

MF 1561

ING. SVETKO LAPAJNE
DOCENT UNIVERZITETA U LJUBLJANI

KROSOVA METODA

ZA STATIČKO RAČUNANJE KONTINUALNIH,
SKELETNIH I OKVIRNIH KONSTRUKCIJA

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НБ. Бр. 29. 631
БИБЛИОТЕКА

IZDAVAČKO PREDUZEĆE MINISTARSTVA GRAĐEVINA F. N. R. J.
NAUČNA GRAĐEVINARSKA BIBLIOTEKA

KNJIGA 3 — 1949

BEOGRAD

Sva prava,
naročito za prevode na strane jezike,
zadržana

*U spomen pokojnom ocu, koji
je svoj životni poziv posvetio studiju
prirodnih istina i pravednih zakona
života*

autor

PREDGOVOR

Ova knjiga nastala je iz preke potrebe: vanredno živa građevna delatnost, oskudica u stručnim kadrovima, sve brži tempo života zahtevaju jednostavne, sigurne i brze metode i u konstruktivnoj praksi. Svojom jednostavnošću i brzinom postupka Krosova metoda je toliko u preimućstvu nad dosad uvedenim metodama (metode stalnih tačaka), da se svaki konstruktor, koji se s njom upozna, odriče svih predašnjih načina računanja skeletnih konstrukcija.

Američki konstruktori (Kros, Grinter i dr.) uveli su Krosovu metodu u svakodnevnu upotrebu u vrlo praktičnom obliku još 1930 g. Danas je ona vrlo rasprostranjena i u zapadnoj Evropi; Englezi, Francuzi i Švajcari je vrlo cene. Kod nas su je dosad primenjivali samo pojedinci. Tomu je verovatno uzrok i to što se naši stručnjaci suviše služe nemačkom literaturom u kojoj se je tek 1947 g. pojavila prva knjiga o ovoj metodi (Moersch: »Das Crossverfahren für kontinuierliche Träger usw.«). Kod nas je, međutim, prof. dr. K. A. Čališev još 1922 in 1923 g. u Tehničkom listu izložio ideje Krosovog postupka postepene aproksimacije, a pisac ove knjige, počev od svog diplomskog rada, uspešno je primenjuje u svojoj svakodnevnoj inženjerskoj praksi od 1935 g.

Ova knjiga je podeljena u tri poglavlja.

Prvo poglavlje koje obrađuje vertikalna opterećenja, namerno je razradeno opširnije i popularnije, a uz to objašnjeno i mnogim praktičnim primerima, kako bi lako poslužilo i tehničarima koji se interesuju za statiku.

Drugo poglavlje koje obrađuje horizontalna opterećenja nešto je teže, ali je i ono pristupačno svakom inženjeru konstruktoru, pa i dobrom tehničaru-statičaru.

Treće poglavlje obrađuje primenu Krosove metode pri rešavanju raznih delikatnih konstruktivnih primera. Ovaj deo, koji prvobitno nije bio predviđen, naučno upotpunjava prva dva dela i namenjen je samo inženjerima s konstruktivnom specijalizacijom.

Knjiga treba ne samo da posluži praktičnoj svrsi nego i da bude važno pomoćno sredstvo pri studijama. U tom cilju autor se ne ograničava samo na obrazloženje Krosovog postupka, nego obrađuje i razne zadatke

i probleme koji se pojavljuju u vezi celokupnih statičkih računa. Potstrek za sastav ove knjige piscu su u prvom redu dali studenti tehnike, a tek u drugom redu inženjeri konstruktori koji žele da olakšaju naporan statički rad i da se usavrše u konstruktivnoj struci.

Na ovom mestu autor se naročito zahvaljuje na ukazanoj stručnoj pomoći u literaturi i sugestijama kolegama ing. Ervinu Nonveilleru, ing. Amadeu Carnelutti-u in ing. Juraju Molčanovu iz Zagreba. Na izradi knjige saradivali su:

drug dr. Vladimir Dvorniković, univ. prof. iz Beograda za redakciju jezika i terminologije i

drug tehničar Boris Erbežnik iz Ljubljane kao crtač svih grafičkih skica za klišeje.

Direktor Izdavačkog preduzeća drug Ljubiša Madžarević sa mnogo zanimanja za rad išao je autoru u susret i potpomogao tehničku izradu knjige.

Neka im je najlepša hvala!

Glavnu zaslugu za izdavanje ove knjige imaju naše vlasti i Ministarstvo građevina FNRJ, koje je preko Izdavačkog preduzeća Ministarstva građevina FNRJ omogućilo objavljivanje ovog dela.

Autor

SADRŽAJ

	Strana
UVOD	17
Kritika dosada uvedenih metoda	17
Direktne metode	18
Uvod u Krosovu metodu	20
VERTIKALNO OPTEREĆENJE	22
Momenti ukleštenja pune ukleštenosti	22
Tabele za računanje momenata pune ukleštenosti	23
Izjednačujući momenti	29
Predznaci	31
Prenosni momenti	31
Krosov postupak izjednačavanja i prenošenja momenata	32
Naročiti slučajevi: uticaji zglobnih ležišta, uticaji simetrije i antimetrije u konstrukciji	34
Celokupan statični račun momenata savijanja sa upotrebom Krosove metode:	
I. Izračunavanje opterećenja za pojedina polja	37
II. Račun osnovnih momenata savijanja	39
III. Račun krutosti i izjednačujućih koeficijenata	40
IV. Izjednačavanje i prenošenje momenata	40
V. Utvrđivanje momenata savijanja merodavnih za dimenzioniranje	42
VI. Izračunavanje reakcija na stubove	44
<i>Primer 1: Kontinualna ploča preko dva polja</i>	<i>45</i>
<i>Primer 2: Kontinualni nosač preko mnogo polja</i>	<i>46</i>
<i>Primer 3: Kontinualni nosač sa koncentrisanim opterećenjem</i>	<i>48</i>
<i>Primer 4: Rezervoar za vodu</i>	<i>50</i>
<i>Primer 5: Silos za materijal sa četiri ćelije</i>	<i>51</i>
<i>Primer 6: Jednoslavan simetrični okvir</i>	<i>53</i>
<i>Primer 7: Prizemni skelet (visoke građevine)</i>	<i>54</i>
<i>Primer 8: Dvospratni skelet</i>	<i>56</i>
Skeletni i kontinualni nosači sa vutama	59
Tabele za nosače sa vutama	60
Naročiti slučajevi: uticaji zglobova, elastične ukleštenosti simetrije i antimetrije kod nosača sa vutama	62
Rebrasti nosači — T-profil	63

	Strana
<i>Primer 9: Prizemni skelet sa vutama (simetričan)</i>	66
<i>Primer 10: Okvir sa rebrastom pločom (simetričan)</i>	67
Približne metode	69
Upotreba približne metode za prethodno dimenzioniranje skeleta	70
<i>Primer 11: Približno dimenzioniranje skeleta</i>	70
Upotreba približne metode za utvrđivanje maksimalnih pozitivnih momenata savijanja pri raznim rasporedima korisnog opterećenja	72
<i>Primer 12: Dvospratni skelet primera 8</i>	72
Približna grafička metoda za izračunavanje kontinualnih nosača	73
<i>Primer 13: Kontinualni nosač preko više polja</i>	75
Određivanje stepena ukleštenosti armiranobetonskih konstrukcija u zidu od opeke pomoću približne Krosove metode	75
<i>Primer 14: Visoka građevina od opeke sa betonskim spratnim pločama</i>	77
<i>Primer 15: Visoka građevina od opeke sa betonskim rebrastim tavanicama</i>	78
HORIZONTALNO OPTEREĆENJE	80
Vrste horizontalnih opterećenja	80
Princip računa pomeranja	82
Momenti pune ukleštenosti usled pomeranja	83
Podela horizontalne sile na pojedine stubove	85
Krosov postupak i kriterij pomeranja	87
Celokupan statički račun pomeranja jednospratnog skeleta po Krosu	89
I. Shema skeleta, krutosti, izjednačujući koeficijenti, pomične krutosti	89
II. Izračunavanje horizontalnog opterećenja	89
III. Krosov postupak	91
IV. Utvrđivanje momenata savijanja merodavnih za dimenzioniranje	91
<i>Primer 16: Okvirni kontinualni most računat na pomeranje</i>	92
<i>Primer 17: Prizemni skelet (visoke građevine) primera 7 računat na pomeranje</i>	95
<i>Primer 18: Jednostavan nesimetrični okvir</i>	98
<i>Primer 19: Simetrično opterećeni kombinovani okvir</i>	101
<i>Primer 20: Puno uklešteni stub opterećen konzolom</i>	103
Račun višespratnog skeleta	105
Skraćena Grinterova metoda	106
Celokupan statički račun pomeranja pri višespratnom skeletu po skraćenoj metodi	110
I. Shema skeleta, krutosti i izjednačujući koeficijenti	110
II. Izračunavanje horizontalnog opterećenja i osnovnih momenata	110
III. Krosovi postupci	111
IV. Utvrđivanje momenata savijanja merodavnih za dimenzioniranje	112
<i>Primer 21: Visoka građevina od opeke sa betonskim rebrastim tavanicama opterećena vetrom</i>	113
<i>Primer 22: Dvospratni skelet primera 8 računat bez postranih oslonaca u spratovima (na pomeranje)</i>	115
<i>Primer 23: Kombinovani okvir primera 19 opterećen antimetrično</i>	120

	Strana
Približna metoda za izračunavanje horizontalnih opterećenja	123
<i>Primer 24: Prethodno dimenzioniranje stubova u prizemlju sedmospratnog skeleta</i>	125
NAROČITI PRIMERI PRIMENE KROSOVE METODE	126
<i>Primer 25: Račun Vierendeelovog nosača</i>	126
<i>Primer 26: Račun ulicajne linije za konstrukciju mosta iz primera 16</i>	128
<i>Primer 27: Račun deformacionih momenata za rešetkasti nosač</i>	130
<i>Primer 28: Okvir poligonalnog oblika</i>	132
<i>Primer 29: Kontinualni luk na vitkim stubovima</i>	135
VARIJACIJE KROSOVE METODE	141
Zaključak	143
Literatura	144

KOMENTAR ZNAKOVA

Opšti znakovi

E	elastični modul materijala
$^{\circ}C$	temperaturna razlika u stepenima Celzijeve skale
α	koeficijent raztezanja materijala usled temperaturnih razlika
k, c	konstanta
Σ	zbir na primer: ΣM zbir momenata; Σl zbir krutosti
Δ	razlika na primer: ΔH razlika horizontalnih sila ΔM razlika momenata;
\mathcal{E}	kriterij pomeranja

Znakovi za sile i momente

g	ravnomerno stalno opterećenje
p	ravnomerno korisno opterećenje
q	ravnomerno celokupno (stalno i korisno) opterećenje
P	vertikalna sila
H	horizontalna sila, horizontalna poprečna sila stuba, horizontalna komponenta reakcije
V	vertikalna komponenta reakcije
A	reakcija u ležištu a
B	reakcija u ležištu b
R	reakcije uopšte
M	momenat savijanja uopšte, momenat ukleštenosti
m	momenat savijanja prosto položenog nosača
P, S	osna sila
T, H	poprečna sila
M_a	momenat ukleštenosti u ležištu a
M_b	momenat ukleštenosti u ležištu b
M_l	momenat ukleštenosti u levom ležištu nosača
M_d	momenat ukleštenosti u desnom ležištu nosača
M_o	momenat ukleštenosti u oba kraja kod simetričnog slučaja
M_g	momenat ukleštenosti na gornjem kraju stuba
M_d	momenat ukleštenosti na donjem kraju stuba
$M = \Sigma M$	zbir momenata ukleštenosti (u etaži)
$M_g = M_{gore}$	zbir momenata ukleštenosti u gavi
$M_d = M_{dole}$	zbir momenata ukleštenosti u nozi
$M_{poč} = M_{početni}$	zbir momenata, kojim počinjemo Krosrov postupak
$M_{kon} = M_{konačni}$	zbir momenata, koji treba da dobijemo za rezultat

$M_{dej} = M_{dejavujući}$	zbir momenata, koji dejstvuju na okretanje čvorova
$M_{dop} = M_{dopunski}$	zbir momenata, koji treba dopuniti
$M_{rez} = M_{rezultirajući}$	zbir momenata, koji dobijamo kao rezultat Krosovog postupka
$H = \Sigma H$	zbir horizontalnih sila pojedinih stubova
H_{opt}	zbir horizontalnih sila, koji opterećuje pojedini sprat
H_{rez}	zbir horizontalnih sila, koji dobijamo kao rezultat Krosovog postupka

Znakovi za elemente nosača

x	udaljenost preseka ili sile od levog ležišta u desno
x'	udaljenost preseka ili sile od desnog ležišta u levo
l	raspon nosača
$\xi = \frac{x}{l}$	srazmer udaljenosti ka rasponu
$\xi' = \frac{x'}{l}$	
$ds = \lim \Delta x$	element dužine
$dx = \frac{dx}{EI}$	redukovani element dužine
t	krutost štapa (obična, okretna)
t_p	pomična krutost štapa
t_{pm}	pomična momentna krutost štapa
t^0, t_p^0, t_{pm}^0	krutosti štapova sa zglobom na jednom kraju štapa
t_g	krutost (obična) grede
t_s	krutost (obična) stuba
$T_g = \Sigma t_g$	zbir krutosti greda u spratu
$T_s = \Sigma t_s$	zbir krutosti stubova u spratu
$r = \frac{T_s}{2 T_g}$	srazmer krutosti stubova protiv krutosti greda x 1/2

Znakovi za elemente preseka

dim	dimenzije preseka
b	širina nosača
δ	širina zida
h	visina nosača
d	debljina ploče
v	statička visina nosača između težišta pritisnute i težišta zategnute zone
c	ekscentričnost sile od težišta preseka
c, m, n	udaljenost sile od ivice preseka
F	površina preseka
I	momenat istrajnosti (lenjivosti)
$i = \sqrt{\frac{I}{F}}$	poluprečnik istrajnosti
W	otporni momenat
$\sigma, \sigma_x, \sigma_y$	naprezanja (u pravcu x, ili u pravcu y)
σ_{doz}	dozvoljena naprezanja

Znakovi za elemente deformacije

α	koeficijent rastezanja usled temperature
δ	veličina deformacije, ordinata deformacione linije
φ	ugao deformacionog okreta
ψ	ugao deformacionog pomeranja
D	veličina pomeranja
K	prenosni koeficijent (položaj infleksione tačke)

Znakovi za mere

m	metar
dm	decimetar
cm	centimetar
mm	milimetar
t	tona = 1000 kiloponda
kp	kilopond
kp/m	kilopond na tekući metar
kp/m^2	kilopond na kvadratni metar
kp/cm^2	kilopond na kvadratni centimetar
kpm	kilopondmetar
$kpcm$	kilopondcentimetar

Napomena: Moderni fizičari i tehničari uveli su oznaku pond za težinu mase jednog grama. Gram je jedinica za masu, kao što je pond jedinica za silu.

UVOD

Kritika dosad uvedenih metoda

Svi dosada poznati i opšte uvedeni načini statičkog izračunavanja kontinualnih i skeletnih konstrukcija zasnivaju se na opštem osnovnom principu izračunavanja statički neodređenih konstrukcija: konstrukcija se pretvara u statički određenu konstrukciju kao osnovni sistem. Na taj sistem dejstvuju dopunske statički neodređene reakcije kao zasebne sile. Osnovni, statički određeni sistem kontinualnog ili skeletnog nosača je serija slobodnih polja. Na svako od tih polja deluju na oba kraja, kao dopunska opterećenja, statički neodređeni momenti ukleštenosti čiju veličinu treba izračunati iz elastičnih deformacijskih uslova. Od metoda za izračunavanje momenata ukleštenosti kod nas su poznate i uvedene:

1) Clapeyronova tromomentna jednačina. Primenjuje se za kontinualne nosače, a zasniva se na postavljanju jednačina (elastičnih uslova) sa n nepoznatih od kojih svaka pretstavlja momenat ukleštenosti preko ležišta.

Postupak je dug i zahteva elementarno postavljanje elastičnih jednačina, pri čemu su faktori određeni integralima unutrašnjeg rada konstrukcije. Ova metoda je upotrebljiva samo za kontinualne nosače.

2) Stalne tačke su način kojim definišemo veličinu ukleštenosti osnovnog (prvobitno prosto položenog) nosača u susedno polje ili priključeni skelet. Stalnu tačku možemo uvek izračunati iz datog specifičnog okreta φ čvora ukleštenog u susedni sistem (za momenat $M = 1$). Ako su stalne tačke date, odnosno izračunate, onda se iz tih podataka mogu izračunati odgovarajući momenti ukleštenosti za bilo koje opterećenje u pojedinom polju. Za proračun po stalnim tačkama kod nas su uvedene dve metode:

- a) grafička Ritterova metoda (samo za kontinualne konstrukcije);
- b) računaska Kasalova metoda (univerzalna za kontinualne i skeletne konstrukcije).

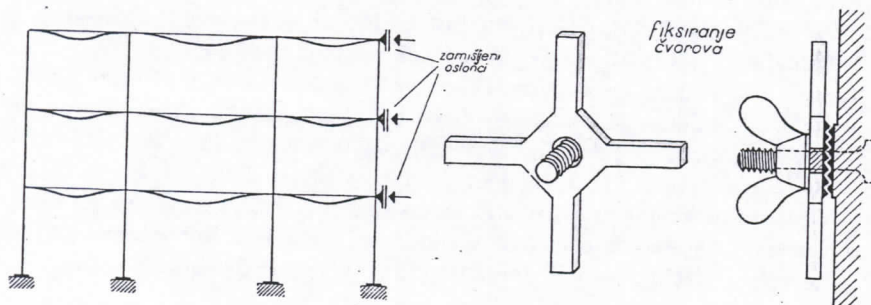
Slaba strana svih metoda sa stalnim tačkama je pre svega što statički račun po tim metodama zahteva vrlo dug i relativno komplikovan postupak. Taj postupak obuhvata tri računске operacije:

- 1) izračunavanje stalnih tačaka što zahteva kod skeleta prilično mnogo vremena;
- 2) izračunavanje momenata ukleštenja na osnovu stalnih tačaka (grafički po Ritteru ili analitički po Kasalu); i
- 3) kombinovanje raznih opterećenja u raznim poljima sa odgovarajućim prenosnim koeficijentima za dobijanje ekstremnih (maksimalnih i minimalnih) momenata ukleštenja.

U takozvanim »direktnim« metodama, čija je zamisao genijalno jednostavna, izbegnut je ceo taj komplikovan postupak.

Direktne metode

Direktne metode ne uzimaju za osnovni sistem statički određene konstrukcije u obliku prosto položenih nosača nego uzimaju za osnovni sistem statički neodređenu konstrukciju potpuno ukleštenih nosača. Osnovni sistem je skelet (ili kontinualni nosač) čiji se čvorovi ne mogu okretati: stubovi ostaju u glavama vertikalni, a nosači na ležištima horizontalni.



Zamislimo da je svaki čvor, u kome su nosači i stubovi među sobom kruto spojeni (»monolitni«), probušen osovnom na kojoj se nalazi vijak s krilnom maticom. Ovom maticom učvršćujemo čvor na čvrstu ravnu podlogu da se ne može okretati, da tangenta čvora ostane horizontalna, odn. stubovi vertikalni. Ako rasponi nisu jednaki, nego na jednoj strani veći a na drugoj manji, ili ako su pri istim rasponima opterećenja različita, onda na čvorove s obe strane dejstvuju momenti ukleštenja potpune

ukleštenosti koji među sobom nisu jednaki. Razliku između ovih momenata ukleštenja preuzima na sebe čvrsta podloga na koju je čvor učvršćen s krilnom maticom u precizno horizontalnom pravcu.

Štaviše: i spratovi su u horizontalnom pravcu nepomični, tako da se čvorovi višeg sprata nalaze tačno nad čvorovima nižeg sprata; horizontalna pomeranja pojedinih spratova sprečavamo time što u visini spratnih nosača postavljamo zamišljene oslonce koji preuzimaju na sebe sve horizontalne sile koje bi se pojavile na datom skeletu od vetra, potresa, nesimetričnog opterećenja itd.

Naš osnovni sistem je dakle skeletni sistem potpuno ukleštenih nosača i potpuno ukleštenih stubova pri čemu su tangente čvorova horizontalne, a spratovi nepomični. Taj osnovni sistem potpuno odgovara svim elastičnim uslovima skeleta: kontinuitet deformacijskih linija je ispunjen. Međutim, ovaj sistem ne zadovoljava statičke uslove: čvorovi nisu u ravnoteži, jer se razlika momenata ukleštenja pojedinih polja prenosi pomoću vijka na čvrstu podlogu. Spratovi nisu u ravnoteži, jer se horizontalne sile koje potiču od vetra ili drugih uticaja prenose na zamišljene oslonce. Ispravno rezultate dobićemo ako odvijemo vijke sa krilnim maticama i puštamo da se čvorovi okreću; zatim ako uklonimo zamišljene oslonce u spratovima i puštamo da se skelet pomera. Čim uspemo da računski tačno utvrdimo uticaj okretanja čvorova i uticaj pomeranja spratova na veličinu momenata u čvorovima, onda smo uspešno rešili postavljeni zadatak.

Izračunavanje momenata ukleštenja za potpuno ukleštenost u pojedinim slučajevima opterećenja biće obrazloženo u zasebnom poglavlju. U praksi neće biti nikada potrebno da se izvode formule za potpuno ukleštenje, pošto imamo u literaturi već izračunate rezultate odnosno uticajne linije za pomična opterećenja.

Za izračunavanje momenata koje uzrokuje okretanje čvorova i pomeranje pojedinih spratova postoje različite metode:

- 1) Dr. F. Takabeya rešava zadatak na analitični način. Okretni čvorovi su naime međusobno zavisni: jedan čvor utiče na drugi, susedni čvor. Za okret svakog čvora, kao i za pomeranje svakog sprata, potrebno je da se postavi po jedna jednačina sa više nepoznatih, tako da se ukupno dobije toliko jednačina koliko ima nepoznatih, odnosno koliko ima čvorova (okreta) i spratova (pomeranja) zajedno. Jednačine se rešavaju postepeno po iterativnom postupku. U svojoj knjizi (Dr. F. Takabeya: Ramentafeln — Berlin, I Springer 1930) Takabeya obrađuje lako razumljivim i vrlo preglednim načinom čitav niz zanimljivih primera. Jedina slaba strana njegove metode je u tome što je za prosečnog tehničara suviše apstraktna i stoga je dosta teško utvrditi greške i kontrolisati postupak.

2) Prof. Hardy Cross (prof. univerziteta u Illinoisu) uveo je metodu koja je u suštini računaska, samo što upotrebljava preglednu grafičku dispoziciju računanja. Rezultat se dobija postepeno (iterativno). Za pomeranje spratova njegov način dopunio je prof. L. E. Grinter (Texas-College). Ova je metoda u suštini tako jednostavna i jasna da se njom mogu lako služiti ne samo građevni inženjeri-statičari, nego i tehničko osoblje koje je manje verzirano u statici. Statički računi mogu se i dosta lako kontrolisati.

Ovoj knjizi je cilj da detaljno obradi Krosovu metodu sa Grinterovim dopunama, kao i da iznese takođe nekoliko primera praktične upotrebe.

3) Prof. Dr. ing. M. Fakin objavio je u svojim predavanjima i posebnim skriptima grafičku metodu koja se takođe zasniva na principu direktnih metoda. Njegov je način odličan, ali pridaje veću važnost slučajevima krutih nosača i vitkih stubova, a zanemaruje uticaj okreta čvorova jednog sprata na čvorove susednog sprata.

Uvod u Krosovu metodu

Krosova metoda bila je dosad već mnogo puta objavljivana, ali uvek samo u kratkim člancima, odlomcima ili zapisnicima stručnih debata. Na opširnija izlaganja nisam nailazio u literaturi.

Izložena izlaganja su delimično originalna, kako su se praktično pokazala u toku desetogodišnjeg iskustva, a delimično se oslanjaju na literaturu koja je navedena na kraju knjige. Krosova metoda, u granicama osnovne zamisli, dopušta naime vrlo mnogo varijacija i kombinacija, tako da je možemo uvesti u najrazličitije tehničke načine računanja.

Krosova metoda rešavanja skeletnih konstrukcija sastoji se po svom osnovnom biću iz dva postupka: iz izjednačivanja okreta (rotacija) i iz izjednačivanja pomeranja. Svaki od ovih postupaka odgovara — bar principijelno — posebnim vrstama opterećenja: prvi vertikalnom opterećenju, drugi horizontalnom opterećenju. Zato je i ova knjiga podeljena na dva poglavlja pod naslovima: Vertikalno opterećenje, i Horizontalno opterećenje.

U poglavlju o vertikalnom opterećenju izlažu se svi slučajevi u kojima su horizontalna pomeranja skeleta isključena. U tim slučajevima obrađuje se korigiranje momenata pune ukleštenosti usled uticaja okreta (rotacije) pojedinih čvorova. Dopunski momenti koji nastaju usled okreta pojedinog čvora na priključenim štapovima zvaće se »izjednačujući« momenti, jer izjednačuju neravnotežu na pojedinom čvoru. Dopunski momenti, koji

nastupaju na pojedinim štapovima kod čvorova usled okreta susednih čvorova, nazivaju se »prenosni« momenti, jer predstavljaju prenešene momente sa jednog kraja štapa na drugi kraj. Teorija samog postupka u suštini sastoji se iz tri faze: a) da se utvrde momenti ukleštenja potpune ukleštenosti; b) da se utvrde izjednačujući momenti, i c) da se utvrde prenosni momenti. Praktički postupak iziskuje naravno znatno širi opseg rada, jer je potrebno da se prethodno sistematski izračunaju momenti istrajnosti (lenjivosti) pojedinih štapova, zatim krutosti štapova, kao i da se sav Krosov postupak izvede na najnepovoljnije kombinacije položaja korisnog opterećenja. Na kraju treba prikazati rezultate u obliku linija maksimalnih i minimalnih momenata savijanja.

Ovaj način koji se rasmatra u poglavlju A. »Vertikalno opterećenje« potpuno je ispravan za sve kontinualne nosače i za skelete, u koliko su faktično poduprti sa strane u horizontalnom pravcu (na primer sa rešetkastim osiguranjem). Ako su skeleti u horizontalnom pravcu pomični, onda je načelno potrebna i korekcija sa momentima koji potiču iz pomeranja da se ispuni uslov $\Sigma H = 0$. Kod skeleta sa mnogo polja, sa većim brojem stubova, biće ta korekcija većinom vrlo neznatna, te ćemo je moći po statičkom rasmatranju utvrditi na aproksimativni način ili posve zanemariti. Kod slučajeva izrazite nesimetrije — bilo u krutosti konstrukcije ili u samom opterećenju — biće potrebno da se zasebno rešavaju uticaji pomeranja na način kako se rešava horizontalni uticaj opterećenja vetra ili potresa u poglavlju B.

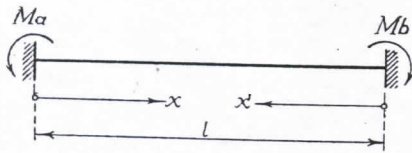
U poglavlju B. »Horizontalno opterećenje« rešava se raspored momenata savijanja u slučajevima kad nastupaju znatne horizontalne sile među pojedinim spratovima (vetar, potres, nesimetrično opterećenje) pri čemu uklanjamo zamišljene oslonce u svakom spratu i prepuštamo skelet horizontalnom pomeranju. Momenti usled pomeranja utiču isto tako na čvorove i okreću ih. Slučaj jednospratnog okvira (skeleta) je jednostavan, višespratni skelet je teoretski mnogo složeniji. Rešavaćemo ga po aproksimativnoj »skraćenoj« metodi Grinterovoj koja ipak omogućava da se na iterativni način postigne tačan rezultat, ako je potrebno.

VERTIKALNO OPTEREĆENJE

Momenti ukleštenja pune ukleštenosti

Za analitičko ili grafičko izračunavanje momenata pune ukleštenosti imamo po teoriji elastičnosti poznatu opštu formulu:

Proizvoljno opterećenje izvodi na prosto položenom nosaču momenat m .



$$\frac{dx}{EI} = ds' \quad \frac{x}{l} = \xi \quad \frac{x'}{l} = \xi'$$

$$M_a \int_0^l \xi'^2 ds' + M_b \int_0^l \xi \xi' ds' = \int_0^l m \xi' ds'$$

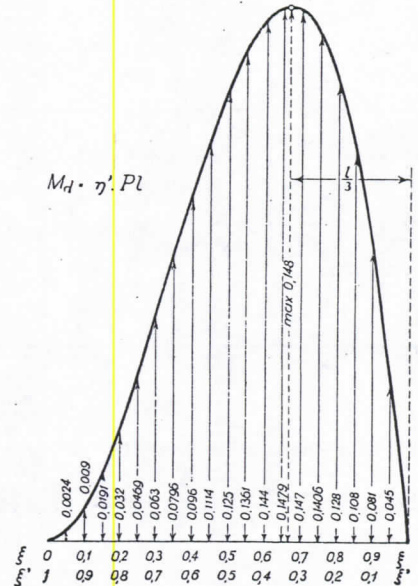
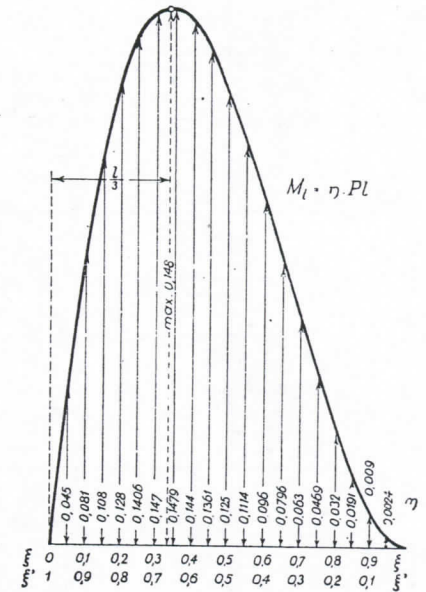
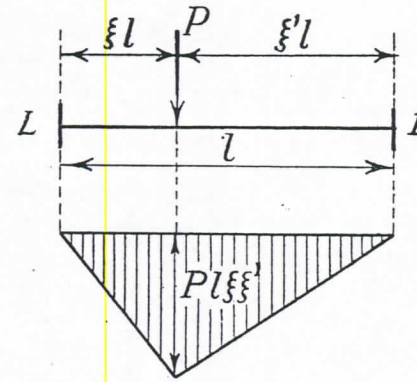
$$M_a \int_0^l \xi \xi' ds' + M_b \int_0^l \xi'^2 ds' = \int_0^l m \xi ds'$$

Za simetrično opterećenje su oba momenta ukleštenosti jednaka

$$M_a = M_b = M_o \quad M_o \int_0^l ds' = \int_0^l m ds' \quad M_o = \frac{\int_0^l m ds'}{\int_0^l ds'}$$

Za svagdašnju praksu nije potrebno da se rešavaju postavljeni integrali, jer za različita opterećenja imamo u literaturi već izračunate formule. Za konstantni momenat istrajnosti uzeti su podaci iz knjige Takabeya: »Rahmentafeln«. Korekcije koje dolaze u obzir kod nosača sa vutama biće obrađene zasebno.

Proizvoljno opterećenje



Primedba:

Za naročite slučajeve opterećenja, koji u tabelama nisu navedeni, izračunamo momente ukleštenosti M_l i M_d po formuli:

$$M_l = \Sigma P \xi \xi'^2 l \quad M_d = \Sigma P \xi'^2 \xi l$$

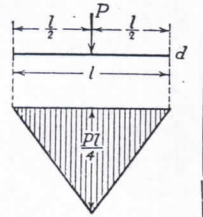
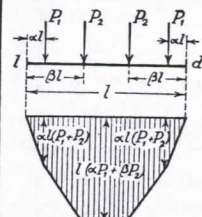
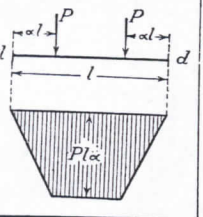
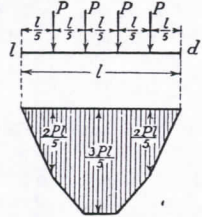
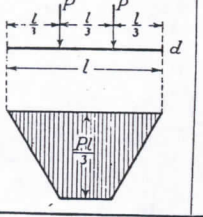
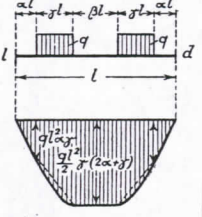
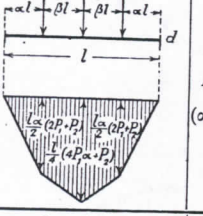
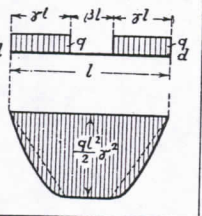
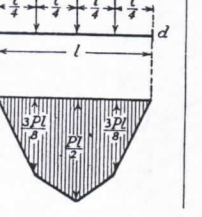
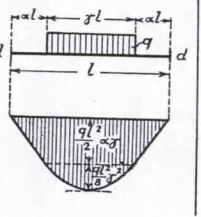
ili pomoću nacrtane uticajne linije:

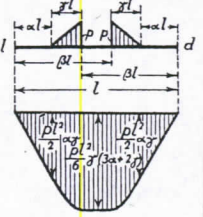
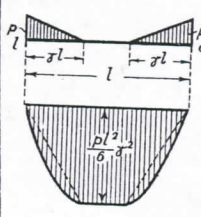
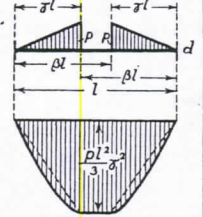
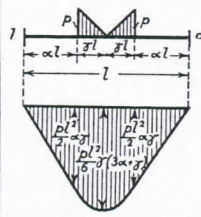
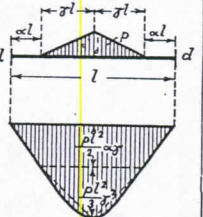
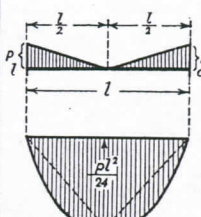
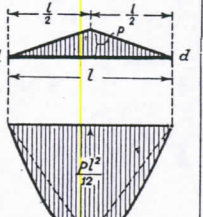
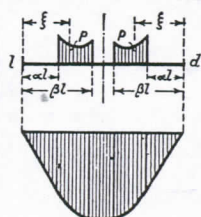
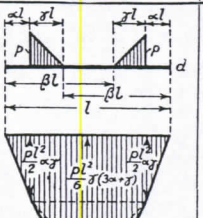
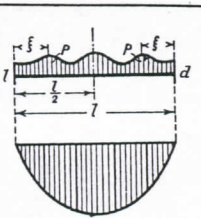
$$M_l = \Sigma P l \cdot \eta \quad M_d = \Sigma P l \cdot \eta'$$

Opterećenje	M_l	M_d
	$M_l = \frac{ql^2}{12} \gamma \{12 \alpha \beta (\beta + \gamma) + 6 \beta^2 \gamma^2 + 4 \gamma^2 (\alpha + \beta) + \gamma^3\}$	$M_d = \frac{ql^2}{12} \gamma \{12 \alpha \beta (\alpha + \gamma) + 6 \alpha^2 \gamma + 4 \gamma^2 (\alpha + \beta) + \gamma^3\}$
	$M_l = \frac{ql^2}{12} \gamma^2 \{6 \beta^2 + 4 \beta \gamma + \gamma^2\}$	$M_d = \frac{ql^2}{12} \gamma^3 \{4 \beta + \gamma\}$
	$M_l = \frac{ql^2}{12} \gamma^3 \{4 \alpha + \gamma\}$	$M_d = \frac{ql^2}{12} \gamma^2 \{6 \alpha^2 + 4 \alpha \gamma + \gamma^2\}$
	$M_l = \frac{ql^2}{12}$	$M_d = \frac{ql^2}{12}$
	$M_l = \frac{pl^2}{60} \gamma \{20 \beta \gamma (\alpha + \beta) + 5 \gamma^2 (\alpha + 2 \beta) + 30 \alpha \beta^2 + 2 \gamma^3\}$	$M_d = \frac{pl^2}{60} \gamma \{10 \alpha \gamma (\alpha + \gamma) + 15 \beta (2 \alpha^2 + \gamma^2) + 40 \alpha \beta \gamma + 3 \gamma^3\}$

Opterećenje	M_l	M_d
	$M_l = \frac{pl^2}{30} \gamma^2 \{10 \beta^2 + 5 \beta \gamma + \gamma^2\}$	$M_d = \frac{pl^2}{20} \gamma^3 \{5 \beta + \gamma\}$
	$M_l = \frac{pl^2}{60} \gamma^3 \{5 \alpha + 2 \gamma\}$	$M_d = \frac{pl^2}{60} \gamma^2 \{10 \alpha (\alpha + \gamma) + 3 \gamma^2\}$
	$M_l = \frac{pl^2}{30}$	$M_d = \frac{pl^2}{20}$
	$M_l = l^2 \int_{\alpha}^{\beta} p \xi \xi'^2 d \xi$	$M_d = l^2 \int_{\alpha}^{\beta} p \xi^2 \xi' d \xi$
	$M_l = l^2 \int_0^l p \xi \xi'^2 d \xi$	$M_d = l^2 \int_0^l p \xi^2 \xi' d \xi$

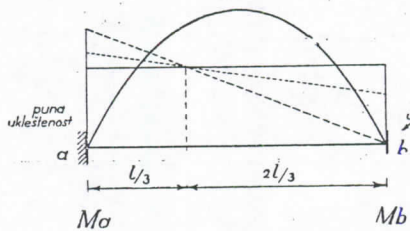
Simetrično opterećenje

Opterećenje	$M_l = M_d = M_o$	Opterećenje	$M_l = M_d = M_o$
	$M_o = \frac{Pl}{8}$		$M_o = l \{ P_1 \alpha (1 - \alpha) + P_2 \beta (1 - \beta) \}$
	$M_o = Pl \alpha (1 - \alpha)$		$M_o = \frac{2}{5} Pl$
	$M_o = \frac{2}{9} Pl$		$M_o = \frac{ql^2}{6} \{ 6\alpha(1-\alpha) + 3\beta\gamma + 4\gamma^2 \}$
	$M_o = l (\alpha + \beta) \{ 2 P_1 \alpha (\alpha + 2 \beta) + P_2 (\alpha + \beta)^2 \}$		$M_o = \frac{ql^2}{6} \gamma^2 (3\beta + 4\gamma)$
	$M_o = \frac{5}{16} Pl$		$M_o = \frac{ql^2}{24} \gamma (3 - \gamma^2)$

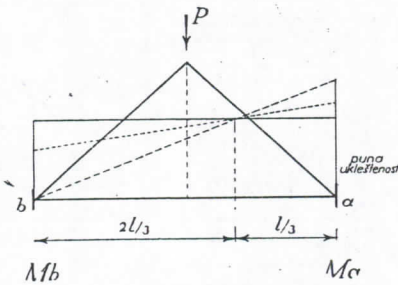
Opterećenje	$M_l = M_d = M_o$	Opterećenje	$M_l = M_d = M_o$
	$M_o = \frac{pl^2}{12} \gamma (6\alpha\beta + 4\beta\gamma + 2\alpha\gamma + \gamma^2)$		$M_o = \frac{pl^2}{12} \gamma^2 (2\beta + \gamma)$
	$M_o = \frac{pl^2}{12} \gamma^2 (4\beta + \gamma)$		$M_o = \frac{pl^2}{4} \gamma \{ 2\alpha^2 + 4\alpha\gamma + \gamma^2 \}$
	$M_o = \frac{pl^2}{12} \gamma (6\alpha^2 + 12\alpha\gamma + 5\gamma^2)$		$M_o = \frac{pl^2}{32}$
	$M_o = \frac{5pl^2}{96}$		$M_o = l^2 \int_{\alpha}^{\beta} p \xi \xi' d\xi$
	$M_o = \frac{pl^2}{12} \gamma \{ 6\alpha\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 \}$		$M_o = l^2 \int_0^{1/2} p \xi \xi' d\xi$

U slučajevima kad je nosač samo na jednoj strani vezan na posmatrati skelet (naravno puno uklešten), a na drugoj strani prosto položen (na zgubno ležište), ili možda elastično uklešten u zidu, moment ukleštenja pune ukleštenosti uz priključak na skelet povećava se. Povećanje momenta ukleštenosti na ukleštenom kraju iznosi kod nosača sa konstantnim presekom tačno polovinu od onog momenta, za koji se je moment ukleštenja smanjio na suprotnom ležištu (u zidu).

Primer za ravnomerno opterećenje:



Primer za koncentrisano opterećenje:



$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$	puno uklešteno	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{8}$
$\frac{ql^2}{12} + \frac{1}{2} \frac{ql^2}{12} = \frac{ql^2}{8}$	$\frac{ql^2}{12} - \frac{ql^2}{12} = 0$	zglobno ležište	$\frac{Pl}{8} - \frac{Pl}{8} = 0$	$\frac{Pl}{8} + \frac{1}{2} \frac{Pl}{8} = \frac{3Pl}{16}$
$\frac{ql^2}{12} + \frac{1}{2} \frac{ql^2}{30} = \frac{ql^2}{10}$	$\frac{ql^2}{12} - \frac{ql^2}{30} = \frac{ql^2}{20}$	elastično uklešteno	$\frac{Pl}{8} - \frac{Pl}{16} = \frac{Pl}{16}$	$\frac{Pl}{8} + \frac{1}{2} \frac{Pl}{16} = \frac{5Pl}{32}$
$M_o + \frac{\Delta M}{2}$	$M_o - \Delta M$	opšti obrazac	$M_o - \Delta M$	$M_o + \frac{\Delta M}{2}$

Kod nosača sa vutama uzima se umesto polovine povećanja momenta ukleštenja povećanje u srazmeru prenosnog koeficijenta, navedenog u zasebnom poglavlju.

Izjednačujući momenti

Posmatrajmo pojedini čvor skeletnog sistema koji je — kako je ranije navedeno — pričvršćen na rapavu podlogu s krilnom maticom. Odvijmo maticu i okrenimo rukom čvor oko osi vijka za ugao φ . Time smo rukom izvršili na čvor učinak statičkog momenta ΔM . Štapovi čvora pak proizvode okretanjem reakcione momente u obratnom smislu i time drže ravnotežu momentu ΔM . Okret φ je u korenu svih štapova jednak. Po teoriji elastičnih štapova iznosi okret pojedinog štapa $\varphi_n = M_n \cdot \frac{l_n}{4EI_n} = \frac{M_n}{4Et_n}$

Izrazom t (krutost ili togost nosača) označavamo karakteristiku štapa $\frac{I}{l}$.

Kod datog okreta φ (koji je jednak za sve priključene štapove) nastupaju na pojedinim štapovima u čvoru sledeći momenti savijanja:

$$M_{01} = \varphi \cdot \frac{4EI_{01}}{l_{01}} = k \cdot t_{01}$$

$$M_{11} = \varphi \cdot \frac{4EI_{11}}{l_{11}} = k \cdot t_{11}$$

$$M_{12} = \varphi \cdot \frac{4EI_{12}}{l_{12}} = k \cdot t_{12}$$

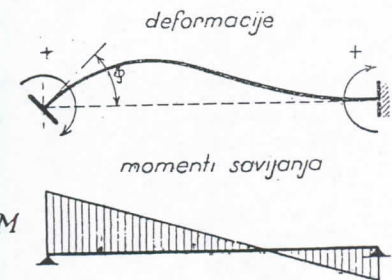
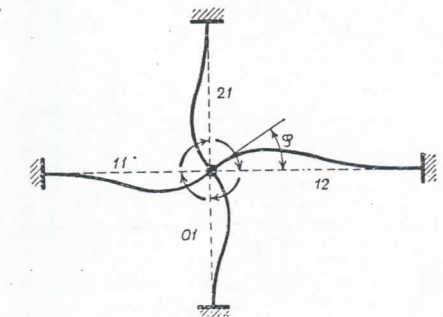
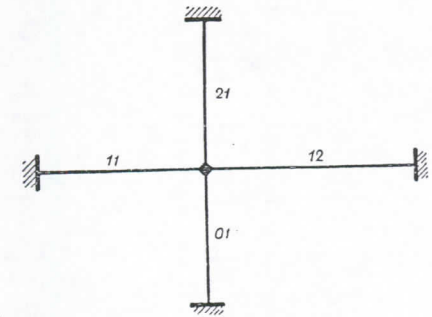
$$M_{21} = \varphi \cdot \frac{4EI_{21}}{l_{21}} = k \cdot t_{21}$$

$$\Sigma M = -\Delta M = k \Sigma t$$

pri čemu je:

$$t_{nm} = \frac{I_{nm}}{l_{nm}} = \frac{\text{moment istrajnosti } nm}{\text{dužina štapa } nm}$$

i k proizvoljna konstanta, jednaka za sve štapove od istog materijala. Kod kombinacije skeletnog sistema iz štapa-



pova od različitih materijala treba uzeti u račun različite izraze »k« srazmerno elastičnom modulu materijala E .

Ako nam je poznat celokupni momenat savijanja kojim okrećemo čvor, ne treba za utvrđivanje momenata koji otpadaju na pojedine štapove, uopšte računati okret φ , nego dobijamo ove »izjednačujuće« (reakcione) momente direktno iz srazmera krutosti štapova:

$$M_{01} = -\Delta M \frac{t_{01}}{\Sigma t} \quad M_{11} = -\Delta M \frac{t_{11}}{\Sigma t} \quad M_{nm} = -\Delta M \frac{t_{nm}}{\Sigma t}$$

Srazmer $\frac{t_{nm}}{\Sigma t}$ naziva se izjednačujući (razdelni) koeficijent; praktično je da ga prethodno izračunamo brojačno u procentima % tabelarno; na primer:

štap	širina b	visina h	momenat inercije $c \cdot J$	dužina l (h)	krutost $t = k \frac{J}{l}$	razdelni koeficijent
01	0,50 m	0,50 m	625 dm ⁴	3,00	208	32,0 %
11	0,40 m	0,60 m	864 dm ⁴	5,00	173	26,6 %
12	0,40 m	0,60 m	864 dm ⁴	6,00	144	22,2 %
21	0,40 m	0,50 m	500 dm ⁴	4,00	125	19,2 %
$J = bh^3 = 650$						100 %

Ako okrenemo posmatrani čvor rukom s momentom od 1000 kpcm, nastupiće u pojedinim štapovima oko čvora reakcioni momenti sledeće veličine:

$$M_{01} = -32,0\% \times 1000 = -320 \text{ kpcm} \quad M_{12} = -22,2\% \times 1000 = -222 \text{ kpcm}$$

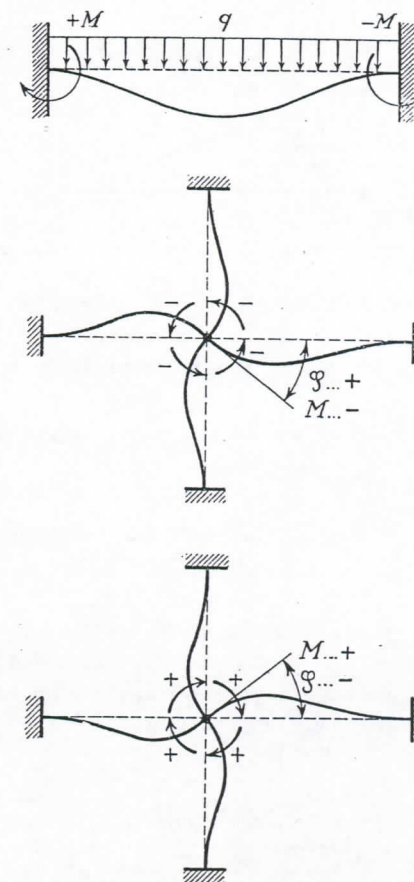
$$M_{12} = -26,6\% \times 1000 = -266 \text{ kpcm} \quad M_{21} = -19,2\% \times 1000 = -192 \text{ kpcm}$$

$$\Delta M = -\Sigma M_{mn} = 1000 \text{ kpcm}$$

Predznaci

Radi tehničke jednostavnosti postupka uveo je Kros nov način označavanja momenata ukleštenja. Momente ne označuje po tome kakvu će krivinu zauzeti nosač kod deformacije (pozitivnu ili negativnu), već po tome u kakvom pravcu deluje momenat na pojedini čvor. Momenti koji kreću čvor u pravcu satne kazaljke svi su odreda pozitivni; moment koji ga kreću u obratnom pravcu satne kazaljke su negativni. Ako pojedino polje opteretimo pozitivnim opterećenjem, onda su momenti ukleštenja na levom ležištu pozitivnog predznaka, a momenti ukleštenja na desnom ležištu negativnog predznaka. Ako se čvor okrene u pozitivnom smislu, reakcijski momenti na pojedinim štapovima imaju obratni, negativni predznak. Ako se čvor pod uticajem negativnog momenta okrene u negativnom smislu, imaju reakcijski momenti obratni pozitivni predznak.

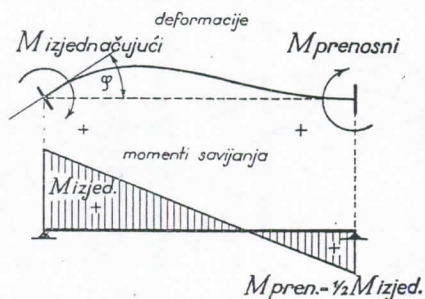
Ako je dakle ΔM pozitivan, biće izjednačujući momenti negativni, jer izjednačuju $+\Delta M$. Ako je ΔM negativan, biće izjednačujući momenti pozitivni.



Prenosni momenti

Time što se je jedan čvor skeleta okrenuo i prouzrokovao reakcione momente izjednačenja uz čvor, problem tog pojedinačnog čvora je rešen. Ali, u tom slučaju nastupaju na suprotnim krajevima štapova u susednim

čvorovima dopunski momenti savijanja koji nastaju zato što se je pomenuti čvor okrenuo. Ove dopunske momente nazivamo »prenosnim« momentima, jer ih tako reći »prenosimo« preko štapova.



Za nosač s konstantnim momentom istrajnosti po teoriji elastičnog, potpuno ukleštenog štapa, taj prenosni moment iznosi tačno $\frac{1}{2}$ izjednačujućeg momenta. Predznak, s obzirom na krivinu nosača, je obratan, jer potpuno uklešteni nosač na ukleštenom kraju dobija obratnu deformacijsku krivinu. Po Krosovoj oznaci prenosni moment dobija isti predznak kao i izjednačujući, jer oba kreću priključene čvorove u istom pravcu.

Opšte formule za prenosni koeficijent glase:

$$\text{Koeficijent prenosa s desna na levo} = \frac{\int \xi \xi' ds}{\int \xi'^2 ds} \quad \text{za} \quad ds = \frac{dx}{EI}$$

$$\text{Koeficijent prenosa s leva na desno} = \frac{\int \xi \xi' ds}{\int \xi^2 ds}$$

Kod nosača sa vutama ili sa nekonstantnim momentom istrajnosti, prenosni momenti su nešto veći od polovine izjednačujućih. Sve pojave u vezi sa vutama biće obrađene u zasebnom poglavlju. Kod nosača trapeznog ili paraboličnog oblika biće prenosni koeficijenti, prema gornjoj jednačini, manji od $\frac{1}{2}$.

Krosova metoda izjednačavanja i prenošenja momenata

Normalan, najpregledniji postupak je ovaj:

1a) Na svim čvorovima odvijemo krilne matice i prepustimo čvorove rotaciji usled dejstvovanja neuravnoteženih momenata ΔM . Posledica okretanja je izjednačenje tih momenata ΔM po procentima % izjednačujućih (razdelnih) koeficijenata za pojedini štap sa predznakom obratnim od »dejavujućeg« momenta. Pri tom smo, naravno, pretpostavili da su pri okretanju pojedinog čvora susedni čvorovi ostali privijeni u polaznom učvršćenom stavu.

1b) Kao posledica okreta koje smo izvršili pod 1a), nastupaju prenosni momenti istih predznaka, kao izjednačujući, ali u polovini iznosa ovih. Preko svakog štapa sistematski se prenosi polovina izjednačujućeg momenta s leva na desno i obratno, s desna na levo, preko svakog stuba, polovina odozdo na gore i polovina odozgo na dole.

Računski postupak vrši se praktično na velikom listu artije, direktno na shemi skeleta. Kod priključka svakog štapa na čvor beleže se svi momenti: prvobitni momenti pune ukleštenosti, izjednačujući i prenosni momenti. Redovi neka budu jedan pod drugim tako udešeni, da ih možemo nakon završene operacije sabirati, odnosno oduzimati. Postupak se najbolje shvata na praktičnim primerima.

2a) Pod 1b) izračunati prenosni momenti na pojedinim čvorovima nisu u ravnoteži. Ako ih saberemo, dobićemo kao sumu novi $\Delta_2 M$ prenosnih momenata koji teži da ponovo okrene čvor. S istim postupkom koji smo upotreabili pod 1a) izjednačićemo taj prenosni $\Delta_2 M$ na pojedine štapove. Čvorove smo dakle po drugi put uravnotežili.

2b) Usled tih sekundarnih okreta dobijamo analogno kao kod prvog okretanja i sekundarne prenosne momente: polovični iznos sekundarnih izjednačujućih momenata prenosimo preko nosača i preko stubova s leva na desno i obratno, i odozgo na dole i obratno.

3) U koliko ti sekundarni prenosni momenti nisu u ravnoteži, pustimo da se čvorovi okreću po treći put; po treći put izvodimo operaciju izjednačavanja i prenošenja momenata.

4), 5) Ako uslovi ravnoteže još nisu ispunjeni, ponavljamo postupak i po četvrti i peti put ili više puta.

Operaciju izjednačavanja i prenošenja momenata ponavljamo dok ne postignemo željenu tačnost rezultata. Kod vertikalnih opterećenja umanjuje se brzo ΔM pojedinih izjednačujućih faza, tako da obično kod skeleta, praktično već kod trećeg, najčešće kod četvrtog izjednačenja, uzmognemo postupak zaključiti. Kod kontinualnih nosača traje postupak nešto duže, do pet faza izjednačavanja. Da bi se isključile greške u tome koji su momenti izjednačeni a koji nisu (vidi praktičan primer), povlačimo crtu ispod svakog izjednačenog momenta.

Konačni rezultat dobićemo ako sve momente: prvobitne momente potpune ukleštenosti i sve izjednačujuće i prenosne momente saberemo (odnosno oduzmemo ako su negativnog predznaka). Zbir konačnih momenata na štapovima, koji se sastavljaju u pojedinom čvoru, mora biti ravan 0, jer smo to postavili kao računski uslov kod svakog izjednačenja. Ako zbir momenata nije ravan 0, onda smo negde u postupku pogrešili (obično kod predznaka).

Gore opisani postupak nije jedina mogućnost. Prvobitni originalni Krosov postupak bio je sledeći:

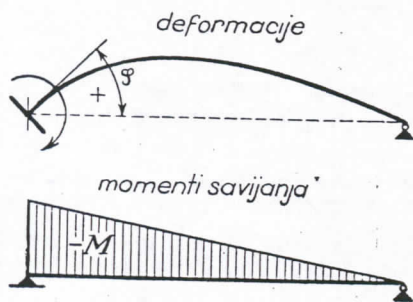
Prvo izjednačenje momenata (odvijanje krilne matice) izvodi se samo na prvom čvoru, a istovremeno i prenošenje »prenosnih« momenata. Kod izjednačenja momenata na susednom čvoru (odvijanje krilne matice susednog čvora) uračunat je u sumu ΔM takođe prenosni moment iz prethodnog rezultata, ali ima slabu stranu da stvara nered u operaciji, naime: prenosni momenti na levim stranama čvorova kao i na gornjim nisu još izjednačeni, dok su prenosni momenti na desnim i na donjim stranama već izjednačeni. Kontrola takvog postupka je mnogo teža. Postupak ove vrste mogao bi dobro da posluži za kontinualni nosač gde je kontrola laka i ne može da nastane zabuna: jedanput polazimo sa izjednačujućim postupkom od čvora na čvor s leva na desno; kod poslednjeg čvora okrećemo i polazimo opet natrag. Konačni rezultat, naravno, mora biti u svakom primeru potpuno isti. Ako bi se upotrebio Krosov postupak za skelet, može se usred računa desiti da ne znamo koji su momenti već preneseni, a koji nisu, odnosno koji su izjednačeni, a koji nisu, i tako na kraju račun moramo početi iznova.

Jednostavnost kako jednog tako i drugog postupka najjasnije će se razabrati iz priloženih praktičnih primera.

Naročiti slučajevi:

uticaji zglobnih ležišta, simetrije ili antisimetrije u konstrukciji

Ako štap (nosač, stub) ima na drugom kraju zglob, biće mu krutost manja. Iz teorije elastičnog štapa sa konstantnim presekom dobijamo:



okret $\varphi = \frac{M_0 l}{3EI}$ iz čega sledi:

$$M_0 = \varphi \cdot 3E \frac{I}{l} = \varphi 4E \frac{3}{4} \frac{I}{l}$$

Kod štapova sa zglobovima treba dakle računati sa tričetvrtinskom krutošću normalnog štapa:

$$t_0 = \frac{3}{4} \frac{I}{l} = 3/4 t_{normalna}$$

Za štap koji je u zidu elastično uklešten, pretpostavljamo neki pristojni međustepen ukleštenosti i tome odgovarajući stepen krutosti.

Ako je konstrukcija potpuno simetrična — po obliku, po krutosti štapova i po opterećenju — pri čemu simetrala prolazi kroz sredinu horizontalnih nosača, rad možemo olakšati time da računamo samo polovinu skeleta do simetrale.

Štap koji leži preko simetrale, okreneće se na oba kraja simetrično:

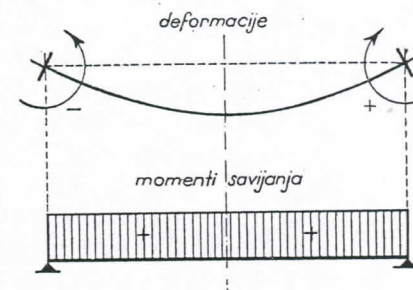
Po teoriji elastičnog štapa:

$$\text{okret } \varphi = \frac{M \cdot l}{2EI}$$

$$M_{sim} = \varphi \frac{2EI}{l} = \varphi 4E \frac{1}{2} \frac{I}{l}$$

U tom slučaju računamo samo s polovinskom krutošću štapa:

$$t_{sim} = \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{l} = \frac{1}{2} t_{normalna}$$



Svako prenošenje momenta preko simetrale, razume se, otpada, jer smo ga umanjujući krutost štapa već uračunali.

Ako je ista simetrična konstrukcija opterećena antisimetrički, okreti su na oba kraja štapa jednaki u istom smislu. Iz teorije elastičnog štapa dobijamo za taj slučaj sledeće okrete:

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{6EI}$$

$$M = \varphi \frac{6EI}{l} = \varphi 4E \cdot \frac{3}{2} \frac{I}{l}$$

U tom slučaju dovoljno je da se izračuna samo jedna polovina skeleta, ali treba da se uzme u računu mesto normalne krutosti štapa koji leži u simetrali, za 50% povećane krutosti od njene normalne krutosti:

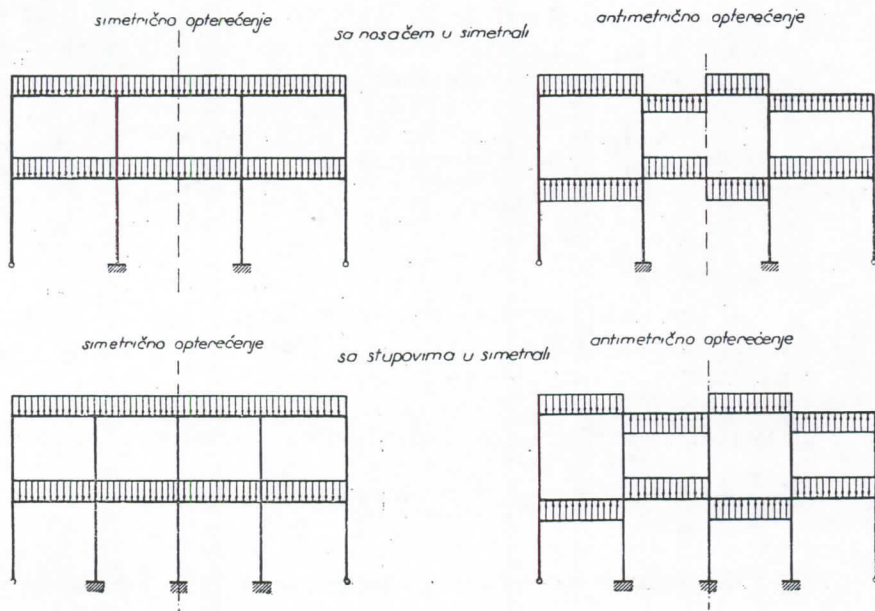
$$t_{antim} = \frac{3}{2} \cdot \frac{I}{l} = \frac{3}{2} t_{normalna}$$

Svi prenosni momenti preko tog štapa, naravno, otpadaju.

Ako je posmatrana konstrukcija simetrična po dispoziciji i po krutosti štapova takve vrste da simetrala pada tačno u osovini stubova, onda je to za simetrično opterećenje najjednostavniji slučaj: svi čvorovi koji se nalaze u simetrali, usled simetričnog opterećenja, ne mogu se okretati ni na desno ni na levo, ostaju dakle učvršćeni (fiksni). Računamo samo jednu polovinu konstrukcije, tako da računamo sve nosače koji dosižu u simetrični čvor kao potpuno ukleštene na tom kraju. Stubovi u simetrali ostaju izvan svakog uticaja momenta savijanja i računski su nepotrebni.

Ako je ista konstrukcija opterećena antimetrički, uštedićemo opet polovinu rada time što ćemo računati samo polovinu skeleta. Zamislimo konstrukciju virtualno presečenu u osi stubova na dve polovine koje ne utiču jedna na drugu. Stubovi sudeluju kod svake polovine skeleta samo sa polovinom svoje krutosti. Suma krutosti čvorova u simetrali sastoji se, dakle, iz cele krutosti nosača (samo s jedne strane) i iz polovina krutosti pojedinih priključenih stubova. Konačni momenti na stubovima u simetrali — kada sastavimo obe polovine skeleta zajedno — su dvostruki, jer se sabiru od leve i od desne polovine. Za dimenzioniranje računamo puni stub koji ima dvostruku krutost od one koja je bila uzeta u statičkom računom postupka.

Simetrične konstrukcije



Celokupan statički račun momenata savijanja po Krosu

Za izračunavanje skeleta ili kontinualnog nosača po Krosovoj metodi potreban je sistematski rad, inače se u toku rada javljaju zapleti koji mogu ne samo da poremete dalji postupak već i da ga sasvim onemoguće.

U praksi izgleda da je najbolja sledeća dispozicija rada:

I. Izračunavanje opterećenja za pojedina polja.

Obično (u visokim i industrijskim zgradama) računamo samo sa ravnomernim opterećenjem.

U tom slučaju postavljamo sledeća opterećenja:

g stalno opterećenje;

p korisno opterećenje

i kombinacije:

slučaj a) $q = g + p$. stalno i korisno opterećenje;

slučaj b) $g + \frac{p}{2}$ stalno opterećenje i polovina korisnog opterećenja;

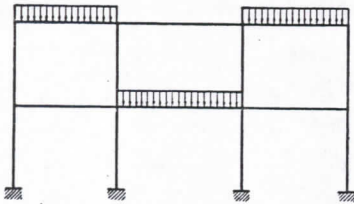
slučaj c) $\frac{p}{2}$ polovina korisnog opterećenja.

Ako skelet računamo sa punim stalnim i korisnim opterećenjem, dobijamo obično maksimalne momente ukleštenja (negativne) sa dovoljnom tačnošću za industrijske i visoke građevine uopšte (ne za mostove!). Za najveće negativne momente dovoljno je dakle opterećenje po rasporedu I koji odgovara slučaju a), punom stalnom i korisnom opterećenju $q = g + p$.

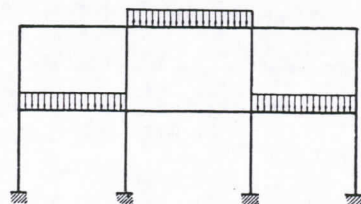
Ako pak želimo da dobijemo najveće pozitivne momente savijanja u poljima i najveće momente savijanja na srednjim stubovima, treba opteretiti i skelet stalnim opterećenjem u svim poljima, a korisnim samo u svakom drugom polju po šahovskom rasporedu. Takav šahovski raspored korisnog opterećenja je dvostruk: raspored II po belim poljima, raspored III po crnim. Da bismo uštedeli dvostruki računski postupak po Krosu i da bismo iskoristili eventualnu simetriju ili antimetriju konstrukcije, kombinovaćemo svaki od ovih rasporeda iz kombinacije dvaju slučajeva opterećenja b) i c) po skici:

Šahovski raspored korisnog opterećenja:

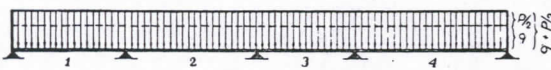
Raspored opterećenja II



Raspored opterećenja III



slučaj opterećenja b)



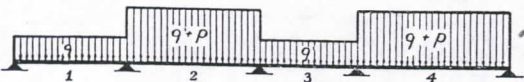
slučaj opterećenja c)



raspored opterećenja II (slučaj b) + slučaj c)



raspored opterećenja III (slučaj b) - slučaj c)



Raspored opterećenja III dobićemo ako oduzmemo slučaj opterećenja c od slučaja opterećenja b.

Raspored opterećenja II daje nam najveće pozitivne momente savijanja u poljima 1 i 3, dok kod rasporeda opterećenja III dobijamo najveće pozitivne momente u poljima 2 i 4. U slučajevima u kojima je korisno opterećenje u srazmeru sa stalnim opterećenjem dosta veliko, pojavljuju se znatni negativni momenti savijanja i u poljima nosača. Za najveće

Slučaj opterećenja b obično neće biti potrebno zasebno izračunavati, jer ćemo ga dobiti iz slučaja opterećenja a, ako rezultate reduciramo u srazmeru

$$\frac{g + \frac{p}{2}}{q}$$

Slučaj opterećenja c treba naravno zasebno izračunati po Krosu.

Iz crteža se vidi da dobijamo raspored opterećenja II ako saberemo oba slučaja opterećenja b i c.

negativne momente u poljima 1 i 3 merodavan je raspored opterećenja III, a u poljima 2 i 4 raspored opterećenja II.

U slučaju da je korisno opterećenje maleno u srazmeru sa stalnim opterećenjem, zadovoljiće se statičar samo sa ispitivanjem opterećenja po rasporedu I, odnosno slučaju a). Primeri za takav postupak su: nepristupačno krovšte, skeletni zidovi bez tavanica, bunker i silosi i rezervoari kod kojih su sve ćelije uvek istovremeno pune, ili silosi samo sa jednom ćelijom.

Kad je korisno opterećenje relativno vrlo malo, ne računamo slučaj opterećenja c) precizno nego više približno.

II. Račun osnovnih momenata savijanja.

Osnovni momenti savijanja su: Momenti prosto položenog nosača koji su potrebni u svrhu crtanja momentne crte (kod ravnomernog opterećenja parabole). Dalje: Momenti pune ukleštenosti koji su potrebni da iz njih dobijemo konačne momente ukleštenosti, nakon izjednačenja po Krosu. Momente prosto položenog nosača izračunavamo samo za slučaj opterećenja I, momente ukleštenosti pak za slučaj opterećenja a) i c). U primerima u kojim se pojavljuju negativni momenti savijanja i u poljima nosača, treba izračunati momente prosto položenog nosača (parabole) i za slučaj opterećenja sa samim stalnim opterećenjem g . Ovi momenti dobijaju se redukovanjem momenata punog opterećenja q , u srazmeru $\frac{g}{q}$.

Pored tih momenata potrebni su i momenti ukleštenosti za slučaj opterećenja b).

Ove momente ćemo izračunati najlakše putem srazmera $\frac{g + \frac{p}{2}}{q}$

Račun izvodimo tabelarno; na primer:

polje broj	raspon	l^2	g	p	q	$\frac{g + \frac{p}{2}}{q}$	M prost.	M uklešt.	M uklešt.	primedba
	l						$\frac{l^2}{8}$	$\frac{l^2}{12}$	$\frac{p}{2} \cdot \frac{l^2}{12}$	
	m^1	m^2	kp/m	kp/m	kp/m	%	kp/m	kp/m	kp/m	
13	5.0	25	1200	800	2000	80.0	6250	4160	833	
14	4.0	16	1200	800	2000	80.0	4000	2670	533	
23	5.0	25	900	450	1350	83.3	4220	2820	469	
24	4.0	16	900	450	1350	83.3	2700	2700*	450*	* $\frac{1}{2}$ zglob

* Uračunat je uticaj zglobnog ležišta.

Pojedine kolone otpadaju ako nisu potrebne. Pod »Primedba« upisuju se korigirani momenti ukleštenja, ako zadnje ležište nije vezano u skelet, već je izvedeno na primer u vidu zgloba, elastične ukleštenosti u zide itd. Ako nemamo ravnomernog već koncentrisano opterećenje, treba da se tabela shodno tome pedesi.

III. Račun krutosti i izjednačujućih koeficijenata.

Za izračunavanje krutosti imali smo već napred navedenu tabelu sledećeg oblika:

štap broj	širina <i>b</i> cm	visina <i>h</i> cm	momenat inercije $J = k \cdot b \cdot h^3$	dužina <i>l</i> m	krutost $t = k \frac{J}{l}$	primedba
13	30	60	216	5·0	43·2	
14	30	60	216	4·0	54·0	
23	30	45	91	5·0	18·2	
24	30	45	91	4·0	17·1*	* 3/4 zglob

* Uračunat je uticaj zgloba.

štap broj	krutost <i>t</i>	izjednačeni koeficijent
13	43·2	32·6 %
14	54·0	40·8 %
23	18·2	13·7 %
24	17·1	12·9 %
$\Sigma t = 132·5$		100·0 %

IV. Izjednačavanje i prenošenje momenata.

Izjednačavanje i prenošenje momenata ukleštenja vrše se u velikoj računskoj shemi skeleta. Shema mora biti dovoljno velika da za vreme računanja ne bi ponestalo prostora. Kao primer navodimo proračun ske-

Pod »Primedba« dolaze korigirane krutosti usled uticaja zglobova, elastične ukleštenosti, pojave simetrije, antimetrije itd.

Prenosne koeficijente izračunavamo za svaki čvor zasebno u naročitoj tabeli koja može biti sastavljena po priloženom obrascu:

Nije potrebno da se ove tabele uvek unose u račun. Koeficijente često izračunavamo na konceptnoj hartiji, a rezultate upisujemo direktno u računsku shemu skeleta.

leta sa dva polja. Tačnost ovog primera ograničena je na 10 kpm. Prethodno su izračunati sledeći podaci:

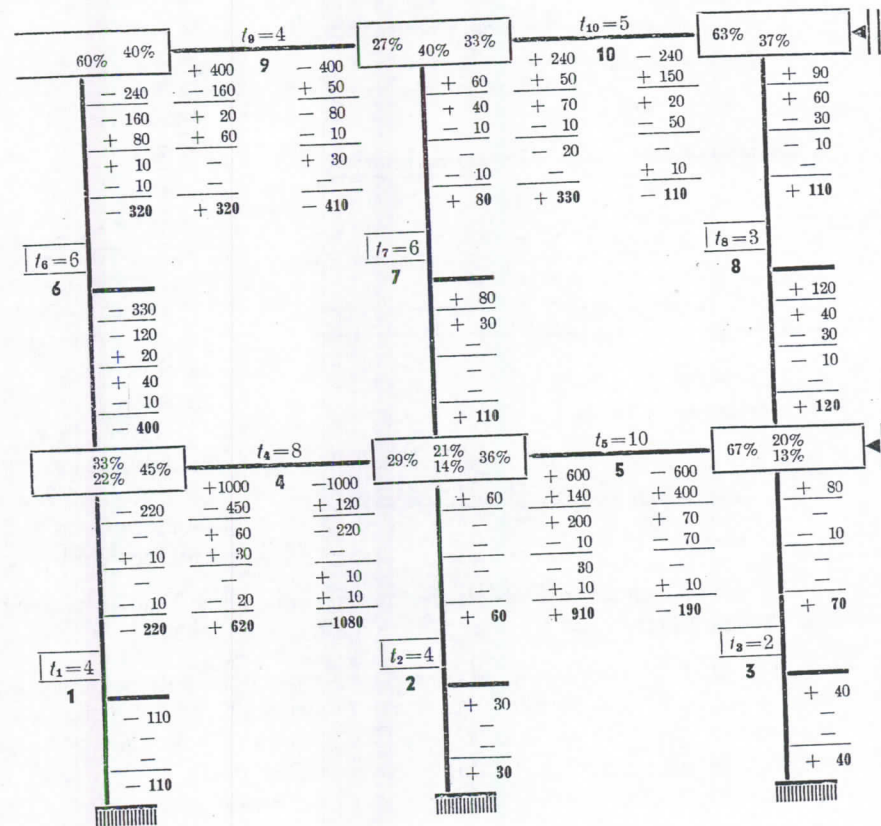
Momenti pune ukleštenosti:

- za štap 9 : $M_9 = 400 \text{ kpm}$
- „ „ 10 : $M_{10} = 240 \text{ kpm}$
- „ „ 4 : $M_4 = 1000 \text{ kpm}$
- „ „ 5 : $M_5 = 600 \text{ kpm}$

Krutosti štapova

- štap 1, 2 $t_{1,2} = 4$
- štap 3 $t_3 = 2$
- nosač 4 $t_4 = 8$
- nosač 5 $t_5 = 10$
- stub 6, 7 $t_{6,7} = 6$
- stub 8 $t_8 = 3$
- nosač 9 $t_9 = 4$
- nosač 10 $t_{10} = 5$

Izjednačujući koeficijenti izračunati u procentima su direktno upisani u računsku shemu skeleta:



Svaki štap skeleta dobija broj sa oznakom krutosti štapa. U četverougaonike čvorova upisujemo, uz priključene štapove, pripadajuće izjednačujuće koeficijente. Računski postupak je sledeći:

Prvi red: momenti pune ukleštenosti (samo kod nosača; kod stubova oni otpadaju).

Drugi red: izjednačujući momenti (ΔM podeljen po %) — crta: znak izvršenog izjednačenja.

Treći red: prenosni momenti ($\frac{1}{2}$ izjednačujućih na suprotnom kraju štapa).

Četvrti red: sekundarni momenti izjednačenja — crta: znak izvršenog izjednačenja.

Peti red: sekundarni prenosni momenti ($\frac{1}{2}$ sekund. izjednačujućih momenata).

Šesti red: tercijarni momenti izjednačenja — crta: znak izvršenog poslednjeg izjednačenja.

Sedmi red: suma svih momenata kao konačni rezultat.

Ovaj se postupak izvršuje zasebno za svaki slučaj opterećenja: jedanput za slučaj opterećenja *a*) i jedanput za slučaj opterećenja *c*).

Krosov postupak možemo provesti i do veće tačnosti.

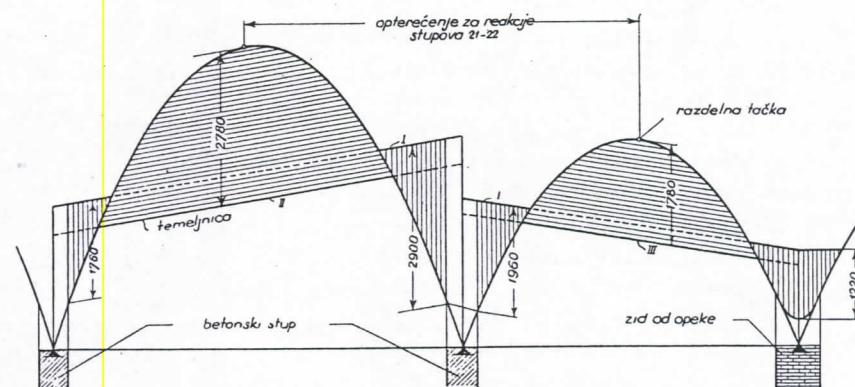
Propisi traže tačnost do tri decimala. Kod manjih raspona i manjeg opterećenja dovoljna je tačnost sa dva decimala, što se sasvim opravdava sa približnošću u računu momenata inercije koja ne vodi računa n. pr. o armaturi. Kod rebrastih ploča može se moment inercije tek približno oceniti. U izračunatom primeru, radi lakšeg pregleda, zadovoljili smo se sa dva decimala.

V. Utvrđivanje momenata savijanja, merodavnih za dimenzioniranje.

Za utvrđivanje merodavnih momenata savijanja za dimenzioniranje potrebno je da se nacrtaju crte maksimalnih i minimalnih momenata savijanja, i to zasebno za nosače i zasebno za stubove.

Za nosače crtamo najpre momentnu crtu prosto položenih nosača za slučaj opterećenja *a*) (*q*), u prebačenom položaju kako to preporučuje prof. dr. ing. Kasal. Najveće momente ukleštenja dobijamo obično za slučaj opterećenja *a*). Po Krosovom postupku izračunate momente ukleštenja nanosimo iznad osovine ležišta. Spojna crta između njih deli nacrtanu momentnu površinu na pozitivne i maksimalne negativne momente. Za

maksimalne pozitivne momente savijanja ležace ta spojna crta kod istog dijagrama prostih momenata — niže. Za ovu drugu spojnu crtu biće merodavno opterećenje po rasporedu *II*, odnosno *III* koje dobijamo ako sabremo (odnosno oduzmemo) rezultate slučaja opterećenja *b*) i *c*). Ovakvo dobivene momente ukleštenja rasporeda *II*, odnosno *III*, unosimo u crtež; nove spojne crte (linije) seku površine maksimalnih pozitivnih momenata.



Polje 21

Polje 22

$\frac{q l^2}{8}$	5360		3640		
slučaj <i>a</i> I	+ 2480	- 3660	+ 2760	- 1850	× 0,83
slučaj <i>b</i>	+ 2060	- 3040	+ 2290	- 1540	
slučaj <i>c</i>	+ 130	- 90	+ 120	- 80	
opterećenje: <i>II (III)</i>	+ 2190	- 3230	+ 2410	- 1620	

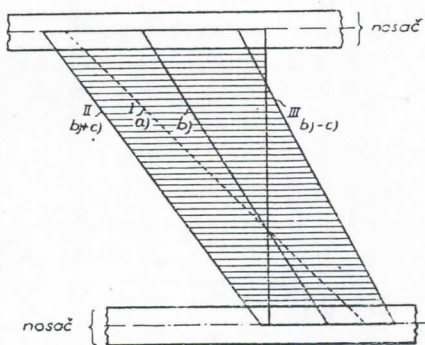
Za dimenzioniranje nosača merodavan je maksimalni pozitivni moment u polju koje dobijamo između spojne crte *II (III)* i s njom paralelne tangente na momentnu crtu.

Maksimalni negativni moment, kritičan za dimenzioniranje, nije šiljak momentne crte. Ako nosač leži na betonskom stubu (na primer u skeletu), ili na mnogo višem primarnom nosaču, možemo ceo šiljak otkriti. Za dimenzioniranje je merodavan moment u preseku gde se nosač priključuje na stub (ili na primarni nosač). U stubu je naime visina nosača veća, zato se umanjuju naprezanja, a armatura ostaje ista. Ako nosač leži na zidu od opeke, ili na primarnom nosaču iste visine, onda možemo pretpostaviti da se reakcije stuba od opeke ili betonskog nosača podele ravnomerno po dužini ležišta. Šiljak momentne crte zaobljemo parabolom i

dobićemo maksimalne negativne momente iste veličine kao da smo odbili polovinu šiljka.

Kod stubova je postupak prostiji: najnepovoljnije kombinacije su raspored opterećenja II i III, dakle slučajevi $b) + c)$ i $b) - c)$. Oba ova rasporeda daju ekstremne momente savijanja. Kritični momenat za dimenzioniranje biće momenat preseka tamo gde se stub priključuje na nosače gore i dole.

U ovom poglavlju obrađivani su samo jednostavni slučajevi u kojima ne dolazi do horizontalnih pomeranja. Ako imamo skelet koji je opterećen i u horizontalnom pravcu (vetrom, potresom, ili uticajem nesimetrične konstrukcije, nesimetričnog opterećenja) te ako usled toga dolazi do horizontalnog pomeranja, ili nastupaju promene u temperaturi, tada treba pre dimenzioniranja uneti odgovarajuće uticaje u momentne crte nosača i stubova. U praksi se pojavljuju i slučajevi u kojima je uticaj vetra veći od uticaja stalnog korisnog opterećenja. Horizontalna pomeranja biće predmet razmatranja u sledećem poglavlju.



VI. Izračunavanje reakcija na stubove.

Za dimenzioniranje stubova potrebne su veličine odgovarajućih reakcija od kontinualnih, odnosno skeletnih nosača. Po propisu dovoljna bi bila približna procena, naime, da se reakcije nosača dele po zakonu koji važi za prosto položena polja. Statičaru često bolje odgovara tačna i pravilna razdeoba reakcija, uzimajući u obzir različiti stepen ukleštenja. Te reakcije dobićemo najlakše na taj način da utvrdimo razdelne tačke u kojima su poprečne sile nosača jednake 0, u kojima su tangente momentne crte paralelne sa osnovnom spojnom crtom. Na svaki stub otpada čitava težina nosača koja pripada razmaku od jedne razdelne tačke do druge razdelne tačke. Postupak se vidi na crtežu u V poglavlju (Utvrdivanje momenata za dimenzioniranje). Opterećenja stubova, dobivena na taj način, katkad su znatno veća od onih opterećenja izračunatih po pretpostavci prosto položena polja.

PRAKTIČNI PRIMERI

Primer 1: Kontinualna ploča preko dva polja.

I. Opterećenje

$$g = 400 \text{ kp/cm}^2 \quad p = 800 \text{ kp/cm}^2 \quad q = 1200 \text{ kp/cm}$$

$$g + \frac{p}{2} = 800 \text{ kp/m}^2 \quad p/2 = 400 \text{ kp/m}^2 \quad \frac{g + p/2}{q} = 0.667$$

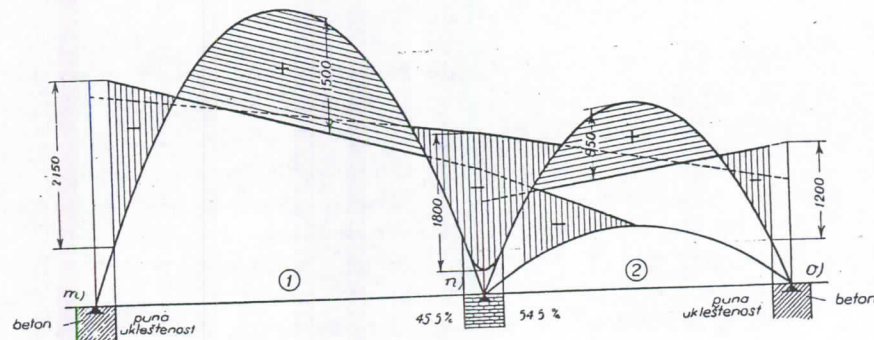
II. i III. Osnovni momenti i krutosti (za konstantan momenat istrajnosti)

Polje	Raspon l_m	$M_{\text{prost}} \frac{ql^2}{8} \text{ kpm}$	$M_{\text{prost}} \frac{gl^2}{8} \text{ kpm}$	$M_{\text{uklešt}} \frac{ql^2}{12} \text{ kpm}$	$M_{\text{uklešt}} \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \text{ kpm}$	$\frac{g + p/2}{q}$	Krutost $\frac{I}{l - c \frac{I}{l}}$	$\bar{I}_u \%$
1	5.0	3750	1250	2500	833	0.667	$\frac{20}{3} = 4$	45.5%
2	4.0	2400	800	1600	533	0.667	$\frac{20}{4} = 5$	54.5%

IV. Krosov postupak

	45.5%		54.5%	
Slučaj a)	+2500 +200 +2700	←	-2500 +400 -2100	+1600 +500 +2100
Slučaj b)	+1800		-1400	+1400
Slučaj c)	+833 +310 +1143	←	-833 +621 -212	-533 +745 +212
Raspored opterećenja	+2943	II (b+c)	-1612	+1188 III (b-c)
				-1805

V. Momentna crta



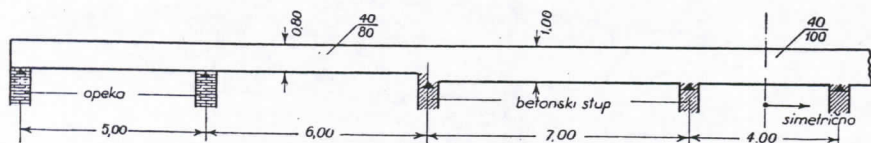
Iz momentne crte vidi se, da je raspored opterećenja I merodavan jedino za potporne momente uz srednji oslonac. Međutim za potporne momente krajnjih potpora i za maksimalne pozitivne momente savijanja u poljima merodavan je raspored opterećenja II (slučaj b + c) odnosno III (slučaj b - c). U polju 2 dobijamo čak i izvesne negativne momente za raspored opterećenja II (slučaj b + c).

Primer 2: Kontinualni nosač preko mnogo polja.

I. Opterećenje

u kp/m'

Polje	g	P	q	$g + P/2$	$\frac{g + P/2}{q} u\%$	$P/2$
1, 2	3200	1600	4800	4000	0.833	800
3, 4	4800	2400	7200	6000	0.833	1200



II. i III. Osnovni momenti i krutosti

Štap br.	Dužina l m	Opterećenje q	Mprost q l ² /8	Mukleš q l ² /12	$g + P/2$ q	Mukleš $\frac{P}{2} \frac{l^2}{12}$	Dimenzije stapova		Moment istrajnosti k I	Krutost $c \frac{I}{l}$	Izjed. koef. u %
							širina b _m	visina h _m			
1	5.0 ^{*)}	4800	15.000	15.000 ^{*)}	0.833	2500 ^{*)}	40	80	512	7.68 ^{*)}	-47.4
2	6.0	4800	21.670	14.500		2420	40	80	512	8.53	52.6
3	7.0	7200	44.000	29.300		4880	40	100	1000	14.30	62.6
4	4.0 ^{**)}	7200	14.400	9.600		1600	40	100	1000	12.50 ^{**)}	53.4
											46.6

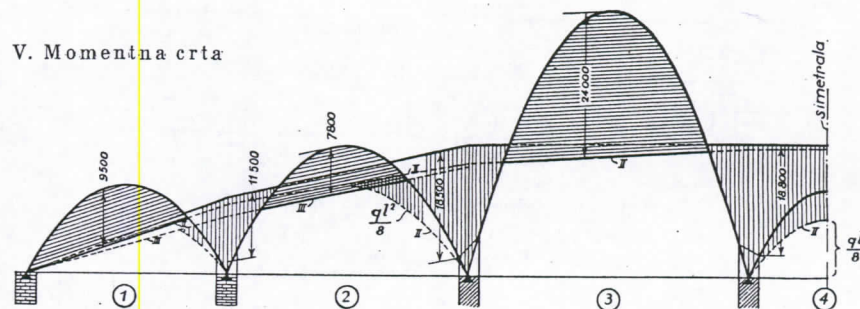
* Uračunat je uticaj zgloba.

** Uračunat je uticaj simetrije.

IV. Krosov postupak — jedinica 10 kpm

	47.4 %	52.6 %	37.4 %	62.6 %	53.4 %	46.6 %		
<i>Slučaj a) na duži način</i>	-1500 +24 - +131 - +48 - +17 - +6 +2	+1450 +26 -277 +146 -101 +53 -36 +19 -13 +7 -2	↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔	-1450 -554 +13 -202 +73 -73 +26 -26 +9 -9 -	+2930 -926 +526 -337 +123 -123 +45 -45 +16 -16 -	↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔	-2930 +1052 -463 +247 -168 +90 -61 +33 +12 -4	+960 +918 - +216 - +78 +28 +10 +4
<i>Slučaj a) na kraći način</i>	-1500 +201 - +25 - +3	+1450 -375 +224 -52 +27 -6 +3	↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔	-1450 -750 +112 -104 +13 -13	+2930 +526 -1256 +167 -175 +23 -23	↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔	-2930 +1052 -624 +335 -87 +46 -11 +6 -1	+960 -918 - +293 -87 +41 - +5 +1
<i>Slučaj b) (sl.a) × 0.833</i>	-1060	+1060	↔	-1830	+1830	↔	-1850	+1850
<i>Slučaj c)</i>	-250 +233 - +91 - +12 +1	-242 +259 -193 +102 -25 +13 -1	↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔	+242 +129 -386 +57 -51 +6 -6	+488 +173 -646 +86 -86 +11 -11	↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔ ↔	-488 +346 -323 +173 -43 +23 -2	-160 +302 - +150 - +20 -2
<i>Raspored opterećenja (b+c)</i>	-1147	+973	↔	-1815	+1815	↔	-2164	+1536

V. Momentna crta

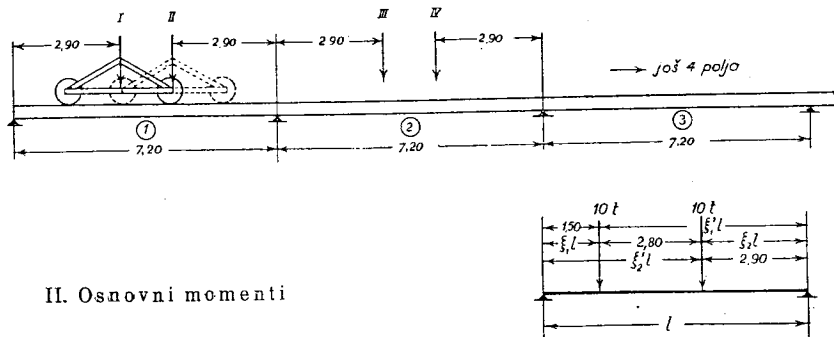


U kraćim poljima 2 i 4 treba paziti na negativne momente u poljima, koji nastupaju kod rasporeda opterećenja II (b + c) dok maksimalni pozitivni momenti nastupaju u istim poljima kod rasporeda opterećenja III (b - c).

Primer 3: Kontinualni nosač sa koncentrisanim opterećenjem.

Rasponi nosača su svi jednaki po 7.20 m, krajnje polje uz dilatacioni stub prosto položeno.

I. Opterećenje: Reakcija pojedinog točka kрана iznosi uključno udarni koeficijent 10 t. Razmak između oba točka iznosi 2.80 m. Rađunaće se 4 kritična položaja kрана prema crtežu.



II. Osnovni momenti

a) Prosti momenti

Točak	ξ	ξ'	M_{prosti} $\cdot \frac{P}{\xi\xi'}$	Uticaj susednog točka	M_{prosti} od oba točka	M_{prosti} $\frac{P \cdot l}{\xi \cdot \xi'}$
1	0.208	0.792	0.165	0.240 $\frac{1.50}{4.30} = 0.084$	0.249	17.9
2	0.597	0.403	0.240	0.165 $\frac{2.90}{5.70} = 0.084$	0.324	23.3

b) Momenti pune ukleštenosti po uticajnoj liniji str. 28

Točak	η	η'	$M_{ukleštenosti}$ levo $\eta_1 \cdot \eta_2$	$M_{ukleštenosti}$ desno, $\eta_1' \cdot \eta_2'$	$M_{ukleštenosti}$	
					$\frac{P \cdot l}{\eta}$	$\frac{P \cdot l}{\eta'}$
1	0.130	0.034	0.227	0.178	16.35	12.80
2	0.097	0.144				

c) Momenti ukleštenosti za pojedine položaje tereta

Položaj I: $M_{ukl\ levo} = 0$ $M_{ukl\ desno} = 12.80 + \frac{1}{2} \cdot 16.35 = 21.00 \text{ tm}$

Položaj II: $M_{ukl\ levo} = 0$ $M_{ukl\ desno} = 16.35 + \frac{1}{2} \cdot 12.80 = 22.70 \text{ tm}$

Položaj III: $M_{ukl\ levo} = 16.35 \text{ tm}$ $M_{ukl\ desno} = 12.80 \text{ tm}$

Položaj IV: $M_{ukl\ levo} = 12.80 \text{ tm}$ $M_{ukl\ desno} = 16.35 \text{ tm}$

III. Krutosti

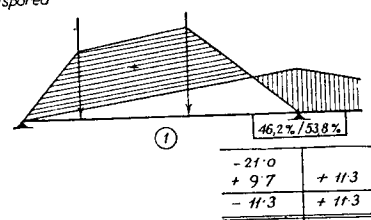
Momenat istrajnosti je konstantan. Za račun položaja I. i II. pretpostavlja se da je nosač 2 s desne strane elastično uklešten na 50% pune ukleštenosti, pošto je polje 3 jednako polju 2. Za račun položaja III. i IV. analogno uzimamo nosač 3 kao elastično 50% uklešten u nosaču 4.

Za položaje tereta I i II: $t_1 = \frac{3}{4} t_{norm}$ $t_2 = \frac{7}{8} t_{norm}$ $t_1 = 46.2\%$ $t_2 = 53.8\%$

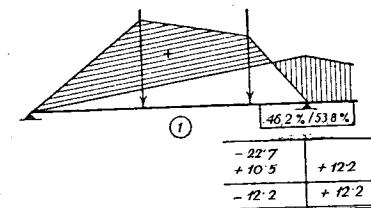
Za položaje tereta III i IV: $t_1 = \frac{3}{4} t_{norm}$ $t_2 = t_{norm}$ $t_3 = \frac{7}{8} t_{norm}$ $\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 42.8\% \\ t_2 = 57.2\% \\ t_3 = 53.4\% \\ t_4 = 46.6\% \end{array} \right.$

IV. i V. Krosov postupak i momentne crte

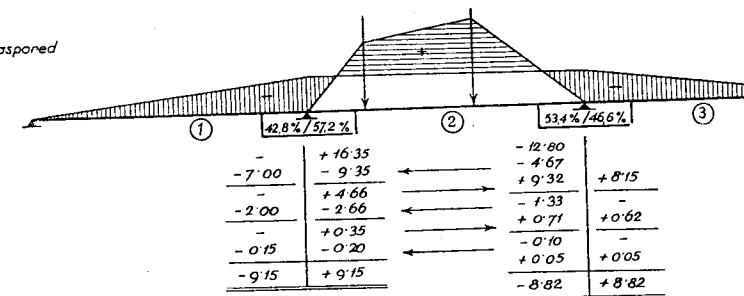
I raspored



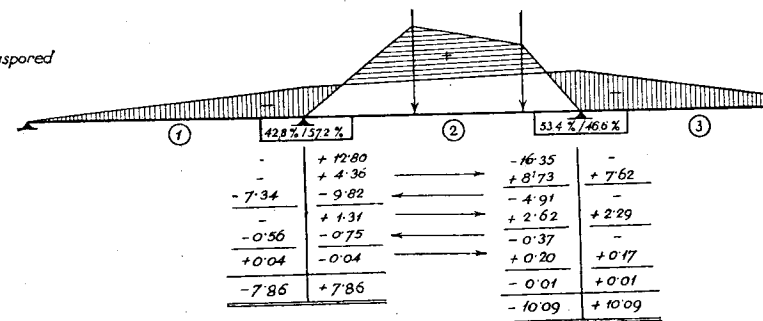
II raspored



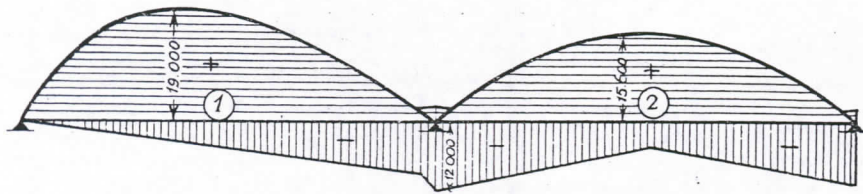
III raspored



IV raspored



Crta maksimalnih pozitivnih i negativnih momenata savijanja od uticaja korisnog opterećenja kрана



Primer 4: Rezervoar za vodu.

Računat je horizontalni presek kao zaključeni okvir bez obzira na uticaj dna i ivične uslove.

I. Opterećenje u dubini 24 m 2400 kp/m².

II. Osnovni momenti

$a = 6.0 \text{ m}$ $b = 5.0 \text{ m}$

$M_{a \text{ prosto}} = 2400 \cdot \frac{6.0^2}{8} = 10.800 \text{ kpm}$ $M_{b \text{ prosto}} = 2400 \cdot \frac{5.0^2}{8} = 7.500 \text{ kpm}$

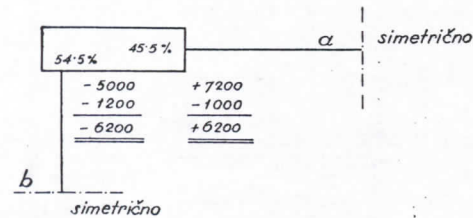
$M_{a \text{ ukl}} = 2400 \cdot \frac{6.0^2}{12} = 7.200 \text{ kpm}$ $M_{b \text{ ukl}} = 2400 \cdot \frac{5.0^2}{12} = 5.000 \text{ kpm}$

III. Krutosti: Obe stranice su jednako debele:

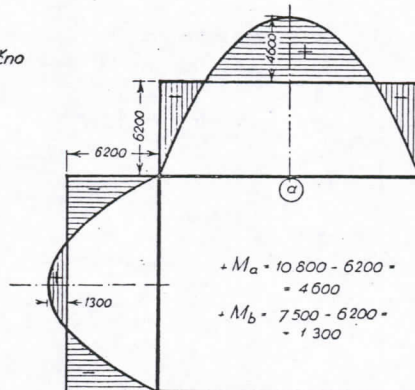
$t_1 = c \cdot \frac{1}{a} = 5$ $t_2 = c \cdot \frac{1}{b} = 6$ $t_1 = 45.5\%$ $t_2 = 54.5\%$

Razmer krutosti ne menja se, pošto su obe stranice simetrične. Prenosni momenti zbog simetrije otpadaju.

IV. Krosov postupak



V. Momentna crta



$+M_a = 10.800 - 6200 = 4600$
 $+M_b = 7.500 - 6200 = 1300$

Primer 5: Silos za materijal sa četiri ćelije.

I. Opterećenje. Na temelju računa $p = 8000 \text{ kp/m}^2$.

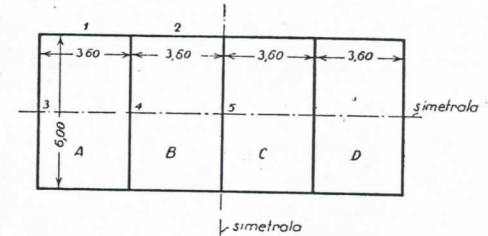
II. Osnovni momenti

Polje 1 i 2: Polje 3 i 4:

$p \frac{l^2}{8} = 12.960 \text{ kpm}$ $p \frac{l^2}{8} = 36.000 \text{ kpm}$

$p \frac{l^2}{12} = 8.640 \text{ kpm}$ $p \frac{l^2}{12} = 24.000 \text{ kpm}$

$\frac{p}{2} \frac{l^2}{12} = 4.320 \text{ kpm}$ $\frac{p}{2} \frac{l^2}{12} = 12.000 \text{ kpm}$



III. Krutosti štapova

Nosač 1 i 2: $d = 32 \text{ cm}$ $l = 3.60 \text{ m}$ $t = \frac{I}{l} \cdot k = 1$ * simetrija

Nosač 3 i 4: $d = 40 \text{ cm}$ $l = 6.00 \text{ m}$ $t = \frac{I}{l} \cdot k = \left(\frac{40}{32}\right)^3 \cdot \frac{3.6}{6.0} \cdot \frac{1}{2} = 0.588$

Nosač 5: Za antimetrično opterećenje: $t = \frac{1}{2} \cdot 0.588 = 0.294$

Izjednačujući koeficijenti:

Čvor 1-3	Čvor 1-2-4	Čvor 2-5 za antimetrično opterećenje
$t_1 = 1.00 \text{ } 63\%$	$t_1 = 1.00 \text{ } 38.7\%$	$t_2 = 1.00 \text{ } 77.3\%$
$t_3 = 0.588 \text{ } 37\%$	$t_2 = 1.00 \text{ } 38.7\%$	$t_5 = 0.294 \text{ } 22.7\%$
	$t_5 = 0.588 \text{ } 22.6\%$	

Slučajevi opterećenja: a) sve ćelije pune: opterećenje p

b) sve ćelije u pola pune: opterećenje $\frac{p}{2}$

c) sve ćelije naizmjenično opterećene sa $\mp \frac{p}{2}$

Raspored opterećenja II. ($= b + c$) pretstavlja primer u kome su ćelije A i C pune, a B i D prazne.

Raspored opterećenja III. ($= b - c$) pretstavlja primer u kome su ćelije B i D pune, a A i C prazne.

IV. Krosov postupak

Slučaj a)

37%	63%		38.7%	38.7%		
+2400	-864		+864	-	-864	+864
-568	-968		-484	+110	+187	+93
-	+93		+187	-	-	
-35	-58		-29	+7	+11	+5
-	+5		+11	-	-	
-2	-3		-	+117	-666	+962
+1795	-1795		+549	+117	-666	
Slučaj b)						
+897	-897		+274	+58	-333	+481

Slučaj c)

37%	63%		28.7%	38.7%		77.3%	22.7%
+1200	-432		+432	-2400	+432	-432	+1200
-	+297		+594	+346	+594	+297	-
-393	-672		-336	+170	-412	-824	-241
-	+144		+289	+170	+289	+144	-33
-53	-91		-45	+22	-55	+19	-
-	+19		+39	+22	+39	-15	-4
-7	-12		-1	+2	-1	-922	+922 *
+747	-747		+972	-1860	+886		

* U diagram momenata treba uzeti dvostruki iznos zbog antimetričnog položaja:

Raspored opterećenja II (slučaj b + c)

+1644	-1644		+1246	-1802	+553		-441	+1844
-------	-------	--	-------	-------	------	--	------	-------

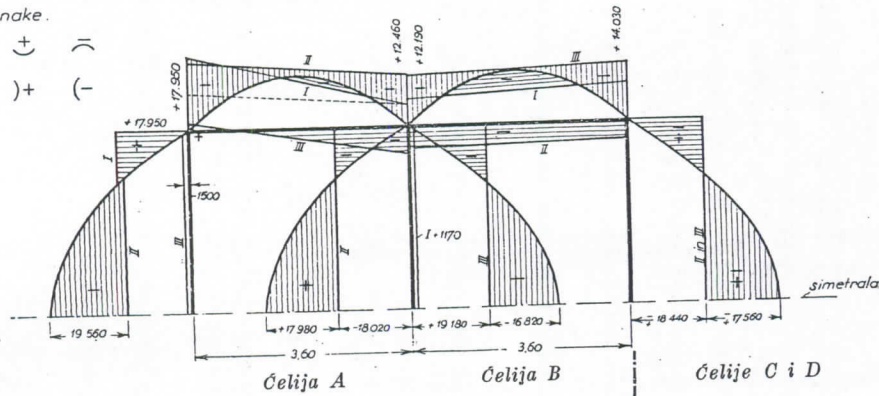
Raspored opterećenja III. (slučaj b-c)

+150	-150		-698	+1918	-1219		+1403	-1844
------	------	--	------	-------	-------	--	-------	-------

V. Diagram ekstremnih momenata savijanja

Oznake:

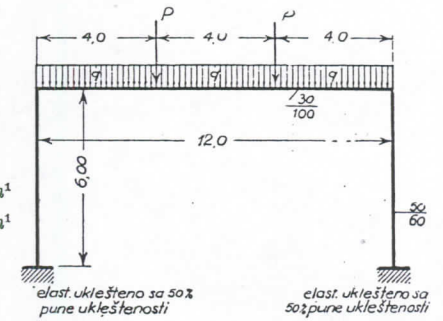
(+) (+) (-) (-)



Primer 6: Jednostavan simetrični okvir.

I. Opterećenje

ravnomerno $q = 2600 \text{ kp/m}^2$
 koncentrisano $P = 7200 \text{ kp/m}^2$
 raspon $l = 1200 \text{ m}$



II. Osnovni momenti

$$M_{\text{prost}} = q \frac{l^2}{8} + P \cdot \frac{l}{3} = 2600 \cdot \frac{12^2}{8} + 7200 \cdot \frac{12}{3} = 75.600 \text{ kpm}$$

$$M_{\text{uklešt}} = q \frac{l^2}{12} + P \cdot \frac{2l}{9} = 2600 \cdot \frac{12^2}{12} + 7200 \cdot \frac{2 \cdot 12}{9} = 50.400 \text{ kpm}$$

III. Krutosti

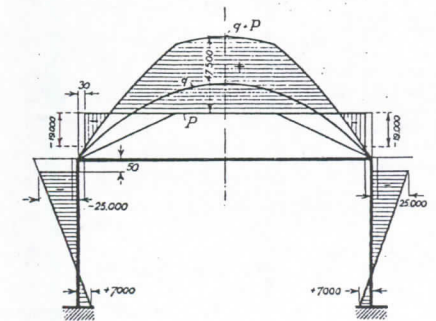
$$t_{\text{stuba}} = k \frac{I}{l} \cdot \frac{7}{8} = k \cdot \frac{50 \cdot 60^3}{6 \cdot 00} \cdot \frac{7}{8} = 15 \cdot 75 \cdot k \quad 55.8\% \quad \frac{7}{8} \text{ zbog elastične ukleštenosti}$$

$$t_{\text{nosača}} = k \frac{I}{l} \cdot \frac{1}{2} = k \cdot \frac{30 \cdot 100^3}{12 \cdot 0} \cdot \frac{1}{2} = 12 \cdot 50 \cdot k \quad 44.2\% \quad \frac{1}{2} \text{ zbog simetrije}$$

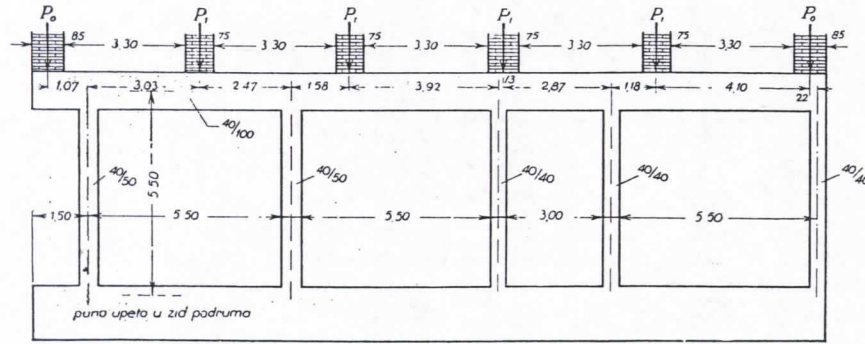
IV. Krosov postupak

55.8%	44.2%
-28.100	+50.400
-28.100	-22.300
	+28.100
prenos:	
-7000	

V. Momentna crta

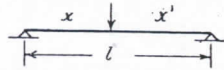


Primer 7: Prizemni skelet (visoke građevine).



Opterećenje. Ravnomerno naskroz $q + p = 3000 \text{ kp/m}^2$.
 Koncentrisano $P_0 = 15.000 \text{ kp}$, $P_1 = 25.000 \text{ kp}$.
 Od ovog opterećenja 80% stalnog a 20% korisnog.

II. Osnovni momenti



$\xi = \frac{x}{l}$, $\xi' = \frac{x'}{l}$ η , η' Koefficienti momenata pune ukleštenosti po uticajnoj liniji

Štup	Raspored l m	M prost. q l/8 kpm	M ukl. q l/2 kpm	P, l	ξ	ξ'	M prost. P l $\xi \xi'$ kpm	η	η'	M ukl. levo P l η kpm	M ukl. desno P l η' kpm
0	1.50	3 380 ^{a)}	3.380 ^{a)}	22 500	-	0.713	16.000	-	-	-	16.000
1	5.50	11 380	7 590	137 500	0.551	0.449	34.000	0.111	0.136	15.250	18 700
2	5.50	11 380	7 590	137 500	0.287	0.713	28.100	0.144	0.059	19 800	8 100
3	3.00	3.380	2 250	75 000	0.043	0.957	3.100	0.040	0.002	3 000	165
4	5.50	11 380	7 590	137 500	0.215	0.785	23.200	0.132	0.036	18.150	4 950
				82 500	0.960	0.040	3.170	0.036	0.020	2 950	1 650

a) Konzola - $M = q l^2 / 2 + P l \xi'$

III. Krutosti

Štup	Celokupni momenti pune ukleštenosti			
	za opter. q		za opter. P ₂	
	M levo 10 kpm	M desno 10 kpm	M levo 10 kpm	M desno 10 kpm
0	-	1940	-	195
1	2785	2630	230	265
2	2740	1570	270	155
3	525	240	50	25
4	2870	1420	285	140

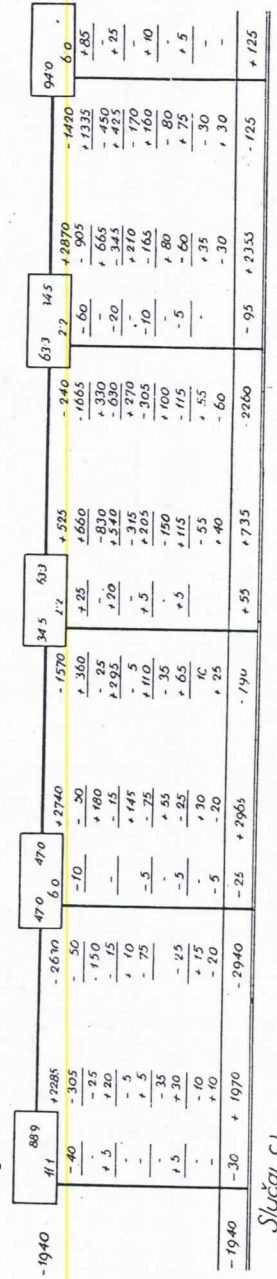
	Štup	Dim b/h	I-cbh ³	l _m	l · I _x / l	Krutost u %
Grede	1	40/100	100	5.50	182	470
	2			5.50	182	470
	3			3.00	333	633
	4			5.50	182	345
Stubovi	01	40/50	12.5	5.50	227	111
	12			5.50	2 27	60
	23	40/40	6.40	5.50	116	22
	34			5.50	116	22
40				5.50	116	60

$\frac{q + P_2}{q} = 90\%$ $\frac{P_2}{q} = 10\%$

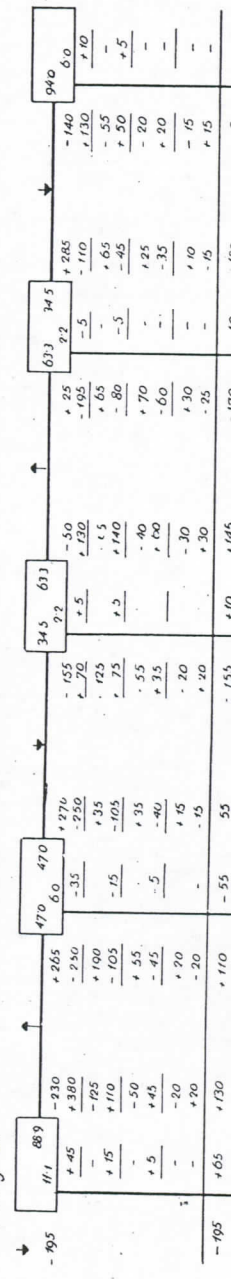
Tačnost je ograničena na 50 kpm

IV. Krosov postupak

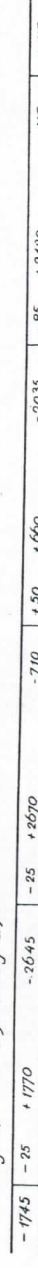
Slučaj a)



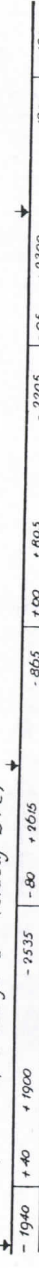
Slučaj c)



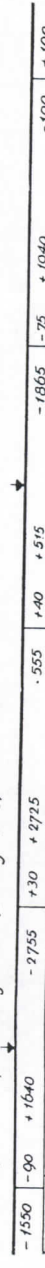
Slučaj b) = 0.9 x slučaj a)



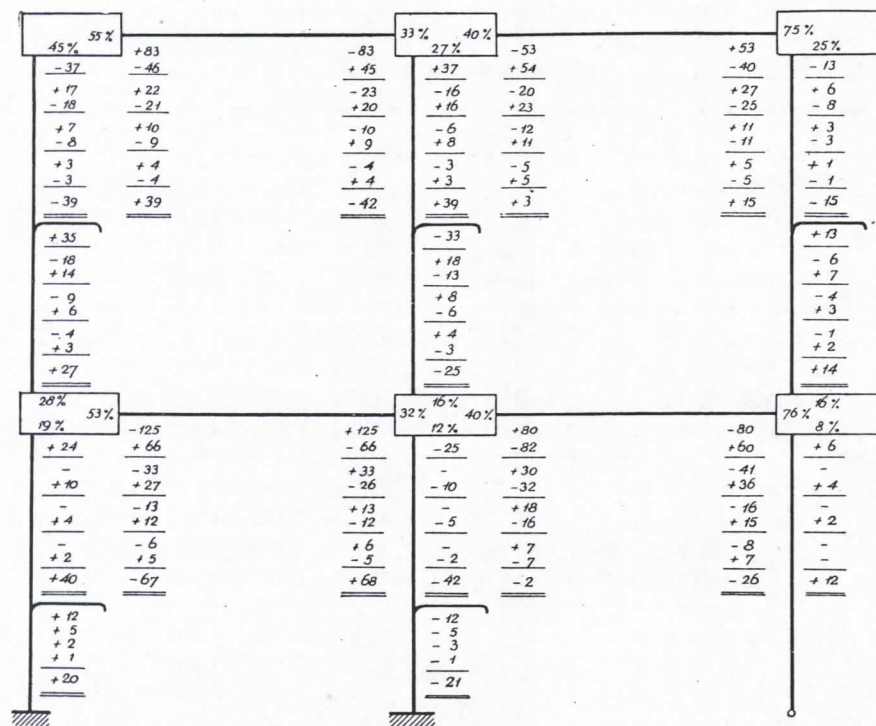
Raspored opterećenja II (slučaj b+c)



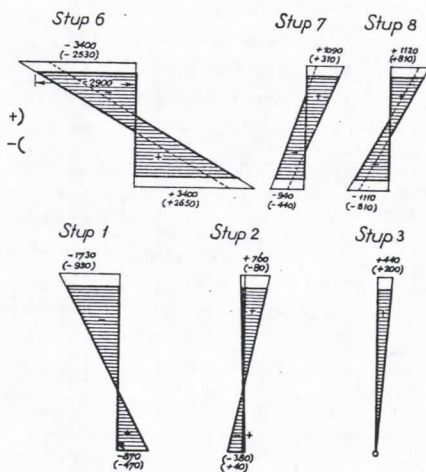
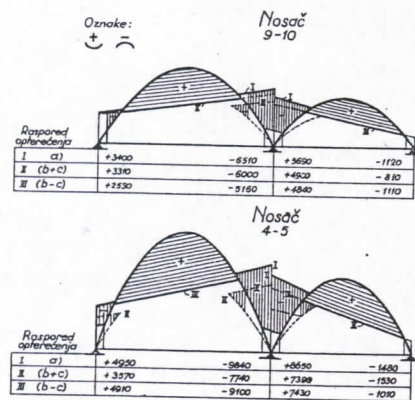
Raspored opterećenja III (slučaj b-c)



Slučaj c)



V. Momentne crte



Skeletni i kontinualni nosači sa vutama

Ako skeletni ili kontinualni nosači imaju vute, tada priroda raspoređuje u nosaču unutrašnje sile i momente savijanja tako da ukupni unutrašnji rad postaje minimalan: pojačani delovi nosača (vute) preuzeuće veća opterećenja (veće momente savijanja), a tanji delovi biće rasterećeni.

Praktični račun zahteva sledeće promene:

I. Račun opterećenja ne menja se.

II. Račun osnovnih momenata savijanja menja se utoliko što se potporni momenti punog ukleštenja povećavaju, dok se maksimalni pozitivni momenti u polju smanjuju. Na elementarni način možemo momente pune ukleštenosti računati po formuli na strani 6.

III. Račun krutosti menja se utoliko što krutost nosača sa vutama biva veća od one krutosti koju imaju nosači bez vuta. Ovom povećanju krutosti pridolazi i račun prenosnih koeficijenata koji kod nosača sa vutama, nisu jednaki $\frac{1}{2}$, nego su veći od $\frac{1}{2}$. Označimo ih sa $\kappa < \frac{1}{2}$. Elementarne formule za izračunavanje prenosnih koeficijenata navedene su napred na strani 32.

IV. Izjednačenje i prenošenje momenata vrši se na isti način kao kod ravnih nosača, samo što kod prenošenja momenata ne uzimamo polovične iznose, već κ -te delove izjednačujućih momenata.

V. Određivanje merodavnih momenata savijanja za dimenzioniranje ostaje isto kao kod običnih nosača.

Koeficijenti povećanja potpornih momenata punog ukleštenja za razne slučajeve opterećenja, koeficijenti povećanja krutosti, kao i prenosni koeficijenti za nosače sa vutama preuzeti su iz stručne revije: Concrete and Constructional Engineering god. 1947, broj 1 i 2, iz članka: L. S. Müller: Bending Moments in Members of Varying Section.

U tabeli A su dati koeficijenti za povećanje momenata ukleštenja za više slučajeva opterećenja: Koncentrisani teret u sredini polja, dalje dva koncentrisana tereta, svaki u trećini raspona; tri tereta postavljena u međusobnim razmacima od četvrtine raspona i ravnomerno opterećenje. Takođe se u tabeli nalaze koeficijenti povećanja krutosti nosača i prenosni koeficijenti.

B. Slučaj jednostrane vute dolazi u obzir samo kod stubova (okvira). Zato nisu navedeni koeficijenti za povećanje momenata ukleštenja za različita opterećenja, već samo koeficijenti povećanja krutosti i prenosni koeficijenti. Usled nesimetrije ovi su koeficijenti drugačiji za glave a drugačiji za noge stubova.

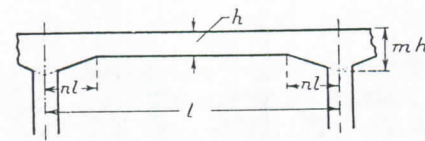


Tabela
povećanja momenata pune uklešte-

A. Simetrične vute (za nosače)

n	m	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,1	Jedan teret u sredini	1,040	1,068	1,093	1,103	1,120
	Dva tereta u trećinama	1,040	1,067	1,090	1,103	1,117
	Tri tereta u četvrtinama i sredini	1,040	1,067	1,086	1,103	1,113
	Ravnomerno opterećenje	1,038	1,064	1,083	1,098	1,110
	Krutost	1,115	1,205	1,282	1,340	1,380
	Prenosni koeficijent	0,530	0,551	0,568	0,578	0,588
0,2	Jedan teret u sredini	1,075	1,130	1,168	1,200	1,226
	Dva tereta u trećinama	1,070	1,120	1,160	1,190	1,215
	Tri tereta u četvrtinama i sredini	1,068	1,117	1,152	1,181	1,204
	Ravnomerno opterećenje	1,063	1,113	1,144	1,173	1,190
	Krutost	1,227	1,440	1,623	1,795	1,960
	Prenosni koeficijent	0,550	0,588	0,618	0,640	0,660
0,3	Jedan teret u sredini	1,095	1,166	1,225	1,275	1,313
	Dva tereta u trećinama	1,085	1,152	1,203	1,242	1,275
	Tri tereta u četvrtinama i sredini	1,082	1,140	1,190	1,227	1,256
	Ravnomerno opterećenje	1,076	1,133	1,180	1,215	1,240
	Krutost	1,325	1,655	2,010	2,360	2,710
	Prenosni koeficijent	0,560	0,608	0,648	0,679	0,704
0,4	Jedan teret u sredini	1,100	1,182	1,258	1,310	1,360
	Dva tereta u trećinama	1,085	1,158	1,210	1,250	1,288
	Tri tereta u četvrtinama i sredini	1,085	1,146	1,200	1,240	1,274
	Ravnomerno opterećenje	1,078	1,139	1,185	1,222	1,256
	Krutost	1,404	1,860	2,380	2,950	3,570
	Prenosni koeficijent	0,561	0,610	0,652	0,690	0,720
0,5	Jedan teret u sredini	1,089	1,165	1,228	1,285	1,333
	Dva tereta u trećinama	1,080	1,133	1,180	1,222	1,256
	Tri tereta u četvrtinama i sredini	1,077	1,125	1,170	1,208	1,241
	Ravnomerno opterećenje	1,070	1,120	1,160	1,196	1,224
	Krutost	1,496	2,010	2,663	3,450	4,350
	Prenosni koeficijent	0,555	0,595	0,631	0,665	0,693

koeficijenata

nosti, povećanja krutosti i prenosnih koeficijenata.

B. Jednostrana vuta u glavi (za stubove)

n	m	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,1	Krutost u nozi	1,020	1,035	1,046	1,056	1,062
	Krutost u glavi	1,092	1,159	1,214	1,250	1,285
	Prenosni koeficijent na nogu	0,498	0,496	0,495	0,494	0,493
	Prenosni koeficijent na glavu	0,532	0,557	0,572	0,586	0,597
0,2	Krutost u nozi	1,038	1,065	1,085	1,110	1,120
	Krutost u glavi	1,181	1,328	1,455	1,560	1,638
	Prenosni koeficijent na nogu	0,492	0,485	0,481	0,479	0,475
	Prenosni koeficijent na glavu	0,560	0,606	0,642	0,672	0,694
0,3	Krutost u nozi	1,044	1,083	1,120	1,147	1,174
	Krutost u glavi	1,258	1,497	1,708	1,900	2,070
	Prenosni koeficijent na nogu	0,484	0,470	0,461	0,455	0,449
	Prenosni koeficijent na glavu	0,582	0,648	0,705	0,751	0,790
0,4	Krutost u nozi	1,050	1,100	1,142	1,183	1,218
	Krutost u glavi	1,325	1,651	1,960	2,273	2,560
	Prenosni koeficijent na nogu	0,472	0,454	0,437	0,428	0,418
	Prenosni koeficijent na glavu	0,596	0,681	0,753	0,822	0,880
0,6	Krutost u nozi	1,068	1,110	1,162	1,222	1,274
	Krutost u glavi	1,430	1,882	2,398	2,980	3,560
	Prenosni koeficijent na nogu	0,453	0,415	0,389	0,369	0,354
	Prenosni koeficijent na glavu	0,607	0,703	0,801	0,900	0,993
0,8	Krutost u nozi	1,097	1,154	1,218	1,283	1,344
	Krutost u glavi	1,490	2,035	2,690	3,453	4,330
	Prenosni koeficijent na nogu	0,442	0,387	0,351	0,324	0,301
	Prenosni koeficijent na glavu	0,600	0,682	0,775	0,870	0,968
1,0	Krutost u nozi	1,180	1,282	1,438	1,570	1,715
	Krutost u glavi	1,560	2,130	2,915	3,802	4,850
	Prenosni koeficijent na nogu	0,449	0,385	0,350	0,319	0,295
	Prenosni koeficijent na glavu	0,592	0,652	0,709	0,772	0,835

Posebni slučajevi: zglobovi, elastična ukleštenost, simetrija

Ako je nosač samo na jednom kraju potpuno uklešten u priključeni skelet, a na drugom kraju samo elastično uklešten ili slobodno položen, onda u račun skeleta treba uneti sledeće izmene: Pretpostavlja se da je momenat ukleštenosti na elastično ukleštenom kraju b (odnosno zglobnom ležištu) manji od momenta potpune ukleštenosti za ΔM dakle:

$$\Delta M = M_{\text{pune ukleštenosti}} - M_{\text{konačno}}$$

za slučaj zgloba: $\Delta M = M_{\text{pune ukleštenosti}}$

Usled ovog ΔM na kraju b), pojačaće se momenat ukleštenosti na ležištu a) za veličinu ΔM , a u srazmeru prenosnog koeficijenta κ

κ ... prenosni koeficijent.

Ako je $M_a = M_b$ označujemo ga sa M_o

Obostrano uklešteno

$$\begin{cases} M_a & M_b \\ M_o & M_o \end{cases}$$

U potpori b) elastično uklešteno

$$\begin{cases} M_a + \kappa \Delta M & M_b - \Delta M \\ M_o + \kappa \Delta M & M_o - \Delta M \end{cases}$$

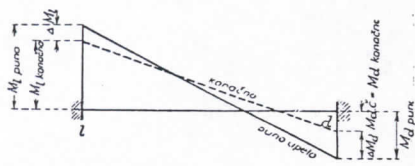
U potpori b) zglobno ležište

$$\begin{cases} M_a + \kappa M_b & \ominus \\ M_o (1 + \kappa) & \ominus \end{cases}$$

Krutost nosača sa vutama analogno se menja:

Momenat punog ukleštenja na osloncu b) smanjuje se za ΔM , što utiče na smanjenje momenta na osloncu a) koji je potreban za okret nosača u iznosu $\varphi = 1$.

Pretpostavimo da elastična ukleštenost u osloncu b) u srazmeru sa punom ukleštenošću iznosi λ . Kot pune ukleštenosti biće $\lambda = 1$, za zglob je $\lambda = 0$. Momenat elastične ukleštenosti biće $\lambda \cdot M_{\text{pune ukleštenosti}}$.



$$\begin{aligned} M_b \text{ puno uklešteno} &= M_a \kappa_b \\ M_b \text{ elastično uklešteno} &= M_a \kappa_b \cdot \lambda \\ \Delta M_b &= M_a \cdot \kappa_b (1 - \lambda) \\ \Delta M_a &= \Delta M_b \cdot \kappa_a = M_a \cdot \kappa_a \cdot \kappa_b (1 - \lambda) \\ M_a \text{ konačno} &= M_a [1 - \kappa_a \cdot \kappa_b (1 - \lambda)] \end{aligned}$$

Opšta formula koja važi i za jednostrane vute je sledeća:

$$\begin{aligned} t_a &= t_o [1 - \kappa_a \cdot \kappa_b (1 - \lambda)] \text{ za } M_b = \lambda M_b \text{ pune ukleštenosti} \\ t_a &= t_o [1 - \kappa_a \cdot \kappa_b] \text{ za zglobno ležište u } b) \\ t_a &= t_o [1 - \kappa^2] \text{ za zglob u } b) \text{ kod simetričnih vuta} \end{aligned}$$

pri čemu znači:

t_a ... krutost nosača sa vutama pune ukleštenosti kod elastične ukleštenosti ležišta b)

t_o ... krutost nosača sa simetričnim vutama

κ_a, κ_b ... prenosni koeficijenti na kraj a) i kraj b)

Ako je konstrukcija skeleta (kontinualnog nosača) simetrična po obliku i krutosti, ako je takode i opterećenje simetrično pri čemu prolazi simetrala sredinom nosača sa vutama tada računamo analogno kao kod ravnih nosača samo sa polovinom skeleta. Za krutost simetričnog nosača uzimamo pak manju vrednost koja iznosi:

$$t_{\text{simetrična}} = t_{\text{normalna}} \cdot (1 - \kappa)$$

Kot iste konstrukcije za slučaj antimetričnog opterećenja (na primer vetra) računamo takode sa polovinom skeleta, dok je krutost simetričnog polja veća od prvobitne krutosti

$$t_{\text{antimetrična}} = t_{\text{normalna}} \cdot (1 + \kappa)$$

Ako za κ stavimo iznos koji odgovara ravnom nosaču bez vute dobićemo (za $\kappa = \frac{1}{2}$) već poznate koeficijente 1/2 i 3/2 za slučaje simetrije i antimetrije.

Rebrasti nosači, T-profilii

Često upotrebljavamo kod konstrukcija iz armiranog betona rebraste ploče, takozvane nosače T-profile. Takvi profili pruže veći otpor pozitivnim momentima savijanja, manji negativnim. Usled toga je prirodno da su deformacije u negativnoj krivini na osloncima veće od deformacija u polju gde je krivina pozitivna. Sama priroda iskorišćuje takve profile ekonomičnije time što kod ukleštenja (kontinualnih i skeletnih konstrukcija) smanjuje momente ukleštenja i prenosi razliku na pozitivne momente savijanja. Ova nam je činjenica u praksi vrlo korisna. Inače dobijamo, pri relativno malom iskorišćavanju tlačne ploče, već prekoračena dozvoljena tlačna naprezanja u rebru uz oslonac. Baš taj uticaj smanjuje momente ukleštenja na osloncima i time reducira prevelika naprezanja. U literaturi

nisam dosada naišao na odgovarajuće formule i jednačine; zato sam sastavio sâm sledeći način računanja:

Prvo, ujedno i najviše problematično, je utvrđivanje srazmera između pozitivnog (većeg) momenta istrajnosti I_0 našeg T profila, i negativnog (manjeg) momenta istrajnosti I_1 .

Ovaj odnos izračunaće se najlakše iz stanja naprezanja u profilu iz armiranog betona ako ga opteretimo istim momentom M , jedanput u pozitivnom, a drugi put u negativnom smislu. Pošto je obično profil armiran skoro istom armaturom u polju kao i uz oslonac, možemo za oba primera računati sa istim naprezanjem gvožđa pri istom momentu savijanja. Metoda dozvoljava isto tako i uzimanje u obzir različitih stepena armature na osloncu i u polju. Za slučaj da je M konstantan, dobijemo sledeće odnose momenata istrajnosti.

U pozitivnom smislu: $\sigma_{b_0}, \sigma_{z_0}, n\sigma_{b_0} + \sigma_{z_0}$

U negativnom smislu: $\sigma_{b_1}, \sigma_{z_1}, n\sigma_{b_1} + \sigma_{z_1}$

$$\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta x} = \frac{M}{EI_1} \quad \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta x} = \frac{M}{EI_0} \quad \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta x} = \frac{n\sigma_{b_1} + \sigma_{z_1}}{h} \quad \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta x} = \frac{n\sigma_0 + \sigma_{z_0}}{h}$$

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{n\sigma_{b_1} + \sigma_{z_1}}{n\sigma_{b_0} + \sigma_{z_0}} \quad \text{Koeficijent } \varphi = \frac{I_0 - I_1}{I_1} = \frac{I_0}{I_1} - 1$$

$$\text{uz uslov da je } \sigma_{z_1} = \sigma_{z_0} = \sigma_z \quad \varphi = \frac{n(\sigma_{b_1} - \sigma_{b_0})}{\sigma_z + n\sigma_{b_0}}$$

Na osnovu poznatog statičkog uslova:

pri čemu je moment istrajnosti u negativnim momentnim zonama manji od momenta istrajnosti u pozitivnim zonama, dobijaju se za momente pune ukleštenosti sledeći umanjujući koeficijenti ω

Umanjujući koeficijent

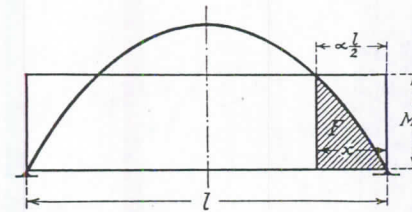
$\frac{I_0}{I_1}$	$\varphi = \frac{I_0 - I_1}{I_1}$	ω	
		za ravnomerno opterećenje	za koncentrisano opterećenje
1,10	0,10	0,983	0,977
1,20	0,20	0,966	0,955
1,30	0,30	0,950	0,934
1,40	0,40	0,934	0,915
1,50	0,50	0,919	0,899
1,60	0,60	0,905	0,883
1,80	0,80	0,882	0,851
2,00	1,00	0,862	0,822

Niže je obrazložen matematični postupak, po kojem su izračunati koeficijenti navedeni u tabeli.

Time što smo sve momente ukleštenosti kod rebrastih ploča smanjili a pozitivne povećali približno smo već dovoljno tačno vodili računa o toj anomaliji. Sve ostalo: krutosti nosača, izjednačenje i prenošenje momenta po Krosovom postupku izvodimo na običan način bez obzira na to što imamo posla sa T profilom. Za krutost nosača biće bolje ako računamo sa punim momentom istrajnosti uključivši i zategnutu zonu betona i tako dobijemo što manje momente ukleštenja.

Izvođenje jednačina za račun tabele koeficijenata ukleštenosti T-profila.

Momentna crta za ravnomerno opterećenje:



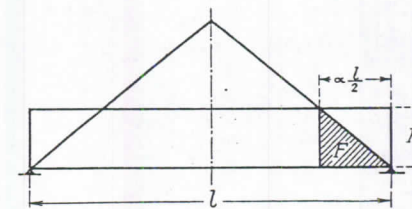
Momentna površina:

$$F = \frac{ql}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6}$$

$$\text{Za } x = \frac{\alpha \cdot l}{2}$$

$$2F = ql \left(\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^3}{24} \right)$$

Momentna crta za ravnomerno opterećenje:



Koeficijenti izračunavaju se iterativno za razne α .

$$M_0 = \frac{\int m \frac{dx}{EI}}{\int \frac{dx}{EI}} = \omega \frac{ql^2}{12} \quad \varphi = \frac{I_0 - I_1}{I_1} = \frac{I_0}{I_1} - 1$$

$$\int \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI_0} \left[l + \alpha l \left(\frac{I_1}{I_0} - \frac{I_0}{I_0} \right) \right] = \frac{l}{EI_0} (1 + \alpha\varphi)$$

$$\int m \frac{dx}{EI} = \frac{1}{E} \left[\frac{ql^3}{12I_0} + \frac{ql^3}{8} \left(\alpha^2 - \frac{\alpha^3}{3} \right) \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_0} \right) \right] = \frac{1}{E I_0} \frac{ql^3}{12} (1 + 1.5\alpha^2\varphi - 0.5\alpha^3\varphi)$$

$$\omega = \frac{1 + 1.5\alpha^2\varphi - 0.5\alpha^3\varphi}{1 + \alpha\varphi}$$

$$\text{pri čemu je } \alpha = 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3}} \omega$$

$$M_0 = \frac{\int m \frac{dx}{EI}}{\int \frac{dx}{EI}} = \omega \cdot \frac{Pl}{8} \quad \varphi = \frac{I_0}{I_1} - 1$$

$$\int m \frac{dx}{EI} = \frac{1}{E} \left[\frac{Pl^2}{8I_0} - \frac{P\alpha l}{2} \frac{2\alpha l}{4} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_0} \right) \right] = \frac{Pl^2}{8} \frac{1}{EI_0} (1 - \alpha^2\varphi)$$

$$\omega = \frac{1 + \alpha^2\varphi}{1 + \alpha\varphi} \quad \text{pri čemu je } \alpha = \frac{\omega}{2}$$

PRAKTIČNI PRIMERI

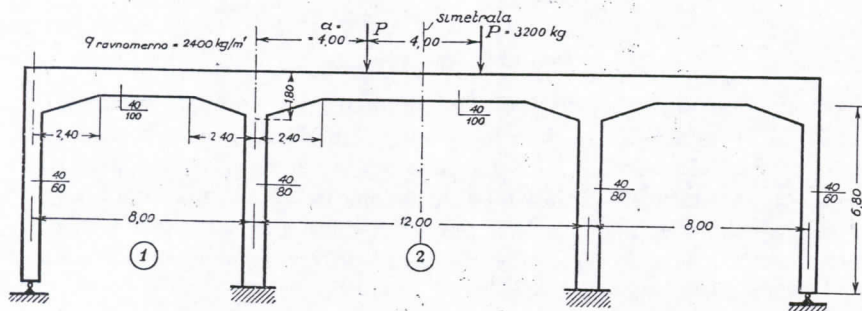
Primer 9: Prizemni skelet sa vutama (simetričan).

I. Opterećenje

Ravnomerno opterećenje $q = 2400 \text{ kp/m}^2$.

Koncentrisano opterećenje $P = 3200 \text{ kp}$.

Čitavo opterećenje je stalno, pokretnog nema (neznatno je).



II. Osnovni momenti

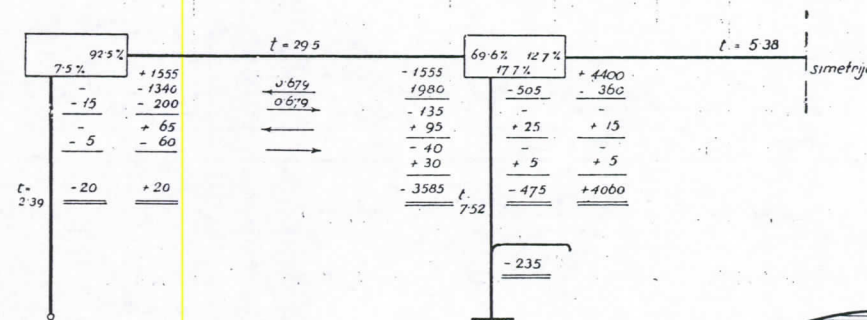
Polje	Opterećenje q, P	Raspon l	M prosti g, P, q	M uklešt bez vuta g, P, q	Oblik vuta m/n	Koeficijent povećanja M uklešt	M uklešt sa vutama q, P	Ukupno M uklešt q, P
1	$g = 2400$	8.00	19 200	12 800	1.8/0.3	1.215	15 550	15 550
2	$g = 2400$	12.00	43 200	28 800	1.8/0.2	1.173	33 850	44 000
	$P = 3200$	12.00	12 800	8 530	1.8/0.2	1.190	10 150	

III. Krutosti i prenosni koeficijenti

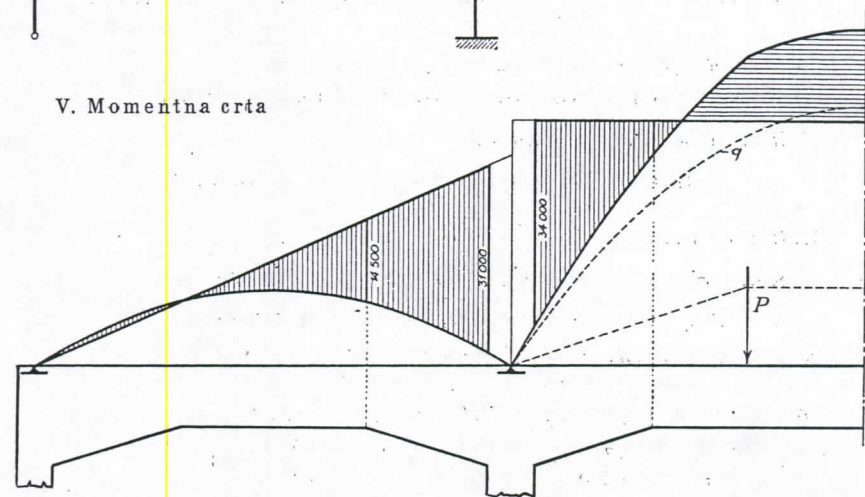
Štap	Dimenzije cm	Moment inercije $kI = kbh^3$	Raspon l	Krutarost (bez vuta) $k \cdot l^2$	Koeficijent povećanja krutosti	Koeficijent simetrije odn zgloba	Krutarost sa vutama simetrijom zglobom	Prenosni koeficijent
N_1	40/100	10.00	8.00	12.50	2.360	1.00	29.50	0.079
N_2	40/100	10.00	12.00	8.33	1.795	1 - 0.640	5.38	0.640
S_{01}	40/60	2.16	6.80	3.18	-	0.75	2.39	0
S_{12}	40/80	5.12	6.80	7.52	-	1.00	7.52	0.5

IV. Krosov postupak

tačnost na 50 kpm

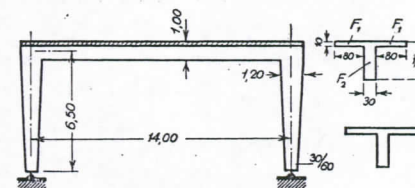


V. Momentna crta



Primer 10: Okvir sa rebrastom pločom (simetričan).

I. Opterećenje ravnomerno $q = 4000 \text{ kp/m}^2$.



III. Krutosti

Tabelarni račun momenta istrajnosti T-profila.

Deo preseka	Površina preseka cm^2	Ručica cm	Statični moment cm^3	Ručica od težišta cm	$e^2 \cdot i^2 (= \frac{I^2}{12})$	Moment istrajnosti $I \cdot F (e^2, i^2) cm^4$
1	1600	5	8.000	29.4	$29.4^2 + 10^2/12 = 866 + 83$	1.400.000
2	3000	50	150.000	5.6	$5.6^2 + 100^2/12 = 31.4 + 833$	2.590.000
Σ	4600	težište 34.4	158.000			3.990.000

$$\text{Krutost nosača: } t_n = \frac{1}{2} \frac{I}{l} = \frac{1}{2} \frac{3.990.000}{1400} = 1422 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Krutost stuba: } I_0 = \frac{30 \times 60^3}{12} = 540.000 \text{ cm}^3 \quad l = 650 \text{ cm} \quad \frac{I_n}{l} = 830 \text{ cm}^3.$$

Uticao pojačanja u glavi sa jednostranom vutom $m = 2'0$, $n = 1'0$
 Koefficient krutosti u glavi 4'850, prenosni koefficienti 0'295, 0'835.

Obzirom na zglob, konačna krutost iznosi:

$$t_{\text{stuba}} = 830 \times 4'850 \times (1 - 0'295 \times 0'835) = 3030 \text{ cm}^3.$$

II. Osnovni momenti

Račun srazmera momenata istrajnosti u potpori i u polju.

T-profil opteretimo sa momentom 50.000 kpm i dobijamo:

a) u pozitivnom smislu: $\sigma_z = 1200 \text{ kp/cm}^2$ $\sigma_s = 29'3 \text{ kp/cm}^2$
 po Kasalu: $d/v = 0'11$ $\sigma_r = 37'5 \text{ kp/cm}^2$

b) u negativnom smislu: $\sigma_z = 1200 \text{ kp/cm}^2$ $\sigma_b = 97 \text{ kp/cm}^2$

$$\varphi = \frac{I_0 - I_1}{I_1} = \frac{n(\sigma_b - \sigma_0)}{\sigma_z + n\sigma_0} = \frac{10(97 - 37'5)}{1200 + 37'5 \cdot 10} = \frac{595}{1575} = 0'378$$

Po tabeli $\omega = 0'941$

$$M_{\text{pune ukleštenosti}} = 4000 \cdot \frac{14^2}{12} \cdot 0'941 = 61.800 \text{ kp/m}$$

$$M_{\text{prasto položeno}} = 4000 \cdot \frac{14^2}{8} = 98.000 \text{ kp/m}$$

IV. Krosov postupak

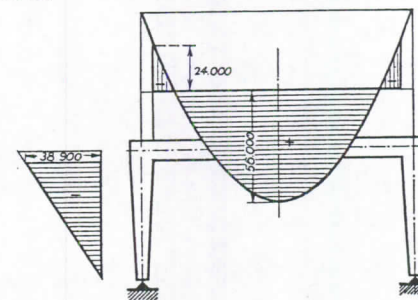
Pošto je ovaj primer jednostavan, možemo i bez šeme izračunati moment ukleštenja

$$\text{po obrascu: } M_0 = M_{\text{dej}} \cdot \frac{t_{\text{stuba}}}{t_{\text{stuba}} + t_{\text{nosača}}}$$

$$M_0 = 61.800 \cdot \frac{3030}{3030 + 1422} = 42.100 \text{ kpm}$$

$$+ M = 98.000 - 42.100 = 55.900 \text{ kpm}.$$

V. Momentna crta



Približne metode

Krosova metoda sama po sebi ima pred drugim načinima računanja skeleta bitno preimućstvo u tome što postupak možemo produžiti do bilo kojeg stepena tačnosti, odnosno da možemo prestati čim smo postigli dovoljan stepen tačnosti. Približnom metodom nazivamo upotrebu prve aproksimacije koju dobijamo nakon prvog izjednačenja momenata ne uzimajući u obzir prenosne momente. Za takav približni postupak ne treba da crtamo računsku shemu. Dovoljan je analitički račun:

Krutost pojedinih štapova izračunaćemo kao veličinu $t = \frac{I}{l}$, pa je korigiramo sa faktorom uticaja okreta susednih čvorova. Taj faktor iznosi za zglobno ležište $2/3$, za elastičnu ukleštenost oko $7/8$, za punu ukleštenost $1'0$, za pojavu simetrije $1/2$, za pojavu antimetrije $3/2$. Usled okreta pojedinog čvora pod uticajem momenta ΔM , pojavljuju se na pojedinim štapovima izjednačujući momenti obratnog predznaka, a u srazmeru krutosti:

$$M_n = \Delta M \frac{t_n}{\Sigma t}$$

Ako se nalazi štap na kraju skeleta, ili nastupa slučaj da susedna polja nisu opterećena, već jedino posmatrano polje, biće

$$\Delta M_n = M_{\text{pune ukleštenosti}} \frac{t_n}{\Sigma t}$$

i izraz za konačni moment ukleštenja uprošćuje se:

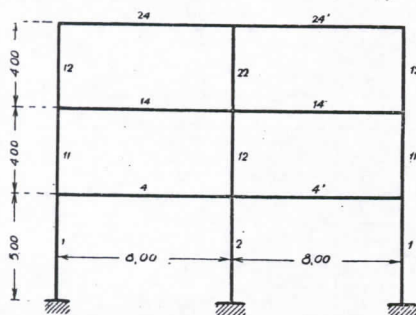
$$\begin{aligned} M_{\text{konačno}} &= M_{\text{pune ukleštenosti}} \left(1 - \frac{t_n}{\Sigma t} \right) = \\ &= M_{\text{pune ukleštenosti}} \frac{\Sigma t \text{ priključenih štapova}}{\Sigma t \text{ svih štapova}} \end{aligned}$$

Upotreba približne metode za prethodno dimenzioniranje skeleta

Upotreba približne metode vrlo je korisna za prethodno približno dimenzioniranje skeleta. Pre nego što počnemo sa tačnim statičnim izračunavanjem skeleta potrebno je da se odrede dimenzije skeleta toliko tačno da definitivni račun ne bi više zahtevao promene dimenzija nego samo varijacije stepena armiranja (kod armiranog betona). Ovaj način rada najbolje se vidi na sledećem praktičnom primeru:

Primer 11: Približno dimenzioniranje skeleta.

Šema skeleta:



Skelet je simetričan oko osovine stupova 2—12—22

Pretpostavljene krutosti štapova:

Štap	krutost
1—1'	3
2	2
4—4'	10
11—11'	2
12	15
14—14'	8
21—21'	2
22	1
24—24'	4

Dozvoljena naprezanja: 70 kp/cm²

Opterećenja nosača: br. 4—4' 12.000 kp/m²
 br. 14—14' 10.000 kp/m²
 br. 24—24' 3.000 kp/m²

Račun momenata savijanja:

$$\text{Štap 24—24': } -M_{11} = \frac{3000 \cdot 8^2}{12} \cdot \frac{2}{2+4} = 5320 \text{ kpm}$$

$$-M_{22} = \frac{3000 \cdot 8^2}{8} - \frac{5320}{2} = 21.340 \text{ kpm}$$

$$+M_{24} = \left[\frac{3000 \cdot 8^2}{8} - \frac{21.340 + 5320}{2} \right] \cdot 1.25^{**} = 13.300 \text{ kpm}$$

$$\text{Štap 21: } -M_{11} = 5320 \text{ kpm} \quad P = 4 \cdot 3000 + 2000 = 14.000 \text{ kp}$$

$$\text{Štap 22: } - \quad P = 8 \cdot 3000 = 24.000 \text{ kp}$$

$$\text{Štap 14—14': } -M_{11} = \frac{10.000 \cdot 8^2}{12} \cdot \frac{2+2}{2+2+8} = 17.800 \text{ kpm}$$

$$-M_{11} = \frac{10.000 \cdot 8^2}{8} - \frac{17.800}{2} = 71.100 \text{ kpm}$$

$$+M_{14} = \left[\frac{10.000 \cdot 8^2}{2} - \frac{17.800 + 71.100}{2} \right] \cdot 1.25^{**} = 44.500 \text{ kpm}$$

$$\text{Štap 21: } -M_{21} = \frac{17.800}{2} = 8900 \text{ kpm} \quad P = 14.000 \text{ kp}$$

$$\text{Štap 11: } -M_{11} = \frac{17.800}{2} = 8900 \text{ kpm} \quad P = 14.000 + 4 \cdot 10.000 + 12.000 = 66.000 \text{ kp}$$

$$\text{Štap 12: } - \quad P = 24.000 + 8 \cdot 10.000 = 104.000 \text{ kp}$$

$$\text{Štap 4—4': } -M_1 = \frac{12.000 \cdot 8^2}{12} \cdot \frac{3+2}{3+2+10} = 21.300 \text{ kpm}$$

$$-M_2 = \frac{12.000 \cdot 8^2}{8} - \frac{21.300}{2} = 85.300 \text{ kpm}$$

$$+M_4 = \left[\frac{12.000 \cdot 8^2}{8} - \frac{21.300 + 85.300}{2} \right] \cdot 1.25^{**} = 42.700 \text{ kpm}$$

$$\text{Štap 11: } -M = \frac{12.000 \cdot 8^2}{12} \cdot \frac{2}{3+2+10} = 8500 \text{ kpm} \quad P = 66.000 \text{ kp}$$

$$\text{Štap 1: } -M = \frac{12.000 \cdot 8^2}{12} \cdot \frac{3}{3+2+10} = 12.750 \text{ kpm}$$

$$P = 66.000 + 4 \cdot 12.000 + 14.000 = 128.000 \text{ kp}$$

$$\text{Štap 2: } P = 104.000 + 8 \cdot 12.000 = 200.000 \text{ kp}$$

$$\text{Dimenzioniranje: } \sigma = \frac{P}{F} \mp \frac{M}{W} \quad W = \frac{b h^2}{6}$$

Štap	M kritičan kpm	P krit kp	Dimenzije cm	σ kp/cm ²	Krutost $t = k \cdot l_i$
24	0,8 * 21.300 = 17.000	-	50/70	41,6	343/8 = 4,3
21	0,8 * 8.900 = 7.120	14.000	50/40	60,5	64/4 = 1,6
22	-	24.000	50/30	16,0	27/4 = 0,4
14	0,8 * 71.100 = 56.900	-	50/100	68,0	1000/8 = 12,5
11	0,8 * 8.900 = 7.120	66.000	50/50	60,5	125/4 = 3,1
12	-	104.000	50/40	52,0	64/4 = 1,6
4	0,8 * 85.300 = 68.300	-	50/110	68,0	1330/8 = 16,7
1	0,8 * 12.700 = 10.200	128.000	50/64	69,0	262/5 = 5,2
2	-	200.000	50/64	62,4	262/5 = 5,2

Primer 11: Približno dimenzioniranje skeleta.

* Faktor 0,8 uzet je u račun zbog toga što se kritični presek za dimenzioniranje ne nalazi u osovini stuba već uz priključak stuba na nosač odnosno uz priključak nosača na stub.

** Faktor 1,25 uzet je u cilju uzimanja u račun najnepovoljnijih kombinacija korisnog opterećenja.

Upotreba približne metode za utvrđivanje maksimalnih pozitivnih momenata savijanja pri raznim rasporedima korisnog opterećenja

Celokupan statički račun, a naročito utvrđivanje maksimalnih momenata savijanja, iziskuje u celini mnogo vremena, jer treba dva puta ponavljati ceo Krosov postupak: jedanput za slučaj opterećenja *a*) i jedanput za slučaj opterećenja *c*). Zato se u praksi često zadovoljavamo samo sa tačnim računom rasporeda *I* odnosno *a*), dok raspored opterećenja za izmjenično korisno opterećenje (raspored *II* i *III*) računamo samo približnom metodom po sledećem postupku:

a) Čitav skelet izračunamo po poznatom opisanom Krosovom postupku za puno stalno i korisno opterećenje (*q*) u svim poljima. Rezultati daju najveće momente ukleštenosti.

b) Čitav skelet izračunavamo samo za stalno opterećenje *g* bez ikakvog korisnog opterećenja. Rezultate dobijene pod a) pomnožimo s faktorom g/q (koji je obično za pojedini sprat zgrade u svim poljima isti). Time dobijamo momente ukleštenja samo za stalno opterećenje *g*.

c) Momente ukleštenja za slučaj da se nalazi korisno opterećenje samo u pojedinom posmatranom polju, dok su ostala polja bez korisnog tereta, dobijamo na taj način da slučaju *b*) pribrojimo momente savijanja prozrokovane korisnim opterećenjem koje dejstvuje samo u posmatranom polju. Ove dopunske momente ukleštenja izračunavamo po približnoj metodi:

$$M_{\text{ukleštenosti}} = M_{\text{pune ukleštenosti}} \frac{\Sigma t - t_n}{\Sigma t}$$

Ako za t_n uzmemo punu krutost posmatranog štapa, dobićemo nešto manje momente ukleštenosti nego po tačnoj metodi, jer smo zanemarili uticaj okretanja drugog kraja štapa. Za štapove koji su na oba kraja približno jednake ukleštenosti, možemo pretpostaviti simetriju i računati samo sa polovinom krutosti posmatranog štapa. Na taj način se rezultati približuju više rezultatima precizne metode, ali daju nešto veće momente ukleštenosti (manje pozitivne momente) i zato se manje preporučuju. Iskustvo pokazuje da dobijamo najviše odgovarajuće rezultate ako uzimamo za krutost posmatranog nosača samo $\frac{3}{4} I/I$.

Primer 12: Dvospratni skelet primera 8.

Skelet, precizno izračunat u primeru 8 izračunavamo približnom metodom za raspored opterećenja *II*, odnosno *III*. Šema skeleta je ista kao u primeru 8.

Krutosti su iste kao u primeru 8.

Opterećenja i osnovni momenti su isti kao u primeru 8.

Uticaj stalnog i korisnog opterećenja je već precizno izračunat u primeru 8 i služi nam kao osnova za daljni račun:

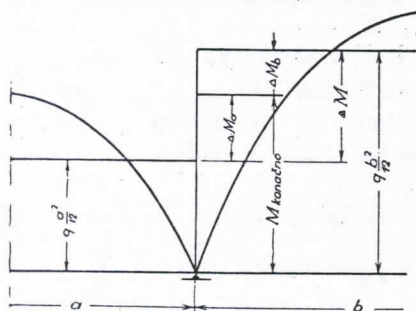
	Polje 9		Polje 10	
	levo	desno	levo	desno
Opterećenje <i>q</i> , slučaj <i>a</i>)	+ 3400	- 6510	+ 5690	- 1120
Opterećenje <i>g</i> (srazmerno $\frac{g}{q}$)	+ 2430	- 4650	+ 4060	- 800
Momental pune ukleštenosti za opt. <i>p</i>	$\frac{p l^3}{12} = 800 \cdot \frac{50^3}{12} = 1670$		$\frac{p l^3}{12} = 800 \cdot \frac{40^3}{12} = 1070$	
Krutost nosača: t_n	$t_n = \frac{3}{4} \cdot 6.74 = 5.05$		$t_n = \frac{3}{4} \cdot 8.43 = 6.32$	
Zbir krutosti: Σt	5.05 + 5.57	5.05 + 5.57 + 8.43	6.32 + 5.37 + 6.74	6.32 + 2.86
$(\Sigma t - t_n) / \Sigma t$	5.57/10.62	14.00/19.05	12.31/18.63	2.86/10.18
Koeficijent ukleštenosti	52.4 %	73.5 %	66.0 %	28.1 %
Momental ukleštenosti za opt. <i>p</i>	+ 830	- 1230	+ 710	- 300
Momental ukleštenosti za raspored	+ 3310	II - 5880	+ 4770	III - 1100
Momental ukleštenosti po preciznoj metodi	+ 3310	- 6000	+ 4840	- 1110
	Polje 4		Polje 5	
	levo	desno	levo	desno
Opterećenje <i>q</i> , slučaj <i>a</i>)	+ 4950	- 9840	+ 8650	- 1480
Opterećenje <i>g</i> (srazmerno $\frac{g}{q}$)	+ 3530	- 7020	+ 6170	- 1060
Momental pune ukleštenosti za opt. <i>p</i>	$\frac{p l^3}{12} = \frac{1200}{12} \cdot 50^3 = 2500$		$\frac{p l^3}{12} = \frac{1200}{12} \cdot 40^3 = 1600$	
Krutost nosača: t_n	$\frac{3}{4} \cdot 10.75 = 8.06$		$\frac{3}{4} \cdot 13.40 = 10.05$	
Zbir krutosti Σt	8.06 + 3.90 + 5.57	8.06 + 13.40 + 3.90 + 5.57	10.05 + 10.75 + 3.90 + 5.57	10.05 + 2.86 + 1.50
$(\Sigma t - t_n) / \Sigma t$	9.47/17.53	22.87/30.93	20.22/30.27	4.36/14.41
Koeficijent ukleštenosti	54.0 %	74.0 %	66.9 %	30.3 %
Momental ukleštenosti za opt. <i>p</i>	+ 1350	- 1850	+ 1070	- 490
Momental ukleštenosti za raspored	+ 4880	III - 8870	+ 7240	II - 1550
Momental ukleštenosti po preciznoj metodi	+ 4910	- 9100	+ 7390	- 1530

Iz navedenog primera vidi se da su razlike između rezultata približne i rezultata precizne metode meznatne, a da je primena približne metode u sličnim primerima opravdana.

Približna grafička metoda za izračunavanje kontinualnih nosača

Ako želimo da pažljivo rasporedimo armaturu za detaljno projektovanje gvozdeno-betonskih okvirnih ili kontinualnih konstrukcija, treba da nacrtamo momente linije, i označimo momente površine. Kad već crtamo momente linije, možemo ovaj postupak ujedno upotrebiti i za grafičko utvrđivanje momenata ukleštenja po približnoj metodi: Po savetu profesora dr. Kasala crtaćemo momente parabole prosto položenih nosača u prebačenom položaju. Na ležištima svakog polja označićemo otsećima momente punog ukleštenja. Ako su ovi momenti ukleštenja s obe strane ležišta jednaki, oni su u ravnoteži. Taj slučaj nastupa pri konstantnom

opterećenju jednakih polja. Tada su ti momenti već konačni momenti ukleštenja. Ukoliko momenti ukleštenja na krajevima ležišta nisu jednaki — ukoliko dakle nisu u ravnoteži — među njima se pojavljuje razlika ΔM koja okreće čvor u smeru većeg momenta ukleštenja. Posledica okretanja je izjednačenje momenata ukleštenja na jednoj i drugoj strani ležišta; nosač koji ima srazmerno veću krutost (kraći i jači nosač) preuzeće



$$\frac{\Delta M_a}{\Delta M_b} = \frac{t_a}{t_b} = \frac{I_a}{I_b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

za konstantan I

ΔM se podeli na ΔM_a i ΔM_b
u obratnom srazmeru raspona

srazmerno veći deo razlike ΔM , a srazmerno vitkiji (duži i tanji) nosač srazmerno manji deo ΔM . Konačni momenat ukleštenja ležace između oba otečka. Deljenje razlike ΔM vrši se prosto računski sa računalom ili pak grafički od oka.

Za određivanje maksimalnih pozitivnih momenata savijanja postupak se ponavlja za svako pojedino polje. Za momenat punog ukleštenja posmatranog polja uzima se puno opterećenje $M = q \cdot l^2/12$, a za momente punog ukleštenja susednih praznih polja samo stalno opterećenje $M = gl^2/12$. Nova (sada veća) razlika ΔM na čvorovima posmatranog polja, daće nam po ranije obrazloženom postupku nove momente izjednačivanja i nove konačne momente ukleštenja. Crta koja spaja oba izjednačena momenta oteći će nam pozitivnu momentnu površinu.

Navedene metode treba smatrati samo kao približne metode. Konstruktor će morati da odluči kada su one dovoljno tačne, a kada nisu. I kod ovog grafičkog postupka postoje mogućnosti korekcije dobijenih momentnih crta sa prenesenim momentima prvog stepena i sa sekundarnim izjednačenjem, kojima se greške smanjuju. Iako je ova metoda približna, ona pruža preimućstvo nad običnim procenama:

$$\frac{1}{14} q l^2, \frac{1}{18} q l^2, \frac{1}{20} q l^2 \text{ itd.}$$

Ovaj grafički prikaz momentnih površina, koji možemo odmah na oko kontrolisati da li je statički uslov $\int M dx = 0$ ispunjen, odnosno da li je suma svih konačnih momentnih površina približno jednaka 0, jamči nam da nismo učinili nikakvu veću grešku ili nepravilnu pretpostavku.

Primer 13: Kontinualni nosač preko više polja.

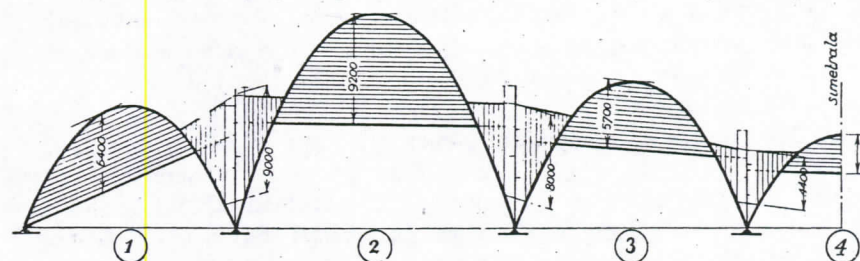
I. Opterećenje: $g = 2000 \text{ kp/m}^2$ $p = 2000 \text{ kp/m}^2$ $q = 4000 \text{ kp/m}^2$

II. Osnovni momenti i krutosti

Polje	Raspon l m	M_{prost} $q l^2/8$ kpm	$M_{\text{uklešt}}$ $q l^2/12$ kpm	$M_{\text{uklešt}}$ $g l^2/12$ kpm	Krutost $t = \frac{60}{l}$	Krutost $u \%$
1	4.50	10.150	10.150 *)	5.070 *)	$13.33 \cdot \frac{3}{4} = 10.00$	50%
2	6.00	18.000	12.000	6.000	$10.00 \cdot 1.0 = 10.00$	50% 45%
3	5.00	12.500	8.330	4.170	$12.00 \cdot 1.0 = 12.00$	62% 55%
4	4.00	8.000	5.330	2.670	$15.00 \cdot \frac{1}{2} = 7.50$	38%

*) Uračunat je uticaj zglobnog ležišta.

* Uračunat je uticaj simetrije.



Primerdaba: Kod približnog izjednačenja uzeto je u obzir i delimično prenošenje momenata sa sekundarnim izjednačenjem.

Određivanje stepena ukleštenosti armirano-betonskih konstrukcija u zidju od opeke pomoću približne Krosove metode

Pri detaljnom projektovanju železo-betonskih ploča i železo-betonskih tavanica građenih u zidju od opeke računamo u praksi sa najraznijim stepenima ukleštenosti katkad odviše solidno, katkad isuviše optimistički, jer smo pri ocenjivanju tog ukleštenja upućeni jedino na svoje »statičko osećanje«.

Po Krosovoj približnoj metodi, ocenjivanje stepena ukleštenja je lako: zgradu smatramo kao skelet čiji su nosači železo-betonske ploče ili železo-betonske tavanice, a stubovi zidovi od opeke. Ploče, odnosno tavanice imaju svoju krutost, definisanu izrazom:

$$\frac{E_b \cdot I_b}{l_b}, \text{ a zidovi svoju krutost utvrđenu izrazom } \frac{E_z \cdot I_z}{l_z}$$

Kod dobrog zidja od opeke iznosi prosečni elastični model E_z od 25.000 do 50.000 kp/cm^2 , dok se za dobar konstruktivni beton E_b kreće između 250.000 do 500.000 kp/cm^2 , dakle približno 10 puta više. U prak-

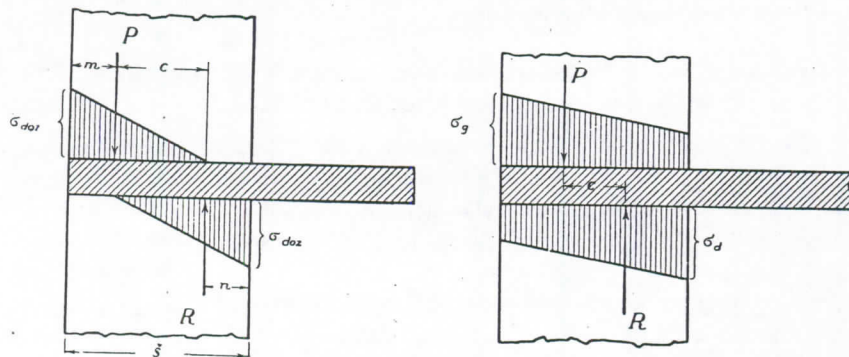
tičnom računu uzimamo ovu razliku u obzir time što za momente istrajnosti zidova uzimamo samo $1/10$ izračunate vrednosti tih momenata istrajnosti usled deset puta manjeg elastičnog modula.

Kod prvorazrednog zidja u cementnom malteru možemo ovaj srazmer povećati na $1/5$, a u protivnom slučaju vrlo lošeg zidja srazmerno ga smanjiti.

Izračunavanje ukleštenosti vrši se analogno kao za skelet na približni način: $M_{ukl} = M_{pune\ ukleštenosti} \frac{\sum t - t_{nosača}}{\sum t}$. Približna metoda potpuno

zadovoljava, jer je pretpostavka srazmera elastičnih modula vrlo ovlašna. Namena računa je naime da se isključi pretpostavka visokih ukleštenosti koje su po svim elastičnim teorijama nedostižive, odnosno da se spreči izbijanje pukotina jer nisu dovoljno armirane zone momenata ukleštenja. Tanke ploče velikih raspona su u jakom zidju od opeke puno ukleštene, međutim su jako dimenzionirani nosači (bez kontinuiteta) skoro slobodno ležeći u zidju od opeke.

Za utvrđivanje momenata ukleštenosti u zidju od opeke imamo još jedno ograničenje: zidovi od opeke uopšte ne prenose naprezanja na zatezanje, dok naprezanja na pritisak samo u dopuštenim granicama (6 do 10 kp/cm^2 , zidovi u cementnom malteru 14 kp/cm^2). Svi nastupajući momenti ukleštenja reališu se time što pritisci u zidu neće nastupati centrično, već uz ivicu preseka, jedanputa spolja, drugiput iznutra.



Maksimalni moment ukleštenosti koji je uopšte moguć iznosi

$$M_{max} = P \cdot c \text{ pri čemu je: } c = \xi \cdot m - n$$

ξ = širina zida (debljina)

$$m = \frac{2P}{3 \cdot b \cdot \sigma_{doz}} \quad n = \frac{2R}{3 \cdot b \cdot \sigma_{doz}}$$

Za veće pritiske odgovaraće bolje obična formula

$$\sigma_g = \frac{P}{F} \mp \frac{M_g}{W} < \sigma_{doz}$$

$$\sigma_d = \frac{R}{F} \mp \frac{M_d}{W} < \sigma_{doz}$$

Tavanica nad najvišim spratom uvek je prosto položena, jer je $P = 0$. Jako ukleštene su tavanice od 4. i 5. sprata na niže računato odozgo na dole. Ako po Krosu izračunata ukleštenost, s obzirom na uslove nosivosti zidja od opeke, ne može biti realizovana, onda kod dimenzioniranja tavanice računamo na maksimalnu ukleštenost koja se može postići u datom primeru. Ovo vredi samo za slučajeve, kada tavanica, odnosno ploča završava u zidu. Ako je tavanica ili ploča kontinualna preko zida, kontinuitet ostaje sačuvan. Krutost zida jedino može da sprečava okrete i time samo malo da izmeni momente ukleštenosti kontinualne konstrukcije. U takvim primerima računamo s dovoljnom sigurnošću u višim spratovima tavanice ili ploče kao kontinualne, a u nižim kao puno ukleštene.

Primer 14: Visoka građevina od opeke sa betonskim spratnim pločama.

Opterećenje ploča:

$$g = 600\text{ kp/m}^2 \quad p = 400\text{ kp/m}^2$$

Moment pune ukleštenosti:

$$M_p = 1000 \cdot \frac{40^2}{12} = 1330\text{ kpm}$$

Krutost ploče (simetrija):

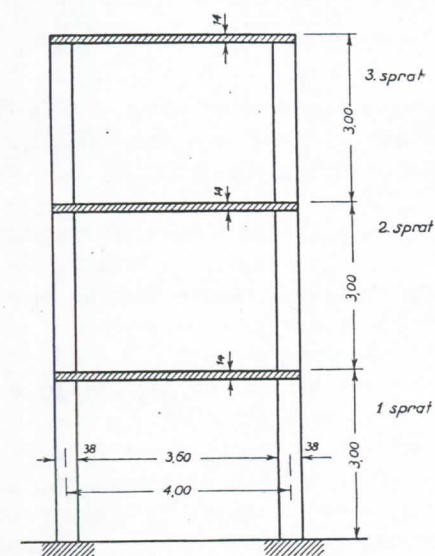
$$t_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{12^3}{12} \cdot \frac{1}{4 \cdot 0} = 18$$

Krutost zida (jednog):

$$t_z = \frac{1}{10} \cdot \frac{38^3}{12} \cdot \frac{1}{3 \cdot 0} = 153$$

$$M_{ukl} = M_p \cdot \frac{\sum t - t_n}{\sum t} = 1330 \cdot \frac{153 + 153}{153 + 153 + 18} = 1260\text{ kpm}$$

Praktički bezmalo puna ukleštenost.



Mogućnost realizacije momenata pune ukleštenosti:

Sile u zidu od opeke:

$$P_{3\text{ sprat}} \quad 2 \cdot 0 (600 + \frac{1}{2} \cdot 400) = 1600\text{ kp}$$

$$+ \text{ zid} \quad 3 \cdot 0 \cdot 600 = 1800\text{ kp}$$

Za dozvoljeno naprezanje zida od cigle 7 kg/cm^2

$$P_{3\text{ dole}} \quad 3400\text{ kp} \quad m_2 = \frac{2 \cdot 3400}{3 \cdot 100 \cdot 7} = 3.2\text{ cm}$$

$$P_{2\text{ gore}} \quad + 1600\text{ kp} \quad 5000\text{ kp} \quad n_2 = \frac{2 \cdot 5000}{3 \cdot 100 \cdot 7} = 4.8\text{ cm}$$

$$P_1 \text{ dole} \quad + 1800 \text{ kp} \quad \underline{6800 \text{ kp}} \quad m_1 = \frac{2 \cdot 6800}{3 \cdot 100 \cdot 7} = 6.5 \text{ cm}$$

$$P_1 \text{ gore} \quad + 1600 \text{ kp} \quad \underline{8400 \text{ kp}} \quad n_1 = \frac{2 \cdot 8400}{3 \cdot 100 \cdot 7} = 8.0 \text{ cm}$$

Momenti savijanja:

$$3 \text{ sprat:} \quad -M = 0 \quad l_{\text{teor}} = 1.05 \cdot 3.60 = 3.78$$

$$+ M_{\text{max}} = 1000 \cdot \frac{3.78^2}{8} = 1790 \text{ kpm}$$

$$2 \text{ sprat:} \quad -M_{\text{max}} = 3400 \cdot (38 - 3.2 - 4.8) = 1020 \text{ kpm}$$

$$+ M_{\text{max}} = 2000 - 1040 = 960 \text{ kpm}$$

$$1 \text{ sprat:} \quad -M_{\text{max}} = 6800 \cdot (38 - 6.5 - 8.0) = 1600 \text{ kpm}$$

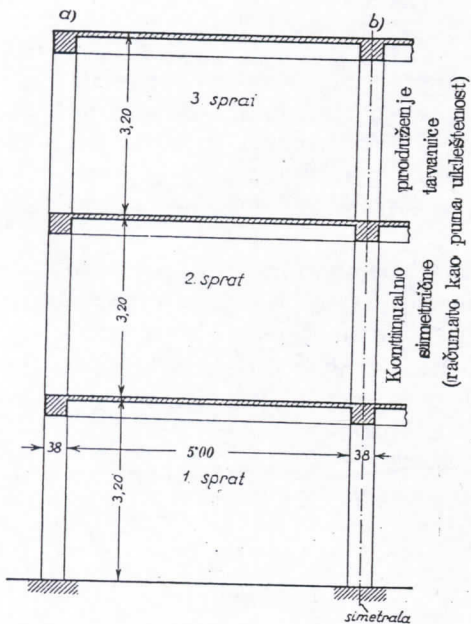
po Krosu manji: 1260 kpm*

$$+ M_{\text{max}} = 2000 - 1260 = 740 \text{ kpm}$$

* Kod dimenzioniranja na momente ukleštenosti može se uzeti parabolično zaobljenje šiljka momentne crte na ležištu i time smanjiti potrebnu količinu armaturnog železa.

Iz navedenog primera vidi se da se mogu tanke ploče ugrađene u donje spratove višespratnih zgrada računati kao puno ukleštene.

Primer 15: Visoka građevina od opeke sa betonskim rebrastim tavanicama.



Traže se momenti ukleštenosti jedino na ivičnom zidu.

Opterećenje:

$$g = 500 \text{ kp/m}^2 \quad p = 300 \text{ kp/m}^2$$

$$q = 800 \text{ kp/m}^2$$

Moment puno ukleštenosti iznosi:

$$M = 800 \cdot \frac{5.38^2}{12} = 1930 \text{ kpm}$$

Krutost tavanice:

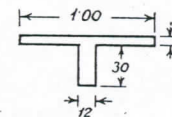
$$t_t = \frac{101.600}{538} = 189$$

Krutost zida:

$$t_z = \frac{100 \cdot 38^3}{10 \cdot 12 \cdot 320} = 143$$

Račun momenta istrajnosti za T-profil tavanice:

Deo	Ploha cm^2	Ručica cm	Stat. moment cm^4	Ručica od ležišta cm	$e^2 + i^2 \left(-\frac{h^2}{12}\right)$	$I = F \cdot (e^2 + i^2)$
1	$6 \cdot 100 = 600$	3	1800	6.75	$45.5 + 36/12 = 48.5$	29.100
2	$12 \cdot 30 = 360$	21	7560	11.25	$126.5 + 900/12 = 201.5$	72.500
Σ	960	9.75	9360			$I = 101.600$



$$M_{\text{ukleštenosti po Krosu iznosi:}} \quad 1930 = \frac{2 \cdot 143}{2 \cdot 143 + 189} = 1160 \text{ kpm}$$

Mogućnost realizacije momenata ukleštenosti:

Sile u zidu od opeke:

Dozvoljeno naprežanje zida: 6 kp/cm^2

$$P_3 \text{ gore} = 2.50 \left(500 + \frac{300}{2} \right) = 1630 \text{ kp} \quad \underline{1630 \text{ kp}}$$

$$P_3 \text{ dole} = + \text{zid} \quad 600 \cdot 3.20 + 1920 \text{ kp} \quad \underline{3550 \text{ kp}} \quad m_2 = \frac{2 \cdot 3550}{3 \cdot 100 \cdot 6} = 4 \text{ cm}$$

$$P_2 \text{ gore} = + 1630 \text{ kp} \quad \underline{5180 \text{ kp}} \quad n_2 = \frac{2 \cdot 5180}{3 \cdot 100 \cdot 6} = 5.8 \text{ cm}$$

$$P_2 \text{ dole} = + 1920 \text{ kp} \quad \underline{7100 \text{ kp}} \quad m_1 = \frac{2 \cdot 7100}{3 \cdot 100 \cdot 6} = 7.9 \text{ cm}$$

$$P_1 \text{ gore} = + 1630 \text{ kp} \quad \underline{8730 \text{ kp}} \quad n_1 = \frac{2 \cdot 8730}{3 \cdot 100 \cdot 6} = 9.7 \text{ cm}$$

Momenti ukleštenosti u ivičnom zidu:

$$3 \text{ sprat:} \quad -M_a = 0 \quad -M_b = \frac{q l^2}{8} = 2890 \text{ kpm}$$

$$2 \text{ sprat:} \quad -M_a \text{ max} = 3550 \text{ kp} (38 - 4.0 - 5.8) = 1000 \text{ kpm}$$

$$-M_b = 2890 - \frac{1}{2} \cdot 1000 = 2390 \text{ kpm}$$

$$1 \text{ sprat:} \quad -M_a \text{ max} = 7100 (38 - 7.9 - 9.7) = 1450 \text{ kpm}$$

$$-M_a \text{ po Krosu} = 1160 \text{ kpm}$$

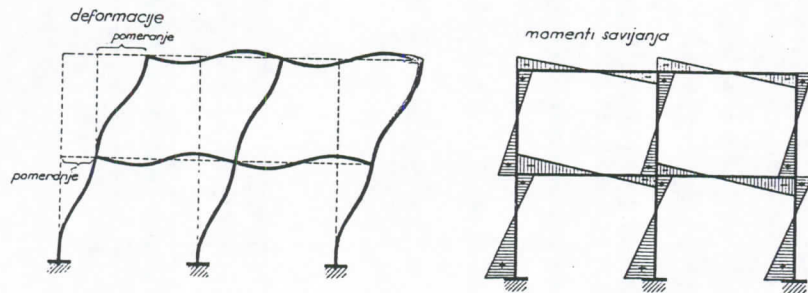
$$-M_b = 2890 - \frac{1}{2} \cdot 1160 = 2310 \text{ kpm}$$

Za dimenzioniranje merodavne momente savijanja dobićemo ako nacrtamo parabole i zaobljimo šiljke negativnih momenata ukleštenja.

HORIZONTALNO OPTEREĆENJE

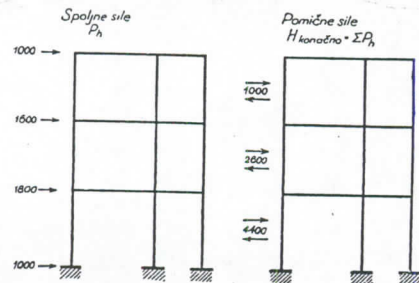
Vrste horizontalnog opterećenja

U poglavlju »horizontalno opterećenje« raspravljaće se svi slučajevi u kojima, pored dosada proučenih okreta čvorova, nastupaju i međusobna pomeranja čvorova, odnosno međusobna pomeranja spratova. Pomeranje jednog sprata čvorova prema susednom spratu uzrokuje naime bitne promene stanja naprezanja u posmatranoj konstrukciji, jer se pojavljuju znatni momenti savijanja u stubovima i nosačima.



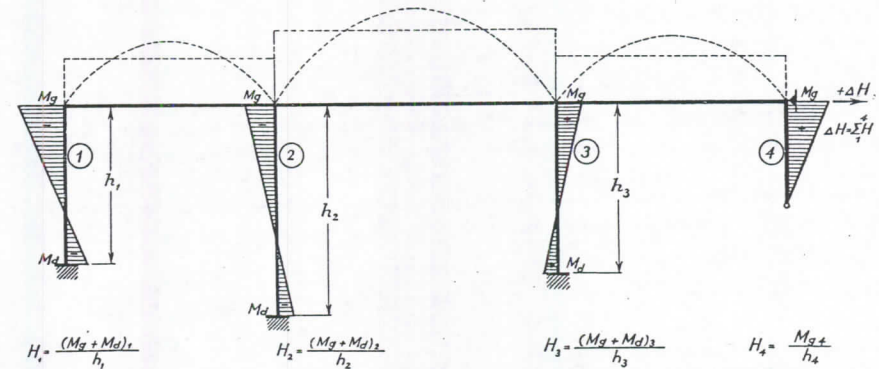
Slučaj horizontalnog opterećenja dolazi, naravno, u obzir samo kod primera okvirnih i skeletnih konstrukcija, dok su kod kontinualnih nosača pomeranja isključena. Za praksu dolaze u obzir sledeće vrste horizontalnih opterećenja:

1. Opterećenja spoljnim silama: vetrom, udarima potresa, reakcijama zemljinog pritiska, pritiscima natovarenog materijala, reakcijama priključenih okvirnih i lučnih konstrukcija, nadalje silama kočenja i centrifugalnim silama prevoznih sredstava. Kod svih ovih opterećenja veličina sile proizlazi iz spoljnog opterećenja. Kod višespratnog skeleta treba paziti na sledeće dejstvo: za pomeranje pojedinog sprata nije merodavna sama horizontalna sila koja deluje na



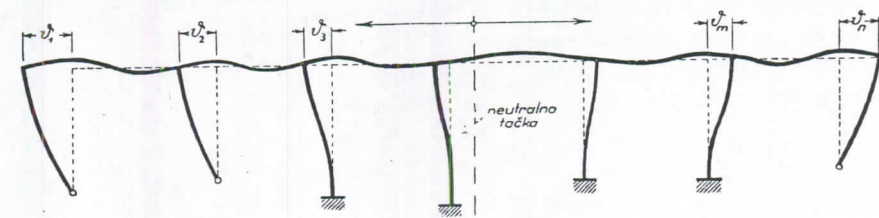
posmatrani sprat, nego celokupna horizontalna poprečna sila koja nastupa u posmatranom spratu. Utvrdićemo je kao sumu svih horizontalnih sila koje deluju u višim spratovima.

2. Kod nesimetričnog skeleta, ili nesimetrično opterećenog, inače simetričnog skeleta, pretpostavljali smo, po računu u poglavlju vertikalnih opterećenja, da su pojedini spratovi u horizontalnom pravcu nepomični, što znači da su poduprti zamišljenim osloncima. Rezultat računa po Krovovom postupku pokazuje nam takođe u svakom spratu veličinu horizontalnih reakcija koje prolaze kroz zamišljene oslonce i koje su matematički definisane kao suma ΣH svih poprečnih sila pojedinih stubova.



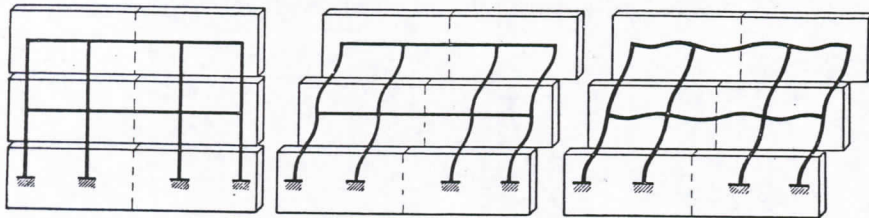
Ako uklonimo zamišljeni oslonac dobićemo dopunski učinak sile kojom smo rasteretili skelet. Učinak ovog rasterećenja je isti, kao da smo na skelet superponirali stanje naprezanja koji izvodi ista sila H, delujući u zamišljenom osloncu u obratnom smislu. Sa veličinom $H = \Sigma H$ određena je i veličina pomeranja koja je potrebna da udovoljimo uslovu ravnoteže $\Sigma H = 0$.

3. Uticaj skupljanja betona i promena temperature ima svoje posledice u prisilnoj deformaciji skeleta u horizontalnom smeru. Elastične jednačine ne definišu nam u brojevima veličinu samih delujućih sila nego direktno pomeranja. Kao što ćemo videti iz računskog postupka, to neće zadavati naročitih teškoća, nego će štaviše račun delimično i uprostiti.



Princip računa pomeranja

Kao što je u uvodu već navedeno — radi boljeg razumevanja računskog postupka — pretpostavljamo da je svaki čvor skeleta nasaden na vijak s krilnom maticom. Čvor je ovom maticom dobro pričvršćen na rapavoj podlozi u prvobitnom neopterećenom položaju, tako da su priključeni nosači tačno horizontalni, a priključeni stubovi vertikalni. Zamislimo da ova tvrda podloga, na kojoj su vijci pričvršćeni, ne predstavlja celinu za čitav skelet, već da je ova podloga u svakom spratu presečena horizontalno i to tako da ova podloga stvara za svaki red čvorova jedan zaseban pojas. Ovaj sistem pruža mogućnost da pojedine pojase spratova pomeramo međusobno i time na veštački način izvedemo pomeranja u skeletu.



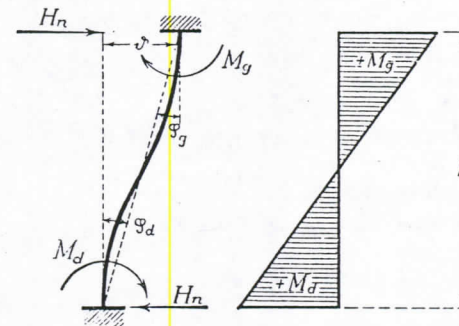
Osnovna faza je svakako neopterećeni skelet kod kojeg su pojasevi međusobno namešteni u prvobitnom, tačno vertikalnom položaju. Druga faza je faza međusobnog pomeranja pojedinih pojasa u kojima čvorovi ostaju čvrsto fiksirani, kako se to vidi u drugoj slici. Kod ove operacije nosači ostaju u prvobitnom, neopterećenom stanju, dok se stubovi moraju iskriviti. Na stubovima se pojavljuju gore i dole momenti ukleštenja koji su nastali usled prisilnog pomeranja čvorova. Ova druga faza predstavlja u Krosovom računskom postupku utvrđivanje osnovnih momenata punog ukleštenja za pomeranje. Pri pomeranju, ovi osnovni momenti ukleštenja neće se pojaviti na nosačima, kao što je to slučaj kod vertikalnog opterećenja, nego samo na stubovima.

Konačna faza obuhvata postepeno odvijanje matica vijaka i oslobađanja čvorova. Momenti punog ukleštenja na stubovima koji su se pojavili usled pomeranja podložnih pojasa, okreću čvorove i time se sami dovode u ravnotežu. Ceo račun je isti kao kod ranije obrađenog Krosovog postupka. Razlika je samo spoljna: kod vertikalnog opterećenja zadati su osnovni dejstvujući momenti punog ukleštenja na nosačima i sa njih se prenose na stubove; kod horizontalnog opterećenja pak pojavljuju se dejstvujući momenti na stubovima i sa njih se prenose na nosače.

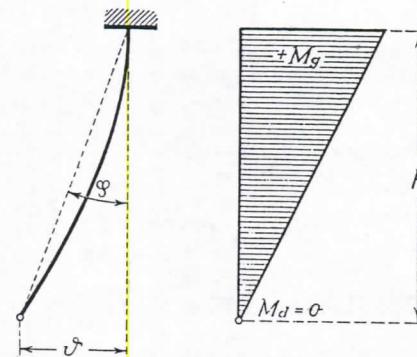
Sam Krosov postupak, izjednačenje i prenošenje momenata, neće biti ponovo prikazivan, jer je već dovoljno opširno obrađen u ranijim poglavljima i primerima.

Momenti pune ukleštenosti usled pomeranja

Ako na pojedinom štapu sa konstantnim momentom istrajnosti izvršimo pomeranje veličine ϑ dobićemo po poznatim elastičnim jednačinama ovde nacrtanu momentnu liniju sa infleksionom tačkom u sredini nosača (stuba). Veličina momenata koji se pojavljuju zavisi od veličine pomeranja ϑ odnosno od ugla pomeranja ψ .



$$\begin{aligned} \varphi_{gore} &= \varphi_{dole} = \psi \\ M_{gore} &= \frac{6EI}{h} \psi = \frac{6EI}{h^2} \vartheta \\ M_{gore} + M_{dole} &= \frac{12EI}{h^2} \psi = \\ &= \frac{12EI}{h^2} \vartheta \\ H &= \frac{M_g + M_d}{h} = \frac{12EI}{h^3} \vartheta \end{aligned}$$



Kod stubova sa zglobovima dobićemo sledeće obrasce:

$$\begin{aligned} M_g &= \frac{3EI}{h} \psi = \frac{3EI}{h^2} \vartheta \\ H_n &= \frac{M_g + (M_d = 0)}{h} = \frac{3EI}{h^3} \vartheta \end{aligned}$$

Izraz $k \frac{h^3}{I}$ označujemo sa t_p ,

što predstavlja pomičnu krutost stuba. Ako imamo stub sa zglobovima, onda je njegova pomična krutost jednaka $\frac{1}{4}$ pomične krutosti obostrano ukleštenog stuba.

Ako stubovi imaju obostrane simetrične vute, njihova pomična krutost se znatno povećava. Upotrebom koeficijenata navedenih kod vertikalnog opterećenja na stranici 60 dobićemo sledeće relacije:

$$M_g = \text{koeficijent krutosti} (4EI\varphi_d + \text{koeficijent prenosa} \cdot 4EI\varphi_g)$$

$$M_d = \text{koeficijent krutosti} (4EI\varphi_g + \text{koeficijent prenosa} \cdot 4EI\varphi_d)$$

$$\text{Za } \varphi_g = \varphi_d = \psi$$

$$M_g + M_d = \text{koeficijent krutosti} \cdot 8EI\psi (1 + \text{koeficijent prenosa})$$

$$t_p^x = t_p^{\text{normalna}} \cdot \text{koeficijent krutosti} \cdot \frac{1 + \text{koeficijent prenosa}}{1.5}$$

ovde znači: t_p^x pomičnu krutost stuba sa simetričnim vutlama.

Infleksiona tačka ostaje usled simetrije u sredini.

Ako stubovi imaju jednostrane vute možemo isto tako upotrebiti koeficijente sa stranice 61, po sledećim formulama:

$$M_g = \frac{4EI}{h} [\varphi_g \cdot \text{koeficijent krutosti glave} + \varphi_d \cdot \text{koeficijent krutosti noge} \cdot \text{prenos na glavu}]$$

$$M_d = \frac{4EI}{h} [\varphi_d \cdot \text{koeficijent krutosti noge} + \varphi_g \cdot \text{koeficijent krutosti glave} \cdot \text{prenos na nogu}]$$

prenos na nogu = prenosni koeficijent od glave ka nozi

prenos na glavu = prenosni koeficijent od noge ka glavi

ako je $\varphi_d = \varphi_g = \psi$

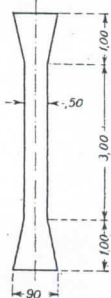
$$M_d + M_g = \frac{4EI}{h} \psi [\text{koeficijent krutosti glave} (1 + \text{prenos na nogu}) + \text{koeficijent krutosti noge} (1 + \text{prenos na glavu})]$$

Pomična krutost stuba s jednostranom vutom, označena sa t_p^y , iznosi dakle:

$$t_p^y = t_{\text{normalna}} \cdot \frac{1}{3} [\text{koeficijent krutosti glave} (1 + \text{prenos na nogu}) + \text{koeficijent krutosti noge} (1 + \text{prenos na glavu})]$$

Srazmer $M_g : M_d$ koji određuje položaj infleksione tačke, iznosi:

$$\frac{M_g}{M_d} = \frac{\text{koeficijent krutosti glave} + \text{koeficijent krutosti noge} \cdot \text{prenos na glavu}}{\text{koeficijent krutosti noge} + \text{koeficijent krutosti glave} \cdot \text{prenos na nogu}}$$



Primer a:

Stub, simetrično pojačan na gornjem i donjem kraju: $m = 1.8$ $n = 0.2$

Koeficijent krutosti: 1.795

Prenosni koeficijent: 1.640

$$t_p^x = t_p^{\text{normalna}} \cdot 1.795 \cdot \frac{1.640}{1.500} = 1.960 t_{\text{normalna}}$$

Infleksiona tačka u sredini

Primer b:

Stub, pojačan samo u glavi: $m = 2.0$ $n = 0.3$

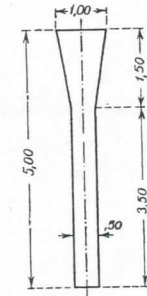
Koeficijent krutosti u glavi: 2.070

Koeficijent krutosti u nozi: 1.174

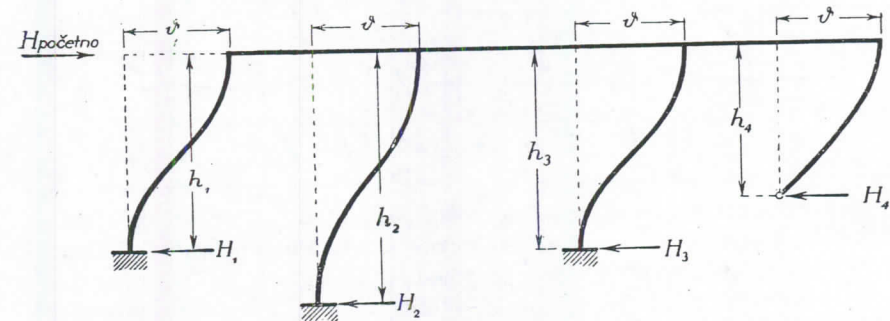
Prenos na nogu: 0.449 Prenos na glavu: 0.790

$$t_p^y = t_p^{\text{normalna}} \frac{2.070 \cdot 0.449 + 1.174 \cdot 0.790}{3} = 1.70 t_p^{\text{normalna}}$$

$$\text{Srazmer } \frac{M_g}{M_d} = \frac{2.070 \cdot 0.449}{1.174 \cdot 0.790} = 1.43$$



Podela horizontalne sile na pojedine stubove



Primenjujući princip računanja pomeranja izvršićemo pomeranje veličine ϑ jednog spratnog podložnog pojasa prema donjem osnovnom. Pri tome ostaju naravno sve matice vijaka čvrsto privijene, tako da se čvorovi ne mogu okretati i ostaju u prvobitnom horizontalno-vertikalnom položaju. Za izvršenje tog pomeranja potrebna je izvesna sila koju označujemo sa H_{pocetna} , odnosno $\Delta H_{\text{pocetna}}$. Pošto je pomeranje ϑ kod svih štapova jednako, to se celokupna sila H_{pocetna} podeli na poprečne (horizontalne) sile pojedinih stubova koje označujemo sa H_1, H_2, \dots, H_n .

Ova podela vrši se u srazmeru s pomičnom krutošću pojedinih štapova:

$$H_1 = \vartheta_1 \cdot 12E \cdot t_{p1} \quad t_{pn} = \frac{I_n}{h_n^3} \cdot (\text{proizvoljna konstanta})$$

$$H_2 = \vartheta_2 \cdot 12E \cdot t_{p2}$$

$$H_3 = \vartheta_3 \cdot 12E \cdot t_{p3}$$

$$H_4 = \vartheta_4 \cdot 12E \cdot t_{p4}$$

za štap sa zglibom:

$$t_{pn}^o = \frac{1}{4} t_p^{\text{normalna}}$$

$$\Sigma H = \vartheta \cdot 12E \cdot \Sigma t_p = H_{\text{pocetna}} \quad H_n = H_{\text{pocetna}} \cdot \frac{t_{pn}}{\Sigma t_p}$$

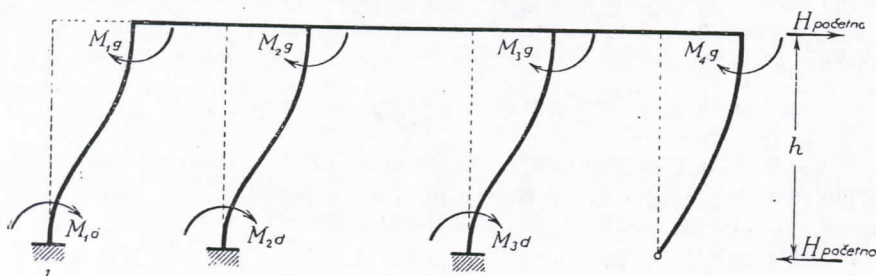
jer je $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \vartheta_4 = \vartheta$

Ako svi stubovi imaju istu visinu ($h = \text{konstantno}$), onda se gornje formule mnogo uprošćavaju: umesto sa horizontalnim poprečnim silama H_n računamo sa momentima savijanja M_g i M_d . Umesto pomičnih krutosti upotrebljavamo pomične momentne krutosti.

Pomične momentne krutosti matematički su definisane izrazom:

$$t_{pm} = k \frac{I}{h^2}$$

Kod stubova jednakih visina pomične momentne krutosti jednake su za svaki sprat normalnim krutostima $\frac{I}{h}$, pošto h ostaje konstantan.



$$M_{1g} = \vartheta \cdot \frac{6EI_1}{h^2} = k \cdot t_1$$

$$M_{1d} = \vartheta \cdot \frac{6EI_1}{h^2} = k \cdot t_2$$

$$M_{2g} = \vartheta \cdot \frac{6EI_2}{h^2} = k \cdot t_2$$

$$M_{2d} = \vartheta \cdot \frac{6EI_2}{h^2} = k \cdot t_2$$

$$M_{3g} = \vartheta \cdot \frac{6EI_3}{h^2} = k \cdot t_3$$

$$M_{3d} = \vartheta \cdot \frac{6EI_3}{h^2} = k \cdot t_3$$

$$M_{4g} = \vartheta \cdot \frac{3EI_4}{h^2} = k \cdot t_{4pm}^0$$

$$t_n = \frac{I_n}{h} \cdot (\text{proizvoljna konstanta})$$

za štab sa zglobom:

$$t_{pm}^0 = \frac{1}{2} t_{\text{normalnog štapa}}$$

Momenti pune ukleštenosti dele se na pojedine štapove pri jednakim visinama štapova (stubova) srazmerno njihovim krutostima ($\frac{1}{2}$ gore, $\frac{1}{2}$ dole), odnosno na svaki kraj stubova u srazmeru krutosti prema iznosu $\Sigma(2t + t_{pm}^0)$.

$$\begin{aligned} \Sigma(M_g + M_d) &= k \cdot \Sigma(2t_n + t_{pm}^0) = \\ &= H_{početna} \cdot h = (H \cdot h)_{početna} \end{aligned}$$

iz srazmera dobijamo:

$$M_{ng} = M_{nd} = H \cdot h_{početna} \cdot \frac{t_n}{\Sigma(2t_n + t_{pm}^0)}$$

Krosov postupak i kriterij pomeranja 3

Čim smo za dato pomeranje ϑ , odnosno za datu početnu horizontalnu silu $H_{početna}$ utvrdili pripadne momente savijanja potpunog ukleštenja za svaki stub gore i dole, pripremljen je skelet za operaciju Krosovog postupka. Kod pojedinih čvorova oslobodimo zamišljene vijke i prepustimo čvorove okretanju. Neuravnoteženi momenti u stubovima uravnotežiće se sa »izjednačujućim momentima«. Okreti čvorova izvode na susednim čvorovima prenosne momente koji su za konstantan momenat istrajnosti štapova jednaki polovini izjednačujućih momenata. Ovi prenosni momenti još nisu međusobno uravnoteženi i zato je potrebno sekundarno izjednačenje momenata, koje izvodi opet sekundarne prenosne momente. Postupak se ponavlja do granice tačnosti računa, odnosno samo do potrebne ili željene tačnosti. U samom postupku moguće su mnoge varijacije: Duži i prostiji postupak je taj da sve čvorove istovremeno prepustimo rotaciji, da izvršimo jednovremeno sve prenose, da ponovno sve čvorove sekundarno izjednačimo, itd. Ovaj postupak može da se skрати time što ćemo izvršiti prenošenje momenata na susedne čvorove kod svakog čvora odmah posle izvršenog izjednačenja. U tom primeru uzimamo kod izjednačenja susednog čvora u račun i već prenesene momente okrenutih čvorova.

Moguće su i kombinacije u tom smislu da okrećemo istovremeno samo čvorove pojedinog sprata. Kod izjednačenja gornjeg sprata uzimamo u obzir prenesene momente iz nižeg sprata. Konačni rezultat je isti u svakom primeru, pošto je poznato da je konačan zbir isti i kad proizvoljno menjamo red sabiraka.

Rezultirajući momenti savijanja koji iz toga proishode u svemu odgovaraju svim elastičnim uslovima skeleta. Ako iz dobijenih momentnih crta na stubovima izračunamo poprečne (horizontalne) sile po poznatim jednačinama:

$$H_1 = \frac{M_{1gore} + M_{1dole}}{h_1}, \quad H_n = \frac{M_{ngore} + M_{ndole}}{h_n}, \quad \sum_1^n H_{rezult} < H_{početna}$$

te ih saberemo, dobićemo za sumu ΣH_{rez} znatno manju silu od one sile $H_{početna}$. Pri jednakim visinama stubova računamo radi uprošćenja rada sa momentima savijanja, što menja oblik gornjeg obrazca u sledeći:

$$\sum_1^n (M_{gore} + M_{dole})_{rezult.} < (H \cdot h)_{početna}$$

Suma svih momenata gore i dole koja izlazi iz Krosovog postupka, manja je od sume početnih momenata $(H \cdot h)_{početna}$.

Tome je razlog što su se čvorovi skeleta okrenuli i time popustili u otpornosti. Kod jakih nosača i vitkih stubova okreti čvorova neće biti veliki, zato i razlika između $(H \cdot h)_{početna}$ i $(H \cdot h)_{rez}$ neće biti velika. Kod slabih nosača i jakih stubova dešava se da rezultirajući momenti iznose jedva $1/10$ početnih. Za postizanje konačnog rezultata i konačnih momenata savijanja drugi je postupak za skelet sa jednim spratom i jednim pomeranjem, a drugi za skelet sa dva i više spratova.

Jednospratni skelet (samo sa jednim pomeranjem) pruža mogućnost da sve dobivene rezultirajuće sile i momente pomnožimo sa odgovarajućim faktorom i na taj način dobijamo konačno ispravno stanje naprezanja. Faktor sa kojim množimo rezultat, nazivamo »kriterij pomeranja« i označujemo ga sa » \mathfrak{S} «.

$$\mathfrak{S} = \frac{H_{konačna}}{H_{rezult}} = \frac{(H \cdot h)_{konačna}}{\Sigma (M_g + M_d)_{rezult}} \text{ za stubove jednakih visina}$$

Kod jednospratnog skeleta (okvira) ustvari je svejedno sa kojom vrednošću $H_{početna}$, odnosno $(H \cdot h)_{početna}$ smo započeli račun pomeranja. Izračunamo skelet za bilo koje pomeranje, a rezultat pomnožimo sa kriterijem pomeranja. Za razne rasporede horizontalnog opterećenja imamo samo jedan jedinični račun pomeranja, ali razne kriterije pomeranja \mathfrak{S} : jedan za nesimetrično opterećenje, drugi za vetar, treći za potres, četvrti za sile kočenja. Američka literatura preporučuje kod skeleta sa jednakom visinom stubova (radi uprošćenosti) da uzimamo $(H \cdot h)_{početna} = \Sigma (2t + t_{pm}^0)$, pri čemu su pojedini dejstvujući momenti u glavama stubova jednaki krutostima pojedinih stubova t . Ovako pomeranje nazivamo »jedinično pomeranje«.

Kod višespratnog skeleta javljaju se teškoće usled toga što svaki sprat traži drugi kriterij pomeranja, a po zakonu srazmera dopušteno je samo da se skeletni račun kao celina množi sa jednim istim kriterijem \mathfrak{S} . Za izračunavanje višespratnih skeleta ima više načina, ali su svi dosta komplikovani i zahtevaju mnogo vremena, jer spratovi utiču jedan na drugi i usled toga zahtevaju red jednačina sa više nepoznatih. Za praksu dolazi u obzir »skraćena Grinterova metoda« koju je pisac ove knjige dopunio. Teorija ove metode i praktičan postupak izračunavanja višespratnih skeleta na pomeranje biće obrazloženi u zasebnom poglavlju.

Celokupan statički račun pomeranja jednospratnog skeleta po Krosu

Za celokupan račun pomeranja jednospratnog skeleta potrebna je celishodna dispozicija raznih računskih postupaka.

I. Shema skeleta, krutosti, izjednačujući koeficijenti, pomične krutosti

Po pravilu su: dispozicija skeleta, obične (okretne) krutosti štapova i izjednačujući koeficijenti već izračunati u statičkom računu za vertikalno opterećenje. Ove podatke uzimamo iz ranijih računa. Isto tako potrebno je da se unapred pripremi shema skeleta za kasniji Krosov postupak. Zasebni račun pomičnih krutosti potreban je samo kod skeleta (ili okvira) sa raznim visinama stubova. Ovo izvodimo tabelarno. Istovremeno izračunavamo i dejstvujuće momente u glavama i nogama stubova po jednačini

$$M_g = M_d = H_n \cdot \frac{h_n}{2} \quad \text{za zglob: } M_g^0 = H^0 \cdot h^0$$

Krutosti, kao i dejstvujuće momente, možemo množiti proizvoljnim konstantama, jer te ispadaju iz računa pri daljem postupku. Pri izračunavanju temperaturnih razlika i skupljanja treba da se ove konstante tačno i broјčano utvrde.

Primer tabele:

Stub broj	(Okretna) krutost $t = k \cdot \frac{I}{h}$	Visina stuba h m	Pomična krutost $t_p = k \cdot \frac{I}{h^3}$	Pomična krutost u % $\frac{t_p}{\Sigma t_p}$	Moment ukleštenja na stubu $t_p \% \cdot \frac{h}{2}$
1	10.0	4.0	6.25	34.7 %	69.4
2	15.0	6.0	4.17	23.1 %	69.3
3	12.0	5.0	4.80	26.6 %	66.5
4 ^{o)}	18.0 ^{o)}	4.0	2.81 ^{o)}	15.6 %	62.5 ^{o)}
$\Sigma t_p = 18.03$				100 %	

^{o)} Uračunat je uticaj zgloba: $t_{p4} = 1/4 t_p$.

Kod skeleta sa jednako visokim stubovima ova tabela otpada. Pomične krutosti, kao i momenti ukleštenja, jednaki su običnim okretnim krutostima. (Za stubove sa zglobovima treba krutost reducirati.)

II. Izračunavanje horizontalnog opterećenja

a) Spoljna horizontalna opterećenja su: vetar, sile kočenja, centrifugalne sile, potres (u % vertikalnog opterećenja). Za veličinu pomeranja merodavna je horizontalna reakcija koja dejstvuje u visini gornjeg nosača skeleta. Ove sile uzimamo u obzir kod određivanja »kriterija pomeranja« \mathfrak{S} nakon dovršenog postupka po Krosu za jedinično pomeranje.

b) Horizontalno opterećenje kojim ispravljamo račun vertikalnog opterećenja po »pogrešnoj« pretpostavci poduprtih spratova, dobijamo izrazom:

$$\Delta H = - \sum \frac{M_g + M_d}{h} \quad \text{Negativni predznak znači da } \Delta H \text{ nastupa}$$

u obratnom smislu izračunate reakcije. Uzimamo ga u obzir — analogno spoljnom opterećenju — nakon dovršenog Krosovog postupka za jedinično pomeranje određivanjem kriterija \mathfrak{S} . Kod simetričnih okvira i simetričnog opterećenja taj uticaj, naravno, otpada.

c) Izračunavanje uticaja temperature i skupljanja nije određeno veličinom sila nego veličinom pomeranja. Pomeranje svakog stuba je različito.

Pomeranja su utvrđena jednačinom: $\delta = a \cdot t \cdot l$ pri čemu znači:

a = koeficijent rastezanja, za armirani beton = 10^{-5} ;

t = temperaturne razlike, po propisu za vrućinu od $+10^\circ$ do $+25^\circ$ za skupljanje i mraz od -25° do -45° ;

l = otstojanje glave stuba od neutralne tačke.

Momenti ukleštenja u glavi, odnosno u nozi pojedinog stuba, računaju se pomoću izraza:

$$M_g = M_d = \frac{6EI\delta}{h^2}, \text{ za stub sa zglobo } M_g^o = \frac{3EI\delta}{h^2}$$

Obrasci su zavisni od realnog momenta istrajnosti i realnog modula elastičnosti pa se prema tome ne sme računati sa relativnim momentima istrajnosti kI . Proizvoljnu konstantu k treba izbaciti iz računa.

S ovim momentima dobili smo osnovu za Krosov postupak. Kod simetričnih okvira pada osovina u simetralu i Krosov postupak daje nam konačne rezultate. Kod nesimetričnih okvira prisiljeni smo da izaberemo proizvoljno izvesnu neutralnu tačku negde u blizini sredine. Kod ove proizvoljno izabrane neutralne tačke pretpostavili smo u toj tački zamišljeni oslonac koji preuzima razliku poprečnih sila stubova, označenih izrazom $\Delta H_t = \Sigma H_t$.

Ako uklonimo ovaj zamišljeni oslonac, uravnotežavamo sistem s dopunskim pomeranjem u smeru reakcije ΔH_t . Ovo uravnoteženje izvodi se računski na taj način da korigiramo rezultate Krosovog postupka, dobivene uz pretpostavku neutralne tačke, s dopunskim momentima usled pomeranja. Slučaj je isti kao kod nesimetričnog vertikalnog opterećenja: dopunski korekcionni momenti su oni isti koji su izračunati za jedinično pomeranje, a pomnoženi s kriterijem pomeranja

$$\mathfrak{S}_t = \frac{\Delta H_t}{H_{\text{rezult. jediničnog pomeranja}}}$$

III. Krosov postupak

Sam Krosov postupak isti je kao i postupak za vertikalno opterećenje. Potrebno je da se pripremi kompletna shema skeleta uz oznaku izjednačujućih koeficijenata. Za sva horizontalna opterećenja dovoljan je samo jedan postupak »jediničnog pomeranja«. Konačni rezultat za svako pojedino opterećenje osim temperaturnih uticaja dobija se na taj način što se dobijeni momenti pomnože s kriterijem pomeranja

$$\mathfrak{S} = \frac{H_{\text{opterećenja}}}{H_{\text{rezult.}}}$$

Za uticaje temperature i skupljanje dobijaju se konačni momenti zasebnim Krosovim postupkom neposredno iz deformacija.

IV. Utvrđivanje merodavnih momenata za dimenzioniranje

Utvrđivanje najnepovoljnije kombinacije raznih uticaja na pojedine preseke konstrukcije zahteva naročito opširan rad. Može da se izvodi na analitički način pomoću tabela ili na grafični način. Važno je, da rezultate vertikalnog opterećenja prethodno korigiramo sa uticajem pomeranja usled istog opterećenja. Ovo možemo izvršiti direktno u shemi Krosovog postupka za vertikalno opterećenje ili u zasebnim tabelama. Prvobitni nekorigirani rezultati ne dolaze više u obzir.

Primer računanja pomoću tabela:

Tabela momenata savijanja usled pomeranja

Štap	Presek	Jedinično pomeranje	Korekcije vertikalnog opterećenja			Sile kočenja	Sile vetra	Skupljanje temperature razlike
			slučaj a)	slučaj b)	slučaj c)			
	ΔH							
	\mathfrak{S}	1						
1	M_g							
	M_d							
11	M_l							
	M_d							
2	M_g							
	M_d							
12	M_l							
	M_d							

Tabela najnepovoljnijih kombinacija

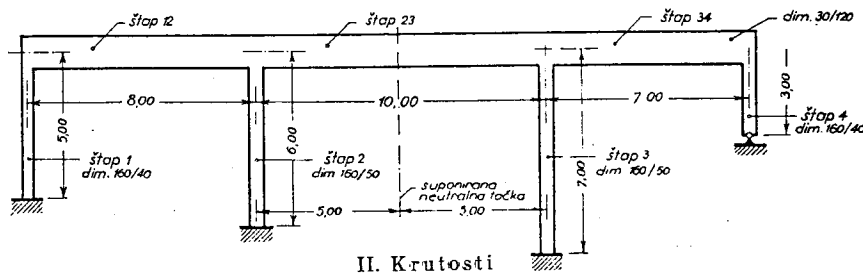
Štap	Presek	Korigirani momenti vertikalnog opterećenja			Sile kočenja	Sile vetra	Korigirani momenti temperat. razlika		Ekstremni momenti	
		slučaj a)	slučaj b)	slučaj c)			Skupljanje + mraz	Vrućina	+Mmax	-Mmax
1	Mg
	Md
1	Mh
	Md
2	Mg
	Md

U gornjoj tabeli računaju se za razne slučaje vertikalnog opterećenja korekcije zbog pomeranja. U donjoj tabeli nisu unete ove korekcije, već ovim korekcijama ispravljeni (korigirani) momenti savijanja vertikalnog opterećenja.

PRAKTIČNI PRIMERI

Primer 16: Okvirni kontinualni most računat na pomeranje.

I. Shema za pojas mosta širine 1'60 m



II. Krutosti

Štap	Dimenzije dm	Moment inercije I = bh ³ /12 dm ⁴	Dužina l dm	Krutost t = I/l ³ dm ³	Pomična krutost tp = I/l ³ dm ³ · 10 ⁻⁴	Pomična momentna krutost tpm = I/l ² dm ² · 10 ⁻²
1	16/4	85	50	1.70	6.80	3.40
2	16/5	107	60	2.78	7.72	4.64
3	16/5	167	70	2.38	4.86	3.40
4	16/4	85	30 ^{*)}	(2.83) 2.12 ^{*)}	(31.5) 7.87 ^{*)}	(9.44) 4.72 ^{*)}
12	3/12	432	80	5.40	-	-
23	3/12	432	100	4.32	-	-
34	3/12	432	70	6.16	-	-

*) Uračunat je uticaj zgloba.

III. Opterećenja

- a) Sile kočenja. Vertikalno opterećenje za pojas širine 1'00 m: ravnomerno korisno: 500 kp/m² koncentrisano korisno: 4800 kp/m²
Horizontalna sila iznosi 1/7 vertikalnog opterećenja mosta:

$$H = \frac{1}{7} \cdot 1'60 \cdot [4800 + 500(8'0 + 10'0 + 7'0 + 0'4)] = 4000 \text{ kp}$$

- b) Skupljanje i temperaturni uticaji

Uzima se u račun temperaturna razlika:

za mraz i skupljanje -40° C za vrućinu +20° C

Pretpostavlja se neutralna tačka u sredini raspona 2-3

Koeficijent stezanja od temperature $\alpha = 10^{-5}$

Elastični modul armiranog betona $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$

δ = pomeranje $\delta = \alpha l l$ l ostojanje od neutralne tačke

$\delta = 40 \cdot 10^{-5} l$ za mraz + skupljanje

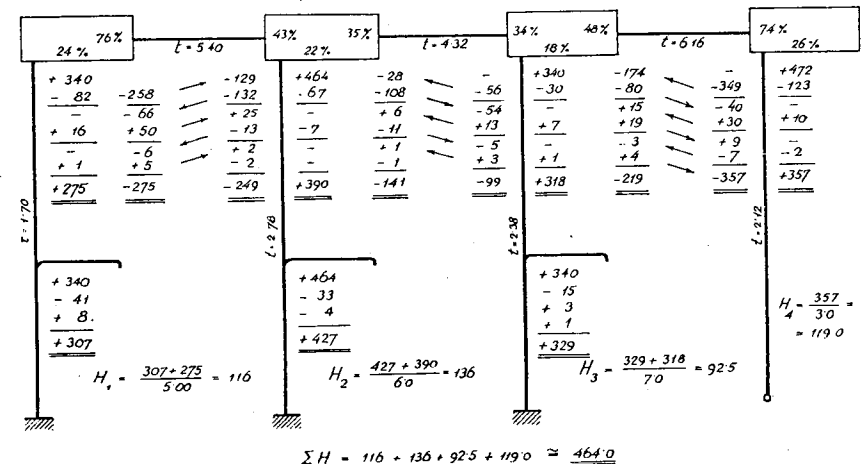
$$H = 12 E \delta \frac{I}{h^3} = 12 \cdot 40 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} \cdot t_p \cdot 10^4 \cdot l_{cm} = 0'96 t_p l_{cm}$$

Štap	Dužina l cm	Pomična krutost tp u dm · 10 ⁻⁴	H = 0'96 t l cm kp	Moment ukleštenja M = H · l/2 kpm
1	1300	6'80	8 500	21 250
2	500	7'72	3 700	11 100
3	500	4'86	-2 330	8 150
4	1200	7'87	-9 080	27 300 ^{*)}

*) Uračunat je uticaj zgloba.

IV. Krosova postupak

a) Jedinično pomeranje



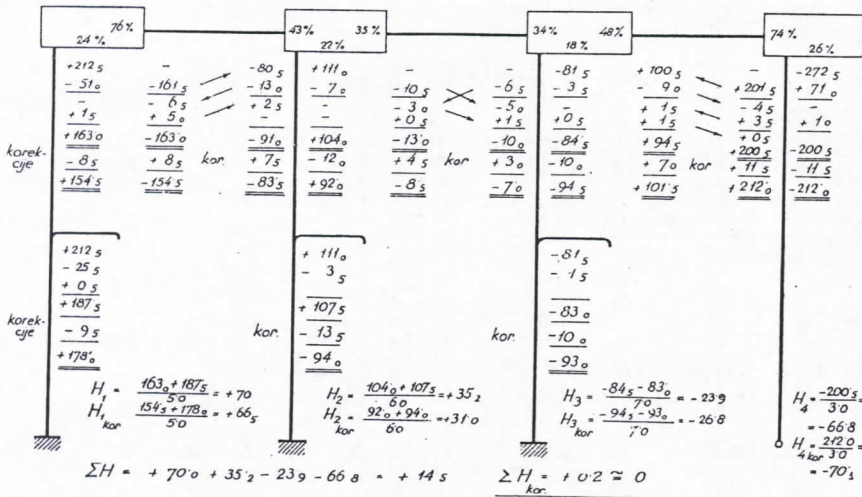
$$\Sigma H = 116 + 136 + 925 + 1190 \approx 4640$$

Momentnu crtu za horizontalnu silu kočenja $H = 4000 \text{ kp}$ dobićemo, ako momente dobivene u Krosovom postupku jediničnog pomeranja pomnožimo kriterijem pomeranja \mathfrak{S}

$$\mathfrak{S} = \frac{4000}{464} = 8.63$$

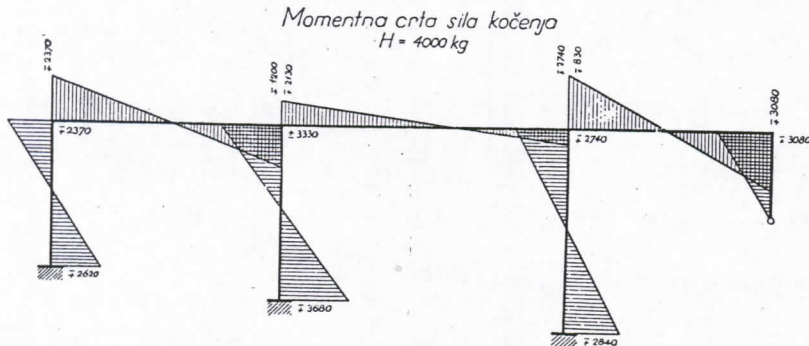
b) Pomeranje usled skupljanja i temperaturnih razlika.

Tačnost računa ograničena na 100 kpm

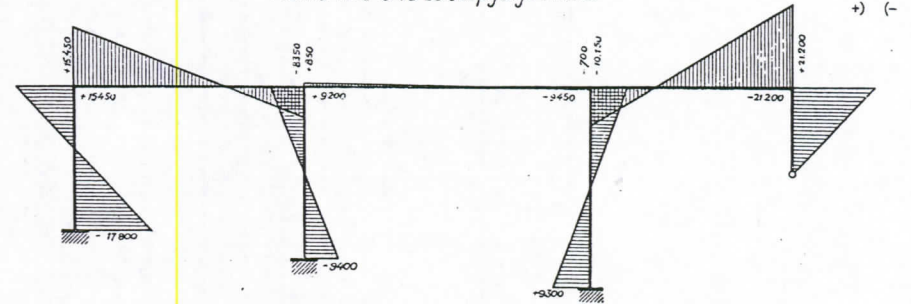


Pošto skelet u horizontalnom pravcu nije u ravnoteži treba rezultate korigirati sa momentima jediničnog pomeranja pomnoženim sa kriterijem pomeranja \mathfrak{S}

$$\mathfrak{S} = \frac{-14.5}{464} = -0.0312$$



Momentna crta za skupljanje + mraz



Momentna crta za vrućinu slična je, samo što su momenti za polovinu manji i s obratnim predznakom.

Primer 17: Prizemni skelet (visoke zgrade) primera 7 računat na pomeranje

Skelet u primeru br. 7 nije pravilno rešen, jer je pretpostavljeno da je nepomičan u horizontalnom pravcu. Rezultati za razna opterećenja a), b), c) nisu pravilni jer ne ispunjavaju uslova ravnoteže za horizontalne poprečne sile stubova

$$\Sigma H = 0 \text{ odnosno } \Sigma (M_g + M_d) = 0$$

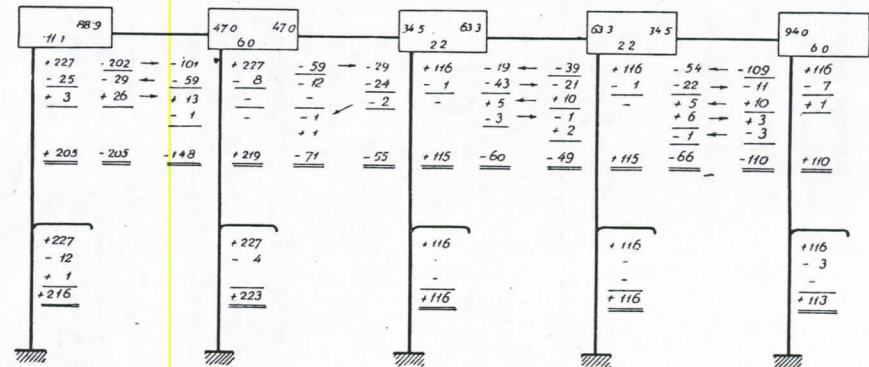
Po Krosovom postupku primera 7 dobijamo za razne slučaje opterećenja sledeće iznose ΣM :

slučaj a) $\Sigma M_g = -300 - 250 + 550 - 950 + 1250 = +300$ $\Sigma M_d = 1/2 \Sigma M_g = +150$
 slučaj b) $\Sigma M_g = 90\% \cdot \Sigma M_g \text{ slučaja a)} = +270$ $\Sigma M_d = +135$
 slučaj c) $\Sigma M_g = +650 - 550 + 100 - 100 + 150 = +250$ $\Sigma M_d = +125$

Krutosti

$$t_{01} = t_{12} = 227 \quad t_{23} = t_{34} = t_{45} = 116 \quad \Sigma t = 802$$

Krosov postupak za jedinično pomeranje



$$\Sigma (M_g + M_d) = +205 + 216 + 219 + 223 + 115 + 116 + 115 + 116 + 110 + 113 = 1548$$

Kriterij pomeranja iznosi:

$$\text{Za raspored opterećenja I (slučaj a): } \mathcal{S}_I = \frac{300 + 150}{1548} = 0.191$$

$$\text{Za raspored opterećenja II (slučaj b+c): } \mathcal{S}_{II} = \frac{270 + 135 + 250 + 125}{1548} = 0.504$$

$$\text{Za raspored opterećenja III (slučaj b -- c): } \mathcal{S}_{III} = \frac{270 + 135 - 250 - 125}{1548} = 0.0196 \approx 0$$

Korekcije su izvršene ograničenom tačnošću na 50 kpm.

Raspored opterećenja	Stub 01		Nosac 1		Stub 12		Nosac 2		Stub 23		Nosac 3		Stub 34		Nosac 4		Stub 45	
	M gore	M dole	M levo	M desno	M gore	M dole	M levo	M desno	M gore	M dole	M levo	M desno	M gore	M dole	M levo	M desno	M gore	M dole
I	-30	-15	+1970	-2940	-25	-10	+2965	-790	+25	+55	+735	-2260	+45	+95	+2355	-125	+60	+125
	-5	-5	+5	+5	-5	-5	-	-	-5	-5	-	-	-	-	-	-	-	-5
	-35	-20	+1975	-2935	-30	-15	+2965	-790	+25	+50	+735	-2260	+45	+95	+2355	-120	+60	+120
II	+40	+20	+1900	-2535	-40	-40	+2615	-865	+30	+60	+805	-2205	-45	-95	+2300	-130	+65	+130
	-10	-10	+10	+5	-10	-10	+5	-	-5	-5	+5	-	-5	-5	+5	+5	-5	-5
	+10	+10	+1910	-2530	-50	-50	+2620	-865	+25	+55	+810	-2205	-50	-100	+2305	-125	+60	+125
III	-45	-45	+1640	-1755	+15	+15	+2795	-555	+20	+40	+515	-1865	-35	-75	+1940	-100	+50	+100

Praktični primer 7—17 pokazuje očigledno jasno način na koji se vrše korekture rezultata dobivenih po Krosovom postupku za vertikalna opterećenja sa uticajem pomeranja sprata da bi se postigla ravnoteža. Primer služi kao dokaz da su za jake nosače i visoke stubove uticaji pomeranja neznatni tako da ih možemo zanemariti. U sledećim primerima dokazujemo obratno, naime da pomeranja kod okvira sa jakim stubovima i vitkim nosačima bitno menjaju stanje naprezanja.

Uticaj skupljanja i temperaturnih razlika

Skupljanje + mraz: -35° C
 Vrućina: +15° C

Osnovni momenti

$$M_g = M_d = \frac{6 EI}{h^2} \delta$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$$

$$I_{01} = I_{12} = 40 \cdot \frac{50^3}{12} = 4167 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_{23} = I_{34} = I_{45} = 40 \cdot \frac{40^3}{12} = 2133 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

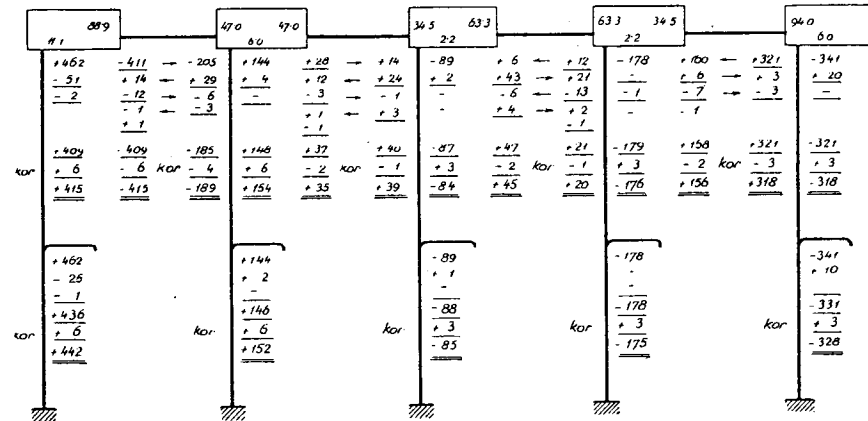
$$h^2 = 550^2 = 303 \cdot 10^4$$

$$\frac{6 EI_{01}}{h^2} = 16.5 \cdot 10^5 \text{ kpcm}$$

$$\frac{6 EI_{23}}{h^2} = 8.45 \cdot 10^5 \text{ kpcm}$$

Stub	Odstojanje od neutralne tačke cm	Pomeranje δ u t.l. cm	M. $\frac{6EI\delta}{h^2}$ kpm
01	+800	+0.280	+4680
12	+250	+0.087	+1440
23	-300	-0.105	-890
34	-600	-0.210	-1780
45	-1150	-0.403	-3410

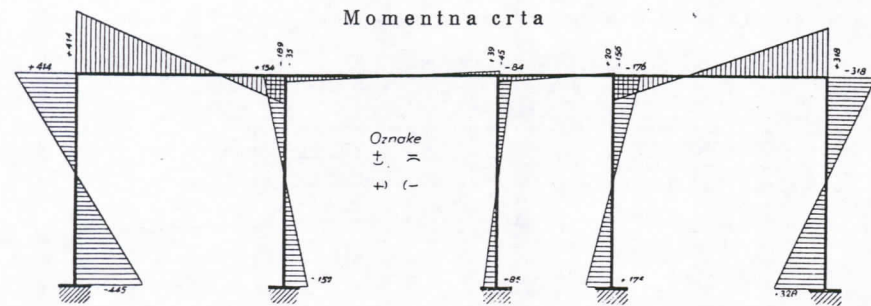
Krosov postupak. Tačnost ograničena na 10 kpm:



$$\Sigma (M_g + M_d) = +845 + 294 - 175 - 357 - 652 = -45$$

$$\text{Kriterij pomeranja } \mathcal{S} = + \frac{45}{1548} = +0.029$$

$$\Sigma (M_g + M_d) \text{ korigiranih} = +857 + 306 - 169 - 351 - 646 = -3 \approx 0$$



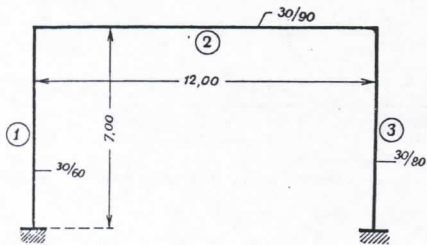
Za uticaj vrućine momentna je crta slična: predznaci su obratni a veličine momenta umanjene u srazmeru $\frac{15^\circ}{35^\circ}$.

Za kombinaciju najnepovoljnijih uticaja raznih rasporeda vertikalnih opterećenja, temperaturnih uticaja i uticaja vetra (odnosno potresa) potreban je naročiti tabelarni račun. Po tabeli navedenoj u tekstu može se sprovesti ovaj račun. Naročiti primer ovde nije potreban.

Na izračunatom primeru 7 i 17 vidi se, da se kod vitkih stubova i srazmerno krutih nosača konačni rezultati ne razlikuju mnogo od rezultata dobivenih pri pretpostavci pune ukleštenosti stubova u nosače. U mnogim konkretnim primerima slične dispozicije krutosti skeleta biće ovakva aproksimacija potpuno opravdana.

Primer 18: Jednostavan nesimetrični okvir.

I. Shema okvira i krutosti



Štap	Dim cm	Moment inajtrajnost $I = bh^3/12$ cm ⁴	Dužina l (· h) dm	$l \cdot \frac{I}{l^3}$ cm ³	Jzyed koef ²	Pomćni koef ²
1	30·60	540	70	0.77	34%	30%
2	30·90	1820	120	1.52	45%	—
3	30·80	1280	70	1.83	55%	70%

II. Račun osnovnih momenata

Vertikalno opterećenje:

Opterećenje pločom: $4 \cdot 0.580 = 2320 \text{ kp/m}^2$
 Sopsvena težina nosača: $0.30 \cdot 0.90 \cdot 2500 = 680 \text{ „}$
 Ukupno = 3000 kp/m^2

$M_{prost} = q \frac{l^2}{8} = 3000 \cdot \frac{12^2}{8} = 54.000 \text{ kpm}$ $M_{ukl} = q \frac{l^2}{12} = 3000 \cdot \frac{12^2}{12} = 36.000 \text{ kpm}$

Vetar:

$H = 75 \text{ kp/m}^2 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 4 \cdot 0 = 1200 \text{ kp}$
 $\Sigma (M_g + M_d) = 1200 \cdot 7 \cdot 0 = 8400 \text{ kpm}$

Skupljanje i temperaturni uticaji: skupljanje + mraz: -40°C
 vrućina: $+20^\circ \text{C}$

Pretpostavljamo neutralnu tačku u sredini okvira:

$\vartheta = 600 \cdot 10^{-5} \cdot 40 = 0.24 \text{ cm}$ $M_g = M_d = \frac{6EI\vartheta}{h^2}$

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$ $\frac{I_1}{h} = 0.77 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$ $\frac{I_2}{h^2} = 183 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$

$M_g = M_d = \frac{6E}{h} \vartheta \cdot t = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0.24}{700} \cdot t = 4.12 \cdot 10^2 \cdot t$

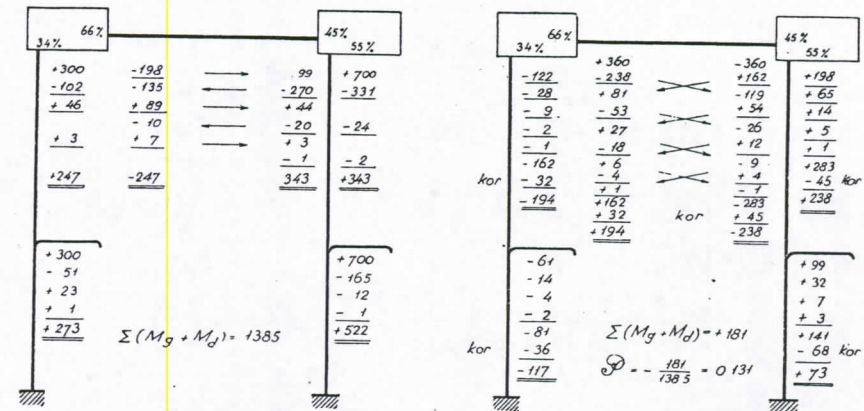
Za $t_1 = 0.77 \cdot 10^3$ $M = 3170 \text{ kpm}$

Za $t_2 = 1.83 \cdot 10^3$ $M = 7530 \text{ kpm}$

III. Krosovi postupci

a) Jedinično pomeranje

b) Vertikalno opterećenje



Rezultate dobivene iz postupka za vertikalno opterećenje korigiramo pribrajanjem rezultata jediničnog pomeranja u srazmeru kriterija pomeranja $\vartheta = 0.131$. Konačni rezultat nam daje $\Sigma (M_g + M_d) = 0$. Ravnotežni uslov $\Sigma M = 0$ je ispunjen.

c) Za izračun uticaja vetra pomnožićemo rezultate jediničnog pomeranja sa kriterijem pomeranja za vetar: $\vartheta_v = \frac{8400}{1385} = 6.06$.

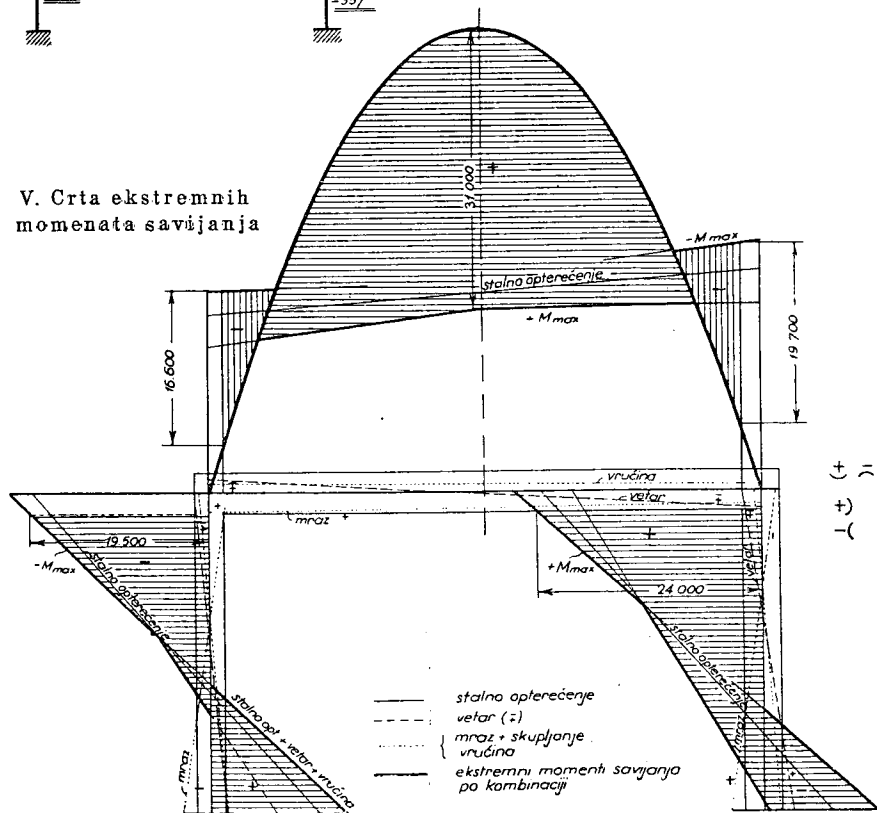
d) Uticaj skupljanja i mraza

34%	66%	45%	55%
+317	-209	+339	-753
-108	+169	-104	+414
-58	-111	+47	+57
-8	+23	-55	+30
-4	-15	+25	+4
+139	+12	-7	+2
+67	-8	-246	+94 kor
+206	+1	+2	-152
	-139	+246	
	-67	-94	
	-206	+152	
Σ (M _g + M _d) = -379			
S _g = 370 / 1385 = + 0.274			
		-753	
		+207	
		+28	
		+15	
		+2	
		+1	
		-500	
		+143 kor	
		-357	

IV. Tabela najpovoljnijih kombinacija

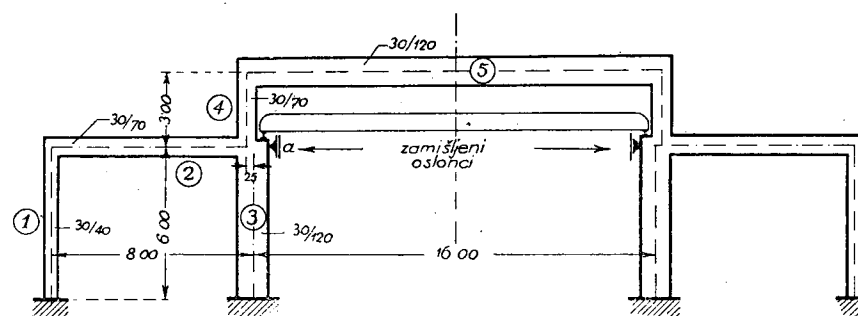
Uticaj	Stub 1		Stub 3	
	M dole kpm	M gore kpm	M gore kpm	M dole kpm
Vertikalna opterećenje	-11.700	-19.400	+23.800	+7.300
Vetar	+1660	+1.500	+2060	+3160
Skupljanje + mraz	+3030	+2060	-1520	-3570
Vrućina	-1520	-1030	+760	+1780
+ M max	(-7010)	(-15.840)	+26.040	+12.240
- M max	-14.880	-21.930	(+20.200)	(+570)

V. Crta ekstremnih momenata savijanja



Primer 19: Simetrično opterećeni kombinovani okvir.

I. Shema okvira



Za sva simetrična opterećenja možemo izvoditi statički račun po principu: Najpre ćemo izračunati okvir za vertikalno opterećenje sa pretpostavkom da se nalaze u tačkama a zamišljeni oslonci. Ovo rešenje korigiramo dopunskim korekcionim momentima koji nastupaju čim uklonimo zamišljene oslonce u tačkama a. Korekzione momente izračunaćemo tako da ćemo rezultate dobivene za jedinično pomeranje u tačkama a pomnožiti sa odgovarajućim kriterijem pomeranja S.

II. Krutosti štapova

Štap	Dimenzije cm	Moment inercije I cm ⁴ · 10 ⁴	Dužina l cm · 10 ²	Krutost I/l ³ cm ³ · 10 ²	Jzjed koef %	Pomična krutost I _p · 1/l _p ³ cm · 10 ⁻³	Pomična momentna krutost I _{pm} = I/l _p ² cm ²
1	30 × 40	160	60	2.67	20%	0.74	0.444
2	× 70	858	80	10.73	80%	9.6%	
3	30 × 120	4320	60	72.00	64.7%	20.00	12.000
4	30 × 70	858	30	28.60	25.7%	66.2%	31.80
5	30 × 120	4320	160	sim 13.50, ant 40.50	sim 32%, ant 58.6%		

III. Račun opterećenja i osnovnih momenata

a) Jedinično pomeranje:

$$M_{1g} = M_{1d} = 44$$

$$M_{3g} = M_{3d} = 1200$$

$$M_{5g} = M_{5d} = 954$$

b) Vertikalno opterećenje:

Štap	q kpm/m	Raspon l m	M prost. = q l ² / 8 kpm	M uklešt. = q l ² / 12 kpm
2	2.400	8.00	19.200	12.800
5	2.800	16.00	90.000	60.000

U tački a nastaje moment usled ekscentričnosti gornjeg stuba u iznosu:

$$M = -8.0 \cdot 2800 \cdot 0.25 = -5600 \text{ kpm.}$$

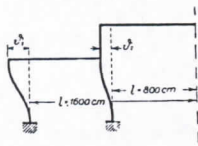
c) Simetrično opterećenje kрана (u tački a):

Reakcija točkova kрана na okvir uključno koeficijent udara iznosi 14.000 kp.
Ručica od osovina stuba: 0'40 m².

$$M_{ukleštenosti} = 14.000 \cdot 0'40 = 5600 \text{ kpm.}$$

d) Skupljanje i temperaturni uticaji:

skupljanje + mraz: -40° C, vrućina: +20° C.



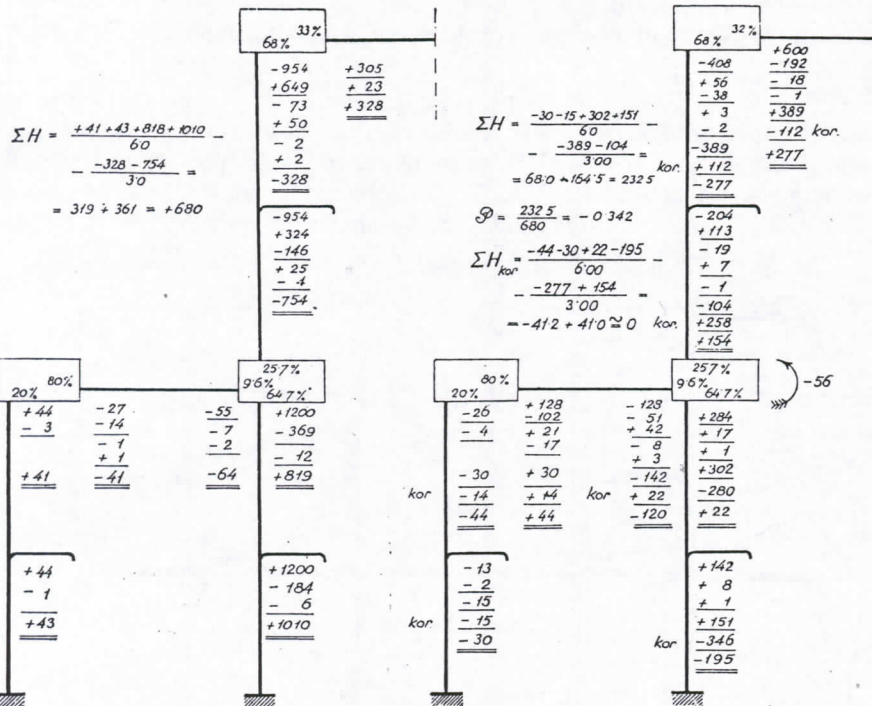
Štap	Pomeranje δ cm	I/h^2 cm ²	6 E	Mukleštenosti	
				kpcm	kpm
1	0'64	0'444	$12 \cdot 10^5$	$3 \cdot 41 \cdot 10^3$	3410
3	0'32	12'000		$460 \cdot 10^3$	46'000

$$M_g = M_d = \frac{6 EI}{h^2} \delta \quad \delta = \alpha l = 10^{-5} \cdot 40 \cdot l$$

IV. Krosovi postupci

a) Jedinično simetrično pomeranje (tačke a)

b) Vertikalno opterećenje jedinica 100 kpm

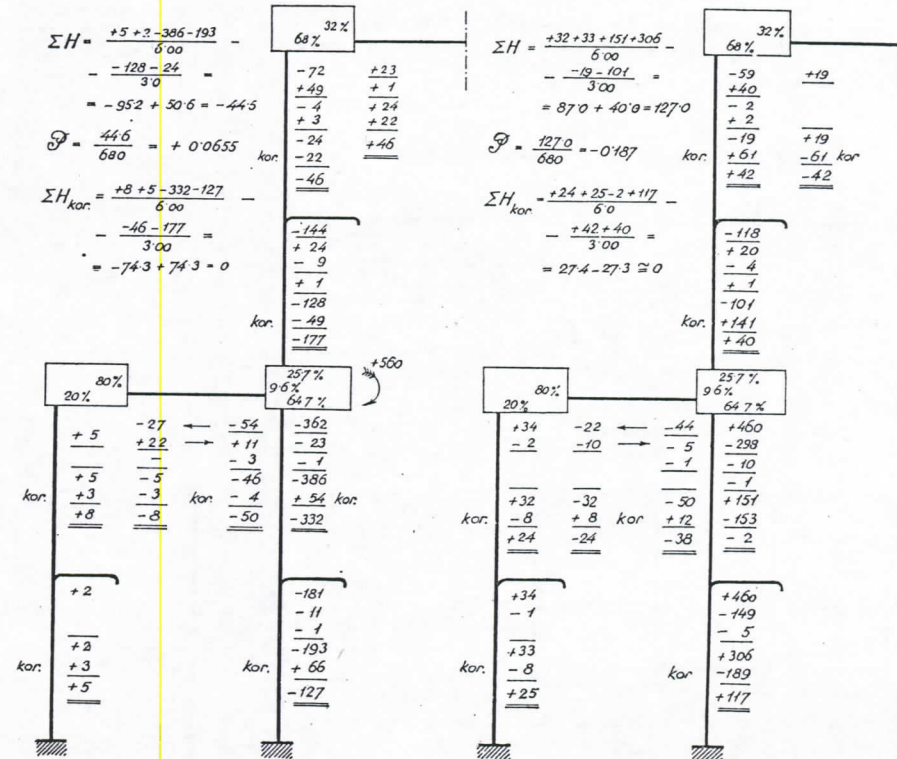


c) Simetrično opterećenje kрана

d) Skupljanje i mraz

jedinica 10 kpm

jedinica 100 kpm



U ovom računu nema postupka za antisimetrično opterećenje vetrom i antisimetrično opterećenje dizalice. Ovi postupci ne mogu se sprovesti po obrazloženoj metodi, jer se izvodi istovremeno pomeranje dvaju spratova, a oba pomeranja su u međusobnoj zavisnosti. Taj postupak biće obrađen u grupi primera za pomeranje višespratnih skeleta. Iz ovog razloga nije ni završen račun okvira sa tabelom najnepovoljnijih kombinacija i momentnim crtama, već će se to izvršiti u kompletnom računu među primerima pomeranja višespratnih skeleta. (Primer 23.)

Primer 20: Puno uklešteni stub opterećen konzolom

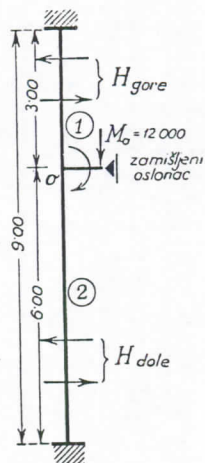
Stub je gore i dole potpuno uklešten te čini sastavni deo skeleta koji nameravamo izračunati po Krosovoj metodi. Na stub deluje konzola (na primer za kransku stazu) sa momentom ukleštenja od $M = 12.000 \text{ kpm}$. Tražimo osnovne momente punog ukleštenja kao osnovu za dalji račun po Krosovoj metodi.

U svrhu izračunavanja konačnog rezultata pretpostavljamo dva stanja naprezanja:

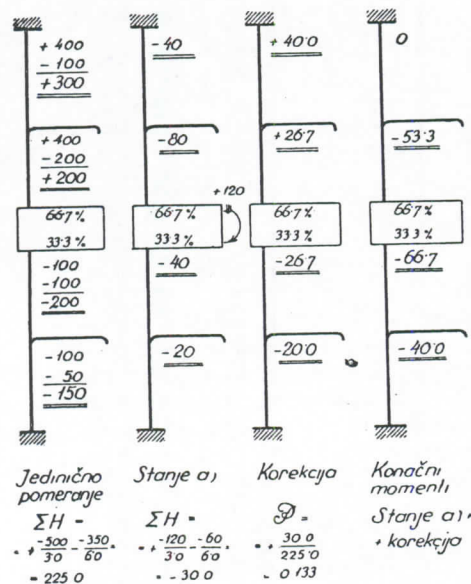
- a) stanje koje nastaje ako podupremo tačku 0 sa zamišljenim horizontalnim osloncem u horizontalnom smeru, i
- b) uticaj uklanjanja ovog zamišljenog oslonca, što znači pomeranje tačke 0 u korizontalnom pravcu, dok se ne ispuni statički uslov: $H_{dole} - H_{gore} = 0$

I. Račun krutosti i osnovnih momenata

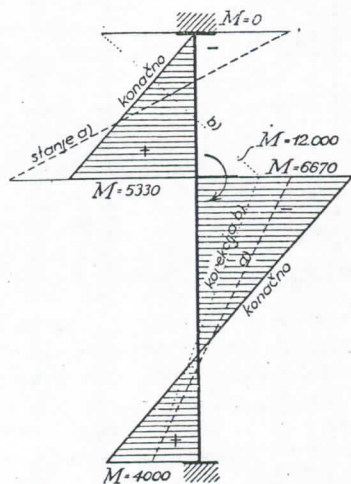
Štap	I	Dužina l_m	Krutost $t = I/l^3 c$	Pomična krutost $t_p = I/l^3 c$	Pomična momentna krutost $t_{pm} = I/l^3 c$
1	konst.	3'00	12 0	1 33	4 00
2	konst.	6'00	6 0	0 167	1 00



II. Krosovi postupci



III. Momentna crta



Primedba: U gornjem ukleštenom ležištu dobili smo momenat ukleštenosti jednak 0 sasvim slučajno. Kod opštih drugih primera dobija se pozitivni ili negativni momenat ukleštenosti.

Slučaj jediničnog pomeranja bi mogli izračunati takođe kao slučaj opterećenja potpuno ukleštenog nosača dužine h sa jediničnom silom $P = 225$ pri čemu bi dobili sledeći račun:

$$P = 225 \text{ kg} \quad \text{raspon } l = 9.0 \text{ m} \quad \xi = \frac{x}{l} = 0.667 \quad \xi' = \frac{x'}{l} = 0.333$$

$$P \cdot l = 2025 \text{ kpm} \quad M_{prost} = P \cdot l \cdot \xi \cdot \xi' = 450 \text{ kpm}$$

$$\text{za } \xi = 0.667 \quad \eta = 0.074 \quad M_{ukl. dole} = P \cdot l \cdot \eta = 150 \text{ kpm}$$

$$\text{za } \xi' = 0.333 \quad \eta' = 0.147 \quad M_{ukl. gore} = P \cdot l \cdot \eta' = 300 \text{ kpm}$$

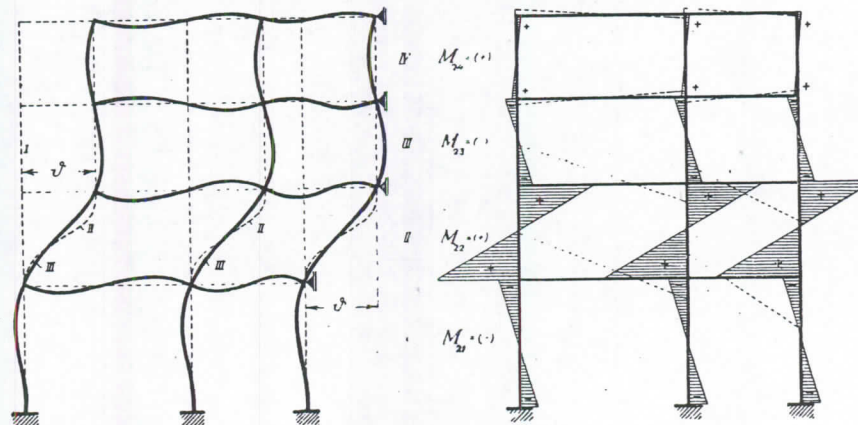
$$+ M = M_{prost} - M_{ukl. dole} \cdot \xi' - M_{ukl. gore} \cdot \xi = 450 - 150 \cdot 0.333 - 309 \cdot 0.667 = 200 \text{ kpm}$$

Račun višespratnog skeleta

Kod višespratnog skeleta uzima se načelno u obzir samo računanje sa momentima $H \cdot h$ odnosno računanje sa normalnim krutostima $t = \frac{I}{l^3}$, jer su visine svih stubova u pojedinim spratovima jednake. Postupak računanja jednospratnih skeleta sproveden u ranijem poglavlju može se takođe prilagoditi na višespratne skelete. U pojedinom spratu izvršićemo pomeranje jedinične veličine, dok ostali spratovi ostaju u prvobitnom međusobnom položaju. Zatim uravnotežićemo čvorove po Krosovom postupku. Na kraju utvrđujemo rezultirajuće momente ukleštenja pojedinih spratova:

$M_{rezult.} = \Sigma (M_g + M_d)$ ne pojavljuje se samo u spratu u kojem je izvedeno pomeranje nego i u susjednim spratovima u manjoj meri sa obratnim predznakom. U dosusednim spratovima takođe se pojavljuju momenti savijanja u još manjoj meri, ali sa istim predznakom. Na momente savijanja pojedinog sprata utiču dakle pomeranja svih spratova.

Sa M označujemo $= \Sigma (M_g + M_d)$ pojedinog sprata. (Slika 94.)



M_{mn} znači zbir momenata u n-tome spratu zbog jediničnog pomeranja izvedenog u m-tom spratu

\mathfrak{S}_m je kriterij pomeranja m-tog sprata

Za svaki sprat dobićemo kao uslov statičke ravnoteže po jednu jednačinu sa nepoznatima svih spratova:

$$M_{1\text{konačni}} = \mathfrak{S}_1 \cdot M_{11} + \mathfrak{S}_2 M_{21} + \mathfrak{S}_3 M_{31} + \mathfrak{S}_4 M_{41} + \dots$$

$$M_{2\text{konačni}} = \mathfrak{S}_1 \cdot M_{12} + \mathfrak{S}_2 M_{22} + \mathfrak{S}_3 M_{32} + \mathfrak{S}_4 M_{42} + \dots$$

$$M_{3\text{konačni}} = \mathfrak{S}_1 \cdot M_{13} + \mathfrak{S}_2 M_{23} + \mathfrak{S}_3 M_{33} + \mathfrak{S}_4 M_{43} + \dots$$

Za skelet sa n spratova dobićemo n jednačina sa n nepoznatih u obliku n kriterija pomeranja \mathfrak{S} . Konačne momente dobićemo ako saberemo sve rezultate, pomnožene svaki sa odgovarajućim kriterijem pomeranja. Jednačine možemo rešavati analitički, grafički, iterativno (Takabeya), ili bilo na koji drugi način. Za praktičnog konstruktora ova elementarna metoda nije podesna. Zato je Grinter uveo prostiju i bržu metodu koju nazivamo »skraćena Grinterova metoda«. Rešavanje n jednačina sa n nepoznatih po tom postupku otpada.

Skraćena Grinterova metoda

Ako izvršimo istovremeno pomeranja svih spratova sa nekim pretpostavljenim početnim momentom $M_{\text{početni}}$, i prepustimo čvorove okretanju po Krosovom postupku, biće $M_{\text{konačni}}$ manji od $M_{\text{početnog}}$, i to za toliko za koliko su se čvorovi okrenuli. Kod vitkih stubova i krutih nosača razlika neće biti velika; međutim pri krutim stubovima i vitkim nosačima biće razlika višestruka. Ako uspemo da dobro ocenimo veličinu okreta pojedinih čvorova i utvrdimo uticaj tih okreta na momente savijanja stubova, onda smo zadatak uspešno rešili.

$$M_{\text{konačni}} = M_{\text{početni}} - M_{\text{usled okreta čvorova}}$$

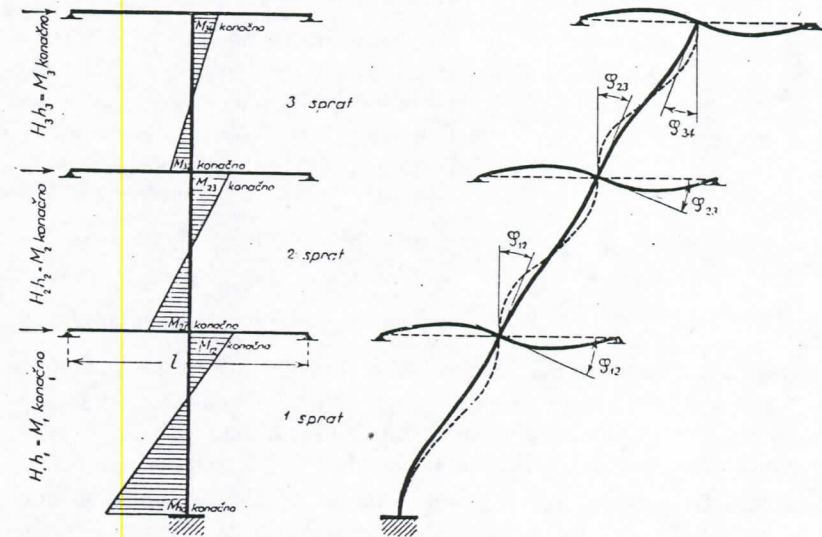
Ovde $M_{\text{konačni}}$ označava sumu momenata na oba kraja stubova koju želimo dobiti nakon dovršenog postupka;

$M_{\text{početni}}$ pak označava veličinu momenata na krajevima stubova kojima treba započeti Krosov postupak. To su oni momenti koji karakterišu veličinu momenata druge faze, što je već navedeno i prikazano na str. 82.

$$M_{\text{početni}} = M_{\text{konačni}} + M_{\text{dopunski}}$$

Treba naći M_{dopunski} kao sumu momenata usled rotacije čvorova. Ta suma ne može se tačno utvrditi, ali ćemo pokušati da je što bolje ocenimo. U tu svrhu zamišlja Grinter sve stubove kao spojene u jednom stubu čija je krutost $T_s = \sum t_s$, tj. jednaka sumi krutosti svih stubova.

Analogno Grinter zamenjuje sve nosače jednim idealnim nosačem čija krutost je $T_g = \sum t_g$, što znači zbir krutosti pojedinih nosača u spratu. Takav skelet izgleda približno ovako:



Moment koji deluje na svaki čvor jednak je sumi konačnih momenata koji će se pojaviti na donjem kraju gornjeg stuba i na gornjem kraju donjeg stuba:

$$M_{\text{dej23}} = M_{23\text{konačni}} + M_{32\text{konačni}}$$

$$\text{Okret iznosi: } \varphi_{23} = \frac{M_{\text{dej23}}}{12 E T_{g23}}$$

Dopunski momenti ΔM na stubovima usled okreta iznose:

$$\Delta M_{23} = \varphi_{23} \cdot 6 E T_{s2} = M_{\text{dej23}} \cdot \frac{1}{2} \frac{T_{s2}}{T_{g23}}$$

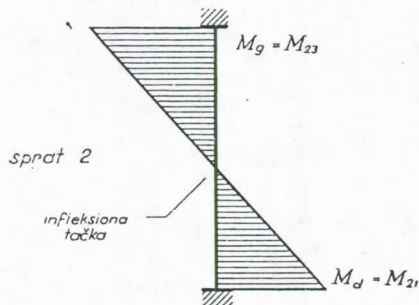
$$\Delta M_{32} = \varphi_{23} \cdot 6 E T_{s3} = M_{\text{dej23}} \cdot \frac{1}{2} \frac{T_{s3}}{T_{g23}}$$

$$\text{Izraz: } \frac{T_{s3}}{2 T_{g23}} \text{ označujemo sa } r_{23}, \quad \Delta M_{23} = M_{\text{dej23}} \cdot r_{23}$$

$$\Delta M_{32} = M_{\text{dej23}} \cdot r_{32}$$

Zadatak se ne može još rešiti, jer nemamo konačnih momenata, M_{23} konačno i M_{32} konačno i t. d., ali nam je poznat statički uslov iz kojeg ćemo izvoditi daljne formule; naime

$$M_{21\text{konačni}} + M_{23\text{konačni}} = M_{2\text{konačni}} = (H \cdot h) \text{ za II sprat}$$



Tražimo, dakle, samo još infleksionu tačku momentne crte. U Fornerod-ovom članku — Schweizerische Bauzeitung g. 1933, str. 227 — preporučuje Ginter da pretpostavimo infleksione tačke u srazmeru:

$$\frac{M_g}{M_d} = \frac{2 r_{\text{dole}} + r_{\text{gore}}}{2 r_{\text{gore}} + r_{\text{dole}}}$$

pri čemu se račun izvodi po tabelama.

Praksa je pokazala da ova pretpostavka ne odgovara za jake stubove i vitke nosače. Autor knjige preporučuje novu metodu koja se je pokazala upotrebljivom i u vrlo ekstremnim slučajevima, kod deset puta jačih stubova od nosača, za pojedino horizontalno opterećenje.

Analogno Grinterovoj tabeli sastavljena je tabela za izračunavanje početnih momenata: $M_{\text{početni}}$. Postupak se obrazlaže na osnovu sledeće tabelle:

Tabela za osnovne momente pomeranja

Elementi	I. aproksimacija				II. aproksimacija				III. aproksimacija			
	T_g	T_s	$r = \frac{T_s}{2T_g}$	$M_{\text{konačni}} = H \cdot h$	$M_{\text{dejtstvujući}} = \frac{1}{2}(M_g + M_d)$	$M_{\text{dopunski}} = M_{\text{dejt}} \cdot r$	$M_{\text{početni I}} = M_{\text{konačni}} + \sum M_{\text{dopunski}}$	Podela momenata $\frac{1}{2} M_{\text{početni}} - \frac{2}{3} M_{\text{dejt}} r_g - \frac{1}{3} M_{\text{dejt}} r_d + M_{\text{gore}} + M_{\text{dole}}$ $\frac{1}{2} M_{\text{početni}} - \frac{1}{3} M_{\text{dejt}} r_g - \frac{2}{3} M_{\text{dejt}} r_d + M_{\text{dole}}$		$M_{\text{dejtstvujući}} = M_{\text{dejt}} \cdot r$	$M_{\text{konačni}} = H \cdot h$	$M_{\text{početni II}} = \frac{1}{2}(M_{\text{početni I}} + M_{\text{početni II}})$
20					5				5.28			
6	4.0	0.333	10	20	5.00	21.67	10.83 - 3.33 - 2.22 = 5.28	5.28	6.95	22.23	21.95	
					6.67	10.83 - 1.67 - 4.45 = 4.72	20.83	6.95	50.15	50.07		
5	4.0	0.333	30	40	13.33	50.00	25.00 - 4.45 - 4.44 = 16.11	39.63	13.20	94.60	94.50	
					20.00	25.00 - 2.22 - 8.89 = 13.89	66.00	24.80	140.00	140.00		
4	6.0	0.375	50	65	24.40	94.40	47.20 - 13.33 - 8.13 = 25.74	66.00	24.80	140.00	140.00	
					24.40	140.00	70.00 - 16.26 - 11.90 = 41.84	93.90	46.95	204.35	206.90	
3	8.0	0.375	80	95	35.60	209.50	70.00 - 8.13 - 23.70 = 38.16	93.90	46.95	204.35	206.90	
					47.50	209.50	104.75 - 31.70 - 17.30 = 55.75	118.35	47.40	209.20	212.40	
2	10.0	0.400	110	130	52.00	215.00	104.75 - 15.80 - 34.70 = 54.25	118.35	59.20	209.20	212.40	
					65.00	215.00	107.50 - 43.40 - 0 = 64.10	85.90	0			
1	∞	0		0	0	107.50 - 21.70 - 0 = 85.90	85.90	0				

I. grupa: Stupci u tabeli su T_g , T_s , $r = \frac{T_s}{2T_g}$ i $M_{\text{konačni}} = H \cdot h$

II. grupa: Prva aproksimacija za $M_{\text{početni}}$

Za infleksione tačke pretpostavljamo da su u sredini stubova, tako da otpada polovina $M_{\text{konačni}}$ gore, polovina dole. M_{dejt} (dejtstvujući momenat) biće suma ovih polovina momenata gore i dole, dakle prosečna vrednost $M_{\text{konačni}}$. Dejtstvujuće momente pomnožimo sa koeficijentom r pri čemu dobijamo dopunske momente usled uticaja okretanja. Prvu aproksimaciju: $M_{\text{početni I}}$ dobićemo ako konačnim momentima pribrojimo dopunske momente.

III. grupa: Druga aproksimacija za $M_{\text{početni}}$

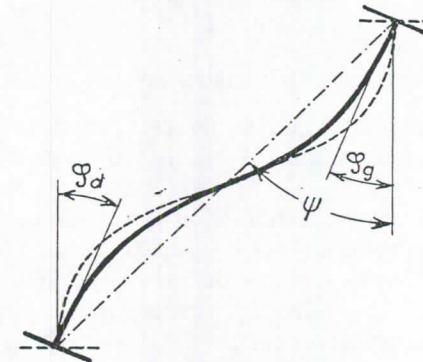
Infleksione tačke izračunavaju se iz prve aproksimacije:

Formula izvedena je po teoriji Takabeye:

$$M = 6 Et \psi - 4 Et \varphi_g - 2 Et \varphi_d$$

pošto je $M_{\text{početni}} = 12 Et \psi$; $M_{\text{dopunski gore}} = 6 Et \varphi_g$

$$M_{\text{dopunski dole}} = 6 Et \varphi_d$$



$$\text{biće } M_g = \frac{M_{\text{početni}}}{2} - \frac{2}{3} M_{\text{dopunski gore}} - \frac{1}{3} M_{\text{dopunski dole}}$$

$$\text{i } M_d = \frac{M_{\text{početni}}}{2} - \frac{1}{3} M_{\text{dopunski gore}} - \frac{2}{3} M_{\text{dopunski dole}}$$

Konačni momenat deli se na dva momenata koji nisu jednaki, ali njihov srazmer odgovara prvoj aproksimaciji. Ako saberemo momente koji dejtstvuju na isti čvor gore i dole, dobićemo dejtstvujuće momente druge aproksimacije. Iz ovih dejtstvujućih momenata dobićemo dopunske momente time što ćemo ih pomnožiti s koeficijentom r , kao i ranije.

Konačni momenti i drugi dopunski momenti daju zajedno drugu aproksimaciju: $M_{\text{početni II}}$.

Poslednja kolona tabele: Aritmetička sredina između I. i II. aproksimacije odgovara najbolje početnom momentu za drugu fazu postupka pomeranja.

(Možemo provesti i iterativni postupak, te više puta ponoviti račun. Iskustvo pokazuje da postupak limitira vrlo polagano u pravcu aritmetičke sredine I. i II. aproksimacije. Za praksu dovoljno je uzeti u račun aritmetičnu sredinu obaju iznosa kao III. aproksimaciju.)

U tabelarnom primeru II. aproksimacija za $M_{početni}$ skoro se ne razlikuje od I. aproksimacije. U sličnim primerima, u kojima su grede jače ili barem jednako jake kao i stubovi, dovoljno će biti računanje osnovnih momenata $M_{početni}$ samo po prvoj aproksimaciji. Međutim kod vrlo jakih stubova i vitkih nosača pojavili su se slučajevi u kojima je prva aproksimacija bila do 10 puta veća od konačnog momenta, a druga aproksimacija čak i negativna. Takođe u tom primeru pokazala se aritmetička sredina (u približnom iznosu četverostrukog konačnog momenta) kao odgovarajuća za konačni rezultat.

Ima primera u kojima pojedini stubovi imaju na jednom kraju zglobove ili nosači na jednom kraju okretno ležište. Za takav slučaj zamenimo obrazac $r = \frac{T_s}{2T_g}$ sa analognim obrascem

$$r = \frac{1}{2} \frac{\sum (2t_n + t_{pm}^0) \text{ za stubove}}{\sum (2t_n + t_{pm}^0) \text{ za nosače}}$$

Ovde gornji i donji izrazi predstavljaju sumu pomičnih momentnih krutosti umesto običnih krutosti.

Celokupan statički račun pomeranja pri višespratnom skeletu po skraćenoj metodi

Celokupan postupak statičkog računa pomeranja po skraćenoj metodi obuhvata u suštini iste faze kao postupak za jednospratni skelet:

I. Shema skeleta, krutosti i izjednačujući koeficijenti

Ove podatke obično imamo već izračunate pri računu vertikalnog opterećenja.

II. Izračunavanje horizontalnog opterećenja i osnovnih momenata

a) Spoljne horizontalne sile: vetar, potres, pritisak zemlje (terena), i t. d. imaju u svakom spratu drugu jačinu; za veličinu pomeranja pak merodavna je suma ovih sila; to je celokupna poprečna sila koja se prenosi preko stubova iz višeg sprata na niži. Za svaku vrstu opterećenja treba pripremiti naročiti račun osnovnih momenata.

b) Horizontalne sile koje izviru iz neuravnoteženih rezultata dobivenih kod računa vertikalnog opterećenja dobićemo za svaki sprat po obrascu: $H = -\frac{\sum (M_g + M_d)}{h}$, odnosno dobićemo direktnu sumu neizjednačenih momenata: $M_{konačni} = -\sum (M_g + M_d)$.

c) Sile usled uticaja temperature i skupljanja nastupaju samo između ona dva sprata koji se različito zagrevaju: između temelja i prizemlja javlja se uticaj skupljanja; jače razlike u temperaturi mogu se zapažati između pretposlednjeg i najvišeg sprata sa ravnim krovom. Početni postupak računanja isti je kao kod jednospratnog skeleta, rezultate pak treba naknadno korigovati da udovoljimo uslovu statičke ravnoteže

$$\sum (M_g + M_d) = 0,$$

i to istovremeno za sve spratove, što se može provesti po skraćenoj metodi.

Za svaki primer opterećenja naveden pod a), b) i za korekture rezultata dobivenih pod c), treba pripremiti jednu tabelu za izračunavanje početnih momenata $M_{početni}$. Ove početne momente podelimo na pojedine stubove, srazmerno krutosti stubova. Zatim ih upišemo u shemu Krosovog postupka kao dejstvujuće momente: polovinu momenta uz glavu stuba, polovinu uz nogu stuba.

III. Krosovi postupci

Krosovi postupci sprovode se na uobičajeni način. Red izjednačivanja i prenošenja momenata treba praktički udesiti tako da što brže limitiraju: najbolje će biti da se počne s najvećim dejstvujućim momentima (a to je odozdo) i da se izjednači samo jedan sprat čvorova. Odmah posle toga vrše se prenosi na gore. Kod izjednačenja čvorova susednog sprata uzimamo u obzir i ove prenesene momente. Time se postiže brže limitiranje postupka.

Nakon završenog Krosovog postupka kontrolišemo sumu momenata pojedinog sprata na stubovima. $\sum (M_g + M_d)_{rezultirajući}$ neće biti jednak $M_{konačni}$, ali neće biti ni velike razlike. Praksa pokazuje da se razlika kreće u granicama između $\mp 20\%$. Tačne rezultate postićemo tim što izvodimo ponovo ceo račun za dopunsko opterećenje, ukoliko iznosi razlika između $M_{konačnog}$ i $M_{rezultirajućeg}$.

Sprat	$M_{konačni}$	M_{rezult}	$M_{konačni}$ za dopunski račun
IV	+ 200	+ 280	— 80
III	+ 600	+ 610	— 10
II	+ 1000	+ 940	+ 60
I	+ 1500	+ 1320	+ 180

Ponovni dopunski račun ne zahteva mnogo vremena, pošto se obično ograničava samo na dve decimale. Kod komplikovanih primera sa nepravilnim oblikom skeleta kod kojih se srazmer $\frac{\sum M_{rezult}}{\sum M_{konačni}}$ jako razlikuje od jednog sprata do drugog (više od 15%) ovaj ponovni račun biće neophodno potreban.

U običnim primerima srazmer $\frac{M_{konačni}}{M_{rezult}}$ uopšte neće biti ni veći od 1.25 ni manji od 0.8, i to tako da se od sprata do sprata neće razlikovati za više od 15%. U takvom slučaju moći ćemo dosta tačno odrediti konačne momente $M_{konačni}$ na taj način da rezultate pojedinih spratova pomnožimo sa odgovarajućim kriterijem pomeranja. Američka literatura navodi da su greške koje nastaju zbog različitih kriterija pomeranja \mathcal{S} u pojedinim spratovima tako male da ih možemo bez daljeg zanemariti, ako razlika između kriterija pomeranja između susednih spratova ne premašuje 15%. U svakom primeru imamo mogućnost da pomnožimo prethodno celokupan račun Krosovog postupka jednim te istim kriterijem pomeranja ako su svi kriteriji veći od 1 ili su manji od 1 te time reduciramo potrebne korekcije na kombinovano \mp dopunsko horizontalno opterećenje.

Ako su razlike između kriterija pomeranja u susednim spratovima veće od 15%, verovatno ćemo naći grešku u tabeli po kojoj smo računali $M_{početni}$, ili pak u samom Krosovom postupku. Ima i slučajeva da su krutosti nosača i stubova neobično promenljive, nepravilne, i otuda potiču razlike. Izvesne smetnje mogu se zapažati obično između poslednjeg i pretposlednjeg sprata zbog neznatne horizontalne sile.

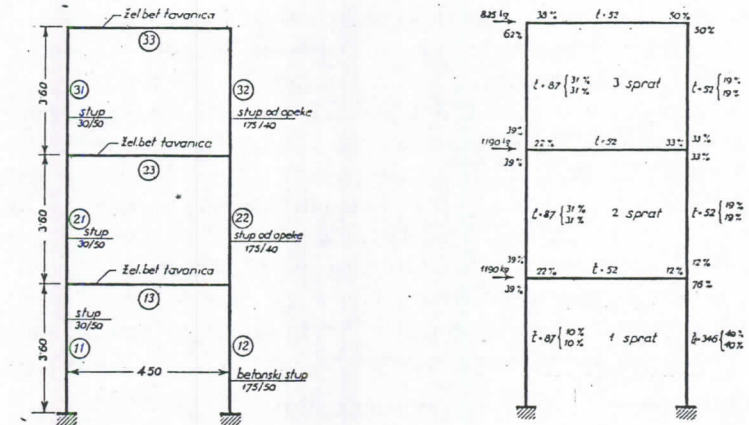
IV. Utvrđivanje merodavnih momenata za dimenzioniranje

Određivanje najnepovoljnijih kombinacija opterećenja za dimenzioniranje pojedinih preseka vrši se u načelu po tabelama, pored toga potreban je za utvrđivanje maksimalnih pozitivnih i negativnih momenata u kritičnim presecima i grafički postupak. Grafički postupak ima to premućstvo da očigledno pokazuje tok naprezanja u nosaču i olakšava celishodnu dispoziciju armature u konstrukciji od armiranog betona. Kot vrlo visokih i uskih skeleta u nižim spratovima preovlađuju sila vetra nad uticajem vertikalnog opterećenja. Pošto vetar deluje u oba smera pozitivno i negativno, to dobijamo u celom nosaču (stubu) pozitivnu i negativnu armaturu, a u blizini ležišta pojačanje armature nosača (stubova) i gore i dole.

PRAKTIČNI PRIMERI

Primer 21: Visoka građevina od opeke sa betonskim rebrastim tavanicama opterećena vetrom

I. Shema skeleta



II. Račun krutosti

Stubovi 11, 21, 31: $I = \frac{3 \cdot 5^3}{12} = 31.2 \text{ dm}^4$

$t = \frac{I}{l} = \frac{31.2}{36.0} = 0.87 \text{ dm}^3$

Stubovi od opeke 22, 32: $I = \frac{17.5 \cdot 4^3}{12} = 93.5$

$E_{ziđa}$ u cementnom malteru pretpostavlja se 40.000 kp/cm² tako da iznosi srazmer

$t_z = \frac{I}{l} \cdot \frac{E_z}{E_b} = \frac{93.5}{36.0} \cdot \frac{1}{5} = 0.52 \text{ dm}^3$

$\frac{E_{ziđa}}{E_{betona}} = \frac{40.000}{200.000} = \frac{1}{5}$

Stubovi od betona 12: $I = \frac{17.5 \cdot 5^3}{12} = 182.0$

E_{betona} (bez armature) pretpostavlja se 136.000 kp/cm² tako da iznosi srazmer

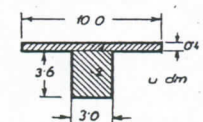
$t_{12} = \frac{I}{l} \cdot \frac{E_z}{E_b} = \frac{182.0}{36.0} \cdot 0.68 = 3.45 \text{ dm}^3$

$\frac{E_{bet. ziđa}}{E_{betona}} = \frac{136.000}{200.000} = 0.68$

Tavanica:

Deo	Površina dm ²	Težište dm	Stat moment dm ³	$l^2 + e^2$ dm ²	Istr mom dm ⁴
1	10.04 + 4.0	-0.2	-0.8	$0.16/12 + 1.45^2 = 2.12$	8.48
2	3.36 + 10.8	1.8	+19.4	$12.96/12 + 0.35^2 = 1.38$	14.90
Ukupno	14.8	1.25	+18.6	$I =$	23.40

Krutost $t = \frac{I}{l} = \frac{23.40}{45.00} = 0.520 \text{ dm}^3$



III. Račun osnovnih momenata.

Horizontalne sile vetra i konačni momenti (H.h) konačni

- 3. sprat: $75 \text{ kp/m}^2 \cdot 4 \cdot 40 \cdot 2 \cdot 50 = 825 \text{ kp}$ $\Sigma H = 825 \text{ kp}$ $H \cdot h = 825 \cdot 3 \cdot 60 = 2970 \text{ kpm}$
- 2. sprat: $75 \text{ kp/m}^2 \cdot 4 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 60 = 1190 \text{ kp}$ $\Sigma H = 2015 \text{ kp}$ $H \cdot h = 2015 \cdot 3 \cdot 60 = 7250 \text{ kpm}$
- 1. sprat: $75 \text{ kp/m}^2 \cdot 4 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 60 = 1190 \text{ kp}$ $\Sigma H = 3205 \text{ kp}$ $H \cdot h = 3205 \cdot 3 \cdot 60 = 11.550 \text{ kpm}$

IV. Krosov postupak

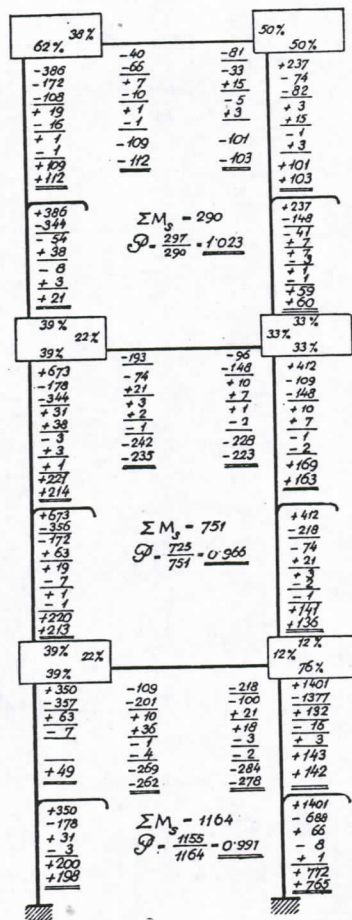
Račun M_{početnog}

Sprat	Elementi				I. aproksimacija			
	T _g	T _s	r ₂ = T _s / 2T _g	M konačni	M dej.	M dop.	M poč. I	
3	52				1485			
		139	f.34	2970		1990	11810	
2	52				5110		6850	
		139	f.34	7250		6850	26.700	
1	52				9400		12.600	
		433	4/16	11.550		39.100	50.650	
∞		0				0		

II. aproksimacija

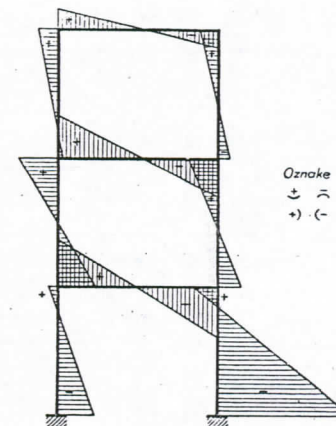
III. opr.

Podela momenata	M dej.	M dop.	M poč. II	M poč. III.
5900 - 1330 - 2280 = + 2290	2290	3070	13.080	12.450
5900 - 660 - 4570 = + 670	5250	7040	16.820	21.760
13.350 - 4570 - 4200 = 4580		7040		
13.350 - 2280 - 8400 = 2670	1890	2530	19.410	35.030
25.320 - 26.100 = - 780		7860		
25.320 - 13.000 = 12.330	12.330	0		



V. Momentna crta

Primer 21 zanimljiv je po tome što ima relativno vitke nosače i krute stubove. Da postignemo M_{konačni} u iznosu od 11.550 kpm u prizemlju, treba uzeti M_{početni} po prvoj aproksimaciji: 50.650 kpm, po drugoj aproksimaciji: 19.410 kpm. Antimetrička sredina obiju aproksimacija u iznosu od 35.030 kpm daje nakon dovršenog Krosovog postupka rezultat koji se razlikuje od željenog samo za 1% dakle u granicama tačnosti našeg računa.



Primer 22: Dvospratni skelet primera 8 — računat bez postranih oslonaca u spratovima (na pomeranje)

I. Shema skeleta i okretni krutosti izračunate su u primeru 8. Pomične krutosti usled istih visina jednake su normalnim okretnim krutostima sem štapa 3, čija normalna krutost iznosi $\frac{I}{l} = 2'00$, zglobna okretna krutost $\frac{1}{2} \times 2'00 = 1'50$, pomična momentna krutost $\frac{1}{2} \times 2'00 = 1'00$.

Razdelni koeficijenti pomeranja iznose:

2. sprat: $i_6 = 2.5 \cdot 57 = 40\%$ $i_7 = 2.5 \cdot 57 = 40\%$ $i_8 = 2.2 \cdot 86 = 20\%$ $\Sigma i = 2.14'00 = 100\%$

1. sprat: $i_1 = 2.3 \cdot 90 = 47 \cdot 0\%$ $i_2 = 2.3 \cdot 90 = 47 \cdot 0\%$ $i_3^* = 1.1 \cdot 00 = 6 \cdot 0\%$ $\Sigma i = 2.8 \cdot 30^* = 100\%$

* Uračunat je uticaj zgloba.

II. Račun osnovnih momenata

Elementu

Neravnoteža vertikalnog opterećenja

Sprat	T _g	T _s	r = T _s / 2T _g
3	15 17		0.462
2	24 15	14'00	0.290
1		9'30	0.1925

Slučaj a)

2 sprat: $H \cdot h = -680 + 163 + 222 = -295.10 \text{ kpm}$

1 sprat: $H \cdot h = -233 + 60 + 37 = -136.10 \text{ kpm}$

Slučaj b) isti kao slučaj a, u srazmeru 0.857

Slučaj c)

2 sprat: $H \cdot h = -12 + 14 - 1 = +1.10 \text{ kpm}$

1 sprat: $H \cdot h = +60 - 63 + 12 = +9.10 \text{ kpm}$

Slučaj opterećenja c) nećemo računati na pomeranje jer su razlike neznatne a okvir je vezan za susedne okvire i prema tome praktično nepomičan.

a) slučaj a) vertikalnog opterećenja:

Sprat	h	I. aproksimacija				II. aproksimacija				III. apr.	
		M _{kon.}	M _{dej.}	M _{dop.}	M _{poč.I}	Podela momenata		M _{dej.}	M _{dop.}	M _{poč.II}	M _{poč.III}
2	0.462	+295	147	68	425	212 - 46 - 20 = 146		146	67	422	423
	0.290		215	62		213 - 22 - 42 = 149		210	61		
1	0.1925	+136	0	0	177	88 - 27 = 61		75	0	177	177
	0					89 - 14 = 75					

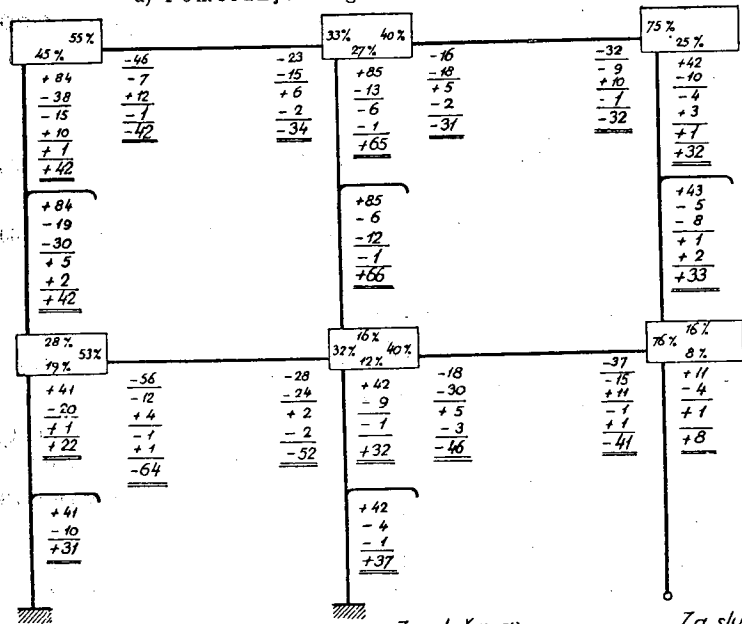
b) opterećenje vetrom:

2 sprat: H = 700 kg ΣH.h = 700 · 3 · 50 = 2500 kpm
 1 sprat: H = 1000 kg ΣH.h = 1700 · 5 · 00 = 8500 kpm

Sprat	h	I. aproksimacija				II. aproksimacija				III. apr.	
		M _{kon.}	M _{dej.}	M _{dop.}	M _{poč.I}	Podela momenata		M _{dej.}	M _{dop.}	M _{poč.II}	M _{poč.III}
2	0.462	+250	125	58	468	234 - 29 - 53 = 142		142	65	464	466
	0.290		550	100		234 - 19 - 107 = 108		515	149		
1	0.1925	+850	-	-	956	478 - 71 = 407		-	99	949	952
	-					478 - 35 = 443					

III. Krosovi postupci

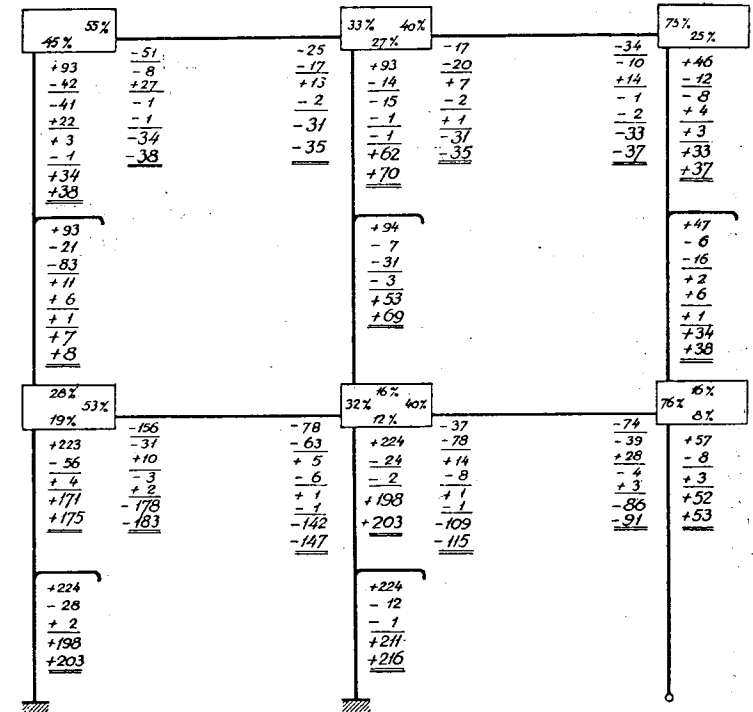
a) Pomeranje zbog vertikalnog opterećenja:



Za slučaj a)
 2. sprat: ΣM = 84 + 131 + 65 = 280 $\rho = \frac{280}{360} = 0.778$
 1. sprat: ΣM = 53 + 69 + 8 = 130 $\rho = \frac{130}{150} = 0.867$

Za slučaj b)
 2. sprat: ΣM = 1054 - 0.900 $\rho = 0.857$
 1. sprat: ΣM = 0.992 - 0.850 $\rho = 0.857$

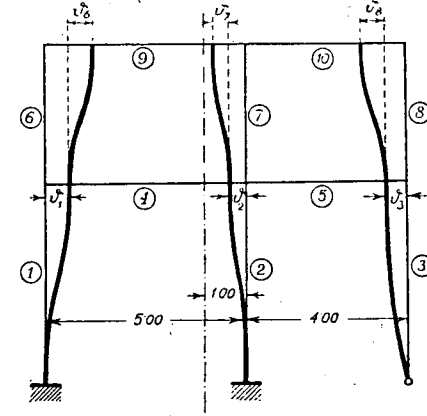
b) Pomeranje zbog vetra:



2 sprat: ΣM = 41 + 115 + 67 = 223 $\rho = \frac{250}{223} = 1.122$
 1 sprat: ΣM = 369 + 409 + 52 = 830 $\rho = \frac{850}{830} = 1.024$

c) Uticaj temperaturnih razlika:

Pretpostavlja se da se pojavljuju sledeće temperaturne razlike:



izmedju temelja i 1. sprata ± 10° c
 izmedju 1. sprata i krova ± 10° c
 Fiksna tačka pretpostavlja se izmedju stuba 1 i 2, odnosno 6 i 7 u udaljenosti 1.00 m od stuba 2, odnosno 7.

$$\delta = 10 \cdot 10^{-5} \cdot e$$

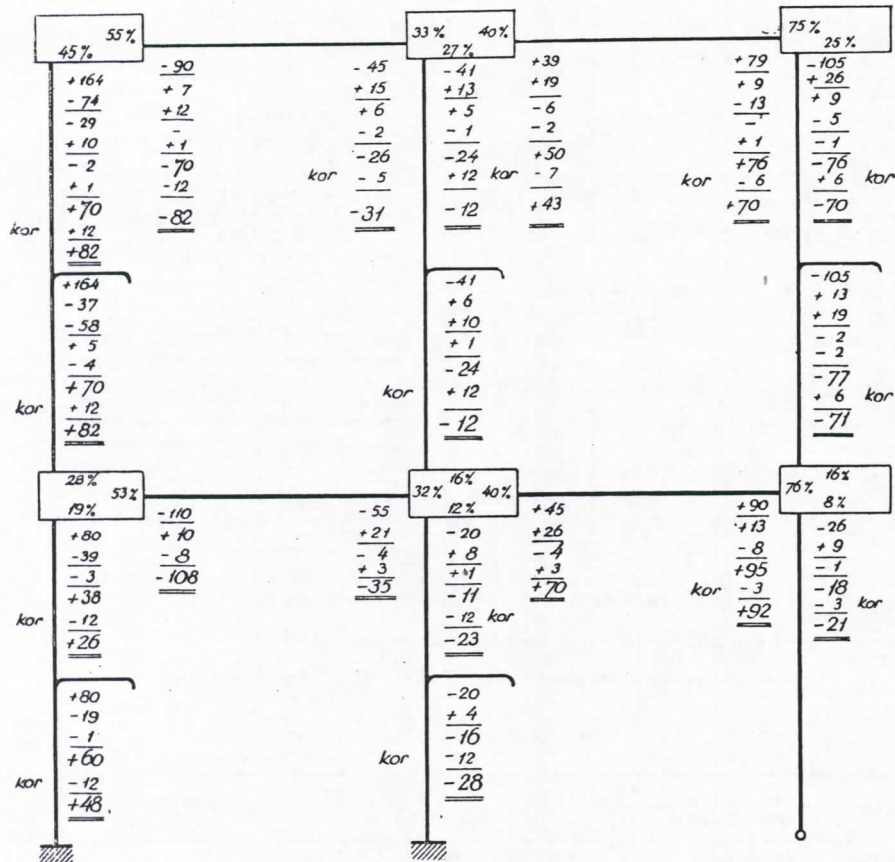
e udaljenost od fiksne tačke.

$$M_g = M_d = \frac{6EI}{h^2} \delta = 6 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{I}{l^2} e = \frac{12 \cdot 10}{12} \cdot \frac{bh^3}{l^2} e$$

Štapa	Dim	bh^3 $cm^4 \cdot 10^4$	I^2 $cm^2 \cdot 10^4$	ϵ cm	$M = 10 \frac{bh^3}{I^2} \epsilon$ kpm
6	40/50	500	12.25	+400	+1640
7	40/50	500	12.25	-100	-410
8	40/40	256	12.25	-500	-1050
1	40/50	500	25.0	+400	+800
2	40/50	500	25.0	-100	-200
3	40/40	256	25.0 ^{o)}	-500	-256 ^{o)}

o Usled zgloba treba uzeti M pola manji.

Krosov postupak
jedinica 10 kpm:



2 sprat: $\Sigma M = +140 - 48 - 153 = -61$ $M_6 = M_7 = +12$ $M_8 = 6$
 1 sprat: $\Sigma M = +98 - 27 - 18 = +53$ $M_1 = M_2 = -12$ do 13 $M_3 = -3$

*) Korekcije su izvedene po približnoj metodi

d) Uticaj skupljanja betona:

Uticaj skupljanja betona sličan je uticaju temperaturnih razlika. Pojavljuje se jedino u prvom spratu ali u jačoj meri — kao za 20° C temperaturne razlike.

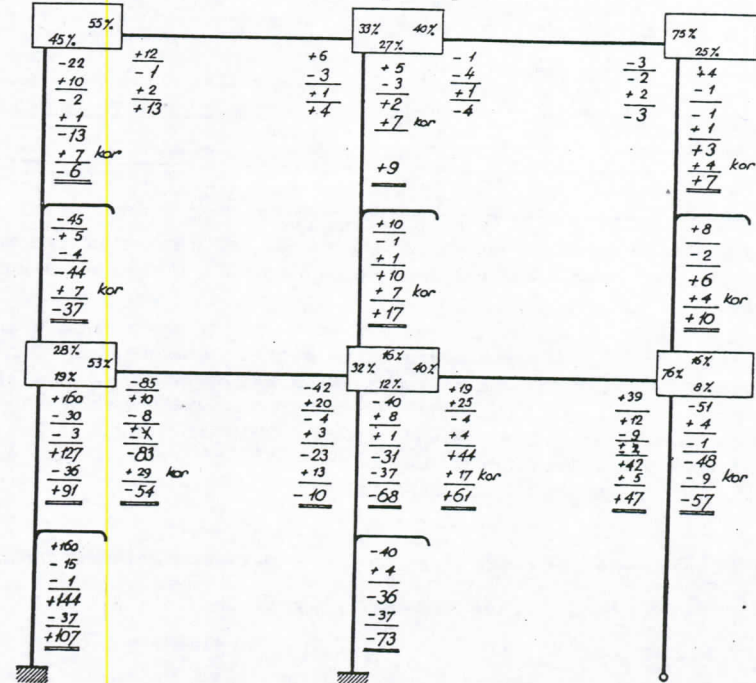
Štab 6, 7, 8: $M = 0$

Štab 1: $M = 2.800 = 1600$ kpm

Štab 2: $M = 2.(-200) = -400$ kpm

Štab 3: $M_3 = 2.(-250) = -510$ kpm

Krosov postupak



2 sprat: $\Sigma M = -57 + 12 + 9 = -36$
 1 sprat: $\Sigma M = -271 - 67 - 48 = +156$

Korekcije su izvedene po približnoj metodi*

Razdelni koeficijenti pomeranja za približnu metodu:

2. sprat		1. sprat	
$l_6 = 5.57$	20 %	$l_1 = 3.90$	23.5 %
$l_6' = 5.57$	20 %	$l_1' = 3.90$	23.5 %
$l_7 = 5.57$	20 %	$l_2 = 3.90$	23.5 %
$l_7' = 5.57$	20 %	$l_2' = 3.90$	23.5 %
$l_8 = 2.86$	10 %	$l_3 = 1.00$	6.0 %
$l_8' = 2.86$	10 %		
$\Sigma l = 28.00$	100 %	16.60	100 %

Tabela najnepovoljnijih kombinacija jedinica 10 kpm

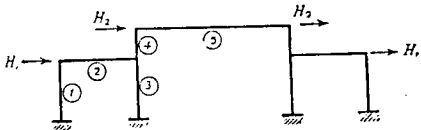
Opterećenje	Stub 1		Stub 2		Stub 3	Nosac 4		Nosac 5		Stub 6		Stub 7		Stub 8		Nosac 9		Nosac 10	
	dole	gore	dole	gore		gore	levo	desno	levo	desno	dole	gore	dole	gore	dole	gore	dole		gore
Rasp I a	-78	-155	+20	+40	+37	+495	-984	-140	-340	-340	+81	+82	+110	+112	-651	+569			
Korekcija	+31	+22	+37	+32	+8	-66	-54	-48	-43	+44	+44	+70	+59	+35	+34	-36	-33		
Rasp I a	-47	-133	+57	+73	+45	+435	-1030	+817	-191	-296	-296	+151	+151	+148	+146	-687	+536		
Rasp II	-47	-93	-4	-8	+44	+357	-774	+739	-153	-265	-331	+44	+109	+109	+81	-500	+490		
Rasp III	-87	-173	+38	+76	+20	+491	-910	+743	-101	-319	-253	+94	+31	+81	+111	-516	+484		
Korekcija	+26	+19	+31	+27	+7	-37	-46	-41	-37	+38	+38	+68	+59	+30	+29	-31	-28		
Rasp II	-21	-74	+27	+19	+151	+300	-820	+698	-190	-227	-293	+104	+104	+139	+110	-631	+462		
Rasp III	-61	-154	+69	+103	+27	+434	-956	+702	-138	-281	-215	+154	+90	+111	+140	-547	+456		
Vetar	+203	+175	+216	+203	+53	+183	+147	+115	+91	+128	+136	+169	+170	+138	+137	+135	+135		
Temperat.	+48	+26	+28	+23	+21	+108	+135	+170	+192	+182	+112	+112	+121	+121	+120	+131	+143		
Skupljanje	+107	+91	-73	-68	-57	54	-10	+61	+47	-37	-6	+17	+9	+10	+7	+2	-4		
+M _{max}	+337	+218	+313	+329	+125	+726	+1063	+92	+1371	+1551	+232	+259	+264	+260	+479	+614			
-M _{max}	-312	-355	-290	-275	-104	-45	-1230	-374	-423	-422	+23	+8	+21	+31	-753	+374			
Momenti ukleštenja merodavni						Nosac 4		Nosac 5		Nosac 9		Nosac 10							
						levo	desno	levo	desno	levo	desno	levo	desno						
						+89	-1148	+653	-199	+173	-697	+534	-33						
za +M _{max} u polju																			
Merodavno opterećenje						Rasp. II + vetar + temp. + skupj.		Rasp. I + vetar + temp.		Rasp. II + vetar + temp.		Rasp. III + vetar + temp.							

Za potpunost statičnog računa potreban je još grafički prikaz momentne crte za pojedine rasporede opterećenja kod svih stubova i svih nosača u najnepovoljnijim kombinacijama.

Ovaj primer detaljno je obraden zato da bi se videla upotreba Krosovog postupka za razne primere opterećenja. U praksi se redovno ne izvode svi ovde navedeni računi raznih opterećenja. Redovno računa se samo raspored vertikalnog opterećenja I. (slučaj a) dok se rasporede opterećenja II. i III. uzimaju u obzir samo kod većih korisnih opterećenja (kod krovova redovno se ne uzimaju u račun). Sile vetra računaju se samo kod uskih i visokih zgrada. Temperaturni uticaji i skupljanje računaju se kod zgrada koje su izložene jakim vremenskim uticajima.

Primer 23: Kombinovani okvir primera 19 — opterećen antimetrično

Shema okvira. Krutosti su već izračunate u primeru 19.



Račun opterećenja vetrom

H_2 na ceo okvir = 800 kp na 1/2 okvira 400 kp
 M_2 konačno = 400 · 3'00 = 1200 kpm
 H_1 na ceo okvir = 2000 kp na 1/2 okvira 1000 kp
 M_1 konačno = (1000 + 400) · 6'00 = 8400 kpm

Osnovni momenti

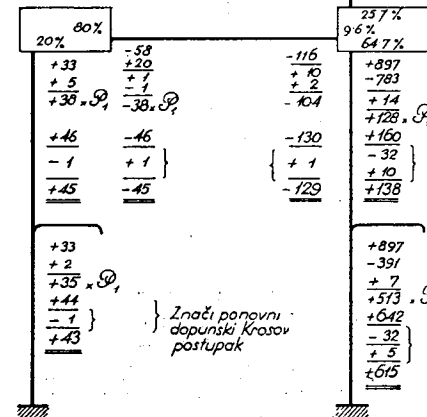
Spat	T _g	T _s	r ₂ · I _x / 2T _g	M _{kon.}	I aproksimacija			II aproksimacija			M _{poč.II}	
					M _{dej.}	M _{dop.}	M _{poč.I}	Podela momenata				
2	1350	2860	1'06	120	60	64	824	412 - 43 - 213 = +156	156	165	426	625
					480	640	824	412 - 21 - 427 = -36	106	141		
1	1073	7467	3'49	840	1670	2510		1255 - 1113 = +142	370	1210	1860	
								1255 - 557 = +698		0		

Krosov postupak

$t_1 = 2.67 - 2 \cdot 1.78 \%$
 $t_3 = 7200 - 2 \cdot 482 \%$

Konačni rezultat

$\Sigma M_2 = +129 - 9 = +120$
 $\Sigma M_1 = +88 + 753 = +841$



Znači ponovni dopunski Krosov postupak

$\Sigma M_2 = +94 - 24 = +70$
 umesto +120 kpm
 $\Sigma M_1 = +73 + 641 = +714$
 umesto +840 kpm

Rezultat ostaje ispravan, ako sve rezultate pomnožimo sa jednim te istim kriterijem pomeranja $\mathcal{E}_1 = 1.25$

$\Delta M_2 = (+117 - 30) - 120 = -33$ kpm
 $\Delta M_1 = (+90 + 802) - 840 = +52$ kpm

Za razliku ΔM_2 i ΔM_1 izvodimo ponovni postupak pomeranja:

Spat	r ₂ · I _x / 2T _g	M _{kon.}	M _{dej.}	M _{dop.}	M _{poč.I}
2	1'06	+33	+16	+17	+37
	1'33		-10	-13	
1	3'49	-52		-35	-87
	0				

Podela momenata	M _{dej.}	M _{dop.}	M _{poč.II}	M _{poč.II}
18 - 11 + 4 = 11	+11	+12	+18	+42
18 - 6 + 9 = 22	+2	+3		
-43 + 23 = -20		+7	-45	-66
-44 + 12 = -32				

Račun antimetričnog opterećenja kranom

Reakcija kрана za antimetrično opterećenje ± 8000 kp.

Ručica: 0'40 m. Momenat ukleštenosti: $M = 8000 \cdot 0'40 = 3200$ kpm.

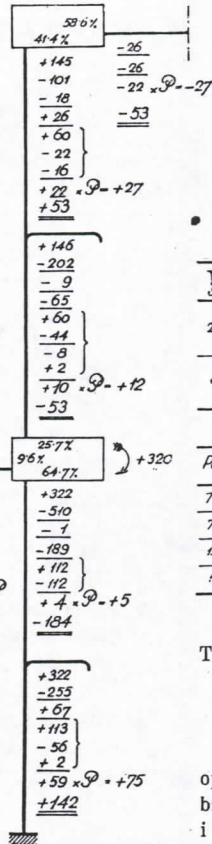
Osnovni momenti

Spat	T _g	T _s	r ₂ · I _x / 2T _g	M _{kon.}	I aproksimacija			II aproksimacija			M _{poč.II}	
					M _{dej.}	M _{dop.}	M _{poč.I}	Podela momenata				
2	1350	2860	1'06	0	0		+426	213 - 142 = +71	+71	+75	+157	+291
						-426		213 - 284 = -71	-258	+82		
1	1073	7467	3'49	0	+320	+1120	+1120	560 - 747 = -187	+216	+216	+668	
								560 - 373 = +187				

Krosov postupak

Končni rezultat

$\Sigma M_2 = +53 - 53 = 0$
 $\Sigma M_1 = +23 + 19 - 184 + 142 = 0$



$\Sigma M_2 = -39$ umesto 0
 $\Sigma M_1 = +31 - 122 = -91$ umesto 0

Ispravan rezultat možemo dobiti dopunskim pomeranjem u cilju uravnoteženja horizontalnih sila sa

$\Delta M_2 = +39, \Delta M_1 = +91$

Red	$r = \frac{I_2}{2I_1}$	M_{kon}	M_{dej}	M_{dop}	$M_{počI}$
2	1.06	+39	19		146
	1.33		65	+20	
1	3.49	+91		+87	318
	0			+227	

Podela momenata	M_{dej}	M_{dop}	$M_{počI}$	$M_{počII}$
73-13-29 = 31	31	33	93	120
73-7-58 = 8	16	21	147	233
159-151 = 8		56		
159-76 = 83				

Tabelarni pregled rezultata
 jedinica: 10 kpm

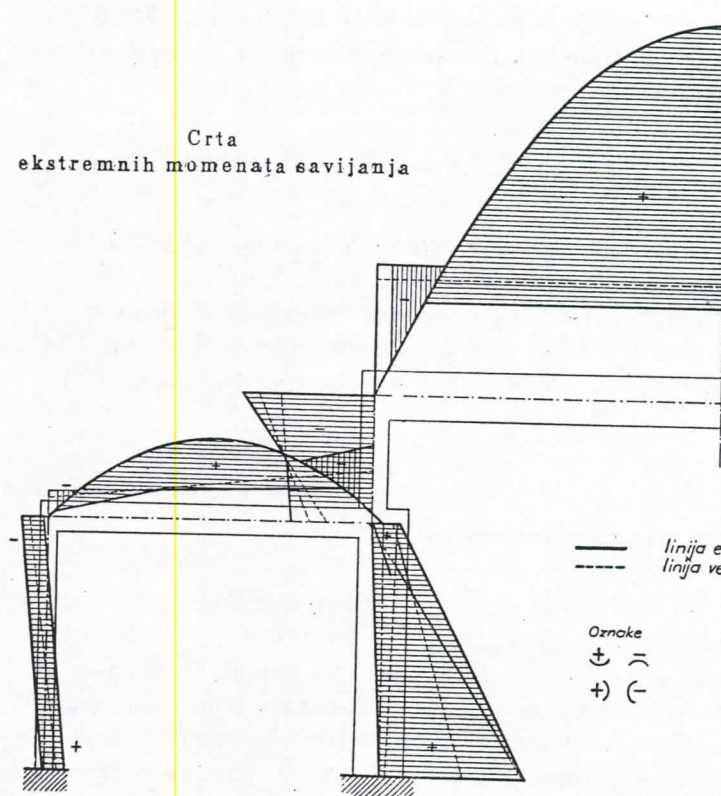
Primedba: Ekscentrični slučaj opterećenja kranom dobija se sabiranjem rezultata za simetrično i antisimetrično opterećenje kрана (drugi i treći red). Čisti antisimetrični slučaj (treći red) ne može se pojaviti bez simetričnog slučaja.

Kontrola sekundarnog izjednačenja
 $\Sigma M_2 = +22 + 10 = +32$ umesto +39 $P = 1.22$
 $\Sigma M_1 = +9 + 63 = +72$ umesto +91 $P = 1.27$

Opterećenja	Stub 1		Nosac 2		Stub 3		Stub 4	
	dole	gore	desno	dole	gore	dole	gore	
Vertikalno opterećenje	-300	-440	-1200	-1950	+220	+1540	-2770	
Kran - simetrično	+5	+8	-50	-127	-332	-177	-46	
Kran - antisimetrično	(+) 19	(+) 23	(-) 83	(-) 142	(-) 184	(-) 53	(-) 53	
Velar	(-) 43	(-) 45	(-) 129	(-) 615	(-) 138	(-) 9	(-) 129	
Mraz i skupljanje	+250	+240	-380	+1170	-20	+400	+420	
Vrućina	-125	-120	+190	-585	+10	-200	-210	
+ M _{max}	+17	(-124)	(-848)	(-265)	+368	+1949	(-2214)	
- M _{max}	-482	-620	-1842	+3419	-454	(+1101)	-3208	
Za + M _{max} u polju 2 i 5	vert. - kran					vert. + mraz	-2350	

Znači ponovni dopunski Krosov postupak

Crta ekstremnih momenata savijanja



— linija ekstremnih momenata
 - - - linija vertikalnog opterećenja

Oznake
 ⊕ ⊖
 ⊕ ⊖

Približna metoda za izračunavanje horizontalnih opterećenja

Vrlo grubu aproksimaciju za izračunavanje horizontalnih pomeranja, odnosno horizontalnih opterećenja, dobićemo ako pretpostavimo da su nosači skeleta beskonačno kruti. Na pojedinom stubu nastupaće gore i dole momenti koje izvodi pomeranje ako su oba kraja stuba puno ukleštena. Za konstantan momenat istrajnosti biće taj momenat gore i dole jednak; infleksiona tačka nalazi se u sredini stuba

$$M_g = M_d = H_1 \cdot \frac{h}{2} = \frac{6EI}{h^2} \delta$$

Pomeranje δ ne treba da se računa (ako nije već poznato iz elastičnih uslova temperaturne deformacije) već te momente dobijamo neposredno iz spoljne horizontalne poprečne sile H .

$$(M_{gore} + M_{dole}) = H \cdot h \frac{t_n}{\sum t}$$

Ovde navedenu približnu metodu upotrebićemo u sledećim primerima:

1. Za korekciju rezultata dobivenih iz računa vertikalnog ili horizontalnog opterećenja, ako ti rezultati ne udovoljavaju statičkim uslovima $\Sigma(M_g + M_d) = 0$, odnosno $H \cdot h = 0$, već se pojavljuje razlika momenata

$$\Delta M = M_{konačni} - M_{rezultirajući},$$

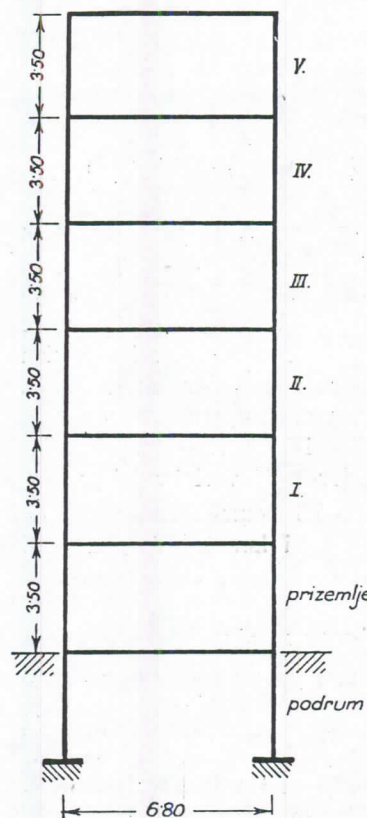
pri čemu je ova razlika srazmerno malena.

Prvobitni račun korigujemo superponiranjem momenata usled horizontalnog pomeranja po gore navedenoj formuli, da bismo u konačnom rezultatu udovoljili statičkim uslovima. Upotreba ove približne metode potpuno je opravdana samo ako su greške koje smo učinili upotrebom približnog računa manje od granice tačnosti. Upotreba približne metode za korekciju rezultata prikazana je u primeru 22 kod računa dvospratnog skeleta o uticaju temperature i skupljanja.

2. Za prethodno dimenzioniranje skeleta. Kod visokih i uskih skeleta igra pritisak vetra znatnu ulogu; u krajevima gde postoji opasnost potresa, računamo i sa silama potresa.

Kod prethodnog dimenzioniranja stubova takvog skeleta treba uzeti u obzir, pored osovinskih sila i momenata ukleštenja još i momente horizontalnih sila. Ako dimenzije nosača skeleta nisu ravnomerne, već variraju u krutosti, verovatno neće biti infleksione tačke za horizontalno opterećenje u sredini stubova nego ekscentrično, tj. više ili niže. S obzirom na tu razliku dodaćemo kod približnog računanja 10 do 30 % ovim izračunanim momentima, da kod konačnog računa ne bi nastale teškoće zbog preusko određenih dimenzija.

Primer 24: Prethodno dimenzioniranje stuba u prizemlju sedmospratnog skeleta



Okviri udaljeni po 4'50 m

Osovinske sile stuba:

$$\begin{aligned} \text{Tavanice: } & 6 \text{ spratova} \cdot 16 \text{ m}^2 \cdot 1200 \text{ kp/m}^2 = 115.000 \text{ kp} \\ \text{Zidovi: } & 5 \text{ " } \cdot 16 \text{ m}^2 \cdot 700 \text{ kp/m}^2 = 56.000 \text{ kp} \\ & 171.000 \text{ kp} \end{aligned}$$

Momenti savijanja stuba:

Uticaj nosača:

$$M = M_{pune \ ukleštenosti} \cdot \frac{t}{\sum t}$$

$$M = 6000 \cdot \frac{6 \cdot 80^2}{12} \cdot \frac{34}{34 + 34 + 51} = 6.600 \text{ kpm}$$

Uticaj vetra:

$$M = \frac{1}{2} H \cdot \frac{h}{2} \cdot \text{koeficijent povećanja}$$

$$H = 5 \cdot 16 \text{ m}^2 \cdot 75 \text{ kp/m}^2 = 6000 \text{ kp}$$

$$M = 6000 \cdot \frac{3 \cdot 50}{4} \cdot (1 + 20\%) = \frac{6.300 \text{ kpm}}{12.900 \text{ kpm}}$$

Za dimenzioniranje merodavni momenat savijanja nalazi se uz priključak stuba na nosač:

$$M_{krit} = 12.900 \frac{3 \cdot 50 - 0 \cdot 80}{3 \cdot 50} = 9950 \text{ kpm}$$

$$\text{Dim 48/72} \quad F = 3360 \text{ cm}^2 \quad W = 39200 \text{ cm}^3$$

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{171.000}{3360} + \frac{9950 \cdot 100}{39.200} = 50 \cdot 9 + 25 \cdot 4 = 76 \cdot 3 \text{ kp/cm}^2$$

Dimenzije 48/72 verovatno će odgovarati sa celishodnim armiranjem.

3) Za definitivni statički račun poslužiće opisana približna metoda u ovim slučajevima:

a) Ako je opterećenje skeleta vetrom u srazmeru s ostalim opterećenjem vrlo maleno, pri čemu celokupni momenti usled vetra ne prelaze 10 % momenata savijanja usled glavnog opterećenja.

b) Ako skelet sastoji iz velikog broja tanjih stubova dok su nosači srazmerno jaki to jest imaju veću krutost od stubova. Praksa pokazuje da će za slučaj b) biti obično ispunjen i uslov naveden pod a), infleksione tačke biće vrlo blizu sredine stubova usled veće krutosti nosača.

Približnu metodu ne smemo upotrebiti kod krutih stubova i vitkih nosača (ako su krutosti stubova veće od krutosti nosača). U tom primeru rezultati približne metode bitno se razlikuju od rezultata tačne metode.

NAROČITI PRIMERI PRIMENE KROSOVE METODE

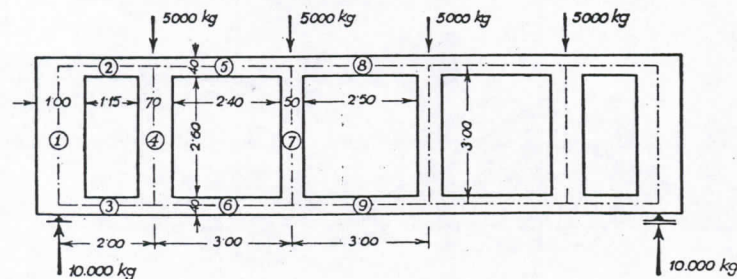
Sa navedenim primerima vertikalnog i horizontalnog opterećenja nisu ni izdaleka iscrpljene sve mogućnosti u kojima nam Krosov postupak pomaže da brže postignemo cilj. Sam Krosov postupak sadrži neizmerno mnogo varijacija izvođenja koje sve, jedne brže a druge sporije, vode do istog rezultata. Od spretnosti statičara zavisi da dobro položi osnovicu i produži postupak, tako da se izbegnu nepotrebna prebacivanja momenata. U literaturi se preporučuje da se Krosov postupak otpočne na mestima najvećih okreta (najvećih momenata savijanja) i nastavi prema manjim momentima. Obratni put ne preporučuje se, jer traži veći broj iteracija.

Niže je prikazano nekoliko primera kako se pomoću Krosovog postupka mogu vrlo brzo rešavati izvesni specijalni konstruktivni zadaci.

Primer 25: Račun Vierendeel-ovog nosača

Sa Vierendeel-ovim nosačem postupamo kao i sa višespratnim skeletom u izvnutom položaju. Stubovi Vierendeel-ovog nosača odgovaraju nosačima višespratnog skeleta, a horizontalni pojasi stubovima skeleta. Poprečna sila T Vierendeel-ovog nosača je horizontalna poprečna sila višespratnog skeleta. Konstrukciju računamo s obzirom na pomeranje pojedinih spratova. Ovo pomeranje treba da sa deformacionim momentima uravnoteži poprečne sile T Vierendeel-ovog nosača.

I. Shema nosača i opterećenje



II. Krutosti štapova i izjednačujući koeficijenti

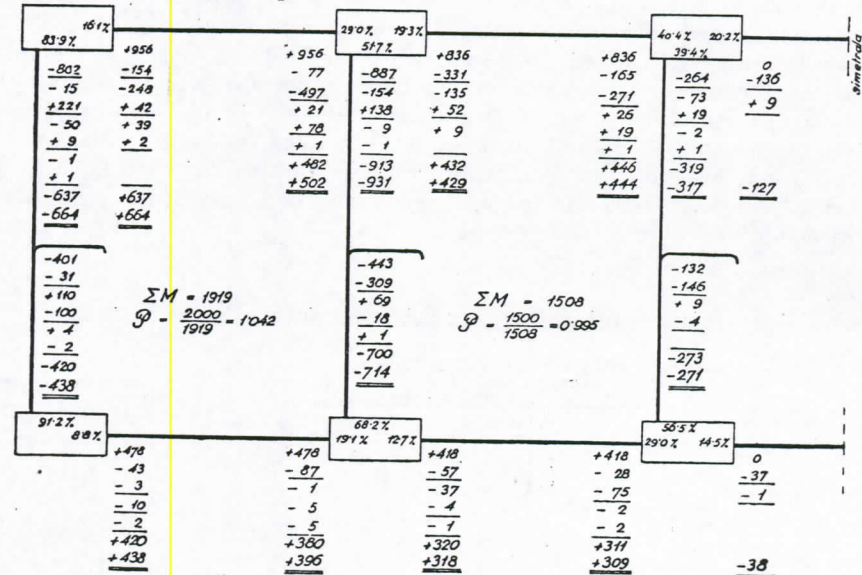
Štap	Dim.	$I-k.h^3$	l	$t \frac{3}{10} \frac{l}{l}$		Zbir krutosti	Izjednačujući koeficijent
1	30/100	1000	300	100.0	Okretni koeficijenti	$\Sigma t_1 + t_3 = 109.6$	$t_1 - 91.2\% \quad t_3 - 8.8\%$
2	60/40	128	200	19.2		$\Sigma t_1 + t_2 = 19.2$	$t_1 - 83.9\% \quad t_2 - 16.1\%$
3	30/40	64	200	9.6		$\Sigma t_2 + t_4 + t_5 = 66.3$	$t_2 - 29.0\% \quad t_4 - 51.7\% \quad t_5 - 19.3\%$
4	30/70	343	300	34.3		$\Sigma t_3 + t_4 + t_6 = 50.3$	$t_3 - 19.1\% \quad t_4 - 68.2\% \quad t_6 - 12.7\%$
5	60/40	128	300	12.8		$\Sigma t_5 + t_7 + t_8 = 31.7$	$t_5 - 40.4\% \quad t_7 - 39.4\% \quad t_8 - 20.2\%$
6	30/40	64	300	6.4	Apsolutni koeficijenti	$\Sigma t_6 + t_7 + t_9 = 22.1$	$t_6 - 29.0\% \quad t_7 - 56.5\% \quad t_9 - 14.5\%$
7	30/50	125	300	12.5		$\Sigma t_2 + t_3 = 28.8$	$t_2 - 66.7\% \quad t_3 - 33.3\%$
8	60/40	128	300	12.8		$\Sigma t_5 + t_6 = 19.2$	$t_5 - 66.7\% \quad t_6 - 33.3\%$
9	30/40	64	300	6.4		$\Sigma t_8 + t_9 = 19.2$	$t_8 - 66.7\% \quad t_9 - 33.3\%$

* Uticaj simetrije.

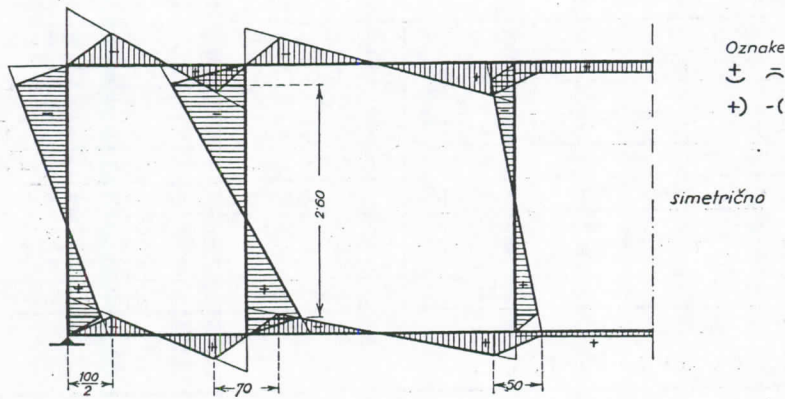
III. Osnovni momenti

Sprat	T_{nos}	T_{stup}	$r = \frac{T_{stup}}{2T_{nos}}$	$H.h$	M_{1daj}	M_{1dop}	$M_{poc I}$	Podela momenata	$M_{daj II}$	$M_{dop II}$	$M_{poc II}$	$M_{poc II}$
8-9	12.5	9.6	0.384	(-150)	-75	-28.7	0	$0 + 19.2 - 9.6 = +9.6$	-64.0	-24.8	0	
5-6	12.5	19.2	0.768	150	+75	+57.6	256.6	$128.3 - 38.4 - 16.3 = 73.6$	+64.0	+48.2	244.8	250.7
2-3	34.3	28.8	0.420	200	+175	+73.5	287.9	$128.3 - 19.2 - 32.7 = 76.4$	166.6	+70.0	285.8	286.8
	100.0		0.144			+14.4		$144.0 - 24.5 - 9.6 = 109.9$	109.8	+15.8		

IV. Krosov postupak



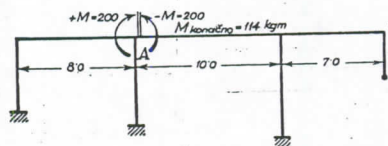
V. Momentna crta



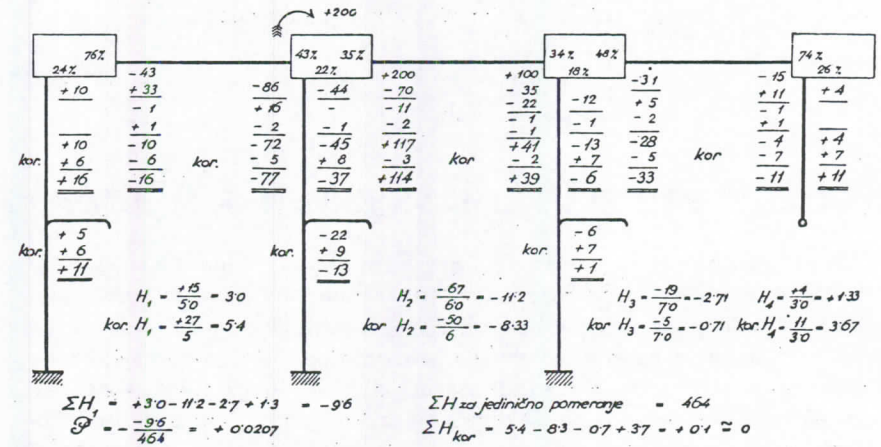
Primer 26: Račun uticajne linije za konstrukciju mosta iz primera 16

Tražimo uticajnu liniju za momenat ukleštenja u preseku A (vidi skicu). Po Maxwellu uticajna linija za moment savijanja u preseku A jednaka je deformacionoj crti koju dobijamo, ako nosač u tački A sa veštačkim momentom savijanja prelomimo do ugla lomljenja $tg \varphi = 1$. Crtu savijanja konstruisaćemo iz momentne crte koju ćemo dobiti pomoću Krosovog postupka: U tački A namestimo dvosmerni momenat savijanja proizvoljne veličine, na primer $M = 200$, i izvodimo za dato opterećenje Krosovo izjednačenje i prenošenje momenata preko cele konstrukcije. Iz dobivene momentne crte izračunamo ugao okreta konstrukcije u tački A. Ovaj ugao okreta, koji je u stvari i prelom nosača, nije jednak 1, jer smo kao osnovu uzeli bilo koji proizvoljni momenat. Momentnu crtu koja je merodavna za konstruisanje uticajne linije (po Euleru) dobićemo, ako dobivenu momentnu crtu pomnožimo sa faktorom one veličine kojom dobijamo prelom veličine $tg \varphi = 1$.

Schema skeleta i krutosti štapova izračunati su u primeru 16



Krosovo postupak



Račun zaokreta u tački A

Po poznatim principima teorije elastičnosti:

$$\varphi = \frac{Ml}{6EI} \cdot (2M_{\text{čvora}} - M_{\text{sus. čvora}}), \quad t_{\text{štapa}} = \frac{l}{I}$$

$$\varphi_{\text{desno}} = \frac{1}{6E} \cdot \frac{1}{4 \cdot 32 \cdot 10^3} (2 \cdot 114 - 39) = \frac{1}{6E \cdot 10^3} \cdot 43.8$$

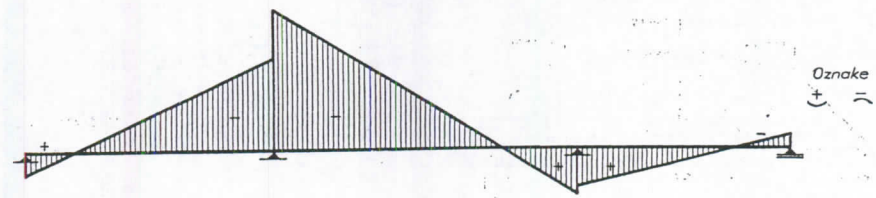
$$\varphi_{\text{levo}} = \frac{1}{6E} \cdot \frac{1}{5 \cdot 40 \cdot 10^3} (-2.77 + 16) = -\frac{1}{6E \cdot 10^3} \cdot 25.6$$

$$\varphi_{\text{ukupno}} = \varphi_{\text{desno}} - \varphi_{\text{levo}} = \frac{1}{6E \cdot 10^3} \cdot 69.4$$

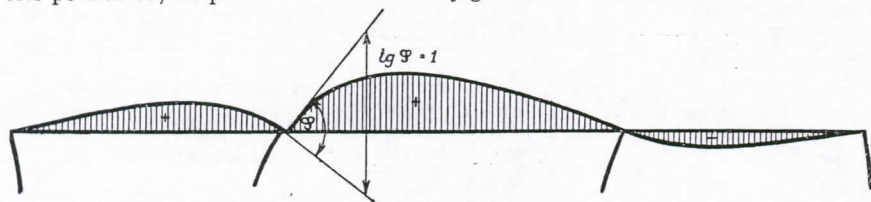
Za konstrukciju uticajne linije pomnožimo momentnu crtu sa faktorom koji je potreban da bude ugao $\varphi_{\text{ukupno}} = 1$.

a to je $E \cdot 86.5$

Momentna crta



Uticajna linija se konstruiše kao deformaciona crta ka gornjoj momentnoj crti po Euleru, ili po već izračunatim dijagramima (tabelama).



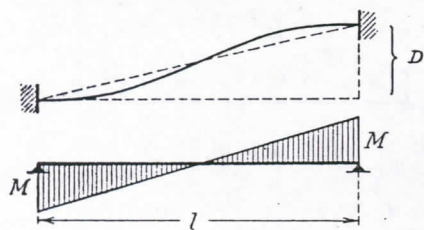
Uticajna linija za M_A

Primer 27: Račun deformacionih momenata za rešetkasti nosač

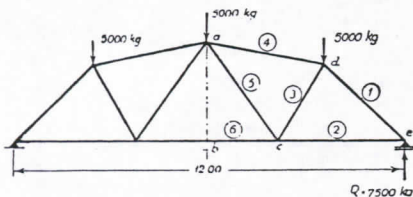
Svaki rešetkasti nosač deformiše se kod datog opterećenja usled stišnjenja odnosno raztegnuća pojedinih štapova. Posledica ovih deformacija su sekundarni momenti savijanja. Ovi sekundarni momenti savijanja mogu se brzo izračunati pomoću Krosovog postupka:

Najpre utvrdimo stanje naprezanja normalnog rešetkastog nosača (uz pretpostavku zglobnih sastava u čvorovima) pomoću poligona sila po Kremoni. Svakoj osovinskoj sili u štapovima izračunamo pripadajuće longitudinalno rastezanje δ . Po metodi Williot-a utvrdimo grafički apsolutnu veličinu pomeranja za svaki čvor, pri čemu dobijamo istovremeno, pored uzdužnih pomeranja i poprečno pomeranje na svakom štapu. Razliku između poprečnih pomeranja u oba kraja štapa označujemo sa D . Pri pretpostavci paralelnog pomeranja čvorova svako pojedino prečno pomeranje D izvodi uz čvor ove sledeće momente ukleštenosti:

$$M = \frac{6EI}{l^2} \cdot D = \frac{6t}{l} E \cdot D$$

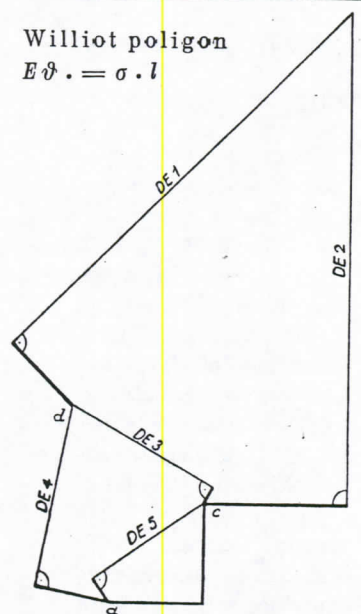


Ovako dobiveni momenti ukleštenja na čvorovima nisu uravnoteženi, jer smo pretpostavili da su se čvorovi pomerili u paralelnom položaju. Ako po osnovnom Krosovom principu »odvijamo« zamišljene vijke u čvorovima i pustimo da se čvorovi okreću, čvorovi će sami da se uravnoteže. Matematički izvršićemo ovo uravnoteženje po Krosovom postupku. Rezultat ovog postupka su definitivni deformacioni momenti savijanja.



Shema rešetkastog nosača

Williot poligon
 $E\delta = \sigma \cdot l$



Kremona poligon

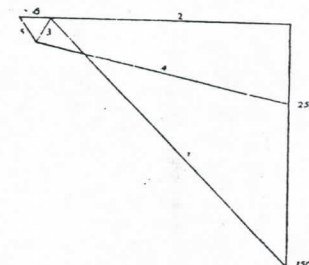


Tabela dimenzija deformacija i naprezanja

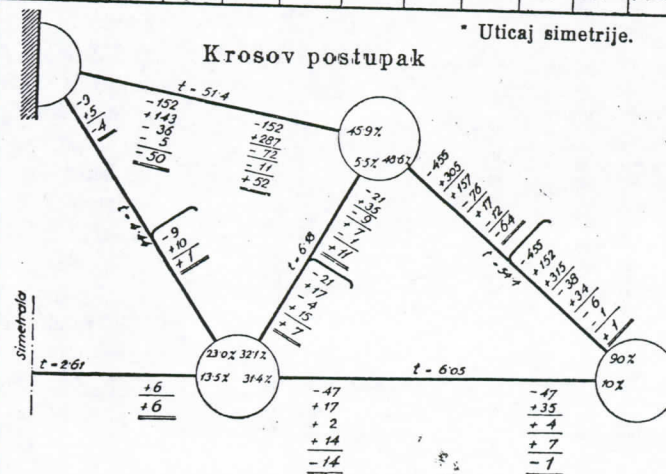
$$E\delta = \sigma \cdot l$$

Štap	P	Dim.	F_{cm^2}	σ kp/cm ²	l cm	$E\delta$	DE	$I \cdot F \cdot \frac{h^2}{4}$ cm ⁴	I/l	$\frac{6I}{l^2} \times 10^4$	$M = \frac{6EI}{l^2} \cdot D$	M kontri	W cm ³	σ okopras kp/cm ²
1	-10 500	16/24	384	-27.3	340	-9280	47.500	18 500	54.40	9600	45.500	6400	1536	± 4.16
2	+7.300	16/12	192	+38.0	360	+44400	49.000	2300	6.05	956	-4.680	1400	384	± 3.65
3	+900	12/12	144	+6.2	280	+1730	15.900	1730	6.18	1328	2.110	1100	288	± 3.82
4	-7950	16/24	384	-20.7	360	-7450	17.700	18500	51.40	8580	15.200	5200	1536	± 3.39
5	-900	12/12	144	-6.2	390	-2420	13.000	1730	4.44	682	890	400	288	± 1.39
6	+8300	16/12	192	+43.3	220	+9450 (9500)	2300	(261) ²	-	-	600	384	± 1.56	

Radi simetrije
puna ukleštenost

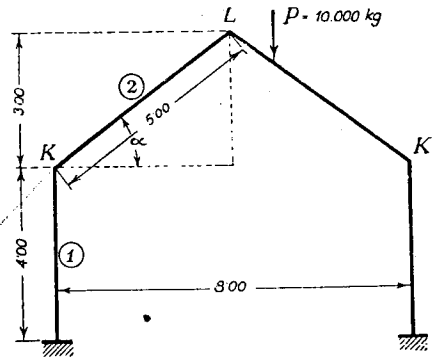
Krosov postupak

* Uticaj simetrije.

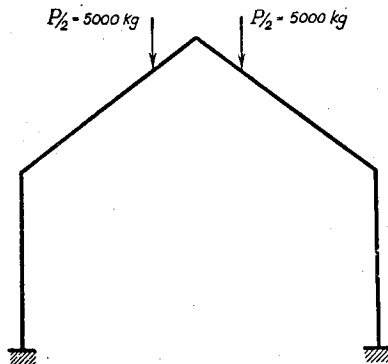


Primer 28: Okvir poligonalnog oblika

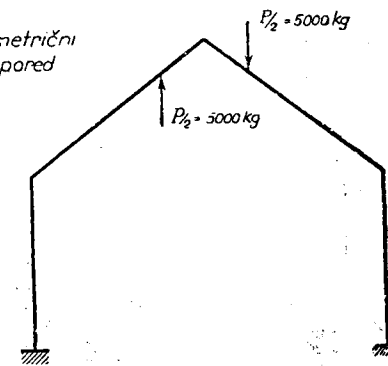
Shema okvira i opterećenje



Simetrični raspored



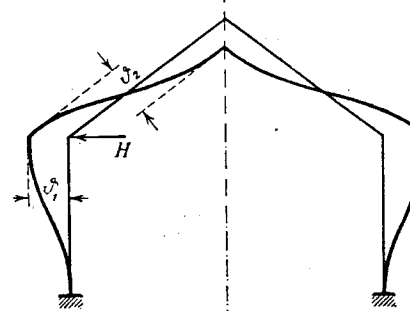
Antimetrični raspored



Simetrični okvir prema ovome crtežu takođe može da se rešava po Krosovoj metodi. Svaki raspored opterećenja delimo na čelno u simetrični i antisimetrični slučaj opterećenja. Simetrično opterećenje zadržava čvor L u prvobitnom neokrenutom položaju. Zato je ovaj čvor kao puno uklešten. Antisimetrično opterećenje pretpostavlja u čvoru L zamišljeni zglob jer po antisimetričnim uslovima mora momenat u tački L biti jednak 0. Okvir se rešava tako kao da su pojedini sastavni štapovi okvira zasebno opterećeni i puno uklešteni u čvorovima. Čvorovi (KK') tretiraju se kao nepomični u horizontalnom smeru (stadij I). Ovaj se stadij I koriguje sa uticajem pomeranja tačkaka K, K' — koje nastaje ako uklonimo zamišljene oslonce u tim tačkama (stadij II). Uklanjanje oslonaca računacemo prethodno kao jedinično pomeranje.

A. Simetrično opterećenje

Jedinično simetrično pomeranje



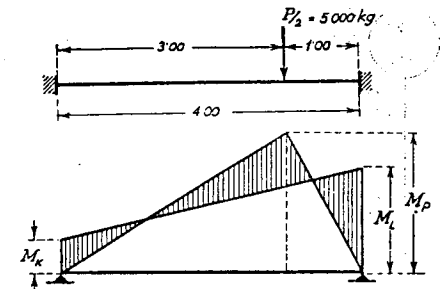
Krosov postupak za jedinično simetrično pomeranje

Račun krutosti

Štap	I	l_m	$t-k^{1/2}$	$t_{antisimetr}$	$k^{3/2}$
1	konst.	5'00	4'00	3'00	0'80
2	konst.	4'00	5'00	5'00	1'25

$\delta_1 \dots$ proizvoljna konstanta = 300
 $\delta_2 \dots = \delta_1 \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \delta_1 \cdot \frac{5}{3} = 500$
 $M_{1g} = M_{1d} = 1'25 \cdot 300 = 375$
 $M_{2g} = M_{2d} = 0'80 \cdot 500 = 400$
 Momentima odgovara horizontalna sila
 $H = \frac{-389 - 382}{4'00} + \frac{389 + 395}{3'00} = -454$

Stadij I: Simetrično opterećenje sa nepomernim čvorovima KK'



$M_p = 5000 \cdot \frac{1'0 \cdot 3'0}{4} = 3750 \text{ kpm}$
 $M_L = 0'1406 \cdot 20.000 = 2812 \text{ kpm}$
 $M_K = 0'0460 \cdot 20.000 = 938 \text{ kpm}$

Po stadiju I deluje u čvorovima K odnosno K' sledeća horizontalna reakcija:

Htročlensko

$= \frac{M \text{ u sredini}}{h} = 5000 \cdot \frac{3'00}{3'00} = + 5000 \text{ kp}$

Hukleštenosti štapar:

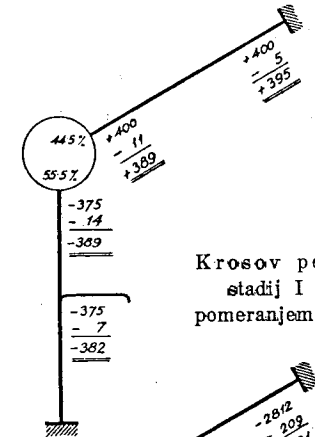
$= \frac{-3021 + 520}{3'00} = + 833 \text{ kp}$

Hukleštenosti štapar:

$= \frac{-520 - 260}{4'00} = - 195 \text{ kp}$

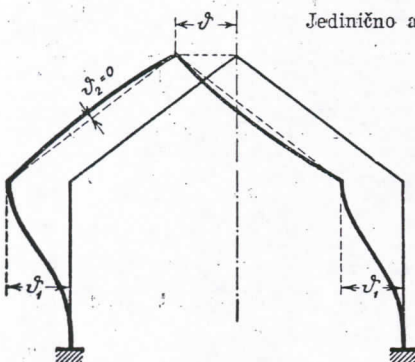
$\delta = \frac{5638}{454} \cdot 12'41$

H ukupno = + 5638 kp



Krosov postupak za stadij I korigovan pomeranjem na stadij II.

Uklanjanjem zamišljenog oslonca u tački K treba korigirati rezultate stadija I sa uticajem simetričnog jediničnog pomeranja u srazmeru kriterija \mathfrak{F} . Konačni rezultati potpuno se slažu sa onima, dobivenim po klasičnoj metodi elastičnog težišta.



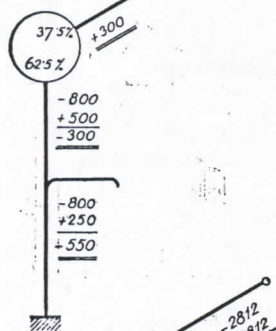
Jedinično antimetrično pomeranje

B. Antimetrično opterećenje

Za jedinično pomeranje izaberemo proizvoljnu veličinu δ , odnosno proizvoljni momenat $M = 800$. Pripadajuća horizontalna reakcija na stubu iznosi:

$$H = (-300 - 550) \frac{1}{4.0} = -212.50$$

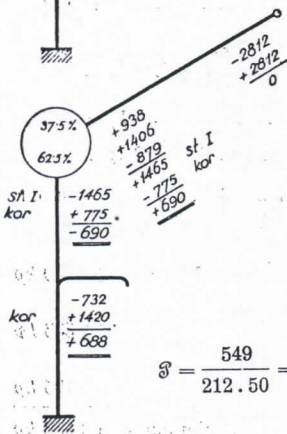
Krosov postupak za jedinično antimetrično pomeranje.



Horizontalna reakcija u štapu 2 je jednaka 0. Analogno gornjem izvođenju biće:

$$M_K = +938 \text{ kpm} \quad M_L = -2812 \text{ kpm}$$

Krosov postupak za stadij I korigovan pomeranjem na stadij II.



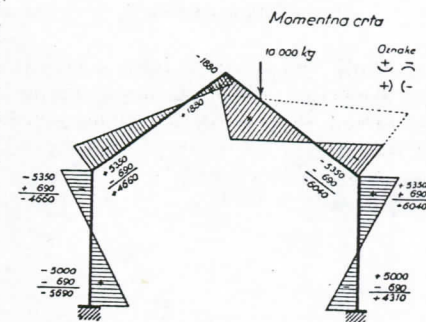
Horizontalna komponenta u štapu 2 se usled antimetrije u zglobu poništava. Izjednačenje horizontalnih komponentata u štapu 1 iznosi:

$$H = \frac{1465 - 732}{4} = -549$$

Za koncentrisanu silu, postavljenu samo na jednoj strani okvira sumiramo rezultate dobivene pod A i B.

$$\mathfrak{F} = \frac{549}{212.50} = -2.58$$

Okvir poligonalnog oblika može se rešavati, kao što se vidi iz navedenog primera po Krosovoj metodi. Ipak izgleda da se dolazi do rezultata brže i prostije običnom metodom elastičnog težišta. Po Krosovoj metodi treba tražiti 4 nepoznate: simetrično i antimetrično nepomično rešenje te simetrično i antimetrično pomeranje. Običnim putem elastičnog težišta tražimo samo 3 nepoznate: M_0 , H i V . U sličnim primerima Krosova metoda ne pruža nikakvih preimućstava pred ostalim metodama.

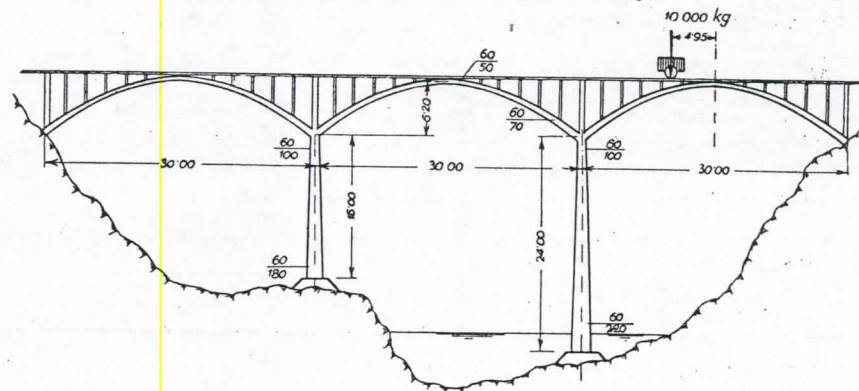


Primer 29: Kontinualni luk na vitkim stubovima

Donald E. Larson (Transaction of american Society of civil engineers No 1793) rešava statički naročito komplikovane konstrukcije kontinualnog luka na elastičnim vitkim stubovima pomoću Krosove metode.

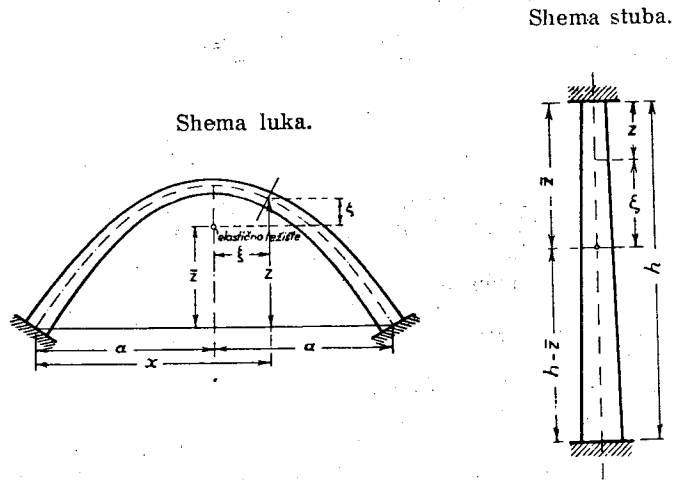
Kao osnova služi puno ukleštenji luk na nepomičnim ležištima. Horizontalne reakcije i momenti ukleštenja koji svi nisu u ravnoteži, treba da se uravnoteže pomoću pomeranja i okretanja čvorova. Značajno je to da se u tom primeru upotrebljava Krosov postupak za izjednačivanje i za prenošenje horizontalnih sila. Naročite teškoće su u činjenici što izjednačenje horizontalnih sila sa paralelnim pomeranjem čvorova ima za posledicu momente ukleštenja, i obratno: izjednačivanje momenata u čvorovima ima za posledicu okretanja dopunske horizontalne sile. Suština postupka je u tome što treba da primenimo dve računске sheme, jednu za izjednačivanje horizontalnih sila, drugu za izjednačivanje momenata. Ove dve sheme utiču jedna na drugu po izvesnom ključu. Celokupan računski postupak razabire se iz primera:

Schema konstrukcije i opterećenja



I. Račun osnovnih konstanta, krutosti štapova

Potrebno je da se izračunaju sve osnovne konstante pojedinih elemenata konstrukcije: pojedinog luka kao puno ukleštenog, i pojedinih stubova isto tako puno ukleštenih. Sve navedene konstante izračunaju se za pojedini luk kao puno uklešten na nepomičnim osloncima kao i za pojedini puno uklešteni stub na osnovu klasične teorije elastičnog težišta. U predloženoj tabeli navedene su pripadajuće formule.



	Luk:	Stub:
Elastično težište, razmak \bar{z}	$\bar{z} = \frac{\sum z ds/I}{\sum ds/I}$	$\bar{z} = \frac{\sum z ds/I}{\sum ds/I}$
Sila, potrebna za horiz. pomeranje 1 = pomična krutost t_p	$t_p = \frac{1}{\sum \xi^2 ds/I} \int_0^s z ds$	$t_p = \frac{1}{\sum \xi^2 ds/I}$
Momenat potreban za okret 1 = okretna (obična) krutost t	$t = \frac{1}{\sum ds/I} + \frac{a^2}{\sum \xi^2 ds/I} + \bar{z}^2 t_p$	$t = \frac{1}{\sum ds/I} + \bar{z}^2 t_p$
Prenosni koeficijent za sile	$p_r = -1$	$p_r = -1$
Prenosni koeficijent za momente	$p_r = 1 - \frac{2a^2 t_p}{t}$	$p_r = h \cdot \bar{z} \cdot \frac{t_p}{t} - 1$
Momenat, koji nastaje usled horizontalne sile 1 M_H	$M_H = +\bar{z}$	gore $-\bar{z}$ dole $h \cdot \bar{z}$
Horizontalna sila, koja nastaje usled momenta 1 H_m	$H_m = -\bar{z} \cdot \frac{t_p}{t}$	$H_m = -\bar{z} \cdot \frac{t_p}{t}$

^{*)} kod luka je prenosni koeficijent negativan.

U konkretnom primeru dobivene su na osnovi detaljnog računa sledeće vrednosti:

	Luk	Stub 1 (h = 16,0 m)	Stub 2 (h = 24,0 m)
$\sum \frac{ds}{I}$	401 m ⁻³	13,65 m ⁻³	15,68 m ⁻³
$\sum z \frac{ds}{I}$	1855 m ⁻²	80,40 m ⁻²	120,40 m ⁻²
\bar{z}	4,62 m ¹	5,89 m ¹	7,68 m ¹
$\sum \xi^2 \frac{ds}{I}$	1078,0 m ⁻¹	238,0 m ⁻¹	583,0 m ⁻¹
$\sum \xi^2 \frac{ds}{I}$	24.900 m ⁻¹	-	-
t_p	928 · 10 ⁻⁴ m ¹	42,0 · 10 ⁻⁴ m ¹	17,2 · 10 ⁻⁴ m ¹
t	$\frac{(249 + 9,04 + 19,86)}{31,39} \cdot 10^{-3} m^3$	$\frac{(73,3 + 146,4)}{219} \cdot 10^{-3} m^3$	$\frac{(63,8 + 101,5)}{165,3} \cdot 10^{-3} m^3$
Prenosni koef. za momente	$-1 + \frac{2 \cdot 15^2}{31,39 \cdot 24,9} = -0,424$	$\frac{16 \cdot 589 \cdot 42}{219} - 1 = +0,81$	$\frac{24 \cdot 7,68 \cdot 17,2}{165,3} - 1 = +0,92$
H_m	$4,62 \cdot \frac{928}{31,39} = 0,137 m^{-1}$	$5,89 \cdot \frac{42,0}{219} = 0,113 m^{-1}$	$7,68 \cdot \frac{17,2}{165,3} = 0,080 m^{-1}$

^{*)} Prenosni koeficijent kod luka je negativan!

II. Račun osnovnih horizontalnih sila i momenata

U ovom primeru uzeli smo kao opterećenje koncentrisanu silu P=10.000 kp u datom preseku luka. Osnovne momente izračunaćemo za konstrukciju puno ukleštenog luka po poznatim elastičnim jednačinama (po metodi elastičnog težišta):

$$M_{opšte} = M_0 + H \cdot \xi + V \cdot \xi + m$$

m momenat prosto položenog nosača

$$M_0 = \frac{\sum m ds/I}{\sum ds/I} \text{ u konkretnom primeru } = -38.100 \text{ kpm}$$

$$H = \frac{\sum m \xi ds/I}{\sum \xi^2 ds/I} \text{ u konkretnom primeru } = -10.120 \text{ kp}$$

$$V = \frac{\sum m \xi ds/I}{\sum \xi^2 ds/I} \text{ u konkretnom primeru } = +844 \text{ kp}$$

Iz ovoga dobijamo momente punog ukleštenja na osloncima:

$$M_{levo} = -4000 \text{ kpm}, \quad M_{desno} = +21.300 \text{ kpm}$$

Za Krosov postupak dobija M_{levo} pozitivni predznak po Krosovoj oznaci.

U praksi, razume se, nećemo nikada računati takvo specifično opterećenje koncentrisanog tereta nego ćemo konstrukciju mosta opteretiti virtualnom silom, ili momentnom dvojicom tako da bi mogli iz dobivenih momentnih crta konstruisati uticajnu crtu. Kad se radi o malom opterećenju zasvedenih krovišta biće dovoljno ako se reše simetrične i antisimetrične kombinacije opterećenja.

III. Krosovi postupci

Na osnovu ovih podataka nacrtaćemo dve sheme za Krosov postupak: jednu za pomeravanje, za izjednačivanje horizontalnih sila; drugu za okretanja, za izjednačivanje momenata. U sheme unosimo celishodno izračunate pomične krutosti i prenosne koeficijente, odnosno okretnu krutost i prenosne koeficijente. Iz njih izračunaćemo takođe izjednačujuće koeficijente; tako za horizontalne sile, kao i za momente.

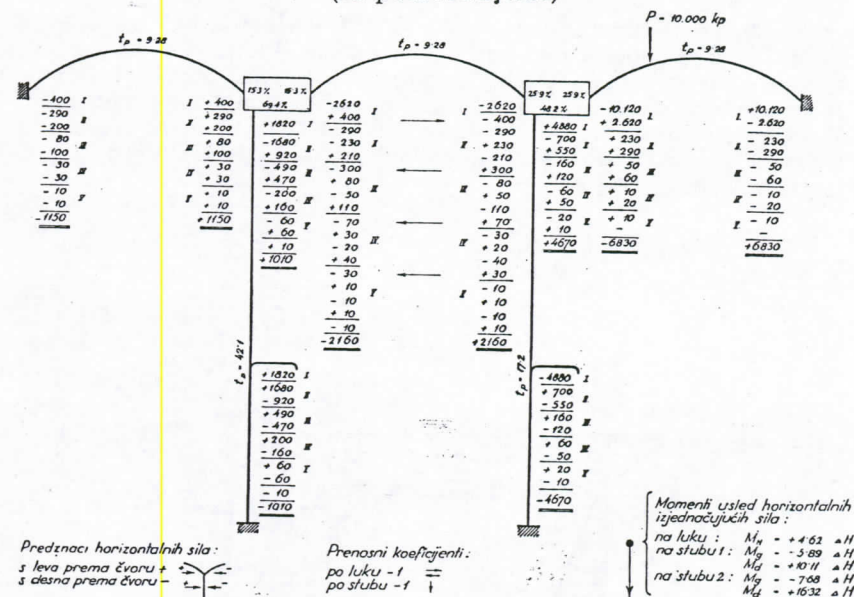
I. faza počinje sa izjednačenjem horizontalnih sila u shemi A. Prvo izvodimo prenos sila na suprotna čvorišta (u istom iznosu s obratnim predznakom). Zatim unosimo uticaj izjednačujućih horizontalnih sila u shemu B u vidu dopunskih dejstvujućih momenata. Ove momente izračunaćemo kao produkt $\Delta H \cdot M_H$. Posle toga izjednačićemo momente u shemi B po poznatom postupku, uključujući osnovne momente i dopunske momente od uticaja pomeranja. Izjednačene momente prenosimo na suprotne čvorove (kod lukova je prenosni koeficijent negativan!). Svaki okret čvora proizvodi na nepomičnim čvorištima nove dopunske horizontalne sile koje izračunavamo kao produkt $\Delta M \cdot H_H$. Ove sile unosimo u shemu A kao dejstvujuće horizontalne sile, i to na oba kraja stuba koji je priključen ovom čvoru. Za veličinu ove dopunske sile merodavan je uvek samo izjednačujući, nikad prenosni momenat.

II. faza. U shemi A nisu horizontalne sile još potpuno izjednačene; ostatak jedne prenosne sile iz I faze, kao i sve dopunske horizontalne sile koje su se pojavile usled okretanja čvorova faze I, zahtevaju ponovno drugofazno izjednačenje. Nakon izjednačenja sile izvršićemo prenos na suprotna čvorišta i izračunaćemo, kao posledicu pomeranja, dopunske momente druge faze, koje unosimo u shemu B. U shemi B izvršićemo izjednačenje druge faze, analogno prvom. Ovo izjednačenje proizvodi prenosne momente II faze i dodatne horizontalne sile II faze, koje treba da se unesu u A shemu za III fazu izjednačivanja.

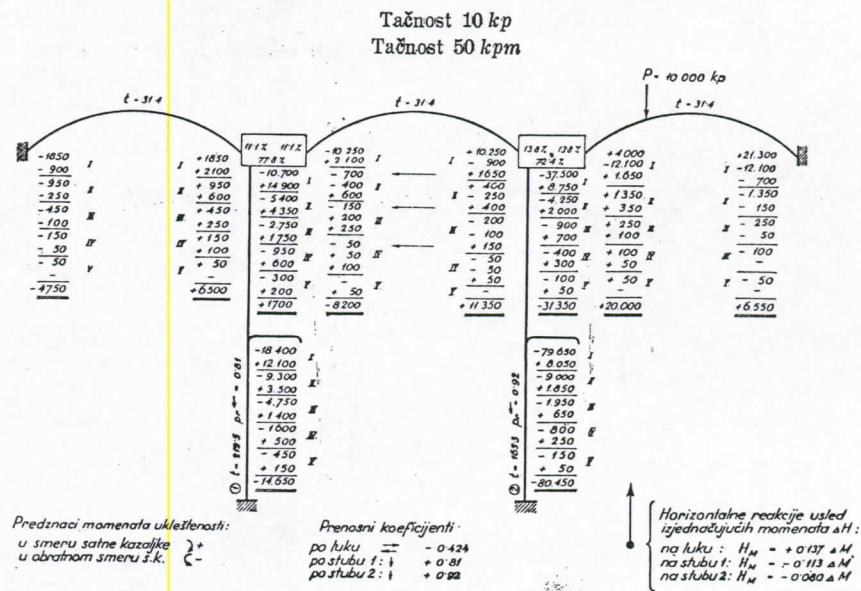
III. faza, kao i dalje faze ponavljaju se tako dugo dok ne postignemo granicu tačnosti računskog postupka.

Postupak zahteva, i pored svoje jednostavnosti, priličan napor da se ne bi potkrale greške u faktorima, predznacima. Naročitu pažnju iziskuje uticaj jedne sheme na drugu. Kod utvrđivanja dejstvujućih momenata usled horizontalnih sila važno je ovo: kod luka dolazi u obzir celokupno stlačenje odnosno rastezanje luka; momenat je jednak na oba kraja (s obratnim predznakom). Kod stuba biće na gornjem delu jedan momenat, a drugi na donjem (na taj donji ne smemo zaboraviti!). Pri utvrđivanju horizontalnih sila, izvedenih okretanjem važno je ovo: Horizontalnu silu uzrokuje samo izjednačujući momenat, nikako prenosni. Veličina horizontalne sile upisuje se sa izračunatim predznakom uz čvor; na suprotnom kraju luka, odnosno stuba, upisuje se automatski

A. Krosov postupak izjednačivanja horizontalnih sila (sa pomeranjima)



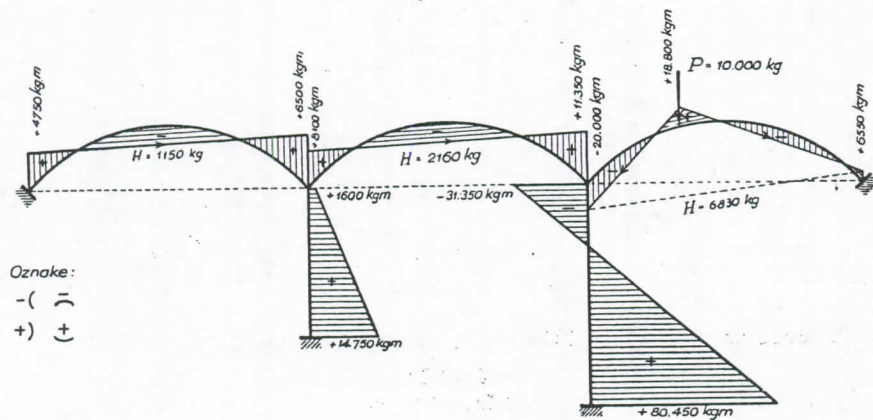
B. Krosov postupak izjednačivanja momenata (sa okretima)



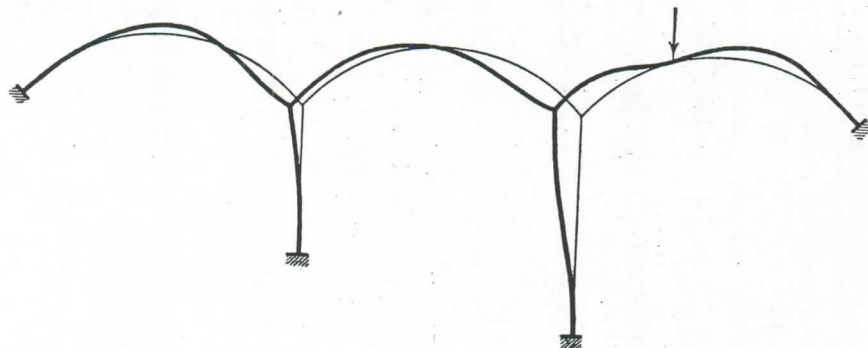
ista veličina s obratnim predznakom, bez obzira na veličinu prenosnih momenata. Postupak dakle, zahteva pomalo i »statičke akrobacije«.

U ovom konkretnom primeru postupak limitira dosta sporo (5 izjednačujućih faza!). Uzrok je u tome što se radi o pomeranjima. Postupak bi se mogao skratiti, kad bismo proizvoljno izvodili unapred u pojedinim fazama veća pomeranja kao što je to potrebno pri samom izjednačenju pokretnih horizontalnih sila. Pojava je ista kao kod višespratnih skeleta kod kojih treba da počnemo s većim pomeranjima no što to iziskuju same konačne horizontalne sile. ($M_{početni}$ znatno je veći od $M_{konačnog}$).

Momentna crta



Deformaciona crta



VARIJACIJE KROSOVE METODE

U knjizi obrađena je Krosova metoda u osnovnom elementarnom obliku. Ima mnogo svetskih stručnjaka koji su mišljenja da je jedina mana ove metode dugovremeni, sasvim mehanički postupak izjednačivanja i prenošenja momenata i zato su tražili metode, po kojima bi se ovaj postupak skratio:

Amerikanac Lin (Proceedings, 1934) računa sa »modificiranim« krutostima. Analogno redukciji krutosti pri zglobu na $3/4$, kod simetrije na $1/2$ — reducira Lin krutost pojedinih štapova s obzirom na elastičnu ukleštenost drugog kraja. Svaki nosač ima, dakle, dve modificirane krutosti; u svakom pravcu drugu. Dalje ne računa Lin sa prenosnim koeficijentom $1/2$, već sa »modificiranim« prenosnim koeficijentom, koji odgovara položaju stalne tačke (po Ritteru). Račun modificiranih krutosti i modificiranih prenosnih koeficijenata može se izvesti po formulama na osnovu normalnih krutosti I/l . Ako se računa skelet na bazi modificiranih krutosti i modificiranih prenosnih koeficijenata, otpadaju svi prenosni unatrag, a postupak se vrlo brzo svršava prenošenjem samo u jednom pravcu. Račun skeleta vrši se obično tako da se izračuna raspored unutrašnjih sila za svako opterećeno polje zasebno, a konačni rezultati dobijaju se sabiranjem pojedinačnih rezultata u najnepovoljnijim kombinacijama. Linova metoda pretstavlja kompromisno rešenje između metode stalnih tačaka i Krosove metode. Mišljenje je autora da je rad na samom računu modificiranih krutosti i modificiranih prenosnih koeficijenata dugotrajniji od običnog mehaničkog postupka na Krosovoj iteraciji. U izvesnim primerima, naročito kad treba na isti skelet primeniti vrlo mnogo različitih opterećenja, Linova metoda ima bitnih prednosti.

Prof. Čališev iz Zagreba računa (po objavi u Züriškim memoarima g. 1936) sa okretima čvorova. Veličina okreta izračunava se iterativnim putem u naročitoj tabeli, jer su okreti pojedinih čvorova u međusobnoj zavisnosti. Okreti su izraženi u momentima savijanja. Konačni momenti ukleštenosti izračunavaju se iz okreta pojedinih čvorova po poznatim formulama Takabeie. Metoda ima mnogo sličnosti sa metodom dr. Fukuheia Takabeie, tako da je možemo tretirati kao prelaznu metodu od Takabeia na Krosa.

Ing. Kani (iz Zagreba) takođe obrađuje račun skeleta na sličan način kao i prof. Čališev (možda i pod njegovim uticajem), ali s tom razlikom što se iteracija okreta ne izvodi u tabelarnom pregledu nego u shemi skeleta, analogno Krosu.

Vrlo interesantna je Grinter-ova varijacija Krosove metode (Proceeding, br. 62/1936). Osnova za računanje nisu momenti već okreti čvorova. Grinter izračunava najpre za svaki nosač (kao prosto položen) uglove okretanja na ležištima. Ako se nosač jednog kraja ukruti u čvor, ovaj se ugao smanji, a razmer smanjenja izračunava se iz odnosa krutosti priključenih štapova čvora. Priključeni štapovi tretiraju se opet kao zglobno poduprti na suprotnom kraju. Okret čvora na prvom kraju štapa ima za posledicu okret zglobno položenog štapa na drugom kraju, u polovičnom iznosu prvog okreta. Prema tome dobijamo, analogno Krosovom postupku, prelazni koeficijent $1/2$. Konačne okrete izračunavamo prenošenjem i izjednačivanjem okreta po Krosovom postupku. Mana ove metode je u tome što je potrebno da se iz datih opterećenja izračunaju okreti i obratno, iz okreta opet momenti ukleštenosti, a to produžuje postupak. Metoda, ipak, ima izvesnih prednosti, naročito za račun uticajnih linija.

Grasshof (Bautechnische Hefte für Studium und Praxis) skraćuje Krosov postupak time što izračunava prenosne momente direktno iz dejstvujućih momenata (bez izjednačujućih momenata), a izjednačuje samo jedanputa konačnu sumu dejstvujućih i prenosnih momenata. Postupak je uistini unekoliko kraći od originalnog Krosovog, ali je potrebno da se prethodno izračunaju kombinirani izjednačujuće-prenosni koeficijenti, a to komplikuje rad. I kontrola se time otežava.

Ovde je navedeno samo nekoliko primera varijacija Krosove metode za račun skeletnih sistema, ustvari ima ih i više. Svaki statičar može, a i mora — na osnovu date teorije — da primenjuje onaj sistem računanja na koji je navikao, i po kome može najbrže da svršava zadatke moderne tehnike. Prema tome mogli bismo dobiti bezbroj raznih varijanata; koliko konstruktora, toliko varijacija! U svim ovim »skraćenim« metodama nisam mogao da nađem bitnih preimućstava nad elementarnom Krosovom metodom: svako skraćivanje računskog postupka povlači za sobom misaono komplikovanje ili čitav red novih koeficijenata, a to ponovo produžuje rad i otežava kontrolu. Krosova metoda — elementarna, kako je u ovoj knjizi obrađena — svakako predstavlja osnovu na kojoj se mogu zasnovati i komplikovanije, skraćene metode. Iskustvo je pokazalo da je opravdano da se u mnogim primerima daje prednost dužim, a prostijim i preglednijim, metodama pred kraćim i komplikovanijim.

Zaključak

Poneki statičari smatraju Krosovu metodu kao metodu aproksimacije. U istini to nije aproksimativna metoda već potpuno tačna metoda, samo što se tačan rezultat dobija putem postepene aproksimacije. Metoda takva kakva jeste ne sadržava ni jedne aproksimativne pretpostavke (u matematičkom smislu). Postupak postepene aproksimacije sam je sličan postupcima, koji se smatraju za »tačna« rešenja u mnogim računskim primerima, na primer: kod numeričkog računanja kvocijenta iz dividenda i divizora se dobija postepenim deljenjem proizvoljno tačan rezultat. Kod »tačne« metode rešavanja n jednačina sa n nepoznatih putem determinanata isto tako se dobija rezultat kvocijentom, koji se izračuna do proizvoljne tačnosti postepenim deljenjem. I kod »tačne« metode dr. Takabeie se rezultat ograničuje po tačnosti na tačnost izračunatih zaokreta i pomeranja, koji se isto tako izračunavaju obično iterativnim putem, Krosova metoda dakle u pogledu tačnosti rezultata nikako ne zaostaje za drugim metodama, koje su se tretirale kao tačne, već je ona isto tako potpuno tačna.

Svi čitaoci knjige umoljavaju se, da svoje primedbe, i eventualne pogreške koje će naći u pojedinim primerima jave autoru, kako bi se mogle u sledeće izdanje uneti potrebne ispravke i popunjavanja.

Autor.

LITERATURA*

- Cross Hardy: Continuity as a Factor in Reinforced Concrete Design (Proceedings of the Amer. Concrete Institute, 1929).
- Takabeia Fukuhei: Rahmentafeln (Berlin, Springer, 1930).
- Cross Hardy: Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments. (Transaction of the Amer. Society of Civ. Eng., Vol. 96, 1932.)
- Grinter L. E.: Wind Strees Analysis Simplified. (Transaction of the Amer. Society of Civ. Eng., Vol. 96, 1932.)
- Fornierod M. F.: Berechnung mehrstöckiger Rahmen durch die Methode der algebraischen Momentverteilung. (Schweiz. Bauzeitung, Bd. 102, 1933.)
- Jakobsen Aas A.: Zur Berechnung durchlaufender Träger und Rahmen mit Schrägen. (Beton und Eisen 1936, Heft 16/17.)
- Čaišev K. A.: La methode d'iteration pour le calcul des systèmes hyperstatiques. (Association international des ponts et charpentes, Memoires IV, 1936.)
- Nonveiller Ervin: Crossova metoda postepene aproksimacije za rješavanje okvirnih konstrukcija. (Tehnički list 1937.)
- Dernedde Wolfgang: Näherungsweise Berechnung von durchlaufenden Trägern und Rahmen. (Bauingenieur 1938, No. 3/4.)
- Göttlicher Hans: Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes bei Berechnung von Stockwerkrahmen nach der Methode der Gleichungstabulierung. (Bauingenieur 1939, Heft 13/14.)
- Voegeli H.: Näherungsweise Untersuchung von Stockwerkrahmen auf Temperaturänderung und Schwinden. (Beton und Eisen 1940.)
- Shepley E.: Moments in Frames without Side Sway. (Concrete and Constructional Engineering 1940, No. 10.)
- Shepley E.: The Effect of Sway on Rigid Frames. (Concrete and Constructional Engineering 1941, No. 6, 7, 8.)
- Fruchtländer A.: Continous Beams and Rigid Frames an Algebraic Moment-Distribution Method. (Concrete and Constructional Engineering 1941, No. 1, 2.)
- Göttlicher J.: Die Anwendung des Näherungsverfahrens nach Cross-Takabeia bei Berechnung hochgradigstatisch unbestimmter Stockwerkrahmen. (Bauingenieur 1941.)
- Beschine: Les méthodes americaines de calculs hyperstatiques. (Institut technique du bâtiment et des travaux publics, Serie I, circulaire No. 33.)
- Descans: Simplification de la methode de Cross. (Annales des travaux publics de Belgique 1945.)
- Mörsch E.: Das Cross'sche Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der durchlaufenden Träger. (Wittwer, Stuttgart 1947.)
- Dernedde-Müllenhof: Das Cross'sche Verfahren zur schrittweisen Berechnung durchlaufender Träger und Rahmen. (Ernst & Sohn 1947.)
- Grasshof Heinz: Die Berechnung durchlaufender Balken nach dem Momenten-Ausgleichverfahren von Cross. (Bautechnische Hefte für Studium und Praxis 1947, No. 1.)

* Literatura je raspoređena po vremenu publikacije.