leq |z_n| .$$

Neka je $\alpha = z_{p+1}, z_{p+2}, \dots, z_n$ i neka je $|\alpha| \geq \rho > 1$. Posmatrajmo polinom

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{z-\alpha}$$

čije koeficijente a_k'' možemo napisati u obliku

$$-a_k'' = \frac{a_0}{\alpha^{k+1}} + \frac{a_1}{\alpha^k} + \dots + \frac{a_k}{\alpha} ,$$

odakle je

(36) $$|a_k''| \leq \frac{M_p}{\rho-1}, \quad M_p = \max_{0\leq\nu\leq p-1} (A_\nu) .$$

Slično se zaključuje da za koeficijente $a_k^{(n-p)}$ od

$$f_{n-p}(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=p+1}^{n}(z-z_k)}$$

važi nejednačina

$$\left| a_k^{(n-p)} \right| \leq \frac{M_p}{(\varrho-1)^{n-p}}.$$

Uzimajući za gornju granicu modula za p nula polinoma $f_{n-p}(z)$ granicu (8) Cauchya biće

$$\varrho \leq \max_{0 \leq k \leq p-1} \left(1+\left|a_k^{(n-p)}\right|\right) \leq 1+ \frac{M_p}{(\varrho-1)^{n-p}},$$

odakle se dobija

$$\varrho \leq 1+M_p^{\frac{1}{q}} \quad (q=n-p+1),$$

što znači da p nula polinoma (35) leži u krugu

$$(37) \qquad |z| \leq 1 + M_p^{\frac{1}{q}}, \quad M_p = \max_{0\leq \nu \leq p-1} (A_\nu), \quad q = n-p+1.$$

Za p=n iz (37) sledi Cauchyeva granica (8), (a_n=1).

3. Jedna granica za p nula najvećeg modula. Primenjujući napred navedenu teoremu Jensena, W. Specht [33] je dokazao sledeću teoremu:

Ako su z_i nule polinoma

$$f(z) = z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$$

uredjene tako da je

$$|z_1| \geq |z_2| \geq \cdots \geq |z_p| > 1 \geq |z_{p+1}| \geq \cdots \geq |z_n|,$$

tada je

$$|z_1 z_2 \cdots z_p| \leq N, \quad |z_p| \leq N^{\frac{1}{p}},$$

gde je

$$N^2 = 1+A_{n-1}^2+A_{n-2}^2+\cdots+A_o^2 \;.$$

Tako smo izložili neke metode i rezultate o lokalizaciji nula polinoma, a koji su u vezi sa našim ispitivanjima.

D R U G I   D E O

1. UOPŠTENJE METODE D. MARKOVIĆA

Kao što smo videli, D. Marković se za odredjivanje granica modula nula polinoma oslanjao na poznate nejednakosti

$$(38) \qquad \min_{1 \le k \le n}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right) \le S \le \max_{1 \le k \le n}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right),$$

gde je S izraz

$$(39) \qquad S = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k \lambda_k},$$

a α_k realni, β_k i λ_k realni i pozitivni brojevi $(k = 1,2,\dots,n)$.

Ovde dokazujemo da se u izvesnim slučajevima, zavisno od koeficijenata λ_k, nejednakosti (38) mogu poboljšati što nam omogućava da dobijemo preciznije granice za korene algebarskih jednačina.

Poboljšanje nejednakosti (38). Ako na brojilac i imenilac izraza S primenimo Abelovu transformaciju

$$(40) \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(c) \Delta\lambda_\nu + s_n(c)\lambda_n,$$

gde je

$$(41) \qquad s_\nu(c) = \sum_{k=1}^{\nu} c_k, \quad \Delta\lambda_\nu = \lambda_\nu - \lambda_{\nu+1} \quad (\nu = 1,2,\dots, n-1)$$

dobićemo

(42) $$S = \frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(\alpha)\Delta\lambda_\nu + s_n(\alpha)\lambda_n}{\sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(\beta)\Delta\lambda_\nu + s_n(\beta)\lambda_n}.$$

Kada je $\Delta\lambda_\nu = \lambda_\nu - \lambda_{\nu+1} > 0$ ($\nu = 1,2,\ldots,n-1$), tj. kada koeficijenti λ_ν monotono opadaju, tada se iz (42) na osnovu (38) dobija

(43) $$\min_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right) \leq S \leq \max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right).$$

Prema (38) za $\lambda_k = 1$ ($k = 1,2,\ldots,n$) je

$$\min_{1\leq k\leq\nu}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right) \leq \frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)},\quad \frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)} \leq \max_{1\leq k\leq\nu}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right),\quad (\nu=1,2,\ldots,n),$$

a odavde je očigledno

$$\min_{1\leq k\leq\nu}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right) \leq \min_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right),\quad \max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right) \leq \max_{1\leq k\leq\nu}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right)$$

što zajedno sa (43) daje

(44) $$\min_{1\leq k\leq\nu}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right) \leq \min_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right) \leq S \leq \max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{s_\nu(\alpha)}{s_\nu(\beta)}\right) \leq \max_{1\leq k\leq\nu}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right).$$

Granice (44) za S mogu se u izvesnim slučajevima i dalje poboljšavati.

Ponovnom primenom Abelove transformacije na prvi deo njegove desne strane, izraz (40) može se napisati u obliku

(45) $$\sum_{k=1}^{n} c_k\lambda_k = \sum_{\nu=1}^{n-2} \sigma_\nu(C)\,\Delta^2\lambda_\nu + \sigma_{n-1}(C)\Delta\lambda_{n-1} + s_n(C)\lambda_n,$$

gde je

(46) $$\sigma_\nu(C) = \sum_{k=1}^{\nu} s_k(C),\quad \Delta^2\lambda_\nu = \lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2}\quad (\nu=1,2,\ldots,n-2).$$

Ako se sada na brojilac i imenilac izraza S primeni transformacija oblika (45), dobiće se

(47) $$S = \frac{\sum_{\nu=1}^{n-2} \sigma_\nu(\alpha)\Delta^2\lambda_\nu + \sigma_{n-1}(\alpha)\Delta\lambda_{n-1} + s_n(\alpha)\lambda_n}{\sum_{\nu=1}^{n-2} \sigma_\nu(\beta)\Delta^2\lambda_\nu + \sigma_{n-1}(\beta)\Delta\lambda_{n-1} + s_n(\beta)\lambda_n}.$$

Ukoliko su koeficijenti λ_k konveksni, tj. takvi da je $\Delta^2\lambda_\nu = \lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2} > 0$ $(\nu=1,2,\ldots,n-2)$ i $\Delta\lambda_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n > 0$, za izraz S predstavljen sa (47), s obzirom na (38), važiće nejednakosti

(48) $$\min_{1\le\nu\le n-1}\left(\frac{\sigma_\nu(\alpha)}{\sigma_\nu(\beta)}, \frac{s_n(\alpha)}{s_n(\beta)}\right) \le S \le \max_{1\le\nu\le n-1}\left(\frac{\sigma_\nu(\alpha)}{\sigma_\nu(\beta)}, \frac{s_n(\alpha)}{s_n(\beta)}\right),$$

odnosno zbog (46), važiće nejednakosti

(48') $$\min_{1\le\nu\le n-1}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu} s_k(\alpha)}{\sum_{k=1}^{\nu} s_k(\beta)}, \frac{s_n(\alpha)}{s_n(\beta)}\right) \le S \le \max_{1\le\nu\le n-1}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu} s_k(\alpha)}{\sum_{k=1}^{\nu} s_k(\beta)}, \frac{s_n(\alpha)}{s_n(\beta)}\right).$$

Ovako dobijene granice za S su preciznije od granica datih u (43).

Primena nejednakosti (43). Nejednakosti (43) koje važe za izraz S oblika (39) u slučaju da koeficijenti λ_k monotono opadaju mogu se primeniti za odredjivanje granica modula nula polinoma, čime se, kao što ćemo videti, uopštava napred izneta metoda D. Markovića.

Za nulu $\zeta = \rho e^{\theta i}$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ polinoma

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_0 a_n \ne 0, \quad (|a_k| = A_k)$$

važi nejednačina

$$A_0 \le \sum_{k=1}^{n} A_k \rho^k,$$

koja se može napisati u obliku

$$(49)\qquad A_0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_k t^k \left(\frac{\varrho}{t}\right)^k, \quad t > 0.$$

Ako je $0 < \varrho < t$, tada brojevi $\left(\frac{\varrho}{t}\right)^\nu$ ($\nu=1,2,\dots$) monotono opadaju, pa se primenom Abelove transformacije oblika (40) na desnu stranu (40) dobija

$$(50)\qquad A_0 \leqslant \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(At)\Delta\left(\frac{\varrho}{t}\right)^\nu + s_n(At)\left(\frac{\varrho}{t}\right)^n, \quad (t_k = t^k).$$

Deleći poslednju nejednačinu sa

$$(51)\qquad \Omega_1(\varrho) = \sum_{k=1}^{n} c_k\left(\frac{\varrho}{t}\right)^k = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(C)\Delta\left(\frac{\varrho}{t}\right)^\nu + s_n(C)\left(\frac{\varrho}{t}\right)^n, c_k > 0$$

$$(k=1,2,\dots,n),$$

i vodeći računa o (44), dobija se

$$(52)\qquad \frac{A_0}{\Omega_1(\varrho)} \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2,$$

gde je

$$\mu_1 = \max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\left(\frac{s_\nu(At)}{s_\nu(C)}\right) = \max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu} A_k t^k}{\sum_{k=1}^{\nu} C_k}\right), \quad \mu_2 = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{A_k t^k}{C_k}\right).$$

Iz (52) neposredno sledi

<u>Teorema</u>. Donja granica modula nula polinoma (1) je pozitivni koren ϱ_1 jednačine

$$A_0 = \mu_1\Omega_1(\varrho).$$

Zbog (52) ovaj koren nije manji od pozitivnog korena ϱ_2 jednačine

$$A_0 = \mu_2\Omega_1(\varrho).$$

<u>Primer 1</u>. Ako se u (51) uzme da je $C_k=1$ ($k=1,2,\dots,n$) i $\varrho < t$ biće

$$Q_1(\rho) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\rho}{t}\right)^k .$$

i iz (52) se dobija

$$\frac{A_o}{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\rho}{t}\right)^k} \leq \mu_1(t) \leq \mu_2(t),$$

odnosno

(53) $$\frac{A_o}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{t}\right)^k} \leq \mu_1(t) \leq \mu_2(t)$$

gde je sada

$$\mu_1(t) = \max_{1 \leq \nu \leq n} \left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu} A_k t^k}{\nu} \right), \quad \mu_2(t) = \max_{1 \leq k \leq n} (A_k t^k).$$

Iz (53) nalazimo da je

(54) $$\rho \geq \frac{A_o t}{A_o + \mu_1(t)} \geq \frac{a_o t}{A_o + \mu_2(t)} ,$$

što znači da je donja granica modula nula polinoma (1) predstavljena izrazom

(55) $$\frac{A_o t}{A_o + \mu_1(t)} .$$

Prema (54) granica (55) je preciznija od granice (29), tj. od granice

$$\frac{A_o t}{A_o + \mu_2(t)} ,$$

koju su dobili E. Landau [19], J. Karamata [14] i D. Marković [23] .

<u>Primer 2.</u> Ako se u (51) uzme da je $C_k = 1+k$ $(k=1,2,\ldots,n)$, biće sada za $\rho < t$

$$(56)\qquad Q_1(\rho) = \sum_{k=1}^{n} (1+k)\left(\frac{\rho}{t}\right)^k \le \sum_{k=1}^{\infty} (1+k)\left(\frac{\rho}{t}\right)^k = \frac{2\left(\frac{\rho}{t}\right) - \left(\frac{\rho}{t}\right)^2}{\left(1-\frac{\rho}{t}\right)^2}$$

i iz (52) je

$$A_o \le \mu_1 Q_1(\rho)$$

što zbog (56) daje

$$A_o \le \mu_1(t)\, \frac{2\left(\frac{\rho}{t}\right) - \left(\frac{\rho}{t}\right)^2}{\left(1-\frac{\rho}{t}\right)^2},$$

odakle se dobija

$$(57)\qquad \rho \ge t\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_1(t)}{A_o + \mu_1(t)}}\right), \quad \mu_1(t) = \max_{1 \le \nu \le n}\left(\frac{2\sum_{k=1}^{\nu} A_k t^k}{\nu\,(3+\nu)}\right).$$

Za $t = 1$ iz (57) je

$$(57')\qquad \rho \ge 1 - \sqrt{\frac{\mu_1}{A_o + \mu_1}}, \quad \mu_1 = \max_{1 \le \nu \le n}\left(\frac{2\sum_{k=1}^{\nu} A_k}{\nu\,(3+\nu)}\right).$$

<u>Primer 3.</u> Za $C_k = \binom{n}{k}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ i $t=1$, (dakle, $\rho < 1$) je

$$Q_1(\rho) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \rho^k = (1+\rho)^n - 1,$$

pa se iz (52) dobija

$$A_o \le \mu_1 \left[(1+\ )^n - 1\right],$$

odakle je

$$\rho \ge \left(1 + \frac{A_o}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \quad \mu_1 = \max_{1 \le \nu \le n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu} A_k}{\sum_{k=1}^{\nu} \binom{n}{k}}\right).$$

Primena nejednakosti (48').

Za $0 < \rho < t$ je

$$\Delta^2\left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu = \left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu - 2\left(\frac{\rho}{t}\right)^{\nu+1} + \left(\frac{\rho}{t}\right)^{\nu+2} = \left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu\left(1-\frac{\rho}{t}\right)^2 > 0$$

i

$$\Delta\left(\frac{\rho}{t}\right)^{n-1} = \left(\frac{\rho}{t}\right)^{n-1} - \left(\frac{\rho}{t}\right)^n > 0,$$

pa se sada primenom na desnu stranu nejednačine (50) transformacije oblika (45) dobija nejednačina

$$A_o \leq \sum_{\nu=1}^{n-2} \sigma_\nu(At)\,\Delta^2\left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu + \sigma_{n-1}(At)\Delta\left(\frac{\rho}{t}\right)^{n-1} + s_n(At)\left(\frac{\rho}{t}\right)^n.$$

Deljenjem ove nejednačine sa

$$Q_1(\rho) = \sum_{k=1}^{n} c_k\left(\frac{\rho}{t}\right)^k = \sum_{\nu=1}^{n-2} \sigma_\nu(C)\Delta^2\left(\frac{\rho}{t}\right)^\nu + \sigma_{n-1}(C)\Delta\left(\frac{\rho}{t}\right)^{n-1} + s_n(C)\left(\frac{\rho}{t}\right)^n$$

dobiće se

(58) $$\frac{A_o}{Q_1(\rho)} \leq \bar{\mu}_1,$$

gde je

$$\bar{\mu}_1 = \max_{1\leq\nu\leq n-1}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu} s_k(At)}{\sum_{k=1}^{\nu} s_k(C)}, \frac{s_n(At)}{s_n(C)}\right).$$

Ako je $C_k=1$ $(k=1,2,\ldots)$, iz (58) je prema primeru 1.,

(59) $$\rho \geq \frac{A_o t}{A_o+\bar{\mu}_1(t)},$$

gde je

$$\bar{\mu}_1(t) = \max_{1\leq\nu\leq n-1}\left(\frac{6\sum_{k=1}^{\nu} s_k(At)}{\nu(1+\nu)(2+\nu)}, \frac{2s_n(At)}{\nu(1+\nu)}\right) \leq \mu_1(t) =$$

$$= \max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{s_\nu(At)}{\nu}\right) = \max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu} A_k t^k}{\nu}\right).$$

što znači da donja granica modula nula polinoma (1) predstavljena sa (59) je preciznija od donje granice (55).

Za odredjivanje gornje granice modula nula polinoma (1) polazimo od nejednačine

$$A_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{n-k}}{\varrho^k},$$

koja se može napisati u obliku

(60) $$A_0' \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k'}{\alpha^k}\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^k = \sum_{k=1}^{n-1} s_\nu\left(\frac{A'}{\alpha}\right)\Delta\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^\nu + s_n\left(\frac{A'}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^n,$$

gde je $A_k' = A_{n-k}$ $(k = 1,2,\dots,n)$ i $0 < \alpha < \varrho$, što znači da niz brojeva $\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^\nu$ $(= 1,2,\dots)$ monotono opada.

Deleći (60) sa

(61) $$Q_2(\varrho) = \sum_{k=1}^{n} c_k\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^k = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(C)\Delta\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^\nu + s_n(C)\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^n,$$

$$c_k > 0 \quad (k=1,2,\dots)$$

dobija se

(62) $$\frac{A_n}{Q_2(\varrho)} \leq M_1 \leq M_2, \qquad (A_k' = A_{n-k}),$$

gde je

$$M_1 = \max_{1 \leq \nu \leq n}\left(\frac{s_\nu\left(\frac{A'}{\alpha}\right)}{s_\nu(C)}\right) = \max_{1 \leq \nu \leq n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu} \frac{A_{n-k}}{\alpha^k}}{\sum_{k=1}^{\nu} c_k}\right), \quad M_2 = \max_{1 \leq k \leq n}\left(\frac{\frac{A_{n-k}}{\alpha^k}}{c_k}\right).$$

Iz (62) sledi

<u>Teorema</u>. Gornja granica modula nula polinoma (1) je pozitivni koren ϱ_1 jednačine

$$A_n = M_1 Q_2(\varrho).$$

Zbog (62) koren ρ_1 nije veći od pozitivnog korena ρ_2 jednačine

$$A_n=M_2Q_2(\rho).$$

Primer 4. Uzimajući u (61) $C_k=1$ $(k=1,2,\dots)$ biće

$$Q_2(\rho) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^k$$

i za $0<\alpha<\rho$ iz (62) se dobija

$$\frac{A_n}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^k} \leq M_1(\alpha) \leq M_2(\alpha),$$

odnosno

$$\frac{A_n}{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^k} \leq M_1(\alpha) \leq M_2(\alpha), \tag{63}$$

gde je

$$M_1=\max_{1\leq\nu\leq n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu}\frac{A_{n-k}}{\alpha^k}}{\nu}\right), \quad M_2 = \max_{1\leq k\leq n}\left(\frac{A_{n-k}}{\alpha^k}\right).$$

Iz (63) se dobija

$$\rho \leq \alpha\left(1+\frac{M_1(\alpha)}{A_n}\right) \leq \alpha\left(1+\frac{M_2(\alpha)}{A_n}\right), \tag{64}$$

što znači da je gornja granica modula nula polinoma (1) data sa

$$\alpha\left(1+\frac{M_1(\alpha)}{A_n}\right)$$

preciznija od gornje granice (27), tj. od granice

$$\alpha\left(1+\frac{M_2(\alpha)}{A_n}\right)$$

koju je dobio D.Marković [22].

Za $\alpha=1$ iz (64) se dobija

$$(64') \qquad \rho \leq 1 + \frac{\bar{M}_1}{A_n} \leq 1 + \frac{\bar{M}_2}{A_n}$$

gde je sada

$$\bar{M}_1 = \max_{1\leq \nu\leq n}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu} A_{n-k}}{\nu}\right), \qquad \bar{M}_2 = \max_{1\leq k\leq n} (A_{n-k}) .$$

Iz (64') se vidi da je gornja granica modula nula polinoma (1) data sa

$$1+ \frac{\bar{M}_1}{A_n}$$

preciznija od granice Cauchya, tj. od granice

$$1+ \frac{\bar{M}_2}{A_n} .$$

Primer 5. Ako se u (61) uzme da je $C_k=1+k$ $(k=1,2,\ldots,)$, biće za $0<\alpha<\rho$, prema primeru 2.,

$$A_n \leq M_1(\alpha) \frac{2\left(\frac{\alpha}{\rho}\right) - \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2}{\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right)^2},$$

odakle se dobija

$$(65) \qquad \rho \leq \alpha \Bigg/ \left(1-\sqrt{\frac{M_1(\alpha)}{A_n+M_1(\alpha)}}\right),$$

gde je

$$M_1(\alpha) = \max_{1\leq \nu\leq n}\left(\frac{2\sum_{k=1}^{\nu} \frac{A_{n-k}}{\alpha^k}}{\nu(3+\nu)}\right) .$$

Za $\alpha= 1$ iz (65) je

$$(65') \qquad \rho \leq 1\Bigg/\left(1-\sqrt{\frac{\bar{M}_1}{A_n+\bar{M}_1}}\right),$$

gde je sada

$$\bar{M}_1 = \max_{1\leq \nu\leq n} \left(\frac{2\sum_{k=1}^{\nu} A_{n-k}}{\nu(3+\nu)}\right) .$$

Dajući druge oblike komparativnim funkcijama $Q_1(\varrho)$ i $Q_2(\varrho)$ mogu se dobiti razni drugi izrazi za granice korena.

2. JEDNA NOVA NEJEDNAKOST ZA NULE POLINOMA I NJENA PRIMENA

Kao što smo videli, P.Montel je izveo prsten (13) u kome leže sve nule polinoma (1). Donja granica za module nula polinoma koju je pri tome izveo Montel važi i za funkcije predstavljene Taylorovim redom.

Jedan od prvih rezultata o donjoj granici modula nula funkcija predstavljenih Taylorovim redom dao je M.Petrović [32]. Ovim problemom su se kasnije bavili E. Landau [18], J. Karamata [14], P.Montel [28], D.Marković [23], a u novije vreme i S. Zervos [41].

Ovde ćemo, koristeći samo nejednakost Höldera, izvesti jednu novu nejednakost za nule polinoma. Donje granice za module nula polinoma koje se dobijaju iz ove nejednakosti mogu se primeniti i na funkcije predstavljene Taylorovim redom. U izvesnim slučajevima one ostaju u važnosti i kada odgovarajuće granice koje su dobili M. Petrović, E. Landau, P.Montel i D.Marković gube smisao.

Svaka nula $\zeta = \rho e^{\theta i}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ polinoma

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad a_0 a_n \neq 0 \quad (|a_k| = A_k)$$

zadovoljava jednačinu

$$a_0 = -\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{k\theta i} \rho^k \Big),$$

odnosno jednačinu

$$A_0 = \Big| \sum_{k=1}^{n} a_k e^{k\theta i} \rho^k \Big|$$

koja se može napisati i u obliku

$$(66)\qquad A_o = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k}e^{k\varphi i}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{k(\theta-\varphi)i}\rho^k\right)d\varphi\right|,$$

gde je λ_k $(k = 1,2,\dots)$ jedan niz realnih ili kompleksnih brojeva različitih od nule.

Iz jednačine (66) sledi nejednakost

$$(67)\qquad A_o \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k}e^{k\varphi i}\right|\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{k(\theta-\varphi)i}\rho^k\right|d\varphi.$$

Primenjujući na desnu stranu nejednakosti (67) nejednakost Höldera sa $\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1$, $s > 1$, dobija se

$$(68)\qquad A_o \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k}e^{k\varphi i}\right|^s d\varphi\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{k(\theta-\varphi)i}\rho^k\right|^t d\varphi\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Za $s=t=2$ nejednakost (68) se svodi na

$$A_o^2 \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k}e^{k\varphi i}\right|^2 d\varphi\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{k(\theta-\varphi)i}\rho^k\right|^2 d\varphi\right)$$

koja se, s obzirom na formulu Parsevala, može napisati u obliku

$$(69)\qquad A_o^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k}{\lambda_k}\right|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\rho^{2k}\right).$$

Iz (68) očigledno sledi i nejednakost

$$(70)\qquad A_o \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k}e^{k\varphi i}\right|^s d\varphi\right)^{\frac{1}{s}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\rho^k\right).$$

Uzimajući razne vrednosti za brojeve λ_k $(k=1,2,\dots)$ iz nejednakosti (68), (69) i (70) mogu se dobiti razni izrazi za donju granicu modula nula datog polinoma.

Primer 1. Za $\lambda_k = \frac{1}{t^k}$ $(k=1,2,\dots)$, $t > \rho > 0$, iz (69) se dobija

$$A_0^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 t^{2k}\right)\frac{\rho^2}{t^2-\rho^2},$$

odakle sledi

$$(71) \qquad \rho \geqslant \frac{A_o t}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} A_k^2 t^{2k}}},$$

tj. rezultat koji su dobili M.Petrović [32], E.Landau [19], J.Karamata [14] i D.Marković [23].

Primer 2. Za $\lambda_k = 1+k$ $(k=1,2,\ldots)$ i $\rho < 1$ iz (70) se dobija

$$A_o \leqq M_s(P_1)\,\frac{2\rho-\rho^2}{(1-\rho)^2},$$

odakle je

$$(72) \qquad \rho \geqslant 1 - \sqrt{\frac{M_s(P_1)}{A_o+M_s(P_1)}},$$

gde je

$$M_s(P_1) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+k}e^{k\varphi i}\Big|^s d\varphi\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

Primer 3. Za $\lambda_k = \frac{1}{k}$ $(k = 1,2,\ldots)$ i $\rho < 1$ iz (70) sledi

$$\rho \geqslant 1 - e^{-\frac{A_o}{M_s(P_1)}}, \quad M_s(P_1) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n} k\, a_k e^{k\varphi i}\Big|^s d\varphi\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

Primer 4. Za $\lambda_k = \binom{n}{k}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ iz (70) se dobija

$$\rho \geqslant \Big(1+\frac{A_o}{M_s(P_1)}\Big)^{\frac{1}{n}}-1, \quad M_s(P_1) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\binom{n}{k}}e^{k\varphi i}\Big|^s d\varphi\Big)^{\frac{1}{s}}$$

Primer 5. Za $\lambda_k = k!$ $(k=1,2,\ldots)$ iz (70) sledi

$$\rho \geqslant \ln\Big(1+\frac{A_o}{M_s(P_1)}\Big), \quad M_s(P_1) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n} k!\, a_k e^{k\varphi i}\Big|^s d\varphi\Big).$$

Ako se u polinomu $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_o a_n \neq 0$ stavi $z=\frac{1}{u}$ dobiće se

$$u^n P(\tfrac{1}{u}) = P^*(u) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} u^k .$$

Nula $re^{\alpha i}$ $(0 \leq \alpha < 2\pi)$ najmanjeg modula polinoma $P^*(u)$ je nula $Re^{\theta i}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ najvećeg modula polinoma $P(z)$, pa se zbog $z = \frac{1}{u}$, $R = \frac{1}{r}$ na osnovu navedenih primera dobija da je:

za primer 1.

$$R \leq \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^2 t^{2k}}}{A_n t} ; \tag{73}$$

za primer 2.

$$R \leq 1/(1- \sqrt{\frac{M_s(P_2)}{A_n + M_s(P_2)}}) ,$$

gde je

$$M_s(P_2) = (\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{1+k} e^{k\varphi i}|^s d\varphi) ;$$

za primer 3.

$$R \leq e^{\frac{A_n}{M_s(P_2)}} \left[e^{\frac{A_n}{M_s(P_2)}} - 1 \right]^{-1} , \quad M_s(P_2) = (\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=1}^{n} k a_{n-k} e^{k\varphi i}|^s d\varphi)^{\frac{1}{s}} ;$$

za primer 4.

$$R \leq \left[(1+ \frac{A_n}{M_s(P_2)})^{\frac{1}{n}} - 1 \right]^{-1} , \quad M_s(P_2) = (\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{\binom{n}{k}} e^{k\varphi i}|^s d\varphi)^{\frac{1}{s}} ;$$

za primer 5.

$$R \leq \left[\ln \left(1+ \frac{A_n}{M_s(P_2)}\right) \right]^{-1} , \quad M_s(P_2) = (\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=1}^{n} k! a_{n-k} e^{k\varphi i}|^s d\varphi)^{\frac{1}{s}} .$$

Za $t = 1$ (71) se svodi na

$$\rho \geq \frac{A_o}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} A_k^2}} , \tag{71'}$$

a(73) na

$$R \leq \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} A_k^2}}{A_n}. \tag{73'}$$

Iz (71') i (73') sledi da sve nule polinoma (1) leže u kružnom prstenu

$$\frac{A_0}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} A_k^2}} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} A_k^2}}{A_n}.$$

Poslednji rezultat je Montelov prsten (15).

Iz nejednakosti (68), (69) i (70) mogu se dobiti i druge granice za nule polinoma (1), uzimajući druge vrednosti za niz brojeva λ_k.

3. O GRANICAMA REALNIH KORENA JEDNE KLASE ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Videli smo da za izraz

$$S = \frac{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\cdots+\alpha_n\lambda_n}{\beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2+\cdots+\beta_n\lambda_n},$$

gde su α_k realni, a β_k i λ_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ realni i pozitivni brojevi, važe nejednakosti (38), a ako pri tome brojevi λ_k monotono opadaju, za S važe nejednakosti (43), odnosno (44).

Nejednakosti (43) ostaju u važnosti ako su α_k realni, λ_k pozitivni i monotono opadaju, a β_k realni brojevi za koje je

$$s_\nu(\beta) = \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k > 0, \quad \nu=1,2,\ldots, n.$$

Navedene činjenice koje važe za izraz S iskoristićemo za odredjivanje granica realnih korena jedne klase algebarskih jednačina. Izmedju ostalog, preciziraćemo granice A. Hurwitza [13] i D. Markovića [21] za realne korene nekih algebarskih jednačina.

Za algebarsku jednačinu

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n = 0, \tag{74}$$

čiji su svi koeficijenti pozitivni brojevi, A. Hurwitz [13] je dokazao da moduli svih njenih korena leže izmedju najmanjeg i najvećeg broja u nizu

$$\frac{a_k}{a_{k+1}}, \quad (k=0,1,\ldots,n-1).$$

Ovaj stav važi za realne i kompleksne korene jednačine (74). Medjutim, zarealne korene jednačine (74), kada je ona neparnog stepena, navedene granice mogu biti preciznije. U tom smislu D.Marković [21] je dokazao da realni koreni jednačine

(75) $$a_o+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{2n}x^{2n}+a_{2n+1}x^{2n+1}=0,$$

čiji su svi koeficijenti realni, a njeni koeficijenti neparnog ranga pozitivni, leže izmedju najmanjeg i najvećeg broja u nizu

$$-\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}, \qquad (k=0,1,\dots,n).$$

D.Marković je svoj rezultat dokazao što je jednačinu (75) napisao u obliku

(75') $$-x=\frac{a_o+a_2x^2+\dots+a_{2n}x^{2n}}{a_1+a_3x^2+\dots a_{2n+1}x^{2n}}$$

i na njenu nesnu stranu primenio nejednakosti (38).

Ako se uzme da je $x^2<1$ (slučaj $x^2=1$ proverava se direktno), na desnu stranu (75') mogu se primeniti nejednakosti oblika (43), pa je tada

(76) $$m=\min_{0\le\nu\le n}\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{\nu}a_{2k}}{\sum\limits_{k=0}^{\nu}a_{2k+1}}\right)\le -x\le \max_{0\le\nu\le n}\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{\nu}a_{2k}}{\sum\limits_{k=0}^{\nu}a_{2k+1}}\right)=M.$$

što znači da se $-x$ nalazi u $I=((-1,0)\cup(0,1))\cap[m,M]$, ukoliko I nije prazan skup.

Za $x^2>1$, jednačinu (75') pišemo u obliku

(75") $$-x=\frac{a_{2n}+a_{2n-2}x^{-2}+\dots+a_ox^{-2n}}{a_{2n+1}+a_{2n-1}x^{-2}+\dots+a_1x^{-2n}}$$

i na njenu desnu stranu mogu se opet primeniti nejednakosti (43), pa je u ovom slučaju

(76') $$m_1=\min_{0\le\nu\le n}\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{\nu}a_{2n-2k}}{\sum\limits_{k=0}^{\nu}a_{2n+1-2k}}\right)\le -x\le \max_{0\le\nu\le n}\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{\nu}a_{2n-2k}}{\sum\limits_{k=0}^{\nu}a_{2n+1-2k}}\right)=M_1,$$

što znači da se $-x$ nalazi u $I_1=((-\infty,-1)\cup(1,\infty))\cap[m_1,M_1]$ ukoliko I_1 nije prazan skup.

Granice (76), odnosno (76'), prema (44) su preciznije od granica

$$\min_{0\leq k\leq n}\left(\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}\right) \leq -x \leq \max_{0\leq k\leq n}\left(\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}\right) \tag{77}$$

koje je izveo D.Marković. Ilustrujmo to na primeru. Jednačina

$$8+x+7x^2+3x^3+3x^4+2x^5 = 0 \tag{J_1}$$

koja se može napisati u obliku

$$-x = \frac{3+7x^{-2}+8x^{-4}}{2+3x^{-2}+x^{-4}}$$

ima, prema teoremi D.Markovića, sve svoje realne korene u intervalu $\left[-8, -\frac{3}{2}\right]$, dok se na osnovu (76') zaključuje da su njeni realni koreni u intervalu $\left[-3, -\frac{3}{2}\right]$ (slučaj $x^2=1$ otpada iz razmatranja, pošto ± 1 nisu koreni jednačine (J_1). Slučaj $x^2 < 1$, tj. $-1 < x < 1$, takodje otpada, pošto je tada I prazan skup).

Na osnovu pomenutog Hurwitzovog stava zaključujemo da moduli svih korena jednačine (J_1) leže u intervalu $\left[\frac{1}{7}, 8\right]$ što znači da njeni realni (negativni) koreni leže u intervalu $\left[-8, -\frac{1}{7}\right]$.

Za jednačinu (75) važe i sledeća tvrdjenja.

<u>Tvrdjenje 1.</u> Ako su koeficijenti jednačine (75) realni brojevi, pri čemu njeni koeficijenti neparnog ranga ispunjavaju uslove

$$\sum_{k=0}^{\nu} a_{2k+1} > 0, \qquad \nu=0,1,\ldots,n, \tag{U_1}$$

tada za svaki njen realni koren x važe granice (76), ukoliko

$I=((-1,0)\cup(1,0))\cap[m,M]$ nije prazan skup (slučaj $x^2<1$).

Tvrdjenje 2. Ako su koeficijenti jednačine (75) realni brojevi, a njeni koeficijenti neparnog ranga ispunjavaju uslove

$$(U_1') \qquad \sum_{k=o}^{\nu} a_{2n+1-2k} > 0, \quad \nu=0,1,\ldots,n,$$

tada za svaki njen realni koren x važe granice (76′), ukoliko $I_1=((-\infty,-1)\cup(1,\infty))\cap[m_1,M_1]$ nije prazan skup (slučaj $x^2>1$).

Dokaz tvrdjenja 1 i 2 izvodi se primenom nejednakosti (43) na (75′), odnosno na (75″).

Ilustrujmo jedno od prethodnih tvrdjenja na primeru. Jednačina

$$(J_2) \qquad 5+3x-3x^2-2x^3+6x^4+4x^5 = 0,$$

kod koje koeficijenti neparnog ranga ispunjavaju uslove (U_1'), a koja se može napisati u obliku

$$-x=\frac{5-3x^2+6x^4}{3-2x^2+4x^4},$$

ima, prema tvrdjenu 2, sve realne korene u intervalu $\left[-\frac{8}{5},-\frac{3}{2}\right]=\left[-\frac{16}{10},-\frac{15}{10}\right]$, slučaj $x^2>1$. Slučaj $x^2=1$ otpada iz razmatranja pošto ± 1 nisu koreni jednačine (J_2). Isto tako, slučaj $x^2<1$ otpada, pošto je pri tome I_1 prazan skup.

Napomena. Izloženi postupak za odredjivanje granica realnih korena može se primeniti i kod jednačine parnog stepena

$$a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}=0,$$

tako što se ona pomnoži sa $(x+\lambda)$, gde je λ realan parametar, posle čega se dobija jednačina neparnog stepena

$$\lambda a_o+(a_o+\lambda a_1)x+(a_1+\lambda a_2)x^2+\cdots+(a_{2n-1}+\lambda a_{2n})x^{2n}+a_{2n}x^{2n+1}=0.$$

4. O NULAMA KOMPOZICIONIH POLINOMA

Ovde dokazujemo nekoliko teorema o nulama kompozicionih polinoma koje generališu neke poznate rezultate i omogućavaju da se u izvesnim slučajevima dobiju preciznije granice za module nula polinoma.

Prema pravilu Descartesa, jednačina

$$C_o+C_1z+\cdots+C_{n-1}z^{n-1}-C_nz^n=0,\ C_oC_n\neq 0,\ C_k>0\quad (k=0,1,\ldots,n)$$

ima samo jedan pozitivni koren, dok jednačina

$$C_o+C_1z+\ldots+C_{p-1}z^{p-1}-C_pz^p+C_{p+1}z^{p+1}+\cdots+C_nz^n=0,\ C_oC_pC_n\neq 0,\quad 0<p<n$$

može imati najviše dva pozitivna korena (računajući tu i slučaj dvostrukog korena). Koristeći ove činjenice dokazaćemo sledeće dve teoreme.

<u>Teorema 1</u>. Ako je R_1 pozitivni koren jednačine

$$(78)\qquad \Phi_1(z)\equiv A_o+A_1z+\cdots A_{n-1}z^{n-1}-A_nz^n=0, A_oA_n\neq 0,\ A_k>0,$$

tada pozitivni koren R_s jednačine

$$(79)\qquad \Phi_s(z)\equiv A_o^s+A_1^sz+\cdots+A_{n-1}^sz^{n-1}-A_n^sz^n=0\qquad (1<s<\infty)$$

zadovoljava uslov

$$(80)\qquad R_s\leq R_1^s.$$

<u>Dokaz.</u> Za $z=R_1$ iz (78) je $A_nR_1^n=\sum_{k=0}^{n-1}A_kR_1^k$, odakle je

$$A_n^sR_1^{ns}=(\sum_{k=0}^{n-1}A_kR^k)^s\geq\sum_{k=0}^{n-1}A_k^sR_1^{ks},$$

odnosno

$$A_0^s+A_1^sR_1^s+\dots+A_{n-1}^sR_1^{(n-1)s}-A_n^sR_1^{ns} \leq 0,$$

što prema (79) znači da je $\phi_s(R_1^s) \leq 0$.

Kako je $\phi(0) > 0$ i $\phi_s(R_1^s) \leq 0$, to postoji samo jedno R_s, $0 < R_s \leq R_1^s$ za koje je $\phi_s(R_s)=0$.

Teorema 2. Ako jednačina

(81) $$F_1(z) \equiv A_0+A_1z+\dots+A_{p-1}z^{p-1}-A_pz^p+A_{p+1}z^{p+1}+\dots+$$
$$+A_nz^n=0, \quad A_0A_pA_n\neq 0$$

ima dva pozitivna korena r_1 i R_1, $r_1 < R_1$, tada jednačina

(82) $$F_s(z) \equiv A_0^s+A_1^sz+\dots+A_{p-1}^sz^{p-1}-A_p^sz^p+A_{p+1}^sz^{p+1}+\dots+$$
$$+A_n^sz^n=0, \quad (1 < s < \infty)$$

ima takodje dva pozitivna korena r_s i R_s, $r_s < R_s$ pri čemu je

(83) $$r_s \leq r_1^s \quad , \quad R_1^s \leq R_s.$$

Dokaz. Za $z = r_1$ iz (81) je $A_pr_1^p = \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} A_kr_1^k$, odakle je

$$A_p^sr_1^{ps} = \Big(\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} A_kr_1^k\Big)^s \geq \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} A_k^sr_1^{ks},$$

odnosno

$$A_0^s+A_1^sr_1^s+\dots+A_{p-1}^sr_1^{(p-1)s}-A_p^sr_1^{ps}+A_{p+1}^sr_1^{(p+1)s}+$$
$$+\dots+A_n^sr_1^{ns} \leq 0,$$

što prema (82) znači da je $F_s(r_1^s) \leq 0$.

Kako je $F_s(0) > 0$ i $F_s(r_1^s) \leq 0$, to postoji samo jedno r_s, $0 < r_s \leq r_1^s$ za koje je $F_s(r_s)=0$.

Isto tako, za $z = R_1$ iz (81) je $A_p R_1^p = \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} A_k R_1^k$, odakle je

$$A_p^s R_1^{ps} = \Big(\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} A_k R_1^k\Big)^s \geq \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} A_k^s R_1^{ks},$$

odnosno

$$A_0^s + A_1^s R_1^s + \cdots + A_{p-1}^s R_1^{(p-1)s} - A_p^s R_1^{ps} + A_{p+1}^s R_1^{(p+1)s} +$$

$$+ \cdots + A_n^s R_1^{ns} \leq 0,$$

što prema (82) znači da je $F_s(R_1^s) \leq 0$.

Kako je $F_s(+\infty) > 0$ i $F_s(R_1^s) \leq 0$, to postoji samo jedno R_s, $R_1^s \leq R_s < +\infty$ za koje je $F_s(R_s) = 0$.

Dakle je $r_s \leq r_1^s$ i $R_1^s \leq R_s$, odnosno $0 < r_s^{1/s} \leq r_1$ i $R_1 \leq R_s^{1/s}$, što zbog $r_1 < R_1$ daje $0 < r_s^{1/s} \leq r_1 < R_1 \leq R_s^{1/s}$, tj $r_s < R_s$.

Sada ćemo dokazati dve teoreme o kompozicionim polinomima.

<u>Teorema 3</u>. Neka je R_s (jedini) pozitivni koren jednačine

(84) $$A_0^s + A_1^s R_s + \cdots + A_{n-1}^s R_s^{n-1} - A_n^s R_s^n = 0,\quad A_n \neq 0,\quad s > 1.$$

Tada sve nule kompozicionog polinoma

(85) $$F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k, \qquad b_n \neq 0, \quad (|b_k| = B_k)$$

leže u svakom od krugova

(86) $$|z| \leq R_s^{\frac{1}{s}} (1+M_1^t)^{\frac{1}{t}} \leq R_1 (1+M_1^t)^{\frac{1}{t}},$$

(87) $$|z| \leq R_s^{\frac{1}{s}} M_2 \leq R_1 M_2,$$

gde je

(88) $$M_1 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n}\right),$$

(89) $$M_2 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n \alpha_k^{\frac{1}{t}}}\right)^{\frac{1}{n-k}}, \quad (\alpha_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \leq 1)$$

i gde je $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$.

Dokaz. Neka je

(90) $$z = u\lambda$$

nula polinoma (85). Tada je

$$A_n B_n |u|^n |\lambda|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} A_k |u|^k B_k |\lambda|^k,$$

odnosno

(91) $$A_n |u|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} A_k |u|^k \frac{B_k}{B_n} \cdot \frac{1}{|\lambda|^{n-k}}.$$

Ako se na desnu stranu (91) primeni nejednakost Höldera sa $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, $s > 1$ dobiće se

(92) $$A_n |u|^{ns} \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^s |u|^{ks}\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{B_k}{B_n}\right)^t \frac{1}{|\lambda|^{(n-k)t}}\right)^{\frac{s}{t}}.$$

Neka je $M_1 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{B_k}{B_n}\right)$ i $|\lambda| > 1$. Tada iz (92) sledi

$$A_n^s |u|^{ns} \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^s |u|^{ks}\right) \left(\frac{M_1^t}{|\lambda|^t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{t\nu}}\right)^{\frac{s}{t}}$$

odnosno

(93) $$A_n^s |u|^{ns} \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^s |u|^{ks}\right) \left(\frac{M_1^t}{|\lambda|^t - 1}\right)^{\frac{s}{t}}.$$

Za $|\lambda| = (1+M_1^t)^{1/t}$, $|u| = \rho^{\frac{1}{s}}$ (93) se svodi na

$$A_n^s \rho^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} A_k \rho^k,$$

što prema (84) znači da je $\rho \leq R_s$, odakle na osnovu (90) sledi prva nejednakost (86), dok druga sledi iz (80) teoreme 1.

Za dokaz (87) uzmimo da je u (92)

$$\left(\frac{B_k}{B_n}\frac{1}{|\lambda|^{n-k}}\right)^t \leq \alpha_k \qquad \alpha_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k \leq 1,$$

što znači da je

$$|\lambda| \geq \left(\frac{B_k}{B_n\alpha_k^{\frac{1}{t}}}\right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

Za

(94) $$|\lambda| = \max_{0\leq k\leq n-1}\left(\frac{B_k}{B_n\alpha_k^{\frac{1}{t}}}\right)^{\frac{1}{n-k}} \qquad |u| = \rho^{\frac{1}{s}}$$

je

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{B_k}{B_n}\frac{1}{|\lambda|^{n-k}}\right)^t \leq 1$$

i (92) se svodi na

$$A_n\rho^n \leq \sum_{k=0}^{n-1}A_k\rho^k,$$

što prema (84) znači da je $\rho \leq R_s$, odakle zbog (90) i (94) sledi prva nejednakost (87), dok druga sledi takodje iz (80) teoreme 1.

U slučaju kada $t \to \infty$, tada $s \to 1$ i (87) se svodi na

$$|z| \leq R_1\bar{M}_2, \qquad \bar{M}_2 = \max_{0\leq k\leq n-1}\left(\frac{B_k}{B_n}\right)^{\frac{1}{n-k}},$$

a to je rezultat koji je dobio D.Markovi [25].

Specijalno, ako je $a_k = 1$ $(k=0,1,\ldots,n)$ polinom (85) se svodi na

(95) $$P(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k.$$

U ovom slučaju pozitivni koren jednačine (84) je R_s, $1 < R_s < 2$, što znači da sve nule polinoma (95) leže u svakom od krugova

(96) $$|z|<2^{\frac{1}{s}}(1+M_1^t)^{\frac{1}{t}},$$

(97) $$|z|<2^{\frac{1}{s}} M_2.$$

Kada $s\to\infty$, tada $t \to 1$ i (96) se svodi na

$$|z| < 1 + M_1,$$

a to je klasični rezultat Cauchya, dok se (97) u ovom slučaju svodi na

$$|z| < M_2^* = \max_{0\le k\le n-1}\left(\frac{B_k}{B_n\alpha_k}\right)^{\frac{1}{n-k}}, \quad \alpha_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k \le 1,$$

a to je rezultat koji je dobio M. Fujiwara [8] (Metoda Fujiwarae).

Kada $s \to 1$, tada $t\to\infty$ i (97) se svodi na

$$|z| < 2M^*, \quad M^* = \max_{0\le k\le n-1}\left(\frac{B_k}{B_n}\right)^{\frac{1}{n-k}}$$ (Montel [27] Dieudonné [6])

<u>Primer.</u> Neka je

$$f_1(z)= \sum_{k=0}^{5} a_k z^k = 9+6z+3z^2+4z^3+z^4+z^5,$$

$$f_2(z)= \sum_{k=0}^{5} b_k z^k = 1+z+3z^2+2z^3+4z^4+2z^5.$$

Tada je

$$P(z) = \sum_{k=0}^{5} a_k b_k z^k = 9+6z+9z^2+8z^3+4z^4+2z^5.$$

Jednačina (84) za $s=1$ u ovom slučaju glasi

$$9+6R_1+3R_1^2+4R_1^3+R_1^4-R_1^5 = 0,$$

čiji je pozitivni koren $R_1 = 3$. Dalje je u našem slučaju

$$\overline{M}_2 = \max_{0 \le k \le 4} \left(\frac{B_k}{B_5}\right)^{\frac{1}{5-k}} = 2,$$

pa je $R_1 \overline{M}_2 = 6$.

Za $s=t=2$ jednačina (84) glasi

$$81+36R_2+9R_2^2+16R_2^3+R_2^4-R_2^5 = 0,$$

čiji je pozitivni koren $R_2 \le 5$, dok je $M_1 = \max_{0 \le k \le 4}\left(\frac{B_k}{B_5}\right) = 2$ pa je prema (86) $R_2^{\frac{1}{2}}(1+M_1^2)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{25} = 5$.

Znači, za $s=t=2$ sve nule kompozicionog polinoma $P(z)$ u navedenom primeru leže u krugu $|z| \le 5$, dok bi se na osnovu teoreme D. Markovića [25] u ovom slučaju izveo zaključak da se sve nule datog polinoma $P(z)$ nalaze u krugu $|z| \le 6$.

<u>Teorema 4.</u> Ako jednačina

(98) $$A_0^s+A_1^s R_s+\dots+A_{p-1}^s R_s^{p-1}-A_p^s R_s^p+A_{p+1}^s R_s^{p+1}+\dots+A_n^s R_s^n=0,$$

$$A_p \ne 0 \quad (1 \le s < \infty)$$

ima dva pozitivna korena R_s' i R_s'', $R_s' < R_s''$, tada kompozicioni polinom,

(99) $$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k, \quad b_p \ne 0, \quad (|a_k| = A_k, \; |b_k| = B_k)$$

ima tačno p nula u krugu

(100) $$|z| \le R_s'^{\frac{1}{s}} M$$

i nema nula u kružnom prstenu

(101) $$R_s'^{\frac{1}{s}} M < |z| < R_s''^{\frac{1}{s}} M,$$

ukoliko postoji pozitivan broj M za koji je

$$(102)\qquad \max_{0\le k\le p-1}\left(\frac{B_k}{B_p\alpha_k^{\frac{1}{t}}}\right)^{\frac{1}{p-k}} \le M \le \min_{p+1\le k\le n}\left(\frac{B_p\alpha_k^{\frac{1}{t}}}{B_k}\right)^{\frac{1}{k-p}},$$

gde je

$$(103)\qquad \alpha_k > 0, \sum_{\substack{k=0\\k\ne p}}^{n}\alpha_k \le 1; \qquad \frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1, \quad t>1.$$

Dokaz. Neka je

$$(104)\qquad z = u\lambda \quad , \qquad (\ |\lambda| = M)$$

i ε pozitivan broj za koji je

$$(105)\qquad R_s' + \varepsilon \le |u|^s \le R_s'' - \varepsilon .$$

Tada je iz (98)

$$A_p^s |u|^{ps} > \sum_{\substack{k=0\\k\ne p}}^{n} A_k^s |u|^{ks}$$

odakle je

$$(106)\qquad A_p |u|^p > \left(\sum_{\substack{k=0\\k\ne p}}^{n} A_k^s |u|^{ks}\right)^{\frac{1}{s}} .$$

Neka je $M=|\lambda|>0$ tako da je

$$(107)\qquad \left(\sum_{\substack{k=0\\k\ne p}}^{n}\left(\frac{B_k}{B_p}\ \frac{1}{M^{k-p}}\right)^t\right)^{\frac{1}{t}} \le 1 .$$

Tada se iz (106) i s obzirom na (107) i nejednakost Höldera sa $\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1$, $t>1$, dobija

$$A_p |u|^p > \left(\sum_{\substack{k=0\\k\ne p}}^{n} A_k^s |u|^{ks}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{\substack{k=0\\k\ne p}}^{n}\left(\frac{B_k}{B_p}\ \frac{1}{M^{k-p}}\right)^t\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$\ge \sum_{\substack{k=0\\k\ne p}}^{n} A_k |u|^k \left(\frac{B_k}{B_p}\ \frac{1}{M^{k-p}}\right),$$

odakle je, zbog $M = |\lambda|$, dalje

$$(108) \qquad A_p |u\lambda|^p > \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} A_k B_k |u\lambda|^k .$$

Neka je

$$(109) \qquad P(z) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} a_k b_k z^k , \quad Q(z) = a_p b_p z^p .$$

Na krugu $|z| = |u\lambda|$ iz (109) i s obzirom na (108) je

$$|P(z)| \leq \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} A_k B_k |u\lambda|^k < A_p B_p |u\lambda|^p = |Q(z)| \neq 0,$$

odakle na osnovu Rauchéovog stava sledi da u krugu $|z| < |u\lambda|$, $f(z) = P(z) + Q(z)$ ima isti broj nula kao i $Q(z)$, dakle p nula. Pošto je $|u|$, prema (105), proizvoljan broj takav da je

$$R_s'^{\frac{1}{s}} < |u| < R_s''^{\frac{1}{s}} ,$$

odakle je

$$R_s'^{\frac{1}{s}} M < |u\lambda| < R_s''^{\frac{1}{s}} M, \quad (|\lambda| = M),$$

sledi da funkcija $f(z)$ ima u krugu $|z| \leq R_s' M$ tačno p nula i da ona nema nula u oblasti $R_s' M < |z| \quad R_s''^{\frac{1}{s}} M$, gde je M pozitivan broj za koji su ispunjene relacije (102).

U našem slučaju M je izabrano u (102) tako da je

$$\left(\frac{B_k}{B_p} \frac{1}{M^{k-p}} \right)^{t} \leq \alpha_k , \ (\alpha_k > 0, \ \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} \alpha_k \leq 1).$$

Poslednje relacije su ispunjene ako je

$$M \leq \left(\frac{B_k}{B_p \alpha_k^{\frac{1}{s}}} \right)^{\frac{1}{p-k}} \qquad \text{za } k=0,1,\dots,p-1,$$

$$M \leq \left(\frac{B_p \alpha_k^{\frac{1}{s}}}{B_k} \right)^{\frac{1}{p-k}} \qquad \text{za } k= p+1,p+2,\dots,n,$$

tj. ako su ispunjene relacije (102), čime je dokaz teoreme 4. završen.

Ako jednačina (98) ima dva različita pozitivna korena R_1' i R_1'' za $s=1$, tada ona prema teoremi 2. ima takodje dva različita pozitivna korena R_s' i R_s'' za svako $s > 1$. Zato kada $s \to 1$ tada $t \to \infty$ i polinom (99) ima, prema (100), tačno p nula u krugu

$$(110) \qquad |z| \leq R_1'\overline{M}$$

i prema (101) nema nula u kružnom prstenu

$$(111) \qquad R_1'\overline{M} < |z| < R_1''\overline{M},$$

gde je

$$(112) \qquad \max_{0 \leq k < p}\left(\frac{B_k}{B_p}\right)^{\frac{1}{p-k}} \leq \overline{M} \leq \min_{p < k \leq n}\left(\frac{B_p}{B_k}\right)^{\frac{1}{k-p}} .$$

Ako je pri tome još $b_k=1$ $(k=0,1,\ldots,n)$, tada je $\overline{M}=1$, pa se u ovom slučaju dobija klasična teorema Pelleta [31] za polinom $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

5. O NULAMA NAJMANJEG MODULA

Često se postavlja pitanje lokalizacije korena najmanjeg modula jedne algebarske jednačine u zavisnosti samo od nekih njenih koeficijenata. Ovaj problem vodi poreklo iz teorije funkcija gde se za funkciju

$$f(z) = a_o+a_1z+\dots+a_nz^n+\dots \qquad (a_1\neq 0)$$

traži krug sa centrom u početku čiji poluprečnik zavisi samo od koeficijenata a_o i a_1 tako da ovaj krug sadrži jedan koren bilo koje od jednačina $f(z)=0$ ili $f(z) = 1$.

Početkom ovog veka (1906 - 1907) E.Landau [18] je dokazao da jednačina

$$a_o+a_1z+a_nz^n=0$$

ima bar jedan koren u krugu

(113) $$|z| \leq 2\left|\frac{a_o}{a_1}\right|,$$

a da jednačina

$$a_o+a_1z+a_mz^m+a_nz^n = 0$$

ima bar jedan koren u krugu

(114) $$|z|\leq \frac{17}{3}\left|\frac{a_o}{a_1}\right|.$$

Problemima ove vrste kasnije su se bavili mnogi matematičari, a naročito P.Montel [28], Van Vleck [38], Biernacki [2], G. Szegö, G.v.Sz.Nagy [29] i D.Marković [24].

Ovde izlažemo jedan jednostavan dokaz nekih rezultata E.Landaua [18], A. Hurwitza [12], G.Szegöa [35], D.Markovića [24] a zatim preciziramo i uopštavamo neke rezultate G. v. Sz. Nagya [29].

Neka je dat polinom

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0 \tag{115}$$

i neka su $z_1, z_2, \dots, z_n$ njegove nule. Vrednost polinoma $P(z)$ u proizvoljnoj tački ζ kompleksne ravni može se predstaviti u obliku

$$a_n(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)\cdots(\zeta - z_n) = P(\zeta). \tag{116}$$

Neka je z nula polinoma (115) koja je u kompleksnoj ravni najbliža tački ζ. Tada je iz (116)

$$|z - \zeta|^n \leq \left| \frac{P(\zeta)}{a_n} \right|;$$

odakle je

$$|z - \zeta| \leq \sqrt[n]{\left| \frac{P(\zeta)}{a_n} \right|}. \tag{117}$$

Na ovaj način je dokazana sledeća

<u>Teorema 1.</u> Krug sa centrom u tački ζ poluprečnika

$$r_P(\zeta) = \sqrt[n]{\left| \frac{P(\zeta)}{a_n} \right|}$$

sadrži bar jednu nulu polinoma (115).

<u>Primena teoreme 1.</u> Uzimajući razne vrednosti za ζ dobijaju se različiti krugovi u kompleksnoj ravni takvi da

svaki od njih sadrži bar jednu nulu polinoma (115).

Korolar 1. Ako se za ζ uzme nula odsečka polinoma (115), tj. nula polinoma

(118) $$Q(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$$

biće prema (117) bar za jednu nulu z polinoma (115)

(119) $$|z-\zeta| \leq |\zeta| \ ,$$

odakle je

(120) $$|z| \leq 2|\zeta| \ .$$

Rezultat (120) dobio je G. Szegő [35].

Ako je polinom (115) oblika

(121) $$P(z) = 1+z^p+a_nz^n, \qquad n > p \geq 1$$

i ako su α_i $(i=1,2,\ldots,p)$ nule polinoma

$$Q(z) = 1 + z^p \ ,$$

tada na osnovu (119) sledi da u svakom od krugova

(122) $$|z-\alpha_i| \leq 1$$

leži bar po jedna nula polinoma (121).

Rezultat (122) dobio je D.Marković [24], takodje A. Hurwitz [12] i G.Szegő [35] za p=1.

Isto tako, za polinom (115) oblika

$$P(z) = a_0+a_1z+a_nz^n$$

iz (120) direktno sledi rezultat (113) E. Landaua [18].

Ako je polinom (115) oblika

$$P(z) = a_o + a_1 z + a_m z^m + a_n z^n$$

i ako se na njega dva puta uzastopno primeni (120), proizilazi odatle da se bar jedna njegova nula nalazi u krugu

$$|z| \leq 4 \left| \frac{a_o}{a_1} \right| .$$

Poslednji rezultat je precizniji od rezultata (114) koji je dobio E. Landau [18].

Korolar 2. Neka je

(123) $$P(z) = z^n + b_k z^{n-k} + b_{k+1} z^{n-k-1} + b_{k+2} z^{n-k-2} + \cdots + b_n ,$$

(124) $$Q(z) = b_{k+1} z^{n-k-1} + b_{k+2} z^{n-k-2} + \cdots + b_n .$$

G.v.Sz.Nagy [29] dokazao je teoremu:

Ako polinom (124) ima bar jednu nulu u krugu $|z| \leq r$, tada polinom (123) ima bar jednu nulu u krugu

(125) $$|z| \leq 2r + |b_k|^{\frac{1}{k}} .$$

Rezultat (125) može se precizirati. Zapravo, važi

Teorema 2. Ako polinom (124) ima bar jednu nulu u krugu $|z| \leq r$, tada polinom (123) ima bar jednu nulu u krugu

$$|z| < 2r + \left(\frac{|b_k|}{\binom{n}{k}} \right)^{\frac{1}{k}} .$$

Dokaz. Neka je ζ nula polinoma (124). Tada je prema

(117)
$$|z-\zeta| \leq \sqrt[n]{|\zeta^n + b_k\zeta^{n-k}|} \leq \sqrt[n]{|\zeta|^n + |b_k||\zeta|^{n-k}} < |\zeta| + \left(\frac{|b_k|}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}},$$

odakle je

$$|z| < 2|\zeta| + \left(\frac{|b_k|}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}},$$

odnosno zbog $|\zeta| \leq r$ je

$$|z| < 2r + \left(\frac{|b_k|}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

<u>Korolar 3.</u> Neka je

(126) $$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_0,$$

(127) $$Q(z) \equiv P(z) - z^n - a_k z^{n-k}, \qquad k=1,2,\ldots,n-1.$$

Slično prethodnoj teoremi, može se dokazati

<u>Teorema 3.</u> Ako polinom (127) ima bar jednu nulu u krugu $|z| \leq r$, tada polinom (126) ima bar jednu nulu u krugu

(128) $$|z| \leq 2r + \left(\frac{|a_k|}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Za $k=n$ je $r=0$ i (128) se svodi na

$$|z| \leq |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

<u>Primedba.</u> Označimo sa K_ζ kružnu liniju sa centrom u tački ζ i poluprečnikom

$$r_p(\zeta) = \sqrt[n]{\left|\frac{P(\zeta)}{a_n}\right|}.$$

Kada $|\zeta| \to \infty$, tada K_ζ degeneriše u pravu K_∞; pri tome prava K_∞ prolazi kroz težište nula polinoma $P(z)$.

Još neke primene. Kod numeričkog rešavanja algebarske jednačine stepena većeg od 2 obično se u praksi koristi neka od metoda postupnog približavanja. Pri tome se polazi od jedne početne vrednosti kao takozvanog prvog približnog rešenja date jednačine. Efikasnost primene izabrane metode postupnog približavanja u mnogome zavisi od početne vrednosti sa kojom smo otpočeli računanje. Zbog toga je potrebno da se prvo odredi što uža oblast C (najpodesnije kružna oblast) u kojoj leže svi koreni date jednačine, a zatim da se izvrši razdvajanje ovih korena, tj. da se odrede medjusobno disjunktne podoblasti C_k $(k=1,2,\ldots,n)$ oblasti C u kojima bi se nalazio samo po jedan koren.

Prema teoremi 1, krug sa centrom u tački ζ poluprečnika

$$r_p(\zeta) = \sqrt[n]{\left|\frac{P(\zeta)}{a_n}\right|}$$

sadrži bar jednu nulu polinoma

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad a_n \neq 0.$$

Ovu činjenicu primenićemo na razdvajanje nula polinoma $P(z)$. Posmatrajmo slučaj kada polinom $P(z)$ nema višestrukih nula.

Neka su nule polinoma $P(z)$ redom $z_1, z_2, \ldots, z_n$ i neka sve one leže u kružnoj oblasti C. U oblasti C može se odrediti n različitih tačaka $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ i oko njih opisati n krugova čiji su poluprečnici redom

$$\sqrt[n]{\left|\frac{P(\zeta_1)}{a_n}\right|},\quad \sqrt[n]{\left|\frac{P(\zeta_2)}{a_n}\right|},\ \ldots,\ \sqrt[n]{\left|\frac{P(\zeta_n)}{a_n}\right|}$$

i da pri tome ovi krugovi nemaju zajedničkih tačaka. Pored toga, svaki od ovih krugova sadrži tačno po jednu nulu polinoma $P(z)$.

Primer 1. Posmatrajmo polinom

$$P(z) = z^5+17z+1.$$

Ako za tačke $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_5$ uzmemo, na primer, nule polinoma

$$Q(z) = z^5+17z,$$

tj. tačke

$$\zeta_1=0,\quad \zeta_2=\sqrt[4]{\frac{17}{4}}\,(1+i),\quad \zeta_3=\sqrt[4]{\frac{17}{4}}\,(-1+i)$$

$$\zeta_4=\sqrt[4]{\frac{17}{4}}\,(-1-i),\quad \zeta_5=\sqrt[4]{\frac{17}{4}}\,(1-i)$$

i oko njih opišemo jedinične krugove, pošto je u ovom slučaju

$$r_P(\zeta_k)=\sqrt[5]{\left|\frac{P(\zeta_k)}{a_5}\right|}=1 \qquad (k = 1,2,\ldots,5),$$

tada ovi krugovi nemaju zajedničkih tačaka i, prema tome, svaki od njih sadrži tačno po jednu nulu uočenog polinoma, što znači da posmatrani polinom ima tačno jednu realnu nulu u $(-1,0)$, dok su ostale kompleksne.

Primer 2. Posmatrajmo polinom

$$P(z) = z^3-2z^2+5z-1.$$

Prema pravilu Descartesa za ovaj polinom zaključujemo da može imati tri ili jednu pozitivnu nulu i da nema negativnih nula.

Ako za tačke $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ uzmemo nule polinoma

$$Q(z) = z^3-2z^2+5z,$$

t.j. tačke

$$\zeta_1=0, \quad \zeta_2=1+2i, \quad \zeta_3=1-2i$$

i oko njih opišemo jedinične krugove, pošto je

$$\sqrt[3]{\left|\frac{P(\zeta_k)}{a_3}\right|} = 1 \qquad (k=1,2,3),$$

tada ovi krugovi nemaju zajedničkih tačaka i, prema tome, svaki od njih sadrži po jednu nulu uočenog polinoma, što znači da ovaj polinom ima jednu pozitivnu nulu u $(0,1)$ i dve kompleksne nule, po jednu u svakom od krugova

$$|z-(1+2i)| \leq 1, \quad |z-(1-2i)| \leq 1.$$

6. NEKE PRIMENE

U ovom odeljku navodimo neke primene dobijenih rezultata o granicama modula nula polinoma.

1. <u>Primena na funkcije predstavljene Taylorovim redom.</u> Za datu funkciju

$$(129) \qquad f(z) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \qquad a_o \neq 0 \quad (|a_k| = A_k),$$

koja je regularna za $|z| < r$, često se traži krug $|z| \leq \rho$ $(\rho < r)$ u kome ona nema nula, pri čemu se poluprečnik ρ izražava pomoću njenih koeficijenata.

1901. godine M.Petrović [32] je dokazao značajan rezultat koji je bio povod za istraživanja E. Landaua [19], P.Montela [28], J.Karamata [14] i D.Markovića [23]. Petrovićev rezultat glasi:

Neka je t broj > 0. Ako red (129) konvergira za $|z| < t$ tada se funkcija $f(z)$ ne anulira u krugu

$$|z| \leq \frac{A_o t}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 t^{2k}}} .$$

Ovaj Petrovićev rezultat izveo je takodje E. Landau [19] pomoću Cauchy-Schwarzova nejednakosti.

Za funkciju (129) E. Landau [19] i J.Karamata [14] dokazali su teoremu:

Funkcija (129) se ne anulira u krugu

$$|z| < \frac{A_o t}{A_o + \mu(t)} , \qquad \mu(t) = \sup_{k \geq 1} (A_k t^k) ,$$

kakav god bio broj $t > 0$ (kada je broj t veći od poluprečnika konvergencije reda (129), navedeni rezultat očigledno važi).

Za funkciju (129) P. Montel [28] je dokazao da ona nema nula u krugu

$$|z| < \frac{A_0}{M_s(f)}, \quad M_s(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{\varphi i})|^s d\varphi\right)^{\frac{1}{s}} \quad (0 < s < \infty)$$

Za s=2 Montelov rezultat glasi

$$|z| < \frac{A_0}{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k^2}} .$$

Značajno je da se metoda za odredjivanje donje granice modula nula polinoma izložena u odeljku 2 može primeniti i na funkcije predstavljene Taylorovim redom.

Neka je $z = \rho e^{\theta i}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ nula funkcije (129). Tada je

$$a_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\theta i} \rho^k ,$$

odnosno

$$a_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} e^{k\varphi i}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{k(\theta-\varphi) i} \rho^k\Big) d\varphi ,$$

odakle je

$$A_0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} e^{k\varphi i}\Big| \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{k(\theta-\varphi) i} \rho^k\Big| d\varphi , \tag{130}$$

gde je λ_k $(k=1,2,\dots)$ neki niz realnih ili kompleksnih brojeva različitih od nule.

Ako se na desnu stranu (130) primeni nejednakost Höldera sa $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, $s > 1$, dobiće se

$$A_0 \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} e^{k\varphi i}\Big|^s d\varphi\right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{k(\theta-\varphi) i} \rho^k\Big|^t d\varphi\right)^{\frac{1}{t}} . \tag{131}$$

Za s=t=2 i s obzirom na formulu Parsevala nejednakost (131) se svodi na

(132) $$A_o^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{a_k}{\lambda_k}\Big|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2\varphi^{2k}\Big).$$

Iz (131) sledi takodje nejednakost

(133) $$A_o \leq \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k}e^{k\varphi i}\Big|^s d\varphi\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|\varphi^k\Big).$$

Uzimajući razne vrednosti za brojeve λ_k $(k=1,2,\dots)$ iz nejednakosti (131), (132) i (133) mogu se dobiti razni izrazi za donju granicu modula nula posmatrane funkcije (129).

Primer 1. Za $\lambda_k = \frac{1}{t^k}$ $(k=1,2,\dots)$, $t > \varphi > 0$, iz (132) slično primeru 1 odeljka 2, sledi granica

(P) $$\varphi \geq \frac{A_o t}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}A_k^2 t^{2k}}} = g_1(t),$$

tj. rezultat koji su za funkciju (129) dobili M.Petrović [32] E.Landau [19], J.Karamata [14], P.Montel [28] i D.Marković [23].

Primer 2. Za $\lambda_k = \frac{1+k}{t^k}$ $(k=1,2,\dots)$ i $\varphi < t$, iz (133), slično primeru 2, odeljka 2, sledi granica

(134) $$\varphi \geq t\Big(1-\sqrt{\frac{M_s(f_1)}{A_o+M_s(f_1)}}\Big),$$

gde je

$$M_s(f_1) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k t^k}{1+k}e^{k\varphi i}\Big|^s d\varphi\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

Za s=2 je prema formuli Parsevala

$$M_2(f_1) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{A_k}{1+k}\Big)^2 t^{2k}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

pa se iz (134) u ovom slučaju dobija

(135) $$\rho \geqq t\left\{1-\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k}{1+k}\right)^2 t^{2k}\right)^{\frac{1}{2}}}{A_o+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k}{1+k}\right)^2 t^{2k}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}= g_2(t).$$

Za t =1 granice (P) i (135) svode se na granice

(P′) $$\frac{A_o}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2}} = g_1(1)$$

i

(135′) $$1-\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k}{1+k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{A_o+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k}{1+k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}= g_2(1) .$$

Kako je $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k}{1+k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$, to (135′) ima smisla kadgod ima smila (P′). Medjutim, može biti $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k}{1+k}\right)^2 < \infty$ a da je $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \infty$, kao što to pokazuje primer funkcije

$$f(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\ln(1+k)} z^k, \quad |a_k|=1 \quad (k=1,2,\ldots)$$

kod koje je $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2(1+k)} = \infty$, dok je $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+k)^2 \ln^2(1+k)} < \infty$.

Za ovu funkciju izraz (P′), kao donja granica modula njenih nula, nema smila pošto je on jednak nuli, dok je izraz (135′) različit od nule ($0 < g_2(1) < 1$).

2. <u>Odredjivanje gornje granice pozitivnih korena algebarskih jednačina sa realnim koeficijentima.</u> U radu [26] D.Marković posmatra algebarsku jednačinu

(136) $$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-k} a_\nu x^\nu = 0 ;$$

gde su a_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$ realni brojevi, a x njen bilo koji realan pozitivan koren i uzima polinom

(137) $$Q_{n-k}(x) = \sum_{\nu=0}^{n-k} C_\nu x^\nu,$$

gde je x pozitivan koren jednačine (136) i gde su koeficijenti C_ν $(\nu=0, 1,\ldots,n-k)$ proizvoljni pozitivni brojevi, a k prirodan broj $(k=1,2,\ldots,n-1)$. Pri tome vrši delimično deljenje (136) sa (137) i dobija jednačinu

$$\alpha_k x^k+\alpha_{k-1}x^{k-1}+\ldots+\alpha_1 x+\frac{\beta_{n-k}x^{n-k}+\beta_{n-k-1}x^{n-k-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0}{C_{n-k}x^{n-k}+C_{n-k-1}x^{n-k-1}+\ldots+C_1 x+C_0} = 0,$$

ili kraće

(138) $$r_k(x) + R_{n-k}(x)=0$$

gde je

$$r_k(x) = \alpha_k x^k+\alpha_{k-1}x^{k-1}+\ldots+\alpha_1 x,$$

$$R_{n-k}(x) = \frac{\beta_{n-k}x^{n-k}+\beta_{n-k-1}x^{n-k-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0}{C_{n-k}x^{n-k}+C_{n-k-1}x^{n-k-1}+\ldots+C_1 x+C_0}$$

i gde su koeficijenti α_μ $(\mu= 1,2,\ldots, k)$, β_ν $(\nu=0,1,\ldots, n-k)$ dobijeni posle pomenutog deljenja.

Ograničavajući $R_{n-k}(x)$ primenom dvostruke nejednakosti (38), D.Marković iz (138) izvodi nejednačine

(139) $$r_k(x)+m \leq 0 \leq r_k(x)+M,$$

gde je

$$m = \min_{0\leq\nu\leq n-k}\left(\frac{\beta_\nu}{C_\nu}\right), \qquad M = \max_{0\leq\nu\leq n-k}\left(\frac{\beta_\nu}{C_\nu}\right).$$

Nejednačine (139) odredjuju granice pozitivnih korena jednačine (136), ukoliko oni postoje.

Ovde preciziramo rezultat (139) D.Markovića, a zatim izvodimo jedan opšti izraz za gornju granicu modula nula polinoma.

Ako je $0 \leq x \leq 1$, tada se, na osnovu (43) $R_{n-k}(x)$ može ograničiti sa

(140) $$m_1 \leq R_{n-k}(x) \leq M_1,$$

gde je

$$m_1 = \min_{0\leq s\leq n-k}\left(\frac{\sum_{\nu=0}^{s}\beta}{\sum_{\nu=0}^{s}C_\nu}\right) \geq \max_{0\leq\nu\leq n-k}\left(\frac{\beta_\nu}{C_\nu}\right) = M,$$

$$M_1 = \max_{0\leq s\leq n-k}\left(\frac{\sum_{\nu=0}^{s}\beta_\nu}{\sum_{\nu=0}^{s}C_\nu}\right) \leq \max_{0\leq\nu\leq n-k}\left(\frac{\beta_\nu}{C_\nu}\right) = M,$$

pa se na osnovu (140) iz (138) dobijaju nejednačine

(141) $$r_k(x)+m_1 \leq 0 \leq r_k(x)+M_1.$$

Nejednačine (141) odredjuju granice realnih pozitivnih korena x jednačine (136) za koje je $0 \leq x \leq 1$, ukoliko oni postoje.

Ako je $x \geq 1$, tada se $R_{n-k}(x)$ može ograničiti sa

(142) $$m_1' \leq R_{n-k}(x) \leq M_1',$$

gde je

$$m_1' = \min_{k\leq s\leq n}\left(\frac{\sum_{\nu=k}^{s}\beta_{n-\nu}}{\sum_{\nu=k}^{s}C_{n-\nu}}\right) \geq \min_{0\leq\nu\leq n-k}\left(\frac{\beta_\nu}{C_\nu}\right) = m,$$

$$M_1' = \max_{k\leq s\leq n}\left(\frac{\sum_{\nu=k}^{s}\beta_{n-\nu}}{\sum_{\nu=k}^{s}C_{n-\nu}}\right) \leq \max_{0\leq\nu\leq n-k}\left(\frac{\beta_\nu}{C_\nu}\right) = M,$$

pa se na osnovu (142) iz (138) dobijaju nejednačine

(143) $$r_k(x) + m_1' \leq 0 \leq r_k(x)+M_1'.$$

Nejednačine (143) odredjuju granice realnih pozitivnih korena x ($x > 1$) jednačine (136), ukoliko oni postoje.

Ako je u (136) $a_n=1$, a u (137) $k=1$ i $C_{n-1}=1$, tada se nejednačine (141) svode na

(144) $$x+m_1 \leq 0 \leq x+M_1,$$

gde je sada

(145) $$m_1 = \min_{0 \leq s \leq n-1}\left(\frac{\sum_{\nu=0}^{s}(a_\nu - C_{\nu-1})}{\sum_{\nu=0}^{s} C_\nu}\right) \geq \min_{0 \leq \nu \leq n-1}\left(\frac{a_\nu - C_{\nu-1}}{C_\nu}\right) = m,$$

(146) $$M_1 = \max_{0 \leq s \leq n-1}\left(\frac{\sum_{\nu=0}^{s}(a_\nu - C_{\nu-1})}{\sum_{\nu=0}^{s} C_\nu}\right) \leq \max_{0 \leq \nu \leq n-1}\left(\frac{a_\nu - C_{\nu-1}}{C_\nu}\right) = M,$$

dok se nejednačine (143) svode na nejednačine

(147) $$x+m_1' \leq 0 \leq x+M_1',$$

gde je sada

(148) $$m_1' = \min_{1 \leq s \leq n}\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{s}(a_{n-\nu} - C_{n-\nu-1})}{\sum_{\nu=1}^{s} C_{n-\nu}}\right) \geq \min_{1 \leq \nu \leq n}\left(\frac{a_{n-\nu} - C_{n-\nu-1}}{C_{n-\nu}}\right) = m,$$

(149) $$M_1' = \max_{1 \leq s \leq n}\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{s}(a_{n-\nu} - C_{n-\nu-1})}{\sum_{\nu=1}^{s} C_{n-\nu}}\right) \leq \min_{1 \leq \nu \leq n}\left(\frac{a_{n-\nu} - C_{n-\nu-1}}{C_{n-\nu}}\right) = M,$$

i gde je $C_{-1}=0$, $C_\nu > 0$ ($\nu=0,1,\ldots,n-1$), $C_{n-1}=1$.

U praksi se često postavlja pitanje odredjivanja gornje granice L pozitivnih korena jedne algebarske jednačine sa realnim koeficijentima. Do granice L može se doći na osnovu Lagrangeove teoreme (videti [17] ,str. 949), ili, na primer, metodom grupisanja članova.

Ako je pozitivni koren jednačine (136) $x > 1$, tada je, prema (147), $x+m_1' \leq 0$, odakle je $x \leq -m_1'$, što znači da je

(150) $$L = -m_1',$$

gde je prema (148)

(151) $$m_1' = \min_{1\le s\le n}\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{s}(a_{n-\nu}-C_{n-\nu-1})}{\sum_{\nu=1}^{s} C_{n-\nu}}\right).$$

Primer. Odrediti gornju granicu L pozitivnih korena jednačine

(E) $$P_4(x) = x^4+x^3-3x^2+x-100 = 0.$$

Kako je $P_4(1) < 0$, to je $L > 1$, pa je prema (150) $L=-m_1'$. U našem slučaju je, prema (151),

$$m_1' = \min\left(\frac{1-C_2}{1}, \frac{2-C_2-C_1}{1+C_2}, \frac{-1-C_2-C_1-C_0}{1+C_2+C_1}, \frac{-101-C_2-C_1-C_0}{1+C_2+C_1+C_0}\right),$$

što, na primer, za $C_2=4$, $C_1=10$, $C_0=25$ daje $m_1' = -3,5$. Prema (150) gornja granica pozitivnih korena jednačine (E) je

$$L = 3,5.$$

Posmatrajmo sada plinom

(152) $$P(z) = z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1z+a_0$$

i uz ovaj polinom jednačinu

(153) $$x^n-A_{n-1}x^{n-1}-A_{n-2}x^{n-2}-\cdots-A_1x-A_0 = 0 \quad (A_\nu = |a_\nu|).$$

Jednačina (153) ima samo jedan pozitivan koren x pri čemu svaka nula z polinoma (152), prema teoremi Cauchya, zadovoljava relaciju

(154) $$|z| \leq x .$$

Neka je pozitivni koren jednačine (153) $x \geq 1$. Tada, na osnovu (147) i (148), za ovaj koren važi relacija $x \leq -m_1'$, tj. relacija

(155) $$x \leq \max_{1\leq s\leq n}\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{s}(A_{n-\nu}+C_{n-\nu-1})}{\sum_{\nu=1}^{s} C_{n-\nu}}\right) \leq \max_{0\leq\nu\leq n-1}\left(\frac{A_\nu+C_{\nu-1}}{C_\nu}\right),$$

gde je $C_{-1}=0$, $C_\nu > 0$ $(\nu=0,1,\dots,n-1)$, $C_{n-1}=1$, što prema (154) znači da je izraz

(156) $$r_1' = \max_{1\leq s\leq n}\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{s}(A_{n-\nu}+C_{n-\nu-1})}{\sum_{\nu=1}^{s} C_{n-\nu}}\right)$$

gornja granica modula nula polinoma (152).

Iz (156) mogu se dobiti razni novi izrazi za gornju granicu modula nula polinoma (152). Tako, na primer, za $C_0=C_1=\dots=C_{n-1}=1$ iz (156) se dobija

$$r_1' = 1 + \max_{1\leq s\leq n}\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{s} A_{n-\nu}}{s}\right).$$

Kada je pozitivni koren jednačine (153) $x < 1$, tada na osnovu (144) i (145), za ovaj koren važi relacija $x \leq -m_1$, tj. relacija

(157) $$x \leq \max_{0\leq s\leq n-1}\left(\frac{\sum_{\nu=0}^{s}(A_\nu+C_{\nu-1})}{\sum_{\nu=0}^{s} C_\nu}\right) \leq \max_{0\leq\nu\leq n-1}\left(\frac{A_\nu+C_{\nu-1}}{C_\nu}\right)$$

što prema (154) znači da je izraz

(158) $$r_1 = \max_{0\leq s\leq n-1}\left(\frac{\sum_{\nu=0}^{s}(A_\nu+C_{\nu-1})}{\sum_{\nu=0}^{s} C_\nu}\right)$$

gornja granica modula nula polinoma (152), ukoliko one leže u jediničnom krugu $|z| < 1$.

Na osnovu (155) i (157) vidimo da su granice r_1' i r_1 preciznije od granice

$$(159) \qquad r = \max_{0\le\nu\le n-1}\left(\frac{A_\nu + C_{\nu-1}}{C_\nu}\right), \quad C_{-1}=0, \quad C_\nu > 0 \ (\nu=0,1,\dots,n-1),$$

$$C_{n-1}=1.$$

Izraz (159), kao gornju granicu modula nula polinoma (152) dobio je H.Bell [1] matričnom metodom Gerschgorina [9].

\- - - - - - - -

B I B L I O G R A F I J A

1. BELL, H.E. - Gershgorin's theorem and the zeros of polynomials, Amer, Math. Monthly 72(1965), 292-295.
2. BIERNACKI, M. - Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires, Thèse, Bull. Acad. Polon., Classe des Sciences Math., Sér. A, 1927, 541-685.
3. BIRKHOFF, G.D. - An elementary double inequality for the roots of an algebraic equation having greatest absolute value, Bull. Amer. Math. Soc. 21(1914), 494-495.
4. CARMICHAEL, R.D., MASON, T.E. - Note on the roots of algebraic equations, Bull. Amer. Math. Soc. 21(1914) 14-22.
5. CAUCHY, A.L. - Exercices de mathématique, Oeuvres (2), Vol.9, 1829, 122. -- Calcul des indices des fonctions, Oeuvres (2), Vol. 1, 1829, 416-466. -- Journ. Ecole Polytech. 25(1837), 176-229.
6. DIEUDONNÉ, J. - La théorie analytique des polynômes d'une variable, Mém. Sci. Math. 93(1938).
7. FUJIWARA, M. - Ueber die Wurzeln der algebraischen Gleichungen, Tôhoku Math. Journ. 8(1915), 78-85.
8. FUJIWARA, M. - Ueber die obere Schranke des absoluten Betrages des Wurzeln einer algebraischen Gleichung, Tôhoku Math. Journ. 10(1916), 167-171.
9. GERSCHGORIN, S. - Ueber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, Izv. Akad. Nauk SSSR 7(1931), 749-754.
10. HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E., PÓLYA, G. - Inequalities (Chap.VI, 6.6), Cambridge, 1934.

11. HEIGL, F. - Neuere Entwicklungen in der Geometrie der Polynome, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 65(1962/63), Abt. 1, 97-142.

12. HURWITZ, A.- (v. Pólya,G., Szegö, G. - Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, zad. 148, str. 64, Berlin 1925).

13. HURWITZ, A. - Ueber einen Satz des Herrn Kakeya, Tôhoku Math. Journ. 4(1913-14), 89-93. --- Math. Werke, Vol.2 626-631.

14. KARAMATA, J. - Sur la limite inférieure des modules des zéros des fonctions analytiques, Publ. Acad.Roy. Serbe 127(1927), 1o3-117.

15. KELLEHER, S.B. - Des limites des zéros d'un polynôme, Journ. Math. Pures Appl. 2(1916), 169-171.

16. KUNIYEDA, M. - Note on the roots of algebraic equations, Tôhoku Math. Journ. 9(1916), 167-173.

17. KUREPA, Dj. - Viša algebra II, Školska knjiga, Zagreb, 1965.

18. LANDAU, E. - Ueber den Picardschen Satz, Vierteljahrsschrift Naturforsch. Gesellsch. Zürich 51(19o6), 252-318. --- Sur quelques généralisation du théorème de M.Picard, Ann. Ec. Norm. (3), 24(19o7), 179-201.

19. LANDAU, E. - Ueber eine Aufgabe aus der Funktionentheorie, Tôhoku Math. Journ. 5(1914), 97-116.

20. MARDEN, M. - Geometry of polynomials, Math. Surv. 3, Amer. Math. Soc., Providence, 1966.

21. MARKOVIĆ, D. - O rasmacima realnih korena algebarskih jednačina, Glas SKA 175(1937), A. Mat. nauke, 73-76.

22. MARKOVIĆ, D. - Sur la limite supérieure des modules des racines d'une équation algébrique. Bull. Acad. Sci. Math.Natur. (Acad. Roy. Serbe) No 6(1939), 91-97.

23. MARKOVITCH, D. - Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 2 (1948), 236-242.

24. MARKOVIĆ, D. - Uopštenje jednog stava Hurwitz-a, Vesnik DMF Srbije 1(1949), 113-115.

25. MARKOVITCH, D. - On the composite polynomials, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 3(1951), No 3-4,11-14.

26. MARKOVIĆ, D. - Une application de la méthode des polynomes comparatifs, Mat. Vesnik 1(16)(1964),348-350.

27. MONTEL, P. - Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique. C. R. Soc. Sci. Varsovie 24(1932), 317-326. -- Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynômes, C.R. Acad. Sci. Paris 193(1931), 974-976.

28. MONTEL, P. - Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes,Comm.Math.Helv.7(1934-35), 178-200. -- Sur quelques limitations pour les modules des zéros des polynômes. C.R.Acad.Sci. Paris 199(1934), 651-653. -- Sur quelques nouvelles limitations des modules des zéros des polynômes, ibid.199(1934), 760-762.

29. NAGY, G. v. Sz. - Generalization of certain theorems of Szegő on the location of the zeros of polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. 53(1947), 1164-1169.

30. PARODI, M. - La localisation des valuers caracteristiques des matrices et ses aplications, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

31. PELLET M.A. - Sur une mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange, Bull. Sci. Math. 5(1881) 393-395.

32.Petrovich, M. - Remarque sur les zéros des séries de Taylor, Bull. Soc. Math. France 29(1901), 303-312.

33.SPECHT, W. - Abschätzungen der Wurzeln algebraischer Gleichungen, Math. Z. 52(1949), 310-321.

34. SPECHT, W. - Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten, Enz. math. Wiss. Bd. I,1, Heft 3, Teil II, Teubner, Stuttgart, 1958.

35. SZEGŐ, G. - Bemerkungen zu einem Satz von J.H.Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen, Math. Z. 13(1922), 28-55.

36. Titchmarch,E.C. - The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1952.

37. Tôya, T. - Some remarks on Montel's paper concerning upper of absolute values of roots of algebraic equations, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Diagaku A 1(1933), 275-282.

38. VAN VLECK, E.B. - On the limits to the absolute values of the roots of a polynomial, Bull. Soc. Math. France 53 (1925), 1o5-125.

39. WALSH, J.L. - An inequality for the roots of an algebraic equation, Ann. Math. 25(1924), 285-286.

40. WALSH, J.L. - The location of critical points of analytical and harmonic functions, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 34, 195o.

41. ZERVOS, S. - Aspect modernes de la localisation des zéros des polynômes d'une variable, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (3) 77(1960), 303-410.

S a d r ž a j

Uvod 1

PRVI DEO

A. Granice korena kao funkcije svih koeficijenata 5

1. (Gornja granica Cauchya), 6. 2. (Neke posledice), 6. 3. Metoda Fujiwarae, 7. 4. Montelov prsten za module korena, 8. 5. Metoda D.Markovića, 10. 6. Matrična metoda, 13. 7. Ostale metode, 15.

B. Granice za pojedine korene 16

1. Granice za p nula najmanjeg modula, 16. 2. Jedna metoda Montela, 17. 3. Jedna granica za p nula najvećeg modula, 18.

DRUGI DEO

1. Uopštenje metode D.Markovića 20
2. Jedna nova nejednakost za nule polinoma i njena primena 33
3. O granicama realnih korena jedne klase algebarskih jednačina 36
4. O nulama kompozicionih polinoma 40
5. O nulama najmanjeg modula 50
6. Neke primene 58

1. Primena na funkcije predstavljene Taylorovim redom, 58. 2. Odredjivanje gornje granice pozitivnih korena algebarskih jednačina sa realnim koeficijentima, 61.

Bibliografija 68