RUDARSKO - GEOLOŠKI FAKULTET - BEOGRAD
OOUR RUDARSKI ODSEK

POSLEDIPLOMSKE STUDIJE; NAUČNA OBLAST: Podzemna eksploatacija ležišta

KURS SPECIJALIZACIJE U RESAVSKO-MORAVSKIM RUDNICIMA - RESAVICA

NAUČNA DISCIPLINA: MATEMATIKA

- Numeričko rešavanje jednačina
- Metoda najmanjih kvadrata
- Numerička integracija
- Izrada nomograma
- Interpolacija

Autor: Dr Dragomir Simeunović

Beograd, 1985. god.

S A D R Ž A J

NUMERIČKE METODE ZA PRIBLIŽNO REŠAVANJE JEDNAČINA

Ovde ćemo izneti neke numeričke metode za približno rešavanje jednačina. Prvo ćemo posmatrati jednu jednačinu sa jednom nepoznatom veličinom, a zatim sistem od n jednačina sa isto toliko nepoznatih veličina.

Rešavanje jedne jednačine sa jednom nepoznatom veličinom

Neka je data jednačina

$$(a) \qquad F(x)=0$$

gde je $F(x)$ neprekidna funkcija u intervalu (a,b). Ako je pri tome $F(a)<0$, $F(b)>0$ ili $F(a)>0$, $F(b)<0$, tj. ako je

$$F(a).F(b)<0,$$

tada u intervalu (a,b) postoji bar jedan broj c takav da je $F(c)=0$. Ovo znači da u intervalu (a,b) postoji bar jedno rešenje odnosno bar jedan koren jednačine (a).

Metoda iteracije

Posmatrajmo jednačinu:

$$(1) \qquad F(x)=0$$

koja u intervalu (a,b) ima samo jedan koren. Neka je $F(x)$ neprekidna funkcija u intervalu (a,b). Jednačinu (1) zamenimo ekvivalentnom jednačinom

$$(2) \qquad x=f(x)$$

i iz intervala (a,b) uzmimo broj x_o kao približnu početnu vrednost korena x' jednačine (1), odnosno jednačine (2). Sada umesto x na desnoj strani jednačine (2) stavimo x_o. Dobićemo $f(x_o)$ što ćemo označiti sa x_1, tj.

$$x_1=f(x_o).$$

Ako na desnoj strani jednačine (2) umesto x stavimo sada x_1, dobićemo $f(x_1)$ što ćemo označiti sa x_2, tj.

$$x_2=f(x_1).$$

Ponavljajući ovaj postupak dobićemo niz brojeva

$$x_n=f(x_{n-1}), \quad n=1,2,\ldots \tag{3}$$

Ako niz (3) konvergira ka x', tj. ako postoji granična vrednost $x'=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, to uzimajući da je $f(x)$ neprekidna funkcija, iz (3) se dobija

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}), \text{ tj. } x'=f(x').$$

Granična vrednost x' predstavlja koren jednačine (2), odnosno koren jednačine (1), koji se sa željenom tačnošću može izračunati po formuli (3).

Postupak nalaženja brojeva $x_1,x_2,\ldots x_n,\ldots$ pomoću formule (3), a koji predstavljaju približne vrednosti korena jednačine (2), uzimajući za x_o unapred datu vrednost iz intervala (a,b) naziva se iteracija.

T e o r e m a : Neka je $f(x)$ definisana i diferencijabilna funkcija u intervalu $[a,b]$ pri čemu je još $a\le f(x)\le b$. Ako postoji pozitivan broj q takav da je:

(4) $$|f'(x)|<q<1$$

za $a<x<b$, tada:

1) proces iteracija

(5) $$x_n=f(x_{n-1}),\ n=1,2,\ldots$$

konvergira nezavisno od izabrane početne vrednosti x_o iz intervala $[a,b]$;

2) granična vrednost

$$x'=\lim_{n\to\infty} x_n$$

predstavlja jedinstveni koren jednačine

(6) $$x=f(x)$$

u intervalu $[a,b]$.

D o k a z : Prema (5) je:

$$x_n=f(x_{n-1}),\ x_{n+1}=f(x_n),$$

odakle je:

$$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=(x_n-x_{n-1})f'(c)$$

gde je c broj sadržan izmedju brojeva x_{n-1} i x_n, odakle je

(7) $$|x_{n+1}-x_n|\leqslant|x_n-x_{n-1}|q$$

pošto je $|f'(c)|\leqslant q$

Uzimajući za n redom 1,2,3,..., iz (7) dobijamo

$$|x_2-x_1|\leq|x_1-x_o|q$$

$$|x_3-x_2|\leq|x_2-x_1|q\leq|x_1-x_o|q^2$$

$$\vdots$$

(8) $$|x_{n+1}-x_n|\leq|x_1-x_o|q^n$$

Posmatrajmo red

(9) $$x_o+(x_1-x_o)+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+\ldots$$

pri čemu niz

$$x_n=x_o+(x_1-x_o)+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1});\quad n=1,2,\ldots$$

predstavlja parcijalne zbirove reda (9). Red (9) apsolutno konvergira jer je prema (8) sada:

$$|x_o|+|x_1-x_o|+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ldots+|x_n-x_{n-1}|+\ldots$$

$$\leq|x_o|+|x_1-x_o|+|x_1-x_o|q+|x_1-x_o|q^2+\ldots+|x_1-x_o|q^{n-1}+\ldots$$

$$=|x_o|+|x_1-x_o|(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots)=|x_o|+\frac{|x_1-x_o|}{1-q},$$

pošto je $0<q<1$. Zato postoji

$$x'=\lim_{n\to\infty} x_n,$$

pri čemu je $a<x'<b$.

Prelaskom na graničnu vrednost i uzimajući u obzir neprekidnost funkcije $f(x)$ iz jednačine (5) dobijamo:

(10) $$x'=f(x'),$$

što znači da je x' koren jednačine (6). Dokažimo da je x' jedini koren jednačine (6) u intervalu $[a,b]$. Pretpostavimo da postoji još jedan koren x'' jednačine (6) sadržan u intervalu $[a,b]$, što znači da je:

(11) $$x''=f(x'').$$

Iz jednačina (10) i (11) dobija se:

$$x''-x'=f(x'')-f(x')=(x''-x')f'(c_1)$$

gde je broj c_1 sadržan izmedju brojeva x' i x'', odakle se dobija

(12) $$(x''-x')(1-f'(c_1))=0.$$

Kako je $f'(c_1)\neq 1$, to iz jednačine (12) zaključujemo da je $x''=x'$.

O c e n a g r e š k e . Iz

$$x_{n+k}-x_n=(x_{n+1}-x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})+\ldots+(x_{n+k}-x_{n+k-1})$$

je

$$|x_{n+k}-x_n|\leq|x_{n+1}-x_n|+|x_{n+2}-x_{n+1}|+\ldots+|x_{n+k}-x_{n+k-1}|,$$

odakle, imajući u vidu (8), dobijamo

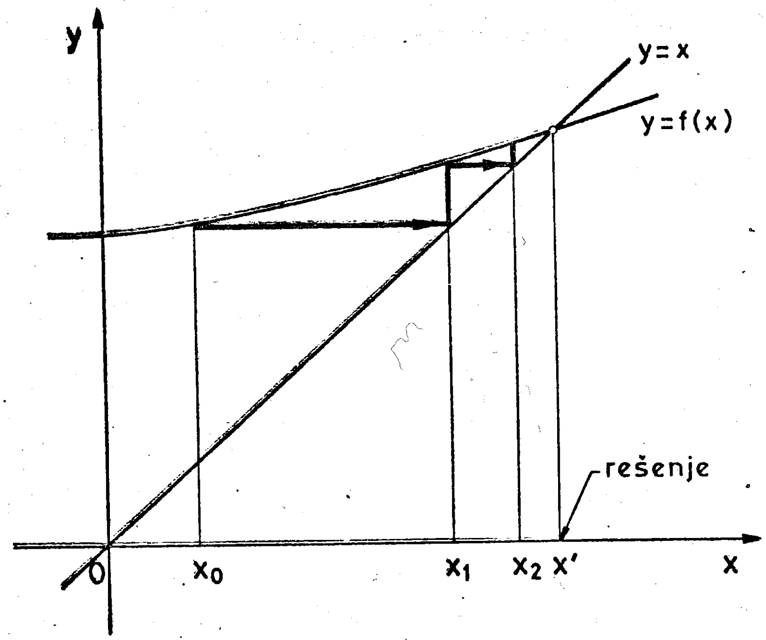
$$|x_{n+k}-x_n|\leq|x_1-x_o|q^n+|x_1-x_o|q^{n+1}+\ldots|x_1-x_o|q^{n+k-1}$$
$$\leq|x_1-x_o|q^n(1+q+q^2+\ldots+q^{n+k-1}+\ldots)=\frac{|x_1-x_o|q^n}{1-q}$$

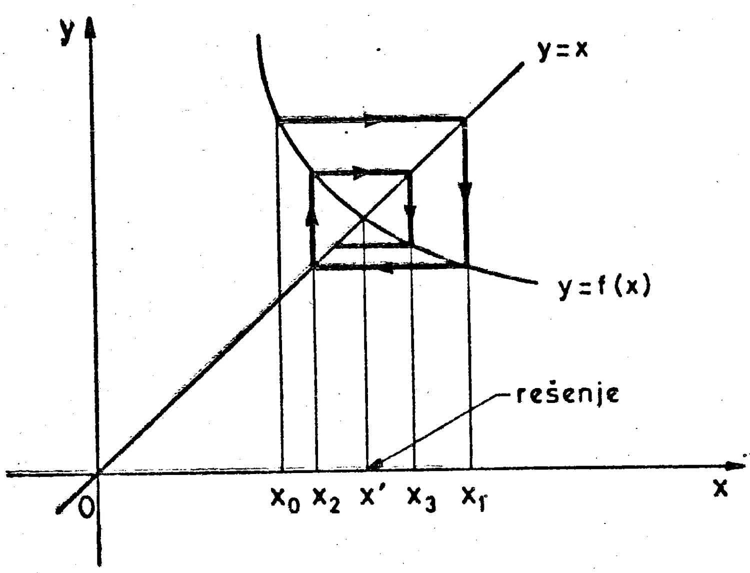
Kada $k\to\infty$, tada $x_{n+k}\to x'$, pa odavde imamo

(13) $$|x'-x_n| \leq \frac{|x_1-x_o|q^n}{1-q}.$$

Obrazac (13) služi za ocenu greške približne vrednosti x_n korena x' jednačine (6) dobijene procesom iteracija (5). Kao što se vidi, na grešku, pored broja iteracija n i veličine broja q utiče i broj x_o koji je uzet kao početna približna vrednost traženog korena x'.

Na sledećim slikama prikazan je geometrijski smisao metode iteracija.





P r i m e r 1. Metodom iteracija odrediti pozitivni koren jednačine

$$\text{(A)} \qquad x^3-8x-1=0$$

sa greškom manjom od 0,001.

R e š e n j e . Ovde je

$$F(x)=x^3-8x-1,$$

pri čemu je $F(2)=-9<0$, $F(3)=2>0$ što znači da se jedan koren x' jednačine (A) nalazi u intervalu (2,3). Funkcija $F(x)$ je neprekidna i rastuća u intervalu [2,3] pošto je njen prvi izvod $F'(x)=3x^2-8$ pozitivan za $2\leq x\leq 3$. Zbog navedenih svojstava funkcije $F(x)$ zaključujemo da se u intervalu (2,3) nalazi samo jedan koren x' jednačine (A). Ovaj koren je i jedini pozitivni koren jednačine (A).

Iz jednačine (A) je $x^3=8x+1$, odakle je

$$(A_1) \qquad x=\sqrt[3]{8x+1}.$$

Jednačina (A_1) je ekvivalentna jednačini (A) i ima oblik $x=f(x)$, gde je $f(x)=\sqrt[3]{8x+1}$, odakle je $f'(x)=\dfrac{8}{3\sqrt[3]{(8x+1)^2}}$ i pri čemu je $|f'(x)|\leq \dfrac{8}{3\sqrt[3]{289}}<0,41=q<1$. Za početnu približnu vrednost korena x' jednačine (A) uzmimo $x_o=2,5$. Iz jednačine (A_1) dobijamo

$$x_1=\sqrt[3]{8x_{o+1}}, \text{ tj.}$$

$$x_1=\sqrt[3]{8.2,5+1}=\sqrt[3]{21}=2,758924.$$

Prema (A_1) imamo dalje

$$x_2=\sqrt[3]{8x_1+1}=\sqrt[3]{23,071392}=2,846806$$

$$x_3=\sqrt[3]{8x_2+1}=\sqrt[3]{23,774448}=2,875435$$

kao i

$x_4=2,884639$, $x_5=2,887585$, $x_6=2,888527$, $x_7=2,888828$,

$x_8=2,888924$, $x_9=2,888955$, $x_{10}=2,888965$, $x_{11}=2,888968$,

$x_{12}=2,888969$, $x_{13}=2,888969$.

Kako je $x_1-x_o=2,758924-2,5=0,258924$; $q=0,41$; $1-q=0,59$ to prema (13) u ovom slučaju imamo $|x'-x_n|\leqslant\frac{0,258924.0,41^n}{0,59}<0,43886.0,41^n<$ $<0,5.0,5^n=0,5^{n+1}$

Znači da je $|x'-x_n|<0,5^{n+1}$. Odavde se dobija:

$|x'-x_8|<0,001953125$, $|x'-x_9|<0,0009765625<0,001$. Dakle,

$x_9=2,888955$ je približna vrednost korena jednačine (A) koja se od njegove tačne vrednosti x' po apsolutnoj vrednosti ne razlikuje za više od 0,001.

Dobijena vrednost $x_{13}=2,888969$ kao približna vrednost korena jednačine (A) od njegove tačne vrednosti x' razlikuje se po apsolutnoj vrednosti za manje od 0,0001, pošto se u ovom slučaju dobija $|x'-x_{13}|<0,0001$

P r i m e r 2. Rešiti jednačinu:

(B) $$e^x+x-2=0$$

R e š e n j e: Stavimo $F(x)=e^x+x-2$. Pošto je $F'(x)=e^x+1>0$ za sve vrednosti nezavisne promenljive x, to funkcija $F(x)$ stalno raste.

Kako je $F(0)=-1<0$, $F(1)=e-1>0$, to kriva $y=e^x+x-2$ seče x osu u tački x' izmedju 0 i 1, što znači da se koren jednačine (B) nalazi izmedju brojeva 0 i 1.

Jednačinu (B) napišimo u ekvivalentnom obliku

(B_1) $$x=x+a(e^x+x-2),$$

(gde je a konstanta koju ćemo naknadno odrediti) tj. u obliku

$$x=f(x)$$

gde je

(B_2) $$f(x)=x+a(e^x+x-2).$$

Iz (B_2) je

(B_3) $$f'(x)=1+a(e^x+1).$$

Cilj nam je da u intervalu $[0,1]$ bude $|f'(x)|<1$.

U tu svrhu možemo staviti $f'(0)=0$ u očekivanju da će $f'(x)$ imati male vrednosti u okolini tačke $x=0$. Jednačina $f'(0)=0$ prema (B_3) svodi se na $1+2a=0$, odakle se dobija $a=-\frac{1}{2}$. Zamenom ove vrednosti za a u (B_1) i (B_3) dobijamo jednačine

(B_4) $$x=x-\frac{1}{2}(e^x+x-2),$$

(B_5) $$f'(x)=1-\frac{1}{2}(e^x+1).$$

Iz (B_5) je $f'(x)=\frac{|e^x-1|}{2}$, pri čemu u intervalu $[0,1]$ funkcija $|f'(x)|$ ima najveću vrednost za $x=1$ koja iznosi $\frac{e-1}{2}$. Ovo znači da je $|f'(x)|=\frac{|e^x-1|}{2}<\frac{e-1}{2}=q<1$ za $0\leq x\leq 1$.

Jednačina (B_4) ekvivalentna je jednačini (B) i njenim rešavanjem dolazimo do rešenja jednačine (B). Pošto se koren jednačine (B) a samim tim i jednačine (B_4) nalazi izmedju brojeva 0 i 1, možemo staviti na primer $x_o=0,3$ kao početnu približnu vrednost traženog korena x'. Iz (B_4) dobijamo:

$x_1=x_o-\frac{1}{2}(e^{x_o}+x_o-2)=0,3-0,5(e^{0,3}+0,3-2)=0,475071,$

$x_2=x_1-0,5(e^{x_1}+x_1-2)=0,433471$. Dalje, zajedno sa x_o, x_1 i x_2 dobijamo:

$x_o=0,300000$, $x_1=0,475071$, $x_2=0,433471$, $x_3=0,445434$,

$x_4=0,448735$, $x_5=0,441203$, $x_6=0,443313$, $x_7=0,442727$,

$x_8=0,442890$, $x_9=0,442844$, $x_{10}=0,442857$, $x_{11}=0,442860$

$x_{12}=0,442853$, $x_{13}=0,442855$, $x_{14}=0,442854$, $x_{15}=0,442854$

Zadaci

1) Naći koren jednačine $x^5-12x^2+3=0$ sadržan u intervalu $[0,1]$.

U p u t s t v o . Iz x^5-12x^2+3 je $x^2=\frac{x^5+3}{12}$, odakle je $x=\pm\frac{\sqrt{x^5+3}}{\sqrt{12}}$. Uzećemo $x=\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{x^5+3}$, što znači da imamo $x=f(x)$, gde je $f(x)=\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{x^5+3}$, odakle je $f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{12}}\cdot\frac{x^4}{\sqrt{x^5+3}}$.

Za $0\leq x\leq 1$ je $|f'(x)|\leq \frac{5}{12} = q<1$.

Za početno približno rešenje možemo uzeti bilo koji broj iz intervala $[0,1]$, na primer $x_o=0,4$ i iz jednačine:

$$x=\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{x^5+3} \qquad (x=f(x))$$

naći redom

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{x^5_{n-1}+3} \qquad (n=1,2,\dots)$$

zaustavljajući se na primer na $n=8$.

2) Naći rešenje jednačine $x-\ln(x+1)-2=0$ koje pripada intervalu $(3,4)$ i oceniti grešku za $|x'-x_6|$.

U p u t s t v o . Iz $x-\ln(x+1)-2=0$ je $x=\ln(x+1)+2$, što znači da imamo jednačinu $x=f(x)$, gde je $f(x)=\ln(x+1)+2$. Kako je $f'(x)=\frac{1}{1+x}$, to je $f'(x)\leq \frac{1}{4} = q<1$ za $3\leq x\leq 4$ pa proces iteracija $x_n=f(x_{n-1})$ $(n=1,2,\dots)$ konvergira. Za početno približno rešenje posmatrane jednačine uzmimo na primer $x_o=3,5$ i zatim iz jednačine

$$x=\ln(x+1)+2 \qquad (x=f(x))$$

nadjimo redom

$$x_n=\ln(x_{n-1}+1)+2 \qquad (n=1,2,\dots,6)$$

Lako se uveravamo da je $|x'-x_6|<0,00001$.

3) Rešiti jednačinu $x^3+x+1=0$

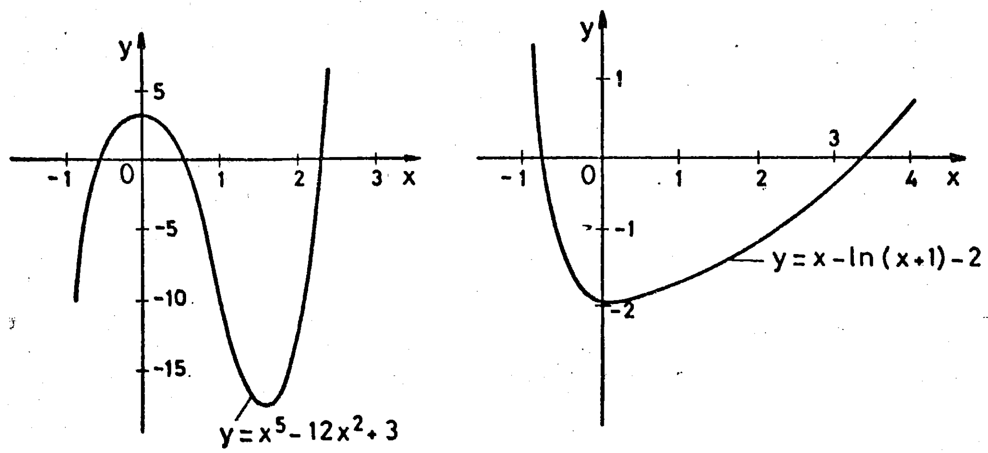
4) Rešiti jednačinu $e^x+x+1=0$.

N a p o m e n a. Prilikom približnog rešavanja jednačine $F(x)=0$ korisno je nacrtati približan grafik funkcije $y=F(x)$ i odrediti njegove presečne tačke sa x osom, odnosno približno odrediti intervale u kojima se nalaze koreni jednačine $F(x)=0$.

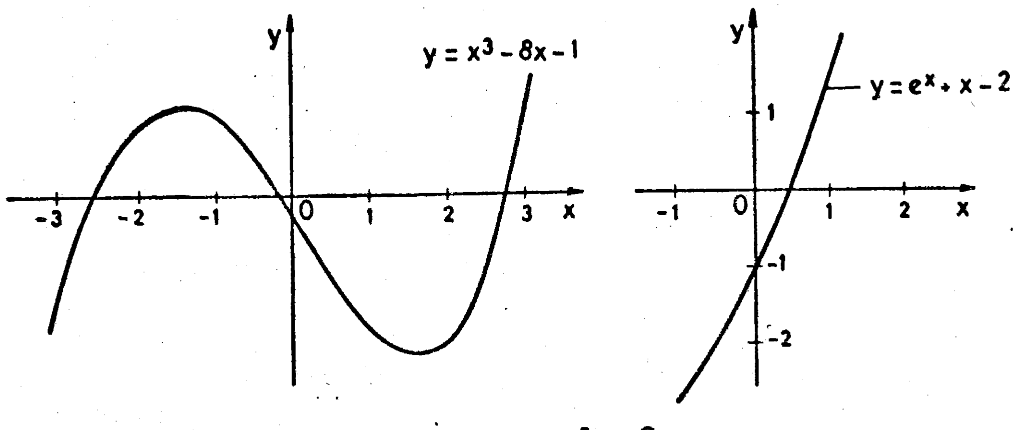
U zadatku 1) je $F(x)=x^5-12x^2+3$. Približni grafik funkcije $y=x^5-12x^2+3$ prikazan je na slici 1, levo, odakle se vidi da jednačina $x^5-12x^2+3=0$ ima tri realna korena, po jedan u svakom od intervala $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(2,3)$.

U zadatku 2) je $F(x)=x-\ln(x+1)-2$. Približni grafik ove funkcije prikazan je na slici 1, desno, odakle vidimo da jednačina $x-\ln(x+1)-2=0$ ima dva realna korena, po jedan u svakom od intervala $(-1,0)$ i $(3,4)$.

Na slici 2 prikazani su grafici funkcija $y=x^3-8x-1$ i $y=e^x+x-2$ koji se redom odnose na primer 1 i primer 2.



sl. 1



sl. 2

Metoda iteracija za sistem nelinearnih jednačina

Neka je dat sistem nelinearnih jednačina:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\
&F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\
&\vdots\\
&F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0
\end{aligned}
$$

gde su $F_1,F_2,\ldots,F_n$ odredjene realne i neprekidne funkcije u oblasti D u kojoj se nalazi jedno njegovo izolovano rešenje $x_1',x_2',\ldots,x_n'$.

Neka je sistem jednačina:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&x_1=f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\
&x_2=f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\
&\vdots\\
&x_n=f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n
\end{aligned}
$$

ekvivalentan sistemu jednačina (1), pri čemu su $f_1,f_2,\ldots,f_n$ realne i neprekidne funkcije u oblasti D. Neka je: $x_1^{(o)}$, $x_2^{(o)},\ldots,x_n^{(o)}$ jedno približno rešenje sistema jednačina (2), odnosno sistema jednačina (1). Ako na desnoj strani jednačina (2) umesto x_1, $x_2,\ldots$, x_n stavimo $x_1^{(o)},x_2^{(o)},\ldots,$ $x_n^{(o)}$, dobićemo:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(1)}=f_1(x_1^{(o)},x_2^{(o)},\ldots,x_n^{(o)})\\
&x_2^{(1)}=f_2(x_1^{(o)},x_2^{(o)},\ldots,x_n^{(o)})\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$x_n^{(1)}=f_n(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$$

Ako sada na desnoj strani jednačina (2) umesto $x_1,x_2,\ldots,x_n$ stavimo $x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}$, dobićemo:

$$x_1^{(2)}=f_1(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$$

$$x_2^{(2)}=f_2(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(2)}=f_n(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$$

Nastavljajući ovaj proces dobićemo nizove:

$$x_1^{(k)}=f_1(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)})$$

(3) $$x_2^{(k)}=f_2(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)}\ldots x_n^{(k-1)})$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)}=f_n(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}),\quad (k=1,2,\ldots)$$

Ako nizovi (3) konvergiraju, tj. ako je

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i^* \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

tada, uzimajući da su $f_1,f_2,\ldots,f_n$ neprekidne funkcije, biće

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=\lim_{k\to\infty} f_i(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)})=f_i(\lim_{k\to\infty} x_1^{(k-1)},$$

$$\lim_{k\to\infty} x_2^{(k-1)},\ldots,\lim_{k\to\infty} x_n^{(k-1)}),$$

tj.

$$x_i'=f_i(x_1',x_2',\dots,x_n') \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

odnosno:

$$x_1'=f_1(x_1',x_2',\dots,x_n')$$
$$x_2'=f_2(x_1',x_2',\dots,x_n')$$
$$\vdots$$
$$x_n'=f_n(x_1',x_2',\dots,x_n')$$

što znači da granične vrednosti $x_1',x_2',\dots,x_n'$ nizova (3) predstavljaju rešenje $x_1',x_2',\dots,x_n'$ sistema jednačina (2), odnosno sistema jednačina (1).

U vezi konvergencije nizova (3) važi sledeća teorema.

T e o r e m a : Neka sistem jednačina (2) ima jedno izolovano rešenje u oblasti D odredjenoj sa $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(i=1,2,\dots,n)$. Ako su u oblasti D funkcije $f_1,f_2,\dots,f_n$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda pri čemu je još $a_i \leq f_i \leq b_i$ i ako su u D ispunjeni uslovi:

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|+\dots+\left|\frac{\partial f_u}{\partial x_1}\right|\leq q_1<1$$
$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|+\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|+\dots+\left|\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|\leq q_2<1$$
$$\vdots$$
$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|+\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|+\dots+\left|\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|\leq q_n<1$$

tada nizovi (3) konvergiraju ka rešenju $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ sistema jednačina (2), polazeći od bilo kog početnog približnog rešenja $x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)}$ sadržanog u oblasti D.

P r i m e r . Metodom iteracija rešiti sistem jednačina

$$
\text{(S)} \qquad \begin{aligned} & e^{-x}-y+1=0 \\ & x^2-y^2-1=0 \end{aligned}
$$

R e š e n j e. Grafici krivih $e^{-x}-y+1=0$ i $x^2-y^2-1=0$ prikazani su na slici 3, odakle se vidi da se one seku u tački $M(x', y')$ pri čemu je $1<x'<2$ i $1<y'<1{,}5$, što znači da se rešenje x', y' sistema (S) nalazi u oblasti D odredjenoj sa $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 1{,}5$. Sistem (S) je oblika (1). Ako drugu jednačinu sistema (S) rešimo po x a prvu po y dobićemo sistem:

$$
(S_1) \qquad \begin{aligned} & x=\sqrt{y^2+1}\,, \quad f_1(x,y)=\sqrt{y^2+1} \\ & y=e^{-x}+1\,, \quad f_2(x,y)=e^{-x}+1 \end{aligned}
$$

koji je oblika (2). Iz (S_1) je:

$$
\frac{\partial f_1}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}=-e^{-x}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}=0
$$

Za $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 1{,}5$ je $1 \leq f_1 \leq 2$ i $1 \leq f_2 \leq 1{,}5$ jer je

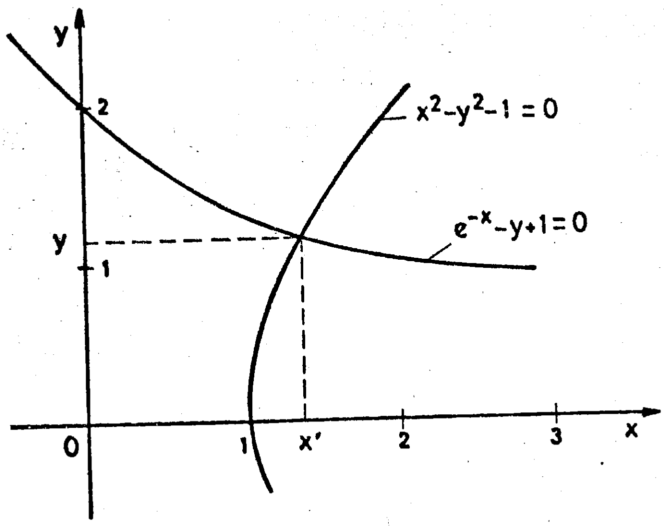
$1<\sqrt{2} \leq f_1 \leq \sqrt{3{,}25}<2$ i $1<e^{-2}+1 \leq f_2 \leq e^{-1}+1<1{,}5$. Dalje, za

$1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 1{,}5$ je:

$$
\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|= -e^{-x} \quad e^{-1}=q_1 \; 1
$$

$$
\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|= \left|\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right| \leq \frac{1{,}5}{\sqrt{3{,}25}} = q_2<1
$$

što znači da su ispunjeni i uslovi (4) prethodne teoreme.



sl. 3

Za početno približno rešenje sistema jednačina (S_1) uzmimo na primer $x_o=1,3$; $y_o=1$. Dobićemo:

$x_1=\sqrt{y_o^2+1}=\sqrt{2}=1,41421$; $y_1=e^{-x_o}+1=e^{-1,3}+1=1,24312$;

$x_2=1,59541$; $y_2=1,20283$, $x_3=1,56412$; $y_3=1,20925$

$x_4=1,56917$; $y_4=1,20822$, $x_5=1,56837$; $y_5=1,20838$

$x_6=1,56850$; $y_6=1,20836$, $x_7=1,56848$; $y_7=1,20836$.

Z a d a t a k . Naći rešenje x',y' sistema jednačina

$$x^3-x^2y=2$$

$$xy=1$$

gde su x' i y' pozitivni brojevi.

N a p o m e n a. U prethodnoj teoremi uslovi (4) mogu se zameniti uslovima:

$$
(4') \quad
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|+\ldots+\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|\leq q_1'<1\\
&\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|+\ldots+\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|\leq q_2'<1\\
&\vdots\\
&\left|\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|+\ldots+\left|\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|\leq q_n'<1
\end{aligned}
$$

Metoda iteracije za sistem linearnih jednačina

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina:

$$
(A) \quad
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\vdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n
\end{aligned}
$$

Pretpostavljajući da su u sistemu (A) dijagonalni koeficijenti $a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ rešimo prvu jednačinu po x_1, drugu po $x_2,\ldots,$ poslednju po x_n. Dobićemo sistem jednačina:

$$
(B) \quad
\begin{aligned}
&x_1=B_1+A_{11}x_1+A_{12}x_2+\ldots+A_{1n}x_n\\
&x_2=B_2+A_{21}x_1+A_{22}x_2+\ldots+A_{2n}x_n\\
&\vdots\\
&x_n=B_n+A_{n1}x_1+A_{n2}x_2+\ldots+A_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

koji je ekvivalentan sistemu jednačina (A), pri čemu je:

$$B_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad A_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{za } i=j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{za } i\neq j; \quad (i,j=1,2,\dots,n). \end{cases}$$

Rešavanje linearnog sistema (B) vrši se kao i rešavanje ranije posmatranog nelinearnog sistema jednačina (2).

Uslovi (4') za slučaj sistema linearnih jednačina (B) svode se na:

$$(4'') \qquad \begin{array}{l} |A_{11}|+|A_{12}|+\dots+|A_{1n}|\leq q_1'<1 \\ |A_{21}|+|A_{22}|+\dots+|A_{2n}|\leq q_2'<1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ |A_{n1}|+|A_{n2}|+\dots+|A_{nn}|\leq q_n'<1 \end{array}$$

Ako su ispunjeni uslovi (4"), iterativni proces primenjen na sistem linearnih jednačina (B) konvergira za bilo koje početno rešenje $x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \dots, x_n^{(o)}$. U praksi se obično uzima $x_1^{(o)}=B_1, x_2^{(o)}=B_2, \dots, x_n^{(o)}=B_n$.

N a p o m e n a: Uslovi (4") kod sistema (B) biće ispunjeni kada su kod sistema (A) ispunjeni uslovi:

$$(C) \qquad \begin{array}{l} |a_{11}|>|a_{12}|+|a_{13}|+\dots+|a_{1n}| \\ |a_{22}|>|a_{21}|+|a_{23}|+\dots+|a_{2n}| \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ |a_{nn}|>|a_{n1}|+|a_{n2}|+\dots+|a_{nn-1}| \end{array}$$

P r i m e r : Sistem jednačina

$$5x_1-x_2+x_3=6$$

(a) $$2x_1+4x_2-x_3=7$$

$$x_1-x_2+5x_3=14$$

rešiti metodom iteracije.

R e š e n j e: Za sistem (a) ispunjeni su uslovi (C).

Ako prvu jednačinu rešimo po x_1, drugu po x_2 a treću po x_3 dobićemo sistem jednačina:

$$x_1=1,2+0,2x_2-0,2x_3$$

(b) $$x_2=1,75-0,5x_1+0,25x_3$$

$$x_3=2,8-0,2x_1+0,2x_2$$

koji je ekvivalentan sistemu (a).

Za početno približno rešenje sistema (b) uzmimo $x_1^{(o)}=1,2$; $x_2^{(o)}=1,75$; $x_3^{(o)}=2,8$. Iz jednačina (b) sada imamo:

$$x_1^{(1)}=1,2+0,2x_2^{(o)}-0,2x_3^{(o)}=1,2+0,2.1,75-0,2.2,8=0,99$$

$$x_2^{(1)}=1,75-0,5x_1^{(o)}+0,25x_3^{(o)}=1,75-0,5.1,2+0,25.2,8=1,85$$

$$x_3^{(1)}=2,8-0,2x_1^{(o)}+0,2x_2^{(o)}=2,8-0,2.1,2+0,2.1,75=2,91$$

i dalje:

$x_1^{(2)}=0,988$ $\quad$ $x_2^{(2)}=1,9825$ $\quad$ $x_3^{(2)}=2,972$

$x_1^{(3)}=1,002I$ $\quad$ $x_2^{(3)}=1,999$ $\quad$ $x_3^{(3)}=2,9989$

$x_1^{(4)}=1,00002$ $x_2^{(4)}=1,998675$ $x_3^{(4)}=2,99938$

$x_1^{(5)}=0,999859$ $x_2^{(5)}=1,999835$ $x_3^{(5)}=2,999731$

$x_1^{(6)}=1,0000208$ $x_2^{(6)}=2,00000325$ $x_3^{(6)}=2,9999952$

(Tačno rešenje sistema (a) je $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$).

Z a d a t a k . Sistem jednačina:

(a) $5x_1-x_2+x_3-x_4=16$

(b) $x_1+x_2-4x_3+x_4=5$

(c) $4x_1+7x_2-x_3-4x_4=17$

(d) $x_1-x_2+3x_3+10x_4=35$

dovesti na oblik pogodan za primenu metode iteracija.

R e š e n j e: Prvu jednačinu sistema uzmimo kao prvu, drugu kao treću a četvrtu kao četvrtu jednačinu. Tako dobijamo sistem:

$$5x_1-x_2+x_3-x_4=16$$

$$x_1+x_2-4x_3+x_4=5$$

$$x_1-x_2+3x_3+10x_4=35$$

Ako od jednačine (a) oduzmemo jednačinu (c) dobićemo jednačinu

$$x_1-8x_2+2x_3+3x_4=-1$$

koju ćemo uzeti kao drugu jednačinu prethodnog sistema. Na taj način dobili smo sistem jednačina:

$$5x_1-x_2+x_3-x_4=16$$

$$x_1-8x_2+2x_3+3x_4=-1$$

$$x_1+x_2-4x_3+x_4=5$$

$$x_1-x_2+3x_3+10x_4=35$$

za čije se rešavanje može primeniti metoda iteracija.

Metoda Zajdela

Metoda Zajdela predstavlja jedan modifikovani oblik metode iteracija. Kod ove metode u narednim približavanjima koriste se sva približna rešenja dobijena u prethodnim koracima. Na ovaj način postoji mogućnost da se ubrza konvergencija.

Metodu Zajdela pokažimo na primeru sistema jednačina (b), tj. na sistemu:

$$x_1=1,2+0,2x_2-0,2x_3$$

$$x_2=1,75-0,5x_1+0,25x_3$$

$$x_3=2,8-0,2x_1+0,2x_2.$$

Ako za početno približno rešenje uzmemo $x_1^{(o)}=1,2;$ $x_2^{(o)}=1,75;$ $x_3^{(o)}=2,8$ tada za $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ dobijamo:

$$x_1^{(1)}=1,2+0,2x_2^{(o)}-0,2x_3^{(o)}=1,2-0,2.1,75-0,3.2,8=0,99$$

$$x_2^{(1)}=1,75-0,5x_1^{(1)}+0,25x_3^{(o)}=1,75-0,5.0,99+0,25.2,8=1,955$$

$$x_3^{(1)}=2,8-0,2x_1^{(1)}+0,2x_2^{(1)}=2,8-0,2.0,99+0,2.1,955=2,993$$

$$x_1^{(2)}=1,2+0,2x_2^{(1)}-0,2x_3^{(1)}=1,2+0,2.1,955-0,2.2,993=0,9924$$

$$x_2^{(2)}=1,75-0,5x_1^{(2)}+0,25x_3^{(1)}=1,75-0,5.0,9924+0,25.2,993=2,00205$$

$$x_3^{(2)}=2,8-0,2x_1^{(2)}+0,2x_2^{(2)}=2,8-0,2.0,9924+0,2.2,00205=3,00193$$

Dalje imamo:

$$x_1^{(3)}=1,000024;\ x_2^{(3)}=2,0004705;\ x_3^{(3)}=3,0000893$$

$$x_1^{(4)}=1,00007624;\ x_2^{(4)}=1,999984205;\ x_3^{(4)}=2,999981593$$

$$x_1^{(5)}=1,000000522;\ x_2^{(5)}=1,999995137;\ x_3^{(5)}=2,999998923.$$

Metoda gradijenta

Neka je dat sistem jednačina:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\ &F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\ &\vdots\\ &F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \end{aligned}$$

gde su $F_1,F_2,\ldots,F_n$ realne i neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti D.

Obrazujmo funkciju:

$$(2)\quad U(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_1^2(x_1,x_2,\ldots,x_n)+F_2^2(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\ldots+ +F_n^2(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Ako je $x_1',x_2',\ldots,x_n'$ jedno rešenje sistema jednačina (1), tada je $U(x_1',x_2',\ldots,x_n')=0$. Važi i obrnuto, tj. brojevi $x_1',x_2',\ldots,x_n'$

za koje je funkcija U jednaka nuli predstavljaju jedno rešenje sistema (1).

Neka sistem (1) ima izolovano rešenje $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ koje pripada oblasti D. U ovom slučaju funkcija U u tački $M^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ ima minimum čija je vrednost jednaka nuli. Neka $x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)}$ predstavlja jedno približno rešenje sistema (1) koje je sadržano u oblasti D.

Kroz tačku $M_o(x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)})$ prolazi jedna višedimenziona površ čija je jednačina

(3) $$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)}).$$

U tački $Mo(x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)})$ povucimo normalu n_o na površ (3). Na normali n_o uzmimo tačku $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, xn^{(1)})$ koja se nalazi u blizini tačke M_o, pri čemu je $U(x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)}) >$ $U(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$.

U tački M_1 površi

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$$

povucimo normalu n_1. Na normali n_1 uzmimo tačku $M_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ koja se nalazi u blizini tačke M_1, pri čemu je $U(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) > U(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$. Nastavljajući ovaj proces dobićemo niz tačaka $M_o, M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ kojima odgovara niz brojeva $U_o, U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots$, pri čemu je $U_o > U_1 > U_2 > \ldots > U_k \ldots$ Na ovaj način preko tačaka $M_o, M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ mi se približavamo tački $M^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ u kojoj je $U(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0$, tj. približavamo se rešenju $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ sistema jednačina (1).

Pošto se pravci normala n_{k-1} $(k=1,2,\ldots)$ poklapaju sa pravcima gradijenata površi

(4) $\quad U(x_1,x_2,\dots,x_n)=U(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\dots,x_n^{(k-1)}) \quad (k=1,2,\dots)$

to je navedeni proces približavanja ka rešenju $x_1',x_2',\dots,x_n'$ sistema (1) nazvan metoda gradijenta.

Jednačine normale površi (4) u njenoj tački $M_{k-1}(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\dots,x_n^{(k-1)})$ $(k=1,2,\dots)$ glase

(5) $$\frac{x_1-x_1^{(k-1)}}{(\frac{\partial U}{\partial x_1})_{k-1}}=\frac{x_2-x_2^{(k-1)}}{(\frac{\partial U}{\partial x_2})_{k-1}}=\dots=\frac{x_n-x_n^{(k-1)}}{(\frac{\partial U}{\partial x_n})_{k-1}}=t_{k-1}$$

gde je t_{k-1} parametar. U parametarskom obliku jednačine normale (5) su:

(6) $$\begin{aligned} x_1&=x_1^{(k-1)}+t_{k-1}(\frac{\partial U}{\partial x_1})_{k-1}\\ x_2&=x_2^{(k-1)}+t_{k-1}(\frac{\partial U}{\partial x_2})_{k-1}\\ &\vdots\\ x_n&=x_n^{(k-1)}+t_{k-1}(\frac{\partial U}{\partial x_n})_{k-1}\end{aligned}$$

Neka je u jednačinama (6) parametar t_{k-1} mali broj čija je vrednost negativna. Ako funkciju $U(x_1,x_2,\dots,x_n)$ predstavimo Tajlorovim obrascem u okolini tačke M_{k-1} $(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\dots,x_n^{(k-1)})$ zadržavajući samo linearne članove, možemo pisati

$$\begin{aligned} U(x_1,x_2,\dots,x_n)\approx U(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\dots,x_n^{(k-1)})+\\ +t_{k-1}(\frac{\partial U}{\partial x_1})_{k-1}\cdot(\frac{\partial U}{\partial x_1})_{k-1}+t_{k-1}(\frac{\partial U}{\partial x_2})_{k-1}\cdot(\frac{\partial U}{\partial x_2})_{k-1}+\dots\\ +t_{k-1}(\frac{\partial U}{\partial x_n})_{k-1}\cdot(\frac{\partial U}{\partial x_n})_{k-1},\end{aligned}$$

odakle dobijamo:

$$t_{k-1}=-\frac{U(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)})}{(\frac{\partial U}{\partial x_1})^2_{k-1}+(\frac{\partial U}{\partial x_2})^2_{k-1}+\ldots+(\frac{\partial U}{\partial x_n})^2_{k-1}}\,. \tag{7}$$

Ako ovako nadjenu vrednost za t_{k-1} uvrstimo u jednačine (6) dobićemo za $x_1,x_2,\ldots,x_n$ redom vrednosti:

$$x_1^{(k)}=x_1^{(k-1)}+t_{k-1}(\frac{\partial U}{\partial x_1})_{k-1}$$

(8)

$$x_2^{(k)}=x_2^{(k-1)}+t_{k-1}(\frac{\partial U}{\partial x_2})_{k-1}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k)}=x_n^{(k-1)}+t_{k-1}(\frac{U}{x_n})_{k-1} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Na ovaj način smo od tačke $M_{k-1}(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)})$ prešli na tačku $M_k(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})$, tj. od približnog rešenja $x_1^{(k-1},x_2^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}$ sistema jednačina (1) došli do njegovog približnijeg rešenja $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}$.

P r i m e r. Sistem jednačina:

$$x^2+y^2-1=0$$
$$x^4-y=0 \tag{9}$$

rešiti metodom gradijenta.

R e š e n j e : Ovde je

$$F_1(x,y)=x^2+y^2-1$$

$$F_2(x,y)=x^4-y.$$

Za funkciju $U(x,y)$ sada imamo $U(x,y)=F_1^2(x,y)+F_2^2(x,y)$, tj.

(10) $$U(x,y)=(x^2+y^2-1)^2+(x^4-y)^2.$$

Za početno približno rešenje sistema (9) uzmimo, na primer $x_o=1$, $y_o=1$. Iz (10) je:

(11) $$\frac{\partial U}{\partial x} = 4x(x^2+y^2-1)+8x^3(x^4-y)$$

(12) $$\frac{\partial U}{\partial y} = 4y(x^2+y^2-1)-2(x^4-y).$$

Za $x = x_o = 1$, $y = y_o = 1$ iz (10), (11) i (12) sada imamo

$U(x_o,y_o) = 1$, $(\frac{\partial U}{\partial x})_o = 4$, $(\frac{\partial U}{\partial y})_o = 4$. Prema obrascu (7), gde je $k=1$, dobijamo $t_o = -\frac{1}{32} = -0{,}03125$. Iz jednačina (8) sada imamo:

$$x_1 = x_o+t_o(\frac{\partial U}{\partial x})_o = 1-0{,}03125\ .\ 4=0{,}875$$

$$y_1 = y_o+t_o(\frac{\partial U}{\partial y})_o = 1-0{,}0135\ .\ 4 = 0{,}875$$

Sada izračunavamo $U(x_1,y_1)$, $(\frac{\partial U}{\partial x})_1$ i $(\frac{\partial U}{\partial y})_1$. Za $x = x_1 = 0{,}875$; $y = y_1 = 0{,}875$ iz (10), (11) i (12) dobijamo $U(x_1,y_1)=0{,}365643$;

$(\frac{\partial U}{\partial x})_1 = 0{,}311489$; $(\frac{\partial U}{\partial y})_1 = 2{,}437012$. Iz obrasca (7) gde je sada $k=2$ dobijamo $t_1=-0{,}060577$. Za ovako nadjenu vrednost za t_1 iz jednačina (8) dobijamo:

$$x_2 = x_1+t_1(\frac{\partial U}{\partial x})_1 = 0{,}875-0{,}060577.0{,}311489 = 0{,}856131$$

$$y_2 = y_1+t_1(\frac{\partial U}{\partial y})_1 = 0{,}875-0{,}060577.2{,}437012 = 0{,}727373$$

Dalje dobijamo $t_2 = -0{,}080075$ i $x_3 = 0{,}860711$; $y_3 = 0{,}635874$, a zatim $t_3 = -0{,}096044$ i $x_4 = 0{,}855363$; $y_4 = 0{,}583691$ kao i $t_4 = -0{,}107920$ i $x_5 = 0{,}854798$; $y_5 = 0{,}555192$.

Njutnova metoda

Posmatrajmo jednačinu

(1) $$F(x) = 0$$

koja u intervalu $[a,b]$ ima koren x'. Neka su $F'(x)$ i $F''(x)$ neprekidne funkcije i koje svaka za sebe zadržava isti znak za $a \leq x \leq b$. Neka smo na neki način u intervalu $[a,b]$ odredili približnu vrednost x_k korena x' jednačine (1). Tada možemo staviti

(2) $$x' = x_k + h_k$$

gde je h_k popravka približne vrednosti x_k korena x' jednačine (1). Popravku h_k, za koju smatramo da je mala, možemo približno odrediti Njutnovom metodom. Naime, ako funkciju $F(x)$ u okolini tačke x_k predstavimo Tajlorovim obrascem prvog stepena, možemo pisati

$$0 = F(x') = F(x_k + h_k) \approx F(x_k) + h_k\, F'(x_k),$$

odakle dobijamo

$$h_k \approx -\frac{F(x_k)}{F'(x_k)}\,.$$

Zamenom ove približne vrednosti za h_k u jednačinu (2) dobićemo za koren x' približnu vrednost

$$x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$

koju ćemo označiti sa x_{k+1}, dakle

$$(3) \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Na ovaj način, polazeći od približne vrednosti x_k korena x' dobili smo njegovu približniju vrednost x_{k+1} datu formulom (3). Formula (3) naziva se Njutnova formula za izračunavanje približnih vrednosti korena jednačine (1).

Formula (3) ima i svoje geometrijsko značenje.

Neka je x_o približna vrednost korena x' jednačine (1), pri čemu je $a \leq x_o \leq b$. U tački $M_o(x_o,F(x_o))$ krive $y=F(x)$ povucimo tangentu. Jednačina ove tangente glasi

$$(4) \qquad y-F(x_o) = F'(x_o)(x-x_o).$$

Njen presek sa x osom, koji ćemo označiti sa x_1, dobija se kada se u jednačini (4) stavi $y = 0$, $x = x_1$, što znači

$$-F(x_o) = F'(x_o)(x_1-x_o),$$

odakle nalazimo

$$x_1 = x_o - \frac{F(x_o)}{F'(x_o)}.$$

Veličina x_1 predstavlja novu približnu vrednost korena x' jednačine (1).

Sada u tački $M_1(x_1,F(x_1))$ krive $y = F(x)$ povucimo novu tangentu. Jednačina ove tangente glasi

$$y-F(x_1) = F'(x_1)(x-x_1).$$

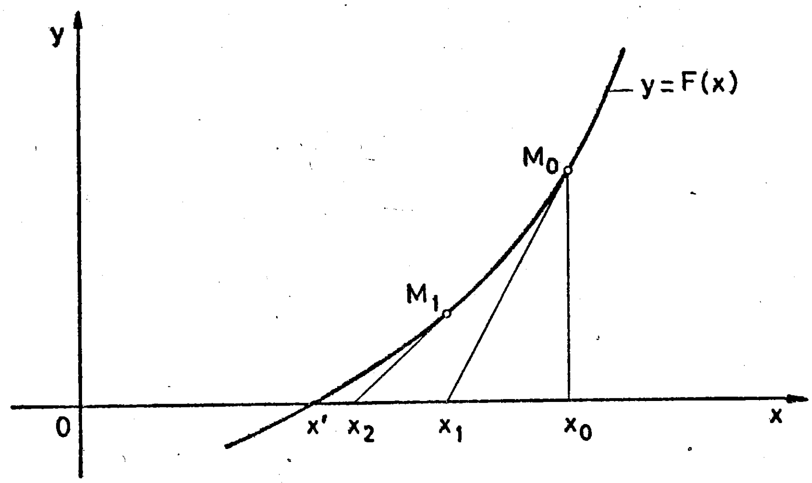
Njen presek sa x osom, koji ćemo označiti sa x_2, dobićemo kao i u prethodnom slučaju kada stavimo $y=0$, $x=x_2$, što znači

$$-F(x_1) = F'(x_1)(x_2-x_1),$$

odakle nalazimo

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$

kao sledeću približnu vrednost korena x' jednačine (1).



Nastavljajući ovaj proces, za jednačinu tangente krive $y=F(x)$ u njenoj tački $M_k(x_k, F(x_k))$ imamo

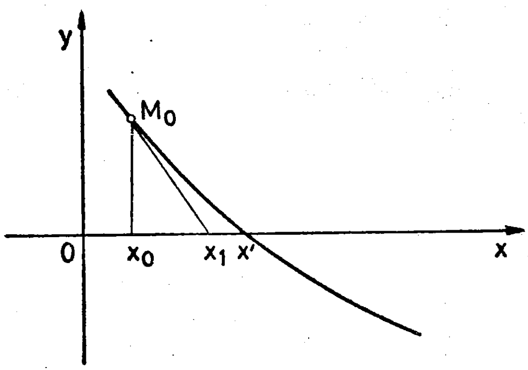
$$y-F(x_k) = F'(x_k)(x-x_k)$$

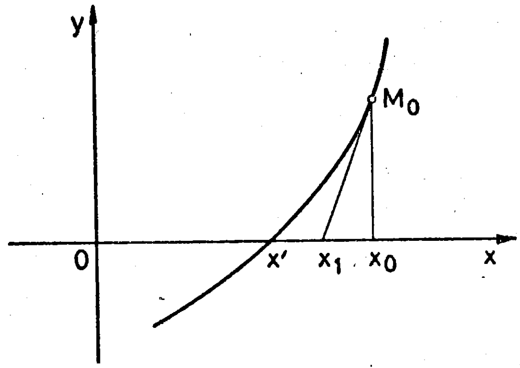
Stavljajući u ovoj jednačini $y = 0$, $x = x_{k+1}$ dobijamo

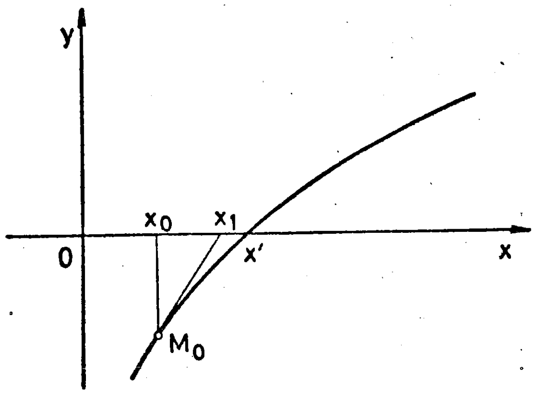
$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

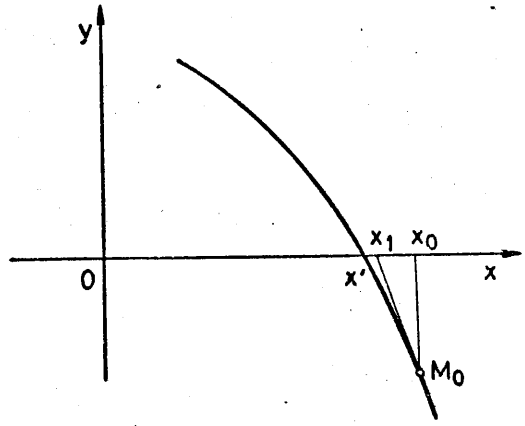
tj. dobijamo formulu (3). Zbog toga se Njutnova metoda za nalaženje približnih vrednosti x_{k+1} korena x' jednačine (1) pomoću formule (3) naziva i metoda tangenata.

Na sledećim slikama prikazani su slučajevi u kojima se može primeniti metoda tangenata, odnosno Njutnova metoda.









Sada ćemo navesti teoremu koja se odnosi na primenu Njutnove metode za izračunavanje približnih vrednosti korena algebarske ili transcendentne jednačine $F(x) = 0$.

T e o r e m a. Ako je $F(a)F(b)<0$ i ako su funkcije $F'(x)$ i $F''(x)$ različite od nule i svaka za sebe zadržava isti znak za $a\leq x\leq b$, tada se, polazeći od približnog korena $x_o (a\leq x_o\leq b)$ jednačine $F(x) = 0$ za koje je $F(x_o)F''(x_o)>0$, primenom Njutnove metode, tj. pomoću formule (3) može izračunati njen jedinstveni koren x' sa željenom tačnošću.

D o k a z . Posmatrajmo slučaj kada je $F(a)<0$, $F(b)>0$, $F'(x)>0$, $F''(x)>0$. (Slično se mogu posmatrati i ostali slučajevi). Prema uslovima teoreme ovde je $F(x_o)>0$ (može se uzeti na primer $x_o = b$). Matematičkom indukcijom dokazaćemo da za sva približavanja $x_k (k=0,1,2,\ldots)$ važi $x_k>x'$ i prema tome $F(x_k)>0$.

Pre svega je $x_o>x'$. Pretpostavimo da je $x_k>x'$ i dokažimo da je $x_{k+1}>x'$. U tu svrhu stavimo

$$x' = x_k+(x'-x_k).$$

Primenom Tajlorove formule na funkciju $F(x)$ dobijamo

$$(5)\quad 0 = F(x') = F(x_k+(x'-x_k)) = F(x_k)+(x'-x_k)\ F'(x_k)+ \\ + \frac{1}{2}(x'-x_k)^2\ F''(c)$$

gde je $x'<c<x_k$. Kako je $F''(c)>0$, to iz (5) dobijamo

$$F(x_k)+(x'-x_k)F'(x_k)<0,$$

odakle je $x_k-\dfrac{F(x_k)}{F'(x_k)}>x'$, tj.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} > x'$$

što je i trebalo dokazati.

Zbog $F(x_k)>0$ i $F'(x_k)>0$, iz formule (3) sledi $x_k+1<x_k (k=0,1,2,\ldots)$ što znači da je niz $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ monotono opadajući i ograničen pa prema tome i konvergentan. Postoji dakle $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x''$.

Prelazeći na graničnu vrednost u (3), dobijamo

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} x_k - \lim_{k\to\infty} \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \text{ odnosno } x'' = x'' - \frac{F(x'')}{F'(x'')}$$

tj. $F(x'')=0$, odakle sledi $x''=x'$ što je trebalo i dokazati.

N a p o m e n a. Za ocenu greške približnog korena jednačine $F(x) = 0$ važi opšti obrazac koji se dobija iz sledeće teoreme.

T e o r e m a. Neka je x' tačna a x_k približna vrednost korena jednačine $F(x) = 0$ koje su sadržane u intervalu $[a,b]$. Ako je pri tome $|F'(x)| \geq m_1$ za $a<x<b$, tada važi ocena

$$|x'-x_k| \leq \frac{|F(x_k)|}{m_1} \tag{6}$$

D o k a z. Primenom Lagranžove teoreme dobijamo

$$F(x')-F(x_k) = (x'-x_k)F'(c), \tag{7}$$

gde se broj c nalazi izmedju brojeva x' i x_k, tj. $a<c<b$. Kako je $F(x')=0$ i $|F'(c)| \geq m_1$, iz (7) se dobija

$$-F(x_k) = (x'-x_k)F'(c),$$

odakle je

$$(8)\qquad |F(x_k)| = |x'-x_k|\,|F'(c)| \geq |x'-x_k|\; m_1$$

Iz (8) dobijamo

$$|x'-x_k| \leq \frac{|F(x_k)|}{m_1},$$

što predstavlja obrazac (6), čime je dokazana navedena teorema.

Njutnova metoda ima kvadratnu brzinu konvergencije.

D o k a z. Iz (5) je

$$(9)\qquad x' = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} - \frac{F''(c)}{2F'(x_k)}\,(x'-x_k)^2.$$

Imajući u vidu (3), iz (9) se dobija

$$x' = x_{k+1} - \frac{F''(c)}{2F'(x_k)}\,(x'-x_k)^2$$

odakle je

$$(10)\qquad |x'-x_{k+1}| = \frac{1}{2}\,\frac{|F''(c)|}{|F'(x_k)|}\,|x'-x_k|^2$$

Iz (10) zaključujemo da Njutnova metoda zaista ima kvadratnu brzinu konvergencije.

P r i m e r 1. Primenom Njutnove metode naći pozitivni koren jednačine

$$(a_1)\qquad x^3-8x-1 = 0.$$

R e š e n j e. Ovde je $F(x)=x^3-8x-1$, pri čemu je $F(2)=-9<0$, $F(3)=2>0$ što znači da jednačina (a_1) ima jedan koren u intervalu $(2,3)$. Dalje je $F'(x)=3x^2-8$, $F''(x)=6x$ pri čemu je $F'(x)>0$ i $F''(x)>0$ za $2\leqslant x\leqslant 3$. Za početni približni koren jednačine (a_1) uzmimo $x_o=3$ u kom slučaju je $F(x_o)F''(x_o) \quad =2.18=36>0$. U ovom primeru ispunjeni su svi uslovi za primenu Njutnove metode. Prema formuli (3) imamo

$$x_1=x_o-\frac{F(x_o)}{F'(x_o)}=3-\frac{F(3)}{F'(3)}=3-\frac{2}{19}=2,894737;\ x_2=x_1-\frac{F(x_1)}{F'(x_1)}=2,888647;$$

$$x_3=x_2-\frac{F(x_2)}{F'(x_2)}=2,888986 \text{ i dalje } x_4=2,888968;\ x_5=2,888969;$$

$x_6=2,888969$.

Ocena greške približnog rešenja $x_6=2,888969$. U našem slučaju je $F(x_6)=x_6^3-8x_6-1=0,0000068$; $|F'(x)|=|3x^2-8|\geqslant 4=m_1$ za $2\leqslant x\leqslant 3$.
Zato je prema obrascu (6)

$$|x'-x_6|=|x'-2,888969|\leqslant\frac{0,0000068}{4}<0,00001.$$

P r i m e r 2. Korišćenjem Njutnove metode odrediti koren jednačine

$$2-x-e^x=0$$

koji se nalazi u intervalu $(0,1)$.

R e š e n j e . Ovde je $F(x)=2-x-e^x$, pri čemu je $F(o)=1>0$, $F(1)=1-e<0$. Dalje je $F'(x)=-1-e^x$, $F''(x)=-e^x$ pa je $F'(x)<0$ i $F''(x)<0$ za $0<x<1$. Uzmimo $x_o=1$. Vidimo da je $F(x_o)F''(x_o)=F(1)$ $F''(1)=(1-e)(-e)>0$. Prema Njutnovoj formuli (3) imamo:

$$x_1=x_o-\frac{F(x_o)}{F'(x_o)}=1-\frac{F(1)}{F'(1)}=1-\frac{1-e}{-1-e}=0,537883;\ x_2=x_1-\frac{F(x_1)}{F'(x_1)}=$$

$= 0{,}445617$ i dalje $x_3=0{,}442857$; $x_4=0{,}442854$; $x_5=0{,}442854$.

O c e n a   g r e š k e. Ovde je $F(x_5)=0{,}00000103$, $|F'(x)|=$ $=|1+e^x|\geq 2=m_1$ za $0\leq x\leq 1$. Prema (6) je $|x'-x_5|\leq\frac{|F(x_5)|}{m_1}$, odnosno $|x'-x_5|\leq\frac{0{,}00000103}{2}$, tj. $|x'-0{,}442854|<0{,}000001$.

P r i m e d b a . Kad jednačine

$$x = f(x)$$

gde iterativni proces glasi

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

a koja se može napisati u obliku

$$x-f(x) = 0,$$

ocena greške (6) svodi se na

$$x'-x_k\leq \frac{|x_{k+1}-x_k|}{1-q} \tag{6'}$$

gde je $|f'(x)|\leq q<1$ i $a\leq f(x)\leq b$ za $a\leq x\leq b$ kao i $a\leq x'\leq b$.

Kako je u ovom slučaju $|x_{k+1}-x_k|\leq q|x_k-x_{k-1}|$ to se (6') svodi na

$$|x' -x_k|\leq\frac{q|x_k-x_{k-1}|}{1-q} \tag{6''}$$

Njutnova metoda za sisteme nelinearnih jednačina

Posmatrajmo prvo sistem od dve nelinearne jednačine

$$(1) \qquad F_1(x,y) = 0$$
$$F_2(x,y) = 0$$

gde su funkcije F_1 i F_2 realne i neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti D odredjenoj sa $a_1 \leq x \leq b_1$, $a_2 \leq y \leq b_2$ u kojoj se nalazi jedno izolovano rešenje x', y'. Neka x_k, y_k predstavlja jedno približno rešenje sistema jednačina (1). Ako sa Δx_k i Δy_k označimo redom popravke približnog rešenja x_k, y_k do tačnog rešenja x', y' imaćemo

$$(2) \qquad x' = x_k + \Delta x_k$$
$$y' = y_k + \Delta y_k$$

Ako vrednosti (2) uvrstimo u sistem (1) dobićemo

$$(3) \qquad F_1(x_k+\Delta x_k, y_k+\Delta y_k) = 0$$
$$F_2(x_k+\Delta x_k, y_k+\Delta y_k) = 0$$

Uz pretpostavku da su Δx_k i Δy_k male veličine, primenom Tajlorovog obrasca na leve strane sistema (3), zadržavajući se samo na linearnim članovima, dobićemo

$$F_1(x_k,y_k) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_k \Delta x_k + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_k \Delta y_k \approx 0$$

$$(4) \qquad F_2(x_k,y_k) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) \Delta x_k + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_k \Delta y_k \approx 0$$

Ako (2) i (4) napišemo u matričnom obliku, imaćemo

(5) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix}$$

(6) $$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_k ;$$

gde indeks k uz napisane matrice označava da su vrednosti funkcija F_1 i F_2 kao i njihovih parcijalnih izvoda posmatrane za $x = x_k$, $y = y_k$. Sada iz (6) dobijamo

(7) $$\begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}_k^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_k$$

Na ovaj način dobili smo približne vrednosti popravki Δx_k, Δy_k. Ako (7) zamenimo u (5) dobićemo nove približne vrednosti za rešenje x', y' sistema jednačina (1) koje ćemo označiti sa x_{k+1}, y_{k+1} pa ćemo imati

(8) $$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_k \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Ako stavimo

(9) $$W_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}_k$$

tada se (8) svodi na

$$(10)\qquad \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - W_k^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_k \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Formula (10) naziva se Njutnova formula za izračunavanja približnih rešenja x_{k+1}, y_{k+1} $(k=0,1,2,\ldots)$ sistema nelinearnih jednačina (1), polazeći od početnog približnog rešenja x_o, y_o.

Kada se radi o sistemu od n nelinearnih jednačina, tj. o sistemu jednačina

$$(11)\qquad \begin{aligned} &F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \\ &F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \\ &\vdots \\ &F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \end{aligned}$$

tada Njutnova formula glasi

$$(12)\qquad \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} - W_k^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}_k \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

gde je sada

$$(13)\qquad W_k^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_k^{-1}$$

P r i m e r. Primenom Njutnove metode naći približne vrednosti pozitivnog rešenja sistema jednačina

$$\text{(a)} \qquad x^2+y^2-1 = 0$$
$$x^4-y = 0$$

R e š e n j e. Ovde je

$$\text{(b)} \qquad F_1(x,y) = x^2+y^2-1$$
$$F_2(x,y) = x^4-y$$

odakle je

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 4x^3, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = -1$$

Za početno približno rešenje sistema (a) uzmimo $x_o=1$, $y_o=1$.

Za $x=x_o=1$, $y=y_o=1$ iz (b) i (c) u skladu sa (9) imamo

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_o^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

pa iz formule (8) dobijamo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} - W_o^{-1}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,6 \end{pmatrix},$$

tj. $x_1=0,9$; $y_1=0,6$.

Sada za $x=x_1=0,9$; $y=y_1=0,6$ iz (b) i (c) kao i (9) imamo

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0,17 \\ 0,0561 \end{pmatrix}, \quad W_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1,8 & 1,2 \\ 2,916 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5,2992} \begin{pmatrix} -1 & -1,2 \\ -2,916 & 1,8 \end{pmatrix} =$$

$$= -0,188708 \begin{pmatrix} -1 & -1,2 \\ -2,916 & 1,8 \end{pmatrix},$$

pa iz formule (8) dobijamo

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - W_1^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,6 \end{pmatrix} + 0,188708 \begin{pmatrix} -1 & -1,2 \\ -2,916 & 1,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,855216 \\ 0,525510 \end{pmatrix},$$

tj. $x_2 = 0,855216$; $y_2 = 0,5255510$.

Dalje, za $x=x_2=0,855216$; $y=y_2=0,525510$ imamo

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0,007555 \\ 0,009428 \end{pmatrix}, \quad W_2^{-1} = -0,230410 \begin{pmatrix} -1 & -1,051020 \\ -2,502001 & 1,710432 \end{pmatrix},$$

pa iz formule (8) dobijamo $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,851192 \\ 0,524870 \end{pmatrix}$, tj.

$$x_3 = 0,851192; \quad y_3 = 0,524870.$$

Zadaci:

1) Rešiti sistem jednačina

$$e^{-x} - y + 1 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

2) Naći pozitivno rešenje sistema jednačina:

$$x^3-x^2y = 2$$

$$xy = 1$$

Modifikacija Njutnove metode

Kod primene Njutnove metode (12) najveće teškoće javljaju se u odredjivanju svaki put nove inverzne matrice W_k^{-1} date u (13) za k=0,1,2 itd. Zbog toga se može primenjivati modifikovana Njutnova metoda koja je izražena formulom

$$(14)\qquad \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{vmatrix} - W_o^{-1} \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix}_k \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

Formula (14) je jednostavnija od formule (12), jer se u njoj inverzna matrica W_o^{-1} koja se odnosi na početno približno rešenje $x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)}$ ne menja. Medjutim, primenom formule (14) sporije se približavamo ka rešenju sistema jednačina (11) nego u slučaju primene formule (12).

GAUSOVA METODA ZA REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

Za sisteme u kojima se javlja više od tri jednačine Kramerove formule sa determinantama nisu podesne zbog obimnog računanja. Zato se u ovakvim slučajevima primenjuje Gausova metoda eliminacije koju ćemo ovde izložiti.

Neka je dat sistem jednačina:

$$
(1)\qquad
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\hline
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Posmatrajmo slučaj kada je $m \geq n$, tj. slučaj kada broj jednačina nije manji od broja nepoznatih.

Pretpostavimo da je $a_{11} \neq 0$. Pomnožimo prvu jednačinu sistema (1) sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i tako dobijenu jednačinu dodajmo drugoj jednačini sistema (1). Zatim prvu jednačinu sistema (1) pomnožimo sa $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ i tako dobijenu jednačinu dodajmo trećoj jednačini sistema (1), itd. Na ovaj način dobija se sistem jednačina

$$
(2)\qquad
\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)} x + a_{23}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)} x_n = b_3^{(1)} \\
\hline
\qquad a_{m2}^{(1)} x_2 + a_{m3}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{mn}^{(1)} x_n = b_m^{(1)}
\end{array}
$$

Ako je $a_{22}^{(1)} \neq 0$, primenićemo isti postupak eliminacije na sistem od poslednjih m-1 jednačina sistema (2), kako bismo eliminisali nepoznatu x_2 iz poslednjih n-2 jednačina.
Na ovaj način dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n &= b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)} x_n &= b_3^{(2)} \\
\text{-----------------------} & \\
a_{m3}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{mn}^{(2)} x_n &= b_m^{(2)}
\end{aligned}$$

koji je ekvivalentan sistemu jednačina (2).

Nastavljajući ovaj postupak, posle (n-1)-ve eliminacije dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n &= b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)} x_n &= b_3^{(2)} \\
\text{-----------------------} & \\
a_{nn}^{(n-1)} x_n &= b_n^{(n-1)} \\
a_{n+1,n}^{(n-1)} x_n &= b_{n+1}^{(n-1)} \\
\text{--------------} & \\
a_{mn}^{(n-1)} x_n &= b_m^{(n-1)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Sistem (3) je jednostavan za rešavanje što ćemo pokazati na sledećem konkretnom primeru. Pre toga dajemo nekoliko napomena.

U sistemu (3) gornji indeks i označava da su odgovarajući koeficijenti dobijeni posle i-te eliminacije. Pri tome je svodjenje sistema (1) na ekvivalentan sistem (3) izvedeno pod pretpostavkom da je

$$a_{11}\neq 0,\ a_{22}^{(1)}\neq 0, \dots,\ a_{n-1,n}^{(n-2)}\neq 0.$$

Ako se posle (i-1)-ove eliminacije dogodi da je $a_{ii}^{(i-1)}=0$, tada treba i-tu jednačinu toga sistema zameniti nekom j-tom jednačinom ($j=i+1,\ i+2,\dots,m$) u kojoj je $a_{ji}^{(i-1)}\neq 0$ i postupak eliminacije nastaviti kao i ranije. Ako je

$$a_{ii}^{(i-1)} = a_{i+1,i}^{(i-1)} = \dots = a_{mi}^{(i-1)} = 0,$$

nepoznatu x_i treba uzeti proizvoljno i sistem (1) posmatrati kao sistem od m jednačina sa n-1 nepoznatih.

U posmatranom slučaju kada je $m>n$, sistem (1) ima rešenje ako i samo ako je

$$\frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} = \frac{b_{n+1}^{(n-1)}}{a_{n+1}^{(n-1)}} = \dots = \frac{b_m^{(n-1)}}{a_{mn}^{(n-1)}}. \tag{4}$$

Ako je $m>n$ i ako ne važe jednakosti (4), sistem (1) nema rešenje.

Kada je u sistemu (1) broj jednačina manji od broja nepoznatih, tj. kada je $m<n$, postupak je isti samo što se u ovom slučaju može odrediti najviše $n-m$ nepoznatih u funkciji ostalih nepoznatih.

P r i m e r . Sistem jednačina

$$
(S_1)\quad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 7\\
3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2\\
2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 14\\
x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5
\end{aligned}
$$

rešiti Gausovim postupkom

R e š e n j e. Drugoj jednačini sistema (S_1) dodajmo prvu jednačinu posle množenja sa -3. Trećoj jednačini sistema (S_1) dodajmo prvu jednačinu posle množenja sa -2. Četvrtoj jednačini sistema (S_1) dodajmo prvu jednačinu posle množenja sa -1. Na taj način dobijamo sistem

$$
(S_2)\quad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 7\\
-5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -19\\
-x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0\\
-2x_2 + 0x_3 + 4x_4 &= -2
\end{aligned}
$$

koji je ekvivalentan sistemu (S_1).

Ako sada trećoj jednačini sistema (S_2) dodamo drugu jednačinu posle množenja sa $-\frac{1}{5}$, a četvrtoj jednačini sistema (S_2) dodamo drugu jednačinu posle množenja sa $-\frac{2}{5}$, dobićemo sistem jednačina

$$
(S_3)\quad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 7\\
-5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -19\\
-\frac{13}{5}x^3 + \frac{16}{5}x^4 &= \frac{19}{5}\\
\frac{4}{5}x_3 + \frac{12}{5}x_4 &= \frac{28}{5}
\end{aligned}
$$

koji je ekvivalentan sistemu (S_2) i sistemu (S_1).

Ako četvrtoj jednačini sistema (S_3) dodamo treću jednačinu posle množenja sa $\frac{4}{13}$, dobićemo sistem jednačina

$$
(S_4) \quad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 7 \\
-5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -19 \\
-\frac{13}{5}x_3 + \frac{16}{5}x_4 &= \frac{19}{5} \\
\frac{220}{65}x_4 &= \frac{440}{65}
\end{aligned}
$$

koji je ekvivalentan sistemu (S_3), a isto tako i sistemima (S_2) i (S_1).

Iz poslednje jednačine sistema (S_4) dobijamo $x_4 = 2$. Zamenom nadjene vrednosti za x_4 u trećoj jednačini sistema (S_4), ona postaje

$$-\frac{13}{5}x_3 + \frac{32}{5} = \frac{19}{5},$$

odakle dobijamo $x_3 = 1$. Zamenom nadjenih vrednosti za x_4 i x_3 u drugoj jednačini sistema (S_4) ona postaje

$$-5x_2 - 2 + 8 = -19,$$

odakle dobijamo $x_2 = 5$. Najzad, zamenjujući nadjene vrednosti za x_4, x_3 i x_2 u prvoj jednačini sistema (S_4) ona postaje

$$x_1 + 5 + 1 - 2 = 7,$$

odakle dobijamo $x_1 = 3$.

Prema tome, rešenje sistema (S_1) je

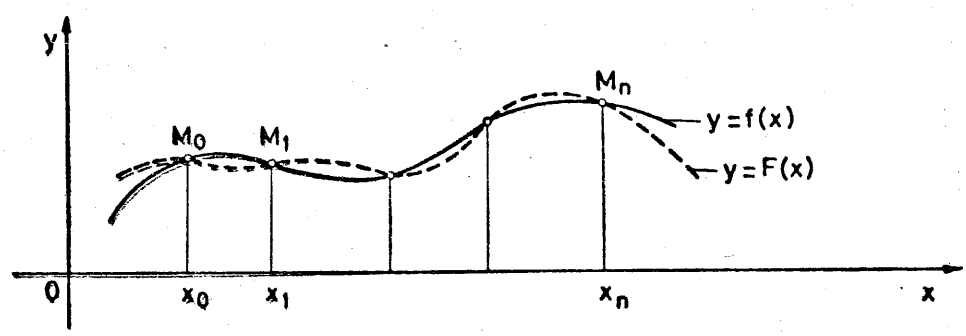
$$x_1 = 3, \ x_2 = 5, \ x_3 = 1, \ x_4 = 2.$$

I N T E R P O L A C I J A

Neka su za posmatranu funkciju $y=f(x)$ poznate njene vrednosti $y_0, y_1, \ldots, y_n$ koje odgovaraju vrednostima $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nezavisne promenljive x, što znači neka je $y=y_i=f(x_i)$ za $i=0,1,\ldots,n$.

Pod interpolacijom funkcije $y=f(x)$ podrazumeva se odredjivanje njenih približnih vrednosti koje odgovaraju medjuvrednostima nezavisne promenljive x pomoću jedne jednostavnije funkcije $F(x)$. Takva funkcija $F(x)$ naziva se interpolaciona funkcija posmatrane funkcije $y=f(x)$. Za funkciju $F(x)$ zahteva se da njene vrednosti u tačkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$ budu jednake odgovarajućim vrednostima $y_0, y_1, \ldots, y_n$ posmatrane funkcije $y=f(x)$, tj. zahteva se da bude $F(x_i) = y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$. Na taj način funkcija $y=f(x)$ se zamenjuje interpolacionom funkcijom $y = F(x)$.

Za interpolacionu funkciju $F(x)$ najčešće se uzima polinom stepena ne višeg od n koja se naziva interpolacioni polinom. Njegove vrednosti se u $n+1$ tačaka poklapaju sa vrednostima funkcije $y = f(x)$. Drugim rečima, za $F(x)$ se uzima polinom čiji grafik prolazi kroz tačke $M_i(x_i, y_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ kroz koje prolazi i grafik funkcije $y = f(x)$, videti sliku. Ove tačke nazivaju se čvorovi interpolacionog polinoma.



U praksi se koristi više interpolacionih polinoma. Mi ćemo se ovde zadržati na Lagranžovom i Njutnovom interpolacionom polinomu.

Lagranžov interpolacioni polinom

Neka posmatrana funkcija $y = f(x)$ u tačkama $x_o, x_1, \ldots, x_n$ ima redom vrednosti $y_o, y_1, \ldots, y_n$ pri čemu je $x_o < x_1 < \ldots < x_n$. Polinom

$$(1)\quad F(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)\ldots(x_o-x_n)}\, y_o + \frac{(x-x_o)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\, y_1 +$$

$$+ \frac{(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_o)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\, y_n$$

naziva se Lagranžov interpolacioni polinom.

Ako u (1) stavimo redom $x=x_o$, $x=x_1, \ldots,$ $x=x_n$ dobićemo $F(x_o)=y_o$, $F(x_1)=y_1, \ldots, F(x_n)=y_n$, što znači da se vrednosti polinoma (1) poklapaju sa vrednostima posmatrane funkcije $y=f(x)$ u navedenim tačkama $x_o, x_1, \ldots, x_n$.

Napomenimo činjenicu da je parovima (x_o, y_o), $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, pri čemu je $x_o < x_1 < \ldots < x_n$, na jedinstven način odredjen Lagranžov interpolacioni polinom (1).

Kod Lagranžovog interpolacionog polinoma (1) tačke $x_o, x_1, \ldots, x_n$ moraju biti različite a njihova medjusobna rastojanja mogu biti različita ili pak jednaka.

P r i m e r . Lagranžov interpolacioni polinom čiji grafik prolazi kroz tačke $M_o(1,-1)$, $M_1(2,0)$, $M_2(4,3)$ i $M_3(5,6)$ glasi

$$F(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)(x_o-x_3)}\,y_o + \frac{(x-x_o)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1$$

$$+\frac{(x-x_o)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2 + \frac{(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_o)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3,$$

odnosno

$$F(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)}.(-1) + \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)}.0 +$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)}.3 + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)}.6,$$

odakle se posle sredjivanja dobija

$$(2)\quad F(x) = \frac{1}{12}x^3-\frac{5}{12}x^2+\frac{20}{12}x-\frac{28}{12}.$$

Na taj način, funkciju $y=f(x)$ čije su vrednosti $y=y_o=-1$ za $x=x_o=1$, $y=y_1=0$ za $x=x_1=2$, $y=y_2=3$ za $x=x_2=4$ i $y=y_3=6$ za $x=x_3=5$ zamenjujemo interpolacionim polinomom (2). Iz dobijenog interpolacionog polinoma možemo naći njegove vrednosti izvan datih čvorova. Tako, na primer, za $x=3$ iz (2) dobijamo $F(3)=1,16667$ pa u ovom slučaju za funkciju $f(x)$ uzimamo $f(3) = F(3)=1,16667$.

O c e n a g r e š k e. Ako je posmatrana funkcija $y=f(x)$ diferencijabilna $n+1$ puta i ako stavimo

$$\Pi(x) = (x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

tada za razliku

$$R(x) = f(x) - F(x)$$

koja predstavlja grešku interpolacije u intervalu [a,b] važi ocena

(3) $$|R(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\Pi(x)|$$

gde je $M = \max\limits_{a<x<b} |f^{(n+1)}(x)|$.

Z a d a t a k . U sledećoj tablici dati su logaritmi brojeva 100,105 i 110. Pomoću Lagranžovog interpolacionog polinoma naći log102.

i	x_i	$y_i=\log x_i$
0	100	2,00000
1	105	2,02119
2	110	2,04139

R e š e n j e. Prema (1) u ovom slučaju za F(x) se dobija

(4) $$F(x) = \frac{(x-105)(x-110)}{25} - \frac{(x-100)(x-110)}{25}\cdot 2{,}02119 + \frac{(x-100)(x-105)}{50}\cdot 2{,}04139.$$

Za x=102 iz (4) dobijamo F(102)=2,008595, tj. log102=2,008595.

Tačna vrednost log102 na šest decimala iznosi 2,008600.

O c e n a   g r e š k e. U našem slučaju posmatrana funkcija je $f(x) = \log x$, za koju je $f'(x) = \frac{1}{x}\log e$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}\log e$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}\log e$ gde je $n+1 = 2+1 = 3$ i gde je

$\Pi(x) = (x-100)(x-105)(x-110)$. Za $100 \leq x \leq 110$ je

$$M = \max|f^{(3)}(x)| = \max\frac{2}{x^3}\cdot 0{,}43429 = \frac{2}{100^3}\cdot 0{,}43429 < 0{,}00001.$$

Dalje je $|\Pi(102)| = 48$, pa prema obrascu (3) imamo

$$|R(102)| \leq \frac{0,00001}{3!} \cdot 48 = 0,00008 < 0,0001.$$

Konačne razlike

Posmatrajmo funkciju $y=f(x)$ definisanu u intervalu $[a,b]$. Neka su $x_o, x_1=x_o+h, x_2=x_o+2h, \ldots, x_n=x_o+nh$ $(n=0,1,2,\ldots)$ tačke koje pripadaju intervalu $[a,b]$ koje se nalaze na jednakim rastojanjima h. Ova veličina h naziva se korak.

Neka x i $x+h$ predstavljaju dve susedne tačke niza

(1) $$x_n = x_o+nh \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Tada se razlika

(2) $$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

naziva konačna razlika prvog reda funkcije $y = f(x)$.

Lako se dokazuje da za konačnu razliku prvog reda važe sledeća svojstva:

1) $\Delta c=0$ gde je c konstanta,

2) $\Delta kf(x)=k\Delta f(x)$ gde je k konstanta

3) $\Delta(f_1(x)\pm f_2(x)) = \Delta f_1(x)\pm\Delta f_2(x)$

4) $\Delta(k_1f_1(x)+k_2f_2(x)) = k_1\Delta f_1(x)+k_2\Delta f_2(x)$ gde su k_1 i k_2 konstante.

Pomoću konačnih razlika prvog reda mogu se definisati i konačne razlike višeg reda. Tako se izraz:

$$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))=\Delta(f(x+h)-f(x))=\Delta f(x+h)-\Delta f(x) =$$
$$= f(x+2h)-f(x+h)-(f(x+h)-f(x))=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x),$$

tj. izraz

$$\text{(2)} \qquad \Delta^2 f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$$

naziva konačna razlika drugog reda funkcije $y=f(x)$.

Iz konačne razlike drugog reda, tj. iz (2) dobija se

$$\Delta^3 f(x)=\Delta(\Delta^2 f(x))=\Delta(f(x+2h)-2f(x+h)+f(x))=\Delta f(x+2h) -$$
$$-2\Delta f(x+h)+\Delta f(x)=(f(x+3h)-f(x+2h))-2(f(x+2h)-$$
$$-f(x))+(f(x+h)-f(x)) = f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-$$
$$- f(x),$$

odnosno

$$\text{(3)} \qquad \Delta^3 f(x)=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)$$

što predstavlja konačnu razliku trećeg reda funkcije $y=f(x)$.

Slično, za konačnu razliku reda k, tj. za $\Delta^k f(x)=\Delta(\Delta^{k-1} f(x))$ dobija se

$$\Delta^k f(x)=f(x+kh)-kf[x+(k-1)h] +\frac{k(k-1)}{2!} f[x+(k-2)h] +\ldots+(-1)^k f(x)$$

što se može napisati u obliku

$$\text{(4)} \qquad \Delta^k f(x)= \sum_{i=o}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f[x+(k-i)h].$$

Kao što se vidi iz obrasca (4), konačna razlika reda k funkcije $y=f(x)$ u tački x izračunava se pomoću njenih vrednosti u tačkama $x, x+h, x+2h, \ldots, x+kh$.

P r i m e r. Izračunati konačne razlike prvog, drugog i trećeg reda funkcije $y=f(x)=x^3$.

R e š e n j e. Ovde imamo $\Delta f(x)=\Delta x^3=(x+h)^3-x^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$, tj. $\Delta x^3 = 3hx^2+3h^2x+h^3$.

Dalje je $\Delta^2x^3=\Delta(\Delta x^3)=\Delta(3hx^2+3h^2x+h^2)=3h\Delta x^2+3h^2\Delta x=3h\left((x+h)^2-x^2\right)+$
$+ 3h^2((x+h)-x) =3h(x^2+2hx+h^2-x^2)+3h^3=6h^2x+6h^3$, tj.

$$\Delta^2x^3=6h^2x+6h^3$$

Odavde je $\Delta^3x^3=\Delta(6h^2x+6h^3)=6h^2\Delta x=6h^2((x+h)-x) = 6h^3$ tj.

$$\Delta^3x^3=3!h^3.$$

Za funkciju $y=f(x)=x^n$ je

$$\Delta^nx^n=n!h^n = \text{const.}$$

dok je

$$\Delta^{n+1}x^n = 0$$

Uopšte, za polinom stepena n, tj. za polinom

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_o$$

je

$$\Delta^nP(x)=n!a_nh^n = \text{const.}$$

U praksi je često potrebno izračunati vrednost funkcije $y=f(x)$ u tački $x+kh$ poznavajući njene konačne razlike u tački x počev od reda 0 do reda k. (stavlja se $\Delta^{o}f(x)\equiv f(x)$). Pre svega, iz $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$ je

(5) $$f(x+h)=f(x)+\Delta f(x).$$

Iz (5) je

$$\Delta f(x+h)=\Delta(f(x)+\Delta f(x)),$$

tj.

$$f(x+2h)-f(x+h)=\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)$$

odakle se, s obzirom na (5), dobija

(6) $$f(x+2h)=f(x)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x).$$

Iz (6) je

$$\Delta f(x+2h)=\Delta(f(x)+2\Delta\ f(x)+\Delta^2 f(x))$$

tj. $$f(x+3h)-f(x+2h)=\Delta f(x)+2\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x)$$

odakle se, s obzirom na (6), dobija

(7) $$f(x+3h)=f(x)+3\Delta f(x)+3\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x).$$

Imajući u vidu (5),(6) i (7) nije teško zaključiti da važi obrazac

$$f(x+kh)=f(x)+\frac{k}{1!}\Delta f(x)\ +\ \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 f(x)+\ldots+\Delta^k f(x)$$

koji se može napisati u obliku

(8) $$f(x+kh)=\sum_{i=o}^{k}\ \binom{k}{i}\Delta^i f(x)$$

T a b l i c a   r a z l i k a. Neka su za neku funkciju $y=f(x)$ utabličene njene vrednosti $y_i=f(x_i)$ za tačke x_i $(i=0,1,2,\ldots)$ koje su rasporedjene na jednakim rastojanjima h, što znači za koje je $x_{i+1}-x_i=h=\text{const}$.

Za konačne razlike prvog, drugog, trećeg,..., n-tog reda sada imamo:

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$$

$$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i$$

$$\Delta^3 y_i=\Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n y_i=\Delta^{n-1} y_{i+1}-\Delta^{n+1} y_i$$

Ako u obrascu (8) stavimo $x=x_j$, tada je $x+kh=x_j+kh=x_{j+k}$ pa je $f(x+kh)=f(x_{j+k})=y_{j+k}$.

U ovom slučaju obrazac (8) svodi se na

$$y_{j+k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\Delta^i y_j=y_j+\frac{k}{1!}\Delta y_j+\frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_j+\ldots+\Delta^k y_j. \tag{9}$$

Tablice konačnih razlika, prema načinu zapisivanja mogu biti horizontalne i dijagonalne.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

Horizontalna tablica konačnih razlika

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_0			
			$\Delta^2 y_0$		
x_2	y_2	Δy_2		$\Delta^3 y_0$	
			$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
x_3	y_3	Δy_3		$\Delta^3 y_1$	
			$\Delta^2 y_2$		
x_4	y_4				

Dijagonalna tablica konačnih razlika

P r i m e r . Za funkciju $y=x^3-x^2+2x+1$ sastaviti horizontalnu i dijagonalnu tablicu konačnih razlika uzimajući $x_o=0$, $h=1$ i $n=5$.

R e š e n j e. Rešenje ovog primera prikazano je u sledećim tablicama:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	2	4	6
1	3	6	10	6
2	9	16	16	6
3	25	32	22	
4	57	54		
5	111			

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		2		
1	3		4	
		6		6
2	9		10	
		16		6
3	25		16	
		32		6
4	57		22	
		54		
5	111			

Neka je za funkciju $y=f(x)$ kod njene vrednosti y_n napravljena greška koju ćemo označiti sa ε. Tada tablica konačnih razlika posle unošenja greške ε glasi

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
...	...			
x_{n-2}	y_{n-2}			
		Δy_{n-2}		
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}+\varepsilon$	
		$\Delta y_{n-1}+\varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-2}-3\varepsilon$
x_n	$y_n+\varepsilon$		$\Delta^2 y_{n-1}-2\varepsilon$	
		$\Delta y_n-\varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-1}+3\varepsilon$
x_{n+1}	y_{n+1}		$\Delta^2 y_n+\varepsilon$	
		Δy_{n+2}		
x_{n+2}	y_{n+2}			

Ako su, na primer, druge konačne razlike približno konstantne (imaju približno istu vrednost), sem onih koje se odnose na y_n, y_{n-1} i y_{n-2}. U tom slučaju za $\Delta^2 y_{n-1}$ uzimamo

$$(10) \quad \overline{\Delta^2 y_{n-1}} = \frac{1}{3}\left[(\Delta^2 y_{n-2}+\varepsilon)+(\Delta^2 y_{n-1}-2\varepsilon)+(\Delta^2 y_n+\varepsilon)\right] = \frac{\Delta^2 y_{n-2}+\Delta^2 y_{n-1}+\Delta^2 y_n}{3}.$$

Za grešku ε vrednosti y_n uzimamo pri tome

$$(11) \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\,(\Delta^2 y_{n-1}-\overline{\Delta^2 y_{n-1}}).$$

Greška (11) se uzima sa onoliko decimala kao i sve ostale veličine date u tablici.

P r i m e r . U sledećoj tablici prikazane su količine razlike jedne funkcije $y=f(x)$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	10		
		5	
1	15		2
		7	
2	22		3
		10	
3	32		-2
		8	
4	40		8
		16	
5	56		-1
		15	
6	71		2
		17	
7	88		2
		19	
8	107		2
		21	
9	128		

U ovoj tablici konačne razlike drugog reda su medjusobno približno jednake, sem razlika $\Delta^2 y_3$, $\Delta^2 y_4$ i $\Delta^2 y_5$.

Zato, prema (10), uzimamo sada

$$\overline{\Delta^2 y_4} = \frac{-2+8-1}{3} = \frac{5}{3} \approx 2.$$

Prema (11) dobijamo $\varepsilon = \frac{1}{2}(\Delta^2 y_4 - \overline{\Delta^2 y_4}) = \frac{1}{2}(8-2) = 3.$

Sada nova popravljena tablica konačnih razlika glasi

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	10		
		5	
1	15		2
		7	
2	22		3
		10	
3	32		1
		11	
4	43		3
		13	
5	56		2
		15	
6	71		2
		17	
7	88		2
		19	
8	107		2
		21	
9	128		

Kod ove tablice konačne razlike drugog reda su približno jednake medjusobno (približno konstantne).

Njutnov interpolacioni polinom

Neka su za funkciju $y=f(x)$ date njene vrednosti

$y_o=f(x_o)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, ..., $y_n=f(x_n)$ za podjednako udaljene vrednosti x_o, $x_1=x_o+h$, $x_2=x_o+2h$, ..., $x_n=x_o+nh$ nezavisne promenljive x. Kao što smo ranije napomenuli, postoji jedinstven interpolacioni polinom $F(x)$ stepena ne višeg od n takav da je $F(x_i)=f(x_i) = y_i$ $(i=0,1,2,\dots,n)$. Jedan takav polinom je Lagranžov interpolacioni polinom čiji smo oblik zapisivanja videli ranije. Njutnov interpolacioni polinom je polinom $F(x)$ takodje stepena ne višeg od n napisan u drugom obliku i za koji je takodje $F(x_i) = f(x_i) = y_i$ $(i=0,1,2,\dots,n)$.

Njutnov interpolacioni polinom je polinom oblika

(12) $F(x) = a_o+a_1(x-x_o)+a_2(x-x_o)(x-x_1)+a_3(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)+\dots$

$+a_n(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})$

gde se koeficijenti $a_o, a_1, a_2, \dots, a_n$ odredjuju iz uslova $F(x_i)=f(x_i)=y_i$ $(i=0,1,2,\dots,n)$ uz korišćenje konačnih razlika funkcije $y=f(x)$.

Za $x=x_o$ pošto je $F(x_o) = y_o$, iz (12) se dobija

$$a_o = y_o.$$

Za $x=x_1$, $a_o=y_o$ pošto je $F(x_1)=y_1$, iz (12) se dobija $y_1=y_o+a_1h$, odakle je $a_1 = \frac{y_1-y_o}{h}$, tj.

$$a_1 = \frac{\Delta y_o}{h}$$

Dalje, za $x=x_2$, $a_o=y_o$, $a_1 = \frac{\Delta y_o}{1!h}$ pošto je $F(x_2) = y_2$, iz (12) se dobija $y_2 = y_o+2\Delta y_o+2a_2h^2$, odakle je

$$2a_2h^2 = y_2-y_o-2\Delta y_o = y_2-y_o-2(y_1-y_o) = y_2-2y_1+y_o=\Delta^2 y_o,$$

tj. $2a_2h^2 =\Delta^2 y_o$. Iz poslednje jednačine nalazimo

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_o}{2!h^2}.$$

Stavljajući dalje redom $x=x_3$, $x=x_4,\dots,x=x_n$, iz (12) se dobija

$$a_3=\frac{\Delta^3 y_o}{3!h^3}, \quad a_4 = \frac{\Delta^4 y_o}{4!h^4},\dots, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}.$$

Zamenjujući ovako nadjene vrednosti koeficijenata $a_o, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ u jednačini (12) dobija se polinom

$$(13)\quad F(x) = y_o + \frac{\Delta y_o}{1!h}(x-x_o) + \frac{\Delta^2 y_o}{2!h^2}(x-x_o)(x-x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Ovaj polinom naziva se prva Njutnova interpolaciona formula.

Lagranžov interpolacioni polinom sastoji se od (n+1) sabiraka. Svaki od tih sabiraka je jedan polinom stepena n i u praktičnom računu ni jedan od njih se ne može zanemariti.

Njutnov interpolacioni polinom (13) sastoji se od (n+1) sabiraka, pri čemu je prvi sabirak polinom stepena 0, drugi sabirak polinom stepena 1, treći sabirak polinom stepena 2,..., poslednji sabirak polinom stepena n. Koeficijenti uz ove polinome sabirke sadrže kao množitelje konačne razlike odgovarajućeg reda. Sa porastom reda konačne razlike se naglo smanjuju. Tako smo u mogućnosti da članove u formuli (13) izostavimo kada su oni dovoljno mali, što je od velikog praktičnog značaja.

Ako se uvede smena

$$\frac{x-x_o}{h} = t, \text{ tj. } x = x_o + th,$$

tada je

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_o-h}{h} = \frac{x-x_o}{h} - 1 = t-1$$

$$\frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_o-2h}{h} = \frac{x-x_o}{h} - 2 = t-2$$

$$\vdots$$

$$\frac{x-x_{n-1}}{h} = \frac{x-x_o-(n-1)h}{h} = \frac{x-x_o}{h} - (n-1) = t-n+1$$

U ovom slučaju formula (13) svodi se na

$$(14)\quad F(x_o+th) = y_o + \frac{t}{1!}\Delta y_o + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_o$$

i predstavlja konačni oblik prve Njutnove interpolacione formule. Formula (14) naziva se još i Njutnova interpolaciona formula za interpolovanje unazad.

P r i m e r. U sledećoj tablici dati su logaritmi brojeva 100,105,110,115,120 i 125 u kojoj su izračunate i konačne razlike do trećeg reda. Naći log108.

x	y=logx	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
100	2,00000	2119	-99	10
105	2,02119	2020	-89	6
110	2,04139	1931	-83	8
115	2,06070	1848	-75	
120	2,07918	1773		
125	2,09691			

R e š e n j e. Prema tablici je h=5. Stavimo x_o=105, x=108. Kako je $x=x_o+th$, tj. 108=105+5t, to odavde dobijamo $t = \frac{3}{5} = 0,6$. Ako ove vrednosti zamenimo u formulu (14) dobićemo

$$\log 108 = F(108) = 2,02119+0,6.0,02020 + \frac{0,6(-0,4)}{2}.(-0,00089) + \frac{0,6(-0,4)(-1,4)}{6}.0,00006 = 2,03342.$$

Prilikom nalaženja vrednosti log108 pomoću formule (14) koristili smo konačne razlike prvog, drugog i trećeg reda. Ako bismo hteli da nadjemo na primer log122, onda primenom formule (14) mogli bismo uzeti u obzir samo konačnu razliku prvog reda, što je očigledno nedovoljno. Za ovakve slučajeve, tj. za odredjivanje vrednosti funkcije za medjuvrednosti nezavisne promenljive koje se nalaze pri dnu utabličenih vrednosti služi drugi

Njutnov interpolacioni polinom za interpolovanje unapred. Ovaj polinom je oblika

(15) $F(x)=a_o+a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+\dots+a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots$

$(x-x_1)$.

Njegovi koeficijenti $a_o, a_1, a_2, \dots, a_n$ odredjuju se iz uslova $F(x_i) = f(x_i) = y_i (i=n,\ n-1,\ n-2, \dots, 1, 0)$.

Za $x=x_n$ pošto je $F(x_n)=y_n$, iz (15) se dobija

$$a_o = y_n.$$

Za $x=x_{n-1}$, $a_o=y_n$ pošto je $F(x_{n-1})=y_{n-1}$, iz (15) se dobija $y_{n-1}=y_n-a_1h$, odakle je $a_1 = \dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}$, što možemo napisati u obliku

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}$$

Za $x=x_{n-2}$, $a_o=y_n$, $a_1 = \dfrac{\Delta y_{n-1}}{1!h} = \dfrac{\Delta y_n - y_{n-1}}{h}$ pošto je $F(x_{n-2}) = y_{n-2}$, iz (15) se dobija $y_{n-2}=y_n-2(y_n-y_{n-1})+2a_2h^2$, odakle je $a_2 = \dfrac{y_n-2y_{n-1}+y_{n-2}}{2h^2}$, što možemo napisati u obliku

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}.$$

Na sličan način dalje se dobija

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3},\quad a_4 = \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4!h^4}, \dots, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}.$$

Zamenjujući ovako nadjene vrednosti koeficijenata $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n$ u jednačini (15) dobija se polinom

$$(16)\quad F(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \ldots + \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)$$

koji se naziva druga Njutnova interpolaciona formula.

Ako se uvede smena

$$\frac{x-x_n}{h} = t \text{ ili } x=x_n+th,$$

tada je

$$\frac{x-x_{n-1}}{h} = \frac{x-(x_n-h)}{h} = \frac{x-x_n+h}{h} = \frac{x-x_n}{h} + 1 = t+1$$

$$\frac{x-x_{n-2}}{h} = \frac{x-(x_n-2h)}{2} = \frac{x-x_n+2h}{h} = \frac{x-x_n}{h} + 2 = t+2$$

$$\vdots$$

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-(x_n-(n-1))}{h} = \frac{x-x_n+(n-1)h}{h} = \frac{x-x_n}{h} + n-1 = t+n-1.$$

U ovom slučaju formula (16) svodi se na

$$(17)\quad F(x_n+th) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_o$$

i predstavlja konačni oblik druge Njutnove interpolacione formule za interpolovanje unazad.

P r i m e r. Koristeći prethodnu tablicu naći log122.

R e š e n j e. Prema prethodnoj tablici je h=5. Stavimo x_n=125, x=122. Kako je $x=x_n+th$, tj. 122=125+5t, to odavde dobijamo

$$t = -\frac{3}{5} = -0{,}6.$$

Ako ove vrednosti zamenimo u formuli (17) dobićemo

$$\log 122 = F(122) = 2{,}09691 + (-0{,}6).0{,}01773 + \frac{(-0{,}6).0{,}4}{2}.(-0{,}00075)$$

$$+ \frac{(-0{,}6).0{,}4.1{,}4}{6} . 0{,}00008 = 2{,}08636.$$

N a p o m e n a. Za izračunavanje vrednosti funkcije F(x) za one vrednosti nezavisne promenljive x koje se nalaze između x_i i x_{i+1} u prvoj Njutnovoj interpolacionoj formuli (14) za x_o se uzima x_i iz tablice koje prethodi veličini x, dok se u drugoj Njutnovoj interpolacionoj formuli (17) za x_n uzima x_{i+1} iz tablice koje sledi iza veličine x, kao što je to uradjeno u prethodna dva primera.

NUMERIČKA INTEGRACIJA

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija neprekidne funkcije $f(x)$, tj. ako je

$$\int f(x)dx = F(x),$$

tada se vrednost odredjenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ dobija pomoću formule

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

koja se naziva Njutn-Lajbnicova formula.

Ovo znači da se izračunavanje odredjenog integrala svodi na nalaženje primitivne funkcije. Medjutim, u praksi se dešava da primitivna funkcija $F(x)$ nije elementarna funkcija, a nekada kada ona to i jeste njeno odredjivanje može biti komplikovano. U ovakvim slučajevima pristupa se numeričkom izračunavanju vrednosti odredjenog integrala pomoću raznih formula koje obezbedjuju odredjen stepen tačnosti.

Mi ćemo se ovde zadržati na dvema formulama za približno izračunavanje vrednosti odredjenog integrala.

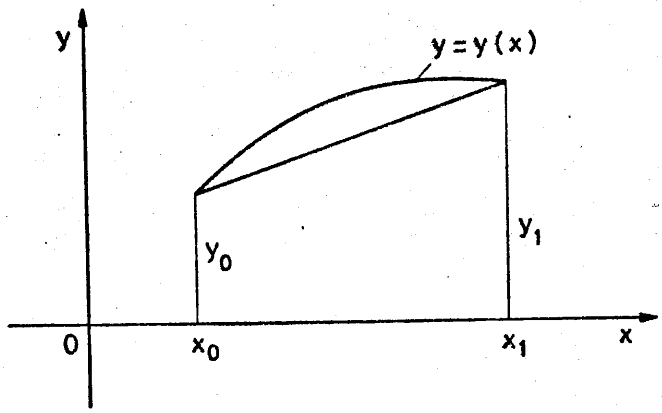
Trapezno pravilo

Pretpostavimo da je $f(x)>0$ za $x_0 \leq x \leq x_1$.

Trapezno pravilo sastoji se u tome da se površina ograničena lukom krive $y=y(x)$, x osom i pravama $x=x_0$ i $x=x_1$ koja je data sa

$$(1) \qquad S = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx$$

zameni površinom trapeza čije su strane: deo x ose izmedju tačaka $x=x_0$ i $x=x_1$, ordinate $y=y_0=y(x_0)$ i $y=y_1=y(x_1)$ i tetiva krive izmedju njenih tačaka koje odgovaraju apscisama x_o i x_1 (videti sliku).



Površina navedenog trapeza je

(2) $$P_1 = \frac{h}{2}(y_o+y_1)$$

gde je $h = x_1-x_o$, $y_o=y(x_o)$, $y_1=y(x_1)$.

Razlika R izmedju integrala $\int\limits_{x_o}^{x_1} y(x)dx$ i površine trapeza je

(3) $$R = \int\limits_{x_o}^{x_1} y(x)dx - \frac{h}{2}(y_o+y_1).$$

Neka je funkcija y(x) dva puta diferencijabilna u intervalu $[a,b]$ koji sadrži tačke x_o i x_1.

Razliku R y(3) posmatraćemo kao funkciju od h, pri čemu je R=R(h). Možemo staviti

(4) $$R(h) = \int\limits_{x_o}^{x_o+h} y(x)dx - \frac{h}{2}[y(x_o)+y(x_o+h)].$$

Prvi i drugi izvod funkcije R(h) po h iz (4) biće

$$R'(h) = y(x_o+h) - \frac{1}{2}[y(x_o)+y(x_o+h)] - \frac{h}{2}\, y'(x_o+h) =$$

$$= \frac{1}{2}[y(x_o+h)-y(x_o)] - \frac{h}{2}\, y'(x_o+h),$$

(5) $$R''(h) = \frac{1}{2}\, y'(x_o+h) - \frac{1}{2}y'(x_o+h) - \frac{h}{2}\, y''(x_o+h) =$$

$$= -\frac{h}{2}\, y''(x_o+h),$$

pri čemu je $R(o) = o$ i $R'(o) = o$

Integraleći (5) po h i primenjujući pri tome teoremu o srednjoj vrednosti odredjenog integrala dobija se

(6) $$R'(h) = R'(0) - \frac{1}{2}\int_o^h t y''(x_o+t)\,dt = -\frac{1}{2}y''(c)\int_o^h t\,dt = -\frac{h^2}{4}\, y''(c)$$

gde je $x_o<c<x_o+h$.

Integraleći sada (6) po h i ponovo primenjujući teoremu o srednjoj vrednosti odredjenog integrala dobija se dalje

(7) $$R(h) = R(0) - \frac{1}{4}\int_o^h t^2 y''(c)\,dt = -\frac{1}{4}y''(c_1)\int_o^h t^2\,dt = -\frac{h^3}{12}y''(c_1)$$

gde je $x_o<c_1<x_o+h$.

Ako je $M_1 = \max\limits_{x_o\leq x\leq x_o+h}|y''(x)|$, tada je prema (7)

(8) $$|R(h)|\leq\frac{h^3}{12}\, M_1.$$

Opšte trapezno pravilo

Za izračunavanje odredjenog integrala

$$\int_a^b y(x)\,dx$$

interval $[a,b]$ podelimo na n jednakih delova $[x_o,x_1],[x_1,x_2],\ldots[x_{n-1},x_n]$ i na svakom od njih primenimo trapeznu formulu (2)

Stavljajući

$$h=\frac{b-a}{n}=x_i-x_{i-1}\quad(i=1,2,\ldots,n)\ \text{i}\ y_i=y(x_i)$$

$(i=0,1,2,\ldots,n)$ imaćemo

$$P=\frac{h}{2}(y_o+y_1)+\frac{h}{2}(y_1+y_2)+\ldots+\frac{h}{2}(y_{n-1}+y_n),\ \text{tj.}$$

$$(9)\quad P=\frac{h}{2}\left[y_o+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+y_n\right].$$

Za odgovarajuću razliku R u ovom slučaju imaćemo

$$(10)\quad R=\int_{x_o}^{x_n}y(x)\,dx-\frac{h}{2}\left[y_o+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+y_n\right]=$$

$$=\frac{h^3}{12}\left[y''(c_1)+y''(c_2)+\ldots+y''(c_n)\right]$$

gde je $x_{i-1}<c_i<x_i\quad(i=1,2,\ldots,n)$.

Ako je $M=\max\limits_{x_o\le x\le x_n}|y''(x)|$, tada je prema (10)

$$(11)\qquad |R|\le\frac{h^3}{12}\cdot nM.$$

Iz $h=\frac{b-a}{n}$ je $n=\frac{b-a}{h}$. Zamenom ove vrednosti za n u (11)

dobijamo

$$(12) \qquad |R| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \cdot M,$$

što predstavlja gornju granicu greške kada se odredjeni integral $\int_a^b y(x)dx = \int_{x_o}^{x_n} y(x)dx$ zameni sa (9). Zato možemo staviti

$$(13) \qquad \int_{x_o}^{x_n} y(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[y_o+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+y_n\right].$$

Formula (13) predstavlja opšte trapezno pravilo za izračunavanje približne vrednosti odredjenog integrala, pri čemu je

$$x_i = x_o+ih,\ x_o=a,\ x_n=b,\ h=\frac{b-a}{n},\ y_i=y(x_i) \quad (i=0,1,2,\ldots,n).$$

P r i m e r. Primenom opšteg trapeznog pravila (13) izračunati približnu vrednost odredjenog integrala

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

R e š e n j e. Stavimo $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ i uzmimo $n = 10$. Imaćemo $h = 0,1$. Prema formuli (13) je

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx \frac{0,1}{2}\left[1+2\left(\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,2}+\ldots+\frac{1}{1,9}\right)+\frac{1}{2}\right] = 0,693771.$$

O c e n a   g r e š k e. Za funkciju $y(x) = \frac{1}{1+x}$ je

$$y''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \text{ pri čemu je } \max_{0\leq x\leq 1}|y''(x)| = \max_{0\leq x\leq 1}\frac{2}{(1+x)^3} = 2 = M.$$

Prema obrascu (12) je $|R| \leq \frac{0,1^2 \cdot 1}{12} \cdot 2 = \frac{0,01}{6} < 0,002.$

Napomenimo da tačna vrednost za I je $I = 0,693147.$

Simpsonovo pravilo

Kada se u odredjenom integralu

(14) $$I = \int_{x_o}^{x_2} y(x)dx$$

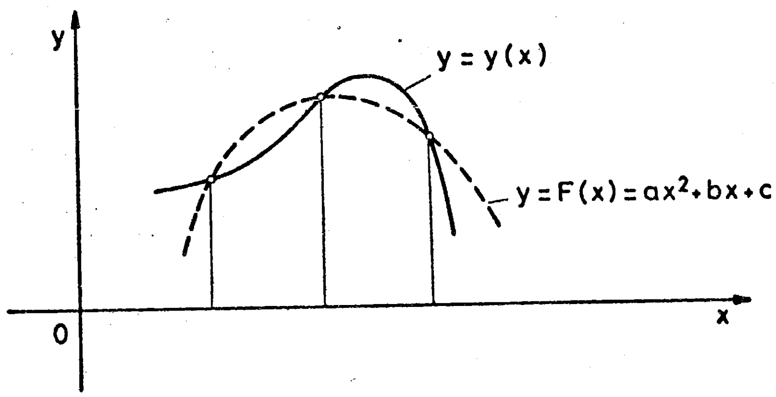
luk krive $y=y(x)$ koja prolazi kroz tačke $M_o(x_o,y_o)$, $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, gde je $x_1=x_o+h$, $x_2=x_o+2h$, zameni lukom parabole $y = F(x) = ax^2+bx+c$ koja takodje prolazi kroz tačke M_o, M_1 i M_2, tada se umesto integrala (14) dobija integral

$$I_1 = \int_{x_o}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_o}^{x_2} (ax^2+bx+c)dx$$

čija vrednost iznosi

(15) $$I_1 = \frac{h}{3}(y_o+4y_1+y_2).$$

Na ovaj način umesto integrala I uzima se njegova približna vrednost I_1. Formula (15) naziva se Simpsonova formula za približno izračunavanje odredjenog integrala (14).



Greška Simpsonove formule (15) iznosi

$$R = \int_{x_o}^{x_2} y(x)dx - \frac{h}{3}(y_o+4y_1+y_2),$$

koju možemo napisati u obliku

$$(16)\quad R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} y(x)dx - \frac{h}{3}\left[y(x_1-h)+4y(x_1)+y(x_1+h)\right].$$

Kada je funkcija $y=y(x)$ četiri puta diferencijabilna u intervalu $[x_o,x_o+2h]$, tada se, slično kao kod trapeznog pravila, polazeći od (16) dokazuje da je

$$(17)\qquad R(h) = -\frac{h^5}{90}\, y^{(4)}(c_1)$$

gde je $x_o<c_1<x_o+2h$. Ako je $M_1 = \max\limits_{x_o\leqslant x\leqslant x_o+2h} |y^{(4)}(x)|$

tada se iz (17) dobija

$$(18)\qquad |R(h)|\leqslant \frac{h^5}{90}\cdot M_1.$$

Opšte Simpsonovo pravilo za približno izračunavanje odredjenog integrala $\int_a^b y(x)dx$, gde je

$$a=x_o,\ b=x_{2m},\ x_i=x_o+ih \quad (i=0,1,2,\dots,2m) \text{ i } h=\frac{b-a}{2m}$$

glasi

$$\int_a^b y(x)dx\approx\frac{h}{3}(y_o+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\dots+\frac{h}{3}(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m})$$

što se može napisati u obliku

$$(19)\quad \int_a^b y(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_o+y_{2m})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2m-2})\right]$$

Za grešku kod opšteg Simpsonovog pravila (19) se dobija

$$|R(h)| \leqslant \frac{h^5}{90}\,.mM$$

gde je $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |y^{(4)}(x)|$.

Ako se uzme prethodni primer, onda primenom opšte Simpsonove formule (19) se dobija

$$\int_o^1 \frac{1}{1+x}dx = \frac{0,1}{3}\left[(1+\frac{1}{2})+4(\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,3}+\frac{1}{1,5}+\frac{1}{1,7}+\frac{1}{1,9})+2(\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8})\right]=$$

$$= 0,69315, \text{ pri čemu je } \quad a=x_o=0,\ b=x_{2m}=x_{10}=1,$$

$$h = \frac{b-a}{2m} = \frac{1-0}{10} = 0,1.$$

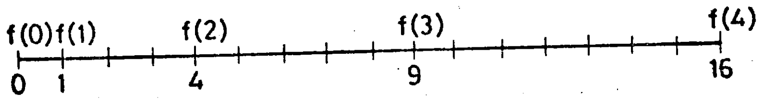
Simpsonovo pravilo daje veću tačnost od trapeznog pravila.

N a p o m e n a. Ukoliko je korak h manji, tj. ukoliko je interval $[a,b]$ podeljen na veći broj jednakih podintervala, tačnost je veća kako kod trapeznog pravila tako i kod Simpsonovog pravila.

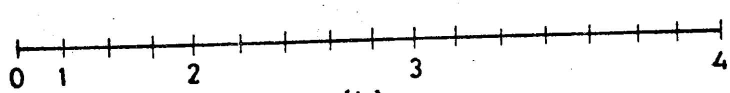
IZRADA NOMOGRAMA

Nomogrami su crteži pomoću kojih se izražava odredjena zavisnost izmedju posmatranih veličina. Oni omogućavaju da se brzo i na jednostavan način odredi vrednost jedne veličine kada su poznate vrednosti ostalih veličina. Pri tome svaki nomogram ima svoju namenu.

Vrednost jedne funkcije f možemo predstaviti na jednoj liniji L na taj način što izmedju vrednosti funkcije f i tačaka linije L uspostavljamo odredjeni obostrano jednoznčni odnos. Linija L na kojoj su predstavljene vrednosti jedne funkcije naziva se funkcijska skala. Na funkcijskoj skali pored tačke kojoj odgovara vrednost funkcije f stavlja se vrednost njenog argumenta. (Uporediti skale na slikama a i b za funkciju $f(x) = x^2$).



(a)



(b)

Funkcijska skala posmatrane funkcije f obično se obeležava istim slovom kojim se obeležava i njen argument. Dužina funkcijske skale odredjuje se u zavisnosti od varijacije posmatrane funkcije f dok njen argument uzima vrednosti iz odredjenog intervala $[a,b]$. Pri tome funkcija f treba da je strogo monotona (strogo rastuća ili strogo opadajuća) u intervalu $[a,b]$.

Pod nomogramom se podrazumeva odredjena veza najčešće izmedju tri ili više funkcijskih skala. Kada su tri ili više datih funkcija vezane odredjenom jednačinom, tada odgovarajući nomogram služi za odredjivanje argumenta jedne posmatrane funkcije pomoću poznatih vrednosti argumenata ostalih funkcija.

Mi ćemo ovde posmatrati tri funkcije $f_1(u)$, $f_2(v)$ i $f_3(w)$ izmedju kojih postoji veza oblika

(1) $$f_1(u)+f_2(v) = f_3(w)$$

ili oblika

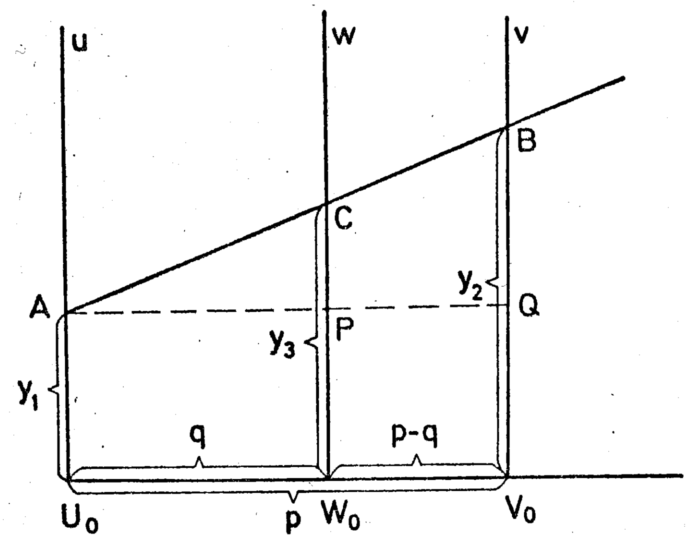
(2) $$f_1(u) = f_2(v)f_3(w).$$

Zadržimo se prvo na zavisnosti izmedju funkcija $f_1(u)$, $f_2(v)$ i $f_3(w)$ koja je izražena jednačinom (1).

Neka su prave u,v i w funkcijske skale za funkcije $f_1(u)$, $f_2(v)$ i $f_3(w)$ i neka su one postavljene paralelno u jednoj ravni. Neka je p rastojanje skale v od skale u, a q rastojanje skale w od skale u. Neka je m_1 jedinična dužina za skalu u, m_2 jednačina dužina za skalu v, a m_3 jedinična dužina za skalu w.

Neka su U_o, V_o, W_o početne tačke na skalama u,v,w. Tada odredjenim vrednostima argumenata u,v,w funkcija $f_1(u)$, $f_2(v)$ i $f_3(w)$ odgovaraju na skalama u,v,w tačke A,B,C (slika 1) čija su rastojanja od početnih tačaka U_o,V_o,W_o redom

(3) $$y_1 = m_1f_1(u),\ y_2 = m_2f_2(v),\ y_3 = m_3f_3(w).$$



Sl.1

Iz sličnosti trouglova AQB i APC (slika 1) je

$$p:(y_2-y_1) = q:(y_3-y_1)$$

odakle se dobija veza

$$y_1(p-q)+y_2q = y_3p$$

koja se, s obzirom na (3), može napisati u obliku

$$m_1(p-q)f_1(u)+m_2qf_2(v) = m_3pf_3(w).$$

Posle deljenja sa m_3p poslednja jednačina glasi

$$\frac{m_1(p-q)}{m_3p} f_1(u) + \frac{m_2q}{m_3p} f_2(v) = f_3(w) \tag{4}$$

Da bi jednačina (4) bila identična sa jednačinom (1), mora biti

$$\frac{m_1(p-q)}{m_3p} = 1, \quad \frac{m_2q}{m_3p} = 1,$$

tj.

$$m_1(p-q) = m_3p, \quad m_2q = m_3p, \tag{5}$$

odakle proizilazi veza

$$m_1(p-q) = m_2q$$

koju možemo napisati u obliku

$$(6) \qquad q:(p-q) = m_1:m_2.$$

Iz odnosa (6) vidi se način na koji se odredjuje položaj skale w u odnosu na dato rastojanje p izmedju skala u i v i izabranih jediničnih duži m_1 i m_2 za ove skale.

Ako prvu jednačinu iz (5) pomnožimo sa m_2, a drugu sa m_1 i tako dobijene jednačine saberemo, dobićemo jednačinu

$$m_1m_2p = (m_1+m_2)m_3p,$$

odakle nalazimo

$$(7) \qquad m_3 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

Pomoću obrasca (7) odredjuje se jedinična duž za skalu w u odnosu na izabrane jedinične duži m_1 i m_2 za skale u i v.

Imajući u vidu (7), sada se jednačine (3) mogu napisati u obliku

$$(8) \qquad y_1 = m_1f_1(u), \; y_2 = m_2f_2(v), \; y_3 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} f_3(w)$$

pomoću kojih odredjujemo ordinate y_1, y_2, y_3 za funkcijske skale u,v,w.

Funkcijske skale u,v,w čiji je položaj odredjen na osnovu relacije (6) i na kojima su ordinate y_1, y_2, y_3 dobijene pomoću jednačina (8) predstavlja jedan nomogram za funkcije $f_1(u)$,

$f_2(v)$, $f_3(w)$ vezane jednačinom (1). Pomoću ovoga nomograma, poznavajući argumente bilo kojih dveju posmatranih funkcija, možemo odrediti odgovarajući argument treće funkcije u jednačini (1). Ovo postižemo na taj način što kroz dve tačke na dvema funkcijskim skalama koje odgovaraju datim vrednostima argumenata povlačimo pravu liniju. U preseku ove prave i treće funkcijske skale nalazimo traženi argument treće funkcije.

P r i m e r 1. Konstruišimo nomogram za funkciju

$$2u + v^2 = w \tag{9}$$

ako se zna da se promenljiva u menja u granicama $0 \leq u \leq 12$, a promenljiva v u granicama $0 \leq v \leq 7$.

R e š e n j e. Funkcija (9) je oblika (1) gde je

$$f_1(u) = 2u,\ f_2(v) = v^2,\ f_3(w) = w.$$

Ordinate (8) u ovom slučaju imaju vrednosti

$$y_1 = m_1.2u,\ y_2 = m_2.v^2,\ y_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} . w. \tag{10}$$

Ako se uzme $m_1 = 5\text{mm}$, $m_2 = 2\text{mm}$, tada će dužina skale u biti $5.2u = 10u = 10.12 = 120\text{mm}$ pošto promenljiva u uzima broj 12 kao najveću vrednost, a dužina skale v biće $2v^2 = 2.7^2 = 98\text{mm}$ pošto promenljiva v uzima broj 7 kao najveću vrednost.

Rastojanja izmedju skala, prema (6), uzimaju se sada u odnosu

$$q:(p-q) = 5:2,$$

dok za jediničnu dužinu m_3 za skalu w, prema (7), imamo

$$m_3 = \frac{5.2}{5+2} = \frac{10}{7}.$$

Jednačine (10) možemo sada napisati u obliku

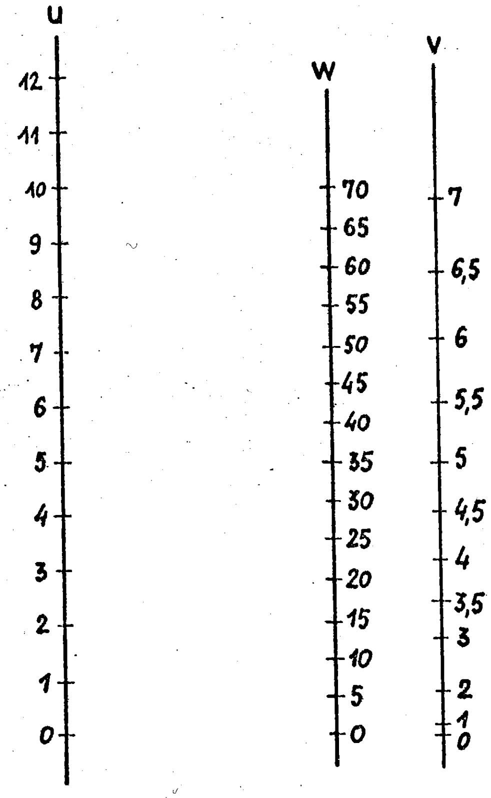
$$y_1 = 10u,\ y_2 = 2v^2,\ y_3 = \frac{10}{7}w.$$

Vrednosti datih argumenata (promenljivih) u,v,w upisujemo pored tačaka na odgovarajućim skalama čije položaje odredjujemo ordinatama y_1, y_2, y_3 na skalama u,v,w računatim od početnih tačaka U_o, V_o, W_o tih skala a na osnovu sledećih tablica

u	$y_1=10u$
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90
10	100
11	110
12	120

v	$y_2=2v^2$
0	0
1	2
2	8
2,5	12,5
3	18
3,5	24,5
4	32
4,5	40,5
5	50
5,5	60,5
6	72
6,5	84,5
7	98

2	$y_3=\frac{10}{7}w$
0	0
5	7,1
10	14,3
15	21,4
20	28,6
25	35,7
30	42,8
35	50,0
40	57,1
45	64,3
50	71,1
55	78,6
60	85,7
65	92,8
70	100,0



Sl.2

Traženi nomogram prikazan je na slici 2. Pomoću njega možemo odrediti argument treće funkcije ako znamo argumente bilo koje dve funkcije iz jednačine (9). Tako, na primer, za $u=10$, $v=5$ nalazimo $w=45$. Ako je $u=8$, $w=25$, dobićemo $v=3$.

Posmatrajmo sada funkciju oblika (2), koju možemo napisati u obliku

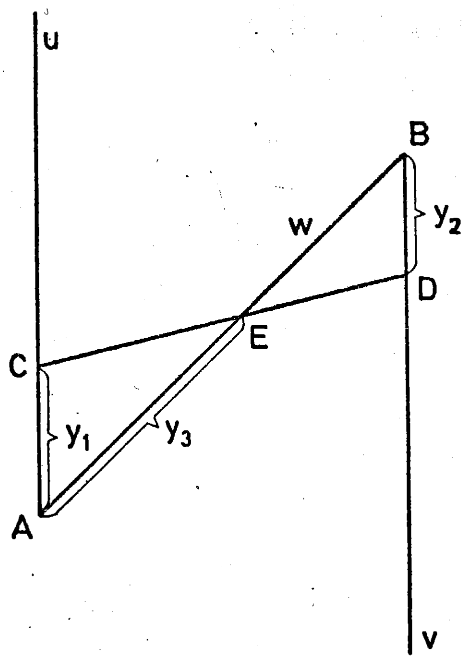
$$(11) \qquad \frac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w), \qquad (f_2(v) \neq 0).$$

Ako su funkcije $f_1(u)$, $f_2(v)$, $f_3(w)$ pozitivne, tada logaritmovanjem jednačine (2) dobijamo jednačinu

$$\log f_1(u) = \log f_2(v) + \log f_3(w),$$

koja je oblika jednačine (1), pošto je jedna funkcija predstavljena kao zbir drugih dveju funkcija, pa za ove funkcije možemo konstruisati nomogram na već opisani način.

Medjutim, za funkciju oblika (2), odnosno oblika (11), može se konstruisati nomogram tako da se za skale u i v uzmu dve paralelne i suprotno orijentisane poluprave, a za skalu w uzme prava koja prolazi kroz početne tačke A i B skala u i v (slika 3).



sl. 3

Neka je rastojanje AB=a. Na osnovu sličnosti trouglova AEC i BDE (slika 3) imamo

$$y_1 : y_2 = y_3 : (a-y_3),$$

tj. imamo vezu

$$ay_1 - y_1 y_3 = y_2 y_3,$$

koja se može napisati u obliku

$$y_3(y_1+y_2) = y_1 a,$$

odakle se dobija

$$(12) \qquad y_3 = \frac{y_1}{y_1+y_2} \cdot a.$$

Kako je, prema (3), $y_1 = m_1 f_1(u)$, $y_2 = m_2 f_2(v)$, to se (12) može napisati u obliku

$$y_3 = \frac{m_1 f_1(u)}{m_1 f_1(u)+m_2 f_2(v)} \cdot a.$$

Ako brojilac i imenilac poslednje jednačine podelimo sa $m_1 f_2(v)$, dobićemo vezu

$$y_3 = \frac{\frac{f_1(u)}{f_2(v)}}{\frac{f_1(u)}{f_2(v)}+\frac{m_2}{m_1}} \cdot a$$

koja se, s obzirom na (11) može napisati u obliku

$$(13) \qquad y_3 = \frac{f_3(w)}{f_3(w)+\frac{m_2}{m_1}} .a.$$

Pomoću obrasca (13) izračunavaju se ordinate y_3 na skali w.

Prema tome, za odredjivanje ordinata y_1, y_2, y_3 za funkcijske skale, kada se radi o funkciji oblika (11), služe jednačine

$$(14) \quad y_1 = m_1 f_1(u), \quad y_2 = m_2 f_2(v), \quad y_3 = \frac{f_3(w)}{f_3(w)+\frac{m_2}{m_1}} \cdot a.$$

P r i m e r 2. Konstruisati nomogram za funkciju

$$\frac{u}{v} = w \tag{15}$$

ako se zna da se promenljiva u menja u granicama $0 \leq u \leq 600$, a promenljiva v u granicama $0 \leq v \leq 15$.

R e š e n j e. Za dužinu skale w uzmimo $a = 100$mm. Za jediničnu dužinu za skalu u uzmimo $m_1 = 0,25$ mm, a za skalu v uzmimo jediničnu dužinu $m_2 = 10$mm. U ovom slučaju je

$\frac{m_2}{m_1} = \frac{10}{0,25} = 40$. Kako je, prema (15), $f_1(u) = u$, $f_2(v) = v$, $f_3(v) = w$, to jednačine (14) za odredjivanje ordinata y_1, y_2, y_3 u ovom slučaju glase

$$y_1 = 0,25u,\ y_2 = 10v,\ y_3 = \frac{100w}{w + 40}. \tag{16}$$

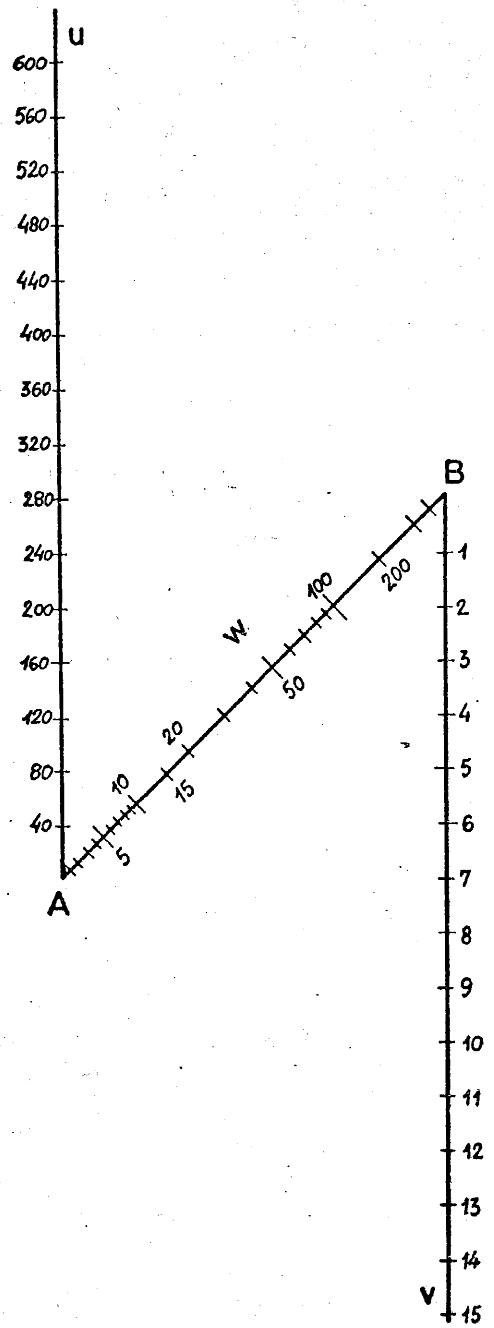
Vrednosti ordinata y_1, y_2, y_3 iz (16) u zavisnosti od argumenata (promenljivih) u, v, w date su u sledećoj tabeli:

u	$y_1 = 0,25\ u$
0	0
40	10
80	20
120	30
160	40
200	50
240	60
280	70
320	80
360	90
400	100
440	110
480	120
520	130
560	140
600	150

v	$y_2 = 10\ v$
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90
10	100
11	110
12	120
13	130
14	140
15	150

w	$y_3 = \frac{100w}{w + 40}$
0	0
1	2,4
2	4,8
3	7,0
4	9,1
5	11,1
6	13,0
7	14,9
8	16,7
9	18,4
10	20,0
15	27,3
20	33,3
30	42,9
40	50,0
50	55,6
60	60,0
70	63,6
80	66,7
90	69,2
100	71,4
200	83,3
500	92,6
1000	96,2

Ove ordinate ucrtane su na odgovarajućim funkcijskim skalama u,v,w (slika 4) i to ordinate y_1 na skali u počev od tačke A, ordinate y_2 na skali v počev od tačke B i ordinate y_3 na skali w počev od tačke A. Pored ovih ordinata ubeležene su vrednosti argumenata u,v,w funkcija $f_1(u)=u$, $f_2(v)=v$, $f_3(w)=w$, čime je konstruisan nomogram za funkciju (15).



sl. 4

Pomoću ovoga nomograma (slika 4), na primer, za u=260, w=60 dobija se v=4,3.

METODA NAJMANJIH KVADRATA

Uočimo jedan predmet nepoznate težine x. Neka su merenja nepoznate težine x datog predmeta dala n rezultata: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Za jednu nepoznatu x dobili smo dakle n vrednosti koje ne moraju biti medjusobno jednake. Različiti rezultati pri tome pojavili su se usled nesavršenosti naših merenja. Pri svakom merenju mogu se učiniti greške koje mogu biti grube, sistematske i slučajne. Grube i sistematske greške mogu se uglavnom otkloniti, ali ostaju slučajne greške. Zbog toga izmedju prave težine x datog predmeta i rezultata merenja $x_1, x_2, \dots, x_n$ nastaju odstupanja. Ako ova odstupanja označimo redom sa $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ imaćemo n jednačina

$$x-x_1 = \varepsilon_1$$
$$x-x_2 = \varepsilon_2$$
$$\text{-------}$$
$$x-x_n = \varepsilon_n$$

Za izračunavanje prave težine x koristićemo Principnajmanjih kvadrata. Ovaj princip postavlja uslov da zbir kvadrata odstupanja bude najmanji. U našem slučaju treba da bude

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = \text{minimum},$$

što znači treba da bude

$$f(x) = (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + \dots + (x-x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x-x_i)^2 = \min.$$

Funkcija f(x) u ovom slučaju ima minimum za onu vrednost x za koju je prvi izvod funkcije f(x) jednak nuli, što znači x treba odrediti iz uslova

$$f'(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} (x-x_i) = 0.$$

odakle se dobija

$$\sum_{i=1}^{n}(x-x_i) = 0,$$

tj.

$$x-x_1+x-x_2+\ldots+x-x_n = 0,$$

a odavde

$$nx = x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

odakle je

$$x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Dakle, prema principu najmanjih kvadrata za pravu vrednost težine uočenog predmeta treba uzeti aritmetičku sredinu svih merenjima dobijenih vrednosti.

Jedan od problema koji se rešava metodom najmanjih kvadrata (korišćenjem principa najmanjih kvadrata) sastoji se u sledećem.

Dato je n jednačina

$$f_i(x,y,z,\ldots) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

sa m nepoznatih $x,y,z,\ldots$, pri čemu je $n>m$. Naći one vrednosti $a_1,a_2,\ldots,a_m$ nepoznatih $x,y,z,\ldots$ tako da vrednosti funkcija

(1) $$f_i(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \varepsilon_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

najmanje odstupaju od nule, tj. da prema principu najmanjih kvadrata bude

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2 = \min.$$

Prema jednačinama (1) treba dakle odrediti vrednosti $a_1, a_2, \dots, a_m$ nepoznatih $x, y, z, \dots$ za koje funkcija

$$(2) \qquad F(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

ima minimum.

Vrednosti $a_1, a_2, \dots, a_m$ za koje funkcija F data sa (2) ima minimum odredićemo iz jednačina

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \dots, \ \frac{\partial F}{\partial a_m} = 0.$$

Kako je prema (2)

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, a_2, \dots, a_m)\frac{\partial f_i}{\partial a_1} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, a_2, \dots, a_m)\frac{\partial f_i}{\partial a_2} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_m} = 2\sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, a_2, \dots, a_m)\frac{\partial f_i}{\partial a_m} = 0,$$

to se jednačine (3) svode na sistem jednačina

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, a_2, \dots, a_m)\frac{\partial f_i}{\partial a_1} = 0,$$

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, a_2, \dots, a_m)\frac{\partial f_i}{\partial a_2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(a_1, a_2, \dots, a_m)\frac{\partial f_i}{\partial a_m} = 0.$$

Sistem jednačina (3), odnosno (4), predstavlja jedan sistem od m jednačina sa m nepoznatih $a_1, a_2, \dots, a_m$ i naziva se <u>normalni sistem jednačina</u>.

Mi ćemo se ovde zadržati na jednom posebnom slučaju primene metode najmanjih kvadrata.

Neka izmedju dveju veličina x i y postoji izvesna zavisnost i neka je na bilo koji način ustanovljeno da vrednostima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ veličine x odgovaraju redom vrednosti $y_1, y_2, \ldots, y_n$ veličine y.
Neka je dalje data funkcija odredjenog oblika

$$(5) \qquad f(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0,$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_m$ parametri. Parametre $a_1, a_2, \ldots, a_m$ odredimo pri tome tako da jednačina (5) bude u smislu principa najmanjih kvadrata najbolje moguće zadovoljena vrednostima svih parova (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, tj. da veličine

$$f(x_i, y_i; a_1, \ldots, a_m) = \varepsilon_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

najmanje odstupaju od nule, odnosno da bude

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = \min.$$

U ovom slučaju treba dakle da je

$$(6) \quad F(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i, y_i; a_1, a_2, \ldots, a_m) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = \min.$$

Da bi funkcija F data sa (6) imala minimum, parametre $a_1, a_2, \ldots, a_m$ treba odrediti iz jednačina

$$(7) \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial a_m} = 0.$$

Kako je prema (6)

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i; a_1, a_2, \ldots, a_m)\frac{\partial f}{\partial a_1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i;a_1,a_2,\dots,a_m)\frac{\partial f}{\partial a_2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_m} = 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i;a_1,a_2,\dots,a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m},$$

to se jednačine (7) svode na sistem jednačina

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i;a_1,a_2,\dots,a_m)\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0\\ &\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i;a_1,a_2,\dots,a_m)\frac{\partial f}{\partial a_2} = 0\\ &\text{-----------------------------------}\\ &\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i;a_1,a_2,\dots,a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m} = 0 \end{aligned}$$

koji predstavlja normalni sistem jednačina za nalaženje parametara $a_1,a_2,\dots,a_m$.

Kakvu funkcionalnu vezu izmedju veličina x i y treba uzeti zavisi od vrednosti $y_1,y_2,\dots,y_n$ promenljive y koje odgovaraju vrednostima $x_1,x_2,\dots,x_n$ promenljive x. U praksi se najčešće uzimaju funkcije oblika

1) $y = ax+b$ (linearna funkcija čiji grafik je prava)
2) $y=ax^2+bx+c$ (kvadratna funkcija - polinom drugog stepena čiji grafik je parabola)
3) $y = a+\frac{b}{x}$ (čiji grafik je hiperbola)
4) $y = ax^b$ (opšti stepen)
5) $y = ae^{bx}$ (eksponencijalna funkcija)
6) $y = a+b\cos wx + c\sin wx$, gde je w poznato.

Kada su nam poznate vrednosti $y_1,y_2,\dots,y_n$ promenljive y koje odgovaraju vrednostima $x_1,x_2,\dots,x_n$ promenljive x, prvo treba u koordinatnoj ravni OXY predstaviti tačke $M_i(x_i,y_i)$, $i=1,2,\dots,n$

koje odgovaraju parovima (x_i, y_i) i zatim u zavisnosti od položaja tačaka M_i izabrati oblik funkcije. Ako se tačke $M_1, M_2, \dots, M_n$ rasporedjuju približno oko neke prave, tada za funkcionalnu vezu izmedju promenljivih x i y treba uzeti linearnu funkciju, tj. funkciju

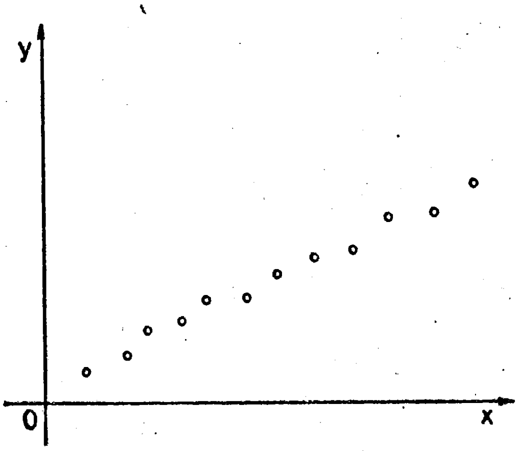
$$y = ax + b$$

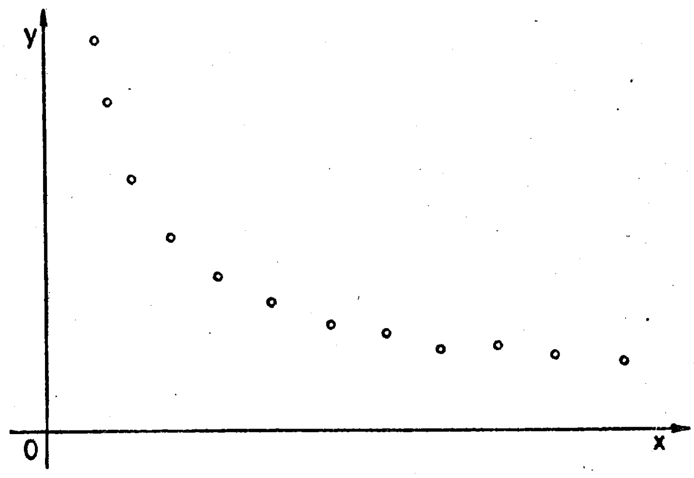
pri čemu parametre a i b treba odrediti metodom najmanjih kvadrata.

Ako položaj tačaka M_i u ravni odgovara više nekoj hiperboli onda za vezu izmedju promenljivih x i y treba uzeti funkciju

$$y = a + \frac{b}{x},$$

i tako dalje.





Da li je nadjena funkcionalna veza izmedju promenljivih x i y dobra, tj. da li se ona može prihvatiti, utvrdjuje se na sledeći način.

Neka je

(9) $$f(x,y) = 0$$

nadjena funkcionalna veza izmedju promenljivih x i y. Ako u levoj strani jednačine (9) umesto x,y stavimo redom x_1,y_1; x_2,y_2;...;x_n,y_n dobićemo

$$f(x_1,y_1) = \varepsilon_1$$
$$f(x_2,y_2) = \varepsilon_2$$
$$\text{-------------}$$
$$f(x_n,y_n) = \varepsilon_n$$

gde su $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m$ odstupanja od nule leve strane jednačine (9).

Stavimo

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2}{n}}$$

i označimo sa ε_{max} najveći od brojeva $|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|,\ldots,|\varepsilon_n|$. Ako je pri tome

(10) $$\varepsilon_{max}<3S,$$

nadjena funkcionalna veza (9) izmedju x i y prihvata se kao dobra, a ako je

$$\varepsilon_{max}\geqslant 3S,$$

nadjena funkcionalna veza izmedju x i y se odbacuje. U ovom poslednjem slučaju treba tražiti i drugu funkcionalnu vezu.

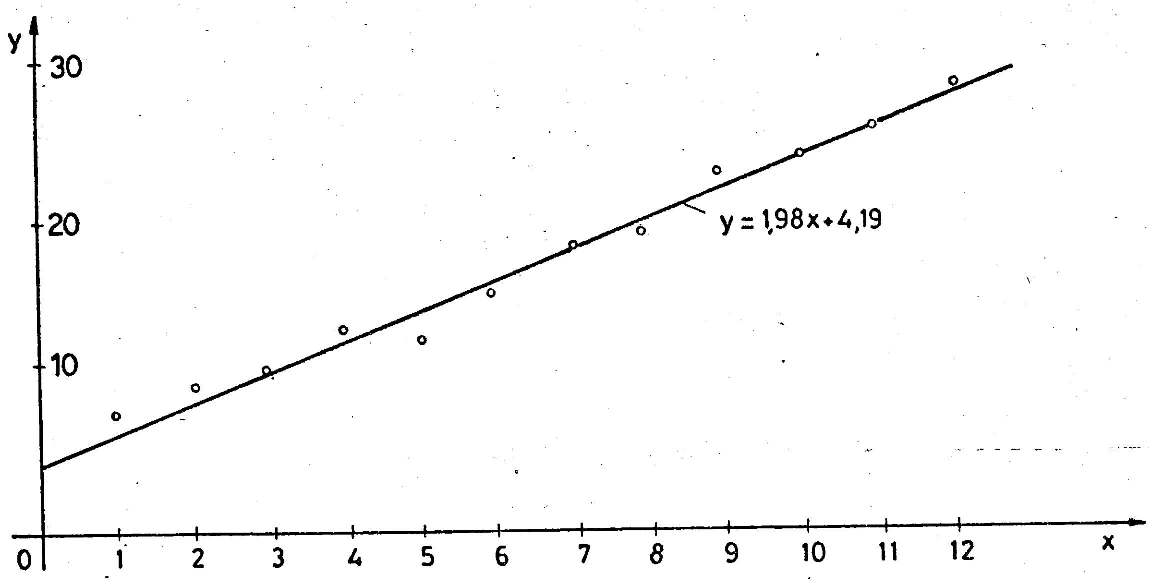
Navedeni kriterijum za ocenjivanje nadjene funkcionalne veze izmedju promenljivih x i y može se koristiti budući da su odstupanja $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ mala i pri čemu su neka od njih pozitivna a neka negativna, da ona podležu zakonu normalne raspodele i da je njihova aritmetička sredina približno jednaka nuli kada se radi o većem broju podataka. Njegova upotreba dolazi u obzir u slučaju kada raspolažemo sa većim brojem podataka za x i y i ne može se koristiti kada je n<10.

Kada je $n<10$, nadjena veza izmedju x i y ocenjuje se na osnovu jačeg ili slabijeg slaganja datih podataka $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i teorijski dobijenih podataka $y(x_1)$, $y(x_2), \ldots, y(x_n)$ iz dobijene veze $y = y(x)$.

Od dve funkcionalne veze za x i y koje smo odredili metodom najmanjih kvadrata, bolja je ona za koju je zbir kvadrata odstupanja od datih podataka manji.

P r i m e r 1. U odredjenom pravcu počev od tačke 0 ispitivan je sadržaj jedne korisne komponente y u zavisnosti od rastojanja x. Rezultati tih ispitivanja prikazani su u sledećoj tabeli.

Rastojanje u dekametrima x_i	Sadržaj odredjene komponente u gramima po toni rude y_i
1	7
2	9
3	10
4	13
5	12
6	15
7	18
8	19
9	23
10	24
11	26
12	29



Ako u koordinatnoj ravni OXY ucrtamo tačke M_i koje odgovaraju parovima (x_i,y_i), tj. tačke $M_i(x_i,y_i)$, tada vidimo da se one rasporedjuju oko jedne prave. Zato možemo uzeti da izmedju promenljivih x i y postoji linearna zavisnost oblika

(11) $$y = ax+b,$$

gde ćemo parametre a i b odrediti metodom najmanjih kvadrata. U tom smislu jednačinu (11) napišimo u obliku

(12) $$ax+b-y = 0,$$

tj. u obliku

$$f(x,y;a,b) = ax+b-y = 0$$

i parametre a i b odredimo, prema (6), tako da bude

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i+b-y_i)^2 = \min.$$

U ovom slučaju, prema (8) normalni sistem jednačina za nalaženje parametara a i b glasi

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i = 0$$

(13)

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i) = 0,$$

koji se može napisati u obliku

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

(14)

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb = \sum_{i=1}^{n}y_i.$$

Sistem (14) nam nalaže da obrazujemo radnu tabelu oblika

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	7	1	7	49
2	9	4	18	81
3	10	9	30	100
4	13	16	52	169
5	12	25	60	144
6	15	36	90	225
7	18	49	126	324
8	19	64	152	361
9	23	81	207	529
10	24	100	240	576
11	26	121	286	676
12	29	144	348	841
Σ: 78	205	650	1616	4075

Kako je broj podataka $n=12$ i kako je

$$\sum_{i=1}^{12}x_i = 78, \quad \sum_{i=1}^{12}x_i^2 = 650, \quad \sum_{i=1}^{12}y_i = 205, \quad \sum_{i=1}^{12}x_iy_i = 1616,$$

to se sistem (14) svodi na

$$650a + 78b = 1616$$
$$78a + 12b = 205$$

odakle se dobija

$$a = 1{,}98, \quad b = 4{,}19.$$

Zamenom nadjenih vrednosti za a i b u (11) dobijamo traženu linearnu vezu

$$(15) \qquad y = 1{,}98x + 4{,}19$$

izmedju promenljivih x i y.

Grafik funkcije (15) prikazan je na prethodnoj slici.

Da bismo našli odstupanja datih podataka od nadjene funkcionalne zavisnosti, jednačinu (15) napišimo u obliku

$$1{,}98x + 4{,}19 - y = 0$$

i u njenoj levoj strani uvrstimo redom parove datih podataka (x_i, y_i).

Imamo

x_i	y_i	$1{,}98x_i+4{,}19-y_i = \varepsilon_i$	ε_i^2
1	7	-0,83	0,6889
2	9	-0,85	0,7225
3	10	0,13	0,0169
4	13	-0,89	0,7921
5	12	2,09	4,3681
6	15	1,07	1,1449
7	18	0,05	0,0025
8	19	1,03	1,0609
9	23	-0,99	0,9801
10	24	-0,01	0,0001
11	26	-0,03	0,0009
12	29	-1,05	1,1025
Σ:		-0,28	10,8804

Iz prethodne tabele vidimo da je aritmetička sredina odstupanja

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \varepsilon_i}{12} = -0{,}023, \text{ da je } \varepsilon_{max} = 2{,}09, \ S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12} \varepsilon_i^2}{12}} = 0{,}95$$

$3S = 2{,}85$, što znači da je $\varepsilon_{max} < 3S$, pa na osnovu (10) sledi da se nadjena funkcionalna veza (15) izmedju promenljivih x i y može prihvatiti kao dobra.

Nadjena zavisnost (15) izmedju veličina x i y omogućava nam da odredimo iznos posmatrane komponente na nekom rastojanju od tačke 0 koje nije navedeno u datoj tabeli. Tako, na primer, za $x=3{,}5$ iz (15) dobijamo $y=11{,}12$.

U prethodnoj tabeli ε_i predstavljaju odstupanja izračunatih vrednosti $y(x_i)$ pomoću jednačine (15) i vrednosti y_i ustanovljenih merenjem. Ona nam govore da izmedju podataka x_i promenljive x i podataka y_i promenljive y ne postoji potpuna linearna zavisnost, već linearna zavisnost do odredjene mere koja je izražena jednačinom (15).

U kojoj meri postoji linearna zavisnost izmedju podataka x_i i y_i ustanovljava se pomoću <u>koeficijenta linearne korelacije</u>.

Posmatrajmo medjuzavisne podatke x_i i y_i $(i=1,2,\dots,n)$.

Sa $\bar{x}$ odnosno sa $\bar{y}$ označimo aritmetičke sredine za podatke x_i odnosno za podatke y_i, što znači

(16) $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Sa σ_x^2 odnosno σ_y^2 označimo varijanse za podatke x_i odnosno za podatke y_i, što znači

(17) $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$

Posle razvijanja desnih strana y (17), varijanse σ_x^2 i σ_x^2 mogu se napisati u obliku

(18) $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\bar{y}^2.$

Najzad, sa μ_{11} označimo kovarijansu za podatke x_i i y_i, što znači

(19) $\mu_{11} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}).$

Posle razvijanja desne strane y (19), kovarijansa μ_{11} može se napisati u obliku

(20) $\mu_{11} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\bar{y}$

Veličina

(21) $r = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x\sigma_y}$

naziva se koeficijent linearne korelacije za podatke x_i i y_i $(i=1,2,\dots,n)$, za koji važi ograničenje

$$-1\leq r\leq 1$$

Ako izmedju podataka x_i i y_i postoji potpuna linearna zavisnost izražena linearnom jednačinom

(22) $y = ax + b$

tada je $r = -1$ ako je $a<0$ i $r = 1$ ako je $a>0$. Važi i obrnuto, tj. ako za podatke x_i i y_i koeficijent linearne korelacije izračunat pomoću obrasca (21) iznosi 1 ili -1, tada izmedju njih postoji potpuna linearna zavisnost izražena u obliku jednačine (22), pri čemu je u njoj $a>0$ kada je $r=1$ i $a<0$ kada je $r=-1$.

U slučaju kada je

$$-1<r<1,$$

tada se kaže da izmedju podataka x_i i y_i, odnosno izmedju veličina x i y postoji linearna zavisnost u odredjenoj meri. Pri tome je linearna zavisnost:

uočljiva kada je $0,6\leq|r|<0,7$;

dovoljno uočljiva kada je $0,7\leq|r|<0,8$;

jaka kada je $0,8\leq|r|<0,9$;

vrlo jaka kada je $0,9\leq|r|<0,95$;

veoma jaka kada je $0,95\leq|r|<1$.

Za $r=-1$ ili $r=1$ izmedju podataka x_i i y_i postoji strogo linearna zavisnost, odnosno potpuna linearna zavisnost. Kada je $r<0$ zavisnost je protivsmerna, a kada je $r>0$ zavisnost je istosmerna.

U našem primeru 1, prema (16) je

$\bar{x}=\frac{1}{12}\cdot 78 = 6,5$; $\bar{y}=\frac{1}{12}\cdot 205 = 17,08$. Prema (18) je

$\sigma_x^2=\frac{1}{12}\cdot 650-6,5^2 = 11,9167$ odakle je $\sigma_x = 3,45$;

$\sigma_y^2=\frac{1}{12}\cdot 4075-17,08^2 = 47,8569$ odakle je $\sigma_y = 6,91$.

Dalje, prema (20) je $\mu_{11} = \frac{1}{12} \cdot 1616 - 6,5 \cdot 17,08 = 23,6467.$

Prema obrascu (21) za koeficijent linearne korelacije r sada dobijamo

$$r = \frac{23,6467}{3,45 \cdot 6,91} = 0,992.$$

Dobijena vrednost za koeficijent linearne korelacije $r=0,992$ govori nam da izmedju sadržaja odredjene komponente y (grama po toni rude) i rastojanja x u odredjenom pravcu od tačke 0 izraženog u dekametrima postoji veoma jaka linearna zavisnost data jednačinom (13). Ova zavisnost je istosmerna.

P r i m e r 2. Posle obavljenih izvesnih radova na jednom terenu došlo je do postepenog sleganja zemljišta. Merenja relativne visine u cm odredjene tačke dala su sledeće rezultate:

Godina x_i	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
Visina y_i	100	70	50	42	37	35	33	32	31

Na osnovu ovih podataka odrediti izmedju veličina x i y vezu oblika

$$y = a + \frac{b}{x} \tag{23}$$

a zatim pomoću dobijene veze izračunati kolika se relativna visina te tačke može očekivati u 1978. godini.

R e š e n j e. Jednačinu (23) napišimo u obliku

$$ax + b - xy = 0,$$

tj. u obliku

$$f(x,y;a,b) = ax + b - xy = 0$$

i odredimo parametre a i b tako da bude

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i+b-x_iy_i)^2 = \min$$

Prema (8), normalni sistem jednačina za nalaženje parametara a i b u ovom slučaju glasi

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i+b-x_iy_i)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i+b-x_iy_i) = 0,$$

koji se može napisati u obliku

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2+b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2y_i$$

(24)

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i+nb = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Godinu 1966 označimo sa 1, 1967 sa 2,..., 1974 sa 9. Imamo sledeću tabelu:

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	100	1	100	100
2	70	4	140	280
3	50	9	150	450
4	42	16	168	672
5	37	25	185	925
6	35	36	210	1260
7	33	49	231	1617
8	32	64	256	2048
9	31	81	279	2511
Σ:45	430	285	1719	9863

Sistem (24) sada glasi

$$285a + 45b = 9863$$
$$45a + 9b = 1719,$$

čije je rešenje

$$a = 21{,}13, \quad b = 85{,}33.$$

Zamenom nadjenih vrednosti za a i b u (23) dobijamo traženu funkcionalnu vezu izmedju veličina x i y, tj.

$$(25) \qquad y = 21{,}13 + \frac{85{,}33}{x}.$$

Kolika se relativna visina posmatrane tačke može očekivati u 1978. godini dobićemo kada u (25) stavimo x=13. Imamo

$$y_{13} = 21{,}13 + \frac{85{,}33}{13} = 27{,}69 \text{ cm}.$$

Jednačinom (25) data je jedna krivolinijska zavisnost izmedju vremena x i relativne visine y uočene tačke. U kojoj meri se eksperimentalni podaci y_i slažu sa podacima $y(x_i)$ izračunatim iz jednačine (25) za $x=x_i$ ustanovljava se pomoću <u>indeksa krivolinijske zavisnosti</u>.

Neka jednačina y = f(x) koju ćemo napisati u obliku

$$(26) \qquad y = y(x)$$

predstavlja ustanovljenu krivolinijsku zavisnost izmedju promenljivih x i y dobijenu na osnovu eksperimentalnih podataka x_i i y_i $(i=1,2,\dots,n)$. Tada se veličina

$$(27) \qquad \rho = \sqrt{1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y(x_i)-y_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i-\bar{y})^2}}$$

naziva indeks krivolinijske zavisnosti. Na osnovu veličine indeksa ρ utvrdjujemo u kojoj meri izmedju podataka x_i i y_i postoji krivolinijska zavisnost izražena jednačinom (26).

Za indeks krivolinijske zavisnosti ρ važi ograničenje $0 \leq \rho \leq 1$.

Kod primera 2 je $\bar{y} = \frac{1}{9} \cdot 430 = 47{,}78$. Nadjena krivolinijska zavisnost izmedju x i y, prema (25) je

$$y(x) = 21{,}13 + \frac{85{,}33}{x}$$

Dalje dobijamo:

x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i)-y_i$	$(y(x_i)-y_i)^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$
1	100	106,46	6,46	41,7316	52,22	2726,9284
2	70	63,80	-6,20	38,4400	22,22	439,7284
3	50	49,57	-0,43	0,1849	2,22	4,9284
4	42	42,46	0,46	0,2116	-5,78	33,4084
5	37	38,20	1,20	1,4400	-10,78	116,2084
6	35	35,35	0,35	0,1225	-12,78	163,3284
7	33	33,32	0,32	0,1024	-14,78	218,4484
8	32	31,80	-0,20	0,0400	-15,78	249,0084
9	31	30,61	-0,39	0,1521	-16,78	281,5684
Σ:				82,4251		4287,5556

Prema (27), sada je

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{82{,}4251}{4287{,}5556}} = 0{,}990.$$

Dobijena vrednost za ρ ukazuje da izmedju podataka x_i i y_i $(i=1,2,\ldots,9)$ navedenih u primeru 2 postoji veoma jaka zavisnost izražena jednačinom (25).

Funkcija $y = y(x)$ kojom je izražena zavisnost izmedju promenljivih x i y dobijena na osnovu eksperimentalnih podataka x_i i y_i $(i=1,2,\ldots,n)$ naziva se <u>regresija</u>.

Ako se izmedju promenljivih x i y traži funkcionalna veza oblika

$$y = ax^b,$$

tada ovu jednačinu treba logaritmovati. Pri tome se dobija

$$\log a + b \log x = \log y.$$

Normalni sistem jednačina za nalaženje parametara a i b, prema (8) u ovom slučaju glasi

$$n \log a + b \sum_{i=1}^{n} \log x_i = \sum_{i=1}^{n} \log y_i$$

(28) $$(\log a) \sum_{i=1}^{n} \log x_i + b \sum_{i=1}^{n} (\log x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \log x_i \log y_i .$$

Slično se postupa kada se izmedju promenljivih x i y traži funkcionalna veza oblika

$$y = ae^{bx}.$$

Tada se logaritmovanjem dobija

$$\log a + (b \log e) x = \log y$$

i normalni sistem jednačina za nalaženje parametara a i b, prema (8), u ovom slučaju glasi

$$n \log a + b \log e \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \log y_i$$

(29) $$(\log a) \sum_{i=1}^{n} x_i + b \log e \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i$$

Ako se u sistemima (28) i (29) stavi loga = A, tada oni postaju linearni po A i b.

Ako normalni sistem jednačina (4), odnosno (8), nije linearan po parametrima $a_1, a_2, \ldots, a_m$, tada se za njegovo rešavanje može primeniti neka od metoda za približno rešavanje jednačina, na primer Njutnova metoda za približno režavanje nelinearnih sistema algebarskih i transcendentnih jednačina.

Metoda najmanjih kvadrata može se primeniti za nalaženje funkcionalne veze izmedju više promenljivih veličina, na primer izmedju promenljivih x,y,z.

Kada znamo da vrednostima x_i promenljive x i vrednostima y_i promenljive y odgovaraju vrednosti z_i promenljive z tada metodom najmanjih kvadrata možemo, kao i ranije, odrediti funkciju odredjenog oblika

$$(30) \qquad f(x,y,z;a_1,a_2,\dots,a_m) = 0$$

kojom se izražava zavisnost izmedju promenljive z sa jedne strane i promenljivih x i y sa druge strane, gde su $a_1,a_2,\dots,a_m$ parametri koji se odredjuju tako da bude

$$F(a_1,a_2,\dots,a_m) = \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i,y_i,z_i;a_1,a_2,\dots,a_m) = \min.$$

što dovodi do normalnog sistema jednačina

$$(31) \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_m} = 0$$

Kada se parametri $a_1,a_2,\dots,a_m$ odrede iz jednačina (31) i zamene u jednačini (30) dobiće se tražena zavisnost izmedju veličina x,y i z.

Zavisnost izmedju promenljive z sa jedne strane i promenljivih x i y sa druge strane za date podatke x_i,y_i,z_i $(i=1,2,\dots,n)$ u praksi se uzima najčešće u obliku polinoma.
Tako, na primer, zavisnost u obliku polinoma trećeg stepena glasi:

$$z = a_o+a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2 + a_6x^3+a_7x^2y+a_8xy^2+a_9y^3$$

gde se koeficijenti $a_o,a_1,\dots,a_9$ odredjuju metodom najmanjih kvadrata, što dovodi do rešavanja sistema od 10 linearnih jednačina sa 10 nepoznatih $a_o,a_1,\dots,a_9$.

NUMERIČKO REŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Neka je data diferencijalna jednačina prvog reda

(1) $$y' = f(x,y)$$

za koju treba naći rešenje $y=\varphi(x)$ u intervalu $[x_o, a_o]$ sa početnim uslovom $y=y_o$ za $x=x_o$, pri čemu je $\varphi(x)$ neprekidna funkcija. Kriva $y=\varphi(x)$ predstavlja jednu integralnu krivu jednačine (1) koja prolazi kroz tačku $M_o(x_o,y_o)$ U mnogim slučajevima $\varphi(x)$ se ne može izraziti u obliku elementarnih funkcija, a često kada je to i moguće, njeno odredjivanje vezano je za mnoge teškoće. Zato se u ovakvim slučajevima koriste numeričke metode za približno rešavanje diferencijalnih jednačina. Mi ćemo se ovde zadržati na Ojlerovoj metodi i metodi Runge - Kuta.

Ojlerova metoda poligonalnih linija

Kod ove metode koristi se jednačina (1) tako što se u tački $M_o(x_o,y_o)$ povuče tangenta na integralnu krivu. Jednačina ove tangente glasi

(2) $$y-y_o = y_o'(x-x_o).$$

Prema (1) je $y_o' = f(x\ ,y_o)$ pa se jednačina (2) može napisati u obliku

(2a) $$y-y_o = f(x_o,y_o)(x-x_o).$$

Za $x = x_1 = x_o+h$ gde je h korak, iz jednačine (2a) se dobija ordinata na tangenti čija je vrednost

$$y = y_o+hf(x_o,y_o)$$

koju ćemo označiti sa y_1 pa imamo

$$y_1 = y_o + hf(x_o,y_o).$$

Za mali korak h a pod pretpostavkom da je integralna kriva kroz tačku $M_o(x_o,y_o)$ neprekidna, njena ordinata za $x=x_1=x_o+h$ malo će se razlikovati od ordinate y_1 tangente (3). Na ovaj način y_1 se može uzeti kao približno numeričko rešenje jednačine (1) u tački $x_1 = x_o+h$. Drugim rečima, tačka $M_1(x_1,y_1)$ približno leži na integralnoj krivoj. Novu tačku $M_2(x_2,y_2)$ koja približno leži na integralnoj krivoj dobićemo ako u tački $M_1(x_1,y_1)$ povučemo novu tangentu. Jednačina ove tangente glasi

$$y-y_1 = y_1'(x-x_1),$$

tj.

$$y-y_1 = f(x_1,y_1)(x-x_1) \tag{3}$$

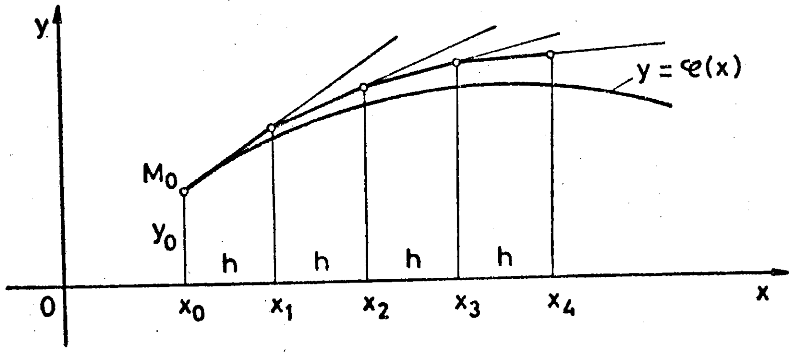
gde smo stavili $y_1' = f(x_1,y_1)$. Za $x = x_2 = x_1+h$, iz (3) se dobija $y = y_1+hf(x_1,y_1)$ što ćemo označiti sa y_2 pa imamo

$$y_2 = y_1+hf(x_1,y_1).$$

Na ovaj način dobili smo približno numeričko rešenje y_2 jednačine (1) za $x = x_2 = x_1+h = x_o+2h$. Nastavljajući ovaj proces dobijamo

$$y_{i+1} = y_i+hf(x_i,y_i) \quad (i=0,1,2,\dots,n-1) \tag{4}$$

gde približna rešenja $y_1,y_2,\dots, y_n$ odgovaraju tačkama $x_1 = x_o+h$, $x_2 = x_o+2h,\dots,x_n = x_o+nh$.



P r i m e r . Naći približna numerička rešenja y_{i+1} diferencijalne jednačine

$$y' = x+y \tag{b}$$

u intervalu $[0;0,5]$ uz uslov da je $y = y_o = 1$ za $x = x_o = 0$ uzimajući pri tome za korak $h = 0,1$.

R e š e n j e. Ovde imamo jednačinu $y' = f(x,y)$, gde je $f(x,y) = x+y$. Za $x=x_o = 0$, $y = y_o = 1$, $i = 0$ i $h = 0,1$ iz (4) se dobija $y_1 = y_o + hf(x_o,y_o)$, tj. $y_1 = 1+0,1(0+1) = 1,1$. Zajedno sa y_o i y_1 dalje imamo (Tabela 1)

i	x_i	y_i	$hf(x_i,y_i)$
0	0,0	1,00000	0,10000
1	0,1	1,10000	0,12000
2	0,2	1,22000	0,14200
3	0,3	1,36200	0,16620
4	0,4	1,52820	0,19282
5	0,5	1,72102	

Tabela 1

i	x_i	y_i
0	0,0	1,00000
1	0,1	1,11034
2	0,2	1,24281
3	0,3	1,39972
4	0,4	1,58365
5	0,5	1,79744

Tabela 2

Tačno rešenje jednačine (b) je

$$y = 2e^x - x - 1$$

a tačne vrednosti na pet decimala za y_i $(i=0,1,2,\ldots,5)$ dobijene odavde upisane su u tabeli 2. Razlike Δ_i izmedju tačnih i približnih vrednosti za y_i iz tabele 1 i tabele 2 date su u tabeli 3.

i	Δ_i	i	Δ_i
0	0,00000	3	0,03772
1	0,01034	4	0,05545
2	0,02281	5	0,07642

Tabela 3

Metoda Runge-Kuta. Neka je rešenje jednačine (1) u tački $x = x_i$ dato Tajlorovim redom

$$y = y_i + \frac{x-x_i}{1!}y_i' + \frac{(x-x_i)^2}{2!}y_i'' + \ldots + \frac{(x-x_i)^s}{s!}y_i^{(s)} + \ldots$$

koja se za $x = x_{i+1}$, zbog $x_{i+1} - x_i = h$, svodi na

$$(5)\quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1!}y_i' + \frac{h^2}{2!}y'' + \ldots + \frac{h^s}{s!}y_i(s) + \ldots$$

Metoda Runge-Kuta zasniva se na nalaženju takvog izraza

$$k = \frac{1}{6}(k_1+2(k_2+k_3)+k_4),$$

gde je

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_i + h,\ y_i + k_3)$$

da se formula

$$y_{i+1} = y_i + k,$$

tj. formula

$$(6) \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1+2(k_2+k_3)+k_4)$$

poklapa sa Tajlorovim redom (5) do člana h^4 zaključno. (Stoga je potrebno da funkcija $f(x,y)$ ima parcijalne izvode do četvrtog reda u intervalu $[x_i, x_i+h]$.

Metoda Runge-Kuta daje veliku tačnost, ali zahteva više računanja.

U tabeli 6 date su vrednosti približnih rešenja jednačine (3) izračunatih po formuli (6), sa početnim uslovom $x_o = 0$, $y_o = 1$.

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4	k
0	0,0	1,00000	0,10000	0,11000	0,11050	0,12105	0,11034
1	0,1	1,11034	0,12103	0,13209	0,13264	0,14430	0,13246
2	0,2	1,24280	0,14428	0,15649	0,15710	0,16999	0,15691
3	0,3	1,39971	0,16997	0,18347	0,18414	0,19838	0,18393
4	0,4	1,58364	0,19836	0,21328	0,21403	0,22977	0,21379
5	0,5	1,79743					

Tabela 6

Razlike Δ_i izmedju tačnih i približnih vrednosti za y_i iz tabele 2 i tabele 6 date su u tabeli 7.

i	Δ_i	i	Δ_i
0	0,00000	3	0,00001
1	0,00001	4	0,00001
2	0,00001	5	0,00001

Tabela 7

Iz tabele 7 vidimo da sepribližna rešenja jednačine (3) dobijena metodom Runge-Kuta neznatno razlikuju od njenih tačnih rešenja.

Ojlerova metoda poligonalnih linija i metoda Runge-Kuta mogu se primeniti i na sistem diferencijalnih jednačina.

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

(7)
$$\frac{dy}{dx} = f_1(x,y,z)$$
$$\frac{dz}{dx} = f_2(x,y,z).$$

Treba naći približno rešenje sistema (7) u intervalu $x_o \leq x \leq x_n = a_o$, uz uslove da je $y = y_o$, $z = z_o$ za $x = x_o$.

Poligonalna linija sistema (7) glasi

(8)
$$y-y_i = f_1(x_i,y_i,z_i)(x-x_i)$$
$$z-z_i = f_2(x_i,y_i,z_i)(x-x_i),$$
$$x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (i=0,1,\dots,n-1)$$

Koordinate tačaka $M_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1},z_{i+1})$ kroz koje prolazi poligonalna linija (8), prema (2), imaju vrednosti

(9)
$$y_{i+1} = y_i+hf_1(x_i,y_i,z_i)$$
$$z_{i+1} = z_i+hf_2(x_i,y_i,z_i)$$

i one predstavljaju približna rešenja sistema (7) u tačkama $x_{i+1} = x_o+(i+1)h$, $(i=0,1,\dots,n-1)$ odredjena Ojlerovom metodom poligonalnih linija.

Za slučaj sistema (7), uz početne uslove $y = y_i$, $z = z_i$ za $x = x_i = x_o+ih$, $(i=0,1,\dots,n-1)$, analogno formuli (6) može se primeniti metoda Runge-Kuta. Prvo se izračunavaju veličine

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
k_1 &= hf_1(x_i, y_i, z_i)\\
l_1 &= hf_2(x_i, y_i, z_i)\\
k_2 &= hf_1(x_i+\tfrac{h}{2},\ y_i+\tfrac{k_1}{2},\ z_i+\tfrac{l_1}{2})\\
l_2 &= hf_2(x_i+\tfrac{h}{2},\ y_i+\tfrac{k_1}{2},\ z_i+\tfrac{l_1}{2})\\
k_3 &= hf_1(x_i+\tfrac{h}{2},\ y_i+\tfrac{k_2}{2},\ z_i+\tfrac{l_2}{2})\\
l_3 &= hf_2(x_i+\tfrac{h}{2},\ y_i+\tfrac{k_2}{2},\ z_i+\tfrac{l_2}{2})\\
k_4 &= hf_1(x_i+h,\ y_i+k_3,\ z_i+l_3)\\
l_4 &= hf_2(x_i+h,\ y_i+k_3,\ z_i+l_3)
\end{aligned}
$$

a zatim se vrednosti y_{i+1} i z_{i+1} odredjuju iz formula

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}\left[k_1+2(k_2+k_3)+k_4\right]\\
z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6}\left[l_1+2(l_2+l_3)+l_4\right]
\end{aligned}
$$

$$(i=0,1,\ldots,n-1).$$

Vrednosti y_{i+1}, z_{i+1} odredjene formulama (11) predstavljaju približna rešenja sistema (7) u tačkama $x_{i+1} = x_o+ih$ dobijena metodom Runge - Kuta.

Prilikom rešavanja sistema (7) za početne uslove uzima se $x = x_o$, $y = y_o$, $z = z_o$, a zatim se redom izračunavaju veličine (10) i vrednosti (11).

N a p o m e n a. Diferencijalna jednačina drugog reda, tj. jednačina

$$(12) \qquad y'' = f(x,y,y')$$

smenom

$$y' = z, \; y'' = z'$$

svodi se na sistem diferencijalnih jednačina

$$(13) \qquad \begin{aligned} y' &= z \\ z' &= f(x,y,z). \end{aligned}$$

Na sistem (13), uz početne uslove $y = y_0$, $y' = y_0' = z_0$ za $x = x_0$ primenom Ojlerove metode poligonalnih linija ili metode Runge-Kuta može se naći približno rešenje y_{i+1} u tački $x_{i+1} = x_0+(i+1)h$, $(i=0,1,\ldots,n-1)$.

P r i m e d b a. Metode za približno rešavanje diferencijalnih jednačina mogu se primeniti u slučaju da postoji rešenje date diferencijalne jednačine, odnosno datog sistema diferencijalnih jednačina u posmatranom intervalu $x_0 \leq x \leq a_0$.

Napred izložene metode spadaju u <u>numeričke metode</u> za približno rešavanje diferencijalnih jednačina.

P r i m e r . Naći približno rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$(14) \qquad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -x+y+z \\ \frac{dz}{dx} &= 1+3y-z \end{aligned}$$

u intervalu $0 \leq x \leq 0,2$

a) primenom Ojlerove metode poligonalnih linija,

b) primenom metode Rute-Kuta, a uz početne uslove $y = y_o = 2$, $Z = z_o = 1$ za $x = x_o = 0$ uzimajući za korak $h = 0{,}1$.

R e š e n j e a) U sistemu (14) je $f_1(x,y,z) = -x+y+z$, $f_2(x,y,z) = 1+3y-z$. Za $i=0$ i $x=x_o=0$, $y = y_o = 2$, $z = z_o = 1$, $h = 0{,}1$ prema (9) imamo

$$y_1 = y_o+hf_1(x_o,y_o,z_o) = 2+0{,}1(2+1) = 2{,}30000$$

$$z_1 = z_o+hf_2(x_o,y_o,z_o) = 1+0{,}1(1+6-1) = 1{,}60000.$$

Dalje je

$$y_2 = y_1+hf_1(x_1,y_1,z_1) = 2{,}68000$$

$$z_2 = z_1 +hf_2(x_1,y_1,z_1) = 2{,}23000.$$

Ove vrednosti prikazane su u tabeli 8.

Radi uporedjenja, u tabeli 9 data su tačna rešenja za y i z sistema (14). U tabeli 10 date su razlike Δy_i i Δz_i izmedju tačnih i približnih rešenja sistema (14).

i	x_i	y_i	z_i
0	0,0	2,00000	1,00000
1	0,1	2,30000	1,60000
2	0,2	2,68000	2,23000

Tabela 8

i	x_i	y_i	z_i
0	0,0	2,00000	1,00000
1	0,1	2,34197	1,61856
2	0,2	2,77693	2,28903

Tabela 9

i	x_i	Δy_i	Δz_i
0	0,0	0,00000	0,00000
1	0,1	0,04197	0,01856
2	0,2	0,09693	0,05903

Tabela 10

R e š e n j e b). Za $i = 0$ i $x = x_o = 0$, $y = y_o = 2$, $z = z_o = 1$, $h = 0{,}1$ prema (10) je:

$$k_1 = hf_1(x_o, y_o, z_o) = 0{,}1(2+1) = 0{,}30000$$

$$l_1 = hf_2(x_o, y_o, z_o) = 0{,}1(1+6-1) = 0{,}60000$$

$$k_2 = hf_1(x_o+\frac{h}{2},\ y_o+\frac{k_1}{2},\ z_o+\frac{l_1}{2}) = 0{,}34000$$

$$l_2 = hf_2(x_o+\frac{h}{2},\ y_o+\frac{k_1}{2},\ z_o+\frac{l_1}{2}) = 0{,}61500$$

$$k_3 = hf_1(x_o+\frac{h}{2},\ y_o+\frac{k_2}{2},\ z_o+\frac{l_2}{2}) = 0{,}34000$$

$$l_3 = hf_2(x_o+\frac{h}{2},\ y_o+\frac{k_2}{2},\ z_o+\frac{l_2}{2}) = 0{,}62025$$

$$k_4 = hf_1(x_o+h,\ y_o+k_3,\ z_o+l_3) = 0{,}38630$$

$$l_4 = hf_2(x_o+h,\ y_o+k_3,\ z_o+l_3) = 0{,}64080.$$

Prema formulama (11) imamo sada

$$y_1 = y_o+\frac{1}{6}\left[k_1+2(k_2+k_3)+k_4\right] = 0{,}34197$$

$$z_1 = z_o+\frac{1}{6}\left[l_1+2(l_2+l_3)+l_4\right] = 1{,}61855.$$

Dalje, za $x = x_1 = x_o+h = 0{,}1$; $y = y_1 = 2{,}34197$, $z = z_1 = 1{,}61855$ iz (10) se dobija

$$k_1 = 0{,}38605, \quad l_1 = 0{,}64074$$

$$k_2 = 0{,}43239, \quad l_2 = 0{,}66661$$

$$k_3 = 0{,}43600, \quad l_3 = 0{,}67226$$

$$k_4 = 0{,}48688, \quad l_4 = 0{,}70431$$

pa iz formula (11) u ovom slučaju nalazimo

$$y_2 = 2{,}77692; \quad z_2 = 2{,}28902$$

Ove vrednosti prikazane su u tabeli 11.

i	x_i	y_i	z_i
0	0,0	2,00000	1,00000
1	0,1	2,34197	1,61855
2	0,2	2,77692	2,28902

Tabela 11

i	x_i	Δy_i	Δy_i
0	0,0	0,00000	0,00000
1	0,1	0,00000	0,00001
2	0,2	0,00001	0,00001

Tabela 12

U tabeli 12 prikazane su razlike Δy_i i Δz_i izmedju tačnih i približnih rešenja dobijenih metodom Runge-Kuta koja se odnose na sistem (14).

Iz tabele 12 vidimo da se približna rešenja sistema (14) dobijena metodom Runge-Kuta neznatno razlikuju od njegovih tačnih rešenja.

Napominjemo da

$$y = \frac{1}{16}(27e^{2x}+5e^{-2x}) + \frac{1}{4}x$$

$$z = \frac{1}{16}(27e^{2x}-15e^{-2x}) + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

predstavlja rešenje sistema (14) sa početnim uslovima $y = y_o = 2,\ z = z_o = 1$ za $x = x_o = 0$.

Z a d a t a k . Data je diferencijalna jednačina

$$(x^2+2x)y''+(x+4)y' - y = 0. \tag{15}$$

Uz date početne uslove $x = x_o = 1,\ y = y_o = 6,\ y' = y_o' = 0$, primenom metode Runge-Kuta naći približno rešenje $y = y_1$ jednačina (15) koje odgovara nezavisnoj promenljivoj $x = x_1 = 1{,}2$

uzimajući za korak $h = 0,2$.

R e š e n j e. Jednačinu (15) napišimo u obliku

(16) $$y'' = \frac{y-(x+4)y'}{x^2+2x}.$$

Uvodjenjem smene $y' = z$, $y'' = z'$ jednačina (16) svodi se na sistem

(17) $$y' = z$$

$$z' = \frac{y-(x+4)z}{x^2+2x}.$$

Zato se rešavanje jednačine (16) svodi na rešavanje sistema (17), sa početnim uslovima $x = x_o = 1$, $y = y_o = 6$, $z = z_o=0$.

Primenom formula (10), gde je $f_1(x,y,z) = z$,

$f_2(x,y,z) = \dfrac{y-(x+4)z}{x^2+2x}$, za $x_o = 1$, $y_o = 6$, $z_o = 0$, $h = 0,2$

dobijamo:

$$\begin{aligned} k_1 &= 0, & l_1 &= 0,4 \\ k_2 &= 0,04, & l_2 &= 0,29208 \\ k_3 &= 0,02921, & l_3 &= 0,30940 \\ k_4 &= 0,06188, & l_4 &= 0,30553, \end{aligned}$$

odakle se, prema formulama (11) dobija traženo približno rešenje

$$y_1 = 6,03338, \qquad (z_1 = 0,30553).$$

Ako bismo hteli da nadjemo približno rešenje y_2, tada ćemo ponovo koristiti formule (10) i (11), uzimajući $x_1 = 1,2$; $y_1 = 6,03338$; $z_1 = 0,30553$, $h = 0,2$.

N a p o m e n a. Približna rešenja dobijena primenom Ojlerove metode ili metode Runge-Kuta biće utoliko tačnija ukoliko je korak h manji.

METODA KONAČNIH RAZLIKA

Ovde ćemo ukratko izložiti primenu konačnih razlika za odredjivanje približnih rešenja nekih tipova linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda sa datim graničnim uslovima.

Metoda konačnih razlika sastoji se u zamenjivanju date parcijalne jednačine u čvorovima mreže odgovarajućom jednačinom sa konačnim razlikama. Na osnovu datih graničnih uslova prvo se odredjuju rešenja u graničnim čvorovima a zatim se rešava dobijeni sistem linearnih algebarskih jednačina sa velikim brojem nepoznatih.

Jednačina

$$(1)\qquad A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = F(x,y),$$

gde su A,B,C,a,b,c i F date funkcije definisane u oblasti w, naziva se linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda.

Stavimo

$$D = AC-B^2.$$

U zavisnosti od znaka funkcije D u oblasti W jednačina (1) je:

eliptičkog tipa ako je $D>0$,
paraboličkog tipa ako je $D = 0$,
hiperboličkog tipa ako je $D < 0$,
mešovitog tipa ako D menja znak.

Posmatrajmo prvo Laplasovu jednačinu

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

U njoj je A = 1, B = 0, C = 1, a = 0, b = 0, c = 0, F = 0, pri čemu je $AC-B^2 = 1 > 0$ što znači da ona spada u jednačine eliptičkog tipa.

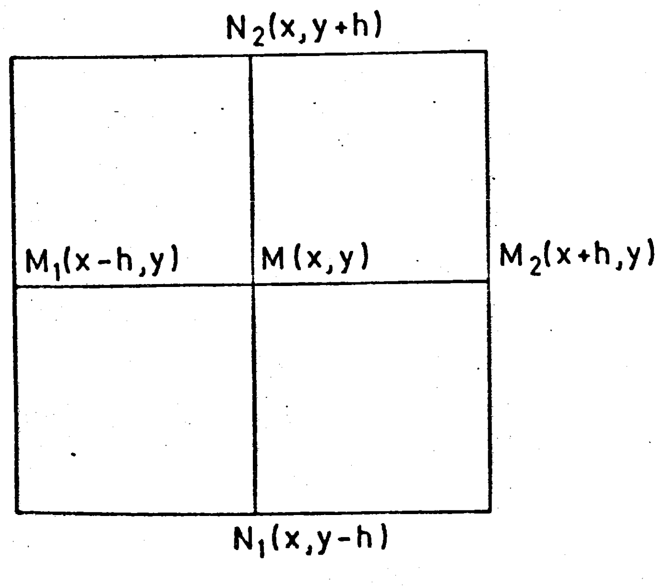
U tački M(x,y) je

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\approx \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Ako se u jednačini (2) veličine $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ zamene desnim stranama iz (3) dobiće se približna Laplasova jednačina

$$(4) \qquad u(x,y) = \frac{1}{4}\left[u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)\right].$$

Na sledećoj slici prikazane su tačke M, M_1, M_2, N_1, N_2 sa koordinatama (x,y), (x-h,y), (x+h,y), (x,y-h), (x,y+h).



Neka se traži rešenje Laplasove jednačine (2) u oblasti G čija je kontura linija L, uz uslov da su vrednosti funkcije $u(x,y)$ poznate na konturi L, tj. da je $u(P) = f(x,y)$ gde je $f(x,y)$ data funkcija i gde je P tačka na konturi L.

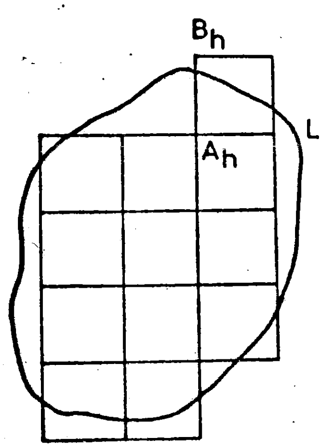
U tu svrhu konstruišimo takvu kvadratnu mrežu S_h:

$$\begin{aligned} x_i &= x_o+ih \\ y_j &= y_o+jh \end{aligned} \qquad (i,j=\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

da čvorovi (x_i,y_i) mreže S_h ili pripadaju oblasti G ili su udaljeni od konture L za rastojanje manje od h. Pri tome se za čvorove kaže da su susedni ako su udaljeni jedan od drugog u pravcu ose Ox ili u pravcu ose Oy za rastojanje h.
Dalje, za čvor A_h se kaže da je unutrašnji ako se nalazi u oblasti G a sva četiri njemu susedna čvora pripadaju mreži S_h. Ako ovo nije ispunjeno, čvor se naziva graničnim. Takav je čvor B_h (videti sledeću sliku). Granični čvor mreže S_h je granični čvor prve vrste ako ima susedni unutrašnji čvor.

Za svaki unutrašnji čvor, prema (4), uzima se jednačina

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}).$$

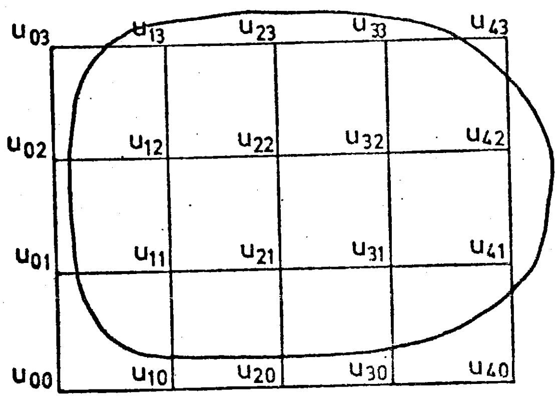


U graničnim čvorovima prve vrste kao što je tačka B_h stavlja se $u(B_h) = u(B) = f(B) = f(x,y)$ gde je B tačka na liniji L a koja je najbliža tački B_h. Na ovaj način se dobija nehomogen linearni sistem od onoliko jednačina koliko ima i nepoznatih. Na sledećoj slici prikazana je jedna ovakva mreža. Veličine sa crtom predstavljaju poznate vrednosti. To su vrednosti f(B) koje smo uzeli umesto $u(B_h)$ gde su B_h granični čvorovi prve vrste. U navedenom slučaju broj jednačina i nepoznatih je 6. To su jednačine:

$$u_{11}=\frac{1}{4}(\bar{u}_{o1}+u_{21}+\bar{u}_{1o}+u_{12}) \qquad u_{12}=\frac{1}{4}(\bar{u}_{o2}+u_{22}+u_{11}+\bar{u}_{13})$$

$$u_{21}=\frac{1}{4}(u_{11}+u_{31}+\bar{u}_{2o}+u_{22}) \qquad u_{22}=\frac{1}{4}(u_{12}+u_{32}+u_{21}+\bar{u}_{23})$$

$$u_{31}=\frac{1}{4}(u_{21}+\bar{u}_{41}+\bar{u}_{3o}+u_{32}) \qquad u_{32}=\frac{1}{4}(u_{22}+\bar{u}_{42}+u_{31}+\bar{u}_{33})$$



Metoda mreže za jednačinu paraboličkog tipa

Posmatrajmo jednačinu provodjenja toplote i pojednostavljenom obliku

(5) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

gde je $u = u(x,t)$ temperatura, a t vreme. Neka je

(6)
$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u(0,t) &= f_1(t) \\ u(1,t) &= f_2(t) \end{aligned}$$

gde su $f(x)$, $f_1(t)$ i $f_2(t)$ unapred date funkcije. Uzećemo mrežu:

$$x_i = ih\,(i=0,1,2,\ldots,n),\ t_j = jk\ (j=0,1,2,\ldots),\ h=\frac{1}{n},\ k=\frac{1}{6}h^2.$$

Sada je $x_i = ih$, $t_j=\frac{j}{6}h^2$, $u_{ij}=u(x_i,y_i)$ i jednačina (5) postaje

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{\frac{1}{6}h^2} = \frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2},$$

odakle se dobija

(7) $$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i+1,j}+4u_{ij}+u_{i-1,j}).$$

U krajnjim čvorovima, polazeći od t=0 dobijamo

(8) $$u(x_i,0) = f(x_i),\ u(0,t_j) = f_1(t_j),\ u(1,t_j) = f_2(t_j).$$

Za $j = 0$ iz (7) se dobija

(9) $$u_{i1} = \frac{1}{6}(u_{i+1,o}+4u_{io}+u_{i-1,o}).$$

Stavljajući u (9) $i=1,2,\dots$ dobija se

$$u_{11} = \frac{1}{6}(u_{20}+4u_{10}+u_{00})$$

$$u_{21} = \frac{1}{6}(u_{30}+4u_{20}+u_{10}) \text{ itd.}$$

$$\vdots$$

Zatim se u (7) stavi $j=1$ i dobija se

$$u_{i2} = \frac{1}{6}(u_{i+1,1}+4u_{i1}+u_{i-1,1}). \tag{10}$$

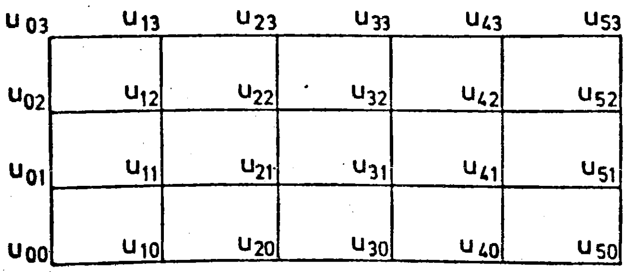
U (10) se stavlja $i = 1,2,\dots$ i dobija se

$$u_{12} = \frac{1}{6}(u_{21}+4u_{11}+u_{01})$$

$$u_{22} = \frac{1}{6}(u_{31}+4u_{21}+u_{11}) \text{ itd.}$$

$$\vdots$$

U ovom slučaju se rešenja izračunavaju na osnovu prethodno dobijenih rešenja.



Na osnovu uslova (6) odnosno uslova (8) vrednosti $u_{00}, u_{10}, u_{20}, u_{30}, u_{40}, u_{01}, u_{02}, u_{03}, u_{41}, u_{42}, u_{43}$ su poznate.

Metoda mreže za jednačinu hiperboličkog tipa

Posmatrajmo jednačinu žice koja treperi

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pri uslovima

$$(12)\qquad \begin{aligned} &u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x) && 0\leq x\leq 1\\ &u(0,t) = f_1(t),\ u(1,t) = f_2(t) && 0\leq t<\infty \end{aligned}$$

Uzmimo mrežu

$$x_i = ih,\ t_j = \frac{kj}{a};\ i,j = 0,1,2,\ldots;\ h = \frac{1}{n}.$$

Dobićemo

$$(13)\qquad \frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Ako uzmemo $k = \frac{h}{a}$ iz (13) dobijamo

$$(14)\qquad u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}.$$

Ako stavimo $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) = \frac{u_{i,-1}-u_{io}}{-k} = F(x_i)$ dobićemo

$$u_{i,-1} = u_{io} - kF(x_i),\ \text{tj.}$$

$$(15)\qquad u_{i,-1} = u_{io} - \frac{h}{a}F(x_i).$$

Iz (15) za $i = 0$ je

$$u_{o,-1} = u_{oo} - \frac{h}{a}F(x_o) = f(0 - \frac{h}{a}F(0)$$

pošto je, prema (12), sada $u_{oo} = f(0)$. Iz (15) za $i = 1$ je

$$u_{1,-1} = u_{1o} - \frac{h}{a} F(x_1) = f(x_1) - \frac{h}{a} F(x_1)$$

pošto je, prema (12), sada $u_{1o} = f(x_1)$.

Iz (14) za $i = 1$ i $j = 0$ je

$$u_{11} = u_{2o} + u_{oo} - u_{1,-1},$$

tj.

$$u_{11} = f(x_2) + f(0) - f(x_1) + \frac{h}{a} F(x_1) \text{ itd.}$$

L i t e r a t u r a

1- Charles Blanc, Mathématiques appliquées (Lausane 1949)
2- E.Whittaker i G.Robinson, Tečaj numeričke matematike (Beograd 1951, prevod sa engleskog)
3- Anton Bilimović, Elementi više matematike III (Beograd 1966)
4- B.P.Demidovič i I.A.Maron, Osnovi vičisliteljnoj matematiki (Moskva 1970)
5- P.S.Guter, B.V.Ovčinskij, Elementi čislenogo analiza i matematičeskoj obrabotki rezultatov opita (Moskva 1970)
6-Djuro Kurepa, Viša algebra II knjiga (Beograd 1971)
7- Branislav Ivanović, Teorijska statistika (Beograd 1973)
8- Milorad Bertolino, Numerička analiza (Beograd 1977)
9- Dobrilo Tošić, Uvod u numeričku analizu (Beograd 1978)