VIŠA ŠKOLA ZA ORGANIZACIJU RADA U BEOGRADU
Odsek za organizaciju rada

Dragomir Simeunović

VIŠA MATEMATIKA

Beograd, 1968. godina

Š t a m p a:

PREVODILAČKO ŠTAMPARSKI SERVIS
UDRUŽENJE KNJIŽEVNIH PREVODILACA SR SRBIJE
B e o g r a d, Generala Ždanova br. 6

P R E D G O V O R

Skripta obuhvataju materijal predvidjen nastavnim programom Više škole za organizaciju rada u Beogradu. Napisana su za potrebe studenata Odseka za organizaciju rada.

Pored neophodne teorije skripta sadrže više uradjenih primera i zadataka koji čitaocu pružaju veću mogućnost za samostalan rad.

Na kraju je dat kratak pregled trigonometrije i analitičke geometrije.

Pisac

I
ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE

U rasudjivanju najčešće koristimo rečenice koje imaju svojstvo: ili su tačne ili netačne. Takve rečenice zovemo iskazi. Označimo iskaze sa $p, q, r, \ldots$.

Tada:

$p \Longrightarrow q$ označava : Ako p onda q.
$p \vee q$ " : p ili q.
$p \wedge q$ " : p i q.
$p \Longleftrightarrow q$ " : p je ako i samo ako q.
$\neg p$ " : nije p.

Simboli $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ su oznake za <u>logičke operacije</u> sa iskazima: <u>implikacija</u>, <u>disjunkcija</u>, <u>konjunkcija</u>, <u>ekvivalencija</u>, <u>negacija</u>.

Pomoću tih operacija, na način koji smo naveli, od iskaza se prelazi na nov iskaz - "rezultat" operacije.

Primer. Neka je

$p : 2 = 2$
$q : 3 = 4$

Tada:

1° Ako $2 = 2$ onda $3 = 4$
2° $2 = 2$ ili $3 = 4$
3° $2 = 2$ i $3 = 4$
4° $2 = 2$ ako i samo ako $3 = 4$
5° Nije $2 = 2$

Od ovih iskaza tačan je 2°, a ostali su netačni. Tačnost i netačnost zovemo istinitosne vrednosti. Istinitosna vrednost "složenih" iskaza $p \Longrightarrow q$,

$p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Leftrightarrow q$, $\neg p$ odredjuje se pomoću sledećih <u>istinitosnih tablica:</u>

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

$\neg$	
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

gde $\top$ znači tačan, $\bot$ netačan.

Kvantifikatori su, u jeziku, termini <u>za svaki</u>, <u>postoji</u>. Označavamo ih redom sa $\forall$, $\exists$. Prvi zovemo univerzalni, a drugi egzistencijalni kvantifikator.

Često se, u matematičkim rečenicama, javljaju i navedeni kvantifikatori.

Navodimo primere:

1° Za svaki realan broj x je

$$x = x$$

2° Za svaki realan broj x postoji realan broj y takav da je

$$x + y = 1$$

Ove se rečenice obično ovako "šifriraju" matematičkim simbolima:

$$(\forall x) \quad (x = x)$$

$$(\forall x) \quad (\exists y) \quad (x + y = 1)$$

Navodimo primere u "šifrovanom" obliku:

$(\forall x)(\exists y) \quad (x = y)$
$(\exists x)(\forall y) \quad (x = y)$
$(\forall x)(\forall y) \quad (x = y)$
$(\exists x)(\exists y) \quad (x = y)$

(x, y su realni brojevi).

Medju ovim rečenicama tačne su 1 i 4, a netačne 2 i 3.

Napominjemo još da u matematici "vlada" običaj: Rečenice:

1° Ako p onda q
2° Iz p sleduje q
3° Iz p proizlazi q
4° Da bude q dosta je da bude p
5° p je dovoljan uslov za q
6° Da bude q mora da bude p
7° q je nužan (potreban) uslov za p
8° q samo ako p

dogovorno, isto znače.

Matematička indukcija

Prirodni brojevi su $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Predpostavimo da je svakom prirodnom broju dodeljen po jedan iskaz. Označimo te iskaze redom: $I(1), I(2), \ldots, I(n), \ldots$.

Primer:

$I(1)$ je iskaz $1 = 1$
$I(2)$ je iskaz $2 = 2$
.
.
.
$I(n)$ je iskaz $n = n$
.
.
.

Često smo pred problemom da li su svi iskazi $I(1)$, $I(2)$, ..., $I(n)$, ... tačni ili ne. Odgovor na to daje princip matematičke indukcije koji glasi:

Svi iskazi $I(1)$, $I(2)$, ..., $I(n)$, ... su tačni ako su ispunjeni uslovi:

1^o $I(1)$ je tačan iskaz.

2^o Ako je $I(n)$ tačan iskaz onda je takodje i iskaz $I(n+1)$ tačan.

Primer. Za svaki prirodni broj n je

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dokaz metodom matematičke indukcije:

1^o Iskaz $I(1)$ glasi:

$$1 = \frac{1.2}{2}$$

i to je tačan iskaz.

2^o Neka za broj n bude $I(n)$, tj.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

tačan iskaz. Dodavanjem $(n+1)$ dobijamo

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

odnosno

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\left(\text{jer } \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$$

Došli smo do iskaza $I(n+1)$ i ujedno izveli njegovu tačnost iz predpostavke da je $I(n)$ tačan iskaz. Prema navedenom principu dokaz je završen.

II
S K U P O V I

Jedan od najvažnijih (osnovnih) pojmova matematike je pojam <u>skup</u> (mnoštvo, klasa, kolekcija).

Skup je ili prazan (bez elemenata) ili neprezana(i u tom slučaju ima izvesne elemente). Ako je x element skupa A, onda pišemo $x \in A$. Na primer, ako je N oznaka za skup svih prirodnih brojeva, onda $1 \in N$, $2 \in N$, $15 \in N$.

Skup čiji su elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ označavamo

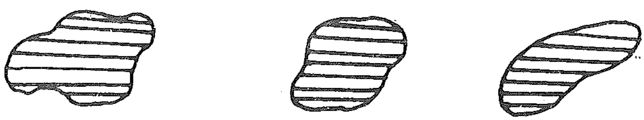
$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} .$$

Neki primeri skupova:

1° Skup svih stanovnika Beograda
2° Skup svih molekula u jednom gramu vode
3° Jadranski sliv - skup svih reka koje se ulivaju u Jadransko more.
4° Skup svih pozitivnih brojeva
5° Skup svih brojeva koji su veći od 2 a manji od 1 - <u>prazan skup</u> (jer nema takvih brojeva).

Prazan skup označavamo sa $\emptyset$.

Skupove obično grafički prikazujemo kao "delove ravni oivičene nekom zatvorenom linijom":



Pomoću skupovnih operacija koje dalje navodimo od izvesnih skupova prelazi se na nove - rezultate operacija. Te operacije zovemo: <u>unija</u>, <u>presek</u>, <u>razlika</u>.

1° Unija skupa A sa skupom B je skup svih elemenata koji su u A ili u B. Oznaka unije je: $A\cup B$.

2° Presek skupa A sa skupom B je skup svih elemenata koji su u A i u B. Oznaka preseka je: $A\cap B$.

3° Razlika skupa A sa skupom B je skup svih elemenata koji su u A i nisu u B. Oznaka razlike je: $A\setminus B$.

Ako je $A = \{1,2,3,4,\}$ $B = \{2,5\}$, onda je

$$A\cup B = \{1,2,3,4,5\}\ ,\ B\cup A = A\cup B$$

$$A\cap B = \{2\}\ ;\ \ B\cap A = A\cap B$$

$$A\setminus B = \{1,3,4\}\ ,\ \ B\setminus A = \{5\}\ .$$

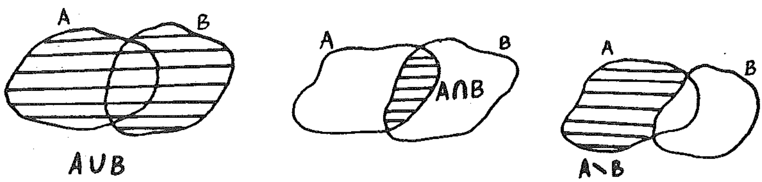
Upotrebom logičkih simbola navedene definicije mogu se ovako izraziti:

$$x\in A\cup B \Longleftrightarrow x\in A \vee x\in B$$

$$x\in A\cap B \Longleftrightarrow x\in A \wedge x\in B$$

$$x\in A\setminus B \Longleftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B)$$

Navodimo i dijagrame za $\cup$, $\cap$, $\setminus$:



Ističemo da uvedene operacije imaju sledeća svojstva.
Ako su A, B, C proizvoljni skupovi onda je:

$$A\cup A = A,\qquad A\cap A = A$$

$$A\cup B = B\cup A,\quad A\cap B = B\cap A$$

$$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C,\qquad A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C.$$

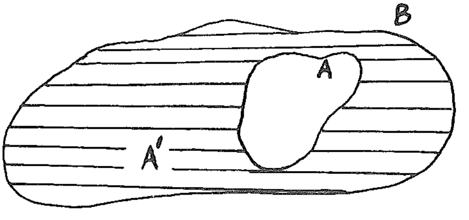
To neposredno izlazi iz definicija navedenih operacija.
Ako je svaki element skupa A takodje i element skupa B, onda kažemo: skup A je podskup skupa B i pišemo $A \subseteq B$. Znak $\subseteq$ je znak inkluzije.

Uzimamo da je $\emptyset \subseteq A$ gde je A bilo koji skup.

Primeri:

$\emptyset \subseteq \{1,2,3\}$, $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$, $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$, $\emptyset \subseteq \emptyset$.

Neka je $A \subseteq B$. Tada $B \setminus A$ zovemo komplement skupa A u odnosu na skup B. Oznaka komplementa je $\mathscr{C}_A B$ ili $\mathscr{C}B$ ili B'.



Neka su A, B podskupovi skupa E i neka je $'$ oznaka za komplement u odnosu na skup E. Važe jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' \end{aligned}\right\} \text{ (De Morganovi zakoni)}$$

$$\emptyset' = E, \qquad E' = \emptyset .$$

Primer: $A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,5,6\}$, $E = \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$,

$A \cup B = \{1,2,3,5,6\}$, $(A \cup B)' = \{7,8,9\}$,

$A' = \{5,6,7,8,9\}$, $B' = \{1,3,7,8,9\}$, $A' \cap B' = \{7,8,9\}$

Dakle je $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

B R O J E V I

Realni brojevi

Prirodni brojevi su:

1,2,3, ..., n, ...

U skupu prirodnih brojeva definisane su operacije sabiranja (+) i množenja (.). Rezultat ovih operacija daje opet prirodan broj, što znači da su operacije sabiranje i množenje unutrašnje operacije u skupu prirodnih brojeva. Ove operacije imaju sledeća svojstva:

$x + y = y + x$	komutativnost sabiranja
$x + (y + z) = (x + y) + z$	asocijativnost sabiranja
$x . y = y . x$	komutativnost množenja
$(x . y) . z = x . (y . z)$	asocijativnost množenja
$x . (y + z) = x . y + x . z$	distributivnost množenja prema sabiranju

Prirodni brojevi zadovoljavaju princip matematičke indukcije.

Inverzne (suprotne) operacije od sabiranja i množenja, tj. oduzimanje (-) i deljenje (:) ne mogu se uvek izvesti u skupu prirodnih brojeva (na primer 3-3, 3-4 ili 5:6). Zbog toga se proširuje pojam broja i uvode se nula i negativni celi brojevi kao i razlomci. Ovako prošireni skup brojeva naziva se skup racionalnih brojeva. U skupu racionalnih brojeva uvek je moguće izvesti sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje, izuzev deljenja nulom koje u matematici nije definisano - deljenje nulom nema smisla.

Operacije sabiranje i množenje u skupu racionalnih brojeva imaju ista svojstva kao i u skupu prirodnih brojeva koja smo već naveli.

Racionalni brojevi

o, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...

nazivaju se <u>celi brojevi</u>.

Prema načinu kako su uvedeni, racionalni brojevi su oblika

$$\frac{p}{q}$$

gde su p i q celi brojevi, pri čemu $q \neq 0$.

U skupu racionalnih brojeva moguće je izvesti stepenovanje celim brojem, dok korenovanje nije uvek izvodljivo. Zbog toga se skup racionalnih brojeva proširuje i uvode <u>iracionalni brojevi</u>. Za neki broj kažemo da je iracionalan ako se ne može napisati u obliku

$$\frac{p}{q}$$

gde su p i q celi brojevi, pri čemu $q \neq 0$.

Dokazaćemo, na primer, da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. Zbog toga navodimo neka svojstva celih brojeva.

a) Broj a je paran ako je deljiv sa 2, tj. ako se može napisati u obliku $a = 2b$ gde je b ceo broj.

b) Ako je a paran broj, tada je njegov kvadrat paran broj.

c) Ako je kvadrat celog broja a paran broj, tada je i sam broj a paran.

Neka je $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, gde su p i q celi uzajamno prosti brojevi. Odavde je $2q^2 = p^2$ što zbog osobine c) znači da je p paran broj, tj. broj p ima oblik $p = 2c$ gde je c ceo broj. Medjutim, tada je $2q^2 = (2c)^2 = 4c^2$, odakle je $q^2 = 2c^2$ što znači da je q paran broj oblika $q = 2d$ gde je d ceo broj. Nije moguće da je $p=2b$, $q=2d$, jer smo pretpostavili da su p i q celi uzajamno prosti brojevi.

Znači, $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

Racionalni i iracionalni brojevi čine <u>skup realnih brojeva</u>. To su svi pozitivni brojevi, nula i svi negativni brojevi.

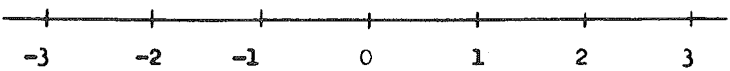
U skupu realnih brojeva sabiranje i množenje su komutativne i asocijativne operacije, dok je operacija množenje još i distributivna prema operaciji sabiranja. U skupu realnih brojeva moguće je izvesti pored sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja (sem deljenja nulom) još i stepenovanje i korenovanje ma kojim realnim brojem, pod uslovom da osnova nije negativan broj.

Realne brojeve obično predstavljamo na brojnoj liniji - brojnoj osi. Na pravoj (slika) od njene proizvoljne ali utvrdjene tačke - nule preneta je duž $\overline{OI}$ - jedinica.

Duž $\overline{OI}$ može se neograničeno prenositi levo i desno od tačke 0. Tako se na brojnoj liniji dobija skup celih brojeva

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$

Na brojnoj liniji jednoj odredjenoj tački odgovara jedan realan broj, i obrnuto, jednom odredjenom realnom broju odgovara jedna tačka brojne linije.



Niz brojeva

$$1, 2, 3, \ldots, n, (n+1), \ldots$$

nije ograničen, tj. nema najvećeg prirodnog broja. To se izražava simbolički

$$n \to \infty$$

i čita se: n teži beskonačnosti. Simbol ∞ nije broj. Tako je $\frac{\infty}{2} = \infty$, ali ne mora biti $\infty - \infty = 0$.

Apsolutna vrednost realnog broja a, koja se označava sa $|a|$ je nenegativan broj i definisana je na sledeći način:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{za} \quad a > 0 \\ 0 & \text{za} \quad a = 0 \\ -a & \text{za} \quad a < 0 \end{cases}$$

Važe relacije:

1. $|a| = |-a|$
2. $|a\,b| = |a|\,|b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ (b \neq 0)$
4. $c^2 = |c|^2$
5. $\sqrt{c^2} = |c|$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Relacije 1 – 5 su očigledne.
Dokažimo relaciju 6. Kako je

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

i kako je

$$a^2 = |a|^2 , \quad b^2 = |b|^2 \qquad \text{i} \qquad |a|\,|b| \geq ab, \quad \text{to je}$$

$$a^2+2ab+b^2 \leq a^2+2|a|\,|b| +b^2=a^2+2|a|\,|b| +b^2=(|a| +|b|)^2,$$

odnosno

$$(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

ili

$$|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2,$$

odakle se dobija

$$|a + b| \leq |a| + |b| ,$$

tj. apsolutna vrednost zbira realnih brojeva nije veća od zbira apsolutnih vrednosti tih brojeva.

Takodje važi relacija:

$$|a + b| \geq |a| - |b|.$$

Za dokaz ove relacije polazi se od jednakosti $|a| = |a + b + (-b)|$ i na njenu desnu stranu primeni relacija 6 odakle se dobija:

$|a| \leq |a + b| + |(-b)|$, odnosno

$|a| \leq |a + b| + |b|$, odakle sledi nejednakost

$|a + b| \geq |a| - |b|$.

Relacija:

$|a| \leq r, \quad r \geq 0$

Znači isto što i

$- r \leq a \leq r,$

dok relacija

$|x-b| \leq r$

znači isto što i

$-r \leq x - b \leq + r$

ili isto što i

$b - r \leq x \leq b + r.$

Neka su a i b konačni realni brojevi takvi da je $a \leq b$. Skup svih onih realnih brojeva koji nisu manji od a niti veći od b, tj. koji zadovoljavaju relaciju

$a \leq x \leq b$

zove se zatvoreni <u>interval</u> (razmak) i označava sa $[a,b]$.

Ako brojevi a i b ne pripadaju intervalu, tj. ako je:

$a < x < b$

kažemo da je interval <u>otvoren</u> što se obeležava sa (a,b).

Ako a pripada intervalu, a b ne pripada, tj. ako je:

$a \leq x < b$,

tada kažemo da je interval sleva zatvoren a zdesna otvoren i označavamo ga sa $[a, b)$. Slično, interval je s leva otvoren, a s desna zatvoren ako je:

$a < x \leq b$

što se označava sa $(a,b]$.

U svim navedenim slučajevima svakom intervalu odgovara na brojnoj liniji duž ili segment. Brojevi a i b zovu se medje intervala.

Skup svih realnih brojeva koji nisu manji od konačnog broja a predstavlja interval $[a, +\infty)$, tj.

$$a \leq x < +\infty,$$

dok skup svih realnih brojeva koji nisu veći od broja a predstavlja interval $(-\infty, a]$, tj.

$$-\infty < x \leq a.$$

Skup svih realnih brojeva predstavlja interval $(-\infty, +\infty)$.

Kod konačnih intervala $[a,b]$, $(a,b]$, $[a, b)$ i (a,b), $b \geq a$, broj $b - a$ zove se dužina intervala.

Svaki otvoreni interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ zove se ε-okolina tačke a, odnosno ε-okolina broja a, gde je ε proizvoljan pozitivan broj.

Na primer $(2 - \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{100})$ jeste jedna okolina broja 2.

Ovde je $a = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

Aritmetička, geometriska, harmoniska i kvadratna sredina

Za brojeve

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

aritmetička sredina je broj

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Zbir $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ obično označavamo sa $\sum_{i=1}^{n} a_i$, (čita se: sigma a_i pri čemu i uzima vrednosti redom od 1 do n, ili: sigma a_i, i teče od 1 do n).

Sada aritmetičku sredinu pomenutih brojeva možemo napisati u obliku

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Za nenegativne brojeve (brojeve koji nisu manji od nule)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$

geometriska sredina je broj

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Za pozitivne brojeve

$a_1, a_2, \ldots, a_n$

harmoniska sredina je broj

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

što znači da je harmoniska sredina recipročna vrednost aritmetičke sredine recipročnih vrednosti datih brojeva.

Za brojeve

$a_1, a_2, \ldots, a_n$

broj

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}}$$

naziva se kvadratna sredina.

Kompleksni brojevi

Da bi se moglo izvesti korenovanje u slučaju kada je osnova negativan broj uvode se imaginarni, odnosno opštije od toga kompleksni brojevi. To su brojevi oblika

$a + bi$

gde su a, b realni brojevi, dok je i imaginarna jedinica, tj.

$i = \sqrt{-1}$.

Kod kompleksnog broja $a + bi$ broj a je njegov realni deo, b je njegov imaginarni deo.

Kompleksan broj oblika $a - bi$ naziva se knjugovano kompleksan broj kompleksnog broja $a + bi$.

Računske operacije sa kompleksnim brojevima definisane su ovako:

Zbir: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

Razlika: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

Proizvod: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(Proizvod se dobija po pravilu množenja binoma binomom, pri čemu se uzima $i^2 = -1$).

Za kompleksan broj $(a+bi)$ važi relacija

$$(a+bi = 0) \Longleftrightarrow (a = 0 \wedge b = 0)$$

Proizvod kompleksnog i konjugovano kompleksnog broja je realan broj, tj.

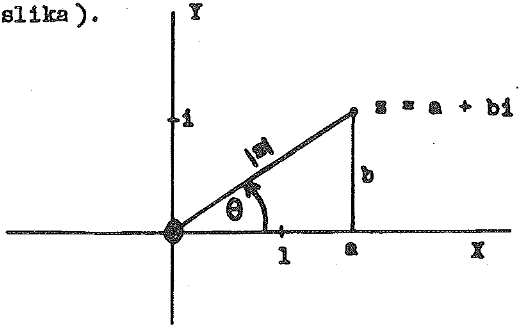
$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

Prikazaćemo sada deljenje dva kompleksna broja:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i, \quad (c,d \neq 0)$$

Kompleksne brojeve predstavljamo tačkama u kompleksnoj ravni (slika).



Kompleksan broj obeležavaćemo sa z. Dakle, $z = a + bi$.

Moduo - apsolutna vrednost kompleksnog broja z u oznaci $|z|$ predstavlja njegovo rastojanje od koordinatnog početka 0, a ugao θ što ga duž $0z$ zaklapa sa pozitivnim smerom realne ose naziva se argument kompleksnog broja z. Sa slike vidimo da je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = |z| \cos \theta, \quad b = |z| \sin \theta$$

odakle je

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta),$$

što predstavlja triginometriski oblik kompleksnog broja $z = a + bi$.

Neka su data dva kompleksna broja z_1 i z_2 u trigonometriskom obliku

$$z_1 = |z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

Tada je

$$z_1 z_2 = \left[|z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)\right] \left[|z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)\right] =$$

$$= |z_1| \, |z_2| \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

Ako je $z_1 = z_2 = z$, tada je $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ i

$$z^2 = |z|^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

Uopšte je

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

za svaki prirodni broj n. To je obrazao Moavra (Moivre) za stepenovanje kompleksnog broja.

Kao što vidimo, kompleksan broj z stepenuje se brojem n kada se sa n stepenuje njegov moduo, a argument mu se pomnoži sa n.

Za kompleksne brojeve

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

je

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right], \quad (z_2\neq 0)$$

Posmatrajmo n-ti koren kompleksnog broja z, tj. $\sqrt[n]{z}$. To je kompleksan broj u takav da je

$$u^n = z.$$

Ako je

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$u = |u|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

tada je prema Moavrovom obrazcu

$$|z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) = z = u^n = |u|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha),$$

odakle je

$$|u| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \theta + 2k\pi = n\alpha,$$

tj.

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Tako je

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

gde $\underline{k}$ uzima vrednost: o,1, ..., n − 1. Na taj način se dobija n različitih vrednosti za $\sqrt[n]{z}$. Za ostale vrednosti broja k rešenja se ponavljaju.

Primeri:

1) Naći proizvod i količnik kompleksnih brojeva $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + \sqrt{3}\,i$

Rešenje. Ovde je $|z_1| = \sqrt{2}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $|z_2| = \sqrt{7}$,

$\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ pa je

$$z_1\, z_2 = |z_1|\,|z_2| \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\right] =$$

$$= \sqrt{14}\,(\cos \tfrac{7\pi}{12} + i \sin \tfrac{7\pi}{12})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\right] =$$

$$= \sqrt{\tfrac{2}{7}}\,(\cos \tfrac{\pi}{12} - i \sin \tfrac{\pi}{12}).$$

2. Izračunati: a) $(1-i)^6$, b) $\sqrt[3]{8}$

Rešenje. a) $1-i = \sqrt{2}\,(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$, odakle je

$$(1-i)^6 = (\sqrt{2})^6 (\cos 6.\tfrac{7\pi}{4} + i \sin 6.\tfrac{7\pi}{4}) = 8(\cos \tfrac{\pi}{2} + i \sin \tfrac{\pi}{2}) =$$

$$= 8i.$$

b) $\sqrt[3]{8} = 2(\cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3})$, što za $k=0$

daje

$$\sqrt[3]{8} = 2;\ \text{za}\ k=1\ \text{je}\ \sqrt[3]{8} = 2(\cos.\tfrac{2\pi}{3} + i \sin \tfrac{2\pi}{3}) =$$

$$= 2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i) = 1 - \sqrt{3}\, i;\ \text{za}\ k=2\ \text{je}\ \sqrt[3]{8} =$$

$$= 2(\cos \tfrac{4\pi}{3} + i \sin \tfrac{4\pi}{3}) = 2(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, i) = -1 - \sqrt{3}\, i.$$

IV
F U N K C I J A

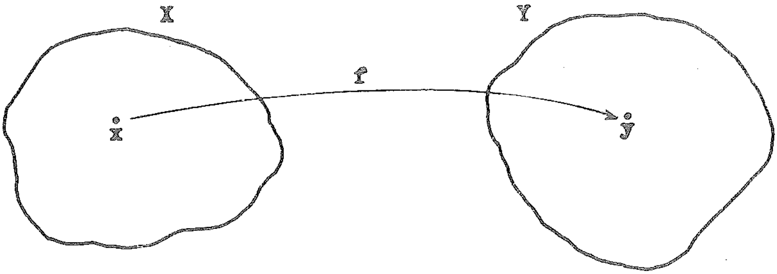
<u>Definicija funkcije.</u> Neka su data dva skupa X i Y. Tada zakon (propis, konvencija) po kome elementima $x \in X$ odgovaraju elementi $y \in Y$ i to tako da jednom elementu $x \in X$ odgovara jedan odredjeni element $y \in Y$ nazivamo <u>fun-</u>

koija (preslikavanje, korespondencija). Za skup X kažemo u tom slučaju da je oblast definisanosti, a za skup Y da je oblast vrednosti funkcije. Činjenicu da elementu $x \in X$ odgovara element $y \in Y$ označavamo sa

$$y = f(x)$$

i kažemo da je y slika elementa x, a x original za y.

Preslikavanje elemenata skupa X u elemente skupa Y možemo izraziti i shematski (slika):



Neka je f preslikavanje elemenata skupa X u elemente skupa Y. Ako je pri tome svaki element $y \in Y$ slika nekog elementa $x \in X$, kažemo da je sa f definisano jedno preslikavanje skupa X na skup Y. U opštem slučaju govorimo o preslikavanju skupa X u skup Y.

Ovako uvedena definicija funkcije odnosi se na takozvane apstraktne skupove pa je zato nezavisna od prirode elemenata skupova X i Y; znači X i Y mogu biti ma kakvi konkretni skupovi.

Primeri:

1) Neka je $X = \{P, Q, R\}$ i $Y = \{1, 2, 3\}$ i neka je preslikavanje f elemenata skupa X u elemente skupa Y dato na sledeći način:

$$f(P) = 1, \quad f(Q) = 3, \quad f(R) = 2.$$

Preslikavanje f definisano na ovaj način je preslikavanje skupa X na skup Y.

2) Neka je $X = \{1,2,3,4\}$ i $Y = \{a,b,c,d,e\}$ i neka je preslikavanje f skupa X u skup Y dato na sledeći način:

$$f(1) = a, \quad f(2) = d, \quad f(3) = e, \quad f(4) = e.$$

Ovako definisano preslikavanje f zadovoljava sve uslove gornje definicije: svakom elementu skupa X je pridodeljen po jedan element skupa Y.

Elementi a i d iz Y imaju po jedan original 1, odnosno 2, element e ima dva originala 3 i 4, a elementi b i c nisu pritom slike nijednog elementa iz X. Na taj način ovo preslikavanje skupa X nije preslikavanje na skup Y, već preslikavanje skupa X u skup Y.

Zakon pridruživanja možemo dati i tablicom

x	f(x)
1	a
2	d
3	e
4	e

tako da na levoj strani stoje originali (elementi skupa X - oblasti definisanosti) a s desne u istoj visini njihove slike. Često se uočeno preslikavanje označava i ovako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & d & e & e \end{pmatrix},$$

što znači da se u jednom redu napišu elementi skupa X, a ispod svakog od njih odgovarajuće slike iz Y.

Naravno, ova dva načina su pogodna samo ako X ima konačno članova.

3) Neka je $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ i neka je preslikavanje f skupa X u skup Y dato ovom formulom: $y=f(x) = x^2$. Tada je $f(1)=1$, $f(2)=4$,

$f(3) = 9$. Znači, ovo preslikavanje svakom elementu $x \in X$ pridružuje njegov kvadrat. Naravno, nisu svi elementi iz Y kvadrati brojeva iz X, te je u pitanju preslikavanje skupa X u skup Y. Ovo preslikavanje možemo na gore pomenuta dva načina da predstavimo ovako:

x	$y = f(x)$
1	1
2	4
3	9

, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

Ovde je $X \subseteq Y$ (svi elementi iz X su elementi i skupa Y) ali ne možemo govoriti da je to preslikavanje skupa Y u samog sebe, jer nije definisano za svaki broj iz Y (na primer za 4).

4) $X = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$
$Y = \{a, b, c\}$

Skup X je znači skup svih prirodnih brojeva i oni su još, poredjani u prirodnom poretku po veličini. Definišimo sada preslikavanje f skupa X y skup Y na ovaj način:

$f(2k-1) = a$, $f(2k) = b$, gde broj k uzima vrednosti $1, 2, 3, \ldots$. Pri tome $2k - 1$ daje sve neparne, a $2k$ sve parne brojeve iz X, tako da je preslikavanje definisano na celom skupu X. Znači, ako je element $x \in X$ neparan broj njegova je slika element $a \in Y$, ako je element $x \in X$ paran broj, tada mu odgovara element $b \in Y$. U ovom slučaju svaki neparan broj iz X je original elementa a i svaki paran broj iz X je original elementa b, tj. i jedan i drugi imaju beskonačno mnogo originala.

5) Često se sa R označava skup svih realnih brojeva, ili kako kažemo, realna prava. Neka je $X=R$ i $Y=R$, a preslikavanje f dato ovako: $x \xrightarrow{f} x^2$, tj. $y=f(x)=x^2$.

Kako je sada $X=Y(=R)$ imamo preslikavanje skupa realnih brojeva u samog sebe i svakom se realnom broju ovom funkcijom pridružuje njegov kvadrat. Negativni brojevi nemaju originala (tj. ni jedan se broj ne preslikava u negativan broj), jer nema negativnih kvadrata, nula ima samo jedan original-nulu, a pozitivni brojevi x imaju po dva originala $+\sqrt{x}$ i $-\sqrt{x}$ (jer je $(+\sqrt{x})^2=(-\sqrt{x})^2=$ $= x$).

U daljem izlaganju ćemo imati još mnogo primera funkcija definisanih na skupu realnih brojeva.

Da bismo ilustrovali opštost funkcije navodimo i sledeći primer.

6) Neka je X skup radnika neke fabrike, a Y skup pogona te fabrike. Svakom radniku pridodeljujemo pogon u kome je njegovo radno mesto. Time smo zadali jedno preslikavanje skupa X na skup Y. Naravno, svaki pogon ima bar jednog radnika, pa svaki element $y \in Y$ ima svoj original u X.

V
KOMBINATORIKA

Pre izlaganja kombinatorike uvodimo pojam <u>reč</u> (slog, kompleksija).

Neka je S izvestan konačan skup. Elemente toga skupa nazovimo dogovorno, <u>slova</u> a sam skup – <u>azbuka</u>. Uvodimo pojmove: reč dužine 1, reč dužine 2, ...

<u>Definicija</u>. Svako preslikavanje f skupa $\{1,2,3,\dots,n\}$ u skup S zovemo reč dužine n azbuke S.

Dakle, $f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

gde su $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ izvesni elementi skupa S.

Tu reč, dogovorno, označavamo sa

$a_1\, a_2\, a_3 \dots a_n$.

<u>Primer</u>. Slova su a,b,c; azbuka je $S = \{a,b,c\}$.

Tada su a,b,c – reči dužine 1, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc – reči dužine 2, aabacb je reč dužine 6.

Umesto termina reč upotrebljavaju se i: slog, kompleksija, linearan raspored.

Varijacije

Posmatrajmo skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata. Ako iz ovog skupa izdvojimo k različitih elemenata (pri čemu je $k \leq n$) i sa njima obrazujemo na bilo koji način reč dužine k dobićemo varijaciju klase k od elemenata skupa S.

Ako svaki element uzmemo posebno dobićemo varijacije prve klase. To su:

a_1

a_2

.

.

.

a_n

kojih imamo ukupno n, što izražavamo obrascem:

$$V_1(n) = n.$$

Ako uzmemo dva po dva elementa dobićemo reči dužine 2.

$$a_1a_2,\ a_1a_3,\ \ldots,\ a_1a_n,$$
$$a_2a_1,\ a_2a_3,\ \ldots,\ a_2a_n,$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$a_na_1,\ a_na_2,\ \ldots,\ a_na_{n-1},$$

a to su varijacije druge klase obrazovane od n elemenata različitih položaja) mogu da sede 6 lica na 6 stolica?

Odgovor. Na $P(6) = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ načina.

K o m b i n a c i j e

Neka je S izvestan skup sa n elemenata i neka je W_k skup svih varijacija k-te klase tog skupa. U tom skupu dogovorno uvodimo "jednakost" na sledeći način: varijacije w_1 i w_2 su jednake ako su izgradjene od istih slova. Na primer, varijacije abcd, cabd, bdac, ... jednake su medjusobno, dok ab i ac to nisu.

Varijacije sa ovako definisanom jednakošću zovemo <u>kombinacije</u>.

Na primer, sve kombinacije druge klase elemenata a, b, c,d su ab, ac, ad, bc, bd, cd. (Mogli smo, takodje, umesto ab uzeti i ba).

Jednoj kombinaciji klase k možemo pridružiti tačno $k!$ varijacija koje imaju ista slova kao i ta kombinacija. Otuda je broj svih kombinacija klase k od n elemenata skupa S $k!$ puta manji od broja svih varijacija klase k od n elemenata skupa S. Prema obrascu (1), imaćemo da je broj kombinacija klase k od n elemenata ($k \leq n$):

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k},$$

odnosno

$$C_k(n) = \binom{n}{k}. \qquad \dots (3)$$

Simbol $\binom{n}{k}$ čita se: n nad k i označava količnik

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k},$$

ili

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Tako je $\binom{5}{2} = \frac{5\,.\,4}{1\,.\,2} = 1o,\quad \binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$

$$\binom{9}{1} = \frac{9}{1} = 9\;;\quad \binom{3}{3} = \frac{3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3} = 1\,.$$

Uzima se da je $\binom{n}{o} = 1$, dok je $\binom{n}{n} = 1$ za svaki prirodni broj n.

Važi jednakost

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,.$$

Tako je na primer:

$$\binom{1o}{8} = \binom{1o}{1o-8} = \binom{1o}{2} = \frac{1o\,.\,9}{1.2} = 45.$$

Primer 1. Naći broj kombinacija druge klase od elemenata a, b, c, d, e, a zatim napisati ove kombinacije.

Rešenje. Ovde se traži broj kombinacija druge klase od pet elemenata, koji se dobija na osnovu obrazca (3) gde je $k = 2$, $n = 5$, dakle:

$$C_2(5) = \binom{5}{2} = \frac{5\,.\,4}{1\,.\,2} = 1o.$$

Kombinacije su: ab, ac, ad, ae; bc, bd, be; cd, ce; de.

Primer 2. U jednoj radionici zaposleno je 8 radnika. Na koliko različitih načina mogu koristiti istovremeno godišnji odmor grupe od po 3 radnika?

Rešenje. Ovde imamo kombinacije treće klase od osam elemenata čiji je broj prema obrascu (3)

$$C_3(8) = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Varijacije sa ponavljanjem

Posmatrajmo skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n različitih elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Varijacije sa ponavljanjem klase k od tih elemenata su reči sa k slova iz te azbuke S. Pri tom se isto slovo može pojaviti i više puta.

Varijacije prve klase su:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n .$$

Njih je na broju ukupno n.

Varijacije druge klase sa ponavljanjem su:

$$a_1a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_n ,$$

$$a_2a_1, a_2a_2, \ldots, a_2a_n ,$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$a_na_1, a_na_2, \ldots, a_na_n ,$$

kojih, kao što vidimo, ima ukupno $n \cdot n = n^2$.

Dakle, broj varijacija druge klase sa ponavljanjem od n elemenata je:

$$\bar{V}_2(n) = n^2.$$

Može se dokazati da je broj varijacija klase k sa ponavljanjem od n elemenata jednak:

$$\bar{V}_k(n) = n^k . \qquad \ldots (4)$$

Primer 1. Naći broj varijacija sa ponavljanjem druge klase od elemenata 1, 3, 4, 9 a zatim napisati ove varijacije.

Rešenje. Prema obrascu (4) broj varijacija druge klase sa ponavljanjem od četiri elementa je:

$$\bar{V}_2(4) = 4^2 = 16.$$

pošto je sada $k = 2$, $n = 4$.

Ove varijacije su: 11, 13, 14, 19; 31, 33, 34, 39; 41, 43, 44, 49; 91, 93, 94, 99.

Primer 2. Naći broj varijacija sa ponavljanjem treće klase od elemenata A, C.

Rešenje. Prema obrascu (4) broj varijacija treće klase sa ponavljanjem od dva elementa je

$$V_3(2) = 2^3 = 8$$

Ove varijacije su: AAA, AAC, ACA, ACC, CAA, CAC, CCA, CCC.

Permutacije sa ponavljanjem

Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ skup sa s različitih elemenata. Reč dužine $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$ u kojoj se slovo a_1 pojavljuje k_1 puta, slovo a_2 k_2 puta, ..., slovo a_s k_s puta naziva se permutacija sa ponavljanjem reda n.

Primer. Neka je $S = \{a, b\}$ i neka je $k_1=3$, $k_2=2$. Tada su

aaabb, abaab, ababa

permutacije sa ponavljanjem reda 5 u kojima se slovo a pojavljuje 3 puta, a slovo b 2 puta.

Broj različitih pertumacija obrazovanih od s različitih elemenata skupa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ u kojima se slova $a_1, a_2, \ldots, a_s$ pojavljuju redom $k_1, k_2, \ldots, k_s$ puta dobija se po obrascu

$$P_{(n)}^{(k_1, k_2, \ldots, k_s)} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_s!} . \quad \ldots (5)$$

To su permutacije sa ponavljanjem reda $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$.

<u>Kombinacije sa ponavljanjem</u>

Neka je S izvestan skup sa n elemenata i neka je $\bar{W}_k$ skup svih varijacija sa ponavljanjem k-te klase tog skupa. U tom skupu dogovorno uvodimo "jednakost" na sledeći način: varijacije sa ponavljanjem $\bar{\bar{w}}_1$ i $\bar{\bar{w}}_2$ su jednake ako su izgradjene od istih slova.

Varijacije sa ponavljanjem sa ovako definisanom jednakošću zovemo <u>kombinacije sa ponavljanjem</u>.

Kombinacije druge klase sa ponavljanjem su:

$$\begin{array}{l} a_1a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_{n-1}, a_1a_n \;, \\ \quad a_2a_2, \ldots, a_2a_{n-1}, a_2a_n \;, \\ \quad - - - - - - - - - - - \\ \qquad\qquad a_{n-1}\, a_{n-1}, a_{n-1}\, a_n \;, \\ \qquad\qquad\qquad a_n\, a_n \end{array}$$

kojih ima na broju

$$n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \binom{n+1}{2} .$$

Dakle, broj kombinacija druge klase sa ponavljanjem od n elemenata je:

$$\bar{C}_2(n) = \binom{n+1}{2} .$$

Može se dokazati da je broj kombinacija klase k sa ponavljanjem od n elemenata

$$\bar{C}_k(n) = \binom{n+k-1}{k} . \qquad \ldots (6)$$

Primer 1. Naći broj svih kombinacija sa ponavljanjem treće klase od četiri različita elementa.

Rešenje. Ovde je $n = 4$, $k = 3$, pa prema obrascu (6) dobijamo

$$C_3(4) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$$

Primer 2. Naći broj svih kombinacija sa ponavljaljanjem treće klase od dva različita elementa.

Odgovor. $C_3(2) = \binom{2+3-1}{3} = 4.$

Svi obrasci od (1) do (6) mogu se izvesti metodom matematičke indukcije.

Binomni obrazac

Pri stepenovanju binoma:

$a + b$

prirodnim brojem $n = 1, 2, \ldots$ javljaju se koeficienti oblika:

$$\binom{n}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n ,$$

koji se nazivaju <u>binomni koeficijenti</u>.

Po sporazumu uvodimo:

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Za binomne koeficiente važi jednakost:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \ldots (7)$$

što je već ranije napomenuto.

Dokaz jednakosti (7) izvodi se na osnovu značenja samih simbola njene leve i desne strane, tj.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\ldots(n-k-1)(n-k)} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-n+k+1)}{1\cdot 2\ldots(n-k)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{1\cdot 2\ldots(n-k)} \cdot \frac{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\ldots(k-1)k} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

što znači da važi jednakost (7).

Za binomne koeficiente važi jednakost:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \qquad \ldots (8)$$

Jednakost (8) se dokazuje na sledeći način:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\ldots(k-1)} \cdot \frac{k}{k} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{1\ .\ 2\ \dots\ k} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+2)}{1\ .\ 2\ \dots\ (k-1)k} =$$

$$= \binom{n+1}{k} .$$

Dokazaćemo sada da važi obrazao:

$$(a+b)^n = \binom{n}{o} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \qquad \dots (9)$$

za svaki prirodni broj $n=1, 2, \dots,$ koji se zove <u>binomni obrazao</u>.

Obrazao (9) izvešćemo metodom matematičke indukcije na sledeći način: Obrazao (9) važi za $n = 1$ tj.

$$(a+b)^1 = \binom{1}{o} a + \binom{1}{1} b.$$

Predpostavimo da obrazao (9) važi za neki prirodni broj n i dokažimo da on važi za $n + 1$.

Neka je za neki prirodni broj n

$$(a+b)^n = \binom{n}{o} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n .$$

Ako poslednju jednakost pomnožimo sa $(a+b)$ dobićemo:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{o} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{n} ab^n +$$

$$+ \binom{n}{o} a^n b + \dots + \binom{n}{n-1} ab^n + \binom{n}{n} b^{n+1} =$$

$$= \binom{n}{o} a^{n+1} + \left[\binom{n}{o} + \binom{n}{1}\right] a^n b + \dots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] ab^n + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

Kako je:

$$\binom{n}{o} = \binom{n+1}{o} \quad \text{i} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1},$$

i kako je prema (8)

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{n} = \binom{n+1}{k},$$

dobijamo da je:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{o} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{n} ab^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$

što znači da iz predpostavke da obrazac (9) važi za neki prirodni broj n proizilazi da on važi i za broj $n + 1$. Kako obrazac (9) važi za $n = 1$, to on važi za svaki prirodni broj $n = 1, 2, \dots$

Primer 1. Razviti po binomnom obrazou:

a) $(a+b)^4$

b) $(x+y)^7$

o) $(p-q)^5$.

Rešenje:

a) $$(a+b)^4 = \binom{4}{o} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4 .$$

Kako je $\binom{4}{o} = 1$, $\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$,

$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$, $\binom{4}{4} = 1$, to je

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^2 + b^4 .$$

b) $$(x+y)^7 = \binom{7}{o} a^7 + \binom{7}{1} a^6b + \binom{7}{2} a^5b^2 + \binom{7}{3} a^4b^3 +$$

$$+ \binom{7}{4} a^3b^4 + \binom{7}{4} a^3b^4 + \binom{7}{5} a^2b^5 + \binom{7}{6} ab^6 + \binom{7}{7} b^7,$$

tj.

$$(x+y)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 +$$

$$+ 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

c) $$(p-q)^5 = \binom{5}{o} p^5 - \binom{5}{1} p^4q + \binom{5}{2} p^3q^2 -$$

$$- \binom{5}{3} p^2q^3 + \binom{5}{4} pq^4 - \binom{5}{5} q^5 ,$$

tj.

$$(p-q)^5 = p^5 - 5p^4q + 10p^3q^2 - 10p^2q^3 + 5pq^4 - q^5.$$

Primer 2.

a) $$(1+x)^n = \binom{n}{o} + \binom{n}{1} x + \dots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} +$$

$$+ \binom{n}{n} x^n .$$

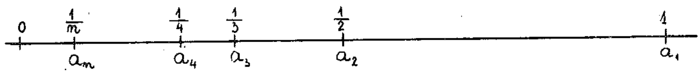
b) $$(1-x) = \binom{n}{o} - \binom{n}{1} x + \dots + (-1)^{n-1} .$$

$$\cdot \binom{n}{n-1} x^{n-1} + (-1) \binom{n}{n} x^n.$$

Primer 3. Dokazati da je:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ \frac{1}{n},\ \dots;$$

sa porastom broja n članovi niza opadaju i postaju sve bliži nuli.

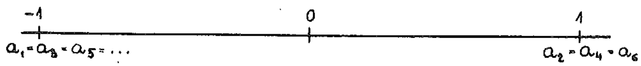


3) $a_n = (-1)^n$. Za $n = 2k - 1$ imamo

$a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$, a za $n = 2k$ $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$,

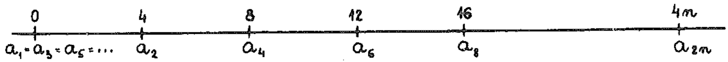
tj. članovi niza sa neparnim indeksom su -1, a sa parnim 1 i to je niz:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \dots,\ (-1)^n,\ \dots$$



4) $a_n = n + n(-1)^n$.

Ako je n neparan, tada je $(-1)^n = -1$ i $a_n = n + n(-1)^n = n + n(-1) = n - n = 0$; ako je n paran to je $(-1)^n = 1$ i $a_n = n + n(-1)^n = n + n = 2n$. Prema tome, na neparnim mestima u nizu imamo nule, a na parnim brojeve jednake dvostrukom iznosu indeksa:



Granične vrednosti nizova (granice nizova)

Definicija 1. Broj a je granica niza $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ ako svaka okolina tačke a sadrži sve članove niza, osim možda konačno mnogo početnih članova.

Dakle, da bi smo dokazali da je a granica niza $(a_n)_{n=1,2,3\ldots}$ treba dokazati da ma kakvu okolinu tačke a izabrali, članovi niza se nalaze u toj okolini, i to svi osim najviše konačno mnogo prvih koji ne moraju biti u toj okolini. Za niz iz primera 2) tačka $a=0$ je granica. Zaista, okoline te tačke su oblika $(-\varepsilon, \varepsilon)$ gde je $\varepsilon > 0$. Uzeti jednu takvu okolinu znači izabrati broj $\varepsilon > 0$. Za ovako izabrani broj $\varepsilon > 0$ može se izabrati tako veliko n da mu je recipročna vrednost $\frac{1}{n}$ manja od ε, tj. $a_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Medjutim, članovi toga niza opadaju sa povećanjem indeksa (ostajući pozitivni):

$0 < a_{n'} < a_n$ za $n' > n$, pa je i $0 < a_{n'} < \varepsilon$. I tako za izabrano ε našli smo n tako da se svi članovi niza čiji je indeks veći ili jednak n sadrže u okolini nule $(-\varepsilon, \varepsilon)$, osim prvih $n-1$ (dakle konačno mnogo) za koje ne možemo tvrditi da su u toj okolini.

Primer. Za $\varepsilon = 0{,}001$ odrediti članove niza $a_n = \frac{1}{n}$ koji leže u okolini $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Kako članovi niza opadaju dovoljno je naći prvi a_n za koji je $a_n < \varepsilon$, tj.

$$\frac{1}{n} < 0{,}001 \quad \text{ili} \quad n > \frac{1}{0{,}001} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 = 1000.$$

Dakle, počevši od 1001 pa nadalje, svi članovi niza se sadrže u okolini nule $\left(-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000}\right)$.

Ako je a granica niza $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$, tada pišemo

$$a_n \to a, \qquad n \to \infty$$

(čitaj: a_n teži ka a kada n teži beskonačnosti), ili

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(čitaj: a jednako limes a_n kada n teži beskonačnosti; limes = granica - na latinskom). Takodje se kaže da a_n konvergira ka a, a za sam niz u tom slučaju da je konvergentan.

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, biće za unapred doto $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

za $n \geq N(\varepsilon)$. To znači da svi članovi a_n datoga niza, počevši od $n = N + 1$ pa nadalje leže u intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. U tom intervalu leži beskonačno mnogo članova niza, a izvan tog intervala njih konačno mnogo, najviše njih N.

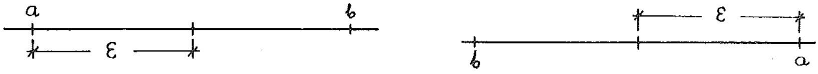
Niz ne mora da ima granicu, ali ukoliko je ima tada ima samo jednu.

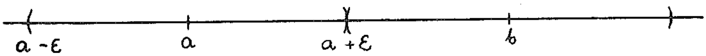
Da bismo ovo dokazali predpostavimo da niz (a_n) pored granice a ima još i granicu $b \neq a$. Ako je

$a < b$ i ako je $\varepsilon = \dfrac{b - a}{2}$, tada okolina

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ - zato što je a granica - sadrži sve članove niza isključujući najviše njih konačno mnogo koje ne sadrži. Tada okolina $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, sadrži najviše konačno elemenata i b ne zadovoljava uslove za granicu.

Za $b < a$ uzimamo $\varepsilon = \dfrac{a - b}{2}$ i ponavljamo isto rasudjivanje. Dakle b ne može biti granica datog niza.





Sada ćemo uvesti jedan pojam koji je blizak pojmu granice.

Definicija 2. Tačka b je tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ ako svaka okolina tačke b sadrži beskonačno mnogo članova niza.

Razlika od granice sastoji se u tome što i izvan okoline tačke nagomilavanja može biti beskonačno mnogo članova niza; granica jeste tačka nagomilavanja i pritom jedina, ali obrnuto ne važi.

Niz u primeru 3) ima dve tačke nagomilavanja -1 i $+1$, a niz iz primera 4) ima jednu 0 ; ni jedan ni drugi ne konvergiraju, ili kako se kaže divergiraju.

Beskonačno male veličine

Opšti član niza a_n zvaćemo dalje promenljiva. Promenljiva koja teži nuli je beskonačno mala veličina. Promenljiva $a_n = \frac{1}{n}$ iz primera 3) je prema tome beskonačno mala veličina. Takve su i promenljive:

$$b_n = -\frac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad c_n = \frac{(-1)^n}{n} .$$

Beskonačno velike veličine

Ako je promenljiva a_n takva da je $|a_n| > G$ za sve članove niza, osim za njih konačno mnogo, ma kako izabrali veliki broj G, kažemo da je a_n beskonačno velika veličina.

Promenljiva $a_n=3n$ iz primera 1) postaje beskonačno velika; takodje i promenljive $b_n = -2n$ i $c_n=(-1)^n n$.

Medjutim, promenljiva $a_n = n+(-1)^n n$ iz primera 4) nije beskonačno velika. Zašto?

Za niz (a_n) kažemo da je ograničen ako je za neki fiksiran broj N, $|a_n| \leq N$ za svako n, tj. ako svi članovi niza po apsolutnoj vrednosti istovremeno nisu veći od datog broja N.

Primer. Dokazati da je konvergentan niz ograničen. Primerom dokazati da nije svaki ograničen niz konvergentan.

Ako niz nije ograničen kažemo da je neograničen. Nizovi iz primera 1) i 4) su neograničeni.

Pre nego što predjemo na dalja razmatranja nizova napominjemo da "ponašanje" nizova ne zavisi od konačno mnogo početnih članova.

Može niz u "početku" "pravilno" da se "ponaša" da bi "kasnije" to svojstvo izgubio, i obratno. Čitalac može i sam da nadje mnogobrojne primere te vrste.

Operacije sa graničnim vrednostima

Sa nizovima uvode se osnovne aritmetičke operacije kao: zbir-suma, razlika, proizvod i količnik dva niza (a_n) i (b_n). To su redom nizovi (a_n+b_n), (a_n-b_n), $(a_n b_n)$ i $(\frac{a_n}{b_n})$ tj. rezultat aritmetičke operacije sa nizovima je novi niz čiji se članovi dobijaju aritmetičkom operacijom nad odgovarajućim članovima niza (u poslednjem slučaju predpostavlja se da je $b_n \neq 0$, zato što deljenje nulom nije definisano).

Primer. Neka je:

$a_n = 4 - \frac{1}{n^2}$, $b_n = 2 + \frac{1}{n}$. Tada je zbir :

niz (a_n+b_n), tj. $(4 - \frac{1}{n^2}) + (2 + \frac{1}{n})$ tj. $(6+ \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) =$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

razlika: niz (a_n-b_n), tj. $(4- \frac{1}{n^2})-(2 + \frac{1}{n})$, tj.

$(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$, $n = 1, 2, \ldots$

Proizvod: niz $(a_n\, b_n)$, tj. $(4 - \frac{1}{n^2})(2 + \frac{1}{n})$, tj.

$(4.2- \frac{1}{n^2}.2+4. \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} . \frac{1}{n})$, tj. $(8+ \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3})$

$n = 1, 2, \ldots$

Količnik: niz $(\frac{a_n}{b_n})$, tj. $\dfrac{4 - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}}$, tj. $\dfrac{(2+ \frac{1}{n})(2- \frac{1}{n})}{2 + \frac{1}{n}}$, tj.

$(2 - \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \ldots$

Postavlja se pitanje kako zavisi konvergencija niza zbira, razlike, proizvoda i količnika nizova (a_n), (b_n) od konvergencije samih nizova (a_n) i (b_n). U tom slučaju važe sledeći stavovi, koji nam često služe za lakše i brže odredjivanje granice nizova.

I. Ako promenljive a_n i b_n imaju konačne granice a i b, tada i njihov zbir (razlika) ima konačnu granicu i pri tome je:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

II. Ako promenljive a_n i b_n imaju konačne granice a i b tada i njihov proizvod ima konačnu granicu i

$$\lim_{n \to \infty} (a_n\, b_n) = a \cdot b$$

III. Ako promenljive a_n i b_n imaju konačne granice a i b, pri čemu je $b \neq 0$, tada i njihov količnik ima konačnu granicu:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} .$$

Dakle:

$$\text{I.} \quad \lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$$

$$\text{II.} \quad \lim (a_n\, b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)$$

$$\text{III.} \quad \lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

Napominjemo još jednom da napisane jednačine važe u slučaju kada granice na desnim stranama postoje i u poslednjem slučaju, još $\lim b_n \neq 0$.

Neodredjeni izrazi

Sada ćemo preći na ispitivanje nekih slučajeva koji se ne rešavaju na izneti način. Mi ćemo uslovno govoriti o "neodredjenim" izrazima, mada ćemo mnogima od njih odrediti vrednost. Ovde ćemo ispitati neke slučajeve kod kojih nije zadovoljen uslov za primenu gornjih jednačina. Simboli kojima ćemo označiti sledeće slučajeve predstavljaju samo znak za raspoznavanje i nemaju nikakav drugi smisao.

1^{o} Neodredjenosti tipa $\frac{0}{0}$

Ako su promenljive a_n i b_n beskonačno male, tj. $a_n \to 0$ i $b_n \to 0$, tada za promenljivu $\frac{a_n}{b_n}$ kažemo da je "neodredjenost tipa $\frac{0}{0}$ ".

Nikakav opšti zaključak ne može da se da u ovom slučaju. Sve zavisi od posebnog zakona po kome se a_n i b_n daju u funkciji od n. Primeri pokazuju da "sve" može da se desi.

1) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n \to 0$ i $b_n \to 0$.

$$a_n = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \to 0.$$

2) $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $b_n = \frac{1}{n^2} \to 0$

Ovde je:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \to \infty$$

3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, $b_n = \frac{1}{n} \to 0$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n, \text{ nema granice.}$$

Znači, u svakom posebnom primeru ovog tipa potrebno je neposredno ispitivati količnik $\frac{a_n}{b_n}$.

2^0 Neodredjenosti tipa $\frac{\infty}{\infty}$

Pod tim nazivom obuhvatamo nizove oblika $\frac{a_n}{b_n}$ gde $a_n \to \pm \infty$ i $b_n \to \pm \infty$. Slična je situacija kao i u predhodnom tipu: sve zavisi od specijalnih zakona kojima su dati a_n i b_n. To se najlakše vidi iz primera.

1) $a_n = n \to \infty$, $\quad b_n = n^2 \to \infty$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

2) $a_n = n^2 \to \infty$, $\quad b_n = n \to \infty$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n} = n \to \infty$$

3) $a_n = (-1)^n\, n \to \pm\infty$ $\quad b_n = n \to \infty$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n n}{n} = (-1)^n, \text{ nema granicu.}$$

3° Neodredjenosti tipa $0.\infty$

Primeri:

1) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\quad b_n = n$, $\quad a_n \to 0$, $\quad b_n \to \infty$

$$a_n\, b_n = \frac{1}{n^2}\, n = \frac{1}{n} \to 0$$

2) $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $\quad b_n = n^2 \to \infty$

$$a_n\, b_n = \frac{1}{n}\, n^2 = n \to \infty$$

3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, $\quad b_n = n \to \infty$

$$a_n\, b_n = \frac{(-1)^n}{n}\, n = (-1)^n, \text{ nema granice,}$$

pokazuju da je potrebno ispitivanje u svakom konkretnom slučaju ovog tipa.

4° Neodredjenosti tipa $\infty - \infty$

Ovde se obuhvataju slučajevi kada a_n i b_n teže beskonačnosti različitih predznaka. U tom slučaju ništa se opšte ne može reći o tome da li i čemu konvergira $a_n + b_n$. Ovo se opet najlakše vidi na primerima:

1) $a_n = 2n, \quad b_n = -n, \quad a_n \to +\infty, \quad b_n \to -\infty$

$a_n + b_n = 2n + (-n) = 2n - n = n \to \infty$

2) $a_n = n \to \infty, \quad b_n = -2n \to -\infty$

$a_n + b_n = n + (-2n) = n - 2n = -n \to -\infty$

3) $a_n = n + (-1)^n \to \infty, \quad b_n = -n \to -\infty$

$a_n + b_n = n + (-1)^n + (-n) = n + (-1)^n - n =$

$= (-1)^n$ – nema granice.

Pored već izloženih, postoje još i neodredjenosti tipa 1^∞, 0^0 i ∞^0.

Granične vrednosti posebnog značaja

Neka su dati nizovi

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}, \qquad b_n = n,$$

što znači da $a_n \to 1$, $b_n \to \infty$, i niz

$$e_n = (a_n)^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^n$$

javlja se kao neodredjenost tipa 1^∞. Medjutim, niz e_n je monoton i ograničen, pa prema tome i konvergentan. Graničnu vrednost niza e_n obeležavamo sa e, tj.

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

i njegova vrednost na pet decimala iznosi 2,71828.

Broj $\underline{e}$ ima vrlo važnu ulogu u matematici, to je Neperov (Napier) broj i uzima se za osnovu prirodnih logaritama.

Logaritam broja x za osnovu e, tj. $\log_e x$ obično obeležavamo sa $\ln x$.

Broj e definiše se i kao

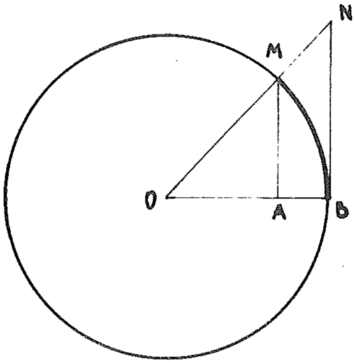
$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Dokazaćemo da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

U tu svrhu posmatrajmo jedinačni krug (slika) gde je $\widehat{BM} = x$, $\overline{AM} = \sin x$, $BN = \operatorname{tg} x$.

Sa slike se vidi da je površina trougla OAM manja od površine kružnog isečka OBM, a ova manja od površine trougla OBN, tj.



$$\frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{AM} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \widehat{BM} < \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{BN},$$

a kako je $\overline{OB} = 1$, biće odavde:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Kako smo uzeli da je $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to su $\sin x$, x i $\operatorname{tg} x$ pozitivni. Zato je:

$$1 < \frac{1}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

odnosno

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Ako x teži nuli, prvi član ove nejednačine ostaje nepromenljiv, a treći teži ka 1 ($\cos 0 = 1$). Ovo važi i u slučaju kada je x negativno jer je:

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Dakle je:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Sada ćemo dokazati da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Zaista, ako stavimo $e^h - 1 = t$, dobićemo:

$$e^h = 1 + t, \text{ odakle je}$$

$$h = \ln(1+t)$$

pa je

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}},$$

(pošto u slučaju kada $h \to 0$ i $t \to 0$), odakle je

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}} =$$

$$= \frac{1}{\ln\left[\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right]} = \frac{1}{\ln e} = 1, \text{ tj.}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Na sličan način se može dokazati da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$

VII
FUNKCIJA JEDNE NEZAVISNE PROMENLJIVE

Ranije smo dali opštu definiciju funkcije gde su oblasti definisanosti i oblasti vrednosti funkcije mogli da budu ma koji skupovi.

Ovde ćemo posmatrati funkcije definisane na skupu realnih brojeva čije su vrednosti takodje realni brojevi.

Dve promenljive veličine koje stoje u takvom odnosu da promenama jedne odgovaraju po nekom zakonu promene druge često se zovu: ona koja se proizvoljno menja - nezavisno promenljiva, a ona druga - zavisno promenljiva ili funkcija. Ako nezavisno promenljivu obeležimo sa x, a zavisno promenljivu, odnosno funkciju sa y, onda zavisnost promenljive veličine y od nezavisne promenljive veličine x obeležavamo sa

$$y = f(x)$$

gde je f simbol funkcije, i čitamo: ipsilon jednako ef od iks.

Zavisnost promenljivih veličina x i y može se izraziti kao

$$F(x,y) = 0$$

gde je F takodje simbol funkcije. Poslednja jednačina implicitno izražava promenljivu y kao funkciju od promenljive x i čita se: ef od iks ipsilon jednako nula.

Kada je funkcija data analitičkim izrazom, tj. u obliku

$$y = f(x)$$

ona je tim izrazom definisana za vrednosti nezavisne promenljive x za koje izraz ima smisla. Vrednosti promenljive x za koje taj izraz nema smisla jesu vrednosti za koje data funkcija nije definisana. Tako na primer izraz

$$\frac{1}{x-1}$$

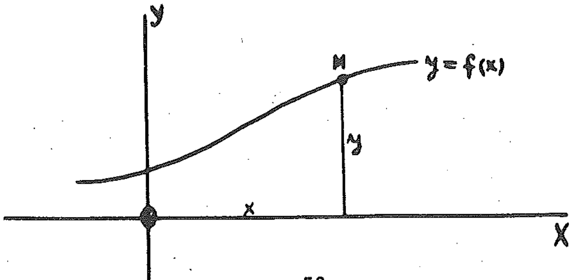
ima smisla za svako x, osim za $x=1$, jer deljenje nulom nema smisla. Izraz

$$\sqrt{x-3}$$

nema smisla za $x < 3$ jer u tom slučaju nema realne vrednosti.

Funkcije kod kojih jednoj vrednosti nezavisne promenljive odgovara jedna vrednost zavisne promenljive zovu se jednoznačne funkcije, a funkcije kod kojih jednoj vrednosti nezavisne promenljive odgovara više vrednosti zavisne promenljive zovu se višeznačne (mnogoznačne) funkcije.

Grafičko predstavljanje funkcija. Neka je data funkcija $y = f(x)$ definisana u intervalu (a,b). Ako vrednost promenljive x uzmemo kao apscisu, a odgovarajuću vrednost promenljive y kao ordinatu u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu u ravni, dobićemo u toj ravni jednu tačku M (slika). Učinimo li isto za sve vrednosti x i njima odgovarajuće vrednosti y, dobićemo u ravni krivu liniju. Ona je slika funkcije $y = f(x)$. Na taj način svaka funkcija $y = f(x)$ može se grafički predstaviti (prikazati) u pravouglom koordinatnom sistemu. Ovo je veoma važno, jer umesto da proučavamo funkcije možemo proučavati krive linije.



Funkcije se mogu prikazivati i tabelarno - u vidu tabele. Jedna takva tabela može, na primer, imati oblik

x	...	1	2	3	...
y	...	f(1)	f(2)	f(3)	...

Logaritamske tablice predstavljaju tabelu koja daje vezu izmedju brojeva i njihovih logaritama.

Inverzna funkcija. Jednačina

$$y = f(x)$$

definiše promenljivu y kao funkciju promenljive x. Ako ovu jednačinu rešimo (bar teoriski) po promenljivoj x dobićemo jednačinu

$$x = \varphi(y)$$

koja definiše promenljivu x kao funkciju promenljive y. Funkcije $y = f(x)$ i $x = \varphi(y)$ zovu se inverzne jedna drugoj.

Primer. Za funkciju $y = \sqrt{x}$ inverzna funkcija je $x = y^2$.

Uobičajeno je da posle nalaženja inverzne funkcije promenljive x i y izmene svoja mesta. Tako se za funkciju $y = \sqrt{x}$ uzima da je njena inverzna funkcija $y = x^2$.

Parna i neparna funkcija. Funkcija

$$y = f(x)$$

je parna ako je

$$f(-x) = f(x),$$

a neparna ako je

$$f(-x) = -f(x)$$

Drugim rečima, funkcija $f(x)$ je parna ako se njena vrednost ne menja kada se nezavisna promenljiva x zameni sa x, dok je funkcija $f(x)$ neparna ako menja znak kada se nezavisna promenljiva x zameni sa $-x$.

Primer 1. Funkcija $f(x) = ax^2$ je parna pošto je $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$. Isto tako funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x^4+1}$$

je parna pošto je

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^4+1} = \frac{1}{x^4+1} = f(x)$$

Funkcija

$$f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$$

je takodje parna jer je

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\cos(-x)} = \frac{x^2}{\cos x} = f(x)$$

Primer 2. Funkcija

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

je neparna jer je

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x)$$

Isto tako i funkcija $f(x) = (x^2+1)\sin x$ je neparna pošto je

$$f(-x) = \left[(-x)^2+1\right]\sin(-x) = (x^2+1)(-\sin x) = -(x^2+1)\sin x =$$
$$= -f(x)$$

Iz definicije parne i neparne funkcije sledi da je grafik (dijagram) parne funkcije simetričan prema ordinatnoj osi Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, dok je grafik neparne funkcije simetričan prema koordinatnom početku.

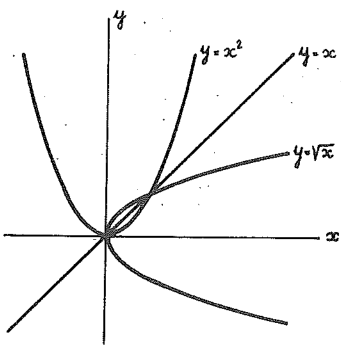
<u>Periodična funkcija</u>. Funkcija $y=f(x)$ je periodična sa periodom $w > 0$ ako je w najmanji broj za koji je $f(x+w) = f(x)$. Primeri periodičnih funkcija su trigonometrijske funkcije i to $\sin x$ i $\cos x$ imaju periodu 2π, dok

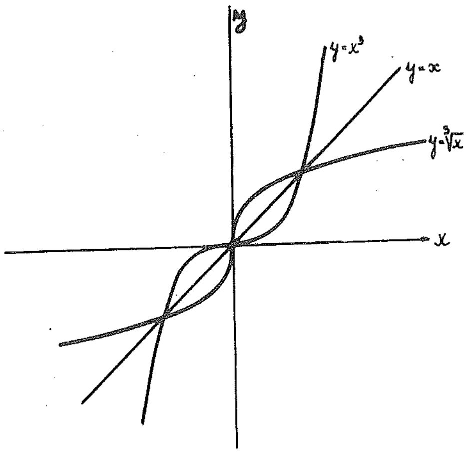
tg x i ctg x imaju periodu π.

Elementarne funkcije

Jedna od osnovnih funkcija jeste funkcija $y=x^n$, gde je n prirodni broj. Ona je definisana za svako x i spada u klasu celih racionalnih funkcija. Njena recipročna vrednost je funkcija $y = -\frac{1}{x^n}$, koja je definisana za svako x, osim za $x = o$.

Inverzna funkcija funkcije $y = x^n$ je funkcija $y = \sqrt[n]{x}$. Na sledećim slikama prikazani su dijagrami (grafici) funkcija $y=x^2$, $y=x^3$ i njima inverznih funkcija $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$. Na tim slikama dat je i grafik funkcije $y = x$ – prave u odnosu na koju su simetrične krive uzajamno inverznih funkcija.





<u>Polinom</u> stepena n je funkcija oblika

$$y = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_o = o)$$

gde su $a_o, a_1 \dots a_n$ realni brojevi (nazivaju se koeficijenti polinoma), a n prirodan broj.

Napomenimo da se polinom u slučaju da $x \to \pm\infty$ ponaša kao njegov glavni član (član sa najvećim stepenom), tj.

kao $y = a_0 x^n$.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija. Neka je a stalan pozitivan broj. Tada se funkcija oblika

$$y = a^x$$

zove eksponencijalna funkcija. Ona je definisana za sve vrednosti promenljivih x i uzima pozitivne vrednosti. Njoj inverzna funkcija je funkcija

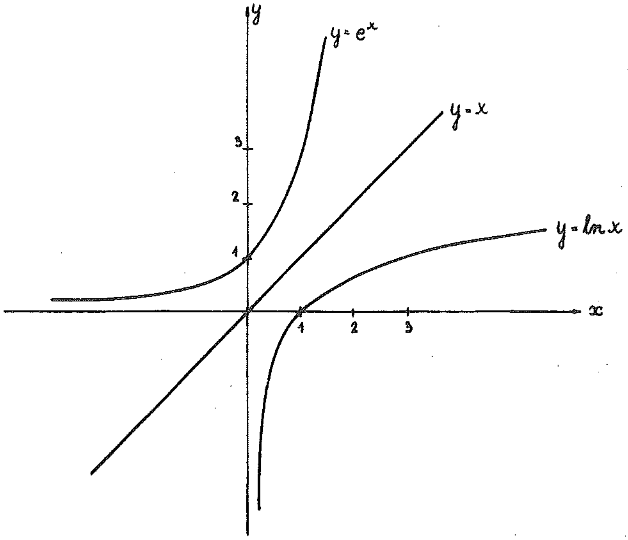
$$y = \log_a x$$

koja se zove logaritamska funkcija.

Ako za osnovu uzmemo broj e imaćemo funkcije

$$y = e^x \quad i \quad y = \ln x$$

čiji su grafici prikazani na narednoj slici



Eksponencijalna funkcija

$$y = a^x$$

može se napisati u obliku

$$y = e^{x\ln a},$$

dok se logaritamska funkcija

$$y = \log_a x$$

može napisati u obliku

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Logaritamska funkcija $y = \ln x$ definisana je za pozitivne vrednosti promenljive x.

<u>Trigonometriske funkcije</u>. To su funkcije

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \cot x$$

u kojima se ugao x uzima u lučnoj meri.

Funkcije $\sin x$ i $\cos x$ definisane su za svako x. One su periodične funkcije, perioda im je 2π. Funkcija $\sin x$ je neparna a $\cos x$ je parna.

Funkcija tg x definisana je za svako x, izuzev za $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, dok je funkcija $\cot x$ definisana za svako x, izuzev za $x = k\pi$, gde je k ceo broj. Funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\cot x$ su neparne i periodične funkcije, perioda im je π.

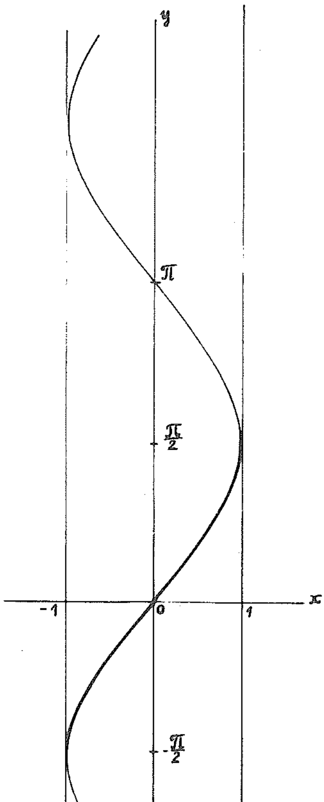
Grafici trigonometriskih funkcija $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ $\cot x$ prikazani su u poglavlju TRIGONOMETRIJA.

<u>Ciklometriske funkcije</u>. To su inverzne funkcije trigonometriskih funkcija $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$. Označavamo ih redom sa

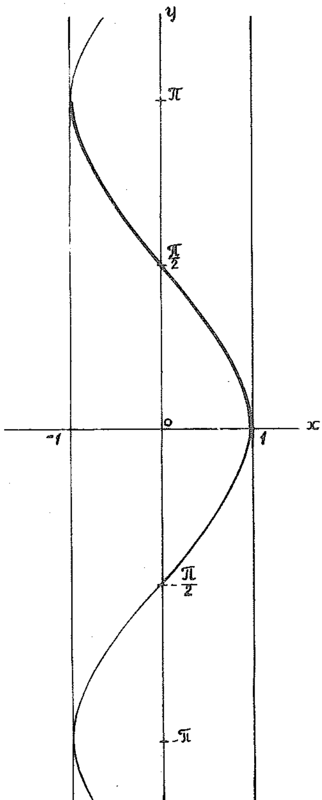
$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arccot} x$$

Funkcija $y = \arcsin x$ (čita se: ipsilon jednako arkus sinus iks) predstavlja ugao čiji je sinus jednak x. Slično je i za ostale ciklometriske funkcije.

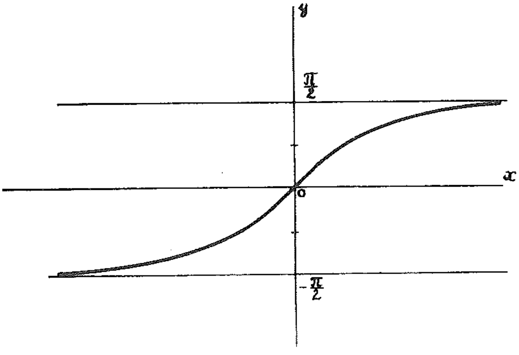
Funkcije $\arcsin x$ i $\arccos x$ definisane su samo za one vrednosti promenljive x za koje je $-1 \leq x \leq 1$, dok su funkcije $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arccot} x$ definisane za svako x. Ciklometriske funkcije su višeznačne funkcije. Na sledećim slikama one su prikazane grafički. Podebljani delovi kod krivih $y = \arcsin x$ i $y = \arccos x$ označavaju njihove takozvane glavne grane. Kod funkcija $y = \text{arctg}\, x$ i $y = \text{arccot}\, x$ dati su grafici samo njihovih glavnih grana (glavnih vrednosti).



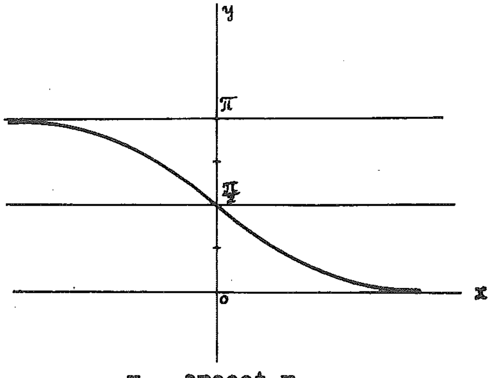
$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



$y = \text{arctg } x$



$y = \text{arccot } x$

Granična vrednost funkcije. Počinjemo sa jednim primerom: "Kad x teži 1 onda (x+1) teži 2". Ovo se simbolički, na primer, i ovako zapisuje:

$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

Kakvo je matematičko tvrdjenje iskazano prethodnom rečenicom, odnosno formulom?

Označimo $(x+1)$ sa y, dakle

$$y = x + 1.$$

Tada neposrednim "računom" dolazimo do tablice:

x	0	0,5	0,8	0,9	0,999	1,2	1,111	...
y	1	1,5	1,8	1,9	1,999	2,2	2,111	...

Ova tablica, tako bar izgleda, odgovara rečenici: "Kad x teži 1 onda y teži 2".

Stvarno, ako za x uzmemo vrednost "vrlo blizu 1" onda će y dobiti vrednost "blizu 2". Možemo proizvoljno birati x, odnosno za x uzeti vrednost proizvoljno blizu 1 - pitanje je kakve su onda odgovarajuće vrednosti za y. Da li te vrednosti mogu biti proizvoljno blizu 2?

Da bismo se strožije izražavali termine "blizu 1", "blizu 2", ... zamenićemo podesnijim terminima: "okolina broja 1", "okolina broja 2", ...

U prethodnom izlaganju rečenica: "Kad x teži 1 onda y teži 2" uzimana je potpuno intuitivno. Pomoću pojma okoline dajemo definiciju koja se usvaja u današnjoj matematici. Definisaćemo, odmah, opšti slučaj.

Definicija. Kažemo: "Kada x teži a onda $f(x)$ teži b" ako je ispunjen sledeći uslov:

Svakoj okolini $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ broja b odgovara izvesna okolina $(a - \delta, a + \delta)$ broja a takva da funkcija $f(x)$ uzima vrednosti iz okoline $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ kadgod x uzima vrednosti iz okoline $(a - \delta, a + \delta)$ [*]

Dogovor. Rečenicu: "Kad x teži a onda $f(x)$ teži b" označavamo ovako:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

[*] Funkcija $f(x)$ ne mora biti definisana u tački $x = a$.

Primer od koga smo pošli je očigledno takav da je

$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

Primedba: Prethodna "okolinska" definicija granične vrednosti funkcije se lako prevodi na "standardni" oblik sa nejednakostima koji se najčešće navodi.

Umesto: "x je u okolini $(a - \delta, a + \delta)$" možemo pisati nejednakost $|x - a| < \delta$, a umesto "f(x) je u okolini $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$" nejednakost $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Prethodna definicija se prevodi u sledeću:

Kažemo "f(x) teži b kad x teži a" ukoliko svakom pozitivnom broju ε odgovara pozitivan broj δ tako da je

$$|f(x) - b| < \delta$$

kadgod je

$$|x - a| < \delta$$

(sem, možda, za $x = a$).

Uvode se i definicije za:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=b, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)=b, \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x)=b, \quad \lim_{x \to a} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x \to a} f(x)= -\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x)= \pm\infty,$$ itd. (a,b realni brojevi)

Navodimo definiciju za $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Kažemo:

Kad x teži plus beskonačnosti onda f(x) teži b ukoliko svakom pozitivnom broju ε odgovara pozitivan broj N tako da je $|f(x) - b| < \varepsilon$ kadgod je $x > N$.

Slične su definicije i za ostale slučajeve.

Neprekidnost funkcije. Definicija. Kažemo da je funkcija f(x) neprekidna za $x = a$ (a je neki realan broj) ukoliko su ispunjeni uslovi:

1° Postoji broj $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

2° Važi jednakost $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna za svaku vrednost promenljive x iz intervala (a,b), kaže se da je ona <u>neprekidna u tom intervalu</u>.

Funkcija $f(x)$ koja ne ispunjava navedene uslove 1° i 2° za vrednost promenljive $x = a$ kaže se da je <u>prekidna</u> (ima prekid) za $x=a$ (prekidna je u tački $x=a$).

Tako je na primer funkcija $f(x)=x^2$ neprekidna za sve vrednosti promenljive x. Medjutim, funkcija $f(x)= \frac{1}{x}$ je prekidna za $x = 0$.

Sva pravila o graničnim vrednostima koja smo naveli za nizove mogu se preneti i na funkcije.

Neka je za funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A, \qquad \lim_{x \to a} f_2(x) = B.$$

Tada je:

1) $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x \to a} f_2(x)=A\pm B.$

2) $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) \cdot f_2(x))= \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A \cdot B$.

3) Ako je $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = B \neq 0$, tada je

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)} = \frac{A}{B} .$$

4) Ako je $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A$ (A konačno i različito od nule), a

$\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = 0$, tada je

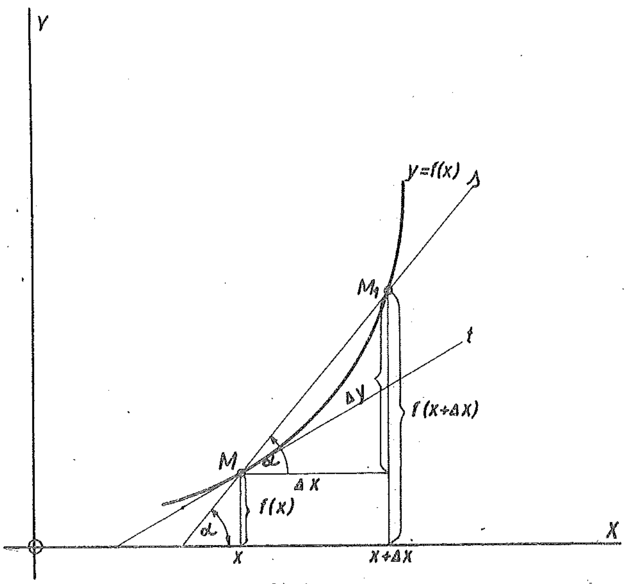
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \pm\infty$, i tako dalje.

VIII
DIFERENCIJALNI RAČUN

Izvod funkcije

Uspon. Sečica. Neka je $f(x)$ funkcija promenljive x definisana u intervalu (a,b) i neka je x broj iz tog intervala. Ako se vrednost promenljive x promeni za Δx tako da i $x + \Delta x$ bude u intervalu (a,b), funkcija će dobiti vrednost $f(x+\Delta x)$, a njena promena biće $f(x+\Delta x)-f(x)$.

Geometrijski (sl.1) tražena funkcija znači promenu ordinate na krivoj liniji $y=f(x)$ kada se apscisa x tačke M promeni za Δx.



Sl.1

Količnik promene funkcije i promene nezavisno promenljive, tj. količnik

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = tg\alpha$$

naziva se uspon funkcije.

Prava kroz tačke M i M_1 koje imaju koordinate x i $f(x)$, odnosno $x+\Delta x$ i $f(x+\Delta x)$, zove se sečica date krive $y=f(x)$. Njena jednačina je:

$$Y - f(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}(X-x)$$

gde su X i Y koordinate ma koje tačke na sečici.

Kao što vidimo uspon funkcije $f(x)$ od tačke M do M_1 jeste koeficient pravca sečice povučene kroz tačke M i M_1 date krive linije.

Izvod funkcije. Tangenta. Za datu funkciju $y=f(x)$ definisanu u intervalu (a,b) i izabrane vrednosti x i $x+\Delta x$ iz toga intervala, uspon funkcije od x do $x+\Delta x$ je neka funkcija od Δx, pa će biti:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \varphi(\Delta x).$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \varphi(\Delta x)$, ako postoji, naziva se **izvod funkcije** **$y=f(x)$** u tački x i obeležava se sa y' odnosno sa $f'(x)$.
Za funkciju $y=f(x)$ je

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

što znači da je prvi izvod funkcije granična vrednost kojoj teži količnik promene priraštaja funkcije i promene priraštaja nezavisno promenljive kada ova poslednja teži ka nuli, pod uslovom da ta granična vrednost postoji.

Da bi postojao izvod funkcije u nekoj tački, potrebno je da je ona u toj tački neprekidna. Kod neprekidne funkcije $y=f(x)$ malim promenama promenljive x odgovaraju male promene funkcije. U slučaju kada Δx teži ka nuli ($\Delta x \to 0$) težiće nuli i Δy, što znači da se tačka M_1 po krivoj $y=f(x)$ približava tački M, a u ovom slučaju sečica krive kroz njene tačke M i M_1 teži da zauzme položaj tangente na krivu u tački M.

Iz jednačine sečice

$$Y - f(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}(X-x)$$

dobija se, kada $\Delta x \to 0$ (tada tačka $M_1 \to M$ po krivoj $y=f(x)$), jednačina njene tangente u tački M

$$Y - f(x) = f'(x)(X-x)$$

Koeficient pravca tangente krive $y=f(x)$ u nekoj tački čija je apscisa x u pravouglom koordinatnom sistemu jeste izvod funkcije u dodirnoj tački.

Nalaženje izvoda date funkcije naziva se diferenciranje ili derivacija. Diferenciranje je jedna operacija nad funkcijama, kao što su na primer oduzimanje ili množenje operacije nad brojevima.

Pravila diferenciranja. Ako je funkcija $f(x)$ konstanta, tj.

$$f(x) = C$$

biće

$$f(x+\Delta x) = C,$$

pa je

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{C-C}{\Delta x} = 0$$

odakle se za $\Delta x \to 0$ dobija

$$(C)' = 0,$$

tj. izvod konstante je nula.

Ako funkcija $f(x)$ ima izvod $f'(x)$ tada funkcija $F(x) = kf(x)$ gde je k konstanta, ima izvod $kf'(x)$. Za funkciju $F(x)$ imaćemo:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = k\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

odakle je

$$F'(x) = kf'(x).$$

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ dve funkcije koje imaju izvode u' i v'. Tada je izvod funkcije $f(x)=u(x)+v(x)$ jednak $f'(x) = u'+v'$, pošto je

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x},$$

odakle je

$$f'(x) = u'+v'$$

Znači za funkciju $u+v$ je

$$(u+v)' = u'+v' .$$

Isto važi i za razliku:

$$(u-v)' = u'-v'.$$

Neka su date funkcije $u(x)$ i $v(x)$ koje imaju izvode u' i v'. Potražićemo izvod funkcije

$$f(x) = u(x).v(x) = u\,v.$$

Kako je

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)-u\,v}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\,\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$$

to je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0} u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v = u'v+u\,v' +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v = u'v+u\,v'+u'\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=u'\,v+u\,v'$$

pošto $\Delta v\to 0$ kada $\Delta x\to 0$, tj. za funkciju $u\,v$ je

$$(u\,v)' = u'v+u\,v'.$$

Posmatrajmo funkciju $v(x)$ koja je različita od nule u intervalu (a,b) i ima izvod. Tada je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{v(x)}$$

definisana za svako x iz pomenutog intervala. Neka i $x+\Delta x$ pripada tome intervalu. Tada je

$$\frac{f(x)+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{v+\Delta v}-\frac{1}{v}\right) =$$

$$= -\frac{1}{(v+\Delta v)}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Zbog neprekidnosti funkcije $v(x)$ biće

$$\lim_{\Delta x \to 0} (v+\Delta v) = v.$$

Zato je

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Neka je $v(x) \neq 0$ i neka funkcije $u(x)$ i $v(x)$ imaju izvod. Tada je prema predhodnim pravilima

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u.\frac{1}{v}\right)' = u'\frac{1}{v} + u\left(\frac{1}{v}\right)' =$$

$$= \frac{u'}{v} - \frac{u\,v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Znači, za funkciju $\frac{u}{v}$ je

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$$

Neka je $y=f(x)$ neprekidna i monotona funkcija čija je inverzna funkcija $x=\varphi(y)$ neprekidna po promenljivoj y. Pošto je

$$f(x+\Delta x)-f(x) = \Delta y,$$

$$\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y) = \Delta x,$$

to je

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

odakle je

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} . \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta y}{\Delta x} . \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1.$$

Kada $\Delta x \to 0$ tada i $\Delta y \to 0$, pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y+\ y)-\varphi(y)}{\Delta y} = 1, \quad \text{tj.}$$

$$f'_x(x) \cdot \varphi'_y(y) = 1. \qquad \ldots (1)$$

Ako je $y=f(u)$ i $u=\varphi(x)$, tada je

$$y = f\left[\varphi(x)\right] = F(x)$$

Neka $f(u)$ ima izvod po u, tj. $f'(u)$, a $\varphi(x)$ neka ima izvod po x, tj. $\varphi'(x)$.

Kada se x promeni za Δx, u će se promeniti za Δu a y za Δy pa će biti:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

odakle je (pošto $\Delta u \to 0$ kada $\Delta u \to 0$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

odnosno

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

ili

$$f'_x(x) = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x),$$

što predstavlja obrazac za nalaženje izvoda posredne funkcije.

Izvodi elementarnih funkcija

Za funkciju $f(x) = e^x$ biće

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

odakle je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

jer je, kao što smo videli

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

Znači da je

$$(e^x)' = e^x .$$

Uzmimo sada funkciju:

$$y = \ln x ,$$

odakle je

$$x = e^y$$

Sada prema (1) je

$$(\log x)'_x \cdot (e^y)'_y = 1,$$

tj.

$$(\log x)'_x \cdot e^y = 1$$

ili zbog $e^y = x$

$$(\log x)'_x \cdot x = 1 ,$$

odakle je $(\log x)'_x = \dfrac{1}{x}$.

Znači, za funkciju $y = \log x$ je

$$y' = (\log x)' = \frac{1}{x} .$$

Posmatrajmo sada funkciju:

$$y = x^n$$

koja se može napisati i u obliku

$$y = e^{n \ln x}.$$

Stavimo $u = n \ln x$ i dobićemo

$$y = e^u$$

pa je sada

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot u'_x = e^u(n \ln x)'_x = e^u n \frac{1}{x} =$$

$$e^{n \ln x} n \frac{1}{x} = n x^n \frac{1}{x} = n x^{n-1}$$

Dakle je za funkciju $y = x^n$

$$y' = n x^{n-1}.$$

Za funkciju

$$f(x) = \sin x$$

je

$$\frac{f(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2 \cos \frac{x+\Delta x+x}{2} \sin \frac{x+\Delta x-x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2 \cos(x+\frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

odakle je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Dakle, za funkciju $y = \sin x$ je

$$y' = (\sin x)' = \cos x .$$

Iz $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin u$, gde je

$u = \frac{\pi}{2} - x$, imamo prema pravilu za nalaženje izvoda posredne funkcije

$$(\cos x)'_x = (\sin u)'_u \; u'_x = \cos u \cdot (-1) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Znači, za $y = \cos x$ je

$$y' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Izvod funkcije $y = \operatorname{tg} x$.

Funkciju $y = \operatorname{tg} x$ napišemo u obliku

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

i odredimo njen izvod kao izvod količnika dveju funkcija. Imaćemo:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dakle, za funkciju $y = \operatorname{tg} x$ je

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Za funkciju $y = \operatorname{ctg} x$ je

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Znači, za funkciju $y = \mathrm{ctg}\, x$ je

$$y' = (\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Izvodi ciklometrijskih funkcija

Iz $y = \arcsin x$ je $x = \sin y$. Na osnovu obrasca (1) biće:

$$(\mathrm{arc}\sin x)'_x \cdot \cos y = 1$$

odakle je

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

pošto je $\sin y = x$.

Dakle, za $y = \mathrm{arc}\sin x$ je

$$y' = (\mathrm{arc}\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Za funkciju $y = \mathrm{arc}\cos x$ je

$$y' = (\mathrm{arc}\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

što se dobija na sličan način kao i izvod funkcije $y = \mathrm{arc}\sin x$.

Iz $y = \mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x$ je $x = \mathrm{tg}\, y$ pa je

$$(\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x)'_x\, (\mathrm{tg}\, y)'_y = 1,$$

odnosno

$$(\text{arc tg } x)'_x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} = 1 ,$$

odakle je

$$(\text{arc tg } x)'_x = \cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} .$$

Dakle je za $y = \text{arc tg } x$

$$y' = (\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1+x^2} .$$

Na sličan način se izvodi da je za funkciju $y = \text{arc ctg } x$:

$$y' = (\text{arc ctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2} .$$

Izvod implicitne funkcije

Neka je data implicitna funkcija

$$F(x,y) = 0.$$

Ova jednačina definiše y kao funkciju od x, tj. $y=f(x)$ pri čemu je jednačina

$$F(x,f(x)) = 0$$

identički zadovoljena. Kako je y posredna funkcija od x to se pri traženju izvoda ovo uzima u obzir.

Primer 1. Naći izvod funkcije

$$x^2 + e^y + y^2 = 0$$

Rešenje. Ovde je:

$$(x^2+e^y+y^2)' = (0)'$$

tj.

$$2x+(e^y)'_y \ y'_x + (y^2)_y \ y'_x = 0,$$

odnosno

$$2x + e^y y' + 2y y' = 0,$$

odakle je

$$y' (e^y + 2y) = - 2x$$

ili konačno

$$y' = - \frac{2x}{e^y+2y} .$$

Primer 2. Naći izvod funkcije:

$$\sin y + x^3 + \ln y + 3 = 0$$

Rešenje. Ovde je:

$$(\sin y + x^3 + \ln y + 3)' = (0)' ,$$

odnosno

$$(\sin y)'_y \ y'_x + (x^3)'_x + (\ln y)'_y \ y'_x + (3)' = 0$$

ili

$$\cos y \ y' + 3x^2 + \frac{1}{y} \ y' = 0,$$

odakle je

$$y' = - \frac{3x^2 y}{1+y \cos y} .$$

<u>Primeri</u>.

1/ Za $y=x^5-e^x + \cos x + \ln x - 2$ je

$$y' = (x^5 - e^x + \cos x + \ln x - 2)' =$$

$$= 5x^4 - e^x - \sin x + \frac{1}{x}\,.$$

2/ Naći izvod funkcije $y = e^{\sin x}$.
Stavljajući $u = \sin x$ imaćemo $y = e^u$, odakle je

$$y'_x = (e^u)' = (e^u)'_u \cdot u'_x\,,$$

tj.

$$y' = e^u\, u'_x = e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x} \cos x.$$

3/ Izvod funkcije $y = (x^3 - \sin x + e^x + 1)^8$
dobićemo kao izvod posredne funkcije stavljajući $u = x^3 - \sin x + e^x + 1$. Tada ćemo imati da je $y = u^8$, odakle je

$$y' = (u^8)' = (u^8)'_u \cdot u'_x = 8u^7 \cdot u'_x =$$

$$= 8(x^3 - \sin x + e^x + 1)^7 (3x^2 - \cos x + e^x),$$

pošto je $u = x^3 - \sin x + e^x + 1$,

$$u' = (x^3 - \sin x + e^x + 1)' =$$

$$= 3x^2 - \cos x + e^x\,.$$

4/ Izvod funkcije $y = x^7 \operatorname{tg} x$ dobićemo kao izvod proizvoda $y = u\,v$, gde je $u = x^7$, $v = \operatorname{tg} x$. U ovom slučaju biće:

$$y' = u'\,v + u\,v' = (x^7)' \operatorname{tg} x + x^7 (\operatorname{tg} x)' =$$

$$= 7x^6 \operatorname{tg} x + x^7 \cdot \frac{1}{\cos^2 y}\,.$$

5/ Izvod funkcije $y = \dfrac{x^2 + \cos x}{x^3 + \sin x}$ naćićemo kao izvod količnika $y = \dfrac{u}{v}$, gde je $u = x^2 + \cos x$, $v = x^3 + \sin x$.

U ovom slučaju biće:

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\,v'}{v^2}=\frac{(x^2+\cos x)'(x^3+\sin x)-}{}$$

$$\frac{-(x^2+\cos x)(x^3+\sin x)'}{(x^3+\sin x)^2}=\frac{(2\,x-\sin)(x^3+\sin x)-}{}$$

$$\frac{-(x^2+\cos x)(3x^2+\cos x)}{(x^3+\sin x)^2}.$$

6/ Za funkciju $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ je

$$y'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Dakle, za funkciju $y=\sqrt{x}$ je $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Pravila diferenciranja

$y=C$, $y'=0$ (C konstanta)

$y=kf(x)$, $y'=kf'(x)$ (k konstanta)

$y=f_1(x)\pm f_2(x)$, $y'=f_1'(x)\pm f_2'(x)$

$y=u(x)\cdot v(x)$, $y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $y'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Posredna funkcija

$y=f(u)$, gde je $u=\varphi(x)$

$$y'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x) = y'_u \cdot u'_x \,.$$

Inverzna funkcija

$y = f(x)$, odakle je $x = \varphi(y)$:

$$f'_x(x) \cdot \varphi'_y(y) = 1.$$

<u>Tablica izvoda</u>

$y=C$, $y' = 0$ (C konstanta)

$y=e^x$, $y'=e^x$, $y=a^x$, $y'=a^x \ln a$.

$y=\ln x$, $y'= \dfrac{1}{x}$

$y=x^n$, $y'=nx^{n-1}$, $y=x$, $y'=1$

$y= \sqrt{x}$, $y'= \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y=\sin x$, $y'=\cos x$

$y=\cos x$, $y'= -\sin x$

$y=\mathrm{tg}\, x$, $y'= \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$y=\mathrm{ctg}\, x$, $y'= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$y=\arcsin x$, $y'= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\arccos x$, $y'= -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\mathrm{arc\ tg}\, x$, $y'= \dfrac{1}{1+x^2}$

$y=\mathrm{arc\ tg}\, x$, $y'= -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Ako je $u=u(x)$, tada prema pravilu za nalaženje izvoda posredne funkcije imamo tablicu:

$y=e^u$, $\quad y'=e^u \cdot u'$;

$y=a^u$, $\quad y'=a^u \ln a \cdot u'$

$y=\ln u$, $\quad y'=\frac{1}{u} u'$

$y=u^n$, $\quad y'=n\, u^{n-1} u'$

$y=\sin u$, $\quad y'=\cos u\, u'$

$y=\cos u$, $\quad y'=-\sin u\, u'$

$y=\operatorname{tg} u$, $\quad y'=\frac{1}{\cos^2 u} u'$

$y=\operatorname{ctg} u$, $\quad y'=-\frac{1}{\sin^2 u} u'$

$y=\arcsin u$, $\quad y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$

$y=\arccos u$, $\quad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$

$y=\operatorname{arctg} u$, $\quad y'=\frac{1}{1+u^2} u'$

$y=\operatorname{arcctg} u$, $\quad y'=-\frac{1}{1+u^2} u'$

Funkcija $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$

može se napisati u obliku

$$y=e^{\varphi(x) \ln f(x)} = e^u,$$

pa je za nju

$$y'=e^u \cdot u' = [f(x)]^{\varphi(x)}[\varphi(x) \ln f(x)]'.$$

Primeri izvoda nekih funkcija

Naći izvod funkcija:

1. a) $y=e^{\cos x}$, b) $y=e^{x^2}$, c) $y=e^{tgx}$

2. a) $y=\ln(x^5+\cos x+1)$, b) $y=\ln(3+2e^x+\ln x)$

3. a) $y=(\sin x+x^3+5)^4$, b) $y=(e^x-x^2+2)^3$

4. a) $y=\sin 5x$, b) $y=\sin^7 x$

5. a) $y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$, b) $y=\cos^2 x$

6. a) $y=tg\,6x$, b) $y=tg^3 x$

7. a) $y=ctg\,4x$, b) $y=ctg\,x^3$

8. a) $y=arc\sin(1-x^2)$, b) $y=arc\cos 2x$

9. a) $y=arc\,tg\,3x$, b) $y=arc\,ctg\,(1+2x)$

10. a) $y=\sqrt{x^3+e^{4x}+2}$, b) $y=\sqrt[3]{x^2-5x+1}$

11. a) $y=x^x$, b) $y=(\sin x)^{\cos x}$

Rešenja:

1. a) Iz $y=e^{\cos x}=e^u$, gde je $u=\cos x$, je

$y'=e^u u'=e^{\cos x}(\cos x)'=-e^{\cos x}\sin x.$

b) $y=e^{x^2}=e^u$, $u=x^2$; $y'=e^u u'=e^{x^2}2x=$

$=2xe^{x^2}$

c) $y=e^{tg\,x}=e^u$, $u=tg\,x$; $y'=e^u u'=$

$$e^{tg\,x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}$$

2. a) $y=\ln(x^5+\cos x+1)=\ln u$, $y'=\frac{1}{u}u'=$

$$= \frac{5x^4-\sin x}{x^5+\cos x+1} .$$

b) $y=\ln(3+2e^x+\ln x)$, $\quad y'= \frac{1}{3+2e^x+\ln x}(2e^x+\frac{1}{x})$

3. a) $y=(\sin x + x^3 + 5)^4 = u^4;\quad y'= 4u^3\, u' =$

$$=4(\sin x + x^3 + 5)^3(\cos x + 3x^2).$$

b) $y=(e^x-x^2+2)^3$, $\quad y'=3(e^x-x^2+2)^2(e^x-2x)$.

4. a) $y'=5\cos 5x$, $\quad$ b) $y=\sin^7 x = u^7$, $\quad y'=7u^6u' =$

$$= 7 \sin^6 x \cos x.$$

5. a) $y'=\sin(\frac{\pi}{3} - x)$, $\quad$ b) $y'=-2\cos x \sin x$.

6. a) $y'= \frac{6}{\cos^2 6x}$, $\quad$ b) $y'=3\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} .$$

7. a) $y'= -\frac{4}{\sin^2 4x}$, $\quad$ b) $y'= -\frac{3x^2}{\sin^2 x^3}$.

8. a) $y'= \frac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}$, $\quad$ b) $y'= -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

9. a) $y'= \frac{3}{1+9x^2}$, $\quad$ b) $y'= -\frac{2}{1+(1+2x)^2}$.

10. a) $y'= \frac{3x^3+4e^{4x}}{2\sqrt{x^3+e^{4x}+2}}$,

b) $y'= \frac{2x-5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x+1)^2}}$

11. $y=x^x=e^{x\ln x}=e^u$, $u=\ln x$; $y'=e^u\ u'=$

$= x^x(x\ln x)' = x^x(\ln x+1)$.

Viši izvodi funkcije

Drugi izvod funkcije $y=f(x)$ jeste izvod njenog prvog izvoda, tj.

$$y'' = (y')' = \left[f'(x)\right] = f''(x)$$

Primer 1. Naći drugi izvod funkcije:

$y=x^4+\sin x+5$.

Rešenje. Ovde je,

$y'=4x^3+\cos x$, $y''=(y')'=$

$=(4x^3+\cos x)'=12x^2-\sin x$.

Dakle, drugi izvod funkcije

$y=x^4+\sin x+5$ je $y''=12\ x-\sin x$.

Primer 2. Naći drugi izvod funkcije

$y=x^3\ \ln x$. Kako je $y'=3x^2\ \ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}=$

$=3x^2\ \ln x+x^2$, to je odavde

$y''=6x\ \ln x+3x^2\cdot\frac{1}{x}+2x=6x\ \ln x+3x+2x=$

$=6x\ \ln x+5\ x$.

Dakle je

$$y''=6x\ \ln x+5x$$

Treći izvod funkcije $y=f(x)$ se dobija kao izvod od njenog drugog izvoda, četvrti izvod kao izvod njenog trećeg izvoda itd.

Primer. Naći izvode do reda 5 funkcije $y=\sin x$.

Rešenje. Ovde je:

$$y'=\cos x,\quad y''=(\cos x)'=-\sin x,\quad y^{(3)}=(-\sin x)'=$$

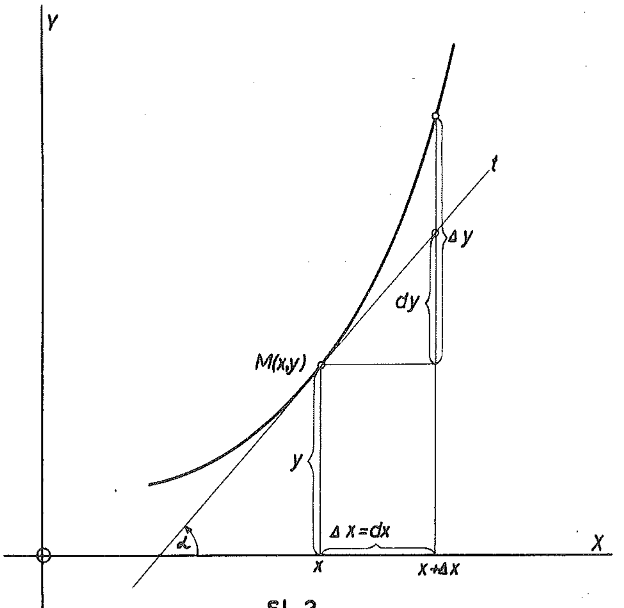
$$=-\cos x,\quad y^{(4)}=(-\cos x)'=\sin x,$$

$$y^{(5)}=(\sin x)'=\cos x.$$

Napominjemo da se izvod reda n funkcije $y=f(x)$ obeležava sa $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$, obično za izvode od trećeg reda pa naviše.

Diferencijal funkcije

Posmatrajmo funkciju $f(x)$ koja ima izvod $f'(x)$, tj. kriva linija $y=f(x)$ neka ima u tački $M(x,y)$ tangentu, slika 2.



Sl. 2

Ako se apscisa tačke M promeni za Δx, ordinata krive će se promeniti za $y=f(x+\Delta x)-f(x)$ a ordinata tangente za $y=f'(x)\Delta x$.

Izraz $dy = f'(x)\Delta x$

koji se obeležava i sa

$df(x)$

naziva se <u>diferencijal funkcije</u> $f(x)$.

Dakle, $df(x) = f'(x)\Delta x$. Ako je $f(x)=x$, biće $f'(x)=1$, pa je $dx=\Delta x$, tj. diferencijal nezavisno promenljive jednak je priraštaju te promenljive.

Iz $dy = f'(x)dx$ je

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

što znači da se prvi izvod funkcije $y=f(x)$ može prikazati kao količnik diferencijala.

Izraz $\frac{dy}{dx}$ čitati: de ipsilon po de iks.

Diferencijal nezavisno promenljive se uzima kao konstanta, tj. ne zavisi od x, dok diferencijal zavisne promenljive nije konstanta, nego zavisi od x, jer je on proizvod iz funkcije od x i konstante dx.

Važno je napomenuti da ako je x veoma mala veličina i ako je $f'(x) \neq 0$, onda su Δy i dy takodje veoma male veličine istoga reda i to ekvivalentne.

<u>Diferencijali višeg reda</u>

Za funkciju $y=f(x)$, $dy=df(x) = f'(x)dx$ je diferencijal prvog reda, $d(dy) = d^2y = d^2f(x) = d(f'(x)dx) = f'(x)dx^2$ je diferencijal drugog reda i $d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$ je diferencijal reda n funkcije $y=f(x)$. Ovde izraz dx^n znači $(dx)^n$.

Izraz $\frac{d^2y}{dx^2}$ čitati: de dva ipsilon po de iks na kvadrat, dok se izraz $\frac{d^n y}{dx^n}$ čita: de en ipsilon po de iks na en.

Primer 1. Naći diferencijal funkcije:

1/ $y=x^n$; 2/ $y=e^{\ln x}$; 3/ $y=x^2-5x+6$

Rešenje:

1/ $dy=nx^{n-1}dx$; 2/ $dy=\frac{1}{x}\,dx$;

3/ $dy=(2x-5)dx$.

Primer 2. Naći diferencijal funkcije:

1/ $\cos x$; 2/ $\operatorname{tg} x$; 3/ x^2e^x.

Rešenje:

1/ $d(\cos x) = -\sin x\,dx$; 2/ $d\operatorname{tg}x= \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

3/ $d(x^2\,e^x) = (2xe^x + x^2e^x)\,dx$.

Napominjemo da ako je $x=f(y)$ funkcija dobijena inverzijom od funkcije $y=f(x)$, pravilo o nalaženju njihovog izvoda prelazi u identičnost

$$\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 1, \text{ odnosno}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Primer. Naći izvod funkcije $y = \arcsin x$.
Rešenje. Iz $y = \arcsin x$ je $x = \sin y$, pa je:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y, \quad a \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Primer 3. Naći diferencijale prvog i drugog reda funkcija:

1/ $y=x^4$; 2/ $y=\sin x$; 3/ $y=e^x$

Rešenje:

1/ $dy=4x^3dx$; $d^2y = 12x^2dx^2$

2/ $dy=\cos x\, dx$; $d^2y = -\sin x\, dx^2$

3/ $dy=e^x\, dx$; $d^2y=e^x\, dx^2$

Pravila za diferenciranje mogu se pomoću diferencijala pisati u obliku: $dC = 0$, tj. diferencijal konstante jednak je nuli:

$$d(ku) = kdu;\quad d(u\pm v) = du \pm dv;\quad d(u.v)=$$

$$= vdu + udv;\quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Kod posredne funkcije:

$y=f(u)$, gde je $u = \varphi(x)$, je

$dy = f'(u).\ \varphi'(x)\, dx$,

odnosno

$dy = f'(u)\, du$.

Kod nalaženja izvoda implicitnih funkcija uzima se diferencijal leve i desne strane. Pri tome se koriste pravila računanja sa diferencijalima.

Primer 1. Naći izvod funkcije

$x^3+8xy + 2y^2-y = 0$.

Rešenje. Ovde je

$d(x^3+8xy + 2y^2-7) = d(0) = 0$,

odakle imamo

$$3x^2dx + 8ydx + 8xdy + 4ydy = 0,$$

odnosno

$$(3x^2+8y)dx + (8x+4y)dy = 0,$$

odakle je

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+8y}{8x+4y}.$$

Primer 2. Naći izvod funkcije

$$e^x+y+\cos y+2x^3 = 0$$

Rešenje. Izjednačavajući diferencijal leve strane gornje jednačine sa nulom dobićemo

$$e^x dx + dy - \sin y\, dy + 6x^2\, dx = 0,$$

odnosno

$$(e^x+6x^2)dx + (1-\sin y)dy = 0,$$

odakle je

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{e^x+6x^2}{1-\sin y}.$$

Primer 3. Naći izvod funkcije $x^2+x = y^3+y$.

Rešenje. Izjednačavajući diferencijale leve i desne strane date jednačine dobijamo

$$2xdx + dx = 3y^2dy + dy,$$

odakle je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 1}{3y^2+ 1}.$$

Primena izvoda

Tangenta i normala krive

Kao što smo videli, geometrijski, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu prvi izvod $f'(x)$ funkcije $y = f(x)$, predstavlja koeficient pravca tangente povučene u tački $M(x,f(x))$ krive čija je jednačina $y=f(x)$. Jednačina prave kroz jednu tačku $M_1(x_1,y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k(x-x_1),$$

gde je k - koeficient pravca, pa za slučaj tangente imamo

$$y-y_1 = y_1'(x-x_1)$$

gde je y_1' izvod funkcije $y=f(x)$ u tački $M_1(x_1,y_1)$.

Primer. Napiši jednačinu tangente krive $y=x^2-2x-3$ u tački M_1 čija je apcisa $x_1 = 0$.

Prvo nalazimo ordinatu tačke M_1 iz jednačine krive koja iznosi -3, tj. $y_1= -3$.

Izvod funkcije je $y'=2x-2$, čija vrednost za $x=x_1=0$ je $y_1'=2.0-2 = -2$.

U našem slučaju je $x_1=0$; $y_1=-3$; $y_1' = -2$ pa jednačina tangente glasi

$$y+3 = 2(x-0), \text{ odnosno } y=-2x-3.$$

Primer 2. Napiši jednačinu tangente krive $y=x+\ln x$ u njenoj tački $M_1(1, 1)$.

Rešenje. Prvi izvod funkcije je

$y'=1 + \frac{1}{x}$, odakle dobijamo za $x_1=1$ da je

$y_1' = 1+ \frac{1}{1} = 2$, pa će jednačina tangente glasiti

$y-1 = 2(x-1)$, tj.

$y=2x-1$.

Neka je $M_1(x_1, y_1)$ tačka krive K, a t_1 njena tangenta u tački M_1. Prava koja prolazi kroz tačku M_1 i stoji normalno na t_1 naziva se normala krive K. Njena jednačina glasi

$$y-y_1= -\frac{1}{y_1'}(x-x_1).$$

Primer. Napiši jednačinu normale krive $y=2e^x$ u njenoj tački M_1 (0, 1).

Rešenje. Za $y=2e^x$ je $y'=2e^x$, odakle je $y_1'=2e^{x_1} = 2e^0 = 2$, pa jednačina normale glasi

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-0), \text{ tj.}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1.$$

Ugao pod kojim se seku dve krive

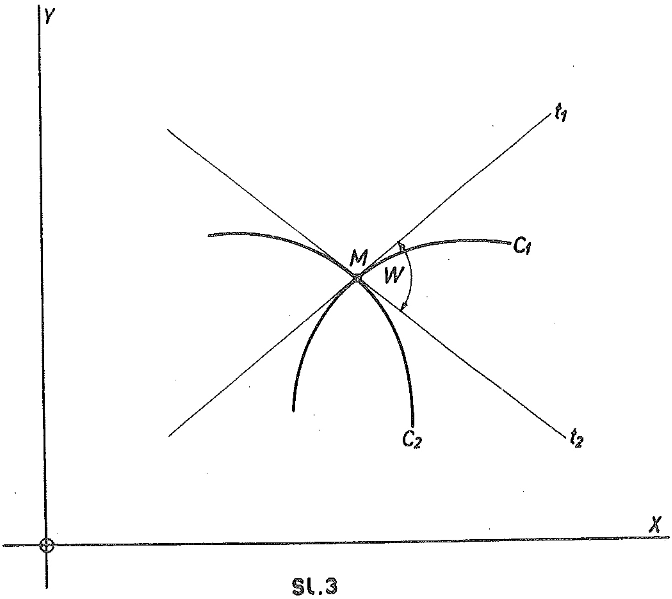
Pod uglom preseka dveju krivih C_1 i C_2 podrazumeva se ugao izmedju tangenata t_1 i t_2 povučenih na obe krive u njihovoj presečnoj tački, slika 3.

Primer 1. Naći ugao pod kojim se seku krive $y=x^2$ i $y = \frac{1}{x}$.

Rešenje. Prvo nalazimo tačku njihovog preseka, rešavanjem jednačina datih krivih. Tako je $x^2 = \frac{1}{x}$, odakle je $x^3 = 1$, što znači da je $x=1$. Zamenom nadjene vrednosti za x u jednoj jednačini, nalazimo da je $y = 1$, što znači da se krive seku u tački M (1, 1).

Koeficient pravca K_1 tangente t_1 na krivu $y=x^2$ u tački M dobija se kao vrednost prvog izvoda funkcije $y=x^2$ u toj tački. Za $y=x^2$ je $y'=2x$, odakle $K_1=2.1 = 2$.

Koeficient pravca K_2 tangente t_2 na krivu $y=\frac{1}{x}$



Sl.3

u tački M dobija se takodje kao vrednost prvog izvoda funkcije $y = \frac{1}{x}$ u toj tački. Za $y = \frac{1}{x}$ je $y' = -\frac{1}{x^2}$, odakle je $K_2 = -\frac{1}{1^2} = -1$.

Sada se ugao ω izmedju tangenata t_1 i t_2 nalazi kao ugao izmedju pravih čije koeficijente pravca K_2 i K_1 znamo, tj. po obrazcu

$$tg\,\omega = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_2 \cdot K_1}$$

što u našem slučaju daje

$$tg\,\omega = \frac{-1-2}{1-2} = 3.$$

Znači da se date krive seku pod uglom $\omega = \text{arc tg } 3$.

Primer 2. Naći ugao pod kojim kriva $y = \ln x$ seče x osu.

Rešenje. U ovom slučaju treba naći koeficient pravca tangente krive u njenoj presečnoj tački sa x osom. Kako kriva $y = \ln x$ seče x osu u tački $x = 1$. biće u toj tački vrednost prvog izvoda $y'=1$, pošto je za $y=\ln x$ $y'=\frac{1}{x}$, što znači da je $tg\omega = 1$, odakle se dobija da je $\omega = 45^o$. Znači, kriva $y=\ln x$ seče x osu pod uglom od 45^o.

Teorema Rola (Rolle) i Lagranža (Lagrange)

Rolova teorema. Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna u intervalu (a,b) i neka ona ima izvod u svakoj tački toga intervala. Ako je $f(a) = f(b) = 0$, tada postoji bar jedna vrednost ξ iz intervala (a,b) tako da je $f'(\xi) = 0$.

Dokaz ove teoreme je geometriski očigledan, slika 4. Tako, ako je $f(a) = 0$, funkcija $f(x)$ počev od $x=a$ raste ili opada. Ako funkcija $f(x)$ raste, ona ne može stalno da raste, pošto je $f(b) = 0$ već će da raste do neke vrednosti $x = \xi$, a zatim će da opada, što znači da u tački ξ iz intervala (a,b) funkcija $f(x)$ dostiže maksimum. Kako funkcija $f(x)$ ima izvod u svakoj tački intervala (a,b) to u ovom slučaju mora biti $f'(\xi) = 0$. Isti se zaključak izvodi ako funkcija $f(x)$ počev od $x=a$ opada.

Ako je $f(x) = 0$ za sve vrednosti promenljive x iz intervala (a,b) tada je i $f'(x) = 0$.

Rolova teorema važi i kada je $f(a) = f(b) = c$.

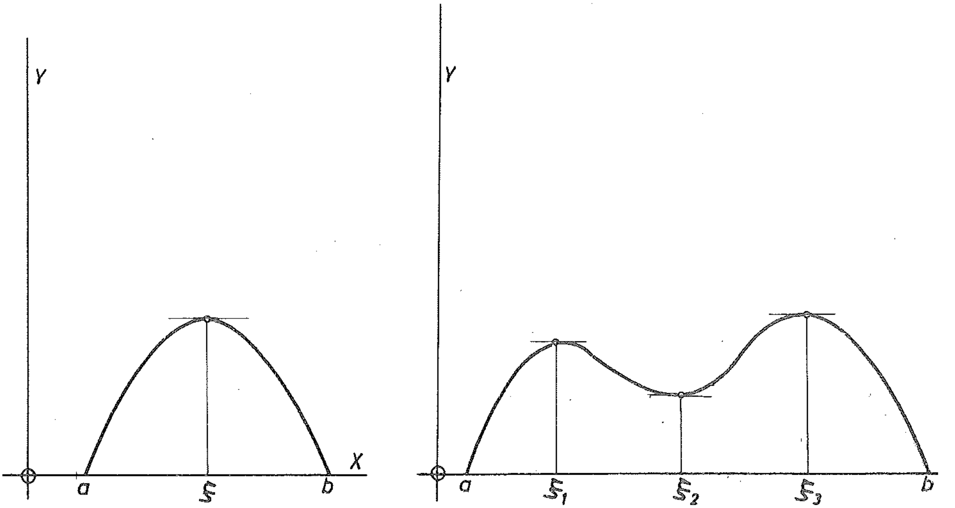
Lagranževa teorema. Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija u intervalu (a,b) i neka ona ima izvod u svakoj tački toga intervala. Tada je

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Za dokaz Lagranževe teoreme posmatrajmo funkciju

$$F(x)=f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, x.$$

Funkcija $F(x)$ je neprekidna i ima izvod u svakoj tački intervala (a,b). Kako je



Sl. 4

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a},$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a},$$

to je $F(a) = F(b)$ pa prema Rolovoj teoremi je za neko ξ iz intervala (a,b)

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

odakle je

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Poslednja jednačina može se napisati i u obliku

$$f(b) = f(a) + (b-a)\, f'(\xi).$$

Ako se stavi $b=a+h$, odakle je $b-a = h$, tada je $\xi=a+\theta h$ gde je $0<\theta<1$, pa predhodni obrazac dobija oblik

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

i naziva se obrazac konačnog priraštaja.

Teorema Lopitala (L'Hospital)

Potsetimo se da se izvod funkcije $f(x)$ u tački $x=a$ (za $x=a$) definiše kao:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Neka je

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

i neka je $f_1(a) = 0$ i $f_2(a) = 0$. Tada je funkcija $F(x)$ za $x=a$ prividno neodredjena tipa $\frac{0}{0}$.

Iz

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}}{\frac{f_2(x)-f_2(a)}{x-a}}$$

je

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}}{\frac{f_2(x)-f_2(a)}{x-a}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x \to a} \frac{f_2(x)-f_2(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1'(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$

a to je teorema Lopitala.

Ako je $\lim\limits_{x \to b} f_1(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x \to b} f_2(x) = \infty$,

tada je funkcija

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

za $x=b$ prividno neodredjena tipa $\frac{\infty}{\infty}$.

Kao u predhodnom slučaju i ovde se može dokazati da je:

$$\lim_{x\to b} F(x) = \lim_{x\to b} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}.$$

Primer 1. Naći $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$.

Rešenje. Ovde je $f_1(x) = x^2-x-2$, $f_2(x) = x-2$, $f_1(2) = 0$, $f_2(2)=0$, pa je:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{1} = 3.$$

Primer 2. Naći $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Rešenje. Kako je

$$F(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$ gde je $f_1(x) = 1-\cos x$,

$f_2(x)=x^2$ i gde je $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$,

to se ovde može primeniti Lopitalova teorema pa će biti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$ gde je

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(o) = 0,$$

što znači da se sada na izraz

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

može primeniti Lopitalova teorema i biće:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} .$$

Dakle je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} .$$

Primer 3. Naći $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$.

Rešenje. Kako ovde imamo neodredjeni izraz tipa $\frac{\infty}{\infty}$, to se u ovom slučaju može primeniti Lopitalova teorema i biće:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty .$$

Primer 4. Naći $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \operatorname{tg} x$

Rešenje. Ovde se javlja neodredjeni izraz tipa $0.\infty$. Medjutim, ako se izraz $(\frac{\pi}{2} - x)\operatorname{tg} x$ napiše u obliku

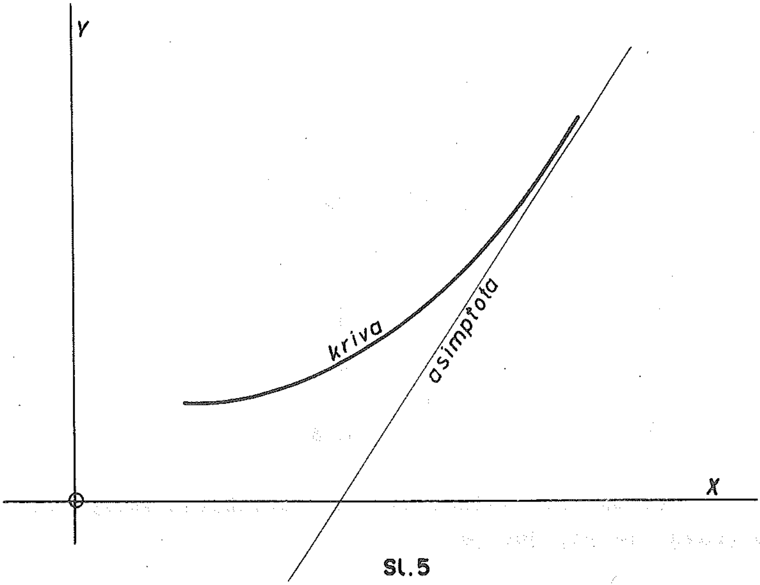
$\dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{\operatorname{ctg} x}$ to se sada javlja neodredjeni izraz tipa $\frac{0}{0}$, i primenom Lopitalove teoreme dobija se:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\pi}{2} - x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin^2 x = 1.$$

Asimptote

Posmatrajmo krivu $y=f(x)$ i na njoj tačku $M(x,y)$.

Ako se tačka M pomera po krivoj tako da kada jedna njena koordinata teži beskonačnosti, rastojanje tačke M od neke prave teži nuli, kazaćemo da je ta prava asimptota date krive. Drugim rečima, asimptota je prava koja se sa krivom dodiruje u beskonačno udaljenoj tački (slika 5).



Sl.5

Razlikujemo vertikalne, horizontalne i kose asimptote krivih.

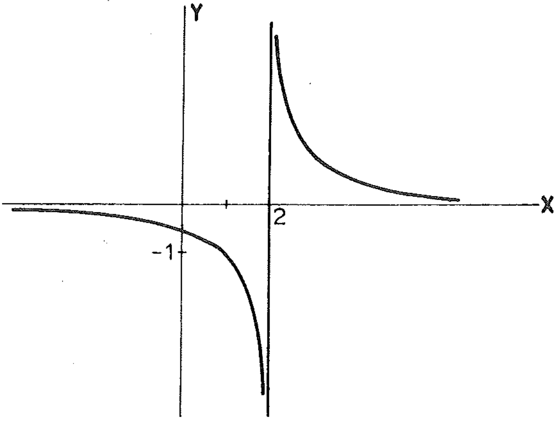
Vertikalna asimptota

Prava $x=a$ je vertikalna asimptota krive $y=f(x)$ ako je:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

Primer 1. Kriva $y = \frac{1}{x-2}$ ima za vertikalnu asimptotu pravu $x=2$, jer je $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \pm\infty$.

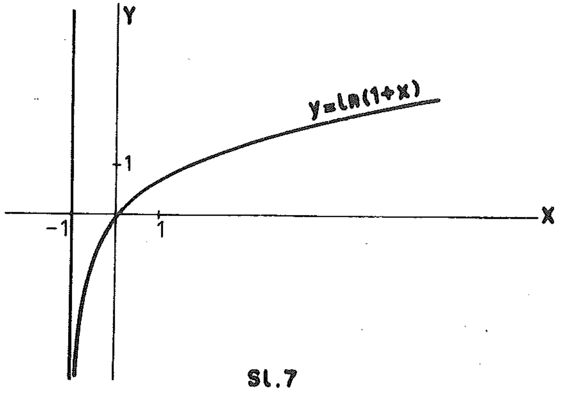
Ovde je $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \infty$, dok je $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$, slika 6



Sl. 6

Primer 2. $y=\ln(x+1)$ ima vertikalnu asimptotu. To je prava $x=-1$, jer je

$\lim\limits_{x\to -1} \ln(x+1) = -\infty$, slika 7.



Sl. 7

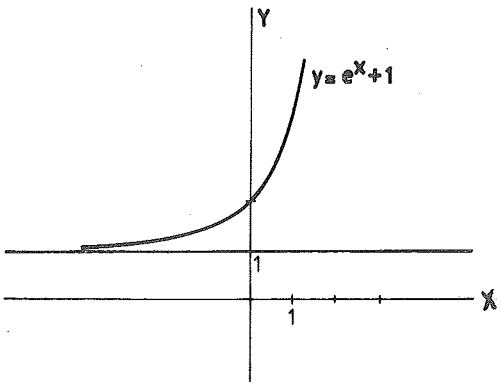
Horizontalna asimptota

Prava $y=b$ je horizontalna asimptota krive $y=f(x)$ ako je

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b_1, \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b_2$$

Primer 1. Kriva $y=e^x+1$ ima horizontalnu asimptotu pravu $y=1$, jer je

$$\lim_{x \to -\infty} (e^x+1) = \lim_{x \to \infty} (e^{-x}+1) = 1,$$ slika 8.



Sl. 8

Primer 2. Da li kriva $y= \frac{2x-1}{x}$ ima horizontalnu asimptotu?

Kako je $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x} = \lim_{x \to \infty} (2 - \frac{1}{x}) = 2,$

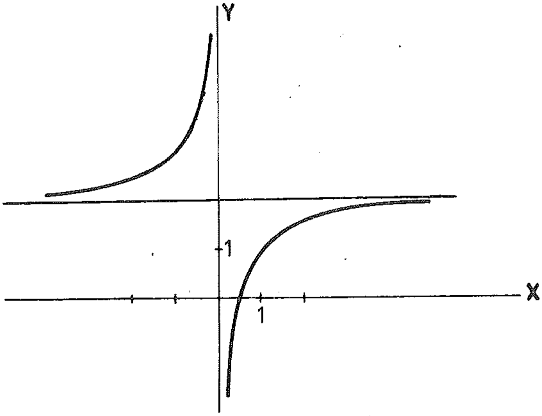
to pomenuta kriva ima horizontalnu asimptotu; to je prava $y=2$. Da li data kriva ima i vertikalnu asimptotu? Ovde treba da $y \to \infty$, kada $x \to a$. U našem slučaju imamo da

$y \to \infty$ kada $x \to 0$, jer je $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x-1}{x} = \pm\infty$, tj.

$$\lim_{x \to -0} \frac{2x-1}{x} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +0} \frac{2x-1}{x} = -\infty,$$

što znači da je prava $x=0$ (y osa) vertikalna simptota krive

$y = \frac{2x-1}{x}$, slika 9.



Sl. 9

Kosa asimptota

Kosa asimptota krive $y=f(x)$ je prava

$y = kx + b.$

Posmatrajmo razliku

$$d(x) = kx + b - f(x). \qquad \ldots (1)$$

Kako prava $y=kx+b$ dodiruje krivu $y=f(x)$ u beskonačnosti, to $d(x) \to 0$, kada $x \to \infty$, pa takodje i

$$\frac{d(x)}{x} \to 0 \quad \text{kada} \quad x \to \infty, \text{ tj.}$$

$$k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x} \to 0, \quad \text{kada} \quad x \to \infty, \text{ odakle je}$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \text{tj.} \quad k_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

S druge strane iz (1) je

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = 0, \text{ tj.}$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x]$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x]$$

Primer 1. Naći kosu asimptotu krive

$$y = \frac{x^2 - 1}{x+2}$$

Rešenje. Jednačina asimptote je

$y = kx + b$, gde je

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^2+2x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$ Kada smo našli k, sada

tražimo b po obrazou

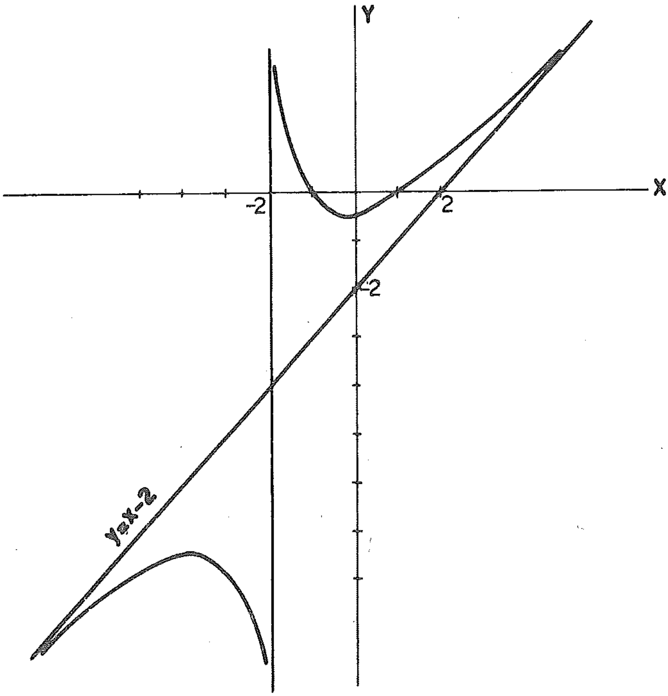
$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2-1}{x+2} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1 - x^2-2x}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x-1}{x+2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = \frac{-2}{1} = -2$$

Znači, kosa asimptota krive $y = \frac{x^2-1}{x+2}$, slika 10, jeste prava

$$y = x-2$$



Sl.10

Rašćenje i opadanje funkcije

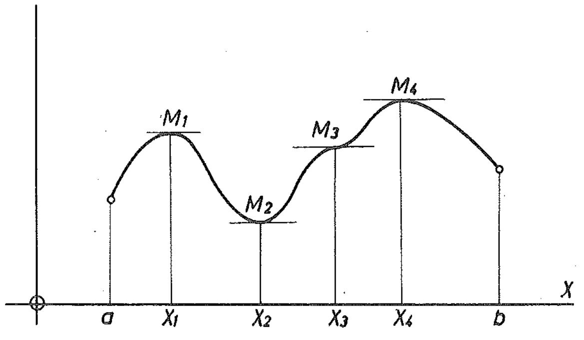
Posmatrajmo funkciju $y=f(x)$ koja je definisana na intervalu (a,b) i ima takodje izvod za sve vrednosti promenljive x iz tog intervala.

U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu funkcija $y=f(x)$ predstavlja krivu liniju, a prvi izvod funkcije predstavlja koeficient pravca tangente povučene u datoj tački krive.

Tačke krive u kojima je tangenta paralelna sa apscisnom osom nazivaju se stacionarne tačke. U tim tačkama je prvi izvod jednak nulu, tj.

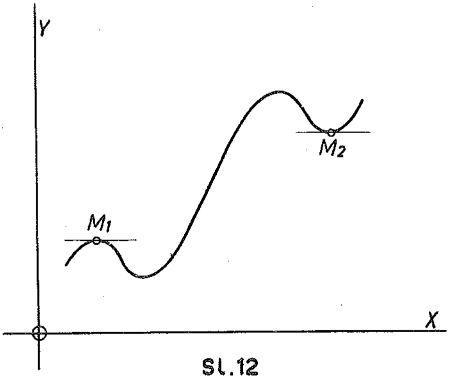
$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = f'(x_4) = 0.$$

Tačke M_1, M_2, M_3 i M_4 izuzev tačke M_3, dele lukove krive u delove gde kriva raste i gde kriva opada, slika 11.



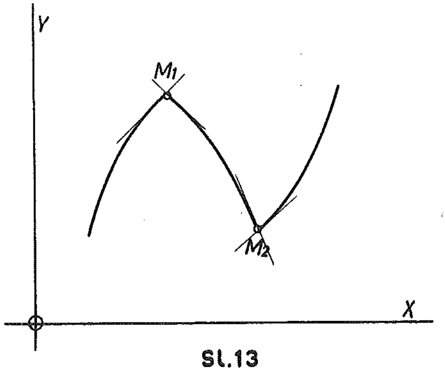
Sl.11

Tačka u kojoj kriva prestaje da raste da bi počela da opada naziva se tačka maksimuma, a tačka u kojoj kriva prestaje da opada da bi počela da raste naziva se tačka minimuma. Tako su na slici 11, M_1 i M_4 tačke maksimuma, dok je M_2 tačka minimuma. Vrednosti funkcije $f(x)$ u tačkama x_1 i x_4 su njeni maksimumi, a vrednost funkcije $f(x)$ u tački x_2 je njen minimum. Maksimumi i minimumi funkcije $f(x)$ zovu se <u>ekstremne vrednosti</u>. Maksimum je vrednost funkcije koja je veća od obližnjih vrednosti, a minimum je vrednost funkcije koja je manja od obližnjih vrednosti. Može u jednom intervalu maksimum funkcije da bude manji od njenog minimuma slika 12, gde je maksimum u tački M_1 manji od minimuma u tački M_2.



Sl.12

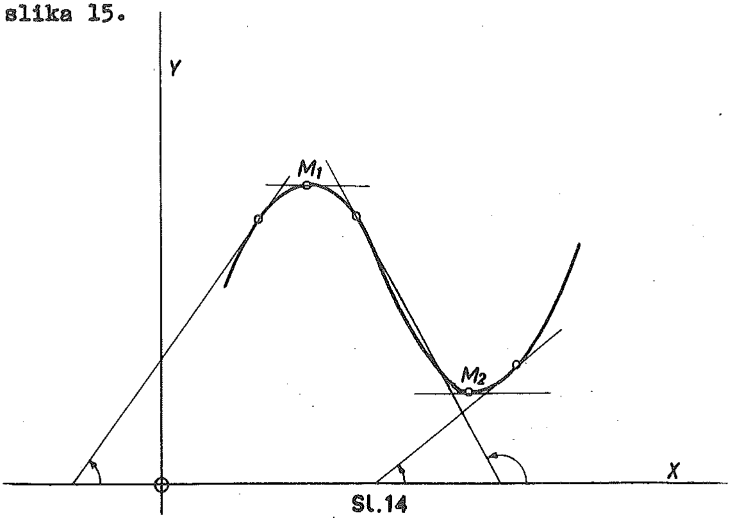
Kriva $y=f(x)$ može imati ekstremne vrednosti u nekim tačkama a da prvi izvod u tim tačkama nije jednak nuli, kao što se vidi na slici 13,



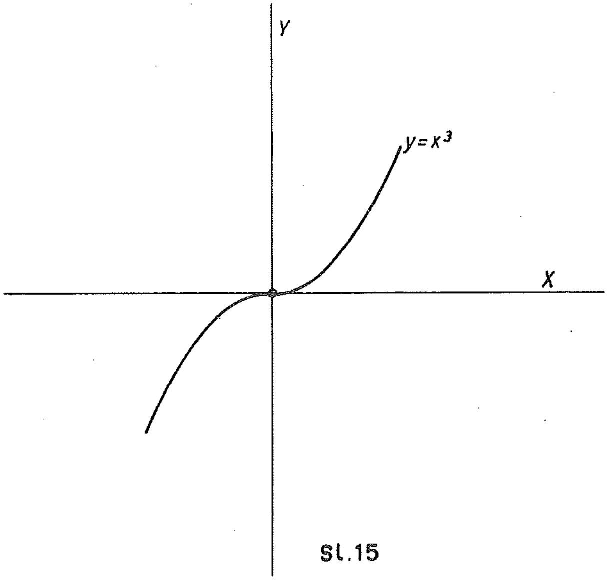
Sl.13

gde kriva ima maksimum u tački M_1, a minimum u tački M_2. U ovim tačkama ne postoji prvi izvod, jer u tim tačkama kriva nema jednu tangentu.

Da bi funkcija $y=f(x)$ imala u tački $x=x_1$ maksimum, treba da levo od te tačke, tj. od tačke x_1-h, gde je $h > 0$ i dovoljno malo, kriva raste, a njena tangenta u tački x_1-h zaklapa oštar ugao sa pozitivnim smerom apscisne ose, tj. $f'(x_1-h) > 0$, slika 14. Desno od tačke x_1 kriva opada, a njena tangenta u tački x_1+h zaklapa tup ugao sa pozitivnim smerom apscisne ose, pa je $f'(x_1+h) < 0$. Da bi funkcija $y=f(x)$ imala u tački $x=x_2$ minimum, treba da je $f'(x_2-h) < 0$ i $f'(x_2+h) > 0$. Znači: Dovoljan uslov za maksimum funkcije $y=f(x)$ u tački x_1 je $f'(x_1) = 0$ i za dovoljno mali pozitivan broj h da je $f'(x_1-h) > 0$ i $f'(x_1+h) < 0$, a dovoljan uslov za minimum funkcije $y=f(x)$ u tački x_2 je $f'(x_2) = 0$ i da je $f'(x_2-h) < 0$ i $f'(x_2+h) > 0$. Sam uslov $f'(x_3) = 0$ bez promene znaka izvoda u okolini tačke x_3 nije dovoljan za maksimum i minimum kao što to pokazuje primer funkcije $y=x^3$, za koju je $y'=3x^2=0$ za $x=0$, dok je $3(-h)^2 > 0$ i $3(+h)^2 > 0$, pa kriva stalno raste, slika 15.



Sl.14



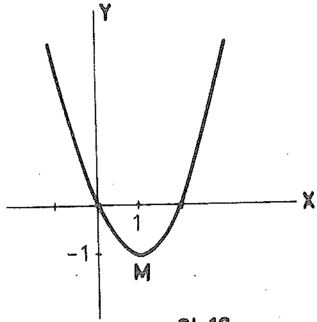
Sl.15

Znači, da bi funkcija $f(x)$ za ono x_0 koje zadovoljava jednačinu $f'(x) = 0$ imala ekstremum potrebno je i dovoljno da prvi izvod $f'(x)$ menja svoj znak pri prolazu kroz x_0. Ako $f'(x)$ menja pozitivan znak u negativan kada x ide s leva udesno, tj. rastući prolazi kroz x_0, ekstremum će biti maksimum, a ako izvod $f'(x)$ menja negativan znak u pozitivan, ekstremum će biti minimum.

Primer 1. Funkcija $y=x^2-2x$ ima prvi izvod $y'=2x-2$. Ovde je $y'=0$, tj. $2x-2=0$ za $x=1$. Kako je $y'(x)=2x-2 < 0$ za $x < 1$, $y'(x) = 0$ za $x=1$, a $y'(x) > 0$ za $x > 1$, znači da za $x=1$ funkcija ima minimum. Vrednost ovog minimuma dobija se iz same funkcije:

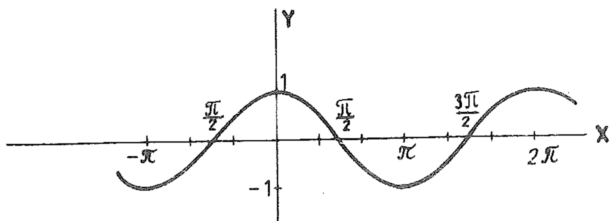
$$y_{(x)}=x^2-2x \quad \text{za} \quad x=1, \quad \text{tj.} \quad y_{min}=y_{(1)}=1^2-2.1= - 1,$$

slika 16.



Sl.16

Primer 2. Funkcija $y=\cos x$ ima prvi izvod $y=-\sin x$, a ovaj je jednak nuli za $x=k\pi$ /$k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$/. Tako je $y'=0$ za $x=0$, pa u tački $x=0$ funkcija $y=\cos x$ može imati ekstremnu vrednost. Kako je levo od nule, tj. za $x=-h$ (h pozitivan i mali broj) $y'=-\sin(-h)=\sin h>0$, a za $x=h$ je $y'=-\sin h<0$, to u tački $x=0$ funkcija $y=\cos x$ ima maksimum, slika 17.



Sl.17

Vrednost ovog maksimuma dobijamo kao vrednost funkcije $y=\cos x$ za $x=0$, tj. $y_{(0)}=\cos 0=1$.

Utvrdjivanje ekstremne vrednosti date funkcije na osnovu ispitivanja promene znaka njenog prvog izvoda može biti složen posao. Zato ćemo ovde navesti kriterijum za maksimum i minimum:

Da bi funkcija $y=f(x)$ u tački x_1 imala ekstremum potrebno je i dovoljno da je njen prvi izvod u toj tački jednak nuli a da izvod najnižeg reda koji u toj tački nije jednak nuli bude parnog reda. Ako je ovaj izvod negativan, funkcija će imati maksimum, a ako je ovaj izvod pozitivan, funkcija će imati minimum.

Ako hoćemo da nadjemo ekstremnu vrednost neke funkcije koristeći gornji kriterijum treba da postupimo na sledeći način:

1. Za funkciju $y=f(x)$ nadjemo njen izvod $f'(x)$ i ovaj izjednačimo sa nulom. Zatim rešimo jednačinu $f'(x)=0$ po x. Neka je rešenje te jednačine $x=x_0$.

2. Sada nalazimo drugi izvod funkcije $f(x)$, tj. $f''(x)$, posle čega odredjujemo njegovu vrednost za $x=x_0$, tj. $f''(x_0)$. Ako je $f''(x_0) > 0$ onda funkcija $f(x)$ za $x=x_0$ ima minimum, a ako je $f''(x_0) < 0$, funkcija $f(x)$ za $x=x_0$ ima maksimum. Ako je $f''(x_0)=0$ pitanje ekstremuma moramo naknadno rešávati. Zato nalazimo $f'''(x)$, pa ako je $f'''(x_0)\neq 0$ onda funkcija $f(x)$ za $x=x_0$ nema ekstremnu vrednost, a ako je $f'''(x_0)=0$ moramo naći $f^{(4)}(x)$. Ako je $f^{(4)}(x) > 0$, funkcija $f(x)$ za $x=x_0$ ima minimum, a ako je $f^{(4)}(x_0) < 0$ ona za $x=x_0$ ima maksimum.

Ako jednačina $f'(x)=0$ ima više rešenja ispitivanja vršimo za svako dobijeno rešenje.

Primer 1. Naći ekstremnu vrednost funkcije $y=x^4-4x$. Prvo nalazimo njen izvod, tj. $y'=4x^3-4$. Ovaj izvod izjednačavamo sa nulom, tj. stavljamo $4x^3-4=0$, odakle dobijamo jedino njeno realno rešenje $x=1$. Znači, funkcija $y=x^4-4x$ bi za $x=1$ mogla imati ekstremnu vrednost.

Sada nalazimo drugi izvod funkcije, tj. $f''(x)=12x^2$. Vrednost $f''(x)$ za $x=1$ je $f''_{(1)}=12.1^2=12 > 0$, tj. $f''_{(1)}>0$, što znači da funkcija $y=f(x)=x^4-4x$ za $x=1$ ima minimum. Njegovu vrednost nalazimo iz same funkcije, tj. $y_{min}=f_{(1)}=$ $=1^4-4.1=1-4 = -3$.

Primer 2. Naći ekstremnu vrednost funkcije $f(x) =$

$= \ln x/x$. Kako je sada $f'(x) = (1-\ln x)/x^2$ to je $f'(x)=0$ kada je $1-\ln x=0$, odakle se dobija $\ln x=1$, odnosno $x=e$. Znači, za $x=e$ funkcija $f(x)=\ln x/x$ može imati ekstremnu vrednost. Njen drugi izvod je

$f''(x) = (2\ln x - 3)/x^3$, odakle se dobija da je

$f''(e) = (2\ln e - 3)/e^3 = (2-3)/e^3 = -1/e^3 < 0$, tj. $f''(e)<0$ pa funkcija $y=\ln x/x$ za $x=e$ dobija svoju najveću vrednost – svoj maksimum. Vrednost ovog maksimuma dobićemo iz same funkcije za $x=e$, tj. $f(e)=\ln e/e = 1/e$.

Primer 3. Naći ekstremne vrednosti funkcije $y=f(x)= =x^3 - 12x$.

Ovde je $y'=f'(x)=3x^2-12$ i $f'(x)=0$ kada je $3x^2-12= =0$, odnosno $x^2=4$, odakle je $x_{1,2}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$. Znači $f'(x)=0$ ako je $x=2$ ili $x=-2$. Drugi izvod funkcije je $f''(x)=6x$. Za $x=2$ vrednost drugog izvoda je $f''(2)=6\cdot2=12 > 0$, tj. $f''_{(2)}>0$ što znači da data funkcija za $x=2$ ima minimum. Za $x=-2$ vrednost drugog izvoda je $f''_{(-2)}=6(-2) = -12 < 0$ što znači da za $x=-2$ funkcija ima maksimum.

Vrednost minimuma, odnosno maksimuma dobićemo iz funkcije, tj. $y_{min}= y_{(2)} = 8 - 24 = -16$, $y_{max}=y_{(-2)} = -8+24 = 16$.

IX

ISPITIVANJE TOKA FUNKCIJE. GRAFIK FUNKCIJE

Ispitivati tok funkcije $f(x)$ znači odrediti intervale u kojima ona raste, naći one vrednosti promenljive x za koje ona ima ekstremne vrednosti i odrediti intervale u kojima funkcija opada.

Najčešće se tok funkcije prikazuje njenim grafikom u koordinatnom sistemu. U koordinatnom sistemu grafik funkcije $y=f(x)$ je neka linija, najčešće kriva. Ordinata y ove krive predstavlja vrednost funkcije za datu apscisu x.

Pri crtanju grafika funkcije $y=f(x)$ potrebno je odrediti:

1. Intervale u kojima je data funkcija definisana, kao i njeno ponašanje na krajevima tih intervala.

2. Odrediti nule funkcije, tj. naći one vrednosti promenljive x za koje je $f(x)=0$.

3. Naći asimptote krive $y=f(x)$.

4. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije, stacionarne tačke krive.

5. Iz svega prethodnog zaključiti u kojim intervalima funkcija raste, a u kojima opada.

Postupak će mo izneti u nekoliko sledećih primera:

Primer 1. Nacrtaj grafik funkcije $y=x^3-3x$.

1. Definisanost. Data funkcija je definisana za svako $x\in(-\infty, \infty)$. Kada $x\to-\infty$, $y\to-\infty$, a kada $x\to\infty$, $y\to\infty$.

2. Nule funkcije. Funkcija je jednaka nuli, tj. $y=0$ kada je $x^3-3x=0$, odakle je $x(x^2-3)=0$. Ova jednačina ima tri rešenja: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$.

3. Asimptote. Nema.

4. Ekstremne vrednosti. Da bismo našli ekstremne vrednosti date funkcije moramo naći njen prvi i drugi izvod. Imamo:

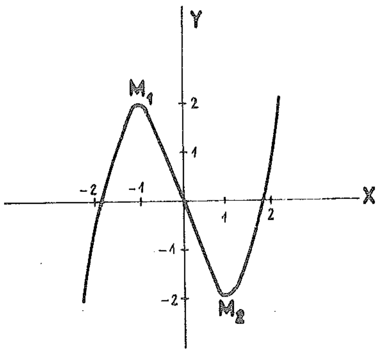
$$y = x^3-3x, \quad y'=3x^2-3, \quad y''=6x.$$

Sada izjednačavamo vrednost prvog izvoda sa nulom, tj. stavljamo

$$3x^2 - 3 = 0$$

i rešavamo datu jednačinu. Njena rešenja su $x_1=1$, $x_2=-1$, što znači da kriva u ovim tačkama može imati ekstremum, u šta ćemo se uveriti pomoću znaka drugog izvoda. Kako je $y''_{(1)}= 6>0$, to u ovoj tački kriva dostiže svoj minimum; njegova vrednost je $y_{min} = y_{(1)} = 1-3 = -2$. Za $x = -1$ je $y''_{(-1)} = -6 < 0$, što znači da kriva u tački $x=-1$ ima maksimum, sa vrednošću $y_{max} = y_{(-1)} = -1+3 = 2$.

Sada imamo sve potrebne elemente za crtanje grafika funkcije. Prvo ucrtavamo njene nule $-\sqrt{3}$, 0 i $\sqrt{3}$. Zatim tačku maksimuma $M_1(-1,2)$ i tačku minimuma $M_2(1,-2)$. Kriva raste od $-\infty$ do maksimuma 2, a odatle opada do minimuma -2. Od minimuma -2 kriva nadalje raste do $+\infty$, slika 18.



Sl.18

Znači, za $x \in (-\infty, -1)$ funkcija raste, za $x=-1$ ona dostiže maksimum čija je vrednost 2; za $x \in (-1,1)$ funkcija opada, za $x= -1$ ona dostiže minimum čija je vrednost -2. Za $x \in (1,\infty)$ funkcija raste. Funkcija je jednaka nuli ako je $x= -\sqrt{3}$, $x=0$ i $x= \sqrt{3}$.

Primer 2. Nacrtaj grafik funkcije $y=x/(1+x^2)$.

Ova funkcija je definisana za svako x iz intervala $(-\infty, \infty)$. Za $x \to -\infty$ je $\lim\limits_{x\to-\infty} x/(1+x^2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x'/(1+x^2)' =$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} 1/(1+2x) = -0$, dok je za $x\to+\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} x/(1+x^2) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(1+x^2)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+2x} = +0$. Znači da je osa x horizo-

ntalna asimptota krive.

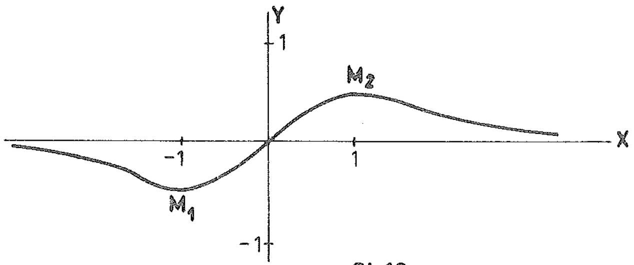
Dalje je $y=0$ ako je $x=0$, što znači da kriva prolazi kroz koordinatni početak.

Sada nalazimo prvi i drugi izvod funkcije. Imamo

$$y=x/(1+x^2), \quad y'=(1-x^2)/(1+x^2)^2, \quad y''=(2x-6x^3)/(1+x^2)^3,$$

odakle je $y'=0$ za $1-x^2=0$, tj. za $x=1$ i $x=-1$. Kako je $y''_{(-1)}=1/2>0$, to za $x=-1$ funkcija ima minimum. Vrednost ovog minimuma je $y_{min}=y_{(-1)}=-1/2$. Za $x=1$ je $y''_{(1)}=-1/2<0$, što znači da funkcija za $x=1$ ima maksimum, čija je vrednost $y_{max}=y_{(1)}=1/2$. Pošto je $y'_{(o)}=1$, znači da kriva seče x-osu u koordinatnom početku pod uglom α pri čemu je $tg\alpha=1$, odakle se dobija da je $\alpha=45^o$.

Grafik funkcije $y=x/(1+x^2)$ prikazan je na slici 19.



Sl.19

Primer 3. Nacrtaj grafik funkcije $y=(x+1)/(x-1)$.

Data funkcija je definisana za svako $x\in(-\infty,\infty)$ izuzev za $x=1$. Za $x=1$ imenilac je jednak nuli, a brojilac različit od nule pa funkcija dobija beskonačnu vrednost.

$$\text{Za } x\to-\infty \text{ je } \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)'}{(x-1)'}=1.$$

$$\text{Za } x\to+\infty \text{ je } \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)'}{(x-1)'}=1.$$

Za $x \to 1-0$ je $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$.

Za $x \to 1+0$ je $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$.

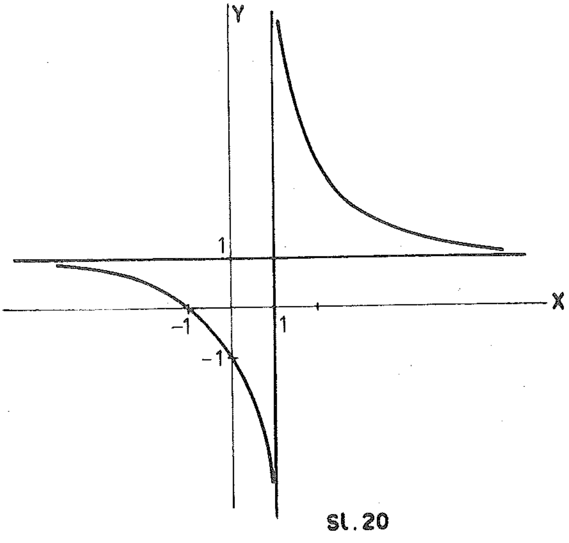
Znači da je prava $y=1$ horizontalna asimptota, a prava $x=1$ vertikalna asimptota krive. Kosih asimptota kriva nema.

Funkcija je jednaka nuli, tj. $y=0$, ako je $x+1=0$, tj. ako je $x=-1$, što znači da kriva seče osu x u tački -1.

Za funkciju $y=(x+1)/(x-1)$ je

$$y'=(x-1-x-1)/(x-1) = -2/(x-1).$$

Vrednost prvog izvoda ne može biti jednaka nuli ni za koje konačno x. Kao što vidimo, znak prvog izvoda je stalno negativan, što znači da funkcija stalno opada. Grafik funkcije prikazan je na slici 20.



Sl. 20

Primer 4. Nacrtaj grafik funkcije $y=(x^2-8)/(x+3)$.

Funkcija nije definisana za $x=-3$, a za sve ostale vrednosti iz intervala $(-\infty, \infty)$ je definisana. Prava $x=-3$ je vertikalna asimptota krive. Horizontalnih asimptota kriva nema. Kada $x\to -3-0$, $y\to -\infty$, a kada $x\to -3+0$, $y\to +\infty$. Kosu asimptotu krive tražimo u obliku:

$y = kx+b$, gde je

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-8}{x(x+3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-8}{x^2+3x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-8)'}{(x^2+3x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{(2x+3)'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-8}{x+3} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-8-x^2-3x}{x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-8-3x}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-8-3x)'}{(x+3)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{1} = -3.$$

Znači, kosa asimptota krive je prava $y=x-3$.

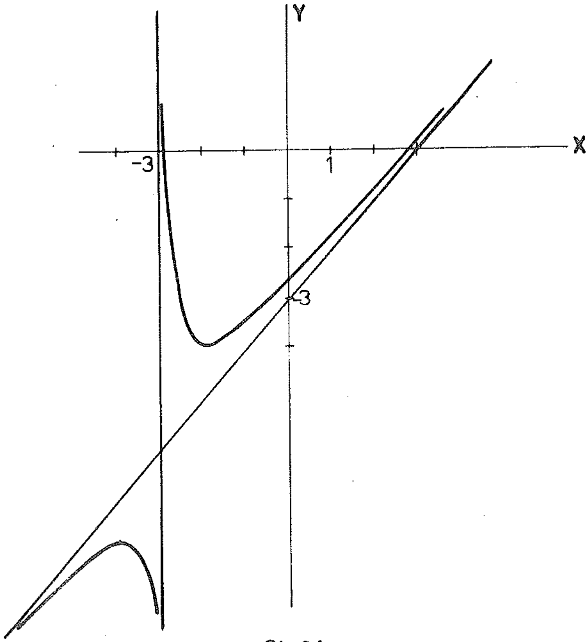
Prvi izvod funkcije je

$$y' = \frac{2x(x+3)-x^2+8}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2},$$

pa je $y'=0$ ako je $x^2+6x+8=0$, tj. za $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-8}=$ $=-3\pm1$, $x_1=-2$, $x_2=-4$, što znači da za $x=-2$ i za $x=-4$ funkcija može imati ektremum. Šta će biti u tim tačkama utvrdjujemo pomoću drugog izvoda, čija je vrednost u ovom slučaju $y''=2/(x+3)^3$. Za $x=-2$ je $y''_{(-2)}=2>0$, što znači da za $x=-2$ funkcija ima minimum. Vrednost ovog minimuma je $y_{min} = y_{(-2)}=(4-8)/1 = -4$. Za $x=-4$ je $y''_{(-4)}=-2<0$, što znači da za $x=-4$ funkcija dostiže svoj maksimum, čija je vrednost $y_{max} = y_{(-4)}=(16-8)/(-1) = -8$.

Funkcija je jednaka nuli, tj. $y=0$, ako je $x^2-8=0$, tj. ako je $x=\pm\sqrt{8}$.

Grafik ove funkcije je kriva prikazana na slici 21.



Sl.21

Primer 5. Nacrtaj grafik funkcije $y=x \ln x$.

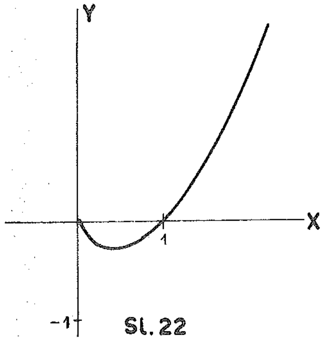
Data funkcija je definisana za $x>0$. Za $x \to 0$ je $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} =$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = -0.$$

Za $x \to \infty$, $y \to \infty$. Za $x=1$ je $y=0$.

Kako je $y'=\ln x+1$, to je $y'=0$ ako je $\ln x+1=0$, tj. $\ln x=-1$, odakle je $x=1/e$. Dalje je $y''=1/x>0$ za $x>0$, što znači da kriva ima minimum u tački čija je ap-

scisa 1/e. Vrednost ovog minimuma je $y_{min} = y_{(1/e)} =$
$= \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -1/e$. Grafik funkcije je prikazan na slici 22.



Sl.22

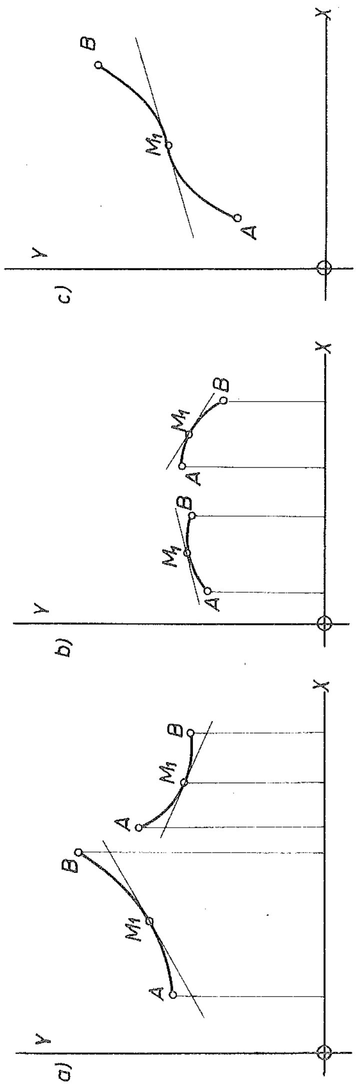
<u>Konveksnost i konkavnost. Prevojne tačke.</u> Posmatrajmo krivu $y=f(x)$. Ako su ordinate krive sa obe strane dodirne tačke M_1 veće od odgovarajućih ordinata tangente dok se tačka M_1 pomera po luku AB krive, slika 23 a), kaže se da je kriva konkavna u pozitivnom smeru ordinate.

Ako su ordinate krive $y=f(x)$ sa obe strane dodirne tačke M_1 dok se tačka M_1 pomera po luku AB krive, slika 23 b), kaže se da je kriva konveksna u pozitivnom smeru ordinate ose y.

Ako su u neposrednoj okolini dodirne tačke M_1 ordinate krive sa jedne strane te tačke veće a sa druge strane manje od odgovarajućih ordinata tangente, slika 23 c), kaže se da je tačka M_1 prevojna tačka krive.

Ovde navodimo pravilo pomoću koga utvrdjujemo da li je kriva $y=f(x)$ konkavna ili konveksna.

Neka je $y=f(x)$ kriva linija i neka je $M_1(x_1, y_1)$ tačka na njoj. Nadjimo izvode $f'(x_1)$, $f''(x_1)$, $f'''(x_1)$, ... idući tako do onog izvoda $f^{(n)}(x_1)$ koji nije nula. Ako je red <u>n</u> ovog izvoda paran broj, kriva je konveksna u pozitivnom smeru ordinate ose ako je $f^{(n)}(x_1) < 0$ a konkav-

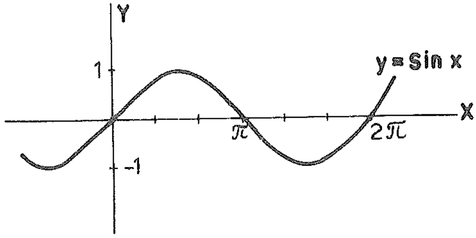


SL.23

na ako je $f^{(n)}(x_1) > 0$. Ako je red n dobijenog izvoda neparan broj, tačka M_1 je prevojna tačka krive.

Primer. Odrediti intervale u kojima je kriva $f(x) = \sin x$ a) konkavna, b) konveksna a zatim odrediti njene prevojne tačke, dok promenljiva x uzima vrednosti iz razmaka $(0, 2\pi)$.

Rešenje. Ovde je $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, pa je $f''(x) < 0$ za $x \in (0, \pi)$ što znači da je naša kriva u intervalu $(0, \pi)$ konveksna. Kako je $f''(x) > 0$ za $x \in (\pi, 2\pi)$ znači da je naša kriva u intervalu $(\pi, 2\pi)$ konkavna. Pošto je $f''(x) = 0$ za $x = \pi$ i kako je $f'''(\pi) \neq 0$, pošto je $f'''(x) = -\cos x$, to je $x = \pi$ tačka prevoja naše krive, slika 24.



Sl.24

Formula Tajlora (Taylor)

Tajlorova formula za polinom. Neka je dat polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n .$$

Tada je

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1},$$

$$P''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3 x + \dots + (n-1)n a_n x^{n-2},$$

$$P'''(x) = 1.2.3a_3 + \dots + (n-2).(n-1)n a_n x^{n-3},$$

. . . .

$$P^{(n)}(x) = 1.2.3 \ldots n.a_n,$$

odakle se za $x=0$ redom dobija

$$a_0=p(o), \quad a_1=\frac{P'(o)}{1!}, \quad a_2=\frac{P''(o)}{2!}, \quad a_3=\frac{P'''(o)}{3!}, \ldots$$

$$a_n = \frac{P^{(n)}(o)}{n!} .$$

Zamenom ovih koeficijenata u (1) dobiće se

$$P(x) = P(o) + \frac{P'(o)}{1!} x + \frac{P''(o)}{2!} x^2 + \frac{P'''(o)}{3!} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{P^{(n)}(o)}{n!} x^n \qquad \ldots (2)$$

Dati polinom (1) može se razložiti po stepenima $(x-x_o)$, gde je x_o neki stalan broj. U tom slučaju polinom (1) može se pisati u obliku

$$P(x) = P(x_o) + \frac{P'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \frac{P''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{P^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n \qquad \ldots (3)$$

Obrazac (3) naziva se Tajlorov obrazac za polinom, dok se obrazac (2) naziva Maklorenov obrazac za uočeni polinom.

Značaj Tajlorovog obrasca leži u tome što se pomoću njega može aproksimirati (dati približna vrednost) neke odredjene funkcije $f(x)$ u okolini njene tačke x_o. Tako se funkcija $f(x)$ koja je neprekidna u intervalu (a,b) i koja ima u tom intervalu neprekidne sve svoje izvode do reda $(n+1)$ može predstaviti u obliku

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n + R_n, \qquad \ldots (4)$$

gde je

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}[x_o + \theta(x-x_o)]}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1},$$

$$(x-x_o,\ x+x_o) \subseteq (a,b); \quad 0 < \theta < 1,$$

što znači da se za približnu vrednost funkcije $f(x)$ može uzeti

$$f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n, \qquad \dots (5)$$

Obrazac (4) naziva se Tajlorov obrazac za funkciju $f(x)$. Ako je u njemu $x_o=0$ dobiće se obrazac

$$f(x) = f(o) + \frac{f'(o)}{1!}x + \frac{f''(o)}{2!}x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^n(o)}{n!}x^n + R_n, \qquad \dots (4')$$

gde je sada

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad x \in (a,b), \qquad 0 < \theta < 1,$$

koji se naziva Maklorenov obrazac za funkciju $f(x)$.

Primer 1. Za funkciju $f(x) = e^x$ napisati Maklorenov obrazac uzimajući prva tri njegova člana.

Rešenje. Ovde je: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, odakle je $f(o)=f'(o)=f''(o) = 1$, dok je $f'''(\theta x) = e^{\theta x}$, pa prema obrascu (4') imamo da je

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{e^{\theta x}}{3!}x^3$$

Primer 2. Funkciju $f(x) = \ln x$ aproksimirati Tajlorovim polinomom trećeg stepena u okolini tačke $x_o=1$.

Rešenje. Ovde je: $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$,

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{1.2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{2.3}{x^4}, \text{ odakle}$$

je $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, $f'''(x) = 2$ pa na osnovu (5) imamo da je

$$f(x) = \ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

U ovom primeru ostatak R_n ima oblik

$$R_3 = -\frac{1}{4[1+\theta(x-1)]^4}(x-1)^4, \qquad 0 < \theta < 1.$$

X

FUNKCIJA VIŠE NEZAVISNO PROMENLJIVIH

Posmatrajmo pravougaonik čije su strane x i y. Površina ovoga pravougaonika menja se promenom bilo jedne, bilo druge ili promenom obeju njegovih strana, što znači da je površina pravougaonika funkcija njegovih strana. Zapravo je

$$P = xy.$$

Ako uzmemo prav paralelopiped čije su ivice x, y, z, onda se njegova zapremina izražava obrascem

$$V = xyz.$$

Drugim rečima, zapremina paralelopipeda je funkcija njegovih ivica, tj. ona je funkcija od tri nezavisne promenljive.

U opštem slučaju, funkcija od dve nezavisne promenljive x, y izražava se simbolički kao

$$z = f(x,y),$$

ili kao

$$F(x,y,z) = 0,$$

a funkcija od n nezavisno promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kao

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ili

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0.$$

Geometriski, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu u prostoru funkcija

$$z = f(x,y)$$

predstavlja neku površ. Tako, na primer, jednačina

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $OXYZ$ predstavlja ravan, dok jednačina

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

u istom koordinatnom sistemu predstavlja loptu sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom r.

Parcijalni izvodi

Neka je data funkcija

$$z = f(x,y)$$

dveju nezavisno promenljivih x i y. Tada se granične vrednosti

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y},$$

ukoliko postoje, nazivaju parcijalnim izvodima funkcije $z = f(x,y)$ i to prvi po promenljivoj x, a drugi po promenljivoj y.

Oznake

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

čitaju se: delta z po delta x, odnosno delta z po delta y.

Kao što se iz izraza za

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

vidi, pri traženju parcijalnog izvoda funkcije po jednoj nezavisno promenljivoj, druga nezavisno promenljiva se smatra kao konstanta.

Primer 1. Za funkciju

$$z = x^3 + e^x + y^5 + \sin y + 3$$

je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + e^x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4 + \cos y,$$

pošto se pri traženju parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ y uzima kao konstanta, a pri traženju parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial y}$ x se uzima kao konstanta.

Primer 2. Za funkciju

$$z = x^3y^4 + 5xy + x^2 - 3y^2 + 2x - 5y + 1$$

je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^4 + 5y + 2x + 2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3y^3 + 5x - 6y - 5.$$

Primer 3. Za funkciju

$$z = x^y$$

je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Slično se definišu parcijalni izvodi funkcije više nezavisno promenljivih. Tako na primer za funkciju

$$u = 3x^5 + 2y^3 - z^4 + 3$$

je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 15x^4, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -4z^3,$$

dok je za funkciju

$$w = x^2y + y^2z + z^2u + u^2 + 3$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = x^2+2yz, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = y^2 + 2zu,$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = z^2 + 2u.$$

Izrazi

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,dx \qquad i \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

nazivaju se <u>diferencijali funkcije $z=f(x,y)$</u> u odnosu na promenljive x, odnosno y, a izraz

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

naziva se <u>totalni diferencijal funkcije $z=f(x,y)$</u>.

Ekstremne vrednosti funkcije više promenljivih

Ovde ćemo izneti samo potrebne uslove da funkcija više promenljivih ima ekstremnu vrednost, pošto ćemo u daljem izlaganju posmatrati samo one slučajeve kod kojih će nam ovi uslovi biti i dovoljni.

Da bi funkcija $z=f(x,y)$ imala ekstremnu vrednost za $x=a$, $y=b$ potrebno je da su njeni parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za $x=a$, $y=b$ jednaki nuli, tj. da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad za \quad x=a, \quad y=b,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{za} \quad x=a, \quad y=b$$

Isto tako, da bi funkcija od n nezavisno promenljivih

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

imala ekstremnu vrednost za $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ..., $x_n=a_n$, treba da je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad \text{za} \quad x_1=a_1,$$

$x_2=a_2$, ..., $x_n=a_n$.

Ako je funkcija data u implicitnom obliku, tj. u obliku

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

potrebni uslovi da ona za $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ..., $x_n=a_n$ ima ekstremnu vrednost su

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \quad \text{za} \quad x_1=a_1,$$

$x_2=a_2$, ..., $x_n=a_n$. Ovi uslovi mogu se napisati i u obliku

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \text{za} \quad x_i=a_i \ (i = 1,2, \ldots, n).$$

Primer 1. Naći vrednosti promenljivih x i y za koje funkcija

$$z = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 5$$

može imati ekstremnu vrednost.

Rešenje. Tražene vrednosti za x i y dobijemo iz uslova

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x-2 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y+4 = 0,$$

koji su ispunjeni ako je $x=1$, $y=-2$.

Primer 2. Napisati potrebne uslove da bi funkcija

$$F(x,y,z) = xy + yz + zx - x + z + 1 = 0$$

mogla imati ekstremnu vrednost.

Rešenje. Potrebni uslovi su

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y+z-1 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x+z = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y +$$

$$+ x + 1 = 0,$$

odakle nalazimo $x = -1$, $y = 0, z = 1$.

Metoda najmanjih kvadrata

Uočimo jedan predmet čija je stvarna težina x jedinica, ali nama nepoznata dok ne izvršimo njegovo merenje. Zbog mogućnosti pojave slučajnih grešaka pri merenju težine datog predmeta, merenje njegove težine obavljamo više puta. Neka su:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

težine uočenog predmeta dobijene na osnovu izvršenih n merenja. Izmedju stvarne težine x datog predmeta i njegovih težina

$$x_1, \quad x_2, \ldots, x_n$$

ustanovljenih na osnovu n merenja mogu nastupiti odstupanja, koja ćemo obeležiti redom sa

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n.$$

Na taj način važiće relacije

$$x_1 - x = \varepsilon_1$$

$$x_2 - x = \varepsilon_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_n - x = \varepsilon_n.$$

Da bi se na osnovu težina $x_1, x_2, \ldots, x_n$ datog predmeta dobijenih merenjem mogla što bolje ustanoviti njegova stvarna težina x, treba da su odstupanja $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ po svojim apsolutnim vrednostima što manja, ili što je isto, treba da kvadrati ovih odstupanja budu što manji, ili što je takodje isto treba da je zbir kvadrata ovih odstupanja što manji.

Drugim rečima, stvarnu težinu x datog predmeta, čije su težine $x_1, x_2, \ldots, x_n$ odredjene na osnovu n merenja najpribližnije ćemo odrediti iz uslova da zbir kvadrata odstupanja $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ bude najmanji, tj. iz uslova

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \text{minimum}.$$

Da bi funkcija $f(x)$ imala minimum, u ovom slučaju je potrebno i dovoljno da je njen prvi izvod jednak nuli, tj. da je:

$$f'(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)\,(-1) = 0.$$

odnosno da je

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x) = 0,$$

ili da je

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - nx = 0,$$

odakle se dobija

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Znači, najpribližnija vrednost stvarne težine x nekog predmeta čije su težine ustanovljene na osnovu n merenja redom $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dobija se kao aritmetička sredina rezultata ovih merenja.

Uzmimo sada nešto opštiji slučaj. Neka su data dva niza brojeva:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_n \quad i \quad Y : y_1, y_2, \ldots, y_n \qquad \ldots(1)$$

i neka je data funkcija odredjenog oblika

$$f(x,y; \; a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \qquad \ldots(2)$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ parametri.

Postavimo zadatak kako da odredimo parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$ u jednačini (2) da bi ona bila najpribližnije zadovoljena brojnim vrednostima svih parova $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ pomenutih nizova (1).

Posle zamene vrednosti za x i y u jednačini (2) odgovarajućim vrednostima parova $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ neka nastane sistem jednačina:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1; \; a_1, a_2, \ldots, a_k) &= \varepsilon_1 \\ f(x_2, y_2; \; a_1, a_2, \ldots, a_k) &= \varepsilon_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n, y_n; \; a_1, a_2, \ldots, a_k) &= \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Za unapred date vrednosti parova $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ parametre $a_1, a_2, \ldots a_k$, očigledno, treba odrediti tako da veličine $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, budu po svojoj apsolutnoj vrednosti što manje, ili što je isto da zbir njihovih kvadrata bude što manji.

Drugim rečima, parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$, treba odrediti iz uslova:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i, y_i; \; a_1, a_2, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \text{minimum} \qquad \ldots(4)$$

Da bi funkcija $F(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ imala minimum, u ovom slučaju je potrebno i dovoljno da su ispunjeni uslovi:

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_k} = 0,$$

koji se prema (4) mogu napisati u obliku:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i; a_1, a_2, \ldots, a_k)\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i; a_1, a_2, \ldots, a_k)\left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right)_i = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i; a_1, a_2, \ldots, a_k)\left(\frac{\partial f}{\partial a_k}\right)_i = 0 \end{array}\right] \ldots(6)$$

Sistem (6) od k jednačina sa isto toliko nepoznatih a_1, $a_2, \ldots, a_k$ omogućava da se ove nepoznate odrede tako da jednačina (2) bude najpribližnije zadovoljena brojnim vrednostima svih parova $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Sistem (6) naziva se <u>normalni sistem jednačina</u>, zbog toga što je broj jednačina jednak broju nepoznatih.

Primer. Neka je data proizvodnja jedne fabrike u hiljadama tona za proteklih 9 godina, koja je po godinama prikazana u narednoj tabeli:

Godina	Proizvodnja u hiljad. tona
1958	7
1959	9
196o	1o
1961	13
1962	12
1963	15

Godina	Proizvodnja u hiljad. tona
1964	18
1965	19
1966	23

Odredimo linearnu funkciju oblika:

$$y = ax + b \qquad \ldots (2_0)$$

gde x predstavlja vreme a y proizvodnju, kojom bi se najbolje moguće izražavala proizvodnja uočene fabrike u toku proteklih 9 godina.

Rešenje. Funkciju (2_0) napišimo u obliku:

$$ax + b - y = 0,$$

tj. u obliku

$$f(x,y;\ a,b) = ax + b - y = 0 \qquad \ldots (2_1)$$

U ovom slučaju godinu 1958 označimo sa 1, godinu 1959 sa 2, itd. Tako imamo dva niza brojeva, za vreme:

$$X : 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

za proizvodnju:

$$Y : 7,\ 8,\ 9,\ 1o,\ 13,\ 12,\ 15,\ 18,\ 19,\ 23.$$

Za slučaj jednačine oblika (2_1) normalni sistem jednačina (6) glasi:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (ax_i+b-y_i)x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} (ax_i+b-y_i) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (6_1)$$

pošto je u našem slučaju:

$$f(x,y;\ a_1,a_2) = ax + b - y = 0,$$

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)_i = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_i = x_i,$$

$(\frac{\partial f}{\partial a_2})_i = (\frac{\partial f}{\partial b})_i = 1$ i gde je $n = 9$.

Normalne jednačine (6_1) mogu se napisati u obliku:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nb\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad \dots (6_2)$$

što predstavlja sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate a i b.

Sistem (6_2) nam nalaže da sastavimo radnu tabelu oblika:

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	1	7	1	7
	2	9	4	18
	3	1o	9	3o
	4	13	16	52
	5	12	25	6o
	6	15	36	9o
	7	18	49	126
	8	19	64	152
	9	23	81	2o7
$\sum$:	45	126	285	742

odakle dobijamo da je :

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 285, \quad \sum_{i=1}^{9} x_i = 45, \quad \sum_{i=1}^{9} y_i = 126$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 742.$$

Sada sistem jednačina (6_2) glasi:

$$285a + 45b = 742$$
$$45a + 9b = 126$$

iz kojih se dobija da je $a=1,92$, $b=4,42$, pa naše tražena linearna funkcija (2_o) je funkcija:

$$y = 1,92x + 4,42$$

Ako bi se proizvodnja date fabrike nastavila sličnim tempom kao za proteklih 9 godina, nadjena linearna funkcija:

$$y = 1,92x + 4,42$$

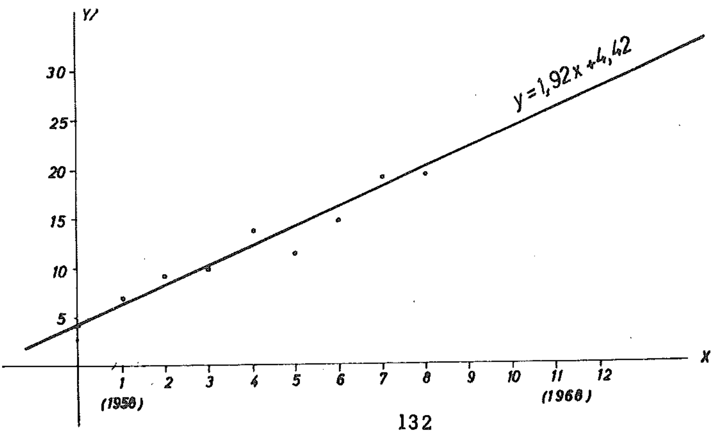
omogućava da proizvodnju možemo predvideti i za neku od narednih godina. Tako se na osnovu nadjene funkcije može očekivati proizvodnja date fabrike u 1968 godini od $y_{11} = 1,92 \cdot 11 + 4,42 = 25,54$ hiljada tona, jer se godina 1968. u datom nizu za vreme označava sa 11.

Funkcija kojom se može iskazati tendencija menjanja neke pojave u toku vremena naziva se trend.

Tako smo u predhodnom primeru odredili linearni trend.

Na prikazanom grafikonu vide se date vrednosti proizvodnje u toku proteklih 9 godina (naznačene kružićima) i prava linija - grafik linearnog trenda

$$y = 1,92x + 4,42$$



Parabolički trend je funkcija oblika:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

(gde je x vreme) koju možemo napisati u obliku:

$$f(x, y; a, b, c) = ax^2 + bx + c - y = 0,$$

za koju sistem normalnih jednačina glasi:

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)\, x_i^2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)\, x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0,$$

Ovaj sistem možemo napisati u obliku

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i ,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

odakle se mogu odrediti nepoznate veličine a, b i c.

Primeri.

1. Za funkciju:

$$y = ax^2,$$

koju možemo pisati u obliku:

$$f(x, y; a) = ax^2 - y = 0$$

normalna jednačina za odredjivanje parametra a glasi:

$$\sum_{i=0}^{n} (ax_i^2 - y_i)x_i^2 = 0$$

odnosno

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=4}^{n} x_i^2 y_i ,$$

odakle je

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}$$

2. Za funkciju:

$$y = \frac{a}{x} + b,$$

koju možemo napisati u obliku:

$$f(x, y; a,b) = a + bx - xy = 0$$

normalni sistem jednačina glasi:

$$\sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - x_i y_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - x_i y_i)\, x_i = 0,$$

odnosno

$$na + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

3. Za funkciju:

$$y = ae^{bx}$$

koja se može napisati u obliku

$$\ln y = \ln a + bx,$$

odnosno u obliku:

$$f(x, y; a, b) = \ln a + bx - \ln y = 0,$$

sistem normalnih jednačina glasi:

$$\sum_{i=1}^{n} (\ln a + bx_i - \ln y_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\ln a + bx_i - \ln y_i)\, x_i = 0,$$

odnosno

$$n \ln a + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln a + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i,$$

iz kojih se mogu odrediti $\ln a$ (samim tim i a) i b.

Do pomenutih sistema jednačina navedenih u primerima 1. do 3. dolazi se primenom metode najmanjih kvadrata, a iz uslova (6) za svaki konkretan slučaj date funkcije $f(x,y; a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$, gde su brojne vrednosti nizova:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \text{i} \quad Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$$

unapred odredjene.

XI
INTEGRALNI RAČUN

<u>Primitivna funkcija</u>. Videli smo kako se definiše i nalazi izvod date funkcije $y=F(x)$. Sada postavljamo zadatak da nadjemo funkciju ako znamo njen izvod. Drugim rečima pitamo se koja je to funkcija čiji je izvod $f(x)$. To je funkcija sa osobinom da je $F'(x) = f(x)$. Na primer, $\cos x$ je izvod od $\sin x$, ali je $\cos x$ izvod i od funkcije $\sin x + 3$ i uopšte, $\cos x$ je izvod od $\sin x + C$ gde je C ma koja konstanta.

Funkcija $F(x)$ čiji je izvod jednak datoj funkciji $f(x)$ zove se <u>primitivna funkcija</u> funkcije $f(x)$.

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$, onda je i $F(x) + C$ takodje primitivna funkcija za $f(x)$, gde je C proizvoljna konstanta. Konstanta C se zove integraciona konstanta. Primitivna funkcija nije odredjena i zato se zove <u>neodredjeni integral</u>.

Umesto da tražimo funkciju $F(x)$ čiji je izvod funkcija $f(x)$, možemo tražiti funkciju $F(x)$ čiji je diferencijal $dF(x) = f(x)\,dx$, gde je $f(x)$ poznata funkcija.

Činjenica da je $F(x)$ primitivna funkcija, odnosno neodredjeni integral funkcije $f(x)$, piše se u obliku

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

a čita: $F(x)$ jednako je integral od $f(x)\,dx$. Znak $\int$ je znak za integraljenje funkcije $f(x)$.

Jednačina

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

identična je sa

$$F'(x) = f(x), \quad \text{tj. sa} \quad dF(x) = f(x)\,dx,$$

odakle izlazi

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Kao što vidimo, operacije d i $\int$, izvedene u navedenom redu poništavaju jedna drugu, dok je

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Osnovne formule za integraljenje

Tablični integrali:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$, jer je $d\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n dx$,

$\int dx = x + C$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$, jer je $d\ln x = \frac{1}{x}\,dx$

3. $\int e^x dx = e^x + C$, jer je $de^x = e^x dx$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, jer je $d\sin x = \cos x\,dx$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, jer je $d(-\cos x) = \sin x\,dx$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$, jer je $d\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$, jer je $d(-\operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$, jer je $d\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

9. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$, jer je $d\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}\,dx$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a}) + C$, jer je $d\ln(x+\sqrt{x^2+a}) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\, dx$$

Pravila za integraljenje

Iz pravila za diferenciranje mogu se izvesti dva osnovna pravila za integraljenje.

Neka je K konstanta, tada je

$$\int Kf(x)\, dx = K\int f(x)\, dx,$$

što znači da se konstanta kao množitelj funkcije $f(x)$ može izneti ispred znaka integrala, pošto je

$$d\int Kf(x)\, dx = Kf(x)\, dx,$$

$$d\left[K\int f(x)\, dx\right] = Kd\int f(x)\, dx = Kf(x)\, dx.$$

Ako su u i v funkcije od x, onda je

$$\int (u+v)\, dx = \int udx + \int vdx,$$

što znači da je integral zbira jednak zbiru integrala, pošto je

$$d\int (u+v)\, dx = (u+v)\, dx = udx + vdx,$$

$$d\left(\int udx + \int vdx\right) = d\int udx + d\int vdx = udx + vdx.$$

Prema gornjim pravilima i osnovnim formulama za integraljenje pisaćemo da je, na primer

$$1.\ \int \left(x^3+2\cos x - 9e^x + \frac{5}{x} + 3\right) dx = \int x^3 dx + 2\int \cos x dx -$$

$$-9\int e^x dx + 5\int \frac{1}{x}\, dx + 3\int dx = \frac{x^4}{4} + 2\sin x -$$

$$-9e^x + 5\ln x + 3x + C,$$

$$2.\ \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{1+x^2}\right) dx = \int \sqrt{x}\, dx - \int \frac{1}{x^2}\, dx + 5\int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{-2} dx + 5 \text{ arc tg } x + C = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} -$$

$$- \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 5 \text{ arctg} x + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x^{-1} + 5 \text{ arctg} x +$$

$$+ C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 5 \text{ arctg} x + C.$$

3. $$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \text{arctg} x + C,$$

4. $$\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x} + 3x + 4}{x^2} dx = \int \left(x - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx =$$

$$= \int x dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 3 \int \frac{1}{x} dx + 4 \int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x} + 3 \ln x - \frac{4}{x} + C.$$

Metoda zamene

Posmatrajmo integral

$$I = \int f(x)\, dx.$$

Izvršimo zamenu nezavisne promenljive x tako da je $x = \varphi(t)$, tako da je t nova promenljiva. Biće, dakle,

$$f(x) = f[\varphi(t)], \qquad dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\, dt,$$

pa ćemo dobiti da je

$$I = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt.$$

P r i m e r i. 1. Neka je

$$I = \int (2x+3)^8\, dx.$$

Uvodeći smenu

$$2x + 3 = t, \quad \text{odakle je} \quad x = \frac{1}{2}(t-3), \quad dx = \frac{1}{2}\,dt,$$

imaćemo da je

$$I = \int t^8 \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = \frac{1}{2}\int t^8 dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{18}\,t^9 + C =$$

$$= \frac{1}{18}(2x + 3)^9 + C.$$

2. Neka je

$$I = \int \frac{dx}{x + 5}.$$

Stavljajući da je

$$x+5 = t, \quad \text{odakle je} \quad x = t-5, \quad \text{tj.} \quad dx = dt,$$

dobićemo da je

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x+5) + C.$$

3. Neka je

$$I = \int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx.$$

Ako ovde uvedemo smenu

$$\sin x = t,$$

odakle posle diferenciranja imamo

$$\cos x\, dx = dt,$$

naš integral postaje

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln \sin x + C.$$

4. Neka je

$$I = \sqrt[3]{5x+1}\, dx.$$

Uvodeći smenu

$\sqrt[3]{5x+1} = t$, odakle je $5x+1=t^3$, $5\,dx=3\,t^2\,dt$,

$dx = \frac{3}{5}\,t^2\,dt$,

biće

$$I=\int t.\ \frac{3}{5}.t^2dt = \frac{3}{5}\int t^3dt= \frac{3}{5}.\frac{t^4}{4} +C= \frac{3}{20}\,t^4+C =$$

$$= \frac{3}{20}\,(\sqrt[3]{5x+1})^4+C.$$

5. Neka je

$$I =\int\frac{dx}{a^2+x^2}$$

Ako stavimo da je

$x=at$, odakle je $t=\frac{x}{a}$, to jest $dx=a\,dt$,

biće

$$I =\int\frac{adt}{a^2+a^2t^2} =\int\frac{adt}{a^2(1+t^2)} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,t+$$

$$+ C = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

6. Neka je

$$I =\int\frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Posle smene

$1+x^2=t$, odakle je $2x\,dx = dt$, odnosno $xdx= \frac{1}{2}\,dt$,

biće

$$I =\int\frac{\frac{1}{2}\,dt}{t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\,\ln\,t +C = \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2)+C.$$

7. Neka je

$$I =\int\frac{dx}{x^2-a^2} =\int\frac{1}{2a}\,(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})\,dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}\,dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}\,dx = \frac{1}{2a} I_1 - \frac{1}{2a} I_2,$$

gde je

$$I_1 = \int \frac{1}{x-a}\,dx\ , \qquad I_2 = \int \frac{1}{x+a}\,dx$$

Ako stavimo $x-a=t$, odakle $dx=dt$, biće

$$I_1 = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t + C_1 = \ln (x-a) + C_1.$$

Slično se nalazi da je

$$I_2 = \ln(x+a)+C_2\ ,$$

pa je

$$I = \frac{1}{2a} \ln(x-a)+ \frac{C_1}{2a} - \frac{1}{2a} \ln(x+a) - \frac{C_2}{2a} =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, \qquad C = \frac{1}{2a} (C_1-C_2).$$

8. Neka je

$$I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}\ .$$

Posle smene $x+1=t$, odakle je $dx=dt$, imaćemo

$$I = \int \frac{dt}{t^2+4} = \int \frac{dt}{a^2+t^2}\ , \quad \text{gde je} \quad a^2=4, \quad a=2,$$

pa na osnovu primera 5) imamo da je

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{2} +C = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{2} +C.$$

9. Neka je

$$I = \int \frac{dx}{x^2-4x-12} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-16}\ .$$

Posle smene $x-2=t$, odnosno $dx=dt$, biće

$$I = \int \frac{dt}{t^2-16} = \int \frac{dt}{t^2-a^2}, \quad \text{gde je} \quad a^2=16, \quad a=4,$$

pa na osnovu primera 7) imamo da je

$$I = \frac{1}{2a} \ln \frac{t-a}{t+a} + C = \frac{1}{8} \ln \frac{x-6}{x+2} + C.$$

10. Neka je

$$I = \int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2}.$$

Posle smene $x-3=t$, odnosno $dx=dt$, biće

$$I = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x-3} + C.$$

11. Neka je

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}.$$

Posle smene $\sqrt{3x+4}=t$, odnosno $3x+4=t^2$, $3\,dx=2\,t\,dt$,

$$dx = \frac{2}{3}\,t\,dt,$$

biće

$$I = \int \frac{\frac{2}{3}\,t\,dt}{t} = \frac{2}{3}\int dt = \frac{2}{3}\,t + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4} + C.$$

12. Neka je

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}.$$

Posle smene $x+1=t$, odnosno $dx=dt$, biće

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln(t+\sqrt{t^2+4}) + C = \ln(x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}) + C$$

13. Neka je

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2}} = \int \frac{dx}{x-1}$$

što posle smene $x-1=t$, odnosno $dx=dt$, daje

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x-1) + C.$$

14. Neka je

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{6-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x-6)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-[(x+2)^2-1o]}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1o-(x+2)^2}}.$$

Smenom $\sqrt{1o}(x+2)=t$, odakle $\sqrt{1o}\,dx=dt$, $dx=\frac{1}{\sqrt{1o}}\,dt$,

biće

$$I=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{1o}}\,dt}{\sqrt{1o-1ot^2}}=\frac{1}{1o}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{1o}\,\text{arc}\sin t+C=$$

$$=\frac{1}{1o}\,\text{arc}\sin\sqrt{1o}(x+2)+C.$$

15. Integral

$$I=\int\cos\ 2x\,dx$$

posle smene $2x=t$, odakle $2\,dx=dt$, $dx=\frac{1}{2}\,dt$, postaje

$$I=\int\cos t.\ \frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

16. Integral

$$I=\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

posle smene $x=\sin t$, odakle $dx=\cos t\,dt$, postaje

$$I=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=\int\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt=$$

$$=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\ (1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}\,t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t+C.$$

Kako je $x=\sin t$, to je $t=\text{arc}\sin x$, pa je

$$I=\frac{1}{2}\,\text{arc}\sin x+\frac{1}{4}\sin(2\,\text{arc}\sin x)+C=$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

17. Integral

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

posle smene $x = \sin t$, odakle je $dx = \cos t \, dt$, postaje

$$I = \int \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

$$= -\operatorname{ctg} t + C = -\frac{\cos t}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

18. Integral

$$I = \int e^{-3x} \, dx$$

posle smene $-3x = t$, odakle je $-3dx = dt$, $dx = -\frac{1}{3} dt$,

postaje

$$I = \int e^t \left(-\frac{1}{3} dt\right) = -\frac{1}{3} \int e^t \, dt = -\frac{1}{3} e^t + C =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-3x} + C.$$

Metoda delimičnog (parcijalnog) integraljenja

Neka su u i v funkcije nezavisne promenljive x. Tada je

$$d(u\,v) = v\,du + u\,dv,$$

odakle se dobija

$$\int d(u\,v) = \int (v\,du + u\,dv),$$

to jest

$$u\,v = \int v\,du + \int u\,dv.$$

Iz poslednje jednačine je

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Poslednja formula omogućava da se izračuna $\int u\,dv$, ako možemo da izračunamo $\int v\,du$.

P r i m e r i. 1. Neka je

$$I = \int x\,e^x\,dx.$$

Stavimo $u=x$, $dv=e^x\,dx$, odakle se dobija $du=dx$, $v=\int e^x dx = e^x$, pa imamo da je

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C$$
$$(x-1)\,e^x + C.$$

2. Neka je

$$I = \int x^3 \ln x\,dx.$$

Stavimo $u=\ln x$, $dv=x^3\,dx$, odakle je $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v=\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4$, pa je

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \ln x.\,\frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4}.\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

3. Kod integrala

$$I = \int \ln x\,dx$$

stavićemo $u=\ln x$, $dv=dx$, odakle je $du=\frac{1}{x}\,dx$, $v=\int dx = x$, pa imamo da je

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}\,dx = x\ln x -$$

$$- \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

4. Kod integrala

$$I = \int \operatorname{arc\,sin} x\, dx$$

stavićemo $u = \operatorname{arc\,sin} x$, $dv = dx$, odakle je

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad v = \int dx = x, \quad \text{pa je}$$

$$I = \int u\, dv = uv - \int v\, du = x \operatorname{arc\,sin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x \operatorname{arc\,sin} x - I_1,$$

gde je

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx .$$

Integral I_1 izračunaćemo ako uvedemo smenu

$$\sqrt{1-x^2} = t, \quad \text{odakle je} \quad 1-x^2 = t^2, \quad -2x\, dx = 2t\, dt,$$

$$x\, dx = -t\, dt.$$

Sada je

$$I_1 = \int \frac{-t\, dt}{t} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

pa je konačno

$$I = x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Ima funkcija koje se ne mogu integraliti elementarnim putem, tj. njihov integral se ne može izraziti pomoću elementarnih funkcija. Takvi su, na primer, integrali

$$I_1 = \int e^{-x^2} dx, \quad I_2 = \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad I_3 = \int \frac{dx}{\ln x} .$$

Sa prvim od ovih integrala, tj. sa $I_1 = \int e^{-x^2} dx$, srećemo se u statistici. Do integrala I_1 dolazi se pomoću redova, tj. funkcija e^{-x^2} razvije se u beskonačni red i integrali se član po član toga reda.

Odredjeni integral

Donji i gornji integral. Neka je $y=f(x)$ jednoznačna i ograničena funkcija definisana u zatvorenom intervalu $[a,b]$. Podelimo interval $[a,b]$ tačkama $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ u n delova, tako da je $x_{k-1} < x_k$, slika 1. Neka je m_k najmanja, a M_k najveća vrednost funkcije $f(x)$ u intervalu $[x_{k-1}, x_k]$. Tada je za neko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k.$$

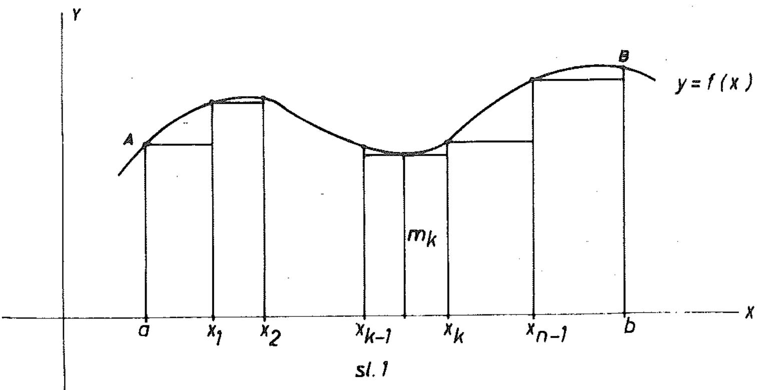
Posmatrajmo sada zbirove:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

pri čemu je $x_0=a$, $x_n=b$.



sl. 1

Tada je

$$s_n \leq J_n \leq S_n,$$

Ako se sa m označi najmanja a sa M najveća vrednost funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, biće:

$$m \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \leq s_n \leq J_n \leq S_n \leq M \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

tj. biće:

$$m(b-a) \leq s_n \leq J_n \leq S_n \leq M(b-a).$$

pošto je:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_o = b-a.$$

Znači, zbirovi s_n, J_n i S_n su ograničeni i sa donje i sa gornje strane.

Ako je:

$$\lim_{\delta \to 0} s_n = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} mk(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \lim_{\delta \to 0} J_n = J,$$

gde je δ najveći od podeoka $(x_k - x_{k-1})$, tada kažemo da je funkcija $f(x)$ integrabilna u intervalu $[a,b]$, a vrednost J se zove integral funkcije $f(x)$ u Rimanovom (Riemann) smislu.

Geometrijski, ako je funkcija $f(x)$ integrabilna u intervalu $[a,b]$, tada površine s_n i S_n upisanih i opisanih poligona teže istoj graničnoj vrednosti J, kada dužine podeoka svih podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ teže ka nuli. Broj J na taj način definiše površinu ograničenu apscisnom osom, ordinatama u krajnjim tačkama A i B i lukom krive $y=f(x)$ izmedju tačaka A i B.

Ako je funkcija $f(x)$ u intervalu $[a,b]$ integrabilna, njen integral se označava sa:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Veličine a i b označavaju u kom intervalu se vrši operacija integraljena i zovu se granice. Pri tome je a donja a b gornja granica.

Ako je $b < a$, biće razlike $x_k - x_{k-1}$ negativne pa će biti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

što znači da medjusobna izmena granica dovodi do promene znaka integrala.

Ako je $b=a$, tada je dužina intervala $[a,b]$ a samim tim i dužina svih podintervala jednaka nuli, pa je:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Videli smo da je

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M,$$

što znači da je:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a), \quad m \leq \mu \leq M,$$

gde je $\mu = f(\xi)$, $a \leq \xi \leq b$.

Poslednja formula predstavlja pravilo o <u>srednjoj vrednosti</u> u integralnom računu. Veličina μ se zove <u>srednja vrednost</u> funkcije $f(x)$ u intervalu $[a,b]$. Ona je definisana sa:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Srednja vrednost kod funkcije odgovara pojmu aritmetičke sredine kod brojeva.

Na osnovu definicije odredjenog integrala dolazi se do pravila za računanje sa odredjenim integralima.

Tako imamo pravila:

1. Ako je $f(x)$ integrabilna funkcija u intervalu $[a, b]$ i ako je c neka konstanta, integrabilna je i funkcija $cf(x)$ u istom intervalu, tako da je:

$$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Ako su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ integrabilne funkcije u intervalu $[a,b]$ integrabilne su i funkcije $f_1(x)+f_2(x)$ i $f_1(x)-f_2(x)$ u istom intervalu, tako da je:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

3. Neka je dat interval $[a,b]$ i neka je: $a < c < b$. Tada je:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\, dx,$$

ukoliko je funkcija $f(x)$ integrabilna u intervalu $[a,b]$.

Veza izmedju odredjenog i neodredjenog integrala

Neka je $f(x)$ integrabilna funkcija u intervalu $[a,b]$ i neka je $F(x)$ njena primitivna funkcija, tj. neka je $F'(x) = f(x)$ za svako $x \in [a,b]$.

Ako interval $[a,b]$ podelimo u n podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ biće tada po Lagranževoj teoremi:

$$F(x_1) - F(a) = (x_1-a)F'(\xi_1) = (x_1-a)f(\xi_1)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = (x_2-x_1)F'(\xi_2) = (x_2-x_1)f(\xi_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) = (x_{n-1}-x_{n-2})F'(\xi_{n-1}) =$$

$$=(x_{n-1}-x_{n-2})f(\xi_{n-1})$$

$$F(b)-F(x_{n-1})=(b-x_{n-1})F'(\xi_n)=(b-x_{n-1})f(\xi_n).$$

Sabiranjem ovih jednačina dobija se:

$$F(b)-F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),\quad x_{k-1}<\xi_k < x_k.$$

Ako izvršimo podelu intervala $[a,b]$ na niz sve finijih intervala $[x_{k-1}, x_k]$ tako da dužina najvećeg od ovih podintervala teži nuli, desna strana poslednje jednačine će zbog integrabilnosti funkcije $f(x)$ težiti ka $\int_a^b f(x)\,dx$.

Znači: Za integrabilnu funkciju u intervalu $[a,b]$ koja u tom intervalu ima primitivnu funkciju $F(x)$ je:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Umesto $F(b) - F(a)$ piše se i $F(x)\Big|_a^b$.

Vidimo da se izračunavanje odredjenih integrala integrabilnih funkcija svodi na izračunavanje neodredjenih integrala, tj. primitivnih funkcija.

P r i m e r i. 1. Izračunaj odredjeni integral I funkcije $f(x) = x^3$ u intervalu $[0,2]$.

Rešenje. Prvo nalazimo neodredjeni integral

$$F(x) = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

a zatim i vrednosti $F(2)$ i $F(0)$, to jest

$$F(2) = \frac{2^4}{4} + C=4+C,\qquad F(0)=C,\quad \text{a zatim}$$

$$F(2)-F(0) = 4+C-C = 4,$$

što znači da je

$$I = 4.$$

U praksi se neodredjeni integral uzima bez integracione konstante i odmah piše

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

što u našem slučaju daje

$$I = \int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4.$$

2. Naći vrednost odredjenog integrala

$$I = \int_1^e \frac{x+1}{x}\,dx.$$

Rešenje. Ovde je

$$I = \int_1^e \frac{x+1}{x}\,dx = \int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = (x+\ln x)\Big|_1^e =$$

$$= (e+\ln e)-(1+\ln 1) = (e+1)-(1+0) = e.$$

3. Izračunaj vrednost odredjenog integrala

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\,dx.$$

Rešenje. Imamo da je

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\,dx = (\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= (1+0) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}.$$

U napred navedenim primerima nismo se upuštali u pitanje integrabilnosti funkcija pri nalaženju odredjenih integrala. One su sve bile zaista integrabilne u posmatranim intervalima u kojima je vršeno integraljenje.

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna u intervalu $[a, b]$, ona je integrabilna i u svakom podintervalu $[a,x]$ toga intervala, gde je $a < x < b$. Vrednost integrala u ovom slučaju zavisi od x, tj. integral je funkcija od x, pa je

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a).$$

Neka je

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Ako se gornja granica x promeni za Δx, promeniće se i $\Phi(x)$, pa će biti

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)\, dx.$$

U ovom slučaju je

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)= \int_a^{x+\Delta x} f(x)\, dx - \int_a^x f(x)\, dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\, dx.$$

Ako je $m(x)$ najmanja, a $M(x)$ najveća vrednost funkcije $f(x)$ u intervalu $[x, x+\Delta x]$, biće

$$m(x)\,\Delta x \leq \int_x^{x+\Delta x} f(x)\, dx \leq M(x)\,\Delta x,$$

što znači da će $m(x)\Delta x$ i $M(x)\Delta x$ težiti nuli kada Δx teži nuli, a samim tim težiće nuli i $\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$. Drugim rečima, funkcija $\Phi(x)$ je neprekidna funkcija. Znači: za integrabilnu funkciju $f(x)$ u intervalu $[a,b]$ odredjeni integral $\Phi(x) = \int_a^x f(x)\, dx$ je u tom intervalu neprekidna funkcija od x.

Prema pravilu o srednjoj vrednosti je

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)= \int_x^{x+\Delta x} f(x)\, dx = f(\xi)\,\Delta x,$$

$$x \leq \xi \leq x + \Delta x,$$

to jest

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi),$$

odakle je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Znači, ako je $f(x)$ u zatvorenom intervalu $[a,b]$ neprekidna funkcija, tada funkcija

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

ima za svako x iz tog intervala izvod

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x).$$

Za neprekidne funkcije možemo, dakle, reći: Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u intervalu $[a,b]$, ona je u tom intervalu i integrabilna i ima u istom intervalu primitivnu funkciju $F(x)$, pri čemu je

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \qquad F'(x) = f(x)$$

i

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ovo je <u>osnovno (fundamentalno) pravilo integrabilnog računa</u>. Pomoću njega se za neprekidne funkcije daje način kako da se izračuna odredjeni integral. Drugim rečima, problem nalaženja odredjenog integrala kod neprekidnih funkcija sveo se na problem nalaženja njihovih primitivnih funkcija.

Smena promenljive kod odredjenog integrala

Posmatrajmo integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Neka je $x=\varphi(t)$, odakle je $dx=\varphi'(t)\,dt$ i neka je $a=\varphi(\alpha)$ $b=\varphi(\beta)$ i neka funkcija $\varphi(t)$ preslikava interval $[\alpha,\beta]$ na interval $[a,b]$. Tada je

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\Phi(t)\,dt.$$

P r i m e r i. 1. Izračunaj odredjeni integral

$$I=\int_{2}^{3}(x-3)^4\,dx.$$

Rešenje. Ako uvedemo smenu $x-3=t$, dobićemo odavde $x=t+3$ i $dx=dt$. Za $x=2$ je $t=-1$, a za $x=3$ je $t=0$, tako da su nove granice -1 i 0, pa naš integral postaje

$$I=\int_{-1}^{0}t^4\,dt=\frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{0}=\frac{0^5}{5}-\left(\frac{(-1)^5}{5}\right)=\frac{1}{5}.$$

2. Izračunaj vrednost integrala

$$I=\int_{1}^{5}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}.$$

Rešenje. Uvodeći smenu $\sqrt{2x-1}=t$, odakle je $2x-1=t^2$, $2\,dx=2t\,dt$, $dx=t\,dt$, dobija se za $x=1$ da je $t=1$, a za $x=5$ da je $t=3$, pa je

$$I=\int_{1}^{3}\frac{t\,dt}{t}=\int_{1}^{3}dt=t\Big|_{1}^{3}=3-1=2.$$

3. Izračunaj vrednost integrala

$$I=\int_{0}^{2}x\sqrt{x^2+1}\,dx.$$

Rešenje. Ako uvedemo smenu $\sqrt{x^2+1}=t$, biće $x^2+1=t^2$, $x\,dx=t\,dt$, a za $x=0$ je $t=1$, za $x=2$ je $t=\sqrt{5}$, pa je sada

$$I=\int_{1}^{\sqrt{5}}t.t\,dt=\int_{1}^{\sqrt{5}}t^2\,dt=\frac{t^3}{3}\Big|_{1}^{\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5})^3}{3}-\frac{1^3}{3}=$$

$$= \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

4. Izračunaj

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{5x-4}.$$

Rešenje. Stavljajući $5x-4=t$, dobijamo da je $5\,dx= dt$, $dx= \frac{1}{5}\,dt$ i za $x=2$ je $t=6$, a za $x=4$ je $t=16$, pa je

$$I = \int_6^{16} \frac{\frac{1}{5}\,dt}{t} = \frac{1}{5}\int_6^{16}\frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln t\Big|_6^{16} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln 16 - \frac{1}{5}\ln 6 = \frac{1}{5}\ln\frac{16}{6} = \frac{1}{5}\ln\frac{8}{3} =$$

$$= \ln\sqrt[5]{\frac{8}{3}}.$$

5. Izračunaj vrednost integrala

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin x + 2}.$$

Rešenje. Ako stavimo da je $\sin x + 2 = t$, odakle se dobija da je $\cos x\,dx = dt$, i za $x=0$ je $t=2$, a za $x = \frac{\pi}{2}$ je $t=3$, biće

$$I = \int_2^3 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

Delimična (parcijalna) integracija

Neka funkcije $u(x)$ i $v(x)$ imaju integrabilne izvode $u'(x)$ i $v'(x)$ u intervalu $[a,b]$. Tada je

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx.$$

P r i m e r i. 1) Izračunaj

$$I = \int_0^1 x\, e^x\, dx.$$

Rešenje. Prvo izračunavamo primitivnu funkciju

$$I_1 = \int x\, e^x\, dx$$

stavljajući $u=x$, $dv = e^x dx$, odakle je $du=dx$, $v=\int e^x dx = e^x$, pa je

$$I_1 = \int x\, e^x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = x\, e^x - \int e^x\, dx = $$
$$= x\, e^x - e^x \quad \text{(bez integracione konstante)}.$$

Zato je

$$I = (x\, e^x - e^x)\Big|_0^1 = (e-e)-(0-1) = 1.$$

2. Izračunaj

$$I = \int_1^e \ln x\, dx.$$

Rešenje. Prvo nalazimo neodredjeni integral

$$I_1 = \int \ln x\, dx,$$

stavljajući $u = \ln x$, $dv = dx$, odakle je $du = \frac{1}{x}\, dx$, $v = \int dx = x$, pa je

$$I_1 = \int \ln x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = x \ln x - \int \frac{1}{x}\, x\, dx =$$
$$= x \ln x - x.$$

Zato je

$$I = (x \ln x - x)\Big|_1^e = (e-e)-(0-1) = 1.$$

Ovde smo se zadržali na izračunavanju odredjenog integrala pomoću primitivne funkcije. Ustvari, za nalaženje odredjenog integrala potrebno je znati vrednost primitivne funkcije na krajevima intervala.

Primene odredjenog integrala

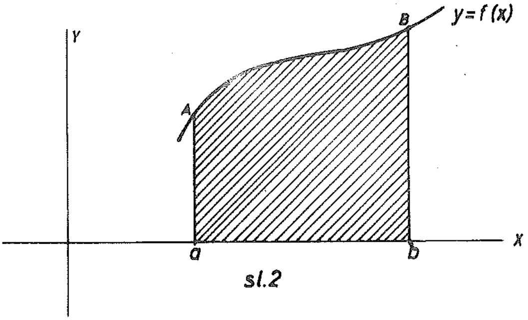
Izračunavanje površina ravnih figura

Kao što smo videli, odredjeni integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

geometrijski predstavlja površinu ograničenu osom x, ordinatama aA, bB (v. sl. 2) i lukom krive $y=f(x)$ izmedju tačaka A i B. Dakle,

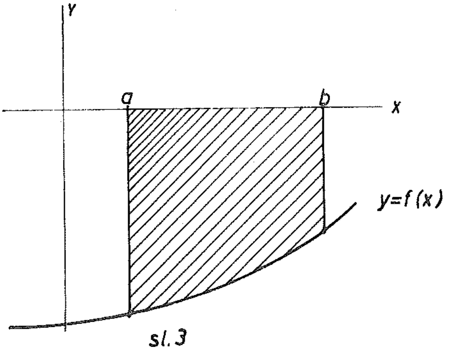
$$P = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$



sl.2

Ako se kriva nalazi ispod x ose, onda se ova površina uzima s promenjenim predznakom, tj.

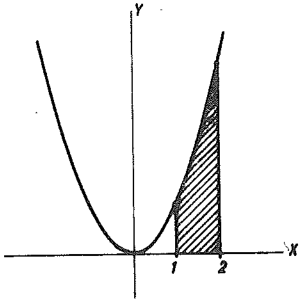
$$P = - \int_a^b f(x)\, dx \text{ , (vidi sliku 3).}$$



sl. 3

P r i m e r i. 1. Izračunaj površinu ograničenu x osom, parabolom $y=x^2$ i pravim linijama $x=1$ i $x=2$.

Rešenje. Ovde tražimo šrafiranu površinu na slici 4.



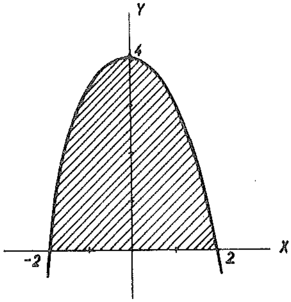
sl. 4

Imamo da je

$$P = \int_1^2 y\, dx = \int_1^2 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

2. Naći površinu ograničenu krivom $y=4-x^2$ i x osom.

Rešenje. Kao i u prethodnom primeru, prvo crtamo grafik krive $y=4-x^2$, da bismo videli o kakvoj površini se radi. Grafik ove funkcije pokazan je na slici 5, a tražena površina je šrafirana.



sl.5

Imamo, dakle, da je

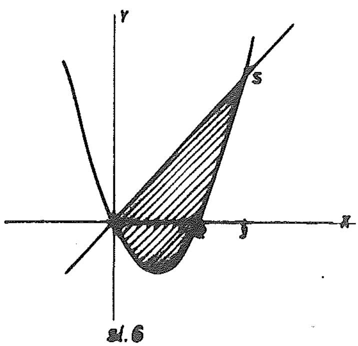
$$P = \int_{-2}^{2} y\,dx = \int_{-2}^{2} (4-x^2)dx = (4x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= (8-\frac{8}{3}) - (-8+\frac{8}{3}) = 16.$$

3. Izračunati površinu ograničenu pravom $y=x$ i parabolom $y=x^2-2x$.

Rešenje. Grafici prave i parabole dati su na slici 6, odakle se vidi da treba naći šrafiranu površinu. Dakle, tražena površina se može naći kao

$$P = P_1 + P_2 - P_3,$$



sl.6

gde je P_1 površina izmedju luka parabole i x ose od 0 do 2; P_2 površina izmedju prave $y=x$, x ose od 0 do 3 i ordinate za tačku $x=3$; a P_3 površina izmedju x ose od 2 do 3, luka parabole od apscise 2 do tačke preseka S prave $y=x$ i parabole (čija je apscisa 3) i ordinate za tačku $x=3$.

Prema tome, imamo da je

$$P_1 = -\int_0^2 (x^2-2x)dx = -\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^2 = -\left(\frac{8}{3}-4\right) = \frac{4}{3};$$

$$P_2 = \int_0^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9}{2};$$

$$P_3 = \int_2^3 (x^2-2x)dx = \left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3 = (9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right) = \frac{4}{3}.$$

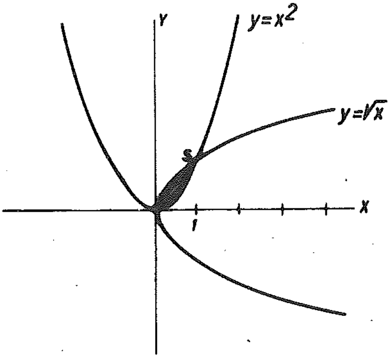
Tako je

$$P = \frac{4}{3}+\frac{9}{2}-\frac{4}{3} = \frac{9}{2}.$$

4. Izračunaj površinu ograničenu krivim

$y=x^2$ i $y^2=x$.

Rešenje. Obe krive prikazane su na slici 7, a tražena površina izmedju njih je šrafirana. Krive se seku u tačkama O(0, 0) i S(1,1).



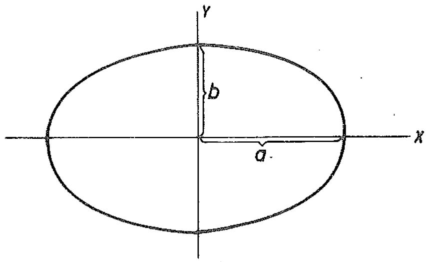
sl.7

Tražena površina se dobija kao

$$P=P_1-P_2=\int_0^1 \sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\int_0^1 (x^{1/2}-x^2)dx=$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

5. Izračunaj površinu elipse čije su poluose a i b, slika 8.



sl. 8

Rešenje. Jednačina elipse čije su poluose a i b glasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

odakle je

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Površina date elipse dobija se po obrascu

$$P=4\int_0^a y\,dx=4\,\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Da bismo našli ovaj integral uvedimo smenu $x=a\sin t$, odakle je $dx=a\cos t\,dt$ i za $x=0$ je $t=0$, a za $x=a$ je $t=\frac{\pi}{2}$,

pa je sada $P=4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi,$$ što znači da

je površina elipse

$$P = ab\pi .$$

U slučaju da su poluose elipse jednake, tj. $a=b=r$, elipsa prelazi u krug pa je tada prema prethodnom obrascu

$$P = r^2\pi .$$

gde je r poluprečnik kruga.

Izračunavanje dužine luka krive

Za datu krivu $y=f(x)$ diferencijal luka u njenoj tački $M(x,y)$ je

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

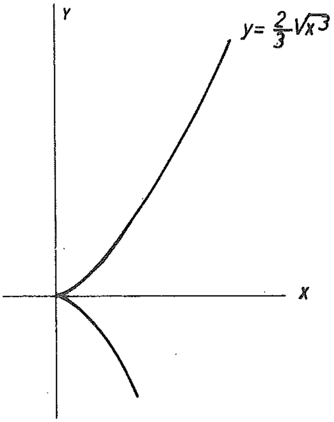
odnosno

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

odakle se dobija dužina luka krive od neke njene tačke $A(a, f(a))$ do tačke $B(b,f(b))$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Primer. Naći dužinu luka krive $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ izmedju njenih tačaka $O(0,0)$ i $B(4, \frac{16}{3})$, slika 9.



sl. 9

Rešenje. Za $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ je $y'=x^{\frac{1}{2}}$, pa je

$$s=\int_0^4 \sqrt{1+x}\,dx.$$

Ako se uvede smena $\sqrt{1+x}=t$, odakle je $1+x=t^2$, $dx=2t\,dt$ i za $x=0$ je $t=1$, a za $x=4$, je $t=\sqrt{5}$, biće

$$s=\int_1^{\sqrt{5}} t.2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{5}} t^2\,dt = \frac{2t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}-2}{3}.$$

Izračunavanje zapremine obrtnih tela

Kada se kriva $y=f(x)$, slika 10 obrće oko x ose u granicama a i b nastaje obrtno telo. Element njegove zapremine je

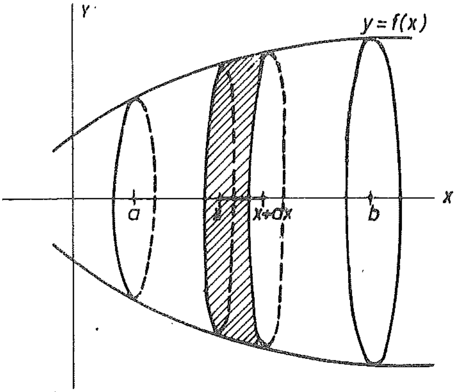
$$dV=\pi y^2\,dx,$$

odakle je

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx.$$

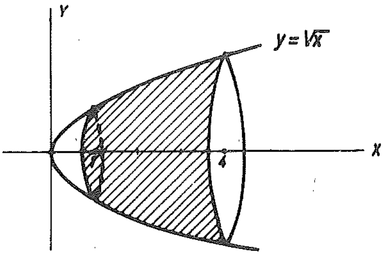
Ako se kriva obrće oko y ose biće

$$V = \pi \int_o^d x^2\, dy.$$



sl. 10

Primer 1. Izračunaj zapreminu tela nastalog obrtanjem krive $y = \sqrt{x}$ oko x ose u granicama njenih apscisa od 0 do 4, slika 11.

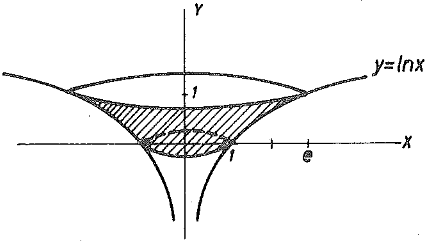


sl. 11

Rešenje. Ovde je $y = \sqrt{x}$, $y^2 = x$, pa je

$$V = \pi \int_0^4 y^2\, dx = \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{\pi}{2}.16 = 8\pi.$$

Primer 2. Izračunaj zapreminu tela nastalog obrtanjem oko y ose krive $y=\ln x$ u granicama njenih ordinata od 0 do 1, slika 12.



sl.12

Rešenje. Ovde je $\ln x = y$, odakle je $x=e^y$, $x^2=e^{2y}$, pa je tražena zapremina

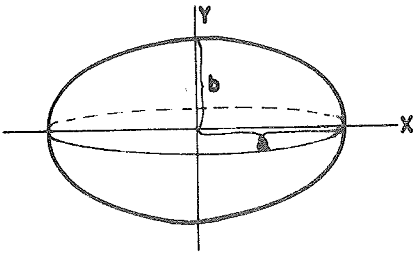
$$V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1 e^{2y}\,dy=\frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1).$$

Primer 3. Izračunati zapreminu tela nastalog obrtanjem elipse oko jedne njene ose.

Jednačina elipse, kao što znamo, glasi

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

gde su a i b njene poluose, slika 13.



Sl.13

Neka se, na primer, elipsa obrće oko y ose. Tada je zapremina nastalog tela

$$V = \pi \int_{-b}^{b} x^2 \, dy.$$

Iz jednačine elipse je

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$$

pa je

$$V = \pi \int_{-b}^{b} \frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)dy = \frac{2a^2\pi}{b^2}\int_{0}^{b}(b^2-y^2)dy =$$

$$= \frac{2a^2\pi}{b^2}\left(b^2y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{0}^{b} = \frac{2a^2\pi}{b^2}\left(b^3 - \frac{b^3}{3}\right) = \frac{4a^2b\pi}{3}$$

U slučaju da je $a=b=r$, elipsa se pretvara u krug, a tako nastalo telo je lopta, čija je zapremina prema gornjem obrascu

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Izračunavanje površine omotača obrtnog tela

Neka se kriva $y=f(x)$ obrće oko x ose, slika 14. Pri tome njen luk AB opisuje obrtnu površinu M. Element te obrtne površine je

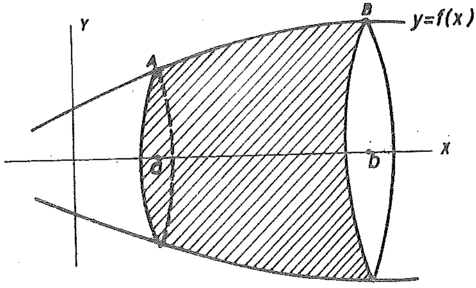
$$dM = 2\pi y \, ds,$$

gde je y ordinata tačke na luku krive, a ds element luka krive u toj tački, odakle se dobija da je $M = 2\pi\int_a^b y \, ds$, tj.

$$M = 2\pi\int_{a}^{b} y\sqrt{1+y^2}\,dx$$

pošto je

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$



sl. 14

Primer. Izračunati površinu omotača nastalog obrtanjem oko x ose luka krive $y=\frac{1}{3}x^3$ od njene tačke $O(0,0)$ do tačke $B(3,9)$.

Rešenje. Iz $y=\frac{1}{3}x^3$ je $y'=x^2$, pa je

$$M = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}x^3\sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^3 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx.$$

Ako uvedemo smenu $\sqrt{1+x^4}=t$, odakle je $1+x^4=t^2$, $4x^3dx = 2t\,dt$, $x^3dx=\frac{1}{2}t\,dt$ i za $x=0$ je $t=1$, a za $x=3$ je $t=\sqrt{82}$, biće

$$M=\frac{2\pi}{3}\int_1^{\sqrt{82}} t.\,\frac{1}{2}t\,dt = \frac{\pi}{3}\int_1^{\sqrt{82}} t^2dt = \frac{\pi}{9}t^3\Big|_1^{\sqrt{82}} =$$

$$= \frac{\pi}{9}(82\sqrt{82}-1).$$

Proširenje pojma odredjenog integrala

Do sada smo imali slučaj da su kod odredjenog integrala granice integracije bile konačne i da je podintegralna funkcija u intervalu integracije bila ograničena. U slučaju da je podintegralna funkcija neograničena, ili da je interval integracije beskonačan, kažemo da imamo posla sa <u>nesvojstvenim integralom</u>. Ovakve slučajeve integrala <u>poka-</u>

zaćemo na konkretnim primerima.

Primer 1. Nadji vrednost integrala

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx.$$

Rešenje. Ovde podintegralna funkcija $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ poastaje beskonačna za $x=1$, tj. za vrednost gornje granice. U ovom slučaju integral I se izračunava kao

$$I = \lim_{b\to 1} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{b\to 1} (-2\sqrt{1-x}) \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 1} \left[-2(\sqrt{1-b} - 1)\right] = 2.$$

Primer 2. Nadji vrednost integrala

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

Rešenje. Ovde je interval integracije beskonačan, gornja granica je beskonačna. U ovom slučaju integral I se izračunava kao

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-b}+1\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{e^b}\right) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1.$$

XII
DETERMINANTE I MATRICE

Determinante

Posmatrajmo sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate x i y.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad \dots (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

gde su a_1, a_2, b_1, b_2, koeficijenti uz nepoznate c_1, c_2 nezavisni članovi. Ako se prva jednačina sistema (1) pomnoži sa b_2 a druga sa $-b_1$ i tako dobijene jednačine saberu dobiće se jednačina:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad \dots (2)$$

Ako se prva jednačina sistema (1) pomnoži sa $-a_2$ a druga sa a_1 i tako dobijene jednačine saberu dobiće se jednačina:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \qquad \dots (3)$$

Iz jednačina (2) i (3) dobijaju se rešenja sistema (1)

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \dots (4)$$

Kvadratna šema od $2x2 = 4$ broja a, b, c, d, napisana u obliku:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

naziva se <u>determinanta drugog reda</u> ako je njena vrednost data sa:

$ad - bc$.

Brojevi a, b, c, d nazivaju se elementima uočene determinante. Tako su a i b elementi njene prve vrste, c i d elementi njene druge vrste, dok su a i c elementi njene prve kolone, b i d elementi njene druge kolone. Elementi a i d nalaze se na glavnoj dijagonali a elementi b i c na sporednoj dijagonali uočene determinante.

Iz definicije determinante drugog reda vidi se da se njena vrednost izračunava ako se od proizvoda njenih elemenata na glavnoj dijagonali oduzme proizvod njenih elemenata na sporednoj dijagonali.

Otuda se rešenja x i y u sistemu (1) navedena u (4) mogu napisati u obliku:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \ldots (5)$$

Determinanta u imeniocu, obrazovana od koeficijenata uz nepoznate x i y sistema (1) naziva se <u>determinanta sistema</u>.

Primer 1. Izračunaj vrednost determinante drugog reda:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \qquad 3)\ \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

Rešenje.

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 2.8-5.3 = 16-15 = 1.$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4.(-3)-2.1 = -12-2 = -14.$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 3.(-5)-(-3).10= -15+30 = 15.$$

Primer 2. Reši sistem jednačina:

$2x - 5y = 1$

$3x + 8y =17$

Rešenje. Na osnovu (5) je.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 17 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{1.8-17.(-5)}{2.8-3(-5)} = \frac{8+85}{16+15} = \frac{93}{31} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2.17-3.1}{31} = \frac{34-3}{31} = \frac{31}{31} = 1.$$

Kvadratna šema od $n x n = n^2$ brojeva

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}; \quad a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1},$

$a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ napisana u obliku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

naziva se <u>determinanta reda n</u>. Ona se sastoji od n vrsta i isto toliko kolona.

Svakom elementu determinante dodeljuje se znak + ili −. Ako je zbir rednog broja vrste i rednog broja kolone uočenog elementa paran broj, onda se tom elementu dodeljuje znak + , a ako je zbir rednog broja vrste i rednog broja kolone uočenog elementa neparan broj, elementu se dodeljuje znak −. Tako za determinantu trećeg reda imamo šemu znakova:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Ako se u determimanti reda n izostave vrsta i kolona u kojima se nalazi uočeni element dobiće se odgovarajuća determinanta reda $n-1$ i uzima se sa znakom koji se dodeljuje uočenom elementu. Ona se zove još i <u>kofaktorom</u> uočenog elementa.

Vrednost determinante izračunava se po pravilu o razvijanju determinante po elementima jedne njene vrste ili kolone. Ono glasi:

Svaki element jedne vrste ili jedne kolone pomnoži se odgovarajućom determinantom (odgovarajućim kofaktorom) i tako dobijeni proizvodi saberu. Tako na primer, ako se determinanta trećeg reda:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

razvije po elementima prve vrste dobiće se da je:

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2).$$

Do iste vrednosti D dolazi se ako se data determinanta razvije po elementima neke druge vrste ili kolone.

Primer 1. Izračunaj vrednost determinante:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Ako datu determinantu razvijamo po elementima njene prve kolone dobićemo da je:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} -4\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} +3\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(8+2)-4(4o+3)+3(1o-3) = 2o-172+21 = -131.$$

Primer 2. Naći vrednost determinante:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Razvijanjem date determinante po elementima prve vrste dobićemo da je:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(5+2)-1(4+3)+0(8-15) = 14-7 = 7,$$

pri čemu smo vrednosti odgovarajućih determinanata drugog reda neposredno izračunavali.

Za determinante trećeg reda važi pravilo Sarusa (Sarrus) po kome se vrednost determinante dobija na taj način što se uz datu determinantu dopišu dve njene prve kolone (ili dve njene prve vrste) i od zbira proizvoda elemenata na glavnim dijagonalama oduzme zbir proizvoda elemenata na sporednim dijagonalama.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} =(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3) -$$

$$-(a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1),$$

ili

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 +$$

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

$$+ a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3) .$$

Primer. Pomoću Sarusovog pravila naći vrednost determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Uz datu determinantu dopisaćemo dve prve njene kolone i primenićemo Sarusovo pravilo. Imaćemo da je:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{matrix} = (2.4.1 + 5.0.5 + 3.1.2) -$$

$$-(5.4.3 + 2.0.2 + 1.1.5) = (8+6) - (60+5) = -51.$$

Ako se u datoj determinanti svaka vrsta zameni odgovarajućom kolonom (prva vrsta prvom kolonom, druga vrsta drugom kolonom itd.) dobiće se determinanta koju nazivamo, <u>transponovana determinanta</u> date determinante.

Tako je za determinantu:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

njena transponovana determinanta oblika:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Osobine determinanata

Ovde ćemo navesti neke važnije osobine determinanata sa dokazom samo za neke od njih.

1. Determinanta D i njena transponovana determinanta imaju istu vrednost.

Dokaz ove činjenice sledi iz pravila o razvijanju determinante po elementima jedne njene vrste ili kolone.

2. Ako dve bilo koje vrste (kolone) determinante D izmenjaju svoja mesta, determinanta menja znak.

3. Ako su kod determinante D dve vrste (kolone) identične, tada je vrednost determinante D jednaka nuli.

Dokaz ove činjenice izvodi se na osnovu predhodne osobine. Neka je D determinanta kod koje su dve vrste (kolone) identične. Ako uočene dve vrste (kolone) izmenjaju svoja mesta, na osnovu osobine 2. determinanta D promeniće znak. Kako se na ovaj način dobila ista determinanta, biće $D=-D$, odakle je $2D=0$, tj. $D=0$.

4. Determinanta D se množi nekim brojem ako se tim brojem pomnože elementi jedne njene vrste (kolone), ili što je isto, ako su elementi jedne vrste (kolone) determinante D pomnoženi nekim brojem, tada je determinanta D pomnožena tim brojem.

Tako je za determinantu trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ili u konkretnom primeru

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 25 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} .$$

Dokaz osobine 4 izvodi se primenom pravila o razvijanju determinante D po elementima jedne njene vrste (kolone).

5. Ako su u determinanti D elementi jedne njene vrste (kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima druge njene vrste (kolone), tada je determinanta D jednaka nuli.

Osobina 3 je specijalan slučaj osobine 5, kada je faktor proporcionalnosti k=1.

Osobina 5 se dokazuje na osnovu osobina 3 i 4. Tako je za determinantu trećeg reda:

$$D = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = k.0=0,$$

jer poslednja determinanta ima dve identične vrste, prvu i treću.

6. Ako su kod determinante D elementi jedne vrste (kolone) predstavljeni u vidu zbira od po dva (od po s brojeva), tada se determinanta D razlaže na zbir dve determinante (zbir s determinanti) istoga reda; elementi ovih determinanti isti su kao i date determinante, osim elemenata one vrste (kolone) koji su prikazani u vidu zbira gde se u dotičnoj vrsti (koloni) nalaze elementi sabirci.

Tako je na primer:

$$D = \begin{vmatrix} m_1+n_1 & m_2+n_2 & m_3+n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

do čega se dolazi razvijanjem date determinante po elementima njene prve vrste.

7. Ako elemente jedne vrste (kolone) determinante D pomnožimo nekim stalnim brojem i dodamo ih odgovarajućim elementima druge vrste (kolone), vrednost determinante D se ne menja.

Tako je na primer

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

jer je determinanta

$$\begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

jednaka nuli na osnovu osobine 5.

Primer 1. Izračunaj vrednost determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Pomnožimo elemente prve kolone sa 2 i dobijene proizvode dodajmo elementima treće kolone. Dobićemo determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

Pomnožimo sada elemente prve kolone sa -3 i dobijene proizvode dodajmo elementima druge kolone. Dobićemo determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 5 \\ 5 & -11 & 7 \end{vmatrix},$$

čiju ćemo vrednost najbrže dobiti ako je razvijemo po elementima prve vrste. Tako dobijamo da je:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 5 \\ 5 & -11 & 7 \end{vmatrix} = 1(-49 + 55) = 6.$$

Primer 2. Izračunaj vrednost determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Ako elemente druge kolone jednom pomnožimo sa 3 i tako dobijene proizvode dodamo elementima treće kolone, a drugi put elemente druge kolone pomnožimo sa -2 i tako dobijene proizvode dodamo elementima prve kolone dobićemo determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & 5 & 16 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -1(-6.7+5.16) = -(-42+80) = -38.$$

Rešavanje sistema linearnih jednačina

Posmatrajmo sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznate x, y, z:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

Determinanta sistema može se napisati u obliku:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A(a_1)+a_2A(a_2)+a_3A(a_3), \quad ..(2)$$

gde su

$$A(a_1)= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A(a_2)= - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A(a_3)= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\ldots (3)$$

odgovarajući kofaktori (minori) elemenata a_1, a_2, a_3.

Ako pomnožimo prvu jednačinu sistema (1) sa $A(a_1)$, drugu sa $A(a_2)$, treću sa $A(a_3)$ i tako dobijene jednačine saberemo, dobićemo jednačinu:

$$\begin{aligned} &\left[a_1A(a_1) + a_2A(a_2) + a_3A(a_3)\right] x + \\ &+ \left[b_1A(a_1) + b_2A(a_1) + b_3A(a_3)\right] y + \\ &+ \left[c_1A(a_1) + c_2A(a_2) + c_3A(a_3)\right] z = d_1A(a_1)+d_2A(a_2)+ \\ &+ d_3A(a_3). \end{aligned}$$

Kako je:

$$a_1A(a_1) + a_2A(a_2) + a_3A(a_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D,$$

$$b_1A(a_1) + b_2A(a_2) + b_3A(a_3) = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D} \qquad \ldots (8)$$

Prema tome dokazali smo teoremu:

Ako je dat sistem linearnih jednačina od toliko nepoznatih koliko ima i jednačina, onda se vrednost svake nepoznate dobija u vidu razlomka čiji je imenilac determinanta sistema a brojilac determinanta koja se dobija iz determinante sistema ako se u ovoj koeficijenti uz nepoznatu koju tražimo zamene nezavisnim članovima, pod uslovom da determinanta sistema nije jednaka nuli.

Primer 1. Reši sistem jednačina.

$$x + y + z = 6$$

$$2x - y + z = 3$$

$$x + y - z = 0$$

Rešenje. Kako je:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-1) - (-2-1) + (2+1) = 6$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6(1-1)-(-3-0)+(3-0) = 6,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3-0) -6(-2-1) + (0-3) = 12,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-3) - (0-3) +6\ (2+1) = 18,$$

to je prema (8)

$$c_1A(a_1) + c_2A(a_2) + c_3A(a_3) = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$d_1A(a_1) + d_2A(a_2) + d_3A(a_3) = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D_1,$$

to se jednačina (4) svodi na jednačinu:

$$D \cdot x = D_1 \qquad \ldots (5)$$

Ako se date jednačine sistema (1) pomnože redom sa $A(b_1)$, $A(b_2)$, $A(b_3)$ i potom saberu, dobiće se jednačina:

$$D \cdot y = D_2, \qquad \ldots (6)$$

gde je:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

a ako se jednačine sistema (1) pomnože redom sa $A(c_1)$, $A(c_2)$, $A(c_3)$ i potom saberu, dobiće se jednačina:

$$D \cdot z = D_3, \qquad \ldots (7)$$

gde je

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Ako determinanta sistema D nije jednaka nuli, iz jednačina (5), (6) i (7) mogu se jednoznačno naći x, y, z:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{6} = 1,$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{12}{6} = 2,$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{18}{6} = 3.$$

Primer 2. Rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 3 \\ 3x_2 - 2x_3 + 5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Rešenje. Dati sistem jednačina napišimo u obliku:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + x_3 &= 3 \\ 0x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 + 0x_3 &= 4 \end{aligned}$$

odakle je:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (o-2) + (0-6) = -8,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3(0-2) + (5-12) = -13,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0+8-3(0+4) + (0+10) = 6,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12-5+3(0-6) = -11,$$

pa je prema (8)

$$x_1 = \frac{13}{8}, \quad x_2 = -\frac{6}{8}, \quad x_3 = \frac{11}{8}.$$

Adjungovana determinanta. Ako elemente date determinante D zamenimo odgovarajućim kofaktorima dobićemo novu determinantu čija se transponovana determinanta naziva adjungovana determinanta determinante D i označava se sa adj D.

Tako je za determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{adj} D = \begin{vmatrix} A(a_1) & A(a_2) & A(a_3) \\ A(b_1) & A(b_2) & A(b_3) \\ A(c_1) & A(c_2) & A(c_3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Primer 1. Naći adjungovanu determinantu determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Rešenje.

$$\operatorname{adj} D = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -9 & 8 \\ 7 & 6 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Primer 2. Naći adjungovanu determinantu determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Rešenje.

$$\operatorname{adj} D = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

<u>Inverzna determinanta.</u> Za determinantu $D \neq 0$, reda n inverzna determinanta se definiše kao:

$$D^{-1} = \frac{\operatorname{adj} D}{D^n} .$$

Primer. Naći inverznu determinantu determinante trećeg reda:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Ovde je $n = 3$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad \mathrm{adj}\, D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 8 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

pa je

$$D^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\, D}{D^n} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 8 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{6^3}$$

Videli smo da se rešenja sistema (1) dobijaju pomoću obrasca (8), u slučaju kada je determinanta sistema $D \neq 0$. Medjutim, kada je $D=0$, obrazac (8) nema smisla. Potpuniju diskusiju ovoga slučaja ovde nećemo izvoditi, već ćemo navesti krajnje rezultate.

1) Ako je u obrascima (8) $D=0$, a bar jedna od determinanti D_1, D_2, D_3 različita od nule, sistem (1) nema rešenja, on je protivurečan, odnosno nema smisla.

2) Ako je $D=D_1=D_2=D_3 = 0$, a bar jedan od kofaktora determinante D različit od nule, tada je sistem(1) neodredjen, tj. jedna od jednačina (1) je algebarska posledica drugih dveju i tada sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Pri tome se za jednu nepoznatu može uzeti proizvoljna vrednost, a ostale dve nepoznate izračunavamo iz dve jednačine.

Tako je na primer sistem jednačina:

$$x + 2y = 5$$

$$3x + 6y = 11$$

protivurečan (nemoguć), jer je iz druge jednačine:

$$x + 2y = \frac{11}{3}$$

što protivureči prvoj jednačini. Ovde je: $D=0$, $D_1=8$, $D_2= -4$

Sistem jednačina

$$x - y = 3$$

$$3x - 3y = 9$$

je neodredjen pošto je ovde $D = D_1 = D_2 = 0$
Ustvari, ovde je druga jednačina nastala iz prve jednačine posle množenja sa 3.

<u>Homogene jednačine.</u> Ako su u sistemu (1) svi nezavisni članovi jednaki nuli, sistem se zove <u>homogeni sistem</u>. U ovom slučaju se sistem (1) svodi na sistem:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots (9)$$

koji očigledno ima rešenja $x=y=z=0$ koja se zovu <u>trivijalna rešenja sistema (9)</u>.

Ispitaćemo sada pod kojim uslovom sistem (9) ima i rešenja koja su različita od nule. Neka je na primer $z \neq 0$. Tada možemo jednačine sistema (9) podeliti sa z pa ćemo dobiti:

$$\begin{aligned} a_1\frac{x}{z} + b_1\frac{y}{z} + c_1 &= 0 \\ a_2\frac{x}{z} + b_2\frac{y}{z} + c_2 &= 0 \\ a_3\frac{x}{z} + b_3\frac{y}{z} + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve dve jednačine možemo odrediti nepoznate $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ u obliku:

$$\frac{x}{z} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \frac{y}{z} = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Da bi rešenja $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ nadjena iz prve dve jednačine identički zadovoljila treću jednačinu mora biti:

$$-\frac{a_3\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} - \frac{b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + c_3 = 0,$$

tj. mora biti:

$$a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

što se može napisati u obliku:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Vidimo, dakle, da će homogeni sistem jednačina (9) imati rešenja različita od nule ako je njegova determinanta sistema jednaka nuli.

Primer. U homogenom sistemu

$$ax + 2y + 3z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

$$x + y - 2z = 0$$

odrediti a tako da ovaj sistem ima i rešenja različita od nule.

Rešenje. Da bi dati homogeni sistem jednačina imao i rešenja različita od nule treba da je determinanta toga sistema jednaka nuli, tj. treba da je:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tj. treba da je:}$$

$$a(2-1) -2(-2-1) + 3(1+1) = 0,$$

odnosno

$$a+12 = 0, \quad \text{odakle je} \quad a=-12.$$

U ovom slučaju naš sistem glasi:

$$\begin{aligned} -12x + 2y + 3z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Ako poslednji sistem jednačina podelimo sa z uzimajući da je $z \neq 0$, dobićemo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} -12\frac{x}{z} + 2\frac{y}{z} + 3 &= 0 \\ \frac{x}{z} - \frac{y}{z} + 1 &= 0 \\ \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ako poslednje dve jednačine rešimo po $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ dobićemo

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y}{z} = \frac{3}{2}.$$

Ova rešenja zadovoljavaju i prvu jednačinu.

Znači, rešenja našeg sistema su:

$$x = \frac{1}{2} z, \qquad y = \frac{3}{2} z, \qquad z = z$$

M a t r i c e

Pravougaona šema od $m \times n$ elemenata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

naziva se <u>matrica tipa $m \times n$</u>, odnosno matrica formata $m \times n$.

Umesto uglaste zagrade, za matricu A se upotrebljavaju i sledeće oznake:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Mi ćemo ovde posmatrati matrice čiji su elementi realni ili kompleksni brojevi.

Element a_{ij} nalazi se u i - toj vrsti i j-toj koloni matrice A.

Matrica tipa (formata) $n \times n$ naziva se <u>kvadratna matrica reda</u> n. To je matrica oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 2_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ leže na glavnoj dijagonali, a elementi $a_{n1}, a_{n-12}, \ldots, a_{1n}$ leže na sporednoj dijagonali uočene kvadratne matrice reda n.

Matrica oblika:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

je tipa $n \times 1$ i često se naziva vektor stuba - kolone.

Matrica oblika:

$$Y = [y_1 \quad y_2 \ \ldots \ y_p]$$

je tipa $1 \times p$ i često se naziva vektor linije - vrste.

Matrica A se često piše u obliku:

$$A = [a_{ij}], \quad i=1, 2 \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Matrica tipa 1×1 (reda 1) često se naziva skalar.

Ako su dve matrice A i B istoga tipa, tj. ako je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ - & - & - & - \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

onda se njihovi elementi a_{ij} i b_{ij}, koji se nalaze na mestu (i, j) nazivaju odgovarajućim elementima.

Za dve matrice A i B kažemo da su jednake ako i samo ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

Matrica tipa $m \times n$ čiji su svi elementi jednaki nuli naziva se nula matrica i obeležava se sa 0. Dakle je:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ - & - - - - \\ 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}.$$

Računske operacije sa matricama

Sabiranje matrica. Ako su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ dve matrice istoga tipa, tada se njihov zbir izražava u obliku:

$$A + B = C = [c_{ij}]$$

gde je:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots n).$$

Znači, operacija sabiranja definisana je za matrice istoga tipa, tako da je zbir dve matrice A i B matrica C, koja je istoga tipa kao i matrice A i B; njeni elementi se dobijaju kao zbir odgovarajućih elemenata matrica A i B.

Tako je za matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A + B = C = \begin{bmatrix} 1+5 & 3+11 & 7+2 \\ 4+3 & 5+4 & 2+8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 14 & 9 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Sabiranje kod matrica je komutativna i asocijativna operacija, tj.

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Za matricu A tipa $m \times n$ kod operacije sabiranja neutralni element je nula matrica tipa $m \times n$, pošto je

$$A + 0 = 0 + A = A,$$

dok je njen simetrični (suprotni) element matrica $(-A) = [(-a_{ij})]$, pošto je:

$$A + (-A) = [a_{ij}] + ([-a_{ij}]) = 0.$$

Znači, skup matrica istoga tipa čini komutativnu grupu u odnosu na operaciju sabiranja.

<u>Množenje matrica skalarom.</u> Matrica se množi skalarom k ako se tim skalarom pomnože svi njeni elementi. Tako je za matricu:

$$A = [a_{ij}], \quad kA = [k\, a_{ij}].$$

Primer. Ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & -8 \end{bmatrix},$$

tada je

$$5A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 & 30 \\ 15 & 5 & 25 & -40 \end{bmatrix}.$$

<u>Linearna kombinacija matrica.</u> Neka su:

$$A_1, \; A_2, \; \ldots, \; A_s$$

matrice istoga tipa i neka su:

$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_s$

skalari, tada se matrica:

$$A = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \ldots + k_s A_s$$

naziva linearna kombinacija datih matrica.

Primer. $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 6 & 22 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrica. Ako je $A = [a_{ij}]$ matrica tipa $m \times n$, $B = [b_{jk}]$ matrica tipa $n \times p$, tada se pod njihovim proizvodom podrazumeva matrica tipa $m \times p$, tj.

$$AB = C = [c_{ik}],$$

gde je

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, b_{jk} .$$

Proizvod matrica AB definisan je ako i samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B. Pri ovome je broj vrsta matrice AB jednak broju vrsta matrice A, a broj kolona matrice AB jednak je broju kolona matrice B.

Element c_{ik} matrice $AB = C$ formira se na taj način što se elementi i-te vrste matrice A:

$$a_{i1}, \quad a_{i2}, \quad \ldots, \quad a_{in}$$

izmnože odgovarajućim elementima k-te kolone matrice B:

$$\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}$$

i tako dobijeni elementi saberu.

Množenje matrica u opštem slučaju nije komutativno. Medjutim, množenje matrica je asocijativna operacija, tj. važi jednakost:

$$A\,(BC) = (AB)\,C.$$

Primer 1. Za matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

naći AB.

Rešenje. U ovom slučaju je:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 10 + 7\cdot 1 & 1\cdot 3 + 3\cdot 2 + 7\cdot 4 \\ 2\cdot 2 + 6\cdot 10 + 8\cdot 1 & 2\cdot 3 + 6\cdot 2 + 8\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 30 + 7 & 3 + 6 + 28 \\ 4 + 60 + 8 & 6 + 12 + 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 37 \\ 72 & 50 \end{bmatrix}.$$

Primer 2. Date su matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Naći a) AB, b) BA.

Rešenje.

$$\text{a)}\ AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 3 & 3\cdot 0 + 2(-5) \\ -4\cdot 1 + 6\cdot 3 & -4\cdot 0 + 6(-5) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 14 & -30 \end{bmatrix}$$

b) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3 + 0.(-4) & 1.2 + 0.6 \\ 3.3 + (-5)(-4) & 3.2 + (-5).6 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 29 & -24 \end{bmatrix}.$$

Primer 3. Pokazati da je za matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 56 & -26 \\ 19 & 8 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 10 & 28 & 12 \\ 3 & 12 & 18 \\ -3 & 3 & 42 \end{bmatrix}$$

Jedinična matrica. Jedinična matrica je kvadratna matrica kod koje su elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici a svi ostali njeni elementi jednaki nuli.

Dakle, jedinična matrica reda n je matrica

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Za kvadratnu matricu A reda n i jediničnu matricu I_n važe jednakosti:

$$AI_n = I_nA = A,$$

dok je za matricu B tipa $n \times p$ ispunjena jednakost

$$I_nB = B.$$

Transponovana matrica matrice tipa $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

je matrica tipa $n \times m$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primer. Za matricu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

transponovana matrica j

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

<u>Inverzna matrica</u>. Determinanta kvadratne matrice reda n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

čiji su elementi kompleksni ili realni brojevi je determinanta:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tako je za matricu:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11.$$

Kvadratna matrica A čija je odgovarajuća determinanta jednaka nuli naziva se <u>singularna matrica</u> dok se kvadratna matrica čija je odgovarajuća determinanta različita od nule naziva <u>regularna</u> ili <u>nesingularna matrica</u>.

Neka je A kvadratna matrica reda n. Ako postoji matrica X takva da je:

$$XA = AX = I_n,$$

gde je I_n jedinična matrica reda n, kažemo da je X <u>inverzna matrica</u> matrice A i pišemo:

$$X = A^{-1}.$$

Kvadratna matrica A može imati inverznu matricu A^{-1} ukoliko ona nije singularna matrica (ukoliko je regularna).

Primer. Naći inverznu matricu matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Prvo utvrdjujemo da li je matrica A regularna, tj. nalazimo det A. Ovde je:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

što znači da je matrica A regularna i ima inverznu matricu. Inverznu matricu tražićemo kao matricu:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

u kojoj ćemo elemente a, b, c, d odrediti iz uslova:

$$AX = I_2,$$

tj. iz uslova

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odnosno iz uslova:

$$\begin{bmatrix} 2a + 5c & 2b + 5d \\ a + 3c & b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle sledi da je:

$$2a + 5c = 1, \qquad 2b + 5d = 0$$

$$a + 3c = 0, \qquad b + 3d = 1$$

Iz poslednjih jednačina nalazimo da je $a=3$, $c=-1$, $b=-5$, $d=2$, pa je inverzna matrica matrice A matrica:

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Adjungovana matrica. Videli smo ranije kako se od date determinante D dobija adjungovana determinanta. Na isti način se od date matrice, čiji su elementi kompleksni ili realni brojevi, dobija adjungovana matrica.

Adjungovana matrica služi za dobijanje inverzne matrice, pri čemu je:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}.$$

Primer 1. Naći inverznu matricu matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Prvo nalazimo odgovarajuću determinantu, tj.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 3,$$

a zatim transponovanu matricu matrice A, tj.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Sada nalazimo adjungovanu matricu matrice A, tj.

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

Naposletku je:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{9}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{9}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Primer 2. Naći inverznu matricu matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Rešenje.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{-7} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Rešavanje sistema linearnih jednačina pomoću matrica.

Posmatrajmo sistem od n linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \qquad \dots(1)$$

sa isto toliko nepoznatih $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ako stavimo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \dots(2)$$

sistem jednačina (1) možemo napisati u matričnom obliku

$$AX = B. \qquad \dots(3)$$

Ako jednačinu (3) pomnožimo s leva sa A^{-1}, gde je A^{-1} inverzna matrica matrice A, dobićemo:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B,$$

odakle se primenom asocijativnog zakona na levu stranu poslednje jednačine dobija:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B ,$$

tj.

$$In\ X = A^{-1}B,$$

jer je $A^{-1}A = In$, odakle je

$$X = A^{-1}B, \qquad \dots(4)$$

pošto je:

$$In\ X = X.$$

Jednačina (3) može se napisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\det A \neq 0) \qquad \ldots(5)$$

odakle se dobijaju nepoznate:

$$X_k = \frac{D_k}{D} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad \ldots(6)$$

gde je $D = \det A$, dok D_k označava determinantu matrice A u kojoj su elementi k - te kolone zamenjeni kolonom sastavljenom od nezavisnih članova.

Do obrazaca (6) došli smo ranije pomoću determinanata.

Primer. Sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

reši pomoću matrica.

Rešenje. Ovde je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6, \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

pa je prema (5)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

odakle se dobija da je:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 3.$$

Primer 2. Sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 8 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

rešiti pomoću matrica:

Rešenje. Ovde je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \ \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

pa je prema obrascu (5)

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

odakle dobijamo $x_1 = \frac{11}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Primer 3. Sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= x_3 + 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6 &= 0 \\ x_1 &= x_2 - x_3 + 8 \end{aligned}$$

rešiti pomoću matrica.

Rešenje. Dati sistem napišimo u obliku:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

pri čemu je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10, \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

pa je prema obrascu (5)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 60 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odakle je $x_1 = 6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$.

Rang matrice. Matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tipa $m \times n$ ima rang r ako medju njenim kvadratnim submatricama postoji bar jedna regularna submatrica reda r, dok su sve submatrice reda višeg od r, ako postoje, singularne.

Rang matrice se ne menja ako njene dve vrste (kolone) izmenjaju svoja mesta.

Matrica A i njena transponovana matrica A^T imaju isti rang.

Primer. Rang matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

je 2.

Linearne transformacije

Neka je:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad & - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= y_m , \end{aligned} \qquad \dots (1)$$

i neka je dalje

$$\begin{aligned} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1m}y_m &= z_1 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2m}y_m &= z_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad & - \\ b_{p1}y_1 + b_{p2}y_2 + \dots + b_{pm}y_m &= z_p . \end{aligned} \qquad \dots (2)$$

Ako stavimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ - & - & & - \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_p \end{bmatrix}$$

tada se relacije (1) i (2) mogu pomoću matrica napisati redom u obliku

$$AX = Y \qquad \ldots(1')$$

$$BY = Z \qquad \ldots(2')$$

Ako (1') pomnožimo s leva sa B dobićemo:

$$B\,(A\,X) = BY\,,$$

što s obzirom na (2') i asocijativnost operacije množenja matrica daje:

$$(B\,A)\,X = Z \qquad \ldots(3)$$

Relacija (3) može se napisati u obliku:

$$CX = Z, \qquad \ldots (4)$$

gde je

$$C = BA,$$

što znači da su sada veličine $z_1, z_2, \ldots z_p$ izražene pomoću $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Na taj način smo transformacijom A veličina $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dobili veličine $y_1, y_2, \ldots, y_m$, transformacijom B veličina $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dobili veličine $z_1, z_2, \ldots, z_p$. Medjutim, veličine $z_1, z_2, \ldots, z_p$ dobili smo transformacijom C veličina $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koja je nastala kao proizvod transformacija B i A. Svaka od navedenih transformacija A, B i C predstavlja jednu <u>linearnu transformaciju</u>.

Primer 1. Neka je:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = y_1$$

$$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = y_2$$

i

$$3y_1 - 2y_2 = z_1$$

$$4y_1 + 5y_2 = z_2.$$

Izrazi veličine z_1, z_2 pomoću veličina x_1, x_2, x_3.

Rešenje. Ovde je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

pa je na osnovu (3)

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} -4 & 13 & -11 \\ 33 & 2 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$-4x_1 + 13x_2 - 11x_3 = z_1$$
$$33x_1 + 2x_2 + 16x_3 = z_2 .$$

Primer 2. Neka je

$$3x_1 - x_2 + x_3 = y_1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = y_2 ,$$

$$2y_1 - 3y_2 = z_1$$
$$5y_1 + 2y_2 = z_2$$

i

$$z_1 + 2z_2 = u_1$$
$$4z_1 - z_2 = u_2 .$$

Izraziti veličine u_1, u_2 pomoću veličina x_1, x_2.

Rešenje. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Tada je $AX = Y$, $BY = Z$, $CZ = U$, odakle je $CBAX = U$, tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 37 & -11 & 11 \\ -5 & -17 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

odnosno

$$37x_1 - 11x_2 + 11x_3 = u_1$$
$$-5x_1 - 17x_2 + 17x_3 = u_2 .$$

V e k t o r i

Uredjenu n-torku realnih brojeva $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazivamo <u>n-dimenzioni vektor</u>. Brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivaju se koordinate vektora a.

Skup svih n-dimenzionih vektora čini <u>n-dimenzioni vektorski prostor R^n</u>. Dakle:

$$R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\}$$

gde su $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ realni brojevi.

Za n=3 dobijaju se trodimenzioni vektori, a prostor R^3 je običan Euklidski trodimenzioni prostor.

Sa n-dimenzionim vektorima uvode se operacije na sledeći način:

Za dva vektora

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

i skalar k je

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \quad \text{(zbir)}$$

$a-b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$ (razlika)

$ka = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$ (proizvod sa skalarom)

$ab = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ (skalarni proizvod)

Dužina vektora definisana je kao

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{aa}$$

Nula vektor koji označavamo sa 0 je vektor čije su sve koordinate jednake nuli, tj.

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

Ako su $k_1, k_2, \ldots, k_s$ skalari, izraz oblika

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_s v_s$$

je linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_s$.

Za vektore $v_1, v_2, \ldots, v_s$ kažemo da su linearno nezavisni ako jednakost

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_sv_s = 0$$

povlači $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$. Ako je ta jednakost moguća i kada je bar jedan od koeficijenata $k_i (i=1, 2, \ldots, s)$ različit od nule kaže se da su vektori $v_1, v_2, \ldots, v_s$ linearno zavisni.

Vektori

$$e_1 = (1, o, o, \ldots, o)$$
$$e_2 = (o, 1, o, \ldots, o)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (o, o, o, \ldots, 1)$$

takvi da e_i ima i-tu koordinatu jednaku 1, a ostale jednake nuli su linearno nezavisni, jer je

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n =$$
$$= (k_1, o, o, \dots, o) + (o, k_2, o, \dots, o) + \dots +$$
$$+ (o, o, o, \dots, k_n) = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = 0$$

ako je

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

Svaki vektor

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

može se predstaviti kao linearna kombinacija vektora $e_1, e_2, \dots, e_n$. Zaista:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, o, o, \dots, o) + (o, a_2, o, \dots, o) +$$
$$+ \dots + (o, o, o, \dots, a_n) = a_1(1, o, o, \dots, o) + a_2(o, 1, o, \dots, o) +$$
$$+ \dots + a_n(o, o, o, \dots, 1) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

U tom smislu za skup vektora $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kaže se da je baza vektorskog prostora R^n.

Uopšte, za n-torku vektora $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kaže se da čini bazu prostora R^n ako su vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno nezavisni i ako se svaki vektor prostora R^n može predstaviti kao linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Primer. Za vektore

$$a = (2, 3, 5), \qquad b = (1, -2, 4)$$

je:

$$a + b = (3, 1, 9), \qquad a - b = (1, 5, 1)$$

$$5a = (1o, 15, 25), \qquad 3a - 2b = (4, 13, 7)$$

$$ab = 2 - 6 + 2o = 16,$$

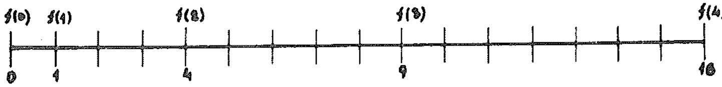
$$|a| = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$$

$$|b| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

XIII

OSNOVI TEORIJE NOMOGRAMA

Funkcijska skala. Linija na kojoj predstavljamo brojne vrednosti jedne funkcije naziva se funcijska skala te funkcije. Koliku ćemo dužinu za jedinicu izabrati na funkcijskoj skali zavisi od samih brojnih vrednosti funkcije koju posmatramo. Pored tačke na funkcijskoj skali kojoj odgovara vrednost date funkcije običnos se piše vrednost argumenta. (Uporediti skale a i b za funkciju $f(x) = x^2$).



Sl. a

Sl. b

Sa slike b takodje vidimo kako se menja data funkcija $f(x) = x^2$.

Veza izmedju funkcijskih skala - nomogram. U praksi se često nameće potreba da se odredi vrednost jedne funkcije više nezavisno promenljivih.

Mi ćemo ovde posmatrati funkciju dve nezavisno promenljive, prvo funkciju

$$F(u,v) = w$$

koja je data u obliku

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$$

a zatim funkciju koja je data u obliku

$$f_1(u) = f_2(v)\ f_3(w)$$

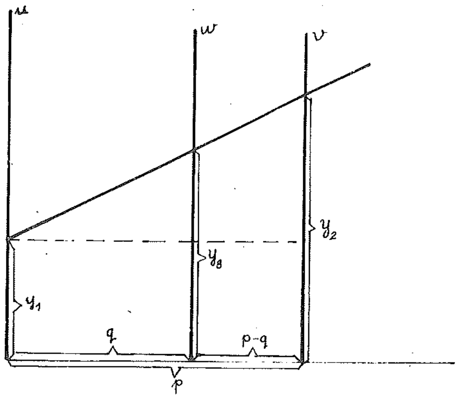
Posmatrajmo prvo funkciju oblika

$$f_1(u)+f_2(v) = f_3(w) \qquad \ldots (1)$$

Neka su u, v, w funkciske skale za odgovarajuće funkcije $f_1(u)$, $f_2(v)$, $f_3(w)$ paralelno postavljene u jednoj ravni. Neka je p rastojanje skale v od skale u, a q rastojanje skale w od skale u. Neka je m_1 izabrana jedinica dužine za skalu u, m_2 izabrana jedinica dužine za skalu v, m_3 odgovarajuća jedinica dužine za skalu w.

Za odredjene vrednosti argumenata u i v sada je, slika 1

$$y_1 = m_1 f_1(u), \quad y_2 = m_2 f_2(v), \quad y_3 = m_3 f_3(w). \qquad \ldots(2)$$



Sl.1

Sa slike 1 se vidi da je

$$p:(y_2-y_1) = q:(y_3-y_1),$$

odakle se dobija

$$(y_2-y_1)q = (y_3-y_1)\ p$$

tj.

$$y_1(p-q) + y_2q = y_3p,$$

što s obzirom na (2) daje

$$m_1(p-q)\ f_1(u) + m_2qf_2\ (v) = m_3pf_3\ (w),$$

odakle je

$$\frac{m_1(p-q)}{m_3p}\ f_1(u) + \frac{m_2q}{m_3p}\ f_2(v) = f_3(w). \qquad \ldots (3)$$

Da bi jednačina (3) bila identična sa jednačinom (1) mora biti

$$\frac{m_1(p-q)}{m_3p} = 1, \qquad \frac{m_2q}{m_3p} = 1,$$

odakle se dobija

$$m_1(p-q) = m_3p, \qquad m_2q = m_3p. \qquad \ldots (4)$$

Iz jednačina (4) proizilazi da je

$$m_1(p-q) = m_2q,$$

što možemo napisati u obliku

$$q : (p-q) = m_1 : m_2 \qquad \ldots (5)$$

Iz jednačine (5) vidimo kako se odredjuje položaj skale w u odnosu na izabrano rastojanje skala u i v i izabrane jedinice dužine m_1 i m_2 za ove skale.

Ako prvu od jednačina (4) pomnožimo sa m_2, a drugu sa m_1 i obrazujemo njihov zbir dobićemo

$$m_1m_2p = (m_1+m_2)m_3p$$

što posle deljenja sa p daje

$$m_1m_2 = (m_1+m_2)\ m_3,$$

odakle je

$$m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \qquad \ldots (6)$$

Iz jednačine (6) vidimo koliku jedinicu dužine treba uzeti za skalu w u odnosu na izabrane jedinice dužine m_1 i m_2 za skale u i v.

Sada jednačine (2) postaju

$$y_1 = m_1 f_1(u), \quad y_2 = m_2 f_2(v), \quad y_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} f_3(w) \quad ..(7)$$

pomoću kojih dobijamo ordinate y_1, y_2, y_3 za svaku funkcisku skalu u, v, w.

Funkciske skale u, v, w, obrazovane na ovaj način predstavljaju jedan nomogram. Nomogram omogućava da na osnovu vrednosti argumenata dveju funkcija odredimo argument treće funkcije na taj način što kroz tačke na funkciskim skalama koje odgovaraju datim argumentima povlačimo pravu liniju koja seče treću funkcisku skalu u tački koja nam daje vrednost traženog argumenta.

Primer 1. Izradimo nomogram za funkciju

$$2u + v^2 = w \qquad \ldots (8)$$

ako se zna da se promenljiva u menja u granicama $0 \leq u \leq 12$, promenljiva v u granicama $0 \leq v \leq 7$.

Rešenje. Prvo biramo jedinice dužine m_1 i m_2 za skale u i v. Kako je prema (8)

$$f_1(u) = 2u, \quad f_2(v) = v^2, \quad f_3(w) = w,$$

to je sada prema (7)

$$y_1 = m_1 . 2u, \quad y_2 = m_2 . v^2, \quad y_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} . w \quad \ldots (9)$$

Ako se uzme da je $m_1 = 5$ mm, $m_2 = 2$mm, tada će dužina skale u biti $5.2u = 10u = 10.12 = 120$ mm pošto promenljiva u uzima 12 kao najveću vrednost, dužina skale v biće

$2v^2 = 2.7^2 = 98$ mm pošto promenljiva v uzima 7 kao najveću vrednost.

Rastojanja izmedju skala, prema (5), data su sada u odnosu

$$q:(p-q) = 5:2,$$

dok je jedinica dužine m_3 za skalu w, prema (6), sada $m_3 = \frac{5.2}{5+2} = \frac{10}{7}$.

Jednačine (9) možemo sada napisati u obliku

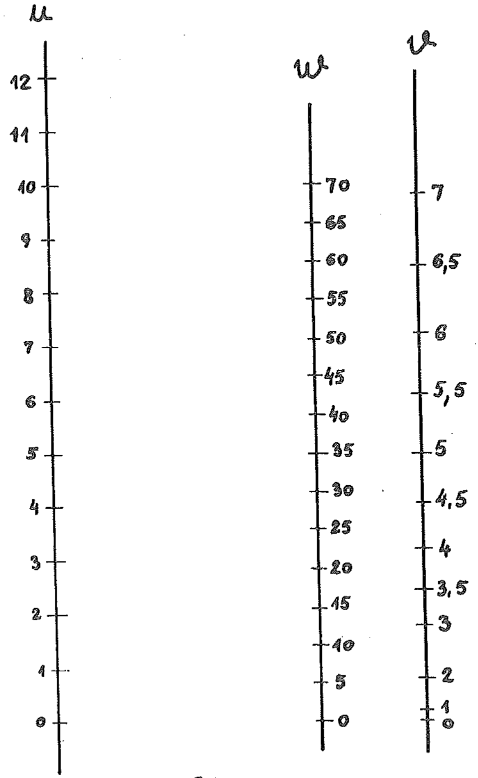
$$y_1 = 10\,u, \quad y_2 = 2v^2, \quad y_3 = \frac{10}{7} w.$$

Vrednost argumenata (promenljivih) u,v,w odredjujemo tačkama na odgovarajućim skalama čije položaje nalazimo na osnovu sledećih tablica

u	$y_1=10u$
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90
10	100
11	110
12	120

v	$y_2=2v^2$
0	0
1	2
2	8
2,5	13,5
3	18
3,5	24,5
4	32
4,5	40,5
5	50
5,5	60,5
6	72
6,5	84,5
7	98

w	$y_3=\frac{10}{7}w$
0	0
5	7,1
10	14,3
15	21,4
20	28,6
25	35,7
30	42,8
35	50,0
40	57,1
45	64,3
50	71,1
55	78,6
60	85,7
65	92,8
70	100,0



SL. 2

Traženi nomogram prikazan je na slici 2. Pomoću njega na primer za u=lo, v=5 nalazimo da je w=45. Medjutim, ako je na primer u=8, w=25 pomoću našeg nomograma nalazimo da je v=3.

Posmatrajmo sada funkciju oblika

$$f_1(u) = f_2(v)\ f_3(w) \qquad \ldots (1o)$$

ili, što je isto, funkciju oblika

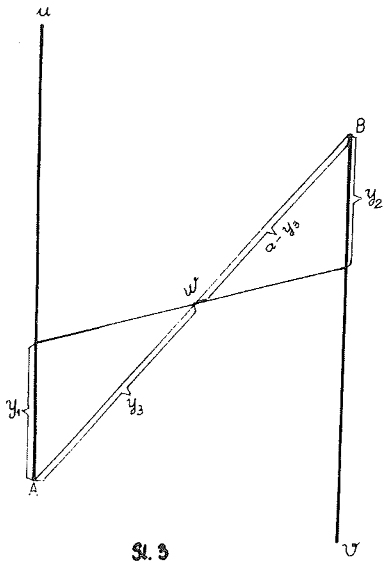
$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w) \qquad \ldots(10')$$

Logaritmovanjem jednačine (lo) dobijamo jednačinu

$$\log f_1(u) = \log f_2(v) + \log f_3(w)$$

a ona je oblika (1), za koju možemo napraviti nomogram na već opisani način.

Medjutim, za funkciju oblika (lo) može se konstruisati nomogram tako da se za skale promenljivih u i v uzmu dve paralelne i suprotno orijentisane poluprave, a za skalu w prava koja prolazi kroz početke A i B skala u i v.



Sl. 3

Neka je AB = a. Sa slike 3 je tada

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_3}{a-y_3},$$

odakle se dobija $ay_1 - y_1 y_3 = y_2 y_3$, odnosno $y_3(y_1+y_2)=ay_1$, odakle je dalje

$$y_3 = \frac{y_1}{y_1+y_2} \cdot a \qquad \ldots (11)$$

Kako je prema (7)

$$y_1 = m_1 f_1(u), \qquad y_2 = m_2 f_2(\nu), \qquad y_3 = m_3 f_3(w),$$

to se iz (11) dobija

$$y_3 = \frac{m_1 f_1(u)}{m_1 f_1(u) + m_2 f_2(\nu)} \cdot a$$

Ako brojilac i imenilac poslednje jednačine podelimo sa $m_1 f_2(\nu)$ dobićemo

$$y_3 = \frac{\dfrac{f_1(u)}{f_2(\nu)}}{\dfrac{f_1(u)}{f_2(\nu)} + \dfrac{m_2}{m_1}} \cdot a,$$

koju s obzirom na (lo') možemo napisati u obliku

$$y_3 = \frac{f_3(w)}{f_3(w) + \dfrac{m_2}{m_1}} \cdot a \qquad \ldots (12)$$

Primer 2. Konstruišimo nomogram za funkciju

$$u = vw$$

ako se zna da se promenljiva u menja u granicama $0 \leq u \leq 600$, a promenljiva v u granicama $0 \leq \nu \leq 15$.

Rešenje. Za jedinicu dužine za skalu u uzmimo $m_1 = 0{,}25$ mm, za skalu v jedinicu dužine $m_2 = 10$ mm. Za dužinu skale w uzmimo a=loo mm. U ovom slučaju je $\frac{m_2}{m_1} = 40$, pa jednačina (12) glasi

$$y_3 = \frac{w}{w+40} \cdot 100$$

Sada je

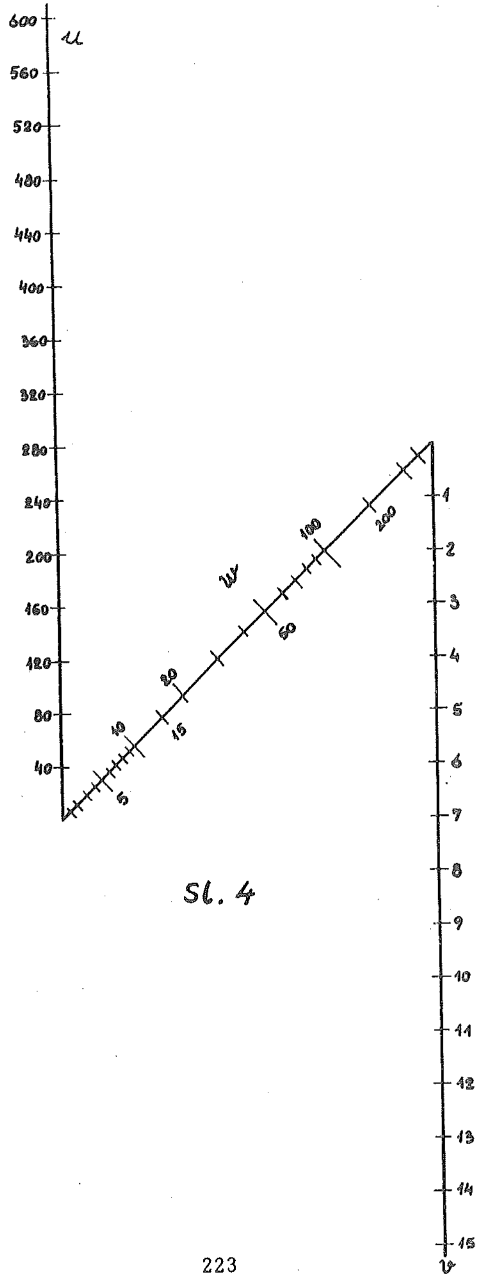
$$y_1 = 0,25\,u, \qquad y_2 = 10\nu, \qquad y_3 = \frac{100\,w}{w+40}$$

Vrednosti argumenata u, v, w odredjujemo tačkama na odgovarajućim skalama čije položaje nalazimo na osnovu tablica

u	$y_1 = 0,25\,u$
0	0
40	10
80	20
120	30
160	40
200	50
240	60
280	70
320	80
360	90
400	100
440	110
480	120
520	130
560	140
600	150

ν	$y_2 = 10\nu$
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90
10	100
11	110
12	120
13	130
14	140
15	150

w	$y_3 = \frac{100\,w}{w+40}$
0	0
1	2,4
2	4,8
3	7,0
4	9,1
5	11,1
6	13,0
7	14,9
8	16,7
9	18,4
10	20,0
15	27,3
20	33,3
30	42,9
40	50,0
50	55,6
60	60,0
70	63,6
80	66,7
90	69,2
100	71,4
200	83,3
500	92,6
1000	96,2


u
600
560
520
480
440
400
360
320
280
240
200
160
120
80
40
w
5
10
15
20
60
100
200
v
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Sl. 4

Traženi nomogram prikazan je na slici 4. Pomoću njega se na primer za $u = 260$ i $w = 60$ dobija da je $v = 4,3$.

Napominjemo da je logaritamski računar konstruisan na principu nomograma.

XIV
ZADACI ZA VEŽBU

1. Za skupove $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{b, c, d, f\}$ naći $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Ako je R skup svih realnih brojeva a R_a skup svih racionalnih brojeva, šta predstavlja $R \setminus R_a$ a šta $R_a \setminus R$.

3. Naći broj varijacija klase 4 od 6 elemenata.

4. Naći broj kombinacija klase 3 od 8 elemenata.

5. Naći broj permutacija obrazovanih od elemenata a, b, c, d, e.

6. Naći broj varijacija sa ponavljanjem klase 2 od 5 elemenata.

7. Naći broj varijacija sa ponavljanjem klase 5 od 2 elementa.

8. Popunjavanje listića kod sportske prognoze jeste obrazovanje varijacija sa ponavljanjem klase 12 od 3 elementa. Koliki je pri tome broj svih mogućih varijacija?

9. Naći broj kombinacija sa ponavljanjem klase 3 od 5 elemenata 1, 2, 3, 4, 5.

10. Naći broj kombinacija sa ponavljanjem klase 4 od 3 elementa A, B, C.

11. Razviti binome: a) $(x+y)^8$, b) $(a-b)^6$

12. Naći granicu niza: a) $a_n = \frac{2}{n}$, b) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$

13. Da li niz $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ima granicu ? Koliko tačaka nagomilavanja ima ovaj niz?

14. Za koje vrednosti nezavisno promenljive x su definisane funkcije:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, b) $y = l_n(x-2)$, c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$,

d) $y = \frac{x}{x-1}$, e) $y = \frac{1}{1+x^2}$?

15. Odrediti tačke prekida funkcija:

a) $y = \frac{1}{x-3}$, b) $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+3)}$, c) $y = \frac{1}{x^2-1}$,

d) $y = e^{\frac{1}{x}}$, e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. Naći prvi izvod funkcije:

A)

a) $y = x^8$, b) $y = \sin 5x$, c) $y = tg^6 x$,

d) $y = x^2 \sin x$, e) $y = (\sin x + 2 \cos x)^3$,

f) $y = x^2 e^{3x}$, g) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, h) $y = \sqrt{\cos x}$,

i) $f(x) = (2x-3)^4(5-x)^3$, k) $y = \ln(x^3-1)$

l) $y = 5^x$, m) $y = \log_2 x$, n) $y = \frac{1}{x^2}$

B)

a) $y = x^3-5x^2+3x-1$, b) $y = \frac{1}{x^5}$, c) $y = x^3 e^x$,

d) $f(x) = x \ln x$, e) $y = x^3 \cos x$, f) $y = \frac{e^x}{\sin x}$

g) $y=\sqrt{\sin^2 x+1}$, h) $y=\frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}$, i) $y=\operatorname{tg} x^2$,

k) $y=e^{6x^2}$, l) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,

m) $x^3+y^3-3axy=0$, n) $2x^2-7xy+3y^2+2x=5y+2$

17. Naći: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x+1}{2x^3+8}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3e^{-x}$, e) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

18. Nacrtati grafik (dijagram) funkcije:

a) $y=x(x+1)(x-1)^2$, b) $y=\frac{x^2+1}{x}$, c) $y=\frac{1}{x-2}$

d) $y=\frac{x}{3-x^2}$, e) $y=\frac{1}{1+x^2}$, f) $y=xe^x$,

g) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$, h) $y=x^3-12x$, i) $y=e^{-x^2}$

19) Naći ekstremne vrednosti funkcija:

a) $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3$, b) $y=2x^3+3x^2-12x+1$

c) $y=x^2(x-3)$, d) $y=x^2(x-12)^2$, e) $f(x)=\frac{4x-3}{x^2+1}$

f) $y=\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$, g) $y=x^4-8x^2+9$, h) $y=x^3-3x^2-9x+5$

i) $y=xe^{-x}$, k) $y=x+\frac{1}{x}$,

l) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+2$

20. Naći parcijalne izvode funkcije:

a) $z=3x^2-8xy-5y^2-7x+3y-2$, b) $z=(x^2-3y^2)^5$

21. Proizvodnja kamenog uglja u prethodnih 9 godina izražena u hiljadama tona prikazana je sledećom tabelom:

godina	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
proizvodnja	9	11	12	12	15	17	21	25	28

Za datu vremensku seriju naći linearni trend i na osnovu njega predvideti proizvodnju kamenog uglja u 1968 godini.

22. a) $\int x^5 dx$, b) $\int \frac{1}{x^3} dx$, c) $\int (5x^2-3x+1)dx$

d) $\int (\sin x + e^x - x+3)dx$, e) $\int (3x+4)^3 dx$,

f) $\int (x+1)^6 dx$, g) $\int \sqrt[5]{2x-1}\, dx$, h) $\int \frac{dx}{3x+2}$,

i) $\int \frac{dx}{(x+3)^4}$ $\int \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) dx$,

l) $\int \frac{dx}{25x^2+20x+4}$, m) $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$,

n) $\int \frac{dx}{2x^2+4x+5}$, o) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-24x+9x^2}}$,

p) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+5}}$, q) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+2}}$,

r) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$, s) $\int x\sqrt{3-x^2}\, dx$, t) $\int x \sin x\, dx$,

u) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$, v) $\int x \ln x\, dx$, w) $\int xe^x dx$.

23. a) $\int_0^1 x^2 dx$, b) $\int_1^3 (x-1)\, dx$,

c) $\int_{-1}^{1} (x^2-3x+2)\, dx$, d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$,

e) $\int_{0}^{1} e^{x}\, dx$, f) $\int_{1}^{2} (2x-3)^{4}\, dx$,

g) $\int_{0}^{5} 3x+1\, dx$, h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx$,

i) $\int_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25 + 3x}}$, k) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$,

l) $\int_{2}^{6} \sqrt{x-2}\, dx$, m) $\int_{2}^{3} (2x-1)^{3}\, dx$,

n) $\int_{0}^{3} \sqrt{5x+1}\, dx$, o) $\int_{1}^{2} (x^{2}-2x+3)\, dx$,

p) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1)\, dx$, q) $\int_{0}^{1} (x+e^{x})\, dx$,

r) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^{2}}$, s) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^{3}}$, t) $\int_{1}^{2} (x^{3}+2x-4)\, dx$

24. Izračunati površinu ograničenu osom x i parabolom $y = 1-x^{2}$.

25. Izračunati površinu ograničenu x osom, pravom $x=3$ i parabolom $y = x^{2}$.

26. Izračunati površinu ograničenu krivom linijom $y=x(x-1)^{2}$ i x osom.

27. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y=4x-x^{2}$ i x osom.

28. Izračunati zapreminu tela nastalog obrtanjem oko x ose parabole $y = 4x - x^{2}$ za koju je $y \geqslant 0$

29. Naći vrednost determinante:

a) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 19 & 4 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 19 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -5 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

30. Reši sistem jednačina:

a) $2x - 3y = 3$
$5x + 4y = 19$

b) $x + y = 3$
$x - y = 1$

c) $2x - 3y + z - 2 = 0$
$x + 5y - 4z + 5 = 0$
$4x + y - 3z + 4 = 0$

d) $2x - 4y + 3z = 1$
$x - 2y + 4z - 3 = 0$
$3x - y + 5z = 2$

e) $2x_1 - x_2 + x_3 = 2$
$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2$
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

f) $2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$
$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$

g) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1$

31. Naći zbir matrica

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

32. Naći $4A$ ako je $A = \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

33. Naći $3A - 2B$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

34. Naći proizvod matrica

a) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

35. Naći adjungovanu matricu matrice:

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

36. Naći inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

37. Sistem jednačina rešiti pomoću matrica:

a) $$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x - y + z &= 7 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

38. Naći x i y iz jednačine

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 10 \end{bmatrix}$$

39. Za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

naći AB

40. Naći AB i BA za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

41. Dati su vektori $a=(3,1)$, $b=(4,-1)$.
Naći: $a+b$, $a-b$, ab, $|a|$, $|b|$.

42. Dati su vektori $a = (2, 0, -1)$, $b = (1, -2, 3)$.
Naći: $2a$, $3b$, $a-b$, ab, $|b|$.

43. Za vektore $a=(1, 3, -2, 5)$, $b = (0, 1, 2, 3)$.
Naći: $a+b$, ab, $|a|$.

Rešenja

1. $A\cup B = \{a, b, c, d, f\}$, $A\cap B = \{b, c\}$,
$A\setminus B = \{a\}$, $B\setminus A = \{d, f\}$.

2. $R\setminus R_a$ predstavlja skup iracionalnih brojeva, $R_a\setminus R=\emptyset$ (prazan skup)

3. 360 4. 56 5. 120 6. 25 7. 32 8. $3^{12}=531\,441$

9. 35 10. 15 12. a) 0, b) 0.

13. Niz nema granicu; niz ima dve tačke nagomilavanja 1 i -1.

14. a) $x \geqslant 0$, b) $x \geqslant 2$, c) Za svako $x \in (-\infty, \infty)$,

d) $x \neq 1$, e) Za svako x.

15. a) $x = 3$, b) $x = 1$ i $x = -3$, c) $x = \pm 1$, d) $x = 0$,

e) $x = \pm 1$.

17. a) 1 , c) $\frac{1}{2}$, d) 0 , e) 1

21. $y = 4{,}92 + 2{,}35\ t$; 33,12.

23. h) -2 i) $-\frac{2}{3}$ l) $\frac{16}{3}$ m) 68 n) $\frac{42}{5}$

o) $\frac{7}{3}$ p) $\frac{\pi}{2} - 1$ t) $\frac{11}{4}$.

24. $\frac{4}{3}$ 30. c) (5; 6; 10) d) (−1; 0; 1) e) (2; −1; −3)

37. a) (3; 4) b) (2; 0; 1) c) (1; 2; 3)

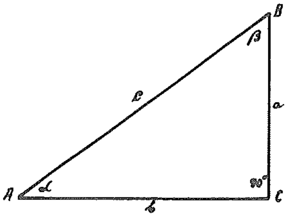
38. (4; 5)

D O D A T A K

XV

T R I G O N O M E T R I J A

1. Definicija trigonometrijskih funkcija na pravouglom trouglu. Odnosi ili razmere strana pravouglog trougla ABC (slika 2) jesu funkcije ma kog oštrog ugla posmatranog trougla, i obrnuto, mogu se uglovi smatrati kao funkcije tih razmera. Izmedju strana pravouglog trougla ABC moguće su ove razmere:



Sl. 2

$\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ i recipročne:

$\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{b}{a}$

Ove razmere zavise samo od uglova i zovu se trigonometrijske funkcije uglova. Za trigonometrijske funkcije oštrog ugla u pravouglom trouglu imamo sledeće definicije:

1. Sinus ugla je odnos suprotne katete prema hipotenuzi i to: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$

2. Kosinus ugla je odnos nalegle katete prema hipotenuzi i to: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$

3. Tangens ugla je odnos suprotne katete prema naleglој kateti i to: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$

4. Kotangens ugla je odnos nalegle katete prema suprotnoj kateti i to: $\cot \alpha = \frac{b}{a}$, $\cot \beta = \frac{a}{b}$

5. Sekans ugla je odnos hipotenuze prema naleglоj kateti i to: $\sec \alpha = \frac{c}{b}$, $\sec \beta = \frac{c}{a}$

6. Kosekans ugla je odnos hipotenuze prema suprotnoj kateti i to: $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$, $\operatorname{cosec} \beta = \frac{c}{b}$

Odnosi strana pravouglog trougla ne menjaju se ako se ugao ne menja, a strane se menjaju. Sve ove posmatrane funkcije su neimenovani brojevi. Katete su uvek manje od hipotenuze, pa sinus ugla i cosinus ugla ne mogu biti brojevi veći od jedan, secans ugla i cosecans ugla nisu manji od jedan, tangens ugla i kotanges ugla mogu biti veći, manji ili jednaki jedinici.

U pravouglom trouglu ABC ugao $\beta = 90^\circ - \alpha$. Iz toga sledi:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \cot\alpha, \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\sec(90^\circ - \alpha) = \frac{c}{a} = \operatorname{cosec}\alpha, \quad \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \frac{c}{b} = \sec\alpha$$

Kad se dva ugla dopunjuju do 90°, onda su funkcije jednoga ugla (sinus, tangens, sekans) jednake kofunkcijama (kosinus, kotangens kosekans) drugoga ugla.

Primer. 1) Dat je pravougli trougao čije su kateta $a = 3$ cm, $b = 4$ cm. Izračunati vrednosti svih trigonometrijskih funkcija uglova.

Rešenje. Po Pitagorinoj teoremi je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ cm}$$

Iz definicije trigonometrijskih funkcija dobijamo

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$

$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{cotg}\beta = \frac{3}{4}$,

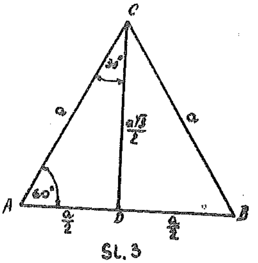
$\sec\alpha = \frac{5}{4}$, $\sec\beta = \frac{5}{3}$

$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$, $\operatorname{cosec}\beta = \frac{5}{4}$, što je jasno sa slike 2.

2. Trigonometrijske funkcije uglova od 30°, 45° i 60°

Radi izračunavanja trigonometriskih funkcija ugla od 30° i ugla od 60° treba posmatrati ravnostrani trougao ABC(slika 3). Spustimo jednu njegovu visinu. Tako dobijamo dva pravougla trougla ACD i BCD. Iz trougla ADC imamo:

$$a)\ \sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Sl. 3

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{otg} 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) $$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

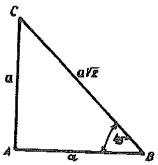
Posmatranjem trigonometriskih funkcija uglova, tj. njihovih vrednosti vidimo da je:

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg} 30^\circ$,
$\operatorname{cotg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ$, $\sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ$, $\operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ$

Za izračunavanje trigonometriskih funkcija ugla od 45° posmatrajmo ravnokrako pravougli trougao ABC, kod koga su oštri uglovi po 45°. Iz trougla ABC, (slika 4) sledi:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



SL. 4

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{cotg} 45^{\circ} = \frac{a}{a} = 1$$

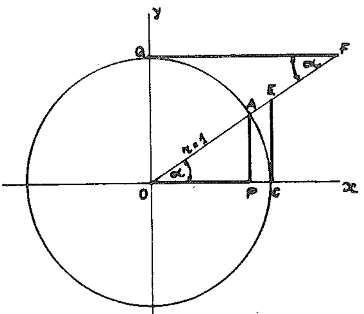
$$\sec 45^{\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 45^{\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

3. <u>Trigonometrijski krug</u>

Krug sa centrom u koordinatnom početku pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema X o Y i poluprečnika 1 naziva se <u>trigonometrijski krug</u>.

Uočimo tačku A na kružnoj liniji, slika 5. Ugao izmedju pozitivnog smera apscisne ose OX i poluprečnika povučenog u tački A neka je ugao α. Neka je CE tangenta kruga povučena u njegovoj tački C, a QF tangenta kruga povučena u njegovoj tački Q. Tada je:



SL.5

$$\sin\alpha = \frac{PA}{OA} = \frac{PA}{1} = PA\,;$$

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OA} = \frac{OP}{1} = OP.$$

Iz sličnosti trouglova sa slike 5, OAP, OEC i OFQ imamo:

$$\frac{PA}{OP} = \frac{CE}{OC}; \qquad \frac{OA}{OP} = \frac{OE}{OC};$$

$$\frac{OP}{PA} = \frac{QF}{OQ} \quad \text{i} \quad \frac{OA}{PA} = \frac{OF}{OQ}.$$ Iz ovih odnosa sledi:

1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{PA}{OP} = \frac{CE}{OC} = \frac{CE}{1} = CE;$

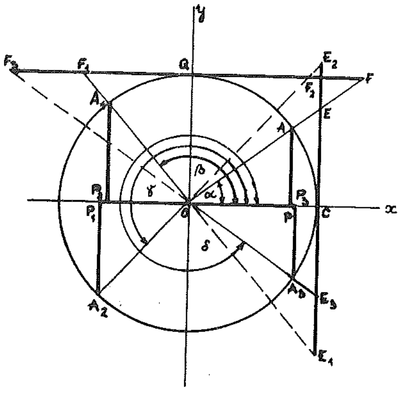
2. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{OP}{PA} = \frac{QF}{OQ} = \frac{QF}{1} = QF\,;$

3. $\sec\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{1} = OE$ i

4. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{OA}{AP} = \frac{OF}{OQ} = \frac{OF}{1} = OF$

Kao što vidimo, ordinata tačke A na trigonometrijskom krugu je sinus ugla α, apscisa tačke A istoga kruga je kosinus ugla α. Tangens ugla α je dužina tangente trigonometrijskog kruga od njene tačke C do tačke E, kao preseka sa produžetkom poluprečnika OA. Kotanges ugla α je dužina tangente istoga kruga od njene tačke Q do tačke F, preseka sa produžetkom poluprečnika OA.

Na taj način mogu se definisati trigonometrijske funkcije tupog ugla β u drugom kvadrantu, tupo - ispupčenog ugla γ u trećem kvadrantu i najzad oštroispupčenog ugla δ u četvrtom kvadrantu. Njihove vrednosti prikazane su na slici 6.



Sl.6

1. $\sin\alpha = PA$

   $\cos\alpha = OP$

   $tg\,\alpha = CE$

   $ctg\,\alpha = QF$

2. $\sin\beta = P_2A_1$

   $\cos\beta = OP_2$

   $tg\,\beta = CE_1$

   $ctg\,\beta = QF_1$

3. $\sin\gamma = P_1A_2$

   $\cos\gamma = OP_1$

   $tg\,\gamma = CE_2$

4. $\sin\delta = P_3A_3$

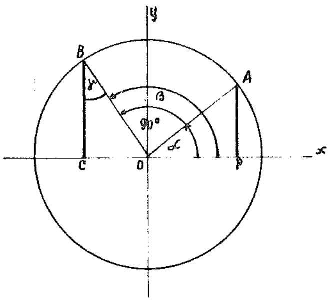
   $\cos\delta = OP_3$

   $tg\,\delta = CE_3$

$\cot g\, \gamma = QF_2$ $\qquad\qquad$ $\cot g\, \delta = QF_3$

4. Svodjenje trigonometrijskih funkcija na oštar ugao.

Posmatrajmo sliku 7 . U drugom kvadrantu je tup ugao β . Njegove se trigonometrijske funkcije mogu izraziti pomoću oštrog ugla α iz prvog kvadranta. Posmatramo trouglove OBC i OAP. Oni su podudarni jer je $OA=OB=1$; $\gamma = \alpha$ kao uglovi sa normalnim kracima. Iz toga sledi: $CB = OP$ i $OC = AP$, pa je



SL. 7

$\sin\beta = \sin(90^0+\alpha) = CB = OP =$
$= \cos\alpha$; $\qquad \cos\beta = \cos(90^0+\alpha) =$
$= OC = AP = -\sin\alpha$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90^0+\alpha) = \frac{\sin(90^0+\alpha)}{\cos(90^0+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot g\,\alpha$$

$$\cot g\,\beta = \cot g\,(90^0+\alpha) = \frac{\cos(90^0+\alpha)}{\sin(90^0+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

Pomoću ovih obrazaca, trigonometriske funkcije tupih uglova pretvaramo u trigonometriske funkcije oštrih uglova.

Primeri:

1) $\sin 125^0 = \sin(90^0 + 35^0) = \cos 35^0$

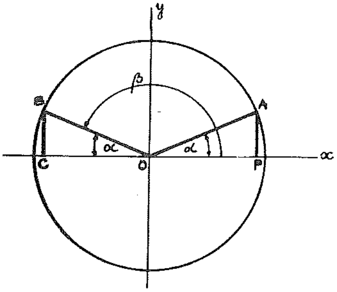
2) $\cos 155^0 = \cos(90^0 + 65^0) = -\sin 65^0$

3) $\operatorname{tg} 137^0 = \operatorname{tg}(90^0 + 47^0) = -\cot g\, 47^0$

4) $\cot g\, 128^0\, 17'\, 36'' = \cot g(90^0+38^0 17' 36'') =$

$= -\operatorname{tg} 38^0 17' 36''$.

Na sličan način može se pokazati da kada od 180^0 oduzmemo oštar ugao α dobijamo za tupe uglove iste obrasce. Na sl. 8 su dva podudarna trougla OBC i OAP. Iz podudarnosti sledi: $CB = PA$ i $OC = PO$. Stoga je:



Sl.8

$$\sin\beta = \sin(180^0-\alpha) = CB = PA = \sin\alpha,$$

$$\cos\beta = \cos(180^0-\alpha) = OC = PO = -\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^0-\alpha) = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}(180^0-\alpha) = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha,$$

Primeri:

1) $\sin 140^0 = \sin(180^0-40^0) = \sin 40^0$

2) $\cos 157^0 = \cos(180^0-23^0) = -\cos 23^0$

3) $\operatorname{tg} 150^0 = \operatorname{tg}(180^0-30^0) = -\operatorname{tg} 30^0$

4) $\operatorname{cotg} 175^0 = \operatorname{cotg}(180^0-5^0) = -\operatorname{cotg} 5^0$

Uglovi koji se nalaze u trećem kvadrantu su tupoispupčeni. Oni se mogu prikazati kao zbir ugla od 180^0 i jednog oštrog ugla. To prikazuje slika 9. Iz podudarnosti trouglova OBC i OAP izlazi da je $CB = AP$ i $OC = PO$, pa je

$$\sin\beta = \sin(180^0+\alpha) = BC = AP = -\sin\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(180^0+\alpha) = OC = PO = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^0+\alpha) = \frac{\sin(180^0+\alpha)}{\cos(180^0+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}(180^0+\alpha) = \frac{\cos(180^0+\alpha)}{\sin(180^0+\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$$

Pomoću ovih obrazaca funkcije tupoispupčenih uglova pretvaramo u funkcije oštrih uglova.

Primeri:

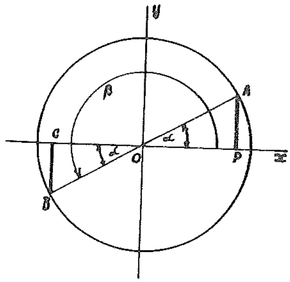
1) $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$

2) $\cos 245^\circ = \cos(180^\circ + 65^\circ) = -\cos 65^\circ$

3) $\mathrm{tg}\ 235^\circ = \mathrm{tg}\ (180^\circ + 55^\circ) = \mathrm{tg}\ 55^\circ$

4) $\mathrm{cotg}\ 193^\circ = \mathrm{cotg}(180^\circ + 13^\circ) = \mathrm{cotg}\ 13^\circ$

Isti obrasci se mogu dobiti ako tupoispupčene uglove predstavimo kao razliku ugla od 270° i odgovarajućeg oštrog ugla. Može se naći odnos funkcija dva ugla koji se dopunjuju do 360°. Iz podudarnosti trouglova OAP i OBP sl. 10 izlazi da je BP=AP, pa je:



SL.9

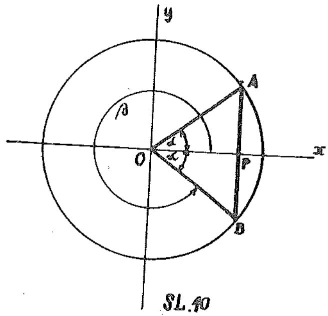
$\sin\beta = \sin(360^\circ - \alpha) = PB = AP = -\sin\alpha$

$\cos\beta = \cos(360^\circ - \alpha) = OP = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}(360 - \alpha) = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{cotg}\,\beta = \mathrm{cotg}(360 - \alpha) = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} =$

$= -\mathrm{cotg}\,\alpha$



SL.10

Pomoću ovih obrazaca funkcije oštroispupčenih uglova pretvaramo u funkcije oštrih uglova.

Primeri:

1) $\sin 350^\circ = \sin(360^\circ - 10^\circ) = -\sin 10^\circ$

2) $\cos 280^\circ = \cos(360^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$

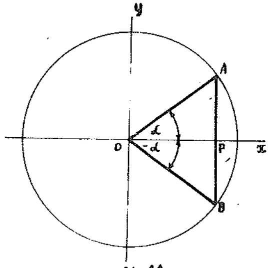
3) $\mathrm{tg}\ 320^\circ = \mathrm{tg}\ (360^\circ - 40^\circ) = -\mathrm{tg}\ 40^\circ$

4) $\mathrm{cotg}\ 326^\circ = \mathrm{cotg}(360^\circ - 34^\circ) = -\mathrm{cotg}\ 34^\circ$

Oštroispupčene uglove možemo prikazati kao zbir ugla od 270° i oštrog ugla α. Obrasci tako dobijeni isti su sa predhodnim obrascima.

5. Trigonometrijske funkcije negativnog ugla

Tačka se kreće po kružnoj periferiji u pozitivnom smislu, ako je njeno kretanje suprotno kretanju kazaljke na satu, a u negativnom smislu, ako je njeno kretanje zajedno sa kretanjem kazaljke na satu. Na isti način kretanjem utvrdjenog zraka u jednoj tački postaju pozitivni i negativni uglovi. Posmatrajmo sliku 11. Iz podudarnosti trouglova OAP i OBP je: BP = PA. Stoga je:



SL.11

$$\sin(-\alpha) = PB = AP = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = OP = \cos\alpha$$

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\,\alpha$$

$$cotg(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -cotg\,\alpha$$

Primeri:

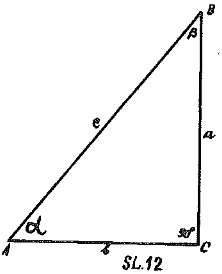
1) $\sin(-40^\circ) = -\sin 40^\circ$

2) $\cos(-50^\circ) = \cos 50^\circ$

3) $tg(-32^\circ) = -tg\ 32^\circ$

4) $cotg(-56^\circ) = -cotg\ 56^\circ$

6. Izražavanje ostalih trigonometrijskih funkcija pomoću jedne od njih



SL.12

Iz pravouglog trougla ABC slika 12 sledi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Dignimo na kvadrat leve i desne strane i saberimo, dobijamo :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

Po Pitagorinoj teoremi je $c^2 = a^2 + b^2$ pa se dobija

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Iz ove veze je:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

Iz istog pravouglog trougla ABC je:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Veze $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ daju:

$a = c\sin\alpha$ i $b = c\cos\alpha$, pa je posle smene

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c\sin\alpha}{c\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \text{a} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{c\cos\alpha}{c\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Lako se nalazi da je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$ ili $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \text{ ili } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}},$$

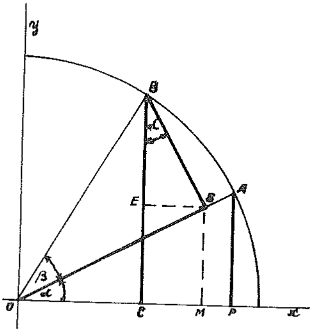
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \text{ ili } \cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \text{ ili } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \text{ ili } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

7. Trigonometrijske funkcije zbira i razlike dva ugla

Neka su uglovi α i β oštri i neka ispunjavaju uslov da je njihov zbir manji od 90°. Posmatramo sliku 13.



SL. 13

$BS \perp OA$, $SM \perp Ox$ i $SE \parallel Ox$. Onda je:

$PA = \sin\alpha$, $OP = \cos\alpha$, $BS = \sin\beta$, i $OS = \cos\beta$.

$CB = \sin(\alpha+\beta)$; $OC = \cos(\alpha+\beta)$.

Iz ovoga sledi:

1. $\sin(\alpha+\beta) = CB = CE + EB = MS + EB$;

2. $\cos(\alpha+\beta) = OC = OM - CM = OM - ES$.

Za odredjivanje $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$ treba naći vrednosti veličina: MS, EB, OM i ES. Iz trouglova OMS i BES imamo:

a) $\frac{MS}{OS} = \sin\alpha$, $\quad MS = \sin\alpha\, OS = \sin\alpha \cos\beta$

b) $\frac{OM}{OS} = \cos\alpha$, $\quad OM = \cos\alpha\, OS = \cos\alpha \cos\beta$

c) $\frac{EB}{BS} = \cos\alpha$, $\quad EB = \cos\alpha\, BS = \cos\alpha \sin\beta$

d) $\frac{ES}{BS} = \sin\alpha$, $\quad ES = \sin\alpha\, BS = \sin\alpha \sin\beta$

Zamenom ovih vrednosti u jednačinama 1. i 2. dobijamo:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

Obrasce za $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ i $\mathrm{cotg}(\alpha+\beta)$ dobijamo na sledeći način:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

Ako podelimo brojitelj i imenitelj ovog razlomka sa $\cos\alpha \cos\beta$ dobijamo:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha}$$

Obrasci za funkcije zbira dva ugla važe za ma kakve uglove, a ne samo za uslov $\alpha + \beta < 90^\circ$. Trigonometrijske funkcije razlike dva ugla lako se dobijaju iz obrazaca za zbir dva ugla, ako se svuda ugao β zameni uglom $-\beta$. Na taj način dobijamo:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \text{i} \quad \operatorname{cotg}(\alpha-\beta) =$$

$$= \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}$$

Primeri:

1) Naći sin 75° i cos 75°, kad se zna da je $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \sin 45^\circ . \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2) Naći sin 105° i cos 105°.

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) =$$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ -$$

$$- \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Iz priloženih primera se vidi kako se sve trigonometrijske funkcije mogu lako izračunati, ako se uglovi podesno rastave na zbir ili razliku uglova čiji su sin, cos, tg i cotg poznati.

8. Trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla i polovine ugla

U predhodnim obrascima smo videli kako se izračunavaju sin, cos, tg i cotg zbira i razlike dva ugla. Ponovimo te obrazce:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \text{i}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha}$$

Kada se u ovim obrascima stavi $\beta = \alpha$ dobija se:

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha =$$
$$= 2 \sin\alpha \cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{i}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\alpha) = \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha} =$$

$$= \frac{\text{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \,\text{cotg}\, \alpha}$$

Iz ovih obrazaca mogu se naći funkcije dvostrukog ugla, kad su poznate funkcije prostog ugla.

Primer. Naći funkciju ugla 2α kada je $\sin = \frac{3}{5}$, a ugao α oštar.

Rešenje. Upotrebom osnovnih obrazaca najpre nalazimo:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \quad \text{i} \quad \text{cotg}\, \alpha = \frac{1}{\text{tg}} = \frac{4}{3}.$$ Zamenom ovih vrednosti u obrascima za funkcije dvostrukog ugla dobijamo:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25};$$

$$\text{tg}\, 2\alpha = \frac{2 \,\text{tg}\, \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = 3\frac{3}{7} \quad \text{i}$$

$$\text{cotg}\, 2\alpha = \frac{\text{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \,\text{cotg}^2 \alpha} = \frac{\frac{16}{9} - 1}{2 - \frac{4}{9}} = \frac{7}{24}$$

Po prvom osnovnom obrazcu imamo:

$$1 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

a prema drugom obrascu iz funkcije dvostrukih uglova imamo:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Sabiranjem ovih dveju jednačina dobijamo:

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \text{ a odavde } \cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

dok oduzimanje druge od prve daje:

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ a odavde } \sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \text{ tada je}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \text{i}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Pred korenom uzimamo ili samo pozitivan ili samo negativan znak. To jedino zavisi od ugla $\frac{\alpha}{2}$. Ako je $\frac{\alpha}{2}$ u I kvadrantu onda uzimamo samo pozitivne znakove; ako je ugao $\frac{\alpha}{2}$ u II kvadrantu, tada je $\sin\frac{\alpha}{2}$ pozitivan, a za ostale funkcije znak je negativan; ako je $\frac{\alpha}{2}$ u III kvadrantu onda se za $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$ uzima negativan, a za $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ pozitivan znak; ako je ugao $\frac{\alpha}{2}$ u IV kvadrantu, onda se uzima za $\cos\frac{\alpha}{2}$ pozitivan a za ostale funkcije negativan znak.

Primeri:

1) Kad je $\cos\alpha = 0{,}4$, naći $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ sa 3 decimala. Ugao α je oštar.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = +\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = +\sqrt{\frac{1-0{,}4}{1+0{,}4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}6}{1{,}4}} = \sqrt{0{,}428}$$

2) Kad je $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, naći $\sin 15^\circ$ i $\cos 15^\circ$.

Znamo da je $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Iz obrasca $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

lako računamo $\sin 15^\circ = +\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$$\cos 15^\circ = +\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

Prema uslovu zadatka $\cos 30^\circ = \sqrt{1-\sin^2 30^\circ} = \sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} =$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9. Pretvaranje zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod

Pretpostavimo da je $\sphericalangle a + \sphericalangle b = \alpha$ i $\sphericalangle a - \sphericalangle b = \beta$. Sabiranjem i oduzimanjem ovih dveju jednačina dobijamo:

$a = \frac{\alpha+\beta}{2}$ i $b = \frac{\alpha-\beta}{2}$; tada je:

1) $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(a+b) + \sin(a-b) =$

$\sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b -$

$- \cos a \sin b = 2 \sin a \cos b = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Primer:

$\sin 60^\circ + \sin 10^\circ = 2 \sin 35^\circ \cos 25^\circ$

2) $\sin\alpha - \sin\beta = \sin(a+b) - \sin(a-b) =$

$= \sin a \cos b + \cos a \sin b - \sin a \cos b +$

$+ \cos a \sin b = a \cos a \sin b =$

$= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Primer:

$$\sin 70^\circ - \sin 40^\circ = 2\cos 55^\circ \sin 15^\circ.$$

3) $\cos\alpha + \cos\beta = \cos(a+b) + \cos(a-b) =$

$\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b +$

$\sin a \sin b = 2\cos a \cos b =$

$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Primer:

$$\cos 80^\circ + \cos 20^\circ = 2\cos 50^\circ \cos 30^\circ$$

4) $\cos\alpha - \cos\beta = \cos(a+b) - \cos(a-b) =$

$\cos a \cos b - \sin a \sin b - \cos a \cos b -$

$\sin a \sin b = -2\sin a \sin b =$

$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Primer:

$\cos 80^\circ - \cos 120^\circ = -2\sin 100^\circ \sin(-40^\circ) =$

$2\cos 10^\circ \sin 40^\circ$, zato što je $\sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) =$

$= \cos 10^\circ$,

a $\sin(-40^\circ) = -\sin 40^\circ$.

5) $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

Primeri:

1) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 30^\circ \cos 20^\circ}$

2) $\operatorname{tg} 47^\circ - \operatorname{tg} 17^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 47^\circ \cos 17^\circ}$

6) $\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \pm \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} =$

$$= \frac{\sin\beta\cos\alpha \pm \cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Primeri:

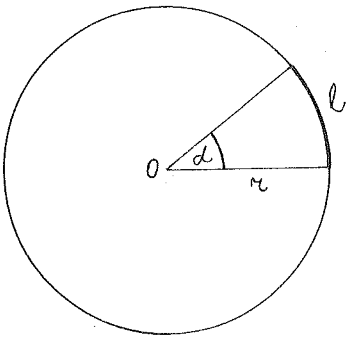
1) $\operatorname{cotg} 20^\circ + \operatorname{cotg} 42^\circ = \dfrac{\sin 62^\circ}{\sin 20^\circ \sin 42^\circ}$.

2) $\operatorname{cotg} 40^\circ - \operatorname{cotg} 75^\circ = \dfrac{\sin 35^\circ}{\sin 40^\circ \sin 75^\circ}$

10. Grafičko predstavljanje trigonometrijskih funkcija

Ugao se u matematici češće izražava lučnom merom - radijanom. Kod kruga datog poluprečnika r veličina centralnog ugla α zavisi samo od veličine odgovarajućeg luka l . Zato se ugao α može definisati kao odnos luka i poluprečnika (slika S), tj.

$$\alpha = \frac{l}{r}$$



Sl. S

Ako je poluprečnik kruga $r=1$, tada je ugao α jednak luku l . Pri ovome uglu od 360° odgovara obim jediničnog kruga od 2π , uglu od 180° odgovara poluobim jediničnog kruga od π , itd. Znači uglu od α° odgovara luk jediničnog kruga od

$$\frac{\alpha^\circ \pi}{180^\circ} \qquad \ldots (a)$$

Obrascem (a), kao delovima poluobima jediničnog kruga izražavaju se vrednosti ugla α u takozvanoj <u>lučnoj meri</u>. Lučna mera je neimenovan broj.

Obrnuto, ako je dat ugao α u lučnoj meri, pretvorićemo ga u stepene ako njegovu vrednost u lučnoj meri pomnožimo sa $\frac{180^\circ}{\pi}$. Lučnoj meri čija je vrednost 1 odgovara ugao od $\frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',8$ i naziva se <u>radijan.</u> To je ugao čiji je luk jednak poluprečniku kruga.

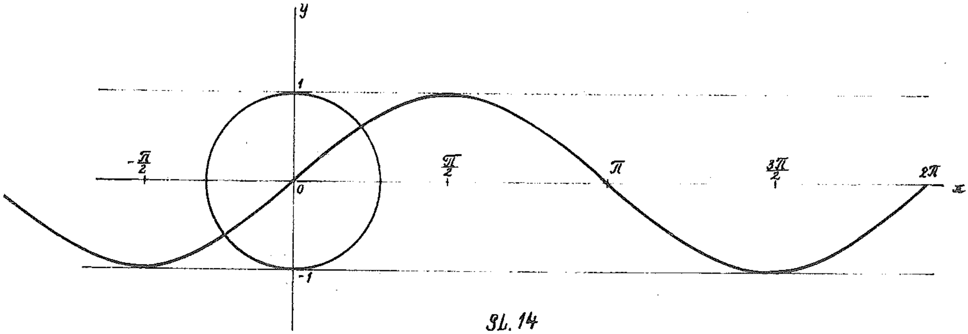
Pre nego što grafički predstavimo trigonometrijske funkcije podsetimo se brojnih vrednosti trigonometrijskih funkcija uglova od 0°, 90°, 180°, 270° i 360°. Te vrednosti date su u tabeli 1., a lako se dobijaju sa trigonometrijskog kruga slika 6.

Tabela 1. (u zagradi su uglovi izraženi u radijanima)

α	$0^\circ(0)$	$90^\circ(\frac{\pi}{2})$	$180^\circ(\pi)$	$270^\circ(\frac{3\pi}{2})$	$360^\circ(2\pi)$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0	$\pm\infty$

Trigonometrijske funkcije $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$ i $y=\mathrm{cotg}\,x$, grafički su predstavljene na sledeći način u pravouglom kordinatnom sistemu. Za funkciju $y=\sin x$, periferiju trigonometrijskog kruga prenosimo kao pravu liniju na apscisnu osu, a ordinate koje odgovaraju tačkama 0, 90°, 180° itd. dobijamo kao brojne vrednosti funkcije $y = \sin x$, za odgovarajuće vrednosti uglova iz tabele 1.

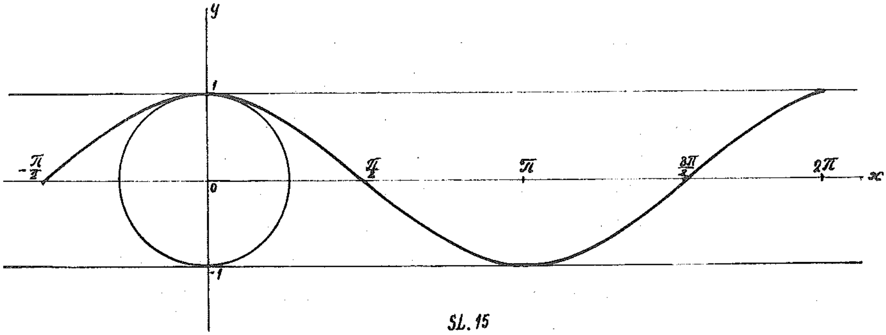
Kako se periferija trigonometrijskog kruga može prenositi, na apscisnu osu u pozitivnom i u negativnom smeru koliko se puta hoće, to je kriva linija funkcije $y=\sin x$ neograničena.



Sl. 14

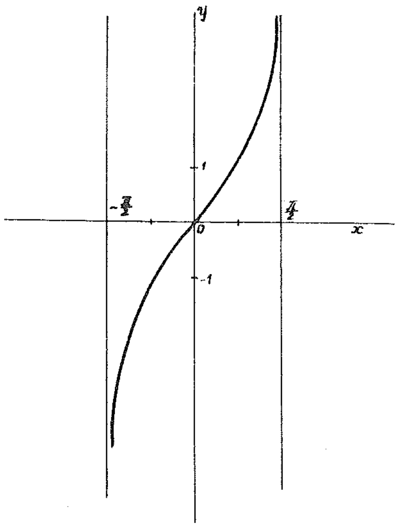
Kažemo da se ona periodično ponavlja sa periodom od 2π.

Na isti način se grafički predstavlja funkcija $y=\cos x$. Grafik funkcije je isti kao i funkcije $y=\sin x$, samo što je pomeren ulevo za $\frac{\pi}{2}$. Perioda funkcije $y=\cos x$ je takodje 2π. Vidi sliku 15.

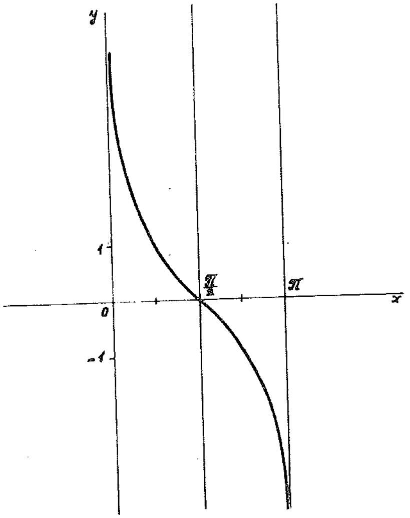


Sl. 15

Uzimajući u obzir vrednosti trigonometrijskih funkcija $y=\text{tg}\ x$ i $y=\text{cotg}\ x$ iz tabele 1 za uglove od 0°, 90°, 180°, 270° i 360° dobijamo grafik na slikama 16 i 17. Periodično ponavljanje kod funkcije $y = \text{tg}\ x$ i $y = \text{cotg}\ x$ je π.



SL. 16



SL. 17

Rešavanje prostijih trigonometrijskih jednačina

Jednačine u kojima se nalaze trigonometrijske funkcije nepoznatih uglova, zovu se trigonometrijske jednačine. Ako se u jednačini nalazi samo jedan nepoznati ugao, onda treba jednačinu tako transformisati, da se u njoj nalazi samo jedna funkcija tog ugla. Ako u jednačini ima više nepoznatih uglova onda treba tako transformisati, da se u njoj nalazi samo jedna funkcija svakog nepoznatog ugla, ili njihovog zbira ili razlike.

Primeri:

1) $2 \sin x = 1$, tj. $\sin x = \frac{1}{2}$, odakle je

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad x_2 = \frac{5\pi}{6},$$

što zbog periodičnosti funkcije $\sin x$ daje:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

Iz ovoga primera vidimo da trigonometrijska jednačina može imati bezbroj rešenja.

2) Rešiti jednačinu $a \sin x + b \cos x = c$

Podelimo jednačinu sa a, dobijamo:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

Sada uvedimo pomoćni ugao α tako da je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, onda je

$$\sin x + \operatorname{tg} \alpha \cos x = \frac{c}{a} \text{, ili}$$

$$\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{a} \cos \alpha,$$

$$\sin (x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

Kako je α poznat ugao, iz ove jednačine može se odrediti vrednost $x + \alpha$, a tako i ugao x.

3) Date su dve jednačine:

$$\text{I} \quad \sin^2 x + \cos^2 y = a$$

$$\text{II} \quad \cos^2 x - \sin^2 y = b$$

Ako u drugoj jednačini $\cos^2 x$ zamenimo sa $1-\sin^2 x$, a $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ dobija se ovaj sistem

$$\text{I} \quad \sin^2 x + \cos^2 y = a$$

$$\text{II} \quad 1 - \sin^2 x - 1 + \cos^2 y = b$$

Sada I i II saberemo i oduzmemo, dobijamo:

$$\text{I} \quad 2 \cos^2 y = a + b$$

$$\text{II} \quad 2 \sin^2 x = a - b$$

rešenja su: iz I i II

$$\cos y = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (a+b)} , \quad \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (a-b)} .$$

XVI
PRIMENA U GEOMETRIJI

1. Prirodne vrednosti trigonometrijskih funkcija

Za četiri osnovne trigonometrijske funkcije: sin, cos, tg i cotg, izračunate su i utabličene vrednosti za uglove 0°–45°, za svakih $10'$ (u nekim tablicama i za svaku minutu).

Skupom utabličenih vrednosti sadržane su ujedno i funkcije uglova većih od 45°, naime:

za funkcije komplementnih uglova važe relacije

$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}(90^\circ - \alpha)$,

$\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$, (npr., $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$);

funkcije uglova većih od 90° uvek mogu da se svedu na funkcije oštrih uglova (npr., $\mathrm{tg}\,160^\circ = -\,\mathrm{tg}\,20^\circ$; $\cos 200^\circ = -\cos 20^\circ$).

Izvod iz tablice (po O. Schlömilchu i J. Majcenu):

G.	M.	Sinus	D.1'	Tang	D.1'	Cotg	D.1'	Cosin	D.1'	/	0
25	0	o,42 262		o,46 631		2,1445		o,9o 631		0	65
			26,3		35,5		16,2		12,3		
	10	o,42 525		o,46 985		2,1283		o,9o 5o7		5o	
	.									.	
	.									.	
27	.									.	
	.									.	
	2o	o,45 917		o,51 688		1,9347		o,88 835		4o	
			25,8		36,9		13,7		13,4		
	3o	o,46 175		o,52 o57		1,921o		o,88 7o1		3o	
	.									.	
	.									.	
										.	62
29	.										
	.									.	
	2o	o,48 989		o,56 194		1,7796		o,87 178		4o	
			25,3		38,3		12,1		14,3		
	3o	o,49 242		o,56 577		1,7675		o,87 o36		3o	
										.	
										.	(6o)
0	/	Cosin	D.1'	Cotg	D.1'	Tang	D.1'	Sinus	D.1'	M.	G.

(U originalu su neke cifre poslednje decimale podvučene, no o tome ne treba da vodimo računa).

Argumentima leve kolone (stepenima – G. i minutima – M.) odgovaraju funkcije navedene u gornjem zaglavlju, a argumentima desne kolone – u donjem zaglavlju. U kolonama pod D.1' date su minutne promene za svaku funkciju posebno, u jedinicama poslednje decimale, radi interpolacije za uglove i funkcije unutar desetminutnog razmaka.

Primeri:

1) Odrediti sin $27^\circ 20'$.–Argumentu $27^\circ 20'$ u levoj koloni i funkciji Sinus u gornjem zaglavlju pripada broj o,45 917. Dakle,

$$\sin 27^\circ 20' = 0{,}45\ 917 \approx 0{,}46.$$

2) Odrediti cos $62^\circ 40'$. – Argumentu $62^\circ 40'$ u desnoj koloni i funkciji Cosin u donjem zaglavlju pripada broj o,45 917. Dakle,

$$\cos 62^\circ 40' = 0{,}45\ 917 \approx 0{,}46,$$

tj. ista vrednost kao i u prethodnom primeru, jer su dati uglovi komplementni: $27^\circ 20' + 62^\circ 40' = 90^\circ$.

3) Odrediti tg $27^\circ 24' 17''$. – Prvo podelimo $17'' : 60 \approx 0',28$. Minutna promena funkcije Tang u razmaku izmedju $27^\circ 20'$ i $27^\circ 30'$ iznosi: D,1' = 36,9. Za 4'28 promena iznosi $4{,}28 \cdot 36{,}9 \approx 158$ jedinica poslednje decimale. Kako je tg $27^\circ 20' <$ tg $27^\circ 30'$, to za tg $27^\circ 24',28$ važi relacija

$$\mathrm{tg}\ 27^\circ 20' < \mathrm{tg}\ 27^\circ 24',28 < \mathrm{tg}\ 27^\circ 30'.$$

Dakle,

$$\begin{array}{rrl} & 0{,}51\ 688 & \ldots\ldots\ldots\ldots(= \mathrm{tg}\ 27^\circ 20') \\ & \underline{+ \qquad 158} & \ldots\ldots\ldots\ldots(= 4{,}28.\mathrm{D}.1') \\ \mathrm{tg}\ 27^\circ 24' 17'' = & 0{,}51\ 846 & \approx 0{,}52 \end{array}$$

4) Odrediti cotg $60^\circ 37' 27''$. – Prvo podelimo $27'':60 \approx 0'45$. Minutna promena funkcije Cotg u razmaku izmedju $60^\circ 30'$ i $60^\circ 40'$ iznosi: D.1' = 38,3. Za 7',45 promena iznosi $7{,}45 \cdot 38{,}3 \approx 285$ jedinica poslednje decimale. Kako

je cotg $60^\circ 30' >$ cotg $60^\circ 40'$, to za cotg $60^\circ 37',45$ važi relacija:

$$\text{cotg } 60^\circ 30' > \text{cotg } 60^\circ 37',45 > \text{cotg } 60^\circ 40'.$$

Dakle,

$$\begin{array}{rcl} & 0,56\ 577 \ldots\ldots\ldots & (= \text{cotg } 60^\circ 30') \\ & \underline{-\qquad 285} \ldots\ldots\ldots & (= 7,45 \cdot \text{D}.1') \\ \text{cotg } 60^\circ 37'27'' = & 0,56\ 292 \approx 0,56 & \end{array}$$

Medjutim, kako je $37',45$ bliže ka $40'$ nego ka $30'$ ($40' - 37',45 = 2',55$), račun može da se izvede i ovako:

$$\begin{array}{rcl} & 0,56\ 194 \ldots\ldots\ldots & (= \text{cotg } 60^\circ 40') \\ & \underline{+\qquad 98} \ldots\ldots\ldots & (= 2,55 \cdot \text{D}.1') \\ \text{cotg } 60^\circ 37'27'' = & 0,56\ 292. & \end{array}$$

5) Odrediti cotg $25^\circ 8'46''$. – Prvo podelimo $46'':60 \approx 0',77$. Minutna promena funkcije cotg u razmaku izmedju $25^\circ 0'$ i $25^\circ 10'$ iznosi: $\text{D}.1' = 16,2$. Za $8',77$ promena iznosi $8,77 \cdot 16,2 \approx 142$ jedinice poslednje decimale. Kako je cotg $25^\circ 0' >$ cotg $25^\circ 10'$, to za cotg $25^\circ 8',77$ važi relacija

$$\text{cotg} = 25^\circ 0' > \text{cotg } 25^\circ 8',77 > \text{cotg } 25^\circ 10'.$$

Dakle,

$$\begin{array}{rcl} & 2,1445 \ldots\ldots\ldots & (= \text{cotg } 25^\circ 0') \\ & \underline{-\qquad 142} \ldots\ldots\ldots & (= 8,77 \cdot \text{D}.1') \\ \text{Cotg } 25^\circ 8'46'' = & 2,1303 \approx 2,13. & \end{array}$$

Medjutim, kako je $8',77$ bliže ka $10'$ nego ka $0'$ ($10' - 8',77 = 1',23$), račun može da se izvede i ovako:

$$\begin{array}{rcl} & 2,1283 \ldots\ldots\ldots & (= \text{cotg } 25^\circ 10') \\ & \underline{+\qquad 20} \ldots\ldots\ldots & (= 1,23 \cdot \text{D}.1') \\ \text{cotg } 25^\circ 8'46'' = & 2,1303. & \end{array}$$

6) Odrediti ugao α ako je $\sin \alpha = 0,45\ 917$ (zadatak obrnut primeru 1). – U koloni funkcije sinus nalazimo vrednost $0,45\ 917$. Kako se oznaka kolone sinus nalazi u <u>gornjem</u> zaglavlju, funkciji pripada argument <u>leve</u> kolone:

$27^\circ 20'$. Dakle

$\alpha = 27^\circ 20'$.

7) Odrediti ugao β ako je $\cos \beta = 0{,}45\ 917$ (zadatak obrnut primeru 2). – U koloni funkcije cosin nalazimo vrednost o,45 917. Kako se oznaka kolone cosin nalazi u donjem zaglavlju, funkciji pripada argument desne kolone: $62^\circ 40'$. Dakle

$\beta = 62^\circ 40'$.

8) Odrediti ugao γ ako je $\mathrm{tg}\,\gamma = 0{,}51\ 846$ (zadatak obrnut primeru 3). – U koloni tang nalazimo da je vrednost o,51 846 interpolovana izmedju vrednosti o,51 688, kojoj pripada argument $27^\circ 20'$, i vrednosti o,52 o57, kojoj pripada argument $27^\circ 30'$. Minutna promena u tom razmaku iznosi: $D.1' = 36{,}9$.

Relaciji medju funkcijama

$$0{,}51\ 688 < 0{,}51\ 846 < 0{,}52\ 057$$

odgovara relacija pripadajućih argumenata:

$$27^\circ 20' < \gamma < 27^\circ 30'.$$

Razlici date vrednosti funkcije i one susedne u tabličene koja je bliža datoj:

$$\begin{array}{rr} & 0{,}51\ 846 \\ & -\ 0{,}51\ 688 \\ \hline \Delta = & 158 \end{array}$$

odgovara promena argumenta (količnik razlike i minutne promene, $\Delta : D.1'$):

$$158 : 36{,}9 \approx 4{,}28.$$

Dakle,

$$\begin{array}{rr} & 27^\circ 20' \\ & 4',28 \\ \hline \gamma = & 27^\circ 24',28 \end{array}$$

odnosno, kad delove minute izrazimo sekundama,

$0',28 \cdot 60 = 16''8 \approx 17''$,

$\gamma = 27^{\circ}24'17''$.

2. Logaritmi trigonometrijskih funkcija

Kao i za prirodne vrednosti trigonometrijskih funkcija, izračunati su i utabličeni logaritmi tih vrednosti, i to za svaku minutu. Stoga su u kolonama sa oznakom D.1" date sekundne promene, i to za funkcije log sin i log cos posebne, a za funkcije log tang i log cotg zajedničke.

Utabličenim vrednostima logaritama trigonometrijskih funkcija treba da se oduzme 10. Na primer,

$$\log \sin 37^{\circ}32' = 9,78\,478 - 10 \quad \text{odnosno}$$
$$= 0,78\,478 - 1 \quad \text{ili}$$
$$= \bar{1},78\,478,$$

ili, na primer:

$$\log \text{cotg}\, 37^{\circ}32' = 10,11\,450 - 10, \text{ odnosno}$$
$$= 0,78\,478,$$

ili, na primer:

$$\log \text{tg}\, 0^{\circ}12' = 7,54\,291 - 10, \quad \text{odnosno}$$
$$= 0,54\,291 - 3, \quad \text{ili}$$
$$= \bar{3},54\,291.$$

Inače, način upotrebe ovih tablica istovetan je sa načinom izloženim u primerima upotrebe tablica prirodnih vrednosti.

Primeri:

9) Odrediti log tg $27^{\circ}24'17''$. – Sekundna promena u razmaku izmedju $27^{\circ}24'$ i $27^{\circ}25'$ iznosi: D.1" = 0,52. Za 17" promena iznosi $17 \cdot 0,52 \approx 9$ jedinica poslednje decimale. Kako je log tg $27^{\circ}24'$ < log tg $27^{\circ}25'$, to za funkciju log tg $27^{\circ}24'17''$ važi relacija

$\log \operatorname{tg} 27^{o}24' < \log \operatorname{tg} 27^{o}24'17'' < \log \operatorname{tg} 27^{o}25'$

Dakle,

$$\begin{array}{rl} \bar{1},71\,462 & \ldots\ldots\ldots (= \log \operatorname{tg} 27^{o}24') \\ + \qquad\qquad 9 & \ldots\ldots\ldots (= 17 \cdot D.1'') \\ \hline \log \operatorname{tg} 27^{o}24'17'' = \bar{1},71\,471. & \end{array}$$

1o) Odrediti ugao δ ako je $\log \sin \delta = \bar{1},9o\,334$, ili $9,9o\,334 - 1o$. – U koloni log sin (donje zaglavlje) nalazimo da je vrednost $9,9o\,334\ (-1o)$ interpolovana izmedju vrednosti $9,9o\,33o\ (-1o)$, kojoj pripada argument (desne kolone) $53^{o}1o'$, i vrednosti $9,9o\,339\ (-1o)$, kojoj pripada argument $53^{o}11'$. Sekundna promena u tom razmaku iznosi: $D.1'' = o,16$.

Relaciji medju funkcijama

$$9,9o\,33o < 9,9o\,334 < 9,9o\,339$$

odgovara relacija pripadajućih argumenata:

$$53^{o}1o' < \delta < 53^{o}11'.$$

Razlici date vrednosti funkcije i one susedne utabličene koja je bliža datoj:

$$\begin{array}{r} 9,9o\,334 \\ -\ 9,9o\,33o \\ \hline \Delta = \qquad\qquad 4 \end{array}$$

odgovara promena argumenta (količnik razlike i sekundne promene, $\Delta : D.1''$).

$$4 : o,16 = 25$$

Dakle,

$$\begin{array}{r} 53^{o}1o' \\ +\qquad 25'' \\ \hline \delta = 53^{o}1o'25''. \end{array}$$

3. Rešavanje trougla

Da bi trougao bio odredjen, potrebno je da su poznata tri elementa, od kojih bar jedna stranica.

Ostala tri elementa mogu da se odrede ili konstrukcijom ili računom.

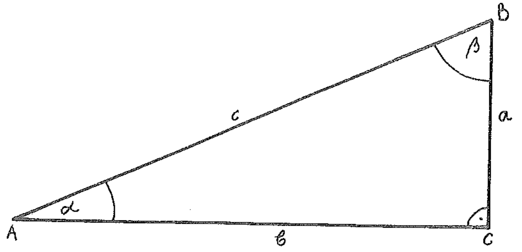
Rešavanje trougla, to jest izračunavanje nepoznatih elemenata trougla pomoću podataka o datim elementima, izvodi se primenom trigonometrijskih funkcija i tablica.

a) Pravougli trougao

Termin "pravougli" sadrži već jedan poznati element - pravi ugao. Prema tome, za rešavanje pravouglog trougla treba da su zadana još samo dva elementa: stranica i ugao, ili dve stranice.

Primeri:

Skica pravouglog trougla za primer 1 - 9.



1) Rešiti pravougli trougao kad su mu poznate katete $a = 40$ i $b = 120$.

Hipotenuzu izračunavamo pomoću Pitagorine teoreme:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dakle,

$$c = \sqrt{40^2+120^2} = \sqrt{1\ 600+14\ 400} = \sqrt{16\ 000} = \sqrt{1\ 600 \cdot 10} = 40\sqrt{10}.$$

U tablici kvadratnih korena brojeva 1–100 nalazimo da je $\sqrt{10} = 3,16\,228$. Prema tome,

$$c \approx 126,49 \ .$$

Ugao α odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \ .$$

Dakle,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} = 0,33\,333.$$

U tablici prirodnih vrednosti trigonometrijskih funkcija nalazimo da datoj vrednosti funkcije odgovara argument

$$\alpha = 18^{\circ}26'6'' \approx 18^{\circ}26'.$$

Ugao β komplementan je uglu α $(\beta = 90^{\circ} - \alpha)$:

$$\beta = 71^{\circ}33'54'' \approx 71^{\circ}34'.$$

2) Rešiti pravougli trougao ako su poznate kateta $a = 40$ i hipotenuza $c = 126,49$.

Ugao α odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Dakle,

$$\sin\alpha = \frac{40}{126,49} = 0,31\,623.$$

U tablici prirodnih vrednosti trigonometrijskih funkcija nalazimo da datoj funkciji odgovara argument

$$\alpha = 18^{\circ}26'7'' \approx 18^{\circ}26'.$$

Ugao β komplementan je uglu α :

$$\beta = 71^{\circ}33'53'' \approx 71^{\circ}34' \ .$$

Katetu b mogli bismo da odredimo pomoću Pitagorine teoreme

$$b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

ali s obzirom da je hipotenuza data višecifrenim brojem, katetu b odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{cotg} \alpha,$$

odakle je

$$b = a \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$$

U tablici nalazimo da je

$$\operatorname{cotg} 18^{o}26'7'' = \operatorname{cotg} 18^{o}26',117 = 3,oo\ ooo = 3.$$

Dakle,

$$b = a \cdot 3,$$

$$b = 4o \cdot 3 = 12o.$$

3) Rešiti pravougli trougao ako je poznata hipotenuza $c = 126,49$ i jedan oštar ugao, recimo $\alpha = 18^{o}26'7''$.

Ugao $\beta = 9o^{o} - \alpha = 9o^{o} - 18^{o}26'7'' = 71^{o}33'53''$.

Katetu a odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha,$$

odakle je,

$$a = c \cdot \sin \alpha.$$

Kako je $\sin \alpha = \sin 18^{o}26'7'' = \sin 18^{o}26',117 = o,31\ 623$, to je

$$a = 126,49 \cdot o,31623,$$

tj.

$$a = 4o.$$

Katetu b možemo da odredimo pomoću ugla α i izračunate katete a. Naime,

$$\frac{b}{a} = \operatorname{cotg} \alpha,$$

odakle je

$$b = a \cdot \cot g \alpha .$$

Kako je $\cot g \alpha = 3$, to je kateta

$$b = 4o \cdot 3 = 12o.$$

4) Rešiti pravougli trougao ako je poznata jedna kateta, recimo $b = 12o$, i jedan oštar ugao, recimo $\alpha = 18^o 26' 6''$.

Drugu katetu odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\frac{a}{b} = tg \alpha ,$$

odakle je

$$a = b \cdot tg \alpha .$$

Kako je $tg \alpha = o,33\ 333$, to je

$$a = 12o \cdot o,33\ 333 = 4o.$$

Hipotenuzu c odredićemo pomoću Pitagorine teoreme (v. pr. 1):

$$c = \sqrt{12o^2 + 4o^2} = 126,49.$$

5) Vertikalni štap (a) dužine 4o cm baca senku (b) dugu 12o cm. Odrediti visinu Sunca (α = ugao pod kojim Sunčevi zraci padaju na horizontsku ravan).

<u>Odgovor:</u> $\alpha = 18^o 26' 6''$ (vidi primer 1).

6) Kretanjem po strmoj ravni (c) dužine 126,49 m, telo dostigne visinu (a) 4o m iznad osnove (AC) strme ravni. Odrediti ugao nagiba (α) strme ravni.

<u>Odgovor:</u> $\alpha = 18^o 26' 7''$ (vidi primer 2).

7) Nagibni ugao strme ravni $\alpha = 18^o 26' 7''$. Dužina strme ravni (c) iznosi 1264,9 m. Za krajnju tačku (B) uspona odrediti visinu (a) nad osnovom (AC) strme ravni.

<u>Odgovor:</u> a = 4oo m (vidi primer 3).

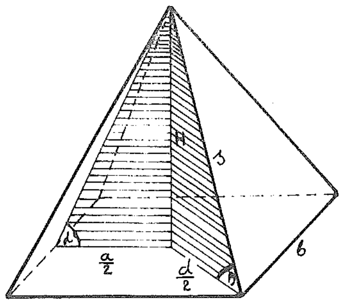
8) Avion (B) osmotren je iz mesta A pod elevacionim uglom (merenim od horizontske ravni posmatrača naviše) $\alpha = 18^{\circ}26'6''$, a u trenutku kad se avion nalazio vertikalno iznad mesta C, udaljenog od mesta A za 12 km. Odrediti visinu (a) na kojoj leti avion.

<u>Odgovor:</u> a = 4ooo m (v.pr. 4).

9) Iz aviona (B) koji leti vertikalno iznad mesta C, osmotren je, sa visine (a) od 4 ooo m, aerodrom A pod depresionim uglom (merenim od horizontske ravni posmatrača naniže) $\alpha = 18^{\circ}26'6''$. Odrediti udaljenost (b) aerodroma A od mesta C.

<u>Odgovor:</u> $b = a \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 12$ km. Na skici, ugao α komplementan je uglu β. (v.pr. 4. i 3.).

Skica za primere 1o–11.



1o) Za četvorostranu piramidu visine H=24 i jednakih bočnih ivica, čija je osnova pravougaonik stranice a = 14 i dijagonale d=2o, odrediti: a) nagibni ugao (α) bočne strane (osnovne ivice b), i b) nagibni ugao (β) bočne ivice (s) – prema ravni osnove piramide.

Rešenje:

(a) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{2H}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{48}{14}$$

Možemo da primenimo i logaritamski račun:

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log 48 - \log 14$$

$$\begin{array}{r} \log 48 = 1{,}68\ 124 \\ -\log 14 = -1{,}14\ 613 \\ \hline \log \operatorname{tg} \alpha = 0{,}53\ 511, \end{array}$$

odnosno,

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 10{,}53\ 511 \qquad (-10).$$
$$\alpha = 73^{\circ}44'23''.$$

(Najbliža tablična vrednost funkciji $\log \operatorname{tg} \alpha$ je 10,53 493, razlika 18 : 0,78 = 23.).

$$\text{(b)} \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{H}{\frac{d}{2}} = \frac{2H}{d}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{48}{20}$$

$$\log \operatorname{tg} \beta = \log 48 - \log 20$$

$$\begin{array}{r} \log 48 = 1{,}68\ 124 \\ -\log 20 = -1{,}30\ 103 \\ \hline \log \operatorname{tg} \beta = 0{,}38\ 021, \end{array}$$

odnosno

$$\log \operatorname{tg} \beta = 10{,}38\ 021 \qquad (-10)$$
$$\beta = 67^{\circ}22'48''.$$

11) Za četvorostranu piramidu jednakih bočnih ivica, $s = 26$, nagnutih prema ravni osnove pod uglom $\beta = 67^{\circ}22',8$, odrediti visinu H.

Rešenje:

$$\frac{H}{s} = \sin \beta,$$

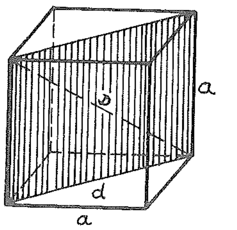
$$H = s \cdot \sin \beta,$$

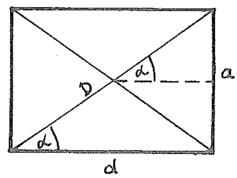
$$H = 26 \cdot \sin 67^{\circ}22',8.$$

$(\sin 67^{\circ}20' = 0{,}92\ 276;\quad 2{,}8 \cdot 19{,}7 \approx 55;$
$26 \cdot \sin 67^{\circ}22',8 = 24{,}00\ 606)$

$H = 24.$

12) Odrediti oštar ugao pod kojim se seku dijagonale kocke.





Dijagonalni presek kocke je pravougaonik osnove $d = a\sqrt{2}$ (dijagonala kvadrata) i visine a (ivica kocke).

Polovinu ugla preseka odredićemo pomoću trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\log \operatorname{tg}\alpha = \log 1 - \log 2 = \log 1 - \frac{1}{2}\log 2$$

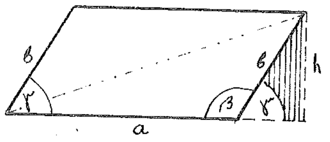
$$\begin{array}{rrl} \log 1 = & (1)\ 0{,}00\ 000 & (-10) \\ -\frac{1}{2}\log 2 = & -\ 0{,}15\ 052 & \\ \hline \log \operatorname{tg}\alpha = & 9{,}84\ 948 & (-10) \\ \alpha = & 35^{\circ}15'51'' & \\ 2\alpha = & 70^{\circ}31'42''. & \end{array}$$

Dakle, dijagonale kocke seku se pod uglom $70^{\circ}31'42''$.

13) Odrediti nagibni ugao dijagonale kocke prema ravni osnove.

<u>Odgovor:</u> $\alpha = 35^{\circ}15'51''$ (v.pr.12).

14) Izvesti trigonometrijske obrasce za površine romboida i trougla.



Površina romboida jednaka je proizvodu osnovice i visine:

$$P = ah .$$

Kako je, prema skici,

$$\frac{h}{b} = \sin \gamma ,$$

odnosno $$h = b \cdot \sin \gamma ,$$

to je $$\underline{P = ab \sin \gamma} ,$$

tj. površina romboida jednaka je proizvodu dveju susednih stranica i sinusa ugla medju njima.

Ako je zahvaćeni ugao tup (suplementan oštrom uglu), obrazac $P=ab \sin \beta$ ekvivalentan je prethodnom obrascu, jer su sinusi suplementnih uglova jednaki.

Kako je romboid dijagonalom podeljen na dva jednaka trougla, to je

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma ,$$

tj. površina trougla jednaka je poluproizvodu ma koje dve stranice i sinusa ugla medju njima.

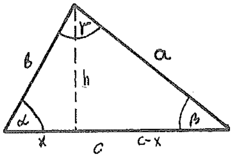
(Obrazac za površinu P razlike isečka i odsečka kruga poluprečnika r i zajedničkog centralnog ugla α :

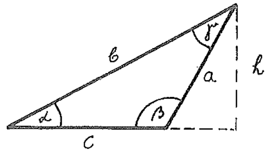
$$P = \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha .)$$

b) <u>Kosougli trougao</u>

Kosougli trougao rešava se primenom trigonometrijskih teorema: sinusne, ili kosinusne, ili tangensne, u zavisnosti od elemenata koji su poznati.

Skice kosouglog trougla.





(1) <u>Sinusna teorema</u>

Iz trigonometrijskog obrasca za površinu trougla (v.pr.14) primenjenog na sva tri ugla, tj.

$$P = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma ,$$

$$P = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta ,$$

$$P = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha ,$$

izvodimo relacije:

$$\frac{1}{2}\, ab \sin\gamma = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta ,$$

$$\frac{1}{2}\, ab \sin\gamma = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha ,$$

$$\frac{1}{2}\, ac \sin\beta = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha ,$$

iz kojih se, posle skraćivanja, izvode proporcije

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} ,$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} ,$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} ,$$

koje mogu da se napišu u obliku produžene proporcije

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

koja predstavlja sinusnu teoremu.

Sinusna teorema može da se izrazi i odnosom

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

tj. stranice trougla odnose se kao sinusi naspramnih uglova.

(2) Kosinusna teorema

Visina trougla, koja odgovara osnovici, obrazuje sa datim trouglom (vidi skicu) dva pravougla trougla. Primenom Pitagorine teoreme, visinu h možemo da izrazimo

$$h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

i

$$h^2 = b^2 - x^2$$

odakle je

$$a^2 - (c - x)^2 = b^2 - x^2;$$

dalje je

$$a^2 = b^2 - x^2 + (c-x)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx .$$

Kako je

$$\frac{x}{b} = \cos\alpha,$$

odnosno

$$x = b\cos\alpha,$$

dobićemo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

tj. kosinusnu teoremu kojom se jedna stranica izražava pomoću dveju drugih i ugla medju njima.

Sličnim postupkom dobijamo još dva odgovarajuća izraza:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma .$$

U slučaju kad je ugao medju stranicama tup (kosinus tupog ugla je negativan), proizvod $2bc \cos\alpha$ ($2ac \cos\beta$, $2ab \cos\gamma$) ne oduzima se, već se dodaje zbiru kvadrata stranica.

Prema tome, kosinusna teorema može da se izrazi rečima:

Kvadrat ma koje stranice trougla jednak je zbiru kvadrata drugih dveju stranica algebarski umanjenom za njihov proizvod sa udvostručenom vrednošću kosinusa ugla medju njima.

Primedba: Ako je ugao medju dvema stranicama prav, recimo ugao $\gamma = 90^\circ$, s obzirom da je $\cos 90^\circ = 0$, kosinusna teorema svodi se na Pitagorinu teoremu.

$$c^2 = a^2 + b^2 ;$$

dakle, Pitagorina teorema predstavlja poseban slučaj opštije kosinusne teoreme.

(3) Tangensna teorema

Ako na sinusnu teoremu (za dva para elemenata)

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

primenimo stav o proporcijama

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} ,$$

i ako zbir i razliku sinusa uglova α i β transformišemo u proizvod,

$$\frac{a+b}{a-b} \quad \frac{2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

dobićemo proporciju

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

kojom je izražena tangensna teorema i koja može da se iskaže:

Zbir ma koje dve stranice trougla odnosi se prema njihovoj razlici kao tangens poluzbira naspramnih uglova prema tangensu njihove polurazlike.

Primena:

Kosinusna teorema primenjuje se ako su date dve stranice i ugao medju njima, ili ako su date tri stranice (nije podesna za logaritamski račun).

Tangensna teorema primenjuje se uglavnom umesto kosinusne ako su podaci o stranicama dati višecifrenim brojevima (podesna za logaritamski račun).

U svim ostalim slučajevima primenjuje se sinusna teorema.

Primeri:

15) Rešiti trougao ako su mu poznate dve stranice, $a = 17$, $b = 10$ i ugao medju njima, $\gamma = 25^\circ 3' 27''$.

U kosinusnoj teoremi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

zamenimo date vrednosti

$$c^2 = 17^2 + 10^2 - 2 \cdot 17 \cdot 10 \cdot \cos 25^\circ 3' 27''$$

$$\cos\gamma = 0{,}90\,589; \qquad 2 \cdot 17 \cdot 10 \cdot \cos\gamma = 308;$$

$$c^2 = 289 + 100 - 308 = 81$$

$$c = 9.$$

Ugao, recimo β, odredićemo pomoću sinusne teoreme

$$c : b = \sin\gamma : \sin\beta;$$

iz ove proporcije biće

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c},$$

ili, logaritamski,

$$\log \sin \beta = \log b + \log \sin \gamma - \log c,$$

odnosno

$$\log \sin \beta = \log 1o - \log \sin 25^{0}3'27'' - \log 9.$$

$$\log 1o = 1$$

$$
\begin{array}{lcrr}
+ \log \sin \gamma & = & + 9,62\ 688 & -1o \\
\hline
(\text{zbir}) \quad \sum & = & 1o,62\ 688 & -1o \\
- \log\ 9 & = & - o,95\ 424 & \\
\hline
\log \sin \beta & = & 9,67\ 264 & -1o
\end{array}
$$

$$\beta = 28^{0}4'21''$$

$$\text{Ugao } \alpha = 180^{0} - (\beta + \gamma);$$

$$\alpha = 126^{0}52'12''.$$

Medjutim, pošto je izračunata stranica c, ugao, recimo β, mogli smo da odredimo ponovo primenom kosinusne teoreme:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta ,$$

odakle je

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

odnosno

$$\cos \beta = \frac{17^2 + 9^2 - 1o^2}{2 \cdot 17 \cdot 1o} = \frac{27}{34} .$$

Pomoću tablica prirodnih vrednosti trigonometrijskih funkcija, ili pomoću logaritama dobili bismo već nadjenu vrednost.

16) Date su dve stranice trougla, a=13, c=4 i ugao medju njima $\beta = 112^{0}37'12''$. Odrediti treću stranicu.

<u>Rešenje:</u>

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$b^2 = 13^2 + 4^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4 \cdot \cos 112^{0}37'12''.$$

$\cos 112^\circ 37' 12'' = -\cos 67^\circ 22' 48'' = -0{,}38\ 462.$

$b^2 = 169 + 16 + 40 = 225$

$b = 15.$

17) Rešiti trougao ako su mu poznate dve stranice, $a = 2\ 890$, $b = 2\ 500$ i ugao medju njima $\gamma = 17^\circ 35' 40''$.

Primenićemo tangensnu teoremu:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Zbir $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, a poluzbir $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 81^\circ 12' 10''$$

$$a + b = 5\ 390$$

$$a - b = 390.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Logaritmovanjem,

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = \log (a-b) + \log \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} - \log (a+b)$$

i zamenom datih vrednosti dobijamo

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}66\ 982 \qquad -10,$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 25^\circ 3' 29'',$$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 50^\circ 6' 58'' \\ \alpha + \beta &= 162^\circ 24' 20'' \\ \hline 2\alpha &= 212^\circ 30' 78'' \\ \alpha &= 106^\circ 15' 39'' \\ \beta &= 56^\circ 8' 41'' \end{aligned}$$

Stranicu c odredićemo pomoću sinusne teoreme

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$$

odnosno

$$\log c = \log b + \log \sin\gamma - \log \sin\beta .$$

$$\log c = 2{,}95\ 904,$$

$$c = 91.$$

18) Osmatrači iz dva mesta, udaljena jedno od drugog ($c = 17$ km), osmotrili su neki objekt na horizontu pod uglovima $\alpha = 73^\circ 44' 23''$ i $\beta = 67^\circ 22' 48''$, merenim prema pravoj liniji koja spaja mesta osmatrača. Odrediti: 1) za koliko je osmotreni objekt bliži jednom osmatraču i 2) udaljenost objekta od linije koja spaja osmatrače.

1) $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$; $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

$$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma} ; \quad b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\gamma = 38^\circ 52' 49''$$

$\log a = 1{,}41\ 497$; $\quad \log b = 1{,}39\ 794$

$a = 26$ km $\quad b = 25$ km

Objekt je za 1 km bliži onom osmatraču koji je izmerio veći ugao (prema većem uglu leži duža strana, a prema manjem kraća).

2) Visina trougla (v. skicu)

$$h : a = \sin\beta$$

$$h = a \cdot \sin\beta .$$

Udaljenost objekta od date linije iznosi:

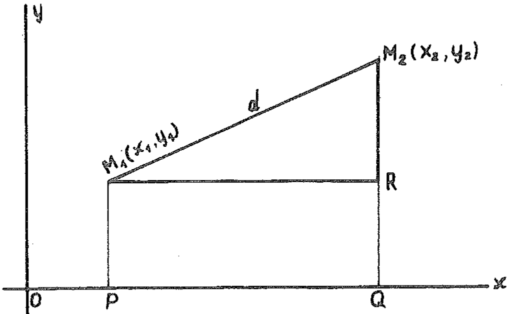
$$h = 24 \text{ km}.$$

XVII
ANALITIČKA GEOMETRIJA

TAČKA I PRAVA

1. Rastojanje dveju tačaka

Neka su date dve tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ (slika 1) čije ćemo rastojanje označiti sa d. Sa slike vidimo da je:



SL. 1

$$PM_1 = y_1 \; ; \qquad QM_2 = y_2$$

$$M_1R = PQ = x_2 - x_1$$

$$RM_2 = y_2 - y_1.$$

Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao M_1RM_2 dobićemo:

$$M_1M_2^2 = M_1R^2 + RM_2^2 \, , \quad \text{tj.}$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

odakle je:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \ldots (1)$$

Primer 1. Naći rastojanje tačaka $M_1(2, 3)$ i $M_2(5, 7)$.

Rešenje. Ovde je $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=5$, $y_2=7$, pa prema obrascu (1) imamo da je:

$$d = \sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Primer 2. Naći rastojanje tačaka $A(-1, 0)$ i $B(11,5)$.

Rešenje. Ovde je $x_1= -1$, $y_1= 0$; $x_2 = 11$, $y_2=5$. Prema obrazcu (1) sada je:

$$d = \sqrt{[11 - (-1)]^2 + (5-0)^2} = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Primer 3. Naći dužine strana trougla čija su temena $A(1, 3)$, $B(-1, 1)$ i $C(3, 1)$.

Rešenja. Prema obrazcu (1) je:

$$AB = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$BC = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$$

$$CA = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

2. Koordinate sredine date dužine

Neka je data duž d čije su krajnje tačke $A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_2,y_2)$. Odredimo koordinate sredine duži A_1A_2. Neka je $S(x_s,y_s)$ tačka koja polovi duž (A_1A_2), slika 2. Sa slike 2 je:

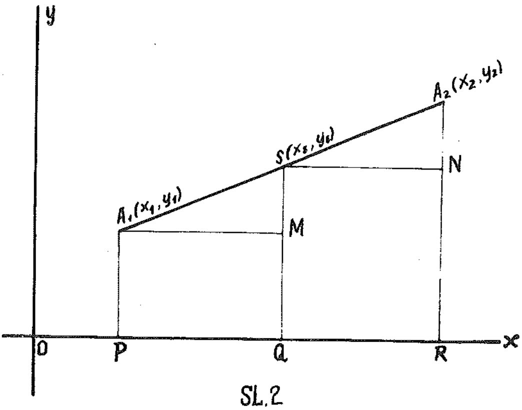
$$OP = x_1, \quad OQ = x_s, \quad OR = x_2, \quad PA_1 = QM = y_1$$

$$QS = RN = y_s, \quad A_1M = x_s - x_1, \quad MS = y_s - y_1,$$

$$SN = x_2 - x_s, \quad NA_2 = y_2 - y_s.$$

Iz podudarnosti trouglova A_1MS i SNA_2 je:

$$A_1M = SN; \quad MS = NA_2, \quad \text{tj.}$$



SL.2

$$x_s - x_1 = x_2 - x_s; \qquad y_s - y_1 = y_2 - y_s$$

odakle dobijamo koordinate sredine duži A_1A_2

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y_s = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \ldots (2)$$

Primer 1. Naći koordinate sredine duži čije su krajnje tačke $A_1(2, 5)$ i $A_2(1, 3)$.

Rešenje. Prema obrascima (2) je:

$$x_s = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}; \qquad y_s = \frac{5 + 3}{2} = 4,$$ pa je

sredina duži A_1B_1 tačka $S(\frac{3}{2}, 4)$.

Primer 2. Naći dužinu težišne linije trougla $A(1,-1)$, $B(0, 3)$ i $C(4, -1)$ koja odgovara njegovoj strani BC.

Rešenje. Ako sredinu strane BC obeležimo sa A_1 težišna linija čiju dužinu tražimo biće duž AA_1. Koordinate tačke A znamo, a koordinate tačke A_1 naćićemo kao koordinate sredine duži BC prema obrascima (2). U našem slučaju biće:

$$x_s = \frac{0 + 4}{2} = 2; \qquad y_s = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

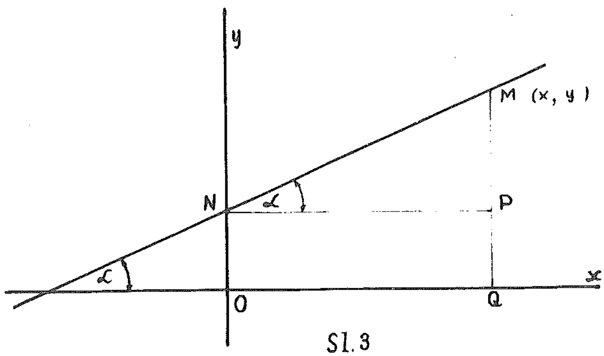
Sada smo zadatak sveli na odredjivanje rastojanja tačaka $A(1,-1)$ i $A_1(2, 2)$. Prema obrascu (1) imamo da je:

$$AA_1 = \sqrt{(2-1)^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

3. Jednačina prave

a) Eksplicitni oblik jednačine prave

Položaj prave u koordinatnom sistemu XOY odredjen je odsečkom $ON = b$ koji ona odseca na osi OY i uglom α koji prava gradi sa pozitivnim smerom OX ose (slika 3).



Sl.3

Neka je $M(x, y)$ ma koja tačka prave; tada se iz trougla NPM dobija:

$ON = QP = b$

$PM = y - b$,

$NP = OQ = x$, pa je

$$tg\,\alpha = \frac{y-b}{x},$$

odakle

$$y = x\,tg\,\alpha + b, \quad \text{ili}$$

ako stavimo $tg\,\alpha = k$, gde je k koeficijent pravca prave, imaćemo odavde:

$$y = kx + b. \qquad \ldots (4)$$

Jednačina (4) predstavlja eksplioitni oblik jednačine prave. Ona se često naziva i glavni oblik jednačine prave.

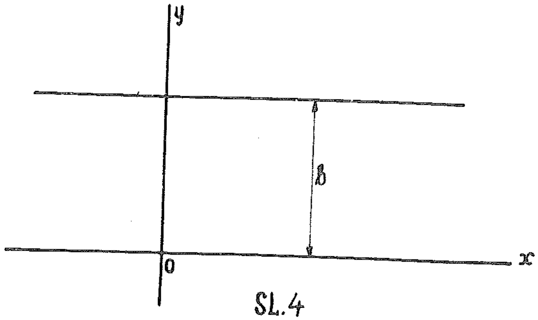
Primer 1. Jednačina $y = \sqrt{3}\,x + 2$ predstavlja pravu koja sa pozitivnim smerom ose OX obrazuje ugao od 60^o ($k = tg\ 60^o = \sqrt{3}$), a na osi OY gradi odsečak koji iznosi 2.

Primer 2. Jednačina $y = - x - 3$ predstavlja pravu liniju koja sa pozitivnim smerom ose OX gradi ugao od 135^o ($k = tg\ 135^o = -1$) a prolazi kroz tačku $(o, -3)$ na osi OY.

Jednačina

$$y = b$$

predstavlja pravu paralelnu osi OX na rastojanju b (slika 4).



Sl.4

Ako je $b = 0$, prava se poklapa sa osom OX, što znači da je jednačina OX ose

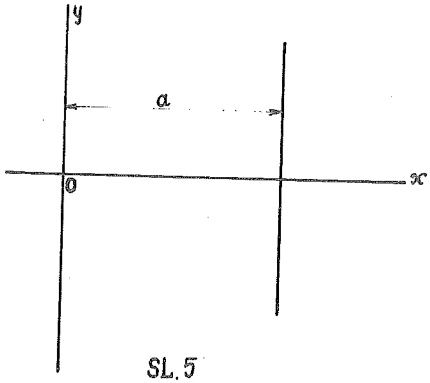
$$\underline{y = 0}$$

Jednačina

$$x = a$$

predstavlja pravu paralelnu osi OY na rastojanju a (slika 5). Ako je $a = 0$, onda se prava poklapa sa osom OY, što znači da je jednačina OY ose

$$\underline{x = 0}.$$



SL. 5

b) Opšti oblik jednačine prave

Jednačina oblika:

$$Ax + By + C = 0 \qquad \ldots (5)$$

predstavlja pravu. Uz predpostavku da je $B \neq 0$, jednačina (5) rešena po y daje:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \ldots (6)$$

Ako se stavi $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$, dobiće se iz (6) jednačina:

$$y = kx + b,$$

a to je, kao što smo videli, jednačina prave.

Ako je u jednačini (5) $A=0$, prava je paralelna osi OX, a ako je $B=0$, prava je paralelna osi OY. Ako je $C=0$, prava prolazi kroz koordinatni početak.

Primer. Jednačinu prave $2x-3y-5 = 0$ datu u opštem obliku napiši u glavnom obliku.

Rešenje. Iz jednačine prave $2x-3y-5 = 0$ date u opštem obliku, rešavanjem po y dobijamo njenu jednačinu u glavnom obliku:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

c) Jednačina prave kroz jednu tačku

Neka je data tačka $M_1(x_1, y_1)$ i prava čija je jednačina:

$$y = kx + b \qquad \ldots (7)$$

Da bi prava čija je jednačina (7) prolazila kroz tačku $M_1(x_1, y_1)$, koordinate ove tačke moraju da zadovolje jednačinu (7) pa ćemo dobiti:

$$y_1 = kx_1 + b$$

Oduzimanjem ove poslednje jednačine od jednačine (7) dobićemo:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad \ldots (8)$$

Jednačina (8) predstavlja pramen pravih kroz tačku $M_1(x_1, y_1)$, pošto se u njoj javlja koeficijent k koji može uzimati razne vrednosti. Ovo je jasno jer se, kao što znamo, kroz datu tačku može povući bezbroj pravih.

Primer. Napiši jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M_1(2, 5)$ a sa pozitivnim smerom ose OX gradi ugao od 30°.

Rešenje. U ovom slučaju je $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pa prema (8) imamo traženu jednačinu:

$$y - 5 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2).$$

d) Jednačina prave kroz dve tačke

Jednačina prave koja prolazi kroz tačku $M_1(x_1, y_1)$, kao što smo videli, ima oblik:

$$y - y_1 = k\,(x - x_1) \qquad \ldots (8)$$

Da bi ova prava prolazila i kroz tačku $M_2(x_2, y_2)$, koordinate ove tačke moraju da zadovolje jednačinu:

$$y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1),$$

odakle je

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

pa jednačina (8) postaje:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \qquad \ldots (9)$$

Poslednja jednačina je jednačina prave kroz dve tačke.

Primer 1. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz tačke $M_1(1, 5)$ i $M_2(3, 9)$.

Rešenje. Prema (9) tražena jednačina glasi:

$$y - 5 = \frac{9 - 5}{9 - 1} (x - 1), \quad \text{tj.}$$

$$y - 5 = 2(x - 1), \quad \text{ili}$$

$$y = 2x + 3.$$

Primer 2. Jednačina prave koja prolazi kroz tačke (2, o) i (1, -1) glasi:

$$y = \frac{-1}{1 - 2} (x - 2) \quad \text{tj.}$$

$$y = x - 2.$$

e) Ugao izmedju dve prave

Neka su date prave l_1 i l_2 čije su jednačine:

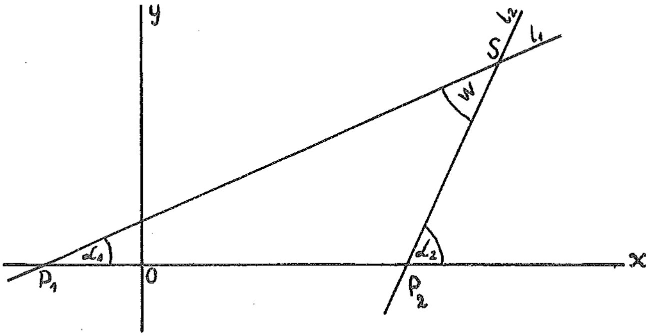
$$y = k_1x + b_1$$

$$y = k_2x + b_2 \quad \text{(slika 6)}$$

Iz trougla P_1P_2S nalazimo da je ugao izmedju pravih l_1 i l_2

$$W = \alpha_2 - \alpha_1$$

odakle je:



SL.6

$$\operatorname{tg} W = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} \, .$$

Kako je $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ to je:

$$\operatorname{tg} W = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \qquad \ldots (9)$$

Ako su prave l_1 i l_2 paralelne, ugao izmedju njih jednak je nuli, tj. $W = 0$, pa je i $\operatorname{tg} W = 0$. U tom slučaju iz (9) se dobija:

$$k_2 = k_1 \qquad \ldots (1o)$$

Primer 1. Prave čije su jednačine $y=2x + 3$ i $y = 2x + 2$ su paralelne, jer imaju jednake koeficijente pravca ($k_1 = 2$ i $k_2 = 2$).

Primer 2. U jednačini prave $y = (2 + m)x - 5$, odrediti m tako da ova prava bude paralelna pravoj $y = 6x - 1$.

Rešenje. Ovde je $k_1 = 6$, $k_2 = 2 + m$, pa prema obrascu (1o) imamo da je:

$2 + m = 6$, odakle je

$m = 4$.

Kada su prave l_1 i l_2 upravne, ugao izmedju njih iznosi 90^o; $tg\ 90^o = \infty$.

Prema obrascu (9) ovo će biti ispunjeno ako je

$1 + k_2 k_1 = 0$ tj. ako je

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \qquad \ldots (11)$$

što predstavlja uslov upravnosti pravih l_1 i l_2.

Primer. Napiši jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $A(1, -2)$ a upravna je na pravoj $y = 3x + 4$.

Rešenje. Jednačina prave kroz tačku A glasi:

$$y + 2 = k(x - 1)$$

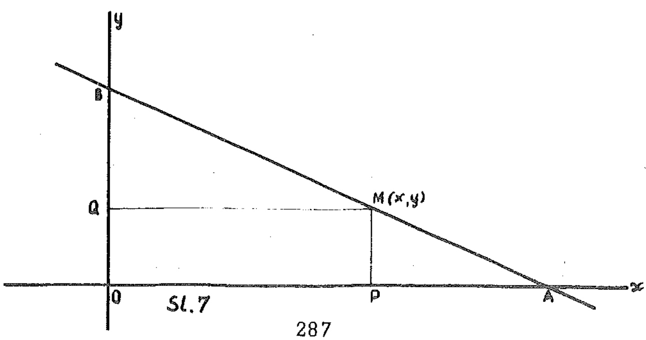
Da bi prava predstavljena poslednjom jednačinom bila upravna na pomenutoj pravoj treba da bude prema (11) $k = -1/3$, pa tražena jednačina ima oblik:

$$y + 2 = -\frac{1}{3}(x - 1), \text{ tj.}$$

$$x + 3y + 5 = 0$$

f) Segmentni oblik jednačine prave

Prava je odredjena odsečcima koje gradi na koordinatnim osama. Ove odsečke obeležavamo sa a, odnosno sa b (slika 7). Sa slike se vidi da je:



Sl.7

$$OP = QM = x, \qquad PM = OQ = y$$

$$PA = OA - OP = a - x$$

$$QB = OB - OQ = b - y.$$

Iz sličnosti trouglova PAM i QMB je:

$$\frac{a - x}{x} = \frac{y}{b - y}$$

odakle se dobija $bx + ay = ab$, što posle deljenja sa ab daje:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad \ldots (12)$$

Jednačina (12) predstavlja segmentni oblik jednačine prave.

Primer 1. Napiši jednačinu prave koja odseca na osi OX odsečak 3, a na osi OY odsečak 5.

Rešenje. Prema (12) imamo:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1.$$

Primer 2. Jednačinu prave $Ax + By + C = 0$ datu u opštem obliku napiši u segmentnom obliku.

Rešenje. Ovde ćemo datu jednačinu napisati u obliku $Ax + By = -C$ i podeliti je sa $-C$, $(C \neq 0)$, posle čega dobijamo:

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \qquad \text{ili}$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

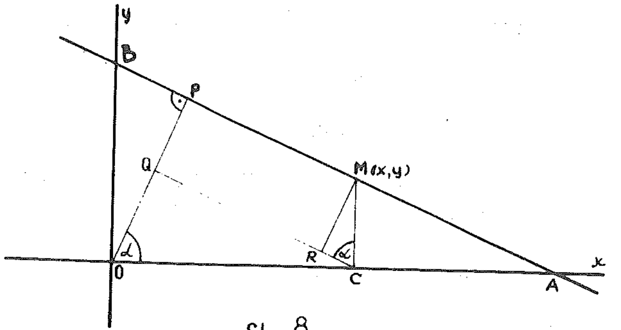
gde je prema (12) $a = -\frac{C}{A}$, $\quad b = -\frac{C}{B}$.

Na taj način jednačina prave $2x - 3y - 5 = 0$ napisana u segmentnom obliku glasi:

$$\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{-\frac{5}{3}} = 1.$$

g) Jednačina prave u normalnom obliku

Položaj prave u koordinatnom sistemu OXY odredjen je njenim normalnim rastojanjem p od koordinatnog početka i uglom α što ovo rastojanje gradi sa pozitivnim smerom apscisne ose (slika 8).



SL. 8

Sa slike 8 je: $OP = p$, $OC = x$, $CM = y$, $QP = RM$, $OP = OQ + QP = OQ + RM$, tj. $p = OC \cos\alpha + CM \sin\alpha$, ili $p = x \cos\alpha + y \sin\alpha$, što se obično piše u obliku:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p \qquad \ldots (13)$$

što predstavlja jednačinu prave u normalnom obliku.

Napiši jednačinu prave ako njeno normalno rastojanje od koordinatnog početka iznosi 5, a ugao što ga ovo radtojanje obrazuje sa pozitivnim smerom ose OX 60°.

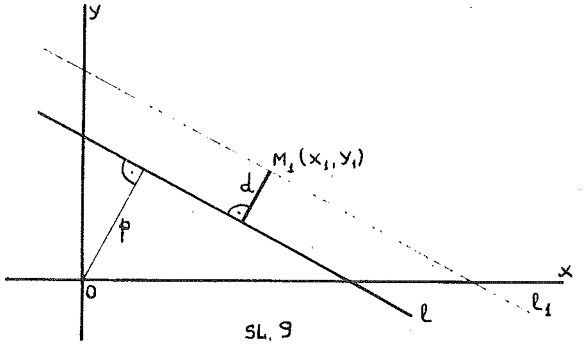
Rešenje. Prema (13) imamo:

$$x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ = 5, \text{ odnosno}$$

$$x + \sqrt{3}\, y = 10$$

h) Rastojanje tačke od prave

Data je tačka $M_1(x_1, y_1)$ i prava 1 (slika 9) čija je jednačina:



SL. 9

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0.$$

Jednačina prave l_1 kroz tačku M_1 a koja je paralelna pravoj l glasi:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p + d$$

odakle se dobija:

$$d = x \cos\alpha + y \sin\alpha - p,$$

gde je d rastojanje prave l_1 od prave l.

Pošto prava l_1 prolazi kroz tačku $M_1(x_1, y_1)$ biće:

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p \qquad \ldots (14)$$

ako se tačka M_1 i koordinatni početak nalaze sa raznih strana prave l. Ako se tačka M_1 i koordinatni početak nalaze sa iste strane prave l, onda se rastojanje tačke M_1 od prave l dobija po obrascu:

$$d = p - (x_1 \cos\alpha + y \sin\alpha). \qquad \ldots (15)$$

Na osnovu (14) i (15) vidi se da se rastojanje tačke $M_1(x_1, y_1)$ od prave $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ dobija po obrascu:

$$d = \left| x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p \right| \qquad \ldots (16)$$

Da bi smo odredili rastojanje tačke $M_1(x_1, y_1)$ od prave čija je jednačina data u opštem obliku:

$$Ax + By + C = 0 , \qquad \ldots (17)$$

prvo se mora ova jednačina napisati u normalnom obliku:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \qquad \ldots (18)$$

Da bi jednačine (17) i (18) predstavljale jednu pravu, potrebno je da bude:

$$\cos\alpha = \lambda A, \quad \sin\alpha = \lambda B, \quad -p = \lambda C \qquad \ldots (19)$$

gde je λ koeficijent proporcionalnosti.

Kvadriranjem i sabiranjem prvih dveju jednačina (19) dobićemo:

$$1 = \lambda^2(A^2 + B^2) \text{ odakle je}$$

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} . \qquad \ldots (2o)$$

U (2o) se uzima od dva znaka onaj koji je suprotan znaku koeficijenta C iz jednačine (17) da bi p dato u (19) bilo pozitivno.

Ako se $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ i $-p$ dato u (19), vodeći računa o (2o), zamene u (18), dobiće se jednačina:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \qquad \ldots (21)$$

koja predstavlja traženi normalni oblik jednačine (17).

Rastojanje tačke $M_1(x_1, y_1)$ od prave čija je jednačina (17) dobija se sada po obrascu:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| . \qquad \ldots (22)$$

Primer 1. Jednačinu prave $3x-4y-2 = 0$ napiši u normalnom obliku.

Rešenje. Prema (21) normalni oblik date jednačine glasi:

$$\frac{3x - 4y - 2}{\pm\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 0, \text{ odnosno}$$

$$\frac{3x - 4y - 2}{5} = 0, \text{ ili}$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0 .$$

Primer 2. Nadji rastojanje tačke $M_1(1, 2)$ od prave $5x + 12y - 3 = 0$.

Rešenje. Prema obrascu (22) traženo rastojanje je:

$$d = \left| \frac{5 \cdot 1 + 12 \cdot 2 - 3}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{5 + 24 - 3}{169} \right| = \frac{26}{13} = 2.$$

XVIII
KRIVE DRUGOG STEPENA

Opšta jednačina drugog stepena:

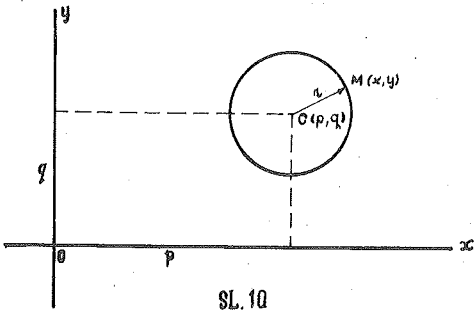
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad \ldots (23)$$

može predstavljati krug, elipsu, hiperbolu, parabolu ili skup dve prave linije. Svaka od ovih linija može se dobiti kada se konusna površina preseca raznim ravnima.

1. Jednačina kruga

Krug je geometrijsko mesto tačaka u ravni koje su podjednako udaljene od jedne stalne tačke koju nazivamo centar kruga.

Proizvoljnu tačku pomenutog geometrijskog mesta obeležavamo sa $M(x, y)$ a stalnu tačku (centar kruga) sa $C(p, q)$, (slika 10). Ako sa r označimo rastojanje tačaka C i M, na osnovu obrasca (1) za rastojanje dveju tačaka biće:



SL. 10

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \qquad \dots (24)$$

što predstavlja jednačinu kruga sa centrom u tački $C(p,q)$ i poluprečnikom r.

Ako se centar kruga nalazi u koordinatnom početku, jednačina kruga (24) postaje:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Primer 1. Napiši jednačinu kruga čiji je centar tačka $C(3,2)$, a poluprečnik mu je 8.

Rešenje. Prema (24), jednačina traženog kruga glasi:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 64.$$

Jednačina (24) može se napisati u obliku:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \qquad \dots (25)$$

Ako jednačinu (25) uporedimo sa (23) dobićemo da je $A=C=1$, $B=0$, $D=-p$, $E=-q$, $p^2 + q^2 - r^2 = F$.

Primer 2. Odrediti poluprečnik i koordinate centra kruga čija je jednačina:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0.$$

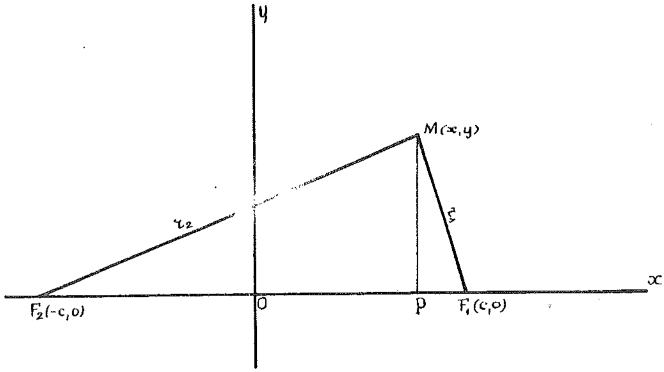
Rešenje. Ako ovu jednačinu uporedimo sa (25) imaćemo da je:

$-2p = -6; \quad -2q=2; \quad p^2+q^2-r^2 = 6,$ odakle je:

$p=3; \quad q= -1; \quad 9+1-r^2=6,$ tj. $r^2=4, \quad r=2$

2. Jednačina elipse

Elipsa je geometrijsko mesto tačaka u ravni kod kojih je zbir rastojanja od dveju datih tačaka stalna veličina. Za date tačke uzmimo $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ a tačku elipse obeležimo sa $M(x, y)$ (slika 11). Stalne tačke F_1 i F_2 nazivamo žiže elipse. Sa slike 11 je:



SL. 11

$OP = x, \quad OF_1 = c, \quad PF_1 = c-x, \quad PM = y,$

$F_2M = r_2, \quad F_1M = r_1.$

Iz pravouglog trougla F_2PM je:

$$r_2^2 = (c + x)^2 + y^2, \qquad \ldots (26)$$

a iz pravouglog trougla PF_1M je:

$$r_1^2 = (c - x)^2 + y^2 \qquad \ldots (27)$$

Neka je

$$r_2 + r_1 = 2a , \qquad \ldots (28)$$

gde je a stalan broj. Na osnovu (26) i (27) dobijamo:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4\,cx \quad \text{ili}$$

$(r_2 - r_1)\,(r_2 + r_1) = 4cx$, što zbog (28) daje:

$2a(r_2 - r_1) = 4cx$, odakle je:

$$r_2 - r_1 = \frac{2c}{a}\,x \qquad \ldots (29)$$

Iz (28) i (29) dobijamo:

$$r_2 = a + \frac{c}{a}\,x \; ; \qquad r_1 = a - \frac{c}{a}\,x \; .$$

Ako nadjenu vrednost za r_2 zamenimo u jednačini (26), dobićemo:

$(a + \frac{c}{a}\,x)^2 = (c + x)^2 + y^2$, odakle posle sredjivanja imamo:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad \ldots (3o)$$

Stavljajući:

$$a^2 - c^2 = b^2 \qquad \ldots (31)$$

jednačina (3o) postaje:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \qquad \ldots (32)$$

koja se posle deljenja sa a^2b^2 može napisati u obliku:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots (33)$$

što predstavlja traženu jednačinu elipse.

Ako se jednačina (32) reši po y dobiće se:

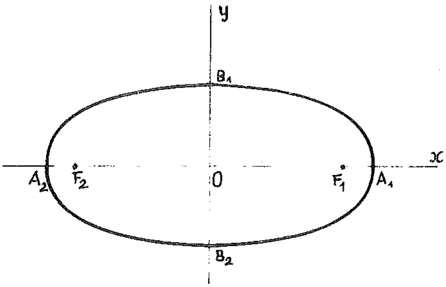
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \; , \qquad \ldots (34)$$

a ako se reši po x daće:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}, \qquad \ldots (35)$$

odakle se vidi da je elipsa simetrična u odnosu na obe koordinatne ose.

Iz (34) se za $x=a$ dobija $y=0$, a za $x=0$, da je $y = \pm b$, dok se iz (35) za $y=b$ dobija $x=0$, a za $y=0$ da je $x = \pm a$. Tačke $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ i $B_1(0,-b)$ nazivaju se temena elipse, dok su a i b njene poluose (slika 12).



SL.12

Primeri: Napisati jednačinu elipse ako je data:

1) Poluosa $a = 3$ i $b = 2$.

Rešenje. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

2) Poluosa $a = 10$ i rastojanje medju žižama $2c=12$.

Rešenje. Kako je $a^2 - b^2 = c^2$, to je $b^2 = a^2 - c^2$, što posle zamene datih vrednosti daje $b^2 = 100 - 36 = 64$, pa dobijamo: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

3) Tačke $M_1(6, 4)$ i $M_2(-8, 3)$ kroz koje prolazi elipsa.

Rešenje. U jednačini elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ koordinate x i y zamenimo jedanput koordinatama tačke M_1, drugi put koordinatama tačke M_2, te dobijemo dve jednačine sa dve nepoznate a^2 i b^2:

$$36\,b^2 + 16\,a^2 = a^2b^2$$

$$64\,b^2 + 9\,a^2 = a^2b^2\,.$$

Oduzimanjem druge jednačine od prve dobijamo:

$$-28\,b^2 + 7\,a^2 = 0$$

odakle je

$$a^2 = 4b^2.$$

Zamenom u jednoj od dve jednačine, recimo u drugoj, dobijamo:

$$64\,b^2 + 36\,b^2 = a^2b^2.$$

Deobom sa b^2 dolazimo do vrednosti veličine a^2:

$$a^2 = 100$$

a zatim

$$b^2 = 25$$

Dakle, jednačina elipse je:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

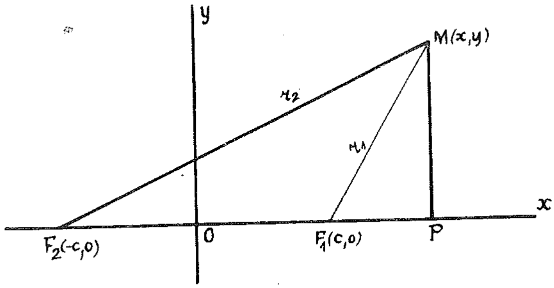
3. Jednačina hiperbole

Hiperbola je geometrijsko mesto tačaka u ravni kod kojih je razlika rastojanja od dveju datih tačaka stalna veličina.

Za date tačke uzmimo $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ a tačku hiperbole obeležimo sa $M(x, y)$ (slika 13).

Stalne tačke F_1 i F_2 nazivaju se žiže hiperbole.

Sa slike 13 je:



SL. 13

$OP = x, \quad OF_1 = c, \quad F_1P = x - c, \quad PM = y,$

$F_2M = r_2, \quad F_1M = r_1.$

Iz pravouglog trougla F_2PM je:

$$r_2^2 = (c + x)^2 - y^2, \qquad \ldots (36)$$

a iz pravouglog trougla F_1PM je:

$$r_1^2 = (x - c)^2 + y^2 \,. \qquad \ldots (37)$$

Neka je:

$$r_2 - r_1 = 2a \qquad \ldots (38)$$

gde je a stalan broj.

Na osnovu (36) i (37) oduzimanjem dobijamo:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx$$

ili

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = rcx$$

što zbog (38) daje: $2a(r_2 + r_1) = 4cx$, odakle je

$$r_2 + r_1 = \frac{2c}{a}\,x \qquad \ldots (39)$$

Iz (38) i (39) dobijamo:

$$r_2 = \frac{c}{a} x + a, \quad r_1 = \frac{c}{a} x - a$$

Ako nadjenu vrednost za r_2 zamenimo u jednačini (36) dobićemo:

$$\left(\frac{c}{a} x - a\right)^2 = (c + x)^2 + y^2$$

odakle, posle sredjivanja, imamo:

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2). \quad \ldots (4o)$$

Stavljajući:

$$c^2 - a^2 = b^2 \quad \ldots (41)$$

jednačina (4o) postaje:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots (42)$$

koja se posle deljenja sa a^2b^2 može napisati u obliku:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots (43)$$

što predstavlja traženu jednačinu hiperbole.

Ako se jednačina (42) reši po y, dobiće se:

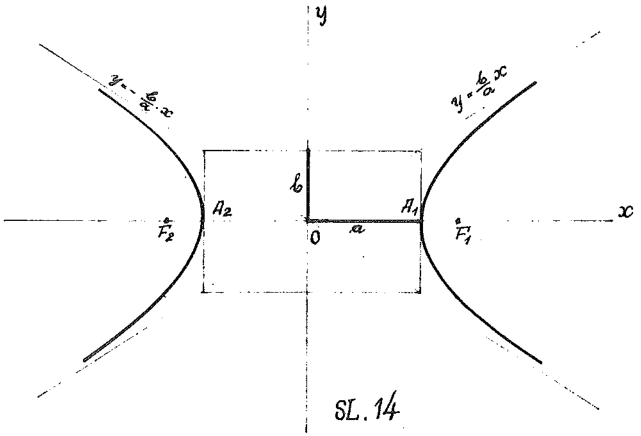
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad \ldots (44)$$

a ako se reši po x, daće:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}, \quad \ldots (45)$$

odakle se vidi da je hiperbola simetrična u odnosu na obe koordinatne ose.

Iz (44) se za $x=a$ dobije $y=0$. Tačke $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ nazivaju se temenima hiperbole, dok su a i b njene poluose, i to: a je realna, b je imaginarna poluosa. Prave $y = \frac{b}{a} x$ i $y = -\frac{b}{a} x$ su asimptote hiperbole (asimptote - prave kojima se grane krive približavaju da bi se u beskonačnosti dodirnule), (slika 14).



SL. 14

Primeri: Napisati jednačinu hiperbole ako je dato:

1) Poluose $a = 2$ i $b = 3$.

Rešenje: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

2) Poluosa $a = 15$ i rastojanje medju žižama $2c = 34$.

Rešenje. Kako je $a^2+b^2 = c^2$, to je $b^2=c^2-a^2$, što posle zamene datih vrednosti daje $b^2 = 17^2 - 15^2 =$ $= (17 + 15)(17 - 15) = 32 \cdot 2 = 64$, pa jednačina hiperbole glasi:

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

3) Tačke $M_1(4, 3)$ i $M_2(14, -12)$ kroz koje prolazi hiperbola.

Rešenje. U jednačini hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ koordinate x i y zamenimo jedanput koordinatama tačke M_1, drugi put koordinatama tačke M_2, te dobijemo dve jednačine sa dve nepoznate a^2 i b^2:

$$16\ b^2 - 9\ a^2 = a^2b^2$$

$$196\ b^2 - 144\ a^2 = a^2b^2.$$

Oduzimanjem jedne jednačine od druge dobijamo:

$$18o\ b^2 - 135\ a^2 = 0$$

odakle je:

$$b^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Zamenom u jednoj od dve jednačine, recimo u prvoj, dobijamo

$$12a^2 - 9a^2 = a^2b^2.$$

Deobom sa a^2 dolazimo do vrednosti veličine b^2:

$$b^2 = 3$$

a zatim

$$a^2 = 4.$$

Dakle, jednačina tražene hiperbole je:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

4. Jednačina parabole

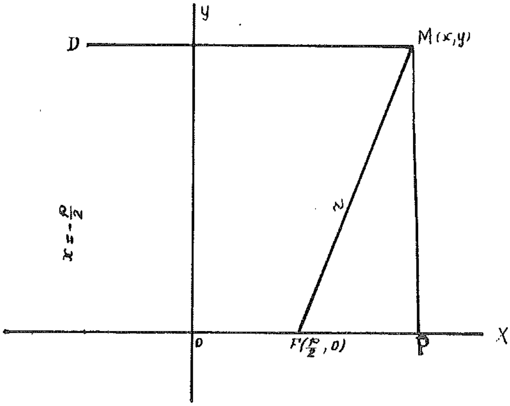
Parabola je geometrijsko mesto tačaka u ravni kod kojih su rastojanja od date tačke i date prave jednaka.

Za datu tačku uzmimo $F(\frac{p}{2}, 0)$, za datu pravu $x = - p/2$, a tačku parabole obeležimo sa $M(x, y)$,(slika 15). Stalna tačka F naziva se žiža parabole, a stalna prava direktrisa parabole.

Sa slike 15 je:

$$OP = x, \quad OF = \frac{p}{2}, \quad FP = x - \frac{p}{2}, \quad PM = y,$$

$$DM = d.$$



SL. 15

Iz pravouglog trougla FPM je

$$r^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 . \qquad \ldots (46)$$

Kako je $r=d$ (prema definiciji parabole) i kako je:

$$d = x + \frac{p}{2} \qquad \ldots (47)$$

smenom u (46) dobija se:

$$y^2 = 2px, \qquad \ldots (48)$$

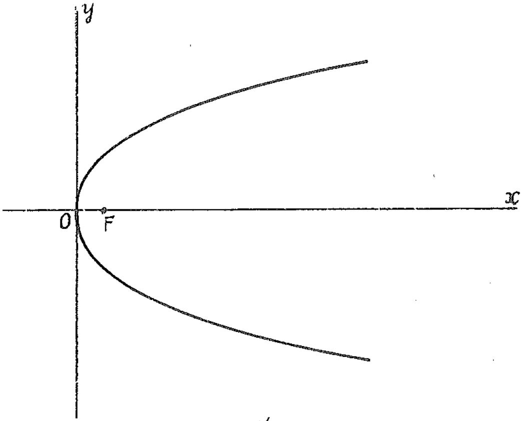
što predstavlja traženu jednačinu parabole.

Ako se jednačina (48) reši po y, dobiće se:

$$y = \pm \sqrt{2px} ,$$

odakle se vidi da je parabola simetrična u odnosu na osu OX, a da se nalazi samo s jedne strane ose Oy (slika 16). Tačka O naziva se teme parabole, a veličina p - parametar parabole.

Primeri. Napisati jednačinu parabole ako je dato:



SL.16

1) Dužina tetive koja prolazi kroz žižu parabole i koja je normalna na osi simetrije parabole, tj. dvostruka vrednost parametra parabole: $2p = 6$.

Rešenje. $y^2 = 2px$, dakle: $y^2 = 6x$.

2) Tačka $M(9, 6)$ kroz koju prolazi parabola.

Rešenje: U jednačini parabole $y^2 = 2px$ koordinate x i y zamenimo koordinatama tačke M, te dobijamo jednačinu sa nepoznatom veličinom p:

$$36 = 9p,$$

odakle je $p = 4$. Dakle, jednačina tražene parabole je:

$$y^2 = 8x.$$

S A D R Ž A J

str.

III