ZNANSTVENA DJELA
HRVATSKOG PRIRODOSLOVNOG DRUŠTVA
KNJIGA I

„TIPOGRAFIJA" GRAFIČKO-NAKLADNI ZAVOD, ZAGREB

M. BORN

EINSTEINOVA TEORIJA RELATIVNOSTI

I NJEZINI FIZIČKI OSNOVI

PREMA TREĆEM IZDANJU PREVEO,
DODATKOM I BILJEŠKAMA NADOPUNIO

D. BLANUŠA

ZAGREB 1948

Naslov originala:

MAX BORN
DIE RELATIVITÄTSTHEORIE EINSTEINS
UND IHRE PHYSIKALISCHEN GRUNDLAGEN
Berlin, J. Springer 1922

Поклон библиотеци
Математичког факултета
у Београду
Миленко Боснић
8 марта 1996.

IZ PREDGOVORA AUTORA K PRVOM IZDANJU

Ova je knjiga obrada nekih predavanja, koja sam pred većim slušateljstvom održao posljednje zime. Čini mi se, da teškoće u razumijevanju teorije relativnosti, na koje nailazi matematički i fizički neškolovani slušač ili čitalac, nastaju poglavito zbog toga, što mu nisu dobro poznati temeljni pojmovi i činjenice fizike, naročito mehanike. Pokazao sam zato u svojim predavanjima sasvim jednostavne, kvalitativne pokuse, koji su služili pri uvođenju pojmova kao brzina, ubrzanje, masa, sila, jakost polja i t. d. Pokušavajući da pronađem slično sredstvo za štampanu knjigu došao sam do ovdje odabranoga polu-historijskog načina prikazivanja, čime sam se uklonio, nadam se, suhom stilu elementarnih udžbenika fizike. Treba ipak naglasiti, da je historijski poredaj samo ruho, u kojem treba da se tim jasnije istakne ono glavno, a to je logička veza. Ovako započeti način prikazivanja prisilio me je, da budem potpun, a time je knjiga narasla do ovoga opsega.

Pretpostavljam što manje matematičkog znanja. Ne samo da se klonim više matematike, nego se nisam služio ni elementarnim funkcijama, kao logaritmima, trigonometrijskim funkcijama i t. d. Doduše, bez razmjera, linearnih jednadžbi i po kojega kvadrata ili kvadratnog korijena nije se moglo proći. Savjetujem čitaocu, koji bi zapeo na formulama, da najprije čita dalje, pa će iz samoga teksta shvatiti značenje matematičkih znakova. Obilno sam se služio slikama i grafičkim prikazivanjem. I onaj, koji nije navikao služiti se koordinatama, lako će naučiti da čita u krivuljama.

Filozofska pitanja, koja je potakla teorija relativnosti, u ovoj su knjizi samo dodirnuta. Ipak je svagdje sačuvano određeno spoznajno-teoretsko gledište. Smatram sigurnim, da se to gledište u glavnom slaže s mišljenjem samoga Einsteina.

Frankfurt na M., u lipnju 1920.

Max Born

PREDGOVOR PREVODIOČEV

Teorija relativnosti danas je jedno od temeljnih područja fizike, koje zahvaća u sva moderna istraživanja. Poznavanje njezinih osnovnih ideja potrebno je stoga ne samo stručnjaku, nego i širem krugu obrazovanih ljudi, koji žele produbiti svoje znanje o prirodnim naukama. Trebalo je zato izdati sustavan prikaz na našem jeziku, koji bi bio razumljiv širokom krugu, a opet tako temeljit, da može i našim studentima visokih škola služiti kao pouzdan uvod u to područje.

Možda će se tkogod začuditi, da je izbor pao na knjigu, koja je izašla prije četvrt stoljeća. Razlog je taj, što je baš ta knjiga za naše prilike osobito prikladna, jer prije izlaganja same teorije relativnosti daje opširan i lako shvatljiv prikaz osnovnih ideja klasične fizike, koji će mnogome dobro poslužiti, da nadopuni i produbi svoje znanje iz srednje škole. Što se tiče kvaliteta te knjige, neka mi bude dopušteno navesti, kako ju je nazvao istaknuti matematičar i fizičar H. Weyl u predgovoru k 5. izdanju svojeg standard-djela o teoriji relativnosti »Raum-Zeit-Materie«: »...das an einen breiteren Kreis sich wendende prachtvolle Buch von Born...«[1]).

Prijevod je izrađen prema 3. njemačkom izdanju od god. 1922. Sam tekst ostavljen je netaknut, ali je nadopunjen »Dodatkom«, u kojemu je izložen noviji razvoj na području teorije relativnosti, dakako u granicama mogućnosti knjige, koja je namijenjena širem krugu. Osim toga su na kraju dodane bilješke, na koje u tekstu upućuju brojevi u uglastim zagradama. U tim su bilješkama korigirani navodi teksta, ukoliko je to tražio kasniji napredak, a ponegdje su dodana proširena objašnjenja. Numerički podaci u bilješci [14] uzeti su iz »Periodic chart of the atoms«, Designed by Henry D. Hubbard, 1947 Edition, Revised by William F. Meggers, National Bureau of Standards, Published by M. W. Welch Manufacturing Company, Chicago i iz pomoćne knjižice »Key to periodic chart of the atoms«, 1947 Edition, by Henry D. Hubbard and William F. Meggers. U toj je knjižici rečeno: »Every bit of information on the chart is brought up to this date«[2]). S obzirom na teškoće u pronalaženju podataka u stranim časopisima ovo mi se činilo najboljim izvorom, do kojega sam mogao doći.

---

[1]) Prekrasna Bornova knjiga, koja se obraća širem krugu.

[2]) Svaka najmanja informacija na tablici dovedena je na današnje stanje.

Citati iz Newtonovih »Principia« prevedeni su izravno iz latinskoga originala, pri čemu mi je uvelike pomogao prof. dr. Ž. Marković, koji je povrh toga pročitao sav rukopis i dao mi mnoge savjete. Slike su većim dijelom preuzete iz originala, a jedan je dio nanovo nacrtao dr. V. Niče. B. Zelenko stavio je na raspolaganje svoj primjerak originala, prema kojemu je prijevod izrađen. Kod čitanja korekture pomogli su mi F. Deutsch i M. Lažanski. Njima i svima drugima, koji su me poduprli na bilo koji način, izražavam hvalu, a napose osoblju štamparije »Tipografija«, koje je učinilo sve, da knjiga izađe u lijepoj opremi.

Zagreb, u ožujku 1948.

Prevodilac

SADRŽAJ

TEORIJA RELATIVNOSTI

UVOD

Umu, koji razmišlja, svijet nije dan kao takav; on mora sebi sliku toga svijeta stvoriti iz nebrojenih osjeta, doživljaja, saopćenja, sjećanja i iskustava. Zato valjda nema dva čovjeka, kojima se slika svijeta podudara u svim pojedinostima.

Kad neka predodžba u svojim glavnim crtama postane zajedničko dobro većega broja ljudi, nastaju duhovna strujanja, koja se zovu religije, filozofske škole, znanstveni sustavi — nerazmrsiv kaos mišljenja, dogma i uvjerenja. Čini se gotovo nemoguće naći misao vodilju, kojom bi se dovela u pregledan red ova razgranata naučavanja, koja se razilaze i opet spajaju.

Gdje je mjesto *Einsteinovoj teoriji relativnosti*[1], kojoj je posvećeno ovo malo djelo? Je li ona samo specijalan dio fizike ili astronomije, po sebi možda zanimljiv, ali bez većeg značenja za razvoj ljudskoga duha? Ili je bar simbol osobitoga duhovnog smjera, koji je karakterističan za naše vrijeme? Ili je možda sama jedan »nazor o svijetu«? Na ta pitanja moći ćemo pouzdano odgovoriti tek onda, kad se upoznamo sa sadržajem Einsteinove nauke. Ovdje neka je dano gledište, koje, ma i na grub način, klasificira sveukupnost svih nazora o svijetu i daje Einsteinovoj teoriji stanovito mjesto unutar jedinstvenog shvaćanja cjeline kozmosa.

Svijet se sastoji iz našega ja i onoga drugog, iz nutarnjeg svijeta i vanjskog svijeta. Odnosi tih dvaju polova predmet su svake filozofije. No različita je uloga, koju svaka nauka pridaje našem ja u svijetu. Čini mi se, da je *važnost toga ja* u slici svijeta neko mjerilo, po kojem se mogu nanizati kao biserje različiti filozofski sustavi, umjetnička i znanstvena shvaćanja svijeta. Premda bi bilo privlačivo slijediti ovu misao kroz povijest ljudskoga duha, ne smijemo se ipak previše udaljiti od svoje teme. Primijenit ćemo tu misao samo na jedan dio područja ljudske duševne djelatnosti, u koji ide Einsteinova teorija, t. j. na prirodne nauke.

Prirodoslovno mišljenje stoji na kraju onoga niza, tamo, gdje je uloga našega ja, subjekta, već neznatna, a svaki napredak u stvaranju pojmova fizike, astronomije, kemije znači približavanje cilju isključenja toga ja. Pri tom se naravno ne radi o aktu spoznaje, koji je vezan na subjekt, već o gotovoj slici prirode, koja se temelji na predodžbi, da prirodni svijet postoji neovisno od procesa spoznaje.

Dveri, kroz koje priroda prodire u nas, jesu osjetila. Njihova svojstva određuju opseg svega onoga, što je pristupačno osjetu i zoru. Što se dalje vraćamo u povijest prirodnih znanosti, nalazimo sve više, da je prirodna slika svijeta određena osjetnim kvalitetima. Starija fizika dijeli se u mehaniku, akustiku, optiku i nauku o toplini. Opaža se veza s osjetilima i osjetima gibanja, sluha, vida i topline. Tu su svojstva subjekta još odlučna kod stvaranja pojmova. Razvoj egzaktnih znanosti vodi vidljivom stazom od toga stanja k cilju, koji nam je jasno pred očima, premda još ni izdaleka nije postignut: da se stvori slika prirode, koja nije vezana na granice mogućnosti osjeta ili zora i koja tvori čisto pojmovnu zgradu, zamišljenu zato, da se jedinstveno i neprotuslovno predoči zbroj svih iskustava.

Danas je mehanička sila apstrakcija, kojoj je samo još ime zajedničko sa subjektivnim osjetom sile; mehanička masa nije više atribut opipljivih tjelesa, nego pripada i praznim prostorima ispunjenim zračenjem. Carstvo čujnih zvukova postalo je mala pokrajina u svijetu nečujnih titraja, koji od čujnih nisu fizički razlučeni ni po čemu, već po slučajnom svojstvu ljudskoga uha, da reagira baš samo na izvjestan interval brojeva titraja. Današnja je optika posebno poglavlje nauke o elektricitetu i magnetizmu te se bavi elektromagnetskim titrajima svih valnih duljina, od najkraćih γ-zraka radioaktivnih tvari (duljina vala jedna stomilijuntnina milimetra [2]) preko röntgenskih zraka, ultravioletnog svijetla, vidljivog svijetla, ultracrvenog svijetla, pa do najduljih Hertzovih valova (duljina vala više kilometara). Za bujicu nevidljivog svijetla, koje duševno oko fizičara vidi oko nas, tjelesno je oko gotovo slijepo; tako je maleno područje titraja, koje oko dovodi osjetu. I nauka o toplini samo je poseban dio mehanike i elektrodinamike; njezini temeljni pojmovi, apsolutna temperatura, energija, entropija idu među najsuptilnije logičke tvorevine egzaktnih znanosti i samo po imenu još sjećaju na doživljaj topline ili hladnoće subjekta.

Nečujni zvukovi, nevidljiva svjetlost, neosjetna toplina, to je svijet fizike, hladan i mrtav za onoga, koji hoće osjetiti živu prirodu, shvatiti harmoniju njenih veza, diviti se njenoj veličini. Goethe je mrzio taj ukočeni svijet; njegova gnjevna polemika protiv Newtona, u kojem je gledao personifikaciju neprijateljskog shvaćanja prirode, dokazuje, da se ovdje radi o dubljim problemima, nego što je stvarna prepirka dvaju učenjaka o pojedinim pitanjima nauke o bojama. Goethe je predstavnik shvaćanja svijeta, koje stoji na spomenutoj skali po važnosti našega ja prilično na protivnom kraju od slike svijeta egzaktnih prirodnih znanosti. Bit pjesništva je inspiracija, intuicija, vidovito obuhvaćanje osjetnog svijeta u simboličkim oblicima; izvor

poetske snage je doživljaj, bio to jasno svijesni osjet nekog podražaja, bila to snažno predočena ideja neke veze. Logički formalna, pojmovna strana nema važnosti u slici svijeta jednog duha na taj način obdarenoga; stran mu je svijet kao suma apstrakcija, koje su tek posredno u vezi s doživljajem. Samo ono, što može neposredno biti dano našem ja, što može biti osjećano kao doživljaj ili barem predočeno kao mogući doživljaj, njemu je realno i važno. Tako se kasnijem čitaocu, koji obuhvaća razvoj egzaktnih metoda slijedećega stoljeća i po plodovima sudi o njihovoj snazi i njihovu smislu, Goetheovi prirodoslovno-*historijski* radovi čine kao dokumenti vidovitog gledanja, kao izraz divnog uživljavanja u prirodne povezanosti, njegove *fizičke* tvrdnje kao nesporazumci i kao besplodno opiranje protiv jače sile, kojoj je već onda bila pobjeda sigurna.

A u čemu je ta sila, što su joj mač i štit?

Preuzetnost i odricanje u isti čas. Egzaktne znanosti idu za traženjem *objektivnih* izričaja, ali se odriču njihove *apsolutne* vrijednosti. Time se hoće istaknuti ovo: svi neposredni doživljaji vode do izričaja, kojima se mora pridati neka apsolutna vrijednost. Vidim li crven cvijet, osjetim li užitak ili bol, to su činjenice, u koje nema smisla sumnjati. Njihova je vrijednost neosporna, ali one vrijede samo za mene; one su apsolutne, ali su subjektivne. Sva nastojanja ljudske spoznaje idu za tim, da se izađe iz uskog kruga našega ja, iz još užega ja u jednom momentu, i da se dođe do zajednice s drugim misaonim bićima. Ponajprije s onim ja, kakvo je u neko drugo vrijeme, a zatim s drugim ljudima ili bogovima. Sve religije, filozofije, znanosti su postupci, stvoreni da se »ja« proširi na »mi«. No različiti su putovi do toga. Opet stojimo pred kaosom prijepornih naučavanja, ali ih se više ne plašimo, nego ih sređujemo po važnosti, koja se pridaje subjektu kod željenog postupka sporazumijevanja; time se vraćamo svome principu, jer gotovi postupak sporazumijevanja je *slika svijeta*. Ovdje se opet javljaju protivni polovi.

Jedni se ne će odreći apsolutnoga, ne će ga žrtvovati, drže se zato svojega ja i stvaraju sliku svijeta, koja se u tuđem duhu ne može probuditi nekim sistematskim postupkom, već samo neshvatljivim djelovanjem religioznih, umjetničkih, poetskih sredstava izražavanja. Tu caruje vjera, pobožna usrdnost, ljubav bratske zajednice, ali često i fanatizam, netrpeljivost, nesloboda duha.

Drugi žrtvuju apsolutno. Oni pronalaze — često sa stravom — da se duševni doživljaj ne da prenijeti, oni se više ne bore za nedostiživo i rezigniraju. Ali oni žele stvoriti sporazumijevanje barem u okviru dostiživoga. Zato traže, što ima zajedničko naše ja i ono drugo, strano ja, i najbolje, što se pri tome nalazi, nisu doživljaji samoga duha, nisu osjeti, predodžbe, osjećaji, nego apstraktni pojmovi najjednostavnije vrsti, brojevi, logički oblici, ukratko sredstva izražavanja egzaktnih prirodnih znanosti. Ovdje se više ne radi o apsolutnom. Visina kupole više ne djeluje uzvišeno, nego se mjeri u metrima i centimetrima. Tok jednog života ne osjeća se kao vrijeme, koje protječe, nego se broji godinama i danima. Relativne mjere nadomještaju apsolutne dojmove. Nastaje uzak, jednostran, uglast svijet, lišen svih osjetnih čara, svih boja i zvukova. No jedna mu je prednost pred drugim slikama svijeta: ne može se sumnjati u njegovu prenošljivost od duha k duhu. *Možemo* se složiti o tome, da li je željezo specifički teže od drva, da li se voda lakše smrzava od žive, da li je Sirius planet ili zvijezda stajačica. Dolazi li katkada do prepirke, izgleda li kadšto, da neka nova nauka ruši stare »činjenice«, osjeća onaj, koji nije štedio truda da uđe u bit toga svijeta, ipak postojani porast pouzdano poznatoga područja. I dok tò osjeća, nestaje bolne osamljenosti, stvara se most do srodnih duhova.

Tako smo pokušali izraziti bit prirodoznanstvenog istraživanja, pa sad možemo uklopiti Einsteinovu teoriju relativnosti u to područje.

Ta je teorija ponajprije čist proizvod one težnje za odvajanjem od »ja«, od osjeta i zora. Govorili smo o nečujnim zvukovima, o nevidljivoj svjetlosti fizike; slično nalazimo u srodnim znanostima, kao u kemiji, gdje se tvrdi, da postoje (radioaktivne) tvari, od kojih još nitko nije izravno svojim osjetilima zamijetio ma i najmanji tračak, ili u astronomiji, o kojoj ćemo kasnije još pobliže govoriti. Ova »proširenja svijeta«, kako bi se moglo reći, tiču se u glavnom osjetnih kvaliteta; no sve se to događa u prostoru i vremenu, kako ih je mehanici dao njen osnivač N e w t o n. E i n s t e i n o v o otkriće je u tome, da su taj prostor i to vrijeme još sasvim blizu našega ja, i da slika svijeta prirodnih znanosti postaje ljepša i grandioznija, ako se i ti temeljni pojmovi učine relativnima. Ako je prostor prije bio usko povezan sa subjektivnim, apsolutnim osjetom prostranstva, a vrijeme s osjećajem o toku života, sada oni postaju čiste pojmovne sheme, koje su kao cjelina isto tako odvojene od neposrednog zora, kao što je ukupno područje valnih duljina današnje optike, osim malog odsječka, nepristupačno osjetu svijetla. No kao i tu, uklapaju se prostor i vrijeme dani zorom neprotuslovno u sustave fizičkih pojmova. Time je postignuto objektiviranje, koje je začudo očitovalo svoju moć mogućnošću proricanja prirodnih pojava. O tom ćemo još opširno govoriti.

Djelo je dakle Einsteinove teorije relativiranje i objektiviranje pojmova prostora i vremena. Ona je kruna prirodoznanstvene slike svijeta.

I. GEOMETRIJA I KOZMOLOGIJA

1. Porijeklo umijeća mjerenja prostora i vremena

Fizički problem prostora i vremena vrlo je stvarna zadaća, da se svakom prirodnom događaju brojčano odredi mjesto i vremenski momenat, da bismo ga, tako reći, u kaosu prostornog i vremenskog poređaja stvari opet mogli pronaći.

Prva je zadaća čovjeka bila, da se snađe na Zemlji; zato je umijeće mjerenja Zemlje postalo izvor nauke o prostoru, koja je otale dobila ime *geometrija*. Mjerilo vremena proizašlo je od početka iz pravilne izmjene dana i noći, iz Mjesečevih mijena i godišnjih doba; tim istaknutim pojavima bili su ljudi potaknuti da uzdignu svoj pogled k zvijezdama, i ovdje je izvor nauke o svemiru, *kozmologije*. Astronomska znanost prenijela je geometrijske nauke prokušane na Zemlji na nebeske prostore i određivala je udaljenosti i staze zvijezda; zato je dala stanovnicima Zemlje nebesko mjerilo vremena, da bi naučili razlučivati prošlost, sadašnjost i budućnost i da svakoj stvari pridaju njeno mjesto u carstvu kronosa.

2. Jedinice za duljinu i vrijeme

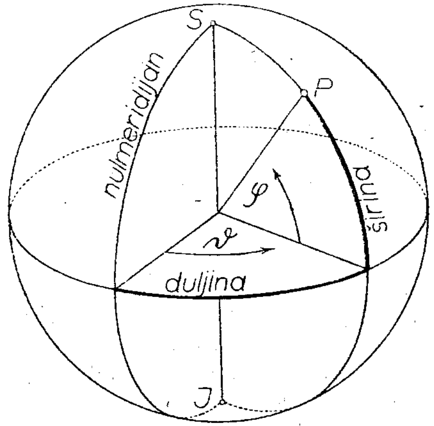
Temelj svakoga mjerenja prostora i vremena je određivanje *jedinice*. Zada li se duljina od »toliko i toliko metara«, zadan je omjer mjerene duljine prema duljini metra; zada li se vrijeme od »toliko i toliko sekunda«, radi se o omjeru mjerenoga vremena i trajanja jedne sekunde. Uvijek se dakle radi o omjerima, o relativnim podacima spram jedinica. One u velikoj mjeri stoje do naše volje i odabiru se po načelima, kao što su mogućnost reproduciranja, trajnost, sposobnost prenošenja i t. d.

Mjera za duljinu u fizici je *centimetar* (cm), stoti dio duljine označene na jednoj šipki, koja se čuva u Parizu. Prvotno je ta duljina, metar, trebala biti u jednostavnom omjeru spram opsega Zemlje, naime jednaka desetmilijuntom dijelu kvadranta. Novija su mjerenja pokazala, da to nije sasvim točno.

Mjera za vrijeme u fizici je *sekunda* (sek), koja je u poznatom odnosu spram trajanja jednog okretaja Zemlje.

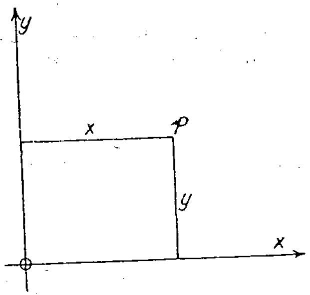
3. Nultočka i koordinatni sustav

Ne želimo li samo određivati duljine i vremenska trajanja, nego i davati podatke o mjestu i vremenu, potrebno je da se utvrde neki pojmovi. Za vrijeme, koje prikazujemo kao jednodimenzionalnu tvorevinu, dovoljno je ustanoviti *nultočku*. Naši historici broje godine od Kristova rođenja; astronomi odabiru prema svrsi svojih istraživanja druge nultočke, koje zovu *epohama*. Ako je ustanovljena jedinica i nultočka, može se svaki događaj pronaći time, da se zada jedan broj.

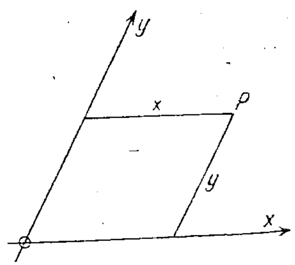


Sl. 1.

U geometriji u užem smislu, kod određivanja mjesta na Zemlji, treba za određenje jedne točke dva podatka. »Moja je kuća u Gundulićevoj ulici« nije dovoljan podatak da se ona nađe; treba još reći kućni broj. U mnogim američkim gradovima same su ulice numerirane; adresa »br. 25, 13. ulica« sastoji se onda iz dva brojčana podatka. Takva je adresa točno ono, što matematičar zove *određenje* koordinatama. Površina zemaljske kugle prekrije se mrežom unakrsnih krivulja, koje su numerirane, ili kojima je položaj spram neke čvrste nulkrivulje određen mjernim brojem, daljinom ili kutom.



Sl. 2.

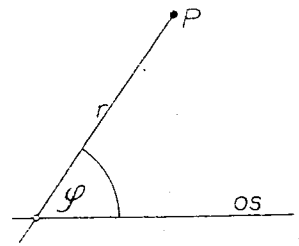


Sl. 3.

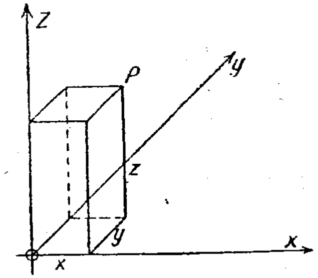
Geografi se obično služe geografskom duljinom (istočno od Greenwicha) i (sjevernom, južnom) širinom (sl. 1); u tima je podacima sadržano i određenje nulkrivulja, od kojih treba brojati koordinate, naime za geografsku duljinu meridijan Greenwicha, za širinu ekvator. Za

istraživanja u planimetriji obično se služimo *pravokutnim koordinatama* (sl. 2) *x*, *y*, koje znače daljine od dviju međusobno okomitih *»koordinatnih osi«*, a katkada se služimo i *kosokutnim koordinatama* (sl. 3), *polarnim koordinatama* (sl. 4) i dr. Ako je koordinatni sustav dan, može se svako mjesto pronaći na temelju dvaju brojeva.

Isto tako su za određenje mjesta u prostoru potrebne tri koordinate, koje se opet mogu odabrati kao pravokutne (sl. 5).



Sl. 4.



Sl. 5.

4. Geometrijski aksiomi

Antička geometrija kao znanost manje se bavila pitanjem određivanja mjesta na Zemljinoj površini, već problemom određivanja veličine i oblika dijelova ploha i prostornih likova te istraživanjem njihovih zakona; osjeća se porijeklo iz mjerenja Zemlje i arhitekture. Zato joj je uspjelo proći i bez pojma koordinata. Geometrijski stavci izriču u prvom redu svojstva nekih elemenata, koji se zovu točke, pravci, ravnine. U klasičnom kanonu grčke geometrije, u djelu E u k l i d o v u (300 god. pr. Kr.), ovi se elementi ne definiraju pobliže, nego se samo označuju ili opisuju; tu se dakle apelira na zor. Što je pravac, moraš već znati, hoćeš li se baviti geometrijom; zamisli brid kuće ili napetu mjernu vrpcu mjernika, apstrahiraj sve materijalno: ostat će ti pravac. Dalje se postavljaju zakoni, koji treba da vrijede među tim tvorevinama apstraktnog zora, a veliko je otkriće Grka, da treba pretpostaviti samo malen broj tih stavaka, kako bi se svi drugi morali logičkom nuždom priznati ispravnim. Ovi početni stavci su *aksiomi;* njihova se ispravnost ne da dokazati, oni ne izviru iz logike, nego iz drugih izvora spoznaje. Koji su to izvori, o tom su sve filozofije idućih stoljeća razvijale teorije. Sama znanstvena geometrija prihvaćala je te aksiome kao dane sve do konca 18. stoljeća i izgradila na njima svoj čisto deduktivni sustav poučaka.

Ne ćemo moći mimoići opširno razmatranje o značenju elementarnih tvorevina kao što su točka, pravac i t. d. i o spoznajnim razlozima geometrijskih aksioma. No ovdje ćemo zauzeti gledište, da su te stvari jasne; operiramo zasad geometrijskim pojmovima, kako smo naučili u školi (ili kako smo barem trebali naučiti) i kako su to bez krzmanja činile nebrojene generacije ljudi. Kao opravdanje neka služi zornost mnogih geometrijskih stavaka i upotrebljivost čitavog sustava za orijentiranje u realnom svijetu.

5. Ptolomejev sustav svijeta

Nebo se oku čini kao više ili manje plosnata kupola, na kojoj su pričvršćene zvijezde; čitava kupola okreće se u toku jednoga dana oko osovine, kojoj je položaj na nebu označen polarnom zvijezdom. Dok je ta očevidnost vrijedila kao stvarnost, nije bilo potrebno prenijeti geometriju sa Zemlje u svemirski prostor, i nije se to ni učinilo; jer nema duljina ili udaljenosti, koje bi se dale mjeriti zemaljskim jedinicama. Za određivanje položaja zvijezda dovoljan su podatak prividni kutovi, što ih čini smjer gledanja od promatrača k zvijezdi s horizontom i jednom drugom zgodno odabranom ravninom. U tom stadiju spoznaje površina je Zemlje mirno, vječno tlo svemira; riječi »gore« i »dolje« imaju apsolutan smisao, i ako se pjesnička mašta ili filozofska spekulacija daju na procjenjivanje visine neba ili dubine Tartara, ne treba objašnjavati značenje tih pojmova, jer ih neposredni doživljaj gledanja daje bez spekulacije. Prirodoslovna tvorba pojmova ovdje još crpi iz obilja subjektivnih činjenica. Sustav svijeta prozvan po *Ptolomeju* (150 poslije Kr.) znanstvena je formulacija toga duševnog stanja; taj sustav već poznaje mnoštvo finijih činjenica o kretanju Sunca, Mjeseca i planeta i teoretski ih obuhvaća znatnim uspjehom, ali ostaje kod Zemlje, koja apsolutno miruje, oko koje zvijezde kruže u beskrajnim udaljenostima. Njihove se staze određuju po zakonima zemaljske geometrije kao kružnice i epicikli, ali se sam svemirski prostor ne ravna po geometriji, jer staze leže kao tračnice na kristalnim kuglinim plohama, koje složene jedna u drugu čine nebo.

6. Kopernikov sustav svijeta

Zna se, da su već grčki mislioci otkrili da Zemlja ima oblik kugle i da su se, polazeći od Ptolomejeva geocentričkog sustava svijeta, odvažili na prve korake k višim apstrakcijama. No tek dugo poslije izumiranja grčke kulture, kod naroda drugih zemalja, *zemaljska kugla* postala je fizička stvarnost. Time se prvi put ljudski duh udaljio od očevidnosti i ujedno ostvario prvo veliko relativiranje. Opet su prošla stoljeća od tog obrata, i što je onda bilo nečuveno otkriće, danas je školsko znanje za malu djecu. Zato je teško shvatiti, što je značilo za mišljenje, kada su pojmovi »gore« i »dolje« izgubili svoj apsolutni smisao, i kad je moralo biti priznato pravo antipoda da nazovu »gore« jedan smjer u prostoru, koji se ovdje zove »dolje«. No kad je uspjelo prvo putovanje oko svijeta, stvar je postala tako očita, da je zamro svaki prigovor. Stoga samo otkriće globusa i nije dalo povoda borbi između objektivnog i subjektivnog shvaćanja svijeta, između prirodoznanstvenog istraživanja i crkve. Ta je borba planula tek onda, kad je K o p e r n i k (1543.) zemlji oduzeo njen centralni položaj u svemiru i stvorio *heliocentrički sustav svijeta.*

Samo po sebi nije to baš bio viši stupanj relativiranja, ali značenje tog otkrića za razvoj ljudskoga duha bilo je u tome, da se sruši s prijestolja i Zemlja i čovječanstvo i pojedino ja. Zemlja postaje pratilac Sunca i vuče sa sobom čovječanstvo, koje na njoj vrvi, dok pored nje kruže slični, jednako vrijedni planeti: čovjek u astronomiji nije više važan, osim možda sam za sebe. No još i više: sva ta čuda ne izviru iz grubih činjenica (kao što je primjerice putovanje oko Zemlje), nego iz finih suptilnih opažanja, mučnih računa o stazama planeta, svakako iz razloga, koji nisu svakomu pristupačni, a nisu ni od kakve važnosti za svakidašnji život. Očevidnost, zor, sveta i profana predaja govore protiv nove nauke. Na mjesto vidljive sunčane ploče ona stavlja nepredočivo golemu plamenu loptu, na mjesto prijaznih nebeskih luči isto takve plamene lopte ili kugle poput Zemlje, koje odražuju tuđe svijetlo. Sve vidljive mjere time su varka, a istina su neshvatljive udaljenosti, strahovite brzine. A ipak je nova nauka morala pobijediti; jer joj je snaga bila u žarkoj želji svakoga misaonog čovjeka da sve pojave prirodnoga svijeta, bile one ma kako malo važne za ljudski život, obuhvati u jednoj cjelini upravljanoj zakonima, tako da ih može zadržati u mišljenju i drugima saopćiti. Kod toga procesa, koji sačinjava bit prirodoznanstvenog istraživanja, duh ne preza pred tim, da sumnja u najočitije zorne činjenice i da ih proglašuje varkama, ali radije posiže i za najvišim apstrakcijama, prije nego što isključi iz slike o prirodi neku sigurnu činjenicu, ma kako beznačajna bila. Zato je morala i crkva, ondašnji nosilac subjektivnog shvaćanja svijeta, proganjati Kopernikovu nauku, zato je morao G a l i l e i pred sud za raskolnike. Nije to bilo samo protuslovlje s dogmama posvećenima tradicijom, koje je raspalilo ovu borbu, nego promijenjeni stav spram duševnih pojava; ako doživljaj duše, zornost stvari više nisu trebali ništa značiti u prirodi, mogla je ta sumnja jednoga dana pogoditi i religiozni doživljaj. Kakogod su i najsmioniji mislioci onoga vremena bili daleko od religiozne skepse, crkva je ipak slutila, gdje joj je neprijatelj.

Od velikoga Kopernikova djela relativiranja potječu sva nebrojena slična, ali manja relativiranja u sve opsežnijem krugu prirodnih znanosti, dok se Einsteinovo djelo opet dostojno stavlja uz bok velikog uzora.

Moramo sada s nekoliko riječi opisati kozmos, kako ga je zamislio K o p e r n i k.

Treba najprije reći, da se zakoni zemaljske geometrije bez daljega prenose na svemirski prostor. Plošno predočeni cikli Ptolomejeva svijeta nadomještaju se pravim prostornim stazama, koje se nalaze u ravninama različitih položaja. Središte svjetskog sustava je Sunce, oko njega planeti opisuju svoje krugove; jedan je od njih Zemlja, koja se sama okreće oko svoje osi, i oko koje Mjesec obilazi opet po kružnoj stazi. A vani, u golemim udaljenostima, nalaze se zvijezde stajačice, koje su sunca poput našega i miruju u prostoru. Kopernikovim konstruktivnim djelom može se smatrati dokaz, da promatrajući nebo uz tu hipotezu moramo vidjeti sve one pojave, koje je tradicionalni sustav svijeta mogao protumačiti samo zamršenim i umjetnim hipotezama. Izmjena dana i noći, godišnja doba, pojavi Mjesečevih mijena, vijugave staže planeta, sve to najednom postaje jasno, razumljivo i pristupačno relativno jednostavnu računu.

7. Izgradnja Kopernikove nauke

Kružne staze Kopernikove uskoro se više nisu slagale s opažanjima; očito je, da su prave staze znatno zamršenije. Bilo je tada odlučno za vrijednost novoga shvaćanja o svijetu, da li će opet biti potrebne umjetne konstrukcije kao epicikli Ptolomejeva sustava, ili će poboljšanje računa staza uspjeti bez zamršaja. *Keplerova* je neumrla zasluga bila (1618), da je pronašao jednostavne i providne zakone planetnih staza i time u krizi spasio Kopernikov sustav. Staze doduše nisu kružnice oko Sunca, ali su kružnici vrlo srodne krivulje, elipse, a Sunce stoji u jednom njihovu žarištu. Kako ovaj zakon određuje na jednostavan način oblik staza, tako druga dva Keplerova zakona određuju veličinu staza i brzine, kojim se planeti po njima gibaju.

Keplerov savremenik Galilei (1610) upravio je novo izumljeni dalekozor na zvjezdano nebo i otkrio je Jupiterove mjesece; u njima je prepoznao smanjenu sliku planetnoga sustava, vidio je Kopernikove ideje kao optičke realnosti. No veća je zasluga Galileijeva razvoj principâ mehanike, koje je Newton (1687) primijenio na staze planeta i tako dotjerao i završio Kopernikov sustav svijeta.

Kopernikove kružnice i Keplerove elipse su ono, što današnja znanost zove *kinematičkim* ili *foronomijskim predočivanjem* staza, t. j. matematička formulacija gibanja bez tumačenja uzroka i veza, koje proizvode upravo takva gibanja. Kauzalna formulacija zakona gibanja sadržaj je *dinamike* ili *kinetike*, koju je osnovao Galilei. Newton je primijenio ovu nauku na gibanja nebeskih tijela i genijalnom interpretacijom Keplerovih zakona uveo pojam uzroka kao *mehaničku silu* u astronomiju. Newtonov zakon opće sile privlačenja ili gravitacije pokazao je svoju nadmoćnost nad starijim teorijama time, što su se njime mogla protumačiti sva odvajanja od Keplerovih zakona, tako zvane smetnje ili perturbacije staza, koje su međutim bile pronađene sve finijim umijećem opažanja.

Ovo dinamičko shvaćanje gibanjâ u svemirskom prostoru ujedno je tražilo oštriju formulaciju pretpostavaka o *prostoru* i *vremenu*. Kod Newtona su ovi aksiomi prvi puta izričito formulirani. Možemo dakle stavke, koji su vrijedili do Einsteina, označiti kao Newtonovu nauku o prostoru i vremenu. Da ih se shvati, prijeko je potrebno imati pregled osnovnih pojmova mehanike, i to s gledišta, koje naglašuje pitanje relativnosti, i koje se obično zanemaruje u elementarnim udžbenicima. Mi ćemo stoga najprije razmotriti najjednostavnije činjenice, definicije i zakone mehanike.

II. OSNOVNI ZAKONI KLASIČNE MEHANIKE

1. Ravnoteža i pojam sile

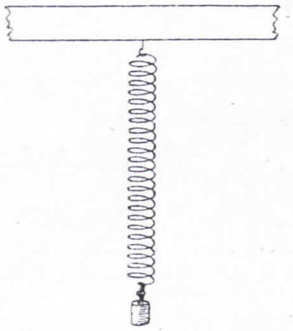
Mehanika je historijski pošla od *nauke o ravnoteži* ili *statike;* a i logički je takva izgradnja najprirodnija.

Temeljni pojam statike je *sila*; taj pojam potječe od osjeta napora kod izvođenja tjelesnog rada. Od dva čovjeka onaj je jači, koji može podići teži kamen, koji može napeti krući luk. U toj mjeri sile, kojom je Odisej proscima dokazao svoje pravo i koja je često važna i u drugim starim herojskim pjesmama, već je sadržana klica objektiviranja subjektivnog osjeta napora. Dalji je korak izbor jedinice sile i mjerenje svih sila u odnosu spram jedinične sile, dakle relativiranje pojma sile. Težina, kao najistaknutija sila, koja sve zemaljske predmete vuče prema dolje, davala je jedinicu sile u udobnom obliku: komad kovine, koji je nekim državnim ili svećeničkim aktom bio određen kao jedinica težine. Danas međunarodni kongresi ustanovljuju jedinice. Kao jedinica težine vrijedi u tehnici težina izvjesnoga komada platine u Parizu; tu jedinicu, zvanu *gram* (g), upotrebljavat ćemo do daljega. Instrumenat za uspoređivanje težina različitih tjelesa je *vaga*.

Dva su tijela jednake težine, jednako teška, ako ne poremete ravnotežu vage, kada se stave na njene zdjelice. Ako se ta dva jednako teška tijela stave oba na jednu zdjelicu, na drugu tijelo, koje im drži ravnotežu, to drugo tijelo ima dvostruku težinu svakog od prvih. Nastavimo li ovako, možemo, polazeći od jedinice težine, načiniti slog utega, kojim se može težina svakoga tijela odrediti na udoban način.

Nije nam ovdje zadaća izvesti, kako se tim sredstvima mogu naći i tumačiti jednostavni zakoni statike krutih tijela, primjerice zakoni poluge. Donosimo samo toliko pojmova, koliko nam je prijeko potrebno za razumijevanje teorije relativnosti.

Druge sile, osim sile vlastitoga tijela ili domaćih životinja, ukazuju se primitivnom čovjeku u prvom redu kod pojava, koje zovemo *elastičnim*. Ovamo ide sila, koja je potrebna za napinjanje luka. Takvu silu možemo lako uspoređivati s težinama. Hoćemo li primjerice izmjeriti silu, koja je potrebna, da se neko spiralno pero (sl. 6) rastegne za određen dio, možemo iskušati, kolik se uteg mora objesiti, da baš kod tolikoga rastezanja nastane ravnoteža; tada je sila pera



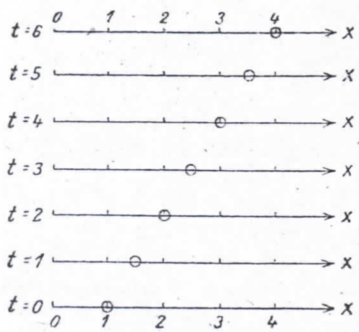
Sl. 6.

jednaka sili utega, samo što pero vuče prema gore, uteg prema dolje. Pri tom se ćutke primjenjuje načelo, da su sila i protusila (akcija i reakcija) u ravnoteži jednake.

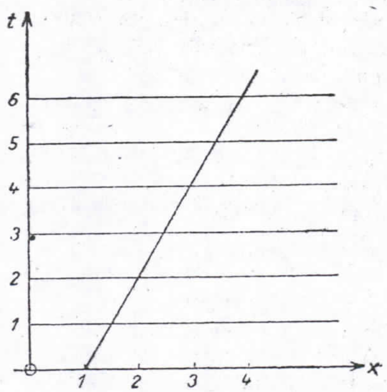
Poremetimo li takvu ravnotežu slabljenjem ili oduzimanjem jedne sile, nastaje *gibanje*. Uteg pada s visine, ako popusti ruka, koja drži uteg i daje protusilu, strelica poleti, kada strijelac ispusti tetivu napetog luka. Sila proizvodi gibanje. To je polazna točka *dinamike*, koja traži zakone toga pojava.

2. Nauka o gibanju. Pravocrtno gibanje

Najprije treba raspraviti sam pojam gibanja. Egzaktno, matematičko opisivanje gibanja neke točke sastoji se u tome, da se od momenta do momenta kaže, na kojem se mjestu ta točka nalazi s obzirom na unaprijed odabrani koordinatni sustav. Matematičaru služe za to formule; mi ćemo se po mogućnosti kloniti toga načina predočivanja zakona i veza, kojemu nije svatko vješt, i poslužit ćemo se mjesto toga grafičkim načinom prikazivanja. Taj ćemo način objasniti na najjednostavnijem primjeru, na gibanju točke po pravcu. Na pravcu neka je odabrana nultočka. Jedinica duljine neka je cm, kako je to u fizici uobičajeno. Pokretna točka neka je udaljena za $x = 1$ cm od nultočke



Sl. 7.



Sl. 8.

u onom momentu, kad počinjemo razmatranje. Taj momenat označujemo sa $t = 0$. Za vrijeme od 1 sek neka se točka odmaknula za ½ cm na desno, tako da za $t = 1$ udaljenost od nultočke ima vrijednost $x = 1{,}5$ cm. U idućoj sekundi neka se točka pomakne za isti iznos

na desno, do mjesta $x = 2$ cm i t. d. Ova mala tablica daje udaljenosti x, koje pripadaju vremenima t:

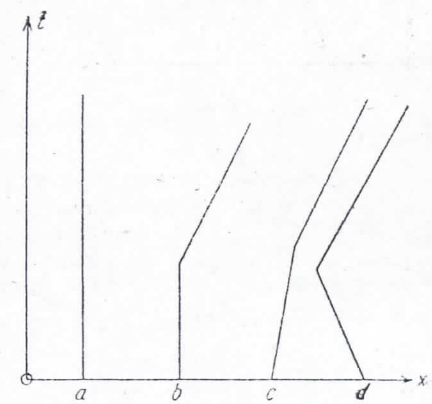
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8 ....
x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5 ....

Istu vezu vidimo na svim pravcima redom u sl. 7, gdje je pokretna točka označena kao mala kružnica na skali udaljenosti. Mjesto da se načine sami mali likovi jedan iznad drugoga, može se nacrtati samo jedan lik, u kojem se x i t pojavljuju kao koordinate (sl. 8); to ima još i tu prednost, da se mogu predočiti mjesta točke ne samo za cijele sekunde, već i za sva vremena između toga. Treba za to samo položaje označene u sl. 7. spojiti crtom. U našem je to slučaju očito pravac. Točka se pomiče u jednakim vremenima za jednake dužine, x i t se dakle mijenjaju u istom odnosu (proporcionalno), pa je jasno, da je slika toga zakona pravac. Takvo gibanje zovemo *jednolikim*. *Brzinom* v označuje se omjer prevaljenoga puta i za to potrebnog vremena, t. j. u znakovima:

$$v = \frac{x}{t}. \tag{1}$$

U našem primjeru točka prevaljuje u svakoj sekundi put od ½ cm, brzina dakle ostaje uvijek ista i iznosi ½ cm po sekundi.

Jedinica brzine je tom definicijom već ustanovljena; to je ona brzina, kod koje pokretna točka u 1 sek prevaljuje 1 cm. Velimo, da je to izvedena jedinica i označujemo je bez uvođenja novog imena sa cm po sek ili cm/sek. Kao izraz toga, što se mjerenje brzine može svesti po formuli (1) na mjerenja duljinâ i vremenâ, kaže se također, da brzina ima »*dimenziju*« duljina kroz vrijeme, pisano $[v] = \left[\frac{l}{t}\right]$. Na sličan način pridružuje se određena dimenzija svakoj veličini, koja se može sastaviti iz temeljnih veličina duljine l, vremena t i težine G. Kad je ta dimenzija poznata, može se jedinica veličine odmah izraziti pomoću jedinica duljine, vremena i težine, na pr. cm, sek i g.



Sl. 9.

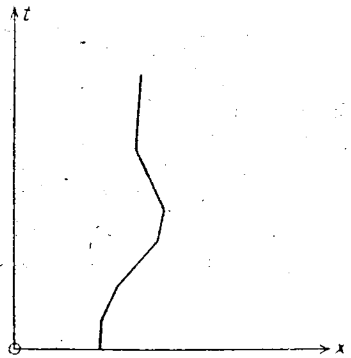
Kod velikih je brzina put x prevaljen u vremenu t velik, pravac u slici zatvara dakle malen kut spram x-osi; što je brzina manja, to je taj pravac strmiji. Točka, koja miruje, ima brzinu nula i predočena je u našem dijagramu pravcem paralelnim s t-osi, jer točke toga pravca imaju za sva vremena istu vrijednost od x (sl. 9a).

Ako točka najprije miruje, a onda u nekom momentu iznenada dobije neku brzinu, pa se tom brzinom dalje giba, dobijemo sliku slomljene crte, kojoj je prvi dio vertikalan (sl. 9b). Slične slomljene crte predočuju slučajeve, gdje točka, koja se isprva giba jednoliko na desno ili na lijevo, najednom promijeni svoju brzinu (sl. 9c, d).

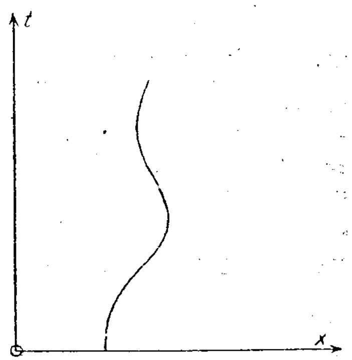
Ako je prije iznenadne promjene brzina v_1 (na pr. = 3 cm/sek), poslije toga v_2 (na pr. = 5 cm/sek), prirast je brzine $v_2 - v_1$ (dakle $= 5 - 3 = 2$ cm/sek). Ako je v_2 manji od v_1 (na pr. = 1 cm/sek), $v_2 - v_1$ je negativan (naime $= 1 - 3 = -2$ cm/sek), a to očito znači, da se točka iznenada usporuje.

Dešavaju li se točci često za redom momentane promjene brzine, slika njezina gibanja je poligonalna crta (sl. 10).

Ako promjene brzine slijede sve brže jedna za drugom i pri tom postaju dovoljno malene, to se poligonalna crta uskoro više ne će moći razlikovati od krivulje; ta crta onda predočuje gibanje, kod kojega se brzina neprestano mijenja, koje je dakle nejednoliko, ubrzano ili usporeno (sl. 11).



Sl. 10.



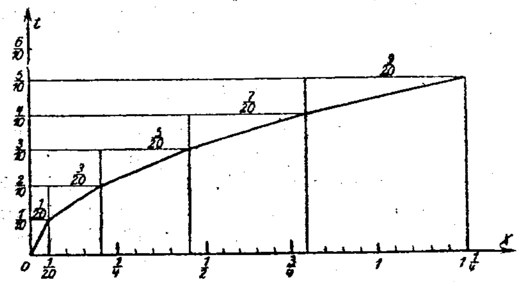
Sl. 11.

Egzaktna mjera brzine i njezine promjene, ubrzanja (akceleracije), može se u tom slučaju dobiti samo metodama infinitezimalnoga računa. Za nas je dovoljno, da krivulju zamislimo nadomještenu poligonom, kojemu ravne stranice predočuju gibanja s konstantnom brzinom. Vrhovi poligona, t. j. iznenadne promjene brzine, neka slijede u jednakim razmacima vremena, recimo $t = \frac{1}{n}$ sek. Ako su osim toga i sve jednako velike, gibanje se zove »jednoliko ubrzano«. Pojedina promjena brzine neka ima veličinu w, i ako ih ima n u sekundi, to je ukupna promjena brzine u sekundi (sl. 12)

(2) $$nw = \frac{w}{t} = b.$$

Ova je veličina mjera *ubrzanja;* njezina je dimenzija očito $[b] = \left[\frac{v}{t}\right] = \left[\frac{l}{t^2}\right]$, a njezina je jedinica ono ubrzanje, kod kojega brzina u jedinici vremena naraste za jedinicu, dakle u fizičkom sustavu cm/sek^2.

Želimo li znati, kako se daleko pomakne pokretna točka, koja se giba jednoliko ubrzano, u bilo kojem vremenu t, zamislit ćemo, da je vrijeme t razdijeljeno u n jednakih dijelova i da se brzina točke na kraju svakoga malog vremenskog odsjeka $\frac{t}{n}$ naglo povećava za iznos w. Ovaj je iznos u vezi s ubrzanjem b prema formuli (2), ako se u njoj maleni vremenski interval t nadomjesti sa $\frac{t}{n}$: $w = b\,\frac{t}{n}$.



Sl. 12.

Onda je brzina

poslije prvoga vremenskog odsjeka $v_1 = w$,
„ drugoga „ „ $v_2 = v_1 + w = 2w$,
„ trećega „ „ $v_3 = v_2 + w = 3w$, i t. d.

Pri tom se pomakne točka

poslije prvoga vremenskog odsjeka do $x_1 = v_1\,\frac{t}{n}$,
„ drugoga „ „ „ $x_2 = x_1 + v_2\frac{t}{n} = (v_1 + v_2)\frac{t}{n}$
„ trećega „ „ „ $x_3 = x_2 + v_3\frac{t}{n} = (v_1 + v_2 + v_3)\frac{t}{n}$

i t. d. Poslije n-toga vremenskog odsjeka, dakle na kraju vremenskog intervala t, točka će dospjeti do:

$$x = (v_1 + v_2 + \ldots + v_n)\,\frac{t}{n}.$$

Izraz u zagradi je jednak:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 1w + 2w + 3w + \ldots + nw = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)w.$$

Zbroj brojeva od 1 do n može se lako izračunati time, da se zbroji prvi i zadnji član, drugi i predzadnji i t. d.; svaki puta izlazi $n+1$, a takvih zbrojeva ima $\frac{n}{2}$. Bit će dakle:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}(n+1).$$

Nadomjestimo li osim toga w sa $b\frac{t}{n}$, izlazi:

$$v_1+v_2+\ldots+v_n=\frac{n}{2}(n+1)\frac{bt}{n}=\frac{bt}{2}(n+1),$$

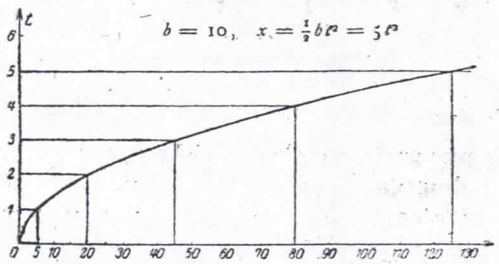
dakle

$$x=\frac{bt}{2}(n+1)\frac{t}{n}=\frac{bt^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ovdje se može n odabrati bilo kako velik; tada postaje $\frac{1}{n}$ po volji malen, pa se dobije:

$$x_1=\frac{1}{2}bt^2.$$

To znači, da se putovi prevaljeni u jednakim vremenima odnose kao kvadrati vremenâ. Iznosi li primjerice ubrzanje $b=10$ m/sek², to će točka u 1. sekundi prevaliti put od 5 m, u 2. sekundi $5.2^2=5.4=20$ m, u 3. sekundi $5.3^2=5.9=45$ m i t. d. Ova se veza može predočiti u xt-ravnini krivuljom, koja se zove parabola (sl. 13). Usporedi li se taj lik



Sl. 13.

sa slikom 12, vidi se, kako poligonski potez približno predočuje kontinuirano zakrivljenu parabolu. U obim slikama odabrano je ubrzanje $b=10$, i to ubrzanje određuje oblik krivulje, dok jedinice duljine i vremena nisu bitne.

Pojam ubrzanja može se primijeniti i na nejednoliko ubrzana gibanja, ako se umjesto 1 sek uzme tako kratko vrijeme opažanja, da se u tom vremenu gibanje može smatrati jednoliko ubrzanim. Sâmo se ubrzanje tada neprestano mijenja.

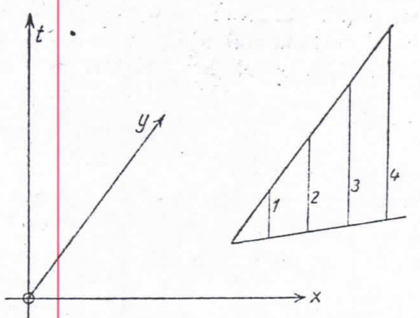
Sve te definicije tek onda postaju stroge i ujedno lako primjenljive, kada se točno prouči proces dijeljenja u male odsječke, u kojima se promatrana veličina može smatrati konstantnom. Pri tome se dolazi do pojma granične vrijednosti, koji je polazna točka diferencijalnoga

računa. Historijski je zaista nauka o gibanju bila onaj problem, radi koga je Newton izmislio diferencijalni račun i njegov obrat, integralni račun.

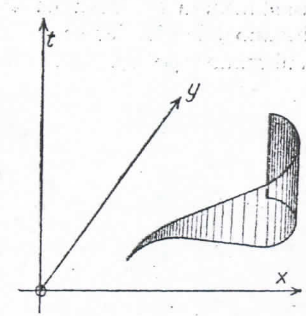
Nauka o gibanju (kinematika, foronomija) pripremni je dio prave mehanike sila ili dinamike i očito tvori neku vrst geometrije gibanja. Zaista je u našem grafičkom predočivanju svako gibanje predočeno geometrijskom tvorevinom u ravnini s koordinatama x, t. Ovo predočivanje je više nego usporedba. Baš u teoriji relativnosti dobiva uvođenje vremena kao koordinate pored prostornih izmjera načelno značenje.

3. Gibanje u ravnini

Želimo li proučavati gibanje točke u ravnini, naš se postupak predočivanja može lako primijeniti. U ravnini se odabere koordinatni sustav xy i postavi t-os okomito na na tu ravninu (sl. 14). Pravocrtnom jednolikom gibanju u xy-ravnini odgovara onda pravac u xyt-prostoru. Ako se točke toga pravca, koje odgovaraju vremenskim vrijednostima $t=0$, 1, 2, 3, ..., projiciraju na xy-ravninu, vidi se, da se prostorno odmicanje odvija po pravcu i u pravilnim intervalima.

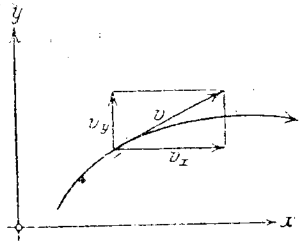


Sl. 14.



Sl. 15.

Gibanje, koje nije pravocrtno i jednoliko, zove se *ubrzano*, na pr. i onda, kad točka prolazi *konstantnom* brzinom *zakrivljenu* stazu. Pri tom se doduše ne mijenja *veličina* brzine, ali joj se mijenja *smjer*. Ubrzano gibanje predočeno je bilo kakvom krivuljom u xyt-prostoru (sl. 15). Projekcija te krivulje na xy-ravninu je ravninska staza. Opet se može brzina i ubrzanje izračunati tako, da se krivulja nadomjesti poligonskim potezom, koji joj je usko priljubljen. Na svakom kutu poligona ne mijenja se samo veličina brzine, već i njezin smjer. Točnija analiza pojma ubrzanja predaleko bi nas odvela. Dovoljno je reći, da je najbolje projicirati pokretnu točku na koordinatne osi x, y i slijediti pravocrtno gibanje tih dviju projekcija, ili, što je isto, vremensko mijenjanje samih koordinata x, y. Na gibanja tih projekcija mogu se primijeniti pojmovi, koje smo dali za pravocrtna gibanja. Tako se dobiju *komponente brzine* v_x, v_y i dvije *komponente ubrzanja* b_x, b_y, koje zajedno određuju stanje brzine. odnosno ubrzanja pokretne točke.



Sl. 16.

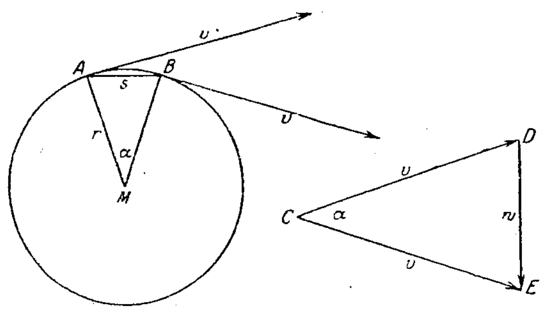
Kod ravninskog gibanja (i isto tako kod prostornoga) brzina i ubrzanje su dakle *usmjerene veličine* (vektori), t. j. one imaju određen *smjer* i određen *iznos*, koji se može izračunati iz komponenata. Brzina se primjerice dobiva po smjeru i po veličini kao dijagonala pravokutnika sa stranicama v_x i v_y (sl. 16). Njezin je iznos dakle po Pitagorinu poučku.

(3) $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,.$$

Sasvim analogno vrijedi za ubrzanje.

4. Kružno gibanje

Samo ćemo jedan slučaj pobliže razmotriti, a to je gibanje točke konstantnom brzinom na kružnoj stazi (sl. 17). Kako smo rekli, to je ubrzano gibanje, jer se smjer brzine neprestano mijenja. Da je gibanje neubrzano, pokretna točka pošla bi od točke A brzinom v pravocrtno naprijed. Točka međutim treba ostati na kružnici, mora dakle imati još jednu brzinu ili ubrzanje prema središtu M. Zovemo ga *centripetalnim ubrzanjem.* Zbog toga ubrzanja imat će brzina u susjednoj točki B, do koje se dolazi u kratkom vremenu t, drugi smjer nego u točki A. Povucimo u sporednoj slici (sl. 17) iz neke točke C brzine u točkama A i B po smjeru i veličini. Veličina v je ista, jer pokretna točka prolazi kružnicom konstantnom brzinom, ali je smjer različit. Spojimo li krajnje točke D i E obih strelica brzina, ta je spojnica očito dodatna brzina w, koja pretvara prvo stanje brzine u drugo. Izlazi dakle istokračan trokut CED s osnovkom w i s kracima v, pa se



Sl. 17.

odmah vidi, da je kut α na vrhu jednak središnjem kutu luka AB, kojim pokretna točka prolazi. Brzine u točkama A i B okomite su na polumjerima MA i MB i stoga zatvaraju isti kut. Istokračni trokuti MAB i CDE slični su dakle, pa izlazi razmjer

$$\frac{DE}{CD} = \frac{AB}{MA}\,.$$

Dalje je $DE = w$, $CD = v$, MA jednak je polumjeru r kružnice, a AB je jednak luku s osim male pogreške, koja se može po volji smanjiti, ako se interval vremena t odabere dovoljno malen.

Izlazi dakle

$$\frac{w}{v} = \frac{s}{r} \quad \text{ili} \quad w = \frac{sv}{r}\,.$$

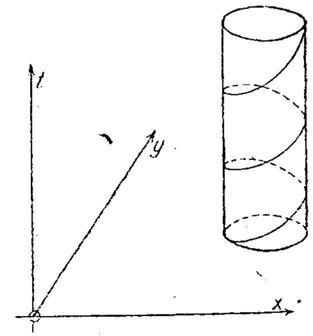
Podijelimo li sa t i uzmemo u obzir, da je $\frac{s}{t} = v$, $\frac{w}{t} = b$, to dobijemo

(4) $$b = \frac{v^2}{r}\,,$$

t. j. *centripetalno ubrzanje jednako je kvadratu ophodne brzine podijeljenom polumjerom kružnice.*

Na ovom se stavku osniva, kako ćemo vidjeti, jedan od prvih i najznačajnijih dokaza za Newtonovu teoriju gravitacije.

Možda nije suvišno razmotriti, kako izgleda jednoliko gibanje po krugu, kada se grafički predoči kao krivulja u xyt-prostoru. Ta krivulja očito nastaje, ako se pokretna točka za vrijeme kružnoga gibanja jednoliko uspinje u smjeru osi t. Dobije se *zavojnica* (spirala), koja potpuno predočuje stazu i vremenski tok gibanja. U slici (sl. 18) nacrtana je ta zavojnica na plaštu valjka, kojemu je osnovka površina kružne staze u xy-ravnini.



Sl. 18.

5. Gibanje u prostoru

Naše grafičko predočivanje ne vrijedi kod gibanja u prostoru, jer bismo pored triju prostornih koordinata x, y, z imali vrijeme t kao četvrtu, a naša moć zornoga predočivanja nažalost je ograničena na trodimenzionalni prostor. Ovdje mora pomoći matematičar sa svojim jezikom formula. Metode *analitičke geometrije* dopuštaju računsko istraživanje svojstava i odnosa prostornih tvorevina, pa nije potrebno uteći se zoru ili crtati likove. Ovaj je postupak dapače moćniji od konstrukcije. Prije svega nije vezan na 3 dimenzije, već se može primijeniti i na prostore od 4 ili više dimenzija. U jeziku matematičara pojam prostora od više nego 3 dimenzije ne znači ništa mistično, već samo izražava, da se radi o elementima, koji se daju odrediti tek sa više od 3 brojčana podatka. Tako se položaj točke u nekom momentu može odrediti samo četirma brojčanim podacima, trima prostornim koordinatama x, y, z i vremenom t. Ako smo naučili postupati s xyt-prostorom kao sa slikom ravninskih gibanja, ne će nam biti teško smatrati, da su gibanja u trodimenzionalnom prostoru prikazana krivuljama u $xyzt$-prostoru. To shvaćanje kinematike kao geometrije u četverodimenzionalnom $xyzt$-prostoru daje nam prednost, da se poznati geometrijski zakoni mogu prenijeti na nauku o gibanju. Međutim, to shvaćanje ima još dublje značenje, koje će se jasno pokazati u Einsteinovoj teoriji. Vidjet će se, da se pojmovi prostora i vremena, koji odgovaraju doživljajima sasvim različitoga kvaliteta, i ne mogu oštro razlučiti kao objekti fizičkih mjerenja. Ako se u fizici želimo držati načela, da samo ono priznamo realnim, što se dâ fizički ustanoviti, morat ćemo pojmove prostora i vremena stopiti u viši, jedinstven pojam, a to je upravo četverodimenzionalni $xyzt$-prostor. Minkowski (1908) je nazvao taj prostor *»svijet«*, čime je htio izraziti, da element reda svih realnih stvari nije mjesto i momenat, nego *»događaj«* ili *»svjetska točka«*, t. j. mjesto u određenom momentu. Grafičku sliku pokretne točke zvao je *»svjetskom crtom«*, i taj ćemo izraz stalno upotrebljavati. Pravocrtnom jednolikom gibanju odgovara dakle pravac kao svjetska crta, ubrzanom gibanju krivulja.

6. Dinamika. Zakon tromosti

Poslije ovih priprava prelazimo na pitanje, od kojega smo pošli, naime na koji način sile proizvode gibanja.

Najjednostavniji je slučaj, kad uopće nema sila. Mirno tijelo onda sigurno ne će biti pokrenuto. To su ustanovili već antički mislioci. No oni su povrh toga držali, da mora vrijediti i obrnuto: gdje ima gibanja, mora biti i silâ, koje ta gibanja održavaju. Ovaj nazor odmah dovodi do teškoća, ako zapitamo, zašto bačen kamen leti dalje, kada se odvoji od ruke. Očito ga je ruka pokrenula, a njeno je djelovanje svršeno, kada gibanje tek zapravo počinje. Antički mislioci mnogo su mudrovali o tome, koje sile održavaju gibanje kamena u letu. Tek je Galilei zauzeo pravo gledište. Opazio je, da je predrasuda smatrati, da uvijek mora postojati sila, gdje ima gibanja. Treba naprotiv zapitati, koje je kvantitativno svojstvo gibanja zakonski povezano sa silom; možda mjesto tijela u gibanju, ili njegova brzina, ili ubrzanje, ili neka kombinirana veličina, ovisna od svih spomenutih. O tom se samim razmišljanjem ne može ništa saznati, nego treba pitati prirodu, a odgovor, koji ona u prvi mah daje, glasi, da sile djeluju na *promjene brzine*. Za održavanje gibanja, kod kojega se veličina i smjer brzine ne mijenjaju, ne treba sile, i obrnuto: gdje nema silâ, ne mijenjaju se smjer i veličina brzine. Tijelo, koje miruje, ne će se pokrenuti, a tijelo, koje se giba jednoliko i pravocrtno, ostaje u tom stanju gibanja.

Taj *zakon ustrajnosti* ili *tromosti* nije tako bjelodan, kao što bi se moglo pomisliti po jednostavnoj njegovoj formulaciji. Po svojem isku-

stvu ne poznajemo tjelesa, koja bi zaista bila izuzeta od svih djelovanja, a ako takvo tijelo zamislimo u mašti, kako se giba kroz svemir jednoliko i po pravcu, odmah se susrećemo s problemom apsolutno ravne staze u apsolutno mirnom prostoru, o čemu ćemo tek kasnije opširno govoriti. Shvaćamo stoga zakon tromosti zasad u ograničenom smislu, koji mu je davao Galilei. Zamislimo gladak, točno horizontalan stol i na njemu glatku kuglu. Svojom težinom bit će kugla pritisnuta na stol, ali se može ustanoviti, da ne treba znatne sile, da se kugla po stolu polagano giba. Očito je, da na kuglu u horizontalnom smjeru ne djeluje nikakva sila, inače ne bi na svakom mjestu sama od sebe ostala na miru.

Damo li joj neku brzinu, kugla se kotrlja po pravcu i jedva se nešto usporuje. Galilei je spoznao, da je ovo usporenje sekundarni učinak, uzrokovan trenjem stola i uzduha, premda se sile trenja ne očituju na temelju statičkih metoda, od kojih smo pošli. Svojstvo je velikog istraživača, da u nekom pojavu prepozna ono, što je bitno i od toga razluči sporedna poremećenja.

Na stolu se dakle potvrđuje zakon tromosti. Ustanovljeno je, da brzina ostaje konstantna po smjeru i veličini, kada nema silâ.

Sile će dakle biti vezane s promjenom brzine, s ubrzanjem. Kako, opet se može odlučiti samo na temelju iskustva.

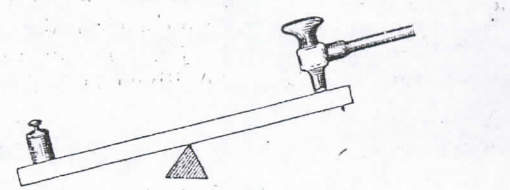
7. Udarac ili impuls

Ubrzanje nejednolikoga gibanja predočili smo kao granični slučaj naglih promjena brzinâ kratkotrajnih jednolikih gibanja. Pitat ćemo stoga najprije, kako se može utjecajem sile proizvesti nagla promjena brzine. Da se to postigne, sila mora djelovati samo kratak čas. Zovemo to onda udarcem ili impulsom. Uspjeh takvog udarca ne ovisi samo o veličini sile, već i o trajanju njezina djelovanja, bilo to trajanje i vrlo kratko. Zato se jakost udarca definira ovako: Znači li impuls J djelovanje sile K u vremenu $t = \frac{1}{n}$ sek, onda će n takvih impulsa, ako slijede brzo uzastopce bez primjetnih prestajanja, imati isti uspjeh, kao da je sila K djelovala kroz čitavu sekundu. Bit će dakle

$$nJ = \frac{1}{t} J = K$$

ili

$$J = \frac{1}{n} K = tK. \tag{5}$$



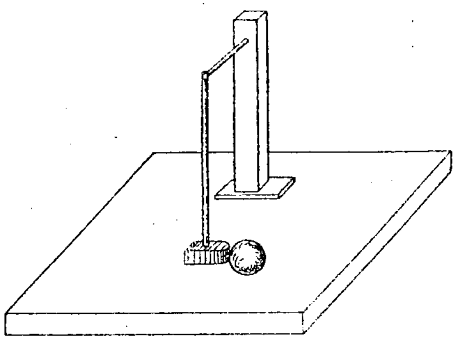
Sl. 19.

Da to zorno predočimo, zamislimo na jednoj strani poluge jednakih krakova uteg, dok na drugu stranu udaramo čekićem jednako jakim brzim udarcima, tolikom silom i tako brzo, da poluga ostaje u ravnoteži, zanemare li se neprimjetna kolebanja (sl. 19). Kod toga se očito može udarati slabije i češće, ili polaganije i jače, samo mora jakost udarca J pomnožena brojem udaraca n ili podijeljena vremenom t, koje otpada na svaki udarac, uvijek biti jednaka težini K. Tom vagom možemo mjeriti jakost udaraca i onda, ako ne možemo ustanoviti trajanje i silu pojedinog udarca. Treba samo odrediti silu K, koja drži ravnotežu spram n jednakih udaraca u sekundi (zanemarivši neprimjetne titraje vage); onda je veličina pojedinog udarca n-ti dio od K.

Dimenzija je impulsa $[J] = [tG]$, jedinica u uobičajenom mjernom sustavu jest sek g.

8. Stavak impulsa

Promatrajmo opet kuglu na stolu i proučavajmo, kako djeluju udarci na nju. Za to možemo upotrebiti čekić, koji se okreće oko horizontalne osovine. Puštamo li ga padati s raznih visina, možemo za svaku visinu mjeriti jakost udarca pomoću vage, kako je prije izloženo. Zatim neka čekić udara na kuglu, pri čemu promatramo, koju brzinu kugla dobije udarcem, t. j. mjerimo, koliko se em kotrlja u 1 sek (sl. 20). Rezultat je vrlo jednostavan:



Sl. 20.

Što je jači udarac, to je veća brzina, i to dvostrukom udarcu odgovara dvostruka brzina, trostrukom udarcu trostruka brzina i t. d. Brzina i udarac u stalnom su omjeru (proporcionalni su).

To je temeljni zakon dinamike, t. zv. *zakon impulsa*, za jednostavni slučaj, da se tijelo pokrene iz mirovanja. Ima li kugla već neku brzinu, udarac će je povećati ili smanjiti, prema tome, da li kuglu pogađa straga ili sprijeda. Jakim protuudarcem možemo kuglu prisiliti, da se vraća na svojoj stazi.

Zakon impulsa onda glasi, da se *nagle promjene brzine tijela odnose kao udarci, kojim su proizvedene.* Pri tom se brzine, prema smjeru, računaju pozitivno ili negativno.

9. Masa

Dosad smo radili s jednom jedinom kuglom. Sada ćemo izvesti isti pokus s kuglama različite vrsti, na pr. različite veličine ili iz različitoga materijala, jedne masivne, druge šuplje. Sve te kugle pokrećemo jednako jakim udarcima. Pokus pokazuje, da one dobiju sasvim različite brzine, i odmah se vidi, da će lake kugle biti bačene daleko, teške će se polako otkotrljati. Nalazimo dakle vezu s težinom, o čemu ćemo kasnije opširno govoriti, jer se radi o jednom od empirijskih temelja

opće teorije relativnosti. No ovdje ćemo uočiti baš protivno: s čisto pojmovnoga gledišta nema činjenica, da različite kugle jednakim udarcima dobiju različite brzine, nikakva posla s težinom. Težina djeluje prema dolje i proizvodi pritisak kugle na stol, ali nikakvu horizontalnu silu. Nalazimo, da se *jedna* kugla više opire udarcima nego *druga;* ako je prva ujedno i teža, to je nova empirijska činjenica, koja se s gledišta, što ga ovdje zauzimamo, nikako ne da izvesti iz pojma težine. Ono što ustanovljujemo, jest različit otpor kugala spram udaraca. Zovemo ga *otporom tromosti* i mjerimo ga omjerom udarca J i proizvedene brzine v. Za taj omjer uvedeno je ime *masa* i odabrano slovo m. Stavljamo dakle

$$m = \frac{J}{v}\,. \tag{6}$$

pa nam ta formula kaže, da za isto tijelo povećanje impulsa J izaziva povećanje brzine tako, da omjer ima uvijek istu vrijednost m. Prema ovoj definiciji ne može se jedinica mase odabrati po volji, jer su jedinice brzine i udarca već odabrane. Masa ima dimenziju

$$[m] = \left[\frac{t^2G}{l}\right]$$

i njezina je jedinica u uobičajenom mjernom sustavu sek²g/cm.

U običnom govoru riječ masa znači otprilike isto što množina supstancije, kvantitet materije, no ti pojmovi sâmi nisu oštro definirani. Pojam supstancije ubraja se kao kategorija razuma u neposredne danosti. No treba izrijekom naglasiti, da u fizici ta riječ nema *nikakvo* drugo značenje do onoga, koje je dano formulom (6); masa je mjera za otpor protiv promjena gibanja.

Stavak impulsa može se nešto općenitije ovako napisati:

$$mw = J. \tag{7}$$

Njime je određena *promjena* w brzine nekoga tijela u gibanju, izazvana udarcem J. Često se formula tumači i ovako: dana moć udarca J čekića prenosi se na pokretnu kuglu. Čekić »gubi« impuls J, koji se opet javlja u gibanju kugle u istom iznosu mw. Tu moć udarca kugla nosi sa sobom i kada se srazi s nekim tijelom, daje mu opet udarac i time gubi baš toliki impuls, koliki drugo tijelo dobije. Ako se primjerice pravocrtno sraze dvije kugle s masama m_1 i m_2, to su moći udarca, kojima jedna na drugu djeluje, uvijek jednake i protivne, $J_1 = -J_2$, njihova je suma dakle jednaka nuli:

$$J_1 + J_2 = m_1w_1 + m_2w_2 = 0. \tag{8}$$

Iz toga izlazi, da je

$$w_2 = -\frac{m_1}{m_2}\,w_1,$$

t. j., kada jedna kugla gubi na brzini (w_1 negativan), druga dobiva (w_2 pozitivan), i obrnuto.

Uvedemo li brzine obih kugala prije i poslije sraza, v_1, v_1' za prvu kuglu, v_2, v_2' za drugu, to su promjene brzina

$$w_1 = v_1' - v_1, \quad w_2 = v_2' - v_2,$$

pa se jednadžba (8) može pisati u obliku

$$m_1 (v_1' - v_1) + m_2 (v_2' - v_2) = 0.$$

Stave li se na jednu stranu sve veličine, koje se odnose na gibanje prije sraza, a na drugu stranu veličine, koje se odnose na gibanje poslije sraza, izlazi

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2', \tag{9}$$

a ta se jednadžba može ovako tumačiti: da se neko tijelo iz stanja mirovanja dovede na brzinu v, potreban je impuls mv. Taj impuls onda tijelo nosi sa sobom. Ukupni je dakle impuls obih kugala prije sraza $m_1 v_1 + m_2 v_2$. Jednadžba (9) tada izriče, da se taj impuls srazom ne mijenja. To je *zakon o održanju impulsa.*

10. Sila i ubrzanje

Prije nego što dalje istražimo taj čudni paralelizam mase i težine, prenijet ćemo dobivene zakone na slučaj sila, koje trajno djeluju. Istina, strogo opravdanje dotičnih stavaka opet se može dati samo metodama infinitezimalnoga računa, no ipak će razmatranja, koja slijede, dati približnu predodžbu o tim vezama.

Sila, koja neprekinuto djeluje, proizvest će gibanje, kojemu se brzina neprekinuto mijenja. Nadomjestimo li silu brzim slijedom malih udaraca, brzina će se kod svakog udarca malo promijeniti. Nastat će mnogostruko slomljena svjetska crta kao u sl. 10, koja se usko priljubljuje pravoj, neprekinutoj zakrivljenoj svjetskoj crti, pa je u računu može nadomjestiti. Ako n udaraca u 1 sekundi nadomještava silu K, to će prema (5) svaki od njih imati vrijednost $J = \frac{1}{n} K$ ili $= tK$, gdje je t kratko vrijeme, koje otpada na jedan udarac. Kod svakog udarca nastaje promjena w brzine, koja je prema (7) određena relacijom $mw = J = tK$ ili $m \frac{w}{t} = K$. No kako je prema (2) $\frac{w}{t} = b$, izlazi

$$mb = K. \tag{10}$$

To je *zakon gibanja dinamike* za sile, koje djeluju neprekinuto. Riječima taj zakon glasi:

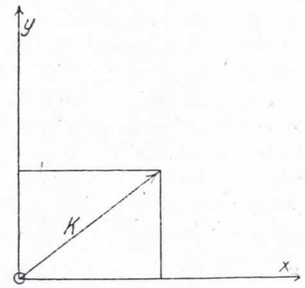
Sila proizvodi ubrzanje, koje joj je proporcionalno. Konstantni omjer $K : b$ jest masa.

Taj se zakon može dovesti u drugi oblik, koji je za mnoge svrhe zgodniji, osobito za poopćenje potrebno u Einsteinovoj dinamici (vidi VI, 7). Promijeni li se brzina v za veličinu w, onda se impuls $J = mv$, koji tijelo nosi sa sobom, promijeni za mw. Stoga je $mb = \frac{mw}{t}$ promjena

impulsa u kratkom vremenu t. Temeljni zakon izražen formulom (10) može se dakle izreći i ovako:

Ako na neko tijelo djeluje sila K, impuls $J = mv$, koji to tijelo nosi sa sobom, mijenja se tako, da mu je promjena u jedinici vremena jednaka sili K.

U tom obliku zakon ponajprije vrijedi samo za gibanja po pravcu, kod kojih sila djeluje u smjeru toga pravca. Djeluje li sila u stranu momentanoga smjera gibanja, mora se zakon nešto poopćiti. Zamislimo silu nacrtanu kao strelicu i projicirajmo je na tri međusobno okomita smjera, na pr. na koordinatne osi. U slici 21 prikazan je slučaj, da sila djeluje u xy-ravnini, pa su ucrtane njezine projekcije na x-os i y-os. Isto tako možemo i pokretnu točku projicirati na osi. Svaka od dobivenih projekcija točke izvodi na pripadnoj osi pravocrtno gibanje. Zakon gibanja tada glasi, da su ubrzanja gibanja tih projekcija točke vezana s komponentama sile relacijom $mb = K$. Ne ulazimo ovdje potanje u ta matematička poopćenja, koja pojmovno ne daju ništa novo.

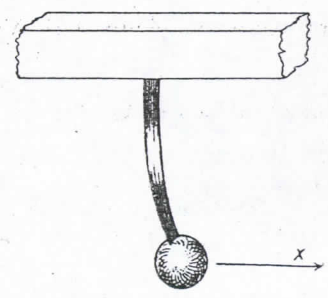


Sl. 21.

11. Primjer. Elastični titraji

Kao primjer odnosa između sile, mase i ubrzanja razmatramo tijelo, koje može titrati pod djelovanjem elastičnih sila. Uzmimo ravno široko čelično pero (oprugu) i pričvrstimo ga na jednom kraju tako, da mu uska strana leži horizontalno. Na drugom kraju nalazi se kugla. (Sl. 22 prikazuje pero gledano odozgo). Kugla će moći titrati u horizontalnoj ravnini. Težina ne će utjecati na gibanje, već samo elastična sila pera. Za male amplitude kugla se giba gotovo pravocrtno. Smjer njezina gibanja neka je os x.

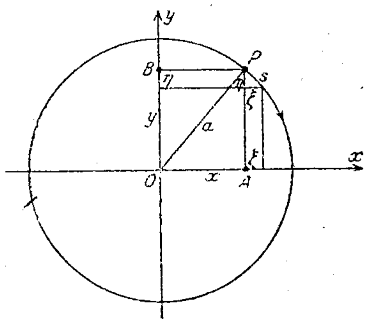
Pokrenemo li kuglu, izvodit će ona periodičko titranje, koje možemo ovako pobliže objasniti. Pomaknemo li najprije kuglu rukom iz njezina položaja ravnoteže, osjetit ćemo silu pera, koje nastoji vratiti kuglu. Ispustimo li kuglu, ova će joj sila podijeliti ubrzanje, i kugla se vraća sve većom brzinom prema srednjem položaju. Pri tom se sila, dakle i ubrzanje, stalno smanjuju i postaju nula kod prolaza kroz srednji položaj, jer tamo je kugla u ravnoteži, pa na nju ne djeluje nikakva sila, koja bi je ubrzavala. Na tom mjestu, gdje je brzina naj-



Sl. 22.

veća, ubrzanje je dakle najmanje. Zbog ustrajnosti kugla će proletjeti kroz položaj ravnoteže, i sada se pojavljuje opet sila pera i usporuje gibanje. Kad je na drugoj strani postignuta početna elongacija (udaljenost od srednjeg položaja), brzina je spala na nulu, a sila je postigla svoju najveću vrijednost. Istodobno ima i ubrzanje svoju najveću vrijednost i u tom času obrne smjer brzine. Odatle se proces ponavlja u obrnutom smislu. Nadomjestimo li kuglu drugom kuglom različite mase, vidjet ćemo, da karakter gibanja ostaje isti, ali se mijenja trajanje jednog titraja. Ako je masa veća, gibanje se usporuje, ubrzanje je manje. Smanjenje mase povisuje broj titraja.

U mnogim se slučajevima može pretpostaviti, da je sila točno proporcionalna elongaciji x (udaljenosti od položaja ravnoteže). Tok gibanja može se onda jednostavno geometrijski predočiti. Zamislimo, da pokretna točka P obilazi jednoliko opseg kruga polumjera a, i to ν puta u sekundi. Točka onda prevaljuje opseg kruga $2\pi a$ ($\pi = 3,14\ldots$) u vremenu $T = \frac{1}{\nu}$ sek, njegova je brzina dakle $\frac{s}{t} = \frac{2\pi a}{T} = 2\pi a\nu$. Odaberemo li središte O kružnice za ishodište pravokutnoga koordinatnog sustava, u kojemu točka P ima koordinate x, y, to projekcija A točke P na os x titra za vrijeme jednog obilaženja točke P amo tamo, kao masa pričvršćena na peru. *Ta točka A neka predočuje masu, koja titra.* Dok P prevali malen dio luka s, A se pomakne na osi x za malen komad ξ, tako da je $v = \frac{\xi}{t}$ brzina točke A. Sl. 23 pokazuje, da su pomaci ξ i s kateta i hipotenuza malenoga pravokutnog trokuta, koji je očito sličan velikom pravokutnom trokutu OAP. Vrijedi dakle razmjer



Sl. 23.

$$\frac{\xi}{s} = \frac{y}{a} \quad \text{ili} \quad \xi = s\,\frac{y}{a}.$$

Zato je brzina točke A

$$v = \frac{\xi}{t} = \frac{s}{t}\,\frac{y}{a} = 2\pi\nu y.$$

Projekcija B točke P na os y izvodi isto takvo titranje. Malenom pomaku s točke P odgovara pomak η točke B, pa vrijedi isto tako kao za ξ

$$\frac{\eta}{s} = \frac{x}{a} \quad \text{ili} \quad \eta = s\,\frac{x}{a}.$$

Ovoj promjeni η od y odgovara promjena brzine $v = 2\pi\nu y$ točke A, u iznosu od

$$w = 2\pi\nu\eta = 2\pi\nu s\,\frac{x}{a},$$

dakle je ubrzanje točke A

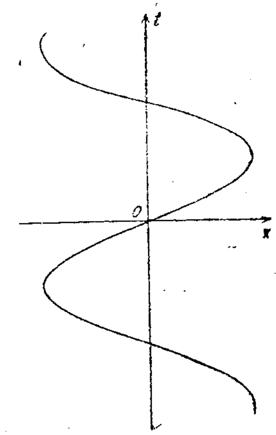
$$b = \frac{w}{t} = 2\pi\nu\,\frac{s}{t}\,\frac{x}{a} = (2\pi\nu)^2 x.$$

Vidimo, da je ubrzanje kod takvoga titranja točke A zaista u svakom momentu proporcionalno elongaciji x. Za silu se dobiva

(11) $$K = mb = m(2\pi\nu)^2 x.$$

Mjerenjem sile K, koja pripada nekoj elongaciji x, i brojenjem titraja može se dakle odrediti masa m njihala na pero.

Slika svjetske crte takvoga titranja očito je valovita krivulja u xt-ravnini, ako je x smjer titranja (sl. 24). U slici je pretpostavljeno, da kugla u momentu $t = 0$ prolazi srednjim položajem $x = 0$ prema desno. Vidi se, da je kod svakoga prolaza kroz os t, t. j. za $x = 0$, smjer krivulje najmanje strm spram osi x, što znači najveću brzinu. No u tim je točkama krivulja nezakrivljena, promjena brzine ili ubrzanje je dakle nula. Obrnuto je na mjestima, koja odgovaraju krajnjim elongacijama. (Maksimalna elongacija zove se amplituda).



Sl. 24.

12. Težina i masa

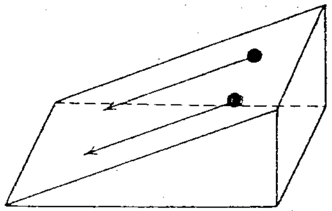
Već kod uvođenja pojma mase ustanovili smo čudnu paralelnost mase i težine. Teška tjelesa jače se opiru ubrzavanju od laganih. Je li to egzaktan zakon? Zaista jest. Da ovo sasvim razjasnimo, razmotrimo još jednom pokus, kod kojega se udarcima pokreću kugle na glatkom horizontalnom stolu. Uzmimo dvije kugle A i B, i neka je kugla B dvostruko teška, t. j. B drži na vagi ravnotežu dvjema jednakim primjercima A. Damo li kuglama A i B jednake udarce na stolu, vidjet ćemo, da A dobije dva puta toliku brzinu kao B. Dvostruko teška kugla B opire se dakle promjeni brzine upravo dva puta tako jako kao kugla A. Može se to izraziti i ovako: tjelesa s dvostrukom masom imaju dvostruku težinu, ili općenito, mase m odnose se kao težine G. Omjer težine i mase sasvim je određen broj. Označuje se sa g, pa se piše

(12) $$\frac{G}{m} = g \quad \text{ili} \quad G = mg.$$

Pokus, kojim smo se poslužili za tumačenje zakona, očito je vrlo grub[1]). No ima mnogo drugih pojava, koji dokazuju istu činjenicu.

[1]) Tako je primjerice zanemaren otpor, koji treba svladati, da kugla dobije rotaciju kotrljanja. Taj otpor ovisi o razdiobi masa unutar kugle (o momentu tromosti) [3].

Takav je pojav jednako brzo padanje svih tjelesa. Pri tomu treba naravno pretpostaviti, da na gibanje ne utječu nikakve druge sile osim sile teže. Treba dakle pokus provesti u zrakopraznom prostoru, da se ukloni otpor zraka. Za demostraciju prikladna je kosina (sl. 25), na koju stavimo dvije po izgledu jednake kugle različite težine. Vidjet ćemo, da će istodobno prispjeti na kraj kosine.



Sl. 25.

Težina je sila, koja pokreće, a masa određuje otpor. Ako su obje u istom omjeru, teško će tijelo doduše biti jače pokrenuto, ali se jače i opire pokretanju. Rezultat je taj, da teška i lagana tjelesa jednako brzo silaze niz kosinu, odnosno padaju. To se razabira i iz naših formula, jer ako u (10) uvrstimo za silu težinu G i prema (12) uzmemo, da je proporcionalna masi, izlazi

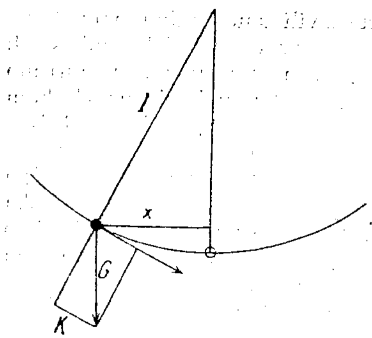
$$mb = G = mg,$$

dakle

$$b = g. \tag{13}$$

Sva tjelesa dobivaju dakle isto ubrzanje vertikalno prema dolje, ako se gibaju pod utjecajem same sile teže, bilo da slobodno padaju ili da su bačena. Veličina g, ubrzanje sile teže, ima vrijednost $g = 981$ cm/sek^2.

Najtočniji se pokusi za ispitivanje toga zakona mogu izvesti pomoću njihala. Već je Newton opazio, da je trajanje njihaja za istu duljinu niti uvijek isto, ma kakva bila kuglica na njihalu. Proces titranja (njihanja) isti je kao kod elastičnoga njihala, koje smo opisali, samo što sada mjesto čeličnoga pera sila teža vuče kuglicu prema položaju ravnoteže. Silu teže treba zamisliti rastavljenu u dvije komponente. Jedna djeluje u produženju niti i stoga napinje nit, druga djeluje u smjeru gibanja i pokreće kuglicu.



Sl. 26.

Sl. 26 pokazuje kuglicu njihala u elongaciji x. Razabiraju se dva slična pravokutna trokuta, kojima dakle stranice imaju isti omjer:

$$\frac{K}{x} = \frac{G}{l}$$

Prema tome formula (11) daje za dva njihala

$$(2\pi\nu)^2 m_1 = \frac{G_1}{l}, \quad (2\pi\nu)^2 = \frac{G_2}{l},$$

dakle

$$\frac{G_1}{m_1} = \frac{G_2}{m_2} = (2\pi\nu)^2 l,$$

t. j. omjer težine i mase isti je za oba njihala. Ovaj smo omjer u formuli (12) zvali g. Izlazi dakle jednadžba

$$g = (2\pi\nu)^2 l, \tag{14}$$

iz koje se vidi, da se g može odrediti mjerenjem duljine njihala l i broja titraja ν.

Često se zakon o proporcionalnosti težine i mase izriče ovako:

teška i troma masa su jednake.

Pod teškom masom pri tom mislimo težinu razdijeljenu sa g, a pravoj masi za razliku dodajemo oznaku »troma«.

Da taj zakon vrijedi vrlo točno, znao je već Newton. Danas je potvrđen najfinijim mjerenjima, koja fizika poznaje, a proveo ih je E ö t v ö s (1890). Stoga je potpuno opravdano, da se vaganje upotrebljava ne samo za usporedbu težina, nego i za usporedbu masa.

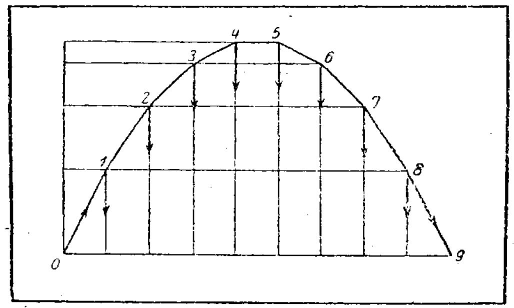
Moglo bi se pomisliti, da takav zakon mora biti čvrsto povezan s osnovima mehanike. Naš prikaz, koji prilično vjerno daje misaoni sadržaj klasične mehanike, pokazuje, da ipak nije tako, nego da je taj zakon, kao neka osobitost, samo nuzgredice povezan s ostalim stavcima. Mnogi su se možda čudili samoj činjenici, ali nitko nije tražio dublju vezu. Ima mnogo sila, koje mogu djelovati na neku masu. Zašto ne bi postojala jedna, koja je masi točno proporcionalna? Ne *daje* se odgovor na pitanje, na koje se odgovor ne *očekuje*. Tako je stvar ostala stoljećima netaknuta. To je bilo moguće samo zbog golemih uspjeha Galilei-Newtonove mehanike, koja je obuhvatala ne samo gibanja na Zemlji, već i gibanja zvijezda i pokazala se kao pouzdan temelj egzaktnih prirodnih znanosti. Tako se osobito sredinom 19. stoljeća smatralo ciljem istraživanja, da se svi fizički pojavi tumače kao mehanički u smislu Newtonove nauke. Zaboravljeno je kod gradnje kuće, da li su temelji dosta jaki. Tek je E i n s t e i n spoznao važnost stavka o jednakosti teške i trome mase za osnove fizičkih znanosti.

13. Analitička mehanika

Zadaća je računske ili analitičke mehanike, da iz zakona gibanja

$$mb = K$$

nađe gibanje, ako su sile K zadane. Sâma formula daje tek ubrzanje, t. j. promjenu brzine. Da se iz toga nađe brzina, a iz ove opet promjenljivo mjesto pokretne točke, zadaća je integralnoga računa, koja može biti dosta mučna, ako se sila zamršeno mijenja prema mjestu i vremenu. Pojam o biti te zadaće daje naš izvod o promjeni mjesta kod jednoliko ubrzanoga gibanja po pravcu (§ 2). Već je zamršenije gibanje u ravnini pod utjecajem konstantne sile izvjesnoga smjera, kao kod kosoga hica ili kod slobodnoga pada. I ovdje možemo neprekinuti proces približno nadomjestiti slijedom jednolikih gibanja, koja udarcima prelaze jedno u drugo. Sjetimo se opet našega stola i ustanovimo, da kugla, koja se po njemu kotrlja, u jednakim kratkim razmacima vremena t dobiva udarce jednakog smjera i veličine. (Sl. 27). Ako kugla polazi iz točke 0 bilo kakvom početnom brzinom, ona će poslije t sek doći do neke točke 1, gdje će je stići prvi udarac. Odatle nastavlja drugim smjerom i drugom brzinom kroz t sek, dok je u točki 2 ne stigne opet jedan udarac, koji je otkloni i t. d. Svaki se otklon može odrediti stavkom impulsa. Stoga možemo konstruirati cijeli proces gibanja, pa vidimo, da je početnom točkom, početnim smjerom i početnom brzinom dalji tok potpuno određen. Ovo isprekidano gibanje daje grubu sliku gibanja kugle po kosini. Slika se to bolje slaže s pravim, neprekinutim tokom gibanja, što je manji odabrani vremenski interval između udaraca.



Sl. 27.

Što ovdje dobivamo konstrukcijom, to u slučaju sila, koje djeluju neprekinuto, daje integralni račun. I onda ostaju početna brzina po veličini i smjeru i početna točka sasvim po volji. No ako su zadane, dalji je tok gibanja potpuno određen. Jedan te isti zakon sile može dakle proizvesti neizmjerno mnogo gibanja, već prema izboru početnih uvjeta. Tako se golemi broj gibanja tjelesa, koja su bačena ili slobodno padaju, osniva na istom zakonu sile teže, koja djeluje vertikalno prema dolje.

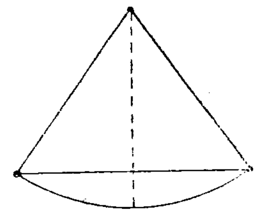
Obično se kod mehaničkih problema ne radi o gibanju *jednoga* tijela, nego o gibanju više tjelesa, koja jedno na drugo djeluju nekim silama. Onda te sile i nisu zadane, nego same ovise o tom nepoznatom gibanju. Shvatljivo je stoga, da je za više tjelesa problem računskog određivanja njihova gibanja vrlo zamršen.

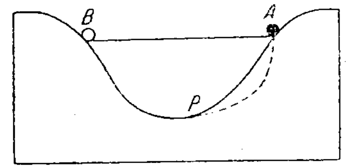
14. Stavak energije

Postoji stavak, koji uvelike olakšava tu zadaću i daje dobar pregled, a osim toga je imao golemu važnost za dalji razvoj fizičkih znanosti. To je *stavak o održanju energije*. Ovdje ga naravno ne možemo

općenito izreći, a kamo li dokazati. Samo ćemo na jednostavnim primjerima upoznati njegov sadržaj.

Njihalo, koje ispuštamo, kad je kuglica u stanovitoj visini, digne se s druge strane srednjega položaja opet do iste visine — zanemari li se mala pogreška, koja je prouzročena trenjem i otporom uzduha (sl. 28). Nadomjestimo li kružnu stazu bilo kojom drugom time, da kuglu vodimo po tračnicama (sl. 29), vrijedit će isto: kugla se uvijek diže do iste visine, od koje je pošla.


Sl. 28.



Sl. 29.

Iz toga lako izlazi, da je brzina kugle u bilo kojoj točki P staze ovisna samo o dubini te točke P ispod polazne točke A. Da se to uvidi, treba samo zamisliti, da se staza promijeni na dijelu AP, dok dio PB ostaje nepromijenjen. Kad bi kugla od A do P po jednoj stazi došla drugom brzinom do točke P, nego po drugoj stazi, ne bi ona oba puta mogla dostići kao cilj baš točku B, jer za to je očito potrebna jednoznačno određena početna brzina u točki P. Brzina u toj točki ne ovisi stoga o obliku staze, koju je kugla prošla, a budući da je P bilo koja točka, vrijedi to općenito. Brzina v mora dakle biti određena jedino visinom pada h. Ispravnost stavka vezana je na to, da se staza (tračnica) kao takva ne opire gibanju, t. j. da ne djeluje na kuglu silom u smjeru gibanja, nego da samo izdrži tlak kugle okomito na stazu. Ako nema tračnice, kugla slobodno pada ili je bačena, i opet vrijedi isto: brzina na svakom mjestu ovisi samo visini pada.

Sl. 30.

Ova se činjenica može ne samo eksperimentalno utvrditi, nego i izvesti iz naših zakona gibanja. Pri tome se dobije i oblik zakona, koji izriče ovisnost brzine o visini pada. Tvrdimo, da taj zakon glasi ovako:

Neka je x put pada, koji brojimo odozdo prema gore (sl. 30), v neka je brzina, m masa, a G težina tijela. Onda veličina

$$E = \frac{m}{2} v^2 + Gx \tag{15}$$

ima istu vrijednost za čitavo vrijeme padanja.

Da to dokažemo, zamislimo najprije, da je E bilo kakva veličina, koja ovisi o gibanju i mijenja se od časa do časa. U malom vremenskom razmaku t neka se E promijeni za e. Omjer $\frac{e}{t}$ označit ćemo brzinom mijenjanja veličine E, zamišljajući pri tom (kao i prije kod definicije brzine v na stazi i ubrzanja b), da vremenski interval treba odabrati sve manji i manji. Razumije se, da je brzina mijenjanja nula, ako se veličina E vremenski ne mijenja, i obrnuto. Načinimo sada promjenu gornjeg izraza E u vremenu t. Za to se vrijeme visina x smanji za vt, a brzina v se poveća za $w = bt$. Poslije vremena t imat će dakle E vrijednost

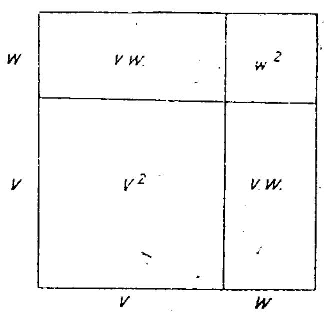
$$E' = \frac{m}{2}(v + w)^2 + G(x - vt).$$

Znamo, da je

$$(v + w)^2 = v^2 + w^2 + 2vw,$$

što znači, da se kvadrat nad zbrojenim dužinama v i w može rastaviti u kvadrat sa stranicom v, u kvadrat sa stranicom w i u dva jednaka pravokutnika sa stranicama v i w (sl. 31). Bit će stoga

$$E' = \frac{m}{2}v^2 + \frac{m}{2}w^2 + mvw + Gx - Gvt.$$



Sl. 31.

Oduzme li se od toga stara vrijednost veličine E, to ostaje kao promjena

$$e = E' - E = \frac{m}{2}w^2 + mvw - Gvt$$

ili, budući da je $w = bt$,

$$e = \frac{m}{2}b^2t^2 + mvbt - Gvt.$$

Brzina mijenjanja bit će dakle

$$\frac{e}{t} = \frac{m}{2}b^2t + mvb - Gv.$$

Član sa t može se ovdje ispustiti, jer se smanjivanjem vremenskog intervala može postići, da taj član postane po volji malen. Dobivamo dakle konačno za brzinu mijenjanja veličine E:

$$\frac{e}{t} = v(mb - G).$$

Po zakonima mehanike taj je izraz jednak nuli, jer je prema (13) $mb = mg = G$. Time je dokazano, da veličina E (15) ostaje vremenski nepromjenljiva. Zadaju li se početna točka i početna brzina gibanja, t. j. vrijednosti veličina x i v za $t = 0$, prima izraz za E prema (15) određenu vrijednost, koja za vrijeme gibanja ostaje ista.

Iz toga izlazi, da se v umanjuje, kada se tijelo uspinje, t. j. kad x raste, i obrnuto, jer svaki član izraza za E može samo onda rasti, ako se drugi umanjuje. Prvi je član karakterističan za stanje brzine tijela,

a drugi za visinu, do koje se tijelo uspelo protiv sile teže. Ti članovi imaju posebna imena:

$T = \frac{m}{2}v^2$ zove se *kinetička energija*,

$U = Gx$ zove se ***radna sposobnost*** ili ***potencijalna energija***.

Njihov zbroj

$$T + U = E \tag{16}$$

zove se naprosto ***mehanička energija* tijela**, a stavak, da se ona ne mijenja, kada se tijelo giba, zove se ***stavak o održanju energije***.

Dimenzija svake energije jest $[E] = [Gl]$, jedinica joj je g cm.

Ime radna sposobnost potječe naravno od obavljene radnje čovječjega tijela kod dizanja utega. Po stavku energije ova se radnja kod padanja pretvara u kinetičku energiju. Damo li obrnuto nekom tijelu kinetičku energiju bacivši ga u vis, pretvara se ona pri tom u potencijalnu **energiju ili radnu sposobnost.**

Točno isto, što smo ovdje naveli za slobodni pad, vrijedi u najširem opsegu za sustave od bilo koliko tjelesa, dok su ispunjene dvije pretpostavke:

1. **Ne smije biti vanjskih zahvata**, t. j. sustav mora biti u sebi zatvoren.
2. **Ne smije biti procesa, kod kojih se mehanička energija pretvara u toplinu, električnu energiju, kemijski afinitet ili slično.**

Uvijek onda vrijedi stavak, da je

$$\boldsymbol{E = T + U}$$

konstantno, pri čemu **kinetička energija ovisi o brzinama, potencijalna energija o položajima pokretnih tjelesa.**

U mehanici zvijezda taj je **idealni slučaj ostvaren velikom čistoćom. Tu vrijedi idealna dinamika, kojoj smo načela razvili.**

U **zemaljskom svijetu nije tako. Svakom gibanju opire se trenje, čime se energija gibanja pretvara u toplinu. Strojevi, kojima proizvodimo gibanja, pretvaraju termičke, kemijske, električke, magnetske sile u mehaničke.** Stavak energije u svome uskom, **mehaničkom obliku ne može onda vrijediti. No može se taj stavak uzdržati u proširenom obliku. Označuje li Q energiju topline, C kemijsku, W elektromagnetsku energiju i t. d., vrijedi stavak, da je za zatvorene sustave zbroj**

$$E = T + U + Q + C + W + \ldots \tag{17}$$

uvijek konstantan.

Predaleko bi nas odvelo, da razmotrimo, kako su **Robert Mayer**, **Joule** (1842) i **Helmholtz** (1847) **otkrili i obrazložili tu činjenicu, ili da istražimo, kako se kvantitativno određuju nemehanički oblici energije. No pojam energije trebat će nam kasnije, kad bude govora o dubokoj vezi, koju je teorija relativnosti otkrila između mase i energije.**

15. Dinamičke jedinice sile i mase

Postupkom, kojim smo izveli temeljne zakone mehanike, ograničili smo njihovu valjanost u neku ruku na površinu našega stola i njezinu bližu okolinu. Mi smo apstrahirali svoje pojmove i stavke iz iskustava u skučenom prostoru, iz laboratorijskih pokusa. Prednost je pri tome bila, da nismo trebali razmišljati o pretpostavkama o prostoru i vremenu. Pravocrtna gibanja, o kojima govori zakon tromosti, mogu se na stolu povući ravnalom, a pri ruci su nam sprave i satovi za mjerenje staza i gibanja.

Sada će se raditi o tome, da iz uskih soba izađemo u svemirski prostor. Prvi je korak tome »putovanje oko svijeta«, pod kojim u običnom govoru razumijevamo malenu zemaljsku kuglu. Pitat ćemo: da li svi dobiveni stavci mehanike vrijede isto tako u nekom laboratoriju u Buenos Airesu ili u Capetownu, kao što vrijede ovdje?

Odgovor je jestan, osim jednog izuzetka, naime veličine ubrzanja sile teže g. Vidjeli smo, da se ta veličina može vrlo točno izmjeriti opažanjima s njihalom. Pokazalo se, da jedno te isto njihalo na ekvatoru njiše nešto polaganije nego u sjevernijim ili južnijim krajevima, da otpada manje njihaja na trajanje jednoga dana, t. j. jednog okretaja Zemlje. Iz toga izlazi, da g na ekvatoru ima najmanju vrijednost i da raste prema sjeveru i jugu. Taj je prirast sasvim neprekinut do polova, gdje g ima svoju najveću vrijednost. Zašto je tako, vidjet ćemo kasnije; ovdje nam dostaje konstatacija same činjenice. Za mjerni sustav, prema kojemu smo dosad mjerili sile i mase, ta činjenica ima dosta neugodne posljedice.

Dok uspoređujemo utege vagom na poluge, nema teškoća. Ali zamislimo, da smo ovdje u laboratoriju baždarili utezima neku vagu na pero. Odnesemo li tu vagu u južnije ili sjevernije širine, naći ćemo, da kazaljka pokazuje druge otklone, kada vagu opteretimo istim utezima. Ako dakle identificiramo težinu sa silom, kao što smo dosad činili, ne preostaje nam drugo, nego da ustvrdimo: sila pera se promijenila, ona ovisi o geografskoj širini. No to očito nije točno. Promijenila se sila teža, a ne sila pera. Nije dakle ispravno, uzme li se na svim mjestima Zemlje težina jednog istog komada kovine kao jedinica sile. Težina izvjesnog nekog tijela može se uzeti na određenom nekom mjestu Zemlje kao jedinica sile. Ako je ubrzanje g sile teže poznato na temelju mjerenja njihalom, može se ta težina prenijeti na druga mjesta. Tako se stvarno postupa u tehnici. Njezina je mjera za silu gram, težina određenoga normalnog tijela u Parizu. Mi smo tu mjeru upotrebljavali ne uzimajući u račun njezinu promjenljivost prema mjestu. Kod točnih mjerenja mora se provesti redukcija na normalno mjesto (Pariz).

Znanost je napustila taj mjerni sustav, kod kojega je privilegirano neko mjesto na Zemlji, i prihvatila sustav, koji je manje samovoljan.

Prikladnu metodu za to daje sam temeljni zakon mehanike. Mjesto da se svodi masa na silu, uzima se masa kao temeljna veličina s neovisnom dimenzijom $[m]$, a njezina se jedinica odabira po volji: stanovit komad kovine neka ima masu 1. Stvarno se za to uzima isti

komad kovine, koji u tehnici služi kao jedinica težine, pariški gram, i ta se jedinica mase opet zove gram (g). Dvostruko značenje te riječi kao jedinica težine u tehnici i kao jedinica mase u fizici lako može dovesti do zabune. Mi ćemo odsad upotrebljavati *fizički mjerni sustav*, kojemu su temeljne jedinice: za duljinu cm, za vrijeme sek, za masu g.

Sila sada ima izvedenu dimenziju

$$[K] = [mb] = \left[\frac{ml}{t^2}\right]$$

i jedinicu g cm/sek^2, koja se još zove 1 din.

Težina je definirana sa $G = mg$; jedinica mase ima dakle težinu $G = g$ din. Ta je težina ovisna o geografskoj širini. U našim širinama ima vrijednost $g = 981$ din. To je tehnička jedinica sile. Razumije se, da je sila vage na pero, izražena u dinima, konstantna, jer njezina sposobnost ubrzavanja stanovite mase nije ovisna o geografskoj širini.

Dimenzija impulsa je sada

$$[J] = [tK] = \left[\frac{ml}{t}\right],$$

njegova je jedinica g cm/sek. Konačno je dimenzija energije

$$[E] = [mv^2] = \left[\frac{ml^2}{t^2}\right],$$

njezina jedinica g cm^2/sek^2 ili din cm.

Pošto smo ovako očistili mjerni sustav od svih zemaljskih nečistoća, možemo prijeći na mehaniku zvijezda.

III. NEWTONOV SUSTAV SVIJETA

1. Apsolutni prostor i apsolutno vrijeme

Principe mehanike, kako smo ih ovdje razvili, našao je Newton dijelom u Galileijevim radovima, a dijelom ih je stvorio sam. Njemu zahvaljujemo prije svega određenu formulaciju definicija i stavaka u takvoj općenitosti, da su odvojeni od zemaljskih pokusa i da se daju prenijeti na svemirski prostor.

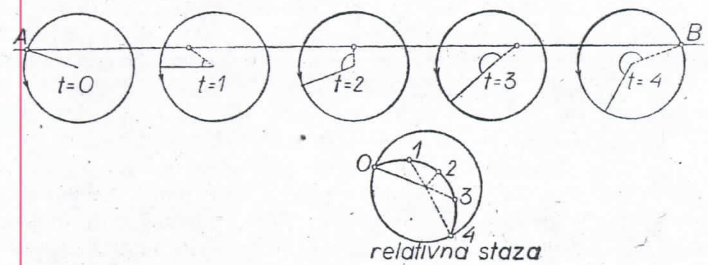
Newton je za to morao prije izlaganja o samim mehaničkim principima izreći određene tvrdnje o prostoru i vremenu. Bez takvih određenja već najjednostavniji stavak mehanike, zakon tromosti, nema smisla. Prema tom zakonu tijelo, na koje ne djeluju nikakve sile, treba da se giba jednoliko po pravcu. Sjetimo se stola, na kojem smo vršili pokuse kuglom, koja se kotrlja. Ako se kugla po stolu kotrlja po pravcu, promatrač s drugoga planeta, koji prati njezinu stazu, morat će ustvrditi, da ta staza relativno spram njegova stajališta nije točno pravocrtna. Zemlja sama rotira, pa je stoga jasno, da gibanje, koje promatraču na Zemlji izgleda pravocrtno, jer na njegovu stolu ostavlja prvocrtan trag, mora izgledati zakrivljeno za promatrača, koji se ne okreće zajedno sa Zemljom. To se na grub način može pokazati ovako:

Kružna ploča iz bijela kartona stavi se na osovinu tako, da se može vrtjeti ručkom. Pred pločom se pričvrsti ravnalo AB. Ako se ploča jednoliko okreće i istodobno olovka pomiče konstantnom brzinom po ravnalu, šiljak olovke označit će svoju stazu na ploči. Ta staza naravno ne će biti pravac na ploči, nego krivulja, koja kod veće brzine okretanja može čak imati oblik petlje. Za isto gibanje, koje promatrač na ravnalu označuje pravocrtnim i jednolikim, reći će promatrač na ploči, da je zakrivljeno i nejednoliko. To se gibanje može konstruirati po točkama, kako vidimo iz lako shvatljivog crteža (sl. 32).

Ovaj primjer jasno pokazuje, da zakon tromosti ima samo onda određen smisao, ako se točno odredi prostor, ili bolje reći sustav referencije, u kojem treba da vrijedi pravocrtnost.

Dakako da Kopernikovoj slici svijeta odgovara da se ne uzme Zemlja kao sustav referencije, za koji vrijedi zakon tromosti, nego sustav, koji je nekako ukotven u svemiru. Kod zemaljskih pokusa, na pr. za kuglu, koja se kotrlja po stolu, staza tijela u slobodnom gibanju onda i nije pravocrtna, nego nešto malo zakrivljena. To se kod primitivnih opažanja ne očituje zbog toga, što su putovi kod tih pokusa maleni spram dimenzija zemaljske kugle. Kao što se često dešava u

znanosti, i ovdje netočnost opažanja pomaže kod otkrivanja dubokih veza. Da je već Galilei mogao izvršiti tako fina opažanja, kao što su se mogla u kasnijim stoljećima, zamršenost pojava znatno bi mu bila otežavala pronalaženje zakona. Možda ni K e p l e r ne bi nikad razmrsio gibanja planeta, da su u njegovo vrijeme staze planeta bile poznate danas postignutom točnošću. Keplerove elipse samo su približenja, od kojih se prave staze poslije duljeg vremena znatno udaljuju. Slično je bilo u današnjoj fizici sa zakonima spektara. Pronalaženje jednostavnih odnosa bilo je veoma otežano i usporeno zbog obilja najtočnijih opažanja.



Sl. 32.

Newton se dakle našao pred zadaćom da traži sustav referencije, u kojem bi imali vrijediti zakon tromosti i ostali temeljni stavci mehanike. Da je odabrao Sunce, ne bi pitanje bilo riješeno, nego samo pomaknuto. Jednoga bi se dana moglo ustanoviti, da se i Sunce giba, kao što danas zaista znamo.

Bit će da su takvi razlozi Newtona doveli do uvjerenja, da empirijski sustav referencije, određen materijalnim tjelesima, uopće nikada ne može biti temelj stavka s misaonim sadržajem zakona tromosti. Sam taj zakon, svojom uskom vezom s Euklidovom naukom o prostoru, nameće se kao prirodna polazna točka za dinamiku svemira. Upravo nam se zakonom tromosti očituje euklidski prostor izvan uskoga zemaljskog svijeta. Slično je s vremenom, kojemu se tok očituje u jednolikosti gibanja prema zakonu tromosti.

Tako je valjda Newton došao do mišljenja, da postoji *apsolutni prostor* i *apsolutno vrijeme*. Najbolje će biti, da citiramo njegove vlastite riječi [4]. On kaže o vremenu:

»I. *Apsolutno, istinsko i matematičko vrijeme* teče jednoliko po sebi i po svojoj prirodi i bez odnosa spram bilo čega izvanjega, a drugim se imenom zove *trajanje*.«

»Relativno, prividno i obično vrijeme jest bilo koja osjetna i vanjska mjera trajanja pomoću gibanja (bilo točna, bilo nejednolika), kojom se narod služi mjesto istinskog vremena, kao sat, dan, mjesec, godina.«

»... Prirodni su dani naime nejednaki, a obično se za mjerenje vremena smatraju kao jednaki. Ovu nejednakost ispravljaju astronomi.

kako bi iz istinitijega vremena mjerili nebeska gibanja. Moguće je, da nema jednolikog gibanja, kojim bi se vrijeme točno mjerilo. Ubrzati ili usporiti mogu se sva gibanja, ali tok apsolutnoga vremena ne može se mijenjati. Isto je trajanje ili održanje postojanja stvari, bila gibanja brza, spora ili nikakva.«

Slično se Newton izražava o prostoru. On kaže:

»II. *Apsolutni prostor* ostaje po svojoj prirodi i bez odnosa spram bilo čega izvanjega uvijek jednak sebi i nepomičan.«

»Relativni prostor mjera je ovoga prostora ili bilo koji protegnuti njegov dio u gibanju, koji se našim sjetilima određuje po svom položaju spram tjelesa, i narod ga upotrebljava mjesto nepomičnog prostora.«

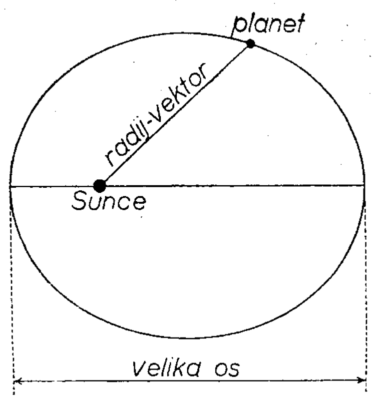
»... Tako se služimo mjesto apsolutnih mjesta i gibanja relativnima, što nije neprikladno kod ljudskih stvari: dok se kod filozofskih mora apstrahirati od osjetila. Jer može biti, da uistinu ne miruje nijedno tijelo, spram kojega se odnose položaji i gibanja.«

Izričita izjava, koju Newton daje kod definicije apsolutnog vremena i apsolutnog prostora, da ovi postoje »bez odnosa spram bilo čega izvanjega«, ponešto je čudna za učenjaka Newtonova načina mišljenja. Ta on često naglašava, da će istraživati samo činjenice, samo ono, što se može opažanjima ustanoviti. »Hypotheses non fingo« njegove su oštre i jasne riječi. No nešto, što je »bez odnosa spram bilo čega izvanjega«, ne može se ustanoviti, nije činjenica. Ovdje se očito radi o tome, da se predodžbe naivne svijesti prenose bez kritike na objektivni svijet. Tek ćemo kasnije točnije istražiti ovo pitanje.

Dalja je naša zadaća, da izložimo, kako je Newton shvaćao zakone kozmosa, i u čemu se sastoji napredak njegove nauke.

2. Newtonov zakon privlačenja

Newtonova je ideja dinamičko shvaćanje staza planeta ili, kako se danas kaže, osnivanje *mehanike neba.* Za to je trebalo Galileijev pojam sile prenijeti na gibanja zvijezda. Zakon, po kojem međusobno djeluju nebeska tjelesa, nije Newton našao postavljanjem smionih hipoteza, već sistematskom, egzaktnom analizom poznatih činjenica o gibanju planeta. Te su činjenice bile izražene u trima Keplerovim zakonima, koji su obuhvaćali sva opažanja onoga doba u zamjerno sažetu, zornu obliku. Moramo ovdje navesti kako glase Keplerovi zakoni:



Sl. 33.

1. Planeti se gibaju u elipsama oko Sunca kao žarišta (sl. 33).

2. Radij-vektor povučen od Sunca prema planetu prelazi u jednakim vremenima jednake površine.

3. Kubi velikih osi odnose se kao kvadrati ophodnih vremena.

Temeljni zakon mehanike daje relaciju između ubrzanja b gibanja i sile K, koja uzrokuje gibanje. Ubrzanje b potpuno je određeno tokom gibanja, pa ako je ovaj poznat, može se ubrzanje izračunati. Newton je spoznao, da je određenje staze, dano Keplerovim zakonima, upravo dovoljno za izračunavanje ubrzanja b. Time je poznata i sila po zakonu

$$K = mb.$$

Uobičajena matematika njegova vremena Newtonu ne bi bila omogućila provedbu toga računa. Morao je sam stvoriti matematička pomagala za to. Tako je u Engleskoj nastao *diferencijalni i integralni račun*, začetak svekolike moderne matematike, kao nusprodukt astronomskih istraživanja, dok je istodobno na kontinentu L e i b n i z (1684)*) izmislio iste metode, polazeći od sasvim drugih gledišta.

Budući da se u ovoj knjizi ne služimo infinitezimalnom matematikom, ne možemo dati predodžbu o veličanstvenosti Newtonova načina zaključivanja. Ipak se za jednostavan slučaj može razjasniti temeljna misao.

Staze planeta su slabo ekscentrične, kružnici slične elipse. Bit će dopuštena približna pretpostavka, da planeti obilaze oko Sunca po kružnicama, kako je to još Kopernik zamišljao. Kružnice su specijalne elipse s ekscentricitetom nula, pa je stoga uz tu pretpostavku Keplerov prvi zakon sigurno zadovoljen.

Drugi Keplerov zakon onda znači, da svaki planet prolazi svoju kružnicu konstantnom brzinom. O ubrzanju kod takvih kružnih gibanja dobro smo obaviješteni prema II,4. To je ubrzanje usmjereno prema središtu i prema formuli (4) u tom paragrafu ima vrijednost

$$b = \frac{v^2}{r},$$

ako je v brzina na stazi, r polumjer kružnice.

Ako je T ophodno vrijeme, brzina se određuje kao omjer opsega kružnice $2\pi r$ ($\pi = 3{,}1415\ldots$) i vremena T, *dakle*

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \tag{18}$$

tako da izlazi

$$b = \frac{4\pi^2 r^2}{rT^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Sada ćemo se poslužiti trećim Keplerovim zakonom, koji za slučaj kružne staze očito izriče, da omjer kuba polumjera, r^3, i kvadrata ophodnog vremena, T^2, za sve planete ima istu vrijednost C:

$$\frac{r^3}{T^2} = C \quad \text{ili} \quad \frac{r}{T^2} = \frac{C}{r^2}. \tag{19}$$

---

*) Prva publicirana radnja; no već u jednom rukopisu iz god. 1673. sadržani su najvažniji rezultati. (Op. prev.).

Uvrstimo li to gore, dobit ćemo

$$b = \frac{4\pi^2 C}{r^2}\,. \tag{20}$$

Prema tome veličina centripetalnog ubrzanja ovisi *samo* o udaljenosti planeta od Sunca. To ubrzanje proporcionalno je kvadratu udaljenosti, ali nikako ne ovisi o svojstvima planeta, recimo o njegovoj masi, jer je veličina C po trećem Keplerovu zakonu za sve planete ista. Ta veličina može dakle ovisiti samo o svojstvima Sunca, a ne o svojstvima planeta.

Začudo točno isti zakon izlazi i za eliptične staze, samo nešto težim računom. Uvijek je ubrzanje usmjereno prema Suncu, koje stoji u jednom žarištu, a iznos ubrzanja dan je formulom (20).

3. Opća gravitacija

Ovako nađeni zakon ubrzanja ima važno svojstvo, koje ima i zemaljska sila teža: sasvim je neovisan od prirode tijela u gibanju. Izračuna li se sila iz ubrzanja, to je i ona usmjerena prema Suncu, znači dakle privlačenje i iznosi

$$K = mb = m\,\frac{4\pi^2 C}{r^2}\,. \tag{21}$$

Ta je sila proporcionalna masi tijela u gibanju, točno kao težina

$$G = mg$$

nekoga zemaljskog tijela.

Ova nam činjenica nameće misao, da su obje sile istoga podrijetla. Danas je to stoljetnom predajom postalo tako samo po sebi razumljivo, da si jedva možemo predočiti smionost i veličinu Newtonove ideje. Kolika li je mašta potrebna, da se gibanje planeta oko Sunca ili Mjeseca oko Zemlje shvati kao »padanje«, koje se zbiva po istim zakonima i pod djelovanjem iste sile, kao padanje kamena iz moje ruke! Da planeti ili mjeseci zaista ne padnu na svoja centralna tjelesa, uzrokom je zakon tromosti, koji se ovdje očituje kao centrifugalna sila. O tom ćemo još kasnije govoriti.

Newton je provjerio ovu misao *opće teže* ili *gravitacije* na primjeru Mjeseca, kojemu je udaljenost od Zemlje bila poznata na temelju mjerenja kutova.

Ova je konstatacija tako važna, da ćemo navesti taj vrlo jednostavni račun, kao potvrdu činjenice, da sve prirodoznanstvene ideje crpe svoju vrijednost tek iz podudaranja proračunanih i mjerenih numeričkih vrijednosti.

Centralno tijelo je sada Zemlja, Mjesec dolazi na mjesto planeta; r je polumjer Mjesečeve staze, T je njegovo ophodno vrijeme. Polumjer zemaljske kugle neka je a. Ako sila teža na Zemlji treba da bude

istoga podrijetla kao privlačenje, kojim Zemlja djeluje na Mjesec, mora ubrzanje g sile teže po Newtonovu zakonu (20) biti izraženo ovako:

$$g = \frac{4\pi^2 C}{a^2}\,.$$

Pri tom C ima istu vrijednost kao za Mjesec, naime prema (19)

$$C = \frac{r^3}{T^2}\,.$$

Ako se to uvrsti, dobije se

$$g = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 a^2}\,. \tag{22}$$

»Sideričko« ophodno vrijeme Mjeseca, t. j. vrijeme između dva položaja, u kojima spojnica Mjesec—Zemlja ima isti smjer spram zvijezda stajačica, iznosi

$$T = 27 \text{ dana } 7 \text{ sati } 43 \text{ minute } 12 \text{ sekunda}$$
$$= 2\,360\,592 \text{ sek.}$$

U fizici obično pišemo samo toliko mjesta nekoga broja, koliko mislimo upotrebiti u daljem računu, dok se ostala naznače potencijom od 10. Tako ovdje pišemo

$$T = 2{,}36 \cdot 10^6 \text{ sek.}$$

Udaljenost Mjeseca od središta Zemlje po prilici je 60 puta tolika kao Zemljin polumjer, točnije

$$r = 60{,}1\ a.$$

Sam polumjer Zemlje lako je zapamtiti, jer je metrički mjerni sustav s njime u jednostavnu odnosu. Znamo, da je 1 m = 100 cm desetmilijunti dio Zemljina kvadranta, dakle 40 milijunti ili 4 puta 10^7-ti dio opsega Zemlje $2\pi a$:

$$100 = \frac{2\pi a}{4 \cdot 10^7}\,,$$

ili

$$a = 6{,}37 \cdot 10^8 \text{ cm.} \tag{23}$$

Uvrsti li se to sve u formulu (22), izlazi

$$g = \frac{4\,\pi^2 \cdot 60{,}1^3 \cdot 6{,}37 \cdot 10^8}{2{,}36^2 \cdot 10^{12}} = 981 \text{ cm/sek}^2.$$

Ova se vrijednost vrlo točno slaže s vrijednošću, koja se dobije zemaljskim opažanjima njihala (II, 12).

Veliko je značenje ovoga rezultata u tome, što je time došlo do *relativiranja sile teže*. Za antičko mišljenje teža znači vučenje svih zemaljskih tjelesa prema apsolutnom »dolje«. Otkriće kuglina oblika

Zemlje donijelo je relativiranje smjera zemaljske teže. Ona je postala vučenje prema središtu Zemlje.

Sada je dokazan identitet zemaljske teže sa silom privlačenja, koja sili Mjesec, da ostane na svojoj stazi, a budući da nema sumnje, da je ta sila u biti ista kao sila, koja drži Zemlju i ostale planete u njihovim stazama oko Sunca, rađa se predodžba, da tjelesa nisu naprosto »teška«, nego da su *uzajamno* ili *relativno jedno spram drugoga teška*. Zemlju kao planet vuče Sunce, ali ona sama privlači Mjesec. Očito je to samo približan opis stvarnosti, koja se sastoji u tome, da se Sunce, Mjesec i Zemlja privlače uzajamno. Istina je, za obilaženje Zemlje oko Sunca može se s velikim približenjem smatrati, da Sunce miruje, jer njegova golema masa sprečava primjetna ubrzanja, a isto tako Mjesec, jer je razmjerno malen, ne ulazi znatnije u račun. Točnija teorija mora te utjecaje, zvane »smetnjama«, uzeti u račun.

Prije nego točnije razmotrimo ovo shvaćanje, koje znači glavni napredak Newtonove teorije, dat ćemo Newtonovim zakonima njihov konačni oblik. Vidjeli smo, da na planet, koji se nalazi u udaljenosti r od Sunca, djeluje privlačna sila veličine (21)

$$K = m\,\frac{4\pi^2C}{r^2},$$

gdje je C konstanta, koja ovisi samo o svojstvima Sunca, a ne o svojstvima planeta. Po novom shvaćanju uzajamne teže mora i planet privlačiti Sunce. Ako je M masa Sunca, a c konstanta, koja ovisi samo o svojstvima planeta, to za silu, kojom planet djeluje na Sunce, mora vrijediti izraz

$$K' = M\,\frac{4\pi^2c}{r^2}.$$

No već smo prije, kod uvođenja pojma sile (II, 1), upotrebili princip uzajamnog djelovanja (actio = reactio), koji je jedan od najjednostavnijih i najsigurnijih stavaka mehanike. Primijenimo li ga ovdje, moramo staviti $K = K'$ ili

$$m\,\frac{4\pi^2C}{r^2} = M\,\frac{4\pi^2c}{r^2}.$$

Iz toga izlazi

$$mC = Mc.$$

Vrijedi dakle

$$\frac{C}{M} = \frac{c}{m},$$

t. j. ovaj omjer ima istu vrijednost za oba tijela (Sunce i planet), dakle za sva tjelesa uopće. Označimo li ga sa $\frac{k}{4\pi^2}$, možemo pisati

(25) $$4\pi^2C = k\,M, \quad 4\pi^2c = k\,m.$$

Faktor proporcionalnosti k zove se *konstanta gravitacije*.

Newtonov zakon opće gravitacije dobiva onda simetrični oblik:

(26) $$K = k\,\frac{m\,M}{r^2}.$$

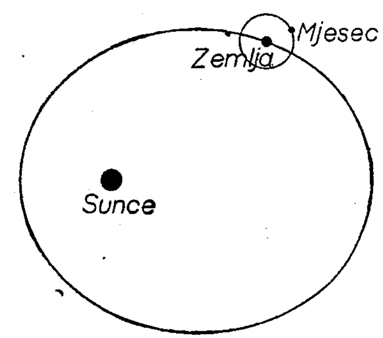
Riječima to glasi:

Dva se tijela uzajamno privlače silom, koja je upravno razmjerna s masom svakoga tijela, a obrnuto razmjerna s kvadratom njihove udaljenosti.

4. Mehanika neba

Tek u ovoj općoj formulaciji Newtonov zakon donosi stvarni napredak za proračunavanje staza planeta. U prvotnom svom obliku bio je izveden iz Keplerovih zakona i značio je samo kratko i vrlo pregnantno obuhvaćanje tih zakona. Obrnuto se može dokazati, da gibanje tijela oko mirnoga centralnog tijela, koje ga privlači po Newtonovu zakonu, mora nužno biti gibanje po Keplerovoj elipsi. Nešto novo nastaje tek onda, kad smatramo oba tijela pokretnima i, dalje, kada dodamo još druga tjelesa.

Tada nastaje matematička zadaća, koja se zove *problem triju ili više tijela*, i koja točno odgovara stvarnim odnosima u planetnom sustavu (sl. 34). Planete ne privlači samo Sunce, mjesece ne privlače samo njihovi planeti, nego svako tijelo, bilo to Sunce, planet, mjesec, komet, privlači svako drugo tijelo. Po tome su Keplerovi zakoni samo približno ispravni, i to samo zato, jer privlačenje Sunca zbog njegove velike mase daleko prelazi međusobna djelovanja svih ostalih tjelesa u planetnom sustavu. No u većim razmacima vremena moraju se ta međusobna djelovanja očitovati kao odvajanja od Keplerovih zakona. Govori se, kako smo već spomenuli, o »smetnjama«.

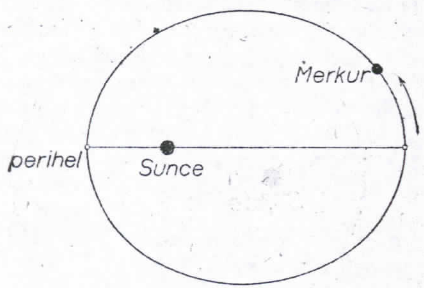


Sl. 34.

Za Newtonova vremena takve su smetnje već bile poznate, a dalja stoljeća nagomilala su profinjenim metodama opažanja golem materijal činjenica, koji je Newtonova teorija privlačenja morala svladati. Jedan je od najvećih triumfa ljudskoga uma, da joj je to uspjelo.

Nije ovdje naša zadaća, da pratimo razvoj mehanike neba od Newtonovih vremena i da izložimo matematičke metode, koje su pronađene za proračunavanje »smetanih« staza. Najoštroumniji matematičari svih zemalja sudjelovali su kod izgradnje *»teorije smetnja«* ili *»perturbacija«*, i premda za problem triju tijela još nije nađeno rješenje, koje bi potpuno zadovoljilo, ipak se mogu gibanja sa sigurnošću proračunati na stotine hiljada ili milijune godina unaprijed ili unatrag [5]. U nebrojenim slučajevima Newtonova je teorija prokušana na temelju novih iskustava i dosad nije nikada nađena netočnom — osim u jednom slučaju, o kojem ćemo odmah govoriti. Stoga je teoretska astronomija, kako ju je Newton osnovao, dugo vrijedila kao uzor egzaktnih znanosti. Ona nam pruža, što je odvajkada bila želja ljudi: dižući velo s budućnosti, daje svome sljedbeniku dar proricanja. Ma bio predmet astronomskih proročanstava i nevažan za ljudski život, ipak je postao simbol za oslobođenje duha od zemaljske skučenosti. I mi, kao narodi svih vremena, s divljenjem dižemo pogled k zvijezdama, koje nam kazuju zakone svemira.

Zakon svemira ne može trpjeti izuzetka. Ipak, ima jedan slučaj, kako smo već napomenuli, gdje nas je Newtonova teorija izdala. Pogreška je doduše malena, ali se ne može osporiti. Radi se o Merkuru, planetu, koji je Suncu najbliži. Staza svakoga planeta može se shvatiti kao gibanje po Keplerovoj elipsi, koje je smetano drugim planetima, t. j. položaj ravnine staze, smjer velike osi elipse, njezin ekscentricitet, ukratko svi »elementi staze« polagano se mijenjaju. Ako se te promjene izračunaju prema Newtonovu zakonu i ako se prema tome korigira opažana staza, mora se dobiti egzaktno Keplerovo gibanje, t. j. elipsa u stanovitoj nepomičnoj ravnini, s velikom osi određenog smjera i određene duljine i t. d. Tako je to kod svih planeta. Samo kod Merkura preostaje malen ostatak [6]. Smjer velike osi, a to je spojnica Sunca s najbližom točkom staze, *perihelom* (sl. 35), poslije korekcije svih smetnja nije nepomičan, već se sasvim polagano okreće, i to za 43 lučne sekunde u stoljeću. To je gibanje velikom sigurnošću ustanovljeno, a proračunao ga je prvi L e v e r r i e r (1845), onaj isti astronom, koji je na temelju računa smetnja prorekao postojanje planeta Neptuna. Newtonovim privlačenjem nama poznatih planetnih masa ne može se to gibanje objasniti. Zato je pokušano tumačenje pomoću hipotetskih masa, koje bi svojim privlačenjem proizvele gibanje Merkurova perihela. Tako je na pr. s Merkurovom anomalijom dovedeno u vezu zodijakalno svijetlo, za koje se smatralo, da potječe od vrlo fino razdijeljene, maglovite tvari u okolini Sunca. Ova hipoteza i brojne druge imaju taj nedostatak, da su ad hoc izmišljene i nisu potvrđene drugim opažanjima [7].



Sl. 35.

Da se jedino, sasvim sigurno odvajanje od Newtonova zakona očituje baš kod Merkura, Suncu najbližeg planeta, upućuje na to, da se ovdje možda ipak radi o načelnom nedostatku Newtonova zakona. Sila privlačenja najveća je u blizini Sunca, odvajanja od zakona obrnute proporcionalnosti s kvadratom udaljenosti najprije će se tamo očitovati. Pokušalo se promijeniti taj zakon. No budući da su te promjene

samovoljno izmišljene i ne mogu se provjeriti drugim činjenicama, nije njihova ispravnost time dokazana, što daju gibanje Merkurova perihela. Ako Newtonovoj teoriji zaista treba profinjenje, onda treba svakako zahtijevati, da to profinjenje izvire iz nekoga principa, koji premašuje prijašnju nauku u pogledu općenitosti i nutarnje vjerojatnosti.

Tek je E i n s t e i n uspio to provesti, postavivši opću relativnost kao najviši postulat na čelo svih prirodnih zakona. U zadnjem poglavlju vratit ćemo se na njegovo objašnjenje gibanja Merkurova perihela.

5. Princip relativnosti klasične mehanike

Razmatrajući velike probleme kozmosa gotovo smo zaboravili na zemaljsku polaznu točku. Zakone dinamike, nađene na Zemlji, prenijeli smo u svemirski prostor, kroz koji Zemlja na svojoj stazi oko Sunca juri golemom brzinom. Kako to, da tako malo opažamo o tom putovanju kroz prostor? Kako to, da je Galilei na Zemlji, koja se giba, mogao naći zakone, koji bi po Newtonu trebali vrijediti samo u apsolutno nepomičnom prostoru? Mi smo to pitanje već dodirnuli, kad smo govorili o Newtonovim nazorima o prostoru i vremenu. Rekli smo tada, da prividno pravocrtni put kugle, koja se kotrlja po stolu, mora zbog Zemljine rotacije uistinu biti nešto zakrivljen, jer taj put nije pravocrtan spram Zemlje, koja rotira, već spram apsolutnoga prostora. Tu zakrivljenost ne opažamo, jer je put kratak i kratko vrijeme opažanja, u kojem se Zemlja samo malo zakrenula. Prihvatimo li to, ipak još ostaje gibanje oko Sunca, koje se zbiva golemom brzinom od po pr. 30 km/sek. Zašto to ne opažamo?

Ovo je gibanje obilaženja doduše također rotacija, pa se mora očitovati kod zemaljskih gibanja slično kao okretanje Zemlje oko vlastite osi, samo još mnogo slabije, jer je zakrivljenost Zemljine staze vrlo malena. Ali naše se pitanje ne odnosi na to gibanje rotacije, nego na odmicanje naprijed, koje je u toku jednoga dana praktički pravocrtno i jednoliko.

Stvarno se svi mehanički procesi na Zemlji zbivaju tako, kao da toga silnog gibanja prema naprijed nema, i taj zakon vrijedi općenito za svaki sustav tjelesa, koja izvode jednoliko i pravocrtno gibanje kroz Newtonov apsolutni prostor. On se zove *princip relativnosti* klasične mehanike i može se formulirati na različite načine. Zasad neka glasi ovako:

Relativno spram koordinatnoga sustava, koji se pravocrtno i jednoliko giba kroz apsolutni prostor, zakoni mehanike glase isto tako, kao relativno spram koordinatnoga sustava, nepomičnog u prostoru.

Da se uvidi ispravnost ovoga stavka, treba samo jasno uočiti mehanički temeljni zakon, stavak impulsa, i pojmove, koji se u njemu pojavljuju. Znamo, da udarac proizvodi *promjenu* brzine. Ta je promjena sasvim neovisna od toga, da li brzine prije i poslije udarca, v_1 i v_2, prosuđujemo spram apsolutnoga prostora ili spram sustava referencije, koji se sam giba konstantnom brzinom *a*. Odmiče li tijelo u gibanju prije udarca na pr. brzinom $v_1 = 5$ cm/sek, to će promatrač, koji se giba u istom smjeru brzinom $a = 2$ cm/sek, mjeriti samo relativnu brzinu $v_1' = v_1 - a = 5 - 2 = 3$. Dobije li sada tijelo udarac u smjeru gibanja, koji mu brzinu povisi na $v_2 = 7$ cm/sek, isti će promatrač mjeriti konačnu brzinu $v'_2 = v_2 - a = 7 - 2 = 5$. Promjena brzine, izazvana udarcem, iznosit će u nepomičnom prostoru $w = v_2 - v_1 = 7 - 5 = 2$. Promatrač, koji se giba, ustanovit će prirast brzine

$$w' = v'_2 - v'_1 = (v_2 - a) - (v_1 - a) = v_2 - v_1 = w = 5 - 3 = 2.$$

Obje su promjene jednake.

Isto to vrijedi za neprekinute sile i za ubrzanja, koja one proizvode. Jer ubrzanje b bilo je definirano kao omjer promjene brzine w i vremena t, koje je za to trebalo, a kako je w neovisno od toga, kakvo pravocrtno jednoliko gibanje (gibanje translacije) ima sustav referencije, koji se upotrebljava za mjerenje, mora isto vrijediti i za b.

Izvor toga stavka očito je zakon tromosti, po kojemu se gibanje translacije zbiva bez djelovanja sila. Sustav nekih tjelesa, koja se sva gibaju istom konstantnom brzinom kroz prostor, ne samo da se geometrijski nalazi u relativnom mirovanju, nego se ne pojavljuju ni sile, koje bi djelovale na ta tjelesa *zbog gibanja*. No ako tjelesa sustava *uzajamno* djeluju silama, onda će se gibanja, koja se time proizvode, relativno isto tako odvijati, kao da nema zajedničkoga gibanja translacije. Promatrač, koji se giba sa sustavom, ne može ga dakle razlikovati od sustava, koji apsolutno miruje.

Dnevno i mnogostruko ponovljeno iskustvo, da ne opažamo ništa o gibanju translacije Zemlje, uvjerljiv je dokaz toga stavka. No ista se činjenica očituje i kod zemaljskih gibanja. Ako je neko gibanje na Zemlji spram nje pravocrtno i jednoliko, onda je takvo i spram prostora, ako od Zemljinog gibanja ne uzmemo u obzir rotaciju. Svatko zna, da se na brodu ili vlaku, koji jednoliko vozi, mehanički pojavi zbivaju na isti način, kao na mirnoj zemlji. I na brodu, koji vozi, kamen pada vertikalno, i to uzduž vertikalna pravca, koji se giba s brodom. Da je vožnja sasvim jednolika i bez trešnje, putnici ne bi ništa opazili o tom gibanju, dok ne gledaju okolinu, koja prolazi.

6. »Ograničeno« apsolutni prostor

Stavak o relativnosti mehaničkih pojava polazna je točka za dalja naša razmatranja. Važnost mu je u tome, što je u najužoj vezi s Newtonovim shvaćanjima o apsolutnom prostoru i što odmah bitno ograničuje fizičku realnost toga pojma.

Nužnost pretpostavki apsolutnog prostora i apsolutnog vremena obrazložili smo time, što bez njih zakon tromosti uopće nema smisla. Moramo sada pristupiti pitanju, u koliko tim pojmovima pripada oznaka »realnosti« u smislu fizike. Fizička realnost pripada nekom pojmu samo onda, ako mu u svijetu pojava odgovara nešto, što se može mjerenjima

ustanoviti. Nije ovdje mjesto, da raspravimo filozofski pojam realnosti. Svakako je sigurno, da kriterij realnosti, koji smo dali, potpuno odgovara običajima fizičkih znanosti. Pojmovi, koji taj kriterij ne zadovoljavaju, pomalo su bili istisnuti iz sustava fizike.

Vidimo odmah, da u Newtonovu apsolutnom prostoru nije neko određeno mjesto u tom smislu ništa realno. Načelno je nemoguće ponovno pronaći neko mjesto u prostoru.

To lako izlazi iz principa relativnosti. Zamislimo, da smo nekako došli do pretpostavke, da neki sustav referencije miruje u prostoru. Za svaki sustav, koji se spram ovoga giba jednoliko i po pravcu, možemo onda s istim pravom smatrati, da miruje. Mehanički se pojavi u oba sustava odvijaju sasvim jednako, nijedan sustav nema pred drugim prednost. Tijelo, koje miruje u jednom sustavu referencije, opisuje, gledano s drugoga sustava, pravocrtno i jednoliko gibanje. Ako bi dakle netko tvrdio, da to tijelo označuje neko mjesto u apsolutnom prostoru, drugi bi to s istim pravom mogao osporiti i smatrati, da se tijelo giba.

Time Newtonov apsolutni prostor već gubi znatan dio svoje neprijatne egzistencije. Prostor, u kojemu nema mjesta, koja se daju označiti kakvim fizičkim sredstvima, svakako je već dosta suptilna tvorevina i nije naprosto škrinja, u koju su utrpane materijalne stvari.

Moramo sada promijeniti i formulaciju principa relativnosti. U njoj smo još govorili o koordinatnom sustavu, koji miruje u apsolutnom prostoru, što je fizički očito bez smisla. Da se dođe do jasne formulacije, uveden je pojam *inercijalnog sustava* (inertia = tromost). Pod tim se razumijeva koordinatni sustav, u kojem vrijedi zakon tromosti u svome prvotnom obliku, ali nije samo jedan takav sustav, gdje to vrijedi, i koji bi mirovao u Newtonovu apsolutnom prostoru, već ima neizmjerno mnogo sustava referencije, koji su svi ravnopravni, a budući da je nezgodno govoriti o više »prostora«, koji su međusobno u gibanju, klonimo se riječi prostor. *Princip relativnosti* onda dobiva ovu formulaciju:

Ima neizmjerno mnogo ravnopravnih sustava, inercijalnih sustava, koji su relativno jedan spram drugoga u gibanju translacije, i u kojima vrijede zakoni mehanike u svome jednostavnom klasičnom obliku.

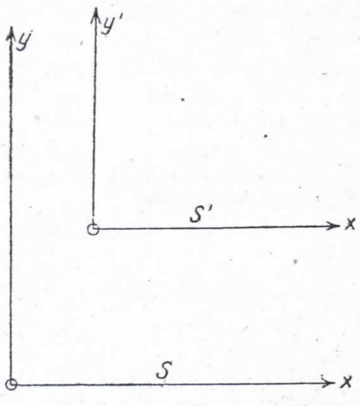
Ovdje se jasno vidi, kako je problem prostora najuže povezan s mehanikom. Ne nameće prostor stvarima svoj »oblik«, nego stvari i njihova fizička svojstva tek određuju prostor. Vidjet ćemo, kako se to shvaćanje probija sve jasnije i općenitije, dok ne dosegne svoju kulminaciju u Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti.

7. Galileijeve transformacije

Premda zakoni mehanike glase jednako u svim inercijalnim sustavima, ne izlazi dakako iz toga, da su koordinate i brzine tijelesa jednake s obzirom na dva inercijalna sustava, koja se relativno jedan spram drugoga gibaju. Ako primjerice tijelo miruje u sustavu S, imat će konstantnu brzinu spram sustava S', koji se giba relativno spram S.

Opći zakoni mehanike sadržavaju samo ubrzanja, a ta su, kako smo vidjeli, jednaka za sve inercijalne sustave. Za koordinate i brzine to ne vrijedi.

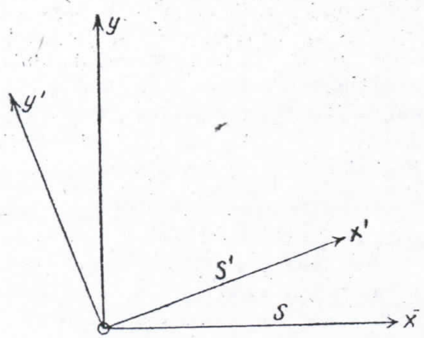
Nastaje stoga problem, da se nađe položaj i brzina nekoga tijela spram inercijalnog sustava S', ako su zadani položaj i brzina toga tijela spram nekoga drugog inercijalnog sustava S.



Sl. 36.

Radi se dakle o prijelazu od jednog koordinatnog sustava na drugi, i to na sustav, koji se relativno spram prvoga giba. Moramo ovdje uklopiti neke primjedbe o ravnopravnim koordinatnim sustavima uopće i o zakonima preračunavanja od jednoga na drugi, t. j. o *jednadžama transformacije*.

U geometriji je kordinatni sustav sredstvo, da se relativni položaji jednog tijela spram nekoga drugog fiksiraju na prikladan način. U tu svrhu zamislimo koordinatni sustav čvrsto spojen s jednim tijelom. Koordinate točaka drugoga tijela onda potpuno određuju relativni položaj. Svejedno je kod toga, da li je koordinatni sustav pravokutan, kosokutan, polaran ili još općenitiji. Svejedno je također, kako je orijentiran spram prvoga tijela. Mora se samo sačuvati ta orijentacija, ili, ako se ona mijenja, treba točno reći, kako se koordinatni sustav spram tijela pomaknuo. Ako se primjerice operira pravokutnim koordinatama u ravnini, može se mjesto prvotno odabranoga sustava S odabrati drugi sustav S', koji je spram sustava S pomaknut (sl. 36) ili zakrenut (sl. 37). No treba točno naznačiti, kolik je pomak ili kut zakretanja. Iz tih podataka može se onda izračunati, kolike su koordinate neke točke P u novom sustavu S', ako su u starom sustavu S imale vrijednosti x, y. Nazovemo li ih x', y', dobijemo formule, koje dopuštaju, da se x', y' izračunaju iz x, y. Provest ćemo to za najjednostavniji slučaj, kada sustav S' nastaje iz sustava S paralelnim pomakom iznosa a u smjeru osi x (sl. 38). Onda će očito nova koordinata x' neke točke P biti jednaka

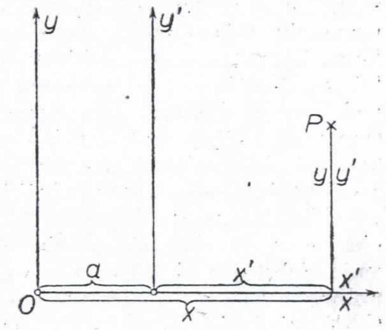


Sl. 37.

staroj koordinati x umanjenoj za pomak a, dok koordinata y ostaje nepromijenjena. Vrijedi dakle

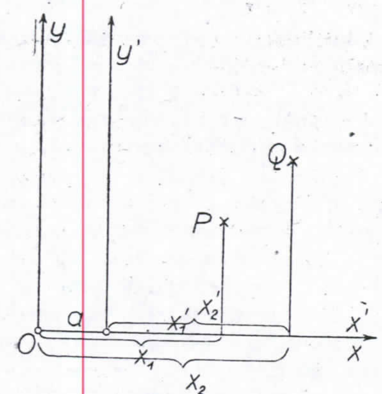
$$x' = x - a, \quad y' = y. \tag{27}$$

Slične, samo kompliciranije formule transformacije vrijede za druge slučajeve. Kasnije ćemo o tome opširnije govoriti. Važna je spoznaja, da svaka veličina, koja po sebi ima neko geometrijsko značenje, mora biti neovisna od izbora koordinatnog sustava i mora stoga u istovrsnim koordinatnim sustavima biti izražena na isti način. Kaže se, da je takva veličina invarijantna spram dotične transformacije koordinata. Razmotrimo kao primjer transformaciju (27), koja znači pomak uzduž osi x. Jasno je da se kod toga ne mijenja razlika $x_2 - x_1$ x-koordinata dviju točaka P i Q. Zaista je (sl. 39)

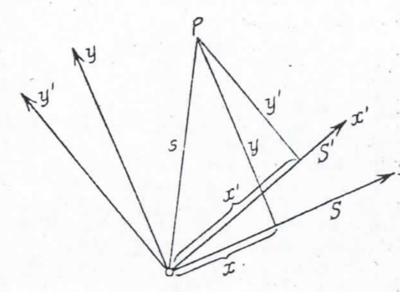


Sl. 38.

$$x_2' - x_1' = (x_2 - a) - (x_1 - a) = x_2 - x_1.$$



Sl. 39.



Sl. 40.

Ako su koordinatni sustavi S i S' zakrenuti jedan spram drugoga, udaljenost je s neke točke P od ishodišta također invarijanta (sl. 40). Izraz za nju isti je u oba sustava, jer po Pitagorinu poučku vrijedi

$$s^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2. \tag{28}$$

U općenitijem slučaju istodobnoga pomaka i vrtnje koordinatnoga sustava bit će razmak dviju točaka P i Q invarijantan. Invarijante su zato osobito važne, jer predočuju geometrijske odnose po sebi, bez obzira na slučajni izbor koordinatnoga sustava. U ovome, što slijedi, imat će one znatnu ulogu.

Vratimo li se sad od toga geometrijskog razmatranja našoj polaznoj točki, morat ćemo odgovoriti na pitanje, koji su zakoni transformacije od jednoga inercijalnog sustava na drugi.

Inercijalni sustav definirali smo kao koordinatni sustav, u kojem vrijedi zakon tromosti. Bitno je kod toga samo stanje gibanja, t. j. da nema ubrzanja spram apsolutnoga prostora, nebitni su vrst i položaj koordinatnoga sustava. Odaberemo li pravokutan sustav, kao što se to najčešće čini, još uvijek mu je slobodan položaj. Može se uzeti pomaknut ili zakrenut sustav, samo mora imati isto stanje gibanja. Mi smo već i prije uvijek, kada se radilo samo o stanju gibanja, a ne o vrsti i položaju koordinatnoga sustava, govorili o *sustavu referencije*, a odsad ćemo se sustavno služiti tom oznakom.

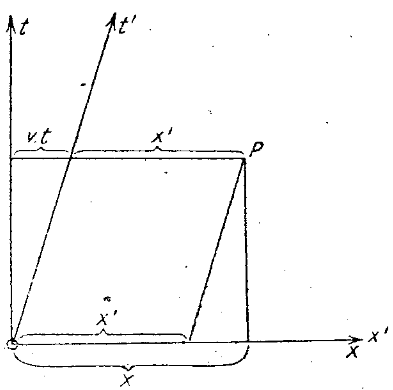
Ako se inercijalni sustav S' giba pravocrtno spram S, mogu se u oba sustava referencije odabrati pravokutne koordinate tako, da se smjer gibanja podudara s osi x, odnosno s osi x'. Osim toga možemo pretpostaviti, da se u momentu $t = 0$ podudaraju ishodišta tih sustava. Onda se ishodište sustava S' u momentu t (t. j. poslije vremena t) pomaknulo za $a = vt$ u smjeru osi x. U tom momentu imaju dakle oba sustava točno položaj, koji smo prije čisto geometrijski raspravili. Moraju dakle vrijediti jednadžbe (27), u kojima treba staviti $a = vt$. Dobivamo tako jednadžbe transformacije

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{29}$$

gdje smo pripisali i nepromijenjenu z-koordinatu. Ovaj se zakon zove *Galileijeva transformacija* u čast osnivača mehanike.

Možemo sada *princip relativnosti* izreći i ovako:

Zakoni su mehanike invarijantni spram Galileijevih transformacija.



Sl. 41.

To izvire iz toga, što su ubrzanja invarijantna, kako smo već prije uvidjeli razmatranjem promjene brzine tijela, koje se giba relativno spram dvaju inercijalnih sustava.

Prije smo pokazali, da se nauka o gibanju ili kinematika može smatrati geometrijom u četverodimenzionalnom $xyzt$-prostoru, u »svijetu« Minkovskoga. Nije stoga nezanimljivo razmotriti, što znače inercijalni sustavi i Galileijeve transformacije u toj četverodimenzionalnoj geometriji. Nije to nimalo teško, jer koordinate y i z uopće ne ulaze u transformaciju. Dovoljno je dakle, da operiramo u xt-ravnini.

Predočit ćemo inercijalni sustav S pravokutnim koordinatnim xt-sustavom (sl. 41). Drugom inercijalnom sustavu S' odgovara onda drugi

koordinatni sustav $x't'$, pa se postavlja pitanje, kako taj izgleda i kako leži spram prvoga. Ponajprije možemo reći, da je vremenska mjera za drugi sustav S' ista kao za prvi, naime jedino, apsolutno vrijeme $t = t'$. Prema tome se os x, na kojoj je $t = 0$, mora podudarati sa osi x', gdje je $t' = 0$. Sustav S' može dakle biti samo kosokutan koordinatni sustav. Os t' je svjetska crta točke $x' = 0$, t. j. ishodišta sustava S'. Ta se točka relativno spram sustava S giba brzinom v, tako da je njezina x-koordinata u tom sustavu u momentu t jednaka vt. Za bilo koju svjetsku točku P daje slika odmah Galileijevu transformaciju $x' = x - vt$.

Bilo kojem drugom inercijalnom sustavu odgovara drugi, kosokutan koordinatni xt-sustav s istom osi x, ali drukčije priklonjenom osi t. Pravokutni sustav, od kojega smo pošli, nema nikakvu prednost pred kosokutnim sustavima. Jedinica vremena odrezana je na svim t-osima različitih koordinatnih sustava *istom* paralelom s osi x. To je u neku ruku »baždarska krivulja« xt-ravnine s obzirom na vrijeme.

Ponavljamo ukratko rezultat:

Izbor smjera osi t u xt-ravnini sasvim je samovoljan. U svakom kosokutnom koordinatnom xt-sustavu s istom x-osi vrijede temeljni mehanički zakoni.

S geometrijskoga je gledišta ta raznolikost ravnopravnih koordinatnih sustava vrlo čudnovata i neobična. Osobito je čudan čvrsti položaj ili invarijancija osi x. Kad se u geometriji operira kosokutnim koordinatama, obično nema razloga, da se fiksira položaj jedne osi. Ali to se zahtijeva Newtonovim načelom apsolutnoga vremena. Svi događaji, koji su istodobni, koji dakle odgovaraju istoj vrijednosti od t, predočeni su paralelom s osi x. Budući da po Newtonu vrijeme teče »apsolutno i bez odnosa spram bilo čega izvanjega«, moraju istodobnim događajima u svim dopuštenim koordinatnim sustavima odgovarati iste svjetske točke.

Vidjet ćemo, da uistinu uopće ne postoji ta nesimetrija u ponašanju svjetskih koordinata x i t, koja je ovdje samo nedostatak u ljepoti. Einstein ju je uklonio svojim relativiranjem pojma vremena.

8. Sile tromosti

Pošto smo spoznali, da pojedinim mjestima u Newtonovu apsolutnom prostoru svakako ne pripada fizička realnost, pitat ćemo, šta onda uopće preostaje od toga pojma. Ipak se on vrlo jasno i snažno očituje, jer otpor svih tjelesa protiv ubrzavanja mora se u Newtonovu smislu tumačiti kao djelovanje apsolutnoga prostora. Lokomotiva, koja pokreće vlak, mora svladati otpor tromosti, tane, koje ruši zid, crpe svoju razornu snagu iz tromosti. Djelovanja tromosti nastaju, gdje se dešavaju ubrzavanja, a ta nisu drugo nego promjene brzina u apsolutnom prostoru. Ovdje se ta riječ može upotrebiti, jer promjena brzine ima istu vrijednost u svim inercijalnim sustavima. Sustavi referencije, koji su sami ubrzani spram inercijalnih sustava, *nisu* dakle ekvivalenti s ovima, a niti međusobno. Zakoni mehanike mogu se naravno izraziti i spram njih, ali ti zakoni onda poprimaju nov, kompliciraniji oblik. Već staza nekog tijela, prepuštenog samom sebi, u obrzanu sustavu nije pravocrtna i jednolika (v. III, 1). To se može izraziti i ovako: u ubrzanu sustavu djeluju osim pravih sila još i *prividne sile, sile tromosti*. Tijelo, na koje ne djeluju nikakve prave sile, ipak je pod utjecajem tih sila tromosti, njegovo gibanje stoga općenito nije ni jednoliko ni pravocrtno. Takav je ubrzan sustav na pr. vagon za vrijeme pokretanja ili kočenja. Svatko poznaje mali udarac, koji se osjeća kod vožnje željeznicom prilikom polaska ili dolaska, a taj nije ništa drugo nego sila tromosti, o kojoj smo upravo govorili.

Razmotrit ćemo potanje pojave u sustavu S, koji se giba pravocrtno, a ubrzanje neka mu je konstantno i jednako k. Mjerimo li ubrzanje nekoga tijela spram toga sustava S u gibanju, ubrzanje je spram apsolutnoga prostora očito za k veće. Stoga će temeljni zakon dinamike u odnosu spram prostora glasiti

$$m(b+k)=K.$$

Pišemo li to u obliku

$$mb=K-mk,$$

možemo reći, da i u ubrzanom sustavu S opet vrijedi zakon gibanja Newtonova oblika

$$mb=K',$$

samo se za silu K' mora staviti zbroj

$$K'=K-mk,$$

gdje je K prava sila, a $-mk$ prividna sila ili sila tromosti.

Ako nema prave sile, t. j. ako je $K=0$, ukupna će sila biti jednaka sili tromosti:

$$K'=-mk. \tag{30}$$

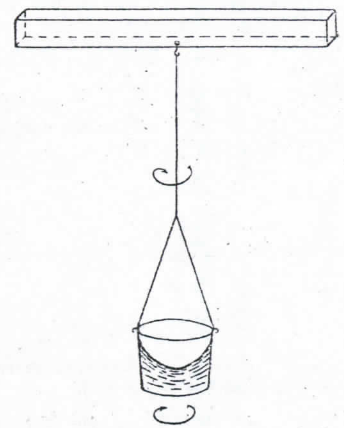
Ta dakle sila djeluje na tijelo, koje je prepušteno samom sebi. Njezino se djelovanje može razabrati ovim razmatranjem: znamo, da je zemaljska sila teža, težina, određena formulom $G=mg$, gdje je g konstantno ubrzanje sile teže. Sila tromosti $K'=-mk$ djeluje dakle točno isto tako kao sila teža. Negativni predznak znači, da je smjer sile suprotan ubrzanju sustava referencije S, a veličina k prividnog ubrzanja teže jednaka je ubrzanju sustava referencije S. Prema tome je gibanje tijela, prepuštenog samom sebi u sustavu S, naprosto gibanje tijela, koje slobodno pada, ili koje je bačeno.

Ta veza silâ tromosti u ubrzanim sustavima sa silom težom čini nam se ovdje još posve slučajnom. Uistinu se nisu kroz dva stoljeća na nju obazirali. Želimo međutim već ovdje kazati, da je ta veza temelj E i n s t e i n o v e opće teorije relativnosti.

9. Centrifugalne sile i apsolutni prostor

Po Newtonovu shvaćanju javljanje sila tromosti u ubrzanim sustavima dokazuje postojanje apsolutnoga prostora, ili, bolje rečeno, privilegiranost inercijalnih sustava. Osobito se jasno očituju sile tromosti u sustavima referencije, koji rotiraju, i to u obliku *centrifugalnih sila*. Na njih se oslanja Newtonova nauka o apsolutnom prostoru. Citirajmo njegove vlastite riječi [8]:

»Učinci, kojim se međusobno razlikuju apsolutna i relativna gibanja, jesu sile udaljivanja od osi u kružnom gibanju. Jer u kružnom su gibanju, naprosto relativnom, ove sile jednake nuli, a u istinskom su i apsolutnom veće ili manje prema veličini gibanja.



Sl. 42.

Visi li čabar na vrlo dugačkoj niti i pokreće li se neprestano u krugu, dok se nit od zakretanja dobro ne ukoči, napuni li se zatim vodom i miruje li zajedno s vodom (sl. 42); a pokrene li se tada najednom nekom silom u obrnuto gibanje u krugu i, popuštanjem niti, dugo ustraje u tom gibanju, površina će vode biti s početka ravna, kao prije gibanja posude; no pošto je silom, koja je pomalo djelovala na vodu, izvela posuda, da se i ova (voda) počela primjetno kretati, pomalo će ona odmicati od sredine, uspinjati se na stijene posude, poprimajući šupalj oblik, (kako sam sâm pokušao)...«

»...Na početku, kada je relativno gibanje u posudi bilo najveće, nije ono izazivalo nikakvu težnju odmicanja od osi: voda nije težila k opsegu uspinjući se na stijene posude, nego je ostala ravna, i stoga njezino istinsko kružno gibanje još nije bilo počelo. Ali kasnije, kada se je relativno gibanje vode umanjilo, njezino uspinjanje na stijene posude odavalo je težnju odmicanja od osi; i ova je težnja pokazivala, da njezino istinsko kružno gibanje neprekidno raste i da je konačno najveće, kada je voda relativno mirovala u posudi.«

Sl. 43.

»...Doduše, vrlo je teško upoznati istinska gibanja pojedinih tjelesa i stvarno ih razlikovati od prividnih zato, što se dijelovi onoga nepomičnog prostora, u kojem se tjelesa zaista gibaju, ne zamjećuju osjetilima. Stvar ipak nije sasvim beznadna. Jer ima razlogâ, dijelom iz prividnih gibanja, koja su razlike istinskih gibanja, dijelom iz sila, koje su uzroci i učinci istinskih gibanja. Kada bi se na primjer dvije kugle, spojene spomoću niti u zadanoj međusobnoj daljini, okretale oko zajedničkog težišta (sl. 43), mogla bi se upoznati iz napetosti niti težnja odmicanja kugala od osi gibanja, i odatle bi se mogla izračunati veličina kružnoga gibanja.«

»... Na taj bi se način mogla naći i veličina i određenje smjera ovoga kružnog gibanja u bilo kojem neizmjernom praznom prostoru, gdje ne bi postojalo ništa izvanje i osjetno, čime bi kugle mogle biti uspoređene.«

Ove riječi najjasnije izražavaju smisao apsolutnoga prostora. Ne treba im dodati mnogo razjašnjenja.

Kvantitativne odnose kod centrifugalnih sila možemo odmah odrediti, sjetimo li se veličine i smjera ubrzanja kod kružnih gibanja. Ubrzanje je bilo upravljeno prema središtu i imalo je prema formuli (4) (II, 4) iznos $b = \frac{v^2}{r}$, gdje je r polumjer kružnice, a v brzina. Imamo li sustav referencije S, koji rotira tako, da u T sek izvrši jedan puni okretaj, brzina je točke, koja se nalazi u udaljenosti r od osi, jednaka [formula (18), III, 2]

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

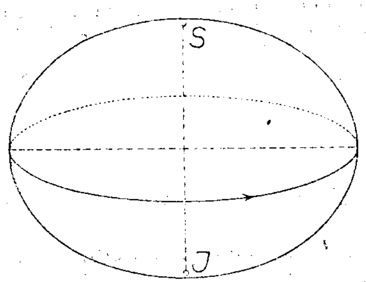
Ubrzanje prema osi, koje označujemo sa k, bit će dakle

$$k = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Ako neko tijelo relativno spram S ima ubrzanje b, njegovo je apsolutno ubrzanje $b + k$. Isto tako kao kod pravocrtnoga ubrzanog gibanja izlazi onda, da postoji prividna sila, kojoj je apsolutna veličina

$$mk = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}, \tag{31}$$

a smjer joj je od osi rotacije upravljen prema vani. To je *centrifugalna sila.*

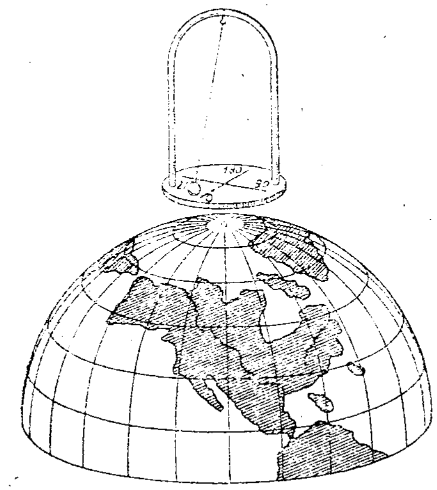


Sl. 44.

Poznato je, da i centrifugalna sila ima svoju važnost među dokazima za rotaciju Zemlje (sl. 44). Ta sila nastoji udaljiti mase od osi rotacije i stoga uzrokuje spljoštenost Zemlje na polovima i smanjivanje teže od pola prema ekvatoru. Taj smo pojav već prije upoznali, kada je bilo govora o jedinici sile (II, 15), ne brinući se za njegov uzrok. Po Newtonu je taj pojav dokaz za rotaciju Zemlje. Centrifugalna sila, koja vuče prema vani, djeluje protiv sile teže i umanjuje težinu. Umanjenje ubrzanja teže g ima na ekvatoru vrijednost $\frac{4\pi^2 a}{T^2}$, gdje je a polumjer Zemlje. Uvrstimo li za a prije [formula (23), III, 3] spomenutu

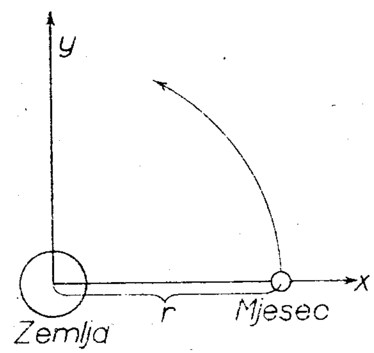
vrijednost $a = 6{,}37 \cdot 10^8$ cm i za trajanje rotacije $T = 1$ dan $= 24 \cdot 60 \cdot 60$ sek $= 86\,400$ sek, izlazi za razliku ubrzanja teže na polu i na ekvatoru vrijednost 3,37 cm/sek², koja je relativno malena spram 981. Ta se vrijednost uostalom mora još nešto uvećati zbog spljoštenosti Zemlje.

Po Newtonovoj nauci o apsolutnom prostoru treba ove pojave svakako tako shvatiti, da se ne temelje na relativnom gibanju spram drugih masa, kao što su primjerice zvijezde stajačice, već na apsolutnoj rotaciji spram praznoga prostora. Da Zemlja miruje, a cijelo nebo sa zvijezdama stajačicama rotira u obrnutom smislu u 24 sata oko Zemljine osi, po Newtonu ne bi se pojavljivale centrifugalne sile. Zemlja ne bi bila spljoštena i sila teža bila bi ista na ekvatoru kao i na polu. Gibanje neba, gledano sa Zemlje, izgleda u oba slučaja jednako, a ipak bi imala postojati izvjesna razlika, koja se može fizički ustanoviti.



Sl. 45.

Još se to oštrije očituje kod *Foucaultova pokusa njihalom* (1850). Njihalo, koje se njiše u nekoj ravnini, mora po zakonima Newtonove mehanike tu svoju ravninu njihanja trajno sačuvati u apsolutnom prostoru, ako se isključe sve druge sile, koje bi ga mogle skrenuti. Objesi li se njihalo na sjevernom polu, zemaljska se kugla pod njim okreće (sl. 45). Promatrač na Zemlji opaža dakle vrtnju ravnine njihanja u obrnutom smislu. Da Zemlja miruje, a sustav zvijezda stajačica rotira, ne bi se po Newtonu ravnina njihanja smjela pomicati spram Zemlje. Da ona to čini, dokazuje dakle opet *apsolutnu* rotaciju Zemlje.



Sl. 46.

Još ćemo razmotriti jedan primjer, gibanje Mjeseca oko Zemlje (sl. 46). Po Newtonu Mjesec bi pao na Zemlju, da nema apsolutnu rotaciju oko nje. Zamislimo koordinatni sustav sa središtem Zemlje kao ishodištem, xy-ravnina neka je ravnina Mjesečeve staze, a os x neka trajno prolazi kroz Mjesec. Da ovaj sustav apsolutno miruje, na Mjesec bi djelovala samo sila gravitacije prema središtu Zemlje, koja je po formuli (26) (III, 3) jednaka

$$K = k\,\frac{Mm}{r^2}\,.$$

Mjesec bi dakle padao na Zemlju duž osi x. Da on to ne čini, dokazuje apsolutnu rotaciju koordinatnoga sustava xy, jer zbog nje nastaje centrifugalna sila, koja drži ravnotežu sili K, pa vrijedi

$$\frac{mv^2}{r} = k\,\frac{Mm}{r^2}$$

Razumije se, da ta formula nije ništa drugo nego treći Keplerov zakon. Kratimo li masom Mjeseca i izrazimo brzinu v ophodnim vremenom T, $v = \frac{2\pi r}{T}$, izlazi

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{kM}{r^2}\,,$$

ili po (25) (III, 3)

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{kM}{4\pi^2} = C.$$

Sasvim analogno vrijedi naravno i za rotaciju planetâ oko Sunca.

Ovi primjeri i mnogi drugi pokazuju, da se Newtonova nauka o apsolutnom prostoru temelji na vrlo konkretnim činjenicama. Prođemo li još jednom taj niz misli, vidjet ćemo ovo:

Primjer posude, koja rotira, pokazuje, da relativna rotacija vode spram posude nije razlog pojavljivanju centrifugalnih sila. Moglo bi biti, da su veće mase u okolini taj razlog, na pr. cijela Zemlja. Spljoštenost Zemlje, smanjenje teže na ekvatoru, Foucaultov pokus njihalom pokazuju, da taj razlog treba tražiti izvan Zemlje. Staze svih mjeseca i planeta postoje također samo na temelju centrifugalnih sila, koje gravitaciji drže ravnotežu. Konačno se opaža isti pojav kod najudaljenijih dvostrukih zvijezda, od kojih svjetlost putuje tisućljeća do nas. Čini se dakle, da je pojavljivanje centrifugalnih sila općenito i da ne može biti osnovano na međusobnim djelovanjima. Time ne preostaje drugo, nego da se uzme, da je apsolutni prostor njihov razlog.

Ovakav način zaključivanja općenito je vrijedio od Newtonova vremena. Samo su se rijetki mislioci tome opirali. Tu je u prvom redu Ernst Mach, koji je u svome kritičkom prikazu mehanike raščlanio Newtonove pojmove i ispitao njihovu spoznajnu moć. On polazi od toga, da nas mehaničko iskustvo nikad ne može poučiti o apsolutnom prostoru. Samo se relativna mjesta i relativna gibanja daju ustanoviti, pa su prema tome fizički realna. Newtonovi dokazi za postojanje apsolutnoga prostora moraju dakle biti prividni dokazi. Uistinu se oni temelje na tome, da li se prihvaća, da vrtnjom cijeloga sustava zvijezda stajačica oko Zemlje ne nastaje spljoštenost Zemlje, smanjenje sile teže na ekvatoru i t. d. S pravom veli Mach, da takve tvrdnje daleko

prelaze svako moguće iskustvo. Energično prigovara Newtonu, da se ovaj u tome iznevjerio svome principu, da priznaje jedino činjenice. Sam je Mach pokušao osloboditi mehaniku od ove grube pogreške u ljepoti. No njegov pokus nije mogao uspjeti. U jednu ruku nije vidio značenje odnosa između tromosti i gravitacije, koji je izražen proporcionalnošću težine i mase, a u drugu mu je ruku nedostajala teorija relativnosti optičkih i elektromagnetskih pojava, kojom se uklanja predrasuda apsolutnoga vremena. Oboje bilo je nužno za izgradnju nove mehanike, oboje je učinio Einstein.

IV. TEMELJNI ZAKONI OPTIKE

1. Eter

Mehanika je historijski i stvarno osnov fizike. Ipak je ona samo dio, pače malen dio fizike. Dosad smo se služli samo mehaničkim iskustvima i teorijama za rješavanje problema prostora i vremena. Moramo pitati, što nas o tome uče druge grane znanstvenog istraživanja.

Područja optike, elektriciteta i magnetizma prvenstveno su u vezi s problemom prostora, jer svjetlost i električke i magnetske sile ispunjaju prazni prostor. Posude, iz kojih je isisan uzduh, i kod najsavršenijeg vakuuma potpuno propuštaju svjetlost. Električke i magnetske sile djeluju kroz vakuum. Svjetlost Sunca i zvijezda dopire do nas kroz prazni svemirski prostor. Veza između Sunčanih pjega i zemaljskoga polarnog svijetla te magnetskih oluja pokazuje bez ikakve teorije, da elektromagnetska djelovanja prolaze kroz svemirski prostor.

Ta činjenica, da se neki fizički pojavi šire kroz svemir, uskoro je dovela do hipoteze, da prostor i nije prazan, nego da je ispunjen nekom vanredno finom tvari bez težine, *eterom*, koja je nosilac tih pojava. Ukoliko se pojam etera danas još upotrebljava, ne misli se time ništa drugo, nego prazni prostor, u kome su neka fizička stanja ili »polja«. Kad bismo se odmah ograničili na tako apstraktan pojam, ostao bi nam nerazumljiv velik dio problema, koji se historijski nadovezuju na eter. Taj se eter smatrao pravom tvari, koja ne samo da ima fizička stanja, nego je i sposobna da se giba.

Prikazat ćemo sada najprije razvoj načelâ optike, a zatim elektrodinamike; oboje se spaja u *fiziku etera*. Time se ponešto udaljujemo od problema prostora i vremena, da se njime kasnije ponovno pozabavimo, oboružani novim iskustvima i zakonima.

2. Emisiona i valna teorija

»Dico igitur rerum effigias tenuisque figuras
mittier ab rebus, summo de corpore rerum;«

. . . .

»quapropter simulacra pari ratione necesset
inmemorabile per spatium transcurrere posse
temporis in puncto, . . .«

. . . .

»propterea fit uti, speciem quo vertimus, omnes
res ibi eam contra feriant forma atque colore.
verum nos solis cernere quimus
. . . .« [9]

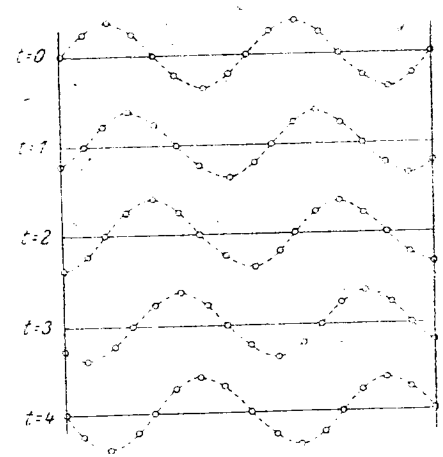
Tako je napisao Tit Lukrecije Kar u svojoj poučnoj pjesmi »O prirodi« (4. pjevanje). tom poetskom vodiču epikurske filozofije, napisanom u zadnjem stoljeću prije naše ere.

Citirani stihovi sadrže neku vrst emisione teorije svjetlosti, zamišljenu od pjesnika bogate mašte, a ujedno sasvim prirodoznanstvenoga stava. Ipak ni ovu nauku, ni druge antičke spekulacije o svjetlosti ne možemo označiti znanstvenom teorijom. Nedostaje svaki pokušaj kvantitativnog određivanja pojava, te prve oznake objektiviranja. Kod svjetlosnih pojava osobito je i teško odvojiti subjektivni osjet svjetlosti od fizičkoga pojava i uvesti u te pojave mjerenje.

Znanstvena se optika može računati od Descartesa. Njegova Dioptrika (1638) sadrži temeljne zakone širenja svjetlosti, zakon zrcaljenja i zakon loma. Prvi je bio poznat već u starom vijeku, potonji je nešto prije našao eksperimentalnim putem Snellius (oko 1618). Descartes je razvio predodžbu o eteru kao nosiocu svjetlosti, koja je preteča *valne (undulacione) teorije*. Ovu je natuknuo već Robert Hooke (1667), a jasno ju je formulirao Christian Huygens (1678). Njihov nešto mlađi savremenik Newton smatra se začetnikom protivnog naučavanja, *emisione teorije*. Prije nego što govorimo o borbi između tih dviju teorija, ukratko ćemo objasniti njihovu bit.

Emisiona teorija tvrdi, da tjelesa, koja svijetle, izbacuju fine čestice, koje se gibaju po zakonima mehanike i pobuđuju osjet svjetlosti, kad pogode oko.

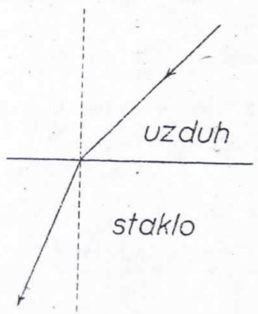
Valna teorija dovodi širenje svjetlosti u analogiju s gibanjem valova na vodi ili s valovima zvuka u uzduhu. U tu svrhu ona mora pretpostaviti, da postoji medij, koji može titrati i prodire sva prozirna tjelesa. To je *svjetlosni eter*. Pojedine čestice te supstancije pri tome samo titraju oko svojih položaja ravnoteže. Ono, što odmiče kao val svjetlosti, stanje je gibanja tih čestica, a ne one same. Crtež (sl. 47) pokazuje taj proces na nizu točaka, koje mogu titrati gore, dolje. Svaka od tih slika, koje su nacrtane jedna ispod druge, odgovara jednom vremenskom momentu, na pr. $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Svaka pojedina točka titra vertikalno. Sve točke zajedno daju dojam vala, koji se od momenta do momenta pomiče na desno.



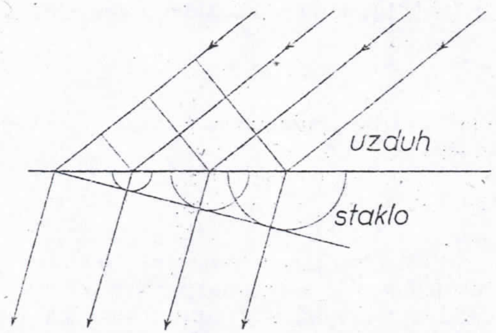
Sl. 47.

Ima međutim važan razlog, koji govori protiv valne teorije. Poznato je, da valovi obilaze zapreke. To se može vidjeti na površini vode, a i zvuk se širi »oko ugla«. Zraka svjetlosti, naprotiv, širi se pravocrtno. Isprijeći li se svijetlu na njegovu putu neprozirno tijelo oštrih bridova, nastaje oštro omeđena sjena.

Ova je činjenica potaknula Newtona, da otkloni valnu teoriju. On se sam nije odlučio za određenu hipotezu, nego je samo ustanovio, da je svjetlost nešto, što se giba od tijela, koje svijetli, »kao izbačene čestice«. Njegovi su nasljednici ovo mišljenje interpretirali u korist emisione teorije, koja je zbog autoriteta Newtonova vladala kroz cijelo stoljeće. Pri tom je već za njegovo vrijeme G r i m a l d i našao (publicirano 1665., poslije smrti Grimaldijeve), da i svjetlost može ići »oko ugla«. Na oštrim granicama sjene vidi se slabo, prugasto osvjetljenje područja sjene. Taj se pojav zove *ogib* ili *difrakcija* svjetlosti. Osobito zbog toga otkrića Huygens je postao revan prvoborac valne teorije. Prvim i najvažnijim argumentom za tu teoriju smatrao je činjenicu, da se dvije zrake svjetlosti mogu križati, da jedna na drugu ne utječe, točno kao dva niza valova na vodi, dok bi se svežnjevi izbačenih čestica morali sraziti ili barem međusobno smetati. Huygens je uspio protumačiti zrcaljenje i lom svjetlosti na temelju valne teorije. Za to mu je poslužio još danas po njemu zvani princip, po kojem se svaka točka, pogođena svjetlošću, može smatrati novim izvorom kuglina svjetlosna vala. Kod toga je proizašla načelna razlika između emisione i valne teorije, a na temelju te razlike je kasnije eksperimentalna odluka pala u korist valne teorije.



Sl. 48.

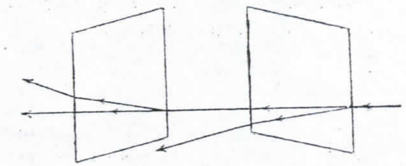


Sl. 49.

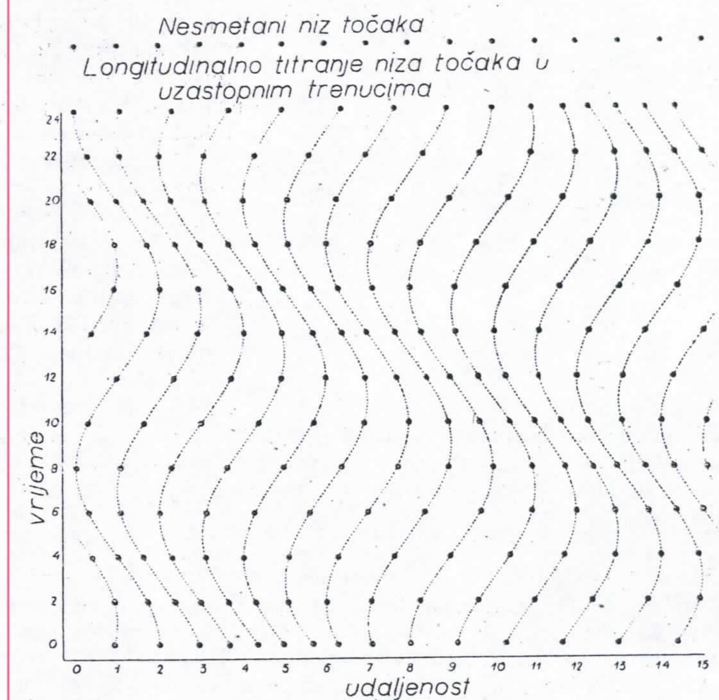
Poznato je, da se zraka svjetlosti, koja dolazi iz uzduha i pada na graničnu plohu gušćega tijela, na pr. stakla ili vode, lomi tako, da u tom tijelu stoji strmije spram granične plohe (sl. 48). Emisiona teorija to tumači time, da u momentu ulaženja gušće tijelo privlači čestice svjetlosti. Te se čestice dakle na graničnoj plohi trenutno ubrzavaju i time otklanjaju prema unutra. Iz toga izlazi, da se u gušćem mediju moraju brže gibati nego u rjeđem. Huygensova konstrukcija prema valnoj teoriji osniva se na obrnutoj pretpostavci (sl. 49). Kad svjetlosni val pogađa graničnu plohu, on u svakoj njezinoj točki izaziva elementarne

valove. Gibaju li se ovi u drugom, gušćem mediju polaganije, bit će u ispravnom smislu otklonjena ravnina, koja dira sve te kugline valove i koja po Huygensu predstavlja lomljeni val.

Huygens je na temelju valne teorije protumačio i *dvolom* u islandskom dvolomcu, što ga je otkrio E r a z m o B a r t o l i n u s (Erasmus Bartholinus 1669), i to uzevši, da se svjetlost u kristalu može širiti dvjema različitim brzinama, tako, da je jedan elementarni val kugla, a drugi sferoid. Otkrio je čudni pojav, da se dvije zrake svjetlosti, koje izlaze iz komada dvolomca, spram nekoga drugog komada dvolomca ponašaju sasvim drukčije nego obična svjetlost. Ako se drugi kristal okreće oko



Sl. 50.

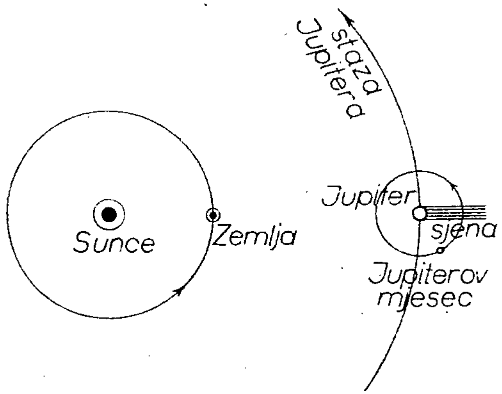


Sl. 51.

zrake, koja izlazi iz prvoga, nastaju iz nje dvije zrake promjenljive jakosti, od kojih jedna ili druga može sasvim iščeznuti (sl. 50). Newton je primijetio (1717), da iz toga treba zaključiti, da zraka svjetlosti po svojoj simetriji ne odgovara prizmi kružnoga presjeka, već kvadratnoga. On je tu činjenicu tumačio na štetu valne teorije, jer se onda u analogiji spram valova zvuka pomišljalo samo na valove zgušćivanja i razrjeđivanja, kod kojih čestice titraju u smjeru širenja vala, »longitudinalno« (sl. 51). Jasno je, da ovakav val mora imati rotacionu simetriju oko smjera širenja.

3. Brzina svjetlosti

Neovisno od prepirke između dviju hipoteza o prirodi svjetlosti provedena su prva mjerenja njezina najvažnijeg svojstva, koje će biti središte naših daljih razmatranja, a to je *brzina svjetlosti*. Da je ta brzina golema, proizlazilo je iz svih iskustava o širenju svjetlosti. Galilei (1607) ju je pokušao mjeriti pomoću signala svjetiljkama, ali bez uspjeha, jer svjetlost preleti zemaljske udaljenosti u izvanredno kratkom vremenu. Mjerenje je stoga uspjelo tek upotrebom golemih udaljenosti između nebeskih tjelesa u svemiru.



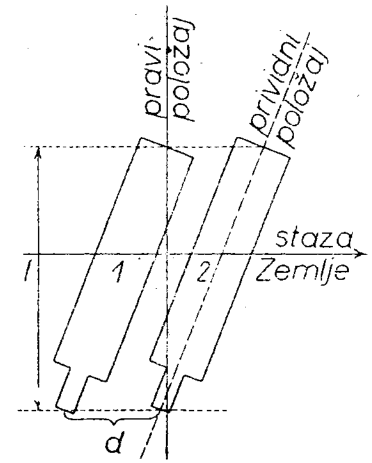
Sl. 52.

Olaf Römer (1676) opazio je, da se pravilne pomrčine Jupiterovih mjeseca pojavljuju prerano ili prekasno, prema tome, da li se Zemlja Jupiteru približava ili se od njega udaljuje (sl. 52). Tumačio je taj pojav razlikom vremena, koje svjetlost treba, da prođe različito dugačke putove, pa je izračunao brzinu svjetlosti. Tu ćemo brzinu svagdje označiti sa c. Njezina je točna vrijednost, kojoj se Römer već jako približio

(32) $$c = 300\,000 \text{ km/sek} = 3.10^{10} \text{ cm/sek}.$$

Drugu posljedicu konačne brzine svjetlosti otkrio je James Bradley (1727). Zvijezde stajačice prividno izvode zajedničko godišnje gibanje, koje je očita slika obilaženja Zemlje oko Sunca. S gledišta emisione teorije taj se učinak može lako shvatiti. Navest ćemo to tumačenje, ali moramo primijetiti, da baš ovaj pojav u valnoj teoriji dovodi do teškoća, o kojima ćemo još mnogo govoriti. Znamo (III, 7), da je gibanje, koje je pravocrtno i jednoliko u jednom sustavu referencije S, također pravocrtno i jednoliko u drugom sustavu S', ako ovaj izvodi gibanje translacije spram S. No veličina i smjer brzine različiti su u oba sustava. Iz toga izlazi, da struja čestica svjetlo-

sti, koja dolazeći s neke zvijezde stajačice pogađa Zemlju u gibanju, prividno dolazi iz drugoga smjera. Zasebno ćemo razmotriti taj otklon ili *aberaciju* za slučaj, da svjetlo dolazi okomito na smjer gibanja Zemlje (sl. 53). Kad svjetlosna čestica pogodi objektiv dalekozora, neka je ovaj u položaju 1. Dok svjetlo prođe duljinu l *dalekozora*, Zemlja se pomakla zajedno s dalekozorom za komad d u položaj 2. Zraka će dakle samo onda pogoditi sredinu okulara, ako ne dolazi iz smjera osi dalekozora, nego iz smjera, koji nešto zaostaje spram gibanja Zemlje. Smjer viziranja nije dakle uperen na pravo mjesto zvijezde, nego na mjesto neba, koje je pomaknuto naprijed. Kut otklona određen je omjerom $d : l$ i očito je neovisan od duljine l dalekozora. Povećamo li tu duljinu, povećat će se u istom omjeru i vrijeme, koje svijetlo treba, da je prođe, a time i pomak d Zemlje. Putovi l i d, koje prolaze svijetlo i Zemlja u jednakim vremenima, moraju se odnositi kao njihove brzine:



Sl. 53.

$$\frac{d}{l} = \frac{v}{c}.$$

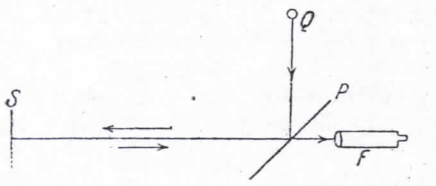
Ovaj se omjer zove *konstanta aberacije*, a označit ćemo ga uvijek sa β:

(33) $$\beta = \frac{v}{c}.$$

Vrijednost je te konstante dakle vrlo malena, jer je brzina Zemlje u njenoj stazi oko Sunca od prilike $v = 30$ km/sek, dok, kako rekosmo, brzina svjetlosti iznosi $c = 300\,000$ km/sek. β je dakle reda veličine 1 : 10000.

Prividna mjesta zvijezda stajačica uvijek su dakle nešto pomaknuta u smjeru momentanoga gibanja Zemlje i stoga opisuju za vrijeme godišnjeg obilaženja Zemlje oko Sunca malen eliptičan lik. Mjerenjem toga lika može se odrediti omjer β, a budući da je brzina v Zemlje u njenoj stazi poznata iz astronomskih podataka, može se iz toga odrediti brzina svjetlosti c. Rezultat se dobro slaže s Römerovim mjerenjem.

Preskačemo sada historijski razvoj i izvještavamo o zemaljskim mjerenjima brzine svjetlosti. Za to načelno ne treba ništa drugo, nego tehnički postupak, kojim bi se pouzdano mjerila izvanredno kratka vremena, koja svjetlost treba, da prođe zemaljske udaljenosti od nekoliko kilometara ili čak metara. F i z e a u (1849) i F o u c a u l t (1865) izveli su takva mjerenja dvjema različitim metodama i potvrdili vrijednost od *c*, dobivenu astronomskim postupcima. Pojedinosti tih metoda ne trebamo ovdje raspraviti, jer se mogu naći u svakom elementarnom udžbeniku fizike. Samo na jedno treba upozoriti: obje metode upotrebljavaju zraku svjetlosti, koju izvor *Q* baca na udaljeno zrcalo *S*, odakle se zraka reflektira i vraća u polaznu točku (sl. 54). Ona dakle prolazi isti put dvaputa, pa se stoga mjeri samo srednja brzina na putu tamo i natrag. To ima važnu posljedicu za naša dalja razmatranja. Pretpostavimo li, da brzina svjetlosti nije jednaka u oba smjera, zato, jer se Zemlja sama giba — o tom će biti govora kasnije (IV, 9) —, ovaj će se utjecaj na putu tamo i natrag sasvim ili gotovo ukinuti. S obzirom na to, da je brzina Zemlje malena spram brzine svjetlosti, ne treba dakle kod tih mjerenja praktički uzeti u obzir gibanje Zemlje.



Sl. 54.

Mjerenja brzine svjetlosti ponovljena su kasnije boljim sredstvima i dostigla su zamjernu točnost; danas ih se može izvesti u sobi umjerene duljine. Rezultat je prije spomenuta vrijednost (32) [10]. Foucaultovom metodom mogla se izmjeriti i brzina svjetlosti u vodi. Nađeno je, da je ta brzina *manja* nego u uzduhu. Time je definitivno riješeno jedno od najvažnijih spornih pitanja između emisione i valne teorije u korist ove potonje, istina u doba, kada je pobjeda valne teorije i onako već odavna bila osigurana.

4. Osnovni pojmovi nauke o valovima; interferencija

Najveći je Newtonov uspjeh u optici rastavljanje bijeloga svijetla prizmom u njegove sastavne dijelove različitih boja i egzaktno istraživanje spektra, koje ga je dovelo do uvjerenja, da su pojedine spektralne boje nedjeljivi sastavni dijelovi svjetlosti. On je osnivač nauke o bojama, koja je po svome fizičkom sadržaju još danas potpuno na snazi, usprkos Goetheovih napadaja. Snaga Newtonovih otkrića zamaglila je pogled kasnijim generacijama. Njegovo je otklanjanje valne teorije ovoj zakrčilo put kroz gotovo 100 godina. Ipak je uvijek bilo pojedinih pristaša te teorije, tako u 18. stoljeću u prvom redu veliki matematičar L e o n h a r d E u l e r.

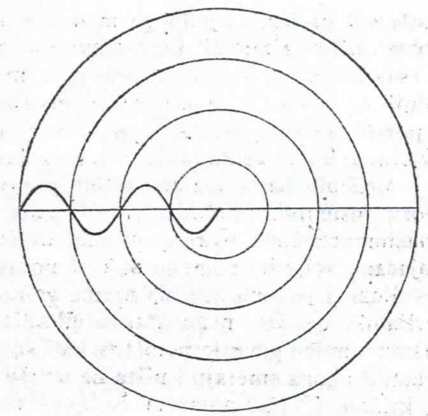
T h o m a s Y o u n g (1802) oživio je svojim radovima valnu teoriju i upotrebio princip *interferencije* za tumačenje šarenih prstena i pruga, koje je već Newton opazio na tankim slojevima providnih tvari. Ovdje ćemo se nešto točnije pozabaviti interferencijom, jer ona ima odlučnu

važnost kod svih finijih optičkih mjerenja, napose kod istraživanja, koja su temelj teorije relativnosti.

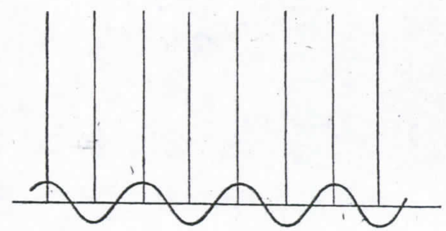
Već smo prije objasnili bit vala: pojedine čestice tijela titraju periodički oko svojih položaja ravnoteže, kod čega je momentani položaj ili momentana faza gibanja susjednih čestica različita i pomiče se konstantnom brzinom. Vrijeme, koje neka čestica treba za jedan titraj tamo i natrag, zove se *trajanje titraja* ili *period* i označuje se sa *T*. *Broj titraja* u jednoj sekundi ili *frekvenciju* označujemo sa ν. Budući da trajanje jednoga titraja pomnoženo brojem titraja u sekundi mora dati baš cijelu sekundu, to mora biti $\nu T = 1$, dakle

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \text{ili} \quad T = \frac{1}{\nu}. \tag{34}$$

Mjesto »broj titraja« kaže se često »boja«, jer svjetlosni val stanovita broja titraja prouzrokuje određen osjet boje u oku. Ne ulazimo u zakučasto pitanje, kako se velika raznolikost psiholoških osjeta boja stvara skupnim djelovanjem jednostavnih periodskih titraja ili »fizičkih boja«. Valovi, koji izlaze iz malena izvora svjetlosti, imaju oblik kugala. To znači, sve čestice na kugli oko izvora nalaze se u istom stanju titranja ili u istoj »fazi« (sl. 55). Lomom ili drugim utjecajem može se dio takva kuglina vala deformirati, tako da su plohe iste faze ili valne plohe kojega drugog oblika. Najjednostavnija valna ploha očito je ravnina, a jasno je, da se dovoljno malen dio bilo kakve valne plohe, pa i kuglina vala, uvijek može približno smatrati ravnim. Razmatramo stoga poglavito širenje ravnih valova (sl. 56). Smjer okomit na valnim ravninama, valna normala, ujedno je smjer širenja. Očito je dovoljno razmatrati stanje titranja uzduž pravca, koji je paralelan s tim smjerom.



Sl. 55.



Sl. 56.

Da li je titranje pojedine čestice paralelno ili okomito na smjeru širenja, ovdje još ostavljamo otvorenim pitanjem. U slikama crtamo uvijek valovite linije i prema tome zovemo mjesta najveće elongacije prema gore ili dolje valnim bregovima i dolinama.

Razmak od jednog valnoga brijega do drugova zove se *duljina vala* i označuje se sa λ. Isto tolik je očito razmak dviju susjednih valnih dolina ili bilo kojih dviju susjednih ravnina iste faze.

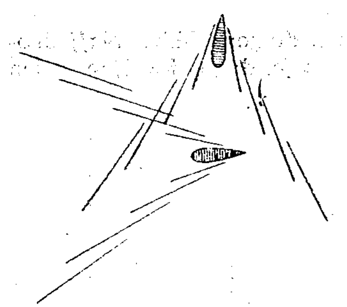
Za vrijeme jednoga titraja tamo i natrag neke određene čestice, s trajanjem T, cijeli se val pomakne naprijed upravo za duljinu vala λ (sl. 47). Kako je za svako gibanje brzina jednaka omjeru prevaljenoga puta i vremena, koje je za to potrebno, valna je brzina c jednaka omjeru valne duljine i trajanja titraja:

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ili} \quad c = \lambda\nu. \tag{35}$$

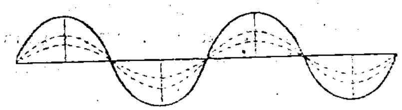
Kada val prelazi iz jednoga medija u drugi, na pr. iz uzduha u staklo, vremenski se ritam titraja naravno prenosi preko te granice, t. j. T (ili ν) ostaje isti. Naprotiv, brzina c se mijenja i stoga prema formuli (35) i duljina vala λ. Sve metode mjerenja duljine vala mogu dakle služiti za uspoređivanje brzine svjetlosti u različitim tvarima i pod različitim uvjetima. Time ćemo se još često koristiti.

Možemo sada razumjeti bit pojavâ interferencije, koji su valnoj teoriji osigurali pobjedu. Interferencija se može opisati nešto paradoksnim riječima ovako: svijetlo dodano svijetlu ne mora nužno dati pojačano svijetlo, nego se može i poništiti.

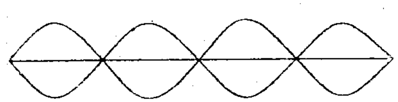
Razlog je tome taj, da prema valnoj teoriji svjetlost nije struja materijalnih čestica, nego stanje gibanja. Dva impulsa gibanja, koja se sastanu, mogu gibanje poništiti, kao što dva čovjeka, koja hoće protivno, jedan drugoga smetaju i ništa ne izvrše. Zamislimo dva niza valova, koja se križaju. Taj se pojav može lijepo motriti, kada se s brijega gleda na jezero, na kojemu se sastaju valovi izazvani dvjema lađama (sl. 57). Oba



Sl. 57.



Sl. 58.



Sl. 59.

se sustava valova prodiru, a ne smetaju se. U području, gdje obadva postoje istodobno, nastaje komplicirano gibanje, ali čim je jedan val prošao kroz drugi, nastavlja se, kao da mu se nije ništa dogodilo. Razmotrimo li gibanje jedne čestice, koja titra, ta će čestica od obih valova

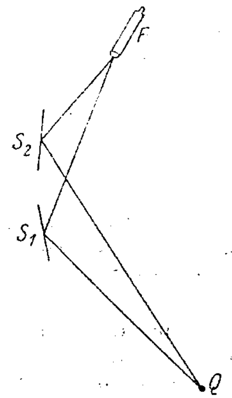
dobiti neovisne impulse gibanja. Stoga je njezina elongacija u svakom trenutku jednaka zbroju elongacija, koje bi imala pod utjecajem svakoga pojedinog vala. Kaže se, da se dva valna gibanja nesmetano superponiraju. Gdje se dakle sastanu valni brijeg s valnim brijegom ili valna dolina s valnom dolinom dvaju jednakih valova, nastat će podvostručenje visine odnosno dubine (sl. 58). Gdje se valni brijeg sastane s valnom dolinom, impulsi se ponište i ne nastaje nikakva elongacija (sl. 59).

Želimo li opažati interferenciju svjetlosti, ne smijemo naprosto uzeti dva izvora svijetla i dati da se prodiru valovi, koji iz njih izlaze. Kod toga ne nastaje vidljiv pojav interferencije, jer prirodni valovi svjetlosti nisu apsolutno pravilni valovi. Poslije niza pravilnih titraja mijenja se najednom stanje titranja na slučajan način, prema slučajnim procesima kod emisije svjetlosti u izvoru. Te slučajne promjene uzrokuju kolebanja pojava interferencije, koja su tako brza, da ih oko ne može slijediti i stoga zapaža samo jednoliko svijetlo.

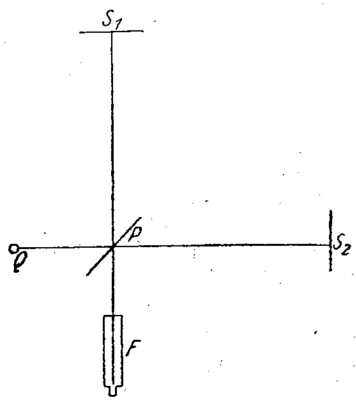
Da se dobiju vidljive interferencije, treba zraku svjetlosti umjetno, zrcaljenjem ili lomom, rastaviti u dvije zrake i kasnije ih opet sastaviti. Nepravilnosti titranja u obim su zrakama sada točno istoga ritma, tako da pojavi interferencije prostorno ne kolebaju, već su stalni. Gdje se valovi u nekom momentu pojačavaju ili poništavaju, tamo to čine uvijek. Dovede li se oko, oboružano lupom ili dalekozorom, na takvo mjesto, vidjet će svijetle i tamne pjege, pruge ili prstene, ako se upotrebljava jednobojno svijetlo, kao što ga na pr. daje Bunsenov plamenik, žuto obojen kuhinjskom soli. Kod običnoga svijetla, koje je sastavljeno od mnogo boja, ne podudaraju se pjege, koje odgovaraju različitim duljinama vala. Na jednom mjestu možda je pojačano crveno svijetlo, a modro poništeno, na drugim mjestima je drukčije, pa tako nastaju pjege i pruge divnih boja. Predaleko bi nas odvelo, da raspravimo te zanimljive pojave.

Na najjednostavnije načine za pokazivanje interferencija ukazao je F r e s n e l (1822), istraživač, koji je svojim radovima dao osnove teorije svjetlosti, kako je neosporno vrijedila do naših dana. Njegovo ćemo ime još često susresti. Ono vrijeme prvih decenija 19. stoljeća moralo je u mnogome sličiti našoj epohi. Kako se danas pronalaskom radioaktivnosti i njoj srodnih procesa zračenja, postavljanjem teorije relativnosti i nauke o kvantima stvara golemo produbljenje i proširenje naše spoznaje o prirodi, koje se motriocu prikazuje kao potpun preokret svih pojmova, tako su prije jednoga stoljeća [11] hiljade pojedinih opažanja, teoretskih pokusa, fizičkih i metafizičkih spekulacija po prvi puta srasle u cjelovite, jedinstvene predodžbe i teorije, koje su, primijenjene, dale pobudu za nevjerojatno mnoštvo novih opažanja i eksperimenata. Onda je nastala L a g r a n g e o v a Analitička mehanika, L a p l a c e o v a Mehanika neba, ta dva djela, koja su Newtonove ideje dovela do završetka. Iz toga su N a v i e r, P o i s s o n, C a u c h y, G r e e n razvili mehaniku tjelesa, koja se daju deformirati, teoriju tekućina i elastičnih tvari, a u drugu ruku razvili su Y o u n g, F r e s n e l, A r a g o, M a l u s, B r e w s t e r u svojim radovima teoriju svjetlosti. Istodobno je počela era elektromagnetskih otkrića, o kojima ćemo govoriti kasnije. U ono su doba fizička istraživanja bila gotovo isključivo u rukama Francuza, Engleza, Talijana. Danas svi kulturni narodi sudjeluju kod toga djela. Spomenimo začetnike velikih revolucionarnih teorija relativnosti i kvanta: E i n s t e i n a i P l a n c k a [12].

Fresnel promatra zraku svjetlosti, koja se reflektira na dva zrcala, nagnuta jedno spram drugoga (sl. 60). Obje reflektirane zrake daju na



Sl. 60



Sl. 61.

mjestu, gdje se sastaju, pruge interferencije, koje se mogu vidjeti povećalom. Sličnih naprava ima velik broj. Ovdje ćemo se osvrnuti samo na jedno područje primjene, koje je važno za naše svrhe, a to su eksperimentalne metode za mjerenje sićušnih promjena brzine svjetlosti. Takvi se aparati zovu *interferometri*. Princip im je taj, da se s brzinom svjetlosti mijenja i duljina vala, pa se stoga interferencije pomaknu. Jedan je takav aparat interferometar M i c h e l s o n a, fizičara sveučilišta u Chicagu. Sastoji se u glavnom (sl. 61) iz staklene ploče P, koja je polupropusno posrebrena, tako da propušta polovicu zrake svjetlosti, koja dolazi od izvora Q, drugu polovicu reflektira. Dobivene dvije zrake reflektiraju se na zrcalima S_1 i S_2 i ponovno dolaze do polupropusne ploče P, koja ih opet dijeli i šalje po jednu zraku u dalekozor za promatranje F. Ako su obje duljine puta PS_1 i PS_2 točno jednake, obje će zrake prispjeti u dalekozor s istom fazom titranja i opet će se sastaviti u prvotnu svjetlost. Produljimo li pomicanjem zrcala S_1 put jedne zrake, ne će se više u oba niza valova kod sastavljanja u F poklapati brijeg s brijegom i dolina s dolinom, nego će nizovi biti pomaknuti i slabit će se uzajamno u većoj ili manjoj mjeri. Pomiče li se zrcalo S_1 polagano, vidi se u dalekozoru F izmjenice svijetlo i tama. Razmak položaja zrcala S_1 za dvije uzastopne tame upravo je jednak duljini vala svjetlosti. Michelson je na taj način izvršio mjerenja duljine vala, koja su točnija od gotovo svih drugih fizičkih mjerenja. To se postizava tako, da se broje izmjene svijetla i tame kod znatnijega pomaka zrcala S_1, koji iznosi mnogo tisuća duljina vala. Pogreška opažanja jedne duljine vala smanjuje se time isto toliko tisuća puta.

Ovdje je mjesto, da damo nekoliko brojčanih podataka. Opisanim mjerenjem nalazi se, da je duljina žutoga svijetla u vakuumu, koje izlazi iz Bunsenova plamena, žuto obojena kuhinjskom soli (natrijskim kloridom), i kojemu su izvor natrijevi atomi, od prilike $\frac{6}{100\,000}$ cm $= 6.10^{-5}$ cm. Sve vidljivo svijetlo nalazi se u malom području valnih duljina od po pr. 4.10^{-5} (ljubičasto) do 8.10^{-5} cm (crveno). Izraženo jezikom akustike, to je jedna oktava, t. j. područje od jednoga vala do vala dvostruke duljine. Iz formule (35) izlazi za broj titraja žutoga natrijevog svijetla golemi iznos od $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^{10}}{6.10^{-5}} = 5.10^{14}$ ili 500 bilijuna titraja u sek. Najbrži titraji zvuka, koji se još čuju, titraju po pr. samo 50000 puta u sekundi.

Metoda multiplikacije pojedine duljine vala, koja se primjenjuje kod interferometričkih mjerenja, daje začudnu točnost optičkih metoda mjerenja. Može se tako na pr. ustanoviti, da se brzina svjetlosti u nekom plinu mijenja kod najsitnijih promjena tlaka ili temperature (na pr. ako se aparat dodirne rukom). Treba za to plin u nekoj cijevi staviti između staklene ploče P i zrcala S_1. Kod najmanjega povećanja tlaka već se vidi promjena interferencije, vidi se, kako se izmjenjuje svijetlo i tama.

Moramo uostalom primijetiti, da se u interferometru obično ne vidi samo svijetlo ili tamno vidno polje, već sustav svijetlih i tamnih prstena. To je zato, što obje zrake nisu točno paralelne, valovi nisu točno ravni. Pojedini dijelovi obih zraka prevaljuju stoga nešto različite putove. Ne ćemo se pozabaviti geometrijskim pojedinostima, nego to spominjemo zato, jer je običaj govoriti o prugama interferencije.

Ponovno ćemo naići na Michelsonov interferometar, kad se bude radilo o pitanju, da li gibanje Zemlje utječe na brzinu svjetlosti.

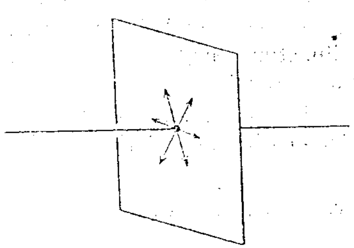
5. Polarizacija i transverzalnost valova svjetlosti

Premda je jedva moguće pojave interferencije drukčije interpretirati nego teorijom valova, ipak su za opće priznanje te teorije postojale dvije teškoće, koje je Newton, kako smo vidjeli, smatrao odlučnima. Prvo je pravocrtno širenje svjetlosti, koje vrijedi u glavnom, t. j. osim sitnih pojava ogiba (difrakcije), a drugo je tumačenje *pojavâ polarizacije*. Prva se točka sama razjasnila točnijim razrađivanjem valne teorije. Pokazalo se, da valovi doduše idu »oko ugla«, ali samo u područjima, koja su reda veličine duljine vala. Ta je duljina vrlo malena, tako da za grubo promatranje nastaje slika oštrih sjena i pravocrtnih zraka. Tek finijim opažanjima mogu se opaziti pruge interferencije duž granice sjene izvedene ogibom svjetlosti. Za razvoj teorije ogiba vrlo su zaslužni F r e s n e l, kasnije K i r c h h o f f (1882) i S o m m e r f e l d (1895).

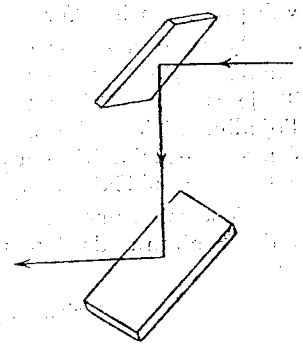
Oni su računski izveli finije pojave ogiba i označili granice, u kojima je dopušteno operirati pojmom *zrake svjetlosti*.

Druga se teškoća ticala pojava polarizacije svjetlosti. Kad se onda govorilo o valovima, uvijek se mislilo na longitudinalne titraje, kako su bili poznati kod zvuka. Zvučni val nastaje ritmičkim zgušćenjima i razređenjima, kod čega pojedina čestica uzduha titra amo tamo u smjeru širenja vala. I transverzalni titraji bili su doduše poznati, na pr. površinski valovi na vodi, ili titraji napete žice (strune), gdje čestice titraju okomito na smjer širenja valova. No tu se ne radi o valovima, koji prolaze *nutrašnjošću* neke tvari, nego dijelom o pojavima na površini (valovi na vodi), a dijelom o gibanjima čitavoga tijela (titraji žice). Onda još nije bilo opažanja ili teorija o širenju valova u elastičnim, čvrstim tijelima. To nam objašnjava neobičnu činjenicu, da je tako dugo trajalo, dok su u optičkim valovima bili prepoznati transverzalni titraji. Desio se čak čudni slučaj, da je razvoj teorije elastičnih osjetu pristupačnih tijela bio potaknut iskustvima i tvorbom pojmova dinamike neprimjetnog, neopipljivog etera.

Već smo prije (IV, 2) objasnili, u čemu je bit polarizacije. Obje zrake, koje izlaze iz islandskog dvolomca, ne ponašaju se kao obično svijetlo, kada prolaze kroz drugi takav kristal. One se ne raspadaju ponovno u dvije jednako jake zrake, već u dvije nejednake, od kojih jedna pod nekih uvjetima može sasvim nestati. Kod običnoga »prirodnog« svijetla različiti su smjerovi unutar valne ravnine ekvivalentni (sl. 62).



Sl. 62.



Sl. 63.

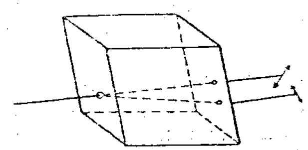
Kod polariziranoga svijetla očito nije više tako. M a l u s (1808) je otkrio, da polarizacija nije osobito svojstvo svijetla, koje je prošlo kroz dvolomac, nego da se može izvesti i običnim zrcaljenjem. Pokazao je, da se svijetlo, koje je reflektirano od nekoga zrcala po stanovitim kutom, različito jako reflektira od drugoga zrcala, ako se to zrcalo okreće oko zrake (sl. 63). Ravnina, koja je okomita na ravnini zrcala i sadrži prvotnu i reflektiranu zraku, zove se ravnina upadanja. Kaže se onda, da je reflektirana zraka polarizirana u ravnini upadanja, čime se ne misli ništa drugo, nego da se ta zraka različito ponaša spram druge refleksije, prema

položaju druge ravnine upadanja spram prve. Ako su te dvije ravnine međusobno okomite, nema refleksije na drugom zrcalu.

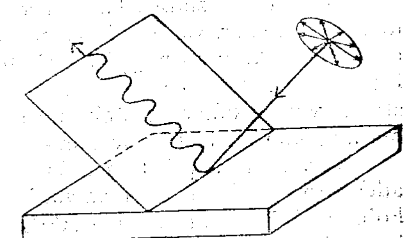
Obje zrake, koje izlaze iz dvolomca, međusobno su okomito polarizirane. Padnu li pod prikladnim kutom na zrcalo, poništit će se jedna zraka kod onoga položaja zrcala, kod kojega se druga zraka reflektira u punom iznosu.

Odlučni eksperimenat izvršili su F r e s n e l i A r a g o (1816) pokušavši dvije takve okomito polarizirane zrake dovesti do interferencije. Nije im uspjelo proizvesti interferencije, pa su F r e s n e l kao i Y o u n g zaključili (1817), da titraji svjetlosti moraju biti transverzalni.

Time se zaista odmah objašnjava čudno ponašanje polariziranoga svijetla. Čestice etera ne titraju u smjeru širenja, već okomito na to, dakle u ravnini vala (sl. 62). Svako gibanje točke u ravnini može se shvatiti kao sastavljeno iz dvaju gibanja u dva međusobno okomita smjera. Vidjeli smo kod razmatranja o kinematici točke, da je gibanje jednoznačno određeno, ako se zna, kako se vremenski mijenjaju pravokutne kordinate. Kristal, koji dvostruko lomi, ima očito to svojstvo,



Sl. 64.



Sl. 65.

da se u njemu titraji dvaju međusobno okomitih smjerova šire različitom brzinom. Oni će se dakle — po Huygensovu principu — kod ulaženja u kristal različito lomiti, i stoga se prostorno odvajaju. Svaka od izlaznih zraka sastoji se onda samo iz titraja, koji se vrše u određenoj ravnini kroz smjer zrake, a ravnine, koje pripadaju tim dvjema zrakama, međusobno su okomite (sl. 64). Dva takva titraja očito ne mogu utjecati jedan na drugi, ne mogu interferirati. Uđe li polarizirana zraka u drugi kristal, proći će samo onda bez slabljenja, ako joj smjer titranja ima upravo ispravni položaj spram kristala, u kojem se upravo taj smjer titraja može širiti. U svim drugim položajima zraka će biti oslabljena, u okomitom (unakrsnom) položaju uopće ne prolazi.

Slično je kod zrcaljenja. Ako je kut prikladan, reflektirat će se od obih titraja, paralelnih i okomitih spram ravnine upadanja, samo jedan, a drugi ulazi u zrcalo i tamo se apsorbira (sl. 65). Da li je reflektirani titraj onaj, koji titra u ravnini upadanja ili onaj, koji titra okomito na nju, to se dakako ne da ustanovti. (U sl. 65 pretpostavljeno je ovo potonje.) To pitanje položaja titranja spram ravnine upadanja ili smjera polarizacije dovelo je do opširnih istraživanja, teorija i rasprava, kako ćemo odmah vidjeti.

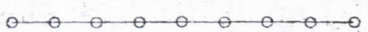
6. Eter kao elastično čvrsto tijelo

Pošto je transverzalnost svjetlosnih valova bila spoznata i dokazana brojnim pokusima, Fresnel je zamislio sliku buduće *dinamičke teorije svjetlosti*, koja bi po uzoru mehanike optičke pojave izvela iz svojstava etera i sila, koje u njemu djeluju. Eter je dakle morao biti neke vrsti elastično čvrsto tijelo. Samo u takvim se tijelima mogu pojavljivati transverzalni valovi. Ali za Fresnelova vremena matematička *teorija elasticiteta čvrstih tjelesa* još nije bila razvijena, a možda je Fresnel i mislio, da ne valja unaprijed poći predaleko u analogiji etera s materijalnim tvarima. Svakako je više volio empirijsko istraživanje širenja svjetlosti i interpretaciju pomoću predodžbe transverzalnih valova. Razjašnjenja o svjetlosnom eteru mogla su se u prvom redu očekivati od optičkih procesa u kristalima. Fresnelovi radovi na tom području idu među najljepše uspjehe fizičke metodike, i u eksperimentalnom i u teoretskom pogledu. No ne smijemo se ovdje gubiti u pojedinostima, nego moramo stalno misliti na problem: kakav je svjetlosni eter?

Fresnelovi rezultati kao da su potvrđivali analogiju svjetlosnih valova s elastičnim valovima. To je bio jak poticaj za razrađivanje teorije elasticiteta, koju su započeli još Navier (1821) i Cauchy (1822), a i Poisson (1828) se njome bavio. Cauchy je dobivene zakone elastičnih valova odmah primijenio na optiku (1829). Pokušat ćemo ocrtati misaoni sadržaj te teorije etera.

Poteškoća je pri tome, da je metoda *diferencijalnih jednadžbi* adekvatno sredstvo za opisivanje promjena u neprekinutim tjelesima, koja se daju deformirati. Budući da tu metodu ne ćemo pretpostaviti kao poznatu, ne preostaje drugo, nego da je na jednostavnu primjeru opišemo i da na koncu dodamo: tako slično, samo nešto kompliciranije, bilo bi u općem slučaju. Matematički neškolovani čitatelj dobit će možda grub pojam o tome. No teško da će dobiti ispravnu predodžbu o snazi i dohvatu fizičkih slika i njima primjerenih matematičkih metoda. Svjesni smo dakle nemogućnosti, da potpuno zadovoljimo nematematičara, ali ipak ne možemo izbjeći pokušaj tumačenja mehanike neprekinutih tvari, jer su sve dalje teorije sagrađene na tim pojmovima; ne samo teorija elastičnog etera, nego i elektrodinamika u svim svojim oblicima, a u prvome redu Einsteinova teorija gravitacije.

Vrlo tanka, napeta žica u neku je ruku jednodimenzionalna, elastična tvorevina. Na njoj ćemo razviti pojmove teorije elasticiteta. Da nadovežemo na običnu mehaniku, koja poznaje samo pojedina, kruta tjelesa, zamislit ćemo, da žica nije neprekinuta, nego sastavljena atomistički. Neka se dakle sastoji iz niza jednakih, malih tjelešaca, poredanih na pravcu u jednakim razmacima (sl. 66). Te čestice neka imaju tromu masu, i svaka neka djeluje na susjedne čestice nekim silama. Sile neka su takve, da se opiru i povećavanju i smanjivanju razmaka. Da dobijemo zornu sliku takvih sila, možemo

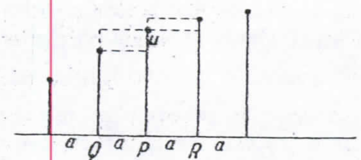


Sl. 66.

zamisliti između čestica mala spiralna pera, koja se opiru i tlačenju i rastezanju. Ovakovu sliku ipak ne smijemo shvatiti doslovce. Sile te vrsti temeljni su fenomen elasticiteta.

Pomakne li se prva čestica uzdužno ili poprečno, odmah ona djeluje na drugu, a ova prenosi djelovanje na susjednu i t. d. Poremećenje ravnoteže prve čestice prolazi dakle čitavim nizom, kao kratak val, i dostigne konačno i zadnju česticu. No taj se proces ne vrši neizmjerno brzo, nego kod svake čestice nastaje malen gubitak vremena, jer ona zbog svoje tromosti ne popušta momentano poticaju. Sila ne izvodi momentani pomak, već ubrzanje, t. j. promjenu brzine u malenu vremenu, a promjena brzine tek s vremenom dovodi do pomaka. Tek kada je došlo do toga pomaka u punom iznosu, dostići će sila, koja djeluje na iduću česticu, svoj puni iznos, i tako se svaki put ponavlja proces s gubitkom vremena, ovisnim o masi čestica. Kada bi sila, koja izlazi iz prve čestice prilikom njena pomaka, izravno djelovala na zadnju česticu niza, djelovanje bi bilo momentano. Tako bi imalo biti u Newtonovoj teoriji gravitacije kod međusobnoga privlačenja nebeskih tjelesa: Sila, kojom djeluje jedno tijelo na drugo, uvijek je uperena na momentano mjesto prvoga i po svojoj veličini određena momentanom udaljenošću. Kaže se, da je Newtonova gravitacija *djelovanje u daljinu*, jer ona djeluje u daljinu bez posredovanja sredstva, koje se nalazi između tjelesa.

U opreci s time, naš je niz ekvidistantnih tjelešaca najjednostavniji model *djelovanja nablizu*. Jer pri djelovanju, koje vrši prva točka na zadnju, posredovale su mase između njih i stoga se ne očituje momentano, nego sa zakašnjenjem. Sila, kojom djeluje čestica na svoje susjede, zamišljena je pri tom, doduše, još kao djelovanje u daljinu, premda samo na malu daljinu. No možemo zamisliti razmake između čestica sve manje i manje, a njihov broj to veći i veći, ali tako, da ukupna masa ostane ista. Lanac čestica s masom prelazi onda u granični pojam *materijalne neprekinute tvorevine*. Sile djeluju između neizmjerno bliskih čestica, i zakoni gibanja primaju oblik diferencijalnih jednadžbi, koje su matematički izraz za fizički pojam djelovanja nablizu.



Sl. 67.

Razmotrit ćemo nešto točnije taj granični proces na zakonima gibanja našeg lanca čestica. Pogledajmo na pr. čisto transverzalne pomake (sl. 67). U teoriji se elasticiteta pretpostavlja, da će česticu P njezina susjeda Q tim jače vući natrag, čim je P jače transverzalno pomaknuta spram Q. Ako je u višak tranverzalnoga pomaka čestice P spram Q, i ako je a prvotni razmak čestica na pravcu, neka je sila, koja vuče natrag, proporcionalna s omjerom $\frac{u}{a} = d$, koji zovemo *deformacijom*. Stavljamo

$$K = p \cdot \frac{u}{a} = pd,$$

gdje je p konstantan broj, koji je očito jednak sili, kad je deformacija $d = 1$. Zovemo p *konstantom elasticiteta*.

Na istu česticu djeluje i od njezine susjede R takva sila $K' = p\frac{u'}{a} = pd'$. No osim u posebnom slučaju, kada je elongacija od P upravo maksimum, bit će čestica R jače pomaknuta nego P, ne će dakle ovu vući natrag, nego će nastojati, da joj poveća pomak. K' će dakle djelovati protiv K. Ukupna sila na česticu P bit će razlika tih sila.

$$K - K' = p\,(d - d').$$

Ta sila određuje gibanje točke P po temeljnom zakonu dinamike, masa puta ubrzanje jednako sila:

$$mb = K - K' = p\,(d - d').$$

Zamislimo sada, da se broj čestica uvećava, a njihove mase u istom omjeru umanjuju, tako da masa po jedinici duljine zadrži istu vrijednost. Ima li n čestica u jedinici duljine, to je $na = 1$, dakle $n = \frac{1}{a}$. Masa po jedinici duljine jest $mn = \frac{m}{a}$. Tu veličinu zovemo (linearnom) *gustoćom mase* i označujemo je sa ρ. Podijelivši gornju jednadžbu sa a, dobivamo

$$\frac{m}{a}\, b = \rho b = \frac{K - K'}{a} = p\,\frac{d - d'}{a},$$

Nailazimo ovdje na izraze sasvim slične onima, što su se javljali kod definicije pojmova brzine i ubrzanja. Kao što je brzina omjer puta x i vremena t, pri čemu za ubrzano gibanje trajanje t moramo zamišljati kao vrlo kratko, tako ovdje imamo deformaciju $d = \frac{u}{a}$, omjer relativnoga pomaka i prvotne udaljenosti, pri čemu tu udaljenost treba zamišljati vrlo malenom. Kao što je ubrzanje prije bilo definirano kao promjena brzine u omjeru spram vremena, $b = \frac{w}{t} = \frac{v - v'}{t}$, imamo ovdje veličinu $f = \frac{d - d'}{a}$, koja na sasvim analogan način mjeri promjenu deformacije od mjesta do mjesta.

Kao što brzina v i ubrzanje b zadržavaju svoj smisao i ostaju konačni kod bilo koga smanjivanja vremenskih odsječaka t, točno tako zadržavaju i veličine d i f smisao i konačnu vrijednost za bilo koje smanjivanje razmaka a. Sve su to tako zvani *diferencijalni kvocijenti*, od kojih su $v = \frac{x}{t}$ i $d = \frac{u}{a}$ prvoga reda, a $b = \frac{v - v'}{t}$ i $f = \frac{d - d'}{a}$ drugoga reda.

Jednadžba gibanja bit će dakle *diferencijalna jednadžba drugoga reda:*

$$\rho b = pf, \tag{36}$$

i to s obzirom i na vremenske i na prostorne promjene procesa. Toga su tipa *svi* zakoni djelovanja nablizu u teoretskoj fizici. Radi li se primjerice o elastičnim tijelima, protegnutim u svim smjerovima, dodat će se sasvim analogni članovi za još dvije prostorne dimenzije. I u teoriji električkih i magnetskih procesa vrijede slični zakoni. Konačno je Einstein i teoriju gravitacije doveo na takav oblik.

Moramo ovdje primijetiti, da se i zakoni djelovanja u daljinu formalno mogu pisati kao formule djelovanja nablizu. Odbacimo li na pr. u našoj formuli (36) član ρb, t. j. pretpostavimo li, da je gustoća mase neizmjerno malena, pomak prve čestice izazvat će u istom trenutku silu na zadnju česticu, jer je nestala tromost posrednih članova. Radi se dakle o širenju sile neizmjernom brzinom, t. j. o pravom djelovanju u daljinu. Ipak se zakon $pf = 0$ pojavljuje u obliku diferencijalne jednadžbe, dakle djelovanja nablizu. Na takve zakone pseudodjelovanja nablizu naići ćemo u teoriji elektriciteta i magnetizma, gdje su ti zakoni utrli put pravim zakonima djelovanja nablizu. Bitan je kod ovih član tromosti, koji uzrokuje konačnu brzinu širenja poremećenjâ ravnoteže, dakle nastajanje valova.

U zakonu (36) pojavljuju se dvije veličine, koje određuju fizički karakter tvari, a to je masa po jedinici volumena ili gustoća ρ i konstanta elasticiteta p. Pišemo li $b = \frac{p}{\rho} f$, vidi se, da uz zadanu deformaciju, dakle uz zadani f, ubrzanje postaje sve veće, što je veći p i što je manji ρ. p je mjera za elastičnu krutost (rigidnost) tvari, ρ za tromost mase. Jasno je, da će povećanje krutosti ubrzati gibanje, dok će ga povećanje tromosti usporiti. Brzina c nekoga vala ovisit će dakle samo o omjeru $\frac{p}{\rho}$, jer što brže val odmiče, to su veća ubrzanja pojedinih čestica tvari. Točni zakon za to naći ćemo ovim razmatranjem. Svaka pojedina čestica opisuje jednostavno periodičko gibanje, kako smo ga prije (II, 11) istražili. Tamo smo pokazali, da je kod toga ubrzanje vezano s elongacijom x po formuli (11)

$$b = (2\pi\nu)^2 x,$$

gdje je ν broj titraja u sekundi. Uvedemo li mjesto toga trajanje titraja po formuli (34) $T = \frac{1}{\nu}$, bit će

$$b = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x.$$

Isto razmatranje, koje smo ovdje proveli za vremenski slijed, može se primijeniti i za prostorni poredaj, pa se moraju dobiti sasvim analogne relacije. Treba naprosto zamijeniti ubrzanje b (drugi, vremenski diferencijalni kvocijent) veličinom f (drugim, prostornim diferencijalnim kvocijentom), a trajanje titraja T (vremenski period) duljinom vala λ (prostornim periodom). Tako se dobiva formula

$$f = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 x.$$

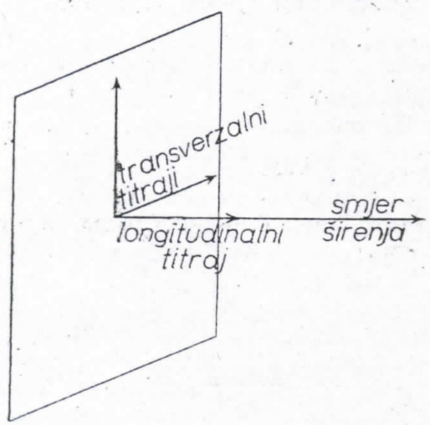
Razdijelimo li izraze za b i f, ukida se faktor $(2\pi)^2 x$ i ostaje

$$\frac{b}{f} = \frac{\lambda^2}{T^2}.$$

No u jednu je ruku po formuli (35) $\frac{\lambda}{T} = c$, a u drugu je ruku po formuli (36) $\frac{b}{f} = \frac{p}{\varrho}$. Izlazi dakle

$$c^2 = \frac{p}{\varrho} \quad \text{ili} \quad c = \sqrt{\frac{p}{\varrho}}. \tag{37}$$

Ta relacija vrijedi za sva tjelesa, bila ona plinovita, tekuća ili čvrsta. Ipak je razlika u ovome. U *tekućinama* i *u plinovima* nema elastična otpora protiv postranih pomaka čestica, nego samo protiv promjene volumena.



Sl. 68.

U takvim se tvarima stoga mogu širiti *samo longitudinalni valovi*, brzinom određenom po formuli (37) na temelju konstante elasticiteta p, koja se odnosi na promjene volumena.

Naprotiv, zbog elastične krutosti spram postranih pomaka u svakom smjeru, mogu se u *čvrstim tijelima* širiti *tri vala* različitim brzinama, *jedan longitudinalni i dva transverzalna*. To je zato, što je za zgušćenja i razređenja longitudinalnih valova odlučna druga konstanta elasticiteta p, nego za postrana izobličenja transverzalnih titraja. U nekristalnim tijelima imaju oba transverzalna vala dva različita, međusobno okomita smjera titranja, ali istu brzinu c_t. Longitudinalni val ima drugu brzinu c_l (sl. 68). Sve se te činjenice potvrđuju pokusima s valovima zvuka u čvrstim tjelesima.

Vraćamo se na polaznu točku ovih razmatranja, na elastičnu teoriju svjetlosti. Ta se teorija sastoji u tome, da se eter kao nosilac titraja svjetlosti identificira s elastičnim čvrstim tijelom. Svjetlosni valovi imali bi onda biti u neku ruku valovi zvuka u tom hipotetskom mediju. Koja svojstva moramo pridati tom elastičnom eteru? Golema brzina širenja c

traži, da bude ili elastična krutost p vrlo velika, ili gustoća mase ϱ vrlo mala, ili da vrijedi jedno i drugo. No kako je brzina svjetlosti različita u različitim tvarima, mora eter unutar materijalnih tjelesa biti zgusnut, ili mu mora biti promjenjen elasticitet, ili jedno i drugo. Vidimo, da tu ima različitih putova. Broj mogućnosti još je povećan time, da se eksperimentima ne da odlučiti, kako smo vidjeli (IV, 5), da li se titraji polariziranog svijetla zbivaju paralelno ili okomito na ravninu polarizacije (ravninu upadanja zrcala, koje polarizira).

Ova je neodređenost problema uzrokom, da historijski nalazimo nepregledan broj različitih teorija elastičnog etera. Imena najvažnijih autora već smo spomenuli. Tu su francuski matematičari P o i s s o n, F r e s n e l, C a u c h y, Englez G r e e n i znatni njemački fizičar F r a n z N e u m a n n, koji je postao učiteljem generacije velikih fizičara: H e l m h o l t z a, K i r c h h o f f a, C l a u s i u s a.

Danas se čudimo, koliko je oštroumnosti i truda žrtvovano za problem, da se optički pojavi u cijelosti shvate kao gibanja elastičnog etera istih svojstava, kao materijalna elastična čvrsta tijela. Čini nam se, da je ovdje pretjerano primijenjeno načelo, koje kaže: objasniti znači svesti nepoznato na poznato. Jer danas znamo, da bit elastičnoga čvrstog tijela i nije nešto jednostavno, a još manje nešto poznato. Fizika etera pokazala se jednostavnijom i providnijom od fizike tvari, i moderno istraživanje nastoji konstituciju tvari svesti kao sekundaran fenomen na svojstva polja sila, koja su preostala od etera starije fizike. No uzrok je toj promjeni programa uvelike neuspjeh nastojanja, da se provede konzekventna teorija elastičnog etera.

Znatan je prigovor toj nauci taj, da bi eter, koji ispunjava svemirski prostor, a toliko je krut, da može biti nosilac brzih svjetlosnih titraja, morao stavljati otpor gibanju nebeskih tjelesa, napose planeta. Astronomija nije nikad otkrila odvajanja od Newtonovih zakona gibanja, koja bi upućivala na takav otpor. S t o k e s (1845) je donekle oslabio taj prigovor primjedbom, da je i pojam čvrstoće tijela nešto sasvim relativno i ovisi o vremenskom toku sila, koje deformiraju. Komad smole — slično se ponaša pečatni vosak i staklo — puca, ako se udari čekićem, i pokazuje oštar, gladak lom. No ako se optereti utegom, ulazit će uteg polagano i postepeno u smolu, kao da je to gusta (viskozna) tekućina. Sile, koje se javljaju kod svjetlosnih titraja, izmjenjuju se strahovito brzo (600 bilijuna puta u sekundi), pa se spram relativno polaganih gibanja planeta odnose još mnogo ekstremnije, nego udarac čekićem prema opterećenju utegom. Eter stoga može za svjetlost biti čvrsto, elastično tijelo, a sasvim lako popuštati gibanjima planeta.

No da smo i pripravni pomiriti se s tim svemirom ispunjenim smolom, ipak se pojavljuju ozbiljne teškoće, koje izviru iz samih zakona širenja svjetlosti. U elastičnim čvrstim tijelima uvijek se uz dva transverzalna vala pojavljuje i longitudinalan. Pratimo li lom vala na granici dvaju medija i pretpostavimo li, da val u prvom mediju titra čisto transverzalno, u drugom mediju nužno nastaje i longitudinalan val. Propali su svi pokušaji, da se ukloni ta posljedica teorije više ili manje samovoljnim promjenama. Čak su postavljene tako čudnovate hipoteze, kao na pr. da eter stavlja kompresiji neizmjerno malen ili neizmjerno velik otpor u poredbi s krutošću spram transverzalnog izobličenja. U prvom bi slučaju longitudinalni valovi putovali neizmjerni polagano, u drugom slučaju neizmjerno brzo, a svakako se ne bi očitovali kao svjetlost. Jedan fizičar, M a c C u l l a g h (1839), pošao je tako daleko, da je konstruirao eter, koji se sasvim odvojio od uzora elastičnoga tijela. Dok takva tijela pružaju otpor svakoj promjeni međusobne udaljenosti svojih čestica, a sama se zakretanja vrše bez otpora, Mac Cullaghov eter trebao je imati baš suprotna svojstva. Ne možemo se ovdje pobliže pozabaviti tom teorijom. Kolikogod je čudnovata, ipak je značajna kao preteča elektromagnetske teorije svjetlosti. Ona daje gotovo iste formule i zaista u priličnom opsegu ispravno prikazuje optičke procese. Slabost je te teorije, da ne otkriva nikakvu vezu između optičkih procesa i drugih fizičkih pojava. Jasno je, da se samovoljnim konstrukcijama mogu naći modeli etera, kojima se može prikazati neko područje pojava. Spoznajnu vrijednost imaju takvi pronalasci tek onda, kada dovode do spajanja dotada nespojenih dijelova fizike. U tome je veliki napredak, koji je postigao Maxwell uklapanjem optike u područje elektromagnetskih pojava.

7. Optika tjelesa u gibanju

Prije nego dalje pratimo taj razvoj, zaustavit ćemo se i zapitati, kako se odnosi nauka o elastičnom eteru spram problema vremena i relativnosti. Dok se dosad nismo obazirali na gibanja tjelesa, koja daju ili primaju svjetlost, ili kojima svjetlost prolazi, sada ćemo svratiti pozornost upravo na ta gibanja.

Prostor mehanike smatra se praznim svagdje, gdje nema materijalnih tjelesa. Prostor optike ispunjen je eterom. Eter nam je pri tom neka vrst tvari, kojoj se pripisuje stanovita gustoća mase i elasticitet. Newtonova mehanika i njezina nauka o prostoru i vremenu može se dakle neposredno prenijeti na svijet ispunjen eterom. Taj se svijet onda ne sastoji više iz pojedinih masa rastavljenih praznim prostorima, nego je sav ispunjen tankom masom etera, u kojoj plivaju grube mase tvari. Eter i tvar međusobno djeluju mehaničkim silama i gibaju se po Newtonovim zakonima. Newtonovo se gledište dakle može misaono primijeniti na optiku. Pitanje je samo, da li se opažanja s time slažu.

No to se ne može lako odlučiti jednoznačnim eksperimentima, jer stanje gibanja etera izvan tvari i unutar nje nije poznato, i slobodno je da se o tome izmišljaju hipoteze. Treba dakle pitanje postaviti ovako: mogu li se naći pretpostavke o međusobnom djelovanju gibanja etera i tvari tako, da je time cjelina optičkih pojava rastumačena?

Sjetimo se nauke o klasičnom principu relativnosti. Po tome postoji apsolutni prostor samo u ograničenom smislu. Svi inercijalni sustavi, koji se jedan spram drugoga gibaju pravocrtno i jednoliko, mogu se

s istim pravom smatrati kao nepomični u prostoru. Prva hipoteza o svjetlosnom eteru, koja se nameće, bit će:

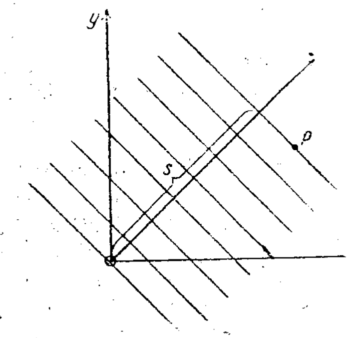
Eter u svemirskom prostoru, daleko izvan materijalnih tjelesa, miruje u inercijalnom sustavu.

Da tome nije tako, dijelovi etera bili bi ubrzani, u njemu bi nastale centrifugalne sile i zbog njih promjene gustoće i elasticiteta, pa bi se moglo očekivati, da će se to očitovati na svjetlosti zvijezda.

Ova hipoteza po svome obliku zadovoljava klasični princip relativnosti. Ubrajamo li eter u materijalna tjelesa, bit će translatorna gibanja tjelesa spram etera isto tako relativna gibanja kao gibanja dvaju tijela međusobno, a neko zajedničko translatorno gibanje etera i svih tjelesa ne bi se moglo dokazati ni mehanički ni optički.

No fizika *samih* materijalnih tjelesa, *bez etera*, ne bi više trebala zadovoljavati princip relativnosti. Zajednička translacija svih tjelesa bez sudjelovanja etera, dakle relativno gibanje spram etera, možda bi se moglo ustanoviti optičkim eksperimentima. Eter bi onda praktički definirao sustav referencije, koji apsolutno miruje. Nama se u prvome redu radi o pitanju, da li optički pojavi, koji se mogu opažati, ovise samo o relativnim gibanjima materijalnih tjelesa, ili se može opaziti gibanje u oceanu etera.

Svjetlosni val karakteriziran je trima obilježjima: 1. brojem titraja ili frekvencijom, 2. brzinom, 3. smjerom širenja. Istražit ćemo sustavno, koji utjecaj na ta tri obilježja vrše gibanja tjelesa, koja davaju ili primaju svijetlo, bila to relativna gibanja jednoga tijela spram drugoga ili spram posrednoga medija, t. j. etera u slobodnom svemirskom prostoru ili koje providne tvari.



Sl. 69.

Evo metode, koju ćemo primijeniti. Promatramo niz valova, koji polazi u momentu $t = 0$ od ishodišta O u nekom smjeru, i brojimo pojedine valove, koji do vremena t prođu nekom točkom P. Taj je broj očito sasvim neovisan od toga, u kojem sustavu referencije mjerimo koordinate točke P, bio taj sustav nepomičan ili u gibanju. Određujemo taj broj ovako: prvi val, koji polazi od ishodišta u momentu $t = 0$, mora proći stanovitu dužinu s (sl. 69), dok stigne točku P te za to treba vrijeme $\frac{s}{c}$. Od toga momenta brojimo valove, koji prolaze točkom P, do momenta t, dakle u trajanju $t - \frac{s}{c}$. Svijetlo izvodi u sekundi ν titraja, a svakom valu, koji prođe, odgovara baš jedan titraj, tako da u 1 sekundi prođe točkom P ν valova, u $t - \frac{s}{c}$ sekunda dakle $\nu\left(t - \frac{s}{c}\right)$ valova. Broj valova $\nu\left(t - \frac{s}{c}\right)$ ovisi stoga samo o tome, kako točke O i P leže jedna spram druge i spram niza valova i kolik je vremenski razmak t između polaska prvog vala u O i dolaska zadnjega u P. Taj broj nema veze sa sustavom referencije. On je *invarijanta* u onom smislu, koji smo toj riječi prije dali.

To se najlakše shvaća, upotrebi li se način izražavanja Minkovskoga. Po tome je polazak prvoga vala u trenutku $t = 0$ od ishodišta jedan događaj, jedna svjetska točka, dolazak zadnjega vala u trenutku t u točki P drugi događaj, druga svjetska točka. Svjetske točke postoje bez obzira na određene koordinatne sustave, a budući da je broj valova $\nu(t - \frac{s}{c})$ određen samo tim dvjema svjetskim točkama, on je neovisan od sustava referencije, dakle invarijantan.

Zornim razmatranjem ili primjenom Galileijevih transformacija izlaze iz toga lako svi stavci o ponašanju triju obilježja vala, frekvencije, smjera i brzine, kod promjene sustava referencije. Mi ćemo te stavke redom izvesti i usporediti ih s iskustvom.

8. Dopplerov učinak

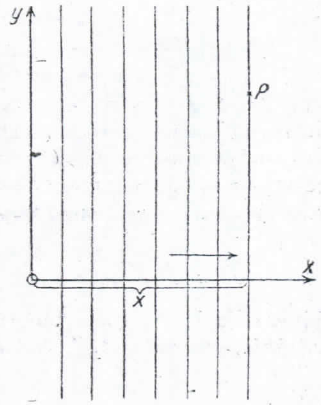
Da opažana *frekvencija* vala ovisi o gibanju izvora svjetlosti i opažača spram posrednoga medija, otkrio je Christian Doppler (1842). Taj se pojav može lako opaziti kod valova zvuka. Pištaljka lokomotive ima prividno viši ton, kada se približava opažaču, a u trenutku prolaženja lokomotive ton se snižava. Slično je, giba li se opažač zvuku u susret. On tada prima valove u bržem slijedu. Isto se mora desiti i kod svjetlosti. Frekvencija svijetla određuje njegovu boju. Bržim titrajima odgovara ljubičasti kraj spektra, polaganijim crveni kraj. Kod približavanja izvora svjetlosti i promatrača bit će dakle boja pomaknuta prema ljubičastom, kod udaljivanja prema crvenom. Taj je pojav zaista opažan. Plinovi, koji svijetle, ne daju svjetlo svih mogućih titraja, nego stanovit broj odijeljenih frekvencija. Prizma ili spektralni aparat, koji radi interferencijom, daje od toga svijetla spektar, koji ne pokazuje kontinuiranu prugu boja kao duga, već pojedine oštre šarene linije. Frekvencija ovih spektralnih linija karakteristična je za kemijske elemente, koji svijetle u plamenu (spektralna analiza, Bunsen i Kirchhoff 1859). I zvijezde imaju takve linijske spektre, a linije im se većinom slažu s linijama zemaljskih elemenata. Iz toga se zaključuje, da su tvari u najudaljenijim dijelovima svemira sastavljene iz istih temeljnih sastojina. No linije zvijezda ne slažu se točno s pripadnim zemaljskim linijama, nego pokazuju male pomake, u jednoj polovici godine na jednu stranu, u drugoj polovici na drugu. Za vrijeme jedne polovice godine Zemlja se približava nekoj zvijezdi stajačici, frekvencija svjetlosnih valova, koji dolaze od te zvijezde, povećava se, i spektralne linije su pomaknute prema strani brzih titraja (prema ljubičastom kraju spektra), dok se u drugoj polovici godine Zemlja udaljuje od zvijezde, i linije su pomaknute prema drugom kraju spektra (crvenom).

To čudesno preslikavanje Zemljina gibanja u spektru zvijezda ne pojavljuje se, istina, sasvim čisto, jer je jasno, da će se superponirati

Dopplerov učinak kod emisije svijetla iz izvora, koji se giba. Ako se zvijezde stajačice ne miruju u eteru, i njihovo se gibanje mora opaziti kao pomak spektralnih linija. Taj se pomak dodaje pomaku uzrokovanom gibanjem Zemlje, ali ne pokazuje godišnju izmjenu, pa se stoga može izlučiti. Astronomski je taj pojav još važniji, jer nam daje podatke o brzinama i najdaljih zvijezda, ukoliko se pri tome približavaju ili udaljuju od Zemlje. Nije naša zadaća, da se pobliže pozabavimo tim razmatranjima.

Nas u prvome redu zanima ovo pitanje: šta se dešava, kad se promatrač i izvor svijetla gibaju u istom smjeru i istom brzinom? Da li onda nestaje Dopplerov učinak, da li on ovisi samo o relativnom gibanju materijalnih tjelesa, ili on ne iščezava i time odaje gibanje tjelesa kroz eter? U prvom bi slučaju vrijedio princip relativnosti za optičke procese između materijalnih tjelesa.

Teorija etera na ovo pitanje odgovara ovako: Dopplerov učinak ne ovisi samo o relativnom gibanju izvora svijetla i promatrača, nego nešto i o njihovim gibanjima spram etera. Taj je utjecaj tako malen, da se ne očituje u opažanjima, a strogo je jednak nuli u slučaju zajedničke translacije izvora svijetla i promatrača.



Sl. 70.

Ovo potonje je zorno tako jasno, da je to jedva trebalo istaknuti. Treba samo uočiti, da valovi prolaze u istom ritmu dvjema točkama, koje relativno jedna spram druge miruju, bez obzira na to, da li su te točke nepomične u eteru, ili se zajedno gibaju. Ipak princip relativnosti *ne vrijedi strogo* za tijelo, koje daje svjetlo i tijelo, koje ga prima, već vrijedi samo približno. To ćemo dokazati.

U tu svrhu služimo se prije dokazanim stavkom o invarijanciji broja titraja. Od ishodišta sustava, koji miruje u eteru, polazi niz valova u smjeru x. Brojimo valove, koji do momenta t prođu preko točke P (sl. 70). Put, koji valovi pri tome moraju prevaliti, jednak je x-koordinati točke P. Treba dakle staviti $s = x$, a broj valova iznosi $\nu(t - \frac{x}{c})$. Razmotrimo sada sustav S', koji se giba u smjeru x brzinom v. U njemu neka promatrač miruje na nekom mjestu s koordinatom x'. U momentu $t = 0$ neka se S i S' poklapaju, a u momentu t neka je promatrač baš dostigao točku P. Onda je isti broj valova u sustavu S' jednak $\nu'(t - \frac{x'}{c'})$, gdje su ν' i c, frekvencija i brzina, mjerene od promatrača, koji se giba. Vrijedi dakle

$$\nu(t - \frac{x}{c}) = \nu'(t - \frac{x'}{c}), \qquad (38)$$

pri čemu su koordinate vezane Galileijevom transformacijom (29) (III, 7)

$$x' = x - vt \quad \text{ili} \quad x = x' + vt.$$

Uvrstimo li to, izlazi

$$\nu\left(t - \frac{x' + vt}{c}\right) = \nu'\left(t - \frac{x'}{c'}\right), \tag{39}$$

a to naravno mora vrijediti za sve vrijednosti od x' i t. Odaberemo li napose $t = 1$, $x' = 0$, dobijemo

$$\nu\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu'. \tag{40}$$

To je traženi zakon. Njime se izriče, da promatrač, koji se giba u istom smjeru kao valovi svjetlosti, mjeri frekvenciju ν', smanjenu u omjeru $(1 - \frac{v}{c}) : 1$.

Promatrajmo sada obrnuto izvor svijetla, koji titra frekvencijom ν_0, a giba se u smjeru osi x brzinom v_0. Promatrač, nepomičan u eteru, neka izmjeri frekvenciju ν. Ovaj se slučaj može odmah svesti na pređašnji, jer je za promatranje svejedno, da li se radi o izvoru svijetla ili o promatraču, glavno je, kojim ritmom valovi pogađaju neku točku. Sada je pokretna točka izvor svijetla. Izlazi dakle formula za taj slučaj iz prijašnje, ako v nadomjestimo sa v_0, a ν' sa ν_0:

$$\nu\left(1 - \frac{v_0}{c}\right) = \nu_0.$$

No ovdje je ν_0 zadan kao frekvencija izvora svijetla, a ν je tražen kao opažana frekvencija. Treba dakle jednadžbu riješiti po ν, pa izlazi

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_0}{c}}. \tag{41}$$

Nazivnik je manji od 1, opažana frekvencija povećana je dakle u omjeru $1 : \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)$.

Vidi se odmah, da nije svejedno, da li se promatrač giba u jednom smjeru ili izvor svijetla u protivnom smjeru istom brzinom. Stavimo li u formuli (41) $v_0 = -v$, dobijemo

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

a to se razlikuje od (40). Razlika je, istina, u svim praktičnim slučajevima vrlo malena. Prije smo vidjeli (IV, 3), da je omjer brzine Zemlje u njezinoj stazi oko Sunca prema brzini svjetlosti $\beta = \frac{v}{c} = 1 : 10000$, a slično malene vrijednosti veličine β vrijede za sva kozmička gibanja.

U tom je slučaju vrlo približno

$$\frac{1}{1 + \beta} = 1 - \beta,$$

jer ako se $\beta^2 = \frac{1}{100\,000\,000} = 10^{-8}$ zanemari spram 1, vrijedi $(1 + \beta)(1 - \beta) = 1 - \beta^2 = 1$.

Zanemarivanje kvadrata od $\beta = \frac{v}{c}$ imat će za nas veliku važnost. Taj je postupak gotovo uvijek dopustiv, jer su tako sićušne veličine kao $\beta^2 = 10^{-8}$ samo rijetko kada pristupačne opažanjima. Uopće se pojavi u optici (i u elektrodinamici) tjelesa u gibanju klasificiraju po tome, da li su reda veličine β ili β^2, pa prve nazivamo veličinama 1. reda, a druge veličinama 2. reda s obzirom na β. U tom smislu možemo reći: Dopplerov učinak ovisi samo o relativnom gibanju izvora svjetlosti i promatrača, ako se zanemare veličine 2. reda.

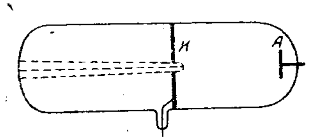
Vidi se to i onda, kada pretpostavljamo istodobno gibanje izvora svjetlosti (brzina v_0) i promatrača (brzina v). Opažana frekvencija ν' očito se dobije, ako se ν iz (41) uvrsti u (40):

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu_0 \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}}$$

Imaju li izvor svjetlosti i promatrač istu brzinu, $v_0 = v$, razlomak se krati, pa izlazi $\nu' = \nu_0$. Promatrač dakle ne opaža ništa od zajedničkog gibanja s izvorom svjetlosti spram etera. No čim su v i v_0 različiti, nastaje Dopplerov učinak, koji po svojoj veličini ne ovisi samo o diferenciji brzina $v - v_0$. Time bi se dakle moglo opaziti gibanje spram etera, da razlika nije 2. reda, dakle mnogo premalena, a da bi se mogla opažati.

Kako vidimo, Dopplerov učinak nije praktički prikladno sredstvo, da se konstatiraju gibanja spram etera u svemirskom prostoru.

Dodat ćemo još, da je uspjelo otkriti Dopplerov učinak i pomoću zemaljskih izvora svjetlosti. Ti se izvori moraju gibati vrlo brzo, da omjer $\beta = \frac{v}{c}$ dobije znatniju vrijednost. J. Stark (1906) upotrebio je za to t. zv. *kanalne zrake*. U evakuiranoj cijevi, ispunjenoj vrlo razrijeđenim vodikom, nalaze se dvije elektrode, od kojih je jedna, K, probušena. Učini li se ova negativnim polom (katodom) električkog izbijanja (sl. 71), nastaju u jednu ruku poznate katodne zrake, a osim toga prodire, kako je Goldstein (1886) otkrio, kroz rupu katode crvenkast sjaj, koji potječe od pozitivno nabijenih vodikovih atoma ili molekula u brzom gibanju. Brzina tih kanalnih zraka ima red veličine $v = 10^8$ cm u sek.



Sl. 71.

β dakle ima veličnu $\beta = \frac{10^8}{3 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{300}$, koja je znatna, usporedi li se s astronomskm vrijednostima.

Stark je istražio spektar kanalnih zraka i našao, da svijetle linije vodika pokazuju pomak, koji treba očekivati zbog Dopplerova učinka. Taj je pojav dobio veliku važnost za atomistiku, ali to ne ulazi u našu temu.

Na kraju moramo još spomenuti, da su B e l o p o l s k i (1895) i G a l i c i n (1907) dokazali neku vrst Dopplerova učinka pomoću zemaljskih izvora svjetlosti i pokretnih zrcala.

9. Konvekcija svjetlosti s materijom

Istražit ćemo sada drugo obilježje svjetlosnog vala, njegovu *brzinu*. Po teoriji etera brzina je svjetlosti veličina određena gustoćom mase i elasticitetom etera. U eteru svemirskoga prostora ima dakle čvrstu vrijednost, u svakom materijalnom tijelu neku drugu vrijednost, koja ovisi o tome, kako tvar utječe na eter i kako ga kod svoga gibanja nosi sa sobom.

Pitamo li najprije za brzinu svjetlosti u svemirskom prostoru, moramo zaključiti, da će promatrač, koji se giba spram etera, izmjeriti drugu brzinu, nego nepomični promatrač, jer tu očito vrijede elementarni zakoni relativnoga gibanja. Ako se promatrač giba u istom smjeru kao svijetlo, pokazat će se, da je brzina svijetla umanjena za brzinu v promatrača. Mogli bismo čak zamisliti bića, koja bi prestigla svijetlo. Isto daju i prije izvedene formule, koje izražavaju opće relacije između svojstava svjetlosti, kako ih mogu ustanoviti dva promatrača s relativnom translacijom. Uvrsti li se u formulu (39) $t = 0$, $x' = 1$, izlazi $\frac{\nu}{c} = \frac{\nu'}{c'}$ i ako se ovamo uvrsti izraz za ν' iz (40):

$$\frac{\nu}{c} = \frac{\nu}{c'}\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

ili

(42) $$c' = c\left(1 - \frac{v}{c}\right) = c - v.$$

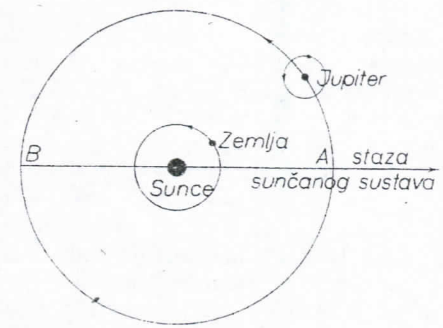
To znači, da se brzina svjetlosti u pokretnom sustavu određuje po zakonima relativnoga gibanja.

Može se to shvatiti i tako, da oko promatrača, koji se giba kroz eter, struji *eterski vjetar*, koji odnosi valove svjetlosti, kao što uzduh struji preko brzog automobila i nosi zvuk sa sobom.

Time je dano sredstvo, da se ustanovi gibanje Zemlje ili Sunčanog sustava spram etera. Dvije su bitno različite metode za mjerenje brzine svjetlosti, astronomska i terestrička metoda. Prvi, stari postupak Römerov služi se pomrčinama Jupiterovih mjeseca. Mjeri se dakle brzina

svijetla, koje od Jupitera juri k Zemlji. Kod druge metode izvor svjetlosti i promatrač sudjeluju kod gibanja Zemlje. Da li obje metode daju točno isti rezultat, ili ima odvajanja, koja odaju gibanje spram etera?

M a x w e l l je upozorio (1879), da bi se opažanjem Jupiterovih mjeseca moralo dati ustanoviti gibanje cijeloga Sunčanog sustava spram etera. Zamislimo planet Jupiter u njegovoj stazi u točki A (sl. 72), koja je najbliža stazi Sunca u smjeru gbanja Sunčanog sustava (u slici se pretpostavlja, da Jupiterova staza siječe stazu Sunčanog sustava u točki A). Za vrijeme jedne godine Jupiter se samo malo udaljuje od točke A, jer je njegovo ophodno vrijeme otprilike 12 godina. U toj godini Zemija prođe jedamput svojom stazom, pa se opažanjem pomrčinâ može naći vrijeme, koje svijetlo treba, da prijeđe promjer Zemljine staze. Budući da se cijeli Sunčani sustav giba u smjeru od Sunca prema A, to svijetlo od Jupitera prema Zemlji ide tom gibanju u susret, njegova se brzina dakle čini većom. Poslije 6 godina, kada Jupiter stoji u protivnoj točki B svoje staze, svijetlo putuje u istom smjeru kao Sunčani sustav, trebat će dakle dulje vrijeme, da prijeđe promjer Zemljine staze, brzina mu je manja.



Sl. 72.

Kada se Jupiter nalazi kod točke A, pomrčine njegovih satelita moraju kroz pola zemaljske godine zakasniti za $t_1 = \frac{l}{c+v}$, gdje je l promjer zemaljske staze. Kada je Jupiter kod točke B, zakašnjenje iznosi $t_2 = \frac{l}{c-v}$. Da Sunčani sustav miruje u eteru, oba bi zakašnjenja bila jednaka, naime $t_0 = \frac{l}{c}$. Njihova stvarna razlika

$$t_2 - t_1 = l\left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v}\right) = \frac{2lv}{c^2 - v^2} = \frac{2lv}{c^2(1-\beta^2)},$$

koju možemo, zanemarivši β^2, pisati

$$t_2 - t_1 = \frac{2lv}{c^2} = 2t_0\beta,$$

dopušta određivanje veličine β i time brzine $v = \beta c$ Sunčanoga sustava spram etera. Svjetlost treba od Sunca do Zemlje otprilike 8 minuta, dakle je $t_0 = 16$ minuta ili okruglo $t_0 = 1000$ sek. Vremenska razlika $t_2 - t_1 = 1$ sek značila bi $\beta = \frac{1}{2000}$ ili $v = \beta c = \frac{300000}{2000} = 150$ km/sek.

Relativne brzine zvijezda stajačica prema Sunčanom sustavu, koje se daju zaključiti iz Dopplerova efekta, ponajviše su reda veličine 20 km/sek. Ima ipak kod nekih skupina zvijezda i spiralnih maglica brzinâ do 300 km/sek[1]). Točnost astronomskih određivanja vremena nije dosad bila dovoljna, da se ustanovi zakašnjenje Jupiterova trabanta za 1 sek ili manje kroz pola godine. Nije ipak nemoguće, da će se usavršenjem umijeća opažanja to jednom moći postići.

I promatrač na Suncu, koji poznaje vrijednost brzine svjetlosti u nepomičnom eteru, mogao bi pomoću pomrčina Jupiterovih trabanata ustanoviti gibanje Sunčanoga sustava. Morao bi za to mjeriti zakašnjenja pomrčina kroz polovicu ophoda. I za to vrijedi formula $t_2 - t_1 = 2t_0\beta$, samo sada t_0 znači vrijeme, koje treba svjetlost, da prijeđe polumjer Jupiterove staze. Ta je vrijednost t_0 veća (oko 2.5 puta) od prije ustanovljene vrijednosti od 16 minuta za Zemljinu stazu, pa se u tom omjeru povećava i zakašnjenje $t_2 - t_1$. No zato je vrijeme Jupiterova ophoda, za koje se pomrčine moraju stalno pratiti, mnogo dulje (oko 12 puta) od zemaljske godine, tako da ta metoda, koju bi mogao primijeniti i promatrač na Zemlji, nema prednosti.

Svakako je činjenica, da danas postignutom točnošću od nekoliko sekunda nije pronađeno zakašnjenje, i da je proveden dokaz, da brzina Sunčanog sustava spram etera nije znatno veća od najvećih poznatih relativnih brzina zvijezda međusobno.

Prelazimo sada na terestričke metode mjerenja brzine svjetlosti. Lako se uviđa, zašto te metode ne dopuštaju zaključivanje na gibanje Zemlje kroz eter. Već smo prije za to naveli razlog, kada su te metode bile prvi puta spomenute (IV, 3). Svijetlo kod tih metoda prevaljuje isti put tamo i natrag. Mjeri se samo srednja brzina, a ta se razlikuje od brzine svjetlosti u eteru samo za veličinu 2. reda s obzirom na β i stoga izmiče opažanju. Ako je naime l duljina puta, onda je vrijeme, koje svijetlo treba u smjeru gibanja Zemlje, jednako $\frac{l}{c-v}$, a vrijeme za povratak je $\frac{l}{c+v}$. Čitavo vrijeme dakle iznosi

$$l\left(\frac{1}{c+v}+\frac{1}{c-v}\right)=\frac{2\,lc}{(c+v)(c-v)}=\frac{2\,lc}{c^2-v^2}.$$

Srednja brzina jednaka je $2l$ razdijeljeno tim vremenom, dakle

$$\frac{c^2-v^2}{c}=c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Ona se dakle razlikuje od c samo za veličine 2. reda.

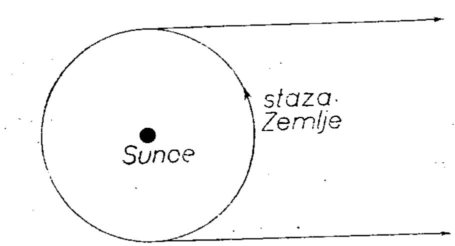
Osim direktnoga mjerenja brzine svjetlosti ima još bezbroj drugih eksperimenata, kod kojih ta brzina ulazi u račun. Svi pojavi interferencije i ogiba temelje se na tome, da svjetlosni valovi različitim putovima

[1]) Danas su poznate maglice s mnogo većim brzinama. Vidi potanje u dodatku, točka 2. (Op. prev.).

dođu na isto mjesto i tamo se superponiraju. Lom na granici dvaju tijela nastaje time, da je brzina svjetlosti u tim tjelesima različita, pa stoga ta brzina ulazi u djelovanje svih optičkih aparata, koji sadržavaju leće, prizme i slično. Zar se ne bi mogla izmisliti aparatura, pomoću koje bi se očitovalo gibanje Zemlje i njime proizvedeni »eterski vjetar«?

Vrlo je mnogo pokusa izmišljeno i izvedeno, da se otkrije to gibanje. Opće je iskustvo, da se kod eksperimenata s terestričkim izvorima svijetla nikad ne opaža ni najmanji utjecaj eterskoga vjetra. Bilo je i posebnih pokusa, koji to dokazuju. Istina, do novijega vremena radilo se o eksperimentalnim uređajima, koji su dopuštali samo mjerenje veličina 1. reda s obzirom na β. Da pri tom rezultat uvijek mora biti negativan, lako izlazi iz toga, što se tu nikad ne mjeri stvarno trajanje gibanja svijetla od jednog mjesta do drugoga, nego samo razlike takvih vremena za isti put, ili njihove sume za put tamo i natrag. Naveli smo razloge, zašto se kod toga uvijek ukidaju veličine 1. reda.

Mogao bi se ipak očekivati pozitivan rezultat, kada se ne bi uzeo terestrički izvor svijetla, već astronomski. Uperi li se dalekozor na zvijezdu, prema kojoj je usmjerena momentana brzina v gibanja Zemlje (sl. 73), brzina svjetlosti u lećama dalekozora relativno spram supstancije stakla bit će za v veća, nego kad bi Zemlja mirovala, a ako se ista zvijezda motri kroz dalekozor poslije pola godine, brzina svjetlosti u lećama bit će za v manja. Kako je jačina loma u lećama određena brzinom svjetlosti, moglo bi se očekivati, da će žarište leće u ta dva slučaja imati različit položaj. To bi bio efekt 1. reda, jer bi razlika brzine svjetlosti u ta dva slučaja bila $2v$, a omjer spram brzine u nepomičnom eteru $\frac{2v}{c}=2\beta$. *Arago* je stvarno proveo taj pokus, ali nije našao nikakve razlike u položaju žarišta. Kako se to može objasniti?



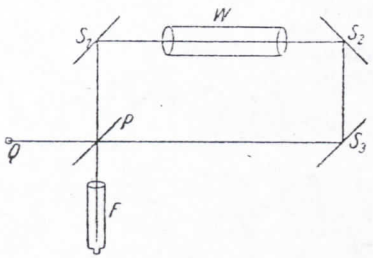
Sl. 73.

Očito smo pretpostavili, da je brzina svjetlosti u tijelu, koje se giba kroz eter u susret zraci brzinom v, upravo za taj iznos veća, nego da tijelo miruje u eteru. Drugim riječima: pretpostavili smo, da materijalno tijelo prolazi kroz eter, a da ga ni najmanje ne nosi sa sobom, kao mreža, koju ribarska lađa vuče kroz morsku vodu.

Rezultat pokusa nas uči, da to očito ne stoji. Eter mora naprotiv sudjelovati kod gibanja tvari. Pitanje je samo, koliko. *Fresnel* je ustanovio, da za objašnjenje Aragova opažanja i svih drugih efekata 1. reda dostaje, da tvar nosi eter samo *djelomice* sa sobom. Ta je teorija bila eksperimentalno izvrsno potvrđena, i mi ćemo je odmah točnije pretresti.

Radikalnije gledište, da eter unutar tvari potpuno **sudjeluje** u njezinu gibanju, zastupao je kasnije u prvome redu **Stokes (1845)**. On je pretpostavio, da Zemlja potpuno nosi sa sobom eter u svojoj unutrašnjosti, i da se to gibanje etera prema vani pomalo smanjuje, do mirovanja svemirskog etera. Jasno je, da onda svi svjetlosni pojavi na Zemlji teku isto tako, kao da Zemlja miruje. Da svjetlo, koje dolazi od zvijezda, u prelaznom sloju između svemirskoga etera i pokretnoga etera Zemlje ne promijeni brzinu ili smjer, moraju se stvarati posebne hipoteze o gibanjima etera. Stokes je našao takvu hipotezu, koja je zadovoljavala sve optičke uvjete. No kasnije je dokazano, da nije u skladu sa zakonima mehanike. Brojni pokušaji spašavanja Stokesove teorije nisu doveli do cilja, i ona bi propala na nutarnjim teškoćama, da i nije Fresnelova teorija bila potvrđena Fizeauovim pokusom (vidi nešto dalje).

Fresnelova misao djelomične konvekcije ne može se lako izvesti iz Aragova pokusa, jer je lom u lećama složen proces, koji se ne odnosi samo na brzinu, nego i na smjer valova. No ima sasvim ékvivalentan pokus, koji je kasnije izveo **Hoek** (1868), i koji je mnogo providniji. U načelu se radi o interferometarskom uređaju (sl. 74). Iz izvora svjetla Q pada svijetlo na polupropusno posrebrenu staklenu ploču P, nagnutu za 45° prema smjeru zrake. Na toj se ploči zraka dijeli. Reflektirana zraka (zraka 1) redom pogađa zrcala S_1, S_2, S_3, koja sa P tvore pravokutnk, pa se kod povratka u P dijelom reflektira u dalekozor za opažanje F. Prolazna zraka (zraka 2) prelazi isti put u obrnutom smislu i u vidnom polju s prvom zrakom stvara interferencije. Između S_1 i S_2 uklapa se providno tijelo, recimo vodom napunjena cijev W, a cijeli se aparat montira tako, da se smjerovi od S_1 i S_2 mogu izmjenice postaviti paralelno ili suprotno gibanju Zemlje oko Sunca. Brzina svjetlosti u nepomičnoj vodi neka je c_1. Ta je brzina nešto manja od brzine u vakuumu, a omjer $\frac{c}{c_1}$ zove se *indeks loma*. Brzina u uzduhu samo je neznatno različita od c, indeks loma uzduha gotovo je točno jednak 1. Zemlja u svom gibanju nosi vodu sa sobom. Da eter ne sudjeluje na tom gibanju, brzina svjetlosti u vodi relativno spram svemirskog etera bila bi nepromijenjeno jednaka c_1. Za zraku, koja putuje u smjeru gibanja Zemlje, bila bi dakle brzina relativno spram Zemlje jednaka $c_1 - v$. Da eter nosi vodu potpuno sa sobom, bila bi brzina relativno spram etera $c_1 + v$, relativno spram Zemlje c_1. Ne ćemo unaprijed pretpostaviti ni jedno ni drugo, nego ćemo iznos konvekcije ostaviti neodređen. Neka je brzina svjetlosti u vodi relativno spram svemirskog etera nešto veća od c_1, recimo $c_1 + \varphi - v$. Nepoznati *broj konvekcije* φ



Sl. 74.

odredit ćemo iz pokusa. Ako je nula, nema konvekcije, ako je jednak v, konvekcija je potpuna. Prava vrijednost mora biti u tim granicama. Jedno ćemo ipak pretpostaviti: da se konvekcija u uzduhu može zanemariti spram konvekcije u vodi.

Neka je l duljina cijevi s vodom. Zraka 1 trebat će onda vrijeme $\frac{l}{c_1 + \varphi - v}$, da prođe kroz cijev, ako se Zemlja giba u smjeru od S_1 prema S_2. Ista zraka treba za dotičnu dužinu u uzduhu između S_3 i P vrijeme $\frac{l}{c+v}$. Ukupno vrijeme, koje zraka treba za jednako dugačke putove u vodi i u uzduhu jednako je dakle

$$\frac{l}{c_1 + \varphi - v} + \frac{l}{c+v} .$$

Zraka 2 putuje obrnuto. Najprije prelazi dužinu uzduha u vremenu $\frac{l}{c-v}$, onda dužinu vode u vremenu $\frac{l}{c_1 - \varphi + v}$, ukupno joj dakle treba za dva jednako dugačka puta u uzduhu i u vodi vrijeme

$$\frac{l}{c-v} + \frac{l}{c_1 - \varphi + v} .$$

Eksperimenat pokazuje, da se interferencije ni najmanje ne mijenjaju, kad se aparat zakrene u protivni ili bilo koji drugi smjer spram brzine Zemlje. Iz toga izlazi, da zrake 1 i 2 neovisno od položaja aparata spram Zemljine staze trebaju jednaka vremena, da je dakle

$$\frac{l}{c_1 + \varphi - v} + \frac{l}{c+v} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c_1 - \varphi + v} .$$

Iz te jednadžbe može se φ izračunati. Ispuštamo nešto opsežni račun[1]) i dajemo rezultat, koji glasi uz zanemarenje veličina drugoga i višega reda:

(43) $$\varphi = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v.$$

---

[1]) Redom se zaključuje:

$$\frac{(c+v) + (c_1 + \varphi - v)}{(c_1 + \varphi - v)(c+v)} = \frac{(c_1 - \varphi + v) + (c - v)}{(c-v)(c_1 - \varphi + v)} .$$

$$(c + c_1 + \varphi)(c - v)(c_1 - \varphi + v) = (c + c_1 - \varphi)(c + v)(c_1 + \varphi - v)$$

$$\varphi^2 - \varphi \frac{v^2 + c^2}{v} = c_1^2 - c^2$$

$$\varphi = \frac{v}{2\beta^2}\left(1 + \beta^2 - \sqrt{(1-\beta^2)^2 + \frac{4\beta^2}{n^2}}\right).$$

ili približno

$$\varphi = \frac{v}{2\beta^2}\left[1 + \beta^2 - \left(1 - \beta^2 + \frac{2\beta^2}{n^2}\right)\right].$$

$$\varphi = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v.$$

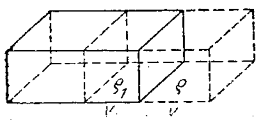
To je znamenata *formula konvekcije*, koju je doduše F r e s n e l našao drugim, više spekulativnim putem. Prije nego što saopćimo njegov postavak, ustanovit ćemo, što ta formula zapravo izriče. Konvekcija je po njoj to veća, što više indeks loma premašuje vrijednost 1, koju ima u vakuumu. Za uzduh je c_1 gotovo jednak c, n gotovo jednak 1, dakle φ gotovo točno jednak nuli, kako smo to pretpostavili. Što je jači lom, to je potpunija konvencija svijetla. Brzina svjetlosti u gibanom tijelu iznosi relativno spram svemirskog etera

$$c_1 + \varphi = c_1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v,$$

a relativno spram gibanoga tijela

$$c_1 + \varphi - v = c_1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v - v = c_1 - \frac{v}{n^2}.$$

Na ovu zadnju formulu nadovezujemo tumačenje Fresnelovo. On je pretpostavio, da je gustoća etera u materijalnom tijelu različita od gustoće u slobodnom eteru. Prva gustoća neka je ρ_1, druga neka je ρ. Zamislimo tijelo u obliku grede, kojoj je uzdužni smjer paralelan s brzinom. Baza neka je jednaka jedinici ploštine. Kod gibanja grede kroz eter prednja ploha napreduje u jedinici vremena za dužinu v (sl. 75), prelazi dakle volumen v (baza 1 puta visina v). U ovome je sadržana količina etera ρv, koja dakle ulazi u tijelo kroz prednju plohu. Tamo ona poprima drugu gustoću, gibat će se dakle drugom brzinom v_1 spram tijela, jer s istih razloga kao gore masa te količine mora biti također jednaka $\rho_1 v_1$, pa vrijedi



Sl. 75.

$$\rho_1 v_1 = \rho v$$

ili

$$v_1 = \frac{\varrho}{\varrho_1} v.$$

To je u neku ruku jakost eterskog vjetra u gredi, koja se giba brzinom v. Svijetlo, koje prema zgusnutom eteru ima brzinu c_1, ima spram tijela brzinu

$$c_1 - v_1 = c_1 - \frac{\varrho}{\varrho_1} v.$$

No vidjeli smo, da po rezultatu Hoekova pokusa brzina svjetlosti spram gibanog tijela iznosi

$$c_1 - \frac{1}{n^2} v.$$

Stoga mora biti

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{1}{n^2} = \frac{c_1^2}{c^2}.$$

Zgušćenje $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ jednako je dakle kvadratu indeksa loma.

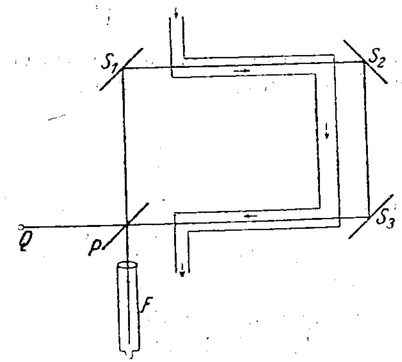
Dalje se može zaključiti, da elasticitet etera mora u svim tjelesima biti jednak, jer formula (37) (IV, 6) nas uči, da je u svakom elastičnom mediju $c^2 = \frac{p}{\varrho}$. U eteru dakle vrijedi $p = c^2\varrho$, u tvari $p_1 = c_1^2\varrho_1$. Po gornjem rezultatu o zgušćenju ta su dva izraza jednaka.

Ovo Fresnelovo mehaničko tumačenje broja konvekcije uvelike je utjecalo na elastičnu teoriju svjetlosti. Ipak ne smijemo zatajiti, da mu se mogu staviti važni prigovori. Znamo, da svijetlo različite boje (broja titraja) ima različit indeks loma n, dakle različitu brzinu. Iz toga izlazi, da broj konvekcije ima za svaku boju drugu vrijednost. To je nespojivo s Fresnelovim tumačenjem, jer bi eter, već prema boji, morao strujiti različitom brzinom kroz tijelo. Postojali bi dakle toliki eteri, koliko ima boja, a to je ipak nemoguće.

Sasvim bez obzira na mehaničko tumačenje formula konvekcije (43) osnovana je na rezultatima eksperimenata. Vidjet ćemo, da se ona u elektromagnetskoj teoriji svjetlosti izvodi iz predodžbi o atomističkoj strukturi tvari i elektriciteta.

Vrlo je teško ispitati Fresnelovu formulu zemaljskim eksperimentima, jer za to treba vrlo brzo gibati providne supstancije. F i z e a u je uspio (1851) provesti pokus pomoću osjetljiva interferometarskog uređaja.

Njegov aparat sličan je Hoekovu, samo je u o b a puta svijetla S_1S_2 i S_3P stavljena cijev, kroz koju može strujati voda, i to tako, da zraka 1 putuje u smjeru vode, zraka 2 protiv smjera vode (sl. 76). Fizeau je ispitao, da li voda nosi svijetlo sa sobom, opažajući, da li se interferencije pomiču, kad se voda brzo giba. Zaista je tako bilo, ali ni izdaleka toliko, koliko bi odgovaralo potpunoj konvekciji. Točna mjerenja izvrsno su se slagala s Fresnelovom formulom konvekcije (43).

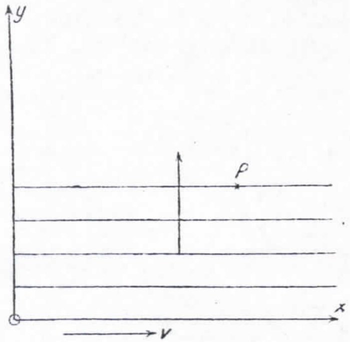


Sl. 76.

10. Aberacija

Raspravit ćemo sada utjecaj gibanja tjelesa na s m j e r zraka svjetlosti, napose pitanje, da li se gibanje Zemlje kroz eter može ustanoviti opažanjem promjene smjera. Treba opet razlikovati, da li se radi o astronomskom ili terestričkom izvoru svijetla.

Prividni otklon svijetla, koje dolazi sa zvijezda stajačica na zemlju, jest *aberacija*, koju smo već pretresli sa stanovišta emisione teorije (IV, 3). Kakogod je dano objašnjenje bilo jednostavno, stvar je složena sa stajališta valne teorije. Lako se uvida, da uopće nema otklona valnih ravnina. To se najlakše vidi, kada zrake upadaju okomito na gibanje promatrača. Valne ravnine paralelne su tom gibanju, i tako ih vidi i promatrač, koji se giba (sl. 77). Isto daje i račun. Neka su nepomični koordinatni sustav S i pokretni sustav S' postavljeni tako, da os x i os x' padaju u smjer gibanja. Brojimo li valove, koji su od momenta $t = 0$ do momenta t prešli preko neke točke P, dobit ćemo, kako znamo $\nu\left(t - \frac{s}{c}\right)$ gdje je s put, što su ga valovi prevalili. U slučaju, da valovi upadaju okomito, očito je $s = y$.



Sl. 77.

Invarijancija broja valova traži, da bude

$$\nu\left(t - \frac{y}{c}\right) = \nu'\left(t - \frac{y'}{c'}\right),$$

ako se koordinate preračunavaju Galileijevom transformacijom. Pri tom ostaje y-koordinata nepromijenjena, mora dakle biti

$$\nu = \nu' \text{ i } \frac{y}{c} = \frac{y'}{c'}, \text{ dakle } c = c'.$$

Pokretni promatrač vidi dakle val točno iste frekvencije, brzine i smjera. Da su te veličine promijenjene, broj valova u S' morao bi ovisiti osim o y' još i o x'. Čini se dakle zaista, da valna teorija nije u mogućnosti objasniti pojav aberacije, poznat već 200 godina.

No ipak nije sasvim tako. Razlog neuspjeha našeg razmatranja je u tome, da optički instrumenti, kojima se vrše opažanja, i kojima pripada i naše oko, uopće ne ustanovljuju frontu vala, nego čine nešto sasvim drugo.

Funkciju oka ili dalekozora označujemo *optičkim preslikavanjem*, a ona se sastoji u tome, da se zrake, koje dolaze od svijetlog objekta, sastavljaju u sliku. Kod toga svjetlosni valovi transportiraju energiju titranja čestica objekta do odnosnih čestica slike. Putovi toga transporta energije zaista su fizičke zrake. Energija je veličina, koja po stavku održanja može kao supstancija putovati i pretvarati se, ali ne može nastati ili nestati. Zato se smije uzeti, da se na njeno gibanje mogu primijeniti zakoni emisione teorije. Stvarno je potpuno ispravan jednostavni izvod formule aberacije, koji smo prije dali (IV, 3), ako se zrake svjetlosti definiraju kao putovi energije svjetlosnih valova i na njih primijene zakoni relativnoga gibanja, kao da su to struje izbačenih čestica.

No formula se aberacije može dobiti i bez primjene toga pojma zraka kao putova energije, ako se u pojedinostima prati lom valova u lećama ili prizmama optičkih instrumenata. Mora se za to pretpostaviti stanovita teorija konvekcije. Stokesova teorija potpune konvekcije može aberaciju objasniti samo uz pretpostavke o gibanju etera, koje mehanički nisu dopustive. Već smo prije upozorili na te teškoće. Fresnelova teorija daje zakon loma na površini gibanih tjelesa, iz kojega točno izlazi formula aberacije. Supstancija tjelesa, kroz koja svjetlo prolazi, ne utječe na rezultat, premda je broj konvekcije za svaku supstanciju drugi. Da to direktno ispita, A i r y (1871) je ispunio dalekozor vodom i ustanovio, da kod toga aberacija ima svoju normalnu vrijednost. Razumije se, da aberacija kao efekt 1. reda iščezava, kada svjetlosni val i promatrač nemaju relativnog gibanja jedan spram drugoga. Iz toga izlazi i to, da kod svih optičkih eksperimenata sa zemaljskim izvorima svijetla nema otklona zraka zbog eterskog vjetra. Fresnelova teorija može te činjenice predočiti u skladu s opažanjima. Nije potrebno, da se time opširnije bavimo.

Prekidamo ova razmatranja o svjetlosnom eteru, da uočimo spoznaje, do kojih smo došli.

11. Osvrt i pogled

Smatrali smo svjetlosni eter kao supstanciju, koja se podvrgava zakonima mehanike. Eter će dakle zadovoljavati zakone tromosti i mirovat će stoga u svemirskom prostoru, gdje nema tvari, u prikladnom inercijalnom sustavu. Gledamo li sve pojave s drugog inercijalnog sustava, vrijedit će točno isti zakoni za gibanje tjelesa i etera, dakle i za širenje svjetlosti, ali dakako samo ukoliko se odnose na ubrzanja i uzajamna djelovanja silama. Znamo, da su brzina i smjer gibanja različiti spram različitih inercijalnih sustava. Svako tijelo, koje se giba jednoliko i pravocrtno, može se smatrati nepokretnim, ako se odabere prikladni sustav referencije, naime sustav, koji se giba s tijelom. U tom, gotovo trivijalnom smislu mora za eter, koji se zamišlja kao mehanička supstancija, vrijediti klasični princip relativnosti.

Iz toga izlazi, da brzina i smjer zraka svjetlosti moraju u svakom inercijalnom sustavu biti drukčiji. Moglo bi se dakle očekivati, da bi se brzina Zemlje ili Sunčanoga sustava mogla ustanoviti opažanjima zemaljskih optičkih pojava, koji u glavnom ovise o brzini i smjeru svjetlosti. No svi pokusi, koji su izvršeni u tu svrhu, dali su negativan rezultat. Pokazuje se dakle, da su brzina i smjer zraka svjetlosti sasvim neovisni od gibanja nebeskoga tijela, na kojem se vrše opažanja. Drukčije rečeno, optički pojavi ovise samo o relativnim gibanjima *materijalnih* tjelesa.

To je princip relativnosti, koji zvuči sasvim slično kao onaj klasični iz mehanike, ali ipak ima drugi smisao. Odnosi se naime na **b r z i n e** i **s m j e r o v e** gibanja, a ti u mehanici **n i s u** neovisni od gibanja sustava referencije.

Moguća su dva gledišta. Jedno polazi od toga, da je optičkim iskustvima stvarno dano nešto načelno *novo*, naime da se svjetlost po smjeru i brzini ponaša *drukčije* nego materijalna tjelesa. Smatramo li optička iskustva obvezatnima, prihvatit ćemo to gledište, ako ne želimo ući u bilo kakvu spekulaciju o *biti* svjetlosti. Vidjet ćemo, da je Einstein konačno pošao tim putem. No za to je potrebna uzvišena sloboda od konvencija tradicionalne teorije, a ta je moguća, kada je gordijski čvor konstrukcija i hipoteza postao tako zamršen, da je jedino rješenje presjeći ga.

No ovdje smo još u cvatu mehaničke teorije etera, a ta je dakako zauzimala sasvim drugo gledište. Ona je morala shvatiti optički princip relativnosti kao sekundaran, u neku ruku slučajan pojav, izazvan kompenzacijom suprotnih uzroka. Da je to u nekim granicama moguće, vidi se po tome, što je još slobodno stvarati hipoteze o tome, kako se eter giba i kako utječu pokretna tjelesa na njegovo gibanje. Velik je uspjeh Fresnelove hipoteze konvekcije, da zaista objašnjava optički princip relativnosti, ukoliko dolaze u račun veličine 1. reda. Dok točnost optičkih mjerenja još nije dostigla onu oštrinu, koja je potrebna za mjerenje veličina 2. reda, ta je teorija zadovoljavala sva iskustva, s jednim možda izuzetkom, koji je začudo slabo zapažen. Kada bi se naime povećanom točnošću astronomskih mjerenja došlo do rezultata, da se može dokazati utjecaj gibanja Sunčanog sustava na brzinu svjetlosti motrenjem pomrčina Jupiterovih trabanata po staroj Römerovoj metodi (IV, 9), teorija bi etera došla time pred zadaću, koju bi jedva mogla riješiti, jer je jasno, da se taj efekt 1. reda ne bi dao objasniti nikakvom hipotezom o konvekciji etera.

Vidimo sada važnost eksperimentalnoga zadatka, da se ovisnost optičkih procesa o gibanju Zemlje izmjeri do veličina 2. reda. Tek rješenje toga problema može donijeti odluku, da li optički princip relativnosti vrijedi strogo ili samo približno. U prvom bi slučaju Fresnelova teorija etera morala zatajiti. Nalazili bismo se pred novom situacijom.

Historijski se to dogodilo tek nekih 100 godina poslije Fresnela. No razvoj teorije etera pošao je drugim smjerom. U početku naime nije bio samo *jedan* eter, nego više njih: optički, termički, električki, magnetski eter, i možda još koji drugi. Za svaki je pojav, koji se događao u prostoru, izmišljen kao nosilac poseban eter. Svi ti eteri ponajprije nisu imali nikakve veze, nego su postojali u istom prostoru jedan kraj drugoga, ili bolje rečeno, jedan u drugom. To stanje fizike naravno nije moglo potrajati. Uskoro su nađene veze između različitih, prvotno rastavljenih područja, i tako je konačno preostao *jedan* eter kao nosilac *svih* fizičkih pojava, koji prelaze preko prostora bez tvari. Napose se pokazalo, da je svjetlost proces elektromagnetskoga titranja, kome je nosilac identičan s medijem, u kome djeluje električke i magnetske sile. Ta su otkrića najprije bila snažno uporište za pretpostavku etera. Konačno je čak došlo do toga, da se eter identificirao s Newtonovim prostorom. On se, prema tom shvaćanju, nalazi u stanju

apsolutnog mirovanja i nije samo posrednik za elektromagnetska djelovanja, nego je posrednim uzrokom i Newtonove centrifugalne sile i sile tromosti.

Taj ćemo razvoj teorije sada prikazati. Stvar se razvija kao napeta sudska rasprava. Eter je navodno svemu kriv, gomilaju se dokazi, dok nije konačno striktno dokazan »alibi« i time stvar svršena; učinio je to Michelsonov pokus i njegovo tumačenje po Einsteinu.

V. TEMELJNI ZAKONI ELEKTRODINAMIKE

1. Elektrostatika i magnetostatika

Već je u starom vijeku bilo poznato, da stanovita rudača, magnetovac, privlači željezo i da se na trljanom jantaru (grčki elektron) hvataju malena, lagana tjelešca. Ipak je znanost o magnetizmu i elektricitetu tekovina novoga doba, koje je u školi Galileija i Newtona naučilo stavljati prirodi razumna pitanja i razumjeti njen odgovor u eksperimentu.

Temeljne činjenice električkih pojava ustanovljene su oko god. 1600. Ukratko ćemo ih nabrojiti. Kao sredstvo za proizvođenje električkih djelovanja služilo je onda isključivo trenje. Gray je otkrio (1729), da kovine (metali) u dodiru s tjelesima, koja su elektrizirana trenjem, dobivaju slična svojstva. Pokazao je, da se u kovinama električka djelovanja mogu dalje voditi. Time su se supstancije razdijelile u *vodiče* (konduktore) i *nevodiče* (izolatore). Da električko djelovanje nije uvijek *privlačenje*, nego može biti i *odbijanje*, otkrio je du Fay (1730). Tumačio je tu činjenicu pretpostavkom dvaju fluida, koja danas zovemo pozitivnim i negativnim elektricitetom, i ustanovio, da se istoimeno nabijena tjelesa odbijaju, raznoimeno nabijena da se privlače.

Odmah ćemo ovdje kvantitativno definirati *pojam električkog naboja*. Ne ćemo se kod toga držati onih često dosta zakučastih sljedova misli, koji su historijski doveli do postavljanja pojmova i zakona, nego ćemo odabrati poredaj definicija i eksperimenata tako, da se logička veza što jasnije očituje.

Zamislimo trenjem elektrizirano tijelo M. To tijelo privlači ili odbija druga elektrizirana tjelesa. Za proučavanje toga djelovanja upotrebit ćemo malena pokusna tjelešca, na pr. kugle promjera, koji je vrlo malen prema najmanjoj udaljenosti od tijela M, gdje još želimo istražiti silu. Dovedemo li takvo pokusno tjelešce P u blizinu tijela M, koje želimo proučavati, na P će djelovati statička sila određene veličine u nekom smjeru. Ta se sila može mjeriti metodama mehanike, primjerice time, da se pomoću poluga ili konaca dovede u ravnotežu s nekim utegom.

Uzmimo sada dva takva pokusna tjelešca P_1 i P_2, trljana na različit način, pa ih po redu dovedimo na isto mjesto u blizini tijela M i svaki puta mjerimo sile K_1 i K_2 po veličini po smjeru. Pri tom ćemo odsad

suprotne sile smatrati istosmjernima, računajući samo njihove veličine s protivnim predznakom. Pokus pokazuje, da obje sile imaju isti smjer, no njihova veličina može biti različita i predznak može biti različit. Dovedimo zatim oba pokusna tjelešca na drugo mjesto u blizini tijela M i mjerimo opet sile K'_1 i K'_2 po smjeru i veličini. Opet su te sile istoga smjera, ali općenito različite veličine i različitog predznaka. Načinimo li omjer $K'_1 : K'_2$ na drugom mjestu, pokazuje se, da oba omjera imaju istu vrijednost, koja može biti pozitivna ili negativna:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{K'_1}{K'_2}$$

Iz toga rezultata možemo zaključiti:

1. Smjer sile, kojom djeluje elektrizirano tijelo na maleno pokusno tjelešce, ne ovisi o prirodi i elektriziranju pokusnog tjelešca, već samo o svojstvima tijela M.
2. Omjer sila na dva pokusna tjelešca, koja su redom dovedena na isto mjesto, sasvim je neovisan od izbora toga mjesta, dakle o položaju, prirodi i elektriziranju tijela M. Taj omjer ovisi samo o svojstvima pokusnog tjelešca.

Odaberimo sada kao jedinično tijelo neko pokusno tijelo elektrizirano na određen način i pridajmo mu naboj ili količinu elektriciteta $+1$. Tim tijelom mjerimo svagdje silu, kojom djeluje tijelo M. Neka se ta sila zove E. Ona ujedno određuje smjer sile, koja djeluje na bilo koje drugo pokusno tijelo P. Omjer veličina $K : E$ ovisi samo o pokusnom tijelu P i zove se njegov ***električni naboj*** e, koji može biti pozitivan ili negativan prema tome, da li su K i E u užem smislu istoga smjera ili protivnoga smjera. Vrijedi dakle:

$$\frac{K}{E} = e \quad \text{ili} \quad K = eE. \tag{44}$$

Sila E, koja djeluje na naboj 1, zove se još *jakost električnog polja* tijela M. Uz čvrsto odabranu jedinicu naboja ova sila ovisi samo o električkoj prirodi tijela M, ona određuje električko djelovanje toga tijela u okolnom prostoru, ili, kako se običava kazati, njegovo *»električno polje«*.

Praktički ne bi bilo moguće odrediti jedinicu naboja propisom o elektriziranju izvjesnog pokusnog tijela, nego ćemo za nju tražiti mehaničku definiciju. Evo kako. Možemo ponajprije dva pokusna tijela nabiti jednako jako. Kriterij jednakog naboja je taj, da treće tijelo M na njih djeluje na istom mjestu jednakom silom. Ta će se dva pokusna tijela međusobno odbijati jednakom silom. Velimo, da je njihov naboj 1, ako je to odbijanje jednako jedinici sile, kad je udaljenost pokusnih tjelesa jednaka jedinici duljine. Pri tom se ništa ne pretpostavlja o ovisnosti te sile o udaljenosti. Tim je definicijama količina elektriciteta ili električni naboj postala isto tako veličina, koja se može mjeriti, kao duljine, mase ili sile.

Najvažniji zakon o količinama elektriciteta, koji su (1747) izrekli neovisno Watson i Franklin, jest stavak, da kod svakog procesa elektriziranja uvijek nastaju jednake količine pozitivnog i negativnog elektriciteta. Tare li se primjerice staklen štap svilenom maramom, stakleni štap bit će pozitivno električan. Isto toliki negativni naboj naći će se na marami.

Ova empirijska činjenica može se tumačiti tako, da se obje vrsti elektriciteta ne *proizvode* trenjem, već se samo *rastavljaju*. Zamišljaju se kao dva *fluida*, koja postoje u svim tjelesima u jednakim količinama. U neelektriziranim, »neutralnim« tjelesima nalaze se svagdje u istoj količini, tako da im se djelovanje prema vani ukida. U elektriziranim tjelesima rastavljena su. Dio pozitivnog elektriciteta prešao je s jednog tijela na drugo, isto toliko negativnoga prešlo je u protivnom smjeru.

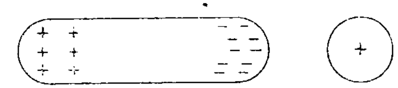
Očito je dovoljno da se pretpostavi i samo *jedan* fluid, koji može strujati neovisno od tvari. Tvari, koja je slobodna od toga fluida, mora se onda pridati stanovit naboj, na pr. pozitivni, a fluidu protivni, negativni. Elektriziranje sastoji se u tome, da negativni fluid prijeđe s jednog tijela na drugo. Prvo će onda biti pozitivno, jer pozitivni naboj tvari nije više sasvim kompenziran, drugo će biti negativno, jer ima višak negativnog fluida.

Prepirka između pristalica tih dviju hipoteza, *teorije jednog fluida* i *teorije dvaju fluida*, dugo je trajala i bila je tako dugo besplodna i beskorisna, dok nije odlučena otkrićem novih činjenica. Ne ćemo se baviti tim diskusijama, nego samo ukratko izvještavamo, da su konačno pronađene karakteristične razlike između dvaju elektriciteta, koje su pokazivale, da se zaista pozitivni elektricitet drži čvrsto tvari, dok je negativni slobodno gibljiv. Ova nauka još danas vrijedi. Kasnije ćemo se na to vratiti kod razlaganja o teoriji elektrona.

Druga se prepirka ticala pitanja, kako se električke sile privlačenja i odbijanja prenose kroz prostor. Prvi deceniji električkog istraživanja nisu još bili pod utjecajem Newtonove teorije atrakcije. Djelovanje na daljinu činilo se neshvatljivim, vrijedili su metafizički stavci, kao na pr. da tvar može samo tamo djelovati, gdje se nalazi, i tako su izmišljene različite hipoteze za tumačenje električnih sila: emanacije, koje izlaze iz nabijenih tjelesa i vrše tlak, kad naiđu na zapreku, i slične pretpostavke. No pošto je Newtonova teorija gravitacije pobijedila, ljudi su se pomalo naučili na predodžbu sile, koja djeluje neposredno u daljinu. Jer zaista je samo navika mišljenja, kada se neka predodžba tako usiječe u mozgove, da se upotrebljava kao zadnji princip objašnjenja. Ne traje tada dugo, dok metafizička spekulacija, često u ruhu kritičke filozofije, iznese dokaz, da je taj princip objašnjenja misaono nuždan, njegova suprotnost nezamisliva. Srećom se empirijska znanost u svom napretku za to mnogo ne brine i katkada ponovno prihvaća osuđene predodžbe, kada to nove činjenice zatraže. Razvoj nauke o električnim i magnetskim silama primjer je takvog kružnog toka teorijâ. Na početku nalazimo teoriju djelovanja nablizu, poduprtu *metafizičkim* razlozima, iza nje slijedi teorija djelovanja na daljinu po

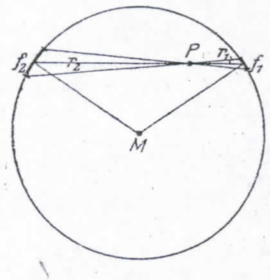
Newtonovu uzoru, a na kraju se ova pod pritiskom novootkrivenih činjenica pretvara opet u opću teoriju djelovanja nablizu. To kolebanje nije znak slabosti. Slike, na koje se te teorije nadovezuju, nisu ono bitno. Bitne su emipirijske činjenice i njihove pojmovne veze. Ako njih slijedimo, ne vidimo kolebanja, nego samo neprekinut razvoj pun unutarnje logičke snage. Na prve se teoretske pokušaje prednewtonskog vremena možemo opravdano i ne osvrnuti, jer je premalo činjenica bilo poznato, da bi se našla nužna uporišta za teoriju. Da je zatim nastala teorija djelovanja u daljinu po uzoru Newtonove mehanike, sasvim je osnovano na biti električkih činjenica. Istraživanje, koje je raspolagalo eksperimentalnim pomagalima 18. stoljeća, moralo je na temelju onda mogućih opažanja izvesti zaključak, da električne i magnetske sile djeluju u daljinu na isti način kao gravitacija. Još i danas, s gledišta visoko razvijene teorije djelovanja nablizu, koju su dali Faraday i Maxwell, predočivanje elektrostatike i magnetostatike pomoću sila u daljinu potpuno je dopustivo i uz razumnu upotrebu daje uvijek ispravne rezultate.

Misao, da električne sile djeluju u daljinu kao gravitacija, prvi je iznio Epin (Aepinus) (1759). On je čak pošao tako daleko, da je shvatio gravitaciju i elektricitet kao djelovanja *istoga* fluida. Zamišljao je u smislu teorije jednoga fluida, da bi tvar bez električnog fluida odbijala drugu tvar, no da uvijek ima mali višak fluida, koji uzrokuje privlačenje gravitacije. Začudo, nije mu uspjelo da postavi ispravne zakone ovisnosti električkih djelovanja o udaljenosti, ali mu je pošlo za rukom kvalitativno protumačiti pojav influencije. Ova se sastoji u tome, da nabijeno tijelo ne djeluje samo na druga nabijena tjelesa, nego da privlači i nenabijena, osobito vodiče. Naime, istoimeni naboj skuplja se na bližoj strani influenciranog tijela, raznoimeni na daljoj strani (sl. 78), stoga privlačenje prevlađuje odbijanje.



Sl. 78.

Bit će da je pravi zakon otkrio Priestley (1767), pronalazač kisika, i to na duhovit, indirektan način, koji u stvari sadrži veću dokaznu snagu od direktnoga mjerenja. Neovisno je Cavendish (1771) izveo taj zakon na isti način. Ipak je zakon prozvan po istraživaču, koji ga je prvi dokazao direktnim mjerenjima silâ, a to je bio Coulomb (1785). Razmatranje Priestleya i Cavendisha otprilike je ovo: privede li se vodiču (metalu) električni naboj, ovaj ne može ostati u ravnoteži u nutrašnjosti vodljive supstancije, jer se istoimene čestice naboja odbijaju. Taj se naboj mora stiskati prema površini, gdje će u stanovitoj razdiobi biti u ravnoteži. Iskustvo nas uči velikom točnošću, da unutar prostora, koji je sasvim opkoljen metalnim stijenama, nema električna polja, ma kako jako nabijen bio taj metalni ovoj. Naboji na površini te šupljine moraju se dakle tako razdijeliti, da djelovanje sila na svaku točku u unutrašnjosti iščezava. Ima li šupljina napose oblik kugle, naboji će zbog simetrije biti jednoliko razdijeljeni po površini. Ako je ρ naboj na jedinici površine (gustoća naboja), to se na dva dijela f_1 i f_2 površine nalaze količine elektriciteta ρf_1 i ρf_2. Sila, kojom ovakav malen komad plohe djeluje na pokusno tijelo P s nabojem e u nutrašnjosti kugle, bit će $K_1 = e\rho f_1 R_1$, gdje je R_1 sila između dva jedinična naboja smještena u P i f_1, koja nekako ovisi o udaljenosti r_1 među P i f_1. Svakom komadiću plohe f_1 pripada suprotni f_2, koji se dobije tako, da se točke ruba od f_1 spoje sa P i ti pravci produže preko P do sjecišta s kuglom. Oba komada plohe f_1 i f_2 izrezuje iz kugle isti dvostruki čunj s vrhom u P (sl. 79), a kutovi između njih i osi dvostrukog čunja jednaki su. Ploštine f_1 i f_2 odnose se dakle kao kvadrati udaljenosti od P:



Sl. 79.

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Naboj ρf_2, koji se nalazi na f_2, djeluje silom $K_2 = e\rho f_2 R_2$ na P, kod čega R_2 nekako ovisi o r_2. Razumije se, da su K_2 i K_1 suprotna smjera.

Nameće se misao, da se sve sile, koje djeluju na P, mogu samo onda ukidati, ako su u ravnoteži po dvije sile, koje potječu od suprotnih dijelova ploha, ako je dakle $K_1 = K_2$. Ova se pretpostavka može i dokazati, ali to bi nas predaleko odvelo. Prihvatimo li tu pretpostavku, to izlazi $f_1 R_1 = f_2 R_2$ ili

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Vrijedi dakle $R_1 r_1^2 = R_2 r_2^2 = c$, gdje je c veličina neovisna od udaljenosti. Time su R_1 i R_2 određeni, naime

$$R_1 = \frac{c}{r_1^2}, \quad R_2 = \frac{c}{r_2^2}.$$

Sila R između dviju jedinica naboja u udaljenosti r mora dakle imati vrijednost

$$R = \frac{c}{r^2}.$$

Prema našem izboru jedinice električkog naboja moramo staviti $c = 1$, jer sila između dviju jedinica naboja u udaljenosti 1 treba da bude jednaka 1. Sila, kojom djeluju dva tijela s nabojima e_1 i e_2 u međusobnoj udaljenosti r jedno na drugo, bit će dakle

(45) $$K = \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Ovo je *Coulombov zakon.* Pretpostavlja se kao samo po sebi razumljivo, da je najveći promjer nabijenih tjelešaca malen spram njihove međusobne udaljenosti. Ovo ograničenje znači, da je taj zakon poput zakona gravitacije idealiziran elementarni zakon. Da se iz njega dobije djelovanje tjelesa konačnih razmjera, treba elektricitet na njima razdijeljen zamisliti rastavljen u malene dijelove i izračunati po parovima djelovanje svake čestice prvoga tijela na svaku česticu drugoga te zbrojiti sva ta djelovanja.

Formulom (45) određena je dimenzija količine elektriciteta. Za odbijanje dvaju jednakih naboja vrijedi:

$$\frac{e^2}{r^2} = K, \quad \text{dakle} \quad e = r\sqrt{K},$$

stoga je

$$[e] = \left[l\sqrt{K}\right] = \left[l\sqrt{\frac{ml}{t^2}}\right] = \left[\frac{l}{t}\sqrt{ml}\right].$$

Time je određena i jedinica naboja u cgs-sustavu. Treba je označiti sa $\frac{\text{cm}\sqrt{\text{g cm}}}{\text{sek}}$.

Jakost električnog polja, definirana sa $K = eE$, ima dimenziju

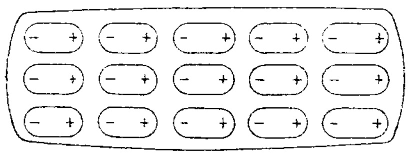
$$[E] = \left[\frac{K}{e}\right] = \left[\frac{K}{l\sqrt{K}}\right] = \left[\frac{\sqrt{K}}{l}\right] = \left[\frac{\sqrt{ml}}{lt}\right] = \left[\frac{1}{t}\sqrt{\frac{m}{l}}\right],$$

a njezina je jedinica $\frac{1}{\text{sek}}\sqrt{\frac{\text{g}}{\text{cm}}}$.

Postavljanjem Coulombova zakona elektrostatika je postala matematička nauka. Najvažniji je problem određivanje razdiobe naboja na vodljivim tjelesima pod djelovanjem međusobne influencije i izračunavanje sila, što tako nastaju, uz zadani ukupni naboj. Razvoj ove matematičke zadaće zanimljiv je zbog toga, što se kod njena rješavanja teorija djelovanja u daljinu ubrzo pretvorila u pseudoteoriju djelovanja nablizu, t. j. umjesto zbrajanja Coulombovih sila pojavile su se diferencijalne jednadžbe, u kojima je nepoznata veličina bila jakost polja E, ili jedna s njome povezana veličina, *potencijal.* Za rješavanje ovih čisto matematičkih pitanja velike su zasluge stekli L a p l a c e (1782), P o i s s o n (1813), G r e e n (1828) i G a u s s (1840). Ovdje se time ne možemo potanje pozabaviti, ali ćemo istaći jedno: kod ovakvog razmatranja elektrostatike, koje obično zovemo teorijom potencijala, ne radi se o pravoj teoriji djelovanja nablizu u onom smislu, koji smo toj riječi dali prije (IV, 6); jer diferencijalne jednadžbe se odnose na prostorne promjene jakosti polja od mjesta do mjesta, ali ne sadržavaju člana, koji bi izražavao vremensko mijenjanje. Zato one ne daju širenje električne sile konačnom brzinom, već prikazuju, usprkos svojega diferencijalnog oblika, momentano djelovanje u daljinu.

Nauka o *magnetizmu* razvijala se slično kao elektrostatika. Možemo stoga biti kratki. Najbitnija razlika između tih dvaju područja pojava je u tome, da ima tjelesa, koja vode elektricitet, dok je magnetizam uvijek vezan na tvar i giba se samo s njome.

Dugoljasto, magnetizirano tijelo, *magnetska igla*, ima dva *pola*, t. j. mjesta, iz kojih prividno izlazi magnetska sila, pa vrijedi zakon, da se istoimeni polovi odbijaju, a raznoimeni privlače. Razbijemo li magnet, ne će njegova dva dijela postati suprotno magnetična, nego svaki dio dobije na mjestu loma nov pol i opet je potpun magnet sa dva jednaka pola. To vrijedi, u ma kako malene dijelove rastavili magnet. Zaključilo se iz toga, da ima doduše dvije vrsti magnetizma, kao i dvije vrsti elektriciteta, ali da se one ne mogu slobodno gibati, nego da se nalaze u jednakim količinama, ali rastavljeno, u najmanjim djelićima tvari, u molekulama. Svaka je dakle molekula sama malen magnet sa sjevernim i južnim polom (sl. 80). Magnetiziranje konačnoga tijela sastoji se u tome, da se svi ti elementarni magnetići, koji su do tada bili u potpunom neredu, usmjere paralelno. Djelovanja izmjenično poredanih sjevernih (+) i južnih (—) polova ukidaju se, osim dviju krajnjih površina, iz kojih prividno izlazi sve djelovanje.



Sl. 80.

Uzme li se vrlo dugačka, tanka magnetska igla, može se postići, da u blizini jednoga pola sila drugoga bude neprimjetna. Može se dakle i ovdje operirati pokusnim tjelešcima, naime polovima vrlo dugačkih, tankih magnetskih štapova. Njima se mogu provesti sva mjerenja, koja smo raspravili kod elektriciteta. Tako se dolazi do definicije *magnetske količine* ili *jakosti pola p* i *jakosti magnetskog polja H*. Magnetska sila, koja djeluje na pol p u polju H, iznosi

(46) $$K = pH.$$

Jedinica pola odabira se tako, da dva jedinična pola u udaljenosti 1 međusobno djeluju odbojnom silom 1. Zakon, po kojem se sila dvaju polova p_1 i p_2 mijenja s udaljenošću, našao je također Coulomb direktnim mjerenjem. On glasi opet kao Newtonov zakon privlačenja:

(47) $$K = \frac{p_1 p_2}{r^2}.$$

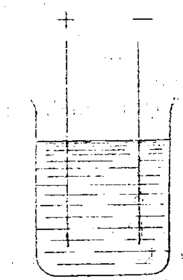
Očito su dimenzije magnetskih veličina jednake dotičnim električnim, a jedinice im imaju iste znakove u cgs-sustavu.

Matematička teorija magnetizma razvija se prilično paralelno s teorijom elektriciteta. Najbitnija je razlika, da su prave magnetske količine vezane uz molekule, a akumulacije, koje se daju mjeriti te prouzrokuju pojavljivanje polova kod konačnih magneta, nastaju samo zbrajanjem djelovanja paralelno postavljenih molekula.

2. Galvanizam i elektroliza

Elektricitet dodirom ili kontaktni elektricitet otkrili su Galvani (1780) i Volta (1792). Povijest toga otkrića tako je poznata, da je ovdje ne iznosimo. Jer kakogod zanimljivi bili Galvanijevi pokusi sa žabljim kracima i diskusija o podrijetlu električnih naboja, koja se na to nadovezala, nama je više do jasne formulacije pojmova i zakona. Ustanovit ćemo stoga samo činjenice.

Urone li se dvije različite kovine u neku rastopinu (sl. 81), na pr. bakar i cink u razrijeđenu sumpornu kiselinu, kovine dobiju električne naboje, koji pokazuju sasvim isto djelovanje kao elektricitet trenja. Po temeljnom zakonu elektriciteta naboji obih predznaka pojavljuju se na kovinama (polovima) u istoj količini. Sustav rastopine i kovina, koji se još zove *galvanski elemenat* ili *ćelija*, ima dakle sposobnost, da razluči elektricitete. Čudno je kod toga, da je ta sposobnost, kako se čini, neiscrpiva; jer spoje li se polovi žicom, tako da se naboji izjednače, ipak su polovi opet nabijeni, kad se žica ukloni. Elemenat neprestano nadoknađuje elektricitet, dok postoji spoj žicom. U žici mora dakle neprestano strujati elektricitet. Kakva će nam biti točnija predodžba toga strujanja, ovisi o tome, da li prihvaćamo teoriju jednoga fluida ili dvaju. U prvom slučaju imamo samo jednu struju, u drugom teku dvije suprotne struje dvaju fluida.



Sl. 81.

Električna struja dokazuje svoju egzistenciju vrlo jasnim djelovanjima. U prvome redu grije spojnu žicu. Svatko poznaje tu činjenicu od kovinskih niti u našim električnim žaruljama. Struja dakle trajno proizvodi toplinsku energiju. Otkuda galvanskom elementu sposobnost da neprestano proizvodi elektricitet i time indirektno razvija toplinu? Po zakonu o održanju energije mora svagdje, gdje se javlja neka vrst energije u nekom procesu, nestati neke druge vrsti energije istog iznosa.

Izvor energije je kemijski proces u ćeliji. Jedna se kovina rastapa, dok struja teče, na drugoj se izlučuje sastavni dio rastopine. U samoj rastopini mogu se događati zamršeni kemijski procesi. Ne ćemo se ovima baviti, nego se zadovoljavamo činjenicom, da su galvanske ćelije sredstvo za proizvodnju elektriciteta u gotovo neograničenim količinama i za dobivanje znatnih električnih struja.

Razmotrit ćemo i obrnuti proces, kod kojega električna struja uzrokuje kemijsko rastvaranje. Teče li primjerice struja između dviju nerastvorivih žica (elektroda), na pr. od platine, kroz vodu, kojoj je dodano nešto kiseline, voda će se rastvoriti u svoje sastavne dijelove, vodik i kisik. Vodik se razvija na negativnoj elektrodi (katodi), kisik na pozitivnoj (anodi). Kvantitativne zakone te »*elektrolize*«, koju su otkrili Nicholson i Carlisle (1800), našao je Faraday (1832). Poznato je golemo značenje Faradayevih istraživanja za spoznaju o strukturi materije te za teoretsku i tehničku kemiju. No nije to razlog, da se tim pitanjem ovdje bavimo, već činjenica, da Faradayevi zakoni daju sredstvo za egzaktno mjerenje električnih struja i time za dalju izgradnju elektromagnetskog pojmovnog sustava.

Mjesto galvanskom strujom, može se pokus rastvorbe provesti isto tako strujom izbijanja, koja nastaje, kada se dva suprotno nabijena metalna tijela spoje žicom. Istina, treba se pri tom pobrinuti, da količine elektriciteta, koje se izbijaju, budu dovoljno velike. Postoje aparati za nagomilavanje elektriciteta, *kondenzatori*, koji djeluju na temelju principa influencije i daju tako jaka izbijanja, da se u elektrolitičkoj ćeliji rastvore izmjerive količine. Veličina naboja, koji prođe kroz ćeliju, može se mjeriti prije iznesenim metodama elektrostatike. Fadaray je našao stavak, da dvostruki naboj proizvodi dvostruko rastvaranje, trostruki naboj trostruko rastvaranje, ukratko, da je količina m rastvorene tvari (ili jednoga od dvaju proizvoda rastvorbe) proporcionalna količini e *elektriciteta*, koja je protekla:

$$Cm = e.$$

Konstanta C ovisi još o prirodi dotičnih tvari i kemijskog procesa.

Drugi Faradayev zakon ravna tom ovisnošću. Poznato je, da se kemijske temeljne tvari (elementi) spajaju u sasvim određenim omjerima težina. Količina elementa, koja se spaja s jednim gramom najlakšeg elementa, vodika, označuje se kao *ekvivalentna težina.* Tako je na pr. u vodi (H_2O) spojeno 8 g kisika (O) sa 1 g vodika (H), stoga kisik ima ekvivalentnu težinu 8. Faradayev stavak izriče, da ista količina elektriciteta, koja izlučuje 1 g vodika, izlučuje od svakog drugog elementa točno jednu ekvivalentnu težinu, dakle na pr. 8 g kisika.

Konstanta C treba nam dakle biti poznata samo za vodik, za svaku drugu tvar dobijemo je diobom s ekvivalentnom težinom. Za 1 g vodika jest:

$$C_0 \cdot 1 = e,$$

za neku drugu tvar s ekvivalentnom težinom μ vrijedi:

$$C\mu = e.$$

Podijelimo li ove jednadžbe, izlazi

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{\mu}, \quad C = \frac{C_0}{\mu}.$$

$C_0 = e$ dakle je ona količina elektriciteta, koja izlučuje 1 g vodika. Njezina je brojčana vrijednost određena točnim mjerenjima te iznosi u cgs-sustavu [14]

(48) $$C_0 = 2{,}90.10^{14} \text{ jedinica naboja po gramu.}$$

Možemo sada sažeti oba Faradayeva zakona u jednu formulu:

(49) $$e = \frac{C_0}{\mu}\, m.$$

Elektrolitsko rastvaranje daje dakle vrlo prikladnu mjeru za količinu elektriciteta e, koja je prošla kroz ćeliju kod jednog izbijanja. Treba samo odrediti masu m jednog proizvoda rastvaranja ekvivalentne težine μ, pa se iz jednadžbe (49) dobije tražena količina elektriciteta. Pri tom je naravno sasvim svejedno, da li je ta količina dobivena izbijanjem nabijenih vodiča (kondenzatora) ili iz galvanske ćelije. U potonjem slučaju elektricitet struji trajno konstantnom jakošću. Količina, koja u jedinici vremena prolazi bilo kojim presjekom voda, dakle i kroz ćeliju rastvaranja, zove se *jakost struje.* Možemo je jednostavno izmjeriti time, da pustimo galvansku struju teći kroz elektrolitsku ćeliju jednu jedinicu vremena (1 sek) i odredimo masu m proizvoda rastvaranja. Jednadžba (49) opet daje onaj naboj e, koji je jednak jakosti struje. Ne teče li struja 1 sekundu, nego t sekunda, to je količina elektriciteta, koja je prošla, i izlučena masa m svakog proizvoda rastvaranja t puta tolika. Jakost struje J je dakle:

(50) $$J = \frac{e}{t} = \frac{C_0}{\mu} \cdot \frac{m}{t}.$$

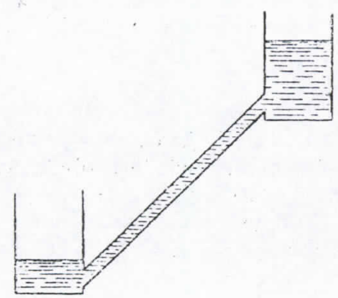
Njena je dimenzija:

$$[J] = \left[\frac{e}{t}\right] = \left[\frac{l}{t}\sqrt{K}\right] = \left[\frac{l}{t^2}\sqrt{ml}\right],$$

a jedinica joj je $\frac{\text{cm}\sqrt{\text{g cm}}}{\text{sek}^2}$.

3. Otpor i toplina struje

Moramo se sada malo pozabaviti samim procesom strujanja. Uvijek se električna struja uspoređivala sa strujanjem vode u cijevi, pa su se dotični pojmovi prenosili na električnu struju. Da voda teče kroz neku cijev, mora postojati sila, koja je tjera. Pustimo li vodu otjecati kroz koso položenu cijev iz više posude u nižu, bit će gravitacija sila, koja tjera vodu (sl. 82). Ta je sila to veća, što je gornja razina vode viša spram donje. No brzina strujanja vode ili jakost struje ne ovisi samo o veličini sile teže, nego i o otporu, koji cijev pruža vodi. Ako je ta cijev dugačka i uska, proći će u jedinici vremena manje vode, nego kroz kratku i široku cijev. Jakost struje J razmjerna je dakle s razlikom razinâ V, a obrnuto razmjerna s *otporom* W. Stavljamo



Sl. 82.

(51) $$J = \frac{V}{W} \text{ ili } JW = V,$$

pri čemu je odabran kao jedinica onaj otpor, kod kojega razlika razina $V = 1$ proizvodi jakost struje 1.

Ove predodžbe prenio je G. S. Ohm (1826) na električnu struju. Razlici razina odgovara električna sila. Za neki komad žice duljine l treba staviti $V = El$, gdje je E jakost polja, koju smatramo konstantnom duž žice. Jer djeluje li isto električno polje duž dulje žice, bit će veća sila, kojom to polje tjera elektricitet. Veličina V zove se *napon* ili *elektromotorna sila*. Ona je identična s pojmom električnog potencijala, koji smo prije (točka 1) spomenuli.

Jakost struje J i jakost električnog polja E, dakle i napon $V = El$, jesu veličine, koje se daju mjeriti, pa se stoga može eksperimentalno ispitati proporcionalnost veličina J i V izražena Ohmovim zakonom (51).

Otpor W ovisi o materijalu i obliku žice. Što je žica dulja i tanja, to je W veći. Ako je l duljina žice i q veličina njezina presjeka, bit će W izravno razmjeran sa l, a obrnuto razmjeran sa q. Stavlja se

$$\sigma W = \frac{l}{q} \quad \text{ili} \quad W = \frac{l}{\sigma q}, \tag{52}$$

gdje faktor proporcionalnosti σ ovisi samo o materijalu žice. Ovaj se faktor zove *vodljivost*.

Uvrsti li se W iz (52) i $V = El$ u (51), dobije se

$$JW = J\frac{l}{q\sigma} = V = El,$$

a iz toga izlazi

$$\frac{J}{q\sigma} = E \quad \text{ili} \quad \frac{J}{q} = \sigma E.$$

$\frac{J}{q}$ znači jakost struje po jedinici presjeka. Zovemo je *gustoćom struje* i označujemo je sa i. Vrijedi dakle

$$i = \sigma E. \tag{53}$$

U tom obliku *Ohmov zakon* sadrži samo još jednu konstantu, vodljivost σ, koja ovisi o materijalu vodiča, ali taj zakon ne sadrži više ništa, što bi ovisilo o obliku vodiča.

Za izolatore je $\sigma = 0$. Idealnih izolatora nema; uvijek ima slabih tragova vodljivosti, osim u savršenom vakuumu. Poznati su svi prijelazi od loših vodiča (kao porculan, jantar) preko t. zv. poluvodiča (kao voda i drugi elektroliti) do kovina, kojima je vodljivost golema.

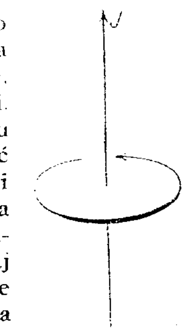
Već smo prije upozorili na to, da struja grije provodnu žicu. Kvantitativni zakon toga pojava našao je Joule (1841). Taj je zakon očito specijalan slučaj zakona o održanju energije, kada se električna energija pretvara u toplinu. Jouleov zakon izriče, da je toplina, koju razvija struja J uz napon V u jedinici vremena jednaka

$$Q = JV, \tag{54}$$

gdje Q nije mjeren u kalorijama, nego u mehaničkim jedinicama radnje. Mi se tom formulom ne ćemo služiti i samo je spominjemo radi potpunosti.

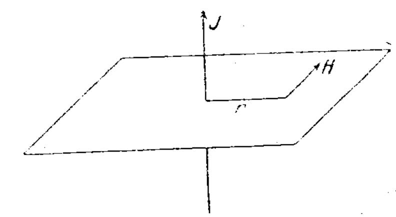
4. Elektromagnetizam

Dosada smo smatrali elektricitet i magnetizam kao dva područja pojava, koja su doduše u mnogočem slična, ali su ipak sasvim razdvojena i samostalna. Dugo se bez uspjeha tražila veza između ta dva područja. Konačno je Oersted (1820) otkrio, da galvanske struje otklanjaju magnetske igle. Još iste godine našli su Biot i Savart kvantitativni zakon toga pojava, koji je Laplace formulirao kao djelovanje u daljinu. Ovaj nam je zakon vrlo važan, jer se u njemu prvi puta pojavljuje konstanta svojstvena elektromagnetizmu, koja ima karakter brzine, a kasnije se pokazala identičnom s brzinom svjetlosti.


Sl. 83

Biot i Savart su ustanovili, da struja, koja teče u ravnoj žici, niti privlači, niti odbija magnetski pol, već ga nastoji tjerati po krugu oko žice (sl. 83), i to pozitivni pol u smislu desne vrtnje (protivno od kazaljke na satu) oko (pozitivnog) smjera struje. Kvantitativni zakon može se dovesti na najjednostavniji oblik na taj način, da se provodna žica zamišlja rastavljena u kratke komade veličine l i naznači djelovanje tih elemenata struje. Djelovanje čitave struje dobije se onda zbrajanjem. Ograničit ćemo se na to, da naznačimo zakon za jedan elemenat struje u specijalnom slučaju, kada magnetski pol leži u ravnini, koja prolazi središtem elementa i okomita je na njegovu smjeru (sl. 84). Sila ili jakost magnetskog polja, koja djeluje na magnetski pol jakosti 1 leži tada u toj ravnini, okomita je na spojnici pola sa središtem elementa struje i upravno je razmjerna njegovoj duljini l i jakosti struje J, a obrnuto razmjerna kvadratu udaljenosti r:

$$cH = \frac{Jl}{r^2}. \tag{55}$$


Sl. 84.

Po vanjskom obliku ta je formula slična Newtonovu zakonu privlačenja ili Coulombovu zakonu elektrostatike i magnetostatike, ali je elektromagnetska sila ipak sasvim druge naravi; jer ona ne djeluje u smjeru spojnice, nego okomito na nju. Tri smjera J, r, H uzajamno su okomita. Vidi se po tome, da su elektrodinamička djelovanja najuže povezana sa strukturom euklidskog prostora. Ona daju u neku ruku prirodan, pravokutan koordinatni sustav.

Faktor proporcionalnosti c, uveden u formulu (55), potpuno je određen, jer su udaljenost r, jakost struje J i magnetsko polje H veličine, koje se mogu izmjeriti. Taj faktor očito znači jakost one struje, koja prolazeći komadom voda duljine 1 proizvodi u udaljenosti 1 magnetsko polje. Jedinica struje, koju smo uveli (naime statička količina elektriciteta, koja u jedinici vremena prolazi presjekom), zove se elektrostatička jedinica struje. Običaj je, a često je i zgodno, da se spomenuta struja, koja u elektrostatičkoj mjeri ima jakost c, uzme kao jedinica struje. Ta se jedinica zove *elektromagnetska jedinica struje*. Prednost je te jedinice, da jednadžba (55) prima jednostavni oblik $H = \frac{Jl}{r^2}$ ili $J = \frac{Hr^2}{l}$, čime je mjerenje jakosti struje svedeno na mjerenje dviju duljina i magnetskog polja. Većina instrumenata za mjerenje struje rade na temelju otklanjanja magneta strujama ili obrnuto i stoga daju jakost struje u elektromagnetskoj mjeri. Da se ona preračuna na prije uvedenu elektrostatičku mjeru struje, mora biti poznata konstanta c. Za to je dovoljno jedno mjerenje.

Prije nego što govorimo o eksperimentalnom određivanju veličine c, orijentirat ćemo se o njezinoj prirodi jednostavnim razmatranjem dimenzija. Prema (55) definirana je ona formulom $c = \frac{Jl}{Hr^2}$. Za dimenzije vrijede ove formule:

$$[J] = \left|\frac{e}{t}\right|, \qquad [H] = \left|\frac{p}{r^2}\right|.$$

Dimenzija veličine c bit će dakle

$$[c] = \left|\frac{e\,l}{p\,t}\right|.$$

Znamo, da su električni naboj e i jakost magnetskog pola p iste dimenzije, jer Coulombov zakon glasi jednako za električke i magnetske sile. Dobijemo dakle:

$$[c] = \left|\frac{l}{t}\right|,$$

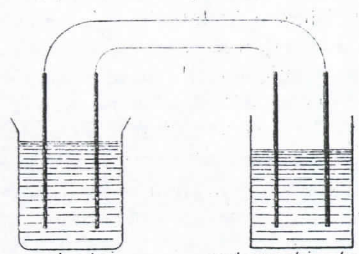
t. j. konstanta c ima dimenziju brzine.

Prvo točno mjerenje te konstante proveli su Weber i Kohlrausch (1856). Ovi su pokusi među najznačajnijim preciznim radovima u fizici, ne samo zbog znatnih teškoća, nego i zbog dosega njihova rezultata. *Pronađena je za veličinu c vrijednost* 3.10^{10} cm/sek, *koja se točno slaže s brzinom svjetlosti.*

To slaganje nije moglo biti slučajno. Brojni mislioci, u prvome redu sam Weber, zatim matematičari Gauss i Riemann, fizičari Neumann, Kirchhoff, Clausius osjećali su duboku povezanost, koju je broj $c = 3.10^{10}$ cm/sek stvarao između dva velika područja znanosti, pa su tražili most, koji bi vodio od elektromagnetizma k optici. Riemann se znatno približio rješenju problema. Riješio ga je tek Maxwell, pošto je divno eksperimentalno umijeće Faradayevo dalo nove činjenice i nova shvaćanja. Taj ćemo razvoj sada slijediti.

5. Faradayeve silnice

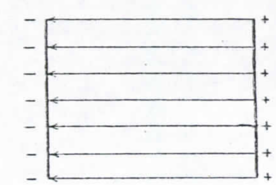
Faraday nije došao iz učene škole, njegov duh nije bio opterećen tradicionalnim predodžbama i teorijama. Poznat je njegov čudesni uspon od šegrta knjigoveže do fizičara svjetskoga glasa u Royal Institution. Kao što je njegov život bio slobodan od konvencionalne sheme, tako je bio slobodan i svijet njegovih misli, koje su izlazile neposredno i isključivo iz obilja njegovih eksperimentalnih iskustava. Mi smo razmotrili njegova istraživanja o elektrolitskom rastvaranju. Njegova metoda, da na sve načine mijenja uvjete pokusa, dovela ga je do toga, da između metalnih ploča (elektroda) u elektrolitskoj ćeliji umjesto vodljive tekućine (kiseline, rastopine soli) stavi tekućine, kao petrolej ili terpentin, koje ne vode struju. Ove se ne rastvaraju, ali ipak nisu bez utjecaja na električki proces. Pokazuje se, da metalne ploče, ako ih nabijamo iz galvanske baterije, primaju sasvim različite naboje, prema tvari, koja je među njima (sl. 85). Nevodljiva tvar utječe dakle na sposobnost primanja ili *kapacitet* sustava vodiča, koji se sastoji iz tih dviju ploča, a zovemo ga *kondenzator*.



Sl. 85.

Ovo se otkriće Faradaya toliko dojmilo, da je napustio dotadanje predodžbe elektrostatike o neposrednom djelovanju električkih naboja u daljinu i razvio novo shvaćanje električkih i magnetskih pojava, koje se može označiti teorijom djelovanja nablizu. Iz spomenutog pokusa je naučio, da naboji na pločama ne djeluju jednostavno jedan na drugi kroz prostor, koji je između njih, nego da je bitan medij, koji se nalazi u tom prostoru. Zaključio je iz toga, da se djelovanje širi kroz taj medij od mjesta do mjesta, da je dakle djelovanje nablizu.

Poznajemo djelovanje nablizu elastičnih sila u deformiranim čvrstim tjelesima. Faraday, koji se uvijek držao empirijskih činjenica, uspoređivao je doduše električko djelovanje nablizu u izolatorima s elastičnim naponima, ali se čuvao toga, da njihove zakone prenese na električke pojave. On se služio slikom »*silnica*«, koje se protežu u smjeru jakosti električnog polja od pozitivnih naboja kroz izolator do negativnih. U slučaju pločastog kondenzatora te su silnice pravci okomiti na ravninama ploča (sl. 86). Faraday smatra silnice pravim supstratom električkih procesa, one su za njega upravo materijalne tvorevine, koje se gibaju i deformiraju i tako proizvode električke efekte. Naboji su kod



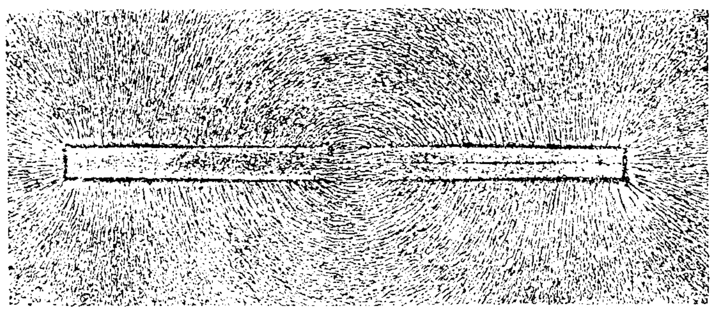
Sl. 86.

Faradaya podređene važnosti, kao mjesta, gdje silnice izviru ili poniru. To shvaćanje potkrijepili su mu pokusi, koji dokazuju, da se u vodičima sav električni naboj nalazi na površini, dok ih u nutrašnjosti nema. Da se to drastično pokaže, sagradio je veliku škrinju obloženu kovinom, u koju je ušao zajedno s osjetljivim električkim instrumentima. Onda je dao škrinju jako nabiti i ustanovio je, da se u nutrašnjosti ne opaža ni najmanji utjecaj naboja. Mi smo prije (V. 1) upravo tu činjenicu upotrebili za izvođenje Coulombova zakona djelovanja u daljinu. No F a r a d a y je iz nje zaključio, da naboj nije ono primarno kod električkog procesa, i da si ga ne smijemo predočiti kao fluid, koji djeluje u daljinu. Primarnim on smatra stanje napetosti u električkim poljima u izolatorima, koje je predočeno slikom silnica. Vodiči su u neku ruku rupe u električnom polju, a naboji na njima samo su fiktivni pojmovi, izmišljeni u tu svrhu, da se sile tlaka i vlaka, koje proizvode napetosti električnoga polja, mogu rastumačiti kao djelovanja u daljinu. U izolatore ili dielektričke supstancije spada i *vakuum, eter*, koji nam se ovdje opet javlja u novom ruhu.

Ovo neobično shvaćanje Faradayevo isprva nisu prihvatili fizičari i matematičari njegova vremena. Ostali su kod shvaćanja djelovanja u daljinu, a to se dalo provesti uzimajući u obzir i »dielektričko« djelovanje izolatora, otkriveno po Faradayu. Trebalo je samo nešto promijeniti Coulombov zakon. Svakom nevodiču pripada jedna konstanta ε, njegova *dielektrička konstanta*, koja je definirana time, da je sila naboja e_1, e_2, koji su uronjeni u nevodič, $1 : \varepsilon$ puta manja nego u vakuumu:

$$K = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e_1 e_2}{r^2} . \tag{56}$$

Za vakuum je ε jednak 1, za svako drugo tijelo ε je veći od 1. Polazeći odatle zaista su se mogli rastumačiti svi pojavi elektrostatike, i ako



Sl. 87.

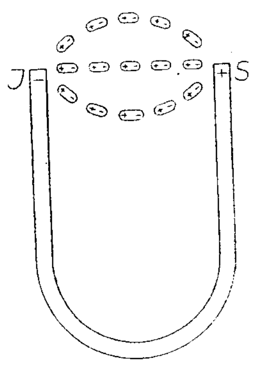
se uzmu u obzir dielektrička svojstva izolatora. Već smo prije rekli, da je elektrostatika formalno već dugo prešla u pseudo-teoriju nablizu, u t. zv. teoriju potencijala, i ta je lako mogla asimilirati dielektričku konstantu ε. Danas znamo, da je time zapravo već bila dobivena matematička formulacija Faradayevih silnica. No kako se ta metoda potencijala smatrala samo matematičkom doskočicom, ostala je nepomirena opreka između klasične teorije djelovanja u daljinu i Faradayeve predodžbe djelovanja nablizu.

Sasvim analogna shvaćanja razvio je Faraday za magnetizam. Otkrio je, da i sile između dvaju magnetskih polova ovise o tome, kakav je medij između njih, i opet je došao do mišljenja, da su magnetske sile kao i električne, izazvane posebnim stanjem napetosti u mediju. Za predočivanje tih napetosti služio se silnicama, koje se mogu učiniti upravo vidljivim tako, da se arak papira pospe željeznom pilovinom i stavi iznad magneta (sl. 87).

Teorija djelovanja u daljinu uvodi formalno jednu konstantu karakterističnu za supstanciju, magnetsku propustljivost ili *permeabilitet* μ, i piše Coulombov zakon u promijenjenom obliku:

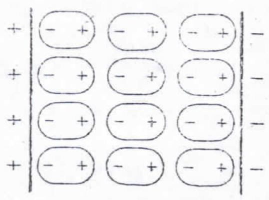
$$K = \frac{1}{\mu} \frac{p_1 p_2}{r^2} . \tag{57}$$

No nije se stalo kod te formule, nego je izmišljen molekularan mehanizam, koji tumači mogućnost magnetskog i dielektričnog polariziranja. Već smo prije vidjeli, da nas svojstva magneta navode na predodžbu, da su molekule mali elementarni magneti, koji se kod procesa magnetiziranja postave paralelno. Pri tom se pretpostavlja, da sami ostaju u tom paralelnom položaju, možda zbog otpora trenja. Može se smatrati, da kod većine tjelesa, koja se ne pokazuju kao permanentni magneti, nema toga trenja. I tu će vanjsko magnetsko polje proizvesti paralelni položaj, ali će ga odmah nestati, čim se polje ukloni. Takva supstancija bit će dakle samo tako dugo magnet, dok postoji vanjsko magnetsko polje. No ne treba ni pretpostaviti, da su molekule permanentni magneti, koji se postavljaju paralelno. Ako svaka molekula sadrži oba magnetska fluida, ti će se fluidi pod djelovanjem polja rastaviti i molekula sâma postat će magnet. Ovako inducirani magnetizam mora imati baš ono djelovanje, koje formalna teorija opisuje uvođenjem permeabiliteta. Između dvaju magnetskih polova (S, J) u takvu mediju stvaraju se lanci molekularnih magneta, kojima se suprotni polovi u nutrašnjosti svagdje kompenziraju, ali se kod S i J svršavaju s protivnim polovima i stoga slabe djelovanje polova S i J (sl. 88). (Postoji uostalom i obrnuti efekt pojačavanja; ne ulazimo ovdje u njegovo tumačenje).



Sl. 88.

Isto, što smo ovdje objasnili za magnetizam, može se zamisliti i za elektricitet. Dielektrik sastoji se po tome iz molekula, koje su ili same električni dipoli te se postavljaju paralelno pod djelovanjem vanjskoga polja, ili im polje rastavlja pozitivni i negativni elektricitet, pa tako postaju dipoli. Između dviju ploča kondenzatora stvaraju se opet lanci molekula (sl. 89), kojima se naboji u nutrašnjosti kompenziraju, ali se ne kompenziraju na pločama. Time se ukida jedan dio naboja samih ploča, pa treba pločama dovesti nov naboj, da ih se nabije na izvjestan napon. Tako se objašnjava, da dielektrik polariziranjem povisuje kapacitet kondenzatora.



Sl. 89.

Po toj predodžbi teorije na daljinu djelovanje dielektrika je dakle posredno. Polje u vakuumu samo je apstrakcija i znači geometrijsku razdiobu sile, koja bi djelovala na električno pokusno tjelešce naboja 1. Polje u dielektriku, naprotiv, povezano je s pravom fizičkom promjenom, s molekularnim pomakom elektriciteta.

Faradayeva teorija djelovanja nablizu ne poznaje takve razlike između polja u eteru i u tvari, koja izolira: jedno i drugo su dielektrici. Za eter je dielektrička konstanta $\varepsilon = 1$, za druge izolatore ona je različita od 1. Ako je ispravna zorna slika električkog pomaka u tvarima, mora ona vrijediti i za eter. Ta je misao značajna u Maxwellovoj teoriji, koja u stvari i nije drugo, nego prijevod Faradayeve predodžbe silnica u egzaktni jezik matematike. Maxwell pretpostavlja, da je i u eteru nastajanje električnog ili magnetskog polja popraćeno »pomacima« fluida. Ne treba doduše zato eter zamišljati atomistički konstituiran, ali Maxwellova je ideja ipak najjasnija, ako sebi predočimo molekule etera, koje, kao materijalne molekule, u polju postaju dipoli. No polje nije **uzrok** te polarizacije, nego je u pomaku *bit* stanja napetosti, koje zovemo električnim poljem. Lanci molekula etera *jesu* silnice, a naboji na površinama vodiča *jesu* krajnji naboji tih lanaca. Ako osim djelića etera ima i materijalnih molekula, polarizacija se pojačava i naboji su na krajevima veći.

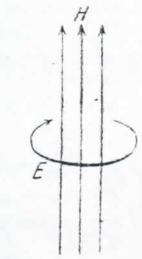
Jesu li dakle ispravne predodžbe Faradayeve i Maxwellove, ili predodžbe teorije djelovanja u daljinu?

Dok se krećemo u krugu elektrostatičkih i magnetostatičkih pojava, oba su naziranja potpuno ekvivalentna. Matematički je izraz Faradayevih misli naime ono, što smo zvali pseudoteorijom djelovanja nablizu, jer ona doduše operira diferencijalnim jednadžbama, ali ne poznaje konačne brzine širenja napetosti. No Faraday i Maxwell sami su otkrili one procese, koji, analogno tromosti u mehanici, uzrokuju usporenje prenošenja elektromagnetskog stanja od mjesta do mjesta i time konačnu brzinu širenja. To su magnetska indukcija i struja pomaka.

6. Magnetska indukcija

Pošto je Oersted otkrio, da električna struja proizvodi magnetsko polje, a Biot i Savart su tu činjenicu formulirali kao djelovanje u daljinu, našao je **Ampère** (1820), da dvije galvanske struje djeluju uzajamno silama, i opet mu je uspjelo izraziti zakon toga pojava u jeziku teorije djelovanja u daljinu. To je otkriće imalo dalekosežne posljedice, jer se sada mogao magnetizam svesti na elektricitet. Ampère smatra, da u tjelesima, koja se daju magnetizirati, teku male, zatvorene struje. Pokazao je, da se takve struje vladaju točno kao elementarni magneti. Uspjeh je te zamisli bio vrlo dobar. Odsada su magnetski fluidi suvišni, postoji samo elektricitet, koji, kada miruje, stvara elektrostatičko polje, a kada struji, povrh toga i magnetsko polje. Ampèreovo otkriće može se izreći i ovako: žica, kojom teče struja J_1, stvara po Oerstedu u svojoj okolini magnetsko polje. Na drugu žicu, kojom teče struja J_2, djelovat će u tom magnetskom polju sile. Magnetsko polje dakle očito otklanja ili ubrzava elektricitet u strujanju.

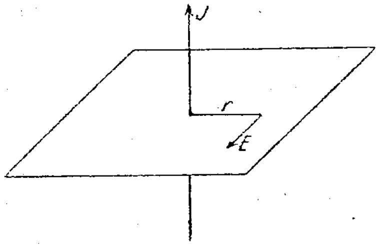
Nameće se pitanje: zar ne može magnetsko polje pokrenuti i elektricitet, koji miruje? Zar ne može u drugoj žici, u kojoj nema struje, proizvesti ili »inducirati« strujanje? Na ovo pitanje odgovorio je **Faraday** (1831). On je našao, da statičko magnetsko polje nema sposobnost da proizvede struju. No struja nastaje, čim se magnetsko polje mijenja. Kad je on primjerice magnet iznenada približio zatvorenoj žici, u žici je tekla struja, dok je trajalo gibanje. Ili, kad je magnetsko polje proizveo primarnom strujom, nastao je u drugoj, sekundarnoj žici kratak impuls struje svaki puta, kada se prva struja uklapala ili isklapala.



Sl. 90

Iz toga izlazi, da inducirana električna sila ovisi o brzini mijenjanja magnetskoga polja. Faraday je uspio pomoću svojih silnica formulirati kvantitativni zakon toga pojava. Dat ćemo tom zakonu takav oblik, da se jasno očituje njegova analogija s Biot-Savartovim zakonom. Zamislimo svežanj paralelnih magnetskih silnica, koje tvore magnetsko polje H. Oko njih neka je položena kružna žica (sl. 90). Mijenja li se jakost polja H u malenom vremenu t za $\mathfrak{H}$, zvat ćemo $\frac{\mathfrak{H}}{t}$ brzinom njezina mijenjanja ili promjenom broja silnica. Predočimo li silnice kao lance magnetskih dipolova (što zapravo po Ampèreu nije dopušteno), to će kod promjene magnetskoga polja H u svakoj molekuli etera nastati pomak magnetskih količina, ili »magnetska struja pomaka«, kojoj je jakost struje po jedinici plohe ili gustoća struje dana formulom $j = \frac{\mathfrak{H}}{t}$. Ako polje H nije u eteru, nego u supstanciji permeabiliteta μ, gustoća je magnetske struje pomaka $j = \mu \frac{\mathfrak{H}}{t}$. Kroz presjek q, t. j. kroz plohu kruga, koji tvori provodna žica, prolazi dakle magnetska struja $J = qj = q\mu \frac{\mathfrak{H}}{t}$.

Ova magnetska struja po Faradayu stvara oko sebe električno polje E, koje opkoljuje magnetsku struju isto onako, kao magnetsko polje H električnu struju kod Oerstedova pokusa, samo u obrnutom smislu. Ovo električno polje E tjera induciranu struju u provodnoj žici. To polje postoji i onda, kad nema provodne žice, u kojoj bi mogla nastati struja. Vidi se, da je magnetska indukcija Faradayeva sasvim analogna elektromagnetskom otkriću Oerstedovu. I kvantitativni zakon je isti. Tamo je po Biotu i Savartu magnetsko polje stvoreno elementom struje duljine l i jakosti struje J (sl. 84), u simetralnoj ravnini okomitoj na elementu okomito na spojnici r i na smjeru struje i ima veličinu $H = \frac{Jl}{cr^2}$ [formula (55)]. Ovdje vrijedi isto, ako se električke i magnetske veličine izmijene i uz to obrne smisao vrtnje (sl. 91). Inducirana jakost električnog polja dana je formulom $E = \frac{Jl}{cr^2}$.



Sl. 91.

Kod toga se javlja ista konstanta c, omjer elektromagnetski i elektrostatički mjerene jedinice struje, za koju su Weber i Kohlrausch našli, da je jednaka brzini svjetlosti. Da tome mora biti tako, može se uostalom uvidjeti i na temelju energetičkih razmatranja.

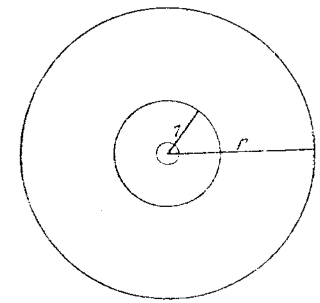
Na zakonu indukcije osniva se velik dio fizičkih i tehničkih primjena elektriciteta i magnetizma. Transformator, induktor, dinamo stroj i nebrojeni drugi aparati i strojevi su naprave, u kojima se izmjeničnim magnetskim poljima induciraju električne struje. No kakogod te stvari bile zanimljive, one se ne nalaze na putu, koji nas treba dovesti do istraživanja etera u vezi s problemom prostora. Prelazimo stoga odmah na izlaganje Maxwellove teorije, kojoj je bio veliki cilj, da sve poznate elektromagnetske pojave obuhvati u jedinstvenoj teoriji djelovanja nablizu u Faradayevu smislu.

7. Maxwellova teorija djelovanja nablizu

Već smo prije kazali, da su matematičari, uskoro poslije postavljanja Coulombova zakona, elektrostatiku i magnetostatiku doveli u oblik pseudo-teorije djelovanja nablizu. Maxwellova zadaća je bila, da ovu stopi s predodžbama Faradayevim i tako je izgradi, da obuhvati novo otkrivene pojave dielektričke i magnetske polarizacije, elektromagnetizma i magnetoindukcije.

Maxwell stavlja na čelo svoje nauke već prije spomenutu predodžbu, da je električno polje E uvijek popraćeno električnim pomakom εE, ne samo u tvari, gdje je ε veći od 1, nego i u eteru, gdje je $\varepsilon = 1$. Već smo gore izložili, kako se taj pomak može zorno shvatiti kao rastavljanje i strujanje električnih fluida u molekulama.

Prvo, što je Maxwell ustanovio, jest činjenica, da na temelju predodžbe pomaka Coulombov zakon u stvari nije ništa drugo, nego posljedica zakona o neuništivosti elektriciteta. Zamislimo metalnu kuglu uronjenu u medij dielektričke konstante ε (sl. 92). Konstruirajmo kuglu polumjera 1 i drugu kuglu polumjera r. Neka se metalna kugla nabije količinom elektriciteta $+e$. Prema Maxwellu mora u svakoj molekuli dielektrika nastati pomak pozitivnog elektriciteta prema vani, da bi količina elektriciteta sadržana u bilo kojem volumenu ostala konstantna. Količina elektriciteta pomaknuta kroz površinu kugle polumjera 1 po Maxwellu treba da je mjerena sa εE. Kroz svaku koncentričnu kuglu proći će ista količina elektriciteta, jer bi se inače u dielektriku nakupili naboji. Površine dviju kugala odnose se kao kvadrati polumjera, tako da kroz kuglu polumjera r prolazi množina elektriciteta $r^2\varepsilon E$. Ta mora biti jednaka naboju e metalne kugle, na kojoj se pomak svršava. Vrijedi dakle $r^2\varepsilon E = e$ ili:



Sl. 92.

$$E = \frac{e}{\varepsilon r^2}.$$

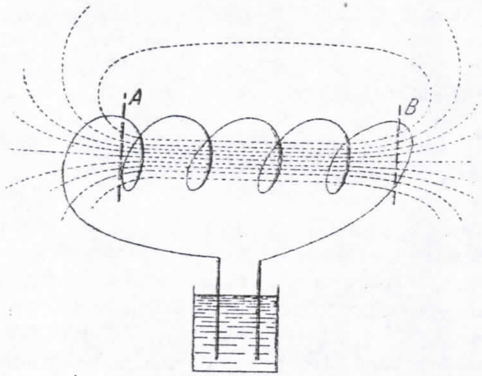
No to je Coulombov zakon u poopćenom obliku (56). E je sila, kojom naboj e djeluje na jedinicu naboja u udaljenosti r.

Ne radi li se o kuglama, nego o bilo kakvima nabijenim tjelesima, temeljna misao Maxwellova ostaje ista: polje je određeno uvjetom, da pomak εE elektriciteta u dielektriku prema vani, ili »divergencija« od εE (div εE) kroz bilo kako malenu zatvorenu plohu upravo kompenzira naboje u nutrašnjosti plohe. Označimo li naboj na jedinicu volumena ili *gustoću naboja* elektriciteta sa ρ, možemo simbolički pisati

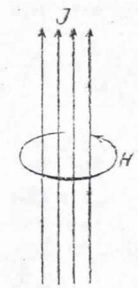
$$\text{div}\ \varepsilon E = \rho. \tag{58}$$

Ovo neka nam je samo pomoć za pamćenje ovoga zakona. No Maxwell je pokazao, da se za pojam divergencije može izvesti i jedan diferencijalni izraz. Zato formula (58) za matematičara znači diferencijalnu jednadžbu, zakon djelovanja nablizu.

Točno ista razmatranja vrijede za magnetizam, samo s jednom važnom razlikom: po Ampèreu nema pravih magneta, nema magnetskih količina, nego samo elektromagneta. Magnetsko je polje uvijek proizvedeno električnim strujama, bile to provodne struje u žicama ili molekularne struje u molekulama. Iz toga izlazi, da magnetske silnice nigdje ne svršavaju, dakle ili su same u sebi zatvorene ili se gube u neizmjernosti. Tako je to kod elektromagneta, svitka, kojim prolazi struja (sl. 93). Magnetske silnice prolaze pravocrtno kroz nutrašnjost svitka, dijelom se vani zatvaraju, dijelom idu u neizmjernost. Zamislimo li svitak zatvoren dvjema ravninama A, B, upravo će toliko »magnetskog pomaka« μH ulaziti kroz A, koliko izlazi kroz B. Uostalom, budući da ovdje slika pomaka dobro ne pristaje, kaže se obično »magnetska indukcija« mjesto pomak. U bilo koju zatvorenu plohu uvijek će ulaziti isto toliko silnica, koliko ih iz nje izlazi, ili ukupna »divergencija« magnetizma kroz bilo koju zatvorenu plohu jednaka je nuli:



Sl. 93.



Sl. 94.

(59) $$\operatorname{div} \mu H = 0.$$

Ovo je Maxwellova formula djelovanja nablizu za magnetizam.

Prelazimo sada na Biot-Savartov zakon elektromagnetizma. Da ga pretvorimo u zakon djelovanja nablizu, zamislimo električnu struju, ali ne u tankoj žici, nego jednoliko razdijeljenu preko kružnog presjeka q s gustoćom $i = \frac{J}{q}$, i pitajmo, kakva je jakost magnetskog polja H na rubu presjeka (sl. 94). Po Biotu i Savartu ona ima svagdje smjer tangente na kružnicu i po formuli (55) joj je veličina $H = \frac{Jl}{cr^2}$, gdje je r polumjer kružnice, a l duljina elementa struje. Presjek, površina kruga, jednak je πr^2, pa se formula (55) može pisati $\frac{cH}{\pi l} = \frac{J}{\pi r^2} = \frac{J}{q} = i$, a to vrijedi za bilo kako malen presjek i bilo kako malenu duljinu l. Lijevo dakle stoji neka diferencijalna veličina magnetskog polja, a zakon kaže, da je ona razmjerna s gustoćom struje. Ne možemo ovdje točno ispitati taj diferencijalni izraz. U njemu se uzima u račun ne samo veličina, nego i smjer magnetskog polja, a kako se to polje rotatorno ovija oko

smjera struje, zove se ta diferencijalna operacija »rotacija« (ili »rotor«) polja H (rot H). Pišemo stoga simbolički

(60) $$c \operatorname{rot} H = i$$

i opet smatramo ovu formulu samo kao pomoć za pamćenje veze između smjera i veličine magnetskog polja H i gustoće struje i. Za matematičara je to diferencijalna jednadžba slične vrsti kao zakon (58).

Sasvim isto vrijedi i za magnetoindukciju, samo ćemo promijeniti predznak, da naznačimo obrnuti smisao vrtnje:

(61) $$c \operatorname{rot} E = -j.$$

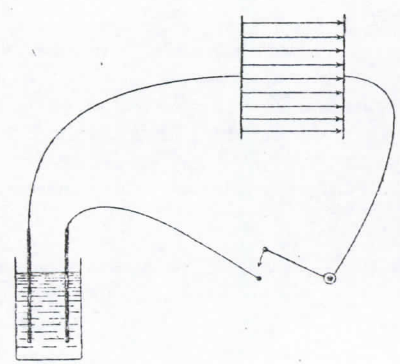
Četiri simboličke formule (58) do (61) čudesno su simetrične. Takva formalna ljepota nipošto nije bez važnosti. U njoj se otkriva jednostavnost prirodnog zbivanja, koja zbog ograničenosti naših osjetila izmiče direktnom zoru i samo se očituje razumu, koji raščlanjuje.

8. Struja pomaka

Ova simetrija ipak još nije savršena. Jer i znači gustoću električne provodne struje, dakle transport električnih naboja na konačne udaljenosti, dok je j vremenska promjena magnetskog polja i samo se na temelju dosta umjetne hipoteze o dipolima etera može tumačiti kao struja pomaka.

Maxwell je primijetio (1864), da se ono, što vrijedi za magnetsko polje, mora dopustiti i za električno. Predodžba o dipolima sili nas, da uzmemo da postoji i *dielektrička struja pomaka,* koja teče u izolatorima, kada se mijenja električno polje E. Uzmemo li, da je e promjena od E u vremenu t, gustoća je dielektričke struje pomaka jednaka $\varepsilon \frac{e}{t}$.

Ta Maxwellova teorija, koja u našem izlaganju izgleda gotovo trivijalna, od najveće je važnosti, jer je ona postala ključ elektromagnetske teorije svjetlosti. Razjasnit ćemo njen smisao na konkretnu slučaju. Polovi galvanske ćelije neka su spojeni dvjema žicama s pločama kondenzatora. U jednoj od tih žica neka je sklopka (sl. 95). Uklopimo li je, teći će kratka struja, koja nabija ploče kondenzatora. Pri tome nastaje između njih električno polje E. Prije Maxwella shvaćao se taj proces kao »otvorena« struja. No



Sl. 95.

Maxwell veli, da za vrijeme porasta polja E između ploča kondenzatora teče struja pomaka, koja nadopunjuje provodnu struju, tako da je nastala zatvorena struja. Čim su ploče kondenzatora nabijene, obje struje prestaju.

Bitno je kod toga, da Maxwell tvrdi, da struja pomaka proizvodi magnetsko polje po Biot-Savartovu zakonu, isto tako kao provodna struja. Da je tomu tako, dokazuju uspjesi Maxwellove teorije ispravnim proricanjem brojnih pojava, a kasnije je uspjelo provesti i izravan eksperimentalan dokaz.

U poluvodiču postojat će u isto vrijeme provodna struja i struja pomaka. Za prvu vrijedi Ohmov zakon (53) $i = \sigma E$, za drugu Maxwellov $i = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}}{t}$; kada postoje obje zajedno, bit će dakle $i = \varepsilon \frac{\mathfrak{E}}{t} + \sigma E$. Za magnetizam nema provodne struje, uvijek je dakle $j = \mu \frac{\mathfrak{H}}{t}$. Uvrstimo li to u naše simboličke jednadžbe (58) do (61), izlazi:

$$(62) \qquad \begin{array}{ll} \text{a) } \operatorname{div} \varepsilon E = \varrho, & \text{c) } c \operatorname{rot} H - \varepsilon \frac{\mathfrak{E}}{t} = \sigma E, \\ \text{b) } \operatorname{div} \mu H = 0, & \text{d) } c \operatorname{rot} E + \mu \frac{\mathfrak{H}}{t} = 0. \end{array}$$

To su *Maxwellovi zakoni*, koji su do danas ostali temelj svih elektromagnetskih i optičkih teorija. Za matematičara su to izvjesne diferencijalne jednadžbe. Za nas su kratka pravila za pamćenje, koja kažu:

a) gdje se pojavljuje električni naboj, nastaje električno polje takve vrsti, da se u svakom volumenu naboj upravo kompenzira pomakom.

b) u svaku zatvorenu plohu ulazi isto toliko magnetskoga pomaka, koliko iz nje izlazi.

c) oko električne struje, bila to provodna struja ili struja pomaka, ovija se magnetsko polje.

d) oko magnetske struje pomaka ovija se električno polje u obrnutom smislu.

Maxwellove *»jednadžbe polja«*, kako ih zovemo, prava su teorija djelovanja nablizu, jer one daju, kako ćemo odmah vidjeti, konačnu brzinu širenja elektromagnetskih sila.

U vrijeme, kada su te jednadžbe bile postavljene, bilo je vjerovanje u neposredno djelovanje u daljinu po shemi Newtonova privlačenja još tako ukorijenjeno, da je trajalo dosta dugo, dok su bile prihvaćene. Jer i teoriji je djelovanja na daljinu uspjelo da obuhvati formulama pojave indukcije. Trebalo je za to pretpostaviti, da naboji u gibanju osim Coulombova privlačenja vrše još druga djelovanja u daljinu, koja ovise o veličini i smjeru brzine. Prve postavke te vrsti dao je N e u m a n n (1845). Osobito je znamenit zakon, koji je postavio W i l h e l m W e b e r (1846). Slične su formule dali R i e m a n n (1858) i C l a u s i u s (1877). Svima je tim teorijama zajedničko, da se sva električka i magnetska djelovanja tumače kao sile između elementarnih električnih naboja, ili, kako danas kažemo, »elektrona«. Radi se dakle o preteči današnje teorije elektrona, pri čemu, istina, nedostaje bitna

okolnost: konačna brzina širenja sila. Ove teorije djelovanja u daljinu u elektrodinamici dale su potpuno tumačenje sila i struja indukcije, koje se javljaju kod zatvorenih provodnih struja. No kod »otvorenih« vodova, t. j. kod nabijanja i izbijanja kondenzatora, nisu mogle zadovoljiti; jer kod toga ulazi u račun struja pomaka, o kojoj teorije djelovanja u daljinu ništa ne znaju. H e l m h o l t z je osobito zaslužan zbog toga, što je nastojao prikladnim pokusima postići odluku između teorije djelovanja u daljinu i teorije djelovanja nablizu. Do izvjesne mu je mjere to i uspjelo, a on sam je postao jedan od najrevnijih boraca za Maxwellovu teoriju. No tek joj je njegov učenik H e r t z osigurao pobjedu svojim otkrićem elektromagnetskih valova.

9. Elektromagnetska teorija svjetlosti

Već smo prije govorili o dojmu, koji je proizvelo na istraživaoce onoga vremena podudaranje elektromagnetske konstante c s brzinom svjetlosti, koje su ustanovili Weber i Kohlrausch. No i druge su činjenice upućivale na to, da mora postojati uska veza između svjetlosti i elektromagnetskih procesa. Najjače to pokazuje otkriće F a r a d a y e v o (1834), da magnetizirano tijelo utječe na polariziranu zraku svjetlosti, koja njime prolazi. Ako je zraka paralelna s magnetskim silnicama, njegova se ravnina polarizacije zakreće. Sam je Faraday iz toga zaključio, da svjetlosni eter i nosilac elektromagnetskih silnica moraju biti identični. Premda nije bio dovoljno matematičar, da svoje predodžbe pretvori u kvantitativne zakone i formule, ipak je njegov svijet misli bio vrlo apstraktan i nimalo nije bio vezan na uske granice trivijalnog zora, po kojemu se ono smatra poznatim, na što smo navikli. Faradayev eter nije bio elastični medij, nije dobivao svoja svojstva iz analogija s *prividno* poznatim materijalnim svijetom, nego iz egzaktnih eksperimenata i iz *zaista* poznatih veza, koje iz njih izviru. Maxwell je nastavio Faradayevo djelo. Njegov je dar bio sličan Faradayevu, ali je on uz to potpuno vladao matematičkim sredstvima svojega vremena.

Sada ćemo objasniti, kako iz Maxwellovih zakona polja (62) izlazi širenje elektromagnetskih sila konačnom brzinom. Ograničit ćemo se na procese u vakuumu ili eteru, koji nema vodljivosti, t. j. za koji je $\sigma = 0$, nema pravih naboja, pa je $\varrho = 0$, a dielektrička konstanta i permeabilitet su mu jednaki 1, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Onda prve dvije jednadžbe polja (62):

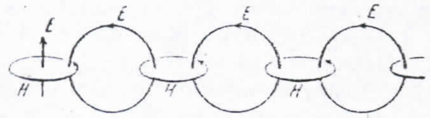
$$(63) \qquad \operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} H = 0,$$

znače, da su sve silnice zatvorene ili se gube u neizmjernosti. Da dobijemo ma i grubu sliku procesâ, zamislit ćemo pojedine, zatvorene silnice.

Druge dvije jednadžbe polja glasit će onda:

$$(64) \qquad \frac{\mathfrak{E}}{t} = c \operatorname{rot} H, \qquad \frac{\mathfrak{H}}{t} = -c \operatorname{rot} E.$$

Pretpostavimo, da negdje u ograničenom prostoru postoji električno polje E, koje se u malenom vremenu t promijeni za $\mathfrak{e}$; $\frac{\mathfrak{e}}{t}$ je tada brzina mijenjanja. Po prvoj se jednadžbi oko toga polja odmah ovije magnetsko polje, koje je razmjerno s brzinom mijenjanja $\frac{\mathfrak{e}}{t}$. I ovo će se polje vremenski mijenjati, i to u daljem malenom vremenskom razmaku t za veličinu $\mathfrak{h}$. Njegova brzina mijenjanja $\frac{\mathfrak{h}}{t}$ inducira po drugoj jednadžbi odmah električno polje, koje ga ovija. U daljem malenom vremenskom razmaku ovo opet po prvoj jednadžbi stvara magnetsko polje, koje ga ovija, i tako se proces nastavlja poput lanca konačnom brzinom (sl. 96). Ovo je naravno samo vrlo grub opis stvarno neprekinutog procesa, koji se širi na sve strane. Kasnije ćemo dati bolju sliku.



Sl. 96.

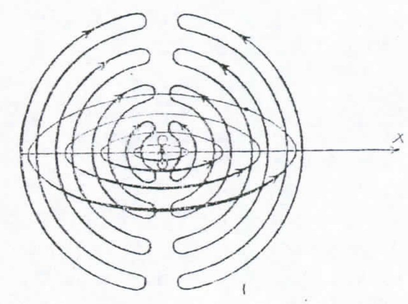
Osobito nas ovdje zanima ovo: znamo iz mehanike, da se konačna brzina širenja elastičnih valova osniva na usporenjima, koje nastaju zbog tromosti masa kod prijenosa sila od točke do točke u tijelu. Tromost masa određuje se ubrzanjem, a to je brzina mijenjanja brzine. Vrijedi $b = \frac{w}{t}$, gdje je w promjena brzine $v = \frac{x}{t}$ u malenom vremenu t. Usporenje se dakle osniva na *dvokratnom* diferenciranju.

Ista je stvar i ovdje. Najprije brzina mijenjanja $\frac{\mathfrak{e}}{t}$ električnog polja određuje magnetsko polje H, onda njegova brzina mijenjanja $\frac{\mathfrak{h}}{t}$ određuje električno polje na susjednom mjestu. Pomicanje električnog polja za sebe vezano je dakle uz dvokratno diferenciranje po vremenu, dakle uz tvorbu analognu ubrzanju. Jedino na tome se osniva postojanje elektromagnetskih valova. Da se jedno od tih djelovanja razvija bez trajanja, ne bi došlo do valovitog širenja električne sile. Ovdje se vidi važnost Maxwellove struje pomaka, jer ona je baš brzina mijenjanja $\frac{\mathfrak{e}}{t}$ električnog polja.

Dajemo još sliku širenja elektromagnetskog vala, koja je nešto bliža stvarnosti. Dvije metalne kugle neka nose jake protivno jednake naboje $+e$ i $-e$, tako da među njima postoji jako električno polje. Neka među kuglama preskoči iskra. Naboji se izjednače, električno polje nestaje velikom brzinom mijenjanja $\frac{\mathfrak{e}}{t}$. Slika pokazuje, kako se onda izmjenice ovijaju magnetske i električne silnice (sl. 97). Pri tome su magnetske silnice crtane samo u simetralnoj ravnini između kugala, električne silnice samo u ravnini slike, koja je na to okomita. Cijelu sliku treba naravno zamisliti s rotacionom simetrijom oko spojnice kugala. Svaka dalja silnica u obliku petlje slabija je od prednašnje, jer se

nalazi dalje vani, pa im veći opseg. Stoga nutrašnji dio jedne petlje električne sile ne ukida sasvim vanjski dio prednašnje, tim više, što djeluje nešto kasnije.

Slijedimo li proces uzduž pravca okomitog na spojnici kuglinih središta, primjerice uzduž osi x, vidimo, da su na nju električne i magnetske sile uvijek okomite, a i međusobno su okomite. Isto uostalom vrijedi za svaki smjer širenja. Elektromagnetski val je dakle strogo transverzalan. Osim toga je polariziran, ali još možemo birati, hoćemo li jakost električnog ili magnetskog polja smatrati bitnim za titranje.



Sl. 97.

Ne može se ovdje dokazati, da je brzina širenja upravo jednaka konstanti c, koja se pojavljuje u formulama. Ipak je to shvaćanje blisko, jer znamo, da c ima dimenziju brzine. Po Weberu i Kohlrauschu veličina konstante c jednaka je brzini svjetlosti, pa tako je Maxwell mogao zaključiti, da *valovi svjetlosti nisu drugo nego elektromagnetski valovi.*

Jedan od zaključaka, koje je Maxwell izveo, uskoro je u izvjesnom opsegu eksperimentalno potvrđen. On je izračunao brzinu svjetlosti c_1 u izolatoru, koji se ne da primjetno magnetizirati ($\mu = 1$, $\sigma = 0$). Ta brzina može ovisiti osim o konstanti c još samo o dielektričkoj konstanti ε, jer je to za $\mu = 1$, $\sigma = 0$ jedina konstanta, koja se još pojavljuje u formulama (62). Maxwell je našao $c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$. Iz toga izlazi za indeks loma $n = \frac{c}{c_1} = \sqrt{\varepsilon}$.

Moralo bi dakle biti moguće odrediti lom svjetlosti iz dielektričke konstante, koja se može odrediti čisto električnim mjerenjima. Za neke plinove, na pr. vodik, ugljični oksid, zrak, zaista je tako, što je L. Boltzmann (1874) pokazao. Za druge supstancije Maxwellova relacija $n = \sqrt{\varepsilon}$ nije ispravna, ali onda indeks loma nije konstantan, nego ovisi o boji (broju titraja) svjetlosti. Ovdje dakle smeta rasipanje po bojama ili *disperzija* svjetlosti. Mi ćemo se kasnije na to osvrnuti s gledišta teorije elektrona. Svakako je jasno, da će se statički mjerena dielektrička konstanta to bolje slagati s kvadratom indeksa loma, što su polaganiji titraji, ili što su dulji valovi svjetlosti, kojom se služimo. Neizmjerno polagani titraji identični su sa statičkim stanjem. Istraživanje područja duljih valova svjetlosnih i toplinskih zraka po Rubensu potpuno je potvrdilo Maxwellovu formulu.

Što se tiče više geometrijskih zakona optike, kao što su refleksija, lom, dvolom i polarizacija u kristalima i t. d., u elektromagnetskoj teoriji svjetlosti nestaju sve teškoće, koje su za teorije elastičnog etera bile gotovo nesavladive. Tamo je prije svega smetalo postojanje longitudinalnih valova, koji su se morali pojaviti kod prolaza svjetlosti kroz graničnu plohu dvaju medija, i samo su se mogli ukloniti najnevjerojatnijim hipotezama o konstituciji etera. Elektromagnetski valovi uvijek su strogo transverzalni. Time otpada ova poteškoća. Formalno je Maxwellova teorija gotovo identična s teorijom Mac Cullaghovom, koju smo prije (IV, 6) spomenuli. Većina zaključaka može se prenijeti bez ponovnog računa.

Ne možemo ovdje izložiti dalji razvoj elektrodinamike. Veza između svjetlosti i elektromagnetizma postaje sve uža. Sve više pojava je otkriveno, koji pokazuju utjecaj električnih i magnetskih polja na svjetlost. Sve se podvrgavalo Maxwellovim zakonima, koji su se smatrali sve sigurnijim.

No neodoljiv dokaz za jedinstvo optike i elektrodinamike dao je Heinrich Hertz (1888), kad je dokazao konačnost brzine širenja elektromagnetskih sila i zaista proizveo elektromagnetske valove. On je stvarao iskre između dviju nabijenih kugala i time proizveo valove, kako ih pokazuje naša slika (sl. 97). Kad su pogodili kružnu žicu, koja je imala malen prekid, izazvali su u njoj struje, koje su se mogle motriti zbog malih iskrica na prekidu žice. Hertzu je uspjelo da te valove reflektira i da ih dovede do interferencije. Time je mogao mjeriti njihovu duljinu vala i izračunati im brzinu, koja se pokazala jednakom brzini svjetlosti *c*. Maxwellova hipoteza je dakle bila neposredno potvrđena. Danas se Hertzovi valovi velikih stanica za bežičnu telegrafiju stalno šire po zemlji i svjedoče za velike istraživaoce Maxwella i Hertza, od kojih je jedan prorekao njihovu egzistenciju, a drugi ih je zbilja proizveo.

10. Elektromagnetski eter

Odsad ima samo *jedan* eter kao nosilac sveukupnosti svih električkih, magnetskih i optičkih pojava. Poznajemo njegove zakone, Maxwellove jednadžbe polja, ali malo znamo o njegovoj konstituciji. Što je to zapravo, u čemu postoje elektromagnetska polja i što u valovima svjetlosti izvodi titranja?

Sjećamo se, da je Maxwell uzeo pojam pomaka kao temelj svojih razmatranja, i mi smo ga zorno shvatili tako, da u najmanjima djelićima ili molekulama etera, isto tako kao u molekulama tvari, zaista nastaje pomak i razdvajanje električkih (ili magnetskih) fluida. Ukoliko se tiče procesa električke polarizacije *tvari*, ova je predodžba vrlo dobro osnovana, pa vrijedi i u novijoj izgradnji Maxwellove teorije, u teoriji elektrona. Jer iz brojnih iskustava izlazi sigurno, da su tvari molekularno sastavljene i da svaka molekula nosi pomične naboje. No za slobodni je eter drukčije. Ovdje je Maxwellov pojav pomaka čista hipoteza i ima samo tu vrijednost, da zorno tumači apstraktne zakone polja.

Ti zakoni kažu, da je sa svakim vremenski promjenljivim pomakom vezano nastajanje elektromagnetskog polja sila unaokolo. Možemo li stvoriti mehaničku sliku te veze? Sam Maxwell dao je mehaničke modele za sastav etera i heuristički uspješno ih je primijenio. Osobito je dosjetljiv u tom pogledu bio William Thomson (Lord Kelvin), koji se neumorno trudio, da elektromagnetske pojave shvati kao djelovanja sakrivenih mehaničkih gibanja i sila. Rotatorni karakter veze između električne struje i magnetskog polja i obrnuto upućuje na to, da se električko stanje etera shvati kao linearni pomak, a magnetsko kao vrtnju oko osi, ili obrnuto. Time nastaju predodžbe, koje su srodne Mac Cullaghovoj teoriji etera. Po njemu eter nema elastičnih otpora protiv izobličenja u običnom smislu, nego otpore protiv apsolutne rotacije svojih elemenata volumena. Predaleko bi nas odvelo, da nabrojimo brojne hipoteze, često fantastične, o konstituciji etera.

Kad bi se te hipoteze shvatile doslovno, eter bi bio strašna mašinerija nevidljivih zupčanika, zvrkova i prigona, koji međusobno zahvaćaju na najkompliciraniji način, a od sve te zbrke ne bi se moglo opaziti ništa osim nekih relativno jednostavnih sila, koje se očituju kao elektromagnetsko polje.

Ima i finijih, često vrlo duhovitih teorija, kod kojih je eter tekućina, kojoj brzina strujanja predočuje električno polje, a virovi magnetsko polje. Bjerknes je razvio teoriju, gdje su električni naboji predočeni kao kugle, koje pulziraju u tekućini etera, i pokazao je, da takve kugle međusobno djeluju silama, koje znatno sliče elektromagnetskim djelovanjima.

Pitamo li za smisao i vrijednost takvih teorija, treba navesti u njihovu korist, da su pokatkad, premda dosta rijetko, dale poticaj za nove pokuse i za otkriće novih pojava. No još češće su se vršila velika i mučna eksperimentalna istraživanja, da se odluči između dviju teorija etera, koje su obje bile jednako nevjerojatne i fantastične. Na taj se način mnogo radilo bez koristi. I danas [11] još ima nekoliko ljudi, koji smatraju mehaničko tumačenje elektromagnetskog etera zahtjevom razuma. Uvijek se iznova javljaju takve teorije, koje su sve neprozirnije, jer sve više raste obilje činjenica, koje treba tumačiti, a time i teškoće takvoga zadatka.

Heinrich Hertz je svijesno odbacio sve mehanističke spekulacije. Citiramo njegove riječi [13]: »U nutrašnjosti svih tjelesa mogu iz mirnog stanja nastati poremećenja, koja zovemo električkim, i druga poremećenja, koja zovemo magnetskim. Bit tih promjena stanja ne poznajemo, već samo pojave, koji zbog njih nastaju.« Time se on jasno odriče mehaničkog tumačenja, a ta je činjenica vrlo važna. Otvara se time put velikom napretku, koji je postignut Einsteinovim radovima. Mehanička svojstva čvrstih i tekućih tjelesa poznata su nam iz iskustva, ali to iskustvo se odnosi samo na njihova gruba svojstva. Može biti, a potvrđuje se novijim molekularnim istraživanjem, da su ta vidljiva, gruba svojstva samo neka vrst iluzije, izazvane grubošću metoda opažanja, dok se stvarni procesi između najmanjih sastavnih dijelova, atoma, molekula i elektrona, razvijaju po sasvim drugim zakonima. Zato je naivna predrasuda misliti, da bi se svaki neprekidni medij, kao eter, morao vladati kao prividno neprekidne tekućine i čvrsta tjelesa onoga svijeta, koji nam je pristupačan grubim osjetilima. Svojstva etera moraju se ustanoviti neovisno od svih drugih iskustava, izučavanjem procesa, koji se u njemu događaju. Rezultat tih istraživanja može se izreći ovako: stanje etera može se opisati dvjema usmjerenim veličinama, koje se zovu jakost električkog i magnetskog polja, E i H, a prostorne i vremenske derivacije su im povezane Maxwellovim jednadžbama. Pod izvjesnim okolnostima stanju etera odgovaraju mehanička, termička i kemijska djelovanja na tvari, koja se mogu opažati. Sve, što je preko toga, suvišna je hipoteza i fantazija. Može se prigovoriti, da tako apstraktno shvaćanje koči pronalazačku moć istraživača, koji se rado koristi slikama i analogijama. No primjer samoga Hertza oprovrgava to mišljenje, jer jedva je koji fizičar imao takvu snagu oblikovanja kao on, koji je kao teoretičar dopuštao samo najčistiju apstrakciju.

11. Hertzova teorija tjelesa u gibanju

Važnije od prividnog problema mehaničkog tumačenja procesa u eteru jest pitanje, kako utječu gibanja tjelesa, u koje treba ubrojiti i eter izvan tvari, na elektromagnetske pojave. Vraćamo se time s općenitijeg gledišta na razmatranja, koja smo prije (IV, 7—11) proveli o optici tjelesa u gibanju. Optika je sada dio elektrodinamike, svjetlosni eter identičan je s elektromagnetskim eterom. Svi zaključci, koje smo tamo na temelju optičkih opažanja stvorili o svojstvima svjetlosnog etera, moraju sačuvati svoju vrijednost, jer su očito sasvim neovisni o mehanizmu svjetlosnih titraja. Naše istraživanje odnosilo se samo na geometrijska obilježja vala svjetlosti: broj titraja (Dopplerov efekt), brzina (konvekcija) i smjer širenja (aberacija).

Vidjeli smo, da su do vremena razvoja elektromagnetske teorije svjetlosti samo veličine 1. reda s obzirom na $\beta = \frac{v}{c}$ bile pristupačne mjerenju. Rezultat tih opažanja mogao se kao »optički princip relativnosti« kratko izreći ovako: optički procesi ovise samo o relativnim gibanjima tjelesa, koja šalju, propuštaju ili primaju svjetlo. U sustavu referencije, koji se translatorno giba, svi se nutarnji optički procesi zbivaju tako, kao da taj sustav miruje u eteru.

Za objašnjenje te činjenice postojale su dvije teorije. Jedna, Stokesova, pretpostavljala je, da tvar u svojoj unutrašnjosti potpuno vuče eter sa sobom, dok se druga, Fresnelova, zadovoljila s djelomičnim povlačenjem etera, kome se je veličina dala izvesti iz pokusa. Vidimo, da Stokesova teorija vodi do teškoća, ako se konsekventno provede, dok Fresnelova dobro obuhvaća sve pojave.

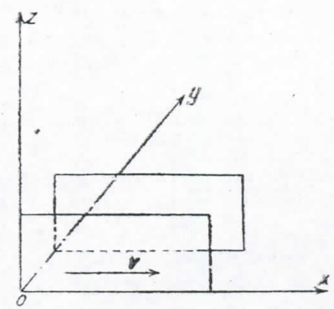
U elektromagnetskoj teoriji isto su tako moguća oba gledišta: ili potpuna konvekcija po Stokesu, ili djelomična po Fresnelu. Postavlja

se pitanje, da li se iz čisto elektromagnetskih opažanja može postići odluka između tih hipoteza.

Hipotezu potpune konvekcije prvi je Hertz sistematski prenio na Maxwellove jednadžbe polja. Bio je pri tome svijestan toga, da je takav postupak mogao biti samo provizoran, jer je primjena na optičke procese morala dovesti do istih teškoća, na kojima zapinje Stokesova teorija. No jednostavnost teorije, u kojoj nije trebalo razlikovati gibanje etera i tvari, ponukala ga je, da je opširno razvije i pretrese. Pokazalo se kod toga, da iz Hertzove teorije ispravno izlaze pojavi indukcije u *vodičima* u gibanju, koji su najvažniji za eksperimentalnu fiziku i za tehniku. Protuslovlja s iskustvom pojavljuju se tek kod finijih pokusa, u kojima je bitno pomicanje *izolatora*. Razmotrit ćemo po redu sve mogućnosti:

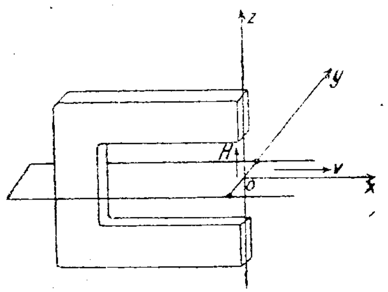
1. vodič u gibanju a) u električnom polju
   b) u magnetskom polju
2. izolator u gibanju a) u električnom polju
   b) u magnetskom polju.

1a). Vodič u električnom polju dobiva površinske naboje. Gibamo li ga, on će ih voditi sa sobom. Naboji u gibanju moraju biti ekvivalentni struji i po Biot-Savartovom zakonu proizvesti magnetsko polje, koje se ovija oko njih. Da dobijemo zornu predodžbu, zamislimo pločasti kondenzator, kojemu su ploče paralelne s ravninom xz (sl. 98). Neka su protivno nabijene tako, da se na jedinici površine nalazi količina elektriciteta e. Giba li se jedna ploča spram druge u smjeru x brzinom v, nastat će *struja konvekcije*. Ploča, koja se giba, pomiče se u jedinici vremena za duljinu v. Ako joj je presjek, koji je okomit na osi x, jednak q, prolazit će kroz ravninu paralelnu s ravninom yz u jedinici vremena količina elektriciteta eqv, dakle struja gustoće ev. Ta struja mora dati isto magnetsko djelovanje kao provodna struja gustoće $i = ev$, koja bi tekla kroz ploču u mirovanju. Ovo je laboratorijski provjerio H. A. Rowland (1875), a kasnije točnije A. Eichenwald (1903). Umjesto ploče u pravocrtnom gibanju upotrebljena je kod toga metalna ploča u rotaciji.

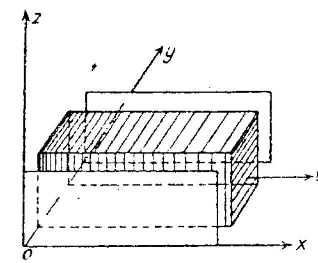


Sl. 98.

1b). Kad se vodiči gibaju u magnetskom polju, nastaju u njima električna polja i time struje. To je pojav *indukcije gibanjem*, koji je već Faraday otkrio i kvantitativno istražio. Najjednostavniji slučaj je ovaj: magnetsko polje H, proizvedeno primjerice magnetom u obliku potkove, neka je paralelno s osi z (sl. 99). Paralelno s osi y nalazi se ravan komad žice duljine 1, koji se giba u smjeru x brzinom v. Iz Hertzove teorije izlazi, da se u toj žici inducira električno polje u smjeru negativnih y. Zatvorimo li žicu vodičem u obliku stremena, koji se ne giba, kako je u slici naznačeno, nastaje zatvoren vod, u kojem će teći struja indukcije. To se dokazuje najjednostavnije, da se Faradayev zakon indukcije formulira ovako: u zatvorenoj žici inducirana je struja razmjerna sa sekundnom promjenom broja silnica ili magnetskog pomaka μH, koji je obuhvaćen žicom. Gibanjem žice ovaj se broj očito povećava za $\mu H v$ u sekundi. Zato je inducirana jakost električnog polja jednaka $\mu H \frac{v}{c}$.



Sl. 99.



Sl. 100.

Ovaj je zakon temelj svih strojeva i aparata fizike i elektrotehnike, u kojima se energija gibanja indukcijom pretvara u elektromagnetsku energiju. Ovamo ide na pr. telefon te dinamostrojevi svih vrsti. Možemo dakle smatrati, da je taj zakon osiguran nebrojenim iskustvima.

2a). Gibanje izolatora u električnom polju zamislimo ovako: između ploča kondenzatora u sl. 98 neka se stavi pomična ploča iz materijala izolatora (sl. 100). Nabije li se kondenzator, nastat će u ploči električno polje E i pomak εE okomito na ravninu ploče, dakle paralelno sa smjerom y. Time se nabijaju obje granične plohe nevodljive ploče jednako i protivno kao suprotna metalna ploča. O veličini tog naboja znamo ovo: u točci 7 smo vidjeli, da Coulombov zakon po shvaćanju Maxwellovu dovodi u vezu veličinu pomaka oko nabijene kugle s njezinim nabojem e. Za kuglu polumjera r vrijedi

$$E = \frac{e}{\varepsilon r^2} \quad \text{ili} \quad \varepsilon E = \frac{e}{r^2}.$$

Ta kugla ima površinu $4\pi r^2$, dakle je naboj po jedinici plohe jednak

$$\frac{e}{4\pi r^2} = \frac{\varepsilon E}{4\pi}.$$

Prenesemo li to na slučaj kondenzatora, bit će površinska gustoća na graničnim plohama nevodljive ploče isto tolika kao na metalnim pločama i povezana je s električnim poljem odnosom

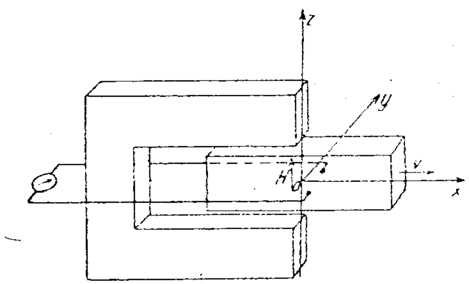
$$e = \frac{\varepsilon E}{4\pi}.$$

Gibamo li nevodljivi sloj brzinom v u smjeru x, morao bi prema Hertzu eter unutar sloja biti potpuno povučen sa slojem. Povučeno je stoga i polje i naboji proizvedeni od njega $e = \frac{\varepsilon E}{4\pi}$ na graničnim plohama. Naboj jedne granične plohe znači dakle opet struju gustoće $\frac{\varepsilon E}{4\pi} v$ i mora prema Biot-Savartovom zakonu proizvesti magnetsko polje.

To je eksperimentalno dokazao W. C. Röntgen (1885). No otklon magnetske igle, koji je on opazio, bio je mnogo manji, nego je trebao da bude po Hertzovoj teoriji. Po tim se mjerenjima čini, kao da ploča nije povukla sav eter, nego samo jedan dio. Drugi dio dakle ostaje na miru. Da je ploča iz samoga etera, bilo bi $\varepsilon = 1$ i influencirani naboj jednak $\frac{E}{4\pi}$. Röntgenovi pokusi pokazuju, da samo pretičak naboja preko toga iznosa, dakle $\frac{\varepsilon E}{4\pi} - \frac{E}{4\pi} = \frac{E}{4\pi}(\varepsilon - 1)$, sudjeluje u gibanju tvari. Taj ćemo rezultat kasnije jednostavno tumačiti. Ovdje samo ustanovljujemo, da je Hertzova teorija potpune konvekcije zatajila i kod čisto elektromagnetskih procesa, kao što se moglo očekivati prema poznatim činjenicama optike.

Eichenwald (1903) vrlo je uvjerljivo potvrdio Röntgenov rezultat time, da je i metalne ploče gibao skupa s izolatorom. Te ploče daju struju konvekcije jakosti ev, a nevodljivi sloj morao bi zbog suprotno jednakih naboja tu struju točno kompenzirati. No Eichenwald je našao, da nije tako. On je naprotiv dobio struju neovisnu od materijala izolatora. To se po Röntgenovu rezultatu djelomične konvekcije upravo može očekivati. Jer struja, koja potječe od izolatora jednaka je $\left(\frac{\varepsilon E}{4\pi} - \frac{E}{4\pi}\right) v$, prvi njezin član bit će kompenziran strujom konvekcije ev, pa ostaje struja $\frac{E}{4\pi} v$, koja nije ovisna o dielektričkoj konstanti.

2b). Zamislimo magnetsko polje paralelno s osi z, što ga proizvodi primjerice magnet u obliku potkove, i ploču iz nevodljivog materijala, koja se giba kroz polje u smjeru x (sl. 101). Budući da nema izolatora, koji bi se dali primjetno magnetizirati, uzimamo $\mu = 1$. Granične plohe ploče, koje su okomite na os y, neka su obložene kovinom. Te prevlake neka su kliznim kontaktima spojene s elektrometrom, tako da se može mjeriti naboj, koji na njima nastaje. Ovaj pokus točno odgovara pokusu s indukcijom pod 1b), samo je mjesto vodiča u gibanju uzet dielektrik



Sl. 101.

u gibanju. Zakon indukcije može se primijeniti na isti način i zahtijeva postojanje električnog polja $E = vH$, koje djeluje u smjeru negativnih y, ako je debljina ploče jednaka 1. Po Hertzovoj teoriji moraju stoga obje metalne prevlake pokazivati suprotne naboje plošne gustoće $\frac{\varepsilon E}{4\pi} = \frac{\varepsilon v H}{4\pi}$, koji daju otklon elektrometra. Pokus je proveo H. A. Wilson (1905) (s dielektrikom u rotaciji), pa je doduše potvrđeno postojanje naboja, ali opet manje veličine, naime s plošnom gustoćom $(\varepsilon - 1)\frac{vH}{4\pi}$. Opet je tako, kao da ne sudjeluje sav eter u gibanju tvari, nego samo toliko, koliko je tvar jače dielektrična od vakuuma. I ovdje je zatajila Hertzova teorija.

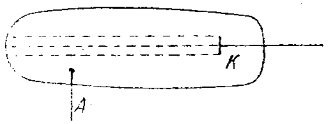
Kod svih ovih četiriju tipičnih pojava očito je bitno samo relativno gibanje tjelesa, koja stvaraju polje prema ispitivanom vodiču ili izolatoru. Mjesto da ga pomičemo u smjeru x, kao što smo to učinili, mogli smo ga držati na miru, i ostale dijelove naprave gibati u smjeru negativnih x. Rezultat morao bi biti isti. Hertzova teorija poznaje samo relativna gibanja tjelesa, pri čemu se i eter smatra tijelom. U sustavu s translatornim gibanjem svi se procesi po Hertzu razvijaju isto tako, kao da miruje. Vrijedi dakle klasični princip relativnosti.

No Hertzova teorija ne da se složiti s činjenicama i uskoro je morala uzmaknuti pred drugom teorijom, koja u pogledu relativnosti zastupa suprotno gledište.

12. Lorentzova teorija elektrona

H. A. Lorentz (1892) razvio je tu drugu teoriju, koja je značila vrhunac i završetak fizike tvarnoga etera. Ona je atomistički razvijena teorija elektriciteta jednoga fluida. Time je ujedno, kako ćemo odmah vidjeti, određeno i značenje, koje ta teorija daje eteru.

Helmholtz (1881) je prvi izrekao, da električni naboji imaju atomističku strukturu, t. j. da se pojavljuju u najmanjim nedjeljivim količinama. On je time htio objasniti Faradayeve zakone elektrolize (točka 2). Zaista treba samo pretpostaviti, da se svaki atom u elektrolitskoj rastopini na neki način kemijski spaja s jednim atomom elektriciteta ili *elektronom*, da se shvati, da izvjesna količina elektriciteta izlučuje uvijek ekvivalentne količine supstancije.

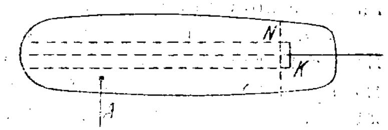


Sl. 102.

Atomistika elektriciteta osobito je prikladna za tumačenje pojava, koji se opažaju kod prolaza električne struje kroz razrijeđen plin. Tu se najprije otkrilo, da se pozitivni i negativni elektricitet različito vladaju. Uvedu li se u staklenu cijev dvije metalne elektrode i pusti struja kroz cijev (sl. 102), dobivaju se vrlo komplicirani pojavi, dok je u cijevi još plin primjetnog tlaka. Uklanja li se plin sve više i više, slika se pojednostavnjuje. Kod vrlo visokog vakuuma iz negativne elektrode, katode

K, izlazi zraka plavkasta svijetla, koja se ne brine za to, gdje se nalazi pozitivni pol, anoda A. Ove *katodne zrake*, koje je otkrio Plücker (1858), mnogi su držali valovima svjetlosti, jer su bacale sjene čvrstih tijela, koja su im stajala na putu, kako je to pokazao Hittorf (1869). Drugi su ih držali materijalnom emanacijom, koja izbija iz katode. Crookes, koji je zastupao to gledište (1879), zvao je te zrake »četvrtim agregatnim stanjem« tvari. Za materijalnu prirodu tih zraka govorila je okolnost, da su se mogle otkloniti magnetom, isto tako, kao struja negativnog elektriciteta. Najveći udio u istraživanju prirode katodnih zraka imaju J. J. Thomson i Ph. Lenard. Uspjelo je dokazati negativni naboj zraka direktnim hvatanjem. Osim toga ih otklanja električno polje, koje je okomito na njihovu stazu, i to u suprotnom smjeru polja, što opet dokazuje njihov negativni naboj.

Uvjerenje o korpuskularnoj prirodi katodnih zraka učvrstilo se, kada su uspjeli kvantitativni zaključci o njihovoj brzini i naboju. Zamislimo li katodnu zraku kao struju malih čestica mase m, očito će je električno ili magnetsko polje to manje otkloniti, što joj je veća brzina, kao što puščano tane leti to »razantnije«, što je brže. Mogu se proizvesti katodne zrake, koje se daju otkloniti, te su dakle vrlo polagane. Zatim se mogu umjetno tako jako ubrzati, da im se početna brzina može zanemariti prema konačnoj brzini. U tu svrhu stavlja se pred katodu K žičana mrežica N (sl. 103), koja je jako pozitivno nabijena. Time će se negativne čestice katodnih zraka u polju između katode i mrežice jako ubrzati i izići kroz oka mreže brzinom, koja u glavnom potječe samo od toga ubrzanja. Ta se brzina može izračunati po temeljnoj jednadžbi mehanike



Sl. 103.

$$mb = K = eE,$$

ako je e naboj, a E jakost polja. Očito se radi o »padanju«, kod kojega ubrzanje nije jednako ubrzanju sile teže g, nego jednako $\frac{e}{m}E$. Da je omjer $\frac{e}{m}$ poznat, mogla bi se brzina naći iz zakona slobodnog pada. No kako su dvije veličine nepoznate, $\frac{e}{m}$ i v, treba još jedno mjerenje, da se mogu odrediti. Kod razmatranja o Hertzovoj teoriji (V, 11, 1b) vidjeli smo, da magnetsko polje H proizvodi u tijelu, koje se giba okomito na H, jakost električnog polja $E = \frac{v}{c}H$, koja je okomita i na H i na v. Stoga će i na svaku česticu katodnih zraka djelovati sila otklanjanja $eE = e\frac{v}{c}H$, tako da okomito na prvotno gibanje nastaje ubrzanje $b = \frac{e}{m}\frac{v}{c}H$. To se ubrzanje može naći mjerenjem postranog otklona zrake. Time je dobivena druga jednadžba za određivanje nepoznanica $\frac{e}{m}$ i v.

Ovakva ili slična mjerenja pokazala su, da $\frac{e}{m}$ za brzine, koje nisu prevelike, zaista ima određenu, konstantnu vrijednost, i to: [14]

$$\frac{e}{m} = 5{,}31.10^{17} \tag{65}$$

elektrostatičkih jedinica naboja po gramu. U drugu ruku smo rekli kod elektrolize [V, 2 formula (48)], da 1 g vodika transportira količinu elektriciteta $C_0 = 2{,}90.10^{14}$ [14]. Nameće se pretpostavka, da je naboj jedne čestice u oba slučaja isti, naime jedan atom elektriciteta ili *elektron*, pa treba zaključiti, da se masa m čestice katodnih zraka odnosi prema masi m_H atoma vodika kao [14]

$$\frac{m}{m_H} = \frac{e}{m_H} : \frac{e}{m} = \frac{2{,}90.10^{14}}{5{,}31.10^{17}} = \frac{1}{1830}\,. \tag{66}$$

Čestice katodnih zraka lakše su dakle oko 2000 puta od atomâ vodika, koji su opet najlakši atomi. Ovaj nas rezultat upućuje na zaključak, da su katodne zrake struja čistih atoma elektriciteta.

Ovakvo se je shvaćanje utvrdilo nebrojenim istraživanjima. Negativni elektricitet sastoji se iz slobodno gibljivih elektrona, dok je pozitivni vezan na tvar i nikad se bez nje ne javlja [15]. Eksperimentalno istraživanje potvrdilo je time i preciziralo staru teoriju jednoga fluida. Uspjelo je i odrediti veličinu naboja jednog elektrona. Prve takve pokuse izvršio je J. J. Thomson (1898). Temeljna je misao ova: male kapljice ulja, vode ili metalne kuglice mikroskopskih ili submikroskopskih dimenzija, koje se dobivaju kondenzacijom pare ili raspršivanjem u uzduhu, padaju konstantnom brzinom, jer trenje uzduha sprečava ubrzanje. Mjerenjem brzine padanja može se odrediti veličina čestica, a množenjem s gustoćom njihova masa M. Težina jedne takve čestice bit će onda Mg, gdje je $g = 981$ cm/sek² ubrzanje sile teže. Takve čestice mogu se električki nabiti time, da na uzduh djeluju rentgenske zrake ili zrake radioaktivnih tvari. Djeluje li vertikalno električno polje, čestica s nabojem e bit će povučena prema gore, a ako je električna sila eE jednaka težini Mg, čestica će lebdjeti. Iz jednadžbe $eE = Mg$ može se izračunati naboj e. Millikan, koji je izvršio najtočnije pokuse te vrsti, našao je, da je naboj uvijek bio višekratnik jednoga najmanjeg naboja. Taj se dakle mora smatrati električnom elementarnom količinom i iznosi [14]

$$e = 4{,}77.10^{-10} \tag{67}$$

elektrostatičkih jedinica. Istina je, da je Ehrenhaft pobijao Millikanove pokuse. Ipak je vjerojatno, da su još manje količine elementarnoga naboja, koje je on našao, uzrokovane time, što je operirao s premalenim kuglicama, kod kojih ima sekundarnih pojava [16].

Za Lorentzovu teoriju elektrona nije bitna apsolutna veličina elementarnog naboja. Opisat ćemo sada sliku fizičkog svijeta prema Lorentzovoj teoriji. Atomi tvari nosioci su pozitivnog eletriciteta, koji je s njima nerazdjeljivo vezan. Osim toga sadržavaju izvjestan broj negativnih elektrona, tako da prema vani djeluju neutralno. U izolatorima su elektroni čvrsto vezani uz atome. Mogu se samo nešto pomaknuti iz svoga položaja ravnoteže, čime atom postaje dipolom. U elektrolitima i vodljivim plinovima dešava se, da atom ima jedan ili više elektrona previše ili premalo. Tada se on zove *ion* i pomiče se u električnom polju transportirajući ujedno elektricitet i tvar. U kovinama se elektroni miču slobodno, i samo srazovima s atomima supstancije nastaje otpor protiv toga gibanja. Magnetizam nastaje, ako u nekim atomima elektroni putuju u zatvorenim stazama i time tvore Ampèreove molekularne struje.

Elektroni i pozitivni naboji atoma plove u moru etera, u kojemu postoji elektromagnetsko polje po Maxwellovim jednadžbama. Samo treba u eteru postaviti $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, a gustoća provodne struje nadomještava se strujom konvekcije elektrona ϱv. Jednadžbe dakle glase

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} E = \rho, \quad \operatorname{rot} H - \frac{1}{c}\frac{\mathfrak{e}}{t} = \frac{\varrho v}{c}, \\ &\operatorname{div} H = 0, \quad \operatorname{rot} E + \frac{1}{c}\frac{\mathfrak{h}}{t} = 0, \end{aligned} \tag{68}$$

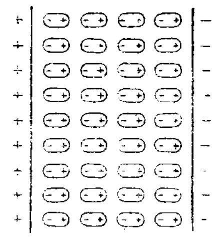
i obuhvaćaju na poznati način Coulombov, Biot-Savartov i Faradayev zakon.

Svi elektromagnetski pojavi sastoje se dakle u načelu iz gibanja elektrona i iz polja, koja slijede elektrone. Sva je materija električki pojav. Razna svojstva tvari osnivaju se na razlikama u gibljivosti elektrona spram atoma, kako smo to baš opisali. Zadatak je teorije elektrona, da iz temeljnih zakona (68) za pojedine nevidljive elektrone i atome izvede Maxwellove jednadžbe, t. j. da pokaže, da materijalna tjelesa, već prema svojoj prirodi, prividno imaju vodljivost σ, dielektričku konstantu ε i permeabilnost μ.

Lorentz je riješio tu zadaću i pokazao, da teorija elektrona ne daje samo u najjednostavnijem slučaju Maxwellove zakone, već da povrh toga objašnjava brojne finije pojedinosti, koje opisnoj teoriji nisu bile pristupačne, ili ih je obuhvaćala samo upotrebom umjetnih hipoteza. Ovamo idu prije svega finiji pojavi optike, disperzija boja, magnetsko zakretanje ravnine polarizacije (V, 9), što ga je otkrio Faraday, i slična uzajamna djelovanja između valova svjetlosti i električkih ili magnetskih polja. Ne možemo se pozabaviti tom opsežnom i matematički zamršenom teorijom, nego ćemo se ograničiti na pitanje, koje nas u prvom redu zanima: koliko sudjeluje eter u gibanju materije? Lorentz je postavio radikalnu tvrdnju, koja nikad prije nije bila tako određeno izrečena:

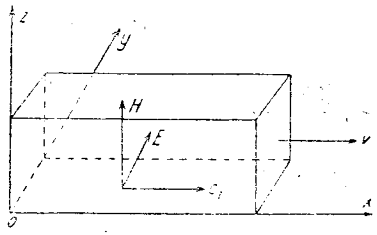
Eter apsolutno miruje u prostoru.

Time su u načelu apsolutni prostor i eter potpuno identificirani. Apsolutni prostor nije vakuum, nego »nešto« s izvjesnim svojstvima, kojemu je stanje određeno dvjema usmjerenim veličinama, električnim poljem E i magnetskim poljem H, i koje se kao takvo zove eter. Ova pretpostavka polazi još nešto dalje od Fresnelove teorije. Tamo je eter mirovao u inercijalnom sustavu, a to bi se moglo nazvati i apsolutno mirovanje. No tvari unutar sebe vuku eter djelomično sa sobom.



Sl. 104.

Lorentzu ne treba ni te djelomične konvekcije Fresnelove, pa ipak praktički dolazi do istih rezultata. Da to uvidimo, razmotrimo pojav u nutarnjosti dielektrika između ploča kondenzatora. Kad se ovaj nabije, nastaje polje okomito na ploče (sl. 104), koje pomiče elektrone dielektrične supstancije i pretvara ih u dipole, kako smo prije (V, 5, 7) objasnili. Dielektrički pomak u smislu Maxwellovu je εE, ali samo jedan njegov dio potječe od stvarnog pomaka elektrona. Jer vakuum ima dielektričku konstantu $\varepsilon = 1$, dakle pomak E, zato je udio pomaka elektrona samo $\varepsilon E - E = (\varepsilon - 1)E$. Vidjeli smo, da pokusi Röntgena i Wilsona o pojavima u izolatorima u gibanju kažu, da zaista samo taj dio pomaka sudjeluje u gibanju. Lorentzova teorija dakle ispravno predočuje elektromagnetske činjenice, a nije potrebno, da eter bilo kako sudjeluje u gibanju tvari.



Sl. 105.

Učinit ćemo prihvatljivim, da je i konvekcija svjetlosti točno u skladu s Fresnelovom formulom [IV, 9, (43)]. Razmotrimo kao kod Wilsonova pokusa dielektrično tijelo, koje se giba u smjeru x brzinom v, a zraka svjetlosti putuje u njemu u istom smjeru (sl. 105). Ta svjetlost neka se sastoji iz električkog titraja E paralelno s osi y i magnetskog H paralelno s osi z. Znamo iz Wilsonova pokusa, da takvo magnetsko polje u tijelu, koje se giba, stvara dodatni električki pomak u smjeru y veličine $(\varepsilon - 1)\,vH$. Iz toga dobivamo dodatno električno polje diobom sa ε. Ukupno električno polje iznosi dakle

$$E + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,vH.$$

Da je konvekcija potpuna, kao što pretpostavlja Hertzova teorija, stajao bi sam ε mjesto $\varepsilon - 1$, pa bi ukupno polje bilo $E + vH$. Vidi se, da zbog djelomične konvekcije treba v nadomjestiti veličinom $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}v$. Ta bi dakle morala odgovarati apsolutnoj brzini etera unutar tvari po

Fresnelovoj teoriji, t. j. broju konvekcije, koji se u optici označuje slovom φ (43). A zaista je tako. Jer po Maxwellovoj teoriji svjetlosti (V, 9) dielektrička konstanta ε jednaka je kvadratu indeksa loma n, t. j. $\varepsilon = n^2$. Uvrsti li se to, izlazi

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\nu = \frac{n^2 - 1}{n^2}\,\nu = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\nu = \varphi$$

u skladu s formulom (43) (IV, 9).

Sjećamo se, da su u Fresnelovoj teoriji nastale teškoće zbog disperzije boja. Jer ako indeks n loma ovisi o frekvenciji (boji), onda i broj konvekcije φ ovisi o njoj. Ali eter može biti povučen samo na jedan način, a ne za svaku boju drukčije. Te teškoće nema u teoriji elektrona, jer ovdje eter ostaje na miru, a povučeni su samo elektroni, koji se nalaze u tvari. Disperzija boja osniva se na tome, da svijetlo te elektrone dovodi do titranja, pa oni djeluju natrag na brzinu svjetlosti.

Ne možemo ovdje ući u pojedinosti ove razgranjene nauke, nego samo ukratko navodimo rezultat. Lorentzova teorije uzima, da postoji eter, koji apsolutno miruje. Zatim dokazuje, da ipak svi elektromagnetski i optički pojavi ovise samo o relativnim gibanjima translacije materijalnih tjelesa, ukoliko se uzimaju u račun članovi 1. reda s obzirom na β. Ona stoga objašnjava sve poznate pojave, napose činjenicu, da se apsolutno gibanje Zemlje kroz eter ne može dokazati pokusima na Zemlji s veličinama 1. reda (optički, ili bolje elektromagnetski princip relativnosti).

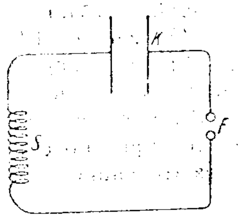
Može se ipak zamisliti pokus (1. reda), koji se ne bi dao objasniti Lorentzovom teorijom, kao ni drugim dosad razmotrenim teorijama etera; to bi bio neuspjeh mjerenja apsolutnog gibanja cijeloga Sunčanog sustava po Römerovoj metodi (IV, 9, 11). Odlučno će biti za Lorentzovu teoriju, da li se ona slaže s pokusima, kojima se mogu mjeriti veličine 2. reda s obzirom na β. Takvim veličinama moralo bi se dati ustanoviti apsolutno gibanje Zemlje kroz eter. Prije nego što raspravimo to pitanje, moramo govoriti o još jednom rezultatu Lorentzove teorije, kojim se njezin doseg znatno povećao: elektrodinamičko tumačenje tromosti.

13. Elektromagnetska masa

Čitalac je možda opazio, da smo malo govorili o mehanici od časa, kada smo napustili elastični eter i prešli na elektromagnetski. Mehanički i elektromagnetski procesi dva su posebna područja. Jedni se događaju u Newtonovu apsolutnom prostoru, koji je definiran time, da vrijedi zakon tromosti, a postojanje mu se očituje u centrifugalnim silama, drugi su procesi stanja etera, koji miruje u apsolutnom prostoru. Svеobuhvatna teorija, kao što bi to imala biti Lorentzova, ne može ta dva područja ostaviti nepovezana.

Vidjeli smo, da nije uspjelo svesti elektrodinamiku na mehaniku usprkos vrlo veliki trud najpronicavijih istraživalaca. Iskrsava obrnuta, smiona misao: ne bi li se mehanika mogla svesti na elektrodinamiku? Da to uspije, bio bi Newtonov apstraktni apsolutni prostor pretvoren u konkretni eter. Otpori tromosti i centrifugalne sile morale bi biti fizička djelovanja etera, možda kao elektromagnetska polja naročite građe, a princip relativnosti mehanike ne bi više točno vrijedio i bio bi samo približno ispravan, za veličine 1. reda s obzirom na $\beta = \frac{v}{c}$, kao u elektrodinamici.

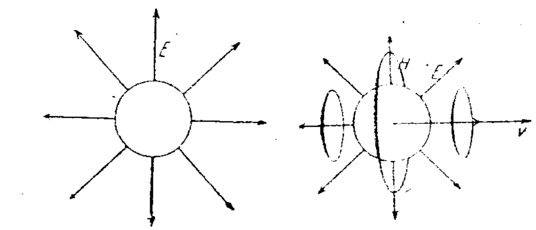
Znanost nije ustuknula pred tim korakom, koji stubokom mijenja poredak pojmova. Premda se naučavanje o apsolutno nepomičnom eteru kasnije moralo napustiti, ipak nije bila uzaludna ova revolucija, kojom je mehanika svrgnuta s prijestolja, a elektrodinamika uzvišena kao gospodarica fizike. Rezultat je zadržao svoju važnost u nešto promijenjenom obliku. Vidjeli smo (V, 9), da širenje elektromagnetskih valova nastaje time, da uzajamno djelovanje jakosti električnog i magnetskog polja proizvodi učinak, analogan mehaničkoj tromosti. Elektromagnetsko polje ima ustrajnost, slično kao mehanička masa. Da se ono stvori, treba utrošiti radnju, a kad nestane, radnja se opet pojavljuje. To se vidi kod svih procesa, koji su skopčani s elektromagnetskim titrajima, na pr. kod aparata za bežičnu telegrafiju. Bežična emisiona stanica sadržava električni oscilator, koji se u bitnosti sastoji iz iskrišta F, svitka S i kondenzatora K, t. j. dviju izoliranih metalnih ploča, koje, spojene žicama, tvore »otvoren« strujni krug (sl. 106) [17]. Kondenzator se nabije, dok ne preskoči iskra kod F. Kod toga se kondenzator opet izbije, nakupljene količine elektriciteta otječu. No one ne samo da se izjednače, nego prijeđu preko ravnoteže i opet se nakupe na pločama kondenzatora, ali s obrnutim predznakom, isto tako, kao što njihalo prođe kroz položaj ravnoteže i ode na drugu stranu. Kad je novo nabijanje kondenzatora završeno, elektricitet struji opet natrag, i njiše amo tamo, dok mu se energija ne potroši zagrijavanjem provodnih žica ili prelaženjem na druge dijelove aparature, na pr. na antenu, koja zrači. Titranje elektriciteta dokazuje dakle ustrajnost poput mase kuglice na njihalu. Maxwellova teorija ispravno predočuje te činjenice u svim pojedinostima. Elektromagnetski titraji, koji se javljaju u izvjesnoj aparaturi, mogu se unaprijed izračunati iz jednadžbi polja.



Sl. 106.

J. J. Thomson zaključio je iz toga, da se tromost tijela mora povećati njegovim električnim nabojem. Razmatramo nabijenu kuglu najprije u mirovanju, a onda u gibanju brzinom v. Nepomična kugla ima elektrostatičko polje s radijalnim silnicama, kugla u gibanju ima povrh toga magnetsko polje s kružnim silnicama, koje ovijaju stazu kugle (sl. 107). Jer naboj u gibanju struja je konvekcije i proizvodi magnetsko polje po Biot-Savartovu zakonu. Oba stanja imaju opisanu ustrajnost. Jedno se stanje u drugo može pretvoriti samo potroškom radnje. Sila, koja je

potrebna, da se kugla iz mirovanja dovede u gibanje, veća je dakle za nabijenu kuglu, nego za nenabijenu. Da se kugla, koja se već giba, još dalje ubrza, treba očito pojačati magnetsko polje H. Opet je dakle za to potrebna pojačana sila.



Sl. 107.

Sjetimo se, da sila, koja djeluje kratko vrijeme t, predstavlja impuls $J = Kt$, koji proizvodi promjenu w brzine neke mase m po formuli (7) (II. 9)

$$mw = J.$$

Nosi li masa naboj, to će neki impuls J proizvesti samo manju promjenu brzine, a ostatak J' utrošit će se za promjenu magnetskoga polja. Bit će dakle

$$mw = J - J'.$$

Račun daje vrlo prihvatljiv rezultat, da je impuls J', koji je potreban za povećanje magnetskoga polja, to veći, što je veća promjena brzine w i približno joj je razmjeran. Može se dakle staviti $J' = m'w$, gdje je m' faktor proporcionalnosti, koji još može ovisiti o stanju, t. j. o brzini v prije promjene. Onda je

$$mw = J - m'w$$

ili

$$(m + m')w = J.$$

Čini se dakle kao da je masa m povećana, i to za veličinu m', koja se može izračunati iz jednadžbi elektromagnetskoga polja, a može još ovisiti o brzini v. Točna vrijednost m' za bilo kakve brzine v može se samo onda izračunati, ako se nešto pretpostavi o razdiobi električnog naboja na tijelu u gibanju. No granična vrijednost za brzine, koje su malene spram brzine svjetlosti c, t. j. za malene β, izlazi neovisno od takvih pretpostavki u obliku

$$m_0 = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}, \tag{69}$$

gdje je U elektrostatička energija naboja na tijelu.

Vidjeli smo, da je masa elektrona od prilike 2000 puta manja od mase atoma vodika. Misao je stoga bliza, da elektron možda uopće nema »obične« mase, nego samo »električni naboj«, a njegova masa da je sasvim elektromagnetskog porijekla. Da li se takva pretpostavka slaže s našim znanjem o veličini, naboju i masi elektrona? Elektroni treba da su sastavni dijelovi atoma, pa su svakako maleni spram veličine atoma. Iz atomske fizike znamo, da je polumjer atoma reda veličine 10^{-8} cm. Polumjer elektrona mora dakle biti bitno manji od 10^{-8} cm.

Zamislimo li elektron kao kuglu polumjera a, kojoj je naboj e razdijeljen po površini, bit će, kako se može izvesti iz Coulombova zakona, elektrostatička energija $U = \frac{1}{2}\frac{e^2}{a}$. Elektromagnetska masa bit će dakle prema (69)

$$m_0 = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}.$$

Iz toga se može izračunati polumjer a:

$$a = \frac{2}{3}\frac{e}{c^2}\frac{e}{m_0}.$$

Na desnoj je strani sve poznato, $\frac{e}{m_0}$ iz otklona katodnih zraka [formula (65), V, 12], e iz Millikanovih mjerenja [formula (67), V, 12], a c je brzina svjetlosti. Uvrstimo li dane vrijednosti, dobijemo [14]

$$a = \frac{2}{3}\frac{4{,}77.10^{-10}}{9.10^{20}}\,5{,}31.10^{17} = 1{,}88.10^{-13}\ \text{cm},$$

a to je duljina, koja je od prilika 100 000 puta manja od polumjera atoma. Hipoteza o čisto elektromagnetskom porijeklu mase elektrona nije dakle u protuslovlju s poznatim činjenicama; no time još nije dokazana.

Ova je teorija našla jak oslonac u profinjenim opažanjima katodnih zraka i β-zraka radioaktivnih tvari, koje su također izbačeni elektroni. Prije smo objasnili, da se električkim i magnetskim utjecanjem na takve zrake može odrediti i omjer naboja i mase $\frac{e}{m}$, i njihova brzina v, i da je najprije za $\frac{e}{m}$ nađena izvjesna vrijednost, neovisna od brzine v. Kada se radilo s većim brzinama, ustanovilo se umanjivanje vrijednosti $\frac{e}{m}$. Osobito kod β-zraka radija, koje su samo malo polaganije od svjetlosti, ovaj je učinak vrlo jasan i mogao se kvantitativno izmjeriti. Pretpostavka, da električni naboj ovisi o brzini, bila je nespojiva s predodžbama teorije elektrona. No trebalo je očekivati ovisnost mase o brzini, ako je masa elektromagnetskog porijekla. Da se dobije kvantitativna teorija, trebale su, istina, određene pretpostavke o obliku elektrona i o razdiobi naboja na njemu. M. Abraham (1903) smatrao je elektron krutom kuglom s nabojem razdijeljenim jednoliko po unutrašnjosti ili po površini i pokazao je, da obje pretpostavke daju istu ovisnost elektromagnetske mase o brzini, naime povećavanje mase, kada brzina raste. Što brže elektron već leti, to jače se opire elektromagnetsko polje daljem povećanju brzine. Prirast mase m tumači opažano smanjivanje veličine $\frac{e}{m}$, a i kvantitativno se Abrahamova teorija dosta dobro slaže s rezultatima mjerenja Kaufmannovih (1901), ako se smatra, da nema »obične« mase pored elektromagnetske.

Time je bio postignut cilj, da se tromost elektrona svede na elektromagnetska polja u eteru. Ujedno se otvarala daleka perspektiva. Atomi su nosioci pozitivnog elektriciteta i sadržavaju brojne elektrone; možda je dakle i njihova masa elektromagnetskog porijekla? Onda masa kao kvantitet ustrajnosti ne bi bila prvotni pojav, kao što je u elementarnoj mehanici, nego sekundarna posljedica strukture etera. Newtonov apsolutni prostor, koji je definiran samo mehaničkim zakonom tromosti, postaje time suvišan. Njegovu funkciju preuzima eter, dobro poznat svojim elektromagnetskim svojstvima; time bi bilo dobiveno vrlo konkretno rješenje problema prostora, koje odgovara fizičkom mišljenju. Vidjet ćemo (V, 15), da se nove činjenice protive tom shvaćanju. No veza između mase i elektromagnetske energije, koja je ovdje najprije nađena, znači fundamentalnu spoznaju, kojoj se dublji smisao očitovao tek Einsteinovom teorijom relativnosti.

Moramo još dodati, da su osim Abrahamove teorije krutog elektrona bile računski ispitane i druge hipoteze. Najvažnija je hipoteza H. Lorentza (1904), koja je u uskoj vezi s teorijom relativnosti. On je pretpostavio, da se elektron u gibanju steže u smjeru gibanja, tako da iz kugle postaje splošteni rotacioni elipsoid. Veličina sploštenosti pri tome ovisi na određen način o brzini. Ta je hipoteza na prvi mah vrlo čudnovata. Ona doduše daje znatno jednostavniju formulu za elektromagnetsku masu u ovisnosti o brzini, nego Abrahamova teorija, no to još ne bi bilo njeno opravdanje. Opravdanje je osnovano na razvoju Lorentzove teorije elektrona na temelju eksperimentalnih istraživanja o veličinama 2. reda, kojima ćemo se odmah pozabaviti. Lorentzova formula za masu elektrona dobila je onda univerzalno značenje u teoriji relativnosti. Kasnije (VI, 7) ćemo se osvrnuti na eksperimentalnu odluku između nje i Abrahamove teorije.

Kada je teorija elektrona oko početka ovoga stoljeća došla do opisanoga stanja, činilo se da je blizu mogućnost jedinstvene fizičke slike svijeta, koja sve oblike energije, uključivši i mehaničku tromost, svodi na isti korijen, na elektromagnetsko polje u eteru. Jedan jedini oblik energije još je bio izvan tog sustava, a to je gravitacija. Ipak je postojala nada, da će se i ona moći shvatiti kao djelovanje etera.

14. Michelsonov pokus

No već 20 godina prije pojavila se pukotina u temelju čitave zgrade, i istodobno s njenim izgrađivanjem prema gore trebalo ju je krpati i podupirati. Već smo više puta naglasili, da su za teoriju nepomičnog etera morali biti odlučni pokusi, kojima se mogu mjeriti veličine 2. reda s obzirom na β. Tu se moralo pokazati, da li preko tijela u brzom gibanju piri eterski vjetar i zanosi valove svjetlosti, kako zahtijeva teorija. Prvi i najvažniji pokus te vrsti uspio je Michelsonu (1881) pomoću njegova interferometra (IV, 4), koji je on neumornim radom dotjerao do preciznog instrumenta još neviđene točnosti.

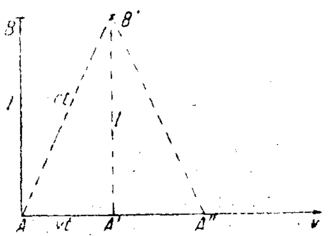
Kada smo razmatrali utjecaj gibanja Zemlje na brzinu svjetlosti (IV, 9), vidjeli smo, da se vrijeme, koje zraka svijetla treba za put tamo i natrag po dužini l paralelnoj sa stazom Zemlje, razlikuje samo za veličinu 2. reda od vrijednosti, koju bi imalo, da Zemlja miruje. Našli smo za to vrijeme izraz

$$t_1 = l\left(\frac{1}{c+v}+\frac{1}{c-v}\right)=\frac{2lc}{c^2-v^2},$$

a za to se može pisati

$$t_1=\frac{2l}{c}\,\frac{1}{1-\beta^2}.$$

Kada bi se to vrijeme svjetlosti dalo tako točno mjeriti, da bismo bili sigurni, da ćemo razlomak $\frac{1}{1-\beta^2}$ razlikovati od 1 usprkos sićušne vrijednosti veličine β^2, bilo bi time nađeno sredstvo, da se dokaže eterski vjetar. No vremena svjetlosti ne mogu se tako točno mjeriti. Interferometarske metode daju samo razlike vremenâ svjetlosti na raznim putovima onom začudnom točnošću, koja je potrebna u tu svrhu. Zato Michelson upotrebljava drugu zraku svijetla, koja prolazi put AB duljine l tamo i natrag, ali okomito na stazu Zemlje (sl. 108). Dok svijetlo dođe od A do B, Zemlja se pomaknula komad naprijed, tako da je točka B došla na mjesto B' u eteru. Pravi put svijetla u eteru je dakle AB', i ako za to treba vrijeme t, onda je $AB' = ct$. U istom vremenu t gibala se točka A do A' brzinom v. Bit će dakle $AA'=vt$. Primijenimo li Pitagorin poučak na pravokutni trokut $AA'B'$, dobivamo



Sl. 108.

$$c^2t^2 = l^2 + v^2t^2$$

ili

$$t^2(c^2-v^2)=l^2,\quad t^2=\frac{l^2}{c^2-v^2}=\frac{l^2}{c^2}\,\frac{1}{1-\beta^2},\quad t=\frac{l}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Za povratak treba svijetlo isto tako dugo, jer za to se vrijeme Zemlja pomakla za isto toliko, kod čega točka A dolazi od A' do A''. Za put tamo i natrag svijetlo dakle treba vrijeme

$$t_2=\frac{2l}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Razlika vremena prelaženja iste dužine paralelno i okomito na gibanje Zemlje jednaka je dakle

$$t_1-t_2=\frac{2l}{c}\left(\frac{1}{1-\beta^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

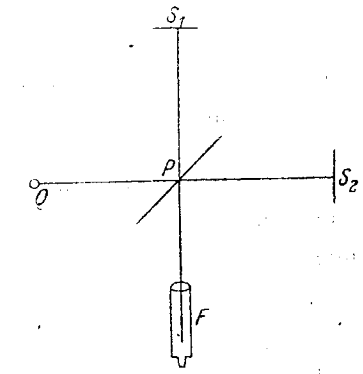
Slično kao u IV, 8 može se približno staviti $1+\beta^2$ mjesto $\frac{1}{1-\beta^2}$ i $1+\frac{1}{2}\beta^2$ [1]) mjesto $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, ako se zanemaruju članovi reda višega od 2. s obzirom na β.

Možemo dakle dovoljno približno pisati:

$$t_1-t_2=\frac{2l}{c}\left((1+\beta^2)-(1+\frac{1}{2}\beta^2)\right)=\frac{2l}{c}\,\frac{\beta^2}{2}=\frac{l}{c}\beta^2.$$

Usporenje jedne zrake svijetla prema drugoj je dakle veličina 2. reda.

Mjerenje tog usporenja može se provesti pomoću Michelsonova interferometra (sl. 109). Pri tome se svijetlo, koje dolazi od izvora Q, dijeli na polupropusnoj ploči P u dvije zrake, koje se međusobno okomito produžuju do zrcalâ S_1 i S_2, gdje se reflektiraju i zatim vraćaju do ploče P (usp. IV, 4). Odavle sjedinjene ulaze u dalekozor za promatranje F, gdje interferiraju. Kada su udaljenosti S_1P i S_2P jednake, a jedan je krak aparata postavljen u smjer gibanja Zemlje, ostvaren je točno upravo razmotreni slučaj. Obje zrake dolaze u vidno polje s uzajamnim usporenjem $\frac{l}{c}\beta^2$. Pruge interferencije ne leže dakle točno tamo, gdje



Sl. 109.

[1]) Ako je x malen broj, kojemu se kvadrat može zanemariti, bit će

$$(1+x)\ (1-x)=1-x^2 \text{ približno } =1,$$

dakle

$$1+x=\frac{1}{1-x},$$

dalje je

$$(1-x)\ (1+\frac{1}{2}x)^2=(1-x)\ (1+x+\frac{1}{4}x^2)$$

približno $=(1-x)\ (1+x)=1-x^2$
približno $=1$,

dakle

$$(1+\frac{1}{2}x)^2=\frac{1}{1-x},$$

$$1+\frac{1}{2}x=\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

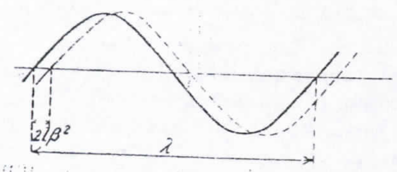
Zamijeni li se u ovim dvjema približnim formulama x sa β^2, izlaze približenja upotrebljena u tekstu:

$$\frac{1}{1-\beta^2}=1+\beta^2,\quad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=1+\frac{1}{2}\beta^2.$$

bi bile, da Zemlja miruje. Zakrene li se aparat za 90^0, tako da drugi krak postane paralelan s gibanjem Zemlje, pruge interferencije bit će sada za istu veličinu pomaknute na drugu stranu. Motri li se dakle položaj pruga interferencije za vrijeme samog zakretanja, mora se vidjeti pomak, koji odgovara dvostrukom usporenju, dakle $2 \frac{l}{c} \beta^2$.

Ako je T period titranja dotičnoga svijetla, onda je omjer usporenja spram perioda $\frac{2l}{cT} \beta^2$, a kako je prema formuli (35) (IV, 4) duljina vala $\lambda = cT$, taj se omjer može pisati $2 \frac{l}{\lambda} \beta^2$.

Oba niza valova, koja interferiraju, pomaknut će se stoga međusobno kod zakretanja aparata za pomak, kojemu je omjer spram duljine vala dan izrazom $\frac{2l\beta^2}{\lambda}$ (Sl. 110). Same pruge interferencije nastaju time, što zrake, koje izlaze iz izvora u nešto različitim smjerovima, prolaze nešto različite putove. Razmak pruga odgovara razlici puta od jedne duljine vala. stoga je očekivani pomak pruga dio $\frac{2l\beta^2}{\lambda}$ od širine pruga.



Sl. 110.

Michelson je zajedno s M o r l e y e m (1887) ponovio pokus u većem mjerilu i postigao je višestrukim refleksijama duljinu puta svijetla od 11 m $= 1{,}1 \cdot 10^3$ cm. Duljina vala upotrebljenoga svijetla bila je od prilike $5{,}9 \cdot 10^{-5}$ cm. Znamo, da je β od prilike jednak 10^{-4}, dakle $\beta^2 = 10^{-8}$. Bit će dakle

$$\frac{2l\beta^2}{\lambda} = \frac{2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}}{5{,}9 \cdot 10^{-5}} = 0{,}37,$$

t. j. pruge interferencije moraju se kod zakretanja aparata pomaknuti za više od $\frac{1}{3}$ svojeg razmaka. Michelson je bio siguran, da bi se još 100. dio toga pomaka morao opaziti.

Kad je pokus izveden, nije se pokazao ni najmanji trag očekivanog pomaka, a i kasniji pokusi izvedeni još finijim sredstvima dali su isti rezultat [18]. Iz toga treba zaključiti: *eterskoga vjetra nema. Gibanje Zemlje kroz eter ne utječe na brzinu svjetlosti ni u veličinama 2. reda.*

15. Hipoteza kontrakcije

Sam je Michelson zaključio iz svoga pokusa, da Zemlja u gibanju nosi eter potpuno sa sobom, kako tvrde elastična teorija Stokesova i elektromagnetska teorija Hertzova. No to se ne slaže s brojnim pokusima, koji pokazuju djelomičnu konvekciju. Michelson je ispitivao, da li se može ustanoviti razlika u brzini svjetlosti u različitim visinama

iznad Zemlje, ali bez pozitivna rezultata. Zaključio je iz toga, da se gibanje etera sa Zemljom proteže u velike visine iznad zemaljske površine. Tijelo u gibanju utjecalo bi dakle na eter na znatnu daljinu. No tako nije, jer je O l i v e r L o d g e pokazao (1892), da se brzina svjetlosti ni najmanje ne mijenja u blizini tjelesa u brzom gibanju, pa ni onda, kada svjetlost prolazi jakim električkim ili magnetskim poljem, koje tijelo nosi sa sobom. No sva se ta nastojanja čine gotovo suvišnima, jer da su i dovela do potpuna razjašnjenja Michelsonova pokusa, sva bi ostala elektrodinamika i optika tjelesa u gibanju ostala nerazjašnjena, jer sva pokazuju djelomičnu konvekciju.

Nameće se pokušaj tumačenja, koji se sastoji u hipotezi, da brzina svjetlosti ovisi o brzini *izvora svjetlosti*. Tu je hipotezu tek mnogo kasnije sistematski razvio R i t z (1908). No ta hipoteza nije u skladu s gotovo svima teoretskim i eksperimentalnim rezultatima istraživanja. Ponajprije bi se time žrtvovao karakter elektromagnetskih pojava kao djelovanja nablizu, koja se baš sastoje u tome, da na širenje djelovanja od jednog mjesta do drugog utječe samo neposredna okolina toga mjesta, a ne brzina udaljena izvora svjetlosti. Ritz je stoga svoju teoriju otvoreno nazvao nekom vrsti teorije emisije. No ono, što se emitira, ne bi imale biti materijalne čestice, koje se podvrgavaju mehaničkim zakonima, već neki agens, koji ušavši u tvari djeluje na elektrone usmjerenim, transverzalnim silama i dovodi ih do titranja. Titraji svjetlosti dakle postoje samo u tvari, a ne u eteru. Prigovor, da se u teoriji emisije interferencija ne bi dala razjasniti, očito nije opravdan, ako prihvatimo ovo shvaćanje.

No Ritz nije uspio dovesti svoju teoriju u sklad s optičkim i elektromagnetskim iskustvima. Svagdje, gdje se radi o relativnim gibanjima izvora svjetlosti i opažača, pokazuje se doduše utjecaj na broj titraja (Dopplerov efekt) i na smjer (aberacija), ali nema utjecaja na brzinu svjetlosti (Arago, Hoek, vidi IV, 9). D e S i t t e r (1913) je iscrpnim ispitivanjem dokazao, da brzina svjetlosti, koja dolazi od zvijezda stajačica, ne ovisi o gibanju tih zvijezda.

Mi smo tu teoriju spomenuli usprkos njezina neuspjeha, jer je jedna misao, koja je u njoj naglašena, važna i za razumijevanje teorije relativnosti. Naime činjenica, da su svi pojavi, *koji se mogu opažati*, uvijek vezani na tvar. »Polje u eteru« je fikcija, izmišljena, da se što jednostavnije opišu prostorne i vremenske ovisnosti pojava u tjelesima. Osvrnut ćemo se kasnije na to shvaćanje.

Vraćamo se sada na Lorentzovu teoriju elektrona, koja je Michelsonovim pokusom očito morala doći u težak položaj. Nauka o nepomičnom eteru čini se da bezuvjetno traži postojanje eterskog vjetra na Zemlji i stoga je u oštrom protuslovlju s rezultatom Michelsonovih pokusa. Da ipak zbog toga nije odmah propala, pokazuje njezinu jakost, koja se osniva na jedinstvenosti i zaokruženosti njezine fizičke slike svijeta. Konačno je ona do neke mjere svladala i tu poteškoću, doduše vrlo čudnovatom hipotezom, koju je izrekao F i t z - G e r a l d (1892), a koju je Lorentz odmah prihvatio i razradio.

Sjetimo se razmatranja, koja su temelj Michelsonova pokusa. Našli smo, da je vrijeme, koje zraka svijetla treba za put tamo i natrag duž neke dužine l, različito, prema tome, da li je ta dužina paralelna s gibanjem Zemlje ili na njemu okomita. U prvom je slučaju to vrijeme $t_1 = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\beta^2}$, u drugome $t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Pretpostavimo sada, da se krak interferometra, koji je paralelan s gibanjem Zemlje, skrati u omjeru $\sqrt{1-\beta^2} : 1$; vrijeme t_1 smanjilo bi se u istom omjeru, naime

$$t_1 = \frac{2l\sqrt{1-\beta^2}}{c(1-\beta^2)} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Bilo bi dakle $t_1 = t_2$. Hipoteza, koja nas iznenađuje svojom grubošću i smionošću, jednostavno je ova: *Svako tijelo, koje ima spram etera brzinu v, steže se u smjeru gibanja na dio*

$$\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Uistinu mora onda Michelsonov pokus dati negativan rezultat, jer je za oba položaja interferometra $t_1 = t_2$. Osim toga, a to je glavno, ovakva se kontrakcija ne bi mogla ustanoviti nikakvim sredstvima na Zemlji. Jer svako bi se zemaljsko mjerilo isto tako kontrahiralo. Opažač, koji bi mirovao izvan Zemlje u eteru, opazio bi doduše kontrakciju; čitava bi Zemlja bila spljoštena u smjeru gibanja, i svi predmeti na njoj isto tako.

Hipoteza kontrakcije čini nam se zato tako čudnovata, gotovo apsurdna, jer skraćenje nije posljedica nekakvih sila, nego se prikazuje kao popratna okolnost same činjenice gibanja. No Lorentz se tim prikao popratna okolnost same činjenice gibanja. No Lorentz se tim pri-

Ne možemo sve te pokuse ovdje opisati, a još manje opširno pretresti. Većinom su to optički pokusi i odnose se na pojave kod refleksije i loma, kod dvoloma, zakretanja ravnine polarizacije i t. d., a djelomice su elektromagnetski i odnose se na pojave indukcije, na raz diobu struje u žicama i t. d. Fizička tehnika danas omogućuje da se ustanovi, da li kod takvih pojava postoji utjecaj 2. reda Zemljina gibanja ili ne postoji. Osobito je značajan pokus, što su ga izveli T r o u t o n i N o b l e (1903), da nađu momenat sila, koji bi se morao pojaviti zbog eterskog vjetra u obješenom pločastom kondenzatoru. Rezultat pokusâ bio je bez izuzetka negativan. Nije se više moglo sumnjati, da opažač, koji se giba sa Zemljom, ne može opaziti translatorno gibanje kroz eter. Princip relativnosti, koji vrijedi u mehanici, proteže se dakle na sveukupnost elektromagnetskih procesa.

Lorentz se prihvatio posla, da tu činjenicu dovede u sklad sa svojom teorijom etera. Činilo se, da za to nema drugog puta, nego da

se prihvati hipoteza kontrakcije, i da se ona spoji sa zakonima teorije elektrona u neprotuslovnu, jedinstvenu cjelinu. Ponajprije je Lorentz opazio, da se sustav električnih naboja, koji su pod djelovanjem svojih elektrostatičkih sila u ravnoteži, sam kontrahira, kada se stavi u gibanje. Točnije rečeno, elektromagnetske sile, koje se javljaju kod jednolikog gibanja, mijenjaju konfiguraciju ravnoteže tako, da je svaka duljina u smjeru gibanja skraćena za faktor $\sqrt{1-\beta^2}$.

Ovaj matematički stavak daje razjašnjenje kontrakcije, ako se pretpostavi, da su sve fizičke sile zapravo električkog porijekla ili se barem podvrgavaju istim zakonima ravnoteže u sustavima, koji se jednoliko gibaju. Teškoća, da se sve sile smatraju električkim, osniva se na tome, da one prema davno poznatim zakonima, koji potječu još od Gaussa, doduše daju ravnotežu, ali ne daju nikada *stabilnu* ravnotežu naboja. Sile, koje spajaju atome u molekule, a ove u čvrsta tjelesa, ne mogu dakle biti jednostavno električke. Najjasnije se očituje potreba neelektričnih sila, kada se pita za dinamičku konstituciju pojedinog elektrona. Takav je elektron nagomilan negativni naboj. Moramo smatrati, da zaprema konačan prostor, jer smo vidjeli (V, 13), da je energija naboja u obliku kugle polumjera a jednaka $\frac{1}{2}\frac{e^2}{a}$ i postaje neizmjerna, ako a stavimo jednako nula. No pojedini dijelovi elektrona nastoje se razići, jer se istoimeni naboji odbijaju. Mora dakle postojati strana sila, koja ih drži na okupu. U Abrahamovoj teoriji elektrona pretpostavlja se, da je elektron kruta kugla. Neelektrične sile su dakle tako velike, da uopće ne dopuštaju deformacije. No mogu se dakako uzeti i druge pretpostavke.

Lorentzu je bila bliska hipoteza, da se i elektron kontrahira u omjeru $\sqrt{1-\beta^2} : 1$. Već smo prije rekli (V, 13), da onda izlazi mnogo jednostavnija formula za masu elektrona, nego po Abrahamovoj hipotezi. No Lorentzov elektron ima osim elektromagnetske energije još energiju deformacije stranoga porijekla, koje nema kod krutog Abrahamovog elektrona. Lorentz je istražio pitanje, da li je hipoteza kontrakcije dovoljna, da se izvede relativnost. Zamršenim računima je ustanovio, da nije tako, ali je i našao (1899), koju pretpostavku još treba dodati, da se svi elektromagnetski pojavi u sustavima u gibanju isto tako događaju kao u eteru. Njegov je rezultat barem isto tako čudnovat kao hipoteza kontrakcije: *u sustavu, koji se jednoliko giba, treba upotrebiti drugu mjeru vremena.* On je tu mjeru vremena, koja se mijenja od sustava do sustava, zvao *»mjesno vrijeme«*. Hipoteza kontrakcije može se očito tako izreći, da je mjera duljine u sustavima u gibanju drukčija nego u eteru. Obje hipoteze zajedno kažu, da u sustavima u gibanju treba drukčije mjeriti prostor i vrijeme nego u eteru. Lorentz je dao zakone, po kojim se mogu međusobno preračunati mjerne veličine u različitim sustavima u gibanju i dokazao je, da kod tih transformacija jednadžbe polja teorije elektrona ostaju nepromijenjene. To je matematički sadržaj njegova otkrića. Do sličnih rezultata došli su gotovo istodobno[1]) engleski fizičar L a r m o r (1900) i francuski matematičar Poincaré (1905). Mi ćemo te veze uskoro upoznati s Einsteinova gledišta u mnogo prozirnijem obliku, pa stoga ovdje u to ne ulazimo. No objasnit ćemo, koje su posljedice toga novog razvoja Lorentzove teorije za predodžbu etera.

U novoj Lorentzovoj teoriji vrijedi u skladu s iskustvima princip relativnosti za sve elektrodinamičke pojave. Opažač dakle vidi u svojemu sustavu iste pojave, bio taj sustav u miru ili u jednolikoj translaciji spram etera. On dakle uopće nema sredstva, da jedno od drugoga razlikuje. Jer promatranje drugih tjelesa u svijetu, koja se gibaju neovisno od njega, uvijek mu pokazuju samo relativno gibanje spram njih, nikad apsolutno gibanje spram etera. On dakle može tvrditi, da je sâm nepomičan u eteru, i nitko toga ne može oprovrgnuti. Doduše, drugi opažač, na drugom tijelu, koje se spram prvoga giba, može istim pravom isto tvrditi. Nema empirijskog ili teoretskog sredstva, da se odluči, da li koji od obojice ima pravo, i koji je to. Dolazimo dakle do istoga položaja spram etera, u koji nas je doveo klasični princip relativnosti mehanike spram apsolutnog Newtonova prostora (III, 6). Tamo smo morali priznati, da je besmisleno smatrati neko određeno mjesto u apsolutnom prostoru kao nešto *realno* u smislu fizike, jer nema mehaničkoga sredstva, da se fiksira neko mjesto u apsolutnom prostoru ili da se ponovno nađe. Isto tako moramo sada priznati, da određeno mjesto u eteru nije nešto fizikalno realno. No time eter sâm gubi karakter supstancije. Dapače, može se reći: ako od dva opažača, koja se relativno gibaju, ima svaki pravo tvrditi, da miruje u eteru, onda ne može postojati eter.

Teorija etera u svom najvišem razvoju dovodi dakle do ukidanja temeljnoga svog pojma. No teška je bila odluka da se prizna, da je predodžba etera prazna. Čak Lorentz se dulje vremena žacao učiniti taj korak, premda su baš njegove duhovite misli i njegov mučni rad doveli teoriju etera do te krize. Razlog je tome ovaj: eter je bio zato izmišljen, da bi postojao u praznom prostoru nosilac titraja svjetlosti ili općenitije elektromagnetskih sila. Titraji bez nečega, što titra, zaista se ne mogu zamisliti. No mi smo već prije, kada smo govorili o Ritzovoj teoriji, upozorili na to, da prelazimo svako moguće iskustvo tvrdeći, da i u praznom prostoru ima titraja, *koji se daju ustanoviti*. Svijetlo ili elektromagnetske sile uvijek se daju dokazati samo na tvari. Prazni prostor, slobodan od tvari, uopće nije predmet opažanja. Ustanoviti se može samo: od ovoga materijalnog tijela izlazi neko djelovanje i poslije nekog vremena prispije do drugoga nekog materijalnog tijela. Što je između toga, čisto je hipotetički, ili točnije rečeno, stoji do naše volje. To znači, teorija može vakuum ispuniti veličinama stanja, poljima i slično po slobodnoj volji, s jednim ograničenjem, da time promjene, opažene na materijalnim tjelesima, dovede u čvrstu, prozirnu vezu.

[1]) Historijski je zanimljivo, da je formule za preračunavanje na sustav u gibanju, koje danas zovemo Lorentzovom transformacijom [VI, 2 (72)], postavio već Voigt (1887) u jednoj radnji, koja još stoji na tlu elastične teorije svjetlosti [19].

Ovo je shvaćanje nov korak u smjeru više apstrakcije, u smjeru napuštanja uobičajenih predodžbi, koje su prividno nužni dijelovi predodžbenog svijeta. No istodobno je to i približavanje idealu, da treba samo ono priznati kao sastavni dio izgradnje fizičkoga svijeta, što je izravno dano iskustvom, a da se uklone sve slike i analogije, koje potječu iz nekog stanja primitivnijeg i grubljeg iskustva.

Supstancijalni eter odsada nestaje iz teorije. Na njegovu je mjestu apstraktno »elektromagnetsko polje« kao matematičko sredstvo za opisivanje pojava u tvari i njihovih zakonskih veza[1]).

Tko se boji takvog formalnog shvaćanja, neka misli na drugu, sasvim analognu apstrakciju, na koju se već davno naučio. Za određivanje mjesta na Zemlji stavljaju se trigonometrijski znakovi na tornjeve, brda i druge vidljive točke, s oznakom geografske duljine i širine. Na moru toga nema. Tamo su krugovi duljine i širine samo zamišljeni, ili, kako se još kaže, virtualni. Kada lađa hoće ustanoviti svoje mjesto, pretvara jedno sjecište tih zamišljenih linija astronomskim opažanjima u realnost, virtualno mjesto u realno. Slično se može shvatiti elektromagnetsko polje. Čvrsto tlo odgovara tvari, trigonometrijski znakovi fizičkim promjenama, koje se daju ustanoviti. Moru odgovara vakuum, krugovi duljine i širine elektromagnetskom polju. To je polje virtualno, dok ne unesemo pokusno tijelo i njegovim realnim promjenama polje učinimo vidljivim, isto tako, kao što lađa realizira virtualno geografsko mjesto [20].

Samo onaj, koji je zaista prisvojio ovaj način promatranja, razumjet će dalji razvoj nauke o prostoru i vremenu. Različiti ljudi različito su pristupačni sve većoj apstrakciji, objektiviranju i relativiranju. Stari kulturni narodi evropskog kontinenta, Nijemci, Holandezi, Skandinavci i Talijani najlakše to primaju i najživlje surađuju na daljoj izgradnji sustava. Englezi, koji naginju konkretnim predodžbama, već su teže pristupačni. Amerikanin rado se drži mehaničkih slika i modela. Čak Michelson otklanja teoriju svjetlosti bez etera kao nezamislivu, premda su baš njegovi pokusi najviše pridonijeli razaranju teorije etera. No mlada generacija već se svagdje odgaja u smislu novih shvaćanja i prima kao po sebi razumljivo, što su stariji smatrali nečuvenom novošću [21].

Osvrnemo li se na razvoj, vidimo, da je teorija etera završila principom relativnosti i njime da je dokončana. Supstancijalni eter nestaje kao suvišna hipoteza, a princip se relativnosti tim jasnije ističe kao temeljni zakon fizike. Nastaje zadatak da se sagradi zgrada fizičkoga svijeta na tom sigurnom temelju. Time konačno dolazimo do Einsteinovih radova.

[1]) Einstein je predložio, da se prazni prostor sa svojim gravitacionim i elektromagnetskim poljima nazove *»eter«*, pri čemu ta riječ ne bi imala značiti nikakvu supstanciju s njezinim tradicionalnim atributima. Tako u tom »eteru« nema točaka, koje se mogu fiksirati, i besmisleno je govoriti o gibanju relativno spram »etera«. Ovakva je upotreba riječi eter dakako dopustiva, i ako se udomaći, možda i zgodna.

VI. EINSTEINOV SPECIJALNI PRINCIP RELATIVNOSTI

1. Pojam istodobnosti

Logičke teškoće, koje je trebalo svladati kod provedbe principa relativnosti za elektrodinamičke procese, osnivaju se na tome, da treba dovesti u sklad ova dva stavka:

1. Po klasičnoj mehanici brzina bilo kakvog gibanja ima različite vrijednosti za dva opažača, koji se relativno gibaju jedan spram drugoga.
2. Iskustvo nas uči, da brzina svjetlosti ima uvijek istu vrijednost c, neovisno od stanja gibanja opažača.

Starija teorija etera pokušavala je ukloniti protuslovlje između ta dva stavka time, da se brzina svjetlosti rastavljala u dva sumanda, u brzinu svjetlosnog etera i u brzinu svjetlosti spram etera, kod čega se prvi dio mogao još prikladno odrediti hipotezama konvekcije. No time uspijeva ukloniti protuslovlje samo s obzirom na veličine 1. reda. Da strogo uzdrži stavak o konstantnosti brzine svjetlosti, Lorentzova je teorija morala uvesti posebnu mjeru duljine i vremena za svaki sustav u gibanju. Stavak se onda ostvaruje nekom vrsti »fizičke varke«.

Einstein (1905) je spoznao, da Lorentzova kontrakcija i mjesno vrijeme nisu matematička doskočica i fizička varka, nego da se radi o temeljima pojmova prostora i vremena uopće.

Od dvaju gornjih stavaka prvi je čisto teoretske, pojmovne prirode, drugi je empirijski osnovan. Budući da se stavak o konstantnosti brzine svjetlosti mora smatrati eksperimentalno potpuno osiguranim, ne preostaje drugo, nego da se napusti prvi stavak i time načela određivanja prostora i vremena. Mora da je u njima pogreška ili barem predrasuda, neka zamjena navike logičkom nuždom, što je poznata kočnica svakog napretka.

Predrasuda je u *pojmu istodobnosti*.

Po sebi se smatra razumljivim, da ima smisla reći: događaj na mjestu A, recimo na Zemlji, i događaj na mjestu B, recimo na Suncu, istodobni su. Pretpostavlja se pri tom, da pojmovi kao momenat vremena, istodobnost, prije, kasnije i t. d. imaju značenje po sebi, a priori, koje vrijedi za cijeli svemir. Toga je gledišta bio i Newton, kad je postulirao postojanje apsolutnog vremena ili trajanja (III, 1), koje »teče jednoliko po sebi i po svojoj prirodi i bez odnosa spram bilo čega izvanjega«.

No za fizičara, koji mjeri, takvog vremena svakako nema. Za njega izreka, da su događaj kod A i događaj kod B istodobni, naprosto nema smisla. On nema sredstva da odluči o ispravnosti ili neispravnosti te tvrdnje. Da se prosudi istodobnost dvaju događaja, koja se dešavaju na dva različita mjesta, treba na oba mjesta imati satove, za koje je sigurno, da jednako idu ili da su »sinkroni«. Pitanje je dakle ovo: postoji li sredstvo, kojim se može ispitati hod dvaju satova na različitim mjestima? Zamislimo oba sata kod A i B u čvrstoj udaljenosti l nepomična u sustavu referencije S. Ti se satovi mogu na dva načina dovesti na jednaki hod:

1. odnesu se na isto mjesto, reguliraju se, dok ispravno ne idu, i zatim se vrate na mjesta A i B.
2. Upotrebe se vremenski signali za uspoređivanje satova.

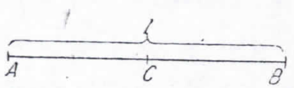
Oba se načina u praksi upotrebljavaju. Morska lađa nosi sa sobom točan kronometar, koji je reguliran po normalnom satu u polaznoj luci. Osim toga dobiva vremenske signale bežičnom telegrafijom. Potreba takvih signala dokazuje nepovjerenje spram »ponesenoga vremena«. Praktična je slabost postupka s transportiranim satom u tome, što se najmanja pogreška u hodu stalno povećava. No i ako pretpostavimo, da ima idealnih satova bez pogrešaka — fizičar je uvjeren, da ih ima u titrajima atoma kod emisije svjetlosti — ipak je logički nedopustivo, da se definicija vremena u sustavima u relativnom gibanju temelji na transportu satova. Jer izravno, t. j. bez posredovanja signala, može se jednaki hod dvaju satova, bili oni ma kako dobri, ispitati samo onda, kada relativno miruju. Da im hod ostaje jednak kod relativnog gibanja, ne može se ustanoviti bez signala. Bila bi to čista hipoteza, kojoj se po načelima fizičkog istraživanja moramo po mogućnosti ukloniti. Tako dolazimo do toga, da dajemo prednost postupku s vremenskim signalima za definiciju vremena u sustavima u relativnom gibanju. Ako time dođemo do neprotuslovnog sustava mjerenja vremena, trebat će naknadno istražiti, kakav mora biti idealan sat, da u sustavima s ma kakvim gibanjem uvijek pokazuje »ispravno« vrijeme (v. VI. 5).

Zamislimo na moru remorker A, koji napetim užetima vuče za sobom u nizu nekoliko teretnih lađa B, C, D. Neka je tišina i tako gusta magla, da se ne vidi od jedne lađe do druge. Hoćemo li usporediti satove na lađama, upotrebit ćemo signale zvuka. Remorker u 12 sati ispali hitac, i kada se prasak čuje na teretnim lađama, one će svoje satove naravnati na 12 sati. No kod toga očito nešto griješe, jer i zvuk treba neko vrijeme, da od A dođe do B, C i t. d. Ako je poznata brzina zvuka c, ta se pogreška može ukloniti. c je od prilike jednak 340 m/sek. Ako se lađa B nalazi za $l = 170$ m iza A, zvuk treba $t = \frac{l}{c} = \frac{170}{340} = \frac{1}{2}$ sek od A do B, sat kod B mora se dakle naravnati na $\frac{1}{2}$ sek iza 12 sati, kad stigne prasak. No korekcija je samo onda ispravna, ako lađe miruju. Ako su u vožnji, zvuk će od A do B očito trebati kraće vrijeme, jer lađa B ide zvuku u susret. Hoćemo li, da korekcija bude točna, moramo poznavati brzinu lađa prema uzduhu. Ako je ta brzina nepoznata, nemoguće je uspoređivati vrijeme pomoću zvuka. Kod vedroga vremena može se upotrebiti svijetlo mjesto vremena. Pogreška je sigurno vrlo malena, jer svijetlo putuje mnogo brže od zvuka, ali za načelno razmatranje nije važna apsolutna veličina. Zamislimo li mjesto lađâ na moru nebesko tijelo u moru etera, mjesto zvučnog signala svjetlosni signal, cijelo će razmatranje ostati nepromijenjeno. No bržega vjesnika od svijetla nema u svemiru. Vidimo, da teorija o apsolutno nepomičnom eteru dovodi do zaključka: apsolutno uspoređivanje vremena u sustavima u gibanju samo je onda provedivo, ako je poznato gibanje spram etera.

No rezultat svih eksperimentalnih istraživanja bio je, da se gibanje spram etera ne može ustanoviti fizičkim opažanjem. Iz toga izlazi, da se ni apsolutna istodobnost ne može ustanoviti ni na koji način.

Paradoks toga stavka nestaje, ako se sjetimo, da za uspoređivanje vremenskim signalima već mora biti poznata točna vrijednost brzine svjetlosti, a da za mjerenje te brzine opet treba odrediti vremensko trajanje. Radi se očito o logičkom kretanju u krugu.

Premda se ne može postići apsolutna istodobnost, ipak se može, kako je Einstein primijetio, definirati relativna istodobnost za sve satove, koji relativno jedan spram drugoga miruju, a da ne treba biti poznata vrijednost signalne brzine. Razmotrimo to najprije kod naših lađa na moru. Miruju li lađe, moći će se postići jednaki hod satova na lađama A i B na ovaj način (sl. 111): čamac C dovede se točno u sredinu vučnog užeta između A i B i tamo se ispali hitac. Prasak se mora čuti kod A i B istodobno.



Sl. 111.

Ako je niz lađa S u vožnji, očito se može primijeniti isti postupak. Ne misle li mornari na to, da se relativno spram uzduha gibaju, bit će uvjereni, da satovi u A i B idu jednako.

Drugi niz lađa S', gdje su lađe A', B', C' u istim razmacima kao dotične lađe u S, neka svoje satove isporede na isti način. Prestigne li jedan niz lađa drugi, bio ovaj u mirovanju ili sam u vožnji, u nekom će trenutku lađa A proći kraj A', B kraj B' i mornari mogu ispitati, da li im se satovi slažu. Dakako, da će naći, da se ne slažu. Ako su A i A' slučajno sinkroni, B i B' ne će više biti. Time će se očitovati pogreška. Signal iz središta C treba u vožnji dulje vremena do prednje lađe A, a kraće vrijeme do stražnje lađe B nego u mirovanju, jer A bježi pred zvukom, a B mu polazi u susret. Razlika je različita, ako su brzine tih nizova lađa različite.

U slučaju zvuka *jedan* sustav ima ispravno vrijeme, naime onaj, koji miruje relativno spram uzduha. U slučaju svjetlosti nema mogućnosti da se to ustvrdi, jer je apsolutno gibanje spram svjetlosnog etera pojam, koji po svim iskustvima nema fizičke realnosti. Razumije se, da je moguće provesti razmotreni postupak reguliranja satova zvukom i pomoću svjetlosti. Satovi u A i B naravnaju se tako, da svaki blijesak,

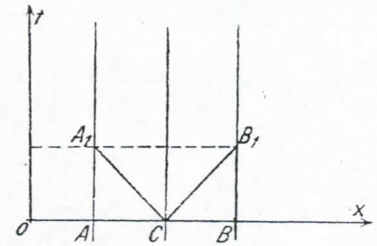
koji izlazi iz središta C dužine AB, stigne do tih satova, kad imaju jednaki položaj kazaljki. Na taj način svaki sustav S može provesti sinkronizam svojih satova. No kad se sretnu dva takva sustava, koja se međusobno jednoliko i pravocrtno gibaju, i ako se primjerice satovi A i A' slažu, satovi B i B' imat će različite položaje kazaljki. Oba sustava mogu *istim* pravom ustvrditi, da imaju ispravno vrijeme, jer svaki može tvrditi, da miruje, budući da svi prirodni zakoni u oba sustava glase jednako. No ako dvojica istim pravom nešto tvrde, što samo za jednoga može biti ispravno, onda možemo zaključiti, da je sama tvrdnja besmislena:

Nema apsolutne istodobnosti.

Tko je to jednom shvatio, taj će teško razumjeti, da je moralo proći mnogo stoljeća egzaktnog istraživanja, dok se spoznala ta jednostavna činjenica. Stara je to pripovijest o Kolumbovu jajetu.

Dalje je pitanje, da li metoda uspoređivanja satova, koju smo uveli, daje neprotuslovan pojam relativnoga vremena. Zaista ga daje. Da to uvidimo, upotrebit ćemo predočivanje Minkovskoga za događaje ili svjetske točke u ravnini xt, ograničivši se na gibanja u smjeru x i ispuštajući stoga y i z (sl. 112).

Točke A, B, C na osi x predočit će se u koordinatnom sustavu S s osima x, t kao 3 paralele s osi t. Točka C neka je u sredini između A i B. Od nje neka se izašalje u trenutku $t = 0$ svjetlosni signal u oba smjera. Pretpostavimo, da S »miruje«, t. j. da je brzina svjetlosti jednaka u oba smjera. Onda će svjetlosni signali, koji putuju na desno i na lijevo, biti predočeni pravcima, koji imaju jednaki nagib spram osi x, i koje zovemo *»crtama svjetlosti«*.



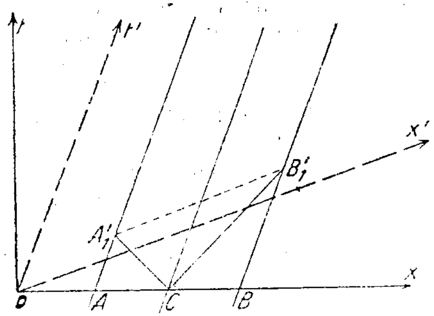
Sl. 112.

Za nagib ćemo uzeti da je 45^0, tako da ista dužina, koja u slici predočuje jedinicu duljine na osi x, znači na osi t vrlo maleno vrijeme $\frac{1}{c}$ sek, koje svijetlo treba, da prođe put od 1 cm. Sjecišta A_1, B_1 crta svjetlosti sa svjetskim crtama točaka A, B daju svojim vrijednostima t trenutke, u kojima stizavaju ta dva svjetlosna signala. Vidi se, da A_1 i B_1 leže na paraleli s osi x, da su dakle istodobni.

Neka se sada tri točke A, B, C gibaju jednoliko istom brzinom. Njihove svjetske crte opet su paralelne, ali su nagnute spram osi x (sl. 113). Svjetlosni signali predočeni su istim crtama svjetlosti, koje izlaze iz C, kao gore. No njihova sjecišta A_1', B_1' sa svjetskim crtama A, B sada ne leže na paraleli s osi x, ona dakle u koordinatnom sustavu xt nisu istodobna, nego je B_1' kasniji od A_1'. Naprotiv će opažač, koji se također giba jednakom brzinom, s istim pravom tvrditi, da su A_1', B_1' istodobni događaji (svjetske točke). On će upotrebiti koordinatni sustav S' s osima x', t', u kojemu točke A_1', B_1' leže na paraleli s osi x'.

Svjetske crte samih točaka A, B, C paralelne su dakako s osi t', jer A, B, C miruju u sustavu S', pa njihove x'-koordinate imaju za sve vrijednosti od t' istu veličinu.

Izlazi iz toga, da je sustav S', koji se giba zajedno s točakama, predočen u ravnini xt kosokutnim koordinatnim sustavom $x't'$, kojemu su *obje* osi nagnute spram prvotnih.



Sl. 113.

Sjetimo se sada, da su i u običnoj mehanici inercijalni sustavi u ravnini xt predočeni kosokutnim koordinatama s po volji usmjerenom osi t, ali je os x uvijek ista (III, 7). Već smo tamo napomenuli, da je to s matematičkog gledišta nedostatak u ljepoti, koju teorija relativnosti uklanja. Sada se jasno vidi, kako se to događa novom definicijom istodobnosti. Ujedno, gledajući sliku, i bez računa stičemo uvjerenje, da ta definicija mora biti moguća i neprotuslovna, jer ona ne znači ništa drugo, nego upotrebu kosokutnih koordinata xt mjesto pravokutnih.

Jedinice duljine i vremena u kosokutnom sustavu nisu još određene konstrukcijom. Upotrebili smo samo činjenicu, da se svjetlost u nekom sustavu S u svim smjerovima širi jednako brzo, ali još nijesmo upotrebili stavak, da brzina svjetlosti u svim inercijalnim sustavima ima istu brzinu c. Uzme li se i on u račun, dobiva se potpuna Einsteinova kinematika.

2. Einsteinova kinematika i Lorentzove transformacije

Ponavljamo još jednom pretpostavke Einsteinove kinematike:

1. *Princip relativnosti:* ima neizmjerno mnogo sustava referencije u relativno jednolikom i pravocrtnom gibanju (inercijalnih sustava), u kojima svi prirodni zakoni primaju svoj najjednostavniji oblik (koji je prvotno izveden za apsolutni prostor ili za nepomični eter).

2. *Princip konstantnosti brzine svjetlosti:* u svim inercijalnim sustavima brzina svjetlosti, mjerena fizički istovrsnim mjerilima i satovima, ima istu vrijednost.

Iz toga treba izvesti odnose između duljina i vremenâ u različitim inercijalnim sustavima. Ograničavamo se pri tome opet na gibanja paralelna s jednim čvrstim smjerom, smjerom x. Razmatramo dva inercijalna sustava S i S', koja imaju relativnu brzinu v. Nultočka sustava S' ima dakle s obzirom na sustav S u trenutku t koordinatu $x = vt$. Njezina je svjetska crta u sustavu S' određena uvjetom $x' = 0$. Obje jednadžbe moraju značiti isto, $x—vt$ mora dakle biti razmjerno sa x'. Stavljamo

$$\alpha x' = x - vt.$$

Po principu relativnosti oba su sustava potpuno ravnopravna. Može se stoga isto razmatranje primijeniti na gibanje nultočke sustava S relativno spram S', gdje samo relativna brzina v ima obrnuti predznak. Mora dakle i $x' + vt'$ biti razmjeran sa x, i to zbog ravnopravnosti sustavâ s istim faktorom proporcionalnosti α:

$$\alpha x = x' + vt'.$$

Iz ove druge jednadžbe može se upotrebom prve izraziti t' pomoću x i t. Izlazi

$$vt' = \alpha x - x' = \alpha x - \frac{x - vt}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\{(\alpha^2 - 1)\, x + vt\},$$

dakle

$$\alpha t' = \frac{\alpha^2 - 1}{v}\, x + t.$$

Pomoću ove jednadžbe, zajedno s prvom, mogu se izračunati x' i t', ako su poznati x i t. Kod toga je još neodređen faktor proporcionalnosti α. Treba ga odabrati tako, da bude sačuvan princip konstantnosti brzine svjetlosti.

Brzina jednolikog gibanja predočena je u sustavu S sa $u = \frac{x}{t}$, u sustavu S' sa $u' = \frac{x'}{t'}$. Razdijelimo li jednu s drugom one dvije jednadžbe, kojima se može x' i t' izraziti pomoću x i t, otpast će faktor α, pa izlazi

$$u' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{\frac{\alpha^2 - 1}{v}\, x + t}.$$

Razdijelimo li brojnik i nazivnik desne strane sa t i uvedemo $u = \frac{x}{t}$, dobivamo

$$u' = \frac{u - v}{\frac{\alpha^2 - 1}{v}\, u + 1}. \tag{70}$$

Radi li se napose o jednolikom gibanju zrake svjetlosti uzduž osi x, mora po principu konstantnosti brzine svjetlosti biti $u = u'$. Ta zajednička vrijednost je brzina svjetlosti c. Stavimo li dakle u našoj formuli $u = c$ i ujedno $u' = c$, to mora biti

$$c = \frac{c - v}{\frac{\alpha^2 - 1}{v}\, c + 1} \quad \text{ili} \quad \frac{\alpha^2 - 1}{v}\, c^2 + c = c - v;$$

iz toga izlazi

$$\alpha^2 - 1 = -\frac{v^2}{c^2} = -\beta^2$$

ili

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Time je nađen faktor proporcionalnosti α, naime

$$\alpha = \sqrt{1-\beta^2}. \tag{71}$$

Formule transformacije glase:

$$\alpha x' = x - vt, \quad \alpha t' = -\frac{\beta^2}{v}\, x + t.$$

Napisat ćemo ih još jednom sasvim opširno, dodavajući koordinate y, z, koje su okomite na smjer gibanja, pa se ne mijenjaju:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{72}$$

Ova pravila, kojim se mogu izračunati mjesto i vrijeme neke svjetske točke u sustavu S', ako su zadani u sustavu S, čine *Lorentzovu transformaciju*. Zaista su to iste formule, koje je Lorentz našao zamršenim razmatranjima o invarijanciji Maxwellovih jednadžbi polja (v. V,15).

Hoćemo li izraziti x, y, z, t pomoću x', y', z', t', treba te jednadžbe riješiti. Bez računa može se iz ravnopravnosti sustava S i S' zaključiti, da rješenja moraju imati isti oblik, samo je v pretvoren u $-v$. Račun zaista daje:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

Osobito je zanimljiv granični slučaj, kada je brzina v tih sustava vrlo malena spram brzine svjetlosti c. Onda se upravo dobiva Galileijeva transformacija [III, 7 (29)]. Jer ako se može $\frac{v}{c}$ zanemariti spram 1, izlazi iz (72)

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Može se dakle razumjeti, da je zbog male vrijednosti, koju ima $\frac{v}{c}$ u većini praktičkih slučajeva, Galileijeva kinematika kroz vjekove zadovoljavala sve potrebe.

3. Geometrijsko predočivanje Einsteinove kinematike

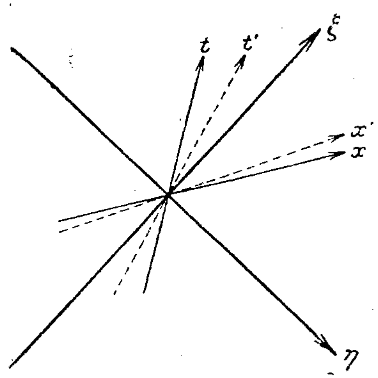
Prije nego što pokušamo tumačiti sadržaj tih formula, prikazat ćemo geometrijski u četverodimenzionalnom *svijetu xyzt* odnose između dvaju inercijalnih sustava, koje one predočuju, na način uveden po Minkovskome. Pri tome nije potrebno da se obaziremo na koordinate y, z, koje se ne mijenjaju, pa se možemo ograničiti na promatranje ravnine xt. Prijeko je potrebno, da čitalac stalno prevodi u obični jezik kinematike

odnose, koje dobivamo u geometrijskom obliku. Treba dakle pod svjetskom crtom zaista razumijevati gibanje točke, pod sjecištem dviju svjetskih crta susretanje dviju točaka u gibanju i t. d. Predočivanje pojava, koje slike prikazuju, može se jako olakšati, vodi li se ravnalo duž osi t paralelno s osi x, pa se pri tom uoče sjecišta brida ravnala sa svjetskim linijama. Te se točke onda gibaju po bridu amo tamo i daju sliku prostornog pojava gibanja.

Svaki inercijalni sustav predočen je, kako smo vidjeli (VI, 1), kosokutnim koordinatnim sustavom u ravnini xt. Da je jedan od njih pravokutan, može se smatrati slučajnom okolnošću i nema osobitoga značenja.

Svaka prostorna točka može biti polazna točka vala svjetlosti, koji se kao kugla širi jednoliko na sve strane. Uzduž smjera x, koji ovdje jedino promatramo, preostala su od kuglina vala samo dva svjetlosna signala, od kojih jedan ide na lijevo, drugi na desno. Oni su dakle u ravnini xt predočeni dvjema pravcima, koji se sijeku i koji su dakako sasvim neovisni od izbora sustava referencije, jer spajaju prave događaje, svjetske točke, naime prostorna mjesta, kojim svjetlosni signal uzastopce prolazi.

Nacrtat ćemo te crte svjetlosti za jednu svjetsku točku, koja neka je ujedno nultočka svih promatranih koordinatnih sustava xt, i to kao dva međusobno okomita pravca, koja odabiramo za osi koordinatnog sustava $\xi\eta$ (sl. 114). Time imamo pred očima jedno od glavnih obilježja Einsteinove teorije: sustav $\xi\eta$ jednoznačno je određen i čvrst u »svijetu«, jer njegove osi nisu prostorni pravci, nego ih tvore svjetske točke, kojima prolazi svjetlosni signal poslan iz nultočke. Ovaj je invarijantni ili »apsolutni« koordinatni sustav dakle vrlo apstraktne prirode. Moramo se priviknuti tome, da takve apstrakcije u modernoj teoriji nadomještavaju konkretnu predodžbu etera. Njihova je jakost, da ne sadrže ništa, što prelazi pojmove, potrebne za tumačenje iskustava.



Sl. 114.

S tim apsolutnim sustavom referencije $\xi\eta$ moraju se čvrsto spojiti *krivulje baždarenja*, koje na osima bilo kojeg inercijalnog sustava označuju jedinice duljine i vremena. Te baždarske krivulje moraju biti predočene invarijantnim zakonom, pa taj zakon treba naći. Crte svjetlosti same su invarijantne. Os ξ $(\eta = 0)$ predočena je u sustavu referencije S formulom $x = ct$, u drugom sustavu S' formulom $x' = ct'$, jer te formule kažu, da brzina svjetlosti u oba sustava ima istu vrijednost. Preračunat ćemo razliku $x' - ct'$, koja je za točke osi η

jednaka nuli, pomoću Lorentzove transformacije na koordinate x, t. Izlazi

$$x' - ct' = \frac{1}{\alpha}\left\{(x - vt) - c\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right\} = \frac{1}{\alpha}\left\{x\left(1 + \frac{v}{c}\right) - ct\left(1 + \frac{v}{c}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1+\beta}{\alpha}(x - ct).$$

Iz toga se vidi, da je i $x' - ct' = 0$, ako je $x - ct = 0$. Za os η ($\xi = 0$) bit će $x = -ct$ i $x' = -ct'$. Analogno preračunavanje izraza $x' + ct'$ u varijable x, t dobijemo, ako u gornjem računu nadomjestimo c sa $-c$, dakle i β sa $-\beta$ (dok $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2}$ ostaje nepromijenjen). Dobijemo tako

$$x' + ct' = \frac{1-\beta}{\alpha}(x + ct).$$

Iz tih dviju formula lako se dobije invarijantan izraz. Vrijedi $(1+\beta)(1-\beta) = 1 - \beta^2 = \alpha^2$, tako da množenje tih dviju jednadžbi daje

$$(x' - ct')(x' + ct') = (x - ct)(x + ct)$$

ili

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2,$$

t. j. *izraz*

(73) $$G = x^2 - c^2t^2$$

jest invarijanta. Zbog njezina fundamentalna karaktera zovemo je *temeljnom invarijantom.*

Ona ponajprije služi za određivanje jedinice duljine i vremena u bilo kojem sustavu referencije S. U tu se svrhu pitamo, gdje se nalaze sve svjetske točke, za koje G ima vrijednost $+1$ ili -1. Očito je $G = 1$ za svjetsku točku $x = 1$, $t = 0$. To je krajnja točka jediničnog mjerila postavljenog iz nultočke sustava referencije S u trenutku $t = 0$. Budući da to vrijedi jednako za sve sustave referencije S, vidimo, da svjetske točke, za koje je $G = 1$, definiraju nepomičnu jedinicu duljine za bilo koji sustav referencije, kako ćemo odmah potanje razložiti. Isto je tako $G = -1$ za svjetsku točku $x = 0$, $t = \frac{1}{c}$. Ta je svjetska točka dakle u vezi s jedinicom vremena sata, koji miruje u sustavu S. Točke $G = +1$ ili $G = -1$ mogu se lako geometrijski konstruirati, ako se polazi s invarijantnog koordinatnog sustava $\xi\eta$. Os ξ tvore točke, za koje je $\eta = 0$. U drugu ruku iste su svjetske točke u bilo kojem inercijalnom sustavu S obilježene time, da je $x = ct$. Stoga mora η biti razmjeran sa $x - ct$. Odaberemo li zgodno jedinicu za η, možemo staviti

$$\eta = x - ct.$$

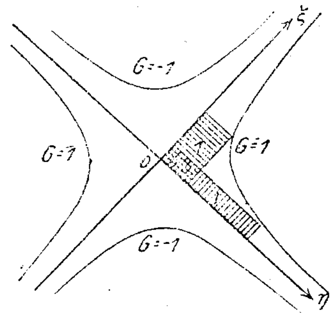
Isto se tako dobije razmatranjem osi η, da se može staviti

$$\xi = x + ct.$$

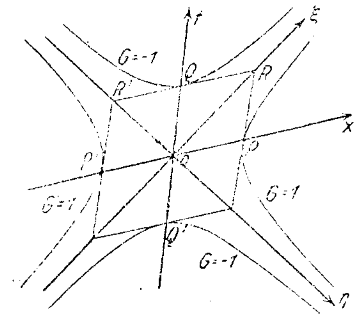
Tada je dakle

$$\xi\eta = (x - ct)(x + ct) = x^2 - c^2t^2 = G.$$

$G = \xi\eta$ očito znači površinu pravokutnika sa stranicama ξ i η. Hoćemo li naći svjetsku točku, za koju je $G = \xi\eta = 1$, treba samo paziti, da pravokutnik, nastao iz koordinata ξ, η ima površinu 1. Svi ti pravokutnici lako se mogu pregledati. Među njima je kvadrat sa stranicom 1, ostali su to viši, što su uži, i to niži, što su širi, prema uvjetu $\eta = \frac{1}{\xi}$ (sl. 115). Točke ξ, η očito tvore krivulju, koja se sve više približava osi ξ, odnosno osi η. Ta se krivulja zove *istostrana hiperbola.* Ako su ξ i η oba negativna, bit će $\xi \cdot \eta$ pozitivan. Stoga konstrukcija daje drugu granu hiperbole, koja je zrcalna slika prve u suprotnom kvadrantu.



Sl. 115.



Sl. 116.

Za $G = -1$ vrijedi ista konstrukcija u ostala dva kvadranta, gdje koordinate ξ i η imaju različit predznak. Te četiri hiperbole tvore tražene *baždarske krivulje,* kojima se određuju jedinice za duljine i vremena za sve sustave referencije xt.

Os x neka siječe grane hiperbole $G = +1$ u točkama P i P'. Os t siječe grane hiperbole $G = -1$ u Q i Q' (sl. 116). Povucimo kroz P paralelu s osi t. Tvrdimo, da ta paralela ne siječe desnu granu baždarske krivulje $G = +1$ još u jednoj točci, nego da je baš dira u P. Drugim riječima, ni jedna točka ove grane baždarske krivulje ne leži lijevo od toga pravca, nego se čitava grana nalazi desno od njega, i sve njezine točke imaju x-koordinate, koje su veće od dužine OP. I zaista je tako. Jer za svaku točku baždarske krivulje $G = x^2 - c^2t^2 = 1$ jest $x^2 = 1 + c^2t^2$. Dakle za točku P baždarske krivulje, koja uz to leži na osi x, $t = 0$, vrijedi $x^2 = 1$, no za svaku drugu točku baždarske krivulje je x^2 za pozitivni iznos c^2t^2 veći od 1. Dakle je $OP = 1$, a za svaku točku desne grane baždarske krivulje x je veći od 1. Isto tako izlazi, da paralela s osi t kroz P' dira lijevu granu hiperbole $G = 1$ u P', i da paralele s osi x kroz Q i Q' diraju grane hiperbole $G = -1$ u Q i Q'. Stoga je očito dužina $OQ = \frac{1}{c}$; točka Q leži naime na baždarskoj krivulji $G = x^2 - c^2t^2 = -1$ i na osi t, $x = 0$, dakle je za nju $c^2t^2 = 1$, $t = \frac{1}{c}$

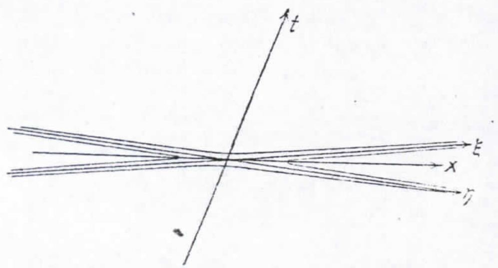
Paralele s osi t kroz P i P' sijeku crte svjetlosti ξ, η u točkama R i R'. Kroz iste točke prolaze i paralele s osi x kroz Q i Q'. Jer na pr. za točku R vrijedi $x = ct$, budući da leži na osi ξ, a $x = 1$, jer je na paraleli s osi t kroz P. Iz toga izlazi $t = \frac{1}{c}$, t. j. ta točka leži na paraleli s osi x kroz Q.

Vidi se sada, da se ta konstrukcija osi x slaže s prije danom konstrukcijom istodobnih svjetskih točaka. Jer t-os OQ i paralele PR i $P'R'$ jesu svjetske crte triju točaka, od kojih je jedna O i leži u sredini drugih dviju P, P'. Pođe li iz O svjetlosni signal na obje strane, bit će on predočen crtama svjetlosti ξ, η i sjeći će dakle obje vanjske svjetske crte u R i R'. Stoga su te dvije svjetske točke istodobne, njihova je spojnica paralelna s osi x, točno kao što je dala naša nova konstrukcija.

Ponavljamo ukratko rezultat razmatranja: *osi x i t nekoga sustava referencije S postavljene su jedna spram druge tako, da je svaka od njih paralelna s onim pravcem, koji dira baždarsku krivulju u sjecištu s drugom osi.*

Jedinica duljine predočena je dužinom OP. Jedinica vremena određena je dužinom OQ, koja istina nije 1 sek, već $\frac{1}{c}$ sek. Svaka svjetska crta, koja siječe grane baždarske krivulje $G = 1$, može se uzeti kao os x. Os t određena je tada kao paralela s tangentom u točki P. Isto tako se može za os t uzeti bilo koja svjetska crta, koja siječe grane baždarske krivulje $G = -1$. Pripadna os x određena je analognom konstrukcijom.

Ova pravila nadomještavaju stavke klasične kinematike. Tamo je os x bila ista za sve inercijalne sustave, jedinica duljine bila je na njoj stalno zadana, a jedinica t jednaka odsječku na općenito kosoj osi t, koji je na njoj odsijecao izvjestan pravac, paralelan s osi x (III, 7 sl. 41).



Sl. 117.

Kako to, da se ove prividno tako različite konstrukcije jedva daju razlikovati?

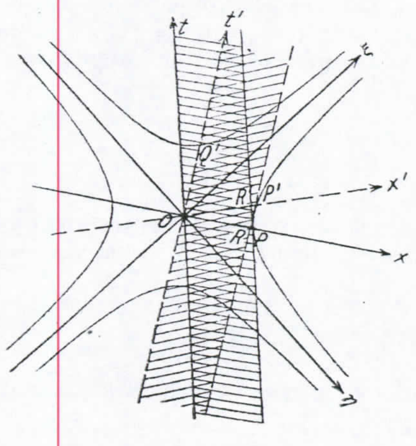
Razlog je golema vrijednost brzine svjetlosti c, ako je mjerimo u cm i sek. Hoćemo li naime u slici 1 sek i 1 cm predočiti dužinama iste duljine, mora se crtež očito stisnuti u smjeru t, tako da se sve dužine paralelne s osi t skrate u omjeru $1 : c$. Da je $c = 10$, nastao bi crtež prema sl. 117. Obje crte svjetlosti tvorile bi sasvim šiljast kut, koji predočuje

mogućnosti za os x, dok kutno područje za osi t postaje jako veliko. Što je c veći, to više bi se očitovala kvantitativna razlika u promjenljivosti smjera x i smjera t. Za pravu vrijednost od c, naime $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sek, crtež se uopće više ne bi mogao izvesti na papiru. Obje crte svjetlosti praktički bi se pokrivale, i smjer x, koji je uvijek među njima, bio bi konstantan. To je baš pretpostavka obične kinematike. Vidi se dakle, da je ona specijalan slučaj, ili, bolje reći, graničan slučaj Einsteinove kinematike, naime granični slučaj neizmjerno velike brzine svjetlosti.

4. Mjerila i satovi u gibanju

Odgovorit ćemo sada na najjednostavnija kinematička pitanja, koja se odnose na prosuđivanje duljine jednoga istog mjerila i jednoga istog vremenskog trajanja iz različitih sustava referencije.

Štap duljine 1 neka je postavljen od nultočke sustava S duž osi x. Pitamo, kolika mu je duljina u sustavu S'. Da mu duljina ne će opet biti 1, odmah je jasno. Opažači sustava S' mjerit će dakako položaje krajnjih točaka štapa istodobno, t. j. istodobno u sustavu S'. No to *nije* istodobno u sustavu S. Ako se dakle u istom trenutku i očita položaj jedne krajnje točke štapa u S i u S', druga krajnja točka štapa s obzirom na S-vrijeme *ne će* biti istodobno očitana od opažača sustava S i S'. U međuvremenu sustav S' se pomaknuo, očitanje opažača u S' odnosi se dakle na pomaknut položaj drugoga kraja štapa.



Sl. 118.

Stvar se na prvi pogled čini beznadno zamršena. Ima protivnika principa relativnosti, koji, pošto su saslušali ovu teškoću određivanja duljine štapa, ogorčeno uzviknu: »Dakako, krivotvorenim satovima može se sve izvesti. Tu se vidi, do kakvih apsurdnosti može dovesti slijepo vjerovanje u čarobnu moć matematičkih formula«, pa zatim osude u cijelosti teoriju relativnosti. Čitalac naših izlaganja bit će da je shvatio, da formule nisu ono bitno, nego da se radi o čisto pojmovnim vezama, koje se mogu sasvim dobro razumjeti i bez matematike. Čak bismo se mogli, u bitnosti, odreći ne samo formula, nego i geometrijskih slika, i sve izreći riječima običnog govora, samo što bi knjiga onda postala tako opširna i nepregledna, da je nijedan nakladnik ne bi štampao, a nijedan čitalac je ne bi proučavao.

Služimo se ponajprije našom slikom u ravnini xt, da riješimo pitanje određivanja duljine štapa u sustavima S i S' (sl. 118). Štap neka miruje u sustavu $S(x, t)$. Svjetska je crta njegove početne točke os t, a svjetska crta njegove krajnje točke paralela u udaljenosti 1. Ta paralela dira baždarsku krivulju u točci P. Cijeli je štap dakle za sva vremena predočen prugom između tih dvaju pravaca. Treba sada odrediti njegovu duljinu u sustavu $S'(x' t')$, koji se giba spram S. Njegova je os t' dakle nagnuta spram osi t. Nalazimo pripadnu os x tako, da u sjecištu Q' osi t' s baždarskom krivuljom postavimo tangentu i povućemo paralelu OP' kroz O. Dužina OP' je jedinica duljine na osi x'. Duljina jediničnoga štapa, koji miruje u sustavu S, mjerena u sustavu S', određena je dužinom OR', koju izrezuje pruga štapa iz osi x' i ona je očito manja od OP', dakle je OR' manji od 1: štap se u sustavu S', koji se giba, prikazuje skraćen.

To je upravo kontrakcija, koju su izmislili Fitz-Gerald i Lorentz, da objasne Michelsonov pokus, i koja ovdje izlazi kao prirodna posljedica Einsteinove kinematike.

Ako se obrnuto mjeri sa sustava S mjerilo, koje miruje u sustavu S', dakako da se prikazuje opet skraćeno, *ne* možda produljeno. Jer takav je štap predočen prugom, koja je ograničena osi t' i njome paralelnom svjetskom crtom kroz točku P'. No ova siječe jediničnu dužinu OP sustava S u nutarnjoj točci R, tako da je OR manji od 1. Kontrakcija je dakle uzajamna, kako to zahtijeva princip relativnosti.

Veličinu kontrakcije naći ćemo najbolje pomoću Lorentzove transformacije (72). l_0 neka je duljina štapa u sustavu S', u kojemu miruje. Zovemo l_0 *duljinom mirovanja* ili *vlastitom duljinom štapa.* Treba li ustanoviti duljinu štapa, kako se prosuđuje sa sustava S, moramo staviti $t = 0$, što izražava istodobnost očitanja položaja krajeva štapa s obzirom na sustav S. Onda iz prve jednadžbe Lorentzove transformacije (72) izlazi

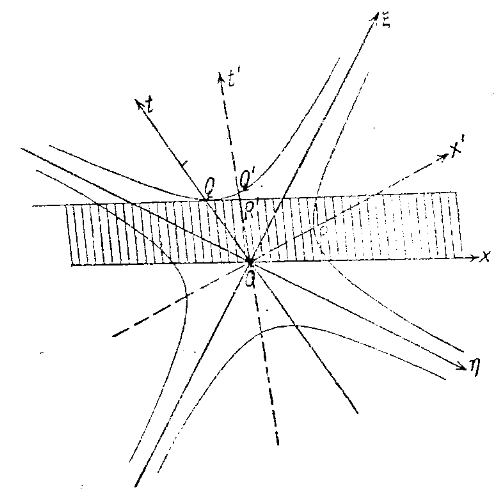
$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Za početnu točku štapa je $x = 0$, dakle i $x' = 0$. Za njegovu je krajnju točku $x' = l_0$, a ako $x = l$ znači duljinu štapa, mjerenu u sustavu S, izlazi

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{74}$$

To znači, da se duljina štapa u sustavu S prikazuje skraćena u omjeru $\sqrt{1 - \beta^2} : 1$, točno u skladu s hipotezom Fitz-Geralda i Lorentza (V, 15).

Ista razmatranja vrijede za određivanje vremenskog trajanja u dva različita sustava S i S'. Zamislimo u svim prostornim točkama sustava S postavljene satove, koji jednako idu. Oni imaju istodobno s obzirom na S izvjestan položaj kazaljki. Položaj $t = 0$ predočen je svjetskim točkama osi x, položaj $t = \frac{1}{c}$ svjetskim točkama pravca, koji je paralelan s osi x i prolazi točkom Q (sl. 119). U nultočki sustava S' neka je postavljen sat, koji za $t = 0$ također pokazuje $t' = 0$. Pitajmo sada, koji je položaj kazaljki jednoga sata sustava S, koji se nalazi na mjestu, gdje sat, koji miruje u S', upravo pokazuje vrijeme $t' = \frac{1}{c}$. Tražena vrijednost od t očito je određena sjecištem Q' osi t' s baždarskom krivuljom $G = -1$. Naprotiv, položaj kazaljki $t = \frac{1}{c}$ satova, koji miruju u S, predočen je točkama pravca, koji je povučen paralelno s osi x kroz



Sl. 119.

točku Q. Taj pravac siječe os t' u točci R', a slika pokazuje, da Q' leži izvan dužine QR'. To znači, da se jedinica vremena sustava S' u sustavu S prikazuje produljena. Da se ustanovi iznos produljenja, stavimo u Lorentzovoj transformaciji za sat, koji se nalazi u nultočci sustava S' $x' = 0$, dakle $x = vt$. Izlazi tada

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Interval vremena t_0 u sustavu S', $t' = t_0$, bit će dakle u sustavu S mjeren kao

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{75}$$

prikazuje se dakle produljen. Dilatacija vremena je recipročna kontrakciji duljina. Dakako da se i obrnuto jedinica vremena jednog sata, koji miruje u sustavu S, prikazuje povećana u sustavu S'.

Može se reći i tako, da sudeći s bilo kojeg sustava, opažamo, da satovi svakoga drugog sustava, koji se spram našega giba, zaostaju.

Vremenski procesi u sustavu, koji se spram našega relativno giba, polaganiji su, svi procesi toga sustava zaostaju za dotičnim procesima u sustavu, koji se smatra nepomičnim. Kasnije ćemo se osvrnuti na okolnosti, koje iz toga izlaze, a često se označuju paradoksnima.

Vremenski podatak sata u sustavu referencije, u kojemu taj sat miruje, zove se *vlastito vrijeme* sustava. Ono je identično s »mjesnim vremenom« Lorentzovim. Napredak Einsteinove teorije ne odnosi se na formalne zakone, nego na njihovo načelno shvaćanje. Kod Lorentza je mjesno vrijeme matematička pomoćna veličina u suprotnosti s pravim, apsolutnim vremenom. Einstein je ustanovio, da nema sredstva, da se to apsolutno vrijeme odredi, da ga se iznađe iz neizmjerno mnogo ravnopravnih mjesnih vremena sustavâ referencije u različitom gibanju. No to znači, da apsolutno vrijeme nije fizička realnost. Vremenski podaci imaju smisla samo relativno, spram određenih sustava referencije. Time je provedeno relativiranje pojma vremena.

5. Prividnost i stvarnost

Pošto smo upoznali Einsteinovu kinematiku u dvostrukom obliku slika i formula, moramo je ukratko osvijetliti s gledišta teorije spoznaje. Moglo bi se naime pomisliti, da se u Einsteinovoj teoriji i ne radi o novim spoznajama o predmetima fizičkog svijeta, nego samo o definicijama konvencionalne prirode, koje su doduše prilagođene zahtjevima empirije, ali bi se isto tako mogle nadomjestiti drugim odredbama. Ta je misao bliska, ako se sjetimo polazne točke naših razmatranja, primjera s nizom lađa, gdje izlazi, kako je Einsteinova definicija istodobnosti konvencionalna i stoji do naše volje. Stvarno bi se za lađe, koje se gibaju kroz nepomični uzduh, Einsteinova kinematika dala potpuno provesti, ako se zvučni signali upotrebljavaju za reguliranje satova. Veličina c značila bi onda u svim formulama brzinu zvuka. Svaka lađa imala bi prema svojoj brzini svoje vlastite jedinice duljine i vremena, a između mjernih sustava različitih lađa vrijedile bi Lorentzove transformacije. Imali bismo neprotuslovan Einsteinov svijet »u malom«.

No ta neprotuslovnost postoji samo tako dugo, dok dopuštamo, da jedinice duljine i vremena ne budu ograničene nikakvim drugim zahtjevima, osim principom relativnosti i principom konstantnosti brzine zvuka, odnosno svjetlosti. Zar je to smisao Einsteinove teorije?

Svakako nije. Pretpostavlja se dakako, da štap, koji se u dva sustava referencije S i S' relativno spram njih nalazi pod točno istim fizičkim okolnostima, na pr. da na njega ne djeluju po mogućnosti nikakve sile, predstavlja svaki puta *istu* duljinu. Čvrsto, nepomično mjerilo duljine 1 u sustavu S treba naravno i u sustavu S' imati istu duljinu, ako u njemu miruje, i ako smo se pobrinuli, da ostali fizički uvjeti (sila

teža, način podupiranja, temperatura, električna i magnetska polja i t. d.) budu u S' po mogućnosti isti kao u S. Točno isto zahtijevamo i za satove.

Ta šutke učinjena pretpostavka Einsteinove teorije mogla bi se nazvati »princip fizičkog identiteta mjernih jedinica«.

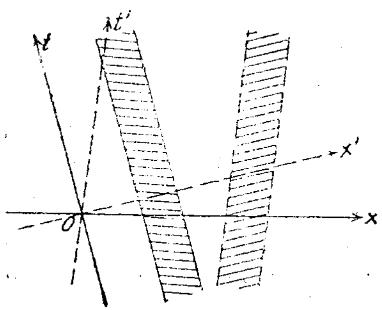
Čim smo jasno uočili taj princip, vidimo, da je on u protuslovlju s prenošenjem Einsteinove kinematike na slučaj lađa i uspoređivanja satova zvučnim signalima. Jer jedinice duljine i vremena određene zvučnim signalima po Einsteinovim propisima ne će biti jednake jedinicama duljine i vremena mjerenim čvrstim mjerilima i običnim satovima. Jedinica duljine ne samo da je na svakoj lađi drukčija, već prema njezinoj brzini, nego je jedinica uzduž lađe drukčija nego poprijeko. Einsteinova kinematika bila bi dakle doduše moguća definicija, ali u tom slučaju pače ni korisna. Obična mjerila i satovi bez sumnje bi bili bolji.

S istoga razloga teško je moguće predočiti Einsteinovu kinematiku modelima. Takvi modeli daju ispravne odnose između duljine i vremena u različitim sustavima, ali su u protuslovlju s principom identiteta mjernih jedinica. Skala duljine mora se u modelu dvaju sustava u relativnom gibanju odabrati različito.

Sasvim je drukčije po Einsteinu u stvarnom svijetu. Ovdje ima da vrijedi nova kinematika, ako se upotrebi i s t i štap, i s t i sat za određivanje duljina i vremenâ najprije u sustavu S, a onda u sustavu S'. Time se Einsteinova teorija izdiže iznad gledišta puke konvencije do tvrdnje o izvjesnim svojstvima stvarnih tjelesa. Time tek dobiva ona fundamentalno značenje za čitavo shvaćanje o prirodi. Vrlo se jasno ističe ova važna okolnost, uoči li se Römerova metoda za mjerenje brzine svjetlosti pomoću Jupiterovih mjeseca. Cijeli Sunčani sustav giba se relativno spram zvijezda stajačica. Zamislimo li s njima čvrsto spojen sustav referencije S, to će Sunce sa svojim planetima definirati drugi sustav S'. Jupiter sa svojim satelitima je (idealno dobar) sat sa svojim kazaljkama. Taj se sat giba u krugu, tako da se nalazi čas u smjeru relativnog gibanja sustava S' spram S, čas u protivnom smjeru. Ne može se hod Jupiterova sata u tima položajima odrediti po volji konvencijom tako, da vrijeme, koje svjetlost treba za prelaženje promjera Zemljine staze, bude u svim smjerovima isto; nego to vrijedi *samo od sebe*, jer je takav Jupiterov sat. On pokazuje vlastito vrijeme Sunčanog sustava S', a ne nekakvo apsolutno vrijeme ili strano vrijeme sustava zvijezda stajačica S. Drugim riječima, ophodno vrijeme Jupiterovih mjeseca konstantno je relativno spram Sunčanog sustava (kod čega nije uzeta u obzir brzina samoga Jupitera relativno spram Sunčanog sustava).

Neki tvrde, da takvo shvaćanje *narušava zakon kauzalnosti*. Ima li naime isto mjerilo, koje se prosuđuje sa sustava S, različitu duljinu prema tome, da li miruje u S ili se spram njega giba, mora, kažu oni, postojati *uzrok* takve promjene. No Einsteinova teorija ne daje nikakvog uzroka, nego tvrdi, da se kontrakcija zbiva sama od sebe, kao popratna okolnost činjenice gibanja. Taj prigovor nije opravdan. On se osniva na preuskom shvaćanju pojma »promjena«. Sam po sebi takav pojam i nema smisla, on ne znači ništa apsolutno, kao što ni podaci o veličini i vremenu nemaju apsolutnoga značenja. Lako će čovjek reći, da se s tijelom, koje se giba jednoliko i pravocrtno spram inercijalnog sustava *S*, »događa neka promjena«, premda se *mijenja* samo *mjesto* toga tijela spram sustava *S*. Koje »promjene« fizika ubraja u djelovanja, za koja treba tražiti uzroke, nikako nije a priori jasno, već se to određuje samim empirijskim istraživanjem.

Shvaćanje Einsteinove teorije o biti kontrakcije jest ovo: materijalan štap fizički nije prostorna stvar, nego prostorno - vremenska tvorba. Svaka je točka štapa sada, i sada, i sad još uvijek, i u svako vrijeme. Slika (prostorno jednodimenzionalno) zamišljenoga štapa koja tome odgovara nije dakle dužina na osi *x*, nego pruga ravnine *xt* (sl. 120). Isti štap, kad miruje u sustavima *S* ili *S'*, koji su u različitom gibanju, predočen je različitim prugama. *Nema* a priori pravila, kako treba crtati takve 2-dimenzionalne tvorevine u ravnini *xt*, da bi se ispravno predočilo fizičko ponašanje istoga štapa kod različitih brzina. Za to treba tek odrediti baždarsku krivulju u ravnini *xt*. Klasična kinematika crta ih drukčije nego Einsteinova. Koja ima pravo, ne može se ustanoviti a priori. U klasičnoj teoriji obje pruge imaju istu širinu, ako je mjerilo paralelno s čvrstom osi *x*. U Einsteinovoj teoriji imaju istu širinu, ako je mjerimo različitim, ali određenim mjernim jedinicama u različitim smjerovima *x* sustavâ referencije, koji se relativno gibaju.



Sl. 120.

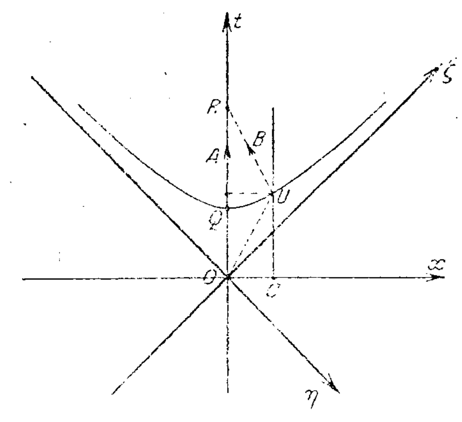
»Kontrakcija« se ne odnosi na prugu, nego na dužinu izrezanu od osi *x*. No samo pruga, kao raznolikost svjetskih točaka, događaja, ima fizičku realnost, a ne prerez. Kontrakcija je dakle samo posljedica načina promatranja, a nije promjena fizičke realnosti. Nije dakle obuhvaćena pojmovima uzroka i djelovanja.

Tim se shvaćanjem rješava i ozloglašeno sporno pitanje, da li je kontrakcija »stvarna« ili samo »prividna«. Ako odrežem režanj kobasice, bit će ovaj veći ili manji, prema tome, da li režem kosije ili manje koso. Besmisleno je označiti »prividnim« različite veličine režnjeva kobasice, a možda onaj najmanji, koji nastaje okomitim rezom, smatrati »stvarnom« veličinom. Isto tako ima štap u Einsteinovoj teoriji različite duljine, već prema stajalištu opažača. Jedna od njih, duljina mirovanja, najveća je, ali zato ona nije stvarnija od drugih. Primjena disjunkcije »prividan« i »stvaran« u tom naivnom smislu nije pametnija, nego kad se pita, koja je stvarna koordinata *x* neke točke *xy*, a da se ne kaže, koji koordinatni sustav treba uzeti.

Isto vrijedi i za relativnost vremena. Idealan sat ima u sustavu, u kojem miruje, uvijek jedan isti hod. On pokazuje »vlastito vrijeme« sustava referencije. Ako ga prosuđujemo s drugog sustava, on ide polaganije. Neki odrezak vlastitog vremena odavle se čini duljim. No i ovdje je besmisleno pitanje, koje je »stvarno« trajanje nekog procesa.

Uz ispravno shvaćanje Einsteinova kinematika ne sadrži nikakvih nejasnoća ili čak nutarnjih protuslovlja. No mnogi su njezini rezultati u suprotnosti s uobičajenim oblicima mišljenja ili s naučavanjem klasične fizike. Gdje su te suprotnosti osobito oštre, često ih osjećamo kao nepodnošljive, paradoksne. Izvest ćemo iz Einsteinove teorije dosta zaključaka, koji su isprva izazvali žestok otpor, dok nije uspjelo, da ih se eksperimentalno potvrdi. Ovdje ćemo saopćiti razmatranje, koje daje osobito čudnovate rezultate, a čini se, da nije moguće ispitati ih pokusom. Radi se o t. zv. »p a r a d o k s u s a t o v a«.

Zamislimo opažača *A* u mirovanju u nultočki *O* inercijalnoga sustava *S*. Drugi opažač *B* neka najprije miruje na istom mjestu *O*, zatim odlazi jednolikom brzinom pravocrtno po osi *x*, dok ne stigne do točke *C*, tamo se obrne i istom brzinom vrati pravocrtno do *O*. Oba opažača imaju sa sobom idealne satove, koji pokazuju svoje vlastito vrijeme. Vremenski odsječci ubrzavanja kod polaska, okretanja i dolaska mogu se učiniti kakogod hoćemo malenim u usporedbi s trajanjem čitavoga putovanja, ako su trajanja jednolikih gibanja tamo i natrag dosta velika. Ako bi ubrzanje utjecalo na hod satova, to će djelovanje ostati razmjerno po volji maleno, ako je trajanje puta dovoljno veliko, tako da ga možemo zanemariti. No onda mora sat opažača *B* poslije njegova povratka zaostajati za satom opažača *A*. Jer znamo (VI, 4), da za vrijeme periodâ jednolikog gibanja opažača *B*, koji su odlučni za rezultat, vlastito vrijeme zaostaje za vremenom drugog inercijalnog sustava. Osobito se jasno to vidi na geometrijskoj slici u ravnini *xt* (sl. 121). U njoj smo, da bude zgodnije, nacrtali osi sustava *xt* međusobno okomite. Svjetska je crta točke *A* os *t*. Svjetska je crta točke *B* slomljena (crtkana) linija *OUR*, kojoj točka loma *U* leži na svjetskoj crti točke okretanja *C*, paralelnoj osi *t*. Kroz *U* položimo hiperbolu, koja izlazi iz baždarske krivulje *G* = — 1 prikladnim povećanjem. Ona siječe os *t*



Sl. 121.

u Q. Onda je očito dužina vlastitog vremena OQ za opažača A točno jednaka dužini vlastitog vremena OU za opažača B. Kako se vidi iz slike, trajanje vlastitog vremena za A do točke okretanja R više je nego dvostruko od OQ, dok je za B točno dvostruko od OU. Zato u trenutku povratka sat opažača A pokazuje više nego sat opažača B.

Veličina razlike lako se izračuna iz formule (75), gdje je t_0 vlastito vrijeme od A, a t vrijeme mjereno u sustavu B. Ograničimo se na male brzine od B i smatrajmo $\beta = \frac{v}{c}$ malenim brojem. Mjesto (75) može se tada približno pisati

$$t = t_0 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right).$$

Stoga je napredovanje sata opažača A pred satom od B jednako

$$t - t_0 = \frac{\beta^2}{2}\, t_0, \tag{76}$$

a to vrijedi u svakom trenutku gibanja, jer opažač putuje tamo i natrag istom brzinom. Vrijedi dakle napose i u trenutku povratka, gdje onda t_0 znači čitavo trajanje putovanja po vlastitom vremenu od A, t trajanje putovanja po vlastitom vremenu od B.

Paradoksno je na tom rezultatu, da se *svaki* nutarnji proces sustava B mora događati polaganije nego isti proces u sustavu A. Svi titraji atoma, pa i sam tok života, moraju se ponašati kao satovi. Ako su dakle A i B blizanci, morat će B poslije povratka biti mlađi od svoga brata blizanca A. Zaista čudnovat zaključak, koji se ne da ukloniti nikakvim cjepidlačarenjem. Moramo se s njime pomiriti, kako smo se prije nekoliko stoljeća pomirili s antipodima, koji stoje naglavce. Budući da se prema formuli (76) radi o efektu 2. reda, jedva da će od toga biti praktičnih posljedica.

Brani li se čovjek protiv toga rezultata i označuje ga paradoksnim, onda time ne misli drugo, nego »neobičan« ili »čudnovat«. Protiv toga pomaže vrijeme. No ima i protivnika teorije relativnosti, koji hoće iz ovog razmatranja izvesti prigovor protiv logičke konsekventnosti te teorije. Oni argumentiraju ovako: po teoriji relativnosti dva su sustava u relativnom gibanju ravnopravna. Može se dakle i B smatrati nepomičnim. Onda A putuje isto tako kao prije B, samo u protivnom smjeru. Treba dakle zaključiti, da sat od B poslije povratka ima prednost pred satom od A, a prije je dobiven suprotni rezultat. No kako sat od A ne može imati napredovanje pred satom od B i istodobno sat od B pred satom od A, otkriva ovo razmatranje nutarnje protuslovlje teorije — tako kažu oni, koji površno misle. Pogreška je razmatranja očita. Princip relativnosti odnosi se s a m o na sustave, koji se uzajamno gibaju jednoliko i pravocrtno. U obliku, kako smo ga dosada razvili, *nije* primjenljiv na ubrzane sustave. No sustav B *jest* ubrzan. On dakle *nije* ravnopravan sa A. A je inercijalni sustav, B nije. Kasnije ćemo doduše vidjeti, da Einsteinova opća teorija relativnosti smatra i relativno ubrzane sustave ravnopravnim, ali u izvjesnom smislu, koji treba točno raspraviti. Mi ćemo se s toga općenitijega gledišta još

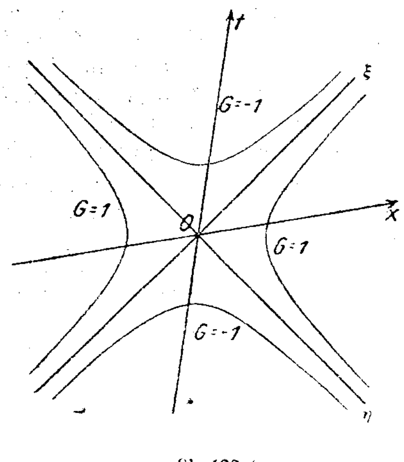
jednom osvrnuti na »paradoks satova« i pokazat ćemo, da i onda pomnim razmatranjem ne nailazimo ni na kakve poteškoće. Gore smo naime pretpostavili, da uz dovoljno dugo trajanje putovanja kratka vremena ubrzanja ne utječu na hod satova. No to vrijedi *samo* za razmatranje s inercijalnog sustava A, a *ne vrijedi* za mjerenje vremena u ubrzanom sustavu B. U njemu se po načelima opće teorije relativnosti pojavljuju gravitaciona polja, koja utječu na hod satova. Uzme li se to djelovanje u račun, izlazi, da svakako sat od B prethodi satu od A, i time nestaje prividno protuslovlje (v. VII, 10).

Relativiranje pojmova duljine i vremenskog trajanja mnogima se čini teško; vjerojatno samo zato, jer je neobično. Jamačno ni relativiranje pojmova »gore« i »dolje« otkrićem kuglina oblika Zemlje nije savremenicima bilo manje teško. I tu je rezultat istraživanja bio u protivurječju sa zornom predodžbom uzetom neposredno iz doživljaja. Slično se čini, da Einsteinovo relativiranje vremena nije u skladu s doživljavanjem vremena pojedinca. Jer *osjećaj* »sada« proteže se bez granica na cijeli svijet, povezujući sve zbivanje jednoznačno s našim ja. Da bi ono isto, što naše ja osjeća kao »istodobno«, netko drugi označio sa »jedno za drugim«, to se zaista ne da shvatiti iz *doživljaja vremena*. No egzaktna znanost ima *druge* kriterije istine. Budući da se apsolutno »istodobno« ne može ustanoviti, mora ona taj pojam izbrisati iz svoga sustava.

6. Zbrajanje brzina

Ući ćemo sada dublje u zakone Einsteinove kinematike. Ponajviše ćemo se ograničiti na promatranje ravnine xt. Poopćenje na četverodimenzionalni prostor $xyzt$ ne pruža bitnih teškoća i samo će prigodice biti spomenuto.

Crte svjetlosti, koje su određene jednadžbom $G = x^2 - c^2t^2 = 0$, dijele ravninu xt u četiri kvadranta (sl. 122). G ima u svakom kvadrantu očito uvijek isti predznak, i to u suprotnim kvadrantima, koji sadržavaju grane hiperbole $G = +1$, vrijedi $G > 0$, a u kvadrantima hiperbole $G = -1$ vrijedi $G < 0$. Pravocrtna svjetska crta kroz nultočku O može se odabrati kao os x ili os t, prema tome, da li prolazi kvadrantima $G > 0$ ili kvadrantima $G < 0$. Prema tome razlikujemo svjetske crte »prostorne prirode« i svjetske crte »vremenske prirode«.



Sl. 122.

U bilo kojem inercijalnom sustavu os x rastavlja svjetske točke »prošlosti« ($t < 0$) od svjetskih točaka »budućnosti« ($t > 0$). No za svaki inercijalni sustav ovo je rastavljanje drukčije; jer za drugi položaj osi x neke svjetske točke, koje su prije bile iznad osi x, dakle u »budućnosti«, sada su ispod osi x, dakle u prošlosti i obrnuto. Samo događaji predočeni svjetskim točkama unutar kvadranata $G < 0$ za svaki su inercijalni sustav jednoznačno »prošli« ili »budući«. Za takvu svjetsku točku P vrijedi $t^2 > \frac{x^2}{c^2}$, t. j. u svakom je dopuštenom sustavu referencije vremenski razmak događaja O i P veći od vremena, koje svjetlost treba, da stigne od jednog mjesta do drugoga. Uvijek se onda može uvesti inercijalni sustav S, kojemu os t prolazi kroz P, u kojemu je dakle P događaj, koji se desio u prostornoj nultočki. Gledano s drugog inercijalnog sustava, ovaj će se sustav S gibati pravocrtno i jednoliko tako, da mu nultočka koincidira baš s nultočakama O i P. Onda je za događaj P u sustavu S očito $x = 0$, dakle $G = -c^2t^2 < 0$.

U svakom inercijalnom sustavu os t rastavlja svjetske točke, kojima odgovaraju događaji na osi x »ispred« ili »iza« prostorne nultočke. No za drugi inercijalni sustav s drugom osi t ovo je rastavljanje očito drukčije. Samo za svjetske točke unutar kvadranta $G > 0$ jednoznačno je određeno, da li su »ispred« ili »iza« prostorne nultočke. Za takvu točku P vrijedi $t^2 < \frac{x^2}{c^2}$, t. j. u svakom je dopuštenom sustavu referencije vremenski razmak događaja O i P manji od vremena, koje treba svjetlost za put između njih; tada se može uvesti inercijalni sustav, koji se prikladno giba tako, da mu os x prolazi kroz P. U njemu su dakle događaji O i P istodobni. U tom je sustavu za događaj P očito $t = 0$, dakle $G = x^2 > 0$.

Iz toga izlazi, da je invarijanta G za svaku svjetsku točku P veličina, koja se može mjeriti i ima zorno značenje. Ili se može P »transformirati na isto mjesto« sa O, onda je $G = -c^2t^2$, gdje je t vremenska razlika događaja P spram događaja O, koji se desio na istom prostornom mjestu sustava S; ili se može P »transformirati na istodobnost« sa O, onda je $G = x^2$, gdje je x prostorna udaljenost ovih dvaju događaja u sustavu S, u kojem su istodobna.

Crte svjetlosti $G = 0$ u svakom koordinatnom sustavu predočuju gibanja brzinom svjetlosti. Zato svakoj svjetskoj crti vremenske prirode odgovara gibanje manje brzine. Svako gibanje brzinom manjom od brzine svjetlosti može se »transformirati na mirovanje«, jer mu pripada svjetska crta vremenske prirode.

No što vrijedi za gibanja brzinom većom od brzine svjetlosti?

Prema rečenom jasno je, da ih Einsteinova teorija relativnosti mora smatrati fizički nemogućim. Jer nova kinematika izgubila bi svoj smisao, da ima signala, koji dopuštaju kontrolu satova brzinom većom od brzine svjetlosti. Čini se, da tu nailazimo na teškoću. Pretpostavimo, da sustav S' ima brzinu v spram drugog sustava S. Tijelo K neka se

giba relativno spram S' brzinom u'. Po običnoj kinematici bit će onda relativna brzina tijela K spram S

$$u = v + u'.$$

Ako i v i u' prelaze polovicu brzine svjetlosti, bit će $u = v + u'$ veći od c, što bi po teoriji relativnosti imalo biti nemoguće. Razumije se, da se ovo protuslovlje osniva na tome, što se u kinematici principa relativnosti, gdje svaki sustav referencije ima svoje vlastite jedinice duljine i vremena, ne smiju brzine jednostavno zbrajati.

Vidi se to već po tome, što brzina svjetlosti ima istu vrijednost u bilo koja dva sustava referencije, koja su u relativnom gibanju. Baš tu činjenicu upotrebili smo (VI, 2) za izvođenje Lorentzove transformacije, i formula (70) daje ispravni zakon za sastavljanje brzina, ako se u nju uvrsti $\alpha^2 - 1 = \beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$. Mi ćemo to pravilo još jednom izvesti pomoću Lorentzove transformacije (72). U tu svrhu dijelimo izraze za x' i y' (ili z') izrazom za t':

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{t - \frac{v}{c^2}x}, \qquad \frac{y'}{t'} = \frac{y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{t - \frac{v}{c^2}x}.$$

Ako desno kratimo sa t, pojavljuju se kvocijenti $u_p = \frac{x}{t}$, $u_s = \frac{y}{t}$, koji su očito u sustavu S mjerene projekcije ili komponente brzine tijela K paralelno (longitudinalno) ili okomito (transverzalno) na smjer gibanja sustava S' spram S. Kvocijenti $u'_p = \frac{x'}{t'}$, $u'_s = \frac{y'}{t'}$ imaju isto značenje s obzirom na sustav S'. Dobivamo dakle *Einsteinov teorem adicije brzina:*

$$u'_p = \frac{u_p - v}{1 - \frac{vu_p}{c^2}}, \qquad u'_s = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_p}{c^2}}, \tag{77}$$

koji nadomještava jednostavne formule

$$u'_p = u_p - v, \qquad u'_s = u_s$$

stare kinematike. Radi li se napose o zraci svijetla, koja putuje u smjeru gibanja sustava S' spram S, bit će $u_s = 0$, $u_p = c$. Onda formula (77) daje evidentni rezultat

$$u'_p = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c, \qquad u'_s = 0,$$

koji izražava stavak o konstantnosti brzine svjetlosti. Povrh toga se vidi, da za bilo koje tijelo, koje se giba longitudinalno, ostaje $u'_p < c$, dok je $u_p < c$. Jer nadomjestimo li u prvoj formuli (77) u_p većom vrijednosti c, povećava se time brojnik, a smanjuje se nazivnik, tako da se razlomak sigurno povećava. Izlazi stoga

$$u'_p < \frac{c-v}{1-\frac{v}{c}} \quad \text{ili} \quad u'_p < c.$$

Analogna relacija vrijedi pogotovo za transverzalno i uopće za bilo kakvo gibanje.

Brzina svjetlosti je dakle kinematički neprekoračiva granica. Ta je tvrdnja Einsteinove teorije naišla na velik otpor. Činila se kao neopravdano ograničenje za buduće pronalazače, koji bi htjeli tražiti gibanja brzinom većom od svjetlosti. Poznajemo u β-zrakama radioaktivnih tvari elektrone s brzinom, koja je bliska brzini svjetlosti. Zašto ih se ne bi moglo toliko ubrzati, da dostignu brzinu veću od brzine svjetlosti? Einsteinova teorija tvrdi, da to načelno nije moguće, jer je otpor tromosti ili masa tijela to veća, što više mu se brzina približava brzini svjetlosti. Time prelazimo na *novu dinamiku*, koja se nadovezuje na Einsteinovu kinematiku.

7. Einsteinova dinamika

Galilei-Newtonova mehanika najuže je skopčana sa starom kinematikom. Klasični princip relativnosti napose osniva se na činjenici, da su promjene brzine, ubrzanja, invarijantna spram Galileijevih transformacija.

Dakako da ne možemo za jedan dio prirodnog zbivanja pretpostaviti jednu kinematiku, a za drugi dio drugu, za mehaniku invarijantnost s obzirom na Galileijeve transformacije, a za elektrodinamiku invarijantnost s obzirom na Lorentzove transformacije.

Znamo, da su Galileijeve transformacije granični slučaj Lorentzovih za neizmjerno veliku vrijednost konstante c. Pretpostavit ćemo stoga prema Einsteinu, da klasična mehanika ne vrijedi točno, nego da se mora modificirati. Zakoni nove mehanike moraju biti invarijantni spram Lorentzovih transformacija. Kod postavljanja tih zakona treba odlučiti, koji će se principi klasične mehanike zadržati, a koje treba odbaciti ili promijeniti. Temeljni stavak mehanike, od kojega smo pošli, bio je *stavak impulsa*, izražen formulom (7) (II, 9): $J = mw$. Jasno je, da ga ne možemo zadržati u ovom obliku. Jer dok u klasičnoj mehanici promjena brzine w ima istu vrijednost za različite inercijalne sustave (III, 5), ovdje to zbog Einsteinova teorema adicije brzina (77) ne će biti tako. Formula (7) stoga bez posebnih propisa o preračunavanju (transformaciji) impulsa s jednog sustava referencije na drugi uopće nema smisla, i zato nije zgodno, da se od nje polazi, kako bi se poopćenjem našao novi temeljni zakon.

No može se poći od zakona održanja impulsa [II, 9, formula (9)]. Ovaj se odnosi na ukupni impuls, koji dva tijela *nose sa sobom*, i izriče da se taj impuls ne mijenja kod sraza tih tjelesa, kakogod se pri tome

mijenjale brzine. Radi se dakle o izričaju, koji se tiče samo dvaju tijela, koja djeluju jedno na drugo, o *uzajamnom* srazu, bez djelovanja izvana, dakle i bez odnosa na treća tijela ili koordinatne sustave. Tražit ćemo dakle, da taj zakon održanja ostane na snazi i u novoj dinamici.

Doduše, kako ćemo odmah vidjeti, to nije moguće, ako se držimo temeljnog zakona klasične mehanike, da je masa svakom tijelu svojstvena, konstantna veličina. Pretpostavit ćemo stoga odmah, *da je masa jednoga istog tijela relativna veličina.* Ona može imati različite veličine prema sustavu referencije s kojega se ona prosuđuje, ili u nekom sustavu referencije prema brzini tijela. Jasno je, da masa s obzirom na neki sustav referencije može ovisiti samo o iznosu brzine tijela spram toga sustava.

Razmotrimo dva sustava referencije S i S', koja se jedan spram drugoga pravocrtno gibaju brzinom v. U sustavu S neka se nalazi opažač A, u sustavu S' opažač B. Oni neka imaju dvije sasvim jednake kugle. Kugla opažača A ima dakle spram sustava S istu masu kao kugla opažača B spram sustava S', ako su samo relativna gibanja ista. Ova dva opažača neka bace kugle jedan drugome, i to svaki u smjeru okomitom na svoje gibanje, a prema drugome. Trenutak bacanja neka odrede tako, da se te dvije kugle u letu pogode točno simetrično, t. j. tako, da spojnica njihovih središta u trenutku sraza bude okomita na smjeru relativnoga gibanja sustava S i S'.

Označimo li sa u_{p_1} i u_{s_1} longitudinalnu i transverzalnu komponentu brzine prve kugle, sa u_{p_2}, u_{s_2} komponente brzine druge kugle, može se odrediti, kako će se te veličine ponašati prije i poslije sraza, ako ih mjerimo u jednom od sustava S, S'. Prvu kuglu baca opažač A transverzalno s obzirom na S relativnom brzinom U. Bit će dakle

$$u_{p_1} = 0, \quad u_{s_1} = U. \tag{78}$$

Isto tako B baca svoju kuglu u obrnutom smjeru s obzirom na S' istom relativnom brzinom U, dakle je

$$u'_{p_2} = 0, \quad u'_{s_2} = -U.$$

Ove se veličine mogu po teoremu adicije (77) preračunati na drugi sustav. Zadovoljit ćemo se, da odredimo sve komponente u sustavu S, ali napominjemo, da račun u sustavu S' daje isti konačni rezultat, kao što mora biti zbog simetrije čitavog procesa. Uvrštenjem vrijednosti od u'_{p_2} i u'_{s_2} u (77) dobiva se

$$u_{p_2} = v, \quad u_{s_2} = -U\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{79}$$

Hoćemo li izračunati ukupni impuls prije sraza, bit će bolje, da ne pokušamo pretpostaviti jednake mase tih dviju jednakih kugala, kojima je gibanje različito, jer će se odmah pokazati, da nužno moraju biti različite. Označimo li dakle mase prije sraza s obzirom na S sa m_1, m_2, imat će ukupni impuls prije sraza komponente

(80) $$\begin{cases} J_p = m_1 u_{p_1} + m_2 u_{p_2} = m_2 v, \\ J_s = m_1 u_{s_1} + m_2 u_{s_2} = m_1 U - m_2 U \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{cases}$$

Razmotrimo sada djelovanje sraza. Budući da sraz mora biti točno simetričan, niti se može promijeniti longitudinalna brzina prve kugle gledane sa sustava S, niti ona druge kugle gledane sa sustava S'. Uopće mora zbog simetrije opažač A na svojoj kugli vidjeti isti proces gibanja, kao B na svojoj. Transverzalne komponente brzine mijenjat će se kod sraza. Prva kugla, mjeri li se u S, neka dobije brzinu $-U'$, koja je suprotnog smjera spram prvotne brzine. Druga kugla, mjeri li se u S', mora onda srazom dobiti brzinu U', koja je također suprotnog smjera spram prvotnog gibanja. Bit će dakle poslije sraza

(81) $$\begin{cases} u_{p_1} = 0, \quad u_{s_1} = -U', \\ u'_{p_2} = 0, \quad u'_{s_2} = U', \end{cases}$$

a preračunavanjem na sustav S dobije se prema (77)

(82) $$u_{p_2} = v, \quad u_{s_2} = U' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Označimo li mase poslije sraza sa $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$, to izlaze ove komponente impulsa poslije sraza:

(83) $$\begin{cases} J_p = \overline{m}_1 u_{p_1} + \overline{m}_2 u_{p_2} = \overline{m}_2 v, \\ J_s = \overline{m}_1 u_{s_1} + \overline{m}_2 u_{s_2} = -\overline{m}_1 U' + \overline{m}_2 U' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{cases}$$

Usporedimo li impulse prije i poslije sraza, (80) i (83), dobijemo kao uvjete njihove nepromjenljivosti

(84) $$\begin{cases} m_2 v = \overline{m}_2 v, \\ m_1 U - m_2 U \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\overline{m}_1 U' + \overline{m}_2 U' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{cases}$$

Da je masa konstantna, dakle $m_1 = m_2 = \overline{m}_1 = \overline{m}_2$, bila bi doduše prva jednadžba identično ispravna, no druga bi dovela do protuslovlja. Jer iz nje bi onda izlazilo, da je

$$(U + U')\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = 0,$$

a to je nemoguće, jer U i v sigurno nisu nula.

Moramo dakle napustiti princip klasične mehanike o konstantnosti mase i nadomjestiti ga već prije spomenutom pretpostavkom, da masa tijela s obzirom na sustav S ovisi o veličini njegove brzine relativno spram toga sustava.

Veličina u brzine može se izračunati iz komponenata u_p i u_s po formuli (3) (II, 3):

$$u = \sqrt{u_p^2 + u_s^2}.$$

Prema tome dobijemo za brzine kugala

(85) $$\begin{cases} \text{prije sraza iz (78) i (79)} & \begin{cases} u_1 = U, \\ u_2 = \sqrt{v^2 + U^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, \end{cases} \\ \text{poslije sraza iz (81) i (82):} & \begin{cases} u_1 = U', \\ u_2 = \sqrt{v^2 + U'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \end{cases} \end{cases}$$

Prva jednadžba (84) traži, da bude $m_2 = \overline{m}_2$. No ako je masa uopće promjenljiva s brzinom, onda može samo onda biti $m_2 = \overline{m}_2$, ako je dotična brzina u_2 prije i poslije sraza ista:

$$v^2 + U^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = v^2 + U'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

No iz toga izlazi $U = U'$. Sada pokazuju jednadžbe (85), da se ni u_1 ne mijenja kod sraza, a iz toga izlazi $m_1 = \overline{m}_1$. Možemo dakle drugu jednadžbu (84) pisati ovako:

$$m_1 U - m_2 U \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -m_1 U + m_2 U \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

ili

$$m_1 - m_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.$$

Iz toga izlazi

(86) $$m_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Zamislimo li sada brzinu bacanja U sve manjom, to će konačno prema (85) biti $u_1 = 0$, $u_2 = v$. Onda je m_1 masa, koja odgovara brzini nula, i koju zovemo *masom mirovanja* m_0, dok je m_2 masa, koja odgovara brzini v, pa je označujemo naprosto sa m. Vrijedi dakle

(87) $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Time je *nađena ovisnost relativističke mase o brzini*. Lako se može naknadno uvidjeti, da je tim postavkom (87) opća jednadžba (86) zadovoljena za bilo koje brzine bacanja U, jer je prema (85)

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}.$$

$$m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{v^2+U^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right\}}} =$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}},$$

iz čega odmah izlazi relacija (86). Kako smo već rekli, promatranje s drugog sustava referencije S' dovelo bi nas do istog rezultata.

Za *impuls*, koji tijelo *nosi sa sobom*, dobiva se

(88) $$J = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Od njega se može prijeći na zakone gibanja za sile, koje djeluju neprekinuto. Za to treba upotrebiti onu formulaciju klasične mehanike (II, 10), koja se osniva na impulsu, koji tijelo nosi sa sobom. Očito se ona može lako prenijeti na novu dinamiku, samo treba zakon posebno formulirati za longitudinalnu i za transverzalnu komponentu: *Sila K proizvodi promjenu impulsa, koji tijelo nosi sa sobom, i to promjena longitudinalne, odnosno transverzalne komponente impulsa po jedinici vremena jednaka je dotičnoj komponenti sile.*

Dodamo li brzini v najprije mali longitudinalni porast w_p, nalazimo jednostavnim računom[1]) da je longitudinalna promjena od J jednaka

$$\frac{m_0 w_p}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}$$

[1]) Ako su naime

$$u_p = v + w_p, \quad u_s = w_s$$

komponente brzine poslije promjene, to su pripadne komponente impulsa

$$J_p = \frac{m_0 (v+w_p)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad J_s = \frac{m_0 w_s}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

gdje je

$$u = \sqrt{u_p^2 + u_s^2} = \sqrt{(v+w_p)^2 + w_s^2}$$

veličina promijenjene brzine. Ta se može približno staviti jednako komponenti u_p, jer je

$$u = \sqrt{v^2 + 2vw_p + w_p^2 + w_s^2},$$

a ako se kvadrati od w_p i w_s zanemare:

$$u = \sqrt{v^2 + 2vw_p} = v\sqrt{1 + 2\frac{w_p}{v}}.$$

Dodamo li brzini v transverzalni prirast w_s, bit će transverzalna promjena od J jednaka

$$\frac{m_0 w_s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ove izraze treba podijeliti malim vremenskim trajanjem t promjene. Pri tom se pojavljuju *komponente ubrzanja*

Na ovo primjenjujemo prije upotrebljeni postupak za izvođenje približnih formula. Za male x vrijedi

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \text{ približno } = 1 + 2x,$$

dakle

$$\sqrt{1+2x} \text{ približno } = 1 + x.$$

Bit će dakle s dovoljnim približenjem

$$u = v\left(1 + \frac{w_p}{v}\right) = v + w_p = u_p.$$

Slično razvijamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(v^2+2vw_p)}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{1-\frac{2vw_p}{\alpha^2c^2}}},$$

gdje smo upotrebili prije uvedenu [VI, 2 formula (71)] kraticu α. Po prije upotrebljenoj približnoj formuli

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x$$

bit će

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{vw_p}{\alpha^2c^2}\right).$$

Komponente impulsa poslije promjene dobiju se sada uz zanemarenje članova kvadratnih u w_p, w_s:

$$J_p = m_0(v+w_p)\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{vw_p}{\alpha^2c^2}\right) = \frac{m_0}{\alpha}\left\{v + w_p\left(1+\frac{v^2}{\alpha^2c^2}\right)\right\} = \frac{m_0}{\alpha}\left(v + \frac{w_p}{\alpha^2}\right)$$

i

$$J_s = m_0 w_s \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{vw_p}{\alpha^2c^2}\right) = \frac{m_0}{\alpha} w_s.$$

Od toga treba odbiti prvotne impulse

$$J_p^0 = \frac{m_0 v}{\alpha}, \quad J_s^0 = 0,$$

pa se dobije za promjene impulsa

$$J_p - J_p^0 = \frac{m_0 w_p}{\alpha^3}, \qquad J_s - J_s^0 = \frac{m_0 w_s}{\alpha},$$

što se slaže s formulama u tekstu.

$$b_p = \frac{w_p}{t}, \qquad b_s = \frac{w_s}{t},$$

pa dobivamo za *komponente* sile izraze:

$$(89) \qquad K_p = \frac{m_0 b_p}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^3}, \qquad K_s = \frac{m_0 b_s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Veza između sile i proizvedenog ubrzanja drukčija je dakle, prema tome, da li sila djeluje u smjeru brzine, koja već postoji, ili okomito na nju.

Obično se te formule dovode na oblik, koji je najsličniji temeljnom zakonu klasične dinamike [II, 10, formula (10)]. U tu se svrhu stavlja

$$(90) \qquad m_p = \frac{m_0}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^3}, \qquad m_s = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

i označuje te veličine kao *longitudinalna i transverzalna masa*. Potonja je identična s veličinom m u formuli (87), koju smo označili naprosto *relativističkom masom.*

Možemo onda mjesto (89) pisati:

$$(91) \qquad K_p = m_p b_p, \qquad K_s = m_s b_s,$$

što se formalno slaže s klasičnim temeljnim zakonom.

Vidi se ovdje, kako je potrebno od početka pojam mase definirati isključivo otporom tromosti. Inače ga se ne bi moglo primijeniti u relativističkoj mehanici, jer za konvektivni impuls, za longitudinalne i transverzalne sile treba uzeti svaki puta drugi izraz za »masu«, a osim toga te mase nisu karakteristične konstante tijela, nego ovise o njegovoj brzini. Pojam mase u Einsteinovoj dinamici znatno se dakle udaljuje od jezičnog običaja, gdje masa na neki način znači kvantitet materije. Mjera je za to u nekom smislu masa mirovanja m_0. No ta opet nije, kao masa obične mehanike, u bilo kojem sustavu referencije jednaka omjeru impulsa i brzine ili sile i ubrzanja.

Pogled na formule za masu (87) i (90) uči nas, da se vrijednosti relativističke mase m (odnosno m_p i m_s) povećavaju, što se više brzina v tijela približava brzini svjetlosti. Za $v = c$ masa postaje neizmjerno velika. Iz toga izlazi, da je nemoguće konačnim silama dovesti tijelo na brzinu veću od brzine svjetlosti. Njegov otpor tromosti raste u neizmjernost i sprečava dostizavanje brzine svjetlosti.

Ovdje se vidi, kako se Einsteinova teorija harmonijski zaokružuje u jedinstvenu cjelinu. Prirodni zakoni u novom obliku sami traže gotovo paradoksnu pretpostavku neprekoračive granične brzine.

Formula (87) za ovisnost mase o brzini ista je, koju je već Lorentz našao elektrodinamičkim računima za svoj splošteni elektron. Pri tom je m_0 bio izražen elektrostatičkom energijom U mirnoga elektrona isto tako kao u Abrahamovoj teoriji [V,13, formula (69)], naime

$$m_0 = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}.$$

Vidimo sada, da Lorentzova formula za masu ima mnogo općenitije značenje. Ona mora vrijediti za svaku vrst mase, bez obzira na to, da li je elektrodinamičkog porijekla ili nije. Istraživanja o otklonu katodnih zraka govore za to, da se Lorentzova formula bolje slaže od Abrahamove. No iznenadna potvrda relativističke formule za masu dobivena je na području, koje je naoko daleko od teorije relativnosti, a to je spektroskopija svjetlosnih i rentgenskih zraka.

Ovdje možemo te čudesne veze dodirnuti samo s nekoliko riječi. Svijetljenje atoma nastaje time, da elektroni u atomu izvode titranja i proizvode elektromagnetske valove, koji se šire na sve strane. Starija teorija računala je te procese pomoću Maxwellovih jednadžbi polja. Kasnije se pokazalo, da se ne može smatrati, da te jednadžbe vrijede točno unutar atoma, pa je trebalo pretpostaviti drukčije zakonitosti, koje je Max Planck (1900) prvi puta uveo u teoriju toplinskog zračenja. To je t. zv. teorija kvanta. Niels Bohr (1913) ju je upotrebio za tumačenje spektara i imao u tome velik uspjeh. Ne ulazeći u pojedinosti primjećujemo, da kod brzih gibanja elektrona prema Einsteinovoj teoriji relativnosti masa mora biti povećana, a to će utjecati na spektre. Stvarno je Sommerfeld (1915) uspio pokazati, da spektralne linije zbog promjenljivosti mase imaju zamršenu strukturu. Svaka je linija zapravo čitav sustav jačih i finijih linija. Kod vidljivih spektara, koje šalju vanjski elektroni atoma, ta je skupina linija vrlo uska, radi se o »finoj strukturi«. Kod rentgenskih spektara, koji potječu iz unutrašnjosti atoma, struktura je gruba s milijun puta većim cijepanjem. Finu strukturu, koju je izračunao Sommerfeld, opažao je Paschen (1916). I kod rentgenskih spektara ovi su se postavci dobro slagali. Tako se točno slažu, da dolazi u obzir razlika formula za masu po Abrahamu i Lorentzu, koja je veličina 2. reda s obzirom na β. Sommerfeldov učenik Glitscher (1917) mogao je pokazati, da Abrahamova formula nije spojiva s opažanjima na helijevu spektru, dok se Lorentzova slaže s tim opažanjima. Može se dakle govoriti o spektroskopskoj potvrdi teorije relativnosti [22].

Budući da po formuli (87) *svaka* masa ovisi o brzini, dokaz o elektromagnetskoj prirodi mase elektrona više ne vrijedi, a time pada i veza između mase mirovanja i elektrostatičke energije. Lorentzova teorija nepomičnog etera mogla je pokušati, da mehaničku tromost mase svede na čudnovatu ustrajnost elektromagnetskog polja. Kad bi Einsteinova teorija relativnosti morala napustiti taj plan, svaki bi joj to morao zamjeriti, komu je do jedinstva prirode. No nova nas dinamika ni ovdje nije napustila, nego je dala duboko objašnjenje o biti trome mase.

8. Tromost energije

Za sve praktičke svrhe, pa i za najbrže elektrone, dovoljno je napisati formulu za masu (87) do uključivo članova 2. reda. Kako smo prije vidjeli, s tim približenjem vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2.$$

Stoga je

$$m = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

U običnoj je mehanici kinetička energija (II, 14) definirana sa $T = m_0 \frac{v^2}{2}$. Iz naše formule za to izlazi izraz

$$T = c^2(m - m_0).$$

Može se pokazati, da je ta definicija kinetičke energije strogo ispravna, i ako se ne zanemare članovi višega od 2. reda.

Stavak energije [II, 14, formula (16)] traži, da vremenska promjena energije $E = T + U$ za vrijeme gibanja bude stalno nula. Pri tom ovdje treba umjesto klasične vrijednosti $T = \frac{m}{2}v^2$ uzeti relativističku

(92) $$T = c^2(m - m_0) = c^2 m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Tvori li se od toga vremenska promjena, dobije se sličnim računom kao prije (VI, 7) za longitudinalno ubrzanje[1]):

(93) Vremenska promjena od $T = \frac{m_0 v b_p}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} = K_p v,$

gdje je longitudinalna komponenta sile uvrštena prema (89). No desna je strana negativna vremenska promjena potencijalne energije U. Jer za vrijeme dovoljno malenog vremenskog intervala t može se sila smatrati približno konstantnom i postupati tako, kao da se radi o sili teži, kojoj je potencijalna energija [II, 14, formula (15)] bila jednaka Gx.

1) Tamo smo pokazali: nadomjesti li se brzina v promijenjenom brzinom u s komponentama $u_p = v + w_p$, $u_s = w_s$, prelazi izraz

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

u

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v w_p}{\alpha^2 c^2}\right).$$

Njegova je promjena dakle

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v w_p}{\alpha^3 c^2},$$

a iz toga odmah izlazi formula teksta.

Pri tom je smjer x bio uzet suprotan sili teži, tako da treba staviti $G = -K_p$. Vremenska promjena potencijalne energije bit će onda

$$G\frac{x}{t} = -K_p v.$$

Jednadžba (93) dakle zaista izražava, da je veličina $E = T + U$ vremenski konstantna, pri čemu T znači izraz (92).

Pišemo li formulu (92) u obliku

$$m = m_0 + \frac{T}{c^2},$$

to nam ona kaže, da se masa razlikuje od svoje vrijednosti mirovanja baš za toliko, koliko iznosi kinetička energija, podijeljena kvadratom brzine svjetlosti.

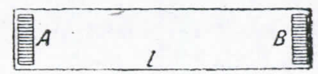
Ova formulacija navodi na misao, da je masa mirovanja m_0 isto tako u vezi sa sadržajem energije tijela u mirovanju, dakle da uopće između svake mase i energije vrijedi univerzalna relacija

(94) $$m = \frac{E}{c^2}.$$

Einstein je ovaj *zakon o tromosti energije* označio najvažnijim rezultatom teorije relativnosti. On znači identitet dvaju fundamentalnih pojmova mase i energije i time otvara dubok uvid u strukturu materije. Prije nego što govorimo o tome, dajemo jednostavni Einsteinov dokaz formule (94).

Taj se dokaz osniva na činjenici, da postoji *tlak zračenja*. Da svjetlosni val, koji pada na tijelo, koje apsorbira, na to tijelo djeluje tlakom, izlazi iz Maxwellovih jednadžbi polja pomoću stavka, što ga je prvi izveo Poynting (1884). Račun daje, da je impuls kratkog blijeska ili udarca svjetla energije E, koji se kod apsorpcije prenosi na tijelo, jednak $\frac{E}{c}$. Taj je rezultat eksperimentalno potvrdio Lebedev (1890), a kasnije su ga većom točnošću provjerili Nichols i Hull (1901). Isti tlak djeluje na tijelo, koje emitira svijetlo, kao što top dobije protuudarac, kada ga se ispali.

Zamislimo šuplje tijelo, recimo dugačku cijev, i u njemu na krajevima dva jednako velika tijela A, B iz istog materijala, koja dakle po običnim predodžbama imaju istu masu (sl. 123). Tijelo A neka ima višak energije E spram B, primjerice u obliku topline, i neka postoji uređaj (konkavno zrcalo ili slično), kojim se ta energija u obliku zračenja može poslati u B. Prostorni razmjeri toga blijeska neka su maleni spram duljine l cijevi. A će dobiti protuudarac $\frac{E}{c}$. Cijela cijev, kojoj neka je ukupna masa M, dobije dakle brzinu v prema natrag, koja se može odrediti iz jednadžbe impulsa



Sl. 123.

$$Mv = \frac{E}{c}.$$

To gibanje će trajati, dok bljesak ne stigne do B i tamo se apsorbira. Kod toga B dobije isti udarac prema naprijed, i cijeli se sustav umiri. Pomak, koji je nastao za vrijeme putovanja t blijeska, jednak je $x = vt$, gdje se v određuje iz gornje jednadžbe, dakle

$$x = \frac{Et}{Mc}.$$

Vrijeme putovanja određeno je (osim male pogreške višega reda) prema $l = ct$. Pomak će dakle biti

$$x = \frac{El}{Mc^2}.$$

No tjelesa A, B mogu se međusobno izmijeniti bez vanjskih djelovanja. Neka na pr. dva čovjeka, koja se nalaze u cijevi, odnesu A na mjesto od B i B na mjesto od A, zatim neka se vrate na svoja prvotna mjesta. Po običnoj mehanici ne bi kod toga cijev bila pomaknuta, jer trajne promjene mjesta mogu nastati samo djelovanjem vanjskih sila.

Poslije izvršene izmjene bilo bi u nutrašnjosti cijevi sve kao na početku, razdioba masa potpuno ista. No čitava cijev bila bi udarcem svijetla pomaknuta spram prvotnog položaja za dužinu x. To je dakako u protuslovlju s principima mehanike. Mogao bi se proces ponoviti i time bez primjene vanjskih sila sustav pomaknuti za bilo koju dužinu. To je nemoguće. Jedini je izlaz pretpostavka, da kod izmjene od A i B ta dva tijela nisu mehanički ekvivalentna, nego da B zbog svojeg većeg sadržaja energije ima za m veću masu nego A. Onda kod izmjene ne ostaje sve simetrično, nego se pomakne ta masa m s desna na lijevo za dužinu l. Kod toga se čitava cijev pomakne za neku dužinu x u obrnutom smjeru. Ona je određena time, da se proces događa bez djelovanja vanjskih sila. Ukupni impuls, koji se sastoji iz impulsa cijevi $M\frac{x}{t}$ i impulsa transportirane mase $-m\frac{l}{t}$, bit će dakle nula:

$$Mx - ml = 0.$$

Iz toga izlazi

$$x = \frac{ml}{M}.$$

Ovaj pomak mora baš ukinuti pomak od udarca svjetlosti. Mora dakle biti

$$x = \frac{ml}{M} = \frac{El}{Mc^2}.$$

Iz toga se može izračunati m:

$$m = \frac{E}{c^2}.$$

To je dakle iznos trome mase, koji mora imati energija E, treba li ostati na snazi temeljni princip mehanike, da bez djelovanja vanjskih sila ne može biti promjene mjesta.

Stavak mora imati univerzalno značenje, jer se konačno nekim putem svaka energija može pretvoriti u zračenje. *Masa je prema tome samo oblik energije.* Sama tvar gubi svoj primarni karakter kao neuništiva supstancija. Gdje električna i magnetska polja ili druga djelovanja proizvode jaka gomilanja energije, tamo nastaje pojav tromosti mase. Elektroni i atomi takva su mjesta goleme koncentracije energije.

Dodirnut ćemo samo neke od brojnih i važnih konsekvencija toga stavka. Što se tiče mase elektrona, pokazuje formula (69) (V, 13) za masu mirovanja $m_0 = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}$, da elektrostatička energija U ne može biti ukupna energija mirnoga elektrona. Mora postojati još drugi dio energije V, $E = U + V$ tako, da je

$$m_0 = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2} = \frac{E}{c^2} = \frac{U+V}{c^2}.$$

Iz toga izlazi $V = \frac{4}{3}U - U = \frac{1}{3}U = \frac{1}{4}E$. Tri četvrtine ukupne energije jesu dakle elektrostatičke prirode, jedna je četvrtina druge vrsti. Taj dio mora potjecati od sila kohezije, koje protiv elektrostatičkog odbijanja elektron drže na okupu. O tom su Mie, Hilbert i Einstein razvili duboke teorije, ali rezultati ne zadovoljavaju toliko, da bismo ovdje o tome izvijestili. Najviše izgleda imaju postavci Einsteinovi, na koje ćemo se još jednom ukratko osvrnuti kod izlaganja opće teorije relativnosti [23].

Naprotiv, stavak o tromosti energije od najveće je važnosti za problem izgradnje atoma. Rekli smo prije, da se svaki atom sastoji iz pozitivnog dijela, koji je nerazdvojivo vezan s tromom masom, i iz nekoga broja negativnih elektrona. Rutherford (1913) i njegovi učenici dokazali su pokusima o rasipavanju pozitivnih zraka, t. zv. α-zraka, što ih emitiraju radioaktivne tvari, da su pozitivni dijelovi atoma, koje zovemo »jezgrama«, vrlo maleni, čak mnogo manji od elektrona, kojemu smo polumjer procijenili na okruglo 2.10^{-13} cm. Ukoliko je masa jezgre, kao kod elektrona, u glavnom (na tri četvrtine) elektromagnetske prirode, morala bi između nje i polumjera a vrijediti formula slična onoj, koju smo primijenili kod elektrona, $m = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}$, samo možda s nešto drugim brojčanim faktorom. Mase bi dakle bile obrnuto razmjerne polumjerima:

$$\frac{\text{polumjer elektrona}}{\text{polumjer jezgre}} = \frac{\text{masa jezgre}}{\text{masa elektrona}}.$$

No mi znamo, da je tromost atoma vodika po pr. 2000 puta veća od tromosti elektrona. Iz toga izlazi, da je polumjer jezgre vodika približno 2000 puta manji od polumjera elektrona, što se dobro slaže s eksperimentalnim rezultatima [24].

Stavak o tromosti energije može se dakle uspješno primijeniti na mase atoma ili jezgri.

Poznato je, da se radioaktivni atomi raspadaju emitirajući tri vrsti zraka: 1. α-zrake, t. j. pozitivno nabijene čestice, za koje se pokazalo, da su helijeve jezgre; 2. β-zrake, koje su elektroni; 3. γ-zrake, a to su elektromagnetski valovi iste prirode kao rentgenske zrake. Kod te emisije atom ne gubi samo direktno masu, nego osim toga znatnu energiju. No po stavku o tromosti energije skopčano je s gubitkom energije dodatno smanjenje mase. Na žalost je to smanjenje tako maleno, da ga nije uspjelo eksperimentalno odrediti.

Načelno je spoznaja vrlo važna, da kod raspadanja atoma zbroj masa pojedinih dijelova nije jednak masi prvotnog atoma. Star je cilj istraživanja, da se atomi rastave u jednostavnije pradijelove. P r o u t (1815) je postavio hipotezu, da su ti pradijelovi *atomi vodika*. On tu misao temelji na tome, što su težine mnogih atoma cijeli višekratnici težine vodikova atoma. Točno mjerenje atomskih težina nije to potvrdilo, pa se Proutova hipoteza više nije cijenila. No danas se ona ponovno prihvaća. Jer po stavku o tromosti energije atomska jezgra, sačinjena od n jezgri vodika ne će biti točno jednaka n puta masa vodikove jezgre, nego će se razlikovati za energiju spajanja. To je shvaćanje jako poduprto R u t h e r f o r d o v i m otkrićem (1919), da se bombardiranjem vodikovim jezgrama mogu odcijepiti α-zrake od dušikovih atoma. Stavak o tromosti energije može doduše objasniti samo mala odvajanja od cjelobrojnih omjera atomskih težina spram atomske težine vodika. No ima još jedan uzrok, koji daje grube razlike, a to je činjenica *izotopa*. Mnogi su elementi mješavine atoma jednako nabijenih jezgri i jednakog rasporeda elektrona, ali različite jezgrine mase. Takvi se atomi ne daju kemijski razlučiti, ali se daju razlučiti fizičkim metodama. Postojanje izotopa bilo je najprije dokazano kod radioaktivnih tvari, a A s t o n (1920) ih je dokazao kod mnogih drugih elemenata [25].

Ovaj pogled na probleme moderne atomistike uvjerljivo pokazuje, da Einsteinova teorija relativnosti nije izrod fantastične spekulacije, nego putokaz u najvažnijim područjima istraživanja u fizici. Otkrivanje tajna u svijetu atoma znači za umni razvoj čovječanstva cilj, koji po svojoj grandioznosti i zamašnosti prelazi sve druge zadaće prirodnih znanosti, možda čak i spoznaju o izgradnji svemira. Jer svaki korak k tome cilju daje nam ne samo novo oružje u borbi za opstanak, nego i znanje o najdubljim vezama prirodnog svijeta i uči nas razlikovati varku osjetila od istine vječnih zakona svemira.

9. Optika tjelesa u gibanju

Pošto smo izveli najvažnije zaključke iz modificirane mehanike, vrijeme je, da se vratimo onim problemima, iz koje je proizašla Einsteinova teorija relativnosti, a to je elektrodinamika i optika tjelesa u gibanju. Temeljni zakoni tih područja skupljeni su u Maxwellovim jednadžbama polja, i već je Lorentz shvatio, da su ove za prazni prostor ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$,

$\sigma = 0$) invarijantne s obzirom na Lorentzove transformacije. Egzaktne, invarijantne jednadžbe polja za tjelesa u gibanju postavio je M i n k o v s k i (1907). One se razlikuju od Lorentzovih formula teorije elektrona samo za sporedne članove, koji se ne mogu provjeriti pokusima, ali i one sadrže parcijalnu konvekciju dielektrične polarizacije i stoga tumače sve elektromagnetske i optičke pojave na tjelesima u gibanju u punom skladu s opažanjima. Podsjećamo napose na pokuse Röntgena, Eichenwalda i Wilsona (V, 11), ali ne ćemo u to ulaziti, jer su za to potrebni opširni matematički izvodi. No optika tjelesa u gibanju može se raspraviti sasvim elementarno, i mi ćemo je ovdje izložiti kao jednu od najljepših primjena Einsteinove teorije.

U njoj nema etera, nego samo tjelesa, koja se relativno gibaju. Samo se po sebi razumije po Einsteinovoj teoriji relativnosti, da su svi optički pojavi, kod kojih izvor svjetlosti, prozračene tvari i opažač miruju u jednom istom inercijalnom sustavu, jednaki za sve inercijalne sustave. Ona stoga objašnjava i Michelsonov pokus, iz kojega je proizašla. Radi se dakle sada samo o tome, da li po toj teoriji ispravno izlaze pojavi, koji nastaju kod relativnih gibanja izvora svjetlosti, prozračenog medija i opažača.

Zamislimo svjetlosni val u materijalnom tijelu, koje miruje u sustavu referencije S. Brzina je vala $c_1 = \frac{c}{n}$ (n je indeks loma), njegov je broj titraja ν, njegov smjer relativno spram sustava S neka je čvrsto zadan. Pitamo, kako prosuđuje ta tri obilježja vala opažač u sustavu S', koji se giba brzinom v paralelno sa smjerom x sustava S. Raspravit ćemo to pitanje po istoj metodi, koju smo prije (IV, 7) primijenili, samo ćemo mjesto Galileijevih transformacija upotrebiti Lorentzove. Tamo smo pokazali, da je broj valova

$$\nu\left(t - \frac{s}{c}\right)$$

invarijanta. Jer on znači broj valova, koji od trenutka $t = 0$ odlaze iz nultočke i do trenutka t dostignu točku P, pri čemu su odmakli za dužinu s (sl. 69). Ta invarijancija sada dakako vrijedi za Lorentzove transformacije. Promotrimo najprije valove, koji se šire paralelno sa smjerom x. Za x-koordinatu točke P treba tada staviti s, pa izlazi

$$\nu\left(t - \frac{x}{c_1}\right) = \nu'\left(t' - \frac{x'}{c_1'}\right),$$

gdje su ν, ν' i c_1, c_1' frekvencije i brzine vala s obzirom na sustave S i S'. Uvrstimo li desno izraze za x' i t' dane Lorentzovom transformacijom (72), dobivamo:

$$\nu\left(t - \frac{x}{c_1}\right) = \frac{\nu'}{\alpha}\left(t - \frac{v}{c^2}x - \frac{x - vt}{c_1'}\right),$$

gdje je $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Stavimo li ovdje najprije $x = 1$, $t = 0$, zatim $t = 1$, $x = 0$, izlazi

$$\frac{\nu}{c_1} = \frac{\nu'}{\alpha}\left(\frac{v}{c^2}+\frac{1}{c_1'}\right),$$

(95)

$$\nu = \frac{\nu'}{\alpha}\left(1+\frac{v}{c_1'}\right).$$

Razdijelimo li drugu jednadžbu prvom, dobivamo:

$$c_1 = \frac{1+\frac{v}{c_1'}}{\frac{v}{c^2}+\frac{1}{c_1'}} = \frac{c_1'+v}{1+\frac{vc_1'}{c^2}}.$$

Riješimo li jednadžbu po c_1', dobijemo *strogu formulu konvekcije:*

$$c_1' = \frac{c_1 - v}{1-\frac{vc_1}{c^2}}.$$

Ona se točno slaže s Einsteinovim teoremom adicije za brzine kod longitudinalnoga gibanja [prva formula (77)], ako se u njemu u_p nadomjesti sa c_1, a u_p' sa c_1'. Isto pravilo, koje vrijedi za preračunavanje brzina materijalnih tjelesa relativno spram različitih sustava referencije, može se dakle primijeniti i na brzinu svjetlosti.

No zanemarimo li članove višega od 2. reda s obzirom na $\beta = \frac{v}{c}$, taj je zakon identičan s Fresnelovom formulom konvekcije (43) (IV, 9). Jer tim približenjem može se pisati:

$$\frac{1}{1-\frac{vc_1}{c^2}} = \frac{1}{1-\frac{\beta}{n}} = 1+\frac{\beta}{n} = 1+\frac{v}{nc},$$

dakle

$$c_1' = (c_1 - v)\left(1+\frac{v}{nc}\right) = c_1 - v + \frac{vc_1}{nc} - \frac{v^2}{nc},$$

a ako ispustimo zadnji član 2. reda i stavimo $\frac{c_1}{c} = \frac{1}{n}$,

$$c_1' = c_1 - v\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

To je točno *Fresnelova formula konvekcije.*

Druga formula (95) znači Dopplerov princip. Taj se obično primjenjuje samo u vakuumu, stavlja se dakle $c_1 = c$. Onda, kako znamo, iz teorema adicije brzina izlazi i $c_1' = c$. Dalje daje druga formula (95)

$$\nu' = \nu \frac{\alpha}{1+\frac{v}{c}} = \nu\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta}.$$

No zbog $1-\beta^2 = (1-\beta)(1+\beta)$ možemo pisati

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}{1+\beta} = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Stroga formula za Dopplerov učinak dobiva dakle simetrični oblik

$$\nu'\sqrt{1+\frac{v}{c}} = \nu\sqrt{1-\frac{v}{c}},$$

u kojem se očituje ekvivalentnost sustava referencije S i S'. Zanemare li se članovi višega od 2. reda, treba $\sqrt{1+\beta}$ nadomjestiti sa $1+\frac{1}{2}\beta$, $\sqrt{1-\beta}$ sa $1-\frac{1}{2}\beta$. Dobiva se dakle

$$\nu'\left(1+\frac{1}{2}\beta\right) = \nu\left(1-\frac{1}{2}\beta\right),$$

$$\nu' = \nu\frac{1-\frac{1}{2}\beta}{1+\frac{1}{2}\beta}.$$

Istom je točnošću $\frac{1}{1+\frac{1}{2}\beta} = 1-\frac{1}{2}\beta$, dakle

$$\nu' = \nu\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)^2 = \nu\left(1-\beta+\frac{1}{4}\beta^2\right)$$

i, ako se zanemari β^2,

$$\nu' = \nu\left(1-\frac{v}{c}\right),$$

što se slaže s formulom (40) (IV, 8).

Da istom metodom izvedemo aberaciju svjetlosti, moramo razmotriti niz valova, koji se šire okomito na smjer x relativnog gibanja sustava S i S'. No treba dodati, da li se misli okomiti smjer s obzirom na S ili S', jer ako je zraka s obzirom na S okomita na os x, ne će to biti s obzirom na S'. Pretpostavit ćemo, da je smjer širenja os y' sustava S. Onda treba staviti $s' = y'$, pa za vakuum ($c_1 = c_1' = c$) vrijedi:

$$\nu\left(t-\frac{s}{c}\right) = \nu'\left(t'-\frac{y'}{c}\right).$$

Uvrstimo li vrijednosti dane Lorentzovom transformacijom (72), izlazi

$$\nu\left(t-\frac{s}{c}\right) = \nu'\left(\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\alpha}-\frac{y}{c}\right).$$

Za $x = 0$, $y = 0$, $s = 0$, $t = 1$ ovo daje

$$\nu = \frac{\nu'}{\alpha}.$$

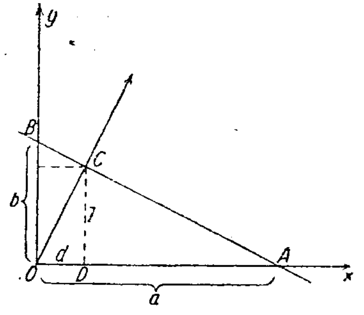
a za $t = 0$

$$\frac{v}{c}\, s = v'\left(\frac{vx}{c^2\alpha} + \frac{y}{c}\right) = \frac{v'}{\alpha c}\,(\beta x + \alpha y),$$

dakle

$$s = \alpha y + \beta x.$$

Da je valna ravnina relativno spram sustava referencije S okomita na osi y, bilo bi $s = y$. Budući da nije tako, mora da je otklonjena (sl. 124). x, y su koordinate neke točke P valne ravnine. Odaberemo li za P napose sjecište s osi x, bit će $x = a$, $y = 0$, dakle $s = \beta a$. Isto tako je za sjecište B valne ravnine s osi y $x = 0$, $y = b$, dakle dakle $s = \alpha b$.



Sl. 124.

Izlazi stoga

$$s = \beta a = \alpha b \quad \text{ili} \quad \frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Ovaj je omjer $\frac{b}{a}$ očito mjera za otklon valne fronte. Lako se vidi, da je on u skladu s elementarnom definicijom konstante aberacije po emisionoj teoriji (IV, 3), jer je okomica OC iz nultočke na valnu ravninu smjer širenja. Ako je D projekcija od C na os x, onda je $OD = d$ pomak, koji treba dati dalekozoru duljine $DC = l$ paralelnom s osi y, da zraka svijetla, koja kod C pogađa objektiv, stigne baš kod O sredinu okulara. Prema tome je $\frac{d}{l}$ konstanta aberacije. Iz sličnosti trokuta OCD i BOA izlazi razmjer

$$\frac{d}{l} = \frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

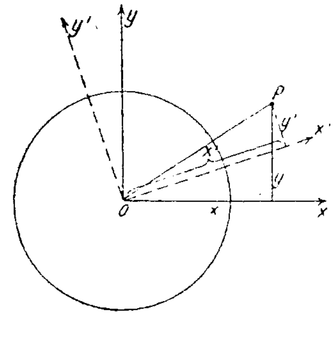
To je *egzaktna formula aberacije.* Zanemari li se β^2 spram 1, ona prelazi u elementarnu formulu

$$\frac{d}{l} = \beta = \frac{v}{c}.$$

Ovaj je rezultat osobito značajan, jer sve teorije etera nailaze na znatne poteškoće kod objašnjavanja aberacije. Pomoću Galileijeve transformacije uopće se ne dobije otklon valne ravnine i valnoga smjera (IV, 10), pa se za objašnjenje aberacije mora uvesti pojam »zrake«, koja u sustavima, koji se gibaju, ne mora biti identična sa smjerom širenja. U Einsteinovoj teoriji to nije potrebno. U svakom inercijalnom sustavu S smjer zrake, t. j. transporta energije, slaže se s okomicom na valne ravnine, a ipak aberacija izlazi isto tako jednostavno kao Dopplerov efekt i Fresnelov broj konvekcije iz pojma vala pomoću Lorentzove transformacije. Ovaj izvod temljnih zakona optike tjelesa u gibanju pokazuje uvjerljivo premoć Einsteinove teorije relativnosti spram drugih teorija.

10. Apsolutni svijet Minkovskoga

Bit nove kinematike sastoji se u nerazdvojivosti prostora i vremena. Svijet je četverodimenzionalna raznolikost, njezin je elemenat svjetska točka. Prostor i vrijeme oblici su poredaja svjetskih točaka, a taj poredaj do neke granice stoji do naše volje. Minkovski je to shvaćanje izrekao ovako: »Odsad su prostor za sebe i vrijeme za sebe postale puke sjene, i samo neka njihova unija sačuvat će samostalnost« [26]. I on je tu misao dosljedno proveo, razvivši kinematiku kao četverodimenzionalnu geometriju. Mi smo se stalno služili njegovim predočivanjem, ispustivši samo zbog jednostavnosti osi y i z i operirajući u ravnini xt. Pogledamo li još s matematičkog gledišta geometriju u ravnini xt, opažamo, da se ne radi o običnoj euklidskoj geometriji. Jer u ovoj su svi pravci kroz nultočku ravnopravni, jedinica duljine na njima je ista, baždarska krivulja je dakle kružnica (sl. 125). No u ravnini xt pravci prostorne i vremenske prirode nisu ekvivalentni, na svakoj je druga jedinica duljine, a baždarska krivulja sastoji se iz hiperbola



Sl. 125.

$$G = x^2 - c^2t^2 = \pm 1.$$

U euklidskoj ravnini može se konstruirati neizmjerno mnogo pravokutnih koordinatnih sustava s istom nultočkom O, koji jedni iz drugih nastaju vrtnjom. U ravnini xt ima također neizmjerno mnogo ravnopravnih koordinatnih sustava, kojima se jedna os može odabrati po volji unutar izvjesnoga kutnog područja.

U euklidskoj je geometriji udaljenost s točke P s koordinatama x, y od nultočke invarijanta s obzirom na vrtnje koordinatnog sustava [III, 7, formula (28)]. Po Pitagorinu poučku (sl. 125) vrijedi naime u sustavu xy

$$s^2 = x^2 + y^2,$$

a u nekom drugom sustavu vrijedi isto tako $s^2 = x'^2 + y'^2$. Baždarska krivulja, kružnica s polumjerom 1, predočena je sa $s = 1$. Stoga ćemo s, ili, ako hoćemo, s^2, smatrati temeljnom *invarijantom* euklidske geometrije.

U ravnini xt temeljna je invarijanta

$$G = x^2 - c^2t^2,$$

baždarska je krivulja $G = \pm 1$.

Minkovski je opazio, da se tu pojavljuje analogija, kojom se jasno prozire matematička struktura četverodimenzionalnoga svijeta (odnosno ravnine xt). Stavimo li naime $-c^2t^2 = u^2$, bit će očito

$$G = x^2 + u^2 = s^2,$$

pa se G može shvatiti kao temeljna invarijanta s^2 neke euklidske geometrije s pravokutnim koordinatama x, u.

Ne može se doduše iz negativne veličine $-c^2t^2$ izvaditi kvadratni korijen, sâmo se u dakle ne može izračunati iz vremena t. No matematika je već odavna navikla da smiono svladava ovakve teškoće. Od Gaussovih vremena »imaginarna« veličina $\sqrt{-1} = i$ uživa građansko pravo u carstvu matematike. Ne možemo ovdje ulaziti u strogo izlaganje nauke o imaginarnim brojevima. Oni u stvari nisu »imaginarniji« od razlomjena broja kao $\frac{2}{3}$, jer brojevi, »kojima se broji«, samo su prirodni, cijeli brojevi 1, 2, 3, 4, ... Broj 2 ne da se dijeliti sa 3. $\frac{2}{3}$ je isto tako neizvediva operacija kao $\sqrt{-1}$. Razlomci, kao $\frac{2}{3}$, znače proširenje prirodnog pojma broja, koje je školom i navikom svakome postalo uobičajeno i bezazleno. Slično su proširenje pojma broja imaginarni brojevi, koji su matematičaru isto tako uobičajeni i dobro poznati, kao računanje razlomcima. Sve formule, koje sadržavaju imaginarne brojeve, imaju isto tako točno značenje, kao formule građene običnim, »realnim« brojevima, i zaključci, koji se izvode iz takvih formula, isto su tako neoborivi.

Poslužimo li se simbolom $\sqrt{-1} = i$, možemo pisati

$$u = ict.$$

Neeuklidska geometrija ravnine xt formalno je dakle identična s euklidskom geometrijom u ravnini xu, samo što realnim vremenima t odgovaraju imaginarne vrijednosti od u. Ovaj je stavak od neprocjenjive vrijednosti za matematičko obrađivanje teorije relativnosti. Jer za mnoge operacije i račune nije važna realnost dotičnih veličina, nego su važni algebarski odnosi između njih, koji za imaginarne brojeve vrijede isto tako kao za realne. Stoga se zakoni, poznati iz euklidske geometrije, mogu prenijeti na četverodimenzionalni svijet. Minkovski nadomještava

$$x\ y\ z\ ict$$

sa

$$x\ y\ z\ u$$

i operira tima četirma koordinatama na sasvim simetričan način. Temeljna je invarijanta očito

$$G = s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2.$$

Posebni položaj vremena time nestaje iz svih formula, što veoma povećava udobnost i preglednost računa. U konačnom rezultatu treba opet u nadomjestiti sa ict, pri čemu samo takve jednadžbe imaju fizički smisao, koje su tvorene isključivo iz realnih brojeva.

Nematematičar ne će si moći mnogo predočiti na temelju tih izlaganja. Ogorčen »mističnom jednadžbom« 3.10^{10} cm $= \sqrt{-1}$ sek, koju je sam Minkovski formulirao napola u šali, možda će dati pravo kritičarima teorije relativnosti, kojima se ekvivalentnost vremena s prostornim dimenzijama čini potpunim nesmislom.

Nadamo se, da naš način izlaganja, kod kojega formalna metoda Minkovskoga dolazi tek na koncu, može odoljeti takvim prigovorima. U ravnini xt očito se vrijeme t nikako ne može izmijeniti s dimenzijom duljine x. Crte svjetlosti ξ i η luče kao neprekoračive granice svjetske crte prostorne prirode od svjetskih crta vremenske prirode. Transformaciju Minkovskog $u = ict$ treba dakle shvatiti samo kao matematičku doskočicu, koja jasno ističe izvjesne formalne analogije između prostornih koordinata i vremena, a da ipak ne dopušta, da se oni zamijene.

No ta doskočica donijela je važne spoznaje. Bez nje ne bi se dala zamisliti Einsteinova opća teorija relativnosti. Kod toga je važna analogija temeljne invarijante G s kvadratom udaljenosti. Ubuduće ćemo za veličinu

$$s = \sqrt{G} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2} \tag{96}$$

upotrebljavati oznaku *»četverodimenzionalna udaljenost«*, pri čemu moramo biti toga svijesni, da se ta riječ razumijeva u prenesenom smislu.

Pravi smisao veličine s lako je razumjeti na temelju naših prijašnjih izlaganja o invarijanti G. Ograničimo li se na ravninu xt, bit će

$$s = \sqrt{G} = \sqrt{x^2 + u^2} = \sqrt{x^2 - c^2t^2}.$$

Za svaku svjetsku crtu prostorne prirode G je pozitivan, dakle je s kvadratni korijen iz realne veličine. Možemo onda svjetsku točku x, t učiniti istodobnom s nultočkom, odabravši prikladan sustav referencije S. Onda je $t = 0$, dakle $s = \sqrt{x^2}$ prostorna udaljenost svjetske točke od nultočke.

Za svaku svjetsku crtu vremenske prirode G je negativan, dakle je s imaginaran. Onda postoji koordinatni sustav, u kojemu je $x = 0$, dakle $s = \sqrt{-c^2t^2} = ict$. U svakom slučaju ima dakle s jednostavno značenje i može se smatrati veličinom, koja se daje mjeriti.

Završavamo time izlaganja o specijalnoj Einsteinovoj teoriji relativnosti. Rezultat možemo sažeti od prilike ovako:

Ne samo zakoni mehanike, nego zakoni svih prirodnih pojava, osobito elektromagnetskih, glase sasvim identično u neizmjerno mnogo sustava referencije, koji se jedan spram drugoga gibaju po pravcu, i koje zovemo inercijalnim sustavima. U svakom od tih sustava vrijedi posebna mjera za duljine i vremena, a te su mjere međusobno povezane Lorentzovim transformacijama.

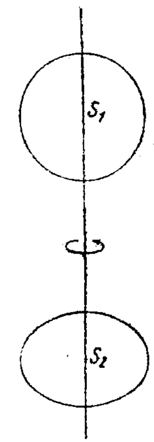
Isto tako kao u mehanici, sustavi referencije, koji se gibaju ubrzano spram inercijalnih sustava, *nisu* ravnopravni s inercijalnim sustavima. Formuliramo li prirodne zakone u takvim ubrzanim sustavima, oni glase drukčije. U mehanici se pojavljuju centrifugalne sile, u elektrodinamici analogna djelovanja, u koja ne ulazimo, jer bi nas to predaleko odvelo. Einsteinova specijalna teorija relativnosti *ne uklanja* dakle Newtonov apsolutni prostor u onom suženom smislu, koji smo toj riječi prije (III, 6) dali. Ona samo stvara u izvjesnom smislu za *čitavu fiziku* uključivo elektrodinamike ono stanje, u kojem je bila mehanika od Newtona dalje. Duboka pitanja o apsolutnom prostoru, koja su nas tamo uznemirivala, nisu dakle još uvijek riješena. Jedva da smo im se za jedan korak približili, pače je proširenjem fizičkog objekta preko mehanike zadatak očito znatno otežan.

Vidjet ćemo sada, kako ga je E i n s t e i n svladao.

VII. EINSTEINOVA OPĆA TEORIJA RELATIVNOSTI

1. Relativnost kod bilo kakvih gibanja

Kada smo raspravili klasičnu mehaniku, opširno smo govorili o razlozima, koji su Newtona doveli do postavljanja pojmova apsolutnoga prostora i apsolutnoga vremena. No odmah smo istakli neke prigovore, koji se mogu staviti protiv tih pojmova sa gledišta spoznajne kritike. Newton temelji pretpostavku o apsolutnom prostoru na postojanju otpora tromosti i centrifugalnih sila. Ove očito ne mogu nastati međusobnim djelovanjima od tijela na tijelo, jer se pojavljuju na isti način u cijelom svemiru, dokle seže opažanja, neovisno od lokalne razdiobe masa. Newton stoga zaključuje, da ovise o *apsolutnim* ubrzanjima. Time se uvodi apsolutni prostor kao fiktivni uzrok fizičkih pojava.



Sl. 126

Što na toj teoriji ne zadovoljava, razabira se iz ovog primjera: neka u svemiru postoje dva tekuća tijela S_1 i S_2 jednake supstancije i veličine, u takvoj međusobnoj udaljenosti, da su obična djelovanja gravitacije jednog na drugo neprimjetno mala (sl. 126). Svako tijelo neka je u ravnoteži pod djelovanjem gravitacije svojih dijelova međusobno i ostalih fizičkih sila, tako da nema relativnih gibanja njegovih dijelova. No oba tijela neka se relativno okreću oko spojnice svojih središta konstantnom brzinom rotacije. To znači, opažač na tijelu S_1 ustanovljuje jednoliku rotaciju drugoga tijela spram svojega vlastitog stajališta, i obrnuto. Neka svako od tih tjelesa izmjere opažači, koji spram njega relativno miruju. Rezultat neka je taj, da je S_1 kugla, a S_2 splošteni rotacioni elipsoid.

Newtonova mehanika zaključila bi iz ovoga različitog ponašanja, da S_1 miruje u apsolutnom prostoru, a S_2 da izvodi apsolutnu rotaciju. Centrifugalne sile onda prouzrokuju spljoštenost od S_2.

Na tom se primjeru jasno vidi, da se apsolutni prostor uvodi kao (fiktivni) uzrok. Jer tijelo S_1 ne može biti krivo za spljoštenost od S_2, budući da oba tijela stoje relativno jedno spram drugoga pod sasvim istim uvjetima i ne mogu se stoga uzajamno različito deformirati.

No prostor kao uzrok ne zadovoljava naš zahtjev kauzalnosti. Ne poznajemo *nikakvo* drugo očitovanje njegova postojanja nego centrifugalne sile. Hipoteza apsolutnog prostora ne može se dakle ničim drugim potkrijepiti nego činjenicama, zbog kojih je uvedena kao objašnjenje. Zdrava spoznajna kritika otklanja ovakve ad hoc postavljene hipoteze. Suviše su površne i obaraju sve ograde, koje savjesno istraživanje nastoji sagraditi između svojih rezultata i tlapnja mašte. Kada bi arak papira, na kojem sam baš pisao, najednom uzletio sa stola, slobodno bih postavio hipotezu, da ga je ugrabio duh davno preminulog Newtona. No kao razuman čovjek ja tu hipotezu ne postavljam, nego pomišljam na propuh, koji je nastao, jer je prozor otvoren, a žena mi je baš ušla kroz vrata. I ako nisam sam osjetio propuh, ova je hipoteza razumna, jer povezuje pojav, koji treba objasniti drugim pojavom, koji se može opažati. Po tom kritičkom izboru dopustivih uzroka razlikuje se razumno, kauzalno promatranje svijeta, u koje treba ubrajati i fizičko istraživanje, od mistike, spiritizma i sličnih manifestacija razuzdane mašte.

Apsolutni prostor gotovo je spiritističkog karaktera. Pitamo li: »Što je uzrok centrifugalnih sila?«, odgovor glasi: »Apsolutni prostor«. No pitamo li: »Što je apsolutni prostor i kako se on inače očituje?«, nitko ne zna drugi odgovor nego ovaj: »Apsolutni je prostor uzrok centrifugalnih sila, drugih svojstava nema«. Ova antiteza dovoljno pokazuje, da prostor kao uzrok fizičkih procesa treba ukloniti iz slike svijeta.

Možda nije suvišno primijetiti, da promatranje elektromagnetskih pojava ništa ne mijenja na prosuđivanju apsolutnog prostora. U koordinatnim sustavima, koji rotiraju, nastaju kod ovih pojava djelovanja, koja su analogna centrifugalnim silama mehanike. No to dakako nisu novi, neovisni dokazi za postojanje apsolutnog prostora, jer, kako znamo, mehanika i elektrodinamika spojene su u jednu cjelinu stavkom o tromosti energije. Jedino je za nas udobnije, da se služimo samo pojmovima mehanike.

Vratimo li se na promatranje dvaju tijela S_1 i S_2, morat ćemo, ako otklonimo prostor kao uzrok njihova različitog ponašanja, potražiti druge, realne uzroke. Pretpostavimo, da osim S_1 i S_2 nema nikakvih drugih materijalnih tjelesa. Različito ponašanje tjelesa S_1 i S_2 bilo bi tada zaista neobjašnjivo. No da li je to ponašanje empirijska činjenica? Nipošto; jer još nismo nikada mogli skupljati iskustva o dva tijela, koja sama lebde u svemiru. *Ničim* nije osnovana pretpostavka, da bi se dva stvarna tijela S_1 i S_2 pod tim uvjetima ponašala različito. Treba naprotiv tražiti, da mehanika, koja nas zadovoljava, isključuje takvu pretpostavku.

No ako zaista kod dvaju realnih tijela S_1 i S_2 opažamo opisano ponašanje (poznajemo više i manje sploštene planete), smijemo kao uzrok tome uzeti samo *udaljene mase*. U stvarnom svijetu zaista postoje takve mase, naime mnoštvo zvijezda. Uzmimo kojegod nebesko tijelo: ono je okruženo nebrojenim drugim tjelesima, u golemoj udaljenosti od njega, koja se relativno jedno spram drugoga gibaju tako polako, da u cjelini djeluju od prilike kao čvrsta, šuplja masa, a u njezinoj šupljini nalazi se promatrano tijelo. Te udaljene mase mora da su uzrok centrifugalnih sila. S time se slažu i sva iskustva, jer sustav referencije astronomije, spram kojega se određuju rotacije nebeskih tjelesa, tako je odabran, da je spram zvijezda stajačica u cjelini na miru. Točnije rečeno tako, da prividna gibanja zvijezda stajačica relativno spram sustava referencije budu sasvim nesređena i ne pokazuju nikakav istaknuti smjer. Sploštenost nekog planeta to je veća, što je veća njegova brzina rotacije spram toga sustava referencije, spojenoga s udaljenim masama.

Zahtijevat ćemo dakle, da zakoni mehanike i uopće fizike sadrže samo relativne položaje i gibanja tjelesa. Nikakav sustav referencije ne smije biti a priori istaknut, kao što su inercijalni sustavi u Newtonovoj mehanici i u specijalnoj Einsteinovoj teoriji relativnosti. Jer inače bi prirodni zakoni sadržavali apsolutna ubrzanja spram tih prvenstvenih sustava referencije, a ne samo relativna gibanja tjelesa.

Dolazimo dakle do postulata, da pravi zakoni fizike moraju vrijediti jednako u svim sustavima referencije, ma kakvo bilo njihovo gibanje. To je znatno proširenje principa relativnosti.

2. Princip ekvivalencije

Da se zadovolji taj postulat, treba sasvim nanovo formulirati zakon tromosti, jer je ovaj temelj za posebni položaj inercijalnih sustava. Tromost tjelesa ne treba više smatrati djelovanjem apsolutnog prostora, nego djelovanjem drugih tjelesa.

Poznajemo samo jedno izmjenično djelovanje između *svih* materijalnih tjelesa, a to je gravitacija. Osim toga znamo, da je iskustvo dalo čudnovatu vezu između gravitacije i tromosti, naime stavak o jednakosti teške i trome mase (II, 12). Oba pojava, u Newtonovoj formulaciji tako različita, tromost i privlačenje, imat će dakle zajednički korijen.

To je veliko otkriće Einsteinovo, kojim je opći princip relativnosti pretvoren iz postulata spoznajne kritike u stavak egzaktnih znanosti.

Cilj razmatranja možemo označiti ovako: u običnoj mehanici gibanje teškoga tijela (na koje ne djeluju elektromagnetske ni druge sile) određeno je dvjema uzrocima: 1. njegovom tromošću kod ubrzavanja spram apsolutnog prostora, 2. gravitacijom ostalih masa. Treba sada naći formulaciju zakona gibanja, kojom se tromost i gravitacija spajaju u viši pojam tako, da je gibanje određeno jedino razdiobom ostalih masa u svijetu. Do postavljanja toga novog zakona prijeći ćemo još dalek put i morat ćemo svladati neke pojmovne teškoće.

Prije smo opširno govorili o stavku jednakosti teške i trome mase. Za pojave na Zemlji on izriče: sva tjelesa padaju jednako brzo. Za gibanja nebeskih tjelesa taj stavak izriče, da je ubrzanje neovisno od mase tijela, koje se giba. Rekli smo i to, da je prema Eötvösovim mjerenjima stavak ispravan izvanrednom točnošću, ali da ga klasična mehanika ipak ne ubraja u temeljne zakone, već ga treba prihvatiti kao gotovo slučajan dar prirode.

To će se sada promijeniti. Spomenuti stavak dolazi na čelo ne samo mehanike, nego čitave fizike. Moramo ga stoga tako osvijetliti, da se jasno istakne njegov osnovni sadržaj. Savjetujemo čitaocu, da izvede ovaj jednostavni pokus. Neka uzme dva lagana predmeta različite težine, na pr. novac i komad gume, i neka ih stavi na dlan. Osjećat će težine tih dvaju tijela kao različite tlakove na dlan. Neka sada pomakne ruku brzo prema dolje. Tlakovi tih tjelešaca će se smanjiti. Ponovi li se to gibanje sve brže, u nekom će se trenutku tjelešca odijeliti od dlana i zaostati za njim. To se očito dešava onda, kad se ruka brže spušta, nego što tjelesa slobodno padaju. No kako ona usprkos različite težine jednako brzo padaju, ostat će, i pošto su se odijelila od ruke, uvijek u istoj visini jedno kraj drugoga.

Zamislimo sitne patuljčiće, koji žive na dlanu i ništa ne znaju o vanjskom svijetu. Kako bi oni prosuđivali cijeli pojav? Lako se možemo uživjeti u misli takovih opažača, ako izvodeći taj pokus pazimo na različite tlakove i na gibanja tjelešaca spram dlana. Kad ruka miruje, patuljčići će ustanoviti različitu težinu tjelešaca. Kad se ruka spušta, ustanovit će smanjenje njihove težine. Tražit će uzrok tome i opazit će, da se njihov stajalište, ruka, spušta relativno spram tjelesa unaokolo, spram zidova sobe. No možemo patuljčiće s pokusnim tjelešcima zatvoriti u škrinju i nju gibati rukom prema dolje. Onda opažači u škrinji ništa ne vide, po čemu bi mogli ustanoviti gibanje škrinje. Mogu onda samo jednostavno ustanoviti činjenicu, da se težina svih tjelesa u škrinji jednako smanjuje. Giba li se ruka tako brzo, da predmeti zaostaju za njom, opažači u škrinji vidjet će na svoje čuđenje , da predmeti, koji su malo prije bili dosta teški, najednom lete prema gore. Dobili su negativnu težinu, ili, bolje rečeno, sila teža više ne djeluje prema dolje, nego prema gore. Usprkos svoje različite težine, oba tijela padaju prema gore jednakom brzinom. Ljudi u škrinji mogu taj pojav objasniti na dva načina: ili misle, da je polje sile teže ostalo nepromijenjeno, a škrinja se ubrzava u smjeru polja; ili pretpostavljaju, da su uklonjene mase ispod škrinje, koje su ih privlačile, ali su se zato druge mase pojavile iznad škrinje, čime se obrnuo smjer sile teže. Pitamo: ima li koje sredstvo, da se pokusima unutar škrinje odluči između tih dviju mogućnosti?

Moramo odgovoriti, da fizika *ne* poznaje takvoga sredstva. Zaista se djelovanje sile teže ničim ne može razlikovati od djelovanja ubrzanja; oba su potpuno ekvivalentna. To se bitno osniva na tome, što sva tjelesa padaju *jednako brzo*. Da nije tako, odmah bi se moglo razlikovati, da li je ubrzano gibanje tjelesa različite težine uzrokovano privlačenjem stranih masa ili je samo prividno zbog ubrzanja stajališta opažača. U prvom bi se slučaju tjelesa različite težine gibala različitom brzinom, u drugom je slučaju relativno ubrzanje svih slobodnih tjelesa spram opažača jednako, ona dakle usprkos različite težine padaju jednako brzo.

Ovaj Einsteinov *princip ekvivalencije* ide dakle u one stavke, koje smo u ovoj knjizi osobito isticali, naime u stavke, koji tvrde, da je nemoguće ustanoviti neku fizičku izreku, da je nemoguće razlikovati dva pojma. Fizika otklanja takve pojmove i stavke i nadomještava ih novim; jer fizičku realnost imaju samo činjenice, koje se daju ustanoviti.

Klasična mehanika razlikuje gibanje tijela prepuštenoga samom sebi, na koje ne djeluju nikakve sile, od gibanja tijela pod djelovanjem gravitacije. Prvo je gibanje u inercijalnom sustavu pravocrtno i jednoliko; drugo gibanje ima zakrivljene staze i nejednoliko je. Po principu ekvivalencije moramo napustiti ovu razliku. Samim prijelazom na ubrzan sustav referencije može se pravocrtno, jednoliko gibanje tromosti pretvoriti u zakrivljeno, ubrzano gibanje, koje se ne može razlikovati od onoga, koje je uzrokovano gravitacijom, a i obrnuto vrijedi, barem za ograničene dijelove gibanja, kako ćemo kasnije točnije izložiti. Odsad zovemo *gibanjem tromosti* svako gibanje nekoga tijela, na koje ne djeluju sile električkog, magnetsko ili drugog porijekla, nego je ono samo pod utjecajem gravitacije masa. Ovaj će naziv dakle imati općenitije značenje nego prije. Razumije se, da prestaje vrijediti obični zakon tromosti, koji kaže, da je gibanje tromosti pravocrtno jednoliko spram inercijalnog sustava. Problem se baš sastoji u tome, da nađemo zakon gibanja tromosti u poopćenom smislu.

Rješenje te zadaće oslobađa nas apsolutnog prostora i ujedno daje *teoriju gravitacije*, koja je time mnogo dublje povezana s principima mehanike, nego u Newtonovoj nauci.

Još ćemo nešto nadopuniti ova razmatranja u kvantitativnom pogledu. Prije (III, 8) smo pokazali, da se jednadžbe gibanja mehanike s obzirom na sustav S, koji spram inercijalnih sustava ima konstantno ubrzanje k, može pisati u obliku

$$mb = K',$$

ako K' znači zbroj stvarne sile K i sile tromosti $-mk$:

$$K' = K - mk.$$

Ako je K sila teža, bit će $K = mg$, dakle

$$K' = m(g - k).$$

Odabere li se prikladno ubrzanje k sustava referencije S, može se razlici $g - k$ dati svaka pozitivna ili negativna vrijednost, pa i nula. Nazovemo li u analogiji s elektrodinamikom silu na jedinicu mase »*jakošću polja*« sile teže, a prostor, gdje ta sila djeluje, *polje sile teže*, to možemo reći: prikladnim odabiranjem ubrzanog sustava referencije može se stvoriti polje sile teže, može se oslabiti polje, koje već postoji, ukinuti, pojačati ili obrnuti ga.

Očito se bilo kakvo polje sile teže može u dovoljno malenom dijelu prostora i kratkom vremenu smatrati približno konstantnim. Možemo stoga uvijek naći ubrzan sustav referencije, spram kojega u ograničenom prostorno-vremenskom području nema polja sile teže.

Pitat će se, ne može li se svako gravitaciono polje u cijelosti i za sva vremena ukloniti samim izborom sustava referencije, ne može li se dakle u neku ruku sva gravitacija shvatiti kao »prividna«. Očito to nije moguće. Polje zemaljske kugle na pr. ne može se potpuno ukloniti. To polje je upravljeno k središtu, ubrzanje bi dakle također moralo imati taj smjer, no to nije moguće. Sve kad bi se dopustilo (a to ćemo morati), da sustav referencije nije krut, nego da se ubrzano steže prema središtu Zemlje, ne bi to gibanje moglo trajati bilo kako dugo jer bi moralo svršiti u središtu. Rotacijom sustava referencije oko osi dobiva se sila tromosti, koja je upravljena od te osi prema vani [III, 9, formula (31)], a zove se centrifugalna sila:

$$mk = m\,\frac{4\pi^2 r}{T^2}\,.$$

Ona kompenzira gravitaciono polje Zemlje samo u nekoj udaljenosti r, koja je polumjer kružno zamišljene Mjesečeve staze s ophodnim vremenom T.

Ima dakle »pravih« gravitacionih polja, ali je smisao te riječi drukčiji u općoj teoriji relativnosti nego u klasičnoj mehanici. Jer uvijek se može prikladnim izborom sustava referencije ukloniti bilo koji, dovoljno maleni dio polja. Tek ćemo kasnije točnije odrediti pojam gravitacionog polja.

Dakako da ima izvjesnih gravitacionih polja, koja se daju u cijelosti ukloniti izborom sustava referencije. Da se takva nađu, treba samo poći od sustava, u kojem je dio prostora bez polja, i uvesti bilo kako ubrzan sustav. Relativno spram njega onda postoji gravitaciono polje. Ovo polje nestaje, čim se vratimo na prvotni sustav referencije. Centrifugalno polje $k = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ takve je prirode. Dakako da tek gotova teorija može odgovoriti na pitanje, kada se gravitaciono polje može u cijelosti ukloniti izborom sustava referencije.

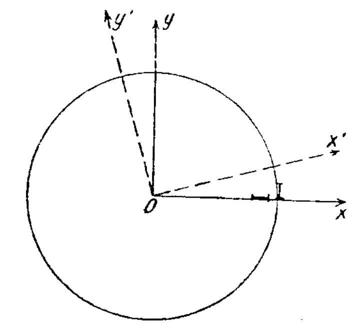
3. Neslaganje euklidske geometrije

Prije nego što nastavimo, moramo svladati jednu teškoću, za koju će trebati znatan napor. Navikli smo da prikazujemo gibanja u svijetu Minkovskoga kao svjetske crte. Kostur te četverodimenzionalne geometrije dale su svjetske crte zraka svjetlosti i staze tromih masa, koje se gibaju bez utjecaja sila. U staroj su teoriji baš te svjetske crte pravocrtne spram inercijalnih sustava. No hoćemo li, da vrijedi opća relativnost, to su ubrzani sustavi referencije ravnopravni, a u njima su prvotno pravocrtne svjetske crte zakrivljene (III, 1, sl. 32). Zato će opet druge svjetske crte postati pravocrtne. Isto to vrijedi i za prostorne staze. Pojmovi pravocrtan i zakrivljen relativirani su, ukoliko se odnose na staze zraka svjetlosti i slobodno pokretnih tjelesa.

Time je potresena sva zgrada euklidske geometrije u svemirskom prostoru. Jer ona bitno počiva (III. 1) na klasičnom zakonu tromosti, koji određuje pravce.

Moglo bi se pomisliti, da se ta teškoća može svladati, ako se za definiciju geometrijskih elemenata kao pravac, ravnina i t. d. upotrebe samo kruta mjerila. Evo kako Einstein pokazuje, da ni to nije moguće. Polazimo od prostornog područja, u kojem neko vrijeme relativno spram prikladno odabranog sustava referencije S nema gravitacionog polja. Promatramo zatim tijelo, koje u tom području rotira konstantnom kutnom brzinom, primjerice u obliku ravne kružne ploče, okomite na osi rotacije (sl. 127). Uvodimo sustav referencije S', koji je čvrsto spojen s tom pločom. U sustavu S' onda postoji gravitaciono polje, usmjereno prema vani, koje je dano centrifugalnim ubrzanjem

$$k = \frac{4\pi^2 r}{T^2}\,.$$



Sl. 127.

Opažač sustava S' htio bi izmjeriti kružnu ploču. Za to upotrebljava kao jedinicu štap određene duljine, koji pri tome mora mirovati spram S'. Opažač u sustavu S upotrebljava isti štap kao jedinicu duljine, kod čega štap mora mirovati spram S.

Morat ćemo pretpostaviti, da rezultati specijalnog principa relativnosti ostaju ispravni, ako se ovaj ograniči na dijelove prostora i odsječke vremena, u kojima se gibanje može smatrati jednolikim. Da to bude moguće, uzet ćemo, da je jedinični štap malen spram polumjera ploče. Postavi li opažač u S' štap u smjeru polumjera ploče, ustanovit će opažač u S, da je duljina štapa u gibanju relativno spram S ostala nepromijenjena i jednaka 1, jer je gibanje štapa okomito na smjer njegove duljine. No prisloni li opažač u S' štap na opseg kružne ploče, ovaj će se prema specijalnoj teoriji relativnosti opažaču u S činiti skraćen. Pretpostavimo, da treba nanizati 100 takvih štapića, da se dođe od jednog kraja promjera ploče do drugoga. Opažač u S trebat će onda $\pi = 3{,}14\ldots$ puta 100, t. j. po pr. 314 štapića, koji miruju u S, da izmjeri opseg, no opažaču u S' ne bi dostajao taj broj štapića. Jer štapići, koji miruju u S', čine se u sustavu S skraćeni, broj 314 nije dakle dovoljan, da se bez razmaka obuhvati opseg. Opažač u S' tvrdio bi dakle, da omjer opsega kružnice spram promjera nije $\pi = 3{,}14\ldots$, nego da je veći. No to je u protuslovlju s euklidskom geometrijom.

Analogno vrijedi i za mjerenje vremenâ. Stavi li se od dvaju jednako građenih satova jedan u središte, a drugi na rub ploče u relativnom mirovanju spram nje, ovaj će potonji sat, prosuđivan sa sustava S, ići polaganije, jer je relativno spram S u gibanju. Opažač u sredini ploče morao bi očito ustanoviti isto. Nemoguće je dakle doći do razumne definicije vremena pomoću satova, koji miruju spram sustava referencije, ako taj sustav rotira, ako je ubrzan ili, što po principu ekvivalencije znači isto, ako u njemu postoji gravitaciono polje.

U gravitacionom polju štap je dulji ili kraći, sat ide brže ili polaganije prema mjestu, gdje se ta mjerna sprava nalazi.

No time se srušio temelj prostorno-vremenskog svijeta, na kojem su dosada počivala sva naša zaključivanja. Opet smo prinuđeni na poopćenje pojmova prostora i vremena, ali ovaj puta na radikalno poopćenje, koje po svojoj temeljitosti daleko nadmašuje sve, što je dosada bilo.

Očito je besmisleno definirati na obični način koordinate i vrijeme x, y, z, t, jer kod toga se geometrijski temeljni pojmovi pravac, ravnina, kružnica i t. d. smatraju naprosto danim i pretpostavlja se, da vrijedi euklidska geometrija u prostoru, odnosno u poopćenju Minkovskoga na prostorno-vremenski svijet.

Nastaje stoga zadaća, da se prikažu četverodimenzionalni svijet i njegovi zakoni, a da se a priori ne pretpostavi određena geometrija.

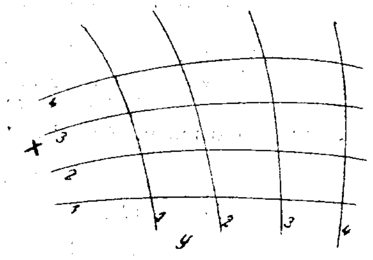
Čini se kao da nam sigurno tlo izmiče pod nogama. Sve koleba, ravno je krivo i krivo je ravno. No Einstein se nije plašio teškoća toga pothvata. Matematika je već bila izvršila važne predradnje. Gauss (1827) je razvio teoriju zakrivljenih ploha u obliku opće dvodimenzionalne geometrije, a Riemann (1854) je osnovao prostornu nauku o neprekinutim raznolikostima od bilo koliko dimenzija. Ne možemo se ovdje služiti tim matematičkim sredstvima. No bez njih nije moguće dublje razumijevanje opće teorije relativnosti. Čitalac ne može stoga od ovih razmatranja očekivati potpuno razjašnjenje o Einsteinovoj nauci. Naći će slike i analogije, koje su uvijek loša zamjena za egzaktne pojmove. No ako ga ovi reci potaknu na dublje proučavanje, njihova je svrha postignuta.

4. Geometrija na zakrivljenim plohama

Zadaća, da se razvije geometrija bez a priori danog kostura pravaca i njihovih euklidskih zakona povezivanja, nije tako neobična, kao što se to čini na prvi mah. Zamislimo, da geodet ima zadatak da izmjeri neki brežuljkast teren pokriven gustom šumom i da od njega nacrta kartu. Na svakom mjestu vidi samo ograničenu okolinu. Ne koriste mu instrumenti za viziranje (teodoliti), nego je u glavnom upućen na mjernu vrpcu. Njome može izmjeriti male trokute ili četverokute, kojima su vrhovi fiksirani letvama, a sastavljanjem ovakvih izravno izmjerivih likova može postepeno prodrijeti do udaljenijih dijelova terena, koji nisu izravno vidljivi. Apstraktno izraženo: geodet može primijeniti metode obične euklidske geometrije samo na mala područja. Cijeli teren nije pristupačan tim metodama, nego se može geometrijski istražiti samo korak po korak, napredujući od mjesta do mjesta. Da, još i više: euklidska geometrija i ne vrijedi točno u brežuljkastom terenu, *nema*

tu uopće pravaca. Kratki odsječci krivulja, koji imaju duljinu mjerne vrpce, mogu se smatrati ravnim. No iz dola u dol, od brijega na brijeg ne vodi ravna spojnica na površini Zemlje. Euklidska geometrija dakle u neku ruku vrijedi samo u malom, u infinitezimalnim područjima. U velikom vrijedi općenitija prostorna ili bolje reći plošna nauka.

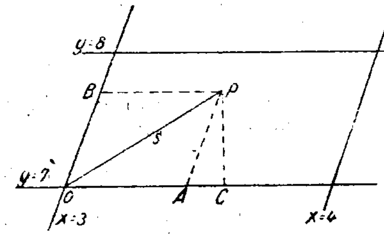
Hoće li geodet postupati sustavno, on će najprije tlo šume prekriti mrežom krivulja, koje su obilježene letvama ili označenim stablima. Trebaju mu dvije familije krivulja, koje se križaju (sl. 128). Krivulje će se odabrati po mogućnosti glatke, neprekinuto zakrivljene i u svakoj familiji redom numerirane. Kao znak za neki broj u jednoj familiji uzet će se slovo x, u drugoj familiji slovo y. Svako sjecište ima onda dva broja x i y, recimo $x = 3$, $y = 5$. Točke, koje leže između, mogu se obilježiti razlomljenim vrijednostima od x i y. Ovaj postupak određivanja točaka na zakrivljenoj plohi prvi je upotrebio Gauss. Zato se x i y zovu Gaussove koordinate.



Sl. 128.

Bitno je kod toga, da brojevi x i y ne znače duljine, kutove ili druge geometrijske, izmjerive veličine, nego samo *brojeve numeracije*. Isto tako, kao sustav američkih brojeva ulica i kuća.

Tek je stvar geodeta, da uvede mjeru u tu numeraciju točaka terena. Njegova mjerna vrpca obuhvaća, recimo, jedno oko mreže Gaussovih koordinata. Geodet će sada početi mjeriti oko po oko. Svako se oko može smatrati malim paralelogramom i određeno je, ako su poznate duljine dviju stranica i jedan kut. Geodet mora te veličine izmjeriti i za svako oko unijeti u kartu. Kad je to proveo, on očito potpuno poznaje geometriju terena pomoću svoje karte.



Sl. 129.

Mjesto triju podataka po oku (2 stranice i jedan kut) obično se primjenjuje drugi način određivanja mjere, koji ima prednost veće simetrije.

Promatrajmo jedno oko mreže, paralelogram, kojemu stranice odgovaraju dvjema uzastopnim cijelim brojevima (na pr. $x = 3$, $x = 4$ i $y = 7$, $y = 8$) (sl. 129). Bilo koja točka u nutrašnjosti neka je P. Njezina udaljenost od vrha O s manjim brojevima neka je s. Ta se udaljenost izmjeri mjernom vrpcom. Kroz P povučemo paralele s krivuljama mreže, s kojima se sijeku u A i B. Osim toga neka je C nožište okomice spuštene iz P na krivulju koordinata x. I točke A i B

imaju brojeve ili Gaussove koordinate u mreži. A se na pr. određuje time, da se izmjeri stranica paralelograma, na kojoj leži A i dužina AO, pa se omjer tih dviju duljina uzme kao prirast x-koordinate od A spram O. Mi ćemo sam taj prirast označiti sa x, uzimajući O kao nultočku Gaussovih koordinata. Isto tako određujemo Gaussovu koordinatu y od B kao omjer, u kojem B dijeli dotičnu stranu paralelograma. x, y očito su onda Gaussove koordinate od P.

Prava duljina od OA nije dakako x, nego možda $a \,.\, x$, gdje je a neki broj, koji treba mjerenjem odrediti. Isto tako prava duljina od OB nije y, nego by. Mičemo li točku P, mijenjat će se Gaussove koordinate, ali brojevi a, b, koji daju omjer Gaussovih koordinata spram pravih duljina, ne mijenjaju se.

Izrazimo sada udaljenost $OP = s$ pomoću pravokutnog trokuta OPC po Pitagorinu poučku. Bit će

$$s^2 = OP^2 = OC^2 + CP^2.$$

Zbog $OC = OA + AC$ izlazi iz toga

$$s^2 = OA^2 + 2\,OA\,.\,AC + AC^2 + CP^2.$$

U drugu ruku vrijedi za pravokutni trokut APC

$$AC^2 + CP^2 = AP^2.$$

Bit će dakle

$$s^2 = OA^2 + 2\,OA\,.\,AC + AP^2.$$

Tu je $OA = ax$, $AP = OB = by$. Dalje je AC projekcija od $AP = by$, pa je stoga sa AP u stalnom omjeru, recimo $AC = cy$. Dobivamo dakle:

$$s^2 = a^2x^2 + 2acxy + b^2y^2.$$

Ovdje su a, b, c čvrsti omjerni brojevi. Obično se ta tri faktora drukčije označuju, pa se stavlja

$$s^2 = g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2. \tag{97}$$

Ovu jednadžbu zvat ćemo *poopćenim Pitagorinim poučkom* za Gaussove koordinate.

Tri veličine g_{11}, g_{12}, g_{22} mogu isto tako kao stranice i kut služiti za određivanje stvarnih razmjera paralelograma. Zovemo ih zato *faktorima metrike*. Oni od oka do oka imaju druge vrijednosti, koje treba unijeti u kartu ili ih zadati sredstvima matematike kao »funkcije«. Ako su za svako oko poznati, onda se time po formuli (97) može izračunati prava udaljenost bilo koje točke P od nultočke oka unutar bilo kojeg oka, kad su zadani brojevi ili Gaussove koordinate x, y od P.

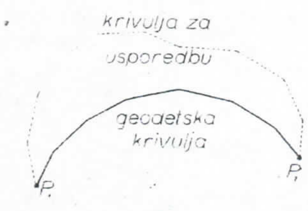
Faktori metrike predstavljaju dakle ukupnu geometriju na plohi.

Toj će se tvrdnji prigovoriti, da to ipak ne može biti točno. Mreža Gaussovih koordinata bila je odabrana sasvim po volji, a ta samovolja mora ulaziti i u g_{11}, g_{12}, g_{22}. To je doduše istina. Mogla bi se odabrati druga mreža, pa bi se za udaljenost istih točaka OP dobio jednako građen izraz (97), ali s drugim faktorima g'_{11}, g'_{12}, g'_{22}. No ima dakako

pravila, po kojim se oni mogu izračunati iz g_{11}, g_{12}, g_{22}. To su pravila transformacije slične vrsti, kao što smo ih upoznali već prije.

Svaka stvarna geometrijska činjenica na plohi mora se očito dati izraziti takvim formulama, koje kod promjene Gaussovih koordinata ostaju nepromijenjene, invarijantne. Plošna geometrija postaje time teorija invarijanta vrlo općenite vrsti. Jer krivulje koordinatne mreže stoje sasvim do naše volje, samo se moraju odabrati tako, da budu neprekinuto zakrivljene i da prekrivaju plohu jednostavno i bez praznina.

Koje su geometrijske zadaće, koje će geodet morati riješiti, pošto je odredio metriku? Na zakrivljenoj plohi nema pravaca, ali ima *najravnijih crta*. To su ujedno one, koje tvore najkraću spojnicu između dviju točaka. Njihov je znanstveni naziv »*geodetske crte*«. Matematički su karakterizirane ovako: razdijelimo bilo koju crtu na plohi na malene, izmjerive odsječke duljinâ s_1, s_2, $s_3, \ldots$; onda im je zbroj $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$ za geodetsku crtu između točaka P_1, P_2 manji nego za bilo koju drugu crtu između njih (sl. 130). Veličine s_1, $s_2 \ldots$ mogu se čisto računski odrediti iz poopćenog Pitagorina poučka (97), ako su poznati g_{11}, g_{12}, g_{22}.

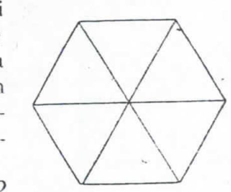


Sl. 130.

Poznato je, da su na kuglinoj plohi »najveći kuglini krugovi« najkraće crte. Oni su izrezani ravninama, koje prolaze središtem. Na drugim plohama često su to vrlo komplicirane krivulje. No ipak su najjednostavnije krivulje, koje tvore kostur geometrije na plohi isto tako, kao što pravci tvore kostur euklidske geometrije u ravnini.

Geodetske crte predočene su dakako invarijantnim formulama. One znače prava geometrijska svojstva plohe. Iz tih invarijanta mogu se izvesti sve više invarijante, no u to ne možemo ulaziti.

Drugo je fundamentalno svojstvo plohe njezina *zakrivljenost*. Obično se ona definira pomoću treće prostorne dimenzije. Zakrivljenost kugle primjerice mjeri se pomoću kuglina polumjera, t. j. dužine izvan kugline plohe. Naš geodet u planinskoj šumi ne će moći upotrebiti to sredstvo. On ne može izaći iz svoje plohe i mora pokušati da ispita odnose zakrivljenosti samo svojom mjernom vrpcom. Da je to zaista moguće, dokazao je sistematski Gauss. Mi ćemo to objasniti ovim jednostavnim razmatranjem:



Sl. 131.

Geodet odmjeri svojom mjernom vrpcom 12 jednako dugačkih užeta i sastavi od njih šesterokutni lik (sl. 131). Po poznatom stavku obične geometrije ravnine zaista je moguće tih 12 užeta u tom liku istodobno napeti. To je zapravo vrlo čudnovato, jer kad je napeto 5 od svih 6 istostranih trokuta, mora zadnje uže pristajati u preostalu prazninu.

U školi učimo, da to ide, a što se uči u školi, o tom se obično kasnije mnogo ne razmišlja. A ipak se treba čuditi, da se praznina ispunjava baš užetom iste duljine, kao ostale stranice.

Zaista to ide samo u ravnini. Pokuša li se isto na zakrivljenoj plohi, tako da središte i 6 vrhova leži na njoj, šesterokut se ne zatvara. Na planinskom vrhu i na dnu doline zadnje je uže predugačko, na brdskom klancu (na sedlasto zakrivljenom dijelu plohe) uže je prekratko. Savjetujemo čitaocu, da to sam pokuša na jastuku pomoću 12 komada konca!

Time je dobiven kriterij, kako se može naći zakrivljenost plohe, a da se iz nje ne izađe. Zatvara li se šesterokutni lik, ploha je ravna, ne zatvara li se, zakrivljena je. Mjeru zakrivljenosti ne ćemo iz toga izvesti. Na temelju rečenoga bit će razumljivo, da se takva mjera može strogo definirati. Očito je ta mjera u vezi s time, da se faktori metrike mijenjaju od mjesta do mjesta. *Mjera zakrivljenosti* može se, kako je Gauss dokazao, izraziti pomoću g_{11}, g_{12}, g_{22} i predstavlja invarijantu plohe.

Gaussova je teorija ploha način obrađivanja geometrije, koji bi se prema fizičkom izražavanju mogao označiti kao teorija djelovanja nablizu. Nisu primarno zadani zakoni plohe u velikom, nego njezina diferencijalna svojstva, koeficijenti metrike i iz njih tvorene invarijante, prije svega mjera zakrivljenosti. Oblik plohe i njezina geometrijska svojstva u cijelosti mogu se iz toga naknadno odrediti računskim procesima, koji mnogo sliče rješavanju diferencijalnih jednadžbi fizike. U suprotnosti s time je Euklidova geometrija tipična teorija djelovanja u daljinu. U tome je dublji razlog, da novijoj fizici, koja je sva sagrađena na pojmovima djelovanja nablizu, na pojmu polja, nije dovoljna euklidska shema, nego ona mora po Gaussovu uzoru kročiti novim stazama.

5. Dvodimenzionalni kontinuum

Zamislimo, da se naš geodet služi svojim šesterokutom od užeta, da ustanovi zakrivljenost terena. Pri tom ne pazi na to, da se sredina šesterokuta nalazi u čistini šume, u koju dopire sunce. Krajevi užeta, koji se tamo sastaju, rastegnut će se nešto zbog zagrijavanja. Zbog toga će radijalna užeta biti dulja od vanjskih i ova se ne će zatvoriti. Geodet će dakle, ako je teren uistinu ravan, misliti, da se nalazi na plosnatom planinskom vrhu (ili u dolini). Ako je savjestan, ponovit će mjerenje užetima iz drugoga materijala. Ova će se u sunčanoj toplini rastegnuti više ili manje od prijašnjih, pa će on time biti upozoren na pogrešku i ispraviti je.

No pretpostavimo, da je produljenje zbog zagrijavanja jednako za sve raspoložive materijale, iz kojih se mogu načiniti užeta. Pogreška se onda ne će pokazati. Ravnine će se smatrati bregovima, bregovi ravninama. Ili zamislimo, da neke još nepoznate prirodne sile utječu na duljinu štapova i užeta, ali na sve na isti način. Onda bi geometrija,

koju geodet određuje mjernom vrpcom i poligonima od užeta, bila sasvim drukčija nego stvarna geometrija plohe. No dok se samo njima služi i nema mogućnosti zauzeti više stajalište, dok ne može upotrebiti i treću dimenziju, bit će čvrsto uvjeren, da je pronašao ispravnu geometriju plohe.

Ova nam razmatranja pokazuju, da pojam geometrije na nekoj plohi, ili, kako je Gauss zove, »geometria intrinseca«, nema posla s oblikom plohe, kako se prikazuje promatraču, koji se može poslužiti trećom prostornom dimenzijom. Kada je jednom dana jedinica duljine mjernom vrpcom ili mjerilom, geometrija plohe potpuno je određena *relativno spram toga mjerila*, makar se mjerilo u stvari mijenjalo kod mjerenja. Za biće, koje je vezano na plohu, tih promjena nema, ako se odnose na sve supstancije jednako. Zato će to biće ustanoviti zakrivljenja, gdje ih uistinu nema, i obrnuto. No ovo »uistinu« postaje besmisleno, kada se radi o plošnim bićima, koja uopće nemaju predodžbu treće dimenzije, kao što mi ljudi nemamo predodžbe o četvrtoj prostornoj dimenziji. Za ta je bića i besmisleno označiti njihov svijet kao »plohu«, koja je smještena u trodimenzionalnom prostoru. On je za njih »dvodimenzionalni kontinuum«. Taj kontinuum ima određenu geometriju, određene najkraće ili geodetske crte, a i određenu »mjeru zakrivljenosti« na svakom mjestu. No plošna bića ne će s tom riječi povezati istu predodžbu, koju mi povezujemo sa zornim pojmom zakrivljenosti neke plohe, nego će time samo misliti na činjencu, da se šesterokut užeta više ili manje zatvara i ništa drugo. Uspije li čitaocu uživjeti se u osjećaje toga plošnog bića i predočiti sebi svijet, kako se njemu prikazuje, onda je sazrio za dalje korake apstrakcije.

Moglo bi se nama ljudima isto to dešavati u našem trodimenzionalnom svijetu. Možda je ovaj isto tako smješten u četverodimenzionalnom prostoru, kao što je ploha u našem trodimenzionalnom. A zbog nepoznatih sila u nekim se dijelovima prostora sve duljine mijenjaju, a ipak to nikad ne možemo opaziti. No onda bi bilo moguće, da se na tim mjestima prostorni poliedar, konstruiran poput šesterokutnoga lika, ne zatvara, a morao bi se zatvarati prema običnoj geometriji.

Da li smo ikada nešto slična opažali? Od staroga vijeka uvijek se euklidska geometrija smatrala egzaktno ispravnom. Čak je kritička filozofija K a n t o v a (1781) proglasila njezine stavke a priori ispravnima i time u neku ruku svetima. No veliki matematičari i fizičari, prije svega G a u s s, R i e m a n n i H e l m h o l t z, nikad se nisu složili s tim općim vjerovanjem*). Sam je G a u s s jednom izvršio veliko mjerenje, da ispita jedan stavak euklidske geometrije, naime, da je zbroj kutova u trokutu jednak 180°. On je izmjerio trokut između triju brda, Brocken, Hoher Hagen, Inselsberg. Rezultat je bio taj, da je unutar granica pogrešaka zbroj kutova ispravan.

*) Ovdje bi trebalo spomenuti i ime N. I. Lobačevski, o čemu vidi bilješku na str. 226. (Op. prev.)

Zbog toga su pothvata Gaussa s filozofske strane mnogo napadali. Reklo se prije svega, kad bi on i ustanovio neka odvajanja, time bi u najboljem slučaju bilo dokazano, da su zrake svjetlosti između dalekozora bile otklonjene nekim, možda nepoznatim, fizičkim uzrocima, ali ništa ne bi bilo dokazano o tome, da li vrijedi ili ne vrijedi euklidska geometrija.

Einstein tvrdi, kao što smo već prije (VII, 3) rekli, da geometrija stvarnoga svijeta zaista nije euklidska, i opravdava tu tvrdnju vrlo konkretnim primjerima. Da shvatimo odnos njegove nauke spram prijašnjih diskusija o osnovima geometrije, moramo uklopiti neka načelna razmatranja, koja se dodiruju s filozofijom.

6. Matematika i stvarnost

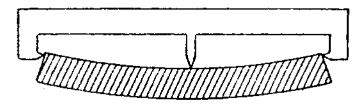
Radi se o pitanju objekta geometrijskih pojmova uopće. Začetak geometrije sigurno je praktična vještina mjernika, dakle čisto empirijska nauka. Antika je otkrila, da se geometrijski stavci daju deduktivno dokazati, t. j. da treba samo pretpostaviti malen broj temeljnih stavaka ili aksioma, da se iz njih može čisto logički izvesti cijeli sustav ostalih stavaka. Ovo je otkriće imalo golemo djelovanje, jer geometrija je postala uzor svake deduktivne znanosti. Nešto demonstrirati »more geometrico« bio je cilj strogog mislioca. A što su objekti, kojima se bavi znanstvena geometrija? Filozofi i matematičari pretresli su to pitanje u svakom pogledu i dali su velik broj odgovora. Općenito se priznavala sigurnost i neoboriva ispravnost geometrijskih stavaka. Problem je bio samo taj, kako se dolazi do takvih apsolutno sigurnih stavaka, i na kakve objekte se oni odnose.

Nema sumnje, prizna li netko geometrijske aksiome kao ispravne, prisiljen je priznati i sve ostale stavke geometrije. Jer lanac dokaza je neoboriv za svakoga, koji uopće zna logički misliti. Time je pitanje svedeno na porijeklo aksioma. To je malen broj stavaka o točkama, pravcima, ravninama i sličnim pojmovima, koji trebaju vrijediti sasvim egzaktno. Ne mogu stoga potjecati iz iskustva kao većina izreka znanosti i svakodnevnoga života. Iskustvo uvijek daje samo približno ispravne, više ili manje vjerojatne stavke. Treba dakle tražiti druge izvore spoznaje, koji jamče za apsolutnu sigurnost stavaka. Prema Kantu (1781) prostor su i vrijeme oblici zora, koji postoje a priori, koji su prije svakoga iskustva i uopće tek omogućuju iskustvo. Objekti geometrije morali bi prema tome biti unaprijed stvoreni oblici *čistoga* zora, koji su osnov sudovima, što ih stvaramo u *empirijskom* zoru o stvarnim predmetima. Prema tome bi se primjerice sud: »Ovaj brid ravnala je ravan« stvorio tako, da se empirijski gledani brid usporedi s čistim zorom pravca, a da taj proces dakako uopće ne postaje svijestan. Predmet geometrijske znanosti bio bi onda pravac dan u čistom zoru, dakle ni logički pojam, ni fizički objekt, nego nešto treće, kojemu bit možemo dokučiti samo upućujući na doživljaj spojen sa zorom »ravan«.

Ne ćemo si prisvajati pravo da sudimo o toj nauci ili o sličnim filozofskim teorijama. One se odnose prije svega na doživljaj prostora, a taj je izvan predmeta naše knjige. Ovdje se radi o prostoru i vremenu fizike, dakle jedne znanosti, koja se svijesno i sve jasnije odvraća od zora kao izvora spoznaje i traži oštrije kriterije.

U tom smislu moramo ustanoviti, da nikad fizičar ne će temeljiti sud »ovaj je brid ravnala ravan« na neposrednom zoru ravnoga. Njemu je sasvim svejedno, da li postoji nešto kao čisti oblik zora pravca ili ne postoji, s kojim bi se mogao usporediti brid ravnala. On će načiniti neke *pokuse*, da ustanovi pravocrtnost, kao što sve druge tvrdnje o predmetima ispituje pokusima. Vizirat će primjerice duž brida ravnala, t. j. ustanovit će, da li zraka svijetla, koja dodiruje ravnalo u početnoj i krajnjoj točci, i u svim ostalim točkama dodirno prolazi uz brid (sl. 132). Ili će okretati ravnalo oko krajnjih točaka i dodirnuti šiljkom bilo koju drugu točku ravnala između krajeva. Ne poremeti li se taj dodir kod vrtnje, ravnalo je ravno (sl. 133).

Sl. 132.



Sl. 133.

Podvrgnemo li kritici te postupke, koji su sigurno kudikamo točniji od zora, vidjet ćemo, da zapravo ništa ne kazuju o apsolutnoj pravocrtnosti. Kod prvog pokusa očito se već pretpostavlja, da je zraka svijetla pravocrtna. Kako se dokazuje, da je to točno? Kod druge se metode pretpostavlja, da su okretne točke ravnala i šiljak kruto vezani, i da je i samo ravnalo kruto. Neka je primjerice štap kružnoga presjeka i horizontalno postavljen i poduprt. Pod djelovanjem vlastite težine on će se nešto svinuti, i taj će progib ostati kod vrtnje nepromijenjen. Metoda dodira šiljkom pokazat će dakle pravocrtnost, gdje se u stvari radi o zakrivljenosti. Neka se ne prigovori, da su to izvori pogrešaka, kojih ima kod svakog fizičkog mjerenja, i koje vješt eksperimentator izbjegava. Želimo samo pokazati, da se ne može izravno empirijski ispitati apsolutna pravocrtnost ili bilo koje drugo geometrijsko svojstvo, nego samo relativno spram izvjesnih geometrijskih svojstava onih pomagala, koja su upotrebljena kod mjerenja (pravocrtnost zrake svijetla, krutost dijelova naprave). Oduzmemo li od stvarno izvedenih operacija sve dodatke mišljenja, sjećanja i znanja, preostaje samo konstatacija: padnu li dvije točke brida ravnala na zraku svijetla, čini to i ova ili ona druga točka; padnu li dvije točke ravnala zajedno s dvjema točkama nekoga tijela, isto vrijedi i za ovu ili onu treću točku. Zaista se ustanovljuju dakle samo prostorne ili bolje *prostorno-vremenske koincidencije*, t. j. susretanje dviju materijalnih točaka, koje se mogu raspoznati, u isto vrijeme i na istom mjestu. Sve drugo je spekulacija, pače i tako jednostavna tvrdnja, da se takvim pokusima koincidencije na ravnalu može ustanoviti njegova pravocrtnost.

Kritički pregled egzaktnih znanosti uči, da se sve konstatacije uopće odnose na takve koincidencije. Svako je mjerenje na kraju krajeva konstatacija, da se kazaljka ili neki znak podudara s ovim ili onim podjelkom neke skale u to i to vrijeme. Odnosilo se mjerenje na duljine, vremena, sile, mase, električne struje, kemijske afinitete ili što mu drago, ono, što se zaista može ustanoviti, jesu prostorno-vremenske koincidencije. To su u jeziku Minkovskoga svjetske točke, koje su u prostorno-vremenskoj raznolikosti označene susretanjem materijalnih svjetskih crta. Fizika je nauka o odnosima takvih označenih svjetskih točaka.

Logičko razrađivanje tih odnosa jest matematička teorija. Bila ona ma kako zamršena, uvijek joj je zadnja svrha, da stvarno opažane koincidencije predoči kao misaono nužne posljedice nekih temeljnih pojmova i stavaka. Neke izreke o koincidencijama pojavljuju se u obliku geometrijskih stavaka. Geometrija kao nauka, koja se može primijeniti na stvarni svijet, nema kod toga poseban položaj prema drugim granama fizičkih znanosti. Njezini pojmovi ovise na isti način o vladanju stvarnih predmeta, kao pojmovi drugih fizičkih područja. Ne možemo geometriji priznati neki povlašteni položaj.

Da je euklidska geometrija dosada vrijedila neograničeno, osniva se na činjenici, da ima zraka svjetlosti, koje se velikom točnošću vladaju kao pravci u pojmovnoj shemi euklidske geometrije, i da ima gotovo krutih tjelesa, koja zadovoljavaju euklidske aksiome o sukladnosti. Tvrdnji, da geometrija vrijedi apsolutno egzaktno, ne možemo s fizičkog gledišta dati određeni smisao.

Predmeti geometrije, koja se stvarno primjenjuje na objekte svijeta, jesu dakle ti objekti sami, promatrani s izvjesnoga gledišta. Pravac je po definiciji zraka svjetlosti, ili staza tromosti, ili sveukupnost nekih točaka tijela, koje se smatra krutim, i to onih točaka, koje se ne miču kod vrtnje oko dviju čvrstih točaka, ili inače kakvo fizičko »nešto«. Da li ovako definirani pravac ima ona svojstva, koja mu daje Euklidova geometrija, može se ustanoviti samo na temelju iskustva. Takvo je svojstvo euklidske geometrije stavak o zbroju kutova u trokutu, koji je Gauss empirijski ispitao. Moramo potpuno priznati opravdanost takvih pokusa. Drugo je karakteristično svojstvo dvodimenzionalne geometrije bilo dano zatvaranjem šesterokuta užeta (VII, 4). Samo iskustvo može reći, da li izvjestan način realiziranja pravca, jedinice duljine i t. d. određenim fizičkim objektima ima to svojstvo ili nema. U prvom je slučaju euklidska geometrija primjenljiva relativno spram tih definicija, u drugom nije.

E i n s t e i n tvrdi: sve dosada uobičajene definicije temeljnih pojmova prostorno-vremenskoga kontinuuma krutim mjerilima, satovima, zrakama svjetlosti, stazama tromosti zadovoljavaju u ograničenim, malenim područjima zakone euklidske geometrije, odnosno svijeta Minkovskoga, ali ih ne zadovoljavaju u velikom. Ta se odvajanja nisu dosada otkrila samo zato, jer su neznatna. Mogla bi se predložiti dva puta, da se tomu doskoči. Ili se napušta definicija pravca zrakom svjetlosti,

definicija duljine krutim tijelom, pa treba tražiti druge realizacije euklidskih temeljnih pojmova, da se može ostati kod euklidskog sustava i njegovih logičkih veza; ili se napušta sama euklidska geometrija i traži se općenitija prostorna nauka.

Da se na prvi put ozbiljno ne trebamo osvrnuti, svakomu je jasno, kome nije strana zgrada znanosti. No ne može se ipak dokazati, da je taj put nemoguć. Tu ne odlučuje logika, nego znanstveni osjećaj. Nema logičkog puta od činjenica do teorije. Domišljanje, intuicija, mašta ovdje su, kao svagdje, izvori stvaralačkog djela, a proricanje još neistraženih ili budućih procesa je kriterij ispravnosti. Neka čitalac jednom pretpostavi: zraka svjetlosti u praznom svemirskom prostoru nije »najravnije«, što ima, pa neka promisli konsekvencije te pretpostavke. Razumjet će onda, da je Einstein išao drugim putem.

Kada se euklidska geometrija pokazala neprikladnom, mogao je on izabrati izvjesnu drugu, neeuklidsku. Ima takvih sustava pojmova, koje su izgradili L o b a č e v s k i (1829), B o l y a i (1832), R i e m a n n (1854), H e l m h o l t z (1866) i drugi, a izmišljeni su zato, da se ispita, jesu li izvjesni Euklidovi aksiomi misaono nužne posljedice ostalih. Da oni to jesu, moralo bi doći do logičkih protuslovlja, ako se nadomjeste drugima. Odabrati ovakvu specijalnu neeuklidsku geometriju za predočivanje fizičkoga svijeta značilo bi tjerati lisicu, a istjerati vuka. Einstein se vratio fizičkom iskonskom pojavu, prostorno-vremenskoj koincidenciji.

7. Metrika prostorno-vremenskog kontinuuma

Sveukupnost svjetskih točaka, označenih u smislu točke 6. jest ono, što se stvarno može ustanoviti. Četverodimenzionalni prostorno-vremenski kontinuum sam je po sebi bez strukture. Tek stvarni odnosi svjetskih točaka u njemu, koje otkriva pokus, nameću mu metriku i geometriju. U stvarnom svijetu nalazimo dakle iste okolnosti, koje smo upravo upoznali kod razmatranja plošne geometrije. I metoda matematičkog obrađivanja bit će dakle ista. Najprije će se uvesti Gaussove koordinate u četverodimenzionalnom svijetu. Konstruirat ćemo mrežu označenih svjetskih točaka. To znači, da ćemo zamisliti prostor ispunjen tvari u bilo kakvom gibanju, koja se može okretati i deformirati, ali uvijek čuva svoju neprekinutu povezanost, koja je dakle neka vrst »mekušca«, kako se Einstein izražava. U njemu povlačimo tri familije unakrsnih krivulja, koje numeriramo i razlikujemo slovima x, y, z. U čvorištima nastale mreže zamislimo postavljene satove bilo kakvog hoda, ali tako, da je razlika podataka t prostorno susjednih satova malena. Sve je to dakle nekrut sustav referencije ili »mekušac referencije« (»Bezugsmolluske«). U četverodimenzionalnom svijetu odgovara mu sustav Gaussovih koordinata, koji je mreža od 4 familije numeriranih ploha x, y, z, t [27].

Svi su kruti sustavi referencije u gibanju dakako samo specijalne vrsti tih općih sustava referencije, koji se deformiraju. No s našeg općeg gledišta bilo bi besmisleno uvoditi krutost kao nešto a priori dano. I rastavljanje prostora i vremena stoji do naše volje. Budući da se za hod satova može uzeti, da je bilo kakav, samo neprekidno promjenljiv, to nema prostor kao sveukupnost svih »istodobnih« svjetskih točaka fizičke realnosti. Kraj drugog izbora Gaussovih koordinata druge će svjetske točke biti istodobne.

Ono što se ne mijenja kod prijelaza od jednog sustava Gaussovih koordinata na drugi, to su sjecišta realnih svjetskih crta, označene svjetske točke, prostorno-vremenske koincidencije. Sve činjenice fizike, koje se zaista daju ustanoviti, jesu kvalitativni odnosi položaja tih svjetskih točaka i ostaju stoga netaknuti kod promjene Gaussovih koordinata. Ovakova transformacija Gaussovih koordinata prostorno-vremenskoga kontinuuma znači prijelaz od nekog sustava referencije na sustav, koji se po volji giba i deformira. Zahtjev, da u prirodne zakone treba ući samo ono, što se zaista može ustanoviti, vodi dakle do toga, da ti zakoni moraju biti *invarijantni spram bilo kakvih transformacija Gaussovih koordinata x, y, z, t* u druge x', y', z', t'. Ovaj postulat očito sadržava u sebi opći princip relativnosti, jer među svim transformacijama od x, y, z, t nalaze se i one, koje znače prijelaz od trodimenzionalnog sustava referencije na neki drugi, koji se po volji giba. Formalno on ide još mnogo dalje, jer uključuje bilo kakve deformacije prostora i vremena.

Time smo našli temelj opće prostorne nauke, na kojem se jedino može provesti potpuna relativnost. Radit će se sada o tome, da se ta matematička metoda spoji s našim prijašnjim fizičkim razmatranjima, kojima je bio vrhunac postavljanje principa ekvivalencije.

Mi smo sada u četverodimenzionalnom svijetu u istom položaju kao geodet u planinskoj šumi, pošto je označio svoj koordinatni sustav, ali još nije počeo izmjeru mjernom vrpcom. Moramo dakle potražiti četverodimenzionalnu mjernu vrpcu. Za to će nam poslužiti princip ekvivalencije. Mi znamo: prikladnim odabiranjem sustava referencije možemo uvijek postići, da nema gravitacionog polja u dovoljno malenom području svijeta. Ima neizmjerno mnogo takvih sustava referencije, koji se međusobno gibaju pravocrtno i jednoliko, i za koje vrijede zakoni specijalne teorije relativnosti. Mjerila i satovi ponašaju se tako, kako to izražavaju Lorentzove transformacije. Zrake svjetlosti i gibanja tromosti ravne su svjetske crte. U tom je malom svjetskom području dakle veličina

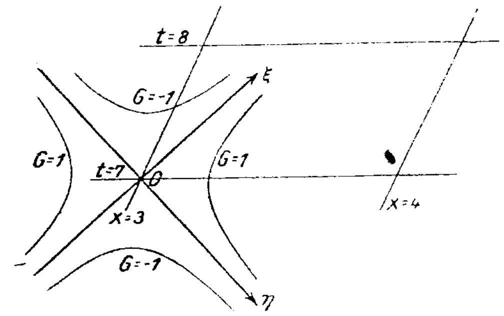
$$G = s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

invarijanta s neposrednim fizičkim značenjem. Ako je naime spojnica nultočke O (koja je uzeta unutar maloga područja) sa svjetskom točkom $P(xyzt)$ svjetska crta prostorne prirode, onda je s udaljenost OP u onom sustavu referencije, u kojem su te dvije točke istodobne. Ako je svjetska crta OP vremenske prirode, onda je $s = ict$, gdje je t vremenska razlika događaja O i P u onom koordinatnom sustavu, u kojem se oba nalaze na istom mjestu. Prije (VI, 10) smo s zvali četverodimen-

zionalnom udaljenošću. Ona se može izravno mjeriti mjerilima i satovima, a uvođenjem imaginarne koordinate $u = ict$ dobiva formalno karakter euklidske udaljenosti u četverodimenzionalnom prostoru:

$$s = \sqrt{G} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}.$$

Činjenica, da u malom vrijedi specijalna teorija relativnosti, točno odgovara primjenljivosti euklidske geometrije na dovoljno male dijelove zakrivljene plohe. Isto kao i tamo, euklidska geometrija odnosno specijalna teorija relativnosti *ne* moraju vrijediti u velikom. Uopće ne moraju postojati ravne svjetske crte, samo najravnije ili geodetske crte.



Sl. 134.

Dalje izgrađivanje četverodimenzionalnog svijeta analogno je teoriji ploha. Najprije treba izmjeriti oka bilo kakve mreže Gaussovih koordinata pomoću četverodimenzionalne udaljenosti s. Pokazujemo postupak u dvodimenzionalnoj ravnini xt (sl. 134). Jedno oko koordinatne mreže neka je omeđeno krivuljama $x = 3$, $x = 4$ i $t = 7$, $t = 8$ (usporedi sl. 129). Zrake svjetlosti, koje izlaze iz čvorišta $x = 3$, $t = 7$, odgovaraju dvjema unakrsnim svjetskim crtama, koje u malom području možemo nacrtati kao pravce, a sijeku se pod kutom od 90°. Između tih crta svjetlosti nalaze se hiperbolne baždarske krivulje $G = \pm 1$. One odgovaraju kružnici, na kojoj se u običnoj geometriji nalaze točke jednake udaljenosti 1.

Prenošenjem formule (97) iz teorije ploha dobivamo za invarijantu s izraz

$$s^2 = g_{11}x^2 + 2g_{12}xu + g_{22}u^2,$$

gdje su x i $u = ict$ Gaussove koordinate bilo koje točke P promatranog oka.

Uvrstimo li $u = ict$, bit će

$$s^2 = g_{11}x^2 + 2icg_{12}xt - c^2g_{22}t^2$$

ili s drukčijom oznakom faktora

$$s^2 = g_{11}x^2 + 2g_{12}xt + g_{22}t^2.$$

g_{11}, g_{12}, g_{22} zovu se *faktori metrike* i daju se izravno fizički interpretirati. Tako je primjerice za $t = 0$ $s = \sqrt{g_{11}}x$, t. j. $\sqrt{g_{11}}$ znači pravu duljinu prostorne stranice oka u sustavu referencije, u kojem ona miruje. U četverodimenzionalnom svijetu izražena je invarijantna udaljenost s dviju točaka, kojima su x, y, z, t relativne Gaussove koordinate, izrazom oblika

$$s^2 = g_{11}x^2 + g_{22}y^2 + g_{33}z^2 + g_{44}t^2 + \\ + 2g_{12}xy + 2g_{13}xz + 2g_{14}xt + \\ + 2g_{23}yz + 2g_{24}yt + 2g_{34}zt. \tag{98}$$

Ova se formula može zvati *poopćeni Pitagorin poučak za četverodimenzionalni svijet.*

Veličine $g_{11}, \ldots, g_{34}$ zovu se *faktori metrike.* Oni će općenito imati različite vrijednosti od oka do oka koordinatnog sustava. Osim toga će za drugi izbor Gaussovih koordinata imati druge vrijednosti, koje s prvotnim vežu neke transformacije.

8. Temeljni zakoni nove mehanike

Po općem principu relativnosti prirodni se zakoni predočuju invarijantama pri bilo kakvim transformacijama Gaussovih koordinata, isto tako, kao što su geometrijska svojstva plohe invarijantna pri bilo kakvim transformacijama krivocrtnih koordinata. Kostur teorije ploha bile su geodetske crte. Isto tako ćemo u četverodimenzionalnom svijetu konstruirati geodetske crte, t. j. svjetske crte, koje daju najkraću udaljenost dviju svjetskih točaka. Kod toga se udaljenost dviju susjednih točaka mjeri invarijantom s.

Što znače te geodetske crte? U područjima, u kojima uz prikladan izbor sustava referencije nema gravitacije, očito su to pravci s obzirom na taj sustav. No ravne svjetske crte ili su prostorne prirode ($s^2 > 0$) ili vremenske ($s^2 < 0$) ili crte svjetlosti ($s = 0$). Uvedemo li drugi sustav Gaussovih koordinata, iste će svjetske crte sada biti krive, ali dakako ostaju geodetske crte.

Iz toga izlazi, da geodetske crte moraju predočivati baš one fizičke procese, koje u običnoj geometriji i mehanici predočuju geodetske crte: zrake svjetlosti i gibanja tromosti. Time smo našli traženu formulaciju za *poopćeni zakon tromosti*, koji obuhvaća u jednom izrazu pojave tromosti i gravitacije.

Geodetske crte mogu se lako računski naći, ako su poznati faktori metrike $g_{11}, \ldots, g_{34}$ relativno spram bilo kojeg Gaussovog koordinatnog sustava za svako mjesto mreže. Ako u nekom području nema gravitacionog polja relativno spram promatranog koordinatnog sustava, to je

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,\ g_{44} = -c^2 \\ g_{12} = g_{13} = g_{14} = g_{23} = g_{24} = g_{34} = 0, \tag{99}$$

jer se onda opći izraz udaljenosti (98) reducira na $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$. Odvajanja veličina g od tih vrijednosti znače dakle ono stanje, koje u običnoj mehanici zovemo gravitacionim poljem. Gibanja tromosti su onda nejednolika i zakrivljena, i obična mehanika smatra, da je tome uzrok Newtonova sila privlačenja. 10 veličina g ima dakle dvostruku funkciju: 1. one definiraju metriku, jedinice duljina i vremenâ; 2. one zamjenjuju gravitaciono polje obične mehanike. Kaže se: veličine g određuju *metričko ili gravitaciono polje.*

Einsteinova je teorija dakle vrlo čudesan spoj geometrije i fizike, sinteza zakona Pitagore i Newtona. Ona to postizava temeljitim čišćenjem pojmova prostora i vremena od svih dodataka subjektivnog zora, najpotpunijim objektiviranjem i relativiranjem, koje se može zamisliti. U tome je značenje nove nauke za umni razvitak čovječanstva.

No nova formulacija zakona tromosti samo je prvi korak teorije. Uveli smo veličine g pojmovno i upoznali smo u njima sredstvo, da matematički opišemo geometrijsko-mehaničko stanje svijeta relativno spram bilo kojeg Gaussovog koordinatnog sustava. Sada iskrsava pravi problem te teorije: naći zakone, po kojima se metričko polje (veličine g) može odrediti za svako mjesto prostorno-vremenskog kontinuuma relativno spram nekog Gaussovog koordinatnog sustava.

O tim zakonima znamo zasad ovo: 1. moraju biti invarijantni s obzirom na bilo kakvu promjenu Gaussovih koordinata; 2. moraju biti potpuno određeni razdiobom materijalnih tjelesa.

K tome dolazi još formalni uvjet, koji je Einstein preuzeo iz obične Newtonove teorije gravitacije. Predoči li se naime ta teorija kao pseudoteorija djelovanja nablizu pomoću diferencijalnih jednadžbi, onda su ove, kao svi zakoni polja u fizici, drugoga reda [28], pa će se zahtijevati, da novi zakoni gravitacije, koji su diferencijalne jednadžbe za veličine g, budu također najviše drugoga reda.

Einsteinu je uspjelo da iz tih zahtjeva izvede jednadžbe metričkog ili gravitacionog polja. H i l b e r t, K l e i n, W e i l i drugi matematičari sudjelovali su kod toga i duboko su istražili i osvijetlili strukturu Einsteinovih formula. Ne možemo ovdje saopćiti te zakone i njihov izvod, jer to nije moguće bez primjene više matematike. Moramo se zadovoljiti nekim napomenama.

Znamo iz teorije ploha, da je zakrivljenost invarijanta spram bilo kojih izmjena Gaussovih koordinata. Ta se invarijanta može odrediti mjerenjima u samoj plohi. Čitalac neka se sjeti šesterokuta užeta. Na sasvim analogan način mogu se za četverodimenzionalni svijet naći invarijante, koje su izravno poopćenje invarijante zakrivljenosti teorije ploha. Možemo to zamisliti ovako: iz točke P četverodimenzionalnog svijeta neka izlaze sve one geodetske svjetske crte, koje diraju neku plohu kroz točku P. Te geodetske crte same ispunjavaju neku plohu, koju bismo mogli nazvati geodetskom plohom. Stavimo li u nju šesterokut, kojemu stranice i polumjeri imaju istu četverodimenzionalnu duljinu, šesterokut se općenito ne će zatvarati. Geodetska ploha je dakle zakrivljena. Orijentiramo li geodetsku plohu kroz točku P drukčije u četverodimenzionalnom prostoru, zakrivljenost se mijenja. Sveukupnost zakrivljenosti svih geodetskih ploha kroz jednu točku daje određen broj neovisnih invarijanta. Ako su ove nula, geodetske su plohe ravne, četverodimenzionalni prostor je euklidski. Odvajanja invarijanta od nule određuju dakle gravitaciona polja i moraju ovisiti o razdiobi materijalnih tjelesa. No prema specijalnoj teoriji relativnosti [VI, 8, formula (94)] masa tijela jednaka je energiji, podijeljenoj kvadratom brzine svjetlosti. Razdioba materije određena je dakle izvjesnim invarijantama energije i impulsa. Za njih treba staviti, da su proporcionalne invarijantama zakrivljenosti. Faktor proporcionalnosti odgovara konstanti gravitacije (III, 3) Newtonove teorije. Tako dobivene formule jednadžbe su metričkoga polja. Ako je zadana prostorno-vremenska razdioba energije i impulsa, mogu se iz toga izračunati veličine g, a ove opet određuju gibanje materijalnih tjelesa i razdiobu njihove energije. Sve je to vrlo zamršen sustav diferencijalnih jednadžbi. No kao protutežu toj matematičkoj komplikaciji vidimo golemi pojmovni napredak, koji se sastoji u njihovoj općoj invarijanciji. Ona je izraz potpune relativnosti svih procesa. Apsolutni prostor definitivno je nestao iz zakona fizike.

Moramo ovdje još spomenuti jedan način označivanja, koji obično sablažnjava nematematičare. Običaj je označiti kao *mjeru zakrivljenosti* one invarijante trodimenzionalnog prostora ili četverodimenzionalnoga svijeta, koje su analogne zakrivljenosti ploha. O prostorno-vremenskim područjima, gdje je ta mjera zakrivljenosti različita od nule, kaže se, da su »zakrivljena«. Protiv toga se obično buni duh neukih: »Da je nešto zakrivljeno *u prostoru*, to mogu zamisliti, ali da je *prostor* zakrivljen, ta to je zaista nesmisao!« Pa nitko ni ne traži, da to netko sebi predoči. Možemo li sebi predočiti nevidljivo svijetlo ili nečujne zvukove? Priznamo li se, da nas tu osjetila izdaju i da metode fizike sežu dalje, onda treba odlučiti, da se isto prizna i za nauku o prostoru i vremenu. Jer zor vidi samo ono, što nastaje kao duševni proces skupnim djelovanjem fizičkih, fizioloških i psihičkih procesa i što je time stvarno dano. Fizika ne niječe, da se ovo stvarno dano sigurno može interpretirati velikom točnošću po klasičnim zakonima Euklida. Odvajanja, koja proriče Einsteinova teorija, tako su sićušna, da ih može razotkriti samo izvanredna točnost mjerenja današnje fizike i astronomije. No ona ipak postoje, i ako zbroj iskustava dovodi do rezultata, da je prostorno-vremenski kontinuum neeuklidski ili »zakrivljen«, onda zor mora uzmaknuti pred sudom spoznaje.

9. Mehaničke posljedice i potvrde

Prva je zadaća nove fizike da pokaže, da su klasična mehanika i fizika vrlo približno ispravne. Inače se ne bi moglo shvatiti, da su se njome mogla zadovoljiti neumorna i pomna istraživanja dvaju stoljeća.

Slijedeći je problem onda pronaći odvajanja, koja su karakteristična za novu teoriju i mogu služiti, da se ona provjeri iskustvom.

Zašto je klasična mehanika dovoljna za prikazivanje svih zemaljskih i gotovo svih kozmičkih pojava gibanja? Što nadomještava pojmove apsolutnog prostora i apsolutnog vremena, bez kojih se po Newtonovim principima ne mogu objasniti ni najjednostavnije činjenice, kao Foucaultovo njihalo, sile tromosti i centrifugalne sile i t. d.?

Mi smo na ta pitanja zapravo već odgovorili na početku razmatranja o općem principu relativnosti. Tamo smo (VII, 1) kao temelj relativističke dinamike postavili stavak, da apsolutni prostor kao fiktivni uzrok fizičkih pojava treba da nadomjeste udaljene mase kao stvarni uzroci: Kozmos kao cjelina, mnoštvo zvijezda, proizvodi na svakom mjestu i u svako vrijeme određeno metričko ili gravitaciono polje. Kakvo je ono u velikom, može nas učiti samo spekulacija kozmološke vrsti, kakovu ćemo kasnije upoznati (VII, 11). U malom mora kraj prikladnog izbora sustava referencije metričko polje biti »euklidsko«, t. j. staze tromosti i zrake svjetlosti moraju biti ravne svjetske crte. Spram kozmosa čak su dimenzije našeg planetnog sustava malene, zato s obzirom na prikladan koordinatni sustav u njemu vrijede Newtonovi zakoni, ukoliko Sunce ili planetne mase ne izazovu lokalne perturbacije, koje odgovaraju privlačenju Newtonove teorije. Astronomija nas uči, da takav sustav referencije, u kojem djelovanje zvijezda stajačica daje području našega planetnog sustava euklidsku metriku, baš relativno miruje (ili se jednoliko i pravocrtno giba) spram sveukupnosti kozmičkih masa, da su dakle gibanja zvijezda stajačica spram toga sustava relativno malena, i da se u prosjeku ukidaju. *Objašnjenje* te astronomske činjenice može se dati samo primjenom novih dinamičkih principa na cijeli kozmos, čime ćemo se pozabaviti u zadnjem odlomku. Ovdje se ponajprije radi o mehanici i fizici u planetnom sustavu. Onda sva nauka Newtonove mehanike ostaje gotovo nepromijenjena. Treba samo uvijek misliti na to, da ravnina njihanja Foucaultova njihala ne miruje spram apsolutnog prostora, nego spram sustava udaljenih masa, da se centrifugalne sile ne pojavljuju kod apsolutnih rotacija, nego kod rotacija spram udaljenih masa. Osim toga je dakako dopušteno primijeniti zakone fizike ne na uobičajeni koordinatni sustav, u kojemu je metričko polje euklidsko i gdje nema polja gravitacije u običnom smislu (osim lokalnih polja planetnih masa), nego na sustav, koji se bilo kako giba (ili čak u sebi deformira). Samo se u tom slučaju odmah pojavljuju gravitaciona polja i geometrija gubi svoj euklidski karakter. Opći oblik svih prirodnih zakona uvijek ostaje isti, a samo su vrijednosti veličina $g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{34}$, koje određuju metričko ili gravitaciono polje, u svakom sustavu referencije drukčije. Jedino u toj invarijanciji zakona postoji razlika spram stare dinamike. I tamo smo dakako mogli prijeći na sustave referencije s bilo kakvim gibanjem (ili deformacijama), ali prirodni zakoni pri tom nisu sačuvali svoj oblik. Postojao je »najjednostavniji« oblik tih zakona, koji se očitovao u nekim koordinatnim sustavima, koji miruju spram apsolutnog prostora. U općoj teoriji relativnosti nema takvih najjednostavnijih, istaknutih oblika zakona. Jedino mogu numeričke vrijednosti veličina $g_{11}, \ldots, g_{34}$, koje se javljaju u svim prirodnim zakonima, biti osobito jednostavne u ograničenim dijelovima prostora, ili se malo razlikovati od takvih jednostavnih vrijednosti. Tako astronomija postavlja svoje formule s obzirom na sustav referencije, koji bi u malom prostoru planetnoga sustava bio euklidski, da nema Sunca i planeta, gdje bi dakle veličine $g_{11}, \ldots, g_{34}$ imale jednostavne vrijednosti (99). Uistinu te veličine $g_{11}, \ldots, g_{34}$ i nemaju tih vrijednosti, nego se od njih razlikuju u blizini planetnih masa, kako ćemo kasnije pobliže razložiti. Bilo koji drugi sustav referencije (na pr. sustav u rotaciji), u kojem veličine $g_{11}, \ldots, g_{34}$ ni bez planetnih masa nemaju jednostavne vrijednosti (99), načelno je dakle prvome sasvim ravnopravan. Time se stavlja na volju povratak Ptolomejevu stajalištu »nepomične Zemlje«. To bi značilo, da se upotrebljava sustav referencije, koji je čvrsto spojen sa Zemljom, pri čemu veličine $g_{11}, \ldots, g_{34}$ dobivaju one vrijednosti, koje odgovaraju centrifugalnom polju rotacije spram udaljenih masa. S Einsteinovog visokog gledišta imaju Ptolomej i Kopernik *isto* pravo: oba gledišta daju *iste* prirodne zakone, samo s različitim numeričkim vrijednostima veličina $g_{11}, \ldots, g_{34}$. Koje će se gledište odabrati, ne da se odlučiti na temelju principa, nego je pitanje udobnosti. Istina je, za mehaniku planetnog sustava shvaćanje je Kopernikovo udobnije. No besmisleno je smatrati »fiktivnim« gravitaciona polja, koja se javljaju kod drugog izbora sustava referencije, u suprotnosti s »pravim« poljima, koja su proizvedena od blizih masa. To je isto tako besmisleno, kao u specijalnoj teoriji relativnosti pitanje o »stvarnoj« duljini štapa (VI, 5). Gravitaciono polje nije u sebi ni »realno« ni »fiktivno«, ono uopće nema značenja, koje bi bilo neovisno od izbora koordinata, kao ni duljina štapa. A polja se ne razlikuju ni time, da su jedna proizvedena od mase, a druga nisu. Samo su to u prvom slučaju poglavito bliske mase, u drugom jedino udaljene mase kozmosa.

Protiv te nauke izneseni su argumenti »zdravog razuma«, među ostalim i ovo: kada željeznički vlak naiđe na zapreku i time se u vlaku sve razbije, može se taj proces opisati na dva načina. Može se odabrati Zemlja (koja se ovdje smatra nepomičnom spram kozmičkih masa) kao sustav referencije, i (negativno) ubrzanje vlaka smatrati odgovornim za razaranje. No može se odabrati i koordinatni sustav čvrsto spojen s vlakom. Onda se u trenutku sukoba cijeli svijet trgne relativno spram toga sustava i nastane svagdje vrlo jako gravitaciono polje, koje je paralelno prvotnom gibanju i proizvodi razaranja u vlaku. Zašto se onda ne sruši i toranj crkve u susjednom selu? Zašto se posljedice trzaja i time skopčanog gravitacionog polja očituju jednostrano samo u vlaku, kada treba da su ravnopravne tvrdnje: svijet je na miru, a vlak se zaustavio — vlak je miran, a svijet se zaustavio? Odgovor je ovaj: toranj se ne ruši, jer se kod kočenja njegov relativni položaj spram udaljenih kozmičkih masa uopće ne mijenja. Trzaj, koji gledan sa vlaka, obuhvaća cijeli svijet, odnosi se jednako na sva tjelesa do najudaljenijih zvijezda uključivo tornja, sva ta tjelesa padaju slobodno u gravitacionom polju

koje nastaje za vrijeme kočenja, izuzevši vlak, koji sile kočenja priječe u slobodnom padanju. Tjelesa, koja slobodno padaju, vladaju se s obzirom na *unutarnje* pojave (kao što je ravnoteža tornja na Zemlji) isto kao tjelesa, koja slobodno lebde bez ikakvih vanjskih utjecaja. Ne nastaju dakle nikakva poremećenja ravnoteže i toranj se ne ruši. Vlaku se naprotiv priječi slobodno padanje. Time nastaju sile i naponi, a time i razorne posljedice [29].

Kod tih teških pitanja uopće je nezgodno pozivati se na »zdravi razum«. Ima pristaša teorije supstancijalnog etera, koji se brane od teorije relativnosti, jer im nije dovoljno zorna, slikovita. Mnogi su od njih konačno priznali specijalni princip relativnosti, pošto su se pokusi nedvoumno svršili u njegovu korist. No još se opiru principu opće relativnosti, jer da se protivi njihovu zdravom razumu. Njih je Einstein poučio ovako: po specijalnoj teoriji relativnosti vlak, koji jednoliko vozi, sigurno je sustav referencije ravnopravan sa Zemljom. Da li će to priznati zdravi razum vlakovođe? On će prigovoriti, da on ne mora neprestano ložiti i podmazivati »kraj« nego lokomotivu, i da se prema tome u njezinu gibanju mora pokazati djelovanje njegova rada. Takva primjena zdravog razuma konačno dovodi do negacije svakog znanstvenog promatranja. Jer čemu služi, tako će pitati zdravi razum običnog čovjeka, baviti se relativnošću ili katodnim zrakama, kad taj posao očito nije prikladan, da se njime zaradi novaca?

Nastavljamo sada razmatranje o nebeskoj mehanici s gledišta Einsteinova i prelazimo na lokalna gravitaciona polja, koja se zbog planetnih masa superponiraju kozmičkom polju. O tim istraživanjima Einsteinovim možemo samo kratko referirati, jer su to u glavnom matematički zaključci iz jednadžbi polja.

Najjednostavniji je problem određivanje gibanja planeta oko Sunca. Kod toga je najbolje poći od spomenutoga Gaussova koordinatnog sustava, u kojem je u području Sunčanog sustava, bez Sunca i planeta, metričko polje euklidsko i nema gravitacionoga polja u običnom smislu. Taj je sustav karakteriziran time, da bi bez djelovanja Sunca veličine $g_{11}, \ldots, g_{34}$ imale vrijednosti (99). Treba sada ustanoviti odvajanja od tih vrijednosti, koja nastaju zbog Sunčane mase. U tu svrhu služe Einsteinove jednadžbe polja, koje pokazuju, da iz njih izlaze sasvim određeni, relativno jednostavni izrazi za veličine $g_{11}, \ldots, g_{34}$, ako se pretpostavi kuglina simetrija za razdiobu Sunčane mase, a time i za polje. Zatim se mogu stazbe planeta računati kao geodetske crte te metrike. Zakrivljenost tih staza, koja se u Newtonovoj teoriji smatra djelovanjem privlačenja, u Einsteinovoj se teoriji prikazuje kao posljedica zakrivljenosti prostorno-vremenskog svijeta, u kojem su one najravnije crte.

Račun daje, da su ovako određene staze planeta vrlo približno iste kao u Newtonovoj teoriji. Taj je rezultat čudesan, kad uočimo sasvim različita gledišta obih nauka: kod Newtona apsolutni prostor, koji nas ne zadovoljava s gledišta teorije spoznaje, i ad hoc izmišljena sila otklona s čudnovatim svojstvom, da je razmjerna tromoj masi — kod

Einsteina opći princip bez specijalne hipoteze, koji zadovoljava zahtjeve spoznajne kritike. Da Einsteinova teorija nije postigla ništa drugo, nego da je Newtonovu mehaniku podvrgla općem principu relativnosti, ipak bi je izabrao svatko, koji u zakonima prirode traži harmoniju i najvišu jednostavnost.

No Einsteinova teorija daje više. Kako smo rekli, ona sadržava Newtonove zakone planetnih staza samo približno. Egzaktni su zakoni nešto drukčiji, i razlika je to veća, što je planet bliži Suncu. Već smo vidjeli kod razmatranja o Newtonovoj nebeskoj mehanici (III, 4), da je ona zatajila baš kod planeta Merkura, koji je Suncu najbliži. Preostaje neobjašnjeno *gibanje Merkurova perihela* od 43 lučne sekunde u stoljeću, a upravo taj iznos traži Einsteinova teorija. Ona je dakle već unaprijed potvrđena Leverrierovim računima. Taj rezultat ima veliku važnost. Jer u Einsteinovoj formuli nema novih, samovoljno odabranih konstanta. »Anomalija« Merkurova isto je tako nužna posljedica teorije kao ispravnost Keplerovih zakona za udaljene planete.

10. Optičke posljedice i potvrde

Osim ovih astronomskih posljedica nađeno je dosad samo nekoliko optičkih pojava, koji ne izmiču opažanju zbog svoje sićušnosti.

Jedan je takav pojav *pomak spektralnih crta prema crvenom*, što ga pokazuje svijetlo zvijezda velike mase. Na površini tih zvijezda postoji vrlo jako gravitaciono polje, koje mijenja metriku i čini, da sat tamo ide polaganije nego na Zemlji, gdje je gravitaciono polje manje. Takvim satovima možemo smatrati atome i molekule plinova, koji svijetle. Mehanizam titranja sigurno je isti, ma gdje se molekula nalazila, trajanje titraja je dakle jednako u takvim sustavima referencije, u kojima je isto gravitaciono polje, na pr. polje nula [30].

Neka je T trajanje titraja u području prostora, gdje nema polja. Onda je $s = icT$ pripadna invarijantna udaljenost svjetskih točaka, koje odgovaraju dvjema uzastopnim obratištima titraja, relativno spram sustava referencije, u kojem atom miruje. U relativno ubrzanom koordinatnom sustavu, u kojem postoji gravitaciono polje, isti $s = icT$ dan je formulom (98), gdje x, y, z označuju položaj atoma, a t je trajanje titraja mjereno u tom sustavu. Možemo staviti $x = y = z = 0$ uzevši atom kao nultočku prostornih koordinata. Onda će biti

$$s^2 = -c^2T^2 = g_{44}t^2,$$

dakle

$$t = T\frac{c}{\sqrt{-g_{44}}}.$$

No samo je u prostoru bez polja $g_{44} = -c^2$ [v. formula (99)], dakle $t = T$. U gravitacionom polju bit će g_{44} različito od $-c^2$, na pr. $g_{44} = -c^2(1-\gamma)$. Trajanje titraja je dakle promijenjeno i iznosi

$$T = t\frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}$$

ili, ako je odvajanje γ maleno,

$$t = T\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right). \tag{100}$$

To je razlika u hodu dvaju satova, koji se nalaze na različitim mjestima, za koja razlika gravitacionih polja, mjerenih veličinom g_{44}, ima relativni iznos γ [30].

Da li je γ pozitivan ili negativan, može se odlučiti promatranjem jednostavnog slučaja, u kojemu se na to pitanje može odgovoriti izravno pomoću principa ekvivalencije. To uspijeva za konstantno gravitaciono polje, kakvo je neposredno na površini nekog nebeskog tijela. Djelovanje takvog polja g može se nadomjestiti ubrzanjem opažača protivnog smjera i iste veličine g. Ako je l udaljenost opažača od površine zvijezde, val svijetla, koji od nje dolazi, trebat će do opažača vrijeme $t = \frac{l}{c}$, i ovaj će taj val opažati tako, kao da za to vrijeme izvodi ubrzano gibanje prema vani s ubrzanjem g. Kad ga val stigne, on bi onda imao brzinu $v = gt = \frac{gl}{c}$ u smjeru širenja svijetla, stoga opaža po Dopplerovu principu [formula (40)] smanjeni broj titraja [31]

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu\left(1 - \frac{gl}{c^2}\right).$$

Relacija između trajanja titraja $t = \frac{1}{\nu'}$, opažanoga u gravitacionom polju, i trajanja tiraja $T = \frac{1}{\nu}$ u prostoru bez polja glasi dakle

$$t = T\frac{1}{1 - \frac{gl}{c^2}}$$

ili približno

$$t = T\left(1 + \frac{gl}{c^2}\right). \tag{101}$$

Ova formula daje općenito razliku hoda dvaju satova, koji se nalaze u konstantnom gravitacionom polju g u udaljenosti l.

Veličina $\gamma = \frac{2gl}{c^2}$, koja se javlja u formuli (100), pozitivna je dakle u konstantnom gravitacionom polju. Trajanje titraja, dakle i duljina vala, povećava se za val svjetlosti, koji putuje protiv privlačenja gravitacionog polja. Ovaj se rezultat može prenijeti na svjetlost, koja dolazi od zvijezda. Veličina γ bit će pozitivna. Stoga su sve spektralne crte zvijezda nešto pomaknute prema crvenom. Premda je taj efekt vrlo malen, danas je njegovo postojanje i za Sunce i za zvijezde stajačice vrlo vjerojatno [32].

Na ovom mjestu možemo ispuniti prazninu, koju smo ostavili prije (VI, 5), naime puno razjašnjenje t. zv. »paradoksa satova«. Pretpostavili smo tamo dva opažača A i B, od kojih A miruje u inercijalnom sustavu (specijalne teorije relativnosti), dok B putuje. Kad se B vrati, njegov sat prema (76) zaostaje spram sata opažača A za iznos $\frac{\beta^2}{2} t_0$, gdje je t_0 ukupno vrijeme putovanja, mjereno u sustavu A. Ova formula doduše vrijedi samo približno, ali je dovoljna za našu svrhu, jer i sve druge račune provodimo u istom približenju.

Može se i za B smatrati, da miruje. Onda A putuje u obrnutom smjeru. No ne može se dakako jednostavno zaključiti, da sat od A mora za isti iznos zaostajati za satom od B, jer B ne miruje u inercijalnom sustavu, nego je podvrgnut ubrzanjima.

S gledišta opće teorije relativnosti treba na to paziti, da se za vrijeme ubrzanja, kod promjene sustava referencije, moraju uvesti neka gravitaciona polja.

Kod prvoga načina promatranja A se nalazi u području prostora, gdje je metrika euklidska i nema gravitacionih polja. Kod drugoga načina promatranja B miruje u sustavu referencije, u kojemu se kod odlaska, okretanja i dolaska od A javljaju kratkotrajna gravitaciona polja, u kojima A slobodno pada, dok je B zadržan vanjskim silama. Od tih gravitacionih polja prvo i posljednje nemaju utjecaja na relativni hod satova od A i B, jer se ovi u trenutku polaska i povratka nalaze na istom mjestu, a razlika hoda u gravitacionom polju nastaje prema (101) samo uz udaljenost l satova. No kod okretanja opažača A nastaje razlika hoda. Neka je τ trajanje okretanja. Smatramo li, da B miruje, onda za to vrijeme postoji gravitaciono polje, i sat od A, koja se nalazi u udaljenosti l u polju g, napreduje prema satu od B, i to prema (101) dovoljnim približenjem za $\frac{gl}{c^2}\tau$. No u vremenima jednolikog gibanja opažača A, kada treba primijeniti specijalni princip relativnosti, obrnuto će sat od A zaostajati za $\frac{\beta^2}{2} t_0$ prema satu od B. Kod povratka pokazuje dakle sat od A prema satu od B ukupni napredak od

$$\frac{gl}{c^2}\tau - \frac{\beta^2}{2} t_0.$$

Tvrdimo, da se taj rezultat točno slaže s rezultatom prvog načina promatranja, gdje smo smatrali, da A miruje, t. j. da je to jednako $\frac{\beta^2}{2} t_0$.

Opažač, koji se giba, prelazi kod okretanja od brzine v na brzinu $-v$. Njegova je promjena brzine dakle svega $2v$. Ubrzanje se dobije diobom vremenom τ, dakle je $g = \frac{2v}{\tau}$. U drugu je ruku u trenutku okretanja prošla polovica trajanja putovanja t_0. Udaljenost opažača je dakle $l = v\frac{t_0}{2}$.

Iz toga izlazi $gl = v^2 \frac{t_0}{\tau}$ i

$$\frac{gl}{c^2}\tau - \frac{\beta^2}{2} t_0 = \frac{v^2}{c^2} t_0 - \frac{\beta^2}{2} t_0 = \frac{\beta^2}{2} t_0,$$

čime je dokaz proveden.

Paradoks satova osniva se dakle na krivoj primjeni specijalne teorije relativnosti, gdje zapravo treba primijeniti opću.

Slična je pogreška u drugom prigovoru, koji se uvijek iznova iznosi, kako od trivijalno bilo objašnjenje. Po općoj teoriji relativnosti treba da je koordinatni sustav, koji je čvrsto spojen sa Zemljom, potpuno ravnopravan sa sustavom, koji miruje spram zvijezda stajačica. No u takvu sustavu zvijezde stajačice imat će goleme brzine. Ako je r udaljenost zvijezde, njegova će brzina biti $v = \frac{2\pi r}{T}$, gdje je T trajanje jednog dana. Ta je brzina jednaka brzini svjetlosti, kad je $r = \frac{cT}{2\pi}$. Mjerimo li r pomoću astronomske jedinice duljine godine svjetlosti[1]), moramo to još podijeliti sa $c \cdot 365$, ako se stavi $T = 1$ dan. Čim je dakle udaljenost veća od $\frac{1}{2\pi \cdot 365}$ godina svijetlosti, brzina je veća od c. No već najbliže zvijezde stajačice udaljene su nekoliko godina svjetlosti od Sunca. U drugu ruku teorija relativnosti tvrdi (VI, 6), da brzina materijalnih tjelesa mora uvijek biti manja od svjetlosti. Ovdje se, čini se, pojavljuje protuslovlje. No to protuslovlje nastaje samo time, što je stavak $v < c$ ograničen na specijalnu teoriju relativnosti. U općoj teoriji relativnosti taj stavak dobiva ovu usku formulaciju: znamo, da se uvijek može odabrati takav sustav referencije, da u neposrednoj okolini bilo koje svjetske točke vrijedi svjetska geometrija Minkovskoga, da je dakle geometrija euklidska, gravitacionog polja nema, a veličine $g_{11}, \ldots, g_{44}$ imaju vrijednosti (99). S obzirom na taj sustav i u tom uskom prostoru brzina svjetlosti $c = 3.10^{10}$ cm/sek znači gornju granicu sve brzine.

Čim ti uvjeti nisu ispunjeni, čim dakle ima gravitacionih polja, može dakako svaka brzina, i materijalnih tjelesa i svjetlosti, dobiti svaku numeričku vrijednost. Jer crte svjetlosti u svijetu određene su sa $G = s^2 = 0$, dakle uz ograničenje na ravninu xt, sa

$$s^2 = g_{11}x^2 + 2g_{14}xt + g_{44}t^2 = 0.$$

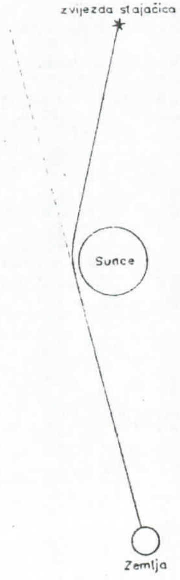
Iz ove kvadratne jednadžbe može se izračunati $\frac{x}{t}$, a to je brzina svjetlosti. Ako je primjerice $g_{14} = 0$, dobivamo iz $g_{11}x^2 + g_{44}t^2 = 0$ vrijednost $\frac{x}{t} = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{11}}}$ kao brzinu svjetlosti, koja sasvim ovisi o tome, koliki su baš g_{11} i g_{44}.

Uzmemo li Zemlju kao sustav referencije, postojat će centrifugalno polje (III, 9) $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$, koje u velikim daljinama ima goleme vrijednosti

[1]) Godina svjetlosti je udaljenost, koju prelazi svjetlost uz brzinu od 300 000 km po sek u jednoj godini (365 dana).

No i veličine g imaju vrijednosti, koje se znatno razlikuju od euklidskih vrijednosti (99). Brzina svjetlosti je stoga za neke smjerove zraka svjetlosti mnogo veća od njezine obične vrijednosti c, a i druga tjelesa mogu dostići mnogo veće brzine [33].

U bilo kakvu Gaussovu koordinatnom sustavu ne samo da se mijenja brzina svjetlosti, nego ni zrake svjetlosti ne će ostati pravci. Na toj zakrivljenosti zraka svjetlosti osniva se drugo optičko provjeravanje općeg principa relativnosti. Svjetske su crte svjetlosti geodetske crte, isto tako kao staze tromosti materijalnih tjelesa, i zakrivljuju se stoga u gravitacionim poljima. Samo je otklon svijetla mnogo manji zbog goleme brzine svjetlosti. Taj se otklon može uvidjeti bez svake teorije na temelju principa ekvivalencije. U ubrzanom sustavu referencije svako se pravocrtno, i jednoliko gibanje čini zakrivljeno i nejednoliko, pa stoga to mora vrijediti i za bilo kakvo gravitaciono polje.



Sl. 135.

Zraka svjetlosti, koja dolazi sa zvijezde stajačice i prolazi kraj Sunca, bit će od njega privučena i opisivat će stazu, koja je spram Sunca nešto konkavna (sl. 135). Opažač na Zemlji stavlja položaj zvijezde u produženje zrake, koja ga pogađa, pa mu se čini, da je zvijezda otklonjena prema vani. Taj bi se otklon mogao računati po Newtonovoj teoriji atrakcije, ako se staza zrake svjetlosti odredi kao da je to komet, koji je dojurio brzinom svjetlosti. Historijski je zanimljivo, da je to razmatranje proveo već god. 1801 njemački matematičar i geodet S o l d n e r. Dobiva se slična formula kao Einsteinova, ali ona daje samo polovicu iznosa otklona. Tomu je razlog pojačanje gravitacionog polja u blizini Sunca, koje zahtijeva Einsteinova teorija [34]. Baš ta prividno sitna razlika, koja je uostalom i samom Einsteinu izmakla kod njegove prve publikacije o tome, daje dakle osobito oštar kriterij za ispravnost opće teorije relativnosti.

Otklon prividnih položaja zvijezda stajačica u blizini Sunca može se opažati samo za vrijeme kratkog trajanja potpune pomrčine Sunca, jer inače Sunčano zračenje zasjenjuje zvijezde stajačice u blizini.

Za pomrčinu Sunca 29. svibnja 1919. Englezi su opremili dvije ekspedicije, koje su imale jedinu zadaću, da ustanove, postoji li »Einsteinov efekt« ili ne postoji. Jedna je pošla na zapadnu obalu Afrike, druga u sjevernu Braziliju i donijele su niz fotografskih snimaka zvijezda stajačica, koje okružuju Sunce. Rezultat izmjere fotografskih ploča proglašen je 6. studenog 1919. i značio je triumf Einsteinove teorije. Pronađen je pomak u punom iznosu od 1,7 lučnih sekunda, kako ga je prorekao Einstein [32]. Od toga najvećeg uspjeha modernog proricanja Einsteinova nauka može se smatrati osiguranom tekovinom znanosti.

Ne može se sa sigurnošću odgovoriti na pitanje, da li će biti moguće pronaći još koje pojave, koji bi se dali opažati. No kako će vjerojatno umijeće opažanja kasnijih desetljeća i stoljeća biti isto tako snažnije od našega, kao što je naše spram eksperimentalnih mogućnosti Newtonova vremena, može se očekivati, da će se nova teorija sve uže priključiti iskustvu.

11. Makrokozmos i mikrokozmos

Vidjeli smo prije, da dosljedno shvaćanje sila tromosti kao uzajamnih djelovanja nužno dovodi do toga, da se teorija primijeni na cijeli kozmos. Radi se o tome, da shvatimo, zašto onaj sustav referencije, za koji u području Sunčanog sustava vrijedi euklidska metrika, baš mora biti u relativnom mirovanju (ili u gibanju translacije) spram sveukupnosti kozmičkih masa. Povrh toga nas uči opažanje dalekih zvjezdanih sustava, dvostrukih zvijezda, da i tamo vrijedi isto. Čini se prema tome, kao da metričko polje određeno sveukupnošću svih masa ima svagdje isti karakter, ukoliko nije lokalno poremećeno bliskim masama.

Spekulacije o svemiru oduvijek su bile omiljena tema onih, koji rado maštaju. No i znanstvena astronomija se bavila takvim problemima. U prvom se redu istraživalo pitanje, ima li konačan broj ili neizmjerno mnogo svemirskih tjelesa, pa se trebalo odlučiti za prvu mogućnost. Obrazloženje možemo ovdje samo natuknuti. Ukoliko ima neizmjerno mnogo zvijezda, koje su donekle jednoliko razdijeljene u prostoru, moralo bi čitavo nebo sjati žarkim svijetlom, jer bi u bilo kojem smjeru morala negdje postojati zvijezda, osim ako se svjetlost na svom putu od zvijezde do nas slabi, apsorbira. No ima dobrih razloga držati, da nema takve apsorpcije svjetlosti u svemiru. Mora se stoga sveukupnost svih zvijezda zamisliti kao velika gomila, koja prema vani ili najednom prestaje ili se barem postepeno razređuje.

No ta predodžba dovodi do velike teškoće, ako se polazi s Newtonove mehanike. Zašto zvijezde ostaju na okupu? Zašto se ne izgube u prazninu? Znamo, da sve zvijezde imaju znatne brzine, no te su nepravilno razdijeljene na sve smjerove i ne opaža se, da bi se sve to skupa razilazilo. Odgovorit će se na to: međusobna gravitacija drži zvijezde na okupu. No taj je odgovor pogrešan. Odavna su poznate metode za istraživanje takvih problema. To su metode k i n e t i č k e t e o r i j e p l i n o v a. Svaki se plin sastoji od nebrojenih molekula, koje nepravilno lete jedne pored drugih, a poznati su zakoni tih gibanja. Jasno je, da se plin odmah razide, ako nije zatvoren među čvrste stijene. Iskustvo i teorija suglasno nas uče, da sustav tjelesa ne ostaje trajno na okupu ni onda, kada se tjelesa privlače silama, koje su po Newtonovu zakonu razmjerne kvadratu udaljenosti [35]. Sustav svih zvijezda morao bi se isto tako ponašati kao plin, i ne može se razumjeti, zašto ne pokazuje tendenciju, da se gubi u neizmjernost svemira.

Einstein je na to dao vrlo čudnovat odgovor: »Jer svijet uopće nije neizmjeran«. Pa gdje bi mu bile granice? Zar nije apsurdno pretpostaviti, da je svijet negdje »daskama okovan«? Stvar je u tome, da ograničeno i konačno nipošto nije isto. Treba samo pomisliti na površinu kugle, koja je bez sumnje konačna, a ipak nema granica. Einstein tvrdi, da trodimenzionalni prostor ima isto svojstvo. On to smije, jer opća teorija relativnosti dopušta zakrivljenost prostora. Tako on dolazi do ove teorije o svemiru: ne gleda li se na nejednoliku razdiobu zvijezda i nadomjesti li se ona razdiobom mase, koja je svagdje jednolika, može se pitati, kada takva razdioba prema jednadžbama gravitacionog polja može trajno ostati na miru. Odgovor glasi: zakrivljenost trodimenzionalnog prostora mora svagdje imati konstantnu, pozitivnu vrijednost, točno kao na dvodimenzionalnoj kuglinoj plohi. Evidentno je, da će se na kuglinoj plohi konačan broj materijalnih točaka, koje se zbog svoje brzine razilaze, jednoliko razdijeliti i tvoriti neku vrst dinamičke ravnoteže. Točno isto imalo bi vrijediti za trodimenzionalnu razdiobu zvijezda. Einstein čak procjenjuje veličinu »zakrivljenosti svijeta« pomoću prihvatljive pretpostavke o ukupnoj masi svih zvijezda; no ona je na žalost tako sićušna[1]), da zasada nema nade za empirijsko provjeravanje ovih smionih misli.

Iz toga, što zakrivljenost svijeta ima svagdje istu vrijednost, izlazi, da metričko polje ima svagdje u svijetu isti karakter i da je euklidsko baš u onom sustavu referencije, u kojem miruje sveukupnost svih masa (ili se spram njega pravocrtno jednoliko giba). Ovaj stavak sadrži jezgru činjenica, koje je Newton htio prikazati svojom naukom o apsolutnom prostoru.

Razumije se, da je beznadan svaki pokušaj, da sebi *predočimo* takav konačan, ali neograničen »sferan« svijet. To je isto tako nemoguće, kao što ne možemo predodžbom obuhvatiti lokalne zakrivljenosti svijeta u blizini masa. Ipak ta teorija ima vrlo konkretnih posljedica. Zamislimo, da je dalekozor zvjezdarnice u Babelsbergu upravljen na neku izvjesnu zvijezdu stajačicu. U isto doba neka je kod antipoda, dakle recimo u Sidneyu u Australiji, neki dalekozor upravljen točno na suprotno mjesto neba. Po Einsteinovoj kozmologiji može se onda zamisliti, da opažači u oba dalekozora vide jednu te istu zvijezdu, koja se, recimo, može prepoznati po svojem karakterističnom spektru! Zaista, isto tako, kao što može netko započeti putovanje oko Zemlje prema istoku ili prema zapadu i proći isti glavni krug u oba smjera, tako će zraka svjetlosti u Einsteinovu sfernom svijetu poći od zvijezde u oba smjera po geodetskoj crti i moći će pogoditi Zemlju u dva suprotna smjera [37].

Ovakva razmatranja možemo danas još smatrati izrodom divlje mašte. Tko zna, ne će li za nekoliko stoljeća profinjenim umijećem opažanja postati empirijske činjenice? Bila bi drska smionost osporiti tu mogućnost. Već danas ima ozbiljnih astronoma, koji *Einsteinovu*

---

[1]) Po jednoj procjeni de S i t t e r o v o j »opseg svijeta«, t. j. duljina geodetske crte, koja se vraća u samu sebe, iznosi po pr. 100 milijuna godina svjetlosti [36].

nauku o makrokozmosu uzimaju kao osnov svojih egzaktnih istraživanja o razdiobi zvijezda stajačica.

No Einsteinove misli zahvaćaju i u *mikrokozmos, u svijet atoma.* Već smo prije (V, 15) dodirnuli pitanje o čudnovatim silama, koje sprečavaju, da se razleti elektron ili atom. No te su čestice golema nagomilavanja energije na najmanjem prostoru. U njima će stoga biti silnih zakrivljenosti prostora ili, drugim riječima, gravitacionih polja. Blizu je pomisao, da ta polja drže na okupu električne naboje, koji se nastoje razići [38]. No ta je teorija tek u svojim počecima i sasvim je nesigurno, da li će imati uspjeha. Znamo iz mnogih iskustava, da u atomističkom svijetu vrijede novi zakoni drukčije prirode, u kojima se očituje izvjesna harmonija cijelih brojeva, koju još nepotpuno shvaćamo: P l a n c k o v a *teorija kvanta* (1900). Ovdje će buduća istraživanja kazati svoju riječ [12].

12. Zaključak

Poznajemo sada, ma i u grubim crtama, Einsteinovu nauku o prostoru i vremenu. Slijedili smo njezin postanak iz fizičkih teorija njegovih predšasnika i opazili smo, da jasno vidljiv proces objektiviranja i relativiranja vodi zamršenim putovima istraživanja do visine apstrakcije, koja se danas očituje u temeljnim pojmovima egzaktnih prirodnih znanosti. Snaga nove nauke osniva se na tome, što potječe izravno iz iskustva. Ona je kćerka pokusa i sama je dala nove pokuse, koji za nju svjedoče. No što je izdiže iznad uskog područja specijalnih istraživanja, to je veličina, smionost i izravnost misli. Einsteinova teorija predstavlja smjer mišljenja, kojemu je ideal zdrava izjednačenost slobodnog stvaranja mašte, kritičke logike i strpljivog prilagođivanja činjenicama. Ona nije nazor o svijetu, ako s v i j e t znači više nego prostorno-vremenska raznolikost Minkovskoga, ali ona v o d i do nazora o svijetu onoga, koji se s ljubavlju zadubi u njezine misli. Jer objektivno i relativno promatranje i izvan znanosti je dobitak; ono znači obaranje predrasuda, oslobađanje od propisa, kojima kritički sud relativista osporava apsolutnu vrijednost.

DODATAK

Napisao Danilo Blanuša

1. Eksperimentalne potvrde teorije relativnosti

O eksperimentalnim podacima, koji su doveli do specijalne teorije relativnosti, bila je riječ u samom tekstu. Danas se može reći, da je mnoštvo eksperimentalnog iskustva potvrdilo zasade te teorije u tolikom opsegu, da se više ne može pomisliti na povratak starom stanju. Ne bi bilo koristi od toga, da se ovdje nabrajaju svi ti pokusi, kojima se rezultat slaže sa specijalnom teorijom relativnosti, a ne slaže se s klasičnom mehanikom, optikom ili drugim predrelativističkim teorijama. O Michelsonovu pokusu, koji je najpoznatiji, nekoliko je podataka dano u bilješci [18]. O spektroskopskim potvrdama vidi u bilješci [22].

Drukčija je stvar u pogledu eksperimentalne potvrde opće teorije relativnosti. Još i danas su samo tri efekta dostupna točnosti opažanja: pomicanje Merkurova perihela, otklon zraka svjetlosti, koje prolaze kraj Sunca i pomak spektralnih crta svjetlosti emitirane na mjestima velikog potencijala gravitacije, napose na Suncu i na tamnijem pratiocu Siriusa.

Kako je izloženo u tekstu (III, 4), elipsa, koju bi neki planet trebao opisivati oko Sunca prema zakonima klasične mehanike, nešto se mijenja pod utjecajem privlačenja ostalih planeta, tako da se čitava eliptična staza vrlo polako okreće oko Sunca u svojoj vlastitoj ravnini. Kod planeta Merkura ovo zakretanje staze (ili zakretanje perihela, t. j. one točke staze, koja je najbliža Suncu) iznosi od prilike 570 lučnih sekunda u stoljeću u smjeru gibanja Merkura. Cijeli taj pomak, koji se ostvaruje tek kroz 100 godina, iznosi, gledano sa Sunca, tek nekih 30% promjera Sunca, kako ga vidimo sa Zemlje. No klasični račun daje manji pomak, a razlika iznosi oko 42 lučne sekunde u stoljeću. To dakle znači, da je računski pomak perihela otprilike za $\frac{1}{14}$ manji od stvarnoga. Ta razlika između stvarnoga i računskog pomaka, koja se pokazuje u 100 godina, iznosi dakle, gledano sa Sunca, otprilike $\frac{1}{46}$ Sunčeva promjera, kako ga vidimo sa Zemlje. Shvatljivo je, da se ovako sićušna razlika jedva može ustanoviti. Razni astronomi dobili su nešto različite vrijednosti za tu veličinu. Tako je Leverrier izračunao vrijednost od 38 lučnih sekunda na stoljeće, a kasnije su njegovi računi i pouzdanost podataka opažanja, na kojima se osnivaju, bili podvrgnuti vrlo opsežnoj i temeljitoj kritici. Spominjemo u tom pogledu imena Newcomb i Chazy. Vrijednost od 42 sekunde, koja je po tim razmatranjima najvjerojatnija, nesigurna je za otprilike $\frac{1}{10}$ svoje vrijednosti. Opća teorija relativnosti daje u nesmetanoj stazi Merkura za zakretanje perihela iznos od 42,9 sekunda u stoljeću, dok se korekture zbog utjecaja ostalih planeta mogu računati po klasičnim metodama, jer se relativistička korektura tih i onako sitnih vrijednosti nikako ne treba uzeti u račun. Vidi se iz svega toga, da je u granicama točnosti opažanja rezultat teorije relativnosti u skladu s astronomskim podacima.

Druga dva odvajanja klasične teorije gravitacije od astronomskih opažanja spomenute su u primjedbi [6]. Venerin čvor (t. j. točka, u kojoj njezina staza siječe ekliptiku, t. j. ravninu Zemljine staze) pomiče se za 10 lučnih sekunda u stoljeću manje prema natrag (t. j. obrnuto od gibanja same Venere) nego što bi klasični račun perturbacija zahtijevao. Ukupno pomicanje iznosi oko 1000 lučnih sekunda u stoljeću, tako da je razlika spram klasičnog računa $\frac{1}{100}$ čitavoga zakretanja. Ovaj se efekt smatra »vjerojatnim«, ali ga ni opća teorija relativnosti ne može objasniti. Treće je odvajanje u tome, što se perihel Marsov zakreće (u smjeru gibanja Marsa) za 8 lučnih sekunda u stoljeću više nego što zahtijeva klasični račun. Ukupno zakretanje iznosi od prilike 1600 sekunda. Ovdje se dakle radi o $\frac{1}{200}$ prave vrijednosti. Ovaj se efekt smatra »mogućim«. Opća teorija relativnosti zahtijeva doduše zakretanje Marsova perihela, ali samo za 1,35 lučnih sekunda, dakle samo jednu šestinu vrijednosti, koju daju opažanja. S obzirom na to, da je vrlo teško sa sigurnošću ustvrditi, da ti sitni efekti zaista postoje i da im nisu uzrok pogreške opažanja ili čak netočnosti računâ, koji su vrlo komplicirani, ne treba ovom neslaganju pridavati mnogo važnosti. O ovim pitanjima, kao i o različitim hipotezama, kojima se pokušalo tumačiti te efekte (usporedi primjedbu [7]), mogu se naći opširna kritička razlaganja u J. Chazy, La théorie de la relativité et la mécanique céleste, t. I, Paris 1928.

Otklon zraka svjetlosti, koje prolaze kraj Sunca, prema općoj teoriji relativnosti iznosi $\frac{1,74}{r}$ lučnih sekunda, gdje je r udaljenost prividnog položaja zvijezde od središta Sunca, mjerena u Sunčevim polumjerima. To znači, ako je $r = 1$, zvijezda se nalazi prividno baš na rubu Sunca i njezin je otklon najveći, naime jednak 1,74 lučnih sekunda, t. j. hiljadu stotom dijelu prividnog promjera Sunca. Za toliko se zvijezda mora prividno odmaknuti od središta Sunca. Ovako sićušan učinak izvanredno je teško provjeriti, ali su takva mjerenja vršena kod svake potpune pomrčine Sunca. Rezultati tih mjerenja nisu dovoljno točni, da bi se mogla ustvrditi ispravnost zakona, po kojemu je taj otklon obrnuto razmjeran s udaljenosti prividnog mjesta zvijezde od središta

Sunca, ali se ipak iz tih mjerenja razabira, da postoji takav učinak približno ispravne veličine. Može se dakle reći, da ta opažanja govore u prilog opće teorije relativnosti, ali se ne može tvrditi, da je striktno potvrđuju.

Osim u tekstu spomenute pomrčine god. 1919. još su različite ekspedicije opažale pomrčine god. 1922., 1929. i 1936. Zadnja potpuna pomrčina bila je 20. svibnja 1947. Dok se ovo piše, rezultati još nisu poznati. Evo datuma nekoliko budućih potpunih pomrčina: 1. XI. 1948., 12. IX. 1950., 26. II. 1952., 30. VI. 1954., 20. VI. 1955., 9. VI. 1956., 13. X. 1958., 2. X. 1959. **Treba imati na umu, da sve** pomrčine nisu jednako prikladne za opažanje Einsteinova učinka, ne samo s obzirom na atmosferske prilike u krajevima, gdje se pomrčina vidi, nego i s obzirom na broj jačih zvijezda, koje se u taj čas nalaze u neposrednoj blizini Sunčeve ploče. Do uključivo 1952. nema u tom smislu povoljnih izgleda.

Možda su stvari nešto povoljnije u pogledu pomaka spektralnih linija prema crvenom, koji treba da pokaže svjetlost emitirana u polju gravitacije velikog potencijala (usporedi primjedbu [30]). Efekt pomaka spektralnih linija svjetlosti Sunca otprilike je 10 puta veći od najmanjeg pomaka, koji bi se još dao ustanoviti, pa se stoga čini na prvi mah, da bi se taj učinak morao dati vrlo jasno ustanoviti. No i tu se javljaju znatne teškoće. U jednu ruku može pomak prema crvenom imati i druge razloge, napose odmicanje izvora svjetlosti od opažača (t. zv. Dopplerov učinak, vidi IV, 8). Taj učinak ovisi o rotaciji Sunca i o gibanju Zemlje te o mjestu vidljive Sunčeve ploče, s kojega je svjetlost došla i konačno o nepotpuno poznatim strujanjima užarenih plinova na Suncu. Osim toga položaj je pojedinih crta često iskrivljen superpozicijom drugih blizih crta. Dosada nije uspjelo besprijekorno odvojiti te različite utjecaje i ustanoviti točne razloge ustanovljenih numeričkih vrijednosti pomaka. Ipak se čini, da je tumačenje tih pomaka znatno olakšano, ako se uzme u račun i Einsteinov učinak pomaka zbog gravitacije.

Kod zvijezda velike mase također je vrlo teško odvojiti Dopplerov učinak od gravitacionoga, jer nema posebnih podataka o brzini gibanja pojedinih zvijezda. No ima ipak jedan slučaj, gdje se to može, a to su opažanja na dvojnim zvijezdama. Kruže li dvije zvijezde jedna oko druge, kao Sirius i njegov tamniji pratilac, i ima li jedna od njih na površini mnogo veći potencijal gravitacije nego druga, mora se u njihovim spektrima očitovati razlika. Dopplerov učinak zbog brzine cijeloga sustava tih dviju zvijezda očituje se jednako u oba spektra i stoga ne utječe na relativni pomak jednog spektra spram drugoga. Siriusov pratilac ide među tako zvane »bijele patuljke« t. j. zvijezde, koje su kraj znatne mase vrlo malene, dakle imaju vrlo veliku gustoću. Njihov je polumjer stoga relativno malen, a potencijal na površini velik (usporedi formulu (h) u primjedbi [30]). Masa Siriusova pratioca od prilike je 0,98 mase Sunca, a gustoća mu ima golemu vrijednost od 80 000 (to znači, da bi 1 cm³ tako stisnute tvari na Zemlji vagao 80 tona). Sunce naprotiv ima gustoću 1,42. Lako je iz tih podataka

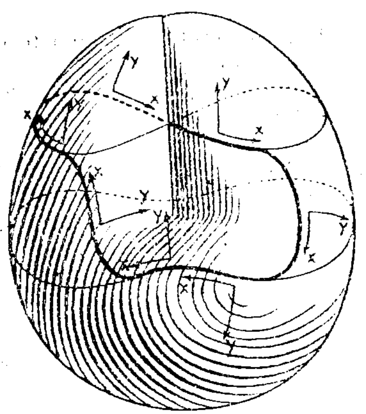
izračunati, da pomak mora biti od prilike 38 puta veći od pomaka, koji daje svjetlost Sunca. Teškoća mjerenja u ovom je slučaju u tome, što je prividna udaljenost Siriusa od njegova pratioca samo 10 lučnih sekunda, i stoga je vrlo teško razdvojiti spektar tamnijeg pratioca od spektra sjajnoga Siriusa, koji emitira 10 000 puta toliko svjetlosti kao njegov pratilac. Običaj je označiti pomak onom brzinom, koja odgovara Dopplerovu učinku iste veličine. Ta je brzina u ovom slučaju oko 23 km/sek. Mjerenja su dala iznos od 19 km/sek s nesigurnošću od 5 km/sek. Osim toga vrijednost od 23 km/sek nije sasvim pouzdana zbog nesigurnosti određivanja mase i gustoće Siriusova pratioca. Po nekim drugim podacima trebalo bi očekivati pomak, koji odgovara samo 20 km/sek. Može se stoga reći, da ova opažanja jasno potvrđuju očekivani Einsteinov učinak pomaka zbog gravitacije.

Kao zaključak može se ustanoviti, da se opća teorija relativnosti ne protivi eksperimentalnim podacima, i da neki od tih podataka pače govore jasno u prilog te teorije. Ipak opća teorija relativnosti ni izdaleka nije tako temeljito eksperimentalno provjerena kao specijalna teorija relativnosti.

2. Kozmološka pitanja

Već je u točki VII, 11 rečeno, da je Einstein (1917) postavio tezu zatvorenog prostora, koji je konačan, ali nema granica i tvori analogon kugline površine. Osim kuglina ili sfernog prostora matematički je moguć još t. zv. »eliptični« prostor. Pokušat ćemo bar donekle objasniti taj pojam. Usporedimo li geometriju u ravnini s geometrijom na kuglinoj površini, vidimo neke razlike. Geodetske su crte u ravnini pravci, na kugli su to glavni krugovi. Nazovimo te glavne krugove »pravcima« geometrije na kugli. Onda će trokut, koji tvore tri »pravca« na kugli biti sferni trokut, kojemu je zbroj kutova veći od 180°. Svaka dva »pravca« sijeku se u dvjema dijametralnim točkama kugle. Kroz takve dvije točke prolazi neizmjerno mnogo »pravaca«, naime svi glavni krugovi, kojima su te točke krajevi promjera. Da se geometrija na kugli približi geometriji u ravnini, može se izvesti ova logička apstrakcija: smatramo, da su dvije dijametralne točke »ista točka« ili, drukčije rečeno, »identificiramo« dijametralne točke. Sada kroz dvije »različite« točke prolazi jedan i samo jedan »pravac«, dok kroz »jednu« točku (dakle kroz dvije dijametralne točke, koje su identificirane) prolazi neizmjerno mnogo »pravaca«, isto tako, kao u običnoj geometriji u ravnini, koju zovemo »euklidskom« geometrijom. Ostaje razlika, da trokut ima zbroj kutova veći od 180°, dok je u euklidskoj geometriji taj zbroj jednak 180°. Osim toga svaka se dva »pravca« sijeku u »jednoj« točki, dok se u euklidskoj geometriji mogu dva pravca i ne sjeći, naime onda, kada su paralelna. Tako dobivenu geometriju zovemo »eliptičnom« geometrijom ili Riemannovom neeuklidskom geometrijom. (Od nje treba razlikovati opću Riemannovu geometriju u više dimenzija, koja ove specijalne geometrije sadržava kao poseban slučaj.) Postoji još jedna druga neeuklidska geometrija, t. zv. »hiperbolna« geometrija ili geometrija Lobačevskoga*). Razvio ju je u prvom redu Lobačevski, uz njega Bolyai, a znao je za nju i Gauss. U toj geometriji trokut ima zbroj kutova manji od 180°, a dva pravca ne samo da se mogu i ne sjeći, nego se kroz točku izvan pravca može povući neizmjerno mnogo pravaca, koji zadani pravac ne sijeku, dok u euklidskoj geometriji postoji samo jedan takav pravac, naime paralela kroz tu točku. Hiperbolna i eliptična geometrija zovu se zajedno neeuklidske geometrije. Objašnjenje naziva »hiperbolna« i »eliptična« ne možemo ovdje dati. Ograničimo li se na dio kugline površine, na kojoj nema dijametralnih točaka (ostanemo li dakle unutar jedne polukugle), to se geometrija na kugli ili sferna geometrija podudara s eliptičnom geometrijom. Tek kod promatranja cijele plohe očituju se tipične razlike između tih geometrija. Na kugli je »pravac« zatvorena krivulja konačne duljine $2\pi R$. U eliptičnoj geometriji već se krivulja zatvorila, kada dođemo do dijametralne točke, jer je smatramo identičnom s polaznom točkom. »Duljina« pravca ili »opseg« plohe bit će tu dakle samo polovica, t. j. πR.

Postavlja se pitanje, ne postoji li ploha, na kojoj vrijedi eliptična geometrija, a da »jedna« točka zaista bude samo jedna točka. Te plohe doduše nema u trodimenzionalnom prostoru, ali se ona u njemu može predočiti u deformiranom obliku, kao što bismo, recimo, kuglu mogli deformirati u oblik jajeta ili kobasice. Takva je ploha prikazana u sl. 136. Ona sama sebe prodire (i ne može se u trodimenzionalnom prostoru predočiti bez prodiranja), a ima to čudno svojstvo, da je »jednostrana«. To znači, da »vanjska« i nutarnja« strana plohe nisu bitno različite. Plosnata životinjica mogla bi plazeći po plohi doprijeti s vanjske strane na nutarnju, ne prodirući plohu, na kojoj plazi. Mora, istina, prodrijeti kroz stijenu, koja joj se isprijeci na putu, tamo gdje ploha sama sebe prodire. »Lijevi« koordinatni sustav, kojemu os x gleda na lijevo, a os y prema gore, pretvara se kod takvog putovanja u »desni« sustav, kojem prema slici os x gleda na lijevo, a os y prema dolje, a okretanjem se može dovesti u uobičajeni položaj, gdje os x gleda na desno, a os y prema gore. To svojstvo označujemo time, da kažemo: ploha se ne da »orijentirati«.



Sl. 136.

Proširimo li broj dimenzija na 3. dobijemo kao analogon kugle t. zv. kuglin ili sferni prostor, a kao analogon plohe, na kojoj vrijedi

*) Vidi M. Hercigonja: N. I. Lobačevskij. Zagreb, 1947. (Op. prev.)

eliptična geometrija, t. zv. eliptični prostor (koji nije analogon elipsoida; takav bi se prostor zvao elipsoidni prostor). Zanimljivo je, da se eliptični prostor dade orijentirati (što vrijedi općenito za eliptične prostore lihog [neparnog] broja dimenzija), ali i za nj vrijedi, da je »opseg« prostora ili duljina »pravca« samo polovica opsega kuglina prostora, a to isto vrijedi i za njegov trodimenzionalni volumen.

Einstein je doduše pretpostavio, da je svemir kuglin prostor, ali je isto tako moguće pretpostaviti, da je to eliptični prostor. Kuglin prostor bliži je shvaćanju nematematičara, jer je on analogon kugle, koja je pristupačna zornoj predodžbi, ali je eliptični prostor u mnogom pogledu matematički jednostavniji, pa stoga tu mogućnost svakako treba uzeti u obzir. I Einstein je priznavao mogućnost eliptičnoga prostora.

Da uopće dođe do rješenja zatvorenog prostora, Einstein je morao svoje jednadžbe gravitacionog polja (koje se u ovoj knjizi ne mogu raspraviti) nešto poopćiti dodavši im t. zv. kozmološki član, u kojemu se pojavljuje »kozmološka« konstanta λ. Ta je konstanta svakako vrlo malena i jednaka recipročnoj vrijednosti kvadrata »polumjera« toga kuglina prostora, t. j.

$$\lambda = \frac{1}{R^2}. \tag{1}$$

Srednja gustoća tvari μ u tom prostoru povezana je s polumjerom prostora R i s konstantom gravitacije k jednadžbom

$$\mu = \frac{c^2}{4\pi R^2 k}. \tag{2}$$

Einsteinov je prostor t. zv. statičko rješenje jednadžbi gravitacionog polja, t. j. takav prostor, u kojemu se veličine $g_{11}, \ldots, g_{44}$ s vremenom ne mijenjaju. No de Sitter je pokazao (1917), da postoji još jedno takvo rješenje, koje pretpostavlja, da je srednja gustoća mase nula. To bi dakle bio svijet »bez mase« ili barem s tako malo mase, da je možemo zanemariti. Svojstva takvog svijeta znatno se razlikuju od svojstava Einsteinova svijeta. Da ih bolje opišemo, objasnit ćemo najprije neke pojmove u vezi s kuglinim prostorom.

Označimo li na kuglinoj površini neku točku kao »pol« i promatramo koncentrične kružnice na plohi oko te točke, to će njihov opseg biti sve veći, dok ne dođemo do glavnog kruga, koji ćemo zvati ekvatorom, a pođemo li još dalje, opseg tih krugova opet će se smanjivati do nule. Analogno možemo u kuglinu prostoru svoje stajalište označiti kao pol, pa promatrati koncentrične kugle oko te točke. Njihova će površina biti sve veća, dok ne dođemo do jedne kugle, koja ima najveću površinu. Tu kuglu ćemo zvati »ekvatorom« kuglina prostora. Pođemo li još dalje, površina koncentričnih kugala opet će se smanjivati, dok se ne stegne u jednu točku, koja je nama dijametralna točka, dakle suprotni pol kuglina prostora.

U de Sitterovu prostoru imalo bi postojati centrifugalno gravitaciono polje, proporcionalno s udaljenošću od ishodišta upotrebljenog koordinatnog sustava (recimo od našeg Sunca), što bi značilo, da bi pojedine velike nebeske jedinice, kao spiralne maglice, morale biti postepeno ubrzane tako, da sve većom brzinom odmiču od nas. Osim toga u tom prostoru, koji je također kuglin prostor, kao Einsteinov, satovi idu sve polaganije, čim se nalaze dalje od nas, a u udaljenosti od četvrt opsega, t. j. na »ekvatoru«, satovi uopće stoje, tamo dakle s našeg stajališta vrijeme ne prolazi. Vidi se, da su to vrlo čudna svojstva, a napose je čudno, da postoji gravitaciono polje, premda je prostor »prazan«, t. j. nema masa u njemu. Doduše, H. W e y l je pokazao, da se mora pretpostaviti t. zv. »horizont mase«, t. j. izvjesna količina mase razdijeljena u zoni oko ekvatora kuglina prostora, ako se hoće ukloniti neobično ponašanje gravitacionog polja na ekvatoru, napose paradoksna tvrdnja, da tamo satovi stoje. Veličina g_{44}, koja u izvjesnom smislu odgovara Newtonovu potencijalu (vidi [30]), postala bi na ekvatoru nula. Preko ekvatora ne bi moglo doprijeti nijedno tijelo, jer bi čak svjetlost trebala neizmjerno dugo vrijeme, dok do njega dođe. Između konstante λ i polumjera R de Sitterova prostora vrijedi relacija

$$\lambda = \frac{3}{R^2}. \qquad (3)$$

Mišljenju, da u de Sitterovu prostoru mora postojati »horizont mase« priklanjao se i matematičar F. K l e i n. No K. L a n c z o s je pokazao (1922), da se prikladnom transformacijom prostorno-vremenskog koordinatnog sustava može postići, da gravitaciono polje u de Sitterovu prostoru nestane. Prostor je onda opet kuglin prostor, ali mu se polumjer vremenski mijenja, i to tako, da se najprije počevši od neizmjerno daleke prošlosti steže do nekog najmanjeg polumjera, koji je upravo jednak polumjeru prema prvotnom de Sitterovu shvaćanju, a zatim se rasteže neograničeno do neizmjerno daleke budućnosti. »Horizont mase« ovdje dakako ne treba pretpostaviti, pa se time pokazalo, da je samo specijalni kordinatni sustav, kojim se služio de Sitter, doveo do paradoksnih zaključaka. Ekvator de Sitterova prostora u Lanczosovu obliku više nije neprekoračiva granica, nego i svjetlost i materijalne čestice mogu doprijeti preko njega. Prostorno-vremenske točke s onu stranu ekvatora, do kojih se na taj način dolazi, bile bi prema prvotnom shvaćanju (dakle u de Sitterovu koordinatnom sustavu) »prije vječnosti« ili »poslije vječnosti«, prema tome, da li je svjetlost odanle došla k nama ili onamo otišla od nas. No ni ovdje ne može zraka svjetlosti obići čitav kuglin prostor i vratiti se u polaznu točku, kao što je to moguće u Einsteinovu prostoru. Ako je zraka svjetlosti pošla prije neizmjerno dugog vremena, dospjet će u neizmjernoj budućnosti do dijametralne točke, dakle do »drugog pola«. Što je kasnije pošla, to je manji njezin doseg. Ova nemogućnost vraćanja s druge strane nije ovisna o izboru koordinatnog sustava, kako se može pokazati. Pretpostavimo li eliptični prostor umjesto kuglina, zraka svjetlosti obišla bi

u neizmjernom vremenu (od $t = -\infty$ do $t = +\infty$) cijeli prostor, jer je tu »dijametralna« točka identična s ishodnom.

Vidimo, da se de Sitterov prostor, koji je prvotno »statičko rješenje«, u Lanczosovu obliku predočuje kao »dinamičko rješenje«, jer se ovdje polumjer kuglina prostora vremenski mijenja. Takva dinamička rješenja prvi je općenito istraživao ruski fizičar A. F r i e d m a n (1922). Premda je opširno diskutirao različita moguća rješenja, ipak nije opazio, da se de Sitterov prostor može shvatiti kao specijalni slučaj takvih dinamičkih rješenja, nego je to, kako rekosmo, primijetio Lanczos. Dinamička rješenja daju mnogo šire mogućnosti, jer sada prostor može sadržavati masu, kozmološka konstanta može biti pozitivna (konačni kuglin odnosno eliptični prostor), nula (obični neizmjerni euklidski prostor) ili negativna (neizmjerni prostor, u kojemu vrijedi geometrija Lobačevskoga).

Dok je ideja Einsteinova kuglina (odnosno eliptičnog) svemira bila u skladu s činjenicom, da srednja gustoća mase u svemiru nije nula (barem u poznatom njegovu dijelu), dotle je de Sitterov svemir sa svojim centrifugalnim gravitacionim poljem mogao tumačiti pojave odmicanja dalekih svemirskih maglica. Već se u ono doba (1917) znalo za neke maglice, koje, sudeći po pomaku njihova spektra prema crvenom, imaju velike radijalne brzine, t. j. brzo odmiču od nas. Friedmanova rješenja dopuštala su spajanje ovih dviju prednosti i tako je Belgijanac Abbé B. L e m a î t r e (1927) postavio teoriju, da je naš svemir izvjestan specijalan slučaj Friedmanovih rješenja. On je pretpostavio, da između konstante λ i ukupne mase svemira M postoji ona relacija, koja vrijedi u Einsteinovu statičkom svemiru. Lemaître pri tom uzima eliptični prostor. Volumen takvog prostora iznosi $\pi^2 R^3$ (što ovdje ne možemo izvesti), pa je stoga

$$M = \pi^2 R^3 \mu. \qquad (4)$$

Iz (1) i (2) izlazi

$$\mu = \frac{\lambda c^2}{4\pi k}, \qquad (5)$$

dakle prema (4) i (1)

$$\lambda = \frac{c^4 \pi^2}{16\, k^2 M^2}. \qquad (6)$$

Na temelju ove relacije dobije se kao rješenje eliptični prostor, koji je u neizmjerno dalekoj prošlosti bio Einsteinov prostor, ali se od onda počeo rastezati, najprije vrlo polako, pa sve brže, tako da mu polumjer teži prema neizmjerno, kad vrijeme raste do neizmjerno daleke budućnosti. E d d i n g t o n (1930) i L e m a î t r e (1931) su pokazali, da je Einsteinov svemir nestabilan, t. j. čim nastanu promjene u jednolikoj razdiobi materije, mora se početi rastezati. S time bi Lemaîtreova teorija bila u dobrom skladu. Slučajeve, gdje nije ispunjena Lemaîtreova relacija (6) diskutirao je već Friedman, a kasnije de Sitter (1930) uzevši u račun i tlak elektromagnetskog zračenja u svemiru. Rješenja, koja su tu moguća, imaju tri karakteristična oblika. Jedno su rješenja, kod kojih je masa svemira veća od one, koja bi odgovarala Einsteinovu prostoru. U tom slučaju polumjer svemira raste do neizmjernosti počevši od nekog trenutka, gdje je bio nula. Dakako, u stvarnosti se ne može uzeti, da je polumjer zaista počeo s vrijednošću nula, jer kod malenih vrijednosti polumjera svemirske mase dolaze tako blizu, da se više ne može opravdati pretpostavka jednoliko razdijeljene materije. Ne možemo onda više stvari promatrati u tako velikim razmjerima, da lokalne inhomogenosti ne dolaze bitno u račun, a time ni razmatranja, koja dovode do vrijednosti nula za taj polumjer, nisu više primjenljiva. Uzmemo li, da je masa svemira manja, nego što odgovara Einsteinovu prostoru, dobijemo rješenja poput de Sitterova (koje je granični slučaj, kada je masa jednaka nuli), gdje se polumjer smanjuje do neke najmanje vrijednosti, a zatim opet neograničeno povećava. Jedno drugo moguće rješenje bilo bi osciliranje polumjera, gdje polumjer počevši u nekom trenutku s vrijednošću nula raste do neke najveće vrijednosti, a zatim se opet smanjuje na nulu. Iza toga bi se igra ponovila, pa stoga govorimo o osciliranju ili o periodičkom rješenju. I ovdje možemo uzeti, da polumjer ne postaje stvarno nula, nego samo razmjerno vrlo malen. Kod svega ovoga pretpostavljali smo, da je kozmološka konstanta pozitivna i da je prostor sferan ili eliptičan. No može biti i drukčije: ako je uz sferni ili eliptični prostor λ jednak nuli ili negativan, postoje periodička rješenja, dakle moguće je osciliranje polumjera. Za euklidski prostor i λ nula ili pozitivan moguće je rastezanje od nule prema neizmjernosti, a za λ negativan osciliranje. Za prostor s geometrijom Lobačevskoga pozitivan λ daje mijenjanje poput de Sitterova prostora s minimumom polumjera u nekom trenutku, λ jednak nuli dopušta rastezanje od nule prema neizmjerno, a negativan λ omogućuje osciliranje.

Osobito su Einstein (1931) i de Sitter (1932) istakli, da se može pretpostaviti $\lambda = 0$, da je dakle nepotrebno poopćenje jednadžbi gravitacije kozmološkim članom i da svemir može biti neizmjerni euklidski prostor s nekom gustoćom materije. Taj se prostor rasteže tako, da je svaki konačni razmak u nekom trenutku bio nula i odonda raste u neizmjernost.

U točnija svojstva pojedinih mogućih tipova dinamičkih rješenja, kao vladanje zraka svjetlosti, odnos između paralakse neke zvijezde i njene udaljenosti i t. d. ne možemo ovdje ulaziti, ali ćemo još dati neke numeričke podatke. De Sitter je (1917) procijenio polumjer Einsteinova svemira iz onda raspoloživih astronomskih podataka o srednjoj gustoći mase u dotada istraženom dijelu svemira na 14 do 800 milijuna godina svjetlosti, što odgovara gustoći od po pr. $0{,}6.10^{-28}$ do $1{,}9.10^{-27}$ g/cm³. Tome pripada »opseg« prostora od 88 milijuna do 5 milijarda godina svjetlosti (odnosno polovica tih vrijednosti, ako je prostor eliptičan). Na ovu se procjenu očito odnosi bilješka u tekstu (VII, 11), gdje se navodi za opseg vrijednost od 100 milijuna godina

svjetlosti. Kasniji su podaci pokazali, da su te vrijednosti sigurno premalene, da je dakle srednja gustoća bila ocijenjena previsoko. Opažanja pomoću dosada najvećeg dalekozora s parabolnim zrcalom od 2,5 m, koji se nalazi u zvjezdarnici na Mount Wilsonu u Kaliforniji, dala su podatke o razmještaju i brzini odmicanja velikoga broja vrlo dalekih svemirskih maglica do daljine od po prilici 500 milijuna godina svjetlosti. Prema tim rezultatima cijeni se srednja gustoća u tom nama pristupnom dijelu svemira na 10^{-28} do 10^{-30} g/cm³, što odgovara polumjeru Einsteinova svemira od 3,5 do 35 milijarda godina svjetlosti, ili opseg od 22 do 220 milijarda godina svjetlosti (odnosno polovica tih vrijednosti za eliptični prostor). U slučaju dinamičkih rješenja polumjer izlazi nešto drukčiji, ali istoga reda veličine. Na pr. za Lemaîtreov svemir može se uzeti, da je početno stanje odgovaralo Einsteinovu svemiru s polumjerom od po pr. 900 milijuna godina svjetlosti, i da sada iznosi oko 3,8 milijarde godina svjetlosti. Pri tom je pretpostavljena sadašnja srednja gustoća od 3.10^{-30} g/cm³.

Budući da opažamo odmicanje dalekih svemirskih objekata, moramo uzeti, da se svemir u sadašnjoj fazi razvitka rasteže. Tada se može procijeniti, koliko je vremena proteklo od trenutka, kada je polumjer svemira bio najmanji ili nula, već prema tome, koje dinamičko rješenje pretpostavljamo. Ova vremena imaju red veličine od 10 milijarda godina, što je za periodička rješenja već Friedman (1922) grubo procijenio. Neki učenjaci drže, da je u to vrijeme, kada je polumjer prostora bio razmjerno vrlo malen, mogao nastati i naš Sunčani sustav pod utjecajem neke zvijezde, koja je dovoljno blizu prošla kraj Sunca. Možda su tada bile i ostvarene prilike, napose goleme temperature, kod kojih se događaju u velikoj mjeri jezgrine reakcije, pa su nastali današnji naši kemijski elementi.

E d d i n g t o n je na temelju nekih dosta smionih spekulacija u vezi s valnom mehanikom nastojao naći vezu između broja elektrona u svemiru i njegova polumjera. Po toj teoriji iznosio bi polumjer Einsteinova svemira nešto preko jedne milijarde godina svjetlosti, a konstanta λ bila bi približno 10^{-54}, što bi se dobro slagalo s teorijom Lemaîtreova svemira.

Treba spomenuti i t. zv. kinematičku teoriju svemira, kojom je E. A. M i l n e (1932) pokušao obuhvatiti pojav odmicanja spiralnih maglica. Ta teorija ne polazi s gledišta opće teorije relativnosti, nego nastoji pronaći zakone razvoja svemira na osnovu nekih općih principa, od kojih je najvažniji t. zv. »kozmološki princip«. Taj princip izriče, da se razvoj svemira prikazuje načelno jednako različitim promatračima, koji putuju zajedno s pojedinim velikim nebeskim jedinicama (svemirskim maglicama). Kinematička teorija svemira u svome daljem razvoju pokazala je dosta dodirnih točaka s općom teorijom relativnosti, ali se od nje ipak znatno razlikuje. Glavna je teškoća te teorije, da je u njoj teško dati objašnjenje pojava gravitacije. I to je doduše uspješno pokušao baš sam Milne, ali njegov način ipak potpuno ne zadovoljava, jer pri tom gravitacija ne izlazi kao nužni sastavni dio te teorije, nego se uvodi na temelju posebnih hipoteza.

Odmicanje svemirskih maglica istražili su osobito Hubble i Humason. Prema tim rezultatima može se uzeti, da se brzina odmicanja tih maglica povećava razmjerno s udaljenošću, tako da za svaki milijun godina svjetlosti naraste za 165 km/sek. Za vrlo daleke maglice te su brzine vrlo velike, na pr. oko 20 000 km/sek za maglice udaljene 120 milijuna godina svjetlosti. To je već blizu 7% brzine svjetlosti! Pomaci prema crvenom zbog Dopplerova učinka također su veliki, ali ih je ipak teško mjeriti. Zbog vrlo slaboga sjaja tih maglica vrijeme ekspozicije kod fotografiranja spektara mora biti vrlo dugačko, čak do 40 sati kroz više noći, a spektralne crte nejasne su zbog toga, što se na spektrogramu superponiraju crte mnogih zvijezda, iz kojih se maglica sastoji. Te se zvijezde relativno gibaju znatnim brzinama, pa su njihove spektralne crte međusobno pomaknute i daju nejasnu i razvučenu sliku.

Pojedine varijante dinamičkih rješenja daju nešto različite zakone za ovisnost toga pomaka od daljine (odnosno sjaja, iz kojeg se ta daljina zaključuje). Danas ipak još nije moguće stvoriti iole pouzdanu odluku između tih mogućnosti. Očekuje se, da će novi dalekozor sa zrcalom od 5 m promjera, koji se ima postaviti na Mount Palomaru u Kaliforniji, omogućiti povećanje dosega na dvostruko do trostruko, čime bi volumen istraživanju pristupačnog dijela svemira narastao na osmerostruki do dvadesetsedmerostruki iznos. Vjerojatno će se na temelju ovako proširenih podataka postići dalji napredak u ovim pitanjima.

3. Jednadžbe gibanja materijalnih čestica

U klasičnoj fizici može se izračunati gravitaciono polje, ako je zadana razdioba masa u prostoru. To polje je određeno, kada je poznat potencijal gravitacije na svakom mjestu prostora (vidi [30]). Veza između gustoće materije i polja gravitacionog potencijala dana je parcijalnom diferencijalnom jednadžbom, koja je poznata pod imenom Laplace-Poissonove jednadžbe. Kako će se neka čestica gibati u gravitacionom polju, koje je na temelju zadane raspodjele masa određeno tom jednadžbom, izlazi iz zakona gibanja. Taj zakon izriče, da je ubrzanje čestice jednako jakosti polja na mjestu, gdje se čestica nalazi. Zakon gibanja je dakle poseban zakon, neovisan od zakona, koji povezuje polje i gustoću materije.

U općoj teoriji relativnosti stvar je analogna. Laplace-Poissonova jednadžba poopćena je ovdje na t. zv. Einsteinove jednadžbe gravitacionoga polja, koje povezuju veličine $g_{11}, \ldots, g_{44}$ s razdiobom materije. Posebni zakon vrijedi za gibanje materijalne čestice, koji ovdje izriče, da je svjetska krivulja te čestice geodetska crta prostorno-vremenskog kontinuuma s metrikom danom veličinama $g_{11}, \ldots, g_{44}$. No kako opća teorija relativnosti mnogo dublje zahvaća u odnos gravitacionog polja i materije, bilo je razloga držati, da zakon, po kojemu se giba neka materijalna čestica, mora biti posljedica samih jednadžbi gravitacionoga polja, t. j. da taj zakon ne može biti neovisan postavak, kao u klasičnoj teoriji gravitacije.

Ovo su zaista uspjeli dokazati A. Einstein, L. Infeld i B. Hoffmann (1938). Time je postignut značajan napredak, a uz to se očitovala duboka skladnost ideja, na kojima počiva opća teorija relativnosti. Zbog matematičkih teškoća ne možemo ovdje potanje raspraviti ovo pitanje, kao što već u tekstu nisu mogle biti raspravljene Einsteinove jednadžbe gravitacionoga polja.

4. Ujedinjene teorije polja

Vidjeli smo, kako je u općoj teoriji relativnosti gravitaciono polje određeno metrikom prostorno-vremenskoga kontinuuma, dakle geometrijskim svojstvima te četverodimenzionalne raznolikosti. Naprotiv, elektromagnetsko polje je ostalo polje sila u starom smislu i nije izraženo geometrijskim svojstvima prostorno-vremenskoga kontinuuma. Budući da se činilo, da se sva polja sila mogu svesti na elektromagnetizam ili gravitaciju, bila je blizu misao da se poopći geometrija na takav način, da i elektromagnetsko polje bude izraz geometrijskih svojstava kontinuuma. Tako dobivene teorije zovu se »ujedinjene (unificirane) teorije polja«, jer ujedinjuju elektromagnetsko i gravitaciono polje.

Prvi je to pokušao H. Weyl (1918) svojom poopćenom geometrijom, u kojoj je uveo pojam t. zv. invarijancije baždarenja. Jednu još nešto općenitiju teoriju razvio je A. S. Eddington (1921). Ove su teorije s matematičkog gledišta vrlo skladne, ali ipak nisu potpuno zadovoljile u fizičkom pogledu. Sam je Einstein također pokušao nekoliko puta da dođe do potpuno prihvatljivog rješenja. Spominjemo njegovu teoriju t. zv. »daljinskog paralelizma« (1928). Drugim je putem pošao Th. Kaluza (1921) time, da je povisio broj dimenzija kontinuuma na pet, da je dakle operirao u peterodimenzionalnom prostoru, gdje međutim peta dimenzija nije imala jasno fizičko značenje. A. Einstein i W. Mayer (1931, 1932) uspjeli su Kaluzinu teoriju preudesiti tako, da je kontinuum ipak imao samo četiri dimnezije, a da su zadržane formalne računske prednosti peterodimenzionalne geometrije. O. Veblen i B. Hoffmann (1930) te W. Pauli (1933) pokušali su razviti t. zv. »projektivnu« teoriju relativnosti, služeći se četverodimenzionalnim kontinuumom, u kojemu se točka karakterizira sa 5 t. zv. projektivnih koordinata, kako se to u analitičnoj geometriji često čini. Konačno su A. Einstein i P. Bergmann (1938) te A. Einstein, V. Bargmann i P. G. Bergmann (1941) razvili teoriju, prema kojoj se svijet smatra peterodimenzionalnim kontinuumom, zatvorenim u smjeru pete dimenzije, slično kao što je dvodimenzionalna valjkasta ploha »zatvorena« u smjer jedne dimenzije. Opseg toga poopćenog valjka imao bi biti vrlo malen.

Sve se ove teorije mogu potanje izložiti samo pomoću kompliciranih matematičkih sredstava, pa smo ih ovdje ukratko spomenuli navodeći po koju karakterističnu osebinu. U pogledu njihove vrijednosti može se reći, da su neke od njih matematički vrlo skladne, ali je neizvjesno, da li znače znatniji napredak za fiziku. Težište današnjih fizičkih nastojanja nalazi se u istraživanjima kvantnih pojava, kod kojih se u prvome redu radi o manifestacijama elektromagnetizma i o međusobnom djelovanju čestica unutar atomskih jezgri, to jest o t. zv. jezgrinim silama. Te su sile druge prirode nego električne sile ili sile gravitacije, pa danas znače treću vrst prirodnih sila, koje bi trebalo uklopiti u jedinstvenu teoriju. Današnja kvantna fizika mnogo se ne bavi gravitacijom, koja je kvantitativno najslabija sila, i nastoji najprije obuhvatiti zakone kvantnih pojava u pogledu električnih i jezgrinih sila. Teorija je danas već vrlo usavršena što se tiče elektromagnetskih pojava, ali još nije potpuno riješila probleme jezgrinih sila, dok gravitacija (osim nekih još slabo uspjelih pokušaja) uopće nije uključena. Dok je dakle kvantna fizika izvrsno obuhvatila kvantne pojave, naročito elektromagnetske prirode, a donekle i pojave jezgrinih sila, dotle su ujedinjene teorije polja obuhvatile gravitaciju i elektromagnetizam, ali bez kvantnih pojava i bez jezgrinih sila. Jasno je, da moramo tražiti teoriju, koja obuhvaća sve fizičke pojave. Da li će takva teorija u sebi sadržavati kao najbolje približenje za makroskopske pojave (t. j. za zbivanja u velikom, gdje se kvantni pojavi i jezgrine sile ne očituju) koju od spomenutih teorija polja, ne može se danas proreći.

BILJEŠKE

[1] (str. 1). Temeljni Einsteinovi radovi jesu: »Zur Elektrodynamik bewegter Körper«, Ann. d. Phys. 17 (1905), str. 891; »Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie«, Ann. d. Phys. 49 (1916), str. 769.

[2] (str. 2). Danas su poznate γ-zrake s mnogo manjom duljinom vala. Na pr. Th C'', jedan elemenat iz torijeva niza radioaktivnog raspadanja, emitira γ-zrake s duljinom vala $4{,}66 . 10^{-11}$ cm, dakle otprilike 20 puta kraćeg vala, nego što je u tekstu navedeno. U t. zv. visinskom zračenju ima, čini se, zraka s još mnogo manjom duljinom vala.

[3] (str. 27). Ako je stol savršeno gladak, kugla će, kad dobije udarac, po njemu kliziti bez rotacije i dobit će, recimo, brzinu v. Ako stol nije gladak, kugla će se kotrljati, pa će uz isti udarac odmicati manjom brzinom $v_1 = \frac{v}{a}$, gdje je a neka konstanta, koja ovisi o razdiobi masa u kugli. Uzmimo li, da se radi o šupljoj kugli s unutrašnjim polumjerom r_u i vanjskim polumjerom r_v, bit će

$$a = 1 + \frac{2}{5} \frac{r_v^5 - r_u^5}{r_v^2 (r_v^3 - r_u^3)} .$$

Kada je kugla puna, t. j. za $r_u = 0$, izlazi $a = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$. Kugla dakle dobije brzinu $v_1 = \frac{5}{7} v$. Granični slučaj $r_u = r_v$, t. j. šuplja kugla s vrlo tankom stijenom, daje $a = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, što nije teško vidjeti, ako se razlomak $\frac{r_v^5 - r_u^5}{r_v^3 - r_u^3}$ najprije krati sa $r_v - r_u$. Kugla u tom slučaju dobije brzinu $v_1 = \frac{3}{5} v$.

Pretpostavlja se kod svega toga, da je sraz između čekića i kugle takav, da se čekić poslije sraza umiri i tako preda kugli sav svoj impuls. No može se dogoditi, da čekić odskoči natrag. U tom slučaju čekić poslije sraza ima negativan impuls (ako impuls u smjeru udarca računamo kao pozitivan), a to znači, da je kugla preuzela veći impuls, nego što je čekić prije sraza imao, pa će dobiti i veću brzinu. U opširnije razmatranje o tome ne ulazimo.

[4] (str. 37). Isaac Newton: Philosophiae naturalis principia mathematica, Amstaelodami. 1714. str. 5—7. (Prvo izdanje izašlo je 1687.). Evo originalnoga teksta:

»I. Tempus Absolutum, verum, & mathematicum, in se & natura sua absque relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare est sensibilis & externa quaevis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inaequabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur: ut Hora, Dies, Mensis, Annus.«

».... Inaequalis enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam aequales pro mensura temporis habentur. Hanc inaequalitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus coelestes. Possibile est, ut nullus sit motus aequabilis quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum, sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli:...«

»II. Spatium Absolutum, natura sua absquae relatione ad externum quodvis, semper manet similare & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quaelibet mobilis, quae a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur:...«

»....Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommode in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.«

[5] (str. 43). S teoretskog gledišta moglo bi se reći, da je problem triju tijela riješen. Sundman je naime pokazao (1912), da se rješenja mogu predočiti pomoću beskonačnih redova, koji su konvergentni za sve vrijednosti vremena t uključivši slučajeve, kada dolazi do sraza između po dva tijela, koja se zamišljaju kao materijalne točke. Staze u takvu slučaju imaju na mjestu sraza šiljke. Za praktički proračun staza i za diskusiju njihova općega oblika te njihovih posebnih svojstava (periodičnosti, asimptotskog približavanja i najvažnijeg od svih pitanja, stabilnosti staza) ti redovi nisu prikladni, jer su preslabo konvergentni i svojim oblikom nepodesni za diskusiju kvalitativne prirode. Za te svrhe postoje klasične približne metode, koje daje teorija perturbacija. Beskonačni redovi, koji se pri tom upotrebljavaju, oštrije su konvergentni za dovoljno malene vrijednosti vremena t, ali općenito ne konvergiraju za svaki t. Prema Moultonu vrijede ti redovi bar za nekoliko stoljeća.

[6] (str. 44, 223). Osim zakretanja Merkurova perihela još su poznata dva druga, znatno manja odvajanja od računskih rezultata Newtonove teorije. To su zakretanja Venerina čvora i Marsova perihela za 10 odnosno 8 lučnih sekunda u stoljeću. Ova su odvajanja već vrlo mala, pa stoga i nisu ustanovljena s tolikom sigurnošću kao zakretanje Merkurova perihela. Usporedi na pr. J. Chazy: La théorie de la relativité et la mécanique céleste, I, Paris 1928, str. 172, 185, 186.

[7] (str. 44, 223). Navodimo još neke od tih hipoteza: utjecaj spljoštenosti Sunca: postojanje nepoznata planeta ili prstena planetâ unutar Merkurove staze ili prstena planetâ između Merkurove i Venerine staze; utjecaj malih planeta (asteroida) između staza Marsa i Jupitera, t. j. pretpostavka, da je njihova ukupna masa znatno veća, nego što se misli; pretpostavka, da je masa Zemlje nešto manja, nego što je ustanovljeno drugim mjerenjima; postojanje Merkurova satelita. Osim toga kušalo se modificirati na različite načine Newtonov zakon gravitacije, bez fizičkog objašnjenja takve modifikacije. Usporedi Chazy, l. c. [6], I, str. 185—232.

[8] (str. 53). L. c. [4], str. 9—10:

Effectus quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hae vires nullae sunt, in vero autem & absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo praelongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorsione admodum rigescat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quiescat; tum vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; superficies aquae sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam, vi in aqua paulatim impressa, effecit vas, ut haec quoque sensibiliter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim a medio, ascendetque at latera vasis, figuram concava induens, (ut ipse expertus sum)...«

»Initio, ubi maximus erat aquae motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Postea vero, ubi aquae motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relative.«

»Motus quidem veros corpora singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiae, partim ex viribus quae sunt motuum verorum causae & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset.«

»In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent.«

[9] (str. 73). Titus Lucretius Carus: De rerum natura. Citirano prema Briegerovu izdanju, Leipzig 1899. Hrvatski prijevod glasi ovako.

»Ovo budući da biva, to može i tanana onda
Slika od stvari se lučit, sa površja njinih tjelesa.«
. . . .
»Stoga na jednaki način je nužno, i slike da mogu
Da neizrecivi prostor u jednom hipu prelete.
. . .«
»Ali budući da mi tek očima možemo gledat,
Odatle biva, da oblik i boja od ovijeh stvari
Nama se odrazi ondje, kud upravo svratimo pogled.«

(Tit Lukrecije Kar: O prirodi. Preveo i rastumačio prof. Marko Tepeš, Zagreb 1938.)

[10] (str. 64). Najtočnija mjerenja pokazala su, da je brzina svjetlosti u granicama $(2{,}99774 \pm 0{,}00011) \cdot 10^{10}$ cm/sek.

[11] (str. 67 i 123). Od pisanja ove knjige prošlo je četvrt stoljeća.

[12] (str. 68, 221). U vezi s daljim razvojem Planckove teorije kvanta u prvoj četvrtini ovoga stoljeća treba istaći imena B o h r i S o m m e r f e l d. U trećem deceniju ta je teorija doživjela novu revoluciju. Nastala je mehanika matrica i valna mehanika, koje su se spojile i dalje razvile u modernu kvantnu fiziku. Iz nje su proistekle vanredno duboke spoznaje o prirodnim zakonima, osobito o procesima unutar atomâ i njihovih jezgri. Spomenimo nekoliko najmarkantnijih imena: d e B r o g l i e, H e i s e n b e r g, S c h r ö d i n g e r, D i r a c. Za noviji napredak teorije relativnosti vidi dodatak.

[13] (str. 123). U originalu ovaj citat glasi: »Das Innere aller Körper, den freien Äther eingeschlossen, kann von der Ruhe aus Störungen erfahren, welche wir als elektrische, und andere Störungen, welche wir als magnetische bezeichnen. Das Wesen dieser Zustandsänderungen kennen wir nicht, sondern nur die Erscheinungen, welche ihr Vorhandensein hervorruft.«

[14] (str. 104, 130, 136). Danas se smatraju najtočnijim ove vrijednosti: Količina naboja, što je nosi 1 g vodika

$C_0 = \frac{e}{m_H} = 2{,}869.10^{14}$ elektrostatičkih jedinica naboja po gramu;

naboj elektrona $e = 4{,}802.10^{-10}$ el.-st. jedinica;
masa elektrona $m = 9.099.10^{-28}$ grama;

$$\frac{e}{m} = 5{,}277.10^{-17};$$

$$\frac{m}{m_H} = \frac{e}{m_H} : \frac{e}{m} = \frac{2{,}869.10^{14}}{5{,}277.10^{17}} = \frac{1}{1839{,}3};$$

$$a = \frac{2}{3} \frac{e}{c^2} \frac{e}{m} = \frac{2}{3} \frac{4{,}802.10^{-10}}{9.10^{20}} 5.277.10^{17} = 1{,}877.10^{-13} \text{ cm}.$$

Dodajemo ove podatke:
masa protona $= 1{,}673.10^{-24}$ g,
masa neutrona $= 1{,}675.10^{-24}$ g,
masa pozitrona = masa elektrona $= 9{,}099.10^{-28}$ g;
polumjer protona, neutrona, elektrona i pozitrona oko $1{,}4.10^{-13}$ cm (usporedi [24]).

[15] (str. 130). Poslije otkrića pozitrona (A n d e r s o n, 1932) ovo se više ne može upravo tako tvrditi. Pozitron je čestica iste mase i protivnog naboja od elektrona, ali se pojavljuje samo rijetko i pod posebnim okolnostima. Vidi [14] i [20].

[16] (str. 130). Ehrenhaftovi rezultati nisu se pokazali točnim.

[17] (str. 134). Danas se više ne upotrebljava iskrište, nego se radi elektronskim cijevima, t. zv. elektronkama. Titrajni krug je međutim i sada temeljni dio emisionog uređaja, i razmatranja u tekstu mogu se u bitnosti još uvijek primijeniti.

[18] (str. 140, 222). Među mnogim pokusima, kojima je provjeren Michelsonov rezultat, bilo je i takvih, koji su dali pozitivan efekt, tako pokusi Millerovi iz godina 1921. do 1926. na Mount Wilsonu u visini od 1800 m nad morem. No točna kritika tih pokusa pokazala je, da se numerički rezultati ne slažu ni s kojom teorijom i da im moraju biti uzrok neke smetnje. Kasniji još znatno točniji pokusi, naročito Kennedyjevi (1926), koji su provedeni i u razini Pasadene i na Mount Wilsonu, dali su negativan rezultat.

[19] (str. 144). Voigtove jednadžbe još nisu sasvim identične s Lorentzovim, ali su im vrlo blizu. Pomnože li se desne strane Lorentzovih jednadžbi (72) (VI, 2) faktorom $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, dobiju se Voigtove jednadžbe.

[20] (str. 145). Ovo shvaćanje elektromagnetskoga polja kao čisto hipotetičkog pomagala za opisivanje djelovanja na tvari ne bi se više moglo zastupati. Razvoj kvantne fizike (vidi [12]) pokazao je dalekosežnu analogiju između »tvari«, t. j. materijalnih čestica, i elektromagnetskog zračenja. U jednu ruku elektromagnetski valovi mogu pod nekim uvjetima djelovati na način, kao da su to čestice (kvanti svjetlosti ili fotoni, vidi pod konac primjedbe [30]), što se prvi puta očitovalo u t. zv. fotoefektu, t. j. izbacivanju elektrona iz metalnih površina, na koje pada svijetlo. Efekt je otkrio H a l l w a c h s (1888), ali su tek L e n a r d o v i kvantitativni rezultati (1902) omogućili E i n s t e i n o v u hipotezu (1905), da postoje čestice svijetla. Efekt se ne da objasniti pomoću klasične valne teorije svjetlosti, jer bi po njoj trajalo neko vrijeme, dok se na pojedini elektron prenese dovoljna količina energije, da ga se izbaci iz metala, dok pokus pokazuje, da izbacivanje počinje odmah, čim svijetlo padne na površinu, ma bila jakost osvjetljenja vrlo malena. Može se naprotiv razumjeti, da pojedini kvant svjetlosti prenese najednom na neki elektron potrebnu energiju.

U drugu ruku čestice, na pr. elektroni, pod nekim okolnostima pokazuju svojstva, koja odgovaraju valovima. Tako su D a v i s s o n i G e r m e r (1927) opazili pojave ogiba (difrakcije) na elektronima, koji padaju na nikaljni kristal.

Poslije otkrića pozitrona (A n d e r s o n 1932, vidi [15] našlo se dalje, da su mogući procesi pretvaranja elektromagnetskog zračenja u materijalne čestice i obrnuto. Jedan foton velike energije (t. zv. γ-kvant, jer pripada γ-zračenju) može se u blizini atomske jezgre pretvoriti u par čestica, jedan elektron i jedan pozitron (bračni par C u r i e-J o l i o t 1933). Blizina jezgre je potrebna, jer ona preuzima suvišak impulsa toga γ-kvanta. Obrnuti proces nije vezan na prisutnost neke jezgre. Pozitron i elektron, kada se sastanu, mogu se pretvoriti u dva γ-kvanta, koja se raziđu u protivnim smjerovima. Time, što nastanu dva γ-kvanta, može se istodobno zadovoljiti zakon održanja energije i održanja impulsa bez sudjelovanja treće čestice. No moguće je i pretvaranje u jedan γ-kvant u blizini jezgre.

Vidi se iz ovoga, da je elektromagnetsko polje u svojim različitim manifestacijama pokazalo isto tako fizičku »realnost« kao materijalne čestice, pa se stoga pod »materijom« sada obično misli i »tvar« i »zračenje« zajedno.

[21] (str. 145). Razumije se, da su i slavenski narodi živo sudjelovali u izgradnji teorija moderne fizike.

[22] (str. 175, 222). Kakogod je Sommerfeldov rezultat o finoj strukturi spektara izgledao kao frapantna potvrda teorije relativnosti, kasniji je razvoj pokazao, da stvar ipak nije tako jednostavna. Taj je uspjeh naime bio moguć zato, jer je Sommerfeldov račun zbog tadašnjeg još nepotpunog znanja o fizici atoma sadržavao dvije pogreške, koje su se međusobno kompenzirale. Treba naime znati, da je način, kako se tada prema starijoj »teoriji kvanta« računala emisija svijetla u atomu, bio osnovan na klasičnoj mehanici uz izvjesne propise o kvantiziranju. Sommerfeld je klasičnu mehaniku nadomjestio relativističkom, ali je inače postupak bio načelno isti. Kasnije se iz teorije kvanta razvila mehanika matrica (H e i s e n b e r g 1925) i valna mehanika (S c h r ö d i n g e r 1926), koje su doskora spojene u jedinstvenu »kvantnu mehaniku«. Dalji je napredak bio, kada je uspjelo besprijekorno uzeti u račun t. zv. spin elektrona, t. j. svojstvo elektrona, da zbog rotacije oko vlastite osi djeluje kao mali magnet. To svojstvo obuhvata D i r a c o v a teorija elektrona (1928), koja daje opet ispravnu finu strukturu, isto tako kao Sommerfeldov račun, dakako u mnogim slučajevima još točnije. Jedna je dakle pogreška bila u Sommerfeldovu računu, da je računao po metodi starije teorije kvanta, a ne po valnoj mehanici, druga je, da nije uzeo u račun spin elektrona. Obje pogreške zajedno ukidale su se u rezultatu. Diracova teorija provedena je u skladu s teorijom relativnosti, kao što se uopće sva moderna kvantna fizika razvija u okviru zasada te teorije i ne može se ni zamisliti povratak na staro. Može se dakle sada s punim pravom govoriti o spektroskopskoj potvrdi teorije relativnosti, dok se to na temelju Sommerfeldova razmatranja zapravo nije moglo, jer je to razmatranje sadržavalo nedostatke, koji su tek kasnijim razvojem fizike otkriveni i uklonjeni.

[23] (str. 179). Pitanje stabilnosti elementarnih čestica ni danas još nije potpuno razjašnjeno.

[24] (str. 179). Zaključak, da s obzirom na veću masu jezgra vodika (proton) mora imati mnogo manji polumjer od elektrona, osniva se bitno na pretpostavci, da je masa većim dijelom elektromagnetskog porijekla, što već zbog postojanja neutralne čestice (neutrona, vidi [25]) gotovo točno iste mase nije vjerojatno. Danas se smatra, da čestice elektron, pozitron, proton i neutron imaju podjednaku veličinu (vidi [14]). U diskusiju eksperimentalnih podataka o tom pitanju ne možemo ovdje ulaziti.

[25] (str. 180). U nizu radioaktivnog raspadanja urana (preko radija sve do olova) može se na temelju današnjih podataka uspoređivanjem atomne težine urana i olova jasno ustanoviti smanjenje mase zbog gubitka energije u obliku γ-zračenja. Ovdje treba nešto reći o sastavu jezgri atoma. Danas se smatra, da su jezgre atoma sastavljene od protona, koji su identični s vodikovim jezgrama, i neutrona, koji su električki neutralne čestice, gotovo iste mase kao protoni (vidi [14]). B o t h e i B e c k e r (1930) otkrili su neutronske zrake, koje emitira berilij, kada se bombardira α-česticama (helijevim jezgrama, koje se sastoje od 2 protona i 2 neutrona). Oni su te zrake isprva držali γ-zrakama vrlo kratkoga vala, ali je C h a d w i c k dokazao, da se radi o električki neutralnim česticama. Jezgra nekog elementa općenito ima nešto manju masu, nego što bi bio zbroj masa protona i neutrona u njoj. Razlika se zove »defekt mase« i znači, da jezgra ima manju energiju, nego što bi imali njezini sastavni dijelovi zajedno, kada su rastavljeni. To smanjenje energije izraz je stabilnosti jezgre. Treba se samo sjetiti, da primjerice kuglica u nekoj šalici u svom stabilnom, t. j. najnižem položaju, ima najmanju potencijalnu energiju. Stoga su oni elementi najstabilniji, koji imaju najveći defekt mase po elementarnoj čestici jezgre, a to su srednje teški elementi. Sasvim lagani i sasvim teški elementi imaju manji defekt mase. Stoga će pretvaranje elemenata onda davati suvišak energije, koji se može iskoristiti, kada se sasvim lagani elementi pretvaraju (spajaju) u srednje teške i kada se teški elementi pretvaraju (raspadaju) u srednje teške. Prvi se proces događa na pr. u nutrašnjosti Sunca, gdje se uz sudjelovanje kisika i dušika kod temperature od po pr. 20 milijuna stupnjeva (na površini Sunca temperatura je samo oko 6000 stupnjeva) vodik pretvara u helij, što Suncu daje potrebnu energiju zračenja. Drugi se proces zbiva na pr. u atomskoj bombi, gdje se raspada uran ili jedan umjetni elemenat, plutonij.

Izotopi su elementi, koji u jezgri imaju isti broj protona i prema tome isti naboj jezgre, pa stoga i isti broj elektrona, koji kruže oko jezgre, ali je broj neutrona u jezgri različit, i zato njezina masa i time masa atoma različita. O broju elektrona oko jezgre ovise kemijska svojstva, pa se stoga izotopi ponašaju kemijski jednako. U prirodi se elementi obično pojavljuju kao smjesa od više izotopa, koji su u toj smjesi u stanovitom omjeru težinâ. Na pr. u prirodnoj smjesi urana najveći je dio uran sa 238 čestica u jezgri (t. j. 92 protona i 146 neutrona), a po pr. 0,7% je uran sa 235 čestica u jezgri (t. j. 92 protona i 143 neutrona). Osim toga ima i tragova urana sa 236 čestica u jezgri. Uran sa 235 čestica je onaj, koji se pod određenim uvjetima naglo raspada, i koji je trebalo izvući iz te smjese uranovih izotopa, da se načini atomska bomba. Ne možemo ovdje ulaziti u pitanje proizvodnje umjetnog elementa plutonija, koji ima 239 čestica u jezgri, od toga 94 protona i 145 neutrona, te omogućuje slične jezgrine reakcije kao uran sa 235 čestica.

Da postoje goleme energije u nutrašnjosti atomskih jezgri, danas je uvjerljivo dokazano mogućnošću iskorištavanja tih energija u tehničke i razorne svrhe, a načelno je to prorekao Einstein svojom relacijom $E = mc^2$.

[26] (str. 185). U originalu ovaj citat glasi: »Von Stund an sollen Raum und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren«.

[27] (str. 206). Ovo poopćenje Gaussovih koordinata na trodimenzionalni i četverodimenzionalni prostor, očito radi jednostavnosti, u tekstu nije sasvim korektno izloženo. Na plohi imamo dvije familije krivulja, a u svakoj je familiji provedena numeracija. Svako sjecište dviju krivulja različitih familija ima stoga dva broja x y, naime brojeve numeracije obih krivulja, koje njime prolaze, pa se ta dva broja zovu Gaussove koordinate te točke. U prostoru treba zamisliti tri familije ploha i u svakoj familiji provedenu numeraciju. Svaka ploha u nekoj familiji ima dakle svoj broj numeracije. Krivulje, u kojima se sijeku plohe različitih familija, tvore tri familije krivulja, naime presječne krivulje ploha prve i druge, druge i treće, odnosno prve i treće familije. Svaka krivulja ima dva broja x y, y z ili x z, naime brojeve numeracije onih dviju ploha, koje njome prolaze. Svaka je točka sjecište triju ploha različitih familija i ima stoga tri broja xyz, koje zovemo njezinim koordinatama. U četverodimenzionalnom prostoru treba uzeti četiri familije »hiperploha«, to su trodimenzionalni kontinuumi, t. j. (općenito zakrivljeni) trodimenzionalni prostori, gdje je opet u svakoj familiji provedena numeracija. Po dvije hiperplohe sijeku se u jednoj (običnoj dvodimenzionalnoj) plohi i takvih ploha ima šest familija, naime plohe, koje nastaju kao presjek hiperploha prve i druge, prve i treće, prve i četvrte, druge i treće, druge i četvrte odnosno treće i četvrte familije. Svaka ploha ima dva broja, xy, xz, xu, yz, yu ili zu, naime brojeve dviju hiperploha, koje njome prolaze. Po tri hiperplohe različitih familija sijeku se u jednoj krivulji, pa te krivulje tvore četiri familije i imaju po tri broja kao oznaku, xyz, xyu, xzu ili yzu prema tome, iz kojih su familija hiperplohe, koje kroz nju prolaze. Svaka je točka sjecište četiriju hiperbola i ima četiri broja $x\,y\,z\,u$ kao oznaku, koje zovemo njezinim koordinatama.

[28] (str. 209). Maxwellove jednadžbe elektromagnetskog polja su 1. reda. Misli se očito, da su svi zakoni poljâ u fizici diferencijalne jednadžbe *najviše* 2. reda.

[29] (str. 213). Možda se ovo objašnjenje može još nešto nadopuniti. U koordinatnom sustavu vlaka sâm je vlak dakako mirovao i prije i poslije sukoba. Kratkotrajno jako gravitaciono polje za vrijeme sukoba sve je razbilo u vlaku. Toranj je naprotiv prije sukoba imao neku znatnu brzinu spram sustava (naime negativnu brzinu vlaka), dok poslije sukoba miruje spram sustava. Gravitaciono polje za vrijeme sukoba zaustavilo ga je, ali nema razloga, da bi se srušio, jer je to polje isto tako zaustavilo i tlo, na kojemu toranj stoji. Da u sustavu vlaka zbog trzaja cijelog svijeta nastaje veliko gravitaciono polje, dok u sustavu Zemlje zbog trzaja vlaka ne nastaje primjetno gravitaciono polje (koje bi, da je veliko, zaista moglo srušiti toranj), nije čudo, jer je masa vlaka sićušna spram mase svih svemirskih tjelesa.

[30] (str. 214, 215, 224, 228, 232). Ova formulacija mogla bi dovesti do nesporazumka, pa ćemo zato ovdje dati nešto opširnije objašnjenje i diskutirati neke specijalne slučajeve. Čitalac neka najprije pročita izvod u tekstu, a onda tek ovu bilješku.

Formula $\nu' = \nu\left(1 - \frac{gl}{c^2}\right)$, koja je u tekstu izvedena približnim razmatranjem iz principa ekvivalencije, pokazuje, da je smanjenje frekvencije (t. j. pomak prema crvenom) dano izrazom

$$\nu - \nu' = \nu \cdot \frac{gl}{c^2}\,.$$

Zamislimo masu od 1 grama dopremljenu protiv djelovanja polja od površine zvijezde do opažača. Sila teže, koja djeluje na masu m, jednaka je mg, dakle za $m = 1$ jednaka je g, a gl je produkt sile i prevaljenog puta, dakle obavljena radnja. Ako je čestica mase 1 bačena u tom polju u vis, ona će na tom putu izgubiti toliko kinetičke energije, koliko iznosi ta radnja. Vidimo dakle, da je smanjenje frekvencije jednako sa c^2 podijeljenom produktu prvotne frekvencije i gubitka kinetičke energije čestice s masom 1, koja je taj put svjetlosti prošla slobodno dižući se. Može se pokazati, da je to općenito ispravno za bilo kakva stacionarna gravitaciona polja, t. j. takva polja, u kojima se veličine $g_{11}, \ldots, g_{34}$ vremenski ne mijenjaju (ili se mijenjaju tako polako spram trajanja putovanja svjetlosti, da te promjene možemo zanemariti). Označimo li vrijednosti veličina g_{44} na dva mjesta sa g_{44} i g'_{44}, gubitak kinetičke energije općenito je jednak $c^2\left(1 - \sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}}\right)$, a smanjenje frekvencije dano je relacijom

$$\nu - \nu' = \nu\left(1 - \sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}}\right), \tag{a}$$

što je lako izvesti iz formule

(b) $$t = T \frac{c}{\sqrt{-g_{44}}}$$

u tekstu. Tu ćemo formulu najprije nešto točnije protumačiti. Zamislimo, da je na mjestu A izvor svjetlosti, koja se širi do mjesta B. Prva valna fronta neka pođe u trenutku $t = 0$ iz A i neka stigne u trenutku τ u B. Druga valna fronta polazi za trajanje jednog titraja kasnije, recimo u trenutku t. Ona mora isto tako dugo putovati do B kao prva fronta, jer smo pretpostavili, da je gravitaciono polje stacionarno, dakle veličine $g_{11}, \ldots, g_{34}$ nisu se za to vrijeme promijenile, pa stoga ni brzina širenja svjetlosti na svakom pojedinom mjestu. Druga valna fronta stiže dakle u točku B u vrijeme $t + \tau$, dakle za t kasnije od prve. Trajanje titraja je dakle u oba mjesto isto, ako ga mjerimo koordinatom t, jednom od četiriju koordinata x, y, z, t, koje smo uveli u prostorno-vremenskom kontinuumu. No kakvo će trajanje pokazati sat u A, a kakvo sat u B? Sat, koji miruje u A, pokazat će vlastito vrijeme T, koje je sa t vezano relacijom $s^2 = -c^2T^2 = g_{44} t^2$, t. j. pokazat će $T = t \frac{\sqrt{-g_{44}}}{c}$. Isto tako će sat u B pokazati $T' = t \frac{\sqrt{-g'_{44}}}{c}$. Vrijedi dakle, ako iz obih relacija odredimo istu vrijednost t,

(c) $$\frac{cT}{\sqrt{-g_{44}}} = \frac{cT'}{\sqrt{-g'_{44}}} = t.$$

Ako je točka B daleko od svih masa, gdje je $g'_{44} = -c^2$, bit će specijalno $T' = t = T \frac{c}{\sqrt{-g_{44}}}$, kao što je u tekstu navedeno. Zbog $T = \frac{1}{\nu}$, $T' = \frac{1}{\nu'}$ možemo mjesto (c) pisati $\nu \sqrt{g_{44}} = \nu' \sqrt{g'_{44}}$ ili $\nu' = \nu \sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}}$, iz čega odmah izlazi relacija (a). Izlazi li $\nu - \nu'$ negativan, radi se naravno o povećanju frekvencije, t. j. o pomaku prema ljubičastom kraju spektra.

Da pobliže diskutiramo odnose u našem Sunčanom sustavu, poslužit ćemo se za izračunavanje gubitka kinetičke energije klasičnom Newtonovom teorijom gravitacije, što je za sve praktične svrhe dovoljno točno. U tu svrhu treba poznavati pojam potencijala gravitacije. Treba li neku česticu transportirati iz neke točke A u neku točku B gravitacionog polja, potrebno je izvršiti stanovitu radnju (pozitivnu, ako česticu dižemo, negativnu, ako je spuštamo u polju). Pri tom zamišljamo, da je čestica pošla iz stanja mirovanja u točki A i umirila se opet u točki B. U Newtonovoj teoriji ta je radnja jednaka gubitku kinetičke energije čestice, kada je ona od točke A do točke B dospjela slobodno gravitirajući (kao bačen kamen) bez utjecaja drugih vanjskih sila, dakle bez privođenja mehaničke radnje. Računat ćemo

dakle tu radnju mjesto gubitka kinetičke energije. Može se izvesti iz Newtonove teorije gravitacije, da je ta radnja neovisna od toga, kojim se putem čestica dovodi od A do B. No to se uviđa i iz općeg stavka održanja energije. Dva različita puta tvorila bi zajedno zatvorenu krivulju. Kad bi radnje uzduž tih dvaju putova bile različite, mogli bismo obilazeći s česticom tu zatvorenu krivulju crpiti razliku tih radnja, a da se ništa drugo nije promijenilo, i ponoviti taj postupak bilo koliko puta. Time bi se beskrajno crpila energija, bio bi dakle ostvaren perpetuum mobile, što se protivi stavku održanja energije.

Pod potencijalom gravitacije Φ na nekom mjestu razumijevamo radnju, koju treba izvršiti, da se čestica s masom 1 otpremi od toga mjesta u neizmjernu daljinu (ili praktički u vrlo veliku daljinu) od masa, koje stvaraju gravitaciono polje. Neka je dakle Φ potencijal u točki A, a Φ' potencijal u točki B. Vodimo li česticu iz točke A najprije u točku B, a onda u neizmjernu udaljenost, mora ukupno obavljena radnja Φ biti jednaka zbroju radnje R, koja je obavljena na putu od A do B i radnje Φ' od B do neizmjernosti, dakle $\Phi = R + \Phi'$ ili $R = \Phi - \Phi'$. Radnja od A do B jednaka je dakle razlici potencijala u tim točkama.

Prema prije rečenom bit će dakle

(d) $$\nu - \nu' = \frac{\nu}{c^2} (\Phi - \Phi').$$

Ovo je približna vrijednost, koja mora biti približno jednaka točnoj vrijednosti

$$\nu - \nu' = \nu \left(1 - \sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}}\right),$$

iz čega izlazi, da je približno

(e) $$1 - \sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}} = \frac{\Phi - \Phi'}{c^2}$$

ili, ako točku B uzmemo u neizmjernoj daljini, gdje je $g'_{44} = -c^2$, $\Phi' = 0$,

$$1 - \sqrt{\frac{g_{44}}{-c^2}} = \frac{\Phi}{c^2}.$$

Iz toga je

$$g_{44} = -c^2 \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)^2$$

ili približno

(f) $$g_{44} = -c^2 \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) = -c^2 + 2\Phi.$$

U tekstu je stavljeno $g_{44} = -c^2 (1 - \gamma)$. Veličina γ odgovara dakle približno veličini $\frac{2\Phi}{c^2}$, gdje je Φ Newtonov potencijal gravitacije.

Zbog ove veze zovu se veličine $g_{11}, \ldots, g_{44}$ potencijali gravitacije, koji određuju gravitaciono polje, kao što potencijal Φ u Newtonovoj teoriji određuje to polje. (Ako je potencijal svagdje poznat, može se izračunati polje i obrnuto.) U općoj teoriji relativnosti ima dakle 10 potencijala gravitacije, dok je u klasičnoj teoriji samo jedan.

Moramo sada vidjeti, kako ćemo taj potencijal izračunati. Može se pokazati, da kugla s potpuno simetričnom razdiobom mase djeluje prema vani tako, kao da joj je sva masa skupljena u središtu. Polje izvan kugle u udaljenosti r od središta, t. j. sila, koja djeluje na masu $m = 1$, bit će stoga [III, 3, (26)]

$$K = k \frac{M}{r^2},$$

gdje je k konstanta gravitacije (u cgs-sustavu je jednaka $6{,}685.10^{-8}$). Budući da je sila jednaka masi puta ubrzanje, a masa je jednaka 1, bit će to ujedno ubrzanje gravitacije na tom mjestu, dakle

$$a = k \frac{M}{r^2}. \tag{g}$$

Pomoću više matematike može se izračunati, da je onda potencijal, t. j. radnja, koju treba izvršiti, da se masa 1 dovede od te točke u neizmjernost, jednak

$$\Phi = k \frac{M}{r}. \tag{h}$$

Iz (g) i (h) izlazi relacija

$$\Phi = a \cdot r, \tag{i}$$

t. j. potencijal u nekoj točki izvan kugle jednak je produktu ubrzanja gravitacije na tom mjestu i udaljenosti od središta. Ako je gravitaciono polje proizvedeno od više različitih masa, onda je potencijal na nekom mjestu jednak zbroju potencijala, koje bi dale pojedine mase, što ovdje pobliže ne obrazlažemo.

Potencijal na površini Zemlje, koji potječe od same Zemlje, izlazi iz formule (i), u kojoj treba staviti $a = g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$, $r = r_Z = 6{,}37.10^8$ cm (t. j. 6370 km), dakle

$$\Phi_o = g \cdot r_Z = 981.6{,}37.10^8 = 6{,}25.10^{11}. \tag{j}$$

Masa Sunca iznosi $1{,}97.10^{33}$ g, polumjer mu je $6{,}96.10^{10}$ cm, dakle je ubrzanje na površini Sunca

$$a_s = k \frac{M}{r^2} = 6{,}685.10^{-8} \frac{1{,}97.10^{33}}{(6{,}96.10^{10})^2} = 2{,}72.10^4.$$

Bit će stoga $\frac{a}{g} = \frac{2{,}72.10^4}{981} = 27{,}2$ ili

$$a_S = 27{,}7\ g.$$

dok je polumjer Sunca u odnosu spram polumjera Zemlje

$$\frac{r_S}{r_Z} = \frac{6{,}96.10^{10}}{6{,}37.10^8} = 109{,}3,$$

t. j.

$$r_S = 109{,}3 \cdot r_Z.$$

Prema tome je potencijal na Suncu

$$\Phi_S = 27{,}7\ g \cdot 109{,}3\ r_Z = 3027\ \Phi_o$$

Prinos potencijala planeta možemo na tom mjestu zanemariti, jer je vrlo malen.

Potencijal Sunca na Zemlji, dakle u udaljenosti polumjera[1]) Zemljine staze ($R_Z = 1{,}495.10^{13}$ cm ili okruglo 150 milijuna km) bit će

$$\Phi_{SZ} = \Phi_S \frac{r_S}{R_Z} = \Phi_S \frac{6{,}96.10^{10}}{1{,}495.10^{13}} = 3027\ \Phi_o. \frac{6{,}96.10^{10}}{1{,}495.10^{13}} = 14{,}1\ \Phi_o,$$

jer je prema (h) potencijal obrnuto razmjeran s udaljenošću od središta. Potencijal Sunca na Zemlji još je dakle 14,1 puta tolik kao potencijal, koji potječe od same Zemlje. Naprotiv, ubrzanje gravitacije Sunca iznosi na Zemlji samo 1650. dio ubrzanja Zemljine sile teže, pa se može stoga zanemariti. Razlog je tomu taj, što sila privlačenja opada s kvadratom udaljenosti, a potencijal samo s prvom potencijom udaljenosti. Potencijali ostalih planeta na Zemlji mogu se zanemariti. Na Zemlji je dakle ukupni potencijal $\Phi_o + \Phi_{SZ} = 15{,}1\ \Phi_o$. Prema tome je razlika potencijala na Suncu i na Zemlji $\Phi_S - (\Phi_o + \Phi_{ZS}) = (3027 - 15{,}1)\ \Phi_o \doteq 3012\ \Phi_o$. Tomu odgovara dakle pomak prema crvenom

$$\nu - \nu' = \nu \cdot \frac{3012\ \Phi_o}{c^2} = \nu \cdot \frac{3012 \cdot 6{,}25 \cdot 10^{11}}{9 \cdot 10^{20}} = \nu \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-6}.$$

To znači, da se frekvencija svjetlosti, koja dolazi sa Sunca, smanjuje za otprilike dvije milijuntnine svoje vrijednosti. Taj se učinak upravo još može opažati.

Načelno je vrlo zanimljivo računati, što bi se opažalo, kada bi se s planeta Merkura motrila svjetlost, koja dolazi s Jupitera. Po astronomskim podacima polumjer Jupiterov je $r_J = 11{,}2 \cdot r_Z$, a ubrzanje na površini $a_J = 2{,}5$ g, tako da je potencijal $\Phi_J = 11{,}2\ r_Z \cdot 2{,}5\ g = 11{,}2.2{,}5\ .\ \Phi_o = 28\ \Phi_o$. Merkur ima polumjer $r_M = 0{,}38\ r_Z$ i ubrzanje na površini $a_M = 0{,}39$ g. Potencijal mu je dakle $\Phi_M = 0{,}38.0{,}39\ \Phi_o = 0{,}148\ \Phi_o$. Da nema Sunca, morala bi svjetlost pokazivati pomak prema crvenom, koji odgovara razlici potencijala $\Phi_J - \Phi_M = (28 - 0{,}148)\Phi_o = 27{,}85\ \Phi_o$. No treba još uračunati utjecaj potencijala Sunca. U udaljenosti Zemljine staze izračunali smo ga kao $\Phi_{SZ} = 14{,}2\ \Phi_o$. Polumjer je Jupiterove staze $R_J = 5{,}2\ R_Z$, dakle je potencijal Sunca tamo 5,2 puta manji nego na Zemlji:

[1]) Staze planeta smatramo približno kružnicama.

$$\Phi_{SJ} = \frac{\Phi_{SZ}}{5,2} = \frac{14,1}{5,2}\,\Phi_o = 2,71\,\Phi_o.$$

Polumjer Merkurove staze iznosi $R_M = 0,387\,R_Z$, dakle je tamo potencijal Sunca

$$\Phi_{SM} = \frac{\Phi_{SZ}}{0,387} = \frac{14,1}{0,387}\,\Phi_o = 36,4\,\Phi_o.$$

Potencijale ostalih planeta opet ćemo zanemariti. Ukupni potencijal na Jupiteru iznosi dakle $\Phi_J + \Phi_{SJ} = (28 + 2,74)\,\Phi_o = 30,7\,\Phi_o$, dok je ukupni potencijal na Merkuru $\Phi_M + \Phi_{SM} = (0,148 + 36,4)\,\Phi_o = 36,5\,\Phi_o$. Pomak svjetlosti odgovarat će dakle razlici potencijala

$$\Phi_J + \Phi_{SJ} - (\Phi_M + \Phi_{SM}) = (30,7 - 36,5)\,\Phi_o = -5,8\,\Phi_o.$$

Razlika je potencijala negativna, pomak će dakle biti prema ljubičastom, premda je polje gravitacije na Jupiteru 6,4 puta jače nego na Merkuru. Razumije se, da su ti pomaci daleko ispod mogućnosti opažanja.

Još je zanimljivo računati potencijal u neutralnoj točci između Sunca i Merkura, t. j. u točki, gdje se njihove privlačne sile ukidaju, tako da je tamo polje nula. Ta se točka nalazi u udaljenostima od tih dvaju tijela, koje su obrnuto razmjerne s drugima korijenima iz njihovih masa. Omjer je masa Merkura i Sunca 1 : 6 000 000. Račun onda daje za tu točku udaljenost od približno 10 polumjera Merkurovih od središta Merkura. Tamo je potencijal Merkura $0,0148\,\Phi_o$, a potencijal Sunca približno $36,4\,\Phi_o$ kao na Merkuru, tako da je ukupni potencijal približno isti kao na Merkuru, t. j. $36,4\,\Phi_o$. Da se u toj točci nalazi izvor svjetlosti, mi bismo na Zemlji morali vidjeti pomak prema crvenom koji odgovara razlici potencijala od $(36,4 - 15,1)\,\Phi_o = 21,3\,\Phi_o$, premda svjetlost dolazi od mjesta, gdje je polje jednako nuli.

Još je mnogo ekstremniji ovaj primjer. Znamo, da se brzom rotacijom mogu stvoriti vrlo znatna gravitaciona polja. Tako se u Svedbergovoj laboratorijskoj ultracentrifugi može na polumjeru od 4,2 cm uz brzinu rotacije od 145 000 okretaja u minuti stvoriti polje, koje je milijun puta jače od Zemljine sile teže, dakle polje od $10^6\,g$. U toj se centrifugi dešavaju vrlo zanimljivi fizički pojavi. Tako je primjerice moguća t. zv. »mehanoliza«, t. j. mehanička elektroliza. Na pr. u rastopini klorovodika HCl rastavljaju se pod djelovanjem toga golemog polja ioni klora i vodika. Nas ovdje zanima potencijal toga polja, koji je zbog linearnog porasta od osi prema opsegu centrifuge (u udaljenosti od 1 mm od osi polje je već jednako 24 000 g!) jednak produktu polumjera i polovice polja na opsegu (t. j. srednje vrijednosti polja uzduž polumjera), dakle $\Phi_C = 4,2\,\frac{10^6}{2}\,g = 2,1.10^6\,g$ ili, zbog $\Phi_o = 6,37.10^8\,g$,

$$\Phi_C = \frac{2,1.10^6}{6,37.10^8}\,\Phi_o = 3,3.10^{-3}\,\Phi_o,$$

t. j. potencijal polja na opsegu centrifuge veći je od potencijala u osi rotacije samo za $\frac{1}{300}$ potencijala Zemljine sile teže! Pomak prema crvenom, koji bismo opažali na svjetlosti emitiranoj na opsegu centrifuge i izbačenoj iz centrifuge, recimo nekim zrcalom, koje je smješteno u osovini, bio bi dakle oko 900 000 puta manji od onoga, koji daje svjetlost Sunca, premda je polje u centrifugi 36 000 puta jače od onoga na površini Sunca.

Iz ovoga svega se vidi, da za pomak spektralnih linija, odnosno za usporenje hoda satova, nije odlučna veličina gravitacionog polja, u kojem se nalazi izvor svijetla ili sat, nego samo potencijal gravitacije na tom mjestu.

Činjenica, da je smanjenje frekvencije svjetlosti na njezinu putovanju razmjerna s gubitkom kinetičke energije čestice, koja bi slobodno gravitirala, čini se kao slučajna i vrlo je čudnovata. U kvantnoj fizici pojavila se duboka veza između tih dviju veličina. Svjetlost, koju smo upoznali kao valni pojav, može se pod stanovitim uvjetima očitovati na način, kao da se radi o roju čestica (usporedi [20]). Te se čestice zovu kvanti svjetlosti ili fotoni. Svaki takav foton ima određenu energiju, koja ovisi o tome, kakvu frekvenciju ima dotična svjetlost, kad se manifestira kao valni pojav. Veza između energije fotona i frekvencije pripadnih valova svjetlosti glasi $E = h\nu$, gdje je h t. zv. Planckova konstanta ili Planckov kvant djelovanja. Ta konstanta u cgs-sustavu iznosi $h = 6,626.10^{-27}$.

Vidimo dakle, da te kvante moramo smatrati česticama, koje imaju izvjesnu energiju, a putuju brzinom svjetlosti. Čini se na prvi mah, da je to u protivurječju s teorijom relativnosti, koja tvrdi, da čestica ne može dostići brzinu svjetlosti, jer bi joj za to trebalo privesti neizmjernu energiju. No energija čestice ne ovisi samo o njezinoj brzini, nego i o njezinoj masi mirovanja m_o, po formuli $E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, koja izlazi iz (87) (VI, 7) i (94) (VI, 8). Možemo stoga zamisliti čestice, koje imaju sve veću brzinu, ali sve manju masu mirovanja, i to baš tako, da im energija bude svima ista. Kao granični slučaj dobit ćemo onda česticu, koja ima brzinu svjetlosti, ali masu mirovanja nula, tako da ipak ima samo konačnu energiju. Takvim graničnim slučajem čestice možemo smatrati kvant svjetlosti.

Gravitira li neka čestica slobodno u stacionarnom gravitacionom polju, ona će na svom putu, ako se, recimo, diže u gravitacionom polju, izgubiti neki iznos kinetičke energije, koji je u općoj teoriji relativnosti samo vrlo približno jednak mehaničkoj radnji potrebnoj za to dizanje. (U točnije obrazloženje toga ovdje ne možemo ulaziti.) To smanjenje $E - E'$ ukupne energije (t. j. energije mirovanja i kinetičke energije) neke bilo kakve čestice dano je formulom

(k) $$E - E' = E\left(1 - \sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}}\right),$$

koju ovdje ne možemo izvesti. Za česticu s početnom masom 1, dakle energijom c^2, to daje iznos $c^2\left(1-\sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}}\right)$, kako je već prije rečeno. Vidi se, da se u formuli (k) ne pojavljuje ni brzina ni masa mirovanja čestice, pa stoga ona mora vrijediti i za kvante svjetlosti, koje smatramo specijalnim slučajem čestica. Relacije $E = h\nu$, $E' = h\nu'$ onda smjesta daju formulu (a) za smanjenje frekvencije. To dakle znači, da je kvant svjetlosti dižući se u gravitacionom polju izgubio nešto energije (kao svaka druga čestica), i stoga se prema relaciji $E = h\nu$ smanjila frekvencija pripadnih valova svjetlosti, t. j. nastaje pomak spektralne linije prema crvenom.

Vrlo je značajno, da račun daje isti rezultat, shvatili mi svjetlost kao korpuskularni ili valni pojav. Relacija $E = h\nu$, koja je osnovna za čitavu kvantnu fiziku, ostaje strogo na snazi, kada se svjetlost širi u polju gravitacije, ako račun provodimo prema općoj teoriji relativnosti. Ovo je jak teoretski razlog u prilog te teorije.

[31] (str. 215). Zapravo bi val svijetla stigao opažača nešto kasnije, jer je ovaj međutim nešto odmaknuo. Točniji račun dao bi korekciju višega reda, a cijeli je račun i onako samo približan, jer je proveden na temelju klasične kinematike.

[32] (str. 215, 218). Vidi potanje u dodatku.

[33] (str. 218). Ovdje treba još nešto primijetiti. U razlaganjima o specijalnoj teoriji relativnosti vidjelo se, da svjetska crta prostorne prirode ostaje prostorne prirode u svim koordinatnim sustavima, koji se dobiju Lorentzovim transformacijama polazeći od bilo kojeg inercijalnog sustava, a isto tako crte vremenske prirode ostaju vremenske prirode kod takvog prijelaza. Kad bismo uveli sustav, koji se spram inercijalnog giba brzinom većom od svjetlosti, bila bi primjerice svjetska crta prostornog ishodišta novog sustava crta prostorne prirode u prvotnom sustavu, dok bi u novom sustavu dakako bila vremenske prirode. Osim toga u tom novom sustavu ne bismo mogli imati ni mjerila ni satova, pa ni opažača, koji bi relativno spram njega mirovali, jer se ta mjerila i satovi ne mogu dovesti na brzinu toga sustava. Ne bi se stoga u takvu sustavu mogla vršiti mjerenja i zato niti nije prikladan za fizička razmatranja.

U općoj teoriji relativnosti dopuštamo doduše bilo kakve koordinatne sustave, ali i tu želimo, da u dotičnom sustavu mogu mirovati mjerila, satovi i opažači, i da crte prostorne ili vremenske prirode ostanu takve kod prijelaza s jednog sustava na drugi. Time se veličinama $g_{11}, \ldots, g_{34}$ nameću izvjesna ograničenja. U sustavu, koji rotira spram inercijalnog sustava, ta su ograničenja ispunjena samo do udaljenosti $\frac{c}{\omega}$ od ishodišta, ako je ω kutna brzina rotacije. Izvan te udaljenosti koordinatni sustav nije više prikladan za opisivanje fizičkih procesa, pa bi se tu koordinatne crte morale drukčije nastavljati. Ovo je dakle razlog, zbog kojega se ne služimo koordinatnim sustavom,

koji rotira spram zvijezda stajačica, u udaljenostima, gdje se te zvijezde nalaze. Za točniju formulaciju spomenutih ograničenja vidi na pr. D. Blanuša: Kakva je geometrija na ploči, koja rotira? (Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Zagreb, T. 1 — 1946. — No. 3, str. 97—111, napose str 100).

[34] (str. 218). Ne misli se time, da je sama jakost polja u blizini Sunca povećana, nego samo to, da je djelovanje gravitacije na svjetlost veća od djelovanja na česticu s brzinom svjetlosti po klasičnom računu.

[35] (str. 219). Pretpostavlja se, da su brzine dovoljno velike spram sila privlačenja. Najjednostavniji je primjer, kad imamo samo dva tijela, na pr. Sunce i komet, koji može opisivati elipsu, parabolu ili hiperbolu, prema tome, kakva mu je brzina. Ako je brzina dovoljno velika, staza je parabola ili hiperbola, t. j. komet se više ne vraća, nego odlazi u neizmjernost.

[36] (str. 220). Ova je vrijednost sigurno daleko premalena, jer astronomi računaju udaljenost krajnjih, današnjim dalekozorima još dostupnih svemirskih maglica na okruglo 500 milijuna godina svjetlosti. Opširnije o tom pitanju vidi u dodatku.

[37] (str. 220). Praktički se zvijezda sa suprotne strane nikako ne bi mogla vidjeti, jer je opseg svemira sigurno tako golem, da je put svjetlosti oko svemira predugačak, da bi se zvijezda još mogla primijetiti. O tim pitanjima vidi pobliže u dodatku.

[38] (str. 221). Po današnjem našem znanju gravitacija bi bila daleko preslaba, da naboje elementarnih čestica drži na okupu. Vidi [23].

VREMENSKA TABLICA

Oko 300 pr. n. e.*) Euklid
Oko 150 „ „ „ Klaudije Ptolomej
98—54 „ „ „ T. Lukrecije Kar

1473—1543 Nikola Kopernik
1564—1642 Galileo Galilei
1571—1630 Johannes Kepler
1596—1650 René Descartes
1618—1663 Francesco Maria Grimaldi
1625—1698 Erazmo Bartolinus
1629—1695 Christian Huygens
1635—1703. Robert Hooke
1642—1727 Isaac Newton
1644—1710 Olaf Römer
1646—1716 Gottfried Wilhelm Leibniz
1692—1762 James Bradley
1698—1739 Charles François du Fay
1706—1790 Benjamin Franklin
1711—1765 Mihajlo Lomonosov
1711—1787 Ruđer Josip Bošković
1715—1787 William Watson
1724—1804 Immanuel Kant
1724—1802 Franz Ulrich Theodor Aepinus
1731—1810 Hon. Henry Cavendish
1733—1804 Joseph Priestley
1736—1806 Charles Augustin Coulomb
1736—1813 Joseph Louis Lagrange
1737—1798 Luigi Galvani
1745—1827 Alessandro Volta
1749—1827 Pierre Simon grof Laplace
1753—1815 William Nicholson
1768—1840 Anthony Carlisle
1773—1829 Thomas Young
1774—1862 Jean Baptiste Biot
1775—1840 André Maria Ampère
1775—1812 Étienne Louis Malus
1777—1851 Hans Christian Oersted
1777—1855 Karl Friedrich Gauss
1781—1840 Siméon Denis Poisson
1781—1868 David Brewster
1785—1836 Claude Louis Marie Henri Navier
1786—1853 François Arago
1786—1850 William Prout
1787—1854 Georg Simon Ohm
1788—1827 Augustin Fresnel
1789—1857 Augustin Louis Cauchy
1791—1841 Baptiste Felix Savart
1791—1867 Michael Faraday
1791—1860 Christian Karl Josias Bunsen
1791—1841 Felix Ampère
1793—1841 George Green
1793—1856 Nikolaj Lobačevski
1798—1895 Franz Neumann
1801—1892 Sir George Bidelt Airy
1802—1860 János Bolyai
1803—1853 Christian Doppler
1804—1890 Wilhelm Weber
1809—1847 James Mac Cullagh
1809—1858 Rudolf Kohlrausch
1811—1877 Urbain Jean Joseph Leverrier
1814—1878 Robert Mayer
1818—1889 James Prescott Joule
1819—1903 George Gabriel Stokes
1819—1868 Léon Foucault
1819—1896 Armand Hippolyte Louis Fizeau
1821—1894 Hermann von Helmholtz
1822—1888 Rudolf Clausius
1824—1908 William Thomson (Lord Kelvin)
1824—1887 Gustav Kirchhoff
1824—1914 Johann Wilhelm Hittorf
1826—1866 Bernhard Riemann
1831—1879 James Clerk Maxwell
1832—1919 Sir William Crookes
1834—1907 Dimitrije Mendeljejev
1838—1916 Ernst Mach
1844—1906 Ludwig Boltzmann
1845—1923 Wilhelm Conrad Röntgen
1848—1919 Roland barun Eötvös
1848—1901 Henry A. Rowland
1849—1925 Felix Klein

* n. e. = naša era

1850—1930 Eugen Goldstein
1850—1919 Woldemar Voigt
1851—1940 Sir Oliver Lodge
1852—1914 John Henry Poynting
1852—1931 Albert Abraham Michelson
1853—1928 Hendrik Antoon Lorentz
1854—1912 Henry Poincaré
1856—1940 Joseph John Thomson
1858—1947 Max Planck
1862—1947 Philip Lenard
1862—1943 David Hilbert
1863 Alexander Eichenwald
1864—1909 Hermann Minkovski
1865—1947 Friedrich Paschen
1865—1922 Heinrich Rubens
1866—1912 P. N. Lebedev
1868 Arnold Sommerfeld
1868 Gustav Mie
1870 Gordon Ferrie Hull
1871—1937 Ernest Rutherford
1871 Walter Kaufmann
1875—1922 Max Abraham
1879 Albert Einstein
1885 Niels Bohr
1887 Erwin Schrödinger
1893 Louis de Broglie
1901 Werner Heisenberg
1902 Paul Adrien Maurice Dirac

POPIS IMENA