Госп. Дr N. Салтиков
Преводиоцу

Проф. И. В. МЕЩЕРСКИЙ

ЗБИРКА ЗАДАТАКА
ИЗ
ТЕОРИЈСКЕ МЕХАНИКЕ

С РУСКОГ ПРЕВЕО
ПРЕМА ПЕТОМ ИЗДАЊУ
DIPL. ING. МИЛАН ВРЕЧКО
АСИСТЕНТ УНИВЕРЗИТЕТА

БЕОГРАД 1933

Printed in Yugoslavia

Графички завод „Славија“, Београд, Бранкова улица 20.

Предговор преводиоца.

Међу збиркама задатака из Техничке Механике, збирка И. В. Мешчерског одликује се избором задатака, који су већином узети из праксе, и то тако да су математичке тешкоће, при решавању истих, сведене на минимум. С обзиром на те одлике с једне стране и на потребе наставе на Техничком Факултету Универзитета у Београду с друге стране, а по савету госп. проф J. Хлитчијев-а превео сам ову Збирку.

Распоред задатака остао је и у преводу исти као у оригиналу, додао сам два нова задатка а код неколико од њих промењени су бројни подаци и дати они који одговарају нашим приликама. Решења добре већине задатака контролисао сам, те су на основи тога исправљене грешке које су се налазиле у оригиналу.

Рукопис је прегледао и поправио госп. Prof. Dr. I. Arnovljević, на чему и овом приликом изјављујем своју благодарност.

Љубљана, за време Божића 1932.

М. В.

Предговор првом издању.

„Збирка задатака из Теоријске Механике“ садржи задатке из множине оних, који су дати судентима техничких оделења Петроградског Политехначког Института, на вежбањима из Теоријске Механике.

Идеје неких од тих задатака узете су из збирки задатака: Walton, Wittenbauer, Zech и др., које су раније издате, али многи задаци отштампани су овде први пут.

При избору задатака пазило се нарочито на то, да имају конкретну форму. Главни циљ вежбањима из теоријске Механике на Петроградском Политехничком Институту тежи ка томе, да студентима пружи могућност да стекну неопходно им потребно умење у примењивању теорема и метода, које су изложенене на предавањима, за решавање проблема из техничких наука.

Подела „Збирке“ на два дела, а сваког од ових на главе као и обим сваке главе, одговара предавањима из Теоријске Механике како се читају на другом, трећем и четвртом семестру техничких оделења Института.

Сви задаци попраћени су тачним или приближним одговорима, а некоји од њих и кратким упуствима, која олакшавају решавање.

Овом издању „Збирке“ претходило је неколико литографских издања првог и другог дела од 1907 до 1911 год., која су била намењена студентима Института, и 1911 год. једно штампано издање првог дела.

При састављању „Збирке“ суделовала су осим мене, следећа лица, која су у својству наставника, водила вежбања из Теоријске Механике са студентима Института: Л. В. Ассур, Б. А. Бахметев, И. И. Бентковский, А. А. Горев, К. М. Дубяга, В. Ф. Миткевич, Е. Л. Николаи, К. Э. Рерих, Д. Л. Тагеев, В. В. Таклинский; С. П. Тимошенко, А. И. Тудоровский, А. П. Фан-дер-флит, А. К. Федерман и В. Д. Шатров.

„Збирка је редигована и издана од мене уз ужу сарадњу И. И. Бентковског и К. Э. Рериха.

1914 г.

Проф. И. В. Мещерский.

Предговор петом издању.

Пето издање „Збирке“ претставља у основним потезима ранија издања. Измене које потичу од мене, састоје се у главном у томе, да је у овом издању избачено неколико ранијих задатака, затим да су уведени нови задаци, и у неким главама измењен је ред задатака. Ситним слогом штампана су кратка упуства која се односе на решавање задатака.

1927 г.

Проф. И. В. Мещерский.

САДРЖАЈ.

ПРВИ ДЕО.

ДРУГИ ДЕО.

ПРВИ ДЕО

СТАТИКА У РАВНИ.

I. Силе, које нападају једну тачку.

1. Реморкер вуче три шлепа различитих величина. Шлепови су повезани међусобно ужадима тако, да један следује за другим. У датом тренутку, равна је сила вуче парног витла 1800 *kg*. Отпор воде кретању пароброда раван је 600 *kg* — првог шлепа такође 600 *kg* другог шлепа 400 *kg* а трећег 200 *kg*. На расположењу нам стоји уже, које, са сигурношћу, може да прими затежућу силу од 200 *kg*. Са колико ужади треба спојити први шлеп са паробродом, први шлеп са другим и други са трећим?

Одг. Са 6 ужади, 3 ужади и 1 ужетом.

2. На дну окна налази се човек тежине 64 *kg*. Помоћу ужета, које је пребачено преко непокретног котура, диже терет од 48 *kg*. Коликом силом утиче човек на дно окна? Колики је највећи терет којег може, помоћу канапа, подићи?

Одг. 16 *kg*, 64 *kg*.

3. Терет $Q = 30$ *kg* одржава се у равнотежи помоћу контра терета P који је учвршћен за крај ужета ABC. Уже, дужине $10m$ тежине 5 *kg*, пребачено је преко непокретног котура B. Одредити тежину терета P, силе S_a, S_b и S_c на крајевима A и C ужета и силу у његовој средини B, за случајеве: 1) када се тачке A и C налазе на истој висини, 2) када тачка A заузима највиши положај и, 3) када тачка A заузима најнижи положај. Димензије котура и трење занемарити.

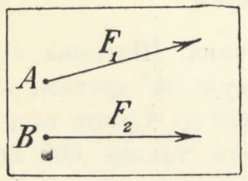
Одг. 1) $P = 30$ *kg*, $S_a = 30$ *kg*, $S_b = 32{,}5$ *kg*, $S_c = 30$ *kg*.
2) $P = 25$ *kg*, $S_a = 30$ *kg*, $S_b = 27{,}5$ *kg*, $S_c = 25$ *kg*.
3) $P = 35$ *kg*, $S_a = 30$ *kg*, $S_b = 32{,}5$ *kg*, $S_c = 35$ *kg*.

4. Воз се креће константном брзином по праволинијском хоризонталном путу. Тежина воза, без локомотиве, 180 тона. Колика је сила вуче локомотиве, кад је отпор трења раван 0,005 од притиска воза на коловоз?

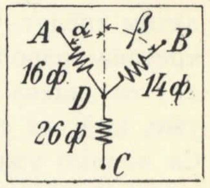
Одг. 900 *kg*.

5. Два коња, који се крећу дуж обала канала константном брзином, вуку, помоћу двају ужета, чамац. Силе у ужетима равне су 80 *kg* и 96 *kg*; угао који затварају раван је 60^0. Наћи отпор P воде, кретању чамца, и углове α и β које треба да затвара ужад с обалама канала, да би се чамац кретао паралелно обалама.

Одг. $P = 16\sqrt{91} = 152{,}6$ *kg*; $\alpha = 33^0$, $\beta = 27^0$.



6. Наћи, конструкцијом, величину и правац резултанте сила P_1 и P_2, кад се пресечна тачка њиних нападних лииија не налази на цртежу.



7. Карике A, B и C трију вага са опругама учвршћене су непокретно на хоризонталној дасци. За куке вага привезани су конци који су затегнути и везани у један чвор. Ваге показују: 16, 14 и 26 *kg*. Одредити углове α и β које затварају правци конаца са правом показаном на цртежу.

Одг. $\alpha = 27{,}5^0$; $\beta = 32{,}2^0$.

8. Храпавој косој равни дат је такав нагиб α према хоризонту, да се тешко тело, смештено на ту раван, креће низ њу константном брзином, која му је дата у почетку кретања. Одредити коефицијенат трења k.

Коефицијентом трења, називамо однос величине силе трења према величини нормалног притиска.

Одг. $k = tg\,\alpha$.

9. Вагон се спушта по паду од 0,008, постигавши неку одређену брзину, креће се равномерно. Одредити отпор R, који при тој брзини утиче на вагон, кад је његова тежина равна 10 тона.

Падом пута зовемо *tangens* угла нагиба пута према хоризонту; због мале величине пада, може се *sinus* заменити *tangens*-ом истог угла.

Одг. $R = 80$ *kg*.

10. Воз се пење константном брзином по праволинијском путу, пада 0,008. Тежина воза без локомотиве 180 тона. Колика је сила вуче P локомотиве, кад је отпор трења раван 0,005 од притиска воза на коловоз?

Одг. $P = 2340$ *kg*.

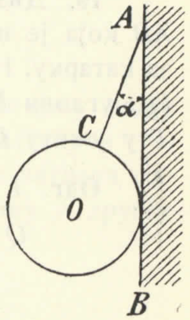
11. Наћи угао природног нагиба земље, кад је њен коефицијенат трења $k = 0{,}8$.

Под углом природног нагиба неког материјала, подразумевамо највећи угао нагиба материјала ка хоризонту, при којем делић материјала остаје на нагибу у равнотежи.

Одг. $38^0\ 40'$.

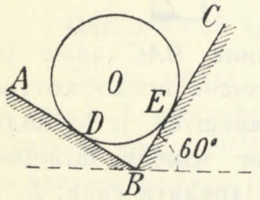
12. На косој равни одржава се, помоћу конца, кугла тежине 20 *kg*. Конац је привезан за вагу са опругом која се налази над косом равнином. Угао нагиба косе равни, према хоризонту, раван је 30^0. Одредити угао α који затвара конац са вертикалом и притисак N кугле на косу раван.

Одг. $\alpha = 60^0$. $N = 10\sqrt{3} = 17{,}3$ *kg*.



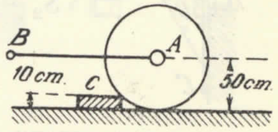
13. На вертикалном глатком зиду AB обешена је, за конац AC, кугла O. Конац затвара са зидом угао α, тежина кугле P. Одредити силу S у концу и притисак N кугле на зид.

Одг. $S = \dfrac{P}{cos\,\alpha}$, $N = P tg\,\alpha$.



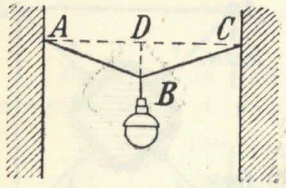
14. На двема узајамно управним косим равнима AB и BC лежи кугла O тежине $Q = 6$ *kg*. Одредити притиске кугле на сваку раван за случај, да је раван BC нагнута према хоризонту за угао $\alpha = 60^0$.

Одг. $N_d = 3\sqrt{2} = 5{,}2$ *kg*; $N_c = 3$ *kg*.



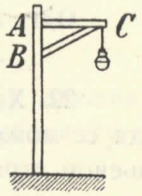
15. Одредити хоризонталну силу P, која је потребна да би ваљак прешао камен 10 *cm* висине у положају, какав је дат на слици. Ваљак је кружан, полупречника 50 *cm* и тежине 2 тоне.

Одг. $P = 1{,}5\,t$.



16. Лучна лампа обешена је у средини B ужета ABC. Уже је крајевима учвршћено за куке A и C, које се налазе на истој хоризонтали. Одредити силе T_1 и T_2 у деловима AB и BC ужета, кад је тежина лампе 15 *kg*, дужина целог ужета $ABC = 20\ m$ и његов угиб $DB = 0{,}1\ m$.

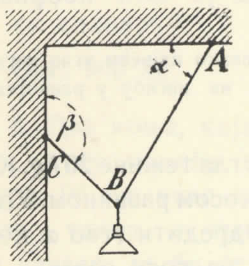
Одг. $T_1 = T_2 = 750$ *kg*.



17. Лампа тежине 30 *kg* обешена је за вертикални стуб помоћу хоризонталне греде $AC = 1{,}2\ m$ и косника $BC = 1{,}5\ m$. Одредити силе S_1 и S_2 у гредама AC и BC.

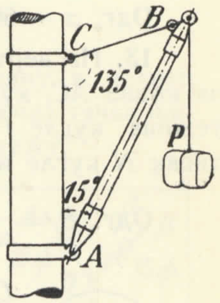
Под силом у греди подразумевамо силу која дејствује у правцу греде, притискујући или затежући ју. У циљу разликовања обележавамо притискујућу силу негативним бројем.

Одг. $S_1 = 40$ *kg*; $S_2 = -50$ *kg*.



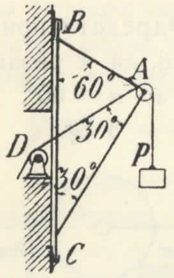
18. Електрична лампа тежине 2 *kg*, обешена је за плафон помоћу канапа *AB*, затим је канапом *BC* привучена зиду. Одредити силу T_a у канапу *AB* и T_c у канапу *BC*, кад су углови $\alpha = 60^0$ и $\beta = 135^0$.

Одг. $T_a = (\sqrt{3} - 1)\ kg. = 1{,}45\ kg.$
$T_a = \sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)\ kg. = 1{,}05\ kg.$



19. Дизалица на катарци састоји се из греде *AB* која је помоћу зглавка *A* и ужета *CB* учвршћена за катарку. На крају *B* греде обешен је терет $P = 200$ *kg;* углови $BAC = 15^0$, $ACB = 135^0$. Одредити силе: *T* у ужету *CB* и *Q* у греди *AB*.

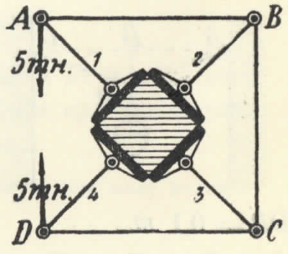
Одг. $T = 100\,(\sqrt{3} - 1\,\sqrt{2})\ kg = 104\ kg.$
$Q = 200\,(\sqrt{3} + 1\,\sqrt{2 - \sqrt{3}}) = 200\,\sqrt{2} =$
$= 282\ kg.$



20. Помоћу магазинске дизалице *BAC* диже се ужетом терет $P = 2\ t$. Уже је пребачено преко котура *A* и котура *D*; овај последњи, намештен је на зиду тако, да је угао $CAD = 30^0$. Углови између штапова дизалице: $ABC = 60^0$, $ACB = 30^0$. Одредити силе: S_1 и S_2 у штаповима *AB* и *AC*.

Одг. $S_1 = 0,\ S_2 = -2\sqrt{3}\ t = -3{,}46\ t.$

21. За притискивање цементне коцке *M* постављене су на њене четири стране папуче које су спојене зглавкастим механизмом. Штапови *AB*, *BC* и *CD* тог механизма поклапају се са странама квадрата *ABCD*, а штапови 1, 2, 3, 4 који су по дужини међусобом једнаки, управљени су по његовим дијагоналама. Две силе *P*, исте величине, супротног смера дејствују у тачкама *A* и *D*. Одредити силе N_1, N_2, N_3, N_4 које притискују коцку и силе S_1, S_2, S_3 у штаповима *AB*, *CB* и *CD*, кад је величина силе $P = 5\ t$.

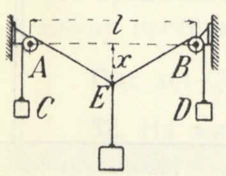


Одг. $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 5\sqrt{2}\ t = 7{,}07\ t.$
Затезање: $S_1 = S_2 = S_3 = 5\ t.$

22. Хомогена правоугаона плоча тежине 5 *kg* обешена је тако, да се може обртати око хоризонталне осовине, која пролази једном њеном страном. Ветар који равномерно дува, одржава је у нагнутом положају, под углом 18⁰ према вертикалној равни. Одредити, величину компоненте притиска ветра управну на раван плоче.

Одг. $5\ sin\,18^0 = 1{,}55\ kg.$

23. Преко два бесконачно мала котура *A* и *B*, који се налазе на истој хоризонталној правој $AB = l$, пребачен је канап *CAEBD*. За крајеве *C* и *D* канапа обешени су терети исте тежине *p* а у тачки *E* терет тежине *P*. Одредити одстојање *x* тачке *E* од праве *AB* у положају равнотеже.

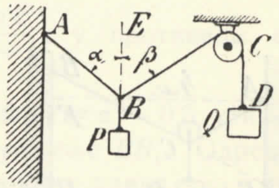


Одг. $x = \dfrac{Pl}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}.$

24. Терет тежине 25 *kg* одржава се у равнотежи помоћу двају канапа који су пребачени преко непокретних котура а затегнути теретима. Један од тих терета тежи 20 *kg*; *sinus* угла који затвара одговарајући канап са вертикалом раван је 0,6. Наћи величину *p* другог терета и угао α који други канап затвара са вертикалом.

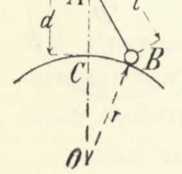
Одг. $p = 15\ kg;\ sin\,\alpha = 0{,}8.$

25. За конац *AB*, чији је један крај везан у тачки *A*, учвршћен је у тачки *B* терет *P*. На крају *D* конца *BCD* који је пребачен преко непокретног котура *C*, учвршћен је терет $Q = 10$ *kg*. Одредити силе у концу *AB* и величину терета *P*, кад су у положају равнотеже, углови које затварају конци са вертикалом *BE* равни: $\alpha = 45^0;\ \beta = 60^0$.



Одг. $S = 5\sqrt{6}\ kg = 12{,}25;\ P = 5\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 5\,(1 - \sqrt{4})\ kg =$
$= 13{,}66\ kg.$

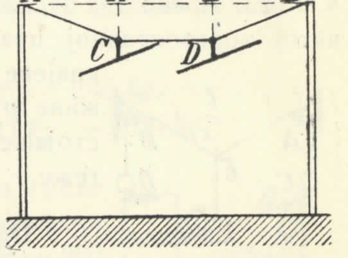
26. Куглица *B*, тежине *P*, обешена је помоћу конца *AB* за непомичну тачку *A* и ослања се о површину глатке кугле полупречника *r*. Одстојање тачке *A* од површине кугле $AC = d$, дужина конца *l*, права *AO* вертикална је. Одредити силу *T* у концу и отпор *N* кугле.



За решење задатка може се користити сличност троугла сила и троугла *AOB*.

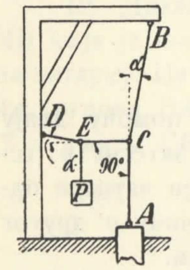
Одг. $T = P\dfrac{l}{d + r};\ \ N = P\dfrac{r}{d + r}.$

27. Два трамвајска спроводника за електричну струју обешени су за попречне жице које су учвршћене за два стуба. Стубови су у правцу пута размакнути један од другога за 40 м. Код сваке попречне жице равна су одстојања $AK = KL = LB = 5$ *m*; $KC = LD = 0{,}5$ *m*. Занемарујући тежину попречне жице, наћи силе, T_1, T_2, и T_3 у њеним деловима AC, CB и DB, кад је тежина 1 *m* спроводника равна 0,75 *kg*.



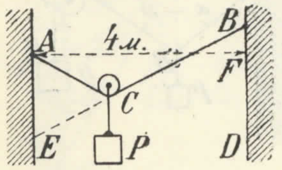
Одг. $T_1 = T_3 = 301{,}5$ *kg*; $T_2 = 300$ *kg*.

28. Да би из земље извукао шип, везао је радник у тачки A шипа један крај ужета, други његов крај везао је за тачку B. Уже AB спојио је затим у тачки C другим ужетом, које је везао за тачку D. После тога обесио се рукама у тачки E за уже CD, тада је део ужета AC заузео вертикалан положај а део EC хоризонталан. Делови CB и DE затварају исте углове α, равне 4^0; први са вертикалом други са хоризонталом. Одредити силу S у ужету AC кад је тежина радника 80 *kg*. ($cotg\ 4^0 = 14{,}3$).



Одг. $S = 16{,}36$ *t*.

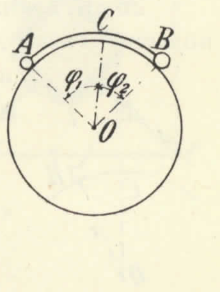
29. Котур C са теретом $P = 18$ *kg* може да клизи по гипком челичном ужету ACB, чији су крајеви A и B учвршћени за зидове. Размак зидова 4 *m*; дужина челичног ужета 5 *m*. Одредити силу у ужету занемарујући његову тежину.



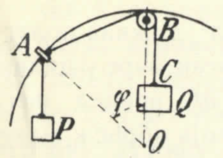
Силе у деловима AC и CB ужета једнаке су, њихова величина може да се одреди из сличности троугла сила и равнокраког троугла, једна његова страна је права BCE а основица му лежи на вертикали CD.

Одг. 15 *kg*, независно од висине BF.

30. На кружном глатком ваљку, са хоризонталном осовином, полупречника $OA = 0{,}1$ *m*, леже две куглице A и B. Тежина прве равна је 0,1 *kg* друге 0,5 *kg*. Куглице су спојене концем AB дужине 0,2 *m*. Одредити углове φ_1 и φ_2 које затварају, у положају равнотеже, полупречници OA и OB са вертикалном правом OC, и притиске N_1 и N_2 куглица на ваљак у тачкама A и B.



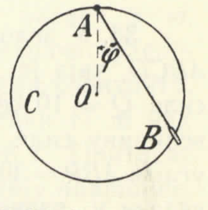
Одг. $\varphi_1 = 2 - \varphi_2$ radiana; $tg\,\varphi_2 = \frac{sin\ 2}{2\ cos\ 2}$. Притисак у *kg*: $N = 0{,}1\ cos\ \varphi_1$; $N_2 = 0{,}2\ cos\ \varphi_2$.



31. Гладак прстен A може да клизи без трења по жици која је савијена по кругу а налази се у вертикалној равни. За прстен, на којему виси терет P, везан је конац ABC који је пребачен преко непомичног котура B. У тачки C конца обешен је терет Q. Котур B налази се на највишој тачки обима круга. Одредити средишњи угао φ лука AB у положају равнотеже, занемарујући тежину прстена.

Одг. $sin\,\frac{\varphi_1}{2} = \frac{Q}{2P}$; $\varphi_2 = \pi$.

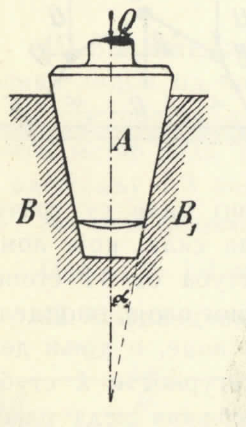
32. На жици ABC, која је савијена по кругу полупречника R, налази се гладак прстен B, тежине p. Жица лежи у вертикалној равни. Прстен B, спојен је помоћу еластичног конца AB са највишом тачком A обима круга. Одредити угао φ у положају равнотеже, знајући да је затежућа сила S конца пропорционална његовом специфичном продужењу; при томе је коефицијенат пропорционалности раван k.



Ако обележимо са L и l дужину конца у растегнутом и нерастегнутом стању, онда је $S = k\,\frac{L-l}{l}$

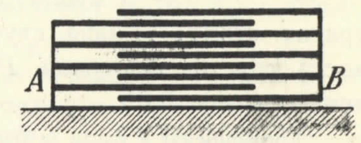
Одг. $cos\,\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{kl}{kR - pl}$ ако је $k \geqslant \frac{2\,p\,l}{2\,R - l}$; у противном случају $\varphi = 0$.

33. Клин А, чији је нагиб $tg\,\alpha = 0{,}5$, утискује се силом $Q = 6$ *t* у удубљење BB_1. Одредити нормални притисак N на бокове клина, као и силу која је потребна за извлачење клина, кад је коефицијенат трења $k = 0{,}1$.



Одг. $N = 20$ *t*; $P = 2$ *t*.

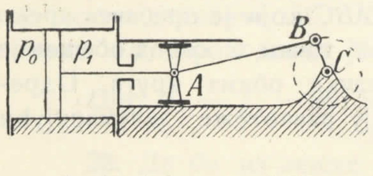
34. Листови хартије, сложени су тако, (види слику) да се њихови слободни крајеви преклапају; на тај начин добијају се две самосталне групе A и B. Тежина сваког листа равна је 6 *grama*, њихов број 200, коефицијенат трења хартије о хартију као и о сто на којем лежи хартија, раван је 0,2. Претпостављајући, да је једна од група непокретна, одредити најмању хоризонталну силу P, потребну за извлачење друге групе.



Циљ задатка — објаснити идеју, на којој се оснива конструкција плочастих фрикционих муфова.

Одг. При извлачењу A из B, $P = 24{,}12$ *kg*.
B из A, $P = 23{,}88$ *kg*.

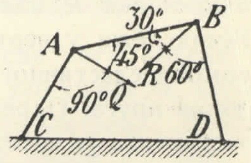
35. Површина клипа парне машине равна је 0,1 m^2, дужина полуге кретаче $AB = 2\ m$, дужина криваје $BC = 0{,}4\ m$; притисак паре у цилиндру, иза клипа $p_0 = 6\ at$, испред њега $p_1 = 1\ at$. Наћи силу P, која обрће криваје и притисак N крсне главе A на вођице, за онај положај клипа, кад је угао $ABC = 90^0$.



1 $at = 1\ kg$ на cm^2. Трење између крсне главе и вођица занемарити.

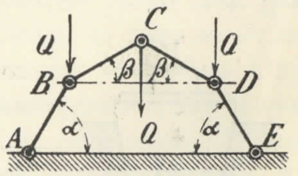
Одг. $P = 5{,}1\ t$; $N = 1\ t$.

36. У зглобу A, зглавкастог четвероугаоника $ABCD$, чија је страна CD непокретна, дејствује сила $Q = 10\ kg$ под углом $BAQ = 45^0$. Одредити величину силе R, која дејствује у зглобу B под углом $ABR = 30^0$, тако, да се четвероугаоник $ABCD$ налази у равнотежи, кад су углови $CAQ = 90^0$; $DBR = 60^0$.



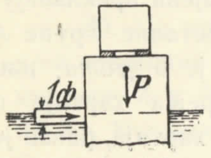
Одг. $R = 20\sqrt{\frac{2}{3}}\ kg = 16{,}3\ kg$.

37. Четири штапа исте дужине зглавкасто су међусобом повезани у један систем. Крајеви A и E учвршћени су на хоризонталној правој. Чворови B, C и D оптерећени су једнаким вертикалним теретима Q. У положају равнотеже затварају крајњи штапови са хоризонталом угао $\alpha = 60^0$. Одредити нагиб β средњих штапова.



Одг. $\beta = 30^0$.

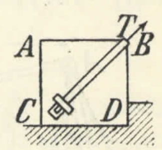
38. Стубови Kansas-City моста на реци Missouri били су срачунати на надолазак леда под том претпоставком, да сила, која ломи ледену санту по целој ширини стуба од 11 стопа, стоји у равнотежи са трењем каменог слоја, оног дела стуба који се налази изнад нивоа воде, о доњи део стуба. Одредити коефицијенат сигурности k стуба против надоласка леда, кад је дебљина леда равна 1 стопи; сила која ломи санте, 11,25 пуда на квадратну стопу; тежина стуба над нивоом воде заједно са тежином моста која на њ отпада $P = 43790$ пуда и коефицијенат трења камена о камен 0,61.



Коефицијенат k раван је односу најмање силе, која је неопходно потребна за померање горњег дела стуба, ка сили која ломи ледену санту.

Одг. $k = 1{,}5$

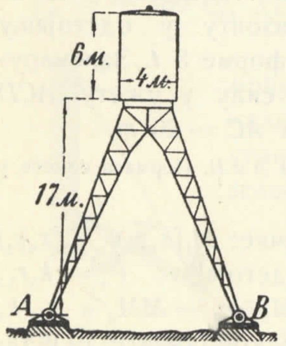
39. Крај кабла ланчаног моста укотвљен је у камени темељ, који има облик правоугаоног паралелепипеда, попречног пресека $ABCD$. Ивица $AB = AC = 5\ m$, специфична тежина темеља 2,5 t/m^3. Кабел је положен по дијагонали BC. Наћи потребну дужину l треће ивице паралелопипеда, кад је сила у каблу $T = 100\ t$.



Темељ треба срачунати против обртања око ивице D; при срачунавању занемарити отпор околне земље на темељ.

Одг. $l \geqslant 2{,}3\ m$.

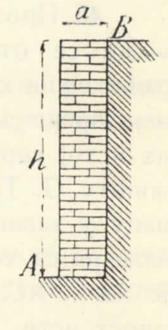
40 Цилиндрични резервоар, висине 6 m, пречника 4 m лежи на четири симетрично расподељена стуба који су нагнути према хоризонту. Дно резервоара налази се на висини 17 m над нивоом терена. Тежина постоља 8 t. Притисак ветра узети 125 kg/m^2 на пројекцију површине, коју добијамо, пројицирањем површине, изложене дејству ветра на раван управну на његов правац. Одредити потребно одстојање AB између лежишта стубова.



Одстојање AB треба срачунати, против претурања услед дејства ветра, кад овај дува хоризонтално.

Одг. 15 m.

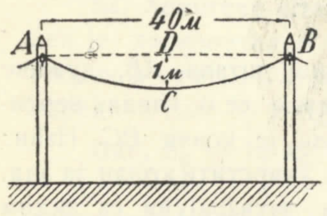
41. Земљани насип висине $h = 5\ m$ подупрт је вертикалним зидом од камена AB. Наћи потребну дебљину a зида, претпостављајући да је притисак земље на сваки дужни метар зида раван 6 t, да дејсвује хоризонтално а на одстојању 1/3 висине; специфична тежина зида 2 t/m^8.



Зид треба срачунати против претурања око ивице A.

Одг. $a \geqslant 1{,}4\ m$.

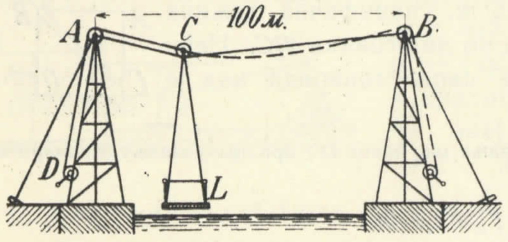
42. Спроводник ABC за електричну струју затегнут је између два стуба тако, да образује ланчаницу, стреле $CD = f = 1\ m$. Размак стубова $AB = l = 40\ m$. Тежина спроводника $Q = 40\ kg$ Одредити силе у спроводнику и то: T_a у средњем пресеку, T_a и T_c на крајевима.



При решавању задатка може се претпоставити, да тежина сваке половине спроводника дејствује на одстојању 1/4 од суседног стуба.

Одг. $T = \frac{Ql}{8f} = 200\ kg$; $T_a = T_b = 201\ kg$.

43. За пребацивање преко реке служи платформа L, која је помоћу котура C обешена о гипко челично уже AB. Уже је учвршћено за крајеве стубова A и B. За покретање котура C ка левој обали служи уже CAD, које је пребачено преко котура A а обавија се на вито D, исто такво уже постоји за покретање ка десној обали. Тачке A и B налазе се на истом хоризонту у одстојању $AB = 100$ m. Дужина ужета 102 m, тежина платформе 5 t. Занемарујући тежину свију ужета, одредити, графички, силу у ужету ACD и силу у ужету ACB у тренутку када је дужина $AC = 20$ m.

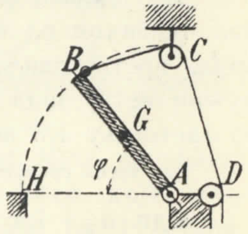


Тачка C креће се по луку елипсе са жижама у тачкама A и B. Нормала елипсе у тачки C полови угао ACB.

44. Тачку M привлаче три непокретне тачке: $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$ и $M_3(x_3y_3)$ силама које су пропорционалне одстојању: $P_1 = k_1r_1$, $P_2 = k_2r_2$, $P_3 = k_3r_3$, где је $r_1 = MM_1$, $r_2 = MM_2$, $r_3 = MM_3$ а k_1, k_2 и k_3 коефицијенти пропорционалности. Одредити координате x, y тачке M у положају равнотеже.

Одг. $x = \dfrac{k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3}{k_1 + k_2 + k_3}$; $y = \dfrac{k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3}{k_1 + k_2 + k_3}$.

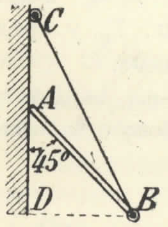
45. Прозорни оквир AB, показан на слици у пресеку, тежине 100 kg, може се отварати обртањем око хоризонталне осовине A. Отварање врши се помоћу канапа BCD који је пребачен преко котура C и D. Котур C и тачка A леже на истој вертикали. Тежина оквира дејствује у тежишту G. Трење занемарити. Наћи силу S у канапу у зависности од угла φ, који раван оквира затвара са хоризонталом AH, претпостављајући да је $AB = AC$, као и максималну и минималну вредност исте.



Одг. $T = 100\ sin\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$; $Tmax = 50\sqrt{2}\ kg = 70{,}5\ kg$ при $\varphi = 0^0$

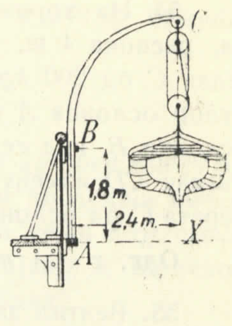
$Tmin = 0$ при $\varphi = 90^0$.

46. Горњи крај A хомогеног штапа AB, дужине $l = 2$ m, тежине $P = 5$ kg, ослања се о гладак вертикални зид; за доњи крај B везан је конац BC. Наћи: 1) На ком одстојању AC треба учврстити конац за зид, да би штап стајао у равнотежи, затварајући са зидом угао $BAD = 45^0$? 2) Силу S у концу и отпор N зида.



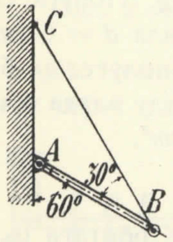
Одг. $AC = AD = 1{,}41$ m; $S = 2{,}5\sqrt{5}\ kg = 5{,}6\ kg$; $N = 2{,}5$ kg.

47. Чамац виси о двема конзолама тако, да се његова тежина од 960 kg подједнако дели на обе конзоле. Конзола ABC ослања се доњим крајем о лежиште A а на висини 1,8 m над овим пролази слободно кроз лежиште B; испад конзоле раван је 2,4 m. Занемарујући тежину конзоле одредити њене притиске на ослонце A и B.



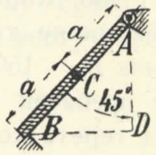
Одг. Пројекције притисака: $X_a = -640$ kg, $Y_a = -480$ kg, $X_b = -640$ kg, $Y_b = 0$.

48. Штап AB, учвршћен је за вертикални зид помоћу зглоба A а одржава се, под углом 60^0 ка вертикали, у равнотежи, помоћу конца који са њиме затвара угао од 30^0. Одредити величину и правац реакције N зглоба A кад је тежина штапа равна 2 kg.



Одг. $N = 1$ kg; угао $(R,\ AC) = 60^0$.

49. Прозорни оквир AB, показан на слици у пресеку належе слободно у тачки B и може се обртати око зглавка A. Наћи отпоре ослонаца, кад тежина оквира, $Q = 89$ kg, дејствује у тачки C а $AD = BD$.



Одг. $R_a = 70{,}7$ kg, $R_b = 31{,}6$ kg.

II. Паралелне силе.

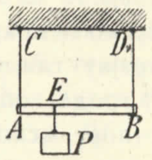
50. Одредити отпоре ослонаца хоризонталне греде, дужине l. Греда је оптерећена равномерно по целој дужини са p kg на јединицу дужине.

Одг. $A = B = \dfrac{pl}{2}$ kg.

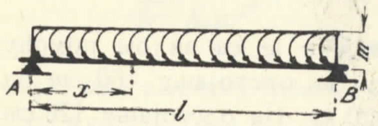
51. Одредити вертикалне отпоре ослонаца хоризонталне греде, распона l, када на њу утиче терет P kg, на одстојању x од левог ослонца.

Одг. $A = P\dfrac{(l-x)}{l}$ kg, $B = P\dfrac{x}{l}$ kg.

52. Хомогени штап AB дужине 1 m, тежине 2 kg, обешен је хоризонтално за два канапа AC и BD. За греду, обешен је у тачки E терет $P = 12$ kg. Одстојање $AE = {}^1/_4$ m. Одредити силе S_c и S_d у канапима.

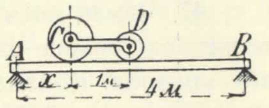


Одг. $S_c = 10$ kg; $S_d = 4$ kg.



53. Како гласи моментна једначина за греду која је оптерећена равномерно подељеним моментом?

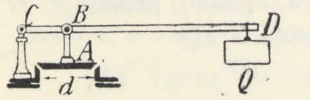
Одг. $M_x = 0$.



54. На хоризонталну греду са два ослонца, распона 4 *m*, треба положити два терета, један *C* од 200 *kg* други *D* од 100 *kg* тако, да отпор ослонца *A* буде два пута већи од отпора ослонца *B*, кад се при томе занемари утицај сопствене тежине греде. Размак *CD* између терета раван 1 *m*. Колико треба да је одстојање *x* терета *C* од ослонца *A*?

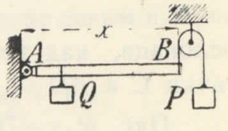
Одг. $x = 1$ *m*.

55. Вентил за сигурност *A* парног котла спојен је штапом *AB* са призматичном полугом *CD* дужине 50 *cm*, тежине 1 *kg*. Полуга се може обртати око непомичне тачке *C*. Пречник вентила $d = 6$ *cm*, $BC = 7$ *cm*. Колики терет *Q* треба обесити за крај *D* полуге, да би се вентил сам отворио, кад у котлу влада притисак од 11 *at*? 1 $at = 1$ *kg* на cm^2.



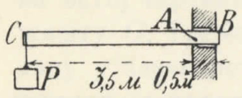
Одг. $Q = 43$ *kg*.

56. Хоризонталан штап *AB* тежине 100 *g* може се обртати око непомичне тачке *A*; његов крај *B* вуче на више сила $P = 150\,g$, она се преноси помоћу конца, који је пребачен преко непокретног котура, а потиче од терета који виси на њему. На одстојању 20 *cm* од краја *B*, обешен је терет $Q = 500$ *g*. Колика је дужина штапа *AB*, кад се налази под утицајем ових сила у равнотежи?



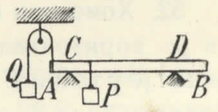
Одг. $x = 25$ *cm*.

57. Гвоздена греда, дужине 4 *m* и тежине 0,5 *t*, узидана је у зид дебљине 0,5 *m* тако, да се ослања у његовим тачкама *A* и *B*. Одредити отпоре у тим тачкама кад је на слободном крају греде обешен терет $P = 4$ *t*.



Одг. $A = 34\,t$ — навише; $B = 29{,}5\,t$ — наниже.

58. Греда *AB*, дужине 10 *m* и тежине 200 *kg*, лежи на двама ослонцима *C* и *D*. Ослонац *C* удаљен је од краја *A* за 2 *m*, ослонац *B* од краја *B* за 3 *m*. Помоћу ужета које је пребачено преко непокретног котура, напада сила $Q = 300$ *kg* крајну тачку *A* греде. На одстојању 3 *m* од краја *A* греде, обешен је терет $P = 800$ *kg*. Одредити отпоре ослонаца.



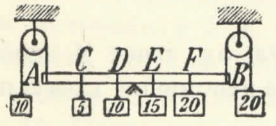
Одг. $R_c = 300$ *kg*; $R_d = 400$ *kg*.

59. Хомогена хоризонтална греда спојена је са зидом помоћу зглоба, а подупрта је у тачки, која се налази на одстојању 160 *cm* од зида. Дужина греде 400 *cm*, њена тежина 320 *kg*. На одстојању 120 *cm* и 180 *cm* од зида, леже на греди два терета 160 *kg* и 240 *kg* тежине. Одредити отпоре ослонаца.

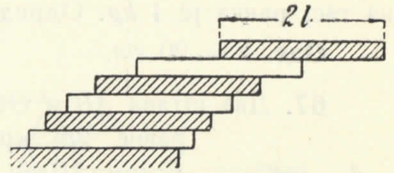
Одг. 790 *kg* — на више; 70 *kg* — на ниже.

60. О хомогену греду, дужине 3 *m* а тежине 6 *kg* обешена су на једнаким међусобцим одстојањима 4 терета. Први и последњи смештени су на крајевима греде. Први терет, идући с лева, тежи 2 *kg*, сваки идући тежи је од предходног за 1 *kg*. На ком одстојању *x*, од левог краја, треба ослонити греду да би остала хоризонтална?

Одг. $x = 1{,}75$ *m*.

61. Помоћу ужета које је пребачено преко непокретног котура, вуче терет од 10 *kg* на више крај *A* хоризонталне греде. На исти начин вуче сила од 20 *kg* на више крај *B* греде. Греда је 5 *m* дуга а тежи 20 *kg*. У тачкама *C*, *D*, *E*, и *F* које су од тачака *A* и *B* као и међусобом удаљене за 1 *m*, обешени су терети од 5 *kg*, 10 *kg*, 15 *kg* и 20 *kg*. На којем месту треба подупрти греду да би остала у равнотежи?

Одг. У средини.

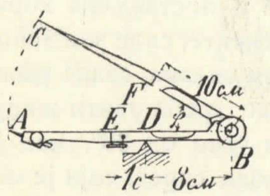
62. Неколико хомогених правоугаоних плочица исте тежине и исте дужине 2*l* сложене су тако да је свака од њих препуштена за извесну дужину над пређашњом. Одредити граничне дужине тих препуста при којима ће плочице стајати у равнотежи.



При решавању треба сабирати постепено тежине плочица почињући одозго.

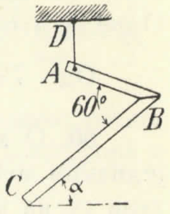
Одг. l, $^1/_2 l$, $^1/_3 l$, $^1/_4 l$, $^1/_5 l$ и т. д.

63. Одредити угао φ за који треба отворити шестар да би крак *AB* који се ослања на оштрицу *D* остао у хоризонталном положају. Тежина крака *AB* равна је 16 *g* и дејствује у тачки *E*, тежина крака *CB* раван је 12 *g* и дејствује у тачки *F*. Одстојања: $BD = 8$ *cm*, $ED = 1$ *cm*, $BF = 10$ *cm*.



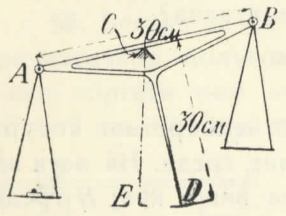
Одг. $\varphi = arc\,cos\ \frac{2}{3}$; равнотежа је лабилна. При истом углу φ биће равнотежа стабилна, кад шестар окренемо за 180° тако, да крак *CB* буде испод оштрице.

64. Два хомогена штапа AB и CB једнаких пресека, од којих је AB у пола краћи од BC, састављени су под углом од 60^0 у једну целину ABC. Крај A учвршћен је за конац AD. Одредити угао α који затвара део CB са хоризонтом, занемарујући попречне димензије штапова.



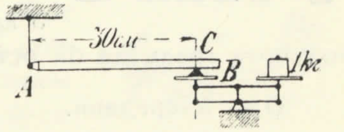
Одг. $tg\,\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{3}$.

65. Дужина AB теразијске полуге равна је 20 cm, њена тежина 300 g; дужина казаљке $CD = 30$ cm. Тег од 0,01 g на једном тасу, отклања крај казаљке, из њеног вертикалног положаја, за одстојање $DE = 3$ mm. Одредити одстојање тежишта полуге од ивице призме C.



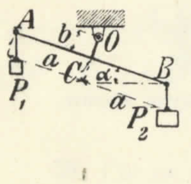
Одг. 0,05 cm.

66. Ради одређивања одстојања x тежишта од тачке A неког хетерогеног штапа AB, обеси се његов крај A за непомичну тачку, па се затим положи хоризонтално на тас ваге, на који се ослања у C. Одстојање AC равно је 30 cm, тежина штапа 1,5 kg а тежина тега, који одржава на ваги равнотежу са притиском, којим штап утиче на тас, равна је 1 kg. Одредити одстојање x.



Одг. $x = 20$ cm.

67. Два штапа AB и OC, чије су тежине на јединицу дужине равне $2p$, круто су везани у тачки C под правим углом. Штап OC може се обртати око хоризонталне осовине O; $AC = CB = a$, $OC = b$. У тачкама A и B обешени су терети, тежина P_1 и P_2; $P_2 > P_1$. Који угао затвара у положају равнотеже, штап AB са хоризонталом?



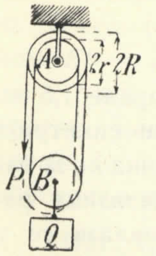
Одг. $tg\,\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1 + 4\,ap + b}$.

68. Магнетна игла обешена је о танку жицу и постављена хоризонтално у магнетни меридијан. Хоризонталне компоненте, силе земљиног магнетног пола, дејствују на полове игле супротним силама, свака равна по 2 mg; одстојање полова 10 cm. За колики угао треба увити жицу, да би игла затварала са магнетним меридијаном угао од 30^0, кад је познато, да је за увијање жице за угао 1^0 потребан спрег, чији је моменат раван 5 mg cm.

Моменат увијања пропорционалан је углу увијања.

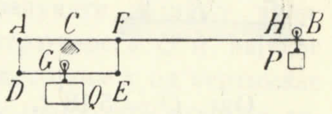
Одг. 32^0.

69. Главни део Weston-овог (диференцијалног) котура састоји се из две кружне плоче A које су међусобно непокретно везане у котур; заједничка осовина учвршћена је за непомичну двокраку виљушку . Жљебови на овим плочама имају зубце који придржавају ланац без краја, обавијен преко котура како је на слици показано. За доњи покретан котур обешен је терет Q а за слободни крај ланца који виси са веће плоче дејствује сила P. Полупречници плоча A равни су R и r, при томе је $r < R$. Треба наћи зависност силе P од терета Q и срачунати ту силу за случај да је $Q = 500$ kg, $R = 25$ cm, $r = 24$ cm.



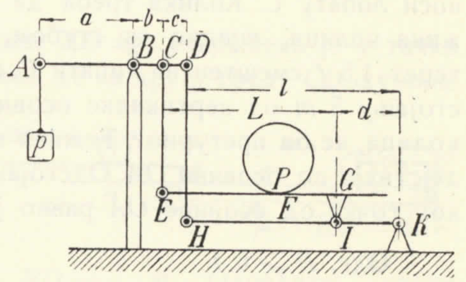
Одг. $P = \frac{1}{2}\,Q\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 10$ kg.

70. Диференцијална полуга састоји се из полуге AB са непокретним ослонцем у C и штапа DE који је помоћу ручица AD и EF зглавкасто везан за полугу. У тачки G штапа DE обешен је помоћу оштрице (призме) терет $Q = 1t$. Одстојање вертикала кроз тачке C и G равно је 1 mm, $AC = CF = 25$ cm; $DG = 24{,}9$ cm, $GE = 25{,}1$ cm. Одредити тежину тега P, који треба обесити у тачки H полуге AB а у одстојању $CH = 1$ m, да би одржавао равнотежу терету Q.



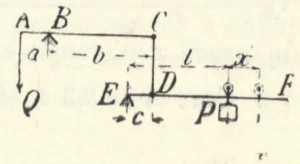
Одг. $P = 1$ kg.

71. На платформи ваге Quintenz дејствује у тачки F терет P. Дужина $AB = a$; $BC = b$ $CD = c$; $JK = d$; $HK = l$; дужина платформе $EG = L$. Одредити однос дужина b, c, d и l при којима тежина тега p, одржава равнотежу терету P а не зависи од положаја овог на платформи и наћи за тај случај тежину тега p.



Одг. $\frac{b + c}{b} = \frac{l}{d}$; $p = \frac{b}{a}\,P$.

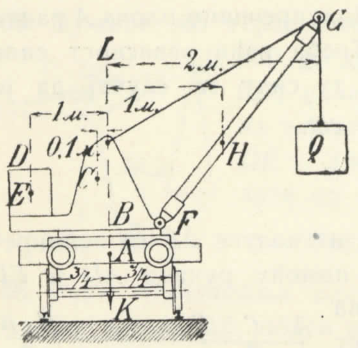
72. За мерење већих терета Q направљен је систем од две ранокраке полуге ABC и EDF, које су спојене међу собом ужетом CD. У тачкама B и E имају полуге непокретне ослонце. По полузи EDF може се померати терет P тежине 12,5 kg. Сила Q, која дејствује у тачки A, стоји у равнотежи са теретом P који је померен за дужину l од тачке E. За коју дужину x треба померити те-



рет P, да би се одржала равнотежа, кад се сила Q увећа за 1000 *kg*? На слици показане дужине равне су $a = 3{,}3$ *mm*; $b = 660$ *mm*; $c = 50$ *mm*.

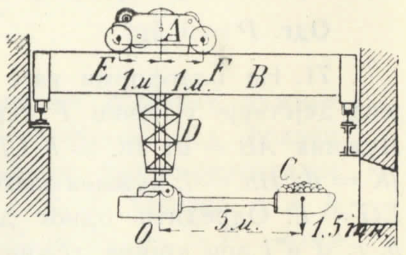
Одг. $x = 2$ *cm*.

73. Железничка дизалица намештена је на колосеку ширине 1,5 *m*. Тежиште A кола налази се у пресечној правој KL равнине симетрије кола са равнином цртежа. Тежина кола равна је 3 *t*. Тежина витла B дизалице равна је 1 *t*, тежиште његово налази се у тачки C на одстојању 0,1 *m* од праве KL. Тежина контра терета D, чије се тежиште налази у тачки E на одстојању 1 *m* од праве KL, равна је 2 *t*. Тежина косника FG, чије се тежиште налази у тачки H на одстојању 1 *m* од праве KL, равна је 5 *t*. Испуст дизалице $LG = 2$ *m*. При којој ће се величини терета Q дизалица претурити?



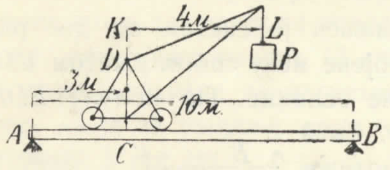
Одг. $Q = 5{,}18$ *t*.

74. Дизалица за утовар материјала код Martens-ове пећи, састоји се из колица A, која могу да се покрећу по колосеку смештеном на покретном мосту B. За доњи део колица учвршћен је покретни стуб D који носи лопату C. Колика треба да је тежина колица, заједно са стубом, да се терет 1,5 *t* смештен на лопати C, а у одстојању 5 *m* од вертикалне осовине OA колица, не би претурио? Тежина колица дејствује по осовини OA. Одстојање сваког точка од осовине OA равно је 1 *m*.



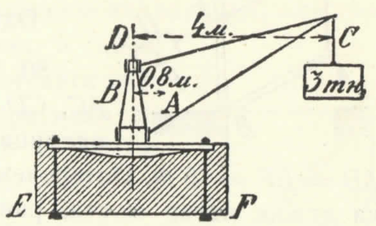
Одг. $P \geqslant 6$ *t*.

75. На греди AB распона 12 *m* смештене су шине по којима може да се креће дизалица. Тежина дизалице 5 *t*, њено тежиште налази се на осовини CD, тежина терета $P = 1$ *t*; тежина греде $AB = 3$ *t*; домашај дизалице $KL = 4$ *m*. Наћи отпоре ослонаца A и B кад се дизалица налази са гредом AB у истој вертикалној равни а одстојање $AC = 3$ *m*.



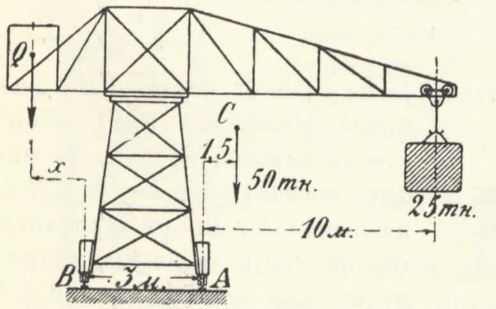
Одг. $A = 5{,}3$ *t*; $B = 3{,}7$ *t*.

76. Дизалица је учвршћена за темељ од камена; њена тежња Q равна је 2,5 *t* и дејствује у тачки A на одстојању $AB = 0{,}8$ *m* од осовине дизалице; домашај дизалице $CD = 4$ *m*. Темељ је квадратне основе, са страном $EF = 2$ *m*; специфична тежина земље 2 t/m^3. Срачунати потребну дубину темеља, када дизалица треба да диже терет до 3 *t*; темељ срачунати против претурања око ивице F.



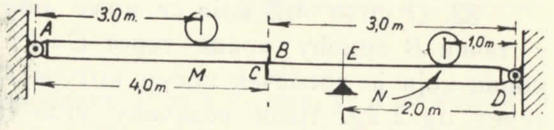
Одг. 1,1 *m*.

77. Тежина покретне дизалице, без контра терета равна 50 *t*, дејствује по правој, у одстојању 1,5 *m* од вертикале кроз десну шину. Моћ ношења покретних колица равна је 25 *t*, њихов домашај, рачунајући га од десне шине, 10 *m*. Срачунати најмању величину контра-терета Q и највеће његово одстојање x од вертикале кроз леву шину, при којој ће дизалица бити стабилна, за све положаје покретних колица, било да су ова оптерећена или не, а занемарујући при томе њихову сопствену тежину.



Одг. $33^1/_3$ *t*; $x = 6{,}75$ *m*.

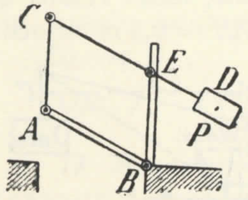
78. Греда AB, дужине 4 *m*, тежине 200 *kg*, учвршћена је у тачки A зглавкасто за зид а крајем B ослања се на другу греду CD, дужине 3 *m*, тежине 160 *kg*; ова греда подупрта је у тачки E а у тачки D зглавкасто је везана за зид. У тачкама M и N дејствују терети, сваки по 80 *kg*. Одстојања: $AM = 3$ *m*; $ED = 2$ *m*; $ND = 1$ *m*. Одредити отпоре ослонца.



При решавању задатка, поставити услове равнотеже греде AB, узимајући у обзир и отпор B греде CD, затим поставити услове равнотеже греде CD узимајући у обзир притисак у тачки C, који је по величини раван отпору B али је супротног смера.

Одг. $R_a = 120$ *kg*; $R_b = 160$ *kg*; $R_c = 400$ *kg*; $R_d = 0$.

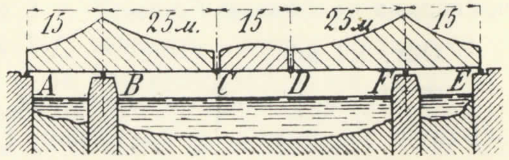
79. Покретан мост AB покреће се помоћу две греде CD, дужине 8 *m* а тежине 400 *kg*. Греде се налазе са сваке стране моста и обрћу се око тачака E стубова BE. Дужина моста $AB = CE = 5$ *m*, дужина ужета $AC = BE$, тежина моста 3 *t* може се сматрати да дејствује у сре-



дини AB. Срачунати величину контра терета P који одржава равнотежу моста.

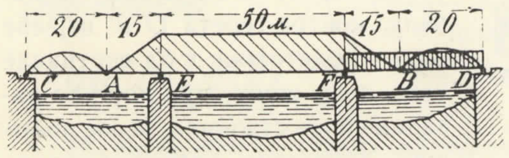
Одг. 1383 *kg*.

80. Мост са препустима састављен је из три дела: AC, CD и DE од којих се крајњи ослањају на два ослонца. Димензије: $AC = DE = 40\ m$, $CD = 15\ m$, $AB = EF = 15\ m$. Оптерећење, на дужни метар моста, равно је 6 *t*. Срачунати притиске на ослонце A и B услед тог оптерећења.



Одг. $A = 155\ t$ — на више; $B = 400\ t$ — на ниже.

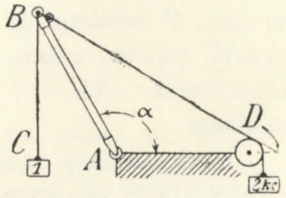
81. Мост са препустима састављен је из главног носача AB и два бочна носача CA и BD. Сопствена тежина, по дужном метру, носача AB равна је 1,5 *t*, а носача CA и BD 1 *t*. Одредити отпоре свију ослонаца, у тренутку кад се воз, тежине 3 *t* по дужном метру, налази над распоном FD. Димензије: $AC = BD = 20\ m$, $AE = FB = 15\ m$, $EF = 50\ m$.



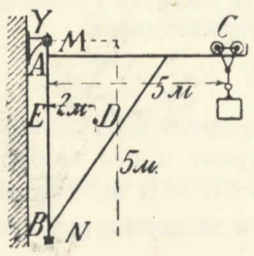
Одг. $R_c = 10\ t$; $R_d = 40\ t$; $R_e = 54{,}25\ t$; $R_f = 160{,}75\ t$.

III. Силе које нападају разне тачке а леже у истој равни.

82. О штап AB, који се може обртати око зглоба A, обешен је у тачки B помоћу конца терет $C = 1\ kg$. За крај B штапа везан је конац који је пребачен преко котура D а носи терет од 2 *kg*. Наћи величину угла $BAD = \alpha$ при којем ће штап стајати у равнотежи, кад је $AB = AD = 1\ m$ и тежина штапа 2 *kg*.



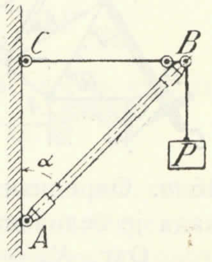
Одг. $\alpha = 120^0$.



83. Дизалица ABC може се обртати око вертикалне осовине MN; одстојање $MN = 5\ m$; $AC = 5\ m$; тежина дизалице 2 *t*; њено се тежиште D налази на одстојању $ED = 2\ m$ од осовине обртања. Тежина терета који је обешен у тачки C равна је 3 *t*. Срачунати отпоре лежишта M и N.

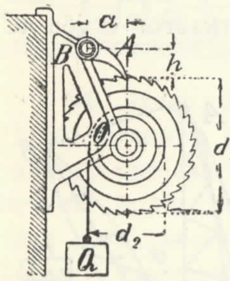
Одг. $X_m = -3{,}8\ t$; $Y_m = 0$.
$X_n = 3{,}8\ t$; $Y_n = 5\ t$.

84. Дизалица за дизање терета састављена је из греде AB; њен доњи крај учвршћен је помоћу зглавка A за зид, а горњи крај придржава хоризонтално уже BC. Срачунати силу S у ужету и вертикалну компоненту притиска на лежиште A, кад је познато да је терет $P = 200\ kg$, тежина греде AB 100 *kg*, а угао $\alpha = 45^0$.



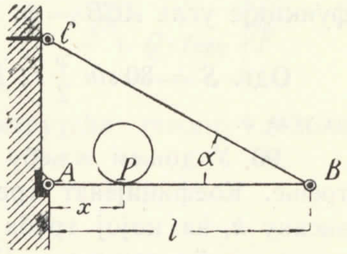
Одг. $S = 250\ kg$; $Y_a = 300\ kg$.

85. Дат је витао који је снабдевен запињачким точком пречника d_1 и запињачем A. На добош пречника d_2 који је непомично везан са колом, обавијено је уже, које придржава терет Q. Одредити притисак R на осовину B запињача. Нека је: $Q = 50\ kg$; $d_1 = 420\ mm$; $d = 240\ mm$; $h = 50\ mm$; $a = 120\ mm$.



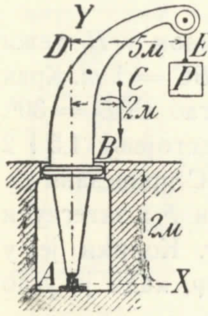
Одг. $R = Q\,\dfrac{d_2}{d_1}\,\dfrac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} = 31\ kg.$

86. Хоризонтална греда дужине l ослоњена је на крају A зглавкасто, а крајем B везана је за зид помоћу ужета BC, које са хоризонталом затвара угао α. По греди креће се терет P чији је положај дат промењивим одстојањем $AP = x$. Одредити силу S у ужету BC као функцију положаја терета.



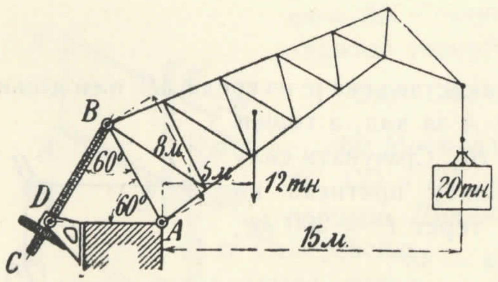
Одг. $S = \dfrac{Px}{l \sin \alpha}$

87. Дизалица, чија је носивост $P = 4\ t$, има у A лежиште а у тачки B ослања се о глатку цилиндричку површину са вертикалном осовином AY. Дужина репа $AB = 2\ m$. Домашај дизалице $DE = 5\ m$. Тежина дизалице равна је 2 *t* и дејствује по правој која се налази у одстојању 2 *m* од осовине AY. Одредити отпоре лежишта A и B.



Одг. $X_a = 12\ t$; $Y_a = 6\ t$;
$X_b = -12\ t$; $Y_b = 0$.

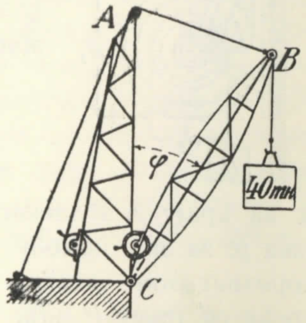
88. Решеткаста дизалица са зглавком у A може се спуштати помоћу завртња BC. Завртањ је везан у тачки B зглав-



касто са решетком а у D пролази навртком, при томе је $AB = AD = 8\ m$. Тежина решетке равна је 12 t и дејствује, у тренутку када је троугао ABD равностран, по правој која је у одстојању 5 m од тачке A. У томе је положају, домашај дизалице, рачунајући га од тачке A, раван 15 m. Одредити компоненте отпора ослонца A и силу S у завртњу, када је величина терета, којег треба дићи, равна 20 t.

Одг. $X_a = 15\sqrt{3}\ t = 26\ t$; $Y_a = 77\ t$;
$S = 30\sqrt{3}\ t = 52\ t$.

89. Дизалица састављена је из непомичног решеткастог стуба AC и покретне решетке BC, која се може обртати око зглавка C а придржава ју челично уже AB. Терет $Q = 40\ t$ виси на ужету, које је пребачено преко котура у тачки B, а отуд иде по правој BC ка витлу. Дужина $AC = BC = 15\ m$. Одредити, занемарујући тежине решетки, силу S у челичном ужету AB и силу P која дејствује по правој BC, као функције угла $ACB = \varphi$.

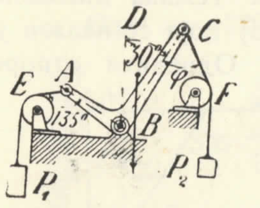


Одг. $S = 80\, sin\, \frac{\varphi}{2}\ t$; $P = 40\ t$, независно од угла φ.

90. У доњем жљебу трамвајских врата дејствује, при отварању, трење. Коефицијенат трења k није већи од 0,5. Срачунати највећу висину h, на којој треба учврстити ручицу врата, да ова, при отварању, не би запињала. Ширина врата $l = 0{,}8\ m$; тежиште се врата налази на вертикалној њиховој осовини симетрије.

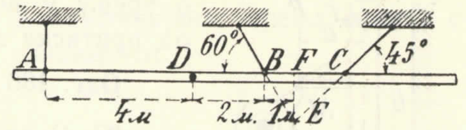
Одг. $h = \frac{l}{2k} = 0{,}8\ m$.

91. Коленаста полуга ABC, са непокретном осовином у B, тежи 8 kg; дужина кракова: $AB = 4\ dm$, $BC = 1\ m$. Крак BC затвара са вертикалом BD угао $CBD = 30^0$. Тежиште полуге налази се на одстојању $1{,}5\sqrt{2}$ dm од праве BD. У тачкама A и Cпривезани су конци, пребачени преко котура E и F а затегнути теретима $P_1 = 31\ kg$, и $P_2 = 10\ kg$. Колики је, у положају равнотеже, угао $BCF = \varphi$, када је угао $BAE = 135^0$?



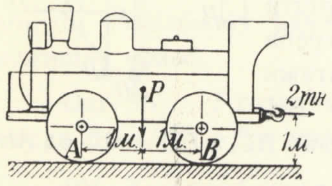
Одг. $\varphi = 45^0$; $\varphi = 135^0$.

92. При монтажи моста треба подићи део ABC мостовске конструкције трима ужетима, намештеним, како је показано на слици. Тежина тога дела конструкције равна је 4200 kg и дејствује у тачки D. Одстојања: $AD = 4\ m$, $DB = 2\ m$, $BF = 1\ m$. Срачунати силе у ужетима, кад је права AC хоризонтална.



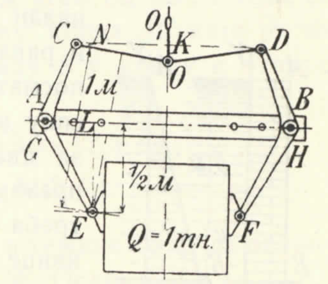
Одг. $S_a = 1\,800\ kg$; $S_b = 1\,757\ kg$; $S_c = 1\,242{,}5\ kg$.

93. Локомотива са двема осовинама, тежине $P = 20\ t$, вуче воз силом од 2 t. Одредити вертикалне притиске локомотиве на коловоз. Димензије су дате на слици.



Одг. $A = 9\ t$; $B = 11\ t$.

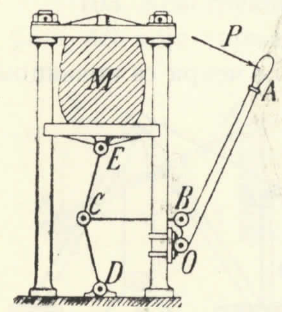
94. Ланац OO_1 направе за дизање терета, везан је помоћу зглавка O за штапове $OC = OD = 60\ cm$, који су такођер спојени зглавцима за две једнаке коленасте полуге CAE и DBF а могу се обртати око тачака A и B штапа GH. Папуче, које су учвршћене у тачкама E и F за полуге, придржавају трећем терет Q. Одстојање тачке E од штапа GH равно $EL = 50\ cm$, а одстојање њено од штапа OC равно $EN = 1\ m$. Висина троугла COD равна $OK = 10\ cm$. Срачунати силу, која затеже штап GH занемарујући тежину делова механизма.



Сила у ланцу OO_1, очигледно, равна је 1 t.

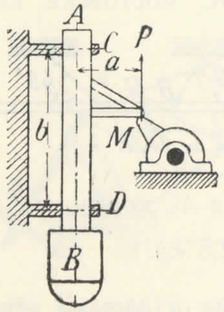
Одг. 6 t.

95. Наћи величину силе, која притискује предмет M у преси, кад су дати следећи подаци: сила $P = 20\ kg$ којом радник утиче на полугу OA, управна је на ову; полуга има непомичну осовину у тачки O. У датом положају пресе затега BC управна је на OB и полови угао ECD; при том је угао $CED = arc\,tg\,0{,}2 = 11^0 20'$; дужина $OA = 1\ m$; $OB = 10\ cm$.



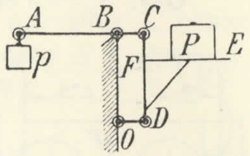
Одг. 500 kg.

96. Рукавац M учвршћен на осовини, доводи у кретање тучак AB, тежине 180 kg. Одстојање војица C и D равно $b = 1{,}5\ m$. Тачка у којој рукавац додирује конзолу тучка удаљена је од осовине овог за $a = 0{,}15\ m$. Наћи силу P,



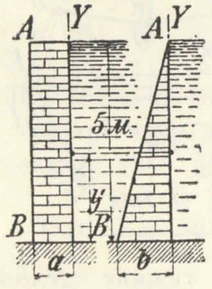
која је потребна за дизање тучка, водећи рачуна о трењу у вођицама C и D. Трење је равно 0,15 од притиска делова који се тару.

Одг. 186 *kg*.



97. О разнокраку полугу ABC, са непомичном тачком у B, обешена је за зглавак C платформа CDE, која је помоћу зглавка D спојена са штапом OD, који се може слободно обртати око непомичне тачке O. Колики терет p, треба обесити у тачки A, да би одржавао у равнотежи терет $P = 100$ *kg*, који лежи на платформи EF, кад је права CD вертикална, OD равно и паралелно BC, а $BC = 0{,}1$ од AB.

Одг. $p = 10$ *kg*.



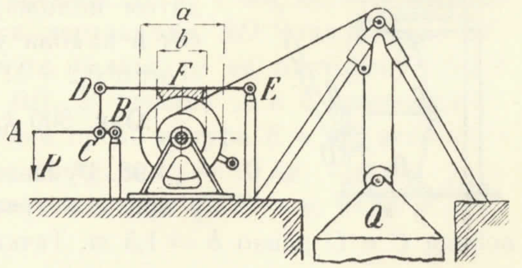
98. Притисак воде на елементарну површину бране пропорционалан је његовом одстојању од слободне површине и раван је тежини водене призме, која има за основу посматрану елементарну површину а за висину, висину воде. Одредити дебљину бране у њеном темељу за два случаја: 1) Када је попречни пресек бране правоугаоник; 2) Када је тај пресек троугао. Брану треба срачунати на претурање услед потиска воде око ивице B, при томе треба да је коефицијенат стабилности *2*. Висина бране равна је дубини воде од 5 *m*. Тежина 1 cm^3 воде 1 *gram*, а 1 cm^3 материјала бране 2,2 *grama*.

Коефицијентом стабилности зовемо однос момента тежине масива према моменту силе која изазива обртање. Притисак воде на површину бране, дужине 1 *m* а висине dy, где је y одстојање површине од дна, раван је у тонама $(5 - y)\,ydy$. Моменат обртања биће

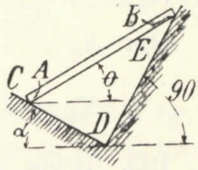
$$\int_0^5 (5 - y)\,ydy = 20\,\frac{5}{6}\,mt.$$

Одг. $a = 2{,}75$ *m*; $b = 3{,}37$ *m*.

99. За спуштање терета у окно употребљава се чекрк са кочницом као што је показано на слици. За добош, око којег је обавијено уже, причвршћено је концентрично дрвено коло, које се кочи, кад се притискује крај A полуге AB која је спојена помоћу ужета CD са крајем D полуге ED. Пречник кола $a = 50$ *cm*, пречник добоша $b = 20$ *cm*, $ED = 120$ *cm*, $FE = 60$ *cm*; $AB = 1$ *m*; $BC = 10$ *cm*. Срачунати величину силе P, која одржава у равнотежи терет $Q = 800$ *kg*, који је обешен за непокретан котур, кад је коефицијенат трења дрвета о гвожђе $k = 0{,}4$; димензије трупца F занемарити.

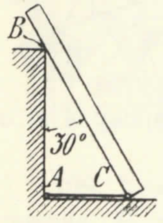


Одг. $P = 20$ *kg*.



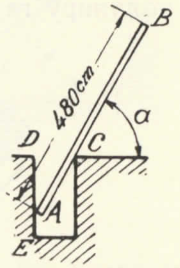
100. Хомогена греда AB, тежине Q, ослања се о две глатке праве CD и DE, које леже у вертикалној равни; прва од њих затвара са хоризонтом угао α, друга угао $90^0 - \alpha$. Наћи угао ϑ који затвара греда са хоризонтом у положају равнотеже и њен притисак на лежишне праве.

Одг. $N_a = P\cos\alpha$; $N_b = P\,si : \alpha$; $tg\,\vartheta = cotg\,2\,\alpha$ отуда $\vartheta = 90^0 - 2\,\alpha$ при $\alpha \leqslant 45^0$.



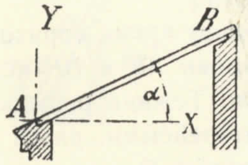
101. Хомогена греда, тежине 60 *kg* а дужине 4 *m*, ослања се једним крајем о гладак под а у тачки B на стуб висине 3 *m*, затварајући тако са вертикалом угао од 30^0. У томе се положају греда одржава помоћу конца AC који је затегнут по поду. Одредити силу S у концу и отпоре R_b и R_c, занемарујући трење.

Одг. $S = 15$ *kg*; $R_b = 10\sqrt{3} = 17{,}3$ *kg*;
$R_c = 60 - 5\sqrt{3}$ *kg* $= 51{,}3$ *kg*.



102. Хомогени штап AB, дужине 480 *cm* а тежине 16 *kg* са ослонцем у тачки C, упире се на вертикалан зид DE. Ослонац C налази се у одстојању 30 *cm* од DE. Срачунати угао α који затвара штап у положају равнотеже са хоризонталом и отпоре, зида DE и ослонца C, занемарујући трење.

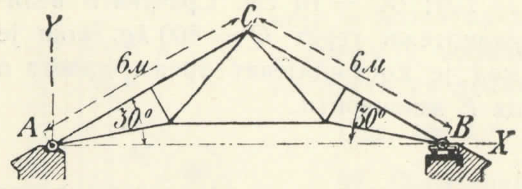
Одг. $\alpha = 60^0$; $R_a = 16\sqrt{3}\,kg = 27{,}7$ *kg*; $R_c = 32$ *kg*.



103. Конструкција једноводног крова састоји се из рога AB који горњем крајем B слободно лежи на глатком лежишту а нижим A упире се на зид. Нагиб крова $tg\,\alpha = 0{,}5$; на рог AB отпада вертикални терет 900 *kg*, који дејствује у средини рога. Одредити отпоре лежишта A и B,

Одг. $X_a = 180$ *kg*; $Y_a = 540$ *kg*; $R_b = \frac{900}{\sqrt{5}}$ *kg* $= 402$ *kg*.

104. Симетрични кровни везач ACB, учвршћен је једним крајем за непокретну тачку A, а другим крајем B ослања се помоћу ваљка на глатку

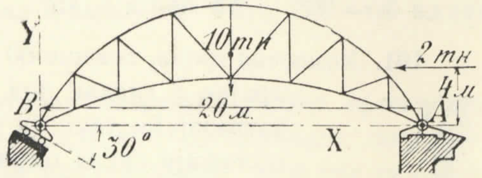


хоризонталну раван. Тежина везача 10 t. Страна AC изложена је по целој њеној дужини равномерно расподељеном притиску ветра који дејствује управно на њу, а чија је резултанта 0,8 t. Дужина $AC = 6\ m$, угао $CAB = 30^0$. Срачунати отпоре ослонаца.

Одг. $X_a = -0,4\ t;\ Y_a = 5 + \frac{4}{15}\sqrt{3}\ t = 5,46\ t;\ X_b = 0;$

$$Y_b = 5 + \frac{2}{15}\sqrt{3}\ t = 5,23\ t.$$

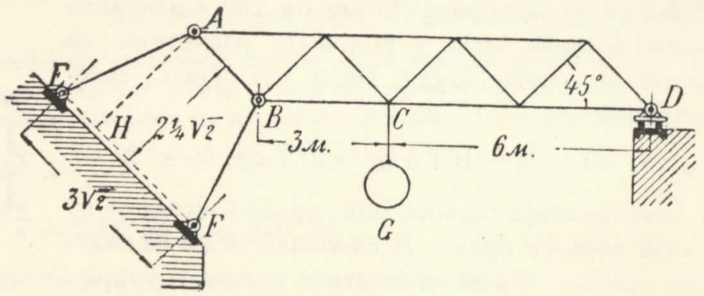
105. Лучни решеткасти носач има у A непокретан лежишни зглавак а у B покретно лежиште. Раван лежишта затвара са хоризонтом угао од 30^0. Распон $AB = 20\ m$. Сопствена тежина везача заједно са снегом 10 t. Резултанта 2 t хоризонталног притиска ветра дејствује паралелно правој AB а у одстојању 4 m од ње. Срачунати величине отпора ослонаца.



Одг. $X_a = 2 - 1,8\sqrt{3}\ t = -1,12\ t;\ Y_a = 4,6\ t$

$R_b = 3,6\sqrt{3}\ t = 6,24\ t.$

106. Решеткасти носач $ABCD$ ослања се у D о ваљак, а у A и B подупиру га коси штапови AE и BF зглавкасто везани у тачкама E и F.

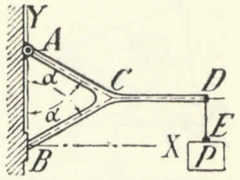


Дијагонале решеткастог носача и права EF нагнути су према хоризонтали под углом 45^0; дужина поља $BC = 3\ m$; штапови AE и BF исте су дужине; одстојање $EF = 3\sqrt{2}\ m$; $AH = 2^1/_4\sqrt{2}\ m$. Тежина решеткастог носача, са штаповима који га подупиру и оптерећењем, равна је 7,5 t и дејствује по правој CG. Одредити отпор ваљка D.

При решавању задатка узети у обзир, да резултанта отпора зглавака A и B мора да буде вертикална.

Одг. $R_d = 1,5\ t.$

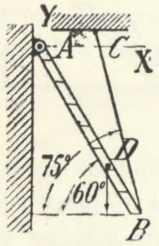
107. Вешаљка, која је састављена из три једнака дела AC, BC и CD — круто везаних међу собом — сваки тежине p, обешена је о зглавак A а крајем B упире се на гладак вертикални зид AB. На крају D вешаљке, обешен је о уже DE терет тежине P. Одредити отпоре зида у тачкама A и B.



Одг. $-X_a = X_b = \frac{2(P + 2p)\sin\alpha + p + 2P}{4\cos\alpha}$

$Y_a = 3p + P;\ Y_b = 0.$

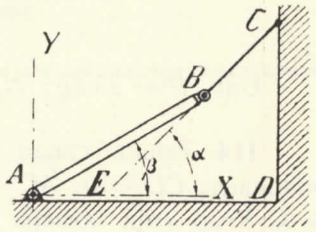
108. На покретним лествицама дужине 6 m и тежине 240 kg, које се могу обртати око хоризонталне осовине A а које са хоризонталом затварају угао 60^0 стоји у тачки D, која је за 2 m удаљена од краја B, човек тежине 80 kg. Крај B придржава уже BC које са хоризонтом затвара угао 75^0. Одредити силу S у ужету и отпор осовине A.



Одг. $S = \frac{260}{3\sin 15^0}\ kg = 334,8\ kg;\ X_a = 86,7\ kg;$

$$Y_a = 320 - \frac{260}{3}\ cotg\ 15^0\ kg = -3,4\ kg.$$

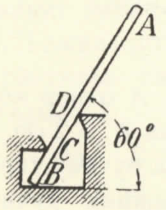
109. Хомогени штап AB дужина $2l$ а тежина P учвршћен је крајем A помоћу зглавка за хоризонтални под AD, други његов крај B везан је ужетом BC за зид CD. Одредити отпор зглавка и силу S у ужету, кад су углови: $CED = \alpha$, $BAD = \beta$.



Одг. $X_a = -P\frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha - \beta)};$

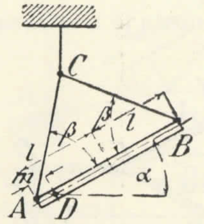
$$Y_a = P\left[1 - \frac{\cos\alpha\ \cos\beta}{2\sin(\alpha - \beta)}\right];\quad S = P\frac{\cos\beta}{2\sin(\alpha - \beta)}$$

110. Хомогена греда AB, тежине 20 kg, упире се у тачки B, под углом од 60^0 према хоризонтали, на хоризонталан под; осим тога подупрта је двема ослонцима C и D. Одредити отпоре ослонаца B, C и D кад је дужина $AB = 3\ m$, $CB = 0,5\ m$, $BD = 1\ m$.



Одг. $R_b = 20\ kg;\ R_c = 30\ kg;\ R_d = 30\ kg.$

111. Даска АВ, дужине $2l$ а тежине p обешена је о два ужета AC и CB исте дужине. Свако уже затвара са даском угао β. У тачки D, на одстојању $AD = m$, стоји човек тежине P. Одредити угао α, који затвара

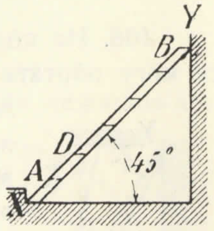


даска у положају равнотеже са хоризонтом и силе S_a и S_b у ужади.

Одг. $tg\,\alpha = \frac{(l-m)\,P}{l\,(p+P)}\,cotg\,\beta$; $S_a = \frac{cos\,(\alpha-\beta)}{sin\,2\beta}\,(P+p)$,

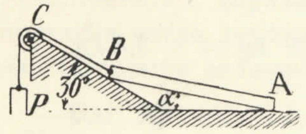
$$S_b = \frac{cos\,(\alpha+\beta)}{sin\,2\beta}\,(P+p)$$

112. На гладак зид наслоњене су, под углом 45° ка хоризонту, лествице AB тежине 20 kg. У тачки D, која је од доњег краја A лествица удаљена за $^1/_3$ њене дужине, налази се човек тежине 60 kg. Срачунати притисак на лежиште A и на зид.



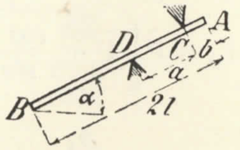
Одг. $X_a = 30\ kg$; $Y_a = -80\ kg$;
$X_b = -30\ kg$; $Y_b = 0$.

113. Хомогена греда AB, тежине 100 kg, ослања се једним крајем на гладак хоризонтални под а другим на глатку раван која са хоризонтом затвара угао 30°. Крај B греде везан је, осим тога, ужетом које је пребачено преко котура C а носи терет P; део ужета BC паралелан је косој равни. Срачунати терет P и притиске N_a и N_b на под и на косу раван.



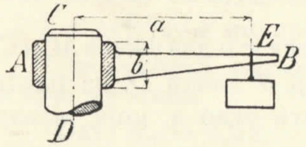
Одг. $P = 25\ kg$; $N_a = 50\ kg$; $N_b = 25\sqrt{3}\ kg = 43{,}3\ kg$.

114. Тешка греда AB лежи на двама ослонцима A и D. Размак ослонаца: $CD = a$; $AC = b$; коефицијенат трења греде о ослонце раван је k. Угао који затвара греда са хоризонтом раван је α. Које услове треба да задовољава дужина греде $2l$, да би остала у равнотежи, кад се њена дебљина може занемарити?



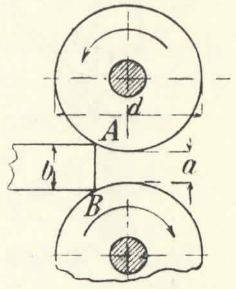
Одг. $2l \geqslant 2b + a + \frac{a}{k}\,tg\,\alpha$

115. Хоризонтална ручица AB има на својем крају A отвор који обухвата вертикалну кружну шипку CD; дужина прстена $b = 2\ cm$. У тачки E на одстојању a од осовине шипке обешен је за ручицу терет P. Одредити, занемарујући тежину ручице AB, одстојање a тако, да би она под утицајем терета P остала у равнотежи, кад је коефицијенат трења између шипке и ручице $k = 0{,}1$.



Одг. $a \geqslant 10\ cm$.

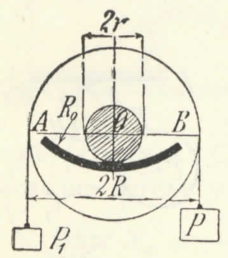
116. Ваљара има два ваљка истог пречника $d = 50\ cm$. Ваљци се обрћу у супротним смеровима, како је стрелицама, на слици показано. Размак између ваљака $a = 0{,}5\ cm$. Колико дебеле b шипке може да ваља ваљара, кад је коефицијенат трења између усијаног гвожђа и ливених ваљака $k = 0{,}1$?



Да би ваљара радила, потребно је да ваљци захвате шипку т. ј. да резултанта реакција и сила трења које дејствују ни шипку у тачкама A и B буде хоризонтална, управљена у десно.

Одг. $b \geqslant 0{,}75\ cm$.

117. На котуру полупречника R учвршћена су симетрично према његовој средњој равни, два чепа полупречника r. Чепови се ослањају о две цилиндричне површине AB са хоризонталним изводницима. Преко котура пребачен је конац за чије су крајеве обешени терети P и P_1, при томе је $P > P_1$. Одредити најмању величину терета P_1 при којој ће котур стајати у равнотежи, претпостављајући, да је коефицијенат трења између чепова и цилиндричних површина AB раван k, а тежина котура са чеповима Q.

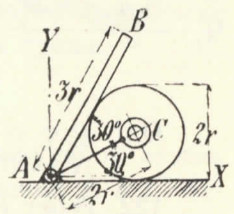


На слици показани положај система, не може бити положај равнотеже, њега треба претходно наћи.

Одг. У положају равнотеже затвара раван, која пролази кроз осовину цилиндра AB и котура, са вертикалом угао, раван углу трења.

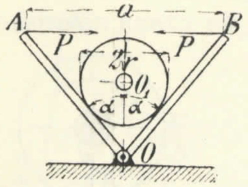
$$P_1 = \frac{P(R\sqrt{1+k^2} - kr) - krQ}{R\sqrt{1+k^2} + kr}$$

118. Штап AB, који се може обртати око хоризонталне осовине A, ослања се на омотач глатког ваљка полупречника r, који лежи на хоризонталној равни а учвршћен је помоћу конца AC за A. Тежина штапа 16 kg, дужина $AB = 3\,r$, $AC = 2\,r$. Срачунати силу S у концу и притисак штапа на зглавак A.



Одг. $S = 4\sqrt{3}\ kg = 6{,}9\ kg$; $X_a = -6\ kg$;
$Y_a = -16 + 2\sqrt{3}\ kg = -12{,}5\ kg$.

119. Између две плоче AO и BO које су спојене зглавком O смештен је ваљак. Осовина O_1 ваљка паралелна је осовини зглавка, обе су пак хоризонталне и леже у једној вертикалној равни. Услед дејства двеју хоризонталних сила P, истих величина а супротног смера, које



нападају тачке A и B, притискују плоче ваљак. Тежина је ваљка Q, његов полупречник r, коефицијенат трења између ваљка и плоча је k, угао $AOB = 2\alpha$, одстојање $AB = a$. Какав услов треба да задовоље величине сила P да би ваљак стајао у равнотежи?

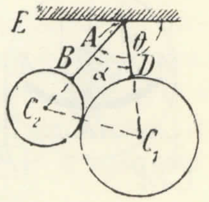
Одг. 1) $tg\,\alpha \geqslant k;\ \frac{r}{a} \cdot \frac{Q}{\sin\alpha + k\cos\alpha} \leqslant P \leqslant \frac{r}{a} \cdot \frac{Q}{\sin\alpha - k\cos\alpha}$,

2) $tg\,\alpha < k;\ P \geqslant \frac{r}{a} \cdot \frac{Q}{\sin\alpha + k\cos\alpha}$.

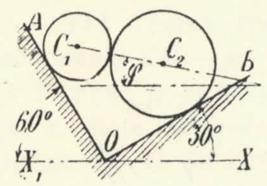
120. Две кугле C_1 и C_2 полупречника R_1 и R_2 а тежине P_1 и P_2 обешене су о тачку A помоћу конца AB и AD; $AB = l_1$; $AD = l_2$. $l_1 + R_1 = l_2 + R_2$; угао $BAD = \alpha$. Одредити угао ϑ, који затвара конац AD са хоризонталном равни AE, силе S_1 и S_2 у концима и међусобни притисак N кугли.

Одг. $tg\,\vartheta = -\frac{P_2 + P_1\cos\alpha}{P_1 \sin\alpha}$; $S_1 = P_1 \frac{\sin\left(\vartheta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$;

$S_2 = P_2 \frac{\sin\left(\vartheta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $N = -P_2 \frac{\cos\vartheta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

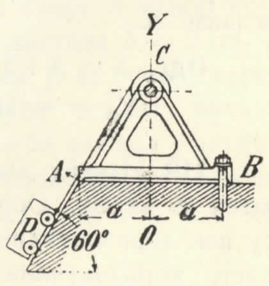


121. Између две глатке косе равни OA и OB налазе се две кугле које се додирују. Кугла са средиштем C_1, полупречника r_1, тежи $P = 10\ kg$, а кугла са средиштем C_2, полупречника r_2, тежи $30\ kg$. Одредити угао φ који затвара права C_1C_2 са хоризонталом XOX_1, притиске N_1 и N_2 кугли на равни, као и међусобни притисак N кугли за случај да је угао $AOX_1 = 60^0$, а угао $BOX = 30^0$.



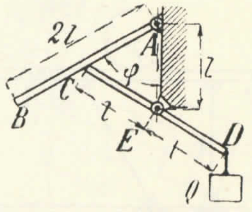
Одг. $tg\,\varphi = 0$; $N_1 = 20\ kg$; $N_2 = 20\sqrt{3}\ kg = 34{,}6\ kg$,
$N = 10\sqrt{3}\ kg = 17{,}3\ kg$.

122. Терет $P = 480\ kg$ одржава се помоћу ужета на косој равни. Коса раван нагнута је под углом 60^0 према хоризонту, а уже, које је паралелно косој равни, обавијено је око непокретне осовине витла ABC. Тежина витла равна је $Q = 240\ kg$ и дејствује по правој CO. Витао ослања се у тачки A на глалак под а у тачки B учвршћен је за под завртњем. Срачунати отпоре лежишта, занемарујући размак између ужета и косе равни.



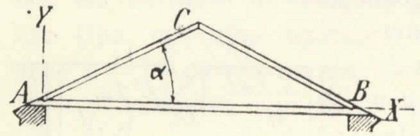
Одг. $X_a = 0$, $Y_a = 480\ kg$; $X_b = 120\sqrt{3}\ kg = 207{,}8\ kg$;
$Y_b = 120\ kg$.

123. Штап AB, дужине $2l$ и тежине P може се обртати око краја A. Он се ослања на штап CD исте дужине $2l$ који се може обртати око свог средишта E. Тачке A и E леже на истој вертикали у одстојању $AE = l$. О крај D обешен је терет $Q = 2P$. Одредити, занемарујући трење, величину угла φ, који штап AB, у положају равнотеже, затвара са вертикалом.



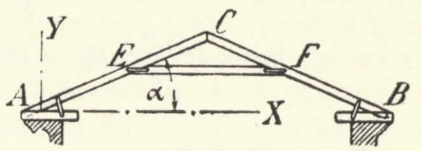
Одг. $\varphi_1 = arc\cos\frac{1}{8}$; $\varphi_2 = 0$.

124. Кровна конструкција састављена је из две греде AC и BC исте дужине $5\ m$. Греде су спојене у тачки C а доњим крајевима усађене су у хоризонталну затегу AB. Нагиб крова $tg\,\alpha = 0{,}5$. Терет који прима свака греда раван је $900\ kg$ и дејствује у њеној средини. Срачунати међусобни притисак греда у тачки C и притисак на затегу у тачки A.



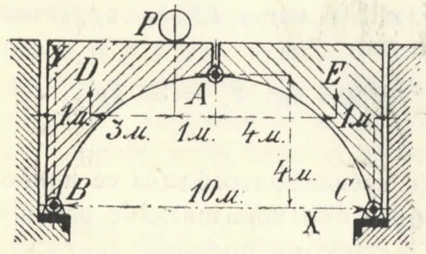
Одг. $X_a = -900\ kg$; $Y_a = -900\ kg$; $X_c = 900\ kg$; $Y_c = 0$.

125. Кровна конструкција састављена је из две греде AC и BC исте дужине $4\ m$. Греде належу слободно на зидове доњим крајевима а спојене су хоризонталном затегом EF. Нагиб крова $tg\,\alpha = 0{,}5$; $AC = 3\,CE$. Терет који прима свака греда, AC и BC раван је $800\ kg$ и дејствује у њеној средини. Срачунати притиске на зид у тачки A и силу S у затези EF, занемарујући трење.



Одг. $X_a = 0$; $Y_a = -800\ kg$; $S = 2400\ kg$.

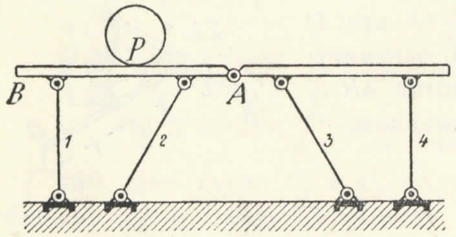
126. Мост је састављен из два дела, који су међусобом везани зглавком A а за обалне стубове учвршћени су зглавцима B и C. Тежина сваког дела моста равна је $4\ t$; њихова тежишта су у D и E. На мосту налази се терет $P = 2\ t$. Димензије дате су на слици. Одредити притисак у зглавку A и отпоре у B и C.



За решавање задатка могу се написати три услова равнотеже за сваки део моста AB

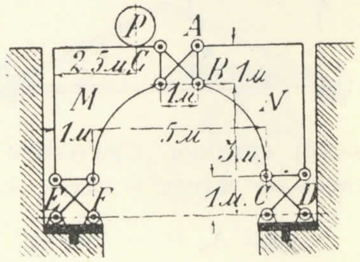
и AC одвојено, при томе треба имати у виду, да је међусобни утицај делова по величини исти али супротног смера; на тај начин добићемо шест једначина за одређивање шест непознатих.

Одг. $X_a = 2\ t;\ X_b = -X_c = 2\ t;\ Y_a = 0{,}8\ t;\ Y_b = 5{,}2\ t;$
$Y_c = 4{,}8\ t.$



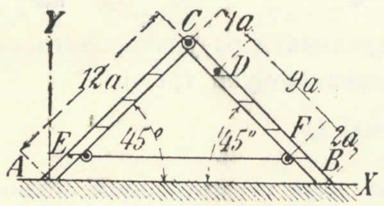
127. Две хоризонталне греде, спојене су међусобом зглавком A а за под везане су зглавкасто штаповима 1, 2, 3, 4. Одредити, графички, задржавајући размере слике, силе у тим штаповима, које изазива вертикалан терет P који дејствује на греди AB.

128. Мост је састављен из два једнака дела M и N који су спојени међусобом и са непокретним лежиштима помоћу шест штапова. Штапови су нагнути под углом 45° према хоризонту а снабдевени су на крајевима зглавцима. Димензије дате су на слици. У тачки G смештен је терет P. Одредити силе у тима штаповима, које су проузроковане дејством терета P.



Одг. $R_a = 0;\ R_b = P\,\frac{\sqrt{2}}{3};\ R_c = 0;$

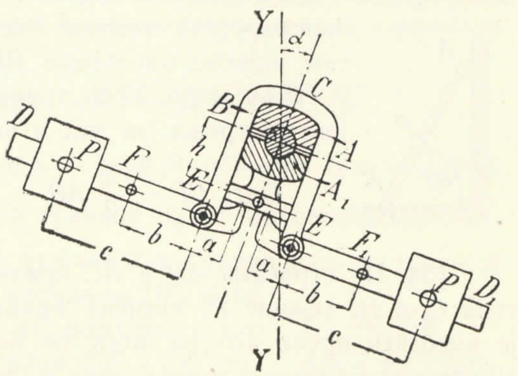
$$R_d = P\,\frac{\sqrt{2}}{3};\ R_e = P\,\frac{\sqrt{2}}{2};\ R_f = P\,\frac{\sqrt{2}}{6}.$$



129. На глатком хоризонталном поду смештене су покретне лествице састављене из два дела AC и BC; сваки је део дужине 12 m и тежине 18 kg. Делови су спојени зглавком C и ужетом EF. Одстојање $BF = AE = 2\ m$. У тачки D, на одстојању $CD = 1\ m$, стоји човек тежине 72 kg. Срачунати отпоре пода, притисак у зглавку и силу S у ужету EF, кад су углови: $BAC = ABC = 45°$.

Одг. $R_a = 51\ kg;\ R_b = 57\ kg;\ X_c = 50{,}4\ kg;\ Y_c = 33\ kg;$
$S = 50{,}4\ kg.$

130. За одређивање коефицијента трења употребљава се прибор који се намешта на вратило, које се обрће око хоризонталне осовине. Прибор је састављен из лежишта AA_1, његове обе половине притискује на вратило узенгија C и две полуге D и D_1 чији кратки препусти, дужине $a = 30\ mm$, преносе на доњу половину A_1 лежишта притисак, изазван теретима P. Тежина целокупног прибора т. ј. лежишта, узенгије, полуга и терета, равна је $Q = 40\ kg$, његово тежиште налази се на одстојању $h = 120\ mm$ испод осовине вратила; тежина сваке полуге $p = 7\ kg$ дејствује у тачки D на одстојању $b = 510\ mm$ од осовине E полуге. Терети P, сваки по 8 kg, дејствују у тачкама, на одстојању $c = 900\ mm$ од осовине E. Тежина q доње половине A_1 лежишта равна је 6 kg. При обртању вратила отклања се осовина $Y - Y$ прибора за угао $\alpha = 5°$ од вертикале. Одредити коефицијенат трења k између вратила и лежишта, кад је пречник вратила $d = 100\ mm$.

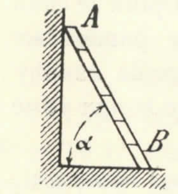


Коефицијенат k добијамо из једначине:

$$\left\{(2\,\frac{pb + Pc}{a} - q) + [\,2\,\frac{pb + Pc}{a} + (Q - q)]\right\} k\,\frac{d}{2} = Q\,h\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

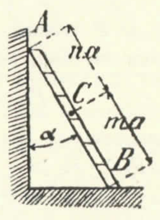
Одг. $k = 0{,}0057.$

131. Лествице AB тежине P ослоњене су на гладак вертикални зид и храпави хоризонтални под. Сила трења у тачки B није већа од kR, где је k коефицијенат трења, а R нормални отпор пода. Под каквим углом према поду треба ослонити лествице да би се по њима попео до краја A човек тежине p?



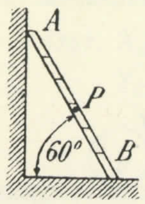
Одг. $\mathrm{tg}\,\alpha \geqslant \frac{P + 2p}{2k(P + p)}.$

132. На вертикални зид ослоњене су лествице AB које се доњим крајем ослањају о хоризонтални под. Коефицијенат трења лествица о зид раван је k_1 а о под k_2. Тежина лествица заједно са човеком који се на њима налази равна је p и дејствује у тачки C. Тачка C дели дужину лествица у односу $m : n$. Одредити највећи угао α који затварају лествице са зидом у положају равнотеже као и отпор N_a и N_b пода зу ту величину угла α.



Одг. $tg\,\alpha = \frac{(m + n)\,k_2}{m - n\,k_1 k_2};\ R_a = \frac{pk_2}{1 + k_1 k_2};\ R_b = \frac{p}{1 + k_1 k_2}.$

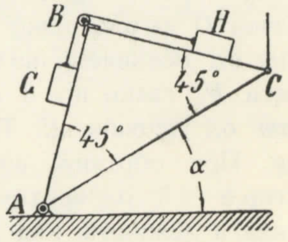
133. Лествице AB ослоњене су на храпав зид и храпав под а затварају са последњим угао од 60^0. На лествицама креће се терет P.



Занемарујући тежину лествица, одредити, графичким путем највеће одстојање BP, при којем ће лествице остати у стању мира. Угао трења, чији *tangens* зовемо коефицијентом трења, за зид и под раван је 15^0.

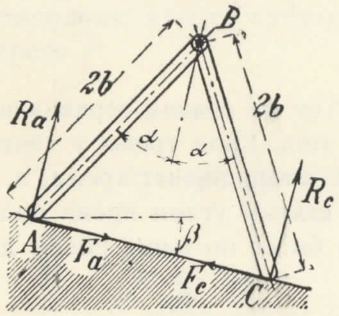
Одг. $BP = \frac{1}{2}\, AB$.

134. На странама AB и BC призме ABC смештена су два једнака тела G и H, тежине P, спојена концем. Конац је пребачен преко котура који се налази у B. Коефицијенат трења између тела и страна призме раван је k. Углови: $BAC = BCA = 45^0$. Колики треба да је угао α, између стране AC и хоризонтале, да би се тело G почело спуштати?



Одг. $tg\,\alpha = k$.

135. Двокрилне лествице са једнаким крацима AB и BC који су спојени зглавком у B, постављене су на косу раван која је према хоризонту нагнута под углом β. Занемарујући трење у зглавку одредити 1) највећи и најмањи угао расклапања 2α при којем је могућа равнотежа; 2) услове, при којима је сила трења у тачки A у положају равнотеже равна нули. Коефицијенат трења између лествица и равнине једнак је k, при томе је $k > tg\,\beta$.



Водећи рачуна о томе, да је при малим вредностима могуће претурање лествица око тачке C у десно, налазимо: $\mathrm{tg}\,\alpha \geqslant 0{,}5\ \mathrm{tg}\,\beta$. Затим добијамо из једначине момената у односу тачака A и C:

$$R_a = P\ (\cos\beta - 0{,}5\ \sin\beta\,\mathrm{cotg}\,\alpha);\ R_c = P\,(\cos\beta + 0{,}5\,\sin\beta\ \mathrm{cotg}\,\alpha),$$

где је P тежина како једног тако и другог крака. Даље, посматрајући равнотежу сваког крака засебно, добијамо, из једначине момената у односу на тачку B:

$$F_a = -\ P\,(\sin\beta - 0{,}5\cos\beta\ \mathrm{tg}\,\alpha);\ F_c = P\ (\sin\beta + 0{,}5\ \cos\beta\ \mathrm{tg}\,\alpha).$$

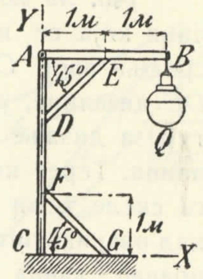
Равнотежа је могућа само при таковим величинама α, при којима је $kR_a > F_a > -\,kR_a$ и $kR_c > F_c > -\,kR_c$ отуд добијамо четири неједначине, које садрже $\mathrm{tg}\,\alpha$ у другом степену, облика $mx^2 + nx + p \gtreqless 0$, где је са x обележено $\mathrm{tg}\,\alpha$, при томе је $m > 0$.

Нека су x_1 и x_2 корепи једначине: $mx^2 + nx + p = 0$, где је $x_1 > x_2$, онда се горње неједначине могу преставити у виду: $m(x - x_1)\,(x - x_2) \lesseqgtr 0$. Горњи знак неједнакости задовољен је при $x > x_1$ и $x < x_2$, доњи при $x_1 > x > x_2$. На тај начин добијамо осам неједначина које нам одређује границе за $tg\,\alpha$; за изналажење њихово ставићемо $tg\,\beta = \mu k$ где је, у складу са условима, $1 > \mu > 0$. Негативне вредности немају значаја у датом задатку. Највећа од позитивних доњих граница претставља тражено $tg\,\alpha\ min$, а најмања од горњих граница тражену вредност $tg\,\alpha\ max$.

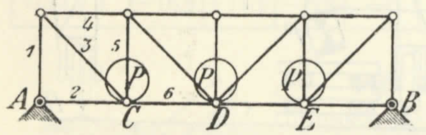
Одг. 1) $\frac{1}{2}\ tg\,\beta \leqslant tg\,\alpha \leqslant k - tg\,\beta + \sqrt{(k - tg\,\beta)^2 + k\,tg\,\beta}$;

2) при $R_c = 0$, када је $tg\,\alpha = \frac{1}{2}\ tg\ \beta$, или при $tg\,\alpha = 2\ tg\ \beta$, само када ова вредност не прелази границе првог одговора.

136. Хоризонтална греда AB дужине $2\ m$, учвршћена у тачки A за вертикални зуб AC и подупрта косником DE, носи на крају терет $Q = 500\ kg$. Стуб AC подупрт је косником FG; $AE = CG = 1\ m$. Косници DE и FG нагнути су под углом 45^0 ка хоризонтали. Срачунати силе S_e и S_f у косницима DE и FG и отпор пода у тачки C.



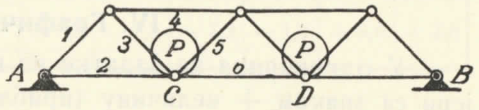
Одг. $S_e = 1400\ kg$; $S_f = 1400\ kg$;
$X_c = 1000\ kg$; $Y_c = -\ 500\ kg$.



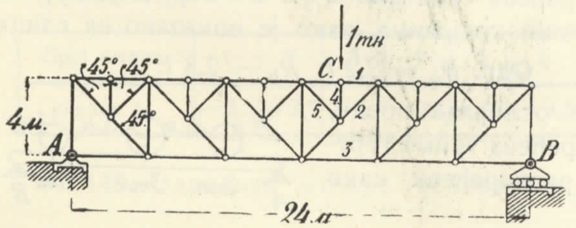
137. Код датог решеткастог носача оптерећени су чворови C, D и E истим теретом $P = 10\ t$. Дијагонале затварају са хоризонталом углове 45^0. Одредити, рачуном, силе у штаповима 1, 2, 3, 4, 5 и 6 изазване датим оптерећењем.

Одг. $S_1 = -\ 15\ t$ притисак; $S_2 = 0$, $S_3 = +\ 21\ t$ — затезање;
$S_4 = -\ 15\ t$; $S_5 = -\ 5\ t$; $S_6 = +\ 15\ t$.

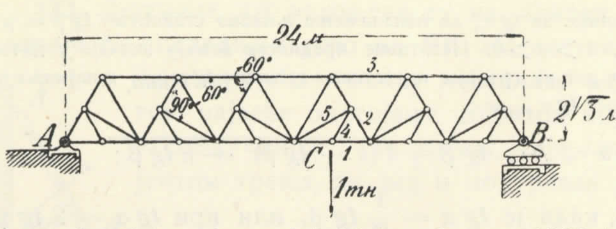
138. Решеткасти носач оптерећен је у чворовима C и D теретима $P = 10\ t$; нагнути штапови затварају са хоризонталом углове 45^0. Наћи, рачуном, силе у штаповима 1, 2, 3, 4, 5 и 6 које су проузроковане датим оптерећењем.



Одг. $S_1 = -14\ t$; $S_2 = +10\ t$; $S_3 = +14\ t$, $S_4 = -20\ t$, $S_5 = 0$;
$S_6 = +20\ t$.



139. Два решеткаста носача, са истим пољима, имају у A непокретно а у B покретно лежиште; Срачунати силе у штаповима 1, 2, 3, 4 и 5 тих носача које су проузро-

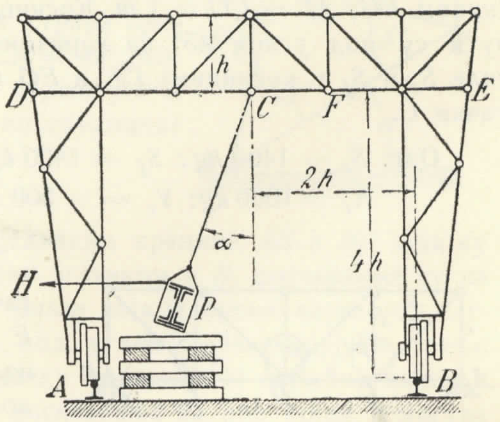


коване силом $P = 1\,t$ која дејствује у чвору C. Димензије носача дате су на слици.

Одг. У првој решетки: $S_1 = -1750\ kg$; $S_2 = +825\ kg.$; $S_3 = +1166\ kg$; $S_4 = -1000\ kg$; $S_5 = +705\ kg$.

У другој решетки: $S_1 = +1687\ kg$; $S_2 = -675\ kg$; $S_3 = -1350\ kg$; $S_4 = +1156\ kg$; $S_5 = -1000\ kg$.

140. За монтажу моста, постављена је привремена дрвена дизалица која се на точковима може померати по шинама A и B. За средњи чвор C доњег појаса DE дизалице, учвршћен је котур за дизање терета помоћу ланца. Терет који треба дићи са скеле тежи $5\,t$, у тренутку кад овај напушта скелу затвара правац ланца са вертикалом угао $\alpha = 20^0 = arc\ tg = 0{,}364$; да би се спречило клаћење терета придржава га хоризонтално уже PH. Претпостављајући, да хоризонталну компоненту силе у ланцу прима само десна шина B, одредити силу S_1 у хоризонталном штапу CF у тренутку кад терет напушта скелу и упоредити га са оном силом S_2 која дејствује у њему, при углу $\alpha = 0$. Димензије дате су на слици.

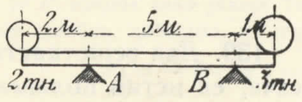


Одг. $S_1 = 10{,}47\ t$; $S_2 = 5\ t$.

IV. Графичка Статика.

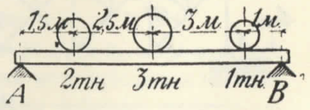
У одговорима на задатке из графичке статике, изражавају бројеви са знаком $+$ величину (приближну) затежуће силе а бројеви са знаком $-$ величину (приближну) притискујуће силе.

141. Срачунати отпоре ослонаца греде са неједнаким препустима. Дужина греде $8\ m$, распон $5\ m$. Греда је оптерећена теретима $2\,t$ и $3\,t$ који дејствују на њеним крајевима, како је показано на слици.



Одг. $R_a = 2{,}2\ t$; $R_b = 2{,}8\ t$.

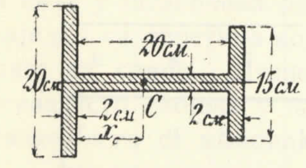
142. Срачунати отпоре ослонаца греде, распона $8\ m$. Греда је оптерећена трима теретима $2\,t$, $3\,t$ и $1\,t$ који су распоређени, како је показано на слици.



Одг. $R_a = 3{,}25\ t$; $R_b = 2{,}75\ t$.

143. Срачунати отпоре ослонаца греде са препустом. Дужина греде $8\ m$, њен распон $6\ m$. Греда је оптерећена теретима: $1\,t$, $0{,}8\,t$ и $0{,}6\,t$ који су распоређени, како је показано на слици.

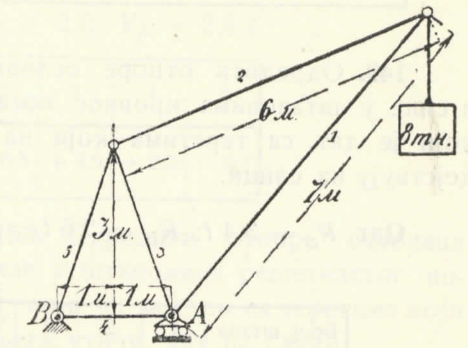
Одг. $R_a = 0{,}73\ t$; $R_b = 1{,}67\ t$.



144. Одредити положај тежишта двогубог те профила, димензије његове дате су на слици.

Одг. $x_c = 9\ cm$.

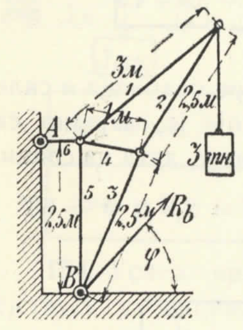
145. Одредити отпоре ослонца и силе у штаповима дизалице дате на слици кад је оптерећена теретом од $8\,t$.



Одг. $R_a = 26\,t$; $R_b = 18\,t$ на ниже.

Бр. штапа	1	2	3	4	5
сила у t	$-16{,}4$	$+11{,}4$	$-14{,}4$	-6	$+19$

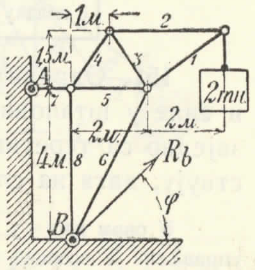
146. Одредити отпоре ослонаца и силе у штаповима дизалице дате на слици кад је оптерећена теретом од $3\,t$.



Одг. $R_a = 2{,}8\ t$; $R_b = 4{,}1\ t$; $\varphi = 47^0$.

Број штапа	1	2	3	4	5	6
сила у t	$+5{,}3$	$-7{,}5$	$-7{,}2$	$-1{,}3$	$+3{,}6$	$+2{,}8$

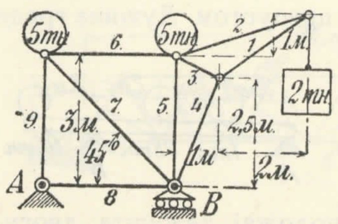
147. Одредити отпоре ослонаца и силе у штаповима дизалице дате на слици кад је оптерећена теретом од $2\,t$.



Одг. $R_a = 2\ t$; $R_b = 2{,}8\ t$; $\varphi = 45^0$.

Број штапа	1	2	3	4	5	6	7	8
сила у t	$-3{,}3$	$+2{,}7$	$-2{,}4$	$+2{,}4$	$+0{,}7$	$-4{,}5$	$+2$	$+2$

148. Одредити отпоре ослонаца и силе у штаповима дизалице,



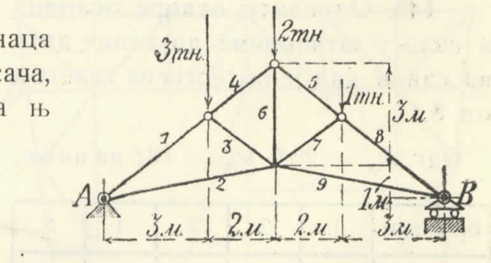
која је, заједно са теретима који на њу утичу, дата на слици.

Одг. $R_a = 3\ t;\ R_b = 9\ t.$

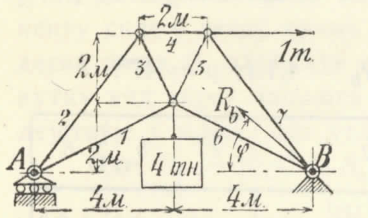
Број штапа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
сила у t	— 6,2	+ 5,2	— 3,4	— 5,4	— 2	+ 2	— 2,8	0	— 3

149. Одредити отпоре ослонаца и силе у штаповима кровног носача, који је дат, са теретима који на њ дејствују на слици.

Одг. $R_a = 3{,}4\ t;\ R_b = 2{,}6\ t.$



Број штапа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
сила у t	— 7,2	+ 5,7	— 2,5	— 4,6	— 4,6	+ 3,9	— 0,8	— 5,6	+ 4,5

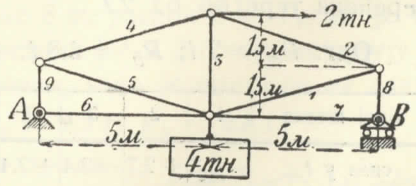


150. Одредити отпоре ослонаца и силе у штаповима решетке, која је, заједно са силама које на њу дејствују, дата на слици.

Одг. $R_a = 1{,}5\ t;\ R_b = 2{,}8\ t;\ \varphi = 68^0$

Број штапа	1	2	3	4	5	6	7
сила у t	+ 2	— 2,9	+ 2,6	— 2,9	+ 3,5	+ 1,5	— 4

151. Одредити отпоре ослонаца и силе у штаповима решетке, која је, заједно са теретима који на њу дејствују, дата на слици.

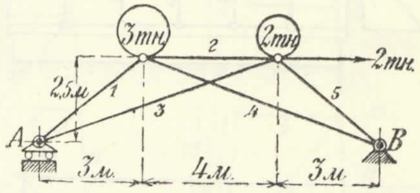


У овом као и у двема следећим задацима, управљена је осовина OX по хоризонталној правој AB, а осовина OY на више.

Одг. $X_a = -2\ t;\ Y_a = 1{,}4\ t;\ X_b = 0;\ Y_b = 2{,}6\ t.$

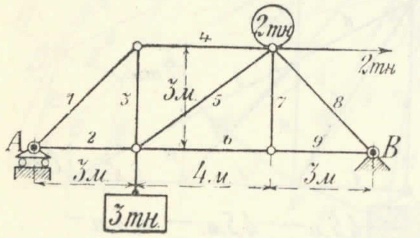
Број штапа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
сила у t	+ 4,5	— 4,5	+ 2,0	— 2,4	+ 2,4	+ 2,0	0	— 2,6	— 1,4

152. Одредити отпоре ослонаца и силе у штаповима решетке, која је, заједно са теретима који на њу утичу, дата на слици. Штапови 3 и 4 нису зглавкасто спојени у њиној пресечној тачки, него се мимоилазе.



Одг. $X_a = 0;\ Y_a = 2{,}2\ t;\ X_b = -2\ t;\ Y_b = 2{,}8\ t.$

Број штапа	1	2	3	4	5
сила у t	— 6,0	— 6,8	+ 4,9	+ 2,5	— 5,7

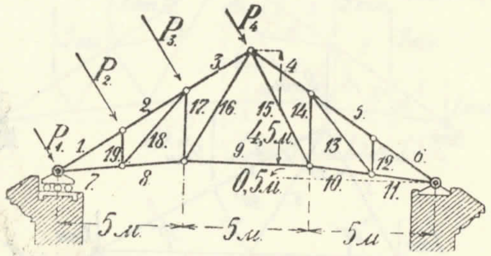


153. Одредити отпоре ослонаца и силе у штаповима решеткастог носача, који је, заједно са теретима који на њега утичу, дат на слици.

Одг. $X_a = 0;\ Y_a = 2{,}1\ t;\ X_b = -2\ t;$ $Y_b = 2{,}9\ t.$

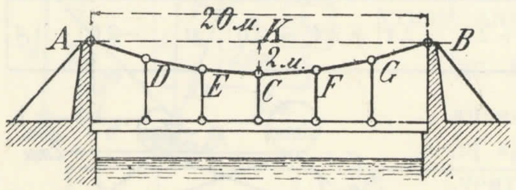
Број штапа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
сила у t	— 3,0	+ 2,1	+ 2,1	— 2,1	+ 1,5	+ 0,9	0	— 4,1	+ 0,9

154. Услед притиска ветра дејствују у чворовима кровног решеткастог носача, са пољима исте дужине, силе које су управне на кровну површину: $P_1 = P_4 = 312{,}5\ kg$ и $P_2 = P_3 = 625\ kg$. Срачунати силе у штаповима решеткастог носача услед дејства ових сила. Димензије решетке дате су на слици.



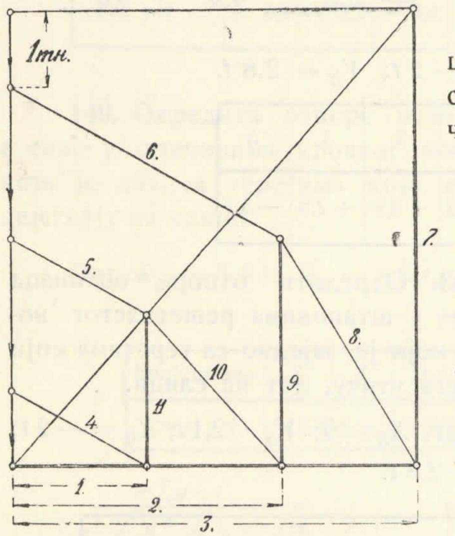
Одг. $S_1 = -1\ 530\ kg;\ S_2 = -1\ 950\ kg;\ S_3 = -1\ 560\ kg;\ S_4 = S_5 = S_6 = -980\ kg;\ S_7 = +1\ 100\ kg;\ S_8 = +440\ kg;\ S_9 = -220\ kg;\ S_{10} = S_{11} = -240\ kg;\ S_{12} = S_{13} = S_{14} = 0;\ S_{15} = -40\ kg;\ S_{16} = +1\ 330\ kg;\ S_{17} = -1\ 120\ kg;\ S_{18} = +1\ 060\ kg;\ S_{19} = -760\ kg.$

155. Ланчани мост, дужине 20 *m* са стрелом $CK = 2\ m$; оптерећен је скроз равномерно расподељеним теретом 1,6 *t* по дужном метру. Одредити силу у средњем пресеку *C* ланца, знајући, да је крива, на којој леже ћошкови ланчаног полигона *A*, *D*, *E*, *C*, *F*, *G*, *B*, парабола.

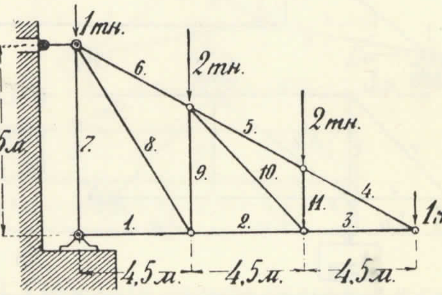


Одг. 20 *t*.

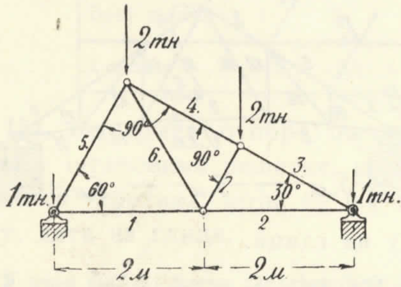
156. Одредити графички силе у штаповима конзолног решеткастог носача, чије су димензије, смер и величина сила, дате на слици.



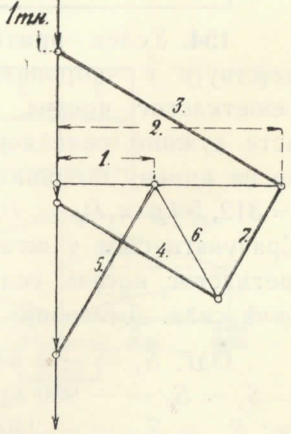
Одг.



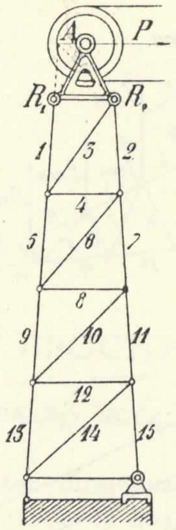
157. Одредити графички силе у штаповима тестерастог кровног носача, који је, заједно са теретима који на њ утичу, дат на слици.



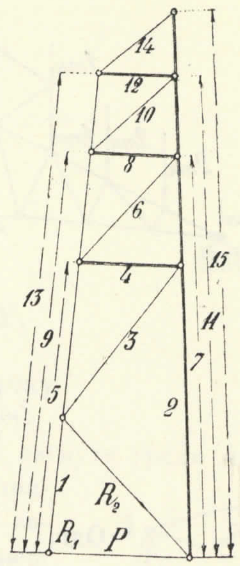
Одг.



158. Одредити графички силе у штаповима решеткасте куле за коју је учвршћен точак трансмисије. Силе у кајишевима изазивају у лежишту *A* хоризонталну силу *P*. Димензије решетке узети из слике.

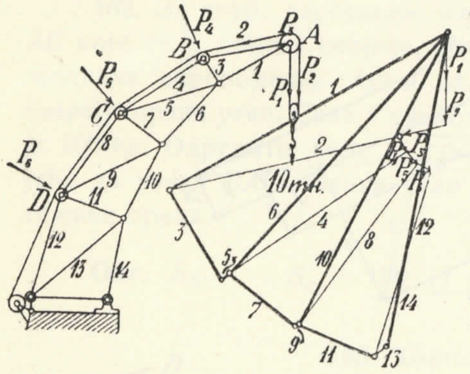


Одг.



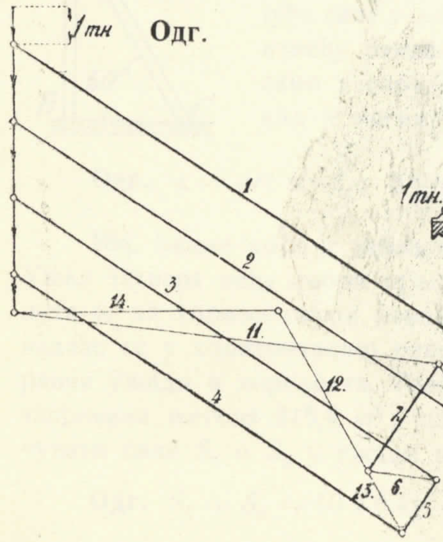
159. Одредити графички силе у штаповима решеткасте понтонске дизалице за случај када је о непокретни котур обешен терет а уже пребачено преко непокретних котура *A*, *B*, *C* и *D*. На чвор *A* утичу силе $P_1 = P_2 = P_3$ а на чворове *B*, *C* и *D* силе $P_4 = P_5 = P_6\ P_1 > P_4$. Димензије решетке, правац и смер сила узети из цртежа.

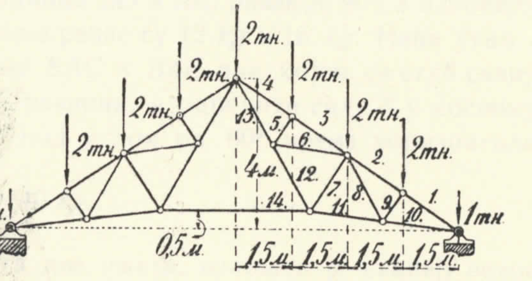
Одг.

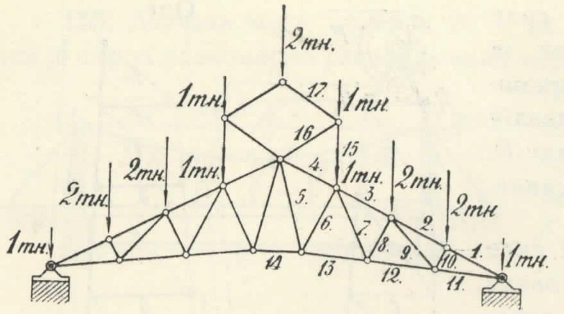


160. Одредити графички силе у штаповима Polonceau-носача, који је, заједно са теретима који на њ утичу, дат на слици.

Одг.

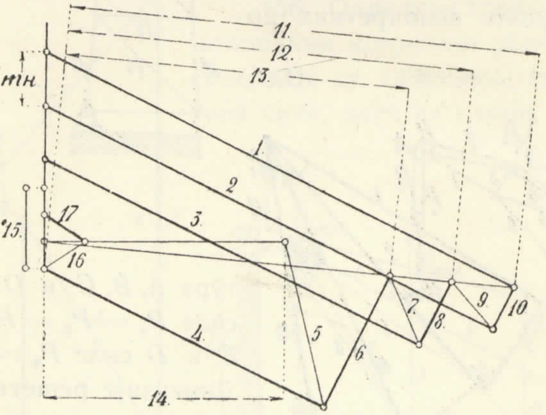






161. Одредити, графички, силе у штаповима Polonceau-носача са латерном. Димензије решетке, смер и величину сила узети из слике.

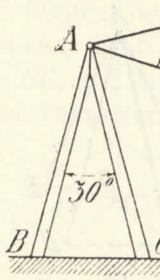
Одг.



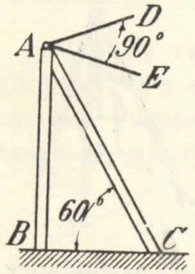
СТАТИКА У ПРОСТОРУ.

V. Силе које нападају исту тачку.

162. За стуб, састављен из две подједнако нагнуте греде *AB* и *AC* које су у темену спојене, учвршћена су два хоризонтална спроводника *AD* и *AE* који међусобом затварају прави угао. Сила у сваком спроводнику равна је 100 *kg*. Одредити силе у гредама, претпостављајући да раван *BAC* полови угао *DAE*, а занемарујући тежине греда.



Одг. $S_b = - S_c = 100 \ (1 + \sqrt{3}) \ kg = 273 \ kg$.

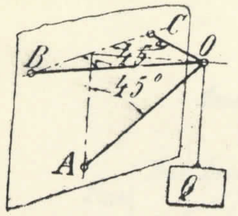


163. Хоризонтални спроводници телеграфске линије учвршћени су за вертикални стуб *AB*, који је подупрт косником *AC*. Угао *DAE*, који затварају међусобом спроводници *AD* и *AE*, раван је 90^0, а одговарајуће силе у њима равне су 12 *kg* и 16 *kg*. Наћи угао α између равнине *BAC* и *BAE* при којем се стуб савија само у својој равнини, и одредити силу *S* у коснику, кад је нагнут под углом од 60^0 према хоризонтали.

Одг. $\alpha = arc \ sin \ \frac{3}{5}; \ \ S = 40 \ kg.$

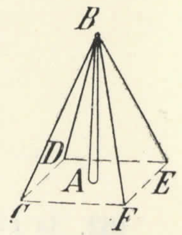
164. Балон који је везан са два ужета, изложен је утицају ветра. Ужад затвара међу собом прави угао. Раван коју образује ужад, нагнута је ка хоризонталној равни за угао 60^0. Резултанта притиска ветра налази се у хоризонталној равни а дејствује управно на пресечну праву равни ужади и хоризонта. Тежина балона са гасом у њему је 250 *kg*; запремина његова 215,4 m^3; тежина метра кубног ваздуха 1,3 *kg*. Срачунати силе S_1 и S_2 у ужади и притисак *P* ветра на балон.

Одг. $S_1 = S_2 = 10 \sqrt{6} \ kg = 24{,}5 \ kg; \ P = 10 \sqrt{3} \ kg = 17{,}3 \ kg.$



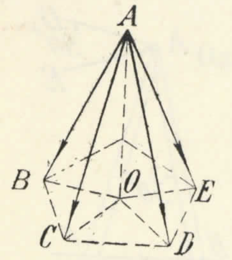
165. Терет $Q = 100\ kg$ обешен је о чвор O у којем су везани крај штапа AO и два хоризонтална ужета BO и CO исте дужине: $\sphericalangle CBO = \sphericalangle BCO = 45^0$. Штап AO нагнут је под углом 45^0 ка хоризонту. Срачунати силу S која дејствује у штапу AO и T у ужади BO и CO.

Одг. $S = 141\ kg$; $T = 71\ kg$.



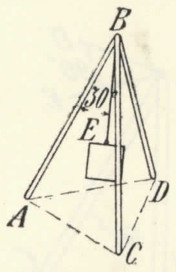
166. Четири симетрично распоређена ужад одржавају у вертикалном положају стуб AB. Угао који затварају два суседна ужета раван је 60^0. Одредити притисак стуба на земљу кад је сила у сваком ужету равна $100\ kg$ а тежина самог стуба $200\ kg$.

Одг. $200\ (1 + \sqrt{2}) = 428\ kg$.



167. Четири ивице AB, AC, AD и AE правилне петоугаоне пирамиде претстављају по величини и правцу четири силе; размера $1\ m = 1\ kg$. Нека је висина пирамиде $AO = 10\ m$ и полупречник описаног круга око основе $OC = 4{,}5\ m$; наћи резултанту R и растојање x од центра O пресечне тачке њене нападне линије са равни основе.

Одг. $R = 40{,}25\ kg$; $x = 1{,}125\ m$.



168. О теме B троношца $ABCD$ обешен је терет E тежине $10\ kg$. Ноге троношца имају исту дужину, а учвршћене су на хоризонталном поду и затварају међу собом исте углове. Одредити силе у ногама, кад је познато да оне затварају са ужетом BE угао 30^0.

Одг. $\dfrac{20\sqrt{3}}{9}\ kg = 3{,}85\ kg$.

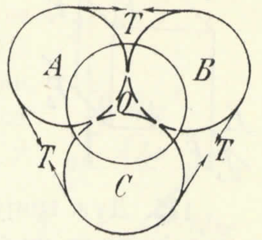
169. На глатком поду стоји троножни статив. Доњи крајеви ногу везани су концима тако, да ноге статива и конци образују правилан тетраедар. О највишу тачку статива обешен је терет P. Одредити притиске R ногу на под и силе S у концима, све као функције терета P.

Одг. $R = \dfrac{1}{3}\ P$; $S = \dfrac{P}{3\sqrt{6}}$.

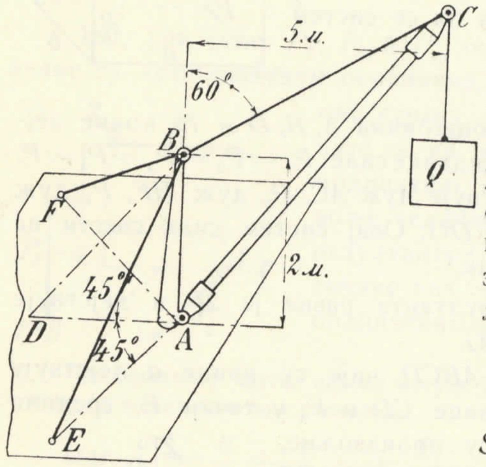
170. Решити предњи задатак, за случај, када су ноге статива везане концима у срединама ногу а не на крајевима, узимајући при томе у обзир и сопствену тежину p сваке ноге која дејствује у њеној средини.

Одг. $R = \dfrac{1}{3}\ P + p$; $S = \dfrac{2P + 3p}{18}\sqrt{6}$.

171. Четири кугле A, B, C и O исте тежине $10\ kg$ и истог полупречника $5\ cm$ образују пирамиду. Кугле A, B и C положене су на глатку хоризонталну раван тако, да се узајамно додирују а обавијене су концем који лежи у екваторијалној равнини. Четврта кугла лежи на доњим трима. Одредити силу S у концу услед притиска горње кугле.



Одг. $S = \dfrac{10}{3\sqrt{6}}\ kg = 1{,}36\ kg$.

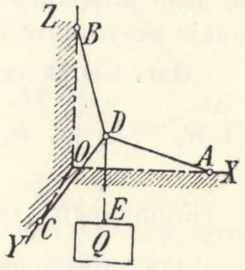


172. Покретна дизалица конструисана као што је показано на слици, носи терет $Q = 2\ t$. $AB = AE = AF = 2\ m$; угао $EAF = 90^0$. Раван ABC дизалице полови правоугаони рогаљ $EABF$. Одредити силу S_1 у стубу AB као и силе S_2, S_3 и S_4 које затежу ужад BC, BE и BF, занемарујући тежине саставних делова дизалице.

Одг. $S_1 = \dfrac{10}{\sqrt{2}} - \dfrac{5}{\sqrt{3}}\ t = 4{,}19\ t$,

$S_2 = \dfrac{10}{\sqrt{3}}\ t = 5{,}76\ t$, $S_3 = S_4 = 5\ t$.

173. За тачке A, B и C које се налазе на одстојању l од почетка координата а на координатним осовинама правоугаоног координатног система, учвршћени су конци: $AD = BD = CD = L$ који су везани у тачки D чије су координате:



$$x = y = z = \frac{1}{3}\,(l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}).$$

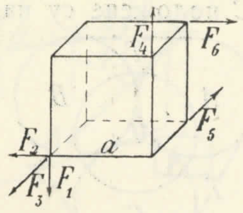
У тој тачки обешен је терет Q. Одредити силе S_1, S_2, S_3 у концима, претпостављајући да је

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\,l < L < l.$$

Одг. $S_1 = S_2 = Q\,\dfrac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}\,.\,L$;

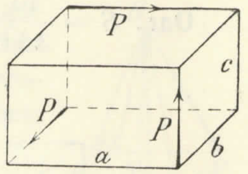
$$S_3 = Q\,.\,\frac{l + 2\sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}\,.\,L.$$

VI. Свођење система сила на простији облик.



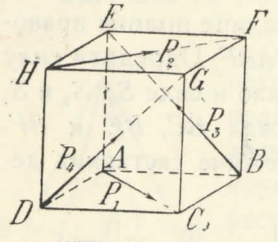
174. У ћошковима коцке дејствују силе тако као што је показано на слици. Које услове треба да задовоље силе F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 и F_6 да би стајале у равнотежи?

Одг. $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_4 = F_6$.



175. Дуж трију ивица правоугаоног паралелопипеда, које се не секу и нису паралелне, дејствују три силе исте величине P. Каква зависност треба да постоји између ивица a, b и c да би се систем сила редуковао на једну силу?

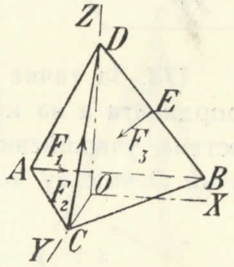
Одг. $b = a - c$.



176. У ћошковима A, B, D и H коцке дејствују четири једнаке силе: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$. Сила P_1 дејствује дуж AC, P_2 дуж HF, P_3 дуж BE и P_3 дуж DG. Овај систем сила свести на простији облик.

Одг. Резултанта равна је $2P$ и дејствује дуж праве DG.

177. На правилном тетраедру $ABCD$ чије су ивице a дејствују силе: F_1 дуж ивице AB, F_2 дуж ивице CD и F_3 у тачки E, средини ивице BD. Величине сила F_1 и F_2 су произвољне, а пројекције силе F_3 на осовине OX, OY, OZ равне су: $-\frac{F_2}{2}; + F_2\frac{5\sqrt{3}}{6} - F_2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Дали се своди овај систем сила на једну резултанту, ако се своди, наћи координате y и z тачке пресека нападне линије резултанте са равнином YOZ.

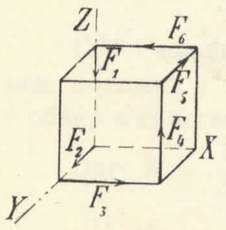


Одг. Своди се, пошто су: $R_x = F_1 - 0{,}5\ F_2$;

$$R_y = F_2\frac{\sqrt{3}}{2};\quad R_z = 0;\quad M_x = 0;\quad M_y = 0;\quad M_z = a\frac{\sqrt{3}}{6}(F_1 + F_2).$$

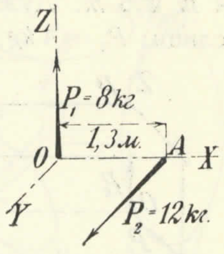
Координате тачке: $y = -\frac{M_z}{R_x} = -\frac{a\sqrt{3}\ (F_1 + F_2)}{6F_1 - 3F_2}$; $z = 0$.

178. Дуж ивица коцке, чија је ивица 5 *cm* дужине, дејствују, како је показано на слици, шест једнаких сила свака по 5 *kg*. Свести тај систем сила на простији.



Одг. Систем се своди на спрег чији је моменат $M = 20\sqrt{3}\ kgcm$; осовина његова затвара са координатним осовинама углове: $\cos\alpha = -\cos\beta = -\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

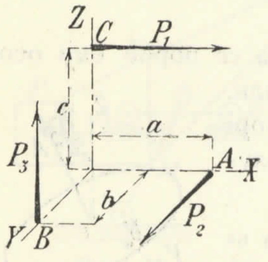
179. Систем сила: $P_1 = 8\ kg$, која дејствује по осовини OZ, и $P_2 = 12\ kg$, која дејствује паралелно осовини OY са смеровима који су дати на слици, где је $AO = 1{,}3$ *m* свести на канонски облик т. ј. на *dynami*. Наћи углове α, β и γ које затвара централна осовина са координатним осовинама као и координате x и y њене продорне тачке са равнином XOY.



Одг. $R = 14{,}42\ kg$; $M = 8{,}65\ kgm$; $\alpha = 90^0$;

$$\beta = arc\ tg\frac{2}{3};\ \gamma = arc\ tg\frac{3}{2};\ x = 0{,}9\,m;\ y = 0.$$

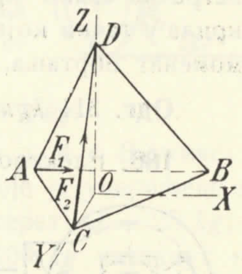
180. Три силе: P_1, P_2 и P_3 леже у координатним равнима и паралелне су координатним осовинама, њихов смер може бити на ову или ону страну. Њине нападне тачке A, B и C налазе се на датим одстојањима, a, b и c од координатног почетка. Који услов треба да задовоље величине тих сила, да би се свеле на једну резултанту? Који услов треба да задовоље величине тих сила, да би *dynama* пролазила координатним почетком?



При решавању другог питања могуће је, избећи једначину централне осовине, ако се пође од њених почетних елемената.

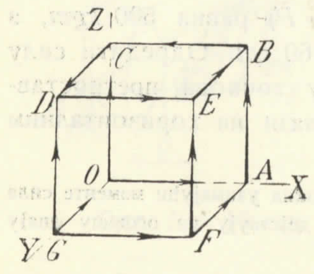
Одг. $\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0$; $\frac{P_1}{bP_3} = \frac{P_2}{cP_1} = \frac{P_3}{aP_2}$.

181. На правилном тетраедру $ABCD$ са ивицама дужине a, дејствују, сила F_1 дуж ивице AB и сила F_2 дуж ивице CD. Наћи координате x и y продорне тачке централне осовине у равни XOY.



Одг. $x = -\frac{a}{2}\,\frac{F_1F_2}{F_1^2 + F_2^2}$;

$$y = \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\frac{2F_2^2 - F_1^2}{F_1^2 + F_2^2}.$$

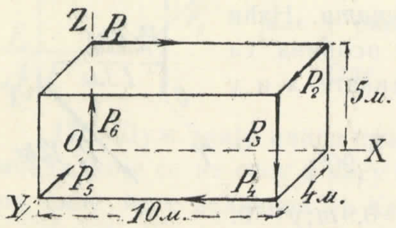


182. Дуж ивица коцке дејствују, као што је показано на слици, дванаест међусобом једнаких сила P. Свести тај систем сила на *dynami* и одредити координате x и y продорне тачке централне осовине у равни XOY. Дужина ивице коцке равна је a.

Одг. $R = 2\,P\sqrt{6}$; $M = -\frac{2}{3}\,Pa\ \sqrt{6}$;

$$\cos\alpha = -\cos\ \beta = \frac{1}{2}\cos\gamma = \frac{1}{6}\sqrt{6}.\ x = y = \frac{2}{3}\,a.$$

183. Дат је правоугаони паралелопипед са ивицама дужине: 10 *m*, 4 *m* и 5 *m*. Дуж ивица дејствују шест сила, као што је показано на слици: $P_1 = 4\ kg$; $P_2 = 6\ kg$; $P_3 = 3\ kg$; $P_4 = 2\ kg$; $P_5 = 6\ kg$; $P_6 = 8\ kg$. Свести тај систем сила на *дynamu* и одредити координате *x* и *y* продорне тачке централне осовине у равни *XOY*.

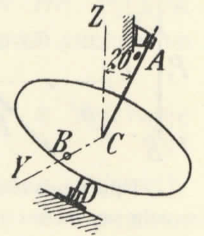


Одг. $R = 5{,}4\ kg$, $M = 47{,}5\ kgm$;
$\cos\alpha = 0{,}37$; $\cos\beta = 0$,
$\cos\gamma = 0{,}93$; $x = -10\ m$,
$y = -11{,}9\ m$.

VII. Равнотежа сила које нападају круто тело.

Одређивање отпора.

184. Кружна плоча нагнутог точка може да се обрће око осовине *CA* нагнуте под углом $\alpha = 20^0$ ка вертикали. Плочу доводи у обртање коњ, тежиина 400 *kg*, који се налази у тачки *B* на крају хоризонталног полупречника $CB = 3\ m$. Срачунати моменат обртања.



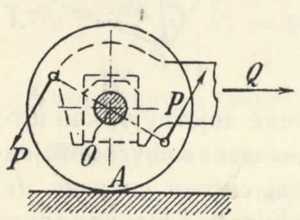
Моментом обртања зовемо збир момената сила, које утичу на тело, у односу на осовину обртања; $\sin 20^0 = 0{,}342$.

Одг. 410 *kgm*.

185. Ветрењача има четири крила нагнута под углом $\alpha = 15^0 = \arcsin 0{,}259$ према равни, управној на осовину обртања. Притисак ветра на свако крило раван је 100 *kg* а дејствује управно на раван крила у тачки која је за 3 *m* удаљена од осовине обртања. Срачунати моменат обртања.

Одг. 311 *kgm*.

186. Електромотор, смештен на осовини двају точкова *O* трамвајског вагона, има тежњу да окрене осовину у смислу супротном од обртања казаљке на сату; при томе је величина момента обртног спрега сила $(P, -P)$ равна 600 *kgm*, а полупречник точкова 60 *cm*. Одредити силу вуче *Q*, осовине двају точкова, претпостављајући, да се она налази на хоризонталним шинама.

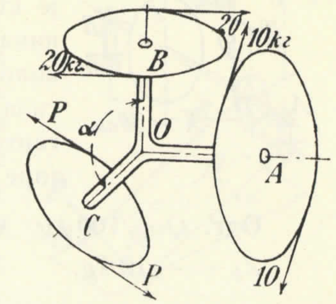


Најпре одредимо збир сила трења између точкова и шина узимајући моменте сила у односу на осовину *O*. Затим пројектујмо све силе, које дејствују на осовину двају точкова, на хоризонталу.

Одг. $Q = 1\ t$.

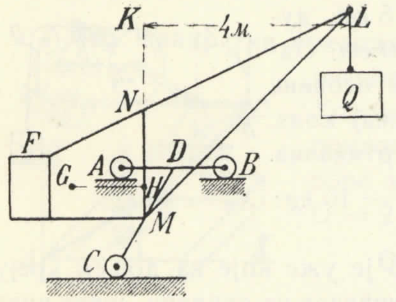
---

187. На обимима трију кружних плоча: *A* полупречника 15 *cm*, *B* полупречника 10 *cm* и *C* полупречника 5 *cm* дејствују спрегови сила. Величине одговарајућих сила равне су 10 *kg*, 20 *kg* и *P kg*. Осовине *OA*, *OB* и *OC* леже у истој равнини, угао $AOB = \frac{\pi}{2}$. Одредити величину силе *P* као и угао $BOC = \alpha$ тако, да би систем трију плоча, као потпуно слободан, стајао у равнотежи.



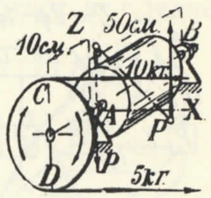
Одг. $P = 50\ kg$; $tg\ \alpha = -0{,}75$.

188. Покретна дизалица постављена је на колица *ABC* са три точка. Димензије: $AD = DB = 1\ m$, $CD = 1{,}5\ m$; $CM = 1\ m$; $KL = 4\ m$. Дизалица је уравнотежена контра-баластом *F*. Тежина дизалице са баластом равна је 10 *t* и дејствује у тачки *G* која лежи у равни *LMNF* у одстојању $GH = 0{,}5\ m$ од осовине дизалице *MN*. Тежина терета *Q* равна је 3 *t*. Наћи притиске точкова на шине кад је раван дизалице *LMN* паралелна *AB*.



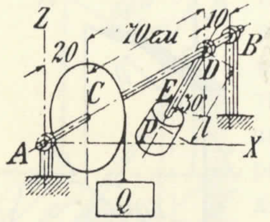
Одг. $N_a = {}^5/_6\ t$; $N_b = 7^5/_6\ t$; $N_c = 4^1/_3\ t$.

189. Точак преко којега је пребачен кајиш динамо-машине има полупречник 10 *cm*; димензије осовине *AB* дате су на слици. Сила у горњем делу кајиша, у оном који вуче, равна је 10 *kg* а она у доњем, вученом, 5 *kg*. Одредити моменат обртања и отпоре лежишта *A* и *B* за случај равномерног обртања, занемарујући при томе тежину машине.



Одг.* $M = 50\ kg\ cm$; $X_a = -18\ kg$; $X_b = 3\ kg$.

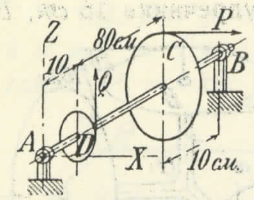
190. На хоризонталну осовину са лежиштима у *A* и *B* утиче: с једне стране, преко ужета које је учвршћено за коло полупречника 20 *cm* терет $Q = 25\ kg$; с друге стране, терет $P = 100\ kg$ натакнут на штап *DE*. Штап *DE* круто је везан за осовину *AB*. Одстојања: $AC = 20\ cm$; $CD = 70\ cm$; $BD = 10\ cm$. У положају равнотеже затвара штап *DE* са вертикалом угао од 30^0. Одредити одстојање *l* тежишта терета *P* од осовине и отпоре лежишта *A* и *B*.



Одг. $l = 10\ cm$; $Z_a = 30\ kg$; $Z_b = 95\ kg$.

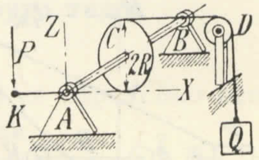
---

* Пројекције тражених отпора, који нису дати у одговорима на задатке у овој глави, равне су нули.



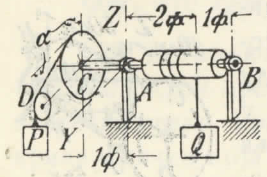
191. На хоризонталној осовини AB учвршћено је коло C полупречника 1 m и коло D полупречника 10 cm. Остале дужине дате су на слици. На коло C дејствује у правцу тангенте, хоризонтална сила $P = 10\ kg$, а на коло D, такође у правцу тангенте, вертикална сила Q. Одредити силу Q и отпоре ослонаца A и B за случај равнотеже.

Одг. $Q = 100\ kg$; $X_a = -1\ kg$; $Z_a = -90\ kg$; $X_b = -9\ kg$; $Z_b = -10\ kg$.



192. Радник диже помоћу витла, шематски приказаног на слици, терет од 80 kg. Полупречник кола $R = 5\ cm$, дужина ручице $AK = 40\ cm$. $AC = CB = 50\ cm$. Одредити притисак P на ручицу и притиске осовине витла на ослонце A и B за такав положај кола, кад је ручица AK хоризонтална а сила P вертикална.

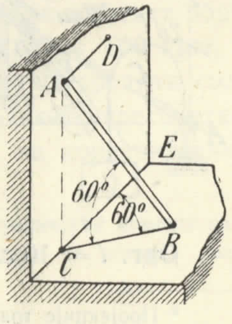
Одг. $P = 10\ kg$; $X_a = -40\ kg$; $Z_a = 10\ kg$; $X_b = 40\ kg$.



193. На добошу витла AB намотано је уже које на доњем крају носи терет Q. Полупречник кола C, учвршћеног на осовини, шест пута је већи од полупречника добоша; остале димензије дате су на слици. На обим кола намотано је уже које је затегнуто теретом $P = 6\ kg$ а напушта коло по тангенти, затварајући са хоризонтом угао $\alpha = 30^0$. Одредити величину терета Q при којем ће витао стајати у равнотежи као и реакције лежишта A и B, замемарујући сопствену тежину витла.

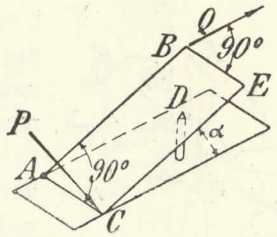
Одг. $Q = 36\ kg$; $Y_a = -4\sqrt{3}\ kg = -6{,}93\ kg$; $Z_a = 16\ kg$; $Y_b = \sqrt{3}\ kg = 1{,}73\ kg$; $Z_b = 23\ kg$.

194. Хоризонталпа ужад AD и CB одржавају штап AB у нагнутом положају. Штап се ослања у тачки A на вертикалну раван на којој се налази и тачка D, а у тачки B на хоризонтални под. Тачке A и C леже у истој вертикали. Тежина штапа 8 kg. Трење у тачкама A и B занемарити. Одредити силе S_a и S_b у ужади као и отпоре равни кад је угао $ABC = BCE = 60^0$.



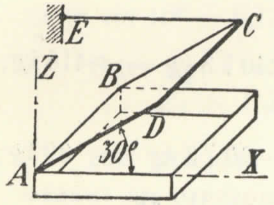
Одг. $S_a = {}^2/_3\sqrt{3}\ kg = 1{,}15\ kg$;
$S_b = {}^4/_3\sqrt{3}\ kg = 2{,}3\ kg$; $R_a = 2\ kg$; $R_b = 8\ kg$.

195. Правоугаона плоча са странама $AB = a = 4\ m$ и $AC = b = 2\ m$ нагнута је према хоризонту под углом $\alpha = 30^0$. У тачки D ослоњена је о јексер, а тачка A учвршћена је непомично. У тачки B дејствује хоризонтална сила $Q = 5\ kg$ затварајући са страном BE прави угао; у тачки C дејствује сила $P = 4\ kg$ управно на раван плоче. Знајући да је $AD = d = 3\ m$ и занемарујући сопствену тежину плоче, срачунати одстојање h тачке D од стране AC, и отпоре у тачкама A и D.



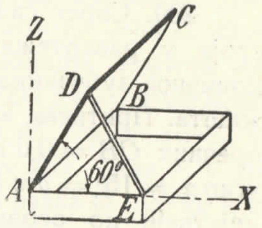
Одг. $h = 2{,}34\ m$, $R_a = 4{,}87\ kg$; $R_b = 4{,}27\ kg$.

196. Квадратни поклопац $ABCD$ кутије, може се обртати око хоризонталне осовине AB са зглавцима у A и B. Хоризонталан конац CE паралелан AX одржава поклопац под углом $DAX = 30^0$. Одредити отпоре зглавака A и B, кад је тежина поклопца $G = 2\ kg$.



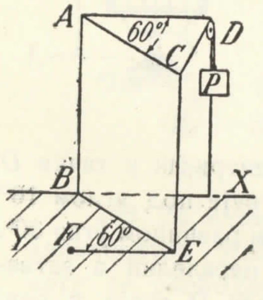
Одг. $Z_a = 1\ kg$; $X_b = \sqrt{3}\ kg = 1{,}73\ kg$; $Z_b = 1\ kg$.

197. Поклопац правоугаоног сандука $ABCD$ подупрт је с једне стране штапом DE. Тежина поклопца равна је 12 kg, његова дужина $AB = 90\ cm$, ширина $AE = AD = 60\ cm$, угао $DAE = 60^0$. Одредити отпоре зглавака A и B а и силу S у штапу, занемарујући његову сопствену тежину.



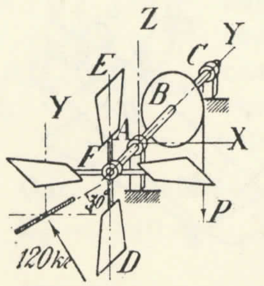
Одг. $X_a = \sqrt{3}\ kg = 1{,}73\ kg$; $Z_a = 3\ kg$; $X_b = 0$; $Z_b = 6\ kg$; $S = 2\sqrt{3}\ kg = 3{,}46\ kg$.

198. Правоугаона врата, која се могу обртати око вертикалне осовине AB, отворена су под углом $CAD = 60^0$ и одржавају се у том положају помоћу двају ужади од којих је једно, CD, пребачено преко котура и затегнуто теретом $P = 32\ kg$, а друго EF, везано је за тачку F пода. Тежина врата 64 kg, њина ширина $AD = AC = 18\ dm$, висина $AB = 24\ dm$. Одредити: силу S у ужету EF, отпор цилиндричног лежишта у тачки A и отпор лежишта B.



Одг. $S = 32\ kg$; $X_a = -28\ kg$; $Y_a = 4\sqrt{3}\ kg = 6{,}9\ kg$; $X_b = 44\ kg$; $Y_b = 12\sqrt{3}\ kg = 20{,}8\ kg$; $Z_b = 64\ kg$.

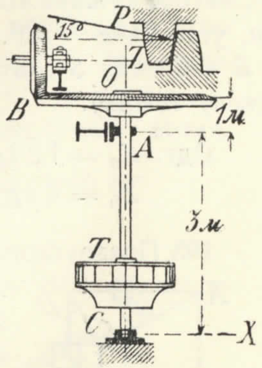
199. Ветрењача са хоризонталном осовином AC има четири симетрично постављена крила. Равни крила затварају са вертикалном равни управном на осовину AC исте углове 30°. На одстојању 2 m од осовине обртња дејствује на свако крило, нормално на његову површину, резултанта притиска ветра, равна 120 kg. Осовина ветрењаче ослоњена је у тачкама A и C на лежишта и одржава се у стању мира вертикалним притиском P на зубчаник кола B. Овај притисак потиче од машинерије која у слици није показана. Лежиште A не прима у правцу осовине никакве силе. Полупречник кола $B = 1{,}2\ m$, одстојања: $BC = 0{,}5\ m$; $AB = 1\ m$; $AF = 0{,}5\ m$. Срачунати притисак P и реакције ослонаца за два случаја: 1) Кад ветар дува на сва четири крила и 2) кад је крило D скинуто, а права DE вертикална.



Одг. 1) $P = 400\ kg$; $Z_a = 133^1/_3\ kg$; $Y_c = -240\sqrt{3}\ kg = -416\ kg$;
$Z_c = 266^2/_3\ kg$.

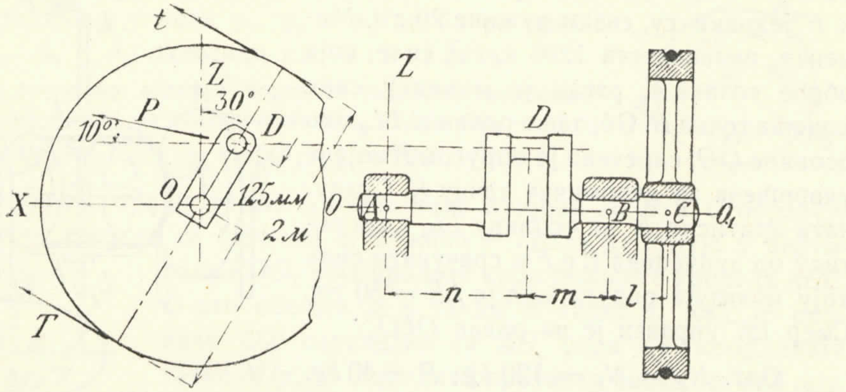
2) $P = 300\ kg$; $X_a = 80\ kg$; $Z_a = 100 - 80\sqrt{3}\ kg = -39\ kg$;
$X_c = -20\ kg$; $Yc = -180\sqrt{3}\ kg = -312\ kg$;
$Z_c = 200 + 80\sqrt{3}\ kg = 339\ kg$.

200. Спрег сила — момента 120 kgm — који обрће водену турбину, стоји у равнотежи са притиском на зубац B коничног зубчаника кола OB и са отпорима лежишта. Притисак на зубац управан је на полупречник $OB = 0{,}6\ m$ и затвара са хоризонталом угао $\alpha = 15^0 = arc\ tg\ 0{,}268$. Тежина турбине 1,2 t дејствује по осовини OC на ниже; одстојање $AC = 3\ m$; $AO = 1\ m$. Одредити отпоре лежишта C и A.



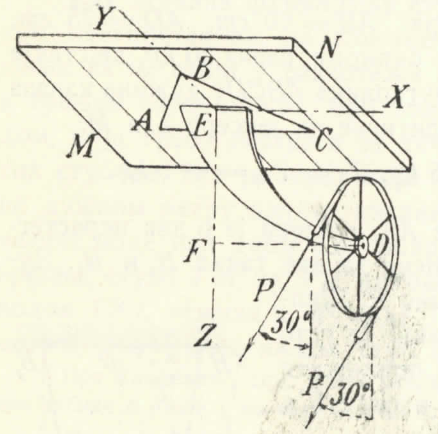
Одг. $X_a = -X_c = 10{,}72\ kg$;
$Y_a = 266^2/_3\ kg$; $Y_c = -66^2/_3\ kg$;
$Z_c = 1\ 253{,}6\ kg$.

201. Притисак на кривају парне машине концентрисан у тачки D коленасте осовине, раван је $P = 2000\ kg$ и дејствује под углом 10° према хоризонту. Кривајa OD затвара са вертикалном равнином угао 30°. Замајац преноси помоћу ужади, чији су крајеви паралелни а затварају са хоризонтом угао 30°, енергију фабрици. Сила P стоји у равнотежи са силама T и t у ужади и отпорима лежишта A и B. Тежина замајца 1500 kg, његов пречник $d = 2\ m$, збир сила у ужади $T + t = 750\ kg$. У слици показана одстојања равна су: $OD = r = 125\ mm$, $l = 250\ mm$, $m = 300\ mm$, $n = 450\ mm$. Одредити отпоре лежишта A и B узимајући да је $sin\ 10^0 = 0{,}174$ и $cos\ 10^0 = 0{,}985$.



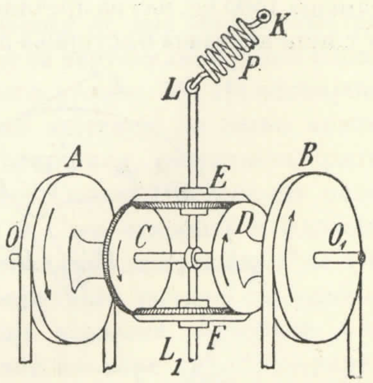
Одг. $X_a = -570\ kg$; $Z_a = -514\ kg$; $X_b = -2\ 048\ kg$;
$Z_b = 1\ 291\ kg$.

202. Конзола трансмисије D учвршћена је у тачкама A и C завртњевима за хоризонталну таваницу а у тачки B упире се о исту. Ове тачке поклапају се са ћошковима равностраног троугла ABC са страном $a = 30\ cm$. Положај средишта точка D дат је вертикалом $EF = h = 40\ cm$, спуштеном из тежишта троугла ABC и хоризонталом $FD = b = 50\ cm$ која је паралелна страни AC. Раван точка управна је на праву FD. Сила P у сваком делу каиша равна је 120 kg и нагнута је за $\alpha = 30^0$ према вертикали. Одредити отпоре у ослонцима A, B и C занемарујући сопствену тежину саставних делова.



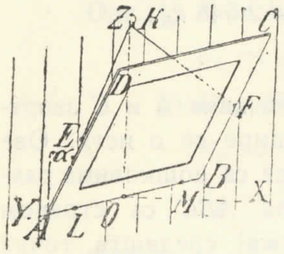
Одг. $Y_a = 140\ kg$; $Z_a = 106^2/_3\sqrt{3}\ kg = 185\ kg$;
$Z_b = 66^2/_3\sqrt{3}\ kg = 115\ kg$; $Y_c = -260\ kg$;
$Z_c = -293^1/_3\sqrt{3}\ kg = -508\ kg$.

203. За мерење силе коју предаје каиш точка A точку B служи динамометар White, шематски престављен на слици. Точкови A и B могу се слободно обртати око непомичне осовине OO_1. Точак A образује са зупчаником C једну целину, исто тако и точак B са зупчаником D. Ова два зупчаника захваћена су зупчаницима E и F који се могу слободно обртати око вертикалне осовине LL_1. Пречници зупчаника C, D, E и F једнаки су, сваки дужине 20 *cm*. Момент, интензитета 1200 *kgcm*, силе, која обрће точак A, раван је моменту силе кочења точка B. Обртање осовине LL_1 око осовине OO_1 спречено је опругом P која је учвршћена за непомичну тачку K. Срачунати притиске N на осовину LL_1 који потичу од зупчаника E и F и срачунати силу коју показује опруга, кад је $LE = 50$ *cm*. Смер LK управан је на раван OLO_1.



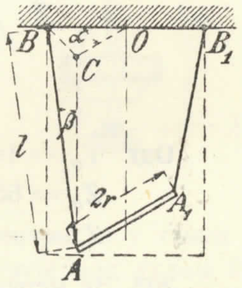
Одг. $N_e = N_f = 120$ *kg*; $P = 40$ *kg*.

204. Слика у оквиру правоугаоног облика $ABCD$, обешена је помоћу канапа EKF за вертикални зид. Канап је пребачен преко куке, тако, да је ивица AB хоризонтална. Тачке E и F средине су стране AD и BC. Слика је нагнута према зиду под углом $\alpha = arc\,tg\,{}^3/_4$ и ослања се о два јексера L и M који су забијени у зид, при томе је $AL = MB$. Димензије оквира: $AB = 60$ *cm*, $AD = 75$ *cm*. Тежина слике са оквиром, равна 20 *kg*, дејствује у тежишту правоугаоника $ABCD$; дужина канапа 85 *cm*. Одредити силу S у канапу и притиске на јексере L и M.



Одг. $S = 8{,}5$ *kg*, $X_l = X_m = -4{,}5$ *kg*, $Z_l = Z_m = -6$ *kg*.

205. Бифилар састављен из шипке AA_1 обешен је о два нерастегљива конца, дужине l, који су учвршћени за две тачке B и B_1. Дужина шипке $AA_1 = BB_1 = 2r$, њена тежина P. Шипка је окренута око њене вертикалне осовине за угао α. Одредити моменат спрега који треба приложити шипки да би остала у равнотежи, а и силу S у концима.

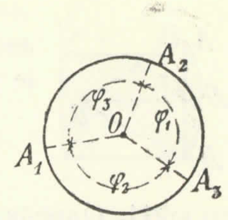


Из троугла ABC и BOC налазимо: $sin\,\beta = \frac{2r}{l}\,sin\,\frac{\alpha}{2}$.

Пројицирањем на вертикалу, сила које утичу на AA_1, добијамо: $S = \frac{P}{2\,cos\,\beta}$; из једначине момената у односу осовине OD налазимо: $M = 2r\,S\,sin\,\beta\,cos\,\frac{\alpha}{2}$.

$$\text{Одг. } M = \frac{P\,r^2\,sin\,\alpha}{\sqrt{l^2 - 4r^2\,sin^2\frac{\alpha}{2}}};\; S = \frac{lP}{2\sqrt{l^2 - 4r^2\,sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

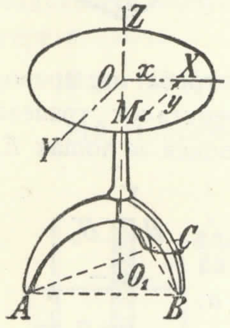
206. Округао сто $A_1A_2A_3$ стоји на трима ногама A_1, A_2 и A_3 а у средишту O носи терет. Колики треба да су средишњи углови φ_1, φ_2 и φ_3 да би се притисци A_1, A_2 и A_3 односили као $1 : 2 : \sqrt{3}$.



При решавању задатака поставити једначину момената сила у односу на два од полупречника: OA_1, OA_2 и OA_3.

Одг. $\varphi_1 = 150^0$; $\varphi_2 = 90^0$; $\varphi_3 = 120^0$.

207. Сто стоји на трима ногама чији крајеви A, B и C образују равнострани троугао са страном a. Тежина P стола дејствује у вертикали ZOO_1 која пролази кроз тежиште троугла ABC. О сто обешен је у тачки M терет p. Кад је осовина OX паралелна са AB онда су координате тачке $M\,(x, y)$. Одредити притисак сваке ноге на под.



$$\text{Одг. } N_a = \frac{P+p}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot y - x\right)\frac{p}{a};$$

$$N_b = \frac{P+p}{3} + \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\,y\right)\frac{p}{a};$$

$$N_c = \frac{P+p}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{y}{a}\cdot p.$$

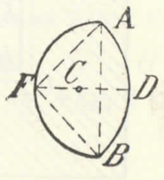
208. Дубина фундирања стубова гвозденог моста срачуната је под том претпоставком да сопствена тежина стуба и одговарајући притисак на њ, стоји у разнотежи са отпором земљишта на основу стуба и трењем на боковима; при томе је земљиште ситан песак засићен водом, која треба сматрати за течност. Срачунати дубину спуштања h тих стубова, кад је терет који отпада на стуб 150 *t*, тежина стуба по дужном метру његове висине 8 *t*, висина стуба над дном реке 9 *m*, висина воде над дном 6 *m*, површина основе стуба 3,5 m^2, бочна површина стуба 7 m^2 на 1 *m* његове висине, тежина 1 m^3 песка засићеног водом 1,8 *t*, тежина 1 m^3 воде 1 *t* и коефицијенат трења гвозденог омогача, у којем се налази стуб од камена, о песак 0,18.

При изналажењу силе трења узмимо у обзир да је средњи бочни притисак на 1 *m* при дубини h раван у тонама: $6 = 0{,}9\,h$.

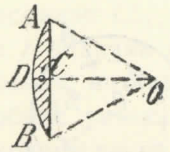
Одг. $h = 11$ *m*.

VIII. Тежиште.

209. Одредити положај тежишта C, линије чија је контура $AFBD$. Линија је састављена из лука ADB, четвртине обима круга полупречника $FD = R$ и из лука полукруга $A\text{-}B$ над тетивом AB као пречником. Линеарне густине за оба дела исте су.



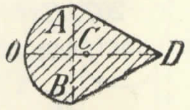
Одг. $CF = R\,(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{\pi}\,(3 - 2\sqrt{2})$



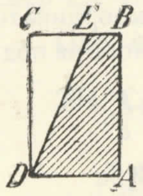
210. Наћи положај тежишта C површине кружног одсечка (segmenta) ADB полупречника $AO = 30\ cm$, кад је угао $AOB = 60^0$.

Одг. $OC = \dfrac{30}{2\pi - 3\sqrt{3}}\ cm = 27{,}7\ cm.$

211. Одредити положај тежишта C површине, ограничене полукругом AOB полупречника R и двема правама AD и DB исте дужине, при томе је $OD = 3R$.

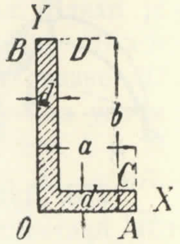


Одг. $OC = \dfrac{3\pi + 16}{3\pi + 12}\ R = 1{,}19\ R.$



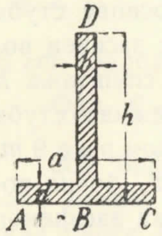
212. Хомогени правоугаоник $ABCD$ треба по правој DE отсећи тако, да страна $AD = a$ преосталог трапеза $ABED$ остане хоризонтална, кад се овај обеси за ћошак E.

Одг. $BE = \dfrac{a}{2}\ (\sqrt{3} - 1) = 0{,}365\ a.$



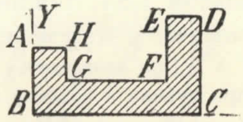
213. Наћи координате тежишта попречног пресека разнокраког угаоника чији су краци дужине: $OA = a$; $OB = b$, а ширине $AC = BD = d$.

Одг. $x = \dfrac{a^2 + bd - d^2}{2(a + b - d)}$, $y = \dfrac{b^2 + ad - d^2}{2(a + b - d)}$.



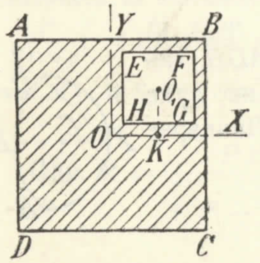
214. Наћи одстојање тежишта T — профила $ABCD$ од његове ивице AC, кад је висина профила $BD = h$, ширина ножице $AC = a$, дебљина ножице d а дебљина ребра b.

Одг. $\dfrac{ad^2 + bh^2 - bd^2}{2\,(ad + bh - bd)}$.



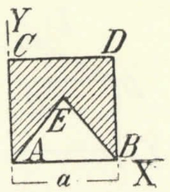
215. Наћи координате тежишта хомогене плоче, престављене на слици, знајући да је $AH = 2\ cm$, $HG = 1{,}5\ cm$, $AB = 3\ cm$, $BC = 10\ cm$, $EF = 4\ cm$, $ED = 2\ cm$.

Одг. $x = 5^{10}/_{18}\ cm$; $y = 1^{10}/_{13}\ cm$.



216. У хомогеној квадратној дасци $ABCD$ стране $AB = 2\ m$ исечен је квадратни отвор $EFGH$; стране отвора паралелне су одговарајућим странама квадрата $ABCD$ а свака од њих равна је $0{,}7\ m$. Одредити координате x и y тежишта преосталог дела даске, знајући да је $OK = O_1K = 0{,}5\ m$, где су O и O_1 средишта квадрата а OK и O_1K да су паралелни одговарајућим странама квадрата.

Одг. $x = y = -0{,}07\ m.$



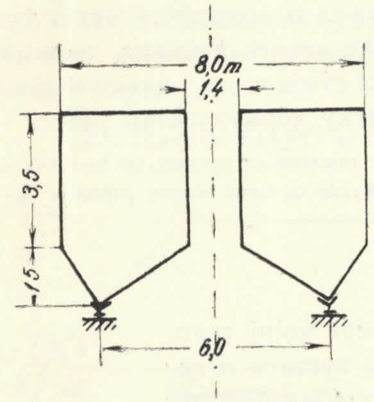
217. Дат је квадрат $ABCD$ са страном a; наћи у његовој површини такву тачку E, која ће бити тежиште површине, коју добијамо, кад из квадрата исечемо равнокраки троугао AEB.

Одг. $x = \dfrac{a}{2}$; $y = \dfrac{a}{2}\ (3 - \sqrt{3}) = 0{,}634\ a.$

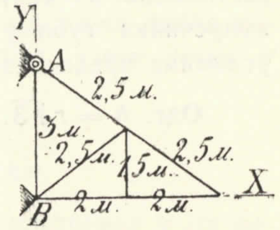
218. Четири човека носе хомогену троугласту плочу. Двојица од њих прихватили су два ћошка, а остали стране које се секу у трећем ћошку. На којем одстојању од трећег ћошка треба да ова двојица подухвате плочу, да би сваки од њих четворо носио једну четвртину терета плоче.

Одг. На одстојању, од ћошка, равном $^1/_3$ стране.

219. Попречни пресек затвореног ротационог резервоара има облик дат на слици. Резервоар је израђен од челичног лима; средњи цилиндрични део служи за смештај завојних степеница. Применом *Pappus-Guldin* — овог правила срачунати: 1) Запремину резервоара при највећој могућој висини пуњења. 2) Површину лима, потребну за његову израду.

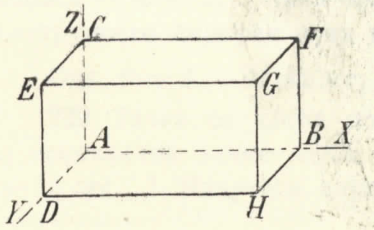


Огд. 1) $V = 210\ m^3$;
2) $F = 224\ m^2$.



220. Наћи координате тежишта равног решеткастог носача који је састављен из седам штапова чије су дужине дате на слици. Тежина дужног метра свију штапова иста је.

Одг. $x = 1{,}47\ m$; $y = 0{,}94\ m.$

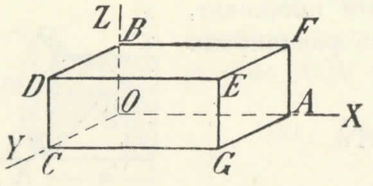


221. Одредити координате тежишта система терета расподељених у ћошковима правоугаоног паралелепипеда са странама $AB = 20\ cm$, $AC = 10\ cm$, $AD = 5\ cm$. Тежине терета у ћошковима равне су:

A	B	C	D	E	F	G	H
1 kg,	2 kg,	3 kg,	4 kg,	5 kg,	3 kg,	4 kg,	3 kg.

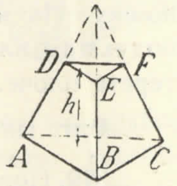
Одг. $x = 9{,}6\ cm$; $y = 3{,}2\ cm$; $z = 6\ cm.$

222. Одредити координате тежишта контуре правоугаоног паралелепипеда чије су стране хомогени штапови дужине: $OA = 8\ dm$; $OB = 4\ dm$; $OC = 6\ dm$. Штапови теже: OA — 250 g; OB, OC и CD по 75 g; CG — 200 g; AF — 125 g; AG и GE по 50 g; BD, BF, DE и EF по 25 g.



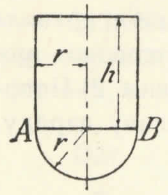
Одг. $x = 4\ dm$; $y = 2{,}625\ dm$; $z = 1{,}05\ dm$.

223. Дат је хомогени зарубљени тетраедар $ABCDEF$; површина основе $ABC = a$, површина основе $DEF = b$, одстојање паралелних основа h. Наћи одстојање z његовог тежишта од основе ABC.



Одг. $z = \frac{h}{4} \cdot \frac{a + 2\sqrt{ab} + 3b}{a + \sqrt{ab} + b}$.

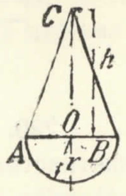
224. Дато тело састављено је из ваљка и полукугле истих густина и истих полупречника r. При којој ће висити h ваљка, тело изгубити у положају равнотеже стабилност, када се ослања површином полукугле о глатку хоризонталну раван?



Тежиште тела треба да се поклапа са средиштем полукугле. Одстојање тежишта хомогене полукугле од њене основе равно је $^3/_8\, r$.

Одг. $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

225. Наћи граничну висину h конуса, при којој тело, састављено из конуса и полукугле истих густина и полупречника, губи у положају равнотеже стабилност при условима предњег задатка.

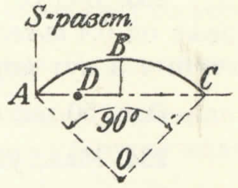


Одг. $h = r\sqrt{3}$.

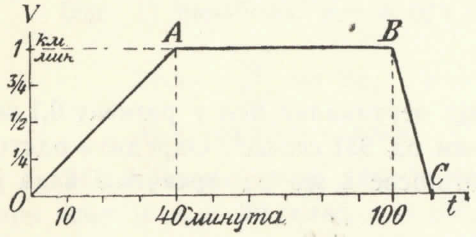
КИНЕМАТИКА.

IX. Кретање тачке.

226. Дијаграм пута неког кретања у зависности од времена претставља четвртина обима круга ABC, показаног на слици. Нацртати дијаграм брзине, узимајући дужину $AD = {}^1/_4\, AC$ за јединицу брзине.



227. Линија $OABC$ и део осовине Ot, иза тачке C, претстављају дијаграм брзине воза, у km/min. Наћи превађени пут, као функцију времена, у размацима времена: 1) од $t = 0$ до $t = 40\ min$; 2) од 40 до 100 min; 3) 100 до 110 min; 4) од 110 до 120 min. За почетак, од којег треба мерити одстојања, узети тачку у којој се налази воз у тренутку $t = 0$.



Одг. 1) $s = 0{,}0125t^2\ km$; 2) $s = t - 20\ km$;
3) $s = 11t - 0{,}05t^2 - 520\ km$; 4) $s = 85\ km$.

228. Тачка се креће по правој линији; њено одстојање у cm мерено од непокретне тачке која се налази на тој правој, дато је једначином $s = 4t - 2t^2$. Наћи брзину v и убрзање u тачке у тренутку t, и конструисати дијаграм пута у брзине.*)

Одг. $v = 4 - 4t\ cm/sec$; $u = -4\ cm/sec^2$.

229. Тачка се креће по правој тако, да се њено одстојање s од непокретне тачке мења по закону: $s = a\ sinkt$, где је $a = 4\ cm$; $k = {}^1/_2\ sec^{-1}$. Нацртати дијаграме пута, брзине и убрзања.

---

*) У следећим задацима (гл. IX, X и XI) свугде, где нису дате јединице дужине и времена, подразумевају се cm и sec.

230. При спуштању у воду прешао је брод првих 30 *cm* за 10 *sec*. У којем је времену прешао пут од 120 *m* крећући се равномерно убрзано?

Одг. 3 *min* 20 *sec*.

231. Брзина којом тане напушта пушчану цев равна је 500 *m/sec*. Претпостављајући, да је кретање у цеви равномерно убрзано, наћи време за које ће тане прећи целу цев, дужине 1 *m*.

Одг. 0,004 *sec*.

232. Воз напуштајући станицу креће се равномерно убрзано са убрзањем $^1/_9\ m.\ sec^{-2}$. На ком одстојању од станице биће његова брзина равна 72 *km/sat*?

Одг. 1,8 *km*.

233. Воз се креће брзином 72 *km/sat*; кочењем постизава се успорење од 0,4 m/sec^2. Срачунати трајање времена после којега ће воз стати и пут који је за то време прешао.

Одг. 50 *sec*; 500 *m*.

234. Маљ, ударивши о шип, креће се, у току следећих 0,02 *sec*, заједно са шипом док не стану; при томе улази шип у земљиште за 6 *cm*. Одредити почетну брзину шипа, сматрајући то кретање равномерно успореним.

Одг. 6 *m/sec*.

235. Водене капљице напуштају вертикалну цев у размаку 0,1 *sec* једна од друге и падају са убрзањем од 981 cm/sec^2. Одредити одстојање између две узастопне капљице после 1 *sec* од тренутка када је прва напустила цев.

Одг. 93,2 *cm*.

236. Нека тачка почиње се кретати из положаја мира и креће се по правој путањи константним убрзањем 4 m/sec^2; друга тачка почиње своје кретање из истог положаја и са истим убрзањем као и прва 2 секунде касније, но са почетном брзином 10 *m/sec* и креће се по истој правој и у истом смеру. После колико ће секунди друга тачка стићи прву?

Одг. 4 *sec*.

237. Решити предњи задатак за случај када прва тачка почиње своје кретање брзином 0,8 *m/sec*.

Одг. 8 *sec*.

238. Кретање тачке дато је једначинама:

$$x = 10\ cos\ 2\pi\ \frac{t}{5};\ y = 10\ sin\ 2\pi\ \frac{t}{5}$$

наћи путању тачке, величину и смер брзине v и величину и смер убрзања u.

Одг. Круг полупречника 10 *cm*; $v = 4\pi$, смера који је супротан смеру обртања казаљке на сату; $u = 1{,}6\ \pi^2$, управљено ка средишту.

239. Кретање тачке дато је једначинама:

$$x = a\ cos\ (\alpha + \omega t);\ y = b\ sin\ (\beta + \omega t)$$

где су a, b, α, β и ω константне величине. Наћи једначину путање.

Одг. Елипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\ sin\ (\beta - \alpha) = cos^2\ (\beta - \alpha)$.

240. Кретање тачке дато је једначинама:

$$x = v_0 t\ \ cos\ \alpha;\ \ y = v_0 t\ sin\ \alpha - \frac{1}{2}\ gt^2$$

при томе је осовина OX хоризонтална, осовина OY управљена по вертикали на више, v_0, g и $\alpha < \frac{\pi}{2}$ су константне величине. Одредити кинематско значење величина v_0 и α и наћи: 1) путању тачке, 2) координате највише тачке њене путање, 3) пројекције брзине у тренутку када се тачка налази на осовини OX.

Одг. 1) парабола: $y = x\ tg\ \alpha - \frac{g}{2\ v_0^2\ cos^2\ \alpha}\ x^2$;

2) $x = \frac{v_0^2}{2g}\ sin\ 2\alpha$; $\quad y = \frac{v_0^2}{2g}\ sin^2\alpha$;

3) $v_0\ cos\ \alpha$; $-\ v_0\ sin\ \alpha$.

241. Кретање тачке дато је једначинама као у пређашњем задатку, при чему је $v_0 = 20\ m/sec$, $\alpha = 60^0$, $g = 9{,}81\ m/sec^2$. Наћи: каквом се брзином v_1 треба да крене из почетка координата у времену $t = 0$ друга тачка, да би, кретајући се равномерно по осовини OX, срела прву тачку, и одредити одстојање x_1 места сусрета.

Одг. $v_1 = 10\ m/sec$; $x_1 = 35{,}3\ m$.

242. Одредити кретање тачке, чије је убрзање равно $12\,t\ cm/sec^2$ са смером негативне осовине OX, када је познато да је, у тренутку $t = 2\ sec$ брзина тачке 6 *m/sec* са смером позитивне осовине OX, а у тренутку $t = 3\ sec$ координата тачке $x = 50\ cm$.

Одг. $x = 14 + 30\ t - 2\ t^3$.

243. Одредити путању тачке, кад је величина њене брзине константна и равна 3 *m/sec*, угао између смера брзине и OX осовине раван је $\frac{\pi}{2}\,t$. У времену $t = 0$ налази се тачка у координатном почетку.

Одг. Круг полупречника $\frac{6}{\pi}\ cm = 1{,}91\ cm$; $x^2 = \frac{12}{\pi}\ y - y^2$.

244. Праволинијско кретање тачке дато је једначином: $t = a \log (b + s)$, где је s — одстојање тачке која се креће од непомичне тачке, a и b — су константе и логаритам узет за базу 10. Наћи брзину v и убрзавање u тачке у времену t.

Одг. $v = \frac{\ln 10}{a} 10^{\frac{t}{a}}$; $u = \left(\frac{\ln 10}{a}\right)^2 10^{\frac{t}{a}}$

245. Дато је праволинијско кретање тачке:

$$x = \frac{m\,v_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

где су v_0, m, k и e константне величине. Одредити карактер тога кретања, користећи изразе превађеног пута x и брзине v. Наћи убрзање u и изразити га помоћу брзине v.

Одг. Асимптотичко приближавање ка тачки чије је одстојање

$$x = \frac{m\,v_0}{k};\ u = -\frac{k\,v_0}{m} e^{-\frac{k}{m}t} = -\frac{k}{m} v$$

X. Окретање крутог тела око осовине и равно кретање.

246. Одредити угаону брзину ω: 1) осовине парне машине која се обрће са 30 обрта у минути; 2) парне турбине Lavala која се обрће са 15000 обрта у минути.

Одг. 1) $\omega = 3{,}14 \frac{1}{sec}$ 2) $\omega = 1\ 570{,}8 \frac{1}{sec}$.

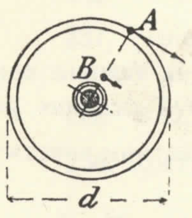
247. Срачунати брзину v и убрзање u тачке, која се налази на површини земље у Београду, узимајући у обзир само обртање земље око њене осовине; географска ширина Београда 45⁰, полупречник земље 6000 km.

Одг. $v = \frac{5\sqrt{2}}{72}\pi\ km/sec = 0{,}308\ km/sec$;

$$u = \frac{\sqrt{2}}{622\ 080}\pi^2\ km/sec^2 = 0{,}023\ km/sec^2.$$

248. Замајац полупречника 0,5 m обрће се равномерно око осовине; брзина тачака, које леже на његовом обиму равна је 2 m/sec. Са колико се обрта у минути обрће замајац?

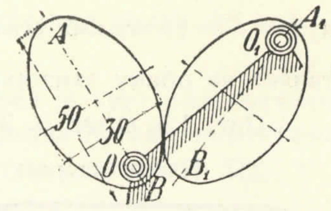
Одг. $\frac{120}{\pi} = 38{,}2$ обрта.



249. Тачка A на точку креће се брзином 50 cm/sec, а тачка B брзином 10 cm/sec; размак $AB = 20\ cm$. Срачунати угаону брзину ω и пречник d точка.

Одг. $\omega = 2 \frac{1}{sec}$; $d = 50\ cm$.

250. Да би се добила периодична промена угаоне брзине захваћена су два једнака елиптична зупчаника, од којих се један обрће равномерно око осовине O са 270 обрта у минути; другога доводи први у обртање око осовине O_1. Осовине O и O_1 су паралелне и пролазе кроз жиже елипси. Одстојање OO_1 равно је 50 cm; полуосе елипси равне су 25 cm и 45 cm. Одредити најмању и највећу угаону брзину зупчаника O_1.



Одг. $\omega_{min} = \pi \frac{1}{sec}$; $\omega_{min} = 81\,\pi \frac{1}{sec}$.

251. Осовина, обрчући се равномерно убрзано из стања мира, прешла је за првих 5 sec 12,5 обрта. Колика је њена угаона брзина после истека ових 5 sec?

Одг. $\omega) = 5$ обрта$/sec = 10\pi \frac{1}{sec}$.

252. Тело, обрчући се равномерно убрзано из стања мира, прешло је за првих 2 минута 3600 обрта. Колико је његово угаоно убрзање ε?

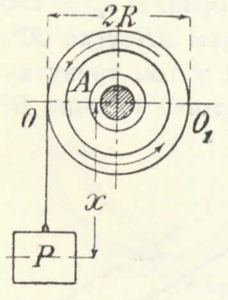
Одг. $\varepsilon = {}^1/_2$ обрта$/sec^2 = \pi \frac{1}{sec^2}$.

253. Замајац почиње из стања мира равномерно убрзано обртање. Десет минута после почетка кретања има угаону брзину која одговара 120 обрта у минути. Колико је обрта учинио замајац у току ових 10 минута?

Одг. 600 обрта

254. Точку са непокретном осовином, дата је почетна угаона брзина $2\pi \frac{1}{sec}$; учинивши 10 обрта, точак је стао услед трења у лежиштима. Одредити угаоно убрзање ε точка, претпостављајући да је његово кретање било равномерно успорено.

Одг. $\varepsilon = 0{,}1\pi \frac{1}{sec^2}$.



255. Терет P обешен за конац, доводи у обртање точак A полупречника $R = 10\ cm$. Кретање терета дато је једначином: $x = 100t^2$, где је x одстојање терета у cm од непокретне хоризонтале OO_1. Одредити, у тренутку t, угаону брзину ω, угаоно убржање ε точка као и тотално убрзање u тачке која се налази на његовом обиму.

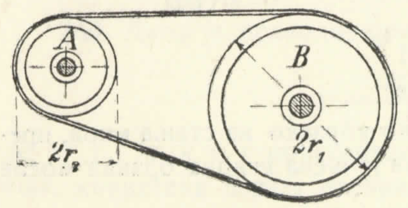
Одг. $\omega = 20t \frac{1}{sec}$; $\varepsilon = 20 \frac{1}{sec^2}$;

$$u = 200\sqrt{1 + 400t^4}\ cm/sec^2.$$

256. Замајац полупречника 2 m обрће се равномерно успорено, у току времена од $t = 0$ до $t = 20\ sec$ учинио је 600 обрта; у тренутку $t = 15\ sec$ има угаону брзину $\omega_1 = 30\pi \frac{1}{sec}$. Колико је успорење тачака на обиму замајца у тренутку $t = 20\ sec$?

Одг. $12\pi\ m/sec^2 = 37,7\ m/sec^2$.

257. Парна машина са точком B покреће, из стања мира помоћу каиша без краја, динамо-машину са точком A. Кајиш је пребачен преко обима точкова чији су полупречници: $r_1 = 75\ cm$; $r_2 = 30\ cm$. После пуштања парне машине у рад, њена угаона брзина равна је $0,4\pi \frac{1}{sec^2}$. Занемарујући клизање каиша по точковима, одредити време после којег ће динамо-машина чинити 300 обрта у минути.



Одг. 10 sec.

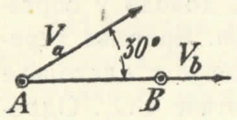
258. Тело се обрће око непомичне осовине тако, да је угао обртања φ дат једначином: $\varphi = 20^0\ sin\left(10^0 \frac{t}{5\ sec}\right)$. Одредити: угаону брзину ω тела у тренутку $t = 0$; тренутке t_1 и t_2 у којима се мења смер обртања и период T обртања.

Одг. $\omega = \frac{1}{810}\pi^2 \frac{1}{sec}$; $t_1 = 45\ sec$; $t_2 = 135\ sec$; $T = 180\ sec$.

259. Код стола на преклоп може се табла правоугаоног облика $ABCD$ са странама $AB = 56\ cm$ и $AD = 112\ cm$ обртати око чепа O тако, да дође у положај $A_1B_1C_1D_1$ где је $AB_1 = BC_1$; расклопивши је добија се квадрат B_1EFC_1. Наћи положај чепа.

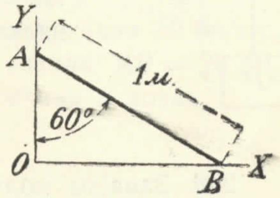
Одг. $x = 14\ cm$; $y = 42\ cm$.

260. Права AB, дужине 30 cm, креће се у равни цртежа. У неком тренутку времена има тачка A брзину $v_a = 180\ cm/sec$ чији смер затвара са правом AB угао 30^0; смер брзине тачке B поклапа се у том тренутку са смером праве AB. Колика је брзина v тачке B?



Одг. $v_b = 90\sqrt{3}\ cm/sec = 156\ cm/sec$.

261. Штап AB дужине 1 m креће се тако, да се његова два краја A и B за цело време кретања ослањају о две међусобно управне праве OX и OY. Наћи координате x и y моментаног пола у тренутку када је угао $OAB = 60^0$.

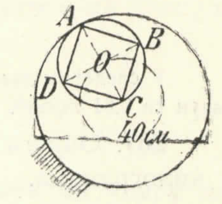


Одг. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ m = 0,866\ m$; $y = 0,5\ m$.

262. Наћи путање моментаних полова кретања штапа AB које је описано у предњем задатку.

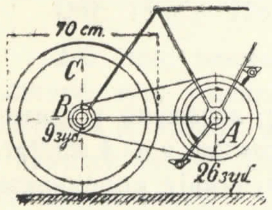
Одг. Покретна путања моментаних полова је круг полупречника 0,5 m са средиштем у средини AB; непокретна путања моментаних полова је круг полупречника 1 m са средиштем у тачки O.

263. По унутарњој страни обима круга, полупречника 20 cm, котрља се без клизања круг чији је полупречник 10 cm. Нацртати покретну и непокретну путању моментаних полова. Одредити брзине ћошкова A, B и C квадрата који је уписан у мањи круг, у тренутку, када се ћошак A налази на већем кругу, претпостављајући да се средиште круга $ABCD$ креће равномерно и да у току 1 sec опише круг.



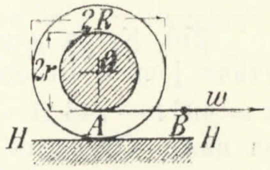
Одг. $v_a = 0$; $v_b = 20\pi\sqrt{2}\ cm/sec = 88,55\ cm/sec$;
$v_c = 40\pi\ cm/sec = 125,6\ cm/sec$.

264. Ланчана трансмисија (пренос) на бициклу састоји се из ланца који обухвата зупчаник A са 26 зубаца и други зупчаник B са 9 зубаца. Зупчаник B круто је везан са задњим точком C пречника 70 cm. Одредити брзину бицикла када точак A чини 1 обрт у 1 секунди.



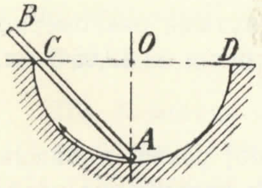
Одг. 22,89 km/sat.

265. Калем полупречника R котрља се без клизања по хоризонталној равни HH. Око средњег, цилиндричног дела полупречника r, обавијен је конац AB који се при томе кретању намотава брзином w хоризонталног правца. Одредити брзину v којом се помера осовина калема.



Одг. $v = w \frac{R}{R - r}$

266. Права AB креће се у равни цртежа тако, да се њен крај A за цело време налази на обиму полукруга CAD а сама права пролази за цело време кретања кроз непомичну тачку C која се налази на пречнику CD. Одредити брзину v тачке праве, која се поклапа са тачком C у тренутку, када је полупречник OA нормалан на CD а брзина тачке A у том тренутку да је равна 4 m/sec.



Одг. $v_c = 2\sqrt{2}\ m/sec = 2,83\ m/sec$.

ДИНАМИКА.

XI. Сила и рад.

У следећим задацима треба убрзање земљине теже g, ако није задато, унети у рачун са 9,81 m/sec^2.

267. Опруга притискује са силом 49 050 *dyn*; изразити тај притисак у килограмима.

Одг. 0,05 *kg*.

268. Кретање тела, тежине 100 *g*, дато је једначинама: $x = 2t$, $y = 3 + t - 5t^2$. Одредити у килограмима силу која утиче на тело.

Одг. $X = 0$; $Y = -\frac{1}{981}\ kg$.

269. Кретање материјалне тачке, тежине 2 *g*, изражено у сантиметрима и секундама дато је једначинама: $x = 3 \cos 2\pi t$, $y = 4 \sin 2\pi t$. Наћи пројекције силе, која утиче на тачку, као функцију координата њеног положаја.

Одг. $X = -\frac{1}{981}\ 8\pi^2 x\ g$; $Y = -\frac{1}{981}\ 8\ \pi^2 y\ g$.

270. Кугла масе 1 *grama*, пада услед дејства силе теже; на њу утиче још и отпор ваздуха тако, да је кретање дато једначином: $x = 490t - 245\ (1 - e^{-2t})$. Осовина *OX* управљена је по вертикали на ниже. Одредити у *dynama* отпор ваздуха *R*, који утиче на куглу, као функцију њене брзине, узимајући за $g = 980\ cm/sec^2$.

Одг. $R = 2v$.

271. Тело, тежине 2 *kg*, креће се по правој путањи равномерно убрзано. Одредити силу која утиче на тело, кад је пут $s = 49{,}05\ t^2\ cm$.

Одг. 0,2 *kg*.

272. Тело, које лежи на храпавој хоризонталној равни, добивши почетну брзину 2 *m/sec*, креће се у правој путањи равномерно успорено; прешавши 4 *m* стане. Одредити величину силе трења која отпада на јединицу масе.

Одг. 50 *dyn* = 0,051 *g*.

273. У окно спушта се равномерно убрзано чабар тежине 280 *kg*; за првих 10 *minuta* прелази 35 *m*. Наћи силу у ужету, о којем виси чабар, кад је $g = 980\ cm/sec^2$.

Одг. 260 *kg*.

274. Тело тежине 20 *g*, креће се осцилаторно по хоризонталној правој. Одстојање тела од непомичне тачке дато је једначином: $s = 10 \sin \frac{\pi}{2} t$. Наћи зависност између силе *P*, која утиче на тело, и одстојања *s*, као и највећу вредност те силе.

Одг. $P = -\frac{5\pi^2}{g}\ s\ g$; $P_{max} = \frac{50\pi^2}{g}\ g$.

275. Камен пада без почетне брзине у бунар. Звук од удара на дно бунара чује се после 6,5 *sec* од почетка падања камена. Брзина звука равна је 36 *g* *m/sec*, где је *g* — бројна величина убрзања земљине теже у m/sec^2. Наћи дубину бунара.

Одг. $18\ g = 176{,}58\ m$.

276. Воз, тежине 196,2 *t* без локомотиве, креће се по хоризонталноме путу равномерно убрзано; после 60 *sec* од почетка кретања постигао је брзину од 54 *km/sat*. Која сила дејствује за време кретања у квачилу између локомотиве и воза, кад је сила трења равна 0,005 од тежине воза?

Одг. 5 981 *kg*.

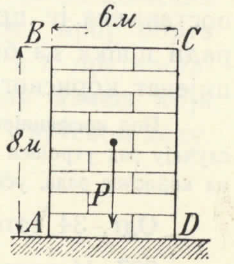
277. Тешко тело спушта се по глаткој косој равни која је за 30° нагнута према хоризонтали. Срачунати, узимајући за $g = 10\ m/sec^2$, време за које ће тело прећи пут од 9,6 *m*, кад је његова почетна брзина равна 2 *m/sec*.

Одг. 1,6 *sec*.

278. По косој равни, која је за 30° нагнута према хоризонтали, спушта се без почетне брзине тешко тело; отпор трења раван је 0,1 његове тежине. Коју ће брзину имати тело, прешавши пут 2 *m* од почетног положаја?

Одг. 3,96 *m/sec*.

279. Хомогени масив *ABCD*, димензија које су дате на слици, тежи 4 000 *kg*. Срачунати рад, који треба утрошити да би се масив претурио обрћући се око ивице *D*.



Срачунајмо рад, неопходно потребан за премештај средишта масива до вертикале кроз *D*.

Одг. 4 000 *kgm*.

280. Одредити најмањи рад који треба утрошити да би се терет од 2 *t* подигао за 4 *m*, крећући га по косој равни која је према хоризонту нагнута под углом 30^0; коефипијенат трења 0,5.

Одг. 18 660 *kgm*.

281. Воз тежине 800 *t* креће се у датом тренутку брзином 15 *m/sec*. Тог тренутка затворио је машиновођа приступ пари. Услед дејства трења креће се воз даље равномерно успорено. Прешавши 2 000 *m*, има брзину 2 *m/sec*. Одредити у *kgm* рад који је потребан за савлађивање трења, и време за које се брзина смањила од 15 на 2 *m/sec*.

Одг. 9 011 200 *kgm*; 235 *sec*.

282. Топовско тане 6 *kg* тежине напушта цев брзином 570 *m/sec*. Колики је средњи притисак *P* барутних гасова, када се тане креће 2 *m* у унутрашњости цеви? Колико се времена тане креће у топовској цеви, ако претпоставимо да је притисак гасова константан?

Одг. 49 680 *kg*; 0,007 *sec*.

283. Колики је ефекат у коњским снагама машине која диже чекић 200 *kg* тежине на висину од 75 *cm* 120 нута у минути?

Одг. 4 HP.

284. Срачунати ефекат у коњским снагама водопада: Ниагаре, Иматре и Нарове. За сваки од њих дате су у следећем пад у метрима и средња количина воде у кубним метрима у секунди. Ниагара—66 *m* и 8 800 m^3, Иматра—12 *m* и 400m^3, Нарва—12 *m* и 250 m^3.

Одг. 1) 7 744 000 HP; 2) 64 000 HP; 3) 40 000 HP.

285. Срачунати ефекат парних машина у електричној централи трамвајске мреже, кад је број вагона на линији 45 а тежина сваког вагона 10 *t*. Отпор трења раван је 0,02 тежине вагона, средња брзина вагона 12 *km/sat*.

Одг. 400 HP.

286. За подизање 5 000 кубних метара воде на висину од 3 *m* постављена је црпка са мотором од 2 HP. Колико времена треба да ради црпка да би горњу количину воде избацила, кад је њен коефицијенат корисног рада 0,8?

Под коефицијентом корисног рада подразумевамо однос корисног рада — у датом случају рад утрошен на подизање воде — ка стварном раду. Овај последњи је увек већи од корисног рада, услед дејства штетних отпора.

Одг. 34 сата 43 минута 20 сек.

287. Истоваривање угља из шлепа врши се мотором који диже корпу. Корпа, која може да прими 1 *t* угља, тежи 1 *t*; треба истоварити 1 500 *t* у току од 10 сати, при томе треба корпу издизати на висину од 9 *m*. Срачунати теоријски ефекат мотора.

Одг. 10 HP.

288. Израчунати рад, потребан за дизање терета од 20 *kg* уз косу раван на дужину од 6 *m*, кад је угао нагиба равни према хоризонту 30^0, а отпор трења 0,01 од нормалног притиска терета на раван.

Одг. $60 + 0{,}6\sqrt{3}$ *kgm* $= 61{,}04$ *kgm*.

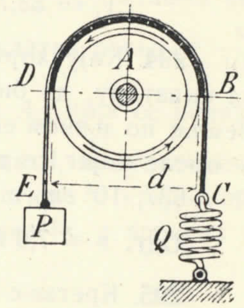
289. Кад се брод креће брзином од 15 чворова, развија његова машина 5 144 коњских снага. Одредити отпор воде кретању брода, знајући да је коефицијенат корисног рада машине и пропелера раван 0,4, а 1 чвор = 0,5144 *m/sek*.

Одг. 20 *t*.

290. Наћи, у коњским снагама, ефекат парне машине, кад је средњи притисак паре на клип за време целог хода раван 5 *kg* на cm^2; дужина хода клипа 40 *cm*; површина његова 300 cm^2; број хода у минути 120 и коефицијенат корисног рада 0,9.

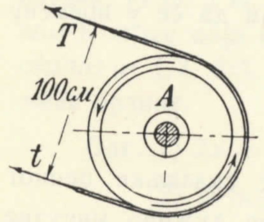
Одг. 14,4 HP.

291. За мерење ефекта мотора, пребачена је преко његовог точка *A* трака са дрвеним летвицама. Десни крај траке *BC* учвршћен је за вагу за опругом *Q* а леви крај *DE* затегнут је теретом *P*. Одредити ефекат мотора, у тренутку кад се обрће са 120 обрта у минути; вага са опругом показала је при томе да је затезање у десном делу траке 4 *kg*. Тежина терета *P* равна је 1 *kg*; пречник точка $d = 63^7/_{11}$ *cm*, $\pi = 3^1/_7$.



Разлика затезања у деловима *BC* и *DE* траке равна је сили која кочи точак; нађимо рад те силе за време једне секунде.

Одг. 0,16 HP.



292. Помоћу каиша предаје се 20 коњских снага. Полупречник точка 50 *cm*, број обрта 150 у минути. Одредити силе *T* и *t*, претпостављајући да је затезање *T* у делу каиша који вуче, два пута веће од затезања *t* у вученом делу.

Одг. $T = 382$ *kg*, $t = 191$ *kg*.

ДРУГИ ДЕО

КИНЕМАТИКА.

I. Апсолутно кретање тачке.

293. Одредити висине: h_1, h_2 и h_3 над површином воде, трију места праве вертикалне обале. Познато је да су из тих места бачене једновремено три куглице хоризонталним брзинама: 50, 75 и 100 *m/sec* а пале су истовремено у воду. При томе је најкраће одстојање упада прве куглице од обале равно 100 *m*; узети у обзир само убрзање земљине теже $g = 9{,}8\ m/sec^2$. Одредити и трајање T лета куглица и њине брзине: v_1, v_2 и v_3 у тренутку када падну у воду.

Одг. $h_1 = h_2 = h_3, = 19{,}6\ m$; $T = 2\ sec$;
$v_1 = 53{,}7\ m/sec$; $v_2 = 77{,}4\ m/sec$; $v_3 = 101{,}9\ m/sec$.

294. Коју хоризонталну брзину треба дати телу, које се налази на екватору, да би се, у нарочитој вођици, кретало равномерно око Земље по њеном екватору убрзањем слободнога пада? Одредити време T после којег се тело враћа у почетни положај. Полупречник Земље $R = 637.\ 10^6\ cm$, а убрзање Земљине теже на екватору 978 cm/sec^2.

Одг. $v = 7{,}9\ km/sec$; $T = 1{,}4$ сата.

295. Кретање тачке дато је једначинама: $x = 3t,\ y = \frac{gt^2}{2}$. Наћи пројекцију v_l брзине тачке на праву l, која се равномерно обрће око почетка координата у смеру од осовине OX ка осовини OY, претпостављајући да права l чини 1 обрт у 3 секунде и да се у времену $t = 0$ поклапа са осовином OY.

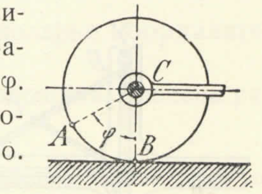
Одг. $v_l = gt\ cos\ \frac{2\pi}{3}t - 3\ sin\ \frac{2\pi}{3}t.$

296. Наћи пројекцију v_s брзине краја минутне сказаљке џепног сата на секундну сказаљку, претпостављајући да је дужина минутне сказаљке 2 *cm*. За почетни тренутак узети 12 сати.

Одг. $v_s = \frac{\pi}{900}\ sin\ \frac{59\pi}{1\ 800}\ t\ cm/sec.$

297. Тачка се креће равномерно по обиму круга полупречника r. Наћи пројекције, v_l и u_l њене брзине и убрзања, на осовину l. Осовина l налази се у равнини круга а обрће се око истог средишта али у супротном смеру од кретања тачке. У јединици времена је број обрта осовине k пута већи од броја обрта тачке; у почетку кретања налази се тачка на осовини; брзина тачке равна је $r\omega$.

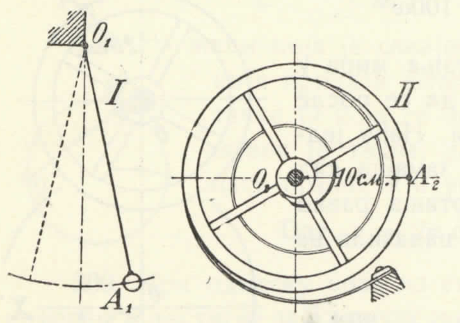
Одг. $v_l = -\ r\omega\ sin\ [(k+1)\ \omega t]$;
$u_l = -\ r\omega^2\ cos\ [(k+1)\ \omega t]$.



298. Точак вагона, котрљајући се по шинама без клизања, креће се брзином $v = 36\ km/sat$. Наћи v_r, пројекцију брзине тачке A, која се налази на обиму точка, на правац радиуса CA у зависности од угла $ACB = \varphi$. Угао φ затварају права CA и полупречник CB додирне тачке точка са шином. Смер кретања у десно.

Одг. $v_r = -\ 10\ sin\ \varphi\ \ m/sec.$

299. Два клатна: математско I, у виду малог терета A_1 који је обешен о конац O_1A_1 и опружно II, у виду замајца и танке спиралне опруге, крећу се хармонијски, обрчући се око непомичних осовина O_1 и O_2. Периоде њихових осцилација T_1 и T_2 једнаке су међусобом: $T_1 = T_2 = {}^1/_2\ sec$. Угаона амплитуда првог клатна равна је $\frac{\pi}{100}$ другог $\frac{\pi}{2}$. Тачка A_2, која се налази на обиму замајца II, полупречника $O_2A_2 = 10\ cm$, креће се по доњем обиму круга и стиже у крајњи положај једновремено са теретом A_1 клатна I. Колика је, у времену t, пројекција v_1 брзине тачке A_2 на правац O_1A_1?



Одг. $v_1 = -\ 20\pi^2\ sin\ (4\pi t)\ sin\ (0{,}49\pi\ cos\ 4\pi t).$

300. Тачка, напустивши у тренутку $t = 0$ положај дат координатама: (1 *m*, 2 *m*, 4 *m*,) креће се по правој путањи равномерно брзином 8 *m/sec* која са координатним осовинама затвара углове чији су *cosinus*-и: 1/3, 2/3, $c_\mathcal{I}s\gamma$. Наћи: 1) једначину путање тачке, 2) ходограф њене брзине.

Одг. 1) $2x = y = z - 2$;

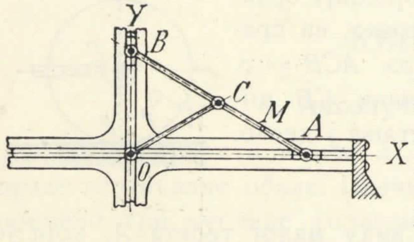
2) тачка са координатама: $2\frac{2}{3}\ m,\ 5\frac{1}{3}\ m,\ 5\frac{1}{3}\ m.$

301. Из топа, чија осовина затвара са хоризонтом угао 30^0, бачено је почетном брзином 500 *m/sec* тане. Претпостављајући, да на тане утиче само убрзање силе теже $g = 9{,}8\ m/sec^2$, наћи ходограф брзине танета и брзину v_1 тачке која описује ходограф.

Одг. Ходограф — вертикална права, њено одстојање од почетка координата равно је: $250\sqrt{3}\ m$; $v_1 = 9{,}8\ m/sec$.

302. Тело се обрће равномерно око осовине са 30 обрта у минути. Наћи једначину ходографа брзине оне тачке тела која је за $2\ m$ удаљена од осовине обртања и брзину v_1 тачке која описује тај ходограф.

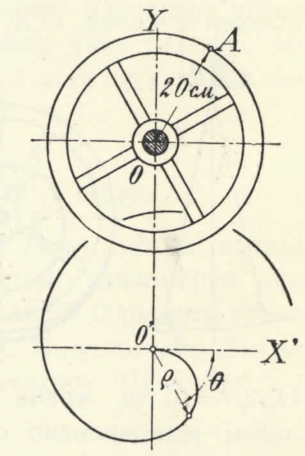
Одг. $x_1^2 + y_1^2 = 4\pi^2$; $v_1 = 2\pi^2\ m/sec$.



303. Дужина лењира елипсографа $AB = 40\ cm$, дужина криваје $OC = 20\ cm$, $AC = CB$. Кривајa се обрће равномерно око осовине O угаоном брзином ω. Наћи једначину путање и ходограф брзине тачке M, која се налази на лењиру а удаљена је од краја A за $AM = 10\ cm$.

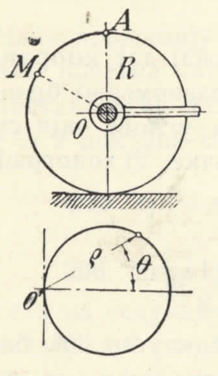
Одг. $\dfrac{x^2}{900} + \dfrac{y^2}{100} = 1$; $\dfrac{x_1^2}{900\omega^2} + \dfrac{y_1^2}{100\omega^2} = 1$.

304. Замајац доведен је из стања мира у равномерно убрзано обртње тако, да се после 22 sec обрће са 105 обрта у минути. Наћи једначину ходографа брзине тачке A замајца кад је њено одстојање од осовине обртања равно 20 cm, а тачка се у времену $t = 0$ налазила на вертикали OY. Заменити $\pi = 3^1/_7$.

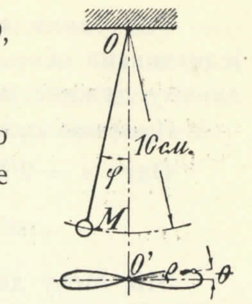


Одг. У поларним координатама: $\rho = 20\sqrt{\vartheta}$.

305. Брзина воза $v_0 = 72\ km/sat$; полупречник точкова $R = 1\ m$; точкови котрљају се по шинама без клизања. 1) Одредити величину и смер брзине v тачке M обима точка чији полупречник затвара са смером брзине v_0 угао $\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$. 2) Наћи једначину ходографа брзине тачке M и одредити брзину v_1 тачке која га описује.



Одг. 1) Брзина $v = 2v_0 \cos\dfrac{\alpha}{2} = 40 \cos\dfrac{\alpha}{2}\ m/sec$, смера MA; 2) $\rho = 2v_0 \cos\vartheta$, круг полупречника $r = v_0$; $v_1 = \dfrac{v_0^2}{R} = 400\ m/sec$.



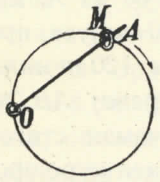
306. Осцилације клатна, око непомичне тачке O, приближно задовољавају једначину: $\varphi = \dfrac{\pi}{100} \cos 10t$, где је φ = елонгација, сматрана за позитивну десно од вертикале. Наћи једначину ходографа брзине тачке M, која је на одстојању 10 cm од тачке O.

Одг. $\rho^2 + 10\ 000\ \vartheta^2 = \pi^2$.

307. Наћи ходограф брзине тачке, чија је путања конични пресек дат једначином: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$ где су r и φ — поларне координате. Познато је да је $r^2\dfrac{d\varphi}{dt} = k =$ конст. (двострука површина, описана радиусом вектором тачке у јединици времена).

При решавању задатка изразићемо помоћу угла φ пројекције брзине тачке на радиус вектор и на управну ка њему, а после, пројекције брзине на осовине Descartes-ових координата.

Одг. Круг: $\dfrac{p^2x_1^2}{k^2} + \left(\dfrac{py_1}{k} - e\right)^2 = 1$.



308. На жици која је савијена по кругу, налази се прстен M кроз који пролази штап OA. Штап се обрће равномерно око тачке O која се налази на истом кругу; угаона брзина штапа је таква, да у 5 sec опише прави угао. Срачунати брзину v и убрзање u прстена.

Одг. $v = 2\pi\ cm/sec$; $u = 0{,}4\pi^2\ cm/sec^2$.

309. При одласку воза из станице увећава се његова брзина равномерно и достигне за 3 минуте по одласку величину 72 km/sat. Колосек се налази у кривини полупречника 800 m. Одредити тангенцијално, нормално и тотално убрзање воза после 2 минуте по одласку из станице.

Одг. $u_t = {}^1/_9\ m/sec^2$; $u_n = {}^2/_9\ m/sec^2$; $u = {}^1/_9\sqrt{5}\ m/sec^2 = 0{,}25\ m/sec^2$.

310. Из топа, чија је осовина нагнута под углом 30^0 према хоризонту, бачено је тане почетном брзином $v = 500\ m/sec$. Одредити полупречник кривине ρ путање танета у њеној највишој тачки. Убрзање теже $g = 9{,}8\ m/sec^2$; отпор ваздуха занемарити.

Употребимо однос између полупречника кривине и нормалног убрзања.

Одг. $\rho = 19\ 132\ m$.

311. Наћи тангенцијално и нормално убрзање тешке тачке, чије је кретање дато једначинама: $x = \alpha t$; $y = \beta t - \dfrac{gt^2}{2}$.

Одг. $u_t = -\dfrac{g(\beta - gt)}{v}$; $u_n = \dfrac{g\alpha}{v}$; где је v брзина тачке.

312. Тачка се креће равномерно по завојници. Кретање је дато једначинама: $x = 2\ cos\,4t,\ \ y = sin\,4t,\ \ z = 2t$, при томе усвојити за јединицу дужине метар. Одредити полупречник кривине ρ путање.

Применимо изразе за компоненте убрзања у ортогоналним и природним координатама.

Одг. $\rho = 2{}^1/_8\ m$.

II. Релативно кретање тачке.

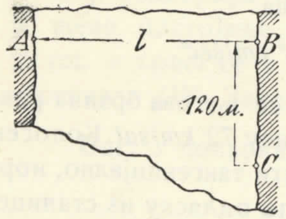
313. Међу два града, који леже на реци у међусобном одстојању од 72 *km*, саобраћа пароброд. Путујући узводно треба 9 сати а низводно 4 сата. Наћи v брзину реке и v_r брзину пароброда у односу на воду, претпостављајући да су те брзине константне.

Одг. $v = 5\ km/sat;\ v_r = 13\ km/sat$.

314. Река, широка 0,5 *km*, тече брзином 5 *km/sat* међу паралелним обалапа. Чамац пређе реку, крећући се управно на обале, за $2\sqrt{3}\ min$. Одредити величину и правац брзине v_r релативног кретања чамца. Успорење речнога тока уз обале занемарити.

Одг. $v_r = 10\ km/sat$. Угао између смера брзине v_r и обала раван је 60^0.

315. Обале реке су паралелне; чамац, који је кренуо из *A*, држећи курс управно на једну обалу, стигне на другу за 10 минута; при томе га је ток реке однео у тачку *C*. Тачка *C* налази се за 120 *m* ниже од тачке *B* која пак лежи на правој *AB*, управној на обале реке. Да би чамац стигао из тачке *A* у тачку *B*, мора држати курс против тока реке, а под неким углом ка правој *AB*; у том случају стигне чамац на другу обалу у тачку *B* за 12,5 минута. Одредити ширину реке *l*, брзину v_r чамца и брзину v_s тока реке.



Одг. $l = 200\ m;\ v_r = 20\ m/min;\ v_s = 12\ m/min$.

316. Брзина капљице кише, која пада вертикално, равна је близу површине земље 3 *m/sec*. Наћи брзину капљице, у односу на човека, који се креће брзином $\sqrt{3}\ m/sec$ као и угао α под којим човек сусреће падајуће капљице.

Одг. $v_r = 2\sqrt{3}\ m/sec = 3{,}46\ m/sec;\ \alpha = 30^0$.

317. Вертикално падајућа киша оставља на стакленим прозорима воза трагове који су нагнути под углом од 40^0 ка вертикали. Брзина воза равна је 72 *km/sat*. Наћи апсолутну брзину v_a капљица кише.

Одг. $v_a = 20\ cotg\,40^0 = 23{,}8\ m/sec$.

318. Права цев креће се по некој справи управно на њену геометријску осовину, брзином $v = 10\ m/sec$. У цеви клизи (на лево и десно) куглица. Нормално одстојање њеног средишта од неке тачке на осовини цеви дато је једначином: $d = 2\ sin\,2\pi t\ cm$. Наћи једначину путање, брзину и убрзање апсолутног кретања куглице.

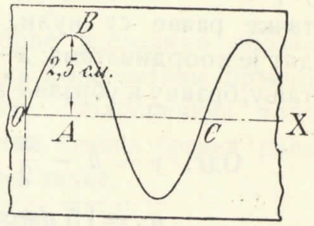
Одг. $y = 2\ sin\,\frac{\pi}{5}\,x;\ \ v = 2\sqrt{25 + 4\pi^2\,cos^2 2\pi t}\ \ cm/sec;$

$$u = 8\pi^2\ sin\,2\pi t\ \ cm/sec^2.$$

319. Права цев креће се у правцу своје осовине. Кретање је дато једначином: $s = 5\ sin\,2\pi t\ cm$, где је s растојање ма које тачке цеви од њеног почетног положаја. У цеви клизи натраг и напред куглица; одстојање њеног средишта, од произвољне тачке, која се налази на осовини цеви а која се креће заједно са овом, дато је једначином: $d = 2\ sin\,6\pi t\ cm$. Наћи једначину апсолутне путање, период апсолутног кретања и највеће одстојање средишта куглице од почетног положаја.

Одг. $x = 5\ sin\,2\pi t + 2\ sin\,6\pi t;\ T = 1\ sec;\ x_{max} = 4{,}96\ cm$.

320. Трака справе, која служи за обележавање осцилаторних кретања (ондограф), креће се у смеру *XO* брзином 2 *m/sec*. Осцилатор описује но њој синусоиду, највећа је њена ордината $AB = 2{,}5\ cm$, а дужина $OC = 8\ cm$. Наћи једначину осцилаторног кретања, обележеног на ондографу, претпостављајући да тачка синусоиде пролази кроз почетак координата у тренутку $t = 0$.



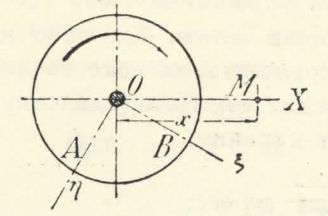
Одг. $y = 2.5\ sin\,(50\pi t)\ cm$.

321. На изложби била је монтирана кружна платформа; кретала се по шинама постављеним на обимима двају концентричних кругова. Платформа се обртала равномерно 2 пута у сату. Наћи апсолутну брзину v_a путника, који иде по платформи у супротном смеру од њеног обртања брзином 0,628 *m/sec* по кругу чији је пречник 180 *m* а чије се средиште налази на осовини обртања платформе.

Одг. $v_a = 0$.

322. Железнички воз креће се равномерно брзином 30 *km/sat*. Сигнална лампа, учвршћена за последњи вагон, спадне са ручице. Одредиту апсолутну путању лампе и дужину пута *s* који ће прећи воз за време падања лампе, кад се лампа налази на висини од 4,905 *m* над насипом.

Одг. Парабола са вертикалном осовином $y = 0{,}07x^2;\ s = 8{}^1/_3\ m$.

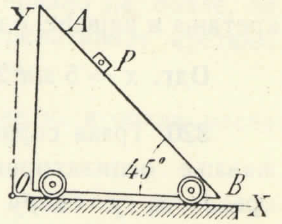


323. Тачка M креће се по правој OX хармонијски, кретање дато је једначином: $x = a \sin kt$. Наћи једначину путање релативног кретања тачке M у односу на плочу AB, која се обрће равномерно угаоном брзином ω око осовине O.

Узећемо, да се координатне осовине $O\xi$ и $O\eta$ крећу заједно са плочом тако, да се у почетном тренутку $t = 0$ осовина $O\xi$ поклапа са осовином OX.

Одг. $\sin^2\left[\frac{k}{\omega}\left(arc\,tg\frac{\xi}{\eta} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{a^2}(\xi^2 + \eta^2)$. При $k = \omega$ је релативна путања тачке M круг полупречника $\frac{a}{2}$.

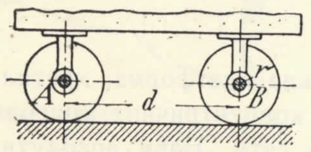
324. Коса раван AB, нагнута под углом 45^0 према хоризонтали, креће се праволинијски паралелно осовини OX константним убрзањем 1 dm/sec^2. По тој равни спушта се тачка P константним релативним убрзањем $\sqrt{2}\ dm/sec^2$; почетне брзине равни и тачке равне су нули. Почетни положај тачке дат је координатама: $x = 0$, $y = h$. Одредити путању, брзину и убрзање апсолутног кретања тачке.



Одг. $y = h - \frac{x}{2}$; $v_a = \sqrt{5}\ t\ dm/sec = 2{,}24\ t\ dm/sec$;

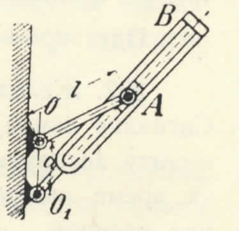
$$u_a = \sqrt{5}\ dm/sec^2 = 2{,}24\ dm/sec^2.$$

325. Колика је релативна брзина v_r средишта точка A неког вагона у односу на други његов точак? Точкови се котрљају по истом колосеку, полупречници њихови имају исту величину r, размак осовина $AB = d$ а брзина воза v.



Одг. Брзина $v_r = \frac{vd}{r}$ и управна на AB.

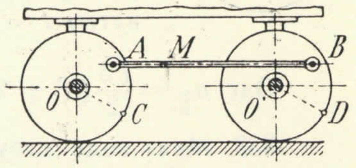
326. Механизам за убрзавање струга састављен је из две паралелне осовине O и O_1 и кривајa OA и O_1B. Крај A криваје OA клизи у прорезу криваје O_1B; размак осовина OO_1 раван је a, дужина криваје OA равна је l, при чему је $l > a$. Осовина O окреће се константном угаоном брзином ω. Наћи 1) угаону брзину ω_1 осовине O_1 у зависности од променљиве величине $O_1A = s$; 2) највећу и најмању њему вредност и 3) међусобни положај криваја када је $\omega_1 = \omega$.



Одг. 1) $\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{l^2 - a^2}{s^2}\right)$; 2) $\omega_{1\,max} = \omega\,\frac{l}{l - a}$,

$$\omega_{1\,min} = \omega\,\frac{l}{l + a};\ \omega_1 = \omega \text{ при } O_1B \perp O_1O.$$

327. Криваје OA и $O'B$ осовина O и O' локомотиве спојене су полугом AB. Полуга има дужину размака осовина OO'. Полупречници точкова: $OC = O'D = 50\ cm$, полупречници криваја: $OA = O'B = 25\ cm$. Наћи тотално убрзање тачке M полуге у тренутку када се локомотива креће равномерно брзином 36 km/sat.



Одг. 100 m/sec^2.

328. Тачка се креће равномерно брзином v по обиму кружне плоче која се обрће у противном смеру равномерно око своје централне осовине угаоном брзином ω; полупречник плоче раван је a. Наћи апсолутно убрзање u тачке.

Одг. Убрзање $u = a\left(\omega - \frac{v}{a}\right)^2$ а управљено је ка средишту плоче.

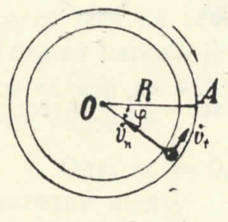
329. По обиму кружне плоче, која се обрће једнолико убрзано око своје централне осовине, креће се тачка константном брзином $v\ m/min$ у смеру супротном од обртања плоче. Полупречник плоче раван је „a"m, угаоно убрзање $n\ m/min^2$, почетна угаона брзина равна је нули. Одредити апсолутну брзину и убрзање тачке.

Одг. $v_a = ant - v\ m/min$; $u_a = \sqrt{a^2n^2 + \frac{1}{a^2}(ant - v)^4}\ m/min^2$

330. Тачка се креће равномерно релативном брзином v_r по тетиви круга. Круг се обрће око своје централне осовине константном угаоном брзином ω. Одредити брзину и убрзање апсолутног кретања тачке у тренутку кад се она налази на најкраћем одстојању h од осовине обртања.

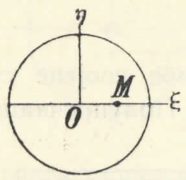
Одг. $v_a = v_r + h\omega$; $u_r = h\omega^2 + 2v_r\omega$.

331. Кружна цев полупречника $R = 1\ m$ обрће се у смислу казаљке на сату око средишта O константном угаоном брзином $\omega = \frac{1}{sec}$. У цеви креће се, око једне њене тачке, рецимо A, куглица M тако, да је угао $\varphi = \sin \pi t$. Одредити компоненте апсолутног убрзања куглице: тангенцијалног u_{at} и нормалног u_{an} у тренутку $t = 2\frac{1}{6}\ sec$.



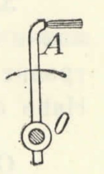
Одг. $u_{at} = 4{,}9\ m/sec^2$; $u_{an} = 13{,}8\ m/sec^2$.

332. Кружна плоча полупречника 1 dm обрће се око свога центра у смислу казаљке на сату равномерно убрзано угаоним убрзањем $1 \frac{1}{sec^2}$. У тренутку $t = 0$ угаона брзина равна је нули. По једноме пречнику плоче креће се тачка M тако, да је њена координата $\xi = sin \pi t \; dm$. Одредити пројекције апсолутног убрзања тачке M: u_ξ и u_η у тренутку $t = 1^2/_3 \, sec$.



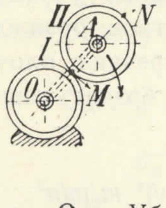
Одг. $u_\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} (\pi^2 + 2{,}8) \; dm/sec^2$; $u_\eta = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{3} \; dm/sec^2$.

333. Млаз воде струји у хоризонталној цеви OA, која се обрће равномерно око вертикалне осовине са 60 обрта у минути. Одредити Coriolis-ово убрзање u_c оног делића млаза који се креће релативном брзином $v_r = \frac{21}{11} \; m/sec$ у смеру OA. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.



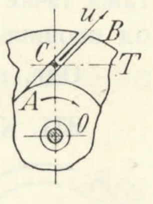
Одг. $u_c = 24 \; m/sec^2$.

334. Криваја OA обрће се око осовине O константном угаоном брзином ω; на рукавац A слободно је насађен точак II полупречника r, који се котрља без клизања по непокретноме точку I истога полупречника, са средиштем у O. Одредити величину и смер убрзања тачака M и N точка II које леже на крајевима пречника, који се по правцу поклапа са кривајом.



Одг. Убрзања: $u_M = 2r\omega^2$ и $u_N = 6r\omega^2$ управљена ка средишту A.

335. Турбина са праволинијским каналима обрће се равномерно угаоном брзином ω око осовине O која је управна на раван цртежа. Вода тече у каналима константном релативном брзином v. Наћи за делић воде, који се налази у датој тачки C канала AB, пројекције v_r и v_t апсолутне брзине и пропројекције u_r и u_t апсолутног убрзања на правце OC и CT ($CT \perp OC$) при следећим подацима: канал AB нагнут је према полупречнику OC под углом 45⁰, $OC = 0{,}5 \; m$, $\omega = 5\pi \; 1/sec$; $v = 2 \; m/sec$

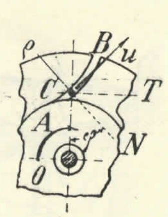


Одг. $v_r = \sqrt{2} \; m/sec = 1{,}4 \; m/sec$; $v_t = 2\pi + \sqrt{2} \; m/sec = 7{,}7 \; m/sec$;

$$u_r = -8\pi (\pi + \sqrt{2}) \; m/sec^2 = -114 \; m/sec^2;$$

$$u_t = 8\pi \sqrt{2} \; m/sec^2 = 35{,}6 \; m/sec^2.$$

336. Решити предњи задатак за случај криволинијског канала, кад је полупречник кривине канала у тачки C раван ρ, а угао између нормале CN и полупречника OC раван φ. Одредити осим тога пројекцију u_r убрзања, на правац релативне брзине v. Користећи се познатим односом између силе, масе и убрзања, одредити моменати M, у односу на средиште O, силе којом делић воде који се налази у тачки C, притискује глатку површину канала; маса делића воде равна је m.



Одг. $v_r = v \, sin \, \varphi$; $v_t = v \, cos \, \varphi + r\omega$;

$$u_r = -\left[r\omega^2 + \left(2 \, v\omega - \frac{v^2}{\rho}\right) cos \, \varphi\right];$$

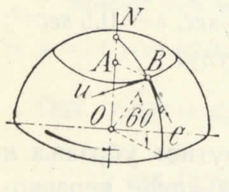
$$u_t = \left(2 \, v\omega - \frac{v^2}{\rho}\right) sin \, \varphi; \; u_r = -r \, \omega^2 \, sin \, \varphi;$$

$$M = mr \, sin \, \varphi \left(\frac{v^2}{\rho} - 2 \, v\omega\right).$$

337. По колосеку који је положен по паралели 30⁰ северне ширине, креће се локомотива брзином $v = 20 \; m/sec$. Наћи Coriolis-ово убрзање локомотиве, а затим, знајући да је тежина локомотиве равна 60 t, одредити притисак на шине услед тога убрзања.

Одг. $u_c = 0{,}3 \; cm/sec^2$. Притисак је раван 9,2 kg и дејствује на десну шину.

338. Река Нева тече са истока ка западу по паралели 60⁰ северне ширине брзином $v = 4 \; km/sat$. За делић воде, који се налази у произвољној тачки B, одредити пројекцију убрзања u на правац тангенте BC у одговарајућем меридијану. Убрзање u ја резултанта убрзања која зависе само од брзине речнога тока. Полупречник Земље $R = 640 \, . \, 10^4 \; m$.



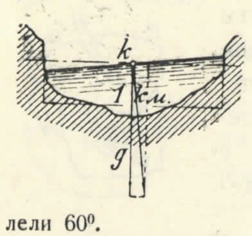
Одг. $u = 14 . \, 10^{-3} \; cm/sec^2$.

Дејство тога убрзања изазива одроњавање десне обале.

339. По колосеку, који је положен у правцу меридијана, креће се са југа ка северу вагон електричне железнице брзином 200 km/sat. Тежина вагона је 100 t. Одредити Coriolis-ово убрзање u_c вагона, када се налази на 45⁰ северне ширине а и притисак вагона на шине услед тог убрзања.

Одг. $u_c = 0{,}57 \; cm/sec^2$. Притисак раван је 58 kg и дејствује на источну шину.

340. Река ширине 1 km, тече са југа ка северу брзином од 5 km/sat. Колико је Coriolis-ово убрзање делића воде, који се налази на 60⁰ северне ширине? Одредити на којој је обали ниво воде виши

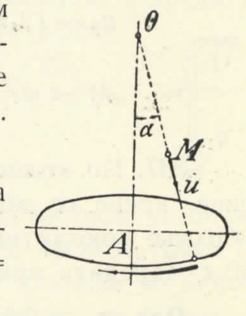


од оног на другој и за колико, кад је познато, да је површина воде управна на правац убрзања које резултује из убрзања силе теже g и убрзања, које је једнако Coriolis-овом убрзању али је супротног смера.

На цртежу показан је вертикални пресек реке на паралели 60⁰.

Одг. Coriolis-ово убрзање $u_c = 0{,}0175\ cm/sec^2$ управљено ка западу. Ниво воде виши је на десној обали за 1,78 *cm* од оног на левој.

341. Тачка *M* креће се равномерно — по изводници вертикалног конуса чија је осовина *OA* — релативном брзином v_r од темена ка осовиници. У тренутку $t = 0$ је одстојање $OM = a$; угао $MOA = \alpha$. Конус се обрће равномерно око своје осовине угаоном брзином ω. Наћи апсолутно убрзање тачке *M*.



Одг. Убрзање лежи у равни која је управна на осовину обртања, а престављено је хипотенузом троугла чије су катете: $u = \omega^2\ (a + v_r\ t) sin\, \alpha$; $u_c = 2\omega v_r\ sin\, \alpha$.

342. Претпостављајући у предњем задатку, да се конус обрће око своје осовине равномерно убрзано угаоним убрзањем ε, одредити величину апсолутног убрзања *u* тачке *M* у тренутку $t = 2\ sec$ при следећим подацима: $\alpha = 30^0$, $a = 18\ cm$, $v_r = 3\ cm/sec$, $\varepsilon = 0{,}5\ sec^{-2}$; у тренутку $t = 0$ угаона брзина ω конуса равна је нулу.

Одг. $u = 15\ cm/sec^2$.

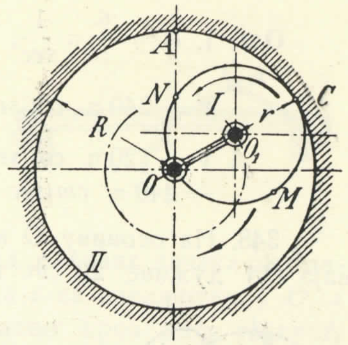
343. У задатку 341 одредити величину апсолутног убрзања *u* тачке *M* у тренутку $t = 1\ sec$ за случај, када се она креће неравномерно по изводници конуса константним релативним убрзањем u_r, са смером од темена ка основици његовој а при следећим подацима:

$\alpha = 30^0$, $a = 15\ cm$, $u_r = 10\ cm/sec$, $\omega = 1\ \frac{1}{sec}$; у тренутку $t = 0$ релативна брзина v_r тачке равна је нули.

Одг. $u = 10\sqrt{2}\ cm/sec^2$.

III. Равно кретање.

344. Кружна плоча I полупречника *r* котрља се без клизања у смеру који је дат стрелицом, по унутрашњем обиму непокретног цилиндра II полупречника $R = 2r$. Осовина O_1 плоче I чини један обрт у току пола секунде. У тренутку $t = 0$ налази се осовина *O* на правој *OA*. Одредити путању произвољне тачке *M*, која се налази на обиму плоче II. Наћи израз за пројекцију брзине v_r оне тачке *N* обима плоче I на правац полупречника OO_1, која се у тренутку *t* налази на правој *OA*.

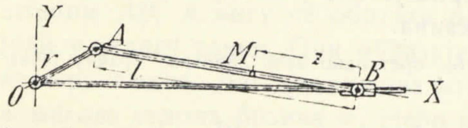


Одг. Права, која пролази кроз тачку *O*; $v_r = -4\pi r\ sin\ 8\pi t$.

345. Код неког механизма криваје је дужина: криваје $OA = 10\ cm$, спојне полуге $AB = 20\ cm$. Криваја се обрће равномерно; број обрта раван је два у секунди. Одредити брзину крсне главе *B* у тренутку када је положај механизма дат углом $AOB = 30^0$.

Одг. $4\pi\ (5 + \sqrt{5})\ cm/sec = 91\ cm/sec$.

346. Наћи приближне изразе за пројекцију брзине и убрзања на координатне осовине произвољне тачке *M* спојне полуге *AB* механизма криваје чија се осовина обрће равномерно угаоном брзином ω, а претпостављајући да је дужина криваје *r* мала у односу према дужини *l* спојне полуге. Положај тачке *M* дат је одстојањем од крсне главе: $MB = z$.



У обрасцу, који ће се добити решавањем задатка, налазиће се $\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\ sin\ \varphi\right)^2}$, где је $\varphi = \omega t$ угао *AOB*; тај радикал развити у безконачни ред и задржати прва два члана.

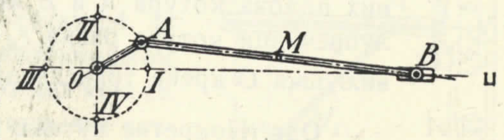
Одг. $v\ cos\ (v,x) = -\omega\left[r\ sin\ \varphi + \frac{(l-z)r^2}{2l^2}\ sin\ 2\varphi\right]$;

$$v\ cos\ (v,y) = \frac{zr}{l}\ \omega\ cos\ \varphi;$$

$$u\ cos\ (u,x) = -\omega^2\left[r\ cos\ \varphi + \frac{(l-z)r^2}{l^2}\ cos\ 2\varphi\right];$$

$$u\ cos\ (u,y) = -\frac{zr}{l}\ \omega^2\ sin\ \varphi.$$

347. Код механизма криваје је дужина: криваје $OA = 40\ cm$, спојне полуге $AB = 2\ m$. Криваја се обрће равномерно угаоном брзином 180 обрта у минути. Наћи угаону брзину ω спојне полуге и брзину средње њене тачке *M* за четири положаја криваје, који су одређени углом *AOB* величине: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

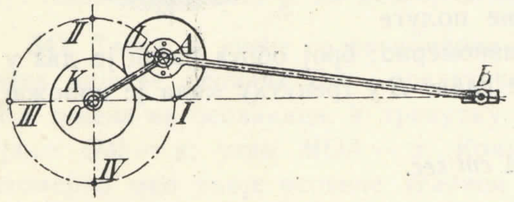


Одг. I. $\omega = \frac{6}{5}\pi\frac{1}{sec}$; $v = 120\pi$ $cm/sec = 376{,}8$ cm/sec. **II.** $\omega = 0$;

$v = 240\pi$ $cm/sec = 753{,}6$ cm/sec. **III.** $\omega = -\frac{6}{5}\pi\frac{1}{sec}$;

$v = 120\pi$ $cm/sec = 376{,}8$ cm/sec. **IV.** $\omega = 0$; $v =$
$= 240\pi$ $cm/sec = 753{,}6$ cm/sec.

348. На осовину O насађен је зупчаник K пречника 20 cm и кривaja OA дужине 20 cm који међу собом нису спојени. Са спојном полугом AB круто је спојен зупчаник L пречника такођер 20 cm; дужина $AB = 1\,m$. Зупчаник K обрће се равномерно угаоном брзином $\omega = 60$ обрта у минути и захватајући зупчаник L доводи у кретање спојну полугу AB и кривају OA. Цео механизам налази се у вертикалној равни. Одредити угаону брзину ω_1 криваје OA у четири разна положаја, два хоризонтална и два вертикална.

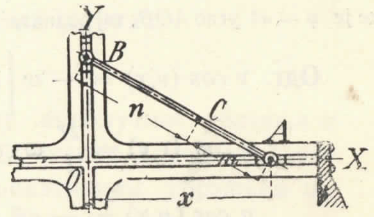


За одредбу угаоне брзине криваје треба претходно наћи линеарну брзину тачке A у датим положајима.

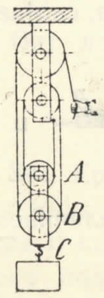
Одг. I. $\omega_1 = \frac{10}{11}\pi\frac{1}{sec}$; **II.** $\omega_1 = \pi\frac{1}{sec}$; **III.** $\omega_1 = \frac{10}{9}\pi\frac{1}{sec}$;

IV. $\omega_1 = \pi\frac{1}{sec}$.

349. Лењир AB елипсографа дужине l креће се крајем A по осовини OX а крајем B по осовини OY. Крај A креће се хармонијски: $x = a\sin\omega t$, где је $a < l$. Одредити величину брзине v тачке C, знајући да је $AC = m$, $CB = n$.



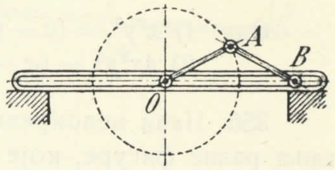
Одг. $v = \frac{a\omega}{l}\cos\omega t\sqrt{n^2 - m^2 + \frac{m^2\,l^2}{l^2 - a^2\sin^2\omega t}}$.



350. Одредити покретну и непокретну путању моментаних полова котура A и B котураче, кад су одговарајући полупречници котура равни r_a и r_b и претпостављајући да се виљушка C креће транслаторно.

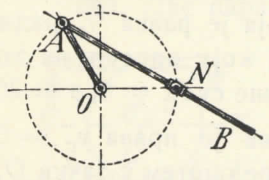
Одг. Покретне путање моментаних полова: котура A — круг полупречника r_a; котура B — круг полупречника $^1/_3\,r_b$. Непокретне путање полова: вертикалне тангенте на покретне путање моментаних полова, с њине десне стране.

351. Наћи геометријски непокретну и покретну путању моментаних полова спојне полуге AB; дужина њена равна је дужини криваје: $AB = OA = r$.



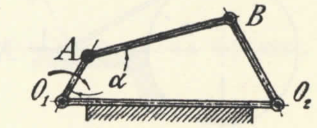
Одг. Непокретна путања моментаних полова — круг полупречника $2r$ са средиштем у тачки O, а покретна — круг полупречника r са средиштем у рукавцу A криваје.

352. Штап AB креће се тако да једна од његових тачака A описује круг полупречника r са средиштем у O, а сам штап пролази стално кроз дату тачку N која се налази на истом кругу. Наћи путање моментаних полова.



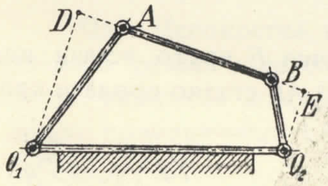
Одг. Непокретна путања моментаних полова — круг полупречника r са средиштем у тачки O; покретна путања моментаних полова — круг полупречника $2r$ са средиштем у тачки A.

353. Штапови O_1A и O_2B спојени су помоћу зглавака A и B са штапом AB, и могу се обртати око непомичних тачака O_1 и O_2 остајући у једној равни. Они образују зглавкасти четвероугаоник. Дато је: дужина штапа $O_1A = a$ и његова угаона брзина ω. Наћи конструкцијом ону тачку M штапа AB чији смер брзине пада у правац штапа и одредити величину брзине v тачке M у оном тренутку кад је угао OAB раван α.



Одг. $v = a\omega\sin\alpha$.

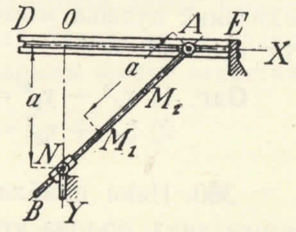
354. Угаона брзина криваје O_1A зглавкастог четвероугаоника равна је ω_1. Применом геометријске методе изразити угаону брзину ω_2 криваје OB помоћу ω_1 и најкраћих одстојања O_1D и O_2E, спуштених од осовина обртања на спојну полугу AB.



Наћи моментани пол обртања спојне полуге.

Одг. $\omega_2 = \omega_1\frac{O_1D}{O_2E}$.

355. Конхоидограф састоји се из лењира AB који је зглавкасто везан у тачки A за крсну главу; ова клизи у праволинијском прорезу DE а лењир пролази кроз цев која се може слободно окретати око непомичне тачке N. Одстојање тачке N од осовине OX прореза равно је a. Наћи једначине кривих линија

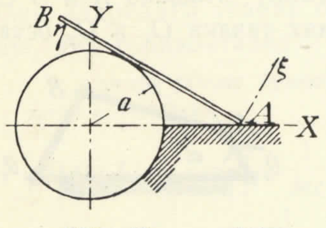


које описују тачке M_1 и M_2 лењира AB, кад су одстојања: $AM_1 = a$ и $AM_2 = {}^1/_2 a$.

Одг. 1) $x^2y^2 = (a-y)^2\,(a^2-y^2)$;
2) $4x^2y^2 = (a-y)^2\,(a^2-4y^2)$.

356. Наћи непокретну и покретну путању моментаних полова кретања равне фигуре, које је дато следећим подацима: тачка O_1 фигуре креће се брзином 10 *cm/sec* паралелно осовини OX у позитивном њеном смеру, а у одстојању 30 *cm* од ње; фигура се обрће око тачке O_1 у смеру казаљке на сату угаоном брзином која је равна ${}^1/_3$ радијана у секунди. Наћи осим тога и криву линију, коју описује на тој фигури непокретна тачка N; координате њене равне су: $x = 0$, $y = 30$.

Одг. Непокретна путања моментаних полова је права $y_c = 0$; покретна путања моментаних полова је круг са средиштем у тачки O_1: $\xi_c{}^2 + \eta_c{}^2 = 900$; релативна путања тачке N је Архимедова спирала: $\rho = 30\,\vartheta$.



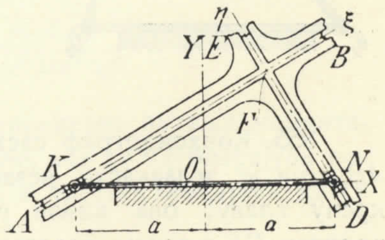
357. Наћи једначине путања моментаних полова штапа AB који, ослањајући се на круг полупречника a, крајем A клизи по правој OX која пролази кроз средиште тог круга.

Одг. $x_c{}^2\,(x_c{}^2 - a^2) - a^2y_c{}^2 = 0$;
$\eta_c{}^2 = a\xi_c$.

358. Замењујући у предњем задатку $a = 15$ *cm*, $AB = 30$ *cm*, одредити величину брзине v тачке B у тренутку када је одстојање $OA = 25$ *cm* а брзина тачке A да је равна 10 *cm/sec* са смером позитивне осовиме OX.

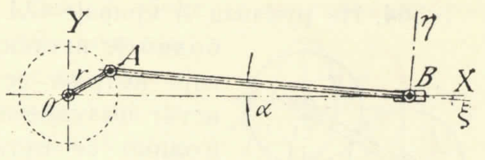
Одг. $v = 8{,}5$ *cm/sec*.

359. Два штапа AB и DE, који су у тачки F круто везани под правим углом, крећу се тако, да један од њих AB стално пролази кроз непокретну тачку K, а други DE кроз кроз непокретну тачку N; одстојање $NK = 2a$. У почетку кретања поклапао се штап AB са правцем KN. Наћи једначине путања моментаних полова тог кретања.



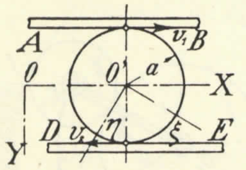
Одг. 1) $x_c^2 - y_c^2 = a^2$
2) $\xi_c^2 + \eta_c^2 = 4a^2$.

360. Наћи приближне једначине непокретне и покретне путање моментаних полова кретања спојне полуге AB механизма криваје, претпостављајући да је дужина $AB = l$ несразмерно велика у односу ка дужини криваје $OA = r$, и да се за угао $ABO = \alpha$ може узети $sin\alpha = \alpha$, $cos\,\alpha = 1$.



Одг. 1) $(x_c - l)^2\,(x_c{}^2 + y_c{}^2) = r^2\,x_c{}^2$;
2) $l^2\xi_c{}^2\,(l + \xi_c)^2 - r^2\eta_c{}^2\,(\eta_c{}^2 - 4l\xi_c) = l^4\xi_c{}^2\eta_c{}^2$.

361. Две паралелне летве AB и DE крећу се у супротним смеровима константним брзинама v_1 и v_2. Између летава налази се кружна плоча полупречника a, која се услед кретања летава и трења котрља по њима без клизања тако, да су брзине додирних тачака M и N равне v_1 и v_2. Наћи једначине путања моментаних полова, одредити брзину v_0 средишта O' кружне плоче и њену угаону брзину ω.



Одг. 1) $y_c = a\,\dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$;
2) $\xi_c{}^2 + \eta_c{}^2 = a^2\left(\dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2$;
3) Брзина v_0 равна је половини разлике датих брзина, и управљена у страну веће.
4) $\omega = \dfrac{v_1 + v_2}{2a}$.

362. Вагонет креће се по шинама константном брзином 3 *m/sec*; на његовој платформи налази се чигра, која се обрће око вертикалне — према платформи непокретне — осовине, са 30 обрта у секунди. Наћи површине моментаних осовина обртања апсолутног кретања чигре.

Одг. Непокретна површина моментаних осовина обртања је вертикална раван, паралелна шинама у одстојању 1,59 *cm* од осовине чигре. Покретна површина моментаних осовина обртања је вертикални ваљак полупречника 1,59 *cm*.

IV. Слагање обртања.

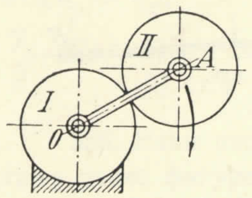
363. Дата су два захваћена цилиндрична зупчаника I и II, полупречника r_1 и r_2 са непокретним осовинама. Одредити однос њихових угаоних брзина ω_1 и ω_2 као и релативну угаону брзину ω_{21} зупчаника II у односу на зупчаник I при спољњем и унутарњем њином захватању.

Одг. При спољњем: $\omega_2 = -\,\omega_1\,\dfrac{r_1}{r_2}$;

$$\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1 = -\,\omega_1\,\frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

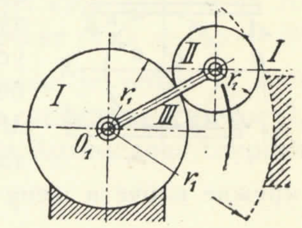
При унутарњем: $\omega_2 = \omega_1\,\dfrac{r_1}{r_2}$; $\omega_{21} = \omega_1\,\dfrac{r_1 - r_2}{r_2}$.

364. На рукавац A криваје OA која се обрће око осовине O слободно је натакнут зупчаник II; при обртању криваје котрља се он по непокретном зупчанику I истог полупречника са средиштем на осовини O. Колико се пута обрне око рукавца A покретни зупчаник II у времену, када се криваја OA обрне једанпут око осовине O?



Одг. Два пута.

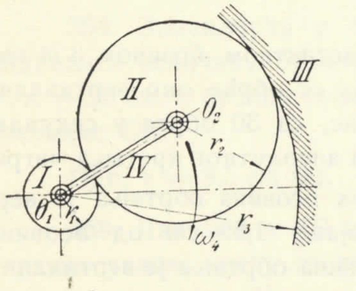
365. Криваја III спаја осовине O_1 и O_2 двају зупчаника I и II. Захватање зупчаника може бити спољње и унутарње, као што је показано на цртежу. Точак I остаје непокретан, а криваја III обрће се око осовине O_1 угаоном брзином ω_3. Одредити апсолутну угаону брзину ω_2 точка II и његову релативну брзину ω_{23} у односу на криварју, када су полупречници точкова r_1 и r_2.



Одг. Спољње захватање: $\omega_2 = \omega_3 \dfrac{r_1 + r_2}{r_2}$; $\omega_{23} = \omega_3 \dfrac{r_1}{r_2}$.

Унутарње захватање: $\omega_2 = - \omega_3 \dfrac{r_1 - r_2}{r_2}$; $\omega_{23} = - \omega_3 \dfrac{r_1}{r_2}$.

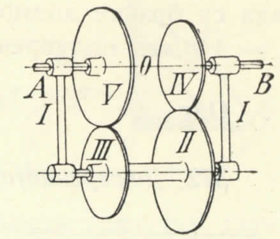
366. Механизам који доводи у брзо обртање брус, конструисан је на следећи начин: нарочитом ручицом ставља се штап IV у обртање угаоном брзином ω_4 око совине O_1. На крају O_2 штапа налази се рукавац на који је слободно насађен точак II полупречника r_2. Обртањем ручице присиљава рукавац точак II да се котрља по спољњем непокретном кругу III полупречника r_3. При томе, доводи точак II, услед трења, у обртање без клизања точак I полупречника r_1, који је слободно насађен на осовину O_1 *а* круто везан са осовином бруса. Помоћу датог полупречника r_3 спољњег непокретног обима, наћи такву величину r_1 да је однос $\dfrac{\omega_1}{\omega_4} = 12$, т. ј. да би се брус обртао 12 пута брже од ручице која га доводи у кретање.



Брзина тачке точка II, у којој точак II додирује непокретни круг III, равна је нули, према томе је $(r_1 + r_2)\,\omega_4 + r_2\,\omega_2 = 0$; брзина тачке у којој се додирују точкови I и II равна је $(r_1 + r_2)\,\omega_4 - r_2\,\omega_2 = r_1\,\omega_1$.

Одг. $r_1 = \dfrac{1}{11}\, r_3$.

367. *Епициклично захватање*. Оквир I обрће се са угаоном брзином ω_1 око непокретне осовине AB. Точкови II и III који су међусобно круто везани, насађени су слободно на осовину оквира која је паралелна осовини AB, а додирују точак IV који је непокретан и точак V који се може слободно обртати око осовине AO. Познавајући полупречнике r_2, r_3, r_4 и r_5 наћи угаону брзину ω_5 точка V.

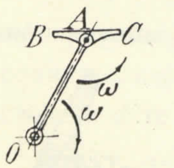


Решење: $\omega_1\, r_4 - \omega_{21}\, r_2 = 0$; $\omega_2 = \omega_1 + \omega_{21}$; $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{r_1 + r_2}{r_2}$;

$$\omega_{21} = \omega_1 \frac{r_4}{r_1};\; r_5\omega_1 - r_3\omega_{21} = r_5\omega_5.$$

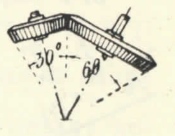
Одг. $\omega_5 = \omega_1 \dfrac{(r_2 + r_4)\,(r_2 - r_3)}{r_2 r_5}$.

368. Криваја OA обрће се угаоном брзином ω око непомичне осовине O. Педал BC обрће се око тачке A криваје истом угаоном брзином ω но у супротном смеру. Одредити апсолутно кретање педала.



Одг. Педал се креће транслаторно, све његове тачке описују кругове полупречника OA.

369. Дата су два захваћена конична зубчаника са непомичним осовинама и одговарајућим угловима α и β. Први се зупчаник обрће угаоном брзином ω_1. Одредити угаону брзином ω_2 другог зупчаника и срачунати је за случај да је $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $\omega = 10$ обрта у минути.

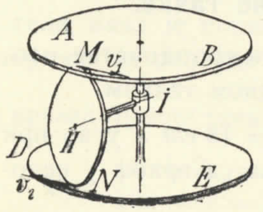


Одг. $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{sin\,\dfrac{\alpha}{2}}{sin\,\dfrac{\beta}{2}} = 0{,}173\,\pi\;\; sec^{-1}$.

370. Дата су два захваћена конична зупчаника I и II, са бројем зубаца k_1 и k_2 а међусобно управним непокретним осовинама. Зупчаник I чини n_1 обрта у минути. Одредити релативну угаону брзину зупчаника.

Одг. $\omega = \dfrac{\pi n_1}{30} \sqrt{1 + \left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^2}\, \dfrac{1}{sec}$.

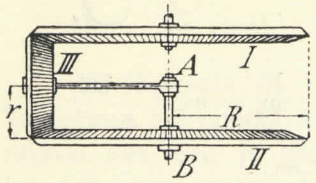
371. Диференцијални пренос састоји се из две кружне плоче AB и DE; њина се средишта налазе на њиној заједничкој осовини обртња; плоче притискују точак MN; његова осовина HI управна је на осовину плоча. Одредити брзину v средишта



H точка MN и угаону брзину ω његовог обртња око осовине HI, када су брзине додирних тачака точка са плочама равне: $v_1 = 3\ m/sec$, $v_2 = 4\ m/sec$; полупречник точка $r = 5\ cm$.

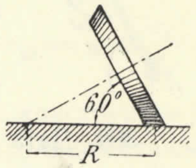
Одг. $v = \frac{v_2 - v_1}{2} = 0{,}5\ m/sec$; $\omega = \frac{v_1 + v_2}{2r} = 70\ \frac{1}{sec}$.

372. *Диференцијално захватање.* Конични зупчаник III, чија се осовина може обртати око непомичне осовине AB, захвата зупчанике I и II, који се обрћу око исте осовине AB угаоним брзинама ω_1 и ω_2. Полупречник точка III раван је r, а полупречници точкова I и II једнаки су и равни R. Одредити угаону брзину ω којом се точак III обрће око осовине AB као и угаону брзину ω_3 којом се обрће око своје осовине.



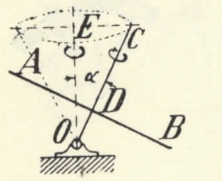
Одг. $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$; $\omega_3 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \frac{R}{r}$.

373. Кружна плоча полупречника r обиђе 5 пута у минути обим круга полупречника R. Раван круга затвара са равни плоче угао 60°. Срачунати угаону брзину ω плоче при обртњу око сопствене осовине и угаону брзину Ω при обртању око моментане осовине.



Одг. $\omega = \frac{\pi}{6} \frac{1}{sec}$; $\Omega = \frac{\pi \sqrt{3}}{6} \frac{1}{sec} = 0{,}289\,\pi \frac{1}{sec}$.

374. Карусел представљен кружном платформом AB, обрће се око осовине OC, која пролази кроз њено средиште D, шест пута у минути, а осовина OC обрће се у истом смеру око вертикале OE десет пута у минути. Угао између осовина је $\alpha = 20^0$. Пречник платформе AB раван је 10 m, одстојање OD равно 2 m. Одредити брзину v тачке B у оном тренутку, када се она налази у најнижем положају.

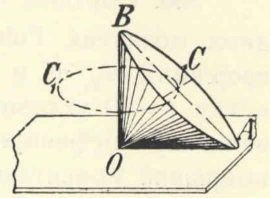


Одг. $v = 8{,}77\ m/sec$.

V. Обртање крутог тела око непомичне тачке.

У задацима овог одељка усвојене су непомичне координатне осовине, а почетак координата поклапа се са непомичном тачком.

375. Прави кружни конус чија је висина $CO = 18\ cm$ а угао при врху $AOB = 90^0$, котрља се по равни без клизања са врхом у непомичној тачки O. Знајући, да се тачка C креће равномерно и да се после 1 sec враћа у првобитни положај, одредити брзине крајева A и B пречника AB.



Одг. $v_a = 0$;

$v_b = 36\pi \sqrt{2}\ cm/sec = 160\ cm/sec$.

376. Тело се обрће око непомичне тачке. У неком тренутку дата је његова угаона брзина као вектор, чије су пројекције на координатне осовине: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}\ sec^{-1}$. Колика је у том тренутку брзина тачке чије су координате $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{28}\ cm$?

Одг. $v = 0$.

377. Угаона брзина тела $\omega = 7\ \frac{1}{sec}$, одговарајућа моментана осовина затвара у датом тренутку са координатним осовинама оштре углове α, β и γ; $cos\,\alpha = \frac{2}{7}$, $cos\,\gamma = \frac{6}{7}$. Срачунати величину брзине v и њене пројекције v_x, v_y, v_z на координатне осовине тачке тела чије су координате, изражене у метрима, у датом тренутку равне: 0, 2, 0, и наћи одстојање d те тачке од моментане осовине обртања.

Одг. $v_x = -12\ m/sec$; $v_y = 0$; $v_z = 4\ m/sec$;

$v = 12{,}7\ m/sec$; $d = \frac{4}{7} \sqrt{10}\ m = 1{,}8\ m$.

378. Угаона брзина тела $\omega = 6\ \frac{1}{sec}$. Правац моментане осовине затвара у датом тренутку са координатни осовинама углове α, β и γ; $cos\,\alpha = \frac{1}{3}$, $cos\,\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma > 90^0$. Наћи тачку тела, која се налази на равни $z = 0$ а има такву брзину, да су компоненте њене брзине у правцу координатних осовина OX и OY: $v_x = v_y = 2\ m/sec$.

Одг. Координате тражене тачке равне су: $x = -\frac{1}{2}\ m$,

$y = +\frac{1}{2}\ m$, $z = 0$.

379. Наћи једначине моментане осовине и величину угаоне брзине ω тела, када је познато да су пројекције брзине тачке M_1 (0, 0, 2) на координатне осовине равне: $v_{x_1} = 1\ m/sec$, $v_{y_1} = 2\ m/sec$, $v_{z_1} = 0$, и да је правац брзине тачке M_2 (0, 1, 2) одређен косинусима: $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$.

Одг. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$; $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{41}\ \frac{1}{sec} = 3{,}2\ \frac{1}{sec}$.

380. Обртање тела око непомичне тачке дато је следећим изводима познатих Euler-ових углова: $\dot{\vartheta} = 0$, $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = \alpha n$. Одредити пројекције ω_x, ω_y и ω_z угаоне брзине, када је познато да су у тренутку $t = 0$ углови: $\vartheta = 60^0$; $\varphi = 0^0$; $\psi = 90^0$. Одредити такођер и величину коефицијента α тако, да би непокретни аксоид (непокретна површина моментаних осовина обртања) била раван XOY.

Одг. 1) $\omega_x = \frac{n\sqrt{3}}{2} \cos\alpha nt$; $\omega_y = \frac{n\sqrt{3}}{2} \sin\alpha nt$; $\omega_z = n\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$;

2) $\alpha = -\frac{1}{2}$.

ДИНАМИКА ТАЧКЕ.

VI. Праволинијско кретање.

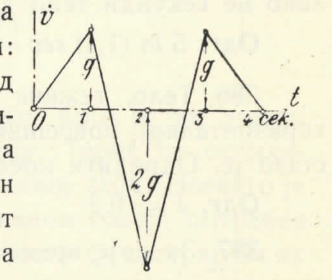
381. Кондуктер трамваја постепено укључује реостат, тиме увећава вучну снагу мотора. Вучна снага расте од нуле пропорционално времену и увеличава се у току сваке секунде за 12 *kg*. Наћи дијаграм пута трамвајских кола при следећим подацима: тежина кола 9,8 *t*, отпор трења је константан и раван 0,2 *t* а почетна брзина равна је нули; $g = 9{,}8\ m/sec^2$.

Одг. Кретање почиње $16^2/_3\ sec$ после укључења тока струје; од тог тренутка је $s = 0{,}002\left(t - 16\frac{2}{3}\right)^3 m.$

382. Тело је бачено са површине Земље почетном брзином v_0 вертикално у вис. Одредити висину пењања H тела, узимајући у обзир да се сила теже мења обрнуто пропорционално квадрату одстојања од средишта Земље. Отпор ваздуха занемарити. Полупречник земље $R = 6370\ km$, $v_0 = 1\ km/sec$.

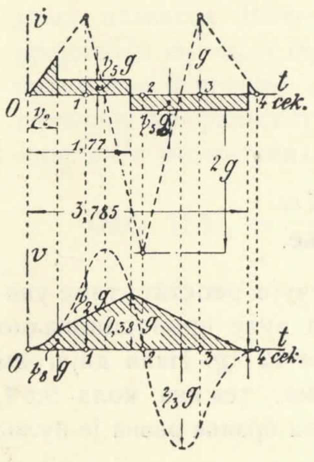
Одг. $H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} = 51\ km.$

383. Хоризонтални гвоздени жљеб, који даје угљен, креће се осцилаторно у правој путањи. Пуни период тога кретања раван је 4 *sec*. Брзина жљеба и угљена у почетку кретања равна је нули. Убрзање жљеба у току сваке четвртине периоде мења се праволинијски, као што је показано на слици: 1) од нуле до $+g$, 2) од $+g$ до $-2g$, 3) од $-2g$ до $+g$, 4) од $+g$ до нуле. Нацртати дијаграм убрзања угљена, дијаграм брзине жљеба и угљена, и одредити пут s који пређе угљен у току периоде кретања, кад је коефицијенат трења између гвожђа и угљена у стању мира $k_1 = 0{,}5$ а у стању кретања $k_2 = 0{,}2$.



Период кретања угља такођер је раван 4 *sec*, а подељен је на четири дела: 1) док је убрзаље жљеба мање од $^1/_2\,g$, креће се угаљ, услед трења, заједно са жљебом; 2 када је убрзање жљеба веће од $^1/_2\,g$, креће се угаљ самостално убрзањем $0{,}2\,g$; 3) кад апсолутна брзина жљеба постане мања од апсолутне брзине угља, угаљ се креће успорењем $0{,}2\,g$ до оног тренутка кад се брзина жљеба и угљена изједначе; 4) после тога креће се угаљ опет заједно са жљебом.

Одг. $s = 6{,}9\ m$.



Дијаграм убрзања жљеба и угљена.
($g\ cm/sec^2 = 20\ mm$).

На цртежу су шрафуром обележеии дијаграми убрзања и брзине угља. Пут који је прешао угаљ, претстављен је у дијаграму брзине површином, ограниченом кривом и осовином времена.

Дијаграм брзине жљеба и угљена.
($g\ cm/sec^2 = 40\ mm$).

384. Тело пада на Земљу са висине h, почетна му је брзина равна нули. Отпор ваздуха занемарити а привлачну силу Земље сматрати обрнуто пропорционалном квадрату одстојања тела од средишта Земље. Колико секунди T треба да протекне да би тело достигло површину Земље и колики је у том времену прираст брзине v? Полупречник Земље раван је R, убрзање Земљине теже на њеној површини равно је g.

Одг. $v = \sqrt{\dfrac{2gRh}{R+h}}$; $T = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{R+h}{2g}}\displaystyle\int\limits_R^{R+h}\dfrac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{R+h-x}} =$

$$= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\,arc\,cos\,\frac{R-h}{R+h}\right).$$

385. На тело тежине 2 kg, које је бачено вертикално у вис почетном брзином 20 m/sec утиче отпор ваздуха који је при брзини $v\ m/sec$, у килограмима изражен, раван $0{,}04\ v$; $g = 9{,}8\ m/sec^2$. После колико ће секунди тело достићи свој највиши положај?

Одг. $5\ ln\ (1{,}4)\ sec = 1{,}7\ sec$.

386. Тело, тежине P грама, прешло је услед судара на храпавој хоризонталној површини у времену од 5 секунди пут од 24,5 m и стало је. Одредити коефицијенат трења.

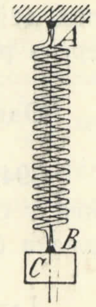
Одг. $k = 0{,}2$.

387. За које време и на коме путу могуће је кочницом зауставити трамвајски вагон, који се креће по хоризонталноме путу брзином 36 km/sat, кад је отпор кретању услед кочења раван 200 kg на тону тежине вагона? $g = 9{,}8\ m/sec^2$.

Одг. 1) 5,1 sec.; 2) 25,5 m.

388. О доњи крај еластичног ужета обешен је терет $Q = 4\ t$. Одредити највећу силу T у ужету при следећем кретању терета Q, претпостављајући да је сила у ужету пропорционална његовом продужењу. Познато је, да сила од 4 t продужује уже за 5 mm и да је у почетку кретања брзина терета и продужење ужета равно нули.

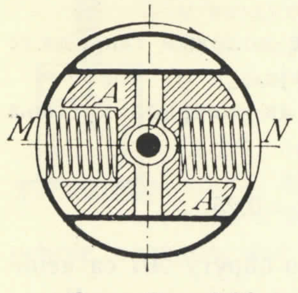
Одг. $T_{max} = 2Q = 8\ t$.



389. Опруга AB учвршћена је једним крајем у тачки A, а таквих је особина да се услед терета од 20 грама који дејствује у тачки B, продужи за 1 cm. У неком тренутку, када је опруга нерастегнута, обешен је о доњи крај B терет од 100 грама. Одредити амплитуду а и период T кретања. Масу опруге занемарити,

Одг. $a = 5\ cm$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{5}{g}} = 0{,}448\ sec.$

390. Регулатор система Гартунг има две масе A, свака 30 kg тежине; ове масе могу да клизе по хоризонталној правој MN а учвршћене су за опруге са непомичним тачкама M и N. Тежишта маса поклапају се са покретним крајевима опруга. Одстојање покретног краја сваке опруге од осовине O, која је управна на раван цртежа, равно је у неоптерећеном стању 5 cm. Промену дужине опруге за 1 cm изазива сила од 20 kg. Одредити период кретања T масе A, када се регулатор обрће равномерно око вертикалне осовине O са 120 обрта у минути.



Одг. $T = 0{,}28\ sec$.

391. На сваку опругу вагона отпада терет $P\ kg$; у стању равнотеже угне се опруга под тим теретом за 5 cm. Одредити период T кретања вагона на опругама.

Еластичан отпор опруга пропорционалан је њеном угибу.

Одг. $T = 0{,}45\ sec$.

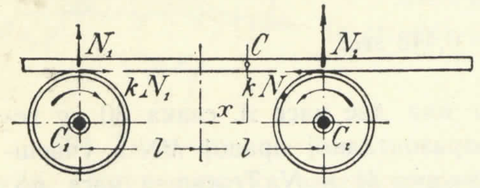
392. На крају A вертикалне еластичне греде, која је на доњем крају B укљештена, учвршћен је терет $Q = 2{,}5\ kg$. Терет ће осциловати ако греду померимо па је затим оставимо самој себи. Познато је да је за померање краја A за 1 cm, у хоризонталном смеру, потребна сила 0,1 kg. Наћи период T малих осцилација терета Q, сматрајући их праволинијским.

Одг. $T = 1\ sec$.

393. Терет тежине p грама, обешен је помоћу еластичног конца о непомичну тачку; изведен из положаја равнотеже, почиње да осцилише. Изразити дужину x конца у зависности од времена и наћи услов који треба да задовољи почетна његова дужина x_0 да би за време кретања терета конац остао затегнут. Затезање конца пропорционално је продужењу; његова дужина у нерастегнутом стању равна је l; услед дејства силе q грама конац се продужи за 1 *cm*; почетна брзина терета равна је нули.

Одг. $x = \left(l + \frac{p}{q}\right)\left(x_0 - l - \frac{p}{q}\right) \cos \sqrt{\frac{qg}{p}}\, t;\ l < x_0 < + \frac{2p}{q}.$

394. На два ваљка једнаког полупречника који се обрћу око осовина у супротним смеровима, положен је хомогени штап. Средишта ваљака C_1 и C_2 леже на хоризонталној правој C_1C_2, њино одстојање $C_1C_2 = 2l$. Штап се покреће услед сила трења, које се јављају у додирним тачкама штапа са ваљцима; те силе пропорционалне су притисцима греде на ваљке, при томе је коефицијенат пропорционалности (коефицијенат трења) ракан k.

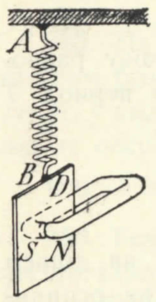


1) Одредити кретање штапа кад је на ваљке положен тако, да се за x_0 *cm* налази померен према положају симетрије.

2) Одредити коефицијенат трења k знајући да је период кретања T штапа, при $l = 25$ *cm*, раван 2 *sec.*

Одг. 1) $x = x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{kg}{l}}\, t\right) cm$; 2) $k = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0{,}25.$

395. Плоча D, тежине 100 *grama*, обешена о опругу AB са непомичном тачком у A, креће се између полова магнета. Услед Foucault-ових струја кретање је кочено силом која је пропорционална брзини. Отпор кретању раван је $kv\Phi^2$ *дyn.*, где је $k = 0{,}0001$, v — брзина у *cm/sec*, а Φ магнетски ток између полова N и S. У почетку кретања брзина плоче равна је нули и опруга је нерастегнута. Продужење опруге за 1 *cm* проузрокује сила од 20 *grama* која дејствује у тачки B. Одредити кретање плоче за случај да је $\Phi = 1000\sqrt{5}$ Maxwell-a.

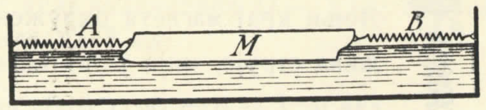


Одг. $x = 5 - e^{-2{,}5t}\,(5 \cos 13{,}78\, t + 0{,}907 \sin 13{,}78\, t)$ *cm*, где је x одстојање произвољне тачке плоче од њеног почетног положаја.

396. Одредити кретање плоче D при условима предњег задатка а за случај да је магнетски ток $\Phi = 10\,000$ Maxwell-a.

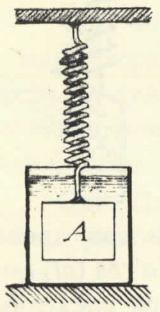
Одг. $x = 5 - \frac{5}{48} e^{-98t}(49\, e^{-96t} - 1).$

397. За одређивање отпора воде кретању модела лађе, при веома малим брзинама, употребљава се следећи метод. Модел M пушта се да плива у суду кад су му прамац и крма привезани помоћу две једнаке опруге A и B. Сила опруга пропорционална је њином продужењу. Резултати опажања показују, да највећа удаљења модела од положаја равнотеже опадају после сваке полуосцилације по геометријском реду чији је количник 0,9 и да полуосцилације трају $T = \frac{500}{981}$ *sec.* Одредити у грамима отпор R воде који отпада на сваки грам тежине модела при брзини $v = 1$ *cm/sec*, претпостављајући да се отпор воде мења линеарно брзини.



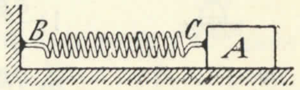
Одг. $R = -\frac{2 \log 0{,}9}{g\, T \log e} = 0{,}00042\ g.$

398. За одређивање житкости (вискозност) течности употребљавао је Coulomb следећи метод: обесивши о опругу танку плочу A, посматрао је њено кретање најпре у ваздуху а затим у оној течности чију је житкост требало одредити и нашао је трајање једне осцилације T_1, у првом случају и T_2 у другом. Трење између плоче и течности можемо, у грамима, изразити обрасцем $2Skv$ где је $2S$ површина плоче, v њена брзина, k поефицијенат житкости. Занемарујући трење између плоче и ваздуха, одредити коефицијенат k из величина T_1 и T_2 које су одређене огледом, кад је тежина плоче Q грама.



Одг. $k = \frac{2\pi Q}{gST_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}.$

399. Тело A тежине 0,5 *kg* лежи на храпавој хоризонталној површини и спојено је са непокретном тачком B помоћу опруге BC чија је осовина хоризонтална. Коефицијенат трења површине 0,2. Опруга је такова да се продужи за 1 *cm* услед силе 0,25 *kg*. Тело A удаљено је од тачке B тако, да смо опругу продужили за 3 *cm* и затим га пустили без почетне брзине.



Одредити: 1) Број највећих удаљења које ће превалити тело A, 2) величину тих удаљења и 3) трајање сваког од њих.

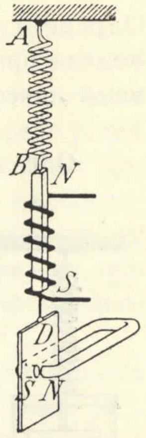
Тело ће стати, када у положају, где је његова брзина равна нули, сила опруге буде равна или мања од силе трења.

Одг. 1) 4 удаљења; 2) 5,2 *cm*; 3,6 *cm*; 2 *cm*; 0,4 *cm*; 3) $T = 1{,}41$ *sec.*

400. Услови задатка Бр. 389. измењени су тако да је место терета P обешен о опругу магнетски штап тежине 100 грама.

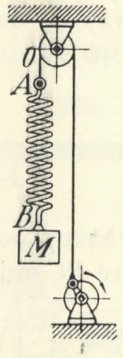
Доњи крај магнета окружен је спиралом којом тече променљива струја, чији је интензитет дат једначином $i = 20\ sin\ \frac{2\pi}{T} t$, где је $T = 0{,}25\ sec$. Струја почиње дејствовати у тренутку $t = 0$ кад увлачимо шипку у соленоид. До тога тренутка је магнетска шипка висила о опрузи непомично. Сила којом узајамно утичу магнет и спирала дата је једначином; $F = 16\pi i\ dyn$. Одредити принудуу осцилацију магнета.

Одг. $x = -\ 0{,}023\ sin\ (8\pi t)\ cm$.



401. Услови предњег задатка допуњени су тако, да на крају магнета, који сада тежи 50 грама, виси још месингана плоча D тежине 50 грама. Њено кретање кочено је магнетом, као у задатку Бр. 395. Отпор кретању система, као и пре, раван је $kv\Phi^2\ dyn$, где је $\Phi = 1\ 000\sqrt{5}$ Maxwell-a. Одредити принудну осцилацију плоче.

Одг. $x = -\ 0{,}02\ sin\left[\frac{2\pi}{T} t - 0{,}91\pi\right] cm$.



402. Терет M обешен је о опругу AB, чији се горњи крај креће хармонијски по вертикалној правој: $AO = a\ cos\ (nt)\ cm$. Одредити принудну осцилацију терета M при следећим подацима: тежина терета равна је p грама; дужина опруге у нерастегнутом стању равна је $l\ cm$; услед дејства силе q грама продужи се опруга за 1 cm; почетна брзина терета равна је нули.

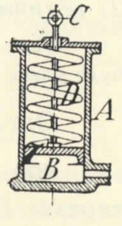
Одг. Узмимо за почетак координата тачку, која је за $a\ cm$ над почетним положајем терета.

1) $\frac{qg}{p} \lesseqgtr n^2$; $x = \frac{aqg}{qg - pn^2} cos\ (nt)\ cm$;

2) $\frac{qg}{p} = n^2$; $x = \frac{aqg}{2pn}\ t\ sin\ (nt)\ cm$.

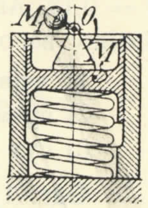
403. Индикатор парне машине састављен је из цилиндра A у којем се креће клип B ослањајући се на опругу D. Са клипом спојена је шипка BC на којој се налази писаљка C. Одредити амплитуду a принудне осцилације писаљке C под претпоставком да се притисак p паре на клип B, дат у килограмима на квадратни центиметар, мења по формули:

$p = 4 + 3\ sin\ \frac{2\pi}{T} t$, где је T време једног обрта осовине. Осовина чини 3 обрта у секунди; површина клипа индикатора $f = 4\ cm^2$; тежина покретног дела индикатора $Q = 1\ kg$; опруга се скрати за 1 cm под дејством силе од 3 kg.



Одг. $a = 4{,}5\ cm$.

404. Електрични мотор монтиран је на платформи M која се ослања на спиралну опругу. Тежина платформе и мотора равна је 32,7 kg. Опруга се скрати за 1 cm услед дејства силе од 30 kg. У одстојању 1,3 cm од осе мотора, учвршћена је за осовину маса M_1, тежине 200 грама. Угаона брзина мотора равна је $30\ \frac{1}{sec}$. Одредити принудну осцилацији платформе, претпостављајући да се она у почетку налазила у стању мира. $g = 981\ cm/sec^2$.



Одг. $x = 0{,}12t\ sin\ (30t)\ cm$.

405. Човек држи у руци крај опруге, на другом њеном крају виси у миру терет тежине p; при томе је опруга, тежином терета, продужена на дужину δ. У неком тренутку $t = 0$ почиње рука да се креће по вертикали хармонијски; при томе је највеће удаљење од почетног положаја (амплитуда руке) равно a и период T. Одредити кретање терета.

Одг. Положај терета у стању мира, узмимо за почетак координатног система.

1) $T \gtrless 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}}$;

$$x = \frac{agT}{4\pi^2\delta - gT^2}\left[2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}}\,sin\left(\sqrt{\frac{g}{\delta}}\ t\right) - T\,sin\left(\frac{2\pi}{T}\ t\right)\right];$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}};$$

2) $x = \frac{a}{2}\left[sin\left(\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t\right) - \sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t\ cos\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right)\right]$.

406. Одредити граничну брзину тешкога тела које пада у средини чији отпор расте пропорционално квадрату брзине. Маса тела m грама; почетна брзина његова равна је нули. Отпор средине при брзини 1 cm/sec раван је $k^2mg\ dyn$.

Одг. $v_{max} = \frac{1}{k}\ cm/sec$.

407. Тело тежине p грама бачено је брзином $v_0\ cm/sec$ вертикално у вис. До које ће се висине H, и за које време попети тело кад је отпор ваздуха дат изразом k^2pv^2 грама, где је v величина брзина тела?

Одг. $H = \frac{ln\ (v_0{}^2k^2 + 1)}{2gk^2}\ cm$; $T = \frac{arc\ tgkv_0}{kg}\ sec$.

408. Вагон тежине $Q = 9\,216$ *kg* почиње да се креће на хоризонталноме путу услед дејства ветра који дува у правцу пута. Отпор кретању вагона, раван је 1/200 делу његове тежине. Притисак ветра $P = kfu^2\,kg$, где је $f = 6\,m^2$, величина задње површине вагона која је изложена дејству ветра, u брзина ветра у односу на вагон и $k = 0{,}12$. Апсолутна брзина ветра $w = 12\ m/sec$. Узимајући за почетну брзину вагона нулу, одредити:

1) највећу брзину вагона v_{max};
2) време T, које треба да протекне да би се постигла та брзина;
3) пут x_1 који треба да пређе вагон да би имао брзину од 3 *m/sec.*

Одг. 1) $v_{max} = 4\ m/sec.$

За одредбу времена узмимо у обзир да је $\frac{dv}{dt} = -\frac{du}{at}$; преставимо једначину кретања у виду:

$$\frac{Qdu}{Q - 200\,kfu^2} = \frac{gdt}{200}$$

и заменимо после u промењљивом $y = u\sqrt{\frac{200\,kf}{Q}}$;

2) $T = \infty$.

За одредбу пута x_1, добијамо, користећи горе уведени израз за y, једиачину:

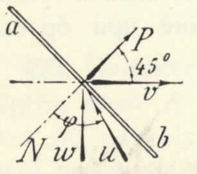
$$\frac{8(8y - w)dy}{y^2 - 1} = \frac{gdx}{200},$$

отуда

$$x = \frac{3200}{g}\,ln\,\frac{(y+1)^5}{y-1} + const.$$

3) $x_1 = 187\ m.$

409. Buer — (возило које клизи по леду услед дејства ветра) тежине $Q = 196{,}2$ *kg* заједно са путницима, креће се, услед притиска на једро, праволинијски по глаткој површини леда. Раван *ab* једра затвара са правцем кретања угао од 45°. Апсолутна брзина *w* ветра управна је на правац кретања. Величина притиска ветра P дата је формулом Newton-а $P = kfu^2cos^2\varphi^2$, где је φ — угао који затвара релативна брзина u ветра са нормалом N једра, $f = 5\ m^2$ — површина једра, $k = 0{,}08\sqrt{2}$ — експерименталним путем одређени коефицијенат. Притисак P дејствује управно на површину *ab*. Занемарујући трење, наћи: 1) коју највећу брзину може постићи буер? 2) који угао α затвара при тој брзинн заставица смештена на катарци са равни једра? 3) који пут треба да пређе буер да би постигао брзину $v = {}^2/_3\,w$, кад је његова почетна брзина равна нули?



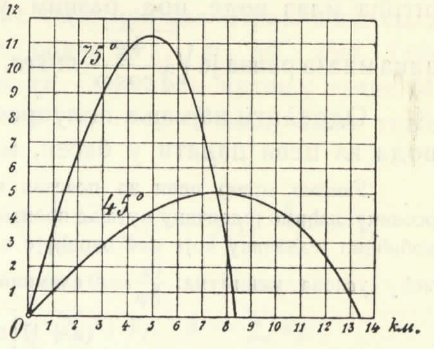
Кад у изводу $\frac{dv}{dt}$, који смо добили из диференцијалне једначине кретања, заменимо $cos\varphi$ изражено помоћу брзина v, w и u, добијамо: $\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{kfg}{Q}(w - v)^2$. Помоћу те једначине добијамо величине v_{max} и α. Зависност између пређеног пута x и брзине v, наћићемо интеграцијом, пошто $\frac{dv}{at}$ заменимо са $v\,\frac{dv}{dx}$ из:

$$\frac{w}{w - v} - 1 + ln\,\frac{w - v}{w} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{kfg}{Q}\,x.$$

Одг. 1) $v_{max} = w$; 2) $\alpha = 0^0$; 3) $x = 100\ (2 - ln\ 3)\ m = 90\ m.$

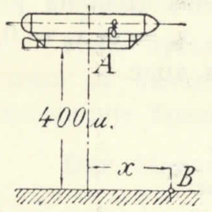
VII. Криволинијско кретање.

410. Бродски топ (105 *mm*, 35 калибара) избацује пројектил (18 *kg*) брзином $v_0 = 700\ m/sec$. Стварна путања пројектила у ваздуху претстављена је на слици за два случаја: 1) Када је угао који затвара осовина са хоризонтом раван 45° и 2) када је тај угао раван 75°. За сваки од датих случајева срачунати, за колико би се увећала како висина пењања тако и домет пројектила, кад њ не би дејствовао отпор ваздуха.



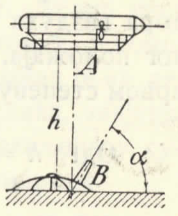
Одг. Увећање висине пењања: 1) 7,5 *km*; 2) 12 *km*.
Увећање даљине домета: 1) 36,7 *km;* 2) 16,7 *km.*

411. Ваздушна лађа A лети, на висини од 400 *m* над земљом, хоризонталном брзином 72 *km/sat*. На којем одстојању x, мереном по хоризонтали од дате тачке B, треба пустити из ваздушне лађе без почетне релативне брзине, произвољан терет, да би пао на ту тачку? Отпор ваздуха занемарити.



Одг. $x = 180\ m.$

412. Ваздушна лађа A лети над земљом у висини h хоризонталном брзином v_1. У тренутку када се ваздушна лађа налази са топом у истој вертикали пуца се из топа на њу. Наћи: 1) Који услов треба да задовољи почетна брзина v_0 метка, да би овај погодио ваздушну лађу? 2) под којим углом према хоризонту треба пуцати из топа? Отпор ваздуха занемарити.



Одг. $v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$; 2) $cos\,\alpha = \frac{v_1}{v_0}$.

413. Под којим углом α према хоризонту треба бацити камен брзином $14\sqrt{2}\ m/sec$, да би пао на циљ који се налази у нивоу његовог почетног положаја, а у одстојању 32 m од овог. Отпор ваздуха занемарити.

Одг. Два решења: 1) $tg\,\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 26^0$; 2) $tg\,\alpha = 2$, $\alpha = 63^0$.

414. Решити предњи задатак за случај да је циљ подигнут у вертикали за 4 m.

Одг. Два решења: 1) $tg\,\alpha = 0{,}75$, $\alpha = 37^0$
2) $tg\,\alpha = 1{,}75$, $\alpha = 60^0$.

415. Из вертикалне цеви, која је смештена у кружном басену, штрца млаз воде под разним угловима φ ка хоризонту. Почетна брзина млаза равна је $\sqrt{\frac{4g}{3\cos\varphi}}\ m/sec$, g — убрзање силе теже; висина цеви 1 m.

Одредити најмањи полупречник R басена при којем ће сва избачена вода из цеви падати у басен, ма како мала била висина зида басена.

Узмимо отвор цеви за почетак координатног система, вертикалну линију за y — осовину; нађимо једначину путање произвољне тачке воденог млаза; замењујући $y = -1\ m$ добићемо једначину која нам одређује одговарајућу вредност x; из ове треба затим помоћу услова минимума: $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0$ елиминисати φ. Ако са u обележимо R^2 добијамо једначину:

$$(u+1)\left[u^2 - 7\frac{1}{9}(u+1)\right] = 0.$$

Одг. $R = 2\sqrt{2}\ m = 2{,}8\ m$.

416. Одредити кретање тешке материјалне тачке масе m коју привлачи непокретна тачка O, силом пропорционалном одстојању. Кретање се збива у безваздушном простору. Привлачна сила на јединицу одстојања равна је $km^2\ dyn$; у времену $t = 0$, $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$; при томе је осовина OY управљена на доле.

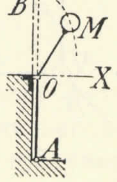
Одг. Хармонијско кретање: $x = a\cos kt$;

$$y = \frac{g}{k^2}\left(1 - \cos kt\right); \text{ по правој; } y = \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2 a}x.$$

417. Тело тежине p грама бачено са почетном брзином v_0, под углом α према хоризонтали, креће се под дејством силе теже и отпора ваздуха R. Одредити највећу висину h тела над нивоом почетног положаја, претпостављајући да је отпор ваздуха пропорционалан првом степену брзине $R = kpv\ dyn$.

Одг. $h = \frac{1}{k}v_0 \sin\alpha - \frac{g}{k^2}ln\left(1 + \frac{kv_0}{g}\sin\alpha\right)$.

418. Еластичан конац, учвршћен у тачки A, пролази кроз непокретан гладак прстен O. На слободном његовом крају налази се учвршћена куглица M масе m грама. Нерастегнута дужина конца равна је $l = OA$; продужење конца за 1 cm изазива сила од $k^2 m\ dyn$. Растезањем конца по правој AB тако, да се његова дужина удвостручи, саопштавамо куглици брзину v_0 управну на праву AB. Одредити путању куглице, занемарујући утицај силе теже и претпостављајући да је сила у концу пропорционална његовом продужењу.



Одг. Елипса: $\frac{k^2x^2}{v_0^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1.$

419. Тачку M, масе m привлаче n непокретних центара C_1, C_2, … C_i… C_n силама које су пропорционалне одстојањима. Привлачна сила тачке M ка центру C_i $(i = 1, 2, 3, \dots n)$ равна је $k_i \cdot m \cdot MC_i\ dyn$. Тачка M и привлачни центри леже у равни xy. Одредити путању тачке M, кад је при $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$; $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$. Утицај силе теже занемарити.

Одг. Елипса: $\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2 + \left[(y-b) + \frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2 \frac{k}{v_0^2} = 1,$

где је $a = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n} k_i x_i$; $b = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n} k_i y_i$; $k = \sum_{i=1}^{i=n} k_i$.

420. Тачку M привлаче два центра C_1 и C_2 силама које су пропорционалне одстојању $km\ MC_1$ и $km\ MC_2$. Центар C_1 је непокретан и налази се у почетку координата, центар C_2 креће се равномерно по x осовини тако, да је $x_2 = 2\,(a + bt)$.

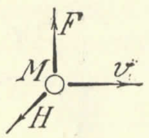
Наћи путању тачке M, претпостављајући да се у тренутку $t = 0$ тачка M налази у равни xy, њене координате нека су $x = y = a$ а пројекције брзине $\dot{x} = \dot{z} = b$, $\dot{y} = 0$.

Одг. Цилиндрична завојна линија, осовина завојнице је x- осовина, полупречник цилиндра раван је $\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2k}}$; ход завојнице раван је $\frac{\pi b\sqrt{2}}{k}$.

421. *Скретање катодних зрака у електричном пољу*. Делић масе m, оптерећен негативним електрицитетом q, улази брзином v_0 у хомогено електрично поље интензитета F; правац брзине управан је на интензитет поља. Одредити путању наредног кретања делића, знајући, да у електричном пољу нањ дејствује сила $F = qE$, управљена у супротну страну од интензитета E. Утицај силе теже занемарити.

Одг. Парабола, параметра: $\frac{m\,v_0^2}{q\,E}$.

422. *Скретање катодних зрака у магнетном пољу.* Делић масе m, оптерећен негативним електрицитетом q, улази брзином v_0 у хомогено магнетно поље интензитета H; правац брзине управан је на интензитет поља. Одредити путању наредног кретања делића, знајући, да кад је његова брзина управна на интензитет поља, да нањ дејствује сила $F = qHv$ управна на правац H и брзину v како је показано на слици. Утицај силе теже занемарити.

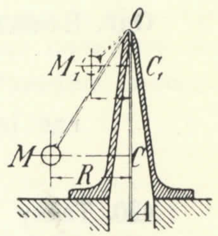


При решавању могу се згодно употребити једначине кретања у правцу тангенте и главне нормале путање.

Одг. Круг полупречника $\frac{m\,v_0}{q\,H}$.

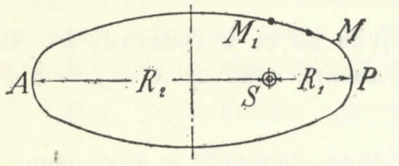
VIII. Закон момената и живе силе.

423. Материјална тачка M привезана је за нерастегљив конац MOA; део конца OAпровучен је кроз вертикалну цев. Тачка се обрће око осовине цеви по кругу полупречника R са 120 обрта у минути. Конац OA увучен је полако у цев тако, да је спољни део конца скраћен на дужину OM_1; при тој се дужини тачка креће по кругу полупречника $^1/_2R$. Наћи: 1) Колико се пута по том кругу обрне тачка у минути? 2) Колико је пута жива сила тачке у положају M_1 већа од оне у положају M?



Одг. 1) 480 обрта у минути; 2) четири пута.

424. Два метеорита M_1 и M_2 крећу се по једној и истој елипси. У жижи S налази се сунце. Међусобно одстојање метеорита је тако мало да лук M_1M_2 елипсе можемо сматрати за део праве. Одстојање M_1M_2 било је равно a, кад се средина овог налазила у перихелу P. Претпостављајући, да се метеорити крећу истим секторним брзинама, одредити одстојање M_1M_2 кад средина овог пролази афелом. Дато је $SP = R_1$ и $SA = R_2$.



Одг. $M_1M_2 = \frac{R_1}{R_2}\,a$.

425. Материјална тачка, тежине 3 kg, креће се брзином од 5 m/sec по хоризонталној правој на лево. Дуж 30 sec утиче на њу константна сила са смером у десно. На крају 30 sec кретала се тачка брзином 55 m/sec у десно. Наћи величину те силе и рад који је извршила.

Одг. 0,61 kg; 459 kgm.

426. Машиновођа воза затворио је, 500 m пред станицом, која је на узвишењу од 2 m, приступ пари и почео је кочити воз који се креће брзином 12 m/sec. Колики треба да је отпор кочења, сматрајући га константним, да би воз стао у станици, кад је тежина воза 1 000 t а отпор трења 2 t?

Одг. 8 679 kg.

427. Воз тежине 187,5 t креће се по хоризонталном делу пута убрзањем од 0,1962 m/sec^2. Отпор воза раван је 10 kg на тону његове тежине. Одредити ефекат парне машине локомотиве у тренутку $t = 10$ sec, кад је у времену $t = 0$ брзина воза 18,038 m/sec.

Из једначине живе силе: $d\left(\frac{m\,v^2}{2}\right) = P\,ds - 0{,}01\,Q\,ds$ где је m маса воза, Q његова тежина у kg, а P сила вуче у kg, налазимо елементарни механички рад локомотиве: $P\,ds = 0{,}01\,Q\,ds + \frac{Q}{g}\,v\,dv$ отуда њен ефекат: $N = \frac{1}{75}\left(0{,}01\,Q\,v + \frac{Q}{g}\,v\,\frac{dv}{dt}\right)$.

Одг. 1 500 HP.

428. Воз се креће уз косу раван брзином 36 km/sat. Нагиб косе равни $\alpha = 0{,}008$. У неком тренутку машиновођа, видевши опасност, почиње кочити воз. Отпор кочења и трења у осовинама раван је 0,1 тежине воза. На којем одстојању и после којег времена од почетка кочења ће воз стати? $sin\,\alpha = \alpha$.

Одг. 50 m; 10 sec.

429. Земљиште се сабија помоћу ручног маља, тежине 60 kg и попречног пресека 12 dm^2, који пада са висине од 1 m. При последњем ударцу ушао је маљ у земљиште за 1 cm, при томе можемо отпор земљишта против кретања маља сматрати сталним. Које највеће оптерећење може издржати земљиште не слежући се?

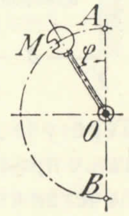
Претпоставићемо да земљиште које се сабија, може — не прекорачујући своју моћ ношења — без слегања издржати онај терет који изазива маљ улазећи у земљиште.

Одг. 5 kg на cm^2.

430. Отпор кретању железничког вагона, тежине 6 t, који потиче од трења осовина у лежиштима, раван је 15 kg. Радник, који гура вагон силом од 25 kg, покренуо га је из стања мира на хоризонталном праволинијском делу пута; прешавши 20 m пустио је вагон самом себи. Срачунати, занемарујући отпор ваздуха и трење између точкова и шина, највећу брзину v_{max} вагона за време његовог кретања а и пут s до поновног стања мира.

Одг. $v = 0{,}81$ m/sec; $s = 33\ ^1/_3$ m.

431. Главни део прибора за испитивање материјала на удар састављен је из тешког челичног лива M, учвршћеног на шипци која се може окретати, скоро без трења, око непомичне осовине O. Занемарујући масу шипке и



сматрајући тело M за материјалну тачку у одстојању $OM = 0{,}981$ *m* од осовине обртања, срачунати брзину v те тачке у најнижем положају B, кад она пада са положаја A бесконачно малом почетном брзином.

Одг. $v = 6{,}2$ *m/sec.*

432. Написати израз за функцију силе еластичне силе опруге, која се продужује за 1 *cm* услед терета од 0,4 *t*, претпостављајући да продужење x расте сразмерно сили.

Одг. $U = -\,0{,}2\,x^2 + \text{const.}$

433. Опруга направе за гађање има у ненапрегнутом стању дужину 20 *cm*. Сила, потребна за промену њене дужине за 1 *cm*, равна је 0,2 *kg*. Којом ће брзином куглица, тежине 30 грама, напустити направу кад је опруга била стиснута до на дужину од 10 *cm*?

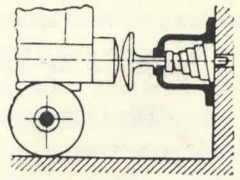
Одг. $v = 8{,}1$ *m/sec.*

434. Статички угиб греде, која је оптерећена у средини распона теретом $Q = 2t$, раван је 2 *mm*. Наћи највећи угиб греде, занемарујући њену масу, у два случаја: 1) када је терет Q положен на несавијену греду и пуштен без почетне брзине. 2) када терет пада са висине од 10 *cm* без почетне брзине.

При решавању задатка имати у виду, да је сила којом греда утиче на терет пропорционална њеном угибу.

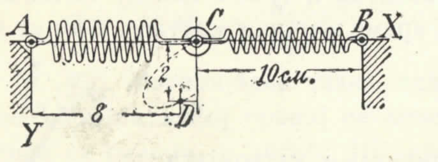
Одг. 1) 4 *mm*; 2) 22,1 *mm*.

435. Вагон тежине 16 *t* судара се брзином 1 *m/sec* са два еластична одбојника. Одредити највеће скраћење одбојника после судара са вагоном, кад је познато да се опруга одбојника скраћује за 1 *cm* услед дејства силе од 6 *t*.



Одг. $4\sqrt{1{,}01}\,cm = 4\,cm.$

436. Две ненапрегнуте опруге AC и BC — које су постављене у хоризонталној правој AX а везане зглавцима за непокретне тачке A и B — оптерећене су у тачки C теретом 1,962 *kg*. Опруга AC скраћује се за 1 *cm* услед силе од 2 *kg* а опруга CB продужује се за 1 *cm* услед силе од 4 *kg*. Одстојања: $AC = BC = 10$ *cm*. Терету је дата брзииа $v_0 = 2$ *m/sec* таквог правца, да при наредном кретању пролази кроз тачку D чије су координате: $x_0 = 8$ *cm*, $y_0 = 2$ *cm*; за почетак координата узета је тачка A а за смер координатних осовина онај



који је дат на слици. Одредити величину брзине терета у тренутку кад пролази кроз тачку D.

Одг. $v = 1{,}78$ *m/sec.*

437. Воз се креће по хоризонталном праволинијском путу равномерно брзином 36 *km/sat*. Да би увећао брзину воза, машиновођа намешта регулатор тако, да се сила вуче локомотиве увећа за 20%. Узимајући, да је отпор кретању воза раван 1/200 његове тежине и да независи од брзине, наћи колико *km* треба да пређе воз да би постигао брзину од 45 *km/sat*; $g = 33$ *km/min*^{2}.

Одг. 3,07 *km*.

438. Два делића оптерећена су позитивним електрицитетом. Оптерећење првог делића q_1 равно је 100 апсолутних електричних јединица $C\text{-}G\text{-}S$; оптерећење другог делића $q_2 = 0{,}1\,q_1$. Први делић остаје непокретан, а други се креће услед одбојне силе F првог делића. Маса другог делића равна је 1 *gram*; његово почетно одстојање од првог делића равно је 5 *cm* а почетна брзина је нула. Одредити горњу границу брзине делића који је у покрету, узимајући у обзир дејство само једне одбојне силе $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где је r - одстојање делића.

Одг. 20 *cm/sec.*

439. Претпоставимо да је по једном пречнику земље ископан скроз праволинијски канал; у тај канал пуштена је да пада са површине Земље тачка, без почетне брзине. Срачунати, брзину тачке у тренутку кад она пролази кроз средиште Земље, кад на њу у унутрашњости Земље утиче сила која је пропорционална одстојању тачке од средишта Земље, а управљена је ка њеном средишту. Полупречник Земље $R = 637\,.\,10^6$ *cm*; убрзање силе теже на површини Земље 980 *cm/sec*^{2}.

Одг. 7,9 *km/sec.*

440. Одредити брзину v_0 којом треба бацити тело са површине Земље вертикално у вис да би се дигло до на висину која је равна полупречнику Земље; при томе узети у обзир само привлачну силу Земље, која се мења обрнуто пропорционално квадрату одстојања тела од средишта Земље. Полупречник Земље раван је $637.\,10^6$ *cm*, убрзање привлачне силе Земље на њеној површини равно је 980 *cm/sec*^{2}.

Одг. 7,9 *km/sec.*

441. Са којом брзином v_0 треба бацити тане са површине Земље у смеру ка месецу, да би достигло ону тачку где су привлачне силе Земље и месеца исте и да у њој остане у равнотежи. Кретање Земље и месеца и отпор ваздуха занемарити. Убрзање силе теже на површини Земље $g = 9{,}8\ m/sec^2$. Однос маса месеца и Земље $m : M = 1 : 80$, њихов размак $d = 60\ R$, где је $R = 6\ 000\ km$ — полупречник Земље.

Константу f опште гравитације, т. ј. привлачну силу двеју маса од којих је свака равна јединици масе, на одстојању јединице дужине, налазимо из једначине:

$$g = f\left[\frac{M}{R^2} - \frac{m}{(d-R)^2}\right].$$

Одг. $$v_0^2 = \frac{2gR\,(d-R)}{d}\cdot\frac{(d-R)\sqrt{\dfrac{M}{m}}-R}{(d-R)\sqrt{\dfrac{M}{m}}+R} = 2gR\left(1-\frac{1}{60}\right)\frac{1-\alpha}{1+\alpha},$$

где је $\alpha = \dfrac{1}{59\sqrt{80}}$; $v_0 = 10{,}8\ km/sec.$

442. Куглица тежине p грама привезана за нерастегљив конац, клизи по глаткој хоризонталној равни; други крај конца увлачи се константном брзином a у отвор који се налази у самој равни. Одредити кретање куглице и силу T у концу, када је познато да је у почетном тренутку конац положен у правој, да је размак између куглице и отвора раван R, и да је пројекција почетне брзине куглице на праву која је управна на правац конца, равна v_0.

Одг. У ноларним координатама, узимајући отвор за почетак координата а угао φ_0 да је раван нули: $r = R - at$; $\varphi = \dfrac{v_0 t}{R - at}$;

$$T = \frac{pv_0^2R^2}{g(R-at)^3}\ g.$$

443. Одредити масу M сунца, располажући следећим подацима: полупречник земље $R = 636\,.\,10^6\ cm$; средња њена густина 5,5; већа полуоса Земљине путање a равна је $149\,.\,10^{11}\ cm$, време обилажења T Земље око сунца равно је 365,25 дана.

Привлачну силу опште гравитације двеју маса, чије су масе 1 g на одстојању 1 cm, узимамо да је равна $\dfrac{gR^2}{m}$, где је m маса Земље; из Kepler-ових закона следује, да је сила којом сунце привлачи Земљу равна $\dfrac{4\pi^2a^3}{T^2}\cdot\dfrac{m}{r^2}$, где је r — одстојање Земље од сунца.

Одг. $M = 197.\ 10^{31}\ g$.

444. Тачка масе m, описује под утицајем централне силе P лемнискату: $r^2 = a\cos 2\varphi$, где је a константа, r одстојање тачке од центра атракције. У почетном тренутку је $r = r_0$, а брзина тачке равна је v_0 и затвара са правом која спаја тачку са центром, угао α. Одредити силу P, знајући да зависи само од одстојања r.

По обрасцу Binet-а је $P = -\dfrac{mc^2}{r^2}\left(\dfrac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}+\dfrac{1}{r}\right)$, где је c двострука секторна брзина тачке.

Одг. Привлачна сила: $P = \dfrac{3\ ma^2}{r^7}\ r_0^2\ v_0^2\ sin^2\alpha$.

445. Тачка M масе m креће се око непокретне тачке O услед дејства централне силе P која зависи само од одстојања $OM = r$. Знајући да је брзина тачке $v = \dfrac{a}{r}$, где је a константа, одредити силу P и путању тачке.

Одг. Привлачна сила $P = \dfrac{ma^2}{r^3}$; путања је логаритамска спирала.

446. Одредити кретање тачке масе 1 g под дејством привлачне централне силе, обрнуто пропорционалне кубу одстојања тачке од центра силе, при следећим подацима: на одстојању равном 1 cm, равна је сила 1 dyn. У почетном је тренутку одстојање тачке од центра $r_0 = 2\ cm$, брзина $v_0 = 0{,}5\ cm/sec$ и затвара са правом која спаја центар са тачком угао 45⁰.

Секторна брзина равна је $\frac{1}{2}\ r_0\,v_0\,sin\,(r_0\,v_0)$.

Одг. $r = 2e^{\varphi}$; $r^2 = 4 + t\sqrt{2}$.

447. Тачку масе 1 kg привлачи непомични центар O силом обрнуто пропорционалном петом степену одстојања; при одстојању 1 cm та је сила равна 8 $dyna$. У почетку кретања налази се тачка на одстојању $OM_0 = 2\ cm$ и има брзину управну на OM_0, равну $v_0 = 0{,}5\ cm/sec$. Одредити путању тачке.

Одг. Обим круга полупречника 1 cm.

448. Под утицајем привлачне централне силе по закону Newton-а описује тачка масе 20 грама у току од 50 sec пуну елипсу са полуосама 10 cm и 8 cm. Одредити највећу и најмању величину привлачне силе P при томе кретању.

Одг. $P_{max} = 2\pi^2\ dyn = 19{,}7\ dyn$; $P_{min} = \dfrac{1}{8}\ \pi^2\ dyn = 1{,}2\ dyn$.

IX. Кретање по датој кривој линији и датој површини.

449. Камен тежине 3 kg, везан за конац дужине 1 m, креће се по кругу који лежи у вертикалној равни. Одредити најмању угаону брзину ω камена, при којој ће наступити кидање конца, када је сила која га кида равна 5 kg.

Одг. $\omega = 2{,}56\ \dfrac{1}{sec}$.

450. На деловима железничког колосека у кривини надвисује се спољња шина над унутарњом да би резултанта тежине вагона и отпора колосека била хоризонтална и равна производу масе вагона и центрипеталног убрзања његовог тежишта. Одредити величину надвишења спољње шине над унутарњом, при следећим подацима: полупречник кривине 400 *m*, брзина вагона 10 *m/sec*, размак шина 1,5 *m*.

Одг. $h = 3{,}8$ *cm*.

451. У вагону, воза који се креће у кривини брзином од 72 *km/sat*, врши се помоћу ваге са опругом мерење неког тела. Тежина терета равна је 5 *kg* али вага показује 5,1 *kg*. Одредити полупречник кривине, занемарујући масу ваге.

Одг. 202 *m*.

452. Терет тежине 2 *kg* обешен је о конац дужине 1 *m*. Услед судара добио је у хоризонталном смеру брзину од 5 *m/sec*. Наћи силу у концу непосредно после судара.

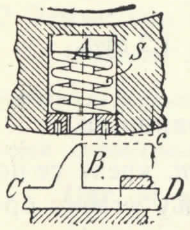
Одг. 7,1 *kg*.

453. Одредити највећи притисак на осовину прибора за испитивање материјала на судар при истим условима као у задатку Бр. 431, претпостављајући да је тежина челичног лива равна 20 *kg*.

Одг. 100 *kg*.

454. Колики угао затвара са вертикалом шипка прибора за испитивање материјала на судар (види задатак Бр. 431) у оном тренутку кад је притисак на осовину раван нули?

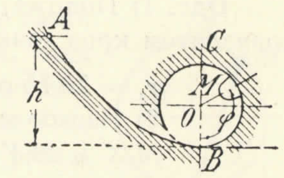
Одг. $\varphi = arc\ cos\ \frac{2}{3}$.



455. За спречавање несретних случајева услед раскидања замајца употребљава се следећа направа. У обиму замајца смештено је тело *A* које се задржава у унутрашњости његовој помоћу опруге *S*. Када брзина замајца достигне граничну величину, судара се тело *A* својим крајем са испадом *B* шипке *CD* која затвара приступ пари у машину. Нека је тежина тела $A = 1{,}5$ *kg*, одстојање испада *B* од обима замајца $c = 2{,}5$ *cm*, гранични број обрта замајца 120 у минути. Одредити величину силе, која скраћује дужину опруге *S* за 1 *cm*, претпостављајући да је маса тела *A* концентрисана у тачки, чије је одстојање од осовине обртања замајца, у положају преставњеном на слици, равно 147,5 *cm*.

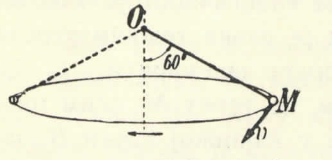
Одг. 14,5 *kg*.

456. По путу *AB*, који у *B* тангенцијално прелази у кружну путању полупречника *a*, положене су шине по којима се котрља вагонет тежине *p kg*. Са које висине *h* треба пустити вагонет без почетне брзине, да би прешао цео обим круга не одвајајући се од њега? Одредити притисак *N* вагонета на кружну путању у тачки *M*. Положај тачке *M* одређен је углом $\sphericalangle MOB = \varphi$.



Одг. $h \geqslant 2{,}5a$; $N = p\left(\frac{2h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right) kg$.

457. Терет тежине 1 *kg*, обешен помоћу конца дужине 30 *cm* за непомичну тачку *O*, претставља конично клатно, т. ј. описује круг у хоризонталној равни, при томе затвара конац са вертикалом угао де 60⁰.



Одредити брзину *v* терета и силу *T* у концу; $g = 9{,}8$ *m/sec*².

Одг. $v = 210$ *m/sec*; $T = 2$ *kg*.

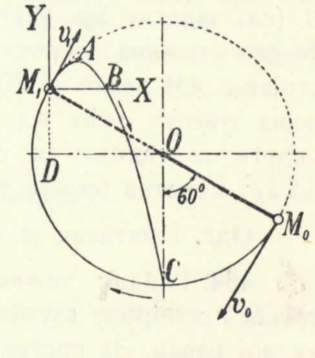
458. О конац, дужине $l = 50$ *cm*, који је учвршћен за непомичну тачку *O* обешена је маса тежине 1 *kg*. Маса је отклоњена из вертикале за угао 60⁰ и дата јој је према доле у вертикалној равни брзина v_0, управна на конац а величине 210 *cm/sec*. Одредити: 1) Силу у концу кад маса пролази најнижом тачком путање. 2) На вертикали одредити ону висину, до које ће се издићи маса изнад тог положаја.

Одг. 1) 2,9 *kg*; 2) 47,5 *cm*.

459. Задржавајућу услове предњег задатка, осим величине v_0; наћи величину брзине v_0 при којој ће маса прећи цео обим круга.

Одг. $v_0 > 140\sqrt{10}$ *cm/sec* $= 442{,}7$ *cm/sec*.

460. Терет тежине 1 *kg* обешен је помоћу конца дужине 50 *cm* за непокретну тачку *O*. У почетном положају *M* отклоњен је терет од вертикале за угао $\alpha = 60^0$, где му је у вертикалној равни дата брзина $v = 350$ *cm/sec* према доле.



1) Наћи положај M_1 терета за који ће напон у концу бити раван нули, и брзину v_1 у том положају.

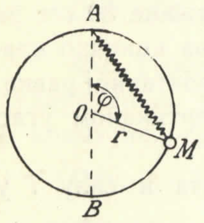
2) Одредити путању наредног кретања до оног тренутка када ће се конац поново затегнути.

Одг. 1) Положај M_1 налази се у одстојању $M_1D = 25\ cm$ над хоризонтом кроз тачку O.

$v_1 = 70\sqrt{5}\ cm/sec = 157\ cm/sec.$

2) Парабола M_1ABC, њена једначина, у односу на осовине M_1X и M_1Y биће: $y = x\sqrt{3} - 0{,}08x^2$; терет пређе ту параболу у току од 0,55 *sec.*

461. О горњу тачку A кружног обруча, који се налази у вертикалној равни, обешен је, помоћу опруге, терет M који може да клизи без трења по обручу. Полупречник обруча r, природна дужина опруге a, њена еластичност је такова, да се при дејству силе која је равна тежини терета M продужи за b; тежину опруге занемарити.



Наћи услов, при којем ће терет M, осим очевидног положаја равнотеже у најнижој тачки B, заузети још и други положај равнотеже и одредити га.

Сила, којом опруга утиче на терет, пропорционална је продужењу опруге.

Одг. Треба да буде: $a + 2b < 2r$,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2(r-b)}.$$

462. Терет M, обешен помоћу опруге о горњу тачку A кружног обруча који се налази у вертикалној равни (сл. задатка Бр. 461) пада клизећи без трења по обручу.

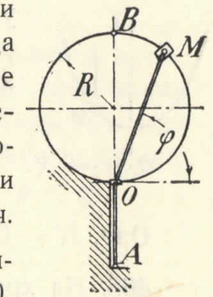
Каква треба да је еластичност (карактеристика) опруге, да би притисак терета на обруч у доњој тачки B био раван нули при следећим подацима: полупречник обруча 20 *cm*, тежина терета 5 *kg*, у почетном положају терета, одстојање AM равно је 20 *cm* и опруга има природну дужину, почетна брзина терета равна је нули; тежину опруге занемарити.

Одг. Опруга треба да се продужи за 1 *cm* услед дејства силе од 0,5 *kg*.

463. Одредити притисак терета M на обруч у доњој тачки B (сл. задатка Бр. 461) при следећим подацима: полупречник обруча 20 *cm*, тежина терета 7 *kg*; у почетном положају терета одстојање AM равно је 20 *cm*, при томе је опруга затегнута и њена дужина двапут већа од природне, која је равна 10 *cm*. Еластичност опруге је такова да се она продужи за 1 *cm* при дејству силе од 0,5 *kg*, почетна брзина терета равна је нули, тежину опруге занемарити.

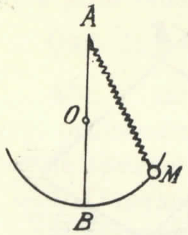
Одг. Притисак је управљен на горе и раван 7 *kg*.

464. Гладак тежак прстен M тежине 1 *g* може да клизи без трења по обручу (луку круга) полупречника R *cm*, који лежи у вертикалној равни. За прстен везан је еластичан конац MOA који је провучен кроз гладак непокретан прстен O, а учвршћен у тачки A. Познато је, да је затезање конца равно нули, када се прстен M налази утачки O и да је за продужење конца за 1 *cm* потребна сила k^2 *dyn*. У почетном тренутку налази се прстен у тачки B у лабилној равнотежи, и услед бесконачно малог удара почиње да клизи по обиму обруча. Одредити притисак N прстена на обруч.



Одг. $N = [2g + Rk^2 + 3(g + Rk^2)\cos 2\varphi]\ dyn$; притисак је управљен ка конвексној страни кад је $N > 0$, ка конкавној кад је $N < 0$.

465. Терет M, обешен помоћу опруге за непомичну тачку A, креће се хармонијски са малим амплитудама у вертикалној равни, клизећи без трења по луку круга чији је пречник AB раван l. Природна дужина опруге је a, њена еластичност је таква да се при дејству силе која је равна тежини терета M, продужи за дужину b.



Одредити период T кретања у случају, када је $l = a + b$; масу опруге занемарити и узети да опруга при кретању остаје затегнута.

Одг. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}.$

466. О непомичну тачку O обешен је помоћу конца OM, дужине l, терет M масе m. У почетку кретања, затвара конац OM са вертикалом угао α и брзина терета M равна је нули. При наредном кретању наилази конац на танку жицу O_1 која је управна на раван у којој се креће терет. Положај жице дат је поларним координатама; $h = OO_1$ и β. Колики треба да је угао α да би се конац OM обавијао око жице после судара са њоме и колика је промена затежуће силе у концу, у тренутку када се овај судара са жицом? Дебљину жице занемарити.

Тражена величина угла α треба да буде такова, да затезање у концу O_1M буде равно нули када се терет M налази над тачком O_1 у истој вертикали са њоме.

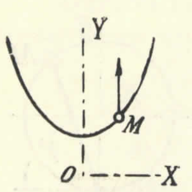
Овај услов, чија је неопходност очевидна, уједно је и довољан; јер кад је испуњен брзина терета нигде не постаје равна нули.

Одг. $\alpha = arc\cos\left[\dfrac{h}{l}\left(\dfrac{3}{2} + \cos\beta\right) - \dfrac{3}{2}\right],$

затезање у концу увећава се на величину:

$$2\,mg\,\frac{h}{l}\left(\frac{2}{3} + \cos\beta\right).$$

467. Тачка масе m креће се, удаљујући се од осовине OX, по ланчаној линији: $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, где је $a = 1\ cm$. Сила која про-



узрокује ово кретање, паралелна је OY — осовини и равна је kmy, где је $k = 1\ sec^{-2}$. У тренутку $t = 0$: $x = 1\ m$, $\dot{x} = 1\ m/sec$.

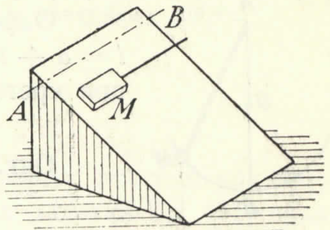
Одредити притисак N тачке на криву и кретање тачке.

Полупречник кривине ланчане линије раван је: $\frac{y^2}{a}$.

Одг. $N = 0$; $x = (1 + t)\ m$.

468. На храпавој косој равни која затвара са хоризонтом угао 30^0, спушта се тешко тело без почетне брзине. Одредити, трајање T за које оно пређе пут дужине $l = 39{,}2\ m$ кад је коефицијенат трења $k = 0{,}02$.

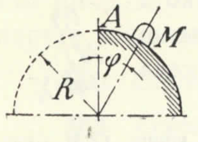
Одг. $T = 4{,}1\ sec$.



469. По храпавој косој равни креће се тешко тело M; у хоризонталном правцу вучено је константно концем који је паралелан правој AB. Од неког тренутка креће се тело праволинијски и равномерно, при чему је она од двеју узајамно управних компонената брзине која је паралелна AB, равна $12\ m/sec$. Одредити другу компоненту v_1 брзине као и силу T у концу при следећим подацима: угао нагиба равни $tg\alpha = \frac{1}{30}$, коефицијенат трења $k = 0{,}1$, тежина тела $300\ g$.

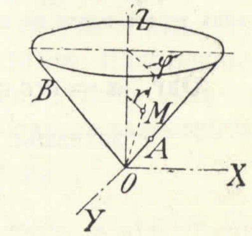
Одг. $v_1 = 4{,}24\ cm/sec$; $T = 28{,}3\ g$.

470. Камену M, који се налази у темену глатке полукугле полупречника R, дата је хоризонтална почетна брзина v_0. На ком ће месту камен напустити куглу? При којим вредностима v^0 напушта камен у почетку кретања куглу?



Одг. $\varphi = arc\ cos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)$; $v_0 \geqslant \sqrt{gR}$.

471. Тачка M масе $m\ grama$ креће се под дејством одбојне силе из O по глаткој површини кружног конуса са правим углом у врху. Одбојна сила пропорционална је одстојању: $P = m.\ OM\ dyn$. У почетном тренутку налази се тачка M у тачки A, одстојање $OA = 2\ cm$, почетна брзина $v_0 = 2\ cm/sec$ паралелна је основи конуса. Одредити кретање тачке M.



Положај тачке M одређен је координатом z и поларним координатама r и φ у равни, која је управна на осовину OZ. Једначина површине конуса: $r^2 - z^2 = 0$.

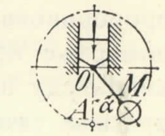
Одг. $r^2 = e^{2t} + e^{-2t}$; $tg\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right) = e^{2t}$.

X. Релативно кретање.

472. Тачка о коју је обешено математско клатно, дужине l, креће се по вертикалној правој равномерно убрзано. Одредити, при малим амплитудама, трајање осцилације клатна за два разна случаја: 1) када је убрзање тачке вешања управљено на горе и произвољне величине; 2) када је убрзање управљено на доле а величина му је $p < g$.

Одг. 1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{p+g}}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-p}}$.

473. Математско клатно OM, дужине l, отклоњено је у почетном тренутку из положаја равнотеже OA за угао α и има брзину равну нули. Тачка о коју је обешено клатно, има у том истом тренутку брзину равну нули, после тога пада константним убрзањем $p \geqslant g$. Одредити дужину s кружнога лука, круга који описује тачка M крећући се око тачке O.



Одг. 1) $p = g$; $s = 0$; 2) $p > g$; $s = 2l\,(\pi - \alpha)$.

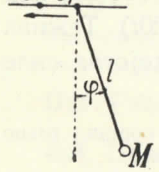
474. У вагону, који се креће по праволинијском хоризнոталном путу, осцилише — са малим амплитудама — математско клатно, при томе је средњи његов покожај отклоњен за угао 6^0 од вертикале.

1) Одредити убрзање u вагона.

2) Одредити разлику трајања осцилација клатна T у случају непокретног вагона и T_1 у датом случају.

Одг. 1) $u = 0{,}1\ g = 98\ cm/sec^2$.
2) $T - T_1 = 0{,}005\ T$.

475. Тачка, о коју је обешено математско клатно дужине l, креће се хармонијски око непомичне тачке O:$OO_1 = a\ sin\,pt$. Одредити мале осцилације клатна, узимајући да се у почетку кретања $t = 0$ клатно налазило у стању мира.

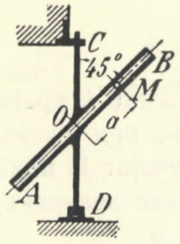


Одг. $\varphi = \frac{ap^2}{k^2 - p^2}\left(sin\,pt - \frac{p}{k}\ sin\,kt\right)$,

где је $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

476. Прстен се креће по глатком штапу који се обрће равномерно у хоризонталној равни око једног свог краја чинећи 1 обрт у sec. Дужина штапа $1\ m$. У тренутку $t = 0$ налази се прстен у одстојању $75\ cm$ од обртне тачке штапа, и има брзину равну нули. Одредити време t_1, после којега ће прстен сићи са штапа.

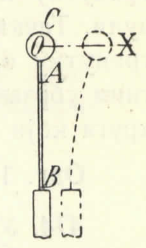
Одг. $t_1 = \frac{1}{2\pi}\ ln\ 3 = 0{,}35\ sec$.



477. Цев AB обрће се константном угаоном брзином ω око вертикалне осовине CD, са којом затвара непроменљив угао 45^0. У цеви се налази тешка куглица M. Одредити кретање те куглице када је њена почетна брзина равна нули и почетно одстојање од тачке O равно a. Трење занемарити.

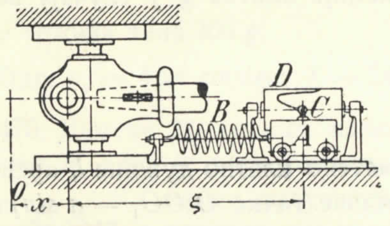
Одг. $OM = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{+0{,}5\omega\sqrt{2}} + e^{-0{,}5\omega t\sqrt{2}}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$

478. За крај A вертикалног еластичног штапа AB учвршћен је терет C тежине 2,5 *kg*. Кад изведемо терет C из положаја равнотеже па га пустимо, креће се хармонијски под дејством силе, пропорционалне одстојању од положаја равнотеже. За померање краја A за 1 *cm* потребна је сила 0,1 *kg*. Наћи амплитуду принудних осцилација терета C за случај да је кретање тачке B, у којој је учвршћен штап, хармонијско по хоризонталној правој амплитуде 1 *mm* и периоде 1,1 *sec*.



Одг. 5,9 *mm*.

479. За мерење убрзања клипа парне машине предложио је Williams следећи прибор: на папучи крсне главе могу се кретати по нарочитим шинама колица A која су везана са крсном главом помоћу опруге B. Релативан положај колица према положају равнотеже обележава писаљка C на добошу D, који се креће заједно са крсном главом. Нарочити сатни механизам обрће добош равномерно тако, да у 1 *sec* тачка на његовом обиму опише лук дужине 1 *cm*. Наћи једначину криве линије коју писаљка обележава на добошу, кад је кретање крсне главе дато једначином: $x = a + 10\cos(20t)$. Тежина колица Q *grama*, опруга се продужује за 1 *cm* услед дејства силе f *kg*, нерастегнута дужина њена равна је l *cm*.



При решавању треба имати у виду, да је овде убрзање апсолутног кретања равно алгебарском збиру убрзања носача и релативног убрзања; $g = 981$ *cm/sec²*.

Одг. $\xi = l + A\cos t\left(\sqrt{\frac{f.g}{Q}}\,t + \alpha\right) + \frac{4\,000\,Q}{fg - 400\,Q}\cos(20t)$, где су A и α произвољне константне величине, одређене почетним условима. Први члан даје средњу линију осцилаторног кретања, други претставља слободну осцилацију, а трећи принудну.

ДИНАМИКА СИСТЕМА ТАЧАКА.

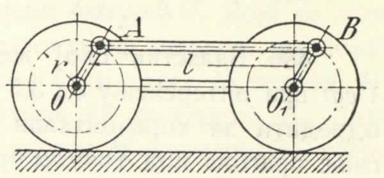
XI. Принцип D'Alembert-а и принцип виртуелних померања.

Многи од задатка из статике, дати у првом делу „Збирке“ могу се лако решити применом принципа виртуелних померања.

480. Хоризонтална платформа, на којој лежи терет тежине 10 *kg*, спушта се вертикално на доле убрзањем 4 *m/sec²*. Наћи притисак терета на платформу за време заједничког кретања.

Одг. 5,92 *kg*.

481. Парна машина чини 360 обрта у минути, дужина криваје $r = 0{,}5$ *m*, дужина спојне полуге 2,0 *m*, њена тежина 50 *kg*. Одредити инерцијалну силу, која делује на јединицу дужине полуге, сматрајући тежину полуге равномерно расподеленом по њеној дужини.



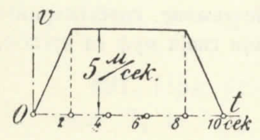
Одг. Инерцијална сила равна је 18 *kg* на један цантиметар дужине, њена нападна линија паралелна је криваји.

482. Локомотива се креће равномерно убрзано; за 20 *sec* од почетка кретања постигла је брзину 72 *km/sat*. Одредити нагиб нивоа воде у тендеру.

Код течности која је у равнотежи, управљена је резултанта сила које утиче на ма који делић течности на слободној површини, по нормали те површине.

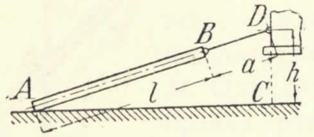
Одг. Раван, нагнута ка хоризонту под углом $\alpha = 5^0 50'$ ($tg\,\alpha = 0{,}102$).

483. При дизању кабине лифта има дијаграм брзине облик претстављен на слици. Тежина кабине равна је 480 *kg*. Одредити силе T_1, T_2 и T_3 у ужету, о које је обешена кабина лифта у току трију размака времена: 1) од $t = 0$ до $t = 2$ *sec*, 2) од $t = 2$ *sec* до $t = 8$ *sec*, 3) од $t = 8$ *sec* до $t = 10$ *sec*.



Одг. $T_1 = 602{,}4$ *kg*, $T_2 = 480$ *kg*, $T_3 = 357{,}6$ *kg*.

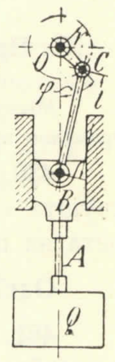
484. Греда AB дужине l ослања се крајем O о хоризонтални пут AC, други њен крај B привезан је ужетом BD, дужине a, у тачки D



за кола која се крећу једнолико убрзано. Висина $CD = h$. Занемарујући попречне димензије греде, одредити убрзање u кола при којем ће уже и греда лежати у истој правој.

Одг. $u = \frac{g}{h}\sqrt{(l+a)^2 - h^2}$.

485. За испитивање утицаја наизменце брзо следујућих затежућих и притискујућих сила на металну шипку, посматра се по методи Reynolds-a метална шипка A која је горњим крајем учвршћена за крсну главу B механизма криваје BCO, док је доњи крај оптерећен теретом Q. Наћи силу, која затеже шипку кад се криваја OC окреће око осовине O константном угаоном брзином ω, кад је тежина терета Q равна p. Занемарити квадрате и више степене односа дужине криваје и полуге $\frac{r}{l}$.

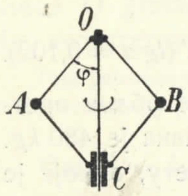


Одг. $p + \frac{p}{g}r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$.

486. Баластни слој железничкога пута слеже се еластично за 1 cm при оптерећењу од 3,5 kg/cm^2. Сматрајући шине и прагове крутим, одредити за хоризонталан пут, у којим ће се границама мењати слегање прагова под точком брзовозне локомотиве која се креће по овоме путу. Притисак точка преноси се на баластни слој половином прага. Дато: точак чини 420 обрта у минути, носи терет од 7 t и има на одстојању 30 cm од своје геометријске осовине неуравнотежени контрабаласт тежине 98,1 kg. Дужина прага 256 cm, његова ширина 25 cm.

Одг. Од 0,11 cm до 1,14 cm.

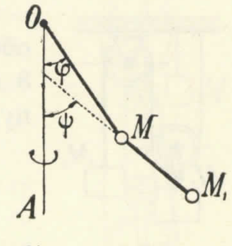
487. Регулатор Watt-a обрће се око вертикалне осовине константном угаоном брзином ω. Одредити угао нагиба ручица OA и OB према вертикали, узимајући у обзир само тежину p сваке кугле и терет p_1 муфа C. Штапови имају исту дужину l.



За сваку куглу мора резултанта из њене тежине, силе инерције и компоненте тежине муфа у правцу штапа који спаја муф са куглом, падати у правац ручице.

Одг. $\cos\varphi = \frac{(p+p_1)g}{p\,l\,\omega^2}$.

488. За терет M, који је помоћу конца дужине a обешен о непомичну тачку O, учвршћен је помоћу конца дужине b други терет M_1.



Систем се обрће око вертикалне осовине OA са константном угаоном брзином ω, при томе су углови φ и ψ које затварају конци са вертикалом такви да је $tg\,\varphi = \frac{4}{5}tg\,\psi$. Терети имају исту тежину $p = 200\,g$; $a = 2\,dm$, $b = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dm$.

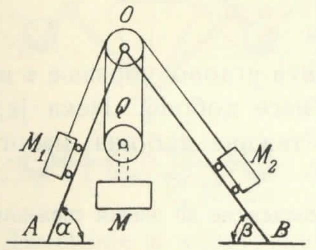
Одредити: 1) углове φ и ψ, 2) угаону брзину ω, 3) силе T_a и T_b у концима.

Одг. 1) $\cos\varphi = \frac{5}{6}$; $\varphi = 33^0 30'$; $tg\,\psi = \frac{1}{4}\sqrt{11}$, $\psi = 39^0 40'$.

2) $\omega = 0{,}3\sqrt{5g} = 6{,}6\ sec^{-1}$.

3) $T_a = \frac{2p}{\cos\varphi} = 480\,g$; $T_b = \frac{p}{\cos\psi} = 260\,g$.

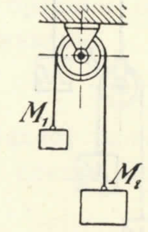
489. Терети M_1 и M_2 исте тежине p крећу се по двема косим вођицама OA и OB, које леже у вертикалној равни а нагнуте су под угловима α и β ка хоризонту. Уже које спаја ове терете, иде од терета M_1 преко котура O, који се може обртати око хоризонталне осовине, на покретан котур Q који носи терет M тежине P а затим преко котура O ка терету M_2. Одредити убрзање u терета M занемарујући трење, масе котура и ужета.



Одг. Узимајући да је убрзање u позитивно када је управљено на доле и негативно када је управљено на горе, налазимо:

$$u = \frac{P - p\,(\sin\alpha + \sin\beta)}{P + 2p}\cdot g.$$

490. Преко котура пребачено је гипко и нерастегљиво уже. За његове крајеве учвршћени су терети M_1 тежине p_1 и M_2 тежине p_2, при томе је $p_2 > p_1$. Наћи величину убрзања u терета и силу T у ужету, занемарујући масу котура.



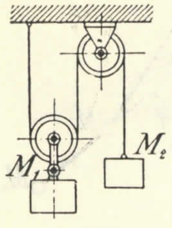
У овом као и у следећим задацима занемарити масе ужета.

Одг. $u = g\,\frac{p_2 - p_1}{p_1 + p_2}$; $T = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}$.

491. При условима предњег задатка одредити убрзање u терета и силе T_1 и T_2 у ужету, узимајући у обзир и тежину котура која је равна p.

При одредби сила инерције котура претпоставићемо, да је његова маса равномерно расподељена по обиму.

Одг. $u = g\,\frac{p_2 - p_1}{p_1 + p_2 + p}$; $T_1 = \frac{p_1\,(2p_2 + p)}{p_1 + p_2 + p}$; $T_2 = \frac{p_2\,(2p_1 + p)}{p_1 + p_2 + p}$.

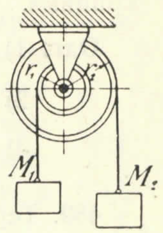


492. О систем котура, који су показани на слици, обешени су терети: M_1 тежине 10 *kg* и M_2 тежине 8 *kg*. Одредити убрзање u_2 терета M_2 и силу T у концу, занемарујући масе котура.

Однос величина убрзања терета M_1 и M_2 раван је 0,5.

Одг. $u_2 = 2{,}8\ m/sec^2$; $T = 5{,}7\ kg$.

493. Два терета: M_1 тежине p_1 и M_2 тежине p_2 обешени су о два гипка нерастегљива ужета који су обавијени како је показано на слици на добоше полупречника r_1 и r_2. Добоши су међусобно круто везани и насађени на заједничку осовину. Терети се крећу под дејством силе теже. Одредити угаоно убрзање ε добоша, занемарујући њихове масе.

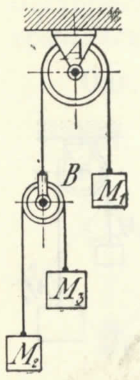


Одг. $\varepsilon = g\,\dfrac{p_2 r_2 - p_1 r_1}{p_2 r_2^{\,2} - p_1 r_1^{\,2}}$.

494. При условима предњег задатка одредити угаоно убрзање ε и силе T_1 и T_2 у ужетима, узимајући у обзир масе добоша. Нека је; $p_1 = 20\ kg$, $p_2 = 34\ kg$, $r_1 = 5\ cm$, $r_2 = 10\ cm$; тежине добоша: малог 4 *kg* већег 8 *kg*.

Претпоставимо да су масе добоша равномерно расподељене по њиним спољним површинама.

Одг. $\varepsilon = 49\ sec^{-2}$; $T_1 = 25\ kg$; $T_2 = 17\ kg$.



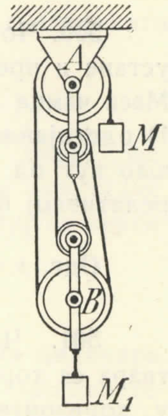
495. Систем од два котура састављен је из: непокретног *A*, покретног *B* и три терета M_1, M_2 и M_3 који су обешени помоћу нерастегљивих ужади, како је показано на слици. Одговарајуће масе терета равне су: m_1, m_2 и m_3; при томе је $m_1 < m_2 + m_3$ и $m_2 \gtreqless m_3$. Масе котура занемарити. При којем ће се односу маса: m_1, m_2 и m_3 терет M_1 спуштати, за случај да су почетне брзине терета равне нули?

Кад *y*-осовину узмемо вертикално на доле и координате тежишта одговарајућих терета обележимо са y_1, y_2 и y_3, онда мора збир $2y_1 + y_2 + y_3$ задржати константну величину. Сила у ужету о који је обешен терет M_1 два пута је већа од оне у ужету M_2M_3. За убрзање терета M_1 налазимо:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{m_1(m_2+m_3) - 4\,m_2\,m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4\,m_2\,m_3}\,g.$$

Одг. Мора бити $m_1 > \dfrac{4\,m_2\,m_3}{m_2 + m_3}$.

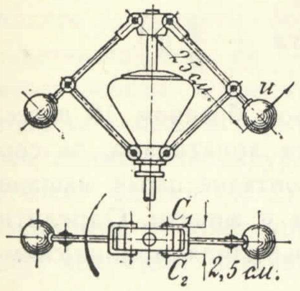
496. Терет *M* тежине 101 *kg* диже помоћу Arhimed-овог котура терет M_1, који заједно са покретном виљушком тежи 320 *kg*. Свега има четири котура; већи, теже по 16 *kg*, мањи по 8 *kg*; полупречници већих котура равни су *r*, полупречници мањих r_1. Одредити убрзање терета *M*.



При одређивању инерцијалних сила котура, претпоставимо да су њихове масе равномерно расподељене по обиму полупречника *r* и r_1. Померања терета M_1 четири пута су мања од померања терета *M*; померања и убрзања тачака доњих котура наћићемо помоћу кинематике равног кретања.

Одг. 0,1 *g*.

497. Клатно центрифугалног регулатора Watt-а чини у стационарном кретању 180 обрта у минути. Услед промене оптерећења машине, регулатор је ступио у дејство и кугла се удаљује релативном брзином $u = 2\ m/sec$. Узимајући да је терет сваке кугле раван 10 *kg*, и занемарујући тежине ручица а користећи познати однос између силе, масе и убрзања, срачунати притисак на лежишта C_1 и C_2 (види сл.) услед Coriolis-овог убрзања. При томе узети, да се број обрта није променио, а угао који затвара ручица са осовином регулатора да је раван 45°. Димензије и конструкцију полуге узети из слике, где је регулатор претстављен у основи и вертикалној пројекцији.



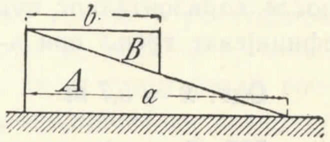
Одг. На свако лежиште дејствује притисак чија је величина приближно равна 54,35 *kg*. Притисци су супротног смера.

XII. Закони: количине кретања и кретања тежишта.

498. Бицикла описује круг полупречника 20 *m* са брзином од 5 *m/sec*. Наћи угао који затвара раван бициклета са вертикалом.

Одг. 7° 15′.

499. На хомогену призму *A*, која лежи на хоризонталној равни положена је хомогена призма *B* као што је показано на слици. Попречни пресеци призми су правоугаони троугли. Тежина призме *A* два пута је већа од тежине призме *B*. Претпостављајући да су призме и хоризонтална раван идеално глатке, огредити дужину *l*, за коју се помери призма *A* када призма *B*, спуштајући се по *A*, доспе до хоризонталне равни.



Одг. $l = \dfrac{a - b}{4}$

500. Човек који је седео на крми мирног и непривезаног чамца, устане и пређе на кљун чамца који је за дужину l удаљен од крме. Маса чамца m_1; маса човека m_2. Одредити, занемарујући отпор воде: 1) одстојање s за које се померио чамац у времену док је човек прешао пут од крме до кључна и 2) однос апсолутне брзине v чамца према релативној брзини u човека за време тог прелаза.

Одг. $s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l; \frac{v}{u} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$

501. Човек тежине p скочи почетном брзином v_0 чији смер затвара са хоризонтом угао α. У рукама држи терет q који баци натраг у хоризонталном смеру релативном брзином u, када се попео до највеће висине. Одредити брзину v човека у том положају непосредно после баченог терета као и даљину његовог скока.

Одг. $v = v_0 \cos\alpha + \frac{q}{p} u; \; s = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \left(2v_0 \cos\alpha + \frac{q}{p} u\right).$

502. Пароброд тежине 200 t креће се средњом брзином 10 m/sec, при томе је покретна сила коју дају точкови са лопатицама, за сво време кретања, равна отпору воде. Клип хоризонталне парне машине тежи 100 kg, његов је ход 1 m, и чини 240 хода у минути. Одредити брзину v пароброда у тренутку t, сматрајући кретање клипа хармонијским.

Одг. $v = 10 - 0{,}00314 \cos 4\pi t \; m/sec.$

503. Електрични мотор тежине P са хоризонталном осовином, намештен је тако да се може померати без трења у хоризонталном правцу. На осовини мотора учвршћен је под правим углом, једним својим крајем хомогени штап дужине $2l$ и тежине p, на другом његовом крају налази се терет Q. Угаона брзина осовине ω.

Одредити хоризонтално кретање мотора и апсолутну путању терета.

Одг. 1) Хармонијско кретање: амплитуде $\frac{l(p + 2Q)}{P + p + Q}$, периоде $\frac{2\pi}{\omega}$.
2) Елипса.

504. Тане тежине 20 kg напушта отвор топовске цеви брзином 500 m/sec; тежина топа је 1 000 kg. За колико ће се померити топ, после хоризонталног пуцња, кад је до пуцња био у стању мира а коефицијенат трења при његовом кретању је раван 0,9?

Одг. $x = 5{,}7 \; m$.

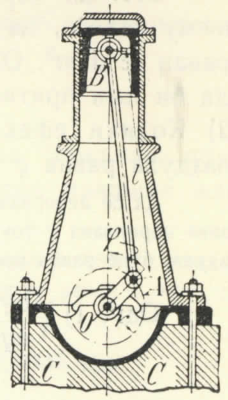
505. Трамвајски вагон врши на опругама хармонијску осцилацију амплитуде 2,5 cm и периоде $T = 0{,}5 \; sec$. Тежина постоља са точковима равна је 1 t а каросерије са корисним теретом 10 t. Одредити притисак вагона на шине.

Одг. Притисак се креће између 7 t и 15 t.

506. На железнички трајект, који је везан за обалу двама ужетима, улази воз тежине 200 t, брзином 18 km/sat. Кочењем воз стане, прешавши пут од 25 m. Одредити силу S у ужади, занемарујући вертикална померања трајекта.

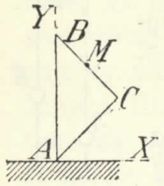
Одг. $S = 5 \; t$.

507. Код вертикалног гасног мотора равна је тежина цилиндра, оквира, осовине и лежишта 10 t, а тежина клипа 981 kg, његово тежиште налази се у крсној глави B. Ход клипа 60 cm. Број обрта у минути 300. Однос дужине криваје ка дужини l спојне полуге раван је $^1/_6$. Масу криваје и спојне полуге занемарити. Мотор је учвршћен за темељ C завртњима, који су — док се мотор не креће — неоптерећени. Одредити: 1) Највећи притисак N мотора на темељ и највећу затежућу силу S у свима завртњима, занемарујући чланове другог и вишег степена односа r/l; 2) тежину Q темеља C тако, да амплитуда његовог потреса, које изазива сила инерције покретног механизма, не пређе 0,25 mm.



Одг. 1) $N = 35{,}6 \; t; \; S = 23{,}6 \; t,$
2) $Q = 2\,454 \; t.$

508. Плочица ABC, облика правоуглог равнокраког троугла, чија је хипотенуза AB равна 12 cm, постављена је теменом A на глатку хоризонталну раван тако, да јој је хипотенуза вертикална. Остављена затим самој себи, плочица пада услед дејства силе теже. Какву криву описује при томе кретању тачка M — средина стране BC?

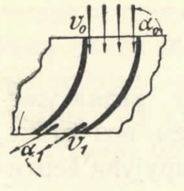


За сво време кретања плочице, теме A остаје на хоризонталној равни.

Одг. Лук елипсе: $9(x - 2)^2 + y^2 = 90.$

509. Чамац тежине p_1 плови брзином v_1; са крме бачен је, у смеру који је супротан кретању чамца, терет тежине p релативном хоризонталном брзином u. Одредити после којег ће времена t_1 чамац опет пловити брзином v_1, претпостављајући, да се у интервалу времена t_1 није веслало а отпор воде да је пропорционалан квадрату брзине: kv^2.

Одг. $t_1 = \frac{pp_1 u}{kgv_1(pu + p_1 v_1)}.$



510. Вода улази у непокретан канал промењљивог пресека, који је симетричан у односу на вертикалну раван, брзином $v_0 = 2$ *m/sec* а под углом $\alpha_0 = 90^0$ према хоризонтали. Попречни пресек канала при улазу раван је 0,02 m^2; вода излази из канала под углом $\alpha_1 = 30^0$ према хоризонтали брзином $v_1 = 4$ *m/sec*. Одредити хоризонталну компоненту реакције којом вода утиче на дувар канала.

Нађимо, за бесконачно мали интервал времена, од тренутка t до $t + dt$ прираст количине кретања свију делића воде које се у тренутку t налазе у каналу; одредимо затим хоризонталну компоненту силе инерције тежишта тих делића, то је уједно и тражена реакција.

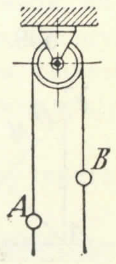
Одг. $8{,}16 \sqrt{3}\ kg = 14{,}1\ kg$.

511. Са аероплана, тежине p, пушта се, из машине која се на њему налази, на доле струја ваздуха. Попречни пресек струје ваздуха раван је a m^2. Одредити: 1) којом брзином треба пуштати такву струју да би њен притисак био довољан за одржавање аероплана у ваздуху? 2) Колики ефекат треба да има таква машина, кад је тежина 1 m^3 ваздуха равна q *kg* а убрзање земљине теже g?

Да се аероплан не би померио у вертикалном правцу, потребно је, да прираст брзине аероплана у току бесконачно малог интервала времена dt, услед дејства струје ваздуха, буде раван производу g dt.

Одг. 1) $\sqrt{\dfrac{pg}{aq}}\ m/sec$; 2) $\dfrac{1}{2}\,p\,\sqrt{\dfrac{pg}{aq}}\ \dfrac{kg\,m}{sec}$.

XIII. Закон момената.



512. Преко непокретног котура пребачено је уже. У тачкама A и B налазе се два човека исте тежине. Шта се дешава са човеком B када човек A почиње, релативном брзином a у односу на уже, да се пење по овоме? Масу котура, тежину ужета и трење међу њима занемарити.

Одг. Човек B кретаће се заједно са ужетом брзином $\dfrac{a}{2}$.

513. Решити предњи задатак, узимајући у обзир и тежину котура, која је четири пута мања од тежине човека.

При одредби момента инерције котура претпоставимо, да је његова маса равномерно расподељена по обиму.

Одг. Човек B кретаће се брзином $4/9\,a$.

514. За одређивање момента трења у лежиштима причвршћен је на осовини замајац чији је моменат инерције у односу на осу осовине раван J. Замајцу је дата угаона брзина ω_0, а затим је, остављен самом себи, стао после T *sec*. Одредити моменат трења, сматрајући га константним.

Одг. $\dfrac{J\omega_0}{T}$.

515. Кружна хоризонтална платформа може се окретати без трења око вертикалне осовине која пролази кроз њено средиште. На платформи обележена је путања у облику концентричног круга полупречника r; по њему иде човек тежине p константном релативном брзином v_r. Са којом ће се угаоном брзином ω окретати платформа око осовине, ако њену тежину P сматрамо равномерно расподељеном по површини круга полупречника R, кад су у почетку кретања платформа и човек имали брзину равну нули?

Одг. $\omega = \dfrac{2pr}{PR^2 + 2pr^2}\,v_r$.

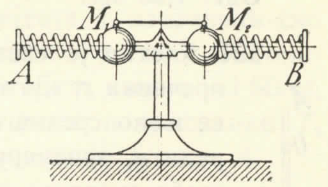
516. Са којом би брзином требало пустити влак масе 2 000 t по екватору са запада на исток да би се тиме увећало трајање дана за једну секунду. Земљу сматрати за хомогену куглу полупречника $R = 6\ 000$ *km* а масе $5 . 10^{21}$ t.

Одг. $5{,}05 . 10^{12}$ *km/sec*.

517. За колико се мења дужина T дана када Земљину површину покрије, равномерним танким слојем, метеорска прашина масе $m = 135 . 10^{11} t$?

При решавању задатка можемо узети да је маса Земље равна $5 . 10^{21}$ t а моменат инерције слоја метеорске прашине у односу на осовину Земље да је раван $^2/_3\,mR^2$, где је R полупречник Земље.

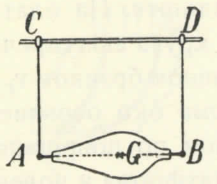
Одг. Дужина дана увећава се за $\dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{m}{M} \cdot T = 0{,}0004$ *sec*.



518. Хомогена шипка AB дужине $2L = 180$ *cm* а тежине $Q = 2$ *kg* ослоњена је на оштрицу на којој се налази у стабилној равнотежи тако, да јој је осовина хоризонтална. По шипци могу се покретати две кугле M_1 и M_2 свака тежине $P = 5$ *kg*, које су учвршћене за крајеве двеју једнаких опруга. Шипка се обрће око вертикалне осовине са $n_1 = 64$ обрта у минути; при томе су кугле симетрично положене у односу на осовину обртања, а њихова су средишта везана концем који их одржава на међусобном одстојању $2l_1 = 72$ *cm*. Када се конац прекине, заузеће кугле после извесног броја обрта, услед дејства опруга и сила трења, положај равнотеже на међусобном одстојању $2l_2 = 108$ *cm*. Сматрајући кугле као материјалне тачке и занемарујући масе опруга одредити нови број обрта n_2 шипке у минути.

Одг. $n_2 = \dfrac{6\,Pl_1^2 + QL^2}{6\,Pl_2^2 + QL^2} \cdot n_1 = 34$.

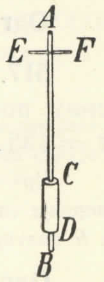
519. За одређивање момента инерције J датог тела у односу на неку осовину AB, која пролази кроз његово тежиште, обесили смо га помоћу два конца AC и BD о непокретну хоризонталну греду тако, да је осовина AB паралелна CD; пустивши затим тело да се клати, одредили смо дужину трајања T једне осцилације. Колики је моменат инерције J, кад је тежина тела p а одстојање осовина AB и CD h? Масе конаца занемарити.



Узмимо у обзир да је разлика момената инерције тела у погледу произвољне осовине и њој паралелне тежишне осовине равна производу масе тела и квадрата одстојања осовина.

Одг. $J = ph\left(\frac{1}{\pi^2}\,T^2 - \frac{h}{g}\right)$.

520. Клатно је састављено из округлог цилиндричног штапа AB тежине p, дужине l и полупречника r и цилиндричног терета CD дужине l_1, полупречника r_1, који је натакнут на штап. Материјал штапа и цилиндра исти је. Осовина обртања EF налази се на одстојању a од горњег краја A штапа; доња основа цилиндра CD удаљена је од доњег краја штапа за дужину b.

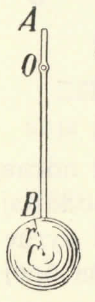


Одредити периоду малих осцилација клатна при следећим подацима: $p = 1{,}5\,kg$; $l = 60\,cm$; $r = 1\,cm$; $l_1 = 12\,cm$; $r_1 = 2\,cm$; $a = b = 5\,cm$.

Моменат инерције кружног цилиндра масе m, полупречника r и дужине l у односу на тежишну осовину која је управна на геометријску, раван је $\frac{1}{4}\,m\left(r^2 + \frac{l^2}{3}\right)$. Види објашњење у претходном задатку.

Одг. 1,28 *sec*.

521. Клатно је састављено из штапа AB и кугле масе m а полупречника r; кугла је учвршћена за његов доњи крај тако, да се њено средиште C налази у продужењу његове осовине. Одредити, занемарујући масу штапа, тачку O на штапу у којој треба сместити осовину обртања да би половина периоде, при малим осцилацијама клатна имала дату величину T.



Моменат инерције кугле, масе m и полупречника r у односу тежишне осовине, раван је $\frac{2}{5}\,mr^2$. Види објашњење у задатку Бр. 519.

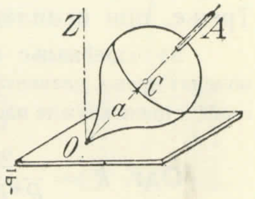
Одг. $OC = \frac{1}{2\pi^2}\left(g\,T^2 + \sqrt{g^2\,T^4 - 1{,}6\pi^4 r^2}\right)$.

Пошто мора бити $OC \geqslant r$, могуће је решење ако је $T^2 \geqslant 1{,}4\,\frac{\pi^2}{g}\,r$; решење које би одговарало знаку минус пред радикалом није могуће.

522. Клатно је састављено из штапа и два терета који су на њему учвршћени у међусобном одстојању l. Горњи терет има масу m_1 доњи m_2. На којем одстојању x од доње масе треба сместити осовину обртања да би периода малих осцилација клатна била најмања; масу штапа занемарити а терете сматрати материјалним тачкама.

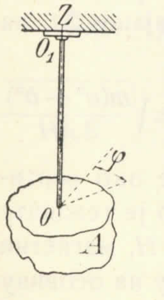
Одг. $x = l\sqrt{m_1}\,\frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2}$.

523. Чигра се обрће око своје осовине OA у смеру казаљке на сату са веома великом константном угаоном брзином ω; осовина OA нагнута је према вертикали, доњи њен крај непомичан је. Тежиште чигре налази се на осовини у одстојању $OC = a$. Тежина чигре равна је G, њен моменат инерције у односу на осовину обртања раван је J. Одредити кретање осовине OA чигре, допустивши да је при веома великој угаоној брзини ω, главни моменат количине кретања управљен по осовини OA и да је раван $J\omega$.



Одг. Осовина OA чигре описиваће око осовине OZ кружни конус у смеру казаљке на сату, са константном угаоном брзином: $\omega_1 = \frac{Ga}{J\omega}$.

524. За одређивање момента инерције J_z тела A у односу на вертикалну осовину OZ, учврстили смо тело за еластичан вертикалан штап OO_1; штап смо затим увили тако, да смо тело A окренули око осовине OZ за мали угао φ_0 па га пустили да осцилише. Показало се да те 100 $T_1 = 2\,min$, где је T_1 полупериода. Кретање је било хармонијско ротационо јер је моменат еластичних сила штапа пропорционалан углу увијања и раван $k^2\varphi$. За одређивање коефицијента k направили смо други оглед: на исти штап натакнули смо у тачки O хомогену кружну плочу полупречника $r = 15\,cm$, масе $m = 1\,600\,g$, и тада се показало да је трајање једне полупериоде T_2 равно 1,5 *sec*. Одредити моменат инерције J_z тела A.

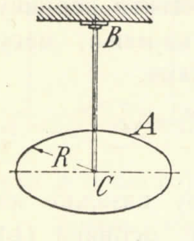


Одг. $J_z = \frac{mr^2}{2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 115\,200\,g.\,cm^2$.

525. Еластична жица, о коју је обешена хомогена кугла, полупречника r и масе m, увијена је за угао φ_0; после тога остављена је сама себи да се слободно раз-увије. Моменат спрега, потребан за увијање жице за 1 радијан, раван је a *dyn.cm*. Одредити кретање, занемарујући отпор ваздуха и сматрајући да је моменат еластичних сила увијене жице пропорционалан углу увијања φ.

Одг. $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{5a}{2mr^2}}\,t$.

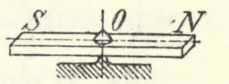
526. За одређивање житкости (вискозност) течности посматрају се осцилације, у ваздуху и течности, кружне плоче A која је обешена о еластичну жицу BC која се увија. Трајање осцилације у првом случају је T_1 а у другом T_2; полупречник кружне плоче је R, њен моменат инерције у односу на осовину жице раван је J. Одредити коефицијенат житкости k, претпостављајући, да је моменат увијања пропорционалан углу увијања, а трење, које отпада на елеменат кружне плоче у течности, да је равно производу коефицијената k са површином елемента и његовом брзином. Трење, при осцилацији кружне плоче у ваздуху занемарити.



За одређивање момента сила трења, које дејствују на кружну плочу, наћићемо моменат трења елементарног кружног прстена, водећи рачуна о томе да је трење једнако с обе стране кружне плоче; добивени израз интегралићемо затим у границама од нуле до R.

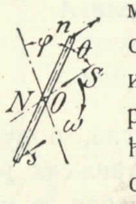
Одг. $k = \frac{2J}{R^4 T_1 T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$.

527. Призматичан магнет масе m грама, дужине $2a$ и ширине $2b$ cm, чији се полови налазе на његовим крајевима, може се, у земљином магнетном пољу, окретати око вертикалне тежишне осовине. Отклонивши магнет из положаја равнотеже SN за веома мали угао, остављамо га самом себи. Одредити кретање магнета када је познато да хоризонтална компонента земљиног магнетског поља утиче на јединицу магнетизма силом H dyn, а магнетни моменат магнета т. ј. производ из количине магнетизма, концентрисан у половима на одстојању $2a$, да је раван A јединица у C-G-S систему.



Одг. Хармонијско ротационо кретање периоде: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(a^2 + b^2)}{3\,AH}}$.

528. У равномерном магнетном пољу, које се обрће око вертикалне осовине O константном угаоном брзином ω, обешено је тежиште хоризонталне магнетне игле ns. Интензитет пола раван је H, магнетни моменат игле A, њен моменат инерције у односу на осовину обртања J. Правац On затвара: угао ϑ са правцем пола NS и угао φ са правцем неке непокретне праве која лежи у равни nOS. Одредити: 1) дужину l математског клатна које ће се у пољу силе теже исто тако кретати као и игла у односу на средину коју обрћемо заједно са магнетним пољем. 2) Кретање игле под том претпоставком, да је њен правац у почетном тренутку затварао са одговарајућим правцем пола веома мали угао ϑ_0, а њена угаона брзина да је равна угаоној брзини пола.

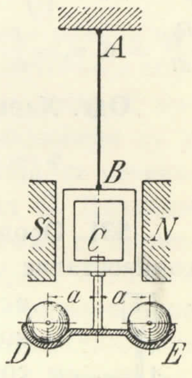


При решавању другог питања угао ϑ остаје мали, према томе може се $\sin\vartheta$ заменити са ϑ.

Одг. 1) $l = \frac{Jg}{AH}$;

$$2)\ \varphi = \omega t + \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{AH}{J}}\, t\right).$$

529. Између полова N и S магнета обешен је о танком концу AB оквир галванометра BC, за који су ван магнетног поља учвршћене две кашике D и E; одстојање њихових средишта равно је $2a$; намотај оквира везан је са неким спољним отпором. Кад се у свакој кашици налази хомогена куглица полупречник r и масе m грама, имају осцилације оквира полупериоду T_1 и логаритамски декремент δ_1; кад су пак кашике неоптерећене куглицама, полупериода осцилације равна је T_2, а логаритамски декремент δ_2. Моменат од увијања конца раван је $k\varphi$, где је φ угао отклона оквира, а моменат отпора ваздуха и електромагнетског отпора раван је у првом случају $n_1\omega$, у другом $n_2\omega$, где је ω — угаона брзина оквира. 1) Одредити моменат инерције J оквира (заједно са кашикама) у односу на осовину обртања и коефицијенте k, n_1, n_2. 2) Срачунати горње величине за $T_1 = 11$ sec, $\delta_1 = 0{,}13$, $T_2 = 4{,}5$ sec, $\delta_2 = 0{,}3$, $a = \sqrt{3{,}55}$ cm, $r = 0{,}5$ cm, $m = 4g$.



Логаритамским декрементом амортизованог кретања зовемо природни логаритам односа двају узастопних највећих удаљења са различитих страна положаја равнотеже.

Одг. 1) $J = J_0 \frac{(\pi^2 + \delta_1^2)\, T_2^2}{(\pi^2 + \delta_2^2)\, T_1^2 - (\pi^2 + \delta_1^2)\, T_2^2}$ где је

$$J_0 = 2m\left(a^2 + \frac{2}{5}\, r^2\right);$$

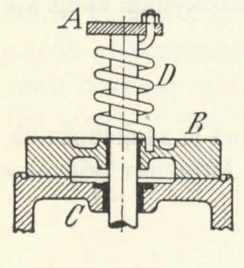
$$k = J\,\frac{\pi^2 + \delta_2^2}{T_2^2};$$

$$n_1 = 2\,(J + J_0)\,\frac{\delta_1}{T_1};$$

$$n_2 = 2\,J\,\frac{\delta_2}{T_2}.$$

2) $J = 6{,}03\ g\ .\ cm^2$, $k = 2{,}94\ dyn\ .\ cm$,
$n_1 = 0{,}85\ dyn\ .\ cm\ .\ sec$; $n_2 = 0{,}80\ dyn\ .\ cm\ .\ sec$.

530. На вертикалну осовину A, која се обрће равномерно око своје геометријске осе угаоном брзином ω, натакнут је терет B, који лежи на хоризонталној равни непокретног ослонца C а са осовином је спојен помоћу опруге D. Моменат инерције терета B у односу на осу осовине раван је J; моменат еластичних сила опруге при увијању за угао од 1 радиана раван је n; моменат сила трења између терета B и равни



лежишта C задржава константну величину f. Одредити кретање терета у односу на осовину.

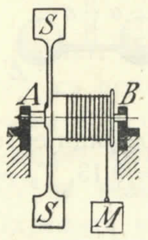
Обележимо са $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ обртни угао вратила, са ψ обртни угао терета око вертикалне осе; поставимо диференцијалну једначину обртања терета, претпостављајући да је $\frac{d\psi}{dt} > 0$. Општи интеграл те једначине биће:

$\psi = A_1 \sin \sqrt{\frac{n}{J}}\, t + B_1 \cos \sqrt{\frac{n}{y}}\, t + \omega t + \varphi_0 - \frac{f}{n}$. У почетку кретања $t = 0$, $\psi_0 = 0$, $\frac{d\psi_0}{dt} = 0$, $\varphi_0 = \frac{f}{n}$.

Одг. Хармонијско кретање:

$$\psi - \varphi = -\varphi_0 - \omega \sqrt{\frac{J}{n}} \sin\left(\sqrt{\frac{n}{J}}\, t\right).$$

531. Осовина полупречника r обрће се, помоћу терета M, око хоризонталне осовине AB. Терет M виси о концу који је обавијен око осовине. Да би угаона брзина осовине остала, после неког времена од почетка кретања, приближно константна, спојено је са осовином n једнаких плоча S. Отпор ваздуха, који утиче на плочу, своди се на силу која је управна на њу, дејствује у одстојању R од осовине, и пропорционална је квадрату угаоне брзине осовине; коефицијенат пропорционалности раван је k. Маса терета је m. Моменат инерције свију делова који круже, у односу на осовину AB, раван је J; масу конца занемарити. Одредити угаону брзину ω осовине, претпостављајући, да је она у почетку кретања равна нули.



Одг. $\omega = \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1} \sqrt{\frac{mgr}{knR}}$, где је $\alpha = \frac{2}{J + mr^2} \sqrt{mgnkrR}$;

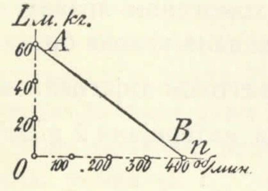
за доста велике вредности t, угаона брзина ω приближно је равна константној величини: $\sqrt{\frac{mgr}{knR}}$.

XIV. Закон живе силе.

532. Срачунати ефекат хидрауличног мотора, који ради под следећим условима: вода улази у мотор са неког нивоа брзином 4 m/sec и оставља га, брзином 1 m/sec, на нивоу који је за $^3/_2$ m нижи од претходног. Утрошак воде раван је 300 kg у sec. Од целокупне енергије воде мотор искоришћује $65^0/_0$.

Одг. 6 HP.

533. Код неког хидрауличног мотора престављена је зависност између момента обртања L и угаоне брзине правом AB. Моменат обртања

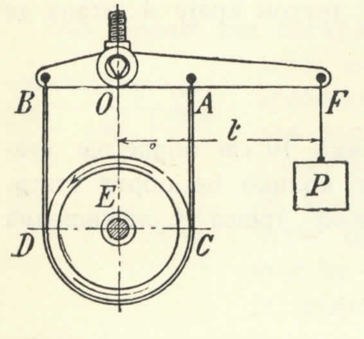


дат је у kgm а угаона брзина бројем обрта n у минути. Одредити ефекат мотора као функцију броја његових обрта у минути и наћи највећи ефекат.

Одг. $E = 0{,}084\, n \left(1 - \frac{n}{400}\right)$ HP;

$$E_{max} = 8{,}4 \text{ HP}.$$

534. Динамометар Neudler-а, употребљава се за мерење ефекта мотора; састоји се из траке са вертикалним деловима AC и BD који обухватају доњу половину обима точка E мотора који се испитује, а учвршћени су у тачкама A и B полуге BF која се сечиницом призме ослања о ослонац O. Дизањем или спуштањем ослонца O може се променити затезање у деловима траке а тиме и трење између траке и точка. Хоризонтални положај равнотеже полуге BE постизава се вешањем терета P. Одредити ефекат мотора у тренутку када се обрће са 240 обрта у минути, када је тежина терета који одржава равнотежу $P = 3$ kg, а крак $l = 50$ cm.



Сила кочења равна је $\frac{Pl}{r}$, где је r полупречник точка.

Одг. 0,5 HP.

535. У ком односу треба да су висина h и полупречник R основе усправног хомогеног кружног цилиндра да би његова кинетичка енергија остала константна при обртању, око произвољне тежишне осовине, са угаоном брзином ω.

Одг. $\frac{h}{R} = \sqrt{3}$.

536. Наћи живу силу танета тежине 200 kg и пречника 10 cm, када оно лети брзином од 500 m/sec, обрћући се при томе 100 пута у секунди око своје осе. Тане сматрати за хомогени кружни цилиндар.

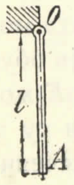
Одг. 2 553 . 10^3 $kg\,m$.

537. На замајац дејствује спрег, чији је моменат раван 500 $kg\,m$ Раван спрега управна је на осовину замајца. Тежина замајца је 9,81 t, његов полупречник инерције у односу на осовину раван је 1 m. За колико секунди после почетка кретања, имаће замајац угаону брзину од 120 обрта у минути, и колики је рад на то утрошен?

Одг. 25 sec; 78 957 $kg\,m$.

538. Колики рад треба утрошити, да би се хомогеном правоугаоном паралелепипеду, који се налази у стању мира, дала угаона брзина $\omega = 7\,\frac{1}{sec}$ око осовине која се поклапа са једном његовом дијагоналом, кад су му ивице дужине 12 *cm*, 6 *cm*, 4 *cm* а густина материјала 2 g/cm^3.

Одг. 96 768 *erga*.



539. Тежак хомогени штап *OA* дужине $l = 3{,}27\ m$ учвршћен је својим крајем *O* за осовину, око које се може у вертикалној равни окретати. Штап се налази у положају стабилне равнотеже. Коју брзину треба дати другом крају *A* штапа да би се окренуо за четврт круга?

Одг. $v = \sqrt{3gl} = 9{,}81\ m/sec.$

540. Осовина кружног пресека, пречника 10 *cm* обрће се угаоном брзином од 60 обрта у минути. После колико ће обрта стати, остављена самој себи, када је коефицијенат трења у лежиштима раван 0,05?

Одг. 0,16 обрта.

541. На осовини кружног пресека, пречника 10 *cm* и тежине 0,5 *t*, налази се замајац пречника 2 *m* и тежине 3 *t*. У датом тренутку обрће се осовина угаоном брзином од 60 обрта у минути па је остављена самој себи. После колико обрта ће осовина стати, када је коефицијенат трења у лежиштима раван 0,05?

При решавању задатка претпоставити да је маса замајца равномерно распоређена по његовом обиму.

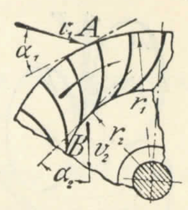
Одг. 109,6 обрта.

542. Хомогена кружна плоча полупречника 12 *cm* и дебљине 2 *cm* навучена је на осовину која пролази кроз тежиште а затвара угао $\alpha = 30^0$ са нормалом равни плоче; тежина плоче 8 *kg*. Плочи је дата угаона брзина од 3 обрта у секунди; учинивши 514 обрта, стала је услед трења у лежиштима. Одредити моменат сила трења, сматрајући га константним; масу и димензије осовине занемарити.

Одг. 283 *g . cm*.

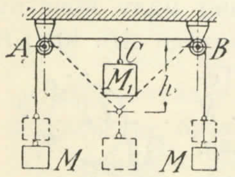
543. По косој равни ступштају се без почетне брзине два потпуно једнака хомогена кружна цилиндра. Један се ослања на раван својом бочном површином и котрља се по њој без клизања; други пак, ослања се на раван својом основом и клизи по њој без трења. Колики је однос висина h_1 и h_2 за које ће се тежишта првог и другог цилиндра у току истог интервала времена спустити?

Одг. $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3}.$



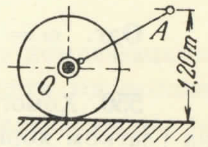
544. Вода улази у канал радиалне турбине у тачки *A* брзином v_1, која са спољним обимом точка затвара угао α_1, а оставља га у тачки *B* брзином v_2 која су унутарњим обимом затвара угао α_2. Тежина воде која у једној секунди протиче, равна је *Q*. Полупречник спољњег обима, раван је r_1, унутарњег r_2. Одредити ефекат турбине, под претпоставком да се равномерно обрће.

Одг. $\frac{Q\omega}{75g}\,(r_1 v_1 \cos\alpha_1 + r_2 v_2 \cos\alpha_2)$ HP.



545. Преко два бескрајно мала котура *A* и *B*, који се налазе у истој висини а у међусобном одстојању $AB = 2l$, пребачен је конац на чијим су крајевима учвршћена два једнака терета *M*, сваки тежине *p* грама. О конац је, у средини између котура, обешен терет M_1 тежине p_1 грама, и остављен да пада без почетне брзине. Одредити највеће одстојање *h*, на које ће се спустити терет M_1, претпостављајући да је дужина конца доста велика и да је $p_1 < 2p$.

Одг. $h = \frac{4pp_1 l}{4p^2 - p_1{}^2}$; терет M_1 креће се осцилаторно.



546. Човек, притискујући ручицу *A* константном силом *P* у смеру *OA*, покреће по хоризонталноме путу ваљак пречника 60 *cm* и тежине 392 *kg*. Дужина *AO* равна је 1,5 *m*, висина тачке *A* над хоризонтом 1,2 *m*. Одредити, занемарујући трење, силу *P* којом ће човек, прешавши пут од 2 *m*, дати ваљку брзину 80 *cm/sec*. ($g = 980\ cm/sec^2$).

Одг. $P = 12\ kg.$

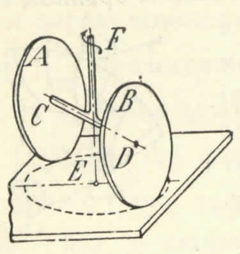
547. Одредити величину константне силе *P* у предњем задатку, кад се при истим бројним вредностима узима у обзир отпор ваљања, чији је коефицијенат раван 0,5 *cm*, а затим наћи за колико треба смањити ту величину силе *P*, да би брзина у наредном кретању ваљка остала константна.

Моменат спрега, који се одупире кретању при ваљању, раван је производу нормалног притиска са коефицијентом отпора при ваљању.

Одг. 1) $P = 20{,}2\ kg.$
2) За 12 *kg*.

548. Млински ваљци *A* и *B* натакнути су на хоризонталну осовину *CD* која се обрће око вертикалне осовине *EF*; ваљци су истог пречника $d = 1{,}0\ m$; сваки тежи по 200 *kg*; одстојање њихово

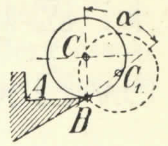
$CD = 1,0$ *m*. Наћи кинетичку енергију ваљака када се осовина *EF* обрће са 20 обрта у минути, претпостављајући да су ваљци — при изналажењу момента инерције — танке хомогене плоче.



Моментана осовина обртања камена пролази кроз његову додирну тачку са хоризонталном равни и пресечном тачком осовина *CD* и *EF*. Моменат инерције ваљка у односу на моментану осовину раван је $\frac{7}{8}\ MR^2$, где је *M*— маса ваљка а *R*— његов пречник.

Одг. $2 \cdot \frac{175}{9}\ \frac{\pi^2}{g} = 39{,}2\ kg\ m.$

549. Тешки хомогени ваљак добивши бесконачно малу почетну брзину, котрља се без клизања по хоризонталној конзоли *AB*. Крај *B* конзоле је зашиљен и паралелан изводници ваљка. Тежина ваљка равна је *Q*, а полупречник основе је *r*. У тренутку када ваљак напушта конзолу, затвара раван, коју образују ивица *B* и оса ваљка, са вертикалним његовим положајем неки угао $CBC_1 = \alpha$. Одредити угаону брзину ваљка после напуштања конзоле и угао α. Отпор трења код котрљања као и отпор ваздуха занемарити.



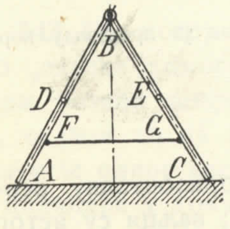
У тренутку кад ваљак напушта конзолу, равна је компонента тежине у правцу C_1B центрифугалној сили ваљка при обртању око ивице конзоле $\frac{Q}{g}\ r\ \omega^2$.

Одг. $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7r}};\ \alpha = arc\ cos\ \frac{4}{7} = 55{,}1^0.$

550. Хомогени конац дужине *L*, који једним својим делом лежи на глатком хоризонталном столу, креће се услед дејства тежине другог дела, који виси са стола. Одредити трајање времена, после којег ће конац напустити сто, кад је познато, да је у почетку кретања дужина висећег дела конца равна *l* а почетна брзина нула.

Одг. $T = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l}\right).$

551. Двокрилне лествице *ABC* са зглавком у *B* стоје на глатком хоризонталном поду. Дужина крака $AB = BC = 2l$, тежишта се налазе у њиховим срединама *D* и *E*. Тежина сваког крила равна је *p*, а његов полупречник инерције у односу на тежишну осовину раван је *k*. Одстојање зглавка од пода равно је *h*. У неком тренутку времена почињу лествице да падају, пошто је пресечено уже *FG*. Занемарујући трење у зглавку, одредити брзину тачке *B* у тренутку њеног судара са подом?



У том су тренутку тачке *A* и *C* моментани полови обртања.

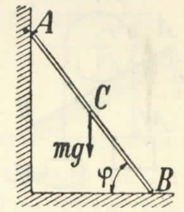
Одг. $v = 2l\sqrt{\frac{gh}{l^2 + k^2}}.$

552. У предњем задатку одредити брзину *v* тачке *B* у тренутку када је њено одстојање од пода равно $\frac{1}{2}\ h$.

Налазимо да је за сваки крак лествица угаона брзина равна брзини тачке *B* подељене са $\frac{1}{2}\ AC$, а брзина тежишта равна је угаоној брзини *h* помноженој са дужином *l*.

Одг. $v = \sqrt{gh\,\frac{16\,l^2 - h^2}{8\,(l^2 + k^2)}}.$

553. Хомогени штап *AB* дужине $a = 120$ *cm* постављен је у вертикалној равни под углом $\varphi = 60^0$ према хоризонтали тако, да се крајем *A* ослања на глатку вертикалну а крајем *B* на глатку хоризонталну раван, после тога пуштен је да пада без почетне брзине, $g = 980\ cm/sec^2$. 1) Одредити угаону брзину ω штапа, када са хоризонталом затвара угао $\varphi = 45^0$; 2) који ће угао φ_1 затварати штап са хоризонталом у оном тренутку, када је притисак на вертикалну раван једнак нули?



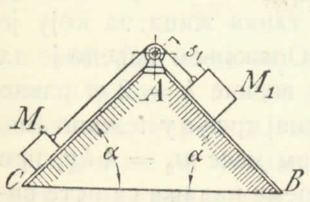
Одг. 1) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{a}\,(sin\ \varphi_0 - sin\ \varphi)} = 1{,}1\,\frac{1}{sec};$

2) $sin\ \varphi_1 = \frac{2}{3}\ sin\ \varphi_0;\ \varphi_1 = 35^0.$

554. За регулисање хода сатова, додаје се клатну компензациони терет. Нека је *M* — маса клатна, *h* — одстојање тежишта од осовине обртања, *l* — редукована дужина клатна, *m* — маса компензационог терета, *x* — његово одстојање од осовине обртања. Сматрајући компензациони терет материјалном тачком одредити: 1) промену Δl редуковане дужине клатна при датим вредностима *m* и *x*; 2) ону вредност $x = x_1$, којом добијамо минималну величину компензационог терета при заданом продужењу Δl редуковане дужине клатна.

Одг. $\Delta l = \frac{mx\,(x - l)}{Mh + mx};\ x_1 = \frac{1}{2}\ (l + \Delta l).$

555. Двоје колица M_1 и M_2 масе m_1 и m_2, крећу се по шинама *AB* и *AC* које су нагнуте под углом α ка хоризонту. Колица су спојена ужетом дужине *l*, које је пребачено преко котура *A*. У почетку кретања $t = 0$, налазе се колица M_1 на одстојању *a* од тачке *A*, и имају брзину равну нули. Одредити рад *R* тежине система при померању за дужину s_1—*a* и кретање колица M_1 при следећи претпоставкама:



1) масу ужета не узимамо у обзир и $m_1 > m_2$.
2) маса јединице дужине ужета равна је k и $m_1 > kl$.

Одг. 1) $R = (m_1 - m_2)(s_1 - a)\, g \sin\alpha$;

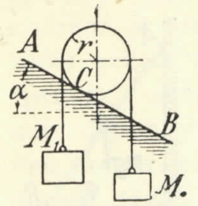
$$s_1 - a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g \,.\, \sin\alpha\, \frac{t^2}{2};$$

2) $R = [m_1 - m_2 + k(s_1 + a - l)](s_1 - a)\, g \sin\alpha$;

$$s_1 - a = \frac{m_1 - m_2 - kl + 2\,ka}{4k}\,(e^{nt} + e^{-nt})^2.$$

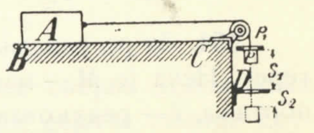
где је $n = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{kg \sin\alpha}{m_1 + m_2 + kl}}$.

556. На косој равни AB, која са хоризонтом затвара угао α, котрља се тешки хомогени цилиндар C, полупречника r а масе M. Око цилиндра обавијен је конац, за чије су крајеве учвршћени терети M_1 масе m_1 и M_2 масе m_2. Одредити угаону брзину ω цилиндра, када је се n пута обрнуо, и кретање почео са брзином равном нули.



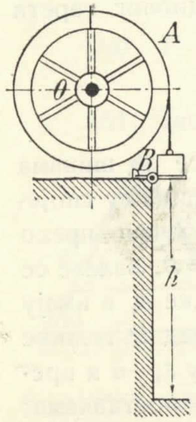
Одг. $\omega^2 = \frac{2\pi n g}{r} \cdot \frac{(M + m_1 + m_2)\sin\alpha + m_2 - m_1}{\frac{3}{4}M + m_1 + m_2 + (m_2 - m_1)\sin\alpha}$.

557. На хоризонталној храпавој равни BC налази се тело A тежине Q. Помоћу конца, који је пребачен преко котура, доводи га из стања мира у кретање тег p на којем се налази тешка карика тежине p_1. Прешивши пут s_1 тег p прође кроз прстен D који му скида карику p_1. После овога, тег пређе још пут s_2 и стане. Одредити: 1) коефицијенат кинетичког трења k између тела A и равни, занемарујући масу конца, котура и трење између њих, 2) утрошени рад, при спуштању карике p_1 за висину s_1. Дато је: $Q = 0{,}8\ kg$, $p = 0{,}1\ kg$, $p_1 = 0{,}1\ kg$, $s_1 = 50\ cm$ $s_2 = 30\ cm$.



Одг. 1) $k = \frac{s_1(p + p_1)(p + Q) + s_2 p(p + p_1 + Q)}{Q[s_1(p + Q) + s_2(p + p_1 + Q)]} = 0{,}2.$

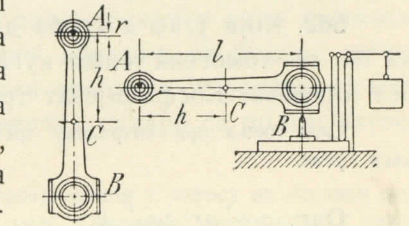
2) $p_1 s_1 \left[1 - \frac{(1 + k)\,Q}{p + p_1 + Q}\right] = 0{,}12\ kg.\ cm.$



558. За одређивање момената инерције J замајца A полупречника $r = 0{,}5\ m$ у односу на тежишну осовину, обавијена је око његовог обима танка жица, за коју је учвршћен тег B масе $m_1 = 8\ kg$. Опажањем нађено је да је време за које тег B падне са висине $h = 2\ m$ равно $T_1 = 16\ sec$. Да би се искључио утицај трења у лежиштима, направљен је други оглед са тегом масе $m_2 = 4\ kg$, при томе је опажањем нађено да је време падања са исте висине равно $T_2 = 25\ sec$. Претпостављајући да је моменат трења константан и независан од тега, срачунати моменат инерције J.

$$\textbf{Одг.}\quad J = R^2 \cdot \frac{\frac{g}{2h}(m_1 - m_2) - \left(\frac{m_1}{T_1^2} - \frac{m_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}} = 1\ 050\ kg\ m\ sec^2.$$

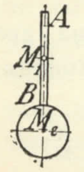
559. Да би одредили моменат инерције спојне полуге, пуштамо је да осцилише око хоризонталне осовине — танке цилиндричне шипке — која је провучена кроз отвор за чеп крсне главе. Опажањем одређено је, да је $100\ T = 100\ sec$, где је T половина периоде. За одређивање пак одстојања тежишта $AC = h$ од осовине обртања, постави се полуга хоризонтално, тако да се тачка A обеси о котур а тачка B ослони о платформу децималне ваге. Вага показује да је притисак на њу раван $P = 50\ kg$. Одредити централни моменат инерције полуге у односу на осовину која је управна на раван цртежа, при следећим подацима: тежина полуге $Q = 80\ kg$, одстојање вертикала кроз A и B (види десну слику) равно је $l = 1{,}0\ m$, полупречник чепа крсне главе $r = 4\ cm$.



$$\textbf{Одг.}\quad J = \frac{(Pl + Qr)}{g}\left(\frac{g}{\pi^2}\,7^2 - \frac{P}{Q}\,l - r\right) = 1{,}76\ kg\ m\ sec^2.$$

XV. Закони: Кретања тежишта, момената и живе силе.

560. Тешко тело састављено је из штапа AB дужине 80 cm, тежине 1 kg, и плоче полупречника 20 cm, тежине 2 kg, која је за њ учвршћена. Телу, које се налази у вертикалном положају, дато је таково кретање да је у почетку кретања брзина тежишта M_1 штапа равна нули, а брзина тежишта M_2 плоче равна 360 cm/sec и управљена хоризонтално на десно. Наћи наредно кретање тела узимајући у обзир само утицај силе теже.



Одг. Тело се обрће равномерно око тежишне осовине угаоном брзином $\omega = 6\,\frac{1}{sec}$, тежиште се креће по параболи: $x^2 = 117{,}5\ y$.

561. Две масе M_1 и M_2 тежине $p_1 = 2\ kg$ и $p_2 = 1\ kg$ спојене су штапом дужине $l = 60\ cm$. У почетку кретања $t = 0$ штап M_1M_2 је хоризонталан, терет M_1 непокретан, а брзина терета M_1 равна је $v_1 = 60\pi\ cm/sec$ и управљена вертикално на горе. Занемарујући отпор ваздуха, тежину штапа који спаја масе и димензије самих маса одредити:

1) кретање маса под утицајем силе теже; 2) одстојања h_1 и h_2 маса, после времена $t = 2\ sec$, од хоризонтале M_1M_2 на којој се оне налазе у тренутку $t = 0$; 3) силу S у штапу.

Одг. 1) Средиште C маса креће се по вертикали: $y_c = -\frac{3}{2}v_1t +$ $+\frac{1}{2}gt^2$; штап се обрће око средишта угаоном брзином $\pi\frac{1}{sec}$;

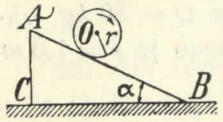
2) $h_1 = h_2 = 1\ 711\ cm$; 3) $S = \frac{1}{g}\cdot\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}.\ l\,\omega^2 = 0{,}4\ kg$.

562. Који угао α треба да затвара са хоризонталом коса раван, да би се хомогена тешка кугла, положена на њу, котрљала по њој без клизања? Коефицијенат трења између кугле и равни раван је k.

Сила трења при котрљању треба да буде мања или равна $kMg\cos\alpha$, где је M маса кугле.

Одг. $\alpha \leqslant arc\,tg\,\frac{7}{2}k$.

563. Призма ABC троугластог пресека а тежине P, налази се на глаткој хоризонталној равни по којој може да клизи без трења. На страни AB призме котрља се без клизања хомогени кружни ваљак тежине p. Одредити кретање призме.

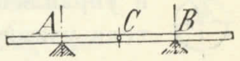


Поставимо једначину живе силе система који се састоји из призме и цилиндра. Помоћу закона о кретању тежишта нађимо брзину осовине цилиндра и његову угаону бузину као функцију брзине призме. Заменивши те вредности у горњу једначину, диференцирајмо ју по времену.

Одг. Призма се креће у лево константним убрзањем, величине:

$$\frac{pg\sin 2\alpha}{2P\cos^2\alpha + (P+p)(1+2\sin^2\alpha)}$$

564. Хомогени танки штап дужине $2l$ и тежине P лежи на два ослонца A и B; тежиште C штапа подједнако је удаљено од ослонаца; $AC = CB = a$ притисак на ослонац раван је $\frac{P}{2}$.

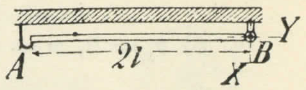


За колико се мења притисак на ослонац A у тренутку када се уклони ослонац B?

Поставимо диференцијалну једначину кретања штапа за бесконачно мали тренутак времена који следује уклањању ослонца B, занемаримо промену положаја штапа и одстојања AC.

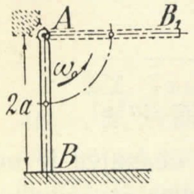
Одг. Притисак на ослонац A прирастао је за: $\frac{l^2 - 3a^2}{2(l^2+3a^2)}\cdot P$.

565. Хомогени тешки штап AB дужине $2l$, тежине Q подупрт је на крају A, може се обртати око зглавка B и налази се у хоризонталном положају. Када се уклони ослонац A, штап почиње падати окрећући се око краја B; у тренутку када штап заузме вертикалан положај ослободи се и крај B. При наредном кретању одредити путању тежишта штапа и угаону брзину ω.



Одг. 1) Парабола $y^2 = 3lx - 3l^2$; 2) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$.

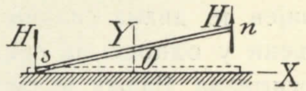
566. Хомогени штап AB дужине $2a$ обешен је за крај A; другим крајем B налази се до самог пода. Кад се штапу да нека почетна угаона брзина ω_0, ослобађа се везе у A у оном тренутку када се налази у хоризонталном положају. На наредно кретање слободног штапа утиче једино сила земљине теже. Колика треба да је почетна угаона брзина ω_0 штапа, да би падајући, у тренутку судара са подом заузео вертикалан положај.



Нађимо моменат инерције штапа у односу на осовину која пролази кроз један његов крај. Одредимо угаону брзину штапа када се налази у хоризопталном положају, а затим брзину тежишта. Нађимо интервал времена, за које ће тежиште, најпре дижући се а затим падајући, стићи у ниво почетног положаја. Кад обртни угао штапа изразимо тим временом, добијамо решење задатка.

Одг. $\omega_0^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{(2k+1)^2\pi^2}{(2k+1)\pi+2}\right]$, где је $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

567. Танки магнетни штап, тежине P, дужине $2l$, са половима на крајевима, лежи на глаткој хоризонталној равни између полова електромагнета. При затварању тока струје електромагнет ствара равномерно поље, у којему дејствује на сваки пол штапа вертикална сила H. Кад је $H > \frac{P}{2}$ штап почиње кретање.



1) Одредити ону највећу величину H, при којој ће се штап за цело време кретања једним крајем ослањати о раван. 2) Претпостављајући, да се штап за цело време ослања о раван, наћи: *а*) путању северног пола штапа под условом да је поље елелектромагнета управљено одозго на доле. *б*) брзину v_1 штапа и његову угаону брзину ω при вертикалном положају.

Ако са ψ обележимо угао нагиба штапа према равни, претстављен је услов првог питања, геометријски изражен, једначином: $y_S = l\sin\psi$. За координатни почетак узета је средина почетног положаја штапа. Помоћу тог услова добићемо из закона момената у односу на тежиште и закона живе силе, израз за отпор, којом раван утиче на штап, у зависности од угла његовог нагиба ка равни. Да би услов додира био испуњен, не сме отпор, претстављен добивеним изразом, бити негативан при ма каквом положају штапа. Из два последња питања добијамо одговор на прво, применом закона кретања тежишта, а одговор на друго — применом закона живе силе.

Одг. 1) $H = \frac{7}{12}P$.

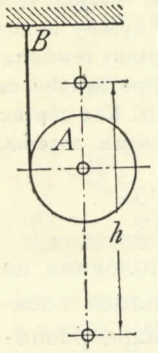
2) а) Половина елипсе са средиштем у тачки P а полуосама l и $2l$; северни пол креће се осцилаторно по тој кривој.

б) $v_s = 0,\ \omega = \sqrt{\frac{6g}{Pl}(2H-P)}$.

568. На бочној површини кружног цилиндра са вертикалном осовином, око које се може окретати без трења, ижљебљен је глатки завојни жљеб успона α. Кад се цилиндар налази у миру, спусти се у жљеб, без почетне брзине, тешка куглица; падајући у њему она доводи у обртање цилиндар. Одредити угаону брзину ω, којом се обрће цилиндар кад се куглица спустила за висину h. Маса цилиндра је M, његов полупречник R, маса куглице је m. Одстојање куглице од осовине обртања узети да је равно R. Моменат инерције цилиндра у погледу осовине обртања раван је $\frac{1}{2}MR^2$.

Применимо закон момената и закон живе силе.

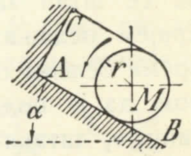
Одг. $\omega = \frac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M+2m)(M+2m\sin^2\alpha)}}$.



569. Око округлог ваљка A масе m обавијен је по средини танак конац, чији је крај B учвршћен непомично. Ваљак пада без почетне брзине одмотавајући конац. Одредити брзину v осовине ваљка, кад се спустила за висину h и наћи силу S у концу.

Одг. $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh};\ S = \frac{1}{3}\ mg.$

570. Хомогени кружни ваљак M, тежине P и полупречника r, обавијен је двама гипким концима тако, да су ови симетрично распођељени у односу на средњи пресек ваљка, који је паралелан његовим основама. Ваљак је смештен на косу раван AB тако, да су му изводнице управне на линију највећег пада косе равни а крајеви конаца C учвршћени су симетрично у односу на поменути пресек у одстојању $2r$ од равни AB. Ваљак почиње кретање, без почетне брзине услед дејства силе теже, савладавши трење на косој равни чији је коефицијенат f. Одредити пут s који пређе средиште ваљка за време t и силу S у концима, претпостављајући да се у посматраном размаку времена ни један од конаца није одмотао до краја.

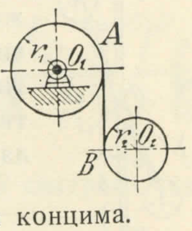


Применимо закон кретања тежишта и закон момената релативног кретања.

Одг. $s = \frac{1}{3}g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)t^2;\ S = \frac{1}{6}P(\sin\alpha + k\cos\alpha).$

Ваљак остаје у стању мира, кад је $tg\,\alpha \leqslant 2f$.

571. Два хомогена кружна ваљка A и B, тежине p_1 и p_2 полупречника r_1 и r_2, обавијена су двама гипким концима слично ономе како је то објашњено у предњем задатку. Осовине ваљака су хоризонталне. Осовина ваљака A је непомична, ваљак B пада из стања мира услед дејства силе теже. Одредити, после времена t од почетка кретања: 1) угаоне брзине ω_1 и ω_2 ваљака, 2) пут s тежишта ваљка B и 3) силу S у концима, претпостављајући да су у том тренутку ваљци још обавијени концима.

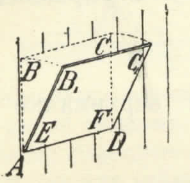


Применом закона момената нађимо везу између обртних углова ваљака а затим применимо закон живе силе.

Одг. 1) $\omega_1 = \frac{2gp_2}{r_1(3p_1+2p_2)}t;\ \omega_2 = \frac{2gp_1}{r_2(3p_1+2p_2)}t;$

2) $s = \frac{g(p_1+p_2)}{3p_1+2p_2}t^2;$ 3) $S = \frac{p_1p_2}{2(3p_1+2p_2)}.$

572. Танка хомогена плоча $ABCD$ правоугаоног облика, висине $AB = 2l$, тежине Q, прислоњена је уз вертикалан зид, а ослоњена на два веома кратка јексера E и F који немају главе. Одстојање AE равно је FD. Плоча почиње да пада, добивши бесконачно малу почетну брзину, обрчући се око праве AD. Колики угао затвара плоча са зидом у тренутку када напушта јексере?



Плоча може да остане на јексерима само до оног тренутку док је резултанта реакција ослонаца управљена ка унутрашњости правоугаоног двоструког рогља са ивицом AD у којем се збива почетно отклањање плоче од вертикалног положаја. Применимо законе: кретања тежишта, момената и живе силе.

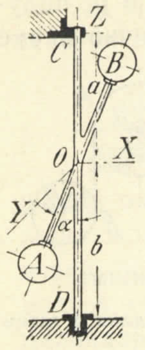
Одг. $\alpha = arc\cos\frac{2}{3} = 48{,}2^0$.

XVI. Притисак на осовине.

573. Тежиште замајца тежине 3 000 kg и пречника 2 m налази се на одстојању 1 mm од осе осовине. Одстојања лежишта од средишње равни замајца равна су 1 m. Одредити притиске на лежишта када се осовина обрће са 1 200 обрта у минути.

Одг. Притисак на свако лежиште је резултанта двеју сила, од којих је једна равна 1 500 kg и управљена по вертикали, а друга равна 2 400 kg и паралелна правој која спаја геометријско средиште замајца, које се налази на оси осовине, са тежиштем замајца.

574. Штап AB, дужине $2l$, на чијим се крајевима налазе масе тежине P грама, обрће се равномерно угаоном брзином ω око вер-

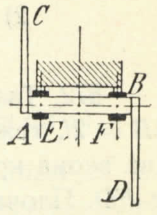


тикалне осовине OZ, која пролази средином O штапа. Одстојање тачке O од лежишта C равно је a а од лежишта D равно b. Угао који затвара штап AB са осовином OZ задржава сталну величину α; Занемарујући тежину штапа и димензије маса, одредити компоненте притиска на лежишта C и D у тренутку када се штап налази у равни XOZ.

Одг. $X_C = -X_D = \frac{Pl^2\omega^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)}\, g$;

$Y_C = Y_D = 0;\ Z_D = -2P\, g.$

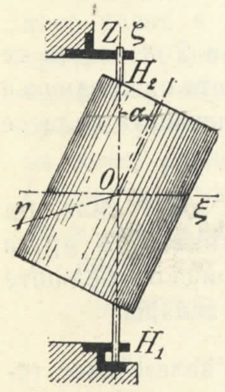
575. На крајевима средње осовине AB велоципеда натакнуте су две једнаке полуге AC и BD дужине l, свака тежине Q и учвршћене су једне према другој под углом од 180^0. Осовина AB дужине $2a$, тежине P обрће се у лежиштима EF константном угаоном брзином ω. Лежишта су симетрично расподељена на међусобном одстојању $2b$. Одредити притиске N_E и N_F на лежишта у тренутку када је полуга AC управљена вертикално у вис. Масу сваке полуге сматрати равномерно расподељеном по њеној осовини.



Одг. Притисак $N_E = \frac{1}{2}P + Q - \frac{al\omega^2}{2bg}Q$ при $N_E > O$ управљен је вертикално на доле, при $N_E < O$ на горе.

Притисак $N_F = \frac{1}{2}P + Q + \frac{al\omega^2}{2bg}Q$ управљен је вертикално на доле.

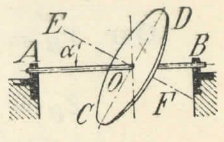
576. Прави хомогени кружни ваљак тежине P, дужине $2l$ и полупречника r, обрће се око вертикалне тежишне осовине константном угаоном брзином ω; угао између осе ваљка и осе обртања задржава при томе константну величину α. Размак лежишта H_1 и H_2: $H_1H_3 = h$. Одредити притиске на лежишта H_1 и H_2.



Узмимо средиште цилиндра O за почетак координатног система. Нека је осовина $O\zeta$ — осовина обртања, $O\eta$ — осовина, управна на раван коју образују осовина обртања и геометријска оса цилиндра, и $O\xi$ осовина, управна на две претходне; онда је моменат девијације $D = \Sigma m\eta\zeta = 0$ а моменат девијације $E = \Sigma m\xi\zeta$; овај последњи раван је $\sin\alpha . \cos\alpha\,(A - C)$ где су A и C главни централни моменти инерције цилиндра.

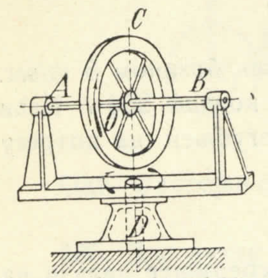
Одг. Притисци N_1 и N_2 имају исту величину: $P\frac{\omega^2 \sin 2\alpha}{2gh}\left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{4}r^2\right)$ и супротног су смера.

575. Хомогена танка кружна плоча CD парне турбине обрће се око осовине AB која пролази кроз њено тежиште O. Услед неправилног бушења главине затвара нормала OE кружне плоче са осовином обртања угао $AOE = \alpha = 0{,}02$ радиана. Срачунати притиске на лежишта A и B када је дато: тежина кружне плоче 3,27 *kg*, њен полупречник $r = 20$ *cm*, угаона брзина 30 000 обрта у минути; одстојање $AO = 50$ *cm*, $OB = 30$ *cm*. Осовину AB сматрати кругом а $\sin 2\alpha = 2\alpha$.



Одг. Притисци од сопствене тежине кружне плоче: 1,23 *kg* на лежиште A; 2,04 *kg* на лежиште B; притисци на лежишта услед обртања кружне плоче имају исту величину 821 *kg* и супротног су смера.

578. Точак полупречника a, тежине $2\,p$ обрће се око хоризонталне осовине AB константном угаоном брзином ω_1; осовина AB пролази кроз тежиште точка и управна је на његову раван, а обрће се око вертикалне осовине CD константном угаоном брзино ω_2. Смерови обртања дати су стрелицама. Наћи притисак N_A и N_B на лежишта A и B, кад је дужина $AO = OB = h$. Претпоставимо да је маса точка равномерно распођељена по његовом обиму.

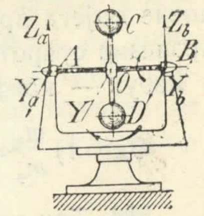


Силе инерције делића точка, како услед релативног убрзања тако и услед убрзања носача, налазе се у равнотежи. Силе инерције, услед Coriolis-ових убрзања дају спрег сила. Нађимо хоризонталну компоненту момента, која је управна на осовину AB, сваке од ових сила, па све то саберимо. Збир вертикалних компонената биће раван нули. Затим применимо принцип d'Alembert-а, формирајмо једначине равнотеже у односу осовина OB, OC и треће, на њих управне.

Много краће решење, како у овом тако и у следећем задатку добијамо, када узмемо у обзир, да је по закону површина, брзина краја вектора, који претставља главни моменат количине кретања система, (или замах) равна главном моменту спољних сила у односу на исту тачку.

Одг. $N_a = p\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right);\ \ N_B = p\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right).$

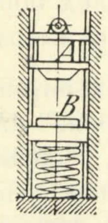
579. Око хоризонталне осовине AB прибора, који је описан у предњем задатку, обрће се равномерно штап CD. Штап је са том осовином круто везан под правим углом а на његовим крајевима учвршћене су две кугле. Кугле су исте тежине, величине Q, средишта им се налазе на подједнаким одстојањима: $OC = OD = a$ од осовине обртања. Одговарајуће угаоне брзине, осовине AB и штапа CD равне су ω_1 и ω_2; њихови смерови обртања дати су на слици. Занемарујући тежину штапа и за-



мишљајући масе кугли концентрисане у њиним средиштима одредити хоризонталне и вертикалне компоненте притисака на лежишта A и B.

Одг. $$Y_B = -Y_A = \frac{Qa^2}{gh}\omega_1\omega_2 \sin 2\omega_1 t;$$
$$Z_B = Q\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right) - \frac{Qa^2}{gh}\omega_1\omega_2 \cos 2\omega_1 t;$$
$$Z_A = Q\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right) + \frac{Qa^2}{gh}\omega_1\omega_2 \cos 2\omega_1 t.$$

XVII. Судар.



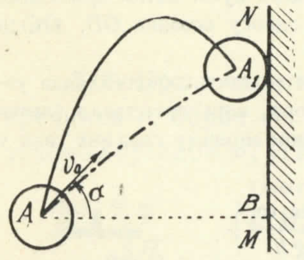
580. Маљ A пада са висине од 4,905 m и судара се са наковњем B који је учвршћен на опрузи. Тежина маља је 10 kg, тежина наковња 5 kg. Одредити брзину са којом ће почети кретање наковња после судара, кад се маљ креће заједно с њиме.

Одг. 6,54 m/sec.

581. Парни чекић тежине 12 t пада на наковањ брзином 5 m/sec. Тежина наковња са комадом гвожђа спремног за ковање 250 t. Наћи рад A_1 утрошен за ковање гвожђа, и рад A_2, изгубљен на потресу земљишта.

Одг. $A_1 = 14\,600$ $kg\ m$; $A_2 = 700$ $kg\ m$.

582. Кугла полупречника $r = 5$ cm чије се средиште налази на одстојању AB од вертикалног зида MN, бачена је брзином $v = 8{,}4$ m/sec под углом $\alpha = 45^0$ ка хоризонту; после судара са зидом кугла се враћа у почетни положај.



Одредити одстојање AB, узимајући да је коефицијенат k судара раван 0,5.

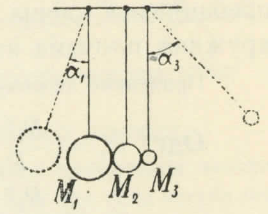
Огпор ваздуха и трење између кугле и зида занемарити; $g = 9{,}8$ m/sec^2.

Одг. $AB = \frac{k}{g(1+k)} v_0^2 \sin 2\alpha + r = 2{,}45$ m.

583. Одредити однос маса m_1 и m_2 двеју кугли у следећа два случаја: 1) Прва се кугла налази у миру, настане централни судар после којега друга кугла остане у миру; 2) кугле се сударе са истим брзинама супротног смера; после централног судара друга кугла остане у миру; — коефицијенат судара k.

Одг. 1) $\frac{m_2}{m_1} = k$; 2) $\frac{m_2}{m_1} = 1 + 2k$.

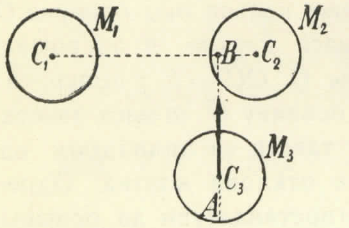
584. Три кугле M_1, M_2, M_3 од слонове кости, обешене су помоћу конаца тако, да су им средишта на истом одстојању од тачака вешања, које се налазе на истој хоризонтали. Кугле додирују једну другу, полупречници њихови односе се, као 3:2:1. Кугла M_1 отклоњена је за угао α_1, па је затим пуштена без почетне брзине. Одредити: 1) за колики се угао α_3 отклања кугла M_3; 2) колики треба да буде угао α_1, да би се кугла M_3 после отклона спуштала по истом луку по коме се и попела; коефицијенат судара $k = 0{,}9$.



Одг. 1) $\sin\frac{\alpha_3}{2} = 2{,}47 \sin\frac{\alpha_1}{2}$ при $\alpha_1 < 48^0$.

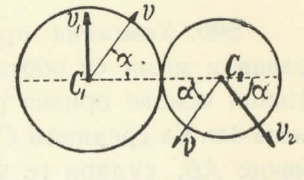
2) $\sin\frac{\alpha_1}{2} < 0{,}29$; $\alpha_1 \leqslant 33^0 20'$.

585. Дате су три једнаке кугле M_1, M_2, M_3 полупречника R. Одстојање средишта $C_1C_2 = a$. Одредити положај праве AB — управне на линији C_1C_2 — на којој треба да се налази средиште C, треће кугле, да би се ова, добивши неку брзину у смеру AB, после судара са куглом M_2, сударила централно са куглом M_1. Кугле сматрати потпуно еластичнима.



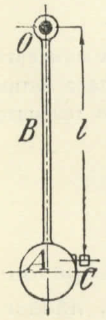
Одг. Одстојање праве AB од средишта C_2: $BC_2 = \frac{4R^2}{a}$

586. Две кугле крећу се једнаким и антипаралелним брзинама v. У тренутку додира затварају њихове брзине, са правом која спаја њихове центре, угао α. Одредити брзину v_1 и v_2 кугли после судара, за случај, када је маса прве кугле два пута већа од масе друге кугле а коефицијенат судара раван k.



Одг. Брзина прве кугле v_1 равна је $v \sin\alpha$ и управна је на линију која спаја средишта; брзина друге кугле v_2 равна је v и затвара угао α са линијом која спаја средишта, и угао $\pi - 2\alpha$ са смером брзине v.

587. Клатно прибора за испитивање материјала на судар, састављено је из челичне плоче A полупречника 10 cm а дебљине 5 cm, и челичног кружно-цилиндричног штапа B пречника 2 cm а дужине 90 cm. На ком одстојању l, од хоризонтале равни, која садржи осовину обртања O, треба сместити штап C који намеравамо да ломимо, да осовина не би трпела од судара. Претпоставимо да је смер судара хоризонталан.



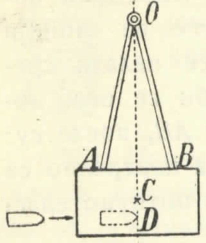
Одг. $l = 97{,}5$ cm.

588. Два точка обрћу се у истој равни око својих оса угаоним брзинама ω_{10} и ω_{20}. Одредити угаону брзину точкова ω_1 и ω_2 после пребацивања каиша . Клизање каиша занемарити, а точкове сматрати кружним плочама исте густине полупречника R_1 и R_2.

Применимо теорему Carnot-a.

Одг. $$\omega_1 = \frac{R_1^3\,\omega_{10} + R_2^3\,\omega_{20}}{R_1\,(R_1^2 + R_2^2)};$$
$$\omega_2 = \frac{R_1^3\,\omega_{10} + R_2^3\,\omega_{20}}{R_2\,(R_1^2 + R_2^2)}.$$

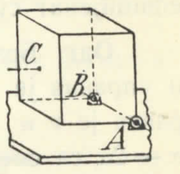
589. Балистичко клатно које служи за одређивање брзине танета, састоји се из ваљка AB обешеног о хоризонталну осовину O. Ваљак је с једне стране A отворен и напуњен песком. Тане, које се зарило у песак, произвело је обртање клатна око осовине O за неки угао. Нека је M маса клатна, h одстојање његова тежишта од осовине O, $OC = h$, ρ полупречник инерције у односу на осовину O, m маса танета, a одстојање тачке судара танега са цилиндром од осовине O; $OD = a$, α угао отклона клатна. Одредити брзину v танета, претпостављајући да осовина O клатна не прима притиске од судара: $ah = \rho^2$.



Изразимо, да се моменат количине кретања система, који је састављен из клатна и танета не мења, затим применимо закон живе силе.

Одг. $$v = \frac{2\,(Mh + ma)}{m}\sqrt{\frac{g}{a}}\,sin\,\frac{\alpha}{2}.$$

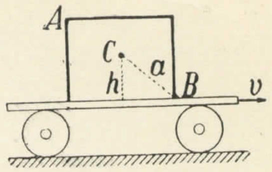
590. Хомогена призма квадратне основе стоји на хоризонталној равни и може се обртати око ивице AB која се налази у тој равни. Ивица основе призме равна је a, висина призме $3a$, њена маса $3m$. Са средином C бочне стране, која лежи наспрам ивице AB, судари се кугла масе m са хоризонталном брзином v. Претпостављајући да је судар нееластичан и да је маса кугле концентрисана у њеном средишту које после судара остаје у тачки C, одредити најмању величину брзине v, при којој ће се призма претурити.



За одредбу угаоне брзине обртања око ивице AB, изједначићемо изразе момената количине кретања система, који је састављен из кугле и призме, пре и после судара, затим ћемо применити закон живе силе. Претурање призме наступа онда, када њено тежиште при обртању пређе највиши могући положај.

Одг. $v = \frac{1}{3}\sqrt{53ga}.$

591. Колица са призматичким теретом AB крећу се по хоризонталним шинама брзином v. На платформи, до ивице B терета, налази се испад који спречава терет да по платформи клизне у напред али му допушта обртње око ивице B. Нека је: p тежина терета, h одстојање његова тежишта од платформе, одстојање $CB = a$ и ρ полупречник инерције масе терета у односу на ивицу B. Одредити угаону брзину ω, са којом се терет обрће око ивице B када тренутно зауставимо колица.



Применимо теорему Carnot-a. Ако са r обележимо одстојање произвољног делића терета од ивице B а са y његово одстојање од платформе, биће при томе изгубљена брзина делића равна: $\sqrt{v^2 + r^2\omega^2 - 2yv\omega}$; због тога је жива сила изгубљених брзина: $\frac{p}{2g}(v^2 + \rho^2\omega^2 - 2hv\omega)$.

Одг. $\omega = \frac{hv}{\rho^2}.$

592. Нека је при условима предњег задатка, терет AB хомогена права четвероугаона призма, доње ивице 4 m и висине 3 m. Нађи ону брзину v колица, при којој ће се терет претурити.

Одг. $v = \frac{\rho}{h}\sqrt{2g(a - h)} = 36\ km/sat.$

ОПАЖЕНЕ ШТАМПАРСКЕ ГРЕШКЕ

страна	Бр. задатка	ред	место	треба
19	87	3 одозго	осаовином	осовином
76	335	у слици	u	v
77	336	у слици	u	v
82	359	9 одозго	$x_c^2 - y_c^2 = a^2$	$x_c^2 + y_c^2 = a^2$
95	407	2 одоздо	брзина	брзине
96	408	5 одоздо	једиачину	једначину
96	409	3 одоздо	брзинн	брзини
97	410	6 одозго	осовина са	осовина топа са
98	416	4 одозго	km^2	k^2m
99	420	7 одозго	$\dot{v}$	$\dot{y}$
100	424	у слици	M	M_2
102	453	5 одозго	$6t$	$5t$
132	556	у слици	M	M_2

Папир из фабрике хартије у Чачку.