Simeunović M. Dragomir

SILA POREMEĆAJA I NJENO POLJE
SA PRIMENOM U TEORIJI MORSKE PLIME
(Diplomski rad)

Poznat nam je Njutnov zakon opšte gravitacije koji glasi:

Svaki delić materije mase m_1 u vasioni privlači svaki drugi delić mase m_2 silom koja ima intenzitet direktno proporcionalno proizvodu masa m_1 i m_2 tih delića, a obrnuto proporionalan kvadratu njihovog rastojanja r ; pravac te sile pada u pravu tih delića. Veličina te sile pretstavljena je izrazom

(1) $$\mathcal{F} = f\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

pri čemu je f faktor proporcionalnosti, gravitaciona konstanta.

Ako u prostoru imamo samo dva tela masa $\mathcal{M}$ i m , čije početne uslove kretanja znamo u odnosu na jedan nepomični koordinatni sistem, onda nam odredjivanje daljeg kretanja tih dvaju tela u odnosu na isti taj sistem koordinata pretstavlja takozvani problem dvaju tela Nebeske Mehanike.

Uzmimo dva tela masa $\mathcal{M}$ i m u ravni XOY, sl 1. Ako nam $\mathcal{M}$ pretstavlja masu Sunca, onda nam m pretstavlja masu planete pri čemu samo ta dva tela uzimamo u obzir. Označimo sa $\vec{\mathcal{R}}$ vektor položaja mase $\mathcal{M}$, a sa $\vec{l}$ vektor položaja mase m u odnosu na tačku O . Dalje, označimo li sa $\vec{r}$ vektor položaja mase m prema masi $\mathcal{M}$, to izmedju vektora $\vec{\mathcal{R}}$ $\vec{l}$ i $\vec{r}$ postoji relacija

(2) $$\vec{r} = \vec{l} - \vec{\mathcal{R}}$$

Ako sa $\vec{r}_0$ označimo jedinični vektor u pravcu vektora $\vec{r}$, to je vektor $\vec{r}$ prestavljen sa $r\vec{r}_0$, gde je r moduo vektora $\vec{r}$. Zato imamo

(3) $$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$

Zato je sila kojom masa $\mathcal{M}$ privlači masu m pretstavljena izrazom $-f\frac{Mm}{r^2}\vec{r}_0 = -f\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$, a sila kojom masa m privlači masu M pretstavljena izrazom $f\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$.

Vektorske diferencijalne jednačine kretanja ovih tela su

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = f\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \tag{4}$$

$$m\frac{d^2\vec{l}}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \tag{5}$$

gde t označava vreme.

Ako jednačinu (4) skratimo sa M,(5), sa m , pa oduzmemo (4) od (5) i uzimajući relaciju (2) u obzir po kojoj je

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{l}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

imamo

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -f\frac{M+m}{r^3}\vec{r} \tag{6}$$

ili

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -f(M+m)\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{7}$$

Ovo je vektorska diferencijalna jednačina kretanja mase m relativno prema masi M . Ako nam masa M pretstavlja masu Sunca, a m masu planete, onda nam jednačina (7) kazuje da se planeta kreće oko Sunca tako kao kad bi Sunce stajalo nepomično, imalo masu $(M+m)$, a privlačilo planetu po Njutnovom zakonu. Isto tako ako je M masa planete a m masa njenog satelita, onda nam jednačina (7) kazuje da se satelit kreće oko planete slično kao planeta oko sunca. Zato pretpostavka o nepomičnosti Sunca se opravdava time što se $(M+m)$ može zameniti sa M , tj. što je masa M Sunca daleko veća od mase m planete.

Kako u prostoru nemamo samo dva tela masa M i m ,već ih ima više, to za odredjivanje kretanja mase m treba, sem mase M , uzeti u obzir i privlačenje ovih ostalih.

I ako u Sunčevom sistemu imamo više tela, to se kretanje planeta vrši skoro tako kao kad bi svaka od njih stajala samo pod dejstvom Sunčeve privlačne sile. Isto važi i za satelite planeta, koji se kreću skoro sasvim tako kao kad bi svaki od njih stajao samo pod privlačnim dejstvom svoje planete. To je zato što Sunce svojom masom daleko nadmašava mase svih ostalih tela Sunčevog sistema, pa je njegovo privlačno dejstvo od glavnog uticaja na svako drugo, pa se privlačna dejstva svih ostalih tela na kretanje mase m ispoljavaju u vidu manjih poremećaja. Isto tako je za kretanje satelita oko svoje planete planetino dejstvo od glavnog uticaja zbog njegove relativno velike blizine prema svojoj planeti.

Medjutim ako bi se strožije ispitivalo kretanje tih nebeskih tela, moralo bi se uzeti u obzir privlačenje onih ostalih, pa bi stvarno kretanje nešto malo otstupalo od rezultata koji se dobijaju u problemu dvaju tela. Zato ćemo ovde uvesti jedan nov pojam, silu poremećaja, do koga dolazimo na sledeći način.

Neka je m_k nebesko telo i njegova masa čije kretanje treba da odredimo, a m_o ono nebesko telo oko koga se uočeno nebesko telo kreće eliptičnim kretanjem. Ako je m_k planeta, onda je m_o Sunce, a ako je m_k satelit onda je m_o njegova planeta. Kada nebi bilo drugih nebeskih tela, sem ovih dvaju, onda bi jednačina za kretanje tela m_k bila prema (7)

$$m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = -f m_k (m_o + m_k) \frac{\vec{r}_k}{r_k^3} \tag{8}$$

gde $\vec{r}_k$ označva vektor položaja mase m_k prema masi m_o, a r_k moduo toga vektora. Ako ovu poslednju jednačinu skratimo sa m_k dobijamo

$$\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = -f(m_o + m_k)\frac{\vec{r}_k}{r_k^3} \tag{9}$$

Jednačina (9) pretstavlja jednačinu neporemećenog kretanja mase m_k oko mase m_o

Ako za sada uzmemo još jedno treće nebesko telo m_i u obzir, onda će njegovo prisustvo poremetiti kretanje nebeskog tela m_k, zbog čega ćemo telo m_i nazvati onim koje prouzrokuje poremećaj, a telo m_k koje podleže poremećaju.

Označimo sa $\vec{r}_i$ vektor položaja tela m_i prema telu m_o, sa $\vec{l}_{ik}$ vektor položaja tela m_k prema telu m_i, a sa ρ_{ik} moduo ovog poslednjeg vektora. Dalje, ako sa $\vec{R}_o$ označimo vektor položaja tela m_o, sa $\vec{R}_k$ vektor položaja tela m_k prema jednoj nepomičnoj tački prostora O, sl. 2 onda za jednačine kretanja ovih dvaju tela imamo

$$m_k \frac{d^2\vec{R}_k}{dt^2} = -f m_k m_o \frac{\vec{r}_k}{r_k^3} - f m_k m_i \frac{\vec{l}_{ik}}{\rho_{ik}^3}$$

$$m_o \frac{d^2\vec{R}_o}{dt^2} = f m_o m_k \frac{\vec{r}_k}{r_k^3} + f m_o m_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

Ako prvu od ovih dveju jednačina skratimo sa m_k, drugu sa m_o, iako drugu oduzmemo od prve dobićemo

$$\frac{d^2\vec{R}_k}{dt^2}-\frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2}=-f(m_0+m_k)\frac{\vec{r}_k}{r_k^3}-fm_i\left(\frac{\vec{l}_{ik}}{\rho_{ik}^3}+\frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\right)$$

i ako uzmemo u obzir da je

$$\vec{R}_k-\vec{R}_0=\vec{r}_k\ ;\quad \frac{d^2\vec{R}_k}{dt^2}-\frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2}=\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}$$

dobićemo

$$(10)\qquad \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}=-f(m_0+m_k)\frac{\vec{r}_k}{r_k^3}-fm_i\left(\frac{\vec{l}_{ik}}{\rho_{ik}^3}+\frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\right)$$

Vektor $-fm_i\left(\frac{\vec{l}_{ik}}{\rho_{ik}^3}+\frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\right)$ može se pretstaviti kao gradijent izvesnog skalara. Zaista vektor $-\frac{\vec{l}_{ik}}{\rho_{ik}^3}$ može se pretstaviti kao gradijent skalara $\frac{1}{\rho_{ik}}$, pri čemu treba m_i smatrati za nepomično, a m_k za pokretno. U tom slučaju su ekviskalarne površine od $\frac{1}{\rho_{ik}}$ lopte sa centrom u m_i; gradijent stoji normalno na tim površinama, ima pravac jediničnog vektora $\frac{\vec{l}_{ik}}{\rho_{ik}}$, njegov moduo jednak je izvodu $-\frac{1}{\rho_{ik}^2}$ od $\frac{1}{\rho_{ik}}$ pa je zato

$$grad\,\frac{1}{\rho_{ik}}=-\frac{1}{\rho_{ik}^2}\cdot\frac{\vec{l}_{ik}}{\rho_{ik}}=-\frac{\vec{l}_{ik}}{\rho_{ik}^3}$$

Vektor $\frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$ može se smatrati kao gradijent jedne skalarne funkcije U_i. Ako posmatramo skalar $U_i=\frac{\vec{r}_i\vec{r}_k}{r_i^3}=\frac{r_i x}{r_i^3}=\frac{x}{r_i^2}$, gde je x projekcija vektora $\vec{r}_k$ u vektor $\vec{r}_i$ (prema definiciji skalarnog proizvoda dvaju vektora). Pri obrazovanju gradijenta skalara U_i treba r_i smatrati za konstantno, pa je stoga

$$grad\,U_i=grad\,\frac{x}{r_i^2}=\frac{1}{r_i^2}\,grad\,x$$

Ekviskalarne površine od x su ravni normalne na vektor $\vec{r}_i$ pa $grad\,x$ ima pravac jediničnog vektora $\frac{\vec{r}_i}{r_i}$, a njegov moduo je jednak izvodu od x tj. $\frac{\partial x}{\partial x}=1$.

Zato je

$$grad\,U_i=grad\,\frac{\vec{r}_i\vec{r}_k}{r_i^3}=\frac{1}{r_i^2}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r_i}=\frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

Na taj način dobijamo

$$-fm_i\left(\frac{\vec{l}_{ik}}{\rho_{ik}^3}+\frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\right)=grad\,fm_i\left(\frac{1}{\rho_{ik}}-\frac{\vec{r}_i\vec{r}_k}{r_i^3}\right)$$

Stavimo li

$$(11)\qquad fm_i\left(\frac{1}{\rho_{ik}}-\frac{\vec{r}_i\vec{r}_k}{r_i^3}\right)=R_k$$

to dobijamo mesto (10)

$$(12)\qquad \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}=-f(m_0+m_k)\frac{\vec{r}_k}{r_k^3}+grad_k R_k$$

gde indeks k označava da pri obrazovanju gradijenta treba samo tačku m_k smatrati za pokretnu.

Uzmimo sada mesto jednog tela m_i njih $(n-1)$ i to $m_1, m_2, \dots, m_n$ (m_k se ovde ne pojavljuje). Zato ćemo za R_k dobiti ovaj obrazac

(13) $$\mathcal{R}_k = \sum_i f m_i \left(\frac{1}{\rho_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \vec{r}_k}{r_i^3} \right)$$

U zbiru (13) ne pojavljuje se masa m_k.

U ovom slučaju dobijamo mesto jednačine (11) n takvih jednačina dodeljujući indeksu k redom vrednosti $1, 2, \ldots, k, \ldots, n$. Dakle imamo

(14) $$\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = -f(m_0 + m_k)\frac{\vec{r}_k}{r_k^3} + \operatorname{grad} \mathcal{R}_k \; ; \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ako uporedimo jednačinu (9) koja važi za neporemećeno kretanje mase m_k oko mase m_0 sa jednačinom (14), vidimo da se ova razlikuje od prve samo prisustvom člana

(15) $$\operatorname{grad} \mathcal{R}_k = \vec{\sigma}_k$$

Vektor $\vec{\sigma}_k$ nazivamo silom poremećaja ili silom perturbacije, a skalar $\vec{\mathcal{R}}_k$ funkcijom poremećaja ili funkcijom perturbacije.

Ako uzmemo u obzir opštu teoriju fizikalnih polja, to možemo i Njutnov zakon opšte gravitacije izraziti na sledeći način.

Svaki delić mase m u vasioni izaziva oko sebe gravitaciono polje, koje se širi od mase m u beskonačnost, a koje je definisano vektorom

(16) $$\vec{\mathcal{F}} = -f\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

gde je f gravitaciona konstanta, $\vec{r}$ vektor položaja uočene tačke polja prema masi m, a r modue toga vektora.

Ako na uočeno mesto polja stavimo jednu masu m', onda se na njoj pojavljuje sila

(17) $$\vec{\Phi} = -f\frac{mm'}{r^3}\vec{r}$$

odakle vidimo da masa m privlači masu m' po Njutnovom zakonu. Vektor $\vec{\mathcal{F}}$ jednačine (16) pretstavlja onu silu koja deluje na jedinicu mase.

Polje (16) izazvano jednom jedinom koncetrisanom masom nazivamo radijalnim poljem. Ono se može prestaviti kao gradijent skalara

(18) $$W = f\frac{m}{r}$$

U stvari se polja svih masa u vasioni medjusobno superponiraju pa je zato moguće govoriti o jednom jedinom gravitacionom polju koje obuhvata celu vasionu. Kako intenzitet polja mase m opada sa kvadratom otstojanja r od te mase, to je moguće oko mase m ograničiti izvesnu oblast prostora u kojoj je masa m od glavnog uticaja, pa je jačina polja izazvana tom masom proizvoljno puta veća od jačine sile $\sum \mathfrak{F}_i$ izazvane svim ostalim masama, te se pri prvom ispitivanju samo ona uzima u obzir.

Ako se masa m', sem mase m, nalazi još pod uticajem mase M koja izaziva poremećaj kretanja mase m', pa ako se uzmu u obzir sve privlačne sile koje dejstvuju izmedju masa M, m i m', onda je masa m' izložena sem uticaju polja (16) još i gradijentu polja $\mathcal{R}_k$ pretstavljenog jednačinom (11). U toj nam jednačini m_i pretstavlja M, $\vec{r}_k$ pretstavlja $\vec{r}$. Ako vektor položaja mase m prema masi M označimo sa $\vec{a}$, onda treba u (12) staviti $-\vec{a}$ mesto $\vec{r}$, a mesto $\vec{r}_i$ staviti $\vec{a}$. Ako zamenimo $\vec{l}_{ik}$ sa $\vec{s}$, ρ_{ik} sa s, onda za funkciju poremećaja imamo

$$U = W + \mathcal{R} \tag{19}$$

tj.

$$\mathcal{R} = fM\left(\frac{1}{s} + \frac{\vec{a}\vec{r}}{a^3}\right) \tag{20}$$

Masa m' nalazi se pod uticajem gravitacionog polja koje je gradijent skalara

$$U = f\frac{m}{r} + fM\left(\frac{1}{s} + \frac{\vec{a}\vec{r}}{a^3}\right) \tag{21}$$

Da bismo ispitali osobine ovoga polja stavimo

$$\vec{a}\vec{r} = ax \tag{22}$$

gde je x projekcija vektora $\vec{r}$ u vektor $\vec{a}$. Zato je

$$U = f\frac{m}{r} + f\frac{M}{s} + f\frac{x}{a^2}M \tag{23}$$

Ovo skalarno polje nastaje superpozicijom triju komponentalnih polja. Ekviskalarne površine prvog polja, tj. polja $f\frac{m}{r}$ su lopte sa centrom u m, ekviskalarne površine drugog polja, tj. polja $f\frac{M}{s}$ su lopte sa centrom u M, a ekviskalarne površine trećeg od njih su ravni upravne na pravoj što spaja M sa m. Zato je rezultujuće polje skalara U simetrično prema toj pravoj, i njegove ekviskalarne površine su rotacione površine sa osom rotacije pravom što spaja M sa m. Za ispitivanje ovog polja potrebno je samo ispitivati meridijanske preseke njegovih ekviskalarnih površina.

Kako je sl. 3

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{r} \tag{24}$$

to ako ovu jednačinu pomnožimo samu sobom dobijamo

$$s^2 = a^2 + 2(\vec{a}\vec{r}) + r^2 \tag{25}$$

Ako sa ϑ označimo ugao što ga vektor $\vec{r}$ zaklapa sa vektorom $\vec{a}$ onda je prema definiciji skalarnog porizvoda dvaju vektora

$$\vec{a}\vec{r} = ar\cos\vartheta \tag{26}$$

Zato dobijamo stavljajući ovo u (25)

$$s^2 = a^2 + 2ar\cos\vartheta + r^2$$

Ako ovo stavimo u (21) dobićemo

$$\mathcal{U} = f\frac{m}{r} + f\frac{\mathcal{M}}{a}\left[\left(1 + 2\frac{r}{a}\cos\vartheta + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{r}{a}\cos\vartheta\right] \tag{27}$$

Ako se masa m' nalazi u neposrednoj blizini mase m onda je broj $\frac{r}{a}$ mali čije se potencije veće od druge mogu zanemariti. Zato razvijajući izraz u maloj zagradi na desnoj strani jednačine (27) po binomnom obrascu dobijamo

$$\left(1 + \frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a}\cos\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a}\cos\vartheta\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\left(\frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a}\cos\vartheta\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2} - \frac{r}{a}\cos\vartheta + \frac{3}{2}\frac{r^2}{a^2}\cos^2\vartheta = 1 + \frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1) - \frac{r}{a}\cos\vartheta.$$

Stavljajući ovo u (27) dobijamo

$$\mathcal{U} = f\frac{m}{r} + f\frac{\mathcal{M}}{a} + \frac{1}{2}f\mathcal{M}\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\vartheta - 1)$$

Kako zbirna konstanta $f\frac{\mathcal{M}}{a}$ u poslednjem izrazu za $\mathcal{U}$ ne utiče ni na gradijent polja ni na oblik ekviskalarnih površina, to je možemo izostaviti. Zato možemo da napišemo

$$\mathcal{U} = f\frac{m}{r} + \frac{1}{2}f\mathcal{M}\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\vartheta - 1) \tag{28}$$

a za jednačinu meridijanskih preseka ekviskalarnih površina polja $\mathcal{U}$ dobijamo

$$c_1 = f\frac{m}{r} + \frac{1}{2}f\mathcal{M}\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\vartheta - 1)$$

ili

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{M}}{m}\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\vartheta - 1) = C \tag{29}$$

gde C označava jednu proizvoljnu konstantu.

Dobijeni rezultati mogu se primeniti na teoriju morske plime.

Poznato nam je da naša Zemlja jednu spoljnu tačku mase m' privlači skoro sasvim tako kao kad bi celokupna Zemljina masa bila skoncentrisana u Zemljinom središtu. Ako nam u našim prethodnim obrascima m pretstavlja masu Zemlje, koncentrisanu u jednoj tački, a $\mathcal{M}$ masu Meseca, takodje koncentrisan u jednoj tački, na otstojanju a od Zemlje. pa ako ne uzmemo u obzir centrifugalne sile prouzrokovane rotacijom

Zemlje oko svoje ose i sile izazvane rotacijom duži a oko zajedničkog težišta Zemlje i Meseca, pošto ove sile ne utiču u mnogome na pojavu koju ćemo ispitivati, onda nam jednačina (29) pretstavlja jednu od ekviskalarnih površina polja privlačnosti Zemlje i Meseca i to u blizini Zemlje pošto smo pri izvodjenju te jednačine pretpostavili da je $\frac{r}{a}$ mali broj. Zato će naša mora koja pokrivaju Zemljinu površinu, nalazeći se u tom polju atrakcija pod dejstvom sila toga polja zauzeti jednu od ekviskalarnih površina toga polja, pošto će samo u tom slučaju sila koja dejstvuje na čestice morske površine biti normalna na toj površini, pa stoga neće moći da promeni oblik te površine. Ta površina, kao što smo videli, biće rotaciona površina. Njena osa rotacije padaće u pravu što spaja centar Zemlje i centar Meseca. Kada ne bi bilo Meseca, onda bi ta površina bila lopta sa centrom u m. Poluprečnik ove lopte bio bi na primer r_0. Zato ako u jednačini (29) stavimo $M=0$ imaćemo jednačinu lopte. Usled prisustva Meseca ova lopta će se pretvoriti u jednu rotacionu površinu koja neće mnogo otstupati od lopte, pa se može staviti

$$(30) \qquad r = r_0 + h$$

gde h pretstavlja jednu malu veličinu, odstupanje od loptinog poluprečnika. Zato ćemo imati

$$(31) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0+h} = \frac{1}{r_0}\left(1+\frac{h}{r_0}\right)^{-1} = \frac{1}{r_0} - \frac{h}{r_0^2}$$

gde smo više stepene, počev od druge, broja $\frac{h}{r_0}$ zanemariti pošto je h vrlo malo prema r_0

Smenjujući vrednost za r u (29) dobijenu iz (31) na mesto prvog člana, dok u drugom možemo r zameniti sa r_0, pošto je $\frac{r}{a}$ mali broj. Zato ćemo dobiti jednačinu morske površine

$$(32) \qquad \frac{1}{r_0} - \frac{h}{r_0^2} + \frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{r_0^2}{a^3}(3\cos^2\vartheta - 1) = C$$

Ovde nam h pretstavlja otstupanje morske površine od nivoa površine lopte poluprečnika r_0. Zato ako je $M=0$ biće i $h=0$ pa imamo

$$\frac{1}{r_0} = C$$

Ako ovu vrednost stavimo u (32) imaćemo konačno

$$-\frac{h}{r_0^2} + \frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{r_0^2}{a^3}(3\cos^2\vartheta - 1) = 0$$

kao jednačinu morske površine, odakle dobijamo

$$h = \frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{r_0^4}{a^3}(3\cos^2\vartheta - 1). \tag{33}$$

Jednačina (33) služi nam kao osnovna jednačina za proučavanje morske plime. Ona nam pretstavlja presek površine mora sa jednom od onih ravni koje prolaze kroz centar Zemlje i centar Meseca. Ovaj presek pretstavljen je na slici 3 krivom $FABCDEF$.

Veličina h jednačine (33) zavisi od mesečeve daljine a i od ugla ϑ, pa će h dostići najveću vrednost obzirom na a kada je vrednost broja a najmanja, a svoju najmanju vrednost kada je veličina mesečevog geocentričnog rastojanja najveća, dok u pogledu veličine ugla ϑ h dostiže najveću vrednost kada je $3\cos^2-1$ najveće, a najmanju kada je $3\cos^2\vartheta-1$ najmanje. Veličina h biće jednaka nuli kada je izraz $3\cos^2\vartheta-1$ jednak nuli. Jednačina $3\cos^2\vartheta-1=0$ ima dva korena s a vrednostima

$$\vartheta_1 = \pm 54°44'8'' \; ; \; \vartheta_2 = \pm 125°15'52''$$

Najveću vrednost dostiže h kada je $\vartheta=0$ ili $\vartheta=180°$, dok za $\vartheta=\pm 90°$ dostiže svoju najmanju vrednost. Zato imamo

$$\begin{matrix}\vartheta=0 \\ \vartheta=180°\end{matrix}\; ; \; h=\frac{M}{m}\frac{r_0^4}{a^3} \qquad \begin{matrix}\vartheta=\vartheta_1 \\ \vartheta=\vartheta_2\end{matrix}\; ; \; h=0 \qquad \vartheta=\pm 90°; \; h=-\frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{r_0^4}{a^3}$$

Odavde vidimo da h dostiže najveću vrednost u tačkama F i C; jednako je nuli u tačkama A, B, D i E, a da dostiže svoju najmanju vrednost u tačkama G i H, sl. 3.

Veličina a, Mesečeva geocentrična daljina koja se pojavljuje u obrascu (33) se menja tokom vremena, pošto Mesec obilazi oko Zemlje po eliptičnoj putanji; u jednoj žiži te elipse nalazi se naša Zemlja. Dakle, daljina Meseca zavisi od njegovog položaja na svojoj putanji. Ona je u svakom trenutku data obrascem

$$a = \frac{a_0(1-e^2)}{1+e\cos\sigma} \tag{34}$$

gde nam a_0 pretstavlja veliku poluosu Mesečeve eliptične putanje, e brojnu ekscentričnost te elipse, a σ pravu anomaliju Meseca. Ugao σ računamo u ravni mesečeve putanje u smeru Mesečevog kretanja i to od tačke na Mesečevoj putanji koja je najbliža Zemlji. Ovu tačku nazivamo Mesečev perigej; ona odgovara uglu $\sigma=0$, dok tačka Mesečeve putanje najdalja od Zemlje odgovara uglu $\theta=180^\circ$ koju nazivamo Mesečev apogej.

Zato će veličina h jednačine (33) u pogledu Mesečeve geocentrične daljine dostići najveću vrednost kada Mesec dospe u perigej, a najmanju vrednost kada Mesec dospe u apogej.

Kao što smo videli, veličina h, koja nam pretstavlja otstupanje nivoa morske površine od nivoa koji odgovara lopti poluprečnika r_0 menja se promenom Mesečeve geocentrične daljine i promenom ugla . Kako se ove veličine menjaju tokom vremena, to se i veličina h menja tokom vremena, pa je zato potrebno ispitati način kako se menja veličina h. Radi toga transformisaćemo izraz $3\cos^2\vartheta-1$ u jednačini (33)

Ako sa z označimo zenitsko rastojanje Meseca, onda je, kao što vidimo sa slike 3., $z=180^\circ-\vartheta$. Dalje ako sa α označimo rektascenziju Meseca, sa δ njegovu deklinaciju, sa θ zvezdano vreme i sa φ geografsku širinu uočenog mesta Zemljine površine, onda izmedju tih veličina prema osnovnom obrascu Sferne Astronomije postoji veza u obliku

$$\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(\theta-\alpha) \tag{35}$$

Kako je zbog $z=180^\circ-\vartheta$, $\cos^2 z=\cos^2\vartheta$, to će biti

$$\cos^2\vartheta = \cos^2 z$$

Sada ćemo izvršiti transformaciju izraza (35). Radi toga pomoćićemo se slikom 4., na kojoj nam $\mathcal{E}\mathcal{E}_1$ pretstavlja presek ravni Zemljinog ekvatora sa nebeskom sferom, $\mathcal{A}\mathcal{M}$ presek Mesečeve putanjske ravni sa nebeskom sferom, $\mathcal{P}$ Mesečev perigej, Ω' presek Mesečeve putanjske ravni sa ravni Zemljinog ekvatora (Mesečev uzlazni čvor u odnosu na ekvatorsku ravan naše Zemlje), i nagib Mesečeve putanjske ravni prema ravni Zemljinog ekvatora, α i δ rektascenziju, odnosno deklinaciju Meseca, $\mathcal{M}$ Mesečev položaj na nebeskoj sferi i γ prolećnu ravnodnevničku tačku. Sa te slike vidimo da je

$$\Omega'\mathcal{M} = \sigma+\tilde{\omega}\,;\quad \Omega'\mathcal{M}' = \alpha-\Omega\,;\quad \gamma\Omega' = \Omega\,;\quad \Omega'\mathcal{P} = \tilde{\omega}\,;\quad \mathcal{P}\mathcal{M} = \sigma$$

Položaj Mesečevog perigeja odredjivaćemo ovde veličinom $\Omega'\mathcal{P}=\tilde{\omega}$. Od Mesečeva perigaja $\mathcal{P}$ računaćemo Mesečevu pravu anomaliju σ.

Sa slike 4. iz sfernog trougla $\Omega'\mathcal{M}\mathcal{M}'$ primenom osnovnih obrazaca Sferne Astronomije imaćemo

(I) $\sin\delta = \sin i \sin(\sigma + \hat{\omega})$

(II) $\cos\delta = \cos(\alpha - \Omega)\cos(\sigma + \hat{\omega}) + \sin(\alpha - \Omega)\sin(\sigma + \hat{\omega})\cos i$

(III) $0 = \sin(\alpha - \Omega)\cos(\sigma + \hat{\omega}) - \cos(\alpha - \Omega)\sin(\sigma + \hat{\omega})\cos i$

Ako jednačinu pod (II) pomnožimo sa $\cos(\alpha-\Omega)$ a pod (III) sa $\sin(\alpha-\Omega)$ pa ih saberemo dobićemo

(a) $\cos\delta\cos(\alpha-\Omega) = \cos(\sigma + \hat{\omega})$

Ako pak jednačinu (II) pomnožimo sa $\sin(\alpha-\Omega)$ a (III) sa $-\cos(\alpha-\Omega)$ pa ih saberemo dobićemo

(b) $\cos\delta\sin(\alpha-\Omega) = \sin(\sigma + \hat{\omega})\cos i$

Jednačina (35) glasi

(36) $\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(\theta-\alpha)$

Kako je

$$\theta - \alpha = (\theta-\Omega) - (\alpha-\Omega) \quad ; \quad \cos(\theta-\alpha) = \cos\left[(\theta-\Omega)-(\alpha-\Omega)\right]$$

to ćemo imati

$$\cos(\theta-\alpha) = \cos\left[(\theta-\Omega)-(\alpha-\Omega)\right] = \cos(\theta-\Omega)\cos(\alpha-\Omega) + \sin(\theta-\Omega)\sin(\alpha-\Omega)$$

Zamenom ove poslednje vrednosti u (36) za $\cos(\theta-\alpha)$ i s obzirom na jednačine pod (a), (b) i (I) dobijamo

(37) $$\cos z = \sin\varphi\sin i\sin(\sigma+\hat{\omega}) + \cos\varphi\cos(\theta-\Omega)\cos(\sigma+\hat{\omega}) + \\ + \cos\varphi\cos i\sin(\theta-\Omega)\sin(\sigma+\hat{\omega})$$

Stoga je

(38) $$\cos^2 z = \cos^2 v = \sin^2\varphi\sin^2 i\sin^2(\theta+\hat{\omega}) + \cos^2\varphi\cos^2(\theta-\Omega)\cos^2(\sigma+\hat{\omega}) + \\ + \cos^2\varphi\cos^2 i\sin^2(\theta-\Omega)\sin^2(\sigma+\hat{\omega}) + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\sin i\sin(2\theta+2\hat{\omega})\cos(\theta-\Omega) + \\ + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\sin 2i\sin^2(\sigma+\hat{\omega})\sin(\theta-\Omega) + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\cos i\sin(2\theta-2\Omega)\sin(2\sigma+2\hat{\omega}).$$

Dalje, ako se poslužimo jednakostima oblika

(c) $$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \; ; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \; ;$$
$$\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\cos x + \cos y) \; ; \quad \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{2}(\cos x - \cos y)$$

jednačinu (38) možemo napisati ovako

$$\cos^2 v = \sin^2\varphi\sin^2 i \cdot \frac{1-\cos(2\sigma+2\hat{\omega})}{2} + \cos^2\varphi \cdot \frac{1+\cos(2\theta-2\Omega)}{2} \cdot \frac{1+\cos(2\sigma+2\hat{\omega})}{2} + \\ + \cos^2\varphi\cos^2 i \cdot \frac{1-\cos(2\theta-2\Omega)}{2} \cdot \frac{1-\cos(2\sigma+2\hat{\omega})}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\sin i \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2} - (2\sigma+2\hat{\omega})\right] \cdot \\ \cdot \cos(\theta-\Omega) + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\sin 2i \cdot \frac{1-\cos(2\sigma+2\hat{\omega})}{2} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\theta-\Omega)\right] - \frac{1}{4}\cos^2\varphi\cos i \cdot \\ \cdot \left[\cos(2\theta+2\sigma+2\hat{\omega}-2\Omega) - \cos(2\theta-2\sigma-2\hat{\omega}-2\Omega)\right].$$

Ake u ovom poslednjem izrazu za $\cos^2\vartheta$ na desnoj strani izvršime naznačena množenja i imajući u vidu jednakosti pod (c) dobićemo

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{2}\sin^2\varphi\sin^2 i - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\sin^2 i\cos(2\sigma+2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\cos(2\sigma+2\tilde{\omega}) +$$
$$+ \frac{1}{4}\cos^2\varphi\cos(2\theta-2\Omega) + \frac{1}{8}\cos^2\varphi\left[\cos(2\theta+2\sigma+2\tilde{\omega}-2\Omega)+\cos(2\theta-2\sigma-2\tilde{\omega}-2\Omega)\right] +$$
$$+ \frac{1}{4}\cos^2\varphi\cos^2 i - \frac{1}{4}\cos^2\varphi\cos^2 i\cos(2\sigma+2\tilde{\omega}) - \frac{1}{4}\cos^2\varphi\sin^2 i\cos(2\theta-2\Omega) + \frac{1}{8}\cos^2\varphi\cos^2 i\cdot$$
$$\cdot\left[\cos(2\theta+2\sigma+2\tilde{\omega}-2\Omega)+\cos(2\theta-2\sigma-2\tilde{\omega}-2\Omega)\right] + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\sin i\cdot\left[\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(2\sigma+2\tilde{\omega}-\theta+\Omega)\right\}+\right.$$
$$\left.+\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(2\sigma+2\tilde{\omega}+\theta-\Omega)\right\}\right] + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\sin 2i\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\theta-\Omega)\right\} - \frac{1}{8}\sin 2\varphi\sin 2i\cdot$$
$$\cdot\left[\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\theta-2\sigma-2\tilde{\omega}-\Omega)\right\}+\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\theta+2\sigma+2\tilde{\omega}+\Omega)\right\}\right] - \frac{1}{4}\cos^2\varphi\cos i\cdot\left[\cos(2\theta+2\sigma+\right.$$
$$\left.+2\tilde{\omega}-2\Omega)-\cos(2\theta-2\sigma-2\tilde{\omega}-\Omega)\right].$$

Ake sada u poslednjem obrascu za $\cos^2\vartheta$ grupišemo članeve sa istim argumentima trgonometriskih funkcija imaćemo konačno za $3\cos^2\vartheta-1$ izraz

(39) $$3\cos^2\vartheta-1 = \frac{3}{4}\cos^2\varphi\cos^2 i\cos(2\theta-2\Omega) + \frac{3}{4}\cos^2\varphi(1-\cos i+\cos^2 i)\cdot\cos(2\theta+2\sigma+$$
$$+2\tilde{\omega}-2\Omega) + \frac{3}{4}\cos^2\varphi(1+\cos i+\cos^2 i)\cos(2\theta-2\sigma-2\tilde{\omega}-2\Omega) + \frac{3}{4}\sin 2\varphi\sin i\cdot$$
$$\cdot\left[\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(2\sigma+2\tilde{\omega}-\theta+\Omega)\right\}+\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(2\sigma+2\tilde{\omega}+\theta-\Omega)\right\}\right] + \frac{3}{4}\sin 2\varphi\sin 2i\cdot$$
$$\cdot\left\{\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\theta-\Omega)\right\}-\frac{1}{2}\left[\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\theta-2\sigma-2\tilde{\omega}-2\Omega)\right\}+\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\theta+2\sigma+2\tilde{\omega}+\Omega)\right\}\right]\right\}+$$
$$+\frac{3}{4}\sin^2 i(\cos^2\varphi-2\sin^2\varphi)\cos(2\sigma+2\tilde{\omega}) + \frac{3}{2}\left(\sin^2\varphi\sin^2 i+\frac{1}{2}\cos^2\varphi+\frac{1}{2}\cos^2\varphi\cos^2 i\right)-1.$$

Kako je prema (34) $a = \dfrac{a_0(1-e^2)}{1+e\cos\sigma}$, to je

$$\frac{1}{a^3} = \frac{(1+e\cos\sigma)^3}{a_0^3(1-e^2)^3} = \frac{1}{a_0^3}\cdot\frac{1}{(1-e^2)^3}\cdot(1+3e\cos\sigma+3e^2\cos^2\sigma+e^3\cos^3\sigma)$$

Pošto je brojna ekscentričnost Mesečeve putanje mala, $e = 0.05490$, te se, druge i treće pocencije broja e mogu zanemariti u zagradi poslednjeg izraza, pa ćemo imati za h prema (33)

(40) $$h = \frac{1}{2}\,\frac{M}{m}\cdot\frac{r_0^4}{a_0^3}\cdot\frac{1}{(1-e^2)^3}\cdot(1+3e\cos\sigma)\cdot(3\cos^2\vartheta-1).$$

gde $3\cos^2\vartheta-1$ treba zameniti svojom vrednošću dobijenom u (39).

Ake izraz $(1+e\cos\sigma)$ pomnožimo sa $(3\cos^2\vartheta-1)$ dobijene u (39) imajući u vidu jednakosti pod (c) i stavljajući

(41) $$\frac{M}{m}\cdot\frac{r_0^4}{a_0^3}\cdot\frac{1}{(1-e^2)^3} = K$$

dobijamo

(42) $$h = \frac{1}{2}K\left(\frac{3}{4}\cos^2\varphi\left\{\cos^2 i\cos(2\theta-2\Omega)+(1-\cos i+\cos^2 i)\cos(2\theta+2\sigma+2\tilde{\omega}-2\Omega)+\right.\right.$$
$$+(1+\cos i+\cos^2 i)\cos(2\theta-2\sigma-2\tilde{\omega}-2\Omega) + \frac{3e}{2}\cos^2 i\left[\cos(2\theta+\sigma+2\Omega)+\cos(2\theta-\sigma-2\Omega)\right]+$$
$$+\frac{3e}{2}(1-\cos i+\cos^2 i)\cdot\left[\cos(2\theta+3\sigma+2\tilde{\omega}-2\Omega)+\cos(2\theta+\sigma+2\tilde{\omega}-2\Omega)\right]+\frac{3e}{2}(1+\cos i+\cos^2 i)\cdot$$
$$\left.\left.\cdot\left[\cos(2\theta-\sigma-2\tilde{\omega}-2\Omega)+\cos(2\theta-3\sigma-2\tilde{\omega}-2\Omega)\right]\right\}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}K\Big[\frac{3}{4}\sin 2\varphi\{\sin i[\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(2\sigma+2\bar{\omega}-\theta+\Omega)\}+\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(2\theta+2\sigma+\theta-\Omega)\}]+$$
$$+\sin 2i[\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta-\Omega)\}-\tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta-2\sigma-2\bar{\omega}-\Omega)\}-\tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta+2\sigma-2\bar{\omega}+\Omega)\}]+$$
$$+\frac{3e}{2}\sin i[\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\sigma+2\bar{\omega}-\theta+\Omega)\}+\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(3\sigma+2\bar{\omega}-\theta+\Omega)\}+\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\sigma+2\bar{\omega}+\theta-\Omega)\}+$$
$$+\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(3\sigma+2\bar{\omega}+\theta-\Omega)\}]+\frac{3e}{2}\sin 2i[\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta-\sigma-\Omega)\}+\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta+\sigma-\Omega)\}-$$
$$-\tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta-3\sigma-2\bar{\omega}-\Omega)\}-\tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta-\sigma-2\bar{\omega}-\Omega)\}-\tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta+\sigma+2\bar{\omega}+\Omega)\}-$$
$$-\tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta+3\sigma+2\bar{\omega}+\Omega)\}]\}\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}K\Big(\frac{3}{4}\sin^2 i(\cos^2\varphi-2\sin^2 i)\cos(2\sigma+2\bar{\omega})+\big(\frac{3e}{2}\sin^2\varphi\sin^2 i+$$
$$+\frac{3e}{4}\cos^2\varphi+\frac{3e}{4}\cos^2\varphi\cos^2 i-1\big)\cos\sigma\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}K\Big[\frac{3}{2}\sin^2\varphi\sin^2 i+\frac{3}{4}\cos^2\varphi+\frac{1}{2}\cos^2\varphi\cos^2 i-1\Big).$$

Obrazac (42) služi nam za izračunavanje visine morske plime izazvane privlačnim dejstvom Meseca. U njemu se, kao što vidimo, javljaju kosinusne funkcije raznih argumenata. U tim argumentima javljaju se veličine koje zavise od Zemljinog dnevnog kretanja kao i od Mesečevog eliptičnog kretanja. Kao najjača promenljiva veličina u tim argumentima jeste zvezdano vreme θ. Ono naraste od 0 do 360° u toku jednog zvezdanog dana, dok se ostale veličine koje zavise od Mesečevog eliptičnog kretanja menjaju sporije. Zato imaju jednostavne funkcije kosinusa od θ periodu jednog zvezdanog dana, a funkcije od 2θ periodu od jedne polovine zvezdanog dana.

Pošto je zvezdano vreme θ glavna promenljiva argumenata pomenutih trgonometriskih funkcija, mi ćemo one članove u čijim se argumentima javlja 2θ nazvati članovima poludnevne periode, članove koji sadrže θ članovima jednodnevne periode, dok ćemo one članove koji zavise samo od Mesečevog eliptičnog kretanja nazvati članovima duge periode. Oni su grupisani u obrascu (42) u uglastim povijenim zagradama. Tu imamo sledeće argumente kosinusnih funkcija:

poludnevne periode	jednodnevne periode		duge periode
$2\theta-2\Omega$	$\frac{\pi}{2}-(2\sigma+2\bar{\omega}-\theta+\Omega)$	$\frac{\pi}{2}-(3\sigma+2\bar{\omega}+\theta-\Omega)$	$2\sigma+2\bar{\omega}$
$2\theta+2\sigma+2\bar{\omega}-2\Omega$	$\frac{\pi}{2}-(2\sigma+2\bar{\omega}+\theta-\Omega)$	$\frac{\pi}{2}-(\theta-\sigma-\Omega)$	σ
$2\theta-2\sigma-2\bar{\omega}-2\Omega$	$\frac{\pi}{2}-(\theta-\Omega)$	$\frac{\pi}{2}-(\theta+\sigma-\Omega)$	

$2\theta+\sigma-2\Omega$	$\frac{\pi}{2}-(\theta-2\sigma-2\hat{\omega}-\Omega)$	$\frac{\pi}{2}-(\theta-3\sigma-2\hat{\omega}-\Omega)$
$2\theta-\sigma-2\Omega$	$\frac{\pi}{2}-(\theta+2\sigma-2\hat{\omega}+\Omega)$	$\frac{\pi}{2}-(\theta-\sigma-2\hat{\omega}-\Omega)$
$2\theta+3\sigma+2\hat{\omega}-2\Omega$	$\frac{\pi}{2}-(\sigma+2\hat{\omega}-\theta+\Omega)$	$\frac{\pi}{2}-(\theta+\sigma+2\hat{\omega}+\Omega)$
$2\theta+\sigma+2\hat{\omega}-2\Omega$	$\frac{\pi}{2}-(3\sigma+2\hat{\omega}-\theta+\Omega)$	$\frac{\pi}{2}-(\theta+3\sigma+2\hat{\omega}+\Omega)$
$2\theta-\sigma-2\hat{\omega}-2\Omega$	$\frac{\pi}{2}-(\sigma+2\hat{\omega}+\theta-\Omega)$	
$2\theta-3\sigma-2\hat{\omega}-2\Omega$		

Vidimo dakle, da se u obrascu (42) pojavljuje ukupno 26 periodičnih članova, 9 članova poludnevne, 15 članove jednodnevne i 2 člana duge periode. Svaki od ovih periodičnih članova izaziva plimu za sebe pa se ovde može govoriti o parcijalnim plimama.

Ugao σ, Mesečevu pravu anomaliju, koja se javlja u obrascu (42) računamo od Mesečevog perigeja. Medjutim, Mesečev perigej ne zadrža va stalan položaj u prosteru, već se pomera u ravni Mesečeve putanje u smeru Mesečevog kretanja. Izvršivši jedan obilazak po toj putanji za oko 9 godina (za 8.953 godina). Stoga se veličina $\hat{\omega}$, označena na sl. 4 menja, pa se u argumentima trigonometriskih funkcija obrasca (42) ovo pomeranje mora uzeti u obzir pri odredjivanju periode pojedinih parcijalnih plimatskih talasa.

Poznato nam je dalje, da se prava preseka ravni ekliptike i ravni Mesečeve eliptične putanje obrće u retrogradnom smeru izvršivši pun obrt za 18.6 godina. Stoga se isto obrće i prava preseka ravni Zemljinog ekvatora i ravni Mesečeve eliptične putanje, takodje retrogradno, pa se zato i veličina Ω (rektascenzija Mesečevog uzlaznog čvora u odnosu na ravan Zemljinog ekvatora) menja tokom vremena te se pri odredjivanju trajanja periode pojedinih parcijalnih plima ovo mora uzeti u obzir.

Mesec obidje jednom oko Zemlje u odnosu na nekretnice za 27d. 6h. 50m. Ovaj vremenski razmak nazivamo siderički mesec. Kako se Mesečev perigej pomera u smeru Mesečevog kretanja, u direktnom smeru, te će Mesecu biti potrebno nešto više od sideričkog meseca. da se ponovo vrati u perigej. Pošto se od perigeja računaju Mesečeve prave anomalije, to je vremenski razmak potreban da se Mesec ponovo vrati u perigej nazvan anomalističkim mesecom. Njegovo trajanje iznosi 27d. 12h. 39m.

Gore pomenuta trajanja izražena su u srednjim danima, srednjim časovima i srednjim minutama.

Ako sa ν označimo uglovnu brzinu Zemljine rotacije, sa n srednju uglovnu brzinu Mesečevog kretanja oko Zemlje, sa $\dot{\omega}$ srednje pomeranje Mesečevog perigeja, a sa $\dot{\Omega}$ srednje kretanje Mesečevog čvora u odnosu na Zemljin ekvator, onda ćemo , ukoliko budemo vodili računa samo o srednjim periodama pojedinih članova obrasca (42), tj. ukoliko konstante iz argumenata tih članova budemo izbacili, i vodeći računa o načinu promene veličina $\nu, n, \dot{\omega}$ i $\dot{\Omega}$ u odnosu na nekretnice imaćemo članove sa sledećim trajanjima perioda izražene u srednjim časovima

poludnevne	dnevne		duge
$2\nu-2\dot{\Omega}$	$\nu+2n-\dot{\Omega}$	$\nu-3n+\dot{\omega}-\dot{\Omega}$	$2n$
$2\nu-2n-2\dot{\Omega}$	$\nu-2n-\dot{\Omega}$	$\nu+n-\dot{\omega}-\dot{\Omega}$	$n-\dot{\omega}$
$2\nu+2n-2\dot{\Omega}$	$\nu-\dot{\Omega}$	$\nu-n+\dot{\omega}-\dot{\Omega}$	
$2\nu-n+\dot{\omega}-\dot{\Omega}$	$\nu-2n+4\dot{\omega}+\dot{\Omega}$	$\nu+n+\dot{\omega}-\dot{\Omega}$	
$2\nu+n-\dot{\omega}-2\dot{\Omega}$	$\nu+n+\dot{\omega}-\dot{\Omega}$	$\nu-n-\dot{\omega}+\dot{\Omega}$	
$2\nu-3n+\dot{\omega}-2\dot{\Omega}$	$\nu+3n-\dot{\omega}-\dot{\Omega}$	$\nu-3n+\dot{\omega}+\dot{\Omega}$	
$2\nu-n-\dot{\omega}-2\dot{\Omega}$	$\nu-n-\dot{\omega}-\dot{\Omega}$		
$2\nu+n+\dot{\omega}-2\dot{\Omega}$			
$2\nu+3n-\dot{\omega}-2\dot{\Omega}$			

U obrascu (42) , koji nam pretstavlja obrazac (33) u razvijenom obliku, pojavljuje se ekscentričnost Mesečeve eliptične putanje sa brojnom vrednošću od 0.05490. Usled ove ekscentričnosti Mesečeva geocentrična daljina menja se u granicama 56.9579 i 63.5751 Zemljinih ekvatorskih poluprečnika. Zato Mesečeva srednja geocentrična daljina izražena istom merom iznosi 60.2665 . Veličina Zemljinog ekvatorskog poluprečnika iznosi 6378.388 km.

Kako Zemljin ekvatorski poluprečnik iznosi km., a polarni 6356.909 km., to bi Zemljin poluprečnik kada bi se ova uzela za sferu, iznosio 6371 km.

Videli smo ranije iz obrasca (33) da je visina plime pri vrednostima ugla ϑ od 0, odnosno 180° jednaka $\frac{\mu}{m} \cdot \frac{r_0^4}{a^3}$, a da je za $\vartheta = \pm 90^\circ$ jednaka $-\frac{1}{2}\frac{\mu}{m} \cdot \frac{r_0^4}{a^3}$. Zato prva vrednost odgovara, u pogledu ugla ϑ najvišoj vodi a druga najnižoj vodi. Kao razliku izmedju najviše i najniže vode imaćemo vrednost od $\frac{3}{2}\frac{\mu}{m} \cdot \frac{r_0^4}{a^3}$. Ova razlika se menja i promenom geocentrične daljine Meseca, kao što smo ranije rekli.

Ako Zemlju zamislimo kao sferu poluprečnika $r_0 = 6371$ km., Mesečevu daljinu izrazimo ovim poluprečnikom i uzmemo u obzir da je Mesečeva masa jednaka $\frac{1}{81.45}$ Zemljinih masa imaćemo za razliku izmedju najviše i najniže vode od 0.636 m kada se Mesec nalazi u perigeju, a od 0.457 m kada se Mesec nalazi u apogeju, dok nam pomenuta razlika na srednjoj Mesečevoj geocentričnoj daljini iznosi 0.532 m.

Vidimo dakle da se usled ekscentričnosti Mesečeve putanje razlika izmedju najviše i najniže vode menja u granicama 0.636 m i 0.457 m. Ova razlika osciluje oko srednje vrednosti od 0.532 m.

U izrazu za visinu plime obrasca (42) pojavljuje se geografska širina uočenog mesta Zemljine površine, pa su zato plime na različitim geografskim širinama različite. Pošto se uz sve članove poludnevne periode javlja koeficijent $\cos^2\varphi$, to će parcijalne plime poludnevne periode dostizavati najveću vrednost na ekvatoru, dok će prema Zemljinim polovima slabiti. Što se tiče parcijalnih plima jednodnevne periode vidimo da se one ne pojavljuju na ekvatoru i na polovima zbog prisustva koeficijenta $\sin 2\varphi$, dok one na geografskim širinama od 45° dostižu svoju najveću vrednost.

Do sada smo uzimali da pojavu morske plime izaziva samo Mesec svojom privlačnom silom. Medjutim i Sunce izaziva sličnu pojavu kao i Mesec, pa je stoga morska plima rezultat udruženog dejstva tih dvaju nebeskih tela. Iako Sunce ima ogromnu masu (333432 masa Zemljinih) to je zbog njegove velike geocentrične udaljenosti (sa srednjom daljinom od 149 700 000 km.) Sunčevo plimatsko dejstvo na Zemlju slabije za $2\frac{3}{20}$

puta od Mesečevog računato na srednjim geocentričnim udaljenostima ova dva nebeska tela.

Ako u obrascu (33) mesto Meseca uzmemo Sunce, obeleživši odgovarajuće oznake samo indeksom "prim" , dobićemo izraz za visinu plime izazvanu privlačnim dejstvom Sunca u obliku

(43) $$h' = \frac{1}{2}\,\frac{M'}{m}\cdot\frac{r_0^4}{a'^3}\,(3\cos^2\vartheta - 1)$$

Imajući u vidu da je Sunčeva prividna putanja oko Zemlje elipsa sa velikom poluosom a_0' i eksentricitetom i da ravan Sunčeve prividne godišnje putanje zaklapa sa ravni Zemljinog ekvatora ugao i' kao i da je ovde $\Omega'=0$ imaćemo obrazac sličan obrascu (42) za visinu plime h' izazvane Sunčevim privlačnim dejstvom u obliku

(44) $$\begin{aligned} h' = {} & \tfrac{1}{2}K'\Big(\tfrac{3}{4}\cos^2\varphi\,\{\cos^2 i'\cos 2\theta + (1-\cos i'+\cos^2 i')\cos(2\theta+2\sigma'+2\tilde{\omega}') + \\ & + (1+\cos i'+\cos^2 i')\cos(2\theta-2\sigma'-2\tilde{\omega}') + \tfrac{3e'}{2}\cos^2 i'\cdot[\cos(2\theta+\sigma')+\cos(2\theta-\sigma')] + \\ & + \tfrac{3e'}{2}(1-\cos i'+\cos^2 i')\cdot[\cos(2\theta+3\sigma'+2\tilde{\omega}')+\cos(2\theta+\sigma'+2\tilde{\omega}') + \tfrac{3e'}{2}(1+\cos i'+\cos^2 i')\cdot \\ & \cdot[\cos(2\theta-\sigma'-2\tilde{\omega}')+\cos(2\theta-3\sigma'-2\tilde{\omega}')]]\}\Big) + \\ & + \tfrac{1}{2}K'\Big(\tfrac{3}{4}\sin 2\varphi\,\{\sin i'[\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(2\sigma'+2\tilde{\omega}'-\theta)\}+\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(2\sigma'+2\tilde{\omega}'+\theta)\}] + \\ & + \sin 2i'[\cos\{\tfrac{\pi}{2}-\theta\} - \tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta-2\sigma'-2\tilde{\omega}')\} - \tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta+2\sigma'-2\tilde{\omega}')\}] + \\ & + \tfrac{3e'}{2}\sin i'[\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\sigma'+2\tilde{\omega}'-\theta)\} + \cos\{\tfrac{\pi}{2}-(3\sigma'+2\tilde{\omega}'-\theta)\} + \cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\sigma'+2\tilde{\omega}'+\theta)\} + \\ & + \cos\{\tfrac{\pi}{2}-(2\sigma'+2\tilde{\omega}'+\theta)\}] + \tfrac{3e'}{2}\sin 2i'[\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta-\sigma')\} + \cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta+\sigma')\} - \\ & - \tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta-3\sigma'-2\tilde{\omega}')\} - \tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta-\sigma'-2\tilde{\omega}')\} - \tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta+\sigma'+2\tilde{\omega}')\} - \\ & - \tfrac{1}{2}\cos\{\tfrac{\pi}{2}-(\theta+3\sigma'+2\tilde{\omega}')\}]]\}\Big) + \\ & + \tfrac{1}{2}K'\Big[\tfrac{3}{4}\sin^2 i'(\cos^2\varphi - 2\sin^2 i')\cos(2\sigma'+2\tilde{\omega}') + \\ & + (\tfrac{3e'}{2}\sin^2\varphi\sin^2 i' + \tfrac{3e'}{4}\cos^2\varphi + \tfrac{3e'}{4}\cos^2\varphi\cos^2 i' - 1)\cos\sigma' + \\ & + \tfrac{1}{2}K'\Big[\tfrac{3}{2}\sin^2\varphi\sin^2 i' + \tfrac{3}{4}\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi\cos^2 i' - 1\Big]. \end{aligned}$$

U obrascu (44) veličina K' data je izrazom

(45) $$K' = \frac{M'}{m}\cdot\frac{r_0^4}{a_0'^3}\cdot\frac{1}{(1-e'^2)^3}$$

a ostale veličine imaju značenja kao u obrascu (42).

Iz obrasca (44) za visinu plime h' , izazvanu Sunčevim privlačnim dejstvom, imamo članove kosinusnih funkcija sa sledećim argumentima

poludnevne periode	dnevne periode		duge periode
2θ	$\frac{\pi}{2}-(2\sigma'+2\bar{\omega}'-\theta)$	$\frac{\pi}{2}-(3\sigma'+2\bar{\omega}'+\theta)$	$2\sigma'+2\bar{\omega}'$
$2\theta+2\sigma'+2\bar{\omega}'$	$\frac{\pi}{2}-(2\sigma'+2\bar{\omega}'+\theta)$	$\frac{\pi}{2}-(\theta-\sigma')$	σ'
$2\theta-2\sigma'-2\bar{\omega}'$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}-(\theta+\sigma')$	
$2\theta+\sigma'$	$\frac{\pi}{2}-(\theta-2\sigma'-2\bar{\omega}')$	$\frac{\pi}{2}-(\theta-3\sigma'-2\bar{\omega}')$	
$2\theta-\sigma'$	$\frac{\pi}{2}-(\theta+2\sigma'-2\bar{\omega}')$	$\frac{\pi}{2}-(\theta-\sigma'-2\bar{\omega}')$	
$2\theta+3\sigma'+2\bar{\omega}'$	$\frac{\pi}{2}-(\sigma'+2\bar{\omega}'-\theta)$	$\frac{\pi}{2}-(\theta+\sigma'+2\bar{\omega}')$	
$2\theta+\sigma'+2\bar{\omega}'$	$\frac{\pi}{2}-(3\sigma'+2\bar{\omega}'-\theta)$	$\frac{\pi}{2}-(\theta+3\sigma'+2\bar{\omega}')$	
$2\theta-\sigma'-2\bar{\omega}'$	$\frac{\pi}{2}-(\sigma'+2\bar{\omega}'+\theta)$		
$2\theta-3\sigma'-2\bar{\omega}'$			

Ako ovde, kao i kod Meseca, sa ν označimo uglovnu brzinu Zemljine rotacije, sa n' srednju uglovnu brzinu Sunčevog prividnog godišnjeg kretanja u odnosu na nekretnice, a precesioni pomeranja ekvinokcija zanemarimo pošto je ono isuviše sporo, imaćemo članove koji potiču od Sunca sa sledećim trajanjima perioda

poludnevne	dnevne	duge
2ν	$\nu+2n'$	$2n'$
$2\nu-2n'$	$\nu-2n'$	n'
$2\nu-n'$	ν	
$2\nu+n'$	$\nu-3n'$	
$2\nu-3n'$	$\nu+n'$	
$2\nu+3n'$	$\nu-n'$	
	$\nu+3n'$	

Usled ekscentričnosti Sunčeve prividne godišnje putanje $e'=0.0167284$ geocentrično rastojanje Sunca menja se u granicama 146 880 000 km. (što odgovara položaju Sunca u perigeju) i 151 890 000 km. (što odgovara položaju Sunca u apogeju) imamo varijaciju razlike izmedju najviše i najniže vode koja potiče od Sunca u granicama 0.261 m. i 0.236 m.

Obrasci (42) i (44) služe nam za izračunavanje plima h i h'

izazvanim privlačnim dejstvom Meseca i Sunca. U tim obrascima pojavljuju se veličine i i i', nagibi putanjskih ravni Meseca i Sunca prema ravni Zemljinog ekvatora, sa vrednostima

$$i = 28^{\circ}36' \quad ; \quad i' = 23^{\circ}27'$$

Kada ovih nagiba nebi postojalo, tj. kada bi se Sunce i Mesec stalno nalazili u ravni Zemljinog ekvatora obrasci (44) i (42) dobili bi prostiji oblik, naime u njima se tada nebi pojavljivali članovi jednodnevne periode. Iz istih obrazaca vidimo da postojanje naziva i i i' smanjuje amplitude članova poludnevne periode, dok radja članove jednodnevne periode povećavajući njihove amplitude.

Do sada smo uzimali pri stvaranju morske plime pojedinačni uticaj Meseca i Sunca. Kako se plime izazvane tim nebeskim telima medjusobno superponiraju, to će celokupna visina plime biti jednaka algebarskom zbiru parcijalnih plima izazvanih zajedničkim dejstvom Sunca i Meseca pa se može staviti

$$H = h + h' \tag{46}$$

Poznavajući u izvesnom trenutku veličine koje se javljaju u izrazu za h i h' obrazaca (42) i (44) možemo izračunati veličinu H, koja nam pretstavlja visinu plime u tom trenutku. Pošto se veličine na desnoj strani jednačine (46) menjaju i promenom Mesečevog i Sunčevog položaja na svojim eliptičnim putanjama prema Zemlji, to će se i veličine H menjati i promenom uzajamnog položaja ta dva nebeska tela, pa će se plime menjati ne samo u toku dana, već i u toku meseca i godine, a promenom veličina $\mathcal{E}$ i $\mathcal{N}$ i u toku godina kao i u toku vekova. Sve ove promene obuhvatio je obrazac (46), gde su veličine h i h', kao što smo već rekli izražene pomoću (42) i (44), pa nam pretstavlja opšti obrazac za proučavanje morske plime.

Medjutim, ako uzmemo da Mesec obilazi oko Zemlje po krugu poluprečnika a, tj. zanemarimo ekscentričnosti e i e', a položaje Meseca i Sunca budemo izražavali pomoću ekvatorskih koordinata (α, δ) i (α', δ') onda ćemo prema (35) imati za Mesec

$$\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos(\theta - \alpha)$$

a za Sunce

$$\cos z' = \sin\delta' \sin\varphi + \cos\delta' \cos\varphi \cos(\theta - \alpha')$$

gde su z i z' zenitna rastojanja Meseca i Sunca, θ zvezdano vreme i φ geografska širina uočenog mesta zemljine površine.

Kako je zbog $z = 180^\circ - \vartheta$, $\cos^2 z = \cos^2\vartheta$ te ćemo imati u (33) mesto $(3\cos^2\vartheta - 1)$ izraz

$$3\cos^2\vartheta - 1 = 3\cos^2\delta\cos^2\varphi\cos^2(\theta-\alpha) + 6\sin\delta\cos\delta\sin\varphi\cos\varphi\cos(\theta-\alpha) + 3\sin^2\delta\sin^2\varphi - 1.$$

Pošto je $\cos^2(\theta-\alpha) = \dfrac{1+\cos 2(\theta-\alpha)}{2}$ te dobivamo

$$3\cos^2\vartheta - 1 = \frac{3}{2}\sin 2\varphi \sin 2\delta \cos(\theta-\alpha) + \frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2(\theta-\alpha) + \frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta + 3\sin^2\varphi\sin^2\delta - 1. \tag{47}$$

Kada ove stavimo u (33) dobićemo plimu h izazvanu privlačnim dejstvom Meseca. Slično ovome imaćemo obrazac za plimu izazvanu privlačnim dejstvom Sunca.

Ako stavimo

$$\frac{M}{m}\cdot\frac{r_0^4}{a^3} = K \tag{48}$$

$$\frac{M'}{m}\cdot\frac{r_0^4}{a'^3} = K' \tag{49}$$

i sa H označimo celokupnu plimu izazvanu udruženim dejstvom Sunca i Meseca imaćemo

$$H = h + h' \tag{50}$$

ili

$$H = H_1 + H_2 + H_3 \tag{51}$$

gde smo sa H_1, H_2 i H_3 označili

$$H_1 = \frac{3}{2}K\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2(\theta-\alpha) + \frac{3}{2}K'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\cos 2(\theta-\alpha') \tag{52}$$

$$H_2 = \frac{3}{2}K\sin 2\varphi\sin 2\delta\cos(\theta-\alpha) + \frac{3}{2}K'\sin 2\varphi\sin 2\delta'\cos(\theta-\alpha') \tag{53}$$

$$H_3 = K\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta + 3\sin^2\varphi\sin^2\delta - 1\right) + K'\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta' + 3\sin^2\varphi\sin^2\delta' - 1\right). \tag{54}$$

U gornjim izrazima najbrže se menja zvezdano vreme θ. Ono naraste, mereno u lučnoj meri, za vreme jednog zvezdanog dana za 2π, pa zato gornje trigonometriske funkcije od θ imaju periodu jednog zvezdanog dana, a funkcije od 2θ imaju poludnevne periode. Ostale promenljive menjaju se sporije; perioda Mesečevih koordinata je mesec dana, a Sunčevih godina dana. Zato bi parcijalna plima H_1 , ne uzimaju ći dejstva ekvatorskih koordinata u obzir, imala poludnevnu periodu, a plima H_2 jednodnevnu periodu, dok bi plima H_3 imala višednevnu periodu. Zato se članovi H_1 , H_2 odnosno H_3 nazivaju članovima poludnevne, jednodnevne odnosno višednevne periode.

Izvršimo transformaciju članova u obrascima i .

Kako je

$$\cos 2(\theta-\alpha') = \cos[2(\theta-\alpha)+2(\alpha-\alpha')] = \cos 2(\theta-\alpha)\cos 2(\alpha-\alpha') - \sin 2(\theta-\alpha)\sin(\alpha-\alpha')$$

to ćemo imati

$$H_1 = \cos 2(\theta-\alpha)\left[\tfrac{3}{2}R\cos^2\varphi\cos^2\delta + \tfrac{3}{2}R'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\cos 2(\alpha-\alpha')\right] -$$
$$- \sin 2(\theta-\alpha)\cdot\tfrac{3}{2}R'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\sin 2(\alpha-\alpha').$$

Ako uvedemo dve nove promenljive definisane jednačinama

(55)
$$\tfrac{3}{2}R\cos^2\varphi\cos^2\delta + \tfrac{3}{2}R'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\cos 2(\alpha-\alpha') = a_1\cos 2\varepsilon_1,$$
$$\tfrac{3}{2}R'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\sin 2(\alpha-\alpha') = a_1\sin 2\varepsilon_1$$

dobićemo

(56)
$$H_1 = a_1\cos 2(\varepsilon_1+\theta-\alpha)$$

Ako kvadriramo i saberemo jednačine (55) imaćemo

(57)
$$a_1 = \tfrac{3}{2}\cos^2\varphi\cdot\sqrt{R^2\cos^4\delta + R'^2\cos^4\delta' + 2RR'\cos^2\delta\cos^2\delta'\cos 2(\alpha-\alpha')},$$

a ako drugu jednačinu (55) podelimo prvom dobivamo

(58)
$$tg\, 2\varepsilon_1 = \frac{R'\cos^2\delta'\sin 2(\alpha-\alpha')}{R\cos^2\delta + R'\cos^2\delta'\cos 2(\alpha-\alpha')}$$

Jednačinom (56) pretstavljena je parcijalna plima H_1 jednom oscilatornom funkcijom vremena pri čemu su amplituda a_1 i perioda T_1 promenljive veličine. U argumentu funkcije (56) veličina $(\theta-\alpha)$ pretstavlja njegov glavni član; on naraste, pošto se θ i α mere u protivnom pravcu, za 2π u vremenu od jednog lunarnog dana, tj. dok se Zemlja jednom obrne prema Mesecu, dakle za $24^h 50^m$. Zato T_1 ima srednju periodu od $12^h 25^m$. , pa se ove ostilacije nazivaju poludnevnim. Oscilujući tom srednjom periodom amplituda oscilacije H_1 se postepeno menja. Ona usled promena rektascenzija α i α' dostiže svoju najveću vrednost kada je $\cos 2(\alpha-\alpha') = 1$, tj. kada je $2(\alpha-\alpha') = 0$; $2(\alpha-\alpha') = 360°$, dakle za $\alpha = \alpha'$; $\alpha = \alpha' + 180°$. U prvom slučaju nalaze se Sunce i Mesec u konjunkciji a u drugom u opoziciji.

Oba ova slučaja nazivaju se sicigijima. Tada imamo ili mlad ili pun mesec. Što se tiče deklinacija δ i δ' amplituda a_1 dostiže svoju najveću vrednost, sem gornje relacije kada je još $\delta=0$; $\delta'=0$. To se dešava kada u doba ravnodnevnica imamo pun ili mlad Mesec, a čvorovi Mesečeve putanje se nadju u ravnodnevničkim tačkama. U doba sicigija, kada je $\alpha=\alpha'$ ili $\alpha=\alpha'+180°$ je zbog (58) $\varepsilon_1=0$. U to doba dostižu poludnevni talasi plime svoju najveću vrednost za $2(\theta-\alpha)=0$, $2(\theta-\alpha)=360°$, tj. kada je

$$\theta=\alpha \quad ; \quad \theta=\alpha+180°$$

To se dešava u doba gornje, odnosno donje kulminacije Meseca.

Dalje vidimo da amplituda a_1 ima najveću vrednost, ukoliko to zavisi od geografske širine uočenog mesta , kada se mesto nalazi na ekvatoru dok prema polovima opada i u njima je jednaka nuli.

Amplituda a_1 osilacije H_1 dostiže svoju njamanju vrednost za $\cos 2(\alpha-\alpha')=-1$; $2(\alpha-\alpha')=180°$ ili $2(\alpha-\alpha')=540°$, tj. kada je $\alpha=\alpha'+90°$; $\alpha=\alpha'+270°$. To se dešava u doba kvadratura Sunca i Meseca. Tada je prema (58) $\varepsilon_1=0$ i poludnevni talasi plime dostižu svoju amplitudu za $\theta=\alpha$; $\theta=\alpha+180°$, tj. u vreme gornje ili donje kulminacije polumeseca. U sva ostala doba, sem pomenutih, je $\varepsilon_1\neq 0$, što znači da se kulminacija talasa plime ne poklapa sa kulminacijom meseca.

Na sličan način možemo i parcijalnu plimu H_2 pretstaviti jednom oscilacijom promenljive ampitude i faze.

Kako je

$$\cos(\theta-\alpha')=\cos[(\theta-\alpha)+(\alpha-\alpha')]=\cos(\theta-\alpha)\cos(\alpha-\alpha')-\sin(\theta-\alpha)\sin(\alpha-\alpha')$$

te za H_2 imamo

(59) $$H_2=\cos(\theta-\alpha)\left[\tfrac{3}{2}k\sin 2\varphi\sin 2\delta+\tfrac{3}{2}k'\sin 2\varphi\sin 2\delta'\cos(\alpha-\alpha')\right]-\sin(\theta-\alpha)\cdot\tfrac{3}{2}k\sin 2\varphi\sin 2\delta'\sin(\alpha-\alpha').$$

Ako uvedemo dve nove promenljive pomoću jednačina

(60) $$\tfrac{3}{2}k\sin 2\varphi\sin 2\delta+\tfrac{3}{2}k'\sin 2\varphi\sin 2\delta'\cos(\alpha-\alpha')=a_2\cos\varepsilon_2$$
$$\tfrac{3}{2}k'\sin 2\varphi\sin 2\delta'\sin(\alpha-\alpha')=a_2\sin\varepsilon_2$$

onda nam njihovo kvadriranje i sabiranje daje

(61) $$a_2=\tfrac{3}{2}\sin 2\varphi\cdot\sqrt{k^2\sin^2 2\delta+k'^2\sin^2 2\delta'+2kk'\sin 2\delta\sin 2\delta'\cos(\alpha-\alpha')}\ ,$$

dok na deljenje drgue prvom daje

(62)
$$tg\varepsilon_2 = \frac{R'\sin 2\delta' \sin(\alpha-\alpha')}{R\sin 2\delta + R'\sin 2\delta' \cos(\alpha-\alpha')}$$

Zato H_2 dobija vrednost

(63)
$$H_2 = a_2 \cos(\varepsilon_2 + \theta - \alpha)$$

Amplituda a_2 menja se promenom geografske širine. Na ekvatoru i polovima ona je jednaka nuli, dok je na širinama od 45° najveća.

Srednja vrednost periode parcijalne plime H_2 je jedan lunarni dan, tj. $24h.50m.$, pošto je glavni član njenog argumenta $(\theta-\alpha)$. Zato se njeni talasi zovu jednodnevni.

Zbog toga što se amplituda a_2 sadrži ispod korena član sa $\cos(\alpha-\alpha')$ koji zavisi od rektascenzija Sunca i Meseca, to će ona dostići svoju najveću vrednost, ukoliko to zavisi od ovih veličina, kada je $\alpha=\alpha'$ što odgovara konjunkciji Sunca i Meseca, tj. u doba mladog Meseca. Svoju minimalnu vrednost dostićiće amplituda a_2 kada je $\alpha=\alpha'+180^\circ$, što odgovara trenutku punog Meseca. U oba slučaja je zbog (62) $\varepsilon_2=0$, pa se čas plime poklapa sa kulminacijom Meseca. Što se tiče deklinacija Sunca i Meseca, amplituda a_2 oscilacije H_2 dostiže svoju najveću vrednost kada su deklinacije tih tela najveće, tj. kada je $\delta=28^\circ 36'$; $\delta'=23^\circ 27'$; a najmanju kada je $\delta=\delta'=0$. U ovom poslednjem slučaju vrednost amplitude a_2 biće jednaka nuli na svim geografskim širinama. To će biti kada Mesec i Sunce predju u isti mah kroz nebeski ekvator.

Što se tiče parcijalne plime H_3 , ona sadrži samo kvadrate trigonometriskih funkcija δ i δ' , pa zato ona dostiže svoju istu vrednost kako za pozitivne tako i za negativne vrednosti deklinacija Sunca odnosno Meseca. Ona se javlja na svim geografskim širinama. Perioda plime H_3 je pola meseca ukoliko to zavisi od Mesečeve deklinacije, a pola godine ukoliko to zavisi od Sunčeve deklinacije.

Ovako izgleda teorija morske plime. Njom je obuhvaćena suština pojave. Ako talas morske plime razložimo u jednostavne harmoniske talase opažamo da se periode njihovih oscilacija poklapaju sa periodama eliptičkog kretanja Sunca i Meseca i periodama svih drugih nejednakosti. Najviše opažene plime zaista se dogadjaju u doba sicigija. I dnevna oscilacija usko je vezana za deklinaciju Sunca i Meseca.

U nabrojanim pojavama postoji saglasnost izmedju teorije i stvarnosti. Medjutim ima i velikih razmimoilaženja. Po izloženoj teoriji najviša voda javljala bi se u trenutku i neposredno oko trenutka kulminacije Meseca, dok se u stvarnosti najviša voda javlja iza kulminacije Meseca, kadkad i po nekoliko časova docnije. Do ovog zakašnjavanja u suštini dolazi usled inercije čestica morske vode, pa se ova nepovinjuje trenutno prema Mesecu. Ovo zavisi i od oblika morskog dna kao i od isprepletanosti kopna. Dalje, prema teoriji maksimalna razlika izmedju najviše i najniže vode izazvane zajedničkim dejstvom Sunca i Meseca bila bi svega 0.78 m. Medjutim stvarne plime su daleko veće. Ovo nastaje usled toga što plimski talas izazvan privlačnim dejstvom Sunca i Meseca nastavlja svoje kretanje tako da u svakom novom talasu ima ostataka ranijih, pa se javlja pojava interferencije talasa. Kako se plimski talasi kreću od istoka prema zapadu te oni udaraju pri svom kretanju o kopna na koja nailaze te se od ovih odbijaju i tako nastaje ukrštanje talasa. Plimski talasi zavise od položaja kopna i pravca prostiranja njegovih obala kao i od oblika i dubine morskog dna. Iz svega ovoga vidi se da je morska plima, kakva se pojavljuje, vrlo komplikovana dinamička pojava, pa bi je moralo ispitivati posebno u svakom delu zemljine površine.

Do sada smo posmatrali smo plimu koju Sunce i Mesec izazivaju na našim morima. Medjutim, postoji plimatsko dejstvo i na zemljino jezgro, koje se nalazi u fluidnom stanju. Jačina ove plime zavisi od viskoznosti same te mase. Dalje, plime postoje i u atmosferi zemljinoj.

Poznato nam je da nam Mesec obrće jednu istu stranu i da se sada nalazi u čvrstom stanju. Nekada je on bio u fluidnom stanju i njegova perioda rotacije bila je kraća od periode njegovog obilaženja oko Zemlje. Zemlja je tada na njenu izazivala plimatsko dejstvo u većoj meri zbog Zemljine prilično prema Mesecu velike mase.

U davnoj prošlosti Mesec je bio u sastavu sa Zemljom. Zemlja se polako hladila i skupljala čime je dobijala sve veću uglovnu brzinu rotacije. Sunce je tada svojim privlačnim dejstvom izazivalo plime na celoj Zemljinoj masi dok je ova bila u fluidnom stanju, tako da je ova pojava odigrala značajnu ulogu pri stvaranju Zemljinog satelita kako to smatra G.H. Darwin. Pri skupljanju Zemljine fluidne mase povećavala se brzina Zemljine rotacije a time i aksifugalna sila. Ova rotaciona masa despela je u takav položaj u kome se sopstvena perioda plimtaskih talasala izazvanih Suncem poklopila sa stvarnom periodom plime, pri čemu se pojavila rezonancija, tako da su plimatski talasi postajali sve veći i veći. Sa druge strane usled napomenutog povećanja rotacione brzine ove mase Zemljina teža na ekvatorskim predelima sve je više gubila svoj uticaj. U jednom trenutku ova masa postaja je nestabilna i razdvojila se na dva dela da od jednog postane Zemljin satelit - Mesec , a od drugog naša Zemlja.

Tako se obrazovao Mesec koji je otpočeo kruženje oko zemlje, udaljavajući se postepeno od nje. Zbog svoje tada velike blizine prema Zemlji ova je na njemu, još dok je bio u fluidnom stanju izazivala veliki plimatski talas. Ovaj je bio isturen prema Zemlji na koga je Zemlja zbog relativno veće blizine ovog ispupčenja prema njoj više privlačila, želeći da zadrži iste čestice toga ispupčenja u istom položaju, pri čemu se javljalo trenje koje je usporavalo Mesečevu rotacionu brzinu dok je konačno nije sasvim ukočilo prema našoj Zemlji. Tako se ostvarila jednakost periode Mesečeve rotacije sa periodom njegovog obilaženja oko Zemlje. Na sličan načina je i Mesec koči zemljinu rotaciju, ali u mnogo manjoj meri zbog zemljine relativno dosta veće mase. Ovo kočenje bilo je jače dok je Zemlja bila u fluidnom stanju.Ono i danas postoji.

Videli smo da je Mesec nekada bio bliži Zemlji nego što je to danas, kao i da je nekada bio u sklopu sa Zemljom. Zato je Mesec nekada, dok je bio bliži izazivao na Zemlji jače plime. Pomoću obrasca (33) možemo izračunati visinu plime pri raznim Mesečevim geocentričnim rastojanjima i pri raznim vrednostima ugla ϑ . Na sledećoj tabeli imamo razliku izmedju najviše i najniže vode pri nekoliko raznih geocentričnih rastojanja Meseca i pri nekoliko različitih vrednosti ugla ϑ .

Ovde ćemo dati vrednosti za visinu plime na srednjem Mesečevom geocentričnom rastojanju pri nekoliko raznih vrednosti ugla ϑ.

a	ϑ		h	Разлика највише и најниже воде
$a = 60\,r_0$	0	180°	0.36 m	0.54
	10°	170°	0.34	0.51
	20°	160°	0.29	0.435
	30°	150°	0.26	0.39
	40°	140°	0.14	0.21
	54°44′8″	125°15′52″	0	0
	60°	120°	−0.045	0.0675
	70°	110°	−0.12	0.18
	80°	100°	−0.16	0.24
	90°		−0.18	0.27

Ovde vidimo promenu visine plime pri promeni ugla ϑ .

Sada izračunajmo kako se menjaju plime promenom Mesečevog geocentričnog rastojanja. Pomoću obrasca (33) iza vrednosti ugla ϑ od 0 odnosno $180°$ dobijamo

a	h
$60\,r_0$	0.36 m
50	0.63
40	1.22
30	2.90
20	9.79
10	98.50
9	107.40
8	192.51
7	283.37
6	362.47
5	626.35

Ovde smo uzeli vrednosti ugla ϑ od 0 odnosno $180°$.

Medjutim pri raznim vrednostima ugla ϑ imaćemo plime smanjene proporcionalno kao u prvoj tabeli za $a=60r_0$.

Iz ove poslednje tabele vidimo da je Mesec izazivao nekada, kada je bio bliži Zemlji daleko veće plime nego danas.

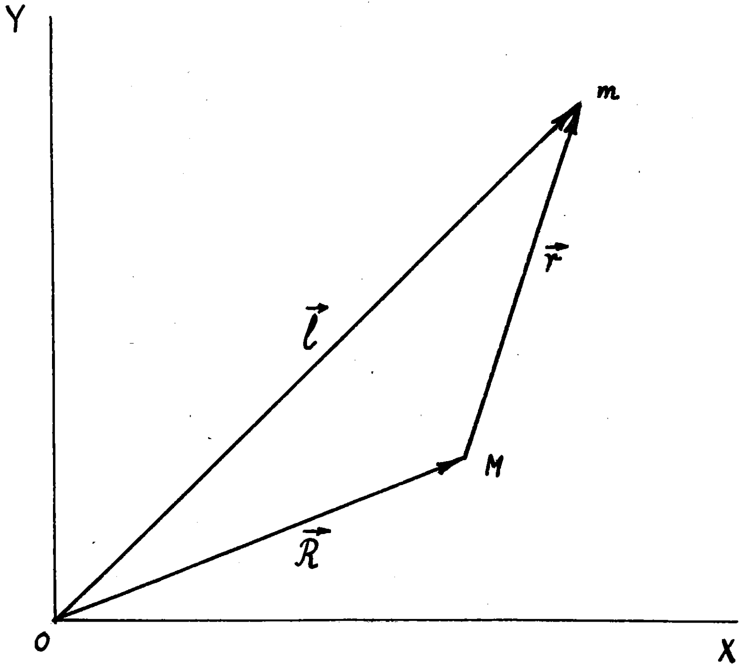
Rekli smo da nam Mesec okreće istu stranu i da se sada nalazi u čvrstom stanju. Nekada je on bio u fluidnom stanju i Zemlja je na njemu izazivala plimatski talas. Taj talas kao što smo rekli kočio je rotaciju Meseca. Ako uzmemo da se Mesec sasvim ohladio na rastojanju od Zemlje na kome je sada, onda primenom obrasca(33) možemo izračunati Mesečevo ispupčenje prema Zemlji, gde u obrascu(33) treba Zemlju zameniti Mesecom, a Mesec Zemljom, odnosno njihove mase, a poluprečnik zemljine sfere r_0 poluprečnikom mesečeve sfere. Kako poluprečnik Meseca iznosi 1736.6 km. to za ovo ispupčenje dobijamo vrednost od 13.25 metara.

L I T E R A T U R A:

M.Milanković, Udžbenik Nebeske mehanike. Beograd 1935. - H.Poincaré, Leçons de Mécanique Céleste III tome. Paris 1910. - C.Wolf, Les Hypotèses cosmogoniques. Paris 1885. - H.Poincaré, Leçons sur Les Hypotèses cosmogoniques. Paris 1913. - J.Bouteloup, Vagues,Marées Courants marins. Paris 1950.

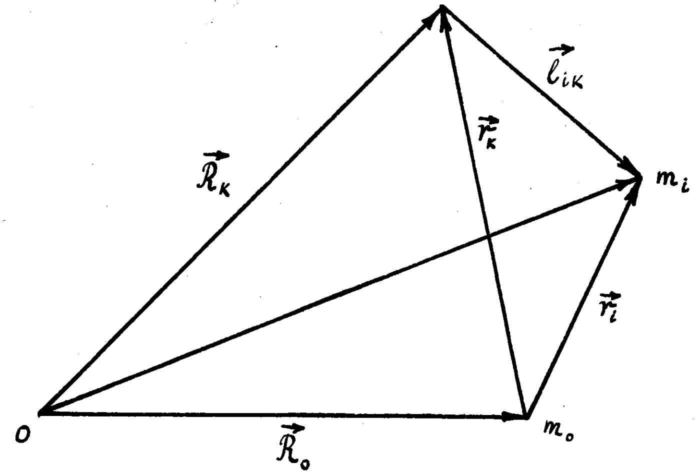
Прегледао

М. Миланковић



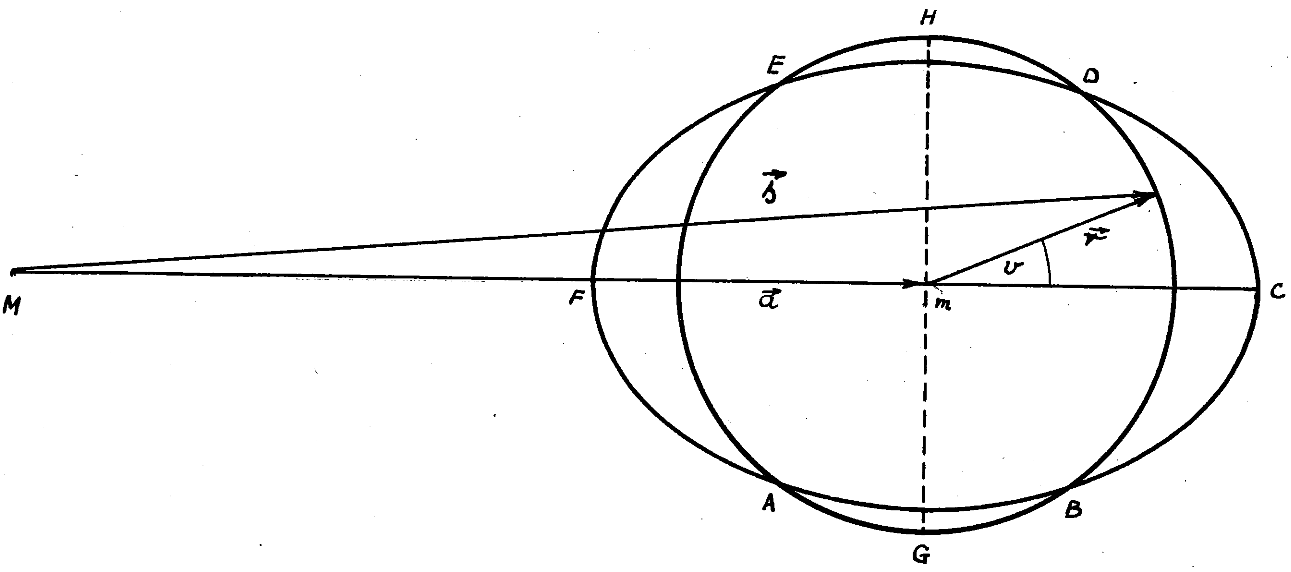
Y
m
$\vec{r}$
$\vec{l}$
M
$\vec{R}$
O
X

Сл. 1

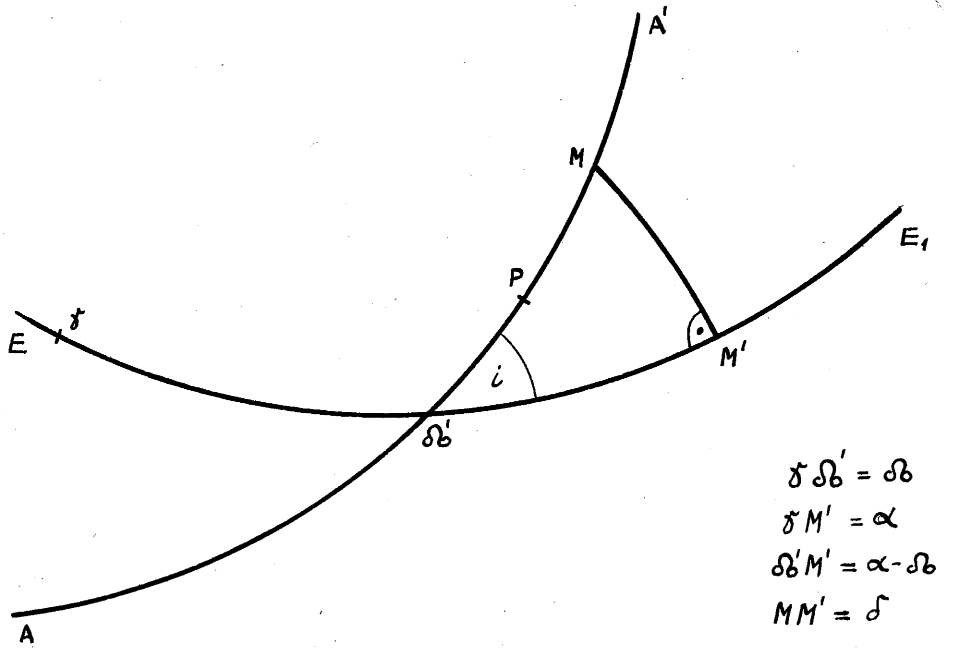


$m_к$
$\vec{l}_{iк}$
$\vec{r}_к$
$\vec{R}_к$
m_i
$\vec{r}_i$
O
m_o
$\vec{R}_o$

Сл. 2



Сл. 3



$\Upsilon \Omega' = \Omega \qquad \Omega' P = \hat{\omega}$

$\Upsilon M' = \alpha \qquad PM = \sigma$

$\Omega' M' = \alpha - \Omega \qquad \Omega' M = \sigma + \hat{\omega}$

$MM' = \delta$

Сл. 4

Сила поремећаја и њено поље
са применом у теорији морске плиме
(Дипломски рад)

одбрањен 28. јуна 1955. године
пред Комисијом у саставу
проф. др. Милутин Миланковић, ментор
проф. др. Војислав Мишковић, члан Комисије