

STABILNOST RAVNOTEŽE. VIRIJAL.

74. STABILNA I LABILNA RAVNOTEŽA. Jedan nepromenljivi sistem tačaka nalazi se u izvesnom stanju kretanja. Na njega dejstvuje sistem sila koji se u trenutku t nalazi u ravnoteži. Nezavisno od uticaja sila, samo usled ovog stanja kretanja biće položaj sistema u vremenu $t + dt$ drugi, sile neće biti više u ravnoteži nego će uticati na stanje kretanja, dakle na dalje kretanje sistema. Ako je to kretanje takvo da se položaji sistema beskonačno malo udaljuju od položaja ravnoteže, zove se ravnoteža sila sigurna ili stabilna, u suprotnom slučaju nesigurna ili labilna.

Pitanje stabilnosti ravnoteže najopštije shvaćeno ne spada u statiku nego u kinetiku i u suštini identično je sa teorijom malih oscilacija. Ali pod pretpostavkom da sile za vreme kretanja ne menjaju ni intenzitet ni pravac možemo i sa statičkog gledišta postaviti kriterije za stabilnost ravnoteže.

Znamo da translacija sistema ne remeti ravnotežu sila, imamo dakle da ispitujemo samo uticaj obrtanja, a možemo pri tom sve obrtne osovine raznih pravaca kroz jednu istu tačku uzeti, kao što smo u čl. 66 napomenuli.

Zamislimo da neki sistem tačaka Σ stoji pod dejstvom nekog sistema sila (P) u ravnoteži. Sistem Σ se obrne oko neke osovine za ugao φ , a sile P zadrže svoj intenzitet i pravac. Ako, posle obrtanja ne postoji više ravnoteža, onda je sistem (P) ekvivalentan spregu čiji momenat H zavisi uopšte od veličine ugla φ (ili amplitude) i od položaja obrtne

Dr. IVAN ARNOVLJEVIĆ
Univerziteta u Beogradu

10.433

PREDAVANJA

IZ

TEORIJSKE MEHANIKE

II DEO

III SVESKA

Statika sila u prostoru

Stručno-tehnička litografija
LITO-STAMPA
Dragoljub T. Djurdjević
Tehnički Fakultet

Izdanje Udruženja Studenata Mašinske i Elektro Tehnike
Udruženja Studenata Građevinske Tehnike

BEOGRAD, 1937

stema (P)

Ako pak postoji medju astatičkim koordinatama sistema proporcija

$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33} = A : B : C$,
padaju sva središta paralelnih sila u jednu tačku, u pomenu tu centralnu tačku

Kod prostornog sistema sila u opšte ne može biti govora o središtu sila. Jer sistem nije za sve položaje sistema tačaka ekvivalentan jednoj rezultanti R, a i u položajima u kojima je to slučaj, ne seku se sile P nego se ukrštaju.

Ako nisu svih 12 astatičkih koordinata ravni nuli, može postojati središte sila. Sistem se u tom slučaju svodi na rezultantu R u svima položajima.

Ako sa X_0, Y_0, Z_0 označimo komponente od R, sa x_0, y_0, z_0 , koordinate središta sistema (P), mora postojati astatička ravnoteža izmedju sistema (P) i -R, dakle moraju postojati 12 jednačina

$$\begin{aligned} A - X_0 &= 0, & a_{11} - x_0 X_0 &= 0, & a_{21} - y_0 X_0 &= 0, & a_{31} - z_0 X_0 &= 0, \\ B - Y_0 &= 0, & a_{12} - x_0 Y_0 &= 0, & a_{22} - y_0 Y_0 &= 0, & a_{32} - z_0 Y_0 &= 0, \\ C - Z_0 &= 0, & a_{13} - x_0 Z_0 &= 0, & a_{23} - y_0 Z_0 &= 0, & a_{33} - z_0 Z_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ako nisu sve komponente A, B, C ravne nuli, izlaze iz ovih uslova koordinate:

$$x_0 = \frac{a_{11}}{A} = \frac{a_{12}}{B} = \frac{a_{13}}{C},$$

$$y_0 = \frac{a_{21}}{A} = \frac{a_{22}}{B} = \frac{a_{23}}{C},$$

$$z_0 = \frac{a_{31}}{A} = \frac{a_{32}}{B} = \frac{a_{33}}{C},$$

ili u drugom obliku:

$$x_0 = \frac{a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y_0 = \frac{a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$z_0 = \frac{a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Za sistem paralelnih sila P sa kosinusima pravaca α, β, γ su astatičke koordinate $A = \alpha \sum P, B = \beta \sum P, C = \gamma \sum P, a_{11} = \alpha \sum xP, a_{12} = \beta \sum xP, a_{13} = \gamma \sum xP, i \text{ t. d.}$

Sa ovim vrednostima dobijamo koordinate središta paralelnih sila

$$x = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \sum xP \cdot \sum P}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) (\sum P)^2} = \frac{\sum xP}{\sum P}$$

i analogo

$$y_0 = \frac{\sum yP}{\sum P},$$

$$z_0 = \frac{\sum zP}{\sum P},$$

koje smo već ranije našli (jedn. 10.5).

73. LITERATURA O ASTATICI. Osnivačem ove grane statike smatra se F. Minding 1835, koji je uveo astatičke koordinate. Glavni radnici na unapredjenju astatike su Möbius 1835, Broch 1854, Moigno 1868, Somov 1879. Broch i Moanjo primenjuju astatiku na teoriju magnetizma. Znatno je usavršio i uprostio astatiku francuski matematičar Darboux uvodjenjem svoga astatičkog centralnog elipsoida.

centralnoj liniji zove centralna tačka centralne linije.

71. SREDIŠTE RAVNOG SISTEMA SILA. Iz onoga što je u čl. 70. o centralnoj liniji ravnog sistema rečeno vidimo da je centralna linija identična sa napadnom linijom rezultante $\vec{R} = \sum \vec{P}$ sistema. Kada označimo $\sum X = A$, $\sum Y = B$, $\sum [xY - yX] = N$, glasi jednačina napadne linije rezultante [II. 1. jedn. 108 c) str. 254] dakle je jednačina centralne linije

$$\xi B - \eta A - N = 0 \quad \dots (71.1)$$

Zatim smo sve sile obrnuli oko njihove napadne tačke za ugao φ i postavili jednačinu za novi položaj rezultante Upoređujući obe centralne linije našli smo da tačka koja leži na obema centralnim linijama mora zadovoljiti jednačinu (II. 1. 118. str. 263).

$$\xi A + \eta B - \sum (xX + yY) = 0 \quad \dots (71.2)$$

Iz ove jednačine našli smo koordinate ξ_0, η_0 središta ravnog sistema.

$$\xi_0 R^2 = A \sum (xX + yY) + BN,$$

$$\eta_0 R^2 = B \sum (xX + yY) - AN.$$

(II. 1, 119 str. 263).

Prava koju predstavlja jednačina 2) stoji upravno na centralnu liniju 1), središte sila dobijamo dakle presekom obih pravih.

Obrtanjem sila oko njihovih napadnih tačaka za ugao φ ili obrtanjem sistema tačaka ne menja se veličina rezultante, ali se menja momenat u

$$N' = N \cos \varphi - \sum (xX + yY) \cdot \sin \varphi.$$

Za $\varphi = \frac{N}{\sum (xX + yY)}$ biće $N' = 0$. Ako je sistem sila prvobitno bio u ravnoteži t.j. $A = B = 0$ i $N = 0$, biće posle obrtanja za φ ekvivalentan spregu momenta

$$N' = - \sum (xX + yY) \cdot \sin \varphi.$$

Za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ biće $N' = \sum (xX + yY)$, a za $\varphi = \pi$ biće opet ravan nuli, sistem će opet biti u ravnoteži.

72. JEDNAČINA CENTRALNE RAVNI. Sve sile jednog prostornog vezanog sistema (P) razložimo u ortogonalne komponente X, Y, Z. Proizvoljna prava „g“ ima kosinuse pravca α, β, γ . Projekcija sile P na pravu „g“ (povučenu kroz napadnu tačku) je $P = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$.

Tako dobijamo sistem sila P paralelnih pravoj „g“. Sa $R = \sum P$ i oznakom iz čl. 68 nalazimo koordinate x_1, y_1, z_1 , središta paralelnih sila P iz uslova ekvivalencije:

$$R = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

$$Rx_1 = \alpha a_{11} + \beta a_{12} + \gamma a_{13},$$

$$Ry_1 = \alpha a_{21} + \beta a_{22} + \gamma a_{23},$$

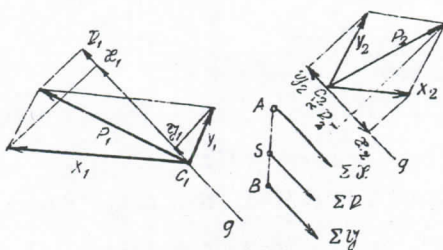
$$Rz_1 = \alpha a_{31} + \beta a_{32} + \gamma a_{33}.$$

Kada iz ove četiri jednačine eliminišemo α, β i γ , dobijamo linearnu jednačinu između tri promenljive x_1, y_1, z_1 , kao geometrijsko mesto središta za sve pravce „g“, dakle jednačinu centralne ravni sistema (P). Eliminanta (ili rezultanta) sistema jednačina, dakle jednačina centralne ravni glasi¹⁾

$$\begin{vmatrix} 1 & A & B & C \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y_1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z_1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

U slučaju da su koeficijenti uz x_1, y_1, z_1 a istovremeno i apsolutni član ravan nuli, postaje ravan neodređena. Jednačina predstavlja tada pramen ravni čija je osovina centralna linija sistema (P) u koju padaju središta svih paralelnih si-

¹⁾Dr. R. Kašanin: Viša matematika I str. 51.



Sl. 129.

pravca „g“. Kako je $\vec{P} = \vec{X} + \vec{Y}$, to je $P = X + Y$, P je algebarski zbir sila X i Y . Prema gornjem stavu središte sila X identično je sa središtem A sila X , a središte sila Y identično je sa središtem B sila Y . U tačkama A i B koncentrisane su paralelne sile ΣX i ΣY , središte S sila P dakle napadna tačka sile ΣP mora ležati na pravoj \overline{AB} tako da je $\frac{AS}{BS} = \frac{\Sigma Y}{\Sigma X}$. Ako su sile ΣX i ΣY suprotnog smera, ležaće tačka S izvan duži \overline{AB} , ako su pri tom i iste veličine, ležaće središte S na pravoj \overline{AB} u beskonačnom rastojanju.

Prava AB zove se centralna linija ravnog sistema sila. Središte S paralelnog sistema ΣP je po projekcionom stavu ujedno i središte ravnog sistema (P) sila proizvoljnih pravaca. Važi dakle stav: Kada iz napadnih tačaka ravnog sistema sila povučemo paralele proizvoljnog pravca u ravni i projiciramo sve sile na njih paralelno nekom drugom pravcu, onda je geometrijsko mesto središta projiciranih sila P određena, od pravca projiciranja nezavisna prava, centralna linija ravnog sistema. Svakom ravnom vezanom sistemu sila odgovara određena centralna linija.

Može se desiti da se za neki ravni sistem sila središta A i B sila X i Y poklope u jednu tačku. Tada je ta tačka središte svih projiciranih paralelnih sistema sila Centralna linija u tom slučaju ne postoji.

Kod prostornog sistema sila raznih pravaca razla-

žemo svaku silu P u tri komponente X, Y, Z proizvoljnih pravaca, povučemo iz svake napadne tačke proizvoljne paralele „g“ i projiciramo na njih sile P, X, Y, Z. Tako dobijamo grupe paralelnih sila (P), (X), (Y) i (Z) koje su sve paralelne pravcu „g“. Sada su određene tri tačke: središta A, B i C paralelnih sila $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$ i $\Sigma(Z)$ koje određuju ravan, centralnu ravan sistema. Kako je $\vec{P} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}$ to je $G = X + Y + Z$ i važi stav:

Kada sile prostornog sistema projiciramo na paralele kroz napadne tačke, geometrijsko mesto središta projiciranih sila P je određena, od pravca projiciranja nezavisna ravan, centralna ravan sistema sila.

Može se za neki sistem sila (P) desiti da se središta A, B, C paralelnih sistema (X), (Y), (Z) poklope u jednu ili dve tačke. Sistem tada nema centralnu ravan nego središte ili centralnu liniju. Ako su na pr. sve sile paralelne jednoj ravni, razložimo ih u dve komponente X, Y paralelne toj ravni. Sistem (X) i (Y) imaće središta A i B; ako ih projiciramo na koju pravu „g“, pašće središte novog sistema (P) uvek na pravu AB.

Centralna ravan ima jednu osobenu pravu. Ako pravce komponentata izaberemo tako da Z-komponente stoje upravno na centralnu ravan, dakle da su X i Y-komponente paralelne toj ravni, onda padaju središta A i B paralelnih sistema (X) i (Y) uvek u jednu određenu pravu nezavisno od orijentacije x- i y-osovine. Tu osobenu pravu zovemo centralnom linijom centralne ravni. Na toj liniji postoji jedna osobena tačka. Ako jednu od ortogonalnih osovina x_1, y_1 orijentišemo u pravcu centralne linije, onda se središte sistema paralelnog

noteže

Jer sa oznakom 9 kosinusa uglova koje pravci x', y', z' , zaklapaju sa pravcima x, y, z u donjoj tablici

	x	y	z
x'	α_1	α_2	α_3
y'	β_1	β_2	β_3
z'	γ_1	γ_2	γ_3

biće zbir komponenta u novom položaju sistema tačaka

$$\left. \begin{aligned} A' &= \sum X' = \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C, \\ B' &= \sum Y' = \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3 C, \\ C' &= \sum Z' = \gamma_1 A + \gamma_2 B + \gamma_3 C. \end{aligned} \right\} \dots (69.5)$$

Koordinatni sistemi $Oxyz, Ox'y'z'$ vezani su za sistem napadnih tačaka, dakle se njihove koordinate ne menjaju.

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Biće dakle ostale astatičke koordinate u novom sistemu

$$a'_{11} = \sum (xX') = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13},$$

$$a'_{12} = \sum (xY') = \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12} + \beta_3 a_{13},$$

i t. d.

Svih 12 koordinata u položaju $Ox'y'z'$ sistema su dakle linearne homogene funkcije analogih koordinata u položaju $Oxyz$. Ako su astatičke koordinate za jedan položaj ravne nuli, onda su to i za svaki drugi položaj sistema. Sile se nalaze u svakom položaju sistema u ravnoteži. Uslovi za takovu astatičku ravnotežu su da sve astatičke koordinate budu ravne nuli. Broj astatičkih koordinata je dvaput veći od broja statičkih koordinata (jedn. 68.1).

Za ravan sistem sila čiju ravan biramo za xy -ravan, je svako $z = 0$ i $Z = 0$, dakle su uslovi $C = 0, a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_{31} = a_{32} = 0$ uvek zadovoljeni; ravan sistem ima 6 a-

statičkih koordinata dale i šest uslova astatičke ravnoteže:

$$A = 0, \quad B = 0,$$

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0.$$

I u ravni je broj astatičkih koordinata dvaput veći od broja statičkih koordinata.

70. CENTRALNA LINIJA I CENTRALNA RAVAN. Središte paralelnih sila u ravni kao i u prostoru ima svoj odredjen položaj u sistemu tačaka; ovaj zavisi od međusobnog položaja napadnih tačaka i od odnosa intenziteta sila a nezavisan je od njihovih zajedničkih pravaca.

Središte ostaje dakle isto za svaki sistem paralelnih sila proizvoljnog pravca ali istih napadnih tačaka i istih odnosa veličina. Ako dakle povučemo iz napadnih tačaka paralele proizvoljnog pravca i na njih projiciramo date sile paralelno jednoj proizvoljnoj pravoj ako je sistem ravan, a paralelno jednoj proizvoljnoj ravni ako je sistem prostoran, dobićemo novi sistem paralelnih sila koji će imati isto središte kao i prvobitni sistem.

Na osnovu ove već poznate nam činjenice možemo lako odrediti geometrijskim putem središte opšteg ravnog sistema sila koje smo već u prvoj svesci (II l. str. 261) ovog dela putem računa našli.

Sile $P_1, P_2, P_3 \dots$ leže u ravni (sl. 129). Razložimo ih na komponente X i Y u dva proizvoljna pravca. Odredimo središte A paralelnih sila X_1, X_2, \dots i središte B paralelnih sila Y_1, Y_2, \dots . Kroz napadne tačke C_1, C_2, \dots sila P povučemo paralele proizvoljnom pravcu „ g “ i projiciramo na ove, opet u proizvoljnom pravcu (na sl. su projekcije upravne), sile P, X i Y . Tako dobijamo nove sile X, X i Y istoga

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

$$a_{23} + a_{31} = 0, \quad a_{32} + a_{13} = 0, \quad a_{11} + a_{22} = 0$$

Ove jednačine ne iskazuju nove relacije nego su kombinacije jednačina 6) Dakle sadrže jednačine 6) uslove ravnoteže za obrtanje sila ili sistema tačaka za ugao $\frac{\pi}{2}$ oko osovine μ ili oko neke njoj paralelne osovine.

Tri jednačine 5) u vezi sa $A = 0$; $P = 0$ iskazuju da sile Y, X, O t.j. projekcije X, Y sila P na ravan upravnu na obrtnu osovinu stoje za sebe u ravnoteži posle obrtanja za $\frac{\pi}{2}$. Jer uslove za ovu ravnotežu dobijamo kad u jednačine 7) stavimo $Z = 0$

$$\sum Y = 0, \quad \sum X = 0,$$

$$\sum \begin{vmatrix} y & z \\ X & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \sum \begin{vmatrix} z & x \\ 0 & -Y \end{vmatrix} = 0, \quad \sum \begin{vmatrix} x & y \\ -Y & X \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{11} + a_{22} = 0.$$

Iz uslova 1) ravnoteže pre obrtanja izlazi da je i $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$ dakle da su jednačine 5) zadovoljene.

Kako je posle obrtanja i ceo sistem sila u ravnoteži, možemo izreći stav: Ravnoteža sila na nepromenljivom sistemu tačaka koji se oko osovine μ obrće ostaće održana ako se sistem komponenata paralelnih osovine μ nalazi za sebe u ravnoteži i ako ravnoteža projekcija sila na ravan upravnu na osovinu μ ne biva usled obrtanja poremećena.

69. ASTATIČKA RAVNOTEŽA. Kao uslov da se sistem sila nalazi u ravnoteži pre i posle obrtanja za proizvoljni ugao φ oko z -osovine ortogonalnog koordinatnog sistema našli smo 9 jednačina (68.6). Istim putem našli bismo iste uslove za x -osovinu:

$$\left. \begin{aligned} a_{31} = 0, & \quad a_{13} = 0 \\ a_{12} = 0, & \quad a_{21} = 0 \\ a_{23} = a_{32}, & \quad a_{22} + a_{33} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (69.1)$$

i za y -osovinu

$$\left. \begin{aligned} a_{12} = 0, & \quad a_{21} = 0 \\ a_{23} = 0, & \quad a_{32} = 0 \\ a_{31} = a_{13}, & \quad a_{33} + a_{11} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (69.2)$$

Jednačine (69.1) dobijamo iz jednačina (68.6) a jednačine (69.2) iz jednačina (69.1) cikličnom permutacijom oba indeksa 1, 2, 3. Od 18 jednačina (68.6), (69.1 i 2) samo su 9 različite:

$$\left. \begin{aligned} a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0 \\ a_{11} + a_{22} = 0 \\ a_{22} + a_{33} = 0 \\ a_{33} + a_{11} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (69.3)$$

a njima pridolaze još uslovi

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

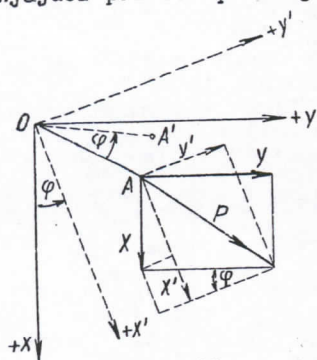
Ako su ova 12 uslova zadovoljena onda su sve tri osovine x, y, z , i njima paralelne osovine osovine ravnoteže. Ove se jednačine mogu pisati i

$$\left. \begin{aligned} A = 0, & \quad a_{11} = 0, & a_{12} = 0, & a_{13} = 0, \\ B = 0, & a_{21} = 0, & a_{22} = 0, & a_{23} = 0, \\ C = 0, & a_{31} = 0, & a_{32} = 0, & a_{33} = 0. \end{aligned} \right\} \dots (69.4)$$

Veličine u jednačinama (69.4) zovu se astatičke koordinate sistema sila koji napada sistem tačaka.

Ako su uslovi 4) za položaj sistema tačaka $Oxyz$ zadovoljeni, onda su astatičke koordinate za svaki drugi položaj $Ox'y'z'$ takodje ravni nuli, t.j. svaka osovina povučena kroz O , dakle i svaka njoj paralelna osovina je osovina rav-

menjajući pri tom položaj sistema sila (P), imaće sila P dru-



ge komponente X' , Y' , a komponenta Z , paralelna obrtnoj osovini, ostaje ista i u novom koordinatnom sistemu $Ox'y'z$. Po poznatim obrascima za transformaciju koordinata (sl. 128) nalazimo

$$\left. \begin{aligned} X' &= X \cos \varphi + Y \sin \varphi \\ Y' &= -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots (68.2)$$

Uslovi za ravnotežu u novom položaju glase

$$\left. \begin{aligned} \sum X' &= 0, & a'_{23} - a'_{32} &= 0 \\ \sum Y' &= 0, & a'_{31} - a'_{13} &= 0 \\ \sum Z' &= 0, & a'_{12} - a'_{21} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (68.3)$$

Pošto zamenimo u ove jednačine vrednost X' , Y' iz 2) i uzmemo u obzir jednačine 1) glasiće one

$$\begin{aligned} A \cos \varphi + B \sin \varphi &= 0, & a_{13} \sin \varphi + a_{23}(1 - \cos \varphi) &= 0, \\ -A \sin \varphi + B \cos \varphi &= 0, & a_{13}(1 - \cos \varphi) - a_{23} \sin \varphi &= 0, \\ C &= 0, & (a_{11} + a_{22}) \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Tri jednačine na levoj strani uvek su zadovoljene jer su po 1) $A = B = C = 0$. Kada iz prve dve jednačine na desnoj strani eliminišemo jedanput a_{13} posle a_{23} , glasiće tada poslednje jednačine

$$\left. \begin{aligned} a_{13}(1 - \cos \varphi) &= 0 \\ a_{23}(1 - \cos \varphi) &= 0 \\ (a_{11} + a_{22}) \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (68.4)$$

Ove će jednačine biti za svaku vrednost ugla φ zadovoljene ako su

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0 \quad \text{i} \quad a_{11} + a_{22} = 0, \quad \dots (68.5)$$

Ravnoteža će postojati pre i posle obrtanja ako su zadovolje-

ne jednačine 1) i 5), dakle da ravnoteža sistema ne bude poremećena usled obrtanja oko z-osovine moraju biti zadovoljena 9 uslova:

$$\left. \begin{aligned} A &= 0, & a_{23} - a_{32} &= 0, & a_{13} &= 0, \\ B &= 0, & a_{31} - a_{13} &= 0, & a_{23} &= 0, \\ C &= 0, & a_{12} - a_{21} &= 0, & a_{11} + a_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (68.6)$$

ili

$$\left. \begin{aligned} A &= 0, & a_{23} &= 0, & a_{32} &= 0, \\ B &= 0, & a_{31} &= 0, & a_{13} &= 0, \\ C &= 0, & a_{12} &= a_{21}, & a_{11} + a_{22} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ako obrtanje oko neke osovine ne remeti ravnotežu sistema, zove se takva osovina po Möbius-u osovina ravnoteže. Ako je neka osovina osovina ravnoteže, onda je to i svaka paralelna osovina. Jer obrtanje oko neke osovine ekvivalentno je (kao što ćemo u kinematici saznati) istom obrtnju oko paralelne osovine u vezi sa translacijom, a translacija ne remeti stanje ravnoteže.

Jednačine 6) sadrže uslove pod kojima će jedan sistem sila biti u ravnoteži osim u prvobitnom položaju još i u drugom položaju. O tome se možemo uveriti ako kroz napadnu tačku svake sile povučemo paralelu sa obrtnom osovinom μ i oko ove okrenemo silu za ugao $\frac{\pi}{2}$ na pr. u smislu kazaljke na satu sl. 128. Time prelazi komponenta X u $-Y$, komponenta Y u X a Z -komponenta (paralelna sa μ) ostaje nepromenjena. Šest uslova ravnoteže za ovaj novi sistem sila glase:

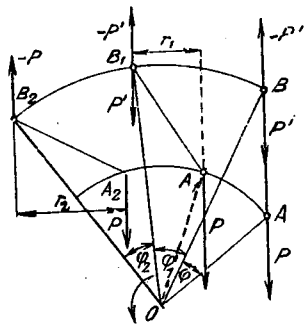
$$\left. \begin{aligned} \sum Y &= 0, & \sum X &= 0, & \sum Z &= 0, \\ \sum \begin{vmatrix} y & z \\ X & Z \end{vmatrix} &= 0, & \sum \begin{vmatrix} z & x \\ Z & -Y \end{vmatrix} &= 0, & \sum \begin{vmatrix} x & y \\ -Y & X \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} (68.7)$$

t. j

tačkaka smatrali nepomičnim, a pravce sila smo obrnuli oko njihovih napadnih tačkaka za isti ugao i u istom smislu. Prema primedbi u čl. 66 nastupiće ista promena relativnog položaja ako pravce sila ostavimo nepromenjene a sistem tačkaka obrnemo oko ma koje osovine upravne na ravan uglova za isti ugao u suprotnom smislu. Slaganje proizvoljnog ravnog sistema sila ili sistema paralelnih sila (P) u prostoru možemo uastati isto tako slagati kao i klizeće vektore, u rezultantu R, ali za napadnu tačku rezultante moramo smatrati središte sistema (P). Samo u tom slučaju ostaće R ekvivalentna sistemu (P) i posle promene relativnog položaja.

Nije dopušteno pomeravati napadnu tačku neke sile P u pravcu napadne linije.

Na sl. 127 je tačka A napadna tačka sile P. Kada



Sl. 127

bismo napadnu tačku pomerili u B t.j. u toj tački stavili dve jednake i suprotne sile $P' = P$ (v. II.1, str. 216) imali bismo posle obrtanja sistema tačkaka oko neke tačke O za ugao φ pored sile P' u tački B_1 još i spreg koji obrazuju sile P u A_1 i $-P'$ u B_1 . Spreg i sile u novoj napadnoj tački B n' su ekvi-

valentni sili P u napadnoj tački A.

Iz slike 127 vidimo da promenom položaja spreg sila menja svoju vrednost. A i B su napadne tačke sile P i $-P$ koje obrazuju spreg. U položaju A_1B_1 je momenat sprega Pr_1 , u položaju A_2B_2 je momenat Pr_2 . Stalno rastojanje AB zovemo astatičkim krakom sprega. Krak sprega „r“ i sa njime i momenat

sprega menjaju se usled obrtanja tako da je $r_{\min} = 0$, kada se pravac sila poklapa sa \overline{AB} , a $r_{\max} = \overline{AB}$ kada su sile upravne na astatički krak \overline{AB} . Na sl. 127 je obrtna osovina O upravna na ravan sprega (ravan crteža). ova se dakle usled obrtanja ne menja, osovina (vektor) sprega ostaje paralelna obrtnoj osovini. Ako pak u opštem slučaju obrtna osovina nije upravna na ravan sprega, menja se usled obrtanja ne samo veličina momenta sprega nego i položaj njegove ravni. Samo u slučaju da je obrtna osovina paralelna astatičkom kraku, ne menja se usled obrtanja ni veličina momenta ni položaj ravni sprega.

68. OBRTANJE OKO JEDNE OSOVINE. Sistem sila P_1, P_2, \dots, P_n nalazi se na slobodnom nepromenljivom sistemu tačkaka u ravnoteži. Oko neke proizvoljne osovine μ obrnemo sistem za ugao φ . Tražićemo uslove pod kojima će ravnoteža postojati i posle obrtanja.

Obrtnu osovinu uzimamo za z-osovinu ortogonalnog koordinatnog sistema, vezanog za sistem tačkaka tako da koordinate x, y, z, tačkaka usled rotacije ne menjaju svoje vrednosti. Komponente neke sile P su X, Y, Z. Početak O koordinatnog sistema je proizvoljan. Kada uvedemo kraće oznake

$$A = \sum X, \quad a_{11} = \sum xX, \quad a_{12} = \sum xY, \quad a_{13} = \sum xZ,$$

$$B = \sum Y, \quad a_{21} = \sum yX, \quad a_{22} = \sum yY, \quad a_{23} = \sum yZ,$$

$$C = \sum Z, \quad a_{31} = \sum zX, \quad a_{32} = \sum zY, \quad a_{33} = \sum zZ,$$

glase šest uslova za ravnotežu sila (P) pre obrtanja:

$$\left. \begin{aligned} A = 0, \quad a_{23} - a_{32} = 0, \\ B = 0, \quad a_{31} - a_{13} = 0, \\ C = 0, \quad a_{12} - a_{21} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (68.1)$$

pošto smo sistem tačkaka obrnuli oko z-osovine za ugao φ ne

laže tvorac ove metode prof B Mayor u svom kratkom delu "Introduction a la Statique Graphique des systèmes de l'espace 1926.

A S T A T I K A

66. PREDMET ASTATIKE. Predmet našeg dosadašnjeg razmatranja bilo je ispitivanje uslova ekvivalencije i ravnoteže sile koje napadaju kruto telo t.j. kontinualan sistem tačaka. Napadnu tačku sile mogli smo proizvoljno birati na njenoj napadnoj liniji t.j. smatrali smo sile klizećim vektorima. Pravci sile imeli su prema telu stalan položaj. Sada ćemo, obratno, pretpostaviti da sile napadaju izvesne stalne tačke krutog tela, a da se njihov položaj prema telu može menjati. Pretpostavićemo konačan broj sile, dakle će broj napadnih tačaka biti konačan. Stoga možemo sada mesto kontinualnog smatrati diskretan nepomerljiv sistem tačaka koji napadaju sile. Takav sistem čine na pr. čvorovi jedne kinematički određene prostorne rešetke kada njemu težinu apstrahujemo. Mesto o telu govorićemo dakle ovde o sistemu tačaka, podrazumevajući dabogme nepromenljivu konfiguraciju sistema. Položaj sile prema sistemu može se menjati ili tako da sistem tačaka menja svoj položaj a sile zadržavaju svoju veličinu, pravac i smer; ili tako da sistem tačaka ostane nepomičan a sile menjaju svoj pravac.

Usled promene relativnog položaja sistema sile prema sistemu njihovih napadnih tačaka jasno je da će se u op-

opšte dejstvo sile menjati. Ako je na pr. u prvobitnom položaju postojala ravnoteža, biće ona promenom položaja u opšte poremećana i samo pod izvesnim uslovima postojaće ona i dalje. Ako je sistem sile prvobitno bio na pr. ekvivalentan jednoj sili, može u drugom položaju biti ekvivalentan spregu.

Astatikom zovemo onaj deo nauke o silama koji istražuje kako se dejstvo nekog sistema sile na dati sistem tačaka menja pri promeni njihovog relativnog položaja.

Ako na pr. ravnoteža postoji i posle promene položaja, zovemo je astatičkom ravnotežom; ako ekvivalencija dva sistema sile postoji i posle promene položaja zovemo je astatičkom ekvivalencijom.

Najopštije pomeranje nekog nepomerljivog sistema tačaka možemo razložiti na translaciju i rotaciju. Translacija sistema tačaka ne menja njegov relativni položaj prema sistemu sile, imamo dakle da ispitujemo samo uticaj rotacije na dejstvo sile. Svaka rotacija oko neke osovine ekvivalentna je rotaciji oko neke paralelne osovine u vezi sa izvesnom translacijom; dovoljno je dakle da se ograničimo na obrtne osovine koje prolaze kroz jednu proizvoljno izabranu tačku sistema.

67. DOPUŠTENE TRANSFORMACIJE SILA Pitanjima koja spadaju u astatiku bavili smo se već u statici sile u ravni. Onda smo se upoznali sa pojmom središta 1) dveju sile koje se seku (str. 218), 2) dveju paralelnih sile (str. 224), 3) ravnog sistema sile proizvoljnih pravaca (str. 261) i najzad 4) proizvoljnog broja paralelnih sile (str. 320) Pojam središta sile proširili smo i na sistem paralelnih sile u prostoru (čl. 11 ove sveske) Pri tome smo sistem napadnih

$$\cos \beta = \frac{e_1}{w_1}, \quad \cos(90 + \beta - \gamma) = \sin(\gamma - \beta) = \frac{f_2}{w_2}, \quad \cos \gamma = \frac{f_2}{a},$$

$$\cos(90 + \beta - \delta) = \sin(\delta - \beta) = \frac{g_3}{w_3}, \quad \cos \delta = \frac{g_3}{a}$$

Pošto ove vrednosti trigonometrijskih funkcija smenimo u momentne jednačine, glasiće one

$$\frac{S_1}{l_1} h \cdot e_1 + \frac{B}{w_1} h \cdot e_1 + P d = 0,$$

$$-\frac{S_2}{l_2} h \cdot f_2 + \frac{B}{w_2} h \cdot f_2 + \frac{A}{a} h \cdot f_2 + P \cdot f = 0,$$

$$\frac{S_3}{l_3} h \cdot g_3 + \frac{B}{w_3} h \cdot g_3 + \frac{A}{a} h \cdot g_3 + P \cdot g = 0.$$

Iz sl. 126 čitamo proporcije $\frac{f}{f_2} = \frac{c}{e_2}$ i $\frac{g}{g_3} = \frac{c}{e_3}$; sa ovim zamenama i pišući kao u čl. 60 kraće $\frac{S}{l} = \sigma$ nalazimo najzad

$$\sigma_1 = -\frac{B}{w_1} - \frac{P \cdot d}{h \cdot e_1},$$

$$\sigma_2 = +\frac{B}{w_2} + \frac{A}{a} + \frac{P \cdot c}{h \cdot e_2},$$

$$\sigma_3 = -\frac{B}{w_3} - \frac{A}{a} - \frac{P \cdot c}{h \cdot e_3}.$$

U ovim jednačinama koje odredjuju sile S_1 , S_2 i S_3 su A , B i P date sile, a , c , d i h dužine date dimenzijama rešetke a dužine e_1 , e_2 , e_3 , w_1 , w_2 i w_3 konstruišemo i merimo iz horizontalne projekcije rešetke. Metoda je dakle mešovita geometrijska i računaska kao i Riterova metoda kod ravne rešetke gde krake sila merimo iz crteža.

64. GRAFIČKO ODREĐIVANJE SILA. Pošto smo datu rešetku pretvorili izmenom štapova izvesnog broja u rešetku najprostijeg oblika imamo u svakom njenom čvoru da razložimo

datu silu u pravce triju štapa koji ne leže u istoj ravni.

Taj smo zadatak rešavali grafički u početku ove glave u čl. 2 sl. 1-8.

Kod velikog broja čvorova i štapova postaje plan sila zbog velikog broja pomoćnih linija nepregledan i teško se može kontrolisati ako za sve čvorove izaberemo jednu i istu vertikalnu projekcionu ravan. Ta se nezdoga može izbeći izborom raznih projekcionih ravni za razne čvorove. Za svaki čvor biramo najpogodnije projekcione ravni, na pr. tako da se u jednoj od njih dve nepoznate sile poklapaju, dakle da je u toj ravni poligon sila trougao, kac što je razlaganje prikazano u sl. 4. Na taj način postizavamo veću preglednost plana sila. Višak rada koji se sastoji iz prenašanja nadjenih sila u nove projekcione ravni, biće nadoknadjen uštedom mnogih pomoćnih linija i većom preglednošću rada.

65. LITERATURA O PROSTORNIM REŠETKAMA. Ovaj kratak pregled prostornih rešetkastih nosača sastavljen je po delima:

A. Föppl, Das Fachwerk im Raume. 1892.

" " , Vorlesungen über tech. Mechanik II. Graphische Statik. 1900.

Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. 1904.

W. Schlink, Statik der Raumbauwerke. 1907.

U poslednjem udžbeniku nalazi se opširan spisak dela i rasprava koje se tiču ovog predmeta.

Metodu prealickavanja prostornog sistema u ravan, kao i njenu primenu na statiku prostornih rešetaka (sa Švedlerovim i Cimermanovim kubetom Reichstaga kao primerom) iz-

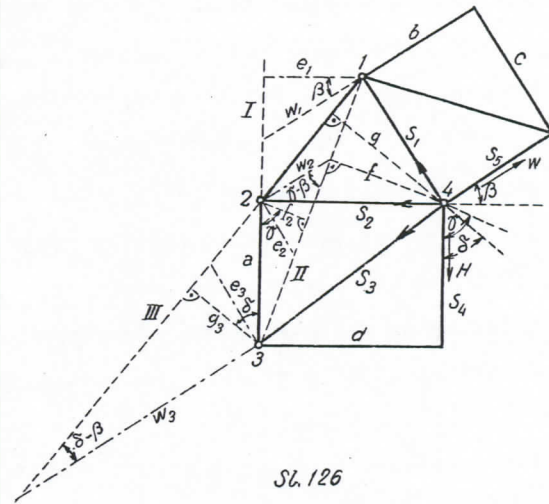
sovina, dakle sa tri para momentnih jednačina nalazimo sile svih šest štapova

U praktičnim slučajevima biće međusobni položaj šest štapova jednostavniji, obično će se dva ili tri štapa seći u jednoj tački tako da je izbor pogodnih momentnih osovina vrlo lak. U tim prostim slučajevima često će se naći prava koja seče pet štapova

U čl. 54 bilo je govora o rešetkama koje postaju spajanjem dveju statički odredjenih rešetaka pomoću šest štapa. Ovdje je primena metode momenata najpogodnije sredstvo za odredjivanje sila u spojnim štapovima. Takav zadatak rešavali smo već u čl. 47 (1. primer sl. 93). Šest štapa spajaju ploču ABCD sa Zemljom.

Metodu momenata primenio je prvi prof. Lendsberg 1903 g. na statički proračun Švedlerovog i Cimermanovog kubeta.

Metodu momenata primenićemo na sile u štapovima koji se seku u jednom čvoru gornjeg okvira kubeta prikazanog u sl. 124. Taj čvor 4 i tri polja koja se u njemu sastaju, prikazana su na sl. 126. Pravougaona polja imaju strane „a“ i „d“ odnosno „b“ i „c“. Visinska razlika izmedju gornjeg i donjeg okvira (visina sprata) je h. Pretpostavljamo da su sile S_4 i S_5 u gornjim okvirnim štapovima već poznate, a traže se sile S_1 , S_2 i S_3 . Prvu ćemo naći iz momentne jednačine za osovinu I koja spaja čvorove donjeg okvira 2 i 3, drugu iz momentne jednačine za osovinu II koja spaja čvorove 1 i 3, a treću iz momentne jednačine za osovinu III koja spaja čvorove 1 i 2. Momentne osovine su dakle strane trougla 123, koji leži u ravni crteža. Čvor 4 napadaju vertikalna sila P i dve horizon-



Sl. 126

talne sile, H u pravcu štapa S_4 i W u pravcu štapa S_5 , dakle tri poznate sile P, $S_4 + H = A$ i $S_5 + W = B$. Najkraće rastojanje čvora 4 od osovine I, II i III označena su sa d, f i g, najkraće rastojanje čvora 1 od osovine I sa e_1 , najkraće rastojanje čvora 2 od osovine II sa f_2 , a najkraće rastojanje čvora 3 od osovine III sa g_3 . Dužine pravih paralelnih štapa S_5 , povučениh iz čvorova 1, 2, 3 do preseka sa osovinom I, II, III označene su sa w_1 , w_2 , w_3 . Dužine oteka e_2 i e_3 su upravne na w_2 odnosno na w_3 . Ugao izmedju pravih S_2 i S_5 označen je sa β , ugao izmedju S_4 i f sa γ , ugao izmedju S_4 i g sa δ . Štapovi S_1 , S_2 i S_3 imaju prema horizontalnoj ravni uglove α_1 , α_2 , α_3 . Sa ovim oznakama glase momentne jednačine:

$$M_I = S_1 \sin \alpha_1 \cdot e_1 + B \cos \beta h + P \cdot d = 0,$$

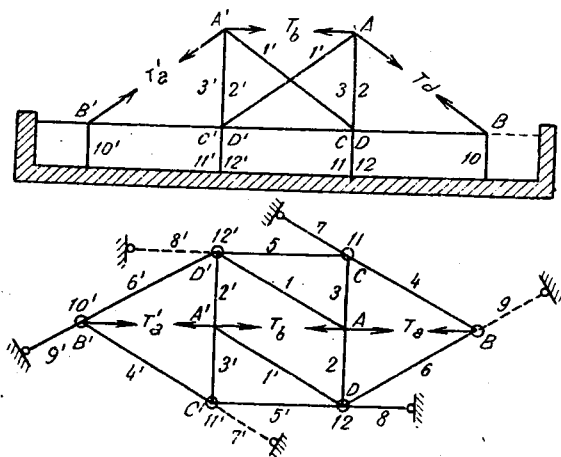
$$M_{II} = -S_2 \sin \alpha_2 \cdot f_2 + B \cos(90 + \beta - \gamma) h + A \cos \gamma \cdot h + P \cdot f = 0,$$

$$M_{III} = S_3 \sin \alpha_3 \cdot g_3 + B \cos(90 + \beta - \delta) h + A \cos \delta \cdot h + P \cdot g = 0.$$

Sa dužinama l_1 , l_2 , l_3 štapa je $\sin \alpha_1 = \frac{h}{l_1}$, $\sin \alpha_2 = \frac{h}{l_2}$, $\sin \alpha_3 = \frac{h}{l_3}$. Iz slike čitamo:

jem izmenjenih štapova da odredimo sile u svima štapovima, jer je tim manji broj jednačina 3) za određivanje sila T . Ta je težnja opravdana naročito kod rešetaka nepravilnog oblika. Kod rešetaka pravilnog oblika možemo uvođenjem većeg broja sila T nego što bi bilo potrebno iskoristiti olakšice pri razlaganju sila koje nam pravilnost rešetke pruža. Rešavanje jednačina 3) u tim slučajevima većinom je vrlo lako, a višak vremena utrošenog na računski posao rešavanja jednačina znatno je nadoknadjeno uštedom vremena pri razlaganju sila.

3. PRIMER. Rešetka na sl. 125 ograničena je sa dve



Sl. 125

pravougaone i sa četiri trougaone ravni i gore je zatvorena. Ležišni okvir je pravilan šestougao, broj potrebnih ležišnih štapova je $6 + 3 = 9$. Ležišni okvir leži na planarnim ležištima B, C, D, B', C', D' a čvorovi C, D i B' vezani su sa Zemljom sa po jednim horizontalnim ležišnim štapom 7, 8 i 9'. Za određivanje sila u štapovima rešetke dovoljno bi bilo da zamenimo dva štapa na pr. $\overline{AA'}$ i $\overline{AB'}$, jer bi time čvor A na-

činili jednostrukim, i spoljnu silu koja napada čvor A mogli bismo razložiti u pravce štapova 1, 2 i 3. Mi ćemo ukloniti i treći štap $\overline{A'B'}$, sile u ta tri štapa označićemo sa T_a , T_b i T_c i zamenićemo ih sa tri horizontalna ležišna štapa 7', 8' i 9'. Uvođenjem treće sile T postigli smo centralnu simetriju rešetke: obrtanjem za 180° dolazi leva strana do poklapanja sa desnom. Stoga je dovoljno da samo sile u štapovima jedne polovine (1 do 12) izrazimo kao funkcije datog opterećenja i sila T , jer ista funkcija važi i za štape druge polovine (1' do 12').

63. METODA MOMENATA. Riterova metoda za određivanje sila u štapovima ravne rešetke sastoji se u tom da rešetku presečemo jednom linijom na dva dela, sile u presečenim štapovima smatramo spoljnim silama i primenimo na jedan deo rešetke uslov ravnoteže da zbir momenata spoljnih sila mora za svaku tačku ravni rešetke biti ravan nuli. Liniju preseka biramo tako da ona seče najviše tri štapa. Birajući za momentni pol presek dvaju štapova dobijamo momentnu jednačinu sa samo jednom nepoznatom, traženom silom u trećem štapu.

Potpuno analogna Riterovoj metodi je metoda momenata kod prostornih rešetaka.

Rešetku presečemo jednom površinom na dva dela tako da presečemo najviše šest štapa, sile u presečenim štapovima smatramo spoljnim silama i primenimo na jedan deo uslov ravnoteže da zbir momenata spoljnih sila mora za svaku osovinu prostora biti ravan nuli. Znamo da je uvek moguće povući dve prave koje seku četiri ukrštene prave. Birajući te prave za momentne osovine dobijamo dve jednačine sa dve nepoznate, dakle su ove jednoznačno određene. Sa tri para o-

$$\mathcal{D}'_6 = -\mathcal{D}'_3 = +1, \quad \mathcal{D}'_{12} = -\mathcal{D}'_9 = +1,$$

$$\mathcal{D}'_9 = -\mathcal{D}'_6 = -1, \quad \mathcal{D}'_{15} = -\mathcal{D}'_{12} = -1,$$

$$\mathcal{D}'_{18} = \mathcal{D}'_{15} = +1$$

Ravnoteža čvora a₇ zahteva $\mathcal{D}'_{21} + T = -\mathcal{D}'_{18} = -1$ i sa $T = +1$

$$\mathcal{D}'_{21} + 1 = -1 \quad \text{ili} \quad \mathcal{D}'_{21} = -2.$$

Ovu vrednost sile u štapu koji zamenjuje jedan štap okvira, a pravac mu se poklapa sa pravcem zamenjenog okvirnog štapa, dobijamo uvek kada pravilni poligon okvira ima neparan broj strana.

Za paran broj strana glasi uslov ravnoteže za poslednji čvor

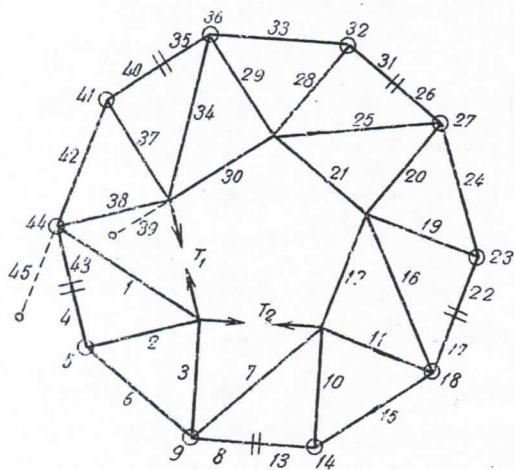
$$\mathcal{D}' + T = +1 \quad \text{dakle} \quad \mathcal{D}' + 1 = +1$$

ili

$$\mathcal{D}' = 0.$$

Mrežasto kube sa pravilnom poligonalnom osnovom u kojoj je broj strana paran labilno je, dakle za izvodjenje neupotrebljivo. Tu je činjenicu prvi A Föppl dokazao na drugi način.

2. PRIMER. Cimermanovo kube na sl. 124 ima donji



Sl. 124

okvir sa 10, gornji okvir sa pet strana pravilnog poligona. Broj potrebnih ležišnih štapova je $10 + 5 = 15$, broj sistemnih štapova 30, broj čvorova 15 dakle je relacija $s + r = 3n$ zadovoljena.

Kube je u sva

kom temenu ležišnog poligona poduprto planarnim ležištem a svaka druga strana u sredini ima vertikalno planarno ležište za primanje horizontalnih sila, slična ležištima na sl. 118. Čvorovi gornjeg okvira su trostruki, potrebno je dva štapa gornjeg okvira zameniti da bi dobili jednostruki čvor. Svi štapovi označeni su brojevima u onom redu kako nalazimo (računom ili grafički) sile u njima usled datog opterećenja. Brojevi se prostiru i na vertikalne ležišne štapove. Štapovi donjeg okvira koji primaju horizontalne sile u njihovom pravcu imaju po dva broja (na pr. 8 i 13) jer se sila u obema polovinama razlikuje za veličinu primljene, horizontalne spoljne sile. Uklonjena dva štapa zamenjena su novim ležišnim štapovima br. 39 i Br. 45 u pravcu štapa 30 odnosno 42.

Sa dva zamenjena štapa glasi jednačina za silu S u nekom štapu

$$S = \mathcal{D}^0 + \mathcal{D}'T_1 + \mathcal{D}''T_2,$$

gde je \mathcal{D}' sila u štapu za opterećenje $T_1 = 1$, \mathcal{D}'' sila za opterećenje $T_2 = 1$ a \mathcal{D}^0 sila usled datog opterećenja rešetke sa izmenjenim štapovima. Kada nove štapove označimo kraće sa 1 i 2, dobijamo sa $S_1 = S_2 = 0$ dve jednačine

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}'_1 + \mathcal{D}'_1 T_1 + \mathcal{D}'_1 T_2 \\ 0 &= \mathcal{D}''_2 + \mathcal{D}'_2 T_1 + \mathcal{D}''_2 T_2 \end{aligned} \right\} \dots (62.3)$$

iz kojih nalazimo sa determinantom sistema $D = \mathcal{D}'_1 \mathcal{D}''_2 - \mathcal{D}'_2 \mathcal{D}''_1$;

$$T_1 = \frac{1}{D} [\mathcal{D}''_2 \mathcal{D}'_1 - \mathcal{D}'_2 \mathcal{D}''_1] \quad \text{i} \quad T_2 = \frac{1}{D} [\mathcal{D}'_1 \mathcal{D}'_2 - \mathcal{D}'_2 \mathcal{D}'_1]$$

U našem primeru zamenjuju se indeksi 1 i 2 kod sila \mathcal{D} sa 39 i 45. Pošto smo odredili sile T_1 i T_2 , nalazimo u označenom redu sile u svima štapovima, kao i otpore oslonaca. Prirodno je da ćemo gledati da sa što manjim bro-

šetku najprostije vrste zamenom izvesnih štapova a, b, \dots, n drugim, zgodno izabranim štapovima kao što smo to činili i kod ravne rešetke (vidi I. sveska II. dela str. 154).

Sile T_a, T_b, \dots, T_n , uklonjenih štapova smatramo kao spoljne sile koje napadaju oba čvora spojena dotičnim štapom. Zavisnost sile S u nekom štapu od spoljnih sila izražena je linearnom funkcijom, možemo dakle pisati

$$S = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_a T_a + \mathcal{D}_b T_b + \dots + \mathcal{D}_n T_n \quad \dots (62.1)$$

gde \mathcal{D}_0 znači silu štapa kada su sve sile $T = 0$ i rešetku napadaju samo date spoljne sile. \mathcal{D}_a je sila štapa kada date sile uklonimo i rešetku napadaju samo dve sile $T_a = 1$ i $T_a = -1$ i t.d. U novim štapovima kojima smo zamenili uklonjene, mora biti $S = 0$ jer oni stvarno ne postoje. Tako dobivamo n linearnih jednačina

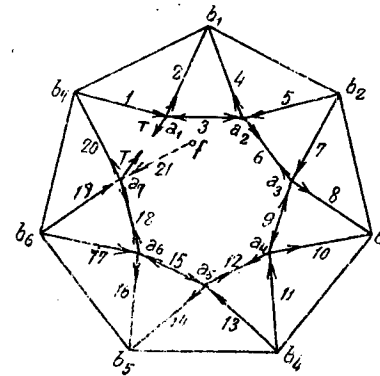
$$\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_a T_a + \mathcal{D}_b T_b + \dots + \mathcal{D}_n T_n = 0 \quad \dots (62.2)$$

iz kojih nalazimo n sila T_a, \dots, T_n . Rešetka je statički određena ako je determinanta sistema različita od nule.

Zamenom štapova u stanju smo odrediti sile u štapovima svake rešetke. Pravce novih (pomoćnih) štapova biraćemo takve da određivanje njihovih sila (računom ili grafički) bude što jednostavnije.

Važna je primedba da se uklonjeni štap rešetke ne mora zameniti štapom koji spaja dva čvora rešetke, nego se može zameniti i štapom koji spaja jedan čvor rešetke sa Zemljom (osloncem); drugim rečima sistemni štap može se zameniti ili novim sistemnim ili novim ležišnim štapom.

1. PRIMER. Mrežasto kube na sl. 123 ima za okvir pravilne poligone sa sedam strana. Površine su ravnokraki trougli. Svi čvorovi su dvostruki. Za određivanje sila u štapovima dovoljna je zamena jednog štapa. Zamenjen je štap $a_1 - a_7$ sa



Sl. 123

štapom $\bar{21}$ koji vezuje čvor a_7 sa nepomičnom tačkom f Zemlje, dakle je štap $\bar{21}$ ili a_7 f ležišni štap. Njegov pravac možemo proizvoljno birati, biramo ga dakle tako da se poklapa sa zamenjenim štapom $a_1 - a_7$. (U sl. se radi jasnog prikazivanja oba štapa ne poklapaju).

Po jednačini (62.1) biće sila u nekom štapu koja ta izražena sa

$$S = \mathcal{D}^0 + \mathcal{D}' T.$$

Iz uslova da sila S_{21} mora biti ravna nuli, nalazimo T iz jednačine

$$0 = \mathcal{D}_{21}^0 + \mathcal{D}_{21}' T \quad \text{ili} \quad T = - \frac{\mathcal{D}_{21}^0}{\mathcal{D}_{21}'}$$

Ako je \mathcal{D}_{21}' t.j. sila u štapu $\bar{21}$ usled opterećenja $T = 1$ ravna nuli, dobijamo $T = \infty$ što znači da je kube labilno.

Da bismo našli kada će takav slučaj nastupiti posmatraćemo sile usled opterećenja $T = +1$. Da čvor a_1 bude u ravnoteži mora se rezultanta iz \mathcal{D}_3' i T potirati sa rezultantom iz \mathcal{D}_1' i \mathcal{D}_2' . Kako ova grupa leži u ravni $a_1 b_1 b_7$, mora i prva rezultanta ležati u istoj ravni. Okvir a_1, a_2, \dots, a_7 je horizontalan, rezultanta iz \mathcal{D}_3' i T mora dakle biti horizontalna t.j. mora imati pravac $b_1 b_7$ da bi zadovoljila oba uslova.

Iz ovoga zaključujemo da je $\mathcal{D}_3' = -T = -1$.

Iz istih razloga nalazimo iz uslova ravnoteže čvorova a_2, \dots, a_6

Ako rešetka ima n čvorova, možemo postaviti 3 n jednačina 2) pomoću kojih možemo naći sile u svima štapovima i sve otpore oslonaca

Pretpostavimo da rešetka ima s štapova i da je položena na k' planarnih, k'' linearnih i k''' nepomičnih ležišta. Broj nepoznatih koje treba da odredimo je tada

$$s + k' + 2k'' + 3k'''$$

i rešetkasti nosač biće statički određen ako postoji relacija

$$s + k' + 2k'' + 3k''' = 3n \quad \dots (60.3)$$

Pored ovih uslova postoji još i taj da je determinanta 3 n linearnih jednačina 2) različita od nule

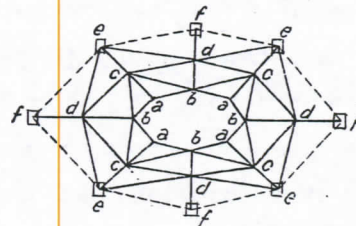
Kod rešetaka sa većim brojem čvorova je ova opšta metoda vrlo zametna. Po njoj je Cimerman odredio sile u štapovima i otpore oslonaca za opšte opterećenje i tako analitičkim putem dokazao stabilnost svoga sistema kubeta.

61. PROSTE REŠETKE. U jednom čvoru prostorne rešetke sastaju se najmanje tri štapa koji ne leže u istoj ravni. Takav čvor zovemo jednostrukim čvorom, čvor u kome se sastaju 4 štapa zovemo dvostrukim, čvor sa „ p “ štapova ($p - 2$) strukim čvorom.

Ako rešetka ima bar jedan jednostruki čvor i ako uklanjamo triju štapova koji se u tom čvoru sastaju, dobijamo opet jednostruki čvor, onda nalazimo lako sile u svima štapovima uzastopnim rešavanjem triju linearnih jednačina sa po tri nepoznate. Takvu rešetku naziva Müller-Breslau rešetkom najprostije vrste

Primer takve rešetke prikazan je na sl.122. Tačke e i f su nepomična ležišta. Čvorovi d vezani su sa tri štapa koji ne leže u istoj ravni sa dve tačke „ e “ i jednom tačkom „ f “,

dakle su nepomični. Tako isto vezani su čvorovi „ e “ sa dva čvor



Sl. 122

ra „ d “ i jednim čvorom „ e “, zatim čvorovi „ b “ sa dva čvora „ c “ i jednim čvorom „ d “ i najzad vezani su čvorovi „ a “ sa dva čvora „ b “ i jednim čvorom „ c “. Tako smo se očigledno uverili da su svi čvorovi nepomično medju sobom

vezani, da je kuba stabilna.

Čvorovi „ a “ su jednostruki tako i ležišni čvorovi „ e “, čvorovi „ b “ su trostruki, „ a “ čvorovi „ c “ i „ d “ su četvorostruki.

Kada su nam date spoljne sile koje napadaju čvorove, nalazimo prvo iz četiri grupe sa po tri jednačina sa tri nepoznate sile 12 štapova koji se u čvorovima seku. Sada nam ostaju u čvorovima „ b “ samo po tri nepoznate koje nalazimo iz nove četiri grupe sa po tri jednačine. Prelazimo zatim na čvorove „ c “ u kojima su tri nepoznate i najzad na čvorove „ d “. Pošto smo našli sile u svima štapovima, određeni su već i otpori oslonaca. Sile u štapovima $f - d$ jednake su otporima ležišta „ f “; otpori su pozitivni ako je u štapu pritisak, negativni ako je štap zatezan. Rezultanta sile u štapu $e - c$ i u dva štapa $e - d$ ravna je otporu oslonca „ e “.

Određjivanje sila u štapovima ove rešetke izvedeno je dakle rešavanjem 16 medjusobno nezavisnih grupa od po tri jednačine sa tri nepoznate, oblika (60.2) dok bi smo po opštoj metodi imali da rešimo $3 \times 14 = 48$ takvih jednačina sa po tri, pet i šest nepoznatih, što bi bilo daleko veći posao

62. METODA ZAMENE ŠTAPOVA. Svaki rešetkasti nosač koji nije sagradjen na opisani način, možemo pretvoriti ure-

Müller-Breslau) prilagodjene pojedinim sistemima rešetaka. Kao treća metoda dolazi u obzir kinematička metoda; ona se osniva na statičkom principu o kome će u trećem delu biti govora, na principu virtualnih (mogućih) pomeranja. Najzad nalazi korisnu primenu na određivanje sila u štapovima prostorne rešetke i metoda preslikavanja sila u prostoru na ravan, sa kojom smo se u čl. 43 upoznali.

Mi ćemo se ograničiti na izlaganje prve dve metode i to samo u opštim crtama. Za studiju specijalnih metoda, koje su iz metode čvorova i metode momenata izvedene kao i za studiju poslednje dve metode upućujemo čitaoca na docnije navedene specijalne udžbenike.

60. METODA ČVOROVA. U nekom čvoru m prostorne rešetke sastaju se „ p “ štapova dužine l_1, l_2, \dots, l_p u kojima vladaju sile S_1, S_2, \dots, S_p . Čvor m napada spoljna sila P , njene ortogonalne komponente su A, B, C . Ortogonalne projekcije dužine r -tog štapa l_r na pravce A, B i C , označimo sa a_r, b_r, c_r . Uslovi ravnoteže čvora m glase tada

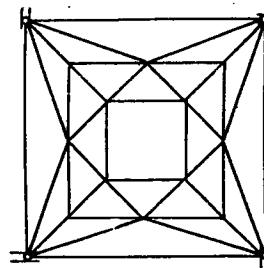
$$\left. \begin{aligned} \sum S_r \frac{a_r}{l_r} + A &= 0 \\ \sum S_r \frac{b_r}{l_r} + B &= 0 \\ \sum S_r \frac{c_r}{l_r} + C &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (60.1) \quad (r = 1, 2, \dots, p)$$

i kada uvedemo skraćenu oznaku $\frac{S_r}{l_r} = \sigma_r$,

$$\left. \begin{aligned} \sum \sigma_r a_r + A &= 0 \\ \sum \sigma_r b_r + B &= 0 \\ \sum \sigma_r c_r + C &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (60.2)$$

Ovo je kube konstruisao i objavio 1904 god prof. W. Schlink i nazvao ga pločastim ili planarnim kubetom (Scheiben-, Flächenkuppel). Sistem ležišta je slično onome kod Cimermanovog kubeta; i ovde se horizontalne spoljne sile prenose na zidove samo u pravcu njihove dužine i to u sredini zidova. Ali dok je broj ležišta Cimermanovog kubeta 3 k , ima Šlinkovo kube 2 k ležišta. Dok je Cimermanovo kube omeđeno sa 2 k ravni, obrazuju pločasto kube samo „ k “ ravni dakle isto toliko koliko strana ima pokrivena površina. Time otpadaju nepokriveni ošeci Cimermanovog kubeta i konstrukcija je prostija. Planarno kube ima dakle sve dobre osobine Cimermanovog kubeta.

Sl. 121 prikazuje dvospratno kube nad kvadratnim



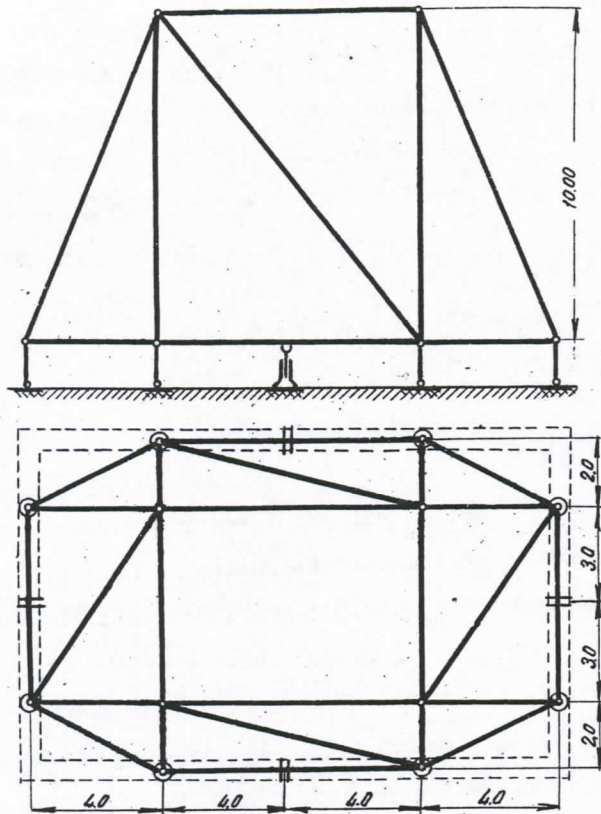
Sl. 121

prostorom koje je A. Föppl izveo na pijačnom holu u Leipzigu¹⁾. Na slici je prikazano kube sa 4 linearna ležišta. Kada uklonimo ležišni okvir, moraju ležišta biti nepomična da bi kube bilo stabilno. Ako sada preostale štapove donjeg sprata smatramo leži-

šnim štapovima, postaje gornji sprat planarno kube identično sa kubetom na sl. 120.

59. STATIČKI PRORAČUN PROSTORNIH REŠETKASTIH NOSAČA. Za određivanje sila u štapovima prostorne rešetke služe nam analoge metode kao u statici ravne rešetke: metoda čvorova i metoda preseka ili momenata. Na ova dva principa osnivaju se razne specijalne metode (Föppl, Henneberg, Mohr,

¹⁾ Leipciško kube nije tako jednostavno kao ono na sl. 121. Osnova je petougao, sa dva prava ugla, ali je jedna strana tako mala da se osnova vrlo malo razlikuje od trapeza.



Sl. 118

kalne sile prenose 8 horizontalna planarna ležišta ispod čvoro-va ležišnog okvira, a 4 vertikalna planarna ležišta koja su postavljena u sredini dužih štapova ležišnog okvira, prenose horizontalne sile duž obimnih zidova. Unutarnje sile u tim štapovima razlikuju se u obema polovima štapa za veličinu prenošenog horizontalnog pritiska.

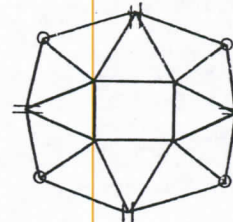
Cimermanovo kube ima znatna preimućstva prema ranije izvodjenim sistemima naročito zbog pogodnog podupiranja koje obimne zidove napreže samo u podužnom pravcu.

Nedostatak može se smatrati što trouglasta polja

koja kose strane ležišnog okvira odsecaju, ostaju nepokrivene, te se moraju zasebno konstrukcijom pokriti.

Švedlerovo i mrežasto kube specijalni su oblici Cimermanovog kubeta. Kada kraće strane ležišnog okvira sl. 117 i 118 svedemo na nulu, dobijamo Švedlerovo kube sa rasporedom ležišta kao na sl. 112. Svodjenjem dužih strana na nulu dobijamo mrežasto kube kao na sl. 115.

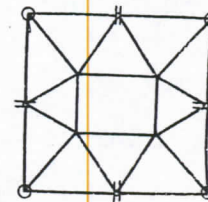
7. PLOČASTO KUBE (Scheibenkuppel) Kube prikazano na sl. 119 ima gornji okvir sa $k = 4$ strane, a donji sa $2k = 8$ strana. Oba okvira spojena su medju sobom sa $3k = 12$ di-



Sl. 119

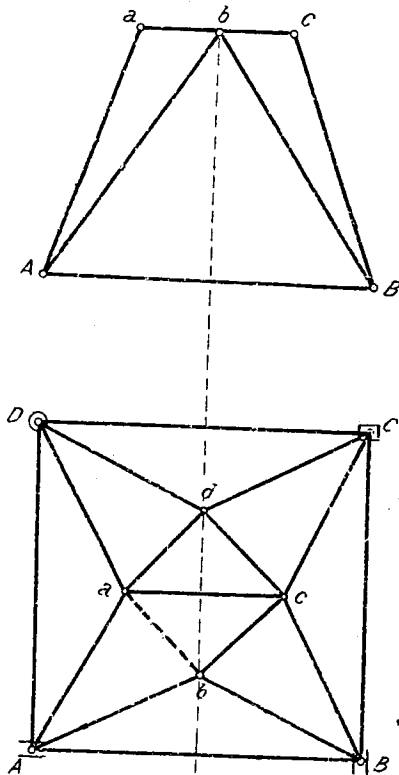
jagonala. Površina kubeta sastoji se iz 12 trouglova u raznim ravnima. Potreban broj ležišnih štapova je $3k = 12$, oni su raspoređeni na 4 linear- na i 4 planarna ležišta. Iz ovog sistema dobijamo prostoji, kada tri trouglasta polja izmedju dva planarna ležišta dovedemo u jednu ravan što postizavamo tako da oba štapa ležišnog okvira izmedju dva planarna ležišta dovedemo u istu pravu.

Tako smo dobili kube na sl. 120 koje ima isto to-



Sl. 120

liko ravni koliko i pokriveni poligon ima strana. Gornji i donji okvir imaju isti broj uglova kao i kod Švedlerovog kubeta. Bitna je razlika u tome što u svakom trapeznom polju ima ovo kube dve dijagonale mesto jedne; novi čvorovi koji tom podelom postaju, poduprti su linearnim ležištima a čvorovi nad temenima pokrivenog prostora leže na planarnim ležištima.



Sl. 116

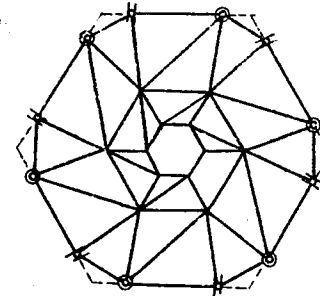
B na linearna ležišta, u C na nepomično a u D na planarno ležište, što čini ukupno 8 ležišnih štapova. Time je donji okvir nepomerljiv. Kada u gornjem okviru ne bi bilo dijagonale ac, mogli bi se čvorovi „a“ i „c“ pomerati na više a čvorovi „b“ i „d“ na niže a da se pri tom dužine strana kvadrata abcd ne menjaju. Mreža bi bila labilna. Moramo dakle uvrstiti u mrežu štap ac i ukloniti na pr stranu ab okvira. Sada je očevidno mreža stabilna, jer pošto su čvorovi „a“, „c“ i „d“ po sistemu mreže nepomično vezani za donji okvir, vezan je i čvor „b“ pomoću tri štapa

koji ne leže u istoj ravni, za mrežu. Broj sistemnih štapova je $s = 16$, $r = 8$, $n = 8$, $s + r = 3n$. Umesto štapa ab mogli smo ukloniti jedan ležišni štap. Na ovom primeru dolazimo do važnog saznanja da relacija $S = 3n$ nije dovoljan uslov za stabilnost mrežastog kubeta, ona zavisi i od rasporeda štapova. Gore opisana pomerljivost se može postojati kod okvira sa neparnim brojem strana.

6. CIMERMANOVO KUBE. Bitno obeležje ovog kubeta je da donji okvir jednog sprata ima dvaputa veći broj strana nego li gornji. Površina kubeta sastoji se usled toga iz troglova i trapeza; ovi poslednji podeljeni su dijagonalama u

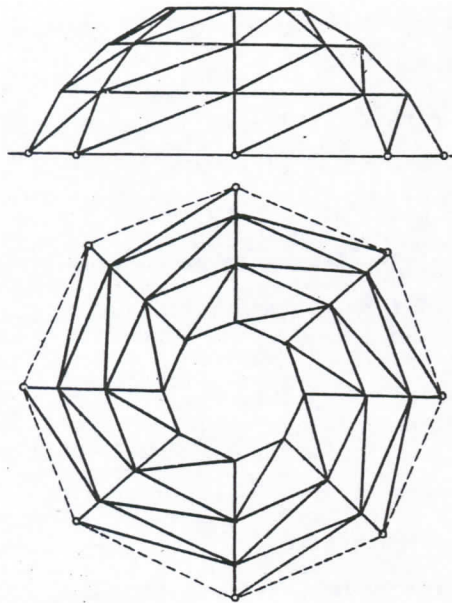
dva trougla.

Stabilnost kubeta zahteva, ako je gornji okvir poligon od k strana, podupiranje sa $3k$ ležišna štapa, ili sa k linearna i k planarna ležišta. Sl. 117 prikazuje dvospratno kube u osnovi. Donji sprat je po Cimermanu izveden nad pravilnim šestougлом, ležišni okvir ima dakle $2k = 12$ strana, 6 linearna i 6 planarna ležišta. Gornji sprat je Švedlerovo kube.



Sl. 117

Cimerman je svoj sistem prvi put izveo pri projektovanju krova za novu zgradu parlamenta (Reichstag) u Berlinu. Osnova je pravougaona sa 16×10 m. Obimni zidovi bili su već izvedeni kada se pomišljalo na kube, i bili su slabi da prime veliki horizontalni pritisak vetra na kube i na zidove. Krovna konstrukcija morala je stoga dobiti takva ležišta koja će horizontalni pritisak vetra na kube prenositi na zidove samo u njihovom podužnom pravcu. Ležišta su dakle smela biti samo planarna i linearna, a ova poslednja pomerljiva poprečno na obimne zidove. Sem toga linearna ležišta nisu smela ležati u uglovima. Cimerman je ove uslove ispunio svojom konstrukcijom prikazanoj na sl. 118. Ležišni okvir je osmougao, broj ležišnih štapova $8 + 4 = 12$. Kube bi se moglo položiti na 4 planarna i 4 linearna ležišta analogo kubetu na sl. 117. Postavljeni uslovi bili bi zadovoljeni, linearna ležišta ne bi bila u uglovima, ali ni u sredini obimnih zidova. Ovaj poslednji zahtev zadovoljio je Cimerman tako što je prenašanje vertikalnih i horizontalnih sila na zidove razdvojio: verti-



Sl. 114

go potpornim zidovima.

Kube sa osnovom od „ k “ strana i sa „ e “ sprata ima $n = k(e + 1)$ čvorova i $3ek = s$ sistemnih štapova ne uračunavajući štapove ležišnog okvira. Broj potrebnih ležišnih štapova je dakle $3k(e + 1) - 3ek = 3k$; na svaki čvor otpadaju po 3 ležišna štapa t. j. kube leži na „ k “ nepomična ležišta.

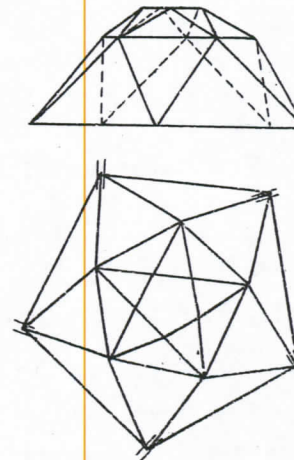
Müller-Breslau je prvi postavio kube na „ k “ linearna ležišta (1892 g). Sada su štapovi ležišnog okvira sistemni štapovi, njihov broj je $s = 3ek + k$, dakle broj potrebnih ležišnih štapova je $r = 3k(e + 1) - 3ek - k = 2k$; kube je stabilno položeno ka „ k “ linearna ležišta.

Kao kod cilindričnog pletera tako i kod Švedlerovog kubeta imaju pokretna ležišta to preimućstvo nad nepomičnim ležištima, što potporni zidovi ne trpe horizontalni pritisak.

njega je obično nasadjena „lanterna“ koju možemo smatrati sekundarnom konstrukcijom.

Švedler je kube podupro u svakom ležišnom čvoru sa po jednim nepomičnim ležištem. Rastojanja izmedju ležišta su dakle nepromenljiva tako da su štapovi ležišnog okvira (na sl. isprekidano ucrtani) izlišni. Oni ne pripadaju pleteru, nego

5. MREŽASTA KUBETA. Ova se razlikuju od Švedlerovih bitno u tome što okviri koji ograničavaju jedan sprat, nemaju isti položaj nego su jedan prema drugom obrnuti za izvestan ugao, obično tako da temena gornjeg okvira leže iznad sredine strana donjeg okvira. Prema tome mrežasto kube (Netzwerk-Kuppel) nema štapova u pravcima meridijana nego samo okvirne i dijagonalne štapove. Površina kubeta sastoji se iz samih trouglova koji svi leže u raznim ravninama. Razlika izmedju Švedlerovog i mrežastog kubeta je analogna razlici izmedju ravnog paralelnog nosača sa vertikalama i bez vertikalama. Sl. 115 prikazuje u osnovi i vertikalnoj projekciji



Sl. 115

mrežasto kube sa petougonom osnovom i sa dva sprata. Kube je otvoreno, potrebna su $2 \times 5 = 10$ ležišna štapa ili pod svaki ležišni čvor po jedno linearno pokretno ležište.

Kao i kod Švedlerovog kubeta mogu i ovde sva ležišta biti nepomična, ali onda ležišni okvir otpada.

Statičko ispitivanje pokazuje da mrežasto kube nad pravilnim poligonom sa parnim brojem strana nije stabilno. Kod velikog broja strana je u statičkom pogledu razlika izmedju kubeta sa parnim i neparnim brojem strana neznatna, stoga treba izbegavati ne samo paran broj strana nego i veliki broj strana ležišnog okvira.

Sl. 116 prikazuje jednospratno mrežasto kube nad kvadratnom osnovom. Donji okvir položen je u čvorovima A i

laju $(k - 1)$ ležišna štapa. Ukupan broj ležišnih štapova je $r = 2(e - 1) + 4(k - 1)$

Ukupan broj štapova je $s + r = 3(ek - e + k - 1) = 3(e + 1)(k - 1) = 3n$; time je dokazano da je pleterni krov na sl. 111c) statički odredjen i stabilan.

O stabilnosti nosača možemo se uveriti posmatrajući stabilnost svakog pojedinog čvora.

Čvor B je očevidno nepomičan jer je za oslonce (za Zemlju) vezan pomoću tri štapa 1, 2 i 3 koji ne leže u istoj ravni. Idući redom nalazimo prvo da je prvi okvir kruto vezan za oslonce i tako redom svi čvorovi pletera. Najzad uvidjamo da za krutu vezu čvora A moramo uvrstiti okvirni štap a.

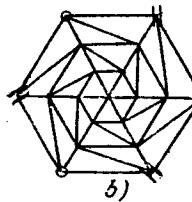
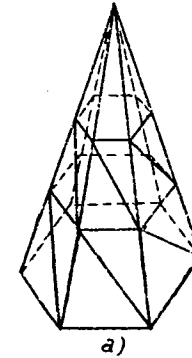
Podupiranje po sl. c) ima tu nezgodu što okviri vrše na obimne zidove horizontalan pritisak kao i lučni nosači, što je kod ležišta na sl. b) nije slučaj.

Pleterni nosači su ekonomični samo ako dužina pokrivenog pravougaonika ne premaša mnogo njegovu širinu. Najpovoljniji odnos je 1 : 1,3 do 1 : 1,6.

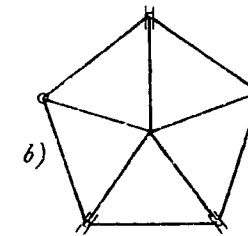
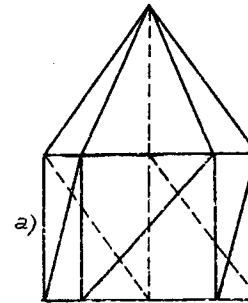
3. PIRAMIDNI PLETER. Piramida može biti potpuna (sa vrhom) ili zarubljena. Prvu možemo smatrati zatvorenim kubetom, te prema tome potrebno je za njeno stabilno podupiranje po čl. 57 $(k + 3)$ ležišna štapa ako je osnova k -strani poligon.

Piramidni pleter na sl. 112 je šestostran, potrebuje 9 ležišna štapa, koja su raspoređena na tri linearna i tri planarna ležišta (sl. b).

Kada uklonimo vrh, dobijamo zarubljenu piramidu. Kako svi okviri imaju isti broj strana, potrebno je za stabil-



Sl. 112



Sl. 113

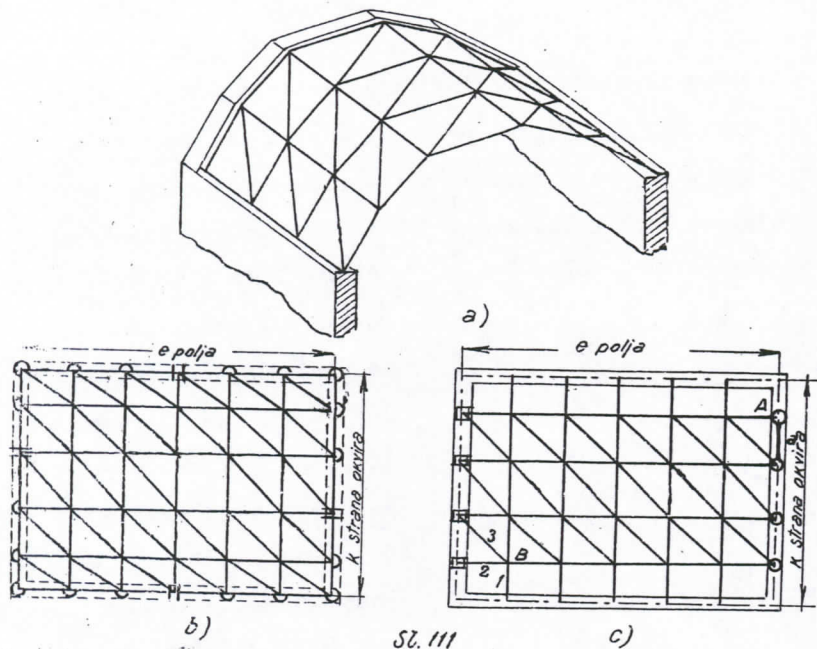
no podupiranje zarubljene (dole i gore otvorene) piramide 2 k ležišna štapa. Za šestostranu piramidu potrebno je dakle 12 ležišnih štapova ili 6 linearnih ležišta raspoređenih kao u sl. 110 b).

Petougaona prizma sa nasadjenom piramidom ima $s = 25$ sistemnih štapova. Za stabilno podupiranje potrebno je $5 + 3 = 8$ ležišnih štapova. Broj čvorova je $n = 11, 25 + 8 = 33 = S$, dakle je $S = 3n$. Ležišni štapi su raspoređeni na dva planarna i tri linearna ležišta. Kako je broj čvorova u okviru neparan mogu se pravci pomeranja linearnih ležišta seći u središtu petougla.

4. ŠVEDLEROVO KUBE Najstarija i do danas najvažnija pleterna konstrukcija je pleterno kube koje je bavarski inženjer Schwedler prvi konstruirao i sračunao 1866.

Osnova kubeta je pravilan poligon sa većim brojem strana. Čvorovi leže na obrtnoj površini sa proizvoljnim meridijanom. Švedler smatra kubičnu parabolu kao meridijan sa kojim je utrošak materijala najmanji. No obično je meridijan kružni luk. Meridijani i paralelni krugovi

dele površinu kubeta u trapezna polja koja su dijagonalama podeljena u dva trougla (sl. 114). Kube je gore otvoreno, i na



njivo bio stabilan ali i statički neodređen. Pleter po sebi je labilan jer je sa sviju strana otvoren. Broj njegovih čvorova je $n = (k + 1)(e + 1) = ek + e + k + 1$. Štapova ima okvirnih $k(e + 1)$, podužnih $e(k + 1)$ i dijagonalnih ke , svega $s = 3ek + e + k$. Da bi pleter bio kinematički određen morao bi imati $3n - 6 = 3(ek + e + k) - 3$ štapova. Nedostaju mu dakle za statičku određenost $2(e + k) - 3$ štapa. Kada još ovom broju dodamo šest ležišnih štapova za stabilno podupiranje statički određenog pletera, nalazimo potreban broj $2(e + k) + 3$ ležišnih štapova za otvoreni labilni pleter. Na svakoj podužnoj strani imamo po $e + 1$, a na čeonim zidovima po $k - 1$ dakle svega $2(e + k) = r$ ležišnih čvorova, tako da je broj potrebnih ležišnih štapova $(r + 3)$. Do ovog rezultata došli bismo neposredno, smatrajući cilindrični pleter kubetom gore zatvorenim sa ležišnim okvirom od „r“

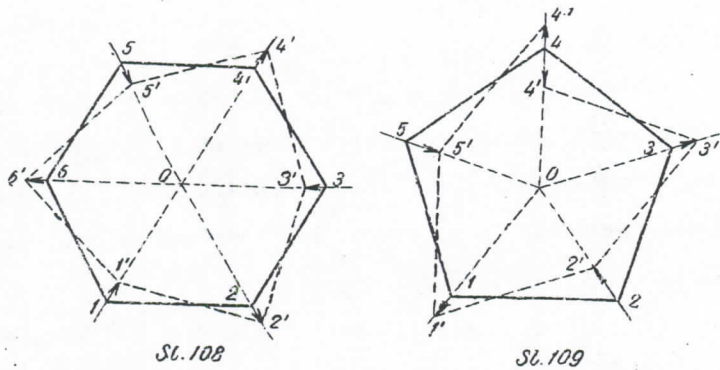
strana čl 57.

Na primeru sl. 111 je $r = 22$, potrebno je dakle 25 štapova. Pleter je poduprt sa četiri linearna i 18 planarna ležišta koja zamenjuju $2 \times 4 + 18 = 26$ ležišna štapa, dakle za jedan više nego šta je potrebno. Radi održavanja statičke određenosti uklonjena je jedna dijagonala.

Prof. A. Föppl koji je prvi primenio cilindrični pleter kao krovnu konstrukciju, (Tonnenflechtwerk-Dach) učinio je pleter statički određenim time što je dijagonale u krajnjim donjim ravnima prizme uklonio, čvorove na jednom čeonom zidu stavio na nepomična ležišta a čvorove drugog čeonog zida na linearna ležišta, pokretna u pravcu osovine prizme. Međutim lako ćemo se uveriti da je tako poduprti pleter još uvek statički neodređen. Da bismo ga učinili statički određenim moramo čvorove na drugom čeonom zidu položiti na planarna ležišta. O ovome uveriće nas kontrola relacije $s + r = 3n$ gde je „s“ broj sistemnih, „r“ broj ležišnih štapova a „n“ broj slobodnih čvorova. Uočimo pleterni krov sa „e“ polja i „k“ strana okvira kao u prvom slučaju sl. 111c. Broj slobodnih čvorova je $n = (e + 1)(k - 1)$.

Podužnih (ivičnih) štapova ima $e(k + 1)$, okvirnih štapova ima $(e - 1)(k - 2) + 1$, gde je jedan okvirni štap na čeonom zidu (na sl. sa „a“ označen) potreban za kruto vezivanje čvora A, i dijagonala $e(k - 2)$. Svega ima $s = 3ek - 5e - k + 3$ sistemnih štapova.

Okvirni štapovi koji se upiru u horizontalne zidove, imaju ulogu planarnih ležišta, njihov je broj $2(e - 1)$. $(k - 1)$ nepokretnih ležišta na levom čeonom zidu predstavljaju $(k - 1)3$ ležišna štapa, a $(k - 1)$ planarna ležišta pretstav-



da je pomeranje temena nemoguće, dakle je petougao sa radijalno vodjenim temenima stabilna figura.

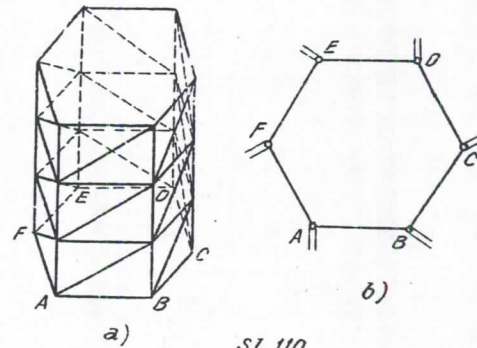
Ali i ležišni obruč sa parnim brojem strana biće stabilan ako se pravci pomeranja ne saku u jednoj tački, na pr. ako je pomeranje temena 1 sl 108 upravno na stranu 1-2, pomeranje temena 2 upravno na stranu 2-3 i t.d. Takav raspored linearno pokretnih ležišta dao je prof Müller - Breslau 1892 g.

58. RAZNI TIPOVI PLETERNIM NOSAČA - Prema ciljevima kojima ovi nosači služe (mostovi, krovovi, omotači gasnih rezervoara, dizalice i t.d.) kao i prema rasporedu štapova u pleteru broj oblika pleternih nosača je vrlo velik. Mi ćemo samo nekoliko tipičnih primera rasmatrati.

1. Cilindrični pleter. Svi čvorovi leže na izvodnicama kružnog cilindra Pleter ima oblik prizme upisane u cilindar. Ravni između ivica prizme ispunjene su štapovima upravnim na osovinu cilindra i čine obruče pletera, a obruči su spojeni dijagonalnim štapovima. Primer za prizmatični pleter imali smo u mostu na sl.106. Kad u krajnim okvirima uvrstimo dijagonale imamo zatvoren pleter koji zadovoljava uslove $s = 3n - 6$, t.j. predstavlja statički određen sistem

koji potrebuje za stabilno podupiranje šest ležišnih štapova.

Prizmatični pleter primenjuje se i sa vertikalnom osovinom kao skela koja omotava cilindrični gazometar, osigurava njegovo vertikalno kretanje i prenosi horizontalni pritisak vetra na temelje (sl.110). Prizma mora biti na obim



bazama otvorena i kako ima šest strana, nedostaju joj $2 \times 3 = 6$ sistemnih štapova. Za njeno stabilno podupiranje potrebuje $6 + 6 = 12$ ležišnih štapova ili šest linearno pomerljivih ležišta. Na sl.

110 b) ucrtani su pravci mogućih pomeranja dvostrukom linijom. Čvor A može se pomerati upravno na AB i analogo i ostali čvorovi ležišnog okvira.

Već je ranije napomenuto da se prizmatični pleter od „n“ strana može smatrati sastavljenim od „n“ paralelnih ravnih nosača. Napadne sile jedne ivice razložimo u obe susedne ravni i odredjujemo sile u štapovima svakog ravnog nosača. Sile u ivičnim štapovima saberemo algebarski.

2. CILINDRIČNI PLETER KAO KROVNA KONSTRUKCIJA Kada cilindrični pleter sa otvorenim krajnim okvirima presečemo duž dvaju izvodnica i jednu polovinu postavimo ivicama na dva horizontalna zida, a krajne okvire na dva čelona zida, dobijamo pleternu krovnu konstrukciju. Na sl. 111 a) prikazana je polovina pleternog krova u kosoj projekciji, u sl. 111 b) u osnovi. Broj strana otvorenog okvira je $k = 5$, broj polja je $e = 6$. U krutoj vezi sa obimnim zidovima nosač bi nesum-

otvorena. Ako je samo donja ravan otvorena zovemo pleter zatvorenim, a ako je pak i gornja ravan otvorena, imamo otvoreni pleter.

Iz statike ravne rešetke znamo da ravan poligon od n strana ima $(n - 3)$ stepena pomerljivosti, dakle da postaje nepomerljiv pošto uvrstimo $(n - 3)$ dijagonala.

Otvorenom pleteru koji ima donji obruč sa „ n “ strana i gornji obruč sa „ m “ strana nedostaju dakle $n + m - 6$ štapova za kinematičku i statičku odredjenost. Za toliko štapova imamo da povećamo broj ležišnih štapova pa da od labilnog pletera načinimo stabilni pleterni nosač. Možemo dakle iskazati stav:

Prostorni sistem omedjen donjim obručem sa „ n “ čvorova, gornjim obručem sa „ m “ čvorova u kojih je površina između obručeva sastavljena iz samih trouglova, sam po sebi nije stabilan nego postaje tek to usled veze sa Zemljinom korom, a za njegovo podupiranje potrebuje $(n + m)$ ležišnih štapova. Ako sva „ n “ čvora donjeg obruča stavimo na nepokretna ležišta, potrebna su „ m “ linearna i $(n - m)$ planarna ležišta. Jer $2m + (n - m) = (n + m)$.

Zatvoreni pleter sa donjim obručem od „ n “ strana potrebuje $(n - 3)$ štapova da postane zatvoren, statički određen pleter, potrebuje dakle $n - 3 + 6 = (n + 3)$ ležišnih štapova da bi postao stabilan prostorni nosač. Ako stavimo sva „ n “ čvora na ležišta, potrebujemo tri linearna i $(n - 3)$ planarna ležišta.

Svako zatvoreno kube možemo smatrati otvorenim čiji gornji obruč ima tri strane ($m = 3$). Sa tom primedbom izlazi poslednji stav neposredno iz prvog.

Broj ležišnih štapova možemo u opšte povećati preko broja $(n + m)$, ako uklonimo isti broj sistemnih štapova. Ako na pr. uklonimo iz pletera $(n - m)$ štapova i zamenimo ih sa toliko ležišnih štapova, biće broj štapova $m + n + n - m = 2n$, moći ćemo dakle svaki čvor ležišnog obruča podupreti sa linearnim ležištem.

Ležišni obruč rešetkastog kubeta biće redovno pravilan poligon sa „ n “ strana.

Valjci linearnih ležišta leže na horizontalnoj ploči, mogućna pomeranja svih „ n “ čvorova su dakle horizontalna. Njihove pravce možemo orijentacijom valjaka proizvoljno birati. Pri tome moramo imati na umu ovu činjenicu: Pravilan poligon čija su temena prinudjena da se kreću u pravcima koji se svi seku u središtu poligona, je stabilna, nepomerljiva figura ako je broj strana neparan broj, a labilna figura, i to konačne pomerljivosti, ako je broj strana paran broj.

O ovom stavu uverićemo se očigledno kada konstruišemo deformisani poligon kome su temena pomerena u radijalnim pravcima, a dužine strana ostale nepromenjene.

Pravilni šestougao na sl.108 ostaje posle te deformacije zatvoren poligon, što znači da je deformacija mogućna. Pomeranja temena su naizmenice upravljena prema središtu O i od središta. Pozitivna i negativna pomeranja nisu iste veličine ali su sva pozitivna kao i sva negativna pomeranja medju sobom jednaka što iz pravilnosti poligona izlazi.

Kod pravilnog petougla (sl.109) takvu deformaciju nije moguće izvesti a da se poligon u jednom temenu (na sl. u temenu 4) ne otvori, t.j. veza u tom temenu ne raskine. Kako je to protivno pretpostavci zatvorenog poligona, vidimo

Ijine kore, možemo svaki prostorni rešetkasti nosač shvatiti kao sistem sastavljen iz rešetke i Zemlje kao krutog tela. U tako shvaćenom sistemu nema više ležišnih uslova nego samo štapova veze, i time je statičko ispitivanje uprošteno.

56. POLIEDRIČKE REŠETKE ILI PLETERI. (FLECHTWERK) -

Tetraedrične rešetke ispunjavaju izvestan deo onoga prostora koji pokrivaju, smanjuju time koristan prostor. U mesto tih rešetaka primenjuje se stoga mnogo češće pletorni nosači. Pletrom zovemo prostornu rešetku čiji svi čvorovi i štapovi leže na jednoj površini koja izvestan deo prostora potpuno omotava. Pletorni nosač je prema tome pletor koji je u krutoj vezi sa Zemljom i sa njome potpuno zatvara izvestan deo prostora.

Prema definiciji pletera njegovi čvorovi su rogljevi, štapovi su ivice, a ravni omedjene štapovima su ravne površine jednog poliedra.

Iz stereometrije nam je poznat Ajler-ov stav o relaciji izmedju broja rogljeva „n“, broja površina „f“ i broja ivica „s“ jednog zatvorenog poliedra. Stav glasi

$$n + f = s + 2 \quad \dots \quad a)$$

Za statički odredjenu rešetku našli smo relaciju

$$s = 3 \cdot n - 6 \quad \dots \quad b)$$

Kada iz ove dve relacije eliminišemo broj rogljeva (čvorova) „n“, dobijamo

$$f = \frac{2}{3} s \quad \dots \quad c)$$

Kako su „f“ i „s“ celi brojevi, mora broj štapova biti deljiv sa tri, a broj površina deljiv sa dva.

Ako su sve površine poliedra trougli, što je najčešći slučaj, onda je relacija c) uvek zadovoljena; jer broj

strana svih trouglova je $3f$, ali kako je pri tom svaka ivica strana dvaju susednih trouglova, to je broj ivica $\frac{3f}{2} = s$, što je u relaciji c) iskazano. Prema tome možemo postaviti stav:

Svaki omotač sastavljen iz trouglova koji potpuno obuhvata jednostavan prostor prestavlja, kada mu ivice shvatimo štapovima, a rogljeve čvorovima, kinematički i statički odredjenu prostornu rešetku; takvu rešetku zovemo pletrom.

Pri tome ne moraju svi trougli omotača ležati u raznim ravnima. Ali trougli koji se u jednom roglju sastaju ne smeju ležati u istoj ravni jer bi tada štapovi koji se u tom roglju (čvoru) sastaju bili pomerljivi u pravcu upravnom na ravan i sile u tim štapovima bile bi beskonačno velike. Taj je slučaj analogan luku sa tri zglavka kada ovi leže u istoj pravoj.

57. PLETERNI NOSAČI I NJIHOVA LEŽIŠTA. Najvažniji i najčešći oblici pleternih nosača su kubeta (kupole). Omotač na kome leže čvorovi, su obrtne površine sa vertikalnom oscvinom (lopta, obrtni paraboloid). Izvesni štapovi rešetke obrazuju horizontalne obruče (prstenove) a čvorove obručeva spajaju štapovi ispune. Obručni štapovi imaju analogu ulogu kao pojasni štapovi ravne rešetke. Neki štapovi ispune mogu ležati u meridijanima omotača (analogo vertikalama ravne rešetke), a to pretpostavlja da čvorovi svih obručeva leže u istim meridijanima. Obručevi mogu imati i različiti broj strana i tada su svi štapovi kosi prema meridijanim ravnima analogo ravnoj rešetki bez vertikala.

Pletor kubeta sam po sebi je labilan sistem jer je njegova donja ravan uvek otvorena a često je i gornja ravan

$$= 3 + 3(n - 3) = 3n - 6.$$

Rešetka koja ima $s = 3n - 6$ broj štapova ujedno je i statički određena po unutarnjim silama. Za svaki čvor imamo po tri uslova ravnoteže: $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ i $\sum Z = 0$, svega dakle $3n$ jednačina u koje ulaze unutarnje i spoljne sile. Ove jednačine nisu medju sobom nezavisne jer one sadrže i šest uslova koje moraju spoljne sile zadovoljiti. Za određivanje sila u štapovima ostaju dakle $3n - 6$ jednačina, koliki je i broj štapova.

Kada dve rešetke, za koje znamo da su stabilne t.j. imaju $s_1 = 3n_1 - 6$ i $s_2 = 3n_2 - 6$ štapova spojimo pomoću šest štapova koji ne pripadaju jednom nultom sistemu, dobijamo takodje statički određenu rešetku sa $n = n_1 + n_2$ čvora i $s = s_1 + s_2 + 6$ štapova, jer i za nju postoji relacija $s = 3n - 6$.

Rešetka obrazovana na prvi način sastoji se iz niza tetraedara analogo ravnoj rešetki sastavljenoj iz niza trouglova. Ove tetraedrične rešetke su kao što iz njihovog obrazovanja izlazi uvek nepromenljivi kruti sistemi. Što važi i za rešetke složene iz dve ili više tetraedrične rešetke.

Iz tetraedrične rešetke dobijamo rešetku drugog sastava izmenom štapova. Ako jedan štap uklonimo, postaje rešetka prinudni mehanizam. Ako u njemu spojimo ma koja dva čvora koji bi u mehanizmu morali menjati svoje medjusobno rastojanje, jednim drugim štapom, dobijamo opet kinematički i statički određeni sistem drugog sastava.

Prosečan broj štapova koji se u jednom čvoru sa-
staju je

$$\frac{2s}{n} = 6 - \frac{12}{n}$$

dakle uvek manji od šest. Kod rešetaka običnog oblika sa velikim brojem čvorova biće veći deo čvorova sa šest štapova dok će neki čvorovi imati manje od šest štapova. Po sebi se razume da se ni u jednom čvoru ne smeju sastati manje od tri štapa i oni ne smeju ležati u istoj ravni

55. PROSTORNI REŠETKASTI NOSAČ I NJEGOVA LEŽIŠTA.

Kada prostornu rešetku spojimo kruto sa Zemljom, odnosno sa potpornim zidovima, dobijamo rešetkasti nosač. Za to spajanje potrebno je kao što smo u čl.53 saznali, šest ležišnih štapova. Statički određena rešetka ima $s = 3n - 6$ štapova. Ako zbir sistemnih i ležišnih štapova nazovemo $S = s + 6$, onda za statički određeni rešetkasti nosač postoji relacija $S = 3n$.

Ležišni štapovi moraju biti raspoređeni najmanje na tri čvora nosača, tako da je jedan čvor vezan za Zemlju pomoću tri štapa (nepomičan čvor) drugi sa dva štapa (čvor pokretan na pravoj) a treći sa jednim štapom (čvor pokretan u ravni).

Povećavanjem broja ležišnih štapova (t.j.uslova veze) preko šest u stanju smo rešetku koja je labilna po sebi, načiniti stabilnim nosačem. Ako rešetki nedostaju „t“ štapova za njenu kinematičku određenost, dakle je $s = 3n - 6 - t$, moći ćemo od nje načiniti stabilan t.j. statički određeni nosač, ako je vežemo sa Zemljom pomoću $6 + t = p$ štapova. Ukupan broj štapova biće opet $S = s + p = 3n$, dakle koliko je i uslova ravnoteže.

Zamenjujući svako linearno pokretno ležište sa dva štapa, svako planarno pokretno ležište sa jednim štapom, a smatrajući svako nepomično ležište kao tačku nepomične Zem-

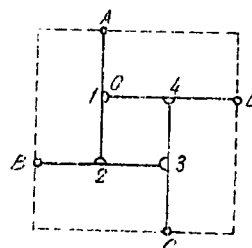
mo, kada bi se više od tri štapa sekla u jednoj tački (ili bila paralelna) ili kada bi više od tri štapa ležala u jednoj ravni.

Prosta greda na sl. 106 poduprta je redovno sa četiri ležišta. Tačka A vezana je sa Zemljom pomoću tri štapa koji ne leže u istoj ravni. Oni zastupaju nepomično ležište (nepomičan sferični zglavak). U tački A su tri komponentalne otpora X_1 , Y_1 i Z_1 nepoznata. Tačka B je poduprta sa dva štapa koja leže u vertikalnoj ravni upravnoj na ravan nosača $ABB'A'$. Donji zglavci štapa 4 i 5 leže na horizontali b-b. Tačka B može se pomerati u podužnom (x) pravcu mosta, štapi 4 i 5 zastupaju pokretno ležište (sferični zglavak na cilindričnim valjcima). U tački B su dva komponentalna otpora Y_2 i Z_2 nepoznata. Najзад tačke C i D poduprte su sa po jednim vertikalnim štapom, one se mogu u svima pravcima horizontalne ravni pomerati. U tačkama C i D može se samo jedna komponenta otpora pojaviti Z_3 odnosno Z_4 . Kako se tačka C može kretati u ravni upravnoj na ležišni štap, zovemo takvo ležište planarnim; konstruktivno se izvodi kao čelična lopta koja leži na horizontalnoj ploči usadjenoj u potporni zid, a podupire sličnu ploču učvršćenu za nosač.

Na primeru grede sl. 106 vidimo da je za stabilno podupiranje potrebno 7 štapa imamo dakle sedam komponentalnih otpora; za njihovo određivanje nedostaje nam jedna jednačina. Podupiranje nosača je dakle jedanput statički neodredljivo. Praktično vrši se podupiranje oba nosača sa po jednim nepomičnim i jednim cilindričnim ležištem tako da imamo deset komponentalnih otpora, dakle četiri puta statički neodredljiv sistem.

Da je pri polaganju nosača na četiri oslonca određivanje otpora statički neodredljivo, izlazi već iz činjenice da silu P_z koja napada kruto telo možemo jednoznačno razložiti u tri komponente Z_1 , Z_2 , Z_3 jer nam stoje tri jednačine ekvivalencije na raspoloženju.

Drugi je slučaj ako sila napada sistem međusobno povezanih tela (štapa) kao što će ovaj primer pokazati. Na sl. 107 prikazan je sistem od četiri grede jednake dužine koje su međusobom povezane zglavcima



Sl. 107

1-4 a svojim drugim krajevima A, B, C i D naležu na obimne zidove. U tački O leži teret P, treba da nadujemo otpore oba četiri ležišta. Za svaku gredu imamo po dva uslova ravnoteže, svega

dakle osam jednačina, pomoću kojih na-

lazimo četiri otpora na obimu i četiri pritiska $D_1 \dots D_4$ na grede. Zbog simetrije opterećenja je $A = D_2 = \frac{P - D_1}{2}$, $B = D_3 = \frac{P - D_1}{4}$, $C = D_4 = \frac{P - D_1}{8}$, a za četvrtu gredu $D = D_1$. Iz uslova $D_1 + D - D_4 = 0$ nalazimo $D_1 = \frac{P}{17}$ i dalje

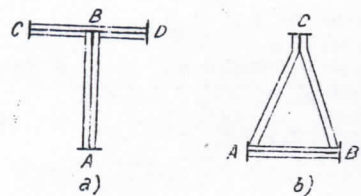
$$A = \frac{8P}{17}, \quad B = \frac{4P}{17}, \quad C = \frac{2P}{17}, \quad D = \frac{P}{17}.$$

Sila P je time jednoznačno razložena na četiri paralelne komponente.

54. KINEMATIČKA I STATIČKA ODREĐJENOST PROSTORNE

REŠETKE - Neka prostorna rešetka sastoji se iz „s“ štapa koji se sastaju u „n“ čvorova. Polazeći od trougla 1, 2, 3 kao krute figure moramo svaki čvor koji leži izvan ravni trougla vezati sa tri štapa 14, 24 i 34 za osnovni trougao da bi bio kruto vezan; treba dakle za nepomerljivost rešetke da je s =

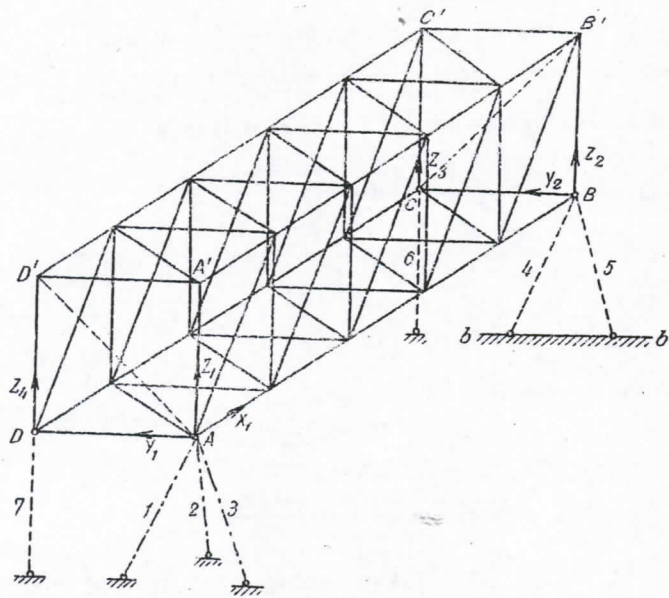
kalnom pravcu, pritisak vetra upravno na ravan nosača. Ravan nosač ne može stoga biti samostalan nego samo deo prostornog nosača. U sl.105 a sastoji se nosač iz dva ravna nosača AB i



SL. 105

CD od kojih prvi prima vertikalne, drugi horizontalne napadne sile. U sl.105 b) sastavljen je nosač iz tri ravna nosača AB, AC i BC, dakle je u stanju da prenese na potporne

zidove sile proizvoljnog pravca. Najčešći slučaj prostornog nosača sastavljenog iz ravnih nosača je gvozdeni ili drveni most. Radi smeštanja kolovoza sastoji se najmanje iz dva vertikalna glavna nosača $ABB'A'$ i $CDD'C'$ (sl.106) koji su me-



SL. 106

đjusobom spojeni sa dva (ili jednim) horizontalna nosača ABCD i $A'B'C'D'$, takozvana sprega protiv vetra. Radi preno-

sa horizontalnih pritisaka gornjeg sprega na ležišta moraju krajni okviri mosta dobiti dijagonale AD' odnosno CB' , ili, ako je kolovoz na donjem pojasu, moraju okviri biti izvedeni kruti.

Statičko ispitivanje takvih nosača svodi se na ispitivanje ravnih nosača. Napadne sile u čvorovima razložemo u komponente koje leže u ravnima nosača koji se u dotičnom pojasu sastaju i određujemo sile u štapovima ravnih nosača.

Nadjene sile u štapovima zajedničkih pojaseva sabiramo algebarski. Vidi čl. 58.1.

Drugu grupu prostornih nosača čine oni koji se ne mogu razložiti u ravne nosače. Ovamo spadaju masivna i rešetkasta kubeta, tornjevi, vodjice gazometara i t.d. to su prostorni nosači u užem smislu reči.

53. LEŽIŠTA I LEŽIŠNI ŠTAPOVI. Zadatak je nosača da sile koje prima, prenese na potporne zidove t.j. na krutu Zemljinu koru.¹⁾ Taj će prenos biti za svaki mogući sistem sila jednoznačno određen ako nosač vezemo sa Zemljinom korom pomoću šest štapa koji su svojim krajevima vezani za nosač i Zemlju sferičnim zglavcima. Ako je taj broj ovih "ležišnih štapova" manji od šest, nosač će biti stabilan samo za izvestan specijalan sistem sila, ako je pak veći od šest, sile u štapovima su statički neodredljivi.

Ležišni štapovi mogu biti proizvoljno raspoređeni samo nesme biti mogućan takav položaj da jedna prava seče sve šest prave osovine štapova. To bi bio slučaj kao što zna-

¹⁾ Kada govorimo o "krutoj" Zemljinoj kori u mesto o "čvrstoj" kori činimo pretpostavku kojoj se njeno prirodno stanje gde više, gde manje približuje.

Silu P razložimo u dve paralelne komponente P_A i P_E , a silu Q u komponente Q_A i Q_E . Rezultanta $\vec{R}_A = \vec{P}_A + \vec{Q}_A$ prolazi kroz tačku A , a sile P_E i Q_E seku se u tački C i slažu se u rezultantu $\vec{R}_E = \vec{P}_E + \vec{Q}_E$. Razlaganje i slaganje sila izvedeno je u sl.103b) u ortogonalnoj projekciji. Novi krst sila nije ortogonalan, najkraće rastojanje sila R_A i R_E je $AN = l$ i stoji upravno na ravan ε kroz presek D obih sila.

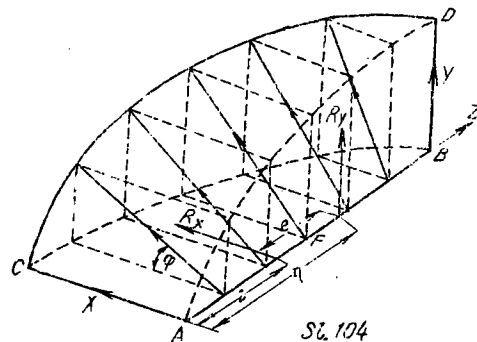
Momenti u pogledu z-osovine P_a i Q_b zovu se u nacuci o čvrstoći momenti torzije.

Ako su ležišta tako izvedena da se štap u ležištu A može slobodno oko svoje osovine obrtati, a da je obrtanje u ležištu B nemoguće, onda je na dužini između oba kraka „a“ i „b“ momenat torzije „P.a“ a između kraka „b“ i ležišta B , P.a - Q.b.

Dijagram momenata torzije prikazan je na sl.103c.

c) Ako su u sistemu sila a) sile upravne na z-osovinu onda je $R_z = 0$, te sistem ima samo četiri koordinate ΣX , ΣY , M_x i M_y .

Kao primer smatraćemo kontinualno opterećenje z-osovine (sl.104). Opterećenje na jedinicu dužine $\frac{dP}{dz} = p$ ne-



ka je konstantne veličine a nagib sile dP menja se proporcionalno dužini, dakle je $\varphi = cz$. Opterećenje leži na dužini $AB = l$. Uzmamo u A $\varphi = 0$, u B

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, tako da je faktor $c = \frac{\pi}{2l}$, dakle $\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{l}$. Sile dP razložemo u horizontalne dX i vertikalne komponente dY , dakle $dX = p \cdot dz \cdot \cos\varphi$ i $dY = p \cdot dz \cdot \sin\varphi$. Krajevi vektora $d\vec{P}$ obrazuju četvrtinu obrta zavojne linije CD . Projekcije AB i BC te linije su podudarne, dakle su i rezultante $\int_0^l dY = \int_0^l dX$.

$$R_y = \int_0^l dY = p \int_0^l \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{l} dz = p \frac{2l}{\pi} = R_x$$

Rastojanje η rezultante R_y od kraja A dobijamo iz momentne jednačine za tačku A :

$$\eta R_y = p \int_0^l z \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{l} dz = p \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 = \eta p \frac{2l}{\pi},$$

dakle je

$$\eta = \frac{2l}{\pi}$$

Isto tako je rastojanje ξ rezultante R_x od kraja B . Time je sistem sila dP sveden na ortogonalni krst sila (R_x , R_y) koje su iste veličine u najkraćem rastojanju

$$e = \frac{l}{\pi} (4 - \pi)$$

Centralna osovina ima nagib $\alpha = 45^\circ$, seče AB u tački F , $AF = \frac{l}{2}$, rezultanta je $R = R_x \sqrt{2} = p \frac{2l}{\pi} \sqrt{2}$, a rezultantni momenat je $M = p \frac{2l}{\pi \sqrt{2}} \cdot \frac{l}{\pi} (4 - \pi) = p l^2 \frac{4 - \pi}{\pi^2} \sqrt{2}$. Prava AB je nulta linija sistema jer ona seče obe sile krsta.

C PROSTORNIM NOSAČIMA.

52. RAVNI NOSAČI KAO SASTAVNI DELOVI PROSTORNIH.

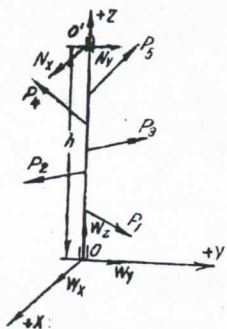
Ravnim nosačem nazvali smo konstrukciju sa jednom ravni simetrije u kojoj jedino dejstvuju napadne sile. Stvarno napadaju nosač sile raznog pravca na pr. teret kola u verti-

za koji će štap AB još biti u ravnoteži.

Sa određenim veličinama N i T nalazimo iz prva tri uslova ravnoteže W_x, W_y i W_z . Ako kraj A štapa nije učvršćen nego samo poduprt, on se neće pomeriti dokle god je $\sqrt{W_x^2 + W_y^2} < f_0 W_z$.

51. SISTEM SILA KOJE SEKU JEDNU PRAVU. Prema njihovom međusobnom položaju možemo sile u prostoru svrstiti u tri grupe. 1. Sile koje prolaze kroz jednu tačku ili centralne sile. Ako je tačka u beskonačnosti sile su paralelne. 2. Sile seku jednu pravu. Ako je prava u beskonačnosti, sile leže u paralelnim ravnima koje se seku u toj pravoj. 3. Sile seku jednu (konačnu ili beskonačnu) ravan. O prvoj i trećoj grupi bile je do sada govora, preostaje nam da se pozabavimo sa drugom grupom.

a) Kada pravu koju seku sile P_i ($i = 1 \dots n$) izaberemo za z-osovinu koordinatnog sistema (sl.101), možemo za



Sl.101

sve sile uzeti $x_i = y_i = 0$ kao koordinate napadnih tačaka; tada je $M_z = 0$, tako da ovaj sistem (P_i) ima samo pet koordinata: $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z, M_x = -\Sigma(zY)$ i $M_y = \Sigma(zX)$. Invarijanta sistema je $J = R_x M_x + R_y M_y$ sistem je ekvivalentan dinami.

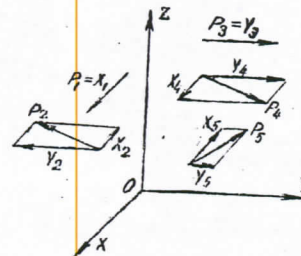
Ako sile napadaju štap koji je učvršćen u tačkama O i O' sl.101

tako da ima O otpore W_x, W_y i W_z a ležište O' otpore N_x i N_y , glase jednačine ravnoteže:

$$\begin{aligned} \Sigma X + W_x + N_x &= 0, & M_x - hN_y &= 0, \\ \Sigma Y + W_y + N_y &= 0, & M_y + hN_x &= 0. \\ \Sigma Z + W_z &= 0, \end{aligned}$$

Iz ovih jednačina određujemo pet komponente otpora.

b) Ako je prava koju sile P_i seku, beskonačno udaljena i na pr. ukrštava se pod pravim uglom sa z-osovinom, sl. 102, drugim rečima ako sve sile leže u ravnima paralelnim xy-

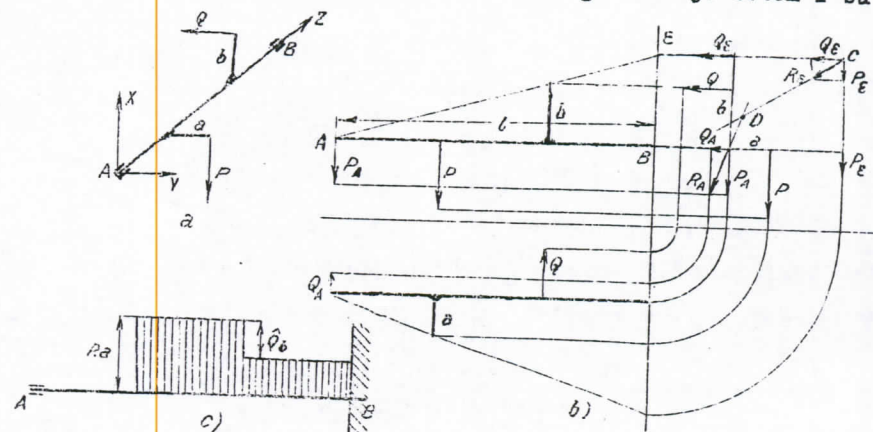


Sl. 102

ravni, onda svako $Z_i = 0$ dakle sistem (P_i) ima pet koordinata $\Sigma X, \Sigma Y, M_x, M_y$ i M_z . Invarijanta je kao i pod a) $J = R_x M_x + R_y M_y$ i sistem se svodi na pravougaoni krst sila (R_x, R_y).

Prav štap sa dva kraka dužine „a“ i „b“ kruto spojen čini telo koje napadaju sile P i Q.

(sl.103a). Sile se ukrštaju pod pravim uglom medju sobom i sa



Sl. 103

štapom. Ortogonalni krst sila (P, Q) treba transformisati u krst tako da jedna sila R_A prolazi kroz ležište A, a druga R_E leži u normalnoj ravni E položenoj kroz ležište B.

nu su koordinate dodirne tačke B : $x = r \sin \varphi$, $y = a - r \cos \varphi$, $z = h$; sa ovim nalazimo dužinu \overline{AB} :

$$\overline{AB} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + r^2 + h^2 - 2 a r \cos \varphi} = \sqrt{l^2 - 2 a r \cos \varphi}$$

kada sa l označimo dužinu \overline{AB}_m .

Težište S štapa udaljeno je od kraja A za $b = \overline{AS}$,

sa oznakom
$$\varepsilon = \frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{b}{\sqrt{l^2 - 2 a r \cos \varphi}} = f(\varphi)$$

su koordinate tačke S : $x' = \varepsilon r \sin \varphi$, $y' = \varepsilon (a - r \cos \varphi)$,

$z' = \varepsilon h$ Komponente sila su

Sila Pravac	Q	W	N	T
x	0	W_x	$N \cos \vartheta \cdot \sin \varphi$	$-T \cos \varphi$
y	0	W_y	$-N \cos \vartheta \cdot \cos \varphi$	$-T \sin \varphi$
z	-Q	W_z	$N \sin \vartheta$	0

Momentne jednačine postavicećemo preglednije kada silu Q u tački S zamenimo silom εQ koja napada tačku B, što na isto izlazi Jednačine ravnoteže glase:

$$W_x + N \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - T \cos \varphi = 0,$$

$$W_y - N \cos \vartheta \cdot \cos \varphi - T \sin \varphi = 0,$$

$$W_z - Q + N \sin \vartheta = 0,$$

$$h(N \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + T \sin \varphi) + (a - r \cos \varphi)(N \sin \vartheta - Q \varepsilon) = 0,$$

$$h(N \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - T \cos \varphi) - r \sin \varphi (N \sin \vartheta - Q \varepsilon) = 0,$$

$$(a - r \cos \varphi)(N \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - T \cos \varphi) + r \sin \varphi (N \cos \vartheta \cdot \cos \varphi - T \sin \varphi) = 0$$

Kada tri poslednje jednačine sredimo po N i T, uvedemo izraze za $\sin \vartheta$ i $\cos \vartheta$ a u njima pišemo kraće

$$\overline{CD} = \sqrt{h^2 + (a \cos \varphi - r)^2} = d = F(\varphi) \quad \text{i} \quad l^2 = a^2 + h^2 + r^2,$$

glase one:

$$\frac{N}{d} [l^2 \cos \varphi - a r (1 + \cos^2 \varphi)] + T h \sin \varphi = Q \varepsilon (a - r \cos \varphi),$$

$$\frac{N}{d} [h^2 + r^2 - a r \cos \varphi] \sin \varphi - T h \cos \varphi = -Q \varepsilon r \sin \varphi,$$

$$\frac{N}{d} a h \sin \varphi - T (a \cos \varphi - r) = 0$$

Ove tri jednačine sadrže dve nepoznate, one nisu medju sobom nezavisne. Kada na pr. iz druge i treće odredimo nepoznate N i T i unesemo ih u prvu jednačinu biće ova identično zadovoljena. Tim putem nalazimo otpore N i T koji u položaju štapa \overline{AB} , odredjenom centralnim uglom φ stoje sa datom silom Q u ravnoteži:

$$N = Q \frac{\varepsilon (a \cos \varphi - r)}{d}$$

i

$$T = Q a h \frac{\varepsilon r \sin \varphi}{d^2},$$

gde su ε i d ranije definisane funkcije ugla φ .

Sa dužinama linija u osnovi sl.100 mogu se poslednja dva obrasca pisati u geometrijskom obliku:

$$N = Q \frac{\overline{AS} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}, \quad T = Q \frac{\overline{AS} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{CD}}.$$

Kada u poslednju jednačinu ravnoteže stavimo $T = f_0 N$ dobijamo

$$a h \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \varphi}{h^2 + (a \cos \varphi - r)^2}} = f_0 (a \cos \varphi - r).$$

Rešenje ove jednačine svodi se na rešavanje jednačine četvrtog stepena ($\cos \varphi = x$):

$$x^4 - 4 \frac{r}{a} x^3 + \left(6 \frac{r^2}{a^2} + \frac{h^2}{a^2 f^2}\right) x^2 - 4 \frac{r^3}{a^4} x + \left(\frac{r^4}{a^4} - \frac{h^3}{a^2 f^2}\right) = 0.$$

Sa datim koeficijentom trenja f_0 i konstantama a, r i h daje nam ova jednačina granične vrednosti φ_0 centralnog ugla φ

Ako pak u dodirnoj tački ima otpora trenja, moćiće štap biti i u svakom drugom položaju AB ($B_0B = x$) u ravnoteži do izvesne maksimalne vrednosti x_1 .

Postavićemo uslove ravnoteže štapa na koji napadaju težina Q u tački S , otpor W u tački A , normalni otpor N u tački B i tangencijalni otpor T u pravcu prave $g - g$.

Promenljiva dužina \overline{AB} je $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + h^2 + x^2}$, i sa kraćom oznakom

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + h^2 + x^2}} = \varepsilon = f(x)$$

imamo koordinate tačke B : $x, y = a, z = h$, a koordinate tačke S : $x' = \varepsilon x, y' = \varepsilon a, z = \varepsilon h$. Komponente sile u izabranom koordinatnom sistemu su $W(W_x, W_y, W_z), Q(0, 0, -Q), N(0, -N \sin \alpha, N \cos \alpha), T(-T, 0, 0)$. Šest uslova ravnoteže slobodnog tela glase

$$\begin{aligned} W_x - T &= 0, & M_x &= -\varepsilon Q a - N a \cos \alpha + N h \sin \alpha = 0, \\ W_y - N \sin \alpha &= 0, & M_y &= \varepsilon Q x - N x \cos \alpha - T h = 0, \\ W_z + N \cos \alpha - Q &= 0, & M_z &= -N x \sin \alpha + T a = 0 \end{aligned}$$

Iz četvrte jednačine nalazimo $N = Q \cdot \varepsilon \cdot \cos \alpha$, a sa ovom vrednošću nalazimo iz šeste jednačine $T = \frac{Q \sin^2 \alpha}{h} \varepsilon x$. Ove vrednosti za N i T zadovoljavaju identično petu jednačinu, a sa njima nalazimo iz prve tri jednačine

$$W_x = \frac{Q}{h} \sin^2 \alpha \cdot \varepsilon \cdot x$$

$$W_y = Q \sin \alpha \cos \alpha \cdot \varepsilon$$

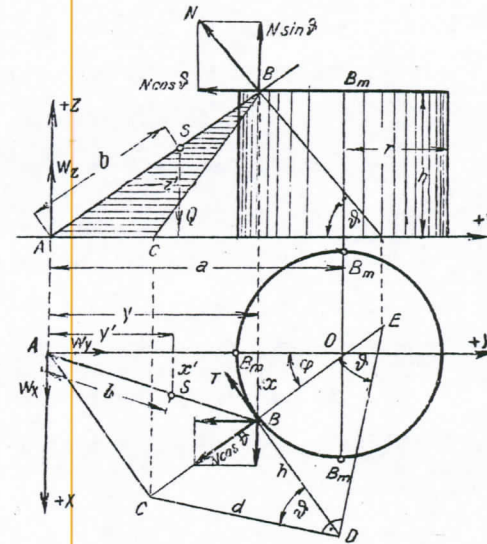
$$W_z = Q(1 - \varepsilon \cdot \cos^2 \alpha).$$

Ovi obrasci za otpore važe za svaku vrednost odstojanja x dodirne tačke od normalnog položaja B_0 . Najveću vrednost x_1 dobijamo iz šeste jednačine kada unesemo $T = F_0 N$,

$$x_1 = \frac{af_0}{\sin \alpha} = \frac{af_0}{h} \overline{AB_0}.$$

Za svaki položaj štapa između $+x_1$ i $-x_1$ biće sile na njemu u ravnoteži.

6. PRIMER Prav štap težine Q učvršćen je nepomično svojim krajem A , a drugim krajem naslanja se na ivicu kružnog cilindra poluprečnika r i visine h (sl.100).



Sl. 100

\overline{ABC} . \overline{AC} je horizontalni trag te ravni. Sa $BD = h$ i $DE \perp CD$ nalazimo $\varphi = \angle CED$ koji zaklapa normalni otpor sa horizontalnom ravni. Iz slike čitamo

$$BC = a \cdot \cos \varphi - r, \quad CD = \sqrt{h^2 + (a \cdot \cos \varphi - r)^2},$$

dakle

$$\sin \varphi = \frac{a \cdot \cos \varphi - r}{\sqrt{h^2 + (a \cdot \cos \varphi - r)^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (a \cdot \cos \varphi - r)^2}}$$

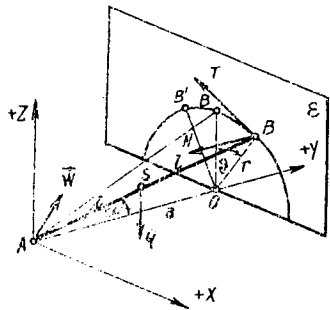
Za tačku A kao početak koordinatnog sistema i AO kao y -osovi-

Rastojanje osovine cilindra od tačke A je $AO = a$. Kao u predjašnjem primeru i ovde je $\overline{AB_0}$ jedini položaj ravnoteže štapa kada nema otpora trenja. Normalni otpor N stoji upravno na tangentu kruga u dodirnoj tački B i na pravu AB , dakle upravan na ravan

$$N_3 = \frac{(x'Q_1 + x''Q_2) \sin \alpha \cos \alpha}{y_3}$$

Sa ovim trima vrednostima nalazimo iz prva tri uslova ravnoteže i komponente X_0 , Y_0 , Z_0 otpora W_0 .

4. PRIMER. Homogeni prav štapa AB dužine $2L$ i težine Q učvršćen je svojim krajem A sferičnim zglavkom, a krajem B naslanja se na vertikalnu hrapavu ravan ε u rastojanju a od tačke A ($a < 2L$). Tačka B može u ravni ε da opiše krug sa poluprečnikom $r = \sqrt{4L^2 - a^2}$ (sl. 98) Pita se koji



Sl. 98

je krajni položaj kraja B na krugu t.j. koji je najveći centralni ugao ϑ , za koji će još štapa biti u ravnoteži ako je f_0 koeficijent trenja? Koliki su otpori N i T u tački B i otpor \vec{W} u tački A?

Sa koordinatnim sistemom označenim u sl. 98 glase šest uslova

ravnoteže slobodnog tela

$$W_x - T \cos \vartheta = 0, \quad -\frac{Qa}{2} + N r \cos \vartheta + T a \sin \vartheta = 0,$$

$$W_y - N = 0, \quad \frac{Qr}{2} \sin \vartheta - T r = 0,$$

$$W_z - Q + T \sin \vartheta = 0, \quad -N r \sin \vartheta + T a \cos \vartheta = 0.$$

Iz prvih pet jednačina nalazimo komponente otpora u A i B

$$W_x = \frac{Q}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad W_y = N = \frac{Q}{2} \frac{a}{r} \cos \vartheta, \quad W_z = \frac{Q}{2} (1 + \cos^2 \vartheta),$$

$$T = \frac{Q}{2} \sin \vartheta.$$

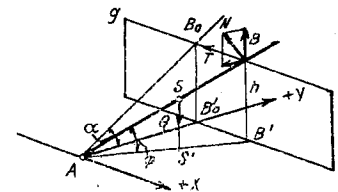
Vrednosti za N i T unesene u šestu jednačinu zadovoljavaju

je identično. Maksimalnu vrednost ugla ϑ dobićemo kada stavimo $T = f_0 N$. Šesta jednačina daje nam $\operatorname{tg} \vartheta = f_0 \frac{a}{r} = f_0 \cot \alpha$. Maksimalni ugao ϑ t.j. krajni položaji B i B' nezavisni su od težine štapa. Gornji obrasci za pet komponentalnih otpora važe za svaki položaj štapa izmedju graničnih položaja B i B'

U graničnim položajima ($T = f_0 N$) imamo samo četiri nepoznate, W_x , W_y , W_z i N. Iz momentne jednačine za x- i y-osovinu nalazimo s obzirom na relaciju $\operatorname{tg} \vartheta = f_0 \frac{a}{r}$ za N istu vrednost

$$N = \frac{Q \cdot a}{2 \sqrt{r^2 + f_0^2 a^2}}$$

5. PRIMER. Prav štapa težine Q učvršćen je nepomično svojim krajem A, i naslanja se na horizontalni štapić $g-g$, tako da se može kretati u kosoj ravni određenoj pravom $g-g$ i tačkom A sl. 99



Sl. 99

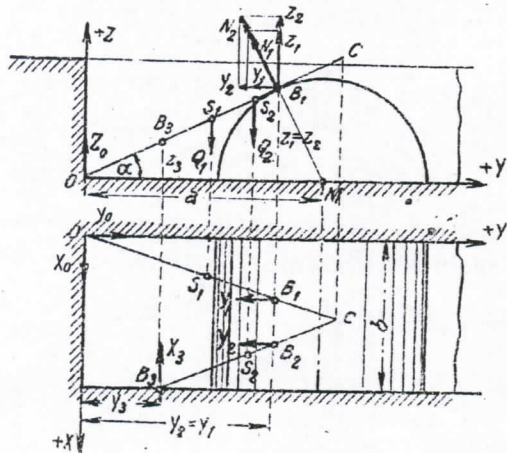
Tačku A uzimamo za početak koordinatnog sistema, x-osovinu paralelnu sa pravom $g-g$, y-osovinu upravnu na vertikalnu ravan položenu kroz $g-g$.

Ravan xy je dakle horizontalna, y-osovina prodire pomenutu ravan u tački B_0 . Dužina $AB_0 = a$ je dužina normale povučene iz A na vertikalnu ravan kroz $g-g$. Visinu prave $g-g$ iznad xy-ravni označićemo sa $B'B = h$, a rastojanje težišta S štapa od kraja A, $AS = b$. Nagib štapa AB prema horizontalnoj ravni je najveći ($\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$) kada on seče pravu $g-g$ pod pravim uglom. Pod pretpostavkom da klizanje biva bez otpora trenja taj je položaj AB jedini položaj ravnoteže i to labilne ravnoteže jer se težište S nalazi u ovom najvišem položaju.

$$A_x = \frac{l-a}{l} Q \cos\alpha, \quad A_y = \frac{r}{l} Q \left[\sin\alpha - \frac{l-b}{R} \cos\alpha \right], \quad A_z = Q \sin\alpha,$$

$$B_x = \frac{a}{l} Q \cos\alpha, \quad B_y = -\frac{r}{l} Q \left[\frac{b}{R} \cos\alpha + \sin\alpha \right].$$

3. PRIMER. Telo čiju ravnotežu tražimo, sastoji se iz dva tanka štapa \overline{OC} i $\overline{B_3C}$ koja su u tački C međusobno kruto spojena (sl.97). Kruti sistem OCB_3 oslanja se svojim kra-



Sl. 97

jem O u jednom roglju pravougaonog paralelopipeda, svojim krajem B_3 na vertikalni zid, a svojim tačkama B_1 i B_2 naleže na krugni cilindar čija je osovina upravna na pomenuti zid i nalazi se u visini roglja O, u rastojanju „a“ od o-

voga. Date sile su težine Q_1 i Q_2 oba štapa \overline{OC} i $\overline{B_3C}$, one napadaju težišta S_1 i S_2 štapova. Pod pretpostavkom da su sve površine potpuno glatke imamo da odredimo šest komponentalnih otpora: tri komponente otpora u O, po dve u tačkama B_1 i B_2 i jednu u tački B_3 . Broj nepoznatih otpora ravan je broju jednačina ravnoteže, dakle je sistem OCB_3 nepokretno položen. Sa početkom O koordinatnog sistema i osovina naznačenim u sl.97 označićemo koordinate tačaka B_1, B_2 i B_3 sa x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) a koordinate težišta S_1 i S_2 sa x', y', z' ; x'', y'', z'' . Komponente datih sila Q_1, Q_2 i četiri otpora su

W_0	X_0	Y_0	Z_0
N_1	0	$-N_1 \sin\alpha$	$N_1 \cos\alpha$
N_2	0	$-N_2 \sin\alpha$	$N_2 \cos\alpha$
N_3	$-N_3$	0	0
Q_1	0	0	$-Q_1$
Q_2	0	0	$-Q_2$

Jednačine ravnoteže glase:

$$X_0 - N_3 = 0$$

$$Y_0 - N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\alpha = 0$$

$$Z_0 + N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha - Q_1 - Q_2 = 0.$$

S obzirom na to što je $y_1 = y_2$ i $z_1 = z_2$ glase tri momente jednačine:

$$(N_1 + N_2)[y_1 \cos\alpha + z_1 \sin\alpha] - y'_1 Q_1 - y''_1 Q_2 = 0,$$

$$-(N_1 x_1 + N_2 x_2) \cos\alpha - z_3 N_3 + x'_1 Q_1 + x''_1 Q_2 = 0,$$

$$-(N_1 x_1 + N_2 x_2) \sin\alpha + y_3 N_3 = 0$$

Eliminacijom otpora N_3 iz pete i šeste jednačine dobijamo s obzirom na relaciju $\frac{z_3}{y_3} = \operatorname{tg}\alpha$

$$N_1 x_1 + N_2 x_2 = (x'_1 Q_1 + x''_1 Q_2) \cos\alpha \quad \dots a)$$

Iz slike čitamo da je $\overline{OB_1} = a \cos\alpha$, $y_1 = \overline{OB_1} \cos\alpha = a \cos^2\alpha$, $z_1 = \overline{OB_1} \sin\alpha = a \sin\alpha \cos\alpha$. Sa tom zamenom glasi četvrta jednačina

$$N_1 + N_2 = \frac{y'_1 Q_1 + y''_1 Q_2}{a \cos\alpha} \quad \dots b)$$

Iz poslednje dve jednačine nalazimo

$$N_1 = \frac{(y'_1 Q_1 + y''_1 Q_2) x_2 - (x'_1 Q_1 + x''_1 Q_2) a \cos^2\alpha}{(x_2 - x_1) a \cos\alpha},$$

$$N_2 = \frac{(x'_1 Q_1 + x''_1 Q_2) a \cos^2\alpha - (y'_1 Q_2 + y''_1 Q_2) x_1}{(x_2 - x_1) a \cos\alpha}$$

i najzad iz šeste jednačine i relacije a):

momenat iste veličine suprotnog smisla. Taj momenat vrši sila P upravna na ravan ploče. Njena napadna tačka A ima rastojanje „ a “ od osovine. Na ploču napadaju četiri sile, data sila Q , sila P i, otpori W_1 i W_2 ležišta B_1 i B_2 .

Za početak koordinatnog sistema uzimamo tačku O koja polovi dužinu $\overline{B_1B_2} = 2b$, obrtnu osovinu za z -osovinu, y -osovina leži u vertikalnoj ravni, dakle je x -osovina horizontalna.

Koordinate napadnih tačaka B_1 , B_2 , S i A , i komponente sila W_1 , W_2 , Q i P u izabranom koordinatnom sistemu navedene su u ovim tablicama:

Tačka	x	y	z	Sila	Komponente		
B_1	0	0	b	W_1	X_1	Y_1	Z_1
B_2	0	0	$-b$	W_2	X_2	Y_2	Z_2
S	$l \cdot \sin\varphi$	$l \cdot \cos\varphi$	0	Q	0	$Q \sin\alpha$	$-Q \cos\alpha$
A	$a \cdot \sin\varphi$	$a \cdot \cos\varphi$	0	P	$P \cos\varphi$	$-P \sin\varphi$	0

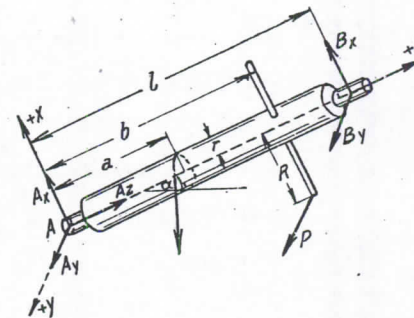
Sa ovim vrednostima glase jednačine ravnoteže:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + P \cos\varphi &= 0, & -(Y_1 - Y_2)b - Q l \cos\alpha \cos\varphi &= 0, \\ Y_1 + Y_2 + Q \sin\alpha - P \sin\varphi &= 0, & (X_1 - X_2)b - P a \sin\varphi \cos\varphi &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - Q \cos\alpha &= 0, & Q l \sin\alpha \sin\varphi - P a &= 0. \end{aligned}$$

Poslednja jednačina ne sadrži otpore, ona je jedina stvarna jednačina ravnoteže koja određuje silu P kao funkciju ugla φ . Prva, druga, četvrta i peta jednačina određuju otpore X_1 , X_2 , Y_1 i Y_2 , a treća jednačina daje zbir $Z_1 + Z_2$.

2. PRIMER. Osovina vratila dužine l i poluprečnika

r zaklapa sa horizontalom ugao α i položena je na ležišta A i B od kojih samo donje može da prima silu u pravcu osovine (sl.96). Na preseku vratila u rastojanju „ a “ od donjeg ležišta



Sl. 96

visi na užetu teret Q , a na kraku dužine R u rastojanju b od A dejstvuje horizontalna sila P .

Osovinu vratila uzimamo za z -osovinu koordinatnog sistema kome je početak A , x -osovina leži u vertikalnoj ravni

kroz z -osovinu dakle je y -osovina horizontalna.

Koordinate napadnih tačaka i komponente sila su

$A(0, 0, 0)$	A_x	A_y	A_z
$B(0, 0, l)$	B_x	B_y	0
$P(-R, 0, b)$	0	P	0
$Q(0, r, a - r \sin\alpha)$	$-Q \cos\alpha$	0	$-Q \sin\alpha$

Poluprečnik r biće prema „ a “ srazmerno mali, a ako je i nagib α mali možemo $r \cdot \sin\alpha$ prema „ a “ zanemariti. Jednačine ravnoteže glase

$$\begin{aligned} A_x + B_x - Q \cos\alpha &= 0, & -l B_y - bP + a \cdot Q \sin\alpha &= 0, \\ A_y + B_y + P &= 0, & l B_x - a \cdot Q \cos\alpha &= 0, \\ A_z - Q \sin\alpha &= 0, & -RP + r \cdot Q \cos\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Poslednja jednačina je stvarni uslov ravnoteže i iz nje nalazimo $P = \frac{r}{R} Q \cos\alpha$. Ostale pet jednačina određuju pet komponenta otpora:

ni položaj da sve seku jednu istu pravu. U tom slučaju telo ima beskonačno malu pomerljivost, kao što ćemo u Kinematici (III. deo) videti.

Razmotrićemo jednostavan slučaj kada sve tačke C_i leže u xy -ravni, normale N_1 , N_2 i N_3 zaklapaju sa koordinatnim osovina ugleve α_i , β_i , γ_i , ($i = 1, 2, 3$) a površine F_4 , F_5 i F_6 se poklapaju sa xy -ravni. Sa koordinatama x_i , y_i , tačka C_i glase jednačine ravnoteže:

$$X + \sum_1^3 N_i \cos \alpha_i = 0, \quad M_x + \sum_1^3 N_i y_i \cos \gamma_i + \sum_4^6 N_i y_i = 0,$$

$$Y + \sum_1^3 N_i \cos \beta_i = 0, \quad M_y - \sum_1^3 N_i x_i \cos \gamma_i - \sum N_i x_i = 0,$$

$$Z + \sum_1^3 N_i \cos \gamma_i + \sum_4^6 N_i = 0, \quad M_z + \sum_1^3 N_i (x_i \cos \beta_i - y_i \sin \beta_i) = 0.$$

Nepoznate otpore nalazimo iz ovih šest jednačina pomoću determinanta trećeg stepena. Označimo kraće poznate veličine sa $\cos \alpha_i = a_i$, $\cos \beta_i = b_i$, $\cos \gamma_i = c_i$, $(x_i \cos \beta_i - y_i \sin \beta_i) = d_i$. Determinanta D sistema iz prve, druge i šeste jednačine glasi

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

a determinante za N_1 , N_2 i N_3 su

$$D_1 = \begin{vmatrix} -X & a_2 & a_3 \\ -Y & b_2 & b_3 \\ -M_z & d_2 & d_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -X & a_3 \\ b_1 & -Y & b_3 \\ d_1 & -M_z & d_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -X \\ b_1 & b_2 & -Y \\ d_1 & d_2 & -M_z \end{vmatrix},$$

i sa ovim nalazimo

$$N_1 = \frac{D_1}{D}, \quad N_2 = \frac{D_2}{D}, \quad N_3 = \frac{D_3}{D}.$$

Sada su nam poznati u trećoj, četvrtoj i petoj jednačini članovi

$$\sum_1^3 N_i \cos \gamma_i = A, \quad \sum_1^3 N_i y_i \cos \gamma_i = B, \quad \sum_1^3 N_i x_i \cos \gamma_i = C,$$

i sa tom oznakom glase ove jednačine

$$N_4 + N_5 + N_6 = -Z - A$$

$$N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6 = -M_x - B$$

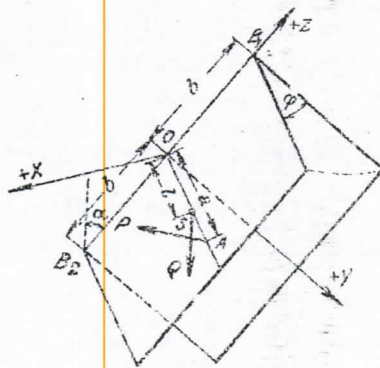
$$N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 = M_y - C.$$

Iz ovih jednačina nalazimo istim načinom i otpore N_4 , N_5 i N_6 .

Kada bi i četvrta površina na pr. F_3 , bila xy -ravan, imali bismo četiri paralelne napadne linije N_3 , N_4 , N_5 i N_6 , one se seku u beskonačno udaljenoj tački. Kada kroz N_2 položimo ravan ξ upravnu na xy -ravan, sećiće ona pravu N_1 u nekoj tački E . Upravna na xy -ravan povučena kroz E seče sve šest prave N_i , dakle su otpori u tom slučaju neodređeni.

Jednu silu možemo samo u tri paralelne komponente jednoznačno razložiti.

50. PRIMERI. 1. Pravougaona ploča obrće se oko osovine $B_1 B_2$ (sl. 95).



Sl. 95

Pod dejstvom svoje težine Q ploča će ležati u vertikalnoj ravni položenoj kroz obrtnu osovinu, jer tada sila Q koja napada težište ploče S , seče obrtnu osovinu. Kada ploču obrnemo za ugao φ iz vertikalnog položaja, sila Q će se ukrštati sa obrtnom osovinom, imaće dakle momenat u pogledu obrtne osovine. Da ploča bude u novom položaju u ravnoteži mora na nju dejstvovati još

sti kao pod 6), a za tačku C'' dva uslova kao pod 3). Sa šest uslova ravnoteže imamo svega 10 jednačina i pošto iz ovih eliminišemo 9 komponenata otpora N , N' i N'' , dobijamo jednu stvarnu jednačinu ravnoteže.

Uzmimo jednostavni slučaj da je linija „a“ x-osovina, linija „a“ y-osovina, a površina $F = 0$ xy-ravan. Tada su koordinate tačke C, (x, 0, 0) tačke C'(0, y', a) a tačke C'' (x'', y'', 0). Komponente otpora u ovim tačkama su $N_x = N'_y = N''_x = N''_y = 0$, tako da su samo pet komponenata N_y , N'_x , N_z , N'_z i N''_z različite od nule.

Šest uslova ravnoteže slobodnog tela glase

$$X + N'_x = 0 \quad M_x + N'_z y' + N''_z y'' = 0$$

$$Y + N_y = 0 \quad M_y - N_z x - N''_z x'' = 0$$

$$Z + N_z + N'_z + N''_z = 0, \quad M_z + N_y x - N'_x y' = 0.$$

Kada iz prve i druge jednačine smenimo otpore u šestu, dobijamo jednu stvarnu (t.j. od otpora slobodnu) jednačinu ravnoteže

$$M_z - Yx + Xy' = 0.$$

Treća, četvrta i peta jednačina određuju tri ostale komponente N_z , N'_z i N''_z .

10). Tačka C'' je nepomična, tačka C' je prinudjena da ostaje na liniji „a“, a tačka C je pokretna na površini $F = 0$. Šest uslova ravnoteže slobodnog tela koje napadaju date sile (P) sa koordinatama X, Y, Z, M_x, M_y i M_z i otpori W , N' i N dva uslova ortogonalnosti otpora N i jedan uslov ortogonalnosti otpora N' čine sistem od 9 jednačina koje određuju jednoznačno 9 komponenata otpora. Kako je broj jednačina ravan broju nepoznatih to ne preostaje nikakav uslov koji bi sistem (P) morao zadovoljiti, drugim rečima svaki pro-

izvoljni sistem sila (P) stajace na ovako ograničenom telu u ravnoteži.

Ako na pr. izaberemo tačku C'' za početak koordinatnog sistema, x-osovinu za liniju „a“, a xy-ravan za površinu $F = 0$, biće komponente $N_x = N_y = N'_x = 0$, te nam ostaju samo 6 nepoznatih komponenata koje određujemo iz 6 uslova ravnoteže slobodnog tela.

Tačka C ima koordinate x, y; tačka C'; x', 0 dakle glase uslovi ravnoteže

$$X + W_x = 0, \quad M_x + yN_z = 0$$

$$Y + W_y + N'_y = 0, \quad M_y - xN_z - x'N'_z = 0$$

$$Z + W_z + N_z + N'_z = 0, \quad M_z + x'N'_y = 0.$$

Iz ovih jednačina nalazimo komponente otpora

$$W_x = -X, \quad N'_y = -\frac{M_z}{x'}$$

$$W_y = \frac{M_z}{x'} - Y, \quad N'_z = \frac{1}{x'} \left[M_x \frac{x}{y} + M_y \right],$$

$$W_z = \frac{1}{x'} \left[M_x \frac{x' - x}{y} - M_y \right] - Z, \quad N_z = -\frac{M_x}{y}.$$

11). Šest tačaka C_i ($i = 1 \dots 6$) tela K prinudjene su da ostaju na šest glatkih površina $F_i = 0$. Za svaku površinu postoji dvojnna jednačina

$$\frac{N_{ix}}{F'_{ix}} = \frac{N_{iy}}{F'_{iy}} = \frac{N_{iz}}{F'_{iz}}.$$

Sa šest jednačina slobodnog tela i 12 uslova normalnosti imamo svega 18 jednačina koje jednoznačno određuju 3.6 = 18 komponenata otpora. Sistem od šest sila \vec{N}_i antivalentan je datom sistemu (\vec{P}). Znamo da napadne linije sila \vec{N}_i , t.j. normale površina F_i u tačkama C_i ne smeju imati takav medjusob-

nepomičnim krivim linijama a i a' . Tangente t i t' na linije a i a' u tačkama C i C' zaklapaju sa korodinatnim osovina ugleve α, β, γ , odnosno α', β', γ' . Pored šest uslova ravnoteže u 4) postoje još dva uslova da su otpori N i N' upravni na tangente t i t' :

$$N_x \cos \alpha + N_y \cos \beta + N_z \cos \gamma = 0$$

$$N'_x \cos \alpha' + N'_y \cos \beta' + N'_z \cos \gamma' = 0.$$

Sa ova dva uslova određene su komponente N_z i N'_z , a pored uslova ravnoteže $M_z = 0$ dolazi još jedan, od otpora nezavisan uslov koji dobijamo eliminacijom tih otpora N i N' .

Tako na pr. ako se linije a i a' poklapaju sa z -osovinom, dakle je $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ i $\cos \alpha' = \cos \beta' = 0$, biće $N_z = 0$ i $N'_z = 0$, dakle i $Z = 0$, t.j. na telu koje se može oko neke osovine obrtati i duž te osovine pomerati biće sistem sila (P) koji telo napada u ravnoteži, ako je zbir momenata u pogledu na osovину ravan nuli i zbir komponentata u pravcu osovine ravan nuli. Ta dva uslova sprečavaju zavojno kretanje tela oko osovine.

7) Dve tačke C i C' tela mogu se pomerati po površinama $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$. Koordinate tačke C su x, y, z , koordinate tačke C' su x', y', z' , otpori površina su N i N' imaju pravac normala. Šest uslova ravnoteže slobodnog tela glase

$$X + N_x + N'_x = 0, \quad M_x + yN_z - zN_y - y'N'_z - z'N'_y = 0,$$

$$Y + N_y + N'_y = 0, \quad M_y + zN_x - xN_z - z'N'_x - x'N'_z = 0,$$

$$Z + N_z + N'_z = 0, \quad M_z + xN_y - yN_x + x'N'_y - y'N'_x = 0.$$

Sa označenjem parcijalnih izvoda jednačina $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$ kao u 3) pridolaze još uslovi normalnosti

$$\frac{N_x}{F'_{1x}} = \frac{N_y}{F'_{1y}} = \frac{N_z}{F'_{1z}}, \quad \frac{N'_x}{F'_{2x}} = \frac{N'_y}{F'_{2y}} = \frac{N'_z}{F'_{2z}}.$$

Kad iz ovih 10 jednačina eliminišemo 6 komponentata otpora, dobijamo četiri stvarna uslova ravnoteže koje mora svaki sistem sila (P) zadovoljiti.

Ako su na pr. površine F_1 i F_2 dve ravni koje se poklapaju, i izaberemo je za xy -ravan, tačku C za početak, a CC' za x -osovinu, onda je $x = y = z = 0$ $y' = z' = 0$. $N_x = N_y = 0$, $N'_x = N'_y = 0$, a uslovi ravnoteže glase

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z + N_z + N'_z = 0,$$

$$M_x = 0, \quad M_y - x'N'_z = 0, \quad M_z = 0,$$

dakle od otpora nezavisna četiri uslova $X = 0, Y = 0, M_x = 0, M_z = 0$.

8). Tri tačke C, C' i C'' tela K mogu se pomerati po nepomičnim površinama $F_1 = 0, F_2 = 0$ i $F_3 = 0$. Sada imamo pored šest jednačina ravnoteže analognih onima u 7) još šest uslova ortogonalnosti. Iz ovih 12 jednačina dobijamo eliminacijom devet komponentata otpora N, N' i N'' tri stvarne jednačine ravnoteže. Najprostiji slučaj je kada se sve tri površine svode na jednu ravan, koju izaberemo za xy -ravan. Koordinate z, z' i z'' tačaka C, C' i C'' su ravne nuli isto tako i komponente otpora u x - i y -pravcu su ravne nuli. Uslovi ravnoteže su

$$X = 0, \quad M_x + N_z y + N'_z y' + N''_z y'' = 0,$$

$$Y = 0, \quad M_y - N_z x - N'_z x' - N''_z x'' = 0,$$

$$Z + N_z + N'_z + N''_z = 0, \quad M_z = 0.$$

Stvarne jednačine ravnoteže su $X = 0, Y = 0$ i $M_z = 0$, a ostale tri određuju otpore N_z, N'_z i N''_z u tačkama C, C' i C'' .

9). Dve tačke C i C' tela pomerljive su po dvema nepomičnim linijama a i a' a treća tačka C'' je pomerljiva po površini $F = 0$. Za tačke C i C' imamo dva uslova ortogonalno-

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0, \quad X = 0$$

3). Tačka C tela K prinudjena je da ostaje stalno na nepomičnoj glatkoj površini $F_0 = 0$, ili površina $F = 0$ tela K prinudjena je da stalno prolazi kroz nepomičnu tačku C. Uslov ravnoteže je da je dati sistem (P) ekvivalentan rezultanti, čija je napadna linija normala površine F_0 (odnosno F) u tački C (odnosno C_0). Kada parcijalne izvode jednačine $F = 0$ površine označimo kraće $\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x$ i t.d. glase jednačine ravnoteže

$$X + N_x = 0, \quad Y + N_y = 0, \quad Z + N_z = 0, \\ M_x + yN_z + zN_y = 0, \quad M_y + zN_x - xN_z = 0, \quad M_z + xN_y - yN_x = 0,$$

$$\frac{N_x}{F'_x} = \frac{N_y}{F'_y} = \frac{N_z}{F'_z}$$

Poslednja jednačina je uslov da rezultanta $R(X, Y, Z)$ pada u normalnu površine F u tački C. Kada eliminišemo komponente otpora \vec{N} , izaberemo C za početak koordinatnog sistema, a normalu u C za z-osovinu, dobijamo pet skalarnih jednačina ravnoteže

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0.$$

4). Dve tačke C i C' tela K su nepomične, dakle je i prava CC' nepomična. Telo se može samo oko osovine CC' obrtati. Otpori W i W' tačaka C i C' čine krst sila koji sa datim sistemom (P) stoji u ravnoteži. Njihove napadne linije su par konjugovanih pravih u kompleksu koji je sistemom (P) odredjen i seče osovinu CC'. Ako izaberemo tačku C za početak koordinatnog sistema, pravu CC = h za z-osovinu, glase šest jednačina ravnoteže:

$$X + W_x + W'_x = 0, \quad Y + W_y + W'_y = 0, \quad Z + W_z + W'_z = 0, \\ M_x - hW'_y = 0, \quad M_y + hW'_x = 0, \quad M_z = 0.$$

Iz poslednje jednačine koja je jedini uslov ravnoteže, vidimo da će sile (P) biti u ravnoteži ako je njihov momenat u pogledu obrtne osovine ravan nuli. Iz četvrte i pete jednačine nalazimo komponente W'_x i W'_y i njihovom smenom u prvu i drugu jednačinu nalazimo W_x i W_y . Iz treće jednačine nalazimo samo zbir $W_z + W'_z$; ležište C' osovine možemo tako izvesti da je $W'_z = 0$ i onda je $W_z = -Z$.

5). Tačka C koju biramo za početak koordinatnog sistema je nepomična, a tačka C' na z-osovini u rastojanju $CC' = h$ može da klizi po datoj glatkoj liniji „a“. Tangenta na liniju „a“ u tački C' sa koordinatnim osovinama zaklapa uglove α, β, γ . Otpor W' seče krivu pod pravim uglom, dakle je normalan otpor i stoga ćemo ga označiti sa N. Jednačinama u 4) pridolazi još uslov normalnosti

$$N_x \cos \alpha + N_y \cos \beta + N_z \cos \gamma = 0,$$

koji iskazuje da je projekcija otpora N na tangentu t linije „a“ u tački C' ravna nuli. Obe komponente W_z i N_z sada su određene izuzev slučaja da kriva „a“ seče z-osovinu pod pravim uglom t.j. $\cos \gamma = 0$, jer u tom slučaju ispada N_z iz poslednje jednačine.

Kada izaberemo x-osovinu paralelnu tangenti „t“ ležeće otpor N linije „a“ u yz-ravni, dakle je $N_x = 0$ i po 5-oj jednačini mora biti $M_y = 0$. Ravnoteža sila (P) zahteva da je $M_z = 0$ i $M_y = 0$, t.j. da je momenat datih sila ravan nuli u pogledu obrtne osovine CC' i u pogledu osovine upravne na ravan položenu kroz CC' i tangentu „t“ na krivu „a“ u tački C'. Uslov $M_z = 0$ iskazuje obrtanje tela oko CC', a uslov $M_y = 0$ isključuje beskonačno malo pomeranje tačke C' na krivoj „a“.

6). Dve tačke C i C' tela K mogu se pomerati po

otpor linije može imati svaki pravac koji leži na površini ili između dva kružna konusa kojima je zajednički vrh dodirna tačka, zajednička osovina je tangenta na liniju u dodirnoj tački, a izvodnice im zaklapaju sa tangentom ugao $(\frac{\pi}{2} - \rho)$. U oba slučaja je dakle pravac otpora neodređen, mi smo u stanju samo da odredimo granice u kojima ravnoteža postoji, kao što ćemo na nekoliko primera videti.

Svako telo ograničene pokretljivosti koje napada dati sistem sila (P), možemo smatrati slobodnim telom koje napada sem sila (P) još i otpori W koji ograničavaju njegovu pokretljivost. Iz šest jednačina ravnoteže slobodnog tela odredjimo veličine otpora (odnosno njihovih ortogonalnih komponentata), a eliminacijom ovih dobijamo čiste uslove ravnoteže kojih je broj isti kao i broj stepena slobode.

49. USLOVI RAVNOTEŽE I ODREĐIVANJE OTPORA ZA NEKOLIKO SLUČAJEVA OGRANIČENE POKRETLJIVOSTI.

1). Jedna tačka C tela K je nepomična. Telo ne može izvoditi translaciju nego može se samo obrtati oko tačke C. Redukujući dati sistem sila (P) na tačku C dobijamo redukcionu rezultantu $\vec{R}(X, Y, Z)$ i redukcioni spreg M. Ako otpor u tački C označimo sa $\vec{W}(W_x, W_y, W_z)$ glase uslovi ravnoteže slobodnog tela $\vec{R} + \vec{W} = 0$ i $\vec{M} = 0$.

U ortogonalnom koordinatnom sistemu Oxyz glase šest skalarne jednačine ravnoteže kada sa a, b i c označimo koordinate nepomične tačke, sa M_x, M_y, M_z momente sistema (P) u pogledu koordinatnih osovina:

$$X + W_x = 0, \quad Y + W_y = 0, \quad Z + W_z = 0,$$

$$M_x + bW_z + cW_y = 0, \quad M_y + cW_x - aW_z = 0, \quad M_z + aW_y - bW_x = 0.$$

Eliminacijom otpora iz prve tri jednačine dobijamo stvarne

uslove ravnoteže:

$$M_x - bZ + cY = 0, \quad M_y - cX + aZ = 0, \quad M_z - aY + bX = 0,$$

ili ako tačku C izaberemo za početak koordinatnog sistema ($a = b = c = 0$): $M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0,$
dakle

$$\vec{M} = 0.$$

Sistem sila (P) koji napada telo čija je jedna tačka nepomična, biće u ravnoteži ako je ekvivalentan rezultanti koja prolazi kroz nepomičnu tačku. Otpor tačke ravan je toj rezultanti i suprotnog je smera.

2). Jedna tačka C tela K prinudjena je da ostaje stalno na nepomičnoj glatkoj liniji l_0 , ili jedna linija tela K prinudjena je da stalno prolazi kroz jednu tačku C nepomičnog tela K_0 . Za ravnotežu sistema sila (P) potrebno je i dovoljno da se sistem (P) svodi na rezultantu koja stoji upravno na liniju l_0 odnosno l . Kada normalni otpor označimo sa N, koordinate tačke C sa x, y, z a njihove izvode po luku s linije sa x', y', z' glase jednačine ravnoteže

$$X + N_x = 0, \quad Y + N_y = 0, \quad Z + N_z = 0$$

$$M_x + yN_z - zN_y = 0, \quad M_y + zN_x - xN_z = 0, \quad M_z + xN_y - yN_x = 0$$

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0$$

Poslednja jednačina iskazuje uslov da je rezultanta R (X, Y, Z) upravna na liniju u tački C. Posle eliminacije otpora iz ovih 7 jednačina ostaju četiri stvarna uslova ravnoteže

$$M_x - yZ + zY = 0, \quad M_y - zX + xZ = 0, \quad M_z - xY + yX = 0,$$

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0.$$

Ako za početak koordinatnog sistema izaberemo tačku C, a za x-osovinu tangentu na liniju l_0 u tački C, t.j. stavimo $x' = 1, y' = z' = 0$ glase uslovi ravnoteže

ploče ε poduprta su sa po dva štapa označena na sl. 94 sa 1 ... 6. Pod je horizontalan, kose ravni 12, 34 i 56 seku pod u pravama DE, EF i FD. Paralele sa ovim pravama povučene kroz A, B i C seku se u tačkama D', E' i F' a prave DD', EE' i FF' seku se u tački O'; ova je horizontalna projekcija tačke O u kojoj se ravni 12, 34 i 56 seku. Nagibi tih ravni su nam poznati. Projicirajući jednu od normala O'G, O'H ili O'J u vertikalnu ravan nalazimo i vertikalnu projekciju O'' tačke O.

Tačku K ploče ε napada sila P. Traže se komponente po pravama 1 ... 6. Silu P razložimo u dve komponente od kojih P_0 ima pravac \overline{KO} a druga P_ε leži u ravni ploče. Silu P_0 koja napada tačku O razložimo u komponente P_{0a} , P_{0b} i P_{0c} u pravcima \overline{OA} , \overline{OB} i \overline{OC} , a silu P_ε razložimo u komponente $P_{\varepsilon a}$, $P_{\varepsilon b}$ i $P_{\varepsilon c}$ čije su napadne linije D'E', E'F' i F'D'. Tačku A napadaju dve sile P_{0a} i $P_{\varepsilon a}$ koje obe leže u ravni 12, možemo ih dakle razložiti u komponente S_1 i S_2 . Na isti način nalazimo i ostale četiri komponente. Ova razlaganja sila P_0 i P_ε koja su već poznata, na sl. 94 nisu izvedena.

EKVIVALENCIJA I RAVNOTEŽA SISTEMA SILA

KOJI NAPADA TELO OGRANIČENO U SVOJOJ POKRETLJIVOSTI.

48. OGRANIČENJE POKRETLJIVOSTI TELA. Kruto telo K koje može izvoditi translatorno kretanje u svima pravcima prostora i koje se može obrtati oko svake osovine koje možemo u prostoru zamisliti, zovemo slobodnim. Položaj slobodnog tela odredjen je sa šest nezavisnih koordinata (v. l. deo str. 10) stoga kažemo da ono ima šest stepena slobode dakle i šest uslova ravnoteže. Njegova pokretljivost može biti ograniče-

na t.j. smanjena time što ga primoramo da ostaje u stalnoj, odredjenoj vezi sa jednim ili više tela K_0 koja mogu biti u pokretu ili nepomična. U prvom slučaju govorimo o reonomnim (od grčke reči rheo = teći i nomos = zakon) u drugom slučaju o skleronomnim (skleros = krut, tvrd) vezama. Mi ćemo se ograničiti na skleronomne veze, smatrati dakle telo K, odnosno površine i linije na njima nepomičnima.

Veze izmedju K i K_0 mogu biti raznolike. Tako na pr. mogu izvesne tačke tela K biti primorane da stalno ostaju na datim površinama ili linijama tela K_0 , ili su izvesne površine tela K primorane da prolaze kroz date nepomične tačke ili se površine tela K i K_0 stalno dodiruju i t.d.

Dati sistem sila (P_i) koji napada telo K i koji je odredjen dinomom (\vec{R}, \vec{M}) ili svojim ortogonalnim koordinatama X, Y, Z, M_x, M_y i M_z prouzrokuje u dodirnim tačkama tela sa telima K_0 izvesne sile W i -W. Sile W kojim tela K_0 dejstvuju na K zovemo otporima, a sile -W pritiscima tela K na tela K_0 . Otpori odnosno pritisci mogu biti pozitivni ili negativni.

Ako su dodirne površine F_0 odnosno F, i linije L_0 odnosno L potpuno glatke tako da nema otpora trenja, onda otpor površine ima odredjen pravac, pravac normale na površinu u dodirnoj tački, a otpor linije leži u nekoj normalnoj ravni položenoj kroz dodirnu tačku, može dakle imati \cos^2 pravaca. Ako pak izmedju dodirnih površina ili linija postoji otpor trenja sa koeficijentom statičkog trenja $f = \tan \rho$, onda otpor površine može imati svaki pravac koji leži unutar ili na površini kružnog konusa, kome je vrh u dodirnoj tački a izvodnice zatvaraju sa normalom površine ugao trenja ρ ;

joj se paralelne ravni 34 i 56 seku Uslov da zbir momenata za ovu osovinu bude ravan nuli identičan je sa uslovom da zbir komponentata svih sila u pravcu AB bude ravan nuli. Taj uslov glasi $P' \cos \alpha + S_2' - S_1' = 0$, i sa $S_1' = S_1 \cos \delta$ i $S_2' = S_2 \cos \delta$ nalazimo $S_1 - S_2 = P' \frac{\cos \alpha}{\cos \delta}$. Kada nadjene vrednosti za $S_1 + S_2$ i $S_1 - S_2$ jedanput saberemo a drugi put drugu od prve oduzmemo, nalazimo

$$2 S_1 = P' \frac{\cos \alpha}{\cos \delta} - P'' \frac{r_3}{a \sin \delta} \quad \text{i} \quad 2 S_2 = - P' \frac{\cos \alpha}{\cos \delta} - P'' \frac{r_3}{a \sin \delta}$$

Iz paralelopipeda čije su ivice paralelne stranama a i b, a sila P je njegova dijagonala nalazimo $P'' = P \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$, a $P' = P \cos \beta$, i sa tim vrednostima je

$$S_1 = \frac{P}{2} \left[\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \delta} - \frac{r_3}{a} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{\sin \delta} \right]$$

i

$$S_2 = - \frac{P}{2} \left[\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \delta} + \frac{r_3}{a} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{\sin \delta} \right]$$

Ako su oba izraza u zagradi pozitivna vlada u štapu 1 zatezanje, u štapu 2 pritisak. Ako sa ϑ označimo ugao koji zaklapa napadna linija sile P sa stranom AB ploče, postoji relacija $\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \beta$, dakle glase obrasci za S_1 i S_2

$$S_1 = \frac{P}{2} \left[\frac{\cos \vartheta}{\cos \delta} - \frac{r_3}{a} \frac{\sin \vartheta}{\sin \delta} \right] \quad \text{i} \quad S_2 = - \frac{P}{2} \left[\frac{\cos \vartheta}{\cos \delta} + \frac{r_3}{a} \frac{\sin \vartheta}{\sin \delta} \right]$$

Sile S_4 i S_6 naćićemo iz projekcije na ravan CDD'C' (sl. d) Projekcija P''' sile P na ovu ravan je $P''' = P \sin \psi$, gde je ψ ugao između pravih P i BC, a određen je relacijom $\cos \psi = \sin \alpha \cos \beta$, o čemu se iz već pomenutog paralelopipeda možemo uveriti.

Momentna jednačina za tačku D glasi sa kracima označenim u sl.d):

$$P''' r_4 + (S_1 + S_2) r_5 + (S_4 + S_3 \sin \gamma) b = 0$$

Kada u ovu jednačinu unesemo već nadjene vrednosti $(S_1 + S_2)$, S_3 , P'' , P''' i $r_5 = \frac{b \sin \delta}{2}$, i $b \sin \gamma = \frac{h}{c}$ gde je $c = CE$, a $h = CC'$ dužina štapova CC' i DD', nalazimo S_4 :

$$S_4 = P \left[\frac{r_3}{2a} \sin \delta - \frac{r_4}{b} \sin \psi - \frac{r_1}{b} \frac{h}{c} \cos \beta \right]$$

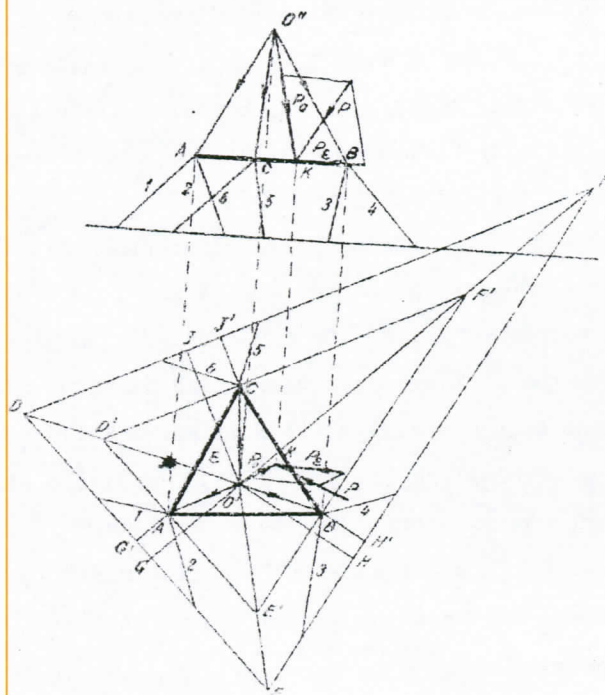
Momentna jednačina za tačku C glasi

$$P''' r_6 + (S_1 + S_2) r_5 + (S_5 + S_6 \sin \gamma) b = 0$$

i zamenom poznatih veličina dobijamo

$$S_5 = P \left[\frac{r_3}{2a} \sin \delta - \frac{r_6}{b} \sin \psi + \frac{r_2}{b} \frac{h}{c} \cos \beta \right]$$

2. PRIMER. Temena A, B, C, horizontalne trouglaste



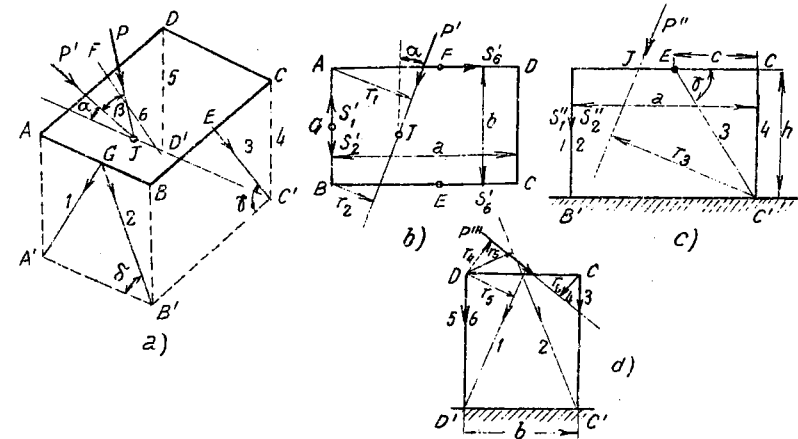
Sl. 94

Neka su a_5 i a_6 direktrise kongruencije g_1, g_2, g_3 i g_4 . Za momente osovine a_5 i a_6 biće samo momenat date sile R i traženih komponenta P_5 i P_6 različit od nule. Iz ove dve momentne jednačine određene su dakle jednoznačno veličine sile P_5 i P_6 koje dejstvuju u datim linijama g_5 i g_6 . Analogno nalazimo iz momentnih jednačina u pogledu na direktrise a_3 i a_4 kongruencije g_1, g_2, g_5 i g_6 veličine P_3 i P_4 i najzad iz momentnih jednačina za osovine a_1 i a_2 kongruencije g_3, g_4, g_5 i g_6 nalazimo veličine P_1 i P_2 . Da nadjemo veličine šest komponenta date sile R treba dakle da postavimo momentne jednačine za tri para osovina.

U tehničkoj primeni biće položaji pravih g_1, \dots, g_6 mnogo jednostavniji, tako da ćemo lako naći momentne osovine koje seku što veći broj tih pravih. Za određivanje veličina komponenta moći ćemo se korisno poslužiti teoremom o ekvivalenciji projekcija prostornih sistema (čl. 44).

1. PRIMER. Horizontalna pravougaona ploča ABCD dužine a i širine b poduprta je pomoću šest štapa 1 ... 6 o horizontalni pod u tačkama A', B', C' i D' . Štapovi su učvršćeni za ploču i za pod sferičnim zglavcima tako da mogu primiti samo aksijalne sile (zatezanje ili pritisak) Slika 93 a) prikazuje sistem u kosoj projekciji, sl. b) u osnovi a sl. c) u vertikalnoj projekciji upravno na stranu a ploče.

U tački J ploče napada sila P . Njen nagib prema ploči je β , a njena horizontalna projekcija P' zaklapa sa stranom $b = AB$ ploče ugao α . Određivanje komponenta sile P u datim pravcima 1 ... 6 identično je sa određivanjem sile u štapovima S_1, \dots, S_6 .



Sl. 93

Projekcije tih sila S označićemo sa S' u osnovi, sa S'' u vertikalnoj projekciji. Momentnu osovinu AA' seku prave 1, 2 i 6, a paralelne su joj prave 4 i 5. Momenti ovih pet komponenta u pogledu na osovinu AA' su dakle ravni nuli. Momentna jednačina glasi (sl. b) $P'r_1 - S'_6 \cdot b = 0$ i sa $P' = P \cos \beta$ i $S'_3 = S_3 \cos \gamma$ nalazimo $S_3 = P \frac{r_1 \cdot \cos \beta}{b \cdot \cos \gamma}$. Analogno nalazimo iz momentne jednačine za osovinu BB' $P'r_2 + S'_6 b = 0$, i odavde $S_6 = -P \frac{r_2 \cdot \cos \beta}{b \cdot \cos \gamma}$. U štapu 3 vlada zatezanje a u štapu 6 pritisak.

Štapovi 1 i 2 seku se u tački G, njihove sile ne možemo odvojeno odrediti. Njih ćemo naći iz dve jednačine postavljene za dve momentne osovine koje seku četiri ostala štapa. Jedna je osovina $C'D'$ koja se u vertikalnoj projekciji (sl. c) projicira u tačku C' . Momentna jednačina za ovu osovinu glasi $P''r_3 + (S''_1 + S''_2)a = 0$. Odavde je sa $S''_1 = S_2 \sin \delta$ i $S''_2 = S_2 \sin \delta$, $S_1 + S_2 = -P'' \frac{r_3}{a \cdot \sin \delta}$, gde je δ nagib štapa 1 i 2 prema horizontali. Druga osovina u kojoj se prave 3, 4, 5 i 6 seku je beskonačno udaljena prava u ko-

su izvodnice istog sistema hiperboloida χ_2 , možemo dakle po 2) naći sile P_2'' , P_3'' i P_4 duž pravih g_2 , g_3 i g_4 koje će sa određenom silom P_4'' stajati u ravnoteži. Tako smo dobili dva sistema od po četiri sile: P_1 , P_2' , P_3' , P_4' i P_2'' , P_3'' , P_4 , P_4'' . Sile P_2' i P_2'' leže na pravoj g_2 dakle je $P_2 = P_2' + P_2''$, isto tako je $P_3 = P_3' + P_3''$, a P_5 je geometrijski zbir od P_4' i P_4'' .

Sabiranjem ova sistema dobijamo traženi sistem od pet sila P_1 , P_2 , P_3 , P_4 i P_5 koje imaju napadne linije g_1, g_2, g_3, g_4 i g_5 i stoje u ravnoteži.

4). Šest sila mogu stajati u ravnoteži samo ako njihove napadne linije pripadaju istom linearnom kompleksu. Veličine sila $P_1 \dots P_6$ naći ćemo na ovaj način. Napadne linije podelićemo u dve grupe, g_1, g_2, g_3, g_4 i g_2, g_3, g_4, g_5 i odredićemo po 3) pet sila P_1, P_2', P_3', P_4' i P_h u napadnim linijama g_1, g_2, g_3, g_4 i u pravoj h koja pripada kongruenciji određenoj prvim četiri pravama. Pravom h možemo još propisati uslov da prolazi kroz datu tačku M , ili da leži u datoj ravni μ . Isto tako odredićemo pet sila P_2'', P_3'', P_4'', P_5 i $P_{h'}$ u napadnim linijama g_2, g_3, g_4, g_5 i u pravom h' koja pripada kongruenciji određenoj prvim četiri pravama. Pravom h' možemo propisati uslov da prolazi kroz istu tačku M , ili da leži u istoj ravni μ kao i prava h . Superpozicijom ovih dvaju sistema od pet sila koji stoje svaki za sebe u ravnoteži, dobijamo traženi sistem od šest sila: $P_1, P_2 = P_2' + P_2'', P_3 = P_3' + P_3'', P_4 = P_4' + P_4'', P_5$ i $P_6 \equiv P_{h'} + P_{h''}$.

Iz uslova propisanih pravama h i h' izlazi da g_6 pripada kompleksu određenom pravama g_1, \dots, g_5 i da prolazi kroz datu tačku M ili leži u datoj ravni μ . Kako veličine sila P_h i $P_{h'}$ možemo proizvoljno birati, to može prava g_6 biti

svaki zrak ravnog pramena u ravni (h, h') , kome je teme u preseku tih pravih.

5.) Sedam sila koje stoje u ravnoteži mogu imati proizvoljne napadne linije g_1, g_2, \dots, g_7 . Odnosi njihovih veličina (veličinu jedne sile možemo proizvoljno izabrati) nalazimo ovim postupkom. Na pravom g_7 izaberemo proizvoljnu tačku M i odredimo njenu nultu ravan μ u pogledu na nulti sistem (kompleks) određen pravama g_1, \dots, g_5 . Zatim odredimo nultu ravan μ' iste tačke u pogledu na nulti sistem određen pravama g_2, \dots, g_6 . Kroz g_7 položimo proizvoljnu ravan ε koja seče ravni μ i μ' u pravama e i e' . Po 4) možemo naći šest sila $P_1, P_2', P_3', P_4', P_5'$ i P_e sa napadnim linijama g_2, \dots, g_6 i e , koje stoje u ravnoteži. Na isti način nalazimo šest sila $P_2'', P_3'', P_4'', P_5'', P_6$ i $P_{e'}$ sa napadnim linijama g_1, \dots, g_6 i e' . Sile P_e i $P_{e'}$ možemo tako izabrati da njihova rezultanta P_7 padne u pravu g_7 . Superpozicijom ova dva ravna sistema dobijamo sistem od sedam sila $P_1, P_2 = P_2' + P_2'', P_3 = P_3' + P_3'', P_4 = P_4' + P_4'', P_5 = P_5' + P_5'', P_6$ i P_7 koje dejstvuju po datim linijama g_1, \dots, g_7 i čine sistem u ravnoteži.

47. RAZLAGANJE SILE POMOĆU MOMENTNIH JEDNAČINA. Odredjivanjem „ n “ sila P_i ($i = 1 \dots n$) koje stoje u ravnoteži, rešen je ujedno i zadatak da jednu datu silu R razložimo u $(n - 1)$ komponenta P_i [$i = 1 \dots (n - 1)$] u datim napadnim linijama g_i . Videli smo da se jedna sila može jednoznačno razložiti u šest komponenta datih, proizvoljnih napadnih linija. Veličine komponenta P_1, \dots, P_6 možemo odrediti postavljajući momentne jednačine za izvesne momente osovine, analogo Riterovoj metodi za razlaganje sile u ravni.

Jer za momentnu osovinu h bili bi momenti komponenata ravni nuli a momenat rezultante različit od nule. Takvi izuzetni slučajevi su 1) Ako više od tri prave leže u jednoj ravni. 2). Ako se više od tri prave seku u jednoj tački. 3). Ako više od četiri prave pripadaju istom sistemu izvodnica nekog jednogranog hiperboloida. U prva dva slučaja postoji uvek jedna prava h koja seče sve šest napadne linije, u 3. slučaju postoje dve takve prave.

Razlaganje sile u šest komponenata naročito je jednostavno ako tri napadne linije leže u jednoj ravni ϵ , a ostale se tri seku u jednoj tački G . Osoben slučaj ovoga razlaganja je kada su napadne linije ivice tetraedra čije je jedno teme tačka G , a osnova leži u ravni ϵ . (čl. 31).

7). $n > 7$. Za osam sila P_1, \dots, P_8 u ravnoteži možemo osim položaja i pravca napadnih linija g_1, \dots, g_8 još i jedan od sedam odnosa π_1, \dots, π_7 proizvoljno birati, za sistem od devet sila proizvoljni su dva odnosa i t.d.

46. ODREĐIVANJE VELIČINA SILA. Pošto smo u prednjem članu upoznali uslove koje moraju napadne linije sila zadovoljiti da bi sistem bio u ravnoteži, valja nam odrediti odnose intenziteta tih sila.

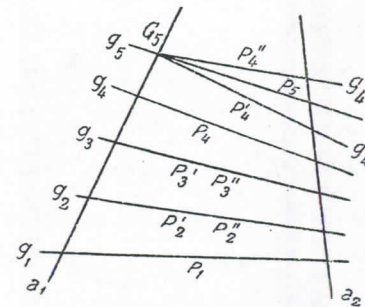
1) Za $n = 2$ i $n = 3$ poznato nam je to određivanje iz Statike u ravni.

2) Za $n = 4$ moraju napadne linije g_1, \dots, g_4 biti izvodnice iste grupe jednog hiperboloida.

Iz jedne tačke O povučemo paralele g'_1, \dots, g'_4 datim napadnim linijama, izaberemo na jednoj, na pr. na g'_1 silu P_1 proizvoljne veličine, a njojzi suprotnu $-P_1$ razložimo na poznat način (v. čl. 1. i 2.) u komponente po pravcima g'_2, g'_3

i g'_4 tako smo našli sile P_1, P_2, P_3 i P_4 koje na datim napadnim linijama g_1, g_2, g_3 i g_4 stoje u ravnoteži.

3). Pet sila mogu stojati u ravnoteži samo ako njihove napadne linije pripadaju istoj linearnoj kongruenciji. Tri prave g_1, g_2, g_3 određuju hiperboloid χ_1 , prave g_2, g_3, g_4 određuju hiperboloid χ_2 . Prava g_4 prodreće χ_1 kao površinu drugog reda u dvema tačkama ili je neće u opšte seći. Izvodnice a_1 i a_2 drugog sistema površine χ_1 , povučene iz te dve tačke, seku dakle sve četiri prave g_1, g_2, g_3 i g_4 . One su direktrise linearne kongruencije, kojoj po pretpostavci pripada i g_5 . Ako prava g_4 ne seče hiperboloid χ_1 , onda su direktrise a_1 i a_2 imaginarne. Mi pretpostavljamo da su one realne. Svaka prava koja seče obe transversale a_1 i a_2 pripada kongruenciji određenoj sa g_1, g_2, g_3 i g_4 , dakle seče i g_5 obe prave a_1 i a_2 . Kroz tačku G_5 u kojoj se a_1 i g_5 seku (sl. 92) povučemo izvodnicu g'_4 hiperboloida χ_1 i izvodnicu g''_4 hiperboloida χ_2 , istog sistema kome pripadaju g_1, g_2, g_3 , odnosno g_2, g_3, g_4 . Obe izvodnice g'_4 i g''_4 seku drugu transversalu a_2 , jer ova pripada obim hiperboloidima χ_1 i χ_2 . Prave g_1, g_2, g_3



Sl. 92

i g'_4 su izvodnice istog sistema hiperboloida χ_1 , možemo dakle po 2) naći četiri sile P_1, P'_2, P'_3 i P'_4 , koje će u tim napadnim linijama biti u ravnoteži. Prave g'_4, g''_4 i g_5 leže u istoj ravni, možemo dakle naći na g'_4 silu P'_4 koja će složena sa P'_4 dati rezultantu P_5 na pravoj g_5 . Prave g_2, g_3, g_4 i g''_5

četiri prave date, možemo za petu izabrati i svaku pravu kongruencije određene prvim četiri pravama.

3). $n = 4$. Eliminacijom odnosa π_1, π_2 i π_3 ostaju nam tri uslovne jednačine koje moraju prave g_1, \dots, g_4 zadovoljiti. Ako tri prave izaberemo proizvoljno, mora g_4 ova tri uslova zadovoljiti, t.j. ona ima $(4-3 = 1)$ jedan proizvoljan parametar. Skup od ∞^1 pravih obrazuju pravolinijsku površinu, jednograni hiperboloid koje je u našem slučaju određen pravama g_1, g_2 i g_3 . Hiperboloid obrazuju, kao što znamo, dva sistema ∞^1 pravih. Svaka prava jednog sistema seče sve prave drugog sistema. Prava g_4 pripada istom sistemu kome pripadaju prave g_1, g_2 i g_3 . To izlazi iz opšteg stava koji važi za n sila u ravnoteži.

Pretpostavimo da su prave $g_1 \dots g_n$ napadne linije sila P_1, \dots, P_n koje stoje u ravnoteži, i da neka prava h seče prvih $(n - 1)$ pravih g_1, \dots, g_{n-1} . Kada tu pravu h smatramo za momentnu osovinu, onda su momenti sila P_1, \dots, P_{n-1} u pogledu na h ravni nuli.

Uslov je ravnoteže da je $\sum_1^n M_h = 0$, mora dakle i momenat sile P_n biti ravan nuli, t.j. mora prava h seći i napadnu liniju g_n .

U našem slučaju ($n = 4$) obrazuju sve prave h drugi sistem-pravih hiperboloida koji obrazuje prvi sistem g_1, g_2, g_3 . Važi dakle stav:

Četiri prave koje su napadne linije četiri sila u ravnoteži, pripadaju jednom i istom sistemu jednogranog hiperboloida. Kada tri prave proizvoljno izaberemo, možemo za četvrtu uzeti svaku izvodnicu hiperboloida koja pripada istom sistemu.

Četiri prave mogu imati dva osobena položaja:

a) Dve prave g_1 i g_2 leže u jednoj ravni. Svaka prava h povučena kroz presek (g_1, g_2) koja seče g_3 mora seći i g_4 . Sve četiri prave moraju stoga ležati u jednoj ravni. Hiperboloid degeneriše u ravan. O slaganju četiri sile u ravni bilo je u "Statici krute ploče" govora.

b) Tri prave g_1, g_2 i g_3 seku se u jednoj tački G . Svaka prava h povučena iz G mora seći i g_4 , mora dakle i četvrta prava prolaziti kroz G . Hiperboloid postaje neodređen. O slaganju i razlaganju "centralnih" sila bilo je govora u početku ove sveske.

4). $n = 3$. Da bi svaka prava h koja seče g_1 i g_2 sekla i g_3 , moraju sve prave ležati u istoj ravni i seći se u istoj tački G . Ako su dve prave date, možemo za treću izabrati svaku pravu u ravni g_1, g_2 koja prolazi kroz G .

Da tri sile koje ne leže u istoj ravni ne mogu biti u ravnoteži, izlazi već iz činjenice da prostorani vlak od tri strane ne može biti zatvoren.

5). $n = 2$. Napadne linije g_1 i g_2 dvaju sila P_1 i P_2 u ravnoteži moraju se poklapati.

6). $n = 7$. Kod sistema od sedam sila koje treba da stoje u ravnoteži imamo šest odnosa π_1, \dots, π_6 , dakle isto toliko koliki je broj jednačina ravnoteže. Položaji i pravci napadnih linija g_1, \dots, g_7 ne podleže nikakvom uslovu, možemo ih dakle proizvoljno birati. Prema tome je zadatak: Razlaganje jedne sile R u šest komponenata čije su napadne linije date jednoznačno određen. Isključeni su dabogme takvi položaji pravih g_1, \dots, g_7 pri kome bi jedna prava h sekla sve napadne linije komponenata a ukrštavala bi se sa R .

sistema, dakle kada one obrazuju krst sila (K_1, K_2).

Sila i spreg određeni su sa $5 - 3 = 8$ koordinata. Da bi one bile ekvivalentne datom sistemu, moraju medju njima postojati $8-6 = 2$ relacije. Redukciona rezultanta R_0 je slobodan vektor jer redukcionu tačku biramo proizvoljno. Sistem (R_0, M_0) određen je dakle sa $2 \cdot 3 = 6$ koordinata, određuje dakle jednoznačno dati sistem. Centralna osočina određena je sa 4 koordinata, veličina rezultante R i sprega M su dve skalarne veličine, dakle je dinamika određena sa $4 + 2 = 6$ koordinata.

U opšte ako je neki sistem sila (P) određen sa n koordinata, sistem (Q_1) sa k_1 koordinata a sistem (Q_2) sa k_2 koordinata, biće sistem (P) ekvivalentan sistemu (Q_1) + (Q_2) ako je $k_1 + k_2 = n$.

43. RAZLAGANJE SILE. USLOVI ZA NAPADNE LINIJE. Kada u nekom sistemu od n sila koje stoje u ravnoteži, promenimo smer jedne sile \vec{P}_i , onda su ostale $(n - 1)$ sile komponente sile $-\vec{P}_i$. Zadatak da jednu silu razložimo u $(n - 1)$ komponenta identičan je sa zadatkom da nadjemo sistem od n sila koje čine ravnotežu. Šest uslova ravnoteže jedn. (33.2) su po silama i koordinatama linearne i homogene. Ako dakle sile $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ čine sistem u ravnoteži, činiće ga i sile intenziteta 1, $\frac{P_2}{P_1} = \pi_1, \frac{P_3}{P_1} = \pi_2, \dots, \frac{P_n}{P_1} = \pi_{n-1}$. Za određivanje ovih $(n - 1)$ odnosa intenziteta stoje nam na raspoloženju šest jednačina (33.2) ravnoteže.

Posmatraćemo redom slučajeve $n \equiv 6$, a zatim slučajeve $n > 6$.

1). $n = 6$. Prave g_1, \dots, g_6 su napadne linije sile $P_1 \dots P_6$ koje treba da budu u ravnoteži. Pošto smo iz je-

dnačina ravnoteže eliminisali pet odnosa π_1, \dots, π_5 , ostaje nam jedan uslov koji moraju napadne linije g_i zadovoljiti. Možemo dakle pet linija proizvoljno birati a šesta mora jedan uslov zadovoljiti. Prava u prostoru određena je sa četiri parametra, šesta prava ima dakle $4 - 1 = 3$ slobodna parametra, t.j. ima ∞^3 mogućih pravih g_6 koje će zadovoljiti propisan uslov. Poznato nam je da ∞^3 pravih čine jedan kompleks, u ovom slučaju kompleks koji je pravama $g_1 \dots g_5$ određen. Taj je kompleks linearan, t.j. sve prave kroz jednu tačku M , koje mogu biti g_6 leže u istoj ravni μ , i obratno sve tačke prave koje leže u ravni μ , prolaze kroz jednu tačku M te ravni. Na osnovu ovog razmatranja možemo iskazati stav :

Šest pravih koje su napadne linije šest sila u ravnoteži, pripadaju jednom i istom linearnom kompleksu. Ako su pet linija date, možemo za šestu izabrati svaku pravu kompleksa koji je sa prvih pet određen.

2). $n = 5$. Pošto smo iz uslova ravnoteže eliminisali odnose $\pi_1 \dots \pi_4$, ostaju nam dve uslovne jednačine koje moraju zadovoljiti prave $g_1 \dots g_5$. Četiri prave možemo proizvoljno birati, a peta mora zadovoljiti ta dva uslova. Kako je prava određena sa četiri parametra to su $4-2 = 2$ parametra još proizvoljna. Petu pravu mogu dakle ∞^2 pravih zastupati. Prave g_5 obrazuju dakle kongruenciju koja je sa $g_1 \dots g_4$ određena. Kongruencija je linearna jer kroz svaku tačku M prostora prolazi jedna prava g_5 , a u svakoj ravni μ leži jedna prava. Prema tome važi stav:

Pet pravih koje su napadne linije pet sila u ravnoteži, pripadaju jednoj i istoj linearnoj kongruenciji. Ako su

Kada unesemo oznake $\overline{O'J} = p$, $\overline{O'A} = q$, postoji relacija $pq = c^2$, a po trećoj jednačini (43.1) je

$$Z = \frac{p \cdot P'}{c} \quad (P' = P^*)$$

Sa tim vrednostima biće

$$M' = \frac{p}{c^2} P' \cdot \overline{O'B} = \frac{P' \cdot \overline{O'B}}{q}$$

ili $M' : P' = \overline{O'B} : q$.

Kada dakle spojimo tačke A i B i iz kraja projekcije P' položimo upravnu na \overline{AB} , seći će ova normalu n_2 u tački M' tako da dužina $\overline{O'M}$ predstavlja veličinu M' . Šrafirani trougli $\overline{O'AB}$ i $\overline{C'P'M}$ su slični i jedan prema drugom obrnuti za 90° . Time smo i veličinu slike M^* odredili.

Svaka sila u prostoru određena je dvema slikama P^* i M^* u ravni. Ako nam je dat sistem sila $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ u prostoru, svodi se njihovo slaganje na slaganje dveju ravnih sistema vektora $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ i $M_1^*, M_2^*, \dots, M_n^*$, dakle na konstruisanje dvaju verižnih poligona koji su nam iz statike sila u ravni poznati. Iz tako dobivenih slika R^* i M^* dobijamo obratnim putem redukcionu rezultantu \vec{R} i redukcionu spreg \vec{M} .

44. OPŠTI ZAKONI EKVIVALENCIJE PROSTORNIH SISTEMA.

Dva vlakva vektora $\sum_1^n \vec{V}_i$ i $\sum_1^m \vec{W}_k$ ekvivalentna su ako su njihove završne strane \vec{V}_{on} i \vec{W}_{om} identične. Ako sa V'_i i W'_k označimo ortogonalne projekcije ovih vektora ($i = 1 \dots n, k = 1 \dots m$) na jednu istu ravan, onda je očividno da su i ravnih vlakova $\sum_1^n \vec{V}'_i \equiv \sum_1^m \vec{W}'_k$ međusobno ekvivalentni. Jedna prostorna grupa sila (\vec{P}_i) određena je, kao što znamo, vlakom $\sum_1^n \vec{P}_i$ sila i vlakom $\sum_1^m \vec{M}_i^{(P)}$ osovina spregova za proizvoljnu redukcionu tač-

ku O.

Dva sistema sila (P_i) i (Q_k) biće ekvivalentna ako je $\sum_1^n \vec{P}_i \equiv \sum_1^m \vec{Q}_k$ i $\sum_1^n \vec{M}_i^{(P)} \equiv \sum_1^m \vec{M}_k^{(Q)}$ pretpostavljajući dabogme za oba sistema istu redukcionu tačku. Iz ovog razmatranja sledi stav: Ako su dva prostorna sistema (P_i) i (Q_k) ekvivalentna: (P_i) \equiv (Q_k), onda su i njihove ortogonalne projekcije na svaku ravan, dakle dva ravna sistema (P'_i) \equiv (Q'_k) ekvivalentna. Ali obrnuti stav ne važi, t.j. iz činjenice da su projekcije dvaju sistema na neku ravan ekvivalentne ne možemo zaključiti da su i sami sistemi (P_i) i (Q_k) ekvivalentni. Da su sistemi (P_i) i (Q_k) ekvivalentni moraju njihove projekcije na dve ravni biti ekvivalentne, dakle (P'_i) \equiv (Q'_k) i (P''_i) \equiv (Q''_k).

Prostorni sistem sila određen je u najopštijem slučaju sa šest skalarnih veličina ili koordinata, jedna sila određena je kao klizeći vektor sa pet koordinata, a osovina sprega kao slobodan vektor određena je sa tri koordinate.

Dva ekvivalentna sistema (P) i (Q) imaju isti broj nezavisnih koordinata. Prostorni sistem u opšte ne može biti ekvivalentan jednoj sili Q_1 . Sistem paralelnih sila P_i ima, kao što znamo, pet nezavisnih koordinata, dakle je ekvivalentan jednoj određenoj sili (rezultanti) $\vec{Q}_1 \equiv \sum \vec{P}_i$.

Najjednostavniji sistem (Q) koji je ekvivalentan datom sistemu (P_i) sastoji se iz dva elementa od kojih jedan može biti spreg t.j. beskonačno mala sila u beskonačnom rastojanju. Dve proizvoljne sile imaju $2 \cdot 5 = 10$ koordinata, među njima moraju postojati $10 - 6 = 4$ relacije a to je slučaj kada su njihove napadne linije konjugovane prave nultog

$$\left(\frac{Y_1^*}{X_1^*} + \frac{X_1^*}{Y_1^*} \right) \cdot x_1 = \frac{M_1^*}{X_1^*}$$

Iz poslednje jednačine nalazimo x_1 a sa tom vrednošću iz b) i y_1 , te dobijamo koordinate tačke J_1 :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{Y_1^* M_1^*}{X_1^{*2} + Y_1^{*2}} \\ y_1 &= -\frac{X_1^* M_1^*}{X_1^{*2} + Y_1^{*2}} \end{aligned} \right\} \dots (43.3)$$

Rastojanje $O^* J_1 = p$ nalazimo iz

$$p^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{M_1^{*2}}{X_1^{*2} + Y_1^{*2}} \quad \dots c)$$

Kada označimo sa q rastojanje pola G_1 i antipola A_1 prave g_1^* od O^* , postoje po definiciji relacije $O^* A_1^* = -O_x G_1$ i $pq = c^2$. Koordinate ξ_1, η_1 antipola su sa obzirom na jednačine c), (43.3) i na $pq = c^2$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -x_1 \frac{q}{p} = -x_1 \frac{c^2}{p^2} = -c^2 \frac{Y_1^*}{M_1^*} \\ \eta_1 &= -y_1 \frac{q}{p} = -y_1 \frac{c^2}{p^2} = c^2 \frac{X_1^*}{M_1^*} \end{aligned} \right\} \dots (43.4)$$

Kada ove vrednosti koordinata zamenimo u jednačinu prave g_2^*

$$x \cdot Y_2^* - y \cdot X_2^* = M_2^*$$

dobijamo uslov ortogonalnosti (43.2) i time je dokazano da A_1 leži na pravoj g_2^* ; analogo leži A_2 na pravoj g_1^* .

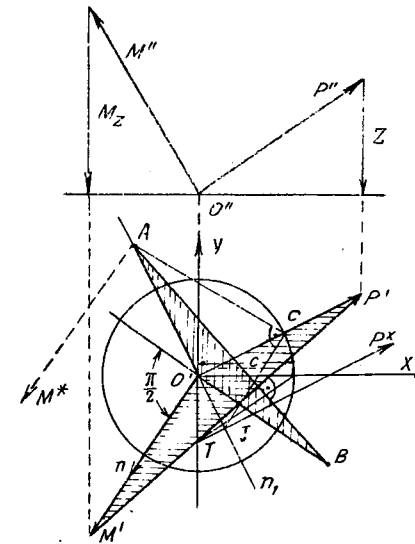
4. ZADATAK. U poslednjim zadacima preslikavali smo prave g odnosno vektore \vec{P} koji prolaze kroz datu tačku O , koji su dakle određeni trima skalarnim veličinama. Ako sila P ima proizvoljan položaj, biće ona određena ako poznamo još i njen momenat $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P}$ u pogledu na početak O . Pored slike \vec{P}^* vektora \vec{P} treba da odredimo i sliku \vec{M}^* momenta \vec{M} . Analogno

obrascima (43.1) a s obzirom na dimenzije usvojicemo za koordinate slike \vec{M}^* .

$$X^* = \frac{M_x}{c}, \quad Y^* = \frac{M_y}{c}, \quad M^* = M_z \quad \dots (43.5)$$

gde je c kao i u (43.1) konstanta preslikavanja.

Za napadnu tačku sile P uzećemo najprostije njenu



Sz. 91

prodornu tačku B (sl. 91) sa xy -ravni koja je i ravan slike. Slika vektora položaja \vec{r} poklapa se dakle sa njegovom horizontalnom projekcijom t.j. sa samim vektorom. Kako slika \vec{P}^* prolazi kroz centar osnovnog kruga, to se njen antipol nalazi u beskonačnosti u pravcu normale n_2 na $O'B$. Sliku \vec{P}^* sile P nalazimo na već poznat način i konstruišemo njen antipol A u pogledu na osnovni krug.

Znamo da vektor \vec{M} stoji upravno na vektore \vec{r}^* i \vec{P}^* po teoremi o slikama upravnih vektora mora slika M^* prolaziti kroz antipole slike r^* i P^* dakle mora prolaziti kroz A i mora biti paralelna normali n_2 na $O'B$. Tako smo našli pravac i položaj slike M^* . Veličina M^* ravna je veličini horizontalne projekcije M' vektora \vec{M} . Po obrascima (43.5) je

$$M' = \sqrt{X^{*2} + Y^{*2}} = \frac{1}{c} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \frac{1}{c} Z \cdot \overline{O'B}$$

Tačke E i F su središta (temena) dvaju projektivnih pramenova u perspektivičnom položaju. Ako dva vektora \vec{P}_1 i \vec{P}_2 leže u jednoj ravni ε , možemo svaki vektor \vec{P} u toj ravni predstaviti jednačinom

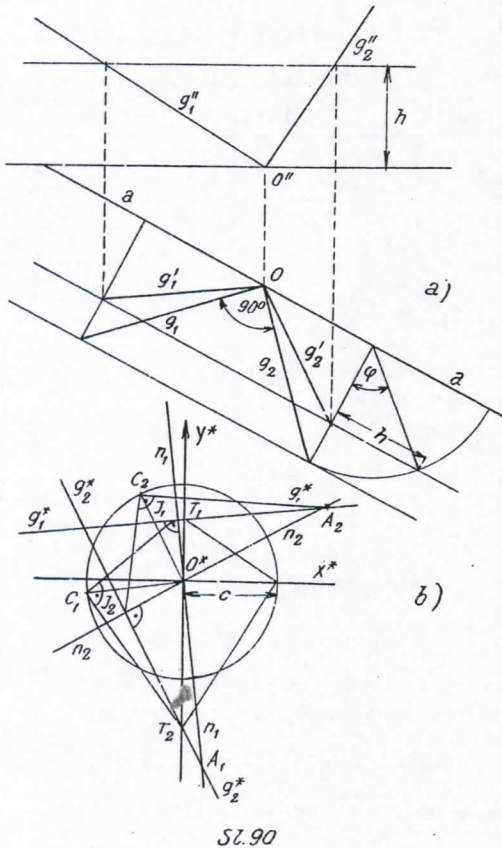
$$\vec{P} = \lambda \vec{P}_1 + \mu \vec{P}_2,$$

gde su λ i μ parametri. Postoje dakle i relacije

$$X^* = \lambda X_1 + \mu X_2, \quad Y^* = \lambda Y_1 + \mu Y_2, \quad M^* = c(\lambda Z_1 + \mu Z_2)$$

koje iskazuju da slike sviju vektora koje dobijamo varijacijom parametara λ i μ prolaze kroz tačku E.

3. ZADATAK. Slike \vec{P}_1^* i \vec{P}_2^* dvaju vektora \vec{P}_1 i \vec{P}_2 koji su međusobno upravni, stoje u takvoj relaciji da \vec{P}_1^* prolazi kroz antipol prave \vec{P}_2^* u pogledu na krug kome je poluprečnik konstanta „c“ preslikavanja i obratno prava \vec{P}_2^* prolazi kroz antipol prave \vec{P}_1^* .



Sl. 90

Na sl. 90a leže prave g_1 i g_2 koje se sseku u O' pod pravim uglom, u horizontalnoj ravni. Ravan pravougla obrnuta je oko osovine a - a koja leži u horizontalnoj ravni za ugao φ . Tako dobijamo

Na sl. 90a leže prave g_1 i g_2 koje se sseku u O' pod pravim uglom, u horizontalnoj ravni. Ravan pravougla obrnuta je oko osovine a - a koja leži u horizontalnoj ravni za ugao φ . Tako dobijamo

horizontalne projekcije g_1' i g_2' , a iz ovih vertikalne projekcije g_2'' i g_2'' . Sa ovim pravcima konstruisane su na sl. 90 b) slike g_1^* i g_2^* sa konstantom preslikavanja c. Iz središta O^* povučemo upravnu n_1 na g_1^* ; obe prave seku se u tački J_1 . Poluprečnik $\overline{OC}_1 = c$ paralelan je sa g_1^* . Upravna na J_1C_1 podignuta u tački C_1 seče pravu n_1 u tački A_1 koja je antipol prave g_1^* , tako da je $\overline{OJ}_1 \times \overline{OA}_1 = c^2$.

Analogo nalazimo i antipol A_2 prave g_2^* . Vidimo da A_1 leži na g_2^* , a A_2 leži na g_1^* . Ova teorema nezavisna je od veličina vektora \vec{P}_1 i \vec{P}_2 koji leže na pravama g_1 i g_2 . Da bismo teoremu dokazali, izrazićemo analitički uslov da su vektori \vec{P}_1 i \vec{P}_2 međusobno upravni. Sa koordinatama X_1, Y_1, Z_1 odnosno X_2, Y_2, Z_2 glasi taj uslov

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$$

ili sa komponentama slika \vec{P}_1^* i \vec{P}_2^* jedn (34.1)

$$X_1^* X_2^* + Y_1^* Y_2^* + \frac{M_1^* M_2^*}{c^2} = 0 \quad \dots (43.2)$$

Sa tekućim koordinatama x, y tačke na pravoj g_1^* daje nam momentna jednačina u pogledu početka O^* :

$$M_1^* = x Y_1^* - y X_1^* \quad \text{ili} \quad y = \frac{Y_1^*}{X_1^*} x - \frac{M_1^*}{X_1^*} \quad \dots a)$$

Jednačina normale O^*n_1 glasi sa tekućim koordinatama x', y'

$$y' = -\frac{X_1^*}{Y_1^*} x' \quad \dots b)$$

Koordinate X_1, Y_1 tačke J_1 u kojoj se obe ove prave seku, zadovoljavaju obe jednačine, dakle je

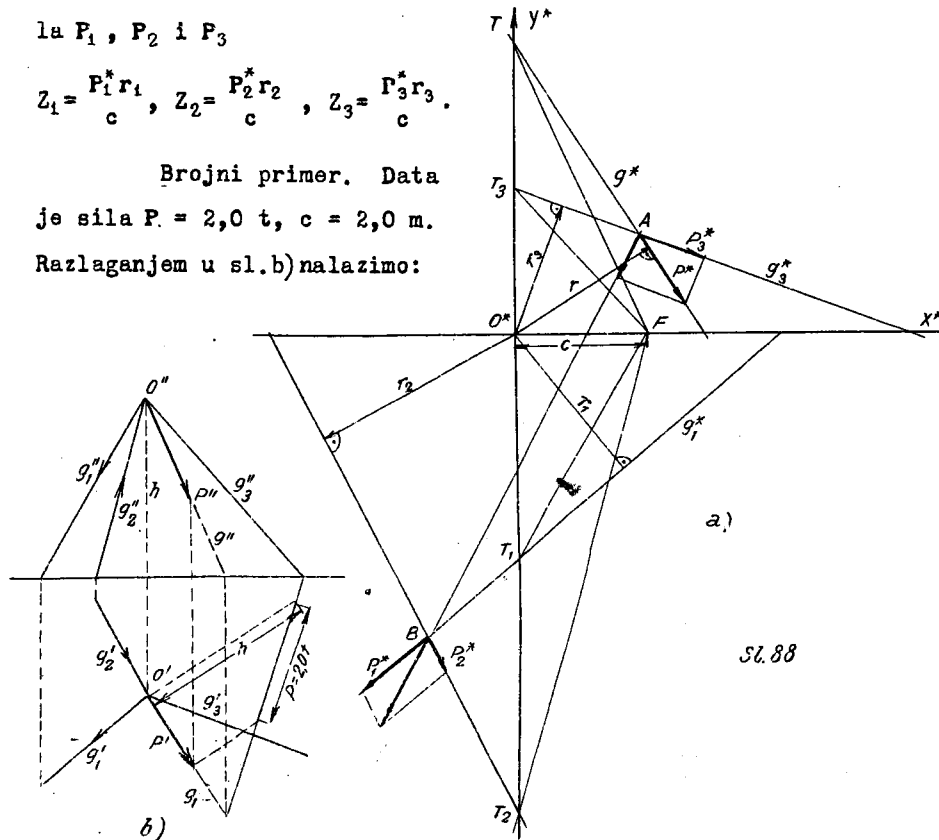
$$\frac{Y_1^*}{X_1^*} x_1 - \frac{M_1^*}{X_1^*} = -\frac{X_1^*}{Y_1^*} x_1$$

ili

1. ZADATAK. Datu silu \vec{P} treba razložiti na komponente po datim pravama g_1, g_2, g_3 koje se sa linijom g sile \vec{P} seku u jednoj tački O . U sl. 88 dati su prave g_1, g_2 i g_3 u vertikalnoj i horizontalnoj projekciji. Sa izabranom konstantom $c = O^*F$ konstruišemo slike g^*, g_1^*, g_2^* i g_3^* (sl. c). Time smo zadatak sveli na zadatak statike u ravni, na razlaganje sile P^* u tri data pravca g_1^*, g_2^* i g_3^* . Pravci g_1^* i g_3^* seku se u tački A , prave g_1^* i g_2^* seku se u tački B . \overline{AB} je pomoćna prava. Pošto smo tako našli sile P_1^*, P_2^* i P_3^* izmerimo krake (normale povučene iz O na sile) r, r_1, r_2 i r_3 , te dobijamo kao kontrolu jednačinu ekvivalencije $P^* \cdot r = P_1^* r_1 + P_2^* r_2 + P_3^* r_3$, a iz momenata zatim vertikalne komponente sile P_1, P_2 i P_3

$$Z_1 = \frac{P_1^* r_1}{c}, Z_2 = \frac{P_2^* r_2}{c}, Z_3 = \frac{P_3^* r_3}{c}.$$

Brojni primer. Data je sila $P = 2,0$ t, $c = 2,0$ m. Razlaganjem u sl. b) nalazimo:



Sl. 88

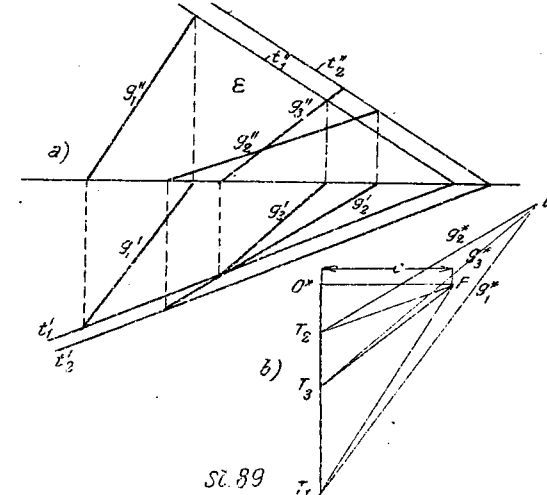
$P' = P^* = 1,25$ t a iz sl. c): $P_1^* = 0,65$ t, $P_2^* = 0,28$ t, $P_3^* = 1,10$ t. Paralelogram u tački B je u dvaput većoj razmeri.

Dalje izmerimo krake: (razmera 1:100) $r = 2,40$ m, $r_1 = 2,60$ m, $r_2 = 3,30$ m, $r_3 = 2,06$ m; te dobijamo momente: $M^* = -3,00$ mt, $M_1^* = -1,68$ mt, $M_2^* = -0,94$ mt, $M_3^* = -2,26$ mt, a iz ovih vertikalne komponente: $Z = -\frac{3,00}{2} = -1,50$ t, $Z_1 = -\frac{1,68}{2} = -0,84$ t, $Z_2 = -\frac{0,94}{2} = 0,47$ t, $Z_3 = -\frac{2,26}{2} = -1,13$ t.

Za kontrolu imamo $-1,50 = -0,84 - 0,47 - 1,13 = Z$. U sl. a) i b) ucrtane su strelice komponentata sile P .

2. ZADATAK. Slike sviju sile (vektora) \vec{P} , dakle i slike njihovih nosilaca g koji su paralelni jednoj ravni ε , seku se u jednoj tački E , u polu paralelnih ravni.

Na sl. 89 a) su t_1', t_1'' tragovi ravni ε , t_2', t_2'' tra-



Sl. 89

govu paralelne ravni ε_2 . Ako nam je data prava g_1 u ravni ε_1 i prava g_2 u ravni ε_2 , određen je pol E presekom slika g_1^* i g_2^* . Prava g_3 leži u ravni ε_1 , njena slika g_3^* prolazi takodje kroz pol E .

U horizontalnoj ravni je zbir momenata spregova

$$\mathcal{M}_1 \cos \alpha_1 + \mathcal{M}_2 \cos \alpha_2 - 2 \delta \cdot R_2 \sin \alpha_2'$$

i kad unesemo gornje vrednosti

$$\mathcal{M} = [0,9989 + 1,0427 - 3,416 \cdot 0,5972] \cdot R_2 = 0.$$

Iz sl. 86 vidimo da se diname R_1, \mathcal{M}_1 i R_2, \mathcal{M}_2 slažu u rezultantu R , dakle da je $\mathcal{M} = 0$ samo ako su oba parametra negativna, t.j. ako R_1 i \mathcal{M}_1 kao i R_2 i \mathcal{M}_2 imaju suprotne znake.

43. PRESLIKAVANJE PROSTORNOG SISTEMA SILA U RAVAN.

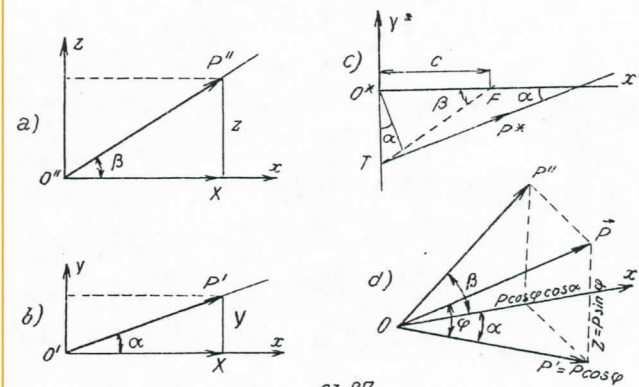
Prof. B. Major (B. Mayor) na inženjerskoj školi Univerziteta u Lozani objavio je 1910 god. svoju metodu po kojoj se jedan prostorni sistem sila (\vec{P}_i) može prikazati ili preslikati u jedan ravan sistem (\vec{P}_i^*) sila. Silu \vec{P}^* (u opšte neki vektor) zovemo slikom sile \vec{P} ili simbolički ($\vec{P} \rightarrow \vec{P}^*$) t.j. vektor \vec{P} preslikan je u vektor \vec{P}^* . Kada su X, Y, Z komponente datog vektora \vec{P} , vrši se preslikavanje u xy -ravni po jednačinama

$$X^* = X, \quad Y^* = Y, \quad M^* = cZ \quad \dots (43.1)$$

t.j. x - i y -komponente datog i preslikanog vektora su podudarni, a moment preslikanog vektora proporcionalan je z -komponenti datog vektora. Konstanta c zove se konstanta preslikavanja.

Na sl. 87 a) i b) prikazan je vektor \vec{P} svojom vertikalnom P'' i horizontalnom P' projekcijom. Tima dvema projekcijama određene su i komponente X, Y, Z vektora \vec{P} .

Silu \vec{P}^* u koordinatnom sistemu $O^*x^*y^*$ (sl. c) dobićemo ovom konstrukcijom: Na x^* osovini prenesemo konstantu $c = O^*F$, iz F povučemo paralelu sa P'' do preseka T sa y^* -osovinom, a iz T povučemo paralelu sa P' . Ova poslednja je napadna linija slike \vec{P}^* , a njena veličina je ravna veličini P' .



Sl. 87

Sa uglovima naznačenim u sl. 87 a-d, čitamo ove relacije,

$$P' = P \cos \varphi = Z \cot \beta, \quad O^*T = c \cdot \tan \beta$$

$$O^*N = p = O^*T \cos \alpha = c \tan \beta \cdot \cos \alpha.$$

Moment sile P^* u pogledu tačke O^* je

$$M^* = pP' = pZ \cot \beta = c \cdot Z \cdot \tan \beta \cdot \cos \alpha \cdot \cot \beta.$$

Iz sl. d) vidimo da je $\tan \beta = \frac{\tan \varphi}{\cos \alpha}$ ili $\tan \beta \cdot \cos \alpha \cdot \cot \beta = 1$, dakle je $M^* = cZ$, kao što jedn. (43.1) zahteva. Time je opisna konstrukcija slike P^* dokazana. Konstrukcija nije izvodljiva za sile upravne na ravan preslikavanja.

Po jedn. (43.1) preslikavaju se ∞^2 vektori $\vec{P} // z$ -osovini i ∞^1 spregova sZ u xy -ravni.

Iz konstrukcije slike vidimo da se svi vektori na istoj napadnoj liniji g preslikavaju u istu napadnu liniju g^* , jer g^* zavisi samo od pravaca projekcija g' i g'' a nezavisna je od veličine P .

Ako je data slika P^* nekog vektora, nalazimo njegove projekcije P' i P'' izvodeći konstrukciju u obrnutom redu.

U nekoliko zadataka upoznaćemo se sa nekim važnijim stavovima ove metode.

$$\delta = + 1,708 \text{ m.}$$

$$- 0,836 \text{ m.}$$

Iz jedn. (42,7 a) dobijamo

$$A = \frac{2}{0,9397} [1,10 \cdot 0,342 \pm 1,196] = + 3,344 \text{ m.}$$

$$- 1,744 \text{ m.}$$

$$A' = \frac{2}{0,9397} [1,30 \cdot 0,349 - 1,196] = + 3,488 \text{ m.}$$

$$- 1,598 \text{ m.}$$

Sa gornjim znacima daju jedn. (42.10b)

$$e_1 = 1,672 \text{ m.}, \quad e_1' = + 1,744 \text{ m.};$$

$$e_2 = + 1,672 \text{ m.}, \quad e_2' = - 1,744 \text{ m.}$$

$$A + A' = + 3,344 + 3,488 = 6,832 \text{ m} = 4 \cdot 1,708 = 4\delta.$$

$$OM = \delta - \frac{A}{2} = \frac{1,708 - 1,672}{2} = 0,036 \text{ m.}$$

$$- 0,836 + 0,812$$

kao u prvom primeru.

Dalje nalazimo

$$\cotg \alpha_1 = \frac{e_2}{p_1} = + \frac{1,672}{1,10} = + 1,520; \quad \cotg \alpha_2 = \frac{e_1}{p_1} = - 1,520;$$

$$\cotg \alpha_1' = \frac{e_2'}{p_2} = - \frac{1,744}{1,30} = - 1,341; \quad \cotg \alpha_2' = \frac{e_1'}{p_2} = + 1,341.$$

$$\alpha_1 = 33^\circ 20', \quad \alpha_2 = 146^\circ 40'; \quad \alpha_1' = 143^\circ 20', \quad \alpha_2' = 36^\circ 40'.$$

Postoje relacije

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1' - \alpha_2' = 2\pi; \quad \alpha_1 + \alpha_2' = 70^\circ = \varphi; \quad \alpha_1' + \alpha_2 = 2\pi - \varphi;$$

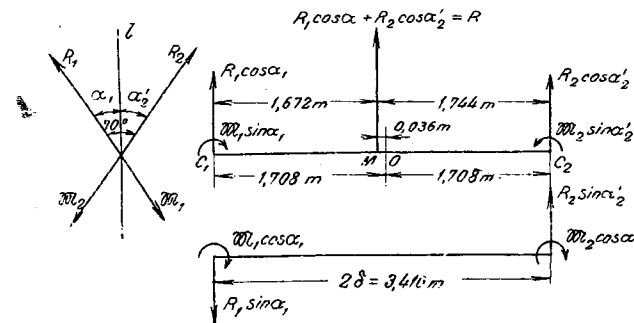
i trigonometrijske funkcije:

$$\sin \alpha_1 = 0,5495, \quad \cos \alpha_1 = 0,8355,$$

$$\sin \alpha_2' = 0,5972, \quad \cos \alpha_2' = 0,8021.$$

Rezultanta R na koju se obe dinamke svode, mora imati \bar{l} za napadnu liniju, sile R_1 i R_2 nisu medjusobom nezavisne. Medju njima postoji odnos $R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2'$, i sa navedenim vrednostima je $R_1 = 1,0868 R_2$. Komponente sile R_1 i R_2 , spregova

\mathcal{M}_1 i \mathcal{M}_2 u pravcu \bar{l} i upravno na \bar{l} su (sl.86):



Sl. 86

$$R_1 \cos \alpha_1 = 0,9079 R_2, \quad R_2 \cos \alpha_2' = 0,8021 R_2;$$

$$R_2 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2' = 0,5972 R_2,$$

i sa $\mathcal{M}_1 = p_1 R_1 = 1,10 \cdot 1,0868 R_2 = 1,1955 R_2$ i $\mathcal{M}_2 = p_2 R_2 = 1,30 R_2$ imamo

$$\mathcal{M}_1 \cos \alpha_1 = 0,9989 R_2, \quad \mathcal{M}_2 \cos \alpha_2' = 1,0427 R_2$$

$$\mathcal{M}_1 \sin \alpha_1 = 0,6568 R_2, \quad \mathcal{M}_2 \sin \alpha_2' = 0,7763 R_2,$$

Rezultanta

$$R = R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2' = 1,710 R_2.$$

Momentna jednačina sile i spregova u vertikalnoj ravni u pogledu na tačku C_2 glasi

$$1,710 x' = 0,9079 \cdot 3,416 + 0,6568 - 0,7763 = 2,982$$

i odavde

$$x' = \frac{2,982}{1,710} = 1,744 = e_1'$$

što smo ranije našli.

U pogledu na tačku C_1 glasi momentna jednačina

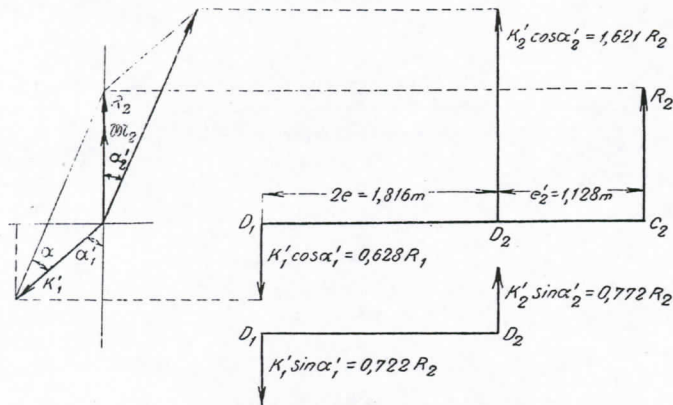
$$1,710 x = 0,8021 \cdot 3,416 - 0,6568 + 0,7763 = 2,8594$$

i odavde

$$x = \frac{2,8594}{1,71} = 1,672 \text{ m} = e_1.$$

kao što smo ranije našli.

Za dinam $R_2 \mathcal{M}_2$ imamo ekvivalentan krst (K'_1, K'_2) sa istim napadnim linijama l_1 i l_2 (sl.84).



Sl. 84

Trigonometrijske funkcije za približne vrednosti uglova $\alpha'_1 = 49^\circ$, $\alpha'_2 = 24^\circ$, su

$$\sin \alpha'_1 = 0,754, \quad \cos \alpha'_1 = 0,656;$$

$$\sin \alpha'_2 = 0,407, \quad \cos \alpha'_2 = 0,914.$$

$$K'_1 = \frac{\sin \alpha'_2}{\sin \alpha} R_2 = \frac{0,407}{0,425} R_2 = 0,958 R_2;$$

$$K'_2 = \frac{\sin \alpha'_1}{\sin \alpha} R_2 = \frac{0,754}{0,425} R_2 = 1,774 R_2.$$

$$K'_1 \cos \alpha'_1 = 0,958 \cdot 0,656 R_2 = 0,628 R_2;$$

$$K'_2 \cos \alpha'_2 = 1,774 \cdot 0,914 R_2 = 1,621 R_2,$$

$$K'_2 \cos \alpha'_2 - K'_1 \cos \alpha'_1 = [1,621 - 0,628] R_2 = 1,008 R_2.$$

(tačno $1,00 R_2$),

$$K'_1 \sin \alpha'_1 = 0,958 \cdot 0,754 R_2 = 0,722 R_2;$$

$$K'_2 \sin \alpha'_2 = 1,774 \cdot 0,407 R_2 = 0,722 R_2.$$

$$\mathcal{M}_2 = 2e K'_1 \sin \alpha'_1 = 1,816 \cdot 0,722 R_2 = 1,311 R_2.$$

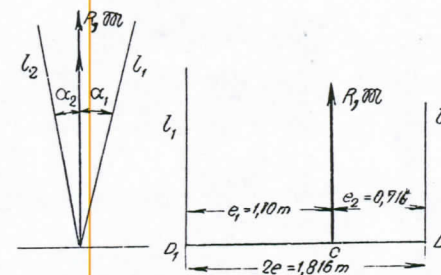
(tačno $1,30 R_2$).

Dve diname R_1, \mathcal{M}_1 i R_2, \mathcal{M}_2 čije se centralne osovine

ukrštaju pod uglom $\vartheta = 70^\circ$ u najkraćem rastojanju $2\delta = 4,00$ m razložili smo u krstove (K_1, K_2) i (K'_1, K'_2) koji imaju iste napadne linije l_1 i l_2 sa najkraćim rastojanjem $2e = 1,876$ m i uglom $\alpha = 25^\circ 13'$. Obe centralne izvodnice su izvodnice cilindroida koji je direktrisa l_1 i l_2 određen.

Jednim uglom, na pr. α_1 određeno je i rastojanje e_1 i parametar diname $R_1 \mathcal{M}_1$.

Uzmimo na pr. $\alpha_1 = 15^\circ 13'$, onda je $\alpha_2 = 25^\circ 13' - 15^\circ 13'$ (sl.85).



Sl. 85

Sa $e_1 = p \cot \alpha_2$ i $e_2 = p \cot \alpha_1$ nalazimo

$$2e = e_1 + e_2 = p(\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2)$$

i sa $2e = 1,816$ m,

$$\cot \alpha_1 = 3,689,$$

$$\cot \alpha_2 = 5,671$$

je

$$p = \frac{1,816}{3,689 + 5,671} = 0,194 \text{ m.}$$

Sa ovom vrednošću p je

$$e_1 = 0,194 \cdot 5,671 = 1,100 \text{ m.}$$

$$e_2 = 0,194 \cdot 3,689 = 0,716 \text{ m.}$$

$$2e = 1,816 \text{ m.}$$

2 PRIMER, Uzmimo kao u 1. primeru $\vartheta = 70^\circ$, $p_1 = 1,10$ m

$p_2 = 1,30$ m. Nalazimo

$$\sin \vartheta = 0,9397, \quad \cos \vartheta = 0,3420, \quad \sqrt{p_1 p_2} = 1,196.$$

Iz jedn. (42.13) dobijamo vrednost δ za koju će $A^2 - 4B = 0$ biti, dakle će se direktrise l_1 i l_2 poklopiti sa pravom l .

$$\delta = \frac{1}{0,9397} \left[\frac{1}{2} (1,10 + 1,30) 0,3420 \pm 1,196 \right] = + \frac{1,606}{0,9397} \text{ i } - \frac{0,786}{0,997};$$

$$OM = \frac{1}{2} 0,0728 = 0,036 \text{ m ;}$$

$$MC_1 = \frac{A}{2} = 1,964 \text{ m ;}$$

$$MC = \frac{A'}{2} = 2,036 \text{ m}$$

Sa gornjih nacima jedn. (42.10a) nalazimo tražena rastoja-
nja

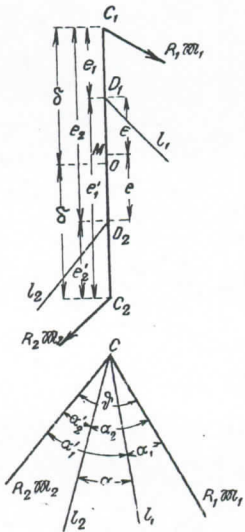
$$e_1 = -1,056 \text{ m ; } e_2 = +2,872 \text{ m ;}$$

$$e'_1 = +2,944 \text{ m ; } e'_2 = -1,128 \text{ m .}$$

Za kontrolu računa služe nam relacije $A + A' = 4\delta$, $e_1 + e_2 =$
 $= e'_1 + e'_2 = 2e$, $1A = e_2 - e_1$, $A' = e'_1 - e'_2$, $e'_1 - e_1 = e_2 - e'_2 =$
 $= 2\delta$, koje su zadovoljene. Po obrascima (42.2) nalazimo

$$\cotg\alpha_1 = \frac{e_2}{p_1} = \frac{2,872}{1,10} = 2,611 ; \quad \cotg\alpha_2 = \frac{e_1}{p_1} = -\frac{1,056}{1,10} = -0,960 ;$$

$$\cotg\alpha'_1 = \frac{e'_2}{p_2} = -\frac{1,128}{1,30} = -0,868 ; \quad \cotg\alpha'_2 = \frac{e'_1}{p_2} = \frac{2,944}{1,30} = 2,264 .$$



Sl. 82

Ovim vrednostima odgovaraju oštri uglovi:

$$\alpha_1 = 20^\circ 57' 30'' , \quad \alpha_2 = 46^\circ 10' 10'' ;$$

$$\alpha'_1 = 49^\circ 2' 30'' , \quad \alpha'_2 = 23^\circ 49' 50'' ,$$

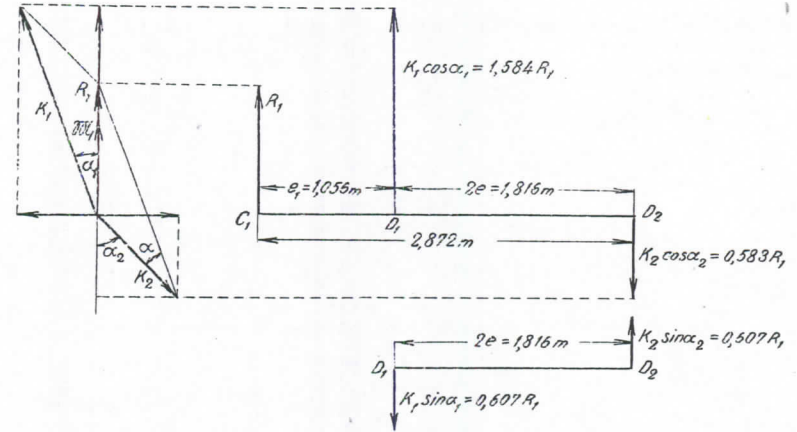
Kao proba služi (sl.82)

$$\alpha_1 + \alpha'_1 = \alpha_2 + \alpha'_2 = \varphi = 70^\circ .$$

Ugao ukrštanja direktrisa l_1 i l_2 je

$$\alpha = \varphi - \alpha_1 - \alpha'_2 = 25^\circ 12' 40'' .$$

Radi kontrole računa složićemo krst (K_1, K_2) u dinam $R_1 \mathcal{M}_1$, i krst (K'_1, K_2) u dinam $R_2 \mathcal{M}_2$. Sa uglovima označenim u sl. 83 nalazimo iz paralelograma $\vec{R}_1 = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$:



Sl. 83

$$\frac{K_1}{\sin\alpha_2} = \frac{K_2}{\sin\alpha_1} = \frac{R_1}{\sin\alpha}$$

Sa približnim vrednostima $\alpha_1 = 21^\circ$, $\alpha_2 = 46^\circ 10'$, $\alpha = 25^\circ 10'$
su

$$\sin\alpha_1 = 0,358 , \quad \cos\alpha_1 = 0,934 , \quad \sin\alpha_2 = 0,721 ,$$

$$\cos\alpha_2 = 0,692 , \quad \sin\alpha = 0,425 , \quad \cos\alpha = 0,905 .$$

$$K_1 = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha} R_1 = \frac{0,721}{0,425} R_1 = 1,696 R_1 ;$$

$$K_2 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} R_1 = \frac{0,358}{0,425} R_1 = 0,842 R_1 .$$

$$K_1 \cos\alpha_1 = 1,696 \cdot 0,934 R_1 = 1,584 R_1 ;$$

$$K_2 \cos\alpha_2 = 0,842 \cdot 0,692 R_1 = 0,583 R_1 .$$

$$K_1 \cos\alpha_1 - K_2 \cos\alpha_2 = [1,584 - 0,583] R_1 = 1,001 R_1 .$$

(tačno $1,00 R_1$) ,

$$K_1 \sin\alpha_1 = 1,696 \cdot 0,358 R_1 = 0,607 R_1 ;$$

$$K_2 \sin\alpha_2 = 0,842 \cdot 0,721 R_1 = 0,607 R_1 .$$

$\mathcal{M}_1 = 2e$ i $K_1 \sin\alpha = 1,816 \cdot 0,607 R_1 = 1,102 R_1$. (tačno $1,10 R_1$) .

Od ovih 8 vrednosti imaju po dve istu veličinu a razlikuju se po znaku. Imamo dakle četiri razne veličine od kojih po dve sa raznim donjim indeksima, dakle e_1 i e_2 , e'_1 i e'_2 , e_1 i e'_2 , e'_1 i e_2 jednoznačno određuju tačke D_1 i D_2 u kojima direktrise l_1 i l_2 seku osovinu kongruencije C_1C_2 . Iz jednačina (42.7) nalazimo

$$A^2 - 4B = 4e^2 = 4\delta^2 + (p_2 - p_1)^2 \cotg^2 \vartheta - 4\delta(p_2 + p_1) \cotg \vartheta - 4p_1 p_2 \quad (42.12)$$

ili

$$e^2 = \delta^2 + \left[\frac{p_2 - p_1}{2} \cotg \vartheta \right]^2 - \delta(p_2 - p_1) \cotg \vartheta - p_1 p_2 \quad (42.12a)$$

Pošto smo našli rastojanja e_1 , e_2 , e'_1 i e'_2 možemo iz jednačine (42.2) naći uglove α_1 , α_2 , α'_1 , α'_2 i time je i ugao ukrštanja direktrisa $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_1 + \alpha'_2$ određen.

Ako je $A^2 - 4B = 0$, dakle $e = 0$, direktrise se seku u tački M, kongruencija degeneriše, kao što iz čl. 37 znamo, u dva odvojena kompleksa.

Sa $e^2 = 0$ dobijamo iz jednačine (42.12)

$$\delta = \frac{1}{\sin \vartheta} \left[\frac{1}{2}(p_1 + p_2) \cos \vartheta \pm \sqrt{p_1 p_2} \right] \quad \dots (42.13)$$

i zamenujući ovu vrednost za δ u (42.7) nalazimo

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2}{\sin \vartheta} \left[p_1 \cos \vartheta \pm \sqrt{p_1 p_2} \right], \\ B &= \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left[p_1 \cos \vartheta \pm \sqrt{p_1 p_2} \right]^2 = \frac{A^2}{4} \\ A' &= \frac{2}{\sin \vartheta} \left[p_2 \cos \vartheta \pm \sqrt{p_1 p_2} \right], \\ B' &= \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left[p_2 \cos \vartheta \pm \sqrt{p_1 p_2} \right]^2 = \frac{A'^2}{4} \end{aligned} \right\} \dots (42.7a)$$

Jednačine (42.10) prelaze u

$$e_1 = -\frac{A}{2}, \quad e_2 = +\frac{A}{2}; \quad e'_1 = +\frac{A'}{2}, \quad e'_2 = -\frac{A'}{2} \quad \dots (42.10 b).$$

Sa ovim vrednostima dobijamo iz jednačina (42.2)

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_1 + \alpha'_2 = \pi, \quad \dots (42.14)$$

a to znači da se direktrise l_1 i l_2 poklapaju u jednu pravu l . Dve dinamne $R_1, \omega l_1$ i $R_2, \omega l_2$ medju čijim uglom ukrštanja ϑ i najkraćim rastojanjem 2δ postoji relacija (42.13) slažu se dakle u jednu rezultantu $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ koja ima napadnu liniju l . Sile R_1 i R_2 ne mogu po veličini biti nezavisne, medju njima mora postojati odnos

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \alpha'_2}{\sin \alpha_1}$$

ili medju momentima

$$\frac{\omega l_1}{\omega l_2} = \frac{p_1 \sin \alpha'_2}{p_2 \sin \alpha_1}$$

Rastojanje OM jedn. (42.9) ostaje isto kao i u opštem slučaju ($A^2 - 4B > 0$). Obrascе koje smo u ovom članu izveli, primenićemo na dva brojna primera.

1. PRIMER. Date su veličine $p_1 = 1,10$ m, $p_2 = 1,30$ m, $\delta = 2$ m, $\vartheta = 70^\circ$ ($\cotg \vartheta = 0,364$). $p_2 \cotg \vartheta = 0,4732$, $p_1 \cotg \vartheta = 0,4004$, $(p_2 - p_1) \cotg \vartheta = 0,0728$, $p_1 p_2 = 1,43$. Sa ovim vrednostima po (42.7)

$$A = 4,00 - 0,0728 = 3,9272, \quad B = 4 \cdot 0,4004 + 1,43 = 3,0316, \\ A' = 4,00 + 0,0728 = 4,0728, \quad B' = 4 \cdot 0,4732 + 1,43 = 3,3228.$$

Po jedn. (42.11):

$$\sqrt{A^2 - 4B} = \sqrt{A'^2 - 4B'} = \sqrt{3,2964},$$

dakle

$$e = \frac{1}{2} \sqrt{3,2964} = 0,908 \text{ m.}$$

Po jedn. (42.9) je :

$$2\delta = e'_1 - e_1 = p_2 \cotg \alpha_2 - e_1 = p_2 \cotg(\alpha_2 + \vartheta) - e_1 = \\ = p_2 \frac{\frac{e_1}{p_1} \cotg \vartheta - 1}{\cotg \vartheta + \frac{e_1}{p_1}}$$

i po izvršenju operacija

$$e_1^2 + e_1 [2\delta - (p_2 - p_1) \cotg \vartheta] + \\ + 2\delta p_1 \cotg \vartheta + p_1 p_2 = 0 \quad \dots (42.3)$$

analogo nalazimo

$$2\delta = e_2 - e'_2 = e_2 - p_2 \cotg \alpha'_1 = \\ = e_2 - p_2 \cotg(\alpha_1 - \vartheta) = e_2 - p_2 \frac{e_2 \cotg \vartheta + p_1}{p_1 \cotg \vartheta - e_2}$$

i sredjeno po e_2 :

$$e_2^2 - e_2 [2\delta - (p_2 - p_1) \cotg \vartheta] + \\ + 2\delta p_1 \cotg \vartheta + p_1 p_2 = 0 \quad \dots (42.4)$$

$$2\delta = e'_1 - p_1 \cotg(\alpha'_2 - \vartheta) = e'_1 - p_1 \frac{e'_1 \cotg \vartheta + p_2}{p_2 \cotg \vartheta - e'_1}$$

i sredjeno po e'_1 :

$$e_1'^2 - e'_1 [2\delta + (p_2 - p_1) \cotg \vartheta] + \\ + 2\delta p_2 \cotg \vartheta + p_1 p_2 = 0 \quad \dots (42.5)$$

najzad

$$2\delta = p_1 \cotg(\alpha'_1 + \vartheta) - e'_2 = p_1 \frac{e'_2 \cotg \vartheta - p_2}{p_2 \cotg \vartheta + e'_2}$$

i odavde

$$e_2'^2 + e'_2 [2\delta + (p_2 - p_1) \cotg \vartheta] + \\ + 2\delta p_2 \cotg \vartheta + p_1 p_2 = 0 \quad \dots (42.6)$$

Kada u jednačine 3-6 unesemo kraće oznake

$$A = 2\delta - (p_2 - p_1) \cotg \vartheta, \quad B = 2\delta p_1 \cotg \vartheta + p_1 p_2 \quad \dots (42.7) \\ A' = 2\delta + (p_2 - p_1) \cotg \vartheta, \quad B' = 2\delta p_2 \cotg \vartheta + p_1 p_2$$

glasiće one

$$\left. \begin{aligned} e_1^2 + A e_1 + B = 0, \quad e_2^2 - A e_2 + B = 0 \\ e_1'^2 + A' e_1' + B' = 0, \quad e_2'^2 + A' e_2' + B' = 0 \end{aligned} \right\} \dots (42.3 \text{ a} - 6 \text{ a})$$

Sabiranjem gornjeg i donjeg para jednačina dobijamo posle skraćivanja

$$A = e_2 - e_1 \quad \text{i} \quad A' = e'_1 - e'_2 \quad \dots (42.8)$$

Kada sa O obeležimo tačku koja polovi rastojanje $2\delta = C_1 C_2 = \frac{A + A'}{2}$, a sa M tačku koja polovi $2e = D_1 D_2$, nalazimo

$$MC_1 = \frac{A}{2}, \quad MC_2 = \frac{A'}{2}, \quad OM = \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \cotg \vartheta \quad \dots (42.9)$$

Iz jednačina (42.3 a-6a) nalazimo

$$\left. \begin{aligned} e_1 = -\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - 4B}, \quad e_1' = +\frac{A'}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A'^2 - 4B'} \\ e_2 = +\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - 4B}, \quad e_2' = -\frac{A'}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A'^2 - 4B'} \end{aligned} \right\} \dots 42.10$$

Zbir prva dva izraza daje

$$e_1 + e_2 = 2e = \pm \sqrt{A^2 - 4B}$$

a zbir druga dva:

$$e_1' + e_2' = 2e = \pm \sqrt{A'^2 - 4B'}$$

dakle je

$$\sqrt{A^2 - 4B} = \sqrt{A'^2 - 4B'} = 2e \quad \dots (42.11)$$

Sa smenom korena iz (42.11) glase jednačine (42.10)

$$\left. \begin{aligned} e_1 = -\frac{A}{2} \pm e, \quad e_2 = +\frac{A}{2} \pm e, \\ e_1' = \frac{A'}{2} \pm e, \quad e_2' = -\frac{A'}{2} \pm e \end{aligned} \right\} \dots (42.10a)$$

Iz jednačina (42.10a) izlaze relacije

$$e_1' - e_1 = e_2 - e_2' = \frac{A + A'}{2} = 2\delta$$

da je za dve osovine $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha \pm \vartheta)$, a za druge dve je $\alpha_1 = \frac{1}{2}[\pi + (\alpha \pm \vartheta)]$.

Kada ugao izmedju direktrisa označimo mesto sa α sa 2α , a sa φ označimo ugao koji zaklapa centralna osovina sa pravom koja polovi ugao 2α (čl.39 sl.77), najzad i u jednačinama (41.5) zamenimo $\alpha_1 = \alpha - \varphi$, $\alpha_2 = \alpha + \varphi$, a α sa 2α prelazi ona u jednačimu cilindroida (39.2).

Obrascze za p i z možemo izraziti samo veličinama K_1, K_2, e i α kada u

$$p = -e \cdot K_1 \frac{\sin \alpha_1}{R}$$

zamenimo

$$\sin \alpha_1 = \frac{K_2}{R} \sin \alpha$$

a u

$$e_2 = e K_1 \frac{\cos \alpha_1}{R}$$

unesemo

$$R \cos \alpha_1 = K_1 + K_2 \cos \alpha$$

Tako dobijamo

$$\left. \begin{aligned} p &= -e \frac{K_1 \cdot K_2}{R^2} \sin \alpha = -\frac{e}{2} \frac{2 K_1 K_2 \sin \alpha}{K_1^2 + K_2^2 + 2 \cdot K_1 K_2 \cos \alpha} \\ z &= e_2 - \frac{e_1}{z} = \frac{e}{2 R^2} (2 K_1 R \cos \alpha_1 - R^2) = \\ &= \frac{e}{2} \frac{K_1^2 - K_2^2}{K_1^2 + K_2^2 + 2 K_1 K_2 \cos \alpha} \end{aligned} \right\} \dots (41.6)$$

Ako označimo odnos $\frac{K_1}{K_2} = \lambda$, prelaze ovi obrasci u čisto matematičke izraze

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{e}{2} \frac{2 \lambda \cos \alpha}{\lambda^2 + 2 \lambda \cos \alpha + 1} \\ z &= \frac{e}{2} \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 2 \lambda \cos \alpha + 1} \end{aligned} \right\} \dots (41.6a)$$

Broj λ varira izmedju 0 ($K_1 = 0$) i ∞ ($K_2 = 0$)

$$\text{Za } \lambda = 0 \text{ je } p = 0, \quad z = -\frac{e}{2}.$$

$$\text{Za } \lambda = \infty \text{ je } p = 0, \quad z = +\frac{e}{2}.$$

Za ove granične vrednosti izlazi iz $p = \frac{\omega \omega}{R} = 0$ da je $\omega \omega = 0$, dinama prelazi u silu K_1 odnosno K_2 .

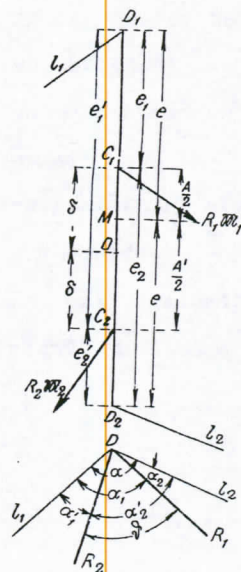
42. ODREĐIVANJE DIREKTRISA KONGRUENCIJE IZ DVE DATE DINAME (KOMPLEKSA). Date su diname $R_1, \omega \omega_1$ i $R_2, \omega \omega_2$ dakle i njihovi parametri $p_1 = \frac{\omega \omega_1}{R_1}$ i $p_2 = \frac{\omega \omega_2}{R_2}$, njihovo najkraće rastojanje $2\delta = C_1 C_2$ i ugao ukrštanja ϑ (sl.81). Znamo da

je time određena kongruencija t.j. nje- ne direktrise l_1 i l_2 sa najkraćim rastojanjem $2e = D_1 D_2$ i uglom ukrštanja $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1' + \alpha_2'$. One su konjugovane prave za sve komplekse (37.2). Sa oznakama sl.81 čitamo iz slike relacije

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1' + \vartheta, \quad \alpha_2' = \alpha_2 + \vartheta, \\ 2\delta &= e_1' - e_1 = e_2 - e_2' \end{aligned} \right\} \dots (42.1)$$

a po jedn. (29.6)

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= p_1 \cotg \alpha_2, \\ e_2 &= p_1 \cotg \alpha_1; \\ e_1' &= p_2 \cotg \alpha_2'; \\ e_2' &= p_2 \cotg \alpha_1'; \end{aligned} \right\} \dots (42.2)$$



Sl. 81

Zamenom uglova i rastojanja u jednačine za 2δ , dobijamo 4 kvadratične jednačine za 4 rastojanja e_1, e_2, e_1' i e_2' .

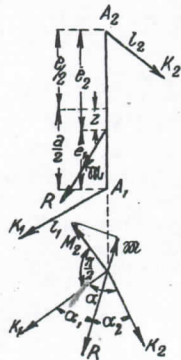
izvodnice cilindroida. Ovaj ima dakle za slaganje dinamama isti značaj, što ga ima paralelogram za slaganje sila.

Za $p_1 = p_2$ prelazi jedn.(40.6) u jednačinu (29.6a):

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}$$

koju smo našli pri slaganju krsta (K_1, K_2) u dinamama.

41. ODREĐIVANJE CENTRALNE OSOVINE I PARAMETRA SVIH KOMPLEKSA (DINAMA) KOJE PRIPADAJU DATOJ KONGRUENCIJI. Data nam je kongruencija svojim direktrisama l_1 i l_2 najkraćim njihovim rastojanjem "e" i uglom ukrštanja α (sl.80). Neka dinamama R, ω seče osovinu kongruencije $A_1A_2 = e$ u tački C udaljenoj od tačaka A_1 i A_2 za $A_1C = e_1$, $A_2C = e_2$. Znamo da su direktrise l_1 i l_2 kongruencije napadne linije krstova (K_1, K_2) za sve dinamama (komplekse) koji pripadaju datoj kongruenciji. Menjanjem odnosa $\frac{K_1}{K_2}$ dobijamo sve dinamama koje nam treba odrediti. Ako R zaklapa sa K_1 i K_2 uglove α_1 i α_2 imamo



Sl. 80

iz čl. 29 poznate relacije

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2 K_1 K_2 \cos \alpha} \\ \frac{R}{\sin \alpha} &= \frac{K_1}{\sin \alpha_2} = \frac{K_2}{\sin \alpha_1} \end{aligned} \right\} \dots (41.1)$$

Momenat sistema (K_1, K_2) za tačku A_2 je $M_2 = K_1 e$. Momenat dinamama ω je ravan projekciji momenta M_2 na pravac R_1 , dakle

$$\omega = M_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -K_1 e \sin \alpha_1$$

i kada K_1 zamenimo iz (41.1) sa $K_1 = \frac{R \sin \alpha_2}{\sin \alpha}$,

$$\omega = -e \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{\sin \alpha} R_1 \dots (41.2)$$

parametar dinamama je

$$p = \frac{\omega}{R} = -e \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{\sin \alpha} = -e \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin \alpha}$$

Razvijanjem sinusa diferencije ($\alpha - \alpha_1$) i uvođenjem $\sin^2 \alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha_1)$ dobijamo

$$p = \frac{e \cos(\alpha - 2\alpha_1) - \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{e \cos(2\alpha_2 - \alpha) - \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \dots (41.3)$$

dakle zakon po kome se p menja sa α_1 odnosno sa α_2

Rastojanja e_1, e_2 dobivamo kao u čl. 29 (jedn.5) $e_2 = e \frac{K_1 \cos \alpha_1}{R}$ i sa $R = \frac{K_1 \sin \alpha}{\sin \alpha_2}$

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= e \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}{\sin \alpha} \\ \text{i analogo} \\ e_1 &= e \frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \dots (41.4)$$

Sabiranjem jednačina (41.4) dobijamo $e_1 + e_2 = e$.

Ako za početak izaberemo tačku M koja polovi osovinu "e" kongruencije imamo

$$MC = z = \frac{e}{2} - e_1 = e_2 - \frac{e}{2}$$

Sa e_2 iz (41.4) biće

$$z = e \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1}{\sin \alpha} - \frac{e}{2} = \frac{e}{2 \sin \alpha} (2 \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 - \sin \alpha)$$

Trigonometrijskom transformacijom dobijamo

$$z = \frac{e}{2} \frac{\sin(2\alpha_2 - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{e}{2} \frac{\sin(\alpha - 2\alpha_1)}{\sin \alpha} \dots (41.5)$$

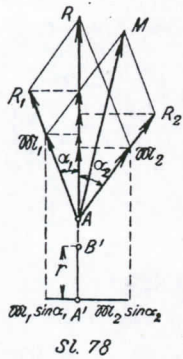
Po četiri centralne osovine imaju isto rastojanje $\pm z$ od centralne ravni kongruencije. Jer ako označimo $\alpha - 2\alpha_1 = \pm \psi$, on-

$$z = a \cdot \sin 2\omega t, \dots (39.2 b)$$

prestavlja dakle harmoničnu oscilaciju duž osovine „z“ sa amplitudom „a“ i periodom $T = \frac{\pi}{\omega}$. Cilindroid opisuje prava koja je upravna na z-osovinu i izvodi dve pune oscilacije duž prave „z“ za isto vreme u kom izvrši jedan obrt oko z-osovine.

40. SLAGANJE DINAMA. a) Centralne osovine se seku.

Diname $R_1 \omega_1$ i $R_2 \omega_2$ seku se pod uglom $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ u tački A (sl. 78). Pretpostavljamo da njihovi parametri p_1 i p_2 imaju različite veličine. Vektori $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ i $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ neće biti paralelni jer njihovi paralelogrami nisu slični. Veličinu R nalazimo iz trougla sila a uglove α_1 i α_2 nalazimo iz odnosa



$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R_1}{\sin \alpha_2} = \frac{R_2}{\sin \alpha_1}$$

Spreg rezultujuće diname ima momenat $M = \omega_1 \cos \alpha_1 + \omega_2 \cos \alpha_2$ i time je i njen parameter $\frac{M}{R} = p$ određen.

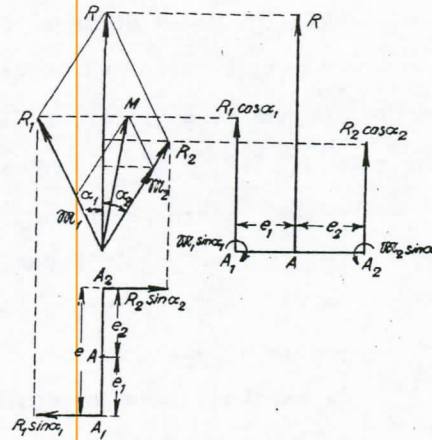
Osim R i M dejstvuje u tački A (čija je projekcija A') još i spreg koji leži u ravni položenoj kroz R upravno na R_1 i R_2 i čiji je momenat

$$M_V = \omega_2 \sin \alpha_2 - \omega_1 \sin \alpha_1 \dots (40.1)$$

Usled sprega M_V pomera se R iz A' i B' za dužinu $A'B' = r = \frac{M_V}{R}$.

Obe date diname slažu se dakle u dinam $R \omega$, čija osovina prolazi kroz B.

b) Diname se ukrštaju. Najkraće odstojanje centralnih osovine je $e = e_1 + e_2$, ugao ukrštanja $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ (sl.



Sl. 79

79). Rezultantu R i uglove α_1, α_2 nalazimo kao i pod a). Horizontalne komponente sila R_1 i R_2 obrazuju spreg

$$e \cdot R_1 \sin \alpha_1 = e \cdot R_2 \sin \alpha_2, \dots (40.2)$$

dakle je spreg rezultujuće diname

$$\omega = \omega_1 \cos \alpha_1 + \omega_2 \cos \alpha_2 - e \cdot R_1 \sin \alpha_1 \dots (40.3)$$

a parameter diname $p = \frac{M}{R}$. Rastojanja e_1 i e_2 rezultujuće diname od A_1 i A_2 naći ćemo iz momentnih jednačina za tačke A_1 i A_2 .

$$\left. \begin{aligned} R \cdot e_1 &= R_2 \cos \alpha_2 e + \omega_2 \sin \alpha_2 - \omega_1 \sin \alpha_1 \\ R \cdot e_2 &= R_1 \cos \alpha_1 e + \omega_1 \sin \alpha_1 - \omega_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots (40.4)$$

Kada u jednačini (40.1) smenimo jedanput $\sin \alpha_1 = \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha_2$, drugi put $\sin \alpha_2 = \frac{R_1}{R_2} \sin \alpha_1$ i uvedemo parametre, glasiće ona

$$M_V = R_2 \sin \alpha_2 (p_2 - p_1) = R_1 \sin \alpha_1 (p_2 - p_1) \dots (40-1a)$$

i sa ovom vrednošću nalazimo iz jednačine (40.4)

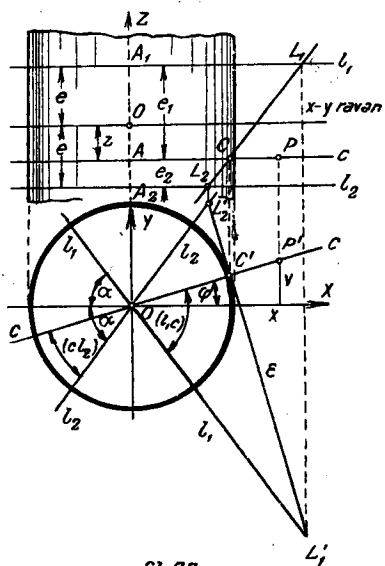
$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{R_2}{R} [e \cos \alpha_2 + (p_2 - p_1) \sin \alpha_2] \\ e_2 &= \frac{R_1}{R} [e \cos \alpha_1 - (p_2 - p_1) \sin \alpha_1] \end{aligned} \right\} \dots (40.5)$$

i odnos rastojanja

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{e \cot \alpha_2 + (p_2 - p_1)}{e \cot \alpha_1 - (p_2 - p_1)} \dots (40.6)$$

Centralne osovine triju dinama (kompleksa) p_1, p_2 i p su

kongruencije l_1, l_2 , dakle i njena osovina koju uzimamo za z-osovinu, najkraće rastojanje $2e = A_1A_2$ i ugao ukrštanja 2α . Centralnu ravan kongruencije uzećemo za xy-ravan, a za x-osovinu pravu koja polovi ugao 2α (sl.77). Znamo da cen-



Sl. 77

tralne osovine svih kompleksa koji pripadaju kongruenciji, seku osovinu z pod pravim uglom, i da su l_1 i l_2 par konjugovanih pravih za sve te komplekse.

Oko z-osovine opišimo kružni cilindar sa proizvoljnim poluprečnikom i položimo na njega proizvoljnu tangencijalnu ravan ϵ . Direktrise l_1 i l_2 prodiraće ravan ϵ u tačkama L_1

i L_2 ; njihove su horizontalne projekcije L_1' i L_2' . Prava L_1L_2 seče obe konjugovane prave (direktrise) l_1 i l_2 , dakle je ona jedna prava kompleksa ili nulta linija. Ona dodiruje cilindar u tački C, dakle je poluprečnik cilindra AC (u horizontalnoj projekciji $C'O$) najkraće rastojanje između ukrštenih pravih $\overline{L_1L_2}$ i z-osovine.

Kada označimo uglove koje zaklapa osovina OC' (kraće c-osovina) sa pravama l_1 i l_2 sa (l_1c) i (cl_2) čitamo iz sl.77 :

$$\frac{\text{tg}(l_1c)}{\text{tg}(cl_2)} = \frac{L_1C'}{C'L_2} = \frac{L_1C}{CL_2} = \frac{A_1A_2}{AA_2} \dots (39.1)$$

Kada sa φ označimo ugao između c- i x-osovine, biće u usvojenom koordinatnom sistemu $\mp(l_1c) = \alpha + \varphi$, $\mp(cl_2) = \alpha - \varphi$,

$A_1A = e + z$, $AA_2 = e - z$; sa ovim oznakama dobija jednačina 39.1 oblik :

$$\frac{\text{tg}(\alpha + \varphi)}{\text{tg}(\alpha - \varphi)} = \frac{e + z}{e - z} \dots (39.1a)$$

Kada još označimo kraće $\alpha + \varphi = \alpha_1$, $\alpha - \varphi = \alpha_2$, $e + z = e_1$, $e - z = e_2$, dobijamo

$$\frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2} = \frac{e_1}{e_2}$$

jednačinu (29.6a). Time je dokazano da je c-osovina osovina kompleksa kome pripada nulta linija L_1L_2 .

Jednačina (39.1a) važi za svaku tačku $P(x, y, z)$ na c-osovini. Rešavajući je po z nalazimo sa $a = \text{tg}\alpha \cdot \text{sec}^2\varphi$ i $b = \text{tg}\varphi \cdot \text{sec}^2\alpha$, $z = e \frac{b}{a}$ i najzad

$$z = \frac{e}{\sin 2\alpha} \cdot \sin 2\varphi \dots (39.2)$$

Za tačku P na centralnoj osovini c, udaljenu za r od z-osovine je

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2xy}{r^2};$$

sa ovim vrednostima glasi jednačina cilindroida

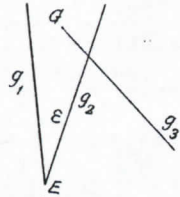
$$z(x^2 + y^2) = \frac{2e}{\sin 2\alpha} x \cdot y; \dots (39.2 a)$$

cilindroid je pravolinijska površina trećeg stepena. Kada sve dužine e, x, y, z, pomnožimo sa nekom konstantom k, ostaje jednačina nepromenjena, t.j. svi cilindroidi su međusobom slični.

Kada u jednačini (39.2) nazovemo konstantu $\frac{e}{\sin 2\alpha} = a$, a ugao $\varphi = \omega t$, gde je ω konstantna ugaona brzina a t^n vreme, glasiće ona

h_3 na istoj površini. Pravolinijsku površinu obrazuju dakle dve grupe ∞^1 pravih koje ćemo kraće zvati grupama (g) i (h). Kroz svaku tačku površine prolazi po jedna prava iz obe grupe.

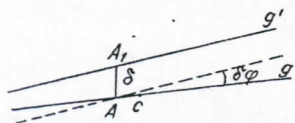
Jednograni hiperboloid (i hiperbolični paraboloid) je dakle na dva načina pravolinijska površina: Njega opisuje svaka prava h koja klizi po trima pravama g_1, g_2 i g_3 , a tačnije i svaka prava g koja klizi po trima pravama h_1, h_2 i h_3 . Ako se dve prave na pr. g_1 i g_2 seku (sl. 74) u tački E



Sl. 74

obrazuju one ravan ε koju prodire g_3 u tački G . Prava koja seče sve tri prave g_1, g_2 i g_3 mora prolaziti kroz E i g_3 , ili mora prolaziti kroz G i ležati u ravni ε . Prave h obrazuju dakle dva ravna pramena sa temenima E i G , pravolinijska površina degeneriše u dve ravni ε i εg_3 . Prave g i h zovu se izvodnice pravolinijske površine.

Dve beskonačno bliske izvodnice g i g' (sl. 75) ukrštaju se pod uglom $\delta\varphi$ i imaju najkraće rastojanje $AA' = \delta q$. Pravolinijska površina je u opšte vitoperna, ona se ne

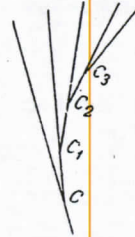


Sl. 75

može položiti u ravan. Kada δq i $\delta\varphi$ teže prema nuli zauzeće tačka A svoj granični položaj C na pravoj g . Tačka C zove se centralna tačka izvodnice g . Geometrijsko mesto svih centralnih tačaka zove se strikciona linija površine (od lat. strictus - sažet, usko vezan). Granična vrednost odnosa $\frac{\delta q}{\delta\varphi}$ zove se p parametar duž izvodnice g .

Ako je za sve izvodnice $\delta\varphi = 0$, one su međjusobno

paralelne, površina je cilindrična. Cilindrične površine mogu se u ravan položiti, one su developable, njihov je parametar $p = \infty$. Ako je pak za sve izvodnice $\delta q = 0$, seče svaka izvodnica svoje susedne izvodnice (sl. 76). Geometrijsko mesto



Sl. 76

tačaka C je kriva linija koja se zove kuspidalna linija (od lat. cuspis - šiljak) jer ona obrazuje oštru ivicu površine. Očevidno su izvodnice površine tangente kuspidalne linije. Površina se stoga zove i tangentna površina. Parametar takve površine koja je de-

velopabla je $p = 0$. Kada se kuspidalna linija svodi na jednu tačku C , prelazi površina u koničnu površinu.

Ako su nam date četiri prave g_1, g_2, g_3 i g_4 , odredjuju po tri na pr. g_1, g_2 i g_3 jedan hiperboloid. Prava g_4 prodiraće hiperboloid kao površinu drugog stepena u dvema tačkama A_1 i A_2 . Prave h_1 i h_2 povučene iz A_1 i A_2 koje su izvodnice grupe (h) hiperboloida seku dakle sve četiri prave g . Time je dokazan stav u čl. 37 da postoje dve određene prave l_1 i l_2 koje seku četiri date prave. Dva para konjugovanih pravih g_1, g_2 i g', g'_2 leže na jednom jednogramnom hiperboloidu i pripadaju istoj grupi njegovih izvodnica. Jer svaka prava l koja seče tri, na pr. g_1, g_2 i g'_1 je nulta linija jer seče g_1 i g_2 . A kako seče i g'_1 , to mora seći i g'_2 . Dakle pripada g'_2 hiperboloidu koji je određen sag_{1,2} i g'_1 .

Kao što pravu definišemo kao presek dveju ravni, a tačku kao presek triju ravni možemo analogo i linearnu kongruenciju definisati kao presek dveju, a pravolinijsku površinu drugog stepena kao presek triju linearnih kompleksa.

39. JEDNAČINA CILINDROIDA. Date su nam direktrise

sve komplekse koje pripadaju toj kongruenciji.

Neka tačka P ima kao pol kompleksa G_1 polarnu (ili ravan) \mathcal{E}_1 . Kao pol kompleksa G_2 ima polarnu ravan \mathcal{E}_2 . Presjek ravnina \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 je dakle zajednička prava oba kompleksa ili, prava kongruencije. Iz ovoga izlaze dva stava:

Kroz svaku tačku prostora prolazi jedna jedina prava kongruencije.

U svakoj ravni prostora leži jedna jedina prava kongruencije.

U idućem članu saznaćemo da postoje uvek dve prave l_1 i l_2 koje seku sve četiri prave g_i . Ove dve ukrštene prave l_1 i l_2 zovu se direktrise kongruencije, njihovo najkraće rastojanje je osovina kongruencije a ravan upravna na osovini u njenoj središnjoj tački zove se centralna ravan kongruencije.

Linearna kongruencija sastoji se iz svih ∞^2 pravih koje seku obe direktrise. Iz definicije konjugovanih pravih jednog kompleksa zaključujemo da su direktrise jedan par konjugovanih pravih u svima ∞^4 kompleksima (37.2) koji pripadaju jednoj kongruenciji. Svaki od ovih kompleksa ima svoju centralnu osovina i skup tih ∞^4 osovina čini jednu skupinu pravolinijsku površinu, osovinsku površinu grupe (37.2). Ova je površinu našao Pliker (1865) i nazvao je konoid. Značaj površine za mehaniku zapazio je Englez Ball i nazvao je po predlogu Cayley-a cilindroidom.

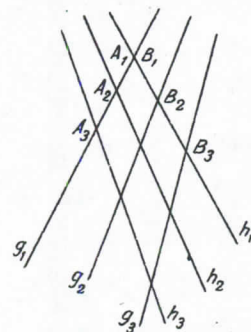
Ako se direktrise l_1 i l_2 seku u tački A, raspada se kongruencija u dve odvojene grupe ∞^2 pravih. Jednu grupu čine sve prave koje prolaze kroz A, a drugu grupu čine sve prave koje leže u ravni $l_1 l_2$.

U opštem slučaju kongruencije kada se l_1 i l_2 ukrštaju, poklapaju se za svaku tačku P koja leži na direktrisi, obe polarne ravni \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 jer su određene tačkom P i drugom direktrisom. Kroz svaku tačku na direktrisi prolaze dakle ∞^1 pravih kongruencije. Ranije pomenuta dva stava ne važe dakle za tačke koje leže na direktrisama.

38. TRI LINEARNA KOMPLEKSA, PRAVOLINIJSKE POVRŠINE. Tri jednačine (37.1).

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = 0 \quad \dots (38.1)$$

postavljaju tri linearne veze između četiri nezavisna parametara (35.2) jedne prave, predstavljaju dakle skup ∞^1 pravih koje obrazuju pravolinijsku površinu. Tri linearna kompleksa (38.1) imaju zajedničke prave koje obrazuju pravolinijsku površinu. Ta je površina određena trima ukrštenim pravama g_1, g_2 i g_3 . Tu bi činjenicu mogli dokazati sličnim putem kao i za komplekse i kongruenciju, ali je ona očevidna. Na sl. 73 su g_1, g_2 i g_3 , tri date ukrštene prave. Iz svake tačke A na pravoj g_1 možemo povući jednu jedinu pravu h koja seče obe druge prave g_2 i g_3 .



Sl. 73

Kako prava ima ∞^1 tačaka, to je i broj pravih h ∞^1 . Niz pravih h obrazuju pravolinijsku površinu drugog stepena koja nam je poznata kao jednograni hiperboloid. U specijalnim slučajevima kada su prave g_1, g_2 i g_3 paralelne jednoj ravni, površina je hiperbolični paraboloid.

Prave g_1, g_2 i g_3 leže na površini dakle leži i svaka prava h koja seče tri prave h_1, h_2

konstantu k kompleksa stavimo parametar p diname. Svi odnosi između tačaka, pravih i ravni koje smo upoznali kod nultog sistema, važi i za svaki linearni kompleks pravih.

U linijskoj geometriji zovu se nulte tačke polovima, nulte ravni polarnim ravnima, a prave kompleksa i dvojnim pravama jer se one mogu smatrati, kao što znamo, parom konjugovanih pravih koji se poklapaju.

37. DVA LINEARNA KOMPLEKSA, KONGRUENCIJA PRAVIH. Kada među četiri parametra prave postoje relacije (36.1) odnosno (36.1a), onda su samo dva parametra međusobno nezavisna, te dve jednačine predstavljaju ∞^2 skup pravih koje pripadaju obim kompleksima.

Taj skup pravih zove se po Plikeru kongruencija pravih.

Najprostija i u geometriji sila kao i u kinematici najvažnija je linearna kongruencija određena dvema linearnim kompleksima (36.2):

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1L + E_1M + F_1N = 0 \\ G_2 &= A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2L + E_2M + F_2N = 0 \end{aligned} \right\} \dots (37.1).$$

Ako sa λ označimo broj koji može imati svaku vrednost od $-\infty$ do $+\infty$, onda jednačina

$$G = G_1 + \lambda G_2 \dots (37.2)$$

predstavlja ∞^1 kompleksa ili po Plikeru dvočlanu grupu kompleksa, jer ma koja dva kompleksa te grupe određuju linearnu kongruenciju (37.1).

Podelimo jednačine (37.1) sa jednim od šest koeficijenata na pr. sa F_1 odnosno F_2 i označimo odnose $\frac{A}{F} = a$, $\frac{B}{F} = b, \dots, \frac{E}{F} = e$. Tako dobijamo iz dve jednačine jednu:

$$(a_2 - a_1)X + (b_2 - b_1)Y + (c_2 - c_1)Z + (d_2 - d_1)L + (e_2 - e_1)M = 0 \dots (37.3)$$

Kada ovu jednačinu podelimo na pr. sa $(e_2 - e_1)$ i uvedemo kraće oznake $\frac{a_2 - a_1}{e_2 - e_1} = \alpha$ i t.d., dobijamo jednačinu

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta L = -M \dots (37.4)$$

koja određuje linearnu kongruenciju iz dva kompleksa (37.1). Pošto izvršimo naznačene računске operacije, glase koeficijenti jednačine (37.4) sa kraćom oznakom

$$\eta = \frac{1}{E_2F_1 - E_1F_2}$$

$$\alpha = \eta(A_2F_1 - A_1F_2), \quad \beta = \eta(B_2F_1 - B_1F_2);$$

$$\gamma = \eta(C_2F_1 - C_1F_2), \quad \delta = \eta(D_2F_1 - D_1F_2);$$

oni zavise od 12 koeficijenata dvaju kompleksa (37.1).

Ako su nam date četiri prave $g_i (X_i \dots N_i) (i = 1, 2, 3, 4)$ možemo postaviti četiri jednačine

$$\alpha X_i + \beta Y_i + \gamma Z_i + \delta L_i = -M_i \dots (37.5)$$

iz kojih nalazimo četiri koeficijenta $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Četiri ukrštene prave određuju linearnu kongruenciju. Njihov međusobni položaj ne sme biti takav da je determinanta sistema 37.5

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & L_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & L_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & L_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & L_4 \end{vmatrix} = 0$$

Kongruenciji pripadaju svi ∞^1 kompleksi koje dobijamo kada u jednačinu (37.2) proizvoljnu konstantu λ variramo. Kompleks je određen sa pet pravih. Ako četiri od njih koje određuju jednu kongruenciju ostavimo stalne, a petu menjamo, dobi-

Ako medju koeficijentima A F postoji relacija (35.3) t. j. ako je

$$AD + BE + CF = 0 \quad \dots\dots(36.3),$$

onda su A ... F linijske koordinate jedne druge prave g_1 , jednačina (36.2) je identična sa jednačinom (35.6). Kada dakle medju koeficijentima A F, postoji relacija (36.3) predstavlja linearni kompleks (36.2) skup svih ∞^3 pravih koje seku $g(X \dots N)$.

Ovaj specijalni linearni kompleks zove se u nemačkoj literaturi Strahlengebüşch (žbunje od pravih). U opštem slučaju kada relacija (36.3) ne postoji, možemo jednačinu kompleksa (36.2) podeliti sa jednim koeficijentom na pr. sa F, tako da je linearni kompleks određen sa pet veličina $\frac{A}{F}$, $\frac{B}{F}$, ... $\frac{E}{F}$. Ako su nam date pet prave g_i ($i = 1 \dots 5$) imamo pet jednačina (36.2)

$$AX_i + BY_i + CZ_i + DL_i + EM_i + FN_i = 0 \quad \dots\dots(36.4)$$

iz kojih smo u stanju odrediti pet odnosa koeficijenata, dakle i linearni kompleks. Za nas je važno saznanje da je linearni kompleks određen sa pet ukrštenih pravih. Isključeni su dabogme oni medjusobni položaji pravih g_i za koje je determinanta sistema (36.4) ravna nuli.

Kada na pravoj g uočimo dve tačke $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i $P_1(x_1, y_1, z_1)$, izražene su linijske koordinate punktualnim koordinatama pomoću poznatih relacija

$$\left. \begin{array}{l} X = x_1 - x_0 \quad L = y_0 z_1 - z_0 y_1 \\ Y = y_1 - y_0 \quad M = z_0 x_1 - x_0 z_1 \\ Z = z_1 - z_0 \quad N = x_0 y_1 - y_0 x_1 \end{array} \right\} \dots\dots(36.5)$$

Uvodjenjem ovih izraza za $X, \dots N$ u jednačinu (36.2) u stanju smo linearnom transformacijom koordinata x_0, \dots, z_1

uvek postići da bude $B = C = E = F = 0$, t. j. da jednačina (36.2) dobije najprostiji oblik^{*)}

$$AX + DL = 0 \quad \text{ili} \quad L = kX \quad \dots\dots(36.2a)$$

Jedini koeficijent $k = -\frac{A}{D} = \frac{L}{X}$ zove se konstanta kompleksa i ima dimenziju dužine. X-osovina je osovina kompleksa.

Po definiciji (36.5) je L momenat odseka $\overline{P_0 P_1} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ u pogledu X-osovine, ili, što je to isto, momenat njene projekcije $\sqrt{Y^2 + Z^2}$ u pogledu na početak O. Kada označimo upravno rastojanje te projekcije od O sa r, onda je

$$L = r\sqrt{Y^2 + Z^2} \quad \text{ili} \quad r = \frac{L}{\sqrt{Y^2 + Z^2}} \quad \dots\dots(36.6)$$

Odsek $\overline{P_0 P_1}$ dakle i prava g na kojoj odsek leži, ukršta se sa x-osovinom (osovinom kompleksa) pod uglom φ . Iz odnosa

$$\cos \varphi = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

nalazimo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{Y^2 + Z^2}}{X} \quad \dots\dots(36.7).$$

Množeći "r" iz (36.6) sa $\operatorname{tg} \varphi$ iz (36.7) dobijamo s obzirom na (36.2a) obrazac

$$r \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{L}{X} = k \quad \dots\dots(36.8)$$

koji određuje položaj svake linije kompleksa $g(X \dots N)$ prema osovini kompleksa X.

Kada uporedimo obrazac (36.8) za obrascem (27.1) koji određuje položaj nulte linije istog sistema sila prema centralnoj osovini (osovini diname) vidimo da je sistem nulatih linija identičan sa linearnim kompleksom pravih ako za

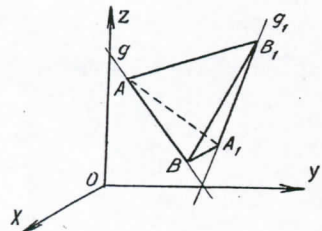
^{*)}Vidi: Dr. O. Dziobek. Lehrbuch der Analytischen Geometrie. II Teil, § 11.

toga zaključujemo da između šest koordinata (35.1) moraju postojati dve relacije, tako da su samo četiri međusobom nezavisne. Stvarno postoji među njima identitet (34.1) ili sa novim oznakama

$$XL + YM + ZN \equiv 0, \dots\dots(35.3)$$

koji smanjuju broj nezavisnih koordinata na pet. Dužina otseka AB nema uticaja na pravac i položaj prave g, ona je proizvoljna, drugim rečima prava g određena je već razmerom koordinata na pr. sa $l, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}, \frac{L}{X}, \frac{M}{X}, \frac{N}{X}$, čime se broj nezavisnih koordinata smanjuje na četiri.

Neka su X_1, \dots, N_1 , koordinate nekog drugog otseka A_1B_1 na pravoj g_1 koja se sa pravom g u opšte ukrštava (sl.72). One moraju takodjer zadovoljiti identitet (35.3) jer



vektor $2 F_1$ stoji upravno na A_1B_1 . Iz koordinata oba otseka \overline{AB} i $\overline{A_1B_1}$ obrazovaćemo izraz

$$LX_1 + MY_1 + NZ_1 + L_1X + M_1Y + N_1Z = S \dots(35.4).$$

Da nadjemo značenje izraza S proširićemo jednačinu (35.4) u identičnu:

$$(L + L_1)(X + X_1) + (M + M_1)(Y + Y_1) + (N + N_1)(Z + Z_1) - (LX + MY + NZ) - (L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1) = S$$

Poslednja dva člana su po jedn.(35.3) ravni nuli.

Zbireve u prva tri proizvoda označićemo sa $L + L_1 = \mathcal{L}, M + M_1 = \mathcal{M}, N + N_1 = \mathcal{N}, X + X_1 = \mathcal{X}, Y + Y_1 = \mathcal{Y}, Z + Z_1 = \mathcal{Z}$, te će poslednja jednačina glasiti

$$\mathcal{L} \cdot \mathcal{X} + \mathcal{M} \cdot \mathcal{Y} + \mathcal{N} \cdot \mathcal{Z} = S \dots\dots(35.5)$$

\mathcal{L}, \mathcal{M} i \mathcal{N} su komponente jednog aksijalnog a $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$, su komponente jednog polarnog vektora; jednačina (35.5) presta-

vlja dakle kao skalarni proizvod aksijalnog i polarnog vektora jedan pseudoskalar S. Izraz na levoj strani jednačine (35.4) znači dakle šestostruku zapreminu tetraedra kome su odseci \overline{AB} i $\overline{A_1B_1}$ dve suprotne ivice i zove se uzajamni momenat vektora \overline{AB} i $\overline{A_1B_1}$. Ako je za dve prave $S = 0$ t.j. zapremina tetraedra ravna nuli, leže obe prave u istoj ravni.

Za dve prave g i g_1 koje se seku ili su paralelne postoji među njihovim koordinatama relacija

$$LX_1 + MY_1 + NZ_1 + L_1X + M_1Y + N_1Z = 0 \dots\dots(35.6)$$

Ako smatramo pravu $g_1(X_1, \dots, N_1)$ nepomičnom, a prava „g“ zauzima sve moguće položaje, t.j. smatramo koordinate X, \dots, N kao kontinualno promenljive, onda predstavlja jednačina (35.6) skup svih pravih koje seku pravu g_1 . Kroz svaku tačku prave g_1 prolaze ∞^2 pravih g, na pravoj ima ∞^1 tačaka, dakle seku pravu g_1 ∞^3 pravih g.

36. LINEARNI KOMPLEKSI*) Kada među parametrima a, b, c, d jednačine prave (35.2) postoji funkcionalna veza

$$f(a, b, c, d) = 0 \dots\dots(36.1)$$

ili linijskim koordinatama izraženo,

$$F(X, Y, Z, L, M, N) = 0 \dots\dots(36.1a)$$

mogu se samo tri parametra nezavisno među sobom menjati. Svaka takva veza izdvaja iz ∞^4 pravih prostora jedan deo, t.j. skup od ∞^3 pravih koji zovemo po Plücker-u kompleksom pravih. Ako je funkcija (36.1) odnosno (36.1a) linearna algebarska funkcija

$$AX + BY + CZ + DL + EM + FN = 0 \dots\dots(36.2)$$

tada ona predstavlja kompleks prvog stepena ili linearni kompleks.

*) Vidi: Dr. R.Kašanin: Viša matematika I str. 172.

Uslovi $R_x = R_y = M_z = 0$ biće uvek zadovoljeni ako je svako $P_{ix} = 0$ i $P_{iy} = 0$ t.j. za sistem paralelnih sila u prostoru je invarijanta ravna nuli.

4. Ako je jedna komponenta sila na pr. $R_z = 0$ i dve komponente $M_x = M_y = 0$. Sistem se svodi na rezultantu $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ i spreg momenta M_z , koji je upravan na R , dakle je sistem ekvivalentan rezultanti u xy -ravni pomerenoj za $\frac{M_z}{R}$ od početka.

Uslovi $R_z = M_x = M_y = 0$ su uvek zadovoljeni ako sve sile P_i leže u xy -ravni, t.j. za sistem sila u ravni je invarijanta ravna nuli.

Do istog rezultata dolazimo i iz definicije invarijante (29.3) $J = K_1 K_2 e \cdot \sin \alpha$ ($J = 0$ 1) ako je K_1 ili $K_2 = 0$, 2) ako je $e = 0$, 3) ako je $\alpha = 0$. U prvom slučaju svodi se sistem (P_i) na jednu silu, u drugom u dve sile koje se seku, dakle opet na jednu silu $\vec{R} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$, a u trećem slučaju se svodi na dve paralelne sile koje su u slučaju $K_1 = -K_2$ ekvivalentne spregu momenta K . Sistem će biti u ravnoteži samo ako je $K_1 = K_2 = 0$.

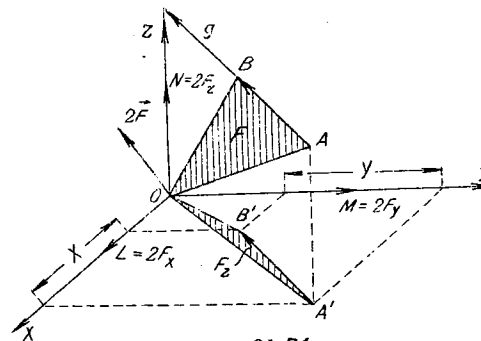
Najzad iz definicije $J = R M \cos(RM)$ vidimo da je $J = 0$ ako je $R = 0$ ili $M = 0$ ili $\angle(RM) = \frac{\pi}{2}$.

Iz ovog rasmatranja zaključujemo da je invarijanta ravna nuli za svaki sistem sila (P_i) koji je ekvivalentan jednoj rezultanti ili jednom spregu. To je uvek slučaj za paralelne sile u prostoru i za ravan sistem sila, ali može nastupiti i kada sile P_i nisu paralelne međusobom i ne leže u istoj ravni. Zato iz činjenice da je invarijanta nekog sistema (P_i) ravna nuli, ne možemo zaključiti da je sistem (P_i) ravan sistem ili paralelan prostorni sistem. Za jednu silu P

je $\vec{M}_0 \perp \vec{P}$ dakle postoji izmedju njenih koordinata relacija

$$P_x M_x + P_y M_y + P_z M_z = 0 \quad \dots \dots (34.1)$$

35. PRAVOLINIJSKE KOORDINATE. Kada silu P zamenimo sa duži \vec{AB} na pravoj g (sl.71), i pišemo umesto P_x, P_y i



P_z, X, Y i Z , a mesto M_x, M_y, M_z, L, M, N , znače X, Y, Z , projekcije duži \vec{AB} na koordinatne osevine, a L, M, N , dvo-gube površine projekcije trougla OAB na yz -, xz - odnosno xy -ravan.

$\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = 2F$ je dakle vektor čija je veličina dvostruka površina trougla OAB , i, koji je upravan na taj trougao. Veličine X, Y, Z određuju veličinu pravac i smer duži \vec{AB} , a L, M i N određuju njen položaj prema koordinatnom sistemu $Oxyz$. Ove šest veličina

$$X, Y, Z, L, M, N,$$

određuju prema tome pravu g na kojoj se nalazi orijentisana duž \vec{AB} , i zovu se linijskim koordinatama ili Plücker-ovim koordinatama po geometru koji ih je prvi uveo u geometriju (J. Plücker 1801-68).

U Dekartovim koordinatama data je prava g dvema njenim projekcijama:

$$\left. \begin{aligned} y &= ax + b \\ z &= cx + d \end{aligned} \right\} \dots \dots (35.2)$$

određena je dakle sa četiri parametra a, b, c, d . Kada se ta četiri parametra kontinualno menjaju, predstavljaju jednačine (35.2) skup od ∞^4 pravih koje ispunjuju ceo prostor. Iz

ili rečima: Za sve tačke jedne ravni upravne na centralnu osovinu ima virijal sistema istu vrednost. Za svaku ravan upravnu na centralnu osovinu imaće $V_0^{(P)}$ drugu (pozitivnu ili negativnu) vrednost. Za jednu od tih ravni biće $V_C^{(P)} = 0$. Prodorna tačka C centralne osovine sa tom ravni je Hamiltonov centar. Po jednačinama (33 a.2) biće $V_C^{(P)} = 0$, za $V_0^P = \vec{a} \cdot \vec{R} = s \cdot R$ ako sa s označimo međjusobno rastojanje dveju ravni sa virijalima V_0^P i $V_C = 0$. Prema tome je virijal sistema za ma koju tačku prostora proporcionalan njenom rastojanju od ravni za koju virijal ima vrednost nule.

Ako tačku O' na sl. 70c) uzmemo na centralnoj osovini (tačka S na sl. 70c) biće po stavu (33a.2)

$$V_S^{(P)} = V_0^{(P)} - \vec{a} \cdot \vec{R} = V_0^{(P)} - V_{OS}^{(R)}$$

gde je u $V_{OS}^{(R)}$ S napadna tačka sile R.

Kada tačku S zamenimo sa Hamiltonovim centrom, biće analogo

$$V_C^{(P)} = V_0^{(P)} - \vec{b} \cdot \vec{R} = V_0^{(P)} - V_{OC}^{(R)}$$

gde je sada C napadna tačka sile R. Kako je po definiciji tačke C $V_C^{(P)} = 0$ izlazi

$$V_0^{(P)} = V_{OC}^{(R)},$$

t.j. virijal sistema (P_1) u pogledu svake tačke O prostora ravan je virijalu jedne sile $\vec{R} = \sum \vec{P}_i$ u pogledu iste tačke kada za njenu napadnu tačku smatramo Hamiltonov centar sistema.

Ako je za neki sistem (P_1) $R = 0$, onda je u jedn. (33a.2) $V_0^R = 0$, dakle $V_0^{(P)} = V_0^{(R)}$, t.j. ako je neki sistem sile ekvivalentan spregu, onda njegov virijal ima za svaku tačku O prostora istu vrednost.

U slučaju $R = 0$ može se sistem uvek redukovati na jedan spreg ($P, -P$) sa stalnim napadnim tačkama A_1 i A_2 sl. 170d tako da virijal sprega bude ravan virijalu sistema. Virijali obih sila sprega biće uvek suprotnog znaka, dakle će virijal sprega u pogledu tačke O sl. 70 d biti

$$V = \vec{P} \cdot \vec{r}_2 - \vec{P} \cdot \vec{r}_1 = \vec{P}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{P} \cdot \vec{r} = P \cdot r \cdot \cos \varphi,$$

gde je $r = A_1 A_2$, t.j. rastojanje napadnih tačaka. Ugao φ možemo uvek tako izabrati da virijal sprega V bude ravan virijalu datog sistema.

Za ortogonalan spreg ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) je $V = 0$. Ako dakle dati opšti sistem sila ($R \neq 0, M \neq 0$) svedemo na silu \vec{R} koja napada Hamiltonov centar i na ortogonalan spreg u ravni upravnoj na \vec{R} (dakle ga svedemo na dinamiku) onda će virijal tako redukovanog sistema za svaku tačku prostora biti ravan virijalu datog sistema.

34. SISTEMI SILA KOJIH JE INVARIJANTA NULA Po jednačini (33.4) biće invarijanta sile ravna nuli u ovim slučajevima:

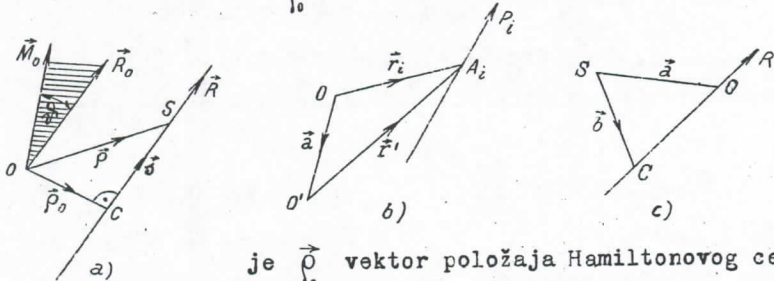
1. Ako su sve tri komponente R_x, R_y i R_z ravne nuli. U tom slučaju se svodi sistem (P_1) na rezultujuć spreg momenta $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$

2. Ako su sve tri komponente M_x, M_y, M_z ravne nuli. U tom slučaju svodi se sistem (P_1) na rezultantu \vec{R} koja prolazi kroz izabrani početak koordinatnog sistema.

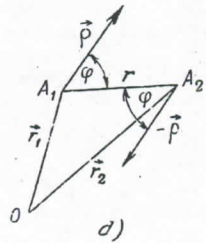
3. Ako su dve komponente sile na pr. R_x i R_y i jedna komponenta sprega M_z ravne nuli. Sistem se svodi na rezultantu $R = R_z$ i spreg momenta $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ dakle je $\vec{M} \perp \vec{R}$ t.j. sistem se svodi na rezultantu paralelnu z-osovini u rastojanju $\frac{M}{R_z}$ od ove.

$$\left. \begin{aligned} |\vec{\rho}_0| &= \frac{R \cdot M_0 \sin \gamma}{R^2} = \frac{|\vec{R} \times \vec{M}_0|}{R^2} \\ \text{dakle} \quad \vec{\rho}_0 &= \frac{\vec{R} \times \vec{M}_0}{R^2} = \frac{\vec{\Pi}}{R^2} \end{aligned} \right\} \dots (33.12)$$

Upoređujući izraz sa $\vec{\rho}_0$ sa jednačinama (33.10) vidimo da



je $\vec{\rho}_0$ vektor položaja Hamiltonovog centra C prema redukcionoj tački O.



Sl. 70

Proizvoljna tačka S na centralnoj osovini određena je vektorom $\vec{OS} = \vec{\rho}$, a njeno rastojanje od C je $\vec{CS} = \vec{s}$, dakle je $\vec{s} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_0$.

Da je centralna osovina paralelna rezultanti R, izraženo je relacijom

$$\vec{R} \times \vec{s} = 0,$$

i kada unesemo vrednosti za \vec{s} i $\vec{\rho}_0$ dobijamo vektorsku jednačinu centralne osovine

$$\vec{R} \times \left(\vec{\rho} - \frac{\vec{R} \times \vec{M}_0}{R^2} \right) = 0 \quad \dots (33.13)$$

Ako se sistem sila (P_i) svodi na rezultantu, dakle ako je $\mathcal{M} = M_0 \cos \gamma = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, onda iz (33.12) izlazi $\rho_0 = \frac{M_0}{R}$, a jednačina napadne linije R ima isti oblik. Za $\gamma = 0$ ili $M_0 = 0$ postaje $\rho_0 = 0$; u prvom slučaju ($M_0 = \mathcal{M}$) prolazi centralna osovina diname kroz O, u drugom pak svodi se sistem na rezultantu R kroz O.

33-a. VIRIJAL OPŠTEG SISTEMA SILA. O pojmu virijala bilo je govora već u statici ravnog sistema sila (1. sveska str. 261) i u statici paralelnih sila u prostoru (čl. 11).

Virijalom $V_0^{(P)}$ jedne sile u pogledu na stalnu tačku O zovemo skalarni proizvod iz sile P i vektora položaja $\vec{OA}_i = \vec{r}_i$ njene napadne tačke A_i , sl. 70 b, dakle

$$V_0^{(P_i)} = \vec{P}_i \cdot \vec{r}_i \quad *)$$

Iz ove definicije izlazi da o virijalu može biti govora samo za sile vezane za tačku, pojam virijala spada u astatiku.

Za sistem sila P_i ($i = 1, \dots, n$) biće virijal algebarski zbir virijala pojedinih sila dakle $(\sum \vec{P}_i \cdot \vec{r}_i)$. Ako se sve sile seku u jednoj tački A, jasno je da će zbir njihovih virijala biti ravan virijalu njihove rezultante $\vec{R} = \sum \vec{P}_i$, dakle

$$\sum \vec{P}_i \cdot \vec{r}_i = \vec{r} \cdot \vec{R} = V_0^{(R)} \quad \dots (33a.1)$$

jer je za sve sile $\vec{r}_i = \vec{r}$ isti vektor.

Za neku drugu tačku O' sa $\vec{OO}' = \vec{a}$ i $\vec{O}'A_i = \vec{r}_i$ biće virijal sistema

$$\begin{aligned} V_0'^{(P)} &= \sum \vec{P}_i \cdot \vec{r}_i' = \sum \vec{P}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{a}) = \\ &= \sum \vec{P}_i \cdot \vec{r}_i - \vec{a} \cdot \sum \vec{P}_i = V_0^{(P)} - \vec{a} \cdot \vec{R} = V_0^{(P)} - V_0^{(R)} \quad \dots (33a.2) \end{aligned}$$

t. j. virijal sistema za tačku O' ravan je virijalu sistema za tačku O smanjenom za virijal rezultante R sa napadnom tačkom O' u pogledu iste tačke O.

Ako je $a \perp R$ biće $\vec{a} \cdot \vec{R} = 0$, dakle po (33a.2)

$$V_0'^{(P)} = V_0^{(P)}$$

*) Clausius je nazvao $-(Xx + Yy + Zz) = -\vec{P} \cdot \vec{r}$ virijalom (v. čl. 75).

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \lambda R_x \\ \mathcal{M}_y &= \lambda R_y \\ \mathcal{M}_z &= \lambda R_z \\ \mathcal{M} &= \lambda R \end{aligned} \right\} \dots\dots (33.7).$$

Uvodjenjem ovih vrednosti u jednačine (33.6) dobijamo jednačinu centralne osovine

$$\frac{M_x + \zeta R_y - \eta R_z}{R_x} = \frac{M_y + \xi R_z - \zeta R_x}{R_y} = \frac{M_z + \eta R_x - \xi R_y}{R_z} = \lambda = \frac{\mathcal{M}}{R} = p \dots\dots (33.8)$$

Unakrsnim množenjem sa imeniteljima dobijamo iz jedn. (33.8)

$$(M_x + \zeta R_y - \eta R_z)R_y - (M_y + \xi R_z - \zeta R_x)R_x = 0$$

$$(M_y + \xi R_z - \zeta R_x)R_z - (M_z + \eta R_x - \xi R_y)R_y = 0$$

$$(M_z + \eta R_x - \xi R_y)R_x - (M_x + \zeta R_y - \eta R_z)R_z = 0$$

Kada prvoj jednačini dodamo $\zeta R_z^2 - \zeta R_z^2$, drugoj $\xi R_x^2 - \xi R_x^2$, a trećoj $\eta R_y^2 - \eta R_y^2$, dobijamo s obzirom na $R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = R^2$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \xi - R_x(\xi R_x + \eta R_y + \zeta R_z) &= R_y M_z - R_z M_y \\ R^2 \eta - R_y(\xi R_x + \eta R_y + \zeta R_z) &= R_z M_x - R_x M_z \\ R^2 \zeta - R_z(\xi R_x + \eta R_y + \zeta R_z) &= R_x M_y - R_y M_x \end{aligned} \right\} \dots\dots (33.9)$$

Ma koje dve od ovih jednačina određuju centralnu osovinu sa tekućim koordinatama ξ, η, ζ .

Izrazi na desnoj strani jednačina (33.9) su komponente vektorskog proizvoda $\vec{R} \times \vec{M} = \vec{\Pi}$, dakle su

$$R_y M_z - R_z M_y = \Pi_x$$

$$R_z M_x - R_x M_z = \Pi_y$$

$$R_x M_y - R_y M_x = \Pi_z$$

Ravan upravna na centralnu osovinu položena kroz početak koordinatnog sistema ima jednačinu

$$R_x x + R_y y + R_z z = 0.$$

Prodorna tačka C (ξ_0, η_0, ζ_0) centralne osovine sa ovom ravni mora zadovoljiti četiri jednačine

$$\begin{aligned} \xi_0 R_x + \eta_0 R_y + \zeta_0 R_z &= 0, \\ R^2 \xi_0 - R_x(\xi_0 R_x + \eta_0 R_y + \zeta_0 R_z) &= \Pi_x, \\ R^2 \eta_0 - R_y(\xi_0 R_x + \eta_0 R_y + \zeta_0 R_z) &= \Pi_y, \\ R^2 \zeta_0 - R_z(\xi_0 R_x + \eta_0 R_y + \zeta_0 R_z) &= \Pi_z, \end{aligned}$$

iz kojih nalazimo koordinate tačke C

$$\xi_0 = \frac{\Pi_x}{R^2}, \quad \eta_0 = \frac{\Pi_y}{R^2}, \quad \zeta_0 = \frac{\Pi_z}{R^2} \dots\dots (33.10)$$

Tačka C zove se po engleskom naučniku Hamiltonu (R. Hamilton, 1805-65) koji je taj pojam prvi uveo u Statiku, Hamiltonov centar sila.

Hamiltonov centar postoji samo ako je $R \neq 0$. Za sistem paralelnih sila prelazi Hamiltonov centar u središte paralelnih sila (jedn. 10.5).

Kada izraze Π_x, Π_y, Π_z iz jedn. (33.10) zamenimo u jednačine centralne osovine (33.9) dobiće ove obični oblik jednačine prave kroz datu tačku C :

$$\frac{\xi - \xi_0}{R} = \frac{\eta - \eta_0}{R} = \frac{\zeta - \zeta_0}{R} = \frac{s}{R} \dots\dots (33.11)$$

kada sa s označimo duž na centralnoj osovini od tačke C (ξ_0, η_0, ζ_0) do tekuće tačke (ξ, η, ζ).

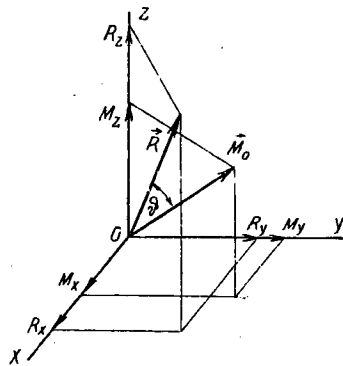
Kada sistem sila (P_i) redukujemo na tačku O prostora, dobijamo dva vektora \vec{M}_0 i \vec{R}_0 koji zaklapaju odredjen ugao ν (sl. 70a). Centralna osovina je paralelna vektoru \vec{R}_0 i prolazi kroz krajnu tačku C vektora \vec{p}_0 veličine $|\vec{p}_0| = \frac{M_0 \sin \nu}{R}$ (čl. 23) koji je upravna na ravan (M_0, R_0). Množeći brojitelj i imenitelj sa R dobijamo:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum P_{ix} & M_x &= \sum M_{ix} \\ R_y &= \sum P_{iy} & M_y &= \sum M_{iy} \\ R_z &= \sum P_{iz} & M_z &= \sum M_{iz} \end{aligned} \right\} \dots (33.1)$$

gde je

$$\begin{aligned} M_{ix} &= y_i P_{iz} - z_i P_{iy} , \\ M_{iy} &= z_i P_{ix} - x_i P_{iz} , \\ M_{iz} &= x_i P_{iy} - y_i P_{ix} . \end{aligned}$$

(i = 1 n) sl.69.



Sl. 69

Ove šest skalarne veličine određuju jednoznačno sistem (P_i) , one su ortogonalne koordinate sistema sila.

Ortogonalne koordinate su specijalan slučaj tetraedričnih koordinata T_x . Kada u ortogonalnom tetraedru sl. 68 zamislimo ravan ACD beskonačno udaljenu, biće teme B početak

ortogonalnog koordinatnog sistema P_{xyz} . Sile T_x, T_y i T_z postaju R_x, R_y i R_z . Ivice AD, AC, CD postaju beskonačno udaljene prave upravne na x, y, odnosno na z-osovinu, dakle je $T'_x \rightarrow 0$ identična sa M_x , $T'_y \rightarrow 0$ sa M_y i $T'_z \rightarrow 0$ sa $M_z = 0$.

Dekartov triedar je dakle tetraedar kome je jedan rogalj pravougaoni, a suprotna ravan mu je beskonačno udaljena.

Uslovi ravnoteže sistema sila (P_i) glase prema jedn.(33.1):

$$\left. \begin{aligned} \sum P_{ix} &= 0 & \sum M_{ix} &= 0 \\ \sum P_{iy} &= 0 & \sum M_{iy} &= 0 \\ \sum P_{iz} &= 0 & \sum M_{iz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (33.2)$$

Ako su ove šest jednačina zadovoljene za neku redukcionu tačku O, biće one zadovoljene i za svaku drugu tačku

Dinam (R, \mathcal{M}) datog sistema sila biće određena veličinama R i \mathcal{M} i položajem centralne osovine. Veličina rezultante je iz prve tri jednačine (33.1)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \dots (33.3)$$

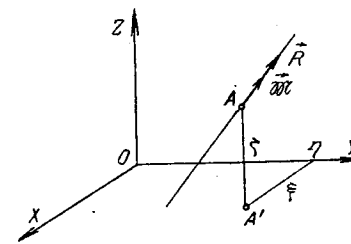
Invarijantu sistema izrazićemo u ortogonalnim koordinatama sila po pravilu skalarnog množenja vektora \vec{R} i $\vec{\mathcal{M}} = \vec{M}_0 \cos \theta$:

$$J = \vec{R} \cdot \vec{\mathcal{M}} = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \dots (33.4)$$

dakle je veličina momenata diname

$$\mathcal{M} = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \dots (33.5)$$

Položaj centralne osovine prema usvojenom koordinatnom sistemu Oxyz nadićemo iz uslova da se za svaku njenu tačku (ξ, η, ζ) (sl.70) moraju vektori \vec{R} i $\vec{\mathcal{M}}$ poklapati. Momentne



Sl. 70

jednačine za koordinatne osovine glase:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \mathcal{M}_x - \xi R_y + \eta R_z \\ M_y &= \mathcal{M}_y - \xi R_z + \zeta R_x \\ M_z &= \mathcal{M}_z - \eta R_x + \xi R_y \end{aligned} \right\} \dots (33.6)$$

Uslovi da \vec{R} i $\vec{\mathcal{M}}$ imaju istu ili tačnije paralelnu napadnu liniju, mogu se izraziti sa faktorom proporcionalnosti λ jednačinama:

$$f = - \left(x \cdot \cos \psi + y \cdot \sin \psi - \frac{H}{K_1} \right) =$$

$$= - \left(x \cdot \sin \varphi - y \cdot \cos \varphi - \frac{H}{K_1} \right) = \frac{1}{K_1} (H + y \cdot K_1 \cos \varphi - x \cdot K_1 \sin \varphi)$$

ili

$$K_1 f = H + y K_1 \cos \varphi - x K_1 \sin \varphi \quad \dots (32.6)$$

Kada iz ove jednačine unesemo u (32.5) $K_1 f$ a iz treće jednačine (32.1) $\frac{K_2}{l}$, glasiće ona

$$J = h \frac{K_2}{l} K_1 f =$$

$$= h \left[\frac{T_1}{l_1} + \frac{T_2}{l_2} + \frac{T_3}{l_3} \right] [H + y \cdot K_1 \cos \varphi - x \cdot K_1 \sin \varphi] \quad \dots (32.5a)$$

Vrednosti za x i y daju prve dve jednačine (32.1); $K_1 \cos \varphi$ i $K_1 \sin \varphi$ prve dve jednačine (32.2) i najzad smenimo H iz jednačine (32.4) u vezi sa (32.3). Posle izvršenih operacija množenja skraćivanja i sažimanja glasiće jednačina (32.5a)

$$J = h (\Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6) \left[\frac{T_1}{l_1} \frac{T_6}{l_6} + \frac{T_2}{l_2} \frac{T_4}{l_4} + \frac{T_3}{l_3} \frac{T_5}{l_5} \right] \quad \dots (32.5b)$$

Sa vrednostima Δ iz (32.3) nalazimo

$$\Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot F_T$$

F_T je površina osnove BCD tetraedra, dakle je $2 F_T h = 6 V_T$; U drugoj zagradi jed. (32.5b) nalaze se tri proizvoda ukrštenih sila. Kada jedan par beležimo kraće sa TT' a sile podeljene sa dužinom ivica označimo sa $t_i = \frac{T_i}{l_i}$, dobićemo invarijantu J sistema izraženu u tetraedričnim koordinatama u najkraćem obliku

$$J = 6 V_T \sum_1^3 t_i t'_i = 6 V_K \quad \dots (32.5c)$$

ili

$$\sum t_i t'_i = \frac{V_K}{V_T}$$

Dimenzija zapremine tetraedra krsta V_K je $[P^2 L]$ a dimenzija zapremine V_T koordinata tetraedra je $[L^3]$ dakle je dimenzija zbira na levoj strani $[P^2 L^{-2}]$.

Ako za koordinatni tetraedar usvojimo pravilni tetraedar sa ivicama l čija je zapremina $V_T = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$ i izaberemo $l = 1$, biće $t_i = T_i$ i invarijanta

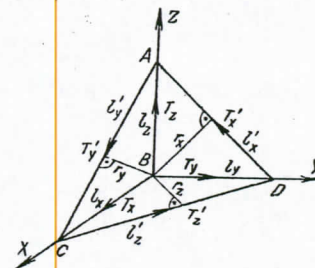
$$J = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_1^3 T_i T'_i = 0,7071 \sum_1^3 T_i T'_i \quad \dots (32.6)$$

Za ortogonalan tetraedar sa ivicama l_x, l_y i l_z u pravcima x, y i z -osovine (sl.68) je $V_2 = \frac{l_x \cdot l_y \cdot l_z}{6}$. Sa upisanim oznakama je invarijanta

$$J = T_x T'_x \frac{l_x l_z}{l'_x} +$$

$$+ T_y T'_y \frac{l_z l_x}{l'_y} +$$

$$+ T_z T'_z \frac{l_x l_y}{l'_z} \quad \dots (32.7)$$



Sl. 68

Dužina $\frac{l_y l_z}{l'_x} = r_x$ je najkraće rastojanje ukrštenih pravih l_x i l'_x , dakle je $T'_x \cdot r_x = M_x$ moment sile T'_x u pogledu na x -osovinu. Analogno važi i za ostale osovine tako da za invarijantu u ortogonalnom tetraedru dobijamo izraz

$$J = T_x M_x + T_y M_y + T_z M_z \quad \dots (32.7a)$$

33. ORTOGONALNE KOORDINATNE SISTEMA. Kada imamo da svedemo numerički dati sistem sila na najprostiji sistem, moramo se služiti ortogonalnim koordinatnim sistemom. Kako smo dati sistem (P_i) sveli na vektore $\vec{R} = \sum \vec{P}_i$ i $\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_i$ (čl. 21 sl.44), to uzimamo redukcionu tačku O za početak koordinatnog sistema $Oxyz$, i razlažemo vektore \vec{R} i \vec{M}_0 u komponente:

nagib linije g_1 prema x-osovini, sa ξ, η koordinate neke tačke na g_1 , glase ove jednačine

$$\left. \begin{aligned} K_1 \cos \varphi &= T_4 \frac{x_1 - x_3}{l_4} + T_5 \frac{x_2 - x_1}{l_5} + T_6 \frac{x_3 - x_2}{l_6} = \sum_4^6 T_x \\ K_1 \sin \varphi &= T_4 \frac{y_1 - y_3}{l_4} + T_5 \frac{y_2 - y_1}{l_5} + T_6 \frac{y_3 - y_2}{l_6} = \sum_4^6 T_y \\ K_1 (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) &= \frac{T_4}{l_4} [x_3(y_1 - y_3) - y_3(x_1 - x_3)] + \\ &+ \frac{T_5}{l_5} [x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)] + \\ &+ \frac{T_6}{l_6} [x_2(y_3 - y_2) - y_2(x_3 - x_2)] \end{aligned} \right\} (32.2)$$

Posle izvršenog množenja uprošćavaju se izrazi u zagradi, i sa oznakama

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \dots (32.3)$$

glasi poslednja jednačina (32.2):

$$K_1 (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) = T_4 \frac{\Delta_4}{l_4} + T_5 \frac{\Delta_5}{l_5} + T_6 \frac{\Delta_6}{l_6} \dots (32.4)$$

Kada konstantan član na desnoj strani označimo kraće sa H i na mesto ugla φ uvedemo nagib ψ normale na g_1 ($\varphi = 90^\circ + \psi$), glasiće poslednja jednačina

$$\xi \cos \psi + \eta \sin \psi - \frac{H}{K_1} = 0 \dots (32.4a)$$

Iz prve dve jednačine (32.2) nalazimo veličinu sile K_1 :

$$K_1 = \sqrt{(\sum T_x)^2 + (\sum T_y)^2}$$

a zatim iz $\cos \varphi = \frac{\sum T_x}{K_1}$ i $\sin \varphi = \frac{\sum T_y}{K_1}$ njen pravac i smer.

Jednačina (32.4a) je Hese-ov oblik jednačine napađne linije sile K_1 dakle je $\frac{H}{K_1} = r$ njen krak u pogledu početka A' koordinatnog sistema Sa, r je i položaj sile K_1 određen

Za invarijantu J sistema (P_i) imamo dva izraza:

$$J = K_1 K_2 e \sin \alpha = 6 V_K$$

Radi prostijeg prikazivanja usvojen je na sl. 67-a pravac $A'x$ - osovina upravan na K_1 ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) Najkraće rastojanje „ukrštenih pravih g_1 i l sila K_1 i K_2 projicira se dakle u vertikalnoj projekciji u pravouj veličini. Sa oznakama slike nalazimo iz dva slična pravougaona trougla $e = \frac{f \cdot h}{l}$. Sa f je označeno upravno rastojanje prodorne tačke G od prave g_1 . Kada normalnu ravan $A''E''$ obrtanjem oko osovine $E'G$ položimo u horizontalnu ravan, dolazi tačka A' u A , te je $AG = l'$, $AE' = l$, i $\sin \alpha = \frac{l'}{l}$, gde je α ugao ukrštavanja međusobni momenat μ ukrštenih pravih je $\mu = \frac{f \cdot h}{l}$, dakle

$$J = K_1 K_2 \frac{f \cdot h}{l} \dots (32.5)$$

Na sl 67b) prikazan je u osnovi tetraedar koji obrazuju sila K_1 i K_2 . Njegova osnova ima površinu $F_K = \frac{1}{2} K_1 f$ a visinu z . Iz slike 67c) vidimo bez daljeg objašnjenja da je $z = \frac{K_2 h}{l}$, dakle zapremina

$$V_K = \frac{1}{3} F_K z = \frac{1}{6} K_1 K_2 \frac{f \cdot h}{l} = \frac{J}{6}$$

U jednačini (32.5) jedina je nepoznata dužina f , rastojanje tačke E od prave g_1 . Nju nalazimo po poznatom pravilu analitičke geometrije u ravni iz jedn. (32.4a) kada u njoj zamenimo tekuće koordinate ξ, η sa koordinatama x, y tačke E . Dakle je:

sistema (P_1) i (Q_1) biće ekvivalentna ako su njihovi glavni momenti za tri tačke koje ne leže u istoj pravoj jednaki. Sistem (P_1) biće u ravnoteži ako postoje tri uslova $\vec{M}_B = 0, \vec{M}_C = 0$ i $\vec{M}_D = 0$, jer su oni identični sa šest uslova $M_k = 0$ ($k = 1 \dots 6$).

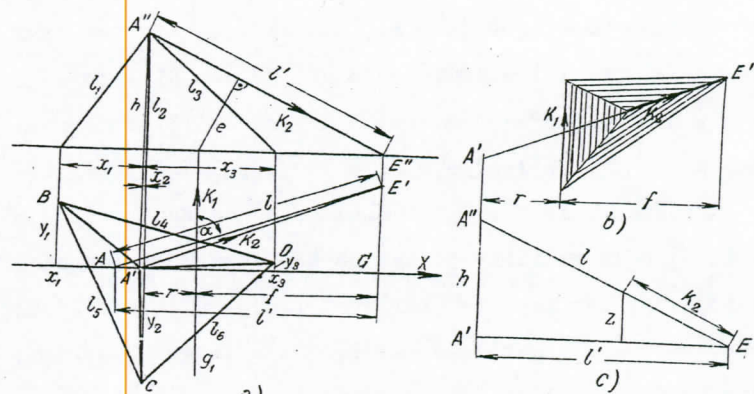
Tri sile T_k koje se seku u jednom temenu tetraedra, možemo složiti u rezultantu, na pr. T_1, T_4 i T_5 u rezultantu \vec{R}_B . Kad to isto učinimo u temenima C i D, dobijamo tri sile \vec{R}_B, \vec{R}_C i \vec{R}_D koje su sistemu T_k dakle i datom sistemu (P_1) ekvivalentne.

Ranije smo već neposredno redukovali sistem (P_1) na tri sile kroz tri date tačke (vl. čl. 30 sl. 64).

Sa silama \vec{R}_B, \vec{R}_C i \vec{R}_D odredili smo bili položaj i veličinu dinamice (R, M) . Te tri sile nisu međusobom nezavisne, jer po dve imaju zajedničku komponentu, na pr. R_B i R_C imaju zajedničku komponentu T_5 . Uslove ekvivalencije i ravnoteže sistema (P_1) možemo izraziti na četiri načina: Dva sistema (P_1) i (Q_1) su ekvivalentna ako za tri tačke koje ne leže na istoj pravoj, postoje jednakosti $\vec{R}_B = \vec{R}'_B, \vec{R}_C = \vec{R}'_C$ i $\vec{R}_D = \vec{R}'_D$.

Sistem (P_1) biće u ravnoteži ako je $\vec{R}_B = 0, \vec{R}_C = 0$ i $\vec{R}_D = 0$.

32. INVARIJANTA SISTEMA IZRAŽENA TETRAEDRIČNIM KOORDINATAMA. Sistem datih sila (P_1) ($i = 1 \dots n$) potpuno je određen komponentama T_k ($k = 1 \dots 6$) u pogledu na jedan usvojeni tetraedar. Iz ovih možemo odrediti ekvivalentni krst sila (K_1, K_2) tako da sila K_1 leži u osnovi BCD tetraedra (sl. 67) a sila K_2 prolazi kroz teme A. Ako sa l_k označimo dužine ivica tetraedra, sa l dužinu napadne linije sile K_2 od



Sl. 67

temena A do prodora E sa osnovom, sa h visinu temena A nad osnovom, sa $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x, y$, koordinate tačaka B, C, D i E odnosno koordinate sistema kome je početak u projekciji temena A' a xy -ravan se poklapa sa osnovom BCD tetraedra, imamo za određivanje triju nepoznatih K_2, x i y tri jednačine (čl. 3)

$$\left. \begin{aligned} K_2 \frac{x}{l} &= T_1 \frac{x_1}{l_1} + T_2 \frac{x_2}{l_2} + T_3 \frac{x_3}{l_3} \\ K_2 \frac{y}{l} &= T_1 \frac{y_1}{l_1} + T_2 \frac{y_2}{l_2} + T_3 \frac{y_3}{l_3} \\ K_2 \frac{h}{l} &= T_1 \frac{h}{l_1} + T_2 \frac{h}{l_2} + T_3 \frac{h}{l_3} \end{aligned} \right\} \dots (32.1)$$

Iz treće jednačine nalazimo $\frac{K_2}{l}$ a sa ovom vrednošću iz prve dve jednačine određene su koordinate x i y tačke E. Sa x i y određena je i dužina $AE = l$:

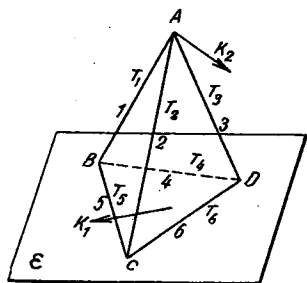
$$l = \sqrt{h^2 + x^2 + y^2}$$

a sa njome i veličina sile K_2 .

Za određivanje sile K_2 iz komponenta T_4, T_5 i T_6 imamo takodjer tri uslova ekvivalencije kada sa φ označimo

zatvoren poligon. U sl. 65b je $A'B'C'$ projekcija trougla ABC na ravan ε . Tri paralelne komponente R'_a , R'_b i R'_c stoje u tačkama A' , B' i C' upravno na ravan ε crteža. Složimo prve dve u R_{ab} , zatim ovu sa trećom u R , čime je položaj centralne osovine određen. Dile R'_a , R'_b , i R'_c obrazuju spreg čiji je moment \mathcal{M} . Njihove veličine odnose se kao dužine strana onog trougla koji njihove napadne linije obrazuju (u sl. šrafiran, v. II. deo str. 265). Dakle je $\mathcal{M} = R'_b h_b$ i analogno dobijamo \mathcal{M} sa drugim dvema silama. Time je parametar dinamice određen.

31. TETRAEDRIČNE KOORDINATE SISTEMA. U čl. 20 redukovali smo sistem sila (P_i) na dve sile K_1 i K_2 tako da prva leži u datoj ravni ε a druga prolazi kroz datu tačku A (sl. 43). U ravni ε izabraćemo proizvoljan trougao BCD (sl. 66) i



Sl. 66

spojicemo njegova temena sa tačkom A . Tako dobijamo tetraedar $ABCD$. Silu K_2 razložimo u tri komponente po ivicama 1, 2 i 3 a silu K_1 , razložimo u komponente po ivicama 4, 5 i 6. Tako smo dobili 6 sila T_k ($k = 1 \dots 6$) koje su ekvivalentne krstu (K_1, K_2)

dakle i datom sistemu (P_i) ($i = 1 \dots n$). Tetraedar smo izabrali, dakle su nam pravci njegovih ivica poznati. Za sile T_k su samo njihove veličine promenljive sa sistemom (P_i) , tj. sile T_k su skalarnе veličine. Po ugledu na analitičku geometriju zovemo 6 skalara T_k tetraedričnim koordinatama sistema (P_i) , jer ga oni jednoznačno određuju. Ako neki drugi sistem sila (Q_j) ($j = 1 \dots m$) ima koordinate T'_k , biće sistemi (P_i) i (Q_j) ekvivalentni samo ako je $T_k = T'_k$ (za $k = 1 \dots 6$).

Sile u prostoru imaju šest uslova ekvivalencije.

Sistem (P_i) biće u ravnoteži ako je $T_k = 0$, t.j. za ravnotežu prostornog sistema potrebna su i dovoljna šest skalarnа uslova.

Svaka ivica tetraedra seče druge četiri, a samo se sa jednom, suprotnom, ukrštava.

Ako usvojimo jednu ivicu na pr. 1 za momentnu osovinu, biće samo moment sile T_6 različit od nule. Taj moment M_1 je ujedno i moment datog sistema (P_i) u pogledu na ivicu 1. Ako nam je poznata sila T_6 , poznamo i moment M_1 i obratno. Za tetraedrične koordinate sistema (P_i) možemo dakle uzeti i momente M_k ($k = 1 \dots 6$) u pogledu na ivice datog tetraedra. Dakle:

Dva sistema (P_i) i (Q_j) su ekvivalentna ako u pogledu istog tetraedra postoje šest uslova $M_k = M'_k$ ($k = 1 \dots 6$). Sistem (P_i) biće u ravnoteži ako postoje šest uslova $M_k = 0$.

Tri momentna vektora koji se seku u jednom temenu tetraedra, na pr. M_1 , M_4 i M_5 koji se seku u temenu B , možemo složiti u rezultatni moment \vec{M}_B ili glavni moment tačke B . Ako to uradimo i za temena C i D , dobijamo tri glavna momenta \vec{M}_B , \vec{M}_C i \vec{M}_D a sa njima smo u stanju odrediti veličinu i položaj dinamice kao što smo to u čl. 23 sl. 48 uradili. Sada je jasno zašto ova tri momenta nisu medju sobom nezavisna, što smo pri konstrukciji sl. 48 uvideli: Po dva glavna momenta imaju jednu zajedničku komponentu, na pr. M_5 je zajednička komponenta od M_B i M_C . Drugim rečima od $3 \times 3 = 9$ komponentata samo su šest medju sobom nezavisne. Uslove ekvivalencije i ravnoteže možemo dakle na tri načina izraziti: Dva

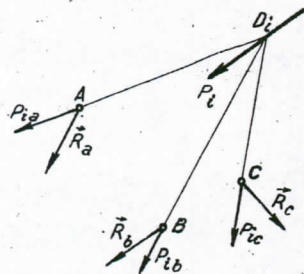
$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \dots (29.6a)$$

Ako izaberemo $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ biće po jednačini (29.6) $e_2 = 0$, sila K_2 će napadati tačku C. Iz jedn. (29.7a) izlazi $K_1 = \frac{M}{e}$ ili $M = K_1 e$. Kako je M momenat sprega, to je $K_1 \rightarrow 0$ a $e \rightarrow \infty$, $K_2 = R$, t.j. za $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ je krst sila ortogonalan i identičan sa datom dinamom, što nam je već iz ranijeg rasmatranog poznato.

Iz ovog rasmatranja vidimo da jedan par konjugovanih pravih ostaje sam sebi ekvivalentan kada ga translatorno pomerimo duž centralne osovine i kada ga oko te osovine obrćemo. Kako je svaka prava koja seče obe konjugovane prave, nulta prava, to zaključujemo da sistem od ∞^3 multih linija ostaje isti kada ga duž centralne osovine pomeramo i oko nje obrćemo.

30. REDUKOVANJE SISTEMA (P_i) NA TRI SILE KROZ DATE

TAČKE. Dat nam je sistem sila (P_i) ($i = 1 \dots n$) i izaberemo tri stalne tačke A, B, C, koje ne leže u istoj pravoj sl.



Sl. 64

64. Na sili P_i izaberemo proizvoljnu tačku D_i i spojimo je sa stalnim tačkama. Silu P_i razložimo u komponente P_{ia} , P_{ib} i P_{ic} u pravcima D_iA , D_iB i D_iC . Kada to razlaganje izvršimo za sve n sile, dobijamo tri prostorna pra-

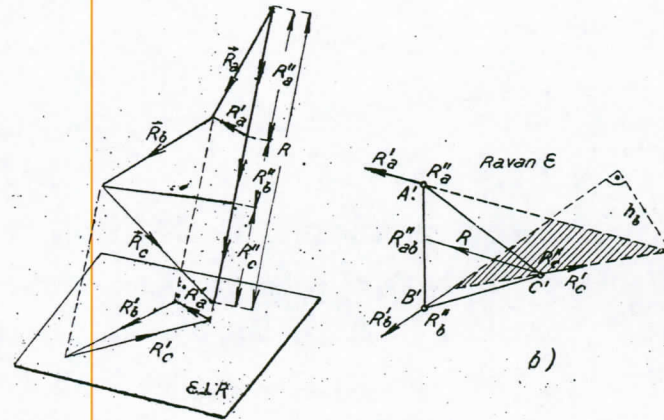
mena sa temenima A, B i C koje slažemo u rezultante $\vec{R}_a = \sum_1^n \vec{P}_{ia}$, $\vec{R}_b = \sum_1^n \vec{P}_{ib}$, $\vec{R}_c = \sum_1^n \vec{P}_{ic}$. Sistem sila u prostoru određen je dakle trima silama koje prolaze kroz tri stalne tačke. Sile \vec{R}_a , \vec{R}_b i \vec{R}_c su tri vektora ekvivalentna datom sistemu (P_i). Ako

se dve sile na pr. \vec{R}_b i \vec{R}_c seku (ili su paralelne), složimo ih u rezultantu \vec{R}_{bc} . Sile \vec{R}_a i \vec{R}_{bc} obrazuju tada već krst sila. Ako se \vec{R}_a i \vec{R}_{bc} seku, onda se dati sistem svodi na rezultantu, u slučaju $\vec{R}_a = -\vec{R}_{bc}$ sa raznim napadnim linijama svodi se sistem na spreg, a u istoj napadnoj liniji se \vec{R}_a i $-\vec{R}_{bc}$ potiru, sistem sila je u ravnoteži.

U opštem slučaju redukujemo tri sile na proizvoljnu tačku na pr. na A dakle na rezultantu \vec{R}' i spreg \vec{M}_0 .

Sa poznatim silama \vec{R}_a , \vec{R}_b i \vec{R}_c možemo naći položaj centralne osovine. Ovaj zadatak je analogan zadatku kojim smo se u čl. 23 sl. 48 bavili: određivanje centralne osovine kada su nam poznati momenti za tri redukcionne tačke.

Kako je $\vec{R}_a + \vec{R}_b + \vec{R}_c = \vec{R}$, to nam je pravac centralne osovine poznat. Svaku silu razložimo u pravac centralne osovine R i upravno na ovu (sl. 65a). Trougao ABC sa sl. 64



Sl. 65

projiciramo u ravan ε upravnu na \vec{R} . Poslednja vektorska jednačina raspada se kako iz sl. 65a čitamo, u skalarnu jednačinu $R_a'' + R_b'' + R_c'' = R$ i vektorsku jednačinu u ravni ε : $\vec{R}_a'' + \vec{R}_b'' + \vec{R}_c'' = 0$ t.j. projekcija poligona sila na ravan ε je

te. Prve su jednake i suprotnog smera $K_1 \sin \alpha = -K_2 \sin \alpha_2$ i obrazuju spreg sa krakom e . Momenat sprega $eK_1 \sin \alpha_1 = \mathcal{M}$ je kada $\sin \alpha_1$ zamenimo sa $\frac{K_2}{R} \sin \alpha$

$$\mathcal{M} = \frac{K_1 K_2}{R} e \cdot \sin \alpha = \frac{K_1 K_2}{R} \mu \quad \dots (29.2).$$

Time je invarijanta sistema određena sa

$$\mathcal{M}R = K_1 K_2 \mu \quad \dots (29.3)$$

i parametar dinam

$$\frac{\mathcal{M}}{R} = \frac{K_1 K_2}{R^2} \mu = p \quad \dots (29.4)$$

Iz poznatih odnosa za dve paralelne sile i njihove rezultante:

$$\frac{e_1}{K_2 \cos \alpha_2} = \frac{e}{K_1 \cos \alpha_1} = \frac{e}{R} \quad \dots (29.5)$$

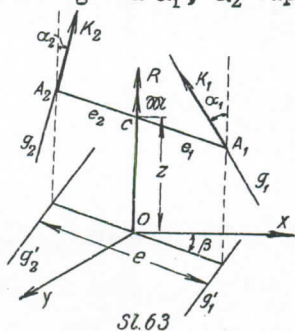
nalazimo $e = \frac{K_2 \cos \alpha_2}{R} e$, a kad „ e “ izrazimo jednačinom (29.2) i

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{K_1}{\sin \alpha_2}$$

iz (29.1) dobijamo

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{\mathcal{M}}{R} \cotg \alpha_2 = p \cotg \alpha_2 \\ \text{i analogo} \\ e_2 &= p \cotg \alpha_1 \end{aligned} \right\} \dots (29.6)$$

Sa e_1 ili e_2 određen je položaj centralne osovine. Ako je jedan od uglova α_1, α_2 tup biće e_2 odnosno e_1 negativno, obe ta-



čke A_1 i A_2 u sl. 62 ležace na istoj strani od C.

Zadatak da se iz datog krsta sila odredi dinam je jednoznačan, jer svakom sistemu sila (P_1) u prostoru odgovara jedna jedina dinam.

Obratni zadatak da iz date dinam odredimo krst sila je mnogoznačan jer je sistem (P_1) ekvivalentan sa ∞^4 krstova.

Na sl. 63 uzmimo datu dinam (R, \mathcal{M}) za z-osovinu koordinatnog sistema Oxyz. Proizvoljno možemo birati ove četiri veličine koje određuju položaj krsta: Proizvoljno možemo birati ove četiri veličine koje određuju položaj krsta: dužinu $OC = z$ (jer krst ne menja svoje značenje ako klizi duž z-osovine), ugao β , (jer krst ne menja svoju vrednost ako se zajednička normala „ e “ obrće oko z-osovine), dužinu $e_1 = CA_1$ i ugao ($z g_1$) = α_1 . Kada smo četiri veličine z, β, e_1 i α_1 , proizvoljno izabrali, onda ostale četiri veličine e_2, α_2, K_1 i K_2 koje određuju potpuno krst (K_1, K_2) nalazimo pomoću obrazaca (29.1-6).

Za parametrom $p = \frac{\mathcal{M}}{R}$ nalazimo prvo po (29.6) $e_2 = p \cotg \alpha_1$, dakle i $e = e_1 + e_2$. Iz definicije momenta $\mathcal{M} = K_2 e \cdot \sin \alpha_2$ nalazimo $K_2 \sin \alpha_2 = \frac{\mathcal{M}}{e}$ a iz (29.5) $K_2 \cos \alpha_2 = R \frac{e_1}{e}$. Ova dva izraza podignuta na kvadrat i sabrana daju

$$K_2 = \frac{1}{e} \sqrt{\mathcal{M}^2 + R^2 e_1^2} = \frac{R}{e} \sqrt{p^2 + e_1^2} \quad \dots (29.7)$$

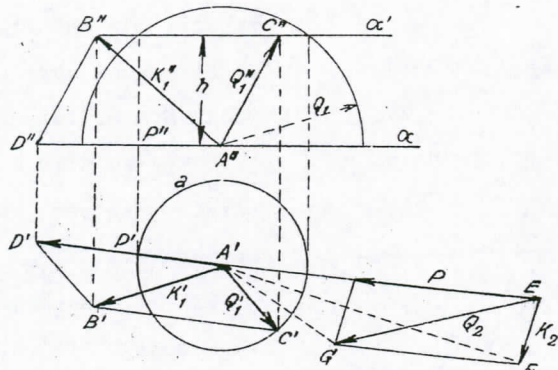
Sa ovom vrednošću za K_2 nalazimo

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_2 &= \frac{\mathcal{M}}{K_2 e} = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{\mathcal{M}^2 + R^2 e_1^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + e_1^2}} \\ \text{i} \\ \cos \alpha_2 &= \frac{R \cdot e_1}{K_2 e} = \frac{R \cdot e_1}{\sqrt{\mathcal{M}^2 + R^2 e_1^2}} = \frac{e_1}{\sqrt{p^2 + e_1^2}} \end{aligned} \right\} \dots (29.8)$$

i $\vec{K}_1 = \vec{R} - \vec{K}_2$ ili analogno sa (29.7)

$$K = \frac{1}{e} \sqrt{\mathcal{M}^2 + R^2 e_2^2} = \frac{R}{e} \sqrt{p^2 + e_2^2} \quad \dots (29.7a)$$

Iz jednačina (29.6) izlazi



Sl. 61

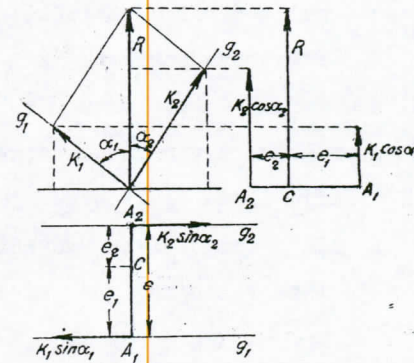
ložimo ravan α' paralelnu osnovi α ; ona seče loptu u krugu a . Na krugu izaberemo proizvoljnu tačku C i spojimo je sa B . Tako smo razložili silu K_1 u komponente Q_1 i P . Silu P koja leži u horizontalnoj ravni α premestimo na tačku E u kojoj ona seče silu K_2 i složimo je sa K_2 u silu Q_2 . Time je krst (K_1, K_2) preobražen u ekvivalentni krst (Q_1, Q_2) u kome Q_1 ima unapred datu veličinu. Kako na krugu „ a “ možemo svaku tačku C izabrati, ima zadatak ∞^1 rešenja. Ako bi ravan α' dodirivala loptu, bilo bi samo jedno rešenje moguće u kome bi krst (Q_1, Q_2) bio upravan. Ako bi pak ravan α' ležala iznad lopte, transformacija sa datom veličinom Q_1 ne bi bila izvodljiva.

Na sl.61 vidimo da oba tetraedra (K_1, K_2) i (Q_1, Q_2) imaju istu zapreminu. Trougli $A'EP$ i $A'EG$ imaju isti površinu a oba tetraedra imaju istu visinu h .

29. ODREĐIVANJE DINAME IZ DATOG KRSTA SILA I OB-

RATNO - Medjusobni položaj dveju ukštenih pravih određen je uglom α ukrštanja i njihovim najkraćim rastojanjem „ e “. Proizvod $e \cdot \sin \alpha = \mu$ nazvali smo (v.I. deo str.533) medjusobnim mo-

mentom dvaju pravih. Veličina μ biće ravna nuli ako je $e = 0$ t.j. ako se prave seku ili ako je $\alpha = 0$ t.j. ako su prave paralelne. Najveću vrednost $\mu = e$ imaće momenat za $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Za sile K_1 i K_2 krsta čije su napadne linije g_1 i g_2 postoji relacija $\vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \vec{R}$ t.j. te tri sile obrazuju trougao. Iz ovoga izlazi da se prave g_1 i g_2 projiciraju na ravan koja je upravna na \vec{R} , kao dve paralele u medjusobnom rastojanju e . (sl.62). Kako je centralna osovina sistema ili osovina di-



Sl. 62

name paralelna rezultanti \vec{R} to postoji stav: Centralna osovina je upravna na najkraća rastojanja (zajedničke normale e) svih ekvivalentnih krstova (Möbius-ova teorema).

Na osnovu ove teoreme u stanju smo naći pravac i položaj centralne osovine ako su nam poznata dva parakonjugovanih pravih g_1, g_2 i h_1, h_2 . Nadjemo prvo najkraća rastojanja e_1 i e_2 oba para i zatim najkraće rastojanje pravih e_1 i e_2 je pravac i položaj centralne osovine.

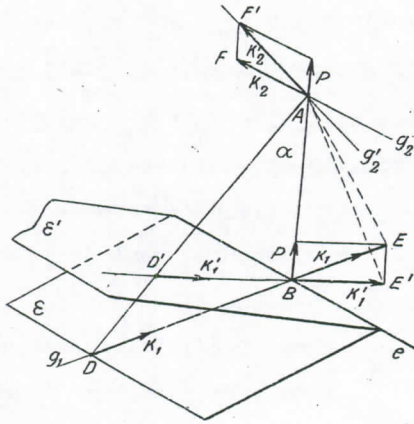
Na sl.62 je horizontalna projekcija krsta (K_1, K_2) upravna na R , vertikalna projekcija upravna na e . Sile K_1 i K_2 ukrštavaju se pod uglom α . Iz poznatih podataka K_1, K_2, e i α treba da nadjemo dinamiku sistema. Iz paralelograma sila nazivamo

$$R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2 K_1 K_2 \cos \alpha}$$

$$i \left. \begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{K_1} &= \frac{\sin \alpha_2}{K_2} = \frac{\sin \alpha}{K} \end{aligned} \right\} \dots (29.1)$$

Sile K_1 i K_2 razložimo u horizontalne i vertikalne komponente

napadnu tačku B i razložimo je u pravce g'_1 i BA u komponente



Sl. 58

K'_1 i P. Silu P pomerimo na napadnu tačku A i složimo je sa K_2 i K'_2 . Tako smo odredili novi par konjugovanih pravih g'_1 i g'_2 i veličine sile K'_1 i K'_2 . Vidimo da je ravan ABD nulta ravan α za tačku A, sve prave povučene iz A u ravni α seku obe sile

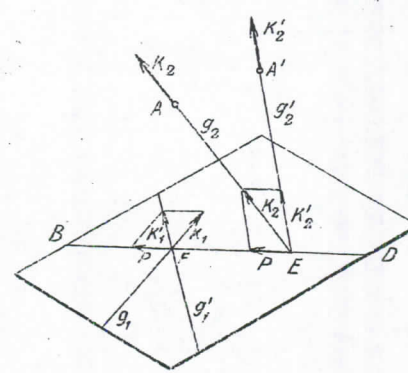
krsta, one su nulte linije. Na ovom primeru vidimo da tetraedr krstova (K_1, K_2) i (K'_1, K'_2) imaju istu zapreminu jer njihove osnove u ravni α ABE i ABE' imaju istu površinu ($EE' \parallel AB$), a temena F i F' imaju ista rastojanja od ravni α ($FF' \parallel AB$).

Iz ovog zadatka izlazi stav: Dok se jedna sila krsta K_1, K'_1, K''_1, \dots pomera u jednoj ravni α , obrće se druga sila K_2, K'_2, K''_2, \dots oko nulte tačke A te ravni. To izlazi već iz transformacije krsta na sl. 53.

2. Sila K_1 na g_1 leži u ravni ε , sila K_2 na g_2 prolazi kroz tačku A. Krst treba tako transformisati da K'_1 ostane u ravni ε a K'_2 da prolazi kroz datu tačku A' (sl. 59).

Tačka A' i prava g_2 odredjuju ravan koja seče ravan ε u pravoj BD. Na toj pravoj leži prodor E prave g_2 sa ravni ε . Tačka E je nulta tačka ravni ε . Silu K_2 pomerimo u napadnu tačku E i razložimo je u komponente K'_2 i P u pravcima EA' i EB. Silu K'_2 premestimo na tačku A', a silu P na tačku F u kojoj prava EB seče pravu g_1 ; ovde je složimo sa

silom K_1 u silu K'_1 . Tako smo dobili novi par konjugovanih pravih g'_1 i g'_2 sa silama K'_1 i K'_2 . Svi-

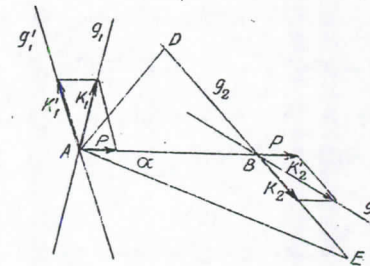


Sl. 59

ma silama K_2 koje prolaze kroz tačku E, a ne leže u ravni ε , konjugovane su sile K koje leže u ravni ε , što smo već iz prvog primera videli.

3. Krst sila (K_1, K_2) treba transformisati u krst (K'_1, K'_2) tako da K'_1

ima napadnu liniju g'_1 koja prolazi kroz tačku A na pravoj g_1 (sl. 60). Ako su D i E proizvoljne tačke na pravoj g_2 , onda je ravan ADE nulta ravan α tačke A. Ravan položena kroz g_1 i g'_1

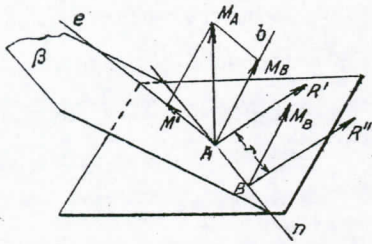


Sl. 60

seče ravan α u pravoj AB. Silu K_1 razložimo u komponente K'_1 i P u pravcima g'_1 i AB. Silu P pomerimo na tačku B i

složimo sa K_2 u silu K'_2 . Paralelogram $K_1K'_1P$ leži u ravni kroz g_1 i g'_1 , a paralelogram K'_2K_2P leži u ravni α . Kroz tačku A prolaze ∞^2 prave g'_2 , na pravoj g_1 ima ∞^1 tačaka A, krst (K_1, K_2) možemo dakle na ∞^3 načina transformisati u (K'_1, K'_2) .

4. Krst sila (K_1, K_2) treba transformisati u krst (Q_1, Q_2) tako da Q_1 ima određenu veličinu. Krst (K_1, K_2) dat je dveima ortogonalnim projekcijama (sl. 61). Za osnovnu ravan usvojena je nulta ravan α tačke A, tako da sila K_2 leži u horizontalnoj ravni, a K_1 je data svojom vertikalnom i horizontalnom projekcijom K''_1 i K'_1 . Oko A kao centra opišemo loptu sa poluprečnikom Q_1 . Kroz krajnju tačku B vektora K_1 po-

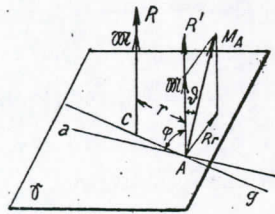


Sl. 56

M_A i b upravne su na n , možemo dakle M_A razložiti u komponentu M_B upravnu na ravan β i M' upravnu na ravan $R'n$. Ako silu R' redukuje na tačku B u takvom rastojanju $AB = r$ da redukcionni moment bude $R'r = -M'$, onda se oba momenta upravna na ravan $R'n$ poništavaju tako da u B ostaje moment M_B upravan na β i sila $R'' = R'$. Tačka B je tražena nulta tačka za ravan β .

27. CENTRALNA OSOVINA, NULTE RAVNI I PRAVE. Dinamismo definisali (v. čl. 20) kao jedini upravni krst sila (K_1, K_2) u kome je $\vec{K}_1 = \vec{R}$, a $K_2 \rightarrow 0$ t.j. silu K_2 zamenjuje spreg \vec{M} paralelan sa \vec{R}

Na sl. 57. je ravan γ upravna na centralnu osovinu, koja je prodire u tački C . Prava Cg je jedna od ∞^1 nul-



Sl. 57

tih linija ravni γ koju ćemo nazvati osnovnom ravni.

U nekoj tački A na pravoj g u rastojanju $CA = r$ pridolazi nepromenljivom momentu \vec{M} redukcionni moment $R.r$. Glavni moment u tački

A je $M_A = \sqrt{M^2 + R^2 r^2}$. Nulta ravan α (u sl. nije označena) tačke A stoji upravno na M_A i prolazi kroz pravu Cg . Nagib ravni α prema osnovnoj ravni je $\angle R'AM_A = \vartheta$. Iz paralelograma momenata čitamo $\text{tg } \vartheta = \frac{R.r}{M}$. Odnos $\frac{M}{R} = p$ koji ima dimenziju dužine, a može biti pozitivan ili negativan; zove se parametar dinamne. Sa tom oznakom je $r = p \cdot \text{tg } \vartheta$. Za $r = 0$ je $\vartheta = 0$, ravan α poklapa sa osnovnom ravni; za $r = \infty$ je $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ravan α je upravna na osnovnu ravan. Taj odnos važi o-

čevidno za svaku nultu liniju Cg . Za jednu konstantnu vrednost r opisać će vektori \vec{M}_A koji su upravni na nulte ravni α obrtni hiperboloid sa osovinom CR i poluprečnikom grla r_1 , kao što smo već u čl. 23 saznali.

Prava Aa upravna na vektor M_A i na pravu g jedna je od nulnih pravih ravni α . Najkraće rastojanje izmedju pravce Aa i centralne osovine je $AC = r$, a obe pravce zaklapaju ugao $\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$. Sa uglom φ glasi poslednja jednačina

$$r \cdot \text{tg } \varphi = p \quad \dots (27.1)$$

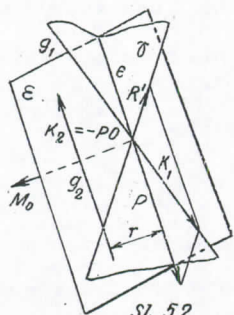
ili rečima: Proizvod iz najkraćeg rastojanja nulte linije od centralne osovine i tangensa ugla ukrštanja sa njome konstantan je za sve nulte linije nekog sistema sila i ravan je parametru dinamne

Jednačina (27.1) daje nam jasan pregled rasporeda nulnih pravih oko centralne osovine. Za $r = 0$ je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, t.j. nulte linije leže u osnovnoj ravni γ i čine pramen sa središtem C . Za $r = \infty$ je $\varphi = 0$, nulte linije su paralelne sa centralnom osovinom.

Na centralnoj osovinu ima ∞^1 tačaka C . Kroz svaku tačku prolaze ∞^1 pravih Cg . Kroz svaku tačku A pravce Cg prolaze ∞^1 nulnih pravih Aa . Prema tome ima dati sistem sila ∞^3 nulnih pravih.

28. TRANSFORMACIJA KRSTOVA SA DATIM USLOVIMA

1. Date su konjugovane pravce g_1 i g_2 sa silama K_1 i K_2 (sl. 58). Kroz g_1 položimo ravan ε , a na g_2 izaberemo tačku A . Krst sila (K'_1, K'_2) treba transformisati u krst (K'_1, K'_2) tako da K'_1 leži u datoj ravni ε a K'_2 da prolazi kroz tačku A . Ravan ε i ε' seku se u pravoj e . Ravan ABD položena kroz g_1 i A seče ravan ε' u pravoj g'_1 . Silu K'_1 pomerimo na

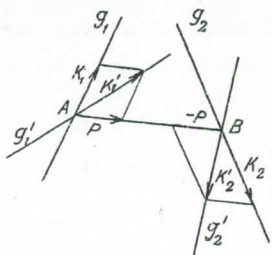


Sl. 52

Prave R' i g_1 određuju ravan γ . Kroz O položimo ravan ϵ upravnu na \vec{M}_0 . Ravni ϵ i γ seku se u pravoj e . Prave R' , e i g_1 leže dakle u istoj ravni ϵ . Moment \vec{M}_0 predstavimo spregom P, r u ravni ϵ takve veličine sile P da je $\vec{R}' + \vec{P} = \vec{K}_1$ t.j. da \vec{K}_2 pada u pravu g_1 . Time je veličina obih sila K_1 i K_2 određena jer iz gornjeg zbira i uslova $\vec{R}' = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$ izlazi $\vec{K}_2 = -\vec{P}$. Napadna linija g_2 sile K_2 je paralelna sa pravom e u rastojanju $r = \frac{M_0}{P}$ od ove i leži u ravni ϵ .

Kad dakle izaberemo jednu pravu g_1 za napadnu liniju jedne sile krsta, onda je njome jednoznačno određena i napadna linija g_2 druge sile kao i veličine K_1 i K_2 obih sila. Prave g_1 i g_2 zovu se stoga konjugovane prave. Iz sl. 51 vidimo da svaka nulta prava koja seče pravu g_1 mora seći i njoj konjugovanu pravu g_2 . Jasno je da nulta prava ne može biti napadna linija jedne sile krsta.

Na sl.53 transformisan je krst (K_1, K_2) u krst (K'_1, K'_2) tako, što smo na nultoj pravoj AB uzeli dve jednake i

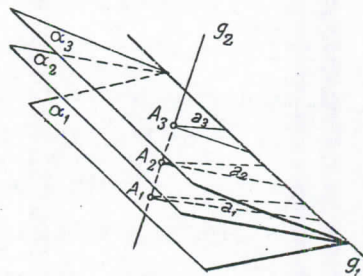


Sl. 53

suprotne sile P i $-P$ koje napadaju tačke A i B , čime sistem sila nije promenjen. Slažući K_1 sa P i K_2 sa $-P$ dobili smo krst (K'_1, K'_2) odnosno iz konjugovanog para g_1, g_2 pravih novi par g'_1, g'_2 . Za $P = \infty$ poklopile bi se prave g'_1 i g'_2 sa nultom linijom AB .

Stoga kažemo da su nulte linije same sobom konjugovane.

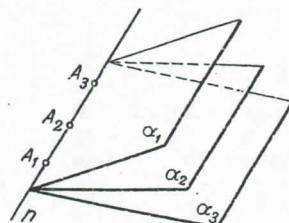
Na sl.54 su g_1 i g_2 dve konjugovane prave određene datim sistemom sila. Kroz g_1 povučene su ravni α_1 , α_2 i α_3



Sl. 54

koje dakle obrazuju snop sa nosiocem g_1 . Konjugovana prava g_2 prodire te ravni u tačkama A_1 , A_2 i A_3 . Ove su tačke dakle nulte tačke ravni α_1 , α_2 i α_3 i kao takve središta su pramenova nultih linija a_1 , a_2 i a_3 . (Na sl.54 su za svaku tačku A ucrtane po dve nulte linije). Ovu činjenicu možemo iskazati stavom: Nulte tačke svih ravni koje prolaze kroz jednu pravu g_1 leže na pravoj g_2 koja je prvoj konjugovana, i obratno nulte ravni svih tačaka jedne prave g_2 prolaze kroz istu pravu g_1 konjugovanu prvoj.

Nulte tačke A svih ravni koje se seku u jednoj nultoj liniji n (sl.55) leže na toj pravoj. Sve nulte linije



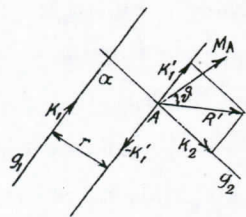
Sl. 55

ravni α_1 seku se u nultoj tački A_1 te ravni; kako je n jedna nulta linija ravni α_1 , to mora A_1 ležati na pravoj n . To isto važi i za sve ostale ravni kroz n . Ovaj stav izlazi već iz definicije nulte linije kao samoj sebi konjugovanoj pravoj: Kada se g_2 poklopi sa g_1 (sl.54) ležace i tačke A u pravoj g_1 .

Data nam je nulta ravan α sa njenom nultom tačkom A rezultujućim (ili glavnim) momentom M_A i rezultantom R' . Treba da nadjemo nultu tačku B ravni β i moment M_B (sl.56). Presek n ravni α i β je njihova zajednička nulta linija, dakle na pravoj n leži nulta tačka B . U tački A podignemo normalu b na ravan β i normalu e na ravan $R'n$. Sve tri prave e ,

Kada krajeve sile K_1 i K_2 spojimo pravama, dobijamo tetraedar OABC. Njegova je zapremina $V_t = \frac{1}{3} F \cdot h$. F je površina trougla OBC dakle $F = \frac{M_0}{2}$. Visina h je identična sa vertikalnom komponentom sile K_1 ili što je isto sile R' . Dakle je $h = R' \cos \vartheta$. Sa ovim vrednostima je $V_t = \frac{1}{6} R' M_0 \cos \vartheta = \frac{1}{6} \vec{R} \cdot \vec{M}_0$. Ili rečima: Zapremina tetraedara svih ∞^4 krstova sile je ista i ravna šestini invarijente sistema (Šalova teorema. Chasles). Ovo je druga relacija koja postoji između ekvivalentnih krstova pored one koju smo već našli (čl. 20), t. j. da je $\vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \vec{R}$. Da je invarijanta $\vec{R} \cdot \vec{M}_0$ pseudoskalar izlazi već iz toga što kada promenimo smer jedne sile u krstu (K_1, K_2) ostaje zapremina tetraedra ista, ali mora dobiti suprotan znak jer su krstovi (K_1, K_2) i ($K_1, -K_2$) antivalentni.

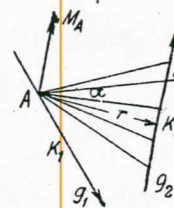
Obratno, ako nam je dat krst sile (K_1, K_2) možemo na beskonačno mnogo načina naći ekvivalentni sistem (R', M_A) (sl. 50). Iz proizvoljne tačke A na pravoj g_2 povučemo paralelu sa pravom g_1 i na toj stavimo



Sl. 50.

dve jednake suprotne sile K_1 i $-K_1$. Sile $K_1' = K_1$ i K_2 slažu se u redukcionu rezultantu $\vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \vec{R}$, a moment sprega ($K_1, -K_1$) je $K_1 r = M_A$ glavni moment u tački A. Tako je krst (K_1, K_2) transformisan u sistem (R', M_A). Kako jedna prava ima ∞^1 tačaka, to možemo dati krst (K_1, K_2) na ∞^1 načina transformisati u sistem (R', M_A). Za redukcionu tačku A možemo izabrati ma koju tačku i na pravoj g_1 , što se po sebi razume.

25. NULTA PRAVA, TAČKA I RAVAN. Na sl. 51 je AB proizvoljna prava koja seče obe sile K_1 i K_2 krsta. U pogle-



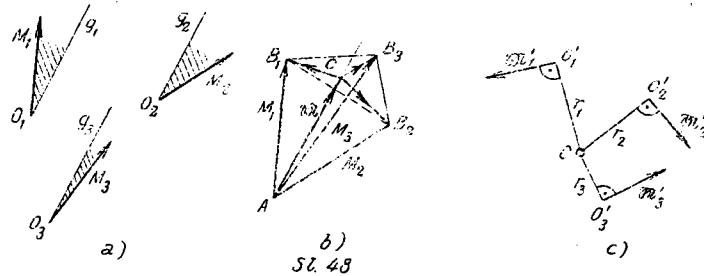
Sl. 51

du na AB kao momentnu osovinu je moment obih sile ravan nuli, dakle i zbir momenta svih datih sile F_i ($i = 1, \dots, n$) u pogledu na AB ravan nuli. Stoga zovemo svaku pravu koja seče obe napadne linije K_1 i K_2 nultom pravom ili nultom linijom. Sve nulte prave (∞^1) povučene iz tačke A obrazuju ravan pramen koji leži u ravni α određenoj tačkom A i pravom K_2 . Ravan α zovemo nultom ravni a tačku A njenom nultom tačkom. Upravna povučena iz A na K_2 do preseka je krak r sile K_2 u pogledu na tačku A, dakle je $K_2 r = M_A = \sum \vec{M}_A^{(P)}$ geometrijski zbir momenta sile F_i u pogledu na tačku A ili glavni moment (čl. 21) u tački A. Vektor \vec{M}_A stoji dakle upravno na nultu ravan α . Upoređujući sl. 49 sa sl. 51 zaključujemo da svakoj tački O u prostoru, koju smo izabrali za redukcionu tačku, odgovara kao nulta ravan ravan ε kroz O upravna na glavni moment M_0 tačke O.

Iz ovih rasmatranja dolazimo do ovih teorema: Jedan prostorni sistem sile dodeljuje svakoj tački prostora jednodnačno određenu ravan koja prolazi kroz tačku, i obratno, svakoj ravni prostora dodeljena je jednodnačno jedna tačka koja leži u ravni. Tačke i dodeljene im ravni su nulte tačke i nulte ravni sistema. Svaka tačka je nosilac ravnog pramena nultih linija koji leži u nultoj ravni tačke.

26. KONJUGOVANE PRAVE. Dat nam je prostorni sistem (P_i) sile. Njihov geometrijski zbir je $\sum \vec{P}_i = \vec{R}$. Sistem hoćemo da redukujemo na krst sile (K_1, K_2) tako da napadna linija sile K_1 bude jedna proizvoljno izabrana prava g_1 (sl. 52). Na pravoj g_1 izaberemo tačku O za koju odredimo $\sum \vec{M}_O^P = \vec{M}_0$.

48) povučemo tri data nam vektora $AB_1 = M_1$, $AB_2 = M_2$ i $AB_3 = M_3$ i spustimo iz A upravnu na ravan $B_1B_2B_3$. Dva prodire ravan u tački C. $AC = \mathcal{M}$ je zajednička komponenta momenata M_1, M_2 i M_3 , njen pravac je dakle pravac centralne osovine. Da na-



djemo i položaj centralne osovine povučićemo iz tačaka O_1, O_2 i O_3 prave g_1, g_2 i g_3 paralelne sa pravom AC. Jasno je da centralna osovina leži u ravni α_1 , položenoj kroz g_1 upravno na ravan M_1g_1 . To isto važi i za tačke O_2 i O_3 . Dve od ovih tri ravni α_1, α_2 i α_3 određuju svojim presekom centralnu osovinu. Na sl. 48b su vektori $CB_1 = \mathcal{M}'_1$, $CB_2 = \mathcal{M}'_2$ i $CB_3 = \mathcal{M}'_3$ komponente spregova M_1, M_2 i M_3 upravne na centralnu osovinu.

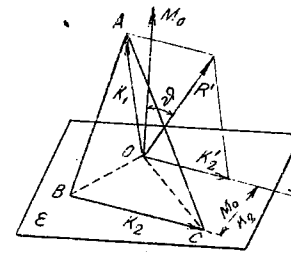
Na sl. 48 c) su O'_1, O'_2 i O'_3 projekcije tačaka O_1, O_2 i O_3 na ravan upravnu na centralnu osovinu sistema. Ravni α_1, α_2 i α_3 projiciraju se u tragovima r_1, r_2 i r_3 na koje su upravni momentni vektori $\mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2$ i \mathcal{M}'_3 ; ovi se projiciraju u svojoj pravoj veličini. Sa poznatim kracima r_1, r_2 i r_3 koji se seku u projekciji C centralne osovine, nalazimo i veličinu rezultante R, jer postoje odnosi

$$\frac{\mathcal{M}'_1}{r_1} = \frac{\mathcal{M}'_2}{r_2} = \frac{\mathcal{M}'_3}{r_3} = R.$$

Iz ovog izlazi da je dinamika jednog prostornog sistema sila potpuno određena kada poznajemo glavne momente (v. čl. 21) si-

la za tri tačke koje ne leže u istoj pravoj.

24. REDUKOVANJE SISTEMA (R', M_0) NA KRST SILA. Za tačku O poznat nam je redukcioni spreg M_0 i rezultanta R' . Kroz O položimo ravan ε upravnu na M_0 (sl. 49). Kroz R' možemo položiti ∞^1 ravni; jedna od ovih seče ravan ε u pravoj Og. U toj pravoj možemo izabrati ∞^1 po veličini različitim sila K'_2 za jednu komponentu sile R' . Druga komponenta je time potpuno određena. Silu R' možemo dakle na ∞^2 načina raz-



Sl. 49

ložiti u komponente K_1 i K'_2 tako da druga leži u ravni ε . Kako spreg M_0 leži takodje u ravni ε , to ga možemo sa K'_2 složiti u paralelnu i jednaku silu K_2 u rastojanju $\frac{M_0}{K_2}$ od sile K'_2 . Sistem (R', M_0) možemo dakle na ∞^2 načina redukovati na krst sila (K_1, K_2) . Vektor M_0 se ne menja ako O pomeramo po pravoj R' , on će se samo menjati ako predjemo na drugu pravu paralelnu sa R' (sa centralnom osovinom). Prema tome ima toliko ekvivalentnih sistema (R', M_0) koliko paralelnih pravih u prostoru t. j. ∞^2 . Svaki od tih sistema možemo, kako smo videli, transformisati u ∞^2 krstova, prema tome možemo svaki prostorni sistem sila (P_i) na ∞^4 načina transformisati u krst sila, drugim rečima broj ekvivalentnih krstova u prostoru je ∞^4 .

Silu R' možemo na jedan jedini način razložiti u dve komponente K_1 i K'_2 tako da je K_1 upravna na ε . Broj ortogonalnih krstova je ∞^2 .

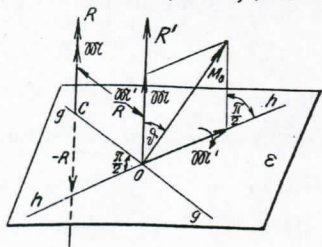
Raznovrstnost krstova u opšte je dakle četvorostruka, a ortogonalnih krstova je dvostruka.

zapremina je negativna. S pogledom na obe slike a i b možemo potvrditi: Zapremina $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ je pozitivna ako tri vektora u tom redu obrazuju desni sistem, ona je negativna ako u istom redu obrazuju levi sistem.

Prema ovome što smo o pseudoskalarima saznali vidimo da je invarijanta sistema sila u prostoru geometrijski prikazana kao paralelepiped kome je osnova rezultujući spreg \vec{M} prikazan kao paralelogram, a treću ivicu čini rezultanta R.

Dimenzija invarijante je $[P^2L]$, dve ivice paralelopipeda valja nam meriti razmerom sile a treću razmerom dužine.

23. REDUKOVANJE SISTEMA (R', M_0) NA DINAMU. Za redukcionu tačku O našli smo R' i M_0 . Kroz O položimo ravan ε upravnu na R' (sl. 47). Ravan kroz R' i M_0 seče ravan ε u pravoj h-h. Momenat M_0 razložimo u komponente $\mathcal{M} = M_0 \cos \vartheta$ i $\mathcal{M}' = M_0 \sin \vartheta$. Prva ima pravac rezultante R i ostaje za svaki položaj tačke O iste veličine, a komponenta \mathcal{M}' leži u pravoj h-h



Sl. 47

i njena se veličina menja sa položajem tačke O. \mathcal{M}' je momenat sprega koji leži u ravni kroz R' upravnoj na h-h. Njen trag u ravni ε je prava g-g. Kada silu R' redukujemo na neku tačku koja leži na pravoj g-g u rastojanju r od O, biće osovina redukcionog sprega R.r paralelna sa \mathcal{M} dakle će se ta dva sprega algebarski sabrati. Za određenu tačku C za koju je $r = \frac{\mathcal{M}'}{R}$ biće redukcioni spreg - \mathcal{M}' , dakle će se sa \mathcal{M} poništiti. Prava paralelna sa R' kroz tačku C je centralna o-

sovinna sistema. Na sl. 47 obrće \mathcal{M}' gledan od O u smislu kazaljke, C leži stoga levo od O tako da spreg $(R' - R)$ obrće u suprotnom smislu.

Iz ovde izloženog je jasno da sa svakog sistema (R', M_0) dolazimo na istu centralnu osovinu i istu dinamiku (R, \mathcal{M}) , da je ova jednoznačno određena i jedina za dati sistem sila.

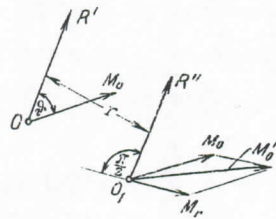
Za neku redukcionu tačku O je $M_0 = \sqrt{\mathcal{M}^2 + \mathcal{M}'^2}$, a kako je \mathcal{M} nezavisno od položaja tačke O, to će M_0 imati najmanju vrednost za $\mathcal{M}' = 0$. Centralnu osovinu možemo definisati kao onu napadnu liniju rezultante R za koju M ima najmanju vrednost.

Kada u ravni ε opišemo iz centra C krug sa poluprečnikom $CO = r$, biće u svima tačkama na periferiji kruga $\mathcal{M}' = Rr$ iste veličine i imaće pravac tangente na krug. Spreg M_0 imaće dakle takodjer istu veličinu $M_0 = \sqrt{\mathcal{M}^2 + R^2 r^2}$ i zaklapaće isti ugao sa R određen iz $\text{tg} \vartheta = \frac{Rr}{\mathcal{M}}$. Osovine M_0 obrazovaće obrtni hiperboloid koji dodiruje kružni cilindar sa centralnom osovinom i poluprečnikom CO. Svakoju tački C na centralnoj osovinom i istom r odgovara podudarni hiperboloid, kome su izvodnice osovine sprega M_0 . Ugao ϑ raste sa poluprečnikom r, za $r = \infty$ je $\text{tg} \vartheta = \infty$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ t.j. osovine M_0 leže u ravni ε , odnosno u ravnima upravnim na R, one se ukrštaju sa R pod pravim uglom. Tako je potpuno određen raspored osovine spregova M_0 u prostoru.

Ako su nam poznati spregovi M_1, M_2 i M_3 za tri redukcione tačke O_1, O_2 i O_3 koje ne leže u istoj pravoj, u stanju smo odrediti pravac i položaj centralne osovine nezavisno od veličine rezultante R. Iz proizvoljne tačke A (sl.

du tačke O .

Kada predjemo sa tačke O na neku drugu tačku O_1 (sl. 45) imamo u tački O_1 iste vektore $R'' = R'$ i M_0 i novi



Sl. 45

spreg $M_{R'} = R' r$ usled redukcije sile R . Vektore M_0 i $M_{R'}$ složimo u spreg $M_0' = M_0 + M_{R'}$, tako da su sistemi (R', M_0) i (R'', M_0') ekvivalentni. Moment $M_{R'}$ je upravan na ravan $R'R''$ dakle se prelazom sa O

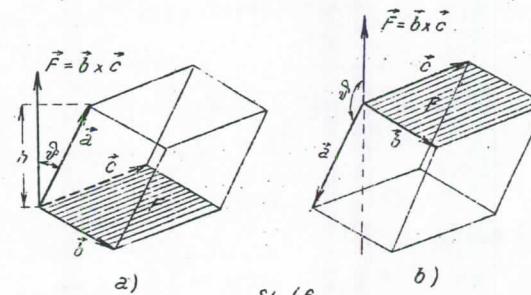
na O_1 menja samo komponenta $M_0 \sin \vartheta$, jer se geometrijski sabira sa $M_{R'}$. Komponenta $M_0 \cos \vartheta$ paralelna sili R ostaje nepromenjena. Kako je i \vec{R} nezavisna od položaja, to i proizvod $RM_0 \cos \vartheta$ ima za svaku redukcionu tačku istu vrednost. U vektorskoj algebri zovemo takav proizvod skalarnim proizvodom $\vec{R} \cdot \vec{M}_0$. Po Somovu zove se ta nepromenljiva vrednost invarijanta sistema.

22. SKALARI I PSEUDOSKALARI. Poznato nam je da se polarni i aksijalni vektor razlikuju u tome što kad njihov položaj odredimo prema jednom koordinatnom sistemu $Oxyz$, polarni vektor menja svoj znak kada koordinatne osovine Ox, Oy, Oz zamenimo sa $-Ox, -Oy, -Oz$ t.j. pri inverziji koordinatnog sistema dok ga aksijalni vektor ne menja. Prema tome skalarni proizvod dvaju polarnih vektora neće pri inverziji menjati svoj znak jer je $-\vec{a} \cdot -\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$. Primer takvog skalara imali smo u elementarnom mehaničkom radu $\vec{P} \cdot \vec{ds}$.

Aksijalni vektor (na pr. stat. moment sile) možemo smatrati vektorskim proizvodom dvaju polarnih vektora (na pr. $\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{P}$). Skalarni proizvod iz polarnog vektora \vec{a} i aksijalnog vektora $\vec{b} \times \vec{c}$ menjaće pri inverziji svoj znak:

$$-\vec{a} \cdot -\vec{b} \times -\vec{c} = -\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$$

Skalar koji pri inverziji menja svoj znak zove se pseudoskalar. Invarijanta sila $\vec{R} \cdot \vec{M}$ je dakle kao proizvod polarnog vektora \vec{R} i aksijalnog vektora \vec{M} pseudoskalar. Kako u izrazu $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ dolazn obe vrste množene, to se on zove mešovitim proizvodom triju vektora. Zagrada nije potrebna jer vektorsko množenje $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sa \vec{c} nema smisla. Na sl. 46 čine vektori \vec{a}, \vec{b} i \vec{c}



Sl. 46

triedar sa temenom O . Proizvod $\vec{b} \cdot \vec{c}$ predstavlja površinu F paralelograma kome su strane \vec{b} i \vec{c} . Vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ stoji upravno na površinu F

i kako smo usvojili desni sistem, upravljn je na više i zaklapa sa \vec{a} oštar ugao ϑ . $a \cdot \cos \vartheta = h$ je visina paralelopipeda kome su ivice vektori \vec{a}, \vec{b} i \vec{c} , dakle je $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = F \cdot h = V_p$ zapremina paralelopipeda. Iz ove činjenice je očevdno da vektore možemo u mešovitom proizvodu proizvoljno ciklički permutovati, dakle je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

po veličini i znaku.

Zbog svoga geometrijskog značenja zove se mešoviti proizvod i zapreminskim (volumnim) proizvodom i može se jednoznačno pisati: $|\vec{abc}|$.

Jednačina $|\vec{abc}| = 0$ znači očevdno da tri vektora leže u istoj ravni da su komplanarni.

Na sl. 46a je ugao ϑ izmedju \vec{a} i $\vec{b} \times \vec{c}$ oštar, $\cos \vartheta > 0$, zapremina V je pozitivna. Na sl. 46b je ϑ tup ugao, $\cos \vartheta < 0$,

geometrijskom zbiru sila $\vec{P}_1, \vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \sum \vec{P}_1$. O drugim relacijama između krstova biće docnije govora.

a) Ako ostanemo pri izabranoj ravni ε i tački A, možemo razlikovati četiri slučaja koji mogu nastupiti: 1) U najopštijem slučaju su $K_1 \neq 0$ i $K_2 \neq 0$, sistem (P_1) ekvivalentan je krstu (K_1, K_2) . 2) Ako je $K_1 = 0$ ili $K_2 = 0$ ili K_1 i K_2 leže u istoj ravni, sistem (P_1) ekvivalentan je rezultanti R. 3) Ako je $K_2 = 0$ a ravan sistem P_1 se svodi na spreg, ili ako su K_1 i K_2 iste veličine i antiparalelne, sistem (P_1) se svodi na rezultujući spreg momenta M. Najzad 4) Ako je $K_1 = 0$ i $K_2 = 0$ sistem (P_1) je u ravnoteži.

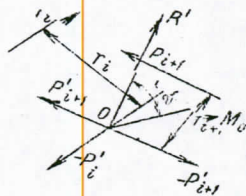
b) Ako tačku izaberemo beskonačno udaljenu, biće sve komponente P_i'' među sobom paralelne, i zaklapaće sa ravni ε neki ugao β . Sistem $\sum P_i''$ može biti ravan sili K_2 ili se može svesti na spreg momenta M_1 . Ako se i sistem (P_1') svodi na spreg momenta M_1 , onda je dati sistem ekvivalentan spregu sa momentom $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$. Ako se pak jedan od komponentalnih sistema na pr. (P_1'') svodi na spreg, a drugi na rezultantu, onda je $K_2 = 0$ dakle $K_1 = \sum \vec{P}_i = R$ i dati sistem (P_1) svodi se na rezultantu R i rezultujući spreg. O tom sistemu (R, M) biće još docnije govora (v. čl. 21).

Ako smo izabrali $\beta = \frac{\pi}{2}$, stoje sile P_i'' upravno na ravan ε , dati sistem (P_1) svodi se na upravni krst sila. Ako se pri tom razlaganju ispostavi da je ravni sistem (P') ekvivalentan spregu, momenta M_1 t. j. da se svodi na beskonačno udaljenu silu $K_1 \rightarrow 0$, tako da je $K_2 = R$, zove se takav upravni krst dinamom, a napadna linija sile K_2 zove se centralnom osovinom sistema (P_1) . Dinama je dakle određena sa dva paralelna vektora \vec{R} i \vec{M} ; prvi ima određeni svoj položaj,

drugi je slobodan. Docnije (v. čl. 23) ćemo videti da se svaki prostorni sistem može na jednu jedinu dinamu svesti.

c) Ako za ravan ε izaberemo beskonačno udaljenu ravan prostora ležaće prodorna tačka B_i sile P_i (sl. 43) u beskonačnosti, komponenta P_i' ležaće u beskonačnom rastojanju od tačke A biće dakle i $P_i' \rightarrow 0$, a usled toga komponenta $P_i'' = P_i$ i $P_i'' \parallel P_i$. Beskonačno udaljena sila $P_i' \rightarrow 0$ znači spreg koji leži u ravni AP_i i čiji je momenat proizvod sile P_i i njenog rastojanja od tačke A. Razlaganje sile u dve komponente od kojih jedna prolazi kroz tačku A a druga leži u beskonačno udaljenoj ravni, poznata nam je već operacija iz statike u ravni: redukcija sile na jednu tačku van njene napadne linije.

21. REDUKCIJA SISTEMA (P_1) NA JEDNU TAČKU. Ovu možemo izvesti i prostije bez primene beskonačno udaljenih elemenata prostora. Na sl. 44 je O proizvoljna redukciona ili



Sl. 44

zborna tačka. Svakoj sili P_i povučemo paralelu kroz O i smatramo je napadnom linijom sile $P_i' = P_i$ i $-P_i'$. Tako dobijamo pramen od n sila P_i' koje složimo u rezultantu $\sum \vec{P}_i' = R'$, i n spregova $(P_i', -P_i')$ čiji su momenti $P_i r_i = M_i$; osovine tih momenata kao slobodne vektore možemo položiti kroz O, i tako dobijamo drugi prostorni pramen vektora koji slažemo u rezultujući momenat $\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_i$. Tako smo sistem sila (P_1) redukovali na redukcionu rezultantu \vec{R}' i redukcioni spreg \vec{M}_0 . Oba vektora zaklapaju uopšte kos ugao ϑ . Kako sile $-P_i'$ prolaze sve kroz istu tačku O, to je $\sum \vec{M}_i$ i geometrijski zbir momenata datih sila P_i u pogledu na tačku O. $\sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_0^{(P_i)} = \vec{M}_0$ zove se glavni momenat u pogle-

oko osovine Oz za ugao α obrtnu površinu $ABB'A' = \Phi$. Elem-

mentat obrtne površine je $d\Phi = \alpha x ds$, dakle

$$\Phi = \alpha \int x ds = \alpha \xi_1 F,$$

gde je $s = \widehat{AB}$ dužina meridijana, ξ_1 rastojanje njegovog težišta od obrtne osovine, dakle $\alpha \xi_1$ put koji težište li-

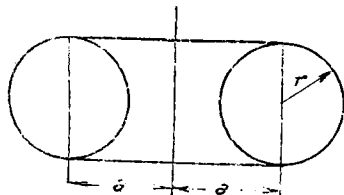
nije pri obrtanju izvrši. Veličina obrtne površine ravna je proizvodu iz dužine meridijane linije i puta koji njeno težište predje.

Ravan $OABC = F$ opisuje obrtanjem oko OC obrtno telo $OAA'E'CB$ zapremine V . Elementarna ravan dF opisuje zapreminu $dV = \alpha x dF$, dakle je

$$V = \alpha \int x dF = \alpha \xi_2 F,$$

t.j. zapremina obrtnog tela ravna je proizvodu iz površine materijalne ravni i puta koji njeno težište pri obrtanju predje.

Oba ova stava o veličini obrtnih površina i tela našao je Aleksandrijski geometar Papos koncem trećeg veka posle Hrista, ali su oni pali u zaborav. Kepler ih je ponovo našao 1615 g. u svojoj stereometriji buradi, ali ih nije formulisao. Po treći put postavio ih je Isusovac P. Guldin iz St. Galena (Švajcarska) 1640 g.



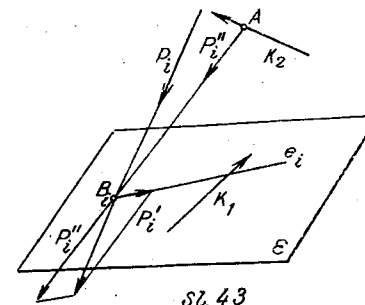
Sl. 42

Guldinove stavove primenićemo na površinu i zapreminu torusa (sl. 42). Sa $s = 2 r\pi$, $F = r^2\pi$, $\alpha = 2\pi$ i $\xi_1 = \xi_2 = a$ nalazimo $\Phi = 4 ar\pi^2$ i $V = 2 ar^2\pi^2$.

S I L E R A Z N I H P R A V A C A .

Neko kruto telo K koje je u svojoj pomerljivosti slobodno, napadaju sile P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) raznih pravaca. Napadne tačke A_i sile možemo u pravcu napadne linije proizvoljno pomerati, sile smatramo kao klizeće vektore. Valja nam naći najprostiji sistem sila koji će datom sistemu (P_i) biti ekvivalentan.

20. KRST SILA. Izaberimo proizvoljnu ravan \mathcal{E} i jednu tačku A izvan nje (sl. 43). Napadna linija sile P_i prodi-



Sl. 43

prolazi kroz tačku A .

Pošto smo tako razložili sve n sile, dobili smo u mesto sistema (P_i) dva prostija sistema istog broja sila: Ravan sistem (P'_i) u ravni \mathcal{E} i centralni sistem (P''_i) sa centrom A . Oba sistema složimo na poznat način u rezultante K_1 i K_2 . Te se dve sile uopšte ukrštaju, stoga sistem (K_1, K_2) zovemo krstom sila. Kako smo ravan \mathcal{E} i tačku A proizvoljno birali, to možemo iskazati stav: Svaki prostorni sistem sila može se na beskonačno mnogo načina svesti na krst sila. Kako su svi ti krstovi ekvivalentni jednom istom sistemu (P_i) moraju medju njima postojati izvesne relacije. Očevidno je da geometrijski zbir sila K_1 i K_2 svakog krsta mora biti ravan

ćemo deleći telo u stubiće $z \cdot dx \cdot dy = dV$, dakle sračunavanjem dvostrukih integrala. Koordinate težišta elementarne zapremine dV su $\xi = x$, $\eta = y$ i $\zeta = \frac{z}{2}$. Primenićemo cilindrične koordinate, dakle stavićemo u integrale (15.1)

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi, \quad z = k\varphi$$

gde je $k = \frac{h}{2\pi}$ (sl.19), te ćemo dobiti

$$V = \iiint z dx \cdot dy = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_1} r \cdot dr \cdot \varphi \cdot d\varphi = k \int_0^{r_1} r dr \left| \frac{\varphi^2}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k\pi^2}{8} \int_0^{r_1} r dr = k \frac{\pi^2 r_1^2}{16},$$

$$V \xi_0 = \int x \cdot z \cdot dx \cdot dy = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_1} r^2 dr \cdot \varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = k \frac{r_1^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = \\ = \frac{kr_1^3}{3} \left| \cos\varphi + \varphi \cdot \sin\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{kr_1^3}{6} (\pi - 2),$$

$$V \eta_0 = \int y \cdot z \cdot dx \cdot dy = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_1} r^2 dr \cdot \sin\varphi \cdot \varphi \cdot d\varphi = \\ = \frac{kr_1^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = \frac{kr_1^3}{3} \left| \sin\varphi - \varphi \cdot \cos\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{kr_1^3}{3},$$

$$V \zeta_0 = \frac{1}{2} \int z^2 dx \cdot dy = \frac{k^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_1} r dr \varphi^2 d\varphi = \frac{k^2 r_1^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 d\varphi = \\ = \frac{k^2 r_1^2}{12} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 = \frac{\pi^3}{96} k^2 r_1^2.$$

i sa ovim integralima nalazimo:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi - 2}{\pi^2} r_1 = 0,3084 r_1, \\ \eta_0 &= \frac{16}{3\pi^2} r_1 = 0,5404 r_1, \\ \zeta_0 &= \frac{k\pi}{6} = \frac{h}{12} = \frac{a}{3} \end{aligned} \right\} \dots\dots (18.9)$$

U tehničkoj praksi potrebno je kadgod da odredimo visinu težišta nekog tela nepravilnog oblika (hrpa zemlje, pe-

ska i t. d.) čije smo dimenzije snimanjem nekoliko profila određili. Pretpostavimo da hrpa leži na horizontalnoj (xy) ravni. Sa proizvoljnim početkom O uzimamo z-osovinu kosu pod uglom α . Teorijski podelili bismo hrpu u tanke horizontalne ploče debljine $\sin\alpha \cdot dz$ i površine F te bismo našli

$$V = \sin\alpha \int F dz \quad \text{i} \quad V \zeta_0 = \sin\alpha \int F \cdot z \cdot dz,$$

dakle

$$\zeta_0 = \frac{\int F_z \cdot z dz}{\int F dz}$$

U praktičnom izvršenju zameniće integrale zbiravi od 2 n sabiraka. Razliku $z_{2n} - z_0$ hrpe podalimo u $2n$ dela

$$a = \frac{z_{2n} - z_0}{2n},$$

konstruišemo iz snimljenih profila izohipse i planimetričanjem nadjemo površine horizontalnih preseka $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{2n}$ hrpe

Primenom Simpsonovog pravila nalazimo

$$V = \sin\alpha \frac{a}{3} [F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + \dots + 4F_{2n-1} + F_{2n}]$$

$$V \zeta_0 = \sin\alpha \frac{a}{3} [F_0 z_0 + 4F_1 z_1 + 2F_2 z_2 + 4F_3 z_3 + \dots + 4F_{2n-1} z_{2n-1} + F_{2n} z_{2n}]. \quad \dots (18.10)$$

19. GULDINOV STAV. Kada poznajemo težište ravno krive linije „s“ odnosno ravne površine „F“, nalazimo lako veličinu površine koju linija „s“ opisuje obrtanjem oko osovine u njenoj ravni, kao i veličinu zapremine koju ravna figura „F“ opisuje obrtanjem oko osovine u njenoj ravni.

Na sl.41 opisuje meridijana linija AB obrtanjem

$$\eta_0 = \frac{\int_{y_1}^{y_2} y^3 dy}{\int_{y_1}^{y_2} y dy} = \frac{3 y_2^4 - y_1^4}{4 y_2^3 - y_1^3} \dots (18.4)$$

Za potpuni konus ($y_1 = 0$) je $\eta_0 = \frac{3}{4} y_2$ kao što smo elementarnim putem našli.

Za obrtni paraboloid (sl. 33) kome je meridijan $z^2 = 2 py$, nalazimo težište zone visine ($y_2 - y_1$) posle skraćivanja sa 2 p:

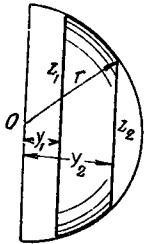
$$\eta_0 = \frac{\int_{y_1}^{y_2} y^2 dy}{\int_{y_1}^{y_2} y dy} = \frac{2 y_2^3 - y_1^3}{3 y_2^2 - y_1^2} \dots (18.5)$$

i za kalotu ($y_1 = 0$) $\eta_0 = \frac{2}{3} y_2$.

Za loptu (sl. 38) je $z^2 = r^2 - y^2$ dakle po obrascu (18.3)

$$\eta_0 = \frac{\int_{y_1}^{y_2} (r^2 - y^2) y dy}{\int_{y_1}^{y_2} (r^2 - y^2) dy} = \frac{3}{4} \left| \frac{2 r^2 y^2 - y^4}{3 r^2 y - y^3} \right|_{y_1}^{y_2} = \frac{3}{4} \frac{2 r^2 (y_2^2 - y_1^2) - (y_2^4 - y_1^4)}{3 r^2 (y_2 - y_1) - (y_2^3 - y_1^3)} = \frac{3}{4} (y_1 + y_2) \frac{2 r^2 - (y_1^2 + y_2^2)}{3 r^2 - (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)} \dots (18.6)$$

Za loptin segment ($y_2 = r$) je



Sl. 38.

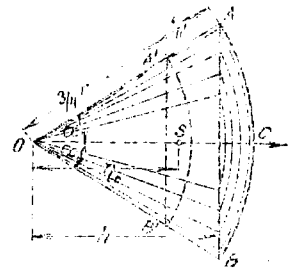
$$\eta_0 = \frac{3}{4} \frac{(r^2 - y_1^2)^2}{2 r^3 - 3 r^2 y_1 + y_1^3} \dots (18.6a)$$

Iz poslednjeg obrasca dobijamo rastojanje težišta polulopte ($y_1 = 0$) od središta 0

$$\eta_0 = \frac{3}{8} r \dots (18.6b)$$

Težište loptinog iseka (sektora) (sl. 39) nalazimo iz već poznatih obrazaca kada ga razložimo na konus ABO i loptin segment ABC.

Mnogo prostije nalazimo težište sektora kada ga



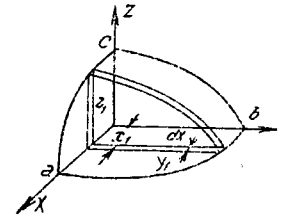
Sl. 39

razložimo u beskonačno mnogo konusa čije osnove dF leže na površini lopte, a imaju zajednički vrh u 0. Težišta svih ovih konusa leže na površini $A'B'$ lopte poluprečnika $\frac{3}{4} r$. Težište sektora identično je dakle sa težištem površine $A'B'$, dakle je po (17.12)

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} h + \frac{3}{4} r \right) = \frac{3}{8} (h + r) \dots (18.7)$$

Za $h = 0$ dobijamo ranije nadjenu apscisu težišta polulopte.

Težište oktanta elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ naći ćemo kada podelimo telo u tanke ploče paralelne na pr. yz-ravni



Sl. 40

(sl. 40). Presek elipsoida u rastojanju x_1 biće elipsa sa poluosama $y_1 = b \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}$ i $z_1 = c \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}$, dakle zapremina ploče

$$dV = \frac{\pi}{4} bc \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} \right) dx$$

i sa ovom zamenom

$$V \xi_0 = \frac{\pi bc}{4} \int_0^a x \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{\pi a^2 bc}{16}$$

Zapremina oktanta je $V = \frac{1}{8} \frac{4}{3} abc \pi = \frac{\pi}{6} abc$, dakle

$$\xi_0 = \frac{3}{8} a \dots (18.8)$$

Iz simetrije jednačine elipsoida sledi da je i

$$\eta_0 = \frac{3}{8} b, \quad \xi_0 = \frac{3}{8} c \dots$$

Težište tela omeđenog sa xy- i yz-ravni, kružnim cilindrom poluprečnika r i kvadrantom helikoida (sl. 34) naći

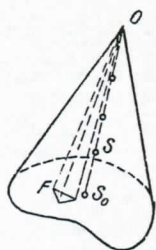
$$\xi_i = \frac{\sum x_i}{4}, \quad \eta_i = \frac{\sum y_i}{4}, \quad \zeta_i = \frac{\sum z_i}{4}, \quad (i = 1 \dots 4) \dots (18.1)$$

Svaki poliedar proizvoljnog oblika možemo razložiti u n tetraedra zapremine V_i čija težišta imaju koordinate ξ_i, η_i, ζ_i određene jedn. (18.1). Težište S poliedra biće određeno obrascima

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{\sum V_i \xi_i}{\sum V_i} \\ \eta_0 &= \frac{\sum V_i \eta_i}{\sum V_i} \\ \zeta_0 &= \frac{\sum V_i \zeta_i}{\sum V_i} \end{aligned} \right\} \dots (18.2) \quad (i = 1 \dots n)$$

Grafičkim putem naći ćemo težište poliedra kada zapremine V_i smatramo paralelnim silama koje napadaju težišta S_i i pomoću tri verižna poligona konstruišemo središte tih sila.

Svaku piramidu i konus možemo razložiti u proizvoljan broj tetraedarsa zajedničkim vrhom O (sl. 36), dakle



Sl. 36

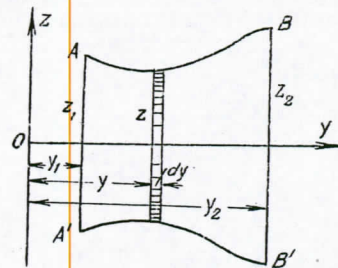
važi stav: Težište S zapremine piramide (konusa) čija je osnova proizvoljan poligon (zatvorena kriva linija) nalazimo kada teme O spojimo sa težištem S_0 osnovne ravni i prenesemo od S_0 dužinu $S_0S = \frac{1}{4} S_0O$.

b) Tela omeđena krivim površinama.

Koordinate težišta takvih tela određena su jednačinama (15.1) u kojima x, y, z znače koordinate težišta elementarne zapremine dV . Ako su ove beskonačno male veličine trećeg reda, na pr. $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ ili $dV = r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot dz$ onda su x, y, z koordinate tačaka prema kojima konvergiše $dV \rightarrow 0$, i integrali u jednačinama (15.1) su trostruki. Ako je

pak dV mala veličina drugog reda na pr. $dV = z \cdot dx \cdot dy$ ili $dV = z \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$, moramo slova x, y, z zameniti sa ξ, η, ζ koja označuju koordinate težišta linearnog elementa dV t.j. linije dužine z . Integrali biće sada dvostruki. Da li ćemo dV izraziti kao malu veličinu prvog, drugog ili trećeg reda, zavisi od oblika dotičnog tela. Ako telo ima osovinu simetrije (na pr. x -osovinu), izrazićemo dV kao malu veličinu prvog reda i težište njegovo biće određeno već prvom od jednačina (15.1) jer je $\eta_0 = \zeta_0 = 0$. Ako telo ima ravan simetrije (na pr. xy -ravan) biće dV veličina drugog reda $z \cdot dx \cdot dy$ i težište tela biće određeno prvim dvema jednačinama, jer je $\zeta_0 = 0$. Ako telo nema ravan simetrije moramo dV izraziti kao malu veličinu trećeg reda i primeniti sve tri jednačine sa trostrukim integralima.

U tehničkoj primeni najvažnija i najčešća su obrtna tela. Na sl. 37 je telo omeđeno obrtnom površinom koja postaje obrtanjem proizvoljne linije AB ili $z = \varphi(y)$ i dve kružnim površinama AA' i BB' . Y -osovina je dakle težišna osovina tela.



Sl. 37.

Telo razložimo u kružne ploče poluprečnika z i debljine dy , tako da je $dV = \pi z^2 dy$ a $\eta = z = y$. Po drugoj jednačini (15.1)

je, pošto sa π skratimo,

$$\eta_0 = \frac{\int \eta dV}{\int dV} = \frac{\int z^2 y \cdot dy}{\int z^2 dy} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)^2 y \cdot dy}{\int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)^2 dy} \dots (18.3)$$

Za zarubljen konus (sl. 31) je $z = \operatorname{tg} \alpha \cdot y$, dakle skraćeno sa $\operatorname{tg}^2 \alpha$:

Određićemo težište jednog kvadranta površine. Integracije 3 jedn. (17.15) izvršićemo mnogo prostije u cilindričnim koordinatama φ, r, z ; sa $x^2 + y^2 = r^2$ je

$$\cos v_2 = \frac{r}{\sqrt{k^2 + r^2}}, \quad dx dy = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

dakle prelazi (17.14) u

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_1} \sqrt{k^2 + r^2} \cdot dr \cdot d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{r_1} \sqrt{k^2 + r^2} \cdot dr$$

i posle izvršene integracije

$$F = \frac{\pi}{4} \left[r_1 \sqrt{k^2 + r_1^2} + k^2 \ln \frac{r_1 + \sqrt{k^2 + r_1^2}}{k} \right] \dots c)$$

Prva jednačina (17.15) glasiće

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{F} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_1} r \sqrt{k^2 + r^2} \cdot dr \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = \\ &= \frac{1}{F} \int_0^{r_1} r \sqrt{k^2 + r^2} dr = \frac{1}{3F} \left[(k^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{r_1} = \frac{1}{3F} \left[(k^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}} - k^3 \right]. \end{aligned}$$

Druga jednačina (17.15) razlikuje se od prve samo u tome što je $\cos \varphi$ zamenjeno sa $\sin \varphi$, no kako je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot d\varphi = 1$$

to je izraz za η_0 isti kao za ξ_0 .

Najzad je

$$\iint \frac{z \, dx \, dy}{\cos v_2} = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_1} \sqrt{k^2 + r^2} \cdot dr \cdot \varphi \cdot d\varphi = \frac{k\pi^2}{8} \int_0^{r_1} \sqrt{k^2 + r^2} \cdot dr$$

Poslednji integral je isti koji se pojavio u jednačini c) za F , dakle je

$$\iint \frac{z \, dx \, dy}{\cos v_2} = \frac{k\pi^2}{16} \left[r_1 \sqrt{k^2 + r_1^2} + k^2 \ln \frac{r_1 + \sqrt{k^2 + r_1^2}}{k} \right];$$

i koordinate težišta su prema tome

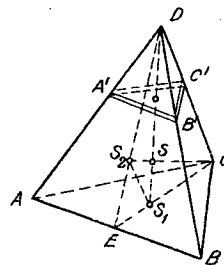
$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{F} \iint \frac{z \, dx \, dy}{\cos v_2} = \frac{k\pi}{4} \\ \eta_0 &= \frac{1}{3F} \left[(k^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}} - r_1^3 \right] \end{aligned} \right\} \dots (17.17)$$

18. TEŽIŠTA TELA. a) Poliedri. Tetraedar na sl. 35

podelimo u ravne ploče beskonačno male debljine, $A'B'C'$ paralelne ravni ABC. Kako su sve te ploče međusobno slične, ležeće njihova težišta na pravoj DS_1 koja spaja teme D sa težištem S_1 trouglaste površine ABC. Prava DS_1 je dakle težišna osovina tetraedra. Iz istog je razloga i prava CS_2 koja spaja težište S_2 ravni ABD sa suprotnim temenom C, težišna osovina. Težište S tetraedra leži u preseku pravih DS_1 i CS_2 . Iz sličnosti trouglova SS_1S_2 i SDC izlazi da je $SS_1 = \frac{1}{4} S_1D$

odnosno $SS_2 = \frac{1}{4} S_2C$.

Težina homogenog tela je $Q = \mu V$. Zamislimo težinu Q tetraedra koja napada težište S razloženu u dve paralelne komponente Q_C i Q_2 koje napadaju tačke C i S_2 . Njihove su veličine $Q_C = \frac{1}{4} Q$ i $Q_2 = \frac{3}{4} Q$. Težinu Q_2



Sl. 35

razložemo u komponente

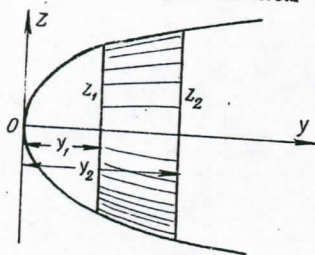
$$Q_D = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} Q = \frac{1}{4} Q \quad \text{i} \quad Q_E = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} Q = \frac{2}{4} Q$$

i najzad Q_E u dve jednake komponente $Q_A = Q_B = \frac{1}{4} Q$.

Težinu Q razložili smo u četiri jednake komponente

koje napadaju temena tetraedra. Ako sa x_i, y_i, z_i ($i = 1 \dots 4$) označimo koordinate temena, sa ξ, η, ζ koordinate težišta S tetraedra, nalazimo ove poslednje po teoremi momenata [jedn. (12.2)]:

Kada imamo da odredimo težište jedne opšte prostorne površine krive date jednačinom $F(x, y, z) = 0$, moramo za dF usvojiti



Sz 33

ti beskonačno male površine drugog reda, jer normala svakog elementa takvog ima različiti pravac u pogledu na koordinatne osi. Prema tome biće i koordinate težišta površine F određene dvostrukim integralima.

Element dF izabraćemo tako da je njegova projekcija na xy -ravan pravougaon sa stranama dx i dy . Ako normala u ma kojoj tački elementa dF (koji možemo smatrati ravnim), zaklapa sa z -osovinom ugao ν_2 onda je

$$dF = \frac{dx \cdot dy}{\cos \nu_2} \quad \text{i} \quad F = \iint \frac{dx \cdot dy}{\cos \nu_2} \quad \dots (17.14)$$

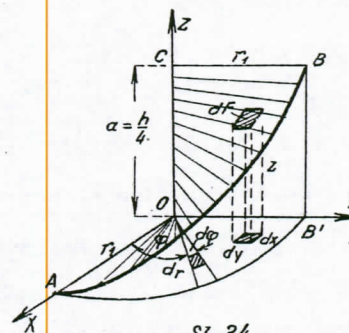
dakle po (17.2)

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{F} \iint \frac{x \cdot dx \cdot dy}{\cos \nu_2} \\ \eta_0 &= \frac{1}{F} \iint \frac{y \cdot dx \cdot dy}{\cos \nu_2} \\ \zeta_0 &= \frac{1}{F} \iint \frac{z \cdot dx \cdot dy}{\cos \nu_2} \end{aligned} \right\} \dots (17.15)$$

U ovim jednačinama su x, y, z koordinate elementa dF a $\cos \nu_2$ je određeno obrascima poznatim iz diferencijalne geometrije

$$\cos \nu_2 = \frac{\partial F}{\partial z} : \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad \dots (17.16)$$

Primer. Jednačine (17.15) primenićemo na određivanje težišta jednog dela površine koja se zove helikoid (sl 34). Ona je pravolinijska površina jer je opisuje prava OA



Sz 34

proizvoljne dužine koja je upravna na pravu Oz i kreće se konstantnom brzinom C translatorno tako da njen kraj A klizi po pravoj Oz , a istovremeno se ona obrće oko Oz stalnom ugaonom brzinom ω . Neka tačka helikoida udaljena sa r

od osovine Oz ima dakle koordinate $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$, $z = ct$.

Kada uvedemo ugao obrtanja $\varphi = \omega t$, i označimo sa T trajanje obrta za 2π , sa h istovremeni put tačke A , imamo

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

i sa $T\omega = 2\pi$, $Tc = h$ je

$$z = \frac{c}{\omega} \varphi = \frac{h}{2\pi} \varphi.$$

Za $r = \text{const.} = r_1$ su to tri parametrične jednačine helise; ova je presek helikoida sa kružnim cilindrom kome je Oz osovina a r_1 poluprečnik.

Sa $\frac{y}{x} = \text{tg} \varphi$ nalazimo jednačinu helikoida kada njen parametar označimo sa $k = \frac{h}{2\pi}$:

$$F(x, y, z) = z - k \cdot \text{arc. tg.} \frac{y}{x} \quad \dots a)$$

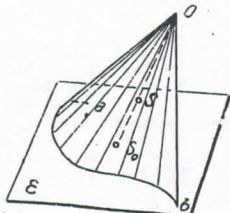
Parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{ky}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

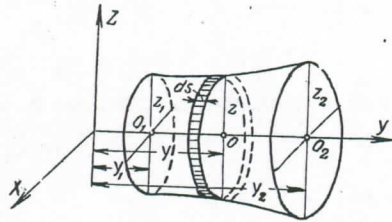
i po jedn. (17.16)

$$\cos \nu_2 = 1 : \sqrt{1 + \left(\frac{ky}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{kx}{x^2 + y^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{k^2 + x^2 + y^2}} \quad \dots b)$$

dorna tačka S sa ravni A'B'C' je prema tome traženo težište trostranog omotača i $S_0S = \frac{1}{3} S_0O$. Ako je piramida zatvorena onda težište S_0 vlaka ABC zamenjuje težište S_4 površine ABC, ali dabogme OS_4 nije težišna linija. Težište omotača zatvorene piramide kao središte nalazimo četiri mase F_i koncentrisanih u tačkama S_i ($i = 1, \dots, 4$); grafičkim ili analitičkim putem. Težište omotača konusa na sl.29 nalazimo analogo kada težište S_0 vodilje spojimo sa temenom O konusa i na OS_0 najdijemo težište S omotača sa $S_0S = \frac{1}{3} S_0O$.



Sl. 29



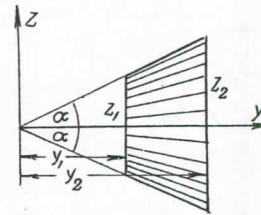
Sl. 30

Za obrtnu površinu koja postaje obrtanjem linije $z = f(y)$ oko y-osovine sl.30 je y-osovina težišna osovina, imamo dakle da najdijemo samo koordinatu η_0 . Kada element meridijana $z = f(y)$ označimo sa ds valja nam u drugu jednačinu (17.2) staviti $dF = 2\pi z ds$ i $\eta = y$, te je $F = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} z ds$ i $F\eta_0 = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} yz ds$ dakle

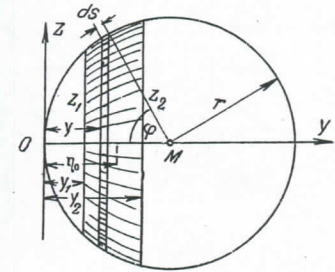
$$\eta_0 = \frac{\int yz ds}{\int z ds} = \frac{\int yf(y) \cdot \sqrt{1 + f'(y)^2} dy}{\int f(y) \cdot \sqrt{1 + f'(y)^2} dy} \dots (17.10)$$

Za zarubljeni pravi konus sl.31 je $z = \text{tg}\alpha \cdot y$, $ds = \text{sec}\alpha \cdot dy$, dakle je η_0 njegovog omotača

$$\eta_0 = \frac{\int_{y_1}^{y_2} y^2 dy}{\int_{y_1}^{y_2} y dy} = \frac{2 \cdot y_2^3 - y_1^3}{3 y_2^2 - y_1^2} \dots (17.11)$$



Sl.31



Sl.32

Za omotač celog konusa ($y_1 = 0$) dobijamo $\eta_0 = \frac{2}{3} y_2$ kao što smo već elementarnim putem našli.

Za površinu loptine zone (sl.32) je $ds = \frac{dy}{\sin\varphi}$, a $\sin\varphi = \frac{z}{r}$ dakle $z \cdot ds = r \cdot dy$. Sa ovom vrednošću daje jedn. (17.10)

$$\eta_0 = \frac{\int y dy}{\int dy} = \frac{1}{2} \frac{y_2^2 - y_1^2}{y_2 - y_1} = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) \dots (17.12)$$

t.j. težište površine loptine zone leži u sredini njene visine $y_2 - y_1$.

Za loptinu kalotu ($y_1 = 0$) je $\eta_0 = \frac{1}{2} y_2$.

Za težište zone površine obrotnog paraboloida koji ima jednačinu meridijana $z^2 = 2py$ (sl. 33) je $\frac{dz}{dy} = \frac{p}{z}$ dakle

$$ds = \sqrt{1 + \frac{p^2}{z^2}} dy \text{ i } z \cdot ds = \sqrt{p} \sqrt{p + 2y} \cdot dy.$$

Sa ovom vrednošću nalazimo

$$\int z \cdot ds = \frac{\sqrt{p}}{3} (p + 2y)^{\frac{3}{2}} \text{ i } \int yz ds = \frac{\sqrt{p}}{15} (p + 2y)^{\frac{3}{2}} (3y - p)$$

dakle za zonu visine $y_2 - y_1$:

$$\eta_0 = \frac{1}{5} \frac{(3y_2 - p)(2y_2 + p)^{\frac{3}{2}} - (3y_1 - p)(2y_1 + p)^{\frac{3}{2}}}{(2y_2 + p)^{\frac{3}{2}} - (2y_1 + p)^{\frac{3}{2}}} \dots (17.13)$$

a za kalotu visine $y_2 (y_1 = 0)$:

$$\eta_0 = \frac{1}{5} \frac{(3y_2 - p)(2y_2 + p)^{\frac{3}{2}} + p^{\frac{5}{2}}}{(2y_2 + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}} \dots (17.13a)$$

ona težišna osovina segmenta ACC_1 parabole. Oba polusegmenta ABC i ABC_1 imaju težišta S i S_1 koja leže na težišnoj liniji celog segmenta, paralelnoj $A\eta$ osovini, sva tri težišta imaju istu apscisu ξ_0 . Kada u d) zamenimo slova ξ , η sa x , y i u integrale jednačina (17.6) unesemo $y = \varphi(x) = \sqrt{2 p' x^{\frac{1}{2}}}$ nalazimo sa $AB = f$ i $BC = e$

$$F \xi_0 = \sin \alpha \sqrt{2 p'} \int_0^f x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} \sqrt{2 p'} \sin \alpha f^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} f^2 e \sin \alpha$$

$$F \eta_0 = \frac{1}{2} \sin \alpha \sqrt{2 p'} \int_0^f x dx = \frac{1}{4} \sqrt{2 p'} \sin \alpha f^2 = \frac{1}{4} f e^2 \sin \alpha$$

$$F = \sin \alpha \sqrt{2 p'} \int_0^f x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2 p'} \sin \alpha f^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} f e \sin \alpha$$

Sa ovim vrednostima integrala daju jednačine (17.6) koordinate težišta polusegmenta parabole ABC i ABC_1 :

$$\xi_0 = \frac{3}{5} f, \quad \eta_0 = \frac{3}{8} e \quad \dots (17.8)$$

dakle su koordinate težišta celog segmenta ACC_1 , $\xi_0 = \frac{3}{5} f$, $\eta_0 = 0$. Pomoću momentne jednačine (12.2) nalazimo sada i koordinate težišta Σ i Σ_1 površine ACD i AC_1D_1 koje dopunjuju polusegmente u paralelograme $ABCD$ i ABC_1D_1 . Te su koordinate $\xi'_0 = \frac{3}{10} f$ i $\eta'_0 = \frac{3}{4} e$. U obrascima ne ulazi ugao α , oni važe dakle i za $\alpha = 90^\circ$.

PRIBLIŽNO ODREĐIVANJE TEŽIŠTA. Ako nam je kriva $y = \varphi(x)$ data grafički ili ako nismo u stanju integrale jedn. (17.6) sračunati, zadovoljavamo se približnim metodama, od kojih je najtačnija Simpsonova metoda. Površinu sl. 25 podelimo u $2n$ pruge jednake širine h tako da je $x_{2n} - x_0 = 2nh$. Onda je:

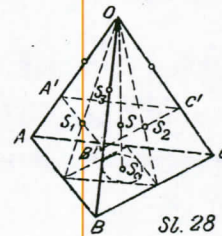
$$F = \frac{h}{3} \sin \alpha (y_0 + y_{2n}) + \frac{2h}{3} \sin \alpha (y_2 + y_4 + \dots) + \frac{4h}{3} \sin \alpha (y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}); \dots (17.9)$$

ostala dva integrala dobijamo zamenom y sa xy odnosno $\frac{1}{2} y^2$, dakle

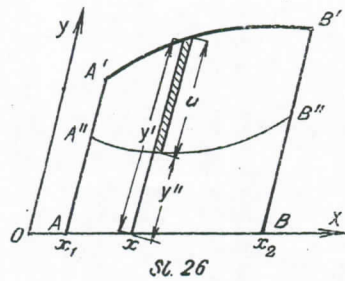
$$\left. \begin{aligned} F \xi_0 &= \sin \alpha \int_{x_0}^{x_{2n}} xy dx = \frac{h}{3} \sin \alpha (x_0 y_0 + x_{2n} y_{2n}) + \\ &+ \frac{2h}{3} \sin \alpha (x_2 y_2 + x_4 y_4 + \dots) + \\ &+ \frac{4h}{3} \sin \alpha (x_1 y_1 + x_3 y_3 + \dots + x_{2n-1} y_{2n-1}) \\ F \eta_0 &= \frac{\sin \alpha}{2} \int_0^{x_{2n}} y^2 dx = \frac{h}{6} \sin \alpha (y_0^2 + y_{2n}^2) + \\ &+ \frac{h}{3} \sin \alpha (y_2^2 + y_4^2 + \dots) + \\ &+ \frac{2h}{3} \sin \alpha (y_1^2 + y_3^2 + \dots + y_{2n-1}^2) \end{aligned} \right\} \dots (17.9)$$

Dužinu $(x_{2n} - x_0)$ i ordinate $y_0 - \dots - y_{2n}$ izmerimo u razmeri slike, sračunamo tri navedena zbira i podelom poslednja dva sa prvim dobijamo tražene koordinate ξ_0 i η_0 .

B) Krive površine. Težište omotača konusa sa proizvoljnom vodiljom nalazimo na isti način kao i težište omotača piramide sa proizvoljnom osnovom. Na sl. 28 trostrana piramida ima otvorenu osnovu ABC . S_0 je težište vlaka ABC koje smo na sl. 16 bili odredili. Prema



tome je prava OS_0 težišna linija omotača. S_1, S_2 i S_3 su težišta triju ravni omotača. Ravan kroz te tri tačke $A'B'C'$ je dakle težišna ravan omotača a pro-



značimo površinu AA'B'B i koordinate njenog težišta, sa F_2, ξ_2, η_2 analoge vrednosti površine AA''B''B i najzad sa F_0, ξ_0, η_0 površinu A''A'B''B i njene tražene koordinate težišta, postoje

Jednačine (12.2)

$$\xi_0 = \frac{F_1 \xi_1 - F_2 \xi_2}{F_1 - F_2} \quad \text{i} \quad \eta_0 = \frac{F_1 \eta_1 - F_2 \eta_2}{F_1 - F_2}$$

Uvodjenjem vrednosti iz (17.6) nalazimo za koordinate težišta površine A''A'B''B ili $F_1 - F_2 = F_0$:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{\int (y' - y'') x dx}{\int (y' - y'') dx} = \frac{\int u x dx}{\int u dx} \\ \eta_0 &= \frac{1}{2} \frac{\int (y'^2 - y''^2) dx}{\int u dx} \end{aligned} \right\} \dots (17.7)$$

Ako se linija A''B'' nalazi ispod apscisne osovine onda je $u = y' + y''$.

Jednačine (17.7) važe i za površinu omeđenu jednom zatvorenom krivom linijom. U tom slučaju je A'A'' = B'B'' = 0. Tada ćemo se služiti ortogonalnim koordinatnim sistemom.

Jednačine (17.6) primenićemo na određivanje težišta S polusegmenta ABC parabole (sl. 27). Parabola je da-

ta u ortogonalnom koordinatnom sistemu Oxy kada je O u temenu parabole a Ox osovina parabole, jednačinom

$$y^2 = 2px \quad \dots a)$$

Diferencijalni izvod po x daje nam nagib φ tangente u nekoj tački P:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{y} \quad \dots b)$$

Kada kroz tačku B koja polovi tetivu CC₁ povučemo paralelu sa Ox, seče ona parabolu u tački A. Tangenta u A je paralelna tetivi CC₁ koja zaklapa sa Ox-osovinom ugao α . Pravac tangente u A i osovina parabole su kao što znamo konjugovani pravci i to važi za svaku vrednost ugla α . Ako sa a i b označimo koordinate tačke A nalazimo po b):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{b} \quad \dots b')$$

Jednačinu a) parabole transformisaćemo na kosi koordinatni sistem A $\xi\eta$ tako da je A ξ paralelna osovini Ox a A η tangenti u A. Iz slike 27 čitamo obrasce za transformaciju koordinata:

$$x = a + \xi + \eta \cos \alpha, \quad y = b + \eta \sin \alpha \quad \dots c)$$

i kad ove vrednosti stavimo u a) dobijamo

$$(b + \eta \sin \alpha)^2 = 2p(a + \xi + \eta \cos \alpha)$$

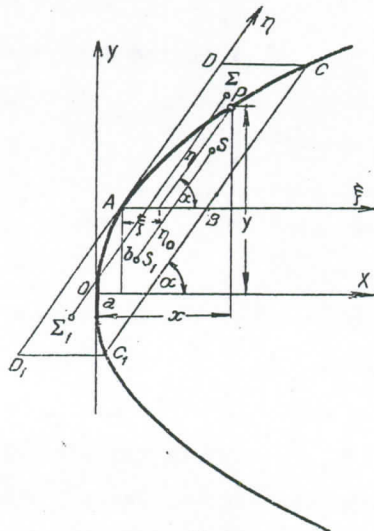
ili

$$\eta^2 \sin^2 \alpha + 2\eta(b \sin \alpha - p \cos \alpha) + b^2 - 2pa = 2p\xi$$

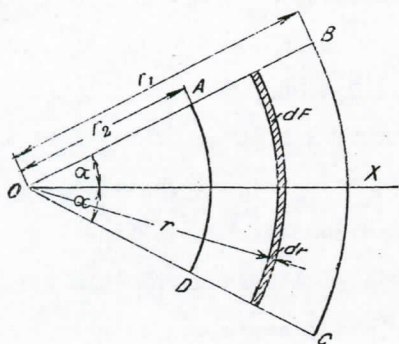
S obzirom na b') je koeficijent uz 2η ravan nuli, a s obzirom na a) je i $b^2 - 2pa = 0$ jer tačka zadovoljava jednačinu a). Jednačina parabole u sistemu A $\xi\eta$ glasi dakle

$$\eta^2 = 2 \frac{P}{\sin^2 \alpha} \xi = 2p' \xi \quad \dots d)$$

ima isti oblik kao a) kada parametar p zamenimo sa $p' = \frac{P}{\sin^2 \alpha}$. Kako prava A ξ polovi sve tetive paralelne tangenti A η to je



Sl. 27



Sl. 23

koji smo našli (16.4) $\xi =$

$$= r \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \text{ dakle}$$

$$\int_{r_2}^{r_1} \xi dF = 2 \sin \alpha \int_{r_2}^{r_1} r^2 dr =$$

$$= \frac{2}{3} (r_1^3 - r_2^3) \sin \alpha$$

i

$$\xi_0 = \frac{\int \xi dF}{\int dF} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \dots (17.3)$$

Za kružni sektor je $r_2 = 0$, dakle

$$\xi_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} r_1 \dots (17.3a)$$

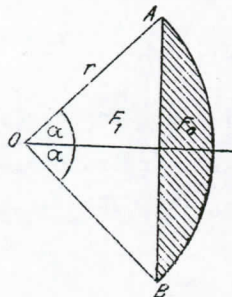
Za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je težište zone udaljeno od središta O za

$$\xi_0 = \frac{4}{3\pi} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \dots (17.4)$$

a za površinu polukruga je

$$\xi_0 = \frac{4 \cdot r_1}{3\pi} \dots (17.4a)$$

Kružni segment (sl. 24). Kada označimo sa F i ξ površinu i apscisu težišta sektora, sa



Sl. 24

F_0 i ξ_0 iste veličine segmenta, a sa F_1 i ξ_1 za trougao OAB, nalazimo po teoremi momenata masa jedn. (12.2).

$$F_0 \xi_0 = F \xi - F_1 \xi_1$$

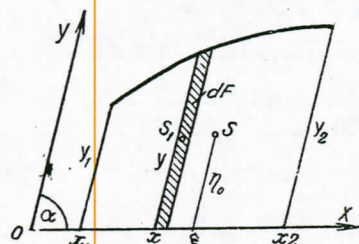
i kad unesemo $F = \alpha r^2$, $\xi = \frac{2}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} r$ (jedn. 17.3a), $F_1 = r^2 \frac{\sin 2\alpha}{2}$, $\xi_1 = \frac{2}{3} r \cdot \cos \alpha$ i $F_0 = F - F_1 =$

$$= \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) \text{ dobijamo}$$

$$\xi_0 = \frac{4}{3} r \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \dots (17.5)$$

Sa $\alpha = \frac{\pi}{2}$ prelazi jednačina (17.5) u jednačinu (17.4a) za težište površine polukruga.

Površina na sl. 25 omeđjena je apscisnom osovinom, dvema paralelama y_1 i y_2 i proizvoljnom krivom linijom. Paralele zaklapaju sa apscisnom osovinom proizvoljan ugao α , jednačina $y = \varphi(x)$ krive data je u kosom koordinatnom sistemu. Površina nema osovine simetrije njeno je težište određeno sa dvema koordinatama ξ_0 i η_0 . Elementarna površina $dF = \sin \alpha \cdot y dx$ ima koordinate $\xi = x$ i $\eta = \frac{y}{2}$ i sa njima glase integrali u jednačinama (17.2)



Sl. 25

$F \xi_0 = \int_{x_1}^{x_2} \xi dF = \sin \alpha \int_{x_1}^{x_2} xy dx$,

$$F \eta_0 = \frac{\sin \alpha}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

$$F = \int_{x_1}^{x_2} dF = \sin \alpha \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

$$F = \int_{x_1}^{x_2} dF = \sin \alpha \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

U jednačinama (17.2) skratit će se konstanta $\sin \alpha$ i kad unesemo $y = \varphi(x)$ dobijamo

$$\xi_0 = \frac{\int x \varphi(x) dx}{\int \varphi(x) dx}, \quad \eta_0 = \frac{1}{2} \frac{\int \varphi(x)^2 dx}{\int \varphi(x) dx} \dots (17.6)$$

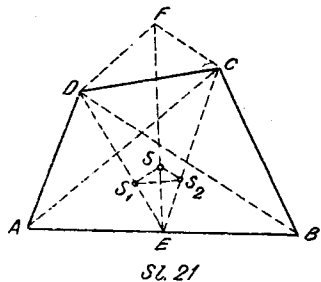
Analogo nalazimo težište površine $A'B'B''A''$ (sl. 26) omeđjena dvema ordinatama i dvema krivim linijama $\widehat{A'B'}$ i $\widehat{A''B''}$ čije su jednačine $y' = \varphi_1'(x)$ i $y'' = \varphi_2(x)$. Kada sa F_1 i ξ_1 , η_1 o-

Koordinate ξ_0, η_0, ζ_0 težišta trougla koji ima proizvoljan položaj u prostoru naći ćemo kada zamislimo površinu F kao silu koja napada težište S i tu silu razložimo u paralelne komponente. Silu F razložimo prvo u dve komponente sa napadnim tačkama A i D . Prva će imati veličinu $\frac{F}{3}$ a druga $\frac{2F}{3}$. Ovu drugu razložimo u dve jednake komponente $\frac{F}{3}$ sa napadnim tačkama B i G . Kada sa s_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) označimo koordinate tačaka A, B, C primenimo momentnu jednačinu (12.2), i skratimo sa zajedničkim faktorom F , dobijamo

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \eta_0 &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ \zeta_0 &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{aligned} \right\} \dots (17.1)$$

Pomoću ovih jednačina u stanju smo računom odrediti težište površine svakog poligona i poliedra. Ako poligon leži u xy -ravni, otpada treća jednačina.

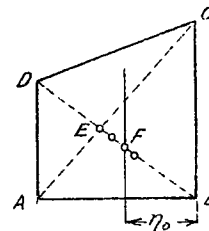
Težište četvorougla nalazimo najprostije konstrukcijom prof. Landa (R.Land, Zentralblatt der Bauverwaltung 1894)



Sl. 21

izvedenoj na sl.21. Iz temena D povučemo paralelu dijagonali AC , iz temena C paralelu dijagonali BD . Obe paralele seku se u tački F . Tačka E polovi stranu AB . Težište četvorougla S leži na pravoj EF i $ES = \frac{1}{3} EF$. Težište četvorougla je dakle identično sa težištem trougla ABF . Za dokaz konstrukcije povučene su

strane DE i CE na kojima leži težište S_1 trougla ABD i težište S_2 trougla ABC . Trougao BCD dopunjuje trougao ABD dakle je $S_1S // AC$, iz istog razloga je $S_2S // BD$. Kako je i $S_1S_2 // DC$, to su trougli S_1S_2S i DCF slični, S leži na pravoj EF i $ES = \frac{1}{3} EF$. Ista konstrukcija služi za određivanje težišta trapeza. U grafostatici često nam nije potrebno težište trapeza, nego samo težišna linija koja je paralelna paralelnim stranama trapeza. To je slučaj na pr. kada empirički datu krivu teretnu liniju zamenjujemo poligonom, dakle teretnu površinu u niz trapeza. Vertikalnu težišnu liniju trapeza na sl.22 do-



Sl. 22

bijamo kada po Landu prenesemo od temena B dužinu $BF = DE$ i podelimo EF na tri jednaka dela. Vertikala kroz deonu tačku bližu dužoj strani BC trapeza je tražena težišna linija.

β) Ravne površine omeđene delimično ili potpuno krivim linijama.

Kada sa ξ, η, ζ označimo koordinate težišta elementarne površine dF i u opšte jednačine (12.1a) zamenimo $dm = \mu_F dF$, dobijamo posle skraćivanja sa gustinom μ_F jednačine

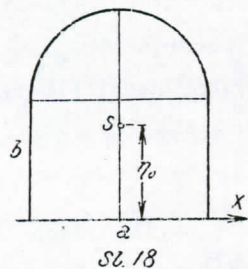
$$\xi_0 = \frac{\int \xi dF}{\int dF}, \quad \eta_0 = \frac{\int \eta dF}{\int dF}, \quad \zeta_0 = \frac{\int \zeta dF}{\int dF} \dots (17.2)$$

koje određuju težište ravne i krive površine. Za površine u xy -ravni otpada treća jednačina, za ravne površine sa jednom osovinom simetrije određen je položaj težišta sa jednom jednačinom (17.2).

Kružna zona i sektor (sl.23). Površinu $ABCD$ zone podelimo u koncentrične elemente $dF = 2r dr$, dakle $F = \int_{r_2}^{r_1} dF = 2\alpha \int_{r_2}^{r_1} r dr = \alpha(r_1^2 - r_2^2)$. Element dF je kružni luk za

$$\eta_0 \left[\frac{a}{2} \pi + \frac{a}{2} + 2a + 3b \right] =$$

$$= \frac{a}{2} \pi \left(\frac{a}{\pi} + b \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{a}{4} + b \right) + 3b \frac{b}{2} + ab \dots (16.5)$$



2. Parametrične jednačine zavojnice (helisa) glase

$$x = a \cdot \cos \varphi, \quad y = a \cdot \sin \varphi,$$

$$z = \frac{h}{2\pi} \varphi = \varphi \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

kada sa a označimo poluprečnik cilindra na kome zavojnica leži, sa h hod helise a sa α njen uspon (sl. 19). Treba da odredimo težište luka $\widehat{A_0 A}$. Element luka je

$ds = a \cdot \sec \alpha \cdot d\varphi$ i sa ovom vrednošću glase četiri integrala u jednačinama (16.1):

$$\int x ds = a^2 \sec \alpha \int_0^{\varphi_1} \cos \varphi \cdot d\varphi =$$

$$= a^2 \sec \alpha \cdot \sin \varphi_1,$$

$$\int y ds = a^2 \sec \alpha \int_0^{\varphi_1} \sin \varphi \cdot d\varphi =$$

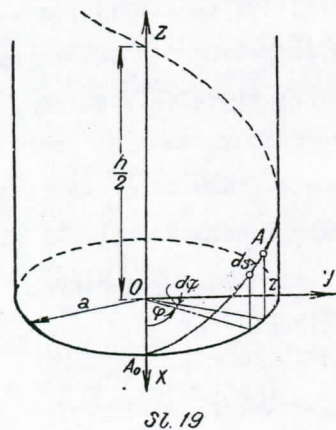
$$= a^2 \sec \alpha (1 - \cos \varphi_1)$$

$$\int z ds = \frac{a \cdot h}{2\pi} \sec \alpha \int_0^{\varphi_1} \varphi \cdot d\varphi = \frac{a \cdot h}{2 \cdot \pi} \sec \alpha \frac{\varphi_1^2}{2},$$

$$\int ds = a \sec \alpha \int_0^{\varphi_1} d\varphi = a \sec \alpha \varphi_1.$$

Sa ovim vrednostima nalazimo koordinate težišta luka $\widehat{A_0 A}$:

$$\xi_0 = a \frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1}, \quad \eta_0 = a \frac{1 - \cos \varphi_1}{\varphi_1}, \quad \zeta_0 = \frac{h}{4\pi} \varphi_1 \dots (16.5)$$

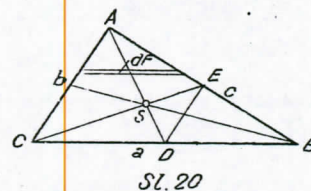


Za	$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2} \pi$	2π	su koordinate:
ξ_0	$\frac{2a}{\pi}$	0	$-\frac{2a}{3\pi}$	0	
η_0	$\frac{2a}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2a}{3\pi}$	0	
ζ_0	$\frac{h}{8}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{h}{2}$	

17. TEŽIŠTE POVRŠINA. Telo čija je debljina δ prema drugim dvema dimenzijama vrlo mala smatramo materijalnom površinom. Masa jednog elementa dF površine je $dm = \mu_F dF$, gde je μ_F površinska gustina. Ako je μ_F za celu površinu iste veličine površina je homogena. Geometrijsku površinu možemo smatrati homogenom materijalnom površinom sa gustinom $\mu_F = 1$. Površine mogu biti:

A) ravne površine a ove su α) omedjene pravim linijama, β) omedjene pravim i krivim ili jednom zatvorenom krivom linijom.

α) Ravne površine omedjene pravim linijama. Medju ovima je najjednostavnija površina trougla iz koje možemo složiti svaku ravnu poligonalnu površinu. U trouglu ABC sa stranama a, b i c sl. 20 je element dF paralelan strani a i njegovo težište je u tački koja polovi njegovu dužinu. To važi za sve elemente paralelne sa a , dakle je prava AD (CD =



= DB) težišna osovina trougla, to važi i za ostale dve medijane strane, težište trougla S je dakle u preseku AD i CE ($AE = EB$). Iz sličnih trouglova ACS i DES izlazi $DS = \frac{1}{3} AD$.

ja je homogena. Masa elementa ds je $dm = \mu_z ds$, gde je μ_z linear-
na gustina. Za homogenu liniju imamo po (12.1a)

$$\xi_0 = \frac{\int x \cdot ds}{\int ds}, \quad \eta_0 = \frac{\int y \cdot ds}{\int ds}, \quad \zeta_0 = \frac{\int z \cdot ds}{\int ds} \quad \dots (16.1)$$

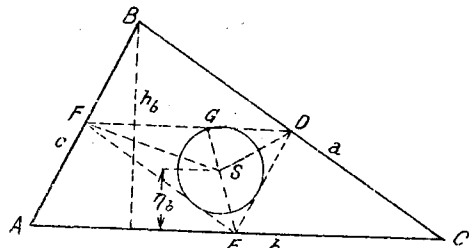
pomoću kojih nalazimo koordinate težišta geometrijske linije. Ova se može konkretno smatrati materijalnom linijom gustine $\mu_z = 1$. Ako cela linija leži na pr. u xy -ravni otpada treća jednačina.

a) VLAK SLOŽEN IZ PRAVIH LINIJA. Težište prave linije leži po teoremi 13-f u sredini njene dužine. Ako njene krajeve označimo sa i i k a dužinu sa l_{ik} , onda su koordinate

$$\xi_{ik} = \frac{x_i + x_k}{2}, \quad \eta_{ik} = \frac{y_i + y_k}{2}, \quad \zeta_{ik} = \frac{z_i + z_k}{2} \quad \dots (16.2)$$

Težište proizvoljnog otvorenog ili zatvorenog vlaka od n strana dužine l_{ik} [$i = 1, 2, \dots (n-1)$] ($k = 2, 3, \dots n$) identično je sa težištem sistema materijalnih tačaka čije su mase $m_{ik} = l_{ik}$ a koordinate $\xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik}$. Grafički određujemo težište vlaka kao središte paralelnih sila $P_{ik} = l_{ik}$ koje napadaju sredine strana.

Primer. Težište trouglastog vlaka ABC (sl.16). U



Sl. 16.

tačkama D, E, F, koje polove strane a, b, c, koncentrisane su mase a, b, c. Težište masa a i c leži na pravoj $DF = \frac{l}{2}$ u tački G. Iz obrasca (15.3) za položaj tačke G izlazi

proporcija $\frac{DG}{FG} = \frac{ED}{EF} = \frac{c}{a}$ t.j. prava EG polovi ugao FED, i ona je težišna prava celog vlaka. To važi i za ostale medija-

ne trougla DEF, dakle je težište S trouglastog vlaka identično sa središtem kruga upisanog u trougao DEF.

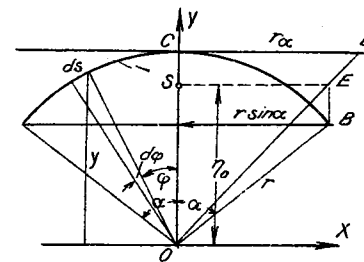
Računom nalazimo sa oznakama slike 16

$$\eta_b = \frac{h_b}{2} \cdot \frac{a+c}{a+b+c} \quad \text{i analogo} \quad \eta_a = \frac{h_a}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} \quad \dots (16.3)$$

Težište vlakova koji imaju dve osovine simetrije (upravne ili kose) kao mreža paralelograma, odnosno tri ravni simetrije kao mreža paralelopipeda, identično je sa središtem simetrije vlaka.

b) Krive linije. Jednačine (16.1) primenićemo na određivanje težišta jedne ravne i jedne prostorne krive linije.

1. Na sl.17 je ABC kružni luk sa centričnim uglom 2α i dužinom $l = 2 \cdot r\alpha$. Kada usvojimo simetralu OC, na kojoj



Sl. 17

se nalazi težište S luka, za y -osovinu, imamo da odredimo samo koordinatu η_0 težišta. U drugoj jednačini (16.1) stavimo $ds = r d\varphi$, $y = r \cdot \cos \varphi$, te dobijamo:

$$\eta_0 = \frac{r^2 \int \cos \varphi \cdot d\varphi}{r \int d\varphi};$$

uzimajući integrale u granicama $+\alpha$ i $-\alpha$ nalazimo

$$\eta_0 = r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \dots (16.4).$$

Za polukrug ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) je $\eta_0 = \frac{2r}{\pi} = 0,637 \cdot r$.

Za prozorni okvir na sl.18 nalazimo koordinatu η_0 težišta po teoremi (12.2)

ta sa koga smo je iz tela izdvojili. Ako sa A označimo jednu tačku koja se u zapremini ΔV nalazi i zamislimo da ΔV konvergira prema nuli tako da uvek sadrži tačku A, onda je $\lim \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} = \mu$ specifična masa ili apsolutna gustina tela u tački A. Analogno dolazimo do pojma specifične težine γ . Kako je težina $Q = gM$ to je $\frac{\Delta Q}{\Delta V} = g \frac{dM}{dV}$ srednja specifična težina zapremine dV , a $g\mu = \gamma$ specifična težina u tački A. Veličine μ i γ menjaju se u opšte od tačke do tačke, one će biti funkcije mesta: $\mu = F(x, y, z)$, $\gamma = gF(x, y, z)$.

Takvo telo sa promenljivim μ i γ zovemo heterogenim, telo u koga je μ konstantno u celoj njegovoj zapremini zove se homogeno. Za homogeno telo je $M = \mu V$ i $Q = \gamma V$. Brojna veličina μ i γ zavisi od jedinica težine, mase i zapremine koju usvajamo. Tako je napr. za jedinicu težine kg i jedinicu zapremine dm^3 ili litar specifična težina topljenog gvoždja $7,85 \text{ kg/dm}^3$. Isti broj dobijamo za jedinice gr i cm^3 , i t i m^3 .

Ako pak usvojimo englesku funtu (1 funta = 0,4536 kg) i stopu (= 3,05 dm) nalazimo da je $\text{kg/dm}^3 = 62,55 \text{ funta/stopa}^3$, dakle specifična težina gvoždja $7,85 \cdot 62,55 = 491 \text{ funti/stopa}^3$. U mesto apsolutne gustine i specifične težine neke materije služimo se u tehničkoj praksi relativnom gustom D ili gustom u užem smislu reči. D je broj koji kazuje koliko puta je veće μ odnosno γ od μ_0 odnosno γ_0 izvesne normalne materije sa kojom upoređujemo sve ostale materije. Dakle je $D = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\mu g}{\mu_0 g} = \frac{\mu}{\mu_0}$. Za normalnu materiju usvojena je za čvrsta i tečna tela hemijski čista voda pri temperaturi od $+4^\circ\text{C}$ kada je njena apsolutna gustina najveća. Gustina neke materije je dakle broj koji kaže koliko puta je njena masa ili težina veća od mase ili težine iste zapremine

vode. Brojna veličina gustine kao neimenovanog broja nezavisna je od jedinica mase i zapremine. Tako je srednja gustina naše Zemlje 5,51, gustina kovnog gvoždja 7,85.

15. TEŽIŠTA HOMOGENIH TELA. Za homogeno telo možemo u jednačine (12.1a) staviti $dm = \mu dV$. Konstantan faktor μ možemo staviti ispred znaka integrala te se μ u brojiocu i imeniocu potiru i tako dobijamo čisto geometrijske obrasce koji nam određuju koordinate težišta geometrijskog tela.

$$\xi_0 = \frac{\int x \cdot dV}{\int dV}, \quad \eta_0 = \frac{\int y \cdot dV}{\int dV}, \quad \zeta_0 = \frac{\int z \cdot dV}{\int dV} \quad \dots (15.1)$$

i koje važe za svako homogeno telo nezavisno od veličine μ .

Za sistem diskretnih materijalnih tačaka m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) prelaze integrali (12.1a) u konačne zbirve. Koordinate težišta sistema biće dakle određene obrascima

$$\xi_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \eta_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad \zeta_0 = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \quad \dots (15.2)$$

Ako su međusobna rastojanja tačaka stalna t.j. ako je sistem krut, biće položaj središta u sistemu stalan, u protivnom slučaju menjaju se i težište svoj položaj u sistemu.

Iz (15.2) nalazimo na pr. da se težište sistema od dve tačke m_1 i m_2 u međusobnom rastojanju l nalazi u rastojanju

$$\xi_0 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$

od tačke m_1 . To je ujedno i središte paralelnih sila $P_1 = \mu m_1$ i $P_2 = \mu m_2$ čije su napadne tačke m_1 i m_2 .

16. ODREĐIVANJE TEŽIŠTA LINIJA. Telo kojega su dve dimenzije prema trećoj vrlo male zovemo materijalnom linijom. Žica nepromenljivog oblika je konkretan primer materijalne linije. Ako je presek žice na svakom mestu isti lini-

lako nalazimo koordinate ξ_1, ξ_2, \dots i t.d. Onda po teoremi momenata masa imamo

$$\int_V x dm = \int_{V_1} x dm + \int_{V_2} x dm + \dots = M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + \dots$$

dakle

$$\left. \begin{aligned} M \xi_0 &= M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + \dots \\ \text{i analogno} \\ M \eta_0 &= M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2 + \dots \\ M \zeta_0 &= M_1 \zeta_1 + M_2 \zeta_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (12.2).$$

Kada su nam poznate koordinate težišta pojedinih delova M_1, M_2, \dots nalazimo pomoću jednačina (12.2) koordinate težišta celog tela mase M .

13. OPŠTE TEOREME O POLOŽAJU TEŽIŠTA. Svaku pravu koja prolazi kroz težište S tela zovemo težišnom osovinom, svaku ravan povučenu kroz težište zovemo težišnom ravni. Pomoću jednačina (12.2) možemo postaviti neke stavove koji nam olakšavaju odredjivanje težišta.

a) Telo se sastoji iz delova M_1, M_2, \dots čija težišta leže u istoj ravni. Kada tu ravan smatramo za xy -ravan tada su po pretpostavci $\xi_1 = \xi_2 = \dots = 0$, dakle po trećoj jednačini (12.2) je i $\xi_0 = 0$, t.j. ta ravan je težišna ravan celog tela.

b) Ako težišta delova M_1, M_2, \dots leže na jednoj pravoj i tu pravu izaberemo na pr. za x -osovinu onda su $\xi_1 = \xi_2 = \dots = 0$ i $\eta_1 = \eta_2 = \dots = 0$ dakle po jednačinama (12.2) su i koordinate $\eta_0 = \zeta_0 = 0$, t.j. ta prava je težišna prava celog tela i za odredjivanje položaja njegova težišta dovoljna je prva od jednačina (12.2).

c) Ako smo u stanju podeliti telo jednom ravni, koju ćemo uzeti za xy -ravan, tako u dva dela I i II, da svakoj elementarnoj masi dm I. dela sa ordinatom - z odgovara masa dm II. dela sa koordinatom - z iste veličine, onda je xy -ravan simetrije mase. U integralu $\int z dm$ je broj elemenata parni i svi parovi se međusobno potiru tako da je po trećoj jednačini (12.1a) $\zeta_0 = 0$ t.j. težište tela nalazi se u xy -ravni. Dakle: Svaka ravan simetrije masa je težišna ravan tela.

Jednačine (12.1) i (12.1a) važe i za kose koordinatne sisteme. Ako su dakle navedeni uslovi simetrije zadovoljeni a z -osovina zaklapa sa xy -ravni proizvoljan ugao različit od 0 i $\frac{\pi}{2}$, onda kažemo da je xy -ravan ravan kose simetrije tela. I u tom opštem slučaju je ona težišna ravan tela.

d) Ako telo ima dve ravni (ortogonalne ili kose) simetrije dakle po teoremi c) dve težišne ravni, onda je njihov presek težišna osovina tela.

e) Ako se telo sastoji iz parnog broja delova tako da delovi jednog para imaju istu težinu (masu) a njihova težišta leže simetrično prema jednoj pravoj onda je ta prava težišna prava tela. Ako telo ima dve prave navedene osobine onda njihov presek odredjuje težište tela.

f) Ako se telo sastoji iz parnog broja delova tako da oba dela jednog para imaju istu težinu i leže simetrično prema jednoj tački, onda je ta tačka težište tela. (Centralna simetrija masa).

14. SPECIFIČNA TEŽINA, APSOLUTNA I RELATIVNA GUSTINA. Kada iz nekog tela mase M i zapremine V izdvojimo jedan deo mase ΔM i zapremine ΔV zovemo odnos $\frac{\Delta M}{\Delta V}$ srednjom gustinom tela. Njena veličina zavisi od veličine ΔV i od mes-

drugi način transformisati kada komponente sile P_i označimo kraće sa X_i, Y_i, Z_i . Dobijamo tako

$$\begin{aligned} \sum \vec{P}_i \cos \alpha x_i + \sum \vec{P}_i \cos \beta y_i + \sum \vec{P}_i \cos \gamma z_i &= \\ &= \sum [X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i] = \\ &= \sum P_i r_i \cos \vartheta_i = \sum \vec{P}_i \cdot \vec{r}_i = \sum V_0^{(P)} \end{aligned}$$

Upoređujući ovaj izraz sa ranije dobivenim, nalazimo da je

$$\vec{R}_0 \cdot \vec{\rho}_0 = \sum \vec{P}_i \cdot \vec{r}_i \quad \text{ili} \quad V_0^{(R)} = \sum V_0^{(P)},$$

t.j. virijal rezultante ravan je algebarskom zbiru virijala svih sila u pogledu na istu tačku^{*)}. O središtu i virijalu sile proizvoljnog pravca u ravni bilo je govora u prvoj svesci ovog dela, str. 261.

Za grafičko određivanje središta može nam poslužiti sl. 14. Koordinate ξ i η središta su već određene, one ne zavise od položaja napadnih tačaka jer su sile paralelne z-osovini. Da nađemo ζ koordinatu moramo u xz- ili yz-ravni uneti napadne tačke A_i i oko njih obrnuti sve sile za 90° u jednom ili drugom smislu. Tako dobijamo snop P_i'' paralelan xy-ravni za koji odredimo trećim verižnim poligonom položaj rezultante R'' . Njen presek sa R' i R'' daje nam položaj središta A_0 u dvema projekcijama.

O TEŽINI I TEŽIŠTU TELA.

12. TEŽIŠTE KAO SREDIŠTE PARALELNIH SILA. Najvažniji primer sistema vezanih paralelnih sila je težina tela

*) Pojam virijala ima važnu primenu u statističkoj mehanici koja ispituje nesredjena kretanja velikog broja tačaka, dakle ima primenu u termodinamici i kinetičkoj teoriji gasova.

(čvrstih, tečnih ili gasovitih). Svako telo zapremine V (ona ima kod čvrstih tela vrlo približno stalnu veličinu i oblik, kod tečnih tela stalnu veličinu a oblik suda u kome se nalazi, kod gasovitih tela veličinu i oblik suda u kome je zatvoreno) možemo smatrati složenim iz beskonačno mnogo materijalnih tačaka. Svaka ta tačka je napadna tačka jedne elementarne sile, njene težine dq . Skup svih tih sila $\int dq = Q$ je težina tela. Kada položaj tela odredimo prema jednom koordinatnom sistemu $Oxyz$, određeno je središte paralelnih sila dq sa određenim napadnim tačkama po jednačinama (10.5) u kojima znak zbira \sum zamenjujemo sa znakom \int :

$$\xi_0 = \frac{\int x dq}{\int dq}, \quad \eta_0 = \frac{\int y dq}{\int dq}, \quad \zeta_0 = \frac{\int z dq}{\int dq} \quad \dots (12.1)$$

Tačku određenu koordinatama ξ_0, η_0, ζ_0 zovemo težištem tela.

Po definiciji sile je $dq = g \cdot dm$ gde je $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ ubrzanje teže a dm masa tačke. Kad u (12.1) unesemo tu vrednost za dq , skraćiće se konstanta g u brojiocu i imenitelju te će biti

$$\xi_0 = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad \eta_0 = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad \zeta_0 = \frac{\int z dm}{\int dm} \quad \dots (12.1a)$$

Jednačine (12.1) i (12.1a) definišu jednu i istu tačku krutog tela s toga se težište tela zove i središtem njegove mase.

$\int dm = M$ je masa celog tela, $M \xi_0$ je momenat težišta u pogledu na yz-ravan, jednačina $M \xi_0 = \int x \cdot dm$ iskazuje da je momenat težišta ravan zbiru momenata svih elemenata dm u pogledu na istu ravan.

Često možemo neko telo mase M i zapremine V razložiti u delove mase $M_1, M_2 \dots$ i zapremine $V_1, V_2 \dots$ za koje

vnoteža ne biva poremećena proizvoljnim pomeranjem tela dok se intenzitet i pravac sila ne menja. Očividno je da se usled translacije tela ravnoteža neće poremetiti; dovoljan je dakle uslov za astatičku ravnotežu da ona bude održana ako se telo oko jedne tačke obrće. U mesto da telo obrćemo a pravac sila ostavimo nepromenjen možemo telo smatrati nepomičnim a sve sile za isti ugao u istom smislu oko njihovih napadnih tačaka obrnuti čime posmatranje biva jednostavnije. Za dva vezana sistema sila (P_i) i (Q_i) kažemo da su astatički ekvivalentni ako se telo pod istovremenim dejstvom sistema (P_i) i $(-Q_i)$ nalazi u astatičkoj ravnoteži.

Kada se sve sile paralelnog sistema (P_i) obrnu oko njihove napadne tačke za jedan isti ugao φ ne menjajući pri tome svoju veličinu, ostaće one međusobno paralelne, njihova rezultanta R imaće istu veličinu ΣP_i i obrnuće se za isti ugao φ u istom smislu.

Onu zamišljenu tačku A_0 na napadnoj liniji R oko koje se rezultanta obrne za ugao φ , zovemo središtem paralelnih sila. Obrtanjem sila za ugao φ menjaju se vrednosti uglova α, β, γ . Jednačina (10.6) napadne linije R biće za svaku vrednost uglova α, β, γ zadovoljena samo za tačku čije su koordinate $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0, \zeta = \zeta_0$. Ta tačka ostaje na napadnoj liniji za svaku vrednost uglova α, β, γ , dakle za svaku vrednost ugla φ . Prema tome su koordinate središta paralelnih sila definisane jednačinama (10.5).

Vezani sistem paralelnih sila biće u astatičkoj ravnoteži ako je pored $\Sigma P_i = 0$ za svaku vrednost uglova α, β, γ ; $M = 0$. Iz jednačine (10.2) ili (10.3) vidimo da će to biti ako je:

$$\Sigma P_i x_i = 0, \Sigma P_i y_i = 0, \Sigma P_i z_i = 0.$$

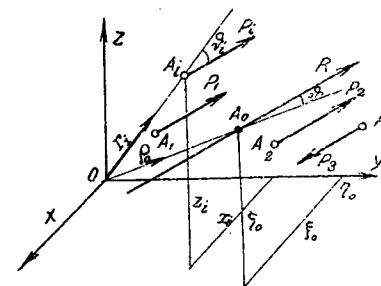
Za astatičku ravnotežu paralelnih sila postoje dakle četiri uslova, za jedan uslov više nego za ravnotežu kličih sila.

Uvodjenjem koordinata ξ_0, η_0, ζ_0 središta A_0 iz jednačine (10.5) možemo jednačinu (10.3) znatno uprostiti. Vektor položaja središta označimo sa $\vec{OA}_0 = \vec{\rho}_0$, vektor položaja napadne tačke A_i sile P_i sa $\vec{OA}_i = \vec{r}_i$ sl. 15. Kada pišemo mesto $\Sigma P_i R$ glasiće prva tri člana jednačine (10.3)

$$R^2 (\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2) = R^2 \rho_0^2$$

a izraz pod zagradom

$$\begin{aligned} [R \xi_0 \cos \alpha + R \eta_0 \cos \beta + \\ + R \zeta_0 \cos \gamma]^2 = \\ = [R_x \xi_0 + R_y \eta_0 + R_z \zeta_0]^2 = \\ = (R \rho_0 \cos \vartheta)^2. \end{aligned}$$



Sl. 15.

gde je ϑ ugao koji zaklapaju vektori \vec{R} i $\vec{\rho}_0$. Sa ovim transformacijama je

$$M^2 = R^2 \rho_0^2 - (R \rho_0 \cos \vartheta)^2 = R^2 \rho_0^2 (1 - \cos^2 \vartheta) = R^2 \rho_0^2 \sin^2 \vartheta,$$

dakle $M = \pm R \rho_0 \sin \vartheta$ ili u vektorskom obliku $\vec{M} = \vec{\rho}_0 \times \vec{R}$. Tako smo uvodjenjem središta sveli jednačinu (10.3) na definiciju momenta kao vektorskog proizvoda iz $\vec{\rho}_0$ i \vec{R} . Skalarni proizvod vektora \vec{R} i $\vec{\rho}_0$ zove se po Klausiusu (R. Clausius, 1822-88) virijal sile R u pogledu na tačku O . Dakle

$$R \rho_0 \cos \vartheta = \vec{R} \cdot \vec{\rho}_0 = V_0^{(R)}.$$

Izraz pod zagradom u jednačini (10.3) možemo i na

sve tri komponente M_x , M_y i M_z jed (10.2) ravne nuli, dobijamo stavljajući $M_x = M_y = M_z = 0$ iz jed. (10.2) odnose:

$$\frac{\sum P_i \cdot x_i}{\cos \alpha} = \frac{\sum P_i \cdot y_i}{\cos \beta} = \frac{\sum P_i \cdot z_i}{\cos \gamma} = \mu \quad \dots (10.7)$$

gde je μ konstanta dimenzije statičkog momenta. Iz jednačina (10.5) i (10.7) nalazimo da je u slučaju $M = 0$

$$\xi_0 = \frac{\mu}{\sum P_i} \cos \alpha, \quad \eta_0 = \frac{\mu}{\sum P_i} \cos \beta, \quad \zeta_0 = \frac{\mu}{\sum P_i} \cos \gamma \quad \dots (10.5a)$$

a jednačina napadne linije R prelazi u

$$\frac{\xi}{\cos \alpha} - \frac{\mu}{\sum P_i} = \frac{\eta}{\cos \beta} - \frac{\mu}{\sum P_i} = \frac{\zeta}{\cos \gamma} - \frac{\mu}{\sum P_i}$$

ili

$$\frac{\xi}{\cos \alpha} = \frac{\eta}{\cos \beta} = \frac{\zeta}{\cos \gamma} \quad \dots (10.6a)$$

t.j. rezultanta R prolazi kroz početak O koordinatnog sistema.

Iz odnosa (10.7) vidimo da je μ vektor paralelan silama P_i čija je veličina određena jednačinom

$$\mu^2 = (\sum P_i \cdot x_i)^2 + (\sum P_i \cdot y_i)^2 + (\sum P_i \cdot z_i)^2 \quad \dots (10.7a)$$

t.j. čije su komponente u x,y,z pravcu zbirevi planarnih momenta $(\sum P_i \cdot x_i)$, $(\sum P_i \cdot y_i)$ i $(\sum P_i \cdot z_i)$.

Iz jednačina (10.5a) vidimo da je konstantna $\frac{\mu}{\sum P_i}$ rastojanje tačke A_0 od koordinatnog početka O.

Sistem paralelnih sila P_i biće ekvivalentan spregu M ako je $\sum P_i = 0$ i bar jedna od jednačina (10.2) različita od nule.

Najzad stajace sile P_i u ravnoteži ako pored $\sum P_i = 0$ postoji medju planarnim momentima dvojnja jednačina (10.7).

Uslovi ravnoteže, dakle i uslovi ekvivalencije izraženi su trima skalarnim jednačinama: $\sum P_i = 0$ i dvojnjom jednačinom (10.7).

Sve dosada postavljene jednačine dobiće prostiji oblik kada koordinatne osovine tako orijentiramo da je z-osovina paralelna pravcu sila. Tada je

$$\cos \alpha = \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = 1.$$

Sa tim vrednostima svode se tri jednačine (10.1) na $R'_z = \sum P_i$, jednačine (10.2) prelaze u

$$M_x = \eta \sum P_i = \sum_1^n P_i y_i; \quad M_y = -\xi \sum P_i = -\sum_1^n P_i x_i, \quad M_z = 0.$$

Iz ove dve komponente kao i neposredno iz (10.3) nalazimo

$$M^2 = (\sum P_i x_i)^2 + (\sum P_i y_i)^2 = (\sum P_i)^2 (\xi^2 + \eta^2).$$

Položaj rezultante određen je dvema koordinatama

$$\xi = \frac{\sum P_i \cdot x_i}{\sum P_i}, \quad \eta = \frac{\sum P_i \cdot y_i}{\sum P_i}.$$

Uslovi ravnoteže sistema iskazani su trima jednačinama

$$\sum P_i = 0, \quad \sum P_i \cdot x_i = 0, \quad \sum P_i \cdot y_i = 0.$$

11. ASTATIKA. SREDIŠTE PARALELNIH SILA. ASTATIČKA RAVNOTEŽA. -

Teoreme koje smo do sada u statici paralelnih sila izveli, odnosile su se na sile čije napadne tačke možemo proizvoljno pomerati na njihovoj napadnoj liniji. U prirodi nailazimo i na takve sile koje imaju svoje određene napadne tačke t.j. koje su vezane za tačku. Onu granu statike koja ispituje uslove ravnoteže takvog "vezanog sistema" sila zovemo astatikom. Za jedno kruto telo kažemo da je u astatičkoj ravnoteži pod dejstvom vezanog sistema sila (P_i) ako ra-

$$M_{ix} = y_i P_{iz} - z_i P_{iy}.$$

Kada za P_{iy} i P_{iz} unesemo gornje vrednosti glasiće momenat

$$M_{ix} = \cos\gamma P_i y_i - \cos\beta P_i z_i.$$

Iz ovog obrasca dobijamo cikličnom permutacijom M_{iy} i M_{iz} . Algebarski zbirjevi $\sum M_{ix}$, $\sum M_{iy}$ i $\sum M_{iz}$ daju komponente rezultujućeg momenta M . Dakle je

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \cos\gamma \sum_1^n P_i y_i - \cos\beta \sum_1^n P_i z_i; \\ M_y &= \cos\alpha \sum_1^n P_i z_i - \cos\gamma \sum_1^n P_i x_i; \\ M_z &= \cos\beta \sum_1^n P_i x_i - \cos\alpha \sum_1^n P_i y_i. \end{aligned} \right\} \dots\dots(10.2)$$

Iz jednačine (10.1) dobijamo po opštem obrascu rezultat koji nam je unapred poznat:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sum P_i$$

s obzirom na jednačinu

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Iz jednačina (10.2) dobijamo veličinu rezultujućeg momenta

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Posle lake transformacije sa $\cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha$ i t.d. nalazimo:

$$M^2 = (\sum P_i x_i)^2 + (\sum P_i y_i)^2 + (\sum P_i z_i)^2 - [\cos\alpha \sum P_i x_i + \cos\beta \sum P_i y_i + \cos\gamma \sum P_i z_i]^2 \dots\dots(10.3)$$

gde je indeks i izostavljen.

Proizvode iz sile i upravnog rastojanja njene napadne tačke od jedne ravni zevamo statičkim momentom sile u pogledu te ravni ili planarnim momentom, dakle je $P_i x_i$ momenat sile P_i u pogledu na yz -ravan i analogno važi i za $P_i y_i$, $P_i z_i$. Ako su sile klizeći vektori, što ovde pretpostavljamo, možemo

ma koju tačku $A_i(x_i, y_i, z_i)$ na napadnoj liniji sile P_i smatrati njenom napadnom tačkom. Jednačine napadne linije rezultante dobijamo iz njene definicije da ona zamenjuje dati sistem paralelnih sila. Momenat rezultante u pogledu ma koje osovine mora biti ravan algebarskom zbiru momenata sile P_i . Dobijamo tako tri jednačine u kojima ξ, η, ζ znače koordinate njene proizvoljne tačke na liniji R i s obzirom (10.1):

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \cos\gamma \eta \sum P_i - \cos\beta \zeta \sum P_i = \\ &= \cos\gamma \sum P_i y_i - \cos\beta \sum P_i z_i \\ M_y &= \cos\alpha \zeta \sum P_i - \cos\gamma \xi \sum P_i = \\ &= \cos\alpha \sum P_i z_i - \cos\gamma \sum P_i x_i \\ M_z &= \cos\beta \xi \sum P_i - \cos\alpha \eta \sum P_i = \\ &= \cos\beta \sum P_i x_i - \cos\alpha \sum P_i y_i; \end{aligned} \right\} \dots\dots(10.4)$$

da ove tri jednačine nisu međusobom nezavisne zaključujemo već iz činjenice da je prava u prostoru određena već sa dve ma jednačinama koje predstavljaju njene projekcije na dve koordinatne ravni. Kada podelimo prvu jednačinu sa $\cos\beta \cos\gamma \sum P_i$, drugu sa $\cos\gamma \cos\alpha \sum P_i$ a treću sa $\cos\alpha \cos\beta \sum P_i$ i označimo kraće konstantne veličine

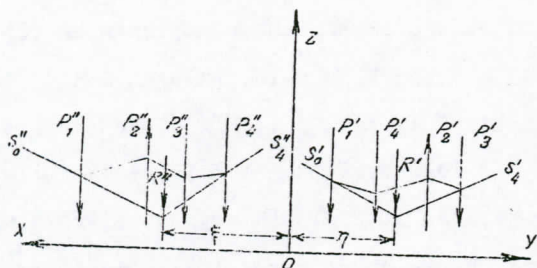
$$\frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} = \xi_0, \quad \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} = \eta_0, \quad \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} = \zeta_0 \dots\dots(10.5)$$

dobijamo iz jednačina (10.4):

$$\frac{\xi - \xi_0}{\cos\alpha} = \frac{\eta - \eta_0}{\cos\beta} = \frac{\zeta - \zeta_0}{\cos\gamma} \dots\dots(10.6)$$

t.j. normalnu jednačinu prave u prostoru koja prolazi kroz stalnu tačku $A_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$. O značaju tačke A_0 biće doznije govora.

Jednačina (10.6) određuje napadnu liniju u opštem slučaju kada je $R \neq 0$ i $M \neq 0$. Ako je $M = 0$ dakle kada su



Sl. 14

Veličina rezultante je $R = \sum P_i$ a njen položaj određen je koordinatama ξ i η koje na sl. merenjem nalazimo. U sl. 14 je $n = 4$ i $R \neq 0$.

Kada bi bila $R = 0$ dakle i $R' = 0$, $R'' = 0$, mogla bi kao što nam je iz statike u ravni poznato, nastupiti dva slučaja. a) Verižni poligoni $S'_0 S'_n$ i $S''_0 S''_n$ su zatvoreni, sile $P_1 \dots P_n$ stoje u ravnoteži. b) Verižni poligoni su otvoreni t.j. strane S'_0 i S'_n su paralelne u rastojanju r' . Sile P'_i obrazuju spreg sa momentom $M' = S'_0 r'$. Isto tako će i sile P''_i obrazovati spreg sa momentom $M'' = S''_0 r''$. Date sile P ekvivalentne su spregu sa momentom $M = \sqrt{M'^2 + M''^2}$. Za izvesne položaje projekcionih ravni može verižni poligon biti u jednoj ravni otvoren, u drugoj zatvoren. Onda je na pr. $M'' = 0$ i $M = M'$.

9. REDUKCIJA SILA NA JEDNU TAČKU. Treći način kojim ćemo sistem paralelnih sila svesti na najprostoji: rezultujuću silu R ili na rezultujući spreg M je onaj isti kojim smo sile u ravni slagali: redukovanje sila na jednu proizvoljnu tačku O .

Svakoj sili P_i povučemo kroz O paralelu i na njoj dve jednake sile P'_i i $-P'_i$ iste veličine sa datom silom. Kada smo to izvršili za sve n sile, dobili smo sistem od $3n$

sila koji je datom sistemu ekvivalentan jer se $2n$ sile koje napadaju tačku O međusobno po dve i dve potiru. Sile P'_i složimo u rezultantu $R' = \sum P'_i$. Redukciona rezultanta određuje veličinu, pravac i smer stvarne rezultante R . Sile P_i i $-P'_i$ čine spreg koji možemo vektorom \vec{M}_i prikazati. Sve n ravni spregova seku se u pravoj sile R' , vektori \vec{M}_i obrazuju dakle ravan pramen sa centrom O . Njihov geometrijski zbir $\sum \vec{M}_i = \vec{M}$ je dakle upravan na \vec{R}' . Rezultujući spreg leži u jednoj ravni sa silom R' , možemo ga dakle složiti sa R' u silu R koja ima od R' rastojanje $\frac{M}{R'}$. Time je položaj rezultante R jednoznačno određen. Ako smo našli da je $R' \neq 0$ a $M = 0$, to znači da smo redukcionu tačku slučajno izabrali na napadnoj liniji rezultante R . Ako je pak $R' = 0$ a $M \neq 0$, onda je dati sistem sila ekvivalentan spregu sa momentom $\sum \vec{M}_i = \vec{M}$. Veličina momenta je sada nezavisna od položaja redukcione tačke. Najzad ako je $R = 0$ i $M = 0$, stoji sistem sila u ravnoteži.

10. SLAGANJE SILA ANALITIČKIM PUTEM. Redukcionu tačku O uzimamo za početak proizvoljno orijentisanog koordinatnog sistema $Oxyz$. Pravac paralelnih sila zaklapa sa pozitivnim koordinatnim osovina uglove α, β, γ . Ako sile P_i smatramo kao algebarske veličine dajući im pozitivan znak u jednom smeru a negativan u suprotnom smeru, važe uglovi α, β, γ za oba smera. Komponente sile P_i su $P_i \cos \alpha, P_i \cos \beta$ i $P_i \cos \gamma$ dakle

$$R'_x = \cos \alpha \sum_1^n P_i; R'_y = \cos \beta \sum_1^n P_i; R'_z = \cos \gamma \sum_1^n P_i \dots (10.1).$$

Momenat \vec{M}_i sprega $(P_i, -P'_i)$ identičan je sa momentom sile P_i u pogledu na početak O kroz koji sve sile $-P'_i$ prolaze. Komponente momenta \vec{M}_i u pravcima koordinatnih osovina biće po poznatom obrascu za momenat sile P_i u pogledu na x -osovinu:

smo ovde smatrali, sve "n" ravni ε_i seku u jednoj proizvoljnoj tački O.

U osobenom slučaju mogu se sve ravni spregova seći u jednoj pravoj. Kada tu pravu izaberemo za z-osovinu imamo jednačine (6.1) do (6.4) da stavimo:

$$\alpha_i + \beta_i = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_i = \frac{\pi}{2}, \quad M_{iz} = 0$$

te dobijamo

$$M_{ix} = \hat{M}_i \cos \alpha_i, \quad M_{iy} = M_i \sin \alpha_i \dots \dots \dots (6.1a)$$

$$M_x = \sum_1^n M_i \cos \alpha_i, \quad M_y = \sum_1^n M_i \sin \alpha_i \dots \dots \dots (6.2c)$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad \text{i} \quad \cos \alpha = \frac{M_x}{M}, \quad \sin \alpha = \frac{M_y}{M} \dots \dots \dots (6.3a) \quad \text{i} \quad (6.4a)$$

Najzad mogu se sve ravni spregova ε_i seći u beskonačno udaljenoj pravci, tj. mogu biti medjusobom paralelne ili što je to isto, mogu se poklopiti u jednu ravan ε . Tada su svi vektori \vec{M}_i paralelni i rezultujući momenat je $M = \sum M_i$ kao što smo u "Statici krute ploče" str. 242 opisali.

Pojam sprega sila uveo je u nauku Poanso (L. Poinsot 1777-1859) svojim znamenitim delom "Eléments de statique, Paris 1804" i njime znatno uprostio statiku sila u prostoru.

PARALELNE SILE.

7. SLAGANJE n PARALELNIH SILA, MOGUĆI SLUČAJEVI. Jedno kruto telo napadaju u raznim njegovim tačkama paralelne sile P_1, P_2, \dots, P_n . Iz statike silâ u ravni znamo da će sile P_1 i P_2 imati rezultantu $R_1 = P_1 \pm P_2$ koja leži u ravni sila P_1 i P_2 izmedju njih ako su sile istog smera, a izvan

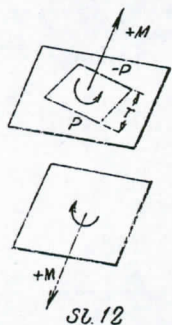
njih na strani veće sile ako imaju suprotan smer. Na isti način složimo silu R_1 sa P_3 u rezultantu R_2 i t.d. Najzad nam ostaje rezultanta R_n iz sila R_{n-2} i P_{n-1} . Tako smo sve sile P_i sveli na dve paralelne sile R_{n-1} i P_n . Obe ove sile mogu imati I) razne napadne linije, II) mogu se njihove napadne linije poklapati. U oba slučaja mogu: I α) imati obe sile razne veličine istog i suprotnog smera i tada ih slažemo u rezultantu R_n . I β) obe sile su jednake veličine i suprotna smera i tada obrazuju spreg II α) Obe sile imaju razne veličine a isti ili suprotan smer, one se slažu u rezultantu čija je veličina $R_{n-1} \pm P_n$ a napadna linija se poklapa sa P_n . II β) Obe sile imaju istu veličinu i suprotan smer, sile se potiru i sistem od n sila ima rezultantu $R_n = 0$. U oba slučaja: I α) i II α) sistem sila P_i ima rezultantu, dakle možemo iskazati: Sistem od n paralelnih sila ekvivalentan je 1) jednoj rezultanti R_n , ili 2) jednom rezultujućem spregu M_n i 3) ili najzad nalazi se u ravnoteži.

8. SLAGANJE SILA GRAFIČKIM PUTEM. Postepeno slaganje po dve sile koje nam je služilo da pokažemo tri moguća slučaja redukcije paralelnih sila nije pogodno ako je broj sila veći. Brže dolazimo cilju pomoću verižnog poligona kojim smo se pri slaganju sila u ravni služili. Sile P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) date su dvema projekcijama P_i' i P_i'' (sl.14). Prava sila uzimamo za z-osovinu tako da je P_i' projekcija na zy ravan, P_i'' projekcija na z-x ravan. Za ravne sisteme P_i' i P_i'' konstruišemo sa proizvoljnim polovima verižne poligone i nalazimo njihove rezultante R' i R'' . Ove rezultante projiciranih sila su projekcije rezultante R datog prostornog sistema.

taj smisao suprotan. Smisao obrtanja sprega biće jednoznačno određen, kada osovini sprega propišemo strelicom izvestan smer. U desnom sistemu dajemo osovini takav smer da stojeći u osovini i gledajući prema strelici vidimo obrtanje sprega u smislu kazaljke na satu (sl.12). Na taj način smo spreg jednoznačno predstavili kao vektor. Kao vektorski proizvod dvaju polarnih vektora \vec{P} i \vec{r} moment sprega je aksijalan vektor a kako se spreg može u svojoj ravni pomerati to je i slobodan vektor. Slaganje "n" spregova svodi se dakle na slaganje "n" vektora koji se u jednoj tački sastaju. Sve što za slaganje i razlaganje centralnih sila važi, važi i za slaganje i razlaganje spregova. Na sl.11-b ucrtan je paralelogram momenata koji je sličan paralelogramu sila, jer su mu sve strane r-puta veće i za ugao $\frac{\pi}{2}$ u istom smislu obrnute.

Na sl. 11 složili smo spregove M_1 i M_2 tako da smo ih sveli na isti krak r . No možemo spregove svesti na istu silu P . Tada su kraci spregova $r_1 = \frac{M_1}{P}$ i $r_2 = \frac{M_2}{P}$. Silu $+P$ sprega M_1 i silu $-P$ sprega M_2 dovedemo u pravu "g" u kojoj se ravni ε_1 i ε_2 seku. Te se sile potiru i ostaju dve antiparalelne sile $-P$ u ravni ε_1 i $+P$ u ravni ε_2 koje obrazuju rezultujući spreg sa krakom r i momentom $M = Rr$. Veličinu kraka r i nagibe α_1 i α_2 ravni ε u kojoj leži spreg M nalazimo iz poznatih veličina α , r_1 i r_2 rešavanjem trougla sa stranama r_1 , r_2 i r .

6. SLAGANJE I RAZLAGANJE SPREGOVA ANALITIČKIM PUTEVIM. Položaj krutog tela koje napadaju "n" spregova sa mo-



mentima M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) određen je prema koordinatnom sistemu $Oxyz$. Položaj ravni ε_i u kojoj leži spreg M_i određen je uglovima α_i , β_i , γ_i koji normala ravni dakle i osovina sprega \vec{M}_i zaklapa sa koordinatnim osovina. Kada normale na sve ravni ε_i povučemo iz početka O koordinatnog sistema i na njih prenesemo iz O vektore \vec{M}_i , dobijamo u opšte prostorni pramen vektora. Svaki vektor \vec{M}_i razložimo u tri komponente

$$M_{ix} = M_i \cos \alpha_i, \quad M_{iy} = M_i \cos \beta_i, \quad M_{iz} = M_i \cos \gamma_i \quad \dots (6.1)$$

i njihov algebarski zbir je komponenta rezultujućeg sprega \vec{M}

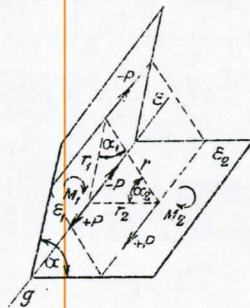
$$M_x = \sum_1^n M_i \cos \alpha_i, \quad M_y = \sum_1^n M_i \cos \beta_i, \quad M_z = \sum_1^n M_i \cos \gamma_i \quad \dots (6.2)$$

iz kojih nalazimo veličinu rezultujućeg sprega vektora \vec{M}

$$|\vec{M}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad \dots (6.3)$$

i uglove α , β , γ koje zaklapa sa koordinatnim osovina:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{M_x}{M} \\ \cos \beta &= \frac{M_y}{M} \\ \cos \gamma &= \frac{M_z}{M} \end{aligned} \right\} \dots (6.4)$$



SL. 13

Iz obrasca (6.3) vidimo da će telo pod dejstvom sprega biti u ravnoteži ako je

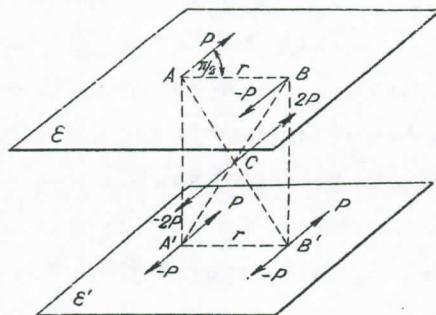
$$M_x = 0, \quad M_y = 0 \quad \text{i} \quad M_z = 0 \quad \dots (6.5).$$

Dva razna sistema spregova $\sum_1^n \vec{M}_i$ i $\sum_1^n \vec{M}_i$ biće ekvivalentna ako je

$$M_x = \sum M_x, \quad M_y = \sum M_y, \quad M_z = \sum M_z \quad \dots (6.6).$$

Kako su spregovi istog momenta u paralelnim ravnima međusobno ekvivalentni možemo tvrditi da se u opštem slučaju koji

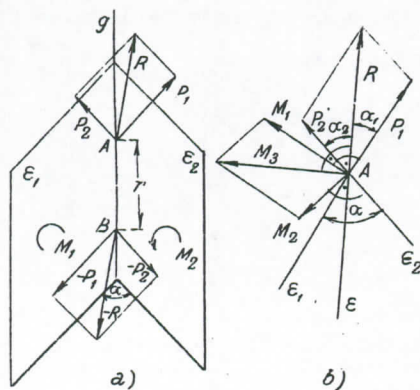
mo grupisati na ovaj način: Sile P u tačkama A i B' imaju re-



Sl. 10

zultantu $2P$ koja napada tačku C u sredini dijagonale AB' . Sile $-P$ u tačkama A' i B imaju rezultantu $-2P$ koja napada istu tačku C . Te se dve sile potiru te ostaje sila P u tački A' i $-P$ u tački B' , dakle isti spreg u ravni E' koji je bio dat u ravni E . Iz ovoga izilazi stav: Svi spregovi u paralelnim ravnima koji imaju isti moment medjusobno su ekvivalentni.

5. SLAGANJE SPREGOVA U KOSIM RAVNIMA. Dve ravni E_1 i E_2 seku se u pravoj "g" pod uglom α . U ravnima leže spregovi sa momentima M_1 odnosno M_2 (sl.11). Na pravoj "g" izabe-



Sl. 11

remo proizvoljnu duž $AB = r$ kao zajednički krak spregova M_1 i M_2 . Sile spregova su dakle $P_1 = \frac{M_1}{r}$ i $P_2 = \frac{M_2}{r}$. Spreg $(P_1, -P_1)$ leži u ravni E_1 , spreg $(P_2, -P_2)$ leži u ravni E_2 . Obe sile P_1 i P_2 , odnosno $-P_1$ i $-P_2$ leže u ravnima upravnim na pravu g . Rezultante njihove R odnosno $-R$ su dakle takodje upravne na pravu g i leže u jednoj ravni E koja sa E_1 i E_2 zaklapa uglove α_1 i α_2 . (sl.11 b). Spregove M_1 i M_2 složili smo u jedan spreg $(R, -R)$ sa momentom $M = Rr$; uglove α_1 i α_2 nalazimo iz sinusnog pravila:

$$\frac{\sin \alpha_1}{M_2} = \frac{\sin \alpha_2}{M_1} = \frac{\sin \alpha}{M} \quad \dots (5.1)$$

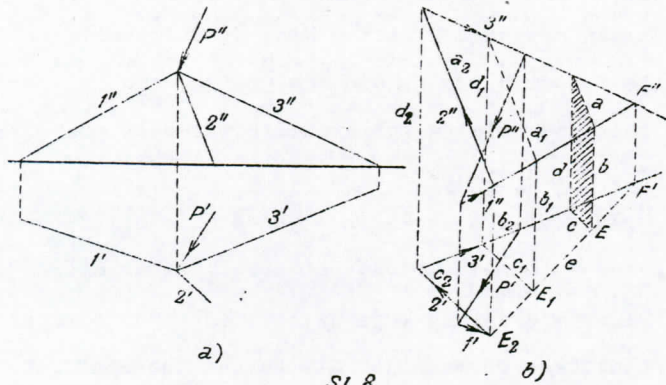
pošto smo pomoću kosinusnog stava našli

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \cos \alpha} \quad \dots (5.2)$$

Slaganje možemo na proizvoljan broj spregova protegnuti. Ako spreg M_3 leži u ravni E_3 koja seče ravan E u pravoj "g" uzećemo na "g" duž "r" i složiti sile R i $P_3 = \frac{M_3}{r}$ odnosno $-R$ sa $-P_3$ te dobijamo rezultujući spreg triju spregova $(R, -R)$ i t.d.

Moment sprega $(P, -P)$ ravan je momentu sile P u pogledu na ma koju tačku koja leži na napadnoj liniji druge sile $-P$, i predstavljen je površinom paralelograma kome je osnova sila P a visina krak "r". Ta površina leži u ravni sprega ili prema čl.4 u ma kojoj ravni paralelnoj ravni sprega. Paralelogram može imati u svojoj ravni proizvoljan položaj. Položaj jedne grupe paralelnih ravni potpuno je određen njihovom normalom. Položaj i veličina sprega biće dakle potpuno određen jednom duži ravnoj momentu sprega nanešenoj na ma koju pravu upravnu na ravan sprega. Tu pravu zovemo osovinom sprega.

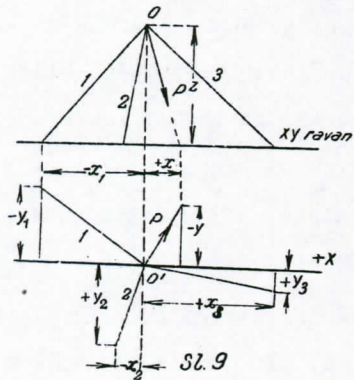
Kada svi spregovi leže u istoj ravni, u ravni crteža, mi ih sve posmatramo sa iste strane, i razlikujemo njihove momente u pozitivne i negativne prema tome da li okreću u smislu kazaljke na satu, ili u suprotnom smislu. Ali kada spregovi leže u ravnima raznog položaja u prostoru, možemo spreg posmatrati sa obe strane njegove ravni i onda je ovo razlikovanje nemoguće, jer ako s jedne strane vidimo obrtanje u smislu kazaljke na satu, biće gledan s druge strane



Sl. 8

a_1, b_1, c_1, d_1 na proizvoljnom mestu nalazimo teme E_1 . Sa tačkama E i E_1 određena je prava e na kojoj se po Štajnerovoj teoremi kreće teme E . Presjek prave "e" sa pravom l' povučenom iz kraja sile P' određuje tačku E_2 i time i četvorougao $a_2 b_2 c_2 d_2$ čije su strane $a_2 = 2''$ i $c_2 = 2'$. Tako je poligon sila u obema projekcijama određen. Ako se presjek F'' pravih $1''$ i $3''$ nalazi na crtežu, onda njegova projekcija F' na pravu $3'$ određuje sa E pravu e , dakle je dovoljno da konstruišemo samo jedan četvorougao $abcd$.

3. RAZLAGANJE SILE PUTE M RACUNA.- Teme O tronošca uzimamo za početak koordinatnog sistema, a upravnu OO' na horizontalnu ravan za z -osovinu (sl.9). Kada označimo sa l_i dužine štapova od O do x - y ravni, a sa l dužinu napadne linije sile P , sa $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ odnosno α, β, γ nagibe pravih l_1, l prema koord. osovinama, dobijamo komponente date sile P i traženih sila S_i u štapovima ($i = 1, 2, 3$):



Sl. 9

žine štapova od O do x - y ravni, a sa l dužinu napadne linije sile P , sa $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ odnosno α, β, γ nagibe pravih l_1, l prema koord. osovinama, dobijamo komponente date sile P i traženih sila S_i u štapovima ($i = 1, 2, 3$):

$$\left. \begin{aligned} X &= P \cdot \cos \alpha = P \frac{x}{l}, Y = P \cdot \cos \beta = P \frac{y}{l}, Z = P \cdot \cos \gamma = P \frac{z}{l} \\ X_i &= S_i \cos \alpha_i = S_i \frac{x_i}{l_i}, Y_i = S_i \cos \beta_i = S_i \frac{y_i}{l_i}, Z_i = S_i \cos \gamma_i = S_i \frac{z_i}{l_i} \end{aligned} \right\} \dots (3.1)$$

gde je z ista koordinata za sva četiri pravca.

Kada ove vrednosti unesemo u uslove ravnoteže

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0$$

dobijemo tri jednačine

$$\left. \begin{aligned} S_1 \frac{x_1}{l_1} + S_2 \frac{x_2}{l_2} + S_3 \frac{x_3}{l_3} + P \frac{x}{l} &= 0 \\ S_1 \frac{y_1}{l_1} + S_2 \frac{y_2}{l_2} + S_3 \frac{y_3}{l_3} + P \frac{y}{l} &= 0 \\ S_1 \frac{z_1}{l_1} + S_2 \frac{z_2}{l_2} + S_3 \frac{z_3}{l_3} + P \frac{z}{l} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3.2)$$

iz kojih nalazimo najzgodnije pomoću determinanata sile S_1, S_2, S_3 u štapovima l_1, l_2 i l_3 odnosno komponente $-S_1, -S_2$ i $-S_3$ date sile P .

B. SILE NAPADAJU RAZNE TAČKE KRUTOG TELA.

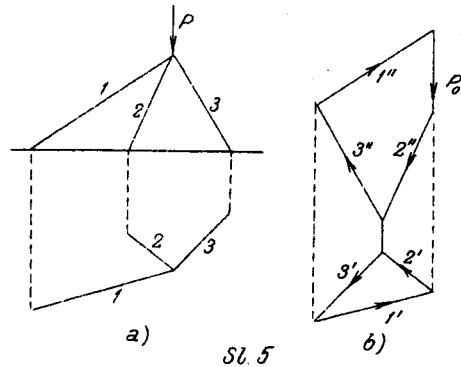
O spregovima sila u raznim ravnima.

4. SPREGOVI U PARALELNIM RAVNIMA.- U staciti sila u ravni videli smo (1 sv. str. 229) da spreg $(P, -P)$ možemo u njegovoj ravni translatorno pomerati u proizvoljnom pravcu obrtati oko proizvoljne tačke u njegovoj ravni, a da pri tom ostaje njegov statički značaj nepromenjen dokle se njegov momenat $M = Pr$ ne menja. Možemo dakle veličinu sile i kraka menjati tako da bude $P_1 r_1 = Pr$.

Na sl.10 nalazi se u ravni E spreg $(P, -P)$ sa krakom $AB = r$. Tačke A i B projiciramo na paralelnu ravan E' i u tačkama A' i B' sastavimo po dve jednake i suprotne sile P . Ovih šest sila koje su ekvivalentne dvema datim silama, može-

dobijamo neposredno komponente njene u dvama štapovima. Ako pak trougao sila obrazuje tri nepoznate sile u štapovima onda je neposredno određivanje komponenata po gornjoj metodi nemoguće. U tom slučaju primenjujemo metodu neodredjene razmere koju će sledeća dva primera objasniti.

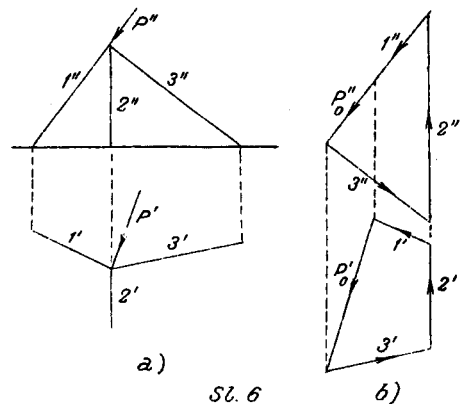
Na sl.5 je data sila P vertikalna, njena projekcija na horizontalnu ravan je $P' = 0$. Trougao $1', 2', 3'$ uzimamo proizvoljne veličine i projekcijom njegovih temena u vertikalnu ravan dobijamo izvesnu vrednost P_0 za datu silu. Ali kako nam data sila ima veličinu P , to će stvarne veličine sila $1, 2$ i 3 biti $\frac{P}{P_0}$ puta veća od proizvoljno usvojenih.



mamo proizvoljne veličine i projekcijom njegovih temena u vertikalnu ravan dobijamo izvesnu vrednost P_0 za datu silu. Ali kako nam data sila ima veličinu P , to će stvarne veličine sila $1, 2$ i 3 biti $\frac{P}{P_0}$

puta veća od proizvoljno usvojenih.

Na sl.6 poklapa se prava P'' sa pravom 1 , štap 2



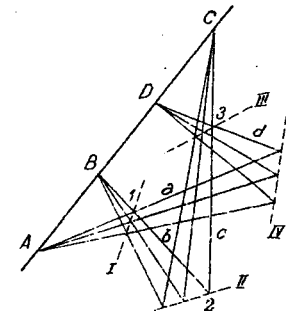
leži u ravni upravnoj na vertikalnu ravan. Sa proizvoljnom dužinom $2''$ konstruišemo trougao sila u kome druga strana predstavlja komponentu $3''$, a treća algebarski zbir P_0'' i $1''$. Horizontalnu projekciju sile S_2 u štapu dužine l_2 na-

lazimo imajući na umu da zbog specijalnog položaja toga štapa postoji odnos $\frac{S_2''}{S_2} = \frac{l_2''}{l_2}$. U sl. je $\frac{l_2''}{l_2} = 2$, dakle je $S_2' = \frac{1}{2} S_2''$. Sa tom veličinom konstruisan je četvorougao u horizontalnoj

projekciji i tako nadjena veličina P_0' . Projiciranjem u vertikalnu ravan dobijamo P_0'' i $1''$. Kada je data sila P imamo komponente da pomnožimo sa odnosom $\frac{P}{P_0}$, jer smo iz dve projekcije poligona sila na poznat način odredili prave veličine sila P_0, S_1, S_2 i S_3 .

Za grafičko razlaganje jedne sile u tri komponente možemo pored Kulmanove metoda primeniti metodu Miler - Breslau-a (Müller - Breslau) koja se osniva na jednoj opštoj teoremi projektivne geometrije (Steinerova teorema): Ako jedan zatvoreni poligon od "n" strana menja svoj oblik tako da se sve njegove strane a, b, c, \dots okreću oko stalne tačke A, B, C, \dots koje leže na jednoj pravoj a pri tome $(n - 1)$ njegovih temena $1, 2, 3, \dots$ opisuju prave linije I, II, III, ... onda se i poslednje teme kreće po pravoj liniji

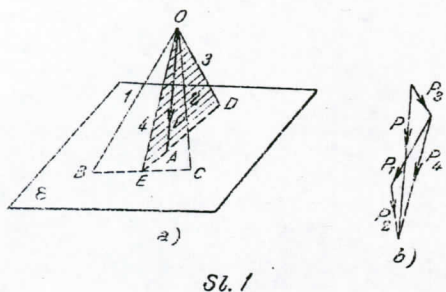
Na sl.7 prikazana je Steinerova teorema za četvorougao $abcd$. Tačke A, B, C, D , mogu biti beskonačno udaljene tj. četvorougao $abcd$ može se tako deformisati da nje-



Sl. 7

gove strane ostaju paralelne prvobitnom obliku a menjaju se samo njihove dužine kao što ćemo u primeru videti.

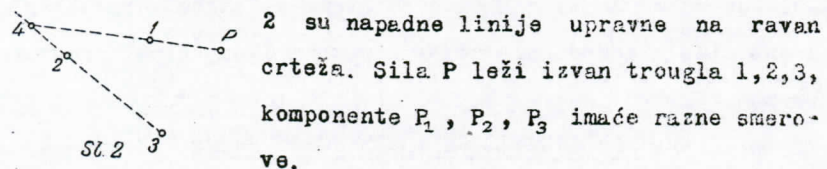
Za tronožac na sl.8a određene su sile u štapovima pomoću Miler - Breslau-ove metode. Iz krajeva sile P'' povučemo paralele sa $1''$ i $3''$, a iz početka sile P' povučemo paralelu sa $3'$. Zatim konstruišemo proizvoljan četvorougao $abcd$ čije su strane b i d vertikalne a $\parallel 2''$ i $c \parallel 2'$, a njegova tri temena leže na pravama $1'', 3''$ i $3'$. Četvrto teme je E . Za drugi četvorougao



Sl. 1

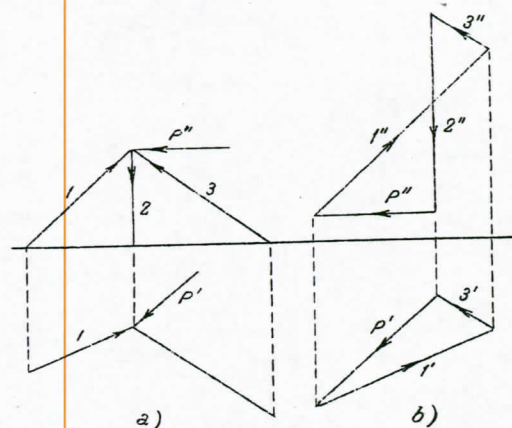
komponentata. Tačke A, B, C i D su sporedne tačke tih pravih sa proizvoljnom ravni ϵ . Kada produžimo DA do preseka E sa pravom BC, dobijamo ravan ODE u kojoj leže prave P, 3 i trag 4 te ravni u ravni OBC. Silu P razložimo u koponente P_3 i P_4 a pomoću silu P_4 koja leži sa 1 i 2 u istoj ravni, razložimo u P_1 i P_2 . Zadatak je jednoznačan (Culmann - ova metoda). Pri rešavanju brojnog zadatka moraju dabogme sila P i pravci 1, 2, 3 biti dati u dvema ortogonalnim projekcijama.

Zamislimo da je O čvor prostorne rešetke, 1, 2, 3, štapovi koji se u čvoru O sastaju. Na sl. 1 biće sva tri štapa pritisnuta, ako je smer sile suprotan P biće oni zatezani. Ako napadna linija sile P pada izvan trijedra 1,2,3 ili njegovih produženih strana, biće pritisnutih i zatezanih štapova. Ista metoda razlaganja važi i za slučaj da se tačka O nalazi u beskonačnosti, tj. kada imamo da razlažemo silu P u tri paralelne komponente koja ne leže u istoj ravni. Na sl.



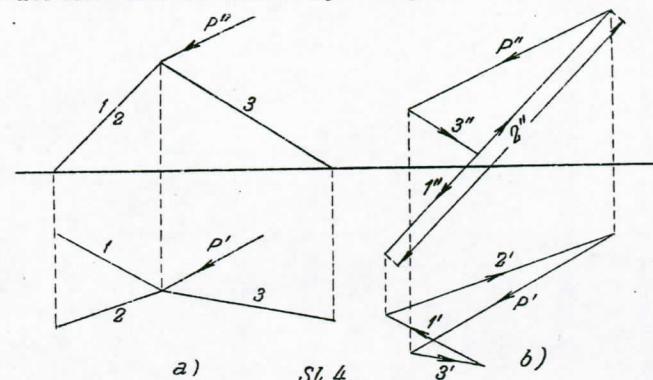
Sl. 2

Razlaganje je naročite prosto ako jedna od napadnih linija stoji upravno na jednu ili drugu projekcionu ravan ili se dve linije u jednoj ravni poklapaju. U oba slučaja je poligon sila u dotičnoj ravni trougao. Razlaganje vidimo iz dva primera na sl. 3 i 4.



Sl. 3

horizontalna, to je u trouglu P' prava veličina sile. Projiciranjem temena trougla u vertikalnu ravan dobijamo četvoro-ugao sila $P''1''3''2''$ i tako i pravu veličinu komponente 2. U sl. su ucrtane strele sile koje stoje sa P u ravnoteži. Vi-



Sl. 4

dimo da je štap 2 zatezan a 1 i 3 su pritisnuti.

Na sl. 4 poklapaju se u vertikalnoj projekciji štapovi 1 i 2, dakle je poligon sila u toj projekciji trougao.

U oba ova primera bila je jedna strana trougla sile projekcija date sile P' odnosno P'' i njenim razlaganjem

G L A V A T R E Ć A.

STATIKA SILA U PROSTORU.A. CENTRALNE SILE.

1.- U prvom delu ovog udžbenika (Glava IV. Statika tačke) upoznali smo se sa uslovima ravnoteže i ekvivalencije sila koje se seku u jednoj matematičkoj tački ili centralnih sila, koje dakle obrazuju ravan ili prostoran pramen. Saznali smo onde kako se analitičkim i grafičkim putem jedan ravan ili prostoran pramen od "n" sila slaže u jednu rezultantu. Sada ćemo da se zabavimo obratnim zadatkom: razlaganjem jedne sile u komponente koje sa datom silom čine prostoran pramen.

2.- RAZLAGANJE SILE GRAFIČKIM PUTEM.- Znamo da za prostoran pramen sila postoje tri uslova ekvivalencije, možemo dakle samo tri skalarne veličine komponentata jednoznačno odrediti. Ako su nam date tri prave koje se seku u jednoj tački napadne linije sile P koju hoćemo da razložimo, u stanju smo odrediti veličine tih komponentata. Na slici 1a data je sila P i prave 1, 2, 3 koje treba da budu napadne linije

	str.
1. Cilindrični pleter	182
2. Cilindrični pleter kao krovna konstrukcija	183
3. Piramidni pleter	186
4. Švedlerovo kube	187
5. Mrežasta kubeta	189
6. Cimermanovo kube	190
7. Pločasto kube	193
59. Statički proračun prostornih rešetkastih nosača	194
60. Metoda čvorova	195
61. Proste rešetke	196
62. Metoda zamene štapova	197
63. Metoda momenata	203
64. Grafičko odredjivanje sila	206
65. Literatura o prostornim rešetkama	207

Astatika.

66. Predmet astatike	208
67. Dopusnene transformacije sila	209
68. Odrtanje oko jedne osovine	211
69. Astaticka ravnoteža	214
70. Centralna linija i centralna ravan	217
71. Središte ravnog sistema sila	220
72. Jednačina centralne ravni	221
73. Literatura o astatici	223

Stabilnost ravnoteže. Virijal.

74. Stabilna i labilna ravnoteža	224
75. Kriterijum stabilnosti za ravan sistem	225
76. Kriterijum stabilnosti za prostoran sistem	227.

Opažene štamparske greške.

STATIKA SILA U PROSTORU

14. Specifična težina, Apsolutna i relativna gustina.....	str. 27
15. Težišta homogenih tela.....	29
16. Odredjivanje težišta linija.....	29
17. Težište površina	33
18. Težišta tela	47
19. Guldinov stav	53

Sile raznih pravaca.

20. Krst sila	55
21. Redukcija sila (P_i) na jednu tačku.....	57
22. Skalari i pseudoskalari	58
23. Redukcija sistema (R' , M_0) na dinamam	60
24. Redukcija sistema (R' , M_0) na krst sila	63
25. Nulta prava, tačka i ravan	64
26. Konjugovane prave	65
27. Centralna osovina, nulte ravni i prave.....	68
28. Transformacija krstova sa datim uslovima.....	69
29. Odredjivanje dinamam iz datog krsta i obratno	72
30. Redukovanje sistema (P_i) na tri sile kroz date tačke...76	
31. Tetraedrične koordinate sistema	78
32. Invarijanta sistema izražena tetraedričnim koordinatama	80
33. Ortogonalne koordinate sistema	85
33a. Virijal opšteg sistema sila	91
34. Sistemi sila kojih je invarijanta nula	93
35. Pravolinijske koordinate	95
36. Linearni kompleksi	97
37. Dva linearna kompleksa. Kongruencija pravih	100
38. Tri linearna kompleksa. Pravolinijske površine	103

39. Jednačina cilindroida	str. 105
40. Slaganje dinamam	108
41. Odredjivanje centralne osovine i parametra svih kompleksa	110
42. Odredjivanje direktrisa kongruencije iz dve date dinamam	113
43. Preslikavanje prostornog sistema sila u ravan	124
44. Opšti zakoni ekvivalencije prostornih sistema	132
45. Razlaganje sile. Uslovi za napadne linije	134
46. Odredjivanje veličine sile	138
47. Razlaganje sile pomoću momentnih jednačina	141

Ekvivalencija i ravnoteža sistema sila koji napada telo ograničeno u svojoj pokretljivosti.

48. Ograničanje pokretljivosti tela	146
49. Uslovi ravnoteže i odredjivanje otpora za nekoliko slučajeva ograničene pokretljivosti.....	148
50. Primeri	157
51. Sistemi sila koje seku jednu pravu	168

O prostornim nosačima.

52. Ravni nosači kao sastavni delovi prostornih	171
53. Ležišta i ležišni štapovi	173
54. Kinematička i statička odredjenost prostorne rešetke	175
55. Prostorni rešetkasti nosač i njegova ležišta	177
56. Poliedrične rešetke ili pleteri	178
57. Pleterni nosači i njihova ležišta	179
58. Razni tipovi pleternih nosača	182

S A D R Ž A J.

STATIKA SILA U PROSTORU.

<u>A. Centralne sile.</u>		
1. Uvod		str. 3
2. Razlaganje sile grafičkim putem		3
3. Razlaganje sile putem računa.....		8
<u>B. Sile napadaju razne tačke krutog tela.</u>		
O spregovima sila u raznim ravnima.		
4. Spregovi u paralelnim ravnima.....		9
5. Slaganje spregova u kosim ravnima		10
6. Slaganje i razlaganje spregova analitičkim putem.....		12
<u>Paralelne sile.</u>		
7. Slaganje "n" paralelnih sila. Mogući slučajevi		14
8. Slaganje sila grafičkim putem.....		15
9. Redukcija sila na jednu tačku		16
10. Slaganje sila analitičkim putem.....		17
11. Astatika. Središte paralelnih sila. Astatič- ka ravnoteža		21
<u>O težini i težištu tela.</u>		
12. Težište kao središte paralelnih sila		24
13. Opšte teoreme o položaju težišta		26

P R E D G O V O R.

Drugi deo "Predavanja iz teorijske mehanike" obuhvata statiku materijalnih sistema.

Prvoj svesci ovoga dela (objavljena 1935 g.) koja sadrži statiku (ravne) materijalne linije i krute ploče, dakle teorijski deo "Statika u ravni" sledovaće kao druga sveska primena na statiku ravnih nosača. Ovaj "praktični deo" statike u ravni sredjuje za štampu i dopunjuje primerima iz grafične statike g. Ing. Sv. Nešić asistent Univerziteta. U izgledu je da će taj posao biti završen u toku ove školske godine.

Ova treća sveska II dela sadrži moja predavanja iz "Statike u prostoru" koja držim dva časa nedeljno u III semestru. Neki odeljci izloženi su u knjizi opširnije nego što mi vreme dopušta da to usmeno učinim. Navodim samo: osnovne pojmove linearnog kompleksa i linearne kongruencije, njihovu primenu na ravnotežu tela raznih stepena ograničenja pokretljivosti, preslikavanje prostornih sistema sila na ravan i najzad odeljak o prostornim rešetkastim nosačima.

G. Ing. M. Vrečku univ. docentu zahvaljujem i na ovom mestu na trudu koji je uložio vodeći korekturu i ove sveske.

Beograd u februaru 1937.

Iv. Arnovljević.

Dr. IVAN ARNOVLJEVIĆ
prof. Universiteta u Beogradu

*Arhiv Beograd: D. H. Čereminski
i Mat. Institut u Beogradu
M. B. Čereminski*

PREDAVANJA
IZ
TEORIJSKE MEHANIKE

II DEO

III SVESKA

Statika sila u prostoru

Stručno-tehnička litografija
LITO-ŠTAMPA
Dragoljuba T. Djurdjevića
(Tehnički Fakultet)

21. 11. 37
10. 433
Beograd

Izdanje Udruženja Studenata Mašinske i Elektro-Tehnike
Udruženja Studenata Građevinske Tehnike

BEOGRAD. 1937