ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА
НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

А. Ј. ХИНЧИН

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ МАТЕМАТИКЕ
И
МАТЕМАТИЧКЕ ДЕФИНИЦИЈЕ
У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Научна књига
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1948

Наслов оригинала:

А. Я. ХИНЧИН

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Превела
МИЛИЦА ИЛИЋ - ДАЈОВИЋ,
асистент Техничке велике школе

ПРЕДГОВОР

Штампањем ове по обиму мале али по садржини значајне књиге познатог совјетског научника А. Ј. Хинчина Друштво математичара и физичара Народне Републике Србије жели да нашим наставницима математике у средњој школи укаже помоћ у њиховом методичком раду. Потреба да се у средњој школи обрада основних појмова математике и математичких дефиниција усклади са обрадом и „схватањем истих у савременој математичкој науци" навела је писца да у овој књизи не само укаже на штетност застарелих ненаучних традиција и формализма у настави математике, које средња школа још увек није одбацила, него и покаже правилан начин како се оне отстрањују и како настава математике потпомаже развитак логичког мишљења код ученика развијајући постепено у њиховој свести претставу о квантитативним и просторним односима у свету уопште.

Преводилац

УВОД

Идејни ниво наставе математике у средњој школи приметно заостаје за њеним научним развитком. Ни у једној школској дисциплини немамо такво стање ствари да се, с појединим изузецима, цео материјал који се излаже састоји од чињеница које су биле познате још у XVII столећу. Само једно поглавље алгебре — теорија ирационалних бројева — припада стварањима XIX столећа.

Ако се архаичност програмског материјала унеколико може објаснити тиме што у области математике (за разлику од физике, хемије и биологије) виша школа непосредно води ученике даље, не враћајући се на елементарне чињенице, онда се никако не може објаснити ни оправдати она опште позната појава да се у школској настави чак и најосновнији појмови, формулације и методе расуђивања услед вековне традиције често излажу у нескладу са схватањем и третирањем истих у савременој науци. Позивање на тобожње тиме постигнуто олакшавање усвајања одговарајућих чињеница потпуно је лишено основа; у огромној већини случајева научна концепција оних појмова о којима је овде реч елементарнија је и једноставнија и, у сваком случају, јаснија од оне коју уџбеници по традицији негују; поменуто позивање скоро увек има за циљ да маскира учмалост и рутину методичке осредњости; често на све предлоге за обнављање чујемо, само, да ће „по старом бити лакше"; ни у једном случају нисам успео да сазнам зашто ће по старом бити лакше, и у свим случајевима стицао сам уверење да ће лакше бити не ученику већ наставнику који је уџбеник научио напамет па не жели да се преучи; у свим случајевима то је било изравнавање методичара са заосталим слојем наставника, док су се напредни наставници интересовали за новине, с вољом о њима размишљали и често их усвајали.

Желео бих да два принципа поставим у основу решавања питања о томе у коликој се мери овај или онај математички појам, с обзиром на развој ученика, у школском курсу може проучавати у складу са третирањем истог у савременој науци. Ево тих принципа.

1. У случајевима када услови узраста не дозвољавају да се известан појам третира онако како је то усвојила савремена наука, концепција тога појма може се у школском курсу упростити. То значи да школа није обавезна да развитак сваког појма доводи до његовог стања у савременој науци, већ се може зауставити и на претходном стадиуму развитка тог појма. Али, ни у једном случају школа није дужна да у циљу упрошћавања *квари* научно третирање појма дајући му обележја која су противречна научном схватању истог — обележја која би убудуће требало искорењивати; другим речима, ни у једном случају школа не мора развијати појмове у правцу који скреће од пута њиховог научног развитка.

2. Замењивање јасних и тачних дефиниција, формулација и расуђивања расплинутим, који немају тачан смисао и при доследном искоришћавању неизбежно доводе до логичких бесмислица, ни у коме случају не може потпомоћи олакшавању разумевања, већ ће, напротив, у свим случајевима то отежати; мислити расплинуто не може бити лакше него мислити јасно.

Најзад, ми сматрамо да уобичајено градиво школског курса обилује таквим појмовима за које математичка наука не зна или које је давно одбацила. У великој већини случајева увођење тих појмова, измишљених нарочито за школу и неупотребљивих у науци, има за собом само слепу традицију, те тиме изазвано непотребно отежавање курса методички није ничим оправдано и само штети.

Ето, то су они полазни принципи са гледишта којих је написана ова књига, можда мало необична по садржини: читалац неће у њој наћи нити више или мање популарно излагање савремених научних концепција намењено уздизању његове стручне спреме нити методичких разрада у опште усвојеном значењу те речи. Међутим, ја бих утолико пре хтео да изразим наду да ће наставник, читајући је, наићи како на моменте који проширују његов научни видик тако и на извесну методичку помоћ. Ова књига има скроман задатак да анализира неколико најважнијих математичких појмова по питању у којој се мери и којим путевима проучавање истих у средњој школи може довести у склад са третирањем тих појмова усвојеним у савременој науци.

I. ПОЈАМ БРОЈА У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Појам броја је основна полуга целокупног школског курса математике, која тај курс прожима од првог до последњег разреда. На тај се начин историска еволуција тог појма производи у учениковој свести за време дугог периода, и то таквог периода током кога се развијање ученикове свести може упоредити са развијањем свести човечанства у току целокупне историје његовог свесног живота. И, слично томе како је у свести мисаоног чо́вечанства појам броја, уздижући се од ступња до ступња, у разним епохама не само по садржају него и по стилу, научном нивоу и логичкој зрелости претстављао потпуно различиту слику — исто се тако не може говорити о једном јединем појму броја који одговара нивоу ученикове свести. За време школске наставе појам броја не само обогаћује свој садржај укључујући у себе све нове и нове класе бројева него и квалитативно еволуира заједно са учениковом свешћу, добијајући нова обележја и нијансе и уздижући се на све више ступњеве апстракције и логичке заокругљености. Сама мотивација постепених проширавања појма броја, природно, на разним ступњевима развитка треба да добија сасвим различите форме, слично томе како су у историји науке та постепена проширивања, имајући потребе праксе као заједничку основу, фактички извојевала себи право на живот позивајући се на најразличитије потребе и особине човечије свести. Ако увођење разломка можемо непосредно мотивисати реалним захтевима праксе и тешко да бисмо постигли боље резултате покушавајући да се на датом нивоу дечије свести позивамо на питања више теориског карактера, онда при увођењу негативних бројева можемо већ рачунати на важан педагошки ефект примедбе да ће у новој области одузимање бити неограничено изводљиво. Приликом увођења ирационалних бројева можемо се, осим аналогне аргументације, са успехом позивати и на теориске потребе геометрије, а увођење комплексних бројева изводи се са децом таквог узраста да код нормално развијеног ученика морају већ постојати прилично високи захтеви теориског развитка који се тим последњим проширивањем појма броја постављају. На тај су начин не само ступањ, напредовање саме еволуције, него и *ниво схватања* тог еволуционог процеса природно потпуно различити у разним стадиумима наставе. И, разуме се, тек је у последњем разреду уместан довољно потпун, систематски, ретроспективан поглед на општу слику еволуционог процеса који се завршава.

Појам броја се од многих других појмова школског курса математике разликује својом *примарношћу*. То значи да у знатној већини логичких изграђивања математике појам броја припада класи оних појмова који се не дефинишу другим појмовима и који заједно са аксиомама улазе у састав првобитно датих. То значи да математичка наука не садржи у себи одговор на питање шта је број — одговор који би се састојао у дефинисању тога појма другим, раније утврђеним појмовима; математичка наука даје тај одговор у другој форми, набрајајући особине броја изражене аксиомама. Утолико пре је, разуме се, бесмислен и безнадан сваки покушај да се тај појам дефинише у школском курсу аритметике и алгебре. Нарочито се треба чувати доста раширене тенденције ка стварању сурогата такве дефиниције, кад се као дефиниција појма набрајају они моменти практичног живота у којима се срећемо са тим појмом; наравно, потребно је да ученик зна како су и зашто потребе рачунања и мерења довеле до појаве и постепеног проширавања појма броја; али нагонити децу да уче фразе као: „Број је резултат рачунања или мерења", „однос је резултат упоређивања" итд., и да те фразе сматрају одговорима на питање шта је број и шта је однос, тј. *дефиницијама* тих појмова — то значи свесно калемити ученицима логичку расплинутост и збрку, смешу логичке дефиниције и генетичког описивања. Из „дефиниције" сличне врсте ученик сазнаје о броју исто онолико колико и човек који никада није чуо реч „рат" сазнаје о њему из реченице „рат је резултат сукобљавања интереса држава".

Ми сматрамо да је важно настојати на томе да се цео курс школске математике ослободи било од каквих покушаја непосредног одговора на питање шта је број, јер, ма какав био, тај ће одговор бити вулгаран и унаказиће логички садржај тог питања. Али, разуме се, питају нас како ће наставник поступити ако ученик постави то питање. Одговарамо:

поступити као и увек, тј. говорити истину; одговорити ученику да је то питање које је поставио један од најтежих задатака научне филозофије, од чијег смо потпуног решења још далеко, да је број, као и сваки математички појам, одраз извесних односа реалног света у нашој свести; али питање који заправо односи реалног света налазе свој израз у појму броја, питање који су односи *количински* — то је дубок и тежак задатак филозофије, а ономе који га проучава математика може само показати каквих бројева има, које су њихове особине и како се са њима може и мора оперисати. Ако такав одговор не задовољи ученика, онда ће то значити једино да тај ученик није сазрео за правилно разумевање оног задатка који се садржи у постављеном питању; наставник се с тим мора помирити; боље је причекати с одговором годину две, него тај одговор замењивати сурогатом који вулгаризује проблем.

Али, ако се у школском курсу математике одричемо логичке дефиниције појма броја, то, наравно, не значи да формирање и еволуцију оних претстава и асоцијација које ученик доводи у везу са речју „број" можемо оставити самотоку. Насупрот томе, сваки наставник је обавезан да чврстом руком у току целе наставе води ученике ка стварању правилне, јасне и у научном погледу што је могућно зрелије претставе о броју, подвлачећи све оно што потпомаже стварање такве претставе и одбацујући све оно што је квари и фалсификује.

Па која је то правилна претстава о броју, који је ступањ научне зрелости у формирању те претставе приступачан ученику и којим се путем може постићи стварање те претставе?

Ми сматрамо да се цео курс аритметике и алгебре мора оријентисати на то да се код ученика постепено ствара и учвршћује претстава о броју као објекту *аритметичких операција*. Само се по себи разуме да та (или њој еквивалентна) реченица не само да не може послужити као дефиниција појма броја него је у школском курсу уопште не треба изговарати. Али, ако ученик лагано, уз помоћ наставникових вештих нагласака и индиректних напомена, на завршетку десетог разреда буде са речју „број" макар и полусвесно доводио у везу нешто што се може сабирати, множити итд., онда ћемо са сигурношћу моћи да кажемо да је у погледу појма броја школа умела да му пружи најбоље и највише што му је могла дати; притом ће платформа за даљи математички развитак, ако он устреба, бити припремљена на најбољи начин; управо таква претстава о броју, пошто је, с једне стране, безусловно приступачна свести ученика у завршној етапи његовог развитка, у исто време отвара сва врата у област научних концепција савремене алгебре.

Разуме се, изложену тезу нипошто не треба схватити као позив на кидање са *реалним* везама појма броја. Само по себи је разумљиво да од нас заступана резултативна претстава о суштини броја не искључује, већ, напротив, обавезно укључује у себе идеју о броју као одразу реалних односа и зависности. Целокупна настава аритметике и алгебре изводи се, како ће о томе касније бити речи, у знаку борбе против формализма и стално водећи рачуна о материјалном садржају сваког новог вида појма броја[1]) и сваке нове алгебарске операције; саме операције аритметике и алгебре не треба да у свести ученика изгубе свој материјални, реални садржај, услед чега и претстава о броју — објекту тих операција, као зрео плод достигнутог ступња уопштавања и апстракције, неће моћи и не треба да означава раскид са реалним извором тог апстрактног појма; напротив, оперативност која се везује са идејом броја треба да подвлачи, потсећа и у учениковој свести учвршћује практичне везе и примене те идеје.

У даљем излагању ми ћемо се постепено дотицати различитих етапа развитка појма броја; притом ће сва наша пажња бити усретсређена на логичку природу сваког новог проширавања, а методичке закључке расматраћемо само утолико уколико су они у вези са реализацијом те логичке природе у процесу предавања. Зато, разумљиво, све следеће излагање не може претендовати на улогу методичке разраде, слично томе као што и цео овај чланак не може претстављати методички уџбеник

1. Нула

Прво проширење појма броја са којим се ученик среће настаје у оном тренутку када се природним бројевима прикључује нула.

У нашој методичкој литератури и данас се води дискусија по питању да ли и у школи нулу треба сматрати бројем или јој оставити само значење симбола који у датом броју

[1]) појам негативног, рационалног и имагинарног броја. — Прим. прев.

показује отсуство јединица одговарајуће класе. Ми сматрамо да последњи став може бити само плод неразумевања; нема апсолутно никаквих основа да се у школској настави долази у противречност са научним устројством аритметике; такав став доводи у пракси до отворено противречних закључака и последица, који у крајњој линији прете потпуном немогућношћу колико толико систематског устројства учења о броју. Заиста:

1. Цела савремена наука признаје нулу за број.

2. Ако нулу не признајемо за број, приморани смо да признамо да разлика (а после увођења негативних бројева — и збир) двају бројева може да не буде број.

3. Ако нулу не признајемо за број, приморани смо да аритметичке радње (сабирање, одузимање, множење) изводимо са нечим што није број. Напротив, ако нулу признајемо за број, добијамо могућност да већ на ранијем стадиуму наставе почнемо усађивати у свест ученика онај оперативни принцип о коме смо говорили горе (на пример по схеми: нула се може додавати и одузимати, нулом се може множити — значи, нула је број).

4. Најзад, оно што многе методичаре плаши — производити у ранг броја такав симбол који је досад означавао управо *отсуство* јединица одговарајуће класе — уствари не само да није антинаучно нити нарушава логични ред излагања него, напротив, служи као први и веома јасан пример како се у математици реализује дијалектички закон супротности. Када касније учимо ученике да цео број схвате као специјалан случај разломљеног, реалан — као специјалан случај комплексног, сталну величину — као специјалан случај промењиве итд., онда су све те појаве у којима долази до израза један те исти закон дијалектичке логике, појаве необично карактеристичне за цео стил математичке науке: појам који је првобитно поникао као антитеза извесном датом појму и који је првобитно стајао према овоме у односу отворено израженог антагонизма, доцније, пошто је уздигнут на виши ступањ, синтетизује се са овим у један једини заједнички појам, при чему, наравно, у томе јединству оба појма у пуној мери задржавају супротна обележја. Тако и нула, не губећи нимало своје реално значење и све своје специфичне особине, настала првобитно као антитеза, као негација у односу на природни број, у даљем развитку појма броја стаје у један ред са низом природних бројева, појављује се као резултат операција са природним бројевима, потчињава се истим за-

конима и правилима којима и ови и самим тим придружује се свету бројева.

Тако стоји ствар на принципијелном плану. Разуме се, у свести ученика слика се мора стварати у знатно упрошћеном облику, али упрошћавање не мора повући за собом ни кварење ни вулгаризацију. Пошто се нула учврстила у учениковој свести као симбол који у датом броју указује на отсуство јединица ове или оне класе и на тај начин постала уобичајено средство писане нумерације, ученик се, савладавши радње са вишецифреним бројевима, лагано и постепено у самој пракси аритметичких операција привикава на то да се нула појављује и као резултат радњи које се изводе са природним бројевима, па чак и као непосредан објект тих радњи. После тога наставник у прави час говори: пошто са нулом изводимо рачунске радње исто онако једноставно и успешно као и са бројевима и пошто се свим правилима тих радњи нула покорава исто онако добро као и бројеви, то ћемо уговорити да је сада сматрамо бројем, и тога свога уговора стално ћемо се придржавати.

Придруживање нуле свету бројева, услед могућности да се са њом изводе аритметичке операције, биће први корак у ствари калемљења учениковој свести оног оперативног принципа о коме смо говорили у уводу овог чланка.

2. Разломци

Реална, практична мотивација увођења разломљених бројева толико је убедљива и приступачна свести сваког детета, да овде не изискује никаква објашњења.

Са логичког гледишта треба подвући неколико момената.

1. Цели бројеви, најпре супротни разломљеним, појављују се затим као један од облика, као специјалан случај ових последњих; овде имамо други случај реализације закона јединства супротности у аритметици, и томе моменту треба посветити нарочиту пажњу. Разуме се, не говорећи деци ништа ни о каквим законима дијалектике, наставник се мора позабавити тиме да се у свести његових ученика чврсто усади слика проширеног света бројева у коме ученицима одавно познати цели бројеви заузимају своје посебно место (а не налазе се ван њега).

2. Немогућност дељења нулом последица је оне нарочите природе тога броја коју он задржава и пошто је прикључен свету бројева. Пошто је ова забрана универзална, тј. остаје на снази при свим даљим проширивањима појма броја, то је треба исказати и стално помињати у најкатегоричнијој форми. Током целог школског курса неопходно је брижљиво избегавати такав начин писања да се нула налази у имениоцу. Тако, када се говори о томе да једначина $0 \cdot x = 1$ нема решења, треба тај закључак мотивисати тиме да је $0 \cdot x$ ма за које x једнако нули, те се, према томе, ни за какво x не може изједначити са јединицом. Напротив, не треба расуђивати овако: из $0 \cdot x = 1$ произлази $x = \frac{1}{0}$, а пошто израз $\frac{1}{0}$ нема смисла, то дата једначина нема решења. При таквом расуђивању ми фактички вршимо дељење нулом, а потом само констатујемо да добијени израз нема смисла, док се, међутим, задатак састоји управо у томе да се ученици навикну да никад не покушавају делити нулом, а да и не говоримо да је писање као $\frac{1}{0} = \infty$ и слично, прилично распрострањено у нашој школи, у корену погрешно, да води небројним заблудама и штетним навикама, те се зато најодлучније мора избацити из школске праксе.

3. Сматрамо потребним да дамо неколико примедаба по питању улоге и места десетних разломака и процентног рачуна у курсу аритметике. Искуство показује да у том питању често ни сам наставник није начисто са најједноставнијим чињеницама, а та околност, са своје стране, утиче на цео стил предавања, на оне опште тачке гледишта у чијој се светлости наставно градиво излаже ученицима.

Као извор нејасности служе и сами термини „десетни разломци" и „проценти", који стварају утисак као да је ту реч о разломљеним бројевима неке друге природе. Разуме се, уствари се мисли на оне исте разломке које су ученици већ детаљно савладали, и поставља се питање само о новом апарату за претстављање свих тих истих старих бројева, о новој форми писања разломака. Било би много боље и знатно би потпомогло правилно разумевање питања ако би одговарајућа поглавља носила назив: „Десетно обележавање разломака« и „Процентно обележавање разломака", јер се 0,2 од $\frac{1}{5}$, 0,3 од $\frac{1}{3}$, 45% од $\frac{9}{20}$ разликују само начином обележавања, те уколико пре и уколико боље ученици схвате ту околност, утолико ће се лакше сналазити са тешкоћама које су у вези са десетним и процентним рачуном. По нашем чврстом уверењу знатан део тих тешкоћа изазива се тежњом писаца уџбеника, методичара и наставника да вештачки створе некакву „предметну" разлику између израза 0,6 и 60%, разлику за коју наука не зна (ова просто идентификује смисао тих израза), и која се измишља специјално за школске потребе; ми смо одлучно за то да се из школског курса избаци сваки сличан паразитски псеудонаучни пртљаг, полазећи при том од чврстог убеђења да специјално измишљена претрпавања, неспособна да добију јасан логички садржај, ни у једном случају не могу олакшати схватање одговарајућих појмова, већ напротив — у свим случајевима само отежавају јасно разумевање истих. У овоме контексту неопходно је поменути још једно аналогно претрпавање: уместо да се однос двају бројева једноставно дефинише као њихов количник, деца се терају да набубају „дефиницију" према којој „однос двају бројева је резултат упоређивања" итд., — фразу којој ниједан доктор математике неће умети да открије тачан смисао.

Нарочито тешко стоји ствар са процентима. Уместо да се од самог почетка са исцрпном јасношћу укаже на то да проценти претстављају само посебну форму обележавања разломака и зато не постоје и не могу постојати никакви „задаци са процентима", а да се, насупрот томе, ма који задатак са разломљеним датим величинама може поставити и решити помоћу процентног начина писања и обрнуто, — уместо свега тога крајње јасног прилажења ствари код нас се ствара некакав култ процената иови се хипостазирају дотле да им се придаје посебан предметни садржај, за њих се ствара посебна теорија и посебна категорија задатака, једном речју, чини се све што је могућно да би у учениковој претстави процент израстао у нов, туђ и тежак појам који захтева специјално прилажење и специјалне методе испитивања. А после тога се, као по правилу, констатује да „ученици слабо усвајају проценте".

Сматрамо потребним да о процентном обележавању разломака учинимо још једну примедбу. Код ученика се може појавити питање зашто је затребала још и та нова форма обележавања разломљених бројева, кад већ постоје две форме — обична и десетна. Стари курсеви аритметике одговарали су на то питање тиме што су показивали да је та форма писања усвојена у трговачкој рачуници; да и не говоримо о томе да такав одговор ни у старо време, разуме се, ништа није објашњавао, јасно је да је у совјетској пракси процентни рачун

добио такву широку примену пред којом је тај одговор потпуно застарео. А међутим, наш се наставник често и сам мучи да на то питање одговори довољно јасно. Зато сматрамо корисним да томе питању посветимо неколико речи.

Ако хоћемо да брзо, на први поглед упоредимо по величини два разломка, на пример $\frac{8}{23}$ и $\frac{12}{35}$, смета нам то што су ти разломци написани у различитим деловима (имају разне имениоце). Зато је целисходно да се за елементарне практичне потребе по могућности користимо (бар приближним) изражавањем разломљених бројева у једним истим деловима, тј. у облику разломка са једним истим имениоцем. А који је број најподесније изабрати за такав универзални именилац? Потребе десетног система рачунања и метарског система мера јасно показују да за такав број треба изабрати или 10, или 100, или 1000 итд. Даљи избор врши се већ на основу чисто практичног расуђивања. Ако се универзални именилац изабере сувише мали, може се догодити да, користећи се целим бројиоцима, добијемо превише заокругљен резултат, тако да ће се за већину практичних циљева показати недовољна тачност. Насупрот томе, ако универзални именилац изаберемо превише велики, добићемо добру приближну тачност, али ће уједно и бројиоци испасти сувише велики бројеви и стога неподесни за практично рачунање. Како показује пракса, управо избор броја 100 за универзални именилац најбоље задовољава све захтеве елементарне рачунице: приликом употребе целих бројилаца добијамо у том случају ма за које величине такве приближне вредности које у већини пракичних рачуна дају сасвим довољну тачност; с друге стране, бројиоци су притом, као по правилу, сразмерно мали бројеви, са којима није тешко оперисати.

Међутим, изабрати број 100 као унивезални именилац управо значи прећи на процентно обележавање разломљених бројева. Разуме се, искоришћавање целих бројалица ипак не даје увек захтевани степен тачности; понекад смо принуђени да у бројиоцу додајемо један или више децимала (86,3%), што стварно значи прелаз од процента на промила итд.

3. Негативни бројеви. Рационални бројеви

Увођење негативних бројева је са реалне стране условљено потребом за мерењем величина чије се вредности простиру у два међусобно супротна смера. Са величинама те врсте срећемо се у својој свакодневној пракси, зато, са методичке стране, реална условљеност негативних бројева не претставља тешкоћу. Знатно теже стоји ствар са заснивањем рачунских радњи са негативним бројевима. Узрок свих, методичарима добро познатих тешкоћа у вези са тим разделом, има свој корен у томе што је овде створена логичка ситуација нова и необична за детињу свест; реч је о дефиницијама рачунских радњи уобичајена назива (сабирање, множење) са новим, тек уведеним објектима; околност да се ова или она рачунска радња, макар носила стари назив, са формалног гледишта може за нове објекте (негативне бројеве) дефинисати потпуно произвољно — то је такав нови момент, који се на датој етапи само са великом муком усађује у детињу свест. Ученик не може да се ослободи од упорне потребе за доказом правила знакова множења, док му, међутим, наставник не само не може дати такав доказ већ, насупрот томе, треба да га са научног гледишта убеди у то да такав доказ не може постојати, да такав доказ не треба ни тражити ни захтевати. Наша методика налази у општем случају правилан излаз из тог положаја, тежећи да на бази низа примера у вези са овим или оним конкретним тумачењем негативних бројева ученике убеди у целисходност у алгебри усвојених правила за рачунске радње. Притом, међутим, постоји једна значајна опасност због које је неопходна одлучна предострожност: наводећи примере сличне врсте, уџбеник, методичар, наставник морају их неизоставно пропратити јасним објашњењем да је ту реч не о доказу овог или овог правила, већ само о илустрацији његове корисности, са неизоставним указивањем на то зашто се то правило уопште не може доказати. На сличан начин и у даљем излагању — показујући ученицима да код установљених дефиниција аритметичких радњи са негативним бројевима остају на снази сви они закони који су важили за позитивне бројеве — наставник обавезно треба да напомене да ни та околност никако не може послужити као доказ установљених дефиниција, већ претставља само илустрацију њихове *логичке* целисходности, слично ономе као што смо раније имали илустрацију њихове *практичне* целисходности. Без свих ових објашњења ученици ће у тим илустрацијама не само неизоставно гледати довољно логичко заснивање правила аритметичких радњи него и стећи склоност да и у даљим разделима курса бесплодно траже доказе тврђења која су уствари дефиниције нових појмова и зато се, разумљиво, не могу доказати (обим круга једнак је граници обима уписаних многоуглова и сл.).

Учење о негативним бројевима у излагању многих аутора садржи један важан момент који га ставља у отворену противречност са опште усвојеном научном концепцијом тога појма; тај момент има известан одраз и у сталном уџбенику као и у програму курса алгебре. Док се, са научног гледишта, увођење негативних бројева изводи тако што се већ познатим бројевима, који се зову позитивни (нула заузима посебно место), прикључују нови, звани негативни — дотле скоро сви системи школског излагања тога питања са већом или мањом јасношћу и отвореношћу гравитирају ка сасвим другачијој слици тога процеса, која нема ничег заједничког са његовим научним третирањем. У својој завршеној форми та слика изгледа овако: већ познатим („апсолутним", безначним) бројевима прикључују се нови, „релативни" бројеви, који се деле на позитивне и негативне; са гледишта те концепције позитиван број, посматран у алгебри, у нечему се разликује од апсолутног, безначног броја посматраног у аритметици. Та се тенденција нарочито јасно испољава приликом расматрања апсолутне величине „релативних" бројева; сматра се да се $|5|$ нечим разликује од $+5$, да је $|5|$ апсолутан, безначан број, док је $+5$ „релативан", позитиван број. Та тенденција је веома раширена, али, док је једни аутори потпуно одређено, отворено исказују и доследно настоје да је спроведу, дотле се код других њено постојање и дејство само провлаче између редова и постају очигледни једино из индиректних напомена; само у веома ретким случајевима наилазимо на јасно и недвосмислено изражено тврђење које одговара научном третирању тога питања.

Као и у свим другим аналогним случајевима, ми сматрамо да и овде натрпавање објеката и појмова непознатих науци, који су измишљени специјално за потребе школске наставе а ту наставу нужно доводе у противречност са научним третирањем, не само што предмет не чини приступачнијим, већ, напротив, без икаквог методичког ефекта само пренатрпава његову логичку структуру и неопходно доводи до збрке и логичке неуспелости. Зашто апсолутну величину не дефинисати онако како то чини наука? Зашто уводити „нијансе" које никоме нису потребне и стварају некакве ефемерне, како теорији, тако и пракси непотребне разлике између величина $5, +5, |5|, |-5|$, које се са научног гледишта ни по чему не разликују једна од друге? Па ученику се се говори да $|5|$ значи $+5$, да се знак $+$ пред позитивним бројем може изоставити; па како то да се под тим условом жели створити утисак као да, осим позитивне петице, постоји и некаква апсолутна петица, која се обележава тим истим символом 5 и код свих рачунских радњи даје исти резултат као и позитивна петица, а ипак је у нечему, за извесну нијансу различита од ове? И зар се озбиљно мисли да све то претрпавање, у коме се неће снаћи ни учени математичар, може детету олакшати схватање негативних бројева?

Треба признати да је за жилавост тих антинаучних традиција у знатној мери крив термин „релативни бројеви", који се у науци уопште не употребљава, али се досад стално среће у нашим уџбеницима и програмима. Све што је релативно самим тим захтева нешто апсолутно као свој нужни корелат: ако постоје релативни бројеви, онда, природно, свако тражи апсолутне. Међутим, ако желимо да за скуп свих позитивних и негативних целих и разломљених бројева, заједно с нулом, имамо одговарајући термин, онда је тај термин наука већ одавно створила: *рационални бројеви.* Можемо само препоручити да се њиме користи у школи; лако је објаснити деци његов постанак: ratio — однос; рационални бројеви — бројеви који се могу претставити у облику односа целих бројева (приговоре који се често чују — да ученик неизоставно пита: а каквих још има и нерационалних бројева? — не треба узимати озбиљно већ и стога што ће, ако ученик одиста тако пита, то бити врло добро).

Треба, најзад, приметити да увођење „релативних" бројева, уз задржавање пређашњих као „апсолутних", поред тога што је противречно принципима математичке науке и доводи до отворених нецелисходности, изопачује и дијалектичку слику развитка појма броја; уместо да се за тезу („позитиван број") створи антитеза („негативан број") и да се затим обе споје у синтезу („рационалан број"), тј. да се пређе класични пут дијалектичког проширивања, код таквог прилажења истовремено се утврђује и теза и антитеза, једна и друга ненастале у претходној линији развитка, већ поникле по страни, без икаквог директног односа према претходној етапи.

4. Ирационални бројеви

Увођење ирационалних бројева наши методичари са пуно основа цене као један од најодговорнијих задатака

школског курса алгебре. Учење о ирационалним бројевима је у целокупном курсу математике скоро једини раздео који се у самој науци појавио тек у XIX столећу. То учење је она неопходна основа без које се читав низ раздела школске алгебре и геометрије уопште не може засновати. То учење означује такав заокрет у ученикової свести, који се по своме значају и својим последицама може упоредити једино са одговарајућим заокретом који је настао у самој математичкој науци после стварања опште теорије ирационалних бројева.

Задатак увођења ирационалних бројева састоји се у таквом проширавању области рационалних бројева које би омогућило да се сваком елементу линиског простирања, за који очигледно служи права линија, додели одређен број. Са геометриске и физичке стране, тај се задатак јавља као нужност да се свакој вредности величине која се непрекидно мења додели одређен број као мера те вредности. Овај реални циљ опште теорије реалних бројева мора чврсто ући у свест ученика; нипошто га не треба замењивати специјалним циљевима као, на пример, постизањем једнозначне изводљивости свих алгебарских операција (извлачење корена), јер свака од таквих операција доводи до стварања само одређених класа ирационалних бројева, не изазивајући потребу за изграђивањем опште теорије. Али, управо то карактерише стари систем увођења ирационалних бројева, који због његове логичке неоснованости савремени програми одбацују. Јер, ако је ученик навикао на мисао да је сваки ирационалан број својим постанком везан за некакав корен, ако је усто он чак упознат са ирационалним бројем као односом несамерљивих дужи, онда је, разуме се, немогућно таквом ученику доказати постојање границе обима многоуглова уписаних у дати круг; позивање на „аксиому" о постојању границе код сваке монотоне ограничене величине[1]) овде нимало не помаже већ и стога што је са гледишта таквог ученика и сама та „аксиома" просто нетачна: међу бројевима везаним са коренима, говорећи уопште, таква се граница неће наћи, а други ирационални бројеви у његовој свести не постоје (позивање на „однос дужи" овде би, разуме се, у логичком погледу претстављало просто одговор који тежи да проблем прикрије уместо да га реши). Ради избегавања неспоразума морамо нагласити да уопште не сматрамо обавезним да се у школ-

[1]) тј. да сваки монотон ограничен низ бројева има одређену граничну вредност (аксиома монотоније). — Прим. прев.

ском курсу доказује теорема о постојању границе монотоне ограничене величине; сасвим се може допустити усвајање тога става без доказа; али пре него што се учини тај корак, мора се, очигледно, бројна област проширити у толикој мери, да уведена аксиома не би у њој довела до противречности. Управо тога се клонио систем излагања који је раније владао; у најбољем случају он се, уводећи извесну класу ирационалних бројева у вези са извлачењем корена, ограничавао на више или мање расплинуто указивање на то да се и код других операција, у циљу обезбеђења изводљивости тих операција, уводе нови бројеви који се на аналоган начин могу дефинисати, а који се такође називају ирационалним; после тога се изграђивање области ирационалних бројева сматрало завршеним.

Математичка наука познаје много логички међусобно еквивалетних начина изграђивања теорије ирационалних бројева. Најраширеније су методе везане за имена Вајерштраса, Кантора и Дедекинда. У сагласности са огромном већином у вези с тим датих исказа, ми сматрамо да се ниједна од тих теорија не може предавати у средњој школи. Штавише, треба отворено признати да *теорију* ирационалних бројева у правом значењу те речи средња школа не може дати; моменти, као основне теореме о мноштву реалних бројева, а утолико пре дефиниције и особине операција са тим бројевима, значили би, у случају да се анализирају у школи, такво преоптерећивање детиње свести које ни до чег доброг не би могло довести, а у најбољем случају, и то уз довољно осећање мере, та питања — тачније, нека од њих — могла би послужити као тема за ваншколски рад (кружока) у X разреду. Али, наш програм ништа од тога и не захтева, ограничавајући се само на *дефиницију ирационалног броја*. Ми сматрамо да се таква дефиниција одиста може дати у форми која је са научног гледишта беспрекорна и у исто време потпуно приступачна свести ученика; изузетан значај те околности садржи се, као што смо већ горе видели, у томе што само проширивање појма броја до области *свих* реалних бројева може знатан део следећих раздела алгебре, геометрије и тригонометрије учинити осмишљеним и логички беспрекорним.

Приликом увођења реалних бројева задатак се знатно олакшава координираним дејством алгебарских и геометриских стимулуса. Стога важан предуслов за успешно солидно усвајање тога раздела јесте то да се потреба за проширивањем области рационалних бројева појави истовремено и у алгебри и у геометрији, што је требало неизоставно предвидети програмом.

Природан формални апарат за увођење ирационалних бројева су, разуме се, десетни разломци. Као први пример који то илуструје може, као и обично, послужити дефиниција $\sqrt{2}$ (броја чији је квадрат једнак 2). Као и обично, доказује се непостојање траженог броја у области рационалних бројева и изражава се жеља да се такав број уведе у циљу мерења отсечка који се у геометрији може природно конструисати. Дужина тог отсечка пренесе се на бројну праву удесно од тачке 0. Добија се тачка којој, при обичном положају рационалних бројева на бројној правој, не одговара ниједан број. Указује се на тешкоће с тим у вези, говори се, на пример, о томе да је приликом кретања тачке дуж праве пожељно да се сваки положај тачке на правој, свако растојање које је она прешла измери, окарактерише извесним бројем, тј. да се свакој тачки праве додели неки број; рационалних бројева, као што се види из наведеног примера, за то нема довољно; сада се, пак, може указати на колико се год хоће других тачака за које рационални бројеви неће бити довољни (најједноставнији пример — средина отсечка о коме је горе било речи). Даље, треба потсетити на то да смо већ не једанпут уводили нове бројеве када за ову или за ону практичну сврху стари нису били довољни; очигледно, исто тако треба да поступимо и у датом случају.

После тога се можемо вратитити на посматрани пример и обичним путем дефинисати два низа коначних десетних разломака са растућим бројем децимала, чији су квадрати мањи, односно већи од броја 2. Сада долази одлучни корак: уводимо нов број, меру отсечка који нас интересује; показујемо да је природно тај број претстављати бескрајним десетним разломком; доказујемо да тај разломак не може бити периодичан; најзад (то је далеко мање важно), ради краћег писања нови број означавамо са $\sqrt{2}$.

Желимо да подвучемо важност тачног придржавања овде поменуте терминологије. За разлику од већине других аутора, ми сматрамо целисходним избегавати изразе „ирационалан број је непериодичан бескрајан десетни разломак", већ томе претпостављамо да се говори да се ирационалан број може *изражавати* или *претстављати* таквим разломком; и овде, као и увек, потпуно идентификовање броја са симболом који га претставља сматрамо неприхватљивим, јер би то са филозофске стране значило отворено падање у номинализам, а са математичке довело до противречности, пошто се за претстављање једног истог броја можемо користити разним алгоритмима, што и само показује немогућност идентификовања броја са овим или оним алгоритмом који га претставља.

Пошто је увођење ирационалног броја спроведено на примеру, може се непосредно прећи на општу дефиницију, уз понављање целе конструкције за произвољну тачку за коју на бројној правој нема рационалног подеока. Затим треба извести обратно расуђивање, са циљем да се ученик убеди да сваком непериодичном бескрајном десетном разломку одговара један једини ирационалан број (једина тачка без рационалног подеока) који је претстављен тим разломком. После тога су сви ирационални бројеви дефинисани и темељ зграде положен. Научност ове дефиниције најбоље се доказује тиме што се, полазећи од ње, могу строго доказати све теореме о ирационалним бројевима, дефинисати операције са тим бројевима и установити особине тих операција. Њена приступачност не изазива никакву сумњу, нарочито ако се непрекидно користимо геометриском илустрацијом.

Као што смо већ горе рекли, даљи развитак учења о ирационалним бројевима углавном превазилази могућности средње школе. У најједноставнијим операцијама са ирационалним бројевима ученицима се могу саопштити само најпримитивнији подаци (тако се на примеру може показати сабирање два непериодична бескрајна десетна разломка; може се указати на геометриско значење сабирања ма која два позитивна броја као добијања резултујућег отсечка из саставних отсечака). Но, ученицима се мора са исцрпном јасношћу указати на то да се за ирационалне бројеве све алгебарске операције могу на разумљив начин дефинисати и и да наука доказује да те операције задржавају све оне главне особине којима се одликују операције са рационалним бројевима.

5. Комплексни бројеви

Последње проширивање појма броја са којим средња школа има посла јесте увођење комплексних бројева. Тај задатак у методичком погледу такође претставља знатну тешкоћу; међутим, та тешкоћа је сасвим другачије природе неголи у случају ирационалних бројева. Тамо су реалан повод за увођење нових бројева и, уједно с тим, реална вредност

тих бројева били сасвим јасни и могли су се потпуно довести до свести ученика; сва тешкоћа састојала се пак у логичкој сложености и гломазности саме теорије, а пре свега у дефинисању и проучавању операција с новим бројевима. Овде видимо управо супротну слику: дефинисање операција са комплексним бројевима једноставно је и природно, проучавање особина тих операција не садржи никакве идејне тешкоће и у формалном погледу није гломазно; насупрот томе, веза нових бројева са реалном стварношћу претставља такав момент који се у оквирима школског курса никако не може колико-толико потпуно расветлити; стога при излагању учења о комплексним бројевима морамо рачунати са опасношћу да ће се у свести ученика сав тај раздео запечатити као формално-логичка игра која нема никакве везе са реалним светом.

Треба отворено признати да је у границама средње школе борба са таквим стањем ствари могућна само до извесне мере; они ученици чије се математичко образовање завршава заједно са школом силом прилика ће само из туђих речи сазнати о непосредним практичним применама теорије комплексних бројева и те примене никад неће видети својим очима. Утолико пре је борба за то да се код ученика створи чврсто убеђење у научну заснованост и чак неизбежност увођења комплексних бројева потпуно могућна и може се водити у неколико разних праваца. Овде притиче у помоћ околност да се ученици већ одликују довољно зрелим математичким развитком. Ако су ученици шестог или седмог разреда способни да као потребно и актуелно осете само оно што налази *непосредно* практично отелотворење и примену, онда ће у десетом разреду они већ бити у стању да схвате и увиде потребе саме математичке науке, која претставља индиректно испољавање потреба и захтева те исте праксе; таква добит, као универзална изводљивост обрнуте операције или универзална решљивост неких најпростијих типова једначина, у свести ученика најстаријег разреда постаје већ као опипљиво достигнуће, и ту околност треба свестрано искористити приликом увођења комплексних бројева.

Као друго важно средство које ученику помаже да са комплексним бројевима повеже читав ланац конкретних претстава служи геометриска интерпретација тих бројева. Ми се не можемо сагласити са онима који заступају потпуну геометризацију теорије комплексних бројева у средњој школи, тј. такво излагање те теорије код кога се дефиниције нових бројева и операција с њима одмах дају у геометриској форми, јер, са сваког становишта, комплексан број треба да уђе у ученикову свест пре свега као објект аритметике, тј. као нов проширен појам броја, а не као геометриски појам, не као симбол познате геометриске трансформације који тек касније добија аритметичко тумачење. Геометриска илустрација треба да буде то што она јесте, тј. илустрација. Али, та се илустрација може на најшири начин искористити за то да се у свести ученика конкретизује идеја комплексног броја, за везу те идеје са низом простих очигледних претстава. Заједно са улогом коју комплексни бројеви играју у извлачењу корена и решавању једначина вишег степена, геометриска интерпретација тих бројева, која дозвољава да се они искористе као аналитички апарат за најједноставније операције са векторима, треба да у свести ученика учврсти претставу о комплексним бројевима као о таквом математичком објекту који није изоловано мишљење већ је, насупрот томе, најприсније повезан са читавим низом актуелних питања алгебре и геометрије.

Даље, мора се, водити рачуна о томе да сама могућност извођења свих алебарских операција са комплексним бројевима, уз задржавање свих основних особина којима се те операције одликују у области реалних бројева, треба да у свести правилно васпитаног ученика десетог разреда већ створи претставу о новим бројевима као о законитом објекту аритметике, тј. законитом проширивању појма броја. Онај оперативни принцип о коме смо говорили у уводу овог чланка, кад се довољно плански калеми ученицима у току целог курса, може већ овде дати извесног плода; само се по себи разуме и обрнуто, да проучавање комплексних бројева треба свестрано искористити за учвршћивање тог принципа у свести ученика.

Најзад, сматрали бисмо корисним да наставник, без икакве претензије да ту примедбу образложи, ипак саопшти ученицима да даљи развитак теорије комплексних бројева има веома важну примену у природним наукама и у техници, специјално у науци о кретању течности и гасова, у електротехници и конструисању авиона. Ако напомене те врсте ученикову свест и не обогаћују ничим конкретним, оне ипак у сваком случају могу побудити веће поштовање, а заједно с тим и пажњу и интересовање за проучавану област, што и сам опретстављa важан добитак.

Поред свог чисто математичког значаја, увођење комплексних бројева претставља у току школског курса скоро најупечатљивију илустрацију дијалектичког развитка математичких појмова — илустрацију коју треба свестрано искористити, утолико пре што се у томе узрасту ученицима већ могу саопштавати елементарна знања о дијалектичким законима. Комплексан број, који је у својој првобитној форми чисто имагинарног броја супротан реалноме (и који се код геометриске интерпретације преноси на управни правац) у свом даљем развитку прелази у такав општи појам (синтезу), у ком се, као разни видови, јављају и реалан број (теза) и чисто имагинаран (антитеза), при чему сваки од та два један другоме супротстављена појма у тој синтези потпуно задржава своја специфична обележја, ступајући у разноврсне односе са својом антитезом (сваки комплексан број је пример одређене спецификације таквог односа). Све то не смета да скуп таквих односа (комбинација реалног и чисто имагинарног) образује једну складну целину — свет комплексних бојева, који је себи нашао очигледну илустрацију у целовитом и завршеном облику комплексне равни. Тешко да се може наћи други пример који би са таквом јасношћу, очигледношћу, логичком једноставношћу и уједно са таквом исцрпном потпуношћу могао илустровати дијалектичке законе развитка математичких појмова.

Усмеравање пажње ученика на описану дијалектичку слику пожељно је утолико више што његов ефект може бити не само принципијелно филозофски него и конкретно математички; тако, на пример, расматрања те врсте могу код ученика учврстити претставу о реалном броју као једном од видова, као специјалном случају комплексног броја, насупрот веома раширеној неправилној претстави у чијој светлости комплексан број самим тим не може бити реалан. Само се по себи разуме да је за постизање тога циља потребна беспрекорно јасна терминологија; ученици се морају добро навићи да за број $a+b\sqrt{-1}$, где су a и b реални, кажу да је:

1. к о м п л е к с а н — м а з а к о ј е a и b;
2. р е а л а н — з а $b=0$;
3. и м а г и н а р а н — з а $b \neq 0$;
4. ч и с т о и м а г и н а р а н — з а $a=0$, $b \neq 0$.

На одговарајући начин ученици морају умети да по положају тачке у комплексној равни брзо одређују које јој врсте број одговара, тј. треба да знају где у комплексној равни леже реални, имагинарни и чисто имагинарни бројеви.

Само се по себи разуме да горе наведено терминолошко рашчлањавање не претставља *класификацију*, јер у њему побројане класе бројева, говорећи уопште, не леже једна ван друга.

II. ПОЈАМ ГРАНИЦЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

1. Историски осврт

Као ни већина математичких појмова, ни савременој науци својствена концепција границе није се створила одједанпут, већ је претрпела дугу еволуцију од своје зачетне форме до оног облика у каквом је налазимо у савременој математици. На први поглед у томе еволуционом процесу разликујемо четири основне етапе.

I. Прва етапа, најдужа, захвата XVII и XVIII столеће и везана је за епоху првобитне, бурне и некритичке анализе бескрајно малих. То је период наглог прикупљања чињеничног материјала, конкретних резултата; као увек у таквим епохама, ту се пажња ученика само у незнатној мери усретсређује на анализу и на тачно дефинисање основних појмова; тешко да се сада може указати на такву формулацију концепције границе која би у свим случајевима одговарала схватању те епохе; може се само покушати да се назначе неке опште црте претставе о граници, својствене науци тога периода.

У свакој епохи концепција границе је у целости условљена тиме како се схвата бескрајно мала величина. Познато је да у посматраном периоду развитка математичке анализе у схватању природе бескрајно малих величина није било ни потпуне јасности ни потпуне једногласности. Ма да процесуално, динамичко настајање бескрајно малих није подлежало сумњи, сама идеја о промењивој величини била је још толико нова, још је тако несигурно усвајана од научне мисли, да се термин „бескрајно мала" у знатној мери схватао још и као указивање на то какве су размере те величине, а не као карактеристика начина њеног мењања; у оптицају су били описни изрази као „сенка величине", „флуид величине" итд. Ако се покуша да се та претстава изрази тачним терминима, онда се мора признати да се бескрајно мала величина схватала као величина која је по апсолутној вредности мања ма од ког позитивног броја а у исто време и различита од нуле; пошто се промењљиви карактер те величине притом изражавао само описно и по схватању те епохе није се могао адекватно изразити тачним логичким терминима, то је, са логичког гледишта, појам бескрајно мале величине остајао статички, а у суштини имали смо посла са „актуелним" (тј. сталним) бескрајно малима. Премда је логичка неоснованост те концепције несумњиво побуђивала неспокојство код најистакнутијих умова те епохе, такво схватање задржало се веома дуго; штавише, и у наше време оно понекад још налази себи одраза у неким примењеним наукама (схватање диференцијала у механици) и у неким уџбеницима (види, на пример, курс математичке анализе проф. Вигодског; истина захтева да забележимо да је аутор потпуно свестан архаизма концепције коју излаже и свесно се њоме користи као педагошком методом). Узрок тако дуготрајног пребивања појма бескрајно мале величине (а то значи и појма границе) у логички недограђеном стању треба видети унеколико у већ поменутом стилу епохе, која је у целости била заузета хитним изграђивањем математичке анализе и зато није имала времена за темељно испитивање фундамента те зграде. Међутим, постоји и други, важнији узрок: укључивање у оквир математичке науке идеје промењљиве величине као објекта тачног испитивања изискивало је, како је то доцније Енгелс веома јасно показао, елементе дијалектичког мишљења, што описаној епохи као целини није било у моћи. Отуда је настала таква ситуација, кад се динамички карактер бескрајно малих величина и граничних прелаза макар и несумњиво сазнавао, али је био принуђен да остаје ван оквира тачних математичких формулација и допуштао се само као описна допуна тих формулација, допуна која не претендује на тачност.

Овај први стадиум у еволуцији појма границе данас треба сматрати коначно савладаним, и повратак к њему у сваком случају треба посматрати као испољавање реакционарних тенденција.

II. Друга етапа у развитку појма границе, која отприлике припада првој половини XIX столећа, обележава најзначајнији заокрет који је тај појам претрпео у току целе своје историје. У томе периоду је пажња научника обузетих стваралачким радом већ била довољно прикована за питања заснивања математичке анализе, услед чега се појавила могућност да се преодоли онај основни логички дефект концепције границе о коме смо горе говорили. Метода тога преодољивања у суштини се састојала у томе што је идеја промењљиве величине била чврсто уклопљена у оквир тачних математичких појмова и формулација; то је и дало могућност да се у дефиницију појма границе укључи идеја промењљивости, тј. да се томе појму врати његова првобитна динамичност, да се при дефинисању истог потпуно узме у обзир његово процесуално настајање и самим тим избегну оне логичке недоречености које су биле карактеристичне за претходну епоху. У томе периоду се већ јасно говори: бесконачно малом назива се величина која у извесном стадиуму посматраног процеса *јесте* и у свим даљим стадиумима *остаје* — (по апсолутној вредности) колико год хоћемо мала (мања ма од ког позитивног броја). Нема сумње да је та динамичка, процесуална суштина појма бескрајно мале величине (и, разуме се, одговарајуће концепције границе) била многима јасна и у претходној епохи, али је *отворено укључивање* те суштине *у формулизовану дефиницију* појма границе изискивало веома значајну еволуцију математичког мишљења и укључивање у исто битно новог дијалектичког елемента, те безусловно претставља једну од највећих тековина поменуте епохе, везану за имена Кошија, Абела и других научника.

Управо та дефиниција бескрајно малих са свом јасношћу говори да термин „бескрајно мала" у примени на дату величину указује не на њене размере (бескрајно мала величина може понекад бити веома велика), већ на *карактер њеног мењања*. У том смислу термин „бескрајно мала", створен у ранијој епохи, претставља очигледан анахронизам; требало би га заменити термином „неограничено опадајућа" или другим аналогним; нажалост, до тога није дошло, и сваки педагог зна колико тешкоћа и погрешака ствара та неуспела употреба речи.

За питања у вези са наставом у средњој школи необично је важно напоменути да, без обзира на сву даљу еволуцију појма границе о којој је напред било речи, савремена наука ниуколико не одбацује концепцију створену у поменутој епохи. Савремена математика *прецизира и упоштава* ту концепцију, али је не мења ни у једној њеној тачки, насупрот схватању XVII—XVIII столећа, које, из горе изложених узрока, савременој науци изгледа лишено основа.

III. Трећа етапа припада другој половини XIX столећа. Она је најприсније везана како за општу тенденцију формализације математичке науке тако и за уже стремљење — аритметизовати аналазу, тј. свести њено заснивање на природан број. У томе периоду су први пут биле изграђене исцрпне теорије ирационалних бројева (Дедекинд, Кантор) и на тако створеној чвршћој бази ново сграђене основе анализе бескрајно малих (Вајерштрас и др.).

Познато је да се без потпуне теорије ирационалних бројева учење о границама не може заснивати како треба, дефинисање класичних констаната π, e и др. нема тачан смисао; основне теореме (на пример теорема монотоније) без опште дефиниције ирационалног броја су или нетачне или без садржаја: међутим, те теореме су неопходне већ у оквирима курса средње школе. Треба напоменути да усвајање теорема те врсте у својству постулата који не подлеже доказу нимало не спасава ситуацију, јер се основна тешкоћа састоји не толико у немогућности да се дадну докази тих теорема колико у томе што је без претходне опште дефиниције ирационалног броја сам њихов садржај или нетачан или лишен тачног смисла; јер се за онога ко није упознат с општим појмом ирационалног броја став о монотонији (свеједно је да ли се уводи као аксиома или као теорема) може протумачити само у једном смислу: или тако да граница увек постоји у области оних бројева који су дотичном лицу већ познати — то очигледно, није тачно — или се, пак, нема у виду никаква одређена област, и тада став губи сваки одређен садржај.

На тај начин, иако се са идејне стране појам границе већ у довољној мери формирао у првој половини XIX столећа, ипак су у концепцији коју је та епоха створила остајале знатне празнине, попуњене тек у другој половини тог столећа.

Уједно с тим, све већи захтеви за формулизацијом математике приморали су да се поново редигује сама формулација дефиниције границе а да се не измени њена суштина. У ранијој дефиницији бескрајно мале величине још је било отворених или скривених позивања на реални процес у коме дата величина учествује и на различите стадиуме тог процеса. У новој редакцији дошао је до израза захтев за потпуном формулизацијом те стране дефиниције. Стварно, од те епохе се бескрајно мала величина (а исто тако и свака величина која тежи граници) увек схвата као функција једне или неколико независно променљивих, и указивање на реални процес замењује се формалним описом понашања тих променљивих. Израз „$y \to b$" сам за себе нема никаквог смисла, а само изрази као „$y \to b$ кад $x \to a$" добијају одређен садржај. Тај се садржај формулише овако: „$y-b$ је произвољно мало ако је $x-a$ довољно мало", или, још тачније (последња формулација се у данашње време скоро неизоставно налази у солидним курсевима анализе): „ма како мало било $\varepsilon > 0$, постоји такво $\delta > 0$ да је, кад је год $x-a < \delta$ испуњена и неједнакост $y-b < \varepsilon$". Такав је степен формулизације предњег указивања на реалан процес и његове различите стадиуме. У овој последњој дефиницији нема наизглед више ничега од првобитне процесуалности идеје границе; жива динамика граничног прелаза у том вербалном изражавању као да је замењена непокретном, чисто статичком *кореспонденцијом* између неких области вредности независно променљиве и одговарајућих области вредности функције. Тај спољашњи статички карактер појма границе који је савремена математика изградила често даје повод да га окривљују за то што, исисавши из идеје границе сву њену динамичност, он самим тим показује тенденцију да математичку концепцију границе удаљи од оне живе стварности као чији одраз и апстракција она треба да служи. Та су пребацивања *у суштини* нетачна, јер савремена дефиниција границе, која ни у једној тачки не противречи пређашњој, већ је само прецизира, самим тим не може имати други садржај. Међутим — то је за нас важно — у *педагошком* погледу, гледиште изражено у тим пребацивањима заслужује особиту пажњу. Јер, да се у тој дефиницији појма границе, која је (дефиниција — прим. прев.) у процесу логичке анализе доведена до последњег рашчлањавања и узела статички облик, не би изгубила из вида првобитна, реална динамика граничног прелаза — за то је потребан веома висок ниво научне културе; свако ко није довољном брзином овладао типичним корацима савремене, сложене математичке мисли стоји пред веома великом опасношћу: заиста изгубити везу појма границе са оним живим реалним извором из кога је тај појам произишао и као чији је одраз у апстрактној математичкој науци он позван да служи.

IV. Последња, четврта етапа у развитку појма границе односи се већ на наше столеће и настала је у вези са одавно назираном потребом за знатним проширивањем идеје садржане у првобитној концепцији границе. Требало је да се већ одавна, упоредо са најједноставнијим случајем реалне променљиве, математика позабави проучавањем граничних прелаза у областима сасвим другачије структуре: граница комплексног броја, граница вишедимензионог вектора, граница функције, граница случајне величине (у теорији вероватноће); у компликованијим случајевима показало се целисходним расматрати по неколико различитих концепција границе; тако се, у случају границе функције, морала разликовати обична конвергенција, униформна конвергенција, конвергенција „у средњем" итд., при чему су се, природно, разни гранични прелази одликовали различитим специфичним особинама. Та околност је, заједно са тенденцијом ка уопштавању, која је својствена математици наше епохе, довела до стварања општих теорија граничног прелаза; ту није реч о граници променљиве величине у ужем смислу те речи, тј. не о граници променљивог реалног броја; оно што тежи граници, као и сама та граница, може имати ма какав предметни садржај — општа теорија граница се потпуно апстрахује од тога садржаја и једини објект проучавања је структура самог граничног прелаза. Таква је у знатној мери концепција границе у савременој *топологији* (општа теорија непрекидних трансформација) и у савременој *општој анализи.*

Ми се нећемо детаљније задржавати на том важном новом моменту историјата појма границе, јер, без обзира на целокупан његов научни значај, он се, ван сваке сумње, не само не може увести у средњошколску наставу него не може чак ни непосредно утицати на програм и стил те наставе. Забележимо једино (то је важно за наш циљ) да ова четврта етапа, слична трећој, нимало не мења и не одбацује концепцију границе изграђену у другој етапи. Ако је крајем XIX столећа та концепција била подвргнута прецизирању и допуњавању, у нашем веку она је знатно уопштена и подигнута на виши ступањ апстракције; међутим, ни једно ни друго није означавало порицање те концепције или бар једног од њених саставних момената.

2. Концепција границе у школи

Приликом бирања форме појма границе која је најефективнија за школску наставу ми морамо, као и увек, рачунати с двама основним захтевима: 1) та форма ни у ком погледу не сме бити противречна традицијама савремене науке; 2) она мора бити довољно конкретна, како се појам који се уводи у свест ученика не би одвајао од оних појава реалног света као чији је формални израз он позван да служи.

Претходни историски осврт јасно нам показује да се, примењен на појам границе, тај двоструки задатак (у другим случајевима нимало лак) може лако решити. Пре свега, првобитну форму концепције границе чију смо карактеристику дали у опису прве етапе треба признати потпуно неприхватљивом: она је у опреци и с првим и с другим основним

условом; с једне стране, ту форму је савремена наука одлучно преодолела и одбацила као логички несавршену; с друге стране, динамичност граничног прелаза у њој је у најмању руку потиснута у задњи план и самим тим је веза са стварним појавама замагљена и логички нејасна. Ако ученик изиђе из школе са преставом бескрајно мале величине као нечег ништавно малог, недостојног пажње, или, још горе, као неког ретког броја који је мањи од кога год хоћемо позитивног броја а у исто време није нула, онда ће се задатак више школе веома компликовати: пре него што почне да таквог ученика даље развија, она ће се морати позабавити тиме да из његове свести изветре претставе и навике које су у опреци са савременим научним концепцијама.

Тешко да може наићи на противљење схватање да проширивања појма границе на која смо указали у опису четврте етапе не могу бити предмет школске наставе: сувише уопштено схватање граничног прелаза, прво, неће наћи у школском курсу никакве примене, а друго, претставља такав степен апстракције који је недоступан ученичковој свести.

Многи се педагози изјашњавају за то да се, схватајући под границом искључиво границу променљивог реалног броја, школске формулације у тим оквирима доведу потпуно до свог савременонаучног текста. То значи да појам границе треба дати у форми кореспонденције области, ε и δ. Ми морамо одлучно изјавити да је та форма нецелисходна. Чак и са гледишта чисто формалног усвајања таква дефиниција, како је показало дугогодишње искуство, изазива веома велике, често и несавладљиве тешкоће, и то не само код средњошколаца него и код студената у првим семестрима. Али, ако се допусти чак и то да ће у појединим случајевима искусни педагог успети да уз знатан утрошак времена и напора натера своје ученике да савладају формалне тешкоће садржане у тој дефиницији, ипак, у сваком случају, повезати ту формалну схему са реалним граничним прелазом у појавама стварности — то је ствар која нимало не одговара моћи ученикове свести; на тај ће начин појам границе у тој његовој формулацији у најбољем случају бити апстрактно усвојен по цену радикалног раскида са реалним претставама везаним за тај појам. С друге стране, у суштини нема никакве потребе за таквом дефиницијом. Ако под речима „променљива величина x у датом процесу има као своју границу сталну величину a" (ознака: $\lim x = a$ или $x \to a$), ученик навикне да схвата чињеницу да разлика $x - a$ почев од неког момента (неког стадиума) процеса постаје и у свим даљим стадиумима остаје колико год хоћемо мала по апсолутној вредности, онда ће таква дефиниција (која одговара другој етапи нашег историског осврта) задовољити све потребне захтеве. С једне стране, она ни једном речју није у опреци са оним што је савремена наука дала, те ће виша школа, кад у своју средину прими ученика са таквом претставом о граници, умети да без великих тешкоћа ту претставу прецизира и прошири у учениковој свести; од онога што је ученику дала средња школа она неће морати ништа да „проветри", ништа да одбаци. С друге стране, управо та дефиниција границе ближа је но све остале (како оне које историски претходе тако и оне које историски следе за њом) реалним појавама које служе као природни објекти примене те дефиниције.

Настојећи на томе да је наведена формула дефиниције границе у сваком погледу најефективнија за школску наставу, ми ипак нипошто не желимо да тиме тврдимо да се слово ε, које се употребљава као ознака у многе сврхе, мора потпуно избацити из те наставе. Тако, при доказивању теорема о збиру или производу бескрајно малих увођење произвољно мале константе ε изгледа нам потпуно умесно. Баш ће у току расуђивања која доводе до тих теорема бити подесно ученицима разјаснити да ознака $|x-a|<\varepsilon$, где је ε произвољна позитивна константа, тачно симболизује израз „разлика $x-a$ је колико год хоћемо мала по апсолутној вредности", који је садржан у дефиницији границе. Ми допуштамо чак и то да се, при довољном општем развитку разреда, та реченица у појединим случајевима може већ приликом самог дефинисања заменити развијенијим изразом: „разлика $x-a$ по апсолутној вредности (постаје и остаје у току датог процеса) мања ма од ког сталног позитивног броја", премда за свесно усвајање таква форма несумњиво изазива више тешкоћа. Но ми сматрамо да у наведеној дефиницији садржано позивање на реалан процес и његове различите стадиуме (моменте) ни у ком случају не треба замењивати (како то савремено научно излагање чини у току даље формулизације) указивањем на ону област вредности независно променљиве која одређује ток процеса; у најмању руку то не треба чинити код општих расуђивања у првом стадиуму проучавања (у даљем излагању, код расматрања конкретних примера, проучавање области вредности те независно променљиве може постати веома корисно, као што ћемо видети доцније).

Наше гледиште објаснићемо примером. Нека је реч о томе да, кад $n \to \infty$, апотема[1]) a_n n-тоугла уписаног у дати круг има за границу полупречник круга r. Садржај те реченице најрадије бисмо изразили речима: „Разлика $r-a_n$ постаје и остаје колико се год хоће мала кад број n неограничено расте". Мање пожељном код првог проучавања (јер се теже може усвојити), ма да се ипак може допустити, сматрали бисмо формулацију: „Ма какав био сталан позитиван број ε, разлика $r-a_n$ постаје и остаје мања од ε кад број n неограничено расте". Најзад, сасвим неприхватљива за школу изгледа нам следећа формулација, која најбоље одговара традицијама савременог научног излагања: „Ма како био мали сталан позитиван број ε, наћи ће се такав број N (који зависи од ε) да је $r-a_n$ мање од ε за све $n>N$". Да би се избегли неспоразуми, морамо се притом оградити да се све то што смо овде рекли односи само на општу дефиницију појма границе, на вербалну формулацију оне претставе коју ученик мора навићи да доводи у везу са термином „граница". У даљем излагању, у конкретном раду са појединим примерима, не само да је пожељно већ је и неопходно да се та указивања на различите стадиуме процеса садржане у општој дефиницији дешифрују и доведу до рачунских операција. Тако, враћајући се на наш пример, ми сматрамо да је сасвим умесно међу задацима из теорије граница поставити ученицима питање какав треба да је број n да би разлика $r-a_n$ испала мања од 0,01, мања од 0,001 итд. Задаци сличне врсте не само јачају везу теорије са применом већ припремају основу за то да се убудуће лакше усвоји формална општа концепција границе.

Како у самој математичкој анализи тако и у њеним различитим применама основну улогу играју два конкретна облика граничног прелаза: 1) граница низа $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n, \ldots$ кад $n \to \infty$ и 2) граница функције $y = F[(x)]$ под условом да x тежи сталном броју a. У средњој школи обично се настоји да се и у општим дефиницијама и у избору задатака и примера обухвате оба облика. Та тежња доводи до познатих тешкоћа, јер се два облика о којима је реч разликују један од другог толико суштаственим моментима, да је при првом упознавању са појмом границе ученику тешко да код тих облика запази сродне заједничке црте и да их призна деловима јединствене целине. Разлике се крију, разуме се, у

$y = f(x)$

[1]) Висина једног од n троуглова из којих је n-тоугао састављен. — Прим. прев.

понашању независно променљиве, која карактерише ток процеса; у првом случају та променљива (n) пролази само целе позитивне вредности, у другом (x) — непрекидан низ вредности; у првом случају n неограничено расте, у другом x тежи коначној граници. У вези с тим важно је напоменути да препоручена дефиниција појма границе у подједнакој мери обухвата оба случаја управо зато што у тој дефиницији карактеристика постепених стадиума процеса остаје неформулизована, док се поменути облици граничног прелаза разликују један од другог баш карактером те своје формулизације. Свака више формулизована дефиниција могућна у границама средње школе (а, уосталом, такође и у границама првих курсева више школе) неизбежно се сукобљава са новом тешкоћом: она захтева за два поменута облика граничног прелаза две различите дефиниције, што, разуме се, још више отежава претставу о јединственој заједничкој логичкој и предметној основи тих двају случајева[1]).

3. Методичке напомене

На тај начин, ми сматрамо да је основни задатак предавања теорије граница у средњој школи стварање чврсте и јасне претставе о граничном прелазу, који идејно одговара оној концепцији границе која је усвојена у савременој математичкој анализи и њеним применама; притом нема потребе, а у многим случајевима је чак и штетно, појам границе доводити до оног формално-логичког рашлањавања које је својствено савременом научном излагању.

Таква оријентација мора, разуме се, показати отсудан утицај и на целу методику предавања расматране главе — на избор и распоред материјала, стил излагања итд. Овде, наравно, не можемо дати потпуну разраду те главе. Наш задатак

[1]) Треба ипак указати на то да постоји потпуна могућност да да се у средњошколском курсу ограничи на ужу концепцију границе, сасвим искључујући из расматрања други од горе наведених облика; ствар је у томе што се у свим применама на какве појам граничног прелаза наилази у току средњошколског курса говори увек о граници низа; тако стоји ствар у теорији бескрајних десетних разломака, у теорији ирационалних бројева, у проучавању прогресија и у свим геометриским применама. Што се тиче појма границе функције, на то се може наићи једино у таквим разделима испитивања једначина и теорије функција, какви се само у изузетним случајевима проучавају у нашој средњој школи.

састоји се у томе да сакупимо неколико посебних напомена методичког карактера које проистичу из горе описане оријентације. Притом ћемо, природно, пажњу читаоца усретсредити на оне моменте у чије традиционално излагање сматрамо да треба унети извесне измене и исправке.

Јасна и конкретна претстава о сложеној појави у којој учествује много променљивих величина са веома различитим карактером мењања најлакше се код ученика може створити ако се већ на првом кораку сви основни појмови теорије граница изведу на основи свестраног проучавања једне такве појаве. Појава, изабрана у том циљу, треба да је, с једне стране, довољно очигледна и у свим својим елементима блиска свести свих ученика, а с друге стране, да довољно тачно тече, како би се на њеној основи могли створити јасни појмови и извести тачни рачуни. Можда томе циљу најбоље одговарају геометриски процеси. Ако се, на пример, за полазну илустрацију изабере процес бескрајног удвостручавања броја страна многоугла уписаног у дати круг и ако се та појава проучава у свим својим појединостима, онда ће ученици одмах имати пред очима велики број променљивих величина најразноликијег понашања које учествују у једном истом процесу: дужина стране, величина унутрашњег угла, величина спољашњег угла, обим, апотема, збир унутрашњих углова, збир спољашњих углова итд. Ту ће бити и бескрајно мале и бескрајно велике величине, и константе, и величине са позитивним границама. Не треба нимало жалити време за тако детаљно проучавање једног примера, јер је васпитни ефект таквог проучавања много већи од оног што би се могло добити као резултат расматрања десетине неповезаних вештачких примера лишених очигледности. Ми нарочито подвлачимо значај те околности да у нашем примеру проучаване променљиве величине учествују у једном истом процесу те су, на тај начин, њихова мењања међусобно координирана, функционално повезана међу собом; чак ако наставник ту околност и не подвуче изричито, даље усретсређивање мисли ученика на такву сложену појаву несумњиво ће показати знатан утицај на њихово развијање, привикавајући мисао да апстрактне појмове теорије граница асоцира са сложеним и многоврсним процесима реалне стварности.

У вези с тим ми смо уопште хтели да предложимо да се број примера који немају везе са чињеничним материјалом курса и самим тим имају вештачки карактер ограничи на неопходан минимум. И теорија прогресија, и десетни разломци, и учење о ирационалним бројевима, а о геометрији и да не говоримо, дају толико материјала за примере и задатке о граничним прелазима, да тешко да има потребе за великим бројем специјално изабраних вежбања која немају реално опипљив садржај. Ипак, и тај мали број таквих вежбања која ће се признати неопходним треба бирати не одумице, већ целисходно; увек треба говорити о граничном понашању таквог аналитичког израза који је у овом или оном смислу типичан и поучан, те самим тим може убудуће бити користан; као пример може се показати проучавање понашања односа двају полинома када независно промењлива неограничено расте, понашање које зависи од степена бројиоца и имениоца; биће добро ако ученици умедну одмах, без израчунавања, одредити границе израза као

$$\frac{x}{1+x} \quad \text{или} \quad \frac{3x^2-5}{4x^2-2x+7}$$

када $x \to \infty$.

У дефиницијама појмова, у формулацијама и доказима теорема треба неизоставно подвлачити динамичку суштину граничног прелаза, никада не изостављајући неопходно наглашавање процеса и његових различитих стадиума и неизоставно захтевајући од ученика јасно схватање те стране ствари. Ученику мора бити јасно да 0,000 000 000 1 није бескрајно мала величина, а да, је, насупрот томе, растојање од површине Земље до метеорита коме је суђено да падне на Земљу бескрајно мала величина, ма да би се то растојање сада израчунало огромним бројем километара. Ученик мора добро знати да је величина бескрајно мала само у датој појави, у оквирима датог процеса, и да у другој појави та иста величина може имати други карактер мењања. Ученик мора знати да промењлива величина може тежити својој граници или с лева, преко мањих вредности (растући), или с десна, преко већих вредности (опадајући), или и са једне и са друге стране (осцилирајући), и да у последњем случају она може и пре завршетка процеса пролазити кроз своју граничну вредност. За свакога ко не влада довољно брзо свим набројаним и њима сличним претставама, теорија граница ће у најбољем случају остати формално усвојена, али идејно бесадржајна теорија.

Напослетку, потребно је рећи неколико речи о ознакама и терминологији. Неопходно је да упоредо са традиционалном ознаком $\lim x = a$ ученици у пуној мери владају и еквивалентним

обележавањем те исте чињенице $x \to a$, које се из године у годину све више и све чешће среће у анализи и њеним применама. Треба писати не $\lim\limits_{x=a} y = b$, него $\lim\limits_{x\to a} y = b$ и сходно томе читати не „за x једнако a" него „за x које тежи a". Ознаку $n \to \infty$ пожељно је читати „n неограничено расте"; у сваком случају, неопходно је да ученици добро схвате чињеницу да n ту не тежи никаквој граници. Најзад наставник треба да обрати пажњу на то да се симбол „lim" чита „граница", а не „limes"; ученици уопште не треба да чују из наставникових уста реч „limes"; треба им указати на то да симбол „lim" долази од латинске речи „limes", што значи граница (често се наилази на тврђења да тај симбол долази од француске речи limite, засновано на очигледном неразумевању, јер би се тај симбол са таквим истим основом могао узети од одговарајућег енглеског, италијанског, шпанског итд. термина).

III. ПОЈАМ ФУНКЦИОНАЛНЕ ЗАВИСНОСТИ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

I

Скоро сви савремени методичари се у овој или оној мери придржавају схватања према коме појам функционалне зависности треба да постане не само један од најважнијих појмова школског курса математике него и она главна осовина која води од елементарне аритметике до виших раздела алгебре, геометрије и тригонометрије и око које се групише целокупна настава математике. Ово схватање може, наравно, повести и злоупотреби: приликом његове необазриве реализације постоји знатна опасност потцењивања других, не мање важних појмова, претстава и метода: појам броја, основних алгебарских операција, геометриског облика итд. Међутим, наведена теза, кад се правилно схвати и кад се има довољно педагошког такта и осећања мере, несумњиво указује састављачу програма, аутору уџбеника, методичару и педагогу правилан и плодотворан пут.

Па зашто тежимо да појму функционалне зависности дамо такву изузетну улогу, која га отворено издваја од свих других основних математичких појмова са којима средња школа упознаје своје ученике?

Зато, прво, што ниједан од осталих појмова не одржава појаве реалне стварности с таквом непосредношћу и тако конкретно као појам функционалне зависности, у коме су отелотворени и покретљивост, и динамичност реалног света, и узајамна условљеност реалних величина.

Зато, друго, што тај појам, као ниједан други, отелотворује у себи дијалектичке црте савременог математичког мишљења, управо он нас навикава да величине замишљамо у њиховој живој изменљивости, а не у вештачки препарираној непокретности, у њиховој међусобној вези и условљености, а не у вештачком јазу између једног и другог.

Зато, најзад, што је појам функционалне зависности основни појам целокупне више математике и што се због тога код оних који завршавају средњу школу квалитет припреме за усвајање курса математике у вишој школи у знатном степену мери тиме колико су се ови чврсто, потпуно и културно сродили са тим веома важним појмом.

II

У нашим програмима учење о функцијама је издвојено у посебну тему курса алгебре; редакција те теме у програму је таква да се има у виду несумњиво само један, сразмерно узак задатак: научити ученике графичком претстављању функција. Тако и треба схватити задатке те теме. Али то, разуме се, никако не треба да значи да се усвајање појма функционалне зависности и стицање навика функционалног резоновања може ограничити на проучавање те специјалне теме. Насупрот томе, претстава о функционалној зависности може ући у свест ученика као чврст, присан и активан елемент, као оруђе математичког мишљења једино под условом да се током целог курса математике, од елементарне аритметике до виших раздела алгебре и тригонометрије, ученици систематски навикавају на ту претставу. То не значи, разуме се, да општу дефиницију функције треба давати у млађим разредима или бар да се сам термин „функција" треба употребљавати и набацивати у сваком подесном случају. Ствар уопште није у томе. Нека ученици сазнају за реч „функција" тек у старијим разредима, нека се они тек на зрелијем ступњу свог развитка први пут замисле о томе какву улогу у познавању реалног света игра учење о међусобној зависности величина; никакви јасно формулисани општи принципи и, нарочито, никакве апстрактне дефиниције и никакви специјални термини нису потребни на млађем и средњем ступњу школског образовања (отприлике до VIII—IX разреда). Нимало не натурајући, нехотице, не оптерећујући дечју свест за њу претешким апстракцијама, а у исто време упорно, плански и свакодневно треба проводити формирање навика функционалног мишљења. На то наставник треба да мисли на сваком часу — ма у којој теми аритметике, алгебре и геометрије наћи ће се материјала који ће пажњу ученика усмерити на ону страну проучаваног питања коју ће они после упознати као функционалну везу између величина. Утицај мењања компонената аритметичких операција на резултат операција; први обрасци са општим бројевима; први количински односи у геометрији и прво упознавање са једначинама — све то и много другог даје неисцрпан материјал за једноставна питања која нимало не отежавају пажњу ученика и која ове систематски привикавају да размишљају о томе како се мења једна величина кад се мења друга; од колико других величина зависи величина одређена датим обрасцем и које су то величине; колико елемената троугла треба знати да би се једнозначно одредили сви његови елементи и који су су то елементи итд. Да се одреди површина квадрата довољно је дати једну дуж (страну или дијагоналу итд); то исто важи и за површину круга; међутим, да бисмо одредили површину правоугаоника или троугла треба задати две дужи За одређивање рационалног броја довољно је дати коначну групу цифара, а за одређивање ирационалног броја треба дати бескрајно мноштво цифара. Ако се у коначном десетном разломку измени прва цифра после запете, величина разломка знатно ће се изменити; ако, пак, било како изменимо шесту цифру, величина разломка ће се врло мало изменити. Ако се једна од троуглових страна равномерно обрће око темена, онда ће се њена тачка пресека са другом страном најпре померати сразмерно споро, а затим огромном брзином. Када се правилном многоуглу повећава број страна, његов унутрашњи угао расте (најпре брзо, затим све спорије) а спољашњи угао опада. Корен једначине $ax=b$, где је $a \neq 0$, $b \neq 0$, опада кад a расте, и расте када a опада (и једно и друго неограничено). Израз $n!$ веома брзо расте када расте n; n^3 расте брже него n^2 а 2^n расте још брже.

Све ове елементарне напомене и питања, као и бескрајно мноштво других сличних поткрепљених одговарајућим једноставним рачуном, практиковани систематски, у свакој згодној прилици, имају за циљ да доведу до тога да би, у тренутку када општа идеја функционалне зависности треба да уђе у свест ученика, та свест била довољно припремљена за објективно и активно а не само формално усвајање новог појма и претстава и навика које су с овим у вези.

Придајући велики значај горе описаној пропедевтици учења о функционалној зависности, ми смо истовремено дужни да се, наравно, позабавимо тиме да се у оним разделима школског курса који дају повод за изучавање специјалних веома важних функција функционални момент проблема нагласи у потребној мери.

Нипошто се не може допустити да ученици уче квадратне једначине без детаљног овладавања понашањем тринома другог степена као једне од најважнијих и најједноставнијих функција. Ту, као и у другим случајевима, код нас се,

често формално схватајући захтеве програма, ученици уче да параболу конструишу тачку по тачку и на то се ограничавају. График, по своме смислу очигледно оруђе које омогућује да се из геометриског облика читају ове или оне најважније карактеристике проучаване функције, из средства се претвара у нешто што је само себи циљ, чиме се оригинална методолошка ситуација потпуно квари. Међутим, ако облик параболе ученик не искористи за решавање питања о максимуму или минимуму тринома другог степена, за брзо извођење закључка о карактеру рашћења и опадања те функције (о томе где она расте, где опада, где расте брже а где спорије и сл.), о броју и распореду њених корена и сл., онда ће конструкција графика постати скоро бесциљан посао, из кога је исисан сав идејни садржај.

Све што смо рекли односи се у још већој мери на проучавање логаритамске и експоненцијалне функције. Опште је познато да ученици који беспрекорно владају техником логаритамског рачунања и лако решавају логаритамске и експоненцијалне једначине у исто време сви редом имају толико слабу претставу о суштини логаритма, да задатак: да се без помоћи таблица нађе $10^{\lg 7}$ изазива код њих принципијелне тешкоће; утолико им пре, наравно, остаје неприступачно питање функционалне природе логаритма, чак и ако су се они бавили цртањем графика те функције. И овде морамо рећи: ако ученик није навикао да са графиком логаритамске функције доводи у везу таква питања као што су: рашћење логаритма кад расте број, брзина тог рашћења на различитим деловима бројне праве, негативни логаритми бројева мањих од јединице, непостојање логаритма нуле и негативних бројева, пресек свих логаритамских кривих у једној тачки као илустрација тога да је $\lg_a 1=0$ ма за које $a>0$ итд., онда ће упознавање са графиком логаритамске функције остати за њега у знатној мери бескорисно. У том више но и у једном другом дефекту наше школске наставе види се један од њених основних општих недостатака — хипостазирање формалног момента сваке проучаване теме на штету њеног идејног садржаја.

У ништа мањој мери се све што смо рекли односи и на проучавање (непосредних и инверзних) тригонометриских функција; и овде логаритамско рачунање, решавање троугла и тригонометриских једначина као по правилу пригушују и потискују у задњи план управо оно што би и са идејног и са практичног гледишта требало да постане главна осовина целокупне тригонометрије: функционалну природу синуса, косинуса итд. И овде, као по правилу, у свести ученика скоро и нема чврсте претставе о периодицитету као главном обележју трију гониометриских функција; знаци тих функција у разним квадрантима, њихово рашћење и опадање не повезују се са графичким претставама; скоро никоме није познато да се косинусоида добија једноставним премештањем синусоиде, а они који су о томе слушали не умеју да покажу аналитичке релације које одговарају тој геометријској ситуацији.

Све поменуте чињенице, као и многе друге њима аналогне, веома се тешко одражавају на квалитету знања ученика и непотребно компликују и отежавају њихов даљи рад у вишој школи. Код таквог прилажења ствари, укључивање елемената теорије функционалне зависности у курс средње школе не може постићи ниједан од својих циљева.

Па шта је потребно за борбу против тих недостатака? Одговор на то питање јасно произлази из свега што смо досад рекли. Ту неће помоћи никакво усретсређивање пажње и напора на прелажење специјалне теме „Функције и њихови графици". Треба, прво, све разделе курса математике који претходе тој теми (а такође да додамо — и часове физике и хемије) искористити за систематску, планску пропедевтику учења о функционалној зависности. И друго, треба да, приликом проучавања оних раздела курса који су у вези са специјалним најважнијим функцијама, идејна, функционална страна питања увек буде она особина око које се групише све остало, а не да се она крије у задњем дворишту.

Ми сматрамо да све за тај циљ потребне напомене могу и морају наћи себи место и у програмима (што не захтева обавезну измену њиховог садржаја) и у тумачењима програма.

III

Све што смо данас рекли односило се на улогу, место и специфичну тежину појма функционалне зависности у школској математици. Сада прелазимо на најважитје питање — *питање садржаја* тог појма.

Историјат појма функционалне зависности у математичкој науци добро је познат и ми немамо потребе да га овде излажемо са свим појединостима. Разни аутори, од Њутна до данашњих дана, на најразличитије начине су формулисали садржај тог појма. Најупадљивија и за наш циљ најважнија тенденција историског развитка појма функције несумњиво је она која се постепено и у борби усавршила и тек у другој половини XIX столећа коначно ослободила тај појам од стега

формалног апарата — од математичке формуле. При првој појави појма функционалне зависносности математички образац, аналитички израз показао се као превасходно средство за испитивање тога појма. Поверење према томе оруђу било је толико велико, формула се са таквом неизбежношћу појављивала свугде где би се повела реч о функцији, да је ускоро, како се често догађа у математици, нестало потребе а затим и способности да се повлачи разлика између математичког појма и оног формалног апарата који је био позван за анализу и за рад на томе појму. Функцију су почели идентификовати са аналитичким изразом, и то индетификовање било је не само чињеница научне праксе него су га многи истакнути математичари бранили као отворено формулисану тезу. Међутим, никада није замрла ни супротна струја, која је потицала из више или мање свесног принципа неопходности строге разлике између садржајно дефинисаног математичког појма и формалног апарата који служи за његово спољашње изражавање. Као и увек, живот се показао на страни реалне а не формалне концепције, и у коначном билансу победило је реално схватање које је забрањивало да се функција меша са оним аналитичким изразом којим се она претставља. Формални апарат, уздигнут на степен који му не одговара, од подесног и послушног оруђа постепено се претворио у тиранина и угушивача идеје функционалне зависности; на извесној етапи развитка математичке науке појам функције се, еволуирајући, није више могао уклопити у тесне оквире аналитичког израза. Ако је већ одавно било познато да један исти аналитички израз може служити за претстављање неколико различитих функционалних зависности, сада су се појавили случајеви када се, обрнуто, за претстављање једне исте функционалне зависности морало користити неколиким различитим аналитичким изразима; понекад, пак, требало се користити и таквим функцијама за чије је претстављање било тешко наћи аналитички израз и — што је најглавније — испоставило се да је тај аналитички израз у многим случајевима толико сложен, да се није могао искористити за проучавање дате функције; испитивање се морало вршити другим, *неаналитичким* методама.

Све ове као и многе друге чињенице приморале су напослетку да се призна да вештачко окивање појма функције аналитичким апаратом ограничава и кочи природан и науци неопходан развитак тог појма, да једино потпуно ослобођење појма функције од оквира формуле, аналитичког израза, који је стешњавају, може дати потребан простор за онакав развитак тог појма какав захтевају потребе математике и примењених наука. То сазнање је већ средином прошлог столећа нашло свој израз у дефиницији појма функције, која се обично доводи у везу са Дирихлеовим именом и коју савремена наука усваја без приговора. У тој дефиницији нема ни помена о аналитичком изразу, ми имамо посла са функцијом увек када је свакој вредности једне величине кореспондирана извесна одређена вредност друге величине, притом начин на који је та кореспонденција дата има само другостепени значај и у сваком случају не показује никакав утицај на саму функционалну зависност. То може бити или аналитички образац, или геометриска трансформација, или, просто, исцрпна вербална формулација итд. Тако, за познату „Дирихлеову функцију", која је за све рационалне вредности аргумента једнака нули а за све ирационалне јединици, може се наћи аналитички израз у терминима обичне математичке симболике; међутим, самим тим што је такав израз нађен, Дирихлеова функција неће постати у већој мери функција него што је то дотле била; и без тог аналитичког израза она је са гледишта савремених схватања пуноправна функција; штавише, тај сразмерно сложен аналитички израз који се за њу може наћи тешко ће моће да нам имало помогне приликом проучавања особина те функције, и остаће неплодна научна творевина, способна једино да радује око љубитеља „аналитичких израза" по сваку цену.

Усвојивши дефиницију функције као кореcподенције, математичка наука је из тога извукла све потребне закључке. Међутим, у културно историском погледу се провођење те реформе, доследно, до краја, на делу показало не више тако лако; традиције целог дугогодишњег претходног периода, када су се место појмом функције задовољавали идејом формуле, аналититичког апарата, са великом муком су пристајале да се повуку из живота; у многим случајевима оне живе и данас, и ми, изгледа, чак и у најбољим савременим уџбеницима за вишу школу наилазимо нескривене трагове тих традиција.

Појмљиво је да средња школа, која је даље од науке него виша, пати од тог недостатка у знатно већој мери. Стварно, у средњој школи се целокупна настава о функцијама, оснивајући се формално на савременој дефиницији основних појмова, изводи на таквом нивоу и у таквом стилу, да је виша школа принуђена да свој рад отпочиње исправљањем великог броја неисправних и антинаучних претстава и навика код старијих студената.

Хипноза обрасца је универзално зло које се толико укоренило у свести ученика, да се у вишој школи први покушаји

стварања правилне претставе о функционалној зависности одмах сукобљавају са жестоким отпором.

Дефиниција функције

$$y = \begin{cases} \sin x & \text{за} \quad x \leqslant 0, \\ \lg x & \text{за} \quad x > 0, \end{cases}$$

неизоставно изазива приговоре да то „није једна него две функције", а стаје много труда да се студент убеди да је то једна функција, а не две, на основу оне исте дефиниције функције коју он сам сигурно зна напамет, коју је он изнео из те исте средње школе. Када први пут упознаш студенте са Дирихлеовом функцијом (за коју је, узгред речено, већ одавно настало време да се показује ученицима у средњој школи), онда неизоставно сусрећеш питање: „Па каква је то функција? Како се она пише?". Предлажеш да је пишу овако: $y=\varphi(x)$; тада студент збуњено говори: „Зар је то формула?" Он је искрено уверен да га обмањују и треба одржати цело једно предавање са историским екскурзијама да би се студентима омогућило да схвате једноставну ствар коју је требало да су одавно научили у средњој школи: да се формула $y=\varphi(x)$ за ознаку Дирихлеове функције ни по чему ни принципијелно ни практично не разликују од формуле $y=\sin x$ за ознаку синуса; да не постоји функција која се принципијелно не може приказати формулама, и да, најзад, за идеју функционалне зависности питање о претстављању формулом има један чисто спољашњи и другостепени значај.

Но, да ли средња школа може и да ли је она дужна да ученицима даје такве претставе о функционалној зависности које би у потпуности одговарале савременим научним концепцијама? Да бисмо то питање решили треба да пођемо од основног принципа који сматрамо строгим правилом за решавање свих питања сличне врсте: у случајевима када је за свест ученика средње школе савремена научна концепција било кога појма сувише сложена, школа може и треба да је замени другом концепцијом која је упрошћена, али обавезно иде у том истом правцу, *тако да би затим виша школа могла ту концепцију потпуно развити, не одбацујући међутим из ње ништа због антинаучности.* Исто тако стоји ствар са појмом ирационалног броја и са појмом границе. Али, школа никада ни у једном случају не може и не треба да концепцију усвојену у савременој науци замењује таквом која би са њом стајала у противречности, тако да би виша школа била приморана да троши времена и снаге на одвикавање студената од оних претстава са којима су они дошли из средње школе.

Што се тиче појма функционалне зависности, ми настојимо на томе да средња школа и може и мора не само по форми него и у суштини да калеми ученицима строго научне претставе и навике. Школа то *може* учинити зато што је савремена научна концепција појма функције једноставна, није оптерећена никаквим формализмом и што се рецидиви формалистичког прилажења које ми свугде виђамо објашњавају не тиме што је такво прилажење знатно лакше, него искључиво недовољно високим научним нивоом и методичком учмалошћу састављача уџбеника и извесног дела методичара и наставника. Школа *мора* то учинити зато што је, прво, борба против формализма у основним научним појмовима неодложан задатак совјетске школе и зато, друго, што се једино тим путем виша школа може избавити од жалосне неизбежности да студенте убеђује у то да претставе које су они донели из средње школе противрече савременим научним погледима, па се због тога те претставе морају у најкраћем времену одбацити као преживеле.

IV

Сада треба да пређемо на последње, у практичном погледу најважније питање: шта и како треба изменити у традиционалној настави теорије функционалне зависности да би се предао прошлости онај дефект о коме се говорило у претходном разреду. разреду.

Она пропедевтика функционалног резоновања чије смо основне контуре и стил горе покушали да оцртамо потпуно омогућује увод за тему „Функције и њихови графици". омогућује потпуно научне дефиниције функције не само једне него и више променљивих, како смо то већ напоменули. Међутим, традиционални стил примера који се расматрају непосредно после те дефиниције може разорити позитиван ефект дефиниције и ученицима накалемити мисао да је формална дефиниција нешто за себе, а уствари функција је просто формула, и обрнуто — формула је функција. Да би се то избегло, ми сматрамо неопходним да се већ међу првим примерима функционалне зависности упоредо са традиционалним алгебарским или геометриским односима расматрају и такве зависности као Дирихлеова функција или функције оваквог типа:

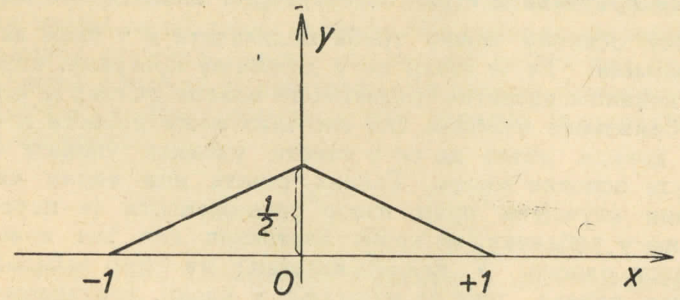
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{за} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{за} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{за} \quad x = 1, \\ x^2 & \text{за} \quad x \neq 1; \end{cases}$$

веома је корисно расматрање таквих функција као $[x]$, ($[x]$ је највећи цео број који не превазилази x), $x-[x]$ и сл. У свим случајевима је, разуме се, потребна графичка илустрација (у случају Дирихлеове функције и њој сличних треба објаснити узроке тешкоћа графичке илустрације).

Ево још примера задатака које бисмо сматрали веома корисним да се у разреду анализирају:

1. Написати аналитички у интервалу $-1 \leqslant x \leqslant 1$ функцију која је графички претстављена на следећој слици:



2. Тешка тачка пада на земљу са висине од 1 *m;* кад падне, она остаје да лежи на месту на које је пала; сматрајући да је момент почетка падања $t=0$ *sec.* и да је убрзање силе теже $g=9{,}8$ m/sec^2, наћи аналитички израз и график зависности између висине тачке изнад земље и времена за 0 *sec.* $\leqslant t \leqslant 1$ *sec.*

Сваки наставник ће и сам лако моћи да састави произвољан број аналогних примера.

Веома је пожељно испричати ученицима о смислу и улози аналитичког израза као условне ознаке за често употребљавану функционалну зависност, повлачећи паралелу између писања функције помоћу обрасца и писања броја помоћу цифара: слично томе како цифре не стварају број, већ су, насупрот томе, само његов спољашњи израз, тако и образац који изражава функцију не рађа ову, него једино служи као апарат за њено изражавање. Слично томе како за непромењиве бројеве историја зна читав низ начина нумерације, тако је и аналитички израз дате функције историска појава која има свој почетак и свој еволуциони пут. Ако смо се, на пример, данас сагласили да са $\psi(x)$ означавамо Дирихлеову функцију, ако се тај услов усвоји у светском размеру и уђе људима у навику, онда ће после извесног времена $\psi(x)$ постати исти такав „аналитички израз", иста таква формула као $\sqrt{x}$ или $\lg x$, и онај ко пише $\psi(x)$ неће више морати, као данас, речима објашњавати смисао те ознаке, као што се не мора сваки пут речима објашњавати шта је $\sqrt{x}$ или $\lg x$. Ми сматрамо да једно предавање по том питању треба у свести ученика да јако учврсти ону веома важну основу мисао: да је функција примарна стварност, док је аналитички израз само инструмент који смо ми створили у циљу проучавања функција, да функција постоји и може се проучавати и без одговарајућег аналитичког израза.

Ову основну мисао треба подвлачити и у свим даљим предавањима. Ту је ствар не у ломљењу програма, који захтева већином незнатне редакционе измене. Ствар је у томе да се брижљиво избегава све оно што може довести и фактички доводи дотле да се у свести ученика унаказе горе поменуте основне мисли. Таквих тачака има веома много; у већини случајева први извор унакажености је неуспело излагање у уџбенику, за којим наставник иде без довољно критичког односа. У даљем излагању ми ћемо забележити неколико тачака, чије је излагање у својој традиционалној форми нарочито незадовољавајуће у оном погледу који нас интересује.

Пре свега, то се тиче области у којој је функција дефинисана или (мање успео термин) „области постојања" функције. Опште је позната традиција уџбеника (убрајајући међу њих и уџбенике за вишу школу) да се та област постојања чита из обрасца; каже се, на пример, да „функција $+\sqrt{1-x^2}$ постоји само за $|x|\leqslant 1$". Такву терминологију треба признати научно нејасном и педагошки штетном, јер у њеној основи лежи мисао да се функција која је за $|x|\leqslant 1$ дефинисана обрасцем $+\sqrt{1-x^2}$ не може дефинисати изван граница тог интервала, да се постојање функције завршава тамо где аналитички израз који је претставља губи свој смисао. Одатле, наравно, није далеко до уобичајеног тврђења да услови типа

$$y = \begin{cases} +\sqrt{1-x^2} & \text{за} \quad |x|\leqslant 1, \\ x^2-1 & \text{за} \quad |x|>1 \end{cases}$$

одређују „не једну већ две функције", јер, ако „функција $+\sqrt{1-x^2}$" не постоји за $|x|>1$, очигледно је да наша дефиниција величине y изван граница интервала $-1\leqslant|x|\leqslant 1$ треба да претставља нову, „другу" функцију.

Уствари, ситуација је, наравно, следећа: формула (а не функција) $+\sqrt{1-x^2}$ по постојећим саглашењима може претстављати дату функцију једино за $|x|\leqslant 1$; стога, ако хоћемо да дату функцију претставимо формулом изван граница тог интервала, ми у том циљу треба да потражимо други аналитички израз; израз $+\sqrt{1-x^2}$, пак, за $|x|>1$ губи смисао (само се по себи разуме да је стално реч једино о реалним вредностима функције). То стање ствари толико је јасно и елементарно, да се у довођењу истог до свести ученика не може наићи ни на какве тешкоће. На потпуно аналоган начин ученицима се улива мисао да симбол $y=\lg x$ има смисла (и зато може служити за претстављање извесне функције) једино за $x>0$ и сл. Но, упоредо с тим корисно је одмах ту указати на то да

$$y = \begin{cases} \lg x & \text{за} \quad x>0, \\ x & \text{за} \quad x\leqslant 0 \end{cases}$$

претставља праву, пуноважну функцију, и дати графичку илустрацију те функције.

У вези са областима у којима је функција дефинисана хтели бисмо још напоменути да је пожељено ученицима накалемити општу идеју према којој је функција, као по правилу, одређена за оне вредности аргумента које за дати задатак претстављају реалну вредност. Тако, на пример, p_n — обим правилног n-тоугла уписаног у круг полупречника 1 — у суштини има смисла одређивати једино за целе $n\geqslant 3$; број пермутација од n елемената за све природне n; ако аргумент t означава температуру, онда у већини случајева нема смисла одређивати функцију за $t\leqslant -273^0$ C итд. Уопште, за избор области у којој је функција дефинисана отсудни момент мора бити реална вредност проучаване функционалне зависности, а нипошто њен формалан аналитички израз, установљен за овај или онај део те области.

Напослетку, треба да се зауставимо на оном појму у коме формалистички правац налази свој најјаснији израз и који зато у испитиваном погледу претставља највећу опасност, — то је појам „вишезначне" функције, са којим се ученици срећу прво приликом извлачења корена, а затим приликом проучавања инверзних тригонометриских функција. Појам вишезначне функције потпуно припада оној епохи када аналитички израз није био средство за истраживање, већ родоначелник функционалне зависности. Као што се види, ствар стоји тако да је у земљи коју је потпуно освојила нова, реална концепција тог појма остала једна непријатељска тврђава која је са свих страна опседнута, али досад још није положила оружје. Та тврђава је појам вишезначне функције, и борба против ње на фронту школске наставе утолико је тежа што се не само виша школа него и сама наука никако још не може растати од тог појма, који је у отвореној идејној и стилској противречности са целим духом савремене теорије функција.

Уствари, шта је то вишезначна функција? Кажу нам: y је вишезначна функција од x ако свакој вредности x одговара неколико вредности y. Али, шта значи „неколико"? Ако то означава одређен коначан број, онда таква дефиниција неће обухватити чак ни потребе средње школе са њеним бескрајнозначним аркус-синусом. Ако се, пак, речи „неколико" приписује шифровано значење, подразумевајући под тим у случају потребе и „бескрајно много", онда је, очигледно, *свака* величина y функција *сваке* друге величине x, јер, ма шта означавали x и y, за сваку вредност величине x величина y очигледно може узимати једино било коју од мноштва приступачних јој вредности. На тај се начин из појма фукционалне зависности исисава сваки смисао. Сваки пак покушај да се дефиниција детаљише, да се у њу унесу ова или она објашњења, води компликацијама које су, с једне стране, сасвим непотребне, а с друге, безусловно неприступачне учениковој моћи схватања.

Савремена математичка наука се на вишим ступњевима свог развитка користи читавим низом веома далекосежних уопштавања појма функције. Она се нипошто не одриче разматрања и таквог случаја када је вредност аргумента број а вредност функције мноштво бројева. Међутим, све то нема ничег заједничког са потребама не само средње школе него чак и основног курса анализе у вишим школама, бар у области реалне промењиве. Сасвим други ветар донео је у те елементарне области појам вишезначности. Пре двеста година наши преци су приликом проучавања инверзних функција

увели обичај да само једним обрасцем $y=\sqrt{x}$ претстављају оба решења једначине $y^2=x$ и само једним обрасцем $y=\operatorname{Arc}\sin x$ сав бескрајни скуп решења једначине $\sin y=x$. Али, то је била епоха када је „једна формула" означавала „једну функцију". Доцније, пак, када је цео научни свет усвојио нову реалну дефиницију појма функције и када је постало јасно да „функције" $\sqrt{x}$ или $\operatorname{Arc}\sin x$ не потпадају под ту дефиницију, ради спасавања ситуације био је измишљен термин „вишезначна функција"[1]).

Уствари, појам вишезначне функције је за елементарну теорију функција реалне промењиве сасвим излишан. Педагошки, он је штетан (како у средњој тако и у вишој школи), јер: 1) његов дух и стил нераскидиво су повезани са формалистичком концепцијом, коју је савремена наука преодолела и одбацила и 2) он уноси у дефиницију функције непотребне сложености, претећи, штавише, да је потпуно лиши садржаја. Као и у многим другим случајевима, ту је фактичко стање ствари толико просто, да није нимало тешко да се оно доведе до ученикове свести без икаквог помињања вишезначних функција; човек само треба да се одлучи да збаци бреме традиција које је столећима притискивало тај момент теорије елементарних функција. Пошто смо написали и испитали релацију $y^2=x$, ми стичемо убеђење да обе функције $y=+\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$ за све $x\geqslant 0$ задовољавају ту релацију, а ако је подесно те две функције написати *једном формулом*, можемо написати $y=\pm\sqrt{x}$ или $y=e\sqrt{x}$, где је e параметар који може узимати вредности $+1$ и -1. То је све. На сличан начин, испитујући релацију $\sin y=x$ долазимо до закључка да је свака од функција

$$y=(-1)^n \arcsin x+\pi n, \tag{*}$$

где је n ма који цео број, а $\arcsin x$ позната „главна вредност", задовољава ту релацију; другим речима, синус има не једну него бескрајно мноштво инверзних функција; за сваку вредност параметра n формула (*) даје једну од таквих инверзних функција. Најзад, можемо да не приговарамо ни символу $y=\arcsin x$ ради краћег писања израза (*); треба само јасно нагласити да символ arc sin овде не означава једну

[1]) Разуме се, у нашем излагању ситуација је унеколико систематизована, а уствари, развитак теорије функција комплексне промењиве такође је одиграо не малу улогу у описаном процесу; међутим, то нимало не дотиче ниједан наш педагошки закључак.

функцију већ бескрајно мноштво функција и да се структура тог мноштва са много већом потпуношћу открива обележавањем (*). То је све. При таквом начину излагања задржавају се једноставност и јасност, својствене савременој дефиницији појма функционалне зависности, функција и формула су различите једна од друге и нема места никаквим непотребним проширивањима која угрожавају сам смисао појма функције. Заједно с тим, тај начин излагања не садржи у себи ништа што би било сложеније неголи у нашој уџбеничкој литератури и педагошкој пракси укорењена традиција оперисања „вишезначним функцијама".

Штампано у 3000 примерака у штампарији „Научна књига", Београд, Народ. фронта 12
Штампање завршено новембра 1948 године