ENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
U ZAGREBU

Poklon od pisca

Ž. MARKOVIĆ

O periodičkim rješenjima linearne diferencijalne jednadžbe $2n$-toga reda s periodičkim koeficijentima

Preštampano iz 246. knjige „Rada" Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti

ZAGREB 1933
TISAK NADBISKUPSKE TISKARE

O periodičkim rješenjima linearne diferencijalne jednadžbe $2n$-toga reda s periodičkim koeficijentima

Napisao red. pravi član

Ž. Marković

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 21. oktobra 1932.

1. Kada se hoće da se na linearne diferencijalne jednadžbe višega reda proširi istraživanje periodičkih rješenja, kako je izvedeno pri diferencijalnim jednadžbama drugoga reda,[1] treba uzeti, da je diferencijalna jednadžba tâkoga reda $2n$-toga. Tada se uz supozicije o tâkosti, dotično lihosti koeficijenata jednadžbe, mogu razviti razmatranja analogna onima pri diferencijalnoj jednadžbi drugoga reda: zgodno odabrana partikularna rješenja mogu se svrstati u parove, u kojima je jedan član tâk, drugi lih; relacije, do kojih dolazimo, poopćuju relacije nađene pri diferencijalnim jednadžbama drugoga reda, i, što je najbitnije, samo diferencijalne jednadžbe tâkoga reda mogu biti samima sebi adjungirane, kako je bila i diferencijalna jednadžba drugoga reda, što ima za posljedicu, da egzistencija periodičkih rješenja izlazi iz egzistencije rješenja jedne linearne homogene integralne jednadžbe tipa Fredholmova sa simetričkom jezgrom i svrstava se time u teoriju ortogonalnih integralnih jednadžbi. Isto je tako dokaz o nemogućnosti postojanja dvaju

[1] Vidi Ž. Marković, I. O *Mathieuovim funkcijama perioda* π. — „Rad" Jugoslav. akad. knj. 232. i 234. i „Izvješća" sv. 21. — II. *Sur la non-existence simultanée de deux fonctions de Mathieu.* — Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. XXIII. Pt. III. — III. *O periodičkim rješenjima Mathieuove diferencijalne jednadžbe.* — Godišnjak sveučilišta u Zagrebu 1924/25—1928/29. — IV. *Sur les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient périodique.* — Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. 2, Vol. 31, Part 6.

linearno nezavisnih rješenja, jednoga tâkoga, drugoga lihoga, za istu vrijednost parametra, o kome zavise, poopćenje dokaza izvedenoga pri diferencijalnim jednadžbama drugoga reda.

Linearna homogena diferencijalna jednadžba tâkoga reda, o kojoj se radi, neka je najprije zadana općeno u obliku:

$$(1\cdot1)\qquad u^{(2n)} = p_2(x)\,u^{(2n-2)} + p_3(x)\,u^{(2n-3)} + \cdots + p_{2n-1}(x)\,u' + p_{2n}(x)\,u\,,$$

gdje je član s $u^{(2n-1)}$ uklonjen poznatom transformacijom. Koeficijenti $p_i(x)$ $(i = 2, 3, \cdots, 2n)$ su periodske funkcije od x perioda ω; koeficijenti $p_2(x), p_4(x), \cdots, p_{2n}(x)$ neka su tâke funkcije od x, a $p_3(x), p_5(x), \cdots, p_{2n-1}(x)$ lihe. O uvjetima, koje će morati još zadovoljavati, bit će govora, kada se pokaže potreba da ih uvedemo.

Odaberimo jedan sustav partikularnih rješenja jednadžbe (1·1): $c_1(x), s_1(x), \cdots, c_n(x), s_n(x)$, određen početnim uvjetima za $x = 0$ danima shemom:

$$(1\cdot2)\qquad \begin{array}{c|ccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \\
c_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
s_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
s_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \\
c_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
s_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\,,
\end{array}$$

gdje brojke iznad prvoga retka sheme označuju red derivacija funkcija, koje stoje lijevo od poteza. One tvore jedan osnovni sustav rješenja; s obzirom na uvjete (1·2) imamo za determinantu Wronskoga toga sustava izraz:

$$(1\cdot3)\qquad \Delta(x) = \begin{vmatrix} c_1 & s_1 & \cdots & c_n & s_n \\ \dot c_1 & \dot s_1 & \cdots & \dot c_n & \dot s_n \\ \ddot c_1 & \ddot s_1 & \cdots & \ddot c_n & \ddot s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^{(2n-1)} & s_1^{(2n-1)} & \cdots & c_n^{(2n-1)} & s_n^{(2n-1)} \end{vmatrix} = 1$$

2. Kako se diferencijalna jednadžba (1·1) uz uvjete za koeficijente $p_i(x)$ ne mijenja uvođenjem promjenljive $-x$ mjesto x, izlazi, da su funkcije $c_i(x)$ tâke, a funkcije $s_i(x)$ lihe funkcije $(i = 1, \cdots, n)$. Kako se jednadžba (1·1) ne mijenja ni uvođenjem promjenljive $x \pm \varkappa\omega$ mjesto x $(\varkappa = 1, 2, \cdots)$, bit će funkcije $c_i(\varkappa\omega \pm x)$, $s_i(\varkappa\omega \pm x)$ $(i = 1, \cdots, n)$ također rješenja jednadžbe diferencijalne (1·1), dakle linearne kombinacije s konstantnim koeficijentima rješenja $c_i(x)$, $s_i(x)$. Imamo tako najprije relacije:

$$(2\cdot1)\qquad \begin{aligned}
c_1(\varkappa\omega + x) &= c_1(x)\,c_1(\varkappa\omega) + s_1(x)\,\dot c_1(\varkappa\omega) + \cdots + s_n(x)\,c_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\
s_1(\varkappa\omega + x) &= c_1(x)\,s_1(\varkappa\omega) + s_1(x)\,\dot s_1(\varkappa\omega) + \cdots + s_n(x)\,s_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_n(\varkappa\omega + x) &= c_1(x)\,c_n(\varkappa\omega) + s_1(x)\,\dot c_n(\varkappa\omega) + \cdots + s_n(x)\,c_n^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\
s_n(\varkappa\omega + x) &= c_1(x)\,s_n(\varkappa\omega) + s_1(x)\,\dot s_n(\varkappa\omega) + \cdots + s_n(x)\,s_n^{(2n-1)}(\varkappa\omega)\,,
\end{aligned}$$

kao i relacije, koje dobijemo diferenciranjem ovih:

$$(2\cdot2)\qquad \begin{aligned}
c_i^{(m)}(\varkappa\omega + x) &= c_1^{(m)}(x)\,c_i(\varkappa\omega) + s_1^{(m)}(x)\,\dot c_i(\varkappa\omega) + \cdots + s_n^{(m)}(x)\,c_i^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\
s_i^{(m)}(\varkappa\omega + x) &= c_1^{(m)}(x)\,s_i(\varkappa\omega) + s_1^{(m)}(x)\,\dot s_i(\varkappa\omega) + \cdots + s_n^{(m)}(x)\,s_i^{(2n-1)}(\varkappa\omega),
\end{aligned}$$

$$i = 1, \cdots, n; \quad m = 1, \cdots, 2n-1\,.$$

Iz relacija (2·1) izlazi za $x = -\varkappa\omega$ s obzirom na uvjete (1·2), na izraz (1·3) i na relacije $c_i(-x) = c_i(x)$, $s_i(-x) = -s_i(x)$ rješenjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi:

$$(2\cdot3)\qquad \begin{aligned}
c_1(\varkappa\omega) &= \begin{vmatrix} \dot s_1 & \dot c_2 & \cdots & \dot c_n & \dot s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1^{(2n-1)} & c_2^{(2n-1)} & \cdots & c_n^{(2n-1)} & s_n^{(2n-1)} \end{vmatrix}_{(\varkappa\omega)} = \delta_{1,1}(\varkappa\omega)\,, \\
c_n(\varkappa\omega) &= \begin{vmatrix} s_1 & c_2 & \cdots & c_n & s_n \\ \dot s_1 & \dot c_2 & \cdots & \dot c_n & \dot s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1^{(2n-3)} & c_2^{(2n-3)} & \cdots & c_n^{(2n-3)} & s_n^{(2n-3)} \\ s_1^{(2n-1)} & c_2^{(2n-1)} & \cdots & c_n^{(2n-1)} & s_n^{(2n-1)} \end{vmatrix}_{(\varkappa\omega)} = \delta_{2n-1,1}(\varkappa\omega)\,,
\end{aligned}$$

$$s_1(\varkappa\omega) = \begin{vmatrix} s_1 & c_2 & \cdots & c_n & s_n \\ \ddot{s}_1 & \ddot{c}_2 & \cdots & \ddot{c}_n & \ddot{s}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1^{(2n-1)} & c_2^{(2n-1)} & \cdots & c_n^{(2n-1)} & s_n^{(2n-1)} \end{vmatrix}_{(\varkappa\omega)} = \delta_{2,1}(\varkappa\omega)$$

$$s_n(\varkappa\omega) = \begin{vmatrix} s_1 & c_2 & \cdots & c_n & s_n \\ \dot{s}_1 & \dot{c}_2 & \cdots & \dot{c}_n & \dot{s}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1^{(2n-2)} & c_2^{(2n-2)} & \cdots & c_n^{2n-2)} & s_n^{(2n-2)} \end{vmatrix}_{(\varkappa\omega)} = \delta_{2n,1}(\varkappa\omega)$$

gdje indeks $(\varkappa\omega)$ znači, da se u članove determinante ima uvrstiti $x = \varkappa\omega$, a simboli $\delta_{i,\varkappa}$ znače algebarske komplemente determinante Wronskoga (1·3), koji pripadaju i-tom retku i k-tom stupcu.

Iz formula (2·2) izlazi slično kao gore uzevši u obzir, da je

$$c_i^{(m)}(-x) = (-1)^m c_i^{(m)}(x), \quad s_i^{(m)}(-x) = (-1)^{m+1} s_i^{(m)}(x),$$

i

$$c_i^{(m)}(0) = \begin{matrix} 0, & m \neq 2i-2 \\ 1, & m = 2i-2 \end{matrix}; \quad s_i^{(m)}(0) = \begin{matrix} 0, & m \neq 2i-1 \\ 1, & m = 2i-1 \end{matrix},$$

$$(i = 1, \cdots, n; \quad m = 1, \cdots, 2n-1)$$

$$\begin{aligned} &\dot{c}_1(\varkappa\omega) = \delta_{1,2}, \quad \dot{s}_1(\varkappa\omega) = \delta_{2,2}, \quad \cdots, \quad \dot{s}_n(\varkappa\omega) = \delta_{2n,2} \\ (2\cdot4) \quad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &c_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega) = \delta_{1,2n}, \quad s_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega) = \delta_{2,2n}, \cdots, \quad s_n^{(2n-1)}(\varkappa\omega) = \delta_{2n,2n}. \end{aligned}$$

Slično imamo dalje:

$$\begin{aligned} &c_1(\varkappa\omega - x) = c_1(x)\,c_1(\varkappa\omega) - s_1(x)\,\dot{c}_1(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(x)\,c_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ &s_1(\varkappa\omega - x) = c_1(x)\,s_1(\varkappa\omega) - s_1(x)\,\dot{s}_1(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(x)\,s_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ (2\cdot5) \quad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &c_n(\varkappa\omega - x) = c_1(x)\,c_n(\varkappa\omega) - s_1(x)\,\dot{c}_n(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(x)\,c_n^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ &s_n(\varkappa\omega - x) = c_1(x)\,s_n(\varkappa\omega) - s_1(x)\,\dot{s}_n(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(x)\,s_n^{(2n-1)}(\varkappa\omega). \end{aligned}$$

Iz sustava jednadžbi (2·1) i (2·5) i uz pomoć relacije (1·3) izlaze daljnje identitete, koje trebaju u transformacijama pri računu s tim funkcijama:

$$\begin{aligned} &c_i(x) = c_1(\varkappa\omega + x)\,c_i(\varkappa\omega) - s_1(\varkappa\omega + x)\,\dot{c}_i(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(\varkappa\omega + x)\,c_i^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ &\quad = c_1(\varkappa\omega - x)\,c_i(\varkappa\omega) - s_1(\varkappa\omega - x)\,\dot{c}_i(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(\varkappa\omega - x)\,c_i^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ (2\cdot6) \quad &s_i(x) = -c_1(\varkappa\omega + x)\,s_i(\varkappa\omega) + s_1(\varkappa\omega + x)\,\dot{s}_i(\varkappa\omega) + \cdots + s_n(\varkappa\omega + x)\,s_i^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ &\quad = c_1(\varkappa\omega - x)\,s_i(\varkappa\omega) - s_1(\varkappa\omega - x)\,\dot{s}_i(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(\varkappa\omega - x)\,s_i^{(2n-1)}(\varkappa\omega). \end{aligned}$$

$$(i = 1, \cdots, n),$$

a odavde iz relacija za $c_i(x)$ za $i = 1, 2, \cdots, n$ uz $x = 0$ i s obzirom na (1·2),

$$\begin{aligned} 1 &= c_1^2(\varkappa\omega) - s_1(\varkappa\omega)\,\dot{c}_1(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(\varkappa\omega)\,c_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ 0 &= c_1(\varkappa\omega)\,c_2(\varkappa\omega) - s_1(\varkappa\omega)\,\dot{c}_2(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(\varkappa\omega)\,c_2^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= c_1(\varkappa\omega)\,c_n(\varkappa\omega) - s_1(\varkappa\omega)\,\dot{c}_n(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(\varkappa\omega)\,c_n^{(2n-1)}(\varkappa\omega), \end{aligned}$$

i slično iz relacija za funkcije $s_i(x)$, od kojih prva, uzevši u obzir relacije (2·3), nije drugo nego razvoj determinante (1·3) za $x = \varkappa\omega$ po elementima prvoga retka.

Diferenciramo li relacije (2·6) $(2n-1)$ puta, stavimo li svagda $x = 0$ i odaberemo uvijek onu relaciju, koja ima vrijednost 1, dobit ćemo ove izraze za determinantu Wronskoga, razvitu po elementima svojih redaka:

$$\Delta(\varkappa\omega) = 1$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &c_1^2(\varkappa\omega) - s_1(\varkappa\omega)\,\dot{c}_1(\varkappa\omega) + \cdots - s_n(\varkappa\omega)\,c_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ &-\dot{c}_1(\varkappa\omega)\,s_1(\varkappa\omega) + \dot{s}_1^2(\varkappa\omega) - \cdots + \dot{s}_n(\varkappa\omega)\,s_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &c_1^{(2n-2)}(\varkappa\omega)\,c_n(\varkappa\omega) - s_1^{(2n-2)}(\varkappa\omega)\,\dot{c}_n(\varkappa\omega) + \cdots - s_n^{(2n-2)}(\varkappa\omega)\,c_n^{(2n-1)}(\varkappa\omega) \\ &-c_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega)\,s_n(\varkappa\omega) + s_1^{(2n-1)}(\varkappa\omega)\,\dot{s}_n(\varkappa\omega) - \cdots + [s_n^{(2n-1)}(\varkappa\omega)]^2 \end{aligned} \right.$$

3. Za računanje s rješenjima diferencijalne jednadžbe (1·1), napose pri problemima Greenove funkcije, od naročite su važnosti relacije, koje vežu algebarske komplemente determinante Wronskoga $\delta_{i,k}(x)$ s koeficijentima diferencijalne jednadžbe. Te će nam relacije dati ujedno prirodna poopćenja nekih relacija među rješenjima i derivacijama njihovima, koje su se pokazale korisne pri diferencijalnim jednadžbama drugoga reda.

Neka je

$$P(u) \equiv u^{(2n)} \quad p_2\, u^{(2n-2)} - \cdot \cdot \cdot \cdot - p_{2n-1}\, u' - p_{2n}\, u$$

zadani linearni diferencijalni izraz,

(3·1)
$$Q(v) \equiv v^{(2n)} + (-1)^{2n-1}(p_2\, v)^{2n-2} + \cdot \cdot \cdot \cdot - \\ - (p_{2n-2}\, v)'' + (p_{2n-1}\, v)' - p_{2n}\, v$$

njegov adjungirani diferencijalni izraz, tako da je

$$\int [v\, P(u) - u\, Q(v)]\, dx = \Psi(u, v);$$

$\Psi(u, v)$ je bilinearna forma, od koje dalje polazimo.

Neka je $u_i(x)$ $(i = 1, \ldots, 2n)$ koje god partikularno rješenje $c_i(x)$, $s_i(x)$; $v_i(x)$ neka je adjungirano rješenje njegovo, t. j. rješenje adjungirane diferencijalne jednadžbe $Q(v) \equiv 0$, vezano s $u_i(x)$ relacijom[2]:

$$v_i(x) = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial u_i^{(2n-1)}} \qquad (i = 1, \cdots, 2n)$$

ili kod nas radi relacije (1·3):

(3·2)
$$v_1(x) = \delta_{2n,1}(x),\ v_2(x) = \delta_{2n,2}(x), \cdots, \\ v_{2n}(x) = \delta_{2n,2n}(x).$$

Tada za jedan par adjungiranih rješenja u_i, v_i imamo:

$$\Psi(u_i, v_i) = 1, \qquad (i = 1, \ldots, 2n)$$

za što se pokazuje, da nije drugo nego determinanta Wronskoga $\Delta(x)$ razvita po elementima i-toga stupca. Iz izraza za bilinearnu formu $\Psi(u, v)$ imamo dakle za determinantu $\Delta(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta(x) = {} & u_i\,[-p_{2n-1} v_i + (p_{2n-2} v_i)' + \cdot \cdot + (p_2 v_i)^{2n-3} - v_i^{(2n-1)}] \\ & + u_i'\,[-p_{2n-2} v_i + (p_{2n-3} v_i)' + \cdot \cdot + v_i^{(2n-2)}] \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + u_i^{(2n-3)}\,[-p_2 v_i + v_i''] \\ & + u_i^{(2n-2)}\,[-v_i'] \\ & + u_i^{(2n-1)}\, v_i \,.\end{aligned}$$

[2] Cf na pr. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. II. chap. V.

Time dobijemo za algebarske komplemente $\delta_{s,i}(x)$ $(s = 1, \ldots, 2n)$ i-tog stupca determinante Wronskoga tražene izraze:

(3·3)
$$\begin{aligned}\delta_{1,i} &= -p_{2n-1} v_i + (p_{2n-2} v_i)' + \cdot \cdot \cdot \cdot - v_i^{(2n-1)} \\ \delta_{2,i} &= -p_{2n-2} v_i + (p_{2n-3} v_i)' + \cdot \cdot \cdot \cdot + v_i^{(2n-2)} \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \delta_{2n-2,i} &= -p_2 v_i + v_i'' \\ \delta_{2n-1,i} &= -v_i' \\ \delta_{2n,i} &= v_i \qquad\qquad (i = 1, \cdots, 2n)\,.\end{aligned}$$

Dovedemo li ove izraze u svezu s relacijama (2·3) i (2·4), izlaze izrazi za $c_i(\varkappa\omega)$, $s_i(\varkappa\omega)$ $(i = 1, \ldots n)$ i njihove derivacije do uključivo reda $(2n - 1)$-oga u zavisnosti o koeficijentima jednadžbe (1·1) i adjungiranim njihovim rješenjima, ali koje ćemo napisati kasnije pri diferencijalnim izrazima sebi adjungiranim, kad su napose zanimljivi.

Isporedujući međusobom relacije (3·3) i uzevši u obzir jednadžbu $Q(v) = 0$, vidi se, da minori $\delta_{s,i}(x)$ zadovoljavaju ovaj sustav diferencijalnih jednadžbi:[3]

(3·4)
$$\begin{aligned}\frac{d\,\delta_{1,i}}{dx} &= -p_{2n} v_i \\ \frac{d\,\delta_{2,i}}{dx} &= -p_{2n-1} v_i - \delta_{1,i} \\ \frac{d\,\delta_{3,i}}{dx} &= -p_{2n-2} v_i - \delta_{2,i} \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{d\,\delta_{2n,i}}{dx} &= -\delta_{2n-1,i}\,.\end{aligned}$$

Iz tih relacija izvodimo daljnje za račun korisne relacije. Iz prve od relacija (3·4) izlazi integracijom i uzevši u obzir početne uvjete (1·2):

[3] J. Cels, *Sur les équations différentielles linéaires ordinaires.* Annales de l'Ecole Normale, Sér. 3. T. 8.; E. Grünfeld, *Über den Zusammenhang zwischen den Fundamentaldeterminanten einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung und ihrer n Adjungierten.* Journal für reine und angewandte Mathematik, t. 115; i t. 117, 121, 122, 123.

$$\delta_{1,1}(x) = 1 - \int_0^x p_{2n} v_1\, d\,x\,; \qquad \delta_{1,2}(x) = \int_0^x p_{2n} v_2\, d\,x\,;$$

$$\delta_{1\,2n}(x) = \int_0^x p_{2n} v_{2n}\, d\,x\,,$$

koje su direktna poopćenja relacija pri diferencijalnim jednadžbama drugoga reda ($n = 1$). Za $x = \varkappa\,\omega$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots$) izlazi iz njih s obzirom na relacije (2·3):

$$(3{\cdot}6)\qquad \begin{aligned} c_1(\varkappa\,\omega) &= 1 - \int_0^{\varkappa\omega} p_{2n} v_1\, d\,x \\ \dot{c}_1(\varkappa\,\omega) &= \int_0^{\varkappa\omega} p_{2n} v_2\, d\,x \\ &\cdots\cdots\cdots \\ c_1^{(2n-1)}(\varkappa\,\omega) &= \int_0^{\varkappa\omega} p_{2n} v_{2n}\, d\,x\,. \end{aligned}$$

Iz prve od relacija (2·3) i prve od (3·4) izlazi još:

$$(3{\cdot}7)\qquad \int_0^x p_{2n} v_i\, d\,x = C + p_{2n-1} v_i - (p_{2n-2} v_i)' + \cdots + v_i^{(2n-1)}$$

$$(i = 1 \cdots 2\,n)$$

kao relacija među koeficijentima zadane jednadžbe i njenim adjungiranim rješenjima.

Uopće, integrirajući relacije (3·4) daju nam one algebarske komplemente i-toga stupca determinante $\Delta\,(x)$ u integralnome obliku. Imamo tako

$$\delta_{k,i} = c_k + \cdots + c_1\, x^{k-1} - \int_0^x \left[\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{(x-\xi)^{j-1}}{(j-1)!}\, p^{(\xi)}_{2n-\varkappa+j}\right] v_i(\xi)\, d\,\xi$$

a za $x = 2\,n$ dolazimo do relacije:

$$\delta_{2n,\,i} = v_i = c_{2n} + \cdots + c_1\, x^{2n-1} + \int_0^x \left[\sum_{j=2}^{2n} (-1)^j \frac{(x-\xi)^{j-1}}{(j-1)!}\, p_j(\xi)\right] v_i(\xi)\, d\,\xi$$

koja predočuje integralnu jednadžbu tipa Volterrina s jezgrom vrlo pravilne građe za funkcije v_i ($i = 1, \ldots, 2\,n$).

Isporedivši izraze (3·2) s relacijama (2·4) imamo još

$$(3{\cdot}8)\qquad \begin{aligned} v_1\,(\varkappa\,\omega) &= -\,s_n\,(\varkappa\,\omega) \\ v_2\,(\varkappa\,\omega) &= \quad \dot{s}_n\,(\varkappa\,\omega) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_{2n-1}(\varkappa\,\omega) &= -\,s_n^{(2n-2)}(\varkappa\,\omega) \\ v_{2n}(\varkappa\,\omega) &= \quad s_n^{(2n-1)}(\varkappa\,\omega)\,, \end{aligned}$$

a isporedivši pretposljednju relaciju (3·3) s (2·4) imamo također

$$(3{\cdot}9)\qquad \begin{aligned} \dot{v}_1\,(\varkappa\,\omega) &= -\,c_n\,(\varkappa\,\omega) \\ \dot{v}_2\,(\varkappa\,\omega) &= +\,\dot{c}_n\,(\varkappa\,\omega) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \dot{v}_{2n-1}(\varkappa\,\omega) &= -\,c_n^{(2n-2)}(\varkappa\,\omega) \\ \dot{v}_{2n}\,(\varkappa\,\omega) &= +\,c_n^{(2n-1)}(\varkappa\,\omega)\,, \end{aligned}$$

koje će relacije biti naročito jednostavne i za računanje važne pri diferencijalnim jednadžbama sebi adjungiranim, kako ćemo kasnije vidjeti.

Iz formula (3·3) i (3·4) daju se izvesti i izrazi za derivacije funkcija $v_i\,(x)$ u zavisnosti o $v_i\,(x)$ i minorima $\delta_{k,i}\,(x)$ determinante $\Delta\,(x)$, koji će nam kasnije trebati.

Pretposljednja relacija (3·3) daje

$$v_i' = -\,\delta_{2n-1,\,i}\,,$$

a iz (3·4) izlazi dalje

$$(3{\cdot}10)\qquad \begin{aligned} v_i'' &= p_2\, v_i + \delta_{2n-2,\,i} \\ v_i''' &= (p_2\, v_i)' - (p_3\, v_i) - \delta_{2n-3,\,i} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_i^{(\varkappa)} &= (p_2\, v_i)^{(\varkappa-2)} - (p_3\, v_i)^{(\varkappa-3)} + \cdots + (-1)^j (p_j\, v_i)^{i-j} + \cdots + (-1)^{\varkappa}\, \delta_{2n-\varkappa,\,i} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_i^{(2n-1)} &= (p_2\, v_i)^{(2n-3)} - (p_3\, v_i)^{(2n-4)} + \cdots - (p_{2n-1}\, v_i) - \delta_{1,\,i} \end{aligned}$$

$$(i = 1, \cdots, n)\,.$$

4. Da se daljnja razmatranja uzmognu izvršiti paralelno s onima pri diferencijalnoj jednadžbi drugoga reda, treba suponirati, da je diferencijalna jednadžba $2\,n$-toga reda samoj sebi adjungirana, dakle oblika

$$\frac{d^n[u^{(n)}]}{d\,x^n} + \frac{d^{n-1}[q_1\,u^{(n-1)}]}{d\,x^{n-1}} + \cdots + \frac{d\,[q_{n-1}u']}{d\,x} + q_n u = 0\,, \tag{4·1}$$

pri čemu moraju koeficijenti zadovoljati uvjet, da imaju derivacije do izvjesnoga reda, i to koeficijenat $q_i(x)$ derivacije do uključivo reda $(n-i)$-toga $(i = 1, \ldots, n-1)$, ali koeficijenti derivacija $u^{(i)}$ neka imaju još uvijek svojstva tâkosti, dotično lihosti kao i u jednadžbi (1·1).

Budući da je jednadžba (4·1) identična sa svojom adjungiranom, bit će funkcije $v_1(x), \ldots, v_{2n}(x)$ linearne kombinacije rješenja $c_1(x), \ldots, s_n(x)$, koje ćemo dobiti odredivši početne vrijednosti za $x = 0$ funkcija $v_i(x)$ i njihovih derivacija iz relacija (3·10), u koje se moraju uvrstiti za koeficijente $p_i(x)$ vrijednosti kako izlaze iz jednadžbe (4·1).

Na temelju početnih uvjeta (1·2) imamo za algebarske komplemente $\delta_{k,i}\begin{pmatrix} i = 1, \ldots 2n \\ k = 1, \ldots 2n \end{pmatrix}$, koji ulaze u formule (3·10), ovu shemu početnih uvjeta za $x = 0$:

$i =$	1	2	3	....	$2n$
$\delta_{1,i}$	1	0	0	....	0
$\delta_{2,i}$	0	1	0	....	0
$\delta_{3,i}$	0	0	1	....	0
..	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\delta_{2n,i}$	0	0	0	....	1 .

Dobijemo tako

$$v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_3(0) = 0, \quad v_4(0) = 0, \quad \cdot\cdot, \quad v_n(0) = 1\,,$$
$$\dot v_1(0) = 0, \ \dot v_2(0) = 0, \ \dot v_3(0) = 0, \ \dot v_4(0) = 0, \ \dot v^{(0)}_{2n-1} = -1 \ \dot v_{2n}(0) = 0\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_1^{(2n-1)}(0) = -1,\ v_2^{(2n-1)} = 0,\ v_3^{(2n-1)}(0) = q_1(0),\ v_4^{(2n-1)}(0) = -(n-2)\,q_1'(0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{2n}^{(2n-1)}(0) = -(q_1\,v_{2n})_0^{(2n-3)} + (n-1)(q_1'\,v_{2n})_0^{(2n-4)} + \cdots + (q_{n-1}'\,v_{2n})_0\ .$$

Pri diferencijalnim jednadžbama $2n$-toga reda sebi samima adjungiranima imamo dakle ove relacije:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -s_n(x) \\ v_2(x) &= c_n(x) \\ v_3(x) &= -s_{n-1}(x) + q_1(0)\,s_n(x) \\ v_4(x) &= c_{n-1}(x) - q_1(0)\,c_n(x) - (n-2)\,q_1'(0)\,s_n(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{2n}(x) &= c_1(x) - q_1(0)\,c_2(x) + (n-2)\,q_1'(0)\,s_2(x) + \cdots \\ &+ [-(q_1\,v_{2n})_0^{(2n-3)} + (n-1)(q_1'\,v_{2n})_0^{(2n-4)} + \cdots \\ &+ (q_{n-1}'\,v_{2n})_0]\,s_n(x)\,. \end{aligned} \tag{4·2}$$

Uvrstimo li te vrijednosti u formule (3·6), imamo za $x = 1$:

$$\begin{aligned} c_1(\omega) &= 1 - \int_0^\omega q_n s_n\,d\,x \\ \dot c_1(\omega) &= \quad - \int_0^\omega q_n c_n\,d\,x \\ \ddot c_1(\omega) &= \quad \int_0^\omega q_n s_{n-1}\,d\,x - q_1(0)\int_0^\omega q_n s_n\,d\,x \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

od kojih se prve dvije za $n = 1$ reduciraju na relacije nađene pri diferencijalnim jednadžbama drugoga reda.[4] Iz (3·8) izlazi nadalje

$$c_n(\omega) = \dot s_n(\omega)$$
$$-s_{n-1}(\omega) + q_1(0)\,s_n(\omega) = \ddot s_n(\omega) \quad \text{i t. d.}$$

od kojih je prva dobro poznata kod slučaja $n = 1$.

Ako se u relacijama (3·3) uvrste mjesto koeficijenata $p_i(x)$ koeficijenti $q_i(x)$ diferencijalne jednadžbe (4·1), nalaze se za $x = \omega$, uzevši u obzir relacije (2·3) i (2·4), izrazi, koji trebaju kod transformacija formula. Uzmimo na pr. $n = 2$, dakle diferencijalnu jednadžbu četvrtoga reda samoj sebi adjungiranu. Ti su izrazi:

$$\begin{aligned} & c_1(\omega) = q_1(0)\,\dot s_2(\omega) + \dddot s_2(\omega), \ \ s_1(\omega) = q_1(0)\,s_2(\omega) + \ddot s_2(\omega), \ \ c_2(\omega) = \dot s_2(\omega), \\ & \dot c_1(\omega) = q_1(0)\,\dot c_2(\omega) + \dddot c_2(\omega), \ \dot s_1(\omega) = q_1(0)\,c_2(\omega) + \ddot c_2(\omega) \\ & \ddot c_1(\omega) = [q_1(0)\,c_2(\omega) + \dddot s_1(\omega)] - q_1(0)\,[q_1(0)\,c_2(\omega) + \dddot s_2(\omega)] \\ & \dddot s_1(\omega) = q_1(0)\,[\ddot c_2(\omega) - q_1(0)\,c_2(\omega)] - [\ddot c_1(\omega) - q_1(0)\,c_1(\omega)]\,, \end{aligned} \tag{4·3}$$

[4] Vidi na pr. loco cit. [1] pod IV. formule 5·1 za $x = \omega$.

te oni daju pri računanju na pr. determinante $D_1(\lambda)$ (br. 6.) znatna ujednostavnjenja.

5. Prelazeći na pitanje egzistencije periodičkih rješenja, uzmimo, da je diferencijalna jednadžba reda $2n$-toga samoj sebi adjungirana dana u obliku:

$$u^{(2n)} = p_2 u^{(2n-2)} + \cdots + p_{2n-1} u' + (\overline{p}_{2n} + \lambda) u \,, \tag{5·1}$$

gdje su dakle koeficijenti dani po zakonu sebi adjungiranih diferencijalnih jednadžbi, gdje je λ neki parametar, a koeficijenat od u oblika $p_{2n}(x) = \overline{p}_{2n}(x) + \lambda$, pri čemu se uvijek dâ ispuniti, da je $\int\limits_0^\omega \overline{p}_{2n}\, d x = 0$.

Promotrimo uz jednadžbu (5·1) i diferencijalnu jednadžbu:

$$u^{(2n)} = p_2 u^{(2n-2)} + \cdots + p_{2n-1} u' + \overline{p}_{2n} u \,. \tag{5·2}$$

Definirajmo i za nju jedan osnovni sustav rješenja s istim početnim uvjetima kao u (1·2) i nazovimo ga $\gamma_1(x)$, $\sigma_1(x)$, ..., $\gamma_n(x)$, $\sigma_n(x)$. Neka su $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{2n}(x)$ adjungirana rješenja njihova. Uvođenje njihovo dat će nam da napišemo integralnu jednadžbu za rješenja jednadžbe (5·1).

Upotrebimo li izraz Frobeniusov[5] za opći integral nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe, ako poznajemo rješenja pripadne homogene jednadžbe i njene adjungirane, imamo za rješenje $u(x)$ diferencijalne jednadžbe (5·1), koje je karakterizirano početnim uvjetima: $u(0) = c_1$, $u'(0) = c_2$, ..., $u^{(2n-1)}(0) = c_{2n}$:

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1\gamma_1(x) + c_2\sigma_1(x) + \cdots + c_{2n-1}\gamma_n(x) + c_{2n}\sigma_n(x) + \\ &+ \lambda \int\limits_0^x [\gamma_1(x)\varphi_1(\xi) + \sigma_1(x)\varphi_2(\xi) + \cdots + \gamma_n(x)\varphi_{2n-1}(\xi) + \sigma_n(x)\varphi_{2n}(\xi)]\, u(\xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{5·3}$$

To rješenje zadovoljava dakle i ovu linearnu integralnu jednadžbu tipa Volterrina; nju zadovoljavaju i naše funkcije $c_i(x)$, $s_i(x)$ $(i = 1, \ldots n)$, ako se odaberu konstante c_i prema početnim

[5] Frobenius, *Über die Determinante mehrerer Funktionen einer Variablen.* Journal für reine und angewandte Mathematik. T. 77. — G. Darboux, loco cit. [2].

uvjetima (1·2). Ako riješimo tu integralnu jednadžbu metodom Volterrinom, imamo razvoje funkcija $c_i(x)$, $s_i(x)$ u obliku cijelih funkcija od λ, koje se za $\lambda = 0$ reduciraju na funkcije $\gamma_i(x)$, $\sigma_i(x)$.

Integralna jednadžba (5·3) vodi nas jednostavno i izravno do integralne jednadžbe za periodička rješenja.

6. Budući da su koeficijenti jednadžbe (5·1) periodičke funkcije od x perioda ω, može ona da za neke vrijednosti parametra λ ima rješenja, koja su periodičke funkcije od x perioda ω ili mnogokratnika njegova. Utvrdit ćemo egzistenciju tih rješenja perioda ω postavivši integralnu jednadžbu tipa Fredholmova sa simetričkom jezgrom, koju zadovoljavaju periodički integrali perioda ω gornje jednadžbe. Teorija Hilbertova dat će nam tada daljnje obavijesti.

Da $u(x)$ bude periodička funkcija perioda ω, nužno je i dovoljno, da je $u(0) = u(\omega)$, $u'(0) = u'(\omega)$, ..., $u^{(2n-1)}(0) = u^{(2n-1)}(\omega)$. Izrazivši te uvjete s pomoću izraza (5·3) i onih, koji izlaze iz njega diferenciranjem, te uzevši u obzir početne uvjete funkcija $\gamma_i(x)$ i $\sigma_i(x)$, imamo za određenje konstanata $c, \ldots, c_{2n}$, koje odgovaraju periodičkom rješenju, sustav jednadžbi (6·1) [vidi str. 174.].

Vrijednosti tako određene uvrštene u izraz (5·3) vode nas do homogene integralne jednadžbe

$$u(x) = -\lambda \int\limits_0^\omega G(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi \,, \tag{6·2}$$

u kojoj je jezgra, budući da potječe od diferencijalnoga sustava sebi samome adjungirana,[6] simetrična funkcija od x i ξ.

Za $\xi \leq x$ imamo za jezgru $G(x,\xi)$ izraz (6·3) [vidi str. 174.].

$$\text{uz} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_1(\omega) - 1 & \sigma_1(\omega) & \cdots & \gamma_n(\omega) & \sigma_n(\omega) \\ \gamma_1'(\omega) & \sigma_1'(\omega) - 1 & \cdots & \gamma_n'(\omega) & \sigma_n'(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_1^{(2n-1)}(\omega) & \sigma_1^{(2n-1)}(\omega) & \cdots & \gamma_n^{(2n-1)}(\omega) & \sigma_n^{(2n-1)}(\omega) - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \,;$$

za $\xi \geq x$ $G(x,\xi)$ dana je simetričnim izrazom zamjenom promjenljivih ξ i x.

[6] Vidi W. D. A. Westfall, *Zur Theorie der Integralgleichungen.* Inaug. Diss. Göttingen. 1905. — M. Bôcher, *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires.* Paris. 1917.

(6·1)
$$c_1[\gamma_1(\omega)-1]+c_2\,\sigma_1(\omega)+\cdots+c_{2n-1}\gamma_n(\omega)+c_{2n}\,\sigma_n(\omega)=-\lambda\int_0^\omega[\gamma_1(\omega)\,\varphi_1(\xi)+\cdots+\sigma_n(\omega)\,\varphi_{2n}(\xi)]\,u(\xi)\,d\xi$$
$$c_1\,\dot\gamma_1(\omega)+c_2[\dot\sigma_1(\omega)-1]+\cdots+c_{2n-1}\dot\gamma_n(\omega)+c_{2n}\,\dot\sigma_n(\omega)=-\lambda\int_0^\omega[\dot\gamma_1(\omega)\,\varphi_1(\xi)+\cdots+\dot\sigma_n(\omega)\,\varphi_{2n}(\xi)]\,u(\xi)\,d\xi$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1\gamma_1^{(2n-1)}(\omega)+c_2\,\sigma_1^{(2n-1)}(\omega)+\cdots+c_{2n-1}\gamma_n^{(2n-1)}(\omega)+c_{2n}\,\sigma_n^{(2n-1)}(\omega)=-\lambda\int_0^\omega[\gamma_1^{(2n-1)}(\omega)\varphi_1(\xi)+\cdots+\sigma_n^{(2n-1)}(\omega)\varphi_{2n}(\xi)]u(\xi)d\xi.$$

(6·3)
$$G(x,\xi)=\gamma_1(x)\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1(\xi) & \sigma_1(\omega) & \cdots & \sigma_n(\omega)\\ \varphi_2(\xi) & \dot\sigma_1(\omega)-1 & \cdots & \dot\sigma_n(\omega)\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \varphi_{2n}(\xi), & \sigma_1^{(2n-1)}(\omega) & \cdots & \sigma_n^{(2n-1)}(\omega)-1\end{vmatrix}}{\Delta_1}+\cdots+\sigma_n(x)\frac{\begin{vmatrix}\gamma_1(\omega)-1, & \sigma_1(\omega) & \cdots & \gamma_n(\omega) & \varphi_1(\xi)\\ \dot\gamma_1(\omega) & \dot\sigma_1(\omega)-1 & \cdots & \dot\gamma_n(\omega) & \varphi_2(\xi)\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ \gamma_1^{(2n-1)}(\omega), & \sigma_1^{(2n-1)}(\omega) & \cdots & \gamma_n^{(2n-1)}(\omega), & \varphi_{2n}(\xi)\end{vmatrix}}{\Delta_1}$$

(6·4)
$$\Gamma(x,\xi;\lambda)=c_1(x)\frac{\begin{vmatrix}v_1(\xi) & s_1(\omega) & \cdots & s_n(\omega)\\ v_2(\xi) & \dot s_1(\omega)-1 & \cdots & \dot s_n(\omega)\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ v_{2n}(\xi), & s_1^{(2n-1)}(\omega) & \cdots & s_n^{(2n-1)}(\omega)-1\end{vmatrix}}{D_1(\lambda)}+\cdots+s_n(x)\frac{\begin{vmatrix}c_1(\omega)-1, & s_1(\omega) & \cdots & c_n(\omega) & v_1(\xi)\\ \dot c_1(\omega) & \dot s_1(\omega)-1 & \cdots & \dot c_n(\omega) & v_2(\xi)\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ c_1^{(2n-1)}(\omega), & s_1^{(2n-1)}(\omega) & \cdots & c_n^{(2n-1)}(\omega), & v_{2n}(\xi)\end{vmatrix}}{D_1(\lambda)}$$

Budući da je jezgra $G(x,\xi)$ i zatvorena, kako se može pokazati, izlazi, da jednadžba (6·2) ima beskonačno mnogo realnih karakterističnih vrijednosti λ_n $(n=1,2,3,\ldots)$, koje se ne gomilaju u konačnosti; njima pripadaju kao karakteristične funkcije $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$, periodička rješenja diferencijalne jednadžbe (5·1), koje tvore potpun i ortogonalan sustav rješenja.

Resolventa $\Gamma(x,\xi;\lambda)$ jezgre $G(x,\xi)$ bit će po teoremu Hilbertovu dana izrazom (6·4) [vidi str. 174.] za $\xi\leq x$, a za $\xi\geq x$ izrazom simetričnim ovome.

Pri tome, jer je diferencijalni sustav samome sebi adjungiran, valja za $v_1\cdots v_{2n}$ uvrstiti u (6·4) izraze (4·2), a u (6·3) za $\varphi_1\cdots\varphi_{2n}$ analogne izraze izražene samo sa $\gamma_1\cdots\sigma_n$.

Determinanta

(6·5)
$$D_1(\lambda)=\begin{vmatrix}c(\omega)-1 & s_1(\omega) & \cdots c_n(\omega) & s_n(\omega)\\ \dot c_1(\omega) & \dot s_1(\omega)-1 & \cdots \dot c_n(\omega) & \dot s_n(\omega)\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ c_1^{(2n-1)}(\omega) & s_1^{(2n-1)}(\omega) & \cdots c_n^{(2n-1)}(\omega) & s_n^{(2n-1)}(\omega)-1\end{vmatrix}$$

koja sadržava parametar λ u izrazima funkcija $c_i(x)$, $s_i(x)$ i njihovih derivacija, Fredholmova je determinanta jezgre $G(x,\xi)$; njene nultačke su karakteristične vrijednosti λ_n jezgre $G(x,\xi)$.

Izrazi (6·2)—(6·5) prelaze za $n=1$ u izraze izvedene za diferencijalne jednadžbe drugoga reda.[7]

Što se tiče diferencijalne jednadžbe reda $(2n+1)$-oga, zna se, da ona ne može biti samoj sebi adjungirana; dotični diferencijalni izraz može biti samo identički jednak adjungiranom diferencijalnom izrazu s protivnim predznakom. Jezgra $G(x,\xi)$ pripadne integralne jednadžbe je polusimetrična, t. j. zadovoljava uvjet $G(x,\xi)=-G(\xi,x)$,[8] a karakteristične su joj vrijednosti sve čisto imaginarne.

7. Dokazat ćemo sada, da istoj karakterističnoj vrijednosti λ ne može pripadati jedno tâko i jedno liho periodsko rješenje jednadžbe (4·1).

Najopćenitije tâko rješenje diferencijalne jednadžbe (1·1) dano je izrazom

$$c(x)=\alpha_1\,c_1(x)+\alpha_2\,c_2(x)+\cdots+\alpha_n\,c_n(x),$$

[7] Vidi l. c. 1) pod IV. No 8.
[8] Vidi l. c. 6).

gdje su $\alpha, \cdot\cdot, \alpha_n$ kakove god konstante, a $c_i(x)$ partikularna rješenja definirana u br. 1. Od svih rješenja diferencijalne jednadžbe ono je karakterizirano time, da je ispunjeno n nezavisnih uvjeta

$$\dot{c}(0) = \ddot{c}(0) = \cdot\cdot = c^{(2n-1)}(0) = 0 .$$

Neka je $c(x)$ periodičko rješenje perioda ω. Izvršimo li na izrazu za njegov m-ti Fourierov koeficijenat

$$c_m = \frac{2}{\omega} \int_0^{\omega} c \cos \frac{2 m \pi}{\omega} x \, dx , \qquad m \neq 0$$

redom $2m$ parcijalnih integracija, dobit ćemo izraz

$$(7{\cdot}1) \qquad c_m = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{c^{(2i-1)}(\omega)}{(2m)^{2i}} + (-1)^n \frac{1}{(2m)^{2n}} \frac{2}{\omega} \int_0^{\omega} c^{(2n)} \cos \frac{2 m \pi}{\omega} x \, dx ,$$

u koji ne ulaze derivacije tâkoga reda, nego samo derivacije karakteristične za tâko rješenje.

Za periodičku funkciju $c(x)$ imamo na temelju sheme (1·2)

$$\dot{c}(\omega) = \ddot{c}(\omega) = \cdot\cdot = c^{(2n-1)}(\omega) = 0 ,$$

a za konstantu c_m izraz:

$$c_m = (-1)^n \frac{1}{(2m)^{2n}} \frac{2}{\omega} \int_0^{\omega} c^{(2n)} \cos \frac{2 m \pi}{\omega} x \, dx , \qquad m \neq 0$$

$$(7{\cdot}2) \qquad = (-1^n) \frac{1}{(2m)^{2n}} \frac{2}{\omega} \int_0^{\omega} \left[p_2 c^{(2n-2)} + \cdot\cdot + (\bar{p}_{2n} + \lambda) c \right] \cos \frac{2 m \pi}{\omega} x \, dx ,$$

$$\text{i} \qquad 0 = \int_0^{\omega} \left[p_2 c^{(2n-2)} + \cdot\cdot + (\bar{p}_{2n} + \lambda) c \right] dx , \qquad m = 0 .$$

Neka su $\frac{1}{2} c_0, c_1, \cdot\cdot, c_m, \cdot\cdot$ Fourierovi koeficijenti funkcije $c(x)$; $(-1)^{n-1} 2^{2n-2} c_1, \cdot\cdot, (-1)^{n-1} 2^{2n-2} m^{2n-2} c_m, \cdot\cdot$ Fourierovi koeficijenti derivacije $c^{(2n-2)}(x)$; neka su dalje $\frac{1}{2} \alpha_0^{(2i)}, \alpha_1^{(2i)}, \cdot\cdot, \alpha_m^{(2i)} \cdot\cdot$

$(i = 1, \cdot\cdot, n)$ Fourierovi koeficijenti funkcija $p_2(x), \cdot\cdot, p_{2n-2}(x), \bar{p}_{2n}(x)$, gdje radi dogovora o koeficijentu $\bar{p}_{2n}(x)$ (vidi početak br. 5.) valja staviti $\frac{1}{2} \alpha_0^{(2n)} = \lambda$, i $\beta_1^{(2i+1)}, \beta_2^{(2i+1)}, \cdot\cdot, \beta_m^{(2i+1)}, \cdot\cdot$, $(i = 1, \cdot\cdot, n-1)$ Fourierovi koeficijenti funkcija $p_3(x), p_5(x), \cdot\cdot, p_{(2n-1)}(x)$. Tada znamo, da redovi $\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^{(2i)})^2$ i $\sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m^{(2i+1)})^2$ konvergiraju. Suponirajmo dalje, da konvergiraju apsolutno redovi:

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(2n)} , \quad \sum_{i=1}^{\infty} i \, \beta_i^{(2n-1)} , \cdot\cdot , \quad \sum_{i=1}^{\infty} i^{2n-3} \beta_i^{(3)} , \quad \sum_{i=1}^{\infty} i^{2n-2} \alpha_i^{(2)} ,$$

što je na primjer ispunjeno, ako funkcije $p_{2n-r}(x)$ imaju integraljivu derivaciju $(r+1)$-oga reda $(r = 0, 1, 2, \cdot\cdot, 2n-2)$.

S pomoću formula, koje daju Fourierove konstante produkta dviju funkcija, možemo sada (7·2) pisati za $m \neq 0$ u obliku (7·3) [vidi str. 179.], gdje je stavljeno $\alpha_{-i} = \alpha_i$, $\beta_{-i} = -\beta_i$, a za $m = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = (-1)^{n-1} & 2^{2n-2} [\alpha_1^{(2)} c_1 + 2^{2n-2} \alpha_2^{(2)} c_2 + \cdot\cdot + m^{2n-2} \alpha_m^{(2)} c_m + \cdot\cdot] \\ + (-1)^{n-1} & 2^{2n-3} [\beta_1^{(3)} c_1 + 2^{2n-3} \beta_2^{(3)} c_2 + \cdot\cdot + m^{2n-3} \beta_m^{(3)} c_m + \cdot\cdot] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + [\lambda c_0 & + \alpha_1^{(2n)} c_1 + \alpha_2^{(2n)} c_2 + \cdot\cdot + \alpha_m^{(2n)} c_m + \cdot\cdot] . \end{aligned}$$

Redovi u zagradama konvergiraju svi apsolutno, kako ćemo se uvjeriti iz ocjena koeficijenata c_m. Iz relacije (7·2) izlazi naime radi omeđenosti funkcija $p_i(x)$, $c(x)$ i njenih derivacija

$$| c_m | < \frac{M_1}{m^{2n}}$$

i dalje

$$\begin{aligned} m^{2n-2} \, | c_m | &< \frac{M_1}{m^2} \\ m^{2n-3} \, | c_m | &< \frac{M_1}{m^3} \\ &\cdots\cdots \\ m \, | c_m | &< \frac{M_1}{m^{2n-1}} . \end{aligned}$$

Iz ovih relacija izlazi i apsolutna i uniformna konvergencija Fourierovih redova funkcije $c(x)$ i njenih derivacija do uključivo reda $(2n-2)$-oga.

Fourierovi koeficijenti periodičke funkcije $c(x)$ zadovoljavaju dakle sustav (7·4) od beskonačno mnogo linearnih jednadžbi s beskonačno mnogo nepoznanica [vidi str. 179.], gdje je

$$\frac{1}{2}\alpha_0^{(2n)} = \lambda, \quad \text{a} \quad \varepsilon_{n,i} = \begin{matrix} 0, & n \neq i \\ 1, & n = i \end{matrix}.$$

Ako označimo koeficijente nepoznanica u ovom sustavu s $a_{m,i}$ $(m, i = 1, 2, \cdots)$ za $m \neq i$, a s $1 + a_{m,m}$ za $m = i$, njegova determinanta

$$(7\cdot5) \qquad D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+(\lambda-1) & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & 1+a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1+a_{nn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

ima za korijene karakteristične vrijednosti periodičkih rješenja, pri čemu λ dolazi u svakom dijagonalnom članu.

Beskonačna determinanta $D(\lambda)$ je apsolutno konvergentna. U tu svrhu valja pokazati, da redovi $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{m,m}|$ i $\sum\limits_{\substack{m=1\\i=1}}^{\infty} |a_{m,i}|^2$ konvergiraju. Imamo u jednu ruku za Fourierove konstante

$$\left|\alpha_m^{(2i)}\right|, \quad \left|\beta_m^{(2i+1)}\right| < N, \quad \text{nezavisno od } m \text{ uz}$$

konačno λ.

Poradi toga je, i na temelju izraza $a_{m,m}$ iz formula (7·4),

$$|a_{m,m}| \leq \frac{\left|\alpha_{2m-2}^{(2n)}\right| + \left|\alpha_0^{(2n)}\right|}{2(2m-2)^{2n}} + \frac{\left|\beta_{2m-2}^{(2n-1)}\right|}{2(2m-2)^{2n-1}} + \cdots + \frac{\left|\alpha_{2m-2}^{(2)}\right| + \left|\alpha_0^{(2)}\right|}{2(2m-2)^2}$$

$$< \frac{N_1}{2}\left[\frac{1}{(2m-2)^{2n}} + \cdots + \frac{1}{(2m-2)^2}\right]$$

$$< \frac{N_1}{2}\,\frac{2n-1}{(2m-2)^2} = \frac{N_2}{(m-1)^2}$$

$$\begin{aligned}(-1)^n (2m)^{2n} c_m = {} & \frac{(-1)^{2n-1}}{2^3 m^{2n}}\left[\left(\alpha_{m+1}^{(2)} + \alpha_{m-1}^{(2)}\right)c_1 + \left(\alpha_{m+2}^{(2)} + \alpha_{m-2}^{(2)}\right)2^{2n-2}c_2 + \cdots + \left(\alpha_{2m}^{(2)} + \alpha_0^{(2)}\right) m^{2n-2} c_m + \cdots\right] \\ & + \frac{(-1)^{2n-1}}{2^4 m^{2n}}\left[\left(\beta_{m+1}^{(3)} - \beta_{m-1}^{(3)}\right)c_1 + \left(\beta_{m+2}^{(3)} - \beta_{m-2}^{(\,)}\right)2^{2n-3}c_2 + \cdots + \beta_{2m}^{(3)} m^{2n-3} c_m + \cdots\right] \\ (7\cdot3) \qquad & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} m^{2n}}\left[\alpha_m^{(2n)} c_0 + \left(\alpha_{m+1}^{(2n)} + \alpha_{m-}^{(2n)}\right)c_1 + \left(\alpha_{m+2}^{(2n)} + \alpha_{m-2}^{(2n)}\right)c_2 + \cdots + \left(\alpha_{2m}^{(2n)} + \lambda\right)c_m + \cdots\right]\end{aligned}$$

$$\lambda c_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\alpha_i^{(2n)} \quad 2i\beta_i^{(2n-1)} - (2i)^2\alpha_i^{(2n-2)} + \cdots + (-1)^n(2i)^{2n-4}\alpha_i^{(4)} + (-1)^{n-1}(2i)^{2n-3}\beta_i^{(3)} + (-1)^{n-1}(2i)^{2n-2}\alpha_i^{(2)}\right]c_i = 0$$

$$(7\cdot4) \qquad \frac{(-1)^{n+1}\alpha_1^{(2n)}}{2^{2n+1}}c_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\varepsilon_{1,i} + (-1)^{n+1}\frac{\alpha_{1+i}^{(2n)} + \alpha_{1-i}^{(2n)}}{2^{2n+1}} + (-1)^n i\,\frac{\beta_{1+i}^{(2n-1)} - \beta_{1-i}^{(2n-1)}}{2^{2n}} + \cdots + i^{2n-2}\frac{\alpha_{1+i}^{(2)} + \alpha_{1-i}^{(2)}}{2^3}\right]c_i = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(-1)^{n+1}\alpha_m^{(2n)}}{2^{2n+1} m^{2n}}c_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\varepsilon_{m,i} + (-1)^{n+1}\frac{\alpha_{m+i}^{(2n)} + \alpha_{m-i}^{(2n)}}{2^{2n+1} m^{2n}} + (-1)^n i\,\frac{\beta_{m+i}^{(2n-1)} - \beta_{m-i}^{(2n-1)}}{2^{2n} m^{2n}} + \cdots + i^{2n-2}\frac{\alpha_{m+i}^{(2)} + \alpha_{m-i}^{(\cdot)}}{2^3 m^{2n}}\right]c_i = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gdje su N_1 i N_2 konstante nezavisne o m, iz čega izlazi konvergencija reda $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{m,m}|$. U drugu ruku, radi supozicije (*a*) o konvergenciji dotičnih redova, pa iz izraza za $a_{m,i}$ na temelju formula (7·4) i činjenice, da $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^{(2n)})^2$ konvergira, izlazi konvergencija i reda $\sum_{\substack{m=1\\i=1}}^{\infty} |a_{m,i}|^2$.

Ako ne ćemo da uvodimo supozicije (*a*), koje traže egzistenciju viših derivacija, nego izlazi iz zahtjeva, da je diferencijalna jednadžba (4·1) samoj sebi adjungirana, konstatirajmo, da je determinanta $D(\lambda)$ normaloidna, t. j. da postaje normalnom, pošto se elementi stupca $(i+1)$-oga pomnože s $\frac{1}{(2i)^{2n}}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, budući da poslije množenja red $\sum_{m,i} |a_{m,i}|$ konvergira, te se daljnja razlaganja bez promjene primjenjuju.

Determinanta $D(\lambda)$ u općem slučaju je ranga n. Izlazi to u jednu ruku iz činjenice, što najopćenitije tâko rješenje sadržava linearno n kakovih god konstanata, a u drugu ruku, kako ćemo pokazati, rješenje $c(x)$ ne može u općem slučaju biti periodičko, ako nisu periodičke i funkcije $c_1(x), \cdots, c_n(x)$.

Da opće tâko rješenje $c = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n$ bude periodičko s periodom ω, nužno je i dovoljno, da $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ zadovoljavaju ovaj linearni sustav od $2n$ jednadžbe s n nepoznanica:

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 [c_1(\omega) - 1] & + \alpha_2 c_2(\omega) & + \cdots + \alpha_n c_n(\omega) & = 0 \\
\alpha_1 \dot{c}_1(\omega) & + \alpha_2 \dot{c}_2(\omega) & + \cdots + \alpha_n \dot{c}_n(\omega) & = 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_1 c_1^{(2n-2)}(\omega) & + \alpha_2 c_2^{(2n-2)}(\omega) & + \cdots + \alpha_n [c_n^{(2n-2)}(\omega) - 1] & = 0 \\
\alpha_1 c_1^{(2n-1)}(\omega) & + \alpha_2 c_2^{(2n-1)}(\omega) & + \cdots + \alpha_n c_n^{(2n-1)}(\omega) & = 0 .
\end{array}$$

Ako je rang matrice ovoga sustava jednak n, sustav nema drugoga rješenja do $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ te $c(x)$ ne može biti periodičko rješenje, ako nijesu $c_1(x), \cdots, c_n(x)$ svako za se periodička rješenja, dakako linearna nezavisna. Da će to biti redovno, izlazi odatle, što minori n-toga reda sadržani u n redaka determinante Δ (1·3) zadovoljavaju jedan sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi

prvoga reda s periodičkim koeficijentima,[9] te su njegova partikularna rješenja. Takovo je rješenje i minor

$$\begin{vmatrix} \dot{c}_1 & \cdots & \dot{c}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^{(2n-1)} & \cdots & c_n^{(2n-1)} \end{vmatrix},$$

koji je za $x = \omega$ determinanta homogenoga sustava sastavljenoga iz 2., 4., $\cdots$, $2n$-te od gornjih jednadžbi i koji za $x = 0$ ima vrijednost nulu te se bez naročitih uvjeta o koeficijentima jednadžbe ne će poništavati i u $x = \omega$, nego će biti različit od nule, a homogeni sustav ne će imati rješenja do trivijalnoga $\alpha_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$.

Precrtavši dakle u $D(\lambda)$ n redaka $r_1, \cdots, r_n$ i n stupaca $s_1, \cdots, s_n$, preostaje minor

$$\begin{pmatrix} r_1, \cdots, r_n \\ s_1, \cdots, s_n \end{pmatrix} \neq 0,$$

a elementi redaka $r_1, \cdots, r_n$ u determinanti $D(\lambda)$ linearne su kombinacije s konstantnim koeficijentima elemenata ostalih redaka.

Iz izraza (7·2) za $m = 0$ izlazi, da je kod nas $r_1 = 1$, t. j. da je prvi redak posljedica ostalih (osim $r_2, \cdots, r_n$-toga), budući da je dobiven iz

$$0 = \int_0^{\omega} c^{(2n)}\, dx = c^{(2n-1)}(\omega),$$

a tu smo relaciju već upotrebili u (7·2) pri postavljanju 2., 3., ... jednadžbe sustava (7·4).

Uzmimo sada, da za istu vrijednost parametra λ ima i jedno liho periodičko rješenje $s(x)$. Tada bismo dobili, slično kao (7·1), iz

$$s_m = \frac{2}{\omega} \int_0^{\omega} s(x) \sin \frac{2m\pi}{\omega} x\, dx, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

parcijalnim integriranjem:

$$s_m = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{s^{(2i-2)}(\omega)}{(2m)^{2i-1}} + (-1)^n \frac{1}{(2m)^{2n}} \frac{2}{\omega} \int_0^{\omega} s^{(2n)} \sin \frac{2m\pi}{\omega} x\, dx,$$

[9] Cf. L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*. T. II$_1$, p. 125.

$$
(7{\cdot}6)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\left[\varepsilon_{1,i}+(-1)^n\frac{\alpha^{(2n)}_{1+i}-\alpha^{(2n)}_{1-i}}{2^{2n+1}}+(-1)^{n+1}\,i\,\frac{\beta^{(2n-1)}_{1+i}+\beta^{(2n-1)}_{1-i}}{2^{2n}}+\cdots+i^{2n-3}\frac{\beta^{(3)}_{1+i}+\beta^{(3)}_{1-i}}{2^4}-i^{2n-2}\frac{\alpha^{(2)}_{1+i}-\alpha^{(2)}_{1-i}}{2^3}\right]s_i=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{\infty}\left[\varepsilon_{m,i}+(-1)^n\frac{\alpha^{(2n)}_{m+i}-\alpha^{(2n)}_{m-i}}{2^{2n+1}m^{2n}}+(-1)^{n+1}\,i\,\frac{\beta^{(2n-1)}_{m+i}+\beta^{(2n-1)}_{m-i}}{2^{2n}m^{2n}}+\cdots+i^{2n-3}\frac{\beta^{(3)}_{m+i}+\beta^{(3)}_{m-i}}{2^4m^{2n}}-i^{2n-2}\frac{\alpha^{(2)}_{m+i}-\alpha^{(2)}_{m-i}}{2^3m^{2n}}\right]s_i=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
(7{\cdot}7)\qquad
\begin{aligned}
&(1+a_{22})s_1+a_{23}s_2+\cdots+a_{2,m+1}s_m+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{\alpha^{(2n)}_{1+i}}{2^{2n}}-(-1)^n i\,\frac{\beta^{(2n-1)}_{1+i}}{2^{2n-1}}+\cdots-i^{2n-3}\frac{\beta^{(3)}_{1+i}}{2^3}-i^{2n-2}\frac{\alpha^{(2)}_{1+i}}{2^2}\right]s_i\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{m,2}s_1+a_{m,3}s_2+\cdots+a_{m,m+1}s_m+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{\alpha^{(2n)}_{m+i}}{2^{2n}m^{2n}}-(-1)^n i\,\frac{\beta^{(2n-1)}_{m+i}}{2^{2n-1}m^{2n}}+\cdots-i^{2n-3}\frac{\beta^{(3)}_{m+i}}{2^3m^{2n}}-i^{2n-2}\frac{\alpha^{(2)}_{m+i}}{2^3m^{2n}}\right]s_i\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

u koji izraz ne ulaze derivacije lihoga reda, u vezi s time, što je najopćenitije liho rješenje jednadžbe (1·1) karakterizirano s $s(0)=\ddot{s}(0)=\cdots=s^{(2n-2)}(0)=0$; i ono dakle sadržava linearno n kakovih god konstanata.

Radi periodičnosti funkcije $s(x)$ imamo

$$
\begin{aligned}
s_m&=(-1)^n\frac{1}{(2m)^{2n}}\,\frac{2}{\omega}\int_0^{\omega}s^{(2n)}\sin\frac{2m\pi}{\omega}x\,dx\,,\qquad m=1,2,\cdots\\
&=(-1)^n\frac{1}{(2m)^{2n}}\,\frac{2}{\omega}\int_0^{\omega}\left[p_2\,s^{(2n-2)}+\cdots+(\overline{p}_{2n}+\lambda)\,s\right]\sin\frac{2m\pi}{\omega}x\,dx,
\end{aligned}
$$

pa se na temelju relacija za Fourierove konstante produkta nalazi, da Fourierovi koeficijenti funkcije $s(x)$ zadovoljavaju sustav od beskonačno mnogo linearnih jednadžbi (7·6) [vidi str. 182.].

Kako se sličnim ocjenjivanjem kao pri koeficijentima c_m može pokazati, da ovi redovi konvergiraju apsolutno, gornji se sustav jednadžbi može pisati, ako još uvedemo i koeficijente a_{ik} iz sustava (7·4), u obliku (7·7) [vidi str. 182.].

Kako opće rješenje i sustava jednadžbi (7·6) sadržava u općem slučaju linearno n kakovih god konstanata, bit će rang njegove determinante n, te će n redaka biti posljedica ostalih. Preneseno na sustav (7·7) znači, da osim preostalih $n-1$ redaka sustava (7·4), koji su linearne kombinacije ostalih, ima još i jedan novi n-ti redak, koji je linearna posljedica ostalih, što je nemoguće s obzirom na rang determinante $D(\lambda)$. Ne može dakle istoj karakterističnoj vrijednosti λ da pripada jedno tâko i jedno liho periodičko rješenje diferencijalne jednadžbe (1·1), ali istoj karakterističnoj vrijednosti λ može pripadati n karakterističnih, linearno nezavisnih funkcija ili svih tâkih, ili svih lihih, kojih su Fourierovi koeficijenti rješenja sustava jednadžbi (7·4) ili (7·6).