

Dr. IVAN ARNOVLJEVIĆ
prof. Universiteta u Beogradu

Obzirom na Dr. H. Carnotovelely

M. Ansovljević

MF 12388

PREDAVANJA
IZ
TEORIJSKE MEHANIKE

II DEO

2. SVESKA:

STATIKA KRUTE PLOČE — PRAKTIČNI DEO

Sredio za štampu
Ing. SVET. A. NEŠIĆ
h. asistent Universiteta

БИБЛИОТЕКА
МАШИНСКОГ ЗАВОДА
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА
Број инвентара 10.437

Stručno - tehnička litografija
„LITO-ŠTAMPA“
Dragoljuba T. Djurdjevića
(Tehnički fakultet)

IZDANJE
UDRUŽENJA STUDENATA MAŠINSKE I ELEKTRO-TEHNIKE
BEOGRAD
1 9 3 7

	str.
<u>β. PRAKTIČNI DEO</u>	337-568
<u>I. UVOD U TEORIJU PUNIH RAVNIH NOSAČA</u>	337-371
17. <u>OSLONCI LEŽIŠTA I VEZE</u>	337-361
a) Nosač je samo jedna kruta ploča	337-351
Ležišni zglobovi - 339. Ležišni štapovi - 342.	
Uklještenost nosača - 344. Statička odredje- nost i statička neodredjenost nosača - 346.	
b) Nosač je složen iz dve ili više krutih ploča... 351-361	
Nepomerljiva veza između dve ploče - 351.	
Statička odredjenost i neodredjenost - 353.	
Luk sa tri zgloba - 354. Gerberova greda-358.	
18. <u>OPTEREĆENJE NOSAČA</u>	361-502
Vertikalni tereti - 361. Kosa opterećenja - 368.	
Ekscentrična opterećenja i napadni momenti-368.	
<u>II. PROSTA GREDA</u>	371-449
19. <u>ODREĐIVANJE OTPORA OSLOMACA</u>	371-381
Koncentrisani vertikalni tereti - 372. Podelje- no (kontinualno) opterećenje - 374. Kose kon- centrisane sile - 377. Ekscentrična sila ispreg - 378. Složeno opterećenje - 379.	
20. <u>TRANSVERZALNE SILE</u>	382-390
a) Neposredno opterećenje	382-388
Pojam transverzalne sile - 382. Dijagram transverzalne sile - 382. Grafička konstruk- cija dijagrama T - 386.	
b) Posredno opterećenje	388-390

	str.
21. <u>NAPADNI MOMENTI</u>	390-413
a) <u>Neposredno opterećenje</u>	390-411
Pojam napadnog momenta - 390. Kulmanova momentna površina - 391. Blekmanova konstrukcija verižnog poligona - 394. Analitičko odredjivanje napadnog momenta - - 397. Lančanica kao dijagram M - 399. Prijena načela superpozicije - 404. Grafo-statička metoda za crtanje parabole-406. Naprasne promene napadnog momenta - 407.	
b) <u>Posredno opterećenje</u>	411-412
c) <u>Opasni preseki</u>	412-413
22. <u>ODNOS IZMEDJU DIJAGRAMA: OPTEREĆENJA, TRANS- VERZALNE SILE I NAPADNOG MOMENTA</u>	413-424
Opšte jednačine - 413. Primeri - 420.	
23. <u>AKSIJALNE SILE</u>	424-429
Pojam aksijalne sile - 424. Brojni primeri - 426.	
24. <u>ZADACI ZA VEŽBANJA</u>	429-449
III. <u>UZIDANA GREDA - KONZOLA</u>	449-457
25. <u>OPŠTI SLUČAJEVI</u>	450-454
26. <u>ZADACI ZA VEŽBANJA</u>	455-457
IV. <u>GERBEROVA GREDA</u>	458-478
27. <u>OPŠTI SLUČAJEVI</u>	458-469
28. <u>ZADACI ZA VEŽBANJA</u>	469-478
V. <u>LUK SA TRI ZGLOBA</u>	478-502
29. <u>ODREDJIVANJE REAKCIJA OSLOKACA</u>	479-485

	str.
Grafičke metode - 479. Analitičke metode-483.	
30. <u>NAPONI U LUČNOM NOSAČU</u>	485-489
Proizvoljno opterećenje (grafička metoda)-486.	
Vertikalni tereti analitička metoda - 487.	
31. <u>ZADACI ZA VEŽBANJA</u>	489-502
VI. <u>RAZNOLIKI STATIČKI ODREDJENI SISTEMI ZADACI ZA VEŽBANJA</u>	502-534
32. <u>GREDA SA IZLOMLJENOM OSOVINOM</u>	502-509
33. <u>GREDA OJAČANA ZATEGAMA</u>	510-517
34. <u>MEŠOVITI SLOŽENI NOSAČI</u>	517-534
VII. <u>DOPUNE REŠETKASTIM NOSAČIMA</u>	534-559
35. <u>REŠETKASTA GERBEROVA GREDA</u>	534-538
36. <u>REŠETKAST LUK SA TRI ZGLOBA</u>	538-544
37. <u>SLOŽENE REŠETKE</u>	544-553
38. <u>REŠETKE SPECIJALNE VRSTE</u>	553-559
VIII. <u>PRIMENA UŽETA U MAŠINSKIM KONSTRUKCIJAMA</u>	559-568
39. <u>TRENJE UŽETA</u>	559-566
40. <u>NEPOTPUNA SAVITLJIVOST UŽETA ("KRUTOST" U- ŽETA)</u>	566-568.

STATIKA KRUTE PLOČE

— Praktični deo —

β) Praktični deo.

I. Uvod u teoriju punih ravnih nosača.

Statika krute ploče ima važnu primenu u tehničkoj praksi pri ispitivanju stabilnosti raznih vrsta punih ravnih nosača. Pojam ravnog nosača već smo upoznali za slučaj da je on sastavljen od materijalnih linija (štapova), koje leže sve u jednoj ravni. Imali smo prvo pomerljive nosače - lančani i lučni, (str. 67 do 70), a zatim i nepomerljive - rešetkaste - nosače, sastavljene obično iz niza trouglova, str. 86 do 157. Sad ćemo upoznati i nosače u vidu jedne ili sistema od više ravnih krutih ploča, koji se od prethodnih time razlikuju (v. str. 213-214), što im je cela ravan ispunjena materijom, te se zbog toga i nazivaju punim nosačima.

Nosače, sastavljene samo iz jedne krute ploče, zvaćemo prostim, a one koji su sastavljeni kombinacijom dve ili više ravnih ploča zvaćemo složenim punim nosačima.

17. Oslonci, ležišta i veze.

a) Nosač je samo jedna kruta ploča.

Iz teorijskog dela (str. 259) poznato je da će jedna

krute ploča, pod uticajem spoljnih sila koje leže u njenoj ravni, ostati u ravnoteži samo onda, kad te sile zadovoljavaju tri analitička uslova ravnoteže (jednačine 112b):

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum M_0^{(P)} = 0$$

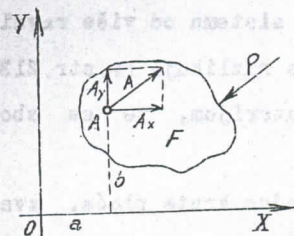
Ako ma koji od ta tri uslova nije zadovoljen, ploča će se kretati. Iz toga zaključujemo da ravna ploča ima uopšte tri stepena slobode*): ona se može kretati translatorsno bilo u pravcu jedne bilo u pravcu druge koordinatne osovine, dakle u proizvoljnom pravcu, ili se može obrtati oko ma koje tačke u svojoj ravni.

Da bi se jedna kruta ploča mogla upotrebiti kao nosač, ona mora biti ograničena u svome kretanju tako, da ostane nepomična. U praksi ovo ograničenje kretanja postiže se vezivanjem krute ploče za izvesne nepomične tačke, ili pak oslanjanjem ploče na nepomične oslonce (ležišta). Ako na primer ploču F podupremo u tački A (sl. 191) tako, da A ostane nepomično, onda je ograničenje slobode kretanja ploče izraženo jednačinama

$$x = a$$

$$y = b$$

koje kažu da su koordinate tačke A nepromenljive. Tada se ploča F ne može kretati ni u pravcu x-ose ni u pravcu y-ose, te ima dakle samo jedan stepen slobode: može se još samo obrtati oko tačke (zgloba) A, koju tada



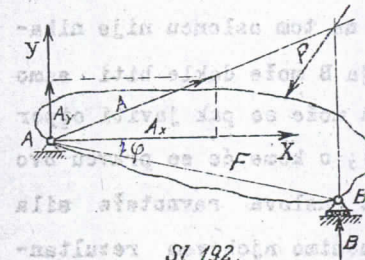
Sl. 191.

*) Uporedi: Mehanika I, str. 229-233 i str. 536-537.

zamišljavamo tako, kao da kroz nju prolazi neka osovina, upravna na ravan ploče.

Ležišni zglobovi. - Ako bi pod uticajem kakve napadne (aktivne) sile P ploča F težila da se pokrene, javiće se - po zakonu akcije i reakcije - sa nepomične osovine (zgloba) u tački A jedna otporna sila (reakcija A osovine) koja će težiti da to kretanje spreči. Ono će biti zaista i sprečeno samo onda, kad sila P prolazi kroz tačku A, jer će je tada moći poništiti reakcija A osovine; a kad sila P prolazi mimo osovinu, stvoriće se od P i A spreg sila, pod čijim će uticajem nastupiti obrtanje ploče oko tačke A. Iz ovog se primera vidi da svako vezivanje ili oslanjanje krute ploče u određenim tačkama izaziva, kad je ploča napadnuta silama, pojavu izvesnih otpornih sila - reakcija - u tim tačkama tako, da ove reakcije u izvesnoj meri ograničavaju slobodu kretanja, koju bi kruta ploča imala kao bi bila slobodna (nevezana). Reakcija A osovine u navedenom primeru ukida dva stepena slobode, ali nije dovoljna da ploča ostane nepomična i da postane upotrebljiva kao nosač. Oslonac A ploče prema sl. 191 zove se u praksi nepomičan zglob.

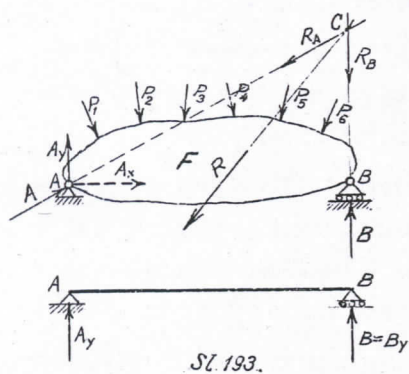
Kao nosač upotrebljiva je ploča F u Sl. 192, kojoj su dve tačke A_x i B vezane, te je i cela ploča nepomična. Reakcija oslonca A na nepokretnom ležištu (nepomični zglob) sprečava translatorsno kretanje ploče u pravcu osovine X, a - zajedno sa reakcijom B - i u pravcu osovine Y, dok reakcija B na pokretnom le-



Sl. 192.

Žištu (pomični zglob) sprečava obrtanje ploče oko tačke A. Ležište kod B izradjeno je na valjcima zato da bi pravac reakcije B bio određen a i da bi se dozvolilo širenje i skupljanje ploče (nosača) usled temperaturnih promena. Takvo ležište nije u stanju da spreči svako moguće obrtanje ploče oko tačke A, već samo obrtanje u smislu skazaljke na satu, koje bi izazvale vertikalne sile sa smislom naniže (tereti); to je međutim za praksu dovoljno, jer se kod nosača u konstrukcijama gotovo uvek javljaju samo takve sile.

Kad dodamo otpore A i B silama P, onda će ploča ostati nepomična i onda je možemo smatrati kao slobodnu - nezvanu. Takav primer imamo na sl.193 : na ploču F, oslonjenu u

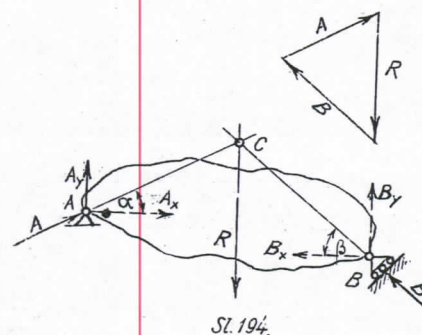


tačkama A i B, napadaju sile $P_1 - P_n$ a sem toga i otpori oslonaca A i B. Kako je ležište kod tačke B izradjeno na valjcima (pomičan zglob), koji se mogu slobodno kotrljati po horizontalnoj podlozi (trenje se zanemaruje), to na tom osloncu nije nika-

ko moguć horizontalan otpor. Reakcija B može dakle biti samo vertikalna. Na nepokretnom ležištu A može se pak javiti otpor A u svima pravcima (nepomičan zglob); u kome će se pravcu ovo A stvarno javiti, to ćemo doznati iz uslova ravnoteže sila $P_1 - P_n$, B i A. Ako sile $P_1 - P_n$ zamenimo njihovom rezultantom R, onda će na krutu ploču - zamišljenu kao slobodno telo - napadati svega tri sile: R, A i B koje treba da su u ravnoteži. One moraju, dakle, zadovoljiti poznata dva grafička us-

lova: moraju se seći u istoj tački C i moraju činiti zatvoren trougao. Iz tih uslova nalazimo grafičkim putem otpore A i B na način pokazan na sl.193. Kad primenimo na ovaj slučaj zakon akcije i reakcije, onda se (sl.193) takodje vidi da otpori oslonaca A i B predstavljaju reakcije komponentama R_A i R_B rezultante sile $P_1 - P_n$.

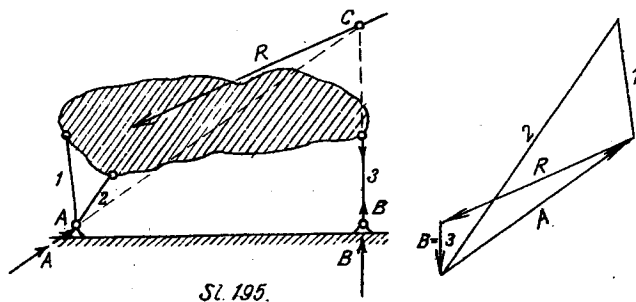
Ako bi na nosač, pretstavljen na sl.193 dejstvovala samo vertikalne sile P (tereti), onda bi njihova rezultanta R bila takodje vertikalna; u tome slučaju presečna tačka C sile R i B nalazila bi se u beskonačnosti, te bi dakle sve tri sile R, A i B morale biti paralelne. Takav nosač, kod koga je jedan oslonac nepomičan zglob a drugi pomičan zglob na valjcima koji se mogu slobodno kotrljati na horizontalnoj podlozi, nosač kod koga vertikalne sile P prouzrokuju samo vertikalne reakcije oslonaca, zovemo prostom gredom. Ako je takva greda duža od raspona AB, tj. ako ona prelazi preko oslonaca bilo na jednu bilo na obe strane, onda je zovemo greda sa pre-



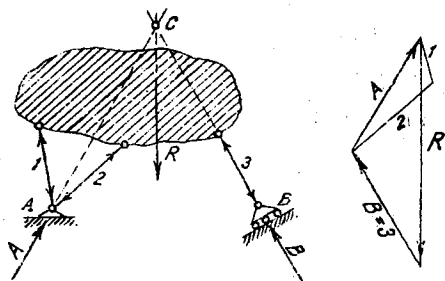
Nosač na sl.194, mada je vrlo sličan sa onim na sl.193, već nije prosta greda. Razlika je u tome, što su - i pri vertikalnom opterećenju teretima P - obe reakcije oslonaca A i B kosse. To dolazi otuda, što se pokretno ležište (pomični zglob) kod tačke B oslanja na nagnutu podlogu, te je otpor B koji uvek - kad zanemarimo trenje - mora biti upravan na pod-

logu, dakle u ovome slučaju kos, a s njim i otpor A jer on u slučaju ravnoteže mora prolaziti kroz presek C sila R i B . Primer na sl.194. sličan je sa onim na sl.193 po tome, što je moguće - konstrukcijom trougla sila - jednoznačno odrediti kolike su reakcije A i B u slučaju ravnoteže.

Ležišni štapovi. - Već kod rešetkastih greda pomenu-to je (v.sl.58. str, 90) da ležišta nosača, pokazana na sl. 192-194, mogu biti zamenjena i t.zv. ležišnim štapovima, čije unutarne sile zamenjuju reakcije oslonaca na zglobovima. Nepomični zglob, koji ukida dva stepena slobode, može biti zamenjen sa dva, a pomični sa jednim ležišnim štapom, kao što se vidi iz sl.195 i 196, koje odgovaraju slikama 193 i 194.



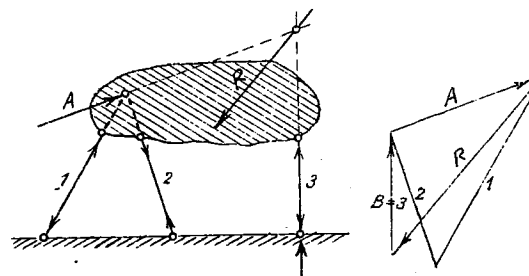
Sl. 195.



Sl. 196.

Kad je nosač sastavljen samo iz jedne krute ploče, dovoljna su dakle kao oslonac tri ležišna štapa, koji ukidaju sva tri stepena slobode i tako nosač čine nepomičnim. Ovi ležišni štapovi mogu biti i drukčije raspore-

dženi, - na primer kao što je pokazano na sl.197, koja odgovara slikama 193 i 195.



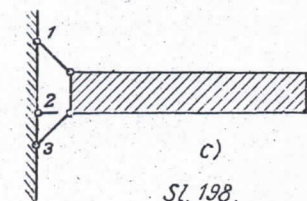
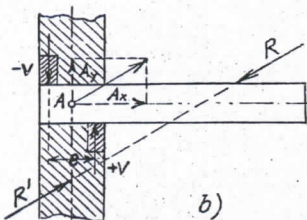
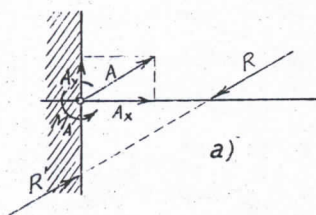
Sl. 197.

U ovome slučaju presek A dvaju ležišnih štapova 1 i 2, kroz koji prolazi rezultanta A napona u tim štapovima, naziva se - za razliku od realnog zgloba u sl.195 i 196 - imaginarni zglob; on ima značaj, bar za beskonačno mala moguća kretanja, nepokretnog ležišta A , dok ležišni štap 3 zamenjuje pokretno ležište B . Da bi nosač, oslonjen na tri ležišna štapa, bio potpuno nepomičan, ova se tri štapa ne smeju seći u jednoj istoj tački, jer bi se tada dejstvo sva tri štapa svelo, bar u pogledu na beskonačno mala kretanja, na dejstvo jednog nepomičnog imaginarnog zgloba, koji bi se nalazio u zajedničkoj njihovoj presečnoj tački, a takav jedan zglob ne osigurava nepomičnost nosača u pogledu obrtanja. Tri ležišna štapa ne smeju biti ni paralelni jer se i tada seku u istoj tački koja leži u beskonačnosti (uporedi sl. 77 str. 129).

Da se tri ležišna štapa u slučaju nepomičnosti nosača ne smeju seći u istoj tački ni biti paralelni, uveravamo se i na taj način što napone u ležišnim štapovima smatramo - po zakonu akcije i reakcije - kao reakcije trima komponentama rezultante R opterećenja nosača. Kao što je iz ranije poznato (str. 330 - 336), silu R moguće je jednoznačno razložiti u tri komponente datih pravaca u istoj ravni samo onda, kad se ovi pravci ne seku u istoj tački niti su paralelni medju sobom. Ako i rezultanta R prolazi kroz presek sva tri štapa, onda je

zadatak razlaganja neodređen: možemo silu R razložiti na bes-
krajno mnogo načina u tri komponente.

Uklještenost nosača. - Sem oslanjanja nosača na pomi-
čan i nepomičan zglob postoji još i jedan treći način, koji se
dosta često u praksi javlja, i to u najprostijem obliku kod
jedne pune konzole, sl.198b. Tu imamo samo jedan oslonac A ,



Sl. 198.

ali tako izradjen da on ukida sve
tri slobode kretanja krute ploče: i
translatorska kretanja u pravcu osa X
i Y i obrtanje oko oslonca A . Za no-
sač, ovako vezan, kaže se da je uk-
lješten ili uzidan; ako je to uči-
njeno samo na jednom kraju nosača
sistema grede, onda se on zove uzi-
dana greda ili kratko konzola.

Kad je nosač na osloncu A nepo-
mično uklješten, onda se prema sl.
198a sem kose reakcije - sile A pro-
izvoljnog pravca, čije komponente A_x
i A_y sprečavaju svako moguće trans-
latorsko kretanje krute ploče, javlja
na istom osloncu još i jedan otpor u
vidu t. zv. momenta uklještenja (ot-
porni moment M_A), koji sprečava i obrtanje nosača oko tačke
 A . Prema tome možemo reći da se uklještenost nosača razlikuje
od oslanjanja na zglobove po tome što se:

- Kod pokretnog zgloba javlja kao otpor oslonca sa-
mo jedna sila određenog pravca (B_y);
- Kod nepokretnog zgloba javljaju se dve sile A_x i

A_y ;

c) a kod uklještenosti nosača javljaju se tri otpora
i to: dve reakcije - sile A_x i A_y i jedna reakcija - moment M_A
tako, da ta tri otpora ukidaju sva tri stepena slobode. Ili:

- Na pokretnom zglavku određena je napadna tačka i
pravac sile, a nepoznata je samo veličina sile;
- Kod nepomičnog zglavka određena je samo napadna
tačka, a nepoznati su pravac i veličina sile;
- Na uklještenom kraju nepoznata su sva tri podatka
koji određuju reakciju oslonca.

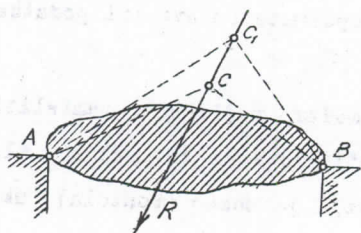
Za reakciju - moment M_A možemo najlakše zamisliti
da nastaje dejstvom jednog sprega sile ($+V$, $-V$) prema (sl.
198b), koje se javljaju u zidu, u koji je nosač (konzola) uk-
lješten, i to tako da je moment uklještenja

$$M_A = V \cdot e$$

Ako reakcije - sile A_x i A_y zamenimo njihovom rezul-
tantom A , a reakciju - moment M_A spregom sile ($+V$, $-V$), on-
da je uklještenost izražena jednom (kosom) silom i jednim spre-
gom. Iz ranije je, međutim, poznato (sl.138 str. 240) da se
sila A i spreg ($+V$, $-V$) dadu uvek složiti u jednu rezultantu
 R koja je jednaka po veličini, pravcu i smislu sili A , ali je
od nje paralelno pomeren za izvesno rastojanje. U našem slu-
čaju (sl.198) ova rezultanta R' (totalni otpor uklještenog os-
lonca) mora biti u ravnoteži sa rezultantom opterećenja R , tj.
mora s njom imati istu liniju dejstva i istu veličinu a suprot-
tan smisao. Iz toga sleduje da kod konzole rezultanta optere-
ćenja R sa reakcijom - silom A čini spreg, čiji je moment ra-
van momentu uklještenja M_A sa protivnim znakom; sem toga, da
totalna reakcija R kod konzole uopšte ne prolazi kroz oslonac

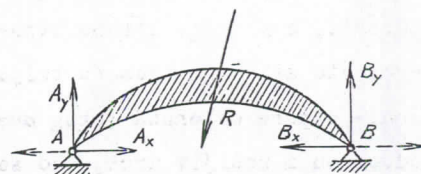
već izvan njega (ekscentrični otpor oslonca). Uklješteno ležište zamonjuju tri ležišna štapa koja se ne seku u jednoj tački i vezuju nosač sa zidom (sl.198c).

Statička odredjenost i statička neodredjenost nosača. - Ako je jedna ravna kruta ploča oslonjena u dve tačke A i B na nepomične zglobove, onda će ona biti nepomična te i upotrebljiva kao nosač, ali zadatak odredjivanja otpora oslonaca biće neodredjen, kao što se vidi iz sl.199. Kako su na nepomičnim zglobovima A i B mogući otpori u svima pravcima, a uslov ravnoteže sila R, A i B zahteva da se te tri sile seku sve u istoj tački C, to sleduje da je ravnoteža nosača moguća ma gde mi uzeli tačku C na liniji dejstva

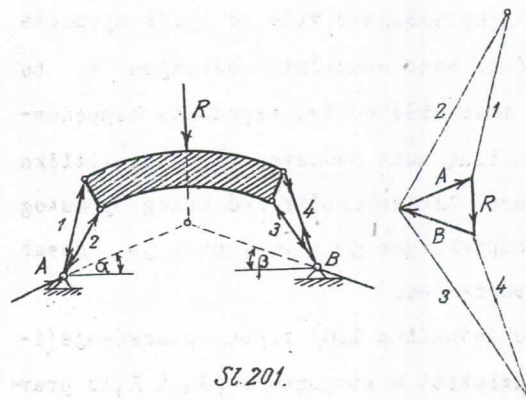


Sl.199.

rezultante R opterećenja. Prema tome u ovome slučaju ima bezbrojno mnogo pari reakcija A i B koje bi mogle biti u ravnoteži sa silom R. Koje će reakcije A i B stvarno nastupiti u datom slučaju, mi ne možemo znati sve dok ne napustimo hipotezu o tome da je ploča kruta, već kad uzmemo u obzir i njenu elastičnost. Takav zadatak ne spada dakle u statiku krutog tela, već u nauku o čvrstoći (otpornost materijala) i zato se takav nosač zove statički neodredjen. Praktičan primer takvog nosača imamo na sl.200, a to je t.zv. pun lučni nosač na dva zgloba. Kad bismo i kod njega nepomične zglobove zamenili ležišnim štapovima, dobili bismo svega četiri ležišna štapa (sl. 201). Znajući da su za nepomičnost nosača dovoljna tri ležišna štapa i upoređujući ovaj slučaj sa slučajevima na s.195-197 vidimo, da je ovde (sl.201) za nepomičnost nosača jedan štap (na



Sl.200.



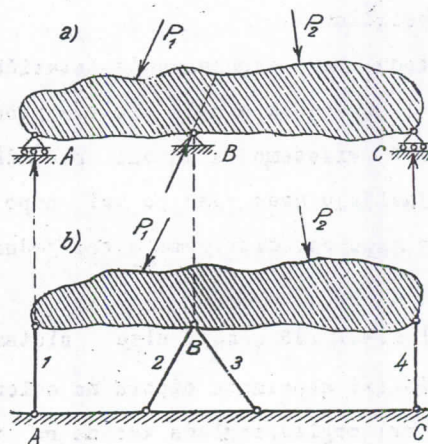
Sl.201.

ve - za razliku od proste - kontinualna greda na tri oslonca, pretstavljen je na sl.202a. Zamenom zglobova sa ležišnim štapovima (sl.202b) uvidjamo da je i ovaj nosač jedanput statički

neodredjen jer i kod njega imamo jedan prekobrojni štap.

Da li je neki prost nosač i koliko puta statički neodredjen najlakše je odrediti primenom analitičkih uslova ravnoteže, koji važe za slobodnu ploču:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \\ \Sigma M &= 0 \end{aligned} \right\} \dots 150)$$



Sl.202.

U ove jednačine ulaze s jedne strane tereti (uopšte opterećenje) koje nosač nosi i koji su poznati, a s druge strane otpori oslonaca koje smatramo kao nepoznate sile. Ako pomoću triju jednačina 150) želimo naći nepoznate otpore oslonaca nekog nosača, onda će taj zadatak biti određen i rešljiv uvek, kad se u te tri jednačine pojave samo tri nepoznate komponente otpora. Ako li se pak kod nekog nosača jave više od tri komponente otpora na osloncima, nosač će biti statički neodređen i to onoliko puta, koliko bude imao više od tri nepoznate komponente otpora, tj. koliko jednačina bude nedostajalo za analitičko određivanje otpora oslonaca. Ako se uopšte kod nekog prostog nosača javi n nepoznatih otpora, gde je $n > 3$, onda je nosač $(n - 3)$ - puta statički neodređen.

Pri postavljanju jednačina 150) treba opterećenje (ili rezultantu R tereta) razložiti u komponente (R_x i R_y) u pravcu osovina X i Y , a tako isto razložiti i reakcije - sile koje se javljaju na osloncima; kad je nosač na nekom osloncu uklješten, javiće se na tome osloncu sem reakcija - sila još i reakcija - momenat (momenat uklještenja) i on ulazi u treću od jednačina 150) kao nepoznata veličina.

Primenimo li ovu metodu za raspoznavanje statičke određenosti ili neodređenosti nosača na nosače sistema proste grede prema sl. 193, 195 i 197 videćemo da su oni statički određeni; kod njih se naime javljaju uvek samo po tri nepoznata otpora A_x , A_y i B koji se mogu odrediti pomoću tri jednačine 150).

Kod nosača prema sl. 194 i 196, koji nisu sistema proste grede, javljaju se po četiri nepoznata otpora na osloncima: A_x , A_y , B_x i B_y , te na prvi pogled izgleda kao da su ti

nosači statički neodređeni. Medjutim, treba imati na umu da kod tih nosača pravac reakcije B nije proizvoljan, već uvek upravan na podlogu ležišta, što znači da je taj pravac otpora B unapred određen, tj. da je ugao β poznat. Za određivanje 4 nepoznate A_x , A_y , B_x i B_y možemo dakle u ovome slučaju trima jednačinama 150) dodati još i ovu četvrtu

$$\frac{B_y}{B_x} = \text{tang } \beta \dots\dots 151)$$

i tako dobivamo dovoljan broj jednačina za rešenje zadatka. Znači da su i nosači prema sl. 194 i 196 statički određeni.

Tako isto i puna konzola (greda uzidana na jednom kraju, sl. 198) statički je određen nosač, jer se na njenom osloncu javljaju svega tri nepoznata otpora: A_x , A_y i M_A koje je moguće odrediti iz jednačina 150).

Kod statički neodređenih nosača prema sl. 200 - 202 vidimo da postoje po četiri nepoznate reakcije oslonaca i to:

a) Kod luka na dva zgloba (sl. 200 i 201) reakcije su A_x , A_y , B_x i B_y i to takve da nam nijedan od pravaca sila A i B nije unapred određen dakle uglovi α i β su nepoznati;

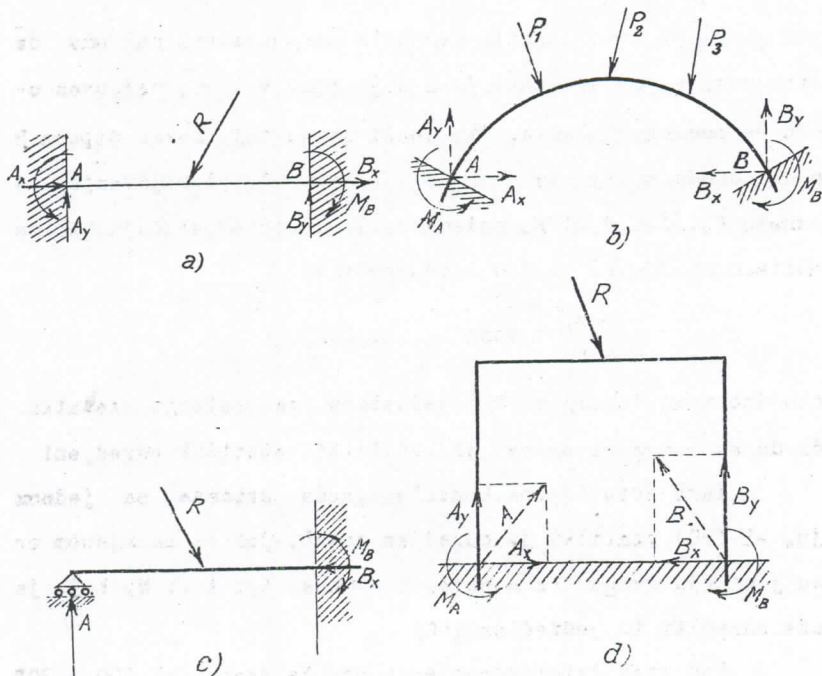
b) Kod kontinualne grede na tri oslonca (sl. 202) reakcije su: A , B_x , B_y i C i to su A i C vertikalne a B neodređenog pravca (ugao β nepoznat).

U oba slučaja su dakle ovi nosači

$$(n - 3) = (4 - 3) = 1$$

put statički neodređeni.

Najzad na sl. 203 imamo - šematički prikazano - nekoliko statički neodređenih nosača, koji se u praksi često primenjuju. Od tih nosača tri su triput statički neodređeni i to: greda uzidana na oba kraja (sl. 203a), luk uzidan na oba



Sl. 203.

kraja (sl. 203b) i okvir - ram uzidan na oba kraja (sl. 203 d), jer kod svakoga od njih ima 6 nepoznatih otpora (na svakom osloncu po 3) pa je dakle

$$(n - 3) = 6 - 3 = 3.$$

Nosač na sl. 203c (konzola, poduprta na slobodnom kraju) je danput je statički neodređen, jer ima 4 nepoznate reakcije pa je

$$(n - 3) = 4 - 3 = 1.$$

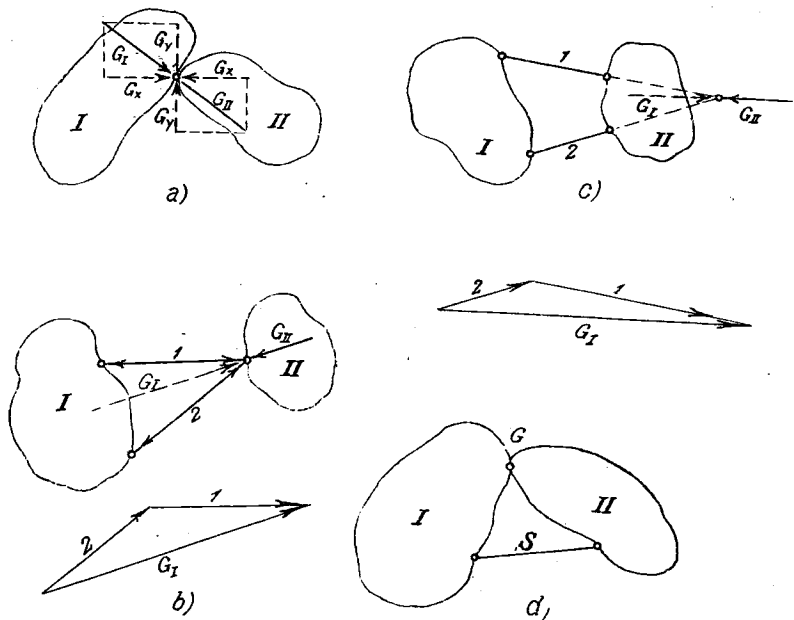
Sve ovo važi za slučaj da je nosač prost, tj. da se sastoji samo iz jedne krute ploče. U praksi dolaze međutim i takvi nosači, koji su sklopljeni iz dve ili više krutih ploča.

Zato se moramo pozabaviti i takvim slučajevima, naročito kad su tako složeni nosači statički određeni.

b) Nosač je složen iz dve ili više krutih ploča.

Ako se nosač sastoji iz dve ili više krutih ploča nepomično vezanih medju sobom, onda za svaku ploču - posmatranu kao zasebno telo - važi sve ono što smo pod a) naveli. Prema tome sistem složen od n ploča, kad bi bio sastavljen od slobodnih (nevezanih) ploča imao bi $3n$ stepena slobode kretanja. Za potpuno ograničenje (ukidanje) svih ovih sloboda, koje čine da sistem postane nepomičan, potrebno je tada najmanje $3n$ otpora (reakcija - sila ili ležišnih štapova), u koje valja uračunati ne samo otpore na ležištima složenog nosača, već i otpore na vezama tj. uzajamne pritiske (u izuzetnim slučajevima uzajamna zatezanja) koji se javljaju po zakonu akcije i reakcije u dodirnim tačkama (zglobovima) gde se pojedine krute ploče koje ulaze u sastav nosača jedna na drugu naslanjaju, odnosno jedna s drugom vezuju.

Nepomerljiva veza izmedju dve ploče. - Ove dodirne tačke izradjuju se u praksi obično u vidu nepomičnih zglobova za koje je svaka od obližnjih ploča tako vezana, da joj ostaje samo još jedna sloboda kretanja: obrtanje oko toga zgloba. Znači da se na svakom takvom zglobu G (slika 204a) moraju javiti sile koje sprečavaju svako moguće translatorno kretanje ma koje od obližnjih ploča I i II; Kada nosač odnosimo na koordinatni sistem čije su ose X i Y, onda moramo dakle u zglobu pretpostaviti jednu kosu silu G čije komponente G_x i G_y sprečavaju oba moguća translatorna kretanja svake ploče u



Sl. 204

pravcima koordinatnih osovina. Ova sila G , kojom se ploče I i II uzajamno pritiskuju, javlja se - po zakonu akcije i reakcije - u dva suprotna smisla a sa istim pravcem i veličinom: kolikom god silom G_I ploča I pritiskuje (izuzetno zateže) na ploču II, tolikom se istom silom G_{II} opire ploča II tome pritisku (izuzetno: zatezanju) i obrnuto. Iz jednakosti sila G_I i G_{II} sleduje, da su im jednake i odgovarajuće komponente G_x i G_y (sl. 204a). Možemo, dakle, iz ovoga zaključiti da se na svakom dodirnom zglobovima G između dve krute ploče, koje ulaze u sastav složenog nosača, javljaju u stvari po 4 sile: dve sile G_x i dve sile G_y ali tako, da su dve i dve među sobom jednake po

zakonu akcije i reakcije. Ako pojedinu ploču (I ili II) posmatramo kao zasebno telo, onda su za tu ploču sile G_x i G_y spoljne sile, jer potiču od obližnje druge ploče, a kad ceo složeni nosač posmatramo kao jednu celinu, onda je sila G (i njene komponente G_x i G_y) unutarnja sila (tenzor) i tada ona ne ulazi u jednačine koje izražavaju ravnotežu spoljnih sila (tereta i otpora oslonaca) na celom složenom nosaču.

Nepomični zglob G , kojim su vezane dve obližnje krute ploče, može biti realan (sl. 204a), može biti stvoren i pomoću dva ležišna štapa koji se u njemu stvarno seku (sl. 204b), a može biti i imaginaran (sl. 204c). U oba poslednja slučaja naponi u ležišnim štapovima 1 i 2 daju kao rezultantu silu G kojom krute ploče kroz zglob jedna na drugu dejstvuju, kao što se vidi i iz trouglova sila na sl. 204b i 204c. Želimo li ukinuti i mogućnost obrtanja ploča I i II oko zglobova G , onda je dovoljno da za vezu obeju ploča sem nepomičnog (realnog ili imaginarnog) zgloba upotrebimo još jedan štap S (sl. 204d). Za tako spojene ploče I i II kažemo da su kruto vezane, što znači da se one sad obe zajedno ponašaju kao jedna kruta ploča ili da nosač tako sastavljen nije složen već prst. Tako obrazovan nosač, sastavljen od dve krute ploče koje su među sobom kruto vezane zglobovima (VIII) i štapom (S) već smo imali kod rešetkastog nosača na sl. 76, str. 128. ove knjige.

Statička odredjenost i neodredjenost. - Što se tiče statičke odredjenosti nosača složenih iz dve ili više krutih ploča, vezanih zglobovima, tu ćemo takodje poći od kriterijuma koji smo našli da važi za nosače koji se sastoje samo od jedne krute ploče. Videli smo da je za ukidanje triju sloboda kretanja jedne krute ploče potrebno i dovoljno da ona bude tako ve-

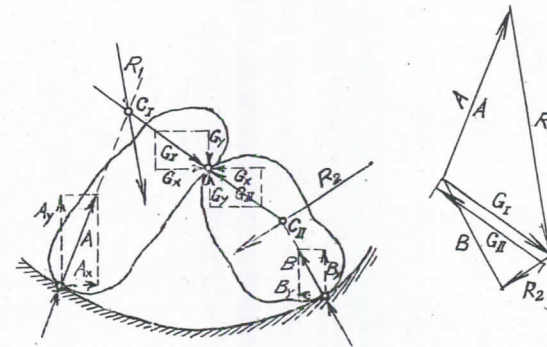
zana, da se na osloncima pojave tri otpora i da je tada moguće ta tri otpora odrediti iz analitičkih uslova ravnoteže (jednačine 150). Ako je ploča tako vezana, da se na njezinim osloncima javljaju više od tri otpora, onda tu imamo posla sa suvišnim ili prekobrojnim otporima koji čine da je nosač statički neodređen i to onoliko puta, koliko ima tih prekobrojnih otpora.

Kad to primenimo na nosač složen iz n krutih ploča, vezanih međusobno nepomičnim zglobovima, onda vidimo da je za njegovu nepomičnost potrebno i dovoljno $3n$ otpora oslonaca i pritisaka G u zglobovima (vezama), jer se i ovi pritisci G javljaju, kad svaku ploču smatramo kao zasebno telo, kao spoljne sile na njoj. Tako isto za određivanje ovih $3n$ otpornih sila na osloncima i u zglobovima (vezama) stajaće nam na raspoloženju $3n$ uslova ravnoteže, sličnih jednačinama 150, iz kojih možemo odrediti ovih $3n$ nepoznatih sila, kad je opterećenje nosača poznato. Bude li nosač tako sklopljen i oslonjen, da ima više od $3n$ pritisaka u zglobovima (vezama) i otpora na osloncima, onda će on biti onoliko puta statički neodređen, koliko bude bilo ovih prekobrojnih otpora oslonaca i pritisaka u zglobovima (vezama).

Od statički određenih nosača, složenih iz dve ili više krutih ploča, za praktičnu primenu su najvažniji: luk sa tri zgloba i greda na tri ili više oslonaca sa zglobovima (Gerberova greda). Zato ćemo pre svega upoznati te nosače i na njih primeniti sve što smo dosad uopšte rekli o složenim nosačima.

Luk sa tri zgloba je nosač na dva oslonca, složen iz dve ($n = 2$) krute ploče, koje su vezane i medju sobom 1 sa

osloncima pomoću zglobova (sl.205). Nepomičnost nosača je obez-



Sl. 205.

bedjena, jer se za ukidanje $3n = 3 \cdot 2 = 6$ sloboda kretanja javlja dovoljno otpora na osloncima A i B i zglobu G koji se nalazi u temenu lučnog nosača. Na sva tri zgloba javljaju se nam po dve otporne sile, dakle svega šest: A_x, A_y, B_x, B_y, G_x i G_y , čije su rezultante A i B reakcije oslonaca, a G uzajamni pritisak krutih ploča I i II u temenom zglobu. Nosač je statički određen, jer za određivanje tih 6 sila imamo 6 jednačina koje sleduju iz analitičkih uslova ravnoteže i koje bismo dobili, kad bismo primenili jednačine 150) zasebno za svaku od ploča I i II.

Grafički sile A, G i B možemo odrediti, onim putem kako je pokazano na sl.205a i 205b, iz uslova: da se u slučaju ravnoteže spoljne sile koje napadaju na svaku od krutih ploča I i II moraju seći u istoj tački (C_I odnosno C_{II}) i činiti zatvoren trougao. Pri tome valja imati u vidu da se sila G javlja u dva suprotna smera (po zakonu akcije i reakcije) i da je ona spoljna sila samo onda, kad svaku ploču smatramo kao zasebno telo. Da u ovome slučaju ne nastupa obrtanje ni ploče I

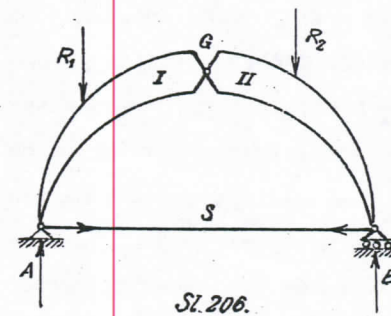
ni ploče II oko temenog zgloba G vidi se po tome, što rezultanta G_I sila A i R_1 (napadna sila za tačku G), koja bi mogla obrnuti ploču I oko zgloba G, to nije u stanju, jer prolazi kroz sam zglob, a tako isto i rezultanta G_{II} sila B i R_2 koja bi mogla obrnuti ploču II oko tačke G.

Kad tu okolnost imamo na umu, onda je moguće reakcije A i B odrediti i analitičkim putem dosta brzo, a da pri tome ne moramo pisati svih 6 jednačina oblika jednačina 150). Mi možemo naime, u slučaju ravnoteže, ceo lučni nosač smatrati kao jednu krutu ploču i primeniti samo jednom jednačine 150). Ali tada silu G za lučni nosač kao celinu moramo smatrati kao unutarnju silu (tenzor), koja ne ulazi u jednačine 150) već samo spoljne sile A_x , A_y , B_x i B_y . No kako tri jednačine 150) nisu dovoljne da se odrede ove 4 nepoznate, to moramo potražiti još jednu jednačinu. Ta četvrta jednačina glasi u ovom slučaju $M_G = 0$ 152).

i izražava činjenicu da kod luka sa tri zgloba u slučaju ravnoteže napadni moment za zglob u temenu mora biti jednak nuli. Pod napadnim momentom za zglob G razumemo, kao što će docnije biti opširnije objašnjeno, moment rezultante svih spoljnih sila (napadne sile) koje na nosač napadaju bilo levo bilo desno od tačke G. Jednačina 152) kazuje da u slučaju ravnoteže lučnog nosača, ne može nastupiti obrtanje nijedne od ploča I i II oko zglobova G. Na ovaj način vidimo da tri jednačine 150) i jednačina 152) pretstavljaju sistem od 4 jednačine koje su dovoljne za određivanje otpornih sila A_x , A_y , B_x i B_y na osloncima luka sa tri zgloba.

Lučni nosači, pa i luk sa tri zgloba, po tome se razlikuju od nosača sistema grede, što kod njih svako - pa i ver-

tikalno - opterećenje izaziva kose reakcije oslonaca. Oni dakle pritiskuju na svoje oslonce tako da ih guraju upolje svojom horizontalnom komponentom koja se naziva horizontalni potisak. Ovaj se potisak može ukinuti umetanjem zatega S i lučni nosač osloniti - kao i prosta greda - na jedno pokretno i jedno nepokretno ležište. Takav se nosač zove: luk sa zategom (sl.206, uporedi str. 69 - 70). No u tome slučaju ne mogu se više kru-



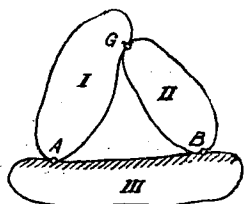
te ploče I i II slobodno obrtati oko zgloba G u temenu, jer su tim zglobom i štapom S (zategom) kruto vezane tako, da se sad ceo nosač ponaša kao jedna kruta ploča (uporedi sl.204d). Nosač na sl. 206 nije u statičkom pogledu ni-

šta drugo, do statički određena prosta greda; on je i pogledu unutarnjih sila G_x , G_y i S statički određen jer je moguće, pošto prvo odredimo reakcije oslonaca A i B kao kod proste grede, naći unutarne sile G_x , G_y i S primenom jednačina 150) na ma koju od ploča I ili II.

Da je sistem od dve ploče prema sl.206 statički određen vidi se i po tome što se na njemu javljaju $3n = 3 \cdot 2 = 6$ otpora oslonaca i pritisaka u zglobovima, koliko je i potrebno za obezbeđenje nepomičnosti; razlika je od običnog luka sa tri zgloba u tome pogledu samo ta, što su od tih 6 sila ovde 3 unutarne (G_x , G_y i S) a 3 spoljne (A_x , A_y i B), dok je kod luka sa tri zgloba bilo 2 unutarne sile (G_x i G_y) a četiri spoljne (A_x , A_y , B_x i B_y). Znači da se može u složenim nosačima jedna spoljna sila zameniti jednom unutarnjom ili obrnuto pa

da sistem ipak ostane statički odredjen, ako samo zbir svih sila $3n$ ostane isti.

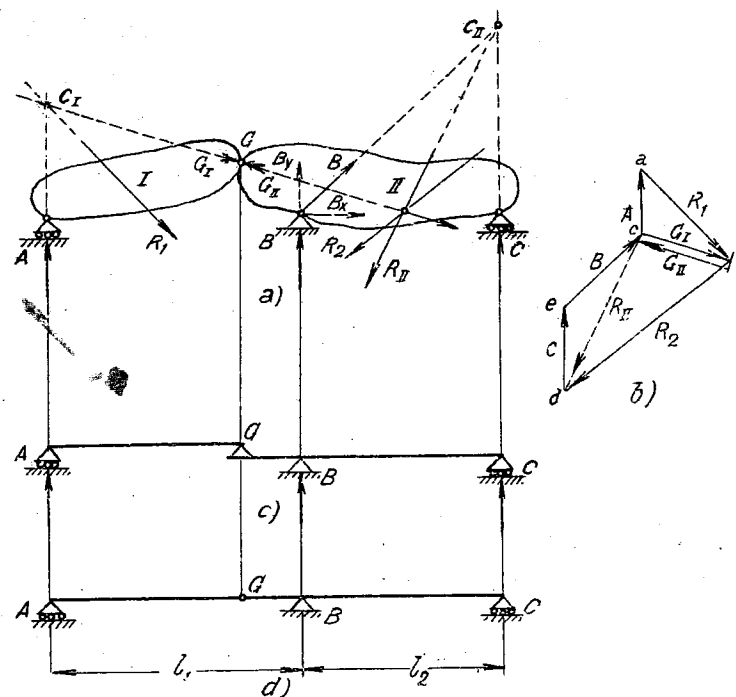
Ako zemljinu koru, za koju je u tačkama A i B vezan luk sa 3 zgloba, smatramo takodje kao krutu ploču (sl.207), onda možemo luk sa tri zgloba shvatiti i kao sistem složen od 3 krute ploče, vezane nepomičnim zglobovima (uporedi sl.78 i str. 130 - 131).



Sl. 207.

Gerberova greda, tako nazvana po svome pronalazaču Gerberu, složen je nosač koji se sastoji od dve ili više krutih ploča, međusobno vezanih pomoću zglobova. Da je ovo nosač sistema grede, iako ne proste jer leži na više od dva oslonca, poznaje se po tome što su ležišta tako izradjena, da vertikalno opterećenje izaziva uvek samo vertikalne reakcije oslonaca. Od kontinualne grede na tri ili više oslonaca Gerberova se greda po tome razlikuje što je na zglobovima prekinuta, dok je kontinualna greda - koja se sastoji samo iz jedne krute ploče - neprekidna. Zato se, za razliku od kontinualne grede, Gerberova greda naziva i greda sa zglobovima.

Najprostiji nosač sistema Gerberove grede imamo, kad je ona složena samo iz dve krute ploče I i II vezane zglobom G i oslonjena na tri oslonca A, B i C (sl. 208). Da bi bile uklonjeno $3n = 3 \cdot 2 = 6$ stepena slobode kretanja ovog sistema od $n = 2$ ploče, moraju se na osloncima (A, B i C) i vezama (G) javiti 6 otpornih sila. Kako se u nepomičnom zglobu G javljaju dve sile (G_x i G_y), to se na osloncima mogu javiti još $(n + 2) = 4$ otporne sile, pa da nosač bude i nepomičan i statički odredjen. Te su sile na sl.208: A (pomični zglob), B_x , B_y (nepo-



Sl. 208

mični zglob) i C (pomični zglob).

Da bismo grafičkim putem odredili sve otporne sile na osloncima i vezama, možemo i ovde primeniti - kao i kod luka sa tri zgloba - grafičke uslove ravnoteže posebno za svaku od krutih ploča I i II (sl.208a i 208b). Prvo na ploči I moramo spoljne sile A, R_1 i G_{II} dovesti do preseka u istoj tački (C_I) i složiti u zatvoren trougao a - b - c - a. Time su odredjene spoljne sile A i G_{II} koje na ploči I drže ravnotežu rezultanti R_1 opterećenja te ploče. Na ploči II sad imamo poznate spoljne sile G_I i R_2 koje ćemo složiti u njihovom preseku u rezultantu opterećenja ploče II, a to je $R_{II} = cd$. Ona se mora u slučaju

ravnoteže ploče II seći sa otporima B i C u istoj tački (C_{II}) i činiti sa njima zatvoren trougao c-d-e-c, čime su određene i reakcije B i C.

Tako isto i za određivanje reakcija oslonaca analitičkim putem možemo za spoljne sile na celom složenom nosaču primeniti tri jednačine 150) i jednu jednačinu 152), a to je dovoljan broj jednačina da se izračunaju 4 nepoznate: A , B_x , B_y i C . Sile G_x i G_y tada ne dolaze u obzir, jer su to unutarnje sile celog sistema. Jednačina 152)

$$M_G = 0$$

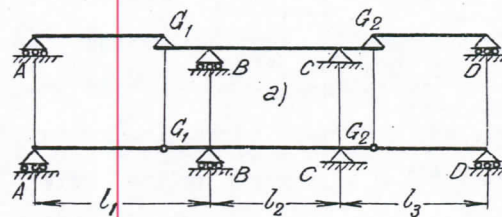
i kod ovog nosača kazuje da je u slučaju ravnoteže napadni moment za zglob G jednak nuli, tj. da napadna sila ili rezultanta svih spoljnih sila levo (ili desno) od zgloba G prolazi kroz sam zglob, što se vidi i u grafičkoj konstrukciji na sl. 208.

Šematički Gerberovu gredu pretstavljamo kao što je pokazano na sl. 208c, iz koje se jasno vidi da ovu Gerberovu gredu možemo smatrati i kao kombinaciju jedne proste (AG_1) i jedne prepuštene grede (BC) koje su vezane medjusobno nepomičnim zglobom (G). Još prostija šematička pretstava za istu Gerberovu gredu data je na sl. 208d.

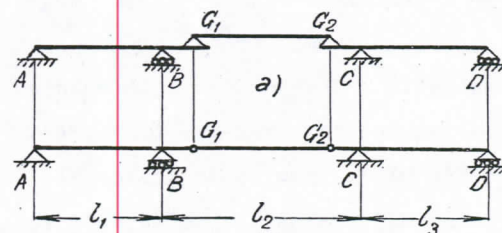
Ako se Gerberova greda sastoji iz tri krute ploče, vezane zglobovima G_1 i G_2 , onda ona mora ležati na 4 oslonca: A , B , C i D (sl. 209 i 210). Zglobovi mogu ležati po jedan u prvom i trećem otvoru (sl. 209) i tada su AG_1 i G_2D proste grede, a G_1G_2 (oslonci B i C) prepuštena greda. Na osloncima i vezama javlja se ukupno

$$3n = 3 \cdot 3 = 9$$

otpora i to: 5 na osloncima (A , B , C_x , C_y i D) i 4 na vezama



Sl. 209



Sl. 210

(G_{1x} , G_{1y} , G_{2x} i G_{2y}), što znači da je sistem i nepomičan i statički određen. Ali je isto tako mogućna i kombinacija sa oba zgloba u drugom otvoru (sl. 210) i tada je G_1G_2 prosta greda, a AG_1 (oslonci A i B) i G_2D (oslonci C i D) su prepuštene grede. I u ovome slučaju sistem je i nepomičan i statički određen, jer se na osloncima i

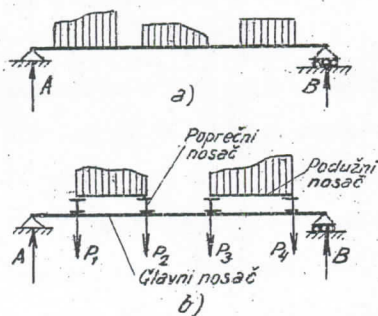
vezama opet javlja svega 9 otpora i to: 6 na osloncima (A_x , A_y , B , C_x , C_y i D) i 3 na zglobovima (G_1 , G_{2x} i G_{2y}). Uopšte dakle pri sklapanju grede Gerberovog sistema treba uvek krute ploče tako redjati, da se na prostu gredu nadovezuje prepuštena pa na ovu opet preta ili obrnuto. Na taj način moguće je konstruisati Gerberovu gredu na koliko se hoće oslonaca. Broj zglobova biće uvek za dva manji od broja oslonaca i za svaki od zglobova važiće po jedna jednačina oblika 152), te će ove jednačine - sa 3 jednačine oblika 150) - uvek biti dovoljne za analitičko određivanje svih otpora oslonaca.

18. Opterećenje nosača.

Vertikalni tereti. - U praksi se nosači najviše upotrebljavaju pri gradjenju zgrada i mostova. U zgradama oni nose

na sebi: pregradne zidove, međuspratne i krovne konstrukcije itd. kao stalni teret, a sem toga razna povremena opterećenja kao što su: teret ljudi ("ljudska navala") koji saobraćaju u zgradama, teret raznih predmeta (nameštaja ili robe) koji su smešteni u zgradama, što sve spada u korisni teret. Kod mostova nosači nose takodje stalni teret u koji spada težina kolovoza i drugih pomoćnih konstrukcija, a zatim i t. zv. saobraćajni teret koji potiče od težine ljudi i raznih vozila koja prelaze preko mosta. Sem ovoga svaki nosač nosi i svoju sopstvenu težinu.

Pri proučavanju stabilnosti nosača sva opterećenja koja nosač ima da nosi moraju biti unapred poznata, tj. moraju se prethodno odrediti iz poznatog cilja kome nosač ima da služi i to i po veličini i po načinu dejstva na sam nosač. Što se tiče načina na koji opterećenja mogu na nosač dejstvovati imamo ih dva: neposredno opterećenje *) je ono kad teški predmeti



Sl. 211

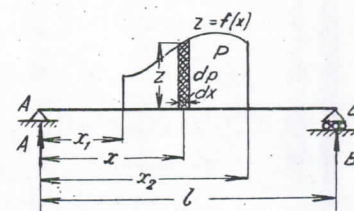
leže na većoj ili manjoj dužini samoga nosača (sl. 211a), a posredno opterećenje imamo onda, kad se teret prenosi na nosač samo u određenim tačkama, na primer na čvorovima kod rešetkastih nosača. Kod posrednog opterećenja teret se prenosi na glavni nosač obično pomoću t. zv. sekundarnih - podužnih i poprečnih - nosača, koji ga neposredno primaju i predaju glavnom nosaču na mestima gde se

*) I sopstvena težina nosača javlja se uvek kao neposredno opterećenje.

poprečni nosači na njega naslanjaju (sl. 211b). No i u takvim prilikama, strogo uzev, ne bismo smeli ove terete P smatrati kao koncentrisane sile, jer se teret stvarno prenosi na glavni nosač ne u jednoj tački, već na celoj dodirnoj površini između poprečnog i glavnog nosača.

Sila (teret) koja dejstvuje na nosač biće raspoređena po većoj ili manjoj površini, odnosno - ako posmatramo u ravni - na većoj ili manjoj dužini nosača. Točak koji se kotrlja po šini matematički bi šinu dodirivao u jednoj tački, te bi teoretski njegova težina predstavljala koncentrisanu silu; ali čak ako je on načinjen od čelika, ipak će se i on i šina usled uzajamnog pritiska na mestu dodira malo deformisati i dodirivanje će se prostirati na jednu izvesnu dužinu šine. Kako je ova dužina veoma mala, to se i ovaj slučaj može praktički smatrati kao opterećenje koncentrisanom silom.

Mnogo češće biće dodirna dužina veća i tada se o tome mora voditi računa. O ovim kontinualno raspodeljenim teretima bilo je već govora kod lančanica (v. str. 161-163 i sl. 95). Dok se koncentrisane sile predstavljaju pravim linijama, raspodeljeno opterećenje se predstavlja površinama. Tako na primer u sl. 212 prosta greda AB opterećena je kontinualno teretom koji predstavlja površina F , ograničena: samom gredom, dvema



Sl. 212

vertikalnim ordinatama i krivom linijom koju nazivamo linijom opterećenja. Ordinate te linije predstavljaju u izvesnoj razmeri specifično optereće-

nje (t. j. opterećenje na jedinicu dužine grede) i ono na sva-

kom mestu iznosi

$$q = k \cdot z$$

Ako je $k = 1$, onda nam ordinate z direktno predstavljaju specifično opterećenje u kg/cm ili u t/m , što zavisi od jedinica u kojima ih računamo.

Teoretski možemo slučaj neposrednog kontinualnog opterećenja svesti na slučaj koncentrisanog time, što zamišljavamo da je kontinualno raspodeljeni teret podeljen u beskonačno mnogo beskonačno malih koncentrisanih sila. U tome cilju delimo površinu F na lamele, čija je osnova beskonačno mala dužina dx . Površina svake lamele predstavlja jednu beskonačno malu koncentrisanu silu

$$dP = q \cdot dx$$

odnosno, ako je $k = 1$ kao što ćemo u sledećem uvek uzimati,

$$dP = z \cdot dx \dots\dots 153).$$

Ako želimo naći celo opterećenje koje pada na gredu na njenoj dužini od $x = x_1$ do $x = x_2$, onda nam mora biti poznata jednačina linije opterećenja

$$q = f(x) \dots\dots 154)$$

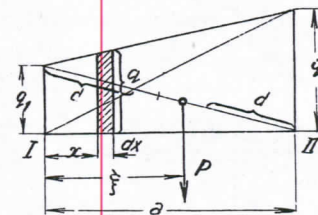
pa ćemo rezultantu P svih sila dP izračunati kad odredimo veličinu površine F :

$$P = F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \dots\dots 155)$$

Ova sila dejstvuje u težištu površine F , čiju apscisu ξ_0 možemo naći pomoću prve od jednačina 147).

Za slučaj da je linija opterećenja prava, tj. površina F pravougaonik, trougao ili trapez, apscise ξ_0 izračunavamo kao što je pokazano na sl. 181-183, str.324. Kad je linija opterećenja kosa prava, dakle opterećenje predstavljeno trape-

zom (sl.213), možemo naći položaj rezultante P i njenu veličinu i po stavovima za paralelne sile.



sl. 213

Veličina rezultante je

$$P = \int_0^a q dx$$

pa pošto je

$$q = q_1 + (q_2 - q_1) \frac{x}{a}$$

$$P = \int_0^a \left[q_1 + (q_2 - q_1) \frac{x}{a} \right] dx = \left[q_1 x + (q_2 - q_1) \frac{x^2}{2a} \right]_0^a = a \frac{q_1 + q_2}{2}$$

Za $q_1 = 0$ (trougao) je

$$P = \frac{aq_2}{2} = \frac{akz_2}{2} = K \cdot F$$

Statički momenat za tačku I glasi

$$\begin{aligned} P_{\xi} &= \int_0^a q x dx = \int_0^a \left[q_1 + (q_2 - q_1) \frac{x}{a} \right] x \cdot dx = \\ &= \left[\frac{q_1 x^2}{2} + (q_2 - q_1) \frac{x^3}{3a} \right]_0^a = \\ &= \frac{q_1 a^2}{2} + (q_2 - q_1) \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6} (q_1 + 2q_2) \end{aligned}$$

a odavde

$$\xi = \frac{a^2}{6} (q_1 + 2q_2) : \frac{a}{2} (q_1 + q_2) = \frac{a}{3} \cdot \frac{q_1 + 2q_2}{q_1 + q_2}$$

Za $q_1 = 0$ (trougao) je $\xi = \frac{2}{3} a$; za $q_2 = 0$ je $\xi = \frac{1}{3} a$;

za $q_1 = q_2$ je $\xi = \frac{1}{2} a$.

Ako je razmera takva da je

$$q = kz$$

onda imamo

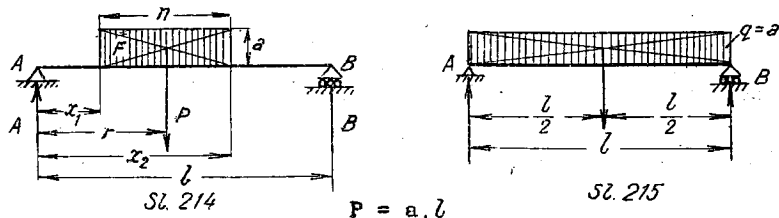
$$P = a \cdot k \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} = k \cdot F$$

gde je F površina trapeza.

Za slučaj na sl.214 nalazimo

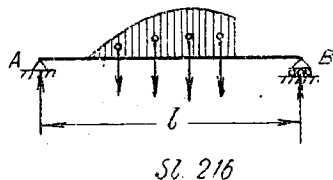
$$P = F = n \cdot a$$

a napadna tačka ove sile leži na polovini dužine opterećenja ($\frac{n}{2}$). U slučaju da je greda duž celog raspona l opterećena jednolikim teretom $q = a$, biće (v.sl.215):



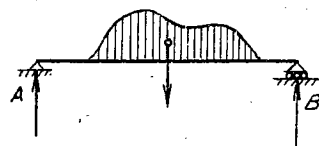
sa napadnom tačkom S u sredini raspona.

Kad je linija opterećenja zadata grafički, onda ćemo podeljena opterećenja moći približno zameniti koncentrisanim silama na taj način, što ćemo površinu opterećenja podeliti na delove toliko uske, da ih možemo smatrati trouglima, pravougaonicima i trapezima (sl.216). U težištu svakog dela, koje možemo naći i grafičkim putem, postavimo da deluje po jedna sila P jednaka površini dotičnog dela. Ako je linija opterećenja poligonalna, položaj sile P biće tačan; ako je pak

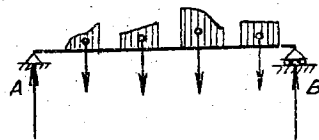


ona proizvoljna kriva, rezultat će biti u toliko tačniji što su uže lamale na koje smo podelili površinu opterećenja. U ovom poslednjem slučaju možemo, kad je data jednačina $g = f(x)$ pomoću obrasca 147) odrediti koordinate težišta S celokupne površine i u njemu postaviti silu P jednaku veličini celokupnog opterećenja (sl. 217). Kada je nosač opterećen po izvesnim delovima svoje dužine (sl. 218), onda treba svaki deo tereta zameniti koncentrisanom silom P na isti ovaj način.

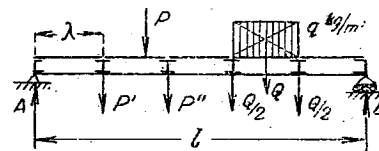
Iz svega toga vidi se da svako podeljeno neposredno opterećenje možemo svesti na slučaj koncentrisanih sila i tako



Sl. 117



Sl. 118



Sl. 119

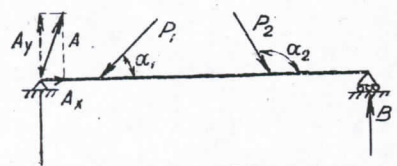
teoriju, koja važi za koncentrisane sile, primeniti i na podeljeno opterećenje. Tako isto i kod posrednog opterećenja, gde stvarno teret na glavni nosač napada samo u određenim tačkama (čvorovima) važi teorija koju ćemo za nosače razviti za slučaj opterećenja koncentrisanim silama.

Kod posrednog opterećenja (sl.219) koncentrisane sile, koje napadaju na glavni nosač raspona l , određujemo na taj način što uzimamo da je pod sastavljen iz samih prostih greda (podužnih nosača raspona λ), koje su naslonjene uvek samo na dva obližnja poprečna nosača. Tu pretpostavku činimo (približno) i onda, kad je pod stvarno izradjen kao kontinualna (neprekidna) greda koja prelazi preko svih poprečnih nosača. Sa takvom pretpostavkom jedan koncentrisani teret P, koji napada neposredno na pod negde između dva poprečna nosača, razlaže se na dve komponente: P' i P'' koje na glavni nosač napadaju kao koncentrisane sile. Veličinu ovih pritisaka P' i P'' na glavni nosač nalazimo isto onako, kao što bi našli i reakcije oslonaca preste grede (podužnog nosača) na rasponu λ , jer po zakonu akcije i reakcije uvek je reakcija oslonaca jednaka pritisku na oslonac. Ako je jedno polje λ kontinualno opterećeno jednako - podeljenim teretom od q kg/m., onda je celokupni teret u tome polju $Q = q\lambda$, a na glavni nosač napadaju i levo i desno jednake koncentrisane sile veličine $\frac{Q}{2} = q \frac{\lambda}{2}$. Kad je opterećenje nekog polja ne-

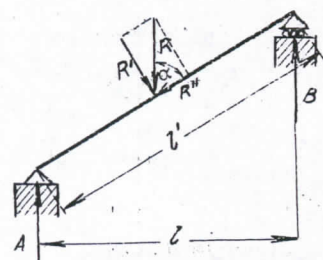
Jednako podeljeno, onda ukupni teret Q u tome polju određuje se na način ranije pokazan, a komponente toga tereta, koje padaju na levi i desni oslonac podužnog nosača u tome polju kao koncentrisane sile, naćićemo na način kako se određuju reakcije oslonaca proste grede na rasponu l za takav slučaj opterećenja. Taj način ćemo upoznati u sledećem odeljku.

Kosa opterećenja. - Sem opterećenja vertikalnim silama koje potiču od težine onih predmeta koje nosač nosi, može nosač biti napadnut i drugim silama koje imaju horizontalan ili uopšte kos pravac. Medju takve sile spadaju: pritisak vetra na primer na krovne nosače koji se javlja približno pod uglom 10° iznad horizontale, sila kočenja kod motornih vozila koja se javlja uvek tangencijalno na obim točkova, - dakle približno u horizontalnom pravcu.

Ako se vertikalni tereti kombinuju sa pomenutim horizontalnim i kosim silama onda je greda opterećena silama koje sa osovinom grede zaklapaju kos ugao (sl. 220). Ali se može



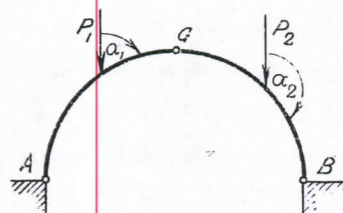
Sl. 220



Sl. 221

desiti i to, da sama greda leži u kosom položaju (sl. 221), kao što je to slučaj kod rogova na krovnim konstrukcijama, a da je opterećenje (rezultanta R tereta) vertikalno, te da sa osovinom grede zaklapa opet oštar ugao α_1 . Tako isto i kod punih lučnih nosača, čija je osovina kriva linija, vertikalni tereti zaklapaju sa osovinom nosača kose uglove (sl. 222).

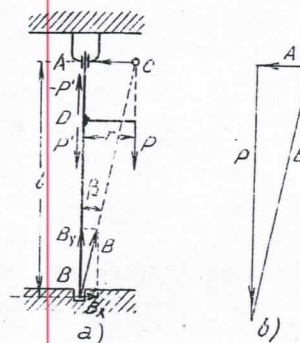
Ekscentrična opterećenja i na-



Sl. 222

padni momenti. - U specijalnim slučajevima mogu se javiti i opterećenja, koja napadaju izvan osovine nosača i na izvesnom razmaku od nje, pa se na nosač prenose pomoću naročitih krakova kruto vezanih za sam nosač. Takva opterećenja zovemo ekscentričnim opterećenjima; ona mogu biti i proizvoljnog pravca, ali se najčešće javljaju tako da su paralelna sa osovinom nosača.

Kao primer može nam poslužiti stub AB na sl. 223 a koji je opterećen jednim ekscentričnim teretom P , paralelnim sa osom stuba no na razmaku r od nje. Oslonac kod B je nepomično a kod A pomično ležište; prema



Sl. 223

tome možemo ovaj nosač smatrati kao prostu gredu na dva oslonca A i B. Reakcije oslonaca A i B određene su na sl. 223 b.

Uticaj ekscentrične sile P na napone u gredi AB najbolje ćemo razumeti ako silu P redukujemo na tačku D, t.j. ako u osovini grede (dakle centrično) dodamo u tački D dve jednake a suprotne sile P' i $-P'$ iste veličine i pravca kao i ekscentrična sila P . Kako se obe sile P' potiru u tački D to njihovim dodavanjem ni smo stvarno ništa izmenili u stanju grede kakvo je bilo kad je napadala samo ekscentrična sila P na kraku r . Ali kad uzmemo u obzir sve tri sile, videćemo da će njihov uticaj na gredu biti ovaj:

1) Sila P' deluje kao aksijalni pritisak na delu grede DB i stoji u ravnoteži sa reakcijom B_y ;

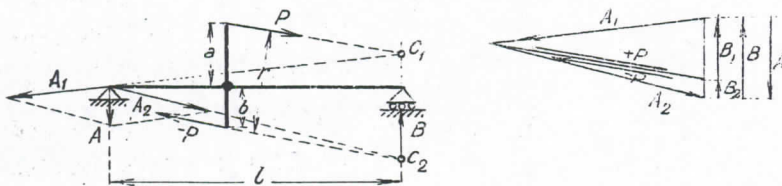
2) Sile P i $-P'$ obrazuju spreg sila koji savija gredu momentom $P.r$, a stoji u ravnoteži sa spregom reakcija A i B_x .

Iz ovoga zaključujemo da je ekscentrična sila P ekvivalentna sa centričnom silom P' i spregom $(P, -P')$ ili, drugim rečima, da ona u sebi stvarno sadrži dva opterećenja i to:

1) Opterećenje - silu P'

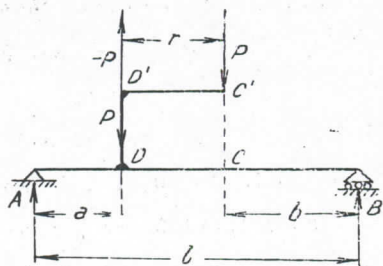
i 2) Opterećenje - momenat $P.r$ koji nastupa dejstvom sprega $(P, -P')$.

Prostu gredu na sl. 224 napada spreg $(P, -P)$ sa mo-



Sl. 224

mentom $P.r$. Otpori oslonaca moraju obrazovati spreg sa momen-



Sl. 225

tom $-P.r$ i krakom l . Dakle je $B = -A = \frac{P.r}{l}$. Smisao obrtanja sprega $(B, -A)$ je suprotan smislu datog sprega $(P, -P)$.

Za prostu gredu AB al. 225 kruto je vezana pravougaona poluga $DD'C'$. Na kraj C' napada vertikalna sila P . Uzimajući u tački D' dve jednake suprotne sile P i $-P$ vidimo da gredu napada sila P u tački D i spreg $(P, -P)$ momenta $P.r$. Usled sile P su otpori oslonaca:

$$A_1 = P \frac{l-a}{l} \quad \text{i} \quad B_1 = P \frac{a}{l},$$

a usled sprega

$$A_2 = -B_2 = \frac{P.r}{l},$$

dakle

$$A = P \frac{l-a}{l} - P \frac{r}{l} = \frac{P}{l} (l-a-r) = P \frac{b}{l}$$

i

$$B = P \frac{a}{l} + \frac{P.r}{l} = \frac{P}{l} (a+r) = P \frac{l-b}{l}$$

Otpori su dakle isti kao kada bi sila P napadala neposredno tačku C grede.

II. Prosta greda.

Pod prostom gredom razumemo nosač, koji je oslonjen na dva oslonca i to tako, da se na osloncima pri vertikalnom opterećenju javljaju samo vertikalni otpori oslonaca. Jedno je ležište pokretno u horizontalnom pravcu (pomičan zglob) a drugo nepokretno (nepomičan zglob).

Ako takva greda prelazi i preko oslonaca, onda se zove greda sa prepustima, a rešava se u svemu na isti način kao i prosta greda, te ćemo i nju proučavati pod opštim naslovom proste grede.

Gredu uvek pretstavljamo kao pravu liniju koja se poklapa sa osovinom nosača.

19. Odredjivanje otpora oslonaca.

Zadatak odredjivanja otpora (reakcija) oslonaca za prostu gredu i za gredu sa prepustima imali smo već kod re-

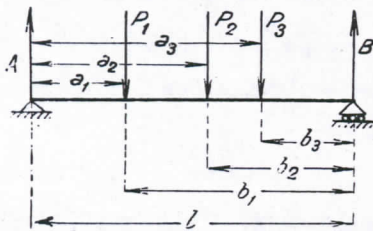
rešetkastih nosača, v. str. 90-102. Sve što smo tamo rekli za reakcije oslonaca rešetkaste grede važi i za punu gredu, jer se obe u pogledu na ravnotežu spoljnih sila ponašaju kao krute ploče. Zato ćemo sad ovde biti kraći, a opširnije ćemo se zadržati samo na onim slučajevima opterećenja kome nismo imali kod rešetkaste grede.

Otpori oslonaca mogu se odrediti analitičkim i grafičkim putem i mi ćemo u sledećem pokazati uporedo obe metode rada. Analitička se metoda osniva na analitičkim uslovima ravnoteže (jednačine 150), a grafička na grafičkim uslovima: da sve spoljne sile na gredi moraju činiti zatvoren poligon sila i stajati u ravnoteži na jednom zatvorenom verižnom poligonu. Za samo tri spoljne sile ne moramo crtati verižni poligon, jer su za njih grafički uslovi ravnoteže: da se sve tri moraju seći u istoj tački i činiti zatvoren trougao.

Postupak pri određivanju reakcija isti je pa bilo da opterećenje na nosač napada neposredno ili posredno, kao što ćemo docnije videti.

a) Koncentrisani vertikalni tereti.

Analitička metoda. - Pošto u ovom slučaju horizontalnih sila nema, primenjujemo samo druge dve od jednačina 150), te dobivamo prema sl.226:



Sl. 226

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 - B \cdot l = 0$$

(obrtna tačka A).

Iz druge jednačine sleduje:

$$B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{l} = \frac{\sum Pa}{l}$$

i kad to stavimo u prvu jednačinu nalazimo

$$A = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{\sum Pa}{l} = \sum P - \frac{\sum Pa}{l}$$

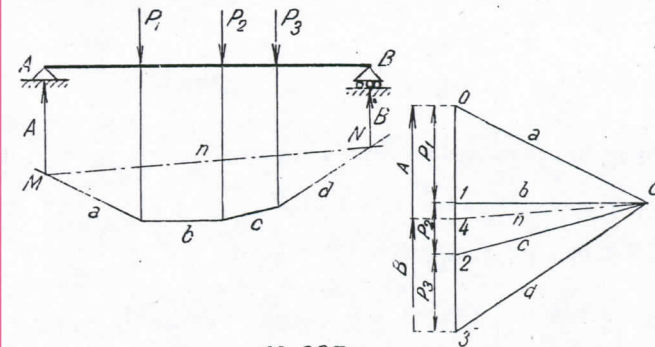
Umesto pisanja gornjih dveju jednačina možemo reakcije A i B naći primenom same momentne jednačine i to, prvo za obrtnu tačku B a zatim za obrtnu tačku A. Tada dobivamo prema oznakama u sl.226:

$$A = \frac{\sum Pb}{l} = \frac{1}{l} \sum Pb$$

$$B = \frac{\sum Pa}{l} = \frac{1}{l} \sum Pa$$

a te smo jednačine već imali, kao jednačine 20), na str.132.

Grafička metoda. - I ona je ista, kao i kod rešetkaste grede. Prvo crtamo (sl.227) vlak sila P t.j.vertikalnu 0-1-2-3



Sl. 227

i sa proizvoljnim polom C verižni poligon a-b-c-d, zatim taj verižni poligon zatvaramo završnom stranom n i najzad njoj vučemo paralelu u planu sila. Ona отсеца na vlak u sila duži

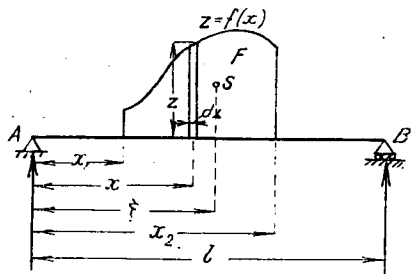
$$\overline{34} = B$$

$$\overline{40} = A$$

jer otpor A stoji u ravnoteži u tački M sa silama a i n a otpor B u tački N sa silama n i d.

b) Podeljeno (kontinualno) opterećenje.

Analitička metoda. - Ako je opterećenje podeljeno i poznata jednačina linije opterećenja (sl.228):



Sl. 228

$$Z = q = f(x)$$

onda možemo pri pisanju jednačine momenata smatrati da je kontinualno opterećenje zamenjeno sa beskonačno mnogo beskonačno malih sila qdx , pa će momentna jednačina za obrtnu tačku A glasiti

$$\int_{x_1}^{x_2} qdx \cdot x - Bl = 0$$

a odavde dobivamo

$$B = \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} qxdx \quad \dots \dots 156a).$$

Drugi otpor oslonca A dobivamo iz jednačine

$$\sum Y = 0$$

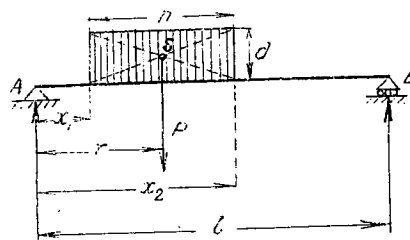
koja, s obzirom na jednačinu 155) daje

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} qxdx \quad \dots \dots 156 b)$$

Integracija u jednačinama 156) naročito je prosta, ako je

$$q = \text{const} = a$$

t.j. kad je teret jednako raspodeljen (sl.229). Tada je linija opterećenja prava, paralelna apscisi; otpor B prema jednačini 156-a) nalazimo sada



Sl. 229

$$B = \frac{a}{l} \int_{x_1}^{x_2} xdx = \frac{a}{2l} (x_2^2 - x_1^2)$$

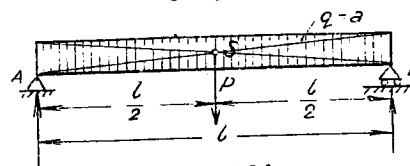
Stavimo li da je dužina opterećenja

$$x_2 - x_1 = n$$

onda u tome primeru dobivamo

$$B = \frac{an}{l} \left(x_1 + \frac{n}{2} \right).$$

Ako je gređa opterećena jednoliko po celoj dužini (sl. 230), onda je $n = l$; $x_1 = 0$;



Sl. 230

$x_2 = l$ te izlazi

$$B = \frac{al}{2}$$

a toliko je i A.

Pri analitičkom određivanju otpora oslonaca možemo postupiti i na drugi način i to tako, što celokupno kontinualno opterećenje zamenimo jednom koncentrisanom rezultantom koja - razume se - mora prolaziti kroz težište S površine opterećenja, jer je za obrtnu tačku A moment te rezultante jednak zbiru momenata njenih komponenta qdx . Tako je na sl.228.

$$B = \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} qxdx.$$

Ovaj je način zgodan naročito onda, kad je linija opterećenja horizontalna prava. Po ovome načinu imali bismo na sl. 229 da zamenimo kontinualno opterećenje rezultantom

$$P = n \cdot a$$

čija je napadna tačka u težištu S površine opterećenja, tj. na rastojanju $r = \left(x_1 + \frac{n}{2} \right)$ od oslonca A. Ako sad napišemo momentnu jednačinu za obrtnu tačku A dobićemo

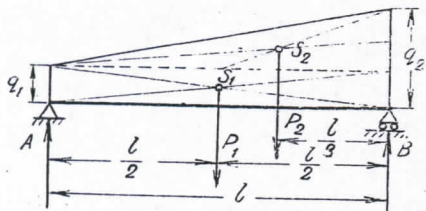
$$P \cdot r - B \cdot l = 0$$

a odavde

$$B = \frac{Pr}{l} = \frac{na}{l} \left(x_1 + \frac{n}{2} \right)$$

kao što smo i malopre bili našli.

Površinu kontinualnog opterećenja možemo pri analitičkom određivanju reakcije oslonaca podeliti i drukčije, na primer na više prostijih delova konačne veličine. Tako ćemo trapezno opterećenje na sl. 231 podeliti u dve koncentrisane sile



$$P_1 = q_1 \cdot l \quad \text{i} \quad P_2 = \frac{(q_2 - q_1)l}{2}$$

koje napadaju u težištima S_1 i S_2 pravougaonika i trougla. Tada nam glasi jednačina

momenata za obrtnu tačku A:

$$P_1 \cdot \frac{l}{2} + P_2 \cdot \frac{2}{3}l - B \cdot l = 0$$

a odavde, kad skratimo sa l ,

$$B = \frac{P_1}{2} + \frac{2}{3}P_2 ;$$

isto tako je

$$A = \frac{P_1}{2} + \frac{1}{3}P_2 ,$$

što odgovara i načelu superpozicije dejstava. Kad u poslednjoj jednačini zamenimo gornje vrednosti za P_1 i P_2 nalazimo

$$B = \frac{q_1 l}{2} + \frac{2}{3} \frac{(q_2 - q_1)l}{2} = \frac{l}{2} \left[q_1 + \frac{2}{3}(q_2 - q_1) \right].$$

Grafička metoda. - Da bismo mogli primeniti grafičku metodu potrebno je uvek kontinualno opterećenje zameniti sa jednom ili više koncentrisanih sila, pa onda postupiti ka-

ko je pod a) pokazano. Ako je kriva linija opterećenja zadata grafički, onda delimo površinu opterećenja u lamele (trouglo, pravougaonike i trapeze) i opet postupamo na isti način. Naravno, ova je metoda samo približna i u toliko tačnija u koliko su uže lamele u koje smo opterećenje podelili.

Kod pravolinijski ograničenih opterećenja, kao na sl. 231, postupamo kao i kod analitičke metode: prvo određujemo koncentrisane sile, koje napadaju u težištima delimične površine opterećenja, a zatim sa tim silama crtamo vlak sila i verižni poligon, kao što je pokazano pod a). Ovo važi samo za grafičko određivanje reakcija oslonaca, a ne i za određivanje poprečnih sila i momenata.

c) Kose koncentrisane sile.

Analitička metoda. - Ako je opterećenje zadato u vidu kosih koncentrisanih sila, onda ih kod analitičke metode određivanja reakcija razlažemo u horizontalne i vertikalne komponente, kako bismo mogli primeniti jednačine 150). Horizontalni otpor može dati samo nepokretno ležište, dok je reakcija na pokretnom ležištu uvek vertikalna.

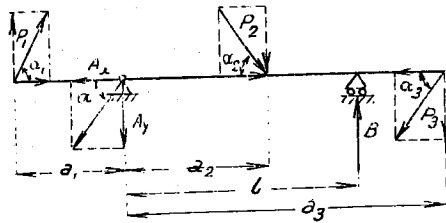
Za primer ćemo uzeti prepuštenu gredu na sl. 232. Jednačine 150) glase:

$$P_1 \cos \alpha_1 - A_x + P_2 \cos \alpha_2 - P_3 \cos \alpha_3 = 0$$

$$P_1 \sin \alpha_1 - A_y - P_2 \sin \alpha_2 - B - P_3 \sin \alpha_3 = 0$$

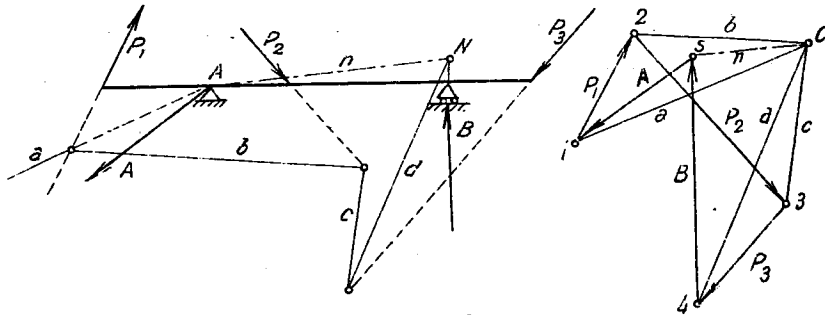
$$P_1 a_1 \sin \alpha_1 + P_2 a_2 \sin \alpha_2 - B \cdot l + P_3 a_3 \sin \alpha_3 = 0$$

(obrotna tačka A). U ove tri jednačine imamo tri nepoznate: A_x , A_y i B , koje možemo odrediti rešavanjem tih jednačina. Kad smo našli A_x i A_y onda otpor A dobivamo



Sl. 232

pri crtanju verižnog poligona (sl. 233) prvu njegovu stranu (a)



Sl. 233

povlačimo kroz zglob na osloncu A. Time postizemo da i završna strana n verižnog poligona mora prolaziti kroz A (uporedi tačku M na sl. 227). Ostala konstrukcija je u svemu ista, kao i pri opterećenju grede vertikalnim koncentrisanim silama.

d) Ekscentrična sila i spreg.

Grafičku metodu određivanja otpora oslonaca za slučajev opterećenja date na sl. 223 i 224. već smo objasnili kod tih slika. Kod opterećenja na sl. 225. reakcije se grafički određuju na isti način kao i kad bi sila P na gredu AB napadala u tački C jer kod krutog tela imamo uvek pravo napadnu tačku sile pomerati duž njene linije dejstva.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

a pravac njegov sleduje

iz

$$\tan \alpha = \frac{A_y}{A_x}$$

Grafička metoda. -

Kako pravac kosog otpora

A unapred ne znamo, to

Ovde ćemo na istim primerima pokazati i analitički postupak.

Za primer na sl. 223. analitički uslovi ravnoteže glase:

$$P - B_x = 0$$

$$B_y - A = 0$$

$$P \cdot r - A \cdot l = 0 \text{ (obrtna tačka B).}$$

Iz njih dobivamo

$$A = \frac{P \cdot r}{l} = B_y$$

$$B_x = P$$

a zatim

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

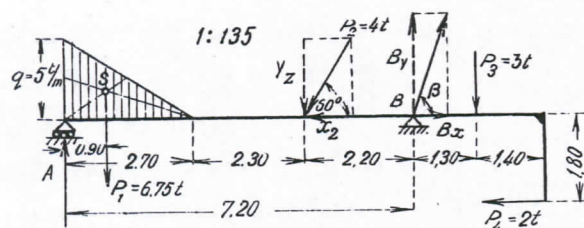
$$\tan \beta = \frac{B_y}{B_x}$$

čime su oba otpora oslonaca A i B potpuno određeni.

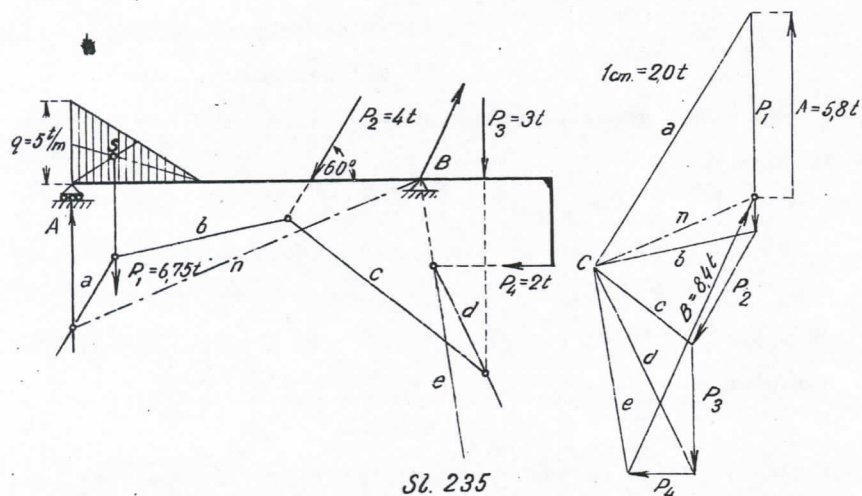
Za primer na sl. 224. određeni su otpori već ranije.

e) Složeno opterećenje.

Ako se opterećenje grede sastoji iz kombinacije više prostih opterećenja, navedenih pod a) do d), onda se pri određivanju reakcija može postupiti po načelu superpozicije dejstava, t.j. složeno opterećenje može se rasčlaniti u više prostih i za svako od ovih odrediti otpore oslonaca na pokazani način, pa dobivene komponente reakcija najzad složiti u totalne reakcije. Takav postupak će docnije pri određivanju transverzalnih sila i napadnih momenata biti potreban, ali za samo određivanje reakcija kraći je put raditi sa složenim opterećenjem onakvim, kakvo je dato. To je pokazano na brojnom pri-



Sl. 234



Sl. 235

Analička metoda. - Prvo zamenjujemo podeljeno (tro-uglasto) opterećenje koncentrisanom silom

$$P = \frac{2,70 \text{ m} \cdot 5 \text{ t/m}}{2} = 6,75 \text{ t}$$

koja napada u težištu trougla t.j. na rastojanju $\frac{1}{3} \cdot 2,70 = 0,90 \text{ m}$ od oslonca A. Zatim kosu silu $P = 4 \text{ t}$ zamenjujemo njenim komponentama

$$X_2 = P_2 \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ t}$$

$$Y_2 = P_2 \sin 60^\circ = 4 \cdot 0,866 = 3,46 \text{ t.}$$

Sad možemo pisati tri jednačine (150):

meru grede s
prepustom na
sl. 234 i 235.

$$- X_2 - P_4 - B_x = 0$$

$$A + B_y - P_1 - Y_2 - P_3 = 0$$

$$A \cdot 7,2 - P_1 \cdot 6,3 - Y_2 \cdot 2,2 + P_3 \cdot 1,3 + P_4 \cdot 1,8 = 0 \quad (\text{obrt. tač. B}).$$

Kad u ove tri jednačine zamenimo poznate veličine pojedinih sila i rešimo ih po trima nepoznatima, dobivamo

$$\text{iz I jednačine } B_x = 4 \text{ t}$$

$$\text{" III " } A = 5,67 \text{ t}$$

$$\text{" II " } B_y = 7,54 \text{ t}$$

Za totalni otpor B nalazimo

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 8,53 \text{ t}$$

i on zaklapa sa horizontalom ugao

$$\tan \beta = \frac{B_y}{B_x} = \frac{7,54}{4} = 1,88$$

$$\beta = 62^\circ.$$

Grafička metoda. - Prvo poredjamo (sl. 235 b) sve date terete u vlak sila 1-2-3-4-5, a zatim im nacrtamo verižni poligon e-d-c-b-a (sl. 235 a) sa proizvoljnim polom C. Početnu stranu (e) toga verižnog poligona vučemo kroz zglob na osloncu B zato, što nam je pravac kosog otpora B nepoznat, pa tako postizavamo da nam i završna strana n verižnog poligona prolazi kroz B, kao i u primenu na sl. 233.

Grafičkim putem nalazimo

$$A = 5,8 \text{ t}$$

$$B = 8,4 \text{ t}$$

a to se dosta dobro slaže sa rezultatima koje smo za isti brojni primer našli analitičkom metodom.

20. Transverzalne sile.a) Neposredno opterećenje.

Pojam transverzalne sile. - Transverzalnu (ili poprečnu) silu u izvesnom preseku C definišemo kao rezultantu svih spoljnih (vertikalnih) sila levo ili desno od preseka, redukovanu na težište S preseka. Njena veličina jednaka je, prema jednačini 157), algebarskoj sumi njenih komponentata, a kod grede na sl. 236, ona će biti u preseku C

$$T_C = A - P_1 - P_2 \quad \dots 157 \text{ a)}$$

pri čemu smo smer naviše uzeli za pozitivan. Ali po definiciji treba da je isto tako

$$T_C = B - P_3 - P_4 \quad \dots 157 \text{ b)}$$

Ako ovu drugu veličinu transverzalne sile, za razliku od prve, obeležimo sa T' i imamo na umu da prema uslovu ravnoteže spoljnih sila mora važiti

$$\sum Y = (A - P_1 - P_2) + (B - P_3 - P_4) = 0$$

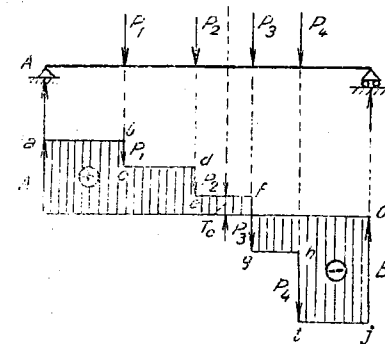
onda izlazi

$$T_C + T'_C = 0 \quad \text{ili} \quad T_C = -T'_C$$

To znači, ako za izračunavanje veličine transverzalne sile uzimamo sile desno od preseka C, onda moramo dobijenu transverzalnu silu uzeti sa protivnim znakom, ili - što izlazi na isto - možemo za spoljne sile desno od preseka uzeti smer naniže za pozitivan.

Prema tome, gornja definicija transverzalne sile važi samo za njenu apsolutnu vrednost.

Dijagram transverzalne sile. - Transverzalna sila menja se uopšte po dužini grede. Da bismo uvideli kakve su te promene, nacrtaćemo ispod grede na sl. 236 dijagram transver-



Sl. 236

zalne sile i to na taj način, što ćemo - pošav od oslonca A ka osloncu B - za svaki presek odrediti kolika je transverzalna sila i preneti je u dijagram u izvesnoj razmeri. Pri tome pretpostavljamo da su nam otpori oslonaca grede već poznati.

Ako gredu presečemo izmedju sile A i P_1 transverzalna sila biće

$$T_C = A$$

i neće se menjati na toj deonici. Dijagram će dakle biti linija a - b na rastojanju A od apscise O-O. Čim predjemo desno od sile P_1 i gredu presečemo na gde izmedju sile P_1 i P_2 transverzalna sila biće

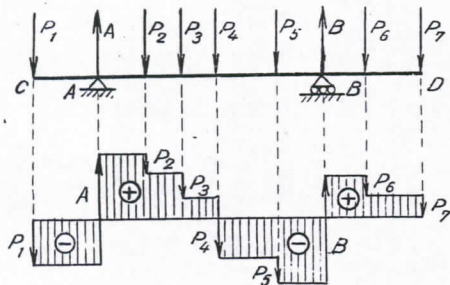
$$T_C = A - P_1$$

i njen dijagram će pretstavljati linija c - d paralelna apscisi O-O na rastojanju $(A - P_1)$. Iz toga vidimo da se u preseku pod silom P_1 poprečna sila naprasno (skokom) smanjuje za P_1 , a tako je i u presjecima pod ostalim silama P. Kad započetu konstrukciju dijagrama produžimo dalje na isti način dobićemo najzad stepenastu liniju a-b-c-d-e-f-g-h-i koja se naziva dijagram transverzalne sile (dijagram T) za dati slučaj opterećenja. Želimo li znati, kolika je transverzalna sila u ma kome preseku C, potrebno je samo da kroz taj presek povučemo vertikalnu do ovoga dijagrama pa će nam ordinata T_C na tome mestu dijagrama značiti transverzalnu silu u tome preseku.

Iz dijagrama na sl. 236 vidimo kako se poprečna si-

la menja po dužini grede: na levom kraju grede ona je pozitivna, u napadnoj tački sile P_3 ona skokom prolazi kroz nulu, a na desnom kraju grede je negativna. Eksremne vrednosti transverzalne sile javljaju se u blizini oslonaca i po veličini su jednake otporima oslonaca A i B.

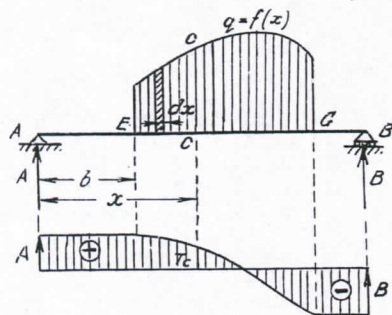
Kod prepustene grede (sl. 237) dobijamo na isti način



Sl. 237

dijagram transverzalne sile, koji se po tome razlikuje od dijagrama T kod proste grede, što transverzalna sila kod grede sa prepustima ne prolazi kroz nulu samo jedanput, kao kod proste grede, već triput.

Ako opterećenje kod proste grede nije koncentrisano u odredjenim tačkama, već je greda na izvesnoj dužini kontinualno opterećena, onda će dijagram T biti kontinualna prava ili kriva linija. O tome se možemo uveriti iz primera na sl.



Sl. 238

238. Za sve preseke od tačke A do tačke E transverzalna sila biće

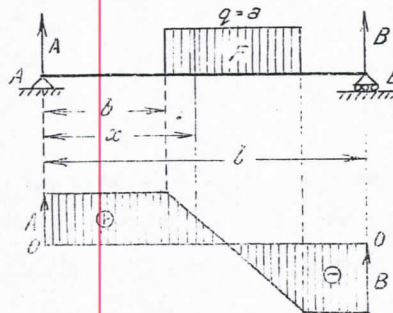
$$T_C = A$$

dakle dijagramna linija biće za taj deo grede paralelna s apscisom na razmaku A. Ali čim prodjemo tačku E idući s

leva na desno i gredu presečemo po liniji C-C videćemo da je poprečna sila sad manja za onoliko, kolika je veličina opte-

rećenja od preseka E do preseka C - C, dakle

$$T_C = A - \int_b^x q dx \dots 157-c)$$



Sl. 239

Ovo je već jednačina dijagramne linije za transverzalnu silu na delu grede od preseka E do preseka G.

Da bismo jednačinu 157c) dobili u konačnoj formi treba da nam je poznat zakon

$$q = f(x)$$

po kome se menja opterećenje duž grede. U najprostijem slučaju, kad je (sl. 239)

$$q = \text{const} = a$$

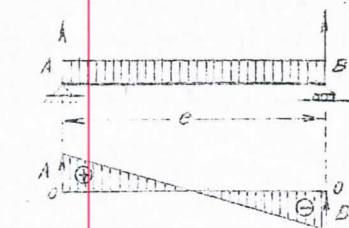
glasiće jednačina dijagrama T na dužini EG

$$T_C = A - a \int_b^x dx = A - a(x - b)$$

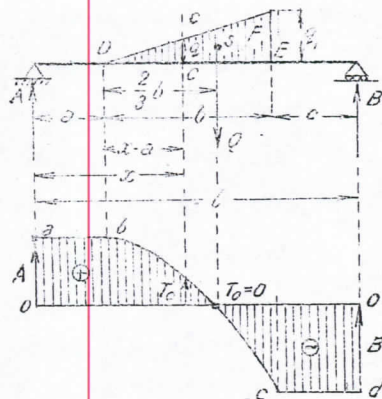
a ovo je jednačina prave linije.

Ako je greda opterećena jednoliko po celoj dužini (sl. 240), onda je $A = B = \frac{al}{2}$, a dijagram T je po celoj dužini grede prava linija, koja seče apscisu u sredini raspona.

Na sl. 241 navodimo i primer dijagrama transverzalne



Sl. 240



Sl. 241

ne sile za slučaj da je opterećenje grede od tačke D do tačke E trouglasto. Tada je zakon po kome se menja opterećenje grede na toj deonici dat proporcijom

$$q : q_1 = (x - a) : b$$

dakle

$$q = f(x) = \frac{q_1(x - a)}{b}$$

Kako je transversalna sila na dužini grede od A do D konstantna ($T_c = A$), a tako isto i na delu od E do B ($T_c = -B$), to će dijagram na tim delovima biti prave a - b i c - d paralelne s apscisom. Za deo grede od D do E dobivamo pak primenom jednačine 157-C)

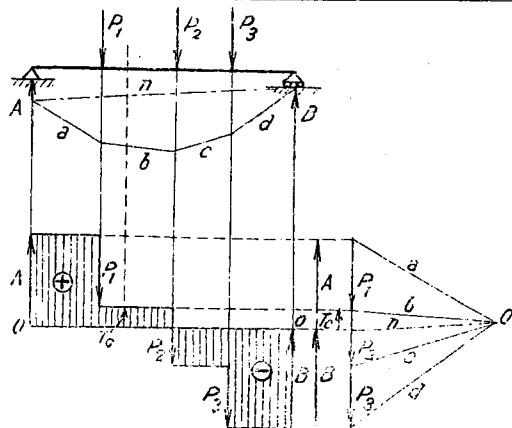
$$T_c = A - \int_a^x \frac{q_1(x - a)}{b} dx = A - \frac{q_1}{b} \int_a^x (x - a) dx$$

a odavde

$$T_c = A - \frac{q_1}{2b} (x - a)^2$$

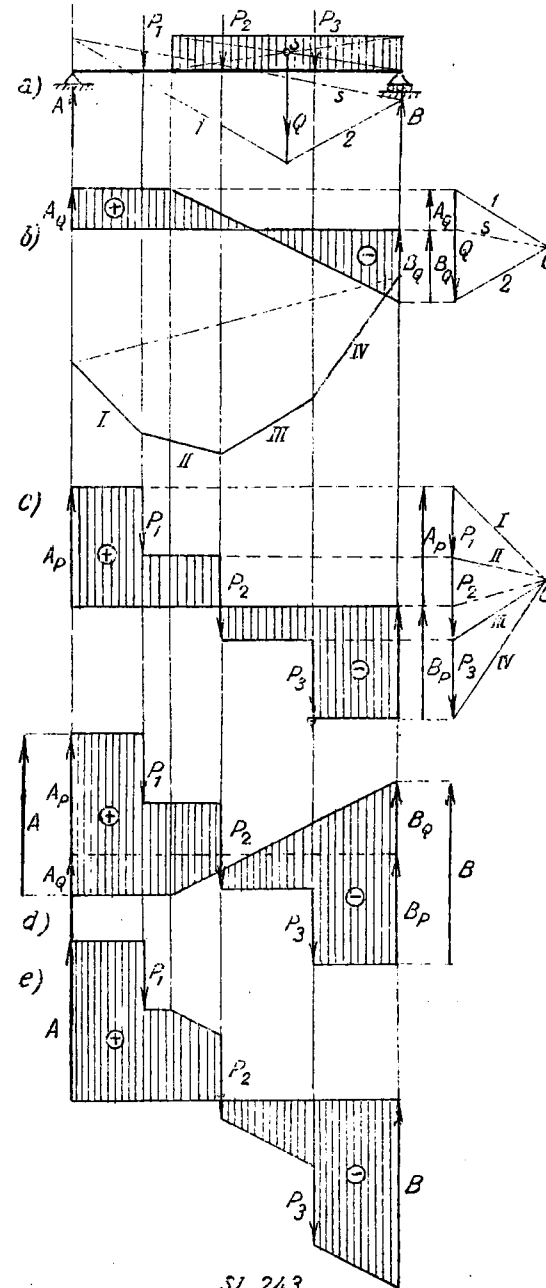
Ovo je jednačina parabole sa vertikalnom osovinom koja prolazi kroz tačku D, što znači da se parabolični deo c - b dijagrama T tangencijalno produžuje u dijagramnu pravu b - a.

Grafička konstrukcija dijagrama T. - U slučaju da smo



Sl. 242

reakcije oslonaca određivali grafičkim putem, možemo dijagram T takodje grafički konstruisati na način pokazan na sl. 242. Pri tome svaku silu iz plana sile projiciramo na onu vertikalu u kojoj ona stvarno dejstvuje



Sl. 243

i tako dijagram dobivamo čisto grafički.

Sličan način upotrebićemo i onda, kad je opterećenje podeljeno bilo po pravolinijskom bilo po krivolinijskom dijagramu opterećenja, a linija opterećenja data grafički. U ovom slučaju delimo površinu opterećenja vertikalnim preseccima u lamelle i dijagram T dobivamo u toliko tačnije, u koliko su uže ove lamelle.

Primena načela superpozicije. - Ako je opterećenje grede složeno, onda se primenom načela superpozicije dejstava može dijagram T grafički odrediti i na taj način, što se opterećenje razloži u nekoliko prostih optereće-

nja i nadju dijagrami za svako od njih, pa se posle grafičkim sabiranjem tih dijagrama dobiva konačni dijagram T. To je pokazano na primeru sl. 243 a, gde je data greda AB opterećena jednako-podeljenim teretom q na izvesnu dužinu, a sem toga i koncentrisanim silama P_1 i P_2 i P_3 . Prvo je na sl. 243 b) nacrtan dijagram T za podeljeno opterećenje q , koji bi važio kod koncentrisanih sila P_1 , P_2 i P_3 ne bi bilo na nosaču, zatim je na sl. 243-c) uzet u obzir samo uticaj sila P i najzad na sl. 243-d) prikazan je definitivni dijagram T za celokupno opterećenje. Na sl. 243-e) prenesene su ordinate $+T$ i $-T$ od horizontalne apscise.

b) Posredno opterećenje.

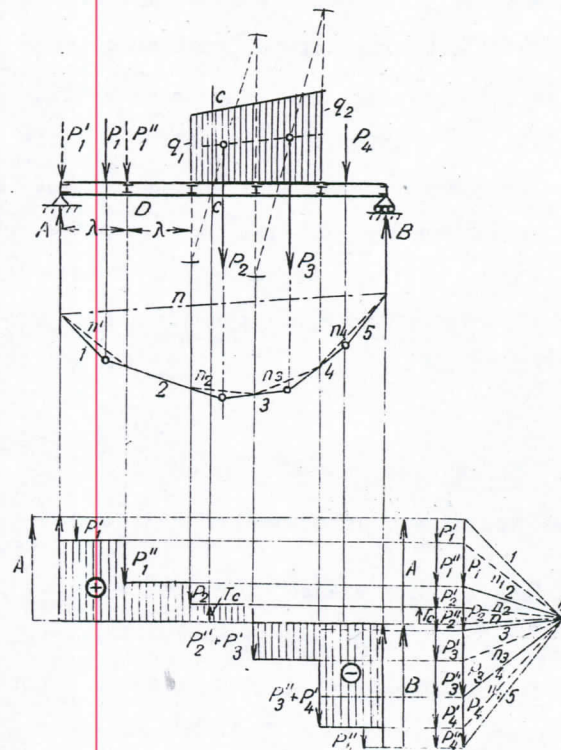
Kao što je ranije (sl. 219) pomenuto, kod posrednog opterećenja trpi glavni nosač AB samo koncentrisane sile koje napadaju u čvorovima. Prema tome, bilo da je opterećenje koncentrisano bilo da je kontinualno. Dijagram T će biti uvek stepenasta linija.

Grafičko određivanje dijagrama transverzalnih sila za takav slučaj objasnićemo na sl. 244. Za određivanje reakcija oslonaca A i B već je ranije rečeno da se vrši na isti način, kao i u slučaju kad opterećenje na nosač neposredno napada. Zato crtamo datim silama P_1 , P_2 , P_3 i P_4 verižni poligon 1-2-3-4-5 kao i ranije i, vukući njegovoj završnoj strani n paralelu u planu sila, dobivamo reakcije A i B. Njihove veličine nezavisne su dakle od toga, da li je greda opterećena datim teretom neposredno ili posredno.

To možemo dokazati računskim putem pomoću momentnih

jednačina za tačke A i B, koje upotrebljujemo pri računskom određivanju reakcija grede AB. U te jednačine ulaze pri neposrednom opterećenju momenti samih datih tereta, a pri posrednom momenti njihovih komponenata na obližnjim čvorovima. Po teoremi momenata uvek je moment rezultante jednak zbiru momenata njenih komponenata, pa prema tome momentne jednačine koje pišemo za određivanje reakcija daće nam u oba slučaja isti rezultat.

Nacrtani verižni poligon 1-2-3-4-5 koji nam je poslužio za određivanje reakcija A i B (sl. 244) možemo iskoristiti i za



Sl. 244

ristiti i za grafičko određivanje čvorovih tereta, koji su nam potrebni za crtanje dijagrama T. Radi toga posmatraćemo na primer prvo polje AD čiji je raspon λ i pretpostavićemo da je podužni nosač na tome rasponu prosta greda. Usled tereta P_1 , koji napada u to me polju, javiće se u čvorovima A

i D pritisci P_1' i P_1'' , a to su traženi čvorni tereti usled sile P_1 (njene komponente). Po zakonu akcije i reakcije svim pritiscima P_1' i P_1'' odgovaraće iste tolike reakcije oslonaca proste grede (podužnog nosača) na rasponu l , te ih dakle grafički možemo naći zatvarajući verižni poligon 1-2 koji odgovara tomé polju završnom stranom n_1' i vukući joj paralelu u planu sila, koja dakle otseca na sili P_1 tražene čvorne terete P_1' i P_1'' . Na isti način postupamo i pri određivanju čvornih tereta usled ostalih sila P_2, P_3 i P_4 i vidimo da se u srednjim čvorovima koji leže između tih sila pritisci s leva i s desna već i u samom planu sila sumiraju u totalni čvorni teret. Čim smo ovako odredili čvorne terete, onda se crtanje dijagrama T za gredu AB može izvršiti na već poznati način.

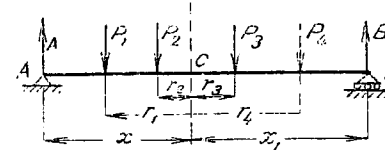
Valja primetiti da u ovome slučaju poprečne sile u poljima uz oslonce nisu jednake reakcijama oslonaca, već su smanjene za onoliko koliki su čvorni tereti u čvorovima nad samim osloncima. Poprečna je sila u svakom polju konstantna, pa i u onim poljima koja su kontinualno opterećena (v. presek c-c u sl. 244).

21. Napadni momenti.

a) Neposredno opterećenje.

Pojam napadnog momenta. - Napadni moment M_C u izvesnom preseku C definišemo kao algebarski zbir statičkih momenata svih spoljnih sila levo ili desno od preseka za obrtnu tačku u težištu S preseka. Za gredu AB (sl. 245) napadni moment u preseku C biće prema gornjoj definiciji (v. jedn. 158):

$$M_C = A \cdot x - P_1 r_1 - P_2 r_2, \dots 158 \text{ a)}$$



Sl. 245

pri čemu smo smisao kazaljke uzeli za pozitivan. Ali tako isto treba da je i

$$M_C = -B \cdot x_1 + P_3 r_3 + P_4 r_4 \dots 158 \text{ b)}$$

Ako ovaj (desni) moment ozna-

čimo sa M_D , a onaj prvi (levi) sa M_L , onda prema uslovu ravnoteže $\sum M = 0$ mora biti

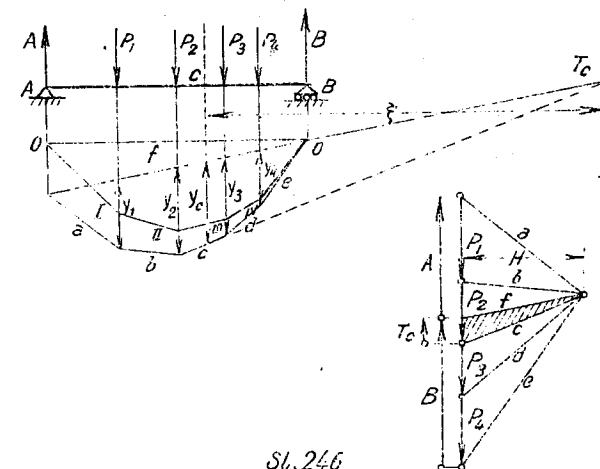
$$\sum M = M_L + M_D = 0$$

ili

$$M_L = -M_D.$$

To znači, kad pri izračunavanju napadnog momenta uzmemo u račun sile desno od preseka, onda moramo dobivenom momentu promeniti znak, ili - što izlazi na isto - možemo za sile desno od preseka pozitivan smisao uzeti suprotno kazaljki. Prema tome, navedena definicija napadnog momenta važi samo za njegovu apsolutnu vrednost.

Kulmanova momentna površina. - Napadne momente za jednu gredu možemo pretstaviti dijagramom momenata. Taj dijagram možemo konstruisati i čisto grafičkim putem, sl. 246. Tereti



Sl. 246

P_1, P_2, P_3 i P_4 zajedno sa otporima oslonaca A i B na toj slici pretstavljaju jedan sistem paralelnih sila, a iz ranije (v. sl. 177 str. 314) znamo kako se grafički nalazi statički moment jedne sile, odnosno jedne grupe sila za ma koju obrtnu tačku.

Ako sa proizvoljnim polom O konstruišemo verižni poligon a-b-c-d-e, onda će nam prema jednačini 141) otsečak y pomnožen sa horizontalnim rastojanjem pola H pretstavljati statički momenat za presek c one grupe sila, koja se drži u ravnoteži sa naponima a, b, c i f; to su pak sile A, P_1 i P_2 (ili B, P_3 i P_4) i prema tome je $y_c \cdot H$ napadni momenat za presek C, dakle

$$M_C = y_c \cdot H \quad \dots \quad 159)$$

Da je jednačina 159) tačna uveravamo se i iz sledećeg rasmatranja. Napadni momenat za presek C možemo definisati i kao statički momenat rezultante svih spoljnih sila levo (ili desno) od preseka za obrtnu tačku u težištu preseka. Rezultanta R_C svih sila levo (ili desno) od preseka, koju smo nazvali i napadnom silom za presek C, iste je veličine pravca i smisla kao i transverzalna sila, te je možemo lako naći u planu sila. Na sl. 246 ona u planu sila čini trougao sa naponima f i c, a njen položaj prema gredi AB sleduje iz odnosa recipročnosti koji postoji između plana sila i verižnog poligona; ona mora prolaziti kroz presek strana c i f verižnog poligona. Ako njen krak za presek C označimo sa ξ , onda je napadni momenat za presek C dat jednačinom

$$M_C = R_C \cdot \xi \quad \dots \quad 159a)$$

Iz sličnosti šrafiranih trouglova na sl. 246 dobijamo međutim proporciju

$$R_C : H = y_c : \xi$$

a odavde sleduje traženi dokaz

$$M_C = R_C \cdot \xi = y_c \cdot H.$$

Verižni poligon a-b-c-d-e pretstavlja nam dakle u istom mahu i dijagram napadnih momenata za gredu AB, jer su njegove ordinate y, merene od završne strane f do poligona, proporcionalne napadnim momentima, a faktor proporcionalnosti (ili razmera dijagrama) je rastojanje pola H. Kako je izbor pola proizvoljan to možemo uvek zamisliti da je $H = 1$ i onda ordinate verižnog poligona pretstavljaju same napadne momente.

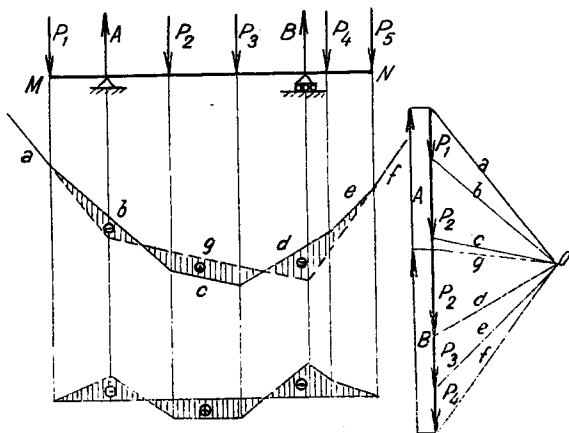
Obično dijagram napadnih momenata, ovako konstruisan, ne ostavljamo u kosom položaju, nego ga redukujemo na horizontalnu apscisu, t.j. konstruišemo verižni poligon tako da mu završna strana bude horizontalna. To možemo postići na dva načina: ili prosto prenosimo, pošav od horizontalne apscise O-O ordinate y_1, y_2, y_3 i y_4 i tako dobijemo vlak O-I-II-III-IV-O, ili prenesimo položaj pola O tako, da završna linija bude horizontalna. Sa tako izabranim polom O' nacrtani verižni poligon daje nam dijagram O-I-II-III-IV-O napadnog momenta, redukovan na horizontalu O-O.

Površinu, ograničenu zatvorenim verižnim poligonom a-b-c-d-e-f-a nazivamo Kulmanova momentna površina s toga, što je Kulman prvi utvrdio ovu vezu između napadnih momenata i ordinata verižnog poligona.

Iz dijagrama M za prostu gredu AB na sl. 246 vidimo: 1) da napadni momenat ima duž cele grede isti znak (pozitivan); 2) da je linija M pri opterećenju koncentrisanim silama poligonalna sa prelomima na linijama dejstva tih sila; 3) da se momenat od preseka do preseka u kojima dejstvuju koncentrisane sile linearno menja; i 4) da su momenti u preseci-

na na osloncima jednaki nuli, a da se najveća vrednost momenta javlja negde oko sredine raspona i to uvek pod jednim od tere-
ta.

Ako imamo gredu MN sa prepustima, napadne momente od-
redjujemo po istom principu, kao i kod proste grede. Grafički
ćemo dijagram momenata konstruisati opet kao Kulmanovu momen-
nu površinu (sl.247): sa ma kojim polom O nacrtaćemo spoljnim



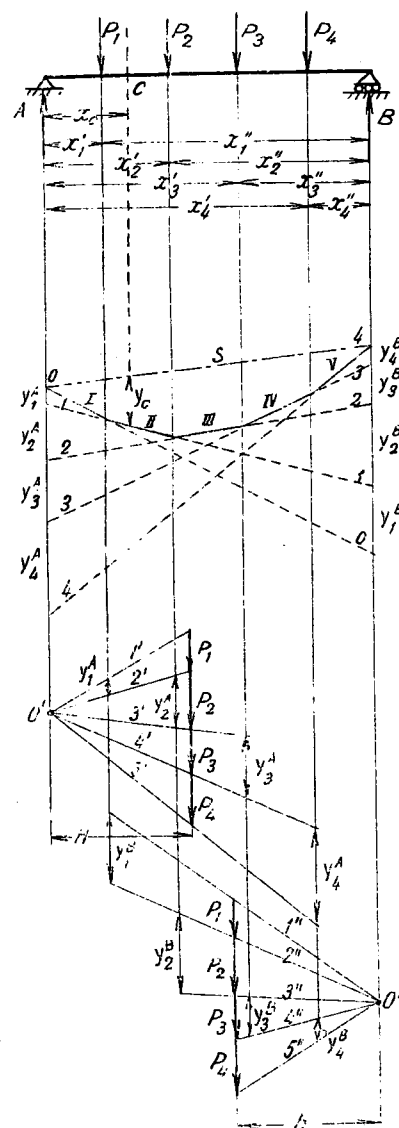
Sl. 247

silama zatvoren ve-
rižni poligon a-b-
-c-d-e-f-g pa će
za ma koji presek C
biti napadni mome-
nat

$M_C = y_C \cdot H$

U ovome slučaju vi-
dimo da napadni mo-
menat nema više is-
ti znak duž cele
grede, već da je
- pošav od M ka N - najpre negativan, da zatim prolazi kroz nu-
lu i postaje pozitivan i da je najzad opet negativan. Na sl.247
dijagram je opet redukovana na horizontalnu apscisu na taj na-
čin, što su ordinate y na svima mestima gde se dijagramna lini-
ja lomi (pod svima spoljnim silama) prenete od jedne horizon-
talne apscise naviše ili naniže prema tome, da li je M nega-
tivno ili pozitivno.

Blekmanova konstrukcija verižnog poligona. - Verižni
poligon, koji pretstavlja dijagram M, možemo po Blekmanu (T.
Bleckmann, 1920) nacrtati, a da ne moramo vući paralele polnim



Sl. 248

za obrtnu tačku u osloncu A.

Ako sad na isti način nacrtamo nov plan sila, sa po-

zracima. Radi toga nacrtaće-
mo (sl. 248) sa polom O' i
polnom razdaljinom H plan
sila ali tako, da pol O' le-
ži na vertikali kroz oslo-
nac A. Produžimo li sve pol-
ne zrake: 1', 2', 3', 4' i 5'
do preseka sa linijama dej-
stva sila P₁, P₂, P₃ i P₄
dobićemo na tim linijama ot-
sečke: y₁^A, y₂^A, y₃^A i y₄^A pro-
porcionalne statičkim momen-
tima svako od sila P za o-
brtnu tačku u osloncu A i to
sa faktorom proporcionalno-
sti H. Da je te tačno na
primer za silu P₂ (a to va-
ži i za svaku drugu) sledu-
je iz sličnosti trouglova

$$H : P_2 = x_2' : y_2^A$$

a odavde

$$M_2^A = P_2 x_2' = y_2^A \cdot H$$

ili

$$y_2^A = \frac{P_2 x_2'}{H} = \frac{M_2^A}{H}$$

Kad bi bilo H = 1, onda bi
otsečki y^A pretstavljali sa-
me momente svake od sila P

lom O'' na vertikali kroz B, sa istom polnom razdaljinom H i u istoj razmeri sila, dobićemo na linijama dejstva sila P otsečke y^B proporcionalne statičkim momentima tih sila za obrtnu tačku B, jer će sad važiti na primer za P_2

$$y_2^B = \frac{P_2 x_2''}{H} = \frac{M_2^B}{H}$$

Poredjamo li najzad otsečke y na vertikali kroz A po redu $y_1, y_2 \dots$ a otsečke y^B u suprotnom redu $y_4, y_3 \dots$ na vertikali kroz B i spojimo li njihove krajnje tačke pravim linijama na način pokazan na sl. 248, dobićemo verižni poligon I-II-III-IV-V, jer se prave $O-O, 1-1, 2-2, 3-3$ i $4-4$ moraju seći na linijama dejstva sila P , kao što iz proporcije $y_1^A : y_1^B = x_1' : x_1''$ za i -tu silu P_i izlazi.

Da zaista ordinate y verižnog poligona I-II-III-IV-V, množene sa polnom razdaljinom H , daju momente za one preseke na čijim vertikalama te ordinate uzimamo, uveravamo se na primer za silu P_2 kad uzmemo njen momenat za obrtnu tačku A:

$$M_2^A = y_2^A \cdot H$$

(uporedi jednačinu 141 str. 315), a za obrtnu tačku B

$$M_2^B = y_2^B \cdot H$$

kao što smo i pri crtanju sl. 248 pretpostavili.

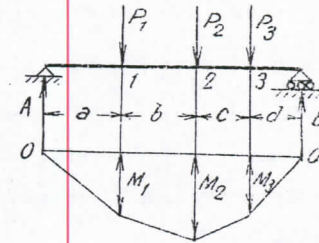
Prema tome, ako povučemo još i završnu stranu s verižnog poligona I-II-III-IV-V onda će i za proizvoljan presek C na razmaku x od levog oslonca važiti za napadni momenat

$$M_C = y_C \cdot H$$

iz čega se vidi da je površina dobivenog verižnog poligona I-II-III-IV-V - S Kulmanova površina.

Analiitičko određivanje napadnog momenta. - Ako želi-

mo nacrtati dijagram M bez primene verižnog poligona, onda ćemo - pri opterećenju koncentrisanim silama - morati analitič-



Sl. 249

kim putem odrediti momente u svima presecima u kojima tereti dejstvuju. To činimo primenom jednačine 158) onoliko puta, koliko ima tereta P . Ako (sl. 249) označimo sa 1, 2, 3 preseke u kojima se dijagramna linija lomi,

biće veličine napadnih momenata za te preseke

$$M_1 = A \cdot a$$

$$M_2 = A(a + b) - P_1 b$$

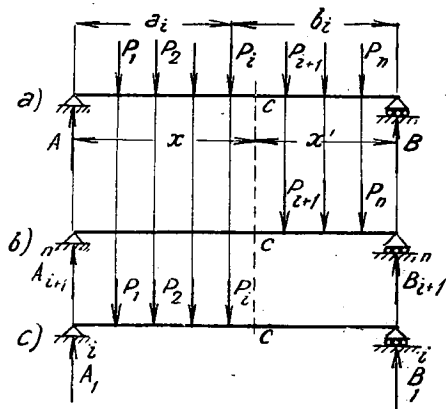
$$M_3 = B \cdot d$$

Kad ove veličine prenesemo od horizontalne apscise $O-O$ kao ordinate u izvesnoj razmeri dobićemo traženi dijagram M bez potrebe da crtamo verižni poligon.

Pri analitičkom određivanju napadnog momenta već kod proučavanja rešetkaste grede str. 133-136 našli smo da je za napadni momenat u preseku C najkraći analitički izraz (prema sl. 75, jednačina 22 o):

$$M_C = x' \cdot \sum_{i=1}^n B_i + \sum_{i=1}^n X_{i+1}^A$$

Ako sud na sl. 250 primenimo iste oznake, kao i na sl. 75, možemo do gornje jednačine doći brže primenom principa superpozicije dejstava. Radi toga zamislićemo da je opterećenje grede na sl. 250 složeno iz dva opterećenja: jednog desno od preseka C, a drugog levo od preseka C, v. sl. 250 b i 250 c. Kad zanemarimo opterećenje $P_1 - P_1$, a uzmemo u obzir samo terete $P_{i+1} - P_n$, onda važe reakcije oslonaca $\sum_{i=1}^n A_i$ i $\sum_{i=1}^n B_i$, a napadni momenat



Sl. 250

za presek C izlazi

$$M_C = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x$$

jer je sad \$A\$ jedina spoljna sila levo od preseka. Na isti način dobivamo, kad zanemarimo opterećenje \$P_{i+1} - P_n\$, kao napadni moment u preseku C usled opterećenja levo od C :

$$M_C = \sum_{i=1}^i B_i \cdot x'$$

a sumiranjem uticaja ovih dvaju

delimičnih opterećenja sleduje moment usled ukupnog opterećenja silama \$P_1 - P_n\$.

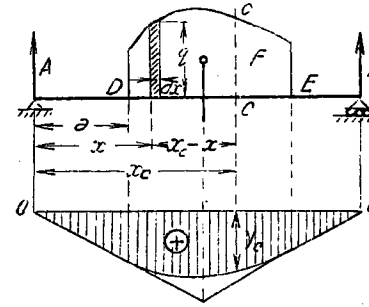
$$M_C = \sum_{i=1}^i M_C + \sum_{i=1}^n M_C = \sum_{i=1}^i B_i \cdot x' + \sum_{i=1}^n A_i \cdot x$$

kao što smo i ranije - po jednačini 22 c - bili našli. Pomenu li smo već (str. 136) da iz ove jednačine možemo zaključiti da je kod proste grede napadni moment zato uvek pozitivan, što reakcije oslonaca za svako vertikalno opterećenje ispadaju pozitivne.

Kad je greda na izvesnoj dužini kontinualno opterećena, onda teoretski svodimo ovo opterećenje na slučaj koncentrisanih sila: delimo kontinualno raspodeljeni teret vertikalnim presecima na beskonačno mnogo beskonačno malih koncentrisanih sila. Na sl. 251 te nam sile predstavljaju beskonačno uske lamele površine opterećenja

$$dP = q \cdot dx$$

Po definiciji napadnog momenta biće on tada za ma koji presek C analitički izražen jednačinom



Sl. 251

Dijagram M za slučaj na sl. 251 biće od A do D prava

linija, jer u tome delu važi

$$M_x = A \cdot x$$

pa moment raste linearno sa apscisom \$x\$. U preseku D biće napadni moment

$$M_D = A \cdot a$$

a odatle do preseka F dijagram će biti kriva, pretstavljena jednačinom 160), i najzad od E do B biće opet prava.

Lančanica kao dijagram M. - Na onom delu grede, koji je kontinualno opterećen, Kulmanov verižni poligon - odnosno dijagram M - prelazi u lančanicu i zato za njega važi ono što je u Statici materijalne linije rečeno u čl. 24 (str. 160 i sledeće), naročito jednačina 51-a) na str. 184, o lančanici opterećenoj vertikalnim silama. Zato su prave linije u dijagramu M na sl. 251 tangente u krajnjim tačkama lančanice, a kroz njihov presek mora prolaziti rezultanta celog kontinualno raspodeljenog tereta.

Da su obe pomenute prave u sl. 251 zaista tangente na lančanicu, lako je u ovome slučaju dokazati. Iz matematike je poznato da se prava i kriva (sl. 252) seku onda, kad beskonačno maloj apscisi \$dx\$ odgovara beskonačno mala ordinata \$dy\$ istog reda, a ako su one različitog reda onda prava dodiruje

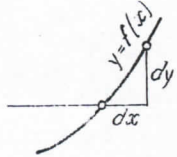
$$M_C = A \cdot x_c - \int_a^{x_c} q(x_c - x) dx \dots 160)$$

pri čemu smo smisao kazaljke uzeli za pozitivan. Ovaj integral moći ćemo rešiti, kad je zadata jednačina linije opterećenja

$$q = f(x)$$

krivu. U našem slučaju ordinata dy znači (negativan) priraštaj momenta i iznosi u preseccima D i E sl. 251.

$$dy = q dx \frac{dx}{2} = \frac{q}{2} dx^2,$$

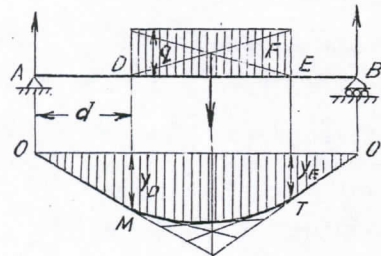


dakle je dy prema dx beskonačno mala količina drugog reda.

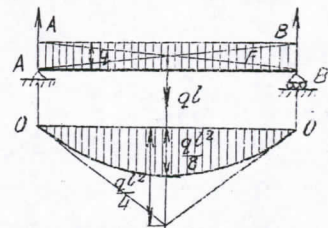
Dijagram M, odnosno vserižni poligon (lančanicu) za kontinualno opterećenu gredu

moćemo u opštem slučaju moći grafičkim putem tačno konstruisati, već samo približno. Ali ako je opterećenje jednako raspodeljeno ($q = \text{const}$), onda lančanica ima oblik parabole (uporedi str. 168) i tada je možemo lako konstruisati (sl. 253). Konstruišemo trougao momenata za koncentrisan teret, povučemo njegove krajnje ordinate y_D i y_E i time dobivamo obe tangente ON i NQ parabole koja leži između M i T. Konstrukcija ove parabole, pokazana na sl. 253 poznata je iz Geometrije.

Kad je teret jednako raspodeljen po celoj dužini grede (sl. 254), onda će i parabola ići s kraja na kraj; njena strela će biti jednaka napadnom momentu za presek u sredini



Sl. 253



Sl. 254

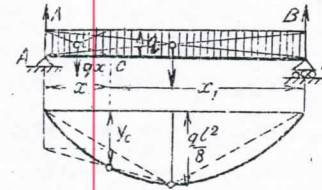
raspona grede:

$$M_{\frac{l}{2}} = A \cdot \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}$$

pa kako je u ovome slučaju $A = B = \frac{q \cdot l}{2}$ biće

$$M_{\frac{l}{2}} = \frac{q \cdot l^2}{4} - \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{q \cdot l^2}{8} \dots\dots 161)$$

U ovome slučaju, kad smo odredili strelu pomoću jednačine 161), nalazimo ordinatu parabole, odnosno napadni moment, za ma koji presek jednom prostom grafičkom konstrukcijom (sl. 255) koja



Sl. 255

se osniva na poznatim osobinama parabole.

Analičkim putem dobivamo napadni moment za ma koji presek pri jednako raspodeljenom teretu također vrlo prosto (sl. 255):

$$M_C = A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_C = \frac{q \cdot l}{2} x - qx \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_C = \frac{q \cdot x}{2} (l - x) = \frac{q x x_1}{2} \dots\dots 162).$$

Kao što smo našli i za parabolichnu lančanicu jednačinom 43), str. 173.

Slučaj jednako raspodeljenog tereta dolazi u praksi najčešće (na pr. sopstvena težina grede). Ali dolaze i slučajevi da opterećenje raste linearno tako, da je površina opterećenja trougao ili trapez, v.sl.256. Ceo teret koji tada leži na gredi je

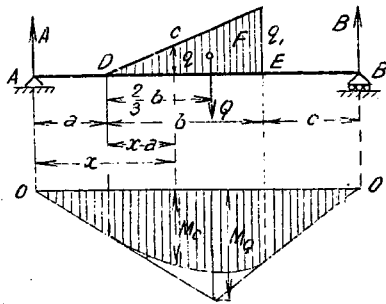
$$Q = \frac{b \cdot q_1}{2}$$

Otpori oslonaca su tada, određeni analitičkim putem:

$$A = \frac{Q}{L} \left(c + \frac{b}{3} \right); \quad B = \frac{b \cdot q_1}{2} - A$$

Znamo da će dijagram M između preseka D i E biti neka kriva, a između A i D i E i B imaćemo dve prave koje se seku na liniji dejstva tereta Q u tački z. Trougao OZO_1 bio bi dijagram napadnog momenta, kad bismo kontinualno raspodeljeni teret zamenili koncentrasanom silom $Q = F$, koja bi dejstvovala u težištu S površine opterećenja. Prema tome ordinata tačke Z je

$$A \left(a + \frac{2}{3} b \right)$$



Sl. 256

i kad nju prenesemo možemo odmah konstruisati obe tangente na lančanicu koja predstavlja dijagram M za deo grede između preseka D i E. S leve strane kod D biće dodir prave i lančanicu višeg reda nego s desne (kod E) jer je za beskonačno mali priraštaj aps-

scise; levo

$$dy = \frac{dq \cdot dx}{2} \cdot \frac{dx}{3} = \frac{dq \cdot dx^2}{6},$$

a desno

$$dy = q_1 dx \cdot \frac{dx}{2} = q_1 \frac{dx^2}{2}$$

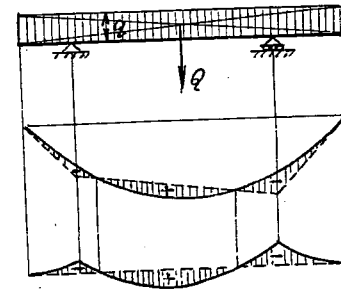
Jednačinu lančanicu (dijagrama M) u ovome slučaju dobivamo za ma koji presek C

$$M_C = A \cdot x - \frac{x-a}{2} \cdot \frac{q_1(x-a)}{b} \cdot \frac{x-a}{3}$$

$$M_C = \frac{bq_1}{2L} \left(c + \frac{b}{3} \right) - \frac{q_1}{6b} (x-a)^3.$$

Kao što vidimo moment za ma koji presek C, na rastojanju x od A, predstavljen je krivom trećeg stepena. Tu krivu možemo približno konstruisati grafički, ako podelimo površinu opterećenja u lamelle, od kojih će prva biti trougao a ostale trapezi, pa u njihovim težištima postavimo koncentrasane sile jednake površinama dotičnih lamela i ovih silama nacrtamo verižni poligon sa proizvoljnim polom. Razdaljina pola H predstavljaće nam tada razmeru u kojoj je dijagram M nacrtan,

Kod grede sa prepustima, opterećenje na celu dužinu jednako raspodeljenim teretom (sl. 257) verižni poligon biće



Sl. 257

opet parabola, čija je osa vertikalna i prolazi kroz sredinu dužine grede. Parametar te parabole je, kao što je poznato

$$\frac{H}{q}$$

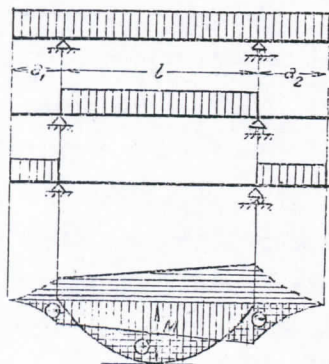
gde bi H bilo horizontalno rastojanje pola u poligonu sila koji bi odgovarao toj lančanicu.

ovo H možemo pri crtanju verižnog poligona proizvoljno izabrati; krajnje završne strane verižnog poligona (prva i poslednja) tangente su na parabolu. Kad njihove preseke sa vertikalama kroz oslonce spojimo, dobivamo treću (srednju) završnu stranu verižnog poligona. Iz sl. 257 se vidi da je u ovome slučaju Kulmanova momentna površina sastavljena iz tri dela: napadni momenti su najpre negativni, zatim pozitivni i onda opet negativni. Kad ovaj dijagram M redukujemo na horizontalu,

nalazimo da on ima tri dela, ali svi ti delovi moraju biti parabole identične prvoj t.j. sa istim parametrom $\frac{H}{q}$ i stoga ih možemo konstruisati pomoću istog šablona. Ose krajnjih parabola su vertikale na krajevima grede, a osa srednje parabole takodje je vertikalna ali ne prolazi sredinom raspona, sem u slučaju da su oba prepusta jednake dužine. U ovom poslednjem (specijalnom) slučaju je dijagram M simetričan (kao i greda i opterećenje) prema vertikali u sredini raspona, te su i momenti nad osloncima A i B jednaki.

Primena načela superpozicije. - Kod grede sa prepustima možemo dijagram M konstruisati i po principu superpozicije. Radi toga prvo zanemarimo opterećenje prepusta, kao da i ne postoji, i tako prepustenu gredu pretvaramo u prostu s rasponom AB, a zatim zamišljamo da je ceo raspon neopterećen, a opterećeni samo prepusti. Tako dobijene dijagrame M usled delimičnih opterećenja posle grafički sabiramo.

Za slučaj jednako-podeljenog opterećenja taj postupak je prikazan na sl. 258. Prvo



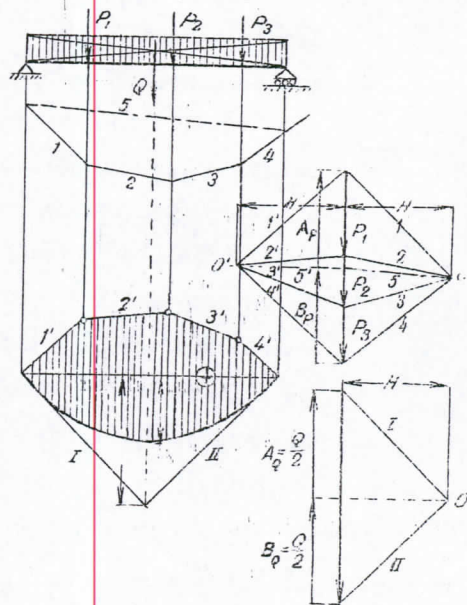
Sl. 258

je nacrtana parabola sa strelom $\frac{qL^2}{8}$, koja pretstavlja uticaj opterećenja izmedju oslonaca na napadne momente grede, a zatim (tačkasto) dve parabole, koje odgovaraju samom opterećenju prepusta. Njih možemo nacrtati kad prvo odredimo momente nad osloncima

$$M_A = - \int_0^{a_1} qxdx = - \frac{qa_1^2}{2},$$

$$M_B = - \frac{qa_2^2}{2},$$

i uzmemo u obzir da obe parabole imaju vertikalne ose koje prolaze kroz krajeve prepusta. Izmedju oslonaca A i B je dijagram M, usled samog opterećenja prepusta, prava linija. Po principu superpozicije momenat u svakom preseku grede biće jednak algebarskom zbiru momenata usled svakog ovog opterećenja uzetog zasebno; pa kako su momenti u prvom slučaju (za opterećenje u rasponu) pozitivni, a u drugom (za opterećenje prepusta) negativni, to će Kulmanova momentna površina za datu gredu biti jednaka razlici obeju ovih površina. Ako dakle ovu poslednju površinu preklopimo preko apscise, onda ćemo time izvršiti grafičkim putem oduzimanje tih površina, jer onda zajednički deo obeju površina (dvostruko šrafirano) pretstavlja Kulmanovu mo-



Sl. 259

mentnu površinu za datu gredu. Nju treba još samo redukovati na horizontalnu apscisu.

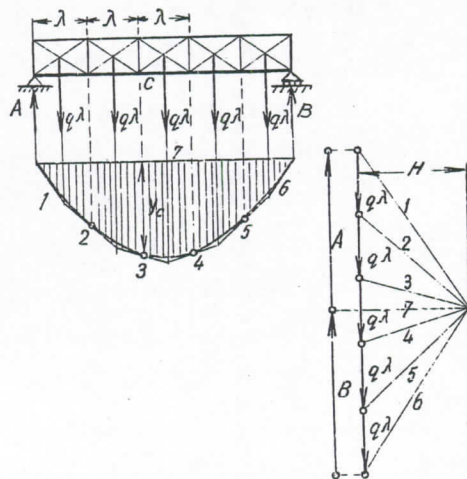
Isto ovako možemo postupiti i kod proste grede, kad je opterećenje složeno, na primer iz jednako podeljenog tereta q i nekoliko koncentrisanih sila sl. 259. Prvo zanemarujemo jednako podeljeni teret q (na primer sopstvenu teži-

nu) i crtamo Kulmanovu momentnu površinu 1-2-3-4-5 samo za sile P . Da bismo je mogli sabrati sa površinom koja odgovara opterećenju q , mi zatim biramo s druge strane vlakla sila nov

pol O' tako da nova završna strana $5'$ ispadne horizontalna i ponova crtamo Kulmanovu momentnu površinu $1'-2'-3'-4'-5'$. Najzad konstruišemo na poznati način paraboličnu lančanicu, koja predstavlja dijagram M za samo jednako-podeljeno opterećenje q , te dobijamo definitivni (šrafirani) dijagram M , koji bi još samo trebalo redukovati na horizontalu. U svima planovima sila na sl.

259 mora polna razdaljina H biti iste dužine da bi određeni dijagrami M za sile P i opterećenje q bili u istoj razmeri.

Grafostatička metoda za crtanje parabole. - Paraboličnu lančanicu koja odgovara jednako podeljenom opterećenju q možemo približno konstruisati grafičkim putem, kad površinu opterećenja podelimo u uske



Sl. 260

rećenja podelimo u uske lamele širine λ , ove zamenimo koncentrisanim silama $q\lambda$ i tim silama nacrtamo verižni poligon (sl. 260). Ova metoda crtanja parabole za razliku od drugih čisto geometrijskih metoda, može se nazvati grafo-statička metoda, jer se osniva na principima grafostatike. Ako po ovoj metodi želimo nacrtati parabolični dijagram M kao kontinualnu krivu, onda je moramo upisati u verižni poligon 1-2-3-4-5-6 tako, da ga dodiruje u tačkama koje leže na granicama između pojedinih vertikalno razdvojenih lamela. Da je to tačno sleduje iz pojma napadnog momenta za proizvoljni presek C po Kulmanu

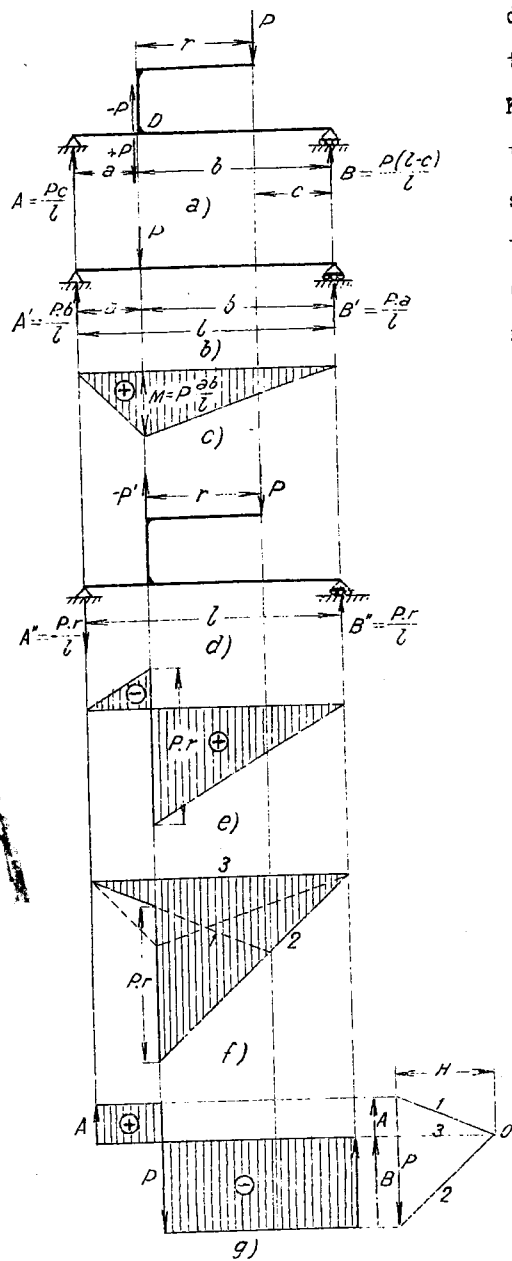
$$M_C = y_C \cdot H.$$

Kad taj izraz primenimo na slučaj u sl. 260 vidimo da y_C predstavlja ordinatu Kulmanove momentne površine 1-2-3-4-5 samo za preseke koji se nalaze na granici između lamela, a za preseke u oblasti samih lamela y_C uzeto iz verižnog poligona 1-2-3-4-5 ne važi, jer tada levo od preseka nemamo samo cele sile $q\lambda$, kao što je bilo pretpostavljeno pri crtanju verižnog poligona.

Navedena približna konstrukcija krivolinijske lančanice, koja se dobiva kao kriva upisana u verižni poligon, važi i onda kad kontinualno opterećenje nije jednoliko raspodeljeno. I tada ostaje kao opšte pravilo: vertikalni preseki koji dele površinu opterećenja u lamele pogadjaju verižni poligon u dodirnim tačkama krive lančanice koju treba u njega upisati.

Naprasne promene napadnog momenta. - U svima dosadašnjim primerima linija M , bilo da je opterećenje koncentrisano ili kontinualno, uvek je bila neprekidna - izlomljena ili kriva linija; drugu rečima napadni momenat se nije nikada menjao naprasno. Ali ima i slučajeva gde se linija M menja naprasno, t.j. pravi skokove, a to je uvek onda kad u nekom preseku grede napada jedan spreg. Ovo je specijalni slučaj opterećenja, jer se razlikuje od svih prethodnih slučajeva. Objasnimo ga sa tri primera koji u praksi mogu nastupiti i za koje smo već pokazali (sl. 223-225) kako se određuju reakcije oslonaca.

Na sl. 261 imamo prostu gredu AB na koju u tački D napada spreg horizontalnih sila $(+P, -P)$. U slučaju ravnoteže spoljnih sila našli smo (sl. 224) da i reakcije oslonaca



Sl. 263

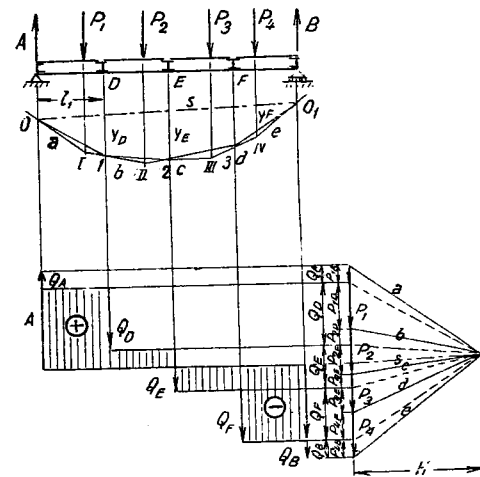
du dejstvuje jedna ekscentrična horizontalna sila P . Kad tu silu redukujemo na tačku D , onda ovaj slučaj svodimo na prethodni, jer tada u tački D napada spreg $(+P, -P)$ čije je dejstvo na gredu isto kao i na sl. 261. Razlika je samo ta, što sem poprečnih sila i napadnih momenata, čiji su dijagrami i ovde isti kao u sl. 261 b i 261 c, imamo ovde još na dužini grede od A do D jednu aksijalnu silu koja dejstvuje kao zatezanje (dijagram njen v. sl. 262 b) i što reakcija A nije vertikalna, već ima i horizontalnu komponentu $A_x = P$, dok je $A_y = B$.

Momenat može biti zadat i u vidu jedne vertikalne sile, koja ekscentrično napada u preseku D (sl. 263). I u ovome se slučaju dijagram M naprasno menja u preseku D , a linear-

no u svima ostalim preseccima. Da je to tačno uvidjemo kad silu P redukujemo na tačku D jer se tada pokazuje da se ona razlaže u dva dejstva: silu P koja dejstvuje u tački D i spreg sila $(+P, -P)$ čiji je momenat $P \cdot r$ i koji izaziva skok u liniji M . Kulmanova momentna površina i dijagram T za ovaj slučaj dati su na sl. 263 f i 263 g. Dijagram M određen je po principu superpozicije.

b) Posredno opterećenje.

Za posredno opterećenje već smo pokazali kako se određuju reakcije oslonaca i dijagram T . Za određivanje dijagrama M neka posluži



Sl. 264.

primer na sl. 264. Pošto opterećenje na glavni nosač AB napada samo u čvorovima u vidu koncentrisanih sila, to će dijagram M biti izlomljena linija, čiji čoškovi leže na vertikalama kroz čvorove. Liniju M možemo konstruisati našavši prethodno (na primer analitičkim putem) čvorna opterećenja, ali je možemo konstruisati i na mnogo kraći način čisto grafički. Zamislimo da je greda AB opterećena datim teretima neposredno i konstruisaćemo najpre verižni poligon za takvo opterećenje (sl. 264). Završna strana s tog verižnog poligona otsecaće, kao i običnom slučaju neposrednog opterećenja, na

teretnoj vertikali veličine otpora oslonaca A i B; njihove veličine su nezavisne od toga da li je greda opterećena datim teretima neposredno ili posredno. Ako sad preseke čvornih vertikala sa verižnim poligonom spojimo pravim linijama i istima u planu sila povučemo paralele (tačkaste) dobićemo u planu sila veličine čvornih tereta, a u planu nosača nov verižni poligon 0-1-2-3-0 koji odgovara tim čvornim teretima i koji nam, dakle, pretstavlja Kulmanovu liniju M za posredno opterećenu gredu, kao što ćemo odmah uvideti. Momenti u samim čvorovima ostaju isti. Na primer, momenat u čvoru D, pod pretpostavkom da je opterećenje neposredno, bio bi (u razmeri H):

$$M_D = y_D = A \cdot l_1 - P_1 x.$$

Stavljajući da je opterećenje posredno ne činimo ništa drugo, nego zamenjujemo silu P_1 njenim komponentama F_{1A} i F_{1D} na obližnjim čvorovima; momenat otpora A ostaje isti, a momenat sile P_1 mora biti jednak zbiru momenata obeju njenih komponenta, dakle u oba slučaja momenat u čvoru ima istu vrednost. Između čvorova, kao napadnih tačaka koncentrisanih spoljnih sila, momenat se menja - kao što znamo - linearno, jer nema opterećenja. Time je dokazano da je konstrukcija dijagrama M, navedena u sl. 264, ispravna.

c) Opasni preseci.

Od veličine napadnog momenta M zavise unutarnje sile koje pretstavljaju istežanja i pritiske u vlaknima grede, izložene savijanju. Tamo gde napadni momenat ima svoju maksimalnu vrednost, bilo pozitivnu ili negativnu, imaće i unutarnje sile (naponi) takodje maksimalne vrednosti. U tim preseci-

ma može greda pod opterećenjem koje ju savija najpre popustiti (t.j. njena se vlakna raskinuti ili zdrobiti) i stoga te preseke, u kojima vladaju maksimalni momenti, nazivamo opasnim presecima grede.

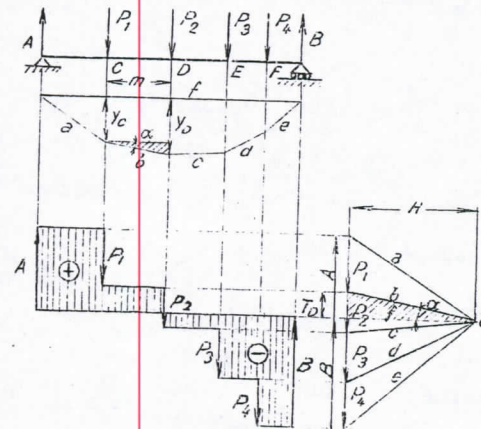
Iz dijagrama M neposredno vidimo gde su opasni preseci za dotičnu gredu. Pri vertikalnom opterećenju naćićemo, da prosta greda ima samo jedan opasni presek, koji se nalazi negde oko sredine raspona, a greda sa prepustima ima tri opasna preseka: dva nad osloncima a treći između oslonaca.

Kod posrednog opterećenja može opasni presek ležati samo u jednom od čvorova.

22 Odnos između dijagrama: opterećenja, transverzalne sile i napadnog momenta.

a) Opšte jednačine.

Transverzalna sila i napadni momenat u istom preseku jedne opterećene grede nisu nezavisni jedno od drugoga, već između njih postoji iz-



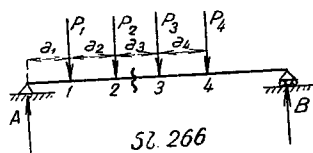
SZ. 265

vezna veza. Da nađjemo tu vezu, uzimamo prostu gredu AB (sl. 265) opterećenu silama $P_1 - P_4$. Pol O za konstrukciju verižnog poligona uzeli smo tako, da dijagram M bude odmah redukovano na horizontalu.

Šrafirani trouglovi u verižnom poligonu i poligonu sila su slični, pa iz te sličnosti sleduje proporcija

$$T_C : H = (Y_D - Y_C) : m$$

Oдавде je
$$T_C = \frac{H(Y_D - Y_C)}{m} = \frac{M_D - M_C}{m} \quad \dots\dots 163).$$



Isti rezultat možemo, prema sl. 266, dobiti i analitičkim putem na ovaj način:

$$M_1 = A \cdot a_1$$

$$M_2 = A(a_1 + a_2) - P_1 a_2 = M_1 + (A - P_1)a_2 = M_1 + T_2 a_2$$

$$M_3 = A(a_1 + a_2 + a_3) - P_1(a_2 + a_3) - P_2 a_3 =$$

$$= A(a_1 + a_2) - P_1 a_2 + (A - P_1 - P_2)a_3 =$$

$$= M_2 + T_3 a_3 \quad \text{i t.d.}$$

Iz poslednje jednačine sledi

$$T_3 = \frac{M_3 - M_2}{a_3}$$

a iz pretposlednje

$$T_2 = \frac{M_2 - M_1}{a_2}$$

i t.d.

Iz obrasca 163) možemo zaključiti da je transverzalna sila u nekom polju (između dveju tačaka u kojima dejstvuju koncentrisane sile) zavisna od napadnih momenata u krajnjim tačkama toga polja. Kad stavimo u jednačinu 163)

$$\frac{Y_D - Y_C}{m} = \text{tang} \alpha$$

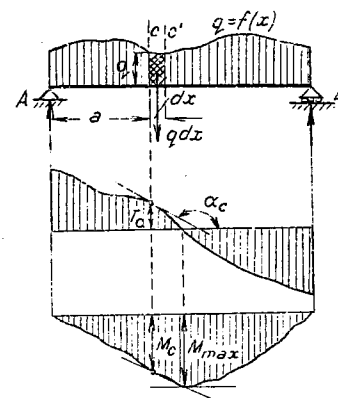
onda je dobivamo još u kraćem obliku

$$T_C = H \cdot \text{tang} \alpha \quad \dots\dots 163 \text{ a}).$$

Ovaj poslednji obrazac možemo dobiti i neposredno iz šrafiranog trougla u planu sila.

Prema jednačinama 163) transverzalna sila u nekom polju proporcionalna je nagibu one strane verižnog poligona (linije M) koja leži u tome polju, ili tačnije jednaka je proizvodu polne razdaljine H i tangensa nagibnog ugla koji dotična strana verižnog poligona zaklapa sa horizontalom. Odmah iz toga vidimo, da je transverzalna sila najveća tamo, gde je ugao α najveći, a to je kod krajnjih strana verižnog poligona (uz oslonce).

U jednačini 163) izražena je transverzalna sila pomoću momenata; obrnuto, možemo i napadni momenat izraziti transverzalnom silom. Ako na sl. 267 napadni momenat u preseku C



Sl. 267

označimo sa M, onda će u beskonačno bliskom preseku C' momenat biti

$$M' = M + dM$$

Da bismo našli ovaj priraštaj momenta dM mi ćemo napadnu silu za presek C redukovati na sam presek (uporedi str. 241-242) ili drugim rečima zamenićemo sve sile levo od preseka C transverzalnom silom T u tome preseku i redukcionim spregom

čiji je momenat za presek C jednak napadnom momentu M. Kad pređemo sa preseka C na beskonačno bliski presek C', priraštaj momenta dM sastojće se iz momenta redukcionne sile T koji je pozitivan i momenta onog dela tereta koji se nalazi između oba preseka C i C' a taj je momenat negativan. Prema tome biće

$$dM = T \cdot dx - q \cdot dx \frac{dx}{2}$$

Drugi član zbira je beskonačno mala količina drugog reda, te ga možemo prema prvom zanemariti, pa nam ostaje $dM = Tdx$, a odatavde sleduje

$$T = \frac{dM}{dx} \quad \dots\dots 164).$$

ili u rečima: Transverzalna sila jednaka je prvom izvodu napadnog momenta po apscisi. Ovu smo jednačinu već izveli kod lančanica, v. str. 185, jednačina 54).

Ako je dakle data linija napadnih momenata analitički ili grafički, onda možemo naći liniju transversalnih sila računom ili i grafičkom diferencijacijom. U preseku C biva sl. 267):

$$T_c = \left[\frac{dM}{dx} \right]_{x=a} = \text{tang } \beta_c \quad \dots\dots 164 b).$$

Nađjeni odnos, izražen jednačinama 163. i 164, između transversalne sile i napadnog momenta u jednom istom preseku, opšteg je karaktera: on postoji kod svake grede, pa bilo da su tereti na njoj koncentrisane sile ili da je greda kontinualno opterećena, sa ma kakvom linijom opterećenja.

No sem toga na sl. 267 pokazaćemo da između sve tri linije: linije q , linije T i linije M postoje matematički odnosi, pomoću kojih možemo dobiti jednu liniju iz druge, bez obzira na njihovo statičko značenje.

Prema oznakama na sl. 267 priraštaj transversalne sile, kad iz preseka C predjemo na beskonačno bliski presek C' , biće

$$dT = -q \cdot dx$$

a odatavde je

$$q = - \frac{dT}{dx} \quad \dots\dots 165).$$

Ova jednačina karakteriše odnos između linije transversalne sile i linije kontinualnog opterećenja. Prema toj jednačini

specifično opterećenje (t.j. opterećenje na jedinicu dužine) grede u ma kojoj tački jednako je izvodu transversalne sile po apscisi, ali sa suprotnim znakom. Ako je zadata linija T svojom jednačinom ili i grafički, onda možemo računom, odnosno grafičkom diferencijacijom, naći liniju opterećenja. Izvod u nekoj tački krive pretstavljen je grafički tangensom nagibnog ugla tangente u dotičnoj tački prema x-osi. Tako će u našem slučaju biti

$$q_c = \left[\frac{dT}{dx} \right]_{x=a} = \text{tang } \alpha_c \quad \dots\dots 165a).$$

Kako je na sl. 267 ugao α po celoj dužini grede u drugom (odnosno četvrtom) kvadrantu, to je u svakom preseku grede

$$\text{tang } \alpha < 0$$

dakle je

$$q > 0$$

a tako i mora biti, jer svi tereti dejstvuju s jedne iste strane grede i imaju pozitivan znak, jer dejstvuju svi vertikalno naniže. Kad je za neki deo grede linija T horizontalna onda je $\alpha = 0$, dakle i $\text{tang } \alpha = 0$, pa mora biti

$$q = 0$$

t.j. na tome delu grede nema nikakvog opterećenja.

Kad dovedemo u vezu još i jednačine 164) i 165) dobivamo najzad

$$q = - \frac{dT}{dx} = - \frac{d^2M}{dx^2} \quad \dots\dots 166).$$

koja kazuje da je specifično opterećenje u nekom preseku grede jednako drugom izvodu napadnog momenta u istom tome preseku, ali sa protivnim znakom.

Jednačine 164), 165) i 166) možemo upotrebiti i obratno. tj. kad je data linija opterećenja onda možemo integracijom iz nje izvesti liniju transverzalnih sila, a ponovnom integracijom i liniju napadnih momenata.

Najprostiji slučaj kontinualnog opterećenja imamo kad je ono jednoliko po celoj dužini grede (sl. 240). Tada je linija opterećenja data jednačinom

$$q = K = \text{const.}$$

Kad primenimo jednačinu 165) dobivamo

$$R = -\frac{dT}{dx}$$

a odavde nalazimo integracijom

$$T = Kx + C_1$$

Ovo je jednačina prave linije, čiji je nagib prema apscisi

$$\text{tang}\alpha = -K$$

a otsečak C_1 na y-osi nalazimo iz početnog uslova:

$$\text{Za } x = 0; \quad T = A$$

dakle

$$C_1 = A.$$

Prema tome linija T biće određena jednačinom

$$T = A - qx$$

a to se slaže i sa dijagramom na sl. 240. koji smo bili nacrtali prema jednačini 157 c).

Primenjujući sada jednačinu 164) dobivamo

$$\frac{dM}{dx} = T = -Kx + C_1$$

ili

$$dM = -Kxdx + C_1x$$

Ponovnom integracijom nalazimo

$$M = C_2 + C_1x - \frac{Kx^2}{2}$$

a to je jednačina linije M koja je u ovome primeru parabola, kao što je iz ranije sl. 254 i 255 poznato. Konstante C_1 i C_2 možemo kod proste i Gerberove grede odrediti čisto statičkim putem, dok ih kod statički neodređenih greda (na primer kod kontinualne grede na više od dva oslonca) možemo naći samo na osnovi zakona elastičnosti. Kod proste grede moraju momenti na oboj oslonca biti jednaki nuli, dakle

$$\text{za } x = 0; \quad M_A = 0$$

$$x = l; \quad M_B = 0.$$

Iz prvog uslova nalazimo da je $C_2 = 0$, a iz drugoga

$$C_1 = \frac{Kl}{2} = A$$

kao što smo i maločas našli. Konačno dakle jednačina linije M glasi u ovome primeru

$$M = \frac{Klx}{2} - \frac{Kx^2}{2} = \frac{Kx}{2}(l-x) = \frac{qx}{2}(l-x)$$

Ako stavimo $(l-x) = x'$, onda je

$$M = \frac{qxx'}{2}$$

kao što smo i ranije bili našli, v. jednačinu 162).

Pomenuli smo da se opasnim presekom naziva onaj presek u kome napadni momenat ima jednu od ekstremnih vrednosti, maximum ili minimum, što odgovara najvećem pozitivnom odnosno najvećem negativnom napadnom momentu. Ako je uopšte linija M data jednačinom

$$M = \Phi(x)$$

onda će momenat dobiti ekstremne vrednosti kad je

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx} = 0$$

ili, s obzirom na 164),

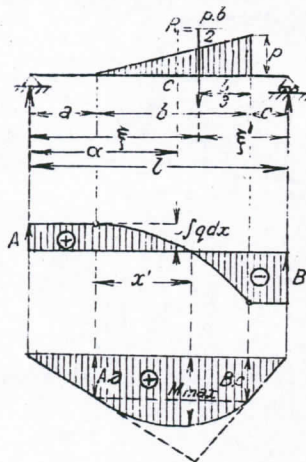
$$T = 0.$$

To znači da je u opasnom preseku transverzalna sila jednaka nuli (sl. 267). Na osnovi toga možemo računskim putem odrediti gde je opasni presek kod grede, opterećene zadatim koncentrisanim ili kontinualnim opterećenjem, a da ne moramo crtati ni dijagram T ni dijagram M.

b) Primeri.

Primenu jednačina 164), 165) i 166) pokazaćemo na dva primera.

Trouglasto opterećenje (sl. 268). *) Linija opterećenja



Sl. 268

data je jednačinom

$$p_x = \frac{p}{b}(x - a)$$

koja važi u granicama

$$a < x < (a + b)$$

Ukupno opterećenje grede je

$$R = \frac{pb}{2}$$

a reakcije oslonaca dobivamo analitički iz uslova ravnoteže:

$$\sum Y = 0$$

$$\sum M = 0$$

*) Uporedi isti zadatak na sl. 241 i 256.

Druga jednačina glasi za obrtnu tačku B:

$$A\ell - \frac{pb}{2}\left(c + \frac{b}{3}\right) = 0$$

i daje nam

$$A = \frac{pb}{2\ell}\left(c + \frac{b}{3}\right);$$

Kad to stavimo u prvu dobivamo

$$B = \frac{pb}{2} - \frac{pb}{2\ell}\left(c + \frac{b}{3}\right) = \frac{pb}{2\ell}\left(a + \frac{2b}{3}\right)$$

Transverzalnu silu u preseku C dobivamo

$$T_c = A - p_x \frac{x - a}{2}$$

ili kad zamenimo p_x i A gornjim vrednostima

$$T_c = \frac{p}{2} \left[\frac{b^2}{\ell} \left(c + \frac{b}{3} \right) - (x - a)^2 \right],$$

koja važi, razume se, samo u granicama

$$a < x < (a + b).$$

Gornja vrednost za T_c biće ravna nuli kad je

$$\frac{b^2}{\ell} \left(c + \frac{b}{3} \right) = (x - a)^2$$

ili

$$(x - a) = b \sqrt{\frac{1 + b/3}{\ell}}$$

Napadni momenat u preseku C dobivamo

$$M_c = A \cdot x - p_x \frac{x - a}{2} \cdot \frac{x - a}{3} = A \cdot x - \frac{p}{6b}(x - a)^3$$

ili kad zamenimo vrednost za A

$$M_c = \frac{p}{2} \left[\frac{b^2}{\ell} \left(c + \frac{b}{3} \right) x - \frac{(x - a)^3}{3} \right].$$

Ako se trouglasto opterećenje prostire na celu dužinu grede, onda je $a = c = 0$, $b = \ell$, pa se dobiva

$$M_c = \frac{P}{2l} \left(\frac{l^2 x}{3} - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{px}{6l} (l^2 - x^2).$$

Da bismo našli gde je opasni presek za gredu prema sl. 268 moramo tražiti gde vrednost M_c dostiže maksimum:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{p}{2} b \left[\frac{b^2}{l} \left(c + \frac{b}{3} \right) - (x - a)^2 \right] = T_c = 0$$

iz čega sleduje da je M_{max} u istom preseku gde je $T_c = 0$, a to je za

$$(x - a) = b \sqrt{\frac{c + \frac{b}{3}}{l}},$$

ili

$$x = \left[a + b \sqrt{\frac{c + \frac{b}{3}}{l}} \right].$$

Kad ovu vrednost za x uvedemo u jednačinu za M dobićemo

$$M_{max} = \frac{p}{2} b \left[\frac{b^2}{l} \left(c + \frac{b}{3} \right) \left(a + b \sqrt{\frac{c + \frac{b}{3}}{l}} \right) - \frac{b^3 \left(c + \frac{b}{3} \right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]$$

Kraće izraze za reakcije oslonaca, transversalnu silu

i napadni momenat dobićemo ako uvedemo sledeće oznake

$$\xi = \left(a + \frac{2b}{3} \right); \quad \xi' = \left(c + \frac{b}{3} \right)$$

Tada će biti

$$A = R \frac{\xi}{l}; \quad B = R \frac{\xi}{l}$$

$$T_c = R \left[\frac{\xi'}{l} - \left(\frac{x - a}{b} \right)^2 \right]$$

$$M_c = R \left[\frac{\xi' x}{l} - \frac{(x - a)^3}{3 b^2} \right]$$

M_c biva maksimum kad je $T_c = 0$, a tada je

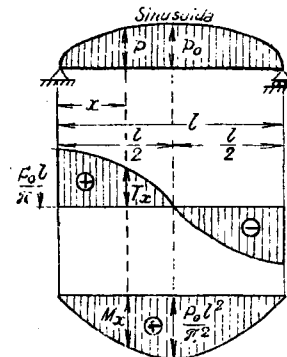
$$(x - a) = b \sqrt{\frac{\xi'}{l}}$$

ili

$$x = \left(a + b \sqrt{\frac{\xi'}{l}} \right)$$

Kad to uvedemo u izraz za M_c dobivamo:

$$M_{max} = R \left[\frac{\xi' \left(a + b \sqrt{\frac{\xi'}{l}} \right)}{l} - \frac{b \left(\frac{\xi'}{l} \right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right].$$



Sl. 269

$$Q = \int_0^l p dx = p_0 \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{p_0 l}{\pi} \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} d \frac{\pi x}{l} = \left[-\frac{p_0 l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \right]_0^l = \frac{2 p_0 l}{\pi}.$$

Teret na dužinu x biće

$$Q_x = \left[-\frac{p_0 l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \right]_0^x = \frac{p_0 l}{\pi} \left[1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right].$$

Kako je opterećenje grede simetrično, biće obe reakcije oslonaca jednake, dakle

$$A = B = \frac{p_0 l}{\pi}$$

i sa tom ordinatom će počinjati dijagram T (za $x = 0$).

Transcendentna li-

nija opterećenja (sl. 269).- Za prostu gredu AB uzimamo da je dato kontinualno opterećenje jednačinom

$$p = p_0 \sin \frac{\pi x}{l},$$

tako da je $p = 0$ i za $x = 0$ i za $x = l$, a $p = p_0$ za $x = \frac{l}{2}$. Ceo teret na rasponu l biće:

Poprečna sila u ma kome preseku biće

$$T_x = A - Q_x = \frac{P_0 l}{\pi} - \frac{P_0 l}{\pi} \left[1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right]$$

$$= \frac{P_0 l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l}$$

Ova vrednost je jednaka nuli za $x = \frac{l}{2}$ jer je $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, te je i M_{\max} u sredini raspona.

U ma kome preseku biće napadni momenat prema jednačini 164)

$$M_x = \int_0^x T_x dx + C = \frac{P_0 l}{\pi} \int_0^x \cos \frac{\pi x}{l} dx + C$$

$$M_x = \frac{P_0 l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} + C$$

Konstantu C nalazimo iz uslova da mora biti $M_x = 0$ za $x = 0$; dobivamo $C = 0$, pa je dakle jednačina M dijagrama za ovaj slučaj

$$M_x = \frac{P_0 l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Ova vrednost biva maksimum, kao što smo videli, za $T_x = 0$ ili za

$$x = \frac{l}{2}$$

i tada je

$$M_{\max} = M_{\frac{l}{2}} = \frac{P_0 l^2}{\pi^2}$$

jer je $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

23. Aksijalne sile.

Pojam aksijalne sile. - Osovinom punog nosača nazivamo liniju koja spaja težišta svih njegovih preseka. Kod grede

to je obično prava linija i to baš ona, kojom gredu (kao štap) šematički pretstavljamo. Sile koje dejstvuju duž ove osovine nazivaju se osovinske ili aksijalne sile (ili još i centrične, za razliku od ekscentričnih). Kako greda obično leži u horizontalnom položaju, to osu grede uzimamo i za x -osu koordinatnog sistema, pa sve aksijalne sile označavamo sa indeksima x .

Aksijalne sile mogu biti spoljne i unutarnje. Spoljne potiču od opterećenja i reakcija oslonaca a unutarnje su naponi u materijalu grede, izazvani uticajem tih spoljnih sila. Aksijalni naponi će se u gredi dakle javiti samo onda, kad spoljne sile (opterećenja i reakcije) imaju i takve komponente koje padaju u osovinu grede.

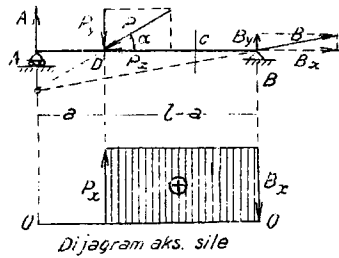
Pod aksijalnom silom X_c u nekom preseku C grede razumemo algebarsku sumu svih aksijalnih (horizontalnih) komponenta od spoljnih sila levo (ili desno) od preseka. Toj spoljnoj aksijalnoj sili u preseku C drži ravnotežu aksijalni napon, kad posmatramo levi (ili desni) otsečak grede kao zasebno telo.

Aksijalne komponente spoljnih sila ulaze u analitičke uslove ravnoteže samih spoljnih sila na nosaču (jednačine 150) te moraju, same za sebe, zadovoljiti uslov

$$\sum X = 0$$

Kod proste grede aksijalna sila X_c javlja se onda, kad je opterećenje horizontalno ili koso, ili uopšte takvo, da izaziva na nepokretnom ležištu i horizontalnu komponentu reakcije oslonca. Takav primer imamo na sl. 270. Opterećenje je dato u vidu jedne kose sile P koja zaklapa sa osovinom grede ugao α . Silu P razložimo u dve komponente

$$\begin{array}{ll} \text{aksijalnu} & P_x = P \cdot \cos \alpha \\ \text{i transverzalnu} & P_y = P \cdot \sin \alpha \end{array}$$



Sl. 270

Kako se na osloncu A (pomični zglob) ne može nikako javiti horizontalni otpor, to sleduje da komponenta P_x nema nikakvog uticaja na veličinu reakcija A i B_y već da ona samo izaziva otpor B_x , što izlazi iz jednačine $\sum X = 0$ koja gla-

si:

$$B_x - P_x = 0$$

ili

$$B_x = P_x.$$

Za svaki presek C, koji leži između napadne tačke sile P i oslonca B imaće aksijalna sila konstantu vrednosti $P \cos \alpha$ (zatezanje), a na delu od A do D jednaka je nuli, kao što se vidi iz dijagrama na sl. 270 (dijagram X).

Razlaganjem napadne sile P u transverzalnu i aksijalnu komponentu, svodimo složeniji zadatak kosog opterećenja na prostiji i poznatiji, a to je onaj kad je opterećenje grede vertikalno.

Konstrukciju dijagrama aksijalnih sila objasnićemo na brojnim primerima.

Brojni primeri. - Za prvi primer uzećemo gredu na sl. 271. To je greda s prepustima, opterećena sa dve vertikalne i dve kose koncentrisane sile.

Prema brojnim podacima na sl. 271, komponente kosih sila P_2 i P_4 biće

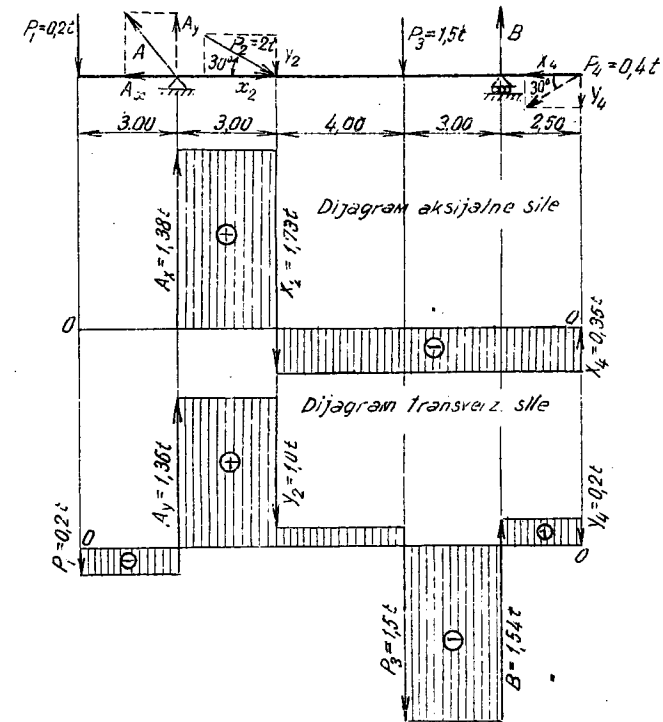
$$X_2 = 2 \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ t.}$$

$$X_4 = 0,4 \cos 30^\circ = 0,4 \cdot 0,866 = 0,35 \text{ t.}$$

$$Y_2 = 2 \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1,00 \text{ t.}$$

$$Y_4 = 0,4 \sin 30^\circ = 0,4 \cdot 0,5 = 0,20 \text{ t.}$$

1:200 ; 1cm = 0,5t



Sl. 271

Reakcije oslonaca dobivamo iz tri analitička uslova ravnoteže spoljnih sila, koji ovde glase

$$A_x - X_2 + X_4 = 0$$

$$A_y + B - P_1 - Y_2 - P_3 - Y_4 = 0$$

$$A_y \cdot 10 - P_1 \cdot 13 - Y_2 \cdot 7 - P_3 \cdot 3 + Y_4 \cdot 2,5 = 0$$

Kad u ove jednačine uvedemo za poznate sile brojne vrednosti biće

$$A_x - 1,73 + 0,35 = 0$$

$$A_y + B - 0,20 - 1,00 - 1,50 - 0,20 = 0$$

$$10 A_y - 0,20 \cdot 13 - 1,00 \cdot 7 - 1,50 \cdot 3 + 0,20 \cdot 2,5 = 0$$

a odavde izračunavamo

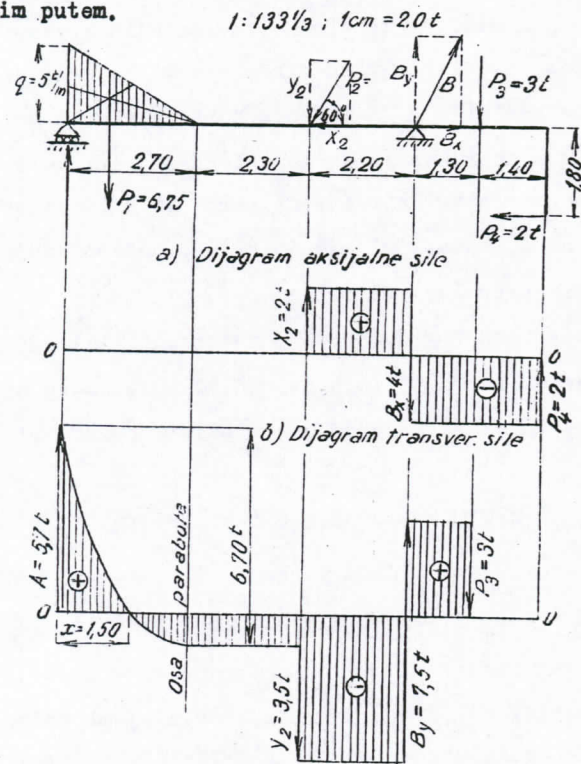
$$A_x = 1,73 - 0,35 = 1,38 \text{ t}$$

$$A_y = \frac{2,60 + 7 + 4,5 - 0,50}{10} = \frac{13,6}{10} = 1,36 \text{ t.}$$

$$B = 2,90 - A_y = 2,90 - 1,36 = 1,54 \text{ t.}$$

Sa takvim komponentama nacrtani su na sl. 271 prvo dijagram X, a zatim dijagram T. Pozitivni delovi dijagramnih površina (zatezanje) stavljeni su iznad, a negativni (pritisak) ispod apscise 0-0.

Kao drugi brojni primer uzećemo prepuštenu gredu sa složenim opterećenjem prema sl. 272., za koju smo ranije (v. sl. 234, str. 380 ove sveske već odredili reakcije oslonaca analitičkim putem.



Prema tome ovde nam ostaje samo još da na sl. 272 prikazemo dijagram X i dijagram T za tu gredu prema već poznatim brojnim podacima, koji su upisani i u te dijagrame.

24. Zadaci za vežbanja.

U dosadašnjem izlaganju proučavali smo kod proste grede i grede sa prepustima odvojeno: reakcije oslonaca, transverzalne sile, napadne momente i aksijalne sile.

Medjutim, pri rešavanju praktičnih zadataka traži se da se za svaku gredu sve to prikaže skupno, te da se jasno i pregledno vide i veličine reakcija oslonaca i svi potrebni dijagrami, iz kojih se može zaključiti o naponima koji vladaju u toj gredi. Uz to se još obično zahteva, da sve važnije veličine (reakcije oslonaca, položaj opasnih preseka, maksimalne vrednosti napadnih momenata i t.d.), koje su grafički određene, budu prokontrolisane i analitičkim putem, kako bismo bili sigurni u tačnost rezultata.

Zato je potrebno da se na nekoliko zadataka pokaže taj postupak, koji se u praksi primenjuje pri statičkom ispitivanju greda. Da bi ovi zadaci bili što poučniji, uzećemo uvek dosta složena opterećenja, mada u praksi takva opterećenja retko dolaze.

Kao opštu primedbu o položaju dijagrama prema horizontalnoj apscisi možemo unapred reći da je u praksi uobičajeno:

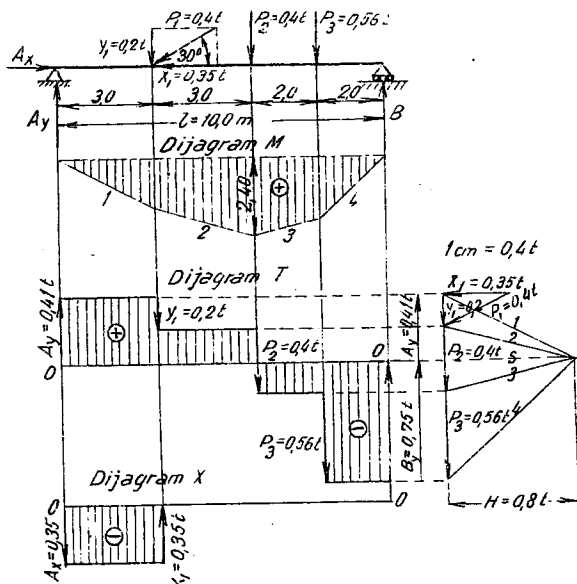
a) Za momente, da pozitivni deo dijagrama dodje ispod apscise, a negativni iznad nje;

b) za transverzalne i aksijalne sile pak obrnuto tj.

pozitivni deo dijagrama iznad, a negativni deo ispod apscise.

1. Zadatak (sl. 273). - Prvo u planu sila razlažemo

$1:200$



Sl. 273

kosu silu P_1 u komponente i dobivamo grafički

$$X_1 = 0,35 \text{ t}; \quad Y_1 = 0,20 \text{ t.}$$

Zatim ove komponente kontroliramo i analitički

$$X_1 = P_1 \cos 30^\circ = 0,4 \cdot 0,866 = 0,3464 = \sim 0,35 \text{ t.}$$

$$Y_1 = P_1 \sin 30^\circ = 0,4 \cdot 0,5 = 0,20 \text{ t.}$$

i vidimo da se obe metode rada dobro slažu.

Da bismo udesili da nam Kulmanova momentna površina ispadne odmah redukovana na horizontalnu apscisu, odredićemo reakcije oslonaca prvo analitičkim putem, pa tek onda grafički. Tri analitička uslova ravnoteže glase:

$$A_x - 0,35 = 0; \quad \text{dakle } A_x = 0,35 \text{ t,}$$

$$A_y + B - 0,20 - 0,40 - 0,56 = 0$$

$$- B \cdot 10 + 0,2 \cdot 3 + 0,4 \cdot 6 + 0,56 \cdot 8 = 0.$$

$$B = \frac{0,60 + 2,40 + 4,48}{10} = \frac{7,48}{10} = 0,75 \text{ t.}$$

$$A_y = 1,16 - 0,75 = 0,41 \text{ t.}$$

Kosu reakciju $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ ne izračunavamo uopšte, jer nam ona za iznalaženje napona u gredi nije ni potrebna.

Čim smo našli aksijalne (horizontalne) komponente A_x i X_1 spoljnih sila, možemo nacrtati dijagram X i time je poznavanje uticaja tih sila na gredu iscrpljeno. Za grafičko određivanje reakcija A i B transverzalnih sila i napadnih momenata ostaju još samo vertikalne sile. Za njih crtamo vlak sila i biramo pol tako da završna strana verižnog poligona, koja deli veličine reakcija A i B , bude horizontalna i crtajući verižni poligon dobijamo reakcije oslonaca grafički i Kulmanovu momentnu površinu. Najzad vertikalne sile iz plana sile prijićiramo na njihove linije dejstva u planu položaja i dobijamo dijagram poprečne sile.

Iz dijagrama T vidimo da transverzalna sila prolazi kroz nulu u preseku na rastojanju $x = 6,00 \text{ m}$ od levog oslonca, a i iz dijagrama M sleduje da je to zaista opasni presek. Grafički nalazimo

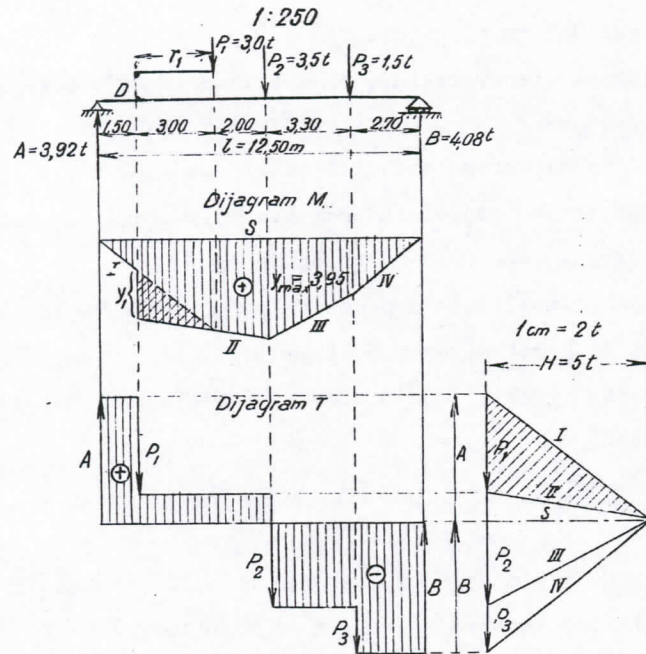
$$M_{\max} = Y_{\max} \cdot H = 2,30 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ t} = 1,84 \text{ tm.}$$

i to još proveravamo analitičkim putem

$$M_{\max} = A \cdot 6 - Y_1 \cdot 3 = 0,41 \cdot 6 - 0,20 \cdot 3 = 1,86 \text{ tm.}$$

pa je time zadatak rešen.

2. Zadatak (sl. 274). - Na ranije objašnjeni način (v. sl. 263-f) nacrtana je Kulmanova površina I-II-III-IV-S za ovaj



Sl. 274

slučaj i tako grafički određene reakcije oslonaca

$$A = 3,9 \text{ t}; \quad B = 4,1 \text{ t.}$$

Da skok y u momentnom dijagramu kod preseka D zaista predstavlja uticaj momenta sile P_1 za tačku D, može se dokazati iz sličnosti šrafiranih trouglova u planu položaja i planu sila (sl. 274):

$$y_1 : P_1 = r_1 : H$$

a odavde

$$P_1 r_1 = y_1 \cdot H.$$

Kad reakcije oslonaca proverimo analitički, dobivamo

$$A + B - 3,0 - 3,5 - 1,5 = 0$$

$$A \cdot 12,5 - 3 \cdot 8 - 3,5 \cdot 6 - 1,5 \cdot 2,7 = 0$$

$$A = \frac{3 \cdot 8 - 3,5 \cdot 6 + 1,5 \cdot 2,7}{12,5} = \frac{49,05}{12,5} = 3,92 \text{ t.}$$

$$B = 8 - 3,92 = 4,08 \text{ t.}$$

i to se dobro slaže sa grafičkim radom.

Dijagram T dobivamo projiciranjem svih sila iz plana sila na njihove linije dejstva, sem sile P koju projiciramo na vertikalu kroz D, jer na toj vertikali dejstvuje transverzalna komponenta sile P_1 koju dobivamo kad silu P redukujemo na tačku D (druga komponenta sile P je spreg čiji je momenat $P_1 \cdot r_1$).

Iz oba dijagrama sleduje da je opasni presek pod silom P_2 , te grafički dobivamo

$$M_{\max} = Y_{\max} \cdot H = 3,95 \cdot 5 = 19,75 \text{ tm.}$$

Analitički nalazimo za isti taj momenat vrednost

$$M_{\max} = A \cdot 6,5 - P_1 \cdot 2 = 3,92 \cdot 6,5 - 3 \cdot 2 = 19,5 \text{ tm.}$$

što se dobro slaže sa grafičkim radom.

3. Zadatak (sl. 275). - U ovome zadatku ceo grafički postupak izvešćemo - po zakonu superpozicije - zasebno za vertikalne terete, a zasebno za spreg horizontalnih sila, pa ćemo najzad dobivene dijagrame za M i T grafički sabrati. Time svodimo složeno opterećenje na dva prosta, koja smo već rešavali u ranijim prikazivanjima.

Prvo je za vertikalne terete (P) nacrtan verižni poligon 1-2-3-4 i određene reakcije oslonaca usled njih

$$A_p = 3,6 \text{ t}; \quad B_p = 2,9 \text{ t.}$$

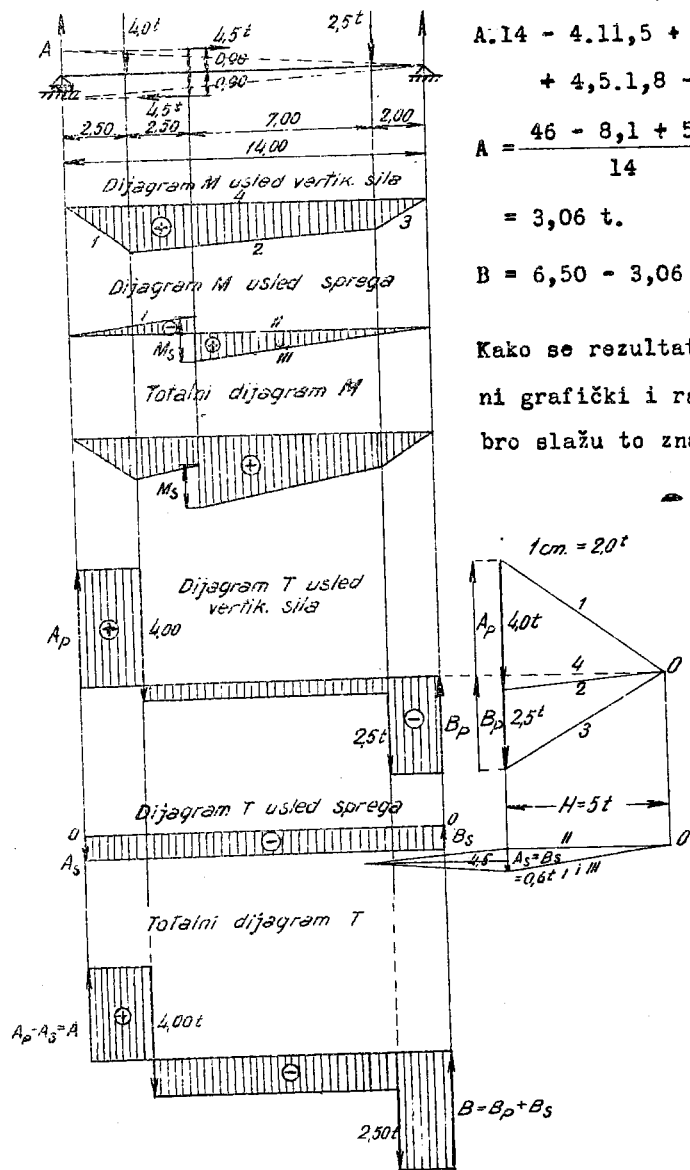
a zatim su grafički određene reakcije oslonaca usled sprega

$$A_s = -0,6 \text{ t}; \quad B_s = +0,6 \text{ t}$$

i nacrtan verižni poligon I-II-III sa istom polnom razdaljinom ($H = 5 \text{ t}$). Totalne su reakcije dakle, nadjene grafički

$$A = A_p - A_s = 3,0 \text{ t}; \quad B = B_p + B_s = 3,5 \text{ t.}$$

Da su ovi rezultati tačni proveravamo sad i analitičkim putem:



Sl. 275

dosadašnje grafičke konstrukcije tačne.

Dijagram transverzalnih sila crtamo takodje odvojeno za oba opterećenja.

Konačne dijagrame za M i T dobili smo grafičkim sabiranjem (prenošenjem pojedinih ordinata) dijagrama za delimična opterećenja, po načelu superpozicije.

Valja primetiti da u ovome primeru, pošto se kod linije M javlja diskontinuitet u preseku gde napada spreg, ne važi više poznati odnos između transverzalne sile i napadnog momenta (jednačina 144):

$$T = \frac{dM}{dx}$$

jer iz dijagrama T vidimo da transverzalna sila prolazi kroz nulu u preseku pod teretom od 4 t, a iz dijagrama M da se M_{max} javlja beskonačno blisko desno od preseka u kome spreg napada.

M_{max} nadjen grafički ima veličinu

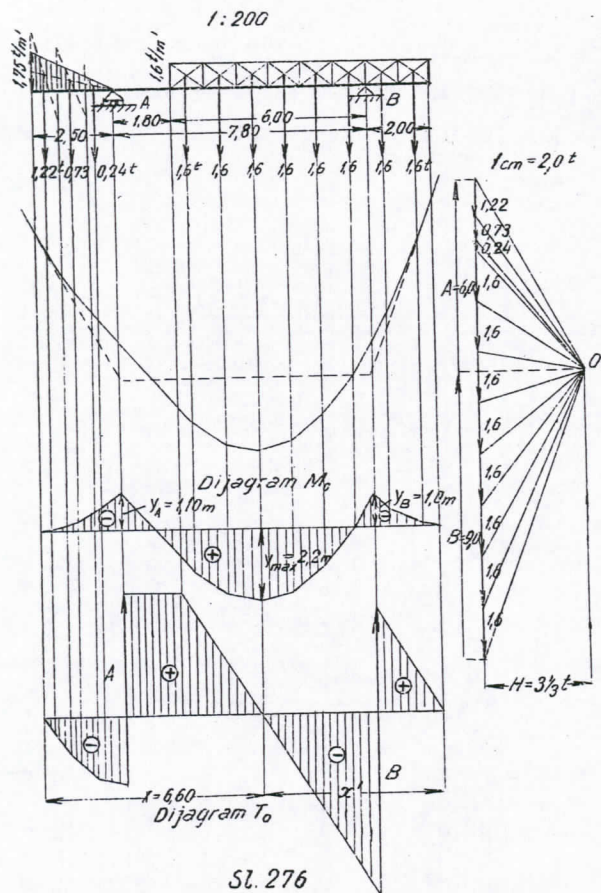
$$M_{max} = Y_{max} \cdot H = 2,70 \text{ m} \cdot 5 \text{ t} = 13,50 \text{ tm.}$$

a računski

$$M_{max} = A \cdot 5 - 4 \cdot 2,5 - 4,5 \cdot 1,8 = 13,1 \text{ tm.}$$

4. Zadatak (sl. 276). - Ovde imamo primer grede sa prepustima, kontinualno opterećene na većem delu svoje dužine i to na levom prepustu trouglastim opterećenjem a na ostalim delovima jednako podeljenim.

Za grafičku metodu rada opterećenje je podeljeno u lamela (granice lamela moraju uvek biti i nad osloncima A i B) i određene veličine tereta koliko pada na svaku lamelu. Za jednoliko podeljeno opterećenje lamela su uzete sve jednake i teret svake iznosi



Sl. 276

$$q \cdot \lambda = 1,6 \text{ t/m} \cdot 1,0 \text{ m} = 1,6 \text{ t}$$

(površina pravougaonika). Trouglasto opterećenje podeljeno je u tri lamele jednake širine (po 0,83 m) a granične ordinate linije opterećenja iznose, počev od reakcije A ka kraju prepusta

$$0,00 \text{ t/m}; 0,58 \text{ t/m}; 1,16 \text{ t/m}; 1,75 \text{ t/m}.$$

Prema tome težina lamela biće, počev s levog kraja

$$\text{Za I lamelu} \quad \frac{1,75 + 1,16}{2} \cdot 0,83 = 1,22 \text{ t}.$$

$$\text{Za II lamelu} \quad \frac{1,16 + 0,58}{2} \cdot 0,83 = 0,73 \text{ t}.$$

$$\text{za III lamelu} \quad \frac{0,58 + 0}{2} \cdot 0,83 = 0,24 \text{ t}.$$

$$\text{Kontrola:} \quad \sum_{I}^{\text{III}} = \dots \dots \dots 2,19 \text{ t} = \frac{1,75 \cdot 2,5}{2}$$

S tim veličinama sila, koje zamišljamo kao koncentrisane u težištima lamela, i sa proizvoljnim polom ($H = 3,33 \text{ t}$) nacrtan je verižni poligon i određena grafički reakcije oslonaca. Dobiveno je, kao što se vidi iz plana sila,

$$A = 6,0 \text{ t}; B = 9,0 \text{ t}.$$

Ovaj rezultat kontrolisan je analitičkim putem

$$A + B - \frac{1,75 \text{ t/m} \cdot 2,5 \text{ m}}{2} - 1,6 \text{ t/m} \cdot 8 \text{ m} = 0$$

$$B \cdot 7,8 - 12,8 \text{ t} \cdot 5,8 \text{ m} + 2,19 \text{ t} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \text{ m} = 0.$$

U ovim jednačinama smatrano je celo trouglasto opterećenje kao jedna koncentrisana sila, a celo jednako podeljeno kao druga. Rešavanjem tih jednačina nalazimo

$$A = 5,94 \text{ t}; B = 9,05 \text{ t}.$$

a to se dobro slaže sa grafičkim radom.

Zatim su na poznati način nacrtani dijagrami za M i T. Iz njih se vidi da transversalna sila duž grede triput prolazi kroz nulu, što je znak da postoje tri opasna preseka. Dva su nad osloncima A i B, a treći je negde između oslonaca. Grafički to mesto nalazimo, kad izmerimo u dijagramu T apscisu x koja odgovara vrednosti $T = 0$. Tako dobivamo

$$x = 6,60 \text{ m}.$$

računajući od kraja levog prepusta.

Analitički ćemo naći sa većom tačnošću taj opasni presek između oslonaca primenom jednačine 164):

$$\frac{dM}{dx} = T = 0.$$

Ako za taj presek obrazujemo izraz za transverzalnu silu, uzimajući u obzir vertikalne sile desno od preseka kao prostije, dobivamo

$$T = B - qx' = 0$$

$$9,05 - 1,6 x' = 0$$

$$x' = \frac{9,05 \text{ t}}{1,6 \text{ t/m}} = 5,66 \text{ m.}$$

Kako je cela dužina grede 12,30 m, biće dakle

$$x = 12,30 - 5,66 = 6,64 \text{ m.}$$

Momenti u opasnim presecima ovi su:

Za $x = 2,50$ (oslonac A)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grafički} \quad M_A = -1,10 \text{ m} \cdot 3,33 \text{ t} = -3,6 \text{ tm.} \\ \text{računski} \quad M_A = -\frac{2}{3} \cdot 2,50 \text{ m} \cdot 2,19 \text{ t} = -3,65 \text{ tm.} \end{array} \right.$$

Za $x = 6,64$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grafički} \quad M_{\max} = +2,2 \text{ m} \cdot 3,33 \text{ t} = +7,3 \text{ tm.} \\ \text{računski} \quad M_{\max} = - (5,66 \cdot 1,6 \text{ t/m}) \frac{5,66 \text{ m}}{2} + \\ \quad \quad \quad + B \text{ t} \cdot 3,66 \text{ m} = +7,45 \text{ tm.} \end{array} \right.$$

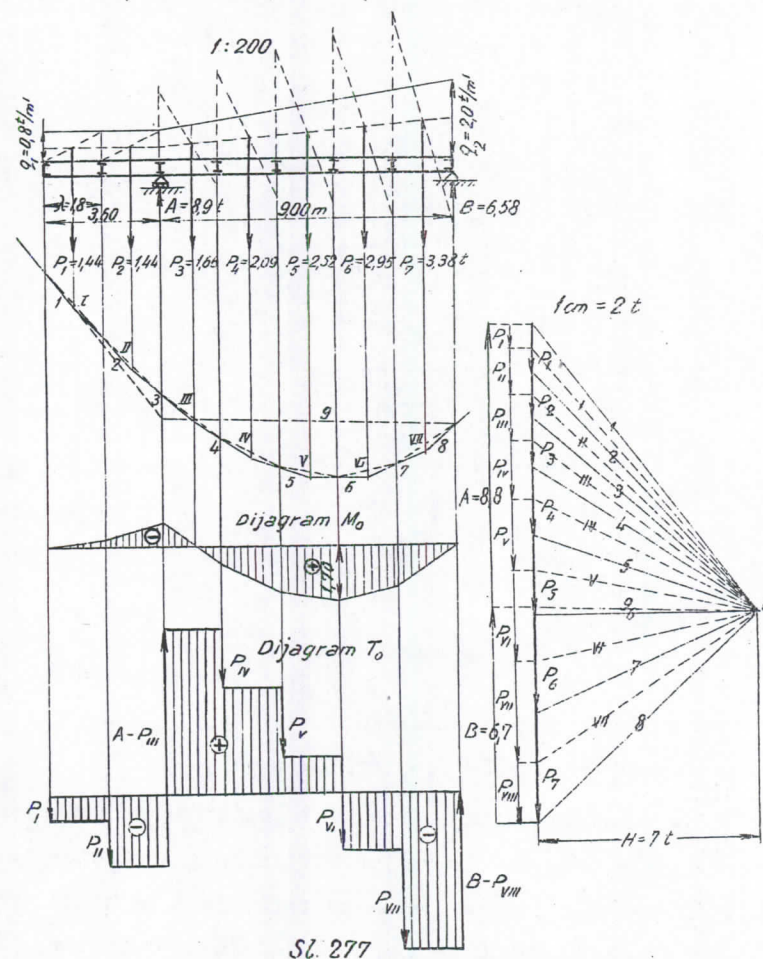
Za $x = 10,30$ (oslonac B)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grafički} \quad M_B = -1 \text{ m} \cdot 3,33 \text{ t} = -3,33 \text{ tm.} \\ \text{računski} \quad M_B = -1,6 \text{ t/m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = -3,2 \text{ tm.} \end{array} \right.$$

iz čega sleduje da je najveći po apsolutnoj vrednosti momenat između oslonaca A i B. Grafički i računski rezultati dobro se slažu.

5. Zadatak (sl. 277). - Ovde imamo gredu s jednostranim prepustom, posredno opterećenu kontinualnim opterećenjem.

Za grafičku metodu rada potrebno je prvo podeliti op-



terećenje u lamela. Ovu podelu izvršićemo tako, da svaka lamela padne na po jedno polje (prostor između dva obližnja čvorova), jer se tako teret stvarno i raspoređuje na čvorove. Radi kontrole ukupne težine svih lamela izračunaćemo unapred koliki je celokupni teret na gredi. Njegova je veličina

$$3,60 \text{ m} \times 0,80 \text{ t/m} + 9 \text{ m} \frac{(0,80 + 2,00) \text{ t/m}}{2} = 2,88 + 12,60 = 15,48 \text{ t.}$$

Dve lamele ka prepustu biće jednake težine, i to će biti svaka od njih

$$P_1 = P_2 = 1,80 \text{ m} \cdot 0,80 \text{ t/m} = 1,44 \text{ t.}$$

Na ostalom delu grede opterećenje raste linearno od $q_1 = 0,80 \text{ t/m}$ (kod A) do $q_2 = 2,0 \text{ t/m}$ (kod B). Težine pojedinih lamela najlakše ćemo izračunati, ako prvo odredimo ordinate linije opterećenja na granicama između lamela. Ukupan priraštaj opterećenja na 5 polja je

$$q_2 - q_1 = 2,00 - 0,80 = 1,20 \text{ t/m};$$

prema tome priraštaj na dužinu jednog polja je

$$\Delta q = \frac{1,20}{5} = 0,24 \text{ t/m.}$$

Ordinate linije opterećenja biće dakle nad pojedinim čvorovima, počev od A ka B:

$$q_A = 0,80 \text{ t/m.}$$

$$q_I = q_A + \Delta q = 0,80 + 0,24 = 1,04 \text{ t/m.}$$

$$q_{II} = q_I + \Delta q = 1,04 + 0,24 = 1,28 \text{ t/m.}$$

$$q_{III} = q_{II} + \Delta q = 1,28 + 0,24 = 1,52 \text{ t/m.}$$

$$q_{IV} = q_{III} + \Delta q = 1,52 + 0,24 = 1,76 \text{ t/m.}$$

$$q_B = q_{IV} + \Delta q = 1,76 + 0,24 = 2,00 \text{ t/m.}$$

Sad računamo težine lamela i to ne kao površine trapeza, već - što će nam docnije trebati - kao sumu površina pravougaonika i trougla za svako polje. Površina trougla biće ista za sva polja, t.j.

$$\frac{1,80 \text{ m} \times 0,24 \text{ t/m}}{2} = 0,216 \text{ t.}$$

Težine lamela na delu trapeznog opterećenja biće dakle

$$P_3 = 1,80 \text{ m} \cdot 0,80 \text{ t/m} + 0,216 \text{ t} = 1,66 \text{ t.}$$

$$P_4 = 1,80 \text{ m} \cdot 1,04 \text{ t/m} + 0,216 \text{ t} = 2,09 \text{ t.}$$

$$P_5 = 1,80 \text{ m} \cdot 1,28 \text{ t/m} + 0,216 \text{ t} = 2,52 \text{ t.}$$

$$P_6 = 1,80 \text{ m} \cdot 1,52 \text{ t/m} + 0,216 \text{ t} = 2,95 \text{ t.}$$

$$P_7 = 1,80 \text{ m} \cdot 1,76 \text{ t/m} + 0,216 \text{ t} = 3,38 \text{ t.}$$

$$\text{Kontrola: } \sum_3^7 P = \dots\dots\dots 12,600 \text{ t.}$$

Tako odredjenim silama $P_1 - P_7$, za koje zamišljamo da napadaju u težištima odgovarajućih površina opterećenja, nacrtan je verižni poligon 1-2-3-4-5-6-7-8-9, koji služi za grafičko odredjivanje otpora oslonca i daje:

$$A = 8,8 \text{ t}; \quad B = 6,7 \text{ t.}$$

Analitički reakcije dobivamo kad trapezno opterećenje cele grede podelimo u pravougaonik i trougao pa napišemo jednačine

$$A + B - 15,48 = 0$$

$$A \cdot 9 - 0,8 \text{ t/m} \cdot 3,60 \text{ m} \cdot 10,8 \text{ m} -$$

$$- 0,8 \text{ t/m} \cdot 9 \text{ m} \cdot 4,5 \text{ m} - \frac{1,20 \text{ t/m} \cdot 9 \text{ m}}{2} \cdot 3 \text{ m} = 0.$$

$$A = \frac{31,1 + 32,4 + 16,2}{9} = \frac{79,7}{9} = 8,86 \text{ t.}$$

$$B = 15,48 - A = 15,48 - 8,86 = 6,62 \text{ t.}$$

Kad smo tako proverili da je verižni poligon tačno nacrtan, povlačimo vertikale kroz čvorove do preseka s verižnim poligonom 1-2-3-4-5-6-7-8 i dve i dve obližnje presečne tačke spajamo stranama I-II-III-IV-V-VII koje se krajnjim stranama 1 i 9 prvog poligona čine nov verižni poligon, a on sad važi kao momentna linija za posredno opterećenje. Ta linija je najzad redukovana na horizontalnu apscisu i tako dobiven konačni dijagram M za datu gredu.

Povlačenjem paralela u planu sila svima stranama ve-

rižnog poligona I-II-III-IV-V-VI-VII dobivamo na teretnoj vertikali grafičkim putem čvorne terete za sve čvorove i to nalazimo da je u usvojenoj razmeri sila, pošav s leva na desno:

$$P_I = 0,72 \text{ t}$$

$$P_{II} = 1,44 \text{ t}$$

$$P_{III} = 1,55 \text{ t}$$

$$P_{IV} = 1,87 \text{ t}$$

$$P_V = 2,30 \text{ t}$$

$$P_{VI} = 2,74 \text{ t}$$

$$P_{VII} = 3,17 \text{ t}$$

$$P_{VIII} = 1,69 \text{ t}$$

Kontrola: $\sum_I^{VIII} P = \dots\dots\dots 15,48 \text{ t} = 2,88 + 12,60.$

Pre no što pristupimo crtanju dijagrama transverzalnih sila kontrolisaćemo analitičkim putem ovo grafičko razlaganje težina lamela na čvorove. Za svaku lamelu levu komponentu označićemo sa P' a desnu sa P'' i primenićemo na trapezno opterećenje u svakom polju obrazac, izveden za određivanje reakcija oslonaca proste grede na sl.231, gde smo našli, kad obeležimo sa Q_1 težinu koja odgovara pravougaonom delu lamele a sa Q_2 onu koja odgovara trouglu

$$\left. \begin{aligned} P' &= \frac{Q_1}{2} + \frac{Q_2}{3} \\ P'' &= \frac{Q_1}{2} + \frac{2}{3} Q_2 \end{aligned} \right\} \text{(v.str. 376 ove knjige).}$$

U našem primeru trougao čija je težina Q_2 za sva polja je isti i to $Q_2 = 0,216 \text{ t.}$, što znači

$$\frac{Q_2}{2} = 0,072 \text{ t}; \quad \frac{2}{3} Q_2 = 0,144 \text{ t.}$$

Čvorne komponente težina pojedinih lamela biće dakle

$$P'_1 = P''_1 = \frac{1,80 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ t/m}}{2} = 0,72 \text{ t}$$

$$P'_2 = P''_2 = \frac{1,80 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ t/m}}{2} = 0,72 \text{ t}$$

$$P'_3 = \frac{1,80 \cdot 0,8}{2} + 0,072 = 0,79 \text{ t}$$

$$P''_3 = \frac{1,80 \cdot 0,8}{2} + 0,144 = 0,86 \text{ t}$$

$$P'_4 = \frac{1,80 \cdot 1,04}{2} + 0,072 = 1,01 \text{ t}$$

$$P''_4 = \frac{1,80 \cdot 1,04}{2} + 0,144 = 1,08 \text{ t}$$

$$P'_5 = \frac{1,80 \cdot 1,28}{2} + 0,072 = 1,22 \text{ t}$$

$$P''_5 = \frac{1,80 \cdot 1,28}{2} + 0,144 = 1,30 \text{ t}$$

$$P'_6 = \frac{1,80 \cdot 1,52}{2} + 0,072 = 1,44 \text{ t}$$

$$P''_6 = \frac{1,80 \cdot 1,52}{2} + 0,144 = 1,51 \text{ t}$$

$$P'_7 = \frac{1,80 \cdot 1,76}{2} + 0,072 = 1,66 \text{ t}$$

$$P''_7 = \frac{1,80 \cdot 1,76}{2} + 0,144 = 1,73 \text{ t.}$$

Sumiranjem onih komponentata koje padaju na isti čvor dobivamo najkad čvorne terete analitički

$$P_I = P'_1 = 0,72 \text{ t}$$

$$P_{II} = P''_1 + P'_2 = 1,44 \text{ t}$$

$$P_{III} = P''_2 + P'_3 = 1,51 \text{ t}$$

$$P_{IV} = P_3'' + P_4' = 1,87 \text{ t}$$

$$P_V = P_4'' + P_5' = 2,30 \text{ t}$$

$$P_{VI} = P_5'' + P_6' = 2,74 \text{ t}$$

$$P_{VII} = P_6'' + P_7' = 3,17 \text{ t}$$

$$P_{VIII} = P_7'' = 1,73$$

$$\text{Kontrola} \quad \sum_{I}^{VIII} P = 15,48.$$

Ovi se rezultati dobro slažu sa grafičkim radom i zato sad možemo pristupiti crtanju dijagrama T.

Iz oba dijagrama (za M i za T) vidi se da postoje dva opasna preseka: jedan nad osloncem A, a drugi između oslonaca A i B i to na trećem čvoru, računajući od oslonca B.

Napadni momenti u tim preseccima dobivaju se

Za presek A

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grafički} \quad M_A = -0,70 \text{ m} \cdot 7 \text{ t} = -4,90 \text{ tm.} \\ \text{analitički} \quad M_A = -0,80 \text{ t/m} \cdot 3,60 \text{ m} \cdot \frac{3,60 \text{ m}}{2} = -5,18 \text{ tm.} \end{array} \right.$$

Za presek VI

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grafički} \quad M_{VI} = +1,70 \text{ m} \cdot 7 \text{ t} = +11,9 \text{ tm.} \\ \text{analitički} \quad M_{VI} = +B \cdot 3,6 - 1,52 \text{ t/m} \cdot 3,60 \text{ m} \cdot \frac{360 \text{ m}}{2} = \end{array} \right.$$

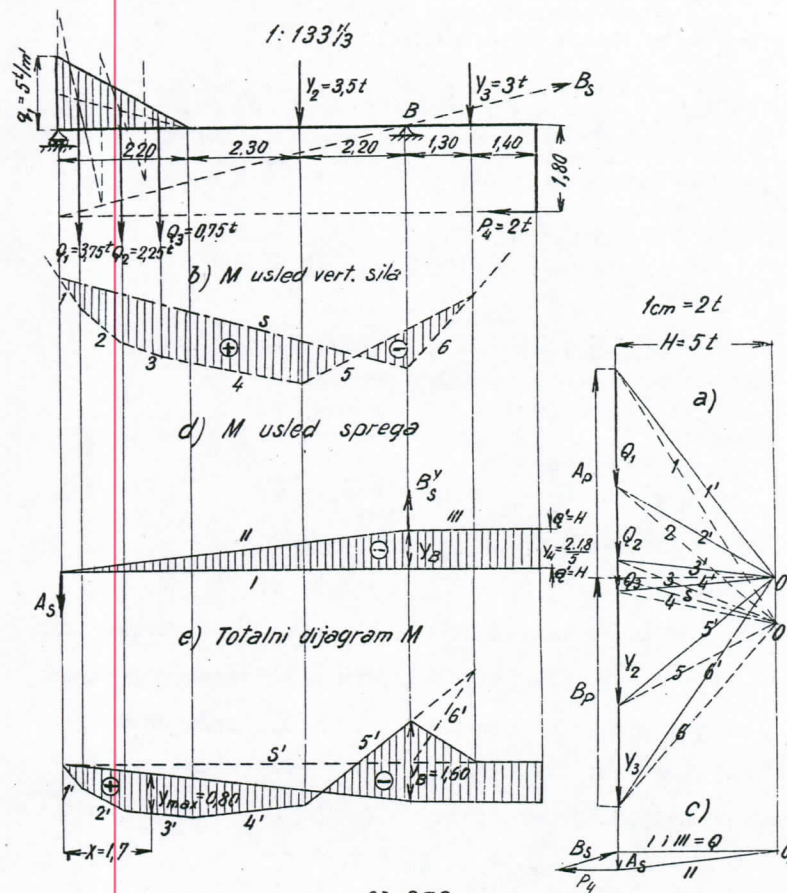
$$= \frac{0,48 \text{ t/m} \cdot 3,60 \text{ m} \cdot 2}{2} \cdot 3,60 \text{ m} =$$

$$= +23,83 - 11,92 = +11,91 \text{ tm.}$$

Prema tome maksimalni momenat je

$$M_{\max} = M_{VI} = +11,91 \text{ tm.}$$

6. Zadatak (sl. 278). - Ovo nije sasvim nov zadatak, jer smo ga imali već u sl. 234 i 235, gde su za ovaj primer određene reakcije oslonaca grafički i analitički i u sl. 272, gde su nacrtani dijagrami aksijalne i transverzalne sile. Ostaje



nam još da na sl. 278. konstruišemo za ovaj slučaj i dijagram napadnog momenta.

Na momente imaju uticaja samo vertikalne sile i ekscentrična horizontalna sila P_4 , te ćemo samo njih i uzeti u obzir. Radićemo prvo zasebno za vertikalne terete a zatim zasebno za ekscentričnu silu P_4 , koja daje spreg na kraju preputa, pa ćemo najzad grafički sabrati dobivene rezultate.

Kontinualni teret $P_1 = \frac{2,70 \cdot 5}{2} = 6,75 \text{ t}$ podelićemo na tri lamelje jednake širine (po 0,90 m), pa će na granicama la-

mela biti ordinate linije opterećenja

$$0,0 \text{ t/m}; \frac{1}{3} 5 \text{ t/m}; \frac{2}{3} 5 \text{ t/m}; \text{ i } 5 \text{ t/m.}$$

Težine pojedinih lamela biće dakle

$$Q_1 = \frac{5 + \frac{2}{3} 5}{2} \cdot 0,90 = 3,75 \text{ t}$$

$$Q_2 = \frac{\frac{2}{3} 5 + \frac{1}{3} 5}{2} \cdot 0,90 = 2,25 \text{ t.}$$

$$Q_3 = \frac{\frac{1}{3} 5 + 0}{2} \cdot 0,90 = 0,75 \text{ t}$$

Kontrola $P_1 = \sum_1^3 Q = 6,75 \text{ t.}$

Pri grafičkom rešavanju zadatka prvo je nacrtan za vertikalno opterećenje plan sila sl. 278 a i njemu odgovarajući verižni poligon 1-2-3-4-5-6-s (sl. 278 b), koji predstavlja liniju M usled vertikalnih sila. Za reakcije usled vertikalnih tereta nadjeno je grafički

$$A_p = 6,35 \text{ t}; B_p = 6,90 \text{ t.}$$

Zatim su pomoću plana sila sl. 278 c određene reakcije oslonaca usled ekscentrične sile P. Nadjeno je

$$A_s = B_s^y = 0,6 \text{ t.}$$

Totalne vertikalne komponente reakcija su dakle

$$A = 6,35 - 0,60 = 5,75 \text{ t (analitički, sl. 234, } A = 5,67 \text{ t).}$$

$$B_y = 6,90 + 0,60 = 7,50 \text{ t (" " } B_y = 7,54 \text{ t).}$$

Sa silama A_s i B_s^y i istom polnom razdaljinom H kao i u sl. 278 a nacrtan je sad verižni poligon I-II-III (sl. 278 d) koji predstavlja liniju M usled sprega ($P_2, - P_4$). Ako posmatramo ravnotežu verižnog poligona I-II-III pod uticajem spoljnih

sila, videćemo da na krajnjim njegovim stranama (I i III) moramo zamisliti spreg ($Q', - Q'$), ekvivalentan spregu ($P_2, - P_4$), koji drži ravnotežu spregu reakcija A_s i B_s^y . Iz plana sila vidi se medjutim da je

$$Q' = H$$

što znači da mora postojati odnos

$$P_4 \cdot r_4 = y_4 \cdot H$$

ili da treba da je u sl. 278 d

$$y_4 = \frac{P_4 \cdot r_4}{H} = \frac{2,1,8}{5} = 0,72 \text{ m.}$$

što služi kao kontrola crteža.

Najzad je izvršeno grafičko sabiranje momentnih dijagrama sl. 278 b i sl. 278 d na taj način, što je prvi dijagram sveden na horizontalnu apscisu pomoću novog pola O' i odgovarajućeg verižnog poligona $1'-2'-3'-4'-5'-6'-s'$, a zatim je dijagram M usled sprega prevrnut ispod te apscise tako, da se negativni deo dijagrama M_s između oslonaca A i B oduzme od pozitivnog dela dijagrama M_p , a sabere sa negativnim delom kod oslonca B.

Iz totalnog dijagrama M vidi se da postoje dva opasna preseka: jedan nad osloncem B u kome vlada negativni momenat grafički $M_D = - y_B \cdot H = - 1,6 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ t} = - 8,0 \text{ tm.}$
analitički $M_B = - P_3 \cdot 1,30 - P_4 \cdot 1,80 = - 3,1,3 - 2,1,8 = - 7,5 \text{ tm.}$

i drugi pozitivan, na izvesnom rastojanju x od oslonca A. Iste podatke o broju i položaju opasnih preseka daje nam i dijagram T nacrtan na sl. 272 b za istu ovu gredu.

Mesto ovog drugog opasnog preseka naćićemo, ako odredimo njegovo rastojanje x od levog oslonca. Iz grafičke kon-

strukcije na sl. 272 b i 278 e to je rastojanje

$$x = \sim 1,70 \text{ m.}$$

a tačno ćemo ga naći putem računa iz uslova

$$\frac{dM}{dx} = T = 0.$$

Da bismo napisali ovu jednačinu podelićemo kontinualno (trapezno) opterećenje levo od preseka x u jedan pravougaonik i jedan trougao. Visina pravougaonika (ordinata linije opterećenja q nad presekom x) biće određena proporcijom:

$$q : (2,70 - x) = 5 : 2,70$$

$$q = \frac{(2,70 - x) \cdot 5}{2,70} = 5 \left(1 - \frac{x}{2,70}\right)$$

a visina trougla biće

$$(q_1 - q) = 5 - \left(5 - \frac{5x}{2,70}\right) = \frac{5}{2,7} \cdot x.$$

Jednačina $T = 0$ glasiće dakle za presek x :

$$A - 5 \left(1 - \frac{x}{2,7}\right) \cdot x - \frac{\frac{5}{2,7} x \cdot x}{2} = 0$$

Za totalni otpor A uzimamo tačniju vrednost, nadjenu analitički, t.j. $A = 5,67 \text{ t}$, pa dobivamo

$$5,67 - 5x - \frac{5x^2}{2,7} - \frac{1,5x^2}{2,7} = 0$$

Kad se ova jednačina uprosti, sredi ona glasi

$$x^2 - 5,4 + 6,12 = 0$$

dakle

$$x = \frac{5,4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,4}{2}\right)^2 - 6,12}$$

i odavde

$$x_1 = 3,78 \text{ m (neupotrebljiva vrednost)}$$

$$x_2 = 1,62 \text{ m.}$$

Sa ovom vrednošću $x = 1,62 \text{ m}$ nalazimo ordinatu opterećenja nad presekom x

$$q = 5 \left(1 - \frac{x}{2,7}\right) = 5 \left(1 - \frac{1,62}{2,7}\right) = 2 \text{ t/m.}$$

Težine delova u koje smo podelili opterećenje na dužini x biće

$$\text{Za pravougaonik } q \cdot x = 2 \cdot 1,62 = 3,24 \text{ t.}$$

$$\text{" trougao } \frac{(q_1 - q) \cdot x}{2} = \frac{(5 - 2) \cdot 1,62}{6} = 2,43 \text{ t.}$$

Kontrola

$$A = \Sigma = 5,67 \text{ t.}$$

Za presek $x = 1,62 \text{ m}$, dobivamo najveći pozitivni momenat između oslonaca A i B . Njegova je veličina

$$M_{\max}^+ = A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} - \frac{(q_1 - q)x}{2} \cdot \frac{2}{3} x = A \cdot x - \frac{qx^2}{2} - \frac{(q_1 - q) \cdot x^2}{3}$$

Kad zamenimo brojne vrednosti $q = 2 \text{ t/m}$; $q_1 = 5 \text{ t/m}$ dobićemo

$$\begin{aligned} M_{\max}^+ &= A \cdot x - 2x^2 \\ &= 5,67 \cdot 1,62 - 2 \cdot 1,62^2 \\ &= 9,18 - 5,25 \\ M_{\max}^+ &= + 3,93 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Grafički za taj isti momenat nalazimo iz dijagrama M na sl. 278 e

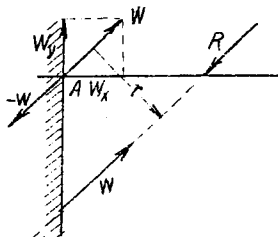
$$M_{\max}^+ = y_{\max}^+ \cdot H = 0,80 \text{ m} \cdot 5 \text{ t} = + 4,00 \text{ tm.}$$

što se dobro slaže sa računom.

III. Uzidana greda - konzola.

Konzola je greda jednostrano uklještena (uzidana) tj.

kruto vezana sa svojim osloncem dok je njen drugi kraj slobodan. Ravnoteža konzole zahteva da



Sl. 279

dan. Ravnoteža konzole zahteva da otpor W uklještenog kraja ima istu veličinu i napadnu liniju kao i rezultanta napadnih datih sila R , i suprotan smer. Pored komponentata W_x

i W_y imamo kao treću nepoznatu i momenat uklještenja $W.r$, a za njihovo određivanje imamo tri uslova ravnoteže ravne ploče. Pri vertikalnom opterećenju konzola se savija tako, da joj je elastična linija po celoj dužini ispučena naviše, iz čega sleduje da je napadni momenat prema usvojenom pravilu skroz negativan.

25. Opšti slučajevi.

Kao i pri ispitivanju drugih vrsta greda tako i kod konzole nas interesuje: kako se određuju otpori na osloncu (reakcija A i momenat uklještenja M_A) i kako crtaju dijagrami napadnih momenata, transverzalnih i aksijalnih sila. To ćemo pokazati na nekoliko primera opšteg značaja.

Analitičko određivanje otpora na osloncu vrši se pomoću jednačina (150):

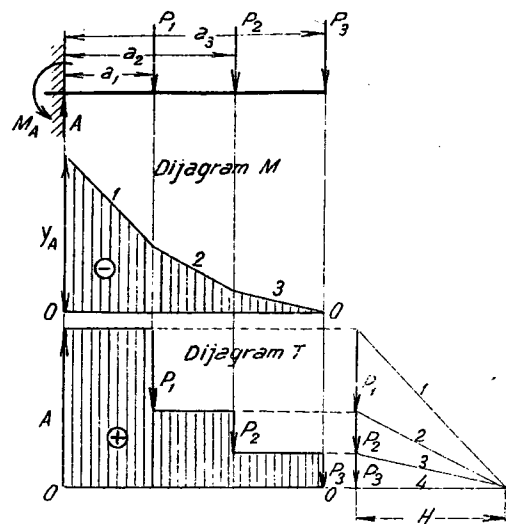
$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Ako je opterećenje isključivo vertikalno, onda prva jednačina otpada i tada je i reakcija A vertikalna. Ona se izračunava iz druge, a momenat uklještenja iz treće jednačine.

Za primer na sl. 280 ova dve jednačine glase



Sl. 280

$$A - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 - M_A = 0$$

te iz njih nalazimo

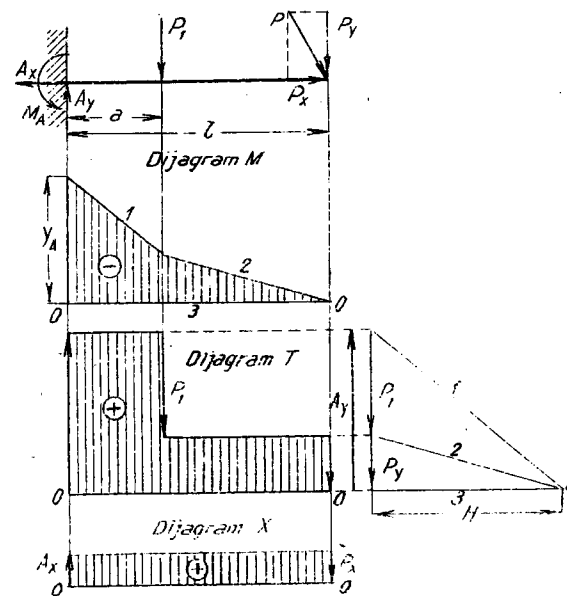
$$A = P_1 + P_2 + P_3$$

$$M_A = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3.$$

Iz poslednje jednačine sleduje da je momenat uklještenja po apsolutnoj vrednosti jednak napadnom momentu opterećenja za presek A , u kome je greda uzidana.

Ako opterećenje ima i horizontalnih komponentata, onda

postoji i horizontalna komponenta reakcije A . Za primer na



Sl. 281

sl.281 analitički uslovi ravnoteže glase

$$A_x - P_x = 0$$

$$A_y - P_1 - P_y = 0$$

$$P_1 a_1 + P_y \cdot a - M_A = 0$$

iz kojih dobivamo uopšte

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \sum P_x \\ A_y &= \sum P_y \\ M_A &= \sum (P_y \cdot a) \end{aligned} \right\} \dots 167)$$

Reakcija oslonca je

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Za grafičke određivanje otpora A_x i

A_y iz jednačine 167) se vidi da se mora sastojati samo u grafičkom sabiranju horizontalnih i vertikalnih komponenta opterećenja. Što se tiče grafičkog određivanja momenta uklještenja M , ono se vrši crtanjem Kulmanove momentne površine za celu gredu, pa nam ona daje i napadni momenat opterećenja za presek A po obrascu

$$M_A = y_A \cdot H$$

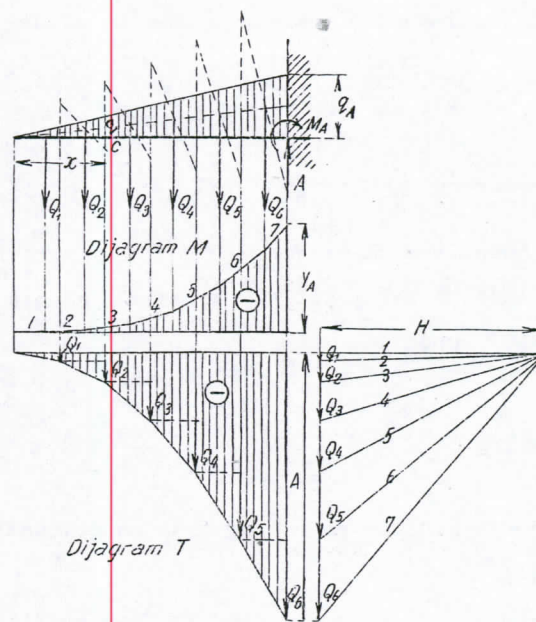
a njegova apsolutna veličina, kao što smo pomenuli, ista je kao i veličina momenta uklještenja s kojim on stoji u ravnoteži.

Pri crtanju Kulmanove momentne površine treba uvek pol tako birati, da ona odmah ispadne redukovana na horizontalnu apscisu $O - O$, kao što je pokazano na sl. 280, 281 i sledećim.

Crtaње dijagrama transverzalnih i aksijalnih sila vrši se na isti način kao i kod proste grede. Ako za transverzalnu silu zadržimo, kao i ranije, pozitivan znak za smer naviše na levom otsečku, onda će ona biti skroz pozitivna kad je konzola uzidana na svom levom kraju, a skroz negativna kad je greda uzidana na svom desnom kraju (v. sl. 282).

Kad je opterećenje konzole kontinualno, onda ga pri grafičkom radu delimo u lamele i dalje postupamo na poznati način. Tako će za primer trouglastog opterećenja (sl. 282) i linija M i linija T biti krive. Njihove jednačine možemo naći analitičkim putem, kad primenimo na levi otsečak definicije momenta i transverzalne sile za proizvoljan presek C na razmaku x od levog kraja konzole. Ordinatu q linije opterećenja nad presekom C dobivamo iz proporcije

$$q : q_A = x : l$$



Sl. 282

što znači da je M - linija kriva trećeg stepena.

Opšta jednačina 164)

$$T = \frac{dM}{dx}$$

važi i ovde, jer ako gornji izraz za M diferenciramo dobićemo

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{q_A}{6l} 3x^2 = -\frac{q_A x^2}{2l} = T_x.$$

Za jednoliko podeljeno opterećenje $q = K = \text{const.}$ ove jednačine glase

$$T_x = -qx = -kx \quad (\text{prava linija})$$

$$M_x = -qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2} = -\frac{kx^2}{2} \quad (\text{parabola})$$

Pri analitičkom određivanju reakcija A i M_A možemo celo kontinualno opterećenje smatrati kao koncentrisano u te-

dakle

$$q = q_A \cdot \frac{x}{l}$$

Transverzalna sila preseku C biće

$$\begin{aligned} T_x &= -\frac{xq}{2} = \\ &= -\frac{x}{2} q_A \cdot \frac{x}{l} = -\frac{q_A x^2}{2l} \end{aligned}$$

a cvo je jednačina parabole.

Napadni momenat za presek C je

$$M_x = -\frac{q_A x^2 \cdot x}{2l \cdot 3} = -\frac{q_A x^3}{6l}$$

žištu površine opterećenja. Tako dobivamo za primer na sl.282

$$A = - \frac{q_A l}{2}$$

$$M = - \frac{q_A l}{2} \cdot \frac{l}{3} = - \frac{q_A l^2}{6}$$

što izlazi i iz opštih jednačina za $x = l$.

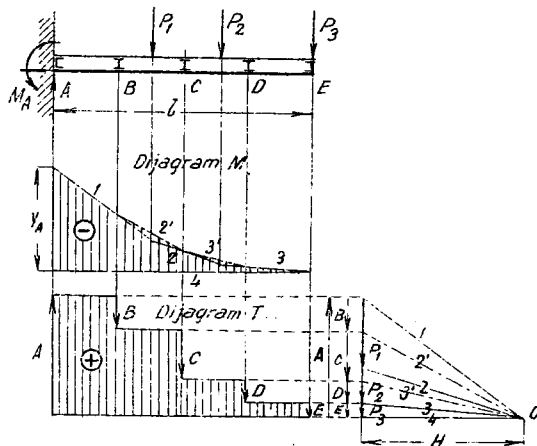
Ako je opterećenje po celoj dužini konzole jednak podeljeno ($q = K = \text{const.}$), onda je

$$A = - q l = - k l$$

$$M = - q l \cdot \frac{l}{2} = - \frac{q l^2}{2} = - \frac{k l^2}{2}$$

..... 167 a).

Kad je opterećenje konzole posredno, onda se postupa na poznati način (sl.283).



Sl. 283

M_A u onom preseku u kome je $T = 0$ kod konzole ne važi, jer M_A nije analitički maksimum.

Iz dosadašnjih primera konzole vidi se, da je - u normalnim slučajevima opterećenja - napadni momenat najveći u preseku A u kome je gređa uzidana tj.

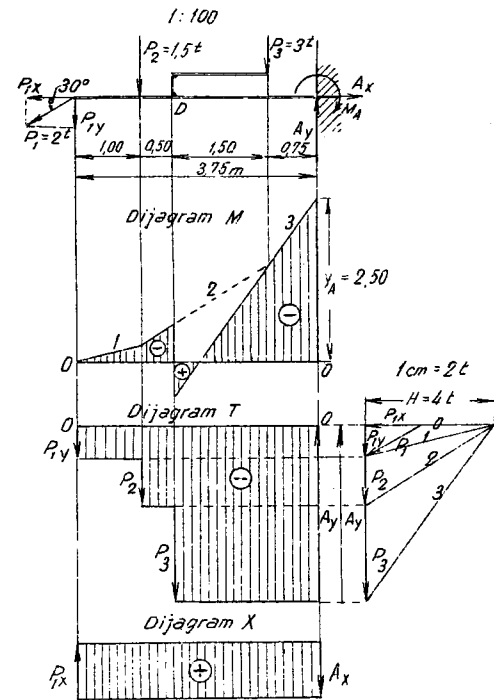
$$M_{\max} = M_A.$$

Pravilo da je

26. Zadaci za vežbanja.

Na tri brojna primera pokazaćemo, kako se konzola praktično rešava,

1. zadatak (sl. 284).- Opterećenje je zadato u vidu



Sl. 284

tri koncentrisane sile, od kojih je jedna kosa, a jedna deluje u preseku D ekscentrično.

Reakcije A i M_A dobivamo analitički

$$A_x - P_{1x} = 0$$

$$A_y - P_{1y} - P_2 - P_3 = 0$$

$$- P_{1y} \cdot 3,75 - P_2 \cdot 2,75 -$$

$$- P_3 \cdot 0,75 + M_A = 0.$$

Zamenivši brojne vrednosti nalazimo

$$A_x = 2 \text{ t} \cos 30^\circ = 1,73 \text{ t}$$

$$A_y = 2 \text{ t} \sin 30^\circ + 1,5 +$$

$$+ 3,0 = 5,50 \text{ t.}$$

$$M_A = + 2 \text{ t} \cdot \sin 30^\circ \cdot 3,75 \text{ m} +$$

$$+ 1,5 \text{ t} \cdot 2,75 \text{ m} +$$

$$+ 3 \text{ t} \cdot 0,75 \text{ m} = 10,125 \text{ tm}$$

Toliki je i najveći napadni momenat u preseku A samo sa negativnim znakom:

$$M_{\max} = - 10,25 \text{ tm.}$$

Grafičko rešavanje zadatka prikazano je na sl. 284.

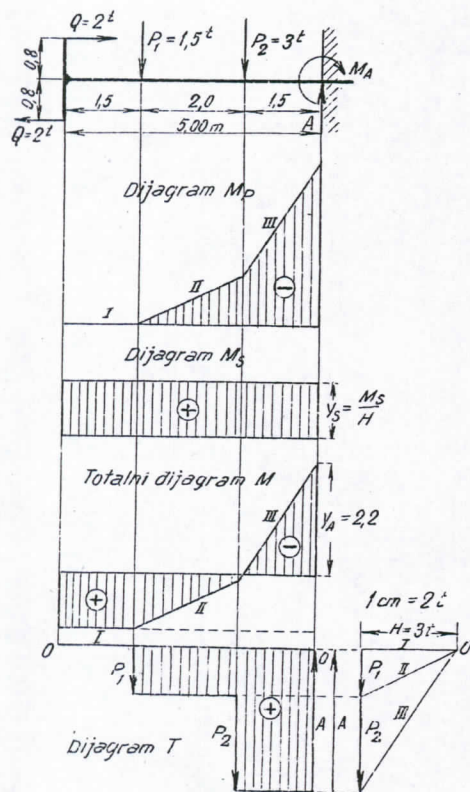
Maksimalni momenat iz Kulmanove momentne površine js

$$M_{\max} = -y_A \cdot H = -2,50 \text{ m} \cdot 4 \text{ t} = -10 \text{ tm.}$$

kao i analitičkim putem.

2. Zadatak (sl. 285).- Na gredu napada na kraju jedan

1:125



Sl. 285

$$y_s = \frac{M_s}{H} = \frac{2 \cdot 1,6}{3} = 1,07 \text{ m.}$$

da bi obe dijagramne linije za M bile u istoj razmeri. Kako je M_p negativno, a M_s pozitivno, konačni dijagram M dobiven je grafičkim oduzimanjem oba dijagrama.

Maksimalni momenat je opet u preseku uklještenja i prema razmerama crteža dobivamo ga iz grafičke konstrukcije

spreg horizontalnih sila $Q = 2t$ sa pozitivnim momentom

$$M_s = 2 \text{ t} \cdot 1,6 \text{ m} = 3,20 \text{ tm.}$$

i sem toga dva vertikalna tereta $P_1 = 1,5 \text{ t}$ i $P_2 = 3 \text{ t}$.

Otpori na osloncu A biće analitički:

$$A = P_1 + P_2 = 4,5 \text{ t.}$$

$$M = 2 \text{ t} \cdot 1,60 \text{ m} - 1,5 \text{ t} \cdot 3,5 \text{ m} - 3 \text{ t} \cdot 1,5 \text{ m} = -6,55 \text{ tm.}$$

Grafička konstrukcija

dijagrama M izvršena je po načelu superpozicije dejstava: prvo je nacrtana linija M_p samo za uticaj vertikalnog opterećenja, a zatim linija M_s samo za uticaj sprega. Ova poslednja je paralelna s apscisom i to na rastojanju koje treba uzeti

$$M_A = -y_A \cdot H = -2,2 \text{ m} \cdot 3 \text{ t} = -6,6 \text{ tm.}$$

što se dobro slaže sa rezultatom dobivenim analitički.

Najveći pozitivan napadni momenat je

$$M_{\max}^+ = M_s = 3,2 \text{ tm.}$$

3. Zadatak (sl. 286).- Opterećenje je dato u vidu tri

koncentrisane sile prema slici.

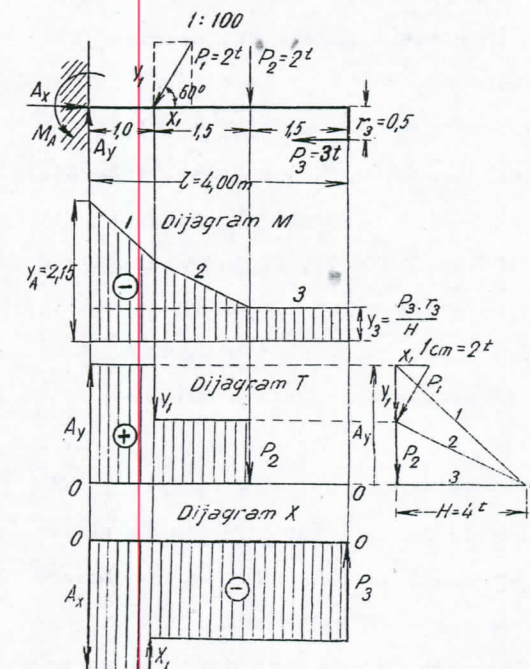
Otpore na osloncu A izračunavamo analitički

$$A_x = 2 \text{ t} \cdot \cos 60^\circ + 3 \text{ t} = 4 \text{ t}$$

$$A_y = 2 \text{ t} \cdot \sin 60^\circ + 2 \text{ t} = 3,73 \text{ t.}$$

$$M_A = -2 \text{ t} \sin 60^\circ \cdot 1,0 \text{ m} - 2 \text{ t} \cdot 2,5 \text{ m} - 3 \text{ t} \cdot 0,50 \text{ m} = -8,23 \text{ tm.}$$

Grafička konstrukcija dijagrama M izvršena je kao i



Sl. 286

u prošlom primeru, samo s tom razlikom što su i momenat usled vertikalnih sila i momenat usled horizontalne sile oba negativni, pa su ordinate njihovih dijagrama grafički sabrate.

Maksimalni momenat, određen iz grafičke konstrukcije, ima veličinu

$$M_{\max} = M_A = -y_A \cdot H = -2,15 \text{ m} \cdot 4 \text{ t} = -8,60 \text{ tm.}$$

Dijagrami za transverzalnu i aksijalnu silu na sl.

286 nacrtani su na već poznati način.

IV. Gerberova greda.

Kako je Gerberova greda nosač, složen iz nekoliko prostih i prepuštenih greda, to za njega važi sve što smo rekli kod ovih prostih nosača. Zato se i rešavanje Gerberove grede može izvršiti i tako, da se ona raščlani na svoje sastavne delove, pa da se svaki od njih posebno rešava kao prosta ili prepuštena greda vodeći, razume se, računa o tome da se tada pritisci u zglobovima moraju smatrati kao spoljne sile.

Umesto toga u praksi je uobičajeno smatrati Gerberovu gredu kao jednu celinu, pa je tako i rešavati. Mi ćemo zato u sledećem pokazati taj praktični način rada, koji se osniva u glavnom na toj činjenici da za svaki zglob G, gde se prosta i prepuštena greda vezuju jedna s drugom, mora - u slučaju ravnoteže celog nosača - biti zadovoljena jednačina 152)

$$M_G = 0$$

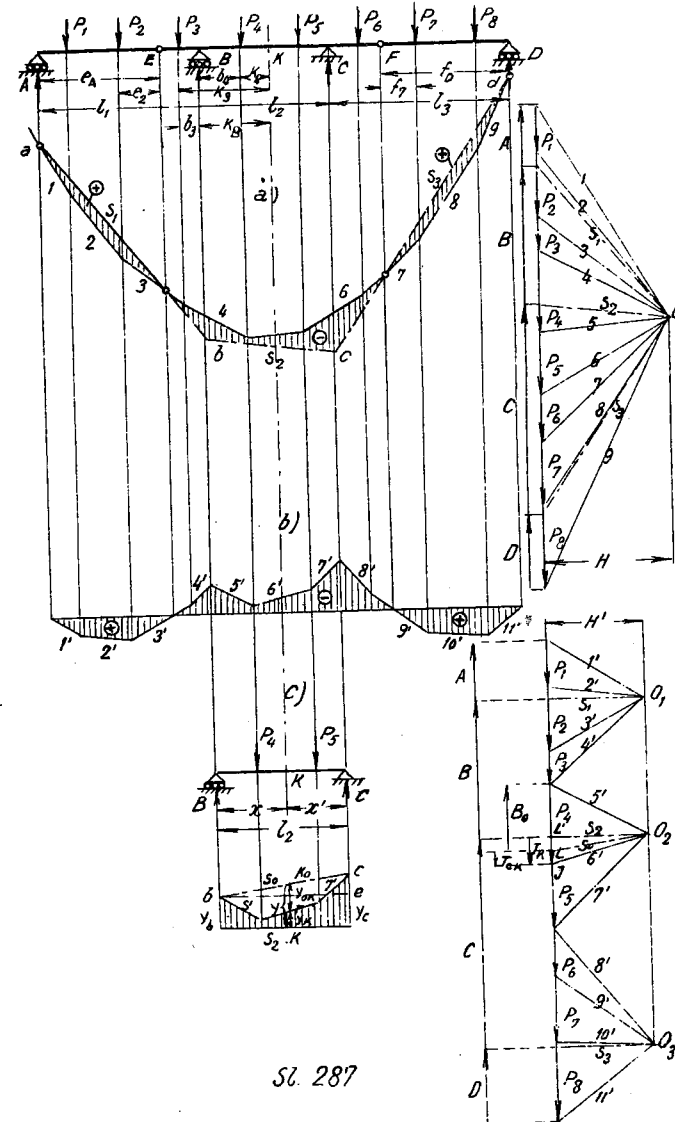
t.j. moraju napadni momenti u svima tim zglobovima biti jednaki nuli. Na toj osnovi utemeljena je i sama metoda analitičkog i grafičkog odredjivanja reakcija oslonaca za Gerberovu gredu kao celinu. A kad su reakcije za ceo nosač odredjene, onda možemo dalje rešavanje Gerberove grede lako dovršiti na način koji smo već upoznali kod proste grede.

27. Opšti slučajevi.

Odredjivanje reakcija oslonaca. - Analitički nalazimo otpore oslonaca za Gerberovu gredu kao celinu primenom triju jednačina 150) i jednačine 152) koju primenjujemo za svaki zglob zasebno, tj. onoliko puta koliko greda ima zglobova. Tako

dobivamo uvek dovoljno jednačina za odredjivanje svih nepoznatih reakcija.

Gerberova greda na sl. 287 ima tri otvora, čiji su



Sl. 287

rasponi l_1 , l_2 i l_3 , četiri oslonca A, B, C i D i dva zgloba E i F. Ona je složena iz dve proste grede (AE i FD) i jedne grede sa prepustima (EF, oslonci B i C). Za tu gredu, u slučaju vertikalnog opterećenja teretima P_1 - P_8 , jednačine koje služe za izračunavanje otpora oslonaca glase

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \sum Y = 0 \\ 2) \quad \sum M = 0 \\ 3) \quad M_E = 0 \\ 4) \quad M_F = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{jednačine 150)} \\ \\ \text{jednačine 152)} \end{array}$$

a te 4 jednačine dovoljne su za određivanje 4 nepoznate: A, B, C i D.

Kad bi na gredi bilo i horizontalnih komponenta opterećenja, onda bismo upotrebili još i jednačinu

$$\sum X = 0,$$

iz koje bismo našli veličinu horizontalne komponente C_x reakcije na nepokretnom ležištu C. Da bi ta jednačina bila rešljiva, t.j. da bi imala samo jednu nepoznatu, sme cela Gerberova greda imati samo jedno nepokretno ležište, koje prima na sebe otpor protiv svih horizontalnih komponenta opterećenja. Kad bi greda imala dva ili više nepokretnih ležišta, ona bi dakle u pogledu horizontalnih sila bila statički neodređena.

Pri postavljanju druge od gornjih jednačina, koja se odnosi na momente svih spoljnih sila u pogledu ma koje tačke u ravni nosača, uvek ćemo izabrati za obrtnu tačku momenata jedan od oslonaca, jer se tada nepoznata reakcija toga oslonca neće javiti u jednačini, pa će dakle jednačina imati jednu nepoznatu manje. Sem toga, da bi momentni kraci svih sila u toj jednačini ispali što kraći i tako računanje što lakše, izabraćemo obrtnu tačku za momente na jednome od srednjih os-

lonaca.

Pri postavljanju treće i četvrte od gornjih jednačina uzećemo u obzir spoljne sile ili levo ili desno od zgloba, prema tome gde ih je manje ili gde je račun prostiji, jer to definicija napadnog momenta dozvoljava.

Imajući sve to na umu možemo sad napisati 4 jednačine za slučaj opterećenja na sl. 287 a prema oznakama u toj slici

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad A + B + C + D - \sum_1^8 P = 0 \\ 2) \quad A \cdot l_1 - C \cdot l_2 - D (l_2 + l_3) - \sum_1^8 (P \cdot b) = 0 \text{ (obrotna)} \\ 3) \quad A \cdot e_A - \sum_1^8 (P \cdot e) = 0 \\ 4) \quad D \cdot f_D - \sum_1^8 (P \cdot f) = 0 \end{array} \right\} \dots 168) \text{ (tačka B)}$$

U dvema poslednjim jednačinama ima samo po jedna nepoznata, te ih odmah možemo rešiti

$$A = \frac{\sum_1^8 (P \cdot e)}{e_A}; \quad D = \frac{\sum_1^8 (P \cdot f)}{f_D}$$

Kad ove vrednosti za A i D unesemo u drugu jednačinu, ostaće u njoj još samo C nepoznato, te ga možemo naći, i najzad iz prve jednačine dobiti i B.

Pri grafičkom određivanju reakcija moramo naći jedan zatvoren verižni poligon, na kome su sve spoljne sile (tereti i reakcije), koje napadaju i na Gerberovu gredu, u ravnoteži. Taj će verižni poligon biti u isto vreme i Kulmanova momentna površina i zato pri njegovoj konstrukciji moramo povesiti računa o tome da bude za svaki zglob zadovoljena jednačina 152)

$$M_G = 0$$

t.j. da ordinata y_G zatvorenog verižnog poligona kod svakog zgloba bude jednaka nuli. Takav verižni poligon možemo nacrtati na dva načina, koji su oba prikazani na sl. 287.

Po prvom načinu (sl. 287 a) biramo za sve sile samo jedan pol O (polna razdaljina H) i prvo crtamo datim silama $P_1 - P_8$ otvoren verižni poligon 1-2-3-4-5-6-7-8-9. On ima 8 preloma koji leže na linijama dejstva tereta P . Kad uzmemo u obzir da na zatvorenom verižnom poligonu koji tražimo treba da su sile $P_1 - P_8$ u ravnoteži sa 4 otpora oslonaca: A, B, C i D , onda vidimo da on mora imati još 4 preloma i to na linijama dejstva reakcija. Dve od tih prelomnih tačaka (a i d) već su određene presekom prve (1) strane verižnog poligona sa linijom dejstva reakcije A i poslednje (9) sa linijom dejstva reakcije D . Ostale dve (b i c), koje leže na linijama dejstva srednjih reakcija B i C naćićemo iz uslova da traženi zatvoreni verižni poligon mora imati ordinate y_E i y_F jednake nuli u tačkama koje odgovaraju vertikalnim presecima kroz zglobove E i F . Povučićemo dakle ove vertikale do preseka s verižnim poligonom, te presečne tačke spojiti sa a i d i produžiti odgovarajuće spojne prave do preseka sa vertikalama kroz oslonce B i C , čime su određene prelomne tačke b i c . Linije $a - b, b - c, c - d$ koje spajaju ove 4 prelomne tačke međusobom i koje se pružaju uvek od oslonca do oslonca tako da svakome otvoru l_1, l_2 i l_3 pripada po jedna, nazivaju se završne strane verižnog poligona jer ga zatvaraju. Obeležićemo ih sa s_1, s_2 i s_3 i kad njima u planu sila povučemo odgovarajuće paralele dobićemo na teretnoj vertikali četiri otečka, koji znače veličine reakcija A, B, C i D . Ove sile A, B, C i D zatvaraju poligon sila i stoje dakle u ravnoteži sa teretima $P_1 - P_8$ na zatvorenom verižnom poligonu 1-2-3-4-5-6-7-8-9- $s_3 - s_2 - s_1$, pa u toliko pre u ravnoteži i na Gerberovoj gredi. Nadjene sile A, B, C i D su dakle reakcije os-

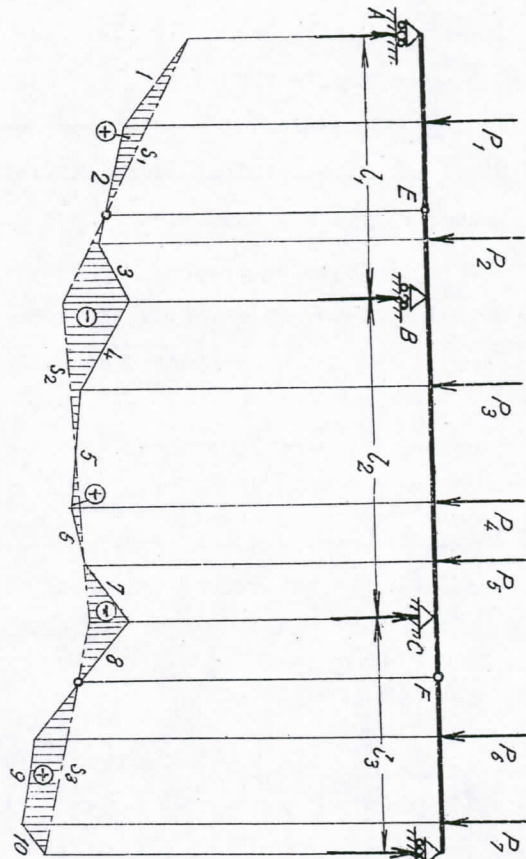
lonaca Gerberove grede koje smo želeli odrediti.

Po drugom načinu, koji se u praksi mnogo češće primenjuje zato, što daje jasniju i pregledniju Kulmanovu površinu, biramo za svaki otvor (raspona l_1, l_2 i l_3) zaseban pol (O_1, O_2 i O_3 u sl. 287 b), ali sa istom polnom razdaljinom H' , pa crtamo onoliko verižnih poligona koliko ima otvora no tako, da se ovi verižni poligoni vezuju jedan za drugi na vertikalama kroz srednje oslonce - vidi izlomljenu liniju 1'-2'-2'-4'-5'-6'-7'-8'-9'-10'-11' na sl. 287 b. Linije s_1, s_2 i s_3 , koje zatvaraju verižni poligon, dobivamo kao i po prvom načinu. Pošto su u sl. 287 a) bile po prvom načinu već određene reakcije A, B, C i D mogli smo polove O_1, O_2 i O_3 tako izabrati, da novi zatvoreni verižni poligon 1'-2'-3'-4'-5'-6'-7'-8'-9'-10'-11'- $s_3 - s_2 - s_1$ bude po celoj dužinu grede redukovan na horizontalnu apscisu koja se poklapa sa završnim linijama s_1, s_2 i s_3 . U koliko H' uzmemo manje, dobićemo u toliko veće ordinate y .

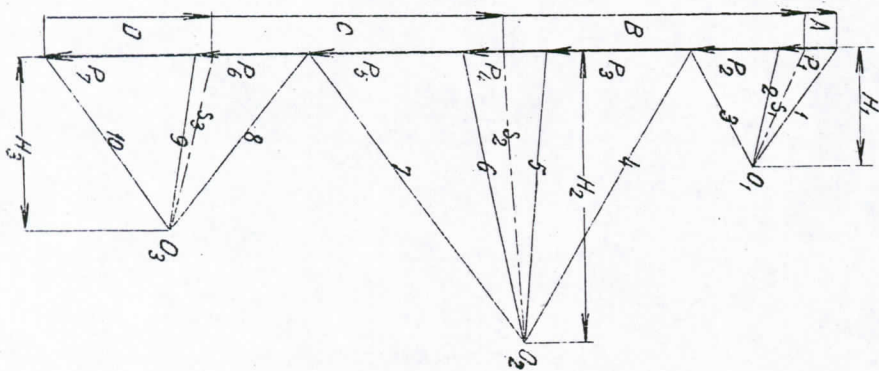
Kod drugog načina možemo izabrati i proizvoljan položaj polova za svaki otvor, sl. 288. Ali tada momentna linija nije za celu Gerberovu gredu u istoj razmeri. Da bismo namo dobili napadne momente u pojedinim presecima moramo tada ordinate Kulmanove površine množiti u prvom otvoru sa H_1 , u drugom sa H_2 a u trećem sa H_3 . Ta se nezgoda izbegava biranjem zajedničke polne razdaljine H' za sve otvore.

Ako je opterećenje kontinualno, onda ga delimo u lamle koje zamenjujemo zamišljenim koncentrisanim silama, pa dalje postupamo kao i u sl. 287.

Transverzalne sile. - Čim su određene reakcije oslonaca i tako sve spoljne sile poznate, nalazimo transverzalnu



Sl. 288



silu za ma koji presek K algebarskim sabiranjem svih vertikalnih komponenata spoljnih sila levo (ili desno) od toga preseka. Za presek K na sl. 287 biće

$$T_K = A + B - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = A + B - \sum_1^4 P \quad \dots 189)$$

U planu sila njenu veličinu pretstavlja duž $L'J$ koja čini trougao sa onim polnim zracima, čije odgovarajuće strane zatvorsnog verižnog poligona pogodja vertikalni presek kroz K (u sl. 287 to su strane $6'$ i s_2).

Za transverzalnu silu T_K u ma kome preseku Gerberove grede možemo izvesti i jedan prost obrazac po kome se T_K za Gerberovu gredu izračunava pomoću vrednosti T_{OK} koja bi važila kao transverzalna sila u istom preseku K kad bi deo grede u tome otvoru (u sl. 287 BC) bio prosta greda istog raspona (l_2) i opterećenja (u sl. 287: P_4 i P_5) kao i Gerberova greda.

Na sl. 287 c, prikazana je Kulmanova momentna površina Gerberove grede samo za otvor BC; ako povučemo liniju bc, ona će nam predstavljati završnu stranu s_0 verižnog poligona $5'-6'-7'$, koja bi zatvarala verižni poligon za prostu gredu BC raspona l_2 . Povučemo li ovoj liniji s_0 u planu sila paralelu iz pola O_2 , dobićemo transverzalnu silu proste grede BC za presek K:

$$T_{OK} = B_0 - P_4 = L J.$$

Ako u verižnom poligonu povučemo još liniju be paralelno liniji s_2 (ovde horizontalno), videćemo da postoji sličnost trouglova

$$\Delta bce \sim \Delta O_2 L' L \text{ (šrafiran)}$$

i zato možemo pisati proporciju

$$L' L : H' = c\bar{e} : l_2$$

a odatle

$$L'L = \frac{\bar{c}e \cdot H'}{l_2}$$

Iz plana sila nalazimo pak da je

$$L'L = T_K - T_{OK}$$

a iz verižnog poligona

$$\bar{c}e = y_C - y_B$$

pa dobivamo dakle

$$T_K - T_{OK} = \frac{H(y_C - y_B)}{l}$$

a odavde

$$T_K = T_{OK} + \frac{M_C - M_B}{l} \quad \dots\dots 169 \text{ a}).$$

Po ovoj jednačini transverzalnu silu T_K Gerberove grede dobivamo kad transverzalnoj sili T_{OK} proste grede istog raspona i opterećenja dodamo izraz

$$\frac{M_C - M_B}{l}$$

a to je transverzalna sila usled momenata M_C i M_B na osloncima.

Dijagram transverzalne sile za Gerberovu gredu crtamo po pravilima koja smo upoznali kod proste grede, kao što ćemo videti docnije na primerima.

Napadni momenti. - Odredjivanje napadnog momenta M_K na kome preseku K Gerberove grede po grafičkoj metodi rada svodi se na izračunavanje proizvoda

$$M_K = y_K \cdot H,$$

gde je y_K ordinata Kulmanove momentne površine na vertikali kroz K , a H polna razdaljina.

Analitički dobivamo M_K kao algebarsku sumu momenata svih vertikalnih komponenta spoljnih sila levo (ili desno) od

preseka K , dakle prema sl. 287

$$M_K = A \cdot K_A + B \cdot K_B - \sum_1^4 P \cdot K \quad \dots\dots 170$$

Za isti ovaj napadni momenat možemo kod Gerberove grede dobiti izraz, sličan jednačini 169 a), kad uvedemo za deo Gerberove grede u tome otvoru (BC) pojam napadnog momenta M_{OK} proste grede istog raspona (l_2) i opterećenja (P_4 i P_5). Prema sl. 287 a možemo naime napisati da je

$$\bar{K}r = KK_D - \bar{K}_O r$$

ili

$$y_K = y - y_{OK}$$

odnosno, kad pomnožimo sa H ,

$$y_K \cdot H = y \cdot H - y_{OK} \cdot H$$

dakle

$$M = y \cdot H - M_{OK}$$

Ordinatu $y = \bar{K}K_O$ možemo pak izraziti ordinatama y_B i y_C na ovaj način (sl. 289)

$$y = m + n,$$

gde dužine m i n odredjujemo iz proporcija

$$m : y_B = x' : l,$$

$$\text{dakle} \quad m = \frac{y_B}{l} \cdot x'$$

$$n : y_C = x : l,$$

dakle

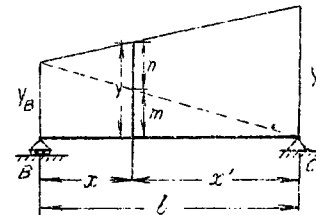
$$n = \frac{y_C}{l} \cdot x$$

Kad to zamenimo, izlazi

$$y = \frac{y_B}{l} x' - \frac{y_C}{l} x$$

dakle i

$$M_K = \left(\frac{y_B}{l} x' - \frac{y_C}{l} x \right) H - M_{OK}$$



Sl. 289

a odavde

$$M_K = M_B \cdot \frac{x'}{l} - M_C \cdot \frac{x}{l} - M_{OK} \quad \dots\dots 170 \text{ a)}$$

gde su M_B i M_C momenti nad osloncima Gerberove grede za dotični otvor l .

Kako je momenat proste grede uvek pozitivan, a momenti nad srednjim osloncima Gerberove grede uvek negativni, to bi ova jednačina 170 a) morala stvarno glasiti

$$M_K = M_{OK} - M_B \cdot \frac{x'}{l} - M_C \cdot \frac{x}{l} \quad \dots\dots 170 \text{ b)}$$

ili, bez obzira na znak,

$$M_K = M_{OK} - M_B \cdot \frac{x'}{l} - M_C \cdot \frac{x}{l} \quad \dots\dots 170 \text{ c)}.$$

Ako dakle (sl. 287) za opterećenje silama P_4 i P_5 odredimo u otvoru BC za ma, koji presek K napadni momenat M_{OK} smatrajući taj deo Gerberove grede kao prostu gredu i ako sem toga poznajemo momente nad osloncima Gerberove grede u tome otvoru (M_B i M_C), onda možemo prema jednačini 170 c) izračunati M_K za taj presek Gerberove grede. Iz jednačine 170 b) sleduje da M_K može biti i pozitivno i negativno prema tome da li je veći prvi član zbira (M_{OK}) ili zbir druga dva člana.

Za Gerberovu gredu sa jednakim rasponima l opterećenu na celoj dužini jednako podeljenim teretom q na jedinicu dužine biće zbir maksimalnog pozitivnog momenta u sredini raspona i momenta na osloncu ravan $\pm \frac{ql^2}{8}$. Greda će biti najekonomičnija ako momenti u oba opasna preseka budu jednaki dakle ravni $\pm \frac{ql^2}{16}$. Rastojanje zglavka x_0 od oslonca za taj slučaj nalazimo iz poznate osobine parabole da se apscise (u pravcu njene osci-

vine) odnose kao kvadrati ordinata:

$$\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^2 : \frac{l^2}{4} = 1 : 2$$

ili $x_0^2 - lx_0 + \frac{l^2}{8} = 0$. Odavde nalazimo $x = \frac{l}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. Kako je $x_0 < \frac{l}{2}$, to važi samo donji znak dakle $x_0 = 0,146 l$.

Da maksimalni momenat u krajnjim otvorima bude takodje $\frac{ql^2}{16}$ moraju ovi otvori biti $l_1 = l - x_0 = \frac{l}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

28. Zadaci za vežbanja.

1. Zadatak (sl. 290): Pri grafičkom rešavanju ovog zadatka crtaćemo Kulmanovu momentnu površinu odvojeno za vertikalno opterećenje, a odvojeno za horizontalnu silu P_5 . Njen uticaj prostire se samo do oslonca B. Tako su nadjene grafički vertikalne komponente reakcija oslonaca

$$A = 1,1 \text{ t}$$

$$B = 6,4 + 0,4 = 6,8 \text{ t}$$

$$C = 1,0 - 0,4 = 0,6 \text{ t.}$$

Ove su reakcije sad kontrolisane analitički za celokupno opterećenje

kupno opterećenje

$$(\sum X = 0) P_{1y} + P_5 - B_x = 0 ; \text{ dakle } B_x = 2t \cos 30^\circ + 3t = 4,73 \text{ t.}$$

$$(\sum Y = 0) A + B + C + P_{1y} - P_2 - P_3 - P_4 = 0, :$$

$$\text{dakle } A + B + C = 8,5 \text{ t.}$$

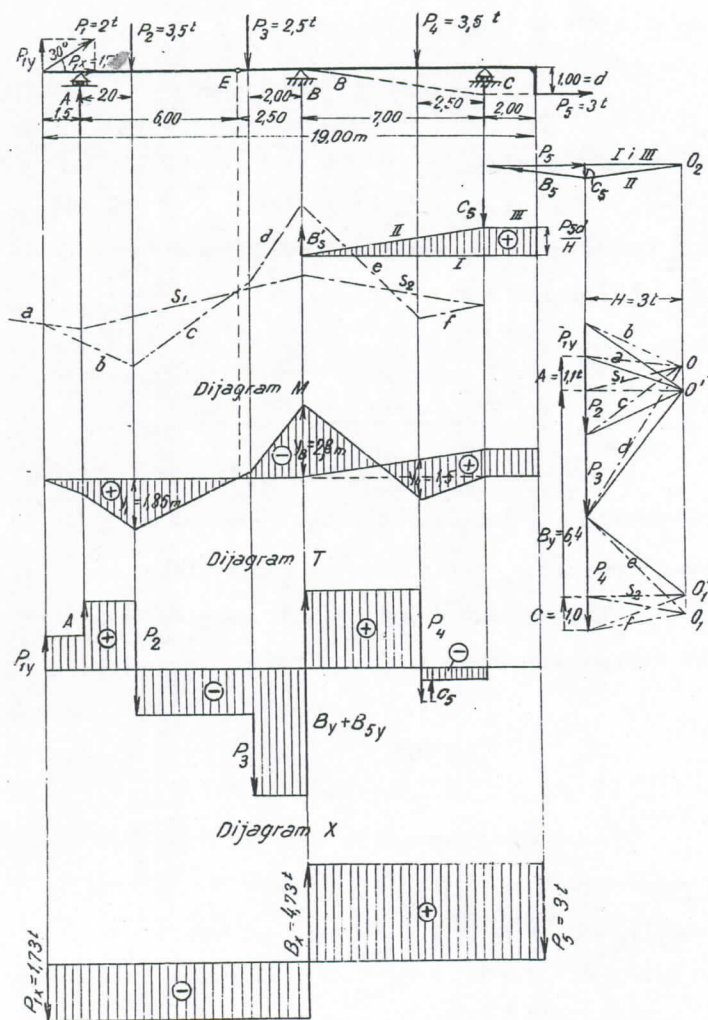
$$(\sum M_B = 0) A \cdot 8,5 + P_{1y} \cdot 10 - P_2 \cdot 6,5 -$$

$$- P_3 \cdot 2 + P_4 \cdot 4,5 - C \cdot 7 - P_5 \cdot 1 = 0$$

$$(M_E = 0) A \cdot 6 - P_{1y} \cdot 7,5 - P_2 \cdot 4 = 0.$$

Iz poslednje jednačine nalazimo, kad zamenimo brojne veličine sila,

$$A = \frac{3,5 \cdot 4 - 2t \sin 30^\circ \cdot 7,5}{6} = \frac{6,5}{6} = 1,08 \text{ t.}$$



Sl. 290

Iz treće nalazimo sad

$$C = \frac{1,08 \cdot 8,5 + 1,0 \cdot 10 - 3,5 \cdot 6,5 - 2,5 \cdot 2 + 3,5 \cdot 4,5 - 3 \cdot 1,0}{7} = 0,60 \text{ t.}$$

i kad nadjene vrednosti za A i C stavimo u drugu jednačinu dobivamo

$$B = 8,5 - 1,08 - 0,60 = 6,82 \text{ t.}$$

Vidimo dakle da su grafički određene reakcije bile dovoljno tačne. Prema tome tačne su i Kulmanove momentne površine a-b-c-d-e-f-s₂-s₁ i I-II-III. Te su površine još samo grafički sabrate i redukovane na horizontalnu apscisu, kao što se vidi na sl. 290.

Opasna preseka imamo tri i njihovi su napadni momenti presek pod silom P₂

$$\text{grafički } M_2 = y_2 \cdot H = 1,85 \text{ m} \cdot 3 \text{ t} = 5,55 \text{ tm.}$$

$$\text{analitički } M_2 = P_{1y} \cdot 3,5 + A \cdot 2 = + 5,66 \text{ tm.}$$

presek nad osloncem B

$$\text{grafički } M_B = - y_B \cdot H = - 2,8 \text{ m} \cdot 3 \text{ t} = - 8,4 \text{ tm.}$$

$$\text{analitički } M_B = - P_4 \cdot 4,5 + C \cdot 7 + P_5 \cdot 3 = - 8,55 \text{ tm.}$$

presek pod silom P₄

$$\text{grafički } M_4 = + y_4 \cdot H = 1,5 \text{ m} \cdot 3 \text{ t} = + 4,5 \text{ tm.}$$

$$\text{analitički } M_4 = + C \cdot 2,5 + 3 \cdot 1 = + 4,5 \text{ tm.}$$

Najveći je dakle momenat (po apsolutnoj vrednosti)

$$M_{\max} = M_B = - 8,55 \text{ tm.}$$

Dijagram T dobiven je najpre projiciranjem pojedinih vertikalnih sila iz plana sila na njihove linije dejstva i to samo iz plana za vertikalno opterećenje. Uticaj sile P₅ na transverzalnu silu uzet je u obzir time, što je naknadno u dijagramu T za vertikalno opterećenje povećana sila B_y za 0,4 t, a sila C za toliko smanjena. To je izvršeno promenom samo jedne linije (tačkasto) u dijagramu T. Kod svih opasnih preseka linija T prolazi kroz nulu.

Dijagram aksijalnih sila pokazuje pritisak (-) na delu grade levo od nepomičnog oslonca B, a zatezanje (+) desno od toga oslonca.

Grafički ćemo odrediti reakcije crtajući Kulmanovu momentnu površinu. Radi toga podelićemo kontinualno opterećenje u lamele, čije su težine, idući s leva na desno:

$$P_1 = \frac{2,50 + 1,75}{2} \cdot 1,25 = 2,66 \text{ t}$$

$$P_2 = \frac{1,75 + 1,00}{2} \cdot 1,25 = 1,72 \text{ t.}$$

$$P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1,625 \cdot 1,0 = 1,62 \text{ t.}$$

$$P_7 = P_8 = P_9 = 1,80 \cdot 1,0 = 1,80 \text{ t.}$$

$$P_{10} = P_{11} = P_{12} = P_{13} = 1,25 \cdot 1,0 = 1,25 \text{ t.}$$

i tim silama crtamo (sa tri proizvoljna pola O_1 , O_2 i O_3 no sa istom polnom razdaljinom $H = 2,0 \text{ t}$) verižni poligon

$$0 - 1 - 2 - 3 - 4 \dots\dots 14 - 15 - 16$$

koji na poznati način zatvaramo završnim linijama s_1 , s_2 i s_3 i istima u planu sila vučemo paralele. Tako nalazimo grafički

$$A = 8,2 \text{ t}$$

$$B = 5,3 \text{ t}$$

$$C = 4,85 \text{ t}$$

$$D = 2,85 \text{ t.}$$

Da bismo dobili dijagram M redukovano na horizontalnu apscisu mogli smo iskoristiti računski određene reakcije i uzeti polove 0 tako da linije s padnu u horizontalan položaj. Umesto toga na sl. 291 dijagram M je nacrtan na taj način što su njegove ordinate - prenošene šestarom iz Kulmanove momentne površine.

Dijagram transverzalnih sila nacrtan je na poznati način. On je na prepustu kod A paraboličan, a na ostalim delovima grede linearan.

Iz dijagrama M i dijagrama T sleduje da postoje 6 opasnih preseka: tri nad osloncima A, B i C, u kojima su momenti negativni i po jedan u svakome otvoru između dva uzastopna oslonca, gde su napadni momenti pozitivni.

Po apsolutnoj vrednosti najveći je napadni momenat u preseku nad osloncem A. Njegova je veličina

grafički

$$M_A = - y_A \cdot H = - 3,15 \text{ m} \cdot 2 \text{ t} = - 6,30 \text{ tm.}$$

analitički

$$M_A = - \frac{2,5 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,50 - 2,5 \cdot 1,0 \cdot \frac{2,5}{2} = - 3,125 - 3,125 = - 6,25 \text{ tm.}$$

3. Zadatak (sl. 292). - Greda ima dva otvora i opterećena je posredno koncentrisanim silama.

Za računsko određivanje reakcija oslonaca A, B i C pišemo tri jednačine

$$(\sum Y = 0) A + B + C - 4,0 - 2,5 - 3,0 - 1,5 = 0$$

$$(\sum M_B = 0) A \cdot 11,4 \text{ m} - 4,0 \text{ t} \cdot 5,8 \text{ m} + 2,5 \text{ t} \cdot 2,5 \text{ m} + 3,0 \text{ t} \cdot 9,1 \text{ m} - 1,5 \text{ t} \cdot 17,1 \text{ m} - C \cdot 19,0 \text{ m} = 0.$$

$$(M_D = 0) C \cdot 15,2 \text{ m} - 3,0 \text{ t} \cdot 5,3 \text{ m} - 1,50 \text{ t} \cdot 13,3 \text{ m} = 0$$

a odatle nalazimo

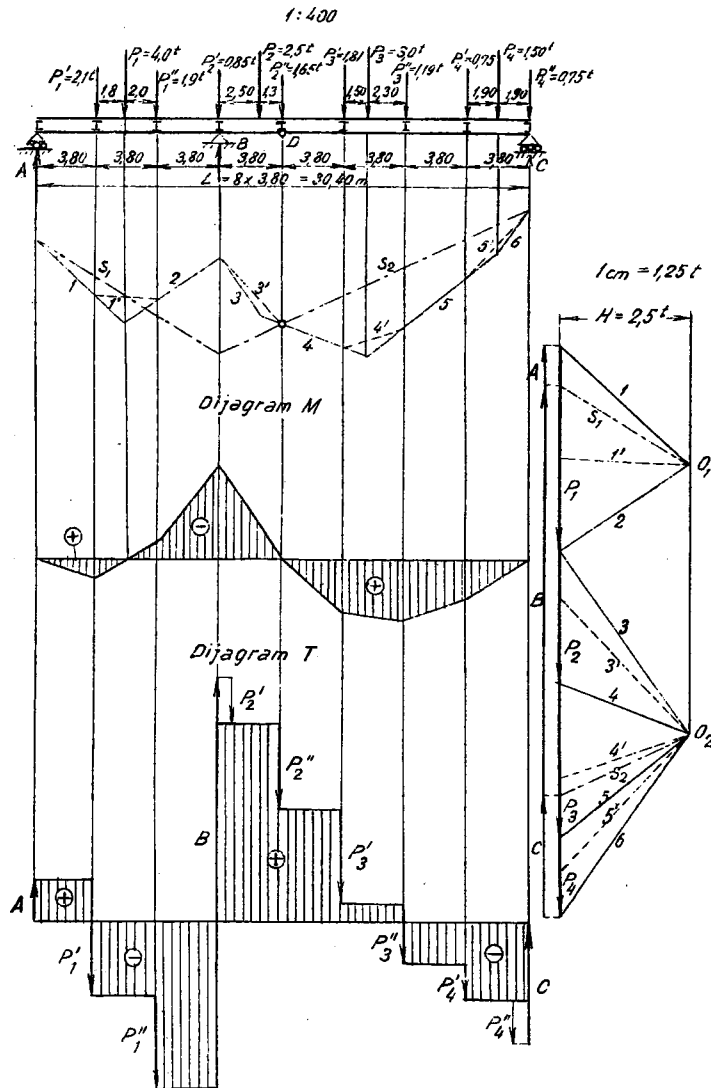
$$A = 0,78 \text{ t}$$

$$B = 7,86 \text{ t}$$

$$C = 2,36 \text{ t}$$

Pri tome smo uzeli sile P nerazložene u čvorne terete jer je za reakcije oslonaca indiferentno, da li je opterećenje grede posredno ili neposredno.

Grafički nalazimo reakcije oslonaca crtanjem zatvorenog verižnog poligona 1-2-3-4-5-6- s_2 - s_1 i dobivamo



Sl. 292

A = 0,8 t.

B = 7,9 t.

C = 2,3 t

Ovaj verižni poligon ne može se upotrebiti kao momentna povr-

šina, dok se za svako opterećeno polje ne povuku završne linije (1', 3', 4' i 5' u sl. 292) i time opterećenje (P) ne razloži u čvrne terete (P' i P'') koji stvarno napadaju na Gerberovu gredu samo u čvorovima. Za čvrne terete nalazimo grafički

$$P_1' = 2,20 \text{ t}; \quad P_1'' = 1,80 \text{ t.}$$

$$P_2' = 0,87 \text{ t}; \quad P_2'' = 1,63 \text{ t.}$$

$$P_3' = 1,80 \text{ t}; \quad P_3'' = 1,20 \text{ t.}$$

$$P_4' = 0,75 \text{ t}; \quad P_4'' = 0,75 \text{ t.}$$

a računom

$$P_1' = \frac{4,0 \text{ t} \cdot 2,0 \text{ m}}{3,8 \text{ m}} = 2,1 \text{ t}; \quad P_1'' = 4,0 \text{ t} - 2,1 \text{ t} = 1,9 \text{ t.}$$

$$P_2' = \frac{2,5 \text{ t} \cdot 1,3 \text{ m}}{3,8 \text{ m}} = 0,85 \text{ t}; \quad P_2'' = 2,5 \text{ t} - 0,85 \text{ t} = 1,65 \text{ t.}$$

$$P_3' = \frac{3,0 \text{ t} \cdot 2,3 \text{ m}}{3,8 \text{ m}} = 1,81 \text{ t}; \quad P_3'' = 3,00 \text{ t} - 1,81 \text{ t} = 1,19 \text{ t.}$$

$$P_4' = P_4'' = \frac{1}{2} P_4 = 0,75 \text{ t.}$$

Uzimajući ove terete u obzir dobivamo grafički momentnu površinu 1-1'-2-3'-4-4'-5-5'-s₂-s₁ koja je, - prenošenjem ordinata od horizontalne apscise, - dala dijagram M na sl. 292.

Tako isto pri crtanju dijagrama T uzete su kao spoljne sile za Gerberovu gredu reakcije oslonaca i čvrni tereti.

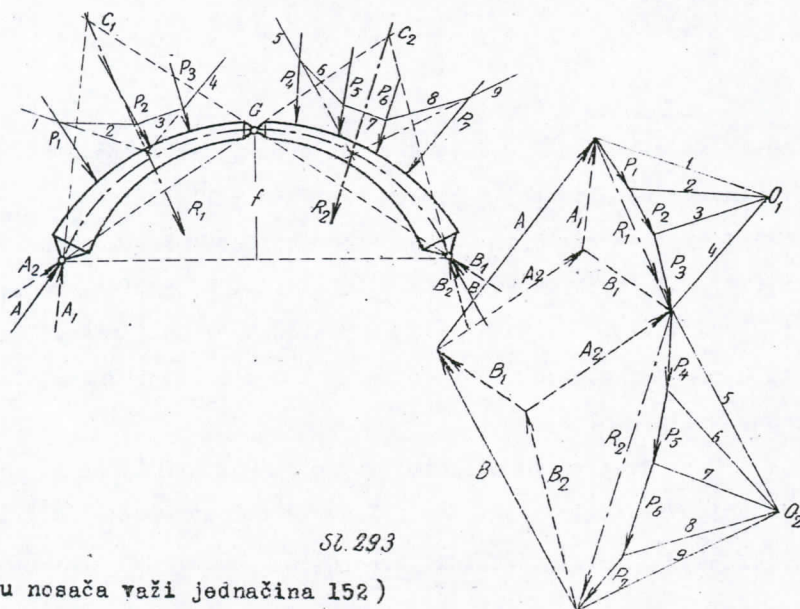
Iz sl. 292 vidi se da kod ove grede postoje tri opasna preseka: jedan sa negativnim napadnim momentom (nad osloncem B) i dva sa pozitivnim (u otvorima AB i BC). Apsolutno najveću vrednost napadnog momenta dobivamo za presek nad osloncem B i za njegovu veličinu nalazimo

29. Odredjivanje reakcija oslonaca.

a) Grafičke metode.

Zbog velike praktične važnosti ovoga zadatka, pokažemo tri načina za grafičko odredjivanje reakcija luka sa tri zgloba.

I. Način (sl. 293). - Iz ranije je poznato da za ravno-



Sl. 293

težu nosača važi jednačina 152)

$$M_G = 0$$

a ona se grafički izražava uslovom: da uvek u slučaju ravnoteže napadna sila za zglob G (R_G = rezultanta svih spoljnih sila levo ili desno od zgloba) mora prolaziti kroz sam zglob. Ako proizvoljno opterećenje lučnog nosača ($P_1 - P_7$ na sl. 293) podelimo u dva opterećenja: jedno ($P_1 - P_3$) levo, a drugo ($P_4 - P_7$) desno od zgloba G, i po principu superpozicije dejstava posmatramo zasebno uticaj svakoga od tih dva opterećenja na stru-

grafički $M_B = - y_B \cdot H = - 5,80 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ t} = - 14,50 \text{ tm}$.

analitički..... $M_B = A \cdot 11,4 \text{ m} - P_1 \cdot 5,8 \text{ m} = 8,9 - 23,2 = - 14,3 \text{ tm}$.

V. Luk sa tri zgloba.

Ovaj nosač složen je iz dve krute ploče, vezane medju sobom i sa osloncima pomoću nepomičnih zglobova. Osovina nosača (linija koja spaja težišta svih preseka) obično je kriva (krug, parabola), zbog čega je nosač i nazvat lukom ili lučnim nosačem.*) Po tome se ovaj sistem nosača, što se tiče oblika, razlikuje od nosača sistema grede koji imaju većinom pravolinijsku osovinu. Ali nosač sistema luka sa tri zgloba ne mora uvek imati oblik krive linije, već se može desiti da svaka od krutih ploča iz kojih je nosač sastavljen ima pravolinijsku osovinu. U tome slučaju moguće je, pošto se odrede reakcije oslonaca celog sistema, i luk sa tri zgloba - u pogledu unutarnjih sila - tretirati na dosadašnji način, t.j. rasčlaniti ga u dve grede i odredjivati za njih: transverzalne sile, aksijalne sile i napadne momente isto onako, kako je pokazano za nosače sistema grede. U slučaju kad je nosač krivolinijskog oblika ta metoda rada postaje suviše komplikovana i nepraktična, te umesto nje upotrebljavamo drugu metodu za odredjivanje uticaja opterećenja na naponu u preseccima nosača. To je metoda pomoću tzv. potporne linije, koju ćemo u sledećem upoznati.

*) Tip nosača ne određuje oblik njegove osovine nego određuju njegova ležišta. Greda može imati i oblik luka.

ranje reakcija oslonaca A i B, naćićemo ovo:

1) Kad zanemarimo opterećenje desno od G (sile $P_4 - P_7$) kao i da ne postoji, onda će od spoljnih sila desno od zgloba G ostati samo reakcija B_1 ; ona je dakle u tome slučaju napadna sila za zglob G ($R_G = B_1$) i zato u slučaju ravnoteže nosača ona mora prolaziti kroz zglob G, dakle mora imati liniju dejstva BG. Sem toga, kad opterećenje levo od zgloba G (sile $P_1 - P_3$) zamenimo jednom rezultantom R_1 , imaćemo na lučnom nosaču svega tri sile: R_1 , A_1 i B_1 koje - da bi bilo ravnoteže - moraju činiti zatvoren trougao i seći se u istoj tački C_1 . Na taj način dobivamo reakcije oslonaca A_1 i B_1 koje drže ravnotežu samom opterećenju levo od zgloba G.

2) Ako sad zanemarimo opterećenje levo od G (sile $P_1 - P_3$), a sile desno od G ($P_4 - P_7$) zamenimo njihovom rezultantom R_2 , dobićemo na sličan način reakcije A_2 i B_2 koje izaziva opterećenje izraženo silom R_2 . Sad je $R_G = A_2$ jedina spoljna sila na nosaču levo od G te mora imati liniju dejstva AG, mora se sa R_2 i B_2 seći u istoj tački (C_2) i činiti sa njima zatvoren trougao.

3) Kad je na nosaču celokupno opterećenje ($P_1 - P_7$), onda se javljaju na svakom osloncu obe reakcije koje smo našli pod 1) i 2), dakle

na osloncu A reakcije A_1 i A_2
 " " B " B_1 " B_2

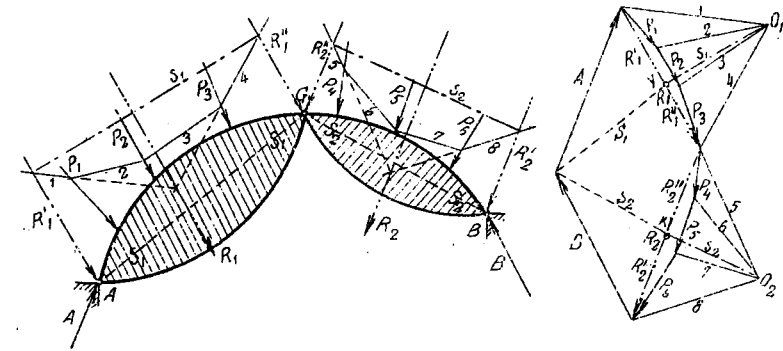
a njihove rezultante A i B koje se dobivaju, na način pokazan u planu sila sl. 293, geometrijskim sabiranjem komponenata:

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \\ \vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 171).$$

Jesu tražene reakcije luka sa tri zgloba usled datog optereće-

nja $P_1 - P_7$.

II. Način (sl. 294). - Terete levo od G zamenimo nji-



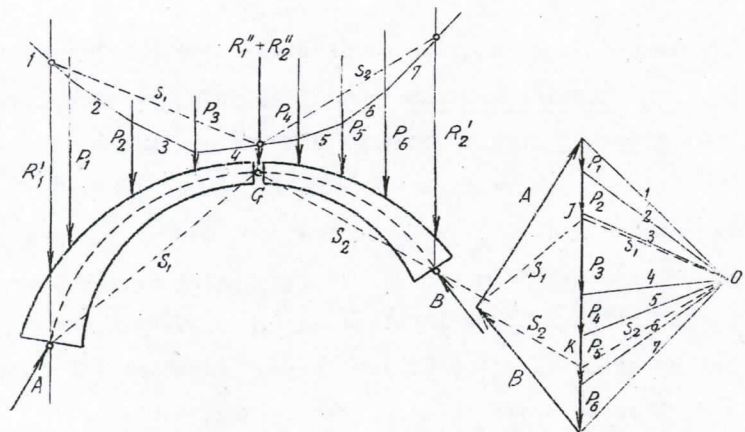
Sl. 294

novom rezultantom R_1 , a terete desno od G rezultantom R_2 , pa zatim ove rezultante, - pomoću verižnih poligona: 1-2-3-4- s_1 i 5-6-7-8- s_2 , - razložimo u njima samima paralelne komponente R_1' , R_1'' , R_2' i R_2'' koje napadaju na zglobove A, G i B. Rezultantu od R_1' i R_2'' razložimo u sile S_1 i S_2 u pravcu GA i GB i najzad nalazimo otpor A kao rezultantu sile R_1' i S_1 , a otpor B kao rezultantu sile R_2' i S_2 .

Ovaj način naročito je zgodan za slučaj da je opterećenje vertikalno (sl. 295). Tada se obe komponente R_1'' i R_2'' poklapaju u istoj vertikali kroz G, te imamo na svakome od zglobova A, B i G po tri sile u ravnoteži. Prvo odredjujemo u planu sila

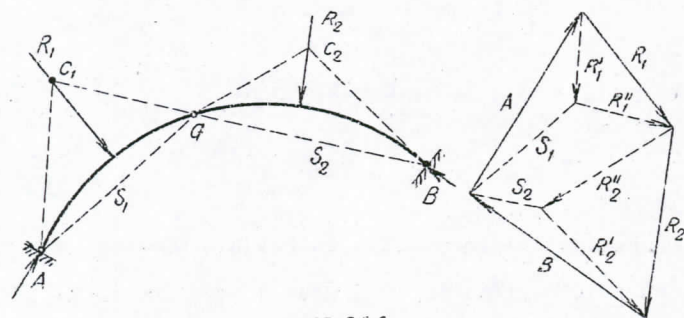
$$JK = R_1'' + R_2''$$

i napone S_1 i S_2 koji stoje u ravnoteži na zglobu G sa tom silom, a zatim prelazimo na zglobove A i B i odredjujemo otpore A i B.



Sl. 295

III. Način (sl. 296).- Dok po drugom načinu rezultante opterećenja levo (R_1) i desno (R_2) od zgloba G razlažemo u



Sl. 296.

paralelne komponente kroz zglobove A, B i G, dotle po trećem načinu te komponente kroz zglobove uzimamo u proizvoljnim pravcima. Prvo biramo na sili R_1 proizvoljnu tačku C_1 i u njoj razlažemo silu R_1 u komponente R_1' i R_1'' u pravcima C_1A i C_1G , a zatim razlažemo silu R_2 u komponente u pravcima C_2B i C_2G . Time je celokupno opterećenje lučnog nosača zamenjeno silama koje napadaju na same zglobove. Najzad crtamo za zglob G zatvoren četvorougao sila R_1'' , R_2'' , S_2 i S_1 iz koga određujemo veličine napona S_1 i S_2 , a za zglobove A i B odgovarajuće trouglo sile

čime su nadjene reakcije oslonaca A i B za luk sa tri zgloba.

b) Analitičke metode.

Proizvoljno opterećenje (sl. 297).- U opštem slučaju

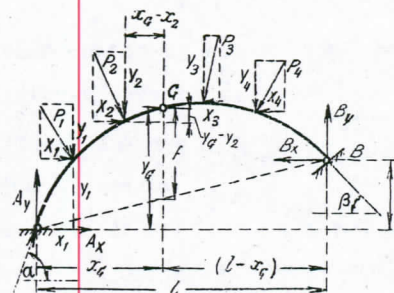
opterećenja primenjujemo za određivanje 4 nepoznate reakcije: A_x , A_y , B_x i B_y sistem od 4 jednačine:

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum M = 0$$

$$M_G = 0$$



Sl. 297

Radi toga razlažemo i date sile $P_1 - P_4$ u horizontalne i vertikalne komponente X i Y, pa gornje jednačine glase, prema oznakama i smerovima sile u sl.297 :

$$A_x + B_x = \sum_{i=1}^4 X_i$$

$$A_y + B_y = \sum_{i=1}^4 Y_i$$

$$B_y \cdot l + B_x \cdot h = \sum_{i=1}^4 X_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^4 Y_i \cdot x_i$$

$$A_y \cdot x_G - A_x \cdot y_G = \sum_{i=1}^2 X_i (y_G - y_i) + \sum_{i=3}^4 Y_i (x_G - x_i)$$

.....172 a).

Iz jednačina 172 a) možemo izračunati komponente reakcija A_x , A_y , B_x i B_y pa onda dobivamo

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

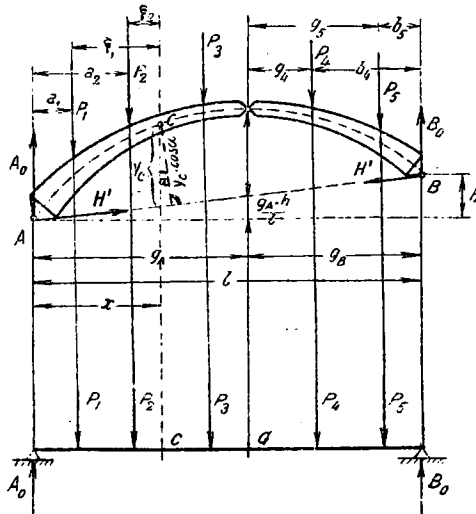
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

..... 172 b)

a pravci reakcija određeni su kad nadjemo uglove koje one zaklapaju sa X-osom:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \alpha &= \frac{A_y}{A_x} \\ \operatorname{tang} \beta &= \frac{B_y}{B_x} \end{aligned} \right\} \dots\dots 172 \text{ c}).$$

Vertikalni tereti (sl. 298). - Kad je opterećenje da-



Sl. 298

bivamo za određivanje vertikalnih komponenta reakcija jednačine identične onima kod proste grede istog raspona i opterećenja (sl. 298 a):

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{\sum P b}{l} \\ B_0 &= \frac{\sum P a}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots 173 \text{ a}).$$

Ako je nagib linije AB prema horizontali α , onda je veličina horizontalnih komponenta reakcija A_x i B_x određena relacijom

$$A_x = B_x = H' \cos \alpha = H \quad \dots\dots 173 \text{ b}).$$

gde se pod H podrazumeva horizontalni potisak lučnog nosača.

Napadni momenat za težište jednog proizvoljnog preseka C lučnog nosača dobivamo u ovome slučaju

$$M_c = A_0 \cdot x - P_1 \xi_1 - P_2 \xi_2 - H' \cdot y_c \cos \alpha$$

Prva tri člana zbira na desnoj strani ove jednačine potpuno odgovaraju napadnom momentu za vertikalni presek C proste grede AB istoga raspona i opterećenja (sl. 296a) i ako taj momenat označimo sa M_{oc} i uvedemo prema jednačini 173 b) $H' \cos \alpha = H$, biće za proizvoljan presek lučnog nosača

$$M_c = M_{oc} - H \cdot y_c \quad \dots\dots 174)$$

gde je y_c vertikalno rastojanje težišta preseka od linije AB.

Napadni momenat u zglobu G mora biti

$$M_G = 0$$

dakle

$$0 = M_{oG} - H f$$

a odavde

$$H = A_x = B_x = \frac{M_{oG}}{f} \quad \dots\dots 173 \text{ c}).$$

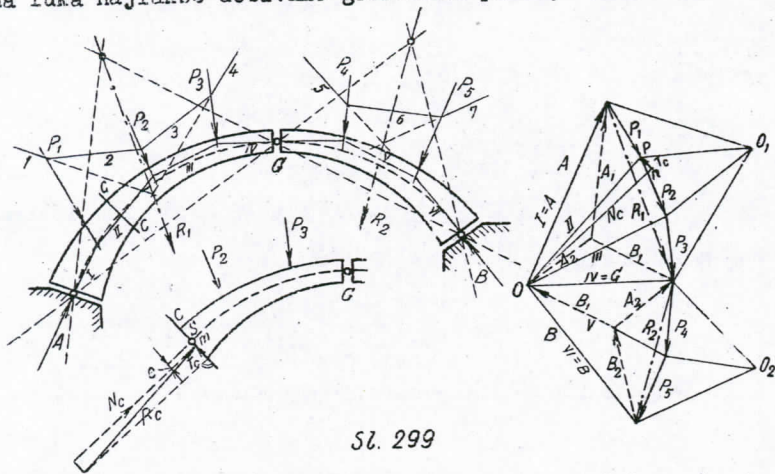
t.j. horizontalne komponente reakcija dobivamo, kad napadni momenat proste grede AB za presek G podelimo sa strelom f lučnog nosača.

Totalni otpori A i B, kao i njihovi pravci prema horizontali određuju se pomoću jednačina 172 b) i 172 c).

30. Naponi u lučnom nosaču.

Već je ranije pomenuto da kod lučnih nosača vladaju u svima preseccima napadni momenti (sem u zglobovima gde je $M = 0$), transverzalne sile i aksijalne sile. Njih možemo odrediti i grafičkim i analitičkim putem.

Proizvoljno opterećenje (grafička metoda). - Kad je opterećenje nosača proizvoljno, onda napone u pojedinim prese-cima luka najlakše dobivamo grafičkim putem, v.sl. 299. Pošto



Sl. 299

na poznati način odredimo reakcije oslonaca A i B, uzimamo u planu sila prelomnu tačku izmedju reakcija A i B za pol O i crtamo teretima $P_1 - P_5$ verižni poligon I-II-III-IV-V-VI. Ovaj poligon mora prolaziti kroz sva tri zgloba jer smo otpore A i B već tako odredili, da oni sa datim silama $P_1 - P_5$ stoje u ravnoteži. Sa silama A i B jednozračno je odredjen pol O sa kojim dobijamo jedini verižni poligon koji prolazi kroz tri tačke A, G i B (vidi str.312). Sve strane toga poligona su napadne linije rezultante svih sila koje levo ili desno od preseka leže.

Zbog ove osobine verižnog poligona I-II-III-IV-V-VI, ovaj se poligon naziva i poligon rezultanata (rezultantni poligon).

Ako sad želimo za presek C, upravnan na osu luka, naći napadni momenat, transverzalnu i aksijalnu silu, uzećemo (sl. 299 a) napadnu silu R_c za taj presek i razložiti je u nje-

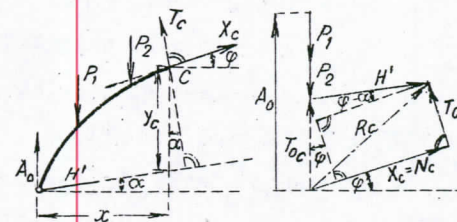
noj napadnoj tački m u dve komponente: jednu ($N_c = O_n$) u pravcu paralelnom tangenti luka u težištu S preseka i drugu ($T_c = np$) u pravcu normale na luk u tački S. Prva sila (N_c) javlja se kao ekscentrični pritisak na presek C, jer napada na razmaku e od težišta preseka. Kad je redukujemo na težište S dobijamo tri veličine potrebne za odredjivanje unutarnjih sila u preseku: aksijalnu silu N_c , transverzalnu silu T_c i napadni momenat $M_s = eN_c$.

Vertikalni tereti (analitička metoda). - Pri vertikalnom opterećenju već smo našli za odredjivanje napadnog momenta jednačinu 174), koja glasi kad zamenimo H iz jednačine 173

$$M_c = M_{oc} - M_{og} \frac{y_c}{f} \quad \dots \dots 174 \text{ bis}).$$

gde su M_{oc} i M_{og} napadni momenti proste grede istog raspona i opterećenja.

Za odredjivanje veličine transverzalne sile T_c i aksijalne sile X_c u proizvoljnom preseku C lučnog nosača izvešćemo obrasce prema.sl. 300 . Da bi smo i ovde ostali u vezi



Sl. 300

sa obrascima koji važe za prostu gredu, složićemo prvo samo vertikalne komponente spoljnih sila levo od preseka C (A_0, P_1 i P_2) i tako dobiti veličinu sile T_{oc} identičnu transverzalnoj sili za vertikalni presek C proste grede AB istog raspona i opterećenja. Kad ovu silu T_{oc} dalje složimo sa komponentom H' reakcije A dobićemo rezultantu svih spoljnih sila levo od preseka C, a to je napadna sila R_c za presek C lučnog nosača. Njene kom-

ponente: tangencijalna (N_C) i transverzalna T_C daju nam veličine aksijalne (X_C) i transverzalne (T_C) sile za presek C. Prema planu sila u sl. 300 sleduje da je za presek C lučnog nosača:

$$\left. \begin{aligned} \text{aksijalna sila } X_C &= N_C = T_{0C} \sin \varphi + H' \cos(\varphi - \alpha) \\ \text{transverz. " } T_C &= T_{0C} \cos \varphi - H' \sin(\varphi - \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots 175)$$

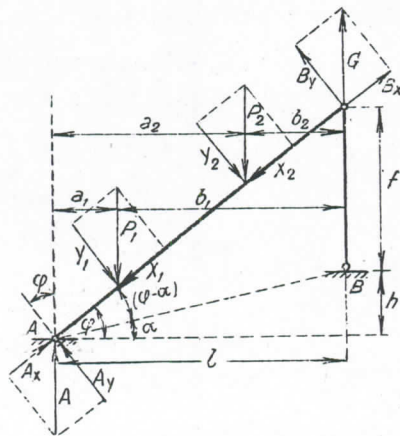
gde je, prema ranijem

$$H' = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{M_{0G}}{f \cdot \cos \alpha} \quad \dots\dots 175 \text{ a).}$$

Jednačine 174) i 175) možemo naročito onda korisno primeniti, kad je lučni nosač sastavljen iz krutih ploča sa pravolinijskim osovina, jer je tada ugao φ za celu jednu ploču konstantan.

U specijalnom slučaju kad je ploča BG neopterećena i

kad prava BG stoji vertikalno (sl. 301) nalazimo da se luk sa tri zgloba AGB pretvara u prostu (kosu) gredu AG, jer tada ploča BG nije ništa drugo do ležišni štap, ekvivalentan pomičnom zglobu na osloncu G. Da je ovo tačno uveravamo se primenom jednačina 173, 174) i 175) na ovaj slučaj. Iz jednačine 173)



Sl. 301

$$H = \frac{M_{0G}}{f}$$

sleduje, kako je

$$M_{0G} = 0$$

da u ovome slučaju horizontalni potisak i ne postoji već da su obe reakcije vertikalne i to prema sl. 301

$$A = A_0 = \frac{\sum P b}{l}; \quad B = B_0 = \frac{\sum P a}{l}$$

Jednačina 174) daje za ovaj slučaj

$$M_C = M_{0C} - H \cdot y_C = M_{0C}$$

jer je $H = 0$.

Najzad za transverzalnu i aksijalnu silu dobivamo primenom jednačina 175) na ovaj slučaj

$$X_C = T_{0C} \sin \varphi$$

$$T_C = T_{0C} \cos \varphi$$

a ta je isto kao i kod proste grede AG u kosom položaju.

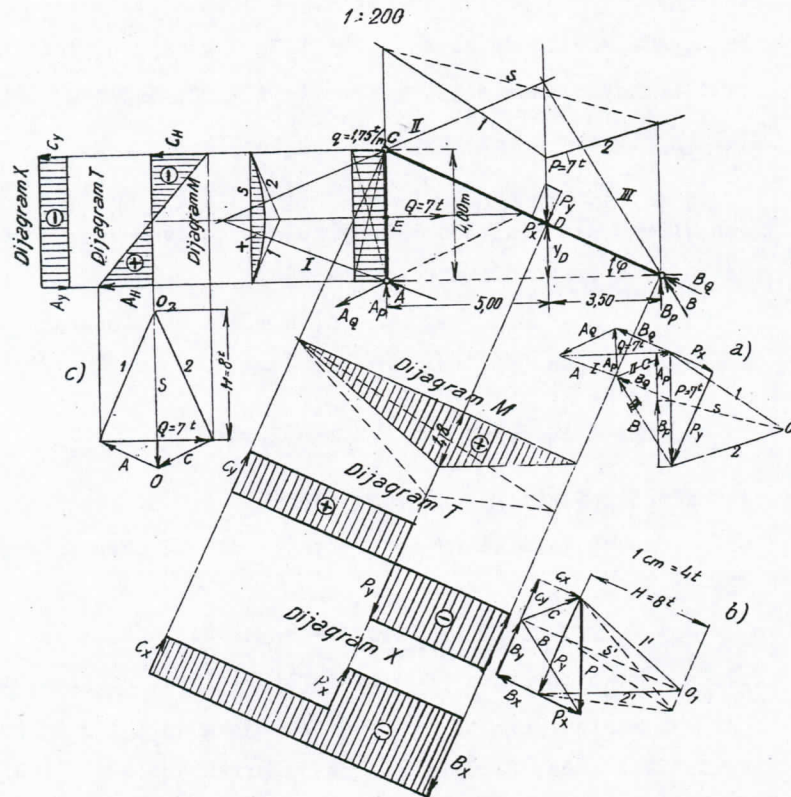
31. Zadaci za vežbanja.

1. Zadatak (sl. 302). - Lučni nosač sastoji se iz dve krute ploče AC i BC sa pravolinijskim osovina; opterećen je: na delu AC horizontalnim jednako podeljenim opterećenjem (pritisak vetra) od $q = 1,75 \text{ t/m'}$, a na delu BC jednom vertikalnom koncentrisanom silom $P = 7,0 \text{ t}$.

Grafičko određivanje reakcija oslonaca izvršeno je po principu superpozicije dejstava i to na planu sila sl. 302a: prvo su nadjene reakcije A_q i B_q koje odgovaraju opterećenju same ploče AC, a zatim (kao kod proste grede CB) i reakcije A_p i B_p koje izaziva sam teret P što dejstvuje na ploči BC. Slaganjem ovih delimičnih reakcija na sl. 302-a) dobiveno je, prema jednačinama 171):

$$\vec{A} = \vec{A}_p + \vec{A}_q = 3,7 \text{ t.}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_q = 6,7 \text{ t.}$$



Sl. 302

Zatim je nacrtan rezultatni poligon I-II-III, koji prolazi kroz sva tri zgloba i tako određena sila

$$II = C = 3,90 \text{ t.}$$

kojom ploče AC i BC jedna na drugu pritiskuju kroz zglob C.

Radi kontrole reakcije A i B određene su i analitičkim putem pomoću 4 jednačine:

$$(\sum H = 0) \quad A_H - Q + B_H = 0$$

$$(\sum V = 0) \quad A_V + B_V - P = 0$$

$$(\sum M_B = 0) \quad A_V \cdot 8,5 + Q \cdot 2,0 - P \cdot 3,5 = 0$$

$$(M_C = 0) \quad A_H \cdot 4,0 - Q \cdot 2,0 = 0.$$

Kad unesemo u ove jednačine $P = 7 \text{ t}$; $Q = 1,75 \text{ t/m} \cdot 4,0 \text{ m} = 7 \text{ t}$. i rešimo ih, nalazimo

$$A_H = 3,5 \text{ t}; \quad A_V = 1,18 \text{ t}; \quad A = \sqrt{3,5^2 + 1,18^2} = 3,69 \text{ t.}$$

$$B_H = 3,5 \text{ t}; \quad B_V = 5,82 \text{ t}; \quad B = \sqrt{3,5^2 + 5,82^2} = 6,79 \text{ t.}$$

Iz plana sila, sl. 302 a, vidimo da je

$$C_H = B_H$$

$$C_V = A_V$$

dakle

$$C = \sqrt{C_H^2 + C_V^2} = \sqrt{3,5^2 + 1,18^2} = 3,69 \text{ t.}$$

što se sve dobro slaže sa grafičkim radom.

Čim su nadjene reakcije oslonaca celog sistema A i B i pritisak u zglobu C, onda je moguće nosač raščlaniti u dve odvojene krute ploče: AC i BC i za ove odrediti dijagrame M, T i X kao kod prostih greda, opterećenih poznatim silama. Radi toga nacrtani su zasebni planovi sila za svaku od ploča BC i AC (sl. 302 b i sl. 302 c) na taj način, što su iz opšteg plana sila (sl. 302 a) izuzete za svaku ploču samo one sile koje na nju napadaju.

a) Ploča BC. - Za ovu ploču spoljne su sile: P, B i C koje u planu sila sl. 302 b čine zatvoren trougao. Kad ih razložimo u komponente u pravcu osovine CB (koju uzimamo za x-osu) i normalno na taj pravac, vidimo da P_Y , C_Y i B_Y stvaraju: napadni momenat i transverzalnu silu, a sile: P_X , C_X i B_X dejstvuju kao aksijalni pritisak. Dijagrami za M, T i X za deo BC lučnog nosača nacrtani su u sl. 302 na poznati način. Maksimalni momenat javlja se u preseku pod teretom P i njegova je veličina prema grafičkoj konstrukciji

$$M_{\max} = y_{\max} \cdot H = 1,8 \text{ m} \cdot 8 \text{ t} = 14,4 \text{ tm.}$$

Analički nalazimo ovaj momenat primenom jednači-

na 174):

$$M_D = M_{0D} - B_H \cdot y_D$$

gde je prema sl. 302:

$$y_D : 4,0 = 3,5 : 8,5$$

dakle

$$y_D = \frac{14,0}{8,5} = \sim 1,65 \text{ m.}$$

Jednačina 174) glasi prema tome za naš slučaj

$$M_D = B_V \cdot 3,5 \text{ m} - B_H \cdot 1,65 \text{ m.}$$

$$M_D = 5,82 \text{ t} \cdot 3,5 \text{ m} - 3,5 \text{ t} \cdot 1,65 \text{ m} = 14,60 \text{ tm.}$$

što se dobro slaže sa grafičkim radom.

Za transverzalnu i aksijalnu silu u preseku sasvim blizu desno od D dobivamo primenom jednačina 175), stavljaјуći u njih za naš slučaj

$$T_{0D} = B_V$$

$$\alpha = 0$$

$$H' = \frac{B_H}{\cos \alpha} = B_H = 3,5 \text{ t.}$$

$$\tan \varphi = \frac{4,0}{8,5} = 0,47, \text{ dakle } \varphi = 25^\circ 15'$$

i to za transverzalnu silu

$$T_D = B_V \cdot \cos 25^\circ 15' - B_H \cdot \sin 25^\circ 15'$$

$$T_D = 5,82 \cdot 0,904 - 3,5 \cdot 0,426$$

$$T_D = 3,77 \text{ t (grafički: } T_D = 3,50 \text{ t).}$$

a za aksijalnu silu

$$X_D = B_V \cdot \sin 25^\circ 15' + B_H \cdot \cos 25^\circ 15'$$

$$X_D = 5,82 \cdot 0,426 + 3,5 \cdot 0,904.$$

$$X_D = 5,64 \text{ t (grafički: } X_D = 5,50 \text{ t).}$$

b) Ploča AC. - Na ovoj ploči su u ravnoteži sile: A, Q

i C koje čine zatvoren trougao u planu sila sl. 302 c. Kad A

i C razložimo u pravce AC (koji sad uzimamo za x-osu) i normalno na AC, vidimo da sile A_H , Q i C_H stvaraju u ploči AC momente i transverzalne sile, a da sile A_V i C_V dejstvuju kao aksijalni pritisak u tome delu lučnog nosača.

Dijagrami za M, T i X za ploču AC nacrtani su na toj osnovi. M_{\max} za ovaj deo lučnog nosača dobivamo na sredini dužine AC i to iz grafičke konstrukcije

$$M_E = M_{\max} = y_{\max} \cdot H = 0,45 \text{ m} \cdot 8 \text{ t} = 3,60 \text{ tm.}$$

a analitički za isti taj presek

$$M_E = A_H \cdot 2,0 \text{ m} - \frac{Q}{2} \cdot 1,0 \text{ m} = 7,0 - 3,5 = 3,50 \text{ tm.}$$

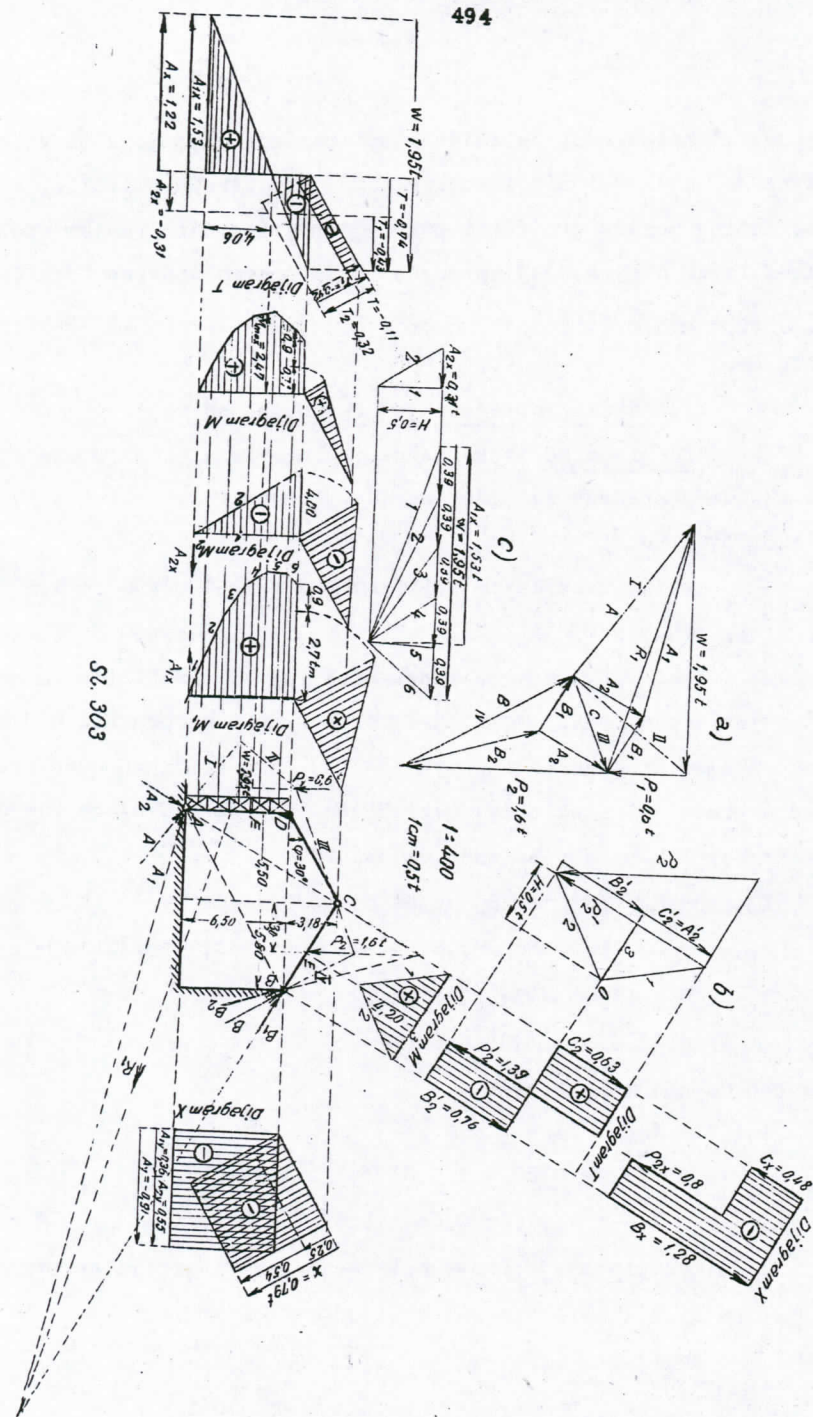
Jednačine 174) i 175) ne mogu se primeniti na ploču AC, jer one važe samo za vertikalno opterećenje, dok je ovde sila Q horizontalna.

2. Zadatak (sl. 303). - Nosač se sastoji iz dve krute ploče, od kojih jedna (BC) ima pravolinijsku osovinu, a druga (AC) je sastavljena od dva pravolinijska dela (AD i DC), kruto vezana kod tačke D. Opterećenje je prikazano u sl. 303.

I. Reakcije oslonaca. - Grafičko odredjivanje reakcija A i B i pritiska u zglobo C izvršeno je na isti način kao i u prošlom zadatku, a pomoću plana sila na sl. 304 a. Nadjeno je grafički

$$A = 1,5 \text{ t}; \quad B = 1,5 \text{ t}; \quad C = III = 0,8 \text{ t.}$$

Kako je pri daljem rešavanju ovoga zadatka tražen zasebno uticaj opterećenja (R_1) levo od zgloba C, a zasebno uticaj opterećenja (P_2) desno od zgloba C, to je potrebno, - radi kontrole takvog grafičkog postupka, - da se računski odrede i same reakcije oslonaca posebno za opterećenje levo od C a posebno za opterećenje desno od C. Tako je nadjeno računom primenom



St. 303

jednačina 172):

1) Za samo opterećenje (R_1) levo od C :

$$(\sum X = 0) A_{1x} + B_{1x} - W = 0$$

$$(\sum Y = 0) A_{1y} + B_{1y} - P_1 = 0$$

$$(\sum M_A = 0) 11 B_{1y} + 6,5 B_{1x} + P_1 \cdot 1,5 - W \frac{6,5}{2} = 0$$

$$(M_C = 0) 5,5 B_{1y} - 3,18 B_{1x} = 0.$$

Zamenom $W = 0,3 \text{ t/m} \cdot 6,5 \text{ m} = 1,95 \text{ t}$ i $P = 0,60 \text{ t}$ u o-

ve jednačine i njihovim rešavanjem dobivamo

$$A_{1x} = 1,53 \text{ t}; A_{1y} = 0,36 \text{ t}; A_1 = \sqrt{1,53^2 + 0,36^2} = 1,57 \text{ t}.$$

$$B_{1x} = 0,42 \text{ t}; B_{1y} = 0,24 \text{ t}; B_1 = \sqrt{0,42^2 + 0,24^2} = 0,49 \text{ t}.$$

$$C_{1x} = 0,42 \text{ t}; C_{1y} = 0,24 \text{ t}; C_1 = \sqrt{0,42^2 + 0,24^2} = 0,49 \text{ t}.$$

2) Za samo opterećenje (P_2) desno od C

$$(\sum X = 0) A_{2x} - B_{2x} = 0$$

$$(\sum Y = 0) A_{2y} + B_{2y} - P_2 = 0$$

$$(\sum M_B = 0) 11 A_{2y} - 6,5 A_{2x} - P_2 \cdot 2,5 = 0$$

$$(M_C = 0) 5,5 A_{2y} - 9,68 A_{2x} = 0$$

Kad u ove jednačine uvedemo $P_2 = 1,6 \text{ t}$ i rešimo ih nalazimo

$$A_{2x} = 0,31 \text{ t}; A_{2y} = 0,54 \text{ t}; A_2 = \sqrt{0,31^2 + 0,54^2} = 0,63 \text{ t}.$$

$$B_{2x} = 0,31 \text{ t}; B_{2y} = 1,05 \text{ t}; B_2 = \sqrt{0,31^2 + 1,05^2} = 1,1 \text{ t}.$$

$$C_{2x} = 0,31 \text{ t}; C_{2y} = 0,54 \text{ t}; C_2 = \sqrt{0,31^2 + 0,54^2} = 0,63 \text{ t}.$$

3) Za totalno opterećenje

$$A_x = A_{1x} - A_{2x} = 1,53 - 0,31 = 1,22 \text{ t}.$$

$$A_y = A_{1y} + A_{2y} = 0,36 + 0,54 = 0,90 \text{ t}.$$

$$A = \sqrt{1,22^2 + 0,90^2} = 1,52 \text{ t};$$

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = 0,42 + 0,31 = 0,73 \text{ t}.$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = 0,24 + 1,05 = 1,23 \text{ t}.$$

$$B = \sqrt{0,73^2 + 1,23^2} = 1,49 \text{ t};$$

$$C_x = C_{1x} + C_{2x} = 0,42 + 0,31 = 0,73 \text{ t}.$$

$$C_y = C_{2y} - C_{1y} = 0,54 - 0,24 = 0,23 \text{ t}.$$

$$C = \sqrt{0,73^2 + 0,23^2} = 0,79 \text{ t}.$$

Ovi se rezultati dobro slažu sa grafičkim radom.

II. Aksijalne i transverzalne sile. - Da bi nam bio što prostiji i jasniji uticaj opterećenja na napone u lučnom nosaču, tražićemo odvojeno aksijalne i transverzalne sile usled opterećenja (R_1) levo od C i odvojeno od opterećenja (P_2) desno od C, pa ćemo ih najzad grafički sabrati po načelu superpozicije dejstava.

1.) Za samo opterećenje (R_1) levo od C

Kod ploče BC nalazimo da je aksijalna sila $X_{1BC} = -B_1 = -0,49$ t (pritisak) po celoj dužini BC konstantna, a transverzalna sila $T_{1BC} = 0$ takodje po celoj dužini, jer su za ovaj slučaj opterećenja na ploči BC jedine spoljne sile $C_1 = B_1$ koje se poklapaju sa osovinom ploče BC.

Kod ploče AC moramo zasebno posmatrati deo AD a zasebno deo DC. Aksijalna sila na celom delu AD je $X_{1AD} = -A_{1y} = -0,36$ t (pritisak) a transverzalna sila kod oslonca A je $T_{1A} = A_{1x} = +1,53$ t pa zatim od A do D linearno opada po zakonu

$$T_{1AD} = A_{1x} - W \cdot y$$

tako da u preseku kod D iznosi

$$T_{1D} = A_{1x} - W = +1,53 \text{ t} - 1,95 \text{ t} = -0,42 \text{ t} = C_{1x}$$

Na delu DC su i aksijalna i transverzalna sila konstantne; najprostije ih dobivamo kad silu $C_1 = B_1 = 0,49$ t razložimo u komponente: u pravcu CD (X) i upravno na taj pravac (T). Kako sila C_1 i pravac CD zaklapaju ugao od 60° biće za deo DC:

$$\text{aksijalna sila } X_{1DC} = -C_1 \cos 60^\circ = -0,24 \text{ t (pritisak)}$$

$$\text{transverz. " } T_{1DC} = -C_1 \sin 60^\circ = -0,42 \text{ t.}$$

Dijagrami aksijalnih i transverzalnih sila za ceo lu-

čni nosač usled ovog delimičnog opterećenja (R_1) mogu se videti na sl. 303. Ovi dijagrami se mogu za svaki pravolinijski deo lučnog nosača grafičkim putem odrediti projiciranjem spoljnih sila za ovaj slučaj opterećenja na pravac osovine toga dela nosača (aksijalne sile) i upravno na taj pravac (transverz. sile).

2.) Za samo opterećenje (P_2) desno od C.

Kod ploče BC i aksijalna i transverzalna sila menjaju se skokom u preseku E, gde napada koncentrisani teret $P_2 = 1,60$ t, i to

$$\text{aksijalna sila za veličinu } P_{2x} = 1,60 \cos 60^\circ = 0,80 \text{ t.}$$

$$\text{transverz. " " " } P_{2y} = 1,60 \sin 60^\circ = 1,39 \text{ t.}$$

a levo i desno od E one su konstantne. Njihove veličine za deo BE najbrže ćemo naći kad silu B_2 razložimo u komponente u pravcu BC (X) i upravno na taj pravac (T). Kako ne znamo ugao između pravca BC i sile B_2 , razložićemo umesto nje njene komponente B_{2x} i B_{2y} pa ćemo naći za deo BE:

$$X_{2BE} = -B_{2x} \cos 30^\circ - B_{2y} \cos 60^\circ =$$

$$= -0,310 \cdot 0,866 - 1,05 \cdot 0,5 = -0,79 \text{ t. (pritisak)}$$

$$T_{2BE} = B_{2x} \sin 30^\circ - B_{2y} \sin 60^\circ =$$

$$= 0,31 \cdot 0,5 - 1,05 \cdot 0,866 = -0,76 \text{ t.}$$

Za deo CE sad možemo pisati

$$X_{2CE} = -X_{2BE} + P_{2x} =$$

$$= -0,79 + 0,80 = +0,01 \text{ t (zatezanje).}$$

$$T_{2CE} = -T_{2BE} + P_{2y} = -0,76 + 1,39 = +0,63 \text{ t.}$$

Kod ploče AC za ovo opterećenje su i aksijalna i transverzalna sila konstantne za svaki od delova AD i DC.

Aksijalna sila je

$$X_{2AD} = -A_{2y} = -0,51 \text{ t. (pritisak)}$$

$$X_{2CD} = -C_{2x} \cos 30^\circ - C_{2y} \sin 30^\circ =$$

$$= -0,31 \cdot 0,866 - 0,54 \cdot 0,5 = -0,54 \text{ t. (pritisk)}$$

Transverzalna sila je

$$T_{2AD} = -A_{2x} = -0,31 \text{ t}$$

$$T_{2CD} = -C_{2x} \sin 30^\circ + C_{2y} \cos 30^\circ =$$

$$= -0,31 \cdot 0,5 + 0,54 \cdot 0,866 = +0,32 \text{ t.}$$

3.) Za totalno opterećenje.

Po principu superpozicije dejstva dobivamo aksijalne i transverzalne sile usled totalnog opterećenja, kad algebarski saberemo nadjene vrednosti za delimična opterećenja.

Tako dobivamo:

za aksijalne sile

$$X_{AD} = -X_{1AD} - X_{2AD} = -0,36 - 0,54 = -0,90 \text{ t.}$$

$$X_{CD} = -X_{1CD} - X_{2CD} = -0,24 - 0,54 = -0,78 \text{ t.}$$

$$X_{CE} = -X_{1CB} + X_{2CE} = -0,49 + 0,01 = -0,48 \text{ t.}$$

$$X_{BE} = -X_{1BC} - X_{2BE} = -0,49 - 0,79 = -1,28 \text{ t.}$$

Sve su aksijalne sile pritisci.

za transverzalne sile

$$T_A = T_{1A} - T_{2AD} = 1,53 - 0,31 = 1,22 \text{ t.}$$

$$T_{AD} = T_A - w \cdot y,$$

što znači da linearno opada. U preseku F mora biti

$$T_F = T_A - w \cdot y_F = 0$$

t.j.

$$1,22 - 0,3 \cdot y_F = 0$$

a odavde dobivamo

$$y_F = \frac{1,22}{0,3} = 4,06 \text{ m.}$$

$$T_D = -T_{1D} - T_{2AD} = -0,42 - 0,31 = -0,73 \text{ t.}$$

$$T_{CD} = -T_{1CD} + T_{2CD} = -0,42 + 0,32 = -0,11 \text{ t.}$$

$$T_{CE} = +T_{2CE} = +0,63 \text{ t.}$$

$$T_{BE} = -T_{2BE} = -0,76 \text{ t.}$$

Sve ove vrednosti za X i T pretstavljene su na sl.303 pomoću odgovarajućih dijagrama.

III. Napadni momenti. - I ovde ćemo, radi uprošćenja zadatka, tražiti odvojeno uticaj opterećenja (R_1) levo od C i opterećenja (P_2) desno od C na napadne momente u presocima lučnog nosača.

1. Za samo opterećenje (R_1) levo od C.

Kod ploče BC napadni je momenat na celoj dužini

$$M_{1BC} = 0,$$

jer se sile B_1 i C_1 koje su tada jedine spoljne sile za ovaj deo nosača poklapaju sa osovinom ploče BC.

Kod ploče AC odredićemo grafički Kulmanovu momentnu površinu najprostije na taj način, što ćemo prvo za opterećenje A_{1x} i W smatrati deo nosača AD kao konzolu, horizontalno uključestenu u preseku D (v. plan sila sl. 303 c). Tako dobivamo parabolični verižni poligon 0-1-2-3-4-5-6 koji važi kao dijagram (pozitivnih) momenata M_1 za deo AD. Iz toga dijagrama nalazimo grafički za presek beskonačno blizu levo (ispod) od preseka D napadni momenat usled opterećenja A_{1x} i W :

$$M'_{1D} = +7,2 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ t} = 3,60 \text{ tm.}$$

Za taj isti presek izračunavamo

$$M'_{1D} = A_{1x} \cdot 6,5 \text{ m} - W \frac{6,5 \text{ m}}{2} = 1,53 \cdot 6,5 - 1,95 \cdot 3,25 = 3,60 \text{ tm.}$$

No sem opterećenja A_{1x} i W deluje na ploču AC još i teret $P_1 = 0,60 \text{ t}$ koji napada ekscentrično u preseku D i čiji je momenat za taj presek negativan

$$-0,6 \text{ t} \cdot 1,5 \text{ m} = -0,90 \text{ tm.}$$

Znači da će se kod dijagramne linije za M_1 pojaviti u preseku D diskontinuitet = skok za $-0,90 \text{ tm}$ - te će momenat beskonačno

no blizu desno od (iznad) D biti

$$M''_{1D} = + 3,60 - 0,90 = + 2,70 \text{ tm.}$$

Na ostatku DC ploče AC ne javljaju se nove spoljne sile i zato će se dalje, od D do C, napadni momenat M_1 linearno menjati, a u zglobu C mora biti jednak nuli, - što je sve uzeto u obzir pri crtanju dijagrama za M_1 u sl. 303. Kontrolu veličine momenta M''_{1D} možemo izvesti i tako, što ćemo sad smatrati deo DC kao konzolu, uklještenu u preseku D. Jedino opterećenje te (zamisljene) konzole desno od D je pritisak $C_1 = B_1$ kojom ploča BC dejstvuje na ploču AC kroz zglob C. Napadni momenat ove sile C_1 za presek D biće

$$\begin{aligned} M''_{1D} &= C_{1x} \cdot 3,18 \text{ m} + C_{1y} \cdot 5,50 \text{ m} = \\ &= 0,42 \cdot 3,18 + 0,24 \cdot 5,50 = + 2,68 \text{ tm.} \end{aligned}$$

a to se dobro slaže sa ranije nadjenom vrednošću.

2.) Za samo opterećenje (P_2) desno od C.

Kod ploče BC nalazimo Kulmanovu momentnu površinu 1-2-3 pomoću plana sile sl. 303 b, u koji su kao spoljne sile unete projekcije sile $A_2 = C_2$, P_2 i B_2 na pravac upravan na osovinu ploče BC. Iz dijagrama za M_2 vidimo da je ploča BC slična prostojoj gredi. M_{\max} javlja se u preseku E gde napada teret P_2 . Grafički nalazimo

$$M_{2E} = y_{\max} \cdot H = 4,20 \cdot 0,5 \text{ t} = 2,10 \text{ tm.}$$

Računom ćemo odrediti veličinu ovoga momenta, kad prvo nadjemo ordinatu y_E tačke E nad horizontalom BD

$$y_E : 3,18 = 2,50 : 5,50$$

$$y_E = \frac{3,18 \cdot 2,50}{5,50} = \sim 1,45 \text{ m.}$$

Sad izračunavamo

$$M_{2E} = B_{2y} \cdot 2,50 \text{ m} - B_{2x} \cdot 1,45 \text{ m} = 1,05 \cdot 2,50 - 0,31 \cdot 1,45 = 2,19 \text{ tm.}$$

Kod ploče AC jedine su spoljne sile A_2 i C_2 , koje se drže u ravnoteži na liniji AC. Kad za deo nosača AD silu A_2 razložimo u komponente A_{2x} i A_{2y} vidimo da na tome delu napadne momente (i to negativne) stvara samo komponenta $A_{2x} = 0,31 \text{ t}$. Shvatimo li deo AD kao konzolu, horizontalno uklještenu u preseku D, dobićemo trouglastu Kulmanovu momentnu površinu prema planu sile sl. 303 c levo. Momenat M_2 menja se dakle od A do D linearno i najveći je u preseku D

$$M_{2D} = - A_{2x} \cdot 6,50 \text{ m} = - 0,31 \cdot 6,50 = - 2,01 \text{ tm.}$$

(grafički: $- 4 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ t} = - 2,0 \text{ tm}$).

Na ostatku ploče AC, t.j. od D do C, momenat linearno opada tako da je $M_{2C} = 0$, kao što je pretstavljeno i u dijagramu za M_2 .

3) Za totalno opterećenje

Kod ploče BC dijagram za M_2 važi i kao totalni dijagram, jer smo našli da je $M_{1BC} = 0$.

Kod ploče AC valja izvršiti grafičko oduzimanje dijagrama M_2 od dijagrama M_1 , jer su ti momenti protivnog znaka. Na taj način dobiven je konačni dijagram M , iz koga se vidi, da je za totalno opterećenje na ploči AC

$$M_{\max} = M_F = y_{\max} \cdot H = - 4,8 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ t} = + 2,4 \text{ tm.}$$

Za taj presek mora biti pri totalnom opterećenju

$$T_F = 0$$

Ranije smo našli, da je za taj presek

$$y_F = 4,06 \text{ m.}$$

te sad možemo analitički izračunati za totalno opterećenje

$$\begin{aligned} M_{\max} = M_F &= A_x \cdot 4,06 + 0,3 \text{ t/m} \cdot 4,06 \text{ m} \cdot \frac{4,06 \text{ m}}{2} = \\ &= 1,22 \cdot 4,06 + 1,22 \cdot 2,03 = + 2,47 \text{ tm.} \end{aligned}$$

što se dobro slaže sa grafičkim radom.

VI. Raznoliki statički određeni sistemi.

- Zadaci za vežbanja. -

Sem nosača, koje smo do sada upoznali, dolaze u praksi i drugi statički određeni sistemi, čije se proučavanje uvek može svesti na koji bilo od ranijih slučajeva.

Mi ćemo u sledećem pokazati praktično rešavanje takvih zadataka, koji ćemo uzeti u vidu brojnih primera. Prvo ćemo upoznati prostije sisteme, sastavljene samo iz jedne krute ploče, a zatim i mešovite i složene sisteme.

32. Greda sa izlomljenom osovinom.

Dolaze u praksi kod mašinskih osovina, kao i kod gvozdjenih i armirano-betonskih okvira (ramova).

1. Zadatak (sl. 304). - Greda AB je horizontalno oslonjena i opterećena samo vertikalnim silama, ali joj je osovina izlomljena kao što je prikazano na sl. 304.

Reakcije oslonaca dobivamo i grafički i računski kao i kod prave grede AB. Grafički ih nalazimo pomoću plana sila (sl. 304 a) i verižnog poligona 1-2-3-4 (sl. 304 b).

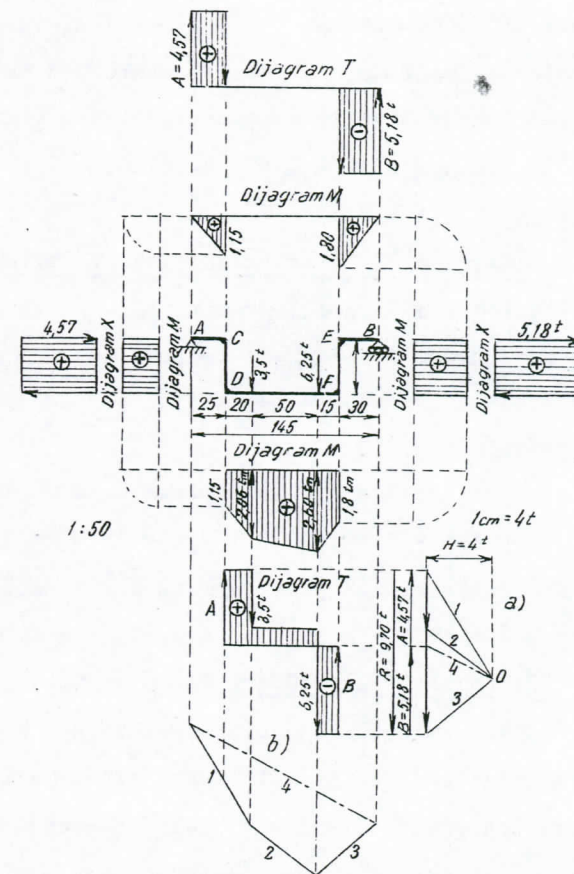
$$A = 4,6 \text{ t}; \quad B = 5,2 \text{ t}.$$

Računom nalazimo

$$(\sum Y = 0) \quad A + B - 3,50 - 6,25 = 0$$

$$(\sum M_A = 0) \quad B \cdot 1,45 - 3,5 \cdot 0,45 - 6,25 \cdot 0,95 = 0$$

a odavde



Sl. 304

$$B = \frac{1,575 + 5,937}{1,45} = \frac{7,512}{1,45} = 5,18 \text{ t}.$$

$$A = 9,75 - 5,18 = 4,57 \text{ t}.$$

Napadni momenti određeni su za celu gredu Kulmanovom momentnom površinom (sl. 304 b), ali ona ne može neposredno poslužiti kao dijagram M za delove grede CD i EF, na kojima je M konstantno i iznosi

$$M_{CD} = A \cdot 0,25 = 4,57 \cdot 0,25 = 1,15 \text{ tm}.$$

$$M_{EF} = B \cdot 0,35 = 5,18 \cdot 0,35 = 1,80 \text{ tm}.$$

Zato je dijagram M raščlanjen u pet delova, koji prikazuju pro-

menljivost napadnog momenta za svaki pravolinijski komad izlomljene grede. Najveći momenat je u preseku pod teretom P_2 i njegova se veličina dobiva iz momentne površine grafički:

$$M_{max} = 0,65 \text{ m} \cdot 4 \text{ t} = 2,60 \text{ tm.}$$

a računom $M_{max} = B \cdot 0,50 = 5,18 \cdot 0,50 = 2,59 \text{ tm.}$

Aksijalne (X) i transverzalne (T) sile prikazane su u sl. 304 takodje svojim dijagramima zasebno za svaki pravolinijski komad grede. Aksijalne sile postoje samo na vertikalnim delovima grede a transverzalne samo na horizontalnim delovima. Njihova je veličina:

$$X_{CD} = A = + 4,57 \text{ t (zatezanje)} = T_{AC}$$

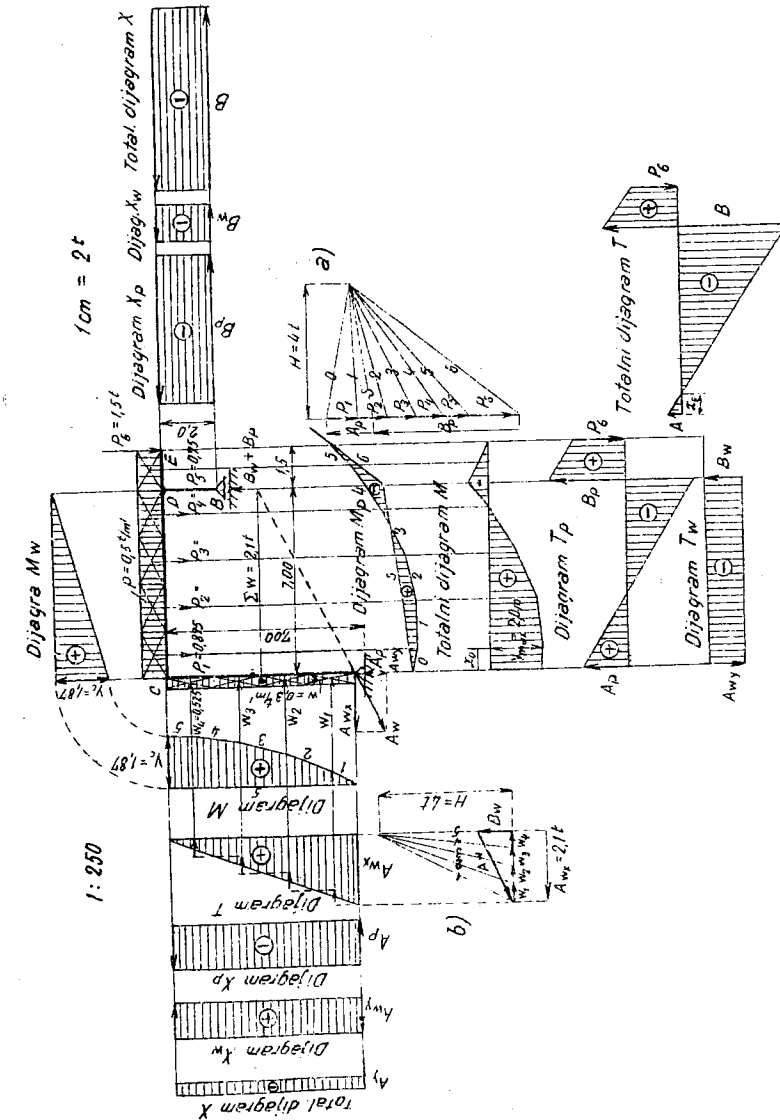
$$X_{EF} = B = + 5,18 \text{ t (zatezanje)} = T_{EB}$$

Na delu DF transverzalna je sila ista kao i na odgovarajućem delu proste grede AB.

2. Zadatak (sl. 305). - Nosač AB tako je oslonjen da su pri vertikalnom opterećenju obe reakcije A i B vertikalne, što sasvim odgovara definiciji proste grede (s prepustom DE). Ali je osovina grede izlomljena, kako je pokazano u sl. 305, te nosač ima oblik okvira (rama); opterećenje je složeno iz dva opterećenja: vertikalnog (p i P) i horizontalnog (w). Pri grafičkom rešavanju zadatka uticaj ova dva opterećenja na ceo nosač ispitivan je zasebno, pa dobiveni rezultati grafički sabrani.

a) Vertikalno opterećenje - grafički rad.

Kako je reakcija B na pokretnom ležištu uvek vertikalna, a tako isto u ovom slučaju i opterećenja $p = 0,5 \text{ t/m}$ i $P = 1,5 \text{ t}$, to sleduje da i reakcija A_p mora biti vertikalna. Prema tome deo nosača CE ponaša se kao prepuštena greda na osloncima C i D, dok delovi AC i BD trpe samo aksijalne pritiske veličine reakcija A_p i B_p , a nemaju ni momenata ni transverzalnih



sila.

Grafičko određivanje reakcija A_p i B_p , momenata i transverzalnih sila za prepušteni greda CE izvršeno je na poznati način, pomoću plana sila u sl. 305 a. Tako nadjenim dijagramima treba još dodati dijagrame aksijalnih sila (pritisaka).

ka) za delove nosača AC ($X_P = A_P = 1,35 \text{ t}$) i BD ($X_P = B_P = 4,40 \text{ t}$), pa je zadatak za vertikalno opterećenje grafički rešen.

b) Horizontalno opterećenje - grafički rad.

Kad zanemarimo vertikalno opterećenje, onda se rezultanta horizontalnih sila ($\sum W = 2,1 \text{ t}$) mora u slučaju ravnoteže seći sa reakcijama B_W i A_W u istoj tački i činiti s njima zatvoren trougao (sl. 305 b). Time su grafički odredjene reakcije za horizontalno opterećenje:

$$A_W = 2,50 \text{ t}; \quad B_W = 1,05 \text{ t}.$$

Da bismo nacrtali momentne površine smatraćemo delove AC i CD nosača AB kao konzole, uklještena u preseku C, gde će moment uklještenja M_C biti isti i za jednu i za drugu konzolu. Na konzolu AC napada u tački A koncentrisana sila A_W (od čijih komponenta A_{Wx} i A_{Wy} samo prva stvara napadne momente u delu AC) i po celoj dužini jednoliko raspodeljen teret $w = 0,4 \text{ t/m}$. Kulmanovu momentnu površinu (M_W) za deo AC dobivamo pomoću plana sila u sl. 305 b) i ona pokazuje najveću ordinatu u preseku uklještenja C gde je

$$M_C = 1,87 \text{ m} \cdot 4 \text{ t} = 7,48 \text{ tm}.$$

Na konzolu CD napada, desno od C, samo jedna koncentrisana vertikalna sila $B_W = 1,05 \text{ t}$ u tački D, te ćemo računom naći

$$M_C = B_W \cdot 7 \text{ m} = 1,05 \cdot 7 = 7,35 \text{ tm}.$$

Moment M_W od preseka C do tačke D linearno će se menjati tako da na kraju bude $M_D = 0$. Prema tome za deo CD ne moramo crtati nov verižni poligon već možemo ordinatu y_C samo obrnuti oko tačke C u vertikalni položaj i njene krajeve spojiti pravih linijama sa jednom tačkom na vertikali kroz D, čime je konstruisan dijagram M_W i za deo CD. Na delu DE su za ovaj

slučaj opterećenja M, T i X ravni nuli.

Transverzalna sila za deo CD biće po celoj dužini konstantna

$$T_W = B_W$$

a za deo AC linearno će opadati od vrednosti $A_{Wx} = 2,1 \text{ t}$ u preseku A do nule u preseku C jer u ovome poslednjem preseku ne postoji nikakva horizontalna sila.

Iz istog razloga nema aksijalne sile u delu CD nosača ($X_{CD} = 0$). U delovima BD i AC aksijalna sila jednaka je reakciji $B_W = A_{Wy}$ jer je

$$B_W = A_{Wy} = 1,05 \text{ t}.$$

a to su jedine vertikalne sile u slučaju horizontalnog opterećenja. Razlika između delova AC i DC samo je u tome, što u delu AC vlada zatezanje ($X_{AC} = -1,05 \text{ t}$) a u delu BD isti toliki pritisak ($X_{DB} = +1,05 \text{ t}$).

c) Totalno opterećenje.

1) Grafički nalazimo reakcije A i B i dijagrame za M, T i X usled totalnog opterećenja sabiranjem rezultata dobivenih za delimična opterećenja. Tako nalazimo totalne reakcije

$$\vec{A} = \vec{A}_P + \vec{A}_W = 0,76 \text{ t}.$$

$$B = B_P + B_W = 4,40 + 1,05 = 5,45 \text{ t}.$$

Za momente i transverzalne sile na delu AC dijagrami M_W i T_W odgovaraju već totalnom opterećenju, jer je za taj deo $M_P = 0$ i $T_P = 0$. Za deo CE dijagrami M i T usled totalnog opterećenja dati su na sl. 305 ispod dijagrama M_P i T_P . M_{max} za celu gredu javlja se desno od C i iznosi

$$M_{max} = y_{max} \cdot H = 2 \text{ m} \cdot 4 \text{ t} = 8 \text{ tm}.$$

Na delu BD i moment i transverzalna sila usled oba opterećenja su jednaki nuli. Za aksijalne sile na delu AC imamo da je

X_p pritisak a X_w istezanje, te za totalno opterećenje dobivamo

$$X_{AC} = X_p - X_w = 1,35 - 1,05 = 0,30 \text{ t. (pritisak),}$$

kako je i dijagramom pretstavljeno. Na delu CE nema uopšte aksijalnih sila, a za deo BD, gde oba opterećenja izazivaju pritisak, važi

$$X_{BD} = X_p + X_w = 4,40 + 1,05 = 5,45 \text{ t.}$$

2) Računski nije korisno razdvajati oba opterećenja, već je najbolje i reakcije oslonaca i veličine M , T i X odrediti za ceo dati teret odjednom.

Reakcije oslonaca izračunavamo iz jednačina:

$$A_x - 7 \text{ m} \cdot 0,3 \text{ t/m} = 0$$

$$A_y + B - 8,5 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ t/m} - 1,5 \text{ t} = 0$$

$$2,1 \text{ t} \cdot 3,5 \text{ m} + 4,25 \text{ t} \cdot 3,5 \text{ m} + 1,5 \text{ t} \cdot 3,5 \text{ m} - B \cdot 7 = 0$$

iz kojih sleduje

$$A_x = 2,10 \text{ t.}$$

$$B = \frac{34,97}{7} = 4,99 \text{ t.}$$

$$A = 0,76 \text{ t.}$$

a totalni (kosi) otpor A iznosi

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{2,1^2 + 0,76^2} = 2,23 \text{ t.}$$

Maksimalni momenat može biti u jednom od opasnih preseka na delu grede CE, u kojima je transverzalna sila jednaka nuli, ili na delu AC u preseku C gde je takodje $T = 0$. Za opasne preseke C i D nalazimo računom

$$M_C = A_x \cdot 7 \text{ m} - 2,1 \text{ t} \cdot 3,5 \text{ m} = + 7,35 \text{ tm.}$$

$$M_D = - 1,5 \text{ t} \cdot 1,5 \text{ m} - 0,75 \text{ t} \cdot 0,75 \text{ m} = - 2,81 \text{ tm.}$$

a opasni presek između C i D naći ćemo iz jednačine za transverzalnu silu na delu CD.

Transverzalna sila u ma kome preseku dela AC data je jednačinom

$$T_{AC} = A_x - w \cdot y = 2,1 - 0,3 \cdot y.$$

gde je y (vertikalno) rastojanje preseka od tačke A. Najveća joj je vrednost za $y = 0$ ($T = 2,1 \text{ t}$), a najmanja za $y = 7 \text{ m}$ ($T = 0$). Za deo CD transverzalna sila je određena jednačinom

$$T_{CD} = A_y - px = 0,76 - 0,5 \cdot x.$$

gde je x (horizontalno) rastojanje preseka od tačke C. Najveća vrednost transverzalne sile na delu CD je za $x = 7 \text{ m}$ ($T = - 2,74 \text{ t}$), a najmanja ($T = 0$) na rastojanju x_0 koje određujemo iz uslova

$$0,76 - 0,5 \cdot x_0 = 0.$$

Iz ove jednačine nalazimo

$$x_0 = 1,52 \text{ m.}$$

a to je opasni presek gde se javlja M_{max} za celu gredu. Veličinu M_{max} za taj presek nalazimo računom

$$M_{max} = A_y \cdot x_0 + A_x \cdot 7,0 \text{ m} - 2,1 \text{ t} \cdot 3,5 \text{ m} - 0,5 \text{ t/m} \cdot 1,52 \text{ m} \cdot \frac{1,52 \text{ m}}{2}$$

$$M_{max} = 0,76 \text{ t} \cdot 1,52 \text{ m} - 2,1 \text{ t} \cdot 7 \text{ m} - 2,1 \text{ t} \cdot 3,5 \text{ m} - 0,5 \frac{1,52^2}{2}$$

$$M_{max} = + 1,15 + 14,70 - 7,35 - 0,57 = + 7,93 \text{ tm.}$$

Aksijalne sile određujemo računom

$$X_{AC} = A_y = 0,76 \text{ t (pritisak)}$$

$$X_{BD} = B = 4,99 \text{ t (pritisak)}$$

$$X_{CE} = 0.$$

33. Greda ojačana zategama.

Ovakvi sistemi dolaze u praksi kad je nosač izradjen od raznih materijala. Obično je horizontalna greda od drveta, a zatege od gvoždja. Zatege smatramo kao štapove, vezane na zglobove na oba kraja, tako da je ceo sistem u stvari rešetkast nosač, ali kod koga opterećenje ne napada u čvorovima već po celoj dužini horizontalne grede. Zato ova greda trpi, pored aksijalnih sila, i momente i transverzalne sile, dok u zategama vladaju samo aksijalne sile (zatezanje ili pritisak).

1. Zadatak (sl. 306). - Greda BE opterećena je kontinualnim teretom $q = 0,2 \text{ t/m}$ po celoj dužini, a na kraju još i koncentrisanom silom $P = 0,5 \text{ t}$; ona je vezana za zid nepomičnim zglobom u tački B i sistemom od tri štapa (1, 2 i 3) koji se oslanja na zid u tački A.

Grafičko rešenje.

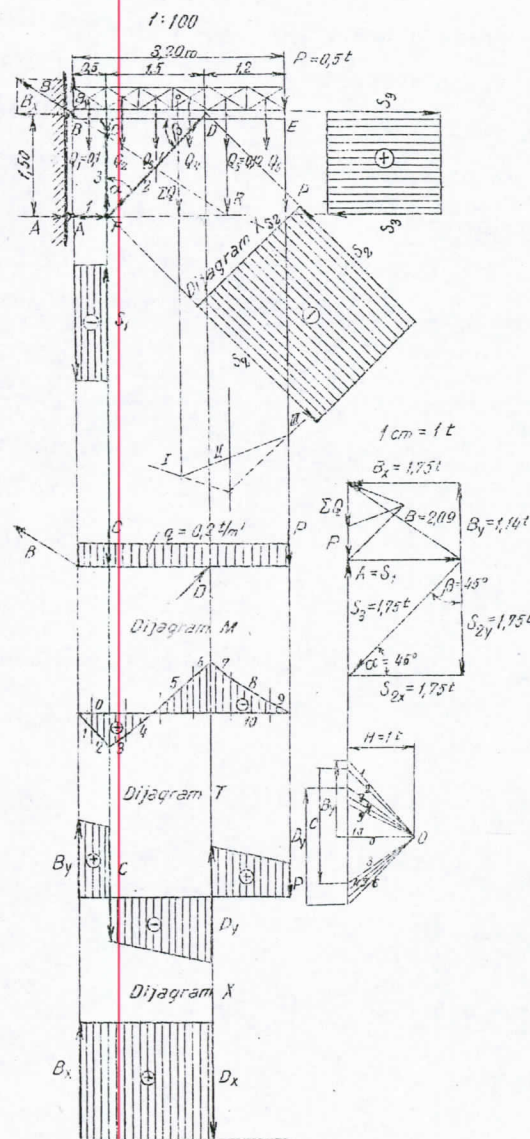
Da bismo grafički našli pritiske kojima nosač kao celina deluje na svoje oslonce u tačkama A i B i njima odgovarajuće reakcije oslonaca, odredićemo prvo rezultantu celokupnog opterećenja verižnim poligonom I-II-III. Ta rezultanta R sa obe reakcije A i B mora u slučaju ravnoteže prolaziti kroz istu tačku i činiti zatvoren trougao. Presečnu tačku sila R, A i B nalazimo u preseku otpora A, koji mora imati pravac štapa 1, i rezultante R, pa kroz tu tačku mora prolaziti i kosi otpor B.

Iz plana sila sleduje grafički

$$A = 1,75 \text{ t}$$

$$B = 2,09 \text{ t.}$$

Otpor A je reakcija pritisku, kojim štap 1 deluje na



Sl. 306

zid i prema tome aksijalna sila u tome štapu biće

$$S_1 = A = -1,75 \text{ t (pritisak)}$$

Čim smo tako odredili napon u štapu 1, možemo odmah naći i napone u štapovima 2 i 3 jer su naponi u sva tri štapa u ravnoteži na čvoru F. Tako dobivamo grafički u planu sila aksijalne sile u ostala dva štapa:

$$S_2 = -2,45 \text{ t (pritisak)}$$

$$S_3 = +1,75 \text{ t (zatezanje)}$$

Kako u zategama 1, 2 i 3 vladaju samo aksijalne sile čije smo veličine odredili, to sad možemo (sl. 306) nacrtati dijagrame tih napona za svaki štap, čime je njihovo statičko ispitivanje završeno.

Ostaje još ispitivanje horizontalne grede BE, na koju napadaju - pored datog opterećenja q i P - još i spoljne sile B, C i D koje su sad već poznate. Da bismo nacrtali Kulmanovu momentnu površinu mo-

žemo gredu BE smatrati kao gredu s prepustom na osloncima B i D. U plan sile prenosimo vertikalne komponente B_y i D_y i vertikalne sile C, λ i P i to onim redom kako iz nailazimo idući s leva na desno duž grede. Da bismo dijagram M dobili odmah redukovano na horizontalnu apscisu biramo pol u visini donjeg kraja sile B_y i crtamo zatvoren verižni poligon 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10 koji nam pretstavlja dijagram M za gredu BE. Najveći momenat javlja se u preseku D i iznosi

$$M_D = M_{\max} = -y_{\max} \cdot H = -0,75 \text{ m} \cdot 1,0 \text{ t} = -0,75 \text{ tm.}$$

Dijagram T dobivamo uzimajući takodje u obzir samo vertikalne sile, a dijagram X uzimajući u obzir samo horizontalne sile na toj gredi.

Računsko rešenje.

Reakcije oslonaca celog sistema dobivamo iz računskih uslova ravnoteže

$$A - B_x = 0$$

$$B_y - \sum q - P = 0$$

$$1,6 \cdot \sum q + P \cdot 3,2 - A \cdot 1,5 = 0 \text{ (obrotna tačka B),}$$

koji nam daju

$$B_y = 0,64 + 0,50 = 1,14 \text{ t}$$

$$A = \frac{0,64 \cdot 1,6 + 0,5 \cdot 3,2}{1,5} = \frac{2,62}{1,5} = 1,75 \text{ t.}$$

$$B_x = 1,75 \text{ t.}$$

$$B = \sqrt{1,75^2 + 1,14^2} = 2,09 \text{ t.}$$

Sile u štapovima 1, 2 i 3 možemo izračunati, kad primenimo na ravnotežu čvora F uslove ravnoteže

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

jer znamo silu u štapu s ($S_1 = 1,75 \text{ t}$) i uglove α i β . Dobićemo

$$S_1 - S_2 \cos \beta = 0$$

$$S_3 - S_2 \cos \alpha = 0$$

a odavde za dati slučaj

$$1,75 - S_2 \cdot 0,707 = 0; \quad S_2 = \frac{1,75}{0,707} = 2,47 \text{ t.}$$

$$S_3 - S_2 \cdot 0,707 = 0; \quad S_3 = 2,47 \cdot 0,707 = 1,75 \text{ t.}$$

Sile S_1 i S_3 jednake su zato, što je trougao sila za čvor F u datom slučaju ravnokrak.

Ako najzad gredu BE smatramo kao prepustenu sa osloncima B i D, onda su njene reakcije oslonaca sada već poznate:

$$B_x = 1,75 \text{ t}; \quad D_x = S_2 \cos \beta = 2,47 \cdot 0,707 = 1,75 \text{ t.}$$

$$B_y = 1,14 \text{ t}; \quad D_y = S_2 \sin \beta = 2,47 \cdot 0,707 = 1,75 \text{ t.}$$

Zato možemo odrediti napadni momenat, transverzalnu i aksijalnu silu za svaki presek grede po opštim pravilima.

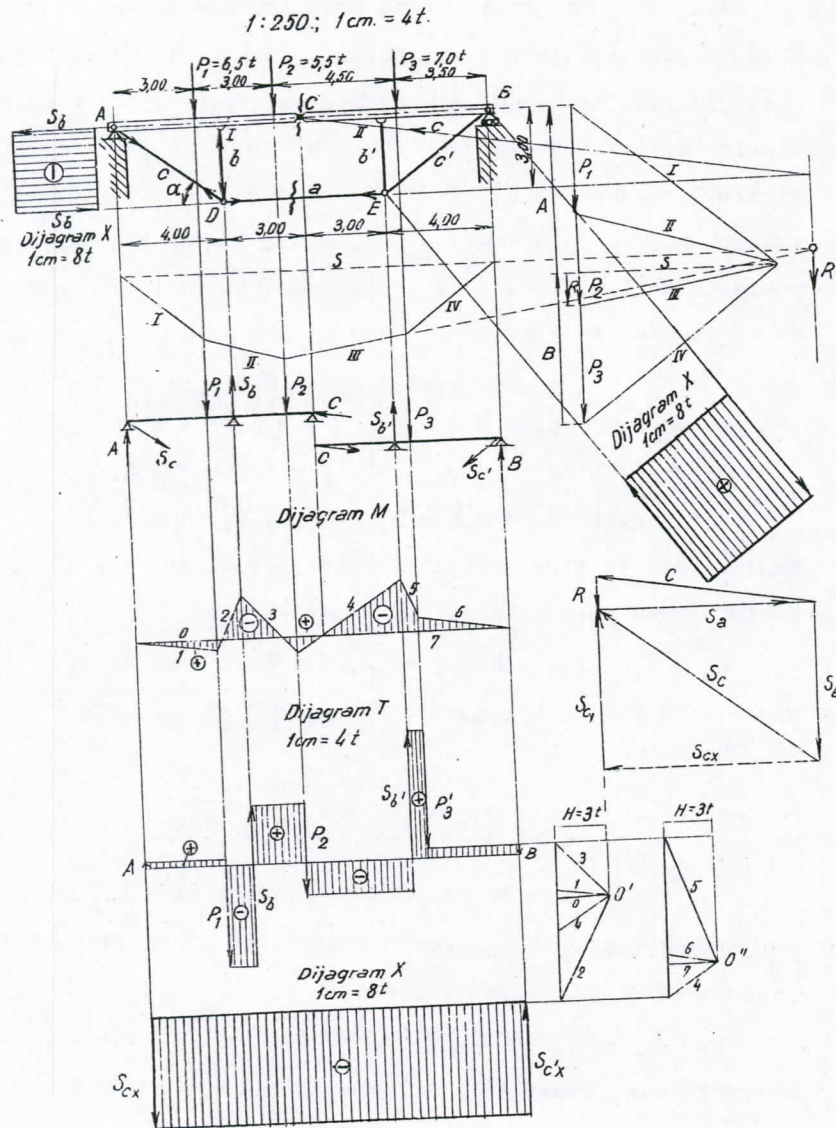
Maksimalni momenat biće u preseku D i njegovu veličinu nalazimo računom

$$M_D = M_{\max} = -0,2 \text{ t/m} \cdot 1,20 \text{ m} \cdot \frac{1,20 \text{ m}}{2} - 0,5 \text{ t} \cdot 1,20 \text{ m.}$$

$$M_D = M_{\max} = -0,144 - 0,60 = -0,74 \text{ tm.}$$

što se dobro slaže sa grafičkim radom.

2. Zadatak (sl. 307). - Greda AB prekinuta je u tački C (zglob), a ojačana sa 5 štapova tako, da je ceo sistem simetričan za vertikalnu kroz C. Ležišta A i B celog sistema izrađena su kao kod proste grede. Sličan sistem (bez zgloba C) dolazi u praksi kao rešetkast nosač pod imenom "armirana greda", ali ovde, prema sl. 307, on nije opterećen u čvorovima već po celoj dužini horizontalne grede AB. Nosač na sl. 307 možemo sma-



trati sastavljen iz dve krute ploče ADC i BEC koje su medju sobom vezane pomoću zgloba C i štapa DE, čine dakle jednu krutu celinu - gredu postavljenu u tačkama A i B.

U pogledu ravnoteže spoljnih sila možemo prema tome ceo sistem smatrati kao prostu gredu. Zato je na sl. 307 grafičko određivanje reakcija oslonaca A i B izvršeno na poznati način, - pomoću zatvorenog verižnog poligona I-II-III-IV-s, koji nam daje

$$A = 10 \text{ t.}$$

$$B = 9 \text{ t.}$$

Računski reakcije dobivamo iz jednačina

$$A + B - 6,5 - 5,5 - 7,0 = 0$$

$$A \cdot 14 - 6,5 \cdot 11 - 5,5 \cdot 8 - 7,0 \cdot 3,5 = 0$$

koje nam takodje daju

$$A = 10 \text{ t}$$

$$B = 9 \text{ t.}$$

Da bismo našli aksijalnu silu S u zatezi "a" povlačimo kroz zglob C vertikalni presek koji pogadja i štap "a" i posmatramo ravnotežu levog otsečka. Na taj otsečak napadaju - sem spoljnih sila A, P_1 i P_2 - još i dve unutarnje sile: pritisak C u zglobu i aksijalna sila S_a u štapu "a". Kad sile A, P_1 i P_2 zamenimo (po Kulmanu) njihovom rezultantom R koja napada u preseku strana III i s verižnog poligona, onda se sile R, C i S_a moraju seći u istoj tački i činiti zatvoren trougao. Na taj način nalazimo grafički nepoznate unutarnje sile C i S_a . Računski naći ćemo iste ove sile, kad na levi otsečak nosača primenimo uslove ravnoteže, koji glase u ovom slučaju

$$S_a - C_x = 0$$

$$A - P_1 - P_2 - C_y = 0$$

$$A \cdot 7,0 - P_1 \cdot 4,0 - P_2 \cdot 1,0 - S_a \cdot 3,0 = 0 \text{ (obrt. tačka C)}$$

Nalazimo

$$S_a = \frac{10,7 - 6,5,4 - 5,5,1}{3} = 12,83 \text{ t} = C_x$$

$$C_y = 10 - 6,5 - 5,5 = -2,0 \text{ t.}$$

$$C = \sqrt{12,83^2 + 2^2} = 12,96 \text{ t.}$$

Čim smo našli napon S_a onda naponi S_b i S_c u druga dva štapa levog otsečka sleduju grafički iz trougla sila za čvor

$$S_b = -9,6 \text{ t (pritisak)}$$

$$S_c = -16,0 \text{ t (zatezanje)}$$

Računski ove napone dobivamo iz jednačina

$$S_a - S_{cx} = 0$$

$$S_{cy} - S_b = 0$$

$$\frac{S_{cy}}{S_{cx}} = \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

koje nam daju

$$S_{cx} = 12,83 \text{ t}$$

$$S_{cy} = \frac{3}{4} 12,83 = 9,62 \text{ t}$$

$$S_c = \sqrt{12,83^2 + 9,62^2} = 16,00 \text{ t.}$$

$$S_b = S_{cy} = 9,62 \text{ t.}$$

Zbog simetričnosti nosača biće aksijalne sile u zategama desno od preseka C iste kao i levo, to jest

$$S_{b'} = S_b = -9,62 \text{ t (pritisak)}$$

$$S_{c'} = S_c = +16,00 \text{ t (zatezanje)}$$

Kako su nam sad poznate sve sile u zategama, to ih možemo u sl. 307 pretstaviti odgovarajućim dijagramima X, čime je statičko ispitivanje zatega završeno.

Radi daljeg ispitivanja grede AB ona je rastavljena u dva dela: AC i CB, koje možemo smatrati kao prepuštene grede čije je opterećenje sad već poznato, - kao što se vidi iz šema u sl. 307. Za svaku od ovih greda, uzimajući u obzir samo vertikalne komponente spoljnih sila, nacrtani su planovi sila i verižni poligon 1-2-3-4-5-6-7 te tako grafički određeni dijagrami M i T za celu gredu AB. Maksimalni momenti javljaju se u presecima I i II, gde je greda poduprta vertikalnim štapovima i njihova je veličina

$$\text{grafički } M_I = -y_I \cdot H = -1,6 \text{ m} \cdot 3 \text{ t} = -4,8 \text{ tm.}$$

$$\text{računski } M_I = A \cdot 4 - S_{cy} \cdot 4 - P_1 \cdot 1 = -4,98 \text{ tm.}$$

$$\text{grafički } M_{II} = -y_{II} \cdot H = -2 \text{ m} \cdot 3 \text{ t} = -6,0 \text{ tm.}$$

$$\text{računski } M_{II} = B \cdot 4 - S_{c'y} \cdot 4 - P_3 \cdot 0,5 = -5,98 \text{ tm.}$$

Najzad, što se tiče aksijalne sile u gredi AB, ona je po celoj dužini grede konstantna i ima veličinu

$$X_{AB} = S_{cx} = -12,83 \text{ t (pritisak)},$$

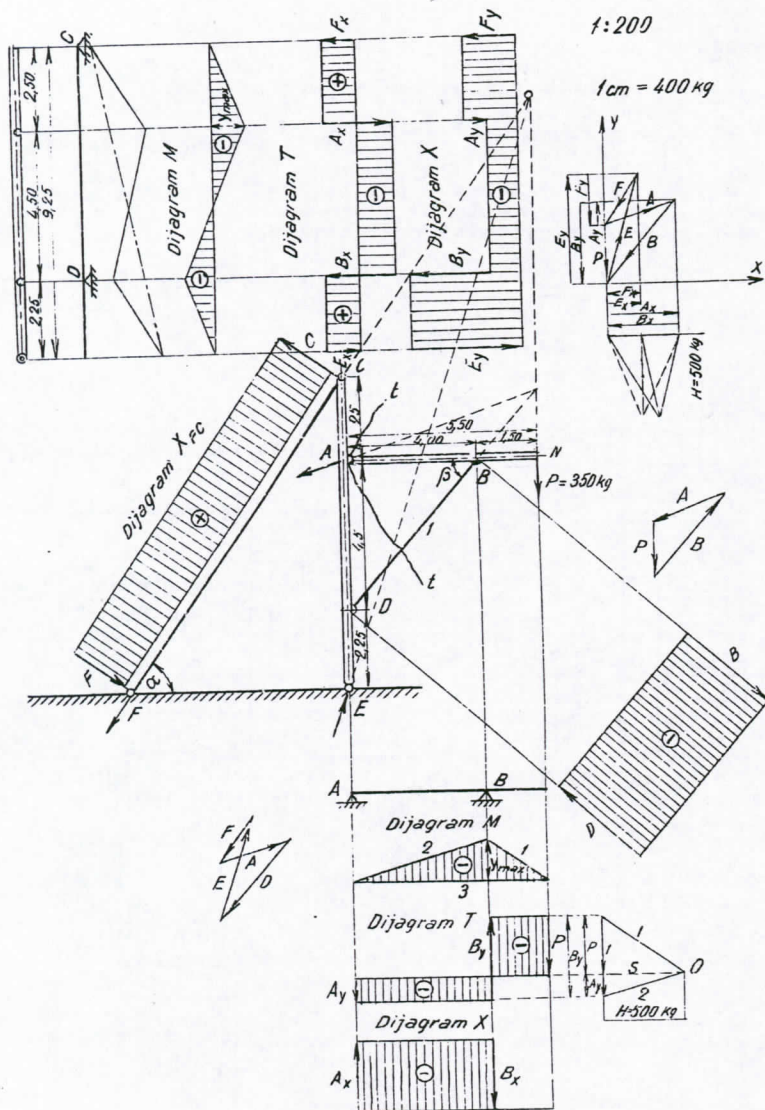
kao što je pretstavljeno i dijagramom X na sl. 307.

34. Mešoviti složeni nosači.

U ovim primerima nosač je složen iz više krutih ploča, medjusobno spojenih zglobovima; sem toga ploče još mogu biti i vezane pomoću zatega (štapova).

1. Zadatak (sl. 308).- Ovde imamo sistem koji se sastoji iz dve grede: AN i CE, spojene na zglob u tački A i vezane štapom BD. Ceo sistem je oslonjen na ležišni zglob E i na ležišni štap CF, a opterećen u tački N vertikalnom silom $P = 350 \text{ kg}$.

Da bismo odredili grafički reakcije oslonaca E i F ce-



Sl. 308

log sistema, produžujemo pravac ležišnog štapa CF do preseka sa teretom P, pa kroz presečnu tačku mora prolaziti i reakcija E. Iz trougla sila sleduje

$$E = 680 \text{ kg.}$$

$$F = 364 \text{ kg.}$$

Računski nalazimo sile E i F iz jednačina

$$E_x - F_x = 0$$

$$E_y - F_y - P = 0$$

$$P \cdot 5,5 - F_y \cdot 6,5 = 0 \text{ (obrotna tačka E)}$$

$$\frac{F_y}{F_x} = \tan \alpha = \frac{9,25}{6,50}$$

koje nam daju

$$E_x = 210 \text{ kg ; } E_y = 648 \text{ kg ; } E = 680 \text{ kg.}$$

$$F_x = 210 \text{ kg ; } F_y = 298 \text{ kg ; } F = 364 \text{ kg.}$$

Sila F može se u isto vreme smatrati i kao reakcija oslonca za gredu CE, dakle

$$C = F = 364 \text{ kg ; } C_x = F_x = 210 \text{ kg ; } C_y = F_y = 298 \text{ kg.}$$

Aksijalnu silu (pritisak) u štapu BD naćićemo, kad presekom t-t (kroz zglob A i štap BD) odvojimo gredu AN i posmatramo ravnotežu desnog otsečka nosača. Tada vidimo da pravci sila: A, $S_{BD} = B$ i P treba da prolaze kroz istu tačku i da te sile čine zatvoren trougao. Na taj način nalazimo grafički

$$A = 449 \text{ kg ; } B = S_{BD} = 645 \text{ kg.}$$

Ovo su u isto vreme i reakcije oslonaca za gredu AN. Računski nalazimo iste ove sile iz jednačina

$$B_x - A_x = 0$$

$$B_y - A_y - P = 0$$

$$P \cdot 1,5 - A \cdot 4 = 0 \text{ (obrotna tačka B)}$$

$$\frac{B_y}{B_x} = \tan \beta = \frac{4,50}{4,00}$$

koje nam daju

$$A_x = 428 \text{ kg ; } A_y = 131 \text{ kg ; } A = 448 \text{ kg.}$$

$$B_x = 428 \text{ kg ; } B_y = 481 \text{ kg ; } B = 645 \text{ kg.}$$

Sila B je u isto vreme i reakcija oslonca D za gredu CE, to jest

$$D = B = 645 \text{ kg}; \quad D_x = 428 \text{ kg}; \quad D_y = 481 \text{ kg}.$$

Pošto su određene aksijalne sile u štapovima CF i BD, nacrtani su u sl. 308 dijagrami X za te štapove.

Grede AN i CE možemo smatrati kao dve prepuštene grede (oslonci A, B i C, D), koje ćemo u sl. 308 ispitivati odvojeno. Kako su sve spoljne sile za obe te grede već određene, možemo odmah pristupiti crtanju dijagrama M, T i X za njih. Grafički određujemo dijagrame M i T kad za svaku gredu uzmemo u obzir samo transverzalne komponente spoljnih sila i postupimo na poznati način (v. sl. 308).

Za gredu AB maksimalni momenat je u preseku B (negativan):

$$\text{grafički } M_B = - y_B \cdot H = - 1,10 \text{ m} \cdot 500 \text{ kg} = - 550 \text{ kgm}.$$

$$\text{računski } M_B = - 350 \text{ kg} \cdot 1,50 \text{ m} = - 525 \text{ kgm}.$$

Za gredu CD maksimalni je momenat u preseku A (pozitivan):

$$\text{grafički } M_A = + 1,00 \text{ m} \cdot 500 \text{ kg} = + 500 \text{ kgm}.$$

$$\text{računski } M_A = + C_x \cdot 2,5 = 210 \cdot 2,5 = + 525 \text{ kgm}.$$

On je veći od (negativnog) momenta u preseku D, čiju veličinu nalazimo računom:

$$M_D = - E_x \cdot 2,25 = - 210 \cdot 2,25 = - 472 \text{ kgm}.$$

Dijagrame X za grede AN i CE nalazimo kad za svaku gredu uzmemo u obzir samo aksijalne komponente spoljnih sila. Tako dobivamo:

Za gredu AN

$$X_{AB} = A_x = B_x = + 428 \text{ kg (zatezanje)}$$

$$X_{BN} = 0.$$

Za gredu CE

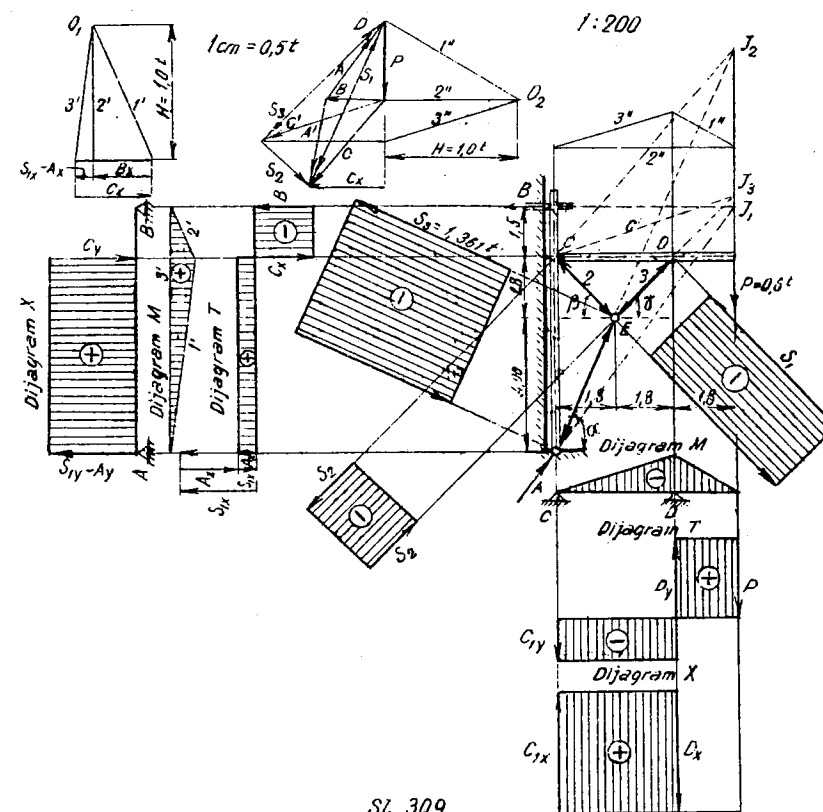
$$X_{DE} = - E_y = - 648 \text{ kg (pritisak)}$$

$$X_{AD} = - E_y + D_y = - 648 + 481 = - 167 \text{ kg (pritisak)}$$

$$X_{AC} = - C_y = - 298 \text{ kg (pritisak)}$$

kao što je i u dijagramima pretstavljeno.

2. Zadatak (sl. 309). - Nosač je složen iz dve grede



Sl. 309

(AB i CD), spojene na zglob u tački C, a ukručen sa tri štapa 1, 2 i 3. Ceo taj sistem je oslonjen na ležišni zglob A i na ležište B, koje je tako izradjeno da može dati samo horizontalnu reakciju B. Greda CD je opterećena silom $P = 0,6 \text{ t}$. na desnom kraju.

Reakcije A i B celog sistema nalazimo grafički iz uslova: da se one sa teretom P moraju, u slučaju ravnoteže, seći u istoj tački J_1 i da moraju s njim činiti zatvoren trougao. Tako dobivamo iz trougla sila

$$A = 0,76 \text{ t}; \quad B = 0,43 \text{ t.}$$

Računski nalazimo A i B iz jednačina

$$A_x - B = 0$$

$$A_y - P = 0$$

$$7,3 B - 0,6 \text{ t} \cdot 5,4 \text{ m} = 0.$$

koje nam daju

$$A_x = B = 0,44 \text{ t.}$$

$$A_y = 0,60 \text{ t.}$$

$$A = 0,75 \text{ t.}$$

Da bismo našli napone u štapovima 1, 2 i 3, sečemo nosač presekom kroz zglobov C i štap 1 i posmatramo desni otsečak. U tački J_2 moraju se seći sile P, S_1 i C koje su u ravnoteži na tome otsečku. Tako dobivamo grafički

$$S_1 = -1,37 \text{ t (pritisak)}$$

$$C = 0,86 \text{ t.}$$

Ova sila C - uzeta u protivnom smeru - pretstavlja u isto vreme i opterećenje za prostu gredu AB. Računski odredjujemo sile C i S_1 iz jednačina

$$S_{1x} - C_x = 0$$

$$S_{1y} - P - C_y = 0$$

$$P \cdot 5,4 - S_{1x} \cdot 1,8 - S_{1y} \cdot 1,8 = 0 \text{ (obrt. tačka C)}$$

$$\frac{S_{1y}}{S_{1x}} = \tan \alpha = \frac{4,0}{1,8}$$

koje nam daju

$$S_{1x} = 0,56 \text{ t}; \quad S_{1y} = 1,24 \text{ t}; \quad S_1 = 1,36 \text{ t}$$

$$C_x = 0,56 \text{ t}; \quad C_y = 0,64 \text{ t}; \quad C = 0,85 \text{ t.}$$

Napone u štapovima 2 i 3 nalazimo grafički iz trougla sila za čvor E

$$S_2 = -0,48 \text{ t (pritisak)}$$

$$S_3 = -1,28 \text{ t (pritisak)}$$

Računski odredjujemo S_2 i S_3 iz uslova ravnoteže za čvor E i poznatih pravaca štapova 2 i 3:

$$S_{1x} + S_{2x} - S_{3x} = 0$$

$$S_{1y} - S_{2y} - S_{3y} = 0$$

$$\frac{S_{2x}}{S_{2y}} = \tan \beta = \frac{1,8}{1,8}$$

$$\frac{S_{3y}}{S_{3x}} = \tan \gamma = \frac{1,8}{1,8}$$

Ove jednačine daju nam, kad u njih unesemo poznate veličine

$$S_{1x} = 0,56 \text{ t}; \quad S_{1y} = 1,24 \text{ t,}$$

$$S_{2x} = 0,34 \text{ t}; \quad S_{2y} = 0,34 \text{ t}; \quad S_2 = 0,48 \text{ t.}$$

$$S_{3x} = 0,90 \text{ t}; \quad S_{3y} = 0,90 \text{ t}; \quad S_3 = 1,27 \text{ t.}$$

Sa nadjenim veličinama sila S_1 , S_2 i S_3 nacrtani su u sl. 309. dijagrami aksijalnih sila za sva tri štapa.

Sad prelazimo na statičko ispitivanje greda AB i CD, jer su sve spoljne sile koje na njih napadaju već poznate.

Na gredi AB složićemo prvo grafičke sile A i S_1 u njihovu rezultantu $A' = 0,65 \text{ t}$ i to će nam biti totalni otpor na donjem osloncu grede AB. Za njegove komponente dobivamo računom

$$A'_x = A_x - S_{1x} = 0,44 - 0,56 = -0,12 \text{ t.}$$

$$A'_y = A_y - S_{1y} = 0,60 - 1,24 = -0,64 \text{ t.}$$

dakle

$$A' = \sqrt{A'_x{}^2 + A'_y{}^2} = 0,65 \text{ t.}$$

Ostale dve sile: B i C koje napadaju na gredu AB znamo već iz ranije.

Da bismo nacrtali dijagram M za gredu AB uzimamo u obzir silu B = 0,44 t i transversalne (ovde: horizontalne) komponente $A'_x = 0,12 \text{ t}$; $C_x = 0,56 \text{ t}$ i crtamo im plan sila i verižni poligon 1'-2'-3' koji pretstavlja Kulmanovu momentnu površinu. Iz istog plana sila sleduje i dijagram T za gredu AB. M_{max} u gredi AB nalazi se u preseku C i njegova je veličina

$$\text{grafički } M_C = +0,70 \text{ m.l t} = +0,70 \text{ tm.}$$

$$\text{računski } M_C = +A'_x \cdot 5,8 \text{ m} = +0,12 \text{ t} \cdot 5,8 \text{ m} = +0,70 \text{ tm.}$$

Dijagram X za gredu AB pokazuje zatezanje na delu AC u veličini

$$X_{AC} = A'_y = C_y = 0,64 \text{ t.}$$

Na gredi CD, koja je prepuštena preko oslonca D, složićemo prvo grafički sile C i S_2 u njihovu rezultantu $C' = 0,95 \text{ t}$ i to će nam biti totalni otpor na levom osloncu grede CD. On se mora sa silama P i S_3 seći u istoj tački J_3 . Računom nalazimo komponente od C' :

$$C'_x = S_{2x} + C_x = 0,34 \text{ t} + 0,56 \text{ t} = 0,90 \text{ t.}$$

$$C'_y = S_{2y} - C_y = 0,34 \text{ t} - 0,64 \text{ t} = -0,30 \text{ t.}$$

dakle $C' = \sqrt{0,9^2 + 0,3^2} = \sqrt{0,90} = 0,95 \text{ t}$. Ostale dve sile: P i $D = S_3$ koje napadaju na gredu CD znamo već iz ranije.

Da bismo nacrtali dijagram M za gredu CD uzimamo u obzir pored sile P = 0,6 t još i transversalne (ovde: vertikalne) komponente ostalih sila:

$$C_y = 0,30 \text{ t} \quad \text{i} \quad D_y = S_{3y} = 0,90 \text{ t}$$

i crtamo im plan sila i verižni poligon 1''-2''-3'' koji pretstavlja Kulmanovu momentnu površinu. Pomoću istog plana sila odre-

djujemo i dijagram T za gredu CD.

M_{max} za gredu CD javlja se u preseku D i za njegovu veličinu nalazimo

$$\text{grafički } M_D = -1,00 \text{ m.l, } 0 \text{ t} = -1,0 \text{ tm.}$$

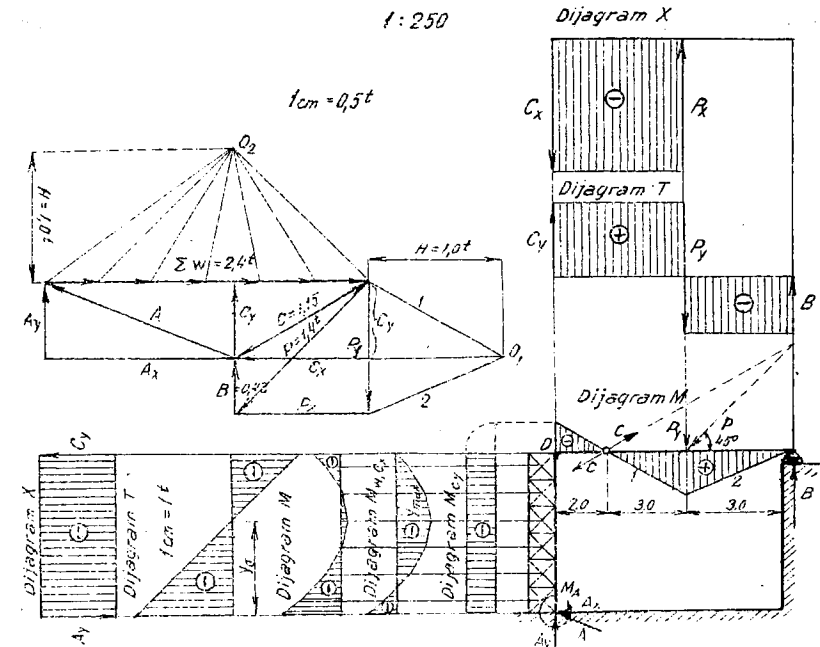
$$\text{računski } M_D = -0,6 \text{ t} \cdot 1,8 \text{ m} = -1,08 \text{ tm.}$$

Dijagram X za gredu CD dobivamo kad uzmemo u obzir aksijalne komponente $C'_x = D_x = +0,90 \text{ t}$. koje deluju kao zatezanje na delu grede od C do D

$$X_{CD} = 0,90 \text{ t (zatezanje).}$$

Na prepustu desno od D nema aksijalne sile.

3. Zadatak (sl. 310). - Nosač je složen iz konzole AC



Sl. 310

sa izlaznom osovinom (prelazna tačka D) i proste grede CB koja se naslanja na tu konzolu u zglobu C i na zid u tački B

(pokretno ležište). Opterećenje je $P = 1,4 \text{ t}$ (pod uglom $\alpha = 45^\circ$) i $w = 0,4 \text{ t/m}$ (horizontalno), kako je pokazano u sl. 310.

Prvo rešavamo prostu gredu CB, za čije reakcije oslonca nalazimo grafički

$$B = 0,43 \text{ t}; \quad C = 1,15 \text{ t.}$$

a računski iz jednačina

$$C_x - P_x = 0$$

$$C_y - P_y + B = 0$$

$$P_y \cdot 3 - 7 \cdot B = 0 \text{ (obrotna tačka C)}$$

koje nam daju, uzimajući u račun

$$P_x = P_y = P \cos 45^\circ = 1,4 \cdot 0,707 = 0,99 \text{ t,}$$

$$B = \frac{0,99 \cdot 3}{7} = 0,44 \text{ t.}$$

$$C_x = 0,99 \text{ t}; \quad C_y = 0,55 \text{ t}; \quad C = 1,13 \text{ t.}$$

Kako opterećenje (w) konzole nema nikakva uticaja na prostu gredu CB, to možemo sa dosadašnjim podacima nacrtati za gredu CB dijagrame M , T i X na poznati način (v. sl. 310). Maksimalni momenat (pozitivan) javlja se u preseku gde napada teret P i veličina mu je

$$\text{grafički } M_{\max} = 1,65 \text{ m} \cdot 1,0 \text{ t} = + 1,65 \text{ tm.}$$

$$\text{računski } M_{\max} = B \cdot 4,0 \text{ m} = 0,44 \cdot 4 = + 1,76 \text{ tm.}$$

Na konzolu AC napada - sem horizontalnog opterećenja $w = 0,4 \text{ t/m}$ - još i sila C na kraju prepusta, koja potiče od opterećenja grede CB. Sila C je iste veličine i pravca kao i reakcija C proste grede CB, ali za konzolu se mora uzeti u protivnom smeru.

Reakciju A oslonca konzole i momenat uklještenja M_A najpreglednije dobivamo, primenom računskih uslova ravnoteže na konzolu AC:

$$\sum w - C_x - A_x = 0$$

$$A_y - C_y = 0$$

$$3 \text{ m} \cdot \sum w + C_y \cdot 2 \text{ m} - C_x \cdot 6 \text{ m} - M_A = 0 \text{ (obrt. tačka A).}$$

Oдавде nalazimo

$$A_x = 1,41 \text{ t}; \quad A_y = 0,55 \text{ t}; \quad A = 1,51 \text{ t.}$$

$$M_A = - 2,36 \text{ tm.}$$

Grafički ćemo najlakše naći M_A , kao i ceo dijagram momenata za konzolu AC, kad celokupno opterećenje konzole razložimo u dva opterećenja: horizontalno (w i C_x) i vertikalno (C_y) pa zasebno ispitujemo njihov uticaj na momente u konzoli.

Za samo vertikalno opterećenje C_y crtamo (sa polom O_1) dijagram M_{Cy} za deo konzole DC, koji je produženje dijagrama M proste grede CB. Tako dobivamo trouglasti dijagram M_{Cy} za deo DC. Dalje od D do A momenat u konzoli usled sile C_y je konstantan, jer je krak sile ($2,0 \text{ m}$) konstantan; zato ovaj deo dijagrama dobivamo prosto, kad ordinatu y_D okrenemo za 90° i povučemo paralelu sa osovinom konzole AD. Momenat M_{Cy} je po celoj dužini konzole negativan, a maksimalna mu je veličina

$$\text{grafički } M_D = - 1,05 \cdot 1 \text{ t} = - 1,05 \text{ tm.}$$

$$\text{računski } M_D = - C_y \cdot 2 = - 0,55 \cdot 2 = - 1,10 \text{ tm.}$$

Za samo horizontalno opterećenje w i C_x konzole crtamo (sa polom O_2) nov verižni poligon koji nam daje Kulmanovu momentnu površinu za deo AD (delom pozitivnu, delom negativnu), dok je na delu DC momenat usled horizontalnog opterećenja jednak nuli.

Totalni dijagram M za konzolu AC dobivamo sad grafičkim sabiranjem dijagrama za delimična opterećenja, vodeći računa o njihovom znaku. Za deo DC totalni dijagram M je isti kao i dijagram M_{Cy} , a za deo AD dobivamo totalnu momentnu po-

vršinu, koja je na krajevima (kod A i D) negativna, a negde oko sredine dela AD pozitivna. Prema tome, sem krajnjih preseka A i D, postoji na delu AD još jedan opasan presek. Njega nalazimo iz uslova da tu mora biti transversalna sila jednaka nuli. Ako sa y_0 označimo (vertikalno) rastojanje toga preseka od oslonca A, naćićemo njegov položaj iz jednačine

$$T_{y_0} = A_x - w \cdot y_0 = 0$$

$$1,41 - 0,4 \cdot y = 0$$

$$y_0 = \frac{1,41}{0,4} = 3,52 \text{ m.}$$

Sad dobivamo računski

$$M_{y_0} = -M_A + A_x \cdot 3,52 - w \cdot \frac{3,52^2}{2}$$

$$M_{y_0} = -2,36 + 4,96 - 2,48 = +0,12 \text{ tm.}$$

Grafički nalazimo veličinu toga momenta

$$M_{y_0} = +0,15 \text{ m} \cdot 1,0 \text{ t} = +0,15 \text{ tm.}$$

Još nam ostaje da grafički odredimo i veličinu momenta uklještenja

$$M_A = -y_A \cdot H = -2,30 \text{ m} \cdot 1,0 \text{ t} = -2,30 \text{ tm.}$$

Kad uporedimo veličine napadnih momenata u svima opasnim presecima konzole, vidimo da je od svih najveći momenat uklještenja.

Dijagrami T i X za konzolu AC nacrtani su na sl. 310. uzimajući u obzir već poznate transversalne i aksijalne komponente spoljnih sila i to zasebno za deo AD, a zasebno za deo DC

Iz tih dijagrama se vidi da je

Za deo DC

$$T_{DC} = C_y = A_y = 0,55 \text{ t.}$$

$$X_{DC} = -C_x = -0,99 \text{ t (pritlsak).}$$

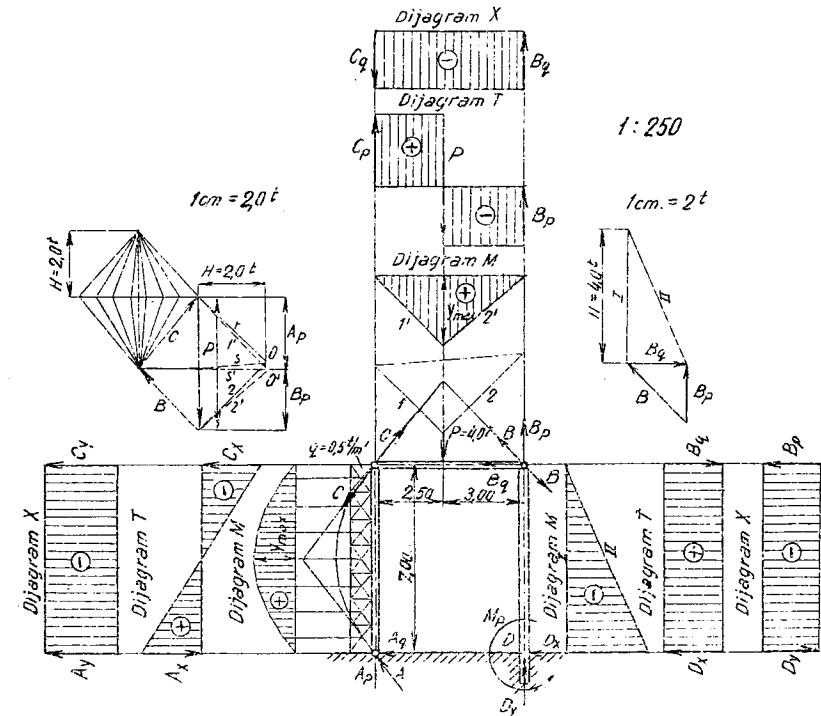
Za deo AD

uopšte: $T_{AD} = A_x - w \cdot y.$

(sa krajnjim vrednostima: $T_A = A_x = 1,41 \text{ t}$; $T_D = C_x = 0,99 \text{ t}$).

$$X_{AD} = A_y = C_y = -0,55 \text{ t (pritlsak).}$$

4. Zadatak (sl. 311). - Nosač je složen iz tri krute



Sl. 311

ploča, od kojih je jedna (BD) vertikalno uklještena (kod D) a druge dve međusobno i sa osloncima (A i B) vezane na zglobove. Ceo sistem se može shvatiti kao luk sa tri zgloba (A, B i C) oslonjen na jednom kraju na zemlju (kod A) a na drugom (kod B) na vrh konzole DB*). Opterećenje nosača je $q = 0,5 \text{ t/m}^2$ (horizontalno) i $P = 4 \text{ t}$ (vertikalno).

*) Ili prestije kao sistem od dve grede: Greda AC ima nepokretno ležište A i pokretno ležište C (ležišni štap CB). Greda GB ima nepokretno ležište B i pokretno ležište C (ležišni štap CA).

Da bismo grafički našli reakcije u zglobovima A i B primenjujemo metodu koju smo upoznali kod luka sa tri zgloba. Prvo odredjujemo reakcije A_p i B_p (odnosno A_y i B_y) koje odgovaraju opterećenju P same ploče CB, zatim reakcije A_q i B_q (odnosno A_x i B_x) koje važe za samo opterećenje q ploče AC i najzad totalne reakcije A i B usled celokupnog opterećenja lučnog nosača. Kad tačku O, gde se u planu sila seku totalne reakcije A i B, upotrebimo kao pol, onda možemo nacrtati za ceo lučni nosač verižni poligon (potpornu liniju) koji prolazi kroz sva tri zgloba. Onoj strani toga verižnog poligona, koja prolazi kroz zglob C, odgovara u planu sila veličina reakcije C koja se javlja u zglobu C. Na taj način su grafički određene sve tri reakcije u zglobovima. Iz plana sila nalazimo njihove veličine

$$A = 2,80 \text{ t.}$$

$$B = 2,50 \text{ t.}$$

$$C = 2,80 \text{ t.}$$

Računski nalazimo reakcije A i B lučnog nosača iz jednačina:

$$(\sum X = 0) \quad A_x - \sum q - B_x = 0$$

$$(\sum Y = 0) \quad A_y - P - B_y = 0$$

$$(\sum M = 0) \quad A_x \cdot 7 \text{ m} + A_y \cdot 5,5 \text{ m} - 3,5 \text{ m} \sum q - P \cdot 3 \text{ m} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{obrtna} \\ \text{tačka B} \end{array} \right)$$

$$(M_C = 0) \quad A_x \cdot 7 \text{ m} - 3,5 \text{ m} \cdot \sum q = 0$$

koje nam daju

$$A_x = 1,75 \text{ t}; \quad A_y = 2,18 \text{ t}; \quad B = 2,81 \text{ t.}$$

$$B_x = 1,75 \text{ t}; \quad B_y = 1,82 \text{ t}; \quad B = 2,52 \text{ t.}$$

Iz uslova ravnoteže same ploče AC sleduje da mora biti $C_y = A_y = 2,18 \text{ t}$, a iz istih tih uslova za ploču CB da je $C_x =$

$$= B_x = 1,75 \text{ t}; \text{ dakle je } C = 2,81 \text{ t.}$$

Čim su određene reakcije u zglobovima A, B i C onda su za svaku od krutih ploča poznate sve spoljne sile koje na nju napadaju, pa je moguće pristupiti statičkom ispitivanju pojedinih ploča. Ono je na sl. 311 izvršeno za svaku ploču zasebno.

Ploče AC i CB rešene su kao proste grede. Iz nacrtanih dijagrama vidi se da svaka od tih ploča, sem momenta savijanja i transversalne sile, trpi i aksijalni pritisak. Za najveće momente savijanja nadjene su ove vrednosti:

Kod ploče AC

$$\text{grafički} \quad M_{\max} = + 1,2 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ t} = + 3,0 \text{ tm.}$$

$$\text{računski} \quad M_{\max} = A_x \cdot 3,5 \text{ m} - q \frac{3,5^2}{2} = + 3,07 \text{ tm.}$$

Kod ploče CB

$$\text{grafički} \quad M_{\max} = + 2,18 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ t} = + 5,45 \text{ tm.}$$

$$\text{računski} \quad M_{\max} = + B_y \cdot 3 \text{ m} = + 5,46 \text{ tm.}$$

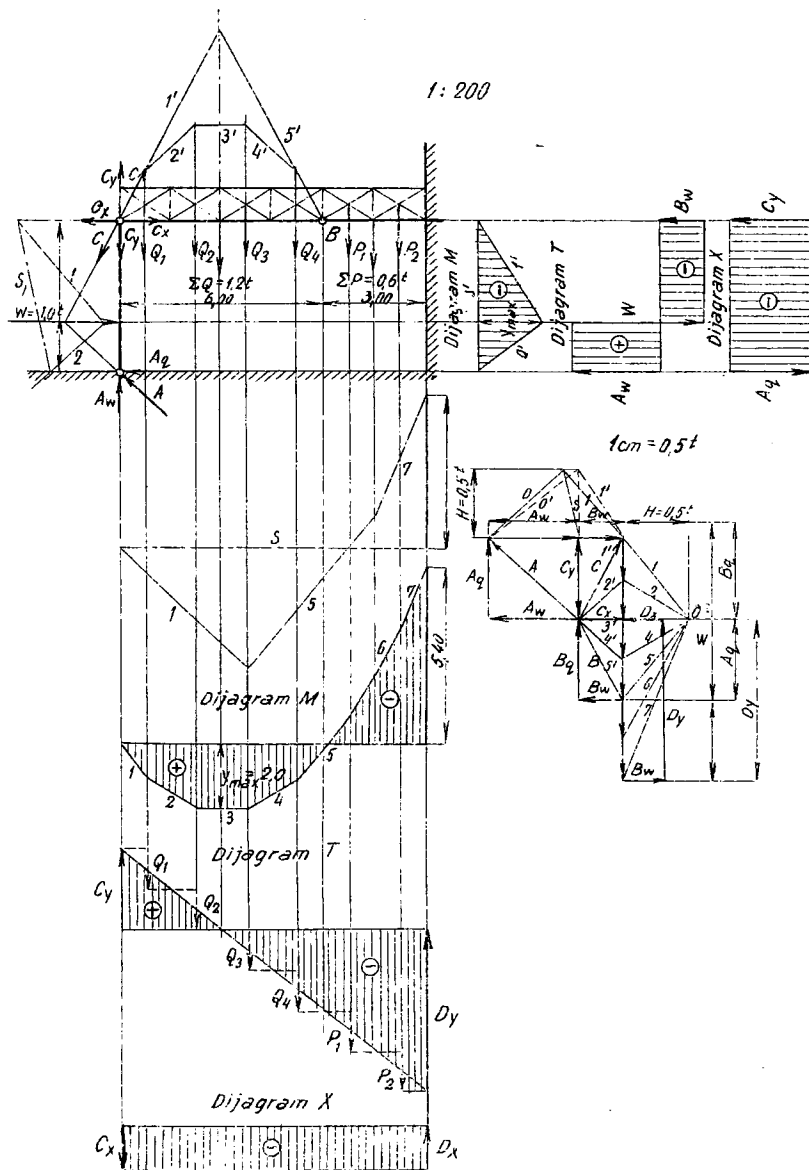
Ploča BD rešena je kao konzola uklještenja u preseku D i opterećena kosom silom B. U konzoli BD takodje vladaju i momenat savijanja i transversalna i aksijalna sila, kao što se vidi iz nacrtanih dijagrama. U preseku D javlja se najveći momenat savijanja, za čiju veličinu nalazimo

$$\text{grafički} \quad M_D = - 4,85 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ t} = - 12,13 \text{ tm.}$$

$$\text{računski} \quad M_D = - B_x \cdot 7 \text{ m} = - 12,25 \text{ tm.}$$

Ovo je u isto vreme i najveći od svih momenata na celom nosaču.

5. Zadatak (sl. 312). - Nosač je sličan sa onim iz prošlog primera, jer se sastoji iz jednog luka sa tri zgloba



Sl. 312

(A, B i C) i jedne konzole (BD)^{*)}, samo što je ovde konzola hori-

*) ili prostije iz konzole BD, proste grede BC koja ima u B pokretno ležište (ležišni štap CA) i grede AC na nepokretnom ležištem A i pokretnim ležištima C (ležišni štap CB).

zontalno uklještena i opterećena po celoj dužini sa $p = 0,2 \text{ t/m}$. Opterećenje lučnog nosača je $q = 0,2 \text{ t/m}$ (vertikalno) i $W = 1 \text{ t}$ (horizontalno).

Rešenje ovog zadatka izvršeno je na isti način kao i u prošlom primeru. Prvo su grafički određene reakcije u zglobovima A, B i C lučnog nosača i nadjeno je

$$A = 0,90 \text{ t}; \quad B = 0,70 \text{ t}; \quad C = 0,70 \text{ t}.$$

Zatim su reakcije A i B izračunate iz jednačina

$$(\sum X = 0) \quad A_x - W - B_x = 0$$

$$(\sum Y = 0) \quad A_y - \sum q - B_y = 0$$

$$(\sum M = 0) \quad A_x \cdot 4,5 \text{ m} + A_y \cdot 6 \text{ m} - 3 \text{ m} \cdot \sum q = 0 \text{ (obrt. tačka B)}.$$

$$(M_C = 0) \quad A_x \cdot 4,5 \text{ m} - W \cdot 3 \text{ m} = 0$$

koje daju

$$A_x = 0,67 \text{ t}; \quad A_y = 0,60 \text{ t}; \quad A = 0,90 \text{ t}$$

$$B_x = 0,33 \text{ t}; \quad B_y = 0,60 \text{ t}; \quad B = 0,69 \text{ t}.$$

a reakcija u zglobu C izlazi

$$C_x = B_x = 0,33 \text{ t}.$$

$$C_y = A_y = 0,60 \text{ t}.$$

$$C = 0,69 \text{ t}.$$

Time su određene sve spoljne sile za svaku od krutih ploča AC, CB i BD.

Dijagrami M, T i X za ceo nosač nacrtani su samtrajući ploču AC kao zasebnu prostu gredu, a ploče CB i BD ujedno kao neku vrstu Gerberove grede složene iz jedne proste grede (CB) i jedne konzole (BD). Iz dijagrama na sl. 312 vidi se da u celom nosaču vladaju, sem momenata savijanja i transverzalnih sila, još i aksijalni pritisci. Postoje tri opasna preseka, u kojima se javljaju ovi momenti savijanja.

Za deo AC :

grafički $M_{max} = + 2 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ t} = 1,0 \text{ tm}.$

računski $M_{max} = + A_x \cdot 1,5 \text{ m} = 1,0 \text{ tm}.$

Za deo CB

grafički $M_{max} = + 2,0 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ t} = + 1,00 \text{ tm}.$

računski $M_{max} = + \frac{q l^2}{8} = + 0,90 \text{ tm}.$

Za deo BD

grafički $M_{max} = - 5,4 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ t} = - 2,7 \text{ tm} = M_D$

računski $M_{max} = - B \cdot 3 = \frac{P \cdot 3^2}{2} = - 2,7 \text{ tm} = M_D.$

Od svih je najopasniji momenat uklještenja u preseku D.

VII. Dopune rešetkastim nosačima.

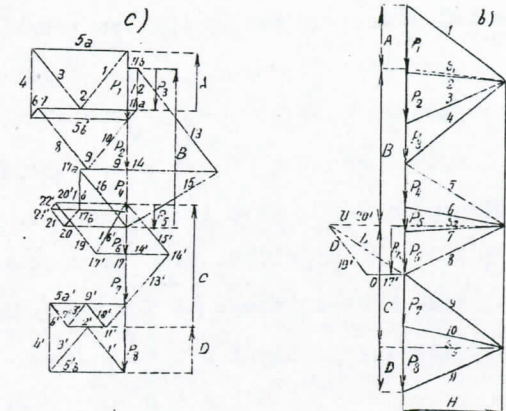
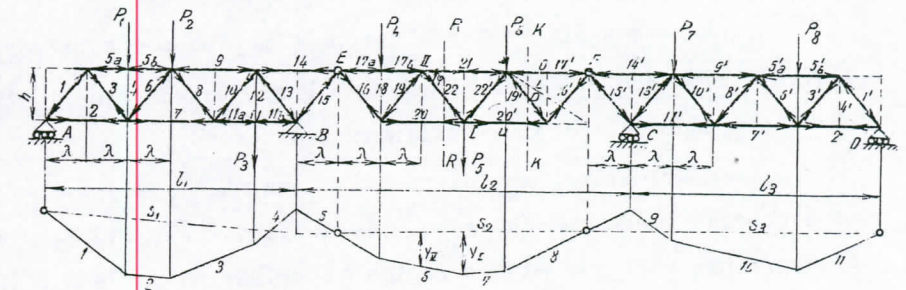
O rešetkastim nosačima opširno smo govorili u Statici materijalne linije, v. str. 71-157. ove knjige. Posle upoznavanja opšte teorije rešetaka tada smo pokazali i kako se vrši ispitivanje statički određenih rešetkastih nosača, čiji štampovi obrazuju jednu krutu ploču, a to su: greda (prosta i prepustena) i konzola. Sad nam još ostaje da proučavanje rešetkastih nosača dopunimo i sistemima, složenim iz dve ili više krutih rešetkastih ploča vezanih na zglobove i to u vidu statički određenih nosača: Gerberove grede i luka sa tri zgloba. Upoznaćemo najzad i složene i specijalne rešetke koje imaju izvesnu praktičnu vrednost.

35 Rešetkasta Gerberova greda.

Nosač na sl. 313 složen je iz tri krute rešetkaste ploče: AB, CD i EF. Ploče AB i CD su grede s prepustom, a ploča EF prosta je greda, oslonjena na krajeve prepusta u zglobovima

E i F (lebleća greda). Opterećenje je dato u vidu čvornih tereta $P_1 - P_8$ koji napadaju u proizvoljnim čvorovima i na gornjem i na donjem pojasu nosača.

Pri određivanju reakcija oslonaca A, B, C i D postupamo i grafički i računski onako, kako je pokazano na str. 458 ove sveske, tj. tako kao da su krute ploče AB, CD i EF pune a ne



Sl. 313

rešetkaste.

Grafičko određivanje reakcija oslonaca pokazano je na sl. 313 a i 313 b, gde je nacrtan (sa tri pola, posebno za svaki otvor) zatvoren verižni poligon 1-2-3...10-11-s₃-s₂-s₁ čije završne strane - prenete paralelno u plan sila - otsecaju na teretnoj vertikali veličine reakcija A, B, C i D.

Za računsko određivanje reakcija stoje nam na raspoloženju, u slučaju sl. 313, četiri jednačine:

$$\left. \begin{aligned} \sum Y &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ za sve spoljne sile}$$

$$\left. \begin{aligned} M_E &= 0 \\ M_F &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ za spoljne sile levo ili desno od zglavka.}$$

iz kojih možemo odrediti sve četiri nepoznate reakcije.

Čim smo našli reakcije oslonaca možemo preći na određivanje napona u štapovima Gerberove grede primenjujući tri poznate metode: Kremoninu, Kulmanovu i Riterovu.

Po Kremoninoj metodi nalazimo sve sile u štapovima cele Gerberove grede pomoću jednog plana sila, v. sl. 313 c, za čije crtanje važi sve što je ranije (str. 102-103) rečeno o crtanju Kremoninih planova sila. No kako ovde imamo posla sa nosačem koji ima vrlo mnogo štapova preporučuje se, radi izbegavanja većeg nagomilavanja grešaka neizbežnih pri grafičkom radu (povlačenju paralela) crtanje Kremoninog plana ne početi samo s krajeva (kod A i D) Gerberove grede već i od svakoga od zglobova (E i F) na levo i na desno. To je moguće zato, što su nam iz plana sila (sl. 313 b) već poznati i uzajamni pritisci kojim ploče kroz zglobove (E i F) jedna na drugu dejstvuju. Tako su u sl. 313 pritisci u zglobovima

$$E = A + B - P_1 - P_2 - P_3$$

$$F = C + D - P_7 - P_8$$

t. j. jednaki transverzalnim silama za preseke E i F Gerberove grede.

Kulmanova metoda prikazana je na sl. 313 za presek K-K koji pogadja štapove $O_{17'}$, $D_{19'}$ i $U_{20'}$. U planu sila (sl. 313 b) određena je za taj presek rezultanta svih spoljnih sila desno

od preseka $R_K = C + D - P_7 - P_8$. U verižnom poligonu (sl. 313 a) ovaj presek K-K pogadja strane 8 i s_2 i u njihovom preseku nalazimo položaj te rezultante: ona prolazi dakle kroz zglob F. Sad možemo primeniti poznatu Kulmanovu konstrukciju (v. raniju sl. 74, str. 123) za određivanje napona $O_{17'}$, $D_{19'}$ i $U_{20'}$ koja je pokazana i u planu sila na sl. 313 b.

Po Riterovoj metodi nalazimo za sile u pojavnim štapovima, koje pogadja presek R-R, iz momentnih jednačina za čvorove I i II izraze:

$$O_{21} = - \frac{M_I}{h}$$

$$U_{20} = + \frac{M_{II}}{h}$$

gde su M_I i M_{II} napadni momenti Gerberove grede za čvorove I i II koji leže naspram tih štapova. Ove momente po Riteru dobivamo računski, za slučaj na sl. 313, iz jednačina

$$M_I = A.10\lambda + B.4\lambda - P_1.8\lambda - P_2.7\lambda - P_3.5\lambda - P_4.2\lambda.$$

$$M_{II} = A.9\lambda + B.3\lambda - P_1.7\lambda - P_2.6\lambda - P_3.4\lambda - P_4.\lambda.$$

ali ih možemo - radi kontrole - odrediti i pomoću Kulmanove momentne površine:

$$M_I = y_I.H.$$

$$M_{II} = y_{II}.H.$$

Za štap D_{22} ne možemo, po Riteru, upotrebiti momentnu jednačinu $\sum M = 0$, jer se štapovi O_{21} i U_{20} ne seku. Zato je za izračunavanje veličine napona u tome štapu u ovome slučaju najbolje primeniti na levi otsečak Gerberove grede jednačinu

$$\sum Y = 0$$

koja, prema sl. 313 a, glasi

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - D \sin\varphi = 0.$$

Ona nam daje

$$D = \frac{A + B - P_1 - P_2 - P_3 - P_4}{\sin \varphi} = \frac{T_R}{\sin \varphi}$$

jer je izraz u brojitelju ravan transverzalnoj sili za presek R - R Gerberove grede. Ovako prosti izrazi za računanje sila u štapovima O_{21} , U_{20} i U_{22} dobivaju se zato, što je nosač v. sl. 313 paralelna greda (uporedi sl. 88, str. 151).

38. Rešetkast luk sa tri zgloba.

Ako je nosač složen iz dve rešetkaste krute ploče, koje se dodiruju u temenu C a oslanjaju na oslonce u tačkama A i B, onda se takav nosač zove rešetkasti luk sa tri zgloba. On se primenjuje naročito kod gvozdениh mostova (sl. 314) i krovova (sl. 315).

Za određivanje reakcija oslonaca A i B i uzajamnog pritiska krutih ploča u zglobu C važe iste metode koje smo primenili i kod punog luka sa tri zgloba. Pri grafičkom radu (sl. 314 a) obično tražimo reakcije oslonaca odvojeno za samo opterećenje levo od zgloba C (A_1 i B_1) i desno od zgloba C (A_2 i B_2) pa ih posle po zakonu superpozicije slažemo u rezultantne reakcije (A i B), koje odgovaraju totalnom opterećenju.

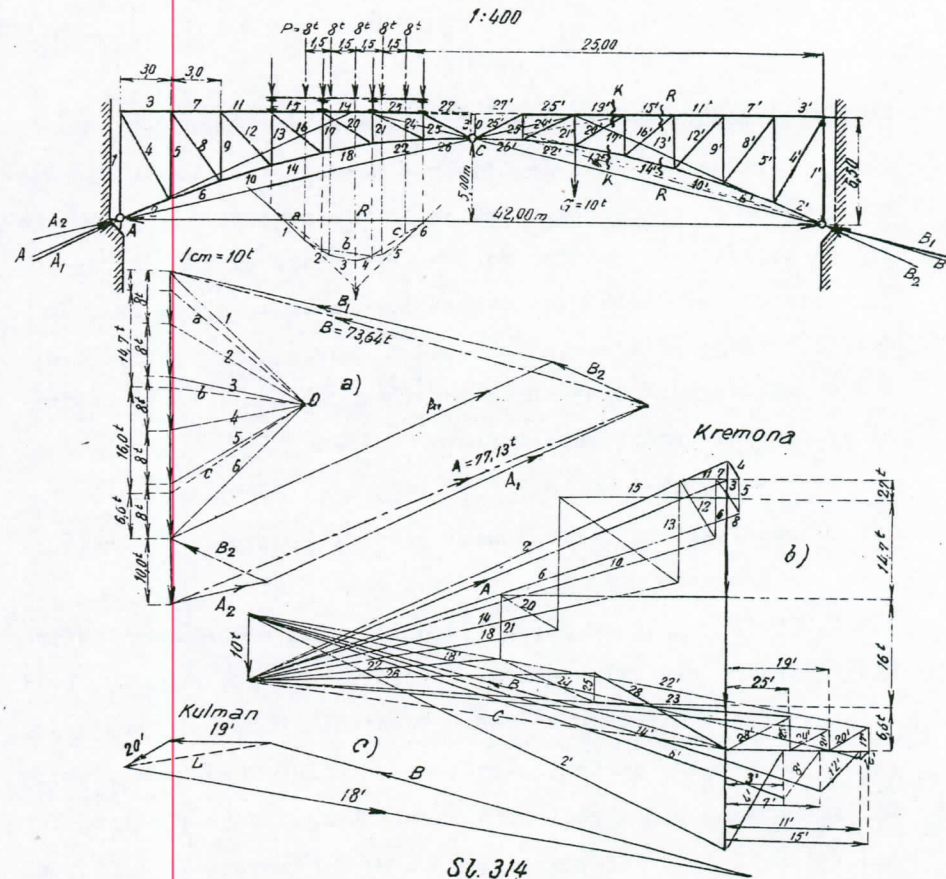
1) Za primer nosača na sl. 314 nalazimo na ovaj način grafički

$$A = 77,1 \text{ t}; \quad B = 73,6 \text{ t.}$$

Pritisak u zglobu C možemo u ovome slučaju grafički odrediti slaganjem svih spoljnih sila bilo levo bilo desno od C, kao što se vidi iz sl. 314 b, koja nam daje

$$C = 72,0 \text{ t.}$$

Računski dobivamo reakcije za slučaj na sl. 314 iz ovih jedna-



čina:

$$(\sum X = 0) \quad A_x - B_x = 0$$

$$(\sum Y = 0) \quad A_y + B_y - \sum P - G = 0$$

$$(\sum M_B = 0) \quad A_y \cdot 42,0 - P(25,0 + 26,5 + 28,0 + 29,5 + 31,0) - G \cdot 15,0 = 0$$

$$(M_C = 0) \quad G \cdot 6,0 + B_x \cdot 5,0 - B_y \cdot 21,0 = 0$$

iz kojih izlazi

$$A_x = 71,2 \text{ t}; \quad A_y = 30,2 \text{ t}; \quad A = \sqrt{71,2^2 + 30,2^2} = 77,4 \text{ t.}$$

$$B_x = 71,2 \text{ t}; \quad B_y = 19,8 \text{ t}; \quad B = \sqrt{71,2^2 + 19,8^2} = 73,9 \text{ t.}$$

Za pritisak u zglobu C nalazimo dalje

$$C_x = B_x = 71,2 \text{ t}; \quad C_y = B_y - G = 9,8 \text{ t}$$

$$C = \sqrt{71,2^2 + 9,8^2} = 71,9 \text{ t.}$$

Rezultati računa dobro se slažu sa grafičkim radom.

Dalje statičko ispitivanje nosača svodi se na odredjivanje napona u svima štapovima, koje možemo izvršiti po ma kojoj od poznate tri metode. No pre toga, kako sile P ne napadaju u čvorovima, treba naći čvorne terete koji im odgovaraju. Grafički to je učinjeno na sl. 314 a) povlačenjem paralela a , b i c odgovarajućim stranama verižnog poligona, te su dobiveni svi čvorni tereti idući s leva na desno

$$2,7 \text{ t}; \quad 14,7 \text{ t}; \quad 16,0 \text{ t}; \quad 6,6 \text{ t.}$$

Ovi se rezultati mogu i računski proveriti na poznati način.

Kremonin plan sila za ovaj nosač nacrtan je u sl. 314 b. Spoljne sile su poredjane onim redom kako ih nailazimo kad obilazimo oko celog nosača u smislu kazaljke na satu. Pritisak u zglobu C možemo za skavu od krutih ploča, iz kojih je nosač sastavljen, smatrati kao spoljnu silu. Prema tome, crtanje Kremoninog plana počinjemo sa oba kraja svake ploče tj. za levu ploču i od A (štapovi 1 i 2) i od C (štapovi 26 i 28), a za desnu i od B (štapovi 1' i 2') i od C (štapovi 26' i 28'). Na ovaj način izbegavamo nagomilavanje neizbežnih grešaka pri povlačenju paralela, koje bi se moralo pojaviti kad bismo ceo Kremonin plan crtali pošav samo sa jednog kraja nosača.

Po Kulmanu su odredjene sile u tri štapa: 19', 20' i 18' koje pogadja presek $K - K$. Rezultanta spoljnih sila desno od preseka je reakcija B . U planu nosača nju dovodimo do preseka sa štapom 18' i tu tačku spajamo linijom L sa presekom ostala dva štapa 19' i 20'. U planu sila (sl. 314 c) crtamo prvo trougao sila B , $U_{18'}$, i L a zatim i trougao sila L , $D_{20'}$ i $O_{19'}$,

čime je zadatak po Kulmanu rešen. Po smislu obilaženja sila oko četvorougla vidimo da štapovi 19' i 20' trpe zatezanje, a štap 18' pritisak.

Riterova metoda pokazana je za presek $R - R$ koji pogadja štapove 15', 16' i 14'. Jedina spoljna sila desno od preseka je reakcija B , čije su komponente, odredjene računom

$$B_x = 71,2 \text{ t}; \quad B_y = 19,8 \text{ t.}$$

Da bismo, na primer, našli silu u štapu 14' postavimo za desni otsečak nosača momentnu jednačinu $\sum M = 0$ za naspramni čvor (presek štapa 15' i 16') kao obrtnu tačku. Ona glasi

$$B_x \cdot 6,5 = U_{14'} \cdot r - B_y \cdot 9,0 = 0$$

gde je $r = 3,0 \text{ m}$ rastojanje štapa 14' od naspramnog čvora. Odatavde nalazimo

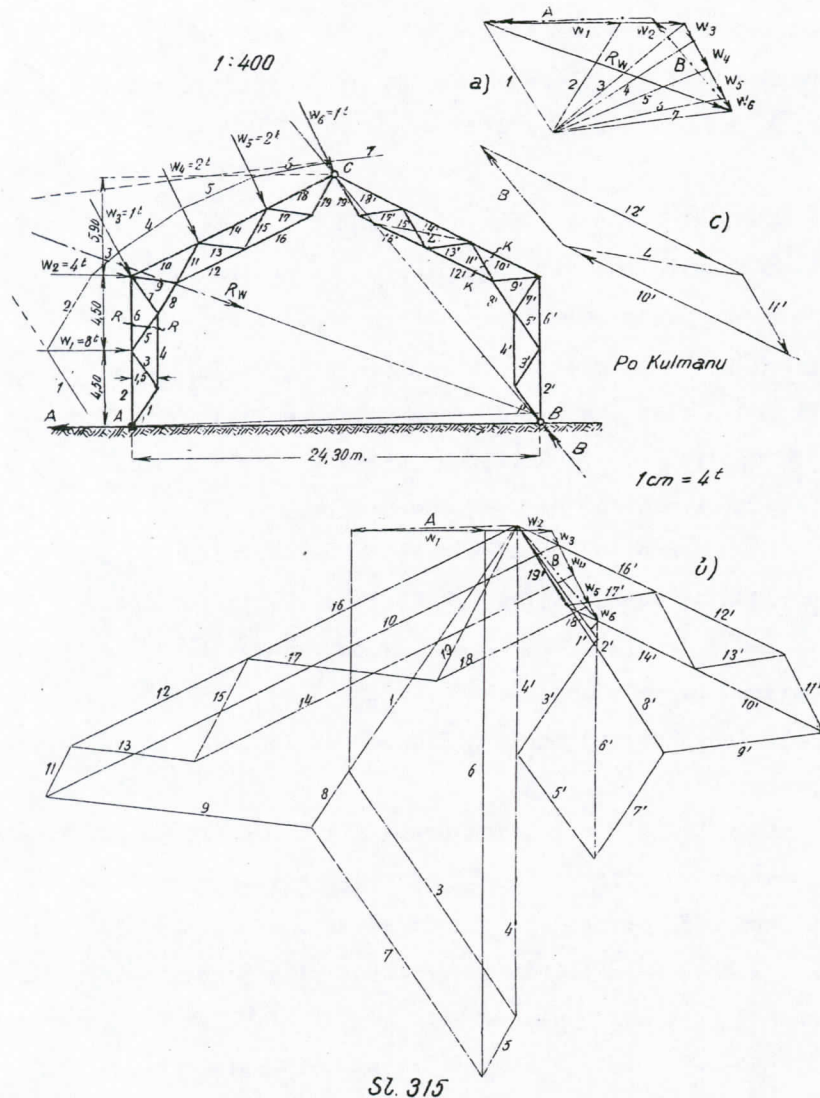
$$U_{14'} = \frac{19,8 \cdot 9,0 - 71,2 \cdot 6,5}{3,0} = - \frac{284,6}{3} = - 94,9 \text{ t (pritisak).}$$

Po Kremoni u ovome štapu vlada sila od $\sim 94,0 \text{ t}$, što se dobro slaže sa vrednošću koju smo našli računom.

Na sličan način možemo po Riteru naći i sile u štapovima 15' i 16'.

2) Krovni nisač na sl. 315, sistema rešetkastog luka sa tri zgloba, opterećen je s leva pritiskom vetra W , koji uzimamo upravno na ravni na koje dejstvuje, a desno strana je neopterećena.

Grafički nalazimo reakcije oslonaca A i B i pritisak u zglobu C kad prvo složimo (sl. 315 a) sve sile W u njihovu rezultantu R_w , čiji položaj na nosaču odredjujemo pomoću verižnog poligona 1-2-3-4-5-6-7. Kako je desna strana neopterećena, otpor B prolaziće i kroz zglob C a otpor A kroz presek sila R_w i B . Tako nalazimo pravce sila A i B a zatim povlače-



Sl. 315

njem paralela u planu sila i njihove veličine

$$A = 10,0 \text{ t}; \quad B = 7,3 \text{ t.}$$

Kako desno od C nema drugih spoljnih sila, to je

$$C = B = 7,3 \text{ t.}$$

Računski odredjujemo A i B kad prvo kose sile W_3 do W_6 razložimo u horizontalne i vertikalne komponente. Sile W_3 -

- W_6 zaklapaju sa vertikalom isti ugao, koji zaklapa i nagnuti deo krova sa horizontalom. Taj ugao je

$$\text{tang} \alpha = \frac{5,90}{12,15} = 0,485$$

$$\alpha = 25^\circ 50'$$

$$\sin \alpha = 0,436; \quad \cos \alpha = 0,900.$$

Prema tome biće pomenute komponente

$$X_3 = X_6 = 1,0,436 = 0,44 \text{ t}; \quad Y_3 = Y_6 = 1,0,9 = 0,9 \text{ t.}$$

$$X_4 = X_5 = 2,0,436 = 0,88 \text{ t}; \quad Y_4 = Y_5 = 2,0,9 = 1,80 \text{ t.}$$

Sad možemo postaviti jednačine za računanje komponenta reakcija

$$(\sum X = 0) \quad A_x + B_x - W_1 - W_2 - X_3 - X_4 - X_5 - X_6 = 0$$

$$(\sum Y = 0) \quad A_y + B_y - Y_3 - Y_4 - Y_5 - Y_6 = 0$$

$$(\sum M_A = 0) \quad W_1 \cdot 4,5 + W_2 \cdot 9,0 + X_3 \cdot 9,0 + X_4 \left(9 + \frac{5,9}{3}\right) + \\ + X_5 \left(9 + \frac{2}{3} \cdot 5,9\right) + X_6 \cdot 14,9 + Y_4 \cdot \frac{12,15}{3} + \\ + Y_5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12,15 + Y_6 \cdot 12,15 - B_y \cdot 24,30 = 0.$$

$$(M_C = 0) \quad B_y \cdot 12,15 - B_x \cdot 14,90 = 0.$$

Iz ovih jednačina dobivamo

$$A_x = -10,06 \text{ t}; \quad A_y = -0,22 \text{ t}; \quad A = 10,07 \text{ t.}$$

$$B_x = -4,58 \text{ t}; \quad B_y = +5,62 \text{ t}; \quad B = 7,25 \text{ t.}$$

Za pritisak u zglobu C sleduje prema ranijem

$$C_x = B_x = 4,58 \text{ t}; \quad C_y = B_y = 5,62 \text{ t}; \quad C = 7,25 \text{ t.}$$

Kremonin plan sila za ovaj nosač prikazan je na sl. 315 b). On je nacrtan, kao i u prošlom primeru, počinjući za svaku krutu ploču odredjivanje sila u štapovima sa oba kraja te ploče.

Kulmanova metoda primenjena je za presek K - K koji

pogadja štapove 10', 11' i 12'. Rezultanta sila desno od preseka je reakcija B. Iz četvorougla sila (sl. 315 c) vidi se da su štapovi 11' i 12' pritisnuti, a štap 10' zategnut.

Po Riterovoj metodi određene su sile u štapovima 4, 5 i 6. i to iz jednačina

$$A_x \cdot 4,5 - U_4 \cdot 1,5 = 0$$

$$A_x \cdot 6,75 + A_y \cdot 1,5 - W_1 \cdot 2,25 + O_6 \cdot 1,5 = 0$$

$$W_1 - A_x + D_5 \sin \beta = 0$$

gde je

$$\tan \beta = \frac{1,55}{2,25} = 0,666 ; \quad \beta = 33^\circ 40' ; \quad \sin \beta = 0,55.$$

Za silu D_5 nije bilo moguće napisati momentnu jednačinu, već je upotrebljena za donji otsečak jednačina $\sum X = 0$. Iz gornjih jednačina sleduje po Riteru

$$U_4 = + \frac{10,06 \cdot 4,50}{1,50} = + 30,18 \text{ t (zatezanje);}$$

$$O_6 = \frac{18 - 67,9 - 0,33}{1,50} = - \frac{50,23}{1,5} = - 33,5 \text{ t (pritisak);}$$

$$D_5 = \frac{10,06 - 8,00}{0,55} = \frac{2,06}{0,55} = + 3,7 \text{ t (zatezanje).}$$

Iz Kremoninog plana (sl. 315 b) za iste štapove nadjeno je

$$U_4 = + 29,4 \text{ t.}$$

$$O_6 = - 32,8 \text{ t.}$$

$$D_5 = + 4,0 \text{ t.}$$

Što se dobro slaže sa Riterovom metodom.

37. Složene rešetke.

Već ranije, pri proučavanju kinematičke i statičke

određenosti ravnih rešetaka, našli smo (v. str. 73 i 83) da je uopšte rešetka kod koje između broja štapova s i broja čvorova k postoji relacija 14):

$$s = (2K - 3)$$

i statički i kinematički određena tj. nepomerljiva. Tako isto pomenuli smo (str. 85-86) šta je osnovna figura neke rešetke i da, prema obliku te osnovne figure, rešetke delimo u proste i složene. Kod proste rešetke osnovna je figura trougao (ili jedan štap), a kod složene mnogougao sa $n \geq 6$ strana (v. sl. 52, 76, 77 i 78). Sad možemo naziv proste i složene rešetke objasniti i načinom njenog postanka.

Prosta rešetka postaje (sl. 45, str. 73) kad, - pošav od jednog štapa, čiji su čvorovi 1 i 2, ili od trougla štapova 1-2-3, sve sledeće (nove) čvorove vezujemo za ma koja dva (stara) čvora samo sa dva nova štapa, ali tako da novi čvor ne leži na pravoj koja spaja čvorove sa koje se taj novi čvor štapovima vezuje.

Složena rešetka postaje kad dve proste rešetke, koje shvatamo kao dve krute ploče, kruto vezemo u jednu celinu tj. kad od njih obrazujemo jednu jedinu krutu ploču. Ovo vezivanje, kao što je poznato, možemo postići bilo pomoću jednog štapa i jednog (realnog) zgloba, bilo pomoću tri (ležišna) štapa koji se ne smeju soći u istoj tački ni biti paralelni. U ovome drugom slučaju presek dvaju od ova tri štapa nazvali smo imaginarnim zglobom. Sa takvim nazivom možemo kratko reći da se kruta veza dvaju ploča postiže uvek pomoću jednog štapa i jednog zgloba, koji može biti realan ili imaginaran.

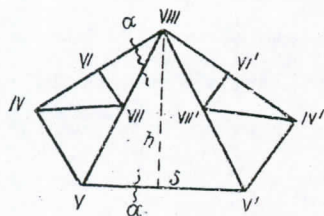
Pojam statički određene složene rešetke, koji obu-

hvata uvek samo jednu krutu ploču, treba razlikovati od pojma statički određenog složenog rešetkastog nosača, koji je sastavljen od dve ili više (prostih ili složenih) rešetkastih ploča, vezanih medjusobno na zglob (dakle ne kruto). Tako je na primer rešetkasti luk sa tri zglobova koji smo imali na sl. 314. i 315 složen rešetkast nosač, ali ne i složena rešetka, jer su obe ploče iz kojih je luk sastavljen proste rešetke sa trouglastom osnovnom figurom.

1.) Najprostiji slučaj složene rešetke imali smo kod krovnog nosača na sl. 76, čija je osnovna figura reprodukovana na sl. 316. Da je ta osnovna figura i kinematički i statički određena rešetka, uveravamo se kad postavimo jednačinu 14):

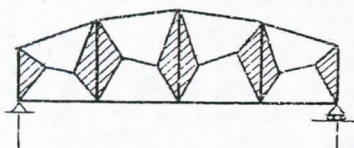
$$s = (2K - 3)$$

koja je u ovome slučaju zadovoljena, jer je $K = 9$ a $s = 15$. Osnovna figura prema sl. 316 nema ni jednog prostog čvora, a postala je na taj način što su dve proste rešetke kruto vezane zglobom VIII i štapom S u jednu krutu celinu. Odredjivanje napona u štapovima ove rešetke nemoguće je po metodi čvorova sve dotle, dok prvo napon u štapu S ne odredimo po metodi preseka, kao što je pokazano za presek $\alpha - \alpha$ na str. 128-129.



Sl. 316

2.) Jedan nov primer složene rešetke imamo na sl. 317.



Sl. 317

Da je ova rešetka, koja takodje nema nijednog prostog čvora, kinematički i statički određena u vidjamo po tome što je i kod nje sa $K = 18$ i $s = 33$ zadovoljen uslov

$$s = (2K - 3)$$

Postanak ove rešetke možemo objasniti na dva načina:

a) da je postala redjanjem šestouganih osnovnih figura datih na sl. 47 a (str. 75) i sl. 77 (str. 129), za koje smo već ranije pokazali da su kinematički i statički određene i da se mogu rešiti po metodi preseka; b) da su 5 prostih rešetaka (u sl. 317 šrafirano) medjusobno kruto povezane sa po tri štapa koji se ne seku u istoj tački niti su paralelni. Uopšte za broj s potrebnih štapova za krutu vezu n ploča u statički određenju složenu rešetku važi jednačina

$$s = 3(n - 1) \dots\dots 176)$$

koja je zadovoljena i kod rešetke na sl. 317, jer kod nje za medjusobnu vezu prostih rešetaka služe

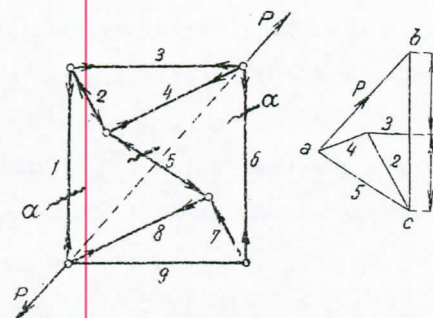
$$s = 3(5 - 1) = 3 \times 4 = 12 \text{ štapova.}$$

3) Osnovna figura na sl. 318 ima $K = 6$ čvorova i

$s = 9$ štapova, dakle zadovoljava jednačinu

$$s = (2K - 3).$$

Možemo smatrati da je i ona postala na taj način što su dve proste rešetke (trougli koje obrazuju štapi 2-3-4 i 7-8-9) kruto



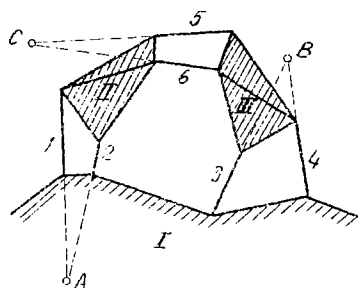
Sl. 318

vezane pomoću tri štapa 1, 5 i 6 koji se ne seku u istoj tački. Prema tome, kad su date spoljne sile P kojima je ta složena rešetka opterećena, onda možemo po metodi preseka naći napone u štapovima 1, 5 i 6 koje pogadja presek $\alpha - \alpha$. Kako su u ovome specijalnom slučaju štapi 1 i 6 paralelni, to je naročito prosta primena Kulmanove metode za odredjivanje napona u štapu

5. Posmatramo li naime ravnotežu gornjeg otsečka (iznad preseka $\alpha - \alpha$), to odmah uvidjamo da rezultanta od P i S_5 mora biti po pravcu paralelna štapovima 1 i 6, a po veličini jednaka algebarskom zbiru njihovih napona S_1 i S_6 . Zato možemo nacrtati trougao sila a-b-c (v. plan sila na sl. 318) koji nam daje veličinu napona S_5 (pritisak). Čim smo tako odredili S_5 , možemo određivanje ostalih napona izvršiti po Kremoni.

Kad bi na ovu rešetku, umesto dve sile P, delovalo proizvoljno opterećenje, onda bi bilo potrebno prvo odrediti rezultantu spoljnih sila iznad (ili ispod) preseka $\alpha - \alpha$, pa bi ona stupila na mesto sile P i s njom bi se dalje postupalo kao i u sl. 318.

4.) Kako je i luk sa tri zgloba statički određen sistem čije smo rešavanje već upoznali, to šestougaonu osnovnu figuru neke složene rešetke možemo rešiti i na taj način, što ćemo je svesti na sistem luka sa tri (imaginarna) zgloba. U principu takav luk bi izgledao, kao što je pretstavljeno na sl.



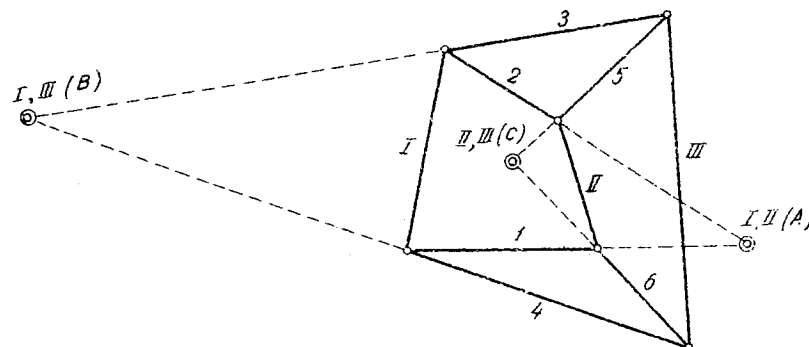
Sl. 319

319, gde su tri krute ploče (proste rešetke) I, II i III međusobno vezane sa šest štapova kojima odgovaraju imaginarni zglobovi A, B i C. (Upor. sl. 207, str. 358).

Ovu metodu rešavanja pomoću imaginarnih zglobova možemo

primeniti i na osnovnu figuru iz prošlog primera, ako sl. 320 u njoj štapove I, II i III shvatimo kao tri krute ploče, međusobno vezane sa tri imaginarna zgloba koje obrazuju preseki dva i dva štapa i to

Zglob I II (ili A) između ploča I i II.



Sl. 320

Zglob I III (ili B) između ploča I i III.

" II III (ili C) " " II i III.

Kad je opterećenje dato, onda prvo određujemo na neki od ranije pokazanih načina reakcije u (imaginarnim) zglobovima A, B i C luka sa tri zgloba. Zatim, kako su za datu rešetku sva tri zgloba prosti čvorovi, možemo početi crtanje Kremoninog plana počev sa nekog od tih zglobova (vidi sledeći primer). Zadatak nije rešljiv jedino u izuzetnom slučaju kad sva tri imaginarna zgloba padnu u istu pravu. Ali u tome slučaju ni rešetka nije upotrebljiva kao nosač jer je infinitezimalno pomerljiva i jer i pri najmanjem opterećenju njeni štapovi trpe beskonačno velike napone.

5.) Na sl. 321-a data je osnovna figura, opterećena silama P, koja takodje ima $K = 6$ i $s = 9$, što znači i da je statički određena i nepomerljiva. Napone u štapovima možemo odrediti na oba pomenuta načina: metodom preseka i metodom imaginarnih zglobova.

Ako želimo upotrebiti metodu preseka, onda smatramo da je ova složena rešetka postala tako, što su dve proste rešetke (trougli koje obrazuju štapovi 1-2-3 i štapovi 4-5-6) spojene pomoću tri štapa 7, 8 i 9 koji se ne seku u istoj tački.

Zglob 78 između ploča 7 i 8 (reakcija R_{78});

" 79 " " 7 i 9 (" R_{79}); i

" 89 " " 8 i 9 (" R_{89}).

U ovom slučaju sva tri zgloba leže na stranama trougla koji obrazuju štapovi 1-2-3, sl. 321 a. Da bismo odredili reakcije zglobova R_{78} , R_{79} i R_{89} pri datom opterećenju P , mi polazimo od uslova ravnoteže koji važe kod luka sa tri zgloba:

a) Reakcije R_{78} i R_{89} zglobova na neopterećenom delu lučnog nosača (ovde štap 8) moraju pasti u istu liniju i imati istu veličinu a suprotan smisao;

b) Ova linija sa teretom P i reakcijom R_{79} zgloba na opterećenom delu (ovde štap 9 i 7) mora se seći u istoj tački C ;

c) Teret P sa reakcijama R_{78} (ili R_{89}) i R_{79} mora činiti zatvoren trougao sila a-b-c, sl. 321 b

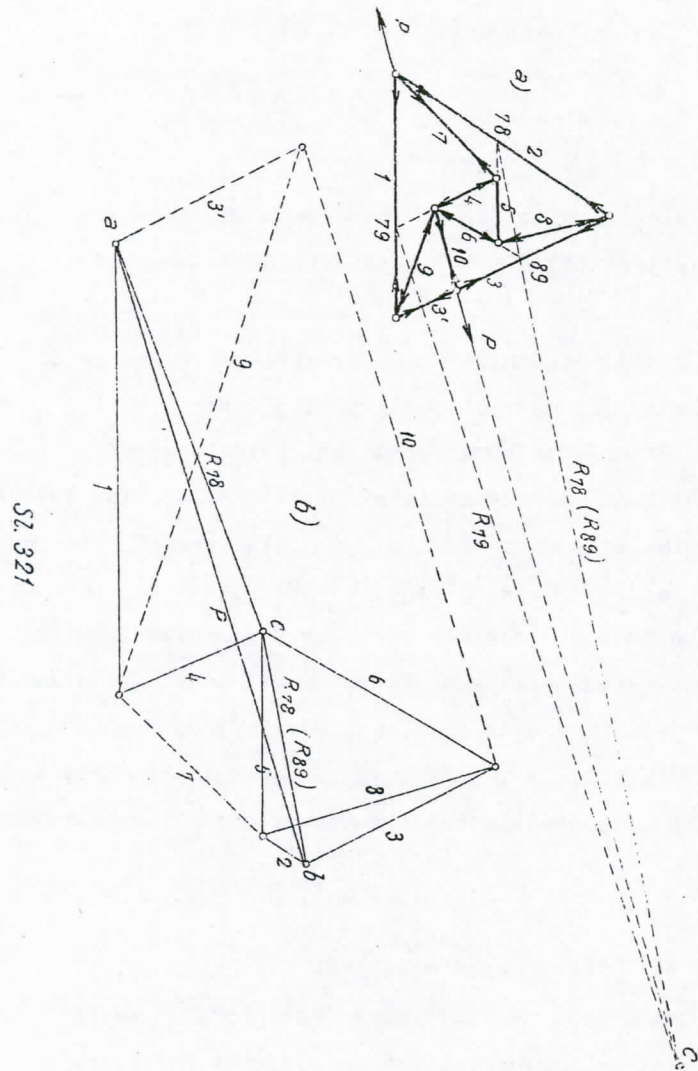
Kad smo tako našli pravce i veličine reakcija R_{78} , R_{79} i R_{89} u zglobovima, onda pristupamo crtanju Cremoninog plana (sl. 321 b) počinjući od imaginarnih zglobova, kao od prostih čvorova date rešetke. Uvodjenjem zamišljenog štapa 10 dovodimo spoljnu silu P na spoljni čvor (vidi str. 114). Tako dobivamo veličine napona u štapovima iz trouglova sila:

na zglobu 78 iz trougla sila R_{78} , S_2 i S_5 ;

" " 89 " " " R_{89} , S_3 i S_6 ; i

" " 79 " " " R_{79} , S_1 i S_4 .

Znak napona u pojedinim štapovima nalazimo, kad uzmemo u obzir smisao dejstva (leve) sile P koja stoji u ravnoteži sa naponima S_1 , S_7 i S_2 te s njima mora činiti zatvoren četvorougao sa istim smislom obilaženja. Na taj način određujemo sem toga i veličinu i smisao napona u štapu 7, a zatim na sličan način i u štapovima 8 i 9.



Prema tome morao bi presek $\alpha-\alpha$, koji pogadja ova tri štapa, biti prstenast, pa bismo postupili kao i u sl. 318.

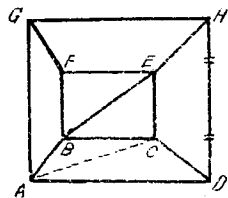
Po metodi imaginarnih zglobova smatramo u ovom slučaju (sl. 321 a) štapove 7, 8 i 9 kao tri krute ploče vezane pomoću šest štapova 1, 2, 3, 4, 5 i 6 u čijim preseccima zamišljamo imaginarne zglobove i to

6.) Kao nov primer složene rešetke navodimo rešetkast nosač, koji smo imali na sl.52, (str.86); njegova je osnovna figura šestougao, pretstavljen na sl.78(str.130), jer se čvorovi nalaze samo na obimu ove osnovne figure i ima ih $K = 6$. Kako je broj štapova $s = 9$, to je zadovoljena jednačina

$$s = (2K - 3),$$

što znači da je ova osnovna figura i statički određena i, uopšte uzev, nepomerljiva. Pomenuli smo već ranije (str.131) da se i ova osnovna figura može shvatiti kao luk sa tri (imaginarna) zgloba, sličan statički određenom sistemu pretstavljenom na sl 319 (imaginarni zglobovi A, B i C) i da ona postaje pomerljiva za beskonačno mala kretanja, kad ta sva tri zgloba leže u istoj pravoj (sl. 322 - Paskalov šestougao). Sile u dva štapa ove osnovne figure nalazimo (v.str. 130-131) najlakše pomoću dva Riterova preseka, koji pogodjaju ista dva štapa, a potom za određivanje sila u ostalim štapovima možemo primeniti metodu čvorova. No zadatak se može rešiti i po metodi imaginarnih zglobova kao i u prošlom primeru.

7.) Osnovna figura prema sl. 323 ima $K = 8$ čvorova i



Sl. 323

jedan stepen pomerljivosti, vazujemo četiri nova čvora sa po dva štapa i to ovim redom.

$s = 13$ štapova, dakle zadovoljava jednačinu

$$s = (2K - 3),$$

što znači da je nepomerljiva i statički određena. Njen način postanka možemo objasniti ovako: za četvorougao ABCD, koji ima

čvor E pomoću štapova BE i CE ;

" F " " BF i EF ;

" G " " AG i FG ; i

" H " " EH i GH.

Tako dobivamo figuru (bez štapa DH) koja ima jedan stepen pomerljivosti, a i taj najzad ukidamo umetanjem štapa DH.

Određivanje napona u štapovima nemoguće je ni po metodi čvorova, jer nema nijednog prostog čvora, a ni po metodi preseka. Rešenje je moguće samo po metodi zamene štapova (Henneberg), koju smo objasnili na sl. 90 (v.str. 154-157). Ako naime uklonimo štap DH i zamenimo ga dijagonalnim štapom AC (tačkasto), onda se data složena rešetka pretvara u prostu, pa je moguće po Kremoni odrediti sve sile u štapovima. Zatim je potrebno, po metodi zamene štapova, za ovu prostu rešetku nacrtati još jedan Kremonin plan koji odgovara opterećenju čvorova D i H silom $S_{DH} = 1$ t. Najzad za određivanje sila u svima štapovima date složene rešetke primenjujemo jednačinu 30), v. str. 156 :

$$S_i = S'_i + S.S''_i$$

ili crtamo nov (treći) Kremonin plan.

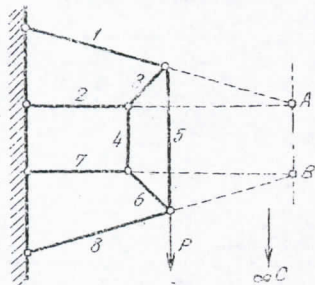
Ova metoda zamene štapova opšta je, pa se može upotrebiti i u svima ranijim primerima složenih rešetaka.

38. Rešetke specijalne vrste.

Metode rada koje smo primenili pri rešavanju složenih rešetaka možemo korisno upotrebiti i kod izvesnih rešetaka koje nisu složene, ali kod kojih rešavanje bilo po kojoj od me-

toda Kremone, Kulmana i Ritera nailazi na izvesne teškoće. Zato ćemo ove rešetke zvati rešetkama specijalne vrste.

1.) Takva je rešetka data na sl. 324. Ona se sastoji



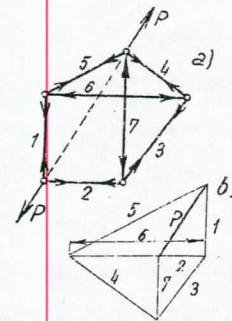
Sl. 324

od 8 štapova od kojih su četiri utvrđeni na zglob za jedan vertikalni zid. Ako ovaj zid shvatimo kao krutu ploču, onda je za vezivanje četiri (slobodna) čvora za taj zid potrebno $2 \times 4 = 8$ štapova, a toliko ih data rešetka i ima. Medjutim pri računanju napona u štapovima nalazimo da su oni (naponi) beskonačno veliki, što znači da je rešetka pomerljiva i nesposobna za nošenje tereta P.

Do istog zaključka dolazimo i primenom metode imaginarnih zglobova. Pri tome smatramo zid, štap 3 i štap 6 kao tri krute ploče povezane međusobno sa po dva štapa tako, da se štapovi 1 i 2 seku u imaginarnom zglobu A, štapovi 7 i 8 u imaginarnom zglobu B, a štapovi 4 i 5, koji su paralelni, u imaginarnom zglobu C koji dakle leži u beskonačnosti u pravcu AB. Sva tri zgloba leže u istoj pravoj dakle je figura pomerljiva.

Po metodi zamene štapova, ako odstranimo štap 5 i zamениmo ga kojim bilo dijagonalnim štapom D, dobićemo nepomerljivu rešetku kod koje se naponi u štapovima lako mogu odrediti po Kremoninoj metodi. Ali ako za istu tu rešetku nacrtamo nov Kremonin plan za opterećenje $S_5 = 1$ t na oba čvora gde je bio vezan štap 5, dobićemo u umetnutoj dijagonali napon $D = 0$, što znači da ovde imamo posla sa izuzetnim slučajem rešetke, kao što smo malo čas objasnili.

2.) Rešetka na sl. 325 a je prosta, ali ima tzv. "ukr-

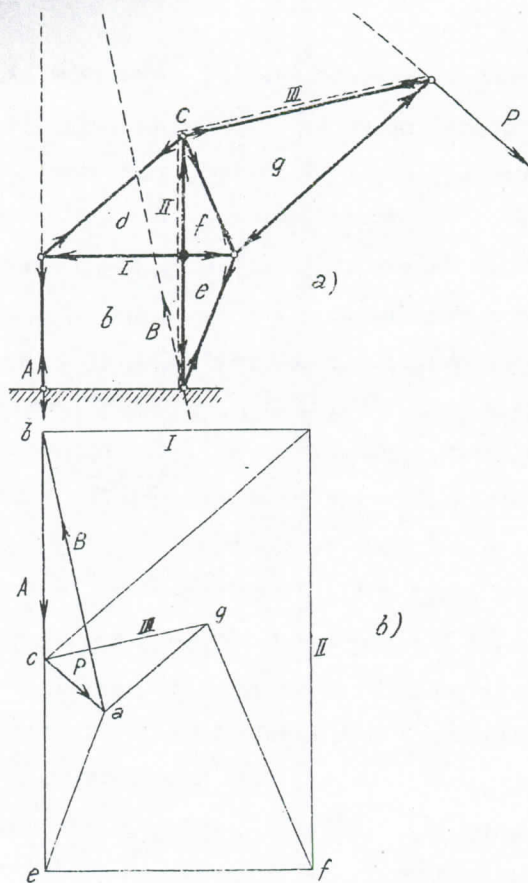


Sl. 325

štene" dijagonale 6 i 7. Čvor u kome se sastaju štapovi 1 i 2 je prost, te je lako moguće naponi u svima štapovima odrediti po metodi čvorova. Ali da bi se uspelo da ovaj plan sila sl. 325 b ispadne recipročna slika planu rešetke, mora se nekoliko puta probati. Ovo lutanje dolazi otud, što nije odmah jasno kako treba štapove u datoj figuri podeliti u poligone kojima u recipročnom planu sila treba da odgovaraju presečne tačke napona, jer se u planu rešetke poligoni preklapaju.

Ako pak u preseku štapova 6 i 7 umetnemo nov čvor, time neće biti izmenjene sile u štapovima 6 i 7, ali se poligoni u planu rešetke neće više poklapati već graničiti zajedničkim stranama, pa će biti moguće odmah konstruisati Kremonin plan kao recipročnu sliku rešetke. No taj novi Kremonin plan neće biti podudaran sa planom na sl. 325 b, jer će se u njemu sile S_6 i S_7 morati javiti po dvaput, jer se svaki od štapova 6 i 7 umetanjem srednjeg čvora raspada u dva štapa.

3) Rešetkasta dizalica na sl. 326 postala je od rešetke na sl. 325 a dodavanjem jednog trougla, na čijem krajnjem temenu dejstvuje teret P i uklanjanjem štapa 2 kao nepotrebnog, jer je dizalica vezana za zemlju. Reakcije oslonaca A i B nalazimo iz uslova da se one sa teretom P moraju seći u istoj tački i činiti zatvoren trougao (sl. 326 b). Kremonin plan crta se kao i u prošlom primeru. Štap III trpi zatezanje ($+S_{III}$) a štap II pritisak ($-S_{II}$). Ali kod dizalice sem napona u štapovima postoji i napon (zatezanje) u užetu. Ako zamislimo da se uže pruža duž štapova III i II, od tačke vešanja tereta



Sl. 326

je nepogodna, jer svaki presek pogadja po četiri štapa. Ovaj nosač ima medjutim izvesne osobine, zbog kojih je moguće te metode primeniti i na njega.

Presećemo li ovaj nosač presekom $\alpha - \alpha$ (sl. 327 a) tako, da on ne pogadja dijagonalne već samo vertikalne i pojasne štapeve i primenimo li na levi otešak uslov ravnoteže

$$\sum X = 0,$$

dobićemo da za napone u pojasnim štapovima u m -tom polju važi jednačina

$$U_m - O_m = 0,$$

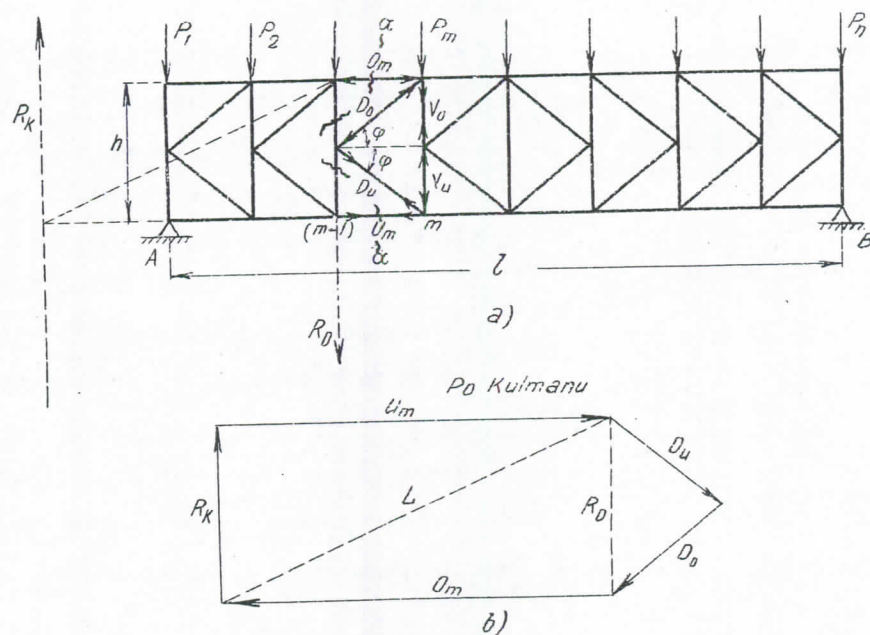
P do tačke oslonca B, onda napone S_{III} i S_{II} određene po Kremoni, valja popraviti i to:

napon S_{III} smanjiti

" S_{II} povećati

za onoliko, koliki je napon zatezanja u užetu, t.j. za P.

4.) Rešetka na sl. 327 a, koja se upotrebljava kao horizontalni nosač protiv vetra kod većih gvozdenih mostova, prosta je, te je za nju lako moguće nacrtati Kremonin plan sila; no za primenu Riterove i Kulmanove metode ona je ne-



Sl. 327

jer drugih horizontalnih sila na tome otešaku nema. Sile u pojasnim štapovima su dakle za svako polje jednake, a veličinu im nalazimo primenom Riterove jednačine $\sum M = 0$ na otešak levo od preseka $\alpha - \alpha$, koja glasi za (donji) čvor $(m - 1)$ kao obrtnu tačku:

$$O_m \cdot h + M_{m-1} = 0$$

a odavde

$$O_m = - \frac{M_{m-1}}{h} \text{ (pritisak)}$$

i

$$U_m = + \frac{M_{m-1}}{h} \text{ (zatezanje),}$$

gde je M_{m-1} napadni momenat za čvor $(m - 1)$. Tako isto i naponi u dijagonalama D_0 i D_u koje leže u istom polju jednake su veličine a suprotnog smisla. Jer ako nosač presećemo vertikalnim presekom kroz m -to polje i primenimo na levi otešak uslov ravnoteže

$$\sum X = 0$$

dobićemo

$$D_0 \cos \varphi + D_u \cos \varphi = 0$$

ili

$$D_0 + D_u = 0,$$

što znači da je $D_0 = -D_u$. Veličinu napona u dijagonalama dobijamo kad na otsečak levo od vertikalnog preseka kroz m -to polje primenimo uslov ravnoteže

$$\sum Y = 0$$

koji daje

$$D_0 \sin \varphi + D_u \sin \varphi - Q_m = 0$$

gde je Q_m transverzalna sila u m -tom polju. Iz ove jednačine, imajući u vidu da je $D_0 = -D_u$, sleduje

$$D_0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{\sin \varphi} \text{ (pritisak)}$$

$$D_u = +\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{\sin \varphi} \text{ (zatezanje)}$$

Pri pozitivnoj transverzalnoj sili Q_m vlada pritisak u dijagonali koja se penje na desno a zatezanje u dijagonali koja se penje na levo.

Najzad iz uslova ravnoteže za čvor m na gornjem (opterećenom) pojasu

$$\sum Y = 0$$

sleduje

$$D_0 \sin \varphi - P_m - V_0 = 0$$

ili

$$\frac{1}{2} Q_m - P_m - V_0 = 0,$$

odakle izlazi

$$V_0 = -P_m + \frac{1}{2} Q_m \text{ (zatezanje ili pritisak),}$$

a iz istog uslova za čvor m na donjem (neopterećenom) pojasu

dobivamo

$$V_u + D_u \sin \varphi = 0$$

ili

$$V_u = -\frac{1}{2} Q_m \text{ (pritisak)}$$

Znajući gornje osobine ove rešetke možemo napone u štapovima U_m , O_m , D_0 i D_u u m -tom polju naći i po Kulmanovoj metodi (sl. 327 b). Rezultantu R_K spoljnih sila levo od preseka koji pogadja te štapove dovodimo prvo do preseka sa pojasnim štapom U_m i tu tačku spajamo sa gornjim čvorom ($m-1$) gde se seku nepoznate sile u ostalim presečenim štapovima O_m i R_D , a ovo poslednje (R_D) je rezultanta sila D_0 i D_u koja prema ranijem mora biti vertikalna. Povlačenjem paralela u planu sila nalazimo prvo napon U_m i silu L , zatim napon O_m i rezultantu R_D koju najzad razlažemo u D_0 i D_u .

VIII. Primena užeta u mašinskim konstrukcijama.

39. Trenje užeta.

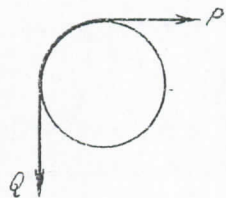
Ranije smo, smatrajući uže omotano oko nepomičnog kotura kao kružnu lančanicu, normalno opterećenu, izveli osnovni obrazac za trenje užeta, koji glasi - v. jednačinu 76), str. 209:

$$S_1 = S_2 e^{f\alpha}$$

Ova jednačina važi samo za granični slučaj ravnoteže, t. j. u momentu kad uže već počinje da klizi, jer se u njoj javlja koeficijent f trenja klizanja. U ovoj jednačini je S_1 ona (veća) sila koja teži da izazove klizanje užeta, a S_2 je ona (manja) sila koja se protivi tome klizanju na drugom kraju užeta; obe su ekvivalentne sa naponima u užetu i javljaju se u pravcima tangenta na obimu kotura.

U svima zadacima statike u kojima se pojavljuju otpori trenja nismo u stanju naći tačno određene veličine sile koje odgovaraju uslovima ravnoteže, nego možemo samo odrediti gornju i donju granicu medju kojima se te veličine nalaze. To ćemo najbolje dokazati na jednom primeru.

Uzećemo da je oko nekog nepomičnog valjka (sl. 328) o-motano jedno uže $l \frac{1}{4}$ puta tako da je



Sl. 328

$$\alpha = \frac{5\pi}{2}$$

sa zadatkom da na valjku silom P držimo u ravnoteži teret Q, pa ćemo postaviti pitanje: u kojim granicama se može kretati veličina sile P u slučaju ravnoteže, ako uz-

memo da je

$$f = 0,2.$$

Gornju granicu za veličinu sile P dobićemo, ako primenimo jednačinu 76) na ravnotežu u momentu kad pod uticajem sile P počinje kretanje na desno. Za taj granični slučaj ravnoteže stavimo u gornju jednačinu

$$P = S_1; \quad Q = S$$

pa dobivamo

$$P_{\max} = Q \cdot e^{f \frac{5\pi}{2}} = 4,80 Q.$$

Najmanje tolika je sila dakle potrebna, ako želimo podići teret Q u vis. Donju granicu za veličinu sile P t.j. onu silu koja je još dovoljna da održi teret Q u ravnoteži sprečavajući njegovo spuštanje naniže, dobićemo kad u jednačinu 76) stavimo

$$Q = S_1; \quad P = S$$

pa će ona glasiti

$$Q = P_{\min} \cdot e^{f \frac{5\pi}{2}}$$

ili

$$P_{\min} = Q \cdot e^{-f \frac{5\pi}{2}} = 0,21 Q.$$

Vidimo dakle na tome primeru da su granice, u kojima se u slučaju ravnoteže može nalaziti sila P, dosta široke (od 0,21 Q do 4,80 Q) i da trenje užeta ima znatan uticaj na odnos između P i Q.

Pri ovakvim računanjima treba imati na umu da je jednačina 76) čisto teorijski obrazac. On je potpuno tačan samo pod pretpostavkom da imamo posla sa "idealnim" užetom, t.j. užetom koje odgovara pojmu lančanice (potpuno savitljivo i nerastegljivo - neelastično), što kod užeta u praksi nije slučaj. No o tome će biti reči u sledećem članku. Za sada ćemo još pokazati kako se trenje ovog "idealnog" užeta iskorišćuje u mašinskim konstrukcijama, kao što su kočnice i transmisije.

1. Obična kočnica (sl. 329).- Na točak kočnice dejstvuje jedan (motorni) spreg sa momentom M, koji teži da točak obrne u smislu kazaljke na satu. Nasuprot tome momentu dejstvuje momenat (kočeće) sile K, koja napada na kraju poluge DCA_1 i koja je taman tolika, da je još u stanju da spreči obrtanje točka. Ako označimo sa S_1 napon u užetu (čeličnoj traci) na delu A_1B_1 a sa S_2 napon na delu A_2B_2 i primenimo i na polugu i na točak uslov ravnoteže $\sum M = 0$, dobićemo

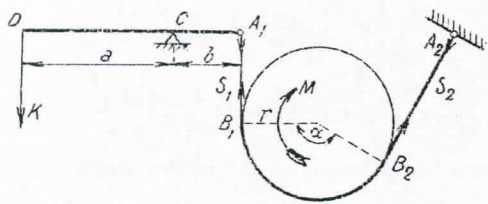
$$\text{na poluzi } S_1 \cdot b - K \cdot a = 0$$

$$\text{" točku } M + S_1 \cdot r - S_2 \cdot r = 0$$

Iz druge jednačine sleduje

$$S_2 - S_1 = \frac{M}{r}$$

što znači da je $S_2 > S_1$. Kako se točak nalazi na granici rav-



Sl. 329

noteže, možemo trenje klizanja užeta (čelične trake) na točku uzeti u punom iznosu i primeniti jednačinu 76)

$$S_2 = S_1 \cdot e^{f\alpha}$$

Kad to unesemo u izraz $S_2 - S_1 = \frac{M}{r}$ izlazi

$$S_1 (e^{f\alpha} - 1) = \frac{M}{r}$$

ili

$$S_1 = \frac{M}{r(e^{f\alpha} - 1)}$$

što, stavljeno u jednačinu za ravnotežu poluge, daje

$$K = \frac{b}{a} \cdot \frac{M}{r(e^{f\alpha} - 1)} \quad \dots\dots 177 \text{ a)}$$

Kad bi motorni momenat M na točku kočnice dejstvovao u obratnom smislu (protivno kazaljki), onda bi bilo na granici ravnoteže $S_2 < S_1$, te bismo primenom jednačine 76) dobili

$$S_1 = S_2 e^{f\alpha}$$

a zatim, kako je sad $S_1 - S_2 = \frac{M}{r}$,

$$S_2 = \frac{M}{r(e^{f\alpha} - 1)} ; S = \frac{M \cdot e^{f\alpha}}{r(e^{f\alpha} - 1)}$$

i najzad

$$K = \frac{b M \cdot e^{f\alpha}}{a r e^{f\alpha} - 1} \quad \dots\dots 177 \text{ b)}$$

U tome bi, dakle, slučaju bila potrebna veća kočuća sila K nego u prvom slučaju, ako je $e^{f\alpha} > 1$.

2. Diferencijalna kočnica (sl. 330). - Umesto da učvrstimo samo jedan kraj užeta (čelične trake) za polugu, kao kod proste kočnice, možemo vezati oba kraja sa obe strane oslonca poluge. Tada dobivamo, za uvertani smer motornog momenta M , kao

i ranije $S_2 = S_1 e^{f\alpha}$; $S_1 = \frac{M}{r(e^{f\alpha} - 1)}$; $S_2 = \frac{M \cdot e^{f\alpha}}{r(e^{f\alpha} - 1)}$

Ravnoteža poluge zahteva da mora biti

$$K \cdot a = S_2 b_2 - S_1 b_1 = \frac{M}{r(e^{f\alpha} - 1)} (b_2 e^{f\alpha} - b_1) \quad \dots\dots 178 \text{ a)}$$

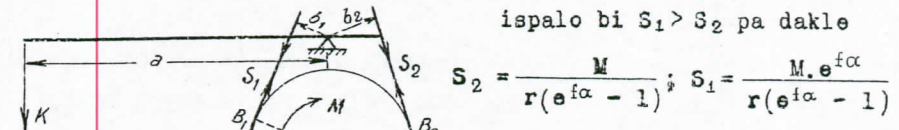
Da li će sila K , potrebna za kočenje, biti veća ili manja to sad zavisi od veličine diferencije

$$(b_2 e^{f\alpha} - b_1)$$

i stoga se ovakva kočnica zove diferencijalnom.

Kad bi motorni momenat M na točku imao obratni smer,

ispalo bi $S_1 > S_2$ pa dakle



$$S_2 = \frac{M}{r(e^{f\alpha} - 1)} ; S_1 = \frac{M \cdot e^{f\alpha}}{r(e^{f\alpha} - 1)}$$

i sobzirom na ravnotežu poluge

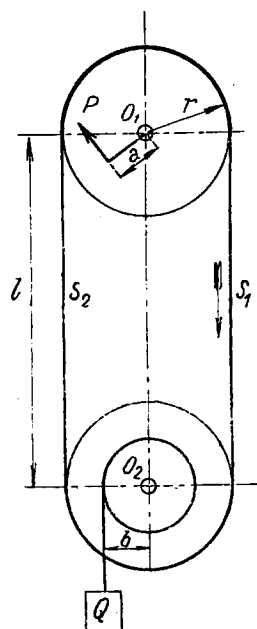
$$K \cdot a = \frac{M}{r(e^{f\alpha} - 1)} (b_1 e^{f\alpha} - b_2) \dots 178 \text{ b)}$$

Ako krake b_1 i b_2 tako izaberemo, da merodavna diferencija

$$(b_2 e^{f\alpha} - b_1), \text{ odnosno } (b_1 e^{f\alpha} - b_2),$$

bude ravna nuli, onda bi ispalo i $K = 0$, t.j. i najmanja sila K bila bi u stanju da ukoči točak kočnice (Automatsko kočenje).

3) Idealni pogon užetom (ili kaišem). - Oko dva kotura (kaišnika) istog prečnika, čije paralelne osovine leže vertikalno jedna iznad druge (tzv. vertikalna transmisija, sl. 331) obavijeno je potpuno savitljivo i nerastegljivo ("idealno") uže (traka ili kaiš) sa takvim naponom, da je moguće silom P koja napada na koturu O_1 podizati teret Q , obešen na koturu O_2 . Pita se: kakav je odnos između P i Q u slučaju ravnoteže i koliki mora biti prethodni napon S_0 u užetu, pa da ono ne klizi po koturu.



Sl. 331

Čim sile P i Q stupe u dejstvo, biće jedna strana užeta (leva polovina u sl. 331) jače zatezana, a druga (desna polovina u sl. 331) olabavljena tj. početni napon S_0 povećaće se levo na S_2 , a smanjiti desno na S_1 . Zbog simetričnosti rasporeda u sl. 331 ne dolazi u obzir težina užeta (kaiša) pri posmatranju ravnoteže jednog i drugog kotura.

Uslov ravnoteže kotura O_1 je

$$P \cdot a = (S_2 - S_1) \cdot r$$

a ravnoteža donjeg kotura O_2 zahteva

$$Q \cdot b = (S_2 - S_1) \cdot r$$

te, ako uvedemo pojam "prenesene obimne

sile" S_n čija je veličina

$$S_n = (S_2 - S_1) \quad \dots\dots 179)$$

nalazimo da je

$$P \cdot a = Q \cdot b = S_n \cdot r.$$

Prema tome uvek ćemo znati kolika je ova prenesena obimna sila, ali su nam nepoznate njeni sastavni delovi S_2 i S_1 koji su u opšte statički neodređeni.

No ove napone S_2 i S_1 u užetu (kaišu) možemo odrediti, ako pretpostavimo da je opterećenje toliko naraslo da se uže (kaiš) nalazi baš na granici klizanja, jer tada možemo primeniti jednačinu 76)

$$S_2 = S_1 e^{f\alpha}$$

$$S_n = (S_2 - S_1) = S_1 (e^{f\alpha} - 1)$$

a odavde

$$S_1 = \frac{S_n}{(e^{f\alpha} - 1)}; \quad S_2 = \frac{S_n \cdot e^{f\alpha}}{(e^{f\alpha} - 1)},$$

što stavljeno u jednačinu $Q \cdot b = (S_2 - S_1) \cdot r$ daje

$$S_1 = \frac{b}{r} \cdot \frac{Q}{(e^{f\alpha} - 1)}; \quad S_2 = \frac{b}{r} \cdot \frac{Q \cdot e^{f\alpha}}{(e^{f\alpha} - 1)} \quad \dots\dots 180)$$

Pritisak D na osovinu ma koga od koturova usled zatezanja užeta kaiša je za vreme prenašanja sile

$$D = (S_1 + S_2) = S_n \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \quad \dots\dots 181 a).$$

a u neopterećenom stanju

$$D_0 = 2 S_0 \quad \dots\dots\dots 181 b).$$

Kad napustimo pretpostavku da je uže (kaiš) nerastegljivo i uzmemo da je ono elastično te da mu je produženje (po Hukovom zakonu) proporcionalno naponu, onda možemo lako dokazati da je $D = D_0$, t.j. da pritisak na osovinu kotura ostaje isti bilo da uže (kaiš) prenosi silu (energiju) ili ne. U opterećenom stanju možemo smatrati da će se jedna (leva) polovina užeta produžiti za Δl , a druga (desna) za istu veličinu Δl skratiti, pa prema tome možemo staviti da se i prethodni napon S_0 za istu veličinu ΔS povećao ili smanjio

$$S_2 = S_0 + \Delta S$$

$$S_1 = S_0 - \Delta S$$

Prema tome je (po Grashofu)

$$S_0 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) \quad \dots\dots 182).$$

a iz ovoga sleduje da mora biti $D = D_0$.

Sad možemo postaviti odnos i izmedju prethodnog napona S_0 i obimne sile S_n koja se može preneti na granici klizanja

$$S_0 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{S_n \cdot e^{f\alpha} + 1}{2 \cdot (e^{f\alpha} - 1)} \quad \dots\dots 183).$$

Iz ove jednačine nalazimo minimalnu vrednost S_0 prethodnog na-

pona kod vertikalne transmisije pomoću užeta (kaiša); tolika sila S_0 mora postojati da bi uže (kaiš), nalazeći se na granici klizanja moglo preneti obimnu silu S_n bez klizanja.

Jednačine 182) i 183) koje smo izveli za vertikalnu transmisiju pomoću užeta (kaiša) nisu tačne i za slučaj horizontalne transmisije, kod koje uže između oba kotura leži horizontalno, jer tada bi se morala uzeti u obzir i težina užeta (kaiša) kao i njegova deformacija usled sopstvene težine, jer ono neće više biti pravo već na sredini ugnuto. Naročito je u tome slučaju nepotrebljiva jednačina 182).

40. Nepotpuna savitljivost užeta

("Krutost" užeta).

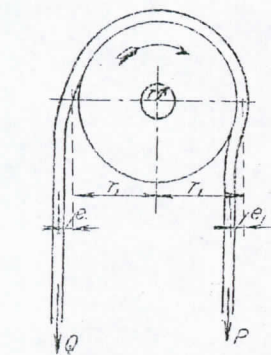
Kada hoćemo, pomoću jednog kotura koji se okreće oko nepomične osovine, da dižemo neki teret Q (sl. 332) u vis, onda je teorijski potrebna sila P , kojom moramo zatezati uže, prebačemo preko kotura, ravna teretu

$$P = Q.$$

Praktično biće uvek potrebno da je

$$P > Q$$

i to iz dva razloga: 1) Zbog otpora trenja u rukavcu (čepu) osovine kotura; i 2) zbog nepotpune savitljivosti užeta.



sl. 332

a) Momenat trenja u rukavcu (čepu). - Ako je r_1 poluprečnik kotura, r poluprečnik rukavca, a f_1 koeficijent trenja u rukavcu, onda (v. Mehanika I deo. str. 270-271) je

$$r' = f_1 \cdot r.$$

poluprečnik kruga trenja; momenat trenja u rukavcu ima veličinu

$$M_1 = 2 Q \cdot r' = 2 Q \cdot f_1 r,$$

jer je kod paralelnih užeta opterećenje rukavca (čepa) $2 Q$. Za savladjivanje toga momenta potrebna je na obimu kotura sila

$$Q' = 2 Q f_1 \cdot \frac{r}{r_1}$$

Prema tome sila P , kojom bismo morali vući uže da bismo savladali težinu tereta Q i trenje u rukavcu morala bi biti

$$P = Q + Q' = Q + 2 Q f_1 \cdot \frac{r}{r_1} = Q \left(1 + 2 f_1 \cdot \frac{r}{r_1} \right)$$

b) Nepotpuna savitljivost užeta. - Njeni su uzroci: unutarnji naponi i trenje između pojedinih žica (vlakana) iz kojih je uže složeno. Kad uže koje je dotle bilo pravo nailazi na kotur, njegova se krivina menja od ∞ na $\frac{1}{r_1}$, a kada silazi sa kotura ono se opet ispravlja pa mu se krivina menja od $\frac{1}{r_1}$ na ∞ . Usled nepotpune savitljivosti užeta ove promene ne mogu biti naprasne nego kontinualne. Zato se, pri ucrtanom smeru kretanja na sl. 332, mora uzeti da je krak tereta Q povećan od r_1 na $(r_1 + e)$ a krak sile P smanjen od r_1 na $(r_1 - e)$. Približno možemo staviti

$$e_1 = e$$

tako da je uslov ravnoteže na koturu

$$P(r_1 - e) = Q(r_1 + e)$$

a odavde

$$P = Q \frac{r_1 + e}{r_1 - e} = Q \frac{1 + \frac{e}{r_1}}{1 - \frac{e}{r_1}}$$

Kad brojitelj i imenitelj ovoga izraza pomnožimo sa $\left(1 + \frac{e}{r_1}\right)$ i zanemarimo kvadrate male veličine $\left(\frac{e}{r_1}\right)$, dobivamo dalje

$$P = Q \left(1 + \frac{2 \cdot e}{r_1} \right)$$

ili, ako stavimo $Q'' = 2 Q \frac{e}{r_1}$,

$$P = Q + Q''$$

gde nam sad Q'' predstavlja višak sile P koji je potreban za savladjivanje otpora koji nastupa usled nepotpune savitljivosti užeta.

Iz praktičnog iskustva nadjeno je

za čelična užeta $2 e = 0,06 d^2 - 0,09 d^2$

" konopljana " $2 e = 0,03 d^2 - 0,06 d^2$

gde je d prečnik užeta u santimetrima.

c) Oba otpora povećavaju silu P za $(Q' + Q'')$ tako, da je stvarno potrebna sila za dizanje tereta Q pomoću kotura sl. 332 :

$$P = Q + Q' + Q'' = Q \cdot \left[1 + 2 f_1 \cdot \frac{r}{r_1} + \frac{2 e}{r_1} \right] = K \cdot Q \quad \dots 184)$$

gde je uvek $k > 1$.

Broj k zovemo koeficijentom ili karakteristikom kotura. On je dat jednačinom

$$K = \left[1 + 2 f_1 \cdot \frac{r}{r_1} + \frac{2 e}{r_1} \right] = \left[1 + \frac{2}{r_1} (f_1 \cdot r + e) \right]$$

a može se odrediti i opitom. On iznosi približno:

za čelična užeta $K = 1,04$

" konopljana " $K = 1,08 - 1,20$.