Мира Гусман к. разд

ВЛАСТИМИР СТАЈИЋ

АРИТМЕТИКА
И
АЛГЕБРА

ЗА III РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

СА ДОДАЦИМА ЗА ЧИТАЊЕ

ШЕСТО ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ
КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА.
БЕОГРАД

ПРЕДГОВОР

1. Ученику се препоручује да ову књигу добро чува и одржава у исправном стању, пошто ће следећих година често бити упућиван на поједине ставове из ње.

2. Кад ученик рачуна на табли, мора непрестано да говори и да сваки поступак објашњава. Ћутање на табли је чамотиња у разреду.

Штампарија Драг. Поповић, Београд, Луја Бартуа 3
Х. Ц. 36764/15-Г-VIII-1942

ДОПУНА АРИТМЕТИКЕ

ИНТЕРЕСНИ РАЧУН

1. — *Интерес или камата* је накнада која се плаћа за употребу туђег *капитала.* Обично се одређује у процентима за једну годину. Капитал је основна вредност (100%). Интересни рачуни су, дакле, процентни рачуни, само ту улази у обзир и време.

Најзгодније је да се у интересним рачунима година рачуна 360 дана, а месец 30 дана. Има држава где се година рачуна 365 дана, а месец по календару. Дан када се капитал узајми не рачуна се за интерес, али се због тога дан исплате рачуна.

2. — У сваком задатку интеересног рачуна имамо посла са 4 величине : *капитал, процент (интересна стопа), време* и *интерес (камата).* Како је интерес пропорционалан осталим величинама, сваки се задатак састоји у томе, да се одреди једна од ових величина кад су познате остале. *Дакле, имамо задатке из правила тројног, у овом случају* **сложеног.**

Пример 1. Наћи интерес који донесу 12 000 динара, кад се позајме по 9% за 4 године.

Решење. 100 динара донесу за 1 год. 9 дин интереса;
1 „ донеће „ 1 „ $\frac{9}{100}$ „ „
12 000 „ донеће за 1 год. $\frac{9 \cdot 12000}{100}$ дин „
12 000 „ „ „ 4 „ $\frac{9 \cdot 12000 \cdot 4}{100}$ „ „

Тражени интерес је 4320 динара.

време бити изражено извесним бројем месеца, година или дана, то ми узимамо најнижу јединицу, у овом случају дан.

За 5 дин инт. треба кап. од 100 дин за 360 дана

1 „ „ „ „ „ 100 „ „ $\frac{360}{5}$ „

62 „ „ „ „ „ 100 „ „ $\frac{360 \cdot 62}{5}$ „

62 „ „ „ „ „ 1 „ „ $\frac{360 \cdot 62 \cdot 100}{5}$

62 „ „ „ „ „ 4800 „ „ $\frac{360 \cdot 62 \cdot 100}{5 \cdot 4800} =$
$= 93.$

ОБРАСЦИ

3. — Задаци интересног рачуна се врло често јављају у практичном животу. Због тога је згодно наћи начин да се ти задаци брже и непосредније решавају, а да се не прибегава онако дугом и гломазном закључивању као што је то случај у претходним примерима. За ту сврху ми се служимо **обрасцима (формулама)** у којима фигуришу слова уместо бројева. У том случају довољно је, кад добијемо задатак, да наместо слова ставимо бројеве који одговарају тим словима и да извршимо назначене рачунске радње, па да одмах добијемо решење задатка.

Пример 1. Површина правоугаоника једнака је производу бројева који казују колика је њихова дужина и ширина.

Ако површину, дужину и ширину обележимо латинским словима p, a и b, можемо написати:

$$p = a \cdot b.$$

Претпоставимо да нам је дужина 3m, ширина 2m; ако наместо слова a и b ставимо 3 и 2, имаћемо:

$$p = 3 \cdot 2 = 6.$$

Пример 2. Одредити интерес који донесе извесна сума новаца, кад је познато време и кад је дат процент.

Обележимо дату суму, дати капитал са k, време са t (латински tempus = време), процент са p. Ми можемо обновити претходна закључивања, сматрајући k, p и t као бројеве који су написани некако друкчије, а не у декадном систему. Овако писање бројева не мења наше размишљање ни у чему.

100 динара капитала доносе за 1 годину p дин интереса;

1 „ „ „ „ 1 „ $\frac{p}{100}$ „ „

k „ „ „ „ 1 „ $\frac{p \cdot k}{100}$ „ „

k „ „ „ „ t годииа t пута више неголи за 1 годину или

$$\frac{k \cdot p \cdot t}{100}.$$

Ако са i обележимо интерес, добићемо образац:

$$i = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}. \qquad (1)$$

Напомена. — Овај образац важи увек ма какви били бројеви p, k и t. Ако t значи месеце или дане, замењује се одговарајућим разломком од године, који ће имати у случају месеца именилац 12, а у случају дана именилац 360.

Применимо овај образац на задатак: Да се одреди интерес који доноси капитал 14 000 динара по 4,50% за 1 годину и 3 месеца.

Решење. У овом задатку је $k = 14\,000$, $p = 4{,}5$, $t = 1 + \frac{3}{12} = \frac{5}{4}$.

Према томе ћемо имати:

$$i = \frac{14000 \cdot 4{,}5 \cdot \frac{5}{4}}{100} = 787{,}^{\text{дин}}5.$$

Исто тако можемо наћи обрасце за израчунавање процента, времена и капитала. Размишљање и закључивање је слично ранијим. Тако бисмо нашли да је:

$$k = \frac{100 \cdot i}{p \cdot t} \qquad (2)$$

$$p = \frac{100 \cdot i}{k \cdot t} \qquad (3)$$

$$t = \frac{100 \cdot i}{k \cdot p} \qquad (4)$$

4. — Колика је корист од употребе ових образаца очевидно је из онога што смо већ рекли. Један једини образац обухвата све задатке једног истог типа, задатке који се разликују само по бројним подацима. Доцније ћемо видети да се

~~12.~~ Неко лице да под интерес 25 000 динара по 4% и 75 000 по 3%. Како би се могла дати целокупна сума, са једним истим процентом, а приход да остане исти?

~~13.~~ На коју суму нарасту, заједно са интересом, за једну годину: 324 динара по $3\frac{1}{2}\%$; 450 динара по $4\frac{1}{2}\%$; 1 560 динара по $2\frac{3}{4}\%$?

~~14.~~ На које суме нарасту са својим интересима следећи капитали: 440 динара по 4% за две године; 3900 динара по 3% за 1 год. 4 мес.; 2 400 динара по $2\frac{3}{4}\%$ за $1\frac{3}{4}$ год.; 9 000 динара по $3\frac{1}{2}\%$ за $\frac{1}{2}$ месеца?

15. Неко донесе једној штедионици, која плаћа 6% интереса, 1200 динара. Интерес који припада за једну годину додаје се капиталу, тако да се за идућу годину рачуна интерес на тако увећани капитал. *Интерес се капиталише, тј. плаћа се интерес на интерес*. На коју суму нарасте дати капитал после 4 године?

16. Неко је имао да плати 1 маја и 1 августа исте године по 300 динара. Он исплати свој дуг тек 1 октобра те године. Колико треба свега да плати, кад се за време после рока плаћа интерес 4%?

17. Колики је један капитал који је заједно са интересом по 4% нарастао за 1 годину на 780 динара?

Решење.

$$\begin{array}{l} 104\%\ \text{осн. вр.} = 780\ \text{динара} \\ 100\%\ \text{„}\ \ \text{„} = x\ \text{динара} \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{780 \cdot 100}{104}.$$

Капитал је 750 динара.

18. Који капитал је са интересом по 3% за 200 дана нарастао на 915 динара?

Решење: Капитал нарасте за 1 годину на 103%. Пошто основна вредност остаје иста, само се интерес мења, то он нарасте за 2 године на 106% (100% + 2 · 3%), за 3 год, на 109% (100% + 3 · 3%), за 200 дана, тј. за $\frac{200}{360}$ године за 100% $+ \frac{3 \cdot 200}{360}\% = 101\frac{2}{3}\%$.

$$\begin{array}{l} 101\frac{2}{3}\%\ \text{осн. вр.} = 915\ \text{динара} \\ 100\%\ \ \text{„}\ \ \text{„} = x\ \ \text{„} \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{915 \cdot 100}{101\frac{2}{3}}.$$

Капитал је 900 динара.

19. Који капитал нарасте са интересом по 4% за $1\frac{1}{2}$ год. на $809,^{\text{дин}}80$; за $\frac{1}{4}$ год. на $586,^{\text{дин}}80$; за 8 мес. на $379,^{\text{дин}}20$?

20. Који дуг је, за 80 дана, заједно са интересом по $3\frac{1}{2}\%$, порастао на 4 535 динара?

21. Неко је 1 априла начинио зајам по $4\frac{1}{2}\%$ и 13 јула исте године, заједно са интересом, исплатио суму од $487,^{\text{дин}}60$. Колики је зајам, а колики интерес?

22. Један дуг од 1 маја биће исплаћен тек марта идуће године са 10 375 динара при чему су урачунати $4\frac{1}{2}\%$. Колики је био дуг?

23. Један трговац не хтеде да прода своју робу по 283 дин тону. 6 месеци доцније он је продао по 285 дин једну тону. Колико је изгубио на једној тони, ако се интерес рачуна 4%?

24. Један земљорадник купи земљиште по $1,^{\text{дин}}40$ квадратни метар и исплати га после 8 месеци. Тада он плати заједно са 5% интереса 50 127 динара. Колика је површина земљишта?

ДИСКОНТНИ РАЧУН

5. — Под *дисконтом* разуме се одбитак од извесног дуга, ако се овај исплати пре одређеног рока. Он се разликује од рабата (шконта) само по томе, што код њега долази у обзир и време. Време се одређује као и код интересног рачуна. Дисконт се обично изражава у стотим деловима, тј. у % од дуговане суме. Као што код интересних рачуна за процент кажемо још интересна стопа, тако и код дисконта кажемо *дисконтна стопа*. Ако на пр. узмемо да је дисконтна стопа 4 имаћемо:

Дуг	дисконтна стопа	плаћање у готову
100% осн. вр.	за 12 мес. 4%	96% осн. вредности
100% „ „	„ 3 „ 1%	99% „ „
100% „ „	„ 1 „ $\frac{1}{3}\%$	$99\frac{2}{3}\%$ „ „

Овакви рачуни су исто што и интересни рачуни, само се уместо речи интерес употребљава реч дисконт. Често се уместо дисконт каже *ѐскont*.

Пример 1. Колики је дисконт од 600 динара, по 4%, за време од 10 марта до 16 маја?

Решење: Број дана је 16/V — 10/III = 6/II = 66 дана.

$$\text{Дисконт} = \frac{600 \cdot 4 \cdot \frac{66}{360}}{100} = \frac{600 \cdot 4 \cdot 66}{36000}.$$

Дисконт износи динара 4,40.

Пример 2. На коју суму је гласила меница чији рок истиче после 2 месеца, кад је са дисконтом 4% исплаћена одмах у готову са 1490 динара?

Решење. Дуг остаје исти, али дисконтна стопа, а са њом и дисконт, мења се временом. Она износи за 2 месеца $\frac{2}{3}$%.

$$99\tfrac{1}{3}\% \text{ осн. вр. } 1490$$
$$100\% \quad „ \quad „ \quad x$$
$$x = \frac{1490 \cdot 3 \cdot 100}{298} = 1500.$$

Меница је гласила на 1500 дин.

Меница је према законским прописима састављена писмена обавеза у којој се потписани обавезује да ће означену суму исплатити у одређеном року. За менице постоје законом прописани штампани бланкети.

За писмено вежбање

1. Израчунај дисконт и плаћање у готову кад је дисконтна стопа 5 на 480 дин плативо 29/IX, дисконтовано 11/VII
„ 680 „ „ 1/V „ 27/III
„ 1550 „ „ 30/X „ 20/VIII

2. Колико вреди у готову једна меница на 2000 дин, чији је рок 2 месеца и 20 дана, при $6\frac{1}{2}$% дисконта?

3. На коју суму гласи меница кад је
дисконт $5,^{\text{дин}}50$, рок 2 месеца, дисконтна стопа 5;
„ $33,^{\text{дин}}30$, „ 54 дана, „ „ 6;
„ —..н „ $1\frac{1}{2}$ месеца, „ „ $7\frac{1}{2}$

4. На коју суму гласи меница кад је
плаћање у готову динара 950, рок $2\frac{1}{2}$ мес., диск. стопа 5;
„ „ „ „ 551,45, „ 3 „ „ „ 6;
„ „ „ „ 896,50, „ 20 „ „ „ 6?

5. Колико % дисконта је рачунато кад меница гласи на:
1520 динара, рок 1 месец, плаћање у готову дин 1513,25;
960 „ „ 50 дана „ „ „ „ 950;
2000 „ „ 7 недеља, „ „ „ „ 1984,25?

6. Кад је једна меница ескontована кад она гласи на 150 дин са роком 26 августа, пошто је одбијен ескonт $11,^{\text{дин}}25$, а при том рачунато 6%?

7. Који је рок једној меници на 5 700 динара, кад је она откупљена 1 маја са 6%, при чему је дисконт изнео $47,^{\text{дин}}50$?

КАМАТНИ КЉУЧЕВИ И КАМАТНИ БРОЈЕВИ

6. — У интересном рачуну време се обично, у пракси, најчешће казује у данима. Тада нам образац за интерес добија овај облик

$$i = \frac{k \cdot p \cdot t}{36\,000},$$

где слово t означава *дане*. По истом обрасцу се одређује и дисконт. Број p, који казује проценте, најчешће се садржи у 36 000, па се разломак може тим бројем да скрати. У том случају имамо:

$$i = \frac{k \cdot t}{36\,000 : p}.$$

Бројилац k • t, где t казује број дана, назван је од банкара ***интересни или каматни број***. Именилац 36 000 : p назван је ***интересни*** или ***каматни кључ***. Корист од овога је у томе што се каматни кључ за уобичајене проценте 2, 3, 4, 5, 6 итд. израчуна, па се то увек има при руци, те се не морају ти рачуни у свакој прилици обнављати.

Интерес и дисконт се добијају по овом **практичном упутству:** *помножимо капитал бројем дана, тако добијамо каматни број; затим каматни број поделимо каматним кључем.*

Пример 1. Наћи интерес који донесу 4 000 дин по 3% за 20 дана.

Решење: Каматни број је 4 000 • 20 = 80 000, каматни кључ који одговара проценту 3 је 36 000 : 3 = 12 000. Тражени интерес је:

$$\frac{80\,000}{12\,000} = \frac{20}{3} = 6{,}66;\ \text{динара } 6{,}65.$$

Напомена 1. У пракси се још више упрошћава. Тако код капитала се занемарују стоти делови, тј. паре. Код каматног броја занемарују се последње две цифре и наместо њих стављају нуле. Још се даље може упростити деобом са 100 каматног броја и каматног кључа.

Пример 2. Дисконтовати меницу од динара 3245,35 са роком од 45 дана по 4%.

Решење. Каматни број је 3245 · 45 = 146025. Каматни кључ је 36 000 : 4 = 9000. Ако сменимо нулама последње две цифре код каматног броја имаћемо:

$$\frac{146\,000}{9000} = \frac{146}{9} = 16{,}222\ldots$$

Дисконт износи динара 16,20. Садашња вредност менице је 3245,35 — 16,20 = динара 3229,15.

Напомена 2. Употреба каматних бројева и каматних кључева је нарочито од велике користи, кад нам је дато више капитала, са разним роковима, а кад је процент увек исти.

Пример 3. Неко уложи у банку 4 априла динара 367,75; 5 маја дин 2864,50; 26 маја дин 800,25; 6 јуна дин 150. Колика је његова имовина на дан 30 јуна исте године? Банчин процент је 5.

Решење. При рачунању се обично овако пише:

Датум	капитал	дани	каматни бројеви	каматни бројеви
4 апр.	367,75	86	367 · 86 = 31562	316
5 мај	2864,50	55	2864 · 55 = 157520	1575
26 мај	800,25	34	800 · 34 = 27200	272
6 јун	150,00	24	150 · 24 = 3600	36

4182,50 2199

инт. 30,50 2199 : 72 = 30,54

имов. 4213,00

У првом ступцу налазе се датуми. У другом износи капитала. Њих потписујемо тако да бисмо их могли лако сабрати и згодно додати интерес. У трећем ступцу налазе се бројеви дана протеклих од дана улагања. У четвртом се налазе помоћни рачуни, који се обично и не стављају у преглед, него се одвојено изводе. У последњем ступцу налазе се каматни бројеви. У њима су изостављене по две цифре. При овом изостављању треба пазити да се последња цифра која остаје повећа за 1, ако изостављене цифре чине број 50, или број већи од 50. Каматни бројеви се саберу и тај збир подели са 72, пошто је каматни кључ 36 000 : 5 = 7 200. Код каматног кључа смо изоставили две нуле, пошто смо каматни број и каматни кључ скратили са 100.

За писмено вежбање

1. Колики ће интерес донети 660 динара по 4,5% од 24 јуна до 29 септембра исте године?

2. Израчунај интерес на 3000 динара по 3% за време од 17 априла до краја године!

3. На коју ће суму нарасти 540 динара са интересом 6% за време од 17 фебруара до 30 новембра исте године?

4. Неко купи кућу за 1 800 000 динара и плати у готову 40%, а за остатак обећа да ће платити интерес $4\frac{1}{2}$%. Колико је имао да плати по истеку 1 год. 2 мес. и 16 дана?

5. Одреди колики ће интерес донети по 6%, 600 дин за 45 дана; 770 дин за 56 дана; 889 динара за 67 дана!

6. Неко уложи у банку 8 јула 400 динара, 10 септембра 750 динара, 23 октобра 1000 динара, 2 децембра 440 динара. Колики интерес има да прими од овога на крају године, ако банка плаћа 6%?

7. Један пословни човек уплати код Поштанске штедионице 17 априла динара 7400; 28 априла дин 3150; 5 маја дин 4685,75; 18 маја 500 дин; 3 јуна дин 285,50 и 24 јуна 1640 динара. Колика ће његова имовина бити код Поштанске штедионице крајем првог полгођа, ако је процент 5?

8. Неко понуди за дисконт три менице и то једну од 2346 дин са роком 45 дана, другу од 4783 дин којој је рок после 35 дана и трећу на 8756 динара, којој рок истиче после 29 дана. Колику ће суму имати да прими, ако се дисконт рачуна по 8%, а банкар напослетку наплати још и 0,15% као провизион?

9. Неко уплати у банку 16 јула 3000 динара, 24 септембра 5700 дин, 1 октобра 7000 динара, 24 новембра 10 200 дин, 28 новембра 1 500 динара. Колика ће његова имовина бити крајем децембра, ако банка плаћа 6%?

10. Неко поднесе на дисконт 15 маја једну меницу од 7326 динара са роком 5 јуна; другу од 4653 динара са роком 15 јуна; трећу од 976 динара са роком од 31 јула. Колику ће суму имати да прими, ако је дисконт 9%, а банкар узме још и 1,25% провизион?

ДРЖАВНЕ ХАРТИЈЕ ОД ВРЕДНОСТИ

7. — Да би држава могла одговорити својим многобројним задацима као што су: одржавање администрације, ширење просвете, осигурање реда и безбедности грађана, одржавање саобраћаја, унапређивање пољопривреде, држање војске и морнарице итд. итд., треба да има на расположењу велике суме новгаца. Те суме она добија путем *пореза*. То је дуг који плаћа сваки становник по извесним правилима која се утврђују законом.

Поред пореза, или боље речено *непосредних* пореза, држава има и тзв. *посредне* порезе, у које спадају на пр. *царине, трошарине, монополи итд*. Држава има и своје *приватно-привредне приходе*. Ту спадају приходи од *државног земљишта*, од *државних шума*, од *рудника, железница, лутрије* итд.

У изузетним приликама, кад је рецимо, потребан новац за грађење железница, за наоружање и др., редовни извори могу бити недовољни. Онда држава узајмљује суме које су јој потребне. Кажемо закључује или емитује зајам. Државни зајмови могу бити веома разноврсни, као: унутрашњи или спољашњи, са залогом или без залоге, консолидовани или летећи (привремени), амортизациони или рентни, принудни или добровољни итд.

8. — Ми ћемо нешто рећи о унутрашњим зајмовима. То су зајмови које држава закључује у земљи својој, код својих поданика. Они могу бити двојаки:

1. Држава се обавезује да плаћа само интерес, а не узима на себе обавезу да врати капитал. Интерес тако исплаћиван назива се *вечита рента*.

2. Држава се обавеже да плаћа интерес на узајмљени капитал за извесни одређени период времена, и да враћа капитал поступно, по једном утврђеном плану. Такви зајмови зову се *амортизациони*. Интерес од оваквих зајмова обично се назива *рента*.

Наша држава има такве зајмове 2%, 4%, 7%. Исто тако немајући готовог новца да исплати својим грађанима накнаду за штету претрпљену за време рата, држава је ту обавезу примила на себе у облику дуга са интересом 2%.

7% зајам је на пр. унутрашњи, са залогом, консолидован, амортизациони и добровољни.

9. Обвезнице. — Кад држава емитује зајам, издаје штампане *обвезнице* у замену за суме које је примила. Обвезнице могу гласити на 100, на 1000, на 10 000 динара итд. Има две врсте обвезница. Или је на њима написано име сопственика, или гласе на доносиоца. У том случају сопственик је онај који их има у рукама.

Обвезнице на доносиоца имају увек штампани купонски табак, са кога се секу поједини купони кад им дође рок. Ти купони подносе се одређеним државним установама, које у замену за њих исплаћују интерес. На сваком купону стоји наштампано колика се сума за њега добија. Купони се секу или једанпут годишње, или сваких 6 месеци, или свака три месеца. То зависи од врсте обвезнице.

10. Трговина обвезницама. — Кад један сопственик жели да дође до капитала који претстављају обвезнице, он их продаје обично *мењачу* или на *берзи*.

Обвезница обезбеђује један сталан интерес, али она претставља капитал, који варира према приликама, или како се то каже, према стању на тржишту, које регулише закон понуде и тражње. Промењива вредност обвезнице је оно што се зове *курсна вредност*. Фиксиран капитал који одговара интересу је *номинална вредност* обвезнице.

Кад је курсна вредност једнака номиналној, кажемо да је рента алпари. Иначе је изнад или испод пари.

Тако курс зајма 7% је 97. За 97 динара може се купити обвезница која претставља годишњи интерес од 7 динара. Рента је испод пари. Номинална вредност је 100 динара.

Курс Ратне штете је 440. Номинална вредност тих обвезница је 1000 динара. Значи, стварно, сопственик добије на 440 динара 25 динара годишњи интерес или ренту. И ова хартија од вредности је испод пари.

Обично при куповини обвезница купац плаћа продавцу не само курсну вредност, него и интерес за онолико дана колико је протекло од последњег купонског рока (термина) до дана продаје. Уз то још има неких ситних трошкова. О овим издацима при решавању задатака нећемо водити рачуна.

Пример 1. За колику суму треба да купимо обвезница Ратне штете, да бисмо имали годишњу ренту од 21 000 динара? Курс Ратне штете је 440 динара, а доноси интерес $2\frac{1}{2}\%$ од номиналне вредности.

Решење:

Да бисмо имали	25	дин ренте треба	440	дин капитала
„ „ „	1	„ „ „	$\frac{440}{25}$	„ „
„ „ „	21 000	„ „ „	$\frac{440 \cdot 21\,000}{25}$	„ „

Треба купити обвезница Ратне штете за 369 600 динара. Овде треба додати још и малу суму за трошкове које смо малочас споменули.

Пример 2. Ако имамо 100 000 динара, колику ћемо имати ренту, кад за ту суму купимо обвезнице 7% зајма? Курс зајма је 97. Номинална вредност је 100 динара.

Решење: Занемарићемо мале суме трошкова и онај мали вишак ренте што долази од шестомесечне исплате купона.

Сваких 97 динара доносе 7 динара ренте. То значи да ћемо имати ренту онолико пута по 7 динара, колико можемо купити обвезница за 100 000 динара тј. онолико пута по 7, колико пута се 97 садржи у 100 000. Кад 100 000 поделимо са 97, добијамо 1 030. Кад 1 030 помножимо са 7, добијамо 7 210.

Ми овде налазимо 7 210 као непотпун резултат. Имаћемо 7 210 динара ренте и нешто од 100 000 неће бити употребљено. Употребиће се за куповину обвезница 99 910 динара и претећи ће 90 динара. Ако бисмо додали још 7 динара на ових 100 000, па купили обвезнице, имали бисмо тачно ренту 7 217 динара.

За писмено вежбање

1. Неко хоће да има годишњу ренту 3 400 динара од Ратне штете. Колико треба да купи те хартије од вредности? Курс ратне штете је 440, процент $2\frac{1}{2}$, номинална вредност 1 000 динара.

2. Неко има 25 000 динара и хоће да купи обвезнице $2\frac{1}{2}$% Ратне штете по курсу 420. Колику ће ренту имати изражену у процентима? Колику ће тачну суму имати да положи?

3. Колики би требало да буде курс Ратне штете да би, пошто се у њу пласира новац, донела 6% ренте? Номинална вредност је 1 000 динара, процент $2\frac{1}{2}$%.

4. Један сопственик има земљиште облика правоугаоника дужине 225 m ширине 128 m, које издаје под закуп и добија годишњу закупнину 950 динара. Он прода то имање по 6 200 динара хектар и за добијени новац купи обвезнице 7% зајма, по курсу 97. Колико је добио или изгубио на овој операцији?

5. Једно лице прода своје имање по 6 000 динара хектар, па добијени новац пласира у 7% зајам, по курсу 97. Од тога добије годишњи приход 6 300 динара. Колика је површина имања?

6. Једно имање од 9ha 7a издаје се под закуп по 360 динара хектар, а опорезовано је 210 динара. Сопственик га прода по 5 630 динара хектар и пласира новац, добијен од продаје, у 4% ренту по курсу 54. Да ли је он тиме свој приход повећао или смањио?

7. Курс 4% ренте је 54, курс 7% зајма је 97. Која је хартија рентабилнија?

Мешовити задаци за понављање

1. Лице А позајми лицу В 1 200 динара за 6 месеци. На име интереса задржи одмах 100 динара. Колики је процент?

2. Колику вредност има један воћњак, који доноси годишње 2 500 динара, а то износи 8%?

3. Једно лице пласира $\frac{3}{4}$ свог капитала по 4,75%, а остатак по 5,50%. Тако добије 493,$^{\text{дин}}$75 интереса за 72 дана. Пита се колики је капитал.

Решење: Узећемо један згодан помоћни број, на пр. 400, од кога се лако узимају $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$. Са њим ћемо радити као да задовољава услове задатка. Видећемо до ког ћемо резултата доћи. Па ћемо поређењем добијеног резултата са оним који се тражи добити тражено решење.

Претпоставимо, дакле, да је лице пласирало 400 дин под условима који су исказани у задатку. Оно је пласирало:

$\frac{3}{4}$ од 400, тј. 300 дин по 4,75% и они донесу за 1 год. дин 14,25
$\frac{1}{4}$ од 400, тј. 100 дин по 5,5 % и они донесу за 1 год. дин 5,50
400 динара донеће за 1 годину дин 19,75

За 72 дана, или $\frac{1}{5}$ године 400 динара донеће

$$19,75 : 5 = 3,95.$$

Кад се 400 динара пласирају под условима задатка, донеће 3,$^{\text{дин}}$95. Сад се пита која је та сума, која ће под истим условима донети 493,$^{\text{дин}}$75. Задатак простог правила тројног.

Да донесе интереса

дин 3,95 треба капитал 400 динара

„ 493,75 „ „ x „

$$x = \frac{400 \cdot 493,75}{3,95} = 50\,000.$$

Тражени капитал је 50 000 динара.

Напомена. — У аритметици овакав метод решавања задатака зове се **метод претпоставке,** или **метод хипотезе.** Овај метод може да се примени на многобројне задатке.

4. Једна сума пласирана под прост интерес по 4,5% за 7 година, постала је капитал и интерес заједно, 5 207,$^{\text{дин}}$40. Колика је то сума? (3 960).

5. Једно лице пласира $\frac{2}{5}$ од своје имовине по 5%, $\frac{1}{3}$ по 4% и остатак, који износи 4 000 динара, по 3%. Пита се колика је целокупна имовина овог лица и колики је његов годишњи приход. (15 000; 620.)

6. Један банкар платио је 5 208 динара за једну меницу која гласи на 5 600 динара, са роком 14 месеци. Колика је дисконтна стопа? (6.)

7. На колику суму гласи меница кад је по одбитку дисконта од 5% исплаћена са 4350 дин? Рок је био 15 месеци. (4640.)

8. Колики је дисконт кад меница гласи на 3330 динара? Процент је 6, а рок 120 дана. (66,60).

9. Садашња вредност једне менице је 1570,$^{\text{дин}}$70. Она гласи на 1698,$^{\text{дин}}$60. Кад треба да се плати? Дисконт 6.

10. Књижар купи књига за 10 000 динара, на чему добије попуст 15%! Он прода те књиге за 12 000 динара при чему је морао пристати на попуст од 5%. Колика је његова зарада?

11. Један човек има 100 000 динара. Он пласира четвртину по 6%, петину по 5% и остатак по 5,5%. Колики је његов годишњи приход?

12. Један капитал пласиран је у три партије: $\frac{2}{3}$ су пласиране по 4%, $\frac{1}{6}$ по 4,5%, и остатак по 5%. После 16 месеци сопственик добије укупно, капитал и интерес, 38 991 динар. Пита се: 1) колика је првобитна вредност капитала; 2) по који процент би се могао издати цео капитал да би донео исти интерес. (36 900; 4,25. Види зад. 3!)

13. Једно лице овако распореди своју имовину: $\frac{3}{4}$ за куповину једног земљишта; $\frac{3}{4}$ остатка да купи кућу. Оно пласира $\frac{4}{7}$ новог остатка по 4,5%, а $\frac{3}{7}$ тог остатка по 6%. Ова сума доноси му тако 5436 динара годишње. Пита се колики је цео капитал, колика цена земљишту и пошто је кућа.

14. Која сума је пласирана по 5% за 16 месеци постала 48 704 динара?

15. Неко купи кућу за 1 800 000 динара. Од ње добија годишње на име кирије 90 500 динара. Међутим издаци за порез, за поправку, за воду, чишћење улице итд. износе 5 000 динара. Колико % интереса доноси овај капитал?

16. Неко добије од два капитала годишњи интерес 1680 динара. Један је пласиран по 4%, други по $4\frac{1}{2}$%. Пошто је процент другог капитала смањен на 4, он добије 120 динара мање. Колики је сваки капитал?

17. Један капитал донео је по $4\frac{1}{2}$% за извесно време 570,$^{\text{дин}}$30. Да је 4 месеца био дуже под интересом, донео би 285,$^{\text{дин}}$15 више. Колики је био капитал? Колико времена је био под интересом?

18. Сума од 14 400 динара издата под интерес по $4\frac{1}{2}$% враћена је 13 маја са 14 691,60. Ког датума је позајмљена?

19. Удовица једног чиновника добија месечно пензију 750 динара и за свако од троје деце по 150 динара. Поред тога има прихода од новца, који је уложен на књижицу код банке. Њено целокупно годишње примање износи 29 800 динара. Колика је уложена сума, кад банка плаћа 7%?

20. Неко добије од 4 200 дин капитала за 5 месеци 97,$^{\text{дин}}$50. Од целе суме 2 400 динара издати су по 6%. По који процент је био издат остатак?

21. Један трговац падне под стечај. Поверилац А потражује 45 000 динара и интерес по $4\frac{1}{2}$% за 135 дана. Поверилац В потражује 7 000 динара и 4% интереса за 86 дана. Поверилац С тражи чистих 28 000. Имовина трговца износи 57 000 динара. Колико ће укупно повериоци изгубити?

22. Једно имање од 35,$^{\text{а}}$14 стало је при куповини 40 000 динара. Од тога је продато $\frac{3}{5}$ по цени 15 динара 1 квадратни метар, остатак за 19 000 динара. Колико % износи добит, или губитак?

23. Један трговац купи 150 g чаја за 10 динара. Колико грама мора продавати за 10 динара, ако добит треба да изнесе 20%?

24. Један винарски трговац заради 40%, кад 1 hl једне врсте вина прода за 504 дин. Колико % ће изнети добит, ако се он реши да флашу тог вина ($\frac{3}{4}$ 1) продаје по 9 динара?

25. Један земљорадник може да прода жито или центу (50 kg) за 84 динара, или 1 hl за 120 динара. Који начин продаје је повољнији, ако 1 hl жита тежи 70 kg? Колико износи вишак у % при повољнијој продаји?

26. Једна сума новаца пласирана је 2 године по 5,5%. Да је пласирана 3 године по 5%, донела би 504 дин више. Колика је та сума?

27. Једно лице пласира $\frac{2}{3}$ своје имовине по 6% остатак по 5,40%. Његов приход је 3 480 динара. Колика је имовина?

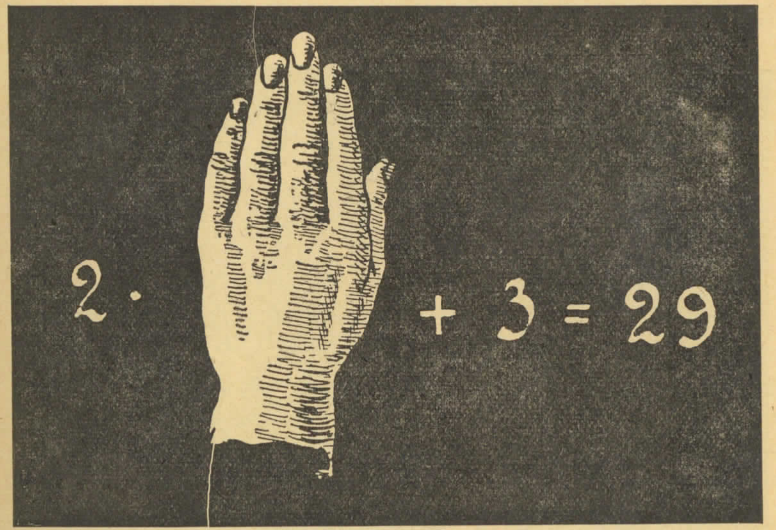
АЛГЕБРА

УВОД

УПОТРЕБА СЛОВА

11. *Проблем.* Један ученик каже: „Кад број својих година удвостручим, па том производу додам још 3, добијам 29.“ Колико је њему година?1)

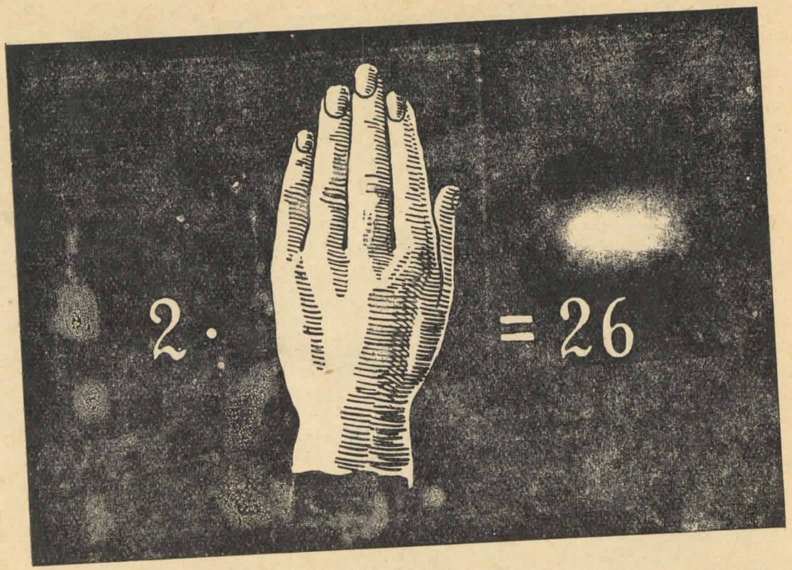
Решење. Узмимо да је број његових година написан на табли, али да смо га сакрили руком. Тада се задатак може овако написати:



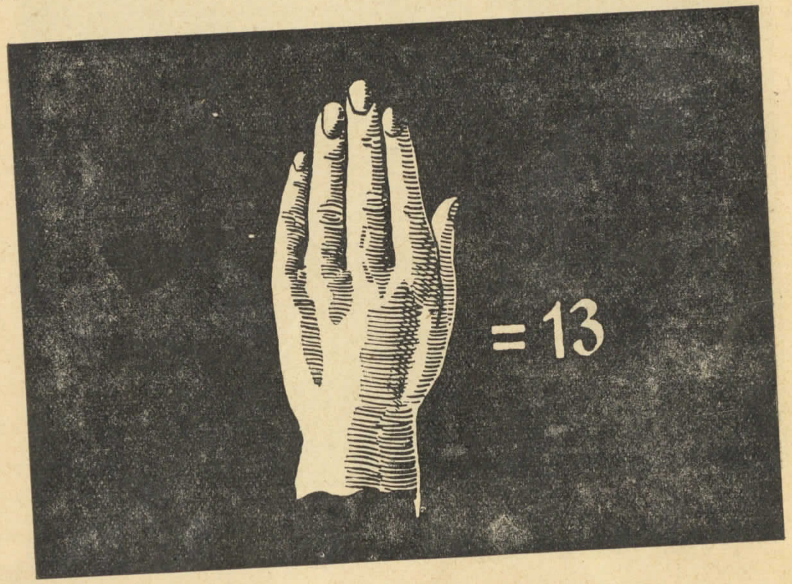
---

1) Види Аритметику за II р. стр. 81. зад. 6!

Изрази с леве и десне стране знака једнакости једнаки су. Ако од ова оба једнака израза одузмемо по 3, остаци ће опет бити једнаки, па имамо:



Ако сад нове једнаке изразе поделимо са 2, добићемо једнаке количнике:



Који је број испод руке?

Сад израчунај колико је $2 \cdot 13 + 3$! Је ли 29?

12. — Уместо да број скривамо руком могли смо написати овако:

$$2 \times \text{непознати број година} + 3 = 29.$$

Обнављајући корак по корак малопређашње радње, дошли бисмо до резултата:

$$\text{непознати број година} = 13.$$

13. — Међутим, најкраћи, најбржи начин рада био би, кад бисмо место непознатог броја година написали само слово x и са њим рачунали као са бројем:

$$2 \cdot x + 3 = 29$$
$$2 \cdot x = 26$$
$$x = 13.$$

14. — Из овог проблема видимо:

1. Да бисмо решавањее проблема *упростили*, да би поступак био што краћи, *намеће* нам се употреба слова.

2. Кад слово вежемо рачунским знацима са бројевима, са њим можемо изводити све рачунске радње. Тако смо број x помножили са 2, па добили производ $2 \cdot x$. Овом производу додали смо број 3, па добили збир $2 \cdot x + 3$.

3. Реченицу: *Кад број својих година удвостручим, па том производу додам 3, добијам 29,* исказали смо много краће *математичким језиком:*

$$2 \cdot x + 3 = 29.$$

Једначина је математичким језиком написана реченица. За математички језик поред бројева и рачунских знакова *потребна су и слова.*

Напомена 1. $2 \cdot x$ је у ствари $x + x$. Уобичајено је да се пише, уместо $2 \times x$, $2 \cdot x$ или $x \cdot 2$, само $2x$. Чита се два **x.** Исто тако уместо $3 \cdot x$ или $x \cdot 3$, пише се просто $3x$ итд.

Напомена 2. Пошто слова не казују одређене бројеве, са њима се рачунске радње не могу извршити до краја. Радње се само назначују. Тек кад слово заменимо одређеним бројем, радње се извршују до краја. Тако се $2x$ не може даље *упростити,* $2x + 3$ такође.

15. *Проблем.* Збир два броја је 37, њихова разлика је 9. Који су ти бројеви?

Аритметичко решење	*Алгебарско решење*
Већи број једнак је мањем увећаном за 9.	Означимо са x мањи број. Већи ће бити $x + 9.$
Збир ова два броја састоји се из мањег увећаног за збир од мањег и броја 9, тј. састоји се од мањег броја узетог двапут и још 9.	Збир њихов је тада $x + x + 9$ или $2x + 9$.
Број 37 смањен за 9 даје остатак 28. Тај остатак једнак је двоструком мањем броју.	Према томе имамо $2x + 9 = 37,$ једначину која казује да је $2x = 37 - 9$ $2x = 28.$
Мањи број је дакле 14, половина од 28. Већи број је 23, тј. збир од 14 и 9.	x је 14, количник броја 28 и 2. Већи број је $x + 9 = 23.$

Проба. Збир $14 + 23 = 37$, а разлика $23 - 14 = 9$..

16. Из овог примера запажамо следеће:

1. При аритметичком решавању проблема служимо се *дугим и недовољно јасним* реченицама.

2. Код алгебарског решавања тога смо ослобођени. Математички, управо *алгебарски језик* је не само краћи, него и јаснији.

3. Употреба слова *олакшава* нам *размишљање и закључивање* при решавању задатака.

17. — Међу проблемима које смо имали у Аритметици за II разред, имамо неколико врло лепих проблема кретања. (То су задаци на странама 96 и 97.) Ти проблеми овако изгледају: *Обично два пријатеља иду један другом у сусрет. Први прелази на сат толико и толико километара, други толико и толико. После колико часова ће се срести, кад нам је раздаљина између њих позната?*

Тако у једном задатку је раздаљина $39^{\text{km}}\frac{1}{2}$, а број километара који се пређе за један час $4\frac{1}{2}$ и **5.** У другом је удаљење $34\frac{1}{2}$km, прелажење на час километара $4\frac{3}{4}$ и 5,600 итд.

Пошто ови задаци припадају једној истој врсти задатака, могу се *сви* решити једним потезом, ако се наместо бројева употребе слова не само за непознате величине, него и за познате. Када се уместо **посебних, одређених** бројева употребе *слова*, **општи бројеви**.

Све те разне задатке можемо овако исказати:

Два пријатеља удаљена s *километара крену једновремено један другоме у сусрет. Први прелази за час* **a** *километара други* **b** *километара. После колико часова ће се срести?*

Решење. Они пређу заједно за један час $(a + b)$ километара. У моменту сусрета њих двојица прешли су цео пут s. Број часова потребних за цео пут биће онолики колико пута се $(a + b)$ садржи у s, тј. непознати број часова x биће

$$x = \frac{s}{a+b}\,.$$

1. Кад је $a = 4\frac{1}{2}$, $b = 5$, $s = 39\frac{9}{10}$, биће

$$x = \frac{39\frac{9}{10}}{4\frac{1}{2} + 5} = \frac{21}{5}\,.$$

Сусрет ће бити после $4^{\text{h}}\ 12^{\text{mn}}$.

2. За $a = 4\frac{3}{4}$, $b = 5{,}600$, $s = 34\frac{1}{2}$ биће

$$x = \frac{34\frac{1}{2}}{4\frac{3}{4} + 5{,}6} = \frac{10}{3}\,.$$

Сусрет ће бити после $3^{\text{h}}\ 20^{\text{mn}}$.

3. Удаљење $s = 45^{\text{km}}\frac{3}{4}$, први прелази за 3 сата 17km, други за минут 75 m. То значи да је $a = \frac{17}{3}$, $b = \frac{75 \cdot 60}{1000} = 4{,}5$.

$$x = \frac{45\frac{3}{4}}{\frac{17}{3} + 4{,}5} = \frac{9}{2}\,.$$

Сусрет ће бити после $4^{\text{h}}\ 30^{\text{mn}}$.

18. — Из овог примера видимо следеће:

1. У аритметици имамо читаве збирке задатака, који су, по ономе како су исказани, *сви исти*, само се разликују по бројним подацима у њима. Такви су на пр. сви задаци *правила тројног*. Они сачињавају један исти тип задатака.

2. Све задатке истог типа решавамо *истим размишљањем, истим закључивањем. Размишљање и закључивање је независно од бројева.*

3. У резултатима које добијамо аритметичким решењем

$$\frac{21}{5},\ \frac{10}{3},\ \frac{9}{2},$$

$$\text{или } 4^{\text{h}}\ 12^{\text{mn}},\ 3^{\text{h}}\ 20^{\text{mn}},\ 4^{\text{h}}\ 30^{\text{mn}}$$

не видимо на који су начин везане и комбиноване познате величине. Због тога смо принуђени да обновимо исто размишљање и исто закључивање за сваки нов задатак.

4. Употребом слова ми смо многобројне задатке истог типа свели на један једини задатак. То је био **општи задатак.**

5. Решење једног општег задатка дато је обрасцем, у прошлом примеру обрасцем

$$x = \frac{s}{a+b}.$$

У обрасцу се виде све познате величине. Видимо и начин на који су оне међусобно везане. У њему видимо решења **свих задатака** те врсте. Према томе *алгебра је једна* општа, универзална аритметика.

19. Кинески проблем. — У једном кавезу налазе се фазани и питоми зечеви. Животиње имају 35 глава и 94 ноге. По колико има од сваке врсте животиња?

Аритметичко решење. — За решење оваквих проблема постоји у аритметици **метод лажног постављања.** Решавање овим методом почиње са две *претпоставке*, од којих је прва обично нетачна.

Прва претпоставка. Замислимо **да су свих 35 животиња** фазани. Тада је број ногу

$$35 \cdot 2 = 70.$$

Овај број је мањи од онога у задатку за

$$\mathbf{94 - 70 = 24} \textbf{ ноге.}$$

Друга претпоставка. Заменићемо једног фазана једним зецом. Тада се број ногу повећа за

$$4 - 2 = 2 \text{ ноге.}$$

За сваког новог додатог зеца број ногу се повећа за 2. Да би се број ногу повећао за 24, потребно је фазане заменити са онолико зечева, колико пута се 2 садржи у 24, тј.

$$\frac{24}{2} = 12.$$

Број зечева биће 12, број фазана 35 — 12 = 23.

Проба. Број глава је 23 + 12 = 35.

Број ногу 23 • 2 + 12 • 4 = 46 + 48 = 94.

Алгебарско решење. — Број фазана означићемо са x, а број зечева са y. Тада је

$$x + y = 35.$$

Број ногу фазана биће $2x$, број ногу зечева $4y$, па је укупан број ногу

$$2x + 4y = 94.$$

Ако ове две једначине напишемо једну испод друге, добићемо *систем од две једначине са две непознате:*

$$\begin{aligned} x + y &= 35 \\ 2x + 4y &= 94. \end{aligned}$$

Решењем овиx двеју једначина налазимо

$$x = 23, \; y = 12.$$

Код алгебарског решавања можемо увек сматрати да је проблем решен, чим смо успели да га напишемо алгебарским језиком помоћу једначина. *Проучавање једначина* је један од *најглавнијих задатака алгебре.*

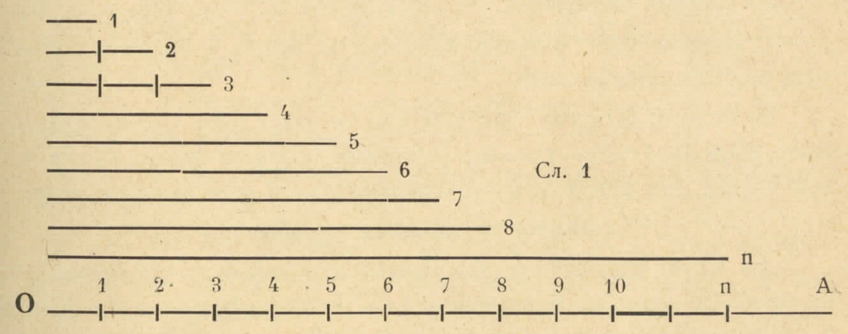
ПРВИ ДЕО

Понављање и допуњавање

ГЛАВА I

Сабирање, одузимање, множење и дељење једночланих израза

20. Очигледно претстављање бројева дужима. — Нацртајмо више дужи, тако да нам прва претставља јединицу, друга две јединице, трећа три јединице итд. Једна од њих да претставља дужину *од ма колико* — од n јединица.



Сл. 1

Тако можемо добити слику о величини појединих бројева.

21. Бројна линија. — Ово очигледно претстављање бројева може да се упрости. Уместо много линија узећемо само једну. На ту једну пренећемо све дужи које смо раније нацртали. При том ћемо пазити да почетне тачке падну све у једну тачку, на слици у тачку O.

Тада је број 2 претстављен дужином O2, број 8 дужином O8, број n дужином On итд.

Из слике се види да сваком броју у бројном низу одговара по једна потпуно одређена тачка на *бројној линији*, наиме крајња тачка пренетих горњих дужи. Ове тачке дају нам *слику* о *величини* и о *месту* или *рангу* броја у бројном низу. Тако је бројни низ *очигледно претстављен*. Уколико даље идемо по правој OA, утолико ће нам поједине тачке претстављати све веће бројеве.

22. — Остале тачке које се налазе између оних обележених са 1, 2, 3... одговарају разломцима и мешовитим бројевима. Све тачке између 0 и 1 одговарају правим разломцима (обичним и десетним) као:

$$\frac{1}{2},\ \frac{5}{12},\ 0{,}2;\ 0{,}006.$$

Тачке између 1 и 2 претстављају мешовите бројеве као:

$$1\frac{1}{2},\ 1\frac{47}{250},\ 1{,}2;\ 1{,}6666.$$

Напомена. Ми једнако говоримо бројна линија, а требало би да кажемо потпуније *бројна права линија*. Уопште кад год кажемо бројна линија, сматраћемо да је то у исто време и *права линија*.

23. Појам сабирања. — Шта значи 5 + 4, шта **a** + **b**?

1. Додати број **b** броју **a** значи од броја **a** бројити даље још за **b** јединица; или

2. Број **b** додати броју **a** значи одредити један трећи број који има исто толико јединица, колико имају бројеви **a** и **b** заједно. **a** и **b** зову се сабирци, резултат зове се **збир.**

сабирак + сабирак = збир.

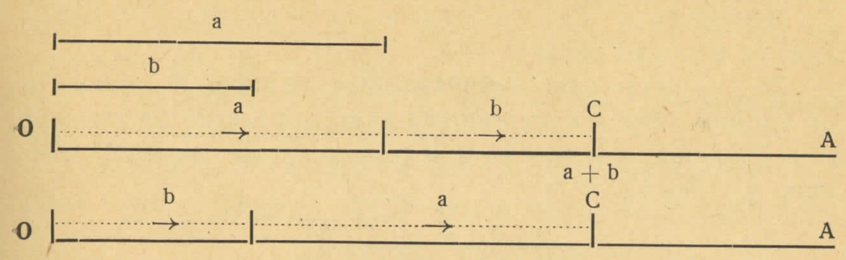
До истог резултата долазимо, ако пођемо од броја **a**, па бројимо даље за **b** јединица као и кад пођемо од броја **b**, па бројимо даље за **a** јединица. Тако је

$$\mathbf{a+b=b+a}.$$

Како се врши проба сабирања?

Напомена. Речју *збир* означавамо поред резултата **s** још и сам израз **a + b.**

24. Очигледно претстављање збира s = a + b. — Идемо по бројној линији (сл. 2) почев од тачке 0 за **a** јединица надесно, а затим истим правцем даље још за **b** јединица. Тада тачка C одговара збиру **s** = **a** + **b**.



Сл. 2

За усмено вежбање

1. Колико је теби сад година? Колико ће ти бити после 2 године? Како си то добио? Колика ће бити твоја старост после x година?

2. Који број долази одмах иза 11? Ако је m један цео број, који број долази одмах иза њега?

3. Ако је n један непаран број, који непаран број долази одмах после њега?

4. Ако је p један паран број, који паран број долази одмах после њега?

5. Који је број за 5 већи од a?

6. Који је број већи од m за 13, $6\frac{7}{8}$, 2,65?

7. Који је број за c већи од d?

8. Шта добијамо кад саберемо бројеве p и 2?

9. Колики је збир бројева s и t?

10. *Писмено.* Напиши три узастопна броја од којих је најмањи број n!

25. Појам одузимања. — Шта значи 11—6, шта **a**—**b**?

1. Број **b** одузети од броја **a** значи од **a** бројити за **b** јединица уназад; или

2. Одредити један трећи број, који кад додамо броју **b**, добијамо **a**.

Број **a** дакле треба схватити као збир, број **b** као један сабирак. Одузимањем се тражи други сабирак.

a је **умањеник, b умањилац,** резултат је **разлика.**

Умањеник — умањилац = разлика.

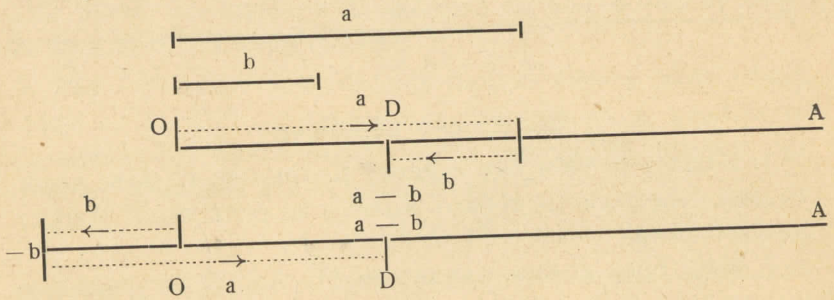
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{d}.$$

Збир — 1 сабирак = 2 сабирак.

Како се врши проба одузимања?

Напомена. — Реч *разлика* поред резултата d употребљава се и за сам израз $a - b$.

26. — **Очигледно претстављање разлике** $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. По бројној линији идемо најпре напред, надесно од тачне O за **a** јединица, а потом за **b** јединица натраг (налево). Стижемо у тачку D.



Сл. 3.

Код сабирања могли смо ићи произвољним редом. Да ли је то могуће и код одузимања?

Можемо ли да напишемо $-b + a = a - b$?

Да ли је свеједно, ако ми у једну кесу са орасима метнемо најпре 10 ораха, па заитм извадимо 6, или најпре из кесе извадимо 6, па затим у кесу ставимо 10, тј. можемо ли да напишемо

$$-6 + 10 = 10 - 6?$$

Напомена. — Неко може поставити себи питање како ћемо најпре извадити из кесе 6 ораха, ако у њој *нема ништа*, ако је она *празна*. У том случају бисмо се помогли, што бисмо узајмили 6 ораха. Кад се у њу метну 10 ораха, ми можемо вратити тих 6 ораха.

У свакомслучају у кеси ће бити 4 ораха *више*, неголи што је било раније.

Ако овај случај хоћемо очигледно да претставимо на бројној линији OA (сл. 3), морамо је најпре продужити налево од тачке O.

Дакле је исто $a - b$ и $-b + a$.

27. — Из ових посматрања на бројној линији можемо извести ова два **важна правила:**

1. *Знак који стоји испред једног броја претстављеног очигледно помоћу дужи показује нам смисао, којим треба да идемо, прелазећи ту дуж. Знак + значи ићи надесно, знак — налево. Ако испред броја не стоји никакав знак, замишљамо као да је ту знак +.*

2. *Ред којим треба ићи тј. ред по коме треба додавати или одузимати произвољан је.*

Напомена. У алгебри се често чују речи *свођење и спајање.* Оне обухватају обе радње, и сабирање и одузимање.

За усмено вежбање

1. Мени је сад x година. Колико ми је било пре 3 године?

2. Који је број за 30 мањи од a? Шта ће бити ако је $a = 50;\ 80;\ 125$?

3. Који је број за y мањи од 10?

4. Ако од једне пантљике која је дугачка b метара отсечемо 4 метра, колика је њена дужина после тога?

5. Даљина од Београда до Загреба је 430 километара. Ако је воз идући од Београда ка Загребу прешао b километара, колико има још да пређе до Загреба? Колико је далеко од Београда, кад је већ прешао Загреб за d километара?

6. Казаљке на једном часовнику дугачке су: већа a сантиметара, мања b сантиметара. Колико су удаљени врхови ових казаљки у 6 часова? Колико у 12 часова?

7. Колики је комплементан угао углу од 20^0? Колики углу од x^0?

8. Колики је суплементан угао углу од y^0?

9. Колико дијагонала се могу повући из темена једног петоугла? Колико из темена једног n — тоугла?

10. Збир два броја је s. Један од њих је 22. Колики је други број?

11. Збир два броја је t. Један од њих је p. Колики је други број?

12. Разлика два броја је 13. Умањеник је x. Колики је умањилац?

13. Колика је разлика бројева x и p?

14. За колико је мање p од 2?

15. Једна роба купљена је за x динара, а продата за y динара. Колика је зарада?

16. Једна роба купљена је за r динара, а продата за s динара. Колики је губитак?

17. За колико је веће f од g?

18. За колико треба повећати s да се добије t?

За писмено вежбање

1. Напиши број који је за b већи од c!
2. Напиши број који је за b мањи од c!
3. Напиши број који је за c мањи од b!
4. Напиши разлику бројева b и c!
5. Напиши три узастопна броја, од којих је n највећи!
6. Напиши три узастопна броја, од којих је n средњи број!
7. Од четири узастопна броја највећи је $n + 3$. Колики су остали?

28. Појам множења. — Шта значи 5 •3, шта **a • b**?

Број **a** помножити бројем **b** значи број **a** узети **b** пута као сабирак.

Дакле $a \quad b = \underbrace{a + a + a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ сабирака једнаких броју } a}.$

a зовемо **множеник, b множилац,** а резултат **производ.**

множеник множилац = производ.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p}.$$

Напомена. Назив *производ* задржавамо и за израз $a \cdot b$.

Као што је $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$,

исто тако је $a \cdot b = b \cdot a$,

тј. *у производу могу множеник и множилац да промене места. Због тога их зовемо једним именом* **чиниоци.**

Чинилац • чинилац = производ.

Како се врши проба множења?

Напомена 1. — Покаткад чинилац добије назив **коефицијент.** Тако у производу 2 •3, 2 је коефицијент броја 3, а 3 коефицијент броја 2. У производу $a \cdot b$, a је коефецијент броја b, а b је коефицијент броја a.

Напомена 2. — Ако у неком производу имамо и слова и бројеве, обично се производ одређених бројева узима за коефицијент. Тако би у производу:

$$2 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 6xy$$

био коефицијент број 6. Он се обично ставља на прво место и добија назив *бројни коефицијент*.

Напомена 3. Између слова, чинилаца, изоставља се знак множења.

За усмено вежбање

1. Како се краће пише $2 + 2 + 2$; како $a + a + a$; како $b + b$; како $x + x + x + x + x$?

2. Зашто је погрешно писати 203, уместо 20 • 3?

3. Килограм јабука стаје 4 динара. Пошто су x килограма? Шта ће бити, ако је $x = 2$; $x = 2\frac{1}{2}$; $x = 5{,}25$?

4. Ако килограм ораха стаје a динара, пошто су 3 kg?

5. Неко троши дневно m динара. Колико ће потрошити за једну недељу?

6. Један воз прелази 50km на час. Колико ће километара прећи за t часова?

7. Један бициклист прелази за секунд c метара. Колико ће прећи за t секунада?

8. Колико пара има у једном динару? Колико у x динара?

9. Колико месеци има у n година? Колико дана у m месеци?

10. Колико има дана у n. недеља; колико часова у p дана; колико минута у h часова?

11. x метара = dm; y km = m; z kg = g?

12. a литара = dl; b hl = 1; s m^3 = hl?

13. c km^2 = ha; d ha = a; f a = m^2?

14. v m^3 = dm^3; r тона = kg; s товара = kg?

15. Дужина једног правоугаоника је 6,m2, ширина 4m. Колика је његова површина? Колика ће површина бити, ако је дужина a метара, а ширина b m?

16. Шта се добија, кад помножимо 9 са a; 5,4 са b; c са 3,5; x са y?

17. Колики је производ бројева 7 и x; y и 0,5?

18. Сваки dm^3 једног тела тежак је s kg; колико су тешки у dm^3 тог истог тела?

19. Једна цев даје сваког часа r литара воде. Колико ће дати за t часова?

20. Једна крагна стаје x динара. Пошто је једно туце?

29. Појам дељења. — Шта значи 15 : 3, а шта **a : b**? Број **a** поделити бројем **b** значи наћи такав један број, којим кад помножимо **b** добијамо **a**.

a се може према томе да схвати као производ, **b** као један чинилац, дељењем се тражи други чинилац. Због тога се дељење узима као **обрнута радња множења**.

a је **дељеник, b делилац,** резултат зовемо **количник.**

Дељеник : делилац = количник
a : b = q
производ : 1 чинилац = 2 чинилац.

Како се врши проба код дељења?

Као знак дељења *уместо две тачке* можемо ставити и *разломачку црту*. Тада кажемо:

бројилац место **дељеник**
именилац место **делилац**
разломак место **количник.**

Напомена. — Назив *количник* задржавамо и за изразе $a : b$ и $\frac{a}{b}$.

За усмено вежбање

1. Неко купи две вежбанке за x динара. Пошто је платио једну вежбанку? Шта ће бити ако је x=2;x=3; x=3,50?

2. Неко пређе за сат y километара. Колико ће пређи за четврт сата?

3. Седам ученика добију a динара да поделе на једнаке делове. По колико ће сваки добити?

4. Шта се добија, кад се подели b и 3; 5 и m; m и n; a са a; a са n ?

6. Колика је половина од a; шестина од b; n-ти део од p?

7. Колико пута се p kg садрже у q kg?

8. x đm = m, y kg = t (тона), zl = hl?

9. Која је дуж m пута мања од n đm?

10. Која је тежина s пута мања од q kg?

11. Колики је један део, кад p m² једног имања поделимо на b једнаких делова?

12. Поделимо m ораха на s једнаких гомила; по колико ће ораха бити у свакој гомили?

13. Површина једног правоугаоника је f m². Дужина је a метара, колика је ширина?

14. Производ је p, један чинилац m, колики је други чинилац?

15. На колико једнаких гомила треба поделити v m³ дрва, ако сваки део треба да буде h m³?

16. Ако један број поделимо са x, добиће се y. Који је тај број?

17. Чиме треба помножити a, да се добије b?

За писмено вежбање

(Све четири радње)

1. Прочитај једначину 5 + 2 = 7! Покажи њену исправност на бројној линији! Како **се зову бројеви 5 и 2,** како резултат 7? Каква је рачунска радња сабирање? Објасни **на** бројној линији да је 5 + 2 = 2 + 5!

2. Прочитај једначину 7 — 2 = 5! Објасни **ток рачуна** на бројној линији! Како се зову бројеви 7, 2 и 5? Каква је рачунска радња одузимање?

3. Прочитај једначину 3 · 4 = 12! Покажи на бројној линији да је 3 • 4 = 3 + 3 + 3 + 3! Покажи на бројној линији да је 3 · 4 = 4 · 3! Како се зову бројеви 3, 4, 12? Шта је множење?

4. Прочитај једначине 12 : 4 = 3 и $\frac{12}{4}$ = 3! Шта је дељење?

5. На примерима 12cm : 4 = 3cm и 12cm : 4cm = 3 објасни дељење *раздељивање* и дељење *мерење* или *садржавање*! Објасни на бројној линији да је дељење скраћено одузимање једнаких умањилаца!

6. Напиши збир бројева c и *đ*!

7. Напиши разлику бројева c и *đ*!

8. Напиши производ бројева c и *đ*!

9. Напиши количник бројева c и *đ*!

10. Један ученик купи 3 књиге и сваку плати по x динара. Колико је свега платио? Ако му је после тога преостало још 5 динара, колико је имао новаца у почетку?

11. Колики је збир једног угла од 45⁰ и друга два, од којих је сваки по *đ*⁰?

12. Ако је један угао на основици равнокраког троугла m^0, колики је угао на врху?

13. Ако је a цифра десетица једног броја, а b цифра јединица, који је тај број?

14. Напиши број чије су цифре по реду a, b и c!

15. Напиши број са истим цифрама, само да иду обрнутим редом!

16. Напиши збир бројева, a, b и c!

17. Напиши производ бројева a, b и c!

18. Напиши производ бројева $\frac{3}{4}$, a, b и c! Шта је овде коефицијент?

19. Напиши производ бројева $\frac{3}{4}$, 4, x, y и z! Одреди коефицијент!

20. Шта добијамо, ако броју a додамо производ бројева b и c?

21. Напиши разлику броја a и производа бројева b и c!

22. Напиши количник из производа бројева b и c и броја m!

23. Напиши количник из броја a и производа бројева p и 2!

24. Напиши збир броја n и количника бројева p и 2!

25. Напиши разлику између броја a и количника бројева 2 и b!

26. Напиши број који је m пута већи од a!

27. Напиши број који је n пута мањи од a!

28. Изрази број који подељен са 2, даје број n!

29. Напиши *општи облик* свих парних бројева!

30. Изрази број који подељен са 3 даје количник m!

31. Изрази *општим бројем* све садржаоце броја 3!

32. Напиши број који подељен са 2 даје количник n и остатак 1!

33. Напиши *општи облик* свих непарних бројева!

34. Напиши *општи вид* бројева који подељени са 3 увек дају остатак 1!

35. Напиши *општи вид* бројева који при дељењу са 3 дају остатак 2!

36. Напиши *општи облик* бројева који су дељиви са 5!

37. Напиши *општи облик* бројева који нису дељиви са 5!

38. Како се краће пише $2 \cdot 2$; како $4 \cdot 4 \cdot 4$; како $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$? Како $a \cdot a \quad a$; $b \cdot b \cdot b \cdot b$; $x \cdot x \cdot x \quad x \cdot x$?

39. Како се зове производ једнаких чинилаца?

40. Шта је основа, а шта изложилац?

Скраћени говор

41. Која су правила краће и прецизније исказана овим једначинама:

$$a \cdot 1 = a \qquad 0 \cdot a = 0$$

$a+b = b+a$ (*комутативни закон сабирања*)

$a \cdot b = b \cdot a$ (*комутативни закон множења*)

$$a + b - b = a \qquad a - b + b = a$$

$$a + b - c = a - c + b$$

$$(a + b) \cdot m = am + bm \qquad (a - b) : m = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$$

$$\frac{a}{b} \cdot b = a \qquad \frac{a}{a} = 1 \qquad \frac{0}{a} = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \qquad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}?$$

42. Напиши алгебарским језиком правило за одређивање површине правоугаоника; правило за одређивање запремине правоуглог паралелопипеда!

43. Изрази алгебарским језиком однос између тежине, запремине и специфичне тежине; однос између пута, брзине и времена!

Напиши следеће реченице алгебарским језиком:

44. Број x већи је за 20 од броја b.

45. Троструко x веће је за 17 од броја y.

46. Шести део од m једнак је седмини од a.

47. Троструко p једнако је петоструком h.

48. А има x година, В је старији за 4 године. Збир њихових година је y.

49. Једно лице има a динара, друго b динара. Друго лице врати првом дуг од c динара. После тога имају једнаке суме.

50. Дељеник је a, делилац b, количник q, остатак r. Напиши чему је једнак дељеник!

51. Производ бројева x и y за три је мањи од збира бројева a и b.

52. Количник бројева x и y за пет је већи од разлике бројева a и b.

53. Кад се за *известан број метара* платна плати *известан број динара*, колико ће се динара платити за *толико и толико метара* платна?

Задатак најпре искажи алгебарским језиком! Затим одреди образац за непознати број метара платна! Најзад опште решење искажи обичним језиком, па начини упоређење између обичног и алгебарског језика!

Заграде (понављање)

54. Колико је $24 - 8 + 2$; $24 - (8 + 2)$; $24 - 8 - 2$; $24 - (8 - 2)$?

Практично упутство. — Ако се у заградама налазе одређени бројеви, *треба најпре израчунати изразе у заградама и на место заграда ставити тако добијене резултате.*

55. $35 - 17 - 8 + 5 =$; $\quad 35 - (17 - 8) + 5 =$;
$35 - 17 - (8 + 5) =$; $\quad 35 - (17 - 8 + 5) = ?$

Провери следеће једначине:

56. $(47{,}39010 + 3{,}11333 + 103{,}57 - 0{,}8756) - 13{,}19783 = 140.$

57. $0{,}57 - (0{,}23493 + 0{,}137) + (167{,}31 - 105{,}40807) = 168{,}164.$

58. $\left(10\frac{3}{5} + 3\frac{3}{5}\right) - \left(6\frac{7}{10} + 4\frac{2}{5}\right) = 2\frac{2}{5}.$

59. $\left(3\frac{2}{9} + 2\frac{1}{2}\right) - 6\frac{1}{3} + \left(5\frac{1}{11} - 4\frac{31}{66}\right) = \frac{1}{99}.$

60. $7\frac{3}{5} - \frac{5}{8} - \left(3\frac{5}{12} - 3\frac{7}{30}\right) - \frac{15}{16} = 5\frac{41}{48}.$

61. $47\frac{5}{27} - \left(3\frac{2}{3} + 31\frac{5}{54} + 2\frac{5}{8}\right) + \frac{43}{216} = 10$

62. $\left(\frac{3}{4} - \frac{27}{50}\right) + \frac{59}{100} - \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{16}\right) - \left(\frac{27}{80} - \frac{1}{40}\right) = 0.$

У следећим примерима ученик сам да стави заграде и да изврши груписање чланова, тако да рачун постане најлакши.

63. $928 - 75 - 228 + 75.$

64. $716 + 548 - 116 - 248.$

65. $23\frac{3}{5} + 6\frac{3}{4} - 18\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4}.$

66. $77\frac{7}{12} + 51\frac{5}{7} - 20\frac{3}{7} - 26\frac{3}{4}.$

67. $85{,}43 - 72{,}88 - 14{,}43 + 2{,}12.$

68. $9{,}36 + 8\frac{3}{8} - 2{,}36 - 2\frac{1}{8}.$

69. $55{,}3 - 13{,}5 - 24{,}7 + 9{,}6 - 18{,}2.$

70. $164{,}9 + 88{,}3 - 75{,}7 - 26{,}1 - 38{,}4 - 55{,}5.$

71. $887\frac{5}{24} - 163\frac{7}{24} + 66\frac{11}{24} - 75\frac{13}{24} - 43\frac{1}{24} - 102\frac{14}{24}.$

---

72. $24 + 8 \cdot 2 =$; $24 - 8 \cdot 2$; $24 + 8 : 2$; $24 - 8 : 2 = ?$

73. $10 \cdot \frac{2}{5} + 4$; $10 \cdot \frac{2}{5} - 4$; $24 \cdot 8 : 2$; $24 : 8 \cdot 2 = ?$

74. $\frac{60 - 12}{3} - \frac{35 - 8}{9} + \frac{6}{2} + 3 \cdot 2 = ?$

75. $\frac{48 - 12}{23 - 11} + \frac{28}{19 - 12} = ?$

76. $60 - 5 \cdot 3 + 6 : 3 =$; $\quad (60 - 5) \cdot 3 + 6 : 3 =$;
$60 - 5 \cdot (3 + 6) : 3 =$; $\quad 60 - 5 \cdot (3 + 6) : 3 =$;
$60 - (5 \cdot 3 + 6) : 3 =$; $\quad (60 - 5 \cdot 3 + 6) : 3 =$;
$60 - (5 \cdot 3 + 6 : 3) =$; $\quad (60 - 5) \cdot (3 + 6) : 3 = ?$

Практично упутство. — *Пошто се израчунају изрази у заградама и заграде замене тако добијеним резултатима, треба најпре извршити множење и дељење, па затим сабирање и одузимање.*

Изрази у бројиоцима и имениоцима разломака сматрају се као да су заграђени.

Ако имамо везано множење и дељење, радње треба извршити оним редом, како су назначене.

Провери следеће једначине:

77. $9900 : (280 : 5 + 162 : 9 \cdot 3) = 90.$

78. $(257 - 57 : 3 + 3 \cdot 34 + 300 : 6) : 13 = 30.$

79. $(220 : 44 + 44) \cdot 10 : 70 + 19 \cdot 7 = 140.$

80. $(247 \cdot 3\,005 + 1\,057\,486) : [49 \cdot (1\,000 - 417)] = 63.$

81. $(0{,}9893 : 0{,}13 - 6{,}4) \cdot (62{,}9 + 989{,}3 : 13) = 168{,}19.$

82. $9{,}893 : 0{,}13 - 72{,}79) \cdot (989{,}3 : 0{,}013 - 73\,800) = 7\,613.$

83. $\frac{0{,}23 \cdot 1{,}609 + 0{,}660528 : 0{,}297}{9{,}5999 : 1{,}7 - 0{,}07 \cdot 63{,}1} = 2{,}109.$

84. $\frac{3}{7} : \frac{1}{14} + \frac{13}{14} \cdot \frac{7}{13} = 6\frac{1}{2}.$

85. $\frac{3}{7} : \left(\frac{1}{14} + \frac{13}{14} \cdot \frac{7}{13}\right) = \frac{3}{4}.$

86. $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{8} : \frac{2}{3}\right) - \frac{1\frac{2}{3}}{6\frac{2}{3}} \cdot \frac{19}{20} + \frac{3}{7} \cdot \frac{6\frac{5}{12}}{3\frac{2}{3}} = 1.$

87. $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{7} + \frac{13}{14} + \frac{27}{28}} = \frac{1}{4}.$

88. $\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{5\frac{1}{16}}{3\frac{6}{7}+2\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$.

89. $\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}}\cdot\frac{1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{7}}=4.$

90. $\frac{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{7}{3}+\frac{11}{12}}\cdot\frac{4\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{5}{12}}=1.$

340
116
224

91. $\frac{31\frac{1}{3}-22\frac{1}{5}}{11\frac{1}{5}-1\frac{1}{7}}:1\frac{49}{88}+2\frac{5}{12}=3.$

92. $\frac{36\frac{7}{8}:9\frac{5}{6}+103\cdot\frac{7}{270}-18:9\frac{9}{10}}{\left(2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}:5\frac{1}{4}\right)\cdot 4\frac{9}{10}-3\frac{9}{10}:3\frac{3}{25}}=\frac{347}{704}.$

93. $\frac{16{,}5\cdot 4\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}}=28.$ 94. $\frac{0{,}27\cdot 4\frac{1}{6}}{6\frac{1}{4}}=0{,}18.$

95. $\frac{7{,}28\cdot 2{,}25}{6\frac{1}{15}}=2{,}7.$ 96. $\frac{70-24\frac{1}{2}:10}{7-4{,}2}=24{,}125.$

97. $\frac{\left(0{,}3+6\frac{3}{50}\right)\cdot 4{,}8}{120\cdot(31-28{,}8:16)}=0{,}014375.$

98. $\frac{7{,}392\cdot 1\frac{1}{11}}{1{,}056\cdot 1\frac{5}{6}-1{,}056:1\frac{5}{6}}=8{,}4.$

99. $\frac{\frac{2}{3}-\frac{3}{8}:\frac{4}{5}+\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\right):\frac{4}{5}+\frac{1}{2}}=\frac{67}{83}$.

100. $\frac{\frac{2}{3}-\frac{3}{8}:\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\right):\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)}=1\frac{24}{35}.$

101. $\frac{\left(3\frac{3}{4}-1\frac{5}{6}:\frac{7}{12}\right)\cdot\left(2\frac{11}{12}\cdot\frac{9}{10}-2\right)}{\left(4\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{91}-1:3\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4\frac{2}{3}-1\frac{7}{8}:\frac{9}{14}\right)}=6\frac{1}{14}.$

---

102. $[(2+4)\cdot 3+8]\cdot 7=$

103. $\{[(3+5)\cdot 4-4]\cdot 2:8\}\cdot 2-14+11=$

104. $\{60-[25-(10-2)\cdot 2]\cdot 2\cdot 2\}+8\cdot 25=$

Практично упутство. — *Ако имамо више заграда, ослобађамо се најпре оних, које су највише унутра.*

Провери следеће једначине:

105. $\left[\left(1-\frac{7}{8}\right)\cdot 3\frac{3}{7}+\frac{23}{28}\right]:\left[\left(2\frac{5}{28}+3\frac{29}{135}\right):37\frac{121}{135}\right]=10.$

106. $9{,}43+[6{,}806+0{,}08584:(21-0{,}63)]:[6712{,}2-$ $-73{,}7:(0{,}92-0{,}909)]=10.$

107. $\{[(47\cdot 281-12389)\cdot 103-13\;\;59\cdot 101]\cdot 7+78\}\cdot$ $\cdot(1352-15\cdot 87)-2\cdot 5\cdot 8\cdot 4387=1\,885\,629.$

Напомена — Примери за чије је решење потребан дуги рад намењени су домаћем вежбању. У случају да ученик наиђе на тешкоће не треба одмах да се обраћа за помоћ. Тек после више неуспелих покушаја може да се обрати своме наставнику за упутства.

Израчунавање алгебарских израза

Алгебарски израз је спој од више слова и бројева простим рачунским знацима. На пр.

$$\frac{s}{a+b},\qquad \frac{3a-7}{2c},\qquad 4a+3b-c.$$

Кад на место слова ставимо бројеве, па извршимо назначене рачунске радње, кажемо да смо **израчунали алгебарски израз.**

Број који добијемо, кад израчунамо један алгебарски израз, зове се **бројна вредност алгебарског израза.**

108. Какву бројну вредност добијају алгебарски изрази:

$2a+3b$ кад је $a=3,\ b=3;$

$a-b+c$ кад је $a=10,\ b=8,\ c=4;$

$a-(b-c)$ кад је $a=50,\ b=20,\ c=15;$

$$\left.\begin{matrix}3a+4b-c\\3a+(4b-c)\\3a-(4b-c)\end{matrix}\right\}\text{ кад је } a=6{,}5,\ b=5{,}5,\ c=9?$$

109. Какву бројну вредност добијају алгебарски изрази:

$a+b:c$

$(a+b):c$

$a-b:c$

$(a-b):c$

$3a+b:4$

$(3a+b):4$

$3(a+b):4$

$3(a+b:4)$

$6a+12:3$

$(6a+12):3$

$a\cdot 3+12$

$a\cdot(3+12)$

кад је 1) $a=40;\ b=36,\ c=4;$

2) $a=\frac{3}{5},\ b=\frac{3}{7},\ c=\frac{3}{2}?$

110. Да се израчуна x из следећих *образаца.*

1. $x = \frac{a+b}{2} \cdot h$, кад је $a = 3{,}4$; $b = 1{,}8$; $h = 1{,}6$.

2. $x = (R^2 - r^2) \cdot \pi$, кад је $R = 9{,}43$; $r = 5{,}36$; $\pi = 3{,}14$.

3. $x = \frac{100 \cdot i}{k \cdot t}$, кад је $i = 155{,}40$; $k = 7400$; $t = \frac{7}{12}$.

111. Да се x одреди из обрасца

$$x = ab + bc - ad.$$

кад је $a = \frac{17}{3}$, $b = \frac{19}{4}$, $c = \frac{13}{6}$, $d = \frac{5}{12}$.

112. Колико је у у обрасцу

$$y = \frac{a \cdot b \cdot c}{d + e - f},$$

кад је $a = \frac{2}{9}$, $b = 1\frac{2}{3}$, $c = 2\frac{2}{5}$, $d = \frac{7}{9}$, $e = \frac{5}{12}$, $f = \frac{3}{4}$?

113. Да се израчуна z из обрасца

$$z = \frac{m - n \cdot p}{q \cdot r + s}, \quad = \frac{(m-n)\cdot p}{q\cdot(r+s)}$$

кад је $m = 15\frac{3}{4}$, $n = \frac{14}{3}$, $p = 1\frac{5}{6}$, $q = \frac{1}{5}$, $r = 22\frac{1}{3}$, $s = \frac{91}{36}$.

114. Колико је x у обрасцу

$$x = a^2 + b^2 - c^2$$

кад је $a = 1{,}23$; $b = 0{,}48$; $c = 0{,}096$?

115. Да се одреди у из обрасца

$$y = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{\cancel{(a-b)}(a+b)}{\cancel{a-b}} =$$

кад је $a = 7{,}346$; $b = 2{,}654$.

Функција

116. Страна једног равностраног троугла је x сантиметара. Колики је обим тога троугла?

У овом задатку скренућемо пажњу на две ствари:

1. Решење задатка је: кад је једна страна равностраног троугла x сантиметара, обим ће бити $3x$ сантиметара, пошто су све три стране једнаке. Овај резултат не даје један одређени обим, већ казује како се одређује обим *свих* равностраних троуглова. Из њега читамо да се обим равностраног троугла добија, кад се дужина једне стране помножи са 3.

2. Кад изговоримо речи *страна равностраног троугла,* ми себи претстављамо једну дуж коју можемо измерити. Страна равностраног троугла је једна величина коју ми можемо претставити **бројем.**

Сви равнострани троугли имају исти облик. По величини пак могу бити врло разнолики. Можемо имати бескрајно много равностраних троуглова и да сви буду различите величине. Кад говоримо о равностраним троуглима разне величине ми у исто време мислимо и о томе, да ти разни троугли имају и *различите стране.* Већи равностран угао има и већу страну.

Ту чињеницу, да стране различитих равностраних троуглова могу бити различите по величини, изражавамо у математици тиме што кажемо **да је страна равностраног троугла променљива величина.**

Самим тим што смо рекли у прошлом задатку да је страна равностраног троугла x сантиметара, јасно смо истакли да је то променљива величина. Наместо слова x можемо стављати бројеве које хоћемо.

Појам променљиве величине у математици је врло важан.

Нама ће сад бити јасно кад кажемо *да је и обим равностраног троугла променљива величина.* Очевидно је да ће обим добијати све друге и друге вредности кад се страна мења.

Промене за **обим могу се згодно видети,** кад се начини оваква табела:

страна x	1	2	3	4		
обим $3x$	3	6	9	12		

Посматрајући ове две променљиве величине, можемо о њима још нешто рећи. Видимо још да величина обима **зависи од промена** стране. Обим равностраног троугла и страна везани су међусобно, тако да свакој вредности стране одговара потпуно одређена вредност обима. Промена једне величине повлачи одмах и промену друге. *У том случају кажемо једна величина је* **функција** *оне друге.* **Обим је функција стране.**

117. У следећем примеру одреди како се мења y, кад x добија редом вредности 1, 2, 3, 4. ....

$$y = 2x + 1.$$

Начини табелу! *Овде је у функција величине x.*

118. Ако је $y = 3x + 5$, попуни следећу табелу:

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

119. Један правоугаоник има површину 300m². Дужина његова је x метара. Колики је обим?

Ако обим обележимо са O, имамо

$$O = 2x + \frac{600}{x}.$$

После тога попуни следећу табелу и додај још потребна објашњења:

x	5	10	15	20	25	30
O						

Примера за променљиве величине у пракси има врло много.

120. Обим круга дат је обрасцем $0 = 2r\pi$, где је са 0 означен обим, са r полупречник круга, а π износи $\frac{22}{7}$. Одреди обим круга кад је $r = 9$ *cm*; $r = 7$ *cm*; $r = 6$ *cm*!

Кад се полупречник мења, мења се обим круга. *Обим круга је функција полупречника.*

121. Површина круга дата је обрасцем $p = r^2\pi$, где је p површина, r полупречник, а $\pi = \frac{22}{7}$. Одреди површину круга кад је $r = 7$ *cm*; $r = \frac{3}{2}$ *cm*; $r = 2\frac{1}{2}$ *cm*; $r = 3,^{cm}5$!

Кад полупречник круга расте и површина расте, кад се полупречник круга смањује и површина бива мања. Површина круга зависи од полупречника. *Површина круга је функција полупречника.*

122. Кад тело слободно пада, пређени пут за време t секунада дат је обрасцем

$$s = \frac{gt^2}{2}, \text{ где је } g = 9,^{m}81.$$

Пређени пут је функција времена.

Одреди пут који тело пређе за 6 секунада!

132. Попуни празна поља у следећој табели:

x	0	1	2	3	4	5
$2x$						
x^2						
$3x$						
x^3						

Напомена 1. — Кад говоримо о једној **функцији од x,** ми обично мислимо на један алгебарски израз, у коме поред других бројева има и слово x или који степен од x. На пр. алгебарски израз

$$2x^2 + 3x + 7$$

је функција од x. Таква функција у којој су бројеви и слова везани простим рачунским знацима зове се *алгебарска функција.*

У математици за обележавање функције постоје нарочити знаци, нарочити *симболи.* То су најчешће $f(x)$ и $F(x)$. Чита се *функција* од x, или још краће f од x (изговори еф од икс). Тако горњу функцију можемо написати

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 7$$

а $f(4)$ би на пр. значило бројну вредност функције $2x^2 + 3x + 7$, кад место x ставимо 4. Тако је

$$f(4) = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 7 = 51$$
$$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 7 = 12$$
$$f(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 7 = 7.$$

124. Ако је $f(x) = 2x + 3$, нађи вредност

$$f(5),\ f(1),\ f(\tfrac{1}{2})!$$

125. Ако је $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$, колико је $f(1)$ и $f(2)$?

126. Ако је $f(x) = x^2 - 6x + 9$, нађи $f(0)$ и $f(6)$!

127. Ако је $f(x) = x + \frac{1}{x}$ покажи да је $f(2) = f(\frac{1}{2})$!

128. Ако је $f(x) = 3x - 2$, а $F(x) = 4x + 5$, нађи вредност

$$f(1) + F(2) \text{ и } F(3) - f(4)!$$

Напомена 2. — Ми смо овде променљиву величину стално бележили са x. То је у математици најчешћи случај. Функција се бележи словом y. Па кад хоћемо да кажемо уопште да је y функција од x, ми пишемо

$$y = f(x).$$

Али то не мора увек бити. И свако друго слово може се употребити као ознака за променљиву величину. Тако обим круга је функција полупречника, па пишемо

$$o = f(r).$$

Површина круга је функција полупречника

$$p = f(r).$$

Површина квадрата је функција стране

$$p = f(a),$$

где је p површина, а a страна квадрата.

Пређени пут је функција времена

$$s = f(t).$$

129. Посматрајмо низ узастопних непарних бројева

1,3,5,7,9,11,13...

Збир од *колико хоћемо*, од n узастопних првих **непарних** бројева добијамо по обрасцу:

$$s = n^2.$$

На пр. ако тражимо збир од 5 првих непарних бројева, тај збир ће бити

$$s = 5^2 = 25.$$

Одиста је $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Овде је било $n = 5$.

1. Одредити збир 20 првих непарних бројева! ($n = 20$.)
2. Колики је збир непарних бројева од 9 до 37 **закључно?**

130. Збир s од првих n узастопних парних бројева је дат обрасцем

$$s = n \cdot (n + 1).$$

1. Одреди збир 10 првих парних бројева!
2. Одреди збир парних бројева од 6 до 42 закључно!

131. Посматрајмо природни бројни низ

1,2,3,4,5,6,7,...

Збир од *колико* хоћемо, од n првих узастопних бројева дат је обрасцем

$$s = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

1. Одреди збир 16 првих бројева природног бројног низа!
2. Реши *Гаусов задатак* по овом обрасцу! (Види Аритметику за I р. стр. 86!)

132. Збир квадрата првих n узастопних бројева

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots\ldots$$

дат је обрасцем

$$s = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

1. Одреди збир квадрата 10 првих бројева!
2. Одредити збир квадрата свих бројева од 8 до 20 закључно!
3. Одредити збир квадрата свих бројева између **12 и 35!**

135. Збир s кубова првих n узастопних бројева

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \ldots\ldots$$

дат је обрасцем

$$s = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2.$$

1. Одреди усмено збир кубова прва два и прва три броја!
2. Одреди збир кубова првих 10 бројева!
3. Нађи збир кубова од 7 до 21 закључно!
4. Нађи збир кубова између 10 и 30!

134. Колико је $4a + 3a$?

Решење. По дефиницији множења је

$$4a = a \cdot 4 = a + a + a + a,$$
$$3a = a + a + a.$$

Сабирањем је $3a + 4a = a + a + a + a + a + a + a = 7a$.

Слично томе је $8a - 5a = (8 - 5) \cdot a = 3a$.

Напомена 1. — У алгебри се производ од слова и броја, или производ од више бројева и слова зове **прост алгебарски израз, једночлани израз или моном. На пр.** $5a$, $7bc$, $\frac{3}{4}xyz$.

Израз $3x + 4y - 2z$ био би **сложен алгебарски израз, вишечлани израз,** или **полином.** Он се састоји из три **члана,** три **монома** $3x$, $4y$ и $-2z$.

Кад полином има два члана зове се **бином,** кад има три члана **трином.**

Напомена 2. — У изразу $5a$ бројеви 5 и a не смеју се сматрати као чланови. То су чиниоци производа $5a$.

134. Упрости усмено (уколико је могућно):

1. $n + n + n + n$
2. $m + m + m + m + m$
3. $3x + 4x$
4. $11b - 7b$
5. $3ab + 4ab$
6. $2ab + 3ba$
7. $3z - 3z$
8. $ab - ba$
9. $2x + 3x + 5x$
10. $b + 2b + 3b$
11. $6a + 7a - a$
12. $7c - 3c + 4c$
13. $6a + 0$
14. $6a - 0$
15. $0 + 2b - b$
16. $4a - 2a + 5$
17. $2a + b$
18. $2a + 3a + b + 4b$ $= 5a + 5b = 5(a+$
19. $x + 14 - 14$
20. $z - 18 + 18$
21. $3x + 3x + 3x + 3x$
22. $3x \cdot 4$
23. $4 \cdot 2x$
24. $2y + 2y + 2y + 2y + 2y$
25. $2y \cdot 5$
26. $6 \cdot 2y$
27. Збир 4 једнака сабирка је $12a$, колики је сваки сабирак?
28. $6x : 3$
29. $20b : 5$

Напомена. — Сводити се могу само **слични мономи,** тј. *који се разликују само по коефицијенту.*

135. $121n + 325n =$
136. $53t + 72t + 83t =$
137. $9{,}8m + 11{,}2m + 12{,}4m + 0{,}8m =$ 342m
138. $16{,}386a + 18{,}925a + 25{,}39b + 1{,}2b =$ 35,311a+26,59b
139. $16\frac{3}{4}ab + 28\frac{5}{12}ab + 49\frac{11}{15}ab + 23\frac{17}{20}ab + 25\frac{1}{2}ab =$
140. $92m - 51m =$; $\frac{5}{12}x - \frac{7}{18}x$; $347q - 1{,}25q =$ 345,75

41m

141. $9t - 4t - 2t =$ (Израчунавање да иде редом.) 3t
142. $9x - 3x + 5x + 8x - 9x - x =$ 9x
143. $15n - 6n - n - n + 9n - 7n + 2n - 11n =$ 0
144. $5{,}6a + 1{,}4a - 2{,}5a - 0{,}8a + 1{,}3a - 4{,}9a =$ 0,1a
145. $3y^2 + 7y^2 - 4y^2 - 2y^2 =$ $4y^2$
146. $48pq + 12pq - 13pq - 29pq + 4pq =$ 22 pq

Напомена. — Ученик треба будном пажњом да се чува од механизирања тј. да на пр. не схвати да је $48ab + 12ab$ исто што и 48 јабука + 12 јабука. Слова нам свуда значе бројеве. Овде неименоване бројеве. ab значи производ два неименована броја. $48ab + 12ab$ је слично што и $48 \cdot 6 \cdot 5 + 12 \cdot 6 \cdot 5$.

$$48ab + 12ab = (48 + 12)ab$$
$$48 \cdot 6 \cdot 5 + 12 \cdot 6 \cdot 5 = (48 + 12) \cdot 6\ \ 5.$$

147. $32ar - .14ar + 7ar - 19ar + 13ar - 18ar =$
148. $9mn + 17mn - 12mn - 8mn + 15mn - 19mn =$
149. $23xy - 15xy + 7xy - 11xy - 4xy + xy =$
150. $1{,}8ab - 0{,}6ab + 0{,}8ab - 0{,}7ab - 0{,}4ab + ab =$
151. $4{,}6tu - 0{,}9tu - 0{,}7tu - 2{,}8tu + tu - 1{,}2tu =$
152. $12a^3 + 4a + 7a^2 - 3a - 3a^2 - 3a^3 =$
153. $8a^2b + 6ab^2 - 5ab^2 - 5a^2b + 9ab^2 + 9a^2b =$ $12a^2b$

154. Ако је $x + 9 = 17$, колику вредност претставља слово x?

Решење:

Ако је $x + 9 = 17$
и како је $8 + 9 = 17$
то је $x = 8$.

155. Ако је $9 - y = 4$, колико је y?

Решење:

Ако је $9 - y = 4$
и како је $9 - 5 = 4$
то је $y = 5$.

Слично овим примерима одреди непознати број у следећим случајевима:

156. $x + 12 = 13$ 157. $x + 8 = 18$ 158. $y + 16 = 29$
159. $x - 6 = 14$ 160. $y - 23 = 5$ 161. $t - 4 = 3$

10 13
20 28 7

162. Ако је $3z + 4 = 19$, колико је z?

Решење:

Ако је $3z + 4 = 19$
и како је $15 + 4 = 19$
то је $3z = 15$;
и како је $3 \cdot 5 = 15$
то је $z = 5$.

163. Ако је $\frac{y}{4} = 2$, колико је y?

Решење.

Ако је $\frac{y}{4} = 2$
и како је $\frac{8}{4} = 2$
то је $y = 8$.

На исти начин одреди непознате величине у следећим примерима:

164. $9z = 45$. 165. $7t = 4$'. 166. $18s = 54$.
167. $\frac{\lambda}{2} = 12$. 168. $\frac{a}{2} = 5$. 169. $\frac{t}{4} = 4$.
170. $\frac{m}{7} = 7$. 171. $\frac{48}{x} = 3$. 172. $\frac{30}{y} = 10$.

Напомена. — Ученик би у свима овим примерима могао доћи до решења усмено одмах и непосредно. Али је веома корисно да све примере реши на начин, како је овде показано.

173. $\frac{20}{y} = 5$. 174. $\frac{28}{y} = 4$. 175. $\frac{32}{r} = 4$.
176. $2w + 7 = 19$. 177. $3y + 9 = 18$. 178. $4x + 6 = 18$.
179. $6t + 4 = 46$. 180. $4x + 9 = 25$. 181. $5y + 6 = 31$.
182. $8z + 2 = 34$. 183. $9t + 7 = 52$. 184. $3p + 6 = 3$.
185. $2q - 5 = 9$. 186. $4u - 8 = 4$. 187. $6s - 18 = 0$.
188. $12 - 2y = 10$. 189. $7 + 6t = 37$. 190. $26 - 4d = 6$.
191. $\frac{x}{3} + 8 = 10$.

Решење.

Ако је $\frac{x}{3} + 8 = 10$
и како је $2 + 8 = 10$
то је $\frac{x}{3} = 2$;
и како је $\frac{6}{3} = 2$
то је $x = 6$.

20 II

−3−4+1 24

192. $\frac{t}{4} - 2 = 3.$ 193. $\frac{x}{3} + 4 = 3.$ 194. $\frac{s}{6} - 1 = 3.$

195. $y^2 = 49.$

Решење:

Ако је $y^2 = 49$
и како је $7^2 = 49$
то је $y = 7.$

196. $t^2 + 2 = 18.$

Решење:

Ако је $t^2 + 2 = 18$
и како је $16 + 2 = 18$
то је $t^2 = 16;$
и како је $4^2 = 16$
то је $t = 4.$

197. $x^2 = 100.$ 198. $2x^2 = 18.$ 199. $x^2 - 10 = 54.$

200. $5y^2 = 80.$ 201. $100 - \mathbf{w}^2 = 19.$ 202. $t^3 = 1.$

203. $\mathbf{x^3} = 8.$ 204. $2t^3 = 54.$ 205. $\frac{s^3}{2} = 32.$

206. Стави у изразу $a + 5$ наместо a вредности 10, 11, 12...! Како се мења збир, кад један сабирак расте?

207. Стави наместо a вредности 10, 9, 8...! Како се мења збир, кад један сабирак опада?

208. Какву вредност има $x - 5$ за $x = 10, 11, 12$...! Како се мења разлика, кад умањеник расте?

209. Стављај у изразу $10 - x$ за x редом 1, 2, 3, 4, 5..., затим 9, 8, 7...! Како се мења разлика, кад умањеник расте, а како, кад умањилац опада?

Шта ће бити, ако место x ставимо 11?

ГЛАВА II

Негативни бројеви

30. — Узећемо да посматрамо како се мења вредност једне разлике

$$d = a - b,$$

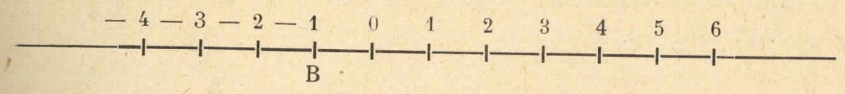
кад a остаје непромењено, на пр. 5, а напротив за b узимамо све могуће вредности 1, 2, 3, 4...

$b = 1$ даје $d = 5 - 1 = 4$
$b = 2$ „ $d = 5 - 2 = 3$
$b = 3$ „ $d = 5 - 3 = 2$
$b = 4$ „ $d = 5 - 4 = 1$
$b = 5$ „ $d = 5 - 5 = ?$

У последњем случају не преостаје „ништа“. За ову *празнину* уведен је знак „нула“ и од њега начињен број који се у природном бројном низу ставља испред 1. Тако на бројној линији почетној тачки 0 одговара број нула.

$b = 5$ даје $d = 5 - 5 = 0$
$b = 6$ „ $d = 5 - 6 = ?$

Овде треба од тачке 5 ићи уназад за 6 јединица. Долазимо до једне тачке B, која лежи за једну јединицу лево од тачке 0, коју бележимо са $0 - 1$, или краће $- 1$.



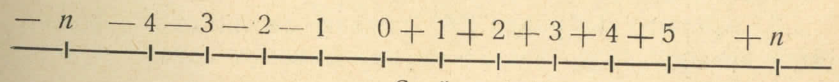
Сл. 4.

Исто тако добијамо за

$b = 7 \quad d = 5 - 7 = 0 - 2 = - 2$
$b = 8 \quad d = 5 - 8 = 0 - 3 = - 3$ итд.

Бројеви $- 1, - 2, - 3, \ldots - n$ зову се *негативни* бројеви. Негативни бројни низ је само продужење преко нуле, уназад, природног бројног низа.

Бројеви којима смо се досада служили у аритметици зову се **позитивни** бројеви. Кад хоћемо то нарочито да истакнемо, ми испред њих стављамо знак $+$. Тада бројна линија изгледа овако:



Сл. 5.

Напомена 1. — Сваки негативан број може се сматрати као разлика, у којој је умањеник нула, а умањилац број n.

$$-n = 0 - n.$$

Напомена 2. — Позитивни и негативни бројеви зову се једним именом **релативни бројеви.** Зову се још и **алгебарски бројеви,** за разлику од бројева без знакова који се зову **аритметички бројеви.** Кад хоћемо у рачунима нарочито да истакнемо алгебарске бројеве ми их заграђујемо заједно са њиховим знацима. Тако пишемо:

$$(+3),\ \left(+\frac{3}{4}\right),\ \left(+\frac{1}{6}\right),\ (-12{,}4).$$

Напомена 3. — **Апсолутна вредност** једног алгебарског броја је аритметички број који добијамо кад изоставимо знак. **На пр.**

апсолутна вредност алгебарског броја $(+4)$ је 4.

„ „ „ „ $\left(-\frac{9}{2}\right)$ је $\frac{9}{2}$.

31. Једнакост алгебарских бројева. — За два алгебарска броја кажемо да су једнаки, ако имају *једнаке апсолутне вредности и исти знак.* У противном случају су *неједнаки.* За два алгебарска броја који имају *једнаке апсолутне вредности,* а *супротне знаке,* кажемо да су то **супротни бројеви.** На пр.

$$(+7) \text{ и } (-7),\ \left(+\frac{2}{3}\right) \text{ и } \left(-\frac{2}{3}\right).$$

За овакве бројеве је врло леп назив *симетрични бројеви.*

ПРИМЕНЕ ПОЗИТИВНИХ И НЕГАТИВНИХ БРОЈЕВА

32. — Негативни бројеви иако на први поглед чудни и необични, потпуно одговарају стварности. То су бројеви много примењени, много корисни. Они се примењују код величина, које се могу мерити у два смисла. Нека ученик одговори на ова питања:

1. На датој правој линији одредити једну тачку M, која је од дате тачке 0 удаљена 3cm.

2. Јуче је температура била 3^0, данас је 4^0. Да ли је топлије данас или јуче?

3. Архимед је рођен 287 године. Је ли ово довољно јасно казано?

4. Један трговачки путник путује стално на линији Суботица — Београд — Ниш. У понедељак се налази 50km од Београда, у уторак 40km. Колики је пут начинио од понедељника до уторника?

33. Примање и дуговање. — Један чиновник прима месечну плату 3000 динара. Он потроши за месец дана 2800 динара. Какво је његово новчано стање на крају месеца?

Други чиновник има исту толику плату, али је у тежем положају од првог. Његови месечни трошкови износе 3200 динара. Какво је његово новчано стање на крају месеца?

Данас се у обичном говору често чује за овај други случај: он је у *минусу* за 200 динара. Математичким језиком то пишемо — 200 динара. Кад кажемо да је нечије имовно стање — 200 динара, ми мислимо *да се он задужио 200 динара.*

За првога кажемо да има на крају месеца *плус* 200 динара. То пишемо + 200 динара.

Имовина на крају месеца добија се, кад се од целокупног примања одузму трошкови. Код првог је 3000 дин — 2800 дин = 200 дин имовина на крају месеца. Код другог је 3000—3200, што у аритметици није могућно извршити. У алгебри ми кажемо 3000 динара — 3200 динара = — 200 дин.

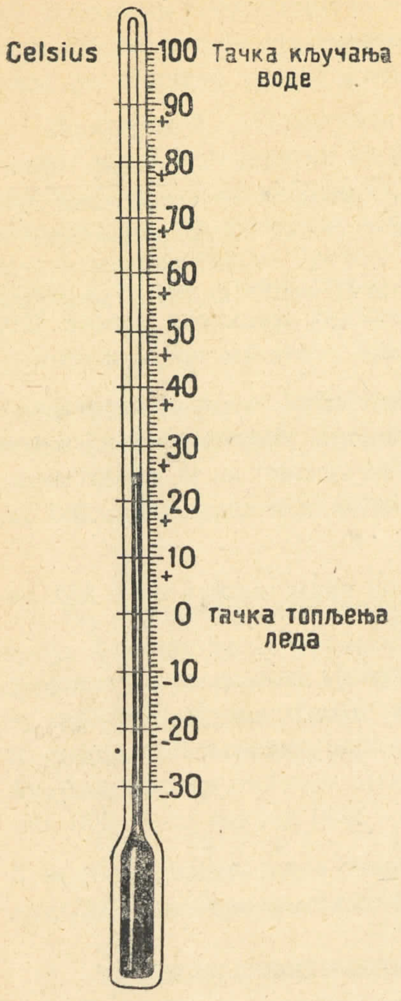
У овом случају бројењем преко нуле, уназад, — 1, — 2, — 3 итд. ми стварно бројимо 1 динар дуга, 2 динара дуга, 3 динара дуга итд.

За усмено вежбање

1. Какво је имовно стање једног ученика, кад има 50 динара, а дугује 49 динара; који има 50 динара, а дугује 51 динар; који има 3 динара, а дугује 25 динара; који има 7 динара, а дугује 70 динара?

2. Колико је 100 дин — 80 дин; 100 дин — 130 дин; 100 — 130; 4 — 6; 5 — 20; 12 — 0; 0 — 12?

3. *Искажи правило како се одузима већи број од мањег!*



34. Термометар. — На Целзијусовом термометру тачка мржњења воде или топљење леда је обележена са 0⁰, а тачка кључања са 100⁰. Кад исказујемо температуре изнад нуле, ми испред броја изговарамо реч *плус*, а кад изговарамо температуре испод нуле, казујемо испред броја реч *минус*. На пр. температура човечјег тела је + 37⁰ С, жива мрзне на — 39⁰ С.

За усмено вежбање

1. Једна течност на температури + 20⁰ расхлађена је за 30⁰. На којој је температури сада?

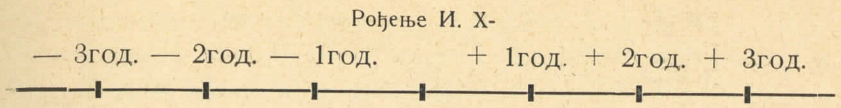
2. За колико степени треба да се расхлади жива, да би смрзла, ако је сад на + 10⁰ С?

3. Алкохол мрзне на — 112⁰ С а кључа на + 78⁰ С. За колико степени треба да се загреје алкохол који мрзне, да би прокључао?

4. Напољу је — 20⁰ С. У соби је + 18⁰ С. Колику промену има да осети лице, које уђе у собу?

35. Време. — *Ми* бројимо године од Христовог рођења. Кажемо: Србија је покорена од Турака године 1459 после Хр. р. или године + 1459. *Еуклид* је написао геометрију око године 300 пре Хр. р. или године — 300. Усвојено је да се време које је прошло бележи знаком —, а време које ће тек наступити знаком +.

Напомена, — При бројењу година не постоји година „нула“.



Сл. 7.

36. — Ово су типични случајеви, где се јављају позитивни и негативни бројеви. На њих се још често наилази при мерењу изнад и испод морске површине, при исказивању географске ширине и дужине.

Речи позитиван и негативан чују се врло често у науци и обичном животу. У физици кажемо позитивна и негативна брзина, позитиван и негативан рад, позитиван и негативан електрицитет, итд.

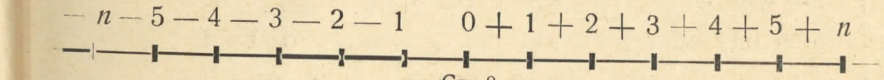
У обичном животу кажемо позитиван и негативан успех, позитивна и незативна особина итд.

Нека ученик искаже обичним говором следеће реченице: — 18 динара добити; — 43 динара губитка; — 8 километара на север; — 3 километра на исток; — 200 динара дуга; — 12 метара изнад морске површине; температура се попела за — 4⁰; један болесник је добио у тежини — 2 kg; животне намирнице пале су за — 5 поена; једна армија је напредовала — 9km; становништво једног града је порасло за — 2 000; један човек уштеђује годишње — 600 динара; један часовник заостаје за дан — 4 минута.

Изрази као губитак 80 дин добити; изрази једно пењање температуре од 6⁰ као падање; изрази 5km на југ као километре на север! Један човек купи неку робу за 150 дин и прода је за 100 динара. Колика је зарада?

СПАЈАЊЕ БРОЈЕВА С ОБЗИРОМ НА ЊИХОВЕ ЗНАКЕ

37. — Нацртајмо бројну линију са позитивним и негативним бројевима.



Сл. 8.

Ако треба једном ма ком броју *додати* један други број, на пр. 7, то значи: треба од првог броја ићи надесно за 7

Ако бројеви имају исте знаке треба сабрати и њихове знаке и испред збира ставити и заједнички знаке

јединица. Таквим одбројавањем на бројној линији добијамо на разним примерима овакве резултате:

+ 5 + 7 = + 12   — 4 + 7 = + 3
+ 1 + 7 = + 8   — 7 + 7 = 0
0 + 7 = + 7   — 10 + 7 = — 3
— 1 + 7 = + 6   — 12 + 7 = — 5

итд.

Ако треба од једног броја одузети неки други број на пр. број 5, то значи да треба од првог броја ићи налево за 5 јединица. Тада, опет из посматрања на бројној линији имамо овакве резултате:

+ 9 — 5 = + 4   + 1 — 5 = — 4
+ 6 — 5 = + 1   0 — 5 = — 5
+ 5 — 5 = 0   — 1 — 5 = — 6
+ 4 — 5 = — 1   — 5 — 5 = — 10

итд.

Из ових резултата имамо ово **практично упутство** за спајање бројева, кад водимо рачуна о њиховим знацима:

1. Ако бројеви имају исте знаке, треба сабрати њихове апсолутне вредности и испред збира ставити заједнички знак.

2. Ако бројеви имају различите знаке, треба образовати разлику њихових апсолутних вредности и испред разлике ставити знак веће апсолутне вредности.

Ако бројеви имају различите знаке одузмемо мању апсолутну вредност од веће и оставимо знак веће вредности.

За усмено вежбање

1. 5 — 3; 3 — 5; 11 — 7; 7 — 11; — 7 — 11 =
2. — 9 + 18; + 24 — 9; + 16 + 8; — 2,75 + 3 =
3. Ако неко оде x корака напред, а затим $3x$ корака натраг, где се сад налази од почетне тачке?
4. $+ 3a - 5a =$; $4x - 10x$; $- a + 4a$; $- x + 5x =$
5. $0 + 2x$; $0 - 2x$; $- 3y - 0 =$
6. $4a - 2a$; $2a - 4a$; $- 2a + a$; $- 2a - 4a =$
7. $8ab - 3ab$; $- 4ab + 8ab$; $4ab - 8ab$; $- 4ab - 8ab =$
8. $4x - x + 2x$; $10a - 12a + 2a$; $6p - 10p + p =$
9. $- x + x$; $- x - 0 + 2x$; $3abc - 5abc =$
10. 0 — 1 — 6; 1 — 0 + 1 — 2 + 0 = .

За писмено вежбање

1. Потврди тачност ових једначина на бројној линији:

7 — 4 = 3   2 — 5 = — 3   — 2 — 3 = — 5
— 4 — 5 = — 9   — 8 + 5 = — 3 $- 2x - 4x = - 6x$

3 — 4 + 2 = 1   — 4 + 4 — 2 = — 2
— 1 — 2 — 3 = — 6   7 — 9 + 2 = 0
— 6 + 3 + 4 = 1   8 — 5 — 3 = 0
— 2 + 1 — 3 + 2 — 4 + 3 = — 3
— 2 + 5 — 7 + 4 = 0 $3a - 5a + 4a - 2a = 0$
$- 7a + 4a - 3a + 6a = 0$!

Напомена. — Кад овако имамо више бројева да додајемо и одузимамо, можемо користити правило о израчунавању агрегата које смо научили у аритметици:
Од збира позитивних треба одузети збир негативних чланова

2. 9,875 — 11,786 =; — 124,3 — 378,596 =
3. $- 5\frac{7}{9} + 3\frac{5}{12} =$; $- 2\frac{3}{4} - 9\frac{5}{6} =$
4. $+ 6{,}93 - 11{,}75 =$; $- 19\frac{2}{15}y + 3\frac{5}{9}y =$
5. $+ 8{,}85ab - 3{,}42ab =$; $18{,}59abc - 42{,}97abc =$ $-24{,}38abc$
6. $- 6\frac{7}{12}p\,qr$; $- 16\frac{5}{8}p\,qr$; $- 35{,}875st + 46\frac{7}{\ }\,st =$
7. Једна армија маршује најпре 20km на север, **затим** 10km на југ, потом још 14km на север, а затим 4km на југ. Где се сад налази од почетне тачке?
8. Један играч ступи у игру са 1800 динара; у првој партији он добије 220 динара, у другој добије 12 дин, у трећој изгуби 130 дин, у четвртој изгуби 11 дин, у петој добије 118 дин, а у шестој још 14 дин. Какав је крајњи резултат његове игре?
9. Тежина једног лица је 70 kg 300; оно омршави и изгуби 1,kg 700, потом се угоји и добије 2,kg 100; најзад изгуби 0,kg 700. Колика је његова последња тежина?
10. Бројно стање једног батаљона приликом одласка на фронт, у рат, било је 1000 људи. У првој борби он изгуби 30 погинулих, 150 рањених и 21 заробљеника. Потом он добије попуну из пуковског депоа 200 људи. У другој борби изгуби 12 погинулих, 61 рањеног и 13 заробљеника. Какво је после тога његово бројно стање?
11. Један аутоматски раздељивач чоколаде има још 28 таблета и дометну у њега још 100 комада. Он раздели у понедељак 29 таблета, у уторак 26, у среду 34, у четвртак 28. Колико пута ће моћи да функционише тај апарат у петак?
12. $3a + b - 2a =$; $14x - 4x + 3x =$; $3{,}5x - 3x - 0{,}5x =$
13. $5y + 3x - 7y - 2x =$; $0{,}5a - 0{,}9b + 1{,}2a - 2{,}3b =$
14. $2p - 3q + 5t - 8q + 7t + 6p =$ $-11q + 8p + 12t$

8,85
3,42
5,43

42,97
18,59
24,38

+5,43ab

15. $11m + 3n - 7x + m - 5n + 9x + m - 6n - 2x =$

16. $10m + 11 - 7x - 12 - 4m + 9x + 1 - 3x - 5m =$

17. $28a + 29p + 109 - 46p - 18a - 30 - 10p - 160 =$

Провери следеће једначине:

18. $14a + 15h - 16c - 19a - 21b + 20c + 15a = 10a - 6b + 4c.$

19. $9m + 7n - 8m + 9y + 13m - 4n - 15m + y + 6n = - m + 9n + 10y.$

20. $7x - 9y - 12 - y + 18 + 6x - 8 = 13x - 10y - 2.$

21. $7a - b - 11a - 13b + 6a + 14b - 10a + 5b + a - 16b + 9a - 14b = 2a - 25b.$

22. $x + y + z - x - y + z + 2x - 3y + 4z + 18z - 19y - 28x = - 26x - 22y + 24z.$

23. $18y - 10u + 15t - 14u - 16t - 19y + 25u - 26t + 3y - y - t + 22u = y + 23u - 28t.$

24. $16ab - 18ac + 3ac - 17ab + 15ac + 9ab = 8ab.$

25. $13x^2 - 27y^2 - 10y^2 - 22x^2 + 26y^2 + 16x^2 = 7x^2 - 11y^2.$

26. $6\frac{1}{4}\,ab + 8\frac{5}{12}\,cd - 2\frac{3}{20}\,ab - 3\frac{1}{5}\,cd - 10\frac{5}{18}\,cd - 10\frac{17}{30}\,cd = 4\frac{1}{10}\,ab - 15\frac{113}{180}\,cd.$

27. $16{,}25r - 28{,}47s + 15{,}24t - 9{,}26r - 13{,}69s - 17{,}13t - 2{,}63r - 40{,}16s + 0{,}89t = 3{,}36r - 82{,}32s - t.$

28. $$\begin{array}{r} 7{,}3a + 1{,}6b - 3{,}2c \\ 4{,}5a - 9{,}8b + 5{,}1c \\ \hline \end{array}$$

29. $$\begin{array}{r} 9{,}8x - 5{,}4y + 8{,}3z \\ - 4{,}9x + 7{,}5y - 1{,}8z \\ \hline \end{array}$$

30. $$\begin{array}{r} - 23{,}4m + 16{,}5n - 12{,}4p + 34{,}6q \\ 41{,}3m - 28{,}4n + 21{,}3p - 60{,}5q \\ \hline \end{array}$$

31. $$\begin{array}{r} - 18{,}4a + 13{,}4b - 6{,}5c - 5{,}6d + 3{,}2e - 1{,}6f \\ - 7{,}8a - 2{,}3b + 3{,}2c - 2{,}5d - 1{,}8e + 99f \\ \hline \end{array}$$

32. $$\begin{array}{r} 17{,}3x - 14{,}2y + 0{,}4z - 13{,}4u + 97v + 4{,}6t \\ - 5{,}3x - 2{,}3y - 2{,}4z + 5{,}3u - 1{,}9v - 6{,}4t \\ \hline \end{array}$$

33. $$\begin{array}{r} 3{,}7a + 1{,}6b - 3{,}7c \\ - 1{,}8a + 3{,}5b - 4{,}6c \\ - 1{,}5a + 0{,}9b + 7{,}3c \\ 2{,}6a + 4{,}8b - 2{,}5c \\ \hline \end{array}$$

34. $$\begin{array}{r} - 32{,}4r - 8{,}24s + 3{,}06t - 16{,}5u \\ 28{,}6r + 9{,}16s - 4{,}15t + 12{,}7u \\ - 11{,}3r - 4{,}28s + 8{,}29t - 9{,}3u \\ 43{,}5r + 2{,}34s - 5{,}33t + 8{,}7u \\ - 8{,}4r - 3{,}68s + 7{,}65t - 32{,}4u \\ \hline \end{array}$$

ДРУГИ ДЕО

РАЧУНАЊЕ СА ЗБИРОВИМА, РАЗЛИКАМА, ПРОИЗВОДИМА И КОЛИЧНИЦИМА

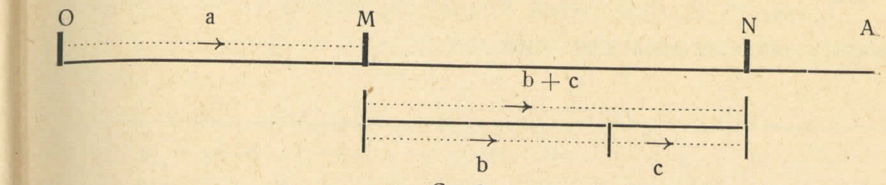
ГЛАВА III

САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ ЗБИРОВА И РАЗЛИКА

38. Додавање збира. — Шта значи $6 + (4 + 3)$, а шта

$$\mathbf{a + (b + c)}\ ?$$

Од крајње тачке M дужи a (сл. 9) идемо за $(b + c$ јединица надесно и добијамо ON.



Сл. 9.

До исте тачке N стижемо, ако од M идемо најпре за b јединица надесно, а после тога још за c. Због тога имамо:

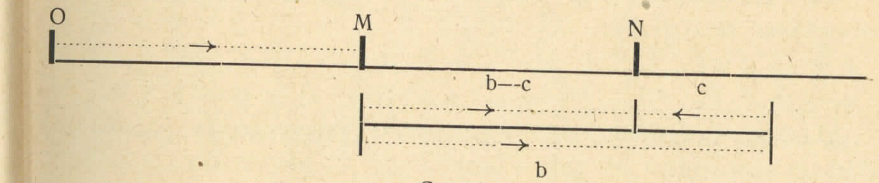
$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Искажи обичним говором правило како се додаје збир!

39. Додавање разлике. — Шта значи $7 + (10 - 6)$, а шта

$$\mathbf{a + (b - c)}?$$

Од крајње тачке M (сл. 10) идемо надесно за $(b - c)$ јединица, па добијамо ON.



Сл. 10.

До исте тачке бисмо дошли, ако идемо од M најпре за b јединица надесно, па затим за c јединица налево. Имамо

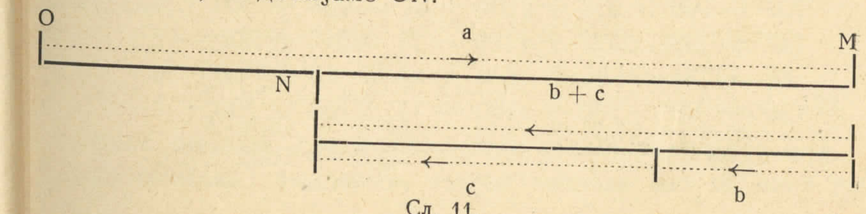
$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Искажи правило како се додаје разлика!

40. Одузимање збира. — Шта значи $16 - (6 + 3)$, а шта

$$\mathbf{a - (b + c)}?$$

Морамо од крајње тачке M (сл. 11) ићи за $(b + c)$ јединица налево, па добијамо ON.



Сл. 11.

До исте тачке бисмо доспели, ако од M идемо најпре за b јединица налево, затим још за с. Отуда

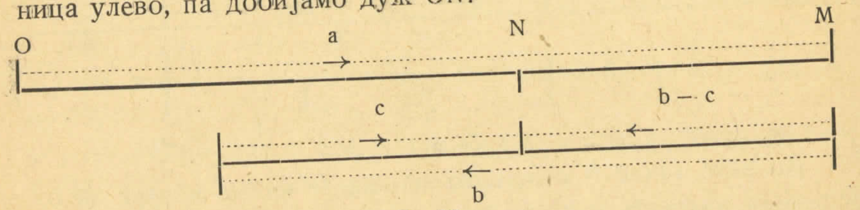
$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Кажи правило како се одузима збир!

41. Одузимање разлике. — Шта значи $16 - (6 - 3)$ а шта

$$\mathbf{a - (b - c)}?$$

Треба од крајње тачке M (сл. 12) ићи за $(b - c)$ јединица улево, па добијамо дуж ON.



Сл. 12.

До исте тачке N дошли бисмо, кад од M идемо најпре за b јединица налево, па затим још за с јединица надесно. Тако је

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Искажи правило!

42. Ослобађање од заграда. — Скупимо уједно све досадашње резултате:

$a + (b + c) = a + b + c$ $\quad$ $a + (b - c) = a + b - c$
$a - (b + c) = a - b - c$ $\quad$ $a - (b - c) = a - b + c.$

Одавде добијамо ово **практично упутство** за ослобађање од заграда:

1. Кад испред заграде стоји знак +, заграда се може изоставити без икаквих других промена.

2. Ако испред заграде стоји знак —, при изостављању заграде морају се свима члановима у загради променити знаци.

Напомена. — Потреба за овакво рачунање са збировима и разликама намеће нам се нарочито при усменом рачунању. То се врло лепо види из следећих примера:

$$238 + 106 = 238 + (100 + 6) = 238 + 100 + 6,$$
$$147 + 98 = 147 + (100 - 2) = 147 + 100 - 2,$$
$$65 - 34 = 65 - (30 + 4) = 65 - 30 - 4,$$
$$150 - 99 = 150 - (100 - 1) = 150 - 100 + 1.$$

Ако у загради имамо вишечлани израз, можемо поступити тако да све чланове изузев последњег схватимо као

први члан, а последњи као други, па поступимо као да је то двочлани израз.

Пример 1.

$$a + \{b - c + d - e\}.$$

Сматраћемо израз $b - c + d$ као први члан, а е као други, па можемо написати

$$a + \{[b - c + d] - e\} = a + [b - c + d] - e.$$

Сад ћемо b — с сматрати као један члан, а d као други члан. Тада је

$$a + [(b - c) + d] - e = a + (b - c) + d - e \text{ и}$$
$$a + (b - c) + d - e = a + b - c + d - e.$$

Напомена. — Ако пред заградом не стоји никакав знак, сматра се као да је пред њом знак +.

Пример 2.

$$a - \{b - c + d - e\} = a - \{[b - c + d] - e\} = a - [(b - c) + d] + e = a - (b - c) - d + e = a - b + c - d + e.$$

Из ових примера се види да *претходна правила важе и кад имамо произвољан број чланова у заградама.*

За усмено вежбање

1. $6 + (4 - 2)$ 2. $6 + (3 + 1)$ 3. $9 + (3 - 4)$
4. $9 - (3 - 4)$ 5 $11 + (7 + 4)$ 6. $10 + (5 - 10)$
7. $15 - (2 + 11)$ 8. $11 - (2 - 3)$ 9. $16 + (1 - 6)$
10. $2 - (3 + 4)$ 11. $- 2 - (3 - 4)$ 12. $- 7 + (4 + 11)$
13. $21 - (25 - 23)$ 14. $- (4 - 7) + 15$ 15. $6a + (4a - 2a)$
16. $6a - (4a - 2a)$ 17. $6a - (4a + 2a)$ 18. $6a - (-4a - 2a)$
19. $a - (a + a)$ 20. $a + (a - a)$ 21. $- a - (a + a)$
22. $- (a + a) + 5a$ 23. $3a - (5a - 7a)$ 24. $6ab - (2ab + ab)$

Шта треба да стоји у заградама у овим изразима:

28. $a + b - c = a + (\quad)$ 29. $a - b + c = a - (\quad)$
30. $a - b - c = a - (\quad)$ 31. $a + b + c = a + (\quad)$?

За писмено вежбање

1. Следеће примере ученик да разреши растављањем појединих бројева на збирове или разлике и употребом заграда:

1. $319 + 286$ 2. $3015 + 199$
3. $2495 - 1693$ 4. $1744 - 714$
5. $431 - 117 - 311$ 6. $1227 - 843 + 133$
7. $2507 + 409$ 8. $3397 + 2604$
9. $2507 - 409$ 10. $3387 - 2604.$

Потврди тачност следћих резултата:

2. $(x - 2) - (3 + 4x) + 5x + 3) = 2x - 2.$
3. $(3x - 2) - (4x - 5) + (x + 7) = 10.$
4. $(9a - b) + (-2a + 3b) - (6a + 5b) = a - 3b.$
5. $x - 6a - (2x - 3a) - (a - 6x) = 5x - 4a.$
6. $(a + b - c) - (a - b - c) + (a - b + c) = a + b + c.$
7. $(a - b) + (b - c) - (a - c) = 0.$
8. $3,7x - 12y - (3,9y + 2,6x) - (0,2x - 0,5y) = 0,9x - 15,4y.$
9. $6x + (3x + 18y - 4z) - (5x + 4y + z) + (2x - 6y + 11z) = 6x + 6y + 6z.$
10. $2,7a - (1,8x + 1,5a - 4,2y) + (-5,3y + 2,7a - 4,6x) - (3,6y - 0,2x + 2,1a) = 1,8a - 6,2x + 2,5y.$
11. $9\frac{1}{2}\,ab - \left(1\frac{3}{5}\,bc - 9\frac{1}{3}\,ba\right) - \left(1\frac{3}{4}\,ab + 3\frac{7}{10}\,bc + 5\frac{5}{6}\,ac\right) + \left(2\frac{1}{2}\,ac - 7\frac{3}{4}\,ab + 5\frac{3}{10}\,bc\right) = 0.$
12. 1) $a - [(b + c) + (b - a)] =$ 3) $p - [(p - q) - (r - p)] =$
    2) $x - [(y - z) - (z + x)] =$ 4) $n + [(v - n) + (w - v)] =$

Напомена. *Показало се као боље да у задацима са* **вишеструким заградама** *ослобађање отпочне са спољним заградама. При том треба још одмах брисати заграде испред којих стоји знак* +. (Ово не важи кад у заградама имамо посебне бројеве, где се назначена радња може да изврши. Види стр. 40!)

13. 1) $(2a - 3b) - [5b - (6c - 5a)] - 4a =$
    2) $5x - [(9y - 13x) - (6x + 3)] =$
14. 1) $39a - [(25a + 17b) + 2c] + [22c + (3b - 2a)] - [6a - (8b - 7c)] =$
    2) $120m - [80m - (35m - 18m) - (70n - 45m) - (25m + 28n)] =$
15. 1) $3,8z - [(5,4x - 2,7y) + (3,2z + 8,4x) - (2,5y - 4,8z) - (1,5z + 4,6y)] =$
    2) $2\frac{2}{3}\,n - [4\frac{5}{6}\,n + (10\frac{2}{3}\,v - 5\frac{5}{9}\,w) - (3\frac{3}{4}\,n - 7\frac{11}{12}\,w + 6\frac{7}{15}\,v)] - [(1\frac{7}{12}\,n + 4\frac{1}{5}\,v + 2\frac{7}{8}\,w)] =$
16. 1) $n - \{v + [w + (r + t)]\} =$
    2) $a - \{b - [c - (d - e)]\} =$
    3) $m - \{n + [m - (-m) - n] + m\} =$
    4) $a + y - \{(y - x) - [y - (x + y) - x]\} =$
    5) $p + \{q - [(r + p) - (q - r) - (p + q)] - r\} =$
17. $11a + 15b - \{13c - 17b + [24a - 28b + (53c - 37b) - (64a - 51b)] - (34c - 21b)\} =$
18. $x - \{11 - [x - 2 - (2x + 12) + (3 - 2x) + x] - 2x\} =$

19. $2,5a - \{1,6b - [1,8c - (4,8a - 2,6b) + 2,7c] - 8,3a\} - 3,5c =$
20. $15xy - \{21xz - [13yz - (12xy - 28yz) + (36xz + 14xy)] - [45yz + (18xy - 22xz) - 9xy] - 30yz\} =$

43. Сабирање и одузимање негативних бројева. — Пошто се један негативан број $-a$ може да сматра као разлика $0 - a$, имамо

$$m - (-a) = m - (0 - a) = m - 0 + a = m + a$$
$$m + (-a) = m + (0 - a) = m + 0 - a = m - a.$$

Практично упутство:

1. *Негативан број додаје се, кад се његова апсолутна вредност одузме.*

2. *Негативан број се одузима, кад се његова апсолутна вредност дода.*

Напомена. — Кад хоћемо да упоредимо два броја a и b по величини, ми образујемо њихову разлику $a - b = d$. Ако је d позитивно, онда је a веће од b, што пишемо $a > b$. Ако је d негативно, a је мање од b, што пишемо $a < b$.

Пример 1. Нека је $a = 3$, $b = -8$. Разлика њихова је

$$(+3) - (-8) = +3 + 8 = +11.$$

Према томе је $+3 > -8.$

Пример 2. Нека је $a = -2$, $b = -6$. Разлика је

$$(-2) - (-6) = -2 + 6 = +4.$$
$$-2 > -6.$$

Пример 3. $a = 0$, $b = -5$. Разлика је

$$0 - (-5) = 0 + 5 = +5.$$
$$0 > -5.$$

Кад посматрамо бројну линију видимо да је од два броја већи онај, који се налази **десно.**

Сви позитивни бројеви већи су од негативних.

Нула је већа од сваког негативног броја.

Од два негативна броја већи је онај чија је апсолутна вредност мања.

Напомена. — Врло често се пише, кад хоћемо да означимо да је неки број a позитиван

$$a > 0,$$

или да је неки број b негативан

$$b < 0.$$

За усмено вежбање

Сабери следеће величине:

1. — 4 и — 7 2. 5 и — 3 3. — 4 и 2 4. — 7 и 6
5. — 4 и 4 6. 9 и — 9 7. 3x и — 2x 8. — 2a и — 4a!

Одузми

9. — 4 од 6 10. — 4 од 4 11. — 4 од 1 12. — 4 од 0
13. — a од 4a 14. — b од 2b 15. — b од 6b 16. — 5b од — 5b!

За писмено вежбање

1. Изврши следећу рачунску радњу

$$x = a + b$$

стављајући редом:

$a = + 10$ $b = + 15$ $a = + 15$ $b = + 10$
$a = + 15$ $b = — 10$ $a = — 10$ $b = + 15$
$a = + 10$ $b = — 15$ $a = — 15$ $b = + 10$
$a = — 10$ $b = — 15$ $a = — 15$ $b = — 10$

Напомена 1. Као што видимо једно слово на пр. a може да значи и позитиван и негативан број.

Ако је број b негативан број шта онда значи — b? Узми пример $b = — 10$!

Напомена 2. Рекли смо у почетку да алгебра има за циљ да *упрости* и да *уопшти*. Она то постиже употребом слова. *Истом циљу служе и позитивни и негативни бројеви.*

Пример. Претпоставимо да један трговац има два узастопна посла.

1. Ако има *два примања* једно од a динара, друго од b динара, биланс ових послова биће *примање* од $a + b$ дин.

2. Ако има једно *примање* од a динара и једно *плаћање* од b динара, и ако је примање веће од издавања, биланс ће бити *примање* од $a — b$. Напротив, ако је издавање веће од примања, биланс ће бити *издавање* од $b — a$ динара.

3. Најзад ако има *два издавања* од a и b динара, биланс ће бити *издавање* од $a + b$ динара.

Ако са x обележимо биланс, видимо да ћемо према природи случаја имати

$$x = a + b$$
$$x = a — b$$
$$x = b — a.$$

Овде образац не само што не казује да ли је биланс примање или плаћање, него није ни само један. Има их више.

Међутим, ако свако примање обележимо знаком +, а издавање знаком —, треба наћи само збир ових алгебарских **бројева.** *Тада један једини образац*

$$x = a + b$$

даје решење за све случајеве који могу наступити. Знак резултата казаће да ли је биланс примање или издавање.

2. Нађи x из обрасца

$$x = a + b$$

кад је $a = — 77,$ $b = 30$ $a = + 63,$ $b = — 37$
$a = — 91,$ $b = — 169$ $a = — 89,$ $b = — 45.$

3. Одреди вредност x из обрасца

$$x = a — b + c — d$$

за 1°. $a = \frac{16}{21},$ $b = — 9,$ $c = \frac{7}{24},$ $d = — \frac{2}{3}.$

2°. $a = — \frac{6}{5},$ $b = — \frac{8}{25},$ $c = — \frac{31}{40},$ $d = 9.$

4. Провери једначине:

$$4 — 3 = 4 + (— 3)$$
$$9 — 2 + 5 = 9 + (— 2) + (+ 5)$$
$$14 — 5 + 3 — 1 — 7 = 14 + (— 5) + (+ 3) + (— 1) + (— 7).$$

Напомена 1. У другој и трећој једначини имамо оно, што смо у аритметици звали *агрегат*. Као што видимо сваки се агрегат може да напише у облику *збира*.

Напомена 2. Могли бисмо још рећи да је агрегат **бројни полином.**

Провери следеће једначине:

5. $— 5 — 3 — (— 15) + (— 2) = 5$
6. $— 2 + (— 7) — (— 4) + 1 = — 4$
7. $— 9 + (— 9) — (— 3) — (— 5) = — 10$
8. $17 + (— 9) — (— 3) — (— 4) + (— 10) — (— 2) = 7$
9. $— 16 — (— 11) + (— 8) — (— 14) + (— 12) — (— 18) + (— 7) = 0$
10. $2a — (— 3a) — (— 6a) + (— 9a) — (— 5a) + (— 11a) = — 4a.$
11. $m — (— 5n) + (— 6m) — (— 3m) + (— 9n) + (— 6n) — (— 7m) = 5m — 10n$

12. $20 - \{-6 - [11 + (-9)]\} - \{[4 - (-7)] - [-8x - (-6b)]\} - \{-2b - [-4x - (-10b)] - (-7x)\} = 17 - 19x + 18b$

13. $3 - (2 - 5) - (6 - 3 - 9) + (3 - 5 - 4) = 6$

14. $3 - 5 - 2 - (3 - 9 - 4 + 12) = -6$

15. $3 - (4 - 1 + 2) - (4 + 1 - 2) - (2 + 12) = -19$

16. $3 - (4 + 1 - 7) + (7 + 1 - 4) - (2 - 12) = 19$

17. $3{,}15 - (3{,}5 - 8{,}135 - 4{,}5 + 3) + (-3{,}35) = 5{,}935$

18. $4{,}15 - (8{,}75 - 3 - 2{,}5) + (-3 + 4{,}52) = 2{,}42$

19. $3{,}6 - (3{,}21 + 7{,}2) - (8{,}83 - 7{,}54 - 11{,}7) + (-7{,}3 + 3{,}7) = 0$

Одузми:

20. $-3a - 5b$ од $6a - 2b$.

21. $x + 7y$ од $3x - 4y$.

22. $-7a^2 + 2b^2$ од $5a^2 - 3b^2$.

23. $-9y^2 + 8y + 10$ од $-2y^2 + 6y - 4$.

24. $-p + 6r$ од $5p - 2q - 3r$.

25. $-4y^2 - y - 6$ од $y^2 - y$.

26. За колико је $2x - 2$ веће од $2x - 5$?

27. Од збира израза $a + 3b$ и $-6a - 2b$ одузми $4a - b$!

28. Од $3x - 7y$ одузми збир израза $2x - 8y$ и $6x + 3y$!

29. Шта треба да додамо изразу $6p - 2q$ да добијемо $-3p + 8q$?

30. Шта треба одузети од $6s - 5t$ да се добије $2s + 3t$?

31. За колико треба повећати израз $4y - 5z$ да се добије $-3x - 3y + 4z$?

32. За колико треба смањити $5x - 6z$ да се добије $2x - 3y + 4z$?

33. За колико је мање $3y^2 - y + 3$ од $y^2 - 4$?

34. Од $a - 3b - 7c$ одузми $4a + 2b - 5c$ и резултату додај $3a - b - 6c$!

35. За колико је збир израза $-2x + 4y - z$ и $5x - 9y + 7z$ већи од збира израза $6x - 4y$ и $7y - 3z$.

36. За колико је разлика израза $-2y^2 + 6y - 7$ и $-9y^2 - 8y + 10$ већа од разлике израза $y^2 - y$ и $-4y^2 - y - 6$?

37. Одузми $3x^2 - 5y^2 - z^2$ од нуле?

38. $8a - [5b - (7a - 2b) - (4b - 3a) - 6a] - (7a - 9b) =$

39. $6m - (5n - 4m) - [8n - (7m + 6n) - (-5m + 4n) - 10m] =$

40. $5x - [27 + (8x^2 - 8x) - 23x] - [6x - (9x - 33)] + 48 =$

41. $4p - 7q + 5r - [15r - (6p - 10q + 8r) - (13q + 8p) + (6p - 2q - 8r)] - (7q - 9p - 11r) =$

42. $36r - 24s - \{15t - [-15r - (24s - 30t)] - (12s - 33r)\} =$

43. $12x + 36t - \{18x - (6t + 8x) - [5x - (11x - 12t)] - 9t\} =$

44. $24a - 12b - \{19a - [8b - (4b + 7a) - 5b] - (8a - 5b)\} =$

45. $29m - \{-15n - [14m - (8n - 3m) + 9n] - 7m\} - [10m - (n - m)] =$

46. $8x - \{-7y - [7z - (4x - 7y - 4z) - (-6y + 4z - 2x)] - (8y - 9z)\} - \{4z - (6x + 5y) - [-3z - (15x - 8y) + (6z - 7y)] - 3y\} =$

ГЛАВА IV

Рачунање са производима и количницима

44. Множење производа једним бројем. — Производ $5 \cdot 3$ претставља се очигледно стављањем јединица у један правоугаоник.

Ако ставимо оваква четири правоугаоника један испод другог, добићемо један велики правоугаоник, који претставља производ

$$(5 \cdot 3) \cdot 4.$$

У том великом правоугаонику имамо у једном реду 5 јединица, а таквих редова има $3 \cdot 4$. Он нам претставља и производ

$$5 \cdot (3 \cdot 4).$$

Ми смо могли правоугаонике ставити и један поред другог. Тад бисмо имали 3 реда, у сваком по $5 \cdot 4$ јединица. Тај би правоугаоник претстављао производ

$$(5 \cdot 4) \cdot 3.$$

Из свега овог излази да је

$$(5 \cdot 3) \cdot 4 = (5 \cdot 4) \cdot 3 = 5 \cdot (3 \cdot 4).$$

Или ако наместо одређених бројева ставимо опште бројеве a, b и n:

$$(a \cdot b) \cdot n = (a \cdot n) \cdot b = a \cdot (b \cdot n).$$

Практично упутство. — *Производ се множи неким бројем кад се један (само један) чинилац производа помножи тим бројем.*

Обрнуто $a \cdot (b \cdot n) = (a \cdot b) \cdot n = (a \cdot n) \cdot b$ доводи до **практичног упутства:** *Један број множи се производом, кад се произвољним редом најпре помножи једним чиниоцем, па добијени производ другим чиниоцем.*

За усмено вежбање

(Потребни подаци, а и делимични резултати исписују се.)

1. $(5 \cdot a) \cdot 19 =$
2. $(b \cdot 14) \cdot 6 =$
3. $(13xy) \cdot 11 =$
4. $64 \cdot (5 \cdot e) =$
5. $2a \cdot 8 =$
6. $4 \cdot 6b =$
7. $3a \cdot 5b =$
8. $2{,}5r \cdot 2{,}5s =$
9. $1{,}5x \cdot 2y =$
10. $(5x \cdot 6y) \cdot 3 =$
11. $(3u \cdot 4v) \cdot 6w =$
12. $(8 \cdot 5b) \cdot (2c \cdot 3d) =$

Израчунати на најкраћи начин

13. $25 \cdot 13 \cdot 4 =$
14. $25 \cdot 125 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 4 =$
15. $8 \cdot 365 \cdot 125 =$
16. $0{,}25 \cdot 12{,}5 \cdot 0{,}04 \cdot 17 =$
17. $1{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 0{,}8 \cdot 9 =$

Писмено. 1. $125a \cdot 2{,}5b \cdot 12c \cdot 32đ =$

2. $(0{,}125m \cdot 0{,}25n) \cdot (0{,}5p \cdot 24q) \cdot 400r \cdot 22 =$

45. Степен. — Шта значи 2^3, шта a^n?

Ако један производ има све саме једнаке чиниоце

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a}_{n \text{ једнаких чинилаца } a}$$

пише се краће a^n. Изговара се a на n-ти степен, или само на n-ти. **a** се зове **основа** или **база,** n **изложилац** или **експонент.**

$$\text{Основа}^{\text{изложилац}} = \text{степен.}$$

Напомена. $a \cdot a = a^2$ чита се још и a на квадрат,
$a \cdot a \cdot a = a^3$ чита се још и a *на куб.*

За писмено вежбање

1. Напиши у облику степена:

1) $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$ 2) 25 једнаких чинилаца x.

3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b =$

4) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y =$

2. Напиши за бројеве 2 и 3 све степене до десетог и израчунај их!

3. Испиши и израчунај квадрате и кубове свих бројева од 1 до 10!

4. Образуј квадрате свих бројева од 10 до 20!

5. Колико је 2^4; 4^3; 5^3; 3^5; 4^5; 5^4; 5^7; 7^5; 9^5; 10^6; 10^8; 10^{10}?

6. Израчунај $0{,}1^4$; $0{,}01^5$; $0{,}001^3$; $0{,}4^3$; $0{,}02^6$; $0{,}005^4$; $1{,}2^5$; $0{,}24^4$; $0{,}125^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(\frac{5}{3}\right)^4$; $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(1\frac{3}{4}\right)^4$; $\left(5\frac{5}{8}\right)^2$!

7. 1) $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 =$ 2) $5^5 \cdot 3^3 \cdot 2^4 =$ 3) $(0{,}5)^4 \cdot 2^6 \cdot 3^4 =$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 5^3 \cdot 0{,}25^3 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^2 \cdot 8^4 =$ 5) $0{,}25^6 \cdot 5^2 \cdot 0{,}2^4 =$

8. Израчунај:

1) $3a^2b$ за $a = 6{,}25$ и $b = 1{,}28$;

2) $4a^2b^3$ за $a = 11\frac{3}{7}$ и $b = 2\frac{5}{8}$;

3) $2a^3bc^2$ за $a = 7\frac{1}{2}$, $b = 4\frac{4}{9}$ и $c = 4\frac{1}{5}$!

9. Претстави у облику степена: 512; 729; 8 192; 78 125; 177 147; $\frac{1}{2048}$; $\frac{1}{625}$; $\frac{128}{2187}$; $\frac{2401}{256}$; 0,000064; 0,03125; 0,00006561; 0,046656.

46. Множење степена. —

$$a^5 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^8.$$

Опште $$a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.)}_{m \text{ чинилаца } a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.)}_{n \text{ чинилаца } a}}_{m + n \text{ чинилаца } a}$$

па је $$\mathbf{a}^m \cdot \mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{m+n}.$$

Практично упутство. — *Степени једнаких основа множе се, кад се заједничка основа степенује збиром изложилаца.*

~~9,5-04~~ ~~9,20-5~~

За усмено вежбање

1. $aaa \cdot a =$; $ppp \cdot pp =$; $p^3 \cdot p^2 =$; $y^3 \cdot y^4 =$; $3a^3 - 2a^3 =$

2. $a^2 \cdot a^2 =$; $(a^2)^2 =$; $x^3 \cdot x^3 =$; $(x^3)^2 =$; $a^2 \ a^2 \cdot a^2 =$; $(a^2)^3 =$

3. $x^{16} \cdot x^8 \cdot x^6 =$; $b^2 \cdot b^3 \cdot b \ b^4 \cdot b^5 =$; $c^6 \cdot c^5 \cdot c =$

4. $(b^2)^3 =$; $(b^3)^2 =$; $(b^4)^2 =$; $(b^2)^4 =$

Како се степен степенује?

За писмено вежбање

1. $5ab^2c^3y^4 \cdot 9a^2b^3c^5y^3 =$

Решење.

$5ab^2c^3y^4 \cdot 9a^2b^3c^5y^3 = 5 \cdot 9 \cdot a \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot c^5 \cdot y^4 \cdot y^3 = 45a^3b^5c^8y^7$.

Практично упутство. — *У производу од више чинилаца могу се међусобно множити бројни коефицијенти и само иста слова.*

Напомена 1. — Никако не губити из вида да свако слово претставља неки неименовани број.

Напомена 2. — У алгебри се често множење израза које сада проучавамо зове *множење монома мономом.*

2. $9a \cdot 7b =$
3. $4b \cdot 25a =$
4. $6ab \cdot ac =$
5. $0,2x \cdot 12,5y =$
6. $0,1xz \cdot 3zy =$
7. $1,25x^2 \cdot 16x =$
8. $2ab \cdot 3a^2b^3 \cdot 4a^3b^3 =$
9. $15a^2xy \cdot 6ax^2y^3 =$
10. $18x^4y^3 \cdot z^4 \cdot 12x^3y^4z^3 =$
11. $0,5x^4y^3 \cdot 0,4x^3y^7 \cdot 5xy^2 =$

12. $3a^3bc \cdot 3a^2b^2c^2 \cdot 4a^3b^3c^2 - 2ab^5c^3 \ a^2bc \cdot 7a^5c + 2a^4b^2c^2 \cdot 4abc \cdot 7a^3b^3c^2 =$

13. $5x^6y^6 \cdot 3x^6y^8 + 9x^3y^{10} \cdot 7x^9y^4 - 4x^{11}y^5 \cdot 8xy^9 - 7x^2y^7 \cdot 2x^4y^3 \cdot 3x^6y^4 + 2x^9y^2 \cdot 4xy^8 \cdot 3x^2y^4 =$

14. $(ab)^2 =$; $(abc)^2 =$; $(a^2b^3)^2 =$; $(a^2b^3)^3 =$; $(a^2b^3)^4 =$

15. $(x \cdot 2y \cdot 3z)^3 =$; $(3ab \cdot 5cd \cdot 4xy)^2 =$; $(0,3mx \ 0,2ny \cdot 0,5pz)^2 =$

16. $(5ab \cdot 0,4ab^2 \cdot 20a^2b) \ (0,2a^2b^2 \cdot 0,5ab)^3 =$

17. $(\frac{1}{3}x^2y \cdot \frac{6}{11}xy^2)^2 \cdot (0,6xy \cdot 2,2x^3y^3) =$

18. $x^3y^3 =$; $c^7 \cdot b^7 =$; $a^2 \cdot c^2$. Обрнуто задатку 14.

На основу претходног задатка да се одреди најкраћим путем:

19. $2^4 \cdot 5^4$; $2^6 \cdot 5^6$; $4^3 \cdot 25^3$; $(\frac{3}{2})^4 \cdot (\frac{2}{3})^4$.

20. $(5\frac{1}{3})^3 \cdot (3\frac{3}{4})^3$; $(7\frac{1}{2})^4 \cdot (1\frac{3}{5})^4$; $(2\frac{1}{7})^2 \cdot (3\frac{1}{9})^2$.

21. $2^2 \cdot 4^2 \cdot 125^2 =$; $5^3 \cdot 8^3 \cdot 25^3 =$; $3^4 \cdot 8^4 \cdot (\frac{1}{2})^4$.

22. $(3\frac{3}{4})^2 \cdot (7\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{15})^2$; $(\frac{7}{12})^3 \cdot (\frac{7}{12})^3 \cdot (1\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{2}{7})^3$.

23. Каква је разлика између $(3x)^2$ и $3x^2$; $2y^3$ и $(2y)^3$?

ГЛАВА V

МНОЖЕЊЕ ПОЛИНОМА

47. Множење полинома једним бројем. — Нека имамо да извршимо усмено множење

$$248 \cdot 3.$$

Сваки би радио како је овде назначено:

$$248 \cdot 3 = (200 + 40 + 8) \cdot 3 = 200 \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 8 \cdot 3.$$

Овде видимо да има случајева кад је потребно множити назначени збир једним бројем. Видимо одмах како се то ради.

Ако место посебних бројева ставимо слова имаћемо:

$$(a + b + c) \cdot 3 = 3a + 3b + 3c.$$

Горњи задатак могли смо и овако решити:

$$248 \cdot 3 = (200 + 50 - 2) \cdot 3 = 200 \cdot 3 + 50 \cdot 3 - 2 \cdot 3.$$

Кад узмемо слова имаћемо:

$$(a + b - c) \cdot 3 = (a + b - c) + (a + b - c) + (a + b - c) = 3a + 3b - 3c.$$

Слично томе је:

$$(a + b - c) \cdot n = \underbrace{(a + b - c) + (a + b - c) + \,.\,.\, (a + b - c}_{n \text{ сабирака}} =$$

$$\underbrace{(a + a + a \ldots + a)}_{n \text{ сабирака } a} + \underbrace{(b + b + b + \ldots + b)}_{n \text{ сабирака } b} \underbrace{- c - c - c - \ldots - c}_{n \text{ умањилаца } c}$$

дакле $(a + b - c \cdot n = a \cdot n + b \cdot n - c \cdot n.$

Практично упутство. — *Полином се множи једним бројем, кад се сваки члан полинома помножи тим бројем, па добијени производи саберу.*

За усмено вежбање

1. $3(x + 2) =$; $10(4 + y) =$; $6(2x - 7) =$; $a(x + y) =$
2. $4(2x - b) =$; $a(2x + 1) =$; $x(2 + 2y) =$; $ab(c - d) =$
3. $5(x + y + z) =$; $3(a - b + c) =$; $5(3a - 4b + 5c) =$

За писмено вежбање

Помножити:

1. $a + 5b - 3c$ са 5 2. $a + b + c$ са $2a$
3. $6a^3-4a^2-2a-5$ са $7a^2$ 4. $ab - bc + ac$ са bc
5. $a^2 - 2xy + y^2$ са x^3 6. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ са $2x$
7. $3m-0{,}5n-2{,}5p$ са $1{,}2$ 8. $8m^2n^2 - 32mn$ са $1{,}25$
9. $(a^2 - 2ab + b^2) \cdot 2a \cdot 8c =$
10. $(7{,}3a - 4{,}5b - 6{,}7c) \cdot 5n \cdot 0{,}8n =$.

48. Множење позитивних и негативних бројева. — Колико је: $a(b + c) - a(e + f) + g(h + i) - k(l - m)$?

Решење: $a(b + c) - d(e + f) + g(h + i) - k(l - m) =$
$= (ab + ac) - (de + df) + (gh + gi) - (kl - km) =$
$= ab + ac - de - df + gh + gi - kl + km.$

Најпре смо измножили изразе у заградама одговарајућим чиниоцима, затим се ослободили заграда.

Овај резултат можемо одмах написати, ако поједине чиниоце посматрамо заједно са њиховим знацима, а множење извршимо по овом **практичном упутству:**

Два алгебарска броја множе се, кад се помноже њихове апсолутне вредности. Производ ће бити позитиван, ако су чиниоци једнако означени, негативан, ако су чиниоци различито означени.

Ово практично упутство, познато под именом **правила о знацима,** овако се **симболички** исказује:

$(+)\cdot(+) = +$ $(-)\cdot(+) = -$
$(+)\cdot(-) = -$ $(-)\cdot(-) = +$

Пример:

$(+2)\cdot(+3) = +6$ $(-2)\cdot(+3) = -6$
$(+2)\cdot(-3) = -6$ $(-2)\cdot(-3) = +6.$

49. — Ово правило је довољно објашњено и оправдано примером од кога смо пошли. Али је занимљиво видети како се оно може сложити и са проученим дефиницијама о множењу и са примерима из стварности, из практичног живота.

Пример 1. $(+2)\cdot(+3)$ значи да број $(+2)$ треба узети 3 пута као сабирак, па је

$$(+2)\cdot(+3) = (+2) + (+2) + (+2) = +6.$$

$$\text{Опште } (+a)\cdot(+b) = +ab.$$

Исто тако је $(-2)\cdot(+3) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$.

$$\text{Опште } (-a)\cdot(+b) = -ab.$$

У случају $(+2)\cdot(-3)$ овакво размишљање *изневерава.* Ми не можемо рећи $(+2)$ да узмемо (-3) пута као сабирак. Аритметички ово нема смисла.

Али могуће је једно алгебарско тумачење. Сетимо се онога, што смо већ рекли, да нам знаци + и — испред броја казују два супротна смисла. Тако + 2 узето — 3 пута значи исто, што и + 2 узето + 3 пута, *само у супротном смислу.*

Према томе је

$(+2)\cdot(-3) = (+2)\cdot(+3)$ са супротним знаком
$= +6$ са супротним знаком
$= -6.$

$$\text{Опште } (+a)\cdot(-b) = -ab.$$

Посматрајмо напослетку производ

$$(-2)\cdot(-3)$$

који изгледа најнеобичнији. Он казује да — 2 треба узети — 3 пута.

Опет водећи рачуна да нам знаци испред броја казују смисао, рећи ћемо да се — 2 узме три пута *само у супротном смислу,* тј.

$(-2)\cdot(-3) = -6$ *у супротном смислу*
$= +6.$

$$\text{Опште } (-a)\cdot(-b) = +ab.$$

Пример 2. Узећемо да посматрамо термометар. Први чинилац ће казивати степене. Кад се жива пење, те степене означићемо знаком +, кад жива пада знаком —. Други чинилац нека буде време (часови). Време које ће тек наступити бележићемо знаком +, време које је прошло знаком —. Посматрајмо сваки од четири случаја посебно.

1. $(+2)\cdot(+3)$.

Овде ћемо рећи: термометар се пење сваког часа по 2^0, колико степени ће показивати *после* 3 часа, ако сад показује нулу. Одговор је 6 степени *изнад нуле,* тј. + 6.

$$(+2)\cdot(+3) = +6.$$

2. $(-2)\cdot(+3)$.

Термометар *пада* сваког часа по 2^0, колико ће показивати *после* 3 часа, ако је сад на нули? Одговор је 6 степени *испод* нуле, или — 6.

$$(-2) \cdot (+3) = -6.$$

3. $(+2) \cdot (-3)$.

Термометар се *пење* сваког часа по 2⁰. Шта је показивао *пре* 3 часа, ако је сад на нули? Одговор је 6 степени *испод* *нуле*, или — 6.

$$(+2) \cdot (-3) = -6.$$

4. $(-2) \cdot (-3)$.

Термометар *пада* сваког часа по 2⁰. Шта је показивао *пре* 3 часа, ако је сад на нули? Одговор је 6 степени *изнад* *нуле*, или + 6.

$$(-2) \cdot (-3) = +6.$$

Пример 3. Уштеде бележимо знаком +, издатке знаком —. Време протекло знаком —, а које ће наступити знаком +.

1. $(+300) \cdot (+3)$.

Неко *уштеђује сваког* месеца по 300 дин. Какво ће његово новчано стање бити према садашњем *после* 3 месеца? Одговор је: имаће 900 динара *више*.

$$(+300) \cdot (+3) = +900.$$

2. $(-300) \cdot (+3)$.

Неко изда сваког месеца по 300 динара. Какво ће његово новчано стање бити према садашњем *после* 3 месеца? Имаћ 900 дин *мање*.

$$(-300) \cdot (+3) = -900.$$

3. $(+300) \cdot (-3)$.

Неко *уштеђује* месечно по 300 динара. Какво је бил његово новчано стање *пре* 3 месеца? Имао је 900 дин *мањ*

$$(+300) \cdot (-3) = -900.$$

4. $(-300) \cdot (-3)$.

Неко *потроши* сваког месеца по 300 дин. Какво је њег во новчано стање било *пре* 3 месеца? Имао је 900 дин *виш*

$$(-300) \cdot (-3) = +900.$$

Пример 4. Шала. Један математичар је тумачио правил о знацима на овај начин. Пријатељство бележио знаком + а непријатељство знаком —, па онда каже:

1. Пријатељ мог пријатеља мени пријатељ

$$(+) \cdot (+) = +.$$

2. Пријатељ мог непријатеља мени непријатељ

$$(+) \cdot (-) = -.$$

3. Непријатељ мог пријатеља мени непријатељ

$$(-) \cdot (+) = -.$$

4. Непријатељ мог непријатеља мени пријатељ

$$(-) \cdot (-) = +.$$

За усмено вежбање

1. $(-4)\ (-1) =$; $(-1) \cdot (+5) =$; $(-1)^2 =$; $(-3)^2 =$; $(-5)^2 =$; $0^2 =$

2. $(-2) \cdot (-9) =$; $(-3) \cdot (+4) =$; $(+6) \cdot (-5) =$; $(-7) \cdot (+8) =$

3. Помножи $3a$ са -3; $-3a$ са -4; $-2a^2$ са a^2!

4. $-3ab$ са $2ab$; $-3x$ са $-2y$; $7x$ са $-3x$; a^{11} са $-a^3$!

5. $(-x)^2 =$; $(-x)^3 =$; $(-x)^4 =$; $(-x)^5 =$

6. $-(-x)^2 =$; $-(2x)^2 =$; $-2(-x)^2$; $(-x^2) \cdot (-1) =$

7. Каква је разлика између $(-x^3y^2)^2$ и $-(x^3y^2)^2$?

Реши једначине:

8. $-x = 7$ 9. $-\frac{x}{2} = 4$ 10. $\frac{x}{2} = -4$ 11. $\frac{x}{6} = -\frac{1}{3}$.

12. $-4(x+2)$; $-6(m-6)$; $-3)(6+c) =$

13. $-7(-t^3+2)$; $-8(-st-3)$; $-9(2f-3g-h) =$

14. $k(-s-3t)$; $-x(-2a-4b)$; $-3s(3u-5v+w) =$

За писмено вежбање

1. $(+2)\quad(+6) \cdot (+5) =$; $(-7) \cdot (+7)\ (+2) = (+3) \cdot (-8) \cdot (-1) =$; $(-4) \cdot (-5) \cdot (-2) =$; $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) =$

Напомена. — Могућно је унапред одредити знак производа од више чинилаца. Треба само имати у виду да на промену знака не утичу позитивни чиниоци, већ само негативни. При том свака два негативна чиниоца дају позитиван резултат. Према томе знак производа од више чинилаца одредићемо по овом **практичном упутству:**

Треба избројити негативне знаке. Ако је тај број паран, производ ће бити позитиван, ако је тај број непаран, производ ће бити негативан.

2. $2x \cdot (-10y)\ (-z) =;\ (-4x) \cdot (-3y)\ \cdot\ (-5z) =$
3. $4 \cdot (-5)\ 2 \cdot (-3) \cdot (-6) =;\ 2{,}5 \cdot 3{,}4 \cdot (-1{,}2) =$
4. $(3 - 4 - 5) \cdot 6 + (2 - 6 + 5) \cdot (-9) =$
5. $(3 - 4 - 6) \cdot (-2) + (6 - 8) \cdot (-12) =$
6. $(+6a^2b) \cdot (-5ab^2) =;\ (-4)\ \cdot\ (-5) \cdot (-6) =$
7. $(+1{,}3) \cdot (-2{,}6)\ (-0{,}25) =;\ (-3{,}7) \cdot (-1{,}4) \cdot (-2{,}5) =$
8. $(-\frac{3}{8}) \cdot (+\frac{2}{9}) \cdot (+\frac{4}{5}) =;\ (-7\frac{1}{2}) \cdot (-3\frac{3}{5}) \cdot (-2\frac{2}{3}) =$
9. $(+4a) \cdot (-4a)\ (-5a) =;\ (2m) \cdot (-5m) \cdot (+0{,}1m) =$
10. $(-2a) \cdot (-3a). \cdot (+4a)\ (-a) \cdot (+a) \cdot (-5a) =$
11. $(-\frac{1}{3}x) \cdot (-\frac{2}{3}x) \cdot (-\frac{3}{4}x) \cdot (+\frac{4}{5}x) \cdot (-\frac{5}{6}x) \cdot (-\frac{12}{13}x) =$
12. $(-5\frac{1}{2}) \cdot (-3\frac{1}{3}) \cdot (-2\frac{1}{7}) \cdot (-6\frac{1}{4}) \cdot (-3\frac{1}{5}) \cdot (-1\frac{1}{6}) =$

Провери да ли су тачни ови резултати:

13. $2(x - 1) + 3(1 - x) - 2(2 - 3x) = 5x - 3$
14. $3(2 - a) - 7(a + 6) + 6(2a + 6) = 2a$
15. $2(a + b) - (2a - b) = 3b$
16. $3(2a - c) - 7(c - 3a) - 4(5a - 2c) = 7a - 2c$
17. $2(3x + 12) + 3(x - 4) - 4(2x + 3) = x$
18. $3(a - b + c) - 4(b + a - c) - 2(c - a - b) = a - 5b + 5c$
19. $7(a - b) - 5(a + b) + 9(b - a) =$
20. $2(a + b + c) - 3(a - b + c) - (b + c - a) =$
21. $4(m - n + p) - 5(p - m - n) + 3(m - p - n) =$
22. $(a + b - 5) \cdot 3 + (b - a - 11) \cdot 7 - (a - b - 14) \cdot 6 =$
23. $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) =$
24. $a)a - b + c) - b(b + c - a) - c(a - b - c) =$
25. $a(a + b - 2) - b(a + b - 3) - a(a - b - 2) =$
26. $2x(3x - 4y) - 3y(5y - 6x) - 10xy =$
27. $0{,}5p(3{,}6p - 4{,}8q - 0{,}25q\ (16{,}4q - 33{,}6p) =$

Провери следеће једначине:

28. $x(y - z) - y(x - z) + z(x - y) = 0$
29. $a(a - b - c) - b(-a - b + c) - c(-a - b - c) = a^2 + b^2 + c^2$
30, $[\,5(a + b) + 4(a - b)\,] + [\,3(a - 2b) - (2a - 5b)\,] = 10a$
31. $[\,7(3m - 4n) - 2(8m - 9n)\,] - [\,6(2m - n) - 5n\,] = -7m + n$
32. $[a(a + b + c) - b\,(a - b + c)] + [b(-a - b - c) - c\,(a - b - c)\,] = a^2 - ab - bc + c^2$

ЗА ДОМАЋЕ ЗАДАТКЕ

1. $15a(3x - 4y + 7a) + (11a - 7y - 4x) \cdot 12x - 5a\,(21a - 4y) - 10y(13x - 4a + 11y) - 17ax =$

2. $6m(2m - n + 2p) - 4n(7p - 2n - 6m) - 18m(m + n) - 3p(5n + 8p - 4m) + m(19p - 8n) =$

Напомена. — Код већих задатака препоручује се да се по извршеном множењу слични чланови потпишу један испод другог ради лакшег свођења.

3. $(1{,}2a^2b - 1{,}3ab^2 + 0{,}1b^3) \cdot 5b - (1{,}1a^3 - 3{,}2a^2b - 1{,}9ab^2) \cdot 3b - 1{,}6ab(a^2 + 2ab + 4a^2) =$

4. $5a^2bc(2ac - 3bc^3) - 7abc^2(3abc + 4b^2c^2) - 8b^3c^2(ac^2 - 3bc^3) - 4b^2c^3(6b^2c^2 - 9a - 11abc) =$

5. $5ab(3ab + 4ac - bc) - 3ac(3bc - 4ac + 5ab) -$

6. $4a^2bc^3 - 4ab^2(3a^2c + 3ac^2 + 4\,bc^3) + 3a^2c(4ab^2 - abc(5a - 17b + 7c) - 4bc(3ab - 4ac + bc) = - 2bc^2 - 4b^2c) - 5abc(9ac^2 - 4abc - 4b^2c^2) + 4bc^2(5a^2c - ab + a^2b) =$

Напомена. — У случају да постоји опасност од забуне, знак множења код заграда треба стављати.

50. Дељење позитивних и негативних бројева. —

Пример. Колико је $(+6) : (+2)$?

Решење. Одговор ћемо најлакше дати, ако узмемо да је $(+6)$ производ, $(+2)$ познати чинилац, па тражимо непознати чинилац. Питамо се чиме треба помножити $(+2)$ да се добије $(+6)$. Одговор је врло прост

$$(+2) \cdot (+3) = +6.$$

Према томе је

$$(+6) : (+2) = +3.$$

Сличним размишљањем дошли бисмо, даље, до оваквих резултата:

$(-6) : (+2) = -3$, јер је $(+2) \cdot (-3) = -6$.
$(+6) : (-2) = -3$, јер је $(-2) \cdot (-3) = +6$.
$(-6) : (-2) = +3$, јер је $(-2) \cdot (+3) = -6$.

Отуда имамо за дељење *позитивних и негативних бројева* слично **практично упутство** као за множење:

Треба поделити апсолутне вредности. Количник ће бити позитиван, ако су бројеви једнако означени, негативан, ако су бројеви неједнако означени.

Симболички се правило о знацима овако исказује:

$$\frac{(+)}{(+)}=+\qquad\frac{(-)}{(+)}=-$$
$$\frac{(+)}{(-)}=-\qquad\frac{(-)}{(-)}=+$$

За усмено вежбање

1. $(-3):(-1)=;\ (-3):1=;\ 6:(-2)=$
2. $(-24):(-6)=;\ (+36):(-12)=;\ (-42):(+7)=$
3. $(+18):(+2)=;\ (-18):(+2)=;\ (+18):(-2)=;\ (-18):(-2)=;\ (+a):(+a)=;\ (-a):(-a)=$
4. $\frac{+48}{+4}=;\ \frac{+48}{-4}=;\ \frac{-48}{+4}=;\ \frac{-48}{-4}=;\ \frac{0}{-7}=$
5. $\frac{-48}{-8}=;\ \frac{+72}{-9}=;\ \frac{+96}{+16}=;\ \frac{-144}{-6}=;\ \frac{-200}{+5}=$

Реши једначине:

6. $4x=-12$ 7. $11y=-33$ 8. $3z=-15$ 9. $-4t=6$.
10. $-8=-4y$ 11. $8=-4y$ 12. $3x=0$ 13. $-3x=0$.
14. $-\frac{x}{3}=\frac{1}{12}$ 15. $-8u=0,24$ 16. $6x+18=0$.

51. Алгебарски разломци. — Један разломак

$$\frac{a}{b}$$

зове се *алгебарски разломак, ако* a и b могу бити ма какви позитивни или негативни бројеви. На пример

$$\frac{-2}{3}\qquad\frac{-4}{-5}\qquad\frac{2,3}{-8}.$$

Вредност ових разломака биће према малопређашњем правилу о дељењу:

$$-\frac{2}{3}\qquad\frac{4}{5}\qquad-\frac{2,3}{8}.$$

Особине разломака које смо проучили у аритметици протежу се и на алгебарске разломке. И њих можемо проширивати и скраћивати. Можемо их доводити на исте имениоце па сабирати и одузимати. Можемо их множити и делити по истим правилима, која смо проучили у аритметици.

За писмено вежбање

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=;\ \left(+\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{3}{2}\right)=$
2. $\frac{-5}{7}+(+6)=;\ \left(+\frac{2}{3}\right)+\frac{-1}{7}=$
3. $\frac{-5}{7}+\frac{-2}{21}=;\ \left(+\frac{1}{4}\right)+(-0,20)=$
4. $\left(+\frac{3}{4}\right)+\frac{-5}{3}+\frac{11}{12}=;\ \frac{11}{-2}+\frac{3}{5}+\frac{-13}{7}=$
5. $\left(+\frac{5}{2}\right)-\left(+\frac{11}{3}\right)=;\ -\frac{5}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=$
6. $\frac{-14}{9}-\frac{-3}{7}=;\ \frac{4}{11}-\frac{11}{-8}=$
7. $\frac{2}{3}-(+0,7)=;\ \frac{4}{11}-(-8,03)=$
8. $\left(-\frac{28}{11}\right)-(-2,2)=;\ \frac{2}{3}-(-0,7)+(+42)=$
9. $(-0,8)-\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)=;\ (-2)-(-0,6)+\frac{3}{-4}=$
10. $\left(+\frac{31}{43}\right)\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)=;\ \frac{3}{-4}\cdot\frac{-5}{6}=;\ \frac{3}{-4}\cdot\frac{3}{-6}=$
11. $\frac{2}{-3}\cdot 15=;\ \frac{4}{7}\cdot(-8)=;\ \frac{-5}{6}\cdot\frac{3}{-6}=$
12. $\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{10}=;\ (-0,81)\left(\quad\frac{4}{3}\right)=$
13. $\left[(+4)-(-6)\right]\cdot\left(\quad\frac{}{3}\right)=;\ \left[\left(+\frac{}{3}\right)-\left(-\frac{}{5}\right)\right]\cdot(+0,7)=$

На два начина!

14. $\left(0,5+\frac{-2}{5}\right)\cdot(-4)=$
15. $\left(-4,5+\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(-4,8+\frac{-1}{5}\right)=$
16. $\left[(-4,8)+\left(-\frac{6}{11}\right)\right]\cdot\left[\left(+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)\right]=$
17. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2=;\ \left(\frac{-2}{5}\right)^2=;\ \left(\frac{3}{-7}\right)^2=;\ \left(\frac{-6}{-11}\right)^2=$
18. $\frac{3}{4}:\frac{-5}{-6}=;\ \frac{3}{-4}:\frac{5}{-6}=;\ \frac{-3}{-4}:\frac{5}{-6}=$

19. $\frac{-5}{4} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{7}{-8} \cdot \frac{6}{-4} \cdot \frac{-3}{-2} =$

20. $\left(3 - \frac{2}{-3} + \frac{-3}{4}\right) : \frac{1}{2} =$

21. $\left(3 - \frac{-2}{+3} + 1\right) + 1 : \frac{3}{-4} =$

22. $\left(2 + \frac{-3}{4} - 5\right) : \frac{-2}{3} + \left(3 + 5\right) \cdot \frac{-3}{4} =$

23. $\left[\left(3 - 5 + \frac{1}{5}\right) : \frac{-3}{-4} + \left(-3 - \frac{2}{3} \quad 4\right) \cdot \frac{-2}{-3}\right] \cdot$
$\cdot \frac{-1}{2} =$

24. Ако је $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{4}$, наћи бројну вредност следећих алгебарских израза:

$a^2 - 3b + c^2$; $\qquad a + 4b^2 - c$;
$5a^3 - 6b^2 + 2c$; $\qquad a^3 - 2b - c^2$.

52. Множење полинома полиномом. — Множење два полинома слично је множењу два вишецифрена броја. У изразу

$$(a + b - c) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m - c \cdot m$$

ставимо наместо простог броја m један полином $(x-y-z)$. Тада ћемо имати:

$$(a + b - c) \cdot (x - y - z) = a(x - y - z) + b(x - y - z) - c(x - y - z) = ax - ay - az + bx - by - bz - cx + cy + cz.$$

Практично упутство: *Треба један од полинома помножити сваким чланом другог полинома, па добијене производе свести, с обзиром на њихове знаке.*

Знаци појединих производа одређују се по правилу о знацима, које смо већ споменули.

За писмено вежбање

1. Ако a, b, c, d, e и f значе извесне дужине, објасни шта у геометрији претстављају производи:

ab; $(a + b) \cdot c$; $(a + b + c) \cdot d$.

2. Изврши множења

$(a + b) \cdot (c + d)$; $(a + b + c) \cdot (d + e)$; $(a + b + c) \cdot (d + e + f)$ и докажи тачност решења помоћу геометрије!

3. 1) $(x + 3) \cdot (x + 4) =$ 2) $(2x + y)\ (2x + y) =$
3) $(x - 2) \cdot (x - 5) =$ 4) $(3x - y)\ (3x - y) =$
5) $(x + a) \cdot (x + b) =$ 6) $(ax + b)\ (cx - d) =$

F10 – 5

7) $(a + b) \cdot (m + n) =$ 8) $(m - n) \cdot (a + 2b - 3c) =$

4. 1) $(a + b - c) \cdot (a - b + c) =$
2) $(x + y + z)\ (z - y - x) =$
3) $(2b - 3c + 4d) \cdot (5d - 6b - 2c) =$
4) $(1\frac{1}{2} a \quad \frac{1}{2} b) \cdot (\frac{1}{4} a + \frac{3}{2} b - \frac{3}{2}) =$

5. 1) $(4a^2 - 3b) \cdot (4a^2 - 3b) =$
2) $(5a^2 - 2x^2) \cdot (5a^2 + 2x^2) =$
3) $(x^2 - 2a^2) \cdot (x^2 + 2a^2) =$

6. $(ax + 1) \cdot (bx + 1) =$ 2) $(ax + 1) \cdot (bx - 1) =$
3) $(ax + b) \cdot (ax + b) =$

7. 1) $(2{,}5x^2 - 3{,}2xy) \cdot (1{,}2x^2 + 1{,}5xy) =$
2) $(0{,}3x^2 - 0{,}2x - 0{,}1) \cdot (0{,}5x^2 + 0{,}4x - 0{,}6) =$

За усмено вежбање

После краћег вежбања, ученик већ треба да буде способан, да у следећим задацима напише резултат без икаквих радњи, само из посматрања.

1. $(x + 2) \cdot (x + 3) =$ 2. $(x - 2) \cdot (x - 3) =$
3. $(x + 2) \cdot (x - 3) =$ 4. $(x - 2) \cdot (x + 3) =$
5. $(x + 3) \cdot (x + 9) =$ 6. $(x - 3) \cdot (x + 6) =$
7. $(x - 11) \cdot (x - 1) =$ 8. $(x - 11) \cdot (x - 7) =$
9. $(1 + x) \cdot (1 + 2x) =$ 10. $(2 + x) \cdot (3 + x) =$
11. $(5 + x) \cdot (6 + x) =$ 12. $(3 + x) \cdot (7 + x) =$
13. $(x + 1) \cdot (x - 1) =$ 14. $(x - 7) \cdot (x + 7) =$
15. $(9 - x)\ (9 + x) =$

За писмено вежбање

1. 1) $(3a - 4b) \cdot (5a + 4b) - (3b - 8a) \cdot (5b - 4a) + (4a + 6b) \cdot (3b - 8a) =$

2) $(7x + 4y) \cdot (3y - 11x) + 12y(3x - 4y) - (2y - 8x) \cdot (17x - 13y) - (15x - 28y) \cdot 5x =$

2. 1) $(3a^2 - 2a + 1) \cdot (1 - 2a) - 11a^2 - 4(3 + 2a - a^2) + 6a(a^2 + 4) =$

2) $(a + b + c) \cdot (a - b) - (a + b - c) \cdot (a - c) - (a - b + c) \cdot (c - b) - (c - a - b) \cdot (a + b) =$

3. $(a^2b - 2ab^2 + 3b^3) \cdot (2a^2 - 3ab) - (3a^3 + 2a^2b + ab^3) \cdot (4ab - 6b) =$

4. $(6a^4 - 9a^2b + 11b^2) \cdot (8a^2 - 7b) - (14b^2 + 21a^2b - 17b^4) \cdot (11a^2 + 13b) =$

5. $(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) \cdot (a - b) =$

6. $(2x^2 + 3y^3) \cdot (16x^8 - 24x^6y^3 + 36x^4y^6 - 54x^2y^9 + 81y^{12}) =$

Уређени полиноми

1. Помножи полиноме

$$3x^3 - 2x^2 + 6x + 1 \text{ и } 2x^2 + 5x - 7!$$

Решење.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 3x^3 & - 2x^2 & + 6x & + 1 & \\
 & & 2x^2 & + 5x & - 7 & \\
\hline
6x^5 - 4x^4 & + 12x^3 & + 2x^2 & & & \\
15x^4 & - 10x^3 & + 30x^2 & + 5x & & \\
 & - 21x^3 & + 14x^2 & - 42x & - 7 & \\
\hline
6x^5 + 11x^4 & - 19x^3 & + 46x^2 & - 37x & - 7 &
\end{array}$$

2. Помножити

$$x^4 + x^2 + 2x + 1 \text{ са } x^3 - x^2 - 1$$

Решење.

$$\begin{array}{lllllll}
x^4 & + x^2 & + 2x & + 1 & & & \\
x^3 & - x^2 & & - 1 & & & \\
\hline
x^7 & & + x^5 & + 2x^4 & + x^3 & & \\
 & - x^6 & & - x^4 & - 2x^3 & - x^2 & \\
 & & & - x^4 & & - x^2 & - 2x - 1 \\
\hline
x^7 & - x^6 & + x^5 & & - x^3 & - 2x^2 & - 2x - 1.
\end{array}$$

3. Помножи полиноме:

$$\begin{array}{l}
2x^2 - 6x + 4 \\
5x^2 - 8x + 3 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
3x^3 - 4x^2 + 6x - 7 \\
2x^2 - 6x + 5 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x^2 + 2ax + a^2 - b^2 \\
x^2 + 2ax + b^2 - a^2 - 3ab \\
\hline
\end{array}$$

Сличност између аритметичког и алгебарског множења.

Сваки број декадног бројног система можемо написати у облику уређеног полинома. На пр.

$$23 = 2 \cdot 10 + 3$$
$$213 = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3$$
$$3826 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \quad 10 + 6.$$

Помножимо 213 са 23. Множење отпочнимо са највишом цифром множиоца.

$$\begin{array}{r}
213 \\
23 \\
\hline
426 \\
639 \\
\hline
4899.
\end{array}$$

Ово је у ствари скраћен облик оваквог рачунања:

$$\begin{array}{r}
2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3 \\
2 \cdot 10 + 3 \\
\hline
4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 \quad \\
6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 9 \\
\hline
4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 = 4899.
\end{array}$$

Упореди ова два начина множења одређених бројева на више произвољно узетих примера!

53. Три важна обрасца. —

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$ или

I $\quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

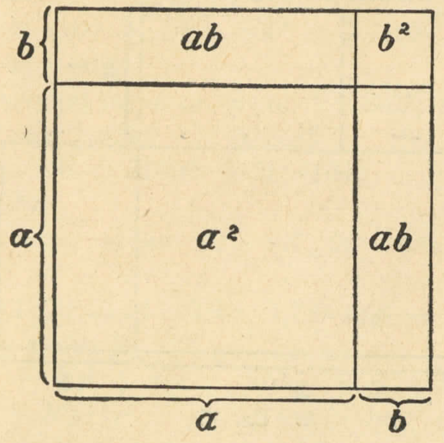
Квадрат збира два броја једнак је збиру квадрата та два броја, увећаном за њихов двоструки производ.

Провери још обрасце и искажи правила:

II $\quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III $\quad (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$

Ова три обрасца су геометријски протумачена сликама **13, 14 и 15.**



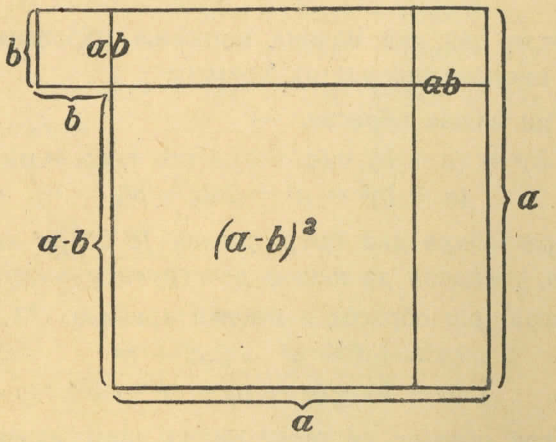
Сл. 13.

За усмено вежбање

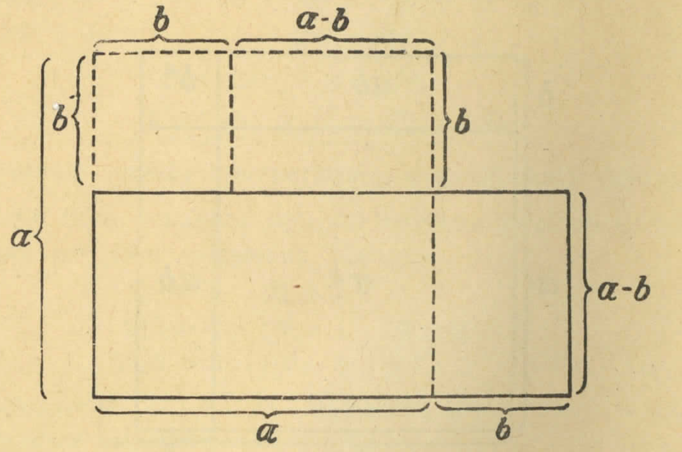
1. $(a + x)^2 =$ 2. $(c + d)^2 =$ 3. $(x + 4)^2 =$

4. $(p + 3)^2 =$ 5. $(a - x)^2 =$ 6. $(c - a)^2 =$

7. $(x - 4)^2 =$ 8. $(p - 3)^2 =$ 9. $(2p + 3)^2 =$
10. $(2p - 5)^2 =$ 11. $(x - 3y)^2 =$ 12. $(1 - x)^2 =$
13. $(2a + 3b)^2 =$ 14. $(4x - 3y)^2 =$ 15. $(- a + b)^2 =$
16. $(- 2a + x)^2 =$ 17. $(a^2 + b^2)^2 =$ 18. $(a^2 - b^2)^2 =$
19. $(x^3 + y^3)^2 =$ 20. $(a^4 - y^4)^2 =$ 21. $(a + 1)(a - 1) =$
22. $(1 + a)(1 - a) =$ 23. $(x - 2)(x + 2) =$ 24. $(3 - y)(3 + y) =$
25. $(- a - b)(- a + b) =$ 26. $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) =$



Сл. 14.



Сл. 15.

За писмено вежбање

1. $(0{,}8x + 0{,}5y)^2 =$ 4. $(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n)^2 =$
2. $(1{,}1c - 1{,}3d)^2 =$ 5. $(\frac{5}{6}m + \frac{9}{10}d)^2 =$
3. $(0{,}04a - 0{,}25b)^2 =$ 6. $(0{,}001p - 1)^2 =$

---

7. $(4a^2 - 9b^2)^2 =$ 10. $(a^3 - 3)^2 =$
8. $(7xy - 9yz)^2 =$ 11. $(5m - 4n)(5m + 4n) =$
9. $(1{,}1m^2 + 1{,}3xy^2)^2 =$ 12. $(2x + 3y)(3y - 2x) =$
13. $(\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{2}y)(1\frac{1}{2}y - 1\frac{1}{3}x) =$
14. $(1 - 4a^2)(4a^2 + 1) =$
15. $(2a + 3b)(2a - 3b)(4a^2 - 9b^2) =$
16. $(5x - y)(25x^2 + y^2)(y + 5x) =$
17. $(7a^2 + 6b^3)(49a^4 + 36b^6)(6b^3 - 7a^2) =$
18. $(a + b + c) \cdot (a + b - c) =$
19. $(a + b + c) \cdot (a - b + c) =$
20. $(a - b + c) \cdot (a + b - c) =$
21. $(1 - x - y) \cdot (1 + x - y) =$
22. $(4 - a)^2 - (2 - a) \cdot (2 + a) + (3 + a)^2 =$
23. $(5a + 6b)^2 + (3a - 7b)^2 + (4a - 5b)(4a + 5b) =$
24. $(5x - 4y)^2 - (3x + 7y)^2 + (8x + 11y) \cdot (11y - 8x) =$
25. $(7r - 8s)^2 - (4r - s)^2 - (3r - 4s)(3r + 4s) =$
26. $(3t - 7)^2 - (5t - 2)^2 - (6t + 7)(7 - 6t) =$
27. $(9a - 8b)(9a + 8b) - (7a - 3b)^2 - (2a - 5b)^2 =$
28. $(10p^2 - 1)(1 + 10p^2) - (3 - 11p^2)^2 + (8p^2 + 7)^2 =$
29. $101^2 =$

Решење: $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201.$

30. $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801.$

31. Израчунај на исти начин 98^2, 201^2, 102^2, 1001^2, 9999^2!

32. $9{,}9^2 =$; $10{,}003^2 =$; $20{,}001^2 =$; $999{,}9^2 =$

33. $1002 \cdot 998 = (1000 + 2) \cdot (1000 - 2) = 1\,000\,000 - 4 = 999\,996.$

34. На исти начин $203 \cdot 197$; $97 \cdot 103$; $83 \cdot 77$; $11{,}5 \cdot 10{,}5$!

35. $9{,}3 \cdot 10{,}7$; $20{,}04 \cdot 19{,}96$; $1{,}72 \cdot 1{,}68 =$

Покажи да ли је

36. $2(x + 3a)^2 + 3(x - 2a)^2 - 5(x^2 + 6a^2) = 0$
37. $(a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$
38. $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) = (a - b) \cdot (b - c) \cdot (c - a)$!

Помножи полиноме:

39. $2x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + 3y^3$ и $x^2 - 2xy + 4y^2$
40. $6m^3 + 3m^2 + 2m + 1$ и $m^2 + 3m - 2$
41. $4 - 6p - 8p^2 - 7p^3$ и $1 - 4p + p^2$

42. $a^2b^2 + 4ab - 7$ и $a^2b^2 - 7ab + 9$
43. $-7x - ax^2 + a^2x^3$ и $4 - x + a^2x^3$
44. $a^2 + x - ax + 5$ и $a^2 - x^2 + ax - 5$.
45. $a^3 + b^3 - a^2b + ab^2$ и $a^2 - ab + b^2$
46. $1 + 2a + 3a^2 + 4a^4 + 5a^5$ и $1 + 2a$
47. $5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x + 7$ и $6x^2 + 4x - 7$
48. $-3x^2 + 5x - 7$ и $-7x^2 - 5x + 3$
49. $(a + b + c) \cdot (-a + b + c) \cdot (a - b + c) \cdot (a + b - c) =$
50. $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) =$
51. Ако је $A = a + b$, $B = ma + b$, покажи да је

$$B^2 - mA^2 = (1 - m)(b^2 - ma^2)!$$

52. Колико је $(a + b)^3$ и $(a - b)^3$? Обрасце искажи речима и упамти!

53. $(a + 2b)^3 =$; $(2a - b)^3 =$; $(2x + 3y)^3 =$; $(5x - 2y)^3 =$
54. $(3a + 4b)^3 =$; $(5a - 3b)^3 =$; $(3x - 4y)^3 =$; $(6x - 5y)^3 =$
55. $(ab + c)^3 =$; $(2xy - z)^3 =$; $(3ab + 4ab^2)^3 =$; $(4y^3 - 8z^2)^3 =$
56. $(0{,}1z^2 - 10)^3 =$; $(0{,}6a^2 - 0{,}5)^3$; $(0{,}4a^2 - 0{,}8a)^3 =$
57. $\mathbf{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$
58. $(a + 2b + 3c)^2 =$; $(5m + 3n + p)^2 =$
59. $(8r + 2s - t)^2 =$; $(8x + 3y - 4z)^2 =$
60. $(3a^2 - a - 5)^2 =$; $(6x^2 - 2x + 1)^2 =$
61. $(5a^2 - 4)(5a^2 + 4) - (4a - 5)^3 + (6a + 7)^3 =$
62. $(6m^2 - 4)^3 - (5m^3 - 2m)^2 - (7m + 2)^3 =$
63. Колико је $(a + b)^4$ и $(a - b)^4$?
64. Колико је $(a + b + c + d)^2$? .
65. $(a - b - c - d)^2 =$

Квадрат и квадратни корен

45. Квадрат двоцифрених бројева. — Један одређени број можемо подићи на квадрат тиме, што ћемо га помножити самим собом. Али квадрирање се обично врши по обрасцу

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

пошто се сваки број може написати у облику збира из његових десетица и јединица. Тако је

$$73^2 = (70 + 3)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 3 + 3^2,$$

што се у пракси овако пише:

$$\begin{array}{cr} 70^2 & 4900 \\ 2 \cdot 70 \cdot 3 & 420 \\ 3^2 & 9 \\ \hline & 5329 \end{array} \qquad \text{тј.} \qquad \begin{array}{cr} 7^2 & 49 \\ 2 \cdot 7 \;\; 3 & 42 \\ 3^2 & 9 \\ \hline & 5329. \end{array}$$

У другом случају су нуле изостављене, али смо водили рачуна о месној вредности сабирака, па их потписивали за једно место удесно.

Напомена 1. — Квадрат двоцифреног броја треба увек израчунати усмено, при чему рачунање почиње са јединицама. **На пр.**

$$47^2 = 2209.$$

При томе се говори: Седам на квадрат је 49, **9** пишем, 4 задржавам. Седам помножено са 4 је 28, удвојено 28 је 56 и 4 задржано, 60. **Нулу** пишем, а 6 задржавам. Четири на квадрат је 16 и 6 задржано 22. Пишем **22**.

Напомена 2. — Двоцифрени бројеви који се свршавају са 5 подижу се на квадрат још брже. Треба помножити цифру десетица бројем за 1 већим од те цифре, па том производу дописати 25. На пр.

$75^2 = 5625$ [производу $7 \cdot (7 + 1)$ допишемо 25].

55. Квадрат вишецифрених бројева. — За вишецифрене бројеве горњи поступак се само продужи, док се не сврши рачун са свима цифрама. На пр.

$$736^2 = (730 + 6)^2 = 730^2 + 2 \cdot 730 \cdot 6 + 6^2.$$

Изостављањем нула као и малочас можемо написати:

$$\begin{array}{cr} 73^2 & 5329 \\ 2 \cdot 73 \cdot 6 & 876 \\ 6^2 & 36 \\ \hline & 541696. \end{array}$$

Или ако место готовог квадрата броја 73 означимо заједно и поступак како се до тог квадрата дошло, имаћемо потпуну слику, како се одређује квадрат троцифреног броја.

$$\begin{array}{cr} 736^2 & \\ 7^2 & 49 \\ 2 \cdot 7 \;\; 3 & 42 \\ 3^2 & 9 \\ 2 \cdot 73 \cdot 6 & 876 \\ 6^2 & 36 \\ \hline & 541696. \end{array}$$

Сличан поступак је и за вишецифрене бројеве.

Један знатно бржи начин састоји се у томе, што се израз $a^2 + 2ab + b^2$ мало трансформише овако

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b) \cdot b.$$

Тако је $73^2 = (70 + 3)^2 = 70^2 + (2 \cdot 70 + 3)\ 3$.

$73^2 =$ (7 десетица + 3 јединице)^2 = 49 стотина + (2 · 7 десетица + 3 јединице) · 3 јединице. Практични поступак је:

$$\begin{array}{rr} 73^2 & \\ 7^2 & 49\,.\,. \\ 143 & 429 \\ \hline & 5329. \end{array}$$

Слично томе је

$$\begin{array}{rr} 736^2 & \\ 7^2 & 49\,.\,. \\ 143 & 429\,.\,. \\ 1466 & 8796 \\ \hline & 541696. \end{array}$$

При чему се говори:

Седам на квадрат једнако је 49. Удвојим 7, добијем 14. Допишем 3, добијем 143. 143 множим са 3 и производ пишем за два места удесно. Удвојим 73, добијем 146. Допишем 6, добијем 1466. 1466 множим са 6 и резултат пишем за два места удесно. Сабирам делимичне резултате.

Напомена. Децималан број диже се на квадрат као и цео број без обзира на запету. Само се у квадрату одвоји двапут више места, неголи што је било у самом броју. Зашто?

За усмено вежбање

Нађи квадрат следећих бројева:

1. 14,23, 32, 44, 57, 68, 79, 88, 96.
2. 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95.
3. 1,6; 2,8; 3,4; 5,6; 7,2; 9,3.
4. 30, 400, 250, 6800, 74 000, 850 000.
5. 0,4; 0,23; 0,04; 0,023; 0,001; 0,0005.
6. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{43}{65}$, $\frac{27}{82}$.

За писмено вежбање

Одреди квадрат следећих бројева и изврши пробу са 9:

1. 15,8; 5,04; 0,697; 52,400; 0,000218.
2. 2,084; 0,05006; 47,51; 243,600; 20,045.
3. 0,3245; 12,345; 6,8095; 0,89623.
4. 6,008; 0,20305; 50,500; 2,0022.

55. Квадратни корен. — На питање шта је квадратни корен уопште, најбоље ћемо одговорити ако решимо овај задатак:

Колика је страна једног квадрата, који има једнаку површину са правоугаоником, чија је дужина 24m, а ширина 6m?

Ако страну квадрата обележимо са x, његова ће површина бити x^2. Тада постоји једначина

$$x^2 = 24 \cdot 6 = 144.$$

Треба да одредимо онај број, који подигнут на квадрат даје 144. То је број 12. Пишемо

$$\sqrt{144} = 12$$

и читамо *квадратни корен* из 144.

$\sqrt{a}$ је такав број који подигнут на квадрат даје број a.

$\sqrt{64} = 8$ јер је $8^2 = 64$ $\qquad$ $\sqrt{4a^2} = 2a$ јер је $(2a)^2 = 4a^2$

$\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$ јер је $1{,}3^2 = 1{,}69$ $\qquad$ $\sqrt{25m^6} = 5m^3$ јер је $(5m^3)^2 =$

$\sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{7}{11}$ јер је $\left(\frac{7}{11}\right)^2 = \frac{49}{121}$ $\qquad$ $= 25m^6$ итд.

Напомена 1. Сваки број има два квадратна корена који су једнаки, а супротно означени.

Тако је квадратни корен из 4 и + 2 и — 2. Јер је

$$(+\,2)^2 = 4 \quad (-\,2)^2 = 4.$$

$$\sqrt{4} = 2 \text{ или } -2$$

што се краће пише $\sqrt{4} = \pm\, 2$.

Засада водићемо рачуна само о позитивној вредности.

Напомена 2. Квадрат је увек позитиван, јер према правилу о знацима имамо:

$$a \cdot a = a^2$$

$$(-\,a) \cdot (-\,a) = a^2$$

тј., био један број позитиван, или негативан, његов ће квадрат бити увек позитиван.

Напомена 3. Из овог видимо да негативан број нема квадратног корена.

Квадратни корен једног негативног броја ипак има једно тумачење, само ће о томе ученик слушати доцније, у вишим разредима.

За усмено вежбање

Простим посматрањем одредити квадратни корен следећих израза:

1. x^8, a^{10}, y^{10}, x^6y^4, a^2b^4, x^8y^6.

2. $49a^4b^2$, $16a^4b^2$, $49x^4y^6z^8$, $\frac{4a^2}{b^2}$, $\frac{9x^4}{y^6}$, $\frac{81a^4b^6}{c^8}$.

3. 0,01; 0,25; 0,36; 0,64; $\frac{1}{0,0001}$, $\frac{1}{0,16}$, $\frac{0,49}{0,36}$.

4. $0,01b^4c^2$, $\frac{0,16a^2}{4b^4}$, $1,21a^6c^{10}$, $\frac{16}{49}x^{12}y^{16}$.

5. $\frac{a^4}{0,81b^2}$, $\frac{0,0064x^4}{0,0001y^2}$, $9(a-b)^2$, $\frac{121}{9}(2x+y)^2$.

6. $0,01 \cdot (10x + 10y)^2$.

7. Реши једначине: $x^2 = 400$; $y^2 = \frac{36}{49}$; $t^2 = 6\frac{1}{4}$; $(x-2)^2 = 25$; $(x+4)^2 = 100$; $(z-5)^2 = 1$.

За писмено вежбање

Кад један број може да се лако растави на просте чиниоце, његов квадратни корен може да се одреди простим посматрањем.

$$7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

$$\sqrt{7056} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84.$$

Ако један број има *тачан квадратни корен*, тј. ако је број *потпун квадрат*, изложилац степена сваког његовог простог чиниоца је *паран* број.

Нађи растављањем на просте чиниоце квадратни корен следећих бројева:

1. 36, 900, 1 764, 11 025, 17 424.
2. 53 361, 63 504, 99 225, 122 500.
3. 148 225, 245 025, 480 249, 571 536.
4. 680 625, 2 480 625, 12 446 784, 18 593 344.
5. $\frac{121}{169}$, $\frac{256}{841}$, $\frac{7056}{9216}$, $\frac{450}{2048}$, $\frac{11025}{9604}$.
6. $1\frac{7}{9}$, $39\frac{1}{16}$, $182\frac{1}{4}$, $44\frac{4}{9}$, $2756\frac{1}{4}$.
7. Растављањем на просте чиниоце одреди најмањи број, којим треба помножити 8085, па да овај број постане потпун квадрат!

Решење.

$$8085 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

Најмањи број којим би га требало помножити да би постао *потпун* квадрат јесте:

$$3 \cdot 5 \cdot 11 = 165.$$

8. Нађи најмањи множилац, којим треба помножити следеће бројеве, да би постали *потпуни* квадрати:

567, 1573, 3549, 92 950, 26 299!

57. Квадратни корен ма каквог броја. — Разликоваћемо два случаја:

1. *Број из кога треба извући квадратни корен мањи је од 100.* Овакав квадратни корен мањи је од 10, један од бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и њега ученик треба да зна напамет. Ако број није потпун квадрат, на пр. 40, онда, пошто се он налази између бројева $36 = 6^2$ и $49 = 7^2$, узима се за квадратни корен број 6, *мањи број*, и каже се број 6 је његов *цели квадратни корен.* У овом случају имамо и остатак 4.

2. *Бројеви већи од 100.* Одређивање квадратног корена је обрнута радња подизању бројева на квадрат.

Пример 1. Ми ћемо поћи од примера, који смо раније имали, од броја 73. Кад га подигнемо на квадрат имамо:

$$73^2 = (70 + 3)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 3 + 3^2 = 5329, \text{ или}$$

$$(7 \cdot 10 + 3)^2 = 7^2 \cdot 100 + 2 \cdot 7 \quad 3 \cdot 10 + 3^2 = 5329.$$

У броју 5329 налазе си три сабирка и то

1. квадрат броја 70, или квадрат десетица;
2. двоструки производ од 70 и броја 3, тј. производ од *удвојених десетица и јединица* (2 7 десетица · 3);
3. квадрат јединица.

Најпре ћемо одредити десетице квадратног корена. То ћемо постићи, кад нађемо *квадратни корен из стотина* датог броја. Треба, у нашем примеру, извући квадратни корен из 53 стотине, тј. из броја 53.

Овај број није потпун квадрат. Његов *најближи мањи потпун* квадрат је 49, па ћемо узети да је квадратни корен из 53 број 7. *Или* квадратни корен из 53 стотине су 7 *десетица.*

У разлици $5329 - 70^2 = 429$ налазе се још два броја Та разлика садржи у првом реду производ из двоструког 70 и *јединица.* Ако ову разлику поделимо удвојеним 70, добићемо или неки број већи од јединица, или саму цифру јединица.

Двоструко 70 добија се кад се са 10 помножи број 14. удвојено 7.

Да бисмо поделили горњу разлику 429 са 14 10 можемо радити поступно. Најпре поделити број 429 са 10, што се ради прецртавањем цифре јединица (42,9.) па број 42 поделити са 14. Тако смо добили ово важно правило:

Кад од једног броја одузмемо квадрат десетица његовог квадратног корена, па у остатку одвојимо цифру једи-

ница, и тако добијени број поделимо удвојеним бројем десетица, добијемо број који је већи од броја јединица, или једнак том броју.

У нашем примеру имамо 42 : 14 = 3. Количник је једнак броју јединица.

Напомена. Разлика 5329 — 70^2 добија се лако и брзо, кад се квадрат десетица $7^2 = 49$ одузме од 53, па остатку допишу изостављене две цифре 29. Дакле 53 — 49 = 4, кад допишемо 29, добијамо 429.

Ако хоћемо да извршимо пробу, да ли су јединице тачно нађене, можемо подићи на квадрат број 73. Али то пробање може бити и брже.

Пошто смо од броја 5329 одузели 70^2, у остатку се налази збир

$$2\ 70 \cdot 3 + 3^2,$$

који се може и овако написати:

$$(2 \cdot 70 + 3) \cdot 3 = (140 + 3)\ 3 = 143 \cdot 3.$$

Уместо да 73 подижемо на квадрат и сравњујемо са бројем 5 329, ми можемо 143 3 сравнити са остатком 429, што је много краће.

Ако је нађена цифра јединица тачна, производ 143 3 биће једнак остатку, или мањи од њега. (Овај други случај наступа, кад задани број није потпун квадрат.)

Напомена. При образовању израза 143 3 говоримо: *удвојеним десетицама допишемо јединице и добијени број помножимо јединицама.*

Пример 2. Наћи квадратни корен броја 1518.

Решење. Увек најпре треба да одредимо број десетица квадратног корена. Треба дакле извући квадратни корен из 15 стотина, или просто из 15. Пошто је броју 15 најближи мањи потпун квадрат број 9, то ћемо рећи да је квадратни корен броја 15, број 3. Кад се од броја 15 одузме 3^2, добија се $15 — 3^2 = 6$.

Броју 6 дописаћемо две изостављене цифре 18, добићемо остатак 618. У њему треба изоставити једну цифру (61|8), па добијени број 61 поделити удвојеним нађеним десетицама, са 3 2 = 6.

Рекли смо да при овој деоби добијамо или *јединице*, или број већи од јединица.

Количник 61 : 6 = 10 нећемо ни пробати, пошто јединице морају бити једноцифрен број. Пробаћемо најпре 9

Кад удвојеним десетицама (6), допишемо 9 и то помножимо са 9, добијамо производ 69 9 = 621, који је већи од остатка 618. Број 9 је сувише велики. Смањићемо број 9 за 1 и пробати број 8.

68 8 = 544 је мање од 618, па ћемо од 618 одузети 544, 618 — 544 = 74.

Квадратни корен броја 1518 је 38, а остатак радње извлачења квадратног корена је 74.

Слично овоме одреди квадратни корен следећих бројева:

576, 1849, 4096, 1250, 3445!

Пример 3. Да се одреди квадратни корен броја 146 689.

Решење. И овде најпре одређујемо десетице квадратног корена. Овај број има 1466 стотина. Кад се из тог броја извуче квадратни корен на начин како смо радили у претходним примерима, добије се број десетица 38 и остатак 22. Овом остатку допишемо изостављене цифре 89 и добијемо број 2289. Ако сад у овом остатку одвојимо цифру јединица (228|9), па брј 228 поделимо бројем 38 2 = 76, добијамо 228 : 76 = 3.

Кад удвојеним десетицама 76 допишемо 3, па тако добијени број 763 помножимо са 3, добијамо 763 3 = 2289. Према томе квадратни корен је 383. Број 146 689 је потпун квадрат.

У пракси се рачун овако изводи:

$$\sqrt{14|66|89} = 383$$

9

56|6 — 56 : 6

544 — 68 · 8

228|9 — 228 : 76

228 9 — 763 · 3

При томе се говори: Најпре број поделим на класе. *У сваку класу долазе по две цифре.* Последња класа налево може имати и једну цифру. Квадратни корен из 14 не постоји као цео број. Узимам најближи мањи број који је потпун квадрат. То је 9. Квадратни корен из 9 је 3. Тако добијам прву цифру квадратног корена. Квадрат броја 3 је 9, кад 9 одузмем од 14, остаје 5. Броју 5 допишем следећу класу. Добијам први остатак 566. Одвојим његове јединице, па преостале десетице 56 делим удвојеном нађеном цифром квадратног корена, бројем 6. Количник је 9. То треба да буде друга цифра квадратног корена. Најпре пробам да 9 не буде сувише велики количник. Уз удвојену прву цифру 3, уз број 6, допишем 9, добијем број 69. Кад 69 помножим са 9, добијем 621. Овај број је већи од 566. Узмем количник 8. Кад 8 допишем броју 6, добијем 68. Кад 68 помножим са 8, добијем 544. 8 је друга цифра квадратног корена. Кад 544 одузмем од 566, добијем 22. Спуштам следећу класу и добијам други остатак 2289. Одвојим његове јединице, па број 228 делим удвојеним 38 итд.

Пример 4. $\sqrt{1,960}$.

Решење. Код децималних бројева деоба на класе врши се почев од запете налево и надесно. Ако у последњој класи надесно добијемо само једну цифру, дописујемо једну нулу.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{1,9600} = 1,40 & \\ 1 & \\ \overline{9|6} & 9 : 2 \\ 9\,6 & 24 \cdot 4 \end{array}$$

Напомена. Ако се неки остатак састоји само из две нуле, ставља се као следећа цифра квадратног корена нула.

Ако је број десетица остатка мањи од удвојеног нађеног дела квадратног корена, опет се стави следећа цифра нула, па поред остатка спусти нова класа. На пр. $\sqrt{93025}$.

Пример 5. $\sqrt{5}$.

Не постоји ниједан цео број, чији би квадрат био број 5. Број 5 је, дакле, непотпун квадрат. Његов квадратни корен се може само приближно да одреди. Написаћемо број у облику децималног броја стављањем запете и дописивањем произвољног броја нула.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{5,00|00} = 2,23 & \\ 4 & \\ \overline{10|0} & 10 : 4 \\ 8\,4 & 42 \cdot 2 \\ \overline{160|0} & 160 : 44 \\ 132\,9 & 443 \cdot 3 \\ \overline{271} & \end{array}$$

Извлачење квадратног корена могли бисмо наставити, ако остатку 271 допишемо поново две нуле. Само извлачење не бисмо могли никад завршити. Увек бисмо добили остатак.

Квадратни корен броја 5 је **ирационалан број.**

Напомена. Врло је згодно да ученик зна напамет следеће квадрате и квадратне корене, који се у пракси јављају врло често.

$13^2 = 169$ $\qquad$ $17^2 = 289$
$14^2 = 196$ $\qquad$ $18^2 = 4 \cdot 81 = 324$
$15^2 = 9 \cdot 25 = 225$ $\qquad$ $19^2 = 361$
$16^2 = 4 \cdot 64 = 256$ $\qquad$ $21^2 = 9 \cdot 49 = 441.$

За писмено вежбање

Да се одреди квадратни корен следећих бројева и изврши проба с 9:

1. 361, 529, 1681, 3481, 6889, 14 161.
2. 24 336, 58 564, 97 969, 150 544, 203 401.
3. 22 201, 64 009, 226 576, 249 001, 252 004.
4. 253 009, 285 156, 309 136, 418 609, 504 100.
5. 585 225, 630 436, 732 726, 813 604, 826 281.
6. 910 116, 937 024, 960 400, 976 144, 990 025.
7. 275 769, 546 121, 1 261 129, 39 640 416.
8. 65 820 769, 68 492 176, 84 456 100.
9. 51 825 605, 81 342 361, 537 729 721.
10. 6 225 367 801, 2 086 479 684, 4 900 840 036.
11. 78 081 124 900, 999 998 000 001.
12. 3,24; 86,49; 1,4161; 28,8369; 331,24.
13. 12,0409; 1015,6909; 170,3025; 100,861849.
14. 0,0961; 0,005476; 0,00010201; 0,00047961.
15. 0,054 756; 0,080 089; 99,8001.
16. 0,654 481; 0,080 656; 99,6004.
17. 0,000 236 144 689; 0,000 020 864 796 84.

Напомена. Не треба никако губити из вида да је најбоље извлачење квадратног корена растављањем на просте чиниоце.

18. Површина једног квадрата је 2*ha* 25*a*. Одреди дужину његове стране у метрима!

19. Одреди страну једног квадрата, који је једнак по површини са правоугаоником, чије су стране 12,ᵐ32 и 6,ᵐ93!

20. Нађи дужину хипотенузе једног правоуглог троугла чије су катете 924mm и 385mm кад је квадрат хипотенузе једнак збиру квадрата катета. (Питагорино правило).

Да се одреди квадратни корен следећих бројева на 4 децимала:

21. 2; 3; 5; 6; 8; 917; 314; 1 000.

22. 4,7; 6,5; 6,8; 3,18; 5,264; 7,056.

23. 0,4; 0,6; 0,9; 0,009; 50; 10; 0,081.

24. 16,9; 25,6; 0,821; 0,0733; 0,000 808.

25. Израчунај на 5 децимала:

$$\sqrt{11},\ \sqrt{21},\ \sqrt{1{,}6}!$$

26. Израчунај на 5 децимала $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ и сравни производ из квадратних корена са $\sqrt{15}$!

27. Одреди на 4 децимала:

$$\sqrt{6}-\sqrt{2};\ \sqrt{\sqrt{2}};\ \sqrt{2-\sqrt{2}};\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right);$$
$$\sqrt{10-2\sqrt{5}}!$$

28. $\sqrt{16\cdot 25}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}=4\cdot 5=20.$

Да се најбрже израчуна

29. $\sqrt{9\cdot 49};\quad \sqrt{36\cdot 81};\quad \sqrt{64\cdot 100};\quad \sqrt{25\cdot 121}.$

30. $\sqrt{144\cdot 169};\quad \sqrt{196\cdot 225};\quad \sqrt{400\cdot 289};\quad \sqrt{256\cdot 900}.$

31. $\sqrt{441\cdot 289};\quad \sqrt{1681\cdot 961};\quad \sqrt{9801\cdot 10\,000}.$

32. $\sqrt{0{,}64\cdot 0{,}09};\quad \sqrt{0{,}0025\cdot 0{,}0121};\quad \sqrt{0{,}0196\cdot 54{,}76}.$

33. $\sqrt{4a^2\cdot 36b^2};\quad \sqrt{9x^4\cdot 25y^6};\quad \sqrt{625m^8\cdot 1225n^{10}}.$

34. $\sqrt{0{,}25a^6\cdot 2{,}25b^{12}};\quad \sqrt{0{,}0004p^4\cdot 0{,}0025q^{16}}.$

35. $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}.$

36. $\sqrt{\frac{9}{4}}=;\quad \sqrt{\frac{36}{49}}=;\quad \sqrt{\frac{81}{64}}=;\quad \sqrt{\frac{225}{361}}=$

Да се одреди квадратни корен ових разломака и мешовитих бројева:

37. $\frac{289}{400};\ \frac{441}{625};\ \frac{961}{1\,024};\ \frac{900}{1\,521};\ \frac{8\,649}{11\,025}.$

38. $\frac{9\,025}{12\,996};\ \frac{21\,994}{54\,756};\ \frac{0{,}0484}{6{,}1009}.$

39. $12\frac{1}{4};\ 18\frac{7}{9};\ 5\frac{1}{16};\ 4\frac{21}{25};\ 8\frac{1}{36}.$

40. $12\frac{52}{81};\ 7\frac{53}{121};\ 4\frac{189}{225};\ 3\frac{321}{400}.$

41. $\frac{a^6}{b^2};\ \frac{9a^2}{b^4};\ \frac{59x^4y^2}{16z^8};\ \frac{324m^4n^{10}}{2025p^6q^{12}}.$

КУБ И КУБНИ КОРЕН

58. Куб двоцифреног броја. — Ученик најпре да одговори на ова питања:

1. Колики су кубови редом једноцифрених бројева?
2. Колики су кубови бројева 10, 100, 1 000, 10 000?

Куб ма кога броја можемо одредити, ако израчунамо производ од три чиниоца, једнака са тим бројем. На пример

$$15^3 = 15\quad 15\cdot 15 = 3375,$$

$$61{,}8^3 = 61{,}8\cdot 61{,}8\quad 61{,}8 = 236\,029,032.$$

Међутим подизање на куб обично се врши по обрасцу

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

пошто се сваки број може да напише у облику збира од његових десетица и јединица. На пример

$$47^3 = (40+7)^3 = 40^3 + 3\cdot 40^2\quad 7 + 3\cdot 40\cdot 7^2 + 7^3 =$$
$$= 64\,000 + 33\,600 + 5\,880 + 343 = 103\,823.$$

У пракси се обично овако пише:

40^3	64 000
$3\cdot 40^2\cdot 7$	33 600
$3\cdot 40\cdot 7^2$	5 880
7^3	343
	103 823

Или кад изоставимо нуле, а водимо рачуна о месној вредности сабирака, па сваки сабирак пишемо за једно место удесно:

4^3	64
$3\cdot 4^2\cdot 7$	336
$3\cdot 4\cdot 7^2$	588
7^3	343
	103823

59. Куб вишецифрених бројева. — За вишецифрене бројеве горњи поступак се само продужи, док се не сврши рачун са свима цифрама. На пример

$$475^3 = (470+5)^3 = 470^3 + 3\cdot 470^2\cdot 5 + 3\quad 470\quad 5^2 + 5^3.$$

470^3	103 823 000
$3\quad 470^2\cdot 5$	3 313 500
$3\cdot 470\quad 5^2$	35 250
5^3	125
	107 171 875

Нуле се обично изостављају, а делимични резултати пишу за једно место удесно:

47^3	103823
$3\quad 47^2\cdot 5$	33135
$3\cdot 47\quad 5^2$	3525
5^3	125
	107171875

Или, ако место готовог куба броја 47, означимо заједно и поступак како се до тог куба дошло, имаћемо потпуну слику, како се одређује куб троцифреног броја:

$$\begin{array}{lr}
475^3 = & \\
4^3 & 64 \\
3 \ 4^2 \cdot 7 & 336 \\
3 \cdot 4 \ 7^2 & 588 \\
7^3 & 343 \\
3 \ 47^2 \cdot 5 & 33135 \\
3 \cdot 47 \ 5^2 & 3525 \\
5^3 & 125 \\
\hline
 & 107171875
\end{array}$$

Сличан поступак важи и за бројеве од више цифара.

Напомена 1. Децималан број диже се на куб као и цео број, без обзира на запету. Само се у резултату одвоји три пута више десетних места, неголи што је било у самом броју. Зашто?

Напомена 2. Куб обичног разломка добија се, кад се и бројилац и именилац дигну на куб. На пример

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}.$$

За усмено вежбање

Одреди куб следећих бројева:

1. 20, 50, 90, 300, 11, 110, 4 000!

2. $\frac{4}{5}$; $\frac{8}{11}$; 0,4; 0,01; 0,06; $1\frac{2}{7}$; $3\frac{1}{3}$!

За писмено вежбање

Подигни на куб следеће бројеве:

1. 27, 274, 602, 536, 1008, 2345!

2. $\frac{13}{16}$, $\frac{28}{45}$, $3\frac{9}{16}$, $10\frac{1}{64}$, $4\frac{7}{18}$!

3. 4,8, 4,83; 0,52; 0,529; 9,1234!

4. Одреди запремину коцке, кад је њена ивица 63 cm; m85; 0,m428!

5. Подићи на куб следеће изразе:

$$ab,\ abc,\ x^2y,\ 4xy^3, \frac{2}{5}m^2n^2p^2,\ 2\frac{1}{4}t^2u^4.$$

6. $\left(\frac{m^2n}{7}\right)^3 =$; $\left(\frac{ax^2}{y^3}\right)^3 =$; $(0{,}1r^3st^2)^3 = ?$

7. Колико цифара може имати куб једног једноцифреног броја; колико куб двоцифреног броја; колико троцифреног, колико, уопште, n-тоцифреног броја?

60. Кубни корен. — Потребу за извлачење кубног корена можемо видети из овог задатка: да се направи коцка, која ће имати исту величину као и правоугли паралелопипед, чије су ивице $a = 4$cm, $b = 3$cm, $c = 18$cm.

Ако непознату ивицу коцке означимо са x, њена запремина биће x^3. Пошто запремина коцке и правоуглог паралелопипеда треба да буду исте, имамо једначину

$$x^3 = abc,$$

или

$$x^3 = 4 \ 3 \cdot 18 = 216.$$

Треба одредити онај број, који подигнут на куб даје 216. То је број 6. Пишемо

$$x = \sqrt[3]{216} = 6$$

и читамо кубни корен из 216.

$\sqrt[3]{a}$ је такав број, који подигнут на куб даје број а.

$\sqrt[3]{512} = 8$, јер је $8^3 = 512$.

$\sqrt[3]{2{,}197} = 1{,}3$, јер је $1{,}3^3 = 2{,}197$.

$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, јер је $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

$\sqrt[3]{8a^3} = 2a$, јер је $(2a)^3 = 8a^3$.

$\sqrt[3]{-125m^{12}} = -5m^4$, јер је $(-5m^4)^3 = -125m^{12}$.

За усмено вежбање

Простим посматрањем да се одреди кубни корен следећих израза:

1. x^6, a^{12}, y^{18}, x^6y^3, x^9y^6.
2. $8a^3b^3$, $247a^6b^3$, $64x^6y^9$, z^{12}.
3. $\frac{8a^3}{b^8}$, $\frac{125x^6}{y^9}$, $\frac{729a^{12}b^{18}}{c^{24}}$.
4. 0,001; 0,125; 0,343.
5. $\frac{1}{0{,}000001}$; $\frac{1}{0{,}064}$; $\frac{0{,}729}{0{,}216}$.

6. $0{,}001b^6c^3$; $\frac{0{,}064a^3}{64b^6}$; $1\,000\,000a^6c^{12}$; $\frac{64}{343}x^{12}y^{15}$.

7. Реши једначине: $x^3 = 8000$; $y^3 = \frac{216}{343}$;

$$z^3 = 3\tfrac{3}{8} \quad (t - 2)^3 = 27; \; (u + 4)^3 = 1000;$$
$$(v - 5)^2 = 1.$$

8. *Писмено*. Да се одреди кубни корен следећих бројева растављањем на просте чиниоце:

216, 2744, 3375, 9261, 13824.

61. Кубни корен ма каквог броја. — Разликоваћемо два случаја:

1. *Бројеви мањи од 1000*. Овакав кубни корен мањи је од 10, један од бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и њега ученик треба да зна напамет. Ако број није потпун куб, на пр. 400, онда пошто се он налази између бројева $343 = 7^3$ и $512 = 8^3$, узима се за кубни корен број 7, *мањи број*, и каже се број 7 је његов *цели кубни корен*. У овом случају имамо и остатак 57.

2. *Бројеви већи од 1000*. Израчунавање кубног корена је обрнута радња подизању бројева на куб.

Пример 1. Поћи ћемо од примера који смо раније имали од броја 47.

$$47^3 = (40 + 7)^3 = 40^3 + 3 \cdot 40^2 \cdot 7 + 3 \cdot 40 \cdot 7^2 + 7^3 \text{ или}$$
$$(4 \cdot 10 + 7)^3 = 4^3 \cdot 1000 + 3 \cdot 4^2 \cdot 7 \cdot 100 + 3 \cdot 4 \cdot 7^2 \cdot 10 +$$
$$+ 7^3 = 103\,823.$$

У кубу, у броју 103 823, налазе се ови сабирци:

1. куб десетица;
2. производ из троструког квадрата десетица и јединица;
3. производ из трострукиx десетица и квадрата јединица;
4. куб јединица.

Десетице кубног корена добићемо, кад из хиљада задатог броја извучемо кубни корен. У нашем примеру треба извући кубни корен из 103 хиљаде, или из броја 103. Кубни корен из 103 је 4, пошто је њему најближи мањи потпун куб $64 = 4^3$. Дакле цифра десетица је 4.

У разлици $103\,823 - 40^3 = 39\,823$ налазе се још три броја, међу којима главни део заузима производ из троструког квадрата десетица и јединица. Ако ми троструким квадратом десетица поделимо остаак 39 823, добићемо или неки број већи од јединица, или саме јединице кубног корена.

Троструки квадрат десетица ($3 \cdot 40^2$) може да се напише у облику

$$3 \cdot 4^2 \cdot 10^2 = 3 \cdot 16 \cdot 100 = 48 \cdot 100.$$

Остатак 39 823 можемо делити са $48 \cdot 100$ поступно, тј. најпре са 100, што се извршује прецртавањем двеју цифара ($398\underline{|23}$), па тако добијени број 398 са 48.

Количник $398 : 48 = 8$ или је цифра јединица, или је тај број већи од јединица кубног корена. Да бисмо видели шта је, можемо 48 подићи на куб. Ако је куб броја 48 једнак броју 103 823, или мањи од њега, онда је 8 цифра јединица, ако је тај куб већи од заданог броја, треба пробати број за 1 мањи од 8. Ово пробање може бити и брже. Знамо да остатак 39 823 у себи садржи производ из троструког квадрата десетица и јединица; даље производ из трострукиx десетица и квадрата јединица и куб јединица. Ми можемо образовати ова три производа, сабрати их и сравнити са остатком.

$$\begin{array}{rcr} 3 \cdot 40^2 \cdot 8 & = & 38\,400 \\ 3 \cdot 40 \cdot 8^2 & = & 7\,680 \\ 8^3 & = & 512 \\ \hline & & 46\,592. \end{array}$$

Кад смо одредили ова три производа и сабрали их, видимо да смо добили број (46 592) већи од остатка (39 823). Значи број 8 је сувише велики. Тада пробамо број 7.

$$\begin{array}{rcr} 3 \cdot 40^2 \cdot 7 & = & 33\,600 \\ 3 \cdot 40 \cdot 7^2 & = & 5\,880 \\ 7^3 & = & 343 \\ \hline & & 39\,823. \end{array}$$

Добили смо број који је једнак остатку. Према томе број 7 је цифра јединица.

Напомена. Разлика $103\,823 - 40^3$ добија се лако и брзо, кад се од броја хиљада, од 103, одузме куб десетица 64, $103 - 64 = 39$, па добијеном броју 39 допишу три изостављене цифре 823.

У пракси се рачунање изводи овако:

$$\begin{array}{lll} \sqrt[]{103|823} = 47 & & \\ \;\;64 & & \\ \;\;\overline{398\underline{|23}} & (\,:\,48) & (3 \cdot 4^2) \\ \;\;336 & & (3 \cdot 4^2 \cdot 7) \\ \;\;\;\;588 & & (3 \cdot 4 \cdot 7^2) \\ \;\;\;\;\;343 & & (7^3) \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;0 & & \end{array}$$

Нуле су изостављене.

Пример 2. Да се одреди кубни корен броја 107 171 875.

Решење. И овде поступамо слично претходном примеру и слично ономе како смо радили при израчунавању квадратног корена. *Увек се најпре одреде десетице кубног корена.* Значи треба извући кубни корен из хиљада, тј. из броја 107 171. Како се из оваквог броја извлачи кубни корен расправљали смо у прошлом примеру.

У пракси се рачун изводи овако:

$$
\begin{array}{lll}
\sqrt[3]{107|171|875} = 475 & & \\
\underline{64} & & \\
431,71 & (:48) & (3\cdot 4^2) \\
\left.\begin{array}{l} 336 \\ 588 \\ 343 \end{array}\right\} - & & \begin{array}{l}(3\cdot 4^2\cdot 7) \\ (3\cdot 4\cdot 7^2) \\ (7^3)\end{array} \\
33488,75 & (:6627) & (3\cdot 47^2) \\
33135 & & (3\cdot 47^2\cdot 5^2) \\
3525 & & (3\cdot 47\cdot 5^2) \\
\underline{125} & & (5^3) \\
0 & &
\end{array}
$$

При томе се говори: Најпре број поделим на класе. *У сваку класу долазе по три цифре.* Може се десити да последња класа налево има и две, или само једну цифру. Кубни корен из 107 не постоји као цео број. Узимам најближи мањи број, који је потпун куб. То је 64. Кубни корен из 64 је 4. Тако добијам прву цифру кубног корена. Куб броја 4 је 64, кад 64 одузмем од 107 остаје 43. Броју 43 допишем следећу класу. Добијам први остатак 43 171. Одвојим његове јединице и десетице па преостале стотине делим троструким квадратом прве нађене цифре кубног корена, бројем 48. Количник је 8. Најпре пробам да 8 није сувише велики број. Због тога образујем производе

$$
\begin{array}{rl}
3\ 4^2\cdot 8 = 48\cdot\ 8 = & 384 \\
3\cdot 4\cdot 8^2 = 12\cdot 64 = & 768 \\
8^3 = & \underline{512} \\
 & 46592
\end{array}
$$

Пошто сам изоставио нуле, а водио рачуна о месној вредности сабирака, писао сам их за једно место удесно. Збир 46 592 већи је од остатка 43 171. Број 8 је сувише велики. Узимам број за 1 мањи, број 7 итд.

Напомена 1. Код децималних бројева деоба на класе врши се *почев од запете* надесно и налево. Последња класа надесно, ако у њој нема три цифре попуни се нулама. На пр. $\sqrt[3]{1,52}$. Овде треба иза 2 дописати нулу.

Напомена 2. Ако при извлачењу кубног корена из *непотупног куба не желимо* да останемо при остатку можемо остатку дописати *три нуле*, па рачун наставити. Такви кубни *корени су ирационални бројеви.*

У оваквим случајевима се обично каже на ком децималу се треба зауставити.

Напомена 3. Ако се при одређивању кубног корена добије остатак чији је број стотина мањи од троструког квадрата већ нађеног дела кубног корена, као следећа цифра кубног корена ставља се нула.

Тај случај имамо на пр. кад хоћемо да одредимо кубни корен броја 8 489 664.

За писмено вежбање

1. Да се одреди кубни корен следећих бројева:
   1628, 5832, 12 167, 39 304, 110 592!
2. Нађи кубни корен бројева:
   4,913; 42,875; 132,651; 262,144!
3. Колики је кубни корен бројева:
   34 328 125; 53 157 376; 202 262 003?
4. Одреди кубни корен броја 474 552 000!
5. Који број треба подићи на куб да се добије
   527 514 112?
6. Колико је $\sqrt[3]{\sqrt[3]{10077696}}$?
7. Који број треба подићи на куб да се добије 0,032 768?
8. Шта је кубни корен броја
   — 87 336?

Израчунај:

9. $\sqrt{830584}$
10. $\sqrt[3]{270840023}$
11. $\sqrt[3]{1,191016}$
12. $\sqrt[3]{15,438249}$
13. $\sqrt[3]{0,016387064}$
14. $\sqrt[3]{0,006331625}$
15. Израчунати на три децимала:
   $\sqrt[3]{1,1}$ $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{5,90}$

16. Колика је ивица коцке чија је запремина 12,$^{dm^3}$ 167?

17. Запремина једне коцке је 100$^{m^3}$. Колика је њена ивица и површина?

18. Да се сагради коцка чија ће запремина бити двапута већа од запремине дате коцке. *(Делски проблем.)*

19. Колика је ивица коцкастог сандука, који хвата 12hl жита?

20. Да се одреди ивица коцке, која је тешка 8,^{kg}4, а специфична тежина материјала је $s = 2{,}5$.

62. Занимљива допуна. — Сад кад смо проучили извлачење кубног корена, можемо показати начин, како се добија кубни корен из бројева усмено, одмах на први поглед. Разуме се да то важи само *за бројеве који немају више од 6* цифара и који су потпуни кубови.

Знамо да је $1\,000 = 10^3$ и $1\,000\,000 = 100^3$. Према томе кубни корен ма кога броја од 4, 5 или 6 цифара мора лежати између 10 и 100, тј. мора бити двоцифрен број.

Затим ученик се може разним пробама уверити да кад се један потпун куб свршава са цифрама

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

његов кубни корен се завршава цифрама

1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9,

тако да цифру јединица кубног корена можемо из ове табеле одмах одредити, а да никад не погрешимо.

Цифра десетица се одређује као и обично. Одвојимо хиљаде и из тако добијеног броја извучемо кубни корен.

Пример 1. Наћи кубни корен броја 4913.

Решење. Из горње табеле видимо да крајњој цифри 3, куба, одговара 7 као крајња цифра кубног корена. Према томе 7 је цифра јединица. Десетице добијамо, кад извучемо кубни корен из 4, а то је 1. Ако је број 4913 *потпун куб*, његов кубни корен је сигурно број 17.

Пример 2. Одредити кубни корен броја 704 969.

Решење. Из горње табеле видимо да је цифра јединица кубног корена 9. Цифра десетица је кубни корен из 704, а то је 8. Према томе ако је број 704 969 потпун куб, његов кубни корен мора бити 89.

Напомена. — Ученик горњу табелу треба да има увек при руци. Одговарајући бројеви да се испишу један испод другога.

За усмено вежбање

Да се одреди кубни корен следећих бројева простим посматрањем:

1. 1728, 2744, 3375, 9291, 10 648, 19683.
2. 13 824, 35 937, 91 125, 166 375, 456 533.
3. $3\frac{3}{8}$, $42\frac{7}{8}$, $49\frac{8}{27}$, $\frac{189}{875}$.

РАЗНОВРСНИ ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ

Покажи да је:

1. $[5x^2 - 2(x^2 - a)] \cdot [2a - 3(a - 2x^2)] = 18x^4 + 9ax^2 - 2a^2$

2. $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 + 6 = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$

3. $(x - a)^2 + (x + a)^2 - (2x - a) \cdot (x - 2a) = 5ax$

4. $(x - 2y) \cdot (x + 2y) \cdot (x - 2y) = x^3 - 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3$

5. $3(a^2 - ab + b^2) \cdot \frac{1}{3} \cdot (a + b)^2 = a^4 + a^3b + ab^3 + b^4$

6. $(3x - 1) \cdot (3x + 1) - (x - 1) \cdot (1 - x) + 3(1 - 2x) \cdot (1 + 2x) = 3 - 4x^2$

7. $(a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

8. $(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$

9. Ако је $a = 5$, $b = -4$, $c = 2$, одреди који је од ових израза највећи: $a^3 + b^3$; $a^2 + b^2 + c^2$; $-abc$!

10. Ако је $a = -6$, $b = 2$ и $c = -5$, израчунај израз

$$(4a - 3b - 6c) \cdot (a + 8b + c)$$

и покажи да је $a^2 - 2a - 48 = 0$!

11. Колико је: $(-2)^2 + (-3)^2$; $(-2-3)^2$; $(-2)^3 - (-3)^2$; $(-2+3)^2$; $1 - (-2)^2$; $[1 - (-2)]^2$?

12. Од збира израза $7a + 2b$ и $-a + 8b$, одузети $8a - b$.

13. Ако је $m^3 + 2m^2 + 3m - 6 = 0$, покажи да m не може бити -2!

14. Ако је $A = 2a - b$, $B = 2a + b$, колико је

$$(2A + 3B) \cdot (A - B)\,?$$

15. Сабери следеће изразе: $2a - 3b + 4c$; $5a - 8b + 2c$; $6a - 8b + 3c$; $a - b - c$!

16. Изврши следеће радње:

$6 - (-9)$; $9 + (-3)$; $1 - (1 - 9)$; $-8 + (-3)$;
$-2 + 0 \cdot 2$; $-8 + 0 : 2$; $-5 - 7 \cdot 3$; $-5 - 9 : 9$;

$7 - 2 \cdot 4$; $2 \cdot (-7)\ 3$; $5 \cdot (-3) - 2$; $8 \cdot (6 - 6) + 5$;
$-5 \cdot 7 - 4$; $-8 + 0$; $0 - (-8)$; $8 : (-2)$; $0 : (-3)$;
$(-7) : (-1)$; $(-3) : (-0{,}1)$; $(-3) : (-0{,}01)$!

17. Ако је $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$, колико је $f(2)$, $f(0)$, $f(4)$?

18. Ако је $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, одреди $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ и $f(-3)$!

19. Ако је $f(x) = \dfrac{x-2}{3x+4}$, колико је $f(0), f\left(\dfrac{2}{3}\right), f(-28)$?

20. Ако је $f(x) = 2x + 6$, колико је $f(a)$, $f(m)$, $f(2a)$, $f(a-3)$, $f(-3b)$, $f(m^2)$?

Покажи да је:

21. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$!

22. $(x + 3y)^2 - (2x - y)^2 + (3x + 2y - z)^2 =$

23. Ако је $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6, g(x) = 3x^2 + x - 4$ $h(x) = -6x^2 - 8x$, колико је $f(x) + g(x) + h(x)$?

24. Ако је $f(a) = 9a^3 - 8a^2 - 7a + 5$, $g(a) = 2a^3 - 5a^2 + 3a + 1$, колико је

$$f(a) - g(a)?$$

25. Применом обрасца $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ одреди 53^2, 64^2, 76^2, 95^2, 83^2, 42^2, 121^2, 125^2!

26. Дужина једног правоугаоника је $(a + 5)$ метара, ширина $(a + 2)$ метара. Одреди његов обим и површину!

27. Колико је $(2a - 4b) - \frac{1}{3}(9a + 6b) + \frac{1}{5}(25a + 15b)$?

28. Израчунај на најпростији начин: $49 \cdot 51$, $79 \cdot 81$, $41\ 39$, $62\ 58$, $68 \cdot 72$, $97 \cdot 103$, $298 \cdot 302$!

29. Сабери изразе $3p - 2q + r$; $-5p + 6q - r$; $p - q + 7r$; добијени збир одузми од $2p - q - r$!

30. Изврши множење: $6x^2 \cdot (-x^5) \cdot (-3x^7)$!

31. Слично 25 задатку одреди квадрате 532^2, 537^2, кад је $53^2 = 2809$!

32. Нађи вредност израза

$$(v - u)^2 + (3v - 3u)^2 - (5 - uv)^2,$$
$$\text{кад је } v = 8,\ u = -2!$$

33. Покажи да је $\dfrac{2-t}{8+t} = \dfrac{5t+2}{t-1}$, кад је $t = -6$ или $-\dfrac{1}{2}$!

34. Колико је $6\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}\right) - 12\left(\dfrac{5}{6}x + \dfrac{3}{4}\right)$?

35. Кад се један број повећа за 1, за колико порасте његов квадрат?

36. По обрасцу $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ израчунај следеће изразе: $28^2 - 12^2, 37^2 - 23^2, 96^2 - 56^2, 823^2 - 73, 529^2 - 91^2$!

37. Реши следеће једначине простим посматрањем:

$$1{,}2x = 24;\ \frac{36}{y} = 0{,}9;\ \frac{42}{z} - 10 = 4!$$

38 Помножи $-7x^3 - 2x^2 + 3x - 8$ са $-2x + 4$!

39. Ако је $f(x) = 3x + 3{,}4$ колико је $f(-2)$, $f\left(-1\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$?

40. За колико постане производ 738 572 мањи ако оба чиниоца смањимо за 1?

41. За колико је један квадрат већи од правоугаоника, који има обим исто толики, колики и квадрат, а чија је дужа страна за 3 cm већа од квадратове стране?

42. $(4ab - 6ax + 2by - 3xy)(4ab + 6ax - 2by - 3xy) =$

43. Један човек пређе a километара за b часова. Колико km прелази за један час? Колико је њему потребно минута, да пређе један километар? Колико је времена потребно да пређе x километара?

44. Упрости израз: $5\left\{8x - 2(1 - 3x) + \dfrac{1}{5}[3 - (3 - x)] + 2\right\}$!

45. У троуглу ABC, угао $A = (3x - 6)$ степени, угао $B = (68 - 2x)$ ст. угао $C = (7x + 14)$ ст. Изрази збир ових углова помоћу слова x, тј. изрази збир тих углова као функцију од x!

46. Покажи да је квадрат сваког непарног броја неки садржалац броја 8 увећан за 1!

47. Мени је било x година пре 5 година. Колико ћу имати после 7 година? Колико ми је било пре 20 година? После колико година ћу имати $x + 20$ година? Колика ће бити моја старост после 15 година?

48 $[(a + b) + (x + y)] \cdot [(a + b) - (x + y)] =$

49. Ако је $a = 0$, $b = -2$, $c = 3$, $d = -4$, нађи простим посматрањем вредност израза:

$$\sqrt{a^2 + 2bd}; \qquad \sqrt{a^2 + c^2 + d^2}!$$

50. $(a + b + c + d)(a - b + c + d) = ?$

51. Нађи вредност израза

$$\frac{(d - b)(d - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(d - c)(d - a)}{(b - c)(b - a)} + 2 \cdot \frac{(d - a)(c - b)}{(c - a)(c - b)}$$

52. Нађи вредност израза:

$$\frac{xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x)}{(x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x)}$$

кад је $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$.

53. Нађи вредност израза:

$$\frac{a^2}{(a - b) \cdot (a - c)} + \frac{b^2}{(b - a) \cdot (b - c)} + \frac{c^2}{(c - a) \cdot (c - b)}$$

кад је $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

54. Изврши: $(a + b) \cdot (a + c) \cdot (a + d)$! Стављајући $b = c = d$, одреди вредност израза $(a + b)^3$!

55. $(a - b + c - d)(a + b - c - d) =$

56. $(08a + 0{,}3b) \cdot (0{,}3a - 0{,}8b) - (0{,}4a - 0{,}6b) \cdot (0{,}6a - 0{,}4b) =$

57. $(2{,}5x + 3)(5 - 2x) + (1{,}5 - x)(4 + 2x) + 7(x - 4)^2 =$

58. $(573 + 3)(573 - 4) - (573 + 10)(573 - 11) =$

59. $(6543 + 7)(6543 - 2) - (6543 - 4)(6543 + 9) =$

60. $(892 + 6)(892 - 3) - (892 + 8)(892 - 6) =$

61. $6a(a + 1)(7a - 2) - (3a + 1) \cdot 7a - (2a - 1) =$

62. Колику вредност добија израз: $10(3x - 5) \cdot (x + 2) - 3(5x + 4)(2x - 1)$, када је $x = 99{,}35$?

63. Израчунај $(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$!

64. Покажи да је збир израза $-3p + 2q - 4r$; $-6q + 7r$, и $4p + 9r$, једнак разлици израза $5p - 3q + r$ и $12p + q - 11r$!

65. Израчунај $(4x - 1)(2x - 5) \cdot 3 - 6(2x + 3)(2x - 3)$, кад је $x = \frac{2}{3}$!

66. Ако је $y = 5x - 8$, а $z = 3y + 7$, нађи вредност за z, кад је $x = 7$; -2; -8! Начини табелу својих одговора!

67. Реши једначине: $x^2 = 2$; $x^2 = 3$; $x^2 = 10$ на 4 децимала!

68. Реши једначинv: $2\sqrt{x} = 18$!

69. Од $4x^2 - 5$ одузми збир израза $3x^2 - (x + 1)$ и $x + 2x^2 - 5$!

70. Уреди следећи полином по падајућим степенима од x:

$x - 7 - 8x^2 + 4x^3 + 2x - 3x^3 + 5x^2 + 6$!

71. Кад се од једног израза одузме збир од $2a^2 - 3a - 4$ и $4a^2 + 7a - 5$ остатак је $3a^2 - 11$. Који је тај израз?

72. Изврши следећа множења: $(-a)^2 \cdot (-b)^2$; $(-a^2x^2) \cdot (ax)^3$; $(-a^2bc)(-ab^2c)(abc^2)$!

73. Ако је $a = b + 4$, изрази $(a - 6) \cdot (a - 2)$ помоћу b!

74. Ако је $f(a) = (a - 6) \cdot (a - 2)$, колико је $f(b + 4)$?

75. Упрости израз $7a - 6\left(x + \frac{a}{2}\right) + 4\left(x + \frac{a}{2}\right)$!

76. Одузми збир израза $2x^2 - 3(x - 1)$ и $2 + 3(x^2 - 2)$ од збира израза $5x^2 - (x - 1)$ и $x^2 - 2(x + 1)$!

77. Помножи $5x - 2(x^2 - a)$ са $2a - 3(a - 2x)$!

78. Упрости израз $2(a - x) - \frac{1}{2}(2a - 2x) + \frac{1}{3}(3a + 6x$!

79. Ако је $(a + b)(a - c) + (a - b)(a + c) = 0$, покажи да је

$$a^2 = bc!$$

80. Ако је $(a + b)^2 - (a - c)^2 = a(a + 2b + 2c)$, покажи да су a, b и c стране једног правоуглог троугла; тј. да је $b^2 + c^2 = a^2$! (Питагорино правило.)

81. Докажи да је:

$(2x + 1)(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7) + 16 = (4x^2 + 16x + 11)^2$!

82. Ако је $f(x) = x^2(6 - x)$, нађи $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$!

83. Ако је $f(x) = x(6 - x)$ нађи $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$!

84. Ако је $f(2) = 3\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)$, колико је $f(2)$, $f\left(1\frac{1}{2}\right)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$?

85. Кад се један број помножи са $\frac{22}{7}$, производ подели са 6,3, па резуqтат подигне на квадрат, добије се 484. Који је тај број?

86. Одреди квадратни корен бројева 697 225, 54 756, 1 449 616, 196 504 324! Изврши пробу са 9!

87. Извући квадратни корен из бројева 11 168 964 и 15 167 164 907. Извршити пробу са 9. Као приближни квадратни корен да се узме само добијени цео број, а да се поведе рачун и о остатку.

88. Одредити на 4 децимала квадратни корен броја 2319,78283424.

89. Код Египћана број π је имао вредност $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, код Грка $\frac{22}{7}$, код Инда и Арабљана $\frac{62832}{20000}$ и $\sqrt{10}$. Која је од ових вредности најближа данашњој? Стара индиска вредност за π била је и $\left(\frac{7}{4}\right)^2$.

90. Докажи раније споменуто правило о подизању на квадрат двоцифрених бројева, кад је цифра јединица 5!

9-. Покажи да је $(10a + 5)^2 = a\,(a + 1) \cdot 100 + 25$, ла израчунај 115^2, 125^2, 555^2!

92. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

92a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} =$; $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} =$; $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} =$; $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27} =$

92b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} =$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} =$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} =$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{72} =$

92c) $\sqrt{6a} \cdot \sqrt{24a} =$; $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{98a^3} =$; $\sqrt{6x^3} \cdot \sqrt{54x^5} =$

92d) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$.

92e) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} =$; $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} =$; $\frac{\sqrt{250}}{\sqrt{10}} =$; $\frac{\sqrt{245}}{\sqrt{5}} =$

Провери следеће једначине:

93. $3 - [4x - (2x + 4) + 1] = 6 - 2x$.

94. $14 - [12 - (2x - 6) - 9x] = 11x - 4$.

95. $12x - [3x - (7x - 9) + (2x - 3)] = 14x - 6$.

96. $24 - [5x - (2x + 5) - (3x - 7)] = 22$.

97. $7[2 - 3(x - 4) + 4(x - 6)] = 7x - 70$.

98. $6\left[x - \frac{1}{3}(2x - 7) + \frac{1}{2}(x - 5)\right] = 5x - 1$.

99. $-\{-[-(-p)]\} - \{-[a - (-q)]\} = p + q$.

100. $3n - \{3m - [6m + (12m - 3n)] - m\} = 14m$.

101. $a - (b - c) - [b - (a - c)] - \{a - [2b - (a - c)]\} = c$.

102. $5m - \{2m - 2[m \quad (m - 1)] + 2\} = 3m$.

103. $5[4 - 4(4 - x) + x] - 3[x - 3(x - 3) + 3] = 26x - 84$.

104. $(a + 2b)^2 - (b + 2a)^2 = 3(b^2 - a^2)$.

105. $2(m + n)^2 - 2(m - n)^2 = (m + 2n)^2 - (m - 2n)^2$.

106. $(p - q)^2 + (q - p)^2 = 2(p + q)^2 - 8pq$.

107. $(a - b)^2 - (b - a)^2 = 0$.

108. $(c - 2d)(c + 2d) + (d - 2c)(d + 2c) = 6cd - 3(c + a)^2$.

109. $4(x + 2y)(y + 2x) = 9(x + y)^2 - (x - y)^2$.

110. $2(3r - 2s)(3r + 2s) - 2(2r - 3s)(2r + 3s) = 5 \cdot [(r + s)^2 + (r - s)^2]$.

111. $2x + 2[x - 2(y - z)] = 4(x - y + z)$.

112. За колико треба повећати $x^3 - 3x(x - 1) - 1$ да постане $x^3 + 3x(x + 1) + 1$?

113.
$$\begin{array}{l} 7a - 3b + 2c - 2d \\ +\,6a - 4b - 5c + 2d \\ \hline \end{array}$$

114.
$$\begin{array}{l} 9x + 3y - 4z + 8 \\ 7x - 2y - 2z - 17 \\ \hline \end{array}$$

115.
$$\begin{array}{l} 8m - n + 7u + 3v \\ -\,9m + 4n - 7u - 5v \\ \hline \end{array}$$

116.
$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c + d \\ +\,\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c + 3d \\ \hline \end{array}$$

117.
$$\begin{array}{l} 3a - 4b + 5c + 2d + 7e - 8f + g - h - 2k - i \\ 2a + b - 2c - 7d - 7e - 9f - 2g + h + k \\ \hline \end{array}$$

118.
$$\begin{array}{l} -\,a + 0{,}5b + 0{,}8c - 0{,}9d - e + f \\ +\,0{,}8a - b + 0{,}5c - d + 1{,}2e - h \\ \hline \end{array}$$

119.
$$\begin{array}{l} 5{,}65a + 7\frac{3}{5}b - 27\frac{3}{4}c - 5{,}73d - 0{,}76e \\ -\,4\frac{1}{4}a + 9{,}38b + 2{,}65c - 13\frac{1}{2}d - 53{,}7e \\ \hline \end{array}$$

120.
$$\begin{array}{l} 5a - 3b + 3c - d \\ -\,3a + 4b + 7c - 9d \\ +\,2a - 5b - 8c + d \\ -\,3a + b - 6c + 7d \\ \hline \end{array}$$

121.
$$\begin{array}{l} 7x + y + u - v \\ -\,5x + 4y - 8u + 4v \\ +\,2x + 5y + 3u + 7v \\ +\,x - 8y + 4u - 4v \\ \hline \end{array}$$

Ако је $a = 25$, $b = 10$, $c = -5$, $d = -7$, израчунај изразе:

122. $a - b + c - d$ 123. $a + b - c + d$

124. $a - b - c - d$ 125. $-a + b - c + d$

126. У претходним изразима од 122 — 125 стави $a = 7x$, $b = -5x$, $c = 10x$, $d = -2x$!

127. Стави у изразима 122 — 125 $a = 7x - y$, $b = 3x + 2y$, $c = -x - y$, $d = x - y$!

128. $9{,}825abc - 6{,}837ab - 3{,}694ac + 0{,}657ab - 11{,}041abc + 10{,}478bc + 1{,}216abc + 6{,}216abc - 6{,}684bc =$

129.
$$\begin{array}{rrrr} & 6{,}9a - & 3{,}7b + & 7{,}7c - 3{,}8d \\ + & 13{,}3a - & 5{,}6b - & 5{,}5c - 7{,}6d \\ - & 7{,}4a - & 21{,}6b - & 12{,}2c + 15{,}3d \\ + & 9{,}8a + & 2{,}7b + & 3{,}8c - 9{,}7d \\ \hline \end{array}$$

130.
$$\begin{array}{rrrr} & 13{,}69x - & 27{,}11y + & 19{,}34z \\ + & 9{,}25x - & 22{,}74y - & 17{,}24z \\ - & 43{,}48x - & 16{,}96y - & 21{,}67z \\ - & 18{,}46x + & 34{,}89y + & 28{,}25z \\ \hline \end{array}$$

131.
$$\begin{array}{rrrr} & 9\frac{5}{7}m - & 8\frac{5}{6}n + & 16\frac{11}{12}q \\ + & 8\frac{11}{14}m - & 5\frac{3}{5}n - & 10\frac{5}{14}q \\ + & 5m - & 8\frac{7}{15}n - & 4\frac{2}{3}q \\ - & 17\frac{1}{2}m + & 22\frac{9}{10}n + & 7\frac{1}{2}q \\ \hline \end{array}$$

Кад је $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, покажи да је:

132. $a - 2(b - c) + 3(2a - 4b) - 6(c - 2a - 3b) = 27.$

133. $3b - \{5a - [6a + (14a - 3b) - 2abc]\} = 13.$

134. $3bc - \{4ab - [3a - (12a - 7b) - 2abc]\} = -13.$

135. $4\{a - 2(b - c) - [a - (b - 2)]\} = -16.$

Покажи да је:

136. $\frac{3b-1}{4} - \frac{2-b}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$, кад је $b = 1$.

137. $\frac{6}{a-1} = \frac{5}{a-2}$, кад је $a = 7$.

138. $\frac{5}{3t-2} = \frac{19}{7t-4} = 0$,кад је $t = \frac{3}{2}$.

139. $\frac{7}{p-2} - \frac{5}{p+2} = 0$, кад је $p = -12$.

140. $\frac{6y+1}{y+1} - \frac{3+6y^2}{y^2-1} = -4\frac{2}{3}$, кад је $y = 2$.

141. $(x^2 + yz)(yz + u^2) - (xz + zu)(xy + yu) = (xu - yz)^2$

142. $[f^2 + (t - 1)^2]^2 - 4t^2(-1)^2 = [t - (t - (t - 1)^2]^2$

143. Израчунај најбрже:

$273 \cdot 35 - 273 \cdot 25$; $47 \cdot 13 - 25\ 13 + 11 \cdot 13 - 24 \cdot 13$; $4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 25$; $125\ 3 \cdot 8$; $2 \cdot 3\ 4 \cdot 5\ 6$; $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 125$!

144. Израчунај најкраћим путем за колико је производ 748 279 мањи или већи од производа $748 \cdot 280$; од $750 \cdot 279$; од 747 279!

145. Провери да ли су тачне ове неједначине:

$(1 + x)^2 > 1 + 2x$ $\quad (1 + 2x) \cdot (1 + x) > 1 + 3x$

$(1 + x)^3 > 1 + 3x$ $\quad (1 + x)^4 > 1 + 4x.$

146. Ако је $P = x^2 - x + 6$, $Q = 2x^2 + 5x - 7$, $R = 3x^2 + 4x + 1$, колико је a) $P + Q + R$; b) $R + P - Q$; c) $R - P + Q$?

147. Ако је $X = 2x^2 - (x^2 + xy)$, $Y = (2x + y)^2$, $Z = (2x + y)(2x - y)$, колико је $Z^2 - (X + Y)^2 + (X - Y)^2$?

148. Колика је површина и запремина коцке, кад је њена ивица $a = 1{,}$m2 ?

149. Да се одреди површина, запремина и тежина коцке, кад је ивица $a = 32{,}$dm6, а специфична тежина материјала $s = 2$.

150. Да се израчуна коцка чија је ивица $\sqrt{3}$ метара.

151. Да ли је тачан овај куб:

$382^3 = 55\ 742\ 968$?

152. Да ли је тачан овај кубни корен: $\sqrt[3]{197\ 137\ 368} = 582$?

153. Лице *A* има *x* година, лице *B* је млађе за *y* година.

1) Колики је збир њихових година сада?

2) Колики ће тај збир бити после 10 година?

3) Колики је тај збир био пре 10 година?

4) Колика је била разлика њихових доба старости пре 10 година?

Провери да ли су исправни следећи квадрати:

154. $138^2 = 19\ 044$; $157^2 = 23\ 649$; $236^2 = 55\ 696$; $309^2 = 95\ 481$; $354^2 = 125\ 316$; $394^2 = 155\ 236$; $520^2 = 270\ 400$; $604^2 = 364\ 816$; $795^2 = 632\ 025$; $849^2 = 720\ 801$; $948^2 = 898\ 704$; $983^2 = 966\ 289$.

155. $16{,}4^2 = 268{,}96$; $23{,}4^2 = 547{,}56$; $3{,}74^2 = 13{,}9876$.

156. $4{,}57^2 = 20{,}8849$; $0{,}587^2 = 0{,}344\ 569$.

157. $0{,}674^2 = 0{,}454\ 276$; $0{,}086^2 = 0{,}007\ 396$.

Одреди усмено квадрат следећих израза:

158. $2m + 3n$; $5a + 4b$; $r + 7$; $6 + s$.

159. $6t + s$; $p + 9q$; $m + 0{,}8n$.

160. $0{,}5x + 0{,}8y$; $a + 0{,}03b$; $1{,}5 - 0{,}9b$.

Шта треба подићи на квадрат да се добије:

161. $9m^2 + 12mn + 4n^2$; $a^2 + 10a + 25$.

162. $36x^2 + 12xy + y^2$; $t^2 + 26t + 169$.

163. $0{,}01p^2 + 0{,}4pq + 4q^2$.

Следеће изразе допуни да постану триноми потпуни квадрати:

164. 1) $a^2 + 14a$ 2) $b^2 + 8b$
3) $x^2 - 18x$ 4) $y^2 + 20y$
5) $25m^2 + 40m$ 6) $4t^2 - 10t$
7) $64z^2 - 96z$ 8) $a^2 + 12ab$
9) $4x^2 + 20xy$ 10) $25 - 20b$

Провери да ли је у следећим примерима тачно одређен квадратни корен:

165. $\sqrt{4489} = 67$; $\sqrt{10201} = 101$; $\sqrt{12996} = 114$

166. $\sqrt{26896} = 164$; $\sqrt{136900} = 370$; $\sqrt{190096} = 436$.

167. $\sqrt{253009} = 503$; $\sqrt{277729} = 527$; $\sqrt{65536} = 256$.

Растављањем на просте чиниоце одреди квадратни корен следећих бројева:

168. 262 144; 260 100; 240 100; 230 400; 220 900; 440 896; 531 441; 390 625; 117 649.

Изврши пробу са 9!

169. Докажи следеће правило:

Ако је један троцифрен број састављен од три узастопне цифре, и ако напишемо број састављен из истих цифара, само да иду обрнутим редом, разлика таква два броја увек ће бити 198.

170. Исто тако докажи правило:

Ако у једном двоцифреном броју, чији је збир цифара 9, цифрама променимо места, па тако добијене бројеве саберемо, добићемо као збир увек број 99.

171. За колико ће се производ 831 754 смањити, ако први чинилац повећамо за 1, а други смањимо за 1?

За колико ће се тај производ повећати, ако први чинилац умањимо за 1, а други повећамо за 1?

172. После овога докажи *уопште* ова правила:

1) Кад у производу два неједнака броја мањи број смањимо за 1, а већи повећамо за 1, нови производ ће бити мањи.

2) Ако у производу два броја, чија је разлика већа од 1, већи умањимо за 1, а мањи увећамо за 1, нови производ ће бити већи.

173. Искажи слична правила за производ два броја, који се разликују само за 1; и за производ два једнака броја.

Провери следеће једначине:

174. $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 4) = a^4 - 16$.

175. $(m + 2)(m - 2)(m - 2)(m + 2) = m^4 - 8m^2 + 16$.

176. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^6 - y^6$.

177. $(x - 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)(x + 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = x^6 - 64y^6$

178. $(a^2 + ab + b^2)^2 = (a^2 + ab)^2 + (b^2 + ab)^2 + (ab)^2$.

179. $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$

180. $a(x + u)^2 + 2b(x + u)(v + y) + c(y + v)^2 = (ax^2 + 2bxy + cy^2) + 2[x(au + bv) + y(bu + cv)] + (au^2 + 2buv + cv^2)$.

181. $a(a + m)(a + 2m)(a + 3m) + m^4 = (a^2 + 3am + m^2)^2$.

Изврши пробу стављајући наместо a и m посебне бројеве!

182. $(2a + 1)^2 + (2a - 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2b - 1)^2 = 8(a^2 + b^2) + 4$.

Стави наместо a и b посебне бројеве!

ДОДАТАК ЗА ЧИТАЊЕ

1. Проширивање бројне области. — Ако се мало осврнемо уназад и погледамо шта смо досада научили о бројевима и рачунању са њима, можемо запазити неколико важних момената. Најпре смо учили рачунске радње са целим бројевима, са бројевима природног бројног низа. Делили смо их на радње „првога ступња“, то су сабирање и одузимање, и на радње „другога ступња“, а то су множење и дељење. Сабирање и множење зову се још и „директне“, а одузимање и дељење „обрнуте“ радње. Сабирање и одузимање су првобитне и врло старе рачунске радње. Тек са развитком културе човечанства, развило се из сабирања множење, а из одузимања дељење. Из множења се доцније развило и степеновање.

2. При рачунању са бројевима природног бројног низа наишли смо на тешкоће код дељења. То је довело до стварања нових бројева, *разломака.* Каже се да је на тај начин *бројна област проширена.*

Наишли смо на тешкоће и при одузимању, кад се јавио проблем, да се од једног мањег броја одузме, други неки већи број. Ту смо тешкоћу уклонили увођењем нуле и негативних бројева. То је било *ново проширење бројне области.*

У тако проширеној бројној области, где имамо све позитивне и негативне бројеве, целе и разломке, могућне су све раније споменуте рачунске радње са свима бројевима. Изузетак чини само *нула. Нулом не можемо делити.*

Рачунска радња извлачење квадратног корена довела је до нових теешкоћа. Те су тешкоће отклоњене *новим проширењима* бројне области. Дошло се до две врсте нових бројева, до *ирационалних* и *имагинарних бројева.* О имагинарним бројевима ученик ће слушати у вишим разредима.

3. Ирационални бројеви. — Рекли смо већ да при одређивању квадратног корена из броја 2 наилазимо на ту тешкоћу, што као резултат добијамо један децималан број, који није коначан. Са продужавањем радње непрестано дописујући две нуле остатку, добијамо све нове и нове децимале у резултату. Такав један број, који се добија извлачењем квадратног корена, а код кога је број децимала бескрајно велики, зовемо *ирационалан број.*

Како смо већ у аритметици за други разред споменули бескрајне десетне разломке, то је згодно да у овој прилици направимо једно мало поређење.

4. Бескрајни десетни разломци, које смо раније проучавали, разликују се од ирационалних бројева по томе, што су они периодични, и што се могу преобратити у обичан разломак. На пр. $\frac{5}{7} = 0{,}714285714285714285 \ldots\ldots$

На левој страни ове једначине имамо обичан разломак, на десној један бескрајан десетни разломак. Ту има бескрајно много децимала, али се они ређају правилно, периодично. Имамо првих шест децимала неправилно 714285, али после тога се они поново јављају у групама по шест, и истим редом.

Један ирационалан број има бескрајно много децимала који не теку правилно. *Уз то он се не може написати као обичан разломак.*

5. Пасматрајмо $\sqrt{2}$ и обележимо његову вредност са x, тј.

$$x = \sqrt{2}.$$

Да x не може бити цео број, то се види на први поглед. Али x не може бити ни обичан разломак. Јер ако би такав разломак постојао, ми бисмо га могли написати, пошто претходно извршимо сва могућа скраћивања, у облику

$$\frac{a}{b}$$

где су a и b релативно прости бројеви. Дакле разломак $\frac{a}{b}$ је доведен на *несводљив облик.* Пошто он треба да претставља квадратни коерн из 2, то кад га подигнемо на квадрат, треба да добијемо 2, тј.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = 2.$$

Али како је разломак $\frac{a}{b}$ несводљив, то се ни $\frac{a \cdot a}{b \cdot b}$ не може да скрати, па не може ни бити једнако броју 2. $\sqrt{2}$ *не може никад да ће напише као обичан разломак.*

6. Нама је лако замислити један периодичан десетни разломак, где се извесна група децимала правилно понавља. Да покушамо, бар у мислима, да себи претставимо један ирационалан број, један десетни разломак, који је бескрајан, а није периодичан. Ето на пр. узмемо једну аритметику, па почнемо из ње да исписујемо, десно од запете, редом све цифре, како на њих наилазимо, идући од стране до стране. Затим цифре из неке друге аритметике итд. На тај начин извесно нећемо добити никад период.

Или пустимо да нам данас неко издиктира 100 цифара, сутра неко други 100 цифара итд. Или ставимо у једну кесу по 100 примерака од сваке цифре, исписанх на малим листићима, па пошто добро измешамо, извуцимо једну прегршт цифара и напишимо их редом. Затим извуцимо другу прегршт итд. У оваквим случајевима постоји увек врло велика вероватноћа, да нећемо добити период.

Ономе који још сумња можемо и на овај начин помоћи. Узећемо један периодичан разломак, на пр.:

$$0{,}135\,135\,135 \ldots\ldots,$$

па ћемо систематски кварити период. И то се може на много начина да изврши. Ми ћемо само на један начин показати, пошто је ствар већ доста јасна. Ставићемо иза првог периода једну цифру, иза другог ту исту цифру двапута, иза трећег ту исту цифру трипута итд., тако да је сваки периодицитет искључен.

Нека нам та цифра буде 2 па ћемо имати:

0,1352 13522 135222.........

Или уметањем нула између прве и друге цифре периода:

0,1035 10035 100035.........

Сигурни смо, дакле, да се на бескрајно много начина могу написати десетни разломци, са бескрајно много децимала, али који немају никаквих периода.

7. Цели позитивни и негативни бројеви и разломци, за разлику од ирационалних бројева, зову се ***рационални бројеви.*** Реч ratio (изг. рацио) је латинска и значи мера. Ирационалан значи оно, што се не може мерити, ***несамерљиво.*** Постоје величине које се не могу измерити. На пр. у равнокраком правоуглом троуглу, кад су катете по 1 dm, хипотенуза се не може измерити. Њен мерни број је десиметара $\sqrt{2}$.

8. Алгебра. — Раније смо говорили да су пре римских и арапских цифара употребљавана слова за писање бројева. Тада смо нарочито истакли колико је данашњи начин савршенији од ранијих. Колико је спретније и лакше моћи написати све бројеве само са десет знакова 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, неголи писање словима, чији је број знатно већи. Само писање бројева словима је много теже, а о тешкоћама при рачунању и да не говоримо.

Човечанство је у свом поступном усавршавању у писању бројева и рачунању њима прешло преко слова на цифре. Цифре претстављају напредак према употреби слова. Служећи се цифрама, а са све већим развитком разноврсних рачуна, долази се поново на мисао о употреби слова. Само садања употреба слова значи опет напредак. Нови начин се разликује од старог углавном по томе, што је при старом начину једно слово значило увек један исти број. На пр. код Грка слово α значило је број 1, ϵ увек број 5 итд. Данашњи начин употребе није више такав.

9. Данас нам слова не служе више за рачунање, него казују каква је улога појединих бројева у проблему. У обрасцу за интересни рачун

$$= \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$$

слова служе томе, да нам у краћем и прегледнијем облику искажу један однос, који важи за све бројеве у задацима те врсте. Краће нам се каже: *да треба бројеве који казују колики је капитал, колики је процент и колико је време, увек међусобно помножити, па тај производ делити са 100, да би се одредио интерес.* Слова нам дакле пружају један скраћен говор, који омогућава лако и сигурно *опште* размишљање и кратко и сигурно изговарање *општих* правила, непромењивих, а примењивих на безброј случајева. Употребом слова се рачунање са посебним бројевима упрошћава.

Оно што смо ми радили са словима, што је личило на рачун са њима, било је само преображавање, *трансформисање* израза из једног у други облик. На пр. у једначини:

$$(a + b)\,c = ac + bc$$

имамо два иста израза, само у разним облицима. Некада је погоднији један израз, некада други. Ми смо ту извршили *идентичну трансформацију*. Цео рачун у алгебри је у ствари само идентично трансформисање, *претварање једног израза у други њему идентичан.*

10. Алгебра као наука о једначинама постојала је од најстаријих времена. Разуме се да те једначине нису писане као данас, већ су казиване речима. На пр. код Египћана

једначина $$x + \frac{x}{5} = 21$$

исказана је: *множина (непознати број), више њена петина, дају 21.* Имали су и неку врсту хијероглифа, као знаке за сабирање и одузимање. То су биле искорачене птичије или човечије ноге. Ако су ноге управљене у истом правцу куда и поглед, то је био знак за сабирање, супротно од тога био је знак за одузимање. Употребљаван је још и знак $<$ у значењу „то укупно чини“ или „једнако“.

Слично њима негују алгебру и Грци, међу којима се нарочито истиче Диофант. Затим Инди и Арабљани. Оваква алгебра са речима, названа је „реторичка“. То би био први период алгебре, који траје све до краја 15 века.

11. Из ње произилази, преко Арабљана и Италијана, други период, где се речи не пишу целе него скраћене. То је „синкопирана“ алгебра. На пр. белгијски математичар Симон Стевин пише наместо данашњег

$$4x^6y^3z^2 : 13xy^5z^7$$

отприлике овако:

4 ⑥ *M* see ③ ter ② *D* 13 ① sec ⑤ ter ⑦ .

Наше x (quantite proposee”) јављало се као кружић, у који се уписивао изложилац. Ако је требало и y, оно се јављало у истом облику, само се испред кружића стављао слог scc (seconde) а са ter изражавана је непозната z. Наместо знака множења дошло је слово M (multiplication), а **D** (division) наместо знака дељења.

12. Рачунање са словима у данашњем смислу налазимо тек код Француза Франсоаа Виета (1540—1603). Виет је употребљавао велика слова из латинске азбуке. Познате величине обележавао је сугласницима. Енглез Thomas Harriot (1560—1621), астроном, физичар и математичар, наставио је рад Виета и увео наместо великих мала слова. На тај начин писање бројева постало је простије и прегледније. Th. Harriot увео је знак $>$ (веће) и $<$ (мање). Код великог францускот филозофа и математичара Декарта, (1596—1650), рачунање са словима има већ данашњи облик. Он употребљава за познате почетна слова азбуке a, b, c, ... за непознате завршна x, y, z, ... Услед велике упрошћености рачунање са словима врло брзо се распрострло. Ово би била „симболичка“ алгебра.

Између ове три алгебре тешко је повући строгу границу. Слова за обележавање величина употребљавали су још Грци Аристотело, Еуклид, Диофант, Архимед и др.

Реч алгебра долази од арабљанске речи ал-џабр. Једна рачуница арабљанског математичара Мухамеда ибн Мусе Алхваризмиа носила је наслов *Ал-џабр валмукабала*. Ал-џабр је значило отприлике оно, што ми данас називамо пребацивање једног члана једначине с једне стране на другу.

13. Негативни бројеви. — Кад видимо колико је рачунање са негативним бројевима просто и лако, учини нам се, као да су они већ одавно уведена у област рачуна. То ипак није случај. Тек у 18 столећу је Швајцарцу Леонхарду Ојлеру, (1707—1783), испало за руком, да и последњи остатак противника негативних бројева увери о њиховој потреби. Француски философ и математичар Декарт указа у Европи као први најјасније да се пошав од 5, 4, 3, 2, 1, 0 може и даље бројити уназад. Препирка је трајала око тога 100 година. Један део математичара тврђаше да негативни бројеви нису никакви бројеви. И како је међу њима било истраживача, који су били од утицаја, борба је трајала дуго време, док се најзад не учврсти схватање, да са негативним бројевима можемо рачунати као и са природним бројевима.

Код старих Грка негативни бројеви нису важили као бројеви, и она решења једначина, која се појављиваху као негативни бројеви, нису призната за решења.

Најстарије истраживање негативних бројева допире ипак у ранија времена. Са таквим величинама су Инди већ рачунали у 7 столећу.

Арабљани који су већим делом прихватили индијску културу и уживели се у индијски рачун, који је био већим делом практичног смера, негативне бројеве нису усвојили. На тај начин је од првог сазнања за ове бројеве, до њиховог дефинитивног усвајања, протекло преко 1000 година.

Речи „позитиван“ и „негативан“ јављају се већ код једног ученика Виета. Поред овога употребљаване су и речи „афирматив“ и „примитив“, док најзад у 19 столећу данашње означавање позитиван и негативан није постало опште.

Инди су негативне бројеве обележавали тачком изнад броја или запетом на пр. $\dot{5}$ или 5’.

Кинези су употребљавали разне боје. За позитивне бројеве служили су се црвеном, а за негативне црном бојом.

14. Корен. — Појам корена био је већ у старо доба јасан. Зна се да је Архимед (287—212) могао извући квадратни корен, само, нажалост, ни до данас није ништа познато у појединостима о његовом методу. Поступак који ми данас примењујемо је веома стар. Најстарији извор за извлачење квадратног корена имамо код математичког писца Теона из Александрије (око 360 г. по Хр.).

Знак за квадратни корен била је најпре једна тачка испред броја. После тога уведена је данашња кука без горње положене црте. Данашњи дефинитивни облик увео је Декарт.

Платон и његова школа примили су од Питогорејаца појам ирационалног, али га нису потпуно признали. Архимед се бавио ирационалним бројевима. Он је утврдио да се ови бројеи могу затворити између два рационална броја. Тако је код њега

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}\,.$$

Грчко учење о ирационалним бројевима примили су Инди. Значајне кораке напред учинили су Арабљани. Од ових понешто има и код Леонарда из Пизе.

Али шта управо значи ирационалан број утврђено је од математичара у 15, 16 и 17 столећу.

Највећи напредак у проучавању ирационалних бројева донело је 19 столеће. Скоро једновремено су три велика немачка математичара тешки проблем свестрано проучили и разрешили: Рихард Дедекинд, Карл Вајерштрас и Георг Кантор.

15. Алгебра као школски предмет уведена је од епохе велике француске револуције. Оснивање Политехничке школе у Паризу послужило је као потстрек за стварање читавог низа елементарних уџбеника из математике.

У последње време, паралелно са великим развитком науке и технике, запажа се да се математика све више и више увлачи у најразличитије области људског делања. *Најчешће претежну улогу игра појам функције.*

16. Избор знакова. — У елементарној алгебри употреба слова је, као што рекосмо, *један скраћен говор.* Рећи ћемо, a динара, уместо *један известан број динара.* Као што је и у сваком говору, тако је и у алгебри, обележавање је произвољно, тј. ми можемо, по вољи, обележити известан број динара са a, са b, или са N или са z итд.

Била би међутим велика заблуда, ако бисмо веровали да је потпуно свеједно, какав ћемо начин обележавања узети, нарочито, ако се укаже потреба, да се употреби велики број слова. У том случају бисмо имали великих тешкоћа, ако знаке (симболе) употребљавамо произвољно, насумце. Много је боље, ако се ради по правилима, која су дугом праксом већ утврђена, а на која се можемо врло брзо навићи. Једна већ утврђена пракса је да се најчешће служимо малим латинским писменима. Познате величине означавају се почетним писменима азбуке a, b, c, d, e, f, g, а непознате завршним x, y, z, u, v, **w**, t . . .

Али то није све. Има извесних груписања слова, која су више уобичајена, неголи друга. Алгебристи сматрају извесне групе слова као да треба да буду уведене једновремено. Тако ако имамо сличне величине, оне се радије бележе са a, b, c, или са f, g, h, или са l, m, n, или са p, q, r, или x, y, z итд. Али није уобичајено да се означавају са n, o, p, или са e, f, g.

На пример, ако имамо три суме новаца, које су пласиране по три различита процента, па хоћемо да означимо колике су вредности тих сума на крају прве године, заједно са интересом, ми ћемо означити суме са a, b и c, три различита процента са p, q и r, а вредност тих сума после једне године са x, y и z. Тада ћемо имати, пошто се крајња вредност добија, кад се капиталу дода интерес:

$$x = a + \frac{a \cdot p}{100} \text{ време } t = 1.$$

$$y = b + \frac{b \cdot q}{100}$$

$$z = c + \frac{c \cdot r}{100}\,.$$

Ове обрасце лакше је написати, а да се при томе не погреши, неголи следеће:

$$z = a + \frac{a \cdot q}{100}$$

$$x = b + \frac{b \cdot p}{100}$$

$$y = r + \frac{r \cdot c}{100}$$

у којима су три суме означене са a, b и r; њихове вредности после једне године са z, x, y и три процента са q, p, c.

Покаткад се употребљавају једновремено са малим словима и велика слова истог имена A, B, C, X, Y, Z. Али се избегава употреба великих слова у питањима, где постоји опасност, да се начини збрка са обележавањима у геометрији.

17. Употреба казаљки (индекса). — Обележавања која смо споменули довољна су да се расправљају питања, где се уводи један мали број сличних величина. Кад бисмо тих величина имали у већем броју, брзо бисмо могли исцрпсти азбуку, а имали бисмо и обележавање, које бисмо тешко памтили. У таквом случају је боље, да сличне величине обележавамо истим словима, само да уз њих стављамо разне ка зальке, као на пр. a_0, a_1, a_2, a_3...., што се изговара *а са казаљком нула, а са казаљком 1, или краће а нула, а један, а два, а три итд.* Такође се употребљавају ознаке a', a'', a''', итд., а изговарају се *а прво, а друго, а треће,* (или на француском *à prime, a seconde, a tierce* итд.).

Узмимо да напишемо образац, који ће нам казивати колика постане сума x, после једне године, ако је претходно поделимо на шест различитих делова, па те делове издамо под интерес са различитим процентима. Ми ћемо означити делове имовине са a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Одговарајуће проценте са p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, тако да ћемо имати:

$$a = a_1 + \frac{a_1 p_1}{100} + a_2 + \frac{a_2 p_2}{100} + a_3 + \frac{a_3 p_3}{100} + a_4 + \frac{a_4 p_4}{100} + a_5 +$$
$$+ \frac{a_5 p_5}{100} + a_6 + \frac{a_6 p_6}{100}\,.$$

Овај образац је очевидно много простији за употребу са тим начином обележавања, неголи да смо узели 12 различитих слова изабраних произвољно.

Дељивост бројева објашњена словима

18. Кажемо да је један број N дељив неким другим бројем n, ако се n садржи у N тачан број пута, тј. ако је количник неки цео број, а остатак нула.

Сваки број N може да се напише у овом облику

$$N = a + 10b + 100c + 1000\text{đ} + 1000e + \ldots$$

где слова a, b, c, ... стоје наместо неке од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0.

Дељивост са 2. Имамо

$$N = a + 10b + 100c + 1000\text{đ} + 10000e + \ldots.$$

$$\frac{N}{2} = \frac{a}{2} + \text{један цео број},$$

пошто се збир $10b + 100c + 1000\text{đ} + \ldots$ може тачно поделити са 2, ма какви били бројеви a, b, c, ...

Овде имамо да је број N дељив са 2, тј. да је $\frac{N}{2}$ цео број, ако је $\frac{a}{2}$ цео број, тј. ако је a дељиво са 2. Према томе број је дељив са 2, ако му је цифра јединица дељива са 2, тј. ако на месту јединица имамо 0, 2, 4, 6 или 8.

Дељивост са 4. Имамо

$$N = a + 10b + 100c + 1000\text{đ} + 10000e + \ldots$$

$$\frac{N}{4} = \frac{a + 10b}{4} + \text{један цео број}.$$

Искажи и објасни правило дељивости са 4!

Дељивост са 8. $N = a + 10b + 100c + 1000\text{đ} + {}$ $+ 10000e + \ldots$

$$\frac{N}{8} = \frac{a + 10b + 100c}{8} + \text{један цео број}.$$

Искажи и објасни правило!

Дељивост са 5. $N = a + 10b + 100c + 1000\text{đ} + {}$ $+ 10000e + \ldots$

$$\frac{N}{5} = \frac{a}{5} + \text{један цео број}.$$

Дељивост са 3. $N = a + 10b + 100c + 1000a + {}$ $+ 10000e + \ldots$

$$N = a + (9b + b) + (99c + c) + (999d + \text{đ}) +$$
$$\frac{N}{3} = \frac{a}{3} + 3b + \frac{b}{3} + 33c + \frac{c}{3} + 333d + \frac{d}{3} + \ldots$$
$$\frac{N}{3} = \frac{a + b + c + d + e + f + \ldots}{3} + \text{један цео број}.$$

Искажи и објасни правило!

Дељивост са 9. $N = a + 10b + 100c + 1000\text{đ} + {}$ $+ 10000e + \ldots$

$$\frac{N}{9} = \frac{a}{9} + b + \frac{b}{9} + 11c + \frac{c}{9} + 111d + \frac{d}{9} +$$
$$+ 1111e + \frac{e}{9} + \ldots$$

$$\frac{N}{9} = \frac{a + b + c + d + e \ldots}{9} + \text{један цео број}.$$

Дељивост са 11. $N = a + 10b + 100c + 1000\text{đ} + {}$ $+ 10000e +$

$$N = a + (11b - b) + (99c + c) + (1001d - d) + (9999e + e) + \ldots$$
$$N = a - b + c - \text{đ} + e \ldots + 11b + 99c + 1001d + \ldots$$
$$N = a + c + e + \ldots - b - \text{đ} - f - \ldots + 11b + 99c + 1001d +$$
$$N = (a + c + e + \ldots) - (b + \text{đ} + f + \ldots) + 11b + 99c +$$
$$+ 1001\text{đ} + \ldots$$

$$\frac{N}{11} = \frac{(a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)}{11} + \text{један цео број}.$$

Цифре a, c, e... налазе се у броју на првом, трећем, петом месту итд., на непарним местима; цифре b, đ, f... на другом, четвртом, шестом... на парним местима.

Отуда правило: *број је дељив са 11, ако је разлика између збира цифара на непарним и збира цифара на парним местима нула или дељива са 11.*

Проба са 9.

19. Кад један број поделимо са 9, остатак ће бити једнак збиру цифара тог броја. Ако је тај збир већи од 9, онда ће остатак бити остатак, који се добија кад тај збир цифара поделимо са 9. На пр. кад број 23 поделимо са 9, остатак ће бити $2 + 3 = 5$; ако број 38 поделимо са 9, остатак ће бити онај, који добијамо кад $3 + 8 = 11$, поделимо са 9, тј. $1 + 1 = 2$.

Претпоставимо да смо број M поделил са 9 и добили количник m а остатак a. Тада можемо написати

$$M = 9m + a.$$

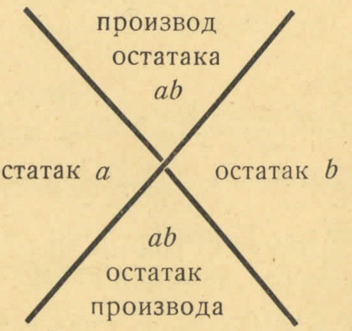
Урадимо то исто са бројем N па ћемо имати

$$N = 9n + b.$$

Производ бројева M и N можемо овако написати

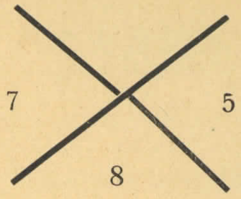
$$MN = 81mn + 9an + 9bm + ab.$$

Кад тај производ MN поделимо са 9, остатак ће бити ab. Основна мисао пробе са 9 је у томе, *да је остатак производа два броја M и N једнак производу остатака бројева M и N*. Служећи се крстом као и раније имали бисмо за бројеве M и N и њихов производ MN следећи крст:



Остаци a, b и ab, добијају се сабирањем цифара. Број 9 узима се због тога, што се остатак дељења тим бројем врло лако налази.

Пример. Производ бројева 3274 и 5621 је 18 403 154. Остатак деобе са 9 код првог чиниоца је $3 + 2 + 7 + 4 = 16$; тј. $1 + 6 = 7$; код другог $5 + 6 + 2 + 1 = 14$, тј. $1 + 4 = 5$; производ остатака је $7 \cdot 5 = 35$, и његов остатак $3 + 5 = 8$; остатак производа је $1 + 8 + 4 + 0 + 3 + 1 + 5 + 4 = 26$ тј. $2 + 6 = 8$.



САДРЖАЈ
