ALGEBRA I
linearne i kvadratne jednačine

po predavanjima profesora
Dr JOVANA KARAMATE

preradio
BRANISLAV IVANOVIĆ

Izdanje Stručnog Udruženja studenata Prirodno-matematičkog
i filozofskog fakulteta
Beograd, 1947

A L G E B R A.

I. Deo.

LINEARNE I KVADRATNE JEDNAČINE.

I Glava. Opšti pojmovi.

1. Uvod. U nižoj matematici se pod algebrom podrazumeva ona grana matematike koja se bavi opštim brojevima, za razliku od aritmetike koja se služi posebnim brojevima odnosno numeričkim računanjem.

Kad na date elemente primenimo računske radnje dolazimo do obrazaca koji izvesnu pojavu ili zadatak izražavaju matematičkim jezikom.

Primer. Izvestan broj golubova se spustio na jedno drvo; jedni su se zadržali na višoj, a drugi na nižoj grani. Ako jedan golub sa niže grane predje na višu, prva grupa biće dva puta veća od druge; ali, ako jedan sa više grane sidje na nižu, biće ih podjednako. Koliko ima golubova?

Da bismo ovaj zadatak izrazili matematičkim jezikom, označimo broj golubova na gornjoj grani sa x, a broj golubova na donjoj sa y. Primenjujući na ove elemente računske radnje, na osnovu gornjih uslova, dolazimo do veza:

$$x+1=2/y-1)$$
$$x-1=y+1$$

odakle dobijamo da je $x=7$ i $y=5$; znači da je bilo 12 golubova.

2. Osnovne računske radnje, dele se na niže: sabiranje /+/, oduzimanje /-/, množenje /x/, deljenje /:/ i na više stepenovanje /^{n}/, korenovanje /$\sqrt{\ }$/, logaritmovanje /log/, kao i stepenovanje iracionalnim brojevima.

Niže računske operacije zajedno sa stepenovanjem sa celim brojevima nazivaju se racionalne operacije, racionalne operacije zajedno sa korenovanjem nazivaju se algebarske operacije. Ostale računske operacije, koje nisu algebarske, nazivaju se transcendentne operacije. /"Quod algebrae vires transcendit" – što prevazilazi moć algebre/.

3. Algebarski izrazi. Pod analitičkim izrazom podrazumevamo skup od dva ili više brojeva vezanih osnovnim računskim operacijama. Na primer:

$$\frac{/x+\sqrt{a-x}/\log x}{x^2}$$

Ako se u analitičkom izrazu javljaju samo algebarske operacije, takav se izraz naziva algebarski izraz. Na primer:

$$\frac{ab^3-b\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a-b}}$$

Često možemo u jednom algebarskom izrazu da izvršimo izvesne računske radnje, tako da on promeni oblik. Na primer, ako u izrazu

$$a^2-/a-b/^2 \qquad /1/$$

binom dignemo na kvadrat i izvršimo sabiranje, dobijamo

$$/2a-b/b \qquad /2/$$

Kako izrazi /1/ i /2/ prestavljaju jedan isti algebarski izraz, to su oni jednaki za svako a i b. U tom slučaju se kaže da su ti izrazi identično jednaki, a piše se

$$a^2-/a-b/^2 \equiv /2a-b/b$$

Ovaj se identitet razlikuje od obične jednakosti, odnosno jednačine, u tome što je kod jednačine jednakost ispunjena samo za izvesne, specijalne vrednosti onih veličina koje se u posmatranim izrazima javljaju. Na primer sledeća dva algebarska izraza

$$2x-a \quad \text{i} \quad x+2a$$

biće jednaka jedino pod uslovom, da vrednost veličine x iznosi

$$x=3a$$

Ako u jednačini figurišu samo algebarski izrazi, jednačina se naziva algebarska jednačina, za razliku od transcendentne, u kojoj se javljaju, pored algebarskih, još i transcendentni izrazi, kao npr.

$$a^x=b;\quad \lg/x+a/+\lg/x+b/=c;\quad \sin/x+\alpha/=\cos/x+\beta/;\quad x=\operatorname{tg}x;$$

$$x=a-\varepsilon\sin x$$

Zadaci: Ispitati da li su sledeće jednakosti jednačine ili identiteti:

1/ $/x+a/^2-/x-a/^2=4ax;$

2/ $/x+a+\sqrt{2ax}/\,/x+a-\sqrt{2ax}/=x^2+a^2;$

3/ $\frac{x+a-b}{a}-\frac{x+b-a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab};$

4/ $x^3-a^3=/x-a/\,/x^2+ax+a^2/;$

5/ $\frac{x}{b-a}+\frac{x}{2a}=\frac{b-a}{2b};$

6/ $\frac{1}{/b-c/\,/c-a/}+\frac{1}{/c-a/\,/a-b/}+\frac{1}{/a-b/\,/b-c/}=0;$

7/ $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\frac{2a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}$

4. Polinom. Rekli smo, da su algebarske operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje, deljenje, stepenovanje i korenovanje sa racionalnim izložiocem. Medjutim, u jednoj algebarskoj jednačini možemo se uvek osloboditi deljenja i korena tako da se ona svodi na oblik u kome će se javljati samo operacije sabiranja i množenja /uzevši u obzir, da je oduzimanje algebarsko sabiranje, a stepenovanje množenje/.

Razlomka se oslobadjamo tako, što levu i desnu stranu jednačine pomnožimo najmanjim zajedničkim sadržiteljem njenih imenitelja. Na primer:

Iz
$$\frac{(a-bx)/(ax+b)}{a^2x^2-b^2} = cx+d$$

$$(a-bx)/(ax+b) = (cx+d)(a^2x^2-b^2)$$

$$a-bx = (cx+d)(a^2x^2-b^2)(ax+b).$$

Korena se oslobadjamo sredjivanjem i stepenovanjem. Na primer kod jednačine

$$x+a+\sqrt{x}=b$$

oslobodićemo se korena ako $\sqrt{x}$ izdvojimo na jednu stranu zatim obe strane tako dobivene jednačine dignemo na kvadrat:

$$/\sqrt{x}/^2 = /b-x-a/^2$$

$$\therefore \quad x = /b-x-a/^2$$

U koliko je izložilac korena veći i u koliko ima više korena u jednačini, u toliko će takvih postupaka trebati više da bi se u dotičnoj jednačini oslobodili korena. Na primer, da se oslobodimo korena u jednačini

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$$

postupamo ovako:

Iz
$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$$

$$\therefore \quad a+\sqrt{b} = -\sqrt{c}$$

$$\therefore \quad a^2+2a\sqrt{b}+b = c$$

$$\therefore \quad 2a\sqrt{b} = c-a^2-b$$

$$\therefore \quad 4a^2b = /c-a^2-b/^2$$

Napomena. Ako se u nekoj jednačini od najmanje tri člana nalaze dva n-ta korena $/n \geq 3/$, onda se elementar

nim putem, /bez primene kompleksnih brojeva/ ovih korena ne možemo osloboditi.

Pomoću ovakvih operacija svaku algebarsku jednačinu sa jednom nepoznatom moći ćemo svesti na oblik

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+ \ldots\ldots\ldots +A_{n-1}x+A_n = 0.$$

Leva strana ove jednačine prestavlja polinom uredjen po stepenima nepoznate količine, koga možemo, kratkoće radi, obeležiti sa $P_n/x/$; tada ona uzima oblik

$$P_n/x/ = 0$$

Najviši stepen nepoznate količine x koji se javlja u polinomu naziva se stepen polinoma. Tako je gornja jednačina n-tog stepena.

Svaki algebarski problem sa jednom nepoznatom količinom svodi se na pitanje kada će jedan polinom n-tog stepena biti jednak nuli. Te vrednosti, za koje polinom postaje jednak nuli, nazivaju se koreni jednačine $P_n/x/=0$, ili nule polinoma $P_n/x/$.

Prema broju i stepenu nepoznatih količina, algebarske se jednačine dele na algebarske jednačine n-tog stepena sa jednom nepoznatom količinom:

$$P_n/x/ \equiv a_0+a_1x+a_2x^2+ \ldots\ldots\ldots +a_nx^n = 0 \;;$$

algebarske jednačine n-tog stepena, sa dve nepoznate količine:

$$P_n/x/ \equiv a_{00}+/a_{01}x+a_{11}y/ +(a_{02}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2/ + \ldots\ldots + /a_{0n}x^n+a_{1n}x^{n-1}+ \ldots +a_{nn}y^n/ = 0$$

ili, opšte, na algebarske jednačine n-tog stepena sa k nepoznatih količina.

Najzad nailazimo na sisteme od više algebarskih jednačina n-tog stepena, sa k nepoznatih količina. Na primer na jednačine:

$$P_n/x,y,z,\ldots\ldots/=0$$

$$Q_n/x,y,z,\ldots\ldots/=0$$

koje prestavljaju sistem od dve jednačine n-tog stepe na sa k nepoznatih.

Algebra je ona grana više matematike koja se bavi proučavanjem i ispitivanjem algebarskih jednačina, njihovih osobina i mogućnosti njihovog rešavanja.

Rešiti algebarsku jednačinu znači naći izraze obrazovane algebarskim operacijama takve, da kada se oni zamene umesto nepoznate količine u jednačini, leva strana jednačine postaje jednaka desnoj.

Algebarske jednačine kod kojih se koeficienti javljaju kao opšti brojevi, nazivaju se opšte algebarske jednačine, a kod kojih se koeficienti javljaju u vidu brojnih vrednosti nazivaju se brojne ili numeričke jednačine.

U ovom odeljku bavićemo se isključivo proučavanjem opštih algebarskih jednačina.

Zadaci. Izvršiti sledeće operacije:

1/ $/a+b-c-d/^2-/c+d-a-b/^2$;

2/ $/8a^3-x^6/\cdot/8a^3+x^6/-/2a+x^2/\{2a/2a+x^2/+x^4\}\{4a^2-x^2/2a-x^2/\}$

3/ $/x^4-5/4x^3+11/8x^2-1/2x/:/x^2-1/2x/$. Rešiti i učiniti probu.

4/ $/x^{8n}-y^{8r}/:/x^{5n}-x^{4n}y^r+x^n y^{4r}-y^{5r}/$. Rešiti i učiniti probu.

5/ Odrediti m i n tako da polinom x^4-3x^3+mx+n bude deljiv sa

$$x^2-2x+4.$$

6/ Odrediti m, n i p tako da polinom

$x^5-2x^4-6x^3+mx^2+nx+p$ bude deljiv sa $/x-3/\ /x+1/\ /x-1/$

7/ Proveriti da li proizvod $/1-ax/\ /1+ax/^{-1}/1+bx/^{1/2}$

$/1-bx/^{-1/2}$ ima vrednost 1, kada je $x=a^{-1}\left[2a/b\ 1\right]^{1/2}$

II Glava. LINEARNE JEDNAČINE.

1. Jednačina 1-og stepena sa jednom nepoznatom ima oblik:

$$ax+b=o$$

gde su a i b konstantni brojevi. Prilikom rešavanja ove jednačine mogu nastupiti sledeći slučajevi:

Prvi slučaj. Broj a je različit od nule $/a\neq o/$. Tada je $ax=-b$ i $x=-b/a$. Jednačina ima jedan koren.

Drugi slučaj. Broj a je jednak nuli, a b je različito od nule $/a=o,\ b\neq o/$. U tom je slučaju $ox+b=o$; jednačina tada nije zadovoljena ni za jednu vrednost x ; jednačina je nemoguća.

Treći slučaj. I a i b su jednaki nuli $/a=o, b=o/$. Jednačina dobija oblik $ox-o=o$ i ona je zadovoljena za ma koju vrednost nepoznate x; jednačina je neodredjena.

Posledica. Ako je jedna jednačina prvog stepena za dve razne vrednosti nepoznate x, onda i svaka vrednost zadovoljava tu jednačinu. Na primer, jednačina

$5x/7-x/5+7/1o=x/2+(x-1)/7o+5/7$, je zadovoljena za $x=o$, jer je $7/1o=-1/7o+5/7=49/7o$ i za $x=1$ jer je $5/7-1/5+7/1o=17/14$ i $1/2+5/7=17/14$,

$$\therefore 5x/7-x/5+7/1o\equiv x/2+x-1/7o+5/7.$$

Zadaci. Rešiti jednačine:

1/ $2x/3+4x-7=x/2-2x-9-3/2+1o$;

2/ $(x-1)/3=x-(x-7)/2+(5-x)/6$;

3/ $(x-1)/3=x-(x-3)/2+(7-x)/6$;

4/ U podne se velika i mala skazalka na časovniku poklope. Kada će se ponovo poklopiti?

5/ Dve tačke nalaze se na istoj pravoj i kreću se uniformnom brzinom. Odrediti trenutak njihovog susreta i diskutovati problem.

2. Diofantove jednačine. Uočimo jednu lineranu jednačinu sa dve nepoznate:

$$ax+by+c=o,$$

gde je $b\neq o$. Ako ovu jednačinu rešimo po y, dobijamo

$$y=-a/b\ x-c/b \qquad /1/$$

Dajući razne vrednosti x-u dobijamo odgovarajuće vrednosti za y. Prema tome jednačina /1/ ima bezbroj rešenja. Postavlja se zadatak da se nadju samo ona rešenja za x y koja su celi brojevi i to u slučaju kad su koeficienti racionalni brojevi, tj. kad /1/ ima oblik:

$$(p_1/p_2)x+(q_1/q_2)y+r_1/r_2=o \qquad /2/$$

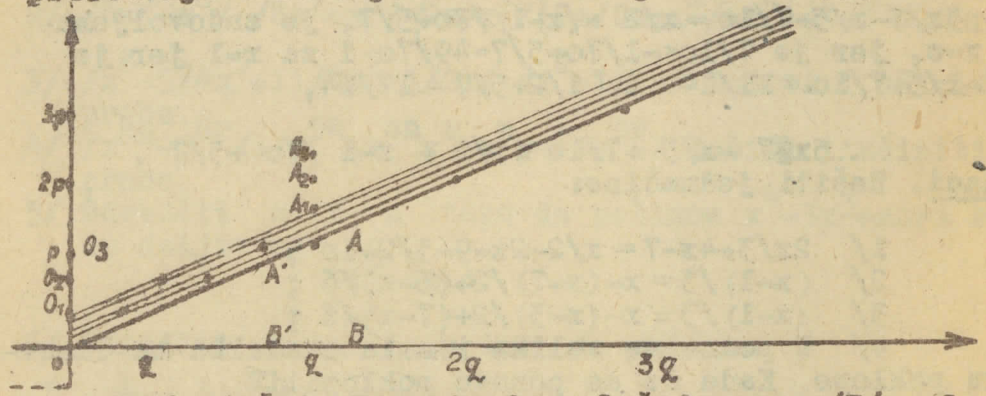
gde su $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$ celi brojevi.

Pomnožimo ovu jednačinu sa najmanjim zajedničkim sadržiteljem brojeva p_2, q_2 i r_2, tada ona uzima oblik $Qy=Px+R$ gde su P, Q i R celi brojevi.

Prema tome svaku jednačinu sa racionalnim koeficientima možemo svesti na jednačinu čiji su koeficienti celi brojevi.

Geometriski jednačini /3/ odgovara prava čiji je koeficient pravca P/Q, a odsečak na ordinatnoj osovini R/Q.

Ako ravan XOY prekrijemo kvadratnom mrežom sa čvorovima u tačkama čije su koordinate celi brojevi, postavljeni zadatak se svodi na ispitivanje da li prava /3/ prolazi kroz neki od ovih čvorova i koji su svi ti čvorovi /v. sl./Koordinate /x,y/ ovih čvorova prestavljaće rešenje Diofantove jednačine /3/.



Prvi slučaj. Posmatrajmo slučaj prave /3/, gde je $R=0$, tj. $Qy=Px$

$$\therefore \quad y=(P/Q)x=(p/q)x \qquad /4/$$

gde smo pretpostavili da smo u razlomku P/Q skratili sve zajedničke faktore, tako da $P/Q=p/q$, gde p i q nemaju više zajedničkih faktora, tj. da su oni relativno prosti. Iz jednačine /4/ vidimo da su njena rešenja $x=q$ i $y=p$.

Nemoguće je da prava prolazi još kroz koji čvor koji se nalazi izmedju koordinatnog početka i čvora $A/q,p/$. Jer ako bi postojao još neki čvor $A'/q', p'/$ izmedju početka i čvora $/q, p/$, na osnovu sličnosti trougla OAB i OA'B' bi

$$p/q=p'/q'$$

gde je $p>p'$ i $q>q'$, što se protivi pretpostavci da se

p/q ne može više skratiti.

Pored rešenja $x=q$ i $y=p$. jednačina /4/ je zadovoljena još i za beskrajno mnogo drugih, jer se trougao OBA može translatorno prenositi levo i desno duž prave OA.

Prema tome sva rešenja Diofantove jednačine

$$y=(p/q)x \qquad /4/$$

su:

$$x=\pm nq, \qquad y=\pm np, \quad \text{sa} \quad n=0,1,2,\ \ldots\ldots$$

Drugi slučaj. Uočimo sad pravu /4/ tj. OA i pomerajmo je translatorno do položaja O_1A_1, gde je

$$OO_1=AA_1=1 \qquad /5/$$

tj. do prave čija je jednačina

$$y=(p/q)x+1 \qquad /6/$$

U paralelogramu OAO_1A_1 nalaziće se tada tačno $q-1$ čvorova, jer se na svakoj od ordinata $x=1,2,\ldots\ldots q-1$, nalazi, prema /5/ jedan i samo jedan čvor. Prave koje prolaze kroz ove čvorove otsecaju na Y-osi duži veličine

$$1/q,\ 2/q,\ 3/q,\ \ldots\ldots\ldots\ (q-1)/q$$

i jednačine ovih pravih linija su:

$$Y=(p/q)x-n/q \quad \text{sa} \quad n=1,2,\ \ldots\ldots\ q-1 \qquad /7/$$

Sve ostale prave, izmedju pravih OA i O_1A_1 ne prolaze ni kroz jedan čvor.

Ako ovo rezonovanje primenimo na paralelograme $O_1A_1O_2A_2$, $O_2A_2O_3A_3$ itd. vidimo da će samo one prave prolaziti kroz čvorove koje otsecaju na Y-osi duži veličine

$$m+n/q, \text{ gde je } \begin{cases} n=0,1,2,\ldots\ldots q-1 & \text{i} \\ \pm m\ 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

i da ostale prave ne prolaze ni kroz koji čvor.

Znači, da će Diofantove jednačine oblika

$$y=\frac{p}{q}x+\frac{R}{Q}$$

gde su p i q relativno prosti brojevi, imati rešenja samo ako nezavisni član R/Q ima oblik

$$\frac{R}{Q} = m + \frac{n}{q} \quad \text{za} \quad 0 \leq n \leq q-1,$$

u suprotnom slučaju ona nema rešenja.

Ali u ovom prvom slučaju, tj. ako je Diofantova jednačina oblika

$$y = \frac{p}{q}x + m + \frac{n}{q}, \quad 0 \leq n \leq q-1,$$

gde su p i q relativno prosti brojevi, postoji uvek jedno i samo jedno rešenje

$$x = s \text{ i } y = m + t, \text{ gde je } 0 \leq s \leq q-1, \quad 0 \leq t \leq p-1$$

i beskrajno mnogo rešenja oblika

$$x = s \pm kq, \quad y = m + t \pm kp, \quad \text{sa} \quad k = 0,1,2,\ldots\ldots$$

Pri tome je s onaj ceo broj izmedju 0 i q za koji je $ps+n$ deljivo sa q, a t količnik $(ps+n)/q$.

Na primer. Diofantova jednačina

$$10y-6x-17=0$$

nema rešenja; ako je rešimo po y dobijamo

$$y = 3/5x+1+7/10$$

a razlomak $7/10$ nije oblika $n/5$.

Isto tako Diofantova jednačina $10y-6x-25=0$ nema rešenja, jer je

$$y = \frac{3}{5}x + 2 + \frac{1}{2}$$

a razlomak $1/2$ nije oblika $n/5$.

Medjutim Diofantova jednačina $5y-3x-4=0$ ima rešenja, jer je

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}, \quad \text{i broj } 2/5 \text{ ima}$$

oblik $n/5$.

Ona rešenja za koje je $0 \leq x \leq 4$ i $0 \leq y \leq 2$ je $s=2$ i $t=2$, jer je $(3.2+4)/5 = 2$; prema tome sva su rešenja

$$x = 2 \pm 5k, \quad y = 2 \pm 3k, \quad k = 0,1,2,\ldots\ldots$$

Iz prethodnog možemo zaključiti opšte pravilo: Diofantova jednačina

$$Px+Qy+R=0$$

gde P,Q i R celi i relativno prosti brojevi, ima beskrajno mnogo rešenja, ako su P i Q relativno prosti, a nema rešenja, ako P i Q imaju zajedničkih faktora.

Zadaci. Reši sledeće Diofantove jednačine:

1/ $13x+5y=67$; 2/ $47x-20y-70=0$; 3/ $5x+11y-210=0$;

4/ $97x+47y+440=0$; 5/ $42y-63x-22=0$;

6/ Odredi sva pozitivna rešenja Diofantove jednačine $9x+8y=260$;

7/ Jednačinu $ax+by+c=0$ zadovoljavaju vrednosti $x=7$, $y=9$ i $x=13$, $y=2$. Odredi koeficiente a, b i c i sva pozitivna rešenja.

8/ Zbir proizvoda nekog pozitivnog celog broja sa 5 i drugog pozitivnog celog broja sa 13 iznosi 107; koji su to brojevi?

9/ Broj 100 rastaviti na dva pozitivna sabirka, tako da jedan bude deljiv sa 7 a drugi sa 11.

II. Deo.

D E T E R M I N A N T E.

I. Glava. SISTEMI OD 2 LIN. JEDNAČINE-DETER. 2- 5 REDA.

Do pojma determinante dolazi se prilikom rešavanja sistema linearnih jednačina sa više nepoznatih.

1. Sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate. Neka je dat sistem:

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c&=0 \\ a_1x+b_1y+c_1&=0 \end{aligned}\right\} \qquad /1/$$

On se može rešiti metodom eliminacije i to: Množenjem prve jednačine sa b_1 a druge sa b, oduzimanjem nepoznate Y se eliminiše i dobijamo:

$$(ab_1-a_1b)\,X+(cb_1-c_1b)=0. \qquad /2/$$

Na isti način prvu jednačinu pomnožimo sa a_1 a drugu sa a, oduzimanjem dobijamo:

$$(ab_1-a_1b)\,Y+(ac_1-a_1c)=0 \qquad /3/$$

Iz /2/ i /3/ sledi:

$$X=\frac{cb_1-c_1b}{ab_1-a_1b} \quad \text{i} \quad Y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b} \qquad /4/$$

U /2/, /3/ ili /4/ mogu se pojaviti sledeći slučajevi:

1. Ako je izraz $ab_1-a_1b\neq 0$, nepoznate količine X i Y su odredjene i sistem /1/ ima samo jedno rešenje dato obrascima /4/.

2. Ako je izraz $ab_1-a_1b=0$

$$a\ \begin{cases} ac_1-a_1c\neq 0 \\ cb_1-bc_1\neq 0 \end{cases}$$

jednačine /2/ i /3/ nisu zadovoljene ni za jednu vrednost X-a i Y-a; prema tome sistem /1/ nema nijednog rešenja,- dati sistem je nemoguć.

3. Ako su izrazi ab_1-a_1b, ac_1-a_1c, cb_1-c_1b, svi jednaki nuli, jednačine /2/ i /3/ zadovoljene su za makoje vrednosti X-a i Y-a. Dati je sistem neodredjen.

U tom slučaju koeficienti zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c} \qquad /5/$$

Prema tome: Ako je $ab_1-a_1b\neq 0$, sistem /1/ ima jedno rešenje dato obrascima /4/; ako je $ab_1-a_1b=0$, sistem je nemoguć ili neodredjen. Izrazi oblika ab_1-a_1b nazivaju se determinantom drugog reda i pretstavljaju se kvadratnom šemom

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

gde se brojevi a, b, a_1, b_1, nazivaju elementima te determinante.

Po definiciji, determinanta drugog reda je razlika unakrsnih proizvoda njenih elemenata, počinjući s levim gornjim:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=ab_1-a_1b \qquad /6/$$

Brojitelji obrazaca /4/ pretstavljaju takodje determinante i to:

$$cb_1-c_1b=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$ac_1-a_1c=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Ako kraćeg pisanja radi stavimo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=\Delta_0,\ \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=\Delta_1,\ \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=\Delta_2,$$

i ako je $\Delta_0 \neq 0$, /1/ mogu se napisati u obliku:

$$x = -\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad y = -\frac{\Delta_2}{\Delta_0}. \qquad /7/$$

Primer. Rešiti sistem

$$2x + 3y - 5 = 0 ;$$
$$x - y + 2 = 0 .$$

Imamo: $\Delta_0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-3 = -5 \neq 0,$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3-6 = -3 ,$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+3 = 7 ;$

Dakle je: $x = -\frac{-3}{-5} = -\frac{3}{5} ,$

i $y = -\frac{7}{-5} = \frac{7}{5}$

Zadaci. Rešiti sisteme jednačine:

1/ $3x-5y = 3$, $6x+15y = 1$ 2/ $2x+3y = -1$, $x-4y = 5$ 3/ $x-y = 0$, $3x-4y = -1$

Izračunati determinante drugog reda:

4/ $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 5/ $\begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}$; 6/ $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$

7/ $\begin{vmatrix} \sin x & -1 \\ \cos^2 x & \sin x \end{vmatrix}$; 8/ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\cos x \end{vmatrix}$; 9/ $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$;

10/ $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin\frac{x}{2} & -\sin\frac{x}{2} \\ \cos\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} & -\cos x \\ \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} \\ \sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 0 \\ \sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

2. **Pravila o determinantama drugog reda su:**

I Pravilo.– Vrednost determinante se ne menja ako se redovi izmene sa kolonama.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = ad-cb = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} .$$

II Pravilo.– Determinanta menja svoj znak ako dva reda ili dve kolone izmenjaju svoja mesta.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = -(bc-ad) = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

III Pravilo. Determinanta koja ima dva jednaka reda ili dve jednake kolone, jednaka je nuli.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab-ba = 0 .$$

IV Pravilo.– Ako se jednim istim brojem pomnože ili podele svi elementi jednog reda ili jedne kolone date determinante, dobija se isti rezultat kao da je cela determinanta pomnožena ili podeljena tim brojem:

$$\begin{vmatrix} ma & b \\ mc & d \end{vmatrix} = mad-mbc = m(ad-bc) = m\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} .$$

V Pravilo.– Ako su elementi jednog reda ili jedne kolone date determinante zbirovi od n sabirka, determinanta se može napisati kao zbir od n determinanata istog reda.

$$\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix} = ad+a_1d-bc-bc_1 = ad-bc+a_1d-bc_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} .$$

VI Pravilo.– Determinanta se ne menja ako se dodaju elementima jednog reda ili kolone odgovarajući elementi nekog reda ili kolone pomnoženi sa jednim istim brojem.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+mb & b \\ c+md & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} .$$

VII Pravilo.– Ako su svi elementi jednog reda ili jedne kolone jednaki nuli, cela determinanta jednaka je nuli.

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{vmatrix} = 0$$

3. **Sistem od dve linearne jednačine sa tri nepoznate.**

Neka je dat sistem od dve linearne jednačine sa tri nepoznate:

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz+d &= 0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad /8/$$

Rešavajući ga kao x i y dobijamo :

$$X = \frac{-\begin{vmatrix} cz+d & b \\ c_1z+d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\Delta_o} = \frac{\begin{vmatrix} cz_1 & b \\ c_1z_1 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & b \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\Delta_o}$$

$$X = -\frac{z_1\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & b \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\Delta_o} \qquad Y = -\frac{z\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\Delta_o} \quad /9/$$

Ako Δ_o nije jednako nuli, sistem /8/ ima beskrajno mnogo rešenja jer svakoj proizvoljno uzetoj vrednosti Z-a odgovara po jedna odredjena vrednost X-a i Y-a.

4. Homogeni sistem od dve linearne jednačine sa tri nepoznate. To je sistem oblika :

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz &= o \\ a_1x+b_1y+c_1z &= o \end{aligned}\right\} \qquad /1o/$$

Ako ga rešimo kao x i y dobijamo :

$$X = -\frac{z\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\Delta_o} = -\frac{\Delta_1}{\Delta_o}Z \ , \quad Y = -\frac{z\begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}}{\Delta_o} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_o}Z \quad /11/$$

I u ovom slučaju ako je $\Delta_o \neq o$, sistem /1o/ imati bezbroj rešenja. Iz obrazaca /11/ sledi :

$$\frac{X}{\Delta_1} = \frac{Y}{\Delta_2} = -\frac{Z}{\Delta_o} = K \ ,$$

tj.

$$\frac{X}{\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}} = \frac{Y}{\begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}} = \frac{Z}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = K \qquad /12/$$

II. Glava. Sistem od 3 linearne jednačine. Determinante 3-ćeg reda.

1. Sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznate. Neka je dat sistem od tri linearne jednačine prvog stepena sa tri nepoznate količine X, Y, Z :

α

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz+d &= o \ , \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1 &= o \ ; \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 &= o \ . \end{aligned}\right\} \qquad /1/$$

Pomnožimo gornje jednačine respektivno količinama k, k_1, k_2, i saberimo sve tri tako dobivene jednačine; biće:

$$Ax+By+Cz+D = 0 \ , \qquad /2/$$

gde je:

$$\begin{aligned} A &= ak+a_1k_1+a_2k_2 \ , \\ B &= bk+b_1k_1+b_2k_2 \ , \\ C &= ck+c_1k_1+c_2k_2 \ , \\ D &= dk+d_1k_1+d_2k_2 \ . \end{aligned} \qquad /3/$$

Da bi u jednačini /2/ otpali članovi sa nepoznatim količinama Y i Z odredimo zasad još proizvoljne koleте k, k_1, i k_2 tako da bude:

$$\begin{aligned} B &= bk+b_1k_1+b_2k_2 = o \ , \\ \text{i} \qquad C &= ck+c_1k_1+c_2k_2 = o \ . \end{aligned} \qquad /4/$$

Sistem /4/ pretstavlja jedan homogeni sistem od dve linearne jednačine sa tri nepoznate količine k, k_1, k_2. Videli smo da je on uvek zadovoljen kad postoje sledeće proporcije:

$$\frac{k}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{k_1}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix}} = \frac{k_2}{\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}$$

Ako kao najjednostavnije uzmemo da su količine k, k_1, k_2, jednake svojim srazmernim determinantama biće:

$$A = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \ ,$$

ili

$$A = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \qquad /5/$$

Ovaj se izraz naziva **determinanta trećeg reda** i obeležava sledećom kvadratnom šemom :

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_o . \qquad /6/$$

Ako dalje količine k, k_1, k_2 smenimo u izrazu za D svojim srazmernim determinantama, dobićemo :

$$D = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_1 .$$

Prema tome jednačina /2/, koja je bila svedena na oblik :

$$Ax - D = o ,$$

postaje

$$\Delta_o x - \Delta_1 = o$$

Tako dobijamo rešenje za X :

$$X = - \frac{\Delta_1}{\Delta_o} \qquad /7/$$

Slično bismo dobili da je :

$$Y = - \frac{\Delta_2}{\Delta_o} \quad i \quad Z = - \frac{\Delta_3}{\Delta_o} , \qquad /7/$$

gde je

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} , \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

2. Determinanta 3-ćeg reda. Posmatrajmo sada determinantu Δ_o ; po definiciji je

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} .$$

Ako u ovom izrazu razvijemo determinante drugog reda dobićemo :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ab_2c_1 - a_1bc_1 + a_1b_1c + a_2bc_1 - a_2b_1c .$$

Kao što se vidi, i ova je determinanta sastavljena iz

jednog broja pozitivnih i negativnih članova. U kvadratnoj šemi determinante trećeg reda imamo tri horizontalna reda i tri vertikalne kolone sa ukupno devet elemenata.

Determinante trećeg reda najlakše se razvijaju pomoću Sarrus - ovog pravila. To se pravilo sastoji u tome, što se kvadratnoj šemi doda s desne strane prva i druga njena kolona :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

Zatim se pomnože po tri elementa, koji leže na istoj dijagonali. Svaki proizvod elemenata čija se dijagonala spušta s leva na desno, biće pozitivan, a negativan ako se dijagonala penje. Zbir svih ovako dobivenih kolona daje determinantu trećeg reda u razvijenom obliku:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 .$$

Po definiciji smo imali :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

Ove determinante drugog reda nazivaju se minorima determinante trećeg reda i dobijaju se na sledeći način: ako izbrišemo vrstu i kolonu u kojoj se nalazi elemenat $\underline{a}$, dobijamo elementu $\underline{a}$ odgovarajući minor

$$\begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{a_1} & b_1 & c_1 \\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Iz gornje definicije vidimo da se determinanta trećeg reda može razlomiti u algebarski zbir produkata elemenata jednog reda ili jedne kolone i njihovih odgovarajućih minora . Znaci tih elemenata raspoređjeni su sledećom šemom :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Zadaci. 1/ Razviti sledeće determinante trećeg reda:

a/ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ b/ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ c/ $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ o & 6 & 5 \end{vmatrix}$

d/ $\begin{vmatrix} o & o & -1 \\ o & x & q \\ 1 & p & r \end{vmatrix}$ d/ $\begin{vmatrix} a^{-4} & a^{-3} & a^{-2} \\ a^{-1} & 1 & a \\ a^{2} & a^{3} & a^{4} \end{vmatrix}$ e/ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

2/ Dokazati da t.zv. Vandermonde - ovu determinatu trećeg reda možemo napisati u obliku :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = /x_2-x_1/\ /x_3-x_1/\ /x_3-x_2/ ,$$

i naći odgovarajući izraz za determinantu :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ o & 1 & 2x_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}$$

Rešiti sledeće sisteme jednačina :

3/ $5x + 6y - 7z = 29$
$9x - 8y + 1oz = 41$
$-11x + 12y + 13z = 7$ odgovor: $x = 5,\ y = 3,\ z = 2$

4/ $3x - 4y = 6$
$2x + 3z = 26$
$5y - 6z = 18$ odgovor: $x = 1o,\ y = 6,\ z = 2$

<u>3. Pravilo o determinanti trećeg reda.</u> Sva pravila koja važe za determinante drugog reda važe i za determinante trećeg reda i glase :

<u>I. Pravilo.-</u> Vrednost se determinante ne menja ako se redovi izmene sa kolonama :

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} .$$

<u>II. Pravilo.</u> - <u>Determinanta menja svoj znak ako dva reda ili dve kolone izmenjaju medjusobno svoja mesta.</u> Ako donju determinantu razvijemo po elementima druge kolone, dobićemo :

$$\begin{vmatrix} b & a & c \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} .$$

<u>III. Pravilo.- Determinanta koja ima dva jednaka reda ili dve jednake kolone, jednaka je nuli.</u>

Determinanta neće se izmeniti kad jednaki redovi uzajamno promene svoja mesta. Ali kad dva reda uzajamno promene svoja mesta po II Pravilu determinanta menja svoj znak. Dakle je

$$\Delta = -\Delta ,$$
$$\therefore \Delta = 0 .$$

<u>IV. Pravilo.- Ako se sa jednim istim brojem pomnože ili podele svi elementi jednog reda ili jedne kolone date determinante, dobija se isti rezultat kao da je cela determinanta pomnožena ili podeljena tim brojem.</u>

$$\begin{vmatrix} ma & b & c \\ ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ma\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - ma_1\begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + ma_2\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= m\left\{ a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \right\} = m\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} .$$

<u>V. Pravilo.- Ako su elementi jednog reda ili jedne kolone date determinante zbirovi od n sabirka, determinanta se može napisati kao zbir od n determinanata istog reda.</u>

$$\begin{vmatrix} a+d & b & c \\ a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = /a+d/\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - /a_1+d_1/\begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ /a_2+d_2/\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ d\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} b & c \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

VI. Pravilo.- **Determinanta se ne menja ako se elementima jednog reda ili kolone dodaju odgovarajući elementi nekog drugog reda ili kolone pomnoženi jednim istim brojem :**

$$\begin{vmatrix} a+kb & b & c \\ a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} b & b & c \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

VII. Pravilo.- **Ako su svi elementi jednog reda ili jedne kolone jednaki nuli i cela determinanta je jednaka nuli**

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

Obraditi jedan numerički primer.

Zadaci. Dokazati da je :

1/
$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3^2 + a^3 \\ 1 & a_3^2 & a^3 + a_2 \\ 1 & a^3 & a + a^2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

2/
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & o \\ \cos\alpha & 1 & o_2 \\ g & f & r^2 \end{vmatrix} = r^2 \sin^2\alpha ;$$

3/
$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

4/
$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = /bc+ca+ab/\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} ;$$

5/
$$\begin{vmatrix} /a+b/^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & /b+c/^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & /c+a/^2 \end{vmatrix} = 2abc\ /a+b+c/^3$$

6/ **Naći vrednost determinante :**

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

7/ **Naći korene jednačine :**

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ /a+x/^3 & /b+x/^3 & /c+x/^3 \\ /2a+x/^3 & /2b+x/^3 & /2c+x/^3 \end{vmatrix} = 0 .$$

4. Sistem od tri linearne jednačine sa četiri nepoznate. **Neka je dat sistem od tri linearnih jednačina sa četiri nepoznatih količima :**

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i t + e_i = o \qquad /8/$$

gde je $i = 1, 2, 3.$

Ako $d_i t + e_i$ smatramo za **konstante to će se u rešenjima koja dobijamo za** $x, y, i\ z$, **sadržati i nepoznata** t . **Proizvoljno date im vrednostima** Zat **odgovaraju tada odredjene vrednosti za** x, y **i** z. **Prema tome biće bezbroj rešenja za količine** x, y **i** z **koja su data obrascem :**

$$X = -\frac{\Delta /dt+e,b,c/}{\Delta /a,b,c/} ; \quad Y = -\frac{\Delta /a,dt+e,c/}{\Delta /a,b,c/} ; \quad Z = -\frac{\Delta /a,b,dt+e/}{\Delta /a,b,c/} \qquad /9/$$

Gde na primer Δ /a,b,c/ prestavlja determinantu $\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$

Na osnovu IV iV pravila ovi se obrasci mogu napisati u obliku :

$$X = -\frac{t\Delta/d,b,c/+\Delta/e,b,c/}{\Delta/a,b,c/}$$

$$Y = -\frac{t\Delta/a,d,c/+\Delta/a,e,c/}{\Delta/a,b,c/}$$

$$Z = -\frac{t\Delta/a,b,d/+\Delta/a,b,c/}{\Delta/a,b,c/}$$

Ako drugi sabirak na desnoj strani ovih jednačina prebacimo na levu stranu i svaku od tih jednačina podelimo sa koeficientom y3 t, dobićemo :

$$\frac{X}{\Delta/d,b,c/}+\frac{\Delta/e,b,c/}{\Delta/d,b,c/\Delta/a,b,c/}=\frac{Y}{\Delta/a,d,c/}+\frac{\Delta/a,e,c/}{\Delta/a,d,c/\Delta(a,b,c)}=$$

$$=\frac{Z}{\Delta/a,b,d/}+\frac{\Delta/a,b,c/}{\Delta/a,b,d/\Delta/a,b,c/}=\frac{t}{\Delta/a,b,c/} \quad /10.$$

Ova jednačina daje vezu koja postoji izmedju X,Y,Z i t, da bi sistem /8/ bio zadovoljen.

5. Homogeni sistem od tri linearnih jednačina sa četiri nepoznate. Sistem /8/ postaje homogen kad je $e_i = o$ $i=1,2,3$, u tom slučaju iz obrazaca /10/ sledi:

$$\frac{X}{\Delta/d,b,c/}=\frac{Y}{\Delta/a,d,c/}=\frac{Z}{\Delta/a,b,d/}=\frac{t}{\Delta/a,b,c/}$$

ili

$$\frac{X}{\Delta/b,c,d/}=\frac{Y}{-\Delta/a,c,d/}=\frac{Z}{\Delta/a,b,d/}=\frac{t}{-\Delta/a,b,c/} \quad /11/$$

Ako napravimo šemu sa koeficientima posmatranog sistema dobićemo četiri kolone sa tri reda.

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \quad /12/$$

Prema obrascima /11/ vidimo da su nepoznate količine proporcionalne determinantama, koje se dobijaju kad se iz šeme /12/ uklone koeficienti odgovarajuće nepoznate.

α

III. Glava . Sistem od 4 lin. jed.-Determinante 4 - 5 reda.

1. Sistem od četiri linearnih jednačina sa četiri nepoznate. Uočimo sistem :

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i t + e_i = o \quad /1/$$

gde je $i = 1,2,3$ i 4. Ovaj sistem pretstavlja četiri linearne jednačine sa četiri nepoznate količine x, y, z i t napisane u opštem obliku.

Pomnožimo sve četiri jednačine sistema /1/ sa izvesnim količinama K_i /za $i=1,2,3,4$/ i saberimo tako dobivene jednačine. Dobićemo linearnu jednačinu oblika:

$$Ax + By + Cz + Dt + E = 0 \quad , \quad /2/$$

gde je

$$A = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4$$
$$B = b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4$$
$$C = c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 \quad /3/$$
$$D = d_1k_1 + d_2k_2 + d_3k_3 + d_4k_4$$
$$E = e_1k_1 + e_2k_2 + e_3k_3 + e_4k_4$$

Da bi smo rešili sistem /1/ treba naći takve vrednosti za k_1, k_2, k_3 i k_4 da u jednačini /2/ otpadnu npr. nepoznate y, z i t, tj. tako da bude

$$B = C = D = 0 \quad ,$$

ili, prema /3/

$$b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4 = o$$
$$c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 = o$$
$$d_1k_1 + d_2k_2 + d_3k_3 + d_4k_4 = o$$

Ovaj sistem pretstavlja sistem od tri homogene jednačine sa četiri nepoznate količine k_1, k_2, k_3, k_4. Da bi on bio zadovoljen potrebno je da postoji proporcija :

$$\frac{k_1}{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}} = \frac{k_2}{-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}} = \frac{k_3}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}} = \frac{k_4}{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}} \qquad /4/$$

Kao što se iz ove proporcije vidi, količine k_i, $i=1,2,3,4$, se mogu menjati a da proporcija ostane ista. Najprostije će biti ako uzmemo da su te količine jednake svojim srazmernim determinantama, tj. ako stavimo,

$$k_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad k_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$k_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad k_4 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \qquad /5/$$

pri tome smo u svim ovim determinantama kolone zamenili redovima. Ako ove vrednosti zamenimo u prvu jednačinu sistema /3/ dobijamo za koeficient A :

$$A = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \qquad /6/$$

$$+ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Ovaj izraz pretstavlja po definiciji determinantu četvrtog reda koju pišemo u obliku kvadratne šeme

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} . \qquad /7/$$

Pošto determinanta trećeg reda ima šest članova, to iz obrasca /6/ vidimo da determinanta četvrtog reda ima $4 \times 6 = 24$ članova. Svaki član determinante trećeg reda je proizvod od tri faktora; iz obrasca /6/ sledi da će **svaki član determinante četvrtog reda** pretstavljati **proizvod od četiri faktora** oblika $a_i \; b_j \; c_k \; d_r$

gde je $i=1,2,3,4$, $j=1,2,3,4$, $k=1,2,3,4$, i $r=1,2,3,4$. Kao što se vidi menjaju se jedino indeksi 1, 2, 3, 4, a broj menjanja /permutacija/ od četiri elementa iznosi $4! = 24$.

Sva pravila koja važe za determinante drugog i trećeg reda važe i za determinante četvrtog reda.

Vrednost determinante 4- og reda najbrže dobijamo ako je prvo razvijemo u minore po elementima jedne kolone ili jednog reda, npr. prema obrascu /6/, čime se izračunavanje determinante četvrtog reda svodi na determinante trećeg reda. Primetimo da Sarrus - ovo pravilo **ne važi** za determinante četvrtog reda.

Zamenom vrednosti k_1, k_2, k_3, k_4, iz /5/ u četvrtu jednačinu sistema /3/ dobijamo

$$E = \begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} ,$$

tako da se jednačina /2/ svodi na

$$Ax + E = 0 \quad ,$$

gde su vrednosti A i E date gornjim determinantama.

iz ove jednačine dobijamo rešenje za nepoznatu količi - nu X. Ako je A različito od nule, imaćemo jednu i samo jedna potpuno odredjenu vrednost za X, a ako je A jedneko nuli, rešenje je nemoguće ili neodredjeno.

Da bi smo našli vrednost za Y, količine k_1, k_2, k_3, k_4, treba birati tako da bude

$$A = C = D = 0 \quad ,$$

što ponova daje sistem od tri homogene linearne jedna - čine sa četiri nepoznate. Ovim postupkom dobijamo za y jednačinu

$$By + E = 0 \quad ,$$

gde je :

$$B = b_1 \begin{vmatrix} a_2 c_2 d_2 \\ a_3 c_3 d_3 \\ a_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 c_1 d_1 \\ a_3 c_3 d_3 \\ a_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_4 \begin{vmatrix} a_1 c_1 d_1 \\ a_2 c_2 d_2 \\ a_3 c_3 d_3 \end{vmatrix} , \qquad /8/$$

$$B = + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ b & a_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad , \quad E = \begin{vmatrix} e_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Determinante koje odgovaraju koeficientima A i B. su iste samo što su prve dve kolone izmenile svoja me - sta. To znači da je :

$$A = - B$$

Ako stavimo

$$A = \Delta o = \Delta \ /abcd/$$

rašenje sistema ·/1/ biće iskazano obrascima :

$$\begin{aligned} \Delta_o X + \Delta/ebcd/ &= 0 \\ \Delta_o Y + \Delta/aecd/ &= 0 \\ \Delta_o Z + \Delta/abed/ &= 0 \\ \Delta_o t + \Delta/abce/ &= 0 \end{aligned} \qquad /9/$$

Determinanta Δ_o koja se javlja kao koeficijent uz nepoznate količine naziva se <u>diskriminantom</u> dateg linearnog sistema. Ako je diskriminanta različita od nule, sistem ima jedno i samo jedno rešenje. Ako je diskriminanta jednaka nuli, sistem može biti neodredjen ili nemoguć.

<u>2. Homogeni sistem od četiri linearnih jednačina sa četiri nepoznate</u>. Ako u sistemu od četiri linearnih jednačina sa četiri nepoznatih, nezavisni članovi e_1 jednaki nuli, dobijamo homogeni sistem oblika

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = o \qquad /1o/$$

gde je $i = 1,2,3,4$, Rešenje sistema od četiri linear - nih jednačina sa četiri nepoznatih, glasilo je :

$$\begin{aligned} \Delta_o x + \Delta\ /ebcd/ &= o \\ \Delta_o y + \Delta\ /aecd/ &= o \\ \Delta_o z + \Delta\ /abed/ &= o \\ \Delta_o t + \Delta\ /abce/ &= o \end{aligned}$$

Svaka od determinanta Δ /ebcd/, Δ /aecd/, Δ /abed/, Δ /abce/ sadrži po jednu kolonu sa nezavisnim člano - vima e_i , a kako su oni jednaki nuli, to će i sve ova determinante biti jednake nuli, tj.

$$\Delta\ /ebcd/ = \Delta/aecd/ = \Delta/abed/ = \Delta/abce/ = o \qquad /11/$$

Prema tome ako je diskriminanta Δ_o sistema različi - ta od nule, biće :

$$x = y = z = t = o \quad ,$$

a ako je i $\Delta_o \neq o$ sistem /1o/ postaje neodredjen.

Medjutim, može se desiti da znamo da taj sistem ima rešenja različita od nule. U tom slučaju diskrimi - nanta Δ_o sistema mora biti jednako nuli, tj

$$\Delta_o = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad /12/$$

Prema tome obrazac /12/ daje uslov da homogeni sis -

tem /1o/ ima rešenja različita od nule. Jasno je da će u tome slučaju takvih rešenja biti beskonačno mnogo.

3. Sistem od četiri jednačine sa tri nepoznate.
Neka je dat jedan takav sistem :

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = o \qquad /13/$$

gde je $i = 1,2,3,4$. Ovaj je zadatak preodredjen, jer su nepoznate $x, y, z,$ odredjene već iz prve tri jednačine ovog sistema, ili iz prve, druge i četvrte, ili iz prve, treće i četvrte, ili iz druge, treće i četvrte. Rešenja tih mogućih četiri sistema od tri jednačina sa tri nepoznate ne moraju se poklapati.

Kakva veza treba da postoji medju koeficijentima pa da se rešenja svih četiri sistema slažu. Na to se pitanje može odgovoriti ako se sistem /13/ smatra kao homogeni sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate :

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i t = o \qquad /14/$$

gde je $i = 1,2,3,4$, a nepoznate su x, y, z, t. Da bi se ovaj sistem sveo na dati sistem /13/ treba da je $t = 1$. Prema tome je sistem /14/ zadovoljen za jednu vrednost nepoznate koja je različita od nule. Da bi jedan homogen sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate imao rešenja koja nisu jednaka nuli, potrebno je da diskriminanta sistema bude jednaka nuli; Znači, jedan sistem od četiri linearnih jednačina sa tri nepoznate će biti zadovoljen jednim rešenjem ako je njegova diskriminanta jednaka nuli. U tom se slučaju diskriminanta naziva **rezultatom eliminacije**, jer se ona dobija kao rezultat eliminacije, tj. ako se iz prve tri jednačine reše nepoznate x i y i z, i tako dobivene vrednost uvrsta u četvrtu jednačinu. U slučaju da je $\Delta_o = o$ rešenje se dobija ako se uzmu ma koje tri jednačine sistema /13/ i reše.

4. Zaključak iz svega što je dosada izloženo u pogledu rešavanja linearnih sistema, može se izvesti sledeći zaključak :

Ako je dat sistem linearnih jednačina , razlikuju se sledeći slučajevi :

1. Broj jednačina je manji od broja nepoznatih. U tom je slučaju problem neodredjen; dati sistem ima bezbroj rešenja, koja su ako je sistem homogen propor-

cionalna svojim odgovarajućim determinantama.

2. Broj jednačina je jednak broju nepoznatih. Dati sistem ima jedno i samo jedno rešenje ukoliko je diskriminanta različita od nule. A ako je ona jednaka nuli sistem je ili nemoguć ili neodredjen.

3. Broj jednačina je veći od broja nepoznatih. U tom je slučaju zadatak preodredjen. Da bi on imao jedno rešenje koeficienti moraju zadovoljavati izvesne uslove. Tako na pr. ako je broj jednačina za 1 veći od broja nepoznatih i to da diskriminanta sistema bude jednaka nuli.

Zadaci :

1/ Odrediti koordinate preseka pravih :

$$Ax + By + C = 0 \quad i \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

Diskutovati rešenje.

2/ Odrediti koordinate preseka triju ravni :

$$Ax+By+Cz+D = 0, \; A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0, \; A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$$

Diskutovati rešenje.

3/ Date su jednačine triju pravih u ravni :

$$Ax+By+C = 0, \quad A_1x+B_1y+C_1 = 0, \quad A_2x+B_2y+C_2 = 0$$

Naći uslov da se ove tri prave seku u jednoj tački. /primena paragrafa 3 /

4/ Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz dve date tačke $M_1/x_1y_1/$ i $M_2/x_2y_2/$.

Neka je jednačina te prave $Ax + By + C = 0$. Pošto tačke M_1 i M_2 leže na toj pravoj, to njene koordinate zadovoljavaju prave, pa je :

$$A_1 x_1 + By_1 + C = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$
$$A\,x + By + C = 0$$

Ovde imamo jedan homogeni sistem od tri jednačine sa tri nepoznate A, B i C. Da bi prava postojala mora ili A ili B biti različito od nule, a to će biti moguće, ako je :

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

ova jednačina pretstavlja traženu jednačinu prave koja prolazi kroz dve date tačke.

5/ Odrediti jednačinu ravni, koja prolazi kroz tri date tačke $M_1/x_1y_1/$, $M_2/x_2y_2/$, $M_3/x_3y_3/$.

6/ Odrediti uslov da se četiri ravni seku u jednoj tački.

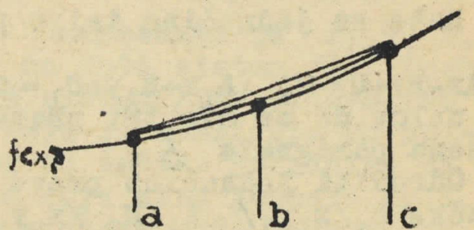
7/ Dokazati da je površina trougla :

$$P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a & f/a/ \\ 1 & b & f/b/ \\ 1 & c & f/c/ \end{vmatrix}$$

gde su $M_1/x_1y_1/$, $M_2/x_2y_2/$, $M_3/x_3y_3/$, temena toga trougla.

8/ Dokazati na osnovu dokaza iz predhodnog zadatka: uslov da tri tačke $M_1/x_1y_1/$, $M_2/x_2y_2/$, $M_3/x_3y_3/$, leže na jednoj pravoj je:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



9/ Dokazati da je zapremina tetraedra :

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1y_1 & z_1 & 1 \\ x_2y_2 & z_2 & 1 \\ x_3y_3 & z_3 & 1 \\ x_4y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & f/a/ \\ 1 & b & f/b/ \end{vmatrix} = 0$$

gde su $M_1/x_1y_1/$, $M_2/x_2y_2/$, $M_3/x_3y_3/$, $M_4/x_4y_4/$, temena toga tetraedra.

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y \\ 1 & a & a^2 & f/a/ \\ 0 & 1 & 2a & f/a/ \\ 1 & b & b^2 & f/b/ \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y \\ 1 & a & a^2 & f/a/ \\ 1 & b & b^2 & f/b/ \\ 1 & c & c^2 & f/c/ \end{vmatrix} = 0$$

1o/ Uslov od četiri date tačke $M_1/x_1y_1/$, $M_2/x_2y_2/$, $M_3/x_3y_3/$, $M_4/x_4y_4/$ leže na jednoj ravni, je:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

11/ Naći uslov da dve kvadratne jednačine imaju jedan zajednički koren :

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

Pomnožimo obe jednačine sa x i obrazujmo sledeći linearni sistem od četiri jednačina sa tri nepoznate x^3, x^2 i x :

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx \quad &= 0 \\ ax^2 + bx + c &= 0 \\ a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x \quad &= 0 \\ a_1x^2 + b_1x + c_1 &= 0 \end{aligned}$$

Da bi ovaj sistem mogao imati jedno zajedničko rešenje diskriminanta sistema mora biti jednaka nuli, tj:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

Gornja jednačina je traženi uslov. Leva strana obe jednačine naziva se <u>rezultanta</u>.

12/ Naći uslove da bi sistem od $\underline{4}$ linearnih jednačina sa $\underline{2}$ nepoznate imao jedno rešenje.

13/ M_1, M_2 i M_3 pretstavljaju tri kolinearne tačke. Neka je d_{12} rastojanje $\overline{M_1M_2}$, d_{13} rastojanje $\overline{M_1M_3}$, d_{23} rastojanje $\overline{M_2M_3}$. Dokazati da je :

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & 1 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

14/ **Ako su M_1, M_2, M_3, M_4 koltlanarne tačke, dokazati da je :**

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

15/ **Jednačina** date prave je $Ax+By+c=0$. **Odrediti jednačinu prave koja je paralelna** sa **datom pravom i prolazi kroz datu tačku $M_1/x_1y_1/$.**

odgovor:
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ B & -A & 0 \end{vmatrix} = 0$$

16/ **Dokazati** da se **jednačina prave, koja prolazi kroz** dve date tačke, **može** napisati i u **sledećem obliku:**

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x - x_2 & y - y_2 \end{vmatrix} = 0$$

17/ **Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz datu tačku M_1 i kroz koordinatni početak.**

odgovor : $\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$

18/ **Odrediti** površinu **trougla čija su temena :**

a/ /1,2/, /-2,3/, /5,6/.
b/ /2,3/, /-4,1/, /-1,2/

c/ $/x_1y_1/$, $/-\frac{c}{A}, 0/$, $/0, -\frac{c}{B}/$

19/ **Dokazati** da će tačka **/x,y/ ležati u trouglu $M_1M_2M_3$,** ako su **determinante :**

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

jednako označene .

2o/ **Dokazati** da je jednačina **kruga koji prolazi kroz tri tačke** M_1, M_2, M_3, sledeća :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

21/ **Naći uslov da četiri tačke leže na jednom krugu.**

22/ **Izračunati :**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}$$

23/**Izračunati:**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

24/ **Dokazati da je:**

$$\begin{vmatrix} ab_1 - a_1b & ab_2 - a_2b \\ ac_1 - a_1c & ac_2 - a_2c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

25/ **Izračunati :**

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

26/ **Dokazati da je:**

$$n \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

gde je $\underline{m}$ **neki činitelj.**

27/ **Date su dve algebarske jednačine:**

$$a_0 x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$
$$b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

Dokazati da je uslov da ove dve jednačine imaju jedno zajedničko rešenje :

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

28/ **Izračunati vrednost simetrične funkcije :**

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix}$$

29/ **Dokazati da je:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2^4$$

30/ **Dokazati da je:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

31/ **Izračunati:**

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -5 & -3 \\ -4 & -5 & -3 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

odgovor: 0

32/ **Izračunati:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \\ 27 & 64 & 125 & 216 \\ 64 & 125 & 216 & 343 \end{vmatrix}$$

odgovor: 6^4

33/ **Dokazati da je :**

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = /a^2+b^2+c^2+d^2/^2$$

34/ **Izračunati:**

$$\begin{vmatrix} \cos /\alpha-\beta/ & \cos /\beta-\gamma/ & \cos /\gamma-\alpha/ \\ \cos /\alpha+\beta/ & \cos /\beta+\gamma/ & \cos /\gamma+\alpha/ \\ \sin /\alpha+\beta/ & \sin /\beta+\gamma/ & \sin /\gamma+\alpha/ \end{vmatrix}$$

35/ **Izračunati :**

$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}$$

odgovor : $/a + b + c/^3$

36/ **Dokazati identitet :**

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} \equiv 4/b+c/ \cdot /c+a/ \cdot /a+b/$$

37/ **Dokazati identitet :**

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \equiv 2(bc+ac+ab)^3$$

33/ **Dokazati identitet :**

$$\begin{vmatrix} -\frac{bc}{b+c} & b & c \\ a & -\frac{ca}{c+a} & c \\ a & b & -\frac{ab}{a+b} \end{vmatrix} \equiv \frac{(bc+ca+ab)^3}{(b+c)\cdot(c+a)\cdot(a+b)}$$

39/ **Dokazati identitet:**

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \equiv a\,(b-a)\cdot(c-b)\cdot(d-c)$$

4o/ **Brojevi** 546, 273 i 169 su deljivi sa 13 ; dokazati da je i determinanta

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

deljiva sa 13.

41/ **Dokazati identitet :**

$$\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} \equiv (a-b)^2\cdot\left[(a+b)^2-4x^2\right]$$

42/ **Izračunati vrednost determinante :**

$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin 2a \\ \sin b & \cos b & \sin 2b \\ \sin c & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix}$$

43/ **Izračunati :**

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}$$

44/ **Izračunati :**

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

odgovor : $4 \sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)$
gde je $2p = a+b+c$

45/ **Dokazati identitet :**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \equiv -16\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}$$

46/ **Dokazati identitet :**

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \\ \cos 3a & \cos 3b & \cos 3c \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv (\cos b-\cos c)\cdot(\cos c-\cos a)\cdot(\cos a-\cos b)\cdot(\cos a+\cos b+$$

$$+\cos c+2\cos a\cos b\cos c)$$

47/ **Ako je** $S = a+b+c+d$, pokazati da je :

$$\begin{vmatrix} (S-a)^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^2 & (S-b)^2 & c^2 & d^2 \\ a^2 & b^2 & (S-c)^2 & d^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & (S-d)^2 \end{vmatrix} \equiv 2S^5\,abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{4}{S}\right)$$

48/ **Pokazati** da je uslov da tri data kruga :

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1 = 0$$
$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2 = 0$$
$$x^2+y^2+a_3x+b_3y+c_3 = 0$$

imaju jednu zajedničku tačku :

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Rešiti jednačine krugova po $x^2 + y^2$, x i y i **zatim eliminisati** x i y iz **dobijenih relacija.**

49/ **Pokazati** da su **jednake medjusobom sledeće dve determinante :**

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \; 1 \; \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & ab+bc+ca & abc \\ 1 & b+c+d & bc+cd+db & bcd \\ 1 & c+d+a & cd+da+ac & cda \\ 1 & d+a+b & da+ab+bd & dab \end{vmatrix}$$

50/ **Znajući da je determinanta :**

$$\begin{vmatrix} x^2+2 & 4x+2 & 2x+2 \\ 4x+2 & x^2+13 & 4x+3 \\ 2x+2 & 4x+3 & x^2+5 \end{vmatrix}$$

kvadrat determinante oblika

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ c & x & d \\ e & f & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 0 & 1 & 2y & 3y^2 \end{vmatrix}$$

izračunati a,b,c,d,e,f ./odgovor: a=b=1, c=3, d=2, e=1, f=2/.

51/ **Rešiti sistem :**

$$\begin{aligned} x-4y+2z &= -1 \\ 2x-3y-z-5t &= -7 \\ 3x-7y+z-5t &= -8 \\ y-z-t &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 1 & y & y^2 & y^3 \end{vmatrix}$$

52/ **Odrediti** a **tako pa** da donji sistem **ima reše-nja različita od nule :**

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + az &= 0 \\ 6x + ay + 7z &= 0 \end{aligned}$$

53/ **Dat** je preodredjeni sistem **:**

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ 3x + 2y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Da li ovaj **sistem** ima jedno zajedničko **rešonje ?**

54/ **Rešiti sistem linearnih jednačina :**

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3 &= 0 \\ x + by + b^2z + b^3 &= 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 &= 0 \end{aligned}$$

gde su a,b,c, **različiti** brojevi .

55/ **Rešiti sistem linearnih jednačina :**

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3t + a^4 &= 0 \\ x + by + b^2z + b^3t + b^4 &= 0 \\ x + cy + c^2z + c^3t + c^4 &= 0 \\ x + dy + d^2z + d^3t + d^4 &= 0 \end{aligned}$$

gde su a, b, c, d, **različiti brojevi.**

56/ **Rešiti sistem :**

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= d \\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2 \end{aligned}$$

gde su a, b, c **različiti brojevi.**

57/ **Rešiti** sistem **:**

$$\begin{aligned} x + y + z &= a+b+c \\ bx + cy + az &= bc+ca+ab \\ cx + ay + bz &= bc+ca+ab \end{aligned}$$

58/ **Rešiti** sistem **:**

$$\begin{aligned} x + Y + Z &= a + b + c \\ bx + cy + az &= a^2 + b^2 + c^2 \\ cx + ay + bz &= a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

59/**Rešiti** sistem **:**

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z &= a^2/b-c/ + b^2/c-a/ + c^2/a-b/ \end{aligned}$$

6o/ Rešiti sistem :

$$x + ay + a^3 z + a^4 = 0$$
$$x + by + b^3 z + b^4 = 0$$
$$x + cy + c^3 z + c^4 = 0$$

61/ Diskutovati sistem :

$$ax + by + z = 1$$
$$x + aby + z = b$$
$$x + by + az = 1$$

ako parametri a i b **uzimaju razne vrednosti.**

62/ Diskutovati sistem :

$$\lambda x + y + z = 1$$
$$x + \lambda y + z = \lambda$$
$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

63/ Diskutovati sistem :

$$\lambda x + y + z + t = 1$$
$$x + \lambda y + z + t = \lambda$$
$$x + y + \lambda z + t = \lambda^2$$
$$x + y + z + \lambda t = \lambda^3$$

III. Glava. KVADRATNA JEDNAČINA S JEDNOM NEPOZNATOM:

I. **Jednačina 2-og stepena** sa jednom nepoznatom je oblika :

$$ax^2 + bx + c = 0 \,, \quad \text{sa} \quad a \neq 0 . \qquad /1/$$

Medjutim b ili c **mogu** biti **jednaki nuli; tada imamo** **nepotpunu** kvadratnu jednačinu.

Pretpostavimo prvo da je nezavisan član c jednak nuli. Tada se jednačina /1/ svodi na

$$ax^2 + bx = 0 \qquad /2/$$

ili

$$x/ax + b/ = 0 .$$

Proizvod će biti jednak nuli, ako je jedan ili drugi faktor jednak nuli :

$$x = 0 \,, \quad \text{ili} \quad ax + b = 0$$

tj. ako je $x = 0$ ili $x = -b/a$.

Jedno je rešenje uvek jednako nuli.

Pretpostavimo sada da je $b = 0$, a $c \neq 0$; **tada jednačina** /1/ ima oblik

$$ax^2 + c = 0 \qquad /3/$$

$$\therefore x^2 = -c/a .$$

Ako je $-c/a$ **negativno**, kako **nema broja čiji je kvadrat negativan**, to jednačina u tom slučaju **nema realnih korena.** Ako je $-c/a$ pozitivno, postoje dva broja $+\sqrt{-c/a}$ i $-\sqrt{-c/a}$ koji, dignuti na kvadrat, daju $-c/a$. Jednačina ima za korene ta dva broja.

Ako je najzad $b = c = 0$, jednačina /1/ se svodi na

$$ax^2 = 0 \qquad /4/$$

U tom slučaju ona ima dva korena koji su jednaki nuli.

Predjimo sada na rešavanje potpuno kvadratne jednačine; uočimo polinom

$$p/x/ = ax^2 + bx + c \; ; \qquad /5/$$

kako je $a \neq 0$ biće:

$$p/x/ = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$\therefore \; p/x/ = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

$$\therefore \; p/x/ = a\left\{/x + \frac{b}{2a}/^2 - \frac{b^2\ 4ac}{4a^2}\right\} . \qquad /6/$$

Izraz $D = b^2 - 4ac$ naziva se diskriminanta.
Mogu nastupiti tri slučaja :

1°. $D > 0$. U tom se slučaju izraz u /6/ može napisati u obliku

$$p/x/ = a\left\{/x + \frac{b}{2a}/^2 - /\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}/^2\right\} \qquad /7/$$

$$p/x/ = a/x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}/ \cdot /x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}/.$$

Data kvadratna jednačina /1/ tj. $p/x/ = 0$, raspada se dakle na dve linearne jednačine

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0,$$

$$\text{i} \qquad x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0,$$

iz kojih dobijamo dva korena jednačine /1/ i to:

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad /8/$$

Sam polinom /5/ možemo tada napisati i u obliku

$$p/x/ = a/x-x_1/ \cdot /x-x_2/. \qquad /9/$$

2. $D = 0$. Jednačina /1/, tj. $p/x/ = 0$, se svodi na

$$/x + \frac{b}{2a}/^2 = 0,$$

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Ako pustimo da $D \to 0$, oba korena /8/ postaju jednaka i teže vrednosti $-\frac{b}{2a}$. Zato kažemo da je koren $/-\frac{b}{2a}/$ dupli koren jednačine /1/

3. $D < 0$. Izraz /6/ za $p/x/$ možemo tada napisati u obliku zbira dva kvadrata

$$p/x/ = a\left\{/x + \frac{b}{2a}/^2 + /\frac{\sqrt{4ac-b}}{2a}/^2\right\}.$$

Prema tome $p/x/$ ne može nikad biti jednak nuli. Data jednačina /1/ nema realnih korena.

Specialan slučaj. Ako je $a = 1$, a koeficient b paran, tj. ako jednačina /1/ ima oblik

$$p/x/ = x^2 + 2px + q = 0 .$$

tada dobijamo jednostavnije izraze, i to

$$p/x/ = /x + p/^2 - p^2 + q .$$

a za korene

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - q} .$$

2. Sistem od dve kvadratne jednačine sa jednom nepoznatom. Neka su nam date dve kvadratne jednačine :

$$f/x/ \equiv ax^2 + bx + c = 0 ,$$

$$g/x/ \equiv a'x^2 + b'x + c' = 0 . \qquad /1/$$

Ovaj sistem u opštem slučaju nema rešenja. Sistem /1/ je ekvivalentan sistemu :

$$ay + bx + c = 0 ,$$

$$a'y + b'x + c' = 0 , \qquad /2/$$

$$y = x^2 .$$

Iz prve dve jednačine sistema /2/ dobijamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} ,$$

pod uslovom da je $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Zamenjujući ove vrednosti x-a i y-a u treću jednačinu sistema /2/ dobija se:

$$R = /ca' - ac'/^2 - /ab' - ba'/ /bc' - cb'/ = 0 \qquad /3/$$

Prema tome, ako je uslov /3/ i ispunjen, kvadratne jednačine $f/x/ = 0$ i $g/x/ = 0$ imaju zajednički koren dat izrazom

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Izraz R naziva se rezultanta jednačine /1/

U slučaju da je i $R = 0$ i $\frac{a}{a'}$ $\frac{b}{b'} \neq c$, prema /3/ je i

$$ca' - ac' = 0 \quad ,$$

a otuda

$$a/a' = b/b' = c/c' \quad .$$

U ovom se slučaju dakle jednačine /1/ razlikuju se samo konstantnim faktorom i imaju oba korena zajednička.

Napomena. 1. Navodimo još i sledeću osobinu rezultante: Potreban i dovoljan uslov da se jedan i samo jedan koren kvadratne jednačine nalazi između korena druge kvadratne jednačine je, da rezultanta bude negativna.

2. U zadatku 11, prvog odeljka videli smo, da se rezultanta može napisati i u obliku determinante

$$R = \begin{vmatrix} a & b & c & o \\ o & a & b & c \\ a' & b' & c' & o \\ o & a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

3. Grafičko rešavanje kvadratnih jednačina.

kvadratnoj jednačini:

$$p/x/\ \ ax^2+bx+c = 0 \ , \qquad /1/$$

A odgovara polinom, tj. funkcija:

$$y = p/x/ = ax^2+bx+c \ , \qquad /2/$$

koja je definisana za sve vrednosti x-a.

Diagram ove funkcije je parabola čija je osa paralelna sa Y-osom, sa temenom T u tački $x = -b/2a$, $y = /4ac-b^2/4a$, koji je najviše ili najniža tačka parabole, prema tome da li je $a < 0$ ili $a > 0$.

Zaista, ako polinom p/x/ napišemo u obliku /6/, § 1:

$$y = p/x/ = a/x + \frac{b}{2a}/^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \ ,$$

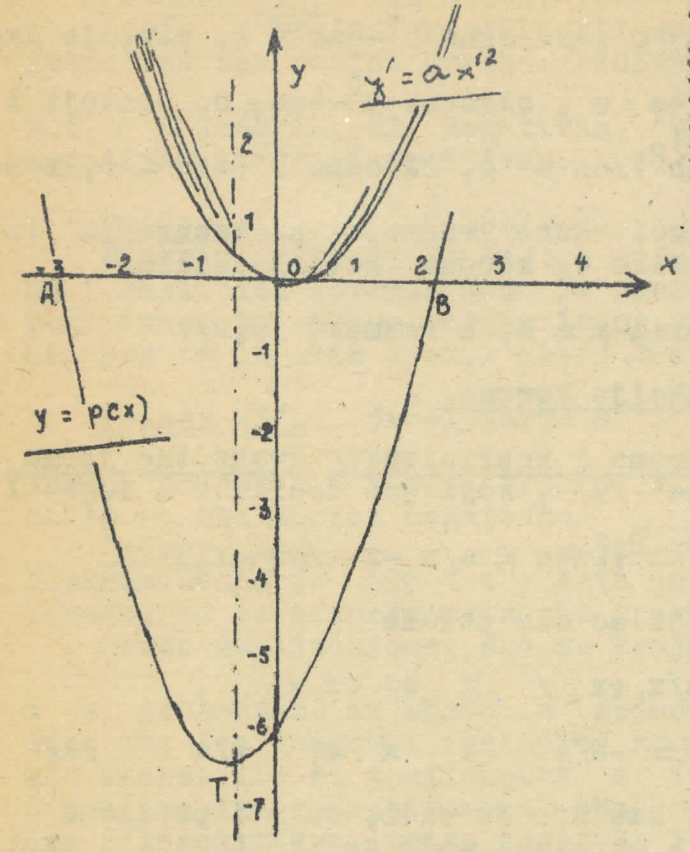
$$\therefore \ y + \frac{b^2-4ac}{4a^2} = a/x + \frac{b}{2a}/^2 \ ,$$

i stavimo

$$y + \frac{b^2-4ac}{4a^2} = y' \quad i \quad x + \frac{b}{2a} = x'$$

dobijamo

$$y' = ax'^2 \qquad /3/$$

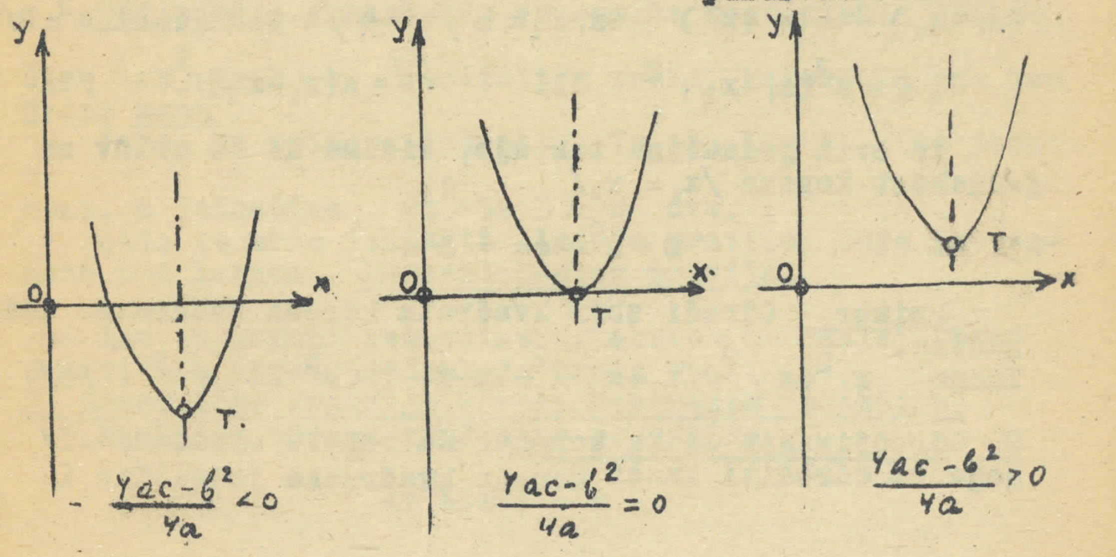


Dakle y p/x/ je jednačina parabole koju dobijamo ako parabolu /3/ translatorno pomerimo tako, da joj teme dođe u tačku sa koordinatama

$$x = -b/2a \quad i$$

$$y = -/b^2-4ac \ /4a \ .$$

Ordinate presečnih tačaka diagrama funkcije /2/ sa apscisnom osovinom jednake su nuli. Kako u tom slučaju apscise tih tačaka zadovoljavaju jednačinu /1/ to one pretstavljaju korene te jednačine. Ako pretpostavimo da je $a > 0$ imaćemo, prema znaku ordinate temena, sledeće moguće položaje parabole:



Iz slike se vidi :

Ako je $(4ac-b^2)/4a < o$, odnosno $b^2-4ac > o$, postoje dva realna korena;
ako je $(4ac-b^2)/4a = o$, odnosno $b^2-4ac = o$, postoji 1 realan dupli koren;
ako je $(4ac-b^2)/4a > o$, odnosno $b^2-4ac < o$, nema realnih korena.

Za vežbu: Dajući razne vrednosti parametru m ispitati grafički koliko će korena imati jednačina

$$x^2-x+1-m = o, \text{ u razmaku } /o,2/.$$

IV Glava. Funkcije korena.

1. Veze izmedju korena i koeficienata kvadratne jednačine. Iz identiteta /9/ , koji smo dobili u § 1,gl. I .

$$p/x = ax^2+bx+c \equiv a/x-x_1\ /\cdot/x-x_2/$$

dobijamo, ako uporedimo obe strane

$$-b = a/x_1+x_2/ \quad i \quad c = ax_1x_2 \quad ,$$

$$x_1+x_2 = -b/a \quad i \quad x_1\cdot x_2 = c/a \ . \qquad /1/$$

Ove relacije daju, kao što se vidi, zbir i proizvod korena. Pomoću ovih obrazaca može se izračunati i razlika korena :

$$(x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2-4x_1x_2 = b^2/a^2-4c/a = (b^2-4ac)/a^2 = D/a^2,$$

$$\therefore\ P = a^2(x_1-x_2)^2 \quad ili \quad \sqrt{D} = a(x_1-x_2)\ . \qquad /2/$$

Iz ovih jednačina takodje, vidimo da je uslov za jednakost korena $/x_1 = x_2/$

$$D = b^2-4ac = o\ .$$

Primer. Odredi zbir kvadrata korena kvadratne jednačine.
Imamo $x_1^2+x_2^2 = /x_1+x_2/^2-2x_1x_2 = (b^2-2ac)/a^2$. /3/

2. Odredjivanje znaka korena. Na osnovu obrazaca /1/ mogu se odrediti znači korena kvadratne jednačine i

bez rešavanja.
Primer /1/. $12x^2-5o85x-7o48 = o$.
Pošto su krajnji koeficienti suprotnog znaka, data jednačina ima realne korene. Proizvod korena je

$x_1x_2 = -7o48/12$, tj. negativan, Dakle je jedan koren negativan, a drugi pozitivan.

Primer /2/. $3x^2-14+1 = o$.
Diskriminanta je $D = 46 > o$; Jednačina ima dva realna i različita korena. Kako je proizvod $x_1x_2 = 1/3$ tj. pozitivan, to su oba korena istog znaka; oni su pozitivni, jer im je zbir $x_1+x_2 = +14/3 > o$.

Primer /3/. $3x^2+14x+1 = o$.

Imamo $D = 46 > o$, $x_1x_2 = 1/3 > o$ i $x_1+x_2 = -14/3 < o$, dakle su oba korena negativna.
Primer /4/. $8x^2-x+3 = o$.
Diskriminanta je $-95 < o$; data jednačina nema realnih korena, te se pitanje njihovih znakova i ne postavlja.
Otuda zaključujemo; Ako su krajnji koeficienti a i c jednačine $ax^2+bx+c = o$ suprotnog znaka, jednačina ima dva realna i različita korena, koji su suprotnog znaka. Ako su koeficienti a i c istog znaka, a jednačina ima realne korene, oba korena će biti pozitivna ili negativna, prema tome, da li je koeficient b suprotnog ili istog znaka kao a i c .
Definicija. Ako su dva uzastopna koeficienta jednačine $ax^2+bx+c = o$, različitog znaka, kažemo da ona ima jednu menu .
Tako, na primer, jednačina $7x^2+3x-1 = o$, ima jednu menu, a jednačina $2x^2-5x+3 = o$ dve.
Sada se može iskazati sledeće pravilo, koje je poznato pod imenom Descartes-ovog pravila.

Ako su koreni jednačine $ax^2+bx+c = o$ realni, broj pozitivnih korena jednak je broju mena.

3. Simetrične funkcije korena kvadratne jednačine.
Funkcija korena kvadratne jednačine

$$ax^2+bx+c = o$$

nazivamo svaki izraz u kome se javljaju koreni x_1 i x_2 te jednačine. Takva funkcija može biti simetrična ili nesimetrična.

Simetrična funkcija je ona koja se ne menja, kada x_1 i x_2 promene svoja mesta. Na primer:

$$x_1+x_2\ ,\quad x_1^2+x_2^2,\quad (3x_1-1)(3x_2-1),\ (x_1+2)(x_2+2),$$

$$\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\ ,\ \text{itd.}$$

Svaku simetričnu funkciju možemo uvek izraziti pomoću zbira x_1+x_2 i proizvoda x_1x_2 .

Naprimer: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$,

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\ ,$$

$$x'^4+x''^4=(x'+x'')^4-4x'x''(x'+x'')^2+2(x'x'')^2\ ,$$

$$(x'-2)(x''-2)=x'x''-2(x'+x'')+4\ ,\quad \text{itd.}$$

Na osnovu ove osobine simetričnih funkcija korena kvadratne jednačine možemo lako rešiti veliki broj problema, ne rešavajući datu kvadratnu jednačinu.

Primer /1/ . Odrediti koeficient m jednačine $x^2-2mx+3=0$, tako da koreni te jednačine zadovoljavaju uslov :

$$(x'-3)(x''-3)=5\ .$$

$(x'-3)(x''-3)$ je simetričan po x' i x'' .
otuda iz

$$(x'-3)(x''-3)=5\ ,$$

$$\therefore\ x'x''-3x''-3x'+9=5\ ,$$

$$\therefore\ x'x''-3(x'+x'')+4=0\ .$$

Kako je

$$x'+x''=2m \quad \text{i} \quad x'x''=3\ ,$$

to mora

$$3-6m+4=0\ ,$$

$$\therefore\ m=7/6\ .$$

Primer /2/ . Ako su x' i x'' koreni jednačine $3x^2-2x-1=0$, naći jednačinu čiji su koreni

$$z'=2x'+2 \quad \text{i} \quad z''=2x''+1\ .$$

Neka tražena jednačina ima oblik

$$z^2+pz+q=0\ .$$

Treba odrediti p i q :

$$-p=z'+z''=2(x'+x'')+1=2.\ 2/3+2=10/3\ ,$$

tj. $p=-10/3$,

$$q=z'z''=4x'x''+2(x'+x'')+1=4(-1/3)+2\ 2/3+1\ ,$$

tj. $q=1$.

Tražena jednačina glasi:

$$z^2-10/3z+1=0\ .$$

4. Zbir korena istih stepena. Ako su x' i x'' koreni jednačine:

$$ax^2+bx+c=0\ ,$$

zbir m-tih stepena

$$S_m=x'^m+x''^m$$

je simetrična funkcija korena. Da bismo ovu funkciju izrazili pomoću koeficienata date jednačine stavimo

$$ax'^2+bx'+c=0\ ,$$

$$ax''^2+bx''+c=0\ . \qquad /1/$$

Pomnožimo prvu jednačinu sa x'^m , a drugu sa x''^m

$$ax'^{m+2}+bx'^{m+1}+cx'^m=0\ ,$$

$$ax''^{m+2}+bx''^{m+1}+cx''^m=0\ ,$$

i saberimo obe jednačine

$$a\cdot S_{m+2}+b\cdot S_{m+1}+c\cdot S_m=0\ .$$

Pomoću ove relacije može se izračunati S_{m+2} , znajući S_{m+1} i S_m . Dajući parametru m vrednosti $m=0,1,2,\ldots\ldots$ mogu se na taj način ovi zbirovi postepeno izračunati.
Za $m=0$ je

$$a\cdot S_2+b\cdot S_1+2c=0\ ,$$

iz koje se jednačine može izračunati S_2, pošto je S_1 $x'+x''=-b/a$.

Zatim, ako se sukcesivno stavlja $m=1$, $m=2$,......, dobićemo zbirove S_3, S_4 itd.

Ako se jednačine /1/ postepeno množe sa $1/x'$, $1/x''$, $1/x'^2$, $1/x''^2$ itd dobijaju se sličnim postupkom zbirovi stepena inversnih vrednosti korena date jednačine.

Zadaci.

1/ Neka su x' i x'' koreni jednačine

$$2x^2-(\lambda+2)x+\lambda=0 .$$

a/ Napisati jednačinu, čiji su koreni $z'=x'^2$ i $z''=x''^2$.

b/ U tako dobivenoj jednačini odrediti λ tako da jedan koren bude četiri puta veći od drugog.

c/ Za nadjene vrednosti λ naći odgovarajuće vrednosti x' i x''.

/Matura, Beograd IV.m.gim. 1939./

2/ Neka su x' x'' koreni jednačine

$$x^2-(1+\lambda)x+\lambda^2=0 .$$

a/ Napisati jednačinu čiji su koreni $z'=x'/x''$, $z''=x''/x'$.

b/ U tako dobivenoj jednačini odrediti tako da jedan koren te jednačine bude 1/4.

c/ Za nadjenu vrednost λ naći odgovarajuće vrednosti za x' i x''.

/Matura, Beograd II m.gim. 1931./

5. Nesimetrične funkcije korena su one funkcije koje menjaju svoju vrednost kada x' i x'' promene svoja mesta.

Takve su funkcije:

$$3x'+x'' , \quad 5x'x''+x' , \quad x'-x'' \quad \text{itd.}$$

Sa nesimetričnim funkcijama imamo obično posla kada

x' i x'' treba da zadovoljavaju neki unapred dati odnos. Metod rada se sastoji u tome, što će se data jednačina zameniti sa sistemom od tri jednačine sa tri nepoznate. Jedna od tih jednačina je unapred dati odnos izmedju x' i x'', a druge dve su osnovne veze izmedju korena i koeficienata /zbir i proizvod korena/.

Naprimer: U jednačini

$$2x^2-5x+2m^2-4m+2=0 .$$

odrediti m tako, da njeni koreni zadovoljavaju uslov $x'-2x''=1$.

Imamo

$$x'-2x''=1$$

$$x'+x''=5/2 ,$$

$$x'x''=2m^2-4m+2\ /2 .$$

Rešavajući x' i x'' iz prve dve i zamenom u treću jednačinu dobijamo:

$$1=m^2-2m+1 ,$$

$$\therefore m^2-2m=0 ,$$

$$\therefore m=0 , \quad m=2 .$$

Zadaci.

1/ U jednačini $2x^2+4m-2x-7m+9=0$ odrediti m tako:

a/ Da koreni budu jednaki.

b/ Da jedan koren bude dva puta veći od drugog.

/Matura, Bitolj. gim. 1933/.

2/ U jednačini $x^2+px+q=0$ odrediti p i q tako da razlika korena bude 4, a razlika njihivih kubova 208.

3/ Data je jednačina $ax^2+bx+c=0$; obrazovati drugu jednačinu čiji su koreni:

1. jednaki i suprotnog znaka korenima date jednačine;
2. Inversni korenima date jednačine;
3. m puta veći od korena date jednačine;
4. veći za h od korena date jednačine.

V. Glava. Sistemi drugog stepena.

1. Sistem od jedna kvadratne i jedne linearne jednačine sa dve nepoznate:

$$p(x,y) = ax+by+c = o$$

$$P(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = o \qquad /1/$$

Pretpostavimo da je jedan od koeficienata a ili b različit od nule, naprimer $a \neq o$. Tada je

$$x = -(by+c)/a \qquad /2/$$

Zamenom ove vrednosti u drugu jednačinu dobijamo, u opštem slučaju kvadratnu jednačinu oblika

$$\alpha x^2 - 2\beta y + \gamma = o \qquad /3/$$

Korenima y_1 i y_2 ove jednačine odgovaraju prema /2/ vrednosti $x_1 = -(by_1+c)/a$ i $x_2 = -(by_2+c)/a$, tako da u opštem slučaju, vrednosti (x_1,y_1) i (x_2,y_2) pretstavljaju dva rešenja sistema /1/.

Ako je $\alpha a \neq o$, sistem /1/ ima dva odredjena rešenja, različita, jednaka ili imagirana, prema tome da li je diskriminanta jednačine /3/ veća, jednaka ili manja od nule.

Ako je $\alpha = o$, sistem /1/ ima u opštem slučaju samo jedno rešenje.

Ako je i $\alpha = o$ i $\beta = o$ sistem /1/ nema rešenja.

Najzad, ako je istovremeno $\alpha = \beta = \gamma = o$, sva rešenja prve jednačine pretstavljaju istovremeno rešenja druge jednačine. U tom se slučaju leva strana druge jednačine sistema /1/ rastavlja na dva faktora od kojih je jedan $ax+by+c$.

Ako prva jednačina sistema /1/ ima oblik

$$y = ax+b$$

koeficienti α, β i β jednačine /3/ su

$$\alpha = Ca^2+2 \quad a+A \;, \quad \beta = Ea+Cab+Bb+D \;, \quad \gamma = Cb^2+2Eb+F \;.$$

Prema tome, da bi kvadratna jednačina sistema /1/ bila deljiva faktorom $y-ax-b$, mora $\alpha = o$, β i $\gamma = o$. tako je

$$\alpha + 2\beta + \gamma = C(a+b)^2 + 2(B+E)(a+b) + A + 2D + F = o \;,$$

to ako iz $\alpha = o$ i $\beta = o$ rešimo a i b i zamenimo

u $\alpha + 2\beta + \gamma = o$, dobijamo uslov

$$(BE-DC)^2 - (B^2-AC)(E^2-CF) = o \qquad /4/$$

koga moraju zadovoljavati koeficienti A,B,C,........ polinoma drugog stepena

$$P(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2+2D+2E+F$$

da bi se on mogao rastaviti na proizvod iz dva linearna faktora oblika

$$P(x,y) = (ax+by)c) \; (a'x+b'y+c') \;.$$

2. SISTEM OD DVE KVADRATNE JEDNAČINE SA DVE NEPOZNATE.

Opšti oblik takvog sistema je :

$$P(x,y) = a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1 = o \qquad /1/$$

$$Q(x,y) = a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2 = o \;.$$

Ako iz ovog sistema eliminišemo, naprimer x^2, dobijamo

$$(b_1a_2-a_1b_2)xy + (c_1a_2-a_1c_2)y^2 + (d_1a_2-a_1d_2)x + (e_1a_2-a_1e_2)y + (f_1a_2-a_1f_2) = o \;,$$

ili

$$Axy+By^2+Cx+Dy+E = o, \qquad /2/$$

$$\therefore \; x = -\frac{By^2+Dy+E}{Ay+C} \;. \qquad /3/$$

Smenom ove vrednosti u jednu od jednačina sistema /1/ dobijamo, u opštem slučaju, jednu jednačinu četvrtog stepena po y oblika

$$\alpha_1 y^4 + \alpha_2 y^3 + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 y + \alpha_5 = o \;. \qquad /4/$$

Rešavanjem jednačine /4/ u opštem slučaju dobijamo četiri vrednosti za y koje zamenjene u /3/ daju četiri odgovarajuće vrednosti x-a .

Kao što se vidi, rešavanje sistema od dve kvadratne jednačine sa dve nepoznate svodi se u opštem slučaju na rešavanje jednačine četvrtog stepena i ima četiri rešenja. Medjutim u izuzetnim slučajevima ove se rešavanje može svesti na rešavanje kvadratnih jednačina od kojih ćemo ispitati glavne slučajeve.

3. Neki specijalni sistemi. Najčešće se nailazi na sisteme kvadratnih jednačina kad su poznati: zbir, razlika, proizvod, zbir kvadrata i razlika kvadrata nepoznatih. To su dakle jednačine oblika:

$$x+y = s \;, \qquad xy = p \;, \qquad x^2-y^2 = q' \;,$$

$$x-y = r \;, \qquad x^2+y^2 = q \;,$$

od kojih dva po dva sačinjavaju sistem koji se obično rešava specijalnim metodama.

Iz gornjih 5 jednačina možemo kombinovanjem dve po dve obrazovati 10 sistema od kojih je prvi linearan, a ostalih 9 kvadratni i to

$$/1/\begin{cases} x+y = s \\ xy = p \end{cases} \qquad /2/\begin{cases} x+y = s \\ x^2+y^2 = q \end{cases} \qquad 3/\begin{cases} x+y = s \\ x^2-y^2 = q' \end{cases}$$

$$/4/\begin{cases} x-y = r \\ xy = p \end{cases} \qquad /5/\begin{cases} x-y = r \\ x^2+y^2 = q \end{cases} \qquad /6/\begin{cases} x-y = r \\ x^2-y^2 = q' \end{cases}$$

$$/7/\begin{cases} xy = p \\ x^2+y^2 = q \end{cases} \qquad /8/\begin{cases} xy = p \\ x^2-y^2 = q' \end{cases} \qquad /9/\begin{cases} x^2+y^2 = q \\ x^2-y^2 = q' \end{cases}$$

1. Sistem /1/ se rešava neposredno kvadratnom jednačinom

$$z^2-sz+p = o \;,$$

čiji su koreni $z_1 = x$, a $z_2 = y$.

2. Sistem /2/ se svodi na sistem /1/ ako se prva jednačina kvadrira i od nje oduzima druga; tada dobijamo

$$2xy = s^2-q \;.$$

3. Sistemi /3/ i /6/ se svode na linearne jer iz

$$x^2-y^2 = (x+y)\,(x-y) = q'$$

$$\therefore \; x-y = q'/s \quad \text{ili} \quad x+y = q'/r \;.$$

4. Sistemi /4/ i /5/ se rešavaju, ako se iz linearne jednačine $x \quad r+y$ zameni u kvadratnoj jednačini.

5. Sistem /7/ odnosno /8/ svodi se na sistem /1/ odnosno /4/ ako se prva jednačina kvadrira i izvrši smena $x^2 = x$, $y^2 = y$.

Sistem /7/ može se svesti i na linearan sistem, ako se drugoj jednačini doda i oduzme dvostruka prva, jer tada dobijamo

$$x+y = \sqrt{q+2p} \quad \text{i} \quad x-y = \sqrt{q-2p} \;.$$

6. Sistem /9/ se smenom $x^2 = x$ i $y^2 = y$ svodi na linearan.

4. Slučaj kad se jedna kvadratna jednačina raspada na dve linearne.

Ako se u sistemu od dve kvadratne jednačine sa dve nepoznate

$$P/x,y/ = o \;,$$
$$Q/x,y/ = o \;.$$

jedan od polinoma, naprimer $P/x,y/$ da rastaviti na linearne činioce $p/xy/$ i $q/x,y/$, tada se gornji sistem raspada na dva sistema od po jedne linearne i jedne kvadratne jednačine:

$$p/x,y/ = o \qquad q/x,y/ = o$$
$$Q/x,y/ = o \qquad Q/x,y/ = o$$

Rešavanje ovih sistema svodi se na rešavanje kvadratnih jednačina. Svaki od ovih sistema ima u opštem slučaju dva rešenja, tako da dati sistem ima u opštem slučaju ukupno četiri rešenja.

Ukoliko ne vidimo neposredno iz datog polinoma

$$P/x,y/ = Ax^2+2Bxy+Cy^2+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

da li se on raspada na linearne faktore ili ne, možemo obrazovati u § 1 izveden uslov /4/ i videti da li je on ispunjen. Često je podesnije napisati taj uslov u obliku determinante trećeg reda, koju dobijamo na sledeći način.

Primetimo, najpre da se homogen polinom, tj. polinom koji sadrži samo kvadratne članove uvek raspada na linearne faktore.

Zaista, neka je

$$p/x,y/ = ax^2+2bxy+cy^2$$

dati homogen polinom; imamo

$$p/x,y/ = y^2\{a(x/y)^2+2b(x/y)+c \;.$$

Ako označimo sa u_1 i u_2 nule polinoma

$$au^2+2bu+c$$

biće

$$P/xy/=y^2a(x/4-u_1)\ (x/4-u_2)\ ,\qquad /1/$$

$$P/xy/=a(x+u_1y)\ (x-u_2y)\ .$$

Da bismo sad uvideli da li se opšti polinom $P/x,y/$ raspada na linearne faktore, ispitajmo da li možemo odrediti dva broja α i β tako da zamenom

$$x=x+\alpha \quad i \quad y=y+\beta \qquad /2/$$

polinom $P/x'+\alpha\ y'+\beta\ /$ postane homogen.

Ako postoje takvi brojevi α i β jasno je da će se i opšti polinom $P/x,y/$ moći rastaviti na faktore, jer, ako je $P/x'+\alpha,\ y'+\beta/$ homogen, prema /1/ imamo

$$P/x'+\alpha,y+\beta/=a/x'+y'u_1/\ /x'-y'u_2/$$

pa je prema /2/

$$P/x,y/\quad a/x-u_1y-\alpha+u_1\beta/\ /x-u_2y-\alpha+u_2\beta\ /$$

tj. $P/x,y/$ je oblika

$$/a'\ x+b'\ y+c'\ /\ /a''\ x+b''\ y+c''\ /\ .$$

Preostaje nam dakle da vidimo kada će polinom $P/x'+\alpha,y+\alpha\ /$ biti homogen.

Kako je

$$P/x'+\alpha,y'+\beta/\quad Ax'^2+2Bx'\ y'+Cy'^2+2/A\alpha+B\beta+D/x+$$

$$+2/B\alpha+C\beta+E/y+P/\alpha\ ,\ \beta\ /\ ,$$

to će ovaj polinom biti homogen ako je

$$A\alpha+E\beta+D=0$$
$$B\alpha+C\beta+E=0$$

i $\quad P/\alpha,\beta/=A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F=0\ .$

Kako ovaj poslednji uslov možemo napisati u obliku

$$\alpha/A\alpha+B\beta+D/+\beta\ /B\alpha+C\ \beta+E/+D\alpha+E\beta+F\ =0\ ,$$

to se on na osnovu prve dve jednačine tj.

$$A\alpha+B\beta+D=0\ ,$$

i

$$B\alpha+C\beta+E=0\ ,$$

svodi na

$$D\alpha+E\beta+F=0\ .$$

Ovo je sistem od 3 linearne jednačine sa 2 nepoznate i ; da bi, dakle on imao rešenja, mora diskriminanta ovog sistema biti jednaka nuli.

Prema tome traženi uslov ima oblik

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0\ .$$

5. **Slučaj kad jednačina sistema sadrže samo članove drugog stepena**, tj. kad je sistem oblika

$$\begin{aligned} P/x,y/&=ax^2+2bxy+cy^2+h=0, \\ Q/x,y/&=a'\ x^2+2b'\ xy+c'\ y^2+h'=0. \end{aligned}\qquad /1/$$

Ako je h ili h' jednako nuli, jedna od ovih jednačina je **homogena**; ona se tada raspada na dva linearna faktora, i sistem /1/ se svodi na prethodno posmatrani slučaj.

Ako su, medjutim i h i h' različiti od nule, množenjem prve jednačine sistema /1/ sa h', a druge sa h, dobijamo oduzimanjem homogenu jednačinu oblika :

$$/ah'-a'\ h/x^2+2/bh'-b'\ h/xy+/ch'-c'\ h/y^2=0\ .$$

Ovu jednačinu možemo zameniti sa jednom od jednačina sistema /1/ i na taj način dobijamo sistem u kome se jedna jednačina raspada na linearne faktore.

6. **Slučaj kad su jednačine sistema simetrične.** U jednom sistemu od dve kvadratne jednačine sa dve nepoznate x i y, jednačine će biti simetrične, ako se one ne promene kad nepoznate x y izmene svoja mesta. Opšti oblik takvog sistema jednačine je:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+ay^2+cx+cy+d=0\ , \\ a_1x^2+b_1xy+a_1y^2+c_1x+c_1y+d_1=0\ , \end{cases}\qquad /1/$$

ili

$$\begin{cases} a/x^2+y^2/+bxy+c/x+y/+d=0\ , \\ a_1/x^2+y^2/+b_1xy+c_1/x+y/+d_1=0\ . \end{cases}$$

Takav se sistem može uvek svesti na kvadratne jednačine stavljajući $x+y=u$ i $xy=v$.

Zaista, sistem /1/ možemo napisati u obliku

$$\begin{cases} a\ /x+y/^2-2xy+bxy+c/x+y/+d=0\ , \\ a_1\ /x+y/^2-2xy+b_1xy+c_1/x+y/+d_1=0\ , \end{cases}$$

otuda iz

$$\begin{cases} x+y=u \\ x\,y=v \end{cases} \qquad /2/$$

$$\begin{cases} au^2+cu+/b-2a/\ v+d=0 \\ a_1u^2+c_1u+/b_1-2a_1/v+d_1=0 \end{cases} \qquad /3/$$

Množenjem prve jednačine sa $/b_1-2a_1/$, a druge sa $+/b-2a/$ dobijamo, oduzimanjem, kvadratnu jednačinu sa jednom nepoznatom u :

$$H_1u^2+H_2u+H_3=0 \qquad /4/$$

gde je $H_1=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$, $H_2=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}$, $H_3=\begin{vmatrix} d & b \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} a & d \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}$.

Zamenom rešenja u_1 i u_2 jednačine /4/ u jednoj od jednačina /3/ dobijamo odgovarajuće vrednosti v_1 i v_2 za v. Na taj način dati sistem /1/ sveden na sisteme

$$\begin{cases} x+y=u_1 \\ xy=v_1 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} x+y=u_2 \\ xy=v_2 \end{cases} ,$$

što daje četiri para rešenja.

7. Svodjenje kvadratnog sistema na jednačinu 3-eg stepena. Neka je dat opšti sistem

$$\begin{cases} ax^2+2cxy+by^2+2dx+2ey+f=0\ , \\ a_1x^2+2c_1xy+b_1y^2+2d_1x+2e_1y+f_1=0\ . \end{cases} \qquad /1/$$

Ako donju jednačinu pomnožimo sa   i saberemo obe jednačine dobijamo:

$$x^2(a+\lambda a_1)+2xy(c+\lambda c_1)+y^2(b+\lambda b_1)+2x(d+\lambda d_1)+2y(e+\lambda e_1)+(f+\lambda f_1)=0 \quad /2/$$

Odredimo λ tako da se polinom /2/ svede na proizvod od dva linearna polinoma. Time bi se jednačina /2/ raspala na dve linearne jednačine, koje zajedno sa jednom od jednačina /1/ daju četiri para rešenja toga sistema.

Da bi se, medjutim polinom /2/ sveo na dva linearna faktora, mora, kao što smo to videli u § 4, diskriminanta te jednačine biti jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & c+\lambda c_1 & d+\lambda d_1 \\ c+\lambda c_1\ , & b+\lambda b_1\ , & e+\lambda e_1 \\ d+\lambda d_1 & e+\lambda e_1 & f+\lambda f_1 \end{vmatrix}=0\ , \qquad /3/$$

Iz ovog uslova dobijamo vrednost za parametar λ, koji treba uvrstiti u jednačinu /2/ da bi se ona raspala na dve linearne jednačine.

Medjutim jednačina /3/ uredjena po stepenima od λ je oblika

$$H_1\lambda^3+H_2\lambda^2+H_3\lambda+H_4=0, \qquad /4/$$

gde je

$$H_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ c_1 & b_1 & e_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{vmatrix},\quad H_2=\begin{vmatrix} a & c & d_1 \\ c & b & e_1 \\ d & e & f_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c & d_1 \\ c_1 & b & e_1 \\ d_1 & e & f_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d \\ c_1 & b_1 & e \\ d_1 & e_1 & f \end{vmatrix},$$

$$H_3=\begin{vmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & c & d_1 \\ c & b & e_1 \\ d & e & f_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c & d \\ c_1 & b & e \\ d_1 & e & f \end{vmatrix} \quad i \quad H_4=\begin{vmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

Na taj način smo izbegli rešavanje jednačine četvrtog stepena, koje bi se pojavilo prilikom neposrednog rešavanja sistema /1/ i ovo sveli na jednačinu /4/ trećeg stepena.

Jednačina /4/ se svodi na kvadratnu ako je naprimer, ili $H_1=0$ ili $H_4=0$, a to je slučaj kad je diskriminanta prve ili druge jednačine sistema /1/ jednaka nuli; tada se, medjutim, ovaj slučaj svodi na slučaj iz § 4.

Vežbe.

1/ Dokazati da su brojevi $\sqrt{2}$ i $1-\sqrt{2}$ koreni jednačine:

$$x^2-x+\sqrt{2}-2=0$$

2/ Date je jednačina:

$$x^2+x-3-\sqrt{3}=0$$

a/ Proveriti da je $\sqrt{3}$ koren te jednačine.

b/ Naći drugi koren jednačine.

3/ Data je jednačina:

$$2x^2+/2m-1/x-m^2=0$$

a/ Odgovoriti da li jednačina ima realnih korena, ne rešavajući je niti tražeći diskriminantu.

b/ Odrediti m tako da jedan koren bude -1.

c/ Izračunati drugi koren.
Naći a priori jedan koren sledećih jednačina, i pomoću njega odrediti drugi :

4/ $(x+b)(x+c) = (a+b)(a+c)$,

5/ $ax^2+(b+c)x = a+b+c$,

6/ $(a-b)x^2+(b-c)x+c-a = o$

7/ $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

8/ $\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = Z$

9/ Dokazati da zbir koeficienata jednačine $ax^2\ x+c$ iznosi $a(1-x_1)(1-x_2)$.

1o/ Dokazati da su koreni jednačine

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} = 3$$

uvek realni ako je $a \neq b \neq c$

11/ Odrediti parametar λ tako da jednačine :

$$3x^2-(\lambda-1)x-2 = o$$
$$6x^2+(2\lambda+3)x+2 = o$$

imaju jedan zajednički koren. Zatim izračunati taj koren.

12/ Dokazati da je $-a$ koren jednačine:

$$\sqrt{-x\sqrt{-x\sqrt{-x\sqrt{\ldots}}}} = x+a$$ i

odrediti drugi koren.

13/ Rešiti jednačinu :

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} \quad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Dižući levu i desnu stranu jednačine na kvadrat samo jedanput.

14/ Odrediti brojeve a i b znajući: 1 da su celi ; 2. da postoji medju njima relacija:

$$(23-a)(a-3) = b^2$$

15/ Proveriti da je : $\frac{1}{3} - \sqrt{2}$ koren jednačine

$$9x^2+9x-22+15\sqrt{2} = o$$

16/ Izračunati strane AB i AC trougla, znajući da je $BC = 2a$, $2AB+AC = 5a$, $AB^2-AC^2 = 4ab$, gde je b dato.

17/ Ako je $o < a < b < c$
Pokazati da je diskriminanta jednačine

$$(b+c)(x-b)(x-c)+(c+a)(x-c)(x-a)+(a+b)(x-a)(x-b) = o$$

uvek pozitivna i da joj se koreni nalaze izmedju a, b i c.

18/ Odrediti z tako da koreni jednačine

$$x^2-6x+5+z(x^2-5x+6) = o$$

budu jednake medjusobom. Označimo te vrednosti sa z_1 i z_2 a sa x_1 x_2 odgovarajuće vrednosti jednakih korena gornje jednačine. Neka su x' i x'' koreni jednačine za makoju vrednost Z, različitu od z_1 i z_2. Izračunati vrednost izraza:

$$\frac{(x'-x_1)(x''-x_2)}{(x'-x_2)(x''-x_1)}$$

i pokazati da ne zavisi od Z.

19/ Urediti po veličini korene jednačine:

$$x^2-mx-1 = o \quad i \quad x^2+mx-1 = o, \quad m > o,$$

ne rešavajući ih.

2o/ Date su jednačine:

$$f(x) = x^2-3x+\lambda = o ,$$
$$\varphi(x) = x^2-4x+3\lambda-3 = o,$$

za koju će vrednost λ : 1 obe jednačine imati jedan zajednički koren; 2 oba zajednička korena.

Za koje vrednosti parametra m sledeće jednačine imati suprotno označene korene:

21/ $x^2-5x-3m+1 = o$,

22/ $(m-1)x^2+x-m^2 = o$,

23/ $(2m^2+3)x^2-mx-8m+4 = o$,

24/ Odrediti m tako da jednačina

$$2x^2+14x-2m+3 = o$$

ima oba negativna korena.

Pokazati ne rešavajući niti obrazovanjem diskriminante da sledeće jednačine imaju realne korene, za makoju vrednost parametra:

25/ $m(x-1)(x-2)$

26/ $x+1+m(3x^2+4x) = 0$,

27/ $mx(x+4)+x^2-9 = 0$;

28/ $m^2(x-2)+m(x-1)(x-2)+3(x-1) = 0$;

29/ $(x-a)(x-b)-c^2 = 0$;

30/ Neka su s i p zbir i proizvod korena jednačine $ax^2+bx+c=0$; s_1 i p zbir i proizvod korena jednačine $a x^2+b x+c=0$ a S i P zbir i proizvod korena jednačine

$$(a+\lambda a')\, x^2+(b+\lambda b)\, x+(c+\lambda c') = 0$$

gde je λ nepoznati faktor. Odrediti λ tako da bude

$$P = p+p'$$

i izraziti S kao funkciju od s, s', p, p',

31/ Date su jednačine :

$$x^2+px+2=0$$
$$x^2+p\, x+2 = 0.$$

Neka su koreni prve jednačine α i β , a druge α' i β'.

Izračunati $(\alpha-\alpha')(\alpha-\beta')\quad(\beta-\alpha')(\beta-\beta')$ kao funkciju koeficienata gornjih jednačina.

32/ Izračunati hipotenuzu pravouglog trougla znajući visinu h i zbir kateta S.

/Njutn/

33/ U pravouglom trouglu hipotenuza iznosi $2m$, a zbir projekcije jedne katete na hipotenuzu i visine je 2. Izračunati tu katetu.

34/ Dat je polukrug sa prečnikom AOB d. Odrediti na njemu tako da bude $AM+MP=md$ gde je m dat broj $h\, OP \parallel AM$. Diskutovati.

35/ Data je jednačina:

$$(\lambda-5)x^2-2\lambda x+\lambda+3 = 0$$

u kojoj je λ parametar koji varira od $-\infty$ do $+\infty$. Ispitati položaj i znak korena prema raznim vrednostima od λ i naći vezu korena koja ne zavisi od λ.

Data je jednačina:

$$m^r x^2-mn(m^{r-2}+n^{r-2})x+n^r = 0.$$

36/ Odrediti x_2 i r ako je $x_1 = 1$;

37/ Odrediti r tako da koreni budu jednaki.

38/ Odrediti r tako da koreni budu recipročni.

39/ Date su jednačine:

$$m^r x^2-mn(m^{r-2}+n^{r-2})x+n^r = 0 ,$$

$$ax^2+bx+c = 0 ,$$

gde su a, b i c poznate veličine. Odrediti m, n i r tako da im koreni budu isti.

40/ Proveriti pomoću obrasca da su brojevi

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{-3-\sqrt{5}} \quad \text{koreni jednačine}$$

$$x^2+x-1 \quad 0.$$

41/ Dokazati da je:

1. $a+b+c = -\dfrac{b}{x_1+x_2}\,(x_1-1)(x_2-1)$

2. $a+b+c = \dfrac{c}{x_1 x_2}\,(x_1-1)(x_2-1)$

42/ Dokazati da se koreni kvadratne jednačine mogu izraziti i na drugi način:

$$x_1 \; \frac{b+2c+\sqrt{b^2-4ac}}{-b-2a+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$x_2 \; \frac{b+2c-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-2a-\sqrt{b^2-4ac}}$$

43/ Odrediti korene jednačine: $ax^2+bx+c = 0$ ako je $a+b+c \quad 0$.

44/ Dokazati da jednačina: $x^2-x\; a = 0$ ima 6 parova celih rešenja dajući parametru a postupne cele vrednosti od 1 do 42.

45/ Pokazati da jednačina:

$$x^2-2x+a = 0$$

ima samo jedan par celih rešenja za makoju celu vrednost parametra a razmaka /-28,-20/.

46/ Jednačina: $x^2-3x-10 = 0$ ima cela rešenja. Ako pustimo da nezavisan član opada koja je prva

jednačina koja će imati cela rešenja?
Data je kvadratna jednačina $x^2 - px > q = 0$; neka je q apscisa a p ordinata jedne tačke, tako da svakoj tački ravne odgovara jedna kvadratna jednačina i obratno.

47/ Gde se nalaze tačke koje odgovaraju jednačinama

a/ $3x^2-4x+1=0$, b/ $9x^2-12x+4=0$,

c/ $5x^2-2x+2=0$?

48/ Ako smatramo x kao parametar dokazati da jemobvojnica pravih $x^2-px+q=0$ ona kriva koja, u ravni daje granicu izmedju tačaka koje jednačinama sa realnim rešenjima i tačaka koje odgovaraju jednačinama sa imaginarnim rešenjima, a tačke koje se nalaze na samoj obvojnici odgovaraju kvadratnim jednačinama sa jednakim rešenjima.

49/ Odrediti kvadratnu jednačinu koja u sistemu /q,p/ odgovara središtu kruga

$$q^2+p^2-6q+4p=1$$

5o/ Naći kvadratnu jednačinu kojoj u sistemu / q,p / odgovara tačka preseka pravih

$$25-5p+q=0 \quad \text{i} \quad 4-2p+q=0$$

51/ Rešiti sistem:

$$x^2+y^2-xy=19$$

$$3x^2+xy+3y^2=33$$

52/ Rešiti sistem:

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$$

$$x^3+y^3+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=b$$

53/ Rešiti sistem:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{b^2}$$

54/ Naći vezu izmedju a i b da bi oba rešenja sistema :

$$y-y=a$$

$$x^2+y^2-xy=b^2$$

bila medjusobom jednaka ($y_1=y_2$ i $x_1=x_2$).

55/ Rešiti sistem:

$$(x-y)^2+2a(x+y)-b=0$$

$$x^2-y^2-a(x-y)-b(x-y)+ab=0.$$

56/ Rešiti sistem:

$$f(x^2-y^2)-2dx+2cy+a-c=0$$

$$cxy-ex-dy+b=0 .$$

57/ Izračunati poluprečnik osnove i visinu kupe čija je zapremina $\frac{\gamma\alpha a^3}{3}$ a površina αb^2.