ТЕХНИЧКА ВЕЛИКА ШКОЛА У БЕОГРАДУ

Thornton C. Fry, Ph. D.

ЕЛЕМЕНТАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Превео
З. МАМУЗИЋ
асистент Техн. вел. школе у Београду

Научна књига
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1948

Штампарија „И С К Р А", Београд, Таковска ул. 32, Телефон 21-211

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник, који се развијао кроз неколико мимеографисаних издања Ванредних течајева Белових телефонских лабораторија, првенствено је намењен студентима технике и њој сродних наука.

За такве су слушаоце техничке примене и илустрације од највећег значаја, јер оне потстичу живо интересовање и продубљују значење апстрактних математичких идеја које би иначе могле остати доста нејасне. Међутим, ако се оне примењују неразборито, нису без опасности; јер, ако би се студент ослањао на своју физичку интуицију више као на замену за апстрактну логику него као на помоћ за њу, изгубио би половину користи од учења. Он би заиста могао постићи знатан степен умешности у руковању математичким апаратом, али би му недостајало оно дубље разумевање принципа који чине граничну линију између механичара и инжењера.

Да би се избегла ова могућна опасност, већина илустративног материјала у овом уџбенику сакупљена је у засебна поглавља. Овај распоред не само да допушта непрекидно развијање математичких идеја, већ такође дозвољава укључивање много више примера него што би то иначе било практично. Можда ће слобода избора, обезбеђена са овако много материјала, бити од мале вредности за наставника који ће, вероватно, своје илустрације опширно узимати из предмета за који се тренутно највише интересује, па било да се он налази у уџбенику или не; али су Ванредни течајеви показали да то има и другу вредност, а то је што бољи студенти развијају спонтано интересовање за ове илустрације чак када им се то и не задаје, и баве се њима по сопственој иницијативи. Нема потребе да се нарочито наглашава васпитна вредност таквог самоиницијативног труда.

У коначној ревизији књиге много су ми користила упутства L. A. MacColl-a и G. G. Muller-a, чланова Белових телефонских лабораторија, који су руководили Ванредним течајевима из овог предмета, и J. H. M. Wedderburn-a, професора Универзитета Princeton, који је прочитао рукопис и дао низ драгоцених сугестија. Такође ми је у многоме помогла Clara L. Froelich, члан Белових телефонских лабораторија, која је, између осталог, припремила цртеже којима је књига илустрована, дала одговоре на задатке и вршила коректуру.

Њујорк
1 фебруара 1929.

Thornton C. Fry

ОД ПРЕВОДИОЦА

Ова је књига преведена на српски језик с намером да се слушаоцима Техничке велике школе пружи елементаран увод у диференцијалне једначине. Поред већ постојеће домаће литературе из ове области математике, надамо се да ће у ту сврху, као помоћни уџбеник, добро послужити и ова књига. Јасно писана, елементарна извођења илустрована су разноврсним примерима из геометрије, физике и технике, а нарочито из електротехнике. Сем тога, излагања су пропраћена задацима за вежбање и на крају књиге дата решења.

Уз она места у тексту где је било неопходно, с преводом су местимично дате и напомене. Можда у превођењу није баш увек на нашем језику изабран одговарајући тачан израз за појмове који се јављају у примерима из технике и електротехнике, но преводилац верује да ће стручњак приликом читања и сам учинити подеснији избор.

Преводилац је настојао да очува ауторов стил писања и „слободнијем“ превођењу приступао је само онда када је ово сматрао неизбежним. Зато је и задржао — не баш срећно изабран — израз „припада ка“ за који, уосталом, и сам писац даје објашњење. Читалац ће, свакако, и сам запазити да је код линеарних диференцијалних једначина вишег реда, израз „решење које припада функцији $f(x)$“ — еквивалентан код нас уобичајеном изразу „решење нехомогене једначине“, а да је израз „решење које припада нули“ — еквивалентан код нас уобичајеном изразу „решење хомогене једначине“, — при чему је $f(x)$ функција која се налази на десној страни нехомогене линеарне диференцијалне једначине. Сем тога, за хомогену линеарну диференцијалну једначину добивену из нехомогене кад се место $f(x)$ на десној страни једначине стави нула читалац ће наићи на назив „комплементарна једначина“, а за њено решење наићи ће или на назив „решење комплементарне једначине“ или пак на назив „комплементарно решење“. Најзад, изостављено је неколико реченица које немају непосредне везе са излагањем теорије диференцијалних једначина.

Превођење је вршено са трећег штампања (октобар, 1930) првог издања (фебруар, 1929) оригинала са насловом „Elementary Differential Equations“.

Новембар, 1948 год.
Београд

З. М.

САДРЖАЈ

ГЛАВА V

СИНГУЛАРНА РЕШЕЊА

ГЛАВА VI

ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

ГЛАВА VII

ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА

ГЛАВА VIII

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

ГЛАВА IX

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА

ЕЛЕМЕНТАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

ГЛАВА I

УВОД

§ 1. Претходне дефиниције

Ма која функција неког скупа промењљивих и њихових извода је *диференцијални израз*, а ма која једначина која садржи диференцијални израз је *диференцијална једначина*. Ако једначина садржи изводе само по једној промењљивој, она се зове *обична диференцијална једначина*, иначе је *парцијална диференцијална једначина*. У оба случаја, промењљиве по којима је извршено диференцирање јесу *независно промењљиве*, а оне чији су изводи узети — *зависно промењљиве*. Међутим, последња два израза, ма да неопходна када се говори или када се пише о диференцијалним једначинама, претстављају донекле вештачку разлику, јер, увек је могућно да се диференцијални израз трансформише тако да се неке од промењљивих које су најпре биле независне појаве као зависно промењљиве и обрнуто.

Ред диференцијалне једначине је ред највишег у њој садржаног извода. Тако, ред једначине

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + 2\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^4 = 0 .$$

је 3.

Степен[1]) диференцијалне једначине је изложилац извода највишег реда који се јавља у једначини, потпуно рационализованој и ослобо-

---

[1]) Диференцијална једначина n-тог реда је степена s ако се може довести на облик

$$\left(\frac{d^n y}{d x^n}\right)^s + \left(\frac{d^n y}{d x^n}\right)^{s-1} f_1 + \cdots\cdots + \frac{d^n y}{d x^n} f_{s-1} + f_s = 0 ,$$

где су f_i, $i = 1, 2, \ldots\ldots, s$, рационалне функције аргумената y, $\frac{d y}{d x}$, $\ldots\ldots$, $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}$, са коефицијентима који могу бити ма какве функције од x. Према овоме се, на пример, не би могло говорити о степену диференцијалне једначине

$$\cos\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^3 + e^{\frac{d^2 y}{d x^2}} + \frac{d y}{d x} + x = 0 ,$$

то јест, не мора свака диференцијална једначина имати степен. — Прев.

ђеној од разломка. Тако, степен горње једначине је 1, јер изложилац од $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}$ је 1. С друге стране, степен од

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \sqrt{1 + y^2 + \frac{d y}{d x}}$$

је 2; јер, када се ослободимо корена, $\frac{d^2 y}{d x^2}$ се јавља на другом степену.

За обичну диференцијалну једначину каже се да је *линеарна* ако је првог степена у односу на зависно променљиву и све њене изводе. Ако садржи само једну зависно променљиву, таква се једначина увек може написати у облику

$$f_n(x) \frac{d^n y}{d x^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + f_1(x) \frac{d y}{d x} + f_0(x)\, y = \phi(x) .$$

У специјалном случају када су све функције f константе, за ову се једначину каже да је линеарна са константним коефицијентима. Она је најважнији тип обичне линеарне једначине јер се среће у многим физичким проблемима, нарочито оним у којима се има посла са осцилаторним системима. Од веома велике важности је у теорији електричне струје. Други специјални тип обичне линеарне једначине, звана Кошијева линеарна диференцијална једначина, је она у којој је коефицијент сваког извода производ константе и једног степена основе x, са изложиоцем једнаким реду тога извода.

У случају да се за дефинисање скупа везаних зависно променљивих употреби више диференцијалних једначина каже се за ту групу да претставља *систем диференцијалних једначина*. Тако је

$$\left.\begin{aligned} x^2 \frac{d y}{d x} + \frac{d z}{d x} &= 2 , \\ \frac{d y}{d x} - x \frac{d z}{d x} &= e^x , \end{aligned}\right\}$$

систем од две обичне линеарне диференцијалне једначине првог реда и првог степена са променљивим коефицијентима.

Ма за коју функционалну везу између променљивих каже се да је *решење* једначине ако идентички задовољава диференцијалну једначину.

Тако је

$$\frac{d y}{d x} - 2 x y = 0 \tag{1}$$

диференцијална једначина чије је решење

$$y = e^{x^2} ; \tag{2}$$

јер, ако се ова вредност за y замени у (1), добива се идентичност:

$$2 x e^{x^2} - 2 x e^{x^2} = 0 .$$

Овде је случај да је (2) „решење по y изражено помоћу x“ у смислу у коме се та реченица употребљава у алгебри: то јест, y претставља једну страну једначине чија се друга страна састоји од познатих елементарних функција од x. Али, са гледишта теорије диференцијалних једначина, није неопходно да се та веза јавља у овом облику. Уствари, једначина

$$\frac{\log y}{x} - x = 0 , \tag{3}$$

звала би се такође решење од (1), ма да у алгебарском смислу она није „решена“ ни по y ни по x.

Стога се у теорији диференцијалних једначина израз „решење“ употребљава у општијем смислу него у алгебри. Зашто се захтева ова општија дефиниција, може се разјаснити једним примером. Једначина

$$x \frac{d y}{d x} - \sin x = 0 , \tag{4}$$

очигледно је еквивалентна са

$$\frac{d y}{d x} = \frac{\sin x}{x} .$$

Наравно, следи да је решење интеграл од $\frac{\sin x}{x}$. Али, ма да се ово решење може написати у облику

$$y = \int \frac{\sin x}{x}\, d x , \tag{5}$$

оно се не може изразити помоћу елементарних функција[1]), изузев помоћу бесконачног реда или томе слично. Зато, ако би се реч „решење“ ограничила на њено алгебарско значење, довело би то до закључка да (4) нема решења. Овај би закључак произилазио не из чињенице да (5) не дефинише адекватно y као функцију од x, већ из чињенице да постоје интеграли који се не могу изразити у облику који захтева алгебра; а ово је опет последица више или мање произвољног избора оних функција које се означавају као „елементарне“. Укратко, изгледа разборитије да се израз „решење“ прошири како би се обухватила свака функционална веза између зависно и независно променљивих која не садржи њихове изводе и идентички задовољава диференцијалну једначину. Ово је садржина горе дате дефиниције.

---

[1]) Израз „елементарне функције“ односи се на оне функције које се обично сретају у алгебри и тригонометрији, укључујући логаритме и степене.

§ 2. Смена променљивих у диференцијалним изразима

Многи се диференцијални изрази могу веома упростити смењивањем једне од променљивих неком функцијом једне или више од њих. Често се дешава да се неки израз после трансформација може интегрирати непосредно разгледањем или неком раније развијеном методом. У случају да се такав диференцијални израз налази у диференцијалној једначини, овај поступак може довести до решења једначине: чињеница је да се многе важне „класичне методе решавања“ могу тако растумачити. Зато се проучавање диференцијалних једначина може заправо почети кратким прегледом технике смене променљивих.

Посматрајмо произвољну функцију променљивих x и y и узастопне изводе од y по x. Можемо је означити са

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots),$$

где су $y', y'', \ldots$ кратко означени изводи $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ Ма како да је компликован, овај се израз може трансформисати увођењем нове променљиве место једне од старих, под условом да се тако исто може трансформисати сваки од аргумената $x, y, y', y'', \ldots$

Претпоставимо да зависно променљиву y треба сменити новом променљивом w, везаном са x и y познатом једначином

$$F(x, y, w) = 0. \tag{6}$$

У овом је случају поступак сасвим једноставан. Треба само решити (6) по y тако да се добије веза облика

$$y = \phi(x, w),$$

а затим сменити $y, y', y'', \ldots$ са ϕ и изразима који се добивају из ϕ поновљеним диференцирањем по x. Како функција ϕ не садржи y, то ниједан од њених извода по x неће садржати y, те стога после извршених замена ниједно y неће остати у диференцијалном изразу.

Посматрајмо, као пример, диференцијални израз

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y. \tag{7}$$

Да се y смени новом променљивом w, везаном за x и y једначином

$$x^2 y - w = 0,$$

потребно је само наћи y и његова два прва извода изражена помоћу x и w. Међутим је

$$y = \frac{w}{x^2}, \tag{8}$$

па отуда непосредним диференцирањем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{dw}{dx} - \frac{2w}{x^3};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{4}{x^3}\frac{dw}{dx} + \frac{6}{x^4}w.$$

Заменом ових вредности у (7) цео се израз своди на $\dfrac{d^2w}{dx^2}$.

У случају да се *израз* (7) изједначи са нулом, произилази *једначина*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0. \tag{8}$$

Ако би читалац имао да реши ову једначину а располаже само са средствима која пружа интегрални рачун, нашао би се у неприлици како да поступи. Али, када се изврши замена (8), решење постаје одједном очигледно. Уствари, једначина (9), изражена помоћу w, добива облик

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 0,$$

чије је решење

$$w = \alpha x + \beta, \tag{10}$$

где су α и β ма какве константе. Сменом променљиве w у (10) њеном вредношћу $x^2 y$ решење једначине (9) одмах се добива у облику

$$y = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}.$$

Желимо ли да уведемо нову променљиву w место *независно* променљиве x, поступак је нешто сложенији, ма да још увек савршено јасан. Решимо једначину (6) по x и нека је решење

$$x = \Psi(y, w). \tag{11}$$

Диференцирање овог израза по w даје

$$\frac{dx}{dw} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{dw} + \frac{\partial \Psi}{\partial w}.$$

Цела је ова количина функција од само три аргумента y, w и $\dfrac{dy}{dw}$, јер $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial \Psi}{\partial w}$ не садрже x. Ради једноставности у писању означимо је са f. Тада је $dx = f\,dw$, па стога

$$y' = \frac{1}{f}\frac{dy}{dw}. \tag{12}$$

Десни члан једначине (12) не садржи x експлицитно, па су зато једначине (11) и (12) заједно довољне да се елиминише x било из којег диференцијалног израза који не садржи изводе од y реда вишег од првог. Ако има и извода вишега реда, треба само наставити исти поступак. Тако, количина којом треба да се смени y'', може се наћи напомињући да је

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{1}{f} \frac{d}{dw} y' = \frac{1}{f} \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{f} \frac{dy}{dw} \right).$$

Уопште је

$$y^{(n)} = \frac{1}{f} \frac{d}{dw} \frac{1}{f} \frac{d}{dw} \cdots \frac{1}{f} \frac{dy}{dw}, \tag{13}$$

где се ознака $\frac{1}{f} \frac{d}{dw}$ понавља n пута узастопно. Овај се израз често пише у скраћеном облику

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{f} \frac{d}{dw} \right)^{(n)} y.$$

Ма да једначине (12) и (13) изгледају можда веома сложене, ипак су њима претстављени поступци често веома једноставни. Као обрасци оне нису од важности, јер, ако је метода једном правилно схваћена, уопште је простије и брже да се потребне радње изводе него да се примењују сами обрасци.

На пример, посматрајмо поново израз (7) и нека

$$x = e^w \tag{11'}$$

буде веза између x, y и w која одговара једначини (6) опште теорије, — исто онако као што је била једначина $x^2 y - w = 0$ у претходном примеру. Како је већ решена по x, она такође одговара једначини (11). Њен извод по w је

$$\frac{dx}{dw} = e^w$$

или, према општој дискусији, $dx = f\,dw$, где f у овом случају значи e^w. Отуда

$$y' = e^{-w} \frac{dy}{dw}, \tag{12}$$

и

$$y'' = e^{-w} \frac{d}{dw} e^{-w} \frac{dy}{dw} = e^{-2w} \left(\frac{d^2 y}{dw^2} - \frac{dy}{dw} \right). \tag{13}$$

Помоћу ових, (7) постаје

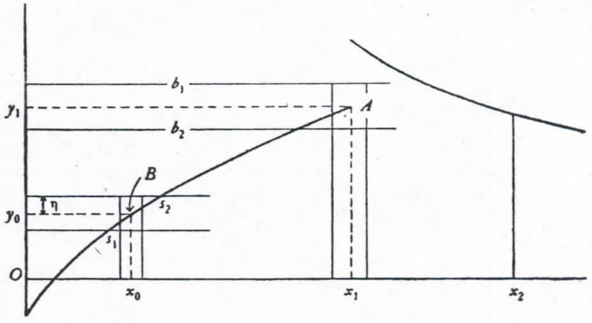
$$\frac{d^2 y}{dw^2} + 3 \frac{dy}{dw} + 2y, \tag{7'}$$

чији се облик разликује од (7) тиме што су коефицијенти извода константни.

У низу проблема наведених у овом и следећим поглављима имаћемо посла са типом израза коме припада (7), то јест са Кошијевим линеарним једначинама. Сви скупа они показују да се такве једначине увек могу свести на облик (7), у коме су сви коефицијенти константни, и да, кад се год може решити последњи тип, може се решити и први.

§ 3. Непрекидност[1]

За криву на сл. 1 каже се да је прекидна у A а непрекидна у B. Да су ови изрази подесни очигледно је са гледишта здравог разума, али је потребна егзактнија формулација њихових значења пре него што се могу употребити у математичке сврхе.



Сл. 1

Посматрајмо најпре тачку B чије су координате x_0 и y_0 и повуцимо пар хоризонталних правих на растојању $y_0 + \eta$ и $y_0 - \eta$. Ове отсецају на кривој кратак отсечак $s_1 s_2$. Очигледно је да се може повући пар вертикалних правих од којих једна између x_0 и s_2, а друга између s_1 и x_0, тако да у интервалу између њих крива стално лежи међу хоризонталама $y_0 + \eta$ и $y_0 - \eta$.

Ако се изабере друга вредност за η, мања од прве, тачке s_1 и s_2 примаћи ће се ближе једна другој, па може бити потребно да се и вертикалне праве примакну ближе једна другој; али, још увек остаје тачно тврђење да постоји неки коначан интервал око x_0 у коме крива не излази нигде изван пара хоризонталних правих.

Међутим, ово тврђење није тачно за тачку A ако су хоризонтале изабране онако као b_1 и b_2; јер, ма како мали интервал узели око x_1, део криве десно од A лежаће изван пара хоризонтала.

Очигледно је сада да разлог нетачности тврђења за тачку A јесте у томе што крива није непрекидна у A, а ово нас доводи да усвојимо следећу дефиницију непрекидне криве:

---

[1] Питања која се расправљају у преосталим одељцима ове главе само су у посредној вези са диференцијалним једначинама. Она су ту скупљена да касније не би било потребно прекидати главно доказивање када нађемо за потребно да се на њих позовемо.

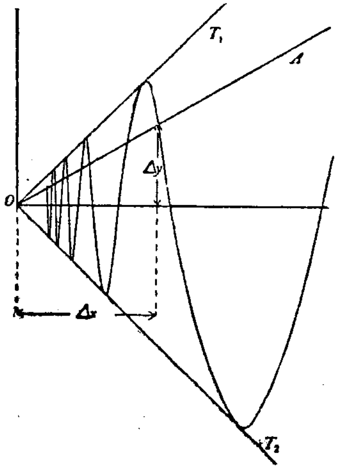
За криву се каже да је непрекидна у x_0 ако је за дату вредност η, могућно наћи интервал око x_0 у коме ордината нигде не одступа од своје висине у x_0 за величину већу од η, ма како мало било η.

Иста се идеја може исказати помоћу функције коју претставља крива. Она тада добива облик: *y је непрекидна функција од x у $x = x_0$, ако се за дати број η, може наћи број ε тако да, у интервалу између $x_0 - \varepsilon$ и $x_0 + \varepsilon$, вредност y остаје стално у границама $y_0 - \eta$ и $y_0 + \eta$, ма како мало било η.* Ако ово тврђење није испуњено, функција је прекидна.

Приметићемо да се непрекидност дефинише као особина криве не као целине већ посебних тачака на њој. Међутим, једноставна је ствар да се идеја нешто прошири и каже: *ако је крива непрекидна у свакој тачки отсечка који лежи између двеју апсциса x' и x'', она је непрекидна у овим границама.* Слично, функција $f(x)$ претстављена кривом непрекидна је у интервалу $x' x''$. Тако крива на сл. 1 је непрекидна између 0 и x_1 и између x_1 и x_2. Али, она није непрекидна између 0 и x_2, јер је прекидна у тачки x_1 која лежи у том интервалу.

§ 4. Диференцијабилност

У проучавању диференцијалног рачуна читалац се опширно бавио формалним процесима којима се диференцирају функције и уопште је поступао под претпоставком да извод постоји и да се може наћи подесним рачуном. Међутим, претпоставка да извод постоји није упек оправдана, као што се може показати навођењем примера у коме он не постоји.



Сл. 2

Функција $y = x \sin \frac{1}{x}$ претстављена је кривом на сл. 2. Њена вредност за $x = 0$ нешто је неизвесна али се може произвољно дефинисати као 0, што функцију чини непрекидном. Да се нађе извод у овој тачки, мора се апсциси x дати прираштај Δx и са Δy означити прираштај који, према томе, добива функција, као што је показано на слици; ове вредности одређују тачку A. Када се Δx све више и више смањује, A се помера према почетку дуж криве. Према дефиницији, тражени извод је граница од $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ када се пусти да Δx тежи 0. Али, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ је коефицијент правца праве OA која осцилује горе доле између правих OT_1 и OT_2 када се Δx смањује. Ово се осциловање наставља ма како мало било Δx. Јер, ма како мало било растојање од почетка, постоје тачке

у којима крива додирује OT_1, и тачке у којима она додирује OT_2. Стога се коефицијент правца креће од $+1$ до -1 и назад (ово су коефицијенти праваца правих OT_1 и OT_2), при чему се овај процес понавља с времена на време, не приближујући се никаквој граници. Зато не постоји граница од $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ када Δx тежи нули: то јест, у координатном почетку не може се наћи вредност за $\frac{dy}{dx}$.

Ако покушамо да нађемо извод ма у којој другој тачки криве, сечица ће коначно прекинути осциловање када се Δx смањује и на крају ће се приближити тангенти на криву као граници. Зато функција има извод за сваку вредност x сем за $x = 0$, а за ову вредност не постоји извод.

Очигледно је зато да постоје функције које се не могу диференцирати. У § 11 видећемо да се због овога извесни проблеми диференцијалних једначина не могу решити.

§ 5. Обвојнице

Посматрајмо једначину облика $f(x, y, c) = 0$ у којој је c нека константа којој се вредности могу давати по вољи. За сваку вредност ове константе функција дефинише неку криву. Према томе, та једначина претставља породицу кривих.

Постоје извесне особине ове породице кривих које се одмах могу установити. На пример, број кривих које пролазе ма кроз коју тачку (x_1, y_1) једнак је броју вредности c које задовољавају једначину $f(x_1, y_1, c) = 0$. Ако је ова једначина n тог степена по c, имаће она n корена. Једноставности ради зваћемо их „бројеви c који припадају тачки (x_1, y_1)“. Сваком од ових бројева c одговара нека крива која пролази кроз тачку (x_1, y_1).

У општем случају су сви ови корени једначине различити. Ако је тако, онда су свих n кривих различити чланови породице. Међутим, у изузетним случајевима једначина може имати једнаких корена и тада се иста крива мора урачунавати двапут. Природно, ови изузетни случајеви долазе од нечег необичног код породице кривих. Наш је циљ у овом одељку да проучимо ове изузетне случајеве од којих су неки од важности за проучавање диференцијалних једначина. Међутим, пре него што можемо ићи даље, морамо имати некакву методу разврставања појединих тачака у којима се јављају једнаки бројеви c.

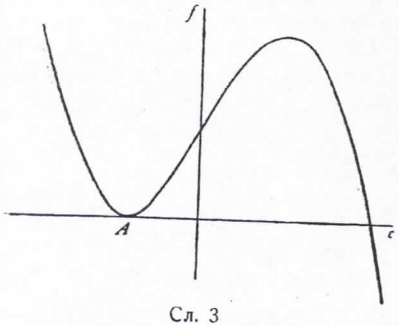
Да бисмо извели такву методу, претпоставићемо да је изабран ма какав пар вредности (x_1, y_1) без икаквог позивања на то да ли он даје једнаке бројеве c или не. Тада функцију $f(x_1, y_1, c)$ можемо сматрати као функцију од c, добивајући на овај начин неку криву као што је ова на сл. 3.

Где год ова крива пресеца осу c, задовољена је веза $f(x_1, y_1, c) = 0$; то јест крива на сл. 3 сече осу c баш за оне бројеве c који припадају спрегу вредности (x_1, y_1). Ови бројеви c су сви различити, изузев ако се деси, као у тачки A на сл. 3, да крива додирује осу c; тада се јављају вишеструки корени. Али, када крива додирује осу c, тада не само да је

$$f(x_1, y_1, c) = 0,$$

него исто тако је и

$$\frac{\partial}{\partial c} f(x_1, y_1, c) = 0.$$



Сл. 3

Елиминисањем c из ових двеју једначина можемо добити извесну везу између x_1 и y_1 која мора бити задовољена где се год јављају једнаки c. Означимо ту везу са $F(x_1, y_1) = 0$. Тада одмах можемо рећи да се једнаки c могу појавити у тачки (x_1, y_1) само онда ако она лежи на кривој $F(x, y) = 0$, чија се једначина налази елиминисањем c из једначине $f(x, y, c) = 0$, која дефинише нашу породицу кривих, и једначине

$$\frac{\partial}{\partial c} f(x, y, c) = 0,$$

која се добива када се $f = 0$ диференцира по c.

На пример, посматрајмо породицу кривих дефинисану једначином

$$(y - c)^2 - (x + c)^3 = 0. \tag{14}$$

Како је она трећег степена по c, то постоје уопште *три* различите криве из ове породице које пролазе ма кроз коју тачку (x_1, y_1). Да бисмо пронашли изузетне тачке у којима се јављају једнаки c, диференцираћемо (14) по c и добићемо:

$$-2(y - c) - 3(x + c)^2 = 0. \tag{15}$$

Из ове једначине налазимо да је

$$(y - c)^2 = \frac{9}{4}(x + c)^4, \tag{16}$$

па, комбинујући ову са (14), добивамо нову једначину

$$\left[\frac{9}{4}(x + c) - 1\right] \cdot (x + c)^3 = 0.$$

Решења ове једначине су $c = -x$ и $c = \frac{4}{9} - x$, која, када се смене у (15), дају[1]) редом[2])

$$y + x = 0$$

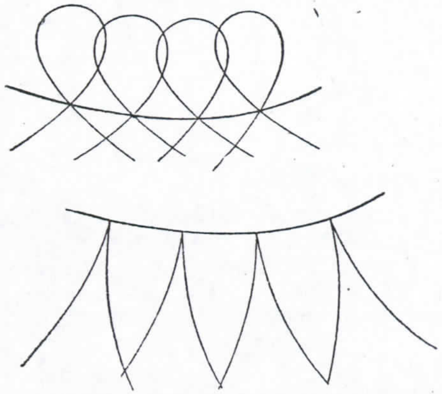
и

$$y + x = \frac{4}{27}.$$

Следи, дакле, да се једнаки c могу наћи само на пару правих које одређују ове једначине.

Нашавши сада методу издвајања тачака којима припадају једнаки c, припремљени смо за повратак нашем полазном питању да одредимо каквим необичностима наше породице кривих може бити проузроковано ово необично стање.

Једна је готово очигледна. Ако крива пресеца саму себе, као што то чине оне у горњем делу сл. 4, мора се сматрати да она двапут пролази кроз тачку пресека. Стога се морају појавити једнаки c у свима таквим двојним тачкама.[3]) Очигледно, на тачност овог тврђења не утиче величина петљи. Ако их, дакле, пустимо да се смањују док не ишчезну, производећи на тај начин *повратне тачке* показане у доњем делу сл. 4, бићемо доведени дотле да очекујемо једнаке c и у свима таквим повратним тачкама.



Сл. 4. Геометриско место двојних и повратних тачака

Ови су закључци непосредно очигледни. Међутим, постоји и трећа околност која је узрок појави једнаких c, а како је она далеко важнија

---

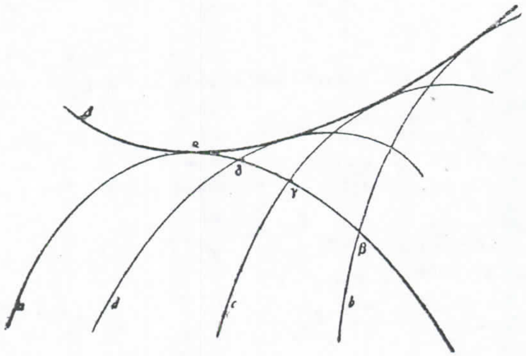
[1]) Ако би се вредности за c смениле у (14), добила би се још једна једначина $y + x = \frac{20}{27}$. Ма да је ова део решења једначина (14) и (16) она није решење једначина (14) и (15), те стога није од значаја за наш проблем. Она је унета у резултат када је (15) дигнуто на квадрат да би се добило (16).

[2]) Ове *две* једначине могу се комбиновати у *једну* која је тада аналогна горе употребљеној једначини $F(x, y) = 0$. Јер, кад је год $y + x$ или $y + x - \frac{4}{27}$ нула, њихов производ је такође нула и обрнуто. Зато, обе заједно можемо писати у облику

$$F(x, y) = (x + y)\left(y + x - \frac{4}{27}\right) = 0.$$

[3]) Тачка у којој крива пресеца саму себе зове се *двојна тачка* или *чвор*.

са гледишта диференцијалних једначина, мораћемо је расмотрити нешто подробније. Ова се околност јавља када су криве те породице таквог положаја, — као што је случај са породицом на сл. 5, — да је могућно повући криву A, коју, у свакој њеној тачки, додирује једна крива из породице. Таква се крива зове „обвојница“ породице



Сл. 5. Обвојница

Једноставности ради претпоставићемо да је породица дефинисана једначином $f(x, y, c) = 0$ другог степена по c, тако да само две криве пролазе кроз сваку тачку. Обратићемо такође пажњу на једну посебну криву a и забележићемо тачку α у којој она додирује обвојницу. Изаберимо тада низ тачака $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, на кривој a, од којих је свака ближа тачки α од претходне. Свакој од ових тачака као и свима другим тачкама равни, одговарају по две вредности c: ове одређују две криве које пролазе кроз уочену тачку. Ма коју тачку изабрали, једна од ових кривих је, очигледно, сама крива a. Остале су криве различите за различите тачке. Цртајући их, формирамо скуп кривих $b, c, d, \ldots$, од којих свака пролази кроз једну од тачака $\beta, \gamma, \vartheta, \ldots$

Очигледно је да је свака од ових кривих све ближи сусед кривој a, па је исто тако њој одговарајући број c све приближније једнак броју c који одговара кривој a. Уствари, довољно блиским померањем тачке пресека према α, суседна крива може бити нанесена толико близу кривој a колико се жели. Зато, прелазећи на границу када се тачка пресека поклопи са α, овим процесом одабрана крива постаје идентична са кривом a: две криве кроз α постају стога исте и две вредности од c се изједначују. Зато свакој тачки обвојнице A одговарају две једнаке вредности c које припадају оној кривој која додирује криву A у тој тачки.

Стога као закључак можемо рећи да $f(x, y, c) = 0$ претставља породицу кривих, и то за сваку вредност c по једну криву и да, елиминишући c из ове једначине и једначине $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$, добивамо геометриско место свих тачака којима припадају једнаке вредности c. Ово се геометриско место тачака може састојати из три типа кривих:[1]

---

[1] Напоменућемо да горе датом класификацијом геометриских места тачака, које се добивају елиминисањем c из једначина $f(x, y, c) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$, нису исцрпене све могућности. Сем поменутих, може да се добије једначина и других места тачака. — Прев.

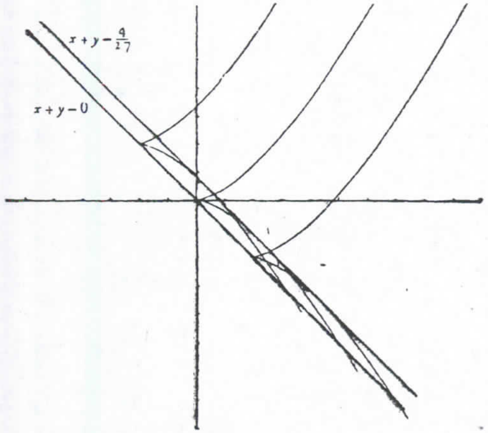
1. Криве које пролазе кроз све двојне тачке скупа $f(x, y, c) = 0$; ове се зову *места двојних тачака.*

2. Криве које пролазе кроз све повратне тачке скупа $f(x, y, c) = 0$; ове се зову *места повратних тачака.*

3. Криве које у свакој тачки додирују неког члана скупа $f(x, y, c) = 0$; ове се зову *обвојнице.*

Указаћемо још и на следеће: како су ове криве места једнаких c, то се оне могу појавити само ако бар две криве скупа пролазе кроз сваку тачку; међутим, како је број кривих кроз једну тачку једнак степену једначине по c која дефинише породицу кривих, то следи да породица може имати обвојницу, само ако је њена једначина бар другог степена по c.

Као први пример, посматрајмо породицу кривих претстављену једначином (14). Оне су, очигледно, семикубне параболе са повратним тачкама $(-c, +c)$. Како све ове тачке леже на правој $x + y = 0$, то је ова права геометриско место повратних тачака и могла би се добити малочас објашњеним поступком. Међутим, видели смо већ да је $x + y = 0$ заиста једна од правих дуж које треба очекивати једнаке бројеве c. Друга права једнаких c, $x + y = \frac{4}{27}$, јесте обвојница доњих грана кривих, као што је очигледно из сл. 6.



Сл. 6. Породица кривих са геометриским местом повратних тачака и обвојницом

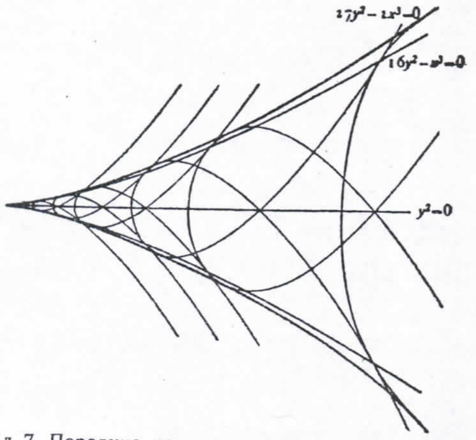
Као други пример, посматрајмо једначину

$$y^2 = (x - c)(x - 2c)^2. \qquad (17)$$

Диференцирајући је по c и решавајући резултујућу једначину, налазимо да c мора бити $\frac{1}{2}x$ или $\frac{5}{6}x$.

Резултати смене ових вредности у једначини (17) јесу $y^2 = 0$ и $27y^2 - 2x^3 = 0$.

Геометриско место тачака прве од ових једначина је оса x, која је место двојних тачака. Друга једначина дефинише семикубну параболу која је обвојница породице кривих. Породица је показана на слици 7.[1])



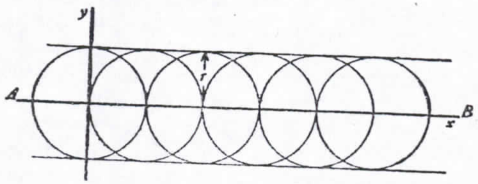
Сл. 7. Породица кривих са геометриским местом додирних тачака, двојних тачака и обвојницом

Најзад, посматрајмо породицу кругова

$$(x-c)^2+y^2-r^2=0. \quad (18)$$

који имају исти полупречник r, али чија су средишта распоређена дуж осе x, као што је показано на сл. 8. Очигледно је да праве $y=r$ и $y=-r$ сачињавају обвојницу и да не постоје повратне нити двојне тачке. Зато би решавање једначине (18) заједно са њеним изводом по c требало да нам да ове две праве и ништа друго. Диференцирање по c даје $x-c=0$, а замена ове вредности у (18) даје $y^2-r^2=0$. Ово је уствари предвиђена веза.

Најзад, потребна је још једна напомена. Досад смо говорили само о случајевима у којима је број различитих c коначан. Међутим, главни резултати овог излагања подједнако су у важности и када је њихов број бесконачан. Посматрајмо, на пример, породицу синусоида



Сл. 8 Породица кривих са геометриским местом додирних тачака и обвојницом

$$y-\sin c x=0.$$

Ма кроз коју тачку пролази овде бесконачно много кривих. Но диференцирање по c и елиминисање c води обвојници $y=\pm 1$.

ЗАДАЦИ

1. Сменити y у изразу

$$\frac{d^2 y}{d x^2}+\frac{2}{x} \frac{d y}{d x}+y$$

са $w=x y$.

---

[1]) Постоји такође и друга крива $16 y^2-x^3=0$, на коју ћемо се позвати касније.

2. Сменити y у једначини

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2}-\frac{x^2}{2 y}\left(\frac{d y}{d x}\right)^2+4 x \frac{d y}{d x}+4 y=0$$

са $w=\sqrt{y}$. Можете ли добити решење ове једначине упоређујући је са првим примером **у тексту?**

3. Сменити y у једначини

$$\frac{d y}{d x}+c y=a$$

са $w=e^{cx} y$. Шта је решење ове једначине?

4. Сменити r у једначини

$$\frac{d^2 \theta}{d r^2}+\frac{1}{r} \frac{d \theta}{d r}+k^2 \theta=0 \qquad \text{(Беселова једначина).}$$

са e^t.

5. Сменити θ у једначини

$$\frac{d}{d \theta}\left(\sin \theta \frac{d P}{d \theta}\right)+m P \sin \theta=0 \qquad \text{(Лежандрова једначина).}$$

са $x=\cos \theta$.

6. Сменити y у једначини

$$\frac{d y}{d x}=\frac{1}{x} \sqrt{1-y^2} \arcsin y$$

са $w=\arcsin y$.

7. Диференцирати (3) и решити по $\frac{d y}{d x}$. Показати сменом ове вредности у (1) да је (3) заиста решење једначине (1).

8. Ако је $x=e^w$ и $z=e^{-nw} \frac{d^m y}{d w^m}$, наћи $\frac{d z}{d x}$ изражено помоћу w и y.

9. Доказати математичком индукцијом да се, ако је $x=e^w$, величина $x^n \frac{d^n y}{d x^n}$ може свести на облик

$$a_n \frac{d^n y}{d w^n}+a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d w^{n-1}}+\cdots+a_1 \frac{d y}{d w}+a_0 y,$$

где су бројеви a константе.

(Доказ математичком индукцијом састоји се из два корака: 1) доказ да је тврђење тачно за једну вредност n; 2) ако је тачно *ма за коју* вредност n, доказ да је оно тачно и за *следећу вишу* вредност. Тада следи да је тврђење тачно било за које n до кога се може доспети бројањем почев од један, за које је оно посебно доказано).

10. Израз облика

$$b_m x^m \frac{d^m y}{d x^m}+b_{m-1} x^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{d x_{m-1}}+\cdots\cdots+b_1 x \frac{d y}{d x}+b_0 y$$

зове се хомогени линеарни диференцијални израз. Показати да га смена $x = e^w$ своди на облик

$$c_m \frac{d^m y}{d w^m} + c_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{d w^{m-1}} + \cdots + c_1 \frac{d y}{d w} + c_0 y.$$

11. Написати једначину породице кругова истог полупречника r са средиштима распоређеним на периферији круга полупречника 1 око координатног почетка.

12. Наћи обвојницу породице кривих у задатку 11.

13. Наћи обвојницу породице правих

$$y = p x + 2 p^2.$$

14. Једна тачка неке праве клизи дуж хиперболе $x y = 1$. Друга тачка клизи дуж осе x. Шта је обвојница правих ако се ове тачке налазе на међусобном одстојању 1?

15. Крајеви жице дужине 1 клизе дуж два међусобно вертикална штапа Колику ће површину пребрисати жица?

16. Класификовати следеће диференцијалне једначине:

a) $$\frac{d^2 v}{d u^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{v} + \left(\frac{d v}{d u}\right)^2}.$$

b) $$\frac{d v}{d u} + u^2 v = \sin u .$$

c) $$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

17. Класификовати следеће диференцијалне једначине:

a) $$\sqrt{\frac{d y}{d x} + y} = \sqrt[4]{\frac{d^2 y}{d x^2} + 2x} .$$

b) $$\frac{d y}{d x} + 2 \frac{d^2 z}{d x^2} = f(y, z,) .$$

18. Сменити зависно променљиву v у једначини

$$\frac{d v}{d u} + \frac{2 v}{u} = 3$$

са $w = v e^{2u}$.

ГЛАВА II

ЗНАЧЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА И ЊИХОВИХ РЕШЕЊА

§ 6. Геометриско тумачење диференцијалне једначине првог реда

Ма која алгебарска[1] једначина облика

$$y = f(x)$$

може се графички претставити неком кривом. Како је, према дефиницији, решење диференцијалне једначине функционална веза између x и y, то се оно такође може претставити кривом. На тај начин криву дефинише, у извесном смислу, или алгебарска једначина или диференцијална једначина. Међутим, за постизање овог циља, оне се не служе истим средствима и проучавање њихових разлика у овом погледу пружа драгоцену слику стварног значења диференцијалне једначине.

У случају алгебарске једначине, када се изабере једна вредност x, једначина дефинише једну или више вредности y, које се могу повезати са тим x. Ово одређује једну или више тачака на кривој. Давањем других вредности добивају се и друге тачке. То јест, алгебарска једначина дефинише криву *повезивањем координата сваке тачке на њој*.

С друге стране, диференцијална једначина не везује y са x директно: она се служи потпуно другим процесом. Посматрајмо засад једначину првог реда која садржи само две променљиве x и y. Ма која таква једначина може се написати у облику

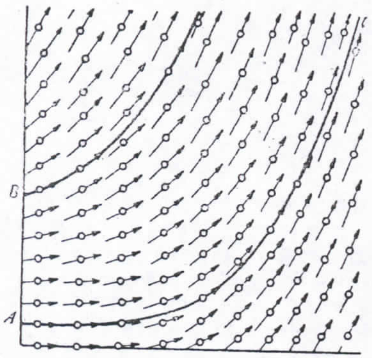
$$\frac{d y}{d x} = f(x, y) . \tag{19}$$

Смена посебне вредности за x у овој једначини не води некој вредности за y; место тога, када се појединачно одреде вредности за x и y, биће

---

[1] Кроз читаво ово поглавље израз „алгебарски“ употребљен је за ознаку ма које једначине која не садржи изводе.

одређена нека вредност за $\frac{dy}{dx}$. То јест, ако се изабере ма која тачка (x, y), једначина (19) одређује правац у коме крива мора продужити ако пролази кроз ту тачку. Наравно, не може бити разлога за помисао да тражена крива стварно пролази кроз ову тачку. Међутим, засад ћемо превидети ову чињеницу и замислићемо да смо одредили правце који одговарају врло великом броју тачака и да смо их означили стрелицама као на сл. 9. Када погледамо на ову слику, свака стрелица тежи да води поглед ка следећој стрелици чело ње на такав начин да стрелице здружује у групе. Почињући било у којој тачки A и спајајући стрелице такве групе заједно настаје једна крива која има коефицијент правца који захтева једначина (19) за сваку од тачака у којима су стављене стрелице.



Сл. 9

Ако се број стрелица јако повећа, јако ће се повећати и број тачака у којима крива задовољава једначину (19). Уствари, наношењем све већег и већег броја стрелица било би могућно, бар теориски, да се дође до граничне криве чије би координате и коефицијент правца у свакој тачки задовољавали диференцијалну једначину. Ова гранична крива — или, боље, веза између x и y чији је она графички претставник, — јесте решење једначине (19).

Зато диференцијална једначина дефинише криву *казивањем правца у коме ова пролази кроз сваку од својих тачака.*

Ова геометриска слика омогућава графичку методу решавања диференцијалне једначине. У пракси се налази да она није веома тачна, па ипак се понекад употребљава када су егзактније методе сувише тешке. Међутим, постоји код ње једна очигледна неизвесност, а то је избор тачке A у којој процес почиње Изабере ли се нека друга тачка B, добиће се друга крива. Очигледно, координате и коефицијент правца ове нове криве, као и код старе, задовољавају једначину (19). Стога су обе „решења“. Отуда постоји више од једног решења једначине (19).

§ 7. Број различитих решења диференцијалне једначине првог реда

Из ове геометриске конструкције можемо такође добити важну претставу значења теореме да *постоји баш онолико решења диференцијалне једначине* (19) *колико има тачака на једној правој линији.*

Већ смо приметили да се једно решење једначине (19) добива полазећи од A, а друго полазећи од B. Очигледно, могли бисмо конструисати

друга решења полазећи од других тачака праве AB и из изгледа сл. 9 закључили бисмо да су сва ова решења различита.

Могли бисмо такође конструисати решења полазећи од тачака које *нису* на правој AB, али из изгледа слике одмах можемо видети да би тако добивене криве пресецале AB.

Зато, у случају сл. 9, теорема изгледа да је тачна; јер, изгледа да свакој тачки праве AB одговара једна крива и изгледа да нема других могућности. Међутим, морамо бити на опрезу да не будемо заведени једноставношћу нашег цртежа; и заиста, одмах можемо наћи једначине које воде сликама из основа различитим од сл. 9 и које на први поглед изгледа да поништавају нашу теорему.

На пример, ако би наша диференцијална једначина била

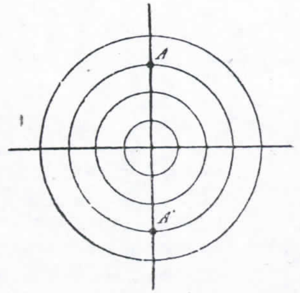
$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=0,$$

све би стрелице биле вертикалне. Зато, полазећи од A, добила би се сама права AB као једно решење. Исто решење, — не различито — добило би се полазећи ма од које друге тачке праве AB. Али, у овом случају *свако* решење јесте вертикална права, па би се, према томе, сва она добила полазећи од тачака било које *хоризонталне* праве. Стога је њихов број опет исти као и број тачака на једној правој.

Једначина, пак,

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$$

има за решења кругове показане на сл. 10. Очигледно је да се идентична решења добивају полазећи од одговарајућих тачака горње и доње половине осе y; зато постоји онолико различитих решења колико има тачака на *делу* праве (не на целој). Али, основна теорема теорије множина тачака тврди да се за ове може учинити да на један једини начин одговарају *свим* тачкама на некој другој правој, тако да још увек постоји баш онолико различитих решења колико има тачака на овој помоћној правој.[1] Зато је теорема још увек у важности.



Сл. 10

---

[1] Ово тврђење може изгледати крајње апсурдно Казати да је половина броја једнака том броју, изгледа неприродно и, наравно, ово последње тврђење није тачно за бројеве различите од нуле. Тешкоћа лежи у чудним особинама појма бесконачности. Природно, нико неће ставити примедбу на тврђење да је „половина бесконачног још увек бесконачна“.

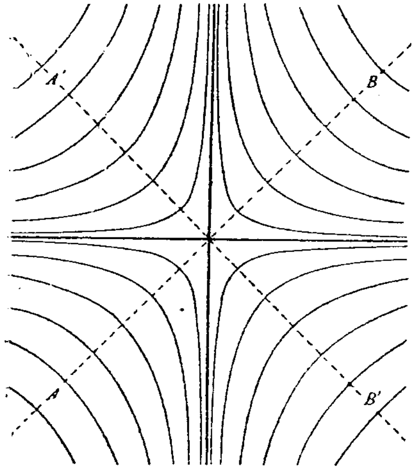
Можда бисмо се овде могли и зауставити, показујући тек толико да тврђење није сасвим апсурдно. Стварно, пак, оно има дубље значење, које можемо бар приближно показати једним примером.

Сваки позитиван број има један логаритам и, обрнуто, сваком логаритму одговара један позитиван број. Постоји, дакле, баш онолико позитивних бројева колико

Најзад, једначину

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0,$$

задовољавају хиперболе на сл. 11. Искоришћујући тачке на правој $A\,B$, извученој цртицама, добиле би се само оне криве које леже у првом и трећем квадранту; недостајале би оне које леже у другом и четвртом. Али би се последња група укључила искоришћавањем и цртицама извучене праве $A'B'$. Ово би изгледало да су потребне тачке *двеју* правих; но, иста горе поменута општа теорема множина тачака омогућава да се све ове тачке доведу у везу са тачкама једне помоћне праве и теорема остаје у важности.



Сл. 11

Уствари се доказ теореме може примењивати све док је могућно делити читаву раван $x\,y$ на пребројљив број области (4 у сл. 11) код којих је у унутрашњости сваке или функција $f(x, y)$ из једначине (19) или њена реципрочна вредност коначна и непрекидна.

Најзад, прећутно смо претпоставили да је функција $f(x, y)$ у једначини (19) једнозначна. Ово би изгледало да искључујемо велик број једначина — на пример, сваку која садржи квадратне корене. Али, ако би у свакој тачки постојале *две* вредности за f, кроз њу би се могле повући две стрелице, па би се стога, полазећи у та два правца, добиле две криве. Међутим, лако је увидети да би се ова два скупа кривих могла повезати са тачкама *двеју* помоћних правих. Али, иста теорема множина тачака, која је искоришћена већ неколико пута, омогућава тврђење да се ове опет могу повезати са двема половинама једне једине праве, па се тако може отклонити чак и ограничење да f мора бити једнозначна функција.

Расуђујући даље, можемо нашу теорему исказати и у подеснијем облику. Решење једначине (19) било је прецизирано једино одређивањем тачке у којој крива пресеца праву AB. Како је ова тачка одређена својим растојањем η од осе x, то следи да тачан облик решења мора зависити од ове константе η. Стога се оно мора писати у облику

и логаритама. Али, пошто су логаритми бројева мањих од један негативни, то би нам била потребна једна цела права да их све нанесемо, ма да би се њихови антилогаритми могли нанети само на једној половини праве. На овај начин довели смо у везу тачке половине праве са тачкама целе праве, а то је баш оно што се тражи у случају сл. 10.

$$\phi(x, y, \eta)=0,$$

јер ово означавање значи ни више ни мање но то да је тачна веза између x и y позната тада и само тада када је дата вредност η. Како нека вредност η постоји за сваку тачку на AB, и обрнуто, то ова веза обухвата свако могућно решење[1] диференцијалне једначине. Оно се зове *опште решење*, при чему се *партикуларним решењем*[2] назива свака од веза која се из њега може добити давањем посебне вредности за η. Отуда следећа теорема, која претставља крајњи резултат ове наше дискусије:

Опште решење једначине (19) *јесте веза између* x *и* y *која садржи једну и само једну произвољну константу.*

§ 8. Геометриско тумачење диференцијалне једначине другог реда

Једначина (19) не садржи изводе реда вишег од првог. Зато се геометриска конструкција у § 7 примењује само на једначине првог реда, те се за теорему дискутовану у § 7 не може рећи да важи за једначине вишег реда. Циљ следећих неколико одељака је да се расуђивање прошири како би се обухватиле једначине другог реда, одакле се може извести резултат и за једначине вишег реда.

Посматрајмо једначину која поред x, y и y' садржи још и други извод y''. Претпоставимо као и раније да је највиши извод изолован тако да једначина добива облик:

$$y''=f(x, y, y'), \tag{20}$$

где је f једнозначна функција. Сада је ситуација нешто сложенија него раније; али се још увек може добити геометриско тумачење засновано на појму „полупречника кривине“ неке криве — то јест, полупречника круга који јој се најтачније прилагођава. Познато је да је полупречник кривине ρ дат изразом

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Зато, било за коју криву која је решење једначине (20) полупречник кривине мора бити:

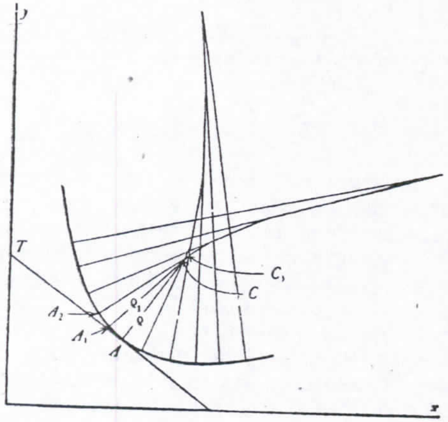
$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{f(x, y, y')}. \tag{21}$$

---

[1] У глави V наћи ћемо да каткад има изузетака од овог тврђења. То јест, постоје извесна решења, звана „сингуларна решења“, која не припадају истој породици кривих као остале. Међутим, нема потребе да се овде њима бавимо.

[2] Обратити пажњу на то да „опште решење“ одговара читавој породици кривих коју дефинише једначина, док се израз „партикуларно решење“ односи само на једну од тих кривих.

Изаберимо сада тачку A и правац AT, (сл. 12), и поставимо захтев да решење једначине (20) пролази кроз A правцем AT. Полупречник кривине ρ који крива мора имати у овој тачки одмах се добива из (21) кад се за x и y искористе координате тачке A, а за y' коефицијент правца праве AT. Ако на праву кроз A нанесемо ово отстојање ρ нормално на AT добивши тако тачку C, и ако око ове тачке као средишта опишемо кратак лук $A A_1$, добићемо, очигледно, један лук који не само да пролази кроз A захтеваним правцем него, исто тако, има кривину коју захтева диференциренцијална једначина.



Сл. 12

Крајњој тачки A_1 овог лука одговара нов скуп координата (x_1, y_1) и нов коефицијент правца y_1', при чему је овај потоњи коефицијент правца кружног лука у тој тачки. Када се ове нове вредности замене у (21), добива се нов полупречник кривине ρ_1. Овај се наноси на праву A_1C и добива се ново средиште C_1 око кога треба описати следећи кратки лук A_1A_2. Продужујући тако, можемо добити криву $A A_1 A_2 \ldots\ldots$, која има особину да из сваке означене тачке одлази таквим правцем и са таквом кривином који задовољавају диференцијалну једначину.

Ако бисмо све лукове учинили тако малим да се од једног до другог кривина не мења осетно, могли бисмо очекивати да ће се тако нацртана крива врло мало разликовати од тачног решења диференцијалне једначине. Уствари, постепеним скраћивањем лукова могли бисмо се, са теориског становишта, тачном решењу приближити толико близу колико желимо. Стога конструкција даје приближну методу решавања једначине, ма да се она у пракси много не употребљава зато што грешке у цртању озбиљно ограничавају њену тачност.

§ 9. Број решења једначина реда вишег од првог

Важност геометриске интерпретације једначине (20) не лежи толико у њеној употребљивости као методе решавања колико у обавештењу које она даје односно породице кривих коју дефинише та једначина.

Да би се започела конструкција криве $A A_1 A_2 \ldots\ldots$, било је потребно изабрати тачку A и правац AT. Да се изабрала нека друга тачка B, добило би се друго решење, чак да се задржао исти правац; и да се изабрао неки други правац AT_1, још увек би се добило друго решење, чак када би се употребила иста тачка A. Уствари, кроз тачку пролази прамен кривих које је напуштају у свим могућним правцима и све су решења једначине (20). Поједине криве овог прамена могу се разликовати својим коефицијентима правца у тачки A. Зато, ако се за одређивање овог коефицијента правца употреби ознака η', читав се прамен може претставити везом између x и y која зависи од произвољне константе η'.

Међутим, овај прамен не садржи сва решења једначине (20). Напротив, постоји сличан прамен за сваку тачку на вертикалној правој кроз тачку A. Зато веза између x и y која обухвата свако могућно решење, — то јест опште решење диференцијалне једначине — мора исто тако зависити од ординате η као и од коефицијента правца η'. Ово води теореми:

Опште решење диференцијалне једначине другог реда је функционална веза

$$\phi\,(x, y, \eta, \eta') = 0\,,$$

која садржи две и само две произвољне константе η и η'.

Да би се овај доказ учинио строгим, била би потребна многа утанчавања, као што је био случај и у дискусији диференцијалне једначине првог реда. Али, како не тражимо толико строг доказ колико јасну слику онога што наша теорема значи, доказ је доста добар.

Слична се теорема може извести и за општи случај једначине n-тог реда. Међутим, нема потребе да је покушавамо изводити, јер је по аналогији готово очигледно да она мора гласити:

Опште решење диференцијалне једначине n-тог реда је функционална веза облика

$$\phi\,(x, y, \eta, \eta', \eta'', \ldots\ldots, \eta^{(n-1)}) = 0\,,$$

у којој су $\eta, \eta', \eta'', \ldots\ldots, \eta^{(n-1)}$ произвољне константе.

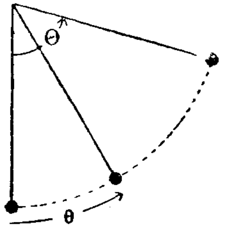
§ 10. Контурни услови

Са школског становишта, решити диференцијалну једначину значи наћи њено опште решење. Са тога гледишта, ниједан проблем није потпуно решен док није изведен резултат у коме је број произвољних константата једнак реду једначине.

Стање је нешто другачије са становишта праксе. Када се, у вези са неким научним истраживањем, појави диференцијална једначина, тада се, обично, тражи партикуларно решење — не опште; за само научно истраживање обично је очигледно да тражено решење, поред тога што задовољава саму једначину, мора задовољавати извесне услове, својствене дотичном истраживању. Ови су познати као „контурни услови“ или „контурне вредности“.

Као пример, посматрајмо кретање математичког клатна, сл. 13, држаног под неким углом Θ а онда пуштеног. Познато је да је угловно убрзање $\frac{d^2\theta}{d t^2}$ клатна пропорционално његовом угловном померању1) и да они имају супротне знаке. Када се изразе у облику једначине, ове чињенице дају

$$\frac{d^2\theta}{d t^2} = -p^2\theta, \tag{22}$$



Сл. 13

где је p позитивна константа.

Методом која ће бити објашњена касније у тексту налази се да је опште решење ове једначине

$$\theta = \alpha \cos pt + \beta \sin pt, \tag{23}$$

где су α и β две произвољне константе. Због присутности ових двеју произвољних констаната, кретање дефинисано једначином (23) потпуно је неодређено. Ово се може видети када се покуша наћи са колико се великим углом клатно клати. Лако је довести једначину (23) на облик

$$\theta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\sin(pt+\varepsilon),$$

где је

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta};$$

из овог облика је очигледно да је $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ највећа вредност коју θ икад може достићи. Али, како су α и β произвољни, то ова максимална вредност може бити уопште шта било.

С друге стране, код физичког кретања клатна нема ничег неодређеног. Ствар је обичног искуства да је његово будуће кретање потпуно одређено ако се оно држи у миру под углом Θ а онда пусти. Следи, наравно, да *неки скуп* вредности α и β мора дати право решење, други скупови пак друга решења, већ према могућним кретањима клатна ако се оно пусти на други начин. Зато се са практичног становишта може рећи да је проблем решен само када су нађене одговарајуће вредности α и β.

То је у овом случају доста лако. Ако се са $t=0$ означи тренутак када је клатно пуштено, онда је познато: прво, да је у то време било θ једнако Θ, и друго да је брзина $\frac{d\theta}{dt}$ била нула. Изражени у облику једначина ови услови су:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \Theta && \text{када} \quad t=0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0 && \text{када} \quad t=0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

---

1) Када је ∂ мало, ово је тачно до високог степена апроксимације, само ако не постоје дисипативне силе као што су силе трења или отпор ваздуха.

Али је из (23):

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \alpha && \text{када} \quad t=0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= p\beta && \text{када} \quad t=0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Упоређујући једначине (24) и (25), очигледно је да морамо ставити $\alpha = \Theta$ и $\beta = 0$. Зато је тражено решење

$$\theta = \Theta \cos pt.$$

Ако се θ и t узму као ордината и апсциса у Декартовом координатном систему, ови контурни услови говоре *где* и у *коме* правцу крива пресеца вертикалну осу. Интересантно је напоменути да је ово тачно податак који се морао узети при конструкцији геометриске слике у § 9. Међутим, постоје и други типови услова који би се могли искористити и који би подједнако добро служили овом циљу. На пример, ако се клатно већ налази у клаћењу, његов би положај могао бити забележен у два тренутка са временским размаком од једне секунде. Ако бисмо ове означили са $t=0$ и $t=1$ и ако би одговарајући положаји били $\theta=\theta_0$ и $\theta=\theta_1$, једначина (23) непосредно би дала:

$$\theta_0 = \alpha,$$

$$\theta_1 = \alpha\cos p + \beta \sin p.$$

Константе α и β биле би тада

$$\alpha = \theta_0,$$

$$\beta = \theta_1 \operatorname{cosec} p - \theta_0 \operatorname{cotang} p,$$

а тражено решење

$$\theta = \theta_0 \cos pt + (\theta_1 \operatorname{cosec} p - \theta_0 \operatorname{cotang} p)\sin pt.$$

Ова се једначина може свести на нешто једноставнији облик

$$\theta = \frac{\theta_0 \sin p(1-t) + \theta_1 \sin pt}{\sin p}.$$

Графички, овај скуп контурних услова одређује не једну тачку и правац у коме крива пролази кроз ту тачку, већ две тачке на кривој без обзира на правце. Многи други типови контурних услова могли би имати подједнако дејство; на пример, угловне брзине клатна опажене у два различита тренутка, али не положаји; или, положај у једном тренутку, а брзина у другом итд. Формулисани у облику једначина ови би услови били редом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \theta_0' \qquad \text{за} \quad t = t_0 , \\ \frac{d\theta}{dt} &= \theta_1' \qquad \text{за} \quad t = t_1 , \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \qquad \text{за} \quad t = t_0 , \\ \frac{d\theta}{dt} &= \theta_1' \qquad \text{за} \quad t = t_1 . \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Графички, први би давали коефицијент правца криве у тачкама где она пресеца сваку од двеју вертикалних правих без појединачног означавања ордината тачака пресека, док би други давали једну тачку кроз коју она пролази и коефицијент правца у тачки где она пресеца неку другу ординату.

Напоменућемо да се у овом примеру процес решавања састојао из два дела: прво, одређивање општег решења, а затим избор констаната тако да буду задовољени контурни услови. Обично је ово пут којим се решава неки проблем са контурним условима, ма да не баш увек. Већ је речено да се са школског становишта за једначину каже да је решена чим је извршен први од ових корака, и на први поглед могло би изгледати да овакав став запоставља врло важну фазу предмета. Али морамо приметити да, када је једном добивено опште решење, одређивање произвољних констаната захтева само решавање једног скупа једначина од којих ниједна не садржи изводе. Стога, логично, тај део проблема припада другој грани Математике — теорији једначина — а не проучавању диференцијалних једначина. Стога школски став није сасвим без оправдања.

§ 11. Доказ егзистенције

У § 10 изложени су контурни услови у неколико облика и у сваком је случају нађено решење једначине (22) које задовољава ове услове. Природно је запитати да ли се увек може наћи решење, без обзира на то у каквом су облику дати контурни услови. Да се на ово питање мора одговорити негативно, може се показати навођењем једнога случаја који нема решења.

Претпоставимо да се тражи решење једначине (22) које задовољава услове:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \qquad \text{када} \quad t = 0 , \\ \theta &= 2\,\theta_0 \qquad \text{када} \quad t = \frac{\pi}{p} . \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Када се ови услови смене у (23), они дају

$$\theta_0 = \alpha ,$$

$$2\,\theta_0 = -\alpha .$$

Очигледно, α не може задовољавати обе ове једначине; зато такво решење не постоји. Тако постављени проблем није могућ, и сваки покушај да се реши мора пропасти.

Постоји физичко објашњење због чега овај скуп услова не може бити задовољен. Клаћење клатна у једном правцу је савршена копија његовог клаћења у другом, изузев што се у одговарајућим тренуцима оно налази на супротним странама вертикале и што се креће у супротним правцима. Зато, ако је θ у неком тренутку θ_0, оно мора бити $-\theta_0$ по истеку времена потребног за једно потпуно клаћење. Захтевати да то буде некако друкчије као што је учињено са једначинама (28), физички је бесмислено.

Ово одговара одречно на питање да ли се могу испунити сви контурни услови, али не даје начина да се унапред каже да ли је неки посебни скуп услова могућ или немогућ. Када се обично појави диференцијална једначина у вези са неким научним проблемом, онда се за овај проблем зна да има неки одговор и стога је ствар здравог разума да његова математичка формулација мора имати такође неки одговор. Али, такав је доказ сасвим индиректан и не даје критеријуме од опште употребљивости. Међутим, код научних проблема има се каткада посла директно са питањем да ли је једно дато стање могућно или не, и тада је овај доказ по здравом разуму без икакве користи. Поготово је индиректан и увек незадовољавајући када се има посла са чисто математичким питањима. Отуда су математичари поклонили знатан део пажње на „доказе егзистенције“: то јест, одређивању оних контурних услова за које се може тврдити да омогућавају решење. Сасвим је изван обима овог текста да се прикажу методе којима се врше таква проучавања или чак и да се да неки знатан део њихових резултата. Но један партикуларан резултат пружа тако блиску аналогију геометриској слици коју смо малочас показали, да га вреди укратко размотрити.

Овај је резултат у вези са случајем када се контурни услови дају одређивањем вредности y и његових извода за *једну исту* вредност x; то јест, контурни су услови

$$\left.\begin{aligned} y &= \eta , \\ y' &= \eta' , \\ &\;\cdot \\ &\;\cdot \\ &\;\cdot \\ y^{(n-1)} &= \eta^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \quad \text{све за} \quad x = \xi . \tag{29}$$

Тачно је овај тип контурних вредности био употребљен у §§ 6 до 9. Ако се, као и у тим одељцима, претпостави да је диференцијална једначина решена по свом највишем изводу тако да се јавља у облику

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

налази се да она има увек решење које задовољава контурне услове (29) само ако функција f задовољава два услова1): 1) она је непрекидна за $x = \xi$, $y = \eta, \ldots, y^{(n-1)} = \eta^{(n-1)}$; 2) она се може диференцирати по $y, y', \ldots,, y^{(n-1)}$. Значење ових услова објашњено је у §§ 3 и 4.

ЗАДАЦИ

1. Одредити произвољне константе у (23) тако да задовољавају услове (26).
2. Одредити произвољне константе у (23) тако да задовољавају услове (27).

---

1) Узима се такође да је функција f једнозначна. Ако је f вишезначна, биће онолико решења која задовољавају услове (29) колико има различитих вредности f.

ГЛАВА III

ПОСТАНАК ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

§ 12. Постанак диференцијалних једначина

Пре него што почнемо објашњавати како се решавају диференцијалне једначине, показаћемо са неколико речи како оне настају. У овом ћемо поглављу продискутовати два различита начина. Дискусија првог од ових уствари је конверзија доказа показаног у **Гл.** II и, као и тај доказ, води правилу да је број произвољних констаната у решењу диференцијалне једначине једнак реду једначине. Он је важан више са теориског него са практичног становишта; јер, диференцијалне једначине на које се стварно наилази у пракси ретко настају на овај начин. Напротив, оне се уопште јављају непосредно као формулација физичких закона помоћу диференцијалних симбола. Други део ове главе посвећен је неколиким илустрацијама ове врсте.

§ 13. Извођење диференцијалне једначине из њеног општег решења

Видели смо да се опште решење диференцијалне једначине може претставити *породицом* кривих. Зато је подесно једначину звати *диференцијална једначина породице кривих*. Циљ је овог одељка да се објасни како се, када је дата породица кривих, може добити њена диференцијална једначина.

Као што знамо, породица кривих дефинисана је једначином

$$f(x, y, c) = 0, \tag{30}$$

која садржи, поред променљивих x и y, једну произвољну константу. Различите криве из породице одговарају различитим вредностима c. Диференцирањем се може добити нова једначина

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{31}$$

Ако ова једначина не садржи c, она је тражена диференцијална једначина. Ако се у њој јавља и c, као што је обично случај, пар једначина (30) и (31) можемо употребити за елиминисање c, изводећи на тај начин нову једначину која садржи само x, y и $\frac{dy}{dx}$. Ова ће тада бити диференцијална једначина породице кривих (30).

На пример, узмимо да је породица кривих

$$y = \sin cx\,. \tag{32}$$

Диференцирање даје

$$y' = c \cos cx\,. \tag{33}$$

Обе ове једначине садрже c, па зато ниједна од њих није тражена једначина. Али, из (32) налазимо да је

$$\cos cx = \sqrt{1 - y^2}\,,$$

$$c = \frac{1}{x} \operatorname{arc} \sin y\,,$$

и када се смене у (33), ове вредности дају

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \sqrt{1 - y^2} \operatorname{arc} \sin y\,. \tag{34}$$

Како је ова једначина потпуно независна од c, то је она диференцијална једначина породице (32).

Овај процес елиминисања произвољних констаната може се извести чак када је број независних констаната већи од 1. Да бисмо ово показали, нека је

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n) = 0 \tag{35}$$

једначина која везује x и y и садржи n констананата $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Ова једначина претставља, дакле, породицу кривих и пред нама је проблем да изведемо диференцијалну једначину која ће дефинисати скуп кривих без употребе произвољних констаната. Ако се (35) диференцира по x n-пута узастопно, добиће се скуп од n других једначина. Ове једначине заједно са једначином (35) чине скуп од $n + 1$ једначина потребних за елиминацију n констаната c. Резултат је ове елиминације тражена диференцијална једначина. Како ниједна од једначина не садржи изводе реда вишег од n, резултујућа диференцијална једначина не може бити реда вишег од n. Обрнуто, ред једначине не може бити мањи од n, изузев ако n-ти извод једначине (35) није био потребан у решењу у коме случају константе нису биле све међу собом независне. Отуда: *ред највишег извода у диференцијалној једначини једнак је броју независних констаната у општем решењу.* Ово је правило које смо већ добили у Гл. II за број констаната у решењу диференцијалне једначине.

Као пример, посматрајмо једначину

$$\theta = \alpha \sin pt + \beta \cos pt \tag{23}$$

која садржи променљиве θ и t и произвољне константе α и β. Диференцирајући двапут добивамо

$$\theta' = \alpha p \cos pt - \beta p \sin pt\,,$$

$$\theta'' = -\alpha p^2 \sin pt - \beta p^2 \cos pt\,.$$

У овом случају елиминисање је врло просто, јер се непосредно види да је

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p^2\theta = 0\,. \tag{22}$$

Ово је тражена диференцијална једначина. Њу смо већ срели у § 10, где смо произвољно тврдили да је (23) њено решење.

§ 14. Извођење диференцијалних једначина из физичких закона

Диференцијалне се једначине непрестано јављају у примени Математике у Техници и Физици, јер се многи физички закони могу једноставније изразити помоћу диференцијалних симбола него ма на који други начин. Једна се илустрација већ појавила у § 10, где су физички закони који владају кретањем математичког клатна одмах довели до диференцијалне једначине другог реда. У следећим ће одељцима бити дато неколико других примера.

Неки од ових примера захтевају примену физичких закона са којима читалац можда није упознат. Зато је, у сваком случају, укратко дато тврђење научних чињеница потребних за разумевање проблема. Нисмо покушавали да објашњавамо како се сазнало да су ове чињенице истините, јер би то захтевало тумачење оних грана Физике из којих су узете илустрације, што је, очигледно, ван обима ове књиге. Са нашег су становишта закони потребни само за једну сврху: да се покаже да диференцијалне једначине произлазе природно и непосредно из њих, уствари тако непосредно да читалац, — када би био упознат са предметима који се њима обрађују, — не би наишао на велику тешкоћу да исте једначине и сам формулише.

Како је то циљ ових излагања, надамо се да ће читалац бити задовољан када се увери да разуме значење научних тврђења и да неће сувише премишљати о том како је установљена њихова истинитост. Другим речима, он ће најбоље успети ако претходним тврђењима приступи са довољно поверења, чувајући свој уобичајени, здрави скептицизам за математичке доказе који им следе.

§ 13. Пример 1. Закон дејства маса

Хемиске реакције се не дешавају тренутно када се реагенси1) доведу у међусобни додир. Извесна количина једињења ствара се у првом хиљадитом делу секунде, нешто више у другом делу, и тако даље. Међутим, брзина стварања једињења није константна, него се мења са количинама реагенса расположивим за стварање једињења. У многим простим трансформацијама брзина реакције покорава се закону познатом као „закон дејства маса“, који тврди да је брзина којом се супстанце једине пропорционална производу из још несједињених количина.

Узмимо да је x број молекула већ насталог једињења у тренутку t и да сваки молекул једињења садржи n молекула једне врсте и m друге врсте. Најзад, узмимо да је у почетку било N молекула прве врсте и M друге. Тада је број несједињених молекула сваке врсте $N - n x$, односно $M - m x$. Закон дејства маса тврди да је брзина — која је очигледно дата са $\frac{dx}{dt}$ — којом се стварају нови молекули једињења, пропорционална производу ових двеју последњих количина. Ово непосредно даје диференцијалну једначину

$$\frac{dx}{dt} = k(N - n x)(M - m x). \tag{36}$$

§ 16. Пример 2. Ланчаница

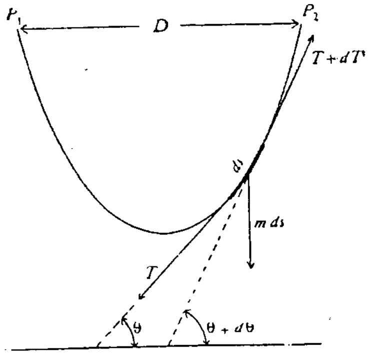
Једно уже обешено је у двема тачкама P_1 и P_2 које леже у истој хоризонталној равни на међусобном отстојању D. Тражи се облик који ово уже узима под дејством силе теже.

Нека крива на сл. 14 претставља овај облик, па уочимо неки елемент дужуне ds.2) Један је од основних ставова Механике да овај елемент мора бити у равнотежи под силама које на њега дејствују. Ове су силе:

а) његова сопствена тежина која претставља силу која дејствује вертикално наниже;

б) напон ужета на доњем крају који дејствује у правцу тангенте на криву у тој тачки;

в) напон у ужету на горњем крају који дејствује у правцу тангенте на криву у тој тачки.



Сл. 14

---

1) Реагенси су активне хемикалије.

2) Природно, овај је елемент заправо „прираштај дужине“ и у диференцијалном рачуну обележио би се са Δs. Међутим, у научном раду је уобичајено да се од почетка до краја употреби диференцијални симбол када такав прираштај треба пустити да тежи нули. Ова пракса ретко кад доводи до забуне, а често служи корисном циљу да се предвиди каква треба да буде природа доказивања.

Означимо нагибе тангената у ова два краја са θ и $\theta + d\theta$ а напоне са T и $T + dT$, и обележимо линеарну тежину1) ужета са m. Тада, ако се ове три силе разложе на своје компоненте X и Y, оне редом дају

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = -m\,ds,$$

$$X_2 = -T\cos\theta, \qquad Y_2 = -T\sin\theta,$$

$$X_3 = (T + dT)\cos(\theta + d\theta), \qquad Y_3 = (T + dT)\sin(\theta + d\theta).$$

Ако се под дејством ових сила елемент ужета налази у равнотежи, неопходно је да буде нула и сума X-компонената и сума Y-компонената, то јест

$$\left.\begin{aligned} T\cos\theta &= (T + dT)\cos(\theta + d\theta), \\ T\sin\theta &= (T + dT)\sin(\theta + d\theta) - m\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Делећи леву са левом а десну са десном страном ових једначина, добивамо:

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}(\theta + d\theta) - \frac{m\,ds}{(T + dT)\cos(\theta + d\theta)}. \tag{38}$$

Прва од једначина (37) тврди да је у оба краја елемента ds *хоризонтална* компонента напона једнака. Како је ds било који елемент, то следи да је ова компонента једнака у свакој тачки криве.2) Ако је означимо са k, (38) постаје

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}(\theta + d\theta) - \frac{m\,ds}{k}.$$

Ако ову једначину напишемо у облику

$$\frac{\operatorname{tang}(\theta + d\theta) - \operatorname{tang}\theta}{d\theta} = \frac{m}{k}\,\frac{ds}{d\theta},$$

па пустимо да ds и $d\theta$ теже нули, њена лева страна прелази у извод од $\operatorname{tang}\theta$. Зато је:

$$\sec^2\theta = \frac{m}{k}\,\frac{ds}{d\theta}. \tag{39}$$

Ово је диференцијална једначина тражене криве, како математичари кажу — у свом природном облику; то јест, она изражава дужину лука s мереног од неке произвољне тачке помоћу нагиба тангенте θ. Међутим, овај природни облик није баш увек користан, и зато је најбоље свести

---

1) То јест, тежину на јединицу дужине.

2) Овде је она најмањи напон ма за коју тачку криве, то јест напон у тачки минимума криве где вертикална компонента напона ишчезава.

га на обичан облик у Декартовим координатама. То захтева смену *обе* променљиве s и θ новим променљивим x и y, према релацијама:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\theta, \tag{40}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Променљиву s елиминисаћемо ако приметимо да је

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\dfrac{ds}{dx}}{\dfrac{d\theta}{dx}}.$$

То даје

$$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{m}{k}\frac{ds}{dx} = \frac{m}{k}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Исто тако диференцирањем једначине (40) налазимо да је

$$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Стога је резултат смене

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m}{k}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{41}$$

То је диференцијална једначина тражене криве, изражена у Декартовим координатама x и y.

§ 17. Пример 3. Ток струје у електричној мрежи

Пет закона који владају током електрицитета у електричној мрежи која је састављена од отпора, индуктивности и капацитета јесу:

(I) количина електрицитета која утиче ма у коју тачку грањања, такву као b на сл. 15, мора бити једнака количини која истиче;

(II) алгебарски збир свих електромоторних сила на које се наилази идући око једног затвореног кола, таквог као што је $abeda$ или $bcfeb$, мора бити једнак нули;

(III) електромоторна сила која дејствује у неком елементу отпора R једнака е производу од R и струје I која кроз њега протиче;

(IV) електромоторна сила која дејствује у неком елементу индуктивности L, једнака је производу од L и брзине којом се мења струја;

(V) електромоторна сила која дејствује у неком елементу капацитета C једнака је количнику из електричног товара у кондензатору и капацитета C.

Да бисмо ова тврђења формулисали у математичком облику, означимо са x количину електрицитета која је прошла кроз неку дату тачку почев од тренутка $t=0$; са x_0 количину у кондензатору у тренутку $t=0$; са R, L и C величине отпора, индуктивности и капацитета, а са I струју[1]. Тада је I везано са x једначином:

$$I = \frac{dx}{dt} \quad \text{или} \quad x = \int_0^t I\,dt,$$

а електромоторне силе E_R, E_L и E_C, које дејствују у отпору, индуктивности и капацитету, дате су обрасцима:

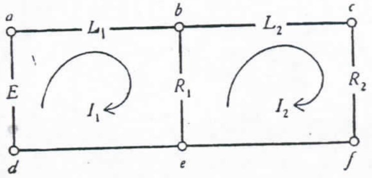
$$E_\mathrm{R} = RI = R\frac{dx}{dt},$$

$$E_\mathrm{L} = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$E_\mathrm{C} = \frac{x+x_0}{C} = \frac{x_0}{C} + \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt.$$

Помоћу ових образаца и применом закона (I) и (II) могућно је одмах написати диференцијалне једначине којима се мора покоравати било количина x било струја I.

Ако применимо закон (I) на електрично коло у сл. 15, долазимо до закључка да иста струја I_1 тече кроз гране ed, da и ab, а иста струја I_2 кроз гране bc, cf и fe, док је[2] $I_1 - I_2$ струја кроз преосталу грану be.



Сл. 15

Тада примена закона (III) и (IV) даје следеће електромоторне силе:

$$\text{у } ab, \qquad L_1\frac{dI_1}{dt};$$

$$\text{у } bc, \qquad L_2\frac{dI_2}{dt};$$

$$\text{у } cf, \qquad R_2 I_2;$$

$$\text{у } be, \qquad R_1(I_1 - I_2);$$

---

[1] „Струја“ је брзина транспортовања електрицитета.

[2] I_2 је одузето јер тече у супротном смеру од I_1.

док је у fe и ed електромоторна сила једнака нули јер тамо нема елемената импеданце. Претпоставља се да се у da налази генератор који производи електромоторну силу E која ствара струју.

Са овим вредностима, примена закона (II) посебно на кола $abeda$ и $bcfeb$ даје тражене диференцијалне једначине:

$$\left.\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 (I_1 - I_2) + E = 0\,, \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 - R_1 (I_1 - I_2) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Једина непоуздана тачка код формулисања ових једначина налази се у одређивању знакова различитих израза, нарочито у случају гране be. Наравно, ово је техничка ствар о којој би електротехнички инжењер био добро обавештен. Засад је довољно приметити да електромоторне силе увек сабирамо полазећи од једне тачке такве као a, и стално идући око затвореног кола таквог као $abeda$ натраг ка a. Кад је год стрелица која претставља струју повучена у смеру у коме идемо, као у случају I_1, електромоторне силе на које наилазимо имају позитиван знак. Али, ако стрелица показује против нас, као у случају I_2 када се иде од b према c, електромоторна сила улази са негативним знаком.

Овај се пример разликује од претходних тиме што се овде налазе две зависно променљиве I_1 и I_2, ма да постоји само једна независно променљива t. Међутим, постоје и две једначине из којих их треба одредити. У једном каснијем одељку наћи ћемо да њихово решавање није тешко.

§ 18. Пример 4. Провођење топлоте

Температуру сваке тачке неког тела можемо претставити као функцију $\theta(x, y, z)$. Ако је температура иста у свим тачкама, θ је константа, иначе се мења са једном или више координата. Ако се у унутрашњости тела повуче линија AB, дужине Δs, и забележе температуре θ_A и θ_B у крајњим тачкама A и B, количник

$$\frac{\theta_B - \theta_A}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

мери средњу брзину промене θ између A и B. Када се пусти да Δs тежи нули, граница овог количника зове се *градијент* температуре у правцу[1] s и обележава се диференцијалним симболом $\frac{\partial\theta}{\partial s}$. Он означава вредност промене температуре θ за неког посматрача који би се кретао од A у правцу s. Ако се правац поклапа са једном од координатних оса, овај градијент постаје обичан парцијалан извод.

---

[1] Правац s значи, наравно, правац у коме је повучена линија AB.

Наведимо сада три закона на којима се заснива проучавање провођења топлоте:

(I) количина топлоте коју тело садржи у јединици запремине пропорционална је његовој температури;

(II) количина топлоте која се преноси у јединици времена било кроз коју равну површину у унутрашњости тела пропорциопална је производу из величине те површине и градијента температуре нормалног на ту површину;

(III) топлота тече правцем од више ка нижој температури.

Константе пропорционалности у (I) и (II) зову се респективно *термички капацитет* и *термичка проводљивост* тела и означићемо их са c и k.

Посматрајмо бескрајно мали квадар са ивицама dx, dy и dz за чије се једно теме претпоставља да је у тачки (x, y, z). Посматрајмо најпре две стране управне на оси x. Износ топлоте који отиче *из* квадра кроз ближу од ових страна је, према (II) и (III),

$$k \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x,y,z} dy\,dz\,;$$

а износ који утиче *у* квадар кроз даљу страну је

$$k \left.\frac{\partial\vartheta'}{\partial x}\right|_{x+dx,y,z} dy\,dz\,.$$

Разлика између ових је чист износ добитка топлоте, уколико се тиче тих двеју страна. Ако за ову количину топлоте која је ушла у квадар кроз те две стране, почев од тренутка $t = 0$, употребимо ознаку q_x, онда се чист износ добитка у јединици времена мора писати у облику $\frac{dq_x}{dt}$. Дакле:

$$\frac{dq_x}{dt} = k\left(\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x+dx,y,z} - \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x,y,z}\right) dy\,dz\,.$$

Ако је dx довољно мало, количина у загради приближно је једнака $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}dx$, при чему се апроксимација претвара у једнакост када се пусти да dx тежи нули. Зато имамо:

$$\frac{dq_x}{dt} = k\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Слично се излагање може применити на стране управне на оси y и води резултату да чист добитак топлоте у јединици времена кроз ове стране има вредност:

$$\frac{dq_y}{dt} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} dx\, dy\, dz\,.$$

Кроз преостали пар страна чист добитак топлоте у јединици времена има вредност:

$$\frac{dq_z}{dt} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dx\, dy\, dz\,.$$

Тоталан износ добитка топлоте у јединици времена, $\frac{dq}{dt}$, је збир ових трију израза Како се он остварује у запремини $dv = dx\, dy\, dz$, то чиста вредност добитка топлоте *у јединици запремине јесте*

$$\frac{1}{dv} \frac{dq}{dt} = k \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right). \tag{43}$$

Све смо ово добили применом другог и трећег закона. Сада ћемо применити први. Количина топлоте у јединици запремине је $c\theta(t)$ у тренутку t, а $c\theta(t + dt)$ у тренутку $t + dt$. Стога је чисти добитак

$$c\,[\theta(t + dt) - \theta(t)]\,,$$

па како се он остварује у интервалу времена dt, вредност добитка је

$$c\,\frac{\theta(t + dt) - \theta(t)}{dt} = c\,\frac{\partial \theta}{\partial t}\,. \tag{44}$$

Наравно, тако добивена топлота утиче кроз граничне стране квадра (сем ако има извора топлоте и у самом квадру, што се у овој дискусији не расматра), одакле следи да износи (43) и (44) морају бити једнаки. Ово води диференцијалној једначини

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{c}{k}\,\frac{\partial \theta}{\partial t}\,. \tag{45}$$

Ову једначину мора задовољавати температура било кога тела које проводи топлоту. Она се ма од које досад сретане разликује тиме што постоје четири независно променљиве x, y, z и t, ма да постоји само једна зависно променљива θ. Зато су ови изводи парцијални изводи, а једначина је парцијална диференцијална једначина.

Као прост пример, посматрајмо једну велику равну плочу чије су се стране одржавале на температурама θ_1 и θ_2 толико дуго да је температура сваке тачке у унутрашњости већ доспела у стање равнотеже и

да се више не мења. Тада је $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ нула. Услови симетрије показују да ће температура бити иста у свим тачкама било које равни паралелне са странама што значи, наравно, да су $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ једнаки нули. Зато се једначина (45) своди на

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = 0\,,$$

јер више нема разлога за употребу ознаке ∂, пошто је преостала само једна независно променљива.

Ова је једначина тако једноставна да је одмах можемо решити и пре него што изведемо разрађене методе. Проста интеграција даје

$$\theta = ax + b\,, \tag{46}$$

где су a а b константе интеграције.

Ако су координате страна $x = 0$ и $x = X$, контурни услови су:

$$\theta_1 = b\,,$$

$$\theta_2 = aX + b\,.$$

Из ових се за a и b налази да је

$$b = \theta_1\,,$$

$$a = \frac{\theta_2 - \theta_1}{X}\,,$$

због чега (46) постаје

$$\theta = \theta_1 + \frac{x}{X}(\theta_2 - \theta_1)\,.$$

Стога је график функције θ од x права која има ординату θ_1 за страну $x = 0$ и ординату θ_2 за страну $x = X$.

§ 19. Пример 5. Безвртложно кретање идеалне течности

Када је нека течност у кретању, њени различити делићи могу имати и сасвим различите брзине. Ако се посматра само x-компонента кретања, очигледно је да је њена вредност за сваку тачку нека функција координата x, y и z, а могућно тако исто и времена t. Означимо ову функцију са $u(x, y, z, t)$. Слично, y-компонента може бити нека функција $v(x, y, z, t)$ истих ових променљивих, а z-компонента нека функција $w(x, y, z, t)$.

Може се показати — ма да то овде није могућно — да су ове три функције веома често[1] једнаке трима парцијалним изводима једне и исте функције $\phi(x, y, z, t)$ по x, y и z. Ова је функција позната као *потенцијал брзине* кретања. Шта више, парцијални извод те исте функције ϕ по t, пропорционалан[2] је *згушњавању* у тачки (x, y, z), то јест, релативној промени густине течности у тој тачки. Написана у облику једначина, ова тврђења постају:

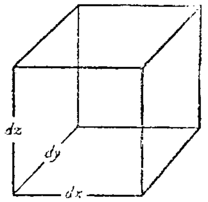
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

$$s = - c^2 \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Претпостављајући да су та тврђења тачна, диференцијалну једначину коју мора задовољавати кретање течности, можемо поставити како следи.



Сл. 16

Посматрајмо елемент запремине показан на сл. 16. За време dt кроз леву управну страну утиче у овај елемент маса течности $\rho u \, dy \, dz \, dt$, а на супротну страну истиче количина $\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy \, dz \, dt$. Исто тако количина $\rho v \, dx \, dz \, dt$ утиче кроз предњу страну, а количина $\rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) dx \, dz \, dt$ истиче кроз задњу. Кроз доњу страну утиче $\rho w \, dx \, dy \, dt$, а кроз горњу истиче $\rho \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) dx \, dy \, dt$. Водећи рачуна о свему овоме и претпостављајући да се густина ρ у целом овом елементу запремине разликује од ρ_0 за занемарљиви износ, видимо да количина која *истиче* премашује количину која *утиче*, за износ

$$\rho_0 \, dx \, dy \, dz \, dt \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

или, ако је тако згодније тврдити, количина у елементу повећава се за негативну вредност овог износа.

Због овога настаје промена згушњавања ds. Међутим, маса у елементу била је у почетку $\rho_0 (1 + s) \, dx \, dy \, dz$, а $\rho_0 \left(1 + s + \frac{\partial s}{\partial t} dt\right) dx \, dy \, dz$ на крају. Зато је повећање $\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} dx \, dy \, dz \, dt$. Изједначујући ове две количине, добивамо

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \tag{47}$$

Ово је тражена једначина.

Ако је течност нестишљива, онда свугде и стално s мора бити нула. У овом се случају једначина (47) своди на

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \tag{48}$$

Једначине (45), (47) и (48) познате су респективно као „једначина провођења топлоте“, „таласна једначина“ и „Лапласова једначина“. Оне спадају међу основне једначине примењене математике, и како садрже исту комбинацију извода

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

то је за ову усвојена специјална ознака ∇^2. Са овом ознаком, која се зове „набла на квадрат“, можемо једначине (45), (47) и (48) поново написати у облику

$$\nabla^2 \theta = \frac{c}{k} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \tag{45}$$

$$\nabla^2 \phi = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \tag{47}$$

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{48}$$

Постоји четврта диференцијална једначина од огромне важности у примењеној математици која садржи исту комбинацију извода као и (45), (47) и (48). То је једначина

$$\nabla^2 \phi + 4 \pi \rho = 0. \tag{49}$$

где је ϕ електрични потенцијал а ρ густина електрицитета, то јест количина електрицитета у јединици запремине. Ова једначина, позната као

---

[1] Специјално, када је течност „идеална“, а њено кретање „безвртложно“.

[2] Константа пропорционалности увек је негативна. Отуда облик доле написане четврте једначине.

Напоменућемо такође да је по дефиницији $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$, при чему је s згушњавање, а ρ густина. Зато имамо однос $\rho = \rho_0 (s + 1)$, који ћемо касније употребити у даљем излагању.

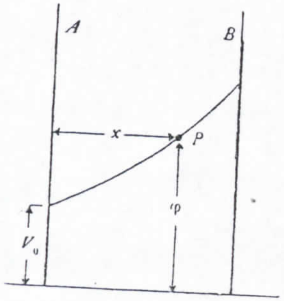
„Поасонова једначина“, претставља расподелу потенцијала у некој области у којој је електрични товар распоређен на било који произвољан начин. Наравно, ρ је функција од $x, y,$ и $z,$ која показује на ком се месту налази електрични товар. У случају да електричног товара уопште нема, ρ је нула и једначина (49) своди се на Лапласову једначину.

§ 20. Пример 6. Једначина расподеле потенцијала у електронској цеви

Као последњи пример, посматрајмо расподелу потенцијала између једног пара паралелних равних електрода у електронској цеви, од којих се за једну претпоставља да је толико топла да емитује електроне, које привлачи друга електрода услед међу њима стално подржаване потенцијалне разлике. Ако се зна расподела електрицитета у простору између електрода, онда, према тврђењима изнетим у последњем параграфу, овај случај обухвата диференцијална једначина (49). Зато је стваран проблем да се нађе та расподела.

Но, када се негативан екектрични товар величине e пренесе са места потенцијала ϕ_1 на место потенцијала ϕ_2, основни је физички закон да се при томе обави износ рада $(\phi_2 - \phi_1)\,e$, па се зато кинетичка енергија тог товара повећава за овај износ. Претпоставимо тада да крива на сл. 17 претставља тражену расподелу потенцијала и узмимо да се сваке секунде емитује n електрона са једног квадратног центиметра електроде A, да сваки електрон носи електрични товар e и да има почетну брзину v_0, а масу m. Када такав електрон доспе у тачку P у којој је потенцијал ϕ, његова кинетичка енергија повећава се за износ $(\phi - V_0)\,e$. Како је његова кинетичка енергија била у почетку $\frac{1}{2}\,mv_0^2$, то његова кинетичка енергија у тачки P мора бити $\frac{1}{2}\,mv_0^2 + (\phi - V_0)\,e$. Ово је међутим једнако $\frac{1}{2}\,mv^2$, где је v његова брзина у тој тачки. Зато је:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2e}{m}(\phi - V_0)}\,.$$



Сл. 17

Из броја електрона који пролазе кроз P у једној секунди и из брзине којом се крећу, лако је наћи густину електричног товара ρ. Обратимо за ово пажњу на електроне који пролазе кроз површину од једног квадратног центиметра, нормалну на струју електрона, за време једног кратког интервала времена dt. Електрони који су прошли кроз ову површину у почетку тог интервала прећи ће растојање vdt до његовог истека, док они који су прошли кроз ту површину крајем интервала,

тек што су уопште и кренули. Зато ће посматрана група бити распоређена у паралелопипеду попречног пресека један, а висине $v\,dt$. Њихов је број, очигледно, $n\,dt$, а њихов укупан електрични товар $-\,n\,e\,dt$. Али, ако је негативан електрични товар $-\,ne\,dt$ распоређен у запремини $v\,dt$ нашег паралелопипеда, његова густина мора бити

$$\rho = -\frac{ne}{v}\,.$$

Зато једначина (49) постаје

$$\nabla^2\phi = \frac{4\pi\,ne}{v}\,.$$

Даље, због симетрије проблема, потенцијал се може мењати само у правцу x, па зато $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ морају бити једнаки нули. Због тога (49) постаје:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{4\pi\,ne}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2e}{m}(\phi - V_0)}}\,. \qquad (50)$$

Ова диференцијална једначина изражава закон варијације потенцијала у унутрашњости електронске цеви са равним електродама, под условом да се сви електрони емитују истом брзином.

ЗАДАЦИ

1. Класификовати све диференцијалне једначине у поглављима I и II према врсти (обичне или парцијалне), степену и реду, и установити да ли су линеарне или нису и, ако су линеарне, да ли су коефицијенти промењљиви или стални.

2. У случају обичне диференцијалне једначине утврдити број независних константата које ће се појавити у општем решењу.

3. Код којих су примера добивена решења била општа решења? Написати по два партикуларна решења за сваки пример код којег је нађено опште решење. Колико их још има?

4. Са довољном тачношћу може се рећи да је количина топлоте коју губи у секунди неко топло тело пропорционална разлици температура тела и околне средине. Узимајући да влада овај закон, написати диференцијалну једначину која изражава читање температуре на термометру у функцији времена, када се овај пренесе из топле у хладну средину.

5. Кривина у свакој тачки неке криве пропорционална је коефицијенту правца нормале повучене кроз ту тачку. Шта је диференцијална једначина криве?

6. Наћи диференцијалну једначину породице кругова

$$(x - c)^2 + y^2 = r^2. \qquad (18)$$

7. Наћи диференцијалну једначину породице кривих

$$(y - c)^2 = (x + c)^3. \qquad (14)$$

8. Наћи диференцијалну једначину породице кривих

$$y^2 = (x - c)(x - 2c)^2. \tag{17}$$

9. Неки дечак стоји на углу A једног поља облика квадрата и држи у руци један крај ужета дужине L. Целом својом дужином ово уже лежи дуж стране AB поља а на другом је крају привезан неки терет. Дечак полази дуж стране AC, држећи свој крај ужета. Претпостављајући да се тренутно померање терета врши увек у правцу ужета, наћи диференцијалну једначину путање тог терета.

10. Нека тачка P креће се на такав начин да настаје једна крива чији је коефицијент правца за сваку тачку пропорционалан површини троугла који сачињавају ордината тачке, оса x и дуж повучена између тачака (2,0) и P. Наћи диференцијалну једначину криве.

11. Неку машину покреће стална сила F, али ово кретање успоравају сил трења у лежиштима, директно пропорционалне брзини машине, при чему је фактор пропорционалности R. Међутим, због загревања мазива у лежиштима, сам фактор R мења се са временом и може се приближно узети као реципрочна вредност од $t+1$. Знајући да је убрзање тела једнако количнику из силе која дејствује и масе, поставити диференцијалну једначину кретања ове машине.

ГЛАВА IV

МЕТОДЕ РЕШАВАЊА. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

§ 21. Зависно променљива се не јавља експлицитно у једначини

Два једноставна типа диференцијалних једначина првог реда јесу оне код којих се експлицитно не јавља једна или друга од променљивих. Претпоставимо да се зависно променљива y не јавља експлицитно. Тада једначина мора бити облика

$$f\left(\frac{dy}{dx}, x\right) = 0.$$

Када се ова једначина реши по $\frac{dy}{dx}$, произилази

$$\frac{dy}{dx} = \Phi(x).$$

Проблем решавања диференцијалне једначине сведен је у овом облику на обичну интеграцију. Решење је

$$y = \int \Phi(x)\, dx + \alpha, \tag{51}$$

где је α произвољна константа.

Често је ово решење подесније написати у облику1)

---

1) За различите вредности x_0 добивају се према једначини (52) различите интегралне криве али свака пролази кроз тачку $(x_0, 0)$; уствари, прећутно је постављен захтев да за $x = x_0$ буде $y = 0$. — Општије и прецизније: нека је дефинициона област функције $\Phi(x)$ интервал (a, b) у ком је она у исто време и непрекидна; тада ма кроз коју тачку $M_0(x_0, y_0)$ за коју је $a < x_0 < b$, $-\infty < y_0 < +\infty$, пролази она интегрална крива диференцијалне једначине $y' = \Phi(x)$, чија је једначина

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \Phi(x)\, dx;$$

наиме, то је решење које за $x = x_0$ добива вредност $y = y_0$. — Прев.

$$y = \int_{x_0}^{x} \phi(x)\, dx\,, \tag{52}$$

где је x_0 константа интеграције. Лако је увидети да је овај облик идентичан са (51), јер се *одређени* интеграл у (52) може израчунати заменом двеју граница *ма у којем* (то јест, *неодређеном*) интегралу и одузимањем резултата. Но када се замени горња граница, она даје само сâм неодређени интеграл, а када се замени доња граница она даје неку константу чија је вредност произвољна све док је x_0 произвољно. Ако се ова константа означи са $-\alpha$, (52) своди се на (51).

На пример, посматрајмо једначину

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + x = 0\,. \tag{53}$$

Ова се једначина може решити по $\frac{dy}{dx}$, што даје

$$\frac{dy}{dx} = -1 \pm \sqrt{1-x}\,,$$

чији је интеграл

$$y = \alpha - x \pm \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,.$$

Зато је једначина (53) задовољена тада и само тада када је задовољена една или друга од веза

$$\left.\begin{aligned} y + x - \alpha + \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} &= 0\,, \\ y + x - \alpha - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Оба се ова решења могу обухватити једном јединим једначином; јер, ако је производ двеју величина нула, онда или једна или друга од тих величина мора бити нула, и обрнуто. Зато свако решење од (53) задовољава једначину

$$(y + x - \alpha)^2 - \frac{4}{9}(1-x)^3 = 0\,, \tag{55}$$

која се добива множењем двеју једначина (54) члан по члан. Обрнуто, кад је год задовољена једначина (55), мора бити задовољена једна или друга од једначина (54), што значи да је исто тако задовољена и једначина (53).

Ако је још уз то што се зна да y мора задовољавати (53) познато да y мора бити нула за $x=0$, вредност α није више произвољна него се мора тако изабрати да овај услов буде испуњен. Када у једначини (55) ставимо да су y и x једнаки нули, налазимо да је $\alpha = \pm\frac{2}{3}$. Зато је партикуларно решење[1] које задовољава и једначину и њен гранични услов:

$$\left(y + x \pm \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}(1-x)^3.$$

§ 22. Независно променљива се не јавља експлицитно у једначини

У случају да се у једначини не јавља независно променљива, једначина добива облик

$$f\left(\frac{dy}{dx},\, y\right) = 0\,.$$

Решена по $\frac{dy}{dx}$, ова даје

$$\frac{dy}{dx} = \phi(y)\,,$$

или

$$\frac{dy}{\phi(y)} = dx\,;$$

решење ове једначине је, очигледно,

$$x = \int \frac{dy}{\phi(y)} + \alpha\,.$$

Оно се такође може написати у облику[2]

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\phi(y)}\,.$$

---

[1] Или, боље, партикуларна решења; јер две вредности за α дају различите криве.

[2] Видети примедбу на облик решења (52). И овде је прећутно постављен захтев да у сваком решењу буде $x=0$ за $y=y_0$, тј. да свако решење пролази кроз тачку $(0, y_0)$. Општије и прецизније би било

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\Phi(y)}\,, \tag{A}$$

где је $M_0(x_0, y_0)$ ма која тачка за коју је $-\infty < x_0 < +\infty$, $c < y_0 < d$; при том се узима да је функција $\frac{1}{\Phi(y)}$ дефинисана у интервалу (c, d) и да је у исто време и непрекидна у том интервалу. Тада је (A) оно решење које за $y = y_0$ добива вредност $x = x_0$. — Прев.

Као пример, посматрајмо једначину

$$\sin\frac{dy}{dx} = 1 - y\,.$$

Она се своди на облик

$$\frac{dy}{\arcsin(1-y)} = dx\,,$$

или

$$x = \int\frac{dy}{\arcsin(1-y)} + \alpha\,. \tag{56}$$

Колико се тиче теорије диференцијалних једначина, то је решење датог проблема. Чињеница да се овај интеграл помоћу елементарних функција не може изразити у коначном облику није повољна, али се не може избећи[1].

§ 23. Променљиве су раздвојиве

Општа диференцијална једначина првог реда може садржавати само променљиве x, y и извод $\frac{dy}{xd}$. Зато је теориски увек могућно решити је по $\frac{dy}{dx}$; када се ово учини, добива се једначина облика

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y)\,. \tag{57}$$

Ако се деси да је функција $\phi(x, y)$ производ неке функције само од x и неке функције само од y, у ком се случају она може написати као $\phi_1(x)\cdot\phi_2(y)$, или ако се она на неки начин може довести на тај облик, онда једначину (57) можемо писати као што следи:

$$\frac{dy}{\phi_2(y)} = \phi_1(x)\cdot dx\,.$$

Очигледно, решење је ове једначине:

$$\int\frac{dy}{\phi_2(y)} = \int\phi_1(x)\,dx\,.$$

---

[1] Практичне методе израчунавања тог интеграла објаснићемо у §§ 24 до 26. Помоћу тих метода могућно је или да добијемо криву која претставља везу између x и y или да израчунамо таблицу вредности, употпуњујући тиме решавање овог проблема.

Овај процес познат је под именом решавања диференцијалне једначине „раздвајањем променљивих". Методе објашњене у §§ 21 и 22, јесу специјални случајеви ове схеме, а није тешко наћи и друге примере. На пример, када се раздвоје променљиве у једначини (34), она постаје

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\ \arcsin y} = \frac{dx}{x}\,. \tag{58}$$

Како је $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ диференцијал од $\arcsin y$, једначину (58) можемо написати у облику

$$\frac{d(\arcsin y)}{\arcsin y} = \frac{dx}{x}\,, \tag{59}$$

чије је решење, очигледно, $\log\arcsin y = \log x + \alpha$. Ово се лако може свести на облик (32), из кога је раније изведена диференцијална једначина (34).

Интересантно је приметити да предложена замена у задатку 6, § 5, своди ову једначину на облик

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w}{x} \tag{60}$$

у коме се променљиве лако раздвајају. После извршених интеграција, налазимо да је решење

$$w = c\,x$$

које се на основи везе између y и w, своди опет на облик

$$y = \sin c\,x\,.$$

У суштини, између ових двеју метода решавања нема разлике. Смена променљивих у задатку 6 учињена је у складу са једначином $y = \sin w$ или $w = \arcsin y$. Ова иста функција и њен диференцијал били су у једначини (59) написани експлицитно и употребљени тако као да је сам $\arcsin y$ променљива интеграције. Да ли је она задржана експлицитно као у (58) и (59), или замењена са w као у (60) — то је сасвим произвољно.

ЗАДАЦИ

1. Решити једначину (39). Узимајући да се дужина лука криве мери од тачке минимума, одредити константу интеграције.

2. Решити задатак (3), § 5. Да ли је решење исто као и оно које је раније добивено?

3. Решити диференцијалну једначину изведену у задатку (4), § 20. Ако је температура топле средине за 30° виша од хладније и ако после две секунде термометар показује температуру за 20° вишу од температуре околне средине, колику ће температуру показивати после 20 секунди од тренутка преношења из топлије средине? Да ли би ово био добар клинички термометар?

4. Решити следеће једначине:

a) $$\sin x \cos^2 y\, dx + \cos^2 x\, dy = 0 .$$

b) $$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0 .$$

c) $$y - x\frac{dy}{dx} = b\left(1 + x^2\frac{dy}{dx}\right).$$

5. Решити једначину (36).

6. Решити једначину:

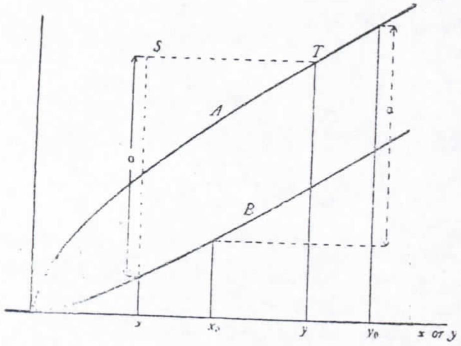
$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+2} - \frac{1}{x(y^2+2)} .$$

§ 24. Нумеричка интеграција

Сви типови једначина дискутовани у §§ 21 до 23, своде се на облик

$$\int f_1(y)\, dy = \int f_2(x)\, dx + \alpha . \tag{61}$$

Ма да у теорији диференцијалних једначина ово претставља „школско решење“, за потребе научника оно може бити недовољно и то из једног из двају разлога: може се десити да није у стању израчунати те интеграле,или, пошто их је израчунао, може се десити да није у стању решити их експлицитно по y у функцији од x. Једначина (56) је илустрација првог типа тешкоће, док ће се за решење задатка 6, § 23, наћи да је одличан пример другог. Када се појави било која од ових околности, потребна су нека друга сретства.



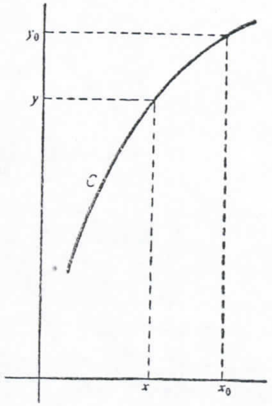
Сл. 18

За ово ћемо најбоље учинити ако тим тешкоћама приђемо обратно од њиховог логичког реда, посматрајући прво шта би требало да се ради када би функције биле интегриране, а онда како да их интегрирамо.

Ако су обе функције интегриране — за тренутак свеједно како — оба се интеграла у једначини (61) могу бар графички приказати у истом скупу координатних оса као на сл. 18, где су са x означене апсцисе за једну криву, а са y за другу. Претпоставимо затим да је контурни услов постављен тако да је $y = y_0$ за $x = x_0$. Када ове тачке обележимо на оси апсциса као на сл. 18, ординате које им одговарају претстављају вредности које интеграли у (61) морају узимати истовремено. Зато α мора имати вредност једнаку разлици њихових дужина, јер иначе једначина (61) не би била тачна.

Знајући вредност α, лако је наћи други пар вредности x и y, јер једначина (61) тврди да, ако су x и y било који пар *одговарајућих* вредности, ордината криве A у тачки y мора премашивати ординату криве B у тачки x, за износ α. Узмимо, дакле, да се тражи вредност y која одговара ма ком x. Означивши ово x на оси апсциса и додавши износ α ординати криве B продужујући је на тај начин до тачке S, треба само да потражимо тачку T на кривој A која има исту ординату као и тачка S, и читање скале непосредно доле даје тражено y.

Истим поступком можемо изабрати друге вредности x и одредити одговарајуће вредности y. Када их имамо довољан број на расположењу, можемо их нанети у координатном систему xy, као на сл. 19, па кроз одговарајуће тачке повући криву C. Та крива претставља тада везу између x и y. Очигледно је да ову можемо продужити колико желимо.



Сл. 19

§ 25. Интеграција помоћу редова

Метода у § 24 претпоставља могућност интеграције функција $f_1(y)$ и $f_2(x)$. Следећих неколико одељака посветићемо тумачењу метода које су каткад корисне за ову сврху.

Функције $f_1(y)$ и $f_2(x)$ често се могу развити у Тајлорове редове. Ако редови конвергирају у околини вредности y и x, могу се интегрирати члан по члан; а помоћу резултујућих редова могу се вршити израчунавања.

Посматрајмо као пример једначину

$$x = \int \frac{dy}{\arcsin(1-y)} + \alpha , \tag{56}$$

која се појавила у § 22. Да бисмо ствар унеколико упростили, сменићемо y новом променљивом w, дефинисаном са једначином

$$w = \arcsin(1-y) . \tag{62}$$

Тада је

$$x = -\int \frac{\cos w}{w}\, dw + \alpha .$$

Наравно, ову једначину можемо написати и у другом облику[1]:

$$x = -\int_{w_0}^{w} \frac{\cos w}{w}\, dw\,. \tag{63}$$

Али, $\frac{\cos w}{w}$ није могућно интегрирати помоћу елементарних функција; ако би то било могућно, могао би се такође одмах интегрирати и интеграл (56). Но, ову функцију могућно је развити у ред који брзо конвергира, јер је ред

$$\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \cdots\cdots$$

добро познат, а из њега одмах добивамо

$$\frac{\cos w}{w} = \frac{1}{w} - \frac{w}{2!} + \frac{w^3}{4!} - \frac{w^5}{6!} + \cdots\cdots.$$

Када овај ред интегрирамо члан по члан, добивамо

$$x = \alpha - \log w + \frac{w^2}{2 \cdot 2!} - \frac{w^4}{4 \cdot 4!} + \frac{w^6}{6 \cdot 6!} - \cdots\cdots. \tag{64}$$

Претпоставимо сада да је контурни услов $y = 0$ за $x = 0$. Тада је из (62) $w = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Смена ове вредности у десној страни једначине (64) даје вредност $\alpha + 0{,}1052$. Зато, ако x треба да буде нула када је y нула, α мора имати вредност $-0{,}1052$. Сада је потпуно одређена веза између x и y једначинама (62) и (64). Пошто је ред (64) конвергентан *ма за коју* вредност w, могућно је израчунати x ма за коју вредност y и у координатном систему xy повући криву кроз одговарајуће тачке. Међутим, са гледишта израчунавања простије би било да се помоћу (64) израчуна x за подесне вредности w^2 и да се из (62) нађу одговарајуће вредности y; јер, поступајући на овај начин, могли бисмо бројеве w изабрати тако да имају мали број цифара, те бисмо њихове логаритме могли наћи без интерполације и у исто време лакше израчунати степене потребне у (64).

На интеграл

$$\int_{w_0}^{w} \frac{\cos w}{w}\, dw\,,$$

---

[1] Прећутно је постављен захтев да за $w = w_0$ буде $x = 0$. Видети примедбе у §§ 21 и 22. — Прев.

који се јавља у (63), често се наилази у проучавању дифракције светлости и звука. Његове су вредности опширно сврстане у таблице под именом „косинус интеграл“ и обично се означавају ознаком[1] Ci w. Наравно, у таблицама се налази *одређен*, а не *неодређен* интеграл. То јест, оне одговарају партикуларној вредности w_0, која је у таблицама ∞. Зато, када једначину (63) изразимо помоћу ових табличних функција, морамо написати

$$x = \mathrm{Ci}\, w_0 - \mathrm{Ci}\, w\,. \tag{65}$$

Није тешко одредити w_0 тако да задовољава нашу контурну вредност; јер, како x мора бити нула када је $w = \frac{\pi}{2}$, очигледно је да w_0 мора бити $\frac{\pi}{2}$. Зато је

$$x = \mathrm{Ci}\, \frac{\pi}{2} - \mathrm{Ci}\, w$$

скраћени облик једначине (64) и одговара партикуларној вредности $\alpha = -0{,}1052$.

Чињеница да једноставан израз (65) и ред (64) претстављају једну те исту функцију може послужити за илустрацију како је уско разликовање оних функција за које се обично мисли да су просте и оних које се сматрају сложеним. На први поглед, Ci w изгледа, вероватно, као вештачка ознака за компликовани ред (64) и да се никако не налази у истој класи са таквим „једноставним“ функцијама као што су $\log w$, $\cos w$ и e^w. Међутим, и ове су у циљу израчунавања од користи једино зато што постоје опширне таблице, а те су таблице изведене најпре из редова.

Слично, нема битног разлога да се каже, као што би се то у проучавању интегралног рачуна могло учинити, да се интеграл

$$\int \frac{dw}{w}$$

може израчунати, а интеграл

$$\int \frac{\cos w}{w}\, dw$$

не може: јер, први се интеграл може писати као $\log w$, а други као Ci w, од којих је сваки од користи само као функција за коју постоје таблице и никако друкчије.

Зато нема ничег необичног у употреби решења у облику реда. Ако се жели, могло би се решењу у облику реда ма ког интеграла дати неко име, као што је интегралу (63) дато име Ci w, а његове би се

---

[1] Ознака је аналогна ознаци „cos w“ а изведена је из почетних слова латинских речи „cosinus integralis“.

вредности могле сврстати у таблице. Оно би се тада могло ставити баш у исту категорију са логаритмима и тригонометриским функцијама. Што је ово у неким случајевима учињено а у неким није, долази од различитих степена потребе, а не због било које друге одлике.

Шта више, Тајлоров ред није неопходно најбољи облик реда у који треба развити неку функцију. Тако, док ред (64) брзо конвергира за мале вредности w, с њим је тешко радити када је w велико, а лако се може наћи други ред који овоме циљу боље служи. Сада ћемо извести такав ред, но не за општи интеграл већ за сам Ci w, јер смо видели да се општи интеграл лако изражава помоћу њега посретством (65).

Делимичном интеграцијом интеграла

$$\mathrm{Ci}\, w = \int_{\infty}^{w} \frac{\cos w}{w}\, dw\,,$$

добивамо

$$\mathrm{Ci}\, w = \frac{\sin w}{w} + \int_{\infty}^{w} \frac{\sin w}{w^2}\, dv\,.$$

Интегришући овај резултат по други пут делимично, добивамо

$$\mathrm{Ci}\, w = \frac{\sin w}{w} - \frac{\cos w}{w^2} - 2\int_{\infty}^{w} \frac{\cos w}{w^3}\, dw\,.$$

Продужујући тако долазимо до реда

$$\mathrm{Ci}\, w = \sin w \left[\frac{1}{w} - \frac{1\cdot 2}{w^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{w^5} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{w^7} + \cdots\cdots\right].$$

$$- \cos w \left[\frac{1}{w^2} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{w^4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{w^6} - \cdots\cdots\right]. \qquad (66)$$

Овај ред не конвергира, а ипак је од користи за циљеве израчунавања када је w велико; јер, може се показати да ако се израчуна n чланова тога реда, њихов збир се разликује од тачног одговора за износ мањи од $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{w^n}$. Да бисмо ово видели, приметимо да ће после n делимичних интеграција, Ci w бити изражено тачно као збир првих n чланова реда (66) више један интеграл, који је или

$$+1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n \int_{\infty}^{w} \frac{\sin w}{w^{n+1}}\, dw\,,$$

или

$$-1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n \int_{\infty}^{w} \frac{\cos w}{w^{n+1}}\, dw\,.$$

Према томе, један или други од ових израза претставља грешку која се чини када се за довољну апроксимацију узму n првих чланова реда (66). Но, како $\sin w$ и $\cos w$ никада не могу бити већи од један, ове грешке неопходно морају бити по апсолутној вредности мање од

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n \int_{\infty}^{w} \frac{1}{w^{n+1}}\, dw = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{w^n}\,.$$

Ако, дакле, чланови у заградама реда (66) најпре *опадају* и постају врло мали, — као што стварно бива кад је w велико — а затим *расту* и чине да ред дивергира, може се добити добра апроксимација када се израчунавање прекине док су чланови још мали. Да се добије исти степен тачности из (64), било би потребно много више труда.

ЗАДАЦИ

1. Наћи ред за (176), § 58, развијајући у потенцијални ред функцију e^{-x}.

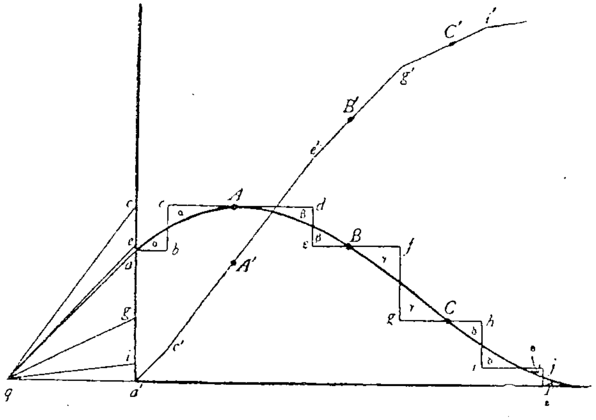
2. Узастопном делимичном интеграцијом развити исту функцију у ред по *опадајућим* степенима од x.

3. Израчунати вредности Ci 1 и Ci 10 на четири децимале ако је дато $\mathrm{Ci}\,\frac{\pi}{2} = 0{,}4720$.

§ 26. Графичка интеграција

Када су примене којима су намењена решења неке једначине такве да се не тражи врло велика тачност, са знатним преимућством се може каткада користити графичка интеграција. Најпрактичнија метода заснива се на двема идејама. Прва је та да се интеграл константе графички претставља правом, чији је коефицијент правца једнак тој константи. Друга је да је интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ једнак површини ограниченој кривом $y = f(x)$, осом x и ординатама у тачкама $x = a$ и $x = b$.

Узмимо да треба интегрирати функцију $y = f(x)$ коју на сл. 20 претставља крива $ABC\ldots.$ и претпоставимо да смо ову криву заменили изломљеном линијом $abcd\ldots.$, конструисаном тако да су по два „троугла" сваког од парова α, α; β, β; ...., по величини својих површина једнака. Интеграл изломљене линије можемо добити применом прве горе поменуте идеје: то јест, повлачењем низа правих са одговарајућим коефицијентима правца. Претпоставимо да смо ово обавили и да је то довело до изломљене линије $a'c'e'$..... Ординате тачака A', B',.... ове изломљене линије морају бити једнаке интегралу саме функције $f(x)$; јер површине испод ABC.... и њихове апроксимације $abcd$...., једнаке су све до ових ордината. Зато тражена интегрална крива пролази кроз тачке A', B', C',..... Шта више, у тачкама A, B, C,...., којима одговарају тачке A', B', C',...., и отсечци cd, ef,.... и дата крива ABC имају исте ординате. Зато ће на овим местима тражена интегрална крива имати исти коефицијент правца као изломљена линија $a'c'e'$..... На овај начин не само да тражена крива пролази кроз тачке A', B',...., него она у тим тачкама и додирује изломљену линију. Ове чињенице дају могућност да повучемо једну криву која са великом тачношћу апроксимира интеграл $\int f(x)\,dx$.



Сл. 20. Графичка интеграција

Практично извођење овог поступка показано је на сл. 20.

Прво се конструише изломљена линија тако да површине одговарајућих троуглова сваког пара буду једнаке толико приближно колико се може оком оценити. Затим се редом обележе тачке a, c, e,...., на оси y у висини одговарајућих отсечака ab, cd, ef,...., и тачка q на оси x за једну јединицу улево од координатног почетка. Праве qa, qc, qe,...., имају зато исте коефицијенте правца као и отсечци $a'c', c'e', e'g'$,..... Крива $A'B'C'$,...., конструисана је уствари спајањем отсечака паралелних тим правим.

§ 27. Интеграф

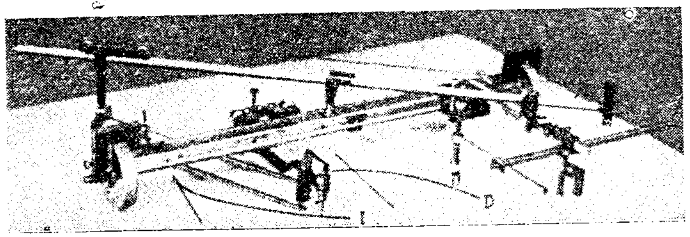
Постоји справа коју је један швајцарски механичар[1] конструисао тако да једно перо у саставу те справе аутоматски повлачи криву $y = \int f(x)\,dx$ када се једна казаљка креће дуж криве $y = f(x)$. Она је

---

[1] *G. Coradi*, Цирих.

показана на сл. 21, а на сл. 22 дат је схематички дијаграм њеног начина дејства.

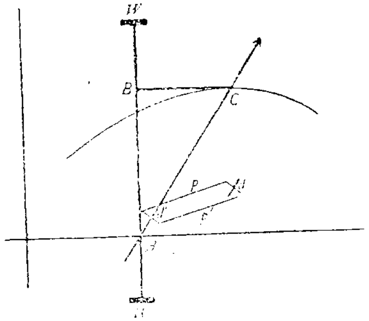
Битни је састав ове машине троугао ABC, који има три покретне стране. Страна AB је тежак носач који се држи паралелно са осом y, но који се слободно котрља на точковима WW. Страна BC држи се паралелно са осом x, но подешена је тако да се може слободно покретати у правцу осе y. Њена дужина, која се одржава сталном, јесте теориска јединица дужине за дејство справе. Трећа страна AC је једна шипка која се поставља тако да пролази кроз тачку A у којој оса x сече носач, и кроз крај C шипке BC. У тачки C смештена је казаљка[1] коју треба покретати дуж криве $y = f(x)$ чији се интеграл тражи.



Сл. 21. Интеграф

Очигледно, пошто је BC јединица, коефицијент правца праве AC увек је једнак вредности функције $f(x)$ која одговара посебној тачки C над којом се налази казаљка.

Постоји такође паралелограм $pp'dd'$, чија се страна d' држи под правим углом према шипки AC, ма да може да клизи слободно дуж ње. Средиште супротне стране d смештено је на ординати тачке C, и осовина је једног заоштреног диска који се котрља по хартији када се креће носач AB. Пошто је његова осовина d *управна* на AC, његово кретање мора бити *паралелно* са AC. Зато, када се казаљка покреће, диск прелази једну путању чији је коефицијент правца стално једнак тренутној ординати $f(x)$ тачке C. Отуда, ако се C креће дуж криве $y = f(x)$, диск се мора котрљати дуж путање чија је једначина $y = \int f(x)\,dx$.



Сл. 22. Схематички дијаграм интеграфа

У интеграфу је са диском спојено једно перо које повлачи ову интегралну криву, стално бележећи на тај начин резултат интегрисања.

---

[1] Ради лакшег руковања казаљку носе подесни носачи показани на сл. 21, но, ово нема везе са теоријом справе.

Институти у којима се има много посла са диференцијалним једначинама, тако да су тешке интеграције честе, обично имају такве изуме. За већину практичних задатака њихова је тачност сасвим довољна и са њима се брзо оперише. Међутим, они имају један недостатак који је често озбиљан. Ако диференцијална једначина као константе или параметре место посебних садржи опште бројеве, може се јавити потреба да се овим константама даје низ вредности и да се за сваку од њих нађе посебно решење. Наравно, ово захтева велики напор и може се показати као непрактично.

На пример, једначину

$$\frac{dy}{dx} = x \sin (3y^2 + 2) ,$$

лако бисмо могли решити помоћу интеграфа; али, једначину

$$\frac{dy}{dx} = x \sin (ay^2 + b), \tag{67}$$

могли бисмо решити само давањем посебних вредности константама a и b.

С друге стране, такви се параметри често могу отстранити подесном сменом променљивих. Тако, једначина

$$\frac{dy}{dx} = x (ay^2 + b) \tag{68}$$

изгледа на први поглед исто тако тешка као и горња. Али, увођењем двеју нових променљивих

$$x = c_1 \xi ,$$

$$y = c_2 \eta ,$$

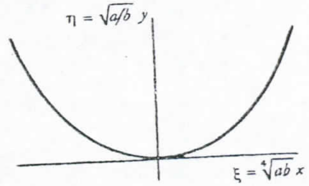
она се може довести на облик

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{{c_1}^2}{c_2} (a{c_2}^2 \eta^2 + b) \xi .$$

Затим, ако учичимо да c_1 и c_2 задовољавају услове $a{c_1}^2 c_2 = 1$ и $\frac{b{c_1}^2}{c_2} = 1$ $\left(\text{то јест, ако ставимо } c_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{ab}} \text{ и } c_2 = \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, ова се може свести на једноставнији облик

$$\frac{d\eta}{d\xi} = (\eta^2 + 1) \xi . \tag{69}$$

Зато би се решавањем једначине (69) могла добити нека крива која везује ξ и η, таква као што је показано на сл. 23. Пошто се ова крива подједнако добро примењује за *све* вредности a и b, из ње се може добити решење *било које* једначине облика (68) променом скала на осама. Тако, ако је $b = 8$ и $a = 2$, x и y везани су са ξ и η по законима $x = \frac{1}{2} \xi$ и $y = 2\eta$. Зато, множећи са 2 бројеве на оси η и делећи са 2 оне на оси ξ, крива $\xi\eta$ трансформише се у другу криву која везује x и y.



Сл. 23

Чак се и једначина (67) може знатно упростити овим начином, јер се сменама $\eta = y\sqrt{a}$ и $\xi = x\sqrt[4]{a}$, може свести на облик

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \xi \sin (\eta^2 + b),$$

где се место два налази само један параметар.

§ 28. Променљиве се раздвајају заменом. Хомогене једначине

Каткада се дешава да нека једначина, у којој изгледа да су променљиве нераздвојиве, може подесном заменом свести на облик у коме се оне раздвајају.

Посматрајмо као пример једначину

$$x \frac{dy}{dx} + y + y^2 x = 0 .$$

Када сменимо y са $w = xy$, добивамо нову једначину

$$\frac{dw}{dx} + \frac{w^2}{x} = 0 ,$$

чије је решење

$$x = \alpha\, e^{\frac{1}{w}} = \alpha\, e^{\frac{1}{xy}} .$$

Без сумње, читалац ће осетити да је ово нека врста довитљивости, која се по свој прилици примењује једино у задацима који су пробрани у ову сврху. Заиста, у овом реаговању има нешто истине; јер, чак ако подесна замена и постоји, не мора бити очигледна[1]. Према томе, ову

---

[1] У овом примеру за смену би нам могло дати повода запажање да су прва два члана добро познати образац за $\frac{d}{dx}(x y)$. Када се има посла са тешким једначинама, често се дешава да успех или неуспех зависи баш од таквог запажања.

би методу уопште требало пробати као једну од последњих. Међутим, постоји један тип једначине за коју је увек позната права смена. Она је позната као *хомогена једначина.*

За једначину

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y), \tag{70}$$

каже се да је хомогена ако се функција ϕ не мења кад се x и y смене са kx и ky без обзира на вредност величине k. То јест, једначина је хомогена ако је

$$\phi(x, y) \equiv \phi(kx, ky),$$

ма за коју вредност k. Специјално, ако се k смени са $\frac{1}{x}$, аргументи функције ϕ постају 1 и $\frac{y}{x}$. Тада једначина (70) добива облик

$$\frac{dy}{dx} = \phi\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

То нам даје идеју да y сменимо са $w = \frac{y}{x}$, што води једначини

$$x\frac{dw}{dx} + w = \phi(1, w),$$

у којој се променљиве раздвајају.

Даљи је формални поступак:

$$\frac{dw}{\phi(1, w) - w} = \frac{dx}{x};$$

$$\log x = \log \alpha + \int \frac{dw}{\phi(1, w) - w};$$

$$x = \alpha\, e^{\int \frac{dw}{\phi(1,\, w) - w}}.$$

Посматрајмо као пример једначину

$$(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0, \tag{71}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Лако је видети да се на десној страни ове једначине не дешава никаква промена ако се место x и y стави kx и ky. Ставимо сада $y = wx$. Тада је

$$x\frac{dw}{dx} + w = -\frac{2w}{1 + w^2},$$

или

$$\frac{1 + w^2}{3w + w^3}\, dw = -\frac{dx}{x}.$$

Интеграл ове једначине је

$$-\log x = \log \alpha + \frac{1}{3}\log(3w + w^3),$$

који се своди на

$$x^2 y + \frac{y^3}{3} = \frac{1}{3\alpha^3}.$$

Можемо узгред приметити да се ово свођење на облик у ком се променљиве раздвајају може подједнако извести и када се x смени са w[1]. Међутим, обично је смена зависно променљиве једноставнија од смене независно променљиве, па је, према томе, прва од ових смена једна од највише употребљаваних.

§ 29. Тоталне диференцијалне једначине

Неке диференцијалне једначине првог реда можемо решити упоређивањем са обрасцем за тоталан диференцијал

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{72}$$

Претпоставимо да се диференцијална једначина јавља у облику

$$f_1(x, y) + f_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{73}$$

---

[1] Наиме: једначину (70) можемо написати у сблику

$$dy = \phi\left(\frac{x}{y}, 1\right) dx$$

па ставити

$$x = wy,\; dx = wdy + ydw;$$

тада је

$$dy = \phi(w, 1)\cdot(wdy + ydw),$$

итд. — Прев.

или да се може свести на тај облик. Очигледно, ако бисмо могли наћи функцију $\phi(x, y)$ такву да је $\frac{\partial\phi}{\partial x} = f_1$ и $\frac{\partial\phi}{\partial y} = f_2$, једначине (72) и (73) би постале идентичне под претпоставком да је $\frac{d\phi}{dx} = 0$. Зато би одмах следило да је $\phi(x, y) = \alpha$ решење једначине (73), јер иначе $\frac{d\phi}{dx}$ не би било нула.

Ово, наравно, не претставља стварно методу решавања таквих једначина, јер нам то не говори како да нађемо функцију ϕ. Но, ово може послужити као основа једне методе решавања, само ако можемо обавити две ствари: прво, ако смо у стању наћи методу помоћу које можемо из саме једначине утврдити да ли таква функција ϕ постоји или не; и друго, ако она постоји, да смо у стању пронаћи методу помоћу које можемо наћи ту функцију. Заиста, може се учинити и једно и друго, као што ћемо сада видети. Међутим, морамо најпре приметити да, када таква функција ϕ постоји, једначину (73) називамо *тоталном* па је стога наш први задатак да поставимо *критеријум када је нека једначина тотална.*

Да бисмо нашли такав критеријум, узмимо да је једначина (73) тотална. Тада је, према дефиницији,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = f_1 ,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = f_2 .$$

Диференцирајући прву од ових једначина по y, а другу по x, видимо да је

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} ,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} ,$$

одакле следи [1] да је

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} , \tag{74}$$

ако је једначина тотална. Шта више, може се доказати и обрнуто: наиме, ако је, једначина (74) задовољена, једначина (73) је

---

[1] Постоје изузетне функције за које $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}$ није једнако $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial x}$; али, оне се тако ретко јављају, нарочито у примењеним наукама, да се у једном елементарном уџбенику потпуно могу занемарити.

тотална. На овај начин увек је могућно одлучити да ли је нека једначина тотална или није и *пре покушаја да се она реши.*

Да то покажемо, посматрајмо поново пример

$$(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 . \tag{71}$$

Овде је $f_1 = 2xy$ и $f_2 = x^2 + y^2$, одакле

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x ,$$

и зато је једначина тотална.

Пошто смо извршили први задатак, пређимо на тражење функције ϕ, за које ћемо наћи да је исто тако једноставно. Када знамо да је једначина тотална, знамо да важе везе

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = f_1(x, y) ,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = f_2(x, y) .$$

Пошто смо $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ добили из ϕ обичним диференцирањем *узимајући да је y константа,* следи да ϕ можемо добити из $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ обичном интеграцијом, *узимајући да је y константа.* Зато је

$$\phi = \int f_1(x, y)\,\partial x + \alpha(y) , \tag{75}$$

где смо написали ∂x место dx да назначимо да y треба сматрати као константу, и где смо „константу интеграције“ означили са $\alpha(y)$, јер тако морамо сматрати ма коју функцију само од y, све док се врши парцијално диференцирање по x.

Интегришући на исти начин другу једначину, добивамо

$$\phi = \int f_2(x, y)\,\partial y + \beta(x) . \tag{76}$$

Две се могућности појављују кад упоредимо једначине (75) и (76): пре свега, интеграл $\int f_2(x, y)\,\partial y$ може бити једнак $\int f_1(x, y)\,\partial x$ у ком ће случају обе једначине дефинисати исту функцију ϕ тада и само тада када је функција $\alpha(y)$ једнака функцији $\beta(x)$, што, наравно, захтева да обе ове функције буду константе.

Затим, интеграл $\int f_1(x, y)\,\partial x$ може да садржи неку функцију од x, рецимо $g(x)$, која се не јавља у интегралу $\int f_2(x, y)\,\partial y$; или, интеграл $\int f_2(x, y)\,\partial y$ може да садржи неку функцију од y, рецимо $h(y)$, која се не јавља у интегралу $\int f_1(x, y)\,\partial x$, — или може да се деси и једно и друго. Да би у овом случају једначине (75) и (76) биле идентичне потребно је да буде $\beta(x) = g(x)$ и $\alpha(y) = h(y)$. Ма у којем од ова два случаја, решење једначине је $\phi = C$, где је C нека константа.

Посматрајмо као пример опет једначину (71). Како је

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2\,xy\,,$$

следи

$$\phi = \int 2\,xy\,\partial x + \alpha(y)$$

$$= x^2y + \alpha(y)\,.$$

Исто тако, како је

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + y^2\,,$$

следи

$$\phi = x^2y + \frac{y^3}{3} + \beta(x)\,.$$

Упоређујући ове две једначине видимо да ће оне бити идентичне под условом да је $\beta(x) = 0$ и $\alpha(y) = \frac{y^3}{3}$. Одавде је $\phi = x^2y + \frac{y^3}{3}$, па је решење те једначине

$$x^2y + \frac{y^3}{3} = C\,.$$

Исто смо решење добили другом методом у § 28.

Као други пример посматрајмо једначину

$$\sec^2 x\ \operatorname{tang} y\,dx + \sec^2 y \operatorname{tang} x\ dy = 0\,.$$

Овде је

$$f_1(x, y) = \sec^2 x\ \operatorname{tang} y,$$

$$f_2(x, y) = \sec^2 y\ \operatorname{tang} x,$$

одакле

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \sec^2 x\ \sec^2 y\,.$$

Интегришући на горе објашњен начин, налазимо:

$$\phi = \operatorname{tang} x\ \operatorname{tang} y + \alpha(y)\,,$$

$$\phi = \operatorname{tang} x\ \operatorname{tang} y + \beta(x)\,.$$

Зато је $\alpha = \beta = C$, где је C нека константа, па је решење[1]

$$\operatorname{tang} x\ \operatorname{tang} y + C = 0\,.$$

ЗАДАЦИ

1. $y^2 = x\,(y - x)\,\frac{dy}{dx}\,.$
2. $2\,x^2y + y^3 - x^3\,\frac{dy}{dx} = 0\,.$
3. $(2\,ax + by) + (2\,cy + bx + e)\,\frac{dy}{dx} = g\,.$
4. $\sec^2 x\ \operatorname{tang} y\,\frac{dy}{dx} + \sec^2 y\ \operatorname{tang} x = 0\,.$
5. $t + l\,\frac{dI}{dt} = m\,I\,.$
6. $2\,\frac{\theta}{r^3} + \left(\frac{1}{r^2} - 3\,\frac{\theta^2}{r^4}\right)\frac{dr}{d\theta} = 0\,.$
7. $(a\,d\alpha + b\,d\beta)\sin(a\alpha + b\beta) = (b\,d\alpha + a\,d\beta)\cos(b\alpha + a\beta)\,.$
8. $\left(T + \frac{1}{\sqrt{t^2 - T^2}}\right)\frac{dT}{dt} = \left(\frac{T}{t\sqrt{t^2 - T^2}} - t\right).$

§ 30. Линеарне једначине

Ако је диференцијална једначина првог реда линеарна, она се може написати у облику

$$\frac{dy}{dx} + f_1(x)\,y = f_2(x). \tag{77}$$

Задатак 3, § 5, био је овог типа, и нашли смо да се лако решава када се y смени са $w = e^{cx}y$. То нам даје сугестију да би се и за овај пример могло наћи неко решење стављајући место y неку нову променљиву $w = y \cdot g(x)$, под условом да смо у стању подесно изабрати функцију $g(x)$. Међутим, како одговарајући избор никако није очигледан, радићемо са неодређеном функцијом, у нади да се може појавити нешто што би сугерисало подесан избор.

---

[1] По правилу треба ставити да је Φ једнако некој константи. Но, једна произвољна константа већ постоји, па другом константом не бисмо добили ничег општијег.

Наша замена $w = g \cdot y$ трансформише једначину (77) у

$$\frac{dw}{dx} + \left(f_1 - \frac{1}{g}\frac{dg}{dx}\right) w = g f_2 .$$

Ако сада g изаберемо тако да буде

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{dx} = f_1 ,$$

други члан ове једначине ишчезава, па одмах имамо

$$w = \alpha + \int g f_2 \, dx .$$

Али, очигледно, услов коме смо подвргли функцију g, води избору

$$g = e^{\int f_1 \, dx} ,$$

одакле имамо

$$w = \alpha + \int e^{\int f_1 \, dx} f_2 \, dx .$$

Враћајући се са w на y, налазимо да је решење једначине (77)

$$y = e^{-\int f_1 \, dx}\left(\alpha + \int e^{\int f_1 \, dx} f_2 \, dx\right). \tag{78}$$

Овај образац (78) треба памтити, пошто многе једначине које се помоћу њега могу решити не могу бити решене ни на који други начин. Да би различите етапе његовог извођења биле савршено јасне, решаваћемо једначину

$$\frac{dy}{dx} + xy = x , \tag{79}$$

корак по корак. Овде је

$$f_1(x) = x ,$$
$$f_2(x) = x .$$

Зато је замена коју треба извршити

$$w = y\, e^{\int x dx} = y\, e^{\frac{x^2}{2}} .$$

Из ове једначине налазимо да је

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dw}{dx} - xy .$$

Зато једначина од које смо пошли постаје

$$\frac{dw}{dx} = x\, e^{\frac{x^2}{2}} .$$

Стога је решење

$$w = e^{\frac{x^2}{2}} + \alpha ,$$

или

$$y = 1 + \alpha\, e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Као други пример посматрајмо једначину

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x . \tag{80}$$

Овде је $f_1 = \frac{1}{x}$ и $f_2 = \sin x$. Зато је $\int f_1 dx = \log x$ па једначина (78) постаје

$$y = e^{-\log x}\left(\alpha + \int e^{\log x} \sin x \, dx\right).$$

Али, по дефиницији логаритма је, $e^{\log x} = x$ и $e^{-\log x} = \frac{1}{x}$. Зато је

$$y = \frac{1}{x}\left(\alpha + \int x \sin x \, dx\right),$$

што се лако израчунава.

§ 31. Једначине које се могу свести на тип линеарних једначина

Неке једначине које нису линеарне могу се подесном сменом променљивих учинити линеарним. Можда је најважнији тип

$$\frac{dy}{dx} + f_1(x)\, y = f_2(x)\, y^m .$$

Ако се ова једначина подели са $\frac{y^m}{1-m}$, она добива облик

$$\frac{1-m}{y^m} \cdot \frac{dy}{dx} + (1-m) f_1 \frac{1}{y^{m-1}} = (1-m) f_2 . \tag{81}$$

Тренутак посматрања показује да је први члан извод по x количине

$\frac{1}{y^{m-1}}$, која се јавља и у другом члану. Зато, ако је означимо са w, једначина (81) добива облик

$$\frac{dw}{dx} + (1-m)\, f_1\, w = (1-m)\, f_2\,,$$

а то је линеарна једначина и лако се решава по обрасцу (78). Када се у резултату w замени са y^{1-m}, налазимо да је

$$y^{1-m} = e^{-\int (1-m)\, f_1\, dx} \left(\alpha + \int e^{\int (1-m)\, f_1\, dx} (1-m)\, f_2\, dx \right). \tag{82}$$

Образац (82) разликује се од обрасца (78) само тиме што је свако f замењено са $(1-m)\, f$, а y са y^{1-m}.

Као пример посматрајмо једначину

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{y^3}. \tag{83}$$

Овде је $m = -3$, па је зато смена $w = y^4$. Замењујући у овом променљивом налазимо да је

$$\frac{dw}{dx} + \frac{4}{x}\, w = 4 \sin x\,,$$

а то је линеарна једначина типа (77), у којој је $f_1 = \frac{4}{x}$ и $f_2 = 4 \sin x$.

Зато је решење

$$w = y^4 = \frac{1}{x^4} \left(\alpha + 4 \int x^4 \sin x\, dx \right).$$

које се одмах може израчунати.

ЗАДАЦИ

1. Решити једначину (79) раздвајањем променљивих.
2. Израчунати до краја решење једначине (80).
3. Израчунати до краја решење једначине (83).
4. $\frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{\rho + a\vartheta^3 - 2\rho\vartheta^2}{\vartheta(1-\vartheta^2)}$.
5. $(T \log t - 1)\, T\, dt = t\, dT$.
6. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.
7. $y - \cos x \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x\, (1 - \sin x)$.
8. $\frac{dy}{dx} + y \frac{d\Phi}{dx} = \phi \frac{d\Phi}{dx}$.
9. Методом § 30 решити диференцијалну једначину постављену у задатку 4, § 20.

§ 32. Једначине које се могу решити по x или по y

Постоји још једна метода решавања диференцијалних једначина првог реда, коју вреди покушати ако ниједна од горе објашњених није успешна. То је решавање по једној од променљивих x или y.

Узмимо да је једначина решена по x. Она је тада облика $x = \phi(y, y')$, где је $y' = \frac{dy}{dx}$. Диференцирајући ову једначину, добивамо

$$1 = \frac{\partial \phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{dy'}{dx},$$

у којој се налазе само променљиве y и y' и извод $\frac{dy'}{dx}$, који се може писати у облику $y' \frac{dy'}{dy}$. То јест, горњим поступком виртуелно смо сменили x новом променљивом y'. *Може* бити могућно да се ова једначина реши и да се добије нека веза између y и y'. Ако је тако, алгебарска елиминација променљиве y' из ове и полазне једначине даје тражено решење. У противном случају, метода није успела.

Као пример посматрајмо једначину (53), коју смо већ решили другим начином. Када је решимо по променљивој x, та једначина постаје

$$x = -y'^2 - 2y'. \tag{84}$$

Диференцирајући и стављајући $\frac{dy'}{dx} = y' \frac{dy'}{dy}$, добивамо нову диференцијалну једначину

$$-dy = (2y'^2 + 2y')\, dy',$$

чије је решење, очигледно,

$$-y = \frac{2}{3} y'^3 + y'^2 + \alpha. \tag{85}$$

Решавајући једначину (84) по y', налазимо да је

$$y' = -1 \pm \sqrt{1-x}\,,$$

а када ово заменимо у једначини (85), добивамо коначно решење

$$y + \alpha + \left(\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3} \sqrt{1-x} \right) \left(2 - x \mp 2 \sqrt{1-x} \right) = 0. \tag{86}$$

И поред сложеног изгледа, ова је једначина стварно идентична са решењем добивеним у § 21 и може се свести на исти облик као што је (55), изузев неке разлике у вредности α у двема једначинама, што није битно.

Слична метода решавања заснива се на томе да се полазна једначина реши по y и на тај начин сведе на облик $y = \phi\,(y', x)$. Диференцирање ове једначине по x води једначини

$$y' = \frac{\partial \phi}{\partial y'}\,\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\,,$$

која садржи само y', x и $\dfrac{dy'}{dx}$, па је зато диференцијална једначина првог реда са зависно промењљивом y'. *Може* бити да је могућно решити ову једначину неком везом између y' и x и, ако је тако, можемо помоћу те везе елиминисати y' из полазне једначине.

Као пример посматрајмо једначину

$$\frac{dy}{dx} + xy = x\,, \tag{87}$$

која, када је решимо по y, даје

$$y = 1 - \frac{y'}{x}\,.$$

Диференцирањем се добива

$$y' = -\frac{1}{x}\,\frac{dy'}{dx} + \frac{y'}{x^2}\,,$$

или

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{1-x^2}{x}\,dx\,.$$

Решење је ове једначине

$$y' = \alpha\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Елиминацијом y' из ове и полазне једначине налазимо да је решење

$$y = 1 - \alpha\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Исто смо решење добили у § 30, изузев знака од α, који није битан јер је α произвољно.

Оба примера наведена у овом одељку лако се решавају и на друге начине. Напротив, следећи примери ма да нису тешки када се решавају овом методом, били би врло тешки када би се решавали на неки други начин.

Једначину

$$x^2\,y'^{\,2} + y^2 = y'\,(1 + 2\,xy)\,, \tag{88}$$

лако можемо решити по y, тј.

$$y = xy' \pm \sqrt{y'}\,.$$

Диференцирање даје

$$y' = x\,\frac{dy'}{dx} + y' \pm \frac{1}{2\sqrt{y'}}\,\frac{dy'}{dx}\,,$$

или[1]

$$\frac{dy'}{dx} = 0\,.$$

Решење је ове једначине $y' = \alpha$, помоћу кога се добива опште решење једначине (88) у облику

$$\alpha^2\,x^2 + y^2 = \alpha + 2\alpha\,xy\,.$$

Као други пример посматрајмо једначину

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^2\,. \tag{89}$$

Ако ову једначину решимо по x, добићемо

$$x = -\,y + \sqrt{y'}.$$

Диференцирање даје

$$1 = -\,y' + \frac{1}{2\sqrt{y'}}\,\frac{dy'}{dx}\,,$$

или

$$dx = \frac{dy'}{2\,(1+y')\sqrt{y'}}\,.$$

Лако налазимо да је њено решење

$$y' = \operatorname{tang}^2(x+\alpha)\,.$$

Зато је опште решење једначине (89)

$$(x+y)^2 = \operatorname{tang}^2(x+\alpha)\,.$$

ЗАДАЦИ

1. Свести једначину (86) на облик (55).
2. $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - y + 2\,\dfrac{dy}{dx} = 0\,.$

---

[1] У тражењу општег решења диференцијалне једначине факторима који не садрже изводе могу се једначине скратити на исти начин као што се скраћују константе при решавању алгебарских једначина. На основи тога једначина се може скратити фактором $x \pm \dfrac{1}{2\sqrt{y'}}$, којим је помножено $\dfrac{dy'}{dx}$. (У овом ће случају то бити јасније ако се стави $y' = p, \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dp}{dx}$. — Прев.)

Међутим, појава таквих алгебарских фактора може бити знак постојања „сингуларних решења“, то јест, решења диференцијалне једначине која нису специјални случајеви општег решења. О овима дискутоваћемо у Глави V.

3. $2\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^3+\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2-\Phi=0.$

4. $\frac{dy}{dz}=e^{z-\frac{dy}{dz}}.$

5. $\sqrt{t^2+T}=\frac{dT}{dt}.$

6. $y=x\frac{dy}{dx}+\Phi\left(\frac{dy}{dx}\right)$, где је Φ ма каква функција.

7. $(x^2-1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1.$

8. Решити једначину (89) сменом зависне променљиве y са $w=x+y$.

§ 33. Једначине другог реда које се могу свести на једначине првог реда

Многе једначине које изгледају да су реда вишег од првог, постају једначине првог реда када се место $\frac{dy}{dx}$ напише y'. На пример, једначина изведена у задатку 5, § 20, јесте облика $F\left(\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)$. Када место $\frac{dy}{dx}$ напишемо y', она постаје $F\left(y',\frac{dy'}{dx}\right)$; то је једначина првог реда чије се решење може лако наћи. Резултат је, наравно, нова једначина која везује y', y и x, а ова је диференцијална једначина првог реда.

Постоје три типа диференцијалних једначина другог реда на које се може применити та метода. То су: a) једначине које не садрже y; b) једначине које не садрже x; и c) једначине које не садрже ни x ни y. Наравно, c) је специјалан случај или од a) или од b).

Једначина типа a) је облика $F\left(\frac{d^2y}{dx^2},\frac{dy}{dx},x\right)=0$ која постаје једначином првог реда $F\left(\frac{dy'}{dx},y',x\right)=0$, када се место $\frac{dy}{dx}$ стави y'.

Једначина типа b) је облика $F\left(\frac{d^2y}{dx^2},\frac{dy}{dx},y\right)=0$ или $F\left(\frac{dy'}{dx},y',y\right)=0$, из које x потпуно ишчезава када се $\frac{dy'}{dx}$ замени са $y'\frac{dy'}{dy}$. Она тада добива облик једначине првог реда у којој је зависно променљива y' а независно променљива y.

Да илуструјемо овај последњи тип, посматрајмо једначину

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0, \tag{90}$$

коју можемо писати

$$y'\frac{dy'}{dy}+2y'+y=0.$$

Ово је хомогена једначина, па зато y' треба сменити са $w=\frac{y'}{y}$. То даје

$$\frac{w\,dw}{(w+1)^2}+\frac{dy}{y}=0,$$

чије је решење

$$\log(w+1)+\frac{1}{w+1}+\log y=\alpha.$$

Ако у овој једначини w сменимо са $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, добивамо нову једначину првог реда чије је решење тражена веза између x и y. На несрећу, та једначина није облика који се може обухватити горе примењеним методама. Међутим, ако приметимо да је w извод по x од $\log y$, изгледа да вреди покушати смену новом независно променљивом $v=\log y$. То даје једначину

$$\log\left(\frac{dv}{dx}+1\right)+\frac{1}{\frac{dv}{dx}+1}+v=\alpha, \tag{91}$$

која се може решити по v. Решавајући и диференцирајући на начин показан у § 32, налазимо

$$-\frac{dv'}{dx}=(1+v')^2.$$

Решење је ове једначине

$$v'+1=\frac{1}{\beta+x}.$$

Замењујући ово у једначини (91), добивамо

$$-\log(\beta+x)+(\beta+x)+v=\alpha,$$

или, с обзиром на $v=\log y$,

$$\frac{\beta+x}{y}=e^{\beta-\alpha+x}.$$

Ако α и β сменимо двема новим константама $\alpha'=\beta\,e^{\alpha-\beta}$ и $\beta'=e^{\alpha-\beta}$, можемо добити нешто једноставнији облик

$$y = (\alpha' + \beta' x)\, e^{-x} .$$

Лако се може проверити да је ово решење дате једначине. Међутим, метода коју смо применили да добијемо то решење много је сложенија него што је потребно, као што ћемо видети у § 62.

ОПШТИ ЗАДАЦИ

1. Решити једначину (22).

2. Решити једначину (39).

3. Решити једначину (41).

4. Решити једначину (50) узимајући да је $v_0 = 0$, да је за катоду $x = 0$ и да су на катоди и потенцијал и градијент потенцијала једнаки нули.

5. Наћи опште решење једначине (50).

6. Звучни талас креће се у правцу x. Зна се да се током времена овај поремећај јавља периодично и да се не мења са y или z, тако да потенцијал брзине мора имати облик

$$\Phi = f(x) \sin pt .$$

Наћи облик функције $f(x)$. (Довести у везу са примером 5, § 19).

7. Решити једначину изведену у задатку 5, § 20.

8. Решити једначине (68) и (69). Проверити да смена, помоћу које је друга једначина добивена из прве, чини ова решења идентичним.

9. Решити диференцијалне једначине:

a) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2v}{u} = 3v .$

b) $\sqrt{1 - u^2}\, dv = 2u \sqrt{1 - v^2}\, du .$

c) $\sqrt{1 + \dfrac{dv}{du}} = \dfrac{e^u}{2} .$

d) $\dfrac{dy}{x\, dx} = y \sin (x^2 - 1) - \dfrac{2y}{\sqrt{x}} .$

e) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{2y}{x - y} .$

10. Решити следеће диференцијалне једначине:

a) $\dfrac{dv}{du} + 2\, uv = 2u .$

b) $(1 + v^2)\, du + (1 + u^2)\, v\, dv = 0 .$

c) $u \log u \dfrac{dv}{du} + \sin^2 v = 1 .$

11. Решити диференцијалну једначину нађену у задатку 9, § 20.

12. Решити диференцијалну једначину постављену у задатку 10, § 20.

13. Решити једначину постављену у задатку 11, § 20, узимајући да је у тренутку $t = 0$ брзина била једнака нули.

ГЛАВА V

СИНГУЛАРНА РЕШЕЊА

§ 34. Дефиниција сингуларних решења

Диференцијална једначина има понекад решења која нису специјални случајеви општег решења. Да таква решења постоје, најлакше можемо објаснити ако се позовемо на геометриско тумачење које смо дали у Глави II. Према том тумачењу, свако партикуларно решење одговара једној кривој, а опште решење читавој породици кривих.

Казати да једна од ових кривих задовољава диференцијалну једначину — значи само то да њен коефицијент правца у свакој тачки, као и координате те тачке, задовољавају једначину. Ако породица кривих има обвојницу, све ове количине — коефицијент правца и координате — исте су за неку тачку обвојнице као и за криву коју она додирује у тој тачки. Зато обвојница такође задовољава диференцијалну једначину. Како обвојница није у општем случају једна од кривнх породице, то се она не може добити давањем неке посебне вредности константи интеграције. Зато она претставља неко решење које никако није обухваћено општим решењем и зове се *сингуларно решење*.

Сингуларна решења можемо често наћи и без решавања саме диференцијалне једначине: геометриски ово је еквивалентно исказивању да обвојницу породице кривих често можемо наћи непосредно из њене диференцијалне једначине, а да и не знамо поједине криве те породице.

Кад смо у § 5 дискутовали о обвојницама, скренули смо пажњу на чињевицу да оне постоје само тада када више кривих из породице пролази кроз сваку тачку. Али, ако кроз неку тачку пролази неколико кривих — рецимо n — свака са одговарајућим коефицијентом правца, мора постојати n вредности y' за сваки пар вредности x и y. Другим речима, када се реши по y', диференцијална једначина

$$\phi(x, y, y') = 0 \tag{92}$$

мора имати n корена. Ово важи ма за који пар вредности x и y. Међутим, ако се деси да се тачка налази на обвојници породице, једну од кривих које пролазе кроз ту тачку морамо урачунавати двапут, као што смо већ приметили у § 5. Зато се вредност y' која одговара *овој* кривој, мора двапут појавити као решење једначине (92). Стога је обвојница породице кривих нека крива дуж које диференцијална једначина те породице има једнаке y', исто тако као и крива дуж које њена алгебарска једначина има једнаке c. Показали смо у § 5 да се ово друго место тачака може наћи елиминацијом c из једначина

$$f(x, y, c) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = 0.$$

Исти доказ показује да се геометриско место једнаких y' такође може наћи елиминацијом y' из једначина

$$\phi(x, y, y') = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y'} = 0.$$

Резултат је ове елиминације нека једначина која садржи сммо x и y: она није диференцијална једначина и добили смо је без знања општег решења једначине (92). Из оног што смо већ рекли, очигледно је да њен график садржи обвојницу породице кривих коју дефинише диференцијална једначина. *Али*, као што ћемо видети у § 35, тај се график може састојати и из других кривих. Но, илуструјмо најпре део теорије који смо већ изложили.

Посматрајмо диференцијалну једначину

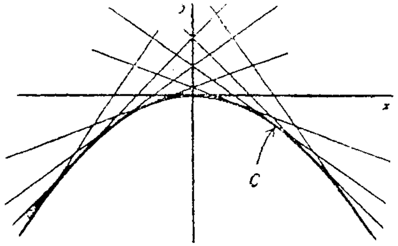
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = y, \tag{93}$$

чије опште решење

$$y = cx + c^2 \tag{94}$$

можемо наћи методом изложеном у § 32.

Ово је линеарна алгебарска једначина: зато је опште решење претстављено породицом правих, које показује сл. 24. Чим погледамо слику, видимо да праве имају обвојницу C, чију једначину можемо наћи ма којом од двеју метода: прво, применом методе изложене у § 5, која захтева да једначину (94) диференцирамо по c, а затим да c елиминишемо. Диференцирање даје $x + 2c = 0$, што, уврштено у једначини (94), води једначини обвојнице $y = -\frac{x^2}{4}$; друго, применом методе изложене у овом одељку која захтева да једначину (93) диференцирамо по y', а затим да y' елиминишемо. Ово такође води истом резултату $y = -\frac{x^2}{4}$.



Сл. 24

Другу од тих метода могли бисмо применити чак и када не бисмо знали решење наше диференцијалне једначине.

§ 35. Место повратних и место додирних тачака

једнаких y' поред об-

Како у § 5, тако и овде геометриско место
војнице може садржавати и друге криве. Међутим, оне обично не прет-
стављају решења диференцијалне једначине породице.
Ако криве које садржи породица имају повратне тачке, као у сл. 4,
обе гране које се састају у повратној тачки имају идентичне коефици-
јенте правца у тој тачки. Зато, када једначину (92) решимо по y', овај
коефицијент правца појавиће се двапут, ако су x и y координате такве
повратне тачке. Геометриско место ових повратних тачака обухваћено
је местом једначих y', исто онако као што је било обухваћено местом
једнаких c.

Зашто ово геометриско место повратних тачака није решење ди-
ференцијалне једначине, лако је видети са сл. 4: наиме, због тога што
коефицијент правца места повратних тачака у општем случају није исти
као и коефицијент правца ма које од кривих из породице које пролазе
кроз те тачке: стога оно не задовољава диференцијалну једначину, што
би се десило да је решење.

Ако су криве таквог облика као што гоказује сл. 8, у свакој тачки
праве AB у којој се различите криве једна с другом додирују, јављају
се две једнаке вредности y', и то по једна за сваку од кривих које се
додирују у тој тачки. Стога је права AB такође место једнаких y'. Ме-
ђутим, као и геометриско место повратних тачака, оно обично није ре-
шење диференцијалне једначине; јер, коефицијент гравца саме праве AB
није у општем случају исти као коефицијент правца ма које од тих
кривих. На пример, у случају породице кругова на сл. 8, њихова дифе-
ренцијална једначина захтева, очигледно, да у овим тачкама y' буде
бесконачно, док је коефицијент правца праве AB нула.

Таква крива дуж које се додирују криве из породице зове се *гео-
метриско место додирних тачака*.

Геометриско место двојних тачака, које је било део места једнаких c,
није део места једнаких y'; јер, као на сл. 4, две гране криве које се
укрштају у двојној тачки имају у општем случају различите коефици-
јенте правца у тој тачки. Ни прво ни друго од ових места тачака није
решење диференцијалне једначине, јер у општем случају коефицијент
правца места двојних тачака различит је од коефицијента правца ма
које од грана.

Да закључимо: нашли смо да се геометриско место једнаких c
може састојати из три типа кривих: обвојнице, места повратних тачака
и места двојних тачака. Геометриско место једнаких y' такође се може

састојати из три типа кривих: обвојнице, места повратних тачака и места додирних тачака. Од ових места тачака, само обвојница претставља сингуларно решење диференцијалне једначине.

§ 36. Одређивање сингуларних решења

С обзиром на претходна посматрања, једноставна је ствар наћи сингуларно решење неке диференцијалне једначине, ако га она уопште има. За ово је потребно само наћи геометриско место једнаких c (ако је познато опште решење) или (ако оно није познато) једнаких y', а затим непосредном заменом одредити који фактори у једначинама ових места задовољавају диференцијалну једначину а који не задовољавају.

На пример, посматрајмо опет породицу кругова показану на сл. 8, чија је једначина

$$(x-c)^2+y^2-r^2=0\,. \tag{18}$$

У § 5 већ смо показали да се геометриско место једнаких c састоји од правих $y=r$ и $y=-r$, које сачињавају обвојницу. У задатку 6, § 20, нађено је исто тако да породицу кругова (18) дефинише такође диференцијална једначина

$$y^2(y'^2+1)-r^2=0\,. \tag{95}$$

Непосредном заменом видимо да функције $y=r$ и $y=-r$ задовољавају ову једначину: зато су оне сингуларна решења.

Али, претпоставимо да нам је дата једначина (95) а да не знамо њено опште решење (18). Њено би сингуларно решење још увек било могућно одредити непосредно из саме диференцијалне једначине. Јер, по диференцирању једначине (95) по y', добили бисмо једначину

$$2y^2y'=0\,, \tag{96}$$

коју задовољава или $y'=0$ или $y=0$. Заменом $y'=0$ у једначини (95), добивамо једначине $y=r$ и $y=-r$ за које смо већ видели да су сингуларна решења. Пошто друга функција $y=0$ не задовољава диференцијалну једначину, она није сингуларно решење. Зато она мора бити или геометриско место повратних тачака или геометриско место додирних тачака. Она је, уствари, права AB на сл. 8, која је очигледно геометриско место додирних тачака.

Приметићемо да би $y=0$ могло бити решење једначине (95) само када би y' било бесконачно. Другим речима, ако крива треба да буде решење једначине (95), њен коефицијент правца мора бити бесконачно велик где год она сече праву $y=0$. Горе смо већ приметили да кругови имају такав коефицијент правца. Права $y=0$ није сингуларно решење управо због тога што она *нема* такав коефицијент правца.

Као други пример, посматрајмо породицу кривих показану на сл. 6, ија је једначина

$$(y-c)^2-(x+c)^3=0\,.$$

У задатку 7, § 20, показано је да је диференцијална једначина ове породице

$$\frac{8}{27}y'^3+\frac{4}{9}y'^2-y-x=0\,. \tag{97}$$

Диференцирање по y' даје

$$y'(y'+1)=0\,,$$

чији су корени $y'=0$ и $y'=-1$. Замена ових вредности у једначини (97), даје нам места тачака $y+x=0$ и $y+x-\frac{4}{27}=0$.

Непосредном заменом налазимо да функција $y=-x$ није решење једначине (97). Зато је она или геометриско место повратних тачака или геометриско место додирних тачака. С друге стране, функција $y=-x+\frac{4}{27}$ задовољава једначину (97). Зато је она сингуларно решење и њен је график обвојница кривих. Како смо у § 5 за $y=-x$ такође нашли да је део места једнаких c, очигледно је да је то геометриско место повратних тачака, као што то заиста показује сл. 6.

Најзад, у задатку 8, § 20, нађено је да породица кривих

$$y^2=(x-c)(x-2c)^2 \tag{17}$$

има за диференцијалну једначину

$$4y\,y'^3-2x^2y'^2+4xy\,y'+x^3=16y^2 \tag{98}$$

и лако налазимо да је геометриско место једнаких y'

$$(27y^2-2x^3)(16y^2-x^3)^2=0\,.$$

Како смо већ нашли да је геометриско место једнаких c

$$y^2(27y^2-2x^3)=0\,,$$

следи да права $y=0$ и семикубна парабола $16y^2=x^3$, дуж којих се, респективно, јављају једнаки c и једнаки y', сачињавају геометриско место двојних тачака и геометриско место додирних тачака. Семикубна парабола $27y^2=2x^3$, која се налази у обим једначинама, или је обвојница или је геометриско место повратних тачака. Заменом налазимо да она задовољава диференцијалну једначину. Зато је та једначина сингуларно решење, а њено геометриско место тачака обвојница кривих (17). Сва та геометриска места тачака показана су на сл. 7.

ЗАДАЦИ

1. Наћи геометриско место једнаких y' за (98).

2. Једначина

$$\rho\,[1-\cos(\theta-\theta_0)]=1,$$

дефинише породицу парабола у поларним координатама. Показати да метода коју смо развили у § 5, остаје у важности и када се ради са једначинама кривих у поларним координатама. Наћи затим обвојницу те породице.

3. Наћи диференцијалну једначину за породицу кривих у задатку 2. Наћи обвојницу из ове диференцијалне једначине.

ГЛАВА VI

ПРАКТИЧНА ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

§ 37. Увод

Када смо у Глави III дискутовали о томе како настају диференцијалне једначине, поменули смо неке проблеме чије је математичко формулисање одмах довело до диференцијалних једначина. Али, како тада још нисмо извели методе решавања, нисмо покушавали да решимо те једначине. С времена на време смо се у Глави IV опет позивали на те једначине и добили решења, уколико је за такве случајеве то било могућно на основи тамо посматраних метода. У овој Глави ћемо навести још неколико проблема тога типа и показаћемо да се њихова решења могу лако добити помоћу теорије диференцијалних једначина.

Изабрани примери су највећим делом врло једноставни, једно због тога што је посматрање неколико једноставних примера често за студента од веће вредности него решавање једног тешког проблема, а друго због тога што тежи проблеми захтевају објашњавање тако много геометрије, механике и електрицитета да би се за ово губило много времена, које је боље посветити математичким идејама. Главни задатак био нам је да наведемо што је могућно разноврсније проблеме и да на тај начин дамо стварну перспективу ширине поља примене диференцијалних једначина.

§ 38. О расипању топлоте неке жице

У § 18 изложили смо три основна закона теорије провођења топлоте. За следећи је пример потребан и четврти. Он гласи:

> (IV) Износ топлоте који у јединици времена губи неко топло тело опкољено таквом средином као што је ваздух, пропорционалан је разлици температура тела и околне средине.

Закони (I), (II) и (III) наведени у § 18 јесу егзактни физички закони: наиме, они важе у врло широким границама са великим степеном тачности. С друге стране, закон (IV) само је груба апроксимација ма под којим околностима, па чак и тај однос престаје да буде у важности када је разлика температура тела и околне средине врло велика. У математичкој обради проблема теорије топлоте он се ипак често примењује из два разлога: прво, јер је тачан закон познат само у облику емпириских података; друго, јер употребом таквих података настају врло тешке диференцијалне једначине, док закон (IV) води проблемима који се одмах могу решити. Резултати који се добивају помоћу овог једноставног закона за већину практичних задатака довољно су тачни, све док разлике температура износе само мали број степени Целзиусове скале, — као што се и дешава, на пример, у већини случајева термометрије. Претпостављамо да су следећи проблеми овог типа.

Посматрајмо врло дугу жицу чији се један крај одржава на сталној температури θ_0, док се преостали њен део налази у ваздуху температуре 0. Очигледно, жица ће настојати да своју топлоту пренесе на ваздух и да се стога охлади. Топлота ће при њеном хлађењу тећи од топлијих ка хладнијим деловима жице. Кад зато кажемо да се један крај одржава на сталној температури, тиме претпостављамо да се на овом крају топлота стално надокнађује ради одржавања равнотеже са губицима у ваздух.

Расподела температуре прећи ће коначно у перманентно стање, ма каква да је била у почетку. Потом ће свака тачка имати своју посебну температуру која се више не мења са временом. Проблем се састоји у томе да нађемо ову „стационарну температуру" у свакој тачки жице.

Означимо са x отстојање ма које тачке од топлог краја жице а са θ њену температуру. Цео диференцијални елемент између x и $x + dx$ имаће тада уствари ову исту температуру θ. Зато он мора губити у јединици времена количину топлоте $g\,\theta\,dA$, где је dA величина површине изложене ваздуху а g константа пропорционалности закона (IV).

Провођењем топлоте кроз топлији крај овог елемента добива се количина топлоте $-k\,a\,dt\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_x$, где је $\frac{d\theta}{dx}$ градијент температуре у тачки x и где је a величина површине попречног пресека жице. Слично, кроз хладнији крај тог елемента губи се количина топтоте $-k\,a\,dt\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x+dx}$. Како је температура стационарна — то јест како се она не мења током времена, добици морају бити једнаки губицима, тако да имамо једначину

$$-k\,a\,dt\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_x = -k\,a\,dt\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x+dx} + g\,\theta(x)\,dA\,dt\,. \tag{99}$$

Али, када dx пустимо да тежи нули, имамо

$$\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x+dx} = \frac{d\theta}{dx}\Big|_x + \frac{d^2\theta}{dx^2}\Big|_x dx\,.$$

Исто тако, dA је једнако производу из обима жице C и дужине dx тог елемента. Када ове вредности заменимо у једначини (99), та се једначина после једноставних упрошћавања своди на облик

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - p^2\theta = 0\,, \tag{100}$$

где смо константу $\frac{gC}{ka}$ обележили са p^2.

Ова се једначина лако решава методом објашњеном у § 33[1] и води резултату

$$\theta(x) = \alpha_1\,e^{+px} + \alpha_2\,e^{-px}\,, \tag{101}$$

где су α_1 и α_2 произвољне константе интеграције.

То је опште решење диференцијалне једначине (100). Међутим, одговор на наш проблем није *опште* решење већ *партикуларно;* јер, нема ничег произвољног код физичке жице чији се један крај одржава на одређеној температури, и зато не може бити ничег произвољног у математичком опису њене температуре. Морамо, дакле, потражити контурне услове.

Један контурни услов очигледан је: наиме, θ мора бити једнако θ_0 кад је x једнако нули. Други се услов односи на стање жице на великим отстојањима од топлог краја. Због физичких услова проблема, очигледно је да на великим отстојањима од топлог краја, жица мора имати исту температуру као и окслни ваздух, што значи да за велике вредности x температура θ мора бити једнака нули.

Из једначине (101) видимо да члан са негативним изложиоцем тежи нули *ма за какву вредност* α_2, док други тежи ∞, *сем ако је* α_1 *нула.* Зато ће физички захтеви бити задовољени само кад ставимо да је α_1 једнако нули.

Пошто смо установили ову чињеницу, лако одређујемо константу α_2 и као коначно решење добивамо $\theta(x) = \theta_0\,e^{-px}$.

§ 39. Ток топлоте у зидовима шупље лопте

Посматрајмо као други пример проблем стационарног стања температуре у зидовима неке шупље лопте потопљене у неком купатилу сталне температуре, а која у свом средишту садржи неки топлотни извор (на пример неки елемент који се загрева електричним путем) који ослобађа у јединици времена сталну количину топлоте. Због симетрије проблема је очигледно да ће све тачке једнако удаљене од средишта имати једнаке температуре; наиме, тампература θ је функција само од r.

Уочимо елемент запремине међу двема замишљеним концентричним сферним површинама чији су полупречници r и $r + dr$. Кроз унутрашњу од ових површина утиче у тај елемент у јединици времена количина топлоте $-4\,\pi\,r^2 a\,\frac{d\theta}{dr}$. Кроз другу од тих површина истиче за то исто

---

[1] У Глави VII налазе се методе решавања једначине (100) подесније од методе из § 33; али, пошто је решавање у оба случаја лако, нема потребе да на овом месту примењујемо методу која је боља но коју још нисмо изложили.

време количина топлоте одређена тачно истим обрасцем изузев што се место r^2 и $\frac{d\theta}{dr}$, сада морају узети вредности које одговарају овој површини. Прва од тих вредности је очигледно $(r+dr)^2$, што је приближно једнако $r^2+2r\,dr$ ако је dr довољно мало. Друга је

$$\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r+dr}=\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r}+\left.\frac{d^2\theta}{dr^2}\right|_{r}dr.$$

Како у том елементу запремине нема топлотних извора, његова ће температура бити стална само ако количина топлоте која утиче кроз унутрашњу површину одржава равнотежу са количином која истиче кроз спољашњу површину тог елемента. Изједначујући ове две количине, вршећи нека очигледна упрошћавања и занемарујући члан који садржи $(dr)^2$ као фактор, добивамо диференцијалну једначину

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr}=0,$$

чије је опште решење

$$\theta=-\frac{\alpha}{r}+\beta. \tag{102}$$

Следећи је корак у проблему да α и β одредимо тако да једначина (102) задовољава специфичне физичке услове постављене у том проблему: прво, да се у јединици времена производи стална количина топлоте, која нека износи S јединица у секунди; друго, да се спољашња површина лопте одржава на сталној температури, коју ћемо узети да је 0.

Ако је температура стационарна, очигледно је да ће количина топлоте која се производи у јединици времена морати да буде једнака количини топлоте која за то исто време пролази ма кроз коју концентричну сферну површину. За ову другу већ смо нашли да је $-4\pi r^2 a\frac{d\theta}{dr}$. Диференцирањем једначине (102) налазимо да она износи $-4\pi a\alpha$. Зато α мора задовољавати једначину $-4\pi a\alpha=S$.

За спољашњу површину лопте, где је $r=R$, температура је једнака нули. Заменом ових вредности у једначини (102) налазимо да је β једнако $\frac{\alpha}{R}$.

Стога је коначно решење проблема

$$\theta=\frac{S}{4\pi a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right).$$

Занимљиво је приметити да се унутрашњи полупречник сферне љуске не јавља у решењу тог проблема. Наиме, расподела температуре

у некој танкој љуски биће иста као и расподела температуре у одговарајућем делу неке дебље љуске. Међутим, ово није без разлога, јер вредност градијента температуре у истим тачкама ма које од тих љуски мора бити толика да топлота отиче истом брзином којом се производи. Дакле, ако је спољашња температура за обе љуске једнака то одмах следи да температура на датом отстојању од средишта мора бити једнака у обема љускама.

ЗАДАЦИ

1. Електрични кабл који се састоји од металног кондуктора пречника 5 милиметара, омотан слојем изолационог материјала три милиметра дебљине, лежи на дну залива где је температура углавном стална и једнака 4°C. Због електричног отпора кондуктора у том каблу производи се топлота у износу од S јединица у секунди на један центиметар. Колика је температура унутрашње површине слоја?

2. Гвоздена цев спољашњег полупречника 10 центиметара проводи водену пару температуре 105°C. Знатан део њене дужине положен је у цилиндру од бетона полупречника 60 центиметара. Температура средине око бетонског зида може се узети да је 20°C. Колика је температура неке тачке бетона удаљене 20 центиметара од зида цеви?

(Термичка проводљивост гвожђа упоређена са термичком проводљивошћу бетона толико је велика да можемо сматрати да цев има исту температуру као и водена пара која се у њој налази).

3. По један крај двеју дугих жица, од којих је једна нешто дебља од друге, одржава се на температури θ^0. Обе су начињене од истог материјала и обе губе топлоту у околни ваздух према закону (IV). Која је жица топлија на јединици отстојања од топлог краја?

4. Један крај жице дужине l има температуру θ_0 а други температуру θ_1. Она губи топлоту у околни ваздух према закону (IV). Колико топлоте расипа у јединици времена?

5. Један крај жице дужине l има температуру θ_0, а губи топлоту према закону (IV) и са своје цилиндричне површине и са другог краја. Колика је температура овог другог краја?

§ 40. Крива сталне кривине

Узмимо као следећи пример једноставан геометриски проблем да нађемо једначину криве чија је кривина иста у свакој тачки. Познато је да је кривина одређена обрасцем

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \tag{103}$$

где су y' и y'' изводи од y по x. Зато је проблем да решимо диференцијалну једначину (103), под претпоставком да је k позната константа.

Како је $y''=\frac{dy'}{dx}$, то интеграцијом једначине (103) непосредно добивамо

$$kx = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \alpha .$$

Када ову једначину решимо по y', налазимо да је

$$y' = \frac{kx - \alpha}{\sqrt{1 - (kx - \alpha)^2}} ,$$

чији је интеграл

$$y = -\frac{1}{k}\sqrt{1 - (kx - \alpha)^2} + \beta ,$$

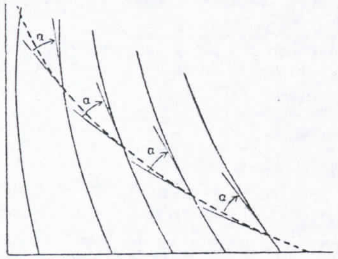
или

$$(ky - \beta)^2 + (kx - \alpha)^2 = 1 . \tag{104}$$

Одмах видимо да је то једначина круга полупречника $\frac{1}{k}$, чији се центар налази у произвољној тачки $\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}\right)$. Како је ово један од оних проблема за који се тражи опште решење, нема потребе да одређујемо вредности α и β.

§ 41. Трајекторије

Следећи проблем је узет такође из области геометрије. У Глави III дискутовали смо донекле о једнопараметарским породицама кривих, то јест о породицама кривих чије смо различите чланове одређивали давањем различитих вредности једној произвољној константи у само једној једначини. Непрекидно извучене криве на сл. 25 сачињавају такву породицу, а цртицама извучена крива има необичну особину да сваку криву из породице сече тачно под истим углом. Наиме, ако повучемо тангенте на цртицама извучену криву и на једну од кривих из породице у тачки њиховог пресека, те тангенте заклапају исти угао ма коју криву да смо изабрали из породице. Свака крива која има ову особину зове се *трајекторија* породице кривих.



Сл. 25

Може постојати више од једне такве трајекторије и, ако је то случај, оне такође чине породицу кривих. Проблем је овог одељка да нађемо ту породицу трајекторија.

За ово је потребно најпре да знамо диференцијалну једначину кривих. У Глави III објаснили смо како се она налази када је породица кривих дефинисана неком алгебарском једначином. Претпоставимо, дакле, да смо нашли диференцијалну једначину кривих на сл. 25 и да она гласи $f(x, y, y') = 0$. Кроз тачку (x, y) пролази нека крива из породице. Угао θ који одређује правац тангенте на ову криву у тој тачки, дат је према релацији $\operatorname{tang}\theta = y'$. Ако нека трајекторија пролази кроз ту исту тачку (x, y), правац њене тангенте у овој тачки мора бити одређен углом $\theta + \alpha$ и зато коефицијент правца трајекторије мора бити $\operatorname{tang}(\theta + \alpha)$.

Да не би било забуне, за количине које се односе на трајекторију употребићемо велика слова, тако да је у тачки (X, Y) њен коефицијент правца Y'. Специјално, за уочену тачку ове ће вредности бити следеће:

$$\begin{aligned} X &= x , \\ Y &= y , \\ Y' &= \operatorname{tang}(\theta + \alpha) \\ &= \frac{\operatorname{tang}\theta + \operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\alpha} \\ &= \frac{y' + \operatorname{tang}\alpha}{1 - y' \operatorname{tang}\alpha} . \end{aligned}$$

Када их решимо, ове једначине дају

$$\left.\begin{aligned} x &= X, \\ y &= Y , \\ y' &= \frac{Y - \operatorname{tang}\alpha}{1 + Y' \operatorname{tang}\alpha} . \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Ове везе важе где год нека трајекторија пресеца неку криву из дате породице. Али, x, y и y' за сваку такву тачку задовољавају једначине (105). Зато мора бити

$$f\left(X, Y, \frac{Y' - \operatorname{tang}\alpha}{1 + Y' \operatorname{tang}\alpha}\right) = 0 . \tag{106}$$

Ово је међутим диференцијална једначина у којој се налазе велика слова: то је диференцијална једначина коју морају задовољавати трајекторије.

Као врло једноставан пример, посматрајмо породицу правих паралелних са осом x. Обична једначина такве породице је $y = c$, а њена диференцијална једначина $y' = 0$. Али, као што можемо видети из једначине (105), ако је y' једнако нули, Y' мора бити једнако $\operatorname{tang}\alpha$. Тако је $Y' = \operatorname{tang}\alpha$ диференцијална једначина трајекторија, а $Y = X \operatorname{tang}\alpha + C$ њено решење. То је једначина породице правих које имају исти коефицијент правца $\operatorname{tang}\alpha$. Очигледно је да оне задовољавају тражени услов.

Као нешто тежи пример, потражимо скуп кривих које под правим угловима секу породицу кругова

$$(x-c)^2+y^2=c^2$$

показану на сл. 26. Одмах можемо наћи да је

$$y^2-x^2-2\,x\,y\,y'=0$$

диференцијална једначина те породице. Зато породица кривих, која под правим угловима сече те кругове, мора задовољавати диференцијалну једначину

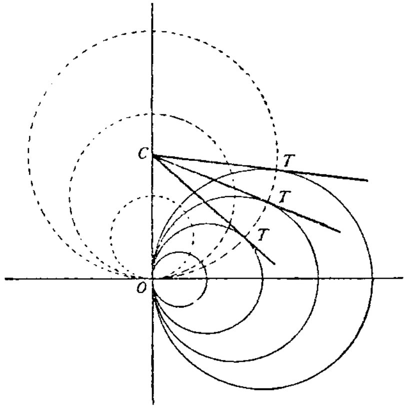
$$Y^2-X^2+2\frac{X\,Y}{Y'}=0,$$

или

$$Y'=\frac{2\,X\,Y}{X^2-Y^2}.$$

Ово је хомогена једначина чије је решење

$$X^2+Y^2-2k\,Y=0.$$



Сл. 26

Оно претставља породицу кругова са средиштима на оси y и сви пролазе кроз координатни почетак.

Да ма који такав круг под правим угловима сече кругове дате породице може се проверити једноставном геометриском чињеницом да је отсечак CT тангенте повучене из неке тачке C на оси y, *ма на који* круг из те породице, једнак дужи CO. Зато су такви отсечци свих тангената повучених из тачке C једнаке дужине и могу се узети за полупречник једног истог круга.

Као последњи пример ове врсте, посматрајмо прамен правих које пролазе кроз координатни почетак. Њихова алгебарска једначина је $y=cx$, а диференцијална

$$y'=\frac{y}{x}.$$

Зато је

$$Y'=\frac{X\operatorname{tang}\alpha+Y}{X-Y\operatorname{tang}\alpha}$$

диференцијална једначина трајекторија које секу тај прамен под углом α. Стога је једначина трајекторија:

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{Y}{X}=\frac{\operatorname{tang}\alpha}{2}\log\left(X^2+Y^2\right)+C.$$

Написана у Декартовим координатама, ова једначина изгледа доста компликована. Али, ако употребимо поларне координате, везе

$$r^2=X^2+Y^2,$$

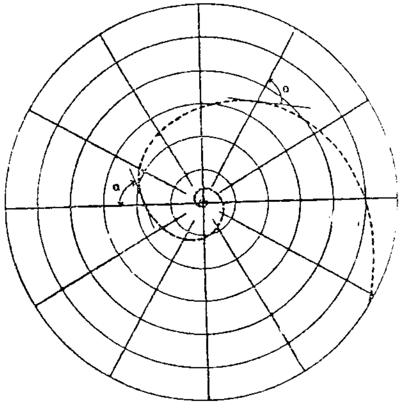
$$\theta=\operatorname{arc\,tang}\frac{Y}{X},$$

своде је одмах на облик

$$\theta=\operatorname{tang}\alpha\log r+C.$$

Ове криве зову се логаритамске спирале. Једна је показана на сл. 27.

Најзначајнија је њихова особина управо та коју смо искористили у извођењу њихових једначина: наиме, да сваки потег у поларном координатном систему секу тачно под истим углом α.



Сл. 27 — Логаритамска спирала

ЗАДАЦИ

1. Наћи једначину трајекторија које под сталним углом α секу кругове $x^2+y^2=c^2$.

2. Трајекторије се зову „ортогоналним" ако је α прав угао. Наћи ортогоналне трајекторије породице кругова $x^2+y^2=c^2$.

(Пошто се кругови и потези међусобно секу под правим угловима, ма која трајекторија једног скупа биће исто тако трајекторија другог скупа, али ће углови под којим се секу бити комплементни).

3. Наћи трајекторије породице парабола $y^2=cx$.

4. Наћи једначину криве чија је кривина у свакој тачки обрнуто пропорционална квадрату њеног отстојања од осе y.

5. Синусоиде $y=c\sin x$ обрћу се око осе x тако да настаје породица обртних површина. Наћи једначину скупа површина нормалних на тим обртним површинама.

§ 42. Слободан пад тела

Основни је закон механике да је убрзање тела пропорционално сили која на њега дејствује, при чему је убрзање једнако изводу брзине по времену. Исто тако, основни је закон механике да је сила којом се узајамно привлаче два тела обрнуто пропорционална квадрату њиховог отстојања. Ова су два закона довољна да одредимо кретање неког метеора који са великог отстојања пада на Сунце.

Претпоставимо да се у тренутку $t=0$ метеор налази у миру, да га у његовом кретању не ометају силе трења које би се, на пример, појавиле у случају пада кроз атмосферу Земље, и да се Сунце такође налази у миру. Нека оса x буде права која спаја средиште Сунца са средиштем метеора и нека се Сунце налази у тачки $x = 0$, а метеор најпре у тачки $x = X$. Ма у ком тренутку његова је брзина $\frac{dx}{dt}$, а убрзање $\frac{d^2x}{dt^2}$. Зато горе поменути закони дају диференцијалну једначину

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^2}. \tag{107}$$

Како је убрзање наперено према Сунцу то оно тежи да смањи x. Због тога смо узели негативан знак.

Решење једначине (107) налази се методом § 33. Следи да је брзина x' одређена једначином

$$\frac{x'^2}{2} = c + \frac{k}{x}.$$

Како услови проблема траже да та брзина у тренутку $t = 0$ буде једнака нули, када се метеор налази на X јединица од Сунца, подесно је да произвољну константу прве интеграције одредимо пре него што започнемо другу. Налазимо да је њена вредност $-\frac{k}{X}$. Зато је

$$x'^2 = 2k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{X}\right).$$

Решење ове једначине је

$$\sqrt{2kX}\cdot t = X\sqrt{xX - x^2} + X^2 \arccos\sqrt{\frac{X}{x}} \tag{108}$$

које задовољава услов да је $x = X$ када је $t = 0$.

Ова једначина непосредно даје *време* проласка метеора кроз неку тачку. Њу је тешко решити по x у функцији времена t.

Закон који се обично даје за слободан пад тела је апроксимација једначине (108); он се заснива на претпоставци да тело пада са отстојања које је мало у односу на полупречник Сунца. Да бисмо извели тај закон, претпоставимо да метеор пада на површину Сунца са висине h. За x морамо тада узети полупречник Сунца, а $x + h$ за X. Ако је, дакле, h мало у односу на x, тада је

$$\arccos\sqrt{\frac{x}{X}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{x}}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{h}{x}},$$

при чему је овај резултат само први члан који није нула у Тајлоровом реду за функцију $\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{x}}}$. Исто тако је

$$\sqrt{xX - x^2} \approx \sqrt{hx},$$

и

$$\sqrt{2kX} \approx \sqrt{2kx}.$$

Кад ово употребимо у једначини (108), она постаје

$$h \approx \frac{kt^2}{2x^2},$$

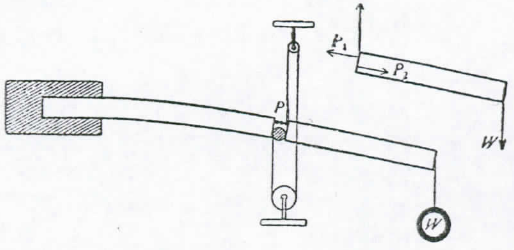
или, како су k и x константе,

$$h = ct^2.$$

Овај закон важи све док је h мало у односу на димензије тела на које пада метеор. Он је увек задовољавајући у случају падања тела у земљином гравитационом пољу, јер растојање кроз које она падају никада не износи више од неког малог разломка полупречника Земље. Једноставније га можемо добити ако претходно претпоставимо да се у току падања гравитациона сила не мења осетно.

§ 43. Савијање греде

Ако један крај греде укљештимо а о други обесимо неки терет, као што показује сл. 28, греда ће се савити ако величина терета не пређе одређену вредност која зависи од димензија греде као и од материјала од ког је начињена, а њена ће се оса деформисати у криву линију која се зове еластична или инфлексиона линија.



Сл. 28

Да бисмо извели диференцијалну једначину ове еластичне линије, замислимо да смо греду пресекли у произвољној тачки па посматрајмо њен десни отсечени део и размислимо о силама које би биле потребне да греду држе тачно у оном положају који је заузимала пре но што смо је пресекли. Очигледно је да поједина влакна греде морају дејствовати тим или њима еквивалентним силама.

Претпоставимо да смо такав пресек начинили на месту P, удаљеном x јединица од слободног краја греде у хоризонталном правцу[1]). Да би

---

[1]) То није исто што и x јединица мерених дуж саме греде јер, услед савијања, греда није више хоризонтална.

се отсечени део греде одржао помоћу сила које дејствују на месту где је начињен пресек, био би потребан неки уређај као што је показано на слици1).

Зато је очигледно:

1) да терет W дејствује силом вертикално наниже;

2) да затегнута влакна у горњој половини греде дејствују силом P_1 у правцу тангенте на греду на месту P;

3) да притиснута влакна у доњем делу греде дејствују силом P_2 која је такође паралелна са тангентом на месту P али дејствује у супротном смеру од силе P_1;

4) пошто само ове три силе не би могле да спрече од пада отсечени део греде, то на месту P мора дејствовати још и четврта сила вертикално навише.

Морамо још напоменути да силе (2) и (3) морају бити једнаке величине. У противном би случају постојала нека резултанта тих сила у правцу x, те би се у томе правцу кретао и отсечени део греде. Слично, силе (1) и (4) морају бити једнаке величине јер би се отсечени део греде кретао или горе или доле. Зато сваки од тих двају парова сила одређује по један „спрег сила“ који тежи да греду само ротира. Пар сила (1) и (2) зове се „спрег нападних сила“, а други пар сила зове се „спрег унутрашњих отпорних сила“. Како се под дејством та два спрега сила отсечени део греде налази у равнотежи, то они морају имати једнаке моменте3), — тако гласи основни закон механике. Како момент спрега нападних сила износи Wx, то спрег унутрашњих отпорних сила мора такође имати тај момент.

Сада морамо узети један став из теорије о савијању греда. Он гласи да је момент спрега сила P_1P_2 пропорционалан кривини греде на месту P. Када га напишемо ознакама математике, добићемо диференцијалну једначину

$$\frac{q\,y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=Wx$$

и лако налазимо да је интеграл те једначине

$$y=\int\frac{\dfrac{Wx^2}{2q}+C}{\sqrt{1-\left(\dfrac{Wx^2}{2q}+C\right)^2}}\,dx+C', \tag{109}$$

где су C и C' константе интеграције.

---

1) Уређај који се састоји од ужета и котура спречава од пада леви крај отсеченог дела. Али он не би спречио од пада десни крај отсеченог дела. Ово врше ланац и мали ваљак *затезањем* горњих и *потискивањем* доњих влакана.

2) Момент силе у односу на неку праву дефинише се као производ из величине те силе и најкраћег растојања између нападне линије силе и те праве. Та је права у горе посматраном проблему права која пролази кроз P, нормално на раван хартије. Тада је момент силе W, у односу на ту праву, једнак Wx, а момент унутрашње отпорне силе W', која дејствује вертикално навише, једнак је нули јер нападна линија ове силе пролази кроз P. Момент спрега тих сила једнак је збиру момената појединих сила и стога једнак Wx.

Са школског становишта је ово решење довољно јер непосредно даје y у функцији од x. Са практичног становишта оно није добро, јер се тај интеграл помоћу елементарних функција не може израчунати. Ова се тешкоћа у пракси избегава пажљивим посматрањем количина које се јављају у самој диференцијалној једначини. Греде се, наравно, никада не оптерећују тако тешко да се много савијају. Зато је $\frac{dy}{dx}$ веома мало — уствари тако мало да се члан y'^2 у имениоцу може занемарити према јединици. Зато диференцијална једначина постаје

$$q\,y''=Wx\,,$$

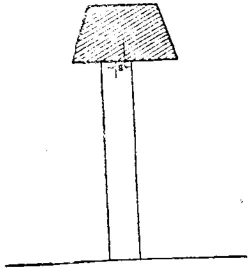
а њено решење

$$qy=\frac{Wx^3}{6}+Cx+C'.$$

Ово је решење једноставно и довољно тачно, тако да је за многе техничке сврхе задовољавајуће. Оно је, на пример, веома тачно када се примени у грађевинарству. Али, постоје гране технике у којима се јављају греде за које та једноставна формула није тачна. На пример, опруга у неком часовнику практично је једна савијена греда и сигурно је да се у таквом случају о величини савијања мора водити рачуна. Да нађемо једначину еластичне линије такве опруге, морамо на неки начин израчунати сложени интеграл у једначини (109). Он припада класи функција чије су вредности израчунате и сврстане у таблице исто онако као што су сврстани у таблице логаритми, тригонометриске функције и косинус интеграли Ci, из § 25. Они се зову „елиптички интеграли“, јер су на себе привукли пажњу најпре у покушају да се нађе обим елипсе. Дискусија о овим интегралима је ван обима ове књиге.

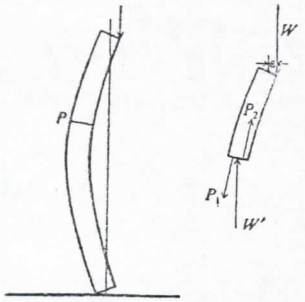
§ 44. Ексцентрично притиснути стубовн

Лаик разликује греду од стуба на тај начин што за прву каже да је хоризонтална, а за други да је управан. Али, правећи ову разлику он мисли првенствено на терете, јер се „греде“ и „стубови“ по његовом мишљењу употребљавају у грађевинарству. У техници се ова разлика изражава нешто друкчије, и стубом се зове ма који чврст предмет подвргнут силама *паралелним* његовој дужини; али, ако је он подвргнут силама *нормалним* на његову дужину, он се зове греда. Тако, кретача и клипњача неке парне машине јесу стубови ма да су, уствари, често по положају хоризонталне, док је заставно копље греда, уколико се узима у обзир притисак ветра на заставу.



Сл. 29

Посматрајмо стуб који показује сл. 29. Ако на тај стуб положимо неки терет на такав начин да савршено симетрично буде распоређен око његове осе, очигледно је да неће постојати никаква тежња да се стуб савије. Ма да ће бити незнатно скраћен, он ће под овим условима остати потпуно прав. Ако терет повећамо дотле да материјал од којег је начињен стуб, није више довољно јак да га издржи, он ће се смрвити без савијања. Али, таква се идеална симетричност у пракси не може уствари очекивати. Напротив, терети су увек тежи на једној него на другој страни, тако да су ефективно еквивалентни једној сили која дејствује нешто покрај средишта стуба. На слици смо ово отстојање обележили са ε. Инжењери зову ово „ексцентрицитет терета“.



Сл. 30. Силе које дејствују у савијеном стубу

Узмимо сада да је терет положен ексцентрично и да се стуб савио онако како показује сл. 30. Ако стуб пресечемо на месту P, наћи ћемо да постоје четири силе које дејствују на његов горњи отсечени део. То су: 1) терет W, 2) затезање P_1 у спољашим влакнима, 3) притисак P_2 у унутрашњим влакнима и 4) вертикална сила W', која спречава од пада отсечени део. Као и у § 43, пар сила 1) и 4) сачињавају спрег нападних сила, а 2) и 3) сачињавају спрег унутрашњих отпорних сила. На те спрегове сила морамо применити исте законе које смо искористили у дискусији о гредама. Они воде диференцијалној једначини

$$\frac{q\,y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -W(y+\varepsilon)\,, \qquad (1\,1\,0)$$

где x меримо у овом случају вертикално, а y хоризонтално.

Савијања стубова су у општем случају мала тако да y'^2 можемо занемарити према јединици. Тада једначина постаје

$$q\,y'' = -W\,(y+\varepsilon)\,,$$

чије је решење

$$y+\varepsilon = \mathrm{C}\sin\left[\sqrt{\frac{W}{q}}\,(x-c')\right].$$

То је образац који се обично усваја за савијање стубова; али, ако су савијања велика, треба решити једначину (110) без упрошћавања.

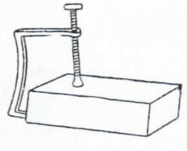
ЗАДАЦИ

1. Дуж читаве греде распоређен је равномерно дати терет. Под претпоставком да је савијање врло мало наћи једначину еластичне линије.

2. Оштрица подупирача налази се тачно у тежишту полуге неке хемичарске ваге и на крајевима полуге обешени су тасови за тегове. Наћи једначину еластичне линије полуге. (Једноставније је замислити да је она *подупрта* на крајевима и да се савија услед притиска који на њу врши навише оштрица подупирача).

3. Наћи опште решење једначине (110).

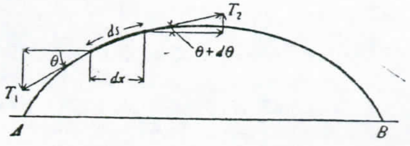
4. Завртањ стеге, коју показује сл. 31, толико је обртан да је њен задњи део почео да се савија. Наћи једначину еластичне линије тог дела. Претпоставити да су хоризонтални краци стеге апсолутно крути.


Сл. 31

§ 45. Треперење жице

Проблеми последња два одељка односила су се на материје које се опиру савијању. Очигледно је да конац или комад меке коже не припадају тој класи, а тако исто ни танка жица или комад златног листића. Такве се материје опиру деформисању само када су затегнуте и тада не због отпора савијању већ због тога што се деформисањем изводе из равнотежног стања силе које их затежу.

Као једноставан пример, посматрајмо затегнуту виолинску жицу причвршћену у двема тачкама A и B. У свом нормалном положају, та ће жица узети облик праве која спаја те две тачке. Ако је деформишемо, силе које њу затежу настоје да је поврате у почетни положај и на тај начин стављају у кретање



Сл. 32. Силе које дејствују у затегнутој жици

Претпоставимо да смо извршили такво деформисање и да се због тога жица налази у кретању. Претпоставимо даље да њен облик у тренутку t претставља крива $y=f(x,t)$ коју на сл. 32 можемо сматрати као преувеличану[1]. Најзад, обележимо са T њен напон. На елемент ds дејствују тада две силе T_1 и T_2 од којих је свака величине T, али су управљене у нешто различитим правцима због кривине елемента. Ако са θ и $\theta+d\theta$ обележимо углове које са позитивном смером осе x заклапају тангенте у тачкама x и $x+dx$, тада су $-T\cos\theta$ и $T\cos(\theta+d\theta)$ компоненте сила T_1 и T_2 у правцу осе x, а $-T\sin\theta$ и $T\sin(\theta+d\theta)$, компоненте сила T_1 и T_2 у правцу осе y. Када се саберу[2], прве две од ових сила дају $-\mathrm{T}\sin\theta\,d\theta$ а друге две $+T\cos\theta\,d\theta$, ако је dx врло мало. Ове су силе узрок убрзањима елемента у правцу x односно y и стога воде једначинама

---

[1] Написали смо $f(x,t)$ место $f(x)$ јер, ако се жица налази у кретању, њен ће се облик мењати током времена.

[2] Занемарујемо инфинитезимале вишег реда од првог.

$$\left.\begin{aligned} m\,ds\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -T\sin\theta\, d\theta, \\ m\,ds\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= +T\cos\theta\, d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

где је $m\,ds$ маса уоченог елемента.

Ако је y' врло мало, као што је обично случај, $\cos\theta$ је приближно једнак јединици, док су и $\sin\theta$ и θ приближно једнаки $\operatorname{tg}\theta = y'$. Шта више, ds разликује се од dx за неку инфинитезималу вишег реда од првог. Зато једначине (111) постају

$$\left.\begin{aligned} m\,dx\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -T\,y'\,dy', \\ m\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= +T\,dy'. \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Како је y' врло мало, десна страна прве од тих једначина приближно је једнака нули. Зато се може занемарити компонента померања у правцу осе x. Стога је важна само друга једначина, која добива облик

$$m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\,\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}. \tag{113}$$

Ово је *парцијална* диференцијална једначина, па је, због тога, опширно излагање метода њеног решавања ван обима ове књиге. Али је можемо искористити да помоћу сретстава која нам већ стоје на расположењу одговоримо на извесна једноставна питања. Фреквенцију треперења жице можемо наћи у случају ако смемо претпоставити да она трепери на такав начин да се и свака друга тачка налази на половини свог пута када се њена средња тачка налази на половини свог максималног померања и да се свака друга тачка налази на трећини пута када се њена средња тачка налази на трећини пута, и тако даље. Наравно, може неко рећи да ниједна жица никада неће треперити на овај начин. Ако је то случај, онда претпоставка да она може треперити на овај начин, мора довести до неке апсурдности која ће бити доказ те немогућности. У сваком случају, нешто ћемо сазнати.

Узмимо, дакле, да је $y = f(x)$ једначина криве максималног померања. Очигледно је да f није функција времена. Ма у ком тренутку t жица се мора померати према закону $y = k\,f(x)$, где се k не мења са x, него је функција само времена t. Обичним диференцирањем добивамо

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f\,\frac{d^2 k}{dt^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k\,\frac{d^2 f}{dx^2},$$

где на десној страни нису више потребне округле ознаке ∂ јер су k и f функције само *једне* променљиве. Уврштавајући их у једначину (113), ова постаје

$$\frac{m}{k}\,\frac{d^2 k}{dt^2} = \frac{T}{f}\,\frac{d^2 f}{dx^2}. \tag{114}$$

Пошто f није функција од t, десна страна ове једначине не може се мењати са временом; а ако се десна страна не може мењати са временом, не може ни лева страна. Даље, пошто k није функција од x, лева страна једначине не може се мењати са x; а кад се она не може мењати са x, не може ни десна страна. Ова два закључка тврде да се изрази у једначини (114) не мењају ни са t ни са x. Зато су они константе. Њихова је вредност непозната, али је можемо означити са λ, у ком се случају (114) своди на *две* једначине

$$m\,\frac{d^2 k}{dt^2} = \lambda k \tag{115}$$

и

$$T\,\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda f. \tag{116}$$

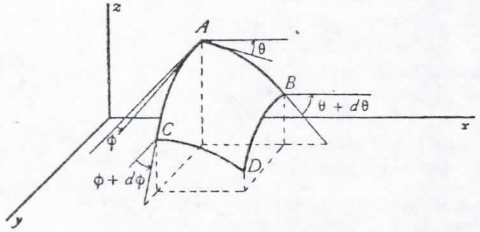
У овој је етапи нашег доказивања друга од тих једначина од посебног интереса јер њу мора задовољавати функција $f(x)$ за коју смо досад претпостављали да је изабрана произвољно. То значи да се жица може довести у стање треперења „као целина“ на горе претпостављени начин само ако се f тако изабере да задовољава једначину (116). Другим речима, једначина (116) је одговор на питање да ли је кретање овог типа могућно или није, при чему тај одговор гласи да је такво кретање могућно тада и само тада ако деформација задовољава једначину (116).

Решавање тих двеју једначина није тешко, али је велика разлика да ли ћемо у решењу узети да је λ веће од нуле или да је оно мање од нуле. Ако бисмо редом пробали обе претпоставке, нашли бисмо да је важан случај онај у ком је λ мање од нуле. Нашли бисмо тада да f мора бити синусна функција од x, а тако исто да је k синусна функција времена. Фреквенција ове друге синусне функције је $\frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{\lambda}{T}}$, а ову смо и тражили.

О овом ћемо решењу опширније дискутовати у једном доцнијем одељку. Засад је важна метода решавања која се заснива на претпоставци да жица трепери „као целина“, то јест да ма у ком тренутку деформацију можемо добити множењем свих ордината једне криве *истим* бројем, који се мења са временом. Такво се кретање зове „карактеристично треперење“ жице. Како су у решавању многих врло тешких проблема карактеристнчна треперења од велике важности, навешћемо и други пример њихове примене.

§ 46. Треперење мембране

Претпоставимо да је нека мембрана разапета тако да је напон једнак у свим правцима и да је из равни xy изведена у једно од карактеристичних стања. Како ће се она понашати када се пусти?



Сл. 33. Силе које дејствују у мембрани

Почнимо са претпоставком да се она држи у положају који, за тренутак, не мора бити једно од карактеристичних стања и посматрајмо силе које дејствују на мали елемент $dx\,dy$, (сл. 33). Ивицу AC напада сила T у правцу θ. То даје силу $T\,dy \sin\theta$ која тежи да смањи[1] померање у правцу z. Супротну ивицу BD напада супротна сила величине

$$T\,dy \sin(\theta + d\theta)\,;$$

занемарујући диференцијале вишег реда, резултанта тих двеју сила је сила

$$T\,dy \cos\theta\, d\theta\,,$$

која тежи да повећа[2] z.

Слично, резултанта сила које нападају остале ивице, је

$$T\,dx \cos\phi\, d\phi\,.$$

Постоје такође силе у правцима x и y, али се оне могу занемарити ако су деформације довољно мале. Ако масу елемената обележимо са $m\,dx\,dy$, мора постојати једначина

$$m\,dx\,dy\,\frac{d^2z}{dt^2} = +\,T(\cos\theta\, d\theta\, dy + \cos\phi\, d\phi\, dx)\,. \qquad (117)$$

Како је θ угао између осе x и тангенте на криву за коју је y стално, то је

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\partial z}{\partial x}\,,$$

или, зато што је θ врло мало,

$$\theta = \frac{\partial z}{\partial x}\,.$$

---

[1] θ је на слици негативно: зато сила тежи да повећа z.

[2] $d\theta$ је на слици негативно.

Исто тако

$$\theta + d\theta = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx\,,$$

па зато

$$d\theta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx\,.$$

Слично

$$\phi = \frac{\partial z}{\partial y}$$

и

$$d\phi = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\,.$$

Уврштавајући ове вредности у једначину (117) и напомињући да су $\cos\theta$ и $\cos\phi$ подједнако приближно једнаки јединици, добивамо једначину

$$m\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

која описује кретање мембране.

За случај карактеристичног треперења, ову једначину можемо решити на исти начин како смо поступили у § 45. Када напишемо

$$z = k(t)\,f(x, y)$$

добивамо

$$\frac{m}{k}\,\frac{d^2k}{dt^2} = \frac{T}{f}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

где смо на десној страни ове једначине још увек употребили округле ознаке ∂ јер је f функција и од x и од y. Као и у § 45, оба члана ове једначине морају бити константе, те је зато

$$m\,\frac{d^2k}{dt^2} = \lambda k\,,$$

$$T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \lambda f\,.$$

Ако мембрана „трепери као целина“ на горе поменут начин, функција $f(x, y)$ мора задовољавати другу од ових једначина. Ако је задовољава, као што тврђење нашег проблема претпоставља, прва једначина опет показује да ће треперење бити синусна функција времена.

Чистим се тоном у теорији звука назива осећај неке особе чије су уши изложене таласном притиску који се мења као синусна функција времена. Стога су последња два одељка показала да су карактеристична треперења било затегнуте жице било затегнуте мембране чисти тонови. Па ипак, из искуства знамо да виолина и бубањ не звуче слично. Објашњење се налази у томе што се производи више карактеристичних тонова кад се свира у виолину или удара у бубањ; а како у ова два случаја фреквенције тих тонова стоје међусобно у различитом односу, то они овим инструментима дају различите „боје“.

ЗАДАЦИ

1. Нека жица затегнута је међу тачкама $x = 0$ и $x = 1$. Наћи њено карактеристично треперење.

(Те тачке дају контурне услове помоћу којих се могу одредити две константе. Постоје, међутим, три непознате константе: λ и две константе интеграције. Наћи ће се да за извесне вредности λ ови контурни услови нису могућни и одређују само једну константу интеграције. Наиме, две константе које одређују физички услови нису две константе интеграције већ *једна* од њих; друга је произвољно уведена константа λ).

2. Скицирати у којим све различитим облицима може та жица да трепери. Шта је физичко значење трију произвољних констаната? Шта је стваран разлог томе што можемо очекивати да нећемо бити у стању одредити вредност једне од тих констаната која остаје неодређена?

3. Наћи функцију времена која одговара сваком од тих карактеристичних треперења. Са коликом се фреквенцијом жица враћа у неки положај?

4. Какав једноставан однос постоји међу фреквенцијама које одговарају различитим карактеристичним треперењима?

5. Општа функција времена у задатку 3 садржи две произвољне константе, а једна је преостала код функције од x коју смо нашли у задатку 1. Али ако се те две функције измноже, оне се на такав начин комбинују да стварно постоје само две произвољне константе. Којим физичким условима одговарају те константе?

6 Претпоставити да нека мембрана кружног облика може слободно треперити на такав начин да се сваки круг концентричан са обимом мембране креће горе-доле као целина. Наћи диференцијалну једначину коју треба да задовољава карактеристично треперење. Не покушавати да се она реши.

7. Решити једначине (115) и (116) под претпоставком да је λ позитивно и показати да решење не одговара случају треперења неке жице.

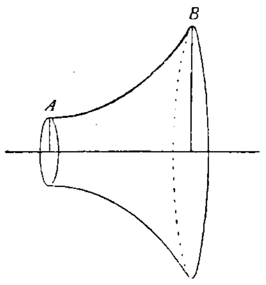
§ 47. Обртне површине минималне величине[1]

Ако две тачке A и B (сл. 34) спојимо неком кривом $y = f(x)$ и целу слику обрћемо око осе x, крива описује неку обртну површину.

---

[1] Решавање овог и следећих проблема на које се примењују методе Варијационог рачуна засноваћемо на извесним прећутним претпоставкама односно природе нашег решења, јер би нас покушај њиховог адекватног објашњавања одвео сувише далеко од главног задатка. Можда је најглавнија претпоставка та да је крива коју тражимо непрекидна и да нема оштрих врхова. Друге претпоставке постављају ограничења на варијације $\varepsilon(x)$ које смемо да вршимо. Све ове претпоставке сматрамо укљученим у поступцима којима је из једначине (118) изведена једначина (120); на пример, кад говоримо о $\varepsilon'(x)$ одмах тиме укључујемо и претпоставку да $\varepsilon(x)$ има извод.

Колико се тиче наших проблема, ова су ограничења од чисто теориског интереса; али, постоје други проблеми за које ово није тачно. На пример, ако бисмо себи поставили задатак да нађемо облик пројектила који би при пролазу кроз ваздух наишао на најмањи могући отпор и ако бисмо расмотрили ограничења којима су подвргнуте наше методе, не бисмо добили тражени резултат; јер, познато је да обртно тело о ком је овде реч, настаје обртањем једне криве која има оштар врх.



Сл. 34

Величина ове површине зависи од облика криве повучене међу овим тачкама, то јест од облика функције $f(x)$. Постоји једна крива која има особину да је величина површине која настаје обртањем те криве, мања од величине површине која настаје обртањем ма које друге криве. Проблем се састоји у томе да нађемо једначину оне криве чијим обртањем настаје површина минималне величине.

Како је овај проблем сличан проблемима који се обично дају у диференцијалном рачуну, а у којима се траже максималне и минималне тачке кривих, добро ће бити да поново анализирамо доказ на основи ког се такви проблеми решавају. Он се састоји углавном из три корака:

(I) Прво се *претпоставља да је позната* апсциса тачке минимума и да је обележена неким словом X.

(II) Затим се напомиње да *одлажење из тог минимума ма у ком смеру дуж криве мора функцију повећати;* наиме и $f(X + \varepsilon)$ и $f(X - \varepsilon)$ морају бити већи од $f(X)$.

(III) Ако је ε врло мало, тада је $f(X + \varepsilon) \approx f(X) + \varepsilon f'(X)$ и $f(X - \varepsilon) \approx \approx f(X) - \varepsilon f'(X)$[1]. *Ако $f'(X)$ не ишчезава,* једна од ових вредности је већа а друга мања од $f(X)$, што се противи закључку до ког смо дошли у (II). Стога следи да у тачки минимума први извод функције мора бити једнак нули.

Наравно, о том се може више говорити од овог. Потсетићемо на пример да је услов (III) потребан и за тачку максимума, и све док не испитамо други извод не можемо бити сигурни шта смо добили. Међутим, за наш садашњи задатак није нам потребно више од овог што смо изнели.

Наш ћемо садашњи проблем решити на основи доказа који се, паралелно горе поменутом, састоји тачно из три корака. У главним цртама он гласи:

(I) Претпоставити да је тачна *крива* позната и да има једначину $y = f(x)$.

(II) Затим, ако се њен облик ма на који начин промени, величина обртне површине *мора се повећати.* Ако се разлика између ордината нове и старе криве обележи са $\varepsilon(x)$, нова је једначина

$$y = f(x) + \varepsilon(x).$$

(III) Тада се може показати да *ако не ишчезава известан диференцијалан израз,* величина површине која настаје обртањем криве $f(x) + \varepsilon(x)$ је већа, а величина површине која настаје обртањем криве $f(x) - \varepsilon(x)$ је мања од величине површине која настаје обртањем криве $f(x)$. Зато диференцијалан израз мора бити једнак нули. Тако се јавља диференцијална једначина чије решење дефинише тражену криву.

---

[1] Ознака $\approx$ употребљава се у смислу „приближно једнако“.

Пошто смо на овај начин у главним цртама скицирали проблем, можемо приступити детаљној анализи дела (III). Природно, први је корак да напишемо израз за величину обртне површине. То је једноставан проблем интегралног рачуна чији је одговор

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f \sqrt{1+f'^2}\, dx .$$

Претпоставимо сада да смо новом кривом $y = f(x) + \varepsilon(x)$ сменили криву $y = f(x)$ чијим обртањем настаје површина минималне величине. Обртањем те нове криве настаје површина величине

$$A + dA = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} (f+\varepsilon) \sqrt{1+(f'+\varepsilon')^2}\, dx .$$

Ако је ε *мала* варијација функције y, и ако се она изабере тако да је и ε' мало, тада је

$$\sqrt{1+(f'+\varepsilon')^2} = \sqrt{1+f'^2} + \frac{f'\,\varepsilon'}{\sqrt{1+f'^2}} ,$$

и зато

$$dA \approx 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \left(\varepsilon \cdot \sqrt{1+f'^2} + \frac{\varepsilon' f f'}{\sqrt{1+f'^2}} \right) dx . \qquad (118)$$

Сви чланови које нисмо написали у једначини (118) садрже степене од ε више од првог, те се стога могу занемарити кад се упореде са члановима које смо задржали.

Ако dA није нула, оно мења знак кад се мења знак од ε. То значи, наравно, да је величина површине која настаје обртањем једне од нових кривих мања од величине одговарајуће површине која настаје обртањем тачне криве, што је, очигледно, супротно претпоставци да тачна крива обртањем даје површину *минималне* величине. Следи да dA мора бити једнако нули.

Једначина (118) је донекле еквивалент израза $\varepsilon f'(X)$ у поменутом једноставном случају диференцијалног рачуна. Па ипак, постоји једна важна разлика. У случају диференцијалног рачуна, слово ε јавља се само као фактор, и зато следи да производ може бити једнак нули само ако је други фактор једнак нули. У садашњем облику, за једначину (118) то се не може тврдити. Место тога њу морамо тако изменити да ε' ишчезне. Прво ћемо интеграл раставити на два дела од којих се један састоји од израза који садржи ε, а други од израза који садржи ε'. Затим ћемо први од ова два интеграла оставити неизмењеним, а други делимично интегрирати и тако добити

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varepsilon' f f'}{\sqrt{1+f'^2}}\, dx = \frac{\varepsilon f f'}{\sqrt{1+f'^2}} \Bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon \frac{d}{dx} \frac{f f'}{\sqrt{1+f'^2}}\, dx . \qquad (119)$$

Како услови проблема траже да свака крива пролази кроз тачке A и B, то $\varepsilon(x)$ мора бити једнако нули за обе границе интеграције. Зато је први члан на десној страни једначине (119) једнак нули. Тражени услов за минимум добивамо заменом преосталог члана у једначини (118):

$$\int_{x_0}^{x_1} \varepsilon(x) \left(\sqrt{1+f'^2} - \frac{d}{dx} \frac{f f'}{\sqrt{1+f'^2}} \right) dx = 0 . \qquad (120)$$

Као и $\varepsilon f'(X)$ у случају диференцијалног рачуна, интегранд се сада састоји из два фактора; из $\varepsilon(x)$, које је произвољно, и из израза у загради који садржи само функцију $f(x)$ и њене изводе. Исто као и раније, овај последњи фактор мора бити једнак нули. Јер, претпоставимо да није. Тада би између x_0 и x_1 постојали неки интервали где би он био негативан и неки интервали где би он био позитиван. Како је $\varepsilon(x)$ произвољно[1], могли бисмо га изабрати тако да буде позитивно тамо где је диференцијални фактор негативан, а да буде негативно на осталим местима. Тада би израз на левој страни једначине (120) сигурно био негативан, те би се величина површине смањила. Зато долазимо до закључка да тачна крива $y = f(x)$ мора задовољавати диференцијалну једначину

$$\sqrt{1+f'^2} - \frac{d}{dx} \frac{f f'}{\sqrt{1+f'^2}} = 0 . \qquad (121)$$

Ова је једначина тако једноставна да се њено решавање може препустити читаоцу. Још ћемо напоменути да је она *другог* реда и да зато може задовољавати баш два контурна услова. Како нам проблем даје баш таква два услова у утврђеним местима двеју крајњих тачака, то је овај резултат врло прецизан. Уствари, математични резултати имају готово досадно монотони обичај да су прецизни.

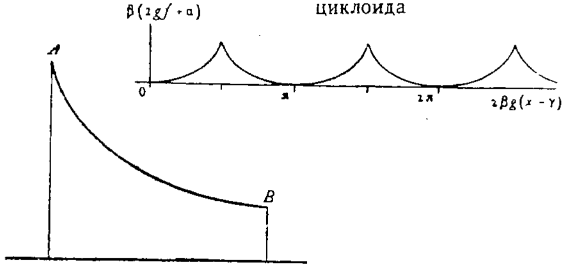
§ 48. Брахистохрона

Ако две тачке A и B (сл. 35) спојимо глатком жицом чији је облик претстављен кривом $y = f(x)$ и ако пустимо да неко тело слободно, без трења, клизи дуж ове криве под дејством теже, време које је потребно да оно стигне у тачку B зависиће од облика те криве. Зато постоји нека крива дуж које ће тело стићи у B за краће време од оног времена које је потребно да оно стигне у ту тачку дуж ма које друге криве. Та се

---

[1] Изузев што смо претпоставили да су ε и ε' мали. Чак и ова ограничења нису строго потребна, али смо их поставили да бисмо унеколико упростили доказ.

крива зове „брахистохрона"[1] између тачака A и B. Проблем се састоји у томе да се нађе облик те криве.



Сл. 35. Брахистохрона

Тај је проблем тачно истог типа као и проблем из § 47; али, да бисмо га могли решити треба да нађемо израз за време које је потребно да тело на поменут начин стигне из тачке A у тачку B дуж ма које криве. Тај израз можемо најподесније извести применом три става из Механике:

(I) *Потенцијална енергија* неког тела у гравитационом пољу земље пропорционална је његовом вертикалном отстојању над површином земље. Константа пропорционалности је производ из масе m тела и убрзања g силе теже.

(II) *Кинетичка енергија* неког тела пропорциовална је квадрату брзине којом се оно креће. Константа пропорционалности је $\frac{1}{2}m$.

(III) Ако тело не преноси своју енергију на неко друго тело, збир његове потенцијалне енергије и кинетичке енергије увек је исти. Ово је принцип „одржања енергије".

Пошто смо проблем тако поставили да не постоје силе трења, тело не губи енергију док клизи дуж жице. Зато збир његове кинетичке енергије $\frac{1}{2}mv^2$ и његове потенцијалне енергије $mg(y_0 - y)$, мора бити увек исти. То даје једначину

$$v^2 = 2gy + \alpha, \tag{122}$$

где је α нека непозната константа[2].

Морамо још приметити да се тело креће увек дуж жице. Зато v значи брзину којом тело пролази кроз неку тачку лука s, то јест, $v = \frac{ds}{dt}$. Уврштавајући ово у једначину (122) налазимо

---

[1] Од две грчке речи које значе „најкраће време".

[2] Она зависи од y_0, висине тачке A коју можемо узети по вољи подесним избором координатног почетка.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2gy+\alpha}},$$

одакле видимо да је време дато изразом

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy+\alpha}}.$$

Кад ds изразимо у функцији променљиве x, добивамо

$$t = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy+\alpha}}. \tag{123}$$

То је интеграл чију вредност треба учинити толико малом колико је то могућно.

Претпоставимо сада да је $y = f(x)$ једначина тачне криве и да је $y = f(x) + \varepsilon(x)$ једначина ма које суседне криве. Обележимо са $t + dt$ време које је потребно за кретање тела од тачке A до тачке B дуж ове *нове* криве; тада је

$$dt = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{f'\,\varepsilon'}{\sqrt{2gf+\alpha}\,\sqrt{1+f'^2}} - \frac{g\varepsilon\sqrt{1+f'^2}}{(2gf+\alpha)^{3/2}} \right) dx.$$

Као и у § 47, треба делимично интегрирати члан у ком се налази ε' и напоменути да је ε једнако нули за обе границе интеграције. Тада се интегранд своди на производ из два фактора. Као и раније, један од ових фактора је ε, које је произвољно. Како цео интеграл мора бити једнак нули, то *други* фактор мора бити једнак нули, и на тај начин добивамо диференцијалну једначину

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'}{\sqrt{2gf+\alpha}\,\sqrt{1+f'^2}} \right) = -\frac{g\sqrt{1+f'^2}}{(2gf+\alpha)^{3/2}}. \tag{124}$$

Ову је једначину могућно решити извођењем назначеног диференцирања, али је у овом случају њу лакше решити онако како стоји. Пошто је то један од оних поступака који је често врло користан како у практичним проблемима тако и у проблемима који су више теориске природе, то ћемо га изводити корак по корак.

Примећујемо пре свега да једначина не садржи x експлицитно. Стога је природно да према методи изложеној у § 33, ознаку $\frac{d}{dx}$ сменимо њеним еквивалентом $f'\frac{d}{df}$. Када затим све чланове који садрже f' скупимо на леву страну, једначина добива облик

$$\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\,\frac{d}{df}\left(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}\,\sqrt{2gf+\alpha}} \right) = \frac{-g}{(2gf+\alpha)^{3/2}}.$$

Количина која стоји пред ознаком $\frac{d}{df}$ на левој страни ове једначине, скоро је једнака, али не потпуно, количини која долази после те ознаке. Ако би оне биле једнаке, читава би лева страна била производ из функције и њеног извода те би одговарајући интеграл био квадрат те функције. Зато ћемо покушати да горњу једначину решимо множењем читаве једначине таквим фактором да се овај облик употпуни. Очигледно је да тај фактор треба да буде $1 : \sqrt{2gf + \alpha}$ и кад њиме помножимо читаву једначину, једина промена на њеној десној страни је та што се изложилац $^3/_2$ смењује изложиоцем 2. Кад у овом смислу изменимо горњу једначину, налазимо да је њен интеграл

$$\frac{f'^2}{(1+f'^2)(2gf+\alpha)} = \frac{1}{2\,gf+\alpha} -- \beta\,.$$

Ову једначину лако можемо решити по f', то јест

$$f' = \sqrt{\frac{1-\beta\,(2gf+\alpha)}{\beta\,(2gf+\alpha)}}\,,$$

одакле следи

$$x = \int \frac{\sqrt{\beta(2gf+\alpha)}}{\sqrt{1-\beta\,(2gf+\alpha)}}\,df\,.$$

Израчунавање овог интеграла много се упроштава сменом промењиве f према једначини

$$\beta\,(2gf+\alpha) = \sin^2\theta\,, \tag{125}$$

и тада налазимо да је његова вредност

$$x = \gamma + \frac{1}{2\beta\,g}(\theta - \sin\theta\cos\theta)\,. \tag{126}$$

Једначине (125) и (126) дефинишу тражену брахистохрону помоћу једне помоћне промењиве или „параметра“ θ. Ако овом параметру дамо посебну вредност, можемо из једначине (126) наћи вредност за x, а из једначине (125) одговарајућу вредност за $y = f(x)$. Дајући параметру θ једну вредност за другом, очигледно је, дакле, да бисмо на брахистохрони могли добити толико тачака колико желимо. Крива коју бисмо добили овим поступком је циклоида коју показује сл. 35.

Могли бисмо из једначина (125) и (126) такође елиминисати параметар θ и на тај начин добити једначину криве у њеном обичном облику. Она гласи

$$\beta\,(2gf+\alpha) = \sin^2\Bigl(2\beta g\,(x-\gamma) + \sqrt{\beta(2gf+\alpha)\,[1-\beta\,(2gf+\alpha)]}\Bigr)\,.$$

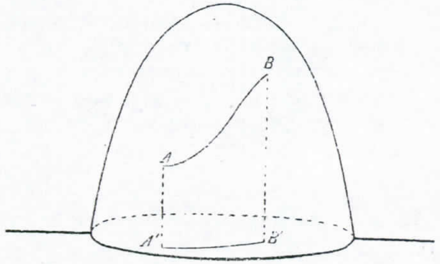
Међутим, место тога да се користимо овом сложеном једначином обично је боље да се вратимо једначинама (125) и (126) у параметарском облику, које су једноставније и за писање и за израчунавање.

---

§ 49. Геодезиске линије на кривој површини

Посматрајмо две тачке A и B на површини коју показује сл. 36. Од кривих које се на тој површини могу повући од једне до друге од ових тачака постоји једна која је краћа од свих осталих. Она се зове *геодезиска линија*. Тражи се та геодезиска линија.

Да бисмо одредили ову геодезиску линију, замислимо да је она пројицирана на раван xy. Тада ће геодезиска линија бити потпуно дефинисана једначином њене пројекције $A'B'$ и једначином површине.



Сл. 36

Узмимо да је $z = \phi\,(x, y)$ једначина површине. Ако се тада x и y промене за износ dx односно dy, z ће се променити за износ $dz = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy$. Зато је елемент дужине лука одређен са

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy\right)^2\,.$$

Претпоставимо сада да смо тачке A и B спојили ма којом кривом. Помоћу њене пројекције $y = y(x)$ на раван xy, налазимо да је дужина те криве

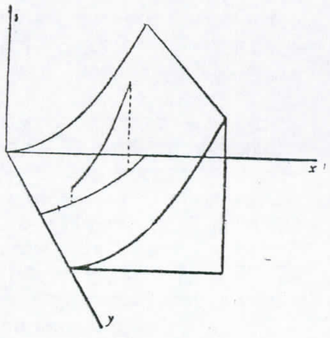
$$s = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,y'\right)^2}\,dx\,. \tag{127}$$

То је интеграл који треба да буде толико мали колико је то могућно.

Узмимо као пример случај параболичног цилиндра који показује сл. 37; његова је једначина $z = bx^2$. Овде је $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2bx$ и $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$, тако да (127) постаје

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + 4b^2x^2 + y'^2}\,dx\,.$$

Диференцијалну једначину можемо из овог интеграла добити уобичајеним поступком чији су нам детаљи сада довољно познати, те их не морамо пснављати. Она се јавља у облику



Сл. 37

$$\frac{d}{d\,x}\,\frac{y'}{\sqrt{1+4b^2x^2+y'^2}}=0\,. \tag{128}$$

Ову је једначину лако решити. Наравно, решење даје породицу кривих од којих свака има особину да је растојање међу двема на њој означеним тачкама мање од одговарајућег растојања дуж ма које друге криве коју би било могућно повући између тих тачака. Ако треба наћи геодезиску линију која спаја две дате тачке, као што се у нашем проблему и претпоставља, треба само да координате ових тачака искористимо као контурне вредности и да на овај начин у нашем решењу одредимо константе интеграције.

§ 50. Дидонин проблем

Сви проблеми последњих неколико одељака захтевају одређивање неке криве дуж које је нешто толико велико (или толико мало) колико је то могућно. Проучавање таквих проблема зове се Варијациони рачун и претставља важну грану Математике. Проблеми које смо досад дали припадају најједноставнијем типу проблема са којим се у овом проучавању има посла. Наиме, нисмо тражили да криве задовољавају друге услове сем услова да чине интеграл максималним. На пример, у § 47, једино ограничење којем смо подвргли криву било је то да њеним обртањем треба да настане површина која има најмању величину. Али, каткад је потребно да се захтева да крива задовољава и друге услове, На пример, њена би дужина могла бити дата унапред, те би се проблем састојао у томе да жицу дате дужине савијемо тако да њеним обртањем настане површина минималне величине. Очигледно, овај проблем има решење а подједнако је очигледно да није неопходно да то решење буде онакво какво смо добили раније; јер, била би то велика случајност кад би жица којом располажемо била тачно оне дужине коју захтева крива из § 47.

Има много проблема ове врсте. Као једна класа, они су познати под именом *изопериметричких* проблема. Један такав врло интересантан историски проблем познат је као Дидонин проблем. Кажу да је Дидона, краљица Картагине, будући у немилости код свог брата Пигмалиона, покупила сав новац који је могла наћи и да је побегла на јужну обалу Средоземља. Тамо је начинила погодбу са краљем Јарбасом за толико земљишта колико се може обухватити једном кожом бика. Тада, са карактеристичном исправношћу које увек има у митологији, она је кожу исекла у сасвим танке каише, повезала крајеве и успела да обухвати земљиште на ком је подигнута Картагина. Са карактеристичном феничанском савршеношћу она је, место да их састави, учинила да крајеви буду на обали мора. Касније, она је на врло необичан начин извршила самоубиство да се не би удала за тог истог Јарбаса; али, тај део приче није подесан материјал за књигу о диференцијалним једначинама. Важно је то да, замисливши овај сјајни план, она се суочила са проблемом постављања кожног конца тако да се обухвати део земљишта који има

највећу вредност, — па био то највећи део или не, већ према околностима.

Стога је Дидонин проблем следећи: дата је једна крива (морска обала) а знајући вредност земљишта (која се може мењати од места до места), како се може повући крива дате дужине тако да вредност обухваћене површине између ове и дате криве, буде максимум?

Да бисмо показали методу решавања изопериметричких проблема, решићемо овај Динонин проблем за најједноставнији могућни случај у ком се претпоставља да земљиште има свугде исту вредност и да је морска обала права. Шта више, претпоставићемо да се крајеви ужета налазе у две унапред означене тачке на растојању од X јединица[1]. Проблем се тада своди на одређивање криве дате дужине која обухвата површину највеће величине.

Тражи се да та крива задовољава *два* услова од којих се један односи на њену дужину, а други на величину обухваћене површине. Ако морску обалу узмемо за осу x у чијем се почетку налази један крај ужета, те услове можемо писати[2]

$$L=\int_0^X\sqrt{1+y'^2}\,dx\,,\quad A=\int_0^X y\,dx\,.$$

Први од ова два израза треба да има одређену вредност, а вредност другог треба да буде толико велика колико је то могућно.

Претпоставимо сада да је тачна крива $y=f(x)$, да је њена дужина L_0 и да је обухваћена површина A_0. Претпоставимо даље да овај проблем треба да решимо на раније показан начин и да треба ову тачну криву да упоредимо са неком другом кривом чија је једначина $y=f(x)+$ $+\varepsilon(x)$ где је $\varepsilon(x)$ мало, али иначе без других ограничења. Очигледно, не бисмо могли више да кажемо да је нова површина A_0+dA, мања од A_0; јер нова би крива могла бити дужа од старе, па би стога могла да обухвати већу површину. Другим речима наш уобичајени начин доказивања отпада и приморани смо да потражимо неку нову методу решавања.

То ћемо учинити скретањем наше пажње са Дидониног ужета дужине L_0 на неко ново уже дужине L_0+dL, где је dL или позитивно или негативно. Претпоставимо да ово ново уже треба на такав начин поставити да се обухвати највећа површина која ће бити већа или мања од A_0 већ према знаку од dL. Најзад, обележимо ову нову површину са[3] $A_0+\Delta A$, а количник $\dfrac{\Delta A}{dL}$ (или, боље, границу тог количника када

---

[1] Ипак, видети проблеме 8 и 9, § 51.

[2] Ако би тачке O и X биле врло близу једна другој, можда би било потребно да се конац положи нешто и поред обале тако да би се делом налазио и изван интервала одређеног тачкама O и X; у таквом случају, — у облику у ком смо га написали, — интеграл за A не би био више тачан. Но, ми се на овом месту таквим случајем нећемо бавити већ ћемо претпоставити да је y једнозначна функција од x.

[3] Пишемо ΔA место dA због тога што ову другу ознаку желимо да задржимо за промену површине насталу посматрањем *произвољне* криве $y=f(x)+\varepsilon(x)$.

dL тежи нули) са λ. Тада можемо тврдити: *ако дужину наше криве променимо за износ dL, највећа површина коју она може да обухвати биће $A_0 + \lambda dL$.*

Вратимо се сада расматрању наше *произвољне* криве $y = f(x) + \varepsilon(x)$ са којом вршимо поређење и претпоставимо да ова има дужину $L_0 + dL$, која може бити дужа или краћа или једнака са L_0. Обележимо такође са $A_0 + dA$ површину коју обухвата ова нова крива. Ма колико да је њена дужина, сада нова крива свакако не може обухватити површину већу од $A_0 + \lambda dL$; јер, по претпоставци ово је највећа површина коју може да обухвати крива дужине $L_0 + dL$. Зато морамо закључити да је

$$dA \leq \lambda\, dL\,,$$

или

$$dA - \lambda\, dL \leq 0\,.$$

То води теореми: *ма како мењали криву $y + f(x)$, било да је та промена таква да њену дужину мења или не мења, количина $dA - \lambda\, dL$ није никад позитивна.* Али, када $dA - \lambda\, dL$ није никад позитивно, $A - \lambda L$ не може бити веће за нову криву него за стару. Одавде можемо нашу теорему поново изложити у значајнијем облику:

Она иста крива између кривих једнаке дужине која максимира A, максимира такође и количину $A—\lambda L$, без обзира на своју дужину.

Зато је проблем максимирања A са ограничењем да L мора бити једнако L_0, идентичан са проблемом максимирања $A - \lambda L$ без икаквих ограничења. Истина, тачно решење проблема добићемо само ако употребимо исправну вредност за λ; а како изгледа да је λ немогућно одредити док не знамо решење проблема, може изгледати да смо тим доказивањем слабо шта постигли. Али, ако λ будемо сматрали као непознату константу, ипак ћемо наћи неко сретство да је израчунамо.

Зато је

$$A - \lambda L = \int_0^X \left(y - \lambda \sqrt{1 + y'^2}\right) dx$$

интеграл који треба максимирати. Кад га трансформишемо на уобичајени начин, он води диференцијалној једначини

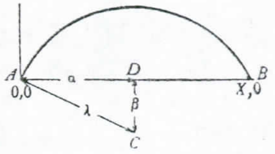
$$\frac{d}{dx}\,\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{1}{\lambda} = 0\,,$$

чије је решење

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \lambda^2\,.$$

То је једначина круга полупречника λ са средиштем у тачки (α, β). Она садржи три произвољне константе α, β и λ; али, постоје и три

услова помоћу којих их можемо одредити: јер, крива мора пролазити кроз тачке $(0, 0)$ и $(X, 0)$ а такође мора бити дужине L. Вредност ових трију констаната најлакше можемо одредити сретствима која нам пружа геометрија. Познато је да средиште круга који пролази кроз две тачке A и B лежи на симетрали дужи AB. То значи да α мора бити једнако $\frac{X}{2}$. (Видети сл. 38). Како је позната хипотенуза и једна страна троугла ADC, лако можемо израчунати дужину друге стране. На тај начин налазимо да је β једнако $-\sqrt{\lambda^2 - X^2/4}$. Најзад, $\frac{L}{\lambda}$ је величина (у радианима) угла ACB. Угао ACD је тачно половина тог угла и његов је синус једнак $X/2\lambda$. То даје једначину



Сл. 38

$$\sin \frac{L}{2\lambda} = \frac{X}{2\lambda}\,,$$

из које треба одредити λ. Та је једначина трансцендентна и не може се решити алгебарским сретствима. Али је можемо решити „пробањем" или помоћу реда. На пример, ако је $L = 1{,}25\,X$, λ постаје $0{,}552\,X$, те је зато β једнако $-0{,}234\,X$. Тај смо круг показали на сл. 38.

§ 51. Један проблем из рачуна вероватноће a priori

Важно је за телефонско друштво да зна колико позива може очекивати у поједином интервалу времена. Радне околности нису увек исте и каткад веома отежавају решење проблема. Али, следећи је случај довољно једноставан тако да га можемо и овде изложити; он је, уз то, довољно близак стварним околностима, тако да је постао модел са којим се упоређују и све друге околности.

Претпоставимо да је у некој телефонској централи постављен један посматрач да пази на пристизање позива и узмимо да их он броји у извесном интервалу времена — рецимо у једној минути. Колика је вероватноћа да ће набројати баш n позива?

Претпоставићемо:

a) Да на вероватноћу да ће набројати баш n не утиче оно што се десило пре но што је почео да броји. Наиме, можда је он приметио да их је било необично мало за време оних неколико минута када је чекао да отпочне своје бројање, или необично много; али, претпостављамо да му ово неће дати никакву индикацију о ономе што има да очекује за време свог посматрања. Ова претпоставка неће изгледати безразложна кад потсетимо на то да неки претплатник нема начина да сазна шта раде други претплатници, па зато у његовим позивима не може на њега утицати оно што је посматрач видео.

b) Да вероватноћа да ће посматрач набројати баш n позива, не зависи од доба дана које ће он изабрати за своју пробу. Наравно, у општем случају ова претпоставка није тачна; јер, вероватноћа пристизања позива у три часа изјутра ни близу није толико велика као у три после подне. Али, уколико се посматрач ограничи да ради само за време оних часова у којима је општи ниво саобраћаја константан, претпоставка није далеко од стварности. Замисао је та де је свеједно хоће ли он почети са посматрањем у $2^h 35^m$ или у $2^h 47^m$ или у $2^h 51^m$.

Три су закона потребна из теорије рачуна вероватноће:

(I) Ако ће се неки догађај сигурно десити, његова је вероватноћа 1.

(II) Ако се један од два догађаја може десити сасвим независао од тога да ли ће се десити други, вероватноћа да се десе *обадва* је *производ* из вероватноће да се деси један и вероватноће да се деси други.

(III) Ако је немогућно да се десе заједно обадва догађаја, вероватноћа да се деси *или један или други* је *збир* вероватноће да се деси први и вероватноће да се деси други.

Сад можемо приступити решавању нашег проблема. Оно ће се састојати из три дела. У првом делу наћи ћемо вероватноћу да посматрач не изброји *ниједан* позив. У другом делу извешћемо диференцијалну једначину за вероватноћу да изброји баш n позива. Затим ћемо решити ту диференцијалну једначину у трећем делу.

Део I. Обележимо са t интервал времена у ком се врши посматрање и поделимо га у велик број врло малих интервала dt. У интервалу времена t неће бити ниједног позива тада и само тада ако ниједног не буде било у овим малим интервалима. Зато вероватноћа, коју ћемо обележити са $p_0(t)$, да у интервалу времена t не буде ниједног позива, производ је из сличних вероватноћа за те мале интервале. То следи из закона (II). Наиме,

$$p_0(t) = [p_0(dt)]^{\frac{t}{dt}}, \tag{129}$$

где је $\frac{t}{dt}$ број интервала.

Затим, нека $q(dt)$ претставља вероватноћу да се *деси* неки позив у таквом једном малом интервалу dt. Како неки интервал не може истовремено и да има и да нема неки позив, то закон (III) тврди да је $p_0(dt) + q(dt)$ вероватноћа да се он у таквом једном интервалу или деси или не деси. Очигледно, једно или друго од овога двога мора се десити: зато збир $p_0(dt) + p(dt)$ мора бити према првом закону једнак јединици. Зато једначина (129) постаје

$$p_0(t) = (1 - q)^{\frac{t}{dt}},$$

или

$$\log p_0(t) = \frac{t}{dt} \log (1 - q).$$

Ако је dt врло мало — рецимо хиљадити део секунде — вероватноћа да се у том интервалу времена деси *један* позив, је мала; а вероватноћа да се у једном таквом интервалу десе *два* или више позива, може се потпуно занемарити: q је тада бескрајно мало. Али, ако је q мало, $\log(1 - q)$ приближно је једнако $-q$; зато је

$$\log p_0(t) \approx -\frac{tq}{dt}. \tag{130}$$

Пустимо сада да dt буде све мање и мање: очигледно, услед тога се не може мењати лева страна једначине (130); јер, она претставља вероватноћу да се не деси ниједан позив у читавом интервалу t; а кад се не мења лева страна, не може се мењати ни десна страна. То тражи да q садржи dt као фактор, наиме

$$q = k\,dt. \tag{131}$$

Тада се једначина (130) своди на

$$p_0(t) = e^{-kt}.$$

То је вероватноћа да се ниједан позив не деси у интервалу времена посматрања. Наравно, k је непознато; али, оно није без физичког значења, јер једначина (131) тврди да је $k\,dt$ вероватноћа да се деси неки позив у интегралу dt, под условом да је *dt врло мало*.

Део II. Узмимо сада ма који интервал времена t, за којим следи *врло кратак* интервал dt. Оба заједно они чине интервал времена $t + dt$ који ћемо звати „комбиновани интервал“.

Ако у овом комбинованом интервалу има n позива, сви се они морају налазити или у интервалу t а ниједан у интервалу dt; или $n - 1$ у интервалу t а један у интервалу dt; или могу бити подељени на ова два интервала неким другим начином. Но сви остали начини деобе захтевају да у интервалу dt буде више од једног позива те су зато тако мало вероватни да их можемо занемарити.

Вероватноћа да се у интервалу t деси n позива а у интервалу dt ниједан, је

$$\begin{aligned} p_n(t)\, p_0(dt) &= p_n(t)(1 - q) \\ &= p_n(t)(1 - k\,dt), \end{aligned}$$

а вероватноћа да се у интервалу t деси $n - 1$ позива а у интервалу dt један, је

$$p_{n-1}(t)\, p_1(dt) = p_{n-1}(t)\, k\,dt.$$

Зато је

$$p_n(t + dt) = p_n(t)(1 - k\,dt) + p_{n-1}(t)\, k\,dt$$

вероватноћа да се у комбинованом интервалу деси n позива. Ту једначину лако можемо довести на облик

$$\frac{p_n(t + dt) - p_n(t)}{dt} = k\,[p_{n-1}(t) - p_n(t)]. \tag{132}$$

Ова једначина важи само под условом да је dt врло мало; чак и тада њу можемо сматрати само као врло добру апроксимацију; јер, ма да је вероватноћа да се у интервалу времена dt деси више од једног позива мала, она није сасвим једнака нули. Али, кад dt постаје све мање и мање, апроксимација постаје све боља и боља, и кад dt буде једнако нули, једначина (132) постаје тачна. Тако, ма да је једначина (132), у облику у ком смо је написали, само приближно тачна, диференцијална једначина

$$\frac{dp_n}{dt} = k\,(p_{n-1} - p_n)\,, \tag{133}$$

која из ње следи, потпуно је тачна. Треба само да је решимо и нађемо вредност за p_n.

Део III. Претпоставимо да је n једнако јединици. Тада једначина (133) постаје

$$\frac{dp_1}{dt} + kp_1 = kp_0\,.$$

Како знамо да је p_0 једнако e^{-kt}, ово је обична линеарна диференцијална једначина чије је решење

$$p_1 = (\alpha_1 + kt)\,e^{-kt}\,.$$

Ако се води рачуна о значењу количина, одређивање тачне вредности за константу интеграције α_1 није тешко; јер, вероватноћа да се деси један позив у *врло кратком* интервалу времена, мора бити врло мала и мора тежити нули кад интервал времена тежи нули. Наиме, p_1 мора бити једнако нули кад је t једнако нули, те стога α_1 мора бити једнако нули. Зато је

$$p_1 = kt\,e^{-kt}\,.$$

Слично, за $n = 2$, једначина (133) постаје

$$\frac{dp_2}{dt} + \kappa p_2 = k^2\,t\,e^{-kt}$$

чије је решење

$$p_2 = \left(\alpha_2 + \frac{k^2\,t^2}{2}\right)e^{-kt}\,,$$

где α_2 такође мора бити једнако нули. Продужујући на овај начин, можемо редом наћи $p_3\,, p_4\,, \ldots\ldots$[1]

Опет се показало да је диференцијална једначина кључ решавања једног важног техничког проблема.

---

[1] Друга интересантна метода решавања једначине (133) заснива се на следећој замисли:

Најпре уводимо помоћну променљиву λ и дефинишемо функцију $F(\lambda, t)$ Тајлоровим редом

$$F(\lambda, t) = p_0 + \lambda\,p_1 + \lambda^2\,p_2 + \cdots\cdots \tag{a}$$

ЗАДАЦИ

1. Наћи најкраћу путању међу двема тачкама у равни xy ако су координате одговарајућих тачака (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

2. Неко тело треба да се помери од тачке $(1, 0)$ до тачке $(2, 2)$. Природа површине по којој га треба померити мења се од места до места на такав начин да је рад утрошен за његово померање на јединицу растојања пропорционалан његовом растојању од почетка. Наћи путању дуж које ће бити потребно да се утроши најмање енергије.

3. Неки терет треба покренути од тачке $x = 0$ до тачке $x = 1$ у једној секунди. Да се ово обави постоји много начина: да га покрећемо брзином 1 целим путем, или брзином 2 од $x = 0$ до $x = \frac{2}{3}$ а одатле даље брзином $\frac{1}{2}$ или, уопште, брзином коју одређује једначина $x = f(t)$. При томе је потребно савладати силу отпора пропорционалну брзини. Којом би га брзином требало покретати да се утроши најмање енергије?

За тај ред напомињемо следеће две ствари: прво, да се он своди на $F(1, t) = 1$ кад је $\lambda = 1$; и друго, да због овога он мора бити конвергентан за све вредности λ мање од један.

Затим диференцирамо наш ред и изводе од p замењујемо са одговарајућим вредностима једначине (133). На тај начин добивамо

$$\frac{dF}{dt} = k\,(\lambda - 1)\,F,$$

или

$$F(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\,e^{k\,(\lambda - 1)\,t}\,, \tag{b}$$

где је $\alpha(\lambda)$ „константа интеграције“.

Да бисмо одредили ову константу, најпре напомињемо да је сем p_0 свако p једнако нули кад је $t = 0$. Зато се једначина (a) једноставно своди на

$$F(\lambda, 0) = p_0(0).$$

Слично се једначина (b) своди на

$$F(\lambda, 0) = \alpha(\lambda).$$

Зато је $\alpha(\lambda) = p_0(0)$, то јест нека константа. С друге стране, ако у једничини (b) ставимо да је 'λ једнако 1 и приметимо да је $F(1, t) = 1$, налазимо да је вредност константе $\alpha(\lambda)$ једнака јединици, то јест

$$F(\lambda, t) = e^{-kt}\,e^{\lambda kt}$$

Развијмо сада $e^{\lambda kt}$ у Тајлоров ред и уврстимо у ову једначину. Добићемо резултат

$$F(\lambda, t) = e^{-kt} + \lambda\,k\,t\,e^{-kt} + \lambda^2\,\frac{k^2\,t^2}{2!}\,e^{-kt} + \cdots\cdot \tag{c}$$

На тај начин, за функцију $F(\lambda, t)$ поново смо нашли конвергентан Тајлоров ред. Али, за једну функцију је немогућно да буде претстављена са два различита Тајлорова реда. Зато коефицијенти редова (a) и (c) морају бити једнаки; то нам даје

$$p_0 = e^{-kt}\,,\quad p_1 = k\,t\,e^{-kt}\,,\quad p_2 = \frac{k^2\,t^2}{2!}\,e^{-kt}\,,$$

као што смо добили и раније.

(Тај се проблем може формулисати неким интегралом са границама $x=0$ и $x=1$, и тада је ово један изопериметричан проблем; или, интегралом са границама $t=0$ и $t=1$, и тада то није изопериметричан проблем. Можете ли наћи исти одговор на оба начина? Енергија је одређена интегралом $\int F dx$, или $\int F \frac{dx}{dt} dt$, где је F интензитет силе).

4. Од једног кубног центиметра месинга треба начинити обртно тело аксиалног пречника један центиметар. Тражи се да његов момент инерције око осе обртања буде минималан. Какав би му облик требало дати?

(Момент инерције масе m око осе која се налази на отстојању d јединица од те масе, је md^2).

5. Из дате количине материје која му стоји на расположењу, неко божанство намерава да створи свет са жељом да тај свет задовољава три услова: прво, треба да буде чврсто обртно тело; друго, треба да буде хомогено; и треће, треба да дејствује максималном гравитационом силом привлачења на неко тело постављено у његовом „северном полу".

Будући свемудро, божанство је поставило своју диференцијалну једначину у поларним координатама, употребљујући „северни пол" као почетак и нашло одговарајући облик тог света. Уверен сам да ће читаоцу бити пријатно када увиди да може и сам исто учинити и да ће зажелети да нацрта криву која претставља попречан пресек тог новог света.

6. Наћи криву дужине 3 која спаја тачке $(-1, 1)$ и $(1, 1)$, чијим ће обртањем око осе x настати површина минималне величине.

(Када добијете решење овог проблема, наћи ћете да једна од ваших констаната може имати ма коју од две вредности. Очигледно, постоји само једно решење проблема. Која је од двеју ьредности тачна и шта значи друга?)

7. Наћи обртну површину дате величине која обухвата максималну запремину.

(Када добијете диференцијалну једначину која садржи само y' и y, посао ће много поједноставнити смена $1+y'^2=\frac{1}{u}$. У општем случају нећете бити у стању да израчунате ваш последњи интеграл. Међутим, ако будете захтевали да оса ротације буде *нормална* на обртној површини — што једино значи да она не сме имати оштрих крајева — наћи ћете решење које очекујете. Какво је значење осталих решења?)

8. Дидона је такође наишла на проблем да се одреди колико би се далеко једна од друге требале да поставе крајње тачке **A** и B, (сл. 38), да би што више добила својом куповином. Одговорити на ово питање тиме што ће се наћи величина површине изражена у функцији угла Φ (то јест, угла ACD), и одредити вредност Φ за коју ће та величина површине бити максимална.

9. Обалско земљиште Картагине вероватно је било од веће потенцијалне вредности него даље унутрашње копно. То је унеколико компликовало Дидонин проблем постављања коже бика. Претпоставимо да се вредност земљишта мењала према закону

$$v(\eta)=\frac{1}{1+\eta}$$

где је $v(\eta)$ вредност јединице површине која се налази на отстојању η од мора. Наћи одговарајућу међу ако су сви остали услови исти као и у тексту. Не морате покушавати да последњи интеграл интегрирате.

ГЛАВА VII

ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА

§ 52. Уводне напомене

На основи примера који се налазе у §§ 45 и 46 и свом решавању задатака који су следили тим примерима, читалац ће закључити да су све диференцијалне једначине биле линеарне. Није то био само случај. Напротив, може се поставити као опште правило да се знатна већина проблема у проучавању еластичних деформација формулише линеарним диференцијалним једначинама. Ово исто важи и за већину проблема провођења топлоте или електрицитета, а тако исто и за много осталих проблема технике и науке. Уствари, претежност линеарних диференцијалних једначина у обичнијим областима физичког истраживања тако је велика да би се проучавање диференцијалних једначина у математичкој физици готово подједнако могло назвати проучавањем линеарних диференцијалних једначина[1].

Природно је, дакле, да једначинама тог облика обратимо специјалну пажњу и, према томе, остатак је ове књиге готово потпуно посвећен њиховом расматрању.

Оне се оштро деле на две класе: на линеарне диференцијалне једначине са *сталним* и на линеарне диференцијалне једначине са *променљивим* коефицијентима. Друга од ових класа узима се уопште (а то је и подесно) као предмет одвојеног курса проучавања. Стога ћемо нашу пажњу ограничити углавном на случај сталних коефицијената као једноставнији, са јединим изузецима уводних напомена у §§ 53 и 54, које подједнако важе за све линеарне једначине, и извесних типова једначина у Глави IX, са циљем да се читаоцу наговести правац у ком — ако то жели — може корисно наставити своја проучавања.

Налазимо као подесно да кроз читаво ово проучавање диференцијални израз

$$f_s(x)\frac{d^s y}{dx^s}+f_{s-1}(x)\frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}}+\cdots,+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_0(x)\,y$$

---

[1] Наравно, разлог ове претежности линеарних диференцијалних једначина је чињеница што се у знатној већини проблема науке задовољавамо да оперишемо са ефектима првог реда.

обележимо кратком ознаком $F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y$. На ту ознаку наводи чињеница што се изводи различитог реда пишу као да су степени од $\frac{d}{dx}$, тако да цео израз има изглед као да је y помножено функцијом двеју променљивих x и $\frac{d}{dx}$. Наравно, ако бисмо желели да посебну пажњу обратимо на чињеницу да је s највиши изложилац од $\frac{d}{dx}$, такву бисмо функцију претставили уобичајеном ознаком $F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)$. Најопштија линеарна диференцијална једначина s-тог реда у том означавању је

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = f(x),$$

где је $f(x)$ ма која функција од x.

§ 53. Принцип суперпозиције

Најважнија општа теорема односно линеарних диференцијалних једначина позната је као *принцип суперпозиције*. У њој је реч о двема једначинама

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = f(x) \tag{134}$$

и

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = g(x), \tag{135}$$

чије су леве стране потпуно једнаке а десне су им различите функције од x, и о једној трећој једначини

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = f(x) + g(x), \tag{136}$$

чија је лева страна такође идентична са левим странама, а десна страна збир десних страна првих двеју једначина. Садржина теореме је да је збир неког решења једначине (134) и неког решења једначине (135) решење једначине (136).

Подесно је да све те три једначине сматрамо идентичним у том смислу да имају једнаку диференцијалну структуру и да о решењима говоримо као да „припадају" партикуларном облику десног члана. Тада теорема добива облик:

Теорема I. *Збир решења диференцијалне једначине која припадају двема функцијама $f(x)$ и $g(x)$ јесте решење које припада функцији $f(x) + g(x)$.*

Да бисмо доказали ову теорему, обележимо редом са $\phi(x)$ и $\psi(x)$ решења једначина (134) и (135). Језиком теореме, од ових једно „припада функцији f" а друго „припада функцији g". Тада је $\phi + \psi$ решење које „припада функцији $f + g$".

Да бисмо одлучили да ли је наша теорема тачна или погрешна, треба само у једначину (136) уврстити збир $\phi + \psi$ и видети да ли он задовољава једначину. Међутим, пошто је извод ма којег реда збира функција $\phi + \psi$ једнак збиру извода истог реда сваке од функција ϕ и ψ узетих појединачно, то, када збир $\phi + \psi$ уврстимо у једначину (136), њен се леви члан раздваја у део који садржи само ϕ и део који садржи само ψ. Упоређивањем са једначином (134) видимо да је први од ових делова једнак функцији f, а упоређивањем са једначином (135) видимо да је други део једнак функцији g. Дакле, теорема је доказана.

Досад смо о функцијама ϕ у ψ говорили као *партикуларним* решењем. Али, ако је ϕ *опште* решење једначине (134), а ψ *партикуларно* решење једначине (135), $\phi + \psi$ мора бити *опште* решење једначине (136). Јер, ако је ϕ опште решење једначине (134), оно садржи s независних произвољних констаната. Зато $\phi + \psi$ такође садржи s независних произвољних констаната, а опште решење једначине (136) не може их имати више¹).

Када пређемо на специјалан случај у ком је $g = 0$, *обе* стране једначина (134) и (136) постају идентичне, а (135) постаје одговарајућа једначина са нулом на десној страни, или, како се обично зове, *комплементарна једначина*. За тај специјалан случај можемо Теорему I изложити како следи:

Теорема II. *Опште решење линеарне диференцијалне једначине је збир ма којег од њених партикуларних решења и општег решења комплементарне једначине²)*; или, другим речима, *опште решење диференцијалне једначине које „припада функцији $f(x)$", је збир ма којег партикуларног решења које „припада функцији $f(x)$" и општег решења које „припада нули".*

Готово све методе решавања линеарних диференцијалних једначина су изведене на основи принципа суперпозиције или на основи Теореме

---

¹) Можда ће у први мах изгледати да би се сабирањем општег решења које припада функцнји f и општег решења које припада функцији g, добило још општије решење једначине (136), услед $2s$ произвољних констаната. Али, од ових констаната има само s независних. Зато тиме не добивамо ничег општијег, као што бисмо могли очекивати на основи наших примедаба.

²) Општи решење комплементарне једначине обично се зввe „комплементарно решење" полазне једначине. Али ово комплементарно решење, и поред свог имена, уопште и није решење; јер, оно своди леву страну једначине на нулу, не на $f(x)$. Из тога разлога, у овој смо књизи избегавали израз „комплементарно решење" у корист дуже реченице „решење комплементарне једначнне". Чак н та реченица је незадовољавајућа јер тешко је видети у ком су смислу једначине комплементарне; али, она бар не одводи сасвим с правог пута. Терминологија "припада ка", заснива се на општем динамичком значењу једначине, у ком y значи померање које „припада" сили $f(x)$. Што се лично мене тиче, оно прво бих радо изоставио да није чињенице што би тада читалац сматрао бесмисленим нзраз „комплементаран" кад би га где у књигама срео.

II, која је његов специјалан случај. Зато овим принципом треба добро владати у оба облика. Њих ћемо протумачити у теорији електричног кола у једном доцнијем одељку и видећемо да сваки од њих има једноставно физичко значење.

§ 54. Принцип декомпозиције

Ма да се може формирати решење једначине (136) када су једном позната решења једначина (134) и (135), треба напоменути да се обрнути поступак, у општем случају, не може извести. Наиме, ако је познато решење које припада збиру функција $f+g$, у општем случају није могућно утврдити који део тог решења припада функцији f а који функцији g. Слично се дешава у елементарној аритметици. Ако су позната два броја 3 и 4, њихов збир 7 је једнозначно одређен: али, ако је познато да је 7 збир два броја, одавде не можемо закључити која су то два броја. То могу бити 3 и 4, или 2 и 5, или ма који други од бесконачно много парова бројева.

Постоји међутим један специјалан случај у ком тај аритметички поступак можемо извести и у обратном смеру и збир раздвојити у своје чланове из којих је он у почетку формиран: ако је збир комплексни број $a+bi$, а познато је да је добивен сабирањем неког *реалног* и неког *имагинарног* дела, следи да је реалан део морао бити a а имагинаран bi. У свим осталим случајевима у којима је збир два броја комплексан број $a+bi$, бар један је комплексан. Слично, постоји специјалан случај принципа суперпозиције у ком о решењу које припада функцији f и о решењу које припада функцији g можемо закључити из решења које припада збиру тих функција, и на тај начин налазимо да је овај специјалан случај потпуно аналоган једноставном аритметичком примеру који смо малочас поменули.

Претпоставимо да је $f(x)$ реална функција и да је $g(x)$ чисто имагинарна и једнака $i\,g_1(x)$; претпоставимо даље да су коефицијенти свих извода у једначини (136) реални. Најзад, узмимо да је познато решење једначине (136). То ће решење имати неки реалан део и неки имагинаран део, те га можемо написати у облику $y=\phi(x)+i\,\psi_1(y)$. Ако ово уврстимо у једначину (136), одмах је можемо свести на облик

$$F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)\phi+i\,F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)\psi_1=f(x)+i\,g_1(x).$$

Пошто су ϕ и ψ_1 *реалне* количине, њихови изводи по x такође су реални. Зато је $F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)\phi$ реално а $i F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)\psi_1$ имагинарно. Из чињенице да су две комплексне количине једнаке само кад су једнаки посебно њихови реални и имагинарни делови следи, дакле, да је

$$F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)\phi=f(x)$$

и

$$F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)\psi_1=g_1(x).$$

Прва од тих једначина тврди да је ϕ решење које припада функцији $f(x)$, а друга да је ψ_1 решење које припада функцији $g_1(x)$.

Речима можемо ову теорему изложити на следећи начин:

Теорема III. *Ако су у линеарној диференцијалној једначини*

$$F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)y=f(x), \tag{134}$$

коефицијенти који стоје уз изводе реални, а функција $f(x)$ комплексна , тада реални и имагинарни делови решења које припада функцији $f(x)$, припадају, респективно, реалном делу и имагинарном делу од $f(x)$.

О првој претпоставци у тој теореми потребна је специјална напомена: ако неки коефицијент у $F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)$ *није* реалан, није реалан ни резултат који ћемо добити кад у том изразу y сменимо неком реалном функцијом од x. Зато није више могућно закључити да су у једначини (136) реални и $F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)\phi$ и $F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)\psi_1$. То, наравно, има за последицу да наш доказ у таквом случају не важи. Други ниже наведени пример је случај те врсте и може послужити да на основи њега подвучемо неопходност захтева да *сви* коефицијенти буду реални.

Слично, теорема се не може применити ако једначина није линеарна, јер се у таквом случају функција y, или један од њених извода, морају помножити или сами собом или неким од осталих извода. Али, ако је функција y која је решење једначине (134) комплексна, њени су изводи такође комплексни, тако да је ма који такав производ неки производ из две комплексне количине. Како *није* тачно да је реалан део таквог производа производ реалних делова фактора, као што ни имагинаран део производа није производ имагинарних делова појединих фактора, — то ни у овом случају наш доказ не важи.

Као први пример, узмимо једначину

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x+i\,x^2. \tag{137}$$

Методом § 30 лако налазимо да је решење ове једначине

$$y=\frac{x^2}{4}+\frac{i\,x^2}{5}+\frac{C}{x^2}. \tag{138}$$

Слично, решења једначина

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x$$

и

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=i\,x^2,$$

су, редом,

$$y=\frac{x^2}{4}+\frac{c_1}{x^2}$$

и

$$y=\frac{i\,x^3}{5}+\frac{i\,c_2}{x^2}.$$

Стога ће то заиста бити реални и имагинарни делови од (138), само ако произвољна константа c буде била комплексан број и ако за реалан део буде имала c_1 а за имагинаран део $i\,c_2$.

Међутим, ако место једначине (137) напишемо једначину

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y=x+i\,x^2, \tag{139}$$

тако да коефицијент који стоји уз y није више реалан, налазимо да је решење те једначине

$$y=\frac{x^2}{2i+2}+i\frac{x^3}{2i+3}+\frac{c}{x^{2i}},$$

или

$$y=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{13}x^3+a\cos(b-2\log x)\right]+$$

$$+i\left[-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{13}x^3+a\sin(b-2\log x)\right]^{1)}, \tag{140}$$

---

[1] У случају прва два израза, раздвајање реалних и имагинарних делова је једноставно: треба само бројилац и именилац помножити са коњуговано комплексним бројевима именилаца. Можда читаоцу није позната метода раздвајања последњег израза. Ако ставимо $c=ae^{ib}$ и напишемо

$$x^{-2i}=e^{-2i\log x},$$

тај израз добива облик

$$a\,e^{i\,(b-2\log x)}.$$

Али је

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta;$$

зато, када место θ напишемо $b-2\log x$, последњи израз постаје

$$a\cos(b-2\log x)+i\,a\sin(b-2\log x).$$

где смо произвољну константу c изразили у облику $a\,e^{ib}$. Овде су реални и имагинарни делови раздвојени, али *нису* решења једначина

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y=x$$

и

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y=i\,x^2.$$

Напротив, решења ових једначина су, редом,

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{x^2}{2i+2}+\frac{c_1}{x^{2i}}, \\ \text{и}\qquad y&=\frac{i\,x^3}{2i+3}+\frac{i\,c_2}{x^{2i}}, \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

па чак нису ни реална.

Тај смо резултат морали и очекивати, јер *принцип декомпозиције* (Теорема III) не важи ако су коефицијенти диференцијалних израза комплексни, као што је случај код једначине (139). Но, такво ограничење нисмо поставили кад смо изводили *принцип суперпозиције* (Теорему I). Зато би требало да збир израза (141) буде једнак изразу (140), као што заиста и јесте.

Најзад, као трећи пример, посматрајмо једначину

$$y\left(\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y\right)=x+i\,x^2. \tag{142}$$

Лако налазимо да је решење те једначине

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{2i+1}+\frac{2i\,x^3}{4i+3}+\frac{c}{x^{4i}}}. \tag{143}$$

Слично, решења једначина

$$y\left(\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y\right)=x$$

и

$$y\left(\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y\right)=i\,x^2,$$

су

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{2i+1}+\frac{c_1}{x^{4i}}} \tag{144}$$

и

$$y=\sqrt{\frac{2i\,x^3}{4i+3}+\frac{i\,c_2}{x^{4i}}}\,. \qquad (145)$$

Али, не само да (144) и (145) нису реални и имагинарни делови од (143), већ чак ни њихов збир није једнак са решењем (143). То јест, у овом случају не важе ни принцип декомпозиције ни принцип суперпозиције, као што заиста тако и треба да буде јер (142) није линеарна једначина.

§ 55. Линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима. Експоненцијална решења

Принцип суперпозиције важи за све линеарне једначине без обзира на природу коефицијента, а принцип декомпозиције важи само кад су коефицијенти реални. Но следећа наша излагања важе само кад су коефицијенти константни. *Зато ћемо кроз читав преостали део ове Главе, дискутовати само о оним једначинама које су линеарне и које имају константне коефицијенте.*

Ма која таква једначина је облика

$$a_s\frac{d^sy}{dx^s}+a_{s-1}\frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}}+\cdots\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=f(x), \qquad (146)$$

или, у симболичном означавању,

$$F_s\left(\frac{d}{dx}\right)y=f(x)\,, \qquad (147)$$

која се од једначине (134) разликује само тиме што x више не улази као аргуменат функције F_s. Како ћемо показати да решење многих једначина зависи од решења које добивамо када је $f(x)$ нека експоненцијална функција облика $B\,e^{px}$, учинићемо најбољи увод у проучавање таквих једначина ако будемо посматрали прво овај специјалан случај.

Претпоставимо, дакле, да је диференцијална једначина

$$F_s\left(\frac{d}{dx}\right)y=B\,e^{px}\,. \qquad (148)$$

Ако није $F_s(p)=0$, можемо увек наћи партикуларно решење у облику $y=A\,e^{px}$. Јер, ако је y тог облика, његове узастопне изводе одмах можемо написати ако само $\frac{d}{dx}$ заменимо са p. Тако је $\frac{d}{dx}y=p\,y$, $\frac{d^2}{dx^2}y=p^2y$, и тако даље. Зато, ако претпоставимо да је y тог облика, једначина (148) постаје

$$F_s(p)\,A\,e^{px}=B\,e^{px}\,. \qquad (149)$$

То није више диференцијална једначина, јер је p само неки број, и зато је $F_s(p)$ такође неки број. Једина неодређена количина је A и једначина одмах показује да A мора имати вредност

$$A=\frac{B}{F_s(p)}\,.$$

И тако, партикуларно решење једначине (148) је

$$y=\frac{B\,e^{px}}{F_s(p)}\,.$$

Тај резултат можемо изразити у облику следеће теореме:

Теорема IV. *Ако је десна страна линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима нека експоненцијална функција* $B\,e^{px}$, *као у случају једначине* (148), *и ако је* $F_s(p)\neq 0$, *тада је*

$$y=\frac{B\,e^{px}}{F_s(p)} \qquad (150)$$

партикуларно решење.

Посматрајмо на пример једначину

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=6\,e^{-5x}\,. \qquad (151)$$

Ако претпоставимо да је неко решење облика

$$y=A\,e^{-5x}\,.$$

и ако га уврстимо у једначину (151), добивамо једначину

$$12\,A\,e^{-5x}=6\,e^{-5x}$$

која је тачна тада и само тада када је $A=\frac{1}{2}$. Лако је видети да је зато

$$y=\frac{1}{2}\,e^{-5x} \qquad (152)$$

заиста решење.

Као што Теорема IV и наговештава, постоји изузетан случај у ком ова замисао за добивање партикуларног решења не успева. Ако се деси да је p корен једначине $F_s(p)=0$, лева страна једначине (149) је једнака нули за сваку вредност A, те једначина не може бити задовољена. Наравно, то долази отуда што решење једначине (148) не постоји у претпостављеном облику ако је p корен једначине $F_s(p)=0$. Методу којом се може добити тачно решење чак и у овом изузетном случају извешћемо у § 63.

$$y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x} - \frac{7+9i}{130} e^{3ix}.$$

Из овог примера можемо извести неколико доста значајних закључака. Када се вратимо партикуларном решењу (155), на основи $e^{3ix} = \cos 3x + i \sin 3x$, закључујемо да се то партикуларно решење може написати у облику

$$y = \left(-\frac{7}{130}\cos 3x + \frac{9}{130}\sin 3x\right) +$$

$$+ i\left(-\frac{9}{130}\cos 3x - \frac{7}{130}\sin 3x\right). \qquad (156)$$

Међутим, пошто (154) задовољава све услове које смо поставили у Теореми III, следи да реални и имагинарни делови од (156) „припадају" одговарајућим деловима од e^{3ix}. Другим речима,

$$y = -\frac{7}{130}\cos 3x + \frac{9}{130}\sin 3x$$

је партикуларно решење диференцијалне једначине

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos 3x,$$

а

$$y = -\frac{9}{130}\cos 3x - \frac{7}{130}\sin 3x$$

је партикуларно решење диференцијалне једначине

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 3x.$$

Да бисмо добили *општа* решења, треба само овим партикуларним решењима додати $\alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}$, према Теореми II.

Најзад, можемо пажљиво расмотрити неке примере за изузетне случајеве на које се, у овој етапи његовог извођења, наша теорија не може применити.

На пример, ако бисмо место (151) имали једначину

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^{-2x}, \qquad (157)$$

решење комплементарне једначине било би још увек

$$y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x},$$

и још увек би било тачно да бисмо добили опште решење диференцијалне једначине (157) на тај начин што бисмо ово додали ма којем њеном партикуларном решењу. Али, кад покушамо да нађемо партикуларно решење методом којом је изведено (150) — наиме, претпостављајући да је то решење облика $y = A e^{-2x}$ и уврштавајући га у (157) — долазимо до једначине

$$A(4 - 6 + 2) = 6$$

или

$$0 \cdot A = 6,$$

из које је, наравно, немогућно наћи A. То долази отуда што једначина (157) нема таквог партикуларног решења. Уствари, тражено партикуларно решење је $y = -6xe^{-2x}$, као што се пробом лако може видети, те је зато опште решење

$$y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x} - 6xe^{-2x}.$$

Међутим, како смо извели ово партикуларно решење, засад мора остати необјашњено.

Најзад, ако место (151) напишемо једначину

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 6e^{-5x}, \qquad (158)$$

можемо одмах наћи партикуларно решење облика (150), то јест

$$y = \frac{3}{8} e^{-5x}.$$

Али, како су -1 и -1 корени помоћне једначине $p^2 + 2p + 1 = 0$, када применом обрасца (153) покушамо да нађемо опште решење комплементарне једначине, добићемо

$$y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-x} = (\alpha_1 + \alpha_2) e^{-x};$$

но како $\alpha_1 + \alpha_2$ није ништа општије од једне једине константе, то не може бити тражено опште решење. Место тога, као што се можемо пробом уверити, опште решење комплементарне једначине је облика $(\alpha_1 + \alpha_2 x) e^{-x}$, тако да је

$$y = (\alpha_1 + \alpha_2 x) e^{-x} + \frac{3}{8} e^{-5x}$$

опште решење диференцијалне једначине (158).

§ 56. Линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима. Тригонометриска решења

Посебан случај примене принципа декомпозиције на решавање диференцијалне једначине (154) може се корисно уопштити. Претпоставимо да треба решити једначину[1]

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) y = B \cos (px - \varepsilon)\,, \tag{159}$$

у којој су B и сви коефицијенти полинома F реални. Према принципу декомпозиције, решење једначине (159) је реалан део решења једначине

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) y = B\,[\cos (px - \varepsilon) + \mathrm{i} \sin (px - \varepsilon)\,]\,,$$

коју такође можемо написати у облику

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) y = B\, e^{-\mathrm{i}\varepsilon}\, e^{\,\mathrm{i}px}\,.$$

Пошто већ знамо како треба ову једначину решавати применом Теорема II, IV и V, сем за извесне изузетне случајеве, одмах можемо наћи решење једначине (159). Истовремено добићемо и решење једначине

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) y = B \sin (px - \varepsilon)\,; \tag{160}$$

али, наравно, ако не постоји неки разлог из ког би нам и то било потребно, ово ће бити бескористан нуз-резултат тога поступка.

Ма да је овај закључак непосредна дедукција из Теорема II, IV и V, у проучавању осцилаторних динамичких система он је од толико огромне важности да га можемо сматрати као шесту од наших важнијих теорема односно линеарних диференцијалних једначина.

Теорема VI. *Реалан део партикуларног решења линеарне диференцијалне једначине које припада експоненцијалној функцији* $B\,e^{\mathrm{i}(px-\varepsilon)}$ *јесте партикуларно решење које припада функцији* $B\cos(p\,x - \varepsilon)$, *а имагинаран део решења које припада тој експоненцијалној функцији, када се изостави* i, *јесте партикуларно решење које припада функцији* $B\sin(p\,x - \varepsilon)$.

Теорема VI даје нам најједноставнију познату методу решавања једначине (159); то јест, стварно је лакше да решавамо једначине (159) и (160) обе *заједно* него да решавамо одвојено ма коју од њих. Ова чињеница може на први поглед изгледати чудна, али се то у вишој математици много примењује, јер је често једноставније радити са комплексним количинама него са реалним. Специјално, многе одређене интеграле чије се вредности тешко налазе елементарним методама интегралног рачуна сасвим лако можемо израчунати кад искористимо извесне особине функција комплексних променљивих.

---

[1] Засад није потребно да стално на уму имамо ред једначине. Зато, место $F_s\left(\frac{d}{dx}\right)$ можемо писати $F\left(\frac{d}{dx}\right)$.

Битно је, међутим, да јасно схватимо откуд заправо долази у овом случају успех те методе, а због тога треба нарочито подвући две ствари. Прва је необична особина експоненцијалне функције e^{px}: кад над њом извршимо операције назначене са $F\left(\frac{d}{dx}\right)$, ове имају за резултат само производ из те функције и $F(p)$. Због те особине, партикуларно решење ма које линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима, које припада функцији тог облика, можемо наћи у облику (150) решавајући само једну алгебарску једначину. То је садржина Теореме IV. Друга је та да су косинус и синус реални и имагинарни делови комплексне експоненцијалне функције; према принципу декомпозиције, можемо на основи тога извести решење које припада или функцији синус или функцији косинус из оног решења које припада тој експоненцијалној функцији.

Разлог успеха малочас објашњене методе налази се баш у тој уској вези између тригонометриских и експоненцијалних функција, као и у томе што се за ову другу лако налазе решења.

На пример, посматрајмо једноставну једначину

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 3x\,, \tag{161}$$

где је

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx} + 2\,.$$

Како је $i \sin 3x$ имагинаран део од $e^{3\mathrm{i}x}$, решење једначине (161) можемо добити из решења једначине

$$\left(\frac{d}{dx} + 2\right) y = e^{3\mathrm{i}x}\,.$$

Решење је ове једначине

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^{3\mathrm{i}x}}{F\,(3i)} + \alpha\, e^{-2x} \\ &= \frac{e^{3\mathrm{i}x}}{3i + 2} + \alpha\, e^{-2x} \\ &= \frac{(2 - 3i)\, e^{3\mathrm{i}x}}{13} + (\alpha' + i\,\alpha'')\, e^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Зато, стављајући $e^{3ix} = \cos 3x + i \sin 3x$ и узимајући имагинаран део, налазимо да је решење једначине (161)

$$y = \frac{2 \sin 3x - 3 \cos 3x}{13} + \alpha'' e^{-2x}.$$

ЗАДАЦИ

1. Решити једначину (100).

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0\,.$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 12\,y = 7\frac{dy}{dx}\,.$

4. $\frac{d^2r}{d\Phi^2} - a^2\,r = 0\,.$

5. $\frac{d^4y}{dx^4} - a^4\,y = 0\,.$

6. $\frac{d^2v}{du^2} - 6\frac{dv}{du} + 13\,v = e^{-2u}\,.$

7. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} - y = \sin t\,.$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\,.$

9. $\frac{d^4x}{dt^4} + 16x = e^{it}\,.$

10 $5\frac{dx}{dt} + x = \sin 3t\,.$

11. $\frac{d^4x}{dt^4} - 6\frac{d^3x}{dt^3} + 11\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} = e^{-3t}\,.$

12. Позвати се на задатак 10, § 5, и објаснити како се могу применити методе које смо извели у овој Глави на једначине облика

$$a_s\,x^s\frac{d^sy}{dx^s} + a_{s-1}\,x^{s-1}\frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}} + \ldots\ldots + a_1x\frac{dy}{dx} + a_0\,y = f(x)\,.$$

13. Ако једначина у задатку 12 треба да буде потпуно аналогна једначини (148), каква врста функције мора бити $f(x)$?

14. $x^4\frac{d^4y}{dx^4} + x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 20x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 20\,x\frac{dy}{dx} = 17\,x^6\,.$

15. $t^4\frac{d^4x}{dt^4} - 2t^3\frac{d^3x}{dt^3} - 20t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 12t\frac{dx}{dt} + 16x = \cos(3\log t)\,.$

---

§ 57. Једначине електричног кола. „Прелазно“ и „устаљено“ стање у простим колима

Правила која смо изложили у § 17 за везу између струје и електромоторне силе у простим колима воде многим линеарним диференцијалним једначинама баш овог типа о коме је сада реч. У овом ћемо одељку даље протумачити принципе које смо досад изложили, а посебно даћемо стварно физичко значење за оба дела нашег решења — за партикуларно решење које припада функцији $f(x)$ и за опште решење које „припада нули“ — у чијем раздвајању, вероватно, има још увек нечег што изгледа нејасно.

У томе циљу, изабраћемо прво један врло једноставан пример. Претпоставимо да су на ред везани индуктивност величине 1 и отпор величине 2 и да су у тренутку $t = 0$ подвргнути дејству електромоторне силе облика $\sin 3t$. Тада, према правилима из § 17, налазимо да је

$$\frac{dI}{dt} + 2I = \sin 3t$$

диференцијална једначина која описује ток струје. Та је једначина идентична са једначином (161) за чије смо опште решење већ нашли да је

$$I = \frac{2\sin 3t - 3\cos 3t}{13} + \alpha'' e^{-2t}.$$

Потребна је још нека контурна вредност на основи које треба да одредимо α''. Њу одмах можемо наћи на следећи начин: све до тренутка $t = 0$ у колу није било струје; наиме, није било електромоторне силе, те зато није текла ни струја. Тако је вредност струје I била једнака нули све до *пред сам* тренутак $t = 0$. Када је почела да дејствује електромоторна сила, струја се или појачавала постепено почев од нуле, у ком је слачају контурни услов очигледан, или је, настао неки нагли скок у тренутку $t = 0$. Прва претпоставка је тачна. Јер, нагли скок значи коначну промену струје у тренутку $t = 0$, што је у физичком смислу еквивалентно бесконачној вредности од $\frac{dI}{dt}$, те зато и од $\frac{dI}{dt} + 2I$. Међутим, ово друго мора бити једнако електромоторној сили која је у тренутку $t = 0$ почела да дејствује и не може бити бесконачно. Одатле следи да не може постојати нагли скок струје I у тренутку $t = 0$.

Зато, α'' морамо тако одредити да I буде једнако нули када је $t = 0$, па на тај начин долазимо до траженог партикуларног решења

$$I = \frac{2\sin 3t - 3\cos 3t}{13} + \frac{3}{13}e^{-2t}. \tag{162}$$

Решење се састоји из два дела: партикуларног решења $\frac{2}{13}\sin 3t - \frac{3}{13}\cos 3t$ које припада електромоторној сили $\sin 3t$ а које не садржи произвољну константу, те је зато потпуно независно од контурних услова, и решења $\alpha'' e^{-2t}$ које „припада нули" и које садржи произвољну константу, за чије је одређивање потребна контурна вредност; ово би било истог *облика* ма каква била величина електромоторне силе, ма да би, наравно, партикуларна вредност константе α'' могла бити и друкчија од $\frac{3}{13}$, када бисмо променили електромоторну силу.[1] Језиком инжењера електротехнике, први се део зове члан „устаљеног стања" а други, члан „прелазног стања". Погледајмо зашто су подесна та имена.

Посматрајмо прво други члан десне стране у једначини (162), то јест члан „прелазног стања". Када t све више и више расте тај израз постаје све мањи и мањи док, најзад, више не буде од практичне важности. Зато, у сасвим реалном смислу, он претставља „прелазну струју" — струју која се појављује у тренутку $t = 0$, али ускоро опет нестаје.

С друге стране, први је члан збир синусне функције и косинусне функције, те зато претставља синусни талас који има исту периоду као и електромоторна сила, а амплитуду $1/\sqrt{13}$. Почев од $t = 0$, он постоји докле год дејствује електромоторна сила. Зато постоји само ова струја када је прелазна ишчезла, а услови постали „устаљени". Због тога се она зове струја „устаљеног стања"[2].

Погледајмо сада шта би се десило када бисмо искључили електромоторну силу после извесног времена њеног дејства. Нека се ово деси у тренутку $t_0 = 17\pi/6$. За електрично коло још увек важи исти диференцијалан израз $\frac{dI}{dt} + 2I$, као и раније; али, сад нам је потребно решење које „*припада само нули*", јер сад не долази више у обзир никаква електроморна сила. Наиме, струја мора задовољавати комплементарну једначину

$$\frac{dI}{dt} + 2I = 0$$

и одговарајући контурни услов. Када у једначину (162) уврстимо $t = 17\pi/6$, налазимо да у тренутку искључивања електромоторне силе струја има величину $\frac{2}{13}$; на основи истог доказа који смо раније поменули, она се

---

[1] На пример, ако бисмо место $\sin 3t$ имали електроморну силу $2 \sin 3t$, α'' било би $\frac{6}{13}$.

[2] Тај члан „устаљеног стања" важи само за партикуларно решење које припада електромоторној сили једноставног хармониског типа, или за суперпозицију решења која припадају неком броју таквих електромоторних сила када оне дејствују истовремено. Наиме, могли бисмо говорити о струји „устаљеног стања" која припада сили

$$E = \sin t + 3 \cos 2t + 6 \sin \frac{1}{\pi} (t - 2),$$

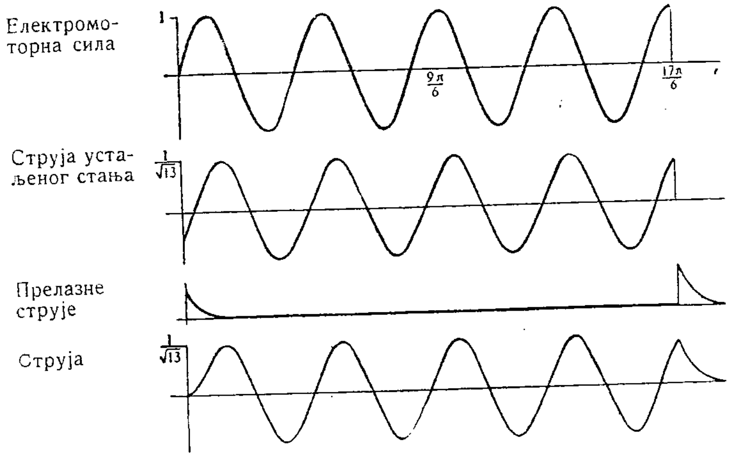
али не сили $E = t$.

не може нагло променити. Стога, од тог времена па даље, струја мора задовољавати диференцијалну једначину

$$\frac{dI}{dt} + 2I = 0,$$

као и контурну вредност $I = \frac{2}{13}$ када је $t = 17\pi/6$. Зато је њена једначина $I = \frac{2}{13} e^{\frac{17}{3}\pi - 2t}$. Током времена струја постаје све слабија и слабија, и најзад ишчезава: она је такође прелазни члан, а члан устаљеног стања не постоји. Прелазни чланови су, дакле, струје које могу постојати само када не дејствује никаква електромоторна сила.

И електромоторну силу коју смо узели у овом примеру и члан како устаљеног стања тако и прелазан и најзад потпуну струју, показали смо на сл 39.



Сл. 39. Прелазне струје и струје устаљеног стања

Као други пример, посматрајмо општи случај индуктивности, отпора и капацитета везаних на ред. На основи правила изложених у § 17, за тај случај добивамо диференцијалну једначину

$$L \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + \frac{x + x_0}{C} = E(t),$$

или,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t), \tag{163}$$

ако x сменимо са електричним товаром у кондензатору, који је $x + x_0 = q$.

Опште решење ове једначине састоји се такође из „струје устаљеног стања“ која припада електромоторној сили $E(t)$, и из „прелазне струје“ одређене контурним условима. Да бисмо одредили облик ове друге, треба само да нађемо корене помоћне једначине

$$L\,p^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0\,,$$

који су,

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\,, \\ p_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Тада је

$$q = \alpha_1\, e^{p_1 t} + \alpha_2\, e^{p_2 t}\,,$$

најопштије решење које „припада нули“ — наиме, најопштије q које би могло постојати када не дејствује електромоторна сила. Како је I први извод по t од x, те стога и од q, општи израз за *прелазну струју* је

$$I = \alpha_1\, p_1\, e^{p_1 t} + \alpha_2\, p_2\, e^{\,p_2 t}\,. \tag{165}$$

Погледајмо шта можемо сазнати из овог израза за прелазну струју. Почнимо са претпоставком да је $R^2C < 4L$, у ком су случају квадратни корени у изразима за p_1 и p_2 имагинарни. Тада сваки члан десне стране у једначини (165) садржи фактор $e^{-\frac{R}{2L}t}$ који током времена опада и најзад ишчезава. Преостали фактор можемо обележити са $\alpha_1\, p_1\, e^{i\bar{n}t} + \alpha_2\, p_2\, e^{-i\bar{n}t}$, где је $\bar{n}$ *реалан* број:

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,.$$

Но како је

$$e^{i\bar{n}t} = \cos \bar{n}\, t + i \sin \bar{n}\, t$$

и

$$e^{-i\bar{n}t} = \cos \bar{n}\, t - i \sin \bar{n}\, t\,,$$

тај фактор можемо написати у облику

$$(\alpha_1\, p_1 + \alpha_2\, p_2) \cos \bar{n}\, t + i\,(\alpha_1\, p_1 - \alpha_2\, p_2) \sin \bar{n}\, t\,.$$

По свом изгледу, тај се израз састоји из *реалног* члана функције косинус фреквенције $\bar{n}/2\pi$, и из *имагинарног* члана функције синус исте фреквенције. Но то само тако изгледа, јер су p_1 и p_2 комплексни бројеви, а могу бити комплексни бројеви и α_1 и α_2. Уствари, због произвољних констаната α_1 и α_2, коефицијенти $\alpha_1\, p_1 + \alpha_2\, p_2$ и $i\,(\alpha_1\, p_1 - \alpha_2\, p_2)$ су сасвим произвољнии и могли бисмо их подједнако обележити са две нове константе a и b. Ма у ком физичком проблему, a и b морали би неопходно бити реални, јер физичке количине нису никад комплексне, али у општем математичком смислу не морају бити реалне. У сваком случају, тај фактор можемо написати у облику

$$a \cos \bar{n}\, t + b \sin \bar{n}\, t\,.$$

Зато се читаво прелазно решење (165) састоји из неког синусоидалног члана фреквенције $\bar{n}/2\pi$, помноженог фактором $e^{-\frac{R}{2L}t}$ као амплитудом. Прелазна је струја, наиме, синусни талас стално опадајуће амплитуде, или, како се обично зове, „пригушени синусни талас“. Фреквенција $\bar{n}/2\pi$, којом осцилује, позната је као „сопствена фреквенција“ електричног кола, јер је то фреквенција којом електрично коло осцилује када се пусти да осцилује „само“, наиме, по престанку дејства неке електромоторне силе.

Све се ово заснива на претпоставци да је $R^2C < 4L$. Да бисмо видели какве промене настају када тај услов није испуњен, поучно је посматрати како се мења фреквенција $\pi/2\pi$ када R постаје све веће и веће. Како је

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,,$$

следи да $\bar{n}$ тада постаје све мање и мање, и према томе осциловање постаје све спорије и спорије док, када буде $R^2C = 4L$, сасвим не престане. Исту чињеницу можемо изложити и на тај начин ако кажемо да „повећавање отпора у електричном колу смањује његову сопствену фреквенцију“.

Ако R и даље повећавамо, квадратни корени на десним странама једначина (164) постају реални бројеви[1], тако да су и p_1 и p_1 реални и негативни, но различити. Под таквим условима, сваки је израз на десној страни једначине (165) нека експоненцијална функција са негативним изложиоцем која ишчезава током времена *без осциловања*, исто онако као што су ишчезавале и прелазне струје на сл. 39. Та се околност у општем случају описује на тај начин што се каже да је електрично коло „критички пригушено“. Повећавање отпора има наиме за последицу да једна прелазна компонента ишчезава све брже и брже, а друга све спорије и спорије.

Досад је наш доказ важио само за прелазну струју. Али, примена Теорема IV и VI на једначину (163) даје нам такође струју устаљеног стања која припада електромоторној сили врло важног типа $E = E_0 \cos nt$. Када функцију $E = E_0 \cos nt$ сменимо са[2]

---

[1] Када је R^2C тачно једнако $4L$, корени p_1 и p_2 су једнаки те је потребан други облик решења, као што смо већ рекли у § 55.

[2] Видети принцип декомпозиције § 54. — Прев.

$$E = E_0 \, e^{int}, \tag{166}$$

чији је она реалан део, једначина (163) постаје

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \, e^{int}.$$

Партикуларно решење ове једначине је

$$q = \frac{E_0 \, e^{int}}{R \, i \, n + \frac{1}{C} - L \, n^2}$$

или

$$I = \frac{E_0 \, e^{int}}{L \, i \, n + R + \frac{1}{C \, i \, n}}. \tag{167}$$

Када се реалан део ове количине дода десној страни једначине (165), добивамо најопштију струју која може да тече у електричном колу због дејства наизменичне електромоторне силе облика функције косинуса. Раздвајање тог реалног дела од имагинарног остављамо као вежбање за читаоца.

Већ смо напоменули да прелазна компонента током времена ишчезава. Зато, ако се електромоторна сила дуго одржава у дејству, у електричном колу се струја осетно своди на реалан део од (167). Стога је то струја „устаљеног стања“ коју ствара наизменична електромоторна сила $E_0 \cos nt$.

§ 58. Једначине електричног кола. Импеданца

Показаћемо у овом одељку уску везу између досад у овој Глави изложених појмова и неких општих појмова из електротехнике. За ово је, међутим, потребно најпре да укратко изложимо те физичке појмове.

На примерима које смо посматрали у § 57 видели смо да је, по ишчезавању прелазних чланова, струја била синусоидална када је синусоидална и електромоторна сила која је ствара. Заиста, као што одмах можемо видети из Теореме IV, то важи ма за коју врсту електричног кола које описује линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима. Но, ма коју такву синусоидалну електромоторну силу или синусоидалну струју, карактеришу три особине: фреквенција, амплитуда и фаза. Док се год стога интересујемо само за услове „устаљеног стања“, наше електрично коло можемо адекватно описати на тај начин што ћемо исказати у каквој вези стоје ове три карактеристике струје са одговарајућим карактеристикама електромоторне силе. Видећемо да све то лако можемо сазнати проучавањем једначина (147) до (150).

Међутим, када смо се коначно одлучили за електромагнетно тумачење, сменимо у тим једначинама y са I, x са t и $f(x)$ са $E(t)$, да бисмо

сликовитије указали на њихово физичко значење. Тада можемо казати: *ако је неко електрично коло такве природе да се његово понашање описује линеарном диференцијалном једначином*

$$F\left(\frac{d}{dt}\right) I = E(t),$$

и ако је електромоторна сила $E(t)$ *или реалан или имагинаран*[1] *део експоненцијалне функције*[2]

$$E(t) = B \, e^{int}, \tag{168}$$

тада реалан или имагинаран део партикуларног решења

$$I = \frac{B \, e^{int}}{F(i \, n)} \tag{169}$$

даје струју устаљеног стања, коју ствара та електромотарна сила.

Посматрајмо прво једначину (168) и нађимо у тој једначини факторе који одговарају изразима „фреквенција“, „амплитуда“ и „фаза“. За ово морамо на десној страни једначине (168) одвојити њен имагинаран део; при томе морамо обратити пажњу и на то да и само B може бити неки комплексан број. Напишимо га одмах у облику

$$B = E_0 \, e^{i\varepsilon},$$

који је као што ћемо на крају видети, најподеснији, тако да једначина (168) добива облик

$$E(t) = E_0 \, e^{i(nt + \varepsilon)},$$

где су E_0, n и ε сви реални[3]. Имагинаран се део у том облику лако раздваја и гласи

$$E(t) = E_0 \sin(nt + \varepsilon).$$

Но читалац добро зна да је амплитуда таквог осциловања E_0, да је његова фреквенција $n/2\pi$, и да је његова фаза ε. Стога одмах видимо:

a) Ако константу B, која у једначини (168) стоји као фактор уз комплексну експоненцијалну функцију, напишемо у облику $B = E_0 \, e^{i\varepsilon}$, осциловање дефинисано једначином (168) има амплитуду E_0;

---

[1] Сви технички појмови о којима је овде реч изведени су најпре посматрањем *синусних* функција. Због тога, овде ћемо говорити само о *имагинарним* деловима наших решења. Наравно, ако бисмо желели, могли бисмо наш доказ до краја изводити посматрањем косинусних функција; но, то би захтевало увођење негативног знака на једном месту где би ово изгледало као сасвим произвољно подешавање.

[2] Видети принцип декомпозиције, § 54. — Прев.

[3] Када би n био комплексан број, његов би имагинаран део одговарао неком изразу који ишчезава као што смо видели у § 57, те електромоторна сила не би била „устаљеног стања“.

b) оно има фазу ε;

c) њена је фреквенција $n/2\pi$.

Обратимо сада пажњу на једначину (169) и како $F(i\,n)$ такође може бити неки комплексан број, напишимо га у облику $F(i\,n) = Z_0 e^{i\varepsilon'}$. Тада имамо

$$I = \frac{E_0}{Z_0}\, e^{i\,(nt + \varepsilon - \varepsilon')} .$$

Видимо одмах:

a) Фреквенција струје је иста као и фреквенција електромоторне силе.

b) Њена је амплитуда пропорционална амплитуди електромоторне силе са фактором пропорционалности који је једнак реципрочној апсолутној вредности од $F(i\,n.)$

c) Њена је фаза $\varepsilon - \varepsilon'$, те се од фазе ε електромоторне силе разликује за угао ε', који се јавља када $F(i\,n)$ напишемо у облику $Z_0\, e^{i\varepsilon'}$.

Количник из електромоторне силе и струје коју она ствара (то јест E/I), у електротехници се зове *импеданца* електричног кола. То нам даје правило да је $F(i\,n)$ *импеданца електричног кола*.

У електротехници се обично употребљавају и друга два израза за које лако можемо наћи математичке изразе помоћу те исте функције $F(i\,n)$. До тих ћемо израза најлакше доћи када претпоставимо да се време мери почев од једног од оних тренутака када је фаза струје једнака нули. То значи да је $\varepsilon = \varepsilon'$, одакле следи да електромоторна сила и струја морају бити одређени изразима

$$\left.\begin{aligned} E &= E_0 \sin(nt + \varepsilon'), \\ I &= \frac{E_0}{Z_0} \sin nt. \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

Прву од ових једначина лако можемо написати у облику[1]

$$E = (E_0 \cos \varepsilon') \sin nt + (E_0 \sin \varepsilon') \cos nt . \tag{171}$$

Електромоторна сила јавља се у том облику као збир двају делова: првог дела који има амплитуду $E_0 \cos \varepsilon'$ и фазу која је једнака фази струје; и другог дела, који има амплитуду $E_0 \sin n\,\varepsilon'$, а који се у фази разликује за 90⁰. Слично као и у дефинисању импеданце, у електротехници је уобичајено да се „резистанцом"[2] електричног кола назива количник из $E_0 \cos \varepsilon'$ и струје I, а „реактанцом" количник из $E_0 \sin \varepsilon'$ и струје I. Када зато резистанцу обележимо са X, а реактанцу са Y, имамо, очигледно,

$$X = Z_0 \cos \varepsilon' ,$$

$$Y = Z_0 \sin \varepsilon' ,$$

$$X + i\,Y = Z_0\, e^{i\,\varepsilon'} = F(i\,n) .$$

Другим речима: *резистанца електричног кола је реалан део а реактанца имагинаран део од $F(in)$ са изостављеним i.*

Важна улога функције $F(in)$ у читавој овој теорији је очигледна: сама та функција је *импеданца* електричног кола; њен је угао *разлика у фазама* електромоторне силе и струје; њен је реалан део *резистанца* а имагинаран *реактанца* електричног кола. Другим речима, у тој се функцији садрже сва ова четири физичка фактора. Због тога инжењери електротехнике све више и више оперишу са *комплексном количином* $F(i\,n)$, место са разним реалним количинама у које се она може да разложи. На основи наших проучавања, лако је можемо дефинисати на следећи начин:

Импеданцу електричног кола, које описује линеарна диференцијална једначина

$$F\left(\frac{d}{dt}\right) I = E_0\, e^{int},$$

добивамо када са $i\,n$ заменимо $\frac{d}{dt}$ где се год оно налази у $F\left(\frac{d}{dt}\right)$; другим речима, она је одређена са $F(i\,n)$.

---

[1] Да смо радили са косинусним функцијама, одговарајуће би разлагање имало пред другим чланом *негативан* знак. Тада бисмо били приморани да Y (у даљем излагању) дефинишемо *негативном* вредношћу извесног разломка. Разлог је овоме што други члан у (171) *заостаје* за 90⁰ за првим чланом који је у фази; наиме, ако би се у првом члану налазио косинус а у другом синус, други би предњачио првом. Како смо дефиницију реактанце дали на основи електромоторне силе која заостаје иза струје коју ствара, било би потребно увођење негативног знака да се поправи тај недостатак.

[2] Или отпор. — Прев.

ЗАДАЦИ

1. Наћи опште решење једначине електричног кола за отпор и капацитет везаних на ред. Продискутовати сопствене фреквенције.

2. Наћи опште решење једначине електричног кола само за индуктивност везану на ред са генератором периодичне електромоторне силе. Колика је сопствена фреквенција? Дискутовати типове струја које би текле по престанку дејства било које електромоторне силе.

3. Наћи опште решење једначине електричног кола за индуктивност и капацитет везаних на ред са генератором периодичне електромоторне силе. Колика је сопствена фреквенција? Који тип струје би текао по престанку дејства електромоторне силе и колико дуго?

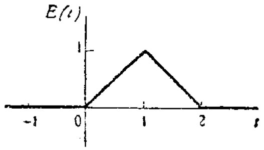
4. Претпоставити у задатку 3 да у тренутку $t = 0$ у електричном колу нема струје, и да је у том тренутку почела да дејствује електромоторна сила. Наиме, и I и $\frac{dI}{dt}$ једнаки су нули када је $t = 0$. Која ће врста струје тећи? Када настаје устаљено стање?

5. *Резонантним* фреквенцијама електричног кола зову се фреквенције за које је апсолутна вредност импеданце $|Z|$ минимална. То су стварне физичке фреквенције за које ће дата сила стварати струју устаљеног стања јачу него ма за коју другу фреквенцију. Наћи резонантне фреквенције за опште електрично коло о ком смо дискутовали у § 57. Да ли су оне исте као и сопствене фреквенције?

6. Ако неко отворено електрично просто коло, које се састоји из напуњеног кондензатора, индуктивности и отпора, — спојимо са неким осцилографом и тада затворимо па узмемо осцилограм, хоће ли фреквенција осциловања бити сопствена фреквенција или резонантна фреквевција? Како бисте поступили да другу нађете експерименталним путем?

7. У тренутку $t=0$ почела је да дејствује константна електромоторна сила у општем електричном колу из § 57. Наћи струју под претпоставком да је до тог тренутка електрично коло мировало.

(Упутство: константу E_0 можемо написати у облику $E_0\, e^{0.t}$.



8. Електромоторна сила $E(t)$ на десној страни наше диференцијалне једначине не мора бити таква да је можемо изразити неким једноставним алгебарским изразом. Могли бисмо је, на пример, претставити са две праве које показује сл. 40. Наћи струју која би текла кроз отпор и индуктивност везаних на ред ако би електромоторна сила била таквог облика.

9. Све диференцијалне једначине које смо употребили у § 57, биле су такве природе да су сви експоненцијални фактори у прелазним решењима били негативних изложилаца: решења су наиме била увек пре облика $e^{-kt}\cos \bar{n}t$ него облика $e^{+kt}\cos \bar{n}t$. То је било физички сасвим оправдано, јер из стабилних динамичких система никад не произилази тај други тип решења. Претпоставимо ипак да за неко електрично коло важи диференцијална једначина

$$\frac{dI}{dt} - I = E(t).$$

Продискутовати струју коју би стварала електромоторна сила $E \sin t$ која би почела да дејствује у тренутку $t = 0$.

§ 59. Методе решавања операторима. Разлагање оператора у факторе

У математици постоје не само ознаке за количине већ тако исто и ознаке за рачунске радње. Тако су 2, 3, x, n бројеви или неке количине, док су $+, -, \frac{d}{dx}, \int \cdots dx$, очигледно, ознаке за рачунске радње или *оператори*1).

---

1) Њих можемо разликовати једне од других по једноставном правилу да ознаке за количине, — као и именице, — кад стоје саме, имају одређено значење; док се значење оператора мора да употпуни неком количином која стоји уз њега, исто онако као што прелазан глагол захтева објекат. Тако 2 или x претстављају потпуне појмове исто као што потпуне појмове претстављају „кућа“ и „мајмун“; док $\div$ или $\frac{d}{dx}$ не претстављају ништа све док им се не придодају ознаке за количине у неком од таквих облика као што су $x + 2$ или $\frac{dy}{dx}$, исто онако као што „правити“ не значи ништа док „правити галаму“ значи.

Методе решавања у којима се врше трансформисања ознака за рачунске операције из једног облика у други, познате су у математици као *методе решавања операторима*. Методе решавања помоћу оператора су наиме оне у којима се рачунске радње изводе пре са операторима него са количинама.

Оператор од основне важности у проучавању диференцијалних једначина је $\frac{d}{dx}$, који ћемо означити са p када желимо да посебну пажњу обратимо на његов операторски карактер1). Како он означава диференцирање по независно промењивој, то бисмо, наравно, два таква узастопна диференцирања назначили са pp или p^2. Стога бисмо у операторском обележавању други извод $\frac{d^2y}{dx^2}$ писали p^2y, трећи извод p^3y, итд. Исто тако, ма коју линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима писали бисмо

$$F(p)\, y = f(x)\,. \tag{172}$$

Та једначина значи сасвим исто што и једначина (147); *p је само скраћена ознака за* $\frac{d}{dx}$. Но, она веома личи на *алгебарску* једначину (149) у којој је p само неки број. Јасно говорећи, суштина методе решавања операторима је та да са том једначином поступамо као да је p неки број; али, наравно, само утолико уколико је могућно доказати да тај поступак води тачним одговорима.

Како бисмо сада решавали по y једначину (172) када бисмо p *сматрали* као неки број? Једноставно бисмо једначину поделили са $F(p)$ и тако добили

$$y = \frac{f(x)}{F(p)}\,. \tag{173}$$

То се решење по аналогији зове „операторско решење“ једначине (172). Ознака $\frac{1}{F(p)}$ зове се „инверзија“ оператора $F(p)$ и често се пише у облику $F^{-1}(p)$. То је нека врста уопштеног знака за интеграцију и назначује обављање свих поступака потребних да се реши једначина (172).

На пример, за најједноставнији могућни случај када је $F(p) = p$, једначина (172) је

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,,$$

па једначину (173) можемо написати или у облику

---

1) У чистој се математици више употребљава ознака D.

$$y = \frac{f(x)}{p}, \qquad (174)$$

или у облику

$$y = \int f(x)\,dx\,. \qquad (175)$$

И једно и друго значи *сасвим исто*. С једне тачке гледишта је сваки од ових облика наређење да се интегрише функција $f(x)$, а било једно било друго наређење је излишно ако га не можемо извршити. Но, у случају обичне ознаке за интеграл је уобичајено да се о том наређењу мисли као да је већ и извршено и да се о (172) говори као *резултату* интеграције, па било да се он може израчунати или не. Очигледно је да исто тако можемо сматрати и (174), јер то је само другом врстом ознаке написано (175). Ако на исти начин поступимо и са мање познатим обликом (173), долазимо до закључка да је $\frac{f(x)}{F(p)}$ решење једначине (172) јер смо решењем једначине (172) назвали $\frac{f(x)}{F(p)}$.[1]

Можда ће један пример разјаснити шта се мисли тиме да каже. Једначину

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{1}{x},$$

можемо написати у облику

$$(p-1)\,y = \frac{1}{x}\,.$$

Слично, њено решење можемо изразити или у уобичајеном облику

$$y = \alpha\,e^x + e^x \int \frac{1}{x}\,e^{-x}\,dx\,, \qquad (176)$$

или у операторском облику

$$y = \frac{1}{p-1}\,\frac{1}{x}\,. \qquad (177)$$

Ниједан од ових облика решења не може се изразити помоћу коначног броја елементарних функција, јер $\frac{e^{-x}}{x}$ нема елементарног интеграла; чист је софизам назвати (176) „решењем диференцијалне једначине“ *ако не* постоји могућност да на неки начин добијемо нумерички одговор; и *није* чист софизам назвати (177) „решењем“ *ако* постоји неки начин

---

[1] То је такође необично слично тврђењу да је $x = \log_{10} y$ решење једначине $y = 10^x$. Да ли је једно или друго од тога двога апсурдно, у потпуности зависи од тога шта можемо учинити таквим паралогизмом.

да га израчунамо. Ова тврђења не погађа ни чињеница да је први начин обележавања уобичајен а други није. Нађемо ли једном начин да се њиме користимо, имамо исто толико права да решењем називамо први облик колико и други. Следећих неколико одељака посветићемо налажењу баш таквих метода тумачења и примењивања операторских решења. Наравно, под методама израчунавања операторских решења подразумевамо *правилне* методе, које дају тачне одговоре; јер, методе које би водиле нетачним одговорима, или би *каткада* водиле нетачним одговорима, биле би горе него када уопште не би било никаквих метода, сем ако не бисмо знали за њихова ограничења. Тако ћемо морати извесно време посветити томе да се уверимо како оно што радимо не само да је вероватно већ и правилно.

Почећемо са доказом следеће теореме:

Теорема VII. *У линеарним диференцијалним једначинама са константним коефицијентима, за оператор p важе обични алгебарски закони сабирања, одузимања и множења.*

Доказ да важе прва два закона, готово је очигледан: јер, израз

$$\alpha\,\frac{dy}{dx} + \beta\,\frac{dy}{dx} = (\alpha + \beta)\,\frac{dy}{dx}\,,$$

у операторском облику постаје

$$(\alpha\,p + \beta\,p)\,y = (\alpha + \beta)\,p\,y\,,$$

што доказује да важи асоцијативни закон за први извод, а слично се показује да он важи и за изводе вишег реда.

Доказ да за оператор p важи закон множења само је нешто сложенији. Ако ставимо

$$u = \alpha\,\frac{dy}{dx} + \beta\,y\,,$$

директно диференцирање показује да је

$$\gamma\,\frac{du}{dx} + \vartheta\,u = \gamma\,\alpha\,\frac{d^2y}{dx^2} + (\gamma\,\beta + \vartheta\,\alpha)\,\frac{dy}{dx} + \vartheta\,\beta\,y\,.$$

У операторском облику први израз постаје

$$u = (\alpha\,p + \beta)\,y\,,$$

а други

$$(\gamma\,p + \vartheta)\,u = [\gamma\,\alpha\,p^2 + (\gamma\,\beta + \vartheta\,\alpha)\,p + \vartheta\,\beta]\,y\,.$$

Када вредност за u из првог уврстимо у други израз, добивамо

$$(\gamma\,p + \vartheta)\;(\alpha\,p + \beta)\;y = [\gamma\,\alpha\,p^2 + (\gamma\,\beta + \vartheta\,\alpha)\;p + \vartheta\,\beta]\,y\,,$$

па када на левој страни операторе помножимо алгебарски, видећемо да они дају десну страну. То је тражени „доказ“, јер он показује да је правилно оно што добивамо кад са факторима — операторима поступамо алгебарски. Наравно, он важи само за *линеарне* факторе, и то само за *два* фактора; али проширење на производ неког полинома ма ког степена и линеарног фактора, а затим и на два полинома, само је ствар праксе. Посебно, ако се измноже s линеарних оператора, добиће се као резултат неки полином-оператор s-тог реда.

Међутим, још је важније то што се тај процес може изводити и обрнуто, и неки полином оператор s-тог реда разложити у производ из s линеарних фактора. Јер, претпостазимо да смо полином оператор

$$F_s(p) = a_s p^s + a_{s-1} p^{s-1} + \ldots\ldots + a_1 p + a_0$$

разложили у производ фактора[1]

$$a_s (p - p_1)(p - p_2) \ldots\ldots (p - p_s), \tag{178}$$

као да је алгебарски полином. Познато је да ове линеарне факторе смемо директно да множимо, а како у том процесу, за који смо доказали да је правилан, настаје $F_s(p)$, (178) мора бити еквивалентно са $F_s(p)$ како у операторском тако и у алгебарском смислу. Тако добивамо следећу теорему:

Теорема VIII. *Линеарни диференцијални оператор s-тог реда са константним коефицијентима може се заменити са s линеарних диференцијалних оператора првог реда, исто онако као кад би то био алгебарски израз.*

На пример, оператор $p^2 + 1$, можемо разложити у производ $(p + i)(p - i)$; зато бисмо добили исти резултат када бисмо некој функцији додали њен други извод или када бисмо прво формирали количину $\frac{dy}{dx} - iy$, помножили је са i, па је затим додали изводу те исте количине. Читаоцу ће ово бити унеколико јасније ако буде ове радње заиста извео за неколико функција, као што су $y = x^2$, $y = \sin nx$, и томе слично.

У вези са тим процесом разлагања у факторе напоменућемо још и то да није битан ред писања линеарних фактора. То следи непосредно из чињенице што се показало да је (178) задовољавајући операторски облик за $F_s(p)$ увек када су његови фактори задовољавајући у алгебарском смислу, а знамо да у алгебарском смислу ред писања фактора није битан. Другим речима, доказали смо да важи и комутативни закон за множење.

---

[1] Треба бити начисто с тим да $p_1, p_2, \ldots, p_s$ нису оператори. То су бројеви реални или комплексни, који се налазе као корени од $F_s(p) = 0$. Само p *без индекса* претставља $\frac{d}{dx}$.

§ 60. Методе решавања операторима. Примена разлагања у факторе на решавање линеарних диференцијалних једначина

Да би се разумело како треба примењивати разлагање у факторе, посматрајмо диференцијалну једначину

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y = e^x, \tag{179}$$

или

$$(p^2 + 1)\, y = e^x .$$

Претпоставимо да смо је написали у облику

$$(p + i)\,(p - i)\; y = e^x,$$

и уведимо ознаку y_1 за количину $(p - i)\, y$. Тада једначина (179) постаје

$$(p + i)\, y_1 = e^x,$$

или, са ознаком извода,

$$\frac{dy_1}{dx} + i\, y_1 = e^x.$$

То је линеарна једначина чије је решење

$$y_1 = \alpha\, e^{-ix} + \frac{e^x}{1+i}.$$

Али је по дефиницији

$$(p - i)\, y = y_1 ,$$

или, са ознаком извода,

$$\frac{d y}{d x} - i\, y = \alpha\, e^{-ix} + \frac{e^x}{1+i}.$$

То је опет линеарна једначина чије је решење

$$y = \beta\, e^{ix} - \frac{\alpha}{2\, i}\, e^{-ix} + \frac{e^x}{2}.$$

На тај начин је једначина (179) потпуно решена. Исти резултат могли бисмо извести методом § 55.

Уопште, (172) можемо написати у облику

$$\alpha_s (p - p_1)\; (p - p_2) \ldots\ldots (p - p_s)\, y = f(x) \tag{180}$$

и увести следеће дефиниције

$$(p - p_s)\, y = y_s\,,$$

$$(p - p_{s-1})\;\; y_s = y_{s-1}\,,$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$(p - p_2)\, y_3 = y_2\,.$$

Тада (180) постаје

$$a_s\, (p - p_1)\, y_2 = f\,(x)\,.$$

Са ознаком извода, свака је од ових једначина линеарна једначина. Посебно, последња једначина је

$$\frac{dy_2}{dx} - p_1\, y_2 = \frac{f\,(x)}{a_s}$$

са општим решењем

$$y_2 = e^{p_1 x}\left(\alpha_1 + \frac{1}{a_s}\int e^{-p_1 x} f\,(x)\, dx\right). \tag{181}$$

Једначина која се налази непосредно испред ове је

$$\frac{dy_3}{dx} - p_2\, y_3 = y_2\,,$$

па зато

$$y_3 = e^{p_2 x}\left(\alpha_2 + \int e^{-p_2 x}\, y_2\, dx\right).$$

Но, како y_2 већ знамо из (181), ово можемо поново написати у облику

$$y_3 = e^{p_2 x}\left(\alpha_2 + \int e^{(p_1 - p_2)\, x}\left(\alpha_1 + \frac{1}{a_s}\int e^{-p_1 x} f(x) dx\right) dx\right).$$

Продужујући овај поступак, y ћемо коначно наћи у облику

$$y = e^{p_s x}\left(\alpha_s + \int e^{-p_s x}\, y_s\, dx\right) =$$

$$= e^{p_s x}\left(\alpha_s + \int e^{(p_{s-1} - p_s)\, x}\left(\alpha_{s-1} + \ldots\ldots \left(\alpha_1 + \frac{1}{a_s}\int e^{-p_1 x} f(x) dx\right) \ldots\right) d\, x\right). \tag{182}$$

Тако смо нашли нову методу решавања линеарних диференцијалних једначина. Шта више, њу можемо применити на тражење решења које припада ма којој функцији f(x), а не само на тражење оних решења која припадају експоненцијалним функцијама, као што је био случај у § 55. Једини је захтев да се назначена интегрисања могу извршити до краја.

Као пример за решење које не бисмо могли добити методама изложеним у §§ 55 и 56, посматрајмо једначину

$$\frac{d^2 y}{d\, x^2} + 3\,\frac{d\, y}{d\, x} + 2y = x^2\,. \tag{183}$$

Ту једначину можемо написати у облику

$$(p + 2)\;\; (p + 1)\, y = x^2\,. \tag{184}$$

Кад ставимо $(p + 1)\, y = y_2$, (184) постаје $(p + 2)\, y_2 = x^2$, одакле видимо да је, са ознаком извода, једначина (184) еквивалентна двема једначинама првог реда

$$\frac{d\, y_2}{dx} + 2y_2 = x^2,$$

$$\frac{d\, y}{d\, x} + y = y_2\,.$$

Решења ових једначина су редом:

$$y_2 = \alpha_1\, e^{-2\, x} + e^{-2x}\int x^2\, e^{2\, x}\, dx$$

и

$$y = \alpha_2\, e^{-x} + e^{-x}\int y_2\, e^{x}\, dx$$

$$= \alpha_2\, e^{-x} - \alpha_1\, e^{-2x} + e^{-x}\int e^{-x}\int x^2\, e^{2x}\, dx\, dx\,.$$

Назначена интегрисања у овим решењима лако је извести до краја.

Лако се може показати да су свих s произвољних константата α несависне. Зато (182) *можемо сматрати као образац који претставља опште решење ма које линеарне једначине са константним коефицијентима.* Ако га разложимо у два дела — један који садржи све чланове у којима се јављају константе α, и други

$$\frac{1}{a_s}\, e^{p_s x}\int e^{(p_{s-1} - p_s)x}\int \ldots\ldots \int e^{(p_1 - p_2)x}\int e^{-p_1 x} f\,(x)\,(dx)^s\,, \tag{185}$$

у ком нема константата α, — одмах видимо да (185) мора бити партикуларно решење на које се мислило у Теореми II, а да преостали чланови морају сачињавати опште решење комплементарне једначине. Засад је важно ово друго; јер, наши садашњи резултати уопште не захтевају да сви корени p_j буду различити, као што је то био случај са резултатима које смо изложили у Теореми V. Могли бисмо их зато искористити да употпунимо Теорему V и наше решење „које припада нули“ нађемо чак кад се јављају и вишеструки корени Но, ову етапу доказа оставићемо за § 62.

Не треба, дакле, заборавити да оба обрасца (182) и (185) важе било да су p_j различити било да нису различити. Први образац даје *опште* решење а други даје *партикуларно* решење једначине (172). Међутим, ако се деси да су p_j различити, можемо нашем *партикуларном* решењу (185) додати изразе које захтева Теорема V и на тај начин доћи до општег решења које је каткад по изгледу једноставније од (182). То је решење

$$y = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j\, e^{p_j x} + \frac{e^{p_s x}}{a_s} \int e^{(p_{s-1} - p_s)x} \int \ldots \int e^{-p_1 x} f(x)\,(dx)^s . \qquad (186)$$

Једина је битна разлика међу једначинама (182) и (186) та што друга важи *само ако су сви корени* p_j *различити*, док прва важи увек.

§ 61. Методе решавања операторима. Примена парцијалних разломака на решавање линеарних диференцијалних једначина

Као што је био случај са разлагањем у факторе у § 60, постоје тако исто и друге алгебарске трансформације оператора $F_s(p)$ које воде решењима линеарних диференцијалних једначина. Можемо, на пример, $\frac{1}{F_s(p)}$ разложити на парцијалне разломке. Наиме, решење у облику оператора

$$y = \frac{1}{F_s(p)}\, f(x) \qquad (173)$$

можемо заправо написати у облику[1]

$$y = \left(\frac{c_1}{p - p_1} + \frac{c_2}{p - p_2} + \ldots + \frac{c_s}{p - p_s} \right) f(x) ,$$

или

$$y = \sum_{j=1}^{s} \frac{c_j}{p - p_j}\, f(x) . \qquad (187)$$

Наравно, ако такво разлагање важи *уопште*, оно мора важити и у *најједноставнијем* случају, то јест у случају када је $F_s(p)$ првог степена. Али, тада у разлагању на парцијалне разломке постоји само *један* члан, наиме

$$y_j = \frac{c_j}{p - p_j}\, f(x) . \qquad (188)$$

То одговара диференцијалној једначини

---

[1] Узимамо у овом одељку да једначина $F_s(p) = 0$ нема вишеструких корена. За тај случај, видети § 62.

$$\frac{dy_j}{dx} - p_j\, y_j = c_j\, f(x) , \qquad (189)$$

а њено је решење

$$y_j = e^{p_j x} \left(\alpha_j + c_j \int e^{-p_j x} f(x)\, dx \right) . \qquad (190)$$

Зато, ако (187) треба да има тачно тумачење уопште, сваки се члан мора заменити неким изразом облика (190).

Претпоставимо, дакле, да је y збир од s чланова од којих је сваки облика (190), па уврстимо тај збир

$$y = \sum_{j=1}^{s} y_j \qquad (191)$$

у леву страну једначине (172). Ако је (191) решење, требало би да резултат замене буде једнак функцији $f(x)$. Наравно, при томе уствари добивамо

$$\sum_{j=1}^{s} F_s(p)\, y_j , \qquad (192)$$

па је стога пред нама проблем да покажемо да је ово заиста једнако функцији $f(x)$.

На основи онога што већ знамо о методама решавања операторима, то није тешко показати. Јер, пре свега, у сваком члану од (192), $F_s(p)$ можемо разложити у факторе и те факторе написати ма којим редом (Теорема VIII). Специјално, фактор $p - p_1$ можемо написати напослетку (наиме, уз y_1) у првом члану; фактор $p - p_2$ можемо написати напослетку у другом члану (тако да се налази уз y_2), и тако даље. Претпоставимо да смо то извршили и да смо изразе

$$(p - p_1)\, y_1 , \quad (p - p_2)\, y_2 , \quad \ldots ,$$

заменили количинама

$$c_1 f(x) , \quad c_2 f(x) , \quad \ldots ,$$

јер су ти изрази, према (188), једнаки овим количинама. Тада (192) постаје

$$\begin{aligned} [\, c_1 a_s (p - p_2)\, (p - p_3) \;\; \ldots \;\; & (p - p_s) + \\ + c_2 a_s (p - p_1)\, (p - p_3) \;\; \ldots \;\; & (p - p_s) + \\ + \;\; \ldots \qquad \ldots \qquad & \ldots + . \\ + c_s a_s (p - p_1)\, (p - p_2) \;\; \ldots \;\; & (p - p_{s-1})]\, f(x) \end{aligned} \qquad (193)$$

То је резултат који стварно добивамо уврштавањем (191) у (172). Ако можемо показати да је он једнак функцији $f(x)$, следиће да је (191) заиста решење. Но, познато је да смемо чланове у заградама комбиновати исто онако као када би они били алгебарски, па је стога довољно показати да се тај израз у загради своди на јединицу када с њим поступамо као са неким алгебарским полиномом.

Да бисмо показали да се он своди на јединицу, вратимо се на (187) где смо претпоставили да је $\dfrac{1}{F_s(p)}$ разложено на парцијалне разломке. Тада смо претпоставили да је

$$\frac{1}{F_s(p)}=\frac{c_1}{p-p_1}+\frac{c_2}{p-p_2}+\quad . \; . \; . \quad +\frac{c_s}{p-p_s} \tag{194}$$

празa *алгебарска* једначина. Помножимо обе стране те једначине са одговарајућим странама једначине

$$F_s(p)=a_s\,(p-p_1)\;(p-p_2)\quad . \; . \; . \quad (p-p_s)\,.$$

Очигледно, на левој страни резултат ће бити један, а десна страна постаје израз који се налази у средњој загради од (193). Следи да *разлагањем* $\dfrac{1}{F_s(p)}$ *на парцијалне разломке заиста долазимо до решења једначине (172), под условом да сваки члан облика* $\dfrac{c_j}{p-p_j}$ *заменимо са* y_j *које је дато са (190). Шта више, то је опште решење једначине (172) јер оно садржи s независних констаната.*

Опште решење до ког долазимо овим поступком можемо тада лако написати у облику

$$y=\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\,e^{p_j x}+\sum_{j=1}^{s}c_j\,e^{p_j x}\int e^{-p_j x}\,f(x)\,dx\,. \tag{195}$$

Као и (186), ово захтева s посебних интеграција; али, за разлику од (180), то нису „узастопни интеграли“. Но, у оба случаја, морају бити пре свега познати корени p_j.

Примена ове теорије на поједине проблеме је у општем случају много једноставнија него што је то био случај са њеним објашњавањем. Посматрајмо, на пример, диференцијалну једначину

$$(p+2)\;(p+1)\,y=x^2, \tag{184}$$

коју смо већ решили у § 60. Овде је

$$F_2(p)=(p+2)\;(p+1)$$

и зато

$$\frac{1}{F_2(p)}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}\,.$$

Када саберемо решења једначина

$$(p+1)\,y_1=x^2$$

и

$$(p+2)\,y_2=-x^2,$$

одмах налазимо опште решење у облику

$$y=\alpha_1\,e^{-x}+\alpha_2\,e^{-2x}+e^{x}\int e^{x}\,x^2\,dx-e^{-2x}\int e^{2x}\,x^2\,dx\,. \tag{196}$$

Када израчунамо интеграле, долазимо до истог резултата као и раније.

Као коначан резултат извођења у §§ 60 и 61, можемо поставити следећу теорему:

Теорема IX. *Када линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима напишемо у облику оператора* $F_s(p)\,y=f(x)$, *тада смемо оператор* $F_s(p)$ *разлагати у факторе, или формално решење* $y=\dfrac{f(x)}{F_s(p)}$ *разлагати на парцијалне разломке, под условом да се сваки тако добивени парцијални разломак тумачи као решење линеарне диференцијалне једначине којој тај разломак одговара.*

Наравно, засад смо показали да та теорема важи само ако су сви корени p_j различити, али ћемо ово ограничење уклонити у § 62.

ЗАДАЦИ

1. Довршити израчунавање решења једначине (183), која смо нашли у §§ 60 и 61. Јесу ли она идентична?

2. Израчунати вредности израза написаних у облику оператора:

$$a)\quad y=\frac{x}{p-a}\,.$$

$$b)\quad y=\frac{x^n}{p-a}\,.$$

$$c)\quad y=\frac{\sin nx}{p-a}\,.$$

$$d)\quad y=\frac{e^{nx}}{p-a}\,.$$

3. Решити задатке 6 и 7 из § 56 помоћу обрасца (196) Добивате ли иста решења као и раније?

4. Решити исте задатке помоћу обрасца (195). Коју методу претпостављате да ли ону чији је резултат (186) или ону чији је резултат (195)?

5. Решити задатак 7, § 58, методама изложеним у §§ 60 и 61.

6. Видели смо да у електричном колу у задатку 5, прелазна струја ишчезава. Зато сваки прелазни члан који треба да задовољи контурне услове за $t=-\infty$, мора бити једнак нули за свако коначно t. Али, ако сматрамо да је $f(t)$ у нашем проблему стално дефинисано двема једначинама

$$f(t)=0\,,\ t<0\,,$$

$$f(t)=E_0\,,\ t>0\,,$$

физички услови требаће да буду задовољени само за $t = -\infty$. Зато би требало да тачан одговор на наш задатак буде дат партикуларним решењем или из (186) или из (195).

Нађите решење за тај случај и покушајте да проверите резултат задатка 5.

7. Решити задатак 8, § 58, помоћу образаца (186) и (195), под претпоставком да је функција $f(x)$ дефинисана са четири услова

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & x &< 0, \\ f(x) &= x, & 0 < x &< 1, \\ f(x) &= 2-x, & 1 < x &< 2, \\ f(x) &= 0, & x &> 2. \end{aligned}$$

8. Паралелно основним доказима овог поглавља, развити „Теорију решавања операторима Кошијеве линеарне диференцијалне једначине“.

§ 62. Вишеструки корени

И у постављању Теореме V и у извођењу Теореме IX претпоставили смо да су сви корени једначине $F_s(p) = 0$ различити. Стварно, Теорема V важи само ако је испуњен тај услов; али, као што ћемо сада видети, Теорема IX важи заиста ма за који случај.

Претпоставимо на пример да су три корена једнака и обележимо их све са p_1. Као што је добро познато, требало би тада разлагање на парцијалне разломке (187) заменити са

$$y = \frac{f(x)}{F_s(p)} = \left(\frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{(p-p_1)^2} + \frac{c_3}{(p-p_1)^3} + \ldots \right) f(x), \tag{197}$$

где су чланови, које нисмо написали и који одговарају коренима $p_4, p_5, \ldots$, истог облика као и раније. Има разлога претпоставци да би прва три члана требала да претстављају решења једначина

$$\left. \begin{aligned} (p-p_1)\, y_1 &= c_1 f(x), \\ (p-p_1)^2\, y_2 &= c_2 f(x), \\ (p-p_1)^3\, y_3 &= c_3 f(x), \end{aligned} \right\} \tag{198}$$

то јест

$$\frac{dy_1}{dx} - p_1 y_1 = c_1 f(x),$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} - 2p_1 \frac{dy_2}{dx} + p_1^2 y_2 = c_2 f(x),$$

$$\frac{d^3y_3}{dx^3} - 3p_1 \frac{d^2y_3}{dx^2} + 3p_1 \frac{dy_3}{dx} - p_1^3 y_3 = c_3 f(x),$$

што се стварно може проверити истим доказом који смо применили у § 61. Јер, када уврстимо збир тих решења у једначину (172), добивамо

$$F(p)\, y = F(p)\, y_1 + F(p)\, y_2 + F(p)\, y_3 + \cdots\cdots$$

те ће једначина (172) бити задовољена ако је збир десне стране ове једначине једнак функцији $f(x)$. Међутим, када $F(p)$ разложимо у факторе и узмемо у обзир везе (198) које y_1, y_2 и y_3 задовољавају по дефиницији, добивамо

$$\begin{aligned} F(p)y = [a_s c_1 (p-p_1)^2 (p-p_4)(p-p_5) \cdots\cdots (p-p_s) + \\ + a_s c_2 (p-p_1)(p-p_4)(p-p_5) \cdots\cdots (p-p_s) + \\ + a_s c_3 (p-p_4)(p-p_5) \cdots (p-p_s) + \cdots\cdots] f(x). \end{aligned}$$

Стога ово мора бити заиста *диференцијалан* однос. Шта више, и израз на који се своди тај однос после алгебарског комбиновања чланова у средњој загради, према Теореми VII, заиста је диференцијалан израз. Али, кад једначину (197), која је по дефиницији права *алгебарска* једначина, помножимо са $F(p)$, налазимо да се тај израз у загради своди на јединицу. Другим речима, $F\left(\frac{d}{dx}\right) y$ је заиста једнако функцији $f(x)$. Следи, дакле, да важи још увек Теорема IX, чак и у случају вишеструких корена.

Што се тиче израчунавања израза (198), оно се може најлакше извести помоћу образаца (182), за које знамо да важе *без обзира на то да ли су корени p_1 једнаки или нису*. Одатле одмах имамо:

$$y_1 = \alpha_1 e^{p_1 x} + c_1 e^{p_1 x} \int e^{-p_1 x} f(x)\, dx,$$

$$y_2 = (\alpha_1 x + \alpha_2) e^{p_1 x} + c_2 e^{p_1 x} \iint e^{-p_1 x} f(x)\, (dx)^2,$$

$$y_3 = (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3) e^{p_1 x} + c_3 e^{p_1 x} \iiint e^{-p_1 x} f(x)\, (dx)^3.$$

Када саберемо та три израза за y_1, y_2 и y_3, добивамо део решења наше једначине који се појављује због вишеструког корена, то јест[1]

$$\begin{aligned} y = (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3) e^{p_1 x} + \\ + c_1 e^{p_1 x} \int e^{-p_1 x} f(x)\, dx + c_2 e^{p_1 x} \iint e^{-p_1 x} f(x)\, (dx)^2 + \\ + c_3 e^{p_1 x} \iiint e^{-p_1 x} f(x)\, (dx)^3. \end{aligned}$$

Део овог резултата од основне важности је онај који садржи произвољне константе. Да смо насумце применили Теорему V, тај би део био

---

[1] Наравно, константе α су у свакој од тих једначина различите.

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, e^{p_1 x},$$

где постоји уствари само једна константа а не три. Напротив, тачан резултат је облика

$$(\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3)\, e^{p_1 x},$$

где су константе независне.

Када се упореде са (195), чланови са интегралима такође су измењени утолико што се знак интеграла понавља онолико пута колико износи степен имениоца парцијалног разломка којем члан одговара.

То је сасвим општи резултат: јер, у случају разломка облика

$$\frac{f(x)}{(p-p_1)^r},$$

решење можемо наћи када у (182) све p_j заменимо са p_1 а s са r. Последица овога је да сви изложиоци $p_{r-1}-p_r,\ p_{r-2}-p_{r-1},\ \cdots,\ p_1-p_2$, постају једнаки нули, тако да по уклањању заграда (182) постаје[1]

$$y = e^{p_1 x}\left(\alpha_r + \alpha_{r-1}\int dx + \alpha_{r-2}\int\int (dx)^2 + \cdots + \alpha_1 \int\int \cdots \int (dx)^{r-1}\right) +$$

$$+ e^{p_1 x} \int\int \cdots \int e^{-p_1 x} f(x)\,(dx)^r.$$

Последњи члан на десној страни ове једначине је заиста истог облика који имају чланови са интегралима у (195), изузев што се сада тражи r-packed тострука интеграција. Што се тиче осталих чланова, њихови су интеграли

$$e^{p_1 x}\left(\alpha_r + \alpha_{r-1} x + \frac{\alpha_{r-2}}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha_1}{(r-1)!} x^{r-1}\right),$$

што тако исто можемо написати у облику

$$e^{p_1 x}(\alpha_r + \alpha_{r-1} x + \alpha_{r-2} x^2 + \cdots + \alpha_1 x^{r-1}),$$

јер су константе α потпуно произвољне. Зато имамо теореме:

Теорема X. *Партикуларно решење диференцијалне једначине*

$$(p-p_1)^r y = f(x)$$

је

$$e^{p_1 x}\int\int \cdots \int e^{-p_1 x} f(x)\,(dx)^r.$$

---

[1] Обратити пажњу на то да је a_r — наиме коефицијент који стоји уз p^r у полиному $(p-p_1)^r$ — једнак јединици.

Теорема XI. *Ако је корен p_1 једначине $F_s(p)=0$, r-тоструки, опште решење одговарајуће диференцијалне једначине*

$$F_s\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0,$$

садржи експоненцијалну функцију $e^{p_1 x}$ помножену не једном произвољном константом већ полиномом $\alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \cdots + \alpha_r$ у ком се налазй r таквих констаната.

Посматрајмо, на пример, једначину

$$(p+1)(p+1)(p+i)\, y = x, \tag{199}$$

у којој се корен -1 јавља двапут. Када $\dfrac{1}{F_3(p)}$ разложимо на парцијалне разломке, добивамо

$$\frac{1}{(p+1)^2(p+i)} = \frac{(1+i)^2}{4(p+i)} - \frac{(1+i)^2}{4(p+1)} - \frac{1+i}{2(p+1)^2}.$$

Зато, ако можемо протумачити изразе $\dfrac{x}{p+1}$, $\dfrac{x}{(p+1)^2}$ и $\dfrac{x}{p+i}$, можемо наћи решење једначине (199). Али, $\dfrac{x}{p+1}$ мора бити решење једначине

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

и гласи

$$\alpha e^{-x} + e^{-x}\int e^x x\, dx = \alpha e^{-x} + x - 1.$$

Слично је $\dfrac{x}{p+i} = \gamma e^{-ix} + 1 - ix$. С друге стране, $\dfrac{x}{(p+1)^2}$ је решење једначине

$$(p+1)(p+1)\, y = x$$

и гласи

$$(\alpha + \beta x)\, e^{-x} + e^{-x}\int\int e^x x\,(dx)^2 = (\alpha + \beta x)\, e^{-x} + x - 2.$$

Када све ове резултате саберемо, налазимо да је партикуларно решење једначине (199)

$$\frac{(1+i)^2}{4}(1-ix) - \frac{(1+i)^2}{4}(x-1) - \frac{1+i}{2}(x-2) = 1 + 2i - ix, \tag{200}$$

док опште решење комплементарне једначине гласи

$$(\alpha + \beta x)\, e^{-x} + \gamma\, e^{-ix}. \tag{201}$$

Збир решења (200) и (201) је опште решење једначине (199).

У решавању овог примера стварно смо изводили алгебарске трансформације које воде решењу (201). То, међутим, није било потребно; јер, унапред смо знали, на основи резултата нашег општег доказа, да оно мора бити облика у ком смо га коначно и добили.

§ 63. Изузетан случај експоненцијалног решења

Морамо посматрати још један изузетан случај, јер смо видели да Теорема IV важи само ако је $F_s(p) \neq 0$. Али, ма да у овом случају Теорема IV не важи, још увек можемо применити методе које смо изложили у §§ 60, 61 и 62 те, према томе, још увек важе једначина (182) као и Теореме IX и X. На основи овога можемо савладати и ту тешкоћу.

Посматрајмо, на пример, једначину

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x},$$

или, у облику оператора, $(p+1)\,y = e^{-x}$. Према (78), (182) или (195) решење ове једначине је

$$y = \alpha\, e^{-x} + e^{-x} \int e^{x} e^{-x}\, dx$$

$$= \alpha\, e^{-x} + x\, e^{-x}.$$

Пре но што протумачимо тај израз, посматрајмо други пример

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\,\frac{d^2y}{dx^2} + 3\,\frac{dy}{dx} + y = e^{-x},$$

или, у облику оператора, $(p+1)^3\, y = e^{-x}$. Према Теоремама X и XI, решење ове једначине је

$$y = (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3)\, e^{-x} + e^{-x} \int\!\!\int\!\!\int (dx)^3$$

$$= (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3)\, e^{-x} + \frac{x^3}{3!}\, e^{-x}.$$

Од оних решења која бисмо очекивали да p није корен помоћне једначине ова се разликују једино укључивањем неког степена x у партикуларном решењу. Зато је та промена слична промени која настаје у

комплементарном делу решења у случају када су корени вишеструки. Но, важно је напоменути да *методе* решавања операторима које смо извели у §§ 60, 61 и 62 можемо применити чак и онда када метода коју смо извели у § 55 не успева.

ЗАДАЦИ

1. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y = 0.$

2. $(p^4 - 3p^3 + 3p^2 - p)\, y = e^{2x}.$

3. $(p^3 - p^2 + p - 1)\, r = \cos\theta.$

4. Продискутовати типове прелазне струје која може тећи у електричном колу које описује једначина (163), за случај када је $R^2C = 4L$. Нацртати криву која претставља типичан случај.

5. Решити једначину 90, § 33.

6. Какав облик функције је аналоган изузетном случају експоненцијалног решења који смо продискутовали у § 63, у случају Кошијеве једначине?

7. Проширите ваше испитивање задатка 8, § 61, како бисте обухватили случај вишеструких корена у Кошијевој једначини.

8. Решити једначину

$$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\,\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}.$$

9. Решити диференцијалну једначину (199) применом обрасца (182).

§ 64. Необична особина општих решења (186) и (195)

У § 21, а затим и у § 25, скренули смо пажњу на чињеницу да произвољну константу која се јавља код неодређених интеграла, као на пример код (51) или (56), можемо исто тако писати као границу интеграције, као на пример у (52) и (63). Ова чињеница никако не зависи од природе диференцијалне једначине услед које би се појавио тај интеграл, већ је сасвим општа; на пример, константу интеграције, која се јавља у нашем обрасцу (78) као решењу линеарне диференцијалне једначине првог реда, могли бисмо тако исто написати као доњу границу интеграције и на тај начин образац написати у облику[1]

$$y = e^{-\int f_1 dx} \int_{x_0}^{x} e^{\int f_1(x)\, dx} f_2\, dx,$$

у ком x_0 има исту улогу произвољне константе коју је имало α у једна

---

[1] Прећутно је постављен захтев да за $x = x_0$ буде $y = 0$. Видети примедбе уз §§ 21, 22 и 25. — Прев.

чини (78)[1]. Слично можемо додати границе интеграције и у обрасцу (182), тако да тај образац садржи решење комплементарне једначине у овом облику. Када то учинимо, образац (182) добива облик

$$y = \frac{e^{p_s x}}{a_s} \int_{x_1}^{x} e^{(p_{s-1} - p_s)\,x} \int_{x_2}^{x} \cdots \int_{x_s}^{x} e^{-p_1 x} f(x)\,(dx)^s, \tag{202}$$

у ком су произвољне константе $x_1, x_2, \cdots, x_s$. То је опште решење диференцијалне једначине

$$F_s(p)\,y = f(x)\,,$$

исто као што је решење и (182) и можемо из њега добити ма које партикуларно решење кад произвољним границама интеграла дамо одговарајући скуп вредности.

Но, када опште решење напишемо у таквом облику, можемо једну његову значајну особину исказати у облику следеће теореме:

Теорема XII. *Ако свим доњим границама интеграције у (202) дамо исту нумеричку вредност (коју можемо означити са x_0), тада решење задовољава следећи скуп контурних вредности: у тачки $x = x_0$ једнаки су нули не само y већ и првих $s-1$ његових извода.*

Чим напишемо разне изводе од (202) и тада заменимо x са x_0, одмах следи тачност наведене теореме. Међутим, те су једначине доста компликоване, те их нећемо изводити.

Место тога обратимо пажњу на једначину (195) која претставља опште решење у оном облику у ком смо га добили поступком разлагања на парцијалне разломке. Опет можемо казати да се произвољне константе интеграције могу сменити произвољним доњим границама интеграла и на тај начин доћи до обрасца

$$y = \sum_{j=1}^{s} c_j e^{p_j x} \int_{x_j}^{x} e^{-p_j x} f(x)\,dx\,. \tag{203}$$

Шта више, показаћемо да опет важи

Теорема XIII. *Ако су све доње границе интеграције у (203) једнаке x_0, онда су y и првих $s-1$ његових извода, за ту вредност од x, једнаки нули.*

---

[2] Ако бисмо то желели могли бисмо границе интеграције додати интегралним знаковима који се јављају у изложиоцима. Али, док то не би било од штете тако исто не би било ни корисно; јер, када узмемо у обзир извођење обрасца (78), видели бисмо да би исту произвољну константу која је додата *једном* од изложиоца, требало одузети од *другог*, и тако би се те две константе потирале.

Извешћемо сада доказ ове теореме. Међутим, пре но што је почнемо изводити, потребни су нам извесни односи између констаната c_j и p_j које се јављају у (195) а те ћемо односе најлакше извести из (194).

Пошто је $F_s(p)$ s-тог степена, Тајлоров ред за $\dfrac{1}{F_s(p)}$ по степенима од $\dfrac{1}{p}$ мора бити облика

$$\frac{1}{a_s\,p^s} + \frac{k}{p^{s+1}} + \frac{l}{p^{s+2}} + \cdots \tag{204}$$

Наиме, сви чланови са изложиоцима мањим од s морају бити једнаки нули. С друге стране, ако чланове на десној страни од (194) развијемо по опадајућим степенима од p и саберемо разне редове које добивамо на тај начин, збир мора бити тај исти ред (204); то следи из добро познате теореме да је ма за коју функцију Тајлоров ред јединствен. Изведимо ово до краја. Из првог члана добивамо

$$\frac{c_1}{p-p_1} = \frac{c_1}{p} + \frac{c_1\,p_1}{p^2} + \frac{c_1 p_1{}^2}{p^3} + \cdots,$$

из другог

$$\frac{c_2}{p-p_2} = \frac{c_2}{p} + \frac{c_2\,p_2}{p^2} + \frac{c_2\,p_2{}^2}{p^3} + \cdots,$$

и тако даље. Из чињенице да њихов збир мора бити идентичан са (204), одмах закључујемо да збир коефицијената свих чланова код којих је изложилац од p мањи од s, мора бити једнак нули. То нам даје тражене односе:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + \cdots + c_s &= 0\,, \\ c_1\,p_1 + c_2\,p_2 + \cdots + c_s\,p_s &= 0\,, \\ c_1\,p_2{}^2 + c_2\,p_2{}^2 + \cdots + c_s\,p_s{}^2 &= 0\,, \\ \cdots\cdots \qquad & \cdots\cdots \\ c_1\,p_1{}^{s-2} + c_2\,p_2{}^{s-2} + \cdots + c_s\,p_s{}^{s-2} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{205}$$

Сада можемо доказати нашу теорему, наиме да су, за $x = x_0$, како y дефинисано са

$$y = \Sigma\,y_j = \sum_{j=1}^{s} c_j\,e^{p_j x} \int_{x_0}^{x} e^{-p_j x} f(x)\,dx\,, \tag{206}$$

тако и свих првих $s-1$ његових извода једнаки нули.

Да је y једнако нули, то је очигледно: јер, када је $x = x_0$, границе интеграције постају једнаке те је зато сваки члан збира једнак нули. Да бисмо се уверили у то да и изводи постају једнаки нули, искористићемо (189) и (191), одакле следи

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma\, p_j\, y_j + f(x)\, \Sigma\, c_j\,,$$

или, водећи рачуна о првој од једначина (205),

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma\, p_j\, y_j\,. \tag{207}$$

Међутим, већ смо скренули пажњу на чињеницу да је за $x = x_0$ сваки члан y_j у (206) једнак нули. Зато (207) мора за $x = x_0$ такође бити једнако нули.

Даље, када диференцирамо (207) добивамо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Sigma\, p_j \frac{dy_j}{dx} = \Sigma\, p_j^2\, y_j + f(x)\, c_j\, p_j\,,$$

чији последњи члан опет отпада због друге од једначина (205), док је први члан за $x = x_0$ једнак нули, јер је тада свако y_j једнако нули.

Очигледно је да бисмо тај поступак могли наставити све док се не исцрпу односи (205): за трећи извод искористили бисмо трећи од односа (205), за четврти извод искористили бисмо четврту једначину, и тако даље. Одатле закључујемо да за $x = x_0$ мора бити једнако нули толико извода колико има једначина у скупу (205), а тај је број, очигледно, $s - 1$; дакле, Теорема XIII је доказана.

Посматрајмо као пример поново једначину (183) и њено решење (196). Према Теореми XIII можемо извести да, за $x = x_0$, и то решење и његов први извод буду једнаки нули, на тај начин што ћемо сасвим изоставити чланове који садрже произвољне константе, па дописати интегралима границе 0 и x. Када ово учинимо и стварно нађемо интеграле, долазимо до једначине

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{7}{4} - 2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-x}\,.$$

Читалац се одмах и сам може уверити у то да су и y и његов први извод једнаки нули за $x = x_0$.

§ 65. Неинтеграбилне функције

Општу замисао да са диференцијалним операторима поступамо као да су алгебарске количине често можемо применити да добијемо важна развијања у ред интеграла који се не могу израчунати у коначном облику. Схему тог начина решавања можемо показати посматрањем једног или два посебна примера.

У § 59 скренули смо пажњу на чињеницу да се ни (176), ни (177) у облику оператора, не могу интегрирати у коначном облику. С друге

стране, у задацима 1 и 2, § 25, читалац је већ нашао да се (176) може развити било у који од два реда, од којих један са растућим а други са опадајућим степенима од x. Сличне резултате такође можемо добити непосредно из (177).

Да је p алгебарска количина, $\frac{1}{p-1}$ би се могло развити ма у који од два облика

$$\frac{1}{p-1} = -1 - p - p^2 - p^3 - \cdots,$$

или

$$\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots.$$

Ако претпоставимо да је исти поступак дозвољен у случају оператора, следи да је, у првом случају,

$$y = -\frac{1}{x} - p\frac{1}{x} - p^2\frac{1}{x} - \cdots,$$

а у другом

$$y = \frac{1}{p}\frac{1}{x} + \frac{1}{p^2}\frac{1}{x} + \frac{1}{p^3}\frac{1}{x} + \cdots.$$

Међутим, чланови првог реда су узастопни изводи од $\frac{1}{x}$ тако да је, у облику реда,

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1\cdot 2}{x^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4} - \cdots.$$

што се слаже са одговором на задатак 2, § 25, само што смо овде изоставили члан $\alpha\, e^x$.

Слично, чланови другог реда су

$$\frac{1}{p}x = \int \frac{1}{x}\,dx = \log x\,,$$

$$\frac{1}{p^2}\frac{1}{x} = \int \log x\,dx = x\,(\log x - 1)\,,$$

$$\frac{1}{p^3}\frac{1}{x} = \int x\,(\log x - 1)\,dx = \frac{x^2}{2!}\left(\log x - 1 - \frac{1}{2}\right),$$

и, уопште,

$$\frac{1}{p^{n+1}}\frac{1}{x} = \frac{x^n}{n!}\left(\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}\right).$$

Када све те чланове саберемо и приметимо да је коефицијент уз $\log x$ идентичан са редом за e^x, као резултат налазимо

$$y = e^x \log x - x - \frac{x^2}{2!}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{3!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots\,.$$

Овај је резултат различит од оног који је добивен у задатку 1, § 25, ма да оба садрже растуће степене од x.

Примену оваквих развијања оператора у редове могућно је оправдати у много разноврсних проблема, али би покушај да ово учинимо био потпуно ван граница ове књиге. Међутим, морамо читаоца опоменути да та метода има својих ограничења и да каткад даје нетачне резултате, ако се примењује на случајеве за које није подесна. Зато читалац никада не би требао да ту методу примењује док се или унапред не увери у то да му она неопходно мора дати тачан резултат, или иначе да коначно докаже тачност свог одговора пошто га је добио.

ЗАДАЦИ

1. Решити задатак 4, § 58, методом § 64.

2. Решити задатак 2, § 63, па решење подврћи задовољавању контурних услова да, за $x = 1$, и y и његова прва три извода буду једнака нули.

3. Решење диференцијалне једначине задатка 8, § 58, у облику оператора је $\dfrac{f(x)}{Lp + R}$. Стога би требало да буде могућно решавати ту диференцијалну једначину развијањем овог оператора у ред или по растућим или по опадајућим степенима, као у § 64. Међутим, у покушају да то учини, читалац ће наћи да једна од ових метода води тачном решењу, а да је резултат добивен из друге нетачан.

Нацртати разне апроксимативне криве као и тачно решење којем би оне требале да теже.

ГЛАВА VIII

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

§ 66. Општи нацрт методе решавања система линеарних диференцијалних једначина

Методе решавања са операторима које смо извели у §§ 60 до 65 лако се могу проширити тако да се примене на системе линеарних диференцијалних једначина. За ово треба само да се сетимо да је основна идеја на којој се заснива схема решавања операторима то, што ознаку $\dfrac{d}{dx}$ сматрамо као да је алгебарска количина, што до решења долазимо под том претпоставком и што затим тражимо неку методу тумачења на тај начин добивеног одговора у облику операторском.

Ако на једном примеру покажемо све поступке које треба да обавимо, вероватно ће бити и општа дискусија нешто једноставнија. Посматрајмо за ово две једначине

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y_1}{dx^2} + 3\,y_1 + \frac{dy_2}{dx} - y_2 &= x\,, \\ -\frac{dy_1}{dx} - 9\,y_1 + \frac{dy_2}{dx} + 5y_2 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (208)$$

Кад диференцијалну ознаку $\dfrac{d}{dx}$ сменимо са p и са овим поступимо као да је алгебарска количина, долазимо до еквивалентних једначина у облику оператора

$$(p^2 + 3)\,y_1 + (p - 1)\,y_2 = x\,,$$
$$-(p + 9)\,y_1 + (p + 5)\,y_2 = 0\,.$$

Кад би ове једначине биле алгебарске и кад бисмо желели да их решимо по променљивим y_1 и y_2 вероватно бисмо применили методу детерминаната и решење написали у облику

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{M_1}{\Delta}\,x\,, \\ y_2 &= \frac{M_2}{\Delta}\,x\,, \end{aligned}\right\} \tag{209}$$

где M_1, M_2 и Δ стоје место трију детерминаната:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \begin{vmatrix} 1 & p-1 \\ 0 & p+5 \end{vmatrix} = (p+5)\,, \\ M_2 &= \begin{vmatrix} p^2+3 & 1 \\ -p-9 & 0 \end{vmatrix} = (p+9)\,, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} p^2+3 & p-1 \\ -p-9 & p+5 \end{vmatrix} = (p+1)\;(p+2)\;(p+3)\,. \end{aligned}\right\} \tag{210}$$

Сада морамо потражити начин да протумачимо те резултате. Узмимо да то покушамо на тај начин што ћемо решење у облику оператора разложити на парцијалне разломке, што се показало као целисходно код једне линеарне диференцијалне једначине. Одмах налазимо да је

$$\left.\begin{aligned} \frac{p+5}{(p+1)\,(p+2)\,(p+3)} &= \frac{2}{p+1} + \frac{-3}{p+2} + \frac{1}{p+3}\,, \\ \frac{p+9}{(p+1)\,(p+2)\,(p+3)} &= \frac{4}{p+1} + \frac{-7}{p+2} + \frac{3}{p+3}\,, \end{aligned}\right\} \tag{211}$$

одакле решења једначине (209) у облику оператора постају:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{2}{p+1}\,x - \frac{3}{p+2}\,x + \frac{1}{p+3}\,x\,, \\ y_2 &= \frac{4}{p+1}\,x - \frac{7}{p+2}\,x + \frac{3}{p+3}\,x\,. \end{aligned}\right\} \tag{212}$$

Када смо решавали само једну једначину, сазнали смо у § 61 да ма који израз у облику оператора, као што је на пример (188), смемо протумачити као решење одговарајуће линеарне диференцијалне једначине (189). То нас је довело до општег резултата (190). Природно је покушати да исто тумачење применимо на шест чланова код једначина (212). Но сад смо наишли на питање које се није јављало у случају једне једначине. Како и y_1 и y_2 у (209) имају исти именилац Δ, једначине (212) састоје се стварно из иста три члана $\frac{1}{p+1}\,x$, $\frac{1}{p+2}\,x$ и $\frac{1}{p+3}\,x$, само што су различите нумеричке вредности коефицијената. Верујемо да би сваки од ових чланова требао да се протумачи као решење једноставне једначине којој члан одговара. Али, питање које се појављује је: треба ли или не треба захтевати да $\frac{1}{p+1}\,x$ буде *исто* решење и код y_1 и код y_2? Ако треба, имаћемо три произвољне константе — по једну за сваки од три члана — али *те исте три* константе појавиће се у обим једначинама. Ако не треба, произвољне константе у другој једначини биће независне од оних у првој. У првом случају имаћамо *три* произвољне константе, а у другом *шест*.

Очигледно, најбоље ће бити да другу претпоставку узмемо као тачну, јер води општијем резултату. Ако се она покаже погрешном, можемо испитати прву.

Лако налазимо да је

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1}\,x &= \alpha_1\,e^{-x} + (x-1)\,, \\ \frac{1}{p+2}\,x &= \alpha_2\,e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ \frac{1}{p+3}\,x &= \alpha_3\,e^{-3x} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

где су α_1, α_2 и α_3 произвољне константе. Ако следимо нашој другој претпоставци — да су константе различитих чланова без икакве међусобне везе — долазимо до евентуалних решења

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\alpha_1\,e^{-x} - 3\,\alpha_2\,e^{-2x} + \alpha_3\,e^{-3x} + \frac{5}{6}\,x - \frac{49}{36}\,, \\ y_2 &= 4\,\alpha_4\,e^{-x} - 7\,\alpha_5\,e^{-2x} + 3\,\alpha_6\,e^{-3x} + \frac{3}{2}\,x - \frac{31}{12}\,. \end{aligned}$$

Сада морамо одлучити да ли су та *евентуална* решења *тачна* или нису. То најлакше можемо извести непосредним уврштавањем у полазне диференцијалне једначине (208). Али, кад то учинимо, налазимо да се лева страна прве једначине своди на

$$8\,(\alpha_1 - \alpha_4)\,e^{-x} - 21\,(\alpha_2 - \alpha_5)\,e^{-2x} + 12\,(\alpha_3 - \alpha_6)\,e^{-3x} + x, \tag{213}$$

(не на x), док се лева страна друге једначине своди на

$$-\,16\,(\alpha_1 - \alpha_4)\,e^{-x} + 21\,(\alpha_2 - \alpha_5)\,e^{-2x} - 6\,(\alpha_3 - \alpha_6)\,e^{-3x}\,, \tag{214}$$

(не на нулу). Другим речима, ако следимо нашој другој претпоставци и дозволимо да се у сваком члану уведе друга константа интеграције, *наш поступак решавања операторима не води нас тачном решењу тих једначина.* С друге стране, ако је $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_5$, $\alpha_4 = \alpha_6$, (213) и (214) своде се на x, односно на нулу, као што тако и треба да буде. Зато је тачно решење

$$y_1 = 2\,\alpha_1\, e^{-x} - 3\,\alpha_2\, e^{-2x} + \alpha_3\, e^{-3x} + \frac{5}{6}\, x - \frac{49}{36},$$

$$y_2 = 4\,\alpha_1\, e^{-x} - 7\,\alpha_2\, e^{-2x} + 3\,\alpha_3\, e^{-3x} + \frac{3}{2}\, x - \frac{31}{12}.$$

Наиме, *наше решење у облику оператора даје тачан резултат ако сваком парцијалном разломку, ма где да се он јави, дамо исто значење и исту произвољну константу.*

Наравно, засад за ово тврђење знамо да је тачно само у посебном примеру који овде посматрамо, и тек се треба уверити у чињеницу да је оно тачно уопште. Но, наш доказ можемо нешто поједноставити ако најпре уопштимо принцип суперпозиције и изложимо начин свођења система диференцијалних једначина ма ког реда на неки други систем диференцијалних једначина првог реда.

§ 67. Други принцип суперпозиције

Посматрајмо два система једначина: систем

$$\begin{array}{l} F_{11}(p)\, y_1 + F_{12}(p)\, y_2 + \cdots + F_{1r}(p)\, y_r = f_1(x), \\ F_{21}(p)\, y_1 + F_{22}(p)\, y_2 + \cdots + F_{2r}(p)\, y_r = f_2(x), \\ \quad \cdots \qquad\qquad + \qquad\qquad \cdots \\ F_{r1}(p)\, y_1 + F_{2r}(p)\, y_2 + \cdots + F_{rr}(p)\, y_r = f_r(p), \end{array} \tag{215}$$

у ком су сви F ма какви линеарни оператори, и неки други систем идентичан са системом (215), изузев што су функције $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_r(x)$ замењене другим скупом функција $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_r(x)$. Наиме, претпостављамо да треба решити ма која два идентична система изузев што у једном случају тражимо решења „која припадају" извесним функцијама f_i, док у другом тражимо решења „која припадају" извесним функцијама g_i. Узмимо даље да за сваки од ових система знамо по један скуп решења: скуп решења који припада функцијама f_i,

$$y_1 = \phi_1(x),\ y_2 = \phi_2(x),\ \cdots,\ y_r = \phi_r(x),$$

и скуп решења који припада функцијама g_i,

$$y_1 = \psi_1(x),\ y_2 = \psi_2(x),\ \cdots,\ y_r = \psi_r(x).$$

Тада можемо лако доказати следећу теорему:

Теорема XIV. *Решења система једначина која припадају скупу функција $f_i + g_i$ јесу збирови решења каја припадају посебно функцијама f_i и решења која припадају посебно функцијама g_i.*

Да бисмо ово доказали, треба само приметити да по уврштавању количина

$$y_1 = \phi_1 + \psi_1,$$

$$y_2 = \phi_2 + \psi_2,$$

$$\cdots$$

$$y_r = \phi_r + \psi_r.$$

у леву страну ма које од једначина (215) — рецимо у прву — чланове можемо поређати следећим редом

$$[F_{11}(p)\, \phi_1 + F_{12}(p)\, \phi_2 + \cdots + F_{1r}(p)\, \phi_r]$$
$$+ [F_{11}(p)\, \psi_1 + F_{12}(p)\, \psi_2 + \cdots + F_{1r}(p)\, \psi_r].$$

Али, према дефиницији је израз који се налази у првој загради једнак функцији $f_1(x)$, а израз који се налази у другој загради је једнак функцији $g_1(x)$. Слично, да смо исте y уврстили у другу од једначина (215), добили бисмо $f_2 + g_2$, и тако даље. То доказује нашу теорему.

Но, ако Теорема XIV важи за *два* скупа функција f_i и g_i, она важи и ма за који број скупова. Специјално, она важи за скупове:

$$\begin{array}{ccccc} f_1, & 0, & 0, & \cdots, & 0; \\ 0, & f_2, & 0, & \cdots, & 0; \\ 0, & 0, & f_3, & \cdots, & 0; \\ & & \cdots & & \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & f_r; \end{array}$$

одакле закључујемо:

Теорема XV. *Систем (215) можемо решити сабирањем решења следећих r скупова једначина: 1) неког скупа у ком је свако f изузев f_1 замењено са нулом, 2) неког скупа у ком је свако f изузев f_2 замењено са нулом; $\cdots$; r) неког скупа у ком је свако f изузев f_r замењено са нулом.*

Та нам теорема даје могућност да наше опште проучавање нешто поједноставнимо, наиме: све што можемо доказати да важи за систем у ком је свако f изузев једног једнако нули, одмах можемо применити и на општији случај

§ 68. Веза између једне линеарне диференцијалне једначине и система диференцијалних једначина

Претпоставимо да у диференцијалној једначини (183) произвољно уведемо ознаку $\frac{dy}{dx} = y_1$. Тада једначина (183) постаје идентична са две једначине

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} + 3y_1 + 2y &= x^2, \\ y_1 - \frac{dy}{dx} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (216)$$

и није тешко доказати да када овај скуп једначина решавамо методом § 66, долазимо до истог решења које смо добили у § 60. Слично, увођењем ознаке $y_1 = \frac{dy}{dx}$, $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots\cdot$, општа линеарна једначина (146) може се свести на систем од s једначина:

$$\left.\begin{aligned} a_s \frac{dy_{s-1}}{dx} + a_{s-1} y_{s-1} + \cdots\cdot + a_1 y_1 + a_0 y &= f(x), \\ y_{s-1} - \frac{dy_{s-2}}{dx} \qquad\qquad &= 0, \\ \cdots\cdot \qquad\qquad & \cdots\cdot \\ y_1 - \frac{dy}{dx} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (217)$$

и, поступајући онако као и у претходном одељку, нашли бисмо да и овај систем и полазна једначина имају потпуно исто решење.

Но, код оба система једначина (216) и (217), значајно је то да ниједна једначина ма ког од тих система не садржи извод вишег реда од првог. Другим речима, подесно називајући изводе другим именима, успели смо да једну линеарну једначину ма ког реда заменимо системом линеарних једначина од којих је свака првог реда.

На исти начин можемо *систем* линеарних једначина ма ког реда свести на систем линеарних једначина првог реда. На пример, кад место $\frac{dy_1}{dx}$ уведемо ознаку y_3, систем од две једначине (208), од којих је једна другог реда, своди се на еквивалентни систем од три једначине првог реда

$$\frac{dy_3}{dx} + \frac{dy_2}{dx} - y_2 + 3y_1 = x,$$

$$y_3 \qquad\qquad - \frac{dy_1}{dx} = 0,$$

$$-y_3 + \frac{dy_2}{dx} + 5y_2 - 9y_1 = 0.$$

Следи, дакле, да ма коју линеарну једначину, или ма који систем
линеарних једначина ма ког реда, можемо увек свести на систем лине-
арних једначина првог реда.

Са гледишта практичног решавања диференцијалних једначина
овом се трансформацијом ништа не добива. Проблем можемо обично
решавати у једном облику исто тако лако као и у другом, и заиста,
у оним случајевима у којима се ишта може рећи пре у корист једне
методе неголи друге, обично се говори у корист тога да се трансфор-
мација не врши. Међутим, замисао је врло корисна са теориског гле-
дишта, јер на основи ње можемо закључити да све оно што важи за
системе једначина првог реда мора важити и за једначине вишег реда
из којих су ти системи настали.

§ 69. Доказ тачности општег решења у облику оператора

Доказали смо да, ако можемо решити скуп диференцијалних једначина[1]

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}\,p + a'_{11})\,y_1 + (a_{12}\,p + a'_{12})\,y_2 + \\ + \cdots\cdot + (a_{1r}\,p + a'_{1r})\,y_r = f(x), \\ (a_{21}\,p + a'_{21})\,y_1 + (a_{22}\,p + a'_{22})\,y_2 + \\ + \cdots\cdot + (a_{2r}\,p + a'_{2r})\,y_r = 0, \\ ({}_{r1}a\,p + a'_{r1})\,y_2 + (a_{r2}\,p + a'_{r2})\,y_2 + \\ + \cdots\cdot + (a_{rr}\,p + a'_{rr})\,y_r = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (218)$$

које су првог реда и у којима се јавља само једно f, можемо решити
и општи скуп диференцијалних једначина (215). На основи резултата при-
мера који смо посматрали у § 66, тако исто имамо разлога да верујемо
да решење можемо наћи методом разлагања на парцијалне разломке

---

[1] Сматрамо да скоро није ни потребно напомињати да неко a или a' може бити једнако нули.

само ако оператору облика $\dfrac{1}{p-p_j} f(x)$ дајемо потпуно исто значење ма где да се он појави. Видећемо да је то заиста тачно.

Решимо систем једначина (218) алгебарски методом детерминаната. На тај начин добивамо:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{M_1}{\Delta} f, \\ y_2 &= \frac{M_2}{\Delta} f, \\ &\cdots\cdots \\ y_r &= \frac{M_r}{\Delta} f, \end{aligned}\right\} \tag{219}$$

где је Δ детерминанта система (218), а $M_1, M_2, \cdots, M_r$ минори елемената прве врсте.

Узмимо сада да је за ову нашу дискусију детерминанта Δ s-тог степена по p[1] и да су сви њени корени $p_1, p_2, \cdots, p_s$ различити[2]. Најзад, узмимо да су сви минори $M_1, M_2, \cdots, M_r$ нижег степена[3] од Δ.

Ма који количник M_k/Δ, можемо на основи ових претпоставки разложити на парцијалне разломке и написати у облику

$$\frac{M_k}{\Delta} = \frac{c_{1k}}{p-p_1} + \frac{c_{2k}}{p-p_2} + \cdots + \frac{c_{sk}}{p-p_s}; \tag{220}$$

важно је приметити да су оператори $\dfrac{1}{p-p_1}, \dfrac{1}{p-p_2}, \cdots, \dfrac{1}{p-p_s}$, исти за свако такво разлагање ма да бројеви c, којим се ти оператори множе, могу бити за различите миноре M различити.

---

[1] Сем ако се деси да су a и a' такви да се изложиоци највиших степена од p потиру, детерминанта Δ бићо r-тог степена. У сваком случају је $s \leq r$.

[2] Циљ је ове претпоставке једино да се наша дискусија поједностави. Измене које настају услед вишеструких корена сасвим су сличне изменама на које смо наишли у Глави VII.

[3] Очигледно је да су они нижег степена ако је детерминанта Δ r-тог степена. Међутим, у случају $s < r$, могућно је да један или више минора M буду једнаког или вишег степена од Δ. Ако је то случај, у разлагању количника M/Δ на парцијалне разломке почеће се са неком константом или са неким позитивним степеном од p. Могли бисмо наш доказ изменити тако да обухватимо и те случајеве; али, вероватно је боље да доказ буде разумљив, ма да се тиме нешто жртвује у општости. Читалац ће наићи на такве једначине међу задацима који се налазе на крају овог поглавља. Заиста, у задатку 6 детерминанта Δ чак и не садржи p.

Заменимо ли сада та разлагања у (219), добићемо

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}\frac{f}{p-p_1} + c_{21}\frac{f}{p-p_2} + \cdots + c_{s1}\frac{f}{p-p_s}, \\ y_2 &= c_{12}\frac{f}{p-p_1} + c_{22}\frac{f}{p-p_2} + \cdots + c_{s2}\frac{f}{p-p_s}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y_r &= c_{1r}\frac{f}{p-p_1} + c_{2r}\frac{f}{p-p_2} + \cdots + c_{sr}\frac{f}{p-p_s}. \end{aligned}$$

Дајмо сада изразу $\dfrac{f}{p-p_j}$ *потпуно исто тумачење у свакој од ових једначина*. Наиме, *узмимо* да су решења

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sum_{j=1}^{s} c_{j1}\,\psi_j(x), \\ y_2 &= \sum_{j=1}^{s} c_{j2}\,\psi_j(x), \\ &\cdots\cdots \\ y_r &= \sum_{j=1}^{s} c_{jr}\,\psi_j(x), \end{aligned}\right\} \tag{221}$$

где је ψ_j решење диференцијалне једначине

$$\frac{d\psi_j}{dx} - p_j\psi_j = f(x), \tag{222}$$

то јест

$$\psi_j = \alpha_j e^{p_j x} + e^{p_j x}\int_0^x e^{-p_j x} f(x)\,dx. \tag{223}$$

Да та евентуална решења заиста задовољавају систем једначина (218), доказаћемо на тај начин што ћемо их заменити у тим једначинама и показати да су оне задовољене. Али, за ово су нам потребне вредности за $\dfrac{dy_1}{dx}, \ldots\ldots, \dfrac{dy_r}{dx}$. Из (221) видимо да сви ти изводи имају исти облик

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{s} c_{jk}\frac{d\psi_j}{dx},$$

или, кад $\dfrac{d\psi_j}{dx}$ заменимо са вредношћу $p_j\psi_j + f(x)$ из (222),

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{s} c_{jk}\, p_j\, \psi_j + f(x) \sum_{j=1}^{s} c_{jk}\,. \tag{224}$$

Најзад, из (221) и (224) добивамо

$$a\frac{dy_k}{dx} + a'y_k = \sum_{j=1}^{s} (a\, p_j + a')\, c_{jk}\, \psi_j + f(x) \sum_{j=1}^{s} a\, c_{jk}\,.$$

Вратимо се сада првој од једначина (218) и приметимо да је сваки члан на левој страни баш таквог облика. Дакле, кад наша евентуална решења заменимо у првој једначини, она даје

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \sum_{k=1}^{r} \left(a_{1k}\frac{dy_k}{dx} + a'_{1k}\, y_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (a_{1k}\, p_j + a'_{1k})\, c_{jk}\, \psi_j + f(x) \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_{1k} c_{jk}\,. \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

Слично, кад наша евентуална решења заменимо у левој страни друге од једначина (218), добивамо

$$\left.\begin{aligned} L_2 &= \sum_{k=1}^{r} \left(a_{2k}\frac{dy_k}{dx} + a'_{2k} y_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (a_{2k}\, p_j + a'_{2k})\, c_{jk}\, \psi_j + f(x) \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (a_{2k}\, c_{jk}\,. \end{aligned}\right\} \tag{226}$$

Остале би се једначине могле довести на сличне облике.

Количине L_1, L_2, . . . јесу вредности које стварно добивају леви чланови кад у њима заменимо евентуална решења. Ако су евентуална решења заиста решења, количина L_1 мора бити іеднака функцији $f(x)$, док количина L_2, као и све остале количине L, мора бити једнака нули. Пред нама је проблем да покажемо да количине L заиста имају те вредности.

Вратимо се за ово нашој детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, p + a'_{11}, & a_{12}\, p + a'_{12}, & \cdots\cdots, & a_{1r}\, p + a'_{1r} \\ a_{21}\, p + a'_{21}, & a_{22}\, p + a'_{22}, & \cdots\cdots, & a_{2r}\, p + a'_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a\, p_{r1} + a'_{r1}, & a_{r2}\, p + a'_{r2}, & \cdots\cdots, & a_{rr}\, p + a'_{rr} \end{vmatrix}$$

и напоменимо да су $M_1, M_2, \ldots, M_r$ минори елемената прве врсте. Зато, када детерминанту Δ развијемо по елементима прве врсте, добићемо

$$\Delta = (a_{11}\, p + a'_{11})\, M_1 + (a_{12}\, p + a'_{12})\, M_2 + \cdots\cdots,$$

или

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{M_k}{\Delta}(a_{1k}\, p + a'_{1k}) = 1\,. \tag{227}$$

Но, када те миноре M_1, M_2, ... , M_r помножимо елементима ма које врсте сем прве, познато је као општа особина детерминаната да је збир тако добивених производа једнак нули. Зато из елемената друге врсте добивамо

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{M_k}{\Delta}(a_{2k}\, p + a'_{2k}) = 0\,. \tag{228}$$

Сличне би се једначине могле написати и за све остале врсте.

Сада ћемо количник M_k/Δ, који се налази и у (227) и у (228), сменити његовом вредношћу (220). Резултати замене су:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p - p_1} \sum_{k=1}^{r} c_{1k}\, (a_{1k}\, p + a'_{1k}) + \frac{1}{p - p_2} \sum_{k=1}^{r} c_{2k}\, (a_{1k}\, p + a'_{1k}) + \\ &\qquad + \cdots\cdots + \frac{1}{p - p_s} \sum_{k=1}^{r} c_{sk}\, (a_{1k}\, p + a'_{1k}) = 1\,, \end{aligned} \tag{229}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p - p_1} \sum_{k=1}^{r} c_{1k}\, (a_{2k}\, p + a'_{2k}) + \frac{1}{p - p_2} \sum_{k=1}^{r} c_{2k}\, (a_{2k}\, p + a'_{2k}) + \\ &\qquad + \cdots\cdots + \frac{1}{p - p_s} \sum_{k=1}^{r} c_{sk}\, (a_{2k}\, p + a'_{2k}) = 0. \end{aligned} \tag{230}$$

Наравно, за сваку од осталих врста детерминанте Δ постоји једначина слична једначини (230).

Но све те једначине од (220) до (230) важе за *сваку* вредност p. Помножимо, дакле, прво једначину (229) са $p - p_1$ и пустимо затим да p тежи ка p_1. Очигледно је да, сем првог, сваки члан мора ишчезавати, јер сви они садрже фактор $p - p_1$. Зато, када пређемо на граничну вредност p_1, имаћемо

$$\sum_{k=1}^{r} c_{1k}\, (a_{1k}\, p_1 + a'_{1k}) = 0\,.$$

Помножимо затим једначину (229) са $p - p_2$ и пустимо да p тежи ка p_2. Добићемо

$$\sum_{k=1}^{r} c_{2k}\, (a_{1k}\, p_2 + a'_{1k}) = 0.$$

Уопште, када једначину (229) помножимо са $p - p_j$ и пустимо да p тежи ка p_j, добићемо

$$\sum_{k=1}^{r} c_{jk} (a_{1k} p_j + a'_{1k}) = 0 .$$

Даље, када са једначином (230) поступимо на исти начин, можемо закључити да је

$$\sum_{k=1}^{r} c_{jk} (a_{2k} p_j + a'_{2k}) = 0 .$$

Међутим, један поглед на прве чланове десних страна једначина (225) и (226) показује нам да су сабирања по k тачно овог облика. Зато ти чланови отпадају, те нам остаје

$$L_1 = f(x) \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_{1k} c_{jk} \tag{231}$$

и

$$L_2 = f(x) \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_{2k} c_{jk} . \tag{232}$$

Наравно, остале количине L добивају сличне облике.

Вратимо се сада поново једначини (229) и пустимо да p тежи бесконачности. Пошто је сваки члан облика $c \frac{a p + a'}{p - p_j}$, сви се они своде на чланове облика $a c$, као граничним вредностима. На тај начин једначина (229) постаје

$$\sum_{k=1}^{r} a_{1k} c_{1k} + \sum_{k=1}^{r} a_{1k} c_{2k} + \cdots\cdots + \sum_{k=1}^{r} a_{1k} c_{sk} = 1 ,$$

или

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} a_{1k} c_{jk} = 1 . \tag{233}$$

Када са једначином (230) поступимо на потпуно исти начин, добићемо

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} a_{2k} c_{jk} = 0 . \tag{234}$$

Остале једначине тог последњег типа могли бисмо добити из осталих врста детерминанте Δ.

Видимо сада да су збирови, који још увек стоје на десној страни једначина (231) и (232), баш (233) и (234). Зато је

$$L_1 = f(x) ,$$
$$L_2 = 0 .$$

Другим речима, наша евентуална решења заиста су изједначила леве и десне чланове једначина (218).

Стога можемо поставити следећу теорему:

Теорема XVI. *Операторско решење система линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима смемо разложити на парцијалне разломке, али ма ком парцијалном разломку* $\frac{1}{p-p_j} f(x)$, *ма где да се појави, треба дати исто тумачење и исту константу интеграције.*

Наравно, наш доказ ове теореме важи само утолико уколико су корени детерминанте Δ различити, а минори M нижег степена од степена саме детерминанте Δ. Али, теорема важи чак и кад ти услови нису задовољени.

§ 70. Решење система диференцијалних једначина подвргнуто контурном услову да за исту тачку све променљиве буду једнаке нули

Постоји један скуп вредности произвољних констаната у (223) који је од необичног интереса: наиме, скуп у ком је свако α_j једнако нули. Када употребимо тај скуп вредности, за $x = 0$ је свако ψ једнако нули. Зато су у тој тачки, према (221), $y_1, y_2, \cdots, y_r$ такође једнаки нули.

Та је особина потпуно аналогна особини коју смо открили у § 64 за случај једне једначине реда вишег од првог. Уствари, резултат § 64 непосредно следи из овог доказа, јер, као што смо видели у § 68, једну једначину вишег реда можемо свести на скуп једначина првог реда на тај начин што уводимо нове променљиве, које треба да претстављају узастопне изводе. Када бисмо ово учинили, из (221) сазнали бисмо да ће не само y, већ и сви његови изводи реда мањег од s-тог бити једнаки нули за $x = 0$.

Међутим, доказ овог одељка примењује се на скуп линеарних диференцијалних једначина ма ког реда, јер се, као што смо већ видели, ма који такав скуп може свести на нов скуп диференцијалних једначина првог реда. Да бисмо то учинили, треба само да уведемо нове ознаке за све изводе сваке од зависно променљивих *сем за изводе највишег реда.* Кад тада кажемо да је за $x = 0$ свако y једнако нули у новом систему, то је еквивалентно исказивању да је свака зависно променљива у полазном систему такође једнака нули за $x = 0$, заједно са свим својим изводима *сем* извода највишег реда.1)

---

1) Тај резултат важи увек када су испуњене претпоставке под којима је извођен доказ у § 69. Он важи чак и када корени детерминанте Δ нису сви различити. Али, за разлику од Теореме XV, он не важи увек када није испуњена друга претпоставка: наиме, када је један или када су више минора M истог степена као и детерминанта Δ. У таквим случајевима разлагања на парцијалне разломке могу да садрже извесне чланове који не захтевају никакву интеграцију, те за $x = 0$ нису једнаки нули.

Неких примера ове врсте има међу задацима на крају § 74.

§ 71. Специјални случај функције $f(x) = e^{px}$

Постоје два специјална случаја једначина (221) која су добила специјална имена и која се често помињу у техничкој литератури. У овом ћемо одељку посматрати општији од ова два случаја, познат под именом *Уопштене Хевисајдове теореме о разлагању*, док ћемо у следећем одељку посматрати специјалнији случај познат под именом *Хевисајдове теореме о разлагању*.

Ако претпоставимо да је на десној страни прве од система једначина (218), функција $f(x)$ експоненцијална функција $B\,e^{px}$, а тражимо да наше решење задовољава специјалан скуп контурних услова о којима смо дискутовали у § 70, после извршене интеграције (223) постаје

$$\psi_j = B\,\frac{e^{px} - e^{p_j x}}{p - p_j}\,.$$

Заменимо сада ово у (221) и затим разложимо у два збира, од којих један нека садржи све чланове у којима се јавља експоненцијална функција e^{px}, а у другом нека се садрже сви остали чланови. Резултат је

$$y_k = B\,e^{px} \sum_{j=1}^{s} \frac{c_{jk}}{p-p_j} - B \sum_{j=1}^{s} \frac{c_{jk}\,e^{p_j x}}{p-p_j}\,. \tag{235}$$

Вратимо се сада разлагању на парцијалне разломке (220) и напоменимо да је збир који се јавља у првом члану једначине (235) тачно $M_k(p)/\Delta(p)$, где, наравно, p овде значи број који се јавља у експоненцијалној функцији e^{px}. Када то уведемо у једначину (235), добивамо коначан образац

$$y_k = B\,\frac{M_k(p)}{\Delta(p)}\,e^{px} - B \sum_{j=1}^{s} \frac{c_{jk}\,e^{p_j x}}{p-p_j}\,. \tag{236}$$

Тај је резултат веома једноставан. Не само што се израз M_k/Δ добива једино заменом *диференцијалне ознаке* p у (218) *бројем* p, а затим решавањем тог система једначина као да је алгебарски а не диференцијални, него се чак и други члан десне стране једначине (236) добива разлагањем количника M_k/Δ на парцијалне разломке, а затим множењем сваког од тих парцијалних разломака експоненцијалном функцијом $e^{p_j x}$.

Другим речима, када је на десној страни прве од система једначина (218) функција f нека експоненцијана функција и када се захтева да у траженом решењу све зависно променљиве буду једнаке нули за $x=0$, решење се може добити чисто алгебарски *без примене интегралног рачуна*.

Узмимо, на пример, да се на десној страни прве од система једначина (208) место x налази $\cos x$. Како је то реалан део од e^{ix}, наше решење можемо добити кад прво нађемо решење које припада овој експоненцијалној функцији, а затим задржимо само реалан део тог решења.

Да бисмо добили прве изразе за y_1 и y_2, ставићемо у (210) $p = i$, јер је i коефицијент који стоји уз x у нашој експоненцијалној функцији. То нам даје изразе

$$\frac{M_1}{\Delta}\,e^{ix} = \left(\frac{1}{10} - \frac{i}{2}\right) e^{ix},$$

$$\frac{M_2}{\Delta}\,e^{ix} = \left(\frac{1}{10} - \frac{9\,i}{10}\right) e^{ix}.$$

Што се тиче других израза на десним странама једначина (236), позовимо се на једначине (211), које ћемо изменити утолико што ћемо увести овде посматрану посебну вредност $p = i$ и што ћемо тако исто сваки члан помножити експоненцијалним изразом којем тај члан одговара. То нам даје

$$\frac{2\,e^{-x}}{i+1} + \frac{-3\,e^{-2x}}{i+2} + \frac{e^{-3x}}{i+3}\,,$$

$$\frac{4\,e^{-x}}{i+1} + \frac{-7\,e^{-2x}}{i+2} + \frac{3\,e^{-3x}}{i+3}\,.$$

Кад ове резултате саберемо и издвојимо њихове реалне делове, добивамо тражена решења

$$y_1 = \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - e^{-x} + \frac{6}{5}\,e^{-2x} - \frac{3}{10}\,e^{-3x}\,,$$

$$y_2 = \frac{1}{10}\cos x + \frac{9}{10}\sin x - 2e^{-x} + \frac{14}{5}\,e^{-2x} - \frac{9}{10}\,e^{-3x}\,.$$

Практична важност једначина (236) лежи у томе што проблеми електротехнике врло често воде контурним условима о којима смо дискутовали у § 70. Ако се, дакле, деси да је електромоторна сила облика $\cos pt$ или $\sin pt$, као што је често случај, партикуларно решење које задовољава те контурне услове можемо добити једино извођењем известног броја основних алгебарских рачунских радњи. Никаква интегрисања нису потребна.

§ 72. Хевисајдова теорема

Резултат о ком се у електротехничкој литератури обично говори као о Хевисајдовој теореми, јесте теорема сасвим аналогна оној коју смо поставили у § 71, но у којој се претпоставља да је функција $f(x)$ нека *константа* E, а не нека експоненцијална функција $B\,e^{px}$. Наиме, она одговара случају када у извесном тренутку почиње да дејствује *устаљена* електромоторна сила, а не одговара случају наизменичне електромоторне силе.

Међутим, као што смо раније чинили неколико пута, константу E можемо написати у облику $E\,e^{0x}$. Како у доказу извођеном у § 71 није постављен захтев да p треба да буде различито од нуле, следи одмах да решење нашег садашњег проблема можемо добити када само место p, ма где да се оно јавља у (236), напишемо нулу. Резултат је

$$y_k = E\,\frac{M_k(0)}{\Delta(0)} + E\sum_{j=1}^{s}\frac{c_{jk}\,e^{p_j x}}{p_j}\,. \tag{237}$$

Сменимо x, које се налази на десној страни прве од система једначина (208), са 1. Ако бисмо, на пример, требали да решимо овај систем једначина и да решење подвргнемо контурним условима да, не само y_1 и y_2, већ исто тако и први извод од y_1 буде једнак нули за $x = 0$, прве изразе десних страна у (237) добили бисмо на тај начин што бисмо у M_1/Δ и M_2/Δ, p сменили са нулом. То би нам дало редом $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{2}$. Да бисмо добили друге изразе десних страна у (237), ставили бисмо у (211) $p = 0$ и сваки од чланова помножили са одговарајућом вредношћу $e^{p_j x}$. Тада би био коначан резултат:

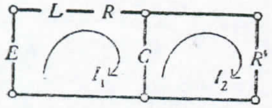
$$y_1 = \frac{5}{6} - 2e^{-x} + \frac{3}{2}\,e^{-2x} - \frac{1}{3}\,e^{-3x},$$

$$y_2 = \frac{3}{2} - 4e^{-x} + \frac{7}{2}\,e^{-2x} - e^{-3x}\,.$$

§ 73. Прелазно и устаљено стање у електричним мрежама

Кад законе које смо изложили у § 17 применимо на неко електрично коло које се састоји из више простих електричних кола, долазимо до система линеарних диференцијалних једначина. Један пример те врсте дали смо у § 17, а други ћемо показати овде.

Диференцијалне једначине које описују ток струје у мрежи коју показује сл. 41 јесу:



Сл. 41

$$L\,\frac{d^2x_1}{dt^2} + R\,\frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{C}(x_1 - x_2) = E(t),$$

$$\frac{1}{C}(x_2 - x_1) + R'\,\frac{dx_2}{dt} = 0\,,$$

где је x_1 количина електрицитета која је протекла кроз неку тачку првог кола почев од тренутка $t = 0$, а x_2 количина електрицитета која је протекла кроз неку тачку другог кола почев од тренутка $t = 0$. Када их напишемо у операторском облику, те једначине постају

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)x_1 - \frac{x_2}{C} = E\,,$$

$$-\frac{x_1}{C} + \left(R'p + \frac{1}{C}\right)x_2 = 0\,.$$

Решење ових једначина, у „облику операторском“, је зато

$$x_1 = \frac{\left(R'p + \frac{1}{C}\right)E}{\Delta(p)}\,,$$

$$x_2 = \frac{E}{C\,\Delta(p)}\,,$$

где је

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} L\,p^2 + R\,p + \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & R'p + \frac{1}{C} \end{vmatrix}\,.$$

Зато су решења за струје

$$I_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{p\left(R'p + \frac{1}{C}\right)E}{\Delta(p)}\,,$$

$$I_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{p\,E}{C\,\Delta(p)}\,.$$

Претпоставимо сада да ово коло мирује све до тренутка $t = 0$ и да тада почиње да дејствује електромоторна сила $E(t) = E_0 \cos n\,t$. Доказом потпуно сличним оном који смо применили у § 57 налазимо да у тренутку $t = 0$ и x_1 и x_2, а тако исто и $\frac{dx_1}{dt}$, морају бити једнаки нули. То су тачно контурни услови које смо изложили у § 70 и, ако место $\cos n\,t$ ставимо e^{int}, можемо применити специјалне резултате из § 71.

Али, за ово морамо знати корене једначине $\Delta(p) = 0$. Лако налазимо да је

$$\Delta(p) = L\,R'\,p^3 + \left(R\,R' + \frac{L}{C}\right)p^2 + \frac{R' + R}{C}\,p\,,$$

одакле добивамо корене:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= 0\,, \\ p_2 &= \frac{-RCR' - L + \sqrt{(RCR'+L)^2 - 4CLR'(R'+R)}}{2CLR'}\,, \\ p_3 &= \frac{-RCR' - L - \sqrt{(RCR'+L)^2 - 4CLR'(R'+R)}}{2CLR'}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (238)$$

Сада можемо применити образац (236) који нам даје

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= E_0 \frac{R'in + \frac{1}{C}}{\Delta(in)} e^{int} - E_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{c_{j1}}{in - p_j} e^{p_j t}\,, \\ x_2 &= E_0 \frac{1}{C\,\Delta(in)} e^{int} - E_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{c_{j2}}{in - p_j} e^{p_j t}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (239)$$

где бисмо коефициенте c_{j1} и c_{j2} могли наћи разлагањем $\dfrac{R'p + \frac{1}{C}}{\Delta(p)}$ и $\dfrac{1}{C\Delta(p)}$ на парцијалне разломке. Они су доста компликовани изрази за писање и како њихове тачне вредности нису за нас од интереса, најбоље ће бити да их оставимо неодређеним.

Најзад, када једначине (239) диференцирамо по t, налазимо за струје[1]:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= E_0 \frac{in\left(R'in + \frac{1}{C}\right)}{\Delta(in)} e^{int} - E_0 \frac{c_{21}p_2}{in - p_2} e^{p_2 t} - E_0 \frac{c_{31}p_3}{in - p_3} e^{p_3 t}, \\ I_2 &= E_0 \frac{in}{C\,\Delta(in)} e^{int} - E_0 \frac{c_{22}p_2}{in - p_2} e^{p_2 t} - E_0 \frac{c_{32}p_3}{in - p_3} e^{p\,t}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (240)$$

Вратимо се сада коренима (238) и напоменимо да, као и њима слични изрази (164), p_2 и p_3 могу бити или реални и *негативни* или комплексни са *негативним* реалним делом Било у првом било у другом случају, изрази $e^{p_2 t}$ и $e^{p_3 t}$ у једначинама (240) постају током времена све мањи и мањи и коначно ишчезавају. Зато су то „прелазни“ изрази. С друге стране, израз e^{int} не ишчезава током времена. То је устаљено стање у које струја евентуално прелази. Другим речима, *први члан уопштеног Хевисајдовог разлагања даје решење устаљеног стања овог проблема; преостали су чланови прелазни.*

---

[1] Изрази који садрже корен p_1 једнаки су нули, јер је извод од $e^{p_1 t} = e^0 = 1$ једнак нули.

Са овим тумачењем можемо одмах написати известан број ставова паралелно оним које смо извели у §§ 57 и 58, али примењујући их сада не на проста електрична кола, већ на мрежу која се састоји ма из ког броја простих електричних кола:

a) Корени једначине $\Delta(p) = 0$ дају нам *сопствене фреквенције* мреже, а исто тако и експоненцијалне опадајуће факторе којима су оне помножене.

b) Ма коју од струја посматрали, она има исте сопствене фреквенције као и ма која друга струја.

c) Количници E/I_1 и E/I_2 зову се *импеданце* као и раније. Прва од ових, која даје струју у оном колу у које је укључена електромоторна сила зове се *улазна импеданца*; друга је *преносна импеданца*.

d) Реални делови тих комплексних импеданци зову се *улазни отпор* односно *преносни отпор* електричног кола; имагинарни делови зову се *реактанце*.

§ 74. Решавање проблема за струје устаљеног стања

У читавој овој теорији постоји једна истакнута тешкоћа с обзиром
на линеарне једначине: наиме, у њој се тражи да се с времена на време
нађу корени $p_1, p_2, \cdots, p_s$ неке алгебарске једначине. Но, она је пот-
пуно задовољавајућа све док је једначина лака за решавање; али, када
покушамо да решимо такве физичке проблеме какви се обично јављају,
налазимо да су многи од њих далеко од тога да буду једноставни.
Уствари, лаки проблеми ове врсте су толико ретки да је потребно уло-
жити много труда за налажење довољног броја како таквих проблема
тако и примера за илустрацију у нашем уџбенику.

Међутим, постоји један тип проблема који собом не повлачи ту
тешкоћу. То је таква врста проблема у којима се интересујемо само за
оно партикуларно решење које смо назвали решењем „устаљеног стања“.
Видели смо да се у таквим проблемима тражи само да напишемо де-
терминанту Δ и онај минор M за који се тренутно интересујемо; јер,
према једначинама (236) и тумачењу тих једначина које смо затим дали
у § 73, решење устаљеног стања које припада функцији $E_0 e^{int}$, је

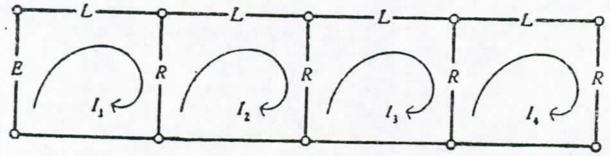
$$E_0 \frac{M(in)}{\Delta(in)} e^{int}.$$

Како тај поступак не захтева да решимо једначину $\Delta(p) = 0$, често је могућно да решења устаљеног стања нађемо чак и тада када су прелазни изрази ван нашег домашаја

Посматрајмо, на пример, мрежу коју показује сл. 42. Њене су диференцијалне једначине:

$$\begin{aligned} (Lp + R)I_1 - RI_2 &= E\,, \\ -RI_1 + (Lp + 2R)I_2 - RI_3 &= 0\,, \\ -RI_2 + (Lp + 2R)I_3 - RI_4 &= 0\,, \\ -RI_3 + (Lp + 2R)I_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Претпоставимо сада да се тражи она врста струје која ће *евентуално* (наиме, по ишчезнућу прелазних струја) тећи у последњем колу овог



Сл. 42

електричног кола, због дејства електромоторне силе $E_0 \cos n t$. Написаћемо:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} L p + R & -R & 0 & 0 \\ -R & L p + 2 R & -R & 0 \\ 0 & -R & L p + 2 R & -R \\ 0 & 0 & -R & L p + 2 R \end{vmatrix} =$$

$$= L^4 p^4 + 7 L^3 R p^3 + 15 L^2 R^2 p^2 + 10 L R^3 p + R^4 ,$$

$$M_4(p) = - \begin{vmatrix} -R & L p + 2 R & -R \\ 0 & -R & L p + 2 R \\ 0 & 0 & -R \end{vmatrix} .$$

На тај начин је I_4 једнако реалном делу од

$$\frac{E_0 R^3 e^{int}}{(L^4 n^4 - 15 L^2 R^2 n^2 + R^4) - i(7 L^3 R n^3 - 10 L R^3 n)} ,$$

тј.

$$I_4 = \frac{E_0 R^3 (L^4 n^4 - 15 L^2 R^2 n^2 + R^4)}{(L^4 n^4 - 15 L^2 R^2 n^2 + R^4)^2 + (7 L^3 R n^3 - 10 L R^3 n)^2} \cos nt -$$

$$- \frac{E_0 R^3 (7 L^3 R n^3 - 10 L R^3 n)}{(L^4 n^4 - 15 L^2 R^2 n^2 + R^4)^2 + (7 L^3 R n^3 - 10 L R^3 n)^2} \sin nt .$$

Толико можемо лако учинити: али, било би врло тешко да нађемо прелазно решење нашег проблема јер би оно захтевало решавање једначине четвртог степена.

ЗАДАЦИ

1. Решити системе једначина:

a) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + y + 4z = 1 ,$$

$$\frac{dy}{dx} + 3 \frac{dz}{dx} - z = 0 .$$

b) $$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + I_1 - \frac{d I_2}{dt} - I_2 = \cos n t ,$$

$$2 \frac{d I_1}{dt} + \frac{d I_2}{dt} + I_2 = 0 .$$

c) $$\frac{dy}{dx} + 2 y - 3 z = x ,$$

$$y - \frac{d^2 z}{dx^2} = 0 .$$

d) $$(p + 3) y_1 - (p + 2) y_2 = f_1(x) ,$$

$$(p + 1) y_1 - (p + 10) y_2 = f_2(x) .$$

2. Решити систем једначина

$$(p^2 - 4) y_1 + (p^2 + 1) y_2 = f_1(x),$$

$$(p^3 + 6) y_1 + (p^3 + 5p) y_2 = f_2(x).$$

(Пошто је детерминанта Δ нижег степена од минора M_1 и M_2, треба разломке M_1/Δ и M_2/Δ делити све дотле док се не добије неки остатак нижег степена од детерминанте Δ. Количник из тог остатка и детерминанте Δ може се тада разложити на парцијалне разломке).

3. Решити систем једначина

$$(p + 1) y_1 + (p + 3) y_2 = f_1(x) ,$$

$$p y_1 + (p + 2) y_2 = f_2(x) .$$

(Примењујући да је $y_1 + y_2 = f_1 - f_2$ и замењујући ово у диференцијалној једначини, могућно је наћи решење одмах. Ипак вреди покушати да се до краја изведе формални процес решавања операторима).

ГЛАВА XI

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА

§ 75. Увод

Доспели смо сада до краја онога што се управо може сматрати да спада у област једног елементарног уџбеника о диференцијалним једначинама; јер, диференцијалне једначине вишег реда које нису линеарне или ако су линеарне а имају променљиве коефицијенте, обично захтевају специјалну технику решавања, коју је подесније задржати за један виши уџбеник. Ипак, постоје извесни појмови који се у техничкој литератури јављају тако често да ће, вероватно, за читаоца бити користан један увод у те појмове. Задатак је овог поглавља да пружи један такав *увод*, а не радно знање.

§ 76. Обична досетка

Неке диференцијалне једначине другог реда у којима се не јавља експлицитно или x или y посматрали смо у § 33, и нашли смо да се оне одмах своде на диференцијалне једначине првог реда када за зависно променљиву узмемо $y' = \frac{dy}{dx}$. Постоји овоме блиска досетка која се односи на неке диференцијалне једначине у којима се не јављају експлицитно x и $\frac{dy}{dx}$, а коју би читалац требао да зна због њене готово опште примене у механици и физици. Када је решимо по $\frac{d^2y}{dx^2}$, таква једначина постаје

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y). \tag{241}$$

Помножимо ли је са $2\frac{dy}{dx}$, добићемо

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 2f(y)\frac{dy}{dx}. \tag{242}$$

Очигледно, чим погледамо ову једначину, видимо да је њена лева страна извод од $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, а њена десна страна извод од $2\int f(y)\,dy$. Зато је

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y)\,dy + \alpha, \tag{243}$$

па је

$$x + \beta = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + \alpha}}$$

решење диференцијалне једначине (241).

Када је добро расмотримо, видимо да је ова досетка идентична са поступцима које смо изложили у § 33, што се може проверити тражењем решења онако како би се чинило у том одељку.

Када напишемо $\frac{d^2y}{dx^2} = y'\frac{dy'}{dx}$, диференцијална једначина (241) постаје

$$y'\,dy' = f(y)\,dy.$$

Ова се врло мало разликује од једначине (242). Уствари, ако је помножимо са 2 и поделимо са dx, она постаје идентична са једначином (248). Очигледно, њено је решење

$$y'^2 = 2\int f(y)\,dy + \alpha,$$

које је идентично са (243). Даље су обе методе решавања исте.

Једна од ових двеју метода не може се много претпостављати другој: уколико постоји, такво преимућство припада методи изложеној у § 33, којом се могу решити једначине у којима се јавља и $\frac{dy}{dx}$, док помоћу друге методе то није могућно. За ово је одличан пример онај који смо дали у § 33. Међутим, начин решавања који смо изложили у овом одељку тако је распрострањен да ће, раније или касније, читалац сигурно на њега наићи.

§ 77. Решавање помоћу редова

У § 25 смо скренули пажњу на чињеницу да диференцијалне једначине често воде интегралима који се не могу лако израчунати, и показали смо да се ти интеграли често могу развити у редове, ове или оне врсте. У § 65 смо поново нашли да су методе решавања операторима могле довести до решења у облику реда. Међутим, примена редова је стварно много шира него што би се могло закључити из тих примера; јер, када решење једначине не можемо написати у облику неког експлицитног интеграла или чак ни у облику „операторског решења“, можемо прибећи редовима. Други пример овог одељка је тог типа, док је први само илустрација те методе решавања.

Претпоставимо да треба решити једначину

$$\frac{dy}{dx} = y^2 . \tag{244}$$

Очигледно, решење ове једначине је

$$y = -\frac{1}{x+\alpha} , \tag{245}$$

али ћемо засад претпоставити да је оно непознато. Шта више, *узмимо* да је решење написано у облику реда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots , \tag{246}$$

у ком су сви коефицијенти a непознати. *Ако* такав ред постоји и *ако* је он конвергентан, диференцирањем тог реда члан по члан лако можемо наћи ред за $\frac{dy}{dx}$. Даље, кад ред (246) помножимо самим собом, можемо наћи и ред за y^2. Та су два резултата:

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + 4\,a_4 x^3 + \cdots , \tag{247}$$

и

$$\left. \begin{aligned} y^2 = a_0^2 + 2\,a_0 a_1 x + 2\,a_0 a_2 x^2 + 2\,a_0 a_3 x^3 + \cdots \\ + a_1 x^2 + 2\,a_1 a_2 x^3 + \cdots \end{aligned} \right\} \tag{248}$$

Може се показати да два реда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

и

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots ,$$

претстављају исту функцију тада и само тада када је свако a једнако одговарајућем b, то јест, само када су оба реда идентична. Зато, ако је (246) заиста решење диференцијалне једначине (244), редови (247) и (248) морају бити идентични јер оба ова реда морају бити једнака изводу $\frac{dy}{dx}$. Међутим, то захтева да буде

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2 , \\ 2a_2 &= 2a_0 a_1 , \\ 3a_3 &= 2a_0 a_2 + a_1^2 , \\ 4a_4 &= 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 . \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Из ових једначина лако је видети да је

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2 , \\ a_2 &= a_0^3 , \\ a_3 &= a_0^4 , \\ a_4 &= a_0^5 , \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

и да зато ред (246) мора бити облика

$$y = a_0 (1 + a_0 x + a_0^2 x^2 + \cdots\cdots) .$$

Одмах видимо да је збир овог реда

$$y = \frac{a_0}{1 - a_0 x} ,$$

који је идентичан са (245) само ако је $a_0 = -\frac{1}{\alpha}$.

Као други пример, посматрајмо диференцијалну једначину

$$3y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y \frac{dy}{dx} + y^2 - 1 = 0 , \tag{249}$$

која се јавља у извесним основним проучавањима у вези са електронским цевима. Околности су такве да y мора бити једнако нули, а $\frac{dy}{dx}$ мора бити једнако јединици када је x једнако нули. Зато се у овом случају тражи *партикуларно* решење а не опште.

Претпоставимо, дакле, да је решење

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$$

Ако за $x = 0$ тај ред треба да буде једнак нули, a_0 мора бити једнако нули; а ако $\frac{dy}{dx}$ треба да се сведе на јединицу, a_1 мора бити једнако 1. Зато тај ред мора бити облика

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots,$$

Очигледно, његови су изводи

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots\cdot,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots\cdot,$$

тако да (249) постаје

$$\begin{array}{r|llll}
3y\frac{d^2y}{dx^2} & & +6a_2 x + 18a_3 x^2 + & 36a_4 x^3 + & \\
 & & +6a_2^2 x^2 + & 24a_2a_3 x^3 + & \cdots\cdot \\
+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 & +1 & +4a_2 x + 6a_3 x^2 + & 8a_4 x^3 + & \\
 & & +4a_2^2 x^2 + & 12a_2a_3 x^3 + & \cdots\cdot \\
+4y\frac{dy}{dx} & & 4x + 12a_2 x^2 + & 16a_3 x^3 + & \\
 & & + & 8a_2^2 x^3 + & \cdots\cdot \\
+y^2 & & +x^2 + & 2a_2 x^3 + & \cdots\cdot \\
-1 & -1 & & & = 0,
\end{array}$$

и зато долазимо до једначина

$$10a_2 + 4 = 0,$$

$$24a_3 + 10a_2^2 + 12a_2 + 1 = 0,$$

$$44a_4 + 36a_2a_3 + 16a_3 + 8a_2^2 + 2a_2 = 0.$$

Из ових налазимо:

$$a_2 = -\frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{11}{120}, \quad a_4 = -\frac{47}{3300}, \cdots\cdots.$$

На тај начин добивамо једначину

$$y = x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{11}{120}x^3 - \frac{47}{3300}x^4 + \cdots,$$

а како ред веома брзо конвергира, он нам даје прилично задовољавајуће решење дотичног проблема. Боље решење није познато.

Постоји и друга метода решавања помоћу редова, која је каткад једноставнија од ове, коју смо горе скицирали. Можемо је илустровати на диференцијалној једначини (244) коју смо већ решили са контурним условом да је $y = a_0$ за $x = 0$.

Знамо да ма за коју функцију $y(x)$ Тајлоров ред гласи

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{1!}x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{3!}x^3 + \cdots,$$

где $y_0, y_0', \cdots$ претстављају вредности функције y и њених разних извода за $x = 0$. Прву вредност, y_0, већ знамо из нашег контурног услова. Другу вредност, y_0', можемо одмах наћи када приметимо да извод y_0' мора бити једчак y_0^2 и зато једнак a_0^2, јер диференцијална једначина (244) мора подједнако важити за $x = 0$ као и ма за коју другу вредност x. Што се тиче вредности y_0'', можемо је наћи диференцирањем једначине (244), то јест

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx},$$

а затим увршитавањем у тој једначини вредности y и $\frac{dy}{dx}$ за $x = 0$. Тако добивамо

$$y_0'' = 2a_0^3.$$

Слично,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2}$$

даје

$$y_0''' = 6a_0^4,$$

и тако даље. Када све те вредности заменимо у општем обрасцу за Тајлоров ред, добивамо

$$y(x) = a_0 + \frac{a_0^2 x}{1!} + \frac{2a_0^3x^2}{2!} + \frac{6a_0^4x^3}{3!} + \cdots\cdot.$$

Наравно, ова се једначина своди на облик

$$y = a_0(1 + a_0 x + a_0^2 x^2 + a_0^8 x^3 + \cdots) = \frac{a_0}{1 - a_0 x},$$

као и раније.

Ова схема налажења коефицијената реда често захтева мање посла него она из прве методе; али, не може се увек применити. На пример, читалац ће одмах видети да се она не може применити на решавање диференцијалне једначине (249).

§ 78. На шта се може наићи у примени редова на решавање диференцијалних једначина

Али, не треба закључити да се увек може наћи неки задовољавајући цео ред. Напротив, тај се случај ретко дешава.

На пример, решење диференцијалне једначине

$$2\,xy\frac{dy}{dx} = 2\,x^3 + y^2,$$

$$\frac{x^3\,dy^2}{x^2\,dx} = 2x^3 + y^2$$

је

$$y = \sqrt{a\,x + x^3}\,,$$

то јест, функција која се не може развити у ред типа (246) Ако покушамо да нађемо такав ред, доћи ћемо до закључка да сви његови коефицијенти морају бити једнаки нули.

Слично, решење диференцијалне једначине

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} - 1$$

је

$$y = \alpha\,x\,e^{-\frac{1}{x}} - x\,e^{-\frac{1}{x}}\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\,dx;$$

али, када претпоставимо да је решење неки ред и одредимо коефицијенте, добивамо резултат

$$y = x^2\,(1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots\cdot)\,.$$

Тај ред *дивергира за сваку вредност* x, и зато је без користи за већину практичних задатака.

Другим речима, могућно је да се не добије никакав одговор, као у нашем првом примеру, или да се добије одговор без користи, као у другом. Што је још горе, *могућно је*, ма да се то ретко дешава, да се добије *погрешан* одговор. Наравно, ово не може бити разлог да се избегавају решења у облику реда или чак да се истиче потреба за претходно осигуравање да ће они довести до тачних резултата; али, то налаже велику опрезност када не постоји могућност таквог осигуравања.

§ 79. Беселова једначина

Беселова једначина

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dR}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0\,, \tag{250}$$

чија су решења позната као Беселове функције, јавља се у многим проблемима теориске физике, при чему је подесно или потребно употребити цилиндричне координате, због контурних услова. На пример, читалац је на њу наишао у задатку 6, § 46.

Узмимо да је неко решење диференцијалне једначине (250) цео ред

$$R = a_0 + a_1\,r + a_2\,r^2 + \cdots\cdot + a_j\,r^j + \cdots\cdot \tag{251}$$

Тада је

$$\begin{aligned}
\frac{d^2R}{dr^2} &= & & 1\cdot 2\cdot a_2 + 2\cdot 3a_3\,r + \cdots,\\
\frac{1}{r}\,\frac{dR}{dr} &= & a_1\frac{1}{r} + {} & 2a_2 + 3a_3\,r + \cdots,\\
R &= & & a_0 + a_1\,r + \cdots,\\
-\frac{n^2}{r^2}R &= -n^2\,a_0\frac{1}{r^2} & - n^2\,a_1\frac{1}{r} & - n^2\,a_2 - n^2\,a_3\,r + \cdots.
\end{aligned}$$

Ако је ред (251) решење диференцијалне једначине (250), збир свих десних страна ових једначина мора бити једнак нули. Даље, ако је тај збир једнак нули за све вредности r, посебно морају бити једнаки нули збирови коефицијената уз једнаке степене од r. Зато је $n^2\,a_0 = 0$, и, ако је n различито од нуле,

$$a_0 = 0\,.$$

Из друге колоне горњих једначина добивамо $(1 - n^2)\,a_1 = 0$. Зато, ако n није једнако јединици,

$$a_1 = 0\,.$$

Из следеће колоне налазимо $(4 - n^2)\,a_2 = 0$, одакле, ако n није једнако 2,

$$a_2 = 0\,.$$

Поступајући на овај начин, можемо закључити да је све до a_n свако a једнако нули. Међутим, прва колона у којој се јавља a_n, своди се на $(n^2 - n^2)\,a_n$, па је идентички једнака нули ма какву вредност имало a_n. Зато ред (251) почиње са чланом n-тог степена по r, чији коефицијент може имати ма какву вредност.

Посматрајмо сада j-ту колону, за коју је $j > n$. Из ње следи једначина

$$a_j(n^2 - j^2) = a_{j-2}.$$

Из ове једначине одмах видимо да су

$$a_{n+1},\ a_{n+3},\ a_{n+5}, \cdots,$$

такође једнаки нули, јер је $a_{n-1} = 0$. Тако исто следи да је

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{2(2n+2)},$$

$$a_{n+4} = \frac{a_n}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)},$$

$$a_{n+6} = -\frac{a_n}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)},$$

и тако даље.

Сада смо одредили све коефицијенте реда (251) сем коефицијента a_n, који је заједнички фактор за све чланове и који је произвољан. Он се обично смењује новом произвољном константом A, тако да је

$$a_n = \frac{A}{2^n n!}.$$

Тада је лако написати све коефицијенте помоћу ове нове константе A. Уствари, можемо извести општи образац

$$a_{n+2p} = \frac{(-1)^p}{2^{n+2p}} \frac{A}{(n+p)!\,p!}.$$

Зато решење диференцијалне једначине (250) гласи

$$R = A\left[\left(\frac{r}{2}\right)^n \frac{1}{n!} - \left(\frac{r}{2}\right)^{n+2} \frac{1}{(n+1)!\,1!} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{r}{2}\right)^{n+4} \frac{1}{(n+2)!\,2!} - \cdots \right]. \tag{252}$$

Обично се израз у загради обележава са $J_n(r)$. Он је познат као *Беселова функција прве врсте и n-тог реда.* Она се такође може написати у облику

$$J_n(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{ir}{2}\right)^{2p}}{(n+p)!\,p!}. \tag{253}$$

Горња се дискусија заснива на претпоставци да је n цео број. За разломљене вредности од n метода решавања је слична. Ако је n разломљен број, ред који задовољава диференцијалну једначину (250), може се наћи у облику

$$R = a_n r^n + a_{n+1} r^{n+1} + \cdots,$$

у ком су сви изложиоци разломљени бројеви јер је n разломљен број. Физички проблеми воде каткад таквим разломљеним вредностима од n, али у техничкој литератури ни близу нису тако чести као проблеми који садрже целе изложиоце. Нема потребе да о њима даље дискутујемо, само ћемо приметити да је израз који се налази у средњој загради на десној страни једначине (252), тј. израз (253), још увек пуноважна дефиниција функције $J_n(r)$ чак када је n разломљен број, само ако се целисходно прошири појам факториеле на разломљене количине $n, n+1, \cdots\cdot$.

Најзад, неки проблеми теориске физике, наиме они у којима се одређује ефективни отпор проводника који проводи високо-фреквентну струју, воде једначинама које су идентичне са једначином (250), изузев што се r смењује новом променљивом $\sqrt{-i}\,q$, где је q реална количина. Међутим, чак и у таквим случајевима, (253) је пуноважно решење. Ако, дакле, напишемо $\sqrt{-i}\,q$ свуда где се јавља r, десна страна те једначине постаје комплексна. Обично се сматра да су реални и имагинарни делови те једначине раздвојени и да се редом обележавају са $\mathrm{ber}_n\, q$ и $\mathrm{bei}_n\, q$[1]. Другим речима, $\mathrm{ber}_n\, q$ и $\mathrm{bei}_n\, q$ су реални и имагинарни делови функције $J_n(\sqrt{-i}\,q)$, то јест

$$J_n(\sqrt{-i}\,q) = \mathrm{ber}_n\, q + i\,\mathrm{bei}_n\, q.$$

Једначина (250) је диференцијална једначина другог реда, и зато би требало да њено решење садржи две произвољне константе. Решење дато са (252) садржи само једну произвољну константу, и зато то није *опште* решење проблема. Када n *није* цео број, може се показати да је опште решење

$$R = A J_n(r) + B J_{-n}(r),$$

где се $J_{-n}(r)$ дефинише на тај начин што се једино напише $-n$ место n где се год оно јавља у (252). С друге стране, када *је* n цео број, тако дефинисана функција $J_{-n}(r)$ једнака је или функцији $J_n(r)$ или њеној негативној вредности, тако да је

$$R = [A \pm B] J_n(r) = C J_n(r).$$

Како ова једначина садржи само једну произвољну константу, мора постојати још неко друго решење диференцијалне једначине (250) када је n цео број. Обично се то решење обележава са $K_n(r)$ и зове *Беселова*

---

[1] Овим се ознакама намерава са be потсетити на *Bessel*-а, док завршна слова r и i означавају, редом, „реалан“ и „имагинаран“.

функција друге врсте и n-тог реда; и то се решење може приказати једним бесконачним редом помоћу методе коју нема потребе да испитујемо. Важна особина тих функција друге врсте је та што све оне постају бесконачне за $r = 0$. Како контурни услови које намеће већина физичких проблема не допуштају бесконачних вредности, обично се налази да је коефицијент B у општем решењу

$$R = A\, J_n(r) + B\, K_n(r)\,,$$

једнак нули, што не значи ништа друго до то да решење проблема не садржи Беселову функцију друге врсте.

За Беселове функције прве и друге врсте, као и за поменуте функције $\operatorname{ber} q$ и $\operatorname{bei} q$, израчунате су опширне таблице. Оне се употребљавају на исти начин као и тригонометриске и логаритамске таблице.

§ 80. Снижавање реда линеарне диференцијалне једначине

Када покушамо да решимо линеарну диференцијалну једначину s-тог реда, а знамо неко партикуларно решење које *„припада нули“*, могућно је помоћу овог партикуларног решења ту диференцијалну једначину свести на не неку другу диференцијалну једначину $(s-1)$-ог реда.

Да бисмо ово видели, узмимо да је $y = \phi(x)$ партикуларно решење диференцијалне једначине (134) које *„припада нули“*. Сменимо y новом промењљивом z коју одређује једначина

$$y = \phi(x)\, z\,.$$

Тада је

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z\,\frac{d\phi}{dx} + \phi\,\frac{dz}{dx}\,, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= z\,\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2\,\frac{dz}{dx}\,\frac{d\phi}{dx} + \phi\,\frac{d^2z}{dx^2}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

и тако даље. Све су ове једначине линеарне по z и његовим изводима. Зато, кад их уврстимо у (134), добићемо нову *линеарну* диференцијалну једначину са зависно промењљивом z.

Шта више, дефинисање ма ког извода $\dfrac{d^iy}{dx^i}$ у (254) почиње са чланом $z\,\dfrac{d^i\phi}{dz^i}$ *а тај је члан једини у ком се јавља само* z, а не његови изводи. Зато у нашој новој диференцијалној једначини са зависно промењљивом z, коефицијент уз само z, мора бити

$$f_s(x)\,\frac{d^s\phi}{dx^s} + f_{s-1}(x)\,\frac{d^{s-1}\phi}{dx^{s-1}} + \cdots + f_0(x)\,\phi, \quad \text{то јест} \quad F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)\phi\,.$$

Али, ово је по дефиницији једнако нули. Другим речима, *нова једначина садржи изводе од z све до s-тог, али не и само z.* Зато је она $(s-1)$-ог за промењљиву $z' = \dfrac{dz}{dx}$.

На пример, узмимо једначину

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0\,, \tag{255}$$

чије је једно решење $y = \sin x$. Ако напишемо

$$y = z \sin x\,,$$

налазимо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -z \sin x + 2 \cos x \frac{dz}{dx} + \sin x \frac{d^2z}{dx^2}\,,$$

одакле

$$\sin x \frac{d^2z}{dx^2} + 2 \cos x \frac{dz}{dx} = 0\,,$$

или

$$\frac{dz'}{z'} + \frac{2 \cos x\, dx}{\sin x} = 0\,.$$

Очигледно, решење ове једначине је

$$z' \sin^2 x = \alpha\,,$$

или

$$dz = \alpha \operatorname{cosec} x\, dx\,.$$

Из ове једначине налазимо

$$z = \beta - \alpha \operatorname{cotang} x\,,$$

или

$$y = \beta \sin x - \alpha \cos x\,.$$

То је заиста *опште* решење диференцијалне једначине (255).

Као други пример, применимо наш поступак на Беселову једначину (250) када знамо да је *једно* њено решење $J_n(r)$. Написаћемо

$$R = z\, J_n(r)\,,$$

$$\frac{dR}{dr} = z\,\frac{dJ_n}{dr} + J_n\,\frac{dz}{dr}\,,$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = z\,\frac{d^2J_n}{dr^2} + 2\,\frac{dz}{dr}\,\frac{dJ_n}{dr} + J_n\,\frac{d^2z}{dr^2}\,;$$

стога (250) постаје

$$J_n \frac{d^2z}{dr^2} + \left(2\frac{dJ_n}{dr} + \frac{1}{r} J_n\right)\frac{dz}{dr} + \left[\frac{d^2J_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dJ_n}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) J_n\right] z = 0 .$$

Али, како је J_n решење диференцијалне једначине (250), знамо да је коефицијент који стоји уз z једнак нули. Зато се та једначина своди на

$$J_n \frac{dz'}{dr} + \left(2\frac{dJ_n}{dr} + \frac{1}{r} J_n\right) z' = 0 ,$$

или

$$\frac{dz'}{z'} + 2\frac{dJ_n}{J_n} + \frac{dr}{r} = 0 ,$$

чије је решење

$$z' r J_n^2 = \alpha ,$$

или

$$z = \beta + \alpha \int \frac{dr}{r J_n^2(r)} .$$

Изузев тешкоћа интеграције, ово је сасвим прихватљиво *опште* решење диференцијалне једначине (250). Заиста, из њега бисмо могли добити функцију $K_n(x)$ коју смо поменули у § 79; али, како то није баш најједноставнији начин њеног извођења, можда ће тако исто бити добро да то и не покушавамо.

Важно је напоменути то да у случају када знамо једно *партикуларно* решење диференцијалне једначине другог реда, увек је можемо заменити неком другом диференцијалном једначином првог реда и на тај начин наћи њено *опште* решење.

ОДГОВОРИ НА ЗАДАТКЕ

Глава I, § 5, стр. 14.

1. $\frac{1}{x}\,\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{w}{x}$.
2. $x^2 \frac{d^2w}{dx^2} + 4x\frac{dw}{dx} + 2w = 0; \qquad y = \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}\right)^2$.
3. $\frac{dw}{dx} = a\, e^{cx}; \qquad y = \frac{a}{c} + \alpha\, e^{-cx}$.
4. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta\, e^{2t} = 0$.
5. $(1 - x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + m P = 0$.
6. $\frac{dw}{w} = \frac{dx}{x}$.
7. $\frac{dy}{dx} = 2xy$.
8. $\frac{dz}{dx} = e^{-(1+n)w}\left(\frac{d^{m+1}y}{dw^{m+1}} - n\,\frac{d^m y}{dw^m}\right)$.

11. $(x - \cos\theta)^2 + (y - \sin\theta)^2 = r^2$.
12. $x^3 + y^2 = (1 \pm r)^2$.
13. $y = -\frac{x^2}{8}$.
14. $x = \sin\theta - \cos^3\theta; \quad y = \sin^3\theta - \cos\theta$.
15. $\frac{3\pi}{32}$.

16. *a*) Обична, 2-ог реда, 3-ег степена, нелинеарна.
    b) Обична, 1-ог реда, 1-ог степена, линеарна са промењљивим коефицијентима.
    c) Парцијална, 2-ог реда, 1-ог стенена, линеарна са константним коефицијентима.

17. *a*) Обична, 2-ог реда, 1-ог степена, нелинеарна.
    b) Обична, 2-ог реда, 1-ог степена, нелинеарна сем ако је линеарна функција $f(y, z)$.

18. $\dfrac{dw}{du} + 2\left(\dfrac{1}{u} - 1\right) w = 3e^{2u}$.

Глава II, § 11, страна 28.

1. $\alpha = \dfrac{\theta_0' \cos pt_1 - \theta_1' \cos pt_0}{p \sin p\,(t_1 - t_0)}$; $\quad \beta = \dfrac{\theta_0' \sin pt_1 - \theta_1' \sin pt_0}{p \sin p\,(t_1 - t_0)}$.

2. $\alpha = \dfrac{\theta_0\, p \cos pt_1 - \theta_1' \sin pt_0}{p \cos p\,(t_0 - t_1)}$; $\quad \beta = \dfrac{\theta_0\, p \sin pt_1 - \theta_1' \cos pt_0}{p \cos p\,(t_0 - t_1)}$.

Глава III, § 20, страна 43.

4. $\dfrac{d\theta}{dt} = k(\theta_0 - \theta)$, где је θ читање скале на термометру а θ_0 температура хладне средине.

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = k\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$.

6. $y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = r^2$.

7. $\dfrac{8}{27}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x + y$.

8. $4y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 2x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 4xy\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + x^3 = 16y^2$.

9. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}} = 0$.

10. $\dfrac{dy}{dx} = ky(x - 2)$.

11. $m\dfrac{dv}{dt} = F - \dfrac{v}{t+1}$.

Глава IV, § 23, страна 49.

1. $\operatorname{tang}\theta = \alpha + \dfrac{ms}{k}$; $\quad \alpha = 0$.

2. $y = \alpha e^{-cx} + \dfrac{a}{c}$.

3. $\theta = \theta_0 + \alpha e^{-kt}$; за $0{,}520^0$ вишу од температуре околне средине; повољан.

4. *a*) $\sec x = \alpha - \operatorname{tang} y$.
    b) $y\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - y^2} = \alpha$.
    c) $y = b + \dfrac{\alpha x}{bx + 1}$.

5. $x = \dfrac{M e^{(Nm - Mn)(\alpha + kt)} - N}{m e^{(Nm - Mn)(\alpha + kt)} - n}$.

6. $y + \operatorname{arc\,tang} y = \alpha + x + \log x$.

Глава IV, § 25, страна 55.

1. $y = e^x\left(\alpha + \log x - x + \dfrac{x^2}{2\cdot 2!} - \dfrac{x^3}{3\cdot 3!} + \dfrac{x^4}{4\cdot 4!} - \cdots\right)$.

2. $y = \alpha e^x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2!}{x^3} + \dfrac{3!}{x^4} - \dfrac{4!}{x^5} + \cdots$.

3. $\mathrm{Ci}\,1 = 0{,}3374$; $\quad \mathrm{Ci}\,10 = -0{,}0455$.

Глава IV, § 29, страна 65.

1. $y = \alpha e^{\frac{y}{x}}$.

2. $y = \alpha x\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. $ax^2 + bxy + cy^2 - gx + ey = \alpha$.

4. $\sin^2 x + \sin^2 y = \alpha$.

5. $2t = ml + l\sqrt{4 - m^2} \operatorname{tang}\left[\frac{\sqrt{4 - m^2} \log \alpha\sqrt{l^2 - mtl + t^2}}{m}\right].$

6. $r^2 - \theta^2 = \alpha r^3.$

7. $\cos(a\alpha + b\beta) + \sin(b\alpha + a\beta) = \gamma.$

8. $T^2 + t^2 + 2 \arcsin\frac{T}{t} = \alpha.$

Глава IV, § 31, страна 68.

1. $y = 1 + \alpha e^{-\frac{x^2}{2}}.$

2. $xy = \alpha - x\cos x + \sin x.$

3. $x^4y^4 = \alpha - 4x^4\cos x + 16x^3\sin x + 48x^2\cos x - 96x\sin x - 96\cos x.$

4. $\rho = a\theta + \alpha\theta\sqrt{1 - \theta^2}.$

5. $T = (1 + \alpha t + \log t)^{-1}.$

6. $y = \alpha e^{-\sin x} + \sin x - 1.$

7. $y = \frac{\sec x + \operatorname{tang} x}{\sin x + \alpha}.$

8. $y = \alpha e^{-\phi} + \phi - 1.$

9. $\theta = \theta_0 + \alpha e^{-kt}.$

Глава IV, § 32, страна 71.

2. $x + y + 2 \mp 2\sqrt{1 + xy} = \alpha + 2\log(-1 \pm \sqrt{1 + xy}) - 2\log x.$

3. $\Phi = \frac{1}{27} - \frac{1}{9}(\alpha + 3r) \pm \frac{2}{27}(\alpha + 3r)^{3/2}.$

4. $z + 1 = \log(-1 \pm \sqrt{\alpha + 2y}) \pm \sqrt{\alpha + 2y}.$

5. $\alpha(2T - t\sqrt{t^2 + T})^{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{t^2 + T} - t(1 - \sqrt{17})}{4\sqrt{t^2 + T} - t(1 + \sqrt{17})}.$

6. $y = \alpha x + \phi(\alpha).$

7. $e^y = \alpha(x + \sqrt{x^2 - 1}).$

Глава IV, § 33, страна 74.

1. $\theta = \alpha\sin(pt + \beta).$

2. $\operatorname{tang}\theta + \alpha = \frac{ms}{k}.$

3. $2m(\beta + y) = k\left(e^{\frac{m(x+\alpha)}{k}} + e^{-\frac{m(x+\alpha)}{k}}\right).$

4. $ne = \sqrt{\frac{2e}{m}\phi^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{9\pi \cdot x^2}.$

5. $12\pi nex =$

$$= \sqrt{\beta + 8\pi mn\sqrt{v_0{}^2 + \frac{2e(\phi - V_0)}{m}}} \cdot \left(\sqrt{v_0{}^2 + \frac{2e(\phi - V_0)}{m}} - \frac{\beta}{4\pi mn}\right).$$

6. $cp\,f(x) = \alpha\sin(cpx + \beta).$

7. $\beta + ky = \sqrt{1 - (kx + \alpha)^2} + \log(kx + \alpha) - \log(1 + \sqrt{1 - (kx + \alpha)^2}).$

9. *a*) $v = \frac{\alpha e^{3u}}{u^2}.$

   b) $\arcsin v = \alpha - 2\sqrt{1 - u^2}.$

   c) $v = \alpha - u + \frac{e^{2u}}{8}.$

   d) $\log y = \alpha - \frac{1}{2}\cos(x^3 - 1) - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}.$

   e) $\alpha\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}.$

10. *a*) $v = 1 + \alpha e^{-u^2}.$

   b) $\log(1 + v^2) + 2\operatorname{arc\,tang} u = \alpha.$

   c) $\operatorname{tang} v = \alpha + \log\log u.$

11. $x = \alpha + L\log y - L\log(L - \sqrt{L^2 - y^2}) - \sqrt{L^2 - y^3}.$

12. $2\log y = \alpha + k(x - 2)^2.$

13. $(m + 1)v = F\left[t + 1 - \frac{1}{(t + 1)^{1/m}}\right].$

Глава V, § 36, страна 80.

1. $(27y^2 - 2x^3)(16^2y^4 - 32x^3y^2 + x^6) = 0$.
2. $\rho = \frac{1}{2}$.
3. $\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \rho^2(2\rho - 1); \quad \rho = \frac{1}{2}$.

Глава VI, § 39, страна 85.

1. $\theta = 4^0C + 0{,}126\frac{S}{a}$.
2. $\theta = 52{,}9^0C$.
3. Дебља жица.
4. $pH = 2\pi rg(\theta_0 + \theta_1)\operatorname{tang\,hyp}\left(\frac{pl}{2}\right)$.
5. $\theta_l = \frac{kp\,\theta_0}{kp\cosh\text{yp}\,pl + g\sin\text{hyp}\,pl}$.

Глава VI, § 41, страна 89.

1. $\log\beta(x^2 + y^2) = -2\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$.
2. $x = \beta y$.
3. $$\sqrt{8\operatorname{tang}^2\alpha - 1}\,\log\beta(y^2\operatorname{tang}\alpha + 2x^2\operatorname{tang}\alpha - xy) = \\ = 6\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2y\operatorname{tang}\alpha - x}{x\sqrt{8\operatorname{tang}^2\alpha - 1}}\right).$$
4. $$(1 - \beta^2)^{3/2}(y + \gamma) = \beta\sqrt{1 - \beta^2}\sqrt{x^2(1 - \beta^2) + 2\alpha\beta x - \alpha^2} - \\ - \alpha\log\left(\sqrt{x^2(1 - \beta^2) + 2\alpha\beta x - \alpha^2} + x\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right).$$
5. $y^2 + z^2 = \alpha + 2\log\cos x$.

Глава VI, § 44, страна 94.

1. $24qy = w(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)$, ако је w величина терета на јединицу дужине, а греда је у $x = 0$ хоризонтално укљештена.
2. $12qy = W(3lx^2 - 2|x|^3)$, где се x мери од оштрице подупирача.

3. $$x = \beta + \int\frac{[W(y + \varepsilon)^2 - \alpha]\,dy}{\sqrt{4q^2 - [W(y + \varepsilon)^2 - \alpha]^2}}.$$
4. $\frac{y + \varepsilon}{y_0 + \varepsilon} = \sin\left[\frac{2x}{l}\left(\arcsin\frac{\varepsilon}{y_0 + \varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right]$, где је ε дужина горњег и доњег дела стеге а y_0 величина хоризонталног померања средње тачке њеног вертикалног дела.

Глава VI, § 46, страна 100.

1. $f(x) = A\sin n\pi x$, где је n цео број.
3. $k(t) = B\sin\left(n\pi t\sqrt{\frac{T}{m}} - C\right); \quad \frac{n}{2}\sqrt{\frac{T}{m}}$.
4. Оне су пропорционалне целим бројевима 1, 2, 3, · · · · · .
5. Амплитуда и фаза треперења.
6. $c^2\frac{\partial^2x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial r}$.

Глава VI, § 51, страна 115.

1. $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.
2. $\operatorname{arg\,sinhyp}(1{,}007y) = \operatorname{arg\,coshyp}(1{,}007x) - 0{,}125$.
3. $x = t$.
4 Цилиндар.
5. $r = \sqrt[3]{\frac{15V}{4\pi}}\sqrt{\cos\theta}$.
6. $y = 1 + \alpha\operatorname{coshyp}\frac{x}{\alpha} - \alpha\operatorname{coshyp}\frac{1}{\alpha}$, где је α корен једначине $2\alpha\operatorname{sinhyp}\frac{1}{\alpha} = 3$. Ова једначина има два корена, $\alpha = \pm 0{,}6165$. Негативан корен даје површину *максималне* величине.
7. Лопта.
8. $\phi = \frac{\pi}{2}$.
9. $$x = \beta + \int\frac{\lambda\,dy}{\sqrt{[\alpha - \log(1 + y)]^2 - \lambda^2}}.$$

Глава VII, § 56, страна 132.

1. $\theta = \alpha_1 e^{px} + e_2 e^{-px}$.
2. $y = \alpha_1 e^{ix} + \alpha_2 e^{-ix}$.
3. $y = \alpha_1 e^{3x} + \alpha_2 e^{4x}$.
4. $r = \alpha_1 e^{a\theta} + \alpha_2 e^{-a\theta}$.
5. $y = \alpha_1 e^{ax} + \alpha_2 e^{-ax} + \alpha_3 e^{iax} + \alpha_4 e^{-iax}$.
6. $v = \frac{1}{29} e^{-2u} + \alpha_1 e^{(3+2i)u} + \alpha_2 e^{(3-2i)u}$.
7. $y = \alpha_1 e^{(-2+\sqrt{5})t} + \alpha_2 e^{(-2-\sqrt{5})t} - \frac{1}{10} \sin t - \frac{1}{5} \cos t$.
8. $y = \alpha_1 e^{\sqrt{3}ix} + \alpha_2 e^{-\sqrt{3}ix} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{18} \sin 3x$.
9. $x = \alpha_1 e^{\sqrt{2}(1-i)t} + \alpha_2 e^{-\sqrt{2}(1-i)t} + \alpha_3 e^{\sqrt{2}(1+i)t} + \alpha_4 e^{-\sqrt{2}(1+i)t} +$
   $+ \frac{1}{17} e^{it}$.
10. $x = \alpha_1 e^{-\frac{t}{5}} + \frac{1}{226} \sin 3t - \frac{15}{226} \cos 3t$.
11. $x = \alpha_0 + \alpha_1 e^{t} + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} + \frac{1}{360} e^{-3t}$.
14. $y = \alpha_1 x^6 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 + \alpha_4 x^{-3} + \frac{17}{216} x^6 \log x$.
15. $x = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \log t}{t} + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^8 + \frac{1}{47450} [62 \cos (3 \log t) +$
    $+ 141 \sin (3 \log t)]$.

Глава VII, § 58, страна 141.

1. $I = \frac{\alpha}{RC} e^{-\frac{t}{CR}} + E_0 \frac{R \cos nt - \frac{1}{Cn} \sin nt}{\frac{1}{C^2 n^2} + R^2}$.
2. $I = \frac{\alpha R}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} + E_0 \frac{R \sin nt - Ln \cos nt}{R^2 + L^2 n^2}$; нула.

3. $I = \alpha_1 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + \alpha_2 \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{E_0 Cn \cos nt}{1 - LCn^2}$; $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$; наизменична струја фреквенције $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$; неограничено.
4. $I = -\frac{E_0 Cn}{1 - LCn^2} \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{E_0 Cn}{1 - LCn^2} \cos nt$. Устаљено стање никад неће настати.
5. $1/2\pi\sqrt{LC}$; нису.
6. Сопствена фреквенција.
7. $I = \frac{E_0}{L\bar{n}} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin \bar{n}t$.
8. $R^2 I = 0$, $t < 0$;

   $R^2 I = Rt - L\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$, $0 < t < 1$;

   $R^2 I = -R(t-2) + L\left(1 - 2e^{-\frac{R(t-1)}{L}} + e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$, $1 < t < 2$;

   $R^2 I = L\left(e^{-\frac{R(t-2)}{L}} - 2e^{-\frac{R(t-1)}{L}} + e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$, $2 < t$.

Глава VII, § 61, страна 153.

1. $y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{7}{4}$; јесу.
2. a) $a^2 y = \alpha e^{ax} - ax - 1$.
   b) $a^{n+1} y = \alpha e^{ax} - [(ax)^n + n(ax)^{n-1} + n(n-1)(ax)^{n-2} + \cdots + n!]$.
   c) $(a^2 + n^2) y = \alpha e^{ax} - a \sin nx - n \cos nx$.
   d) $(n - a) y = \alpha e^{ax} + e^{nx}$.

Глава VII, § 63, страна 159.

1. $y = (\alpha_1 + \alpha_2 x) e^{x} + a_3 e^{-x}$.
2. $y = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_4 x^2) e^{x} + \frac{1}{2} e^{2x}$.

3. $r = \alpha_1 e^{\theta} + \alpha_2 \cos\theta + \alpha_3 \sin\theta - \frac{1}{4}(\cos\theta + \theta\cos\theta + \theta\sin\theta)$.

8. $xy = \alpha_1 + \alpha_2 \log x + \frac{1}{2}(\log x)^2$.

Глава VIII, § 74, страна 185.

1. *a*) $$y = 1 - 2\alpha_1 e^{x} - (4 - \sqrt{2}i)\alpha_2 e^{-(1+\sqrt{2}i)x/3} - \\ - (4 + \sqrt{2}i)\alpha_3 e^{-(1-\sqrt{2}i)x/3}.$$

$$z = \alpha_1 e^{x} + \alpha_2 e^{-(1+\sqrt{2}i)x/3} + \alpha_3 e^{-(1-\sqrt{2}i)x/3}.$$

b) $$I_1 = \left(\frac{1}{2}\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 t\right) e^{-t} + (\cos nt - n^2\cos nt + \\ + 2n\sin nt)/(1+n^2)^2,$$

$$I_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2)e^{-t} + \\ + 2n(\sin nt - 3n^2\sin nt - 3n\cos nt + n^3\cos nt)/(1+n^2)^3.$$

c) $$y = \alpha_1 e^{x} + 6\alpha_2 e^{(-3-\sqrt{3}i)x/2} + 6\alpha_3 e^{(-3+\sqrt{3}i)x/2}.$$

$$z = \alpha_1 e^{x} + \alpha_2(1 - \sqrt{3}i)e^{(-3-\sqrt{3}i)x/2} + \\ + \alpha_3(1+\sqrt{3}i)e^{(-3+\sqrt{3}i)x/2} - \frac{x}{3}.$$

d) $$2y_1 = (2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_2 x)e^{-4x} + e^{-4x}\int e^{4x}[f_1(x) + f_2(x)]\,dx + \\ + e^{-4x}\int dx \int e^{4x}[6f_1(x) - 2f_2(x)]\,dx,$$

$$2y_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 x)e^{-4x} + e^{-4x}\int e^{4x}[-f_1(x) + f_2(x)]\,dx + \\ + e^{-4x}\int dx \int e^{4x}[3f_1(x) - f_2(x)]\,dx.$$

2. $$6y_1 = \alpha_1 e^{-\frac{x}{3}} + \alpha_2 e^{-3x} - \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{10}{3}f_1(x) + f_2(x) + \\ + \frac{1}{36}e^{-\frac{x}{3}}\int e^{\frac{x}{3}}[23f_1(x) + 15f_2(x)]\,dx - \\ - \frac{3}{4}e^{-3x}\int e^{3x}[21f_1(x) + 5f_2(x)\,dx,$$

$$6y_2 = \frac{7}{2}\alpha_1 e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2}\alpha_2 e^{-3x} + \frac{df_1(x)}{dx} - \frac{10}{3}f_1(x) - f_2(x) + \\ + \frac{1}{72}e^{-\frac{x}{3}}\int e^{\frac{x}{3}}[161f_1(x) + 105f_2(x)]\,dx + \\ + \frac{1}{8}e^{-3x}\int e^{3x}[63f_1(x) + 15f_2(x)]\,dx.$$

3. $$2y_1 = 2f_1(x) - 3f_2(x) + \frac{df_1(x)}{dx} - \frac{df_2(x)}{dx},$$

$$2y_2 = f_2(x) - \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx}.$$

ИСПРАВКЕ1)

Стр.		место	треба да стоји
5	у 6-ом реду одозго	(8)	(9)
7	у 6-ом реду одозго	(7)	(7')
12	у 2-ом реду напомене	које	која
48	у 13-ом одозго	$\frac{dy}{xd}$	$\frac{dy}{dx}$
54	у 14-ом реду одозго	dv	dw
85	у задатку 3	θ^0	θ_0
87	у 16-ом реду одоздо	$y' = \frac{Y - \operatorname{tang} \alpha}{1 + Y' \operatorname{tang} \alpha}$	$y' = \frac{Y' - \operatorname{tang} \alpha}{1 + Y' \operatorname{tang} \alpha}$
90	у једначини (108)	$\sqrt{\frac{X}{x}}$	$\sqrt{\frac{x}{X}}$
94	у 9-ом реду одоздо	c'	C'
103	у 11-ом реду одоздо	математични	математички
108	у 15-ом реду одоздо	изопериметричких	изопериметриских
109	у 7-мом реду одозго	”	”
134	у 8-мом реду одоздо	електроморну	електромоторну
137	у 16-ом реду одоздо	p_1 и p_1	p_1 и p_2
144	у 3-ем реду одоздо	$y = 10_x$	$y = 10^x$
152	у 13-ом реду одозго	$\frac{c_j}{p - p_j}$	$\frac{c_j}{p - p_j} f(x)$
160	у 10-ом реду одоздо	$c_j e_{pj}^{x}$	$c_j e^{p_j x}$
161	у 3-ој од једначина (105)	$c_1 p_2^2$	$c_1 p_1^2$
162	у 11-ом реду одоздо	$\frac{1}{4} e^{-x}$	$\frac{1}{4} e^{-2x}$
182	у 2-ој од једначина (240)	e^{pt}	$e^{p_3 t}$

---

1) Ситније ортографске као и остале грешке које не утичу на смисао излагања, нису унете у исправке.

РЕГИСТАР