ДАРИНКА ЈАНОШЕВИЋ и Д-р НИКОЛА ЧЕПИНАЦ

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ПЛАНИМЕТРИЈЕ

СА РЕШЕЊИМА

ЗНАЊЕ
ПРЕДУЗЕЋЕ ЗА УЏБЕНИКЕ
НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД — 1952

Овај приручник одобрен је одлуком Министарства просвете Н. Р. Србије бр. 7441 од 10-IV-1951 г.

ПРЕДГОВОР

Ова збирка задатака има за циљ да утврди, продуби и прошири код ученика знање планиметрије које они стичу систематским прелажењем те гране геометрије у току наставе и увежбавањем помоћу задатака који се налазе у уџбеницима уз теориско градиво. Због тога у њој градиво није изложено строго оним редом којим се излаже у уџбеницима, него је углавном подељено на три одељка, од којих први садржи задатке из геометриског сродства конгруенције (подударности), други из геометриског сродства еквиформности (сличности), а трећи из обе ове области. Затим, у сваком том одељку градиво је распоређено тако да би се што боље могле да проуче понаособ особине појединих основних геометриских фигура: праве, угла, троугла, четвороугла и круга.

Поред теорема, у сваком том одељку налазе се и конструктивни задаци, нумерички и алгебарски задаци, геометриска места и задаци из максима и минима.

Према томе, наставници ће, као и ученици, при употреби ове збирке морати да узму у обзир ове напомене, како би се лакше оријентисали при избору задатака.

Сем тога, задаци у појединим одељцима нису одвојени у такве посебне групе које би биле намењене само ученицима одређеног узраста, па ће и ту бити потребно да се при избору задатака претходно испита да ли је оно што је изабрано, а у вези је са програмом, ученицима довољно приступачно. Ту има, наиме, и таквих задатака које могу успешно да решавају само ученици највиших разреда и задатака који садржином прелазе наше садашње програме, иако и њима за основу служе знања предвиђена нашим данашњим програмима.

Збирци су приложена упутства и решења. Решења су, наиме, дата или потпуно, да би ученици могли да виде на примерима како треба решавати задатке, или се само наводе они моменти који поуздано доводе до одговора на постављено питање. Како је притом каткад указано и на више начина решавања некога задатка, разуме се да тиме нису исцрпени сви могући начини решавања, а то у још већој мери важи за многе задатке решене само на један начин. Верујемо да ће у тој толико широкој и разноврсној области наставници, па и поједини ученици, не само и сами пронаћи и неке друге начине решења него ће и нека од њих бити и краћа и лепша од оних која се налазе у овој збирци. Међутим, то ће само допринети циљу ове збирке: да потстакне ученике на самостална истраживања.

Давање одговора на свако питање постављено у задатку и честа понављања истих елемената у многим решењима имају за циљ да читаоци ове збирке увек имају сигуран одговор на постављено питање не тражећи помоћи са стране, коју врло често не могу да добију, а уједно да не морају решавати дуги низ претходних задатака да би решили задатак који их интересује. Такав рад би могао да их обесхрабри, па да га напусте. Свакако да сваки задатак треба да решавају колико год могу самостално, а да упутства и решења консултују само кад такав рад прелази њихове снаге, или кад траже потврду за тачност свога решења.

ПИСЦИ

§ 1. Права линија и угао

1) Дата је права XY, две тачке A и B на тој правој и средина O дужи AB. Доказати да је свака тачка M на тој правој која лежи са исте стране тачке O као и тачка A ближа тачки A него тачки B.

2) Растојање средине дужи ма од које тачке узете на продушку те дужи једнако је полузбиру растојања те тачке од крајева те дужи. Доказати.

3) Растојање средине дужи ма од које тачке узете на тој дужи једнако је полуразлици растојања те тачке од крајева те дужи. Доказати.

4) На некој правој уочимо четири тачке A, B, C, D, које следују тим истим редом, и нека је $AD = 9$ cm, $BC = 6$ cm.

Израчунати: а) $AB + CD$; б) растојање средина дужи AB и CD.

5) На некој правој уочимо три тачке A, B, C и претпоставимо да је тачка C ван дужи AB и да је $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm. Нека су M, N, P средине дужи AB, AC, BC. Доказати да дужи MN и AP имају заједничку средину. Наћи растојање те средине од тачке A.

6) Кроз тачку P повући праву тако да нормале спуштене на њу из тачака A и B буду једнаке.

7) Ако се повуку симетрале OX и OY два упоредна угла AOB и COB,

а) показати да су углови AOX и COY комплементни;

б) ако је $AOB = 35^\circ$, наћи угао COY.

8) Земља се обрне око своје осовине за 24 часа.

а) За колики ће се угао обрнути Земља за $3^h\ 20^m$?

б) Колико ће трајати њено обртање за 130°?

9) Праве AB и CD секу се у тачки O.

а) Ако угао COB и угао AOD заједно износе 250^0, наћи посебно угао COA и угао BOD.

б) Ако углови AOC, COB, BOD заједно износе 274^0, колико износи сваки од четири угла посебно?

10) Колики је збир суплемената оних углова који су међу собом комплементни?

11) Колики је збир оних испупчених углова који одговарају двама упоредним угловима?

12) Угао од 45^0 поделити на три једнака дела (без угломера).

13) Угао који образују бисектриса једног угла и ма која полуправа повучена ван тога угла из његовог темена једнак је полузбиру углова које образују та полуправа и краци првог угла. Доказати.

14) Угао који образују бисектриса једног угла и ма која полуправа повучена унутар тога угла из његовог темена једнак је полуразлици углова на које је дати угао подељен том полуправом. Доказати.

15) Ако се узме прави угао за јединицу, четири угла имају ове величине: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{2}{5}$, $\delta = \frac{5}{6}$. Израчунати величине комплементног и суплементног угла свакога од та четири угла.

16) Ако четири полуправе са заједничком почетном тачком O следују у истом смислу обртања око тачке O и образују четири узастопна угла, тако да је четврти једнак првом а трећи другом, две од те четири полуправе леже на истој правој и једна од њих је бисектриса угла који чине друге две. Доказати.

17) Ако из неке тачке A ван неке праве MN повучемо нормалу AB на ту праву и косе дужи AC, AD, AE са исте стране нормале, и ако се те дужи непрестано повећавају за исту величину, растојања CD, DE биће све мања. Доказати.

18) Нека је дат угао AOB; повуцимо полуправу OA_1 нормално на OA, са исте стране праве OA где је OB, и OB_1 нормално на OB, са исте стране праве где је OA. Доказати да $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle A_1OB_1$ имају исту бисектрису и да су та два угла суплементна.

19) Ако два угла имају паралелне краке, њихове бисектрисе су паралелне или нормалне. Доказати.

20) Нормале повучене на краке угла у тачкама једнаког растојања од темена угла секу се на бисектриси тога угла. Доказати.

21) Са исте стране праве AA_1, а из тачке O на тој правој, повуку се полуправе OB и OX; претпоставља се да је $\sphericalangle XOA = \alpha$ и $\sphericalangle XOB = \beta$. Израчунати $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle XOM$ које образују полуправе OX и бисектриса OM угла AOB.

Разликовати два случаја, већ према томе да ли је OX ван угла AOB или унутар тога угла, и претпоставити да је $\alpha > \beta$.

22) Два зида AB и AC подигнута су под извесним углом; две личности, M и N, налазе се у овом углу, једна окренута зиду AB, друга зиду AC. Пита се где на зидовима треба поставити огледала да би ове две личности могле видети једна другу.

§ 2. Троугао

а) ТЕОРЕМЕ

1) Ма који троугао

1) Доказати да су два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ подударна ако је:

а) страна AB једнака страни A_1B_1, страна AC једнака страни A_1C_1, а тежишна линија повучена из B једнака тежишној линији повученој из B_1;

б) $AB = A_1B_1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, а висина повучена из C једнака висини повученој из C_1;

в) $AB = A_1B_1$, висина повучена из A једнака висини повученој из A_1, а висина повучена из B једнака висини повученој из B_1;

г) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а тежишна линија повучена из A једнака тежишној линији повученој из A_1;

д) $AB = A_1B_1$, висина повучена из C једнака висини повученој из C_1, а тежишна линија повучена из C једнака тежишној линији повученој из C_1.

2) Да би се измерила раздаљина двеју тачака између којих се не може проћи с ланцем за мерење, изабере се тачка C, из које се може видети и A и B и из које се може доћи и до A и до B. Измери се AC и BC и продуже се преко C, тако да је $CD = AC$ и $EC = CB$. Тада је дуж ED једнака дужи AB. Зашто?

3) Да би се измерила раздаљина између тачака A и B, од којих је тачка A неприступачна, одреди се правац AB и у том правцу измери произвољна дуж BE тако да је тачка E ван дужи AB. Изабере се тачка D, из које се може видети тачка A и из које се може прићи тачкама B и E. Утврде се правци BDG и EDF и одмери $FD = DE$ и $DG = BD$; затим се иде у правцу FG док се не дође до тачке H, из које се тачке A и D виде у једном правцу. Тада је HG једнако траженој раздаљини. Доказати.

4) Неко је желео да измери ширину реке коју није могао прећи. Он је уочио један предмет B на супротној обали и стао управо према њему на месту A на обали. Тада се прошетао дуж праве обале до места C, стављајући на средини AC један предмет O. Потом се удаљавао од C под правим углом према обали док није дошао до места D, са кога је предмете O и B видео у правој линији. Измерио је CD. Покажи да му CD даје ширину реке.

5) Две тачке A и B леже са исте стране праве XY; права AB сече XY у C. Доказати да је разлика растојања тачке C од тачака A и B већа од разлике растојања ма које тачке на правој XY од тачака A и B.

6) Доказати да је у сваком троуглу свака страна мања од половине обима троугла.

7) Доказати да је у сваком неравностраном троуглу највећа страна већа од трећине обима и да је најмања страна мања од трећине обима троугла.

8) Ако се темена троугла споје ма са којом његовом унутрашњом тачком, збир тих трију унутрашњих дужи налази се између збира и полузбира страна троугла.

9) Ако је тачка O унутар троугла ABC, доказати да је:

$$OA + OB + OC < AB + BC + CA < 2\,(OA + OB + OC).$$

10) Збир дужи m, n, p које спајају једну унутрашњу тачку троугла са његовим теменима мањи је од збира две дуже стране тога троугла.

11) Ако се страна једног троугла продужи преко оба темена, доказати да је збир два тако добијена спољашња угла већи од 180^0.

12) Ако се страна једног троугла продужи преко оба темена, доказати да збир тако добијених спољашњих углова умањен за угао који лежи према продуженој страни износи 180^0.

13) Ако се кроз тачку која је на средини између двеју паралелних повуку две праве тако да секу обе паралелне, онда су делови паралелних између пресека једнаки.

14) Дат је троугао ABC и тачка O унутар троугла. Доказати да је $\sphericalangle BOC > \sphericalangle BAC$.

15) Доказати да је у сваком неравностраном троуглу: а) бар један угао мањи од 60^0; б) бар један угао већи од 60^0.

16) Кроз средину O дужи BC повуче се полуправа OX и на њој се узме нека тачка A. Доказати:

а) ако је $OA = \frac{BC}{2}$, тада је $\sphericalangle BAC$ прав;

б) ако је $OA \leq \frac{BC}{2}$, тада је $\sphericalangle BAC \leq 90^0$.

17) У углу од 45^0 нацртан је троугао ABC тако да стране AB и AC образују с једним краком датог угла једнаке углове, а тако исто и стране BA и BC са другим краком. Доказати да је угао ACB прав.

18) Доказати да у троуглу бисектриса угла сече наспрамну страну на два отсечка од којих је сваки мањи од оближње стране.

19) Разлика углова које образује бисектриса унутрашњег угла троугла са наспрамном страном једнака је разлици углова на основици тога троугла.

20) Дат је троугао ABC и бисектриса AD угла α. Доказати да је од два отсечка BD и CD које чини бисектриса на страни BC већи онај који је уз већу страну.

21) Угао који образују бисектрисе два унутрашња угла троугла једнак је правом углу увећаном за половину трећег угла.

22) Ако кроз тачку пресека O бисектриса унутрашњих углова троугла повучемо паралелу MN страни BC, добијамо $MN = BM + CN$.

23) У троуглу ABC разлика два угла β и γ износи 90^0. Доказати да је бисектриса AD угла α нагнута према CB под углом од 45^0.

24) Дат је троугао ABC; кроз произвољну тачку D узету на страни BC повуку се паралеле странама AB и AC све до пресека E, F са странама AB и AC. Доказати да се дужина изломљене линије EDF налази између дужина страна AB и AC.

25) Код троугла ABC стране AB и AC продужене су преко темена B и C и повучене су симетрале спољашњих углова до пресека O. Доказати да је

$$\sphericalangle BOC = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle A.$$

26) Дуж повучена од темена једног троугла ма до које тачке супротне стране преполовљена је оном дужи која спаја средине других двеју страна.

27) Збир висина троугла мањи је од збира његових страна.

28) Тежишна линија ма ког троугла мања је од полузбира страна које полазе из истог темена.

29) У троуглу је свака тежишна линија једнако удаљена од друга два темена.

30) У троуглу ABC повучемо тежишну линију AD. Доказати да је

$$\frac{AB + AC - BC}{2} < AD < \frac{AB + AC}{2}.$$

31) Збир тежишних линија троугла налази се између обима и полуобима тога троугла.

32) Збир тежишних линија троугла већи је од $\frac{3}{4}$ његовог обима.

33) Збир растојања три темена троугла ма од које праве једнак је троструком растојању те праве од тежишта.

34) Доказати да у троуглу ABC већи од два угла које образује тежишна линија AD са страном BC лежи наспрам веће од двеју страна AB и AC.

35) Доказати да је у једном троуглу од два угла које образује тежишна линија са странама што полазе из истог темена већи онај чији је један крак мања страна троугла.

36) У једном троуглу од два угла, које образује висина са странама што полазе из истог темена, већи је онај који та висина образује са већом страном.

37) Угао који образују бисектриса угла троугла и висина спуштена из темена истог угла једнак је полуразлици углова на основици.

38) У троуглу ABC висина AD једнака је половини стране BC на коју је повучена. Доказати да је угао код темена A оштар или изузетно прав.

39) Ако се у једном троуглу спусти нормала из темена на основици на симетралу супротног угла, тада је:

а) угао који гради нормала са једним краком преполовљеног угла једнак половини збира углова на основици;

б) угао који гради нормала са основицом једнак половини разлике углова на основици.

40) Ако је O ортоцентар троугла ABC, докажи да је $\sphericalangle BOC + \sphericalangle BAC = 180^0$.

41) На двема странама AC, BC ма кога троугла ABC конструишу се квадрати. Доказати да се праве AD, BE, где су тачке D и E темена квадрата супротна темену C, секу на висини CF датога троугла.

2) Равнокраки и равнострани троугао

42) Ако су две тачке на основици равнокраког троугла подједнако удаљене од темена на основици, доказати да су оне подједнако удаљене и од врха.

43) Троугао је равнокрак ако су му једнаке две тежишне линије.

44) Троугао је равнокрак ако су му једнаке бисектрисе два унутрашња угла.

45) Дат је равнокраки троугао ABC са врхом у A и висином BB_1; ма из које тачке D основице BC спусте се нормале DE на AB и DF на AC. Доказати да је збир $BE + CF$ сталан и једнак CB_1.

46) Збир нормала спуштених ма из које тачке основице равнокраког троугла на краке сталан је.

47) Ако се краци BA и CA равнокраког троугла BAC продуже преко врха A до тачака E и F тако да је $AE = AF$, и тачка E споји са теменом C, а тачка F са теменом B, доказати да је $FB = EC$.

48) Доказати да се из једне тачке ван неке праве могу до те праве повући само две једнаке дужи.

49) Ако се ма у којој тачки X на основици BC равнокраког троугла ABC дигне нормала на основицу, она ће сећи један крак у тачки Y а продужени други крак у Z. Доказати да је троугао AYZ равнокрак.

50) Ако се повуку симетрале два упоредна угла и ма из које тачке X на заједничком краку повуче паралела са она друга два крака до пресека Y и Z са симетралама, доказати да су дужи XY и XZ једнаке.

51) Ако се крак BA равнокраког троугла ABC $(AB = AC)$ продужи преко темена A до тачке D тако да је $AD = AB$, и тачка D споји са теменом C, доказати да је угао BCD прав.

52) У равнокраком троуглу повучемо тежишне линије које одговарају крацима, затим ма коју паралелу основици. Доказати да је отсечак између једног крака и једне тежишне линије једнак отсечку између другог крака и друге тежишне линије.

53) Ма из које тачке основице равнокраког троугла повуку се паралеле његовим крацима. Доказати да тако добијени паралелограм има сталан обим.

54) Ма из које тачке основице равнокраког троугла повуку се дужи до кракова тако да с њима образују једнаке углове. Доказати да је збир тих дужи сталан.

55) На основици BC равнокраког троугла BAC подигне се ма у којој њеној тачки нормала PMN, која сече стране BA, CA у тачкама M и N. Доказати да је збир $PM + PN$ сталан.

56) У равностраном троуглу ABC на страни BC узета је тачка M и из ње су повучене паралеле: $MP \parallel BA$ до пресека P са страном AC, и $MQ \parallel CA$ до пресека Q са страном BA. Доказати да је $AP + AQ = BC$.

57) Дат је равнострани троугао ABC. Ако се његове стране продуже преко темена за једнаке дужи и споје се крајње тачке тих дужи, доказати да је тако добијени троугао $A_1B_1C_1$ равностран.

58) Ма за коју тачку у равностраном троуглу збир растојања од све три стране сталан је и једнак висини троугла.

59) Дат је равностран троугао ABC и тачка O унутар троугла; из тачке O повучемо паралеле странама троугла које секу друге његове стране, и то страну наспрам темена A у тачки A_1, страну наспрам темена B у тачки B_1 и страну наспрам темена C у тачки C_1. Доказати да је $OA_1 + OB_1 + OC_1$ једнако страни троугла ABC.

60) Дат је равнострани троугао ABC; из тачке O унутар троугла спусте се нормале OA_1, OB_1, OC_1 на његове стране BC, AC, AB. Доказати да је збир $AC_1 + BA_1 + CB_1$ сталан ма за коју тачку O унутар троугла.

3) Правоугли троугао

61) Један од два правоугла троугла има мање катете од другога. Доказати да је хипотенуза првога мања од хипотенузе другога.

62) Симетрале катета правоуглог троугла секу се на хипотенузи.

63) Симетрале катета правоуглог троугла и права која спаја њихову тачку пресека са теменом правог угла деле правоугли троугао на четири подударна троугла.

64) Ако је један од оштрих углова правоуглог троугла једнак $\frac{1}{3}$ правог угла, страна наспрам тог угла је половина хипотенузе.

65) Дат је троугао ABC са правим углом код темена A. Продужимо BA преко A тако да је $AB_1 = AC$, и CA преко A тако да је $AC_1 = AB$. Доказати да продужак висине AD троугла ABC пролази кроз средину дужи B_1C_1.

66) Троугао је правоугли ако је један од оштрих углова на основици једнак $\frac{1}{3}$ правог угла и ако висина троугла дели основицу, тако да је отсечак ближи темену датог угла једнак $\frac{3}{4}$ основице.

67) У правоуглом троуглу тежишна линија и висина које полазе из темена правог угла образују угао једнак разлици оштрих углова.

68) У правоуглом троуглу бисектриса правог угла је бисектриса угла који образују тежишна линија и висина које полазе из темена правог угла.

69) Дате су две паралеле; из неке тачке A једне од њих спусти се нормала AC на другу и повуче коса дуж AB. Ако повучемо трансверзалу BED, тако да је $ED = 2AB$, доказати да је угао EBC једнак $\frac{1}{3}$ угла ABC.

70) Ако продужимо хипотенузу правоуглог троугла преко њених крајева за дужину ближе катете, дужи које спајају нове крајеве са теменом правог угла образују угао од 135^0. Доказати.

71) Над катетама правоуглог троугла ABC са правим углом код темена C нацртана су два квадрата. Из теменâ квадратâ D и G супротних темену C повучене су на продужену хипотенузу нормале DH и GK. Доказати:

а) да се дати троугао може саставити из троуглова BDH и AGK;

б) да је збир нормала DH и GK једнак хипотенузи.

72) Ако су на хипотенузи равнокрако-правоуглог троугла ABC $(AB = AC)$ узете две тачке E и D, тако да је $BE = BA$ и $CD = CA$, тада је $\sphericalangle DAE = 45^0$. Доказати.

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

73) У троуглу две стране имају дужине 4 cm и 8 cm. Шта се може рећи за дужину треће стране?

74) У троуглу је једна страна 1,9 m а друга 0,7 m. Одредити трећу страну ако се зна да је њена мера изражена у целим бројевима.

75) У троуглу ABC повучена је од темена A до стране BC дуж AD, тако да је угао CAD једнак углу ACD. Обим троугла ABC је 37 m, а обим троугла ABD је 24 m. Наћи страну AC.

76) Дат је троугао ABC; наћи на страни AB тачку D, па да, кад се кроз њу повуче паралела DE страни BC, тачка E, у којој та паралела сече страну AC, лежи тако да је $DE = CE$.

77) Из једног темена троугла повучена је симетрала угла; она са супротном страном захвата угао од 110^0 а са једном суседном страном је једнака. Колики су углови у троуглу?

78) У троуглу ABC симетрале углова A и C секу се у тачки M. Наћи угао ABC ако је он половина угла AMC.

79) Једна страна троугла продужена је преко оба темена и тако добијени спољашњи углови износе 94^0 и 126^0. Наћи угао у троуглу који лежи према продуженој страни.

80) У троуглу ABC угао B износи 74^0 а угао C 62^0. Ако се стране AB и AC продуже преко темена B и C и повуку симетрале спољашњих углова, колики је угао између симетрала?

81) Висина и симетрала угла, повучене из једног темена троугла, граде угао од $23^0\ 11'$. Мањи од она друга два угла у троуглу износи $41^0\ 15'$. Наћи трећи угао.

82) У равнокраком троуглу две стране су 3 cm и 8 cm. Колика је трећа страна?

83) Над краком равнокраког троугла конструисан је равностран троугао; његов обим је 45 m а обим равнокраког троугла 40 m. Наћи основицу равнокраког троугла.

84) У равнокраком троуглу једна страна је 25 m а друга 10 m. Која је од њих двеју основица?

85) Висина равностраног троугла је 6 dm; наћи њену пројекцију на другој висини.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1) Ма који троугао

86) Конструисати троугао помоћу средина његових страна.

87) Конструисати троугао ABC помоћу углова β и γ и збира страна $b+c=k$.

88) Конструисати троугао ABC помоћу два угла и обима.

89) Конструисати троугао помоћу разлике између две стране, треће стране и угла наспрам те треће стране.

90) Дата је страна a, угао α наспрам те стране и збир k друге две стране. Конструисати троугао.

91) Конструисати троугао кад је дата основица, разлика углова на основици и

а) разлика других двеју страна,

б) збир других двеју страна.

92) Конструисати троугао ABC кад су дате две стране AB, AC и висина која полази из темена B.

93) Конструисати троугао ABC помоћу две стране AB, AC и висине која полази из темена A.

94) Конструисати троугао ABC помоћу стране b и висина h_a и h_b.

95) Конструисати троугао ABC помоћу угла α и висина које полазе из темена B и C.

96) Дати су висина, обим и угао на основици. Конструисати троугао.

97) Конструисати троугао помоћу стране b, збира остале две стране $(a+c)$ и висине h_c.

98) Конструисати троугао помоћу разлике две стране $(b-c)$, висине h_b и угла α.

99) Конструисати троугао ABC помоћу стране BC и тежишних линија које полазе из темена B и C

100) Конструисати троугао ABC помоћу стране BC и тежишних линија које полазе из темена A и B.

101) Конструисати троугао ABC помоћу две стране AB, AC и тежишне линије која полази из темена A.

102) Конструисати троугао ABC помоћу три тежишне линије.

103) Конструисати троугао помоћу стране c, висине h_a и тежишне линије t_b.

104) Конструисати троугао ABC помоћу стране BC, висине и тежишне линије које полазе из темена A.

105) Конструисати троугао ABC помоћу стране BC, висине и тежишне линије које полазе из темена B.

106) Конструисати троугао ABC помоћу стране BC, тежишне линије која полази из B и висине која полази из A.

107) Конструисати троугао ABC помоћу стране BC, тежишне линије која полази из A и висине која полази из B.

108) Конструисати троугао ABC помоћу стране c, висине h_a и бисектрисе s_α.

109) Конструисати троугао ABC помоћу стране b, бисектрисе s_α и угла α.

110) Конструисати троугао ABC помоћу бисектрисе s_β и углова α и γ.

111) Конструисати троугао кад су позната подножја висина.

112) Конструисати троугао кад се знају две стране AB, BC и тежишна линија AD.

113) Конструисати троугао помоћу стране AB, разлике углова који леже на овој страни (δ) и разлике других двеју страна (d).

114) Конструисати троугао кад се знају:

а) две стране AB и BC, и висина која полази из темена A;

б) две стране AB и AC, и висина која полази из темена A.

115) Конструисати троугао кад се знају:

а) страна BC, висина која полази из темена B и угао B;

б) висине које полазе из темена A и C, и угао B.

116) Конструисати троугао кад се знају:

а) страна BC, угао B и тежишна линија AD;

б) страна BC, угао B и тежишна линија CF.

117) Конструисати троугао кад се знају: једна страна, налегли угао и збир или разлика других двеју страна.

118) Конструисати троугао помоћу једне стране, разлике на њој налеглих углова (φ) и збира других двеју страна (s).

119) Дате су две праве и једна тачка. Кроз дату тачку повући праву тако да је њен део између датих правих преполовљен датом тачком.

120) Дат је троугао ABC. Пресећи стране AB и BC правом DE, тако да отсечак DE има одређену дужину c и да отсечци AD и BE које она гради на странама AB и BC буду међу собом једнаки.

2) Равнокраки троугао

121) На једном краку угла A дата је тачка M. Наћи на истом краку тачку која је подједнако удаљена од дате тачке и од другог крака угла A.

122) Дат је збир (s) крака b и висине h_a равнокраког троугла и основица a. Конструисати троугао.

123) Конструисати равнокраки троугао кад се зна његов обим и висина која полази из врха.

124) Конструисати равнокраки троугао помоћу његових висина.

125) Конструисати равнокраки троугао помоћу угла β на основици и његове симетрале s_β.

126) Конструисати равнокраки троугао помоћу висине h_a, која одговара основици, и тежишне линије t_b, која полази из темена B.

127) Дата је разлика (d) крака b и висине h_a равнокраког троугла и основица a. Конструисати троугао.

128) Конструисати равнокраки троугао помоћу крака и висине која му одговара.

129) Подели дуж на три једнака дела користећи особине равностраног троугла.

3) Правоугли троугао

130) Конструисати правоугли троугао кад је позната једна катета и збир хипотенузе и друге катете.

131) Конструисати правоугли троугао помоћу једног оштрог угла и збира или разлике катета.

132) Конструисати правоугли троугао помоћу једног оштрог угла и збира страна које га захватају.

133) Конструисати правоугли троугао помоћу хипотенузе и збира катета.

134) Конструисати правоугли троугао помоћу разлике између хипотенузе и једне катете и помоћу оштрог угла на тој катети.

135) Конструисати правоугли троугао помоћу разлике између хипотенузе и једне катете и помоћу друге катете.

136) Конструисати правоугли троугао помоћу хипотенузе и разлике катета.

137) Конструисати правоугли троугао помоћу збира катете и висине која одговара хипотенузи и помоћу једног оштрог угла.

138) Конструисати правоугли троугао помоћу тежишне линије и висине које одговарају хипотенузи.

139) Конструисати правоугли троугао помоћу катете и тежишне линије која јој одговара.

140) Конструисати правоугли троугао помоћу пројекције p катете AB на хипотенузи и висине h која одговара хипотенузи.

§ 3. Четвороугао

а) ТЕОРЕМЕ

1) Паралелограм

1) У сваком неправоуглом паралелограму дијагонала наспрам тупих углова већа је од друге дијагонале.

2) Дијагонале два паралелограма од којих је један уписан у другом пролазе кроз исту тачку

3) Кад се две узастопне стране паралелограма продуже преко незаједничких крајњих тачака за сопствену дужину, крајње тачке тих продужака лежаће заједно са супротним теменом на једној правој.

4) Ако се ма из које тачке на симетрали угла повуку паралеле са крацима до пресека са њима, ове паралеле су једнаке, а добијени четвороугао је ромб. Доказати.

5) Кад се споје два супротна темена паралелограма са срединама наспрамних страна, једна дијагонала паралелограма подељена је на три једнака дела.

6) Почев од сваког темена квадрата, идући по контури у истом смеру, на свакој страни узме се иста величина. Доказати да је слика која се добије спајањем по две суседне тачке на контури квадрат.

7) Почев од два супротна темена ромба пренесе се на сваку страну иста дата величина. Слика која се добије спајањем по две суседне тачке је правоугаоник.

8) Почев од два супротна темена квадрата узме се на свакој страни дата дуж. Слика која се добије спајањем по две тако добијене суседне тачке јесте правоугаоник сталног обима.

9) Дат је равнокраки троугао ABC са основом BC. На краку AC узме се ма која тачка D, продужи AB за $BE = CD$ и споји E са D; права ED сече BC у тачки F. Доказати да је F средина дужи ED.

10) Подножја нормала спуштених из тачке пресека дијагонала ромба на његове стране јесу темена правоугаоника.

11) Дуж која спаја средине двеју страна троугла паралелна је са трећом.

12) Доказати да се дужи које спајају средине супротних страна неког четвороугла, узајамно полове.

13) Доказати да је у троуглу ABC тежишна линија повучена из A већа, једнака или мања од $\frac{BC}{2}$, према томе да ли је угао A оштар, прав или туп.

14) Бисектрисе унутрашњих углова правоугаоника секу се тако да образују квадрат.

15) а) Бисектрисе унутрашњих углова паралелограма образују правоугаоник чије су дијагонале паралелне странама паралелограма и једнаке разлици суседних страна. б) Бисектрисе углова правоугаоника образују квадрат.

16) Бисектрисе спољашњих углова паралелограма секу се тако да образују правоугаоник чији је збир дијагонала једнак збиру страна паралелограма.

17) Ако повучемо паралеле на једнаком растојању од једне дијагонале правоугаоника и спојимо међу собом тачке пресека тих паралела са странама правоугаоника, добијамо уписани паралелограм чији је обим једнак збиру дијагонала правоугаоника.

18) Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код A; повуче се висина AD и D споји са срединама E и F катета AB и AC. Доказати да је $\sphericalangle EDF = 90^0$.

19) Кроз једно теме паралелограма повуче се ма која права p; из сваког од преостала три темена спусти се нормала на повучену праву. Доказати да је нормала која полази из средњег темена једнака збиру или разлици крајњих нормала.

20) Пројекција дијагонале паралелограма ма на којој правој једнака је збиру пројекција две суседне стране на истој правој.

21) Збир или разлика нормала спуштених из неке дате тачке на две суседне стране ромба једнак је збиру или разлици нормала спуштених из исте тачке на друге две стране.

22) Нека је у троуглу ABC тачка O пресек симетрала страна; H ортоцентар; A_1, B_1, C_1 средине страна BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2 средине отсечака AH, BH, CH. Доказати да је $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$ и да се четири отсечка $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, OH$ секу у тачки која је њихова заједничка средина.

2) Ма који четвороугао

23) У сваком трапезу дуж која спаја средине кракова паралелна је основицама и једнака њиховом полузбиру; та дуж пролази исто тако, кроз средине дијагонала, и отсечак на тој дужи ограничен дијагоналама једнак је полуразлици основица.

24) Дужи које спајају средине супротних страна равнокраког трапеза стоје једна на другој нормално.

25) Доказати да је дуж која спаја средине основица равнокраког трапеза нормална на тим основицама.

26) Кад је мања основица трапеза једнака половини веће, средња линија је подељена дијагоналама на три једнака дела.

27) Кад је мања основица трапеза једнака збиру кракова, бисектрисе унутрашњих углова на већој основици секу се на мањој основици.

28) Кад је већа основица трапеза једнака збиру кракова, бисектрисе углова који леже на мањој основици секу се на већој основици.

29) Доказати да су два трапеза подударна кад су им једнаке основице и дијагонале.

30) а) Два равнокрака трапеза подударна су кад су им једнаке основице и висине. б) Симетрале страна равнокраког трапеза секу се у истој тачки.

31) У сваком конвексном четвороуглу збир дијагонала је већи од збира двеју наспрамних страна.

32) У конвексном четвороуглу збир дијагонала се налази између обима и полуобима тога четвороугла.

33) Средине страна четвороугла су темена паралелограма. Показати у којим случајевима је тај паралелограм правоугаоник, ромб, квадрат.

34) Површина паралелограма који постаје кад спојимо средине страна ма којег четвороугла једнака је половини површине тога четвороугла.

35) Ма у коме четвороуглу дужи које спајају средине наспрамних страна секу се у средини дужи која спаја средине дијагонала.

36) Збир растојања четири темена четвороугла од неке дате праве једнак је четвоструком растојању пресека дужи које спајају средине наспрамних страна четвороугла од исте праве.

37) Доказати да је у конвексном четвороуглу збир два спољашња угла једнак збиру два унутрашња угла који им нису суседни.

38) Доказати да је у сваком конвексном четвороуглу у коме нису сви углови једнаки: а) бар један од углова оштар; б) бар један од углова туп.

39) Угао између бисектриса два узастопна унутрашња угла четвороугла једнак је полузбиру друга два угла тога четвороугла; угао између бисектриса спољашњих углова два узастопна угла једнак је полузбиру та два унутрашња угла.

40) Оштар угао између бисектриса супротних унутрашњих углова четвороугла једнак је полуразлици друга два угла.

41) Угао између бисектриса два угла који образују супротне стране четвороугла једнак је полузбиру два супротна угла четвороугла.

42) Ако један четвороугао има две супротне стране једнаке,

а) ове стране имају једнак нагиб према дужи која спаја средине других двеју страна;

б) пројекције ових страна на поменутој дужи једнаке су самој дужи.

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

43) Четвороугао је једном дијагоналом подељен на два троугла; њихови обими износе 25 m и 27 m а обим четвороугла 32 m. Нађи дужину повучене дијагонале.

44) У паралелограму $ABCD$ повучена је симетрала угла A, која сече страну DC у тачки E. Одредити отсечке DE и EC ако је $AD = 9$ cm а $AB = 15$ cm.

45) Стране паралелограма износе 8 cm и 3 cm; симетрале углова на већој страни деле супротну страну на три дела. Нађи ове делове.

46) Кроз пресек дијагонала паралелограма $ABCD$ повучена права сече стране BC и AD, тако да је $BE = 2$ m, $AF = 2{,}8$ m. Нађи стране AD и BC.

47) Висина паралелограма $ABCD$ повучена из темена D полови страну AB. Нађи дијагоналу BD и стране паралелограма ако је обим паралелограма 3,8 m и ако је он за 1 m већи од обима троугла ABD.

48) Из тачке M на средини стране BC правоугаоника $ABCD$ повучене су дужи MA и MD. Ако ове две дужи стоје једна на другој нормално, а обим правоугаоника износи 24 m, колике су му стране?

49) Обим ромба је 8 cm, висина 1 cm. Нађи туп угао ромба?

50) У трапезу $ABCD$ дијагонала AC нормална је на страни BC и полови угао DAB; угао $ABC = 60^0$, обим трапеза је 2 m. Нађи страну AB.

51) У правоуглом трапезу $ABCD$ оштар угао $ADC = 45^0$, већа паралелна страна $AD = a$. Из средине E стране CD повучена је на њу нормала која сече продужену страну BA у тачки F. Нађи дужину BF.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1) Паралелограм

52) Конструисати правоугаоник ако је дата дијагонала и разлика димензија.

53) Конструисати правоугаоник кад се знају:
- а) обим и угао између дијагонала;
- б) угао између дијагонала и разлика суседних страна;
- в) обим и дијагонала.

54) Конструисати ромб ако је дат збир дијагонала и већи угао.

55) Конструисати ромб ако се зна страна и збир или разлика дијагонала.

56) Конструисати ромб $ABCD$ помоћу дијагонале $AC = d$ и висине h која одговара страни AB.

57) Конструисати ромб ако је дата разлика дијагонала и мањи угао.

58) Конструисати квадрат кад је дато: а) дијагонала; б) збир дијагонале и стране; в) разлика дијагонале и стране.

59) У један квадрат уписати други квадрат чија је страна a дата. Између којих граница се може налазити ова страна?

60) У дати паралелограм уписати квадрат.

61) Конструисати ромбоид $ABCD$ кад је дата основица $AB = a$, дијагонала $AC = d$ и висина h.

62) Конструисати ромбоид $ABCD$ кад су дате дијагонале $AC = d_1$, $BD = d_2$ и висина h која одговара страни AB.

63) Конструисати паралелограм кад су познате две стране и разлика углова на једној од њих.

64) Конструисати паралелограм кад су познате стране и кад се зна да висина из темена тупог угла полови супротну страну.

65) Из тачке O повучене су три полуправе OA, OB, OC. Нацртати једну дуж чије ће крајње тачке лежати на OA и OC а коју ће половити полуправа OB.

66) Конструисати троугао ABC помоћу стране BC, тежишне линије која полази из B и висине која полази из A.

67) Кроз једну тачку на хипотенузи повући паралеле са катетама тако да на тај начин добијени правоугаоник испуњава ове услове:

а) да његов обим има одређену дужину $2s$;

б) да разлика његових суседних страна има одређену дужину d;

в) да тај правоугаоник буде квадрат;

г) да његове дијагонале буду минималне.

68) Конструисати паралелограм $ABCD$ кад су дате стране и кад се зна да је $AE=3\,EB$, где је E подножје нормале спуштене из пресека дијагонала на AB.

2) Ма који четвороугао

69) Конструисати трапез кад је дата разлика основица, краци и средња линија.

70) Конструисати трапез помоћу све четири стране.

71) Конструисати трапез помоћу основица и дијагонала.

72) Конструисати трапез $ABCD$ помоћу основица AB и CD, крака BC и угла α.

73) Конструисати равнокраки трапез $ABCD$ помоћу основица AB и CD и дијагонале AC.

74) Конструисати равнокраки трапез $ABCD$ помоћу мање основице CD, дијагонале AC и висине CF.

75) Конструисати трапез кад је дат збир основица, висина и углови на већој основици.

76) У трапезу повући паралелу са основицама, тако да њен део између дијагонала има одређену дужину l. Дискутовати о проблему.

77) Конструисати делтоид ако је дата она дијагонала која је симетрала делтоида, угао између ње и стране и збир две неједнаке стране.

78) Конструисати конвексан четвороугао помоћу све четири стране и угла који чине две наспрамне стране.

79) Конструисати четвороугао кад су дате средине трију страна и једна дуж паралелна и једнака четвртој страни.

80) Конструисати четвороугао кад се знају све четири стране и дуж која спаја средине двеју супротних страна.

81) Конструисати четвороугао $ABCD$ кад су дате обе дијагонале, страна AB и углови B и C.

82) Конструисати петоугао кад су познате средине страна.

§ 4. Геометриска места

1) Наћи на датој правој тачку која је подједнако удаљена од две дате тачке.

2) Наћи на датој правој тачку која је подједнако удаљена од две праве које се секу.

3) Дат је угао и у њему тачка M. Наћи такву тачку која би од кракова угла била удаљена подједнако, а од тачке M била удаљена за дужину d.

4) Дат је угао A и тачке B и C, једна на једном а друга на другом краку угла. Наћи тачку M која би била подједнако удаљена од кракова угла, а уз то би било $MC=MB$.

5) Два темена троугла клизе по двема датим паралелама. Шта је геометриско место трећег темена?

6) Наћи геометриско место тежишта троуглова који имају заједничку основу и исту висину.

7) Наћи геометриско место пресека дијагонала паралелограма који имају заједничку основу и исту висину.

8) Нека је дат троугао ABC; узмимо на страни BC ма коју тачку M, и кроз ту тачку повуцимо дуж MN паралелно страни AB, а дуж MP паралелно страни AC, тако да образују паралелограм $MNAP$. Наћи геометриско место које описује тачка O пресека дијагонала тога паралелограма кад се тачка M помера по страни BC.

9) Наћи геометриско место тачака чији збир растојања од две паралелне праве има дату дужину l.

10) Нека је дат угао ROS; на крацима тога угла узму се дужи OA и OB, тако да збир $OA+OB$ има дату дужину l, и нека се конструише паралелограм $OACB$. Наћи геометриско место темена C паралелограма.

11) Решити исти задатак кад је разлика $OA-OB$ стална.

12) Наћи геометриско место тачака чији збир растојања од две праве које се секу има дату дужину l.

13) Наћи геометриско место тачака чија разлика растојања од две праве које се секу има дату дужину l.

14) Нека су дате утврђене тачке A, B и права p нормална на правој AB; на правој p узме се ма која тачка C; из тачке A повуче се нормала AA_1 на BC, а из тачке B нормала BB_1 на AC. Наћи геометриско место које описује тачка P пресека правих AA_1 и BB_1 кад се тачка C помера по правој p.

15) Дата је права BC и тачка A ван ње. По правој BC клизи тачка X. Наћи геометриско место средина дужи AX.

16) Железничка пруга пролази у правој линији PP_1 на извесном растојању од села A и B. На овој прузи треба поставити железничку станицу S на подједнаком растојању од оба села. Одредити положај станице S.

17) Једна река, чији је ток праволиниски у посматраном делу, протиче између два места неједнако удаљена од ње. Где треба саградити мост, у правцу нормалном на ток реке, да би оба места била подједнако удаљена од прилаза мосту?

§ 5. Максима и минима

1) Дуж $PQ=l$ клизи по датој правој MN; тачке A и B налазе се са исте стране праве; поставити дуж PQ тако да изломљена линија $AP+PQ+QB$ буде минимум.

2) У дати троугао ABC уписати троугао најмањег обима.

3) Од свих троуглова ABC који имају исту основицу и једнаку висину наћи онај чији је збир других двеју страна минимум.

4) Од свих паралелограма који имају једну заједничку дијагоналу и чија се друга темена налазе на правима паралелним тој дијагонали наћи онај чији је обим минимум.

5) Од свих паралелограма који имају исту основицу и једнаку висину наћи онај чији је обим минимум.

6) Од свих троуглова ABC који имају заједничко теме A и чија су друга темена на крацима датог оштрог угла O наћи онај чији је обим минимум.

7) Дат је угао POQ и дате су две тачке A и B унутар угла. Наћи на крацима OP, OQ две тачке M и N, тако да збир $AM+MN+NB$ буде минимум.

8) Нека је дат троугао ABC. Наћи тачку на BC за коју је збир растојања од две друге стране троугла минимум.

9) Дат је многоугао и две праве p, q. Наћи тачку на контури тога многоугла за коју је збир растојања од те две праве максимум и тачку за коју је он минимум.

10) Од свих троуглова који имају један заједнички угао и чији је збир страна које образују тај угао сталан наћи онај који има најмању основицу.

11) Дат је угао A по величини и по положају и нека тачка D на бисектриси тога угла. Кроз ту тачку повуче се права BDC која сече краке угла. Наћи троугао чији је обим минимум.

12) Ако се две стране датога троугла продуже изнад основице, тако да је збир продужака једнак тој основици, наћи у ком случају је дуж која спаја крајеве продужака минимум.

13) Из неке тачке D хипотенузе BC правоуглог троугла ABC спусте се нормале DE, DF на краке правога угла. Наћи у ком случају је дуж EF која спаја подножја нормала минимум.

14) Кроз неку тачку E, узету на контури ромба, повуку се паралеле дијагоналама те слике и добија се уписани правоугаоник. Наћи за који је положај тачке E збир дијагонала правоугаоника минимум.

15) Наћи за који положај неке тачке E, узете на контури ромба, уписани правоугаоник чије је једно теме та тачка има обим максимум, а за који други положај је обим минимум.

16) Права p повучена је кроз теме C троугла ABC; из темена A и B спусте се нормале на дату праву. Наћи положај који треба дати троуглу, обрћући га у његовој равни око темена A, па да збир нормала буде максимум.

17) Почев од сваког темена квадрата дуж његове контуре непрекидно се узима на свакој страни дата дуж и споје се две по две тако добијене тачке. Наћи квадрат минималног обима.

18) Две тачке A и B налазе се са исте стране неке праве p. Наћи на тој правој тачку чији је збир растојања од тачака A и B минимум.

19) Две тачке A и B налазе се са разних страна неке праве p. Наћи на тој правој тачку чија је разлика растојања од тачака A и B максимум.

20) Две тачке A и B леже са разних страна праве p; у средини дужи AB подигне се нормала q на ту дуж; свака тачка P праве q има веће растојање од тачке A него од праве p. Наћи где треба узети ту тачку P на правој q, па да разлика њених растојања од тачке A и праве p буде минимум.

§ 6. Круг

а) ТЕОРЕМЕ

1) Пресек круга и праве. Лукови и тетиве.

1) Сви кругови који пролазе кроз једну сталну тачку и имају средишта на једној датој правој, пролазе још кроз једну сталну тачку.

2) Из тачке A ван круга са центром у O повуче се сечица AC чији је спољашњи део AC једнак полупречнику и повуче се пречник AOB. Доказати да је $\sphericalangle DOB = 3 \sphericalangle COA$.

3) Дати су круг, пречник AB и на том пречнику или на његовом продушку нека тачка C; тачка C споји се ма са којом тачком M на периферији круга. Доказати да је CM између CA и CB.

4) Две једнаке тетиве у кругу једнако су нагнуте према пречнику који пролази кроз њихов пресек. Доказати.

5) Дат је полукруг пречника AB и на том пречнику две тачке C и D на једнаком растојању од центра O; кроз C и D повуку се паралеле које секу кружну линију у тачкама E и F. Доказати да је тетива EF нормална на тим паралелама.

6) Ако су две тетиве круга једнаке, и ако их продужимо до њиховог пресека (ако постоји), отсечци између тога пресека и крајњих тачака тетива једнаки су међу собом. Доказати.

7) Од свих правоугаоника уписаних у датом кругу посматрајмо оне чија једна страна или њен продужак пролази кроз неку дату тачку P. Доказати да и наспрамна страна исто тако пролази кроз неку утврђену тачку.

8) Ако се тетива круга обрће око неке утврђене тачке, па се кроз крајње тачке те тетиве повуку тетиве паралелно датој правој, права која спаја крајње тачке тих паралелних тетива пролази увек кроз исту тачку. Доказати.

9) Највећа и најмања тетива које се могу повући кроз неку тачку P у кругу нормалне су једна на другој и једна од њих је пречник тога круга. Доказати.

10) Ако се два круга секу, па се из сваког центра спусти нормала на сечицу која пролази кроз једну тачку њиховог пресека, растојање између тих нормала једнако је полузбиру или полуразлици тетива које отсецају кругови на тој сечици. Доказати.

11) Кад се из крајњих тачака пречника једнога круга спусте нормале ма на коју сечицу, делови те сечице између подножја нормала и пресека сечице са кругом једнаки су.

12) PQ је стална тетива, AB је ма који пречник истога круга. Доказати да је збир или разлика нормала спуштених из A и B на ту тетиву сталан, тј. исти ма за који положај пречника AB.

2) Тангенте круга

13) Из једне тачке ван круга повучене су дирке на круг. Доказати да је угао између дирки двапут већи од угла између додирног полупречника и додирне тетиве.

14) Спољашње тангенте t_1 и t_2, заједничке круговима O_1 и O_2, секу се на централи, а исто тако и унутрашње тангенте t_3 и t_4. Доказати.

15) Из података у зад. 14 доказати:

а) да су додирне тетиве AC, BD, EG, FH паралелне;

б) да су отсечци AB, CD на тангентама t_1, t_2 једнаки међу собом; исто тако отсечци EF, GH на тангентама t_3, t_4, а исто тако и отсечци на сечицама AD, BC.

16) Дате су две праве p и q које се секу и тачка A на правој p. Доказати да постоје два круга који додирују праву p у тачки A и праву q.

17) Дат је круг са центром у O, пречник AB, тангенте у A и B и трећа произвољна тангента која сече прве две у C и D. Доказати да је угао COD прав.

18) На тангенти у тачки A круга са центром у O узму се две тачке B и C, из којих се повуку тангенте BD и CE. Доказати да су углови BOC DAE једнаки или суплементни.

19) Дата је дуж AB, њена средина O и нормале p, q повучене на ту дуж у њеним крајњим тачкама A и B. Из O повучемо две полуправе које чине прав угао: оне секу праве p и q у тачкама C и D. Доказати да је дуж CD, која спаја пресеке C и D, тангента круга пречника AB.

20) Дат је круг са центром у O и тангенте AP, AQ тога круга у тачкама P и Q; нека је M произвољна тачка на мањем луку између P и Q и нека је кроз ту тачку повучена тангента; она сече AP у тачки B и AQ у тачки C. Доказати:

а) да обим троугла ABC остаје увек једнак $2AP$;

б) да угао BOC остаје једнак половини угла POQ.

21) Дати су круг са центром у O и тангенте AP, AQ тога круга у P и Q; нека је M тачка која се помера по већем луку између P и Q и нека је кроз ту тачку повучена тангента; она сече продушке дужи AP и AQ у B и C. Доказати да $AB+AC-BC$ и угао BOC остају стални.

3) Узајамни положаји два круга

22) Два круга секу се у тачкама A и B; нека су AC и AD пречници који пролазе кроз тачку A. Доказати да дуж CD пролази кроз тачку B и да је једнака двострукој централној раздаљини.

23) Ако два круга који се секу пресечемо правом паралелном заједничкој тетиви, тада су делови ове праве између обе кружне линије једнаки.

24) Ако се два круга једнаких полупречника секу, отсечак између унутрашњих или спољашњих лукова праве која пролази кроз пресек централе и заједничке тетиве та два круга преполовљен је тим пресеком. Доказати.

25) Дата су два круга са центрима у O и O_1, који се споља додирују у тачки A, и заједничка тангента, која их додирује у тачкама B и B_1. Доказати:

а) да је $\sphericalangle BAB_1 = 90^0$; б) да круг пречника BB_1 додирује централу OO_1 у тачки A; в) да круг пречника OO_1 додирује дуж BB_1 у њеној средини.

26) A и B су центри два круга који се додирују изнутра. Ако је P центар ма кога круга који већи круг додирује изнутра а мањи споља, покажи да је збир $AP+BP$ сталан.

27) Дата су два круга који се секу. Кад се у пресечној тачки повуче сечица ма у ком правцу и у пресечним тачкама ове сечице и кругова повуче по једна дирка на сваки круг, тада се те дирке секу под сталним углом.

28) Кад су два круга концентрична, па је пречник једнога двапут већи од пречника другога, тада угао који заклапају тангенте повучене ма из које тачке на периферији спољашњег круга на унутрашњи круг граде угао од 60^0.

29) Из дате тачке O повуку се нормале OA_1, OB_1, OC_1 на стране BC, AC, AB троугла ABC; круг који пролази кроз тачке A_1, B_1, C_1 сече те стране у друге три тачке A_2, B_2, C_2. Доказати да се нормале повучене на стране BC, AC, AB троугла у тачкама A_2, B_2, C_2 секу у једној тачки.

4) Мерење лукова и углова. Око круга описане и у кругу уписане слике.

30) Кад се у кругу O повуче пречник BC, око једне тачке M на кругу опише круг који додирује BC, и повуку на други круг дирке из B и C, те дирке су паралелне.

31) Круг описан над краком равнокраког троугла као над пречником пролази кроз средину основице.

32) Права повучена паралелно са основицом BC равнокраког троугла ABC сече краке у тачкама X и Y. Покажи да тачке B C, X, Y леже на кругу.

33) Доказати да кругови који имају за пречнике стране AB, AC троугла ABC имају своју другу заједничку тачку на страни BC.

34) Тетива која стоји нормално у средини полупречника дели кружну линију на два дела, од којих је један половина другог.

35) Дат је круг, тетива AB и тангента у тачки B; на ту тангенту пренесе се дуж $BC=AB$ и повуче се права CA, која сече кружну линију у некој тачки D. Доказати да је $DC=DB$.

36) Ако се ма из које тачке P на луку AB повуку дужи до крајњих тачака тетиве AB, покажи да је збир углова PAB и PBA сталан.

37) Два се круга секу у тачкама A и B. Кроз A су повучене две произвољне праве, од којих једна сече кругове у тачкама P и Q, а друга у тачкама X и Y. Покажи да су углови PBX и QBY једнаки.

38) Ако је P ма која тачка на луку AB, симетрала угла APB сече други лук AB увек у истој тачки.

39) Ако се два круга са центрима у O и O_1 секу, и ако се кроз једну тачку A њиховог пресека повуче сечица PQ, збир степена лукова AP и AQ који леже са исте стране те сечице исти је ма за коју другу сечицу што пролази кроз тачку A.

40) Ако се кроз једну тачку A пресека два круга повуче сечица PQ, дужи које спајају другу тачку B пресека са пресецима P и Q сечице и кругова образују угао који је једнак за сваку сечицу повучену кроз тачку A.

41) Две сечице BB_1 и CC_1 секу се у тачки A кружне линије. Доказати да угао BAC_1 има исти број степена као полузбир степена лукова AB, AC који одговарају тетивама AB и AC:

42) У датом кругу пречника AB повуче се тетива CD паралелно том пречнику. Доказати да је у троуглу ACD разлика двају углова прав угао.

43) Дат је троугао ABC; његове стране AB и AC су пречници кругова у којима се из B и C повуку две паралелне тетиве BB_1 и CC_1. Доказати да B_1C_1 пролази кроз теме A.

44) Ако један низ троуглова има једну страну заједничку а углове према тој страни једнаке, тада се симетрале тих углова секу у једној тачки.

45) ABC је троугао уписан у кругу. Из тачке E на средини лука BC повучен је пречник ED. Покажи да је $\sphericalangle DEA = \frac{1}{2}(\sphericalangle B - \sphericalangle C)$.

46) Ако се из крајњих тачака пречника спусте нормале на једну произвољну тангенту, те нормале су једнаке оним отсечцима пречника који се добијају кад се из додирне тачке спусти нормала на пречник.

47) Ако се из додирне тачке једне тангенте повуче једна тетива, а из средине једнога од два тако добијена лука спусте нормале на тангенту и тетиву, тада су те нормале једнаке.

48) Два се круга секу у тачкама A и B. Ако се ма из које тачке P на периферији једнога круга повуку праве кроз тачке A и B, покажи да оне отсецају на другом кругу лук сталне величине независан од положаја тачке P.

49) Кроз A, једну од пресечних тачака два једнака круга, повучене су две праве, од којих једна сече периферије кругова у тачкама P и Q а друга у тачкама X и Y. Покажи да су тетиве PX и QY једнаке.

50) Кроз пресечне тачке два круга повучене су две паралелне праве које секу сваки круг још у по две тачке. Дужи које спајају ове пресечне тачке свакога круга једнаке су међу собом

51) Права повучена кроз једну пресечну тачку A два једнака круга сече кругове у тачкама P и Q. Ако је друга пресечна тачка кругова B, покажи да је $BP=BQ$.

52) AB је заједничка тетива два круга, од којих један пролази кроз центар O другога круга. Докажи да AO полови угао између заједничке тетиве и тангенте повучене на први круг у тачки A.

53) Два се круга секу у тачкама A и B. Кроз ма коју тачку P на периферији једнога од њих повучене су праве PAC и PBD и секу други круг у тачкама C и D. Покажи да је CD паралелно са тангентом повученом у тачки P.

54) Дата су два круга O_1 и O_2. Круг описан над O_1O_2 као над пречником пролази кроз четири пресечне тачке унутрашњих и спољашњих заједничких тангената кругова O_1 и O_2.

55) Дата су два круга са центрима у O и O_1 и два паралелна полупречника OA и O_1A_1; права AA_1 сече круг O у некој другој тачки B. Доказати да тангенте CB, CA_1 тих кругова, од додирних тачака па до пресека C, имају једнаке дужине.

56) Дата су два круга једнаких полупречника, од којих један има центар на периферији другога; нека су A и B њихове заједничке тачке. Кроз тачку A повуче се произвољна права која сече та два круга у C и C_1. Доказати да је троугао BCC_1 равностран.

57) Тангенте у двема тачкама A и B круга са центром у O секу се у тачки C. Нормала повучена из A на CB сече OC у тачки D. Доказати да је дуж AD једнака полупречнику.

58) Дат је круг, тангенте AC, BC у његовим тачкама A, B, и пречник AD; AC се продужи за $CE = AC$. Доказати да су тачке D, B и E на једној правој.

59) На кружној линији, с једне и друге стране тачке A која је на тој линији, узму се два лука AB, AC мања од полукруга; тетива DE која спаја њихове средине сече тетиве AB, AC у F и G. Доказати да је $AF = AG$.

60) На кружној линији узму се два лука AB, AC од 120^0. Доказати да тетиве AB и AC деле тетиву DE, која спаја њихове средине, на три једнака дела.

61) Нека је AB лук на датом кругу, C његова средина, AD пречник, CE нормала на AD, F и G пресеци CD и CE са тетивом AB. Доказати да је $GA = GF = GC$.

62) Дата су два круга који се додирују изнутра у некој тачки A; ако се из друге крајње тачке B пречника AB спољашњег круга повуче сечица BC, тако да додирује унутрашњи круг у тачки C, права AC је бисектриса угла BAD. Доказати.

63) Два дата круга једнаких полупречника секу се у A и B. Из тачке A као центра опише се круг који сече оба прва. Доказати да тачка B и по две тачке пресека трећега круга са два прва леже на једној правој.

64) Два круга додирују се спојља. Ако се кроз њихову тачку додира D повуку сечице AA_1, BB_1, доказати да су тетиве AB и A_1B_1 паралелне.

65) Два круга додирују се споља. Ако се кроз њихову тачку додира D повуче сечица AA_1, тангенте у тачкама A и A_1 кругова паралелне су.

66) Бисектриса унутрашњег угла троугла уједно је бисектриса угла који образују пречник описаног круга и висина спуштена из темена посматраног угла. Доказати.

67) Нека су AA_1, BB_1 две висине троугла ABC; претпоставимо да A и B остају непомични и да се C помера тако да угао ACB остаје непромењен. Доказати да дужина дужи A_1B_1 остаје, исто тако, стална.

68) Три висине троугла су уједно бисектрисе углова троугла чија су темена подножја тих висина. Доказати.

69) а) Стране једног оштроуглог троугла су симетрале спољашњих углова оног троугла који се добија спајањем подножја висина у првом троуглу. б) Продужене стране тупоуглог троугла које захватају туп угао су симетрале одговарајућих углова оног троугла који се добија спајањем подножја висина.

70) Око троугла је описан круг. Доказати да су полупречници повучени до темена троугла нормални на дужима које спајају по два подножја висина троугла (Нагелова теорема.).

71) Два круга се секу у A и B; кроз A се повуку две произвољне сечице које секу први круг у тачкама C и D а други у C_1 и D_1. Доказати да се праве CD и C_1D_1 секу под сталним углом.

72) Дат је равнострани троугао ABC; око њега се опише круг. Ако је M ма која тачка лука обухваћеног крацима угла A, доказати да је $MA = MB + MC$.

73) Кад се ма која тачка на кругу споји са теменима уписаног равностраног троугла, тада је највећа од тих дужи једнака збиру других двеју.

74) Над сваком страном једног троугла конструисан је равностран троугао и треће теме сваког од ових троуглова спојено је са супротним теменом датог троугла. Доказати:

а) да су ове три дужи међу собом једнаке;

б) да се оне секу у једној тачки.

75) У троуглу основица и тежишна линија која јој одговара имају одређене дужине. Како се мења угао наспрам основице?

76) Да бисмо добили страну у кругу уписаног правилног троугла, довољно је да у средини полупречника повучемо нормалну тетиву. Доказати.

77) Доказати да је у правоуглом троуглу полупречник уписаног круга једнак половини разлике добијене одузимањем хипотенузе од збира катета.

78) Симетрале углова у кругу уписаног троугла ABC секу периферију круга у тачкама X, Y, Z. Покажи да су углови троугла XYZ: $90^0-\frac{1}{2}\sphericalangle A$, $90^0-\frac{1}{2}\sphericalangle B$, $90^0-\frac{1}{2}\sphericalangle C$.

79) Ако се споје додирне тачке круга уписаног у троуглу ABC, тада су углови тако добијеног троугла: $90^0-\frac{1}{2}\sphericalangle A$, $90^0-\frac{1}{2}\sphericalangle B$, $90^0-\frac{1}{2}\sphericalangle C$.

80) У троуглу је разлика двеју страна једнака разлици оних делова треће стране на које је она подељена додирном тачком уписаног круга.

81) Три круга чији су центри A, B, C додирују се споља, два и два, у тачкама D, E, F. Покажи да је круг уписан у троуглу ABC описан око троугла DEF.

82) На полукругу описаном над дужи AB узете су произвољне тачке D и E. Тетиве AD и BE, као и тетиве AE и BD (две од њих продужене), секу се у тачкама F и G. Покажи да је $FG \perp AB$.

83) Полупречник спољашњег додирног круга који додирује хипотенузу правоуглог троугла једнак је збиру полупречника друга два спољашња додирна круга и полупречника круга уписаног у томе троуглу.

84) Дат је троугао ABC; симетрале углова B и C секу кружну линију описану око тога троугла у тачкама B_1 и C_1. Доказати да је права B_1C_1 симетрала отсечка AU на симетрали угла A, ограниченог теменом A и пресеком U симетрала углова троугла ABC.

85) Дат је троугао ABC. Доказати да је полупречник OA круга описаног око тога троугла нормалан на правој B_1C_1 која спаја подножја висина што полазе из темена B и C.

86) Дат је троугао ABC; средине његових страна BC, CA, AB су A_1, B_1, C_1. Доказати да су кругови описани око троуглова AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 једнаки и да пролазе кроз центар круга описаног око троугла ABC.

87) Доказати да у правоуглом троуглу ABC теме A правог угла, подножје D висине AD и средине трију страна чине пет тачака исте кружне линије.

88) Дат је троугао ABC и нека тачка D на страни BC; конструишу се кругови који пролазе кроз тачку D и од којих један додирује страну AB у тачки B а други страну AC у тачки C. Доказати да друга тачка E пресека та два круга припада кружној линији описаној око троугла ABC.

89) Дат је круг и тачка P ван круга; из те тачке повуку се сечице PAA_1, PBB_1 на тај круг. Доказати да троугли PAB и PA_1B_1, PAB_1 и PA_1B имају једнаке одговарајуће углове.

90) Ако се продужи страна тетивног четвороугла, тако добијени спољашњи угао једнак је наспрамном унутрашњем углу.

91) Ако се стране AB и DC тетивног четвороугла $ABCD$ продужене секу у P, а продужене стране CB и DA секу у Q, и ако се кругови описани око троуглова PBC и QAB секу у R, покажи да тачке P, R и Q леже на једној правој.

92) P, Q и R су средине страна једног троугла а X је подножје једне висине. Покажи да су тачке P, Q R, X темена тетивног четвороугла.

93) Темена тангентног четвороугла спојена су са центром уписаног круга. Покажи да су од четири тако добијена угла са теменом у центру два неузастопна угла суплементна.

94) $ABCD$ је квадрат уписан у кругу а P је ма која тачка на луку AD. Покажи да је угао DPA трипут већи ма од ког угла добијеног спајањем тачке P са два узастопна темена квадрата.

95) Дијагонале четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Покажи да су центри кругова описаних око троуглова AOB, BOC, COD, DOA темена паралелограма.

96) У сваком тетивном четвороуглу бисектрисе углова које образују продушци наспрамних страна паралелне су бисектрисама углова које чине дијагонале. Доказати.

97) Кад се продуже наспрамне стране тетивног четвороугла и кад се повуку бисектрисе два угла који се тако добију, оне секу стране четвороугла у четири тачке које су темена ромба уписаног у датом четвороуглу. Доказати.

98) У сваком тетивном четвороуглу нормале спуштене из средине сваке стране на наспрамну страну секу се у истој тачки. Доказати.

99) Трапез $ABCD$ уписан је у кругу са центром у O; његове дијагонале AC, BD секу се у тачки E а продушци страна AD BC у тачки F. Доказати:

а) да четири тачке A, D, O, E леже на истој кружној линији;

б) да четири тачке A, C, O, F леже на истој кружној линији.

100) Ако је у четвороуглу збир једног пара наспрамних страна AB и CD једнак збиру другог пара наспрамних страна BC и AD, у тај четвороугао може се уписати круг.

101) Ако је у равнокраком трапезу средња линија једнака краку, трапез је тангентни четвороугао. Доказати.

102) Ако се у ромб упише круг и редом споје додирне тачке страна, добија се правоугаоник. Доказати.

103) Кроз теме A датог угла и кроз тачку B узету на бисектриси тога угла пролази произвољан круг; он сече кракове угла у тачкама C и D. Доказати да је збир отсечака AC и AD сталан.

104) На некој правој леже ове четири узастопне тачке: A, B, A_1, B_1; конструишу се кругови пречника AB, A_1B_1 и заједничка тангента тих кругова која их дира у тачкама D и D_1. Доказати да праве AD, BD, A_1D_1, B_1D_1 чине правоугаоник чија је једна дијагонала нормална на централи тих кругова.

105) Дат је равнокраки троугао ABC; на његовој страни AB узме се нека тачка B_1 и на страни AC нека тачка C_1 тако да је $B_1C_1 = B_1B + C_1C$. Доказати да круг који додирује стране AB и AC у B и C додирује и праву B_1C_1.

106) Кад се у правилном петоуглу две неузастопне стране продуже до свога пресека, оба продушка биће једнака дијагонали петоугла.

107) Нека су A,B,C,D,E темена правилног петоугла уписаног у кругу, а P ма која тачка лука AE. Доказати да је $PB+PD = PA+PC+PE$.

108) Ако је равнокрак троугао чији су углови на основици двапут већи од угла на врху уписан у кругу, тада је основица страна уписаног правилног петоугла.

109) а) Доказати да су супротне стране правилног шестоугла паралелне.

б) Доказати да је конвексни шестоугао $ABCDEF$, чије су све стране једнаке и углови A, B, C, E једнаки, правилан.

110) а) Ако су у једном шестоуглу дијагонале једнаке а по две стране паралелне, око таквог шестоугла може се описати круг.

б) Над сваком страном правилног шестоугла конструисан је спољна квадрат. Доказати да су она темена квадрата која се не поклапају са теменима шестоугла темена правилног дванаестоугла.

111) Тетива која одговара луку једнаком збиру трију лукова над којима су стране правилног десетоугла једнака је збиру стране десетоугла и полупречника описаног круга.

112) J и S су центри уписаног и описаног круга око троугла ABC. Ако A, J, S леже на истој правој, тада је $AB = AC$.

113) Ако су J и S центри уписаног и описаног круга око троугла ABC, покажи да је $\sphericalangle JAS = \frac{1}{2}(\sphericalangle B - \sphericalangle C)$.

114) Ако се J центар уписаног круга у троуглу ABC споји са теменом A и та дуж продужи до пресека са описаним кругом, покажи да је та пресечна тачка центар круга описаног око троугла BJC.

115) Око троугла ABC описан је круг. Ако је O ортоцентар тога троугла и AK пречник описаног круга, тада је $BOCK$ паралелограм.

116) Ортоцентар једног троугла спојен је са средином једне стране и та дуж продужена до пресека са описаним кругом. Доказати да се тај пресек налази у оној тачки у којој пречник повучен из темена супротног преполовљеној страни сече круг.

117) Кад се висина спуштена на једну страну троугла и дуж која спаја ортоцентар са средином исте стране продуже, оне секу описан круг око троугла у тачкама P и Q. Покажи да је PQ паралелно са поменутом страном.

118) Око троугла ABC опише се круг, повуку висине и продуже до пресека са кружном линијом; тако се добије шест лукова од којих су два по два једнаки. Растојање ортоцентра од једне дате стране једнако је продушку висине спуштене на ту страну до пресека са кружном линијом. Доказати.

119) Кругови описани око датога троугла и око троуглова чија су темена два темена првога троугла и његов ортоцентар једнаки су (Карно[1]). Доказати.

120) Дат је круг и један уписани троугао. Доказати да је тетива повучена нормално на једну страну троугла у једној њеној крајњој тачки једнака отсечку висине повучене из наспрамног темена, ограниченом тим теменом и ортоцентром.

121) Ако кроз темена троугла ABC пролазе три круга тако да се два по два секу на странама тога троугла у тачкама D, E, F, тада:

---

[1] Карно (Carnot) (1753 — 1823), француски генерал и државник;

а) та три круга пролазе кроз исту тачку O;

б) угао AOB једнак је збиру углова C и D, угао BOC једнак је углу A увећаном за угао E, угао COA једнак је углу B увећаном за угао F. Доказати.

122) На странама AB, BC, CA троугла узму се три произвољне тачке C_1, A_1, B_1; опишу се кругови AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 који секу у тачкама P, Q, R три пареле́ле што полазе из A, B, C. Доказати да тачке P, Q, R и тачка S, заједничка тим круговима, леже на једној правој.

123) Четири праве, од којих се две по две секу, образују четири троугла; кругови описани око сваког од тих троуглова пролазе кроз исту тачку P (Микелова тачка). Доказати.

124) Произвољна права сече стране датога троугла ABC, и то AB у C_1, BC (продужак) у A_1, CA у B_1; око троуглова AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C опишу се кругови; ти кругови секу се у истој тачки P круга описаног око датога троугла. Доказати.

125) У једном троуглу средине страна, подножја висина и средине дужи које спајају темена са ортоцентром леже на истој кружној линији. Доказати. (Круг девет тачака или Ојлеров[1] круг.)

126) Центар круга девет тачака лежи у средини дужи која спаја ортоцентар троугла са центром описаног круга.

127) Растојање сваке стране троугла од центра описаног круга око тога троугла једнако је половини растојања ортоцентра од темена наспрам посматране стране.

128) Ако се три круга опишу тако да сваки од њих пролази кроз два темена и ортоцентар једнога троугла, тада је троугао добијен спајањем њихових центара подударан са датим троуглом.

129) Четири центра кругова уписаних у троуглу споља и изнутра спојени су два по два. Доказати да средине тих шест дужи леже на кружној линији описаној око датог троугла.

---

[1] Ојлер (Euler) (1707 — 1783), швајцарски геометар, велики научник и писац многобројних дела из области математике, физике, астрономије, музике, филозофије и физиологије.

130) Збир полупречника спољашњих додирних кругова троугла једнак је полупречнику уписаног круга увећаном за четвороструку дужину полупречника описаног круга.

131) У сваком троуглу збир полупречника уписаног и описаног круга једнак је збиру нормала спуштених из центра описаног круга на сваку страну (Карно).

132) Ако се ма из које тачке кружне линије описане око троугла спусте нормале на његове стране, њихова подножја леже на једној правој (Симсонова[1] теорема). Доказати.

133) Ако се кроз неку тачку P на кружној линији повуку три тетиве и ако се на свакој од њих као пречнику опише кружна линија, те три кружне линије, које имају једну заједничку тачку, секу се у друге три тачке које леже на истој правој (Салмонова[2] теорема). Доказати.

134) Центар уписаног круга, центар описаног круга и пресек нормала спуштених из центара спољашњих додирних кругова на три стране неког троугла јесу три тачке које леже на истој правој; центар описаног круга има једнако растојање од обе друге тачке (Нагелова теорема).

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

135) У кругу полупречника r уписан је троугао; један од његових углова је 30^0. Колика је супротна страна троугла?

136) Ако се у тетивном четвороуглу $ABCD$ продуже стране AB и DC, оне се секу и граде угао од 36^0, а ако се продуже стране AD и BC, оне опет граде угао од 36^0. Наћи углове четвороугла.

137) У трапезу $ABCD$ страна $AB=BC=CD=a$; страна $AD=b>a$. Око трапеза је описан круг. Лук $AB=\alpha^0$. Наћи углове трапеза и углове између дијагонала.

138) У четвороуглу $ABCD$ углови B и D су прави. Дијагонала AC гради са страном AB угао од 40^0, а са страном AD угао од 30^0. Наћи оштар угао између дијагонала AC и BD.

---

[1] Симсон (Simson) (1687—1768), шкотски математичар.

[2] Салмон (Salmon) (1819—1904), ирски теолог, велики беседник и математичар.

139) У кругу O повучен је пречник AB, дирка BC и сечица ADC, тако да пресечна тачка D сечице и круга полови отсечак сечице AC. Наћи угао DAB.

140) Највећа раздаљина дате тачке од круга је a, а најмања b. Наћи полупречник круга (два случаја).

141) У кругу полупречника r повучена су два нормална пречника; произвољна тачка на кругу пројектована је на овим пречницима. Наћи раздаљину између пројекција ове тачке.

142) Дат је круг полупречника $r=1$ dm. Из тачке M повучене су две међусобно нормалне дирке MA и MB. Између додирних тачака A и B на луку AB узета је произвољна тачка C и у њој повучена дирка PQ која са диркама MA и MB гради троугао PQM. Наћи обим овог троугла.

143) У сегменту AMB уписан је трапез $ACDB$ чије су стране AC и CD једнаке а угао $CAB=51^0\ 20'$. Колико степени има лук AMB?

144) Угао на врху равнокраког троугла је 40^0. Један од кракова је пречник полукруга који је другим двема странама подељен на три дела. Наћи ове делове.

145) Страна равностраног троугла је пречник круга. На какве делове дели круг стране троугла а на какве делове деле стране полукруг?

146) AB и AC су једнаке тетиве; MAN је дирка. Лук BC, на коме не лежи тачка A, износи $213^0\ 42'$. Наћи углове MAB и NAC.

147) Тачка C је на продушку пречника AB; CD је дирка; $\sphericalangle ADC=114^0 25'$. Колики је лук BD?

148) Из крајњих тачака лука AB од m^0 повучене су тетиве AC и BD, тако да је угао DMC, добијен њиховим пресеком, једнак углу DNC са теменом на луку CD. Наћи лук CD.

149) Дата су два круга један у другом. Две непаралелне тетиве CAE и DBF већег круга додирују мањи круг у тачкама A и B. Нека је AMB мањи лук између додирних тачака, CND мањи и EPF већи лук између тетива. Колико степени има лук CND ако лук AMB има 154^0 а лук EPF 70^0?

150) Наћи угао између тангената ако је дуж која спаја пресек тангената са центром круга једнака пречнику.

151) Лук AB износи $40^\circ 24'$. На продушку полупречника OA узето је $AC = AB$ и тачка C спојена са тачком B. Наћи угао ACB.

152) Крак равнокраког троугла је 2 cm, угао на врху 120°. Наћи пречник описаног круга.

153) Један оштар угао правоуглог троугла је 25°. Под којим се углом види свака катета из центра описаног круга?

154) Страна ромба је 8 cm, оштар угао 30°. Наћи полупречник уписаног круга.

155) Око круга је описан равнокраки трапез чији је један угао 30°. Средња линија је 1 m. Наћи полупречник уписаног круга.

156) Из једне тачке на кругу повучене су две тетиве. Средишни угао над једном тетивом је α, над другом β. Колики периферски угао захватају тетиве.

157) Дата су два концентрична круга полупречника 1 cm и 4 cm, и трећи круг полупречника 2 cm. Где треба да лежи центар овог трећег круга да би он секао прва два?

158) Дата су два концентрична круга M и N полупречника 3 cm и 1 cm. Наћи полупречник r и средишну раздаљину c трећег круга P који ће додиривати прва два.

159) Имамо једнаке кружне котурове; једни су црни, други бели. Колико треба белих котурова да окруже црни котур, постављајући их тако да додирују црни котур и да сваки од белих котурова додирује друга два бела котура, један с једне а други с друге стране?

160) Дат је круг O полупречника r и једнаки кружни котурови полупречника $\frac{r}{3}$. Колики се број ових котурова може поставити тако да сви додирују дати круг изнутра и да сваки од њих додирује друга два котура, један с једне а други с друге стране?

161) Три једнака круга полупречника r додирују се међу собом два и два. Одредити центре и полупречнике кругова који додирују три дата круга, један споља а други изнутра.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

162) Конструисати угао од 75°.

163) Конструисати равнокраки троугао кад је дат описани круг и средина основице или крака.

164) Конструисати равнокраки троугао кад је дат описани круг, једно теме на основици и права PQ на којој се налази средина основице.

165) Конструисати правоугли троугао кад се знају:

а) r и R — полупречници уписаног и описаног круга;

б) један оштар угао и полупречник r уписаног круга.

166) Конструисати правоугли троугао ако су дати:

а) катета и полупречник уписаног круга;

б) збир катета и полупречник уписаног круга.

167) Конструисати правоугли троугао помоћу катете и висине хипотенузе.

168) Конструисати правоугли троугао ABC кад су дати: дужина хипотенузе, положај темена C правог угла и две међусобно нормалне праве на којима треба да леже друга два темена A и B.

169) Конструисати правоугли троугао кад се знају хипотенуза и њена висина.

170) Конструисати правоугли троугао кад се знају полупречник уписаног круга и висина из темена правог угла.

171) Конструисати правоугли троугао ABC кад се знају хипотенуза c и тежишна линија m која полази из темена B.

172) Конструисати троугао кад је дато једно теме, ортоцентар и центар описаног круга.

173) Конструисати троугао кад су дати:

а) једна страна, разлика других двеју страна и полупречник уписаног круга;

б) једна страна, наспрамни угао и полупречник уписаног круга или полупречник спољашњег круга који додирује дату страну.

174) Конструисати троугао кад се поред полупречника уписаног круга и полупречника једног спољашњег додирног круга зна:

а) страна коју додирују ови кругови;
б) разлика страна које су спољашње дирке.

175) Конструисати троугао кад се знају:

а) страна BC и висине BE и CF;
б) страна BC и висине AD и BE.

176) Конструисати троугао кад су познати центри D, E, F спољашњих додирних кругова.

177) Конструисати троугао ако су дати: висине AD, BE и угао B.

178) Конструисати троугао ако су дати: једна страна a, права PQ на којој она лежи, наспрамни угао α и две тачке M и N кроз које треба да пролазе друге две стране.

179) Конструисати троугао кад је познат његов обим $2s$, један угао α и висина из темена овог угла.

180) Конструисати троугао ABC ако је позната дужина стране BC, разлика налеглих углова φ и права PQ на којој треба да лежи треће теме A.

181) Конструисати троугао кад су дати: једна висина, симетрала угла из чијег темена полази дата висина и полупречник уписаног круга.

182) Конструисати троугао ако су дати: један угао, његова симетрала и висина повучена из његовог темена.

183) Конструисати троугао ABC кад су дати: тежишна линија AD, дуж AE симетрична са AD у односу на симетралу угла A (где је E на основици BC троугла) и растојање DE.

184) Конструисати троугао кад су дати: уписани круг и један спољашњи додирни круг.

185) Конструисати троугао кад су дата два спољашња додирна круга.

186) Конструисати троугао кад се знају две стране AB и AC и полупречник описаног круга.

187) Конструисати троугао кад су дата два угла и полупречник уписаног круга.

188) Конструисати троугао кад су дати: угао A, страна BC и висина AD.

189) Конструисати троугао кад су дати: угао A, наспрамна страна $BC=a$ и полупречник уписаног круга.

190) Конструисати троугао кад су дате: висина, симетрала угла и тежишна линија, повучене из истог темена.

191) Конструисати троугао кад су дата два угла и полупречник описаног круга.

192) Конструисати троугао кад су дати: један угао, наспрамна страна и тежишна линија која јој одговара.

193) У троугао ABC уписати троугао подударан датом троуглу DEF.

194) У дати круг уписати троугао тако да су две његове стране паралелне двема датим правима а да трећа страна пролази кроз дату тачку M.

195) У круг уписати правоугли троугао тако да његове катете, или њихови продужци, пролазе кроз две дате тачке M и N.

196) У дати круг полупречника r уписати троугао кад су дате једна страна и висина која одговара другој страни.

197) Око датог круга описати троугао кад су дати: један његов угао и висина која не полази из темена датог угла.

198) У троуглу ABC наћи тачку S из које се свака страна види под истим углом.

199) У троуглу ABC наћи тачку M тако да су углови MAC, MCB, MBA међу собом једнаки.

200) Конструисати тетивни четвороугао кад су дате две суседне стране a и b и два угла, од којих је један, α, налегли угао на страни a, а други, β, захваћен странама a и b. Најзад описати круг око овог четвороугла.

201) Конструисати тетивни четвороугао ако су дате три стране и један угао, например: c, d, a, α.

202) Конструисати тетивни четвороугао ако су дате дијагонале, угао φ између њих и полупречник описанога круга.

203) Конструисати равнокраки трапез ако су дате паралелне стране a и b $(a > b)$ и полупречник описаног круга R.

204) Конструисати равнокраки трапез ако се зна полупречник уписаног круга и обим.

205) Конструисати трапез кад је познат полупречник уписаног круга r и непаралелне стране c и d.

206) Конструисати четвороугао $ABCD$ кад су дати: дијагонала AC, страна AB и углови.

207) Конструисати четвороугао кад су дати: два суседна угла A и D, дијагонале AC и DB и угао φ између њих.

208) Конструисати четвороугао $ABCD$ ако су дати углови и дијагонале.

209) Око равностраног троугла описати квадрат чије се једно теме налази у темену троугла.

210) Описати квадрат око датог четвороугла.

211) У круг уписати правоугаоник тако да:

а) обим има одређену дужину $2s$;

б) разлика суседних страна има одређену дужину d.

212) Повући у троуглу једну праву паралелно са основицом, тако да њен отсечак између страна буде једнак збиру или разлици отсечака на странама између основице и те паралеле.

213) Кроз тачку M повући праву MBC која сече краке угла, тако да обим добијеног троугла ABC има одређену дужину $2s$.

214) Пресећи троугао ABC једном правом, тако да њен део DE између пресечних тачака има одређену дужину l и да је једнак збиру отсечака BD и CE.

215) Кроз теме A датог троугла ABC повући праву, тако да нормале BB_1 и CC_1, спуштене из темена B и C на ову праву, отсецају на њој отсечак $B_1C_1 = l$.

216) Дате су три тачке A, B, C. Кроз тачку A повући једну праву, тако да збир или разлика растојања тачака B и C од повучене праве има одређену дужину l.

217) Дате су две паралелне праве и једна тачка ван њих. Повући праву кроз дату тачку, тако да она сече паралелне праве и да њен отсечак између њих има дужину l.

218) Дата је права PQ и две тачке M и N са исте стране праве. Наћи тачку A на правој PQ_1 тако да угао MAP буде двапут већи од угла NAQ.

219) Дата је права PQ и две тачке M и N са исте стране праве. Наћи на правој PQ тачку A, тако да збир углова MAP и NAQ има одређену вредност. Шта је минимум ове вредности?

220) Дате су две паралелне праве, на једној од њих тачка M и ван њих једна тачка N. Повући кроз N праву која ће паралелу на којој је тачка M сећи у A, а другу паралелу у B, тако да је $MA = MB$.

221) Описати круг тако да додирује две непаралелне праве l_1 и l_2, а да додирна тетива има одређену дужину t.

222) Описати круг чији се центар налази у датој тачки на краку датог угла, тако да на другом краку отсеца тетиву одређене дужине.

223) Описати круг који пролази кроз две дате тачке а центар му је на периферији датог круга.

224) Датим полупречником r описати круг, тако да га додирују два дата круга, и то већи споља а мањи изнутра.

225) Над датом дужи AB као над тетивом описати круг који сече дати круг O, тако да је заједничка тетива паралелна датој правој PQ.

226) Дате су четири тачке A, B, M, N. Описати круг који пролази кроз A и B, тако да су тангенте повучене из M и N на тај круг једнаке међу собом.

227) Дата је права PQ и на једној њеној нормали са исте стране две тачке M и N. Описати круг који пролази кроз тачке M и N и додирује праву PQ.

228) Дата је права PQ и две тачке M и N са исте стране праве подједнако удаљене од ње. Описати круг који пролази кроз тачке M и N и додирује праву PQ.

229) Описати круг који додирује дати круг O у датој тачки T и једну дату праву PQ.

230) Дата је нека тачка на кругу и једна тетива. Кроз тачку треба повући другу тетиву, тако да је прва преполови.

231) Полупречником r описати круг, тако да пролази кроз дату тачку M и да најкраћа раздаљина његове периферије од периферије датог круга са центром у O буде једнака датој дужи l.

232) Дате су две праве PQ, P_1Q_1 и тачка M. Око те тачке као центра описати круг, тако да збир тетива које он отсеца на датим правима износи $2l$.

233) Датим полупречником описати круг који на кругу са центром у O_1 отсеца тетиву одређене дужине а на кругу чији је центар у O_2 тетиву опет одређене дужине.

234) Описати круг који сече сваку страну датог троугла под датим углом φ.

235) Датим полупречником описати круг, тако да пролази кроз тачку M и сече периферију круга O под датим углом φ.

236) Описати круг тако да тангенте повучене из темена једног троугла на овај круг буду међу собом једнаке и имају одређену дужину l.

237) Полупречником r описати круг који пролази кроз дату тачку M тако да тангента повучена из дате тачке N има одређену дужину l.

238) Око тачке O као центра описати круг који сече дати круг O_1 под датим углом φ.

239) Датим полупречником r описати круг који сече дати круг O_1 под датим углом φ и дату праву PQ под датим углом φ.

240) Датим полупречником r описати круг који сече круг O_1 под углом φ а круг O_2 под углом ψ.

241) Описати круг који пролази кроз две дате тачке M и N и додирује праву PQ.

242) У кружни исечак уписати круг.

243) Датим полупречником описати круг тако да тангенте повучене из датих тачака M и N граде угао 2φ и да разлика тангената има одређену дужину l.

244) Описати круг тако да додирује дату праву PQ и да дати круг O_1 сече у тачки M под датим углом α.

245) Датим полупречником r описати круг, тако да он додирује круг O_1 а сече круг O_2 под правим углом.

246) Описати круг тако да додирује дати круг O и праву l у тачки M.

247) Описати круг полупречником r, тако да додирује праву l а на правој l_1 да отсеца тетиву дужине t.

248) Описати круг тако да додирује праву l и два једнака круга.

249) У дати круг уписати четири једнака круга који га додирују и од којих сваки додирује друга два.

250) Дата су три једнака круга један изван другога. Описати круг тако да га ова три круга додирују: а) спола, б) изнутра.

251) Дат је круг O и тачке M_1 и M_2. Повући на круг тангенту, тако да њена растојања од тачака M_1 и M_2 буду једнака.

252) Наћи тачку ван круга, тако да тангенте повучене из ње граде са додирном тетивом равнострани троугао.

253) У једном кругу дата је тетива AB и тачка M. Кроз тачку M повући другу тетиву, тако да је она преполовљена првом тетивом.

254) Дат је круг са центром у O, права PQ и тачка M. Кроз M повући дуж чије се крајње тачке налазе једна на кругу а друга на датој правој, тако да тачка M полови ту дуж.

255) Дат је круг O и права PQ Повући сечицу нормално на праву PQ, тако да један од њених пресека са кругом буде на средини између другог пресека са кругом и пресека са правом PQ.

256) У кругу повући тетиву, тако да је разлика лукова који јој одговарају једнака одређеном луку истога круга.

257) Описати два концентрична круга, тако да пролазе кроз дате тачке P и Q, да им је раздаљина једнака датој дужини l и да полупречници OP и OQ граде дати угао 2α.

258) Дат је круг O, његова тангента t у тачки A и на овој тангенти тачка B. Описати круг који додирује дати круг и праву t у тачки B.

259) Кроз дату тачку M повући на дати круг сечицу, тако да периферски угао ABC над тетивом одређеном кругом на овој сечици буде једнак датом углу DEF.

260) Дат је круг са центром у O и тачка M на правој PQ. Наћи на истој правој другу тачку која је подједнако удаљена од тачке M и од периферије круга.

261) Кроз тачку A повући праву која је подједнако удаљена од тачке B и периферије круга са центром у O.

262) Из дате тачке M повући сечицу датог круга чији је центар у O тако да део сечице који је тетива датог круга има дату дужину l.

263) Кроз тачку M у кругу средишта O повући тетиву, тако да су збир или разлика њених делова једнаки датој дужини l.

264) Дати су тачка, права и круг. Кроз дату тачку повући праву, тако да је њен део између дате праве и круга преполовљен датом тачком.

265) На кругу су дате две тачке A и B. Наћи на овом кругу трећу тачку C, тако да је збир $CA + CB$ једнак одређеној дужини l.

266) На кругу су дате две тачке A и B. Наћи на овом кругу трећу тачку C, тако да је разлика $CA - CB$ једнака одређеној дужини l.

267) Кроз пресек два круга повући сечицу, тако да тетиве на њој у оба круга буду једнаке.

268) Дата су два концентрична круга. У већем кругу повући тетиву која је двапут већа од њеног отсечка у мањем кругу.

269) Два круга O_1 и O_2 секу се у тачкама A и B. Повући кроз A праву која сече кругове у тачкама S_1 и S_2. Ако је M пресек нормале повучене на ову праву у тачки A и средишне раздаљине O_1O_2, одредити положај ове праве за случај да се M налази на средини средишне раздаљине O_1O_2.

270) На два дата круга повући заједничку сечицу, тако да тетиве које кругови отсецају на тој сечици имају дате дужине l_1 и l_2.

271) Датим полупречником r описати кружну линију која полови сваку од две дате кружне линије C и O.

272) Дата су два круга O_1 и O_2 и тачка M. Кроз M повући дуж A_1A_2, тако да A_1 лежи на кругу O_1 а A_2 на кругу O_2, и да тачка M буде на средини ове дужи.

273) Кроз тачку A повући праву која је подједнако удаљена од периферија два дата круга.

274) Повући једну праву, тако да је подједнако удаљена од периферија трију датих кругова.

275) Дата су два ексцентрична круга један у другом. Повући на унутрашњи круг тангенту, тако да она као тетива спољашњег круга има одређену дужину l. Које су најмање и највеће вредности ове дужине?

276) Дата су два концентрична круга. Кроз једну тачку на периферији спољашњег круга повући тетиву, тако да је унутрашњи круг подели на три једнака дела.

277) Између два круга повући дуж дужине l паралелну датој правој PQ.

278) Дата су два круга један изван другог и права PQ. Повући сечицу паралелну правој PQ, тако да збир тетива на овој сечици има одређену дужину l.

279) Дата су два круга O_1 и O_2. Наћи тачку из које се могу повући једнаке тангенте на оба круга, тако да заклапају дати угао.

§ 7. Геометриска места

1) A и B су две дате тачке у кругу. Наћи на периферији круга тачке које су подједнако удаљене од A и B. Колико има таквих тачака?

2) Растојање тачака A и B је 6 cm. Наћи две тачке које су од A удаљене 4 cm, а од B 5 cm.

3) Дата је дуж AB и кроз B повучена произвољна права. Ако се права обрће око B, а из A спуштају нормале на њу, шта ће бити геометриско место средина свих нормала?

4) Тачка S је 2 cm удаљена од праве MX. Наћи две тачке које су од S удаљене $2\frac{3}{4}$ cm и од праве MX $2\frac{3}{4}$ cm.

5) Кроз крајње тачке дужи AB повучене су две произвољне паралелне праве AP и BQ. Наћи геометриско место пресека симетрала углова PAB и QBA.

6) Дат је угао A и тачке B и C, једна на једном а друга на другом краку угла. Наћи тачку P, тако да свака од тачака B и C буде посебице подједнако удаљена од тачака A и P.

7) Наћи геометриско место тежишта T троугла чија страна BC остаје стална и чија тежишна линија AD има дату дужину l.

8) Наћи геометриско место темена C троугла чија страна AB остаје стална и чија тежишна линија AD има дату дужину l.

9) Наћи геометриско место средине дате дужи чије крајње тачке описују две нормалне праве.

10) Над дужи BC као над основицом конструисани су троуглови чији су углови наспрам стране BC једнаки. Страна BA продужена је до F, тако да је $BP=BA+AC$. Наћи геометриско место тачке P.

11) У троуглу ABC дата је основица AB дужином и положајем; угао C наспрам основице има сталну величину; из средине E једне његове променљиве стране спусти се нормала EM на другу променљиву страну. Наћи геометриско место тачке M.

12) Темена B и C троугла ABC клизе по двема полуправим OX, OY које се секу образујући угао суплементан углу A. Наћи геометриско место темена A.

Дискутовати о проблему под претпоставком да се теме B може померати по продушку OX' полуправе OX и да се за то време тачка C помера по правој YOY'.

13) Дате су две праве p и q, које се секу у тачки O под правим углом, и нека тачка P. Прав угао са теменом у P обрће се око те тачке. Ако су A и B тачке у којима један крак угла сече праву p а други праву q, наћи геометриско место средине отсечка AB.

14) $ABCD$ је паралелограм начињен од четири шипке, тако да се оне у теменима могу прекретати. Ако је шипка AB учвршћена, наћи геометриско место средине шипке CD.

15) Наћи геометриско место средина паралелних тетива једнога круга.

16) Наћи геометриско место додирних тачака тангената повучених из једне сталне тачке на систем концентричних кругова.

17) Дате су две паралелне праве l_1 и l_2 и између њих један круг O. Описати круг који додирује обе паралелне праве и дати круг O.

18) P је ма која тачка на одговарајућем луку тетиве AB. Симетрале углова PAB и PBA секу се у тачки O. Наћи геометриско место за O.

19) Наћи геометриско место средина свих тетива које се секу у једној тачки. Разликовати три случаја: а) тачка је на кругу; б) тачка је у кругу; в) тачка је ван круга.

20) Наћи геометриско место тачака из којих се дата кружна линија види под датим углом.

21) Наћи тачку из које ће се сваки од два дата круга O_1 и O_2 видети под датим углом.

22) Кроз пресек два круга повуче се права на којој кругови отсецају две тетиве, а у крајњим тачкама ових тетива нацртају се два дата угла A и B. Шта је геометриско место тачке C трећег темена тако добијеног троугла?

23) Дат је круг O полупречника 16 mm и једна права PQ која пролази кроз центар O. Одредити центар круга полупречника 4 mm који би додиривао дати круг и дату праву.

24) Дат је круг полупречника 1 cm са центром у O и тачка M чије је растојање од центра $OM=2$ cm. Одредити положај центра круга чији је полупречник 2 cm који пролази кроз тачку M и додирује дати круг.

25) Дата су два круга једнаких полупречника r централне раздаљине r. Одредити центар круга полупречника $\frac{r}{2}$ који додирује два дата круга.

26) Дата су два круга O_1 и O_2. Описати трећи круг полупречником r, тако да он сече оба дата круга под правим углом.

27) Дата је кружна линија C и дуж AB. Кроз сваку тачку P криве повуче се дуж $PQ=AB$, тако да су све међу собом паралелне и истога смера. Наћи геометриско место тачке Q.

28) Наћи геометриско место средина дужи које спајају дату тачку P са тачкама дате кружне линије C.

29) Дата су два круга са центрима у O и O_1 и полупречницима r и r_1; у њима се повуку два полупречника OA и O_1B паралелна и једнаког смера. Наћи геометриско место средине M дужи AB када се мења заједнички правац тих полупречника.

30) Дат је круг и нека тачка P. Наћи геометриско место средина тетива круга које пролазе (или њихови продушци) кроз тачку P.

31) Дат је полукруг пречника AOB; тангента у произвољној тачки C линије сече продужак тога пречника у D; нормала повучена из O на симетралу угла CDO сече тангенту CD у тачки P. Наћи геометриско место тачке P.

32) Кружна линија се обрће око једне своје тачке, и у сваком положају повуку се тангенте паралелно некој датој правој. Наћи геометриско место додирних тачака.

33) Наћи геометриско место средина основица трапеза чије дијагонале леже на двема сечицама повученим кроз додирну тачку два круга, ако се те сечице секу под сталним углом.

34) Наћи геометриско место тачке додира два круга променљивих полупречника који се додирују међу собом и додирују неку праву у две дате тачке D_1 и D_2.

35) Наћи геометриско место додира два круга који се споља додирују и који додирују трећи круг у датим тачкама A и B.

36) Дат је круг и један његов пречник AB. Ма из које тачке C узете на продушку тога пречника повуче се тангента CD, затим бисектриса угла ACD. Наћи геометриско место подножја нормале спуштене из центра на бисектрису.

37) Троугао има за основицу тетиву AB круга, а треће теме C се помера по одговарајућем луку ACB. Наћи: а) геометриско место које описује пресек бисектриса троугла; б) геометриско место ортоцентра тога троугла.

38) На крацима угла AOB обележене су две тачке A и B неједнако удаљене од темена O; ако се опишу два круга који се међу собом додирују и од којих један додирује OA у тачки A, а други крак OB у тачки B, наћи геометриско место додира та два круга.

39) Дата су два једнака круга који се секу у A и B. Кроз тачку B повуче се произвољна сечица која сече кругове у C и C_1. Доказати: а) $AC=AC_1$; б) угао CAC_1 остаје непромењен када се сечица CBC_1 обрће око B. Наћи геометриско место средине дужи CC_1.

40) На сваком полупречнику датога круга одмери се, почев од центра, дуж једнака растојању крајњих тачака тога полупречника од једног сталног пречника. Наћи геометриско место крајњих тачака дужи које се тако добију.

41) Дат је кружни лук AB који одговара тетиви AB; нека тачка C помера се по том луку. Наћи геометриско место центра круга уписаног у троуглу ABC.

42) Кроз један крај тетиве AB датог круга повуче се тетива AC и на ту тетиву пренесе се с једне и с друге стране од C дуж $CP=CP_1=CB$. Наћи геометриско место које описују тачке P и P_1 када се C помера по једном од лукова који одговарају тој тетиви.

§ 8. Максима и минима

1) Дат је лук ABC. Која је тангента лука, ограничена полуправима OA и OC, најмања?

2) На врху куле MN висине H постављено је вертикално једно копље PM висине h. Кула се налази на хоризонталној равни. Са које ће се даљине од куле копље видети под највећим углом?

3) Око датог троугла описати највећи равнострани троугао.

4) Од свих троуглова исте основице и једнаке висине који има највећи угао наспрам основице?

5) Дата је права PQ и један угао сталне величине који се обрће око свог темена утврђеног у тачки M, а његови краци отсецају на датој правој једну дуж. У ком положају треба да се налази овај угао па да дуж буде минимум?

6) Од свих троуглова који имају једнаке основице и у којима је уписан исти круг који има највећи угао наспрам основице?

7) Од свих троуглова исте основице и једнаког наспрамног угла који има највећи обим?

8) У круг уписати троугао највећег обима.

9) Кроз дату тачку унутар једног угла повући праву, тако да са крацима угла образује троугао најмањег обима.

10) Од свих троуглова који имају једнаке основице, а описани су око истог круга, који има најмањи обим?

11) Уписати у полукруг четвороугао највећег обима, тако да је пречник полукруга једна страна четвороугла.

12) У полукруг уписати четвороугао датог обима, тако да страна наспрам пречника има одређену дужину a. Који четвороугао има највећи обим?

13) Наћи тачку у троуглу, тако да је збир њених растојања од темена троугла минимум. (Овај задатак је поставио Ферма[1] Торичелију. Поред Торичелија[2] задатак су решили и Каваљери[3] и Вивијани[4].)

14) Два места M и N налазе се са исте стране праволиниског канала PQ. Одредити положај места S кроз које треба да иде пут OS нормално на правац канала тако да збир путева $MO+NO+SO$ буде минимум.

---

[1] Ферма (Fermat) (1601—1665), француски математичар.

[2] Торичели (Torricelli) (1608 -1647), италијански физичар и геометар.

[3] Каваљери (Cavalieri) (1598—1647), италијански геометар.

[4] Вивијани (Viviani) (1622—1703), италијански научник, ученик Галилеја и Торичелија

§ 9. Пропорционалност дужи и сличност слика

а) ТЕОРЕМЕ

1) Дуж и угао

1) Дат је прав или туп угао XOY, две тачке A и B на OX и две тачке C и D на OY. Ако је $AC:BD=OA:OB$, права AC је паралелна са BD.

2) Дат је угао XOY. На краку OX узете су две тачке M и N $(ON > OM)$ и кроз ове тачке повучене су две паралеле које секу други крак OY у P и Q; тачке N и P су спојене, и кроз Q је повучена паралела са NP, која сече OX у S. Показати да је ON средња геометриска пропорционала између OM и OS.

3) Дате су три паралелне праве m, n, p, две сталне тачке A и B на правој n и једна тачка C на правој m. Ако су D и E тачке у којима дужи AC и BC секу праву p, доказати да отсечак DE има увек исту дужину кад се тачка C креће по правој m.

4) Имамо прамен од три полуправе SA, SB, SC. Ако се тачка M креће по једној полуправој, размера растојања ове тачке од друге две полуправе је стална.

5) На једну праву, почев од тачке A, пренесе се $AB=$ $=12$ cm, $AC=10$ cm, $AD=15$ cm. Показати да су тачке C и D хармониски коњуговане тачке.

2) Троугао

6) Свака дуж паралелна са једном страном троугла, чије се крајње тачке налазе на другим двема странама, преполовљена је тежишном линијом која полази из темена наспрам стране са којом је дуж паралелна.

7) Стране троугла ABC су 12, 18 и 27; стране троугла DEF су 12, 18 и 8. Доказати да су ова два троугла слична.

8) У троуглу ABC симетрала угла A сече страну BC у тачки D; права повучена из D паралелно са AC сече AB у тачки E; права повучена из E паралелно са BC сече AC у F. Доказати да је $EA=FC$.

9) Два правоугла троугла чија је размера хипотенуза једнака размери висина слична су.

10) У правоуглом троуглу ABC са правим углом код A раздаљине подножја висине AD од катета пропорционалне су са катетама.

11) Ако је у правоуглом троуглу једна катета двапут већа од друге, висина дели хипотенузу на два отсечка од којих је један четири пута већи од другог.

12) Сваки троугао ABC код кога је B један оштар угао а страна AB геометриска средина између стране BC и њене пројекције на BC има прав угао код A.

13) Сваки троугао ABC у коме су углови B и C оштри и чија је висина геометриска средина између отсечака које она гради на страни BC има прав угао код А.

14) Ако је у троуглу ABC угао C туп а висина AD геометриска средина између отсечака које она гради на страни BC, разлика углова B и C износи 90^0.

15) Сваки троугао у коме је производ једне стране и одговарајуће висине једнак производу других двеју страна правоугли је.

16) Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код A и висина AD. Пренесено је на AB, AC, DA:

$$AE=\frac{AB}{3},\quad AF=\frac{AC}{3},\quad DG=\frac{DA}{3}.$$

Доказати да је троугао EFG сличан троуглу ABC.

17) Доказати да је у правоуглом троуглу размера квадрата катета једнака размери њихових пројекција на хипотенузи.

18) Дужи између кракова каквог угла једнако нагнуте према симетрали тога угла образују са крацима угла сличне троугле.

19) Не користећи образац за површину доказати да су висине у троуглу обрнуто пропорционалне са странама на које су спуштене. Из тога извести да исто правило важи и за нормале спуштене на стране из једне тачке тежишне линије.

20) Две стране једног троугла стоје у истој размери као њихове пројекције на овим двема странама.

21) Две висине у троуглу секу се тако да је производ отсечака једне висине једнак производу отсечака друге висине.

22) Кад је разлика углова на основици једног троугла 90°, висина овог троугла је средња геометриска пропорционала између отсечака на које висина дели основицу.

23) Ако је један угао једног троугла једнак са једним углом другог троугла и ако је један угао првог троугла суплементан са углом другог троугла, стране наспрам једнаких углова пропорционалне су са странама наспрам суплементних углова.

24) Дат је троугао ABC; кроз две произвољне тачке M и N на страни BC повучене су паралеле са AB до пресека P и Q са страном AC; из истих тачака M и N повучене су паралеле са AC до пресека L и S са страном AB. Показати да је $PQ:LS=AC:AB$.

25) Дата су два троугла ABC и DEF чије су стране паралелне: $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$, $BC \parallel EF$. Доказати да се праве које спајају њихова хомолога темена секу у једној тачки.

26) Дат је троугао ABC и тежишна линија AD. Повучене су симетрале углова ADB и ADC, које секу стране AB и AC у тачкама M и N. Доказати да је MN паралелно са BC.

27) Дат је троугао ABC. Кроз тачку D на страни BC повучена је паралела са тежишном линијом AE; F и G су тачке у којима паралела сече стране AB и AC. Доказати да збир $DF+FG$ остаје сталан кад тачка D клизи по страни BC.

28) Кад једна права сече све три стране троугла (једну од њих у продужку), производ три неузастопна отсечка странâ једнак је производу друга три отсечка (Менелаос[1]).

29) Праве које пролазе кроз темена троугла и кроз једну тачку O образују на странама шест отсечака, тако да је производ трију неузастопних једнак производу остала три (Чева[2]).

---

[1] Менелаос, грчки геометар, живео у Александрији пред крај I века.

[2] Чева (Ceva), италијански математичар, родио се у другој половини XVII века, а умро у првој половини XVIII века.

30) Доказати да у једном троуглу пресек симетрала углова дели сваку симетралу на два дела пропорционална са страном коју сече симетрала и са збиром других двеју страна.

31) Доказати да је у једном троуглу производ делова једне стране подељене подножјем одговарајуће висине једнак производу раздаљина овог подножја висине од подножја других двеју висина.

32) Дуж која полази из једног темена неког троугла до пресека са супротном страном и притом пролази кроз средину тежишне линије повучене ма из ког другог темена дели супротну страну у размери 1 : 2; та дуж средином тежишне линије подељена је у размери 3 : 1.

33) Кад се у троуглу *ABC* страна *AB* подели на три једнака дела и деоне тачке споје са супротним теменом *C*, тада тежишна линија *AM* отсеца од једне дужи $\frac{1}{4}$, а од друге $\frac{2}{5}$.

34) Кад се кроз тежиште троугла повуче произвољна права и на њу спусте нормале из темена, једна од тих нормала једнака је збиру других двеју.

35) Са страном једног троугла повучене су две паралелне праве; једна пролази кроз супротно теме а друга сече друге две стране. Ако теме троугла кроз које пролази једна паралела клизи по тој паралели, отсечак на другој паралели ограничен другим двема странама има сталну дужину.

36) У једном троуглу повући дуж симетричну тежишној линији у односу на симетралу угла повучену из истог темена. Доказати да су растојања сваке тачке ове дужи од двеју страна троугла пропорционална са странама.

37) Ако се у једном троуглу *ABC* две праве *DB* и *CE* секу на висини *AF*, ова висина је симетрала угла *DFE*.

38) Ако тежишне линије једног троугла узмемо за стране другог троугла, доказати да су тежишне линије другог троугла $\frac{3}{4}$ страна̂ првог троугла.

39) У троуглу *ABC* на симетралу *AD* угла *A* повучене су из темена *B* и *C* нормале *BE* и *CF*. Доказати да су тачке *A* и *D* хармониски коњуговане са тачкама *E* и *F*.

3) Четвороугао

40) Пресечна тачка дијагонала трапеза дели дијагонале на пропорционалне делове.

41) Пресечна тачка дијагонала трапеза дели дијагонале на делове пропорционалне паралелним странама.

42) Непаралелне стране трапеза *ABCD* продужене су до свог пресека и кроз тај пресек је повучена паралела са основицама а дијагонале су продужене до пресека са овом паралелом; дуж коју продужене дијагонале отсецају на овој паралели преполовљена је тачком пресека непаралелних страна.

43) Кроз пресек дијагонала једног трапеза повучене су паралеле са непаралелним странама; оне секу основицу у тачкама *E* и *F*. Показати да су раздаљине ових тачака од крајњих тачака основице једнаке.

44 а) Доказати да непаралелне стране и дијагонале трапеза одређују на правој која је паралелна основицама три дужи, од којих су крајње једнаке.

б) Повући ову паралелу тако да све три дужи буду једнаке.

45) Кад се обе непаралелне стране трапеза продуже до пресека, па се кроз тај пресек и кроз пресек дијагонала повуче права, она полови паралелне стране.

46) Код свих правоуглих трапеза код којих се дијагонале секу под правим углом висина је геометриска средина између основица.

47) Ако се повуку две дужи *EF* и *GH* паралелно са једном дијагоналом каквог четвороугла *ABCD*, праве *EG* и *FH* секу се на продушку друге дијагонале.

48) У сваком четвороуглу права која пролази кроз средине дијагонала отсеца на супротним странама пропорционалне отсечке.

49) Сви правоугаоници описани око неког четвороугла чије се дијагонале секу под правим углом слични су међу собом.

50) Дат је троугао *ABC*, у коме је висина *AH* једнака одговарајућој страни *BC*. Доказати да сви правоугаоници уписани у

овом троуглу, а чија су два темена на страни BC троугла, имају сталан обим.

51) Дат је правоугаоник $ABCD$, у коме је основица AB двапут већа од висине BC. Из темена A спуштена је на дијагоналу BD нормала која сече страну CD у тачки E. Доказати да је дуж DE четвртина стране DC.

52) Дат је правоугли троугао и у њему уписан квадрат чија је једна страна на хипотенузи. Страна квадрата је геометриска средина између остала два дела хипотенузе.

53) Два правоугаоника чије се дијагонале секу под једнаким угловима слична су.

54) Два паралелограма чије су дијагонале пропорционалне и секу се под једнаким угловима слична су.

55) Два паралелограма који имају две стране пропорционалне и захваћене углове једнаке слична су.

56) Доказати да су сви ромбови уписани у једном правоугаонику међу собом слични.

57) Доказати да су пројекције темена једног паралелограма на његовим дијагоналама темена другог паралелограма сличног првоме.

58) Кад се из једног темена некоr паралелограма повуче права која на супротној страни отсеца $\frac{1}{n}$ део, она на дијагонали отсеца $\frac{1}{n+1}$ део.

59) У паралелограму $ABCD$ растојања PE и PF ма које тачке P на дијагонали BD од суседних страна обрнуто су пропорционална са странама.

60) На једној правој PQ узете су четири узастопне тачке A, B, C, D. Кроз A и B повучене су две паралелне праве и кроз C и D друге две паралелне праве. Доказати да продушци дијагонала тако добијеног паралелограма секу праву PQ у двема сталним тачкама.

61) Дата су два четвороугла $ABCD$ и $EFGH$. Ако су им стране паралелне: $AB \parallel EF$, $BC \parallel FG$, $CD \parallel GH$, $AD \parallel EH$ и ако се праве AE, BF, CG секу у тачки S, доказати да и права DH пролази кроз тачку S.

62) Дат је паралелограм $ABCD$; кроз теме C повучена је права која дијагоналу BD дели на два дела, тако да је један део четири пута већи од другог. Доказати да ова права дели страну AD на два дела од којих је један трипут већи од другог.

63) Дат је паралелограм $ABCD$. Кроз једну тачку M дијагонале AC повуку се паралеле са странама. Доказати: а) тако добијени паралелограми који имају дијагонале AM и MC имају друге дијагонале паралелне; б) дијагонале друга два паралелограма које не полазе од тачке M секу се на правој AC.

4) Круг

64) Упоређивањем дужи доказати да је аритметичка средина два неједнака броја већа од њихове геометриске средине.

65) Кроз теме A троугла ABC повучен је пречник круга описаног око троугла; из D, његовог пресека са страном BC повучене су нормале DE и DF на друге две стране троугла Доказати да је EF паралелно са BC.

66) Дат је угао BAC и M. кроз тачке A и M описан је круг променљивог полупречника који сече краке датог угла у P и Q. Доказати да је однос $\frac{MP}{MQ}$ сталан.

67) У троуглу ABC повучене су висине AD, BE, CF. Доказати да су троугли AEF, BDF, CDE слични са троуглом ABC.

68) Дат је троугао ABC са странама a, b, c; круг који пролази кроз теме B и додирује страну AC у тачки A сече страну BC у тачки D. Доказати да је AD четврта пропорционала за стране a, b, c.

69) ABC је у кругу уписани равнострани троугао; AD је трећина стране AB, BE је трећина стране BC. Доказати да је DE једнако полупречнику круга.

70) Дат је равнокрак троугао ABC $(AB=AC)$ и око њега описан круг. Кроз теме A повучена је права која сече страну

BC у тачки M а круг у тачки N. Доказати да је страна AB геометриска средина за AM и AN.

71) Дат је троугао ABC и око њега описан круг. Симетрала угла A сече страну BC у тачки M а круг у тачки N. Доказати да је $NB^2 = MA \cdot MN$.

72) Дат је троугао ABC и тежишна линија AD. Кроз тачку D повучена је права која сече AC у тачки E и са DA гради угао $ADE = \sphericalangle B$; затим је из тачке E повучена паралела са CB која сече AD у тачки F. Доказати да је $FE^2 = FA \cdot FD$.

73) У троуглу ABC тачке T и S су други крајеви тежишне линије и симетрале угла A. Круг описан око троугла ATS сече страну AB у D, а страну AC у E. Доказати да је $BD = CE$.

74) Дат је равностран троугао ABC. Над страном BC као над пречником описан је са спољашње стране полукруг. Ако тачке M и N деле овај полукруг на три једнака дела, доказати да дужи AM и AN деле страну BC на три једнака дела.

75) Кад полукруг описан над косом непаралелном страном правоуглог трапеза сече супротну страну, свака тачка пресека дели је на два отсечка чији је производ једнак производу паралелних страна трапеза.

76) У сваком тетивном четвороуглу производ дијагонала једнак је збиру производа супротних страна. (Теорему је поставио Птолемеј[1], па је позната под његовим именом.)

77) Дијагонале тангентног четвороугла и тетиве које спајају додирне тачке супротних страна секу се у једној тачки. Или, кад су темена тетивног четвороугла додирне тачке тангентног четвороугла, дијагонале оба четвороугла секу се у једној тачки.

78) Краци датог угла A пресечени су правом PQ у тачкама C и D и кругом чији је центар O између кракова датог угла. Ако је тетива која спаја пресечне тачке круга и кракова угла паралелна датој правој, тежишна линија троугла ABC повучена из темена A полови поменуту тетиву.

---

[1] Птолемеј, грчки астроном и географ, живео је у II веку у једном предграђу Александрије.

79) Растојање ма које тачке A на кругу од једне дате тетиве CD је средња геометриска пропорционала између растојања ове тачке од тангената повучених у крајњим тачкама дате тетиве CD.

80) Центар описаног круга, тежиште и ортоцентар у троуглу леже на једној правој.

Раздаљина тежишта од ортоцентра двапут је већа од раздаљине центра описаног круга од тежишта (Ојлер, Euler).

81) У сваком троуглу центар уписаног круга, тежиште и центар круга уписаног у троуглу који је добијен спајањем средина страна првог троугла леже на једној правој. Растојање центра уписаног круга од тежишта двапут је веће од растојања тежишта од центра круга уписаног у другом троуглу.

82) Дат је равнокраки трапез и у њему уписан круг. Доказати да пресек дијагонала и додирне тачке непаралелних страна леже на једној правој.

83) Дат је круг и једна тангента чија је додирна тачка M. Ако се повуку друге две, паралелне тангенте, оне ће сећи дату тангенту тако да је производ њених отсечака сталан.

84) Дате су две паралелне праве X и Y; једна заједничка нормала сече X у M а Y у N. Са исте стране дужи MN узме се на правој X тачка A, на правој Y тачка B, тако да, ако је C средина дужи MN, угао ACB буде прав. Доказати да је AB тангента круга чији је пречник MN.

85) Дат је полукруг пречника AB и на пречнику тачка M. Ако се кроз једну тачку P која се креће по полукругу повуче нормала на PM, она сече у тачкама C и D тангенте повучене у тачкама A и B. Показати да производ $AC \cdot BD$ остаје сталан.

86) Дат је полукруг пречника AB; његове тангенте у A и B пресечене су трећом тангентом повученом у произвољној тачки C и њихове пресечне тачке су D и E; дужи AE и BD секу се у тачки F. Права CF сече пречник AB у тачки G. Доказати да је CG нормала на AB и да је тачка F на средини дужи CG.

87) Дат је круг O и права PQ; кроз крајњу тачку A пречника нормалног на правој PQ повучена је произвољна сечица која сече

круг у тачки C а праву PQ у тачки D. Доказати да је производ $AC \cdot AD$ сталан.

88) Дат је троугао ABC и тачка P на страни BC. Доказати да кругови који пролазе кроз тачке A, B, P и A, C, P имају полупречнике пропорционалне странама AB и AC.

89) Кад се два круга додирују споља, раздаљина додирне тачке од једне заједничке тангенте је четврта пропорционала за полузбир њихових полупречника и за оба полупречника појединачно.

90) Дат је круг и једна тетива AB. Доказати да је раздаљина неке тачке P на кругу од тетиве AB геометриска средина између раздаљина ове тачке од тангената повучених на круг у тачкама A и B.

91) Из једне тачке M повучене су на круг тангенте MT и сечица MAB. Доказати да је $MA : MB = TA^2 : TB^2$.

92) Из једне тачке M повучене су на круг тангенте MA и MB и једна произвољна сечица MCD. Доказати да је $AC \cdot BD = AD \cdot CB$.

93) Дат је полукруг пречника AB и са исте стране други полукруг чији је пречник AO једнак полупречнику првог полукруга. У једној тачки M на AO дигнута је нормала MDC, која сече мањи полукруг у D а већи у C. Доказати да је $AC^2 = 2AD^2$.

94) Дат је круг и права XY. Из једне покретне тачке M на правој XY повучене су тангенте на круг. Доказати да права која спаја додирне тачке ових тангената сече пречник нормалан на XY увек у једној тачки.

95) Ако у троуглу ABC обележимо висине са AD, BE, CF, а њихов пресек са H, докажимо да је $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$.

96) У троуглу ABC тачка O је центар уписаног круга а O_1 центар спољашњег додирног круга у углу A. Доказати да је $AO \cdot AO_1 = AB \cdot AC$.

97) Ако се нека тачка M у кругу споји са једном покретном тачком P на кругу и ако се повуче тетива PA нормално на PM, а затим кроз A тетива $AB \parallel PM$, ова последња тетива пролази кроз сталну тачку Q и производ $PM \cdot AQ$ је сталан.

98) Дат је круг пречника AB; опише се круг са центром у A и полупречником AB. Ако је CD тетива већег круга која додирује мањи круг у тачки E, треба доказати да је BE геометриска средина између EC и ED.

99) Два круга чији су полупречници $2a$ и $3a$ додирују се изнутра. Кроз центар мањег круга повуче се нормала на централну раздаљину. Доказати да тангенте повучене на мањи круг из тачака где поменута нормала сече већи круг граде прав угао.

100) Дата су два круга O_1 и O_2 који се секу и заједничка тангента која их додирује у тачкама D и E. Доказати да заједничка сечица која пролази кроз пресеке кругова полови дуж DE.

101) Дате су две тачке M и N. Доказати да свака тачка на правој MN има исту потенцију за све кругове који пролазе кроз тачке M и N.

102) Дата су два круга који се секу. Тангенте повучене из једне тачке на правој која пролази кроз пресеке кругова једнаке су.

103) Дата су три круга; сваки од њих сече друга два. Доказати да се три заједничке сечице секу у једној тачки.

104) Кад два дата круга O_1 и O_2 отсецају на заједничкој сечици AD једнаке тетиве, из пресечне тачке M тангената MA и MD виде се кругови O_1 и O_2 под једнаким угловима AMB и CMD.

105) Кад се два круга додирују споља и на њих повуче спољашња заједничка тангента, тада је растојање додирних тачака средња геометриска пропорционала између пречника кругова.

106) Кад се три круга додирују споља, два и два, а сва три додирују краке једног угла, тада је полупречник средњег круга средња геометриска пропорционала између полупречника крајњих кругова.

107) Кад је круг полупречника r уписан у једном правилном полигону, а описан око другог сличног полигона, тада је његова периферија средња геометриска пропорционала између периферија круга описаног око спољашњег полигона и круга уписаног у унутрашњем полигону.

108) Дуж OM која спаја центар описаног круга са ортоцентром троугла ABC резултанта је трију једнаких сила OA, OB, OC.

109) Из тачке M повучене су на круг O тангенте MA и MB и кроз центар права MCD. Ако је E пресек пречника CD са тетивом AB, доказати да су тачке M и E хармониски коњуговане са тачкама C и D.

110) У крајњим тачкама пречника AB датога круга O повучене су тангенте p и q. Тангента повучена ма у којој тачки M сече тангенту p у тачки C, тангенту q у тачки D, а праву AB у тачки E. Доказати да су тачке C, M, D, E хармониски коњуговане.

111) $ABCDEF$ је правилан шестоугао. Доказати: а) да дијагонала BF дели дијагоналу AD на два дела, од којих је један трипут већи од другог; б) да се дијагонале FD и EC узајамно деле на два дела, од којих је један двапут већи од другог.

112) $ABCDE$ је правилан петоугао; дијагонале AD и BE се секу у тачки P. Доказати да је DP геометриска средина између AP и AD.

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

113) Дуж од 30 cm подели на два дела, тако да је мањи део 12 cm. У којој размери треба поделити дуж?

114) Дуж AB поделити у размери 2:3:4. Растојање између средина крајњих делова је 5,4 m. Наћи дужину AЬ.

115) Дуж AB подељена је тачком C у размери 5:7 а тачком D у размери 5:11. Растојање између C и D једнако је 10 m. Наћи дужину AB.

116) Дата су четири отсечка једне праве, по дужини 40, 5, 20, 25. Поделити први отсечак тако да његови делови буду пропорционални са остала три отсечка и израчунати њихове дужине.

117) Дату дуж поделити на три дела тако да однос између првог и другог дела буде $\frac{2}{3}$, а између другог и трећег $\frac{4}{5}$.

118) Дате су две праве X и Y; на правој Y наћи две тачке чије раздаљине од праве X стоје у размери 3:7.

119) Кроз дату тачку M повучена је права AMB која сече краке угла POQ. Какав однос постоји између OA и OB?

120) На један крак неког угла A пренесе се дуж AM која се узме за јединицу. На други крак пренесе се дуж AN која претставља неки број n. Повуче се MN и пренесе $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ANR = \sphericalangle ARS = \sphericalangle ASP$ итд. Изразити дужине AR, AS, AP, AQ . . . као функције броја n.

121) Стране троугла ABC су: $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 6$ cm. Израчунати стране троугла сличног троуглу ABC, а чији је обим 20 cm.

122) У равнокраком троуглу основица и одговарајућа висина имају исту дужину 8 cm. Израчунати полупречник описаног круга.

123) У троуглу ABC повучена је симетрала угла A. Стране $AB = 8$ cm, $AC = 14$ cm, а отсечак BD је за 3 cm мањи од отсечка DC. Наћи страну BC.

124) Дат је равнокрак троугао ABC ($AB = BC$). У каквој размери тежишна линија AE дели висину BD?

125) Дужина сенке једног дрвета је 19,2 m. У том тренутку дужина сенке једног човека који је висок 1,6 m износи 2,4 m. Израчунати висину дрвета.

126) У средини хипотенузе дигнута је нормала до пресека са катетом, пресечна тачка спојена је са крајњом тачком друге катете; ова дуж дели угао у размери 2:5 (мањи део је до хипотенузе). Наћи тај угао.

127) У равнокраком троуглу крак је додирном тачком уписаног круга подељен у размери 7:5 (рачунајући од врха). Наћи однос крака и основице.

128) У равнокраком троуглу центар уписаног круга дели висину у размери 12:5; крак је 60 cm. Наћи основицу.

129) Стране троугла ABC су a, b, c; BD је симетрала угла B; O је тачка пресека симетрала углова B и C. Наћи однос $OD:OB$.

130) У равнокраком троуглу ABC обележимо страну AC са b, стране BA и BC са a. Нека су AN и CM симетрале углова A и C. Одредити дуж MN.

131) У троуглу ABC, чије су стране a, b, c, повучена је паралелно страни AC дуж MN, тако да је $AM = BN$. Наћи дуж MN.

132) У троуглу ABC повучена је права BD, тако да је угао BDC једнак углу ABC; на страни AC добијају се отсечци $AD = 7$ cm и $DC = 9$ cm. Наћи страну BC и однос $BD : BA$.

133) У троуглу чија је основица 30 cm а висина 10 cm уписан је равнокрако-правоугли троугао, тако да је хипотенуза паралелна основици а теме правог угла на основици. Наћи хипотенузу.

134) У троуглу ABC угао C је прав; $AC = 6$ cm, $BC = 12$ cm. На страни BC узета је тачка D, тако да је угао $ADC = 90^0 - \sphericalangle B$. На какве делове тачка D дели страну BC?

135) У троуглу ABC права CD је симетрала угла C; тачка E лежи на страни BC, тако да је $DE \parallel AC$. Одредити DE ако је $BC = a$, $AC = b$.

136) У троуглу ABC дуж BD је висина, AE симетрала угла A, EF нормала на AC. Одредити EF ако је $BD = 30$ cm и $AB : AC = 7 : 8$.

137) У правоуглом троуглу ABC катета $AC = 16$ dm, катета $BC = 12$ dm. Око темена B као око центра полупречником BC описан је круг и на њега повучена дирка паралелна хипотенузи (дирка и троугао леже на супротним странама од хипотенузе). Катета BC продужена је до пресека са дирком. Наћи за колико је продужена катета.

138) У троуглу ABC стране AC и BC су катете, CD је висина, $DE \parallel BC$. Наћи однос $AE : EC$ ако је $AC : CB = 4 : 5$.

139) Какав однос постоји између страна у кругу уписаног и око истог круга описаног равностраног троугла?

140) Око тачке O на средини основице BC равнокраког троугла ABC опише се полукруг, тако да додирује краке; дирка GH овог полукруга сече краке у тачкама G и H. Наћи однос између GB и HC.

141) У датом правоугаонику нормала повучена из темена на дијагоналу дели прав угао у размери $3 : 1$. Наћи угао између ове нормале и друге дијагонале.

142) Нормала спуштена из темена правоугаоника на дијагоналу дели је у размери $1 : 3$. Наћи дужину дијагонале ако је пресек дијагонала удаљен од веће стране за 2 m.

143) Наћи однос између паралелних страна трапеза ако дијагонале деле средњу линију на три једнака дела.

144) Права повучена кроз теме ромба отсеца изван њега на продушцима страна отсечке p и q. Наћи страну ромба.

145) У дати троугао уписати квадрат тако да једна његова страна лежи на једној страни троугла а два темена на другим двема странама троугла.

146) У правоуглом трапезу паралелне стране су 25 dm и 17 dm, већа непаралелна страна је 10 dm. Из средине ове стране повучена је на њу нормала до пресека са другом непаралелном страном. Наћи дужину ове нормале.

147) У трапезу $ABCD$ мања дијагонала AC нормална је на основицама AD и BC; $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD = 90^0$. Наћи непаралелне стране AB и CD.

148) Кроз теме C паралелограма $ABCD$ повучена је права CEF; она сече стране AB, AD или њихове продушке у тачкама E и F. Који однос постоји између BE, DF и страна паралелограма?

149) Одредити колико степени има лук ако нормала повучена у крајњој тачки одговарајуће тетиве дели други део кружне периферије у размери $5 : 2$.

150) Полупречник исечка је r а његова тетива a. Наћи полупречник круга уписаног у овом исечку.

151) У троуглу основице 12 cm, висине 9 cm уписан је полукруг. Пречник полукруга паралелан је са основицом троугла, крајње тачке његове налазе се на другим двема странама а полукруг додирује основицу. Одредити полупречник полукруга.

152) У равнокраком троуглу основице 18 cm и кракова 27 cm уписан је круг. Наћи раздаљину додирних тачака на крацима.

153) Из једне тачке повучене су дирка и сечица на круг, тако да међу собом граде прав угао. Дирка је 12 m, а тетива на сечици 10 m. Наћи полупречник круга.

154) Лук описан око темена правог угла полупречником једнаким мањој катети дели хипотенузу на отсечке од 98 cm и 527 cm (рачунајући од мање катете). Наћи катете.

155) AB је пречник једног круга, BC је дирка и CDA сечица. Наћи однос $CD:DA$ ако је дирка BC једнака полупречнику.

156) У кругу полупречника r уписан је равнокраки троугао код кога је збир основице и висине једнак пречнику круга. Одредити висину.

157) Полупречник круга је 8 dm, тетива AB је 12 dm. У тачки A повучена је дирка, из тачке B тетива BC паралелна са дирком. Наћи раздаљину између тетиве BC и дирке.

158) Одредити страну ромба ако круг који пролази кроз темена тупих углова и кроз једно теме оштрог угла дели већу дијагоналу на делове од 5 m и 1,4 m.

159) У кругу полупречника R повучене су са исте стране центра две паралелне тетиве AB и CD; њихове раздаљине од центра износе $\frac{3R}{5}$ и $\frac{4R}{5}$. Израчунати дужине ових тетива и углове трапеза $ABCD$.

160) Дат је круг. Наћи тачку M на продушку пречника DC, тако да тангента MT, повучена на овај круг, буде двапут већа од отсечка MC.

161) Равнокрако-правоугли троугао уписан је у кругу. Ако се опише други круг који додирује први круг и краке правог угла датог троугла, изразити полупречник овог круга као функцију полупречника првог круга.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

162) Конструисати четврту пропорционалу за дужи 3, 6, 5 и израчунати је.

163) На датој дужи $AB=a$ (21 cm), или на њеном продушку, наћи тачку O, тако да је $AO:OB=m:n$ (5:2). Испитај случај кад је $m=n$.

164) Дуж AB поделити по златном пресеку.

165) Кроз дату тачку M у једном углу повући праву, тако да њени делови између тачке M и кракова угла буду у размери 2 : 3.

166) Кроз дату тачку M у једном углу повући праву, тако да отсечци на крацима од темена до пресека са том правом стоје у размери 5 : 7.

167) Дат је угао XOY и тачка M. Повући кроз M праву, тако да њени делови између те тачке и кракова датог угла стоје у размери m : n.

168) Дат је угао XOY и тачка M. Кроз тачку M повући праву која сече краке угла у A и B, тако да је $OA:OB=m:n$.

169) На једној правој дате су две тачке M и N и ван праве тачка P. Кроз тачку P повући праву, тако да раздаљине тачака M и N од те праве стоје у размери 8:3.

170) За три дате дужи a, b, c наћи четврту пропорционалу помоћу правила о сечицама.

171) Дат је угао XOY. Наћи на OX тачку M и на OY тачку N, тако да је $OM:ON=m:n$ и да је $MN=l$.

172) Дато је пет отсечака на једној правој. Обележимо их са m, n, p, q, s. Наћи на правој отсечак x тако да је $x=\frac{m\cdot n\cdot p}{q\cdot s}$.

173) Нацртати две дужи кад се зна њихова разлика d и њихова размера m : n.

174) Дата је тачка M и права PQ. Одредити на правој тачке A и B, тако да MA и MB заклапају дати угао α и да је $MA:MB=m:n$.

175) Дате су три хармониске тачке; конструисати четврту.

176) Дате су на једној правој тачке A, B, C, D хармониски коњуговане. Кроз A и B повучене су две паралеле AP, BQ; затим су из произвољне тачке M на правој AP повучене дужи MC и MD које секу праву BQ у тачкама E и F. Доказати да је B средина дужи EF и из овога извести конструкцију хармониски коњугованих тачака C и D у односу на A и B.

177) Конструисати две дужи ако се зна њихова размера $p:q$ и њихова геометриска средина m.

178) На некој линији MN одредити тачку P, тако да њена растојања од двеју правих OX и OY стоје у размери $m:n$.

179) Кроз тачку M повући праву MN, тако да она прође кроз пресек двеју правих који се на слици не може добити.

180) Пресећи две полуправе MP у NQ једном правом XY, тако да отсечци MA и NB на полуправима стоје у размери $m:n$.

а) Права XY треба да је паралелна датој правој $X_1 Y_1$;

б) отсечак AB на правој XY треба да има одређену дужину l.

181) Дате су две праве x и y и тачка M. Са трећом правом z повући паралелу која сече праву x у тачки A, праву y у тачки B, тако да је $MA = MB$.

182) Три дате праве x, y, z полазе из једне тачке M. Из дате тачке N повући праву, тако да, ако су A, B, C тачке у којима права сече праве x, y, z, тачка C буде на средини између тачака A и B.

183) На једној правој дате су три узастопне тачке A, B, C. На отсечку BC наћи тачку P, тако да је $AP^2 = PB \cdot PC$.

184) Дате су три праве које се секу у једној тачки и једна тачка M. Кроз ову тачку повући трансверзалу, тако да њени отсечци између датих правих стоје у размери $m:n$.

185) Наћи прамен правих чија растојања од двеју датих тачака стоје у размери $m:n$.

186) Конструисати троугао кад се знају две стране и симетрала угла захваћеног овим странама.

187) Конструисати троугао кад се зна угао A, однос $AB : AC = m:n$ и дужина симетрале $AD = l$ угла A.

188) Конструисати троугао кад је дата страна a, висина h_a која јој одговара и однос других двеју страна $b:c = m:n$.

189) Конструисати равнокрак троугао ABC $(AB = AC)$ ако се зна угао на врху и збир основице и њене висине.

190) Конструисати троугао сличан датом троуглу ABC, тако да његов обим има одређену дужину $2\,l$.

191) Дат је троугао ABC. Наћи на страни AB тачку M, тако да, ако је MN паралелно са BC, између BM и MN постоји однос $m:n$, где су m и n две дате дужи.

192) Дат је троугао ABC. Повући праву, тако да растојања темена троугла од ње стоје у размери $1:3:5$.

193) Дат је равнострани троугао ABC. Из једне тачке на основици повући дужи MD и ME, тако да је њихов збир једнак одређеној дужини l, и да дужи повучене ма из које друге тачке на основици паралелно са MD и ME имају збир једнак l.

194) У равни троугла ABC повући праву, тако да растојања темена троугла од ове праве стоје у размери $m:n:p$.

195) Из тачке M на основици троугла ABC повући праву MNP која отсеца на странама троугла два једнака отсечка BN и CP.

196) У један троугао уписати други, тако да су му стране паралелне трима датим правима.

197) У дати троугао ABC уписати правоугаоник сличан датом правоугаонику.

198) У троугао ABC уписати квадрат.

199) У дати троугао ABC уписати правоугаоник чија је дијагонала паралелна датој правој CP.

200) У равнокраки троугао уписати правоугаоник, тако да обим равнокраког троугла над правоугаоником буде $\frac{2}{3}$ обима правоугаоника.

201) У дати четвороугао $ABCD$ уписати паралелограм чије су стране паралелне са двема датим правима.

202) У дати четвороугао уписати ромб, тако да његове стране буду паралелне са дијагоналама четвороугла.

203) Дат је троугао ABC. Пресећи стране AB и AC правом DE паралелно са BC, тако да дужи DF, EG повучене нормално на BC образују са DE и FG један квадрат.

204) Кружни лук поделити на два дела, тако да тетиве које им одговарају стоје у размери $m:n$.

205) Дат је круг и два полупречника OA и OB. Повући тетиву коју ова два полупречника деле на три једнака дела.

206) Кроз тачку M у једном кругу повући тетиву која је овом тачком подељена у размери $m:n$.

207) Дат је круг O и тачка M. Повући из M сечицу на круг, тако да је њена тетива једнака отсечку ван круга.

208) У дати круг уписати троугао сличан датом троуглу.

209) Дате су три тачке M, N, P и један круг. У овај круг уписати троугао ABC, тако да свака страна пролази кроз једну од датих тачака.

210) Дате су две тачке G и E, круг и права NP. Одредити на овом кругу тачку B, тако да праве BG и BEсвојим пресечним тачкама C и D са датим кругом дају тетиву $CD \parallel NP$.

211) Дата је дуж MN и један круг. Наћи на кругу тачку P, тако да дужи које је спајају са тачкама M и N дају са кругом два пресека A и B, између којих је тетива AB паралелна са MN (Бурдон[1]).

212) На дати лук AB повући тангенту PTQ ограничену правцима полупречника OAP и OBQ, тако да отсечак PT буде трипут већи од TQ.

213) На једном кругу дате су две тачке M и N, једна права XY и на њој тачка P. Наћи на кругу тачку A, тако да продужене тетиве AM и AN отсеку на правој XY дуж CD и да дужи CP и DP стоје у размери $m:n$.

214) Кроз дату тачку M у равни круга O повући сечицу MS, тако да растојања MR и MS, дате тачке од два пресека са кругом буду у датој размери, например $2:5$.

215) На продуженој страни BC неког троугла ABC наћи тачку P, тако да PA буде средња геометриска пропорционала између PB и PC.

216) Конструисати правоугли троугао кад је позната хипотенуза и размера катета $m:n$.

217) Конструисати равнокраки троугао кад је дат описани круг и збир основице и њене висине.

218) Конструисати троугао кад се знају дужине његових висина.

219) Конструисати троугао сличан датом троуглу, тако да му се темена налазе на трима датим паралелним правима x, y, z.

220) Конструисати троугао ABC кад се знају: страна BC, тежишна линија која јој одговара и разлика δ налеглих углова

221) Конструисати троугао ABC кад су дате тачке M, N, P у којима продужене симетрале углова секу описани круг око траженог троугла.

222) Дат је кружни лук ACB. Повући тетиву DE паралелну тетиви AB, тако да нормале DF и EG, повучене на AB из њених крајњих тачака, образују квадрат.

223) Дата су два круга и тачка M. Повући два у истом смеру паралелна полупречника O_1A и O_2B, тако да је $MA = MB$.

224) Кроз пресек два круга повући сечицу, тако да тетива на њој у једном кругу буде двапут већа од тетиве у другом кругу.

225) Дата су два круга O_1 и O_2 који се секу. Кроз једну пресечну тачку A повући сечицу, тако да тетиве које кругови на њој отсецају стоје у размери $m:n$.

226) Кроз пресек два круга повући сечицу, тако да средишни углови који одговарају њеним тетивама буду једнаки.

227) Око датог круга описати троугао чије стране стоје у размери $m:n:p$.

228) У дати круг уписати троугао чија су два угла α и β позната.

229) У дати круг уписати правоугаоник чије стране стоје у размери $3:5$.

230) Уписати у круг правоугаоник сличан датом правоугаонику.

231) У дати полукруг уписати квадрат.

232) Дат је круг полупречника r; у њему је повучена тетива $AB = t$. Одредити на кругу тачку M, тако да је $AM:BM = m:n$.

233) Дат је круг O и изван њега тачка M. Повући кроз M сечицу MAB, тако да круг пречника AB додирује праву MO.

234) Из тачке M ван круга повући сечицу MAB, тако да тетива AB буде геометриска средина између отсечака MA и MB.

235) Кроз средину кружног лука повући праву, тако да њен отсечак између тетиве која одговара луку и другог дела круга има одређену дужину.

---

[1] Бурдон (Bourdon) (1808—1884), француски инжењер и индустријалац, проналазач манометра и металног барометра.

236) Дат је кружни билијарски сто и билијарска лопта стављена у тачку M. У ком правцу треба управити лопту да она поново прође кроз тачку M, пошто се двапут узастопце одбије?

237) Дате су две праве које се секу и између њих тачка M. Описати круг који пролази кроз тачку M и додирује две дате праве.

238) Описати круг који пролази кроз две дате тачке и додирује дату праву.

239) Описати круг који пролази кроз две дате тачке и додирује дати круг.

240) Описати круг који додирује дати круг O, једну дату праву PQ и пролази кроз тачку M.

241) Описати круг који додирује два дата круга и пролази кроз дату тачку.

242) Описати круг који додирује две дате праве и један дати круг.

243) Описати круг који додирује једну дату праву и два дата круга.

244) Описати круг који додирује три дата круга O_1, O_2, O_3 (Аполоније[1]).

245) Датим полупречником r описати круг и пресећи краке датог угла, тако да се у пресецима налазе темена равнокраког трапеза чије основице стоје у датој размери.

246) Кроз дате тачке M и N описати круг, тако да он полови обим датог круга O.

247) Дате су три тачке M, N, P. Описати круг, тако да пролази кроз две дате тачке M и N, а да тангента повучена из треће тачке P има одређену дужину l.

248) Описати круг, тако да пролази кроз две дате тачке M и N и да дати круг P сече под правим углом.

249) За дате кругове O_1 и O_2 одредити радикалну осу.

250) Описати круг, тако да тангенте повучене из трију датих тачака M, N, P имају одређене дужине m, n, p.

---

[1] Аполоније, грчки геометар и астроном, Архимедов ученик.

г) ГЕОМЕТРИСКА МЕСТА

251) Шта је геометриско место тачака чија растојања од двеју датих тачака M и N стоје у размери $m : n$?

252) Две праве OX и OY секу се под правим углом у тачки O. Из покретне тачке P спуштене су нормале PM и PN на OX и OY. Наћи геометриско место тачке P ако је $PM = 2 \cdot PN$.

253) У датом углу одредити геометриско место тачака чија растојања од кракова стоје у размери $m : n$.

254) Одредити у троуглу тачку, тако да њена растојања од троуглових страна стоје у размери $m : n : p$.

255) Наћи геометриско место тачака код којих збир квадрата растојања од кракова правог угла износи a^2.

256) На једној правој дата је дуж MN и тачка C изван дужи MN; затим права $XY \perp MN$ у тачки N. Ако је P тачка која се креће по правој XY, узме се на CP тачка Q са исте стране са које је и P у односу на C, и то тако да је $CP \cdot CQ = CN \cdot CM$. Шта је геометриско место тачке Q?

257) Две праве OP и OQ пресечене су низом паралелних трансверзала. Шта је геометриско место тачака M узетих на овим трансверзалама тако да оне деле по датој размери отсечке трансверзала између OP и OQ?

258) Дате су две праве OP и OQ, тачка M на једној од њих и тачка N на другој. Ако се почев од M и N преносе на праве једнаке дужи, најпре $MA = NB$, затим $AC = BD$ итд., шта је геометриско место средина дужи $MN, AB, CD, ..$?

259) Темена A и B једног троугла су стална, теме C описује круг чији је центар у A. Наћи геометриско место подножја симетрале угла A.

260) Кад се један троугао ABC обрће у својој равни око свог утврђеног темена A, тако да теме B описује круг а троугао остаје сличан самом себи, шта је геометриско место трећег темена C?

261) Теме C правог угла правоуглог троугла креће се по кругу описаном над хипотенузом AB као над пречником. Ако се једна катета BC продужи за своју дужину преко покретног темена и

крајња тачка D споји са центром O, шта је геометриско место пресека дужи OD са другом катетом?

262) На хипотенузи AB правоуглог троугла ABC дигне се нормала DEF која сече BC у тачки E и AC у тачки F. На овој нормали узме се дуж DG, тако да је $DG^2 = DE \cdot DF$. Шта је геометриско место тачке G?

263) Шта је геометриско место пресечних тачака дијагонала свих правоугаоника уписаних у троуглу ABC ако им једна страна лежи на страни BC?

264) Дат је четвороугао $ABCD$; његове супротне стране AB и CD секу се продужене у тачки E. Страна AB је стална а CD се обрће око тачке E. Шта је геометриско место тачке F, пресечне тачке других двеју страна AD и BC?

265) Дате су дужине паралелних страна и дужина и положај једне непаралелне стране трапеза. Шта је геометриско место пресека дијагонала а шта средине друге непаралелне стране?

266) На једној правој дате су три тачке A, B, C, и то C изван дужи AB. Шта је геометриско место додирних тачака тангената повучених из тачке C на све кругове који пролазе кроз тачке A и B?

267) Ако се спајају разне тачке M на једном кругу са једном сталном тачком C и ако се на свакој таквој правој повуче CN, тако да је $CM : CN = m : n$, шта је геометриско место тачака N?

§ 10. Једнакост површина и мерење површина

А) ТЕОРЕМЕ

1) Два троугла једнаких површина имају једну страну заједничку а налазе се на супротним странама од ње. Показати да је дуж која спаја незаједничка темена преполовљена заједничком страном или њеним продушком.

2) Два троугла ABC и DEF који имају два угла суплементна ($\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^0$) и стране које захватају ове углове једнаке ($AB = DE$, $AC = DF$) једнаки су.

3) Дат је троугао ABC чије су стране $BC = a, CA = b, AB = c$ и нека тачка O чије су раздаљине од страна BC, CA, AB једнаке m, n, p. Доказати да је $am + bn + cp = 2P$, где је P површина троугла.

4) R и Q су средине страна AB и AC троугла ABC. Ако се BQ и CR секу у тачки X, доказати да је троугао BXC једнак четвороуглу $AQXR$.

5) Кад права која је паралелна једној страни неког троугла полови троугао, тада је горњи отсечак ма које пресечене стране геометриска средина између те стране и њене половине.

6) Дата су два равнокрака троугла ABC и DBC са истом основицом BC. Доказати да је површина DBC већа од двоструке површине ABC ако је $\sphericalangle A = 2\sphericalangle D$.

7) Да би обим и површина једног троугла били изражени истим бројем, потребно је и довољно да полупречник уписаног круга буде 2.

8) Дат је троугао ABC и тачка M на страни BC. Кроз темена су повучене паралеле са једном датом правом XY. Прва од тих паралела повучена кроз A сече страну BC у D, друге две повучене кроз B и C секу праву AM у E и F. Доказати да је троугао DEF једнак троуглу ABC.

9) Дат је троугао ABC. Страна BC подељена је на три једнака дела: $BM = MN = NC$. Ако је P нека тачка на MN, повуче се AP и кроз M и N паралеле са AP. Оне секу AB у D и AC у E. Доказати да праве PD и PE деле троугао ABC на три једнака дела.

10) Дат је троугао ABC и права XY која га не сече. На праву XY спуштене су из темена троугла нормале AD, BE, CF; затим су спојене средине M, N, P ових нормала. Доказати да је троугао MNP половина троугла ABC.

11) Дат је троугао ABC. На његовим странама BC, CA, AB узете су три тачке D, E, F, тако да су делови AE, BF, CD трећине страна AC, BA, CB. Доказати да је површина троугла DEF трећина површине троугла ABC.

12) Дат је троугао ABC и у њему тачка M. Из ове тачке повучене су полуправе нормално на стране и на сваку од њих пренесена је дуж једнака одговарајућој страни. Доказати да је

троугао *DEF*, чија су темена крајње тачке ових пренесених дужи, трипут већи од троугла *ABC*.

13) Из тачке *D* на страни *AB* троугла *ABC* повучена је дуж $DE \parallel BC$ и тачка *D* спојена са теменом *C*. Доказати да је површина троугла *ADC* геометриска средина између површина сличних троуглова *ABC* и *ADE*.

14) Дат је троугао *ABC*, његов ортоцентар *O* и полукруг пречника *BC*, који сече висину *AD* у тачки *E*. Доказати да је површина троугла *BCE* геометриска средина између површина троуглова *BCA* и *BCO*.

15) У оштроуглом троуглу *ABC* повучене су све три висине, које се секу у тачки *G*. Над *BC* конструисан је правоугли троугао *BCH* чије се теме правог угла *H* налази на продушку висине *AD*. Доказати да је површина троугла *BCH* средња геометриска пропорционала између површине *ABC* и *BCG*.

16) Ако се стране једног троугла *ABC* продуже свака за своју дужину, идући по обиму троугла *ABC* ; зек у истом смислу, тада је троугао чија су темена крајње тачке продужака седам пута већи од датог троугла.

17) Кад се над странама правоуглог троугла конструишу квадрати и кад се споје редом спољашња темена квадрата, онда имамо овај однос:

а) сваки од три тако добијена троугла једнак је првом троуглу;

б) збир квадрата страна тако добијеног шестоугла једнак је осмоструком квадрату хипотенузе.

18) Кад се над странама ма каквог троугла нацртају квадрати и споје крајње тачке ма које две стране квадрата које полазе из једног темена троугла, добијени троугао биће једнак са датим троуглом.

19) Површина трапеза једнака је производу једне непаралелне стране и њеног растојања од средине друге непаралелне стране.

20) Троугли чије су основице непаралелне стране трапеза а супротна се темена налазе у пресеку дијагонала једнаки су.

21) Непаралалелне стране трапеза *ABCD* секу се у тачки *P*. Доказати да су троугли *PAC* и *PBD* једнаки.

22) Дат је равнокраки трапез *ABCD* чије су паралелне стране *AB* и *CD* а висина *CE*. Доказати да је површина трапеза двапут већа од површине правоуглог троугла *ACE*.

23) У трапезу су повучене дијагонале. Доказати да је троугао чија је основица једна непаралелна страна а супротно теме пресек дијагонала геометриска средина између троуглова чије су основице паралелне стране а супротна су им темена у пресеку дијагонала.

24) Нека су *a* и *b* стране квадрата једнаких са троуглима чије су основице паралелне стране трапеза а супротна темена у пресеку дијагонала. Доказати да је трапез једнак квадрату стране $(a+b)$.

25) *ABCD* је паралелограм, а *X* и *Y* су средине страна *AD* и *BC*. Ако је *Z* ма која тачка на *XY* или на продушку *XY*, покажи да је троугао *AZB* четвртина паралелограма *ABCD*.

26) Ако је *ABCD* паралелограм, а *X* и *Y* ма које тачке стране *DC* и *AD*, показати да су троугли *AXB* и да *BYC* једнаки.

27) *ABCD* је паралелограм, а *P* једна тачка у њему. Показати да је збир троуглова *PAB* и *PCD* једнак половини паралелограма.

28) *ABCD* је паралелограм; изван угла *BAD* узета је ма где тачка *O* и спојена са теменима *A*, *B*, *C*, *D*. Покажи да је троугао *OAC* једнак збиру троуглова *OAB* и *OAD*.

29) Ако се ма кроз коју тачку на дијагонали паралелограма повуку паралеле са странама, тако добијени паралелограми су једнаки.

30) Ако се темена једног паралелограма споје са једном тачком у паралелограму, тада је збир два троугла чије су основице две супротне стране једнак збиру друга два.

31) Кад се ма која тачка на једној дијагонали паралелограма споји са теменима, паралелограм је подељен на четири троугла, од којих су два и два једнака.

32) Ако је правоугаоник једнак квадрату, његов обим је већи од обима квадрата.

33) Ако се свака страна правоугаоника продужи за њену дужину, и то крећући се по обиму правоугаоника увек у истом смислу, тада су крајње тачке ових продужака темена паралелограма чија је површина пет пута већа од површине датог правоугаоника.

34) Дат је квадрат $ABCD$; E, F, G, H су средине страна AB, BC, CD, DA. Доказати да праве DE, AF, BG, CH одређују квадрат чија је површина пети део површине првог квадрата.

35) Кад се средине страна ма каквог четвороугла редом споје, добија се паралелограм који је по површини једнак са половином датог четвороугла.

36) Површина четвороугла чије се дијагонале секу под углом од 30^0 једнак је четвртини производа дијагонала.

37) Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ и у њему тачка M. Из ове тачке повучене су нормале на стране и на њих пренете дужи једнаке одговарајућим странама. Доказати да је четвороугао $EFGH$, чија су темена крајње тачке пренесених дужи, двапут већи од четвороугла $ABCD$.

38) Дат је четвороугао $ABCD$ и права XY. Кроз темена овог четвороугла повучене су паралеле са XY. Паралеле из A и C секу дијагоналу BD у тачкама E и F, а паралеле из B и D секу дијагоналу AC у тачкама G и H. Доказати да је четвороугао $EHFG$ једнак четвороуглу $ABCD$.

39) Дат је четвороугао $ABCD$. Кроз средину M дијагонале BD повучена је паралела са другом дијагоналом AC. Нека је N тачка у којој та паралела сече страну AB. Доказати да права CN дели четвороугао на два једнака дела.

40) Кад се над странама каквог четвороугла нацртају квадрати, па се споје крајње тачке оних двеју страна квадрата које полазе из једног темена четвороугла, тада је збир ма која два троугла чије се по једно теме налази на супротним теменима четвороугла једнак датом четвороуглу.

41) Правилни шестоугао се може поделити на три једнака ромба. Доказати.

42) Свака страна правилног шестоугла продужена је за своју дужину у истом смислу. Крајње тачке ових продужака су спојене редом. Доказати да је на тај начин добијени шестоугао правилан. Колико пута је његова површина већа од површине датог шестоугла?

43) Површина правилног уписаног шестоугла је $\frac{3}{4}$ површине правилног шестоугла описаног око истог круга.

44) Површина правилног уписаног осмоугла једнака је површини оног правоугаоника чије су стране једнаке странама квадрата уписаног у исти круг и описаног око истог круга.

45) Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код A. Ако се конструишу три слична полигона чије су хомологе стране BC, CA и AB, површина полигона P конструисаног на хипотенузи једнака је збиру површина полигона K и L конструисаних над катетама.

46) У полигону једнаких страна збир раздаљина једне тачке од страна овога полигона је сталан, тј. независан од положаја тачке.

47) Површина правилног шестоугла уписаног у датом кругу средња је геометриска пропорционала између површина равностраних троуглова од којих је један уписан у датом кругу а други описан око истог круга.

48) Правоугли троугао једнак је правоугаонику чије су стране отсечци хипотенузе које на њој гради додирна тачка уписаног круга.

49) Дат је троугао и описан круг. Сваки полупречник који полази од темена продужен је до пресека са кругом. Ако се споје две и две крајње тачке трију тако добивених пречника, добија се шестоугао. Доказати да је шестоугао двапут већи од троугла.

50) Дат је круг са центром у O, две тетиве AB и CD, од којих је AB страна уписаног равностраног троугла а CD страна уписаног правилног шестоугла. Доказати да су троугли ABO и CDO једнаки.

51) Кроз тачку M у кругу центра O повучене су две тетиве AB и CD нормално једна на другу. Доказати да су троугли OAC и OBD једнаки.

52) Ако се ма из које тачке у n-тостраном правилном полигону спусте нормале на стране, тада је збир ових нормала једнак n-тоструком полупречнику уписаног круга у полигону.

53) Пошавши од једне тачке на кругу пренет је лук AB од 90^0, затим у истом смислу лук AC од 45^0; повучена је тетива CB и са њом паралелна тетива AD. Доказати да је део круга између ове две тетиве четвртина круга.

54) Пошавши од једне тачке на кругу, пренет је лук AB од 90^0, затим у истом смислу лук AC од 60^0; повучена је тетива CB и с њом паралелна тетива AD. Доказати да је део круга између ове две тетиве трећина круга.

55) У полукругу ABC уписан је равнокрако-правоугли троугао чија је основица DE паралелна пречнику AB. Над DE као над пречником описан је круг. Полумесец $DCEF$ једнак је троуглу DEO. Криволиниска фигура $AOGD+OBEH$ једнака је троуглу DEO.

56) На луку AB квадранта чији се центар налази у O узете су две тачке M и N подједнако удаљене од средине лука C; затим су повучене нормале MP и NQ на полупречник OA. Доказати да је фигура $MPQN$ једнака исечку MON.

57) Око темена правог угла равнокрако-правоуглог троугла описан је круг катетом као полупречником; над хипотенузом као над пречником описан је други круг. Доказати да је површина мањег полумесеца једнака површини троугла.

58) Над странама равностраног троугла уписаног у кругу описана су као над пречницима са спољашње стране три полукруга. Доказати да је збир површина трију полумесеца већи од површине троугла за осмину површине круга.

59) Дат је квадрант ACB; његов полупречник $OA=OB=R$; у њему је над OA као над пречником описан полукруг $ODMA$ и над OB полукруг $OEMB$ (оба са унутрашње стране квадранта); M је њихова пресечна тачка. Доказати:

а) да тачке A, B, M леже на једној правој;

б) да су површине $ACBMA$, $ODMEO$ једнаке;

в) да су површине $OEMAO$, $ODMBO$ једнаке четвртини квадрата стране OA.

60) Два једнака круга додирују се споља у тачки T; из центара O_1 и O_2 повучена су два у истом смислу паралелна полупречника O_1A, O_2B; са спољашње стране кругова описан је полукруг над AB као над пречником. Доказати да је површина између полукруга и лукова TA и TB једнака површини паралелограма O_1O_2BA.

61) Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код A. Над хипотенузом BC као над пречником описан је споља полукруг а са унутрашње стране описани су полукругови над катетама AB и AC као над пречницима. Заједнички део ова два полукруга повећан површином троугла ABC једнак је делу првог полукруга који је изван друга два полукруга.

62) Кад се пречник AB неког круга подели тачкама C и D на три једнака дела, тако да је $AC=CD=DB$, па се над AC и AD с једне и над BD и BC с друге стране пречника опишу полукругови, тада је кружна површина подељена на три једнака дела.

63) Кад се пречник над којим је описан полукруг ма којом тачком подели на два дела, па се над тим деловима опишу полукругови, тада је површина између тих полукругова једнака површини оног круга чији је пречник нормала повучена у деоној тачки на пречник датог полукруга до пресека полукруга (Архимедов[1] срп).

64) Дат је троугао ABC и над BC са спољашње стране лук BDC. Средина лука D спојена је са теменом A, затим је кроз E, средину стране BC, повучена паралела са AD. Ако је F тачка у којој ова паралела сече страну AB, доказати да права DF дели површину $ABDCA$ на два једнака дела.

65) Површина кружног прстена једнака је површини круга чији је пречник она тетива већег круга која је тангента мањег круга.

66) Два се круга додирују изнутра. Кроз тачку додира повучена је сечица. Доказати да су површине сегмената добијених повлачењем сечице, а са исте стране сечице, пропорционалне са квадратима полупречника ова два круга.

---

[1] Архимед (287—212), један од најславнијих научника свих времена.

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

67) Израчунати површину троугла ABC ако је $AC=b$, $AB=c$, $\sphericalangle A=45^0$.

68) Израчунати површину троугла ABC ако је $AC=b$, $AB=c$, $\sphericalangle A=30^0$.

69) Израчунати површину троугла ABC ако је $AC=b$, $AB=c$, $\sphericalangle A=60^0$.

70) Израчунати површину троугла ABC ако је $AC=b$, $AB=c$, $\sphericalangle A=150^0$.

71) Стране троугла ABC износе 3, 4, 5. Колике су стране њему сличног троугла чији су обим и површина једнаки?

72) Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код A; стране су му $AB=4, AC=3$. Над AB као над основицом конструише се, са исте стране са које је теме C, равнокраки троугао ABF једнак троуглу ABC. Израчунати заједничку површину ова два троугла.

73) Дат је равнокрако-правоугли троугао ABC са правим углом код A. AB се подели на n једнаких делова и кроз деоне тачке повуку паралеле са AC. Израчунати површине делова на које је подељен троугао ABC и из тога извести да је збир n првих непарних бројева једнак n^2.

74) Дат је равнострани троугао ABC стране a. Из неке тачке D на страни AB $(BD=x)$ повуче се нормала DE на страну BC, из тачке E нормала EF на страну CA, и из тачке F нормала FG на AB. Изразити површину четвороугла $DEFG$ као функцију од x и a.

75) Површина правоуглог троугла преполовљена је правом која је нормална на хипотенузи. Наћи растојање ове праве од темена мањег оштрог угла ако је већа катета 20 m.

76) Страна једног троугла подељена је у размери $2:3:4$ и из деоних тачака повучене су паралеле са другом страном. У којој је размери подељена површина троугла?

77) Троугао и у њему уписани ромб имају заједнички угао. Стране троугла које захватају тај угао стоје у размери $m:n$. Наћи однос површине ромба и површине троугла.

78) Израчунати стране правоугаоника ако је њихова размера $4:5$ а површина правоугаоника износи 980 m^2.

79) Стране једног правоугаоника су a и b. Наћи стране њему сличног правоугаоника чији су обим и површина једнаки. Примена за $a=5$, $b=2$.

80) Дат је правоугаоник $ABCD$. На дијагонали AC узета је тачка M, тако да је $AM=\frac{AC}{6}$, и кроз тачку M повучена паралела са дијагоналом BD. Тачке пресека ове паралеле са странама AB и AD су E и F. Изразити површине троуглова BCE, BCF и четвороугла $AECF$ као функције површине правоугаоника $ABCD$.

81) Правоугаоник и паралелограм имају једнаке стране. Наћи оштар угао паралелограма ако је његова површина једнака половини површине правоугаоника.

82) У правоуглом троуглу уписан је квадрат, тако да једна његова страна лежи на хипотенузи. Делови хипотенузе изван стране квадрата износе m и n. Наћи површину тога квадрата.

83) Паралелне стране трапеза су 6 cm и 3 cm а висина 4 cm. Израчунати површине четири троугла на које је трапез подељен дијагоналама.

84) У троуглу основице b и висине h повучена је паралела са b. Наћи дужину ове паралеле и њено растојање од темена под условом да површина добијеног трапеза буде геометриска средина између датог троугла и малог троугла.

85) На једној правој дате су три узастопне тачке A, B, C; $AB=a$, $BC=b$. Над AB и BC као над странама конструисани су са исте стране праве равнострани троугли ABF и BCG. Израчунати површину четвороугла $AFGC$.

86) Дата су два конвексна полигона, један у другом, тако да су им стране паралелне и да је раздаљина између страна иста. Ако су њихови обими $2S$ и $2s$ а раздаљина између паралелних страна d, израчунати површину између њихових обима.

87) Дат је троугао ABC у коме је угао $A=120^0$, $AC=a$, $AB=2a$. Над странама AB и AC са спољашње стране троугла конструисани су квадрати $ABMN$ и $ACPQ$. Доказати да се тачке

P, Q, N налазе на једној правој и израчунати обим и површину петоугла $BCPNM$.

88) Из тачке A ван круга повучена је дирка AB и сечица ACD. Наћи површину троугла CBD ако је $AC:AB = 2:3$ а површина $ABC = 20$ dm².

89) У тачки A датога круга повучена је дирка. Из једне тачке P на тој дирки повучена је сечица кроз центар круга а у D, другој пресечној тачки са кругом, повучена је опет дирка до пресека E са првом дирком. Наћи AP, тако да је површина троугла AOP једнака површини четвороугла $AODE$.

90) Око сваког темена квадрата описан је са унутрашње стране лук полупречником који је једнак половини стране. У средини је уписан квадрат, тако да додирује сва четири лука. Наћи његову површину.

91) Два полупречника OA и OB круга граде угао од 60^0. Из A је повучена нормала AN на тангенту повучену у тачки B. Израчунати површину између нормале AN, тангенте BN и лука AB.

92) Над страном BC равностраног троугла ABC као над пречником са исте стране са које је и троугао описан је полукруг. Израчунати површину добијених отсечака.

93) Израчунати заједничку површину двају једнаких кругова чија је централна раздаљина једнака њиховом полупречнику.

94) Око сваког темена равностраног троугла описан је круг полупречником једнаким страни троугла; тако се добија равнострани криволиниски троугао. Изразити његову површину као функцију стране a датог равностраног троугла.

95) Из тачке A повучене су дирке AT и AT_1 на круг O полупречника R. Ако је угао $TAT_1 = 60^0$, наћи површину између дирки и круга.

96) Дате су две међусобно нормалне праве OX и OY. На правој OX дата је тачка A, тако да је $OA = a$ (позитивно), а на правој OY тачка B, тако да је $OB = b$ (позитивно). Затим се на правима OX и OY уоче још две тачке M и N, тако да је $AM = x$ и $BN = x$. Тачке M и N се споје.

а) Изразити дуж $MN = m$ као функцију од a, b, x; исто тако и површину P четвороугла $ABNM$. Наћи однос независан од x који постоји између m и P.

б) Одредити x тако да m има одређену позитивну вредност. Дискутовати.

в) Одредити x тако да P има дату позитивну вредност. Дискутовати.

97) Дат је полукруг пречника $2r$. У крајњој тачки B пречника AOB повучена је тангента, на њу пренесена дуж $BC = x$; из тачке C је повучена друга тангента, која у тачки D сече нормалу повучену на пречник у центру полукруга.

а) Показати да је $OD = DC$.

б) Изразити обим и површину трапеза $OBCD$ као функцију x и r.

в) Одредити x тако да површина овог трапеза буде једнака некој датој површини k^2. Дискутовати.

98) Дат је круг полупречника r. Кроз центар O пролази права d. У кругу је повучена тетива AB нормално на праву d. Ако са a обележимо дужину тетиве, ставимо да је $x = \frac{a}{2r}$. Опишимо око круга равнокрак троугао $A_1O_1B_1$ $(A_1O_1 = B_1O_1)$, тако да је $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1O_1B_1$.

а) Изразити дужину OO_1 као функцију од полупречника r и величине x.

б) Изразити стране троугла $A_1O_1B_1$ као функцију од r и x.

в) Наћи однос који постоји између P, P_1 и P_2, где је P површина правоугаоника, чија је основица A_1B_1 а висина једнака висини троугла AOB повученој из O, P_1 и P_2 површине троуглова AOB и $A_1O_1B_1$.

г) Однос $\frac{P_1 \cdot r^2}{P^2 \cdot a^2}$ претставити као функцију од x и проучити њене промене.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

99) Дат је угао XOY. На OX пренето је $ON = n$, а на OY пренето је $OM = m$. Упоређујући површине троуглова POM и PON, наћи геометриско место тачака P у овом углу, тако да је однос њихових раздаљина од кракова OX и OY једнак $m:n$.

100) Из једне тачке на краку равнокраког троугла повући праву која сече основицу и продужени други крак, тако да се добије троугао једнак датом троуглу.

101) У троуглу ABC наћи тачку M, тако да су троугли MAB, MBC, MCA једнаки.

102) У троуглу ABC наћи тачку M, тако да површине троуглова MAB, MBC, MCA буду пропорционалне трима датим дужинама.

103) Конструисати троугао кад се знају његови углови и површина k^2.

104) Конструисати троугао сличан датом троуглу и једнак датом квадрату.

105) Подели дуж на два дела, тако да квадрат над једним делом буде двапут већи од квадрата над другим делом.

106) Подели дуж на два дела, тако да збир квадрата над овим деловима буде једнак једном датом квадрату.

107) Конструисати квадрат једнак датом троуглу.

108) Конструисати слику која даје стране квадрата двапут, трипут, четири пута, . . . већих од датог квадрата.

109) Наћи на дијагонали AC паралелограма $ABCD$ тачку M, тако да спајањем ове тачке са три темена A, B, D поделимо паралелограм на три једнака дела.

110) У дати троугао уписати правоугаоник тако, да је он једнак троуглу над њим.

111) У квадрат уписати други квадрат дате површине. Испитати промене уписаног квадрата.

112) У круг уписати правоугаоник површине k^2.

113) кроз две дате тачке A и D, узете на једном краку угла M, повући две паралеле до пресека са другим краком, тако да добивени трапез има дату површину m^2.

114) Кроз две дате тачке A и D, узете на једном краку угла M, повући две паралеле до пресека са другим краком, тако да добијени трапез има: а) одређену висину h; б) на другом краку страну одређене дужине d.

115) Кроз две тачке A и D, узете на обиму једног круга, повући две паралелне тетиве, тако да трапез коме су ове две тетиве основице има одређену површину m^2.

116) Око тачке O на симетрали угла A описати круг, тако да збир троуглова чија су темена у O а супротне стране тетиве које круг отсеца на крацима угла има дату површину k^2.

117) Око тачке O, узете на симетрали угла M, описати круг, тако да трапез чија су темена у пресечним тачкама круга и кракова угла има одређену површину m^2.

118) Конструисати полигон X сличан датом полигону M а једнак са датим полигоном N.

119) Кроз тачку M у кругу O повући тетиву AB, тако да је исечак над луком који одговара тетиви једнак $\frac{5}{12}$ целог круга

г) ПОДЕЛА И ПРЕТВАРАЊЕ СЛИКА

120) Поделити троугао на два једнака дела правом нормалном на једној страни.

121) Поделити троугао на два једнака дела правом која пролази кроз једну тачку узету на једној његовој страни.

122) Кроз тачку M на висини повученој из врха равнокраког троугла повући праву која се не поклапа са висином а која дели троугао на два једнака дела.

123) Троугао ABC поделити на два једнака дела правом паралелном са једном његовом страном.

124) Поделити троугао ABC на три дела пропорционална трима датим дужима.

125) Отсеци од једног троугла четвртину, петину, шестину, или ма који део, правом која пролази кроз дату тачку на једној страни.

126) Правом паралелном датој правој поделити паралелограм на два једнака дела.

127) Поделити четвороугао на два једнака дела правом повученом кроз једно теме.

128) Поделити трапез на три једнака дела правима које секу паралелне стране.

129) Правом паралелном са основицама поделити трапез на два дела пропорционална датим дужинама.

130) Дати круг поделити концентричним кругом на два једнака дела.

131) Поделити круг на три једнака дела круговима који га додирују у истој тачки.

132) Концентричним круговима поделити дати круг на три дела пропорционална дужинама m, n, p.

133) Отсеци од четвороугла трећину, четвртину, петину, или ма који део, правом повученом кроз једно теме.

134) Дати правоугаоник претвори у други мање основице.

135) Дати паралелограм претвори у други са датом висином.

136) Над дужи од 5 cm нацртај правоугаоник једнак равностраном троуглу стране 6 cm.

137) Троугао ABC претвори у други, тако да му једна страна лежи на правој BC а једно теме у тачки X.

138) Четвороугао $ABCD$ претвори у троугао чија је једна страна на правој AB а једно теме X на страни DC.

139) Дат је правилан шестоугао $ABCDEF$. Наћи на обиму тачку X, тако да AX подели површину шестоугла на два дела од којих је један трећина другог.

§ 11. Однос величина и израчунавања величина код равних слика

а) ТЕОРЕМЕ

1) Да би се одредила геометриска средина за две дате дужи a и b, може се извести овај поступак: На једној правој узме се дуж MN једнака мањој од датих дужи, напр. b; затим се узме MNP и $MNQ = a$. Из тачака P и Q полупречником a опишу се луци, који се секу у O. Дуж $OM = ON$ је тражена средња геометриска пропорционала.* Доказати.

2) Доказати да је збир квадрата двеју страна једног троугла једнак удвојеном квадрату тежишне линије која одговара трећој страни увећаном за половину квадрата треће стране.

3) Дат је троугао ABC. Ако је T пресек тежишних линија, доказати да је $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\ (TA^2 + TB^2 + TC^2)$.

4) Између страна једног троугла ABC постоји однос $b^2 + c^2 = 2a^2$. Израчунати тежишне линије; затим показати да је троугао чије су стране ове тежишне линије сличан датом троуглу.

5) У равнокраком троуглу ABC чија је основица BC спусти се нормала BD на крак AC. Доказати да је збир квадрата трију страна троугла једнак $CD^2 + 2 \cdot AD^2 + 3 \cdot BD^2$.

6) Катете правоуглог троугла су a и b. Доказати да је симетрала правог угла једнака $\frac{a\,b\,\sqrt{2}}{a+b}$.

7) ABC је правоугли троугао са правим углом код A. Повучена је једна права која сече страну AB у P а страну AC у Q. Ако се споји теме B са тачком Q и теме C са тачком P, показати да је $BQ^2 + PC^2 = BC^2 + PQ^2$.

8) Дате су две дужи a и b $(a > b)$. Ако се конструише правоугли троугао чија је једна катета полуразлика ових дужи $\frac{a-b}{2}$ а друга катета геометриска средина истих дужи $\sqrt{ab}$, хипотенуза је једнака њиховој аритметичкој средини $\frac{a+b}{2}$.

9) Правоугли троугао ABC са правим углом код A има стране $a, b\ c$; висина која одговара хипотенузи је h. Доказати да правоугли троугао чије су катете $b+c$ и h има за хипотенузу $a+h$.

10) Доказати да је у правоуглом троуглу збир квадрата трију тежишних линија једнак трострукој половини квадрата хипотенузе.

---

* Ову конструкцију објавио је енглески геометар Валис (Wallis) (1616—1703), а извео је Тома Строд (Thomas Strode). Она је згоднија од других јер захтева мање графичких операција.

11) У правоуглом троуглу четвороструки збир квадрата над тежишним линијама повученим из темена оштрих углова једнак је петоструком квадрату над хипотенузом.

12) Ако се из средине једне катете правоуглог троугла спусти нормала на хипотенузу, тада је разлика квадрата отсечака хипотенузе једнака квадрату друге катете.

13) Ако се из темена правог угла спусти нормала на хипотенузу, тада су кубови катета пропорционални са пројекцијама отсечака хипотенузе на катетама.

14) Збир реципрочних вредности квадрата катета једнак је реципрочној вредности квадрата висине хипотенузе.

15) У троуглу ABC спуштена је висина из темена A. Ако је $c > b$, покажи да је $c^2 - b^2 = BD^2 - DC^2$.

16) Ако се ма из које тачке O у троуглу ABC спусте нормале OX, OY, OZ на стране BC, CA, AB, покажи да је $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$.

17) У сваком троуглу растојање d између центра уписаног круга полупречника r и центра описаног круга полупречника R дато је односом $d^2 = R\ (R - 2r)$ (*Euler*).

18) Ако се повуче права кроз центре у троуглу уписаног и око троугла описаног круга, тада је полупречник уписаног круга средња геометриска пропорционала између оних отсечака праве који се налазе између периферија ова два круга.

19) Дат је паралелограм $ABCD$. Ван паралелограма кроз теме C повучена је права која сече продужене стране AB и AD у тачкама M и N. Доказати да је $\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = 1$.

20) Збир квадрата страна паралелограма једнак је збиру квадрата дијагонала.

21) Свака дуж повучена паралелно основицама кроз пресек дијагонала каквот трапеза преполовљена је овим пресеком.

22) Збир квадрата страна четвороугла једнак је збиру квадрата дијагонала увећаних за четвороструки квадрат дужи која спаја средине дијагонала.

23) Ако је a страна у кругу уписаног квадрата а b страна у истом кругу уписаног равностраног троугла, покажи да је $3a^2 = 2b^2$.

24) У квадранту AOB кроз једну тачку P на луку повучена је паралела тетиви AB; ова паралела сече OA у C и OB у D. Доказати да је $PC^2 + PD^2 = AB^2$.

25) Доказати да се број π налази између 3 и 4 посматрајући обиме уписаног правилног шестоугла и квадрата описаног око истог круга.

26) На једној правој налазе се узастопне дужи $AB, BC, \ldots KL$. Доказати да је линија састављена из полукругова описаних над овим дужима као над пречницима једнака полукругу чији је пречник AL.

27) Код два круга разних полупречника средишни углови чији луци имају једнаке дужине обрнуто су пропорционални полупречницима.

28) Показати да збир страна у истом кругу уписаног квадрата и равностраног троугла претставља приближно половину кружног обима.

29) Дат је круг са средиштем у O и круг који пролази кроз O и додирује први круг у тачки T. Полупречник OM првог круга сече други круг у тачки N. Доказати да луци TM и TN који одговарају углу TOM имају исту дужину.

30) Два круга O_1 и O_2 додирују изнутра круг O, а њихов збир полупречника једнак је полупречнику круга O. Доказати:

а) да се кругови O_1 и O_2 секу или, изузетно, додирују;

б) ако је M пресечна тачка кругова O_1 и O_2 ближа обиму круга O, четвороугао O_2MO_1O је паралелограм;

в) збир лукова кругова O_1 и O_2 између додирних тачака и тачке M једнак је дужини лука круга O између додирних тачака.

31) Над сваком половином једне дужи као над пречником описани су кругови и из сваке крајње тачке дате дужи повучене су дирке на један од кругова. Доказати да је дуж која спаја пресечне тачке дирки једнака страни квадрата уписаног у једном од кругова.

32) Ако се у кругу кроз тачку M повуку две тетиве нормално једна на другу, тада је збир квадрата ових тетива сталан.

33) Два круга O_1 и O_2 додирују се споља. Кроз додирну тачку P повучене су две сечице APB, CPD нормално једна на другој. Доказати да збир $AB^2 + CD^2$ остаје сталан кад се сечице обрћу око тачке P, остајући нормалне једна на другој.

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

34) Једна лађа пође из пристаништа на североисток пловећи брзином од 9 km на сат. После 20 минута скрене на северозапад пловећи истом брзином још 35 минута. Колико је тада удаљена од пристаништа?

35) На једној правој дате су две тачке M и N. Наћи на овој правој тачку P, тако да је $PM^2 + PN^2 = a^2$, где a претставља извесну дуж.

36) Основица троугла је 13 cm, наспрамни угао 60°, збир других двеју страна 22 cm. Наћи те две стране.

37) У тупоуглом троуглу највећа страна је 16 cm, а висине повучене из њених крајњих тачака удаљене су од темена тупог угла за 2 cm и 3 cm. Наћи друге две стране троугла.

38) У троуглу ABC повучене су тежишне линије из B и C. Наћи однос између страна ако се те две тежишне линије секу под правим углом.

39) Наћи стране троугла ABC кад је страна $a = 1$ и тежишна линија повучена из B, исто тако, 1; а кад се из темена B спусти висина BD, да је $CD \cdot CA = \frac{3}{4}$.

40) У равнокраком тупоуглом троуглу ABC основица $AC = 32$m, крак је 20 m. У темену B повучена је нормала на један крак до пресека са основицом. На какве делове дели нормала основицу?

41) Код правоуглог троугла чије су катете b и c повучене су из темена правог угла тежишна линија и висина. Наћи растојање подножне тачке висине од тежишне линије.

42) Дат је правоугли троугао ABC чије су катете $CA = b$ $AB = c$.

а) Наћи на хипотенузи тачку D, тако да производ нормала ($DE \cdot DF$) спуштених из ове тачке на обе катете AB и AC има дату вредност k^2.

б) Ако су b, c, k дужи, а не бројеви, наћи DE геометриском конструкцијом у специјалном случају кад је $b = c$.

в) Решити овај задатак кад b и c нису једнаки.

43) Дате су две једна на другој нормалне осовине OX и OY и стална тачка P чије су координате a и b позитивне.

а) Једна покретна тачка креће се по осовини OX једнаким кретањем брзином v (у позитивном смеру). Наћи на осовини OX тачку M, тако да друга покретна тачка, која полази из P кад прва покретна тачка пође из O и прелази пут PM једнаким кретањем брзином $\frac{v}{2}$, стигне у њу кад и прва покретна тачка. Као непозната узима се апсциса $OM = x$. Испитати могућност решења.

б) Кад је задатак могућ, он има два решења. За коју ће вредност од x пут PM имати најмању вредност?

в) Где треба да лежи тачка P да би праве PM_1 и PM_2 биле нормалне једна на другој?

44) Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код A. Повуче се нормала CX на хипотенузу BC и симетрала BD угла ABC. Ова симетрала сече AC у D и CX у тачки F.

а) Показати да је троугао CDF равнокрак.

б) Конструисати троугао ABC кад је дато $BC = a$ и $CD = m$.

в) Израчунати стране троугла ABC са истим условима. Ставити $AB = x$ и $AC = y$.

45) Израчунати страну a и дијагоналу d једног квадрата као функцију збира s или разлике q дијагонале и стране.

46) Извести образац за површину трапеза сматрајући га као разлику двају троуглова.

47) Какав однос треба да постоји између страна равнокраког трапеза да би четвороугао чија су темена на срединама страна трапеза био квадрат?

48) Какав однос мора постојати између страна равнокраког трапеза да би се у њега могао уписати круг, и колики је полупречник уписаног круга?

49) У кругу су повучене две паралелне тетиве, једна с једне а друга с друге стране центра, једна једнака страни уписаног равностраног троугла а друга страни уписаног правилног шестоугла. Спајањем крајњих тачака ових тетива добија се равнокраки трапез. Израчунати непаралелне стране овог трапеза, висину, дијагонале и угао између њих.

50) Дат је правоугли троугао ABC, половина равностраног троугла CBB_1; прав угао је у A. Позната је и хипотенуза $CB=a$.

а) Стране AB и AC израчунати као функције од a.

б) На хипотенузи BC између тачака B и C одредити тачку M, тако да, ако је MP нормала повучена из M на AC, збир квадрата свих страна трапеза $BMPA$ буде једнак квадрату дате дужине l. Проучити промене варијацијом дужине l. Ставити $CM=x$.

в) Наћи геометриско решење за случај б). Дискутујући о овом геометриском решењу, наћи све резултате алгебарског решења.

51) У правилном шестоуглу $ABCDEF$ дијагонале AC, BD, CE, DF, EA, FB својим пресецима граде нов шестоугао. Наћи однос између страна ова два шестоугла.

52) Дат је круг полупречника r. Израчунати страну правилног шестоугла чији је обим једнак обиму круга и доказати да је површина шестоугла мања од површине круга.

53) Дат је круг полупречника R. Почев од тачке A, на кругу је узет лук AB од 60°, затим лук BC од 90° и лук CD од 120°. Тачке A, B, C, D су редом спојене.

а) Израчунати стране овог четвороугла.

б) Доказати да се дијагонале секу под правим углом.

о) Израчунати дијагонале и њихове делове.

г) Израчунати површину четвороугла.

54) Дат је равнокраки троугао ABC у коме је $AB=AC=5$, $BC=6$. Наћи полупречник уписаног круга.

55) Равнострани троугао ABC уписан је у кругу. Ако је M средина лука AC, а N средина стране BC, права MN сече круг у тачки P. Изразити отсечке MN и NP као функције полупречника R.

56) У полукругу полупречника R повучена су два произвољна полупречника OC и OD нормална један на другом. Њихове крајње тачке C и D пројектоване су на један пречник и добијене тачке E и H. Наћи однос између OE, OH и R.

57) У кругу полупречника R уписан је троугао; један од његових углова је 45°. Наћи супротну страну троугла.

58) У кругу полупречника r уцртано је пет једнаких квадрата, тако да сваки од четири спољашња има два темена на кругу а једну страну заједничку са унутрашњим квадратом. Колика је страна квадрата?

59) Два се круга додирују споља; њихови полупречници су R и r. Из центра једнога круга повучена је дирка на други круг, а из добијене додирне тачке повучена је дирка на први круг. Наћи њену дужину.

60) Израчунати у метрима дужину морске миље, која је лук једног минута Земљиног меридијана.

61) Две паралелне тетиве једног круга са исте стране средишта износе 6 cm и 8 cm а раздаљина између њих је 1 cm. Наћи полупречник круга.

62) У кругу полупречника 15 повучене су две тетиве које се секу. Тражи се растојање пресека од центра ако се зна да је производ отсечака једне тетиве 200.

63) Наћи стране равнокраког трапеза описаног око круга полупречника r ако је обим трапеза $2p$.

64) Израчунати дијагонале ромба ако је позната страна и полупречник уписаног круга.

65) Наћи однос између двеју паралелних тетива, њихове раздаљине и тетиве паралелне са првим двема на средини између њих.

66) Дати су тетива и полупречник круга; наћи:

а) средишну раздаљину тетиве и висину лука који одговара тетиви;

б) тетиву која одговара половини лука;

в) тангенту паралелну датој тетиви ограничену продуженим полупречницима који пролазе кроз крајње тачке тетиве.

67) Дате су стране једног троугла a, b, c; изразити као функције страна раздаљине центра описаног круга од страна.

68) У троуглу ABC споје се M, N, P, додирне тачке уписаног круга, са супротним теменима A, B, C. Дуж AM сече уписани круг у тачки Q, дуж BN сече круг у тачки R и дуж CP у тачки S. Тражи се вредност збира производа $AM \cdot AQ + BN \cdot BR + CP \cdot CS$ изражена странама троугла.

69) Дата су два концентрична круга. Изразити разлику њихових обима као функцију ширине кружног прстена.

70) Два круга полупречника 1 и 1,7 имају централну раздаљину 2,1. Наћи дужину заједничке тетиве и њена растојања од оба центра.

71) Крајње тачке пречника удаљене су од тангенте за 1,6 cm и 0,6 cm. Наћи дужину пречника.

72) Раздаљине једне крајње тачке пречника од крајњих тачака њему паралелне тетиве износе 13 cm и 84 cm. Наћи пречник круга.

73) У кругу полупречника $r=21$ повучен је пречник AB и у тачки B дирка на круг. На коме се растојању од B на овој дирки мора узети тачка M да би спољашњи отсечак сечице MA био 18,9?

74) Дат је полукруг пречника $2r$; у њему су описана два полукруга над полупречницима првог круга као над пречницима и један круг који додирује ова три полукруга. Наћи полупречник круга.

75) Два се круга полупречника R и r додирују споља у тачки A. Кроз A и кроз центре повучена је права која сече мањи круг у тачки B. У B је на мањи круг повучена дирка. Наћи полупречник круга који додирује ту дирку и оба дата круга.

76) Колико је удаљена тачка од средишта два концентрична круга ако је дирка повучена из те тачке на мањи круг двапут већа од дирке повучене на већи круг?

77) Два круга који леже један ван другога имају центре O_1 и O_2, полупречнике R и r и средишну раздаљину c. Као функцију ових датих количина изразити растојања центара од тачке у којој се секу заједничке спољашње тангенте, дужине додирних тетива, њихова растојања од одговарајућих центара и њихова растојања.

78) Средишна раздаљина двају кругова који леже један ван другог износи 65 dm; дужина заједничке спољашње дирке (између додирних тачака) износи 63 dm; дужина заједничке унутрашње дирке износи 25 dm. Наћи полупречнике кругова.

79) AB и AC су дирке повучене из тачке A на круг чији је центар у O; M је пресечна тачка круга и дужи AO; ME је отсечак дирке повучене у тачки M између дирки AB и AC. Одредити дужину DE ако је полупречник круга 15 dm а дуж $AO = 39$ dm.

80) Полупречник круга је r, тетива a. Наћи тетиву која одговара двапут већем луку него што је лук тетиве a.

81) Средина полукруга спојена је са крајњим тачкама пречника. Кроз средине ових дужи повучена је тетива чији сваки спољашњи отсечак износи c. Наћи полупречник круга.

82) Страна равностраног троугла је 2 m. Око сваког темена полупречником 1 m описан је круг. Тако су добијена три једнака круга који се, два и два, додирују споља.

а) Описати круг који ова три круга додирују изнутра и круг који они додирују споља.

б) Наћи полупречнике ових нових кругова и њихову геометриску средину.

в) Упоредити овај средњи полупречник са полупречником уписаног круга у троуглу.

83) Три круга полупречника r_1, r_2, r_3 са центрима у A, B, C додирују се узајамно споља. Наћи полупречник круга уписаног у троуглу ABC.

84) У правоугаонику $ABCD$ уписана су два једнака круга, тако да један додирује стране AB и AD, други стране CB и CD, а усто се додирују и међу собом. Наћи полупречник ових кругова.

85) На страни BC троугла ABC наћи тачку M, тако да AM буде геометриска средина између MB и MC.

86) Дат је квадрат $ABCD$ стране a и два променљива круга који се додирују споља. Први има центар O_1 на страни BC и пролази кроз теме B, други има центар у O_2 на страни DC и пролази кроз теме D.

Нека је $BO_1 = x$, $DO_2 = y$.

а) Израчунати y помоћу x и a.

б) Проучити промене вредности y кад се x мења од нуле до a.

в) Ако је P додирна тачка кругова, израчунати угао BPD.

87) а) Израчунати дужину једне тетиве $2x$, повучене у кругу полупречника r, ако се зна да збир половине ове тетиве и њене средишне раздаљине y има вредност a.

б) Ако је угао између тетиве и полупречника повученог до крајње тачке тетиве 60°, израчунати a са четири децимале.

в) Ако се у случају а) r и a сматрају као дужине, а не бројеви, наћи дужине полутетиве и њене средишне раздаљине геометриском конструкцијом.

88) Дат је полукруг са центром у O. Пречник полукруга $BA = 2r$. На BA је узета стална тачка F, тако да је $OF = a$. У некој тачки P на пречнику ($OP = x$) дигнута је нормала на AB која сече полукруг у тачки Q а на PQ је узета тачка M, тако да је $PM = \frac{3}{5}PQ$.

а) Израчунати MF^2 као функцију од r, a и x. Проучити промене од MF^2 кад се P помера по пречнику BA. (За ово проучавање може се узети a позитивно.)

б) Било да је a позитивно или негативно, може ли се F наћи, тако да израз MF^2 посматран као трином другог степена по x буде потпун квадрат неког бинома првог степена?

За a се налазе две вредности којима одговарају две тачке F и F_1. Показати да у овом случају збир $MF + MF_1$ има сталну вредност док се P помера по пречнику BA.

§ 12. Максима и минима

1) Дате су две паралелне праве AB и CD и једна тачка M. На ком растојању од ове тачке треба повући нормалу EF на паралелне праве да угао EMF буде максимум?

2) Дате су две паралелне праве AB и CD и тачка M. Повући праву EF паралелно некој правој PQ, тако да угао EMF буде максимум.

3) Производ двају чинилаца чији је збир сталан максимум је ако су ови чиниоци једнаки.

4) Збир двају чинилаца чији је производ сталан минимум је ако су ови чиниоци једнаки.

5) Производ двају чинилаца чији је збир квадрата сталан максимум је кад су ови чиниоци једнаки међу собом.

6) Збир квадрата двају чинилаца чији је производ сталан минимум је кад су чиниоци једнаки.

7) Збир двеју дужи чији је збир квадрата сталан максимум је ако су ове дужи једнаке.

8) Збир квадрата двеју дужи чији је збир сталан минимум је ако су дужи једнаке.

9) Дата је права XY и ван ње две тачке M и N. Наћи на XY тачку P, тако да је $PM^2 + PN^2$ минимум.

10) Дат је угао XAY и тачка M на његовој симетрали. Кроз тачку M пролази права променљивог правца и са крацима угла гради троугле. Доказати да троугао има најмању површину у случају кад је права нормална на симетрали угла.

11) Краке угла BAC пресећи правом MN паралелно датој правој PQ, тако да троугао MNS добијен спајањем тачака M и N са датом тачком S има максималну површину.

12) Између свих троуглова који имају исту основицу и наспрамне углове једнаке који имају највећу површину?

13) Од свих троуглова који имају дате две стране који има највећу површину?

14) Од свих троуглова који имају исту основицу и једнаке обиме који има највећу површину?

15) Од свих троуглова једнаких обима који има највећу површину?

16) Из тачке M ван круга O повући сечицу MAB, тако да површина троугла OAB буде максимум.

17) Од свих троуглова једнаких површина који има најмањи обим?

18) Из једне тачке D на страни BC троугла ABC повучене су нормале DE и DF на друге две стране троугла. Где треба да лежи тачка D да би троугао DEF био максимум.

19) Доказати да од свих правоугаоника једнаких обима квадрат има највећу површину.

20) Од свих правоугаоника једнаких површина чији је обим најмањи?

21) У дати троугао уписати правоугаоник највеће површине.

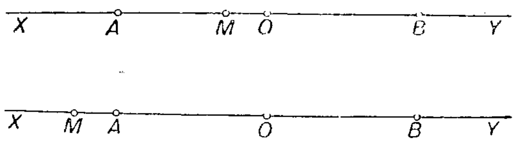
22) У крајњим тачкама једног пречника AB подигнуте су нормале и повучена је на круг једна тангента. Када је на тај начин добијени трапез $ABCD$, ограничен овом тангентом, нормалама и пречником, најмањи?

23) Дата је права PQ и круг чији пречник AB има сталан положај. Паралелно са PQ повуче се тетива CD и у њеним крајњим тачкама повуку се нормале CE и DF до пресека са пречником. Када је тако добијени трапез максимум?

24) Дат је круг, тетива и дирка у тачки која лежи на мањем луку. Наћи на дирки тачку из које се тетива види под највећим углом.

§ 1. Права линија и угао

1) Како тачка M лежи са исте стране од O као и тачка A, она лежи на отсечку AO или на полуправој AX (сл. 1).



Сл. 1

У првом случају је

$MA<AO$, тј. $MA<\frac{AB}{2}$, и

$MB>OB$, тј. $MB>\frac{AB}{2}$;

дакле имамо:

$$MA<MB.$$

Кад је M на AX, имамо:

$$MB=MA+AB.$$

Према томе је

$$MB>MA, \text{ или } MA<MB.$$

2) Нека је O средина дужи AB, и M ма која тачка на продушку те дужи (сл. 2); тада је

$$MA=MO+OA$$
$$MB=MO-BO.$$

Сл. 2

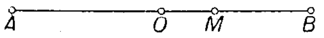
Сабирањем ових једнакости добијамо:

$$MA+MB=2MO, \text{ а отуда:}$$

$$MO=\frac{1}{2}(MA+MB).$$

3) Нека је O средина дужи AB, и M ма која тачка на тој дужи (сл. 3); тада је

$$MA=OA+MO$$
$$MB=OB-MO.$$



Сл. 3

Одузимањем ових једнакости добијамо:

$$MA-MB=2MO, \text{ а отуда:}$$

$$MO=\frac{1}{2}(MA-MB).$$

Кад се тачка M нађе у O, растојање MO је нула, па је и $MA - MB = 0$; кад је тачка M у B, тада је $MB = 0$, па је и тада

$$MO = \frac{1}{2}(MA - MB).$$

4) а) Са слике видимо да је

$$AB + CD = AD - BC = 9 - 6 = 3.$$

Сл. 4

б) Нека су P и Q средине дужи AB и CD (сл. 4); тада је:

$$PQ = BC + BP + CQ.$$

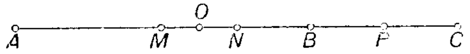
Међутим је $BP + CQ = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} =$

$$= \frac{AB + CD}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5; \text{ дакле:}$$

$$PQ = 6 + 1{,}5 = 7{,}5.$$

5) Како је $AB = 8$, то је $AM = MB = 4$ (сл. 5); с друге стране:

$$AC = AB + BC = 12;$$



Сл. 5

а како је N средина од AC, имамо:

$$AN = 6;$$

најзад, пошто је P средина дужи BC, произилази

$$BP = PC = 2; \text{ отуда:}$$

$$MN = AN - AM = 2.$$

Ако је, дакле, O средина дужи MN, добијамо:

$$AO = AM + MO = 4 + 1 = 5;$$

а како је $AP = AB + BP = 8 + 2 = 10$,

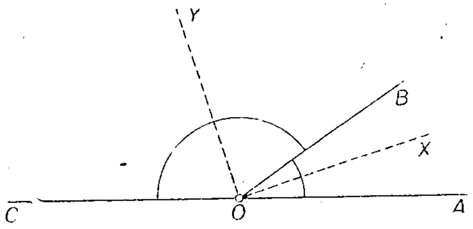
то је и $AP = 2AO$, тј. O је средина

и дужи AP.

6) а) Кроз тачку P треба повући паралелу са AB. б) Кроз тачку P и средину дужи AB повући праву.

Решење је немогуће кад све три тачке P, A и B леже на истој правој.

7) Из слике 6 се види да је



Сл. 6

а) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COB = 180^0;$

$$\frac{1}{2}\sphericalangle AOB + \frac{1}{2}\sphericalangle COB = 90^0;$$

$$\sphericalangle AOX + \sphericalangle COY = 90^0.$$

б) $\sphericalangle AOB = 35^0$; $\sphericalangle COB =$

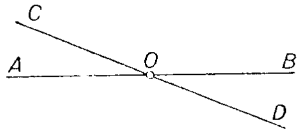
$$= 180^0 - 35^0 = 145^0;$$

$$\sphericalangle COY = \frac{1}{2}\sphericalangle COB = 72^0 30'.$$

8) а) $3^h\ 20^m$ може се написати $3\frac{1}{3}^h$. Кад се Земља обрне око своје осовине за 24 часа, тј. опише угао од 360^0, за један час описаће угао $\frac{360^0}{24}$, а за $3\frac{1}{3}$ часа описаће угао: $\frac{360^0}{24} \cdot 3\frac{1}{3} = 50^0$.

б) Ако је Земљи потребно 24 часа да се обрне за угао од 360^0, за 1^0 потребно јој је $\frac{24}{360}$, а за 130^0 потребно је: $\frac{24}{360} \cdot 130 = 8^h\ 40^m$.

9) Са слике 7 види се да је



Сл. 7

а) $\sphericalangle COB = \sphericalangle AOD = \frac{250^0}{2} = 125^0;$

$$\sphericalangle COA + \sphericalangle COB = 180^0; \quad \sphericalangle COA = 55^0;$$

$$\sphericalangle BOD = \sphericalangle COA = 55^0.$$

б) $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$; $\sphericalangle COB = \sphericalangle AOD$;

$$\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB + \sphericalangle BOD + \sphericalangle AOD =$$

$$= 360^0$$

$$\sphericalangle AOD = 360^0 - 274^0 = 86^0; \sphericalangle COB = 86^0;$$

$$\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = 180^0; \sphericalangle AOC = 180^0 -$$

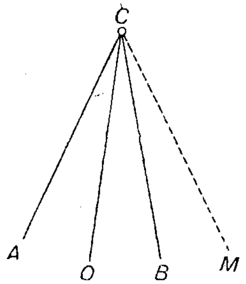
$$- 86^0 = 94^0; \sphericalangle BOD = 94^0.$$

10) Обележимо са α и $90^0 - \alpha$ два комплементна угла. Суплеменат од α је $180^0 - \alpha$, суплеменат од $90^0 - \alpha$ је $90^0 + \alpha$. Збир суплементних углова износи $180^0 - \alpha + 90^0 + \alpha = 270^0$, тј. три права угла.

11) Нека су α и $180^0-\alpha$ два упоредна угла. Испупчен угао који одговара углу α је $360^0-\alpha$, а испупчен угао који одговара углу $180^0-\alpha$ је $180^0+\alpha$. Према томе је збир испупчених углова: $360^0-\alpha+180^0+\alpha=540^0$, тј. 6 правих углова.

12) Над једним заједничким краком и са истим теменом нацртати угао од 45^0, затим угао од 60^0; тако ће се добити угао од 15^0 који треба преносити на угао од 45^0 и тиме га поделити на три једнака дела.

13) Ако је CO бисектриса угла ACB, а CM ма која полуправа повучена из темена C ван угла, добијамо (сл. 8):



Сл. 8

$$\sphericalangle MCA=\sphericalangle MCO+\sphericalangle OCA$$

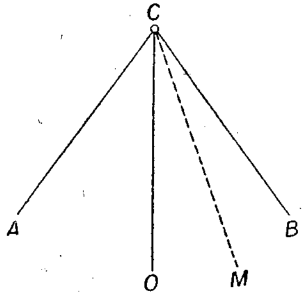
$\sphericalangle MCB=\sphericalangle MCO-\sphericalangle OCB$, а отуда сабирањем:

$$\sphericalangle MCA+\sphericalangle MCB=2\sphericalangle MCO,\ \text{или}$$

$$\sphericalangle MCO=\frac{1}{2}(\sphericalangle MCA+\sphericalangle MCB).$$

Теорема важи уопште ако све те полуправе продужимо преко темена.

14) Нека је CO бисектриса угла ACB и CM произвољна права повучена унутар угла кроз његово теме (сл. 9); тада је:



Сл. 9

$$\sphericalangle MCA=\sphericalangle ACO+\sphericalangle OCM$$

$\sphericalangle MCB=\sphericalangle BCO-\sphericalangle OCM$; а отуда одузимањем произилази:

$$\sphericalangle MCA-\sphericalangle MCB=2\sphericalangle MCO,$$

или:

$$\sphericalangle MCO=\frac{1}{2}(\sphericalangle MCA-\sphericalangle MCB).$$

Слична теорема важи за кружне лукове и исечке и др.

15) Нека су α_1, β_1, γ_1, δ_1 комплементи датих углова; тада је

$$\alpha_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\ \beta_1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3};$$

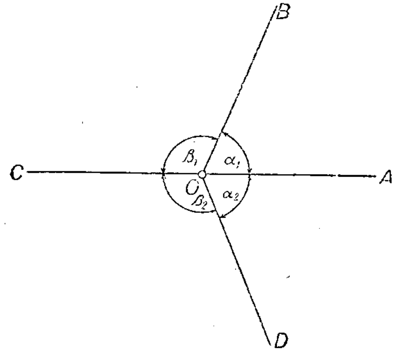
$$\gamma_1=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5};\ \delta_1=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}.$$

Ако су α_2, β_2, γ_2, δ_2 суплементи датих углова, добијамо:

$$\alpha_2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2};\ \beta_2=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3};$$

$$\gamma_2=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5};\ \delta_2=2-\frac{5}{6}=\frac{7}{6}.$$

16) По претпоставци је $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$.



Сл. 10

Како је $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2=4R$, то је и

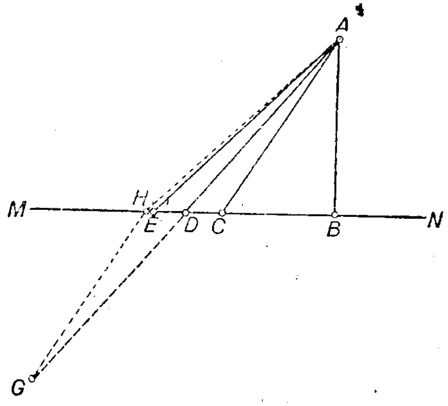
$$2\alpha_1+2\beta_1=4R,\ \text{или:}$$

$$\alpha_1+\beta_1=2R.$$

То значи да су углови α_1 и β_1 суплементни, па према томе OA и OC леже на истој правој.

Из једнакости $\alpha_1=\alpha_2$ и $\alpha_1<90^0$ следује да је OA бисектриса угла BOD, а из једнакости $\beta_1=\beta_2$ и $\beta_1>90^0$ следује да је OC бисектриса угла BOD.

17) По претпоставци је $AE-AD=AD-AC$, а отуда:



Сл. 11

$$AE+AC=2AD\ (\text{сл. }11).$$

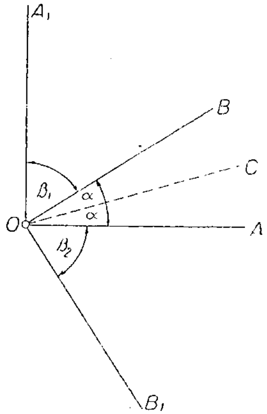
Ако AD продужимо за исту толику дужину DG и узмемо да је $DH=DC$, па повучемо GH, видимо да је довољно доказати да је $AH>AE$, јер је тада $DE<DC$.

Заиста, из подударности троуглова ADC и HDG следује:

$$HG=AC;$$

али како је $AH+HG>AG$, то је $AH+AC>2AD$. Међутим је $AE+AC=2AD$, па видимо да је $AH>AE$, чиме је теорема доказана.

18) Повуцимо бисектрису OC угла AOB; углови обележени са α једнаки су (сл. 12).



Сл. 12

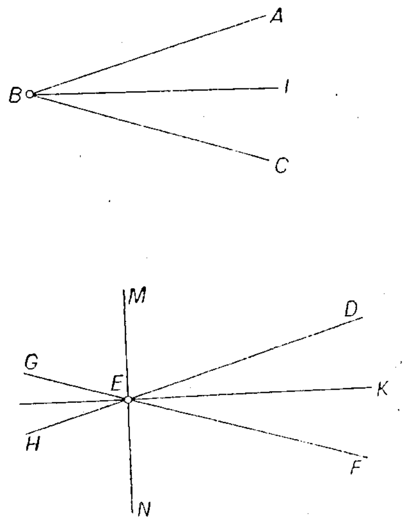
С друге стране, видимо да је β_1 комплемент углу 2α, а исто тако и угао β_2; дакле: $\beta_1 = \beta_2$. Из тога следује да је OC уједно бисектриса угла A_1OB_1.

Сад ћемо доказати да су углови AOB и A_1OB_1 суплементни.

Имамо да је $\sphericalangle AOB = 2\alpha$, $A_1OB_1 = 2\alpha + 2\beta_1$; дакле: $\sphericalangle AOB + \sphericalangle A_1OB_1 = 2\beta_1 + 4\alpha = 2\ (\beta_1 + + 2\alpha)$.

Како је, међутим, $\beta_1 + 2\alpha = R$, то је $\sphericalangle AOB + \sphericalangle A_1OB_1 = 2R$, што је требало доказати.

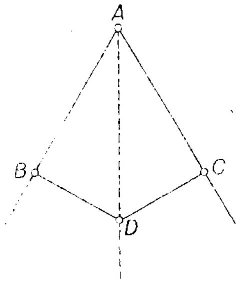
19) Ако су посматрани углови (сл. 13) ABC и DEF исте врсте (оштри или тупи), они су једнаки, па су и њихове половине једнаке



Сл. 13

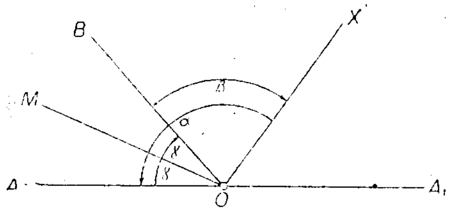
Ако, међутим, посматрамо оштри угао ABC и тупи угао DEG, та два угла су суплементна и бисектриса MN, нормална на EK, нормална је, исто тако, и на паралели BI.

20) Нека је D (сл. 14) тачка пресека нормала повучених на AB и AC, и нека је $AB = AC$. Спојмо тачку A са тачком D. Правоугли троугли ABD и ACD су подударни, па су и углови код A једнаки. Према томе, полуправа AD је бисектриса угла A, чиме је теорема доказана.



Сл. 14

21) Претпоставимо да је OX изван угла AOB (сл. 15). Слика нам показује да је:



Сл. 15

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOX - \sphericalangle BOX = = \alpha - \beta$.

С друге стране, ако са γ означимо углове између бисектрисе и полуправих OA и OB, имамо: $\sphericalangle XOM = \sphericalangle XOA - \gamma = \alpha - \gamma$, и $\sphericalangle XOM - \sphericalangle XOB + \gamma = \beta + \gamma$.

Сабирањем тих једнакости произилази:

$$2\sphericalangle XOM = \alpha - \gamma + \beta + \gamma = \alpha + \beta, \text{ и:}$$

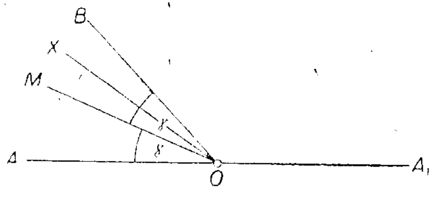
$$\sphericalangle XOM = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Претпоставимо сад да је OX унутар угла AOB (сл. 16). Како је $\alpha > \beta$, OX је унутар угла BOM. У том случају добија се

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOX + \sphericalangle XOB = \alpha + \beta$.

Треба израчунати $\sphericalangle XOM$. Са слике видимо да је

$\sphericalangle XOM = \sphericalangle XOA - \sphericalangle AOM = = \alpha - \gamma$ и $\sphericalangle XOM = \sphericalangle MOB - - \sphericalangle XOB = \gamma - \beta$.



Сл. 16

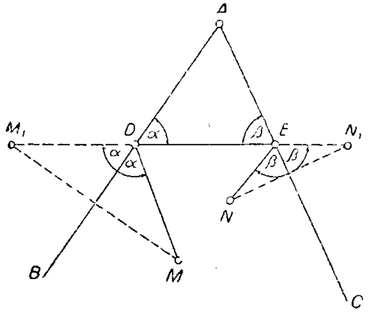
Сабирањем тих једнакости добијамо:

$$2\sphericalangle XOM = \alpha - \gamma + \gamma - \beta = \alpha - \beta,$$

одакле је

$$\sphericalangle XOM = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

22) Тачке M_1 и N_1 одреде се симетрично тачкама M и N у односу на праве AB и AC (сл. 16 а). Спајањем тачака M_1 и N_1 добијају се тачке D и E које одређују места огледалима.



Сл. 16 а

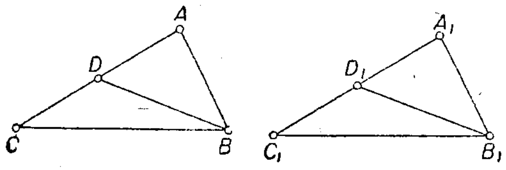
Светлосни зрак MD одбија се у правцу DE, јер су углови α једнаки, а исто тако светлосни зрак који полази из N_1 има правац N_1EDM_1.

§ 2. Троугао

а) ТЕОРЕМЕ

1) Ма који троугао

1) а) Нека су у троуглима ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 17) једнаке стране AB и A_1B_1, AC и A_1C_1 и тежишне линије BD и B_1D_1.

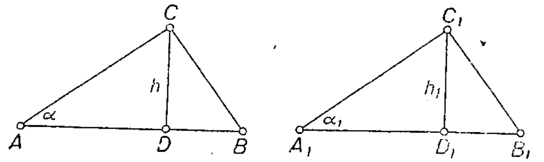


Сл. 17

Троугли ABD и $A_1B_1D_1$ су подударни, јер су им једнаке стране, што значи да је и $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$. Одавде следује:

$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, јер је $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$.

б) Нека је $AB = A_1B_1$, $\alpha = \alpha_1$, $h = h_1$ (сл. 18).



Сл. 18

Тада је

$\triangle ACD \cong \triangle A_1C_1D_1$

($h = h_1$, $\alpha = \alpha_1$,

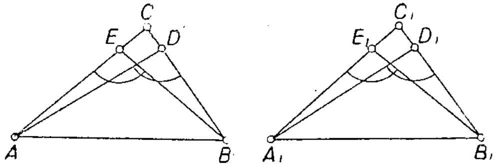
$\sphericalangle D = \sphericalangle D_1 = 90^\circ$).

Стога је и $AC = A_1C_1$.

Одавде следује:

$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, јер је $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\alpha = \alpha_1$.

в) Нека је $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, $BE = B_1E_1$. Тада је (сл. 19)



Сл. 19

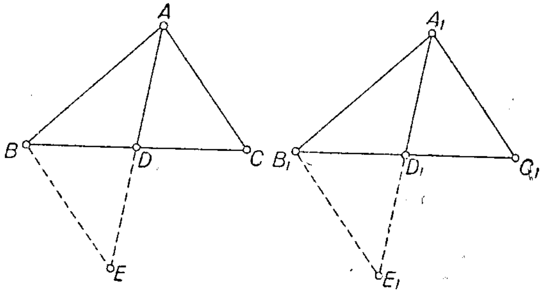
$\triangle ABE \cong \triangle A_1B_1E_1$ и

$\triangle ABD \cong \triangle A_1B_1D_1$.

Из тога следује: $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$; а одавде:

$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, јер је $AB = A_1B_1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$.

г) Продужимо тежишну линију AD (сл. 20) тако да је $DE = AD$ и спојмо B и E.



Сл. 20

Видимо да је

$\triangle DBE \cong \triangle DCA$

($BD = CD$, $AD = DE$,

$\sphericalangle D = \sphericalangle D$).

Отуда следује да је $BE = AC$.

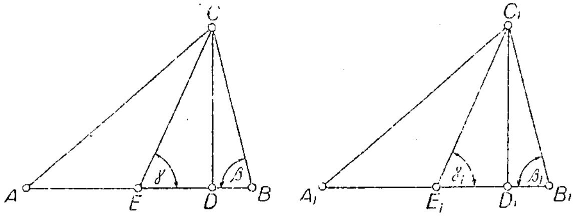
Ако исто тако поступимо и са троуглом $A_1B_1C_1$, добијамо да је $B_1E_1 = A_1C_1$.

Одавде даље закључујемо да су троуглови $ABE = A_1B_1E_1$ подударни, јер су им стране једнаке.

Према томе, кад бисмо троугао ABE положили на троугао $A_1B_1E_1$ тако да се поклапају, тачка D поклопила би тачку D_1, што значи да је $BD = B_1D_1$, и $BC = B_1C_1$.

Дакле: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, јер имају једнаке стране.

д) Нека је $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$, $CE = C_1E_1$ (сл. 21). У том случају је $\triangle CDE \cong \triangle C_1D_1E_1$; дакле: $\gamma = \gamma_1$. Сем тога је и $\triangle BCE \cong \triangle B_1C_1E_1$, јер је $BE = B_1E_1$, $CE = C_1E_1$, $\gamma = \gamma_1$.



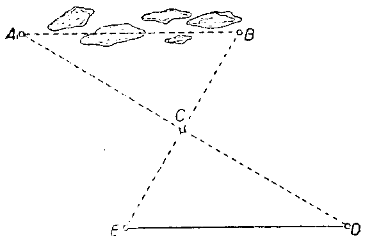
Сл. 21

Одавде даље следује да је

$$BC = B_1C_1 \text{ и } \beta = \beta_1.$$

Како је претпостављено да је $AB = A_1B_1$, следује коначно: $\triangle ABC \cong A_1B_1C_1$.

2) Троугли ABC и CED (сл. 22) су подударни, јер је $BC = CE$, $AC = CD$, а захваћени углови као унакрсни једнаки. Из њихове подударности следује да је $AB = ED$.



Сл. 22

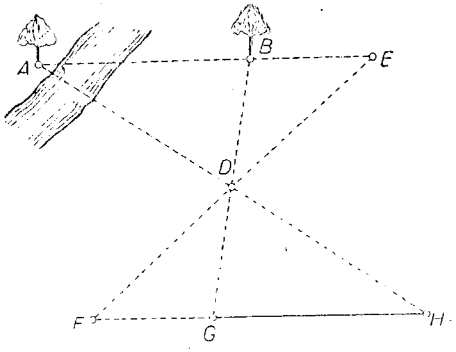
3) Троугли BDE и DFG су подударни, (сл. 23) јер је $BD = DG$, $DE = DF$ а захваћени углови једнаки као унакрсни Из њихове подударности следује:

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle FGD.$$

Троугли ABD и DGH су подударни, јер је $BD = DG$, углови $BDA = GDH$ су једнаки као унакрсни, а углови ABD и DGH једнаки као суплементи једнаких углова EBD и FGD.

Из њихове подударности се закључује да је

$$AB = GH.$$



Сл. 23

4) По претпоставци је $AO = CO$ (сл. 24),

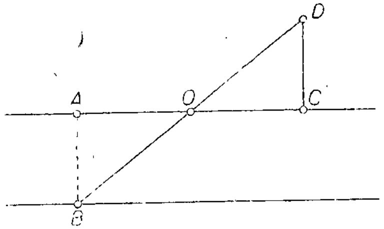
$$\sphericalangle BAO = \sphericalangle DCO = 90^\circ,$$

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD.$$

Према томе су троугли AOB и COD подударни, а из њихове подударности се добија:

$$AB = CD, \text{ тј.}$$

CD даје ширину реке.



Сл. 24

5) У троуглу ABM (сл. 25) је

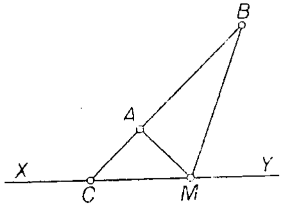
$$AB > MB - MA,$$

где је M ма која тачка на правој XY. Како је

$$AB = CB - CA, \text{ то је}$$

$$CB - CA > MB - MA,$$

што је требало доказати.



Сл. 25

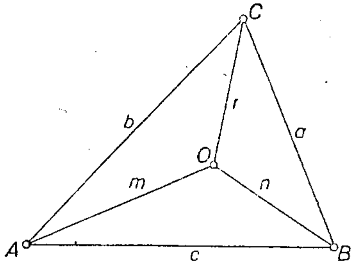
6) Нека је дат троугао ABC. Тврдимо, например, да је страна AB мања од половине обима троугла. Заиста, кад би страна AB била једнака полуобиму или већа од полуобима, онда би и збир друге две стране $BC + CA$ био већи од полуобима, јер је $BC + CA > AB$. Према томе, збир све три стране био би већи од обима, тј. већи од њиховог збира, што је немогуће. Дакле, свака страна је мања од полуобима.

7) Разликоваћемо два случаја, већ према томе да ли је троугао разностран или равнокрак.

а) *Постоји највећа страна AB.* — Тврдимо да је страна AB већа од трећине обима троугла. Заиста, кад би страна AB била мања од трећине обима или једнака трећини обима, свака од страна BC и AC, које су од ње мање, била би мања од трећине обима, па бисмо дошли до закључка да је збир страна у троуглу мањи од његовог обима, што је немогуће, б) *Две стране AB, BC једнаке су и веће од треће стране AC.* У том случају свака од страна AB и BC већа је од трећине обима. Кад би оне биле једнаке трећини обима или мање од трећине обима, страна AC била би мања од трећине обима и збир страна био би мањи од обима, што је немогуће.

Лако је на исти начин доћи до закључка да је најмања страна мања од трећине обима.

8) Имамо (сл. 26):



Сл. 26

$$c < m + n < a + b,$$
$$a < n + r < b + c,$$
$$b < r + m < a + c.$$

Сабирањем тих неједнакости добијамо:

$$a + b + c < 2m + 2n + 2r < 2a + 2b + 2c,$$

одакле: $\frac{a + b + c}{2} < m + n + r < a + b + c.$

9) Треба доказати (сл. 26) да је

$$m + n + r < a + b + c < 2\,(m + n + r).$$

У троуглима BOC, COA, AOB имамо да је

$$a < n + r\ ,$$
$$b < r + m\ ,$$
$$c < m + n\ .$$

Сабирањем тих неједнакости добијамо:

$$a + b + c < 2\ (m + n + r).$$

С друге стране, имамо:

$$n + r < b + c,$$
$$r + m < c + a,$$
$$m + n < a + b.$$

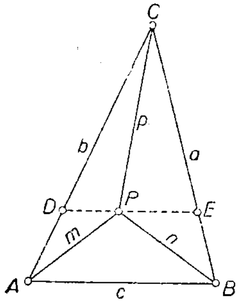
Сабирањем тих неједнакости добијамо:

$2\ (m + n + r) < 2\ (a + b + c)$, и коначно:

$$m + n + r < a + b + c.$$

Дакле: $m + n + r < a + b + c < 2\ (m + n + r)$.

10) Нека је c најмања и b највећа страна у троуглу ABC (сл. 27).



Сл. 27

Тврдимо да је $m + n + p < a + b$.

Да то докажемо, повући ћемо кроз тачку P паралелу основици AB троугла. Она сече страну AC у тачки D и страну BC у тачки E. Како је, у том случају,

$$CD > CE > DE \text{ и } CD > CP,$$

јер наспрам већих углова у троуглу леже веће стране, добијамо:

$$m < AD + DP,$$
$$n < BE + EP,$$
$$p < CD,$$
$$DE < CE.$$

Сабирањем тих неједнакости произилази:

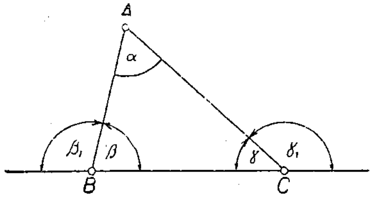
$$m + n + p + DE < AD + DP + BE + EP + CD + CE.$$

Како је

$DE = DP + EP$, $AD + CD = b$, $BE + CE = a$, следује:

$$m + n + p < a + b.$$

11) Из слике 28 види се да је



Сл. 28

$$\beta_1 = \alpha + \gamma$$

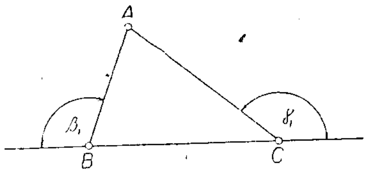
$\gamma_1 = \alpha + \beta$; сабирањем ових једнакости добија се:

$\beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \alpha + \beta + \gamma$. Како је $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, то је

$\beta_1 + \gamma_1 = \alpha + 180^0$, или:

$$\beta_1 + \gamma_1 > 180.$$

12) Из слике 29 види се да је



Сл. 29

$$\beta_1 = \sphericalangle A + \sphericalangle C$$

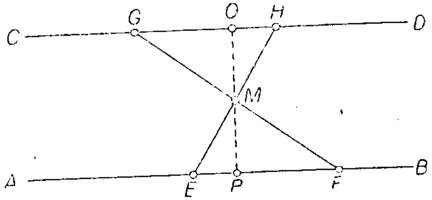
$\gamma_1 = \sphericalangle A + \sphericalangle B$; сабирањем ових једнакости добија се:

$$\beta_1 + \gamma_1 = \sphericalangle A + \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C, \text{ или:}$$

$$\beta_1 + \gamma_1 - \sphericalangle A = \sphericalangle A + \sphericalangle + B \sphericalangle + + \sphericalangle C = 180^0.$$

13) $AB \| CD$ (сл. 30) $MP = MQ$.

Углови EMP и HMQ једнаки су као унакрсни, $\sphericalangle EPM = \sphericalangle HQM = = 90^0$. Према томе су троугли EPM и HQM подударни и $EP = HQ$.



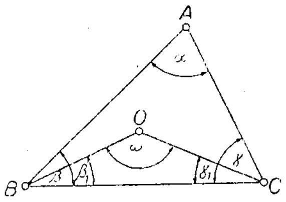
Сл. 30

Исто тако: $MP = MQ$, углови FMP и GMQ једнаки су као унакрсни а углови FPM и GQM једнаки су јер су оба права; према томе су троугли FPM и GQM подударни и $FP = GQ$.

Сабирањем једнакости $EP = HQ$ и $FP = GQ$ добијамо: $EP + + FP = HQ + GQ$, или:

$$EF = GH.$$

14) Са слике 31 видимо да је у троуглу ABC



Сл. 31

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$$

$$\omega = 180^0 - (\beta_1 + \gamma_1).$$

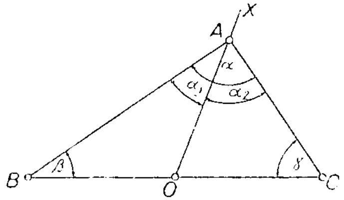
Како је $\beta_1 + \gamma_1 < \beta + \gamma$, јер је $\beta_1 < \beta$ и $\gamma_1 < \gamma$, то је и $\omega > \alpha$.

15 а) Ако ниједан угао не би био мањи од 60^0, значи да би или сваки од њих био једнак 60^0, или један од њих 60^0, а друга два сваки већи од 60^0, или, најзад, сваки већи од 60^0. У првом случају имали бисмо равнострани троугао, што се противи претпоставци, а у другом и трећем случају збир углова био би већи од 180^0, што је немогуће.

Дакле, неравнострани троугао има бар један угао мањи од 60^0.

б) На исти начин може се закључити да неравнострани троугао има бар један угао већи од 60^0.

16 а) Претпоставимо да је $OA = OB = OC$ (сл. 32). Троугли OAB и OAC су равнокраки, па је



Сл. 32

$$\alpha_1 = \beta, \quad \alpha_2 = \gamma.$$

Међутим, знамо да је

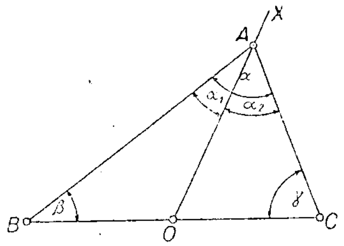
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma = 180^0 \text{ или:}$$

$$2(\beta + \gamma) = 180,$$

$$\text{а одавде: } \beta + \gamma = 90^0.$$

Дакле, угао α је прав.

б) Претпоставимо сад да је $OA > OB$, или $OA > OC$ (сл. 33). Како је $OB < OA$ и $OC < OA$, то је



Сл. 33

$$\alpha_1 < \beta \text{ и } \alpha_2 < \gamma, \text{ а отуда и}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \beta + \gamma, \text{ или:}$$

$$\alpha < \beta + \gamma.$$

Међутим, знамо да је

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0, \text{ или}$$

$$\beta + \gamma = 180^0 \quad \alpha, \text{ па је}$$

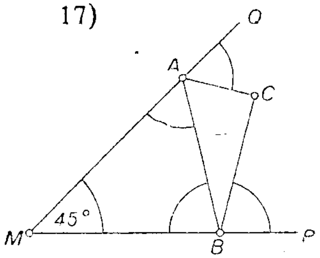
$$\alpha < 180^0 - \alpha \text{ или}$$

$$2\alpha < 180^0, \text{ и коначно:}$$

$$\alpha < 90^0$$

Исто тако, може се доказати да је $\alpha > 90^0$, ако је $OA < \frac{BC}{2}$.

17)



Сл. 34

$\sphericalangle MAB + \sphericalangle MBA = 135^0$ (сл. 34),

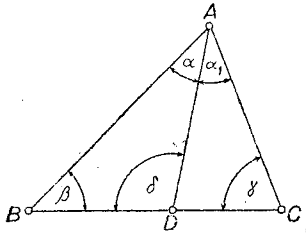
$\sphericalangle CAB = 180^0 - 2 MAB$,

$\sphericalangle CBA = 180^0 - 2 MBA$. Сабирањем ових једнакости добијамо:

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA = 360^0 - 2(MAB + MBA) = = 360^0 - 2 \cdot 135^0 = 90^0,$$

$$\sphericalangle C = 180^0 - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA) = 180^0 - 90^0 = = 90^0.$$

18) Нека је AD (сл. 35) бисектриса угла BAC у троуглу ABC. Треба доказати да је $BD < AB$ и $CD < AC$.



Сл. 35

Како је δ спољашњи угао троугла ACD, то је

$$\delta = \alpha_1 + \gamma, \text{ одакле је}$$

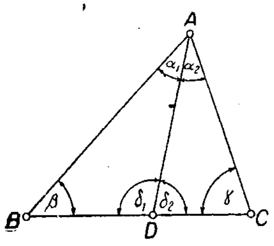
$$\delta > \alpha_1.$$

Међутим, по претпоставци је $\alpha_1 = \alpha$, па је $\delta > \alpha$, а стога и $AB > BD$, или: $BD < AB$.

Исто тако се може показати да је и

$$CD < AC.$$

19) Нека је у троуглу ABC права AD бисектриса угла са теменом у A (сл. 36).



Сл. 36

Тада је:

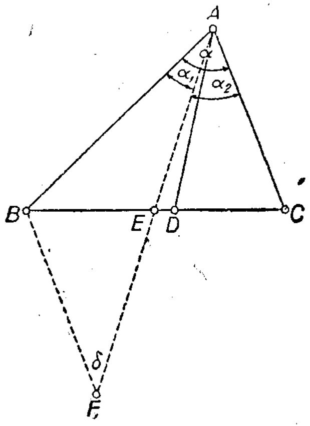
$$\delta_1 = \gamma + \alpha_2,$$

$$\delta_2 = \beta + \alpha_1, \text{ а отуда:}$$

$$\delta_1 - \delta_2 = \gamma - \beta, \text{ јер је}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

20 Нека је AD бисектриса угла α троугла ABC (сл. 37).



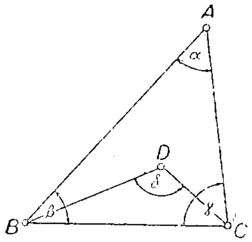
Сл. 37

Претпоставимо да је $AB > AC$; тврдимо да је $BD > CD$.

Да то докажемо, повући ћемо тежишну линију AE и продужити је преко E, тако да је $EF = AE$. Ако спојимо F са B, лако ћемо доказати подударност троуглова AEC и BEF, а отуда да је $BF = AC$ и $\delta = \alpha_2$. Како је $AB > AC$, или $AB > BF$, то је $\delta > \alpha_1$ или $\alpha_2 > \alpha_1$ и, најзад, $\alpha_1 < \frac{\alpha}{2}$. То значи да је бисектриса AD унутар угла CAE.

Одавде следује да је тачка D на отсечку CE, а, према томе: $BD > BE$ или $BD > \frac{BC}{2}$, и $CD < CE$, или: $CD < \frac{BC}{2}$; дакле: $BD > CD$.

21) Нека су BD и CD бисектрисе углова β и γ у троуглу ABC (сл. 38). Треба доказати да је $\delta = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$.



Сл. 38

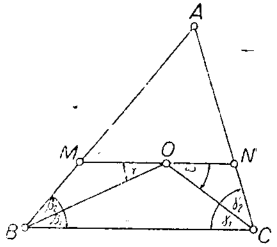
Заиста: $\delta = 180^0 - \frac{\beta + \gamma}{2}$.

Међутим: $\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Дакле: $\delta = 180^0 - (90^0 - \frac{\alpha}{2})$, или $\delta = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$.

22) У троуглу BMO (сл. 39) имамо $\varphi = \beta_1 = \beta_2$, што значи да је тај троугао равнокрак, па је стога

$$OM = BM.$$



Сл. 39

Исто тако, у троуглу CON имамо $\omega = \gamma_1 = \gamma_2$, што значи да је и тај троугао равнокрак, па је

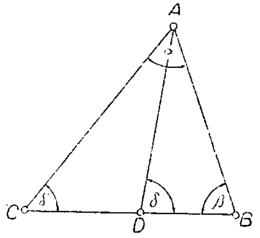
$$ON = CN.$$

Према томе:

$$MN = OM + ON = BM + CN,$$

што је требало доказати.

23) У троуглу ABC (сл. 40) AD је бисектриса угла α. Угао δ је спољашњи угао троугла ACD.



Сл. 40

Према томе:

$$\delta = \gamma + \frac{\alpha}{2}.$$

С друге стране, у троуглу ABD имамо:

$$\delta = 180^c - (\beta + \frac{\alpha}{2}).$$

Ако те две једнакости саберемо, добијамо:

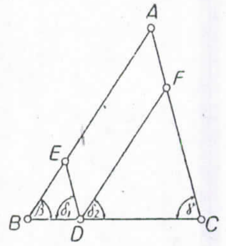
$$2\delta = 180^0 + \gamma - \beta.$$

Међутим, по претпоставци је $\beta - \gamma = 90^0$;

стога је $2\delta = 90^0$, и

$\delta = 45^0$.

24) Нека је у троуглу ABC (сл. 41) $\gamma > \beta$; тада је $AB > AC$.



Сл. 41

Треба доказати да је

$$AB > ED + DF, \text{ и}$$

$$AC < ED + DF.$$

Посматрајмо троуглове BDE и CDF; како је $\delta_1 = \gamma$ и $\gamma > \beta$, то је и $\delta_1 > \beta$, па је, стога, $BE > DE$. С друге стране, $\delta_2 = \beta$; а како је $\beta < \gamma$, то је и $\delta_2 < \gamma$ и стога је $CF < DF$.

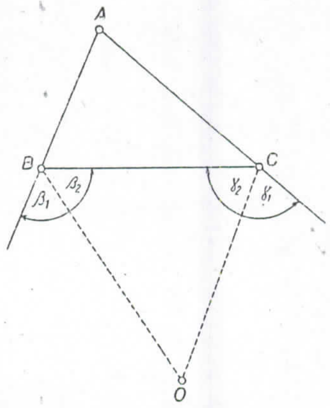
Међутим, због тога што је $DE \parallel AC$ и $DF \parallel AE$, имамо да је $DE = AF$ и $DF = AE$.

Отуда следује:

$$AE + EB > ED + DF, \text{ или: } AB > ED + DF;$$

а затим: $AF + FC < ED + DF$ или: $AC < ED + DF$.

25) Из слике 42 имамо:



Сл. 42

$$\beta_1 + \beta_2 = 180^0 - \sphericalangle B.$$

Како је $\beta_1 = \beta_2$, то је $2\beta_2 = 180^0 - \sphericalangle B$, или:

$$\beta_2 = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle B.$$

Исто тако:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 180^0 - \sphericalangle C$$

$\gamma_1 = \gamma_2$, $2\gamma_2 = 180^0 - \sphericalangle C$, или:

$$\gamma_2 = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle C.$$

Даље:

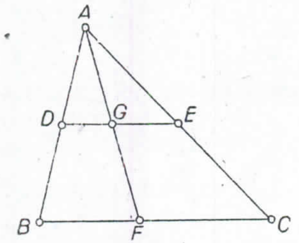
$$\sphericalangle BOC = 180^0 - (\beta_2 + \gamma_2) =$$
$$= 180^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle B + 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle C) =$$
$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle B + \sphericalangle C).$$

Како је $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^0 - \sphericalangle A$, а

$$\frac{1}{2}(\sphericalangle B + \sphericalangle C) = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle A,$$

то је $\sphericalangle BOC = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle A$.

26) Зна се да је $DE \parallel BC$ (сл. 43).



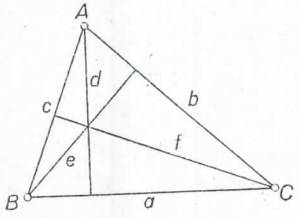
Сл. 43

У троуглу BFA: $AD = DB$,

$DG \parallel BF$; према томе је

$AG = GF$.

27) Са слике 44 видимо да је



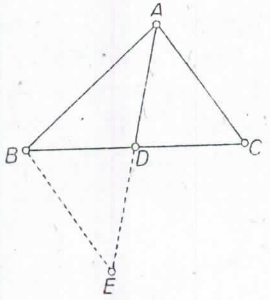
Сл 44

$$d < b,$$
$$e < c,$$
$$f < a;$$

сабирањем тих неједнакости добијамо:

$$d + e + f + a + b + c.$$

28) Нека је у троуглу ABC (сл. 45) AD тежишна линија.



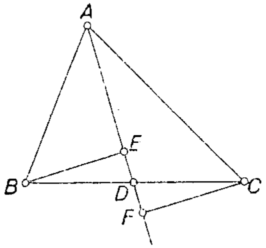
Сл. 45

Продужимо је преко D до тачке E, тако да је $DE = AD$ и спојмо E са B. Тада је

$$BE = AC.$$

Како је $AE < AB + BE$, или $AE < AB + AC$,

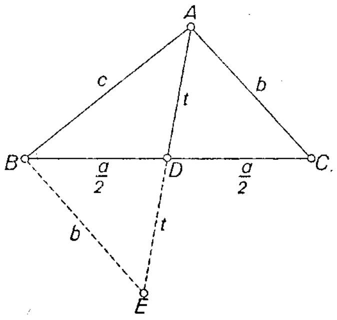
добијамо: $AD < \dfrac{AB + AC}{2}$.



Сл. 46

29) Како је AD тежишна линија (сл. 46), правоугли троугли BDE и CDF су подударни, јер имају једнаке хипотенузе и једнак један оштар угао; дакле:

$$BE = CF.$$



Сл. 47

30) Нека су стране троугла a, b, c и тежишна линија $AD = t$ (сл. 47). Треба доказати да је

$$\frac{b+c-a}{2} < t < \frac{b+c}{2}.$$

У троугловима ACD и ABD имамо:

$$b < t + \frac{a}{2},$$

$c < t + \frac{a}{2}$, одакле сабирањем произилази: $b + c < 2t + a$, или: $b + c - a < 2t$, и, најзад:

$$\frac{b+c-a}{2} < t.$$

Продужимо сад AD преко D до тачке E, тако да је $DE = AD$ и спојмо E са B. Троугли ACD и BDE су подударни, па је $BE = AC = b$. Стога је, у троуглу ABE,

$AE < BE + AB$, или:

$2t < b + c$, и, коначно:

$$t < \frac{b+c}{2}.$$

Дакле: $\frac{b+c-a}{2} < t < \frac{b+c}{2}$,

што је требало доказати.

31) Ако величине тежишних линија обележимо редом са t_1, t_2, t_3, можемо, према закључцима у зад. 30, написати:

$$2t_1 < b + c,$$

$$2t_2 < a + c,$$

$$2t_3 < a + b.$$

Сабирањем тих неједнакости добијамо:

$$2\,(t_1 + t_2 + t_3) < 2\,(a + b + c),$$

или: $t_1 + t_2 + t_3 < a + b + c.$

Исто тако, на основу закључака у зад. 30, имамо:

$$t_1 > \frac{b+c-a}{2},$$

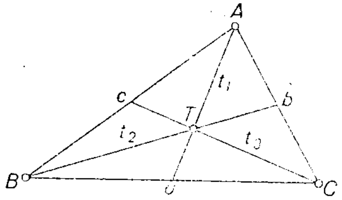
$$t_2 > \frac{c+a-b}{2},$$

$$t_3 > \frac{a+b-c}{2},$$

одакле сабирањем произилази:

$$t_1 + t_2 + t_3 > \frac{a+b+c}{2},$$

чиме је теорема доказана.



Сл. 48

32) Нека су a, b, c стране, а t_1, t_2, t_3 тежишне линије троугла ABC (сл. 48).

Како се тежишне линије троугла секу у тежишту T које дели сваку тежишну линију у односу 2:1, почев од темена троугла, то из троуглова ATB, BTC, CTA добијамо:

$$\frac{2}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2 > c,$$

$$\frac{2}{3}t_2 + \frac{2}{3}t_3 > a,$$

$$\frac{2}{3}t_3 + \frac{2}{3}t_1 > b,$$

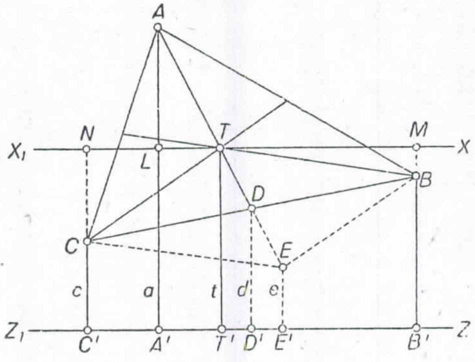
одакле сабирањем произилази:

$$\frac{4}{3}(t_1+t_2+t_3) > a+b+c,$$

или: $$t_1+t_2+t_3 > \frac{3}{4}(a+b+c),$$

што је требало доказати.

33) Нека је $AA'=a$, $BB'=b$, $CC'=c$, $TT'=t$ (сл. 49). Треба доказати да је $a+b+c=3t$.



Сл. 49

Први доказ. Повуцимо кроз тежиште T праву XX_1 (сл. 49) паралелно датој правој ZZ_1. Тада је

$AL=BM+CN$ (докажи!)

или: $AL-BM-CN=0$.

Ако обема странама ове једначине додамо $3t$, произилази:

$$t+AL+t-BM+t-CN=3t,$$

а одавде:

$$AA'+BB'+CC'=3t, \text{ или:}$$

$$a+b+c=3t.$$

Други доказ. Продужимо TD преко D за исто толику дуж, тако да је $DE=DT$, и спојмо E са B и C.

Тада је $b+c=2d$, $e+t=2d$;

дакле: $b+c=e+t$,

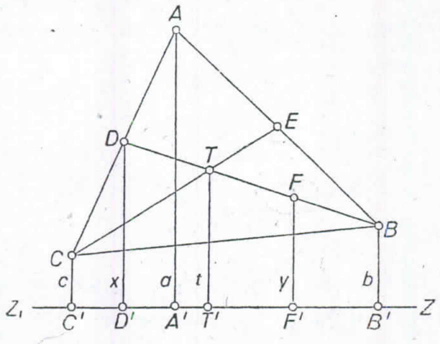
или, кад обема странама додамо a:

$$a+b+c=a+e+t.$$

Међутим је: $a+e=2t$, јер је $AT=TE$.

Дакле: $a+b+c=3t$.

Трећи доказ. Нека су BD и CE две тежишне линије троугла ABC, T његово тежиште и F средина дужи BT (сл. 50). Ако растојања тачака A,B,C,D,F,T од праве ZZ_1 обележимо редом са $AA'=a$, $BB'=b$, $CC'=c$, $DD'=x$, $FF'=y$, $TT'=t$, тада добијамо:



Сл. 50

$$a+c=2x$$
$$x+y=2t$$
$$b+t=2y,$$

одакле сабирањем произилази:

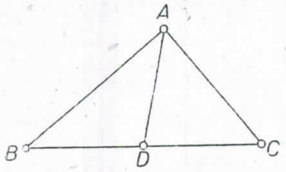
$$a+c+x+y+b+t=2x+2t+2y,$$

или: $$a+b+c=x+y+t,$$

а отуда: $$a+b+c=3t.$$

34) Троугли ACD и ABD (сл. 51) имају једнаке две стране ($AD=AD$, $CD=BD$), а треће неједнаке. Ако је, дакле, $AB>AC$, онда је и

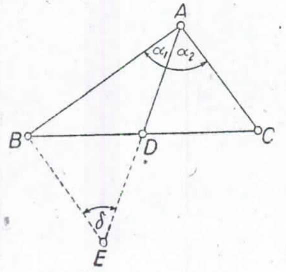
$$\sphericalangle ADB > \sphericalangle ADC.$$



Сл. 51

35) Ако је у троуглу ABC (сл. 52) $AB>AC$ и AD тежишна линија, треба доказати да је

$$\alpha_2>\alpha_1.$$

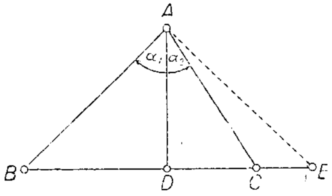


Сл. 52

Продужимо AD преко D_1 тако да је $DE=AD$, и спојмо E са B.

Како је $\triangle ACD \cong \triangle BDE$, следује да је $BE=AC$, $\delta=\alpha_2$. По претпоставци $AB>AC$ или $AB>BE$, што значи да је $\delta=\alpha_1$, а отуда и $\alpha_2>\alpha_1$, што је требало доказати.

36) Нека је у троуглу ABC (сл. 53) AD висина и нека је $AB > AC$; тврдимо да је $\alpha_1 > \alpha_2$.



Сл. 53

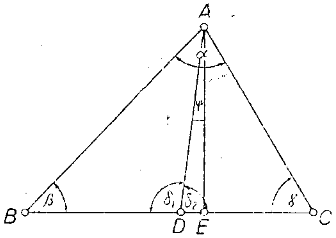
Како је $AB>AC$, то је и $BD>CD$. Ако BD продужимо преко D за исто толику дужину, тако да је $DE=BD$, тачка E ће се наћи на продушку дужи DC, па добијамо

$$\sphericalangle DAE > \alpha_2.$$

Из подударности троуглова ABD и ADE следује да је $\sphericalangle DAE=\alpha_1$. Одавде закључујемо да је $\alpha_1>\alpha_2$.

Ако тачка D лежи на продушку стране BC, страна AC је унутар угла BAD, па је одмах јасно да је $\alpha_1>\alpha_2$.

37) У троуглу ABC нека је AD бисектриса угла α и AE висина (сл. 54).



Сл. 54

Тврдимо да је

$$\varphi = \frac{\gamma-\beta}{2}.$$

Заиста:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} - (90^0 - \gamma)\text{; а како је } \frac{\alpha}{2} = 90^0 - \frac{\beta+\gamma}{2},$$

то је $\varphi = 90^0 - \frac{\beta+\gamma}{2} - (90^0 - \gamma)$,

или:

$$\varphi = \frac{\gamma-\beta}{2},$$

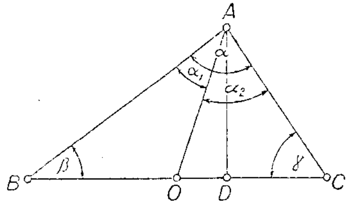
што је требало доказати.

У зад. 19 видели смо да је $\gamma - \beta = \delta_1 - \delta_2$, па је исто тако:

$$\varphi = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2},$$

што је лако проверити.

38) Претпоставимо прво да стране AB и AC нису једнаке и повуцимо тежишну линију AO (сл. 55).



Сл. 55

По претпоставци $AD = \frac{BC}{2} = OB = OC$; како је $AO > AD$, то је

$$AO > BO \text{ и } AO > CO,$$

што значи да је у троуглима AOB и AOC

$$\beta > \alpha_1 \text{ и } \gamma > \alpha_2.$$

Сабирањем тих неједнакости добијамо:

$$\beta+\gamma > \alpha_1+\alpha_2,$$

или:
$$\beta+\gamma > \alpha.$$

Међутим је $\alpha+\beta+\gamma=2R$, па је

$$2R - \alpha > \alpha,$$

или:
$$2R > 2\alpha$$

и, коначно:
$$\alpha < R.$$

У случају да је $AB=AC$, тежишна линија AO уједно је и висина и бисектриса, па имамо:

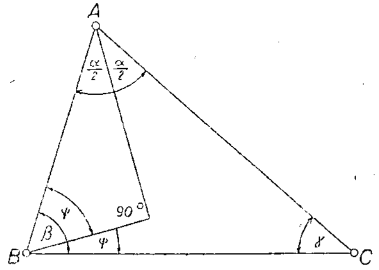
$$AO = BO = CO.$$

Тада је $\beta=\alpha_1$, $\gamma=\alpha_2$ и $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}$,

одакле је
$$\beta+\gamma=\alpha,$$
$$2R-\alpha=\alpha,$$
$$2R=2\alpha,$$

и, коначно:
$$\alpha=R.$$

39) а) $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ (сл. 56)



Сл. 56

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^0$$

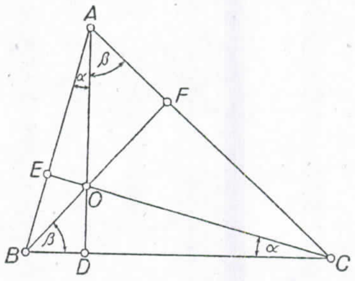
$$\varphi = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

$$\varphi = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

б) $\psi = \beta - \varphi = \beta - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{2\beta-\beta-\gamma}{2}$

$$\psi = \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

40) Из слике 57 имамо:



Сл. 57

$$\alpha = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCE,$$

$$\beta = \sphericalangle DAC = \sphericalangle CBF,$$

$$\sphericalangle COD = 90^0 - \alpha,$$

$$\sphericalangle BOD = 90^0 - \beta.$$

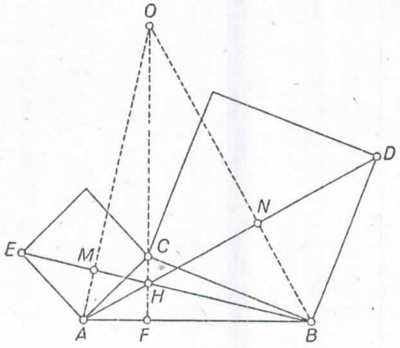
Сабирањем ових једнакости имамо:

$$\sphericalangle COD + \sphericalangle BOD = 180^0 - (\alpha + \beta), \text{ или:}$$

$$\sphericalangle BOC = 180^0 - \sphericalangle BAC, \text{ или:}$$

$$\sphericalangle BOC + \sphericalangle BAC = 180^0.$$

41) Теорема ће бити доказана ако се докаже да се нормале AM, BN (сл. 58), повучене из темена A на BE и из темена B на AD, секу на висини CF; јер ако је тако, праве AD, BE, CF су висине троугла AOB, а оне се, као што знамо, секу у једној тачки.



Сл. 58

Продужимо AM до пресека са FC; нека је O тај пресек.

Троугли EAB и ACO су подударни, јер је $AE = AC$, $\sphericalangle AEB = \sphericalangle CAO$, $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ACO$. Дакле: $CO = AB$.

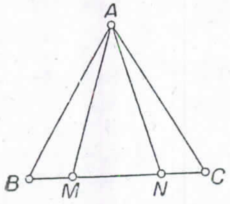
Ако продужимо BN, добићемо троугао $O'CB$ подударан са троуглом ABD, а у тим троуглима биће

$$O'C = AB = OC,$$

што значи да се O и O' поклапају. Дакле, праве AD, BE, CF пролазе кроз исту тачку.

2) Равнокраки и равнострани троугао

42) Троугли ABM и ACN (сл. 59) су подударни, јер је

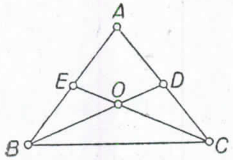


Сл. 59

$$MB = NC, \quad BA = CA, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle C.$$

Према томе је $AM = AN$.

43) Нека је $BD = CE$ (сл. 60).



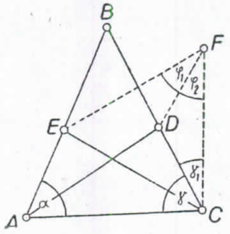
Сл. 60

Како се тежишне линије узајамно деле у односу $2:1$ рачунајући од темена, то је

$$BO = CO \text{ и } OD = OE.$$

Одавде следује да је $\triangle BOE \cong \triangle COD$. Према томе је $BE = CD$, а отуда и $AB = AC$.

44) По претпоставци бисектриса AD једнака је бисектриси CE (сл. 61).



Сл. 61

Према томе, троугли ACD и ACE имају две стране једнаке. Треба, дакле, доказати да је

$$CD = AE,$$

што значи да је и $\alpha = \gamma$.

Претпоставимо да је $\alpha > \gamma$. Из тачке E повуцимо $EF \parallel AD$ и из тачке D праву $DF \parallel AE$. Како је $AEFD$ паралелограм, то је $EF = AD$, а по претпоставци $AD = CE$, одакле следује да је троугао CEF равнокрак и $\sphericalangle ECF = \sphericalangle EFC$, тј.

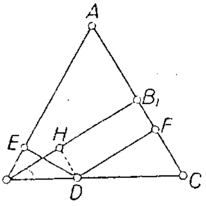
$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\gamma}{2} + \gamma_1 .$$

Међутим, с једне стране, имамо да је $\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2} > \frac{\gamma}{2}$, дакле $\varphi_1 > \frac{\gamma}{2}$, и стога $\varphi_2 < \gamma_1$; тада је у троуглу CDF страна $CD < DF$.

С друге стране, троугли ACD и ACE имају једнаке две стране. Ако је, дакле, $\alpha > \gamma$, тада је $CD > AE$, а тиме, због једнакости $DF = AE$, и $CD > DF$.

Тиме нас претпоставка да је $\alpha > \gamma$ доводи до противуречних закључака, па је морамо одбацити. Мора, дакле, да је $\alpha = \gamma$, и троугао ABC је равнокрак.

45) Из D (сл. 62) спустимо нормалу DH на BB_1.



Сл. 62

Тада је

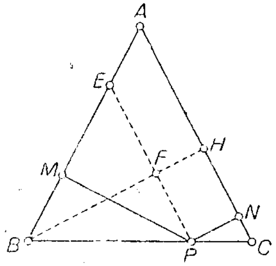
$$DH = FB_1.$$

Из подударности троуглова BDE и BDH и из те једнакости следује:

$$BE = DH = FB_1.$$

Дакле: $BE + CF = FB_1 + CF = CB_1$.

46) Нека су PM и PN посматране нормале (сл. 63).



Сл. 63

Из тачке P основице BC повучемо паралелу PE краку AC, чиме добијамо равнокраки троугао BEP. Паралела PE сече висину BH у тачки F. Из подударности троуглова BFP и BMP следује:

$$PM = BF,$$

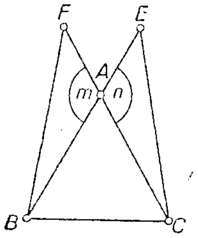
а из паралелограма $FHNP$:

$$PN = FH;$$

отуда добијамо:

$$PM + PN = BF + FH = BH.$$

47) Троугли BAF и CAE (сл. 64) су подударни, јер је



Сл. 64

$$AB = AC,$$

$$AF = AE,$$

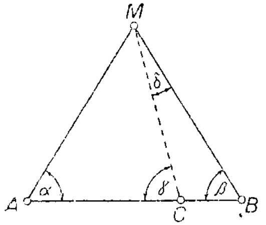
$$\sphericalangle m = \sphericalangle n.$$

Према томе је

$$BF = CE.$$

48) Ако је $MA = MB$ (сл. 65), троугао ABM је равнокрак и

$$\alpha = \beta.$$



Сл. 65

Претпоставимо да се из тачке M може повући више једнаких дужи. Нека је $MC = MA$; у том случају би било $\alpha = \gamma$, а отуда $\gamma = \beta$.

Међутим је

$$\gamma = \beta + \delta, \text{ тј.:}$$

$$\gamma > \beta, \text{ или: } \gamma > \alpha.$$

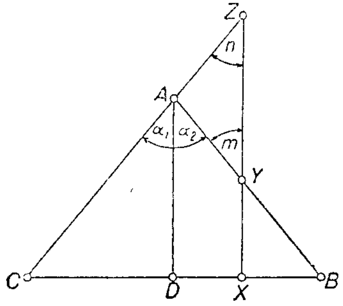
Према томе је $MA > MC'$ и $MB > MC$.

49)

$$ZX \perp CB$$

$AD \perp CB$; према томе је

$$ZX \parallel AD \text{ (сл. 66).}$$



Сл. 66

Висина из врха равнокраког троугла полови угао на врху, значи:

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Међутим је

$$\sphericalangle m = \alpha_2,$$

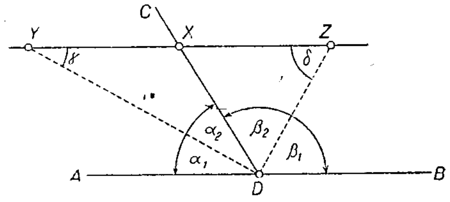
$\sphericalangle n = \alpha_1$; према томе је

$$\sphericalangle m = \sphericalangle n.$$

Ови углови припадају троуглу AYZ, значи:

$$AZ = AY.$$

50) Из слике 67 имамо:



Сл. 67

$$\alpha_1 = \gamma,$$

$\alpha_1 = \alpha_2$, отуда:

$$\alpha_2 = \gamma.$$

Како ови углови припадају троуглу XYD, то је

$$XY = XD.$$

Исто тако:

$$\beta_1 = \delta,$$

$\beta_1 = \beta_2$; према томе:

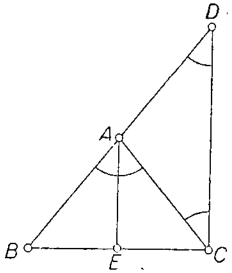
$$\beta_2 = \delta.$$

Ови су углови у троуглу XZD, па је

$$XZ = XD.$$

Из $XD = XY$ и $XD = XZ$ произилази $XY = XZ$.

51) $AD = AB = AC$; према томе троугао ACD је равнокрак и углови ACD и ADC су једнаки (сл. 68).



Сл. 68

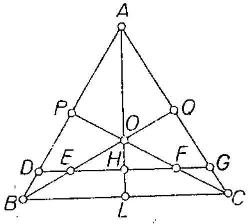
Збир њихов је једнак спољашњем углу код A, па је сваки од њих једнак половини угла A.

Ако повучемо висину из A, знамо да она полови угао на врху; према томе:

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAE.$$

Ови углови су по положају сагласни, значи да је $DC \parallel AE$. Како је AE нормално на BC, то је и DC нормално на BC.

52) Висина AL дели сваку паралелу основици BC (сл. 69) равнокраког троугла ABC на два једнака дела, што значи да је $DH = HG$. Међутим, тежишне линије секу се у тежишту O, које је на висини AL, па је троугао BOC равнокрак; тада је



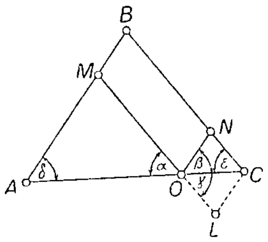
Сл. 69

$$EH = HF,$$

па стога и

$$DE = FG.$$

53) *Први доказ.* Нека су OM, ON паралеле странама CB, AB (сл. 70).



Сл. 70

Треба доказати да паралелограм $OMBN$ има сталан обим, што ће бити кад је $OM + ON = const.$

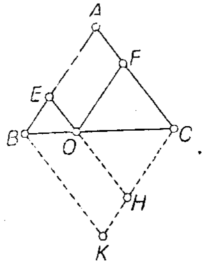
Продужимо MO преко O и узмимо $OL = ON$. Тада је $\alpha = \beta = \gamma$, што значи да су троугли COL и CON подударни и равнокраки. Одавде следује да је $LC \parallel ON \parallel BM$, што значи да је $BCLM$ паралелограм. Према томе је

$$MO + ON = MO + OL = ML = BC = const.$$

Други доказ. Из $\alpha = \varepsilon$ и $\delta = \varepsilon$ следује $\alpha = \delta$, а отуда $OM = AM$; затим, из $\beta = \delta$ и $\varepsilon = \delta$ следује $\beta = \varepsilon$, а отуда $ON = CN$. Према томе:

$$OM + MB + BN + NO = AM + MB + BN + NC = AB + BC = const.$$

54) Нека су дужи OE и OF повучене тако да је $\sphericalangle OEB = \sphericalangle OFC$ (сл. 71). Тврдимо да је



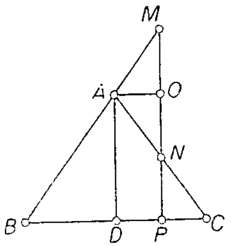
Сл. 71

$$OE + OF = const.$$

Допунимо троугао ABC троуглом BCK до ромба $ABKC$. Ако OE продужимо преко O до пресека са CK, страном ромба $ABKC$, очевидно је да је $OH = OF$ ($\triangle OCF \cong \triangle OCH$), па је

$$OE + OF = OE + OH = const.$$

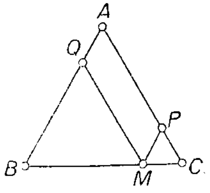
55) Са слике 72 видимо да је



Сл. 72

$$PM + PN = 2PO = 2AD = const.$$

56) Четвороугао $APMQ$ је паралелограм (сл. 73), па следује:



Сл. 73

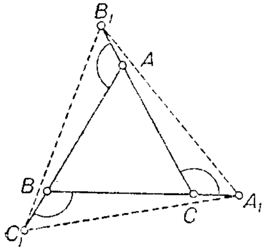
$$AP = MQ = BM,$$

$$AQ = MP = CM.$$

Сабирањем ових једнакости добија се:

$$AP + AQ = BM + CM = BC.$$

57) Троуглови A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1 (сл. 74) међусобно су подударни ($A_1C = BC_1 = B_1A$; $CB_1 = A_1B = AC_1$; $\sphericalangle A_1CB_1 = \sphericalangle A_1BC_1 = \sphericalangle B_1AC_1$), па су им хомологне стране A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 једнаке, што значи да је троугао $A_1B_1C_1$ равностран.



Сл. 74

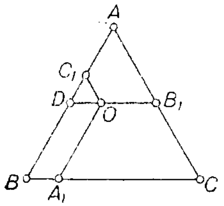
58) Види зад. 46 (сл. 63). Ако кроз тачку P унутар равностраног троугла повучемо паралелу једној његовој страни, збир нормала спуштених из те тачке на бочне стране једнак је висини тога мањег равностраног троугла. Према томе, збир сва три растојања једнак је висини датог троугла.

59) Продужимо B_1O до пресека D са AB (сл. 75). Троугао OC_1D је очевидно равностран. Стога је

$$OB_1 + OC_1 = OB_1 + OD = DB_1 = DA$$

Како је, с друге стране, $OA_1 = BD$, следује коначно:

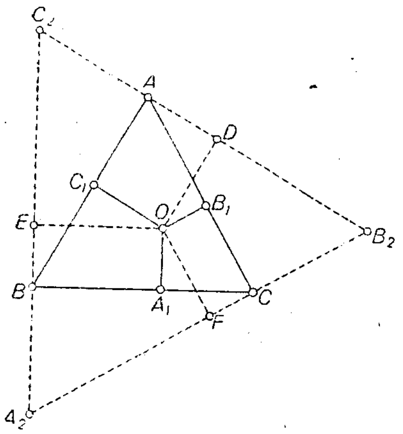
$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = BD + DA = BA.$$



Сл. 75

60) Кроз темена A, B, C троугла ABC повуцимо редом на стране AB, AC, BC нормале B_2C_2, A_2B_2 и A_2C_2 (сл. 76). Оне образују троугао $A_2B_2C_2$, за који је лако показати да је равностран. Ако сад из тачке O унутар троугла спустимо нормале OA_1, OB_1, OC_1 на стране троугла ABC и нормале OD, OE, OF на стране троугла $A_2B_2C_2$, добијамо ове једнакости:

$$AC_1 = OD,\quad BA_1 = OE,\quad CB_1 = OF.$$



Сл. 76

Међутим из зад. 58 знамо да је збир $OD + OE + OF$ једнак висини троугла $A_2B_2C_2$. Према томе:

$$AC_1 + BA_1 + CB_1 = OD + OE + OF = const.,$$

што је требало доказати.

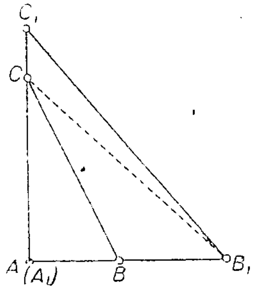
3) Правоугли троугао

61) Поставимо дате троугле ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 77) један на други, тако да им се поклопе темена A, A_1 правога угла и краци правога угла. По претпоставци имамо:

$$A_1B_1 > AB,\quad A_1C_1 > AC.$$

Спојмо C са B_1. Тада је $CB < CB_1$ и $CB_1 < C_1B_1$ (теорема о косим дужима!).

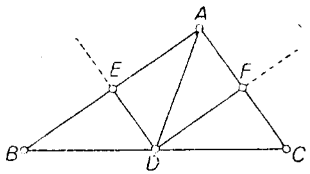
Дакле: $CB < C_1B_1$.



Сл. 77

62) Симетрала једне катете паралелна је другој катети и пролази кроз средину хипотенузе. Дакле, та тачка је подједнако удаљена од сва три темена троугла и кроз њу пролази и симетрала друге катете.

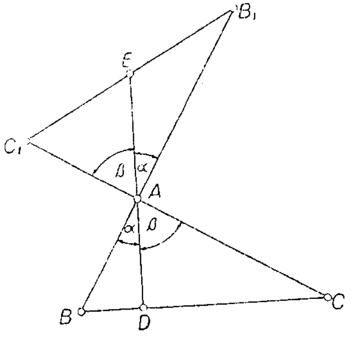
63) Троугли ABD и ACD су равнокраки и симетрале DE и DF су њихове висине (сл. 78). Према томе, троугли ADF и CDF су подударни; исто тако троугли ADE и BDE. С друге стране, четвороугао $AEDF$ је паралелограм, који дијагонала AD дели на два подударна троугла. Отуда је јасно да су сва четири троугла међусобно подударна.



Сл. 78

64) Како је $\frac{1}{3}h = 30^0$, то је други оштар угао 60^0. Дакле, тај правоугли троугао је половина равностраног троугла, и, према томе, страна наспрам угла од 30^0 је половина хипотенузе.

65) Нека је E пресек продушка висине AD троугла ABC и дужи B_1C_1 (сл. 79). Треба доказати да је E средина те дужи.



Сл. 79

Троугли ABC и $A_1B_1C_1$ су подударни, јер имају једнаке две стране и њима захваћени угао. Стога је

$$\sphericalangle C=\sphericalangle B_1 \text{ и } \sphericalangle B=\sphericalangle C_1;$$

затим је $\sphericalangle C=\alpha$ и $\sphericalangle B=\beta$.

Отуда следује:

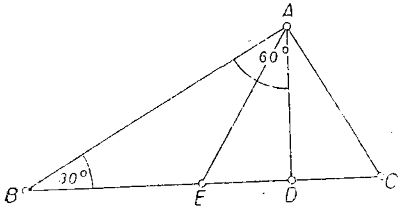
$$EB_1=AE \text{ и } EC_1=AE.$$

Дакле: $$EB_1=EC_1.$$

66) Нека је $\sphericalangle B=30^\circ$ (сл. 80). Тада је $\sphericalangle BAD=60^\circ$. Ако повучемо симетралу AE тога угла, троугао AEB је равнокрак и $AE=BE$. Како је, према зад. 64, $DE=\frac{AE}{2}=\frac{BE}{2}$, а према претпоставци $BD=\frac{3}{4}BC$, следује да је $CD=DE$, а отуда да је троугао ACE равностран. Према томе, $\sphericalangle CAD=30^\circ$, или:

$$\sphericalangle BAC=90^\circ,$$

што је требало доказати.

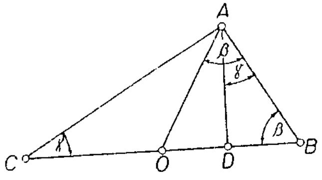


Сл. 80

67) Како је троугао AOB равнокрак, $\sphericalangle OAB=\beta$ (сл. 81) с друге стране, $\sphericalangle BAD=\gamma$;

дакле:

$$\sphericalangle DAO=\beta-\gamma.$$



Сл. 81

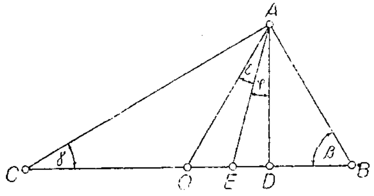
68) *Први доказ.* У зад. 67 видели смо да је

$$\sphericalangle DAO=\beta-\gamma,$$

ако је AO тежишна линија (сл. 82). Из зад. 37 знамо да је

$$\varphi=\frac{\beta-\gamma}{2},$$

ако је AE бисектриса угла BAC.



Сл. 82

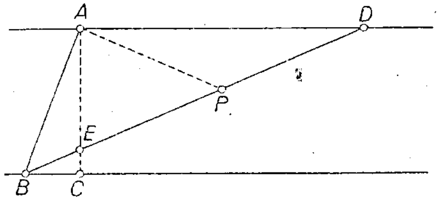
Дакле: $$\varepsilon=\frac{\beta-\gamma}{2},$$

тј.: $$\varphi=\varepsilon.$$

Други доказ. Троугао AOC је равнокрак, па је $\sphericalangle CAO=\gamma$; с друге стране, $\sphericalangle BAD=\gamma$. Према томе, бисектриса AE правога угла уједно је бисектриса угла DAO.

69) Нека је $EP=PD=AB$ (сл. 83). У правоуглом троуглу AED тежишна линија AP једнака је половини хипотенузе DE, тј.:

$$AP=PD=AB.$$



Сл. 83

Тада имамо:

$$\sphericalangle APB=\sphericalangle PAD+\sphericalangle ADP=$$
$$=2\sphericalangle ADP.$$

Међутим је $$\sphericalangle ADP=\sphericalangle DBC.$$

Како је троугао ABP равнокрак, то је $\sphericalangle ABP=\sphericalangle APB$. Према томе:

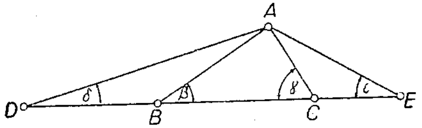
$$\sphericalangle DBC=\frac{1}{2}\sphericalangle ABP,$$

или: $$\sphericalangle DBC=\frac{1}{3}\sphericalangle ABC.$$

Напомена. Као што се види, да поделимо дати угао на три једнака дела, требало би повући трансверзалу BED, тако да је $ED=2AB$; али тај се проблем не може решити само шестаром и лењиром (Проблем трисекције угла).

70) Како су троугли ABD и ACE равнокраки, то је (сл. 84):

$$\beta = 2\delta \text{ и } \gamma = 2\varepsilon.$$



Сл. 84

Отуда следује:

$$\sphericalangle DAE = 90^0 + \delta + \varepsilon.$$

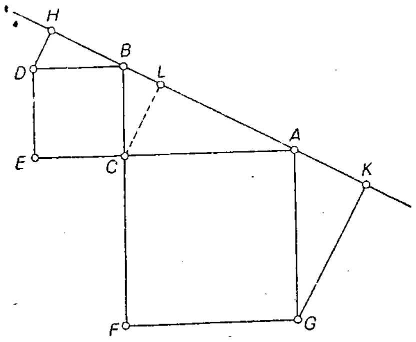
Међутим:

$$\delta + \varepsilon = \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{90^0}{2} = 45^0,$$

па је

$$\sphericalangle DAE = 135^0.$$

71) а) Повуцимо из темена правог угла датог троугла (сл. 85) нормалу на хипотенузу.



Сл. 85

Правоугли троугли BDH и CLB су подударни, јер су им једнаке хипотенузе и оштри углови. Исто су тако подударни и троугли GK и ALC.

Како је троугао ABC састављен из троуглова CLB и ALC, то се он може саставити и из троуглова њима подударних.

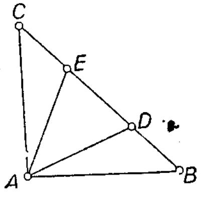
б) Из горње подударности имамо:

$$BL = DH \text{ и } AL = GK;$$

према томе је

$$AB = BL + AL = DH + GK.$$

72) Према услову задатка троугли ABE и ADC су равнокраки (сл. 86); према томе:



Сл. 86

$$\sphericalangle AEB = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle B, \quad \sphericalangle ADC = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle C.$$

У троуглу ADE:

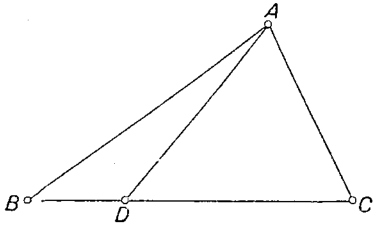
$$\sphericalangle DAE = 180^0 - (\sphericalangle AEB + \sphericalangle ADC) = 180^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle B + 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle C) = \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = 45^0.$$

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

73) Трећа страна је већа од разлике друге две стране, а мања од њиховог збира, и стога је она већа од 4 cm, а мања од 12 cm.

74) У троуглу је свака страна мања од збира других двеју страна; према томе, тражена страна је мања од 1,9 + 0,7, тј. мања од 2,6 m; али она је већа од разлике 1,9 - 0,7, тј. већа од 1.2 m. Како је она изражена целим бројем, то је њена дужина 2 m.

75) Ако је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD$ (сл. 87), троугао ADC је равнокрак и $AD = DC$.



Сл. 87

По претпоставци је

$$AB + BC + AC = 37,$$

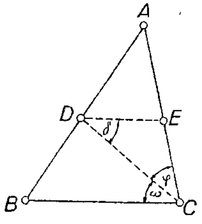
$$AB + BD + AD = 24$$

или: $$AB + BD + DC = 24$$

или: $$AB + BC = 24.$$

Како је обим троугла ABC 37, то је страна $AC = 13$.

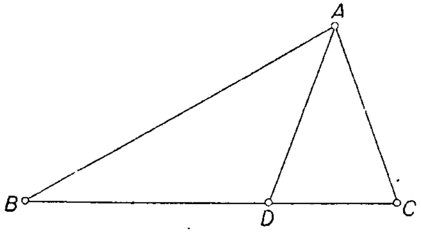
76) Претпоставимо да је задатак решен; нека је DE паралела страни BC која чини отсечак $CE = DE$; спојмо C и D (сл. 88).



Сл. 88

Тада је троугао CDE равнокрак и $\delta = \varphi$. Како је, међутим, $\delta = \omega$, јер је $DE \parallel BC$, то је $\omega = \varphi$, што значи да је CD бисектриса угла ACB. Тражена тачка D налази се, дакле, на пресеку те бисектрисе и стране AB.

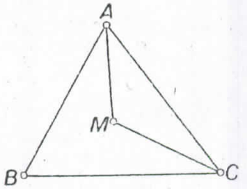
77) Троугао ADC је равнокрак и његови углови код D и C су једнаки. Како је угао код D суплементан углу BDA, то је $\sphericalangle ADC = 70^0$, $\sphericalangle ACD = 70^0$, а $\sphericalangle CAD = 40^0$ (сл. 89).



Сл. 89

AD је симетрала угла A у троуглу ABC; према томе је $\sphericalangle BAC = 80^0$, а $\sphericalangle ABC = 30^0$.

78) Обележимо углове ABC са β, BAC са α, ACB са γ и AMC са m (сл. 90).



Сл. 90

У троуглу ABC: $\alpha+\beta+\gamma=180^0$,

у троуглу AMC: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}+m=180^0$.

По претпоставци је $m=2\beta$.

Заменом добијамо:

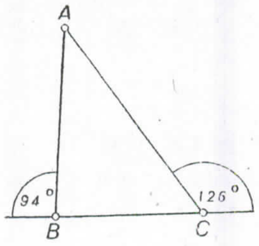
$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}+2\beta=180^0.$$

Из прве једнакости је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^0-\frac{\beta}{2}$;

према томе је $$90^0-\frac{\beta}{2}+2\beta=180^0,$$

а отуда: $$\beta=60^0.$$

79) Унутрашњи углови код B и C су суплементни са спољашњим (сл. 91).



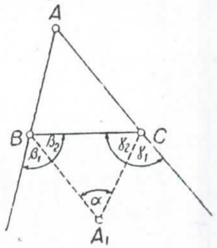
Сл. 91

$\sphericalangle B=180^0-94^0=86^0$

$\sphericalangle C=180^0-126^0=54^0$.

Према томе, збир ова два унутрашња угла износи 140^0, а трећи унутрашњи угао A је тада $180^0-140^0=40^0$.

80) Са слике 92 видимо да је:



Сл. 92

$\beta_1+\beta_2=180^0-74^0=106^0$,

$\beta_1=\beta_2=53^0$.

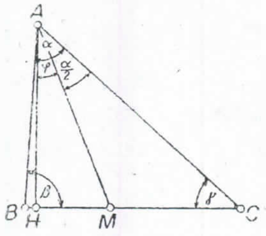
$\gamma_1+\gamma_2=180^0-62^0=118^0$,

$\gamma_1=\gamma_2=59^0$.

$\beta_2+\gamma_2=53^0+59^0=112^0$,

$\alpha=180^0-(\beta_2+\gamma_2)=180^0-112^0=68^0$.

81) Из троугла AHC (сл. 93) имамо:



Сл. 93

$$\frac{\alpha}{2}+\varphi=90^0-\gamma,$$

$$\frac{\alpha}{2}+23^0 11'=90^0-41^0 15'$$

$$\frac{\alpha}{2}=25^0 34'$$

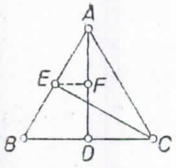
$$\alpha=51^0 8',\ \beta=87^0 37'..$$

82) Како је троугао равнокрак, трећа страна је 3 cm или 8 cm; али, како је трећа страна мања од збира 11 cm друге две стране а већа од разлике 5 cm тих страна, то она износи 8 cm.

83) Обележимо основицу равнокраког троугла са a, крак са b. Страна равностраног троугла, према услову задатка, износи 15 m, тј. $b=15$ m. Обим равнокраког троугла је $a+2b=40$ m; отуда је $a=10$ m.

84) Страна од 25 m не може бити основица, јер је $25>10+10$, а свака страна је мања од збира других двеју. Према томе, основица је страна од 10 m.

85) Пројекција висине CE на висини AD је DF (сл. 94). Према томе, EF је паралелно са BC; а како је тачка E на средини стране AB, то је и тачка F на средини висине AD.



Сл. 94

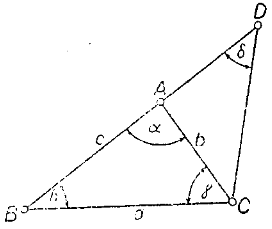
Значи, пројекција DF је половина висине или $DF=3$ dm.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1) Ма који троугао

86) Нека су дате средине страна A_1, B_1, C_1. Спој међусобно те тачке и кроз свако теме добијеног троугла $A_1B_1C_1$ повуци паралелу наспрамној страни. Тако добијени троугао ABC је тражени троугао.

87) Претпоставимо да је задатак решен (сл. 94 а).



Сл. 94 а

Продужимо BA преко A до тачке D, тако да је $AD = AC = b$ и спојмо C са D. Како је, по претпоставци, $b + c = k$, то је $BD = k$. Троугао ACD је равнокрак.

Из $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$

и $\alpha = 2\delta$

следује: $\delta = \frac{\alpha}{2} = R - \frac{\beta + \gamma}{2}$.

Према томе, конструкција се може извести овако: Конструише се угао $\delta = R - \frac{\beta + \gamma}{2}$; затим се на један његов крак пренесе $DB = k$ и кроз B повуче права која са BD образује дати угао β; најзад, из тачке C повуче се права која са BC образује дати угао γ.

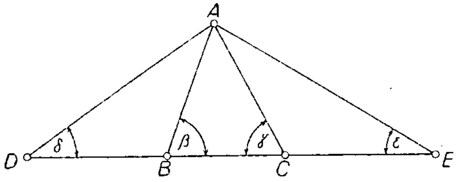
Задатак се може решити ако је $\beta + \gamma < 2R$ и, сем тога, ако је $\beta + \delta < 2R$ Међутим, тај други услов своди се на:

$$\beta + R - \frac{\beta + \gamma}{2} < 2R,$$

или: $$\beta - \gamma < 2R,$$

а то је увек испуњено, јер је β и γ мање од $2R$.

88) Претпоставимо да је задатак решен (сл. 95).



Сл. 95

Продужимо CB преко B до тачке D, тако да је $BD = BA$, и BC преко C до тачке E, тако да је $CE = CA$. Тада је дуж $DE = d$ једнака обиму троугла.

Троугли ABD и ACE су равнокраки. Отуда можемо закључити:

$$\beta = 2\delta \text{ и } \gamma = 2\varepsilon$$

или: $$\delta = \frac{\beta}{2}, \; \varepsilon = \frac{\gamma}{2}.$$

Помоћу тих елемената можемо конструисати троугао ADE. Затим, из темена A треба повући полуправу која са страном AD гради угао $\delta = \frac{\beta}{2}$ и полуправу AC која са страном AE гради угао $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$; где те полуправе пресеку дуж DE, ту су темена B и C траженог троугла ABC.

Та темена се могу добити и тако ако се повуку симетрале дужи AD и AE.

Задатак се може решити ако се може конструисати троугао ADE, а то је могуће под условом да је $\delta + \varepsilon < 2R$, или $\beta + \gamma < 4R$, што постоји; сем тога, треба да је

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle EAC < \sphericalangle DAE,$$

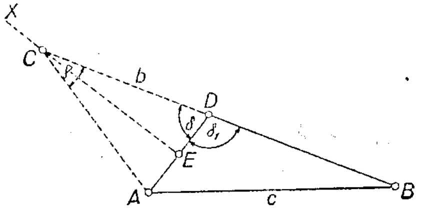
или: $$\delta + \varepsilon < 2R - \delta - \varepsilon,$$

одакле је $$2\delta + 2\varepsilon < 2R,$$

или, коначно: $$\beta + \gamma < 2R,$$

што изражава услов могућности.

89) Претпоставимо да је задатак решен. Нека је у троуглу ABC (сл. 96) дата страна $AB = c$, разлика $BD = a - b = k$ друге две стране и угао γ.



Сл. 96

Пренесимо на CB страну $CA = CD = b$; тада је

$$BD = BC - CD = a - b = k.$$

Како је троугао ACD равнокрак, имамо:

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = \delta = \frac{1}{2}\,(2R - \gamma) = R - \frac{\gamma}{2};$$

дакле: $$\delta_1 = R + \frac{\gamma}{2}.$$

Како су сад у троуглу ABD познате две стране c и k и угао δ наспрам стране c, може се тај троугао конструисати, а помоћу њега и тражени троугао ABC.

Треће теме C траженог троугла ABC може се наћи или преносом угла $CAD = \delta = R - \frac{\gamma}{2}$, или повлачењем симетрале стране AD.

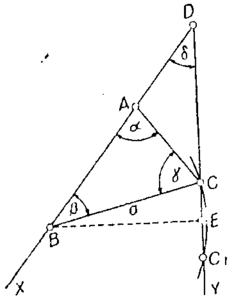
Да би задатак имао решење, потребно је да круг полупречника c описан из B сече полуправу DA, тј. треба да је $c > k$; сем тога, потребно је да полуправа повучена из A под углом $\delta = R - \frac{\gamma}{2}$ према AD сече полуправу DX, што ће бити ако је испуњен услов:

$$\sphericalangle CAD + \sphericalangle CDA = 2\delta < 2R.$$

Међутим, како је $2\delta = 2R - \gamma$, тај услов увек постоји. Према томе, једини услов за могућност конструкције јесте, дакле, $c > k$.

90) Претпоставимо да је задатак решен.

У траженом троуглу ABC позната је страна $BC = a$, збир страна $AB + AC = k$ и угао α (сл. 97).



Сл. 97

Претпоставимо, даље, да је $AB > AC$. Продужимо BA преко A до тачке D, тако да је $AD = AC$ и спојмо C са D. Тада је

$$BD = BA + AC = k.$$

Јасно је да је троугао CAD равнокрак, па је

$$\alpha = 2\delta,$$

или:

$$\delta = \frac{\alpha}{2}.$$

$\sphericalangle BCD$ мо́же бити туп или прав. Заиста, ако је $AB \geqslant AC$, тада је

$$\gamma \geqslant \beta, \text{ или: } \gamma \geqslant 2R - \alpha - \gamma,$$

одакле је

$$2\gamma + \alpha \geqslant 2R,$$

и, коначно:

$$\gamma + \frac{\alpha}{2} \geqslant R,$$

што ће рећи да је

$$\sphericalangle BCD \geqslant R.$$

Према томе, конструкција се може извести овако:

Прво се нацрта угао XDY једнак: $\delta = \frac{\alpha}{2}$; затим се на крак DX пренесе $DB = k$; из тачке B као центра опише се круг полупречника a; он сече DY у две тачке C и C_1. Угао BCD је туп, а угао BC_1D оштар; BC је, дакле, једна страна траженог троугла ABC; најзад се кроз C повуче полуправа CA, тако да са CD гради угао $\frac{\alpha}{2}$. Тиме се добија и треће теме A траженог троугла ABC.

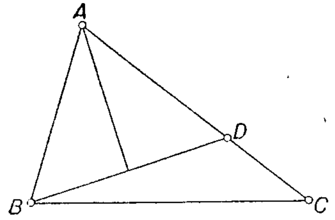
Да би се задатак могао решити, потребно је и довољно да се може повући $BC = a$, тако да C лежи између D и подножја E нормале BE на DY, или да падне у E; а то ће бити ако је

$$BE \leqslant a < k.$$

То су два услова могућности решења.

91) а) Нека је $AC > AB$ (сл. 98). Пренесимо на AC страну $AB = AD$; тада је

$$DC = AC - AD = AC - AB.$$

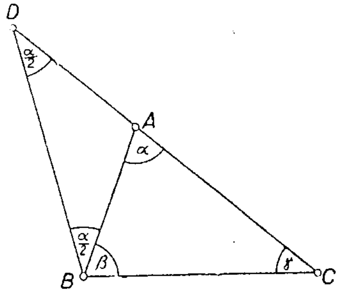


Сл. 98

ABD је равнокрак троугао; симетрала угла A је нормала на BD. Према зад. 39 угао DBC је $\frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2}$. Према томе, треба најпре конструисати троугао DBC, у коме су сада познате две стране и један угао. Затим, треба повући симетралу стране BD и продужити страну CD до пресека са овом симетралом. Тај пресек даје треће теме траженог троугла.

б) На продужену страну AC пренесимо $AB = AD$, тада је

$$CD = AC + AD = AC + AB \text{ (сл. 99).}$$



Сл. 99

Обележимо дату разлику углова на основици са ψ. Како је ABD равнокрак троугао, то су углови код B и D једнаки и сваки од њих половина спољашњег угла α.

$$\beta - \gamma = \psi,$$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; сабирањем ових једнакости добија се:

$$\alpha+2\beta=180^0+\psi, \text{ или:}$$

$$\frac{\alpha}{2}+\beta=90^0+\frac{\psi}{2};$$

$$\sphericalangle DBC=90^0+\frac{\psi}{2}.$$

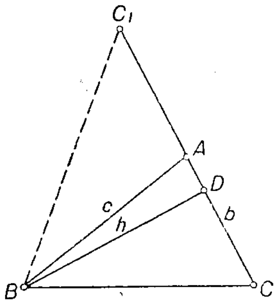
Помоћна слика је троугао DBC у коме су познате две стране и један угао.

92) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је ABC (сл. 100) троугао у коме су познате стране:

$$AB=c, AC=b$$

и висина:

$$BD=h.$$



Сл. 100

У правоуглом троуглу позната је хипотенуза AB и катета BD; према томе, тај се троугао може конструисати. Како је треће теме C траженога троугла ABC на растојању b од A, пренећемо на AD, с једне и друге стране од A, дуж $AC=AC_1=b$. На тај начин добијамо два троугла који задовољавају постављене услове, и то ABC и ABC_1.

Да би решење задатка било могуће, потребно је и довољно да се може конструисати троугао ABD, што ће бити ако је $h \leqslant c$.

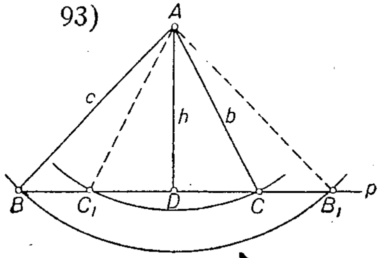
У случају када је $h=c$ троугли ABC и ABC_1 су правоугли и подударни.

93) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је ABC (сл. 101) троугао у коме су познате стране:

$$AB=c,\ AC=b$$

и висина:

$$AD=h.$$



Сл. 101

Лако се види да се конструкција може извести овако: Повучемо неку праву p и ма у којој њеној тачки D дигнемо нормалу на праву p; затим, на ту нормалу из тачке D пренесемо дату висину: $DA=h$; из тачке A као центра опишемо лукове кругова полупречника b и c, чиме добијамо на правој p тачке пресека B, C и B_1, C_1.

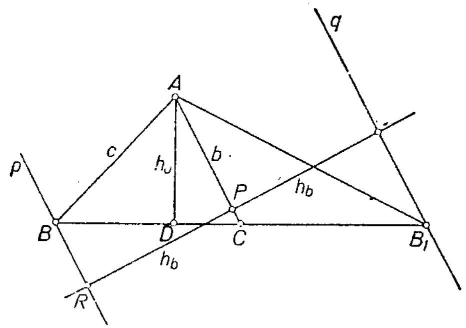
Према томе, добијамо као решења ова четири троугла: ABC, AB_1C_1, ABC_1, AB_1C, од којих су прва два подударна, а исто тако друга два, што је лако доказати.

Кад је $h<b$ и $h<c$, постоје два решења.

Кад је $h=b$ и $h<c$, или, кад је $h<b$ и $h=c$, решење је један правоугли троугао.

Најзад, кад је $h \geqslant b$ или $h \geqslant c$, не постоји ниједно решење.

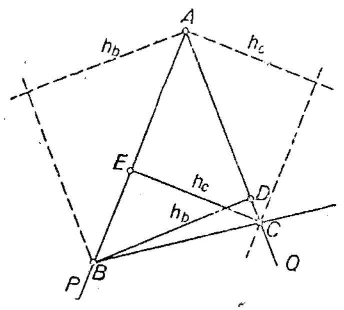
94) Конструиши прво правоугли троугао ACD (сл. 102) из b и h_a; затим, кроз произвољну тачку P праве AC повуци нормалу на ту праву, и с једне и друге стране од тачке P пренеси на ту нормалу h_b; у крајњим тачкама R, S добијене дужи $RS=2h_b$ повуци паралеле p и q страни b; где оне пресеку продужак CD, ту је треће теме B или B_1 траженог троугла ABC или AB_1C.



Сл. 102

Према томе, постоје два решења, која су могућа под условом да је $h_a<b$.

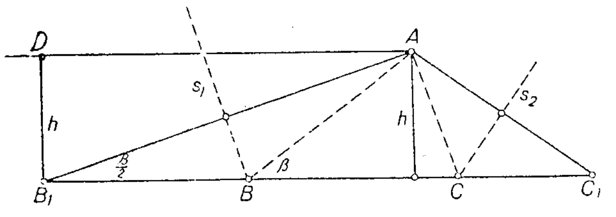
95) Прво се конструише угао α (сл. 103). Како се теме B налази на краку AP и теме C на краку AQ, то ћемо на растојању h_b од крака AQ, а са стране крака AB, повући паралелу краку AQ; а, исто тако, на растојању h_c од крака AP, а са стране крака AQ, повући паралелу краку AP; где те паралеле пресеку краке AP и AQ, тамо су темена B и Cтраженог троугла ABC.



Сл. 103

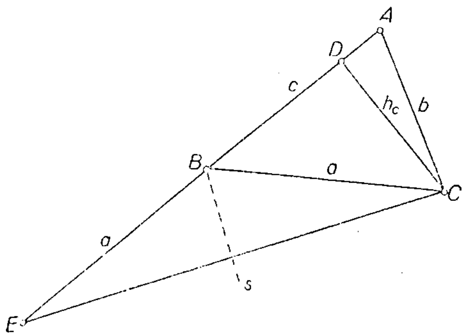
Решење увек постоји и то само једно.

96) Нека су дати обим B_1C_1, висина $B_1D=h$ и угао β траженог троугла ABC (сл. 104). Да га конструишемо, подићи ћемо нормалу B_1D на B_1C_1 у тачки B_1 и на њу пренети дату висину h; затим ћемо конструисати угао $\frac{\beta}{2}$ са теменом у B_1 и кроз тачку D повући паралелу правој B_1C_1; она ће пресећи крак угла $\frac{\beta}{2}$ у тачки A, која је једно теме траженог троугла. Друга два темена B и C добићемо кад повучемо симетрале s_1 и s_2 дужи AB_1 и AC_1 и нађемо њихове пресеке B и C са дужи B_1C_1, што је лако доказати.



Сл. 104

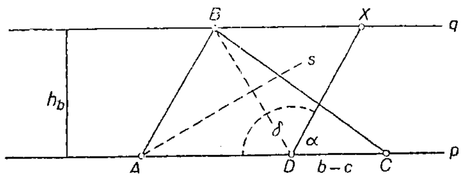
97) Конструиши прво правоугли троугао ACD помоћу b и h_c (сл. 105); затим, продужи AD преко D до тачке E, тако да је $AE=a+c$. Спој C са E и повуци симетралу s дужи CE; она сече дуж AE у тачки B, која је треће теме траженог троугла ABC.



Сл. 105

98) Конструкцију ћемо извести овако (сл. 106): Повући ћемо две паралелне праве p, q на растојању h_b; затим ћемо из произвољне тачке C на праву p пренети дату дуж $b-c$; добијена тачка D нека буде теме датог угла α чији је један крак DC а други DX; сада ћемо повући симетралу DB угла $ADX=\delta$; она ће пресећи праву q у тачки B, другом темену траженога троугла ABC. Остаје још да одредимо треће теме A троугла; очигледно је да се оно налази на пресеку симетрале s дужи BD и праве p. Заиста, кад спојимо A са B, добијамо угао $BAD=\alpha$, јер је ABD равнокраки троугао и

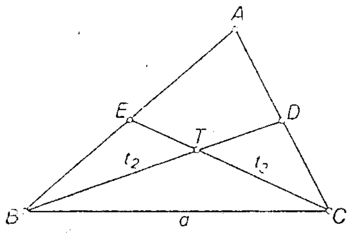
$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = \frac{\delta}{2} = \frac{180^0-\alpha}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$



Сл. 106

Који су услови могућности решења и колико их има?

99) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је ABC (сл. 107) тражени троугао у којем знамо страну $BC=a$ и тежишне линије $BD=t_2$ и $CE=t_3$. Како тежиште T дели тежишне линије BD и CE, тако да је $BT=\frac{2}{3}t_2$ и $CT=\frac{2}{3}t_3$, то су нам у троуглу BCT познате све три стране, па га лако можемо конструисати. Затим на полуправе BT и CE пренесемо дате тежишне линије t_2 и t_3 и спојимо њихове крајње тачке D и E, прву са C, другу са B, и полуправе CD и CE продужимо до пресека A, трећега темена траженог троугла ABC

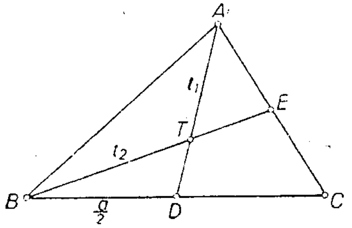


Сл. 107

Очевидно је да је решење задатка могуће само ако је могуће конструисати троугао BCT, што ће бити ако су испуњена ова два услова:

$$\frac{2}{3}\left|t_2-t_3\right| < a < \frac{2}{3}(t_2+t_3).$$

100) Види зад. 99. Прво се конструише BDT (сл. 108) помоћу $BD=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$, $BT=\frac{2}{3}t_2$, $DT=\frac{1}{3}t_1$, а затим употпуни слика до троугла ABC.



Сл. 108

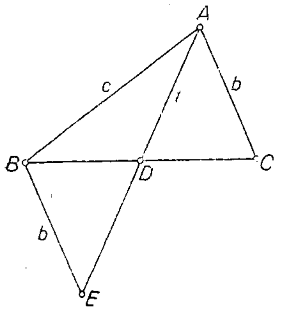
Да се задатак може решити, потребно је и довољно да су испуњени ови услови:

$$\left|\frac{2}{3}t_2-\frac{1}{3}t_1\right| < \frac{a}{2} < \frac{2}{3}t_2+\frac{1}{3}t_1,$$

или:

$$\left|\frac{4t_2-2t_1}{3}\right| < a < \frac{4t_2+2t_1}{3}.$$

101) Претпоставимо да је задатак решен, и нека су нам у троуглу ABC (сл. 109) познате стране $AB=c$, $AC=b$ и тежишна линија $AD=t$.



Сл. 109

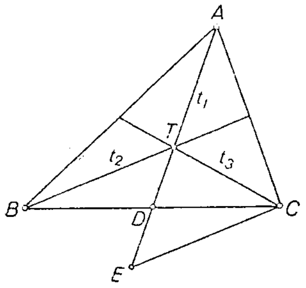
Ако тежишну линију продужимо преко D за $DE=AD=t$, добијену тачку E спојимо са B, из подударности троуглова ACD и BDE следује једнакост страна AC и BE. Троугао ABE можемо конструисати помоћу $AB=c$, $BE=b$ и $AE=2t$, а затим допунимо слику до траженог троугла ABC.

Услов могућности решења дат је овим неједнакостима:

$$|b-c|<2t<b+c.$$

102) Решење задатка се своди на конструкцију троугла CTE (сл. 110) чије су стране:

$$ET=\frac{2}{3}t_1,\ CE=\frac{2}{3}t_2,\ CT=\frac{2}{3}t_3.$$



Сл. 110

У троуглу CTE повучемо тежишну линију CD и продужимо је преко D до тачке B, тако да је $BD=CD$; затим ET продужимо преко T до A, тако да је $TA=ET$, и, најзад, спојимо тачке B и C са A. Тиме добијамо тражени троугао ABC, што је лако доказати.

Услов постојања троугла дат је овим неједнакостима:

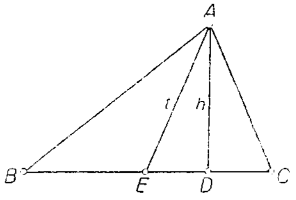
$$\left|\frac{2}{3}t_1-\frac{2}{3}t_2\right|<\frac{2}{3}t_3<\frac{2}{3}t_1+\frac{2}{3}t_2,$$

или:

$$|t_1-t_2|<t_3<t_1+t_2.$$

103) Повуци две паралелне праве p, q на растојању h_a; затим, ма из које тачке B једне од њих, рецимо p, као центра опиши лукове кругова полупречника c и $2t_b$ и добијене тачке пресека тих кругова са правом q спој са тачком B. (Даље види зад. 101).

104) Конструиши прво правоугли троугао ADE (сл. 111) помоћу $AE=t$ и $AD=h$, а затим из тачке E пренеси, с једне и друге стране, на праву ED дуж $EB=EC=\frac{a}{2}$.



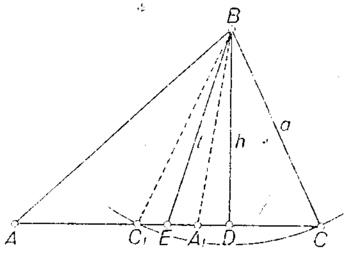
Сл. 111

Решење постоји кад је

$$h\leqslant t.$$

У случају када је $h=t$ троугао ABC је равнокрак.

105) Прво се конструише правоугли троугао BDE (сл. 112) помоћу $BD=h$ и $BE=t$; затим се из B као центра опише круг полупречника a који праву DE сече у тачкама C и C_1; те тачке су темена троуглова ABC и A_1BC_1. Треће теме A троугла добије се кад се из E пренесе дуж $AE=EC$ или $A_1E=EC_1$.



Сл. 112

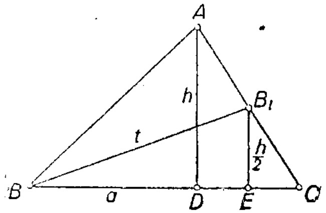
Према томе, постоје два решења, која су могућа под условом да је

$$h\leqslant t \text{ и } h<a.$$

Ако је $h=t$ и $h<a$, постоји само један троугао, који је равнокрак.

Ако је $h<t$ и $h=a$, постоји само један троугао, који је правоугли.

106) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је ABC (сл. 113) троугао у коме је позната страна $BC=a$, тежишна линија $BB_1=t$ и висина $AD=h$.



Сл. 113

Из средине B_1 дужи AC спустимо нормалу B_1E на BC; она је једнака:

$$\frac{AD}{2}=\frac{h}{2}.$$

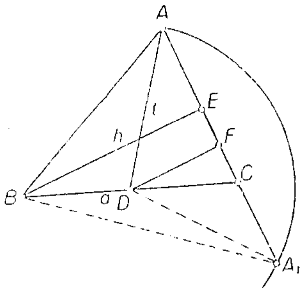
Очевидно је да се може конструисати правоугли троугао BB_1E помоћу $BB_1=t$ и $B_1E=\frac{h}{2}$; затим се на полуправу BE пренесе $BC=a$ и из C повуче полуправа преко B_1 до тачке A, тако да је $B_1A=CB_1$; најзад се споји B са A.

Кад бисмо BC пренели са друге стране од B, добили бисмо друго решење.

Оба решења су могућа под претпоставком да је $\frac{h}{2}\leqslant t$, или $h\leqslant 2t$.

Кад је $h=2t$, оба троугла су подударна.

107) Прво се конструише правоугли троугао BEC (сл. 114) помоћу $BC=a$ и $BE=h$; затим се из средине D дужи BC као центра опише круг полупречника t, који праву EC сече у трећем темену A или A_1 траженог троугла ABC или A_1BC.

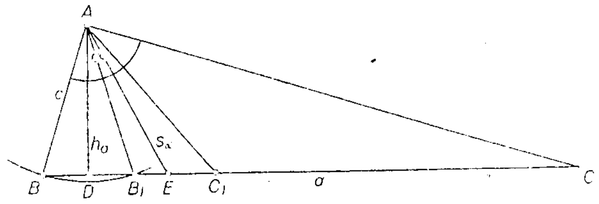


Сл. 114

Услов постојања решења је, очигледно, да је $h\leq a$ и $DF\leqslant t$,

или: $\frac{h}{2}\leq t$, тј. $h\leqslant 2t$.

108) Прво се конструише правоугли троугао ADE (сл. 115)

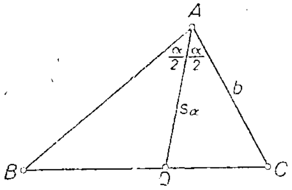


Сл. 115

помоћу $AD=h_a$ и $AE=s_\alpha$; затим се из A као центра опише круг полупречника $AB=c$, који праву DE сече у две тачке B и B_1; сада нацртамо угао EAC једнак углу BAE и угао EAC једнак углу B_1AE. Према томе, добијамо два решења, тј. троугле ABC и AB_1C_1.

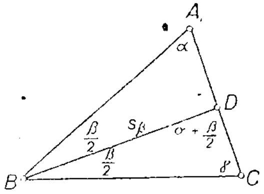
Услов за постојање решења је $s_\alpha > h_a$ и $c \geq h_a$. У случају кад је $c=h_a$ добијамо само један троугао, и то правоугли. Ако је $s_\alpha = h_a$, $c > h_a$, троугао је равнокрак.

109) Прво се конструише троугао ACD (сл. 116) помоћу $AD=s_\alpha$, $AC=b$ и $\sphericalangle CAD=\frac{\alpha}{2}$; затим продужимо CD преко D и пренесемо угао $BAD=\frac{\alpha}{2}$; на пресеку CD и AB добијамо треће теме B траженог троугла ABC.



Сл. 116

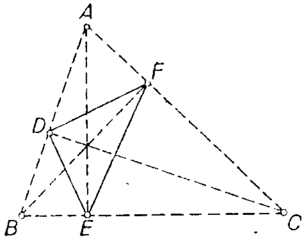
110) Повуци симетралу угла $\beta=180^0-(\alpha+\gamma)$ (сл. 117) и на њу пренеси дату дуж $BD=s_\beta$; затим нацртај угао $BDC=\alpha+\frac{\beta}{2}$, и продужи његов крак DC док не пресече кракове угла β; тачке пресека A и C су темена траженог троугла ABC.



Сл. 117

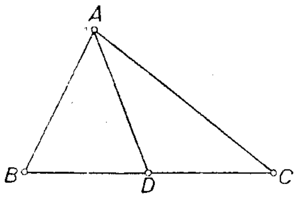
111) Познато је да су висине једног троугла симетрале углова оног троугла чија су темена подножја висина. (Види § 6, зад. 68)

Нека су тачке D, E, F дата подножја висина (сл. 118). Спајањем тачака D, E, F добија се троугао DEF. У њему треба повући симетрале углова и на те симетрале у тачкама D, E, F подићи нормале, па ће се добити тражени троугао ABC.



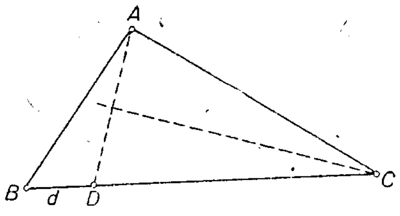
Сл. 118

112) Конструише се најпре троугао ABD (сл. 119); све три стране овог троугла су познате ($BD=\frac{BC}{2}$) итд.



Сл. 119

113) Нека је $d = BD = BC - CD = BC - AC$ (сл. 120); то показује да је троугао DCA равнокрак, и да је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA$.



Сл 120

У троуглу ABC:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^0 - \sphericalangle C;$$

У троуглу ACD:

$$\sphericalangle CAD + CDA = 180^0 - \sphericalangle C;$$

отуда је $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle CAD + \sphericalangle CDA$,

или: $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 2\sphericalangle CAD$,

или: $\sphericalangle CAD = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B}{2}$.

Затим: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle A - \sphericalangle CAD = \sphericalangle A - \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B}{2} = \frac{\sphericalangle A - \sphericalangle B}{2} = \frac{\delta}{2}$.

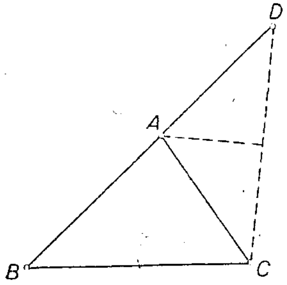
Треба, дакле, најпре конструисати троугао ABD, у коме знамо страну AB, страну $BD = d$ и угао $DAB = \frac{\delta}{2}$. У пресеку продушка стране BD и симетрале стране AD налази се теме C.

114) у оба случаја конструише се најпре правоугли троугао чија је хипотенуза AB а једна катета висина AD, итд.

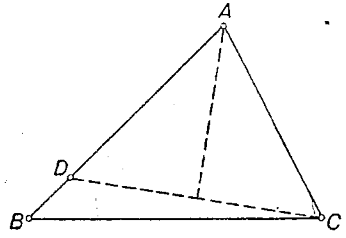
115) а) Конструише се најпре правоугли троугао BCE, итд.
б) Конструише се најпре правоугли троугао BCF, итд.

116) а) Треба најпре конструисати троугао ABD, итд.
б) Треба најпре конструисати троугао FBC, итд.

117) У случају да је дат збир двеју страна, треба конструисати троугао DBC (сл. 121), у коме је BC дата страна, BD збир



Сл. 121

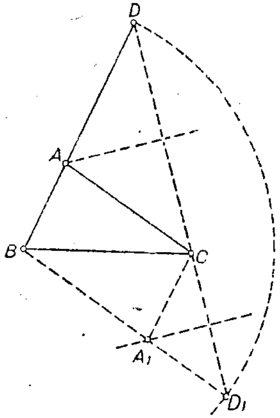


Сл. 122

других двеју страна и угао B дати угао. Симетрала стране CD даће теме A.

У случају да је дата разлика двеју страна, треба конструисати троугао DBC (сл. 122), у коме је BC дата страна, DB разлика других двеју страна и угао B дати угао. Симетрала стране DC у пресеку са продушком стране BD даје теме A.

118) Нека је ABC тражени троугао (сл. 123), BC дата страна, $AB + AC = s$, B и C налегли углови, тако да је $\sphericalangle B - \sphericalangle C = \varphi$.



Сл. 123

Продужимо BA за $AD = AC$; у том случају је $BD = s$.

Спољашњи угао троугла ACD:

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle D + \sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACD$, или:

$$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\sphericalangle A.$$

Знамо да је $\sphericalangle A = 180^0 - (\sphericalangle B + \sphericalangle C)$,

или: $\frac{1}{2}\sphericalangle A = 90^0 - \frac{1}{2}(\sphericalangle B + \sphericalangle C)$;

према томе је

$$\sphericalangle ACD = 90^0 - \frac{1}{2}(\sphericalangle B + \sphericalangle C).$$

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle C + \sphericalangle ACD = 2\frac{\sphericalangle C}{2} + 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle B - \frac{1}{2}\sphericalangle C =$$

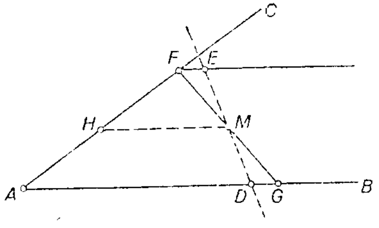
$$= 90^0 + \frac{1}{2}\sphericalangle C - \frac{1}{2}\sphericalangle B = 90^0 - \frac{1}{2}(\sphericalangle B - \sphericalangle C),\text{ или,}$$

најзад: $\sphericalangle BCD = 90^0 - \frac{\varphi}{2}$, што значи да је $\sphericalangle BCD$ познат и да можемо конструисати троугао BCD.

Повлачењем симетрале стране DC добија се тéме A.

Услов могућности решења је да је BD или $s > BC$.

Тачка D_1 даје други троугао BCA_1 подударан са првим.

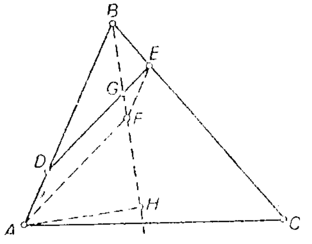


Сл. 124

119) *Први начин.* Нека су дате праве AB и AC, а дата тачка M (сл. 124). Ма на којој правој MD узмимо $ME = MD$ и кроз E повуцимо паралелу са AB. Дуж FG ће задовољити услов задатка, јер је $FM = MG$ (закључује се из подударности троуглова EFM и DGM;

$$MD = ME,\ \sphericalangle GMD = \sphericalangle EMF,$$
$$\sphericalangle MGD = \sphericalangle MFE).$$

Други начин. Ако претпоставимо да је задатак решен и да је $MF = MG$, види се да паралела MH пролази кроз средину дужи AF. Треба, дакле, повући $MH \parallel AB$, одмерити $HF = AH$ и повући дуж FMG.



Сл. 124а

120) Претпоставимо да је задатак решен. Ако је DE тражена дуж l (сл. 124а), па извршимо њену паралелну транслацију и доведемо је у положај AF, тада је $AD = EF = BE$; према томе, троугао BEF је равнокрак. Како је $EF \parallel AB$, то тачка F лежи на симетрали угла B ($\sphericalangle BFE = \sphericalangle EBF$, $\sphericalangle BFE = \sphericalangle DBF$, $\sphericalangle DBF = \sphericalangle EBF$).

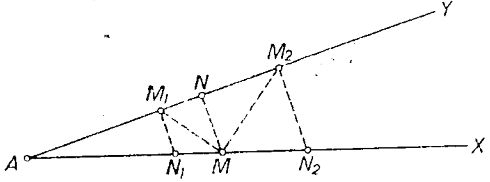
Конструкција се, дакле, изводи овако: повуче се симетрала угла B, из A се опише лук полупречником l; из пресека симетрале и овога лука повуче се $FE \parallel AB$, а из E права $ED \parallel AF$.

Примедба. а) Пошто лук описан око A полупречником l сече симетралу угла B још у једној тачки, то постоје два решења.

б) Нормала AH показује минимум за l.

в) Може се узети и симетрала спољашњег угла B.

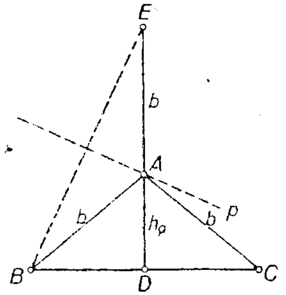
2) **Равнокраки троугао**



Сл. 125

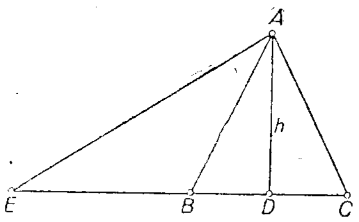
121) Повуцимо $MN \perp AY$ (сл. 125). Симетрале углова NMA и NMX секу крак AY у тачкама M_1 и M_2. Из тих тачака повуцимо $M_1N_1 \parallel MN$ и $M_2N_2 \parallel MN$. Троугли MM_1N_1 и MM_2N_2 су

равнокраки ($\sphericalangle M_1MN_1 = \sphericalangle MM_1N_1$ и $\sphericalangle M_2MN_2 = \sphericalangle MM_2N_2$), тј. $N_1M = N_1M_1$ и $MN_2 = M_2N_2$. Према томе, тачке N_1 и N_2 испуњавају услов задатка.



Сл. 126

122) У средини D дужи BC (сл. 126) дигни нормалу и на њу пренеси дату дуж $DE = s = b + h_a$; затим, спој E са B и повуци симетралу p дужи BE; где она пресече дуж DE, ту је треће теме A траженог троугла ABC.



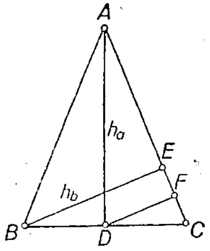
Сл. 127

123) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је ABC тражени троугао (сл. 127) у коме је познат његов обим $2s = AB + AC + BC$ и висина $AD = h$ која одговара основици BC.

Како је $AB + BD = s$, помоћу те дужи и висине h можемо конструисати правоугли троугао ADE, где је $DE = s$. Ако, затим, AB повучемо тако да је $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BEA$, добијамо равнокраки троугао ABE, у коме је $AB = BE$, што значи да је B друго теме траженог троугла ABC. Треће теме C наћи ћемо кад DE продужимо преко D за $DC = BD$.

Услов за постојање решења је да B падне између E и D, што значи да треба да је $\sphericalangle EAB < \sphericalangle EAD$, или, што је исто, да је $\sphericalangle AED < \sphericalangle EAD$. Тада је $AD < ED$, или $h < s$.

124) Конструкција троугла ABC (сл. 128) своди се на конструкцију правоуглог троугла ADF, у коме је дата висина $AD = h_a$ хипотенуза а $DF = \frac{BE}{2} = \frac{h_b}{2}$ катета. По завршетку те конструк-

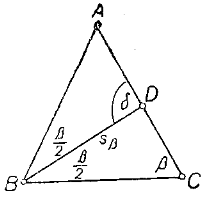


Сл. 128

ције повуче се нормала кроз тачку D на праву AD и где она пресече продужак катете AF, тамо је теме C траженог троугла. Теме B се добије кад се DC пренесе са друге стране од D.

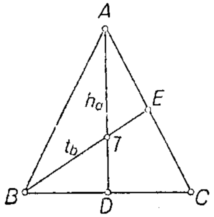
Јасно је да је задатак могућ ако се може конструисати троугао ADF, што ће бити ако је

$$h_a > \frac{h_b}{2}.$$



Сл. 129

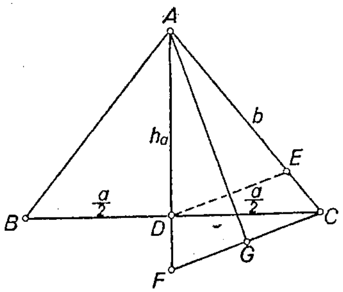
125) Треба прво конструисати троугао ABD (сл. 129) помоћу симетрале $BD = s_\beta$, угла $\frac{\beta}{2}$ и угла $\delta = \beta + \frac{\beta}{2} = \frac{3}{2}\beta$; затим продужити AD преко D до C, тако да је $AC = AB$; најзад, спојити B са C. (Види зад. 110.)



Сл. 130

126) Прво се конструише правоугли троугао BDT (сл. 130) помоћу $\frac{2}{3}\,t_b$ и $\frac{1}{3}\,h_a$, јер је $AD = h_a$ уједно и тежишна линија траженог троугла ABC; затим, продужимо DT преко T до тачке A, тако да је $TA = 2 \cdot DT$; и, најзад, продужимо BD преко D до C, тако да је $DC = BD$. Тиме добијамо сва три темена траженог троугла.

127) Конструиши правоугли троугао CDF (сл. 131) помоћу $DF = CE = b - h_a = d$ и $CD = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$; затим, у средини D дужи $BC = a$ дигни нормалу; најзад, повуци симетралу GA дужи FC; она сече нормалу FA у темену A траженог троугла ABC.



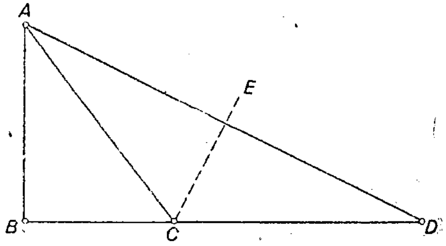
Сл. 131

128) У растојању h_b од крака $AC = b$ повуче се паралела краку b; затим, из тачке A као центра опише се круг полупречника b, који паралелу сече у трећем темену B траженог троугла ABC.

129) Треба конструисати равностран троугао тако да му дата дуж буде висина, па повући још једну висину.

3) **Правоугли троугао**

130) Претпоставимо да је задатак решен и да је AB дата катета, а $BC + AC = s$.



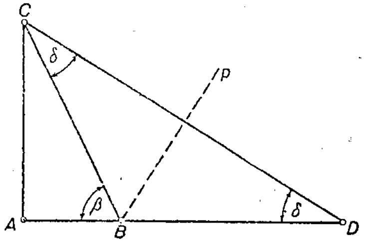
Сл. 132

Да би се добио збир s, треба продужити катету BC за $CD = CA$ (сл. 132). Правоугли троугао ABD је одређен, јер је $BD = s$.

Према томе, треба најпре конструисати троугао ABD, затим повући симетралу стране AD; пресек ове симетрале са катетом BD даће теме C.

131) Ако је дат збир катета, решење се своди на овај задатак: конструисати троугао кад је дата једна страна и два угла на њој, од којих је један 45°. Ако је дата разлика катета, тада место угла од 45° треба узети угао од 135°.

132) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је ABC (сл. 133) правоугли троугао са правим углом код темена A, у коме је познат угао β и збир $AB + BC = k$ страна које га захватају.



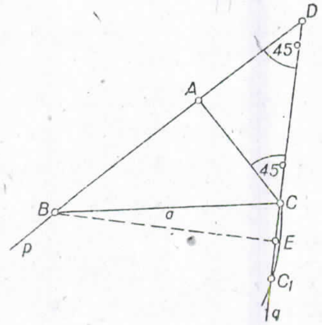
Сл. 133

Решење задатка своди се на конструкцију правоуглог троугла ACD помоћу $AD = k$ и угла $\delta = \frac{\beta}{2}$. Треће теме B добија се кад се повуче симетрала p дужи CD, што је лако даказати.

Да постоји решење, потребно је да је $\sphericalangle BCD < \sphericalangle ACD$, или: $\frac{\beta}{2} < 90 - \frac{\beta}{2}$, тј. $\beta < 90^0$, а то је према претпоставци увек могуће, јер је β оштар угао.

Постоји само једно решење.

133) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је ABC (сл. 134) правоугли троугао у коме је позната хипотенуза $BC = a$ и збир катета $BA + AC = k$.



Сл. 134

Претпоставимо још да је $AB \geqslant AC$, тј. да је AB већа катета у случају да троугао није равнокрак.

Продужимо BA за $AD = AC$ и спојмо D са C. У том случају је

$$BD = BA + AD = BA + AC = k.$$

С друге стране, троугао ACD је равнокрако-правоугли, па је $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC = 45^0$; затим, $\sphericalangle BCD \geqslant 90^0$, јер је $AB \geqslant AC$, и стога: $\sphericalangle ACB \geqslant ABC$, тј. $\sphericalangle ACB \geqslant 45^0$.

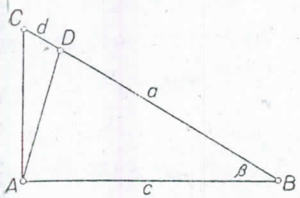
Према томе, решење задатка се своди на конструкцију троугла BCD помоћу a, k и угла од 45^0 наспрам мање стране a.

На праву p пренесемо угао од 45^0, чији је други крак q и теме D; затим, од темена D пренесемо на крак p дуж $DB = k$ и из тачке B као центра опишемо круг полупречника a; он сече крак q у тачкама C и C_1. Како смо претпоставили да је $AB \geqslant AC$, а у том случају је $\sphericalangle BCD \geqslant 90^0$, то долази у обзир само тачка C. Из те тачке спусти се нормала на p и тако добија и треће теме A траженог троугла.

Услов могућности решења је да је

$$BE \leqslant a < k, \text{ јер је тада } \sphericalangle BCD \text{ туп или прав.}$$

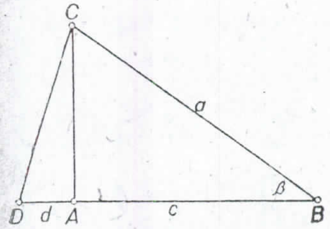
134) Нека је ABC (сл. 135) тражени троугао, у коме је позната разлика $a - c = d$ хипотенузе $BC = a$ и катете $AB = c$ и $\sphericalangle ABC = \beta$.



Сл. 135

Прво треба конструисати троугао ACD помоћу $CD = d$, $\sphericalangle ACD = 90^0 - \beta$ и $\sphericalangle ADC = 90^0 + \frac{\beta}{2}$; затим се у A дигне нормала на AC и CD продужи до пресека са том нормалом. Тачка пресека B је треће теме траженог троугла.

Конструкција се може извести и овако (сл. 136):

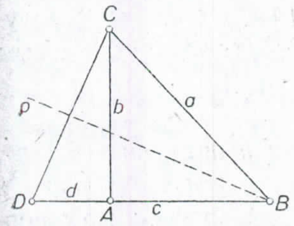


Сл. 136

Прво се конструише правоугли троугао ACD помоћу $AD = d = a - c$ и $\sphericalangle CDA = 90^0 - \frac{\beta}{2}$, јер је троугао BCD равнокрак; затим се продужи DA преко A и повуче права CB под углом $90^0 - \beta$ према CA.

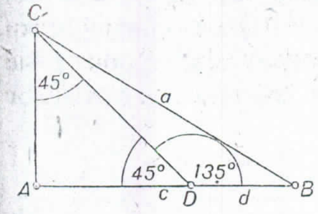
Решење је увек могуће, јер се β задаје увек као оштар угао, и то само једно.

135) Конструиши правоугли троугао ACD (сл. 137) помоћу катете $AC = b$ и разлике d хипотенузе $BC = a$ и катете $AB = c$; затим, продужи DA преко A и повуци симетралу p стране CD; где она пресече праву DA, тамо је треће теме B траженог троугла.



Сл. 137

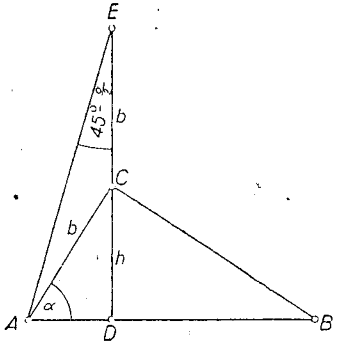
136) Конструиши троугао BCD (сл. 138) помоћу хипотенузе $BC = a$ и разлике d катета $AB = c$ и $AC = b$ и угла $BDC = 135^0$ наспрам стране BC; затим из C спусти нормалу на праву BD; њено подножје даје треће теме A траженог троугла ABC.



Сл. 138

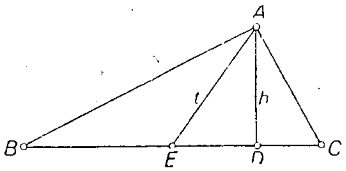
Услов постојања решења дат је неједнакошћу $a > d$.

137) Прво конструисати правоугли троугао ADE (сл. 139) помоћу збира $h+b=k$ висине CD која одговара хипотенузи AB и катете $AC=b$, и угла $AED=45^0-\frac{\alpha}{2}$; затим, на AD пренеси угао α; други његов крак сече DE у тачки C која је теме траженог троугла ABC; најзад, у C дигни нормалу на AC; она сече праву AD; у тачки B, трећем темену траженог троугла.



Сл. 139

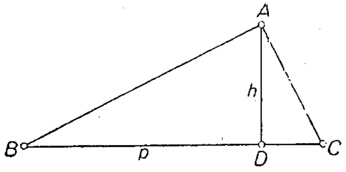
138) Прво конструиши правоугли троугао ADE (сл. 140) помоћу тежишне линије $AE=t$ и висине $AD=h$. Како је у правоуглом троуглу тежишна линија која полази из правог угла једнака половини хипотенузе, то ће се друга два темена B и C траженог троугла ABC добити тако да се из E као центра опише круг полупречника $AE=t$ и где он пресече праву DE, тамо су друга два темена B и C.



Сл. 140

139) У једној крајњој тачки дате катете b подигни нормалу, па из средине те катете као центра опиши круг полупречника t, једнаког датој тежишној линији; тачка у којој круг сече ту нормалу је треће теме траженог троугла.

140) Прво конструиши правоугли троугао ABD (сл. 141) помоћу $BD=p$ и $AD=h$; затим у тачки A подигни нормалу на AB; она сече праву BD у трећем темену C траженог троугла ABC.



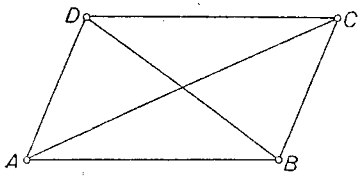
Сл. 141

§ 3. Четвороугао

а) ТЕОРЕМЕ

1) Паралелограм

1) По претпоставци паралелограм $ABCD$ (сл. 142) није правоугли и стога су углови A и D неједнаки. Како су они суплементни, један од њих, рецимо A, оштар је, а други B туп.

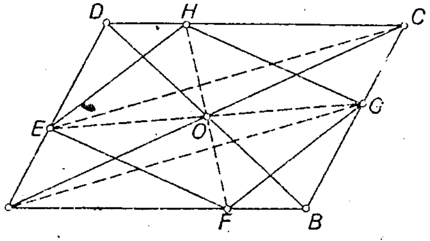


Сл. 142

Треба доказати да је дијагонала AC већа од дијагонале BD.

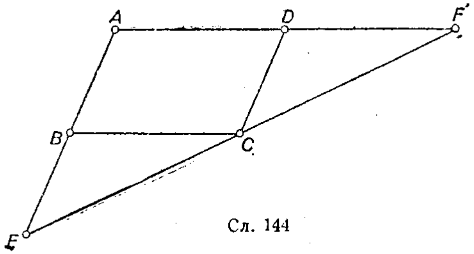
Посматраћемо троугле ABD и ACD; они имају заједничку страну AD; затим, $AB=CD$. Како је у троуглу ABD наспрам угла A трећа страна BD, а у троуглу ACD наспрам угла D трећа страна AC, то је $AC>BD$, јер је $\sphericalangle D>\sphericalangle A$.

2) Нека је паралелограм $EFGH$ (сл. 143) уписан у паралелограму $ABCD$; тада је $EF\#GH$. Како је $\sphericalangle AFE=\sphericalangle CHG$ и $\sphericalangle AEF=\sphericalangle CGH$, то су троугли AEF и CGH подударни. Отуда следује да је $AE=CG$. Према томе, четвороугао $AGCE$ је паралелограм ($AE\#CG$). Дијагонале AC и EG тога паралелограма секу се у тачки O, која их полови. Према томе, кроз ту тачку пролази и дијагонала HF уписаног паралелограма $EFGH$.



Сл. 143

3) Троугли BEC и DCF (сл. 144) подударни су, јер имају по две стране и захваћене углове једнаке. $BE=AB=DC$, $BC=AD=DF$; углови код B и D су једнаки као углови чији су краци паралелни у истом смеру.



Сл. 144

Из подударности троуглова следује:

$$\sphericalangle BEC = \sphericalangle DCF,$$

$$\sphericalangle BCE = \sphericalangle DFC.$$

Сем тога: $\sphericalangle EBC = \sphericalangle BCD$ (наизменични).

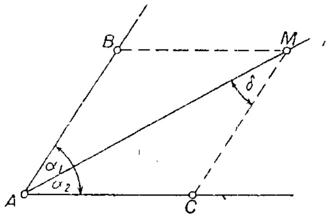
У троуглу BEC је:

$$\sphericalangle BEC + \sphericalangle BCE + \sphericalangle EBC = 180^0, \text{ или:}$$

$$\sphericalangle DCF + \sphericalangle BCE + \sphericalangle BCD = 180^0.$$

Значи да дужи EC и CF леже на једној правој.

4) Нека је $BM \parallel AC$, $CM \parallel AB$. Према томе, четвороугао $ACMB$ је паралелограм (сл. 145).



Сл. 145

Отуда: $BM = AC$, $CM = AB$,

$\alpha_1 = \delta$ (наизменични),

$\alpha_1 = \alpha_2$; значи:

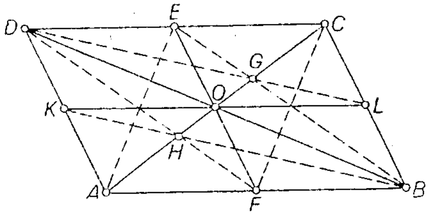
$\delta = \alpha_2$. Ова два угла припадају троуглу ACM, па је $AC = CM$. Како је четвороугао $ACMB$ паралелограм, то је и

$$AC = BM = CM = AB.$$

Према томе, овај паралелограм је ромб.

5) Нека је $ABCD$ дати паралелограм (сл. 146) са дијагоналама AC и BD. Спојмо B са средином E стране CD и D са средином F стране AB. Праве BE и DF секу дијагоналу AC у тачкама G и H. Тврдимо да је

$$CG = GH = HA.$$



Сл. 146

Посматрађемо троугао BCD. У том троуглу су BE, CO и DL тежишне линије. То значи да тачка G дели половину OC дијагонале AC тако да је

$$CG = \frac{2}{3} \cdot CO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{1}{3} AC.$$

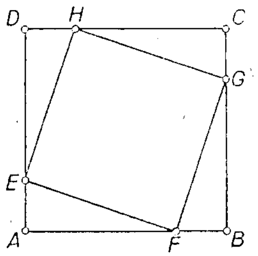
Истим таквим расуђивањем из троугла ABD произилази да је и

$$AH = \frac{1}{3} AC.$$

Дакле: $CG = GH = HA$.

Видимо да ту теорему можемо изрећи и овако: *Праве DF и DL, које спајају једно теме паралелограма са срединама супротних страна, деле једну дијагоналу на три једнака дела.*

6) Нека је $AF = BG = CH = DE$ (сл. 147). Тада је и $AE = BF = CG = DH$. Према томе, троугли AEF, BFG, CGH, DEH су подударни (имају једнаке две стране и захваћени угао), па су им и хипотенузе једнаке, тј.: $EF = FG = GH = HE$. Међутим је $\sphericalangle AEF + \sphericalangle DEH = 90^0$; дакле, $\sphericalangle FEH = 90^0$, што значи да је четвороугао $EFGH$ квадрат.

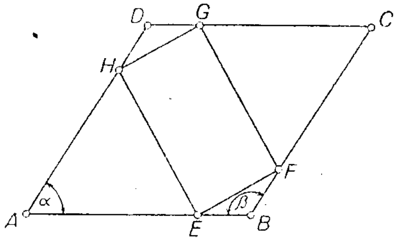


Сл. 147

7) Нека је $AE = AH = CF = CG$ (сл. 148). Тврдимо да је $EFGH$ правоугаоник. Заиста,

$$\triangle AEH \cong \triangle CFG,$$

јер имају две стране једнаке и њима захваћени угао ($\sphericalangle A = \sphericalangle C$). Отуда следује да је $EH = FG$. Из подударности троуглова BEF и DGH ($BE = BF = DG = DH$, $\sphericalangle EBF = \sphericalangle GDH$) следује: $EF = GH$. Дакле, четвороугао $EFGH$ је паралелограм. Међутим је $\sphericalangle AEH + \sphericalangle BEF = 90^0$ (јер је $\sphericalangle AEH = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle BEF = 90^0 - \frac{\beta}{2}$, $\alpha + \beta = 180^0$). Стога је $\sphericalangle FEH = 90^0$, што значи да је тај паралелограм правоугаоник.

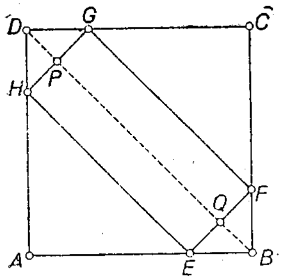


Сл. 148

8) Нека је $BE=BF=DG=DH$ (сл. 149). Троугли BEF, CFG, DGH, AEH су равнокрако-правоугли, па су углови на њиховим основицама сваки по 45°. То значи да су углови у четвороуглу $EFGH$ прави, тј. тај четвороугао је правоугаоник. Како су углови GPD и FQB прави, следује, даље, да је $PG=PD$ и $QF=QB$. Према томе, обим тога правоугаоника је

$$2(GF+PG+QF)=2(GF+PD+QB)=2BD,$$

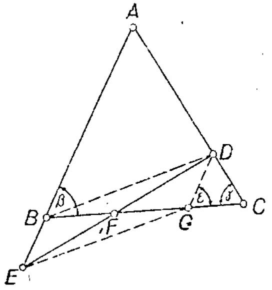
тј. он је сталан.



Сл. 149

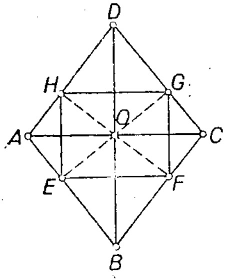
9) Нека је $BE=CD$ (сл. 150). Повуцимо $DG \parallel AB$. Тврдимо да је четвороугао $BEGD$ паралелограм.

Заиста, $\triangle CDG$ је равнокрак, јер је $\varepsilon=\beta=\gamma$. Стога је $DG-CD=BE$. Како је, дакле, $DG \# BE$, четвороугао $BEGD$ је паралелограм и његове дијагонале BG и DE се узајамно полове. Према томе, F је средина дужи DE, што је требало доказаати.



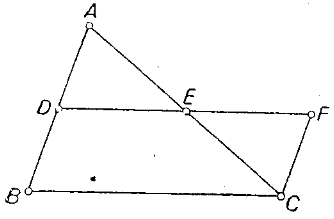
Сл. 150

10) Како је $OE \perp AB$ и $OG \perp CD$, то су OE и OG на једној правој; исто тако је OF и OH на једној правој. Сем тога је $OE=OF=OG=OH$, јер су то висине подударних троуглова: AOB, BOC, COD, AOD (сл. 151). Према томе, дијагонале EG и FH четвороугла $EFGH$ су једнаке и узајамно се полове, па је тај четвороугао правоугаоник.



Сл. 151

11) Дуж DE продужимо преко E, тако да је $EF=DE$, и спојмо F са C (сл. 152).



Сл. 152

Знамо да је $AE=CE$ и $\sphericalangle AED = \sphericalangle CEF$ (унакрсни). Према томе је $\triangle ADE \cong \triangle CEF$.

Из подударности троуглова следује:

$$AD=CF,$$

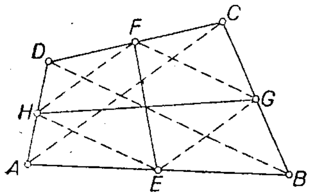
$$\sphericalangle ADE=\sphericalangle CFE, \text{ или:}$$

$$\sphericalangle ADF=\sphericalangle CFD.$$

Како су ови углови по положају наизменични и једнаки, то је $AD \parallel CF$ и

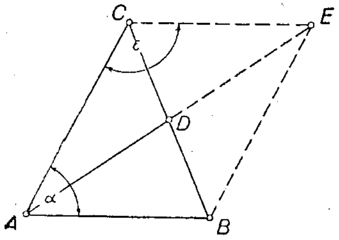
$$AD=BD=CF.$$

12) EF и GH се полове као дијагонале паралелограма $EGFH$ (сл. 153). Четвороугао $EGFH$ је паралелограм, јер су му две супротне стране паралелне са истом дијагоналом, а свака од њих једнака је половини дијагонале са којом је паралелна. (Види зад. 11.)



Сл. 153

13) Допунимо троугао ABC у паралелограм $ABEC$ (сл. 154).



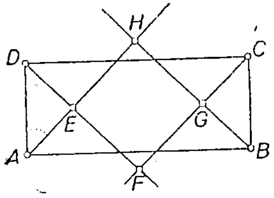
Сл. 154

Претпоставимо прво да је $\alpha<90°$. Троугли ABC и ACE имају једнаке две стране ($AC=AC$, $CE=AB$), а треће неједнаке; како је по претпоставци $\varepsilon>\alpha$ (јер су α и ε суплементни), то је и $AE>BC$, или: $AD>\frac{BC}{2}$.

У случају да је $\alpha>90°$, имали бисмо да је $\varepsilon<\alpha$, и стога је $AD<\frac{BC}{2}$.

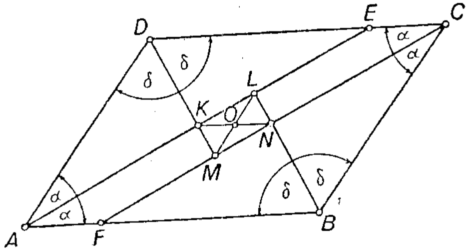
Најзад, ако је $\alpha = 90^0$, троугли ABC и ACE су подударни, па је $AE = BC$, или: $AD = \frac{BC}{2}$.

14) Како је сваки од углова (сл. 155) EAD и EDA једнак 45^0, угао $AED = 90^0$. С друге стране, $DE \parallel BG$ и $AE \parallel CG$, што значи да је четвороугао $EFGH$ правоугли паралелограм. Међутим је $GF = CF - CG$, $EF = DF - DE$; а како је $CF = DF$ и $CG = DE$, произилази: $GF = EF$, тј. четвороугао $EFGH$ је квадрат.



Сл. 155

15) а) Нека је $ABCD$ (сл. 156) дати паралелограм и AE, CF, DM, BL бисектрисе његових унутрашњих углова. Треба прво доказати да је четвороугао $MNLK$ правоугаоник.



Сл. 156

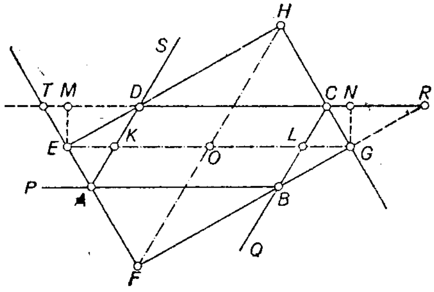
Како је $2\alpha + 2\delta = 180^0$, то је $\alpha + \delta = 90^0$, и према томе је $\sphericalangle AKD = 90^0$. На исти начин може се показати да су и остала три угла четвороугла $MNLK$ права.

Да су дијагонале ML и KN правоугаоника $MNLK$ паралелне странама датог паралелограма $ABCD$, можемо доказати овако: $AE \parallel FC$, јер је $AD \parallel BC$ и $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BCF$; затим је $AE = FC$, јер је $CE \parallel AF$, тј. $AFCE$ је паралелограм. Међутим, троугао ADE је равнокрак, па је $DE = DA$; исто тако је и троугао BCF равнокрак, и $BF = BC$. У тим троуглима DK и BN су висине и тежишне линије па је, стога: $KA = KE$ и $NF = NC$. Због једнакости $AE = FC$ имамо $KE = NC$, а отуда, и из претходног, следује да је $KNCE$ паралелограм, у коме је $KN \# EC$. Како је троугао KOL равнокрак, то је $\sphericalangle OLK = \sphericalangle OKL = \alpha$; одавде закључујемо да је $ML \parallel AD$.

Да су дијагонале KN и ML једнаке разлици суседних страна датог паралелограма, јасно је из овога: $ML = KN = EC = DC - DE = DC - DA$.

б) У случају да је $ABCD$ правоугаоник, дијагонале правоугаоника $MNLK$ су узајамно нормалне, што значи да је квадрат. (Види зад. 14.)

16) Нека је $ABCD$ (сл. 157) дати паралелограм са спољашњим угловима: PAS, PBQ, QCR, RDS и њиховим бисектрисама: EF, BF, CG, DH. Пресеци бисектриса E, F, G, H су темена четвороугла, за који тврдимо да је правоугаоник. Заиста, углови PAS и RDS су суплементни, па је у троуглу ADE збир $\sphericalangle ADE + \sphericalangle DAE = 90^0$, и, према томе је $\sphericalangle FEH = 90^0$. Исто тако се може показати да су и углови EFG, FGH, GHE прави.



Сл. 157

Други део теореме може се доказати овако:

Прво ћемо доказати да је страна CD датог паралелограма $ABCD$ паралелна дијагонали EG описаног правоугаоника $EFGH$. Заиста, ако из тачака E и G спустимо нормале EM и GN на праву CD, тада је $EM = GN$. Ту једнакост је лако доказати на овај начин: Продужимо FE и FG до пресека T и R са правом CD; добијамо подударне троугле DET и CGR, у којима су EM и GN висине. Како је, наиме, $\triangle ADE \cong \triangle BCG$ ($AD \# BC$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CBG$, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BCG$), а с друге стране, $\triangle DET \cong \triangle ADE$ ($DE = DE$, $\sphericalangle DET = \sphericalangle DEA = 90^0$, $\sphericalangle EDT = \sphericalangle ADE$) и $\triangle CGR \cong \triangle BCG$ ($CG = CG$, $\sphericalangle CGR = \sphericalangle CGB = 90^0$, $\sphericalangle GCR = \sphericalangle GCB$), то постоји и подударност троуглова DET и CGR.

Одатле следује да је $\sphericalangle HDC = \sphericalangle HEG$ и $\sphericalangle HCD = \sphericalangle HGE$. Због тога су троугли DEK и CGL равнокраки и $KD = KE = KA$, $LC = LG = LB$; затим: $KL = CD$, јер је $CDKL$ паралелограм.

Према томе је:

$$EG = EK + KL + LG,$$

или:

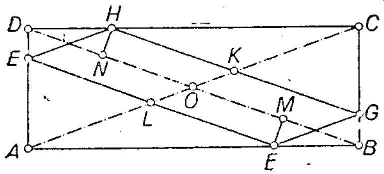
$$EG = DK + DC + CL;$$

дакле:

$$EG + FH = AB + BC + CD + DA,$$

што је требало доказати.

17) (Види зад. 16.)



Сл. 158

Нека је $ABCD$ дати правоугаоник (сл. 158) и $EFGH$ уписани паралелограм чије су стране EF и HG удаљене од дијагонале BD правоугаоника за $FM = HN$.

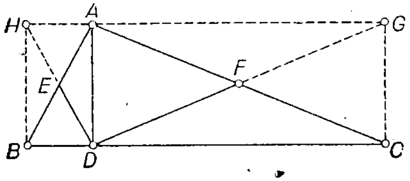
Троугли CGK и AFL су равнокраки, па је $KG = KC$, $LF = LA$; затим: $FG = LK$. Према томе је:

$$FL + FG + GK = AC.$$

Како су и троугли CHK и AEL, исто тако, равнокраки и $KH = KC$, $LE = LA$; затим, $EH = LK$, то је и $EL + EH + HK = AC$.

Дакле: $EF + FG + GH + HE = AC + BD.$

18) Допуни троугао ACD (сл. 159) до правоугаоника $ADCG$ и троугао ABD до правоугаоника $ADBH$. Из једнакости $DG = AC$ дијагонала правоугаоника $ADCG$, једнакости $DH = AB$ дијагонала правоугаоника $ADBH$ и једнакости $BC = HG$ страна правоугаоника $BCGH$ следује подударност троуглова ABC и DGH, а отуда једнакост: $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC = 90^0$.



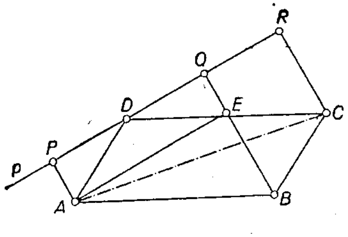
Сл. 159

Докажи теорему без допуњавања до правоугаоника.

19) Нека је $ABCD$ (сл. 160) дати паралелограм и права p повучена кроз теме D; тврдимо да је

$$BQ = AP + CR,$$

где су AP и CR нормале спуштене из темена A и C на праву p.



Сл. 160

Из A повучемо $AE \parallel p$; тада су троугли ABE и DCR подударни ($AB = CD$, $\sphericalangle EAB = \sphericalangle RDC$). Одавде следује:

$$BE = CR.$$

Како је $AP = EQ$, добијамо, најзад:

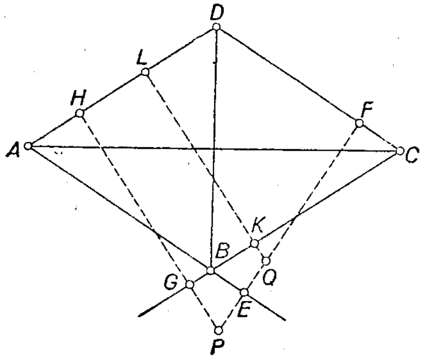
$$BQ = AP + CR.$$

У случају да права p сече паралелограм имаћемо разлику уместо збира, што је лако извести.

20) Посматрајући слику 160, можемо рећи: Пројекција PR дијагонале AC на правој p једнака је збиру $PD + DR$; међутим, PD је пројекција стране AD, а DR пројекција стране DC. Ако бисмо уместо стране CD узели страну AB, имали бисмо: $PQ = AE = DR$, а отуда:

$$PR = PD + DR = PD + PQ.$$

21) Нека је $ABCD$ дати ромб (сл. 161). Из тачке P спустимо нормале PE, PH на стране AB, AD, и нормале PG, PF на стране CB, CD. Тврдимо да је



Сл. 161

$$PE + PH = PG + PF.$$

Како је $PH = PG + GH$ и $PF = PE + EF$, то имамо:

$$PE + PG + GH = PG + PE + EF,$$

одакле је

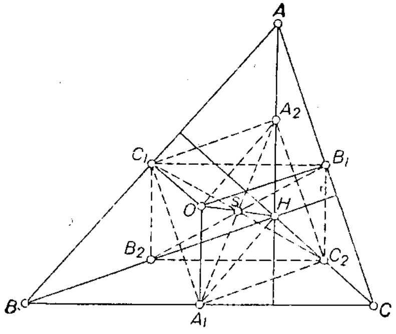
$$GH = EF,$$

што знамо да је истина, јер су висине ромба међусобно једнаке.

Тиме је теорема доказана. Она важи уопште, ако узмемо у обзир и знаке. Тако је

$$QF + QK = QL + (-QE).$$

22) Спојмо C_1 и C_2 са A_1 и A_2 (сл. 162); добијамо четвороугао $A_1C_2A_2C_1$ за који тврдимо да је правоугаоник. Заиста, $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1C_1 = \frac{AC}{2}$, јер су тачке A_1 и C_1 средине страна BC и BA датог троугла ABC; затим је $A_2C_2 \parallel AC$ и $A_2C_2 = \frac{AC}{2}$, јер су тачке A_2 и C_2 средине страна троугла ACH; стога је $A_1C_1 \# A_2C_2$. С друге стране је $A_2C_1 \parallel BH$ и $A_2C_1 = \frac{BH}{2}$, јер су тачке A_2 и C_1 средине страна AH и AB троугла ABH; исто тако је $A_1C_2 \parallel BH$



Сл. 162

и $A_1C_2 = \frac{BH}{2}$, јер су тачке A_1 и C_2 средине страна BC и CH троугла BCH; дакле: $A_2C_1 = A_1C_2$; сем тога је $A_1C_1 \perp A_1C_2$.

Из тога следује да је четвороугао $A_1C_2A_2C_1$ правоугаоник. Према томе, његове дијагонале A_1A_2 и C_1C_2 једнаке су, и тачка S је њихова средина.

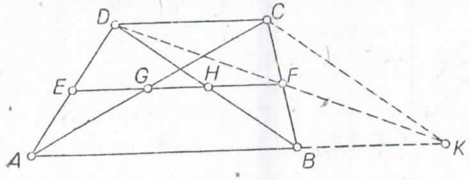
Спајањем тачака B_1 и B_2 са тачкама C_1 и C_2 добијамо четвороугао $B_2C_2B_1C_1$, за који, истим расуђивањем, можемо доказати да је правоугаоник, из чега следује једнакост дијагонала B_1B_2 и C_1C_2 које се, исто тако, секу у својој средини S.

Још остаје да докажемо да је S средина дужи OH.

Како је $\triangle A_1C_1O \cong \triangle A_2C_2H$ ($A_1C_1 \# A_2C_2$, $\sphericalangle OA_1C_1 = \sphericalangle HA_2C_2$, $\sphericalangle OC_1A_1 = \sphericalangle HC_2A_2$), следује: $A_1O \# HA_2$, што значи да је четвороугао A_1HA_2O паралелограм; његове дијагонале A_1A_2 и OH секу се у њиховој средини S.

2. Ма који четвороугао

23) Нека је $ABCD$ (сл. 163) дати трапез и E, F средине кракова; треба доказати да је EF паралелно основицама AB и CD, и да је $EF = \frac{AB + CD}{2}$, $GH = \frac{AB - CD}{2}$.



Сл. 163

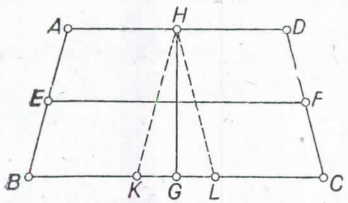
Повуцимо $CK \parallel BD$; тада је $BKCD$ паралелограм, и стога је $BK = CD$. Тачка F је пресек дијагонала BC и DK, и стога је $DF = FK$; према томе је у троуглу ADK дуж $EF \parallel AK$ и $EF = \frac{1}{2}AK$, или:

$$EF = \frac{1}{2}(AB + BK) = \frac{AB + CD}{2}.$$

С друге стране, у троуглу ABD дуж $EH \parallel AB$ и $EH = \frac{AB}{2}$, а у троуглу ACD дуж $EG \parallel CD$ и $EG = \frac{CD}{2}$; дакле:

$$GH = EH - EG = \frac{AB - CD}{2}.$$

24) Знамо да је $EF \parallel BC \parallel AD$ (сл. 164).



Сл. 164

Из тачке H повуцимо $HK \parallel AB$ и $HL \parallel DC$; тада је:

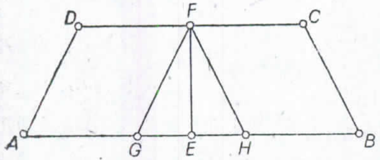
$$HK = AB = DC = HL,$$

$$BK = AH = HD = LC,$$

$$KG = BG - BK = GC - LC = GL.$$

Значи, троугао HKL је равнокрак и средина његове основице спојена са врхом нормална је на основици. Кад је $HG \perp BC$, тада је и $HG \perp EF$.

25) Нека је $ABCD$ (сл. 165) дати равнокраки трапез, и EF дуж која спаја средине E, F основица AB, CD трапеза. Треба доказати да је $EF \perp AB$ и $EF \perp CD$.



Сл. 165

Повући ћемо $GF \parallel AD$ и $HF \parallel BC$; добијамо паралелограме $AGFD$ и $BHFG$, у којима постоје ове једнакости: $GF = AD$, $AG = DF$, $HF = BC$, $BH = CF$. Како је $AD = BC$, то је $GF = HF$, што значи да је троугао GFH равнокрак; међутим је $AE = BE$ и $DF = CF$; одавде следује:

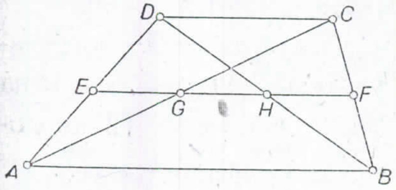
$$GE = AE - AG = AE - DF = BE - CF,$$

$$HE = BE - BH = BE - CF,$$

што значи да је $GE = HE$.

Дакле, FE је висина равнокраког троугла GHF, и отуда је $FE \perp AB$, а због паралелности основица AB и CD и $FE \perp CD$.

26) По претпоставци је $CD = \frac{1}{2}AB$ (сл. 166). Треба доказати да је $EG = GH = HF$ ако је EF средња линија трапеза $ABCD$.



Сл. 166

Заиста, $EG = \frac{1}{2}CD$ (јер је E средина стране AD троугла ACD и $EF \parallel CD$), $FH = \frac{1}{2}CD$

(посматрајмо троугао BCD), $EH=\frac{1}{2}AB$ (посматрајмо троугао ABD). Како је, међутим, $EH=EG+GH$ и $EG=\frac{1}{2}CD$, можемо написати: $GH=EH-EG=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}CD$.

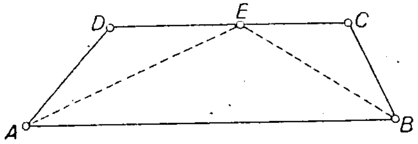
Међутим, по претпоставци је $CD=\frac{1}{2}AB$, па имамо: $GH=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{4}AB=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{2}CD$.

Дакле: $EG=GH=HF$, што је требало доказати.

27) Нека је у трапезу $ABCD$ (сл. 167)

$CD<AB$ и

$CD=AD+BC$.

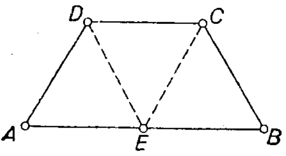


Сл 167

Пренесимо дуж AD на CD, тако да је $DE=DA$; тада је $CE=CB$. Спојмо E са A и B. Сад треба доказати да су AE и BE бисектрисе унутрашњих углова A и B трапеза.

Троугли ADE и BCE су равнокраки; отуда следује једнакост ових углова: $\sphericalangle DAE=\sphericalangle DEA$, $\sphericalangle CBE=\sphericalangle CEB$. Како је $CD \parallel AB$, то постоји и једнакост ових углова: $\sphericalangle DEA=\sphericalangle BAE$, $\sphericalangle CEB=\sphericalangle EBA$. Отуда следује да је $\sphericalangle DAE=\sphericalangle BAE$ и $\sphericalangle CEB=\sphericalangle EBA$, што ће рећи да су праве AE и BE бисектрисе углова A и B на основици AB трапеза.

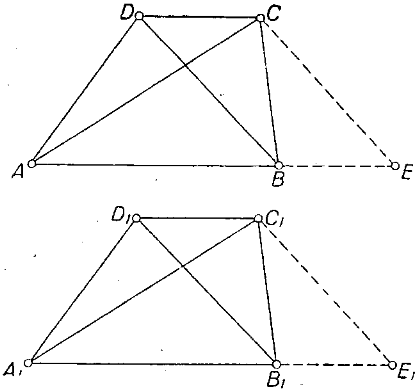
28) Нека је у трапезу $ABCD$ (сл. 168) $AE=AD$ и $BE=BC$ и $AB>CD$.



Сл. 168

Треба доказати да су DE и CE бисектрисе унутрашњих углова D и C на основици CD датог трапеза. (Види доказ у зад. 27).

29) Нека су $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (сл. 169) трапези у којима претпостављамо ове једнакости: $AB=A_1B_1$, $CD=C_1D_1$, $AC=A_1C_1$, $BD=B_1D_1$.

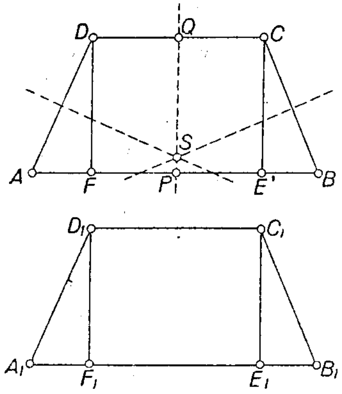


Сл. 169

Треба доказати да су ти трапези подударни.

Повуцимо $CE \parallel BD$ и $C_1E_1 \parallel B_1D_1$; добијамо паралелограме $BECD$ и $B_1E_1C_1D_1$, у којима је $CE=BD$ и $C_1E_1=B_1D_1$, затим: $BE=CD$ и $B_1E_1=C_1D_1$. Отуда следује: $\triangle ACE \cong \triangle A_1C_1E_1$, јер је $AC=A_1C_1$, $AE=AB+BE=AB+CD=A_1B_1+C_1D_1=A_1B_1+B_1E_1=A_1E_1$, $CE=BD=B_1D_1=C_1E_1$. Ако, дакле, трапез $A_1B_1C_1D_1$ положимо на трапез $ABCD$, тако да се поклопе троугли $A_1E_1C_1$ и AEC, тада ће B_1 поклопити B, јер је $A_1B_1=AB$, и страна C_1D_1 поклопиће страну CD, јер је $C_1D_1 \# B_1E_1$, што значи да ће се поклопити сва четири темена трапеза $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$.

30) а) Нека су $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равнокраки трапези (сл. 170), у којима је $A_1B_1=AB$, $C_1D_1=CD$ и $C_1E_1=CE$.



Сл. 170

Треба доказати да су ти трапези подударни.

Спустимо висине DF и D_1F_1 из темена D и D_1; добијамо подударне троугле: ADF, BCE и $A_1D_1F_1$, $B_1C_1E_1$ ($AD=BC$, $DF=CE$, $\sphericalangle DFA=\sphericalangle CEB=90^0$; $A_1D_1=B_1C_1$, $D_1F_1=C_1E_1$, $\sphericalangle D_1F_1A_1=\sphericalangle C_1E_1B_1=90^0$). Како је, међутим, у троуглу ADF страна $AF=\frac{AB-EF}{2}=\frac{AB-CD}{2}$ (јер је $EF=CD$, као наспрамне стране у паралелограму $FECD$), а у троуглу $A_1D_1F_1$ страна $A_1F_1=\frac{A_1B_1-E_1F_1}{2}=\frac{A_1B_1-C_1D_1}{2}$, то је $AF=A_1F_1$ (због једнакости: $AB=A_1B_1$, $CD=C_1D_1$).

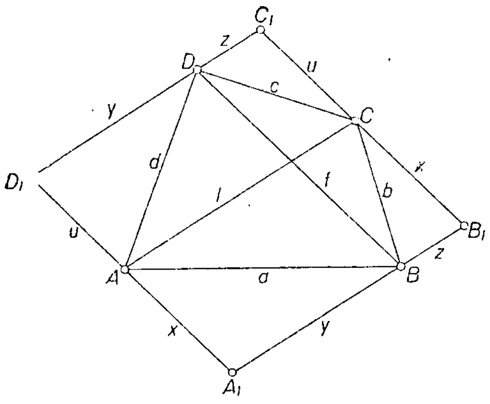
Отуда следује међусобна подударност сва четири троугла ADF, BCE, $A_1D_1F_1$, $B_1C_1E_1$. Према томе, ако трапез $A_1B_1C_1D_1$ положимо на трапез $ABCD$ тако да троугао $A_1D_1F_1$ поклопи троугао ADF, тада ће B_1 поклопити B, јер је $A_1B_1 = AB$, затим тачка C_1 тачку C, јер је $\triangle B_1C_1E_1 \cong \triangle BCE$, што значи да ће се поклопити сва четири темена трапеза $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$.

б) Симетрале страна AD и CD трапеза $ABCD$ секу се у тачки S која је подједнако удаљена од његова три темена A, C, D; треба доказати да и четврто теме B има једнако растојање од тачке S.

Како је симетрала дужи CD уједно и симетрала дужи EF ($\square FPQD \cong \square PECQ$), она је симетрала и дужи AB; дакле: $SB = SA = SC = SD$.

31) У датом четвороуглу $ABCD$ (сл. 171) повући ћемо дијагонале $AC = l$, $BD = f$; тврдимо да је $l + f > a + c$, или: $l + f > b + d$.

Кроз темена B, D датог четвороугла повући ћемо паралеле A_1B_1 и C_1D_1 дијагонали AC, а кроз темена A, C паралеле B_1C_1 и A_1D_1 дијагонали BD; у паралелограму AA_1B_1C имамо да је $AA_1 = CB_1 = x$, у паралелограму ACC_1D_1, исто тако: $AD_1 = CC_1 = u$; затим, слично: $A_1B = D_1D = y$, и $BB_1 = DC_1 = z$. Према томе, из троуглова AA_1B, BB_1C, CC_1D, ADD_1 следује редом: $x + y > a$, $x + z > b$, $z + u > c$, $y + u > d$. Сабирањем прве и треће, затим друге и четврте неједнакости следује:



Сл. 171

$$x + y + z + u > a + c,$$
$$x + y + z + u > b + d.$$

Како је $y + z = l$, $x + u = f$, заменом добијамо:

$$l + f > a + c,$$
$$l + f > b + d,$$

што је требало доказати.

32) Из слике 171 добијамо:

$$a + b > l,\ c + d > l,\ b + c > f,\ a + d > f,$$

а отуда сабирањем:

$$2a + 2b + 2c + 2d > 2l + 2f,$$

или:

$$a + b + c + d > l + f.$$

С друге стране, сабирањем последњих неједнакости из зад. 31 произилази:

$$2l + 2f > a + b + c + d,$$

или:

$$l + f > \frac{a + b + c + d}{2};$$

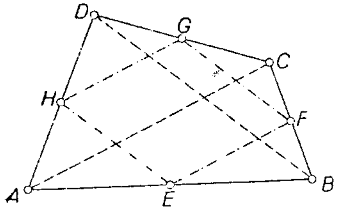
дакле:

$$a + b + c + d > l + f > \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$

33) Нека су у четвороуглу $ABCD$ (сл. 172) тачке E, F, G, H средине његових страна; тврдимо да је четвороугао $EFGH$ паралелограм. (Види зад. 12.)

Заиста, $EF \parallel AC$ и $GH \parallel AC$; затим: $EH \parallel BD$ и $FG \parallel BD$; отуда је и $EF \parallel GH$ и $EH \parallel FG$, што значи да је $EFGH$ паралелограм.

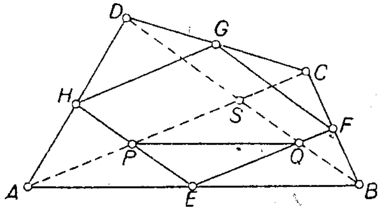
Лако је доказати да је тај паралелограм правоугаоник, кад су дијагонале четвороугла $ABCD$ узајамно нормалне, или кад су дужи које спајају средине наспрамних страна међусобно једнаке.



Сл. 172

Тај паралелограм је ромб ако је дати четвороугао равнокраки трапез или правоугаоник; он је квадрат ако је дати четвороугао квадрат или равнокраки трапез узајамно нормалних дијагонала.

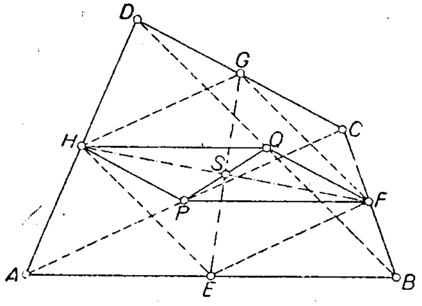
34) Нека су у четвороуглу $ABCD$ (сл. 173) E, F, G, H средине његових страна; тада је (зад. 33) $EFGH$ паралелограм. Како је $EH \parallel BD$, то је у троуглу ASD дуж $HP \parallel DS$, и стога је P средина од AS; исто тако је и Q средина од BS (посматрај троугао BCS!); према томе је $PQ \parallel AB$ и $PQ = \frac{1}{2}AB$ (посматрај троугао ABS!). Међутим је $AE = BE = \frac{1}{2}AB$, и стога су $AEQP$ и $BEPQ$ паралелограми. Отуда следује међусобна подударност троуглова: AEP, BEQ, EPQ и PQS. Према томе је површина паралелограма $EQSP$ једнака половини троугла ABC. Слично ће бити и са осталим деловима слике, па се може закључити да је површина паралелограма $EFGH$ једнака половини површине четвороугла $ABCD$.



Сл. 173

35) Нека је $ABCD$ (сл. 174) дати четвороугао, и нека су E, F, G, H средине његових страна и P, Q средине дијагонала AC и BD; тврдимо да се дужи EG, FH и PQ секу у истој тачки S, која је њихова заједничка средина.

Заиста, ако спојимо E, F, G, H, добијамо паралелограм $EFGH$ (види зад. 33), чије се дијагонале EG и FH секу у некој тачки S, која је њихова средина. Спајањем тачака P, F, Q, H добијамо, исто тако, паралелограм $PFQH$, чија је једна дијагонала FH а друга PQ; како је тачка S средина дијагонале FH, она је средина и дијагонале PQ, што је требало доказати.

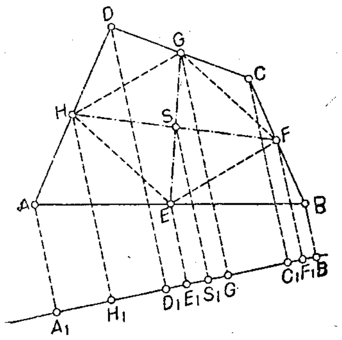


Сл. 174

Да је $PFQH$ заиста паралелограм, види се отуда што су тачке H, P средине страна AD и AC троугла ACD, па је стога $HP \parallel CD$ и $HP = \frac{1}{2}CD$; исто тако су тачке F, Q средине страна BC и BD троугла BCD, па је стога $FQ \parallel CD$ и $FQ = \frac{1}{2}CD$; одавде следује да је $HP \# FQ$, што значи да је $PFQH$ паралелограм.

Дужи EG, FH, PQ зову се каткад *медијане* четвороугла $ABCD$. У том случају теорема се може формулисати овако: *Три медијане секу се у истој тачки.*

36) Нека је $ABCD$ (сл. 175) дати четвороугао и p дата права. Треба доказати да је $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4SS_1$, где је S тачка пресека дужи EG и FH, које спајају средине E, F, G, H страна датог четвороугла, а тачке A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, S_1 пројекције тачака A, B, C, D, E, F, G, H, S на правој p.



Сл. 175

Из трапеза AA_1D_1D и CC_1B_1B имамо да је

$$AA_1 + DD_1 = 2HH_1, \quad BB_1 + CC_1 = 2FF_1;$$

затим, из трапеза AA_1B_1B и DD_1C_1C добијамо:

$$AA_1 + BB_1 = 2EE_1, \quad CC_1 + DD_1 = 2GG_1.$$

Сабирањем ове четири једнакости произилази:

$$2AA_1 + 2BB_1 + 2CC_1 + 2DD_1 = 2EE_1 + 2FF_1 + 2GG_1 + 2HH_1,$$

или

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = EE_1 + FF_1 + GG_1 + HH_1,$$

што ће рећи да је збир растојања, од дате праве, четири темена четвороугла једнак збиру растојања четири темена паралелограма.

Међутим, из трапеза HH_1F_1F и EE_1G_1G добијамо:

$$FF_1 + HH_1 = 2SS_1, \quad EE_1 + GG_1 = 2SS_1,$$

а одавде сабирањем:

$$EE_1 + FF_1 + GG_1 + HH_1 = 4SS_1.$$

Дакле:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4SS_1,$$

што је требало доказати.

Или овако: $AA_1+DD_1=2HH_1$

$$BB_1+CC_1=2FF_1,$$

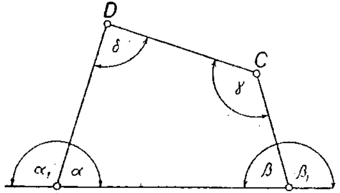
одакле сабирањем добијамо:

$$AA_1+BB_1+CC_1+DD_1=2(HH_1+FF_1).$$

Како је, међутим, тачка S средина дужи HF (зашто?), произилази да је $HH_1+FF_1=2SS_1$. Кад то заменимо, добијамо непосредно:

$$AA_1+BB_1+CC_1+DD_1=4SS_1.$$

37) Нека је $ABCD$ (сл. 176) дати четвороугао чији су унутрашњи углови α, β, γ, δ.



Сл. 176

Знамо да је збир унутрашњих углова у четвороуглу једнак четири права угла, тј:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=4R.$$

Ако су α_1 и β_1 спољашњи углови упоредни угловима α и β, треба доказати да је

$$\gamma+\delta=\alpha_1+\beta_1.$$

Заиста, из

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=4R$$

следује:

$$\gamma+\delta=4R-\alpha-\beta=2R-\alpha+2R-\beta.$$

Како је $2R-\alpha=\alpha_1$, $2R-\beta=\beta_1$, добијамо непосредно:

$$\gamma+\delta=\alpha_1+\beta_1,$$

што је требало доказати.

38) Полазимо од става да је збир углова у конвексном четвороуглу једнак $4R$.

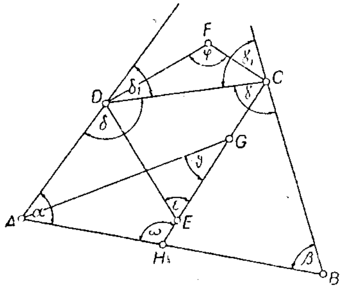
а) Ако такав четвороугао не би имао ниједан оштар угао, значи да би или сви били прави, и стога једнаки, што се противи нашој претпоставци, или би једни били прави а други тупи, или, најзад, сви тупи. У та два последња случаја збир углова у том четвороуглу био би већи од $4R$, што је немогуће.

Према томе, четвороугао има бар један оштар угао.

б) Ако такав четвороугао не би имао ниједан туп угао, они би били или сви прави, и стога једнаки, што се противи претпоставци, или би једни били прави а други оштри, или би, најзад, сви били оштри. У та два последња случаја збир углова би био мањи од $4R$, а то је немогуће.

Дакле, четвороугао има бар један туп угао.

39) Нека је $ABCD$ (сл. 177) дати четвороугао, и нека су CE и DE симетрале унутрашњих углова γ, δ, а CF, DF симетрале спољашњих углова γ_1, δ_1. Тврдимо да је:



Сл. 177

а) $\varepsilon=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, б) $\varphi=\dfrac{\gamma+\delta}{2}$.

а) Из троугла CDE добијамо:

$$\varepsilon=2R-\frac{\gamma+\delta}{2}.$$

Како је, међутим,

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=4R,$$

или: $\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\gamma+\delta}{2}=2R,$

следује: $\dfrac{\gamma+\delta}{2}=2R-\dfrac{\alpha+\beta}{2}.$

Кад ту вредност заменимо у (1), добијамо непосредно:

$$\varepsilon=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

б) Из троугла CDF добијамо:

$$\varphi=2R-\frac{\gamma_1+\delta_1}{2}.$$

Међутим, знамо да је

$$\gamma_1=2R-\gamma,\ \delta_1=2R-\delta.$$

Кад те вредности заменимо у претходној једнакости, добијамо:

$$\varphi=2R-\frac{2R-\gamma+2R-\delta}{2},$$

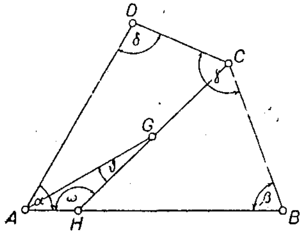
или:

$$\varphi=\frac{\gamma+\delta}{2}.$$

Проверавање: Како су у четвороуглу *CFDE* углови *ECF* и *EDF* прави, следује да је $\varepsilon+\varphi=2R$. Заиста, ако под а) и б) добијене вредности за ε и φ саберемо, добијамо:

$$\varepsilon+\varphi=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{4R}{2}=2R.$$

40) Нека је AG (сл. 178) симетрала угла α и CG симетрала угла γ. Тврдимо да је угао ϑ између тих симетрала једнак $\frac{\delta-\beta}{2}$.



Сл. 178

Заиста, посматрањем троугла AGH видимо да је

$$\vartheta=2R-\omega-\frac{\alpha}{2}.$$

Међутим, угао ω је спољашњи угао троугла BCH, па је

$$\omega=\beta+\frac{\gamma}{2};$$

с друге стране, знамо да је

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=2R.$$

Ако то узмемо у обзир у изразу за ϑ, добијамо:

$$\vartheta=2R-\beta-\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2},\ \text{или:}$$

$$\vartheta=2R-\beta-\frac{\alpha+\gamma}{2};$$

одавде:

$$\vartheta=2R-\beta-2R+\frac{\beta+\delta}{2};$$

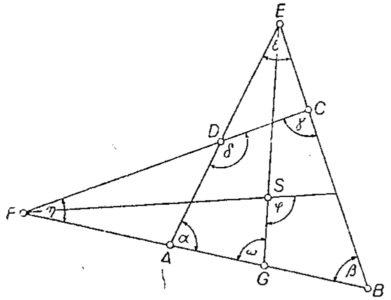
и, најзад, кад средимо:

$$\vartheta=\frac{\delta-\beta}{2}.$$

41) Нека је $ABCD$ (сл. 179) дати четвороугао чији се продушци супротних страна секу у тачкама E и F, и нека је φ угао

што га чине бисектрисе ES и FS углова ε и η које образују ти продушци страна. Треба доказати да је

$$\varphi=\frac{\beta+\delta}{2}.$$



Сл. 179

Угао φ је спољашњи угао троугла FGS; стога је

$$\varphi=\omega+\frac{\eta}{2}.$$

Међутим, угао ω је спољашњи угао троугла BEG, па је

$$\omega=\beta+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Према томе је

$$\varphi=\beta+\frac{\varepsilon+\eta}{2}.$$

Из троуглова ABE и BCF добијамо:

$$\varepsilon=2R-\alpha-\beta,\quad \eta=2R-\beta-\gamma,$$

а одавде, сабирањем:

$$\varepsilon+\eta=4R-\alpha-2\beta-\gamma,$$

или:

$$\frac{\varepsilon+\eta}{2}=2R-\frac{\alpha}{2}-\beta-\frac{\gamma}{2}.$$

Ако уважимо да је

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}=2R,$$

добијамо:

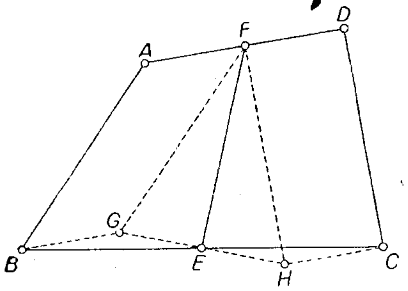
$$\frac{\varepsilon+\eta}{2}=\frac{\delta}{2}-\frac{\beta}{2};$$

дакле:

$$\varphi=\frac{\beta+\delta}{2},$$

што је требало доказати.

42) Нека су у четвороуглу $ABCD$ стране AB и CD једнаке (сл. 180).



Сл. 180

а) Нацртајмо паралелограме $ABGF$ и $FHCD$; (F је средина стране AD) тада је $FG=FH$. Спојмо E, средину стране BC, са тачкама G и H. Дужи GE и EH су на једној правој; троугли GBE и EHC су подударни ($BG=HC$, $BE=CE$, $\sphericalangle GBE=\sphericalangle HCE$), а из њихове подударности следује да је $\sphericalangle GEB=\sphericalangle HEC$, и $GE=HE$.

У равнокраком троуглу FGH, дуж FE која спаја врх са средином основице полови угао на врху, па су стране FG и HF, или AB и DC подједнако нагнуте према дужи EF.

б) Дуж FE која спаја врх и средину основице равнокраког троугла FGH нормална је на основици GH, што значи да је FE пројекција дужи FG и FH, или страна AB и CD.

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

43) Обележимо стране четвороугла са m, n, p, q, а дијагоналу са d. Према услову задатка је

$$m+n+p+q=32$$

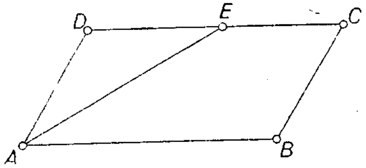
$$m+n+d=25$$

$$p+q+d=27.$$

Сабирањем друге и треће једнакости и одузимањем прве једнакости од тога збира добија се $d=10$ m.

44) $\sphericalangle DEA=\sphericalangle EAB=\sphericalangle EAD$ (сл. 181). Према томе је троугао AED равнокрак, и $DE=DA=9$ cm.

$EC=DC-DE=6$ cm.

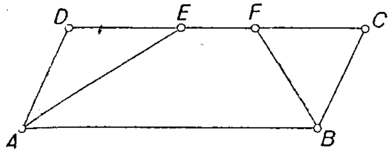


Сл. 181

45) $\sphericalangle DEA=\sphericalangle EAB=\sphericalangle EAD$ (сл. 182). Према томе је троугао AED равнокрак, и $DE=AD=3$ cm.

$\sphericalangle CFB=\sphericalangle FBA=\sphericalangle FBC$; троугао BCF је равнокрак, и $FC=CB=3$ cm.

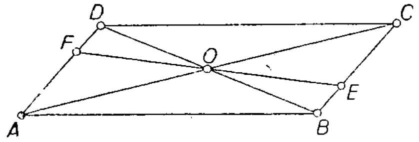
Отуда је $EF=DC-DE-FC=2$ cm.



Сл. 182

46) Троугли AOF и COE су подударни (сл. 183), јер је $AO=CO$, $\sphericalangle AOF=\sphericalangle COE$, $\sphericalangle FAO=\sphericalangle OCE$; према томе је $CE=AF$.

Дакле: $AD=BC=CE+BE=2,8+2=4,8$ m.

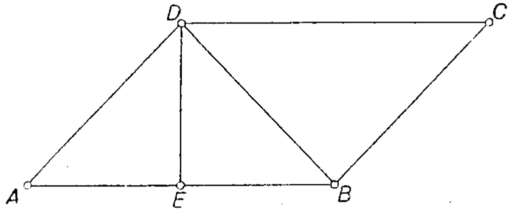


Сл. 183

47) По претпоставци је $2(AB+AD)=3,8$, или: $AB+AD=1,9$ (сл. 184);

$AB+AD+BD=2,8$; према томе је $BD=0,9$ m.

Троугао ABD је равнокрак, па је $AD=0,9$ m, $AB=1$ m.



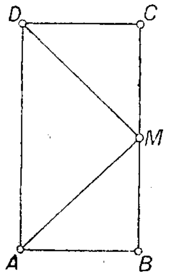
Сл. 184

48) Правоугли троугли ABM и CDM подударни су, јер су им катете једнаке (сл. 185); према томе су им и хипотенузе једнаке. Значи, правоугли троугао AMD је равнокрак и углови на основици износе по 45^0. Одатле следује да су и троугли ABM и CDM равнокрако-правоугли, тј.: $AB=CD=BM=CM$, или: $BC=2AB$.

Дакле:

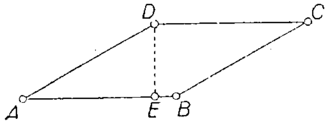
$2AB+2BC=24$, или $2AB+4AB=24$,

или: $AB=4$ m, $BC=8$ m.



Сл. 185

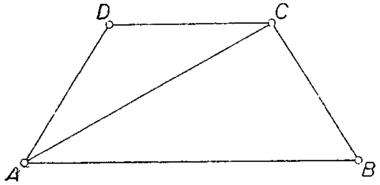
49) Према подацима задатка је $DE=1$, $AD=2$ (сл. 186). Према томе, у правоуглом троуглу ADE оштар угао $DAE=30^0$. Како је то и угао ромба, туп угао ромба је 150^0.



Сл. 186

50) У правоуглом троуглу ABC (сл. 187) $\sphericalangle ABC = 60^0$, $\sphericalangle CAB=30^0$, према томе је

$$BC=\frac{AB}{2}.$$



Сл. 187

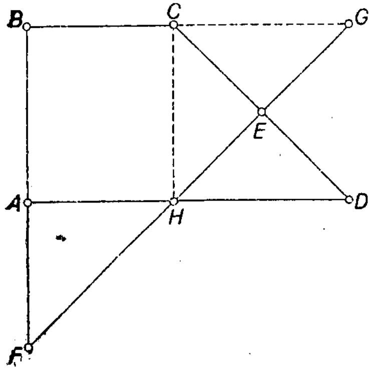
Троугао ACD је равнокрак, јер је $\sphericalangle DAC=\sphericalangle CAB=\sphericalangle ACD=30^0$, отуда је $\sphericalangle DAB=60^0$.

Трапез $ABCD$ је равнокрак, па можемо написати:

$AB+BC+CD+AD=2$ m, или: $2BC+BC+BC+BC=2$ m;

$5BC=2$ m; $BC=0{,}4$ m; $AB=0{,}8$ m.

51) Продужимо страну BC до пресека са продуженом нормалом FE (сл. 188).



Сл. 188

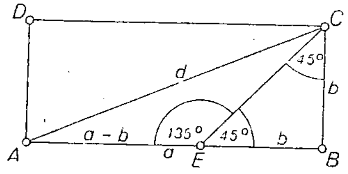
Како је $\sphericalangle D=45^0$, то је троугао DEH равнокрако-правоугли. Исто тако, и троугао CEG је равнокрако-правоугли. Знамо да је $DE=EC$; према томе су ова два троугла подударна, а са њима и троугао CHE.

Из тога се закључује да је $CH\perp BC$, и четвороугао $AHCB$ је правоугаоник. Отуда је $BC=AH$. Како је $CG=HD$, то је $BG=AD=a$. И троугао BFG је равнокрако-правоугли; према томе је $BF=BG=a$.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1) Паралелограм

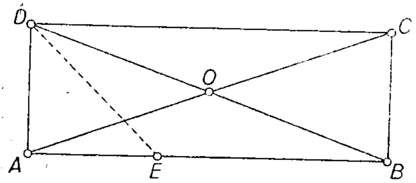
52) Претпоставимо да је задатак решен, и да је $ABCD$ (сл. 189) тражени правоугаоник.



Сл. 189

Очевидно је да се конструкција своди на конструкцију троугла AEC, у коме су познате две стране: $AC=d$, $AE=a-b$, и угао $AEC=135^0$ наспрам стране AC; затим се из темена C траженог правоугаоника спусти нормала на праву AE; њено подножје B је треће теме правоугаоника; четврто теме D налази се на пресеку правих повучених кроз тачку C паралелно правој AB и кроз тачку A паралелно правој BC.

53) а) Претпоставимо да је задатак решен, и да је $ABCD$ (сл. 190) тражени правоугаоник.



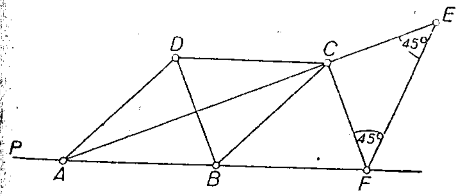
Сл. 190

Кад се зна угао између дијагонала, тада се знају и углови између дијагонала и страна; према томе, може се конструисати правоугли троугао ABC у коме је познат збир катета и углови.

б) Нека је BE разлика суседних страна. Може се конструисати троугао EBD, јер се у њему знају страна BE и два налегла угла: $\sphericalangle EBD=90^0-\frac{1}{2}\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BED=135^0$.

в) Може се конструисати правоугли троугао ABD, у коме је позната хипотенуза и збир катета.

54) Претпоставимо да је задатак решен, и да је $ABCD$ (сл. 191) тражени ромб, у коме је познат збир дијагонала $AC+BD=k$ и већи угао ABC.



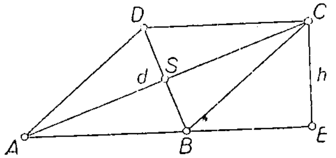
Сл. 191

Како су углови DAB и ABC суплементни, можемо прво конструисати угао PAD једнак датом углу, а затим повући симетралу угла DAB

(јер је дијагонала AC симетрала угла DAB) и на њу од A пренети дати збир k дијагонала AC и BD, тако да је $AE = k$. Одређивање темена C своди се на конструкцију равнокрако-правоуглог троугла CEF са правим углом код C, у коме је $CE = CF = BD$. Заиста, дијагонале у ромбу су узајамно нормалне, па је $BD \perp AC$. Како је дијагонала $AC = AE - BD$, треба да је $CE = BD = CF$ и $CF \perp AE$. Према томе, кад из тачке E повучемо полуправу под углом од 45° према AE и из пресека те полуправе са правом на којој лежи крак AP угла PAD полуправу под углом од 45° према правој EF, ова друга полуправа сече AE у темену C траженог ромба $ABCD$. Најзад, из тачке C повучемо паралеле крацима угла PAD; на пресеку D, B тих паралела и кракова налазе се остала два темена ромба. (Види § 2, зад. 131).

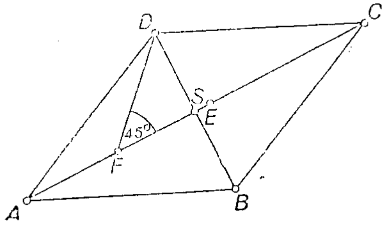
55) Ако се узме половина збира или половина разлике дијагонала, задатак се своди на конструкцију правоуглог троугла коме знамо хипотенузу и збир или разлику катета.

56) Прво конструиши правоугли троугао AEC (сл. 192) помоћу d и h; затим, из C повуци паралелу правој AE и кроз средину S дужи AC повуци нормалу на AC; она сече паралелне праве у тачкама B и D, које су темена траженог ромба $ABCD$; најзад, спој A са D и B са C.



Сл. 192

57) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 193) тражени ромб, у коме је позната разлика AE дијагонала AC и BD. Ако је, дакле,



Сл. 193

$$AE = AC - BD,$$

онда је

$$\frac{AE}{2} = AF = FE = \frac{AC}{2} - \frac{BD}{2},$$

или:

$$AF = AS - DS,$$

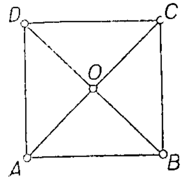
а отуда:

$$DS = AS - AF = FS.$$

Према томе, треба конструисати равнокрако-правоугли троугао DFS.

Прво ћемо конструисати угао BAD једнак датом углу и повући његову симетралу; на ту симетралу пренећемо од тачке A дату разлику AE и преполовити је; из њене средине F повући ћемо полуправу под углом од 45° према AC, и где она пресече крак AD угла BAD, тамо је тражено теме D ромба; затим ћемо из тачке D повући нормалу на AC, и где она пресече крак AB угла, тамо је теме B ромба; најзад, треба повући $DC \parallel AB$ и $BC \parallel AD$; на пресеку тих полуправих лежи теме C ромба.

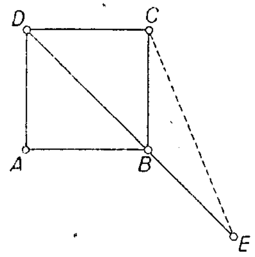
58) а) Повуци две нормалне праве (сл. 194) и из њиховог пресека O пренеси дужи $OA = OB = OC = OD = \frac{d}{2}$, где је d дужина дате дијагонале.



Сл. 194

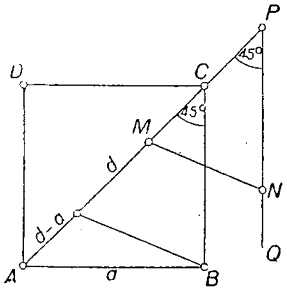
б) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 195) тражени квадрат у коме је познат збир $BD + BC$ дијагонале и стране.

Продужимо дијагоналу DB преко B за $BE = BC$ и спојмо E са C; добијамо троугао CDE који можемо конструисати, јер знамо страну DE и належне углове: $\sphericalangle EDC = 45^0$ и $\sphericalangle CED = \frac{45^0}{2}$ (спољашњи угао CBD равнокраког троугла BCE једнак је 45°); страна CD тога троугла уједно је страна траженог квадрата $ABCD$, па се квадрат може конструисати.



Сл. 195

в) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 196) тражени квадрат у коме је позната разлика $AC - AB = d - a$ дијагонале и стране.



Сл. 196

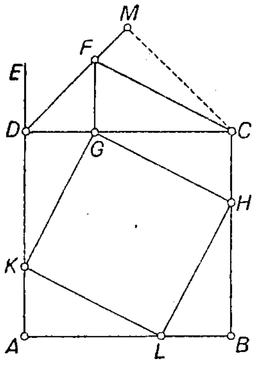
Конструкција се своди на конструкцију троугла ABE, која се лако изводи на овај начин: Нацрта се прави угао BAD и повуче његова симетрала AP, на коју се, почев од A, пренесе дата разлика $d - a = AE$; затим се ма из које тачке P те симетрале повуче полуправа под углом од 45° према симетрали AP

и на крацима угла APQ од темена P одмере једнаке дужи PM и PN; најзад, из тачке E повуче се паралела дужи MN; она сече крак AB угла BAD у темену B траженог квадрата. Тиме је одређена страна AB квадрата, па се он сад може конструисати.

59) Повуцимо симетралу правог угла CDE, спољашњег угла квадрата $ABCD$ (сл. 197). Из тачке C опишимо лук полупречника a; он ће пресећи симетралу у тачки F; из тачке F спустимо нормалу FG на DC и повуцимо $GH \parallel FC$; затим, на GH у тачкама G и H дигнимо нормале GK и HL.

Слика $GHCF$ је паралелограм, па је $GH = FC = a$; $CH = FG = DG$, па је $GC = DK$ итд.

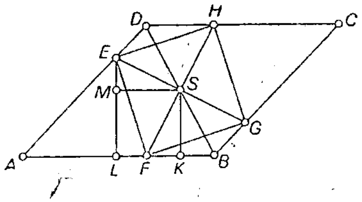
Страна $FC = a$ може лежати између DC и CM, нормале спуштене из C на симетралу угла. Зна се да је $CM = \frac{CD}{\sqrt{2}}$.



Сл. 197

60) Претпоставимо да је задатак решен, и да је квадрат $EFGH$ уписан у паралелограму $ABCD$ (сл. 198); тада је $EF \perp FG$ и $EF = FG$.

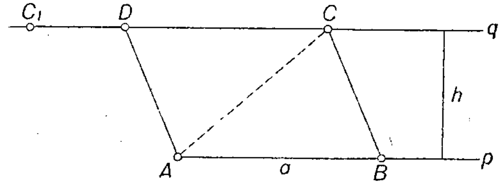
Из темена E квадрата повуцимо $EL \perp AB$, а из пресека S дијагонала $SK \perp AB$ и $SM \perp EL$. Правоугли троугли SKF и SME су подударни, јер имају једнаке хипотенузе (половине дијагонала квадрата) и углове KSF и MSE (нормални краци). Према томе је $KF = ME$.



Сл. 198

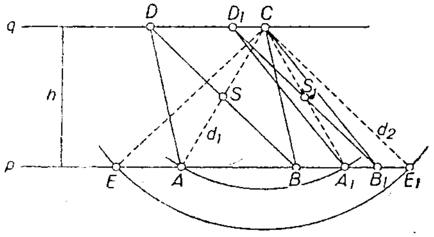
Како се пресек дијагонала квадрата поклапа са пресеком дијагонала паралелограма, конструкција се изводи на овај начин: Из пресека S дијагонала паралелограма спусти се нормала SK на AB и, почев од тачке K, на AB пренесе $KL = SK$; у тачки L дигне се нормала на AB; пресек нормале са страном AD даће једно теме квадрата. Затим се повуче $SM \perp EL$, пренесе EM на AB од K до F, споји E са F итд.

61) На датом растојању h повуци две паралелне праве p и q (сл. 199); затим на правој p одмери дату основицу $AB = a$; из њене крајње тачке A опиши круг полупречника d; он сече праву q у тачкама C и C_1; најзад се троугли ABC и ABC_1 допуне до паралелограма $ABCD$ и ABC_1D_1. Према томе, има два решења.



Сл. 199

62) На датом растојању h повуци две паралелне праве p, q (сл. 200) и ма из које тачке C праве q опиши кругове полупречника d_1 и d_2; они секу праву p у тачкама A, A_1 и E, E_1. Затим, кроз средине S и S_1 дужи AC и A_1C повуци паралеле правој CE_1; оне секу праве p, q у тачкама B, D и B_1, D_1, које су темена траженог ромбоида $ABCD$ или $A_1B_1CD_1$.

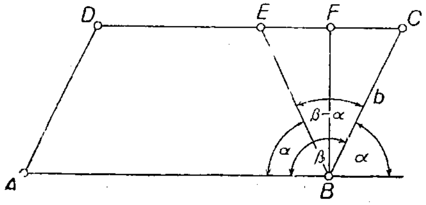


Сл. 200

Ако кроз средине S и S_1 повучемо паралеле правој CE, добијамо још два ромбоида, од којих ће један бити подударан са $ABCD$, а други са $A_1B_1CD_1$.

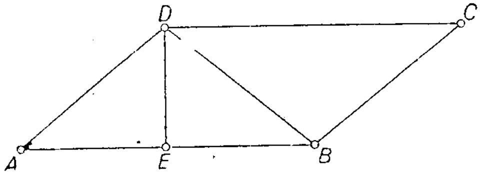
63) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 201) тражени паралелограм, у коме су познате стране $AB=a$, $BC=b$, и разлика $\beta-\alpha$ углова на страни AB.

Очигледно је да се конструкција своди на конструкцију правоуглог троугла BCF, у коме знамо хипотенузу $BC = b$ и угао $CBF = \frac{\beta-\alpha}{2}$. По свршетку те конструкције треба повући $BA \perp BF$ итд.



Сл. 201

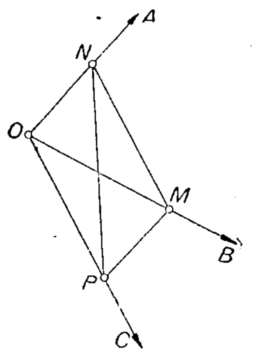
64) Ако висина из темена тупог угла полови супротну страну, троугао ABD је равнокрак (сл. 202). Према томе, треба конструисати равнокрак троугао чија је основица једнака једној страни паралелограма а краци једнаки са другом страном паралелограма; затим, допунити слику.



Сл. 202

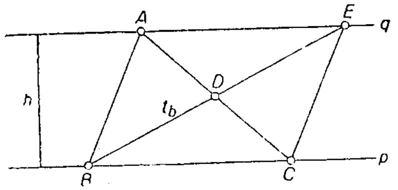
65) Из произвољне тачке M на полуправој OB треба повући паралеле са полуправима OA и OC до пресека са њима (сл. 203). Тако ће се добити паралелограм $OPMN$. Дијагонала NP биће тражена дуж.

Како је тачка M произвољна, то задатак има безбројно много решења.



Сл. 203

66) Тај задатак је већ решен на други начин (види § 2, зад. 106).

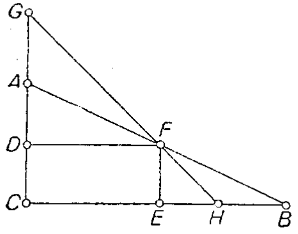


Сл. 204

Овде ћемо га решити помоћу паралелограма $ABCD$ (сл. 204).

На датом растојању h повучемо две паралелне праве p, q и на праву p пренесемо дату основицу $BC = a$ траженог троугла ABC; затим, из темена B као центра опишемо круг полупречника $2t_b$; он сече праву q у тачки E; најзад, из тачке C повучемо полуправу кроз средину D дужи BE; она сече праву q у тачки A, која је треће теме траженог троугла.

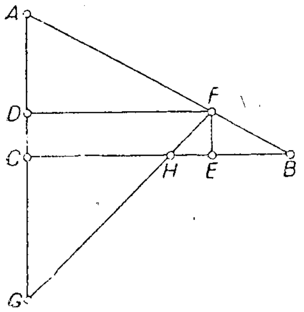
67) а) Нека је ACB дати троугао (сл. 205), и нека правоугаоник $DCEF$ има обим $2s$, или $DC + CE = s$.



Сл. 205

Довољно је нацртати $CG = CH = s$. Тада је троугао GCH равнокрако-правоугли: $\sphericalangle CHG = \sphericalangle CGH = 45^\circ$; отуда је $EH = EF$, $DF = DG$; или: $s = CH = CE + EH = CE + EF = CE + DC$.

б) Нека је ACB дати троугао (сл. 206), и нека је разлика суседних страна правоугаоника $DCEF$ једнака d, тј. $DF - EF = d$.



Сл. 206

Треба AC продужити преко темена C за дужину d до тачке G и на крак CB пренети $CH = d$, спојити G са H и продужити до пресека са хипотенузом, до тачке F.

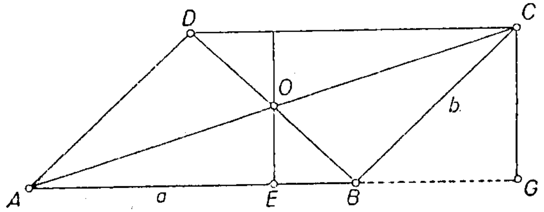
Троугао CGH је равнокрако-правоугли: $\sphericalangle CHG = 45^\circ$. Исто тако $\sphericalangle FHE$ износи 45°; према томе је $HE = FE$. Значи: $CH = CE - HE = DF - FE = d$.

Добило би се још једно решење ако се изведе исти поступак са другом катетом, тј. ако се продужи BC преко C за d итд.

в) Задатак се своди на задатак б), само се узме да је $d=0$, тј. повуче се симетрала угла C итд.

г) Из темена правог угла треба спустити висину на хипотенузу и из подножја висине повући паралеле са катетама. Висина је у том случају дијагонала правоугаоника и то најмања, јер је нормална на хипотенузи.

68) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 207) тражени паралелограм у коме је позната страна $AB = a$, $BC = b$, $AE = 3EB$, где је E подножје нормале спуштене из пресека O дијагонала.

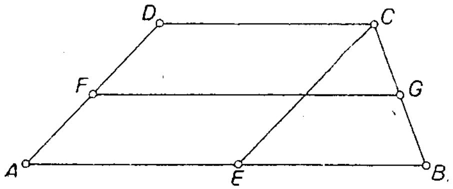


Сл. 207

Посматраћемо троугао ACG; у њему је $OE \parallel CG$; тада је $AE = EG$, јер је O средина стране OC.

Конструкција троугла ACG своди се на конструкцију троугла BCG; њу можемо, међутим, извести тако да од дате дужи $AB = a$ узмемо $\frac{3}{4}$ њене дужине, тј AE, и продужимо AB до тачке G, тако да је $EG = AE$; затим, из тачке B као центра опишемо круг полупречника $BC = b$, који ће нормалу у G на правој AB пресећи у темену C траженог паралелограма; најзад, из C повучемо паралелу страни AB и из A паралелу страни BC; њиховим пресеком је одређено и четврто теме D траженог паралелограма $ABCD$.

2) Ма који четвороугао

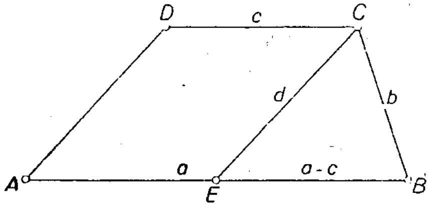


Сл. 208

69) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 208) тражени трапез у коме је дата разлика BE основица AB и CD, краци AD, BC и средња линија FG.

Конструкција се своди на конструкцију троугла BCE; у њему су познате све три стране, па га можемо лако конструисати (јер је $CE \# AD$, $BE = AB - AE = AB - CD$); затим, из средине G стране BC повучемо паралелу страни BE и на њу пренесемо дату средњу линију FG; кроз њену крајњу тачку F повучемо паралелу страни CE троугла BCE, продужимо BE преко E и из C повучемо паралелу страни BE; на пресецима тих линија налазе се темена A и D траженог трапеза $ABCD$.

Који је услов могућности конструкције? (Види зад. 70.)



Сл. 209

70) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ тражени трапез (сл. 209) у коме су познате све четири стране: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

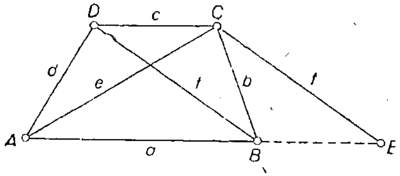
Ако из тачке C повучемо праву паралелну страни AD трапеза, очевидно је да се његова конструкција своди на

конструкцију троугла BCE, чије су нам све три стране познате: $BE = AB - AE = AB - CD$ (јер је $CD = AE) = a - c$, $BC = b$, $CE = d$.

Теме D трапеза добијамо кад из тачке C повучемо паралелу страни BE троугла BCE и на њу пренесемо дату дуж $CD = c$; најзад, теме A одредићемо кад продужимо BE преко E и из тачке D повучемо паралелу страни CE помоћног троугла; оно се налази на пресеку тих линија.

Да трапез постоји, потребно је и довољно да се може конструисати троугао BCE, тј. да постоји овај однос:

$$|b - d| < |a - c| < b + d.$$



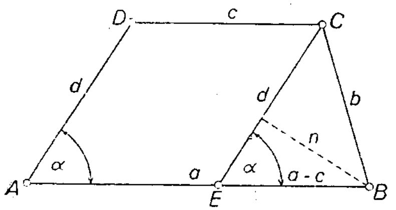
Сл. 210

71) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 210) тражени трапез, чије су нам основице познате: $AB = a$, $CD = c$ и дијагонале: $AC = e$, $BD = f$.

Повуцимо $CE \parallel DB$; добијамо паралелограм $BECD$, у коме је $BE = CD$ и $EC = BD$. Сад се конструише троугао AEC помоћу $AE = AB + BE = AB + CD = a + c$, $AC = e$, $CE = BD = f$. Из слике се јасно види како се добијају темена B и D.

За постојање трапеза потребно је и довољно да постоје ови односи:

$$|e - f| < a + c < e + f.$$



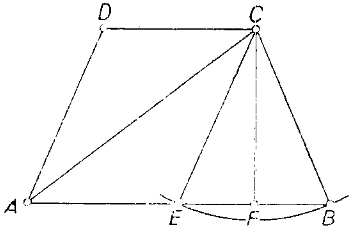
Сл. 211

72) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 211) тражени трапез, у коме знамо основице: $AB = a$, $CD = c$, крак $BC = b$ и угао α.

Повуцимо из темена C паралелу краку AD; добијамо троугао BCE, у коме знамо две стране $BE = a - c$, $BC = b$ и угао α наспрам стране BC, па га можемо лако конструисати, а затим и сам трапез (види зад. 70).

У случају кад је $a - c > b > n$, где је n нормала спуштена из B на CE, имамо два решења; ако је $b > a - c$, имамо једно решење; иначе је задатак немогућ.

73) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 212) тражени равнокраки трапез, у коме знамо основице: $AB=a$ и $CD=c$ и дијагоналу $AC=e$.



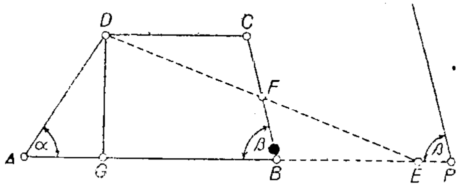
Сл. 212

Повуцимо из тачке C паралелу краку AD; добијамо равнокраки троугао BCE; ако је CF његова висина, тада је $EF=\frac{1}{2}(a-c)$, јер је $BE=AB-AE=AB-CD=a-c$. Сад су у правоуглом троуглу познате стране: $AC=e$ и $AF=c+\frac{1}{2}(a-c)$, па се може конструисати. Потом је лако одредити темена B и D, како се разабира из слике.

74) *Први начин.* Прво нацртај правоугли троугао ACF (сл. 212) помоћу дијагонале $AC=e$ и висине $CF=h$; затим, из C повуци паралелу правој AF и на њу пренеси $CD=c$; спој A са D; најзад, из тачке C као центра опиши круг полупречника AD; он сече праву AF у тачкама E и B, од којих је B четврто теме траженог трапеза $ABCD$.

Други начин. Конструиши прво $\triangle ACD$.

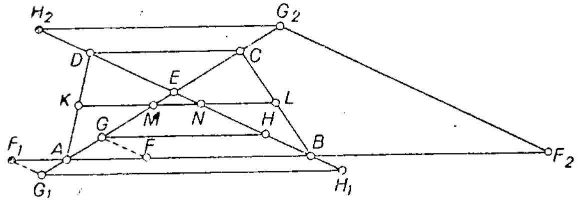
75) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 213) тражени трапез, у коме је познат збир $AB+CD=a+c$, основице: $AB=a$, $CD=c$ $(AB>CD)$, висина $DG=h$ и углови α и β на већој основици.



Сл. 213

Продужимо AB преко B за $BE=CD$ и спојмо E са D; добијамо троугао у коме су познати: основица $AE=a+c$, висина $DG=h$ и угао α на основици, па га можемо конструисати затим, у произвољној тачки P праве AE конструишемо дати угао β и кроз средину F дужи DE повучемо паралелу његовом краку који не лежи на правој AE, а та паралела сече праву AE у темену B траженог трапеза; најзад, паралела из D правој AE сече праву BF у четвртом темену C трапеза.

76) Узме се $BF=l$, повуче се $FG\parallel BD$; дуж GH повучена паралелно основици одговара захтеву задатка (сл. 214).



Сл. 214

а) Нека је $l>BA$. Узме се $BF_1=l$, затим се повуче $F_1G_1\parallel BD$; дуж G_1H_1 паралелна основици одговара захтеву задатка иако је ван трапеза.

б) Нека је $l=BA$.

У овом случају AB одговара захтеву задатка.

в) Нека је $l=\frac{AB-CD}{2}$.

Кад је l полуразлика основица, тражена дуж је на средњој линији трапеза.

У троуглу ABC: $ML=\frac{AB}{2}$.

У троуглу BCD: $NL=\frac{CD}{2}$. Одузимањем ових једнакости добијамо: $MN=\frac{AB-CD}{2}$.

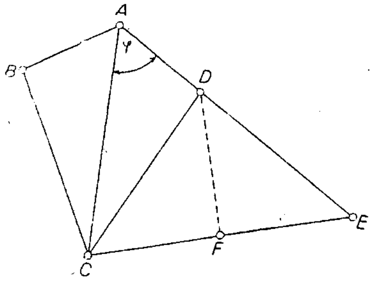
г) Ако је $l=O$, тражена дуж је сама тачка пресека дијагонала.

д) Најзад, ако је l негативно, пренела би се дуж l од B до F_2, па би се добила дуж H_2G_2.

Извод. Задатак увек има само једно решење; дата дужина l може се мењати од $+\infty$ до нуле и од нуле до $-\infty$.

Ако се не води рачуна о смеру GH, и ако тачка G треба увек да се налази на дијагонали AC, дужина l имаће само позитивне вредности: свакој од њих одговараће два решења; једно би било у углу AEB, а друго у углу CED.

77) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 215) тражени делтоид, у коме су познати: дијагонала AC (симетрала делтоида), угао $CAD=\varphi$ и збир $AD+DC=s$ неједнаких страна делтоида.

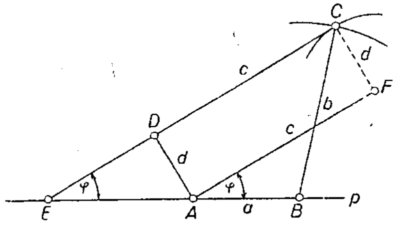


Сл. 215

Продужимо AD преко D до тачке E, тако да је $AE=s$; затим, спојмо C са E; добијамо троугао ACE, који можемо конструисати помоћу AC, AE и њима захваћеног угла φ.

Да одредимо теме D делтоида, повући ћемо симетралу дужи CE; она ће сећи праву AE у траженој тачки D. Заиста, троугао CDE је равнокрак, јер је симетрала DF његова висина, што значи да је $DC=DE$, а отуда је $AE=AD+DC=s$. Сад се лако добија и четврто теме B делтоида, што остављамо ученику да нађе.

78) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $ABCD$ (сл. 216) тражени четвороугао, у коме су познати: стране $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ и угао φ који чине стране AB и CD.

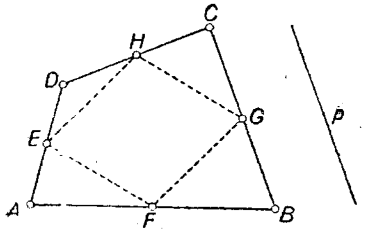


Сл. 216

Конструкција се своди на конструкцију паралелограма $AFCD$, која се може извести овако: На неку праву p пренесемо дату страну $AB=a$ и угао φ; затим, на крак AF угла φ пренесемо дату страну c од темена A; потом, из тачака B и F опишемо кругове полупречника b и d; они се секу у тачки C, темену траженог четвороугла; најзад, из тачке C повучемо паралелу правој AF и на њу од C пренесемо дату страну c, чији је други крај четврто теме D четвороугла.

Испитај у коме случају је задатак немогућ.

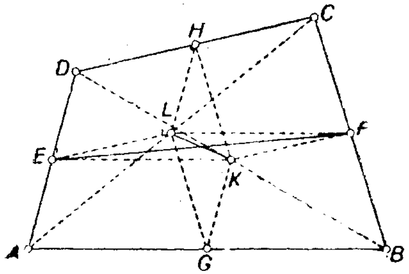
79) Посматрајмо четвороугао $ABCD$ (сл. 217); средине његових страна су темена паралелограма.



Сл. 217

Треба, дакле, конструисати паралелограм спајајући дате средине страна и на тај начин наћи теме G које је средина четврте стране. Затим се повуче BGC паралелно датој дужи p; половина дужи p пренесе се на GB, а половина на GC; тако се добију B и C два темена траженог четвороугла. Најзад се повуче CHD и BFA, пренесе $CH=HD$ и $BF=FA$ и на тај начин добију и друга два темена.

80) Нека је $ABCD$ тражени четвороугао, E, G, F, H средине страна, K, L средине дијагонала BD и AC и EF дуж која спаја средине двеју супротних страна. Нацртајмо четвороугле $EKFL$ и $LGKH$ (сл. 218). (Види зад. 35)



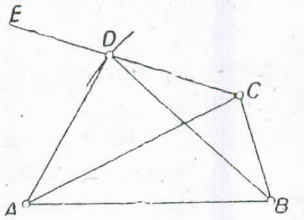
Сл. 218

У троуглу ACD дуж EL паралелна је са DC и једнака $\frac{DC}{2}$. У троуглу BCD дуж KF паралелна је са DC и једнака $\frac{DC}{2}$. Исто тако се може видети да су дужи EK и LF паралелне са AB и једнаке $\frac{AB}{2}$. Према томе, $EKFL$ је паралелограм код кога се знају стране и једна дијагонала. Он се, дакле, може конструисати и повући друга дијагонала LK.

Исто тако се може конструисати паралелограм $LGKH$, чије су познате све четири стране и једна дијагонала, јер је $LG=HK=\frac{BC}{2}$ и $KG=LH=\frac{AD}{2}$.

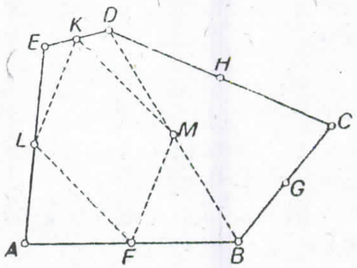
Тада се може конструисати четвороугао $ABCD$, јер **имамо** средине страна, њихове правце и њихове дужине.

81) Конструише се најпре троугао ABC (сл. 219) чије стране AB и AC и угао B знамо; затим се нацрта $\sphericalangle BCE = \sphericalangle C$, и из темена B опише лук полупречником једнаким другој дијагонали BD и тим луком пресече крак CE. На тај начин се добије четврто теме D четвороугла.



Сл. 219

82) Нека је $ABCDE$ тражени петоугао, а F, G, H, K, L средине страна (сл. 220). Свака дијагонала, например BD, дели петоугао на четвороугао $ABDE$ и троугао BCD.



Сл. 220

Како су познати положаји K, L, F средина страна, то се може конструисати паралелограм $LFMK$, који ће нам дати тачку M на средини дијагонале B. Помоћу три средине M, G, H може се конструисати **троугао** BCD. Тако ћемо имати три темена B, C, D траженог **петоугла.** Затим ћемо спојити D са K и продужити за $KE = KD$; **исто тако.** спојићемо B са F и продужити за $FA = FB$. На тај **начин** ћемо добити и темена A и E.

Овај задатак поставио је професор Лионе (Lionnet).

§ 4. Геометриска места

1) Спој дате тачке A и B и повуци симетралу s дужи AB; где она пресече дату праву p, тамо је тражена тачка M.

Према томе, постоји само једно решење ако симетрала s сече праву p.

Ако је $p \parallel s$, задатак нема решења.

Ако се p поклапа са s, све тачке праве p задовољавају дате услове.

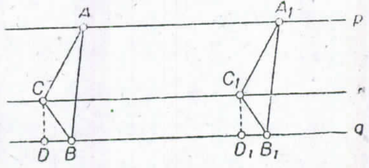
2) Нека се праве p и q секу у тачки O. Пресеци P и Q симетрала r и s два пара унакрсних углова, које чине праве p и q, са датом правом l јесу тражена решења.

Ако је дата права l паралелна једној од симетрала, постоји само једно решење; ако се права l поклапа са једном од симетрала, свака тачка праве l задовољава дате услове. Најзад, ако дата права пролази кроз пресек O, само је он решење задатка.

3) Геометриско место тачака које су подједнако удаљене од кракова једног угла јесте симетрала угла, а геометриско место тачака које су од тачке M удаљене за d јесте круг описан око тачке M полупречником d. У пресеку ових геометриских места биће тражена тачка.

Јасно је да од величине d зависи да ли ће бити два решења, једно или ниједно.

4) Тачка M се мора налазити на симетрали угла A да би испунила први услов задатка, тј. да би била подједнако удаљена од кракова угла A. Да би био испуњен и други услов, тј. да би било $MB = MC$, тачка M се мора налазити на симетрали дужи BC. Тражена тачка ће бити у пресеку ових двеју симетрала.

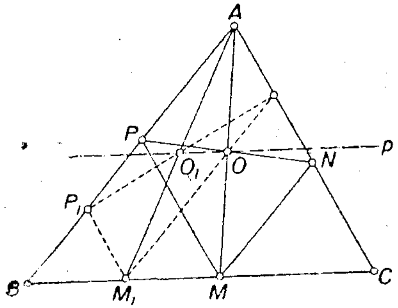


Сл. 221

5) Нека су p и q дате паралеле, и нека теме A троугла ABC клизи по правој p, а теме B по правој q (сл. 221). Ако је $A_1 B_1 C_1$ нови положај троугла ABC, тада је ABB_1A_1 паралелограм ($AA_1 \parallel BB_1$ и $AB = A_1B_1$). Према томе је $\sphericalangle A_1B_1D_1 = \sphericalangle ABD$; стога је и $\sphericalangle C_1B_1D_1 = \sphericalangle CBD$, јер је $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle ABC$. Отуда следује да је $\triangle B_1C_1D_1 \cong \triangle BCD$, па је стога $C_1D_1 = CD$. То значи да је $r \parallel q$, тј. геометриско место трећега темена је права паралелна датим паралелама p и q.

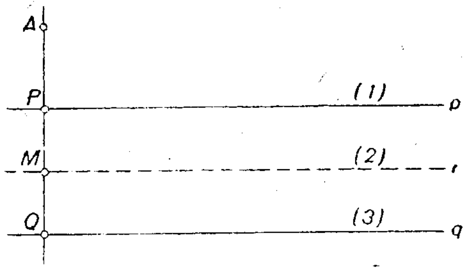
6) Како се тежиште налази на растојању једнаком $\frac{2}{3}$ тежишне линије почев од темена, то је тражено геометриско место права паралелна основи која пролази кроз тачку што лежи на растојању једнаком $\frac{2}{3}$ висине троугла почев од врха.

7) Тражено геометриско место је права што пролази кроз средину висине паралелно заједничкој основи.



Сл. 222

8) Како се пресек дијагонала паралелограма налави на њиховој средини, тачка O је средина дужи AM; исто тако тачка O_1 је средина дужи AM_1. Према томе, тачке O и O_1 одређују праву p која је паралелна основици BC троугла ABC и на растојању од ње које је једнако половини висине троугла. Та права је тражено геометриско место (сл. 222).



Сл. 223

9) Нека су праве p и q (сл. 223) дате паралеле, и нека је d њихово растојање. Разликоваћемо три случаја, према томе да ли је $l>d$, $l=d$ или $l<d$.

а) $l>d$. Као што видимо са слике, праве p и q деле раван на три области: (1), (2) и (3).

Узмимо у области (1) неку тачку A и спустимо из ње нормалу на дате праве p и q, а затим кроз средину M њиховог растојања PQ повуцимо праву r паралелно тим правима. Тада добијамо:

$$AP+AQ=AM-MP+AM+MQ=2AM,$$

јер је $MP=MQ$. Како је по претпоставци збир растојања једнак дужини l, можемо, дакле, узети да је $AP+AQ=l$, а у том случају је

$$2AM=l,$$

одакле је

$$AM=\frac{l}{2},$$

што значи да све тачке A из области (1) леже на паралели правој r на растојању $\frac{l}{2}$ од те праве.

Исто тако, за област (3) добићемо као геометриско место другу паралелу правој r на растојању $\frac{l}{2}$ од те праве.

Ако узмемо неку тачку B унутар области (2), тј. између паралела p и q, имамо:

$$BP+BQ=PQ=d;$$

а како је по претпоставци $l>d$, добијамо:

$$BP+BQ<l,$$

што значи да у области (2) не постоји ниједна тачка траженог места.

б) $l=d$. Како у том случају за сваку тачку A у областима (1) и (3) важи однос $AP+AQ>d$, јер је једно од растојања AP, AQ веће од d, то је $AP+AQ>l$, што значи да у тим областима нема ниједне тачке која би задовољила постављени услов. Међутим, за сваку тачку у области (2) важи однос:

$$BP+BQ=d, \quad \text{или:} \quad BP+BQ=l,$$

што значи да је део равни ограничен правима p и q тражено геометриско место.

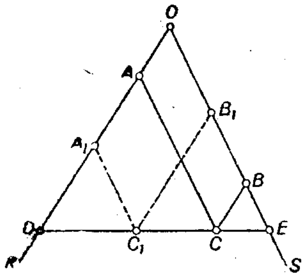
в) $l<d$. Како је за сваку тачку у областима (1) и (3) једно од растојања AP, AQ веће од d, а тиме и од l, а у области (2)

$$BP+BQ=d,$$

и стога

$$BP+BQ>l,$$

то под претпоставком $l<d$ не постоји ниједна тачка која би имала особину траженог места.



Сл. 224

10) По претпоставци $OA+OB=l$. Како је $OACB$ (сл. 224) паралелограм, то је $OA \# BC$ и $OB \# AC$. Пренесимо на крак OR дуж $OD=l$, спојмо D са C и продужимо до пресека E са краком OS. Тада имамо:

$$OA+OB=OA+AD=l.$$

Како је $OB=AC$, то је $AC=AD$, што значи да је ACD равнокраки троугао. Стога је $\sphericalangle ACD=\sphericalangle ADC$. Међутим, из $OB \parallel AC$ следује да је $\sphericalangle OED = \sphericalangle ACD$, што значи да је и троугао DEO, исто тако, равнокрак.

Сад треба да докажемо да је отсечак DE тражено геометриско место. Заиста, ако је $OA_1 + OB_1 = l$, тада је

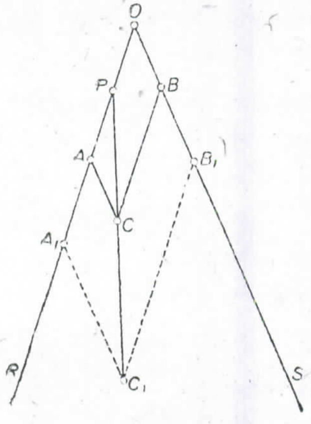
$$OA_1 + OB_1 = OA_1 + A_1D = l.$$

Како је $OA_1C_1B_1$ паралелограм, то је $OB_1 \# A_1C_1$ и $A_1C_1 = A_1D$, што значи да је A_1C_1D равнокраки троугао код кога је $\sphericalangle A_1C_1D = \sphericalangle A_1DC_1 = \sphericalangle OED$. Према томе, основица DC_1 тога троугла лежи на правој DE. Дакле, његово теме C, које је уједно и теме паралелограма $OA_1C_1B_1$ лежи на отсечку DE. Отуда закључујемо да је тражено геометриско место темена C паралелограма $OACB$ отсечак DE, који добијемо кад пренесемо $OD = OE = l$ и спојимо D са E.

И обрнуто, ако је C_1 ма која тачка отсечка DE, па из те тачке повучемо $C_1A_1 \parallel OE$ и $C_1B_1 \parallel OD$, тада је $C_1A_1OB_1$ паралелограм код кога је $C_1A_1 \# B_1O$ и $C_1B_1 \# A_1O$. Како је и $\sphericalangle A_1C_1D = \sphericalangle OED = \sphericalangle ODE$, на основу свега тога закључујемо:

$$OA_1 + OB_1 = OA_1 + A_1C_1 = OA_1 + A_1D = l,$$

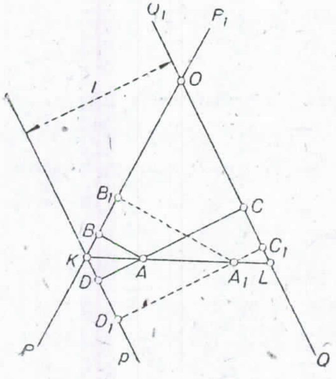
што значи да је $OA_1C_1B_1$ паралелограм чије је теме на отсечку DE, а збир страна које леже на крацима угла има дату дужину l.



Сл. 225

11) По претпоставци је $OA - OB = l$. Како је $OACB$ (сл. 225) паралелограм, то је $OA \# BC$ и $OB \# AC$. Пренесимо на крак OR угла ROS дуж $OP = l$ и спојмо P са C. Тврдимо да је полуправа PC тражено геометриско место.

Нека је $OA_1 - OB_1 = OP = l$; треба доказати да је теме C_1 паралелограма $OA_1C_1B_1$ на полуправој PC. Заиста, $OA - OB = OA - AP = OP = l$; а како је $AC = OB$, следује да је $AP = AC$, што значи да је ACP равнокрак троугао. Отуда произилази да је $\sphericalangle ACP = \sphericalangle APC$. С друге стране је $OA_1 \# B_1C_1$ и $OB_1 \# A_1C_1$. Како је, међутим, $OA_1 - OB_1 = OA_1 - A_1C_1 = OA_1 - PA_1 = l$, то је $A_1P = A_1C_1$, што значи да је и $\triangle A_1C_1P$, исто тако, равнокрак. Из једнакости $\sphericalangle A_1C_1P = \sphericalangle A_1PC_1$ следује да основица PC_1 тога троугла лежи на полуправој PC, а тиме и његово теме C_1, које је уједно и теме паралелограма $OA_1C_1B_1$. Можемо, дакле, закључити да је тражено геометриско место темена C паралелограма $OACB$ полуправа PC, коју добијемо кад пренесемо $OP = l$ и спојимо P са C. Даље види претходни задатак.



Сл. 226

12) Нека се праве PP_1 и QQ_1 секу у тачки O (сл. 226). Унутар угла POQ узећемо тачку A тако да је

$$AB + AC = l,$$

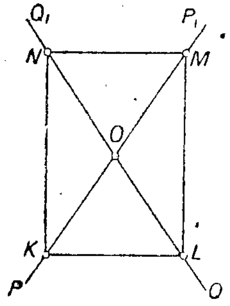
где су AB и AC растојања тачке A од кракова тога угла, и потражићемо њено геометриско место.

Продужимо CA за $AD = AB$; тада је $CD = l$, и тачка D налази се на правој p паралелној краку OQ на растојању l. Спојмо пресек K правих p и OP са тачком A и продужимо до пресека L са краком OQ.

Како правоугли троугли ABK и ADK имају заједничку хипотенузу AK и једну катету једнаку ($AD = AB$), они су подударни, па је $\sphericalangle AKB = \sphericalangle AKD$. Сем тога је $\sphericalangle AKB = \sphericalangle AKD = \sphericalangle OLK$, што значи да је троугао OKL равнокрак и да се тачка A налази на његовој основици KL.

Сад ћемо доказати да је отсечак KL тражено геометриско место. Узмимо на том отсечку тачку A_1 и спустимо из ње нормале A_1B_1 и A_1C_1 на краке OP и OQ угла POQ и продужимо C_1A_1 до пресека са p. Добијамо подударне правоугле троугле A_1B_1K и A_1D_1K. Заиста, они имају заједничку хипотенузу A_1K а сем тога је $\sphericalangle OLK = \sphericalangle OKL$ и $\sphericalangle OLK = \sphericalangle LKD_1$, одакле следује да је $\sphericalangle A_1KB_1 = \sphericalangle A_1KD_1$.

Из те подударности произилази да је $A_1B_1 = A_1D_1$, одакле коначно:



Сл 227

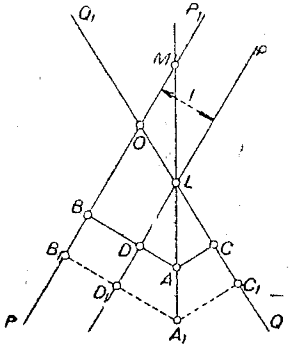
$$A_1B_1 + A_1C_1 = A_1D_1 + A_1C_1 = l.$$

(Види и § 2, зад. 46.)

Отсечак KL даје уствари само делимично решење, тј. оно које одговара углу POQ. Друга решења дају отсечци (сл. 227): LM у углу QOP_1, MN у углу P_1OQ_1 и NK у углу Q_1OP, тако да контура правоугаоника $KLMN$ даје потпуно тражено геометриско место.

13) Нека су PP_1 и QQ_1 дате праве, које се секу у тачки O, и нека тачка A, унутар угла POQ, има растојање AB и AC од кракова OP и OQ угла POQ тако да је

$$AB - AC = l \text{ (сл. 228).}$$



Сл. 223

Потражићемо геометриско место те тачке.

Пренесимо на AB дуж $AD = AC$ и кроз тачку D повуцимо праву p паралелно краку OP. Она ће пресећи крак OQ у тачки L. Повуцимо праву кроз тачке A и L; она сече праву PP_1 у тачки M. Тиме добијамо подударне правоугле троугле ACL и ADL и равнокраки троугао OLM. Заиста, $\triangle ACL \cong \triangle ADL$, јер је $AL = AL$ и $AD = AC$. Отуда следује да је $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ALD$; затим: $\sphericalangle ALC = \sphericalangle MLO$ и $\sphericalangle ALD = \sphericalangle LMO$ и, стога, $\sphericalangle OLM = \sphericalangle OML$.

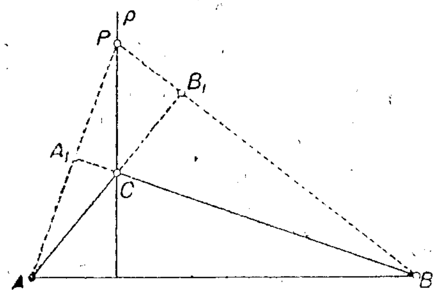
Сад треба доказати да је полуправа LA тражено геометриско место тачке A. Узећемо на полуправој LA произвољну тачку A_1 и спустићемо из ње нормале A_1B_1 и A_1C_1 на краке OP и OQ угла POQ, од којих A_1B_1 сече праву p у тачки D_1. Из једнакости $A_1L = A_1L$, $\sphericalangle C_1LA_1 = \sphericalangle D_1LA_1$ следује подударност троуглова A_1C_1L и A_1D_1L, чија је последица једнакост $A_1C_1 = A_1D_1$. Како је $A_1B_1 - A_1D_1 = l$, следује:

$$A_1B_1 - A_1C_1 = l.$$

Дакле, полуправа LA је геометриско место тачке A.

Видимо да је полуправа LA продужак отсечака ML, а на сл. 227 видимо да је ML једна страна правоугаоника. Према томе, лако је видети да потпуно тражено геометриско место чине продушци страна правоугаоника $KLMN$ из зад. 12.

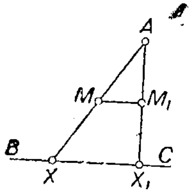
14) Тачке A, B, C (сл. 229) одређују троугао чије се теме C помера по правој на којој лежи висина троугла ABC повучена из C.



Сл. 229

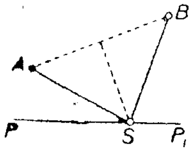
Према томе, геометриско место тачке P је уствари геометриско место ортоцентра тога троугла, који се помера по истој правој p, и стога је та права тражено геометриско место.

15) Геометриско место средина дужи AX биће права паралелна са BC (сл. 230), а на растојању које је једнако половини растојања тачке A од праве BC, и на истој страни на којој је тачка A.



Сл. 230

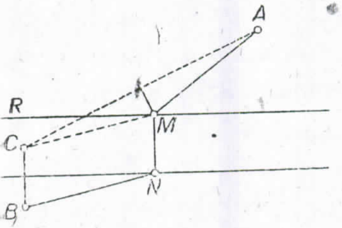
16) Железничка станица S мора лежати у пресеку правца пруге и симетрале дужи AB која спаја оба села, јер је симетрала дужи геометриско место тачака подједнако удаљених од крајњих тачака дужи (сл. 231).



Сл. 231

17) Претпоставимо да је задатак решен; нека је изломљена линија $AMNB$ (сл. 232) таква да је $MN \perp RM$ а $AM = BN$.

Ако повучемо $BC \# MN$, види се одмах да је тачка M на симетрали дужи CA и да је $AM = CM$. А како је $BNMC$ паралелограм, то је $CM = BN$, или: $AM = BN$.

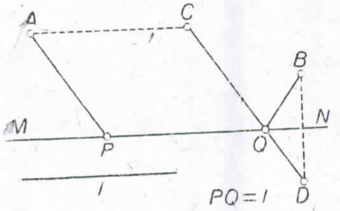


Сл. 232

§ 5. Максима и минима

1) Треба тачку A (сл. 233) померити паралелно правој MN за одређену дужину l до тачке C, па спојити тачку C са тачком D, симетричном тачки B у односу на праву MN. Из тачке A треба повући $AP \parallel CQ$; тада је

$$AP + PQ + QB \text{ минимум.}$$

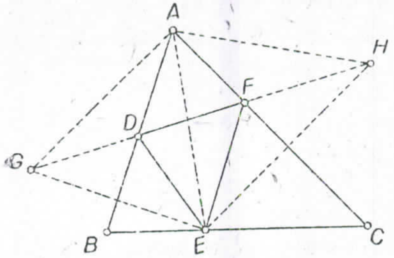


Сл. 233

2) Нека је DEF уписани троугао (сл. 234). Узмимо најпре теме E произвољно и потражимо темена D и F.

Одредимо тачке G и H симетрично тачки E у односу на стране AB и AC. Дуж GH је једнака обиму троугла DEF и претставља минимум за теме E.

Троугао AGH је равнокрак, јер је $AG = AE = AH$, а угао GAH је двапут већи од угла A. Дуж GH ће бити минимум кад AE буде минимум; дакле, AE треба да је висина троугла ABC.



Сл. 234

Троугао DEF добија се спајањем подножја висина, јер су висине троугла ABC симетрале углова троугла DEF, и стране DF и DE једнако су нагнуте према страни AB, итд.

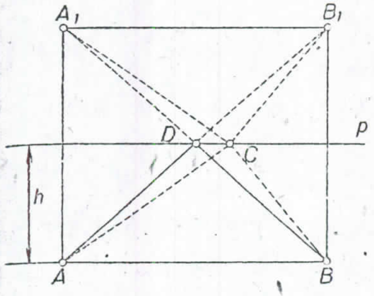
3) Нека је ABC ма који од троуглова са заједничком основицом AB и висином h (сл. 235). Кроз његово теме C повуцимо праву p паралелно основици и одредимо тачке A_1 и B_1 симетричне тачкама A и B у односу на праву p. Спојмо теме C са тачкама A_1 и B_1. Добијамо изломљене линије ACB_1 и BCA_1. Ако спојимо A са B_1 и B са A_1, те дужи су краће од поменутих изломљених линија, јер је права најкраћи пут између две тачке. Како је $AC + BC = AC + CB_1 = BC + CA_1$, то је

$$AB_1 < AC + CB_1 \text{ и } BA_1 < BC + CA_1,$$

или:

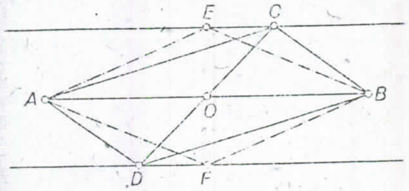
$$AD + BD < AC + BC,$$

јер је $AB_1 = AD + DB_1 = 2AD$ и $BA_1 = BD + DA_1 = 2BD$, што значи да равнокраки троугао ABD има тражени најмањи збир страна.



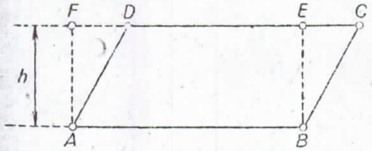
Сл. 235

4) Нека је $ADBC$ (сл. 236) ма који од паралелограма са заједничком дијагоналом AB, и нека се његова темена C и D налазе на правима p и q, паралелним дијагонали AB. Тада је, према претходном задатку, $AE + BE$ минимални збир једног пара, а $AF + BF$ другог пара страна паралелограма. Како је ABE равнокраки троугао, а исто тако и троугао ABF, то је $AEBF$ ромб. Према томе, од свих паралелограма ромб има најмањи тражени обим.



Сл 236

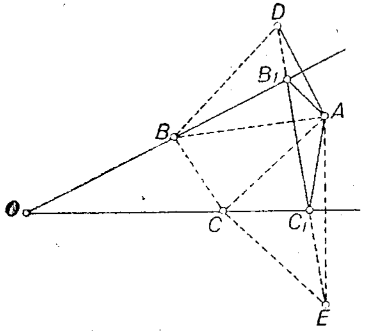
5) Нека је $ABCD$ (сл. 237) ма који од паралелограма са заједничком основицом AB и висином h. Како је наспрамна страна основици код сваког од тих паралелограма једнака тој основици, треба испитати само збир других двеју наспрамних страна. Међутим,



Сл. 237

збир тих двеју наспрамних страна очигледно је најмањи кад је паралелограм-правоугаоник, јер је свака од тих страна правоугаоника заједничка катета свима правоуглим троуглима код којих је одговарајућа страна ма кога другог паралелограма увек хипотенуза, тј. $BE < BC$, или: $AF < AD$. Дакле, од свих паралелограма правоугаоник има најмањи тражени обим.

6) Нека је ABC (сл. 238) ма који од троуглова са заједничким теменом A и са остала два темена на крацима угла O.

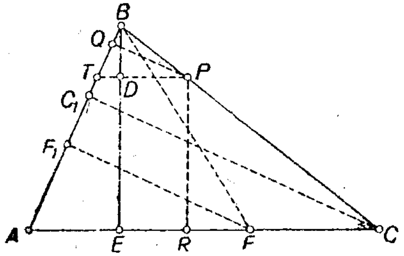


Сл 238

Тачки A одредићемо симетричне тачке D и E у односу на краке датог угла. Спајањем тачке D и E добијамо дуж која сече краке угла у тачкама B_1 и C_1. Ако те две тачке спојимо са A, добијамо троугао AB_1C_1 који има најмањи обим од свих троуглова ABC. Заиста, кад тачку D спојимо са B и тачку E са C, добијамо изломљену линију $DBCE$ која је једнака обиму троугла ABC, јер је $BD = BA$ и $CE = CA$ зато што су троугли ABD и ACE равнокраки (зашто?). Међутим, дуж DE једнака је обиму троугла AB_1C_1 (зашто?), а она је краћа од сваке изломљене линије која спаја тачке D и E.

7) Решење је аналогно ономе у претходном задатку.

8) Нека је ABC (сл. 239) дати троугао у коме је $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA$; тада је висина BE мања од висине CC_1, јер је у равнокраком троуглу ABF са крацима AB и AF висина BE једнака висини FF_1, па је стога $CC_1 > FF_1$. Узмимо на страни BC произвољну тачку P између B и C и спустимо из ње нормале PQ и PR на стране AB и AC. Тврдимо да је

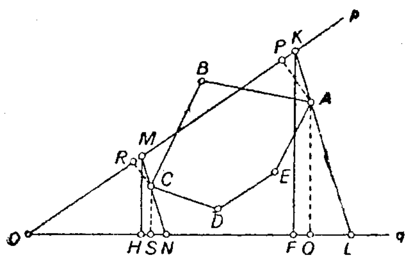


Сл. 239

$$BE < PQ + PR,$$

што значи да је B тражена тачка и да је BE минимални збир растојања, тј. висина спуштена из темена већега од углова ABC и ACB. Заиста, $PR = DE$; треба, дакле, доказати да је $BD < PQ$. Да је то истина, види се отуда што су дужи BD и PQ висине у троуглу BPT ($PT \parallel AC$), од којих је прва мања од друге, јер је $\sphericalangle PBT > \sphericalangle BPT$. Тиме је тврђење доказано.

9) Нека се праве p и q (сл. 240) секу у тачки O, и нека је $ABCDE$ дати многоугао. Кроз његово теме A повући ћемо праву KL, тако да је $OK = OL$, а кроз теме C праву MN, тако да је $OM = ON$ Међутим, знамо да је основица равнокраког троугла геометриско место тачака чији је збир растојања од кракова тога троугла сталан (види § 2, зад. 46). Према томе, за тачку A, која је на основици KL равнокраког троугла OKL, имамо да је



Сл. 240

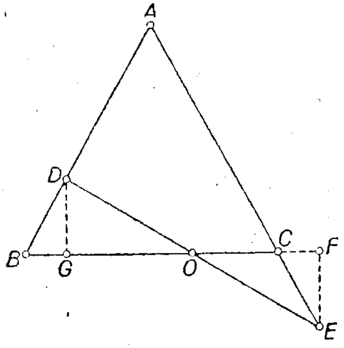
$$AP + AQ = KF,$$

а за тачку C, која је на основици MN равнокраког троугла OMN,

$$CR + CS = MH,$$

што значи да је за тачку A збир растојања од дате две праве максимум а за тачку C минимум.

10) Нека је ABC равнокраки троугао са основицом BC и ADE троугао у коме је $CE = BD$. (сл. 241). Доказаћемо да је $DE < BC$.



Сл. 241

Из D спустимо нормалу DG на BC, а из E нормалу EF. Правоугли троугли BDG и CEF су подударни, јер је $BD = CE$ и $\sphericalangle ECF = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$. Отуда следује да је $BG = CF$; стога је $GF = BC$. Како је у правоуглом троуглу DGO страна OD хипотенуза, она је већа од катете OG, а исто тако у троуглу EFO страна $OE > OF$. Према томе, добијамо:

$$OD+OE>GO+OF,$$

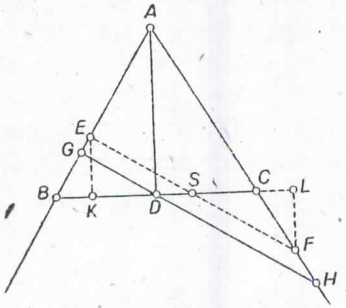
или:

$$DE>BC,$$

што значи да од свих тих троуглова равнокраки има најмању основицу.

11) Посматраћемо равнокраки троугао ABC и троугао AGH (сл. 242) и доказати да је обим равнокраког троугла ABC мањи од обима ма ког троугла AGH.

Прво ћемо нацртати троугао AEF, тако да је $CF=BE$. Према претходном задатку $BC<EF$. Из подударности троуглова SEK и SFL следује да је $KS=SL$, што значи да је тачка S на отсечку DC. Ако, дакле, кроз тачку D повучемо дуж GH паралелно дужи EF, биће $GH>EF$, и стога $BC<GH$.



Сл. 242

С друге стране, имамо да је

$$AE+AF=AB+AC,$$

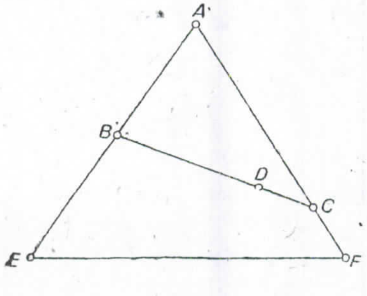
дакле:

$$AG+AH>AB+AC,$$

што значи да равнокраки троугао ABC има мањи обим од троугла AGH, или, што је исто, да од свих тих троуглова равнокраки има најмањи обим.

12) Нека је ABC дати троугао (сл. 243). Узмимо на његовој основици BC произвољну тачку D и продужимо стране AB за $BE=BD$ и AC за $CF=CD$. Спојмо E и F.

Како троугао AEF има сталан угао A и сталан збир страна AE и AF које граде тај угао, јер је $AE+AF=AB+AC+BC$, то је, према зад. 10, основица EF тога троугла минимум кад је тај троугао равнокрак.

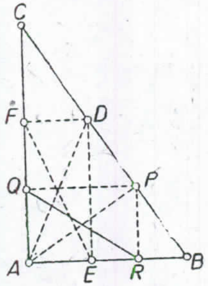


Сл. 243

Да га конструишемо, треба узети:

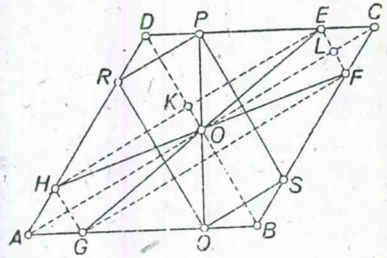
$$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC+BC).$$

13) Како су дијагонале код правоугаоника једнаке, то је $EF=AD$ (сл. 244). Међутим, најкраћа дуж која спаја теме A правоуглог троугла са неком тачком хипотенузе BC је нормала AP, тј. висина тога правоуглог троугла. Стога је дуж $QR=AP$ тражени минимум.



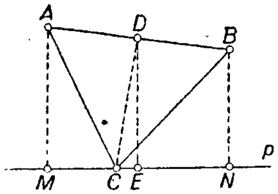
Сл. 244

14) Нека је дат ромб $ABCD$ (сл. 245) и на његовој контури нека тачка E. Збир дијагонала EG и FH правоугаоника $EFGH$ биће, очигледно, најмањи када растојање OE тачке E од пресека дијагонала O буде најмање, а то ће бити у случају кад је $OE=OP$, где је OP нормала спуштена из O на страну ромба. Према томе, збир $PQ+RS$ претставља најмањи збир дијагонала тих уписаних правоугаоника.



Сл. 245

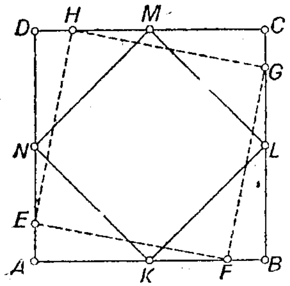
15) Посматрајмо у ромбу $ABCD$ на сл. 245 троугао COD. На његовој страни CD налази се тачка E, из које су спуштене нормале EL на страну CO и EK на страну DO. Према задатку 8, минимум DO збира $EK+EL$ имамо кад E заузме положај тачке D, максимум CO тога збира кад E заузме положај тачке C, одакле произилази да је максимални обим једнак двострукој већој, а минимум двострукој мањој дијагонали ромба, док је за сваки други положај тачке E тај обим мањи од двоструке веће, а већи од двоструке мање дијагонале.



Сл. 246

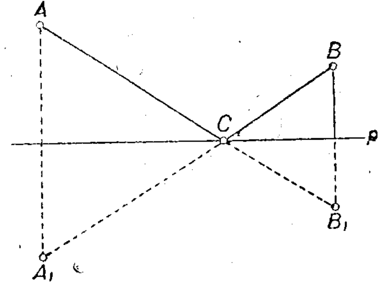
16) Ако из средине D стране AB троугла (сл. 246) спустимо нормалу DE на праву p, она претставља средњу линију трапеза $ABNM$, па је стога $AM + BN = 2DE$, одакле следује да је максимум тога збира дат максималном дужи DE. Међутим, та дуж имаће максималну вредност кад буде једнака дужи CD, јер је CD хипотенуза у правоуглом троуглу CDE. Ту ће вредност DE имати кад средња линија посматраног трапеза буде нормална на правој p.

Испитај колики ће бити тај збир кад тачка B падне на праву p и шта ће бити кад се нађе с друге стране те праве.



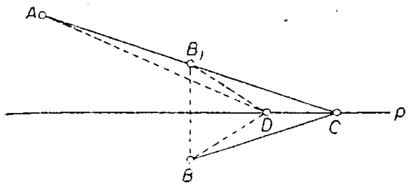
Сл. 247

17) Нека је дат квадрат $ABCD$ (сл. 247), и нека је $AF = BG = CH = DE$. Четвороугао $EFGH$ је квадрат, (види §3, зад. 6). Како је збир $AE + AF$ катета правоуглог троугла AEF ма за који тако уписани квадрат сталан, хипотенуза EF, према зад. 10, биће најмања ако је тај троугао равнокрак. Према томе, квадрат минималног обима добићемо кад спојимо средине страна датог квадрата.



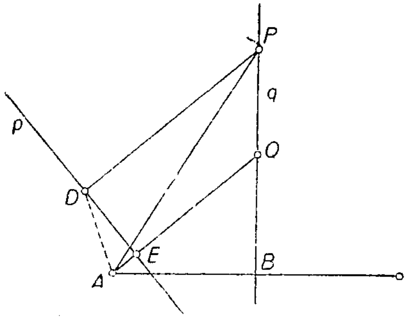
Сл. 248

18) Тачки B (сл. 248) одредимо симетричну тачку B_1 у односу на p и спојмо је са A. Пресек C дужи AB_1 са датом правом p је тражена тачка, јер је $AC + BC = AC + CB_1$, тј. најкраћи пут између две тачке је права. До истог резултата бисмо дошли да смо тачку A, симетричну тачки A_1, спојили са тачком B, како се види са слике.



Сл. 219

19) Тачки B (сл. 249) одредимо симетричну тачку B_1 у односу на p, спојмо је са A и продужимо до пресека са p. Тачка C пресека је тражена тачка. Заиста, за сваку другу тачку D праве p имамо да је $AD - BD < AB_1$, јер је $BD = B_1D$.



Сл. 250

20) Спустимо из тачке P (сл. 250) нормалу PD на праву p. Тада је $PA - PD < AD$. Како је AD коса дуж према правој p, значи да је $AD > AE$, где је AE нормала спуштена из A на p. Према томе, AE претставља најмању вредност разлике $PA - PD$. Стога се тражена тачка налази на пресеку Q праве q и нормале AE.

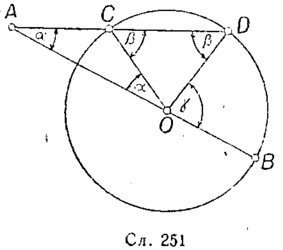
§ 6. Круг

а) ТЕОРЕМЕ

1) Пресек круга и праве. Лукови и тетиве.

1) Сваки круг који има средиште на датој правој а пролази и кроз дату тачку, пролази и кроз тачку симетричну датој тачки у односу на дату праву.

Испитај случај кад је тачка на правој.

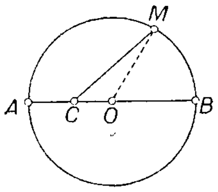


Сл. 251

2) Како су троугли ACO и CDO равнокраки (сл. 251), углови α на основици AO једнаки су, а исто тако и углови β на основици CD. Међутим, угао β је спољашњи угао троугла ACO, а угао γ спољашњи угао троугла ADO. Стога произилази да је $\beta = 2\alpha$ и $\gamma = \alpha + \beta$.

Дакле: $\gamma = 3\alpha$.

3) а) Из троугла CMO на сл. 252 добијамо да је

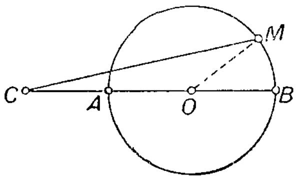


Сл. 252

$$OM - OC < CM < OM + OC,$$

или: $$OA - OC < CM < OB + OC,$$

одакле је: $$CA < CM < CB.$$



Сл. 253

б) Ако је тачка C на продушку пречника, из троугла CMO на сл. 253 имамо:

$$CO - OM < CM < CO + OM,$$

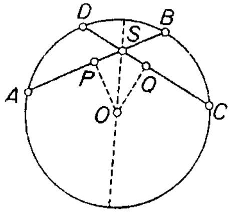
или: $$CO - OA < CM < CO + OB,$$

а отуда: $$CA < CM < CB.$$

Према томе, CA је најмање растојање тачке C од кружне линије, а CB највеће.

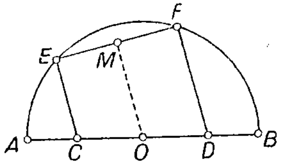
4) Нека су AB и CD дате једнаке тетиве, и нека је OS пречник што пролази кроз њихов пресек. Спустимо из O нормале OP и OQ на те тетиве. Како су те тетиве једнаке, оне су једнако удаљене од центра O круга. Стога је $OP = OQ$. Тада је $\triangle OPS \cong \triangle OQS$, јер је $OS = OS$ и $OP = OQ$ (сл. 254).

Отуда следује да је $\sphericalangle OSP = \sphericalangle OSQ$, што је требало доказати.



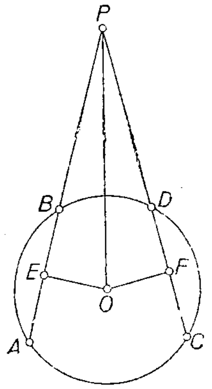
Сл. 254

5) Ако из O повучемо $OM \perp EF$ (сл. 255), тада је M средина тетиве EF. Како је дуж OM средња линија трапеза $CDFE$, она је паралелна његовим основицама CE и DF, па су стога и оне нормалне на тетиви EF.



Сл. 255

6) Нека је $AB = CD$, и нека се тетиве AB и CD секу у тачки P (сл. 256). Треба доказати да је $PA = PC$ и $PB = PD$.



Сл. 256

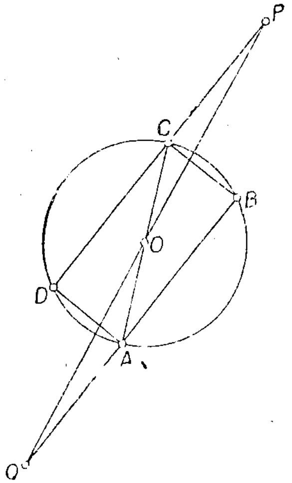
Ако из O спустимо нормале OE и OF на тетиве AB и CD, тада су E и F средине тих тетива и $OE = OF$. Из подударности правоуглих троуглова POE и POF (докажи је!) следује једнакост $PE = PF$. Како је, с друге стране, $EA = EB = FC = FD$, следује:

$$PA = PC \text{ и } PB = PD,$$

јер ако једнаком додамо једнако, или од једнаког одузмемо једнако, остаје једнако.

7) Нека је $ABCD$ (сл. 157) правоугаоник уписан у датом кругу чији продужак стране DC пролази кроз дату тачку P.

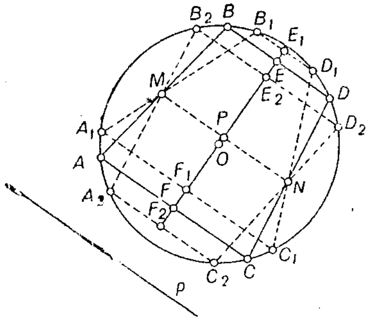
Повуцимо дијагоналу AC тога правоугаоника; она пролази кроз центар круга (зашто?). Затим, повуцимо праву PO до пресека Q са продушком стране AB. Добијамо троугле OCP и OAQ, који су подударни (зашто?). Отуда следује да је $OP = OQ$, тј. страна AB пролази кроз утврђену тачку Q, која је симетрична тачки P у односу на центар O.



Сл. 257

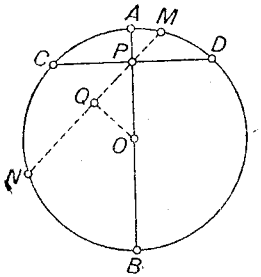
8) Нека се тетива AB (сл. 258) обрће око тачке M, и нека су A_1B_1 и A_2B_2 ма која друга два њена положаја. Повуцимо кроз тачке A и B паралеле AC и BD датој правој p, а исто тако кроз тачке A_1, B_1 и A_2, B_2 паралеле A_1C_1, B_1D_1 и A_2C_2, B_2D_2 тој истој правој p. Тврдимо да ће се тетиве CD, C_1D_1, C_2D_2 сећи у истој тачки N.

Трапези $ACDB$, $A_1C_1D_1B_1$, $A_2C_2D_2B_2$ су равнокраки (зашто?). Они су симетричне слике у односу на праву EO, која је нормална на основицама трапеза. Ако, дакле, слику $EFCD$ обрнемо око осе симетрије EF, тачка C поклопиће тачку A и тачка D тачку B, а тиме и крак CD крак AB. Исто тако ће крак C_1D_1 поклопити крак A_1B_1 и крак C_2D_2 крак A_2B_2, обртањем слика $E_1F_1C_1D_1$ и $E_2F_2C_2D_2$ око исте осе симетрије. Како је M заједничка тачка дужима AB, A_1B_1, A_2B_2, она је после тога поклапања заједничка тачка и дужима CD, C_1D_1, C_2D_2. Међутим, две праве могу се сећи само у једној тачки, што значи да све три тетиве CD, C_1D_1, C_2D_2 пролазе кроз исту тачку N, која је симетрична са тачком M у односу на праву EO. Тај пресек можемо, дакле, наћи кад из M повучемо паралелу правој p. Она ће осу EOF пресећи у тачки P, тако да је $MN \perp EF$ и $PN = PM$.



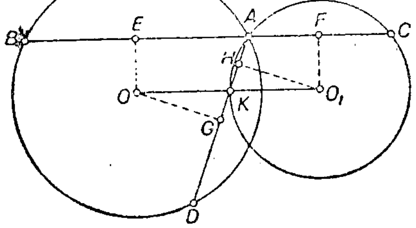
Сл 258

9) Повуцимо кроз тачку P произвољну тетиву MN (сл. 259) и из O спустимо на њу нормалу O; затим, кроз тачку P повуцимо пречник AB и $CD \perp AB$. Како је пречник највећа тетива, јасно је да је AB највећа тражена тетива. С друге стране, у правоуглом троуглу OPQ страна OQ је катета, а OP хипотенуза. Како је $OQ < OP$, то је $MN > CD$, тј. најмању дужину има она тетива која је нормална на пречнику AB.



Сл. 259

10) Нека се кругови са центрима у O и O_1 секу (сл. 260). Кроз њихову тачку пресека A повуцимо две произвољне сечице BC и AD, тако да је A између B и C и на продушку дужи DK. Ако из центара кругова O и O_1 спустимо нормале OE, O_1F и OG, O_1H, имамо:



Сл. 260

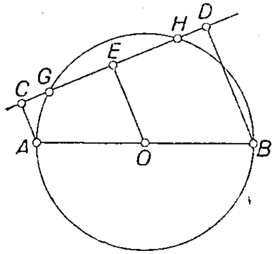
$$EF = AE + AF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} (AB + AC) = \frac{1}{2} BC,$$

а с друге стране:

$$GH = AG - AH = \frac{1}{2} AD - \frac{1}{2} AK = \frac{1}{2} (AD - AK) = \frac{1}{2} DK,$$

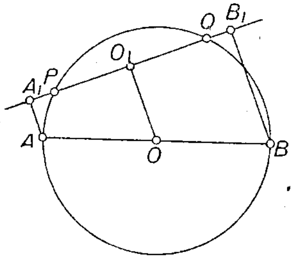
што је требало доказати, јер се за дужину заједничке сечице два круга у применама узима део BC или DK, који се налазе између тачака различитих од заједничке тачке A.

11) Нормале AC и BD спуштене на сечицу паралелне су међу собом, па је четвороугао $ABDC$ трапез (сл. 261). Ако из O, средине стране AB, спустимо нормалу на CD, биће CD преполовљено. Дакле, $CE = ED$. И тетива GH биће преполовљена нормалом из средишта круга, па је $GE = EH$. Одузимањем ових једнакости добија се: $CE - GE = ED - EH$, или: $CG = HD$, што је требало доказати.



Сл. 261

12) Слика ABB_1A_1 је трапез и $AA_1 + BB_1 = 2\ OO_1$ (сл. 262). Како је тетива PQ стална, то је стална и њена средишна раздаљина OO_1, па према томе и збир нормала повучених из крајњих тачака пречника повучених на тетиву је сталан.



Сл. 262

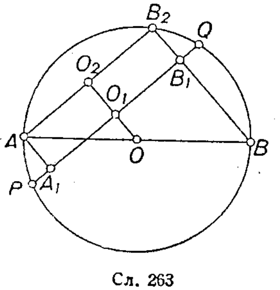
Из слике 263 видимо да је $AA_1 = O_1O_2 = B_2B_1$.

Из троугла ABB_2 имамо:

$$OO_1 + O_1O_2 = \frac{BB_1 + B_2B_1}{2},$$

или: $2OO_1 + 2O_1O_2 = BB_1 + B_2B_1$,

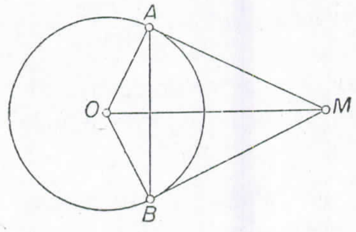
или: $2OO_1 = BB_1 + B_2B_1 - 2B_2B_1 = BB_1 - B_2B_1 = BB_1 - AA_1$, што показује да је разлика нормала повучених из крајњих тачака пречника на тетиву стална.



Сл. 263

2) Тангенте круга

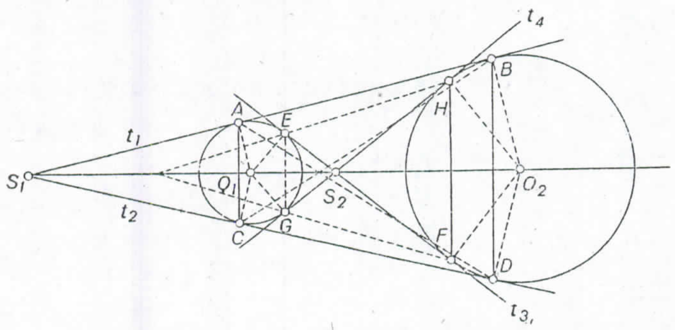
13) Углови AMO и OAB имају нормалне краке; према томе је $\sphericalangle AMO = 2\sphericalangle OAB$ (сл. 264).



Сл. 264

$\sphericalangle AMB = 2\sphericalangle AMO = 2\sphericalangle OAB$, што је требало доказати.

14) Нека су A, B додирне тачке тангенте t_1; C, D тангенте t_2; E, F тангенте t_3 и G, H тангенте t_4 (сл. 265). Додирни полупречници O_1A, O_1C, O_2B, O_2D стоје нормално на тангентама t_1 и t_2. Како је $O_1A = O_1C$ и $O_2B = O_2D$, то се симетрала угла који граде тангенте t_1 и t_2 поклапа са центром. Према томе, тангенте t_1 и t_2 секу се на централи O_1O_2 у некој тачки S_1.



Сл. 265

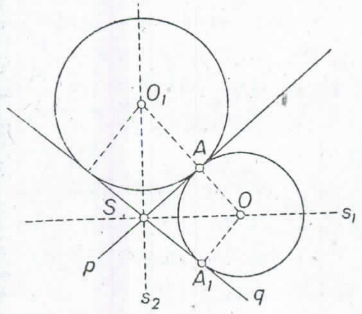
С друге стране, имамо: $O_1E = O_1G$ и $O_2H = O_2F$, што значи да се и симетрала унакрсних углова ES_2G и FS_2H које граде тангенте t_3 и t_4, исто тако, поклапа са централом. Дакле, и тангенте t_3 и t_4 секу се на централи у некој тачки S_2.

15) а) Додирне тетиве AC, BD, EG, FH нормалне су на централи, па су, стога, међу собом паралелне.

б) Како је централа O_1O_2 уједно симетрала додирних тетива, четвороугао $ACDB$ је равнокраки трапез, из чега следује једнакост страна AB и CD и једнакост дијагонала AD и BC.

Исто тако, четвороугао $EGFH$ је равнокраки трапез, што повлачи једнакост дијагонала EF и GH.

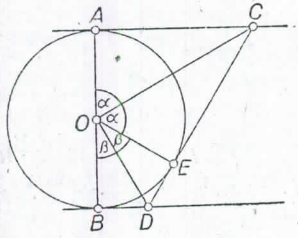
16) Како тражени кругови треба да додирују обе праве p и q (сл. 266), њихови центри мора да леже на симетралама s_1 и s_2 углова које граде праве p и q. Постоје четири таква угла. Али тражени кругови треба да додирују праву p у датој тачки A. Према томе, центри тражених кругова мора да леже на правој која пролази кроз тачку A и стоји нормално на правој p. То значи да се центри тражених кругова налазе на пресеку те нормале у A и симетрала s_1 и s_2. Међутим, две праве могу се сећи само у једној тачки. Отуда следује да постоје само два таква круга: један са центром у O, на пресеку нормале у A и симетрале s_1, а други у O_1, на пресеку исте нормале и симетрале s_2.



Сл. 266

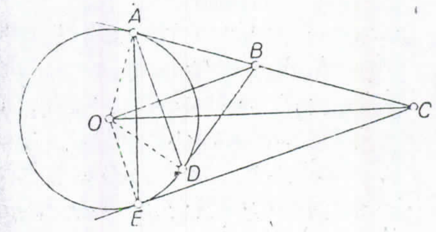
17) Повуцимо полупречник OE додира тангенте CD (сл. 267). Тада је $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COE = \alpha$ и $\sphericalangle BOD = \sphericalangle DOE = \beta$ због подударности троуглова ACO, CEO и BDO, DEO. Према томе је

$$\sphericalangle COD = \alpha + \beta = \frac{2\alpha + 2\beta}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0 = R.$$



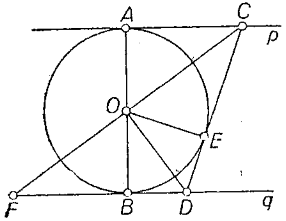
Сл. 267

18) Како је OB симетрала тетиве AD и OC симетрала тетиве AE (сл. 268), то је $AD \perp OB$ и $AE \perp OC$, што значи да углови DAE и BOC имају узајамно нормалне краке. Отуда следује да су ти углови једнаки или суплементни.



Сл. 268

19) Спустимо из O нормалу OE на CD и продужимо CO до пресека F са q (сл. 269) Из подударности троуглова OAC и OBF $(OA=OB, \sphericalangle OAC=\sphericalangle OBF=90^0, \sphericalangle AOC=\sphericalangle BOF)$ следује да је $OC=OF$. Како је $OD \perp CO$, то је троугао CDF равнокрак, а DO његова висина, средња линија и симетрала угла CDF. Према томе, тачка O има једнако растојање од DF и DC, тј.: $OB=OE$. Отуда следује да кружна линија из O полупречника OB пролази кроз тачку E. Дакле, CD $(CD \perp OE)$ је тангента тога круга у тачки E.



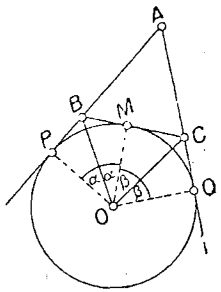
Сл. 269

20) Из подударности троуглова OBP, OBM и OCM, OCQ (сл. 270) произилазе ове једнакости: $BM=BP$, $CM=CQ$, $\sphericalangle BOP=\sphericalangle BOM=\alpha$, $\sphericalangle COM=\sphericalangle COQ=\beta$.

Према томе, имамо:

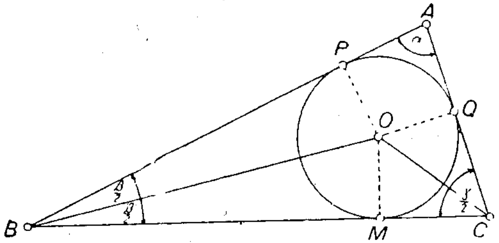
(1) $AB+BC+CA=AB+BM+MC+CA=AB+BP+CQ+CA=AP+AQ=2AP$, јер је $AQ=AP$;

(2) $\sphericalangle BOC=\alpha+\beta=\frac{2\alpha+2\beta}{2}=\frac{1}{2}\sphericalangle POQ$.



Сл. 270

21) Из подударности троуглова BOM, BOP и COM, COQ (сл. 271) добијамо ове једнакости: $BM=BP$, $CM=CQ$, $\sphericalangle OBM=\sphericalangle OBP=\frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle OCM=\sphericalangle OCQ=\frac{\gamma}{2}$.



Сл. 271

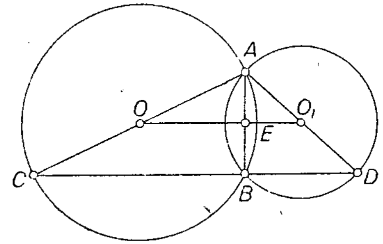
На основу тога закључујемо:

(1) $AB+AC-BC=AB+AC-BM-MC=AB+AC-BP-CQ=AB-BP+AC-CQ=AP+AQ=2AP$. Како је AP стална величина, тврђење је доказано.

(2) $\sphericalangle BOC=2R-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=2R-\frac{\beta+\gamma}{2}=2R-(R-\frac{\alpha}{2})=R+\frac{\alpha}{2}$, јер је $\beta+\gamma=2R-\alpha$, или $\frac{\beta+\gamma}{2}=R-\frac{\alpha}{2}$, што значи да угао BOC има сталну величину.

3) Узајамни положаји два круга

22) У троуглу ACD (сл. 272) централа OO_1 је средња линија она је уједно и симетрала заједничке тетиве AB датих кругова, што значи да је $AE=BE$. Отуда произилази да је $CD \parallel OO_1$ и $CD=2OO_1$. Како је $AB \perp CB$, јер је $BC \parallel EO$ (EO је средња линија троугла ABC), и $AB \perp BD$, јер је $BD \parallel EO_1$ (EO_1 је средња линија троугла ABD) следује да је $\sphericalangle ABC=90^0$ и $\sphericalangle ABD=90^0$, што повлачи $\sphericalangle ABC+\sphericalangle ABD=180^0$. То значи да BC и BD леже на истој правој CD, или да дуж CD пролази кроз тачку B.



Сл .272

23) Зна се да је $OO_1 \perp AB$ (сл. 273).

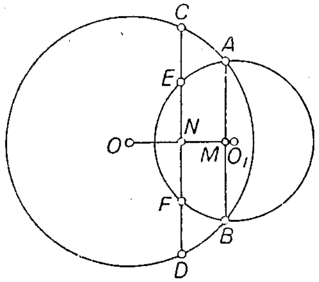
Ако повучемо $CD \parallel AB$, тада је $OO_1 \perp CD$;

према томе је $CN=DN$,

$EN=FN$. Одузимањем ових једнакости добија се $CN-EN=DN-FN$, или:

$$CE=DF,$$

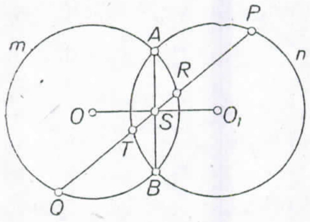
што је и требало доказати.



Сл. 273

24) Заједничкој тетиви AB (сл. 274) датих кругова одговарају једнаки лукови AmB и AnB; централа OO_1 је симетрала заједничке тетиве AB, што значи да је тачка S њиховог пресека средина те тетиве. Доказаћемо да је $SP=SQ$.

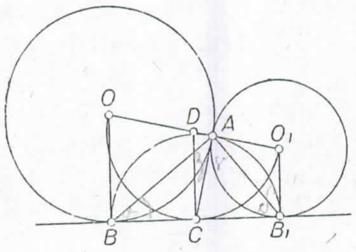
Замислићемо да смо слику $ABQA$, ограничену тетивом AB и луком AmB, обрнули око тачке S у равни кругова за 180^0. Тада ће тачка B поклопити тачку A, тачка A - тачку B, лук AmB - лук AnB, дуж SO - дуж SO_1, а, због једнакости углова PSA и QSB, крак SQ - крак SP; тачка Q поклопиће, дакле, тачку P, што значи да је $SP = SQ$, или да је S средина отсечка PQ.



Сл. 274

На исти начин можемо доказати да је $SR = ST$, тј. да је тачка S средина отсечка RT.

25) а) Повуцимо заједничку тангенту AC датих кругова (сл. 275). Тада је $CB = CA$ и $CB_1 = CA$, што повлачи $CB = CB_1$. Дакле, тачка C је средина дужи BB_1. Како је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle AB_1C = \sphericalangle B_1AC$, то из $\sphericalangle ABC + \sphericalangle AB_1C + \sphericalangle BAC + \sphericalangle B_1AC = 180^0$ следује $2\sphericalangle BAC + 2\sphericalangle B_1AC = 180^0$, или $\sphericalangle BAC + \sphericalangle B_1AC = \sphericalangle BAB_1 = 90^0$. Према томе, угао BAB_1 је прав.



Сл. 275

б) Како је $OO_1 \perp CA$ у тачки A, то је централа OO_1 тангента круга са центром у C полупречника CA или пречника BB_1.

в) Нека је $CD \perp BB_1$. Како је C средина дужи BB_1, то је у трапезу OBB_1O_1 дуж CD средња линија, и, према томе, D средина дужи OO_1. Међутим, знамо да је

$$CD = \frac{BO + B_1O_1}{2},$$

а, због $OB = OA$ и $O_1B_1 = O_1A$,

$$CD = \frac{OO_1}{2},$$

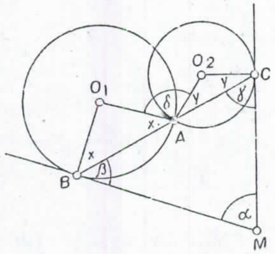
што значи да круг пречника OO_1 пролази кроз тачку C и додирује BB_1 у тој тачки, јер је полупречник DC нормалан на BB_1.

26) Ако је полупречник тог трећег круга x, A центар већег круга, B центар мањег круга, R полупречник већег круга, r полупречник мањег круга, тада је $AP = R - x$, $BP = r + x$. Сабирањем ових једнакости добија се:

$$AP + BP = R - x + r + x = R + r,$$

што значи да је збир $AP + BP$ сталан.

27) Угао δ је сталан, јер су његови краци полупречници повучени до пресечне тачке A.



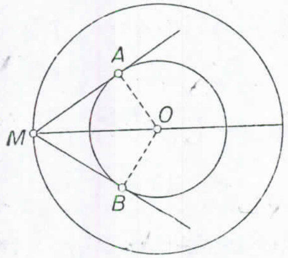
Сл. 276

Обележимо са x углове на основици равнокраког троугла O_1BA (сл. 276), а са y углове на основици равнокраког троугла O_2AC.

Код темена A: $\sphericalangle x + \delta + \sphericalangle y = 180^0$, или: $\sphericalangle x + \sphericalangle y = 180^0 - \delta$; према томе, и збир углова $\sphericalangle x + \sphericalangle y$ је сталан.

У троуглу BMC угао $\beta = 90^0 - \sphericalangle x$, $\gamma = 90^0 - \sphericalangle y$, $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma) = 180^0 - (90^0 - \sphericalangle x + 90^0 - \sphericalangle y) = \sphericalangle x + \sphericalangle y$, што значи, да је угао α сталан.

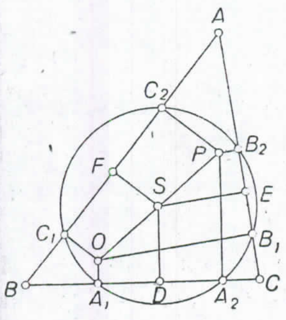
28) Углови OMA и OMB су једнаки (сл. 277).



Сл. 277

У правоуглом троуглу AMO хипотенуза MO је двапут већа од катете AO; према томе је $\sphericalangle AMO = 30^0$, а $\sphericalangle AMB = 60^0$.

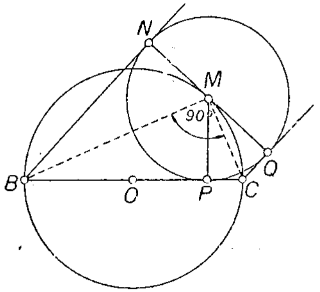
29) Нека је S центар кружне линије која пролази кроз тачке A_1, B_1, C_1 (сл. 278). Ако из S спустимо нормалу SD на страну BC, њено подножје D је средина тетиве A_1A_2. Нормала у A_2 на BC сече праву OS у тачки P. Како је четвороугао A_1A_2PO трапез и SD његова средња линија, то је $SP = SO$, тј. тачка P је симетрична са тачком O у односу на S. Да кроз ту тачку P пролазе и нормале у B_2 на AC и у C_2 на AB, лако је видети посматрањем трапеза B_1B_2PO и C_1C_2PO са средњим линијама SE и SF.



Сл. 278

4) Мерење лукова и углова. Око круга описане и у кругу уписане слике.

30) Повуцимо $MP \perp BC$ (сл. 279).



Сл. 279

$$\sphericalangle PBM = \frac{1}{2} \sphericalangle PBN$$

$$\sphericalangle PCM = \frac{1}{2} \sphericalangle PCQ.$$

Сабирањем ових једнакости имамо:

$$\sphericalangle PBM + \sphericalangle PCM = \frac{1}{2}(\sphericalangle PBN + \frac{1}{2} \sphericalangle PCQ).$$

Троугао BCM је правоугли, отуда је

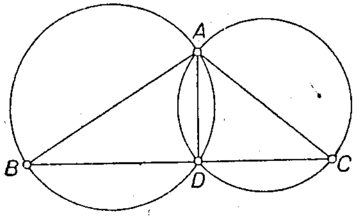
$$\sphericalangle PBM + \sphericalangle PCM = 90^0.$$

Заменом у претходној једнакости добија се: $\sphericalangle PBN + \sphericalangle PCQ = 2(\sphericalangle PBM + \sphericalangle PCM) = 180^0$; према томе је $BN \parallel CQ$.

31) Круг описан над краком равнокраког троугла пролазиће кроз средину основице, јер је средина основице теме правог угла који гради основица са висином.

32) Тачке B, C, X, Y су темена равнокраког трапеза, а око сваког равнокраког трапеза се може описати круг, јер су збирови наспрамних углова једнаки.

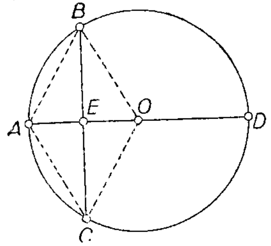
33) Нацртајмо прво круг пречника AB (сл. 280); нека је D тачка пресека тога круга и стране BC; спојмо A са D. Тада је $\sphericalangle ADB = 90^0$. С друге стране, $\sphericalangle ADC = 90^0$ и стога, тачка D лежи на кружној линији пречника AC.



Сл. 280

Дакле, кругови пречника AB и AC имају као заједничку тетиву висину AD троугла ABC.

34) Правоугли троугли BAE и BOE (сл. 281) су подударни, јер имају једну катету заједничку а друге две катете једнаке. Из њихове подударности следује: $AB = BO$. Како је $BO = AO$, то је троугао BAO равностран. Према томе је $\sphericalangle BOA = 60^0$.



Сл. 281

На исти се начин доказује да је троугао ACO равностран и $\sphericalangle AOC = 60^0$.

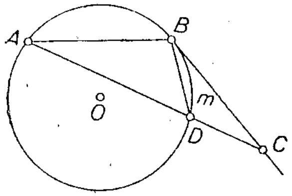
Значи:

$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOA + \sphericalangle AOC = 120^0.$$

Угао BOD као спољашњи угао равностраног троугла BAO износи 120^0, а угао COD исто тако 120^0; значи, луци BAC, CD и DB су једнаки и сваки је од њих трећина обима круга.

Према томе је лук $BAC = \frac{1}{2}$ лука CDB.

35) Троугао ABC је, по претпоставци, равнокрак, па је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$ (сл. 282). С друге стране, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBD$, јер су то периферијски углови над истим луком BmD. Отуд следује једнакост $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BCD$, која повлачи једнакост $DC = DB$.

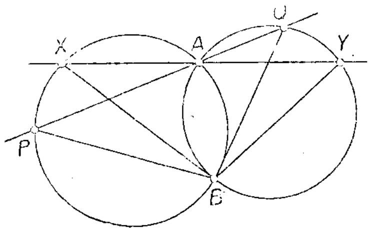


Сл. 282

36) PAB и PBA су периферијски углови, и њихов је збир сталан зато што је сталан збир лукова над којима они леже, тј. лук AP + лук BP = лук AB.

37) Углови PBX и PAX су једнаки, јер су они периферијски углови над истим луком (сл. 283). Исто тако, као периферијски углови над истим луком једнаки су и углови QBY и QAY. Како је, међутим, $\sphericalangle PAX = \sphericalangle QAY$, то је

$$\sphericalangle PBX = \sphericalangle QBY.$$

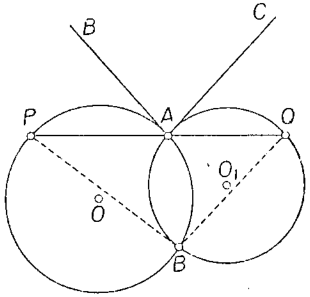


Сл. 283

38) Угао APB је сталан, јер лежи увек над истим луком; према томе, његове половине су увек једнаке и морају лежати

над једнаким луцима. Значи, симетрала угла APB мора половити други лук AB, и према томе пролазити кроз исту тачку на луку.

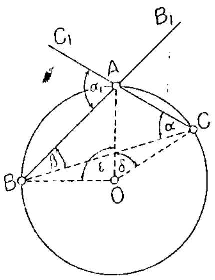
39) Повуцимо у тачки A тангенте AB и AC на дате кругове. Како је $\sphericalangle BAC$ сталан, то је и збир $\sphericalangle BAP + \sphericalangle CAQ$, исто тако, сталан, јер је $\sphericalangle BAP + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAQ = 180^0$ (сл. 284).



Сл 284

40) Како је перифериски угао APB над луком AB круга са центром у O (сл. 284) исти ма за коју сечицу PQ, а, исто тако, перифериски угао AQB над луком AB круга са центром у O_1, следује да је и угао PBQ сталан, јер је збир та три угла 180^0.

41) Спојмо B са C (сл. 285). Како је $\sphericalangle BAC_1 = \alpha_1$ спољашњи угао троугла, то је $\alpha_1 = \beta + \gamma$. Међутим, $\beta = \frac{\delta}{2}$ и $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}$, где је $\delta = \sphericalangle AOC$ и $\varepsilon = \sphericalangle AOB$. Отуда следује:

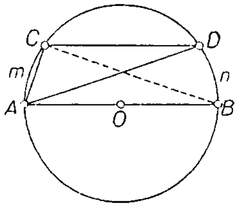


Сл. 285

$$\alpha_1 = \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon).$$

42) Спојмо C са B (сл. 286). Тада је

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCD.$$

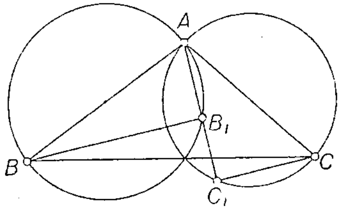


Сл. 286

Међутим, $\sphericalangle ACB = 90^0$, и лук AmC = луку BnD, јер су лукови између паралела једнаки. Стога је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC$. Према томе је $\sphericalangle ACD = 90 + \sphericalangle ADC$, или:

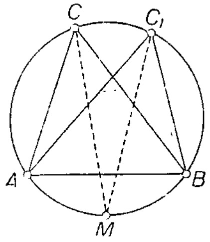
$$\sphericalangle ACD - \sphericalangle ADC = 90^0.$$

43) Угао AB_1B (сл. 287) је прав (зашто?). Исто тако угао AC_1C. Затим, $AB_1 \perp BB_1$, па и $AB_1 \perp CC_1$, јер је $BB_1 \parallel CC_1$. Дакле, AB_1 и AC_1 леже на истој правој.



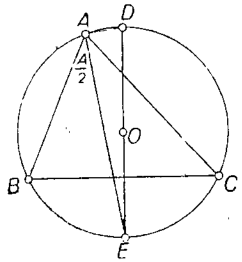
Сл. 287

44) Темена једнаких углова над истом дужи леже на кругу у коме је заједничка страна тетива (сл. 288). Симетрале ових једнаких углова морају пролазити кроз једну тачку на периферији, тј. кроз средину лука који одговара заједничкој страни, јер половине углова као једнаке морају лежати над једнаким луцима. (Види зад. 38.)



Сл. 288

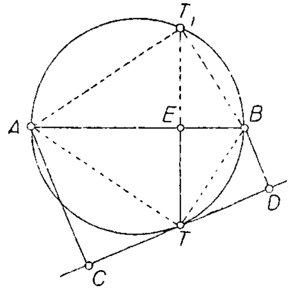
45) Угао у полукругу $EAD = 90^0$ (сл. 289); угао ADE лежи над луком $(AB + BE)$; према томе је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle C + \frac{1}{2} \sphericalangle A$.



Сл. 289

Из троугла ADE имамо: $\sphericalangle DEA = 90^0 - \sphericalangle ADE = 90^0 - (\sphericalangle C + \frac{1}{2} \sphericalangle A) = 90^0 - \sphericalangle C - \frac{1}{2}(180^0 - \sphericalangle B - \sphericalangle C) = \frac{1}{2}(\sphericalangle B - \sphericalangle C)$.

46) Нека су AC и BD нормале спуштене из крајњих тачака пречника AB на произвољну тангенту, T додирна тачка, TE нормала спуштена из додирне тачке на пречник (сл. 290).



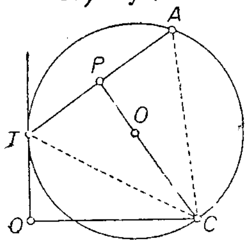
Сл. 290

Продужимо нормалу TE до T_1, пресека са кругом. Како пречник AB стоји нормално на тетиви TT_1, он полови тетиву и њен лук TBT_1 као и лук TAT_1; према томе су једнаки луци TB и T_1B; TA и T_1A и перифериски углови који над њима леже, тј.: $\sphericalangle DTB = \sphericalangle TT_1B = \sphericalangle T_1TB$, $\sphericalangle CTA = \sphericalangle TT_1A = \sphericalangle T_1TA$.

Троугли BTD и BET су подударни, јер имају једну заједничку страну и по два угла једнака. Из њихове подударности следује $BD = BE$. Исто тако су подударни и троугли ACT и ATE, па се из њихове подударности добија $AC = AE$.

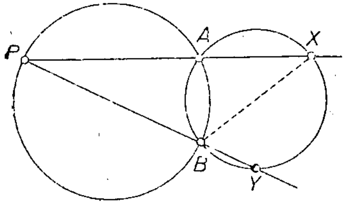
47) Луци AC и TC су једнаки; отуда су једнаке и тетиве AC и TC (сл. 291).

Правоугли троугли APC и TQC су подударни, јер имају једнаке хипотенузе и по један оштар угао ($\sphericalangle PAC = \sphericalangle QTC$, као периферски углови). Из подударности троуглова следује $PC = QC$.



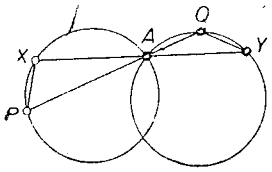
Сл. 291

48) Угао APB је увек исте величине, јер увек лежи над луком AB (сл. 292). Исто тако је и угао AXB увек исте величине. Угао XBY, као спољашњи угао троугла BPX, једнак је збиру углова APB и AXB; према томе, и он има сталну величину, па и лук XY над којим он лежи.



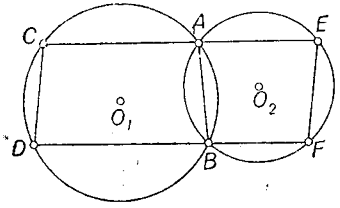
Сл. 292

49) Са слике 293 видимо да су углови XAP и QAY једнаки. Како су кругови једнаки, то су и луци PX и QY једнаки, па, према томе, и тетиве PX и QY морају бити једнаке.



Сл. 293

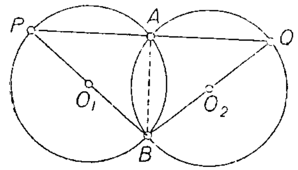
50) У кругу O_1 (сл. 294) луци CD и AB су једнаки, јер леже између двеју паралелних, па су и одговарајуће тетиве CD и AB једнаке. Исто тако, у кругу O_2 луци EF и AB су једнаки, као луци између паралела, па су и одговарајуће тетиве EF и AB једнаке. Према томе је $CD = EF$.



Сл. 294

51) Периферски углови APB и AQB су једнаки, јер леже над једнаким луцима (сл. 295).

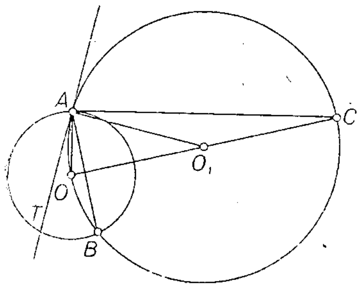
Према томе, троугао BPQ је равнокрак и $PB = QB$.



Сл. 295

52) Периферски углови OCA и OAB су једнаки, јер леже над једнаким луцима (сл. 296).

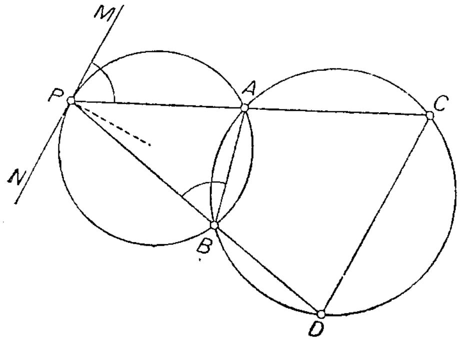
Међутим је и угао $TAO = \sphericalangle OCA$. Према томе је $\sphericalangle TAO = \sphericalangle OAB$.



Сл. 296

53) $MPA = ABP$ (сл. 297).

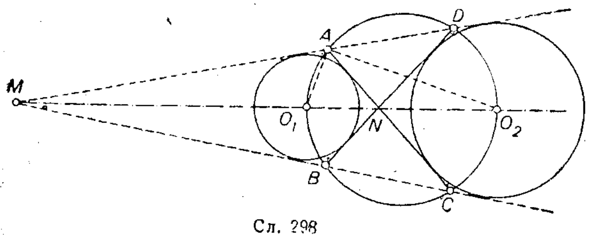
Углови ABP и ACD су једнаки, јер су оба суплементна са истим углом ABD; према томе је $\sphericalangle ACD = \sphericalangle MPA$. Како су они по положају наизменични, то је $CD \parallel MP$.



Сл. 297

54) Да бисмо доказали да круг пречника O_1O_2 пролази кроз тачке A, B, C, D (сл. 298), треба доказати да је угао O_1AO_2 прав.

AC и AM су тангенте круга O_1 повучене из тачке A; стога је O_1A симетрала угла MAN.



Сл. 298

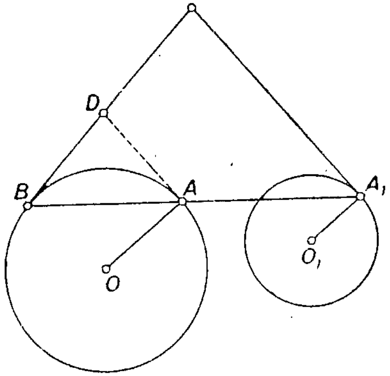
DA и AC су тангенте круга O_2 повучене из тачке A; стога је O_2A симетрала угла CAD.

Како су углови MAN и CAD упоредни, то су њихове симетрале међусобно нормалне, што значи да је угао O_1AO_2 прав.

На исти се начин може доказати да су углови O_1BO_2, O_1CO_2, O_1DO_2 прави.

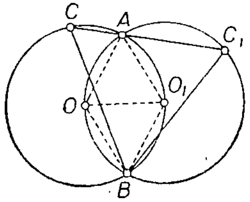
55) Ако у тачки A круга са центром у O (сл. 299) повучемо тангенту AD, добијамо $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABD$ као перифериске углове чији краци обухватају исти лук AB. Због $AD \perp OA$ и $A_1C \perp O_1A_1$ и $OA \parallel O_1A_1$ имамо $AD \parallel A_1C$ и, стога, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABD = \sphericalangle CA_1B$. Дакле: $A_1C = BC$.

Докажи теорему за случај кад су OA и O_1A_1 супротног смера.



Сл. 299

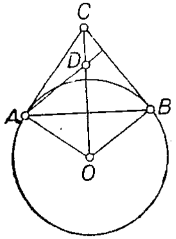
56) Како су троугли OAO_1 и OBO_1 равнострани, то је $\sphericalangle AOB = 120^0$, а, према томе, $\sphericalangle BCA = 60^0$. Исто тако, због $AO_1B = 120^0$, имамо $\sphericalangle AC_1B = 60^0$. Дакле, троугао BCC_1 је равностран (сл. 300).



Сл. 300

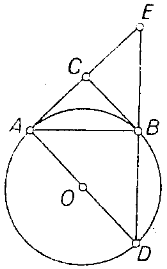
57) Нека је угао ACB оштар (сл. 301). Тада је D унутар троугла ABC. Како је $AD \perp BC$ и $OD \perp AB$, то је $\sphericalangle ADO = \sphericalangle ABC$. Међутим, $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD$. Дакле: $\sphericalangle ADO = \sphericalangle AOD$, и стога $AD = OA$.

Докажи теорему за случај да је $\sphericalangle ACB = 90^0$ и за случај да је $\sphericalangle ACB > 90^0$.



Сл. 301

58) Како је $AC = CE$ и $AC = BC$ (сл. 302) (перифериски углови над истим луком AB), то је тачка C подједнако удаљена од A, B и E, што значи да се из ње може описати круг који пролази кроз те три тачке. Према томе је угао ABE као перифериски над пречником AE прав. С друге стране, $\sphericalangle ABD = 90^0$ као перифериски над пречником AD. Дакле, BD и BE су на истој правој.

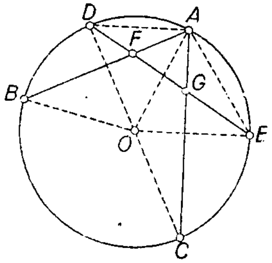


Сл. 302

59) Треба доказати да је $\sphericalangle AFG = \sphericalangle AGF$ (сл. 303). Спојмо A са D. Тада је у троуглу ADF угао AFG као спољашњи једнак збиру

$$\sphericalangle ADF + \sphericalangle FAD = \frac{1}{2} \sphericalangle AOE + \frac{1}{2} \sphericalangle BOD = \frac{1}{2}(\sphericalangle AOE + \sphericalangle BOD),$$

тј. $\sphericalangle AFG$ има меру једнаку полузбиру лукова AE и BD.



Сл. 303

Спојмо A са E. Тада је у троуглу AGE угао AGF као спољашњи једнак збиру

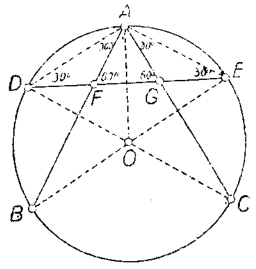
$$\sphericalangle AEG + \sphericalangle EAG = \frac{1}{2} \sphericalangle AOD + \frac{1}{2} \sphericalangle COE = \frac{1}{2}(\sphericalangle AOD + \sphericalangle COE).$$

Како је, међутим, $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{AE}$, то је и $\sphericalangle BOD = \sphericalangle AOD$ и $\sphericalangle COE = \sphericalangle AOE$. Отуда следује да је

$$\sphericalangle AFG = \frac{1}{2}(\sphericalangle AOE + \sphericalangle BOD) = \frac{1}{2}(\sphericalangle AOD + \sphericalangle COE) = \sphericalangle AGF.$$

што значи да је троугао AFG равнократ, и стога је $AF = AG$.

60) Спојмо A са D и E (сл. 304). Како је́ D средина $\widehat{AB}$ и E средина $\widehat{AC}$, то је $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle BOD = \frac{1}{2} 60^0 = 30^0$.



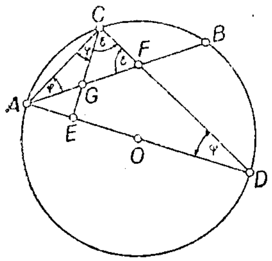
Сл. 304

Исто тако,

$$\sphericalangle ADE = \frac{1}{2} \sphericalangle AOE = \frac{1}{2} 60^0 = 30^0.$$

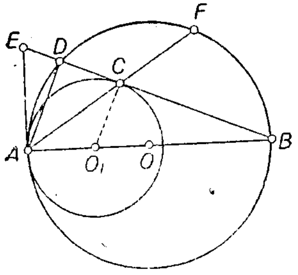
Према томе, троугао ADF је равнокрак, што повлачи $AF = DF$. Отуда даље следује да је $\sphericalangle AFG$ као спољашњи угао троугла ADF једнак $30^0 + 30^0 = 60^0$. Истим расуђивањем код троугла AEG долазимо до закључка да је и $\sphericalangle AGF = 60^0$. Дакле, с једне стране, $AG = GE$, а, с друге стране, $AF = AG = FG$ (јер је $\triangle AFG$ равностран), тј. $DF = FG = GE$.

61) Перифериски угао ACD је прав (сл. 305). Висина CE троугла ACD дели угао C на $\sphericalangle ACE = \varphi$ и $\sphericalangle DCE = \varepsilon$. Из $DC \perp AC$ и $DE \perp CE$ следује: $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACE = \varphi$. Међутим, краци перифериских углова ADC и BAC обухватају једнаке лукове ($\widehat{AC} = \widehat{BC}$), што повлачи $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAC = \varphi$. Према томе, троугао ACG је равнокрак, па је $GA = GC$. С друге стране, у правоуглом троуглу ACF, са правим углом код C, угао AFC је комплементан углу CAF, што значи да је $\sphericalangle AFC = \varepsilon$. Отуда произилази да је и троугао CFG равнокрак, што повлачи $GC = GF$. Дакле: $GA = GC = GF$.



Сл. 305

62) Повуцимо заједничку тангенту AE и продужимо BCD до пресека E са тангентом AE (сл. 306).



Сл. 306

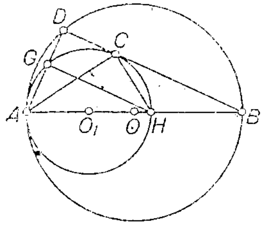
Како је $EA = EC$, то је и $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ECA$. Из те једнакости као и из једнакости

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAF,$$

$$\sphericalangle ECA = \sphericalangle FCB = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EBA = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EAD \text{ (јер је } \sphericalangle EAD = \sphericalangle EBA)$$

следује: $\sphericalangle DAF = \sphericalangle FAB$, што значи да је AC бисектриса угла BAD.

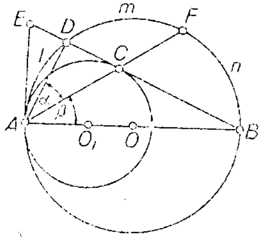
Други докази: а) Спој O_1 са C (сл. 306), посматрај троугао ACO_1 и уважи да је $O_1C \perp BC$ и, стога, $O_1C \parallel AD$. Дакле?



Сл. 307

б) На сл. 307 $HG \parallel BD$, јер је $\sphericalangle AGH = \sphericalangle ADB = 90^0$. Зато је C средина лука GH. Дакле?

в) Углу CAD (сл. 307) комплементан је угао ACD, а углу CAH угао AHC. Међутим, то су перифериски углови над истим луком. Дакле?



Сл. 308

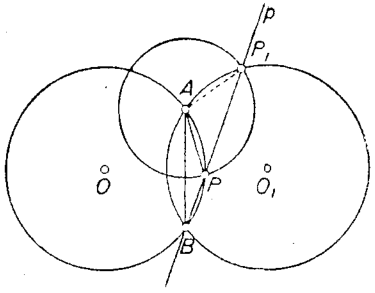
г) Како угао са теменом унутар круга има меру једнаку полузбиру лукова које обухватају краци тога угла и краци његовог унакрсног угла (сл. 308), то је

$$l + m = l + n$$

$$m = n$$

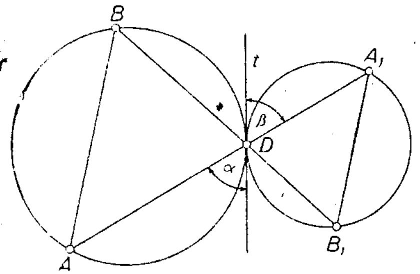
$$\alpha = \beta.$$

63) Треба доказати да је $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABP_1$. Перифериски угао ABP лежи над луком AP, а перифериски угао ABP_1 над луком AP_1. Међутим, из једнакости $AP = AP_1$ следује једнакост $\widehat{AP} = \widehat{AP_1}$, јер кругови са центрима у O и O_1 имају једнаке полупречнике. Дакле: $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABP_1$, тј. тачке B, P, P_1 леже на једној правој, p (сл. 309).



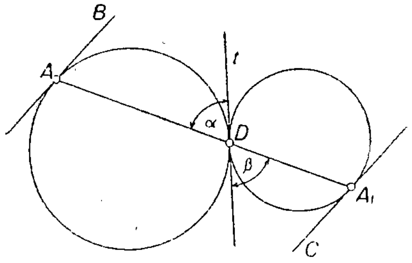
Сл. 309

64) Повуцимо заједничку тангенту t у тачки D (сл. 310). $\sphericalangle ABD = \alpha$, као перифериски над истим луком AD. Исто тако, $\sphericalangle A_1B_1D = \beta$. Како је, међутим, $\alpha = \beta$, следује: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1B_1D$, тј. наизменични углови су једнаки, па је $AB \parallel A_1B_1$.



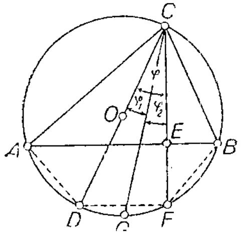
Сл. 310

65) Види задатак 64. Утврди прво једнакост углова BAD и α (сл. 311), а затим једнакост углова CA_1D и β итд.



Сл. 311

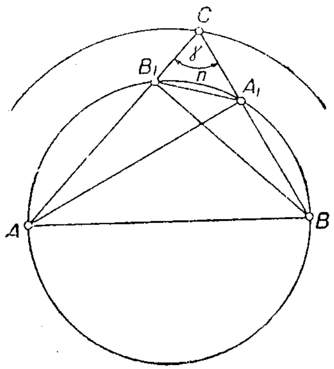
66) Нека је дат троугао ABC (сл. 312). Опишимо око њега круг и повуцимо бисектрису угла C; она сече кружну линију у тачки G, која је средина лука AGB. Повуцимо пречник CD и висину CE, чији продужак сече кружну линију у тачки F. Спојмо D са F. Угао CFD је прав, а исто тако угао AEC. Стога је $AB \parallel DF$. Из тога следује једнакост лукова BF и AD, а отуда једнакост: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF$. Према томе је: $\varphi_1 = \sphericalangle ACG - \sphericalangle ACD$, $\varphi_2 = \sphericalangle BCG - \sphericalangle BCF$, одакле је $\varphi_1 = \varphi_2$, или: CG је бисектриса угла φ.



Сл. 312

Специјалан случај ове теореме види у § 2, зад. 68.

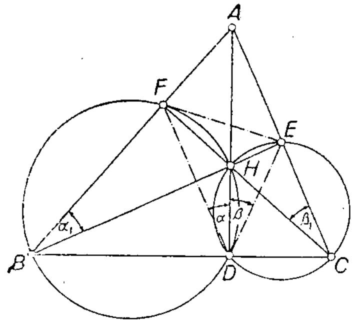
67) Претпоставимо да је угао γ оштар (сл. 313). Како је $\sphericalangle AB_1B = \sphericalangle AA_1B = 90^0$, то A_1 и B_1 леже на кружној линији пречника AB. Теме C је изван круга пречника AB, па је $\gamma = \sphericalangle AB_1B - \sphericalangle CBB_1$, тј. његова мера једнака је полуразлици лукова AmB и A_1nB_1. Како су, међутим, γ и AmB сталне величине, то је и A_1nB_1 стална величина, и, према томе, и тетива A_1B_1, која одговара томе луку.



Сл. 313

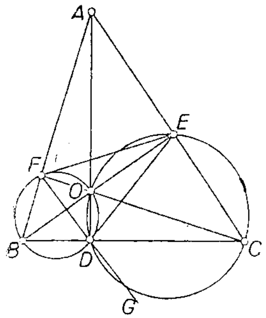
Ако је C унутар круга, тј. $\gamma > 90^0$, угао γ има исту меру као полузбир лукова AmB и A_1nB_1, па расуђујемо као у првом случају.

68) Нека је ABC дати троугао (сл. 314) и AD, BE и CF његове висине. Тврдимо да су те висине бисектрисе углова троугла DEF. Нека је H ортоцентар троугла ABC. Тада се око четвороуглова $BDHF$ и $CDHE$ могу описати кругови. Како је $BE \perp CE$ и $BF \perp CF$, то је $\alpha_1 = \beta_1$. С друге стране, $\alpha = \alpha_1$, јер су то периферски углови над истим луком FH, и $\beta_1 = \beta$, јер су то периферски углови над истим луком EH. Дакле: $\alpha = \beta$ итд.



Сл. 314

69) а) Углови OEC и ODC су прави, па се око четвороугла $ODCE$ може описати круг. Исто тако, круг се може описати и око четвороугла $BDOF$ (сл. 315).



Сл. 315

$$\sphericalangle EDC = 90^0 - \sphericalangle ODE,$$

$\sphericalangle ODE = \sphericalangle OCE$ (периферски углови над луком OE).

У троуглу FCA је $\sphericalangle OCE = 90^0 - \sphericalangle A$. Према горњем, следује:

$$\sphericalangle EDC = 90^0 - (90^0 - \sphericalangle A) = \sphericalangle A.$$

Исто тако, $\sphericalangle FDB = 90^0 - \sphericalangle FDO$,

$$\sphericalangle FDO = \sphericalangle FBO.$$

У троуглу ABE је $\sphericalangle FBO = 90^0 - \sphericalangle A$; отуда је $\sphericalangle FDB = 90^0 - (90^0 - \sphericalangle A) = \sphericalangle A$.

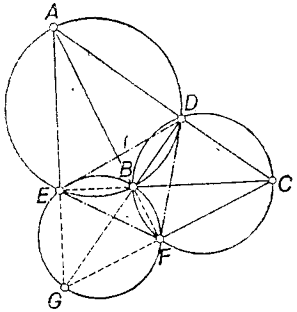
Дакле, $\sphericalangle FDB = \sphericalangle EDC$. Међутим су углови FDB и CDG једнаки као унакрсни, па је, према томе, $\sphericalangle EDC = \sphericalangle CDG$, или, страна BC је симетрала спољашњег угла EDG.

На исти начин се доказују тврђења и за друге две стране.

б) Углови CDB и BFC су прави, и око четвороугла $BFCD$ може се описати круг (сл. 316). Исто тако, кругови се могу описати и око четвороугла $AEBD$ и $GFBE$.

Углови DFB и DCB су једнаки као периферски углови над луком BD.

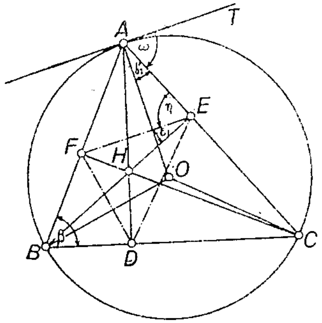
У троуглу ADG је $\sphericalangle EGB = 90^0 - \sphericalangle DAE$, у троуглу ACE је $\sphericalangle DCB = 90^0 - \sphericalangle DAE$; према томе, $\sphericalangle EGB = \sphericalangle DCB$ и $\sphericalangle DFB =$ $= \sphericalangle EGB$. Како је $\sphericalangle EGB = \sphericalangle EFB$ (периферискi углови над луком EB), то је, најзад, $\sphericalangle DFB = \sphericalangle EFB$, тј. продужена страна AB је симетрала угла F, у троуглу DEF.



Сл. 316

Исто тако, углови DEB и DAB су једнаки као периферискi над луком BD, углови FEB и FGB су једнаки као перифериски над луком BF. Међутим, у троуглу DCG је $\sphericalangle FGB = 90^0 - \sphericalangle DCF$, а у троуглу ACF је $\sphericalangle DAB = 90^0 - \sphericalangle DCF$, па је, према томе, $\sphericalangle FGB = \sphericalangle DAB = \sphericalangle FEB =$ $= \sphericalangle DEB$, тј. продужена страна BC је симетрала угла E у троуглу DEF.

70) *Први доказ.* Нека је дат троугао ABC (сл. 317), и нека је O центар круга описаног око тога троугла. Повуцимо висине AD, BE, CF тога троугла; оне се секу у тачки H. Спојмо подножја D, E, F тих висина. Тврдимо да је $AO \perp EF$, $BO \perp DF$ и $CO \perp DE$,

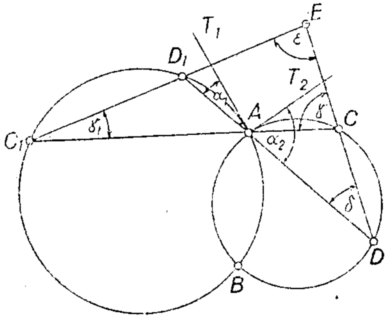


Сл. 317

У тачки A повуцимо тангенту AT на круг. Тада је $\omega = \beta$, јер су углови ABC и TAC перифериски над истим луком. Како је $BCEF$ тетивни четвороугао, то је угао CEF суплементан углу β. Међутим, угао CEF је суплементан углу η, што значи да је $\beta = \eta$, а то повлачи $\omega = \eta$, и тиме $AT \parallel EF$. Како је $AT \perp AO$, то је $EF \perp AO$, што је требало доказати. Итд.

Други доказ. Из задатка 68 знамо да су висине AD, BE, CF троугла ABC симетрале углова троугла DEF. Ако докажемо да је $\gamma_1 = \varepsilon_1$, на основу претпоставке да је $AE \perp BE$ изводимо закључак да је $AO \perp EF$. Остављамо ученику да изведе тај доказ.

71) Треба доказати да је угао ε сталан. (сл. 318). Повуцимо тангенте AT_1 и AT_2 у тачки A пресека датих кругова. Тада је $\gamma_1 = \alpha_1$, јер су то перифериски углови над истим луком AD_1. Затим, због $\gamma =$ $= \delta + \sphericalangle CAD$ и $\delta = \sphericalangle CAT_2$, имамо $\gamma = \sphericalangle CAD + \sphericalangle CAT_2 = \alpha_2$. Како је збир $\alpha_1 + \alpha_2$ стална количина, то је и $\gamma_1 + \gamma = \alpha_1 + \alpha_2$, исто тако, стална количина, па је и $\varepsilon = 180^0 - (\gamma_1 + \gamma)$ стална количина.



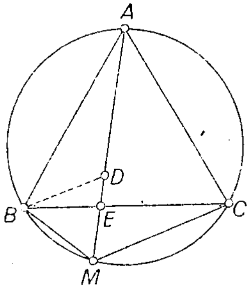
Сл. 318

Ако сечице пролазе кроз тачке на унутрашњим луковима, доказ се слично изводи.

72) Пренесемо дуж MB на дуж AM, тако да је $MD = MB$ (сл. 319). Сада посматрамо троугле ABD и BCM и троугао BDM па расуђујемо: $AB=BC$, $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BCM$ (зашто?); затим $\sphericalangle BMA =$ $= \sphericalangle ACB = 60^0$ (зашто?). Дакле, троугао BDM је равностран, и стога је $BD = BM$. Према томе, у троуглима ABD и BCM имамо засад једнаке две стране: $AB = BC$ и $BD = BM$. Треба још испитати углове ABD и CBM. Како је $\sphericalangle BDM = 60^0$, то је $\sphericalangle BDA = 120^0$. Исто тако, $\sphericalangle BMC = 120^0$ (зашто?). Отуда следује и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBM$, што повлачи подударност троуглова ABD и BCM, а тиме и једнакост страна AD и CM. Дакле:

$$MA = MD + DA = MB + MC,$$

што је требало доказати.

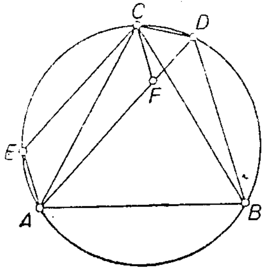


Сл. 319

73) Нека је ABC равностран троугао, а D произвољна тачка на кругу описаном око троугла (сл. 320).

Повуцимо $CE \parallel DA$ и $CF \parallel EA$. Луци CD и EA, као луци између паралелних тетива су једнаки, па су и одговарајуће тетиве једнаке. Значи: $CD = EA = CF$, јер је $EAFC$ паралелограм; према томе, $EC = AF$.

Троугао CFD је равностран; $\sphericalangle CDF =$ $= 60^0$ као перифериски угао над луком



Сл. 320

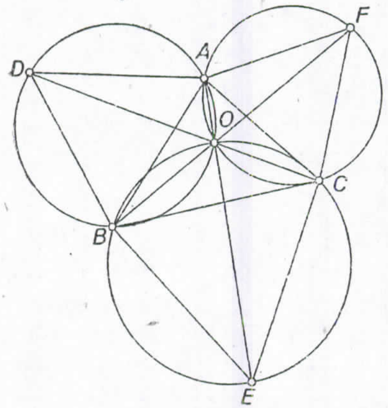
AEC; $\sphericalangle CFD = \sphericalangle CDF = 60^\circ$, јер је $CD = CF$. Значи, и трећи угао је 60°, и $CD = CF = FD$.

Троугли CDB и EAC су подударни; $CB = CA$, $CD = EA$, $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ECA$ (као периферисни углови над једнаким луцима). Из подударности троуглова закључује се да је $DB = EC = AF$. Дакле: $DA = AF + FD = DB + DC$.

74) а) Троугли ADC и ABF су подударни, јер су им по две стране и захваћени углови једнаки (сл. 321). $AD = AB$, $AC = AF$, $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAF$. Из подударности ових троуглова следује да је

$$DC = BF.$$

На исти начин се доказује да је $DC = AE$.



Сл. 321

б) Кругови описани око равностраних троуглова ABD и ACF секу се у тачки O.

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC = 120^\circ$ као суплементни угловима D и F чија је величина 60°. Према томе, $\sphericalangle BOC = 120^\circ$ и круг описан око равностраног троугла BCE пролази кроз тачку O, пресек прва два круга.

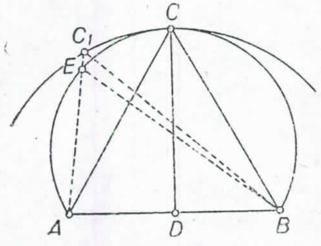
Спојмо тачку O са свих шест темена. Да бисмо доказали други део теореме, довољно је доказати да дужи OD и OC леже на једној правој. Сваки угао чије је теме у O износи 60°, јер лежи над луком који је трећина круга. Збир углова DOA, AOF и FOC је 180°; према томе, дужи DO и OC леже на једној правој.

Примедба. а) Свака страна троугла ABC види се из тачке O под истим углом.

б) Исти доказ теореме може се извести и кад равнострани троугли нису конструисани споља већ са унутрашње стране.

в) Теорема важи и у случају ако се над сваком страном троугла ABC са спољашње стране конструишу слични троугли, тако да облишњи углови углу A буду једнаки углу C, облишњи углови углу B буду једнаки углу A, и облишњи углови углу C буду једнаки углу B.

75) а) Тежишна линија је већа од половине основице (сл. 322).

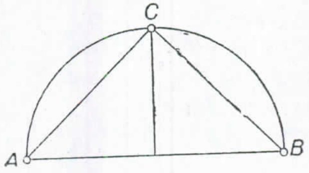


Сл. 322

Равнокраки троугао ABC даје највећи угао, јер, ако се опише лук BCA – геометриско место за темена углова C – и лук CC_1 чији је полупречник тежишна линија CD, види се да је угао $C_1 < E$, који је једнак углу C.

Дакле, почев од тачке C угао се смањује и постаје нула, кад његово теме падне на продужак основице.

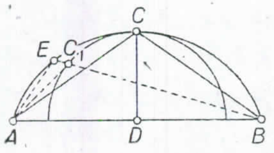
б) Тежишна линија једнака је половини основице.



Сл. 323

У овом случају троугао је правоугли, а угао C сталан (сл. 323).

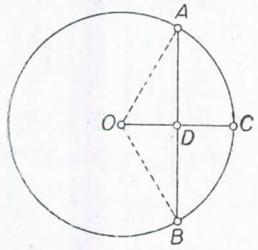
в) Тежишна линија је мања од половине основице (сл. 324).



Сл. 324

Равнокраки троугао ABC даје најмањи угао, јер $\sphericalangle C_1 > \sphericalangle E$, а угао E је једнак углу C. Угао расте и приближава се вредности од 180° уколико се његово теме приближава основици.

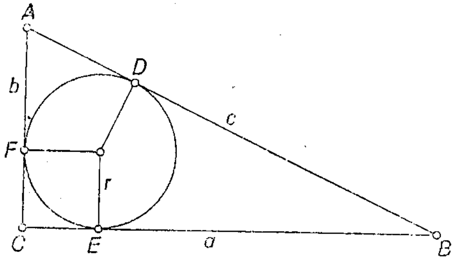
76) Нека је AB тетива нормална на полупречнику OC у његовој средини (сл. 325). Да бисмо доказали да је AB страна уписаног равностраног троугла, довољно је доказати да је угао $AOB = 120^\circ$.



Сл. 325

Ако је $OC \perp AB$, тада је $AD = DB$. Правоугли троугли AOD и BOD, поред тих једнаких катета, имају и заједничку катету OD; према томе, они су подударни и $\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOB$. Међутим, у правоуглом троуглу AOD катета $OD = \frac{1}{2} AO$, због чега је $\sphericalangle AOD = 60^\circ$. Према томе је $\sphericalangle AOB = 120^\circ$.

77) Знамо да је:



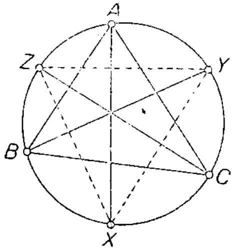
л. 326

$$AD = AF = b - r \text{ (сл. 326)},$$
$$BD = BE = a - r.$$

Сабирањем ових једнакости добијамо:

$$c = a + b - 2\,r, \text{ или:}$$
$$2\,r = (a + b) - c; \text{ најзад:}$$
$$r = \frac{(a + b) - c}{2}.$$

78) Са слике 327 видимо да је:

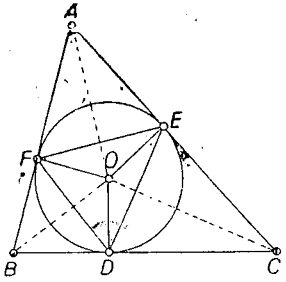


Сл. 327

$$\sphericalangle ZXA = \sphericalangle ZCA = \frac{1}{2} \sphericalangle C,$$
$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle ABY = \frac{1}{2} \sphericalangle B,$$
$$\sphericalangle ZXY = \sphericalangle ZXA + \sphericalangle AXY = \frac{1}{2}(\sphericalangle C + \sphericalangle B) =$$
$$= \frac{1}{2}(180^0 - A) = 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle A.$$

На исти начин се доказују тврђења и за друга два угла троугла XYZ.

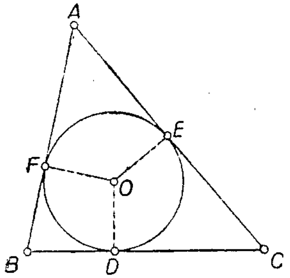
79) Са слике 328 видимо да је:



Сл. 328

$$\sphericalangle EDF = \frac{1}{2} \sphericalangle EOF = \frac{1}{2}(180^0 - \sphericalangle A) =$$
$$= 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle A,$$
$$\sphericalangle FED = \frac{1}{2} \sphericalangle FOD = \frac{1}{2}(180^0 - \sphericalangle B) =$$
$$= 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle B,$$
$$\sphericalangle EFD = \frac{1}{2} \sphericalangle EOD = \frac{1}{2}(180^0 - \sphericalangle C) =$$
$$= 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle C.$$

80) Знамо да је: (сл. 329)



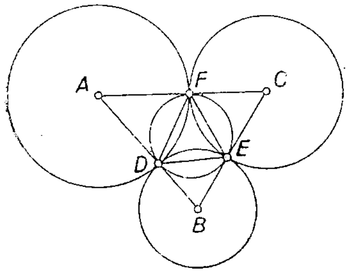
Сл. 329

$$BD = BF,$$
$$AF = AE,$$
$$CD = CE.$$

Са слике видимо да је

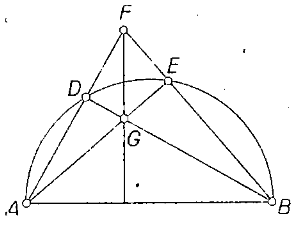
$BC - AB = BD + CD - BF - AF = BD + CE - BD - AE = CE - AE$, што је и требало доказати.

81) Симетрале углова A, B, C морају бити симетрале страна троугла DEF, јер су стране троугла DEF тетиве које одговарају средишним угловима A, B, C (сл. 330). Према томе, пресек симетрала углова у троуглу ABC поклапа се са пресеком симетрала страна троугла DEF, тј. круг описан око троугла DEF уједно је круг уписан у троуглу ABC.



Сл. 330

82) Углови AEB и ADB су прави као углови у полукругу (сл. 331). Према томе, дужи AE и BD су висине троугла ABF. Трећа дуж повучена из темена F кроз пресек висина мора и сама бити висина, тј. $FG \perp AB$.



Сл. 331

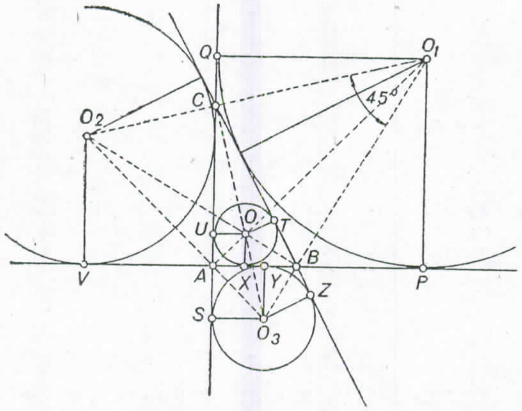
83) Треба доказати да је (сл. 332)

$$O_1P = O_2V + O_3S + OU,$$

или:

$$AP = AV + AY + AX.$$

Према томе, довољно је доказати да је



Сл. 332

$$AX = YB, \quad AV = BP.$$

а) $AY + AX = AS + UA = US$,

$BX + BY = BT + BZ = ZT$.

Међутим, како је $US = ZT$, то је $AY + AX = BY + BX$, а отуда $AX + AX + YX = BY + BY + YX$, и, најзад: $AX = BY$.

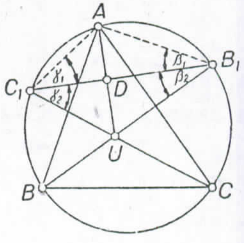
б) Троугао O_1BO_2 је правоугли и равнокрак, јер је угао O_1BO_2 прав (зашто?), а угао $O_2O_1B = 45^0$ (зашто?).

Отуда је $$BO_1 = BO_2.$$

Правоугли троугли BO_1P и BO_2V су подударни (зашто?); дакле: $BP = O_2V = AV$; отуда је

$$O_1P = AP = AY + YB + BP = O_3Y + OX + O_2V.$$

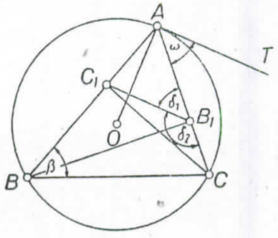
84) Како је BB_1 симетрала угла ABC, то је $\sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle B_1BC$ (сл. 333).



Сл. 333

Ако спојимо A са B_1 и C_1, добијамо: $\gamma_1 = \sphericalangle ABB_1$ (зашто?), $\gamma_2 = \sphericalangle B_1BC$ (зашто?); дакле: $\gamma_1 = \gamma_2$. Истим расуђивањем можемо утврдити да је $\beta_1 = \beta_2$. На основу тога следује подударност троуглова B_1C_1A и B_1C_1U (докажи!), што повлачи: $C_1A = C_1U$, $B_1A = B_1U$. Према томе, троугао AC_1U је равнокрак, а C_1D је његова тежишна линија и висина (зашто?). Дакле?

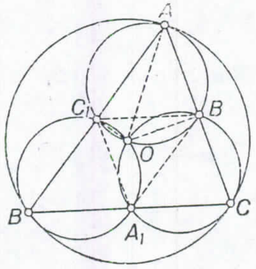
85) Повуцимо тангенту AT у тачки A круга ABC (сл. 334).



Сл. 334

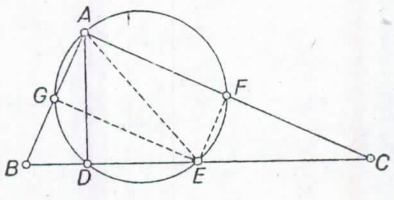
Треба доказати да је $AT \parallel C_1B_1$ $(OA \perp AT)$. То ће бити ако је $\omega = \delta_1$. Међутим, четвороугао BCB_1C_1 је тетивни, па је $\beta + \delta_2 = 180^0$, а, с друге стране, $\delta_1 + \delta_2 = 180^0$; дакле: $\beta = \delta_1$. Како је $\beta = \omega$ (зашто?), следује $\delta_1 = \omega$. Дакле?

86) Како је $A_1B_1 = \frac{1}{2} \cdot AB$, $A_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot AC$, $B_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot BC$ (сл. 335), то постоји подударност троуглова AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, па, стога, и једнакост кругова описаних око тих троуглова. Да докажемо други део теореме, посматраћемо четвороугао AB_1OC_1. Како су углови AB_1O и AC_1O прави, то круг пречника AO пролази кроз тачке B_1, C_1, а то је круг описан око троугла AB_1C_1. Исто тако, може се показати да и кругови A_1B_1C и A_1BC_1 пролазе кроз тачку O.



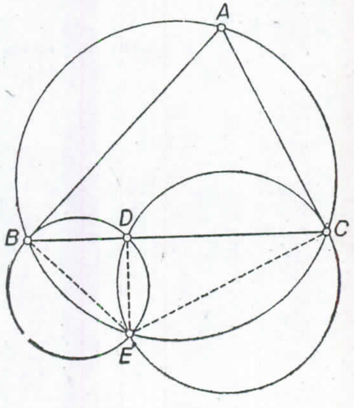
Сл. 335

87) Нека је E средина стране BC, F — средина стране AC и G — средина стране AB (сл. 336). Тада је $EF \parallel AB$ и $EG \parallel AC$. Према томе, четвороугао $AFEG$ је правоугаоник. Његова дијагонала AE је пречник круга који пролази сем кроз темена правоугаоника и кроз тачку D, јер је $\sphericalangle ADE$ прав. Дакле?



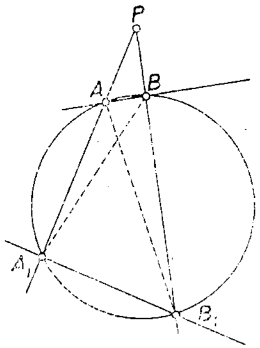
Сл. 336

88) Спојмо E са B, D и C (сл. 337). Тада је $\sphericalangle BED = \sphericalangle ABC$ (зашто?) и $\sphericalangle CED = \sphericalangle ACB$ (зашто?), што значи да је $\sphericalangle BEC$ суплеменат угла A. Према томе, четвороугао $ABEC$ је тетивни и стога тачка E лежи на кружној линији описаној око троугла ABC.



Сл. 337

89) Посматрајмо прво троугле PAB и PA_1B_1 (сл 338). Они имају заједнички угао код P. Затим, $\sphericalangle PAB = ABA_1 + \sphericalangle AA_1B$ (зашто?). Међутим је $\sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle AB_1A_1$ (зашто?) и $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle AB_1B$ (зашто?), па можемо написати: $\sphericalangle PAB = \sphericalangle AB_1A_1 + AB_1B = \sphericalangle A_1B_1P$. Према томе је $\sphericalangle PBA = PA_1B_1$.

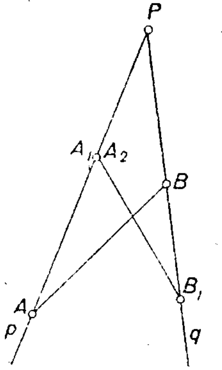


Сл. 338

Аналогно доказујемо и једнакост углова у осталим троуглима.

Теорема би се могла доказати и овако: $\sphericalangle PAB + \sphericalangle A_1AB = 180^0$, $\sphericalangle A_1B_1P + A_1AB = 180^0$; дакле: $\sphericalangle PAB = \sphericalangle A_1B_1P$.

Обрнута теорема. Претпоставићемо да је $\sphericalangle A = \sphericalangle B_1$ и да је P изван дужи AA_1 и BB_1, па ћемо кроз тачке A, B, B_1 повући кружну линију (сл. 339). Нека она сече праву p у некој другој тачки A_2. Тада, по претходној теореми, имамо да је у троуглима PAB и PB_1A_2 угао PB_1A_2 једнак углу PAB, а по претпоставци $\sphericalangle PB_1A_1 = \sphericalangle PAB$, одакле следује: $\sphericalangle PB_1A_1 = \sphericalangle PB_1A_2$, што значи да се тачке A_1 и A_2 поклапају. Дакле?



Сл. 339

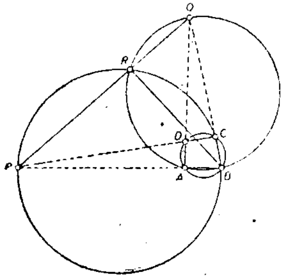
90) Спољашњи угао и супротни унутрашњи угао су једнаки, јер су оба суплементна са истим унутрашњим углом, суседним посматраном спољашњем углу.

91) Углови PRB и PCB су једнаки као периферискн углови над луком PB (сл. 340). Исто тако су једнаки и углови QRB и QAB.

Према томе је:

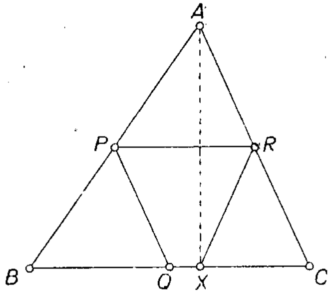
$$\sphericalangle PRB + \sphericalangle QRB = \sphericalangle PCB + \sphericalangle QAB = 180^0,$$

тј. тачке P, R, Q леже на једној правој.



Сл. 340

92) Ако спојимо тачке P и Q средине страна AB и BC (сл. 341), биће $PQ \parallel AC$. Исто тако је $PR \parallel BC$. Слика $QCRP$ је паралелограм и $\sphericalangle PQB = \sphericalangle C$, а $\sphericalangle PQC = 180^0 - \sphericalangle C = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.



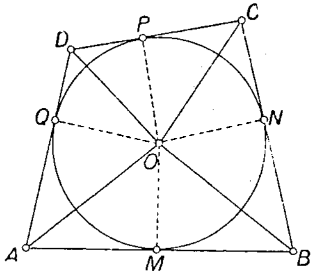
Сл. 341

Троугао AXC је правоугли, R је средина хипотенузе; према томе је $RX = RC$, $\sphericalangle RXC = \sphericalangle C$.

С друге стране, $\sphericalangle PRX = \sphericalangle RXC$, из чега следује: $\sphericalangle PRX = \sphericalangle C$.

Дакле, $\sphericalangle PQC + \sphericalangle PRX = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^0$. Како су углови PQC и PRX наспрамни углови четвороугла $QXRP$, то се око четвороугла $QXRP$ може описати круг.

93) Познато је (сл. 342) да је:

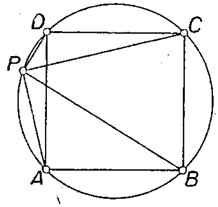


Сл. 342

$$\sphericalangle MOA = \sphericalangle QOA,$$
$$\sphericalangle MOB = \sphericalangle NOB,$$
$$\sphericalangle POC = \sphericalangle NOC,$$
$$\sphericalangle POD = \sphericalangle QOD.$$

Сабирањем ових једнакости добијамо: $\sphericalangle MOA + \sphericalangle MOB + \sphericalangle POC + \sphericalangle POD = \sphericalangle QOA + \sphericalangle NOB + \sphericalangle NOC + \sphericalangle QOD$, или: $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC$. Међутим је $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD + \sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC = 360^0$. Заменом из горње једнакости добија се: $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD + \sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 360^0$, или: $2\sphericalangle AOB + 2\sphericalangle COD = 360^0$, или $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180^0$.

94) Луци DC, CB и BA су једнаки (сл. 343); према томе је $\sphericalangle DPC = \sphericalangle CPB = \sphericalangle BPA$.



Сл. 343

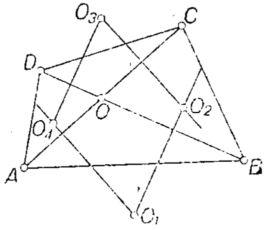
Са слике видимо да је:

$$\sphericalangle DPA = \sphericalangle DPC + \sphericalangle CPB + \sphericalangle BPA,$$

или:

$$\sphericalangle DPA = 3\sphericalangle DPC = 3\sphericalangle CPB = 3\sphericalangle BPA.$$

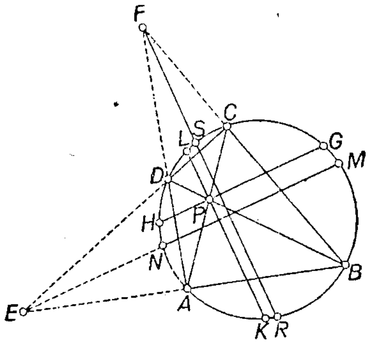
95) Нека су O_1, O_2, O_3, O_4 (сл 344) центри кругова описаних око троуглова AOB, BOC, COD, DOA. Познато је да се ти центри добијају у пресеку симетрала страна ових троуглова; отуда $O_2O_3 \perp OC$, $O_1O_4 \perp OA$, из чега следује $O_2O_3 \parallel O_1O_4$. Исто тако, $O_1O_2 \perp OB$, $O_3O_4 \perp OD$, а одатле $O_1O_2 \parallel O_3O_4$. Значи, слика $O_1O_2O_3O_4$ је паралелограм.



Сл. 344

96) Нека је дат тетивни четвороугао $ABCD$ (сл. 345), и нека се продушци његових наспрамних страна секу у тачкама E и F. Повуцимо симетрале EM и FR углова BEC и AFB и кроз пресек P дијагонала AC и BD датог четвороугла паралеле GH и KL тим симетралама. Треба доказати да су те паралеле симетрале углова BPC и DPC.

Како су луци између паралелних тетива једнаки, то је $GM = HN$. Међутим, угао са теменом ван круга мери се полуразликом лукова које обухватају краци тога угла.



Сл. 345

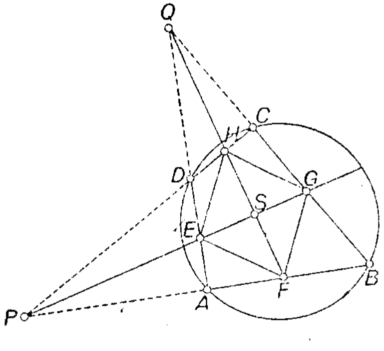
Тако $\sphericalangle BEM$ има меру $\frac{1}{2}$ $(\overset{\frown}{BM} - \overset{\frown}{AN})$, или $\sphericalangle BEM$ има меру $\frac{1}{2}$ $(\overset{\frown}{BG} - \overset{\frown}{AH})$; исто тако, $\sphericalangle CEM$ има меру $\frac{1}{2}$ $(\overset{\frown}{CM} - \overset{\frown}{DN})$, или $\sphericalangle CEM$ има меру $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CG} - \overset{\frown}{DH})$. Како је $\sphericalangle BEM = \sphericalangle CEM$, то је $\overset{\frown}{BG} - \overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{CG} - \overset{\frown}{DH}$, или $\overset{\frown}{BG} + \overset{\frown}{DH} = \overset{\frown}{CG} + \overset{\frown}{AH}$, што значи да је

$$\sphericalangle BPG = \sphericalangle CPG.$$

Исто тако се доказује да је KL симетрала угла DPC.

97) Нека је $ABCD$ дати тетивни четвороугао (сл. 346). Повуцимо симетрале углова које чине његове наспрамне стране. Оне секу стране четвороугла у тачкама E, F, G, H, а њихов пресек је у тачки S. Треба доказати да је четвороугао $EFGH$ ромб. То ћемо доказати кад докажемо да су дијагонале EG и FH узајамно нормалне и да је S њихова средина. У § 3, зад. 40, видели смо да је

$$\sphericalangle FSG = \frac{1}{2} (\sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC).$$

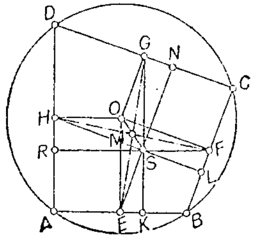


Сл. 346

Како су у тетивном четвороуглу наспрамни углови суплементни, следује да је угао FSG прав, што значи да је $PS \perp QS$. Отуда следује да су троугли FPH и EQG равнокраки и, стога, S средина дијагонала. Дакле?

Посматрањем углова троуглова CHQ и AFQ може се, исто тако, показати да је FPH равнокраки троугао. Како?

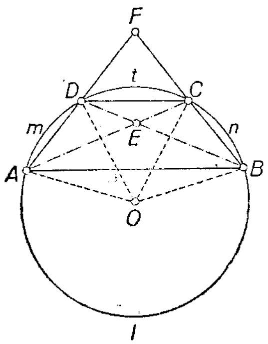
98) Нека је $ABCD$ дати тетивни четвороугао (сл. 347), E, F, G, H средине његових страна, O центар круга описаног око четвороугла, M тачка пресека средњих линија EG и FH.



Сл. 347

Спојмо O са M и продужимо ту дуж за $MS = MO$. Тада је четвороугао $ESGO$ паралелограм (јер се дијагонале OS и EG узајамно полове). Дакле, $GK \parallel OE$, и, према томе, $GK \perp AB$, јер је $OE \perp AB$. Кроз исту тачку S пролазе и остале нормале: $EN \perp CD$, $FR \perp AD$ и $HL \perp BC$, што се може показати на исти начин. Дакле?

99) а) Доказаћемо да је $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AED$ (сл. 348).



Сл. 348

Из $\triangle CDE$ произилази да је $\sphericalangle AED = \sphericalangle ACD + \sphericalangle BDC = 2\sphericalangle ACD$, јер је лук AmD једнак луку BnC. Међутим, $\sphericalangle AOD = 2\sphericalangle ACD$, што повлачи: $\sphericalangle AED = \sphericalangle AOD$. Дакле, тачке O и Eприпадају истом луку (једнаки перифериски углови!) круга који пролази кроз A и D.

б) $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOC$,

$\sphericalangle AFC = \sphericalangle ACB - \sphericalangle FAC$.

Сабирањем тих једнакости добијамо:

$$\sphericalangle AOC+\sphericalangle AFC=\sphericalangle AOD+\sphericalangle DOC+\sphericalangle ACB-\sphericalangle FAC.$$

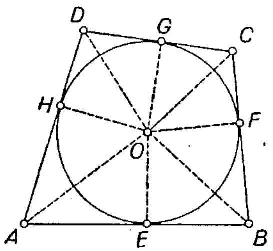
Како је $\sphericalangle ACB=\frac{1}{2}\sphericalangle AOB$ (централни угао који одговара луку ACB), $\sphericalangle FAC=\frac{1}{2}\sphericalangle DOC$, то заменом добијамо:

$$\sphericalangle AOC+\sphericalangle AFC=\sphericalangle AOD+\sphericalangle DOC+\frac{1}{2}\sphericalangle AOB-\frac{1}{2}\sphericalangle DOC$$

или:

$$\sphericalangle AOC+\sphericalangle AFC=\sphericalangle AOD+\frac{1}{2}\sphericalangle DOC+\frac{1}{2}\sphericalangle AOB=180^0,\text{ тј}$$

$\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle AFC$ су суплементни, и, према томе, четвороугао $AOCF$ је тетивни. Дакле?



Сл. 349

100) а) Претпоставимо да смо конструисали круг који додирује стране AB, BC и CD (сл. 349), а затим да смо из тачке A повукли тангенту AD_1 на тај круг. Тада је по директној теореми у четвороуглу $ABCD_1$:

$$AB+CD_1=BC+AD_1,$$

а по претпоставци:

$$AB+CD=BC+AD.$$

Одузимањем добијамо:

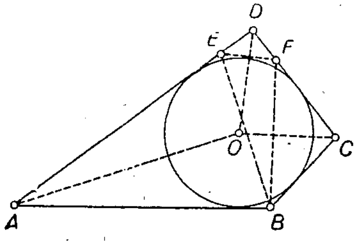
$$CD_1-CD=AD_1-AD,$$

или:

$$DD_1=AD-AD_1.$$

Према томе, произилази да је једна страна у троуглу ADD_1 једнака разлици других двеју, а то је немогуће. Отуда произилази да је $AD_1=AD$, и стога је четвороугао $ABCD$ тангентан.

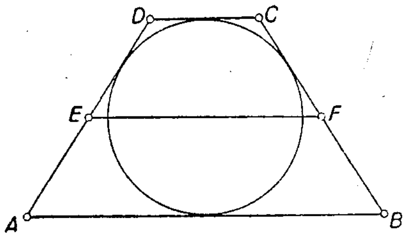
б) Ево директног доказа: Нека је $AB+CD=BC+AD$, и $AD>AB$ (сл. 350). Тада можемо написати: $AD-AB=CD-BC$. Пренесимо AB на AD, тако да је $AE=AB$, и BC на CD, тако да је $CF=CB$. Тако добијамо три равнокрака троугла, чије су симетрале углова на врховима A, C, D нормалне на основицама BE, BF и EF, које чине стране троугла BEF, и стога се секу у једној тачки O која је подједнако удаљена од страна четвороугла $ABCD$.



Сл. 350

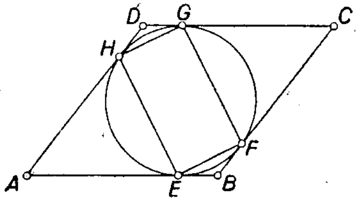
---

101) Нека је $ABCD$ дати равнокраки трапез (сл 351) у коме је средња линија EF једнака краку $AD=BC$. Треба доказати да је $AB+CD=AD+BC$. Заиста, $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$; а како је $EF=$ $=AD=BC$, можемо написати: $AB+DC=2EF=2AD=AD+BC$. Дакле?



Сл. 351

102) Нека је $ABCD$ дати ромб (сл. 352), и нека су E, F, G, H тачке у којима уписани круг додирује његове стране. Тврдимо да је четвороугао $EFGH$ правоугаоник.



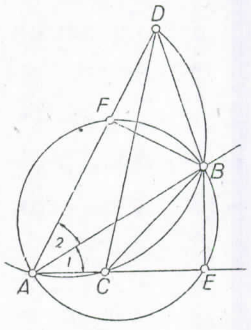
Сл. 352

Троугао AEH је равнокрак (зашто?), па је $\sphericalangle AEH=\frac{1}{2}(180^0-$ $-\sphericalangle A)$; исто тако је и троугао BEF равнокрак (зашто?), па је угао $FEB=$ $=\frac{1}{2}(180^0-\sphericalangle B)$. Сабирањем добијамо: $\sphericalangle AEH+\sphericalangle FEB=\frac{1}{2}(180^0-$ $-\sphericalangle A)+\frac{1}{2}(180^0-\sphericalangle B)=\frac{1}{2}(180^0-\sphericalangle A+180^0-\sphericalangle B)=\frac{1}{2}[360^0-(\sphericalangle A+$ $+\sphericalangle B)]=\frac{1}{2}(360^0-180^0)=90^0$. Према томе, и $\sphericalangle FEH=90^0$. Слично се доказује да су и остали углови тога четвороугла прави. Дакле?

Докажи теорему помоћу подударности троуглова AEH, CFG и DGH и BEF.

103) Нека је EAD дати угао и AB његова симетрала (сл. 353), и нека произвољан круг који пролази кроз тачке A и B сече један крак у тачки D а други у тачки C. Тврдимо да је збир $AC+AD=\text{const}$.

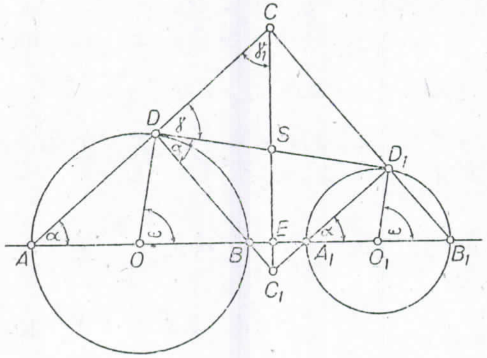
Конструишимо круг пречника AB. Нека су E и F његови пресеци са крацима угла. Како је $AE=AF$, треба доказати да је $AC+AD=2AF$.



Сл. 353

Ако из тачке B спустимо нормале на краке угла, њихова подножја падају у E и F (зашто?). Спојмо B са C и D и C са D. Добијамо подударне правоугле троугле BCE и BDF. Заиста, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle A_2$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle A_1$; а како је $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$, то је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC$, што значи да је троугао BCD равнокрак; то повлачи једнакост $BC = BD$. Према томе је и $CE = FD$. Дакле: $AC + AD = AC + AF + FD = AC + AF + CE = AE + AF = 2\,AF$,

104) Како је $OD \perp DD_1$ и $O_1D_1 \perp DD_1$, то је $OD \parallel O_1D_1$, и стога је $\sphericalangle BOD = \sphericalangle B_1O_1D_1 = \omega$ (сл. 354).



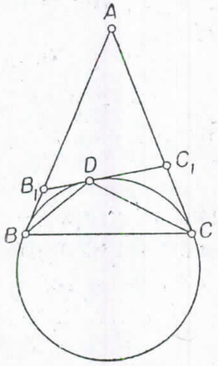
Сл. 354

Отуда следује: $\sphericalangle OAD = \frac{\omega}{2} = \alpha$; исто тако, $\sphericalangle O_1A_1D_1 = \frac{\omega}{2} = \alpha$, што значи да је $AD \parallel A_1D_1$. С друге стране, $\sphericalangle ADB = 90^0$, и $\sphericalangle A_1D_1B_1 = 90^0$, и, стога, $BD \perp AD$ и $B_1D_1 \perp A_1D_1$, што повлачи $BD \parallel B_1D_1$. Према томе, четвороугао $CD\,C_1D_1$ је правоугаоник.

Међутим, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BDD_1 = \alpha$ (зашто?), и $\sphericalangle SCD = \sphericalangle SDC = \gamma_1$. Како је $\alpha + \gamma_1 = 90^0$, то је $\sphericalangle EAC + \sphericalangle ECA = \alpha + \gamma_1 = 90^0$, па стога и $\sphericalangle CEA = 90^0$, што значи да је $CE \perp OO_1$. Дакле?

105) На B_1C_1 преносећемо $B_1D = B_1B$ (сл. 355). Тада је $C_1D = C_1C$. Доказаћемо да круг који пролази кроз тачке B, C и D додирује праве AC, AB и B_1C_1 у тим тачкама.

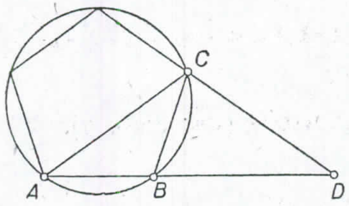
Права AC додириваће круг у тачки C, ако је $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CBD$. Како је CC_1D равнокрак троугао, то је $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \sphericalangle AC_1D$. Исто тако, у равнокраком троуглу BB_1D имамо да је $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2} \sphericalangle AB_1D$. Стога је $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC - \frac{1}{2} \sphericalangle AB_1D$. Треба, дакле, доказати да је $\frac{1}{2} \sphericalangle AC_1D = \sphericalangle ABC - \frac{1}{2} \sphericalangle AB_1D$, или: $\sphericalangle AB_1D + \sphericalangle AC_1D = 2 \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC \sphericalangle ACB$. Међутим, та једнакост постоји, јер су оба збира суплементи угла BAC.



Сл. 355

На исти начин доказује се да је и AB тангента тога круга. Да је и B_1C_1 тангента тога круга, произилази отуда што је $\sphericalangle C_1CD = \sphericalangle C_1DC$.

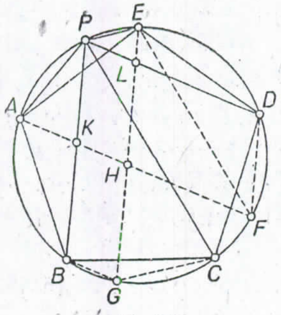
106) Сваки унутрашњи угао правилног петоугла износи 108^0, а спољашњи 72^0. Према томе је $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBD = 72^0$ (сл. 356). Стога је троугао CBD равнокрак и $\sphericalangle D = 36^0$. Исто тако је равнокрак и троугао ABC, и угао на врху $B = 108^0$, а углови на основици BAC и BCA износе по 36^0.



Сл. 356

Како углови BAC и CDA износе по 36^0, то је троугао CAD равнокрак, или $CD = CA$, што је требало доказати.

107) Повуцимо $AF \parallel PD$ и $EG \parallel PB$ (сл. 357). Тада је $PB + PD = PK + KB + PL + LD$. Треба доказати да је $PK = PA$, $PL = PE$, $KB + LD = PC$. Заиста, $\sphericalangle PAF$ има за меру $\frac{PEDF}{2}$, или $\frac{AED}{2}$, јер је $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{DF}$, што значи једну петину кружне линије. Међутим, $\sphericalangle AKP$ има за меру полузбир $\frac{AP + BCF}{2}$, или $\frac{BCD}{2}$, тј., исто тако, једну петину кружне линије. Дакле, $\sphericalangle PAK = \sphericalangle PKA$, што значи да је троугао PAK равнокрак, и, стога, $PK = PA$.



Сл. 357

С друге стране, $\sphericalangle PEG$ има за меру $\frac{PABG}{2}$, или $\frac{EAB}{2}$, јер је $BG = PE$, што опет чини једну петину кружне линије. Међутим, $\sphericalangle PLE$ има за меру полузбир $\frac{PE + GCD}{2}$, или $\frac{BCD}{2}$, а то је опет једна петина кружне линије. Отуда произилази да је $\sphericalangle PEL = \sphericalangle PLE$, што значи да је троугао PEL равнокрак, и то повлачи $PL = PE$.

Како је $EG \parallel PB$ и $AF \parallel PD$, на основу претходног произилази да су $BGHK$, $HLPK$ и $FDLH$ паралелограми. Према томе је $KB = HG$, $LD = HF$ и $HF = HE$, јер је троугао EFH равнокрак ($\sphericalangle EFA = \sphericalangle FEG$). Отуда следује да је $KB + LD = HG + HE = EG$. Међутим, $EG = PC$, јер је лук $EDCG$ једнак луку $CBAP$. Стога можемо написати:

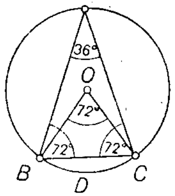
$$PB + PD = PK + KB + PL + LD = PA + PC + PE.$$

108) Како је $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 2\sphericalangle A$, то је $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 5\sphericalangle A = 180^0$ и, стога, $\sphericalangle A = 36^0$.

$\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC$ (зашто?), (сл. 358), тј.

$\sphericalangle BOC = 2 \cdot 36^0 = 72^0$.

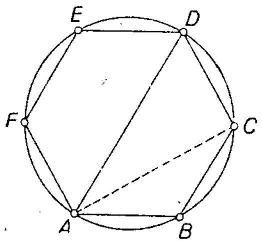
Како је $72^0 = \frac{360^0}{5}$, лук BDC је $\frac{1}{5}$ кружне линије, а тетива BC страна уписаног правилног петоугла.



Сл 358

109) Нека је $ABCDEF$ дати правилни шестоугао (сл. 359). Опишимо круг око овог шестоугла и повуцимо један пречник, например AD. Зна се да једнаким тетивама истога круга одговарају једнаки луци. Значи да су луци AB и CD једнаки. Ако повучемо тетиву AC, добијамо једнаке периферискe углове DAC и ACB. Како су ови углови по положају наизменични, то је $BC \parallel AD$.

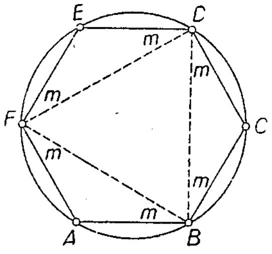
На исти начин бисмо доказали да је $FE \parallel AD$, па је, према томе, $BC \parallel FE$.



109а) Нека је $ABCDEF$ шестоугао чије су све стране једнаке и углови A, B, C, E једнаки (сл. 360).

Повуцимо дијагонале BD, DF и FB, па ћемо добити три равнокрака троугла ABF, CDB и EFD који су подударни, јер су им једнаки краци и углови између њих. Према томе, $BD = DF = FB$; затим, углови означени са m су једнаки. Из тога произилази да је троугао BDF равностран и да је $\sphericalangle D = \sphericalangle F = 2m + 60^0 = \sphericalangle B$.

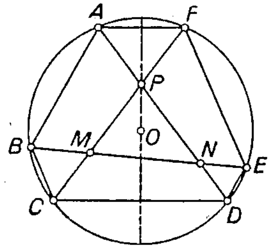
Према томе, шестоугао има све углове једнаке; а како су му и стране једнаке, он је правилан.



Сл. 360

110) Нека су M, N, P пресеци једнаких дијагонала (сл. 361). Слика $ACDF$ је равнокраки трапез, јер је $AF \parallel CD$, а дијагонале AD и CF су једнаке; према томе, симетрала угла APF је симетрала страна AF и CD. То исто би се могло рећи за слике $BCEF$ и $DEAB$.

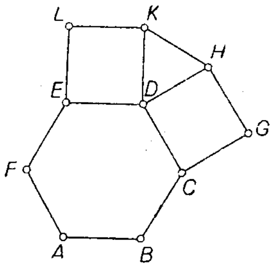
Ако са O обележимо пресек симетрала углова у троуглу MNP, тада се ова тачка O налази и у пресеку симетрала страна шестоугла, и, према томе, она је подједнако удаљена од његових темена.



Сл. 361

110а) Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао над чијим су странама конструисани квадрати (сл. 362). Да бисмо доказали да су 12 темена G, H, K, L.... ових квадрата, која се не поклапају са теменима шестоугла, темена правилног дванаестоугла, довољно је доказати да су стране и углови овог полигона једнаки. —

Троугао DHK је равностран: $DH = DK$, $\sphericalangle KDH = 360^0 - 90^0 - 90^0 - \sphericalangle EDC = 360^0 - 180^0 - 120^0 = 60^0$. Према томе је $KH = HD = HG$. Види се, дакле, да су све стране дванаестоугла једнаке.

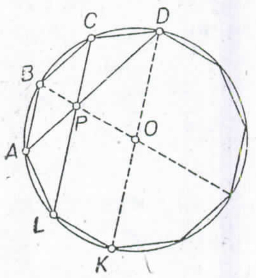


Сл. 362

Угао дванаестоугла, например $LKH = 90^0 + 60^0 = 150^0$, а сваки угао правилног дванаестоугла износи 150^0.

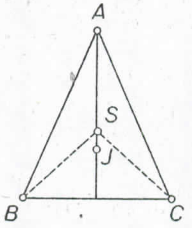
111) Треба доказати да је $AD = OD + AB$ (сл. 363). $\sphericalangle ABP = \sphericalangle APB$ (зашто?) $= \sphericalangle DPO = \sphericalangle DOB$ (зашто?). Према томе, троугли ABP и DOP су равнокраки, а отуда:

$$AD = AP + DP = AB + OD.$$



Сл. 363

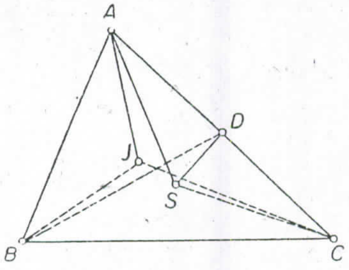
112) Ако је центар описаног круга на истој правој са теменом A и центром уписаног круга J (сл. 364), значи да је он на симетрали угла A. Како је $AS = BS = CS$, то су равнокраки троугли ABS и ACS подударни (зашто?), а из њихове подударности следује $AB = AC$.



Сл. 364

113) $\sphericalangle ASD = \frac{1}{2} \sphericalangle ASC = \sphericalangle B$ (средишни угао ASC и периферски угао B леже над истим луком; (сл. 365); према томе је $\sphericalangle SAD = 90^0 - \sphericalangle B$.

Знамо, међутим, да је $\sphericalangle JAD = \frac{1}{2} \sphericalangle A$; отуда: $\sphericalangle JAS = \frac{1}{2} \sphericalangle A - \sphericalangle SAD = \frac{1}{2} \sphericalangle A - (90^0 - \sphericalangle B) = \frac{1}{2} \sphericalangle A + \sphericalangle B - 90^0 = \frac{1}{2} \sphericalangle A + \sphericalangle B - \frac{1}{2} (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C) = \frac{1}{2} (\sphericalangle B - \sphericalangle C)$.



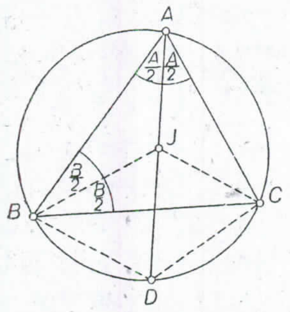
Сл. 365

114) Симетрала угла A полови лук BDC; луци BD и DC су једнаки и, према томе, тетиве BD и DC су једнаке (сл 366).

$$\sphericalangle DBC = \frac{1}{2} \sphericalangle A,$$

$$\sphericalangle DBJ = \frac{1}{2} \sphericalangle A + \frac{1}{2} \sphericalangle B.$$

Спољашњи угао троугла ABJ, угао $BJD = \frac{1}{2} \sphericalangle A + \frac{1}{2} \sphericalangle B$. Значи, $\sphericalangle DBJ = \sphericalangle BJD$, што показује да је троугао BDJ равнокрак и да је $DB = DJ = DC$, тј. D је центар круга који пролази кроз тачке B, J, C.

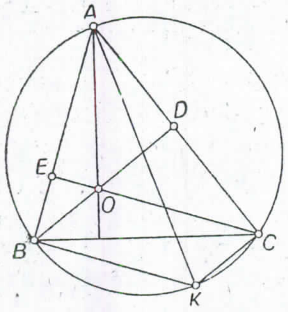


Сл. 366

115) Углови ACK и ABK су прави као углови у полукругу (сл. 367). Са слике видимо да је $\sphericalangle BCK = 90^0 - \sphericalangle BCD$.

У троуглу BCD је $\sphericalangle DBC = 90^0 - \sphericalangle BCD$; према томе је $\sphericalangle BCK = \sphericalangle DBC$. Како су ова два угла по положају наизменична, то је $CK \parallel BD$.

Исто тако, $\sphericalangle KBC = 90^0 - \sphericalangle ABC$. У троуглу BCE је $\sphericalangle BCE = 90^0 - \sphericalangle ABC$; према томе је $\sphericalangle KBC = \sphericalangle BCE$. Како су и ова два угла по положају наизменична, то је $KB \parallel CE$.

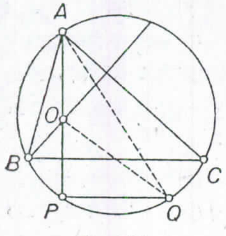


Сл. 367

Дакле, четвороугао $KCOB$ је паралелограм.

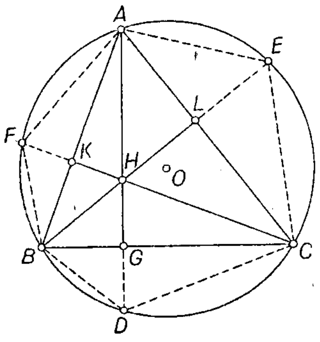
116) Види задатак 115. Дуж повучена из O кроз средину стране BC биће дијагонала паралелограма $BOCK$ и, према томе, мора проћи кроз тачку K.

117) Према задатку 116 дуж која из ортоцентра пролази кроз средину стране сече круг у крајњој тачки пречника. Из тога произилази $\sphericalangle APQ = 90^0$, или $AP \perp PQ$. Међутим је $AP \perp BC$, па, према томе, $PQ \parallel BC$ (сл. 368).



Сл. 368

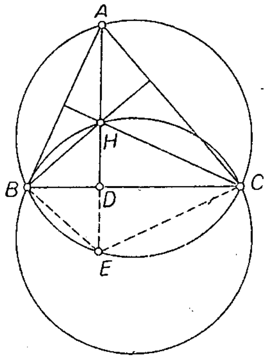
118) Нека је око троугла ABC описан круг (сл. 369). Његов центар је у O, а тачке D, E, F су пресеци продужака висина AG, BL, CK са кружном линијом. Тврдимо да је $AE=AF$, $BD=BF$ и $CD=CE$. Заиста, $\sphericalangle ABE=\sphericalangle ACF$, јер су ти углови комплементи угла BAC. Како једнаким перифериским угловима одговарају једнаки луци, то је $AE=AF$. Истим расуђивањем долазимо до закључка да је $BD=BF$ и $CD=CE$.



Сл 369

Како је $\sphericalangle ABF=\sphericalangle ABE$, јер је $\sphericalangle ABF=\sphericalangle ACF$ (перифериски углови над истим луком) и $\sphericalangle ACF=\sphericalangle ABE$, то је BA симетрала угла EBF. Због тога што је $BA\perp CF$, симетрала BA је и симетрала дужи HF, па је $HK=KF$, где је K подножје нормале BA на CF и H ортоцентар итд.

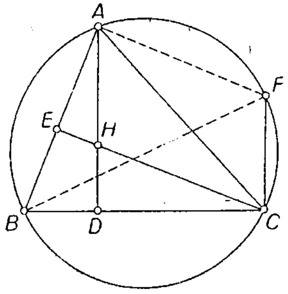
119) Нека је ABC дати троугао (сл. 370) и H његов ортоцентар. Опишимо круг око троугла ABC и круг који пролази кроз тачке B, C, H. Продужимо висину AD до пресека E са описаном кружном линијом око троугла ABC. Посматрајмо троугле BCH и BCE. Они су подударни, јер је $DH=DE$ (види зад. 118). Како је, међутим, круг ABC уједно и круг описан око троугла BCE, он има исти полупречник као и круг описан око троугла BCH, који је подударан са троуглом BCE. Итд.



Сл. 370

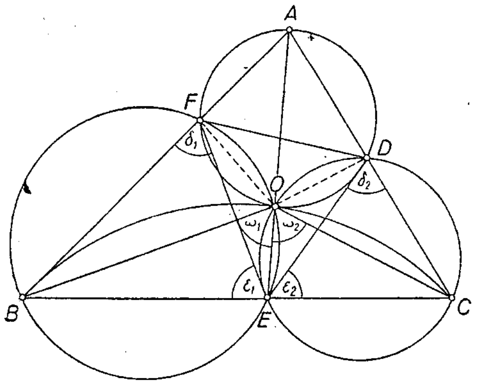
120) Нека је троугао ABC уписан у датом кругу (сл. 371). У крајњој тачки C његове стране BC повуцимо нормалу CF на ту страну и повуцимо висину AD. Нека је H ортоцентар троугла. Тврдимо да је $CF\parallel AH$.

Спојимо F са A и B. Тада је FB пречник круга (зашто?) и FAB прав угао (зашто?). Како је $FC\parallel AD$ (зашто?) и $FA\parallel CE$ (зашто?), то је четвороугао $CFAH$ паралелограм. Дакле?



Сл. 371

121) а) Нека је O тачка пресека кругова што пролазе кроз темена A и B (сл. 372). Треба доказати да ће и круг који пролази кроз теме C исто тако проћи кроз тачку O.

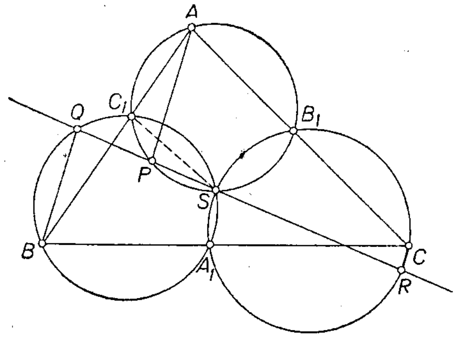


Сл. 372

Спојимо међусобно тачке D, E и F; добијамо троугао DEF; спојимо, затим, тачке D, E и F са тачком O; добијамо четвороугле $ADOF$, $BEOF$ и $CDOE$. Како су четвороугли $ADOF$ и $BEOF$ тетивни, то су углови A и DOF, затим B и EOF суплементни. Међутим, збир углова A, B, C троугла ABC и углова око O чини заједно $6R$, а збир углова A, B и њихових суплемената DOF, EOF чини $4R$. То значи да угао C и његов наспрамни угао DOE износе $2R$. Према томе, и четвороугао $CDOE$ је тетивни. Дакле, и трећи круг пролази кроз тачку O.

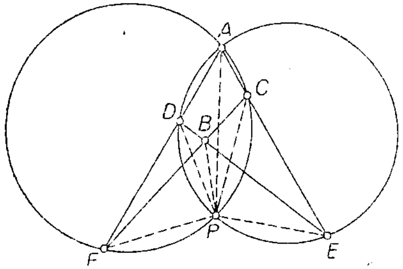
б) Доказаћемо да је $\sphericalangle BOC=\sphericalangle A+\sphericalangle E$. Заиста, $\sphericalangle BOC=$ $=\omega_1+\omega_2$, $\omega_1=\delta_1$ и $\omega_2=\delta_2$. Према томе, $\sphericalangle BOC=\delta_1+\delta_2$. Међутим је $\delta_1=180^0-\sphericalangle B-\varepsilon_1$, $\delta_2=180^0-\sphericalangle C-\varepsilon_2$. Дакле: $\sphericalangle BOC=180^0-$ $-\sphericalangle B-\varepsilon_1+180^0-\sphericalangle C-\varepsilon_2=180^0-(\sphericalangle B+\sphericalangle C)+180^0-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=$ $=\sphericalangle A+\sphericalangle E$. Итд.

122) Како је $\sphericalangle PSC_1=\sphericalangle PAC_1$ и $\sphericalangle QSC_1=\sphericalangle QBC_1$, а, с друге стране, $\sphericalangle PAC_1=\sphericalangle QBC_1$, то је $\sphericalangle PSC_1=\sphericalangle QSC_1$ (сл. 373). Дакле, праве PS и QS поклапају се. Исто тако се може показати да се поклапају и праве PS и SR. Дакле?



Сл. 373

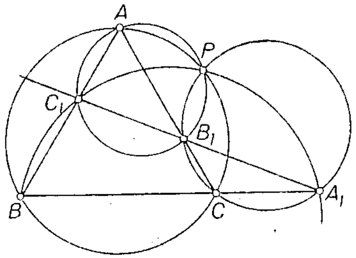
123) Нека четири праве (сл. 374), од којих се две по две секу, образују ове троуглове; ACF, ADE, BCE и BDF. Опишимо круг око троуглова ACF и ADE. Њихов пресек је P. Спојмо ту тачку са свих 6 пресека правих. Треба доказати да и кругови описани око троуглова BDF и BCE исто тако пролазе кроз тачку P. У том случају четвороугао $BCEP$ мора да је тетивни, или, што је исто, да је $\sphericalangle BCP = \sphericalangle BEP$.



Сл. 374

Како је $\sphericalangle BCP = \sphericalangle FCP = \sphericalangle PAF$, а, с друге стране, $\sphericalangle BEP = \sphericalangle DEP = \sphericalangle PAF$, то је $\sphericalangle BCP = \sphericalangle BEP$, што значи да и круг описан око троугла BCE пролази кроз тачку P. Итд.

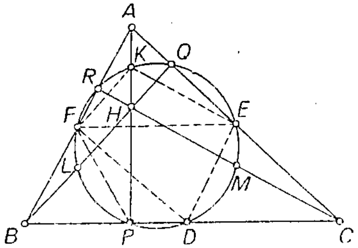
124) Ако стране датога троугла и праву која их сече посматрамо као четири праве од којих се две по две секу, онда видимо да се решење овога задатка своди на решење претходног (сл. 375).



Сл. 375

125) Нека је дат троугао ABC, и нека су тачке D, E, F средине његових страна (сл. 376). Повуцимо висине AP, BQ, CR датог троугла. Нека је H ортоцентар и P, Q, R подножја висина. Затим, нека су K, L, M средине дужи које спајају темена троугла са ортоцентром. Тврдимо да тачке D, E, F, P, Q, R, K, L, M леже на истој кружној линији.

Конструишимо круг кроз тачке D, E, F. Сад треба доказати да та кружна линија пролази, рецимо, кроз тачке P и K.

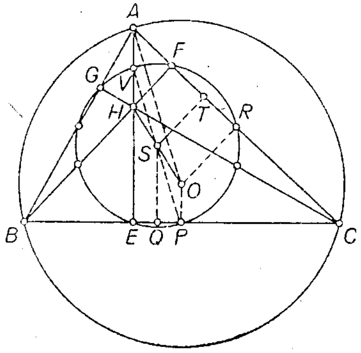


Сл. 376

Како је $FE \| BC$ и $DE \| AB$, затим $FE = \frac{1}{2} BC = BD$ и $DE = = \frac{1}{2} AB = BF$, то је $BDEF$ паралелограм и, стога, $\sphericalangle FED = \sphericalangle DBF$. С друге стране, $FP = \frac{1}{2} AB = BF$, па је $\triangle BFP$ равнокрак и, стога, $\sphericalangle BPF = \sphericalangle PBF = \sphericalangle DBF = \sphericalangle FED$. То значи да $\sphericalangle FED + \sphericalangle FPD = = 180^0$, или да је четвороугао $EFPD$ тетивни. Дакле, тачка P налази се на кружној линији која пролази кроз тачке D, E, F. Исто тако се доказује да и тачке Q и R леже на тој линији.

Остаје још да докажемо да и тачка K лежи на тој истој кружној линији. Спојмо F са K и E са K. Тада је $FK | BQ$. Како је $FD \| AC$, то је $\sphericalangle DFK = \sphericalangle BQC = 90^0$. С друге стране, $EK \| CR$ и $DE \| AB$, па је $\sphericalangle DEK = \sphericalangle CRA = 90^0$. Отуда закључујемо да је четвороугао $DEKF$ тетивни, што значи да тачка K лежи на посматраној кружној линији. Итд.

126) Како симетрала тетиве круга пролази кроз његов центар, јасно је да ће нормале подигнуте у тачкама Q и T, срединама тетива EP и FR круга девет тачака (види зад. 125) проћи кроз центар S тога круга. Како је O центар круга описаног око датог троугла ABC и H ортоцентар (сл. 377), то ће се тачка S наћи на средини дужи HO, јер су QS и TS средње линије трапеза $EPOH$ и $FHOR$. Права која спаја ортоцентар са центром круга описаног око троугла зове се Ојлерова права.

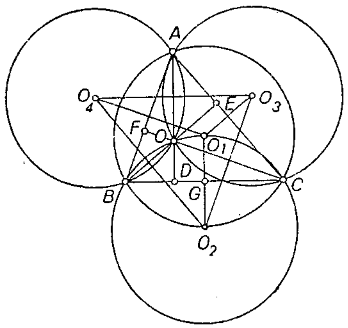


Сл. 377

Како је $SV = \frac{1}{2} AO$, јер је SV средња линија троугла AHO, то је полупречник круга девет тачака једнак половини полупречника описаног круга.

127) Види сл. 377 и зад. 126 и 125. Како је $POAV$ паралелограм (зашто?), то је $PO = AV$.

128) AO је заједничка тетива кругова O_3 и O_4 (сл. 378); зато је $O_3O_4 \perp AD$; али је и $BC \perp AD$, према томе, $O_3O_4 \parallel BC$.

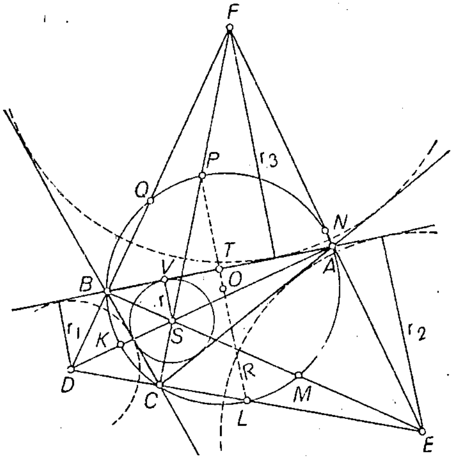


Сл. 378

Аналогно томе може се доказати да је $O_2O_3 \parallel AB$, $O_2O_4 \parallel AC$. Значи, углови троугла $O_2O_3O_4$ једнаки су угловима троугла ABC.

Према задатку 118 $O_2G = O_1G$, а према задатку 127 $O_1G = \frac{AO}{2}$, тј. раздаљина темена O_2 од стране O_4O_3 једнака је раздаљини паралела O_4O_3 и BC повећаној за O_2G, а раздаљина темена A од стране BC једнака је раздаљини паралела O_4O_3 и BC повећаној за $\frac{AO}{2}$, или O_2G. Значи, висине троуглова ABC и $O_2O_3O_4$ су једнаке, итд.

129) Нека је дат троугао ABC, и нека су S, D, E, F четири центра уписаних кругова. Бисектрисе AD, BE, CF унутрашњих углова (сл. 379) троугла стоје нормално на бисектрисама одговарајућих спољашњих углова, тј. на AE, BD, CD. Према томе, оне су висине троугла DEF. Стога је круг описан око троугла ABC Ојлеров круг (види зад. 125) троугла DEF. Он, дакле, пролази кроз тачку L, средину дужи DE, и кроз тачку P, средину дужи FS итд.



Сл. 379

130) Ако на сл. 379 полупречник уписаног круга у троуглу ABC означимо са r, описаног са R, а остале уписане са r_1, r_2, r_3, добијамо:

$$PT = \frac{r_3 - r}{2},\ LT = \frac{r_1 + r_2}{2},$$

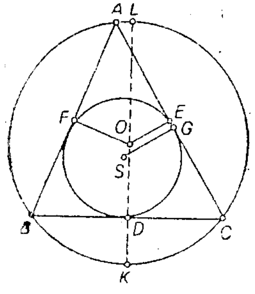
а отуда:

$$LP = LT + PT = 2R = \frac{r_1 + r_2 + r_3 - r}{2},$$

и, најзад:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r + 4R.$$

131) Нека је ABC дати троугао са центром описаног круга у O и полупречником $R = OK$ и центром уписаног круга у S и полупречника $r = SG$, и нека су растојања центра описаног круга од страна троугла: $OD = d_1$; $OE = d_2$, $OF = d_3$ (сл. 380). Тврдимо да је



Сл. 380

$$d_1 + d_2 + d_3 = R + r.$$

Ако са r_1, r_2, r_3 обележимо редом полупречнике кругова спопља уписаних у троуглу ABC, тада, према зад. 130, можемо написати:

$$KD = \frac{r_1 - r}{2};$$

дакле:

$$d_1 = R - \frac{r_1 - r}{2},$$

одакле је

$$2R = 2d_1 + r_1 - r;$$

затим, на исти начин:

$$2R = 2d_2 + r_2 - r$$

и:

$$2R = 2d_3 + r_3 - r.$$

Збир та три израза даје:

$$6R = 2(d_1 + d_2 + d_3) + (r_1 + r_2 + r_3) - 3r.$$

Међутим, у претходној теореми видели смо да је $r_1 + r_2 + r_3 = r + 4R$, па је

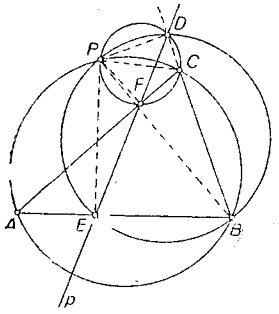
$$6R = 2(d_1 + d_2 + d_3) + 4R - 2r,$$

или:

$$d_1 + d_2 + d_3 = R + r.$$

Изведи образац за случај тупоуглог троугла.

132) Нека је око троугла ABC описана кружна линија, и нека су из неке произвољне тачке P спуштене нормале PD, PE, PF на стране BC, AB, AC троугла (сл. 381). Тврдимо да подножја D, E, F нормала леже на једној правој p.

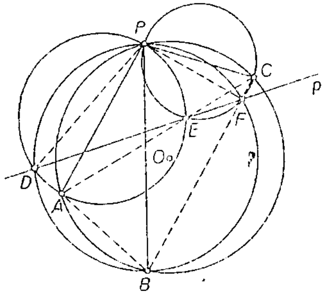


Сл. 381

Како су $PDFC$ и $PEBD$ тетивни четвороугли, то је $\sphericalangle PDF = \sphericalangle PCF = \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBA = \sphericalangle PBE = \sphericalangle PDE$.

Дакле, $\sphericalangle PDF = \sphericalangle PDE$, што значи да су тачке D, F, E на правој p. Та права зове се Симсонова права.

133) Нека су из произвољне тачке P кружне линије са центром у O повучене три тетиве PA, PB, PC и над њима као пречницима описани кругови (сл. 382). Ако су D, E, F пресеци тих кругова, тврдимо да они леже на једној правој p.

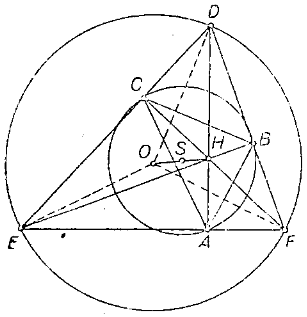


Сл. 382

Спојмо крајње тачке A, B, C тих тетива. Добијамо троугао ABC. Спустимо из P нормалу на страну BC. Њено подножје лежи на кружној линији чији је пречник тетива PC и тетива PB, тј. у тачки F, пресеку та два круга. Сама нормала се поклапа са заједничком тетивом та два круга. Исто важи и за тачке D и E. Међутим, према Симсоновој теореми (види зад. 132) подножја нормала спуштених ма из које тачке кружне линије на стране троугла око кога је та линија описана леже на једној правој. Дакле?

134) Нека је дат троугао ABC (сл. 383). Симетрале унутрашњих углова секу се у тачки H, центру уписаног круга. Симетрале EAF, FBD и ECD спољашњих углова троугла ABC секу се две по две у тачкама D, E, F, центрима споља уписаних кругова. Кроз те тачке пролазе симетрале унутрашњих углова троугла ABC. Нормале спуштене из D, E, F на стране BC, AC, AB троугла ABC секу се у тачки O, центру описаног круга

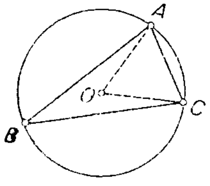
око троугла DEF (види зад. 70). Како су симетрале унутрашњих углова троугла ABC уједно висине троугла DEF (види зад. 68) и пресек H тих симетрала уједно ортоцентар троугла DEF, то се центар круга описаног око троугла ABC налази на средини дужи OH, у тачки S, јер је круг који пролази кроз подножја висина троугла Ојлеров круг девет тачака. Према томе, те три тачке O, S, H леже на истој правој (Ојлерова права; види зад. 126) и центар S круга описаног око троугла ABC има једнако растојање од тачака O и H.



Сл. 383

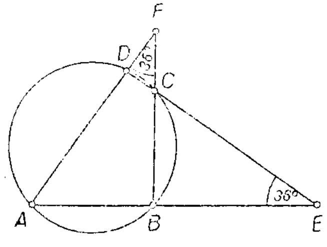
б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

135) Ако је $\sphericalangle ABC = 30^0$ (сл. 384), тада је средишни угао над истим луком $AOC = 60^0$. Према томе, равнокраки троугао AOC је равностран и страна $AC = r$.



Сл. 384

136) У троуглу AED (сл. 385):



Сл. 385

$$\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^0 - 36^0 = 144^0,$$

у троуглу ABF:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^0 - 36^0 = 144^0,$$

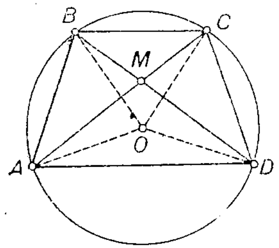
у тетивном четвороуглу $ABCD$:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^0,$$

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^0.$$

Решењем ове четири једначине, добија се: $\sphericalangle A = 54^0$, $\sphericalangle B = 90^0$, $\sphericalangle C = 126^0$, $\sphericalangle D = 90^0$.

137) Према услову задатка $AB = BC = CD$; према томе, луци AB, BC, CD су једнаки.



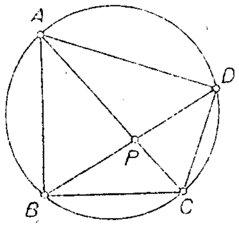
Сл. 386

Троугао AOB је равнокрак (сл. 386), $\sphericalangle AOB = \alpha$; $\sphericalangle ABO = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$. Исто важи и за троугао BOC. Из тога се закључује: $\sphericalangle ABC = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = 180^0 - \alpha$. Трапез је равнокрак, и $\sphericalangle BCD = 180^0 - \alpha$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = \alpha$.

Угао између дијагонала $AMD = \frac{\sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC}{2} = $

$$= \frac{360^0 - 3\alpha + \alpha}{2} = 180 - \alpha.$$

138) Четвороугао $ABCD$ има два наспрамна угла права; зато се око њега може описати круг (сл. 387).



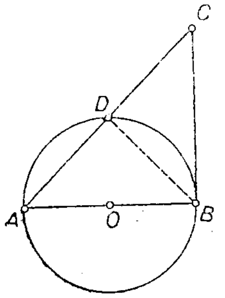
Сл. 387

У правоуглом троуглу ABC оштар угао код A је, по претпоставци, 40^0; зато је угао $BCA = 50^0$.

У правоуглом троуглу ACD оштар угао код A је 30^0 и лежи над луком CD. Над истим луком лежи и угао DBC и, према томе, $\sphericalangle DBC = 30^0$.

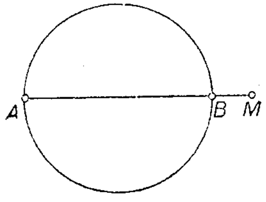
У троуглу BCP, један угао је 50^0, други 30^0, а трећи $BPC = 100^0$. Према томе, оштар угао између дијагонала $DPC = 80^0$.

139) Нека тачка D на кругу полови отсечак сечице AC (сл. 388). Спојмо D са B. У правоуглом троуглу ABC дуж BD је тежишна линија, и зато је $DB = AD = DC$. Значи, троугао ABD је равнокрако-правоугли. Према томе је $\sphericalangle DAB = 45^0$.



Сл. 388

140) Познато је да се највеће и најмање растојање тачке од круга добија ако се из тачке повуче права кроз центар круга, до пресека са кругом.

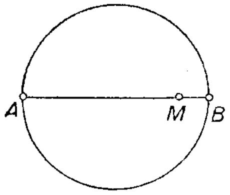


Сл. 389

Разликујмо два случаја:

а) тачка је ван круга.

Највеће растојање $AM = a$, најмање $BM = b$ (сл. 389). Јасно је да је $AB = 2r = AM - BM = a - b$; отуда је $r = \frac{a - b}{2}$.



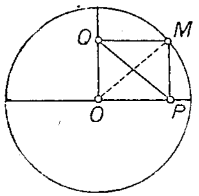
Сл. 390

б) Тачка је у кругу (сл. 390).

$$2r = AM + MB = a + b,$$

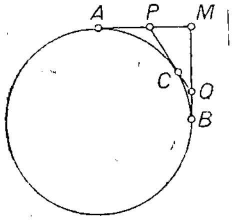
отуда је $r = \frac{a + b}{2}$.

141) Тачка M је произвољна, али нормале из ње спуштене на пречнике са отсечцима пречника образују правоугаоник чија је једна дијагонала раздаљина пројекција, а друга дијагонала полупречник круга (сл. 391). Према томе, ма где се на кругу налазила тачка M, раздаљина њених пројекција биће једнака полупречнику круга.



Сл. 391

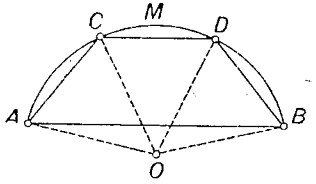
142) $PA = PC$, $QB = QC$ (сл. 392).



Сл 392

Обим троугла: $PQM = PQ + QM + MP = PC + QC + QM + MP = PA + QB + QM + MP = AM + BM = 2r$.

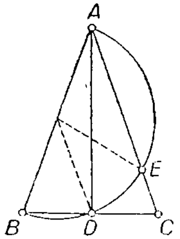
143) Луци AC и BD су једнаки, јер леже између паралелних тетива (сл. 393). Луци AC и CD су једнаки, јер су по претпоставци тетиве AC и CD једнаке. Према томе, једнаки су луци AC, CD, DB.



Сл. 393

$\sphericalangle CAB$ је перифериски угао над луком CDB; зато је средишни угао AOC једнак половини угла COB, тј. износи 51°20′. Значи, угао $AOB = 154°$ или лук AMB је 154°.

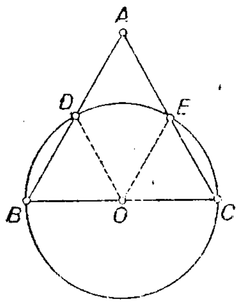
144) Угао BDA је прав као угао у полукругу (сл. 394); отуда је $AD \perp BC$, тј: AD је висина повучена из врха, која полови угао на врху. Према томе, перифериски угао BAD износи 20°, а лук над којим лежи 40°. Како је перифериски угао $DAE = 20°$, то и лук DE износи 40°, а лук AE 100°.



Сл. 394

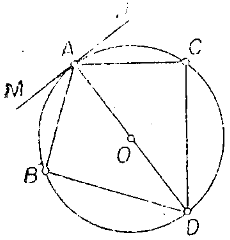
145) Равнокраки троугли BDO и CEO имају по један угао на основици 60° (сл. 395), па су због тога равнострани и међу собом подударни, јер је $BO = DO = EO = CO$. Отуда даље следује да је $BD = DA = AE = EC$, што значи да су стране AB и AC преполовљене тачкама D и E, или да круг полови стране троугла.

Сем тога, $\sphericalangle BOD = \sphericalangle COE = 60° = \sphericalangle DOE$, што показује да стране троугла деле круг на три једнака дела.



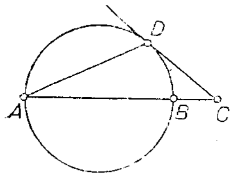
Сл. 395

146) Тетиве AB и AC су једнаке; према томе су и луци AB и AC једнаки (сл. 396). Ако повучемо пречник AD, луци BD и DC су једнаки и сваки од њих износи 106°51′. Из тога се закључује да луци BA и AC износе по 73° 9′, а перифериски углови над њима по 36°34′30″. Према томе, углови MAB и NAC су једнаки и износе по 36°34′30″.



Сл. 396

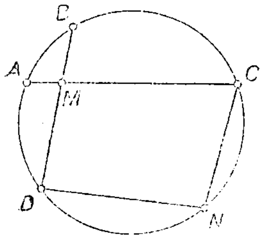
147) Угао ADC једнак је сваком перифериском углу над тетивом AD, или над луком ABD, тј. лук ABD износи 228°50′ (сл. 397). Како је лук AB 180°, то је лук $BD = 48°50′$.



Сл. 397

148) Угао код M одређен је половином збира лукова DNC и AB, (сл. 398), а угао N је одређен половином лука $DABC$ или половином разлике између целе кружне линије и лука DNC. Како су, по претпоставци, углови код M и N једнаки, то се као резултат добија да је лук

$$DNC = 180° - \frac{m°}{2}.$$



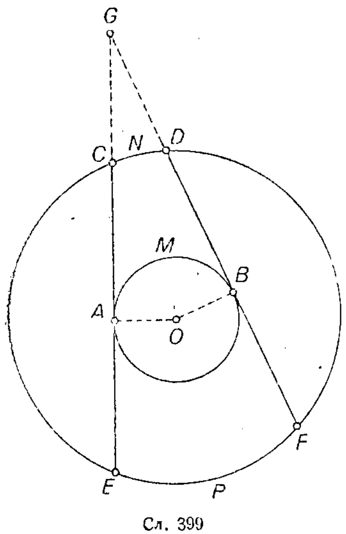
Сл. 398

149) Спојмо додирне тачке A и B са центром унутрашњег круга O, и продужимо тетиве CE и DF до пресека G (сл. 399). У четвороуглу $AOBG$ два су угла права, $\sphericalangle AOB = 154°$; према томе, угао код G износи 26°.

За угао G знамо да је одређен половином разлике лукова EPF и CND израженим степенима. Отуда је

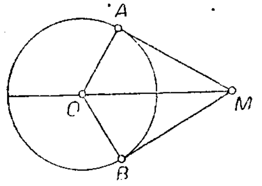
$$26° = \frac{\widehat{EPF} - \widehat{CND}}{2};$$

из ове једначине добијамо да лук CND износи 18°.



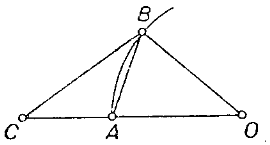
Сл. 399

150) Правоугли троугли OMA и OMB имају катете OA и OB једнаке половини хипотенузе OM (сл. 400). Према томе, углови OMA и OMB износе по 30°, или угао између тангената $AMB = 60°$.



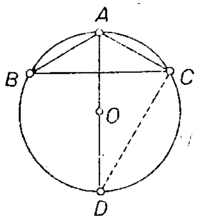
Сл. 400

151) Троугли ABO и BCA су равнокраки (сл. 401). $\sphericalangle AOB = 40°24'$, а $\sphericalangle BAO = 69°48'$ је спољашњи угао на врху равнокраког троугла BCA. Према томе је $\sphericalangle ACB = 34°54'$.



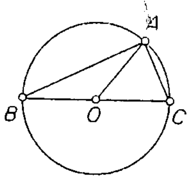
Сл. 401

152) Висина из врха равнокраког троугла пролази кроз центар описаног круга и полови угао на врху. Према томе је троугао ACD правоугли (сл. 402), његов угао $CAD = 60°$, мања катета AC је половина хипотенузе, тј. пречник је 4 cm.



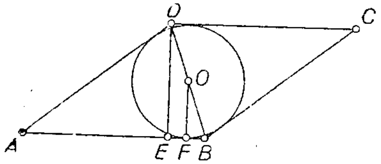
Сл. 402

153) Ако је $\sphericalangle ABC = 25°$, угао AOC је 50°, а угао $AOB = 130°$. Према томе, катете из центра описаног круга виде се једна под углом од 50°, а друга под углом од 130° (сл. 403).



Сл. 403

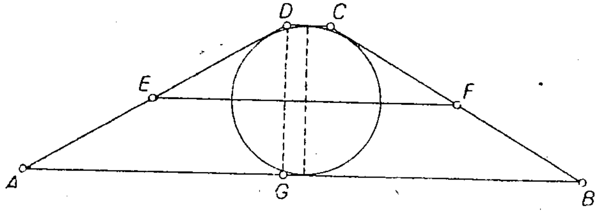
154) Ако из темена тупог угла D спустимо нормалу на страну AB, добијамо правоугли троугао AED (сл. 404), у коме је мања катета DE једнака половини хипотенузе AD; према томе је $DE = 4$ cm.



Сл. 404

У троуглу EBD из центра уписаног круга, који се налази на средини дијагонале BD, повуцимо $OF \parallel ED$, или $OF \perp BE$; OF ће бити половина стране DE. Значи, полупречник уписаног круга $OF = 2$ cm.

155) Знамо да је $EF = \frac{AB + DC}{2}$ (сл. 405). Исто тако је познато да је $AD = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2}$. Према томе је $AD = 1$ m.



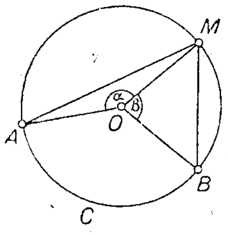
Сл. 405

У правоуглом троуглу ADG (DG је једнако пречнику уписаног круга) DG је половина хипотенузе AD; дакле, $DG = 50$ cm. Према томе, полупречник уписаног круга је 25 cm.

156) Угао који захватају тетиве је перифериски угао над луком ACB (сл. 406), па је, према томе, половина средишног угла AOB.

Угао $AOB = 360° - (\alpha + \beta)$; према томе, угао између тетива је

$$180° - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$



Сл. 406

157) Зна се да је за пресек два круга потребно да средишна раздаљина буде мања од збира и већа од разлике полупречника.

Ако са c означимо раздаљину средишта трећег круга од заједничког средишта прва два круга, можемо написати:

$$1 < c < 3$$
$$2 < c < 6.$$

Да би ове неједначине постојале једновремено, мора бити

$$2 < c < 3.$$

Треба, дакле, да се центар трећег круга налази у кружном прстену ограниченом круговима полупречника 2 cm и 3 cm, а који су концентрични са датим концентричним круговима.

158) Ако круг P додирује круг M изнутра, њихова средишна раздаљина је $c = 3\text{ cm} - r$. Али круг P може додиривати круг N споља и изнутра.

а) Ако се кругови N и P додирују споља, тада је

$$c = 1\text{ cm} + r.$$

Сабирањем ове једначине са првом добијамо: $2c = 4$ cm, или: $c = 2$ cm. Замењујући у једној од горњих једначина имамо $r = 1$ cm.

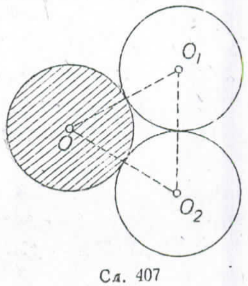
б) Ако се кругови N и P додирују изнутра, очевидно је да N додирује P изнутра, и тада је $c = r - 1$ cm. Решавањем ове и прве једначине добијамо: $2c = 2$ cm, или: $c = 1$ cm. Заменом у једначини $c = r - 1$ cm добија се: $r = 2$ cm.

Дакле: а) $c = 2$ cm, $r = 1$ cm;

б) $c = 1$ cm, $r = 2$ cm.

159) Посматрајмо два узастопна бела котура, и спојмо њихове центре O_1 и O_2 са центром O црног котура (сл. 407). Стране троугла OO_1O_2 пролазе кроз додирне тачке ових котурова.

Троугао OO_1O_2 је равностран и угао $O_1OO_2 = 60^0$. Дакле, $\frac{360^0}{60^0} = 6$, тј. број тражених белих котурова је 6.



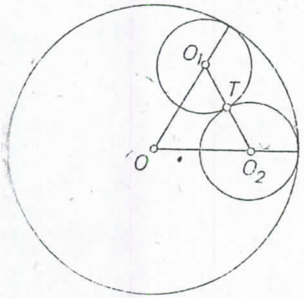
Сл. 407

160) Нека су O_1 и O_2 центри два узастопна котура који додирују дати круг изнутра и додирују се међу собом (сл. 408).

$$OO_1 = r - \frac{r}{3} = \frac{2r}{3}$$

$$OO_2 = \frac{2r}{3}.$$

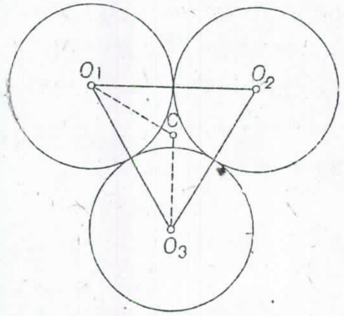
Дуж O_1O_2 пролази кроз додирну тачку T два котура, па је и $O_1O_2 = \frac{2r}{3}$. Троугао OO_2O_1 је равностран, због чега је угао $O_1OO_2 = 60^0$.



Сл. 408

Према томе, како је $\frac{360^0}{60^0} = 6$, може се поставити 6 котурова, да сви додирују круг O изнутра и да сваки додирује по један котур стављен пре њега и један после њега.

161) Нека су O_1, O_2, O_3 центри три дата круга, а r њихов полупречник (сл. 409). Центри ових кругова су темена равностраног троугла стране $2r$. Ако је C центар круга који три дата круга додирују споља, а r_1 његов полупречник, онда је $CO_1 = r + r_1$, $CO_2 = r + r_1$, $CO_3 = r + r_1$. Према томе је $CO_1 = CO_2 = CO_3$, а тачка C је центар круга описаног око троугла $O_1O_2O_3$. Из слике се види да је $r_1 = CO_1 - r$; r_1 је, дакле, разлика полупречника круга описаног око троугла $O_1O_2O_3$ и половине његове стране.

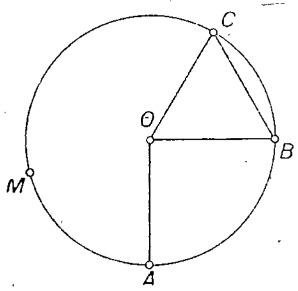


Сл. 409

Ако је C средиште круга који три дата круга додирују изнутра, а r_2 његов полупречник, онда је: $CO_1 = r_2 - r$, $CO_2 = r_2 - r$, $CO_3 = r_2 - r$; према томе је $CO_1 = CO_2 = CO_3$, из чега видимо да се центар C поклапа са центром круга који три дата круга додирује споља. Из слике видимо да је $r_2 = CO_1 + r$, тј. r_2 је једнако збиру полупречника круга описаног око троугла $O_1O_2O_3$ и полупречника три дата круга.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

162) Можемо написати: $75^0 = \frac{150^0}{2} = \frac{90^0 + 60^0}{2}$.



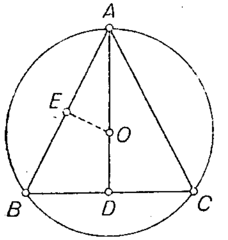
Сл. 410

Нацртајмо један круг (сл. 410) и повуцимо два нормална полупречника, затим тетиву AC једнаку полупречнику. Како је троугао COB равностран, то је угао $COB = 60^0$, а угао $COA = 150^0$. Ако тачке A и C спојимо ма са којом тачком M на луку CMA, на коме није тачка B, добићемо угао од 75^0, јер је угао CMA као перифериски угао, над луком над којим лежи централни угао $COA = 150^0$, половина централног угла.

Конструкција угла од 75^0 може се извести и као конструкција угла израженог збиром $45^0 + 30^0$.

163) а) Треба средину основице D спојити са центром круга O и на DO повући нормалу BDC (сл. 411), итд.

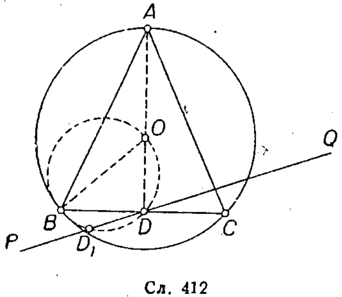
б) Ако је E средина крака, треба E спојити са центром O, на EO повући нормалу AEB, затим повући пречник из A, итд.



Сл. 411

164) Над BO као над пречником опише се круг (сл. 412); где он сече праву PQ, ту ће бити средина D основице ($\angle BDO = 90^0$); затим се повуку BDC и DOA, итд.

Тачка D_1 омогућава још једно решење.



Сл. 412

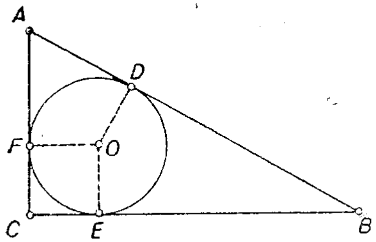
165) а) Хипотенуза је $2R$, а збир катета $2R+2r$, па се задатак своди на § 2, зад. 133.

Покажимо да је збир катета $2R+2r$ (сл. 413).

$$OE = OF = r, \ CE = CF = r.$$

$$AD = AF = AC - CF = AC - r,$$

$$BD = BE = BC - CE = BC - r.$$



Сл. 413

Сабирањем добијамо:

$$AD + BD = AC + BC - 2r, \text{ или:}$$

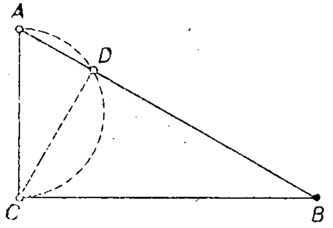
$$AB = 2R = AC + BC - 2r, \text{ или } AC + BC = 2R + 2r.$$

б) Између кракова правог угла ACB опише се круг датим полупречником r тако да додирује краке. Нека су OE и OF додирни полупречници. Затим се нацрта средишни угао EOD суплементан датом оштром углу и у D повуче тангента круга.

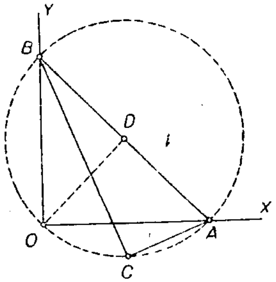
166) а) Између кракова правог угла опише се круг датим полупречником тако да додирује краке; затим се на један крак почев од темена пренесе дата катета и из њене крајње тачке повуче тангента на круг.

б) Кад је познат збир катета и полупречник уписаног круга, тада се из познатог односа: збир катета једнак је збиру пречника описаног и пречника уписаног круга, може наћи пречник описаног круга, или хипотенуза, па се задатак своди на случај конструкције кад је познат збир катета и хипотенуза.

167) Над датом катетом AC као над пречником опише се полукруг (сл. 414), висином CD као полупречником опише се из крајње тачке C лук и пресече полукруг у тачки D, тачка D се споји са тачком A. У тачки C повуче се $CB \perp AC$ и продужи AD до пресека B.



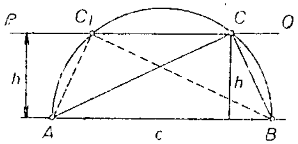
Сл. 414



Сл. 415

168) Нека су OX и OY дате праве, тачка C положај темена правог угла, ACB тражени троугао (сл. 415). Око четвороугла $ACOB$ може се описати круг, јер су углови AOB и ACB прави; AB је пречник, или хипотенуза чија је дужина c позната.

У правоуглом троуглу тежишна линија OD једнака је половини хипотенузе; према томе, ако се полупречником $\frac{c}{2}$ из тачака O и C опишу луци, њихов пресек даће тачку D. Круг описан око ове тачке као око центра полупречником $\frac{c}{2}$ даће тачке B и C у пресеку са правима OX и OY.



Сл. 416

169) Претпоставимо да је задатак решен и да је троугао ABC тражени троугао чија је хипотенуза $AB=c$, а висина $CD=h$ (сл. 416). Како је $\sphericalangle ACB$ прав, теме C се налази на полукругу пречника AB; оно је и на правој $PQ \parallel AB$ на растојању h.

Према томе, конструкција се изводи на овај начин:

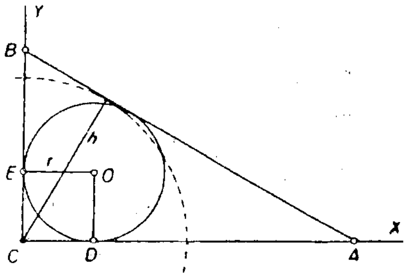
На једној правој се узме $AB=c$, опише полукруг пречника AB, затим повуче $PQ \parallel AB$ на растојању h; ова паралела сече полукруг у тачкама C и C_1, па троугли ABC и ABC_1 одговарају постављеном задатку. Ова два троугла су подударна, јер имају исту хипотенузу и једнаке катете AC и BC_1.

Ако је $h < \frac{c}{2}$, имамо два решења; ако је $h = \frac{c}{2}$, имамо само једно решење, и троугао ABC је равнокрак.

170) Нека је ABC тражени троугао (сл. 417).

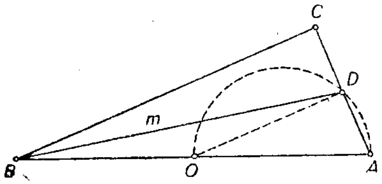
AB је тангента круга чији је центар у C, а полупречник му је h.

Конструкција се изводи на овај начин: Нацрта се квадрат $CDOE$ стране r, круг полупречника r са центром у O, затим круг полупречника h са центром у C; хипотенуза је заједничка тангента ова два круга, која сече краке CX и CY правог угла C.



Сл. 417

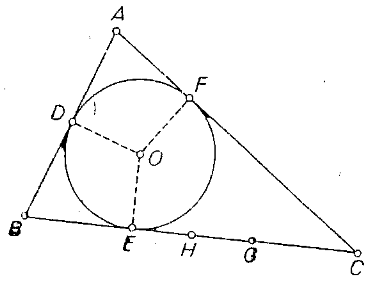
Изводећи конструкцију увиђа се да задатак није увек могућ.



Сл. 418

171) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је ABC тражени троугао (сл. 418). Спојмо средину O хипотенузе са средином D стране AC. Дуж OD је паралелна страни BC, што значи да је $\sphericalangle ODA$ прав и да се тачка D налази на полукругу пречника OA. Сем тога, D је и на кругу полупречника m са центром у B, јер је $BD=m$. Тачка D је, дакле, у пресеку ова два круга. Кад се нађе тачка D, продужи се AD за исту дужину DC и добије троугао ABC.

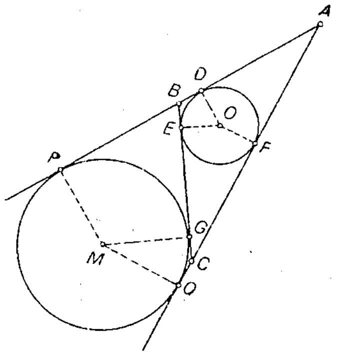
172) Из центра C кроз дато теме M опише се круг. Споји се теме M са ортоцентром O и са овом дужи OM повуче из центра C паралела CD једнака половини дужи OM. Та паралела претстављаће растојање центра описаног круга од стране, које је, према зад. 127, једнако половини растојања ортоцентра од супротног темена. Треба, затим, на CD у тачки D повући нормалу, и њени пресеци са кругом даће друга два темена троугла.



Сл. 419

173) a) Датим полупречником опише се круг са центром у O (сл. 419). На једној тангенти узме се EG (E је додирна тачка), једнако датој разлици $AC-AB$. Од тачке H, на средини дужи EG, пренесе се на обе стране $HB=HC$, једнако половини дате стране BC. Из B и C повуку се тангенте BA и CA. Заиста, одузимањем једнакости $HB=HC$, $EH=HG$ добија се $BE=CG$. Како је $AD=AF$, $BD=BE$, $CF=CE$,

следује: $AC-AB=AF+FC-AD-BD=FC-BD=CE-BE=CE-$ $-CG=EG$.



Сл. 420

б) Нацрта се угао A (сл. 420), опише се круг датим полупречником, тако да додирује краке угла. Затим се нацрта $DP=FQ$, једнако датој страни BC, опише се круг који додирује краке угла A у тачкама P и Q са центром у M. Најзад се повуче заједничка дирка BC на оба круга; она ће имати дужину дате стране.

Из слике се види да је:

$$BC=BE+EC=BD+FC.$$

Исто тако: $BC=BG+GC=BP+CQ$

Сабирањем ових једнакости добија се: $2BC=DP+FQ$, $2BC=2DP$ или $BC=DP$.

Сем тога, EG је једнако разлици страна AC и AB.

Заиста: $EG=EC-GC=FC-CQ=AC-AF-AQ+AC$.

Исто тако: $EG=BG-BE=BP-BD=AP-AB-AB+AD$.

Сабирањем ових једнакости добија се: $2EG=2AC-2AB$, или: $EG=AC-AB$.

174) а) Узме се DP једнако датој страни a (сл. 420) и подигну се нормале у тачкама D и P; $DO=r$ и $PM=r_1$ итд.

б) Опише се круг полупречника r, на једној тангенти узме се EG једнако разлици $b-c$ (сл. 420), у тачки G подигне се нормала на EG и узме се $GM=r_1$ итд.

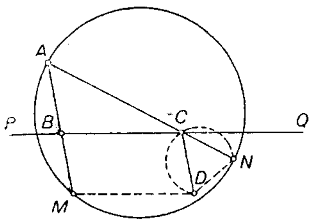
175) а) Конструише се најпре троугао BCE, затим BCF.

б) Конструише се најпре троугао BCE, па продужи страна CE до пресека са правом повученом паралелно са BC, а на раздаљини једнакој AD.

176) Познато је да су центри спољашњих додирних кругова троугла темена троугла чије висине падају на симетрале унутрашњих углова првога троугла. (Види зад. 129). Према томе, први троугао ће се наћи кад се нацрта троугао DEF и повуку све три његове висине. Подножја A, B, C тих висина биће темена траженог троугла.

177) Конструише се најпре правоугли троугао ABD, затим правоугли троугао ABE.

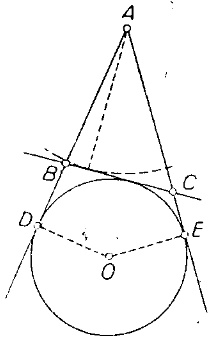
178) Теме A треба да се налази на луку који је геометриско место за темена периферисних углова величине α и који леже над тетивом MN (сл. 421). Стога, кроз тачку M треба повући паралелу правој PQ, на којој треба да лежи дата страна; на њу, почев од M, треба до D пренети дату страну a, спојити D са N и над дужи DN описати лук тако да он буде геометриско место темена периферисних углова величине α; затим, треба спојити тачку N са тачком C у којој лук сече праву PQ, повући праву NCA и кроз тачку M повући паралелу дужи DC.



Сл. 421

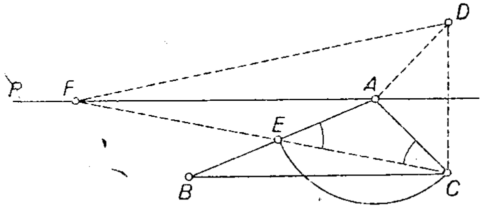
Троугао ABC је тражени троугао.

179) Нацртајмо угао A једнак датом углу α и на његове краке пренесимо по половину обима, тј. $AD=$ $=AE=s$ (сл. 422). У D и E дигнимо нормале на краке и опишимо круг O. Затим из A полупречником једнаким датој висини опишимо лук, па повуцимо заједничку тангенту на круг O и на лук описан око A.



Сл. 422

180) Претпоставимо да је задатак решен и да је троугао ABC тражени троугао (сл. 423).



Сл. 423

Нацртајмо $BC \parallel PQ$. Пренесимо страну AC на AB од A до E, повуцимо праву CE до пресека F са правом PQ. Троугао ACE биће равнокрак и $\sphericalangle ACE=\sphericalangle AEC$.

Сем тога, нацртајмо тачку D симетрично тачки C у односу на праву PQ.

У троуглу ABC: $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^0 - \sphericalangle A$,

у троуглу ACE: $\sphericalangle ACE + \sphericalangle AEC = 180^0 - \sphericalangle A$.

Према томе је $\sphericalangle B + \sphericalangle C = \sphericalangle ACE + \sphericalangle AEC$, или: $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACF = \frac{1}{2}(\sphericalangle B + \sphericalangle C)$.

Даље: $\sphericalangle BCF = \sphericalangle C - \sphericalangle ACE = \sphericalangle C - \frac{1}{2}(\sphericalangle B + \sphericalangle C) = \frac{1}{2}(\sphericalangle C - \sphericalangle B) = \frac{\varphi}{2}$.

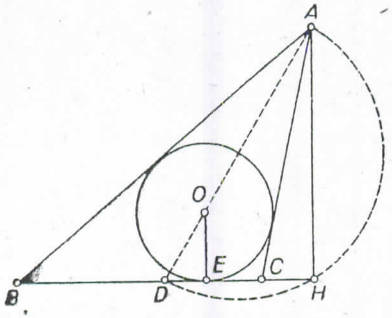
Како је $\sphericalangle BCF = \sphericalangle CFA = \sphericalangle AFD$, то је $\sphericalangle CFD = \varphi$.

Међутим, $\sphericalangle FEA = 180^0 - \sphericalangle AEC = 180^0 - \sphericalangle ACE = 180^0 - \sphericalangle ADF$; отуда је $\sphericalangle FEA + \sphericalangle ADF = 180^0$. Значи, око четвороугла $FEAD$ се може описати круг, и тада је $\sphericalangle EAD = 180^0 - \varphi$.

Треба, дакле, пренети страну $BC \parallel PQ$, нацртати тачку D симетрично тачки C у односу на PQ и над BD као над тетивом описати лук — геометриско место за темена углова величине $180^0 - \varphi$. Пресек тог лука са правом PQ даће теме A.

181) Претпоставимо да је задатак решен. Познато је AD, AH, OE (сл. 424).

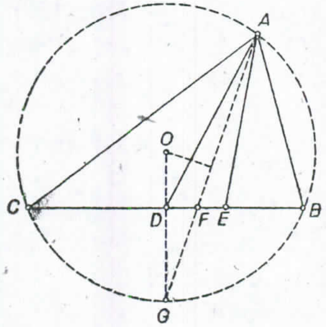
Конструише се троугао ADH и тачка O се одреди помоћу $OE = r$; затим се око O опише круг полупречника r и из темена A повуку тангенте AB и AC.



Сл. 424

182) Нацрта се угао A, повуче његова симетрала и на њу пренесе одређена дужина. Над њом као над пречником опише се полукруг и тај полукруг пресече луком описаним око темена A висином као полупречником.

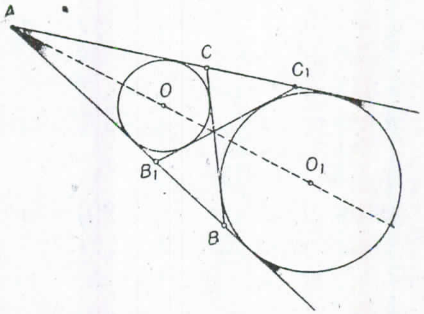
183) Прво ћемо конструисати троугао ADE (сл. 425) и повући симетралу AF угла DAE, која је уједно и симетрала угла A. Како је нормала у тачки D на DE симетрала основице BC траженог троугла, то ће се пресек G те симетрале и симетрале угла A наћи на средини лука круга описаног око траженог троугла ABC. Његов центар O биће на пресеку симетрале DG и симетрале дужи AG, а полупречник OA. Темена B и C налазе се на пресеку праве DE и описаног круга.



Сл. 425

184) Нека је ABC тражени троугао (сл. 426).

Стране AB и AC се добијају повлачењем спољашњих заједничких тангената, а страна BC као унутрашња заједничка тангента. Могу се повући две унутрашње заједничке тангенте BC и B_1C_1 и оба троугла ABC и AB_1C_1 су подударна. Ако бисмо обрнули добијену слику око AOO_1 као осовине, тако да AC падне на праву AB, троугао ABC поклопио би се са троуглом AB_1C_1.

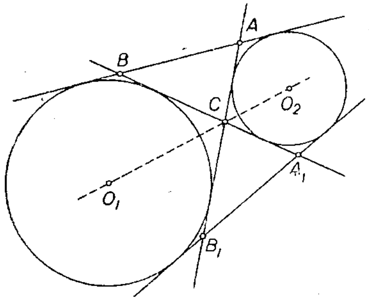


Сл. 426

Да би задатак био могућ, потребно је да кругови O и O_1 леже један изван другог или да се додирују споља и да полупречник круга O буде мањи од полупречника круга O_1.

185) Нека је ABC тражени троугао (сл. 427).

Стране AC и BC добијају се кад се повуку унутрашње заједничке тангенте на два дата круга, а страна AB кад се повуче једна спољашња заједничка тангента. Могу се повући две спољашње заједничке тангенте и имати два подударна троугла ABC и A_1B_1C који одговарају услову задатка.

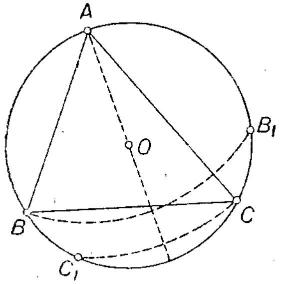


Сл. 427

Кад обрнемо слику око O_1O_2 као осовине, тако да BC падне на B_1C, троугао ABC поклопиће се са троуглом A_1B_1C.

Да би било решења, потребно је и довољно да кругови леже један изван другог.

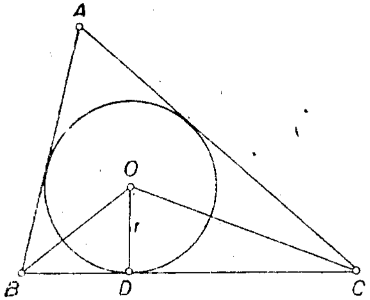
186) Нека је троугао ABC уписан у кругу датог полупречника R, чији је центар у O, и нека су стране троугла $AB=c$ и $AC=b$ (сл. 428). Теме A може се узети произвољно на кругу, а темена B и C се добијају кад се око темена A опишу луци полупречницима b и c, па узму пресечне тачке ових лукова са кругом.



Сл. 428

Из слике се види да се добијају четири троугла: $ABC, AB_1C_1, ABC_1, AB_1C$. Два и два од ових троуглова су међу собом подударна. Ако се цела слика обрне око пречника AO као осовине, ABC ће се поклопити са AB_1C_1 а ABC_1 са AB_1C. Да би задатак био могућ, потребно је да је $b \leqslant 2R$, $c \leqslant 2R$. Кад је $b=2R$ а $c<2R$, или $b<2R$, а $c=2R$, постоји само једно решење. У том случају троугао је правоугли.

187) Претпоставимо да је задатак решен и да је ABC тражени троугао (сл. 429).



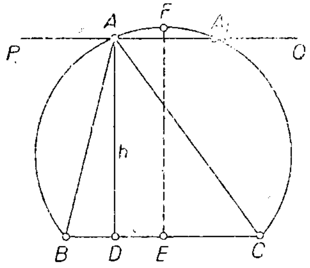
Сл. 429

Повуцимо из центра датог круга полупречник $OD \perp BC$. Како су BO и CO симетрале углова B и C, биће у правоуглом троуглу ODB: $\sphericalangle BOD = 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle B$, а у правоуглом троуглу ODC: $\sphericalangle COD = 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle C$, па се конструкција врши овако: На једној правој се узме тачка D и у њој подигне нормала на праву

$DO=r$; затим се код O на DO пренесу углови $90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle B$ и $90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle C$. Краци ових углова сећи ће праву у тачкама B и C. Најзад се из B и C повуку тангенте на круг полупречника r чији је центар у O.

Да би задатак био могућ, потребно је да се тангенте из B и C секу са исте стране праве BC са које је и центар O, тј. да је $\sphericalangle B + \sphericalangle C < 180^0$.

188) Претпоставимо да је задатак решен, и да је ABC тражени троугао у коме је $BC=a$, $AD=h$, а угао A има дату вредност (сл. 430).



Сл. 430

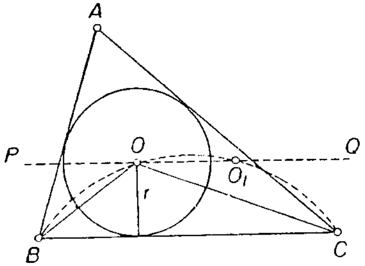
Теме A се налази на луку описаном над BC, тако да је лук геометриско место за темена периферисҡих углова величине A. Исто тако, теме A ће се налазити на правој PQ која је повучена паралелно са BC на раздаљини h. Дакле, теме A је у пресеку лука и ове паралеле.

Нека је $EF=h_l$ висина лука.

Ако је $h<h_l$, права PQ сече лук у двема тачкама A и A_1, па се добијају два троугла: ABC и A_1BC. Ова су два троугла подударна, јер имају једну страну заједничку, две стране једнаке као тетиве које одговарају једнаким луцима, и по један угао једнак. Ако је $h=h_l$, добија се један равнокраки троугао FBC. Најзад, ако је $h>h_l$, задатак нема решења.

189) Нека је троугао ABC тражени троугао (сл. 431). У троуглу OBC имамо: $\sphericalangle BOC + \frac{1}{2} \sphericalangle B + \frac{1}{2} \sphericalangle C = 180^0$, $\frac{1}{2} \sphericalangle B + \frac{1}{2} \sphericalangle C = 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle A$, или: $\sphericalangle BOC = 90^0 + \frac{1}{2} \sphericalangle A$. Овај угао BOC је, дакле, познат, па се конструкција може извршити овако:

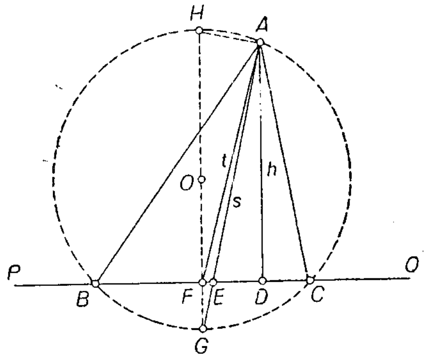
Нацрта се $BC=a$; над BC као над тетивом опише се лук који ће бити геометриско место за темена периферисҡих углова величине $90^0 + \frac{1}{2} \sphericalangle A$. Затим се на растојању r од BC повуче $PQ \parallel BC$. У пресеку ове паралеле и лука биће центар O око кога треба описати круг полупречника r, па из B и C повући тангенте на њега, а оне ће се сећи у тачки A.



Сл. 431

Да би задатак био могућ, потребно је да паралела сече лук, или да r буде мање од висине лука. Сем тога, потребно је да се тангенте из B и C секу са исте стране BC са које је тачка O, тј. да је $\sphericalangle B + \sphericalangle C < 180^0$. Ако паралела сече лук, онда имамо још једно решење A_1BC. Лако је доказати да је троугао ABC подударан са троуглом A_1BC.

190) Претпоставимо да је задатак решен, и да је троугао ABC тражени троугао, у коме је висина $AD = h$, симетрала угла $AE = s$ и тежишна линија $AF = t$ (сл. 432).



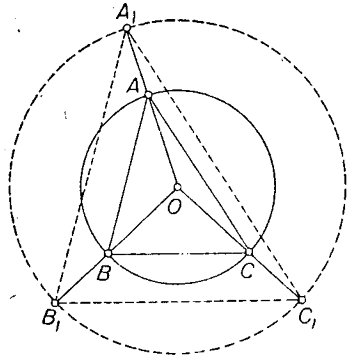
Сл. 432

Опишимо око овог троугла круг, и нека је G средина лука над BC на коме није теме A. Ако продужимо симетралу угла AE, она мора проћи кроз G. Сем тога OG је нормално на тетиви BC у њеној средини F. Према томе, конструкција се може извести на овај начин:

Нацрта се права PQ и у једној њеној произвољној тачки D дигне нормала $DA = h$; затим се са исте стране од AD пренесу косе дужи $AE = s$ и $AF = t$; кроз F се повуче нормала на PQ; ова нормала сече продужену праву AE у тачки G, а нормалу на AG дигнуту у тачки A сече у тачки H. Дуж GH је пречник описаног круга, који сече праву PQ у тачкама B и C, теменима троугла ABC.

Да би задатак био могућ, потребно је и довољно да је $h \leqslant s \leqslant t$. Ако је $h = s$, троугао је равнокрак, а тада треба да је и $h = t$.

191) Претпоставимо да је задатак решен, да је троугао ABC уписан у кругу датог полупречника R и да су углови B и C једнаки датим угловима (сл. 433).

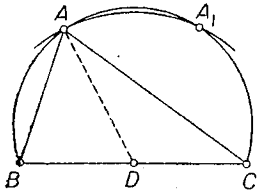


Сл. 433

Око истог центра O опишимо круг произвољним полупречником, и нека су A_1, B_1, C_1 његови пресеци са полупречницима OA, OB, OC или са њиховим продушцима. Повуцимо A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1. Троугао ABC уписан је у овом другом кругу, а његове стране су редом паралелне са странама троугла ABC; јер равнокраки троугли OAB и OA_1B_1 имају једнаке углове на врху, па су им зато једнаки и углови на основици; $\sphericalangle A_1B_1O = \sphericalangle ABO$ итд. Према томе, конструкција се врши на овај начин: Узме се произвољна страна B_1C_1, на њу у крајњим тачкама пренесу дати углови B и C и тако добије троугао $A_1B_1C_1$. Око њега се опише круг, на OA_1, OB_1, OC_1 пренесе $OA = OB = OC = R$ и повуку стране AB, AC, BC.

Да би задатак био могућ, потребно је да је $\sphericalangle B + \sphericalangle C < 180^0$.

192) Над датом страном треба описати лук који је геометриско место темена углова величине датог угла; затим, из средине дате стране пресећи лук другим луком чији је полупречник једнак датој тежишној линији (сл. 434).



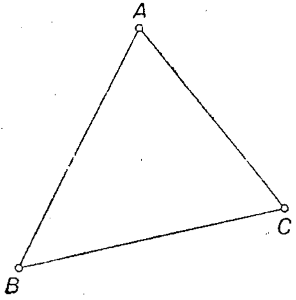
Сл. 434

Задатак је могућ ако је половина дате стране мања од тежишне линије, а ова мања од висине лука над датом страном.

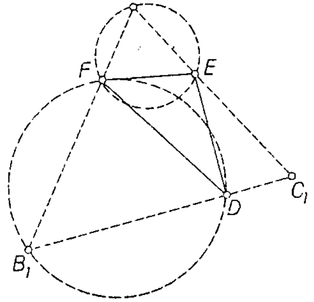
193) Место да упишемо троугао DEF у троугао ABC (сл. 435), ми ћемо описати троугао ABC око троугла DEF (сл. 436).

Над EF опишимо лук тако да он буде геометриско место темена свих углова једнаких углу A; над FD опишимо лук који ће бити геометриско место темена свих углова једнаких углу B.

Сад кроз F повуцимо сечицу чији отсечак има дужину $A_1B_1 = AB$.



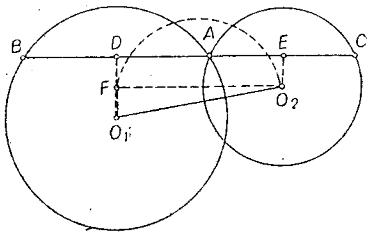
Сл. 435



Сл. 436

Троугли $A_1B_1C_1$ и ABC су подударни, јер имају једнаке по једну страну и два налегла угла.

Показаћемо како се кроз пресечну тачку два круга повлачи сечица са отсечком одређене дужине.



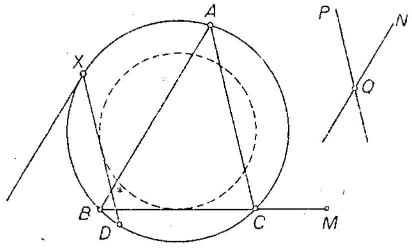
Сл. 437

Нека су O_1 и O_2 два круга, A једна њихова пресечна тачка, а BC сечица са отсечком одређене дужине l (сл. 437).

Ако повучемо $O_1D \perp BC$, $O_2E \perp BC$, из слике се види да је $DE = \frac{BC}{2}$. Ако се из O_2 повуче $O_2F \parallel CB$, добија се правоугли троугао O_1O_2F, који је лако конструисати. Над O_1O_2, као над пречником, опише се лук и из O_2 пресече луком полупречника $\frac{l}{2}$. Кад је троугао конструисан, продужи се O_1F и на тај правац повуче нормала кроз тачку A.

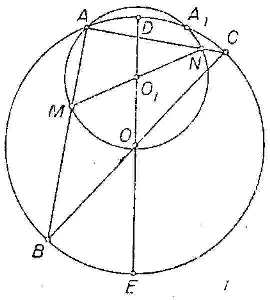
194) Претпоставимо да је задатак решен. Нека су PQ и NQ две дате праве (сл. 438) и $\sphericalangle A = \sphericalangle PQN$.

То значи да су на кругу познати лук и тетива који одговарају углу A. Према томе, узме се на кругу она тачка X у којој се може повући дирка на круг паралелна са једном од датих правих и кроз исту тачку повуче паралела другој датој правој. На тај начин ће се на кругу добити тетива XD којој одговара угао величине угла A. Затим се из тачке M повуче сечица, тако да тетива BC буде једнака тетиви XD. Најзад, из тачке B повуче се права BA паралелна правој XY и тачка A споји са тачком C. Угао A је једнак углу YXD; према томе, $AC \parallel XD$.



Сл. 438

195) Претпоставимо да је задатак решен и да је ABC тражени троугао (сл. 439).



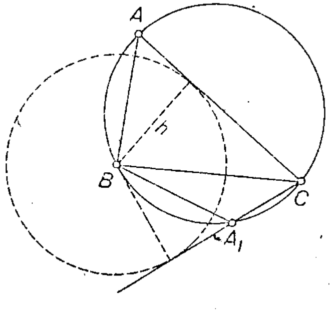
Сл. 439

Како је угао A прав, његово се теме мора налазити на кругу чији је пречник MN; према томе, конструкција се може извести на овај начин: Треба спојити тачке M и N и над том дужи као над пречником описати круг; где тај круг сече дати круг, ту ће бити теме правог угла. Треба само повући AMB, ANC и BC, па ће се добити тражени троугао.

Задатак има два решења ако је $O_1D < \frac{MN}{2} < O_1E$; постоји једно решење ако је $O_1D = \frac{MN}{2}$; и нема решења ако је $O_1D > \frac{MN}{2}$.

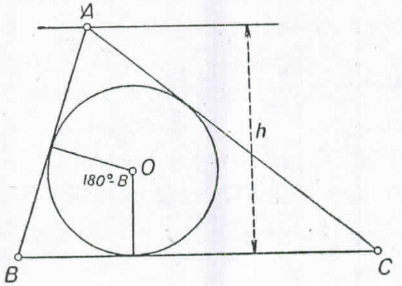
196) У дати круг пренесе се дата страна (BC) као тетива, па из једне њене крајње тачке (B) опише круг полупречника једнаког датој висини (h). Из друге крајње тачке (C) тетиве повуче се тангента на тако описани круг, и где она сече дати круг, ту ће бити треће теме траженог троугла (сл. 440).

Постоје два решења (ABC и A_1BC).



Сл. 440

197) У датом кругу треба повући два полупречника, тако да они граде угао суплементан датом углу (сл. 441); затим, у крајњим тачкама ових полупречника треба повући тангенте. Њихов пресек B даће једно теме. Према једној од тангената треба повући паралелу на растојању једнаком датој висини (h); где паралела сече другу тангенту, ту ће бити друго теме (A). Најзад се из тог другог темена повуче тангента на дати круг и добије тражени троугао.

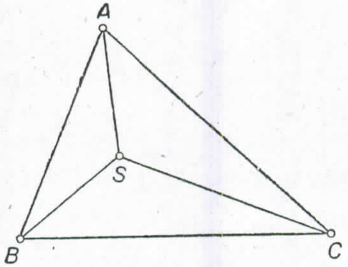


Сл. 441

198) Нека је S тражена тачка (сл. 442). Тада је $\sphericalangle ASC + \sphericalangle CSB + \sphericalangle BSA = 360^\circ$.

Како су ови углови међу собом једнаки, то сваки од њих износи 120°. Значи, над сваком страном треба описати лук који ће бити геометриско место за темена периферискиx углова од 120°.

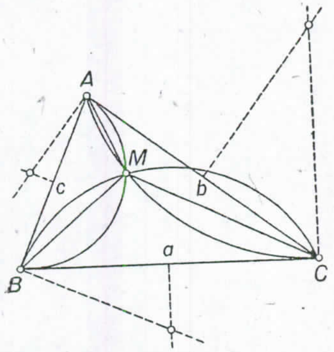
Поред уобичајеног начина за конструкцију лукова може се користити теорема: Кад се над сваком страном једног троугла конструише равностран троугао, па треће теме сваког равностраног троугла споји са супротним теменом датог троугла, те се дужи секу у једној тачки. Види зад. 74.



Сл. 442

199) Треба над страном a описати лук који ће бити геометриско место за темена углова $(180^\circ - B)$, над страном b лук који ће бити геометриско место за темена углова $(180^\circ - C)$, и над страном c лук који ће бити геометриско место темена углова $(180^\circ - A)$ (сл. 443). Ова три лука секу се у једној тачки M, јер њихов збир изражен у степенима износи 360°.

$\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCB$, јер је угао MAC периферисни угао над тетивом или луком MC, а угао MCB је угао између исте тетиве и дирке у једној њеној крајњој тачки (BC додирује лук AMC у тачки C). Из истих разлога је $\sphericalangle MCB = \sphericalangle MBA$.



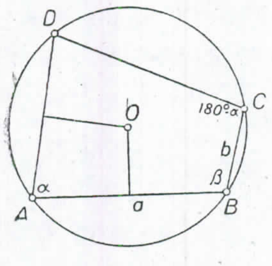
Сл. 443

Добило би се друго решење M_1 ако би се над страном a описао лук коме би дирка била страна b, над страном b лук коме би дирка била страна c, и над c лук коме би дирка била страна a.

Ове две тачке M и M_1 назване су Брокареве тачке.

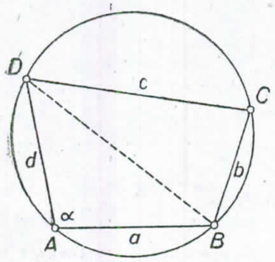
200) Прво треба нацртати страну a (сл. 444) и на њу пренети углове α и β; затим, на други крак угла β треба пренети страну b, и у њеној крајњој тачки $\sphericalangle(180^\circ - \alpha)$. Други крак тог угла и други крак угла α својим пресеком дају четврто теме.

Средиште описаног круга налази се у пресеку симетрала ма којих двеју страна.



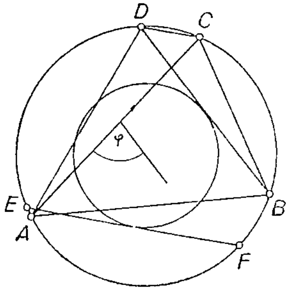
Сл. 444

201) Најпре треба нацртати страну $AB = a$ (сл. 445), у једну њену крајњу тачку пренети угао α, а на други крак угла α страну $AD = d$. Затим, треба спојити темена B и D па над BD као над тетивом описати лук који ће бити геометриско место за темена углова величине угла $(180^\circ - \alpha)$. Тај лук треба из тачке D пресећи луком полупречника c; тако ћемо добити тражени четвороугао.



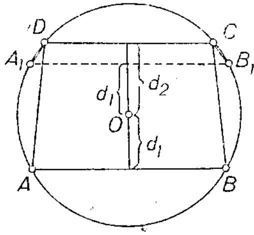
Сл. 445

202) Опише се круг датим полупречником (сл. 446) и пренесу у произвољном положају дијагонале AC и EF као тетиве; затим се опише круг концентричан са датим кругом, тако да додирује тетиву EF и повуче дијагонала BD као тангента тога круга нагнута према дијагонали AC под датим углом φ итд.



Сл. 446

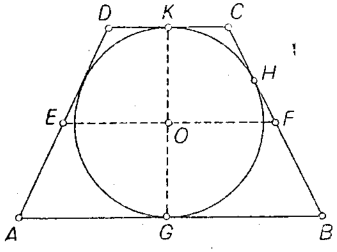
203) Треба најпре описати круг полупречника R (сл. 447), затим пренети тетиву $b = CD$ и одредити њену средишну раздаљину d_2.



Сл. 447

Ма на ком месту треба пренети тетиву a и одредити њену средишну раздаљину d_1. Најзад, на раздаљини $d_1 + d_2$ или $d_2 - d_1$ повући паралеле страни CD. Пресеци круга са овим паралелама даће и друга два темена трапеза. На тај начин ћемо имати два трапеза: $ABCD$ и A_1B_1CD.

204) Нека је $8\,d$ обим траженог равнокраког трапеза (сл. 448).



Сл. 448

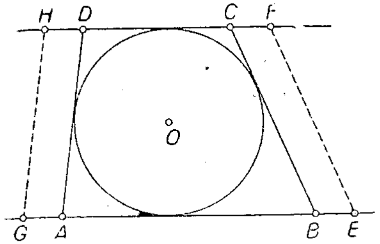
$BH = BG$, $CH = CK$; отуда је $BG +$

$$+ CK = BC = \frac{8\,d}{4} = 2\,d.$$

$$OF = \frac{BG + CK}{2} = d.$$

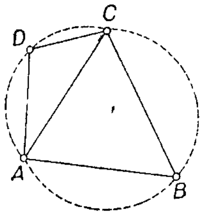
Узме се OF једнако осмини обима, и из F се повуче тангента. Итд.

205) Пошто се најпре опише круг полупречника r (сл. 449), повуку се две паралелне тангенте и нацртају ма на коме месту између ових паралелних две дате непаралелне стране c и d; затим се њима паралелно повуку друге две тангенте ($AD \parallel GH$ и $BC \parallel EF$).



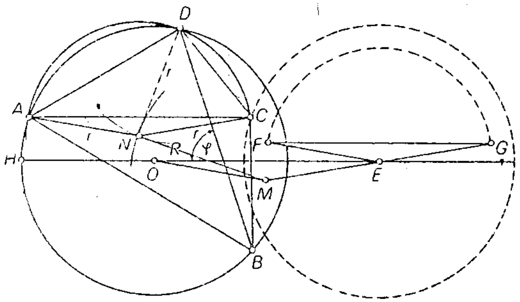
Сл. 449

206) Над дијагоналом AC (сл. 450) опише се с једне стране лук — геометриско место за темена углова величине B, а са друге стране лук за темена углова величине D. Из тачке A луком полупречника AB пресече се лук описан над AC и на тај начин добије теме B. Споји се B са C итд.



Сл. 450

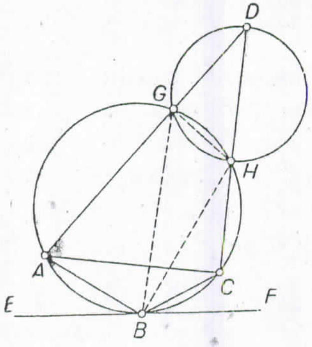
207) Нацрта се дијагонала DB (сл. 451) и над њом опише лук — геометриско место за темена углова величине угла A. Кроз центар O се повуче права OE, тако да са дијагоналом DB гради дати угао φ. Узме се $OE =$ $= AC$ и око E опише круг једнак првом кругу. Свака дуж ограничена периферијама ова два круга и паралелна дужи OE биће и једнака дужи OE, или дијагонали AC. Треба је само повући тако да периферски угао над њом буде једнак датом углу D. Тога ради опише се око тачке E лук над тетивом $FG \# CE$, тако да на њему леже темена свих углова једнаких углу D.



Сл. 451

Најпре се нацрта троугао $MOE \cong EFG$. Из тачке M као центра опише се лук полупречника OH датог круга O, и затим из тачке D као центра лук полупречника EF и, најзад, из пресека N тих лукова лук полупречника EF; где тај лук пресече кругове O и E, ту се налазе темена A и C траженог четвороугла итд.

208) Претпоставимо да је задатак решен, и да је $ABCD$ тражени четвороугао (сл. 452).

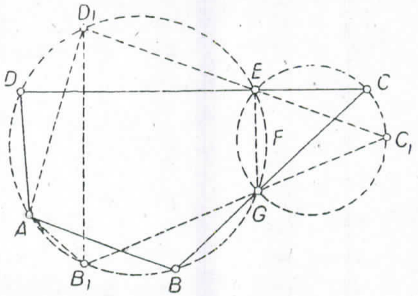


Сл. 452

Ако се опише круг тако да пролази кроз темена A, B, C, он ће сећи стране AD и CD у тачкама G и H. Ако, затим, у темену B повучемо дирку на круг, биће: $\sphericalangle EBH = \sphericalangle C$ а $\sphericalangle FBG = \sphericalangle A$. Према томе, конструкција се врши на овај начин:

Над дијагоналом AC као над тетивом опише се лук — геометриско место темена углова величине угла B.

Ма у којој тачки B на овом луку повуче се дирка EF и на њу пренесе $\sphericalangle FBG = A$, $\sphericalangle EBH = \sphericalangle C$. На тај начин ће се добити тачке G и H. Тачке G и H се споје и над GH као над тетивом опише лук – геометриско место темена углова величине угла D. Овај се лук пресече луком описаним око тачке B полупречника BD; тако ће се добити тачка D. Повлачењем правих DG и DH добијају се темена A и C.

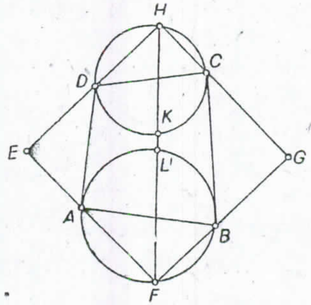


Сл. 453

Задатак се може решити и на овај начин: Над дужи D_1B_1, једнакој дијагонали DB (сл. 453), опише се лук — геометриско место темена углова величине A — и теме A узме произвољно на луку D_1AB_1. Нацрта се $\sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle B$ и $\sphericalangle AD_1C_1 = \sphericalangle D$. Значи, угао C_1 је четврти угао у четвороуглу. На тај начин је одређен лук EFG. Сад се опише круг EC_1G да би се над тетивом EG добио лук као геометриско место за темена углова величине C. Најзад се из тачке A пресече круг EC_1G у тачки C луком полупречника величине друге дијагонале и повуче CED и CGB.

209) Над сваком страном троугла као над пречником опишу се споља полукругови итд.

210) Нека је $ABCD$ дати четвороугао (сл. 454). Претпоставимо да је задатак решен и да је $EFGH$ тражени квадрат.

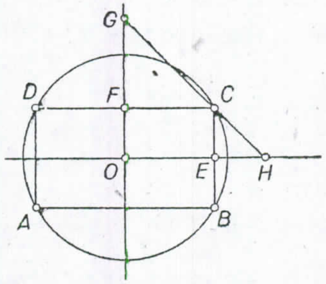


Сл. 454

Теме H налази се на кругу чији је пречник страна DC. Исто тако, теме F се налази на кругу чији је пречник страна AB. Како дијагонала HF полови углове, то она мора проћи кроз средину K лука DKC и кроз средину L лука ALB.

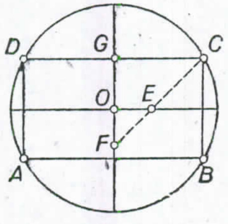
Треба, дакле, над двема супротним странама датог четвороугла, као над пречницима, описати кругове, па унутрашње лукове преполовити и кроз те тачке повући дијагоналу, итд.

211) а) Нека је $ABCD$ у кругу уписани правоугаоник чији је обим $2s$ (сл. 455). Ако повучемо симетрале страна правоугаоника, очевидно је да је $CE + CF = \frac{s}{2}$.



Сл. 455

Може се узети да тачка C лежи на хипотенузи правоуглог троугла чије је теме правог угла у O, па задатак свести на зад. 67 а) (§ 3), тј. узети $OG = OH = \frac{s}{2}$.



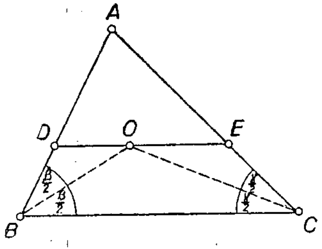
Сл. 456

Ако права GH сече круг у двема тачкама, имамо два решења; ако га додирује, једно решење; ако нема пресека, нема решења.

б) (сл. 456). Повуку се најпре два нормална пречника и узме на њима $OE = OF = \frac{d}{2}$ затим се повуче права FE до пресека са кругом и добије теме C. Из C се повуку паралеле пречницима итд.

Заиста, $CG - CH = OH - EH = OE = \frac{d}{2}$ итд.

212) а) Праву треба повући паралелно основици кроз центар уписаног круга.

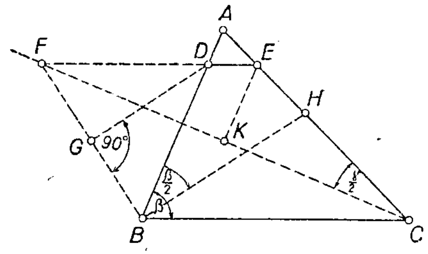


Сл. 457

Нека је O центар уписаног круга у троуглу ABC, а $DE \parallel BC$ (сл. 457). Троугли BOD и CEO су равнокраки

$$\left(\sphericalangle DOB = \sphericalangle OBC = \frac{\beta}{2}, \quad \sphericalangle EOC = \sphericalangle OCB = \frac{\gamma}{2}\right).$$

Из тога произилази да је $DO = DB$ и $OE = EC$. Сабирањем ових једнакости добијамо: $DO + OE = DB + EC$, или: $DE = DB + EC$.



Сл. 458

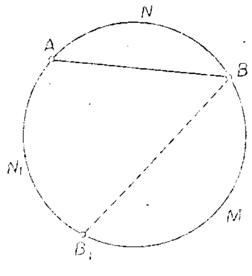
б) Претпоставимо да је задатак решен и да је DE тражена права, тј. да је $DE = CE - BD$, или: $CE = DE + BD$ (сл. 458).

Ако DE продужимо тако да је $DF = BD$, онда је $EF = DE + DF = DE + BD$. Значи, $EF = CE$. Према томе, троугли FBD и FCE су равнокраки и $\sphericalangle DFB = \sphericalangle DBF$, $\sphericalangle EFC = \sphericalangle ECF$. Како је $\sphericalangle FDB = \beta$, то је $\sphericalangle GDB = \frac{\sphericalangle FDB}{2} = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle GBD = 90^0 - \frac{\beta}{2}$, и, стога, $GB \perp BH$. С друге стране, $\sphericalangle FEC = 180^0 - \gamma$, $\sphericalangle KEC = \frac{\sphericalangle FEC}{2} = \frac{180^0 - \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$; значи, $\sphericalangle ECK = 90^0 - \left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}$.

Дакле, треба повући симетралу угла C, а на симетралу угла β дићи нормалу у темену B. Где та нормала сече симетралу угла C, ту ће бити тачка F. Из F треба повући паралелу основици, па ће задатак бити решен.

Да би задатак био могућ, потребно је и довољно да права P_1Q_1 сече или додирује круг, а то ће бити ако је $OC \leqslant r$, или $\frac{OA}{3} \leqslant r$, одакле је $OA \leqslant 3r$, где је r полупречник датог круга.

256) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је AB тетива за коју је разлика лукова AMB и ANB, који одговарају тетиви, једнака датом луку, l (сл. 497).

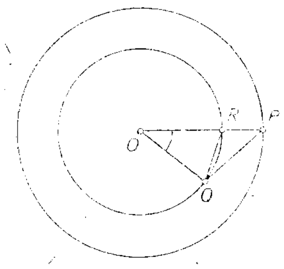


Сл. 497

Посматрајмо лук AN_1B_1 једнак луку ANB, па ћемо видети да је $\overset{\frown}{AMB} - AN_1B_1 = l$ или лук $B_1MB = l$.

Дакле, нацрта се лук B_1MB једнак одређеном луку l, споји се B са A, средином лука BNN_1B_1, па ће се добити тетива AB.

257) Из слике 498 видимо да је у троуглу OPQ позната страна PQ, разлика $PR - l$ других двеју страна и угао O. Међутим, сваки од углова OQR и ORQ је комплеменат половине угла O, тј.

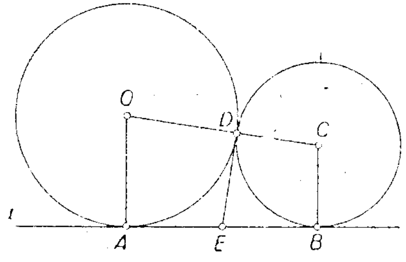


Сл. 498

$$\sphericalangle OQR = 90^0 - \alpha; \text{ отуда је}$$
$$\sphericalangle PRQ = 180^0 - (90^0 - \alpha) = 90^0 + \alpha.$$

Дакле, може се конструисати троугао PRQ, јер су познате две стране и један угао.

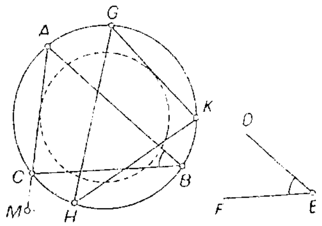
258) Претпоставимо да је задатак решен и да је C центар траженог круга (сл. 499). Повуцимо заједничку тангенту DE у тачки D у којој се кругови додирују. Тада је $DE = AE = BE$ (зашто?). E је, значи, на средини дужи AB. Тачку D ћемо добити у пресеку датог круга и круга описаног над AB као над пречником. Тачку C, центар траженог круга, добићемо у пресеку нормале дигнуте на тангенту t у тачки B и продужене праве OD.



Сл. 499

Задатак је увек могућ и има само једно решење.

259) Сви перифериски углови над једнаким луцима, па, према томе, и над једнаким тетивама једнаки су. Довољно је нацртати перифериски угао $GHK = \sphericalangle DEF$ (сл. 500); затим, повући тетиву GK и описати круг концентричан датом кругу, тако да додирује тетиву GK; најзад, из тачке M повући на овај други круг тангенту MCA; тада је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$.



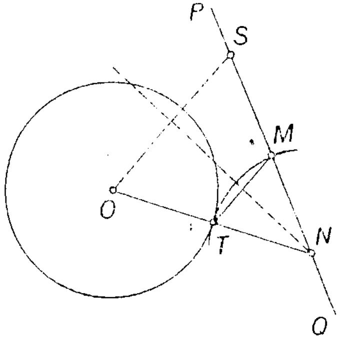
Сл. 500

260) Нека је тачка N тражена тачка, тј. $NM = NT$ (сл. 501).

Троугао MNT је равнокрак, али је немогуће одмах одредити положај тачке T. Међутим, $OS \parallel TM$ даје равнокрак троугао SNO који је лако конструисати, јер је $SM = OT$ (полупречнику круга).

Треба, дакле, пренети полупречник од M до S и повући симетралу дужи OS, чиме ће се добити тачка N.

Добија се још једно решење ако се полупречник пренесе од M у смеру NQ.

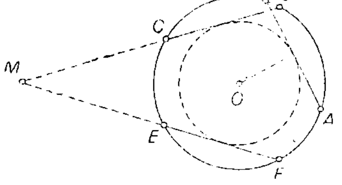


Сл. 501

261) Кроз тачку A треба повући праву, тако да је разлика њених растојања од тачака O и B једнака полупречнику круга. (Види први начин решавања задатка 216).

262) У датом кругу се повуче ма у ком правцу тетива AB (сл. 502) дужине l, око центра O опише се круг који додирује ову тетиву; из тачке M повуку се дирке на овај круг.

Делови ових дирки CD и EF задовољавају услов задатка, јер су тетиве CD, EF, AB једнаке, пошто су им једнаке централне раздаљине.



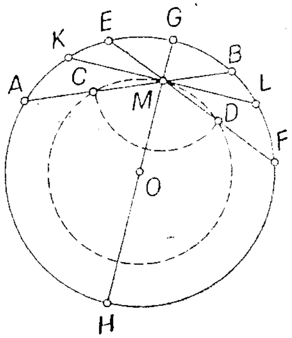
Сл. 502

263) а) Ако збир делова тетиве треба да има одређену дужину, задатак се делимично своди на задатак 262.

б) Разлика делова тетиве треба да има одређену дужину. Претпоставимо да је задатак решен.

Нека је AB тражена тетива, тако да је $AM - BM = l$ (сл. 503).

Да бисмо одузели BM од AM, треба пренети BM од A до C; тада је $CM = l$. Тачке C и M припадају кругу чији је центар у O, а полупречник OM. Из тачке M луком полупречника l треба пресећи помоћни круг у C и D. Тетиве $ACMB$ и $EMDF$ испуњавају услов задатка.



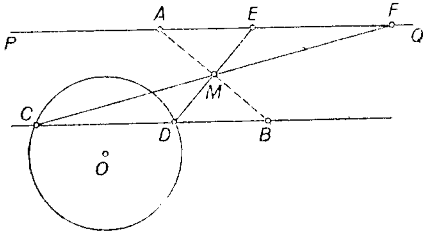
Сл. 503

Има, дакле, два решења.

Највећа вредност разлике l може бити $2\,OM$. Тада је тетива пречник GH. Ако је $l = 0$, тетива KL је дирка помоћног круга.

264) Нека је дата права PQ, круг са центром у O и тачка M (сл. 504).

Ма на којој правој MA узме се $MB = MA$ и кроз B повуче паралела правој PQ. Она сече круг у тачкама C и D. Спајањем ових тачака са тачком M и продужавањем тих дужи до F и E, пресека са правом PQ, добијају се дужи CF и DE које испуњавају услов задатка, јер је $CM = MF$ и $DM = ME$.

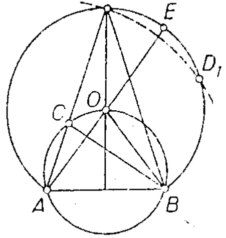


Сл. 504

265) Нека је C тражена тачка, тако да је $CA + CB = l$ (сл. 505).

Ако узмемо $CD = CB$, добијамо равнокраки троугао BDC, у коме је $\sphericalangle D = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$.

Дакле, треба описати лук ADB који ће бити геометриско место за темена углова једнаких половини угла ACB; затим, из тачке A као центра описати лук полупречником l, па повући AD и CB.



Сл. 505

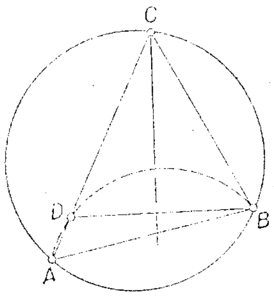
а) Тачка O је центар лука ADD_1B, јер је

$$\sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB.$$

б) Максимум за l даје пречник AOE; он је по величини $2AO$, а AO је крак уписаног равнокраког троугла у датом кругу са основицом AB.

в) Задатак се може свести на задатак: Конструисати троугао кад је дата једна страна, наспрамни угао и збир других двеју страна.

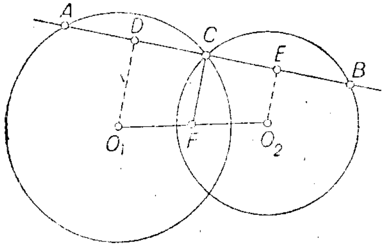
266) Нека је C тражена тачка, тако да је $CA - CB = l$ (сл. 506).



Сл. 506

Ако узмемо $CD = CB$, добијамо равнокраки троугао BDC, у коме је $\sphericalangle CDB = 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle C$. Према томе, $\sphericalangle ADB = 90^0 + \frac{1}{2} \sphericalangle C$. Значи, треба над AB описати лук који ће бити геометриско место за темена углова $90^0 + \frac{1}{2} \sphericalangle C$; затим, из A као центра описати лук полупречника l, спојити A са D и продужити до пресека C са кругом.

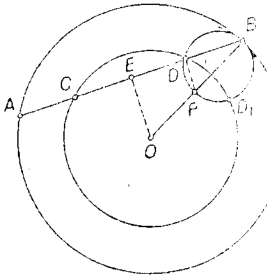
267) Претпоставимо да је задатак решен и да је AB тражена сечица (сл. 507), тј. да је $AC = CB$ или $DC = CE$.



Сл. 507

Ако у трапезу DO_1O_2E из средине C стране DE повучемо $CF \parallel DO_1 \parallel EO_2$, страна O_1O_2 биће преполовљена тачком F. Значи, треба наћи средину средишне раздаљине O_1O_2 и спојити је са пресеком кругова. На ту дуж повучена нормала даће једнаке тетиве у круговима.

268) Претпоставимо да је задатак решен и да је $AB = 2 \cdot CD$ (сл. 508). Тада је $EB = 2 \cdot ED$, тј. $ED = \frac{EB}{2}$, или: $ED = DB$.

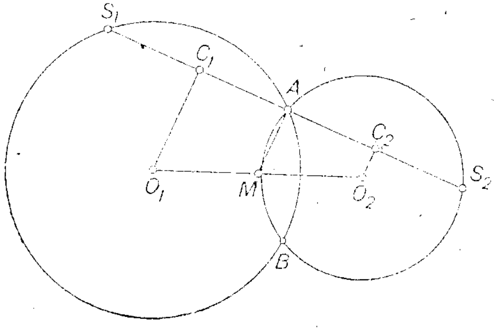


Сл. 508

Ако повучемо OB и $OE \perp AB$, а из тачке D паралелу дужи OE, тачка F преполовиће полупречник OB, и биће $\sphericalangle D = \sphericalangle E = 90^0$.

Јасно је да ћемо тачку D одредити ако над FB као над пречником опишемо круг. Његов пресек са мањим кругом даће тачку D. Права повучена кроз BD даће тражену тетиву. Како помоћни круг сече мањи круг још у једној тачки D_1, то ћемо имати два решења.

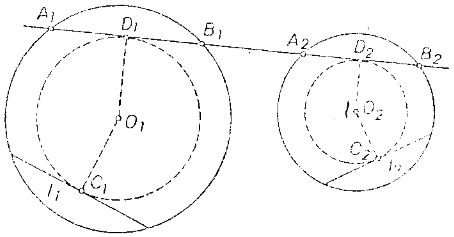
269) Повуцимо O_1C_1 и O_2C_2 нормално на S_1S_2 (сл. 509); C_1 и C_2 су средине тетива S_1A и AS_2. Дакле, ако је $S_1A = AS_2$, тада је $C_1A = AC_2$. Значи, у трапезу $O_1O_2C_2C_1$ дуж AM је средња линија и полови O_1O_2.



Сл. 509

Обрнуто, ако је M на средини дужи O_1O_2, отсечак сечице S_1S_2 повучене нормално на MA биће преполовљен тачком A. (Види задатак 267).

270) Нека су дати кругови са центрима у O_1 и O_2, њихови полупречници r_1 и r_2, и нека кругови на сечици $A_1B_1A_2B_2$ отсецају тетиве $A_1B_1 = l_1$ и $A_2B_2 = l_2$ (сл. 510).



Сл. 510

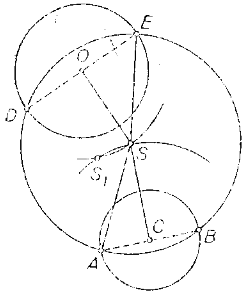
Нацртајмо у кругу O_1 тетиву дужине l_1 а у кругу O_2 тетиву дужине l_2 и повуцимо на њих као и на сечицу нормале O_1C_1, O_2C_2, O_1D_1 и O_2D_2; тада је $O_1C_1 = O_1D_1$ и $O_2C_2 = O_2D_2$.

Сечица је, дакле, заједничка тангента кругова са центрима у O_1 и O_2 а полупречника O_1C_1 и O_2C_2.

Да би задатак био могућ, потребно је да је $l_1 \leqslant 2r_1$, $l_2 \leqslant 2r_2$ и да кругови нису један у другом, да би се могла повући заједничка тангента.

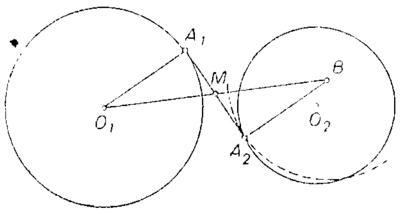
271) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је $SA=SE=r$, а пречници AB и DE (сл. 511). Дужи SC и SO могу се одредити, јер је у сваком од правоуглих троуглова SAC и SOE хипотенуза једнака r а катете су: у једном AC, а у другом EO.

Дакле, из центра C полупречником CS и из центра O полупречником OS описаћемо кругове; они ће се сећи у траженом центру S, или S_1.



Сл. 511

272) Нека је A_1A_2 тражена дуж (сл. 512). Повуцимо O_1M и продужимо за исту дужину до тачке B. У четвороуглу $O_1A_2BA_1$ дијагонале се полове; значи да је четвороугао паралелограм, па је $A_2B=O_1A_1=r_1$. Дакле, тачка A_2 ће се добити у пресеку круга O_2 и круга који се опише око тачке B полупречником r_1. Тада се A_2 споји са M и продужи за $A_2M=MA_1$. Тачка A_1 пашће на круг O_1.



Сл. 512

Задатак има два решења, једно, или ниједно, према томе да ли се кругови B и O_2 секу, додирују, или немају ниједну заједничку тачку.

273) *Први начин.* Ако су B и C центри, а r_1 и r_2 полупречници датих кругова, треба кроз тачку A повући праву тако да је разлика њених растојања од тачака B и C једнака r_1-r_2 (види зад. 216).

Други начин. Треба кроз A повући праве паралелне заједничким тангентама датих кругова. На тај начин имаћемо четири решења.

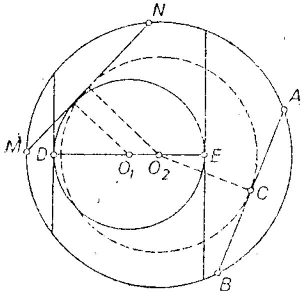
274) Свака група од два круга даје четири заједничке тангенте; свакој тангенти могу се повући две паралелне праве које задовољавају услов задатка. Према томе, постоје 24 праве подједнако удаљене од периферија датих кругова.

Дискусија је интересантна а није тешка.

275) Нека су O_1 и O_2 центри датих кругова, а MN тражена тангента дужине l (сл. 513).

а) Све једнаке тетиве имају једнаке централне раздаљине. Дакле, треба нацртати $AB=l$, описати круг полупречника O_2C, где је C средина тетиве AB, и повући заједничку дирку на тај круг и унутрашњи круг.

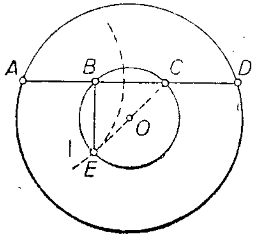
б) Дирка у тачки D нормална на правац O_1O_2 је најмања, а дирка у тачки E нормална на правац O_1O_2 је највећа дужина тетиве.



Сл. 513

Кад тачка O_2 није у унутрашњем кругу, онда је највећа тетива пречник спољашњег круга.

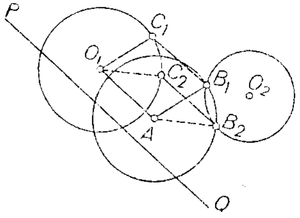
276) *Први начин.* Нека је $AB=BC$ (сл. 514). Ако се у B повуче нормала на праву $ABCD$ до E, пресека нормале са унутрашњим кругом, биће $AE=CE$. Како је $\sphericalangle CBE=90^\circ$, то дуж EOC мора бити пречник. Дакле, из дате тачке A треба описати лук полупречником који је једнак пречнику унутрашњег круга; он ће пресећи унутрашњи круг у тачки E. Затим, треба из тачке E повући пречник; на тај начин ће се добити тачка C.



Сл. 514

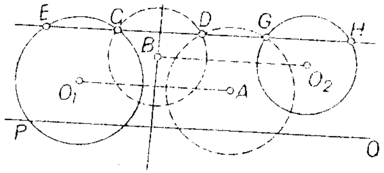
Други начин. Из тачке A повуче се пречник и над првом трећином овог пречника, почев од A, опише се круг. Пресек овог круга са унутрашњим кругом даће тачку B.

277) Из центра O_1 (сл. 515) повуцимо $O_1A \parallel PQ$ и $O_1A = l$; затим, око A опишимо круг полупречником круга O_1. Уствари извршимо транслацију круга O_1 за дужину l. Тачке пресека B_1 и B_2 са кругом O_2 дају решење, јер су слике $AB_1C_1O_1$ и $AB_2C_2O_1$ паралелограми.



Сл. 515

278) Повуцимо $O_1A \parallel PQ$ и $O_1A = l$ (сл. 516), па око A полупречником круга O_1 опишимо круг; другим речима, извршимо транслацију круга O_1. Затим повуцимо $O_2B \parallel PQ$ до пресека B са симетралом дужи O_1A. Око B опишимо круг полупречником круга O_2. Кроз тачке C и D пресека тога круга B са круговима O_1 и A повуцимо сечицу. Тада је $ED = O_1A = l$, $CD = GH$. Одузимањем ових једнакости добијамо: $ED - CD = l - GH$, или: $EC = l - GH$. Најзад, $EC + GH = l$.

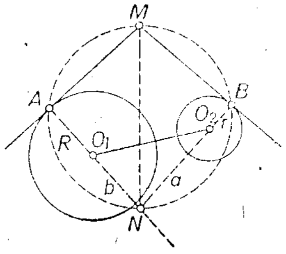


Сл. 516

279) Нека је M тражена тачка (сл. 517). Повуцимо додирне полупречнике и продужимо их до узајамног пресека N; затим, повуцимо MN.

Четвороугао $ANBM$ има два права угла; зато се око њега може описати круг. Прави углови су код A и B; друга два код M и N су суплементни.

Правоугли троугли MNB и MNA су подударни, јер имају заједничку хипотенузу, а катете MA и MB су једнаке. Значи, $AN = BN$, или: $a + r = b + R$, а отуда је $a - b = R - r$. Тако се у троуглу O_1O_2N зна основица O_1O_2, наспрамни угао N суплементан датом углу и разлика других двеју страна: $a - b = R - r$.



Сл. 517

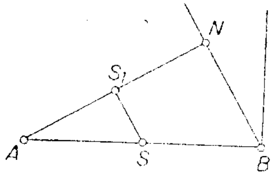
Овај троугао се може конструисати; затим треба продужити NO_2 и NO_1 и у B и A повући тангенте. Оне ће међу собом градити дати угао.

§ 7. Геометриска места

1) То су оне две тачке у којима симетрала дужи AB сече периферију круга.

2) Око тачке A треба описати круг полупречника 4 cm, а око тачке B круг полупречника 5 cm. Пресеци ова два круга даће две тражене тачке.

3) Кад се из A спусти нормала на праву која пролази кроз B, добија се правоугли троугао. Кад је права која пролази кроз B нормална на AB, нормала из A поклапа се са AB. У том случају средина нормале је на средини дужи AB. Ако је права ма у ком другом положају BN и на њу спустимо нормалу AN, добијамо правоугли троугао ABN (сл. 518). Кад спојимо средине нормала AB и AN, тј. повучемо SS_1, добијамо опет правоугли троугао ASS_1, јер је $SS_1 \parallel BN$. Теме правог угла је у средини нормале.



Сл. 518

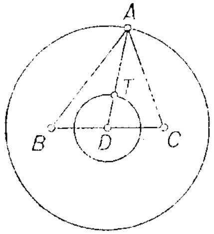
Значи, геометриско место средина нормала биће геометриско место темена правих углова који леже над половином дужи AB, тј круг коме је пречник $\frac{AB}{2}$ и који пролази кроз A.

4) Око тачке S треба описати круг полупречника $2\frac{3}{4}$ cm и правој MX повући паралелу са исте стране са које је тачка S а на растојању $2\frac{3}{4}$ cm од праве MX. Пресек круга и те паралеле даће две тражене тачке.

5) Симетрале углова PAB и QBA секу се под правим углом; према томе, геометриско место пресека симетрала је круг описан над AB као над пречником.

6) Тачке A, B, C имају одређен положај. За услов $BA = BP$ тачка P лежи на кругу описаном око B полупречником BA. Исто тако, да би било $CA = CP$, тачка P треба да лежи на кругу описаном око C полупречником CA. Пресек ова два круга одређује положај тачке P.

7) Како је $AD = l$, $BC = \text{const.}$ и D непомично, очигледно је да је геометриско место тачке A кружна линија полупречника DA (сл. 519). Међутим, знамо да је $DT = \frac{1}{3}\ DA = \frac{l}{3}$, па тачка T остаје на кружној линији полупречника DT са центром у D.



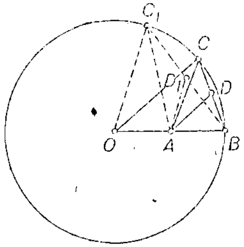
Сл. 519

Узми, обрнуто, да је T ма која тачка на тој кружној линији и покажи да је она тежиште троугла чија је тежишна линија $DA = DT + \frac{2}{3}\ l$ и страна BC.

Шта је у случају кад A дође на праву BC?

Дакле?

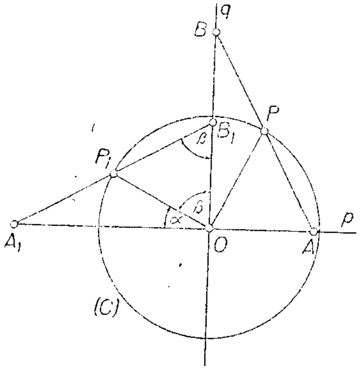
8) Нека је дат троугао ABC (сл. 520). Продужимо BA за дуж $AO = AB$. Како страна AB треба да остане стална, а тежишна линија да има сталну дужину $AD = l$, види се да тачка C припада кружној линији чији је полупречник $OC = 2\,AD = 2\,l$ а центар у O. Рецимо да је C_1 ма која тачка те кружне линије. Спојмо C_1 са O, B и A и повуцимо тежишну линију AD_1 троугла ABC_1. Тада је $AD_1 = \frac{1}{2}\,OC_1 = \frac{1}{2}\,OC = AD = l$. Према томе, геометриско место темена C је кружна линија са центром у O полупречника дужине $2\,l$.



Сл. 520

9) Нека крајње тачке A и B дужи AB описују праве p и q (сл. 521). Спојмо средину P те дужи са пресеком O правих. Како је ABO правоугли троугао, јасно је да је $OP = \frac{1}{2}\,AB$, и, према томе,

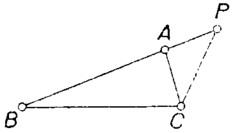
тачка P припада кружној линији са центром у O и полупречником OP.



Сл. 521

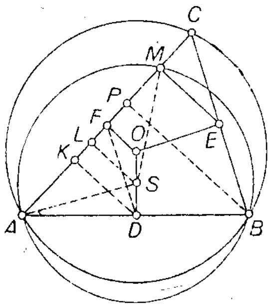
Узмимо обрнут случај. Нека је P_1 ма која тачка на тој кружној линији. Пренесимо од ње дуж $P_1A_1 = P_1O$ и продужимо A_1P_1 до пресека B_1 праве A_1P_1 са q. Из равнокраког троугла A_1OP_1 следује: $\sphericalangle P_1A_1O = \sphericalangle P_1OA_1 = \alpha$. Како је B_1OP_1 комплеменат углу α, а исто тако и $\sphericalangle OB_1P_1$, следује да је $\sphericalangle P_1OB_1 = \sphericalangle P_1B_1O = \beta$, што значи да је $\triangle OB_1P_1$ равнокрак. Отуда следује: $P_1B_1 = P_1O = P_1A_1$. Према томе, P_1 је средина дужи A_1B_1. Дакле, кружна линија (C) је тражено геометриско место.

10) Угао BAC је спољашњи угао на врху равнокраког троугла CAP; према томе је $\sphericalangle BPC = \frac{1}{2}\ \sphericalangle BAC$ (сл. 522), и геометриско место тачке P биће лук описан над BC као над тетивом, тако да су сви периферски углови над овом тетивом једнаки $\frac{1}{2} \sphericalangle BAC$.



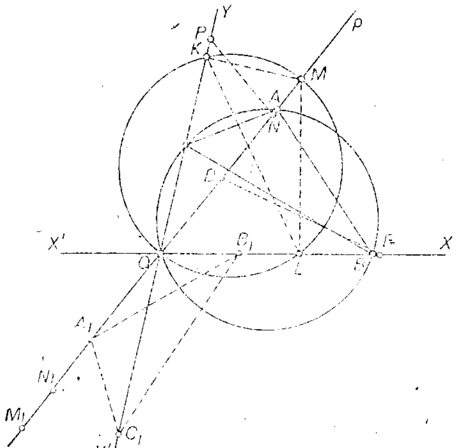
Сл. 522

11) Како је $\sphericalangle ACB$ сталан, то значи да се теме C помера по луку ACB (сл. 523). Спустимо нормале из E — средине стране BC, O — центра описаног круга ABC, S — средине дужи OD, и D — средине стране AB. Треба доказати да је $SM = SA$, тј. да је SM стална величина.



Сл. 523

Тврдимо да је $\triangle ASL \cong \triangle MLS$. Заиста, $AK = KP$, $KL = LF$, $PM = MC$, $AF = FC$; затим је $DF \# EC$, $DK \# EM$, и стога је $\triangle DKF \cong \triangle EMC$, што повлачи: $KF = MC = PM$ Према томе: $AL = AK + KL$, и даље: $AL = KP + LF = KF + FP + LF = PM + FP + LF = LM$. Како је и $SL = SL$, тврђење је доказано; међутим, то повлачи једнакост $SA = SM$ Дакле, тражено геометриско место је круг са центром у S и полупречником SA.

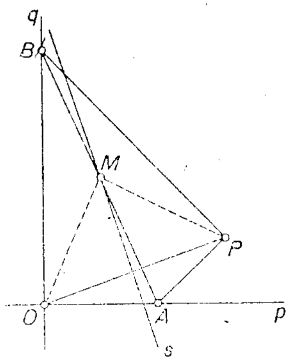


Сл. 521

12) Нека је ABC произвољан положај датог троугла (сл. 524). По претпоставци углови XOY и BAC су суплементни, па је, стога, четвороугао $OBAC$ тетивни. Отуда следује да је $\sphericalangle AOX = \sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle AOY = \sphericalangle ABC$. Према томе, теме A помера се по правој p која са осом OX чини угао једнак углу C троугла и пролази кроз тачку O и са правом OY угао једнак углу B датога троугла.

Дискусија. Тачка A не прелази целу праву p него само један отсечак на њој. Претпоставимо, прво, да се тачка A помера према тачки O. Кад C падне у O, тачка A заузеће положај тачке D, а тачка B положај тачке E, тј. троугао ABC заузеће положај DOE. Тачка A удаљиће се од тачке O највише кад дође у положај M, тј. кад њено растојање ML од OX буде једнако AB. Тада је $MK \perp OY$ и OM једнако пречнику круга описаног око тога датог троугла. Даљим удаљавањем тачке C од тачке O на правој OY она прелази из положаја K у положај P, а притом тачка B прелази из положаја L у положај O. Међутим, тачка A прелази из положаја M у положај N, тј. она се враћа према тачки O. Тиме је кретање троугла ABC у углу XOY испитано.

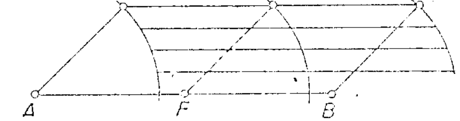
На исти начин може се испитати померање тачке A у случају да се тачка B помера дуж крака OX, а тачка C дуж крака OY' угла XOY'. Нека је $A_1B_1C_1$ један такав произвољан положај троугла ABC у том случају. Кад тачка B_1 дође у положај O, тачка A_1 доћи ће у положај N_1. Њено максимално растојање од O имаћемо кад доспе у положај M_1 итд. Кад испитамо и померање тачака B и C дуж кракова $X'Y'$ и $X'Y$, видећемо да ће тачка A у свему двапут прећи отсечак MM_1, тражено геометриско место.



Сл. 525

13) Нека је M средина отсечка AB (сл. 525). Спојмо M са O и P. У правоуглом троуглу ABO дуж OM је тежишна линија, а у правоуглом троуглу ABP дуж MP је тежишна линија. Како је $MO = \frac{1}{2} AB$ и $MP = \frac{1}{2} AB$, следује $MO = MP$, што значи да тачка M припада симетрали s дужи OP.

Обрнуто, нека је M произвољна тачка симетрале s дужи OP; тада је $MO = MP$. Кружна линија описана из M полупречником MO пролази кроз P, и ако су A и B тачке пресека круга и правих p и q, тада је AB пречник тога круга, јер је по претпоставци $p \perp q$. Према томе, M је средина дужи AB, а угао APB прав. Дакле, симетрала s је тражено геометриско место.



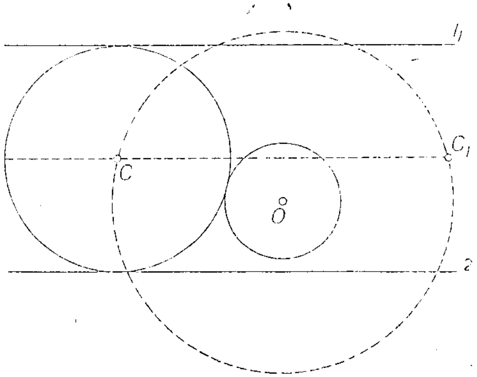
Сл. 526

14) Геометриско место средине E дужи CD је кружни лук полупречника $BC = EF$, чији је центар на средини дужи AB (сл. 526). Померање тачке E може се посматрати као померање темена E паралелограма $AFED$, у коме је $AF = \frac{AB}{2}$.

15) Геометриско место средина паралелних тетива једног круга је пречник нормалан на тетивама.

16) Како су додирне тачке темена правих углова између дирки и додирних полупречника, то је геометриско место додирних тачака круг описан над дужи која спаја сталну тачку и заједнички центар и која је пречник тога круга.

17) Тражени круг треба да додирује две паралелне праве; зато је геометриско место његовог средишта права паралелна датим правима, а на средини између њих. Полупречник траженог круга је једнак половини раздаљине између датих правих.

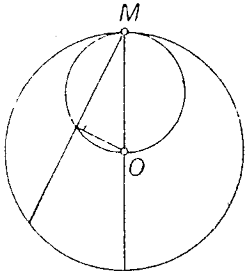


Сл. 527

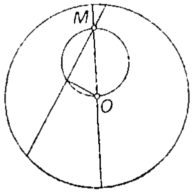
Тражени круг треба да додирује и дати круг O. Према томе, растојање његовог средишта од средишта датог круга мора бити једнако збиру њихових полупречника, и геометриско место средишта траженог круга је круг концентричан датом кругу описан полупречником једнаким збиру полупречника датог и траженог круга. Пресек геометриских места даје средиште траженог круга (сл. 527).

18) Како је збир углова PAB и PBA сталан (види зад. 36, § 6), то је и угао између њихових симетрала сталан. Стога је геометриско место пресека O геометриско место темена периферисских углова над тетивом AB једнаких овом углу између симетрала.

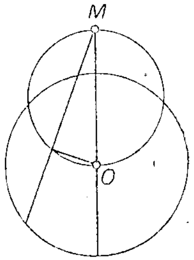
19) Дуж која спаја средину тетиве са центром круга стоји на тетиви нормално. Према томе, средине тетива су темена правих углова чији један крак пролази кроз центар круга а други кроз дату тачку. Значи, геометриско место средина тетива је круг чији је пречник раздаљина дате тачке од центра круга, било да је тачка на кругу, у кругу, или ван круга (сл. 528, 529, 530).



Сл. 528

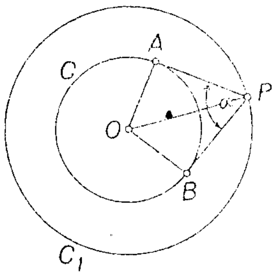


Сл. 529



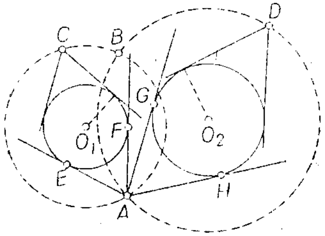
Сл. 530

20) Нека је P тачка из које се дати круг C види под датим углом α (сл. 531). Како је троугао OAP правоугли, он се може нацртати из ових података: OA, $\sphericalangle A = 90^0$, $OPA = \frac{\alpha}{2}$. Према томе, тачка P налази се на кружној линији C_1 полупречника OP са центром у O, и она је тражено геометриско место.



Сл. 531

21) За сваки од датих кругова опише се круг — геометриско место тачака из којих ће се тај круг видети под датим углом. Пресек ових геометриских места даје две тачке A и B, које задовољавају услов задатка (сл. 532).

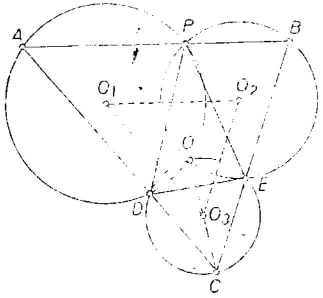


Сл. 532

Да би се добило геометриско место тачака из којих се један круг види под датим углом, треба повући на круг две тангенте које граде дати угао, па кроз пресек тангената описати круг концентричан са датим кругом.

22) Како је угао A периферски и сталан, он ће лежати увек над истим луком POD (сл. 533); значи, страна AC пролази кроз сталну тачку D. Исто тако, и страна BC пролази стално кроз тачку E.

И угао C је сталан, јер је $\sphericalangle C = = 180^0 - (\sphericalangle A + \sphericalangle B)$. Како његови краци увек пролазе кроз тачке D и E, то је геометриско место тачке C лук описан над DE као над тетивом, над којом су сви периферски углови величине $180^0 - - (\sphericalangle A + \sphericalangle B)$.



Сл. 533

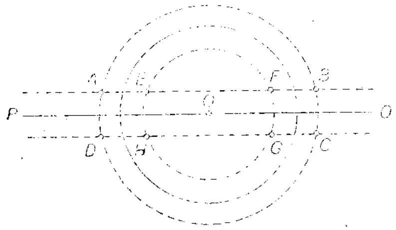
Примедба: а) Круг DCE пролази кроз тачку O у којој се секу дати кругови O_1 и O_2. Јасно је да је $\sphericalangle DOE = 360^0 - \sphericalangle POD - - \sphericalangle POE$.

Исто тако је $\sphericalangle POD = 180^0 - \sphericalangle A$, $\sphericalangle POE = 180^0 - \sphericalangle B$; одавде се сабирањем добија: $\sphericalangle POD + \sphericalangle POE = 360^0 - (\sphericalangle A + \sphericalangle B)$. Заменом ове вредности у првој једнакости добија се: $\sphericalangle DOE = = \sphericalangle A + \sphericalangle B$, тј. $\sphericalangle DOE$ је суплеменат углу C, што показује да круг DCE пролази кроз тачку O.

б) Кад се тетива AB обрће око тачке P, троугао ће бити максимум кад буде $AB \parallel O_1O_2$, јер је $AB = 2\,O_1O_2$. Минимум је кад је $AB \perp O_1O_2$, тј. кад је AB у положају PO и кад троугао дегенерише у тачку O.

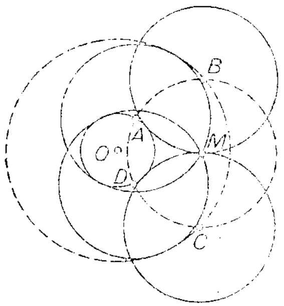
в) Пречник OC одређен је положајем тачке C која се добија кад је троугао максимум, и положајем тачке O која одговара минимуму.

23) Како круг полупречника 4 mm треба да додирује праву PQ, то ће се његов центар налазити на правима паралелним правој PQ а на раздаљини 4 mm. Ако тај круг треба да додирује дати круг споља, њихова средишна раздаљина износи $16 + 4 = 20$ mm, па ће се, према томе, центар круга налазити на кругу концентричном датом кругу полупречника 20 mm. Ако круг треба да додирује дати круг изнутра, њихова централна раздаљина је $16 - 4 = 12$ mm, тј. тражени центар ће се налазити на кругу полупречника 12 mm а који ће бити концентричан датом кругу. У пресеку правих и помоћних кругова налазиће се тражени центар. Како има осам пресека (A, B, C, D, E, F, G, H), задатак ће имати осам решења (сл. 534).



Сл. 534

24) Нека је C тражени центар и нека круг C додирује споља дати круг O (сл. 535), тада је њихова централна раздаљина $OC = 1 + 2 = 3$ cm. Значи, тражени центар се налази на кругу полупречника 3 cm, концентричном датом кругу. А ако тражени круг треба да додирује дати круг изнутра, њихова средишна раздаљина је $2 - 1 = 1$ cm; према томе, тражени центар је на датом кругу.



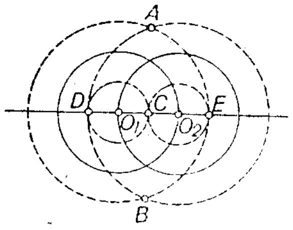
Сл. 535

Како тражени круг треба да пролази кроз тачку M, то ће његов центар лежати на кругу описаном око M полупречником 2 cm.

У пресецима овог круга описаног око M са датим кругом и са њему концентричним кругом полупречника 3 cm налазе се центри тражених кругова.

Решења има четири, јер има четири пресека: A, B, C, D.

25) Нека су O_1 и O_2 центри датих кругова (сл. 536), а O центар круга полупречника $\frac{r}{2}$ који додирује ова два круга. Средишна раздаљина O_1O једнака је збиру или разлици полупречника кругова O_1 и O, тј. $\frac{3r}{2}$ или $\frac{r}{2}$. Исто важи и за раздаљину O_2O.



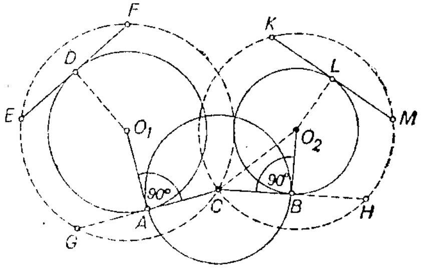
Сл. 536

Дакле, тражени центар O се налази на кругу полупречника $\frac{3r}{2}$ и $\frac{r}{2}$ а чији је центар у O_1. Исто тако, он се налази на кругу полупречника $\frac{3r}{2}$ и $\frac{r}{2}$ а чији је центар у O_2. Два круга полупречника $\frac{3r}{2}$ секу се у тачкама A и B (јер је њихова централна раздаљина мања од збира а већа од разлике њихових полупречника). Два круга полупречника $\frac{r}{2}$ додирују се споља у тачки C (јер је њихова централна раздаљина једнака збиру њихових полупречника). Најзад, један круг полупречника

$\frac{3r}{2}$ и један круг полупречника $\frac{r}{2}$, који нису концентрични, додирују се изнутра у тачкама D и E (јер је њихова централна раздаљина O_1O_2 једнака разлици њихових полупречника).

Има, дакле, пет разних положаја A, B, C, D, E за тражени центар.

26) Кад се два круга секу под правим углом, тада је тангента једног полупречник другог круга.

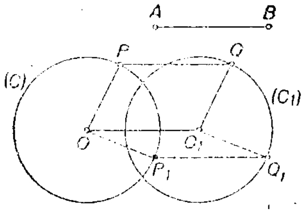


Сл. 537

Претпоставимо да је задатак решен и да је круг C тражени круг (сл. 537). Тангента круга O_1 је AC, полупречник траженог круга. Исто тако, тангента круга O_2 је BC, полупречник траженог круга.

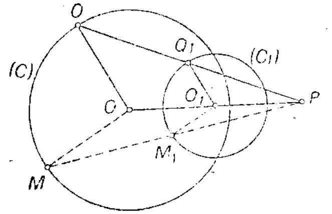
Ма у којој тачки D круга O_1 треба повући тангенту $DE = r$, па полупречником O_1E описати круг концентричан кругу O_1. То исто треба урадити и код круга O_2. Пресек тако описаних концентричних кругова даће центар траженог круга. $AC = \frac{1}{2}\,CG = \frac{1}{2}\,EF = ED = r$ и $CB = \frac{1}{2}\,CH = \frac{1}{2}\,KM = LM$.

27) Повуци $OO_1 \# AB$ и $PQ \# OO_1$ (сл. 538). Спој O са P и O_1 са Q. Докажи да је $OPQO_1$ паралелограм и да је тачка Q на кружној линији (C_1) са центром у O_1 и полупречником $O_1Q = OP$. Затим, обрнуто, ако је Q_1 произвољна тачка на кружној линији (C_1) и $P_1Q_1 \# OO_1$, докажи да је $OO_1Q_1P_1$ паралелограм и $OP_1 = OP$. Отуда извуци закључак да је геометриско место тачке Q кружна линија (C_1).



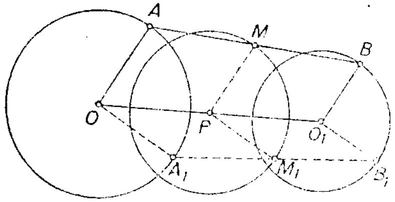
Сл 538

28) Нека је Q_1 средина дужи PQ (сл. 539). Спој Q са O и Q_1 са средином стране PO троугла POQ. Утврди да Q_1 припада кружној линији (C_1) са центром у O_1 и полупречником $O_1Q_1 = \frac{1}{2}\,OQ$. Затим, обрнуто, на кружној линији (C_1) узми произвољну тачку M_1 и докажи да M припада кружној линији (C). Из тога извуци закључак да је кружна линија (C_1) тражено геометриско место.



Сл. 539

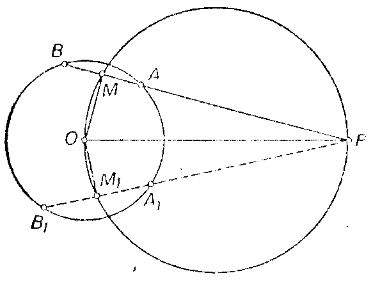
29) Нека је P средина дужи OO_1 (сл. 542). Спој тачку P са средином M дужи AB. Тада је $PM = \frac{OA + O_1B}{2} = \frac{r + r_1}{2}$ (зашто?). Утврди да M припада кружној линији са центром у P и полупречником PM. Затим, обрнуто, утврди, ако је M_1 произвољна тачка те кружне линије, да је M_1 средина дужи A_1B_1. Отуда извуци закључак да је круг са центром у P и полупречником PM тражено геометриско место.



Сл. 540

Ако су OA и O_1B паралелни, али супротног смера, докажи да је геометриско место тачке M круг са центром у P и полупречником $\frac{r - r_1}{2}$.

30) Нека је M средина тетиве AB која припада сечици што пролази кроз тачку P (сл. 541). Кад спојимо O са M, знамо да је $OM \perp AB$, и, стога, M припада кружној линији пречника OP.

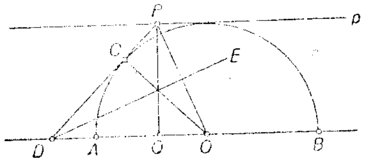


Сл. 541

Докажи, обрнуто, ако је M_1 ма која тачка кружне линије пречника OP, да је та тачка средина тетиве A_1B_1 и, затим, извуци закључак да је лук те кружне линије унутар датог круга са центром у O тражено геометриско место.

Испитај случај кад је тачка P на кружној линији или унутар круга.

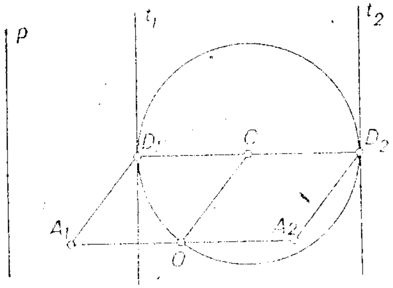
31) Како је $OP \perp DE$, где је DE симетрала угла CDO, то је троугао PDO равнокрак (сл. 542). Стога су висине OC и PQ тога троугла једнаке. Према томе, тачка P има растојање од праве AB једнако полупречнику OC датога полукруга. Како је та величина стална, произилази да се померањем тачке C по кружној линији тачка P помера по правој p паралелној правој AB. Лако је видети да је геометриско место тачке P отсечак на правој p који чине тангенте полукруга у A и B.



Сл. 542

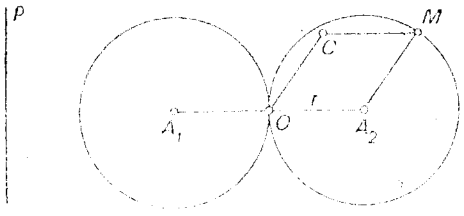
32) Нека се круг са центром у C и полупречником r обрће око неке своје тачке O; повуцимо тангенте t_1 и t_2 тога круга паралелно датој правој p; D_1 и D_2 су додирне тачке чије геометриско место тражимо (сл. 543).

Повуцимо кроз O праву нормалну на p и одмеримо на њој $OA_1 = OA_2 = r$; спојимо A_1 са D_1 и A_2 са D_2 и O са C. Како је $A_1A_2 \parallel D_1D_2$, $CD_1 = CO = OA_1 = r$, $CD_2 = CO = = OA_2 = r$, то је и $A_1D_1 \# OC = r$, $A_2D_2 \# OC = r$.



Сл. 543

Отуда следује да D_1 и D_2 леже на круговима са центрима у A_1 и A_2 и полупречником r.



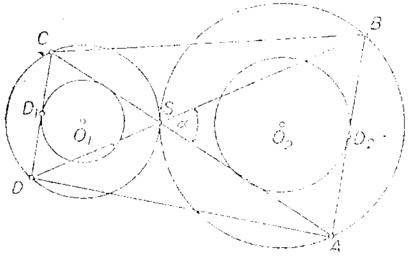
Сл. 544

Обрнуто, нека је M произвољна тачка на једном од тих кругова, рецимо на оном са центром у A_2, и нека је $MC \# A_2O$ (сл. 544). Тада је OA_2MC ромб чија је страна једнака r. Према томе, тачка C је центар круга који пролази кроз тачку O и M чији је полупречник r и чија је тангента у M паралелна правој p, јер је нормална на CM. Отуда следује да M припада геометриском месту.

Дакле, тражено геометриско место су кругови са центрима у A_1 и A_2 и полупречником r.

33) Прво проучи зад. 64 у § 6 и потражи геометриско место средине D_1 тетиве CD и средине D_2 тетиве AB датих кругова са центрима у O_1 и O_2 (сл. 545). Одг. Тражена геометриска места су кругови са центрима у O_1 и O_2 и са полупречницима O_1D_1 и O_2D_2.

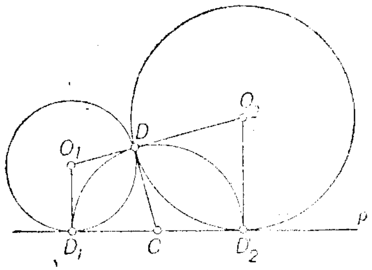
Испитај случај кад се кругови додирују изнутра. Тада отсечци на сечицама чине краке трапеза.



Сл. 545

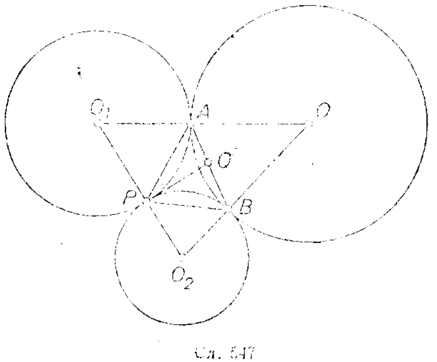
34) Нека се дати кругови додирују у тачки D и нека додирују праву p у две дате тачке D_1 и D_2 (сл. 546).

Повуцимо заједничку тангенту та два круга; она сече праву у тачки C. Како је $CD_1 = CD = CD_2$ (зашто?), то је тражено геометриско место кружна линија пречника D_1D_2.



Сл. 546

35) Нека се кругови са центрима O_1 и O_2 додирују у тачки P и нека додирују круг са центром у O у тачкама A и B (сл. 547).

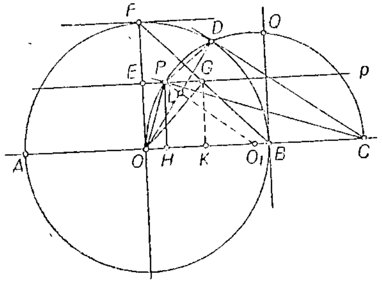


Сл. 547

Повуцимо заједничку тангенту PQ прва два круга. Тада добијамо да је $\sphericalangle APQ + \sphericalangle BPQ = \sphericalangle APB$, и даље: $\sphericalangle APQ = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_1P$, $\sphericalangle BPQ = \frac{1}{2} \sphericalangle BO_2P$, а отуда $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} (\sphericalangle AO_1P+$

$+ \sphericalangle BO_2P)$. Међутим, из троугла OO_1O_2 видимо да је $\sphericalangle O_1OO_2 = 180^0 - (\sphericalangle OO_1O_2 + \sphericalangle OO_2O_1)$, или: $\sphericalangle O_1OO_2 = 180^0 - (\sphericalangle AO_1P + \sphericalangle BO_2P)$, а отуда: $\sphericalangle APB = \frac{1}{2}(180^0 \quad \sphericalangle O_1OO_2) = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle O_1OO_2 = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$. Како је, према претпоставци, $\sphericalangle AOB$ сталан, то је сталан и $\sphericalangle APB$. Према томе, тражено геометриско место је кружни лук над тетивом AB са periфериским углом $90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$.

36) Посматрајмо прво тангенту у тачки B (сл. 548). Угао $ABQ = 90^0$. Бисектриса BF тога угла дели га, дакле, тако да је $\sphericalangle ABF$ 45^0. Спустимо нормалу из O на BF; њено подножје G налази се на средини дужи BF. Стога је растојање GK од AB једнако $\frac{1}{2} \cdot OF = \frac{r}{2}$, где је r полупречник датог круга. Посматрајмо сад тангенту у тачки F. Бисектриса p пролази кроз тачку E, средину полупречника OF, тако да је $OE = \frac{r}{2}$, и паралелна је пречнику AB. Узмимо, најзад, произвољну тачку C на продушку пречника AB, повуцимо из ње тангенту CD на дати круг; затим, повуцимо бисектрису CP угла ACD и из O спустимо нормалу OP на ту бисектрису. Треба доказати да се и подножје P те нормале налази на правој p.

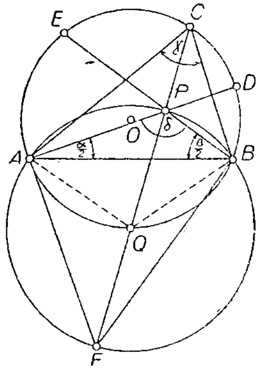


Сл. 548

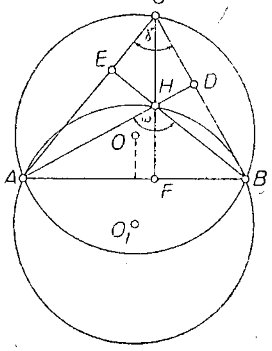
Описаћемо кружну линију која пролази кроз тачке O, D, C. Њен центар O_1 је средина дужи OC. Тачка P је на тој кружној линији (зашто?). Спојмо O са D, P са O_1 и спустимо нормалу PH из P на AB. Означимо пресек PO_1 и OD са L. Тада је $\triangle OHP \cong \triangle OLP$ (зашто?), што повлачи $PH = OL = \frac{1}{2} OD = \frac{1}{2} \cdot OF = \frac{r}{2}$. Дакле, права p је тражено геометриско место. Лако је, наиме, видети да, ако узмемо тачку C на продушку

пречника AB с леве стране тачке A, добијамо тачку на правој p с леве стране тачке E. Јасно је да се таква права добија и с друге стране пречника AB. Притом у оба случаја долазе у обзир бисектрисе оштрих и тупих углова.

37) а) Кад се C помера по луку ACB, угао γ је сталан, па је сталан и збир $\alpha+\beta$; због тога је сталан и збир $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, одакле следује да је и угао δ сталан (сл. 549). Према томе, тачка P, пресек бисектриса углова и теме троугла ABP, помера се по луку који одговара тетиви AB. Тај лук је тражено геометриско место. Лук AFB, који припада истом кругу као и лук APB, јесте геометриско место пресека бисектриса спољашњих углова код темена A и B.



Сл. 549



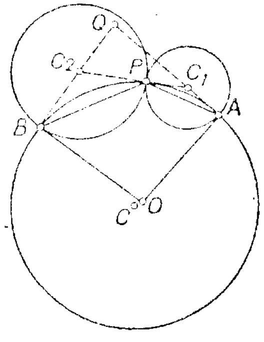
Сл. 550

Центар Q круга $APBF$ налази се на средини лука AQB. Заиста, тачка Q је на пресеку симетрале угла γ и круга описаног око троугла ABC. Затим, тачка D је средина лука BC; угао QAP има за меру збир $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{QB}+\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{QD}$, а угао QPA збир $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AQ}+\overset{\frown}{CD})$. Међутим, $\overset{\frown}{QB}=\overset{\frown}{QA}$ и $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$. Дакле, та два угла имају исту меру па су једнака. Отуда следује да је $\triangle APQ$ равнокрак и $QP = QA$.

Исто тако је и $\triangle AFQ$ равнокрак, јер је $\sphericalangle FAQ + \sphericalangle QAP = 90^0$; $\sphericalangle AFQ + \sphericalangle APQ = 90^0$ и $\sphericalangle QAP = \sphericalangle APQ$, тј. оба угла имају исте комплементе. Дакле: $QF = QA = QP$. Према томе, тачка Q, средина хипотенузе FP, центар је круга $APBF$.

б) Угао $\omega = \sphericalangle DHE = 180^0 - \gamma$ (сл. 550). Према томе, тражено геометриско место је лук AHB, тј. лук круга који пролази кроз ортоцентар H и тачке A и B. Тај круг је симетричан са датим кругом у односу на AB. (Види § 6, зад. 119).

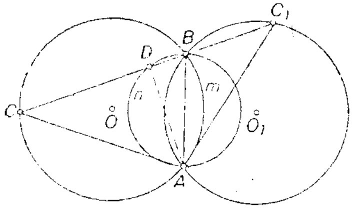
38) Нека су дати кругови са центрима у C_1 и C_2 и нека је P њихова тачка додира (сл. 551). Спојмо тачку P са A и B и повуцимо праве AC_1 и BC_2; оне се секу у тачки Q. Повуцимо централу C_1C_2. Треба доказати да је угао APB сталан.



Сл. 551

Заиста, $\sphericalangle PAQ = \frac{1}{2} \sphericalangle PC_1Q$, $\sphericalangle PBQ = \frac{1}{2} \sphericalangle PC_2Q$. С друге стране, $\sphericalangle APB = 180^0 - (\sphericalangle C_1PA + \sphericalangle C_2PB)$. Како су, међутим, троугли AC_1P и BC_2P равнокраки, јер је $C_1A = C_1P$, $C_2B = C_2P$, следује да је $\sphericalangle C_1PA = \sphericalangle PAQ$, $\sphericalangle C_2PB = \sphericalangle PBQ$, па је отуда $\sphericalangle C_1PA = \frac{1}{2} \sphericalangle PC_1Q$, $\sphericalangle C_2PB = \frac{1}{2} \sphericalangle PC_2Q$. Углови OAQ и OBQ четвороугла $OAQB$ су прави, па су углови AOB и AQB суплементни. Међутим, из троугла C_1C_2Q видимо да је $\sphericalangle C_1QC_2 = \sphericalangle AQB = 180^0 - (\sphericalangle PC_1Q + \sphericalangle PC_2Q)$. Ако то уважимо, добијамо: $\sphericalangle APB = 180^0 - \frac{1}{2} (\sphericalangle PC_1Q + \sphericalangle PC_2Q) = 180^0 - \frac{1}{2} (180^0 - \sphericalangle AQB) = 180^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$, а то је стална вредност. Дакле, геометриско место тачке P је кружни лук APB описан над AB који одговара углу $180^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$. — Остали део кружне линије којој припада лук APB одговара унутрашњем додиру кругова.

39) а) Кад повучемо заједничку тетиву AB, видимо да је $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC_1B$ (зашто?), што значи да је $\triangle ACC_1$ равнокрак и, стога, $AC = AC_1$ (сл. 552).

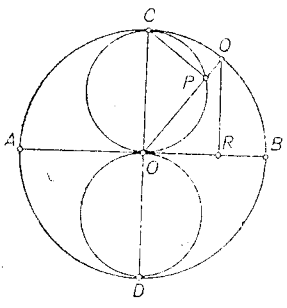


Сл. 552

б) Ако се сечица CBC_1 обрће око B, углови ACC_1 и AC_1C су стални, па и угао CAC_1. — Нека је D средина дужи CC_1. Тада је AD висина троугла ACC_1 и $AD \perp CC_1$, што значи да тачка D припада кружној линији пречника AB. Обрнуто, ако је D једна тачка те кружне линије, тада је $\sphericalangle BDA = 90^0$ и спајањем тачака B и D добијамо сечицу CC_1. Према а) троугао ACC_1 је равнокрак и подножје D висине AD је средина дужи CC_1.

Дакле, геометриско место тачке D је круг пречника AB. — Испитај случај кад је једна од тачака C и C_1 на луку AmB или AnB.

40) Нека је AB сталан пречник и OQ произвољан полупречник (сл. 553). Растојање QR тачке Q од AB пренећемо на OQ од O, тако да је $OP = QR$. Тражимо геометриско место тачке P.



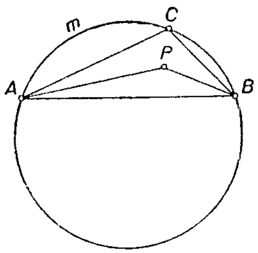
Сл. 553

Спојмо C са P, где је C крајња тачка пречника $CD \perp AB$. Тада је $\triangle COP \cong \triangle OQR$ (зашто?) и $\sphericalangle CPO = \sphericalangle QRO = 90^0$. Дакле, тачка P припада кружној линији пречника OC и кружној линији пречника OD.

Обрнуто, лако је доказати, ако је P тачка ма које од тих кружних линија, да је $QR = OP$. Отуда закључујемо да су те две кружне линије тражено геометриско место тачке P.

41) Нека је P центар круга уписаног у троуглу ABC (сл. 554). У троуглу APB имамо да је $\sphericalangle APB = 180^0 - (\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA)$. Како је $\sphericalangle PAB = \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$, $\sphericalangle PBA = \frac{1}{2} \sphericalangle CBA$, то је $\sphericalangle APB = 180^0 - \frac{1}{2} (\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA) = 180^0 - \frac{1}{2} (180^0 - \sphericalangle ACB) = 180^0 -$

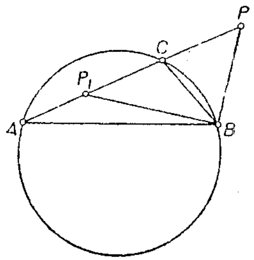
- $90^0 + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 90^0 + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. Како је, међутим, угао ACB сталан, то је сталан и угао APB. Према томе, тачка P припада луку описаном са исте стране као и лук AmB чија је тетива AB и која припада углу $90^0 + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. Тај лук је тражено геометриско место.



Сл. 554

Ако је тачка P нека тачка тога лука, докажи, обрнуто, да је C тачка лука AmB.

42) Треба доказати да су углови APB и AP_1B стални (сл. 555). Заиста, $\triangle BCP$ је равнокрак (зашто?) и, стога, $\sphericalangle CPB = \sphericalangle CBP$. А како је $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBP + \sphericalangle CPB = 2\sphericalangle CPB$, произилази да је $\sphericalangle CPB = \sphericalangle APB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$.



Сл. 555

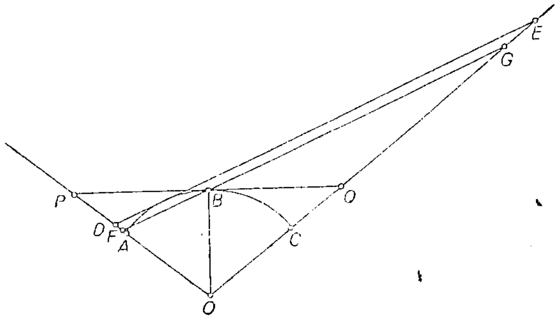
Међутим, угао ACB је сталан, па је сталан и угао APB. Дакле, тачка P припада луку који одговара углу $\frac{1}{2}\sphericalangle ACB$ и чија је тетива AB. Слично се може показати и за тачку P_1. Ти лукови су тражена геометриска места.

Докажи и обрнуто, ако је P тачка лука који одговара углу $\frac{1}{2}\sphericalangle ACB$, да је $CP = CB$

§ 8. Максима и минима

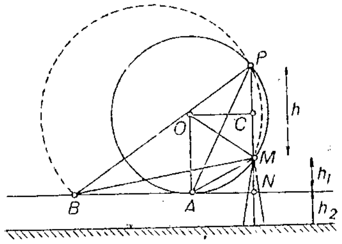
1) Најмања је она тангента која додирује лук ABC у средини B (сл. 556).

Тангента DE је већа од отсечка сечице FBG са којом је паралелна; ова сечица је повучена кроз средину основице равнокраког троугла POQ, па је њен отсечак између кракова равнокраког троугла већи од PQ основице равнокраког троугла; утолико је пре $PQ < DE$. (Види § 5 зад. 10).



Сл. 556

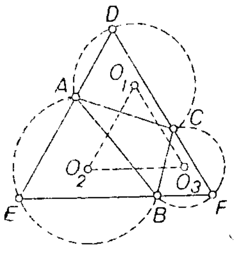
2) Претпоставимо да је задатак решен. Лук који пролази кроз тачке P и M и на коме се налази теме највећег угла (сл. 557) треба да додирује хоризонталну раван која је у висини посматрачевог ока, јер сваки други лук који пролази кроз P и M и сече правац хоризонталне равни NA има полупречник већи од OA. Према томе је $\sphericalangle B < \sphericalangle A$.



Сл. 557

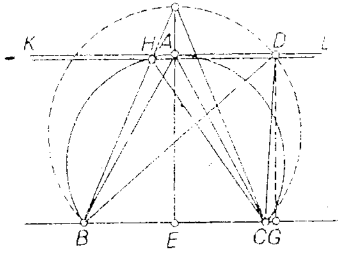
Задатак се, дакле, своди на то да се кроз P и M повуче круг који додирује хоризонталну раван AN. Полупречник $OA = h_1 + \frac{h}{2}$, где је $h_1 = H - h_2$, а h_2 висина посматрачевог ока. Дакле, из тачке M као центра треба пресећи луком полупречника $h_1 + \frac{h}{2}$ симетралу дужи PM, па ће се добити тачка O. Додирна тачка A је тражена тачка, тј. теме највећег угла под којим се види копље. $AN = OC =$ катети правоуглог троугла хипотенузе $OM = OA$ и катете $CM = \frac{h}{2}$.

3) Треба над сваком страном датог троугла ABC (сл. 558) описати лук који ће бити геометриско место за темена углова од 60^0, спојити средишта ових лукова и кроз темена датог троугла повући паралеле странама добијеног троугла $O_1O_2O_3$. (Види § 7, зад. 22, б).



Сл. 558

4) То је равнокраки троугао ABC (сл. 559). Посматрајмо још један троугао DBC са истом основицом и једнаком висином; треће теме тога троугла лежи на правој KL паралелној страни BC на растојању AE.

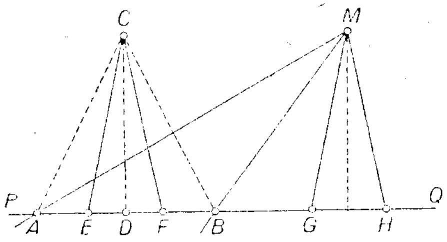


Сл 559

За свако теме на правој KL које не лежи на симетрали основице геометриско место је лук који сече симетралу основице у тачки F; отуда је $EF > DG$ и $\sphericalangle A > \sphericalangle F$.

Из слике видимо да је $\sphericalangle A = \sphericalangle H$, $\sphericalangle H = \sphericalangle F + \sphericalangle HCF$; дакле, $\sphericalangle A$ је максимум.

5) Нека је AMB ма који положај датог угла (сл. 560); његови краци отсецају на правој PQ отсечак AB. Али, према задатку 4, за отсечак AB угао ACB, чије је теме на истом растојању од праве PQ на коме и тачка M, и у исто је време и на симетрали дужи AB, већи је од угла AMB. Према томе, AB није минимум.

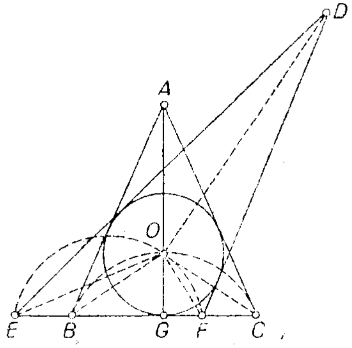


Сл. 560

Како је за отсечак дате дужине угао максимум кад је симетрала CD отсечка у исто време и симетрала угла ACB, нацртајмо угао ECF, или GMH, једнак углу AMB, али тако да нормала из C, или M, буде симетрала угла. На тај начин, отсечак GH ће бити минимум кад нормала из темена спуштена на праву PQ буде симетрала датог угла.

6) Посматрајмо два троугла: равнокраки троугао ABC и још један произвољан DEF са једнаком основицом и истим уписаним кругом (сл. 561).

Познато је да се симетрале углова на основици секу у центру уписаног круга и да је $\sphericalangle BOC = 90^0 + \frac{1}{2}\sphericalangle A$, $\sphericalangle EOF = 90^0 + \frac{1}{2}\sphericalangle D$. Највећем углу са теменом у центру одговара највећи угао на врху; према томе, довољно је да упоредимо углове BOC и EOF.

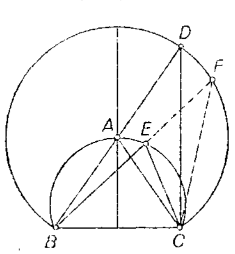


Сл. 561

У равнокраком троуглу OBC, OG је висина лука на коме се налазе темена углова једнаких углу BOC, док за лук на коме се налазе темена углова EOF то је нормала ма из које тачке; то значи да је сегмент BOC мањи од сегмента EOF, па је угао BOC већи од угла EOF, а отуда произилази да је $\sphericalangle A > \sphericalangle D$.

Угао наспрам основице је, дакле, максимум кад је троугао равнокрак.

7) а) *Први начин.* То је равнокраки троугао ABC (сл. 562). Продужимо BA за $AD = AC$, затим узмимо још један троугао BCE, исте основице и једнаког наспрамног угла, па продужимо BE за $EF = EC$. Тада је $\sphericalangle D = \frac{1}{2}\sphericalangle A$, $\sphericalangle F = \frac{1}{2}\sphericalangle E$, или: $\sphericalangle D = \sphericalangle F$; према томе, темена D и F се налазе на луку који је геометриско место за темена углова величине $\frac{1}{2}\sphericalangle A$, тј. углова који су половина датог угла. Центар овог лука је у тачки A, јер је $AB = AD$.



Сл. 562

Пречник BD, који је уствари збир кракова равнокраког троугла ABC, претставља максимум, тј.

$$AB + AC > AE + EC.$$

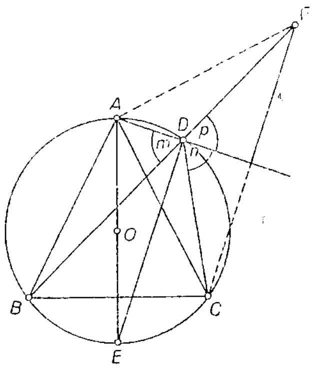
б) *Други начин.* Троугли BCA и BCD (сл. 563) имају исту основицу и једнаке наспрамне углове. Симетрала угла D у BCD пролази кроз тачку E на средини лука BEC; симетрала спољашњег угла код D пролази кроз тачку A, крајњу тачку пречника EA (симетрале спољашњег и унутрашњег угла код истог темена троугла међусобно су нормалне). Ако тачку F одредимо симетрично тачки C у односу на AD, тачка F ће пасти на продужак дужи BD, јер су углови m, n, p једнаки.

Сем тога је $AF = AC$, $DF = DC$,

$$BF < AB + AF,$$

или:

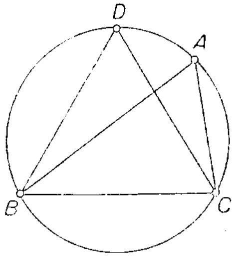
$$BD + DC < AB + AC.$$



Сл. 563

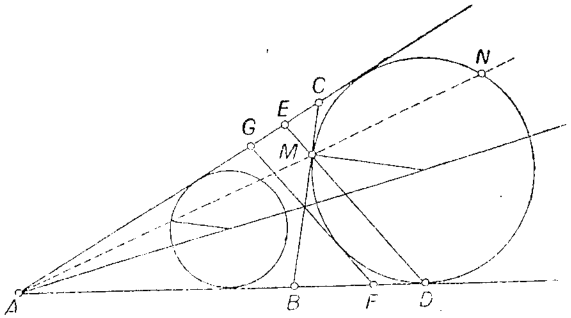
Кад се тачка D приближава тачки A, збир $BD+DC$ расте, јер и $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BAC + 2\cdot\sphericalangle CAD$ расте, а величине дужи које га захватају остају исте.

8) Нека је ABC уписан троугао (сл. 564). Посматрајмо једну од промењљивих страна као сталну; нека је, например, страна BC одређена и стална. Треба у сегменту BAC наћи троугао максималног обима. Из претходног задатка се зна да равнокраки троугао DBC има највећи обим. Значи, кад су две стране AB и AC промењљиве, треба да су једнаке међу собом, тј. $BA = AC = BD = CD$. Слично посматрање показује да стране BC и BD треба да су једнаке. Дакле, троугао највећег обима треба да је равностран.



Сл. 564

9) Нека је M дата тачка у углу A (сл. 565).



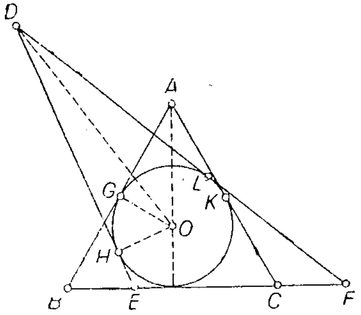
Сл. 565

Треба описати круг који пролази кроз дату тачку и додирује краке датог угла, па повући тангенту BMC. Из слике се види начин његове конструкције.

Довољно је показати да је обим троугла ABC мањи од обима троугла ADE чије су две стране на крацима угла а трећа пролази кроз тачку M. Ако повучемо тангенту $FG \parallel DE$, јасно је да је обим ADE већи од обима AFG, па, према томе, и од обима ABC.

Између кракова угла могу се описати два круга који додирују кракове и пролазе кроз дату тачку. Од та два круга треба узети онај на коме је тачка M ближа темену угла него друга пресечна тачка круга са правом AMN.

10) Равнокраки троугао ABC (сл. 566) има најмањи обим, јер је $\sphericalangle A > \sphericalangle D$ (види зад. 6).



Сл. 566

Правоугли троугли OGA и OHD имају по једну страну једнаку; па како је $\sphericalangle HDO < \sphericalangle GAO$, то је и $DO > AO$ и $DH > AG$, што значи да је $AG + AK < DH + DL$.

Међутим је $EH + FL = EF$,

$$BG + CK = BC = EF,$$

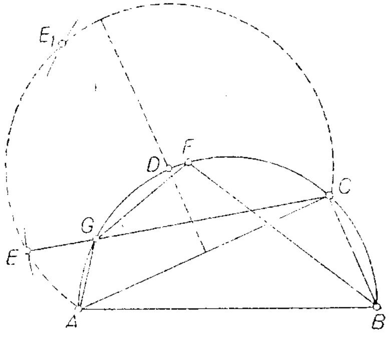
тј. промене обима зависе само од AG и DH. Према томе, равнокраки троугао има најмањи обим.

11) Испитивањем сличним испитивању у зад. 8 налази се да три промењљиве стране треба да су међу собом једнаке. Четвороугао је, дакле, половина правилног шестоугла.

12) Обележимо са d разлику која се добија кад се од обима четвороугла одузме $2r + a$.

Нека је $BC = a$ (сл. 567). Задатак се своди на задатак да се лук AC подели тако да збир тетива $AG + GC$ има познату дужину d; или, што је исто, да се конструише троугао коме знамо основицу, супротан угао и збир других двеју страна (види 6 зад. 265, § 2 зад. 89, 90).

Ради тога, из тачке D, средине лука ADC, треба описати лук AEC и из тачке C луком полупречника d пресећи тај лук; затим, повући EC. Тада ће бити $AG+$ $+GC=d$.

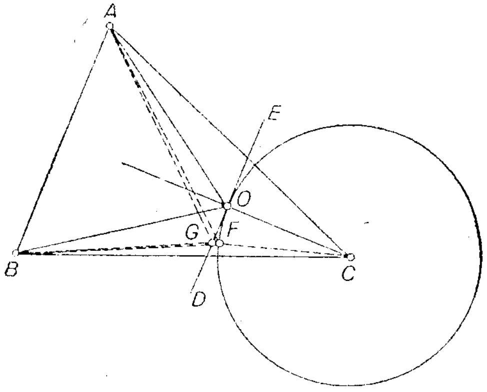


Сл. 567

Ако узмемо $BF=CG$, биће $GF=BC=a$ и четвороугао $ABFG$ биће тражени четвороугао.

Максимум ће бити кад узмемо једнаке тетиве AD и DC. У том случају ће дата тетива a бити паралелна пречнику.

13) Нека је O тражена тачка (сл. 568), тако да је $AO+$ $+BO+CO$ минимум.



Сл. 568

Ако је CO непромењиво, тачка O треба да лежи на кругу датог полупречника; збир $AO+BO$ је минимум кад је $\sphericalangle AOC=$ $=\sphericalangle BOC$, што је у овом случају тако, јер је, по претпоставци, $\sphericalangle AOE=$ $=\sphericalangle BOD$; затим, $\sphericalangle EOC=$ $=\sphericalangle DOC=90^0$. Значи, за сваку другу тачку G тангенте DOE имамо да је $AG+GB>AO+BO$ и, због тога, за сваку другу тачку F кружне линије $AF+BF>AG+BG>AO+BO$.

Сличним размишљањем, сматрајући дуж BO непроменљивом, налази се да AO и CO треба да граде једнаке углове са BO. Дакле, минимум је кад су три угла AOB, BOC, AOC једнаки. Према томе, над двема странама датог троугла треба описати лукове — геометриска места за темена углова од 120^0.

14) Та три пута треба да се састану у једној тачки O и да њихови правци граде међу собом углове од 120^0.

Над дужи MN као над тетивом са стране окренуте каналу треба описати лук — геометриско место за темена углова од 120^0. Из тачке A која је на средини лука с друге стране тетиве спусти се нормала на правац канала. Тачка O биће у пресеку ове нормале и лука, а у подножју нормале биће тачка S. (Види зад. 13.)

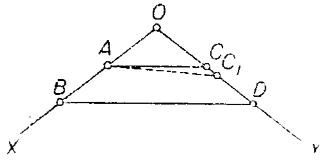
§ 9. Пропорционалност дужи и сличност слика

а) ТЕОРЕМЕ

I) Дуж и угао

1) Нека је $AC_1 \parallel BD$ и тачка C_1 нека је на OY (сл. 569); тада је

$$AC_1 : BD = OA : OB.$$



Сл. 569

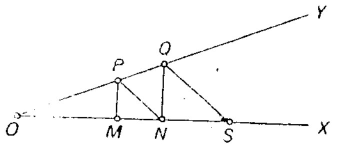
Према услову задатка је:

$$AC : BD = OA : OB;$$

према томе је $AC_1 : BD = AC : BD$; значи, $AC_1 = AC$.

Ако је угао прав или туп, из A се може до OY повући само једна дуж величине AC_1; према томе, дуж AC_1 се поклапа са дужи AC. Дуж AC_1 је, дакле, паралелна са дужи BD.

2) Из слике 570 видимо да је $OM : ON = OP : OQ$ и $ON : OS =$ $= OP : OQ$, према томе је



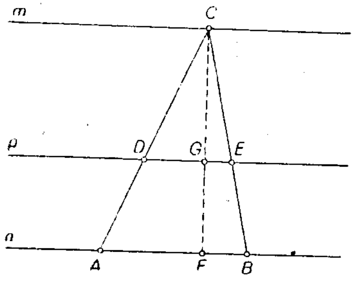
Сл. 570

$$OM : ON = ON : OS$$

или:

$$ON^2 = OM \cdot OS.$$

3) Повуцимо из тачке C нормалу CGF на три дате паралеле (сл. 571).



Сл. 571

Из тачке C полазе три зрака пресечена двема паралелним трансверзалама n и p; отуда је

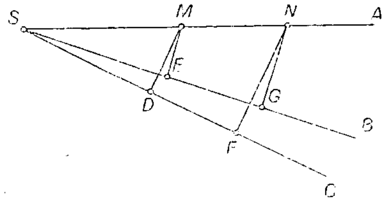
$$DE : AB = CD : CA = CG : CF,$$

а одавде следује:

$$DE = AB \cdot \frac{CG}{CF}.$$

Кад се тачка C креће по правој m, DE има исту дужину, јер је DE једнако производу сталне дужине AB и сталног односа $\frac{CG}{CF}$.

4) Нека су M и N два ма која положаја покретне тачке (сл. 572).



Сл. 572

$ME \parallel NG$. $MD \parallel NF$, па можемо написати:

$$NG:ME = SN:SM,$$

$$NF:MD = SN:SM.$$

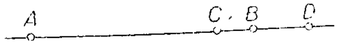
Према томе је

$$NG:ME = NF:MD$$

или:

$$NG:NF = ME:MD.$$

5) Треба да докажемо да је



Сл. 573

$AC:CB = AD:BD$ (сл. 573).

$$AC = 10\,\text{cm},$$

$$CB = AB - AC = 12\,\text{cm} - 10\,\text{cm} = 2\,\text{cm},$$

$$BD = AD - AB = 15\,\text{cm} - 12\,\text{cm} = 3\,\text{cm}.$$

$$AC:CB = 10\,\text{cm}:2\,\text{cm} = 5,$$

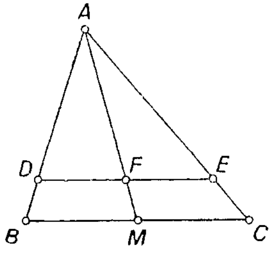
$$AD:BD = 15\,\text{cm}:3\,\text{cm} = 5.$$

Према томе је

$$AC:CB = AD:BD.$$

2) Троугао

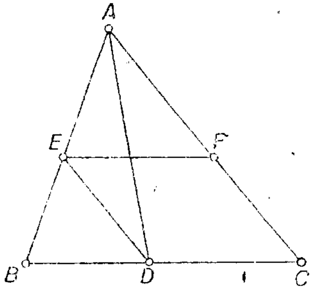
6) Дужи AB, AM, AC (сл. 574) чине прамен полуправих пресечен двема паралелним трансверзалама, а отсечци на трансверзалама су пропорционални. Како је отсечак BC преполовљен, мора бити преполовљен и отсечак DE.



Сл. 574

7) Како је $12:8 = 18:12 = 27:18$, то значи да су стране ових троуглова пропорционалне, па, према томе, троугли су слични.

8) Из сличности троуглова AEF и ABC (сл. 575) можемо написати:



Сл. 575

$AE:EF = AB:BC$; или, како је $EF = DC$; $AE:DC = AB:BC$ (1).

Из сличности троуглова EBD и ABC имамо:

$ED:BD = AC:BC$; или, како је $ED = FC$; $FC:BD = AC:BC$ (2).

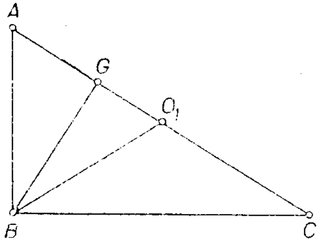
AD је симетрала угла A; према томе је

$BD:DC = AB:AC$ (3).

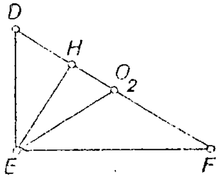
Из пропорција (2) и (3) добијамо:

$FC:DC = AB:BC$. Упоређивањем ове пропорције са пропорцијом (1) добија се $FC = AE$, што је и требало доказати.

9) Зна се да је $AC:DF = BG:EH$ (сл. 576 и 577).



Сл. 576



Сл. 577

Нека су O_1 и O_2 средине хипотенуза.

Зна се да је $AO_1 = BO_1 = CO_1 = \frac{AC}{2}$ и $DO_2 = EO_2 = FO_2 = \frac{DF}{2}$.

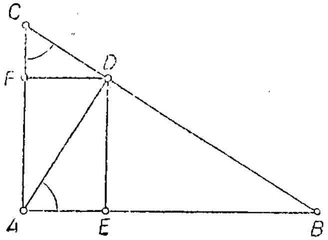
Према условy задатка је

$$BO_1:EO_2 = BG:EH.$$

Према томе, троугли BO_1G и EO_2H су слични, и углови BO_1G и EO_2H су једнаки.

Ако равнокраки троугли ABO_1 и DEO_2 имају углове на врху једнаке, једнаки су им и углови на основици, тј. $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, и правоугли троугли ABC и DEF су слични, јер имају по један оштар угао једнак.

10) Четвороугао $AEDF$ је правоугаоник и $DF = AE$ (сл. 578).



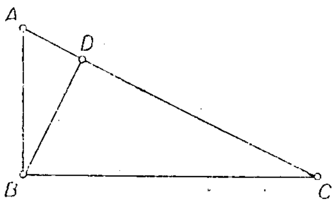
Сл. 578

Правоугли троугли DAE и ABC су слични, јер су им оштри углови код A и C једнаки; према томе је $DE : AB = AE : AC$, или: $DE : AE = AB : AC$.

Кад уважимо наведену једнакост, добијамо:

$$DE : DF = AB : AC.$$

11) Зна се да је $AB^2 = AC \cdot AD$ (сл. 579),



Сл. 579

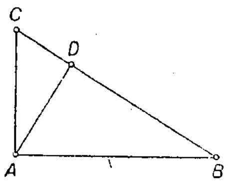
$$BC^2 = AC \cdot CD,$$

отуда је

$$\frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC \cdot CD}{AC \cdot AD} = \frac{CD}{AD}.$$

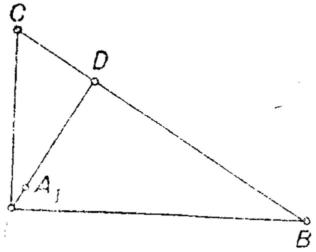
Али, како је $\frac{BC}{AB} = 2$, $\frac{BC^2}{AB^2} = 4$, то је $\frac{CD}{AD} = 4$, или: $CD = 4 \cdot AD$.

12) Угао B је оштар, теме C и подножје D висине су на истој страни према темену B (сл. 580). Два троугла ABD и ABC имају заједнички угао B; а како је, по претпоставци, $AB^2 = BC \cdot BD$, или: $AB : BC = BD : AB$, то је јасно да ова два троугла имају пропорционалне стране које захватају заједнички угао B; дакле, ова два троугла су слична и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDA = 90^0$. Према томе, троугао ABC има прав угао код A.



Сл. 580

13) Нека је ABC троугао у коме су углови B и C оштри и $AD^2 = BD \cdot DC$ (сл. 581).

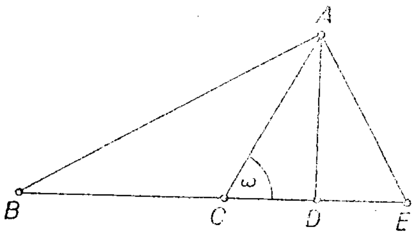


Сл. 581

Из првог дела претпоставке произилази да је D између B и C. Ако над BC као над пречником са исте стране са које се налази A опишемо полукруг, он ће сећи праву AD, рецимо, у тачки A_1. Угао BA_1C уписан у полукругу је прав, и у правоуглом троуглу A_1BC имамо $A_1D^2 = BD \cdot DC$.

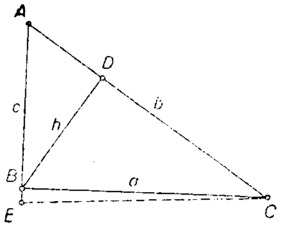
Кад ову једнакост упоредимо са горњом, добијамо $AD = A_1D$, што показује да се A и A_1 поклапају, или да је $\sphericalangle BAC = 90^0$.

14) Повуцимо из тачке A нормалу AE на AB (сл. 582). У правоуглом троуглу ABE је $AD^2 = BD \cdot DE$, а по претпоставци је $AD^2 = BD \cdot CD$. Из ових двеју једнакости следује да је $CD = DE$. Значи, да је троугао ACE равнокраки да је $\sphericalangle E = \omega = 180^0 - \sphericalangle C$. У правоуглом троуглу ABE је $\sphericalangle E = 90^0 - \sphericalangle B$; према томе је $180^0 - \sphericalangle C = 90^0 - \sphericalangle B$, а отуда је $\sphericalangle C - \sphericalangle B = 90^0$.



Сл. 582

15) Нека су a, b, c стране троугла ABC и $BD = h$ висина из темена B, и нека је $bh = ac$ (сл 583).

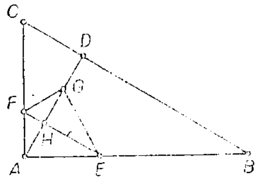


Сл. 583

Треба да докажемо да овај троугао има прав угао код B.

Један од два угла A и C је свакако оштар; можемо, дакле, претпоставити да је угао A оштар. Нека је CE висина из C. Правоугли троугли ABD и CAE, који имају заједнички угао A, слични су, а из њихове сличности имамо: $c : b = h : CE$, или: $bh = c \cdot CE$. Ако ову једнакост упоредимо са претпоставком, добија се $CE = a$. Значи, висина CE се поклапа са страном CB, што доказује да је угао CBA прав.

16) $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$ (сл. 584).



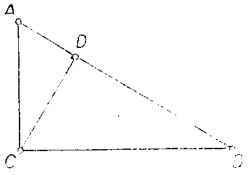
Сл. 584

Дуж EF је, према томе, паралела страни BC и троугао AEF је сличан троуглу ABC.

$\frac{AH}{AD}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$, или: $AH=\frac{AD}{3}$; а како је $DG=\frac{AD}{3}$, то је $GH=\frac{AD}{3}$, а одавде $GH=AH$. Значи, EF је симетрала дужи AG, $AF=FG$, $AE=EG$, и троугли AEF и FEG су подударни. Према томе, троугао EFG је сличан троуглу ABC.

17) Знамо да је $AC^2=AB\cdot AD$ (сл. 585),

$$BC^2=AB\cdot BD.$$

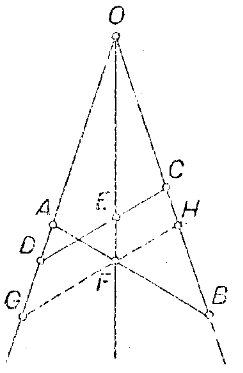


Сл. 585

Деобом ових једнакости добија се:

$$\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AD}{BD}.$$

18) а) Ако су дужи паралелне, теорема је позната.

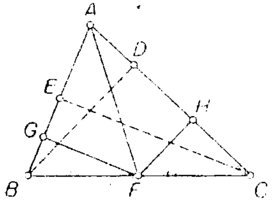


Сл. 586

б) Узмимо непаралелне дужи. Ако је угао $OEC=\sphericalangle OFA$ (сл. 586), троугли OEC и OFA су слични, јер имају по два угла једнака. Отуда $\sphericalangle C=\sphericalangle A$; према томе су и троугли OCD и OAB слични.

Сем тога, може се кроз тачку F повући $GH \parallel DC$. Троугли OAB и OHG су подударни; а како су троугли OCD и OHG слични, то су и троугли OCD и OAB слични.

19) а) Правоугли троугли ABD и AEC су слични; отуда: $BD:BA=CE:CA$ (сл. 587).



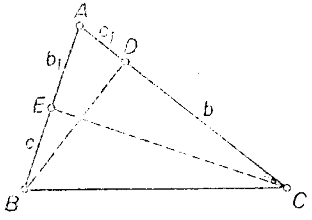
Сл. 587

б) Довољно је посматрати крајњу тачку тежишне линије F. Јасно је да је

$$FH=\frac{BD}{2},\quad FG=\frac{CE}{2}.$$

Према томе је $FH:BA=FG:CA$.

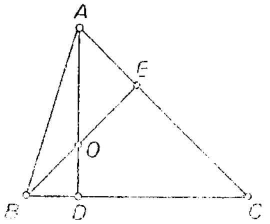
20) Нека је b_1 пројекција стране b на страни c, а c_1 пројекција стране c на страни b (сл. 588). Правоугли троугли ABD и ACE су слични, јер имају један оштар угао заједнички, па се може написати:



Сл. 588

$$\frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}.$$

21) Правоугли троугли BDO и AOE су слични, јер су им оштри углови BOD и AOE једнаки (сл. 589). Из њихове сличности добија се:



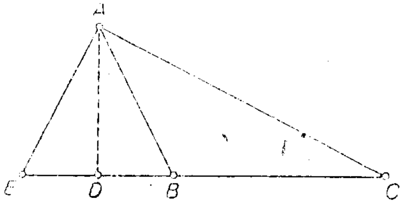
Сл. 589

$$DO:BO=EO:AO,$$

или:

$$AO\cdot DO=BO\cdot EO.$$

22) Нека је $\sphericalangle ABC-\sphericalangle ACB=90^0$ (сл. 590), или: $\sphericalangle ABC=90^0+\sphericalangle ACB$.

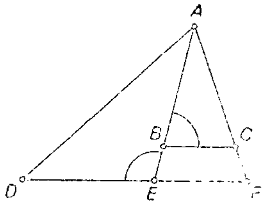


Сл. 590

Узмимо $ED=DB$; тада је: $\sphericalangle EAD=\sphericalangle BAD=90^0-\sphericalangle ABD=90^0-[180^0-(90^0+\sphericalangle ACB)]=\sphericalangle ACB$. Према томе: $\sphericalangle EAC=2\sphericalangle ACB+\sphericalangle BAC=2\sphericalangle ACB+[180^0-\sphericalangle ACB-(90^0+\sphericalangle ACB)]=90^0$.

Дакле: $AD^2=ED\cdot DC=DB\cdot DC$.

23) Положимо ова два троугла ABC и ADE тако да им се темена једнаких углова поклапају као и по један крак, а да тај заједнички крак буде и један крак суплементних углова B и E (сл. 591).



Сл. 591

Како је $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$, то је AE симетрала угла DAF. Према томе, може се написати:

$$DE : EF = AD : AF,$$

или:

$$DE : AD = EF : AF.$$

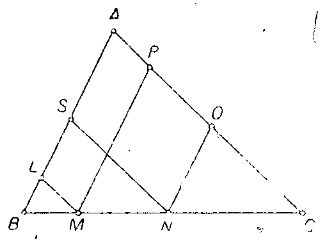
Како је $EF : AF = BC : AC$, то је

$$DE : AD = BC : AC,$$

или:

$$DE : BC = AD : AC.$$

24) Из слике 592 видимо да је



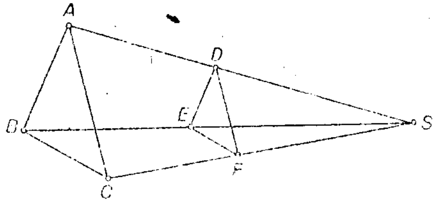
Сл. 592

$$PQ : MN = AC : BC, \quad LS : MN = AB : BC.$$

Ако поделимо ове две пропорције, имаћемо:

$$\frac{PQ}{LS} : 1 = \frac{AC}{AB} : 1, \text{ или: } PQ : LS = AC : AB.$$

25) Нека је S тачка у којој се секу AD и BE (сл. 593).



Сл. 593

Како је $AB \parallel DE$, то је

$$SD : SA = SE : SB.$$

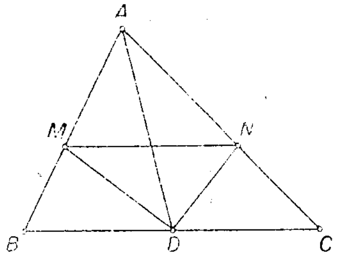
Треба да докажемо да права CF пролази кроз S, или да права SC пролази кроз F.

Нека је G тачка на SC између S и C и у таквом положају да је

$$SG : SC = SD : SA = SE : SB.$$

У том случају је $DG \parallel AC$ и $EG \parallel BC$, што значи да се G и F поклапају.

26) Како је DM симетрала угла ADB (сл. 594), то је



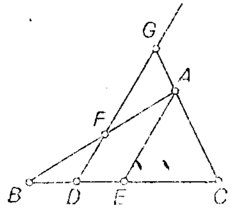
Сл. 594

$MB : MA = BD : AD$; исто тако је $NC : NA = DC : AD$.

Међутим, $BD = DC$, и друге размере ових пропорција су једнаке. Према томе је

$MB : MA = NC : NA$, што значи да је $MN \parallel BC$.

27) Из троуглова BDF и BEA (сл. 595) имамо:



Сл. 595

$$\frac{DF}{EA} = \frac{BD}{BE},$$

а из троуглова GDC и AEC:

$$\frac{DG}{EA} = \frac{DC}{EC}.$$

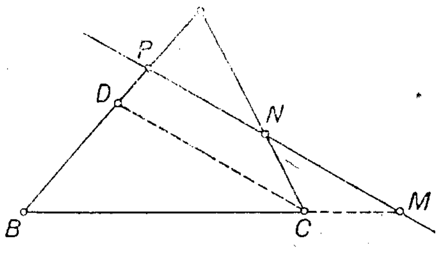
Како је тачка E на средини стране BC, то је $BE = EC$. Сабирањем горњих пропорција добијамо:

$$(DF + DG) : EA = (BD + DC) : BE = \frac{2BE}{BE} = 2;$$

а отуда: $DF + DG = 2EA$.

Према томе, кад тачка D клизи по страни BC, збир $DF + DG$ је увек једнак удвојеној тежишној линији.

28) Нека права MP сече стране троугла у M, N, P (сл. 596).



Сл. 596

Ако повучемо $CD \parallel MP$, из троугла ADC добијамо $AP : PD = AN : NC$, а из троугла PBM: $PD : PB = MC : MB$.

Ако ове две пропорције помножимо једну с другом, добијамо:

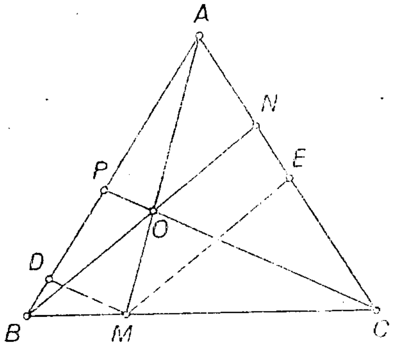
$AP \cdot PD : PD \cdot PB = AN \cdot MC :$
$: NC \cdot MB$, или:

$AP \cdot PD \cdot NC \cdot MB = PD \cdot PB \cdot AN \cdot MC$; најзад:

$AP \cdot NC \cdot MB = PB \cdot MC \cdot AN$, што је требало доказати.

29) Треба доказати да је

$AP \cdot BM \cdot CN = BP \cdot AN \cdot CM$ (сл. 597).



Сл. 597

Ако из M повучемо $MD \parallel CP$ и $ME \parallel BN$, тада је у троуглу ADM:

$$AP : PD = AO : OM,$$

а у троуглу AME:

$$AN : NE = AO : OM, \text{ или: }$$

$$AP : PD = AN : NE.$$

Из троугла PBC имамо: $PD : BP = CM : BC$, а из троугла $NBC : BM : BC = NE : CN$.

Ако последње три пропорције помножимо међу собом, добијамо:

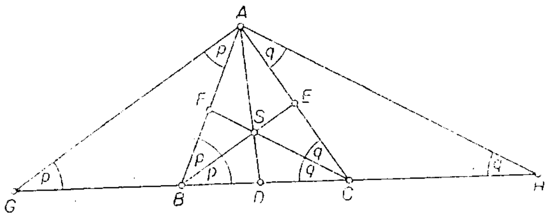
$$AP \cdot PD \cdot BM : PD \cdot PB \cdot BC = AN \cdot CM \cdot NE : NE \cdot BC \cdot CN, \text{ или: }$$

$$AP \cdot BM : BP \cdot BC = AN \cdot CM : BC \cdot CN, \text{ или: }$$

$$AP \cdot BM \cdot BC \cdot CN = BP \cdot BC \cdot AN \cdot CM; \text{ најзад: }$$

$AP \cdot BM \cdot CN = BP \cdot AN \cdot CM$, што је требало доказати.

30) Нека се у троуглу ABC симетрале углова секу у тачки S (сл. 598).



Сл. 598

Обележимо стране троугла са a, b, c.

Треба да докажемо да је

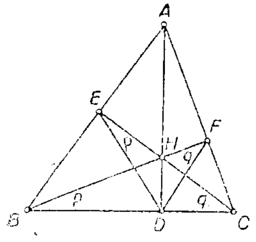
$$SD : SA = a : (b + c).$$

Повуцимо $AG \parallel BE$ и $AH \parallel CF$. Углови p код темена B су једнаки, јер је BE симетрала угла B; углови p у троуглу AGB су једнаки (као наизменични и сагласни); према томе, троугао AGB је равнокрак и $GB = AB = c$. На сличан начин видимо да су и углови q једнаки, и, према томе, $CH = AC = b$. Из тога произилази: $DS : AS = BD : GB = DC : CH = (BD + DC) : (GB + CH)$, тј.:

$$DS : AS = a : (b + c).$$

31) Треба да докажемо да је

$BD \cdot DC = DE \cdot DF$ (сл. 599).



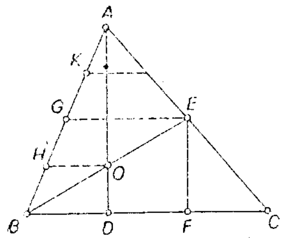
Сл. 599

Око четвороугла $HEBD$, у коме су два супротна угла HEB и HDB права, може се описати круг. Тада су углови означени на слици са p periферискi углови над истим луком и као такви једнаки.

На исти на́чин се види, посматрајући четвороугао $HDCF$, да су углови обележени са q, једнаки.

Према томе, троугли BDF и EDC су слични, јер имају по два угла једнака, а из њихове сличности добијамо: $DF : DC = BD : DE$, или: $BD \cdot DC = DE \cdot DF$.

32) Нека је BE тежишна линија (сл. 600), а AD дуж која пролази кроз њену средину O. Тада је $BO = OE$.



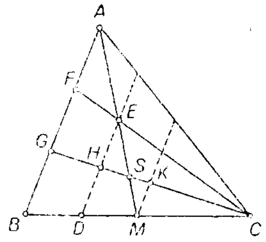
Сл. 600

Ако повучемо $EF \parallel AD$, отсечак DF једнак је отсечку FC (посматрај троугао ADC) и $BD = DF$ (из троугла BEF). Према томе је $BD = DF = FC = \frac{1}{3} BC$, тј.: $BD : DC = 1 : 2$.

Ако повучемо $OH \parallel DB$, $EG \parallel CB$ и из тачке K, на средини отсечка GA, паралелу страни BC, имамо из троугла ABC, $BG = GA$; из троугла BGE, $BH = HG$. Значи да је страна BA тачкама H, G, K подељена на четири једнака дела. Паралеле повучене из ових тачака деле у троуглу ABD страну AD на четири једнака дела; према томе је $AO : OD = 3 : 1$.

33) Ако из тачке D, на средини стране BM, у троуглу ABM (сл. 601) повучемо $DE \parallel BA$, биће $AE = EM$. Према томе, тачка E је на средини тежишне линије AM, и, према зад. 32, дуж CF је тачком E подељена у размери $3 : 1$, тј.:

$$EF = \frac{1}{4} CF.$$



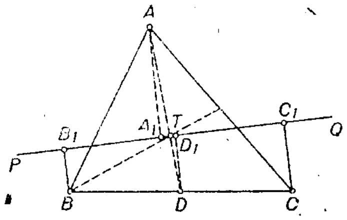
Сл. 601

Ако повучемо $MK \parallel BA$, биће: $MK = \frac{2}{4} GB = \frac{2}{4} FG$, $EH = \frac{3}{4} FG$, па, према томе:

$$MK:EH=\frac{2}{4}:\frac{3}{4}=2:3.$$

Троугли SKM и SHE су слични; отуда је $SK:SH=KM:EH=$ $=2:3$, или: $(SK+SH):SH=5:3$, или: $SH=\frac{3}{5}HK$. Најзад: $GS=$ $=GH+HS=HK+\frac{3}{5}HK=\frac{8}{5}HK=\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{4}GC=\frac{2}{5}GC.$

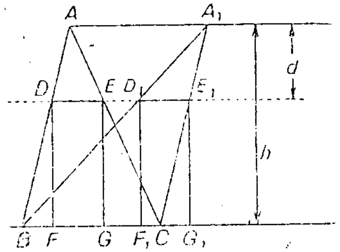
34) Из тачке D, средине стране BC, спустимо нормалу на праву PQ (сл. 602).



Сл. 602

Троугли AA_1T и TDD_1 су слични па можемо написати: $AA_1:DD_1=$ $=AT:DT=2:1$. DD_1 је средња линија трапеза B_1BCC_1, и стога је $DD_1=$ $=\frac{BB_1+CC_1}{2}$. Заменом у горњој пропорцији добијамо: $AA_1:\frac{BB_1+CC_1}{2}=$ $=2:1$, а отуда: $AA_1=BB_1+CC_1$.

35) Нека је дат троугао ABC и нека је A_1 нов положај темена A (сл. 603).

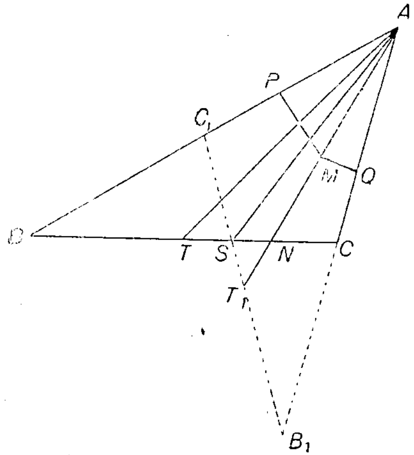


Сл. 6.3

Треба доказати да је $DE=D_1E_1$.

Троугли ADE и ABC су слични, и из њихове сличности следује: $DE:$ $:BC=d:h$, где су d и h висине тих троуглова. Исто тако, из сличности троуглова A_1D_1E и ABC следује: $D_1E_1:BC=d:h$; према томе је $DE=$ $=D_1E_1$. Правоугаоници $DFGE$ и $D_1F_1G_1E_1$ су подударни.

36) а) Довољно је узети $AB_1=AB$ и $AC_1=AC$, па повући тежишну линију AT_1 у троуглу AC_1B_1 (сл. 604).



Сл. 604

б) Показаћемо на крају задатка теорему по којој су растојања сваке тачке на тежишној линији од страна које полазе из истог темена из кога полази тежишна линија обрнуто пропорционална овим странама.

Према тој теореми је

$$MP:MQ=AB_1:AC_1,$$

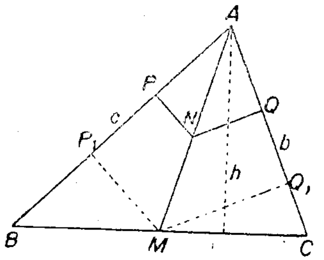
или:

$$MP:MQ=AB:AC.$$

Права AN симетрична са тежишном линијом AT добила је име симедијана; она има многобројне особине.

Ово име јој је дао Морис Докањ, (Maurice d' Ocagne)*.)

Докажимо сад горњу теорему.



Сл. 605

Нацртајмо троугао ABC и у њему тежишну линију AM (сл. 605). Ма из које тачке на AM спустимо нормале NP и NQ на стране AB и AC. То исто урадимо и из тачке M. Јасно је да је $NP:NQ=MP_1:MQ_1$.

Троугли ABM и AMC су једнаки; према томе је

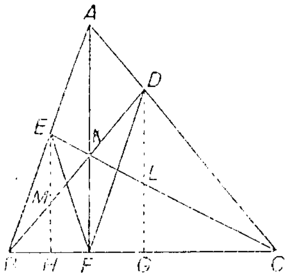
$$c\cdot MP_1=b\cdot MQ_1;\ \text{отуда је}\ MP_1:MQ_1=b:c,$$

или:

$$NP:NQ=b:c.$$

---

*) Морис Докањ, (Maurice d' Ocagne) француски математичар, рођен у Паризу 1862.



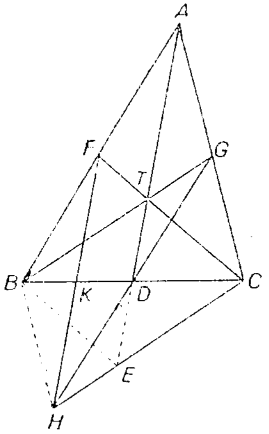
Сл. 606

37) Спустимо нормале DG и EH (сл. 606). Троугли DKL и EMK су слични, јер имају једнаке углове ($\sphericalangle LDK=\sphericalangle KME$, $\sphericalangle DKL=\sphericalangle MKE$); из њихове сличности имамо: $DL:EM=KL:KE=FG:FH$ (FG и FH су висине сличних троуглова). Исто тако: $DL:DG=AK:AF=EM:EH$; а из тога: $DL:EM=DG:EH$.

Упоређујући ову пропорцију са првом имамо:

$$FG:FH=DG:EH.$$

Значи, правоугли троугли DFG и EHF су слични ($\sphericalangle DFG=\sphericalangle EFH$), па је висина AF симетрала угла DFE.



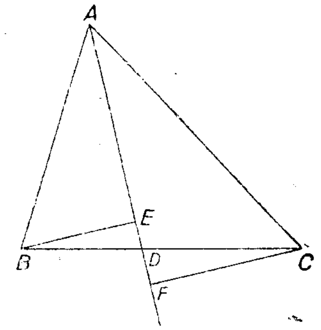
Сл. 607

38) Нека је ABC дати троугао (сл. 607), и нека се тежишне линије секу у T. Ако узмемо да је $DE=DT$, четвороугао $BECT$ је паралелограм а стране троугла TEC су по величини $\frac{2}{3}$ од тежишних линија, јер је $TE=\frac{2}{3}AD$, $TC=\frac{2}{3}CF$ и $CE=\frac{2}{3}BG$. Ако повучемо $BH \parallel AC$, биће $CH=GB$ а $FH \parallel TE$, јер је $CT=\frac{2}{3}CF$ а $CE=\frac{2}{3}CH$; отуда је $TE=\frac{2}{3}FH$, из чега следује $FH=AD$. На тај начин је троугао CFH онај троугао чије су стране тежишне линије троугла ABC.

Међутим, $DK=\frac{BD}{2}=\frac{DC}{2}$, тј. тежишна линија CK троугла CFH је $\frac{3}{4}BC$.

На сличан начин би се доказало тврђење и за друге две тежишне линије.

Примедба. Тачке H, D, G су на једној правој и GH је паралелно са AB.



Сл. 608

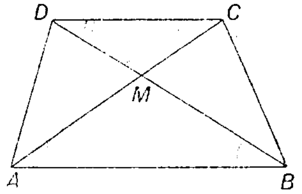
39) Правоугли троугли ABE и ACF су слични, јер су им оштри углови код A једнаки (сл. 608); отуда је $AE:AF=AB:AC$.

Из троуглова BDE и CDF имамо:

$$DE:DF=DB:DC.$$

Како је AD симетрала угла, то је $DB:DC=AB:AC$. Отуда је $AE:AF=DE:DF$, што показује да су тачке A и D хармониски спрегнуте са тачкама E и F.

3) Четвороугао

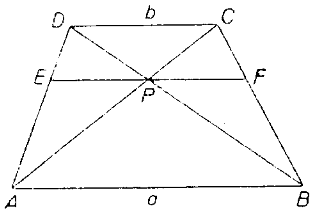


Сл. 609

40) Троугли ABM и CDM су слични, јер је $\sphericalangle MAB=\sphericalangle MCD$, $\sphericalangle MBA=\sphericalangle MDC$ (сл. 609); из њихове сличности се добија:

$$MA:MB=MC:MD,$$

или: $MA:MC=MB:MD$.



Сл. 610

41) Троугли DPC и APB су слични (сл. 610), јер имају једнаке углове; отуда је $CP:AP=DP:BP=DC:AB=b:a$.

Исто тако, може се написати:

$$DP:(DP+BP)=b:(a+b),$$

или: $DP:DB=b:(a+b)$.

Сем тога, може се извести и овај закључак: Ако кроз пресек дијагонала повучемо $EF \parallel AB$, имамо:

$$CF:FB=CP:AP,$$

или: $CF:FB=b:a$,

или: $FB:CF=a:b$;

$$CF:(CF+FB)=b:(b+a),$$

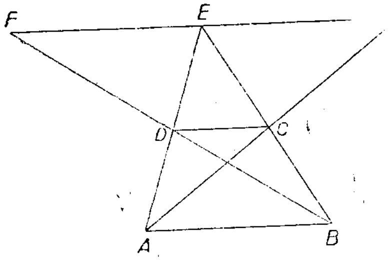
$$FB:(FB+CF)=a:(a+b),$$

$$CF : CB = b : (a+b),$$
$$FB : CB = a : (a+b);$$

отуда је

$$CF = CB \cdot \frac{b}{a+b},\ FB = CB \cdot \frac{a}{a+b}.$$

42) Са слике 611 видимо да је



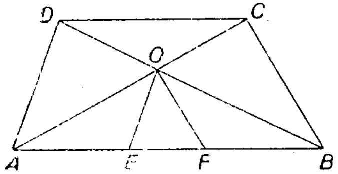
Сл. 611

$$EG : DC = AE : AD,$$
$$FE : DC = BE : BC,$$
$$AE : AD = BE : BC;$$

отуда је $EG : DC = FE : DC$,

или: $EG = FE$.

43) Треба доказати да је $AE = FB$ (сл. 612).



Сл. 612

Из троугла ABD имамо:

$$AE : AB = DO : DB,$$

а из троугла ABC:

$$FB : AB = CO : AC.$$

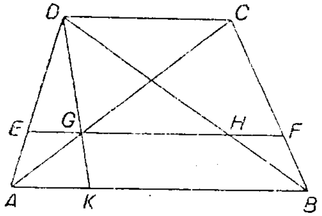
Међутим, знамо да је

$$DO : DB = CO : AC;$$

према томе је $AE : AB = FB : AB$,

или: $AE = FB$.

44) а) Треба да докажемо да је $EG = HF$ (сл. 613).



Сл. 613

Из сличних троуглова AEG и ACD имамо:

$$EG : DC = AE : AD,$$

а из сличних троуглова BFH и BCD:

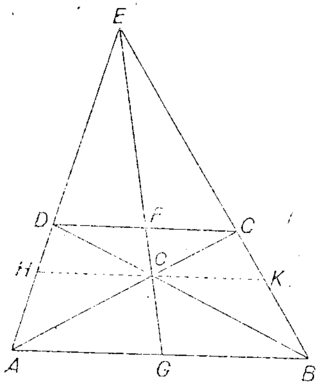
$$HF : DC = BF : BC.$$

Међутим, знамо да је $AE : AD = BF : BC$; према томе је $EG : DC = HF : DC$, или: $EG = HF$.

б) Ако повучемо DG до пресека K са AB, биће: $EG : GH = AK : KB$.

Дакле, да би EG било једнако GH, потребно је и довољно да AK буде једнако KB. Према томе, споји се теме D са средином стране AB, кроз пресек те дужи и дијагонале AC повуче се $EF \parallel AB$. Дуж EF је у том случају подељена на три једнака дела.

45) Ако кроз пресек дијагонала повучемо $HK \parallel AB \parallel DC$ (сл. 614), тада је



Сл. 614

$$DB : OB = DC : OK,$$
$$CA : OA = DC : HO.$$

Како је $DB : OB = CA : OA$, то је $DC : OK = DC : HO$, што показује да је $OK = HO$.

Дуж EO је у троуглу EAK тежишна линија и $DF = FC$, јер је

$$HO : DF = EO : EF$$

и $OK : FC = EO : EF$,

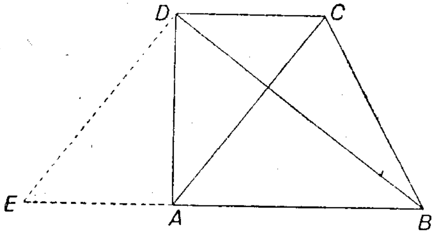
отуда је $DF = FC$.

Исто тако је $AG : DF = EG : EF$,

$$GB : FC = EG : EF,$$

а отуда $AG = GB$.

46) Нека су у трапезу $ABCD$ углови A и D прави и нека се дијагонале секу под правим углом (сл. 615).



Сл. 615

Ако повучемо $DE \parallel CA$, биће $DE \perp DB$. У правоуглом троуглу EDB имамо:

$$DA^2 = EA \cdot AB.$$

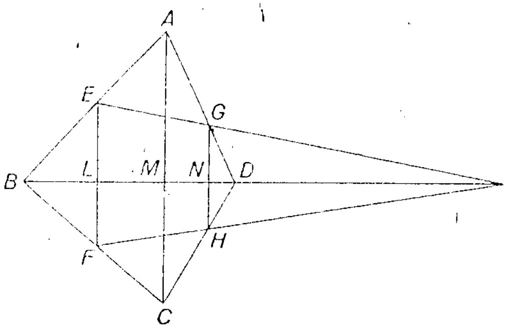
Четвороугао $EACD$ је паралелограм, па је $EA = DC$. Заменом у горњој једнакости добијамо:

$$DA^2 = DC \cdot AB.$$

47) Са слике 616 видимо да се може написати:

$$EL:LF=AM:MC=$$
$$=GN:NH.$$

Како су отсечци паралелних трансверзала пропорционални, то показује да EG, LN, FH припадају прамену правих, па се, према томе, морају сећи у једној тачки.



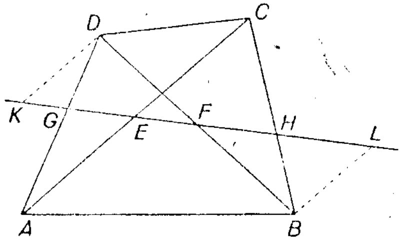
Сл. 616

48) Ако повучемо $DK \parallel AC$ и $BL \parallel AC$ (сл. 617), имамо:

$$AG:GD=AE:KD,$$
$$CH:HB=CE:BL.$$

Како је $AE=EC$, а због подударности троуглова FDK и FBL ($DF=DB$, $\sphericalangle DFK=\sphericalangle BFL$, $\sphericalangle FDK=\sphericalangle FBL$) дуж $DK=BL$, јасно је да су друге размере у горњим пропорцијама једнаке. Према томе,

$$AG:GD=CH:HB.$$



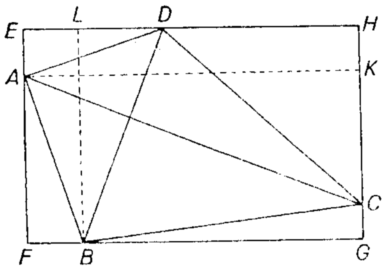
Сл. 617

49) Два су правоугаоника слична ако је размера двеју суседних страна једног правоугаоника једнака размери суседних страна другог правоугаоника.

Нека је $EFGH$ описани правоугаоник (сл. 618). Из тачака A и B повуцимо паралеле странама правоугаоника. Правоугли троугли AKC и BLD су слични, јер је $\sphericalangle KAC=\sphericalangle LBD$ (нормални краци); према томе,

$$AK:BL=AC:BD,$$

а ова друга размера је стална.



Сл. 618

50) Нека је $DEFG$ један уписани правоугаоник чија једна страна лежи на страни BC троугла (сл. 619).

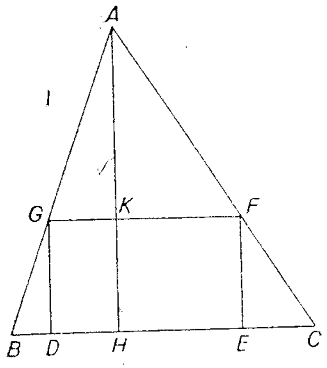
Обим овог правоугаоника је $2GF+2GD$ или $2(GF+GD)$.

Из сличности троуглова ABC и AGF можемо написати:

$$GF:BC=AG:AB=AK:AH.$$

Како је $BC=AH$, то је $GF=AK$. Обим правоугаоника је $2(AK+GD)$, или: $2(AK+KH)=2AH$.

Значи, обим правоугаоника је сталан и једнак двострукој висини.



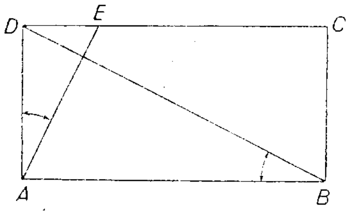
Сл. 619

51) Правоугли троугли ADE и BAD су слични, јер су им оштри углови DAE и ABD једнаки (сл. 620); према томе,

$$DE:AD=AD:AB.$$

Како је $AB=2AD$, то је $DE:$ $:AD=1:2$.

Значи, DE је половина стране AD или четвртина стране DC.

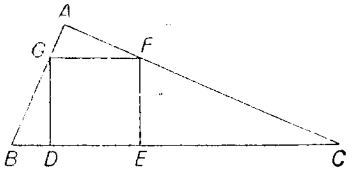


Сл. 620

52) Нека је $DEFG$ уписани квадрат (сл. 621). Треба да докажемо да је $DE^2=BD\cdot EC$.

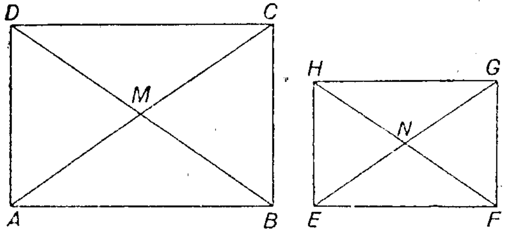
Довољно је запазити да су правоугли троугли BDG и FEC слични, јер је $\sphericalangle B=\sphericalangle F$ (нормални краци); према томе, $DG:EC=BD:EF$. Како је $DEFG$ квадрат, то је $DG=EF=$ $=DE$. Заменом у горњој пропорцији добија се:

$$DE:EC=BD:DE, \text{ или: } DE^2=BD\cdot EC.$$



Сл. 621

53) По претпоставци је $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ENF$ (сл. 622).



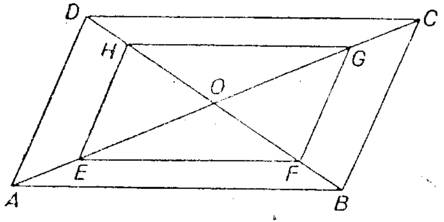
Сл. 622

Равнокраки троугли AMB и ENF, који имају једнаке углове на врху, имају једнаке углове на основици, па је $\sphericalangle CAB = \sphericalangle GEF$. Према томе, правоугли троугли ABC и EFG, који имају по један оштар угао једнак, слични су, и отуда:

$$AB:EF=BC:FG.$$

Дати правоугаоници су слични, јер су им углови као прави једнаки а стране су им пропорционалне.

54) Нека су паралелограми $ABCD$ и $EFGH$ такви да су им углови AOB и EOF једнаки и да је $AC:EG=BD:FH$ (сл. 623). Ови паралелограми се могу положити један на други, тако да им се пресеци дијагонала поклопе и да дијагонале имају исте правце. Како је, по претпоставци, $OA:OE=OB:OF=OC:OG=OH:OD$, то су стране паралелограма паралелне и њихови су углови једнаки.



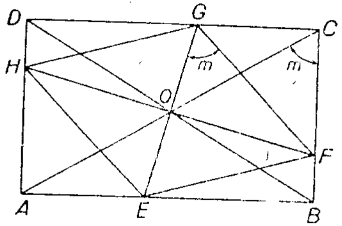
Сл. 623

Према томе: $AB:EF=OB:OF=BC:FG$, што показује да су им стране пропорционалне.

55) Нека су дати паралелограми $ABCD$ и $EFGH$ (сл. 623) и у њима једнаки углови A и E а стране $AB:EF=AD:EH$. Из овог одмах произилази да је $\sphericalangle B=\sphericalangle F$, $\sphericalangle C=\sphericalangle G$ и $\sphericalangle D=\sphericalangle H$ и да је $AB:EF=CD:GH=BC:FG=AD:EH$.

Према томе, ови паралелограми су слични, јер имају углове једнаке а стране пропорционалне.

56) Познато је да се, кад је један паралелограм уписан у другом, дијагонале оба паралелограма секу у истој тачки.

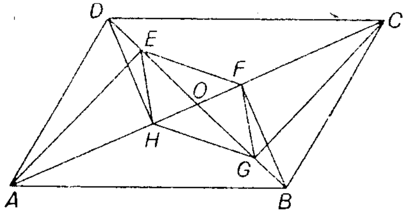


Сл 624

Нека је $EFGH$ ромб уписан у правоугаонику $ABCD$ и O тачка пресека дијагонала (сл. 624). Четвороугао $OFCG$ има два супротна угла права и око њега се може описати круг; два угла m биће у том кругу периферијски углови над истим луком; из тога произилази да су у равнокраким троуглима EFG и BOC углови EFG и BOC једнаки. Према томе, углови ромба су једнаки са угловима између дијагонала.

Закључак: ромбови уписани у правоугаонику имају углове једнаке а стране пропорционалне и, према томе, слични су.

57) Нека је $ABCD$ дати паралелограм и E, F, G, H пројекције његових темена на његовим дијагоналама (сл 625); четвороугао $EFGH$ је паралелограм сличан паралелограму $ABCD$.



Сл. 625

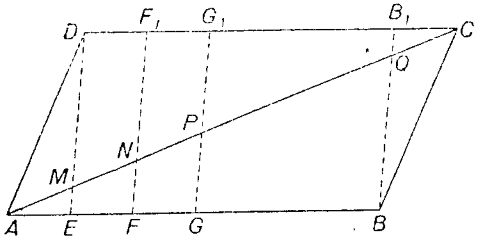
Правоугли троугли OAE и OCG су подударни, јер имају једнаке хипотенузе $AO=OC$ и оштре углове код O једнаке; отуда $OE=OG$. Исто се тако доказује да је $OH=OF$. Значи да се у четвороуглу $EFGH$ дијагонале полове; према томе, он је паралелограм.

Сем тога, правоугли троугли OAE и ODH су слични, јер имају један оштар угао O заједнички. Из њихове сличности следује:

$$OE:OH=OA:OD, \text{ или и: } EG:HF=AC:DB.$$

Дакле, паралелограми $ABCD$ и $EFGH$ имају дијагонале пропорционалне и њима захваћене углове једнаке. У задатку 54 доказано је да су такви паралелограми слични.

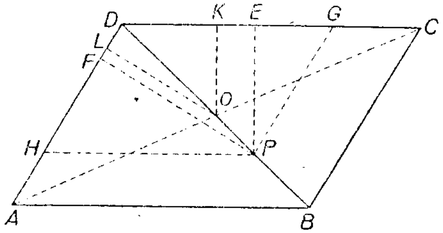
58) Нека је $AE=\frac{1}{n}AB$ (сл. 626) и нека су $F, G, \ldots\ldots$ тачке које деле AB на n делова. Исто тако, нека су тачке $F_1, G_1, \ldots\ldots B_1$ тачке које деле DC на n једнаких делова .



Сл. 626

Дужи $DE, FF_1, GG_1 \ldots\ldots B_1B$ су међу собом паралелне. Према томе, у троуглу DMC страна MC биће подељена на n једнаких делова, а у троуглу ABQ страна AQ биће подељена на n једнаких делова. Значи, $AM=MN=NP=\ldots=QC$. Таквих делова од M до C има n, а од A до C $n+1$, тј. $AM=\frac{1}{n+1}AC$.

59) Повуцимо PG и PH паралелно странама паралелограма (сл. 627). Правоугли троугли PEG и PFH су слични, јер су им углови EGP и FHP једнаки. Из њихове сличности следује:



Сл. 627

$$PE:PF=PG:PH=PG:DG.$$

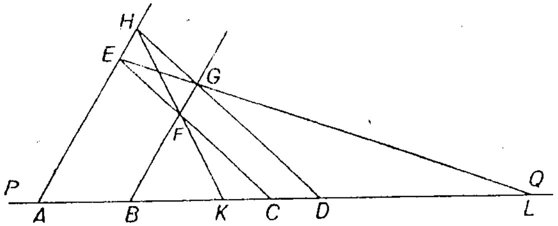
Исто тако, из сличних троуглова DGP и DCB имамо:

$$PG:DG=BC:DC=AD:DC.$$

Из ових двеју пропорција добијамо:

$$PE:PF=AD:DC.$$

60) Нека су K и L пресеци дијагонала са правом PQ (сл. 628). Треба да докажемо да ове тачке остају сталне кад се правци страна паралелограма мењају.



Сл. 628

Из троугла AKH имамо:

$$KA:KB=KH:KF,$$

а из троугла DHK:

$$KD:KC=KH:KF,$$

или:

$$KA:KB=KD:KC=(KA+KD):(KB+KC)=AD:BC.$$

Како је $KA:KB=AD:BC$, то је тачка K ван отсечка AB и стална је.

Исто тако можемо написати:

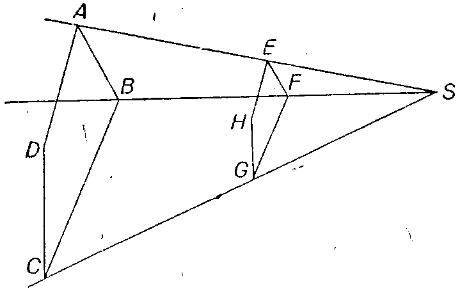
$$LA:LB=LE:LG,\quad LC:LD=LE:LG,$$

или:

$$LA:LB=LC:LD=(LA-LB):(LC-LD)=AB:CD.$$

Тачка L, делећи AB на два отсечка који се могу одузети а чији однос има сталну вредност $AB:CD$, стална је.

61) Претпоставимо да је E између S и A, F и G биће између B и S и између C и S, јер је $AB \parallel EF, BC \parallel FG$ (сл. 629). Тада је



Сл. 629

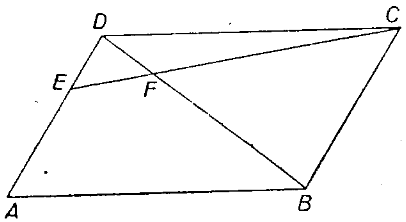
$$SE:SA=SF:SB=SG:SC.$$

Треба да докажемо да DH пролази кроз S или да H лежи на DS. Претпоставимо да је повучена права SD и да је L тачка на овој правој између D и S тако узета да је

$$SL:SD=SG:SC=SF:SB=SE:SA.$$

Тада је EL паралела страни AD и GL паралела страни CD. Међутим, у задатку је дато $EH \parallel AD$, $GH \parallel CD$; према томе, H и L се поклапају и тачка H је на SD.

62) По претпоставци је $BF=4\cdot DF$, а треба доказати да је $AE=3\cdot DE$ (сл. 630).



Сл. 630

Из сличних троуглова FBC и DEF имамо:

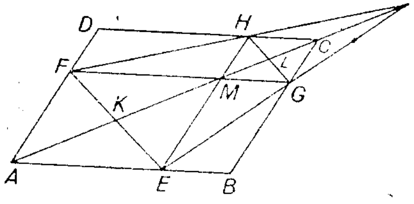
$$\frac{BC}{DE}=\frac{BF}{DF}=4;$$

отуда:

$$BC=4\cdot DE \text{ и } AD=4\cdot DE.$$

Према томе је $AE=3\cdot DE$

63) а) Да бисмо доказали паралелност дијагонала FE и HG (сл 631), довољно је доказати да је $FM : MG = EM : MH$. Из сличних троуглова FAM и MGC имамо:



Сл. 631

$$FM : MG = AF : CG.$$

Међутим,

$$AF = EM,\ CG = MH$$

(зашто?), због чега је

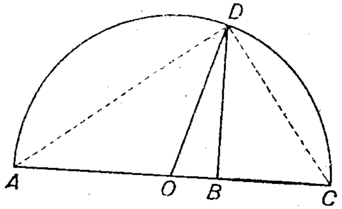
$$FM : MG = EM : MH.$$

б) Тачка K се налази на средини дијагонале FE, а тачка L на средини дијагонале HG; отуда $FK : KE = HL : LG$.

Дакле, праве FH, KL и EG које на паралелама FE и HG отсецају пропорционалне отсечке секу се у једној тачки.

4) Круг

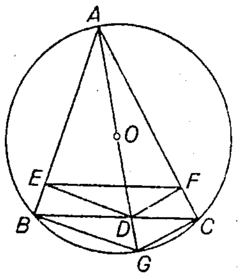
64) Нека дужи AB и BC претстављају два броја (сл. 632). Над њиховим збиром као над пречником опишимо полукруг, и у B дигнимо нормалу до пресека са полукругом. Крајњу тачку нормале D спојимо са центром полукруга. У правоуглом троуглу OBD хипотенуза OD је већа од катете BD.



Сл. 632

Хипотенуза OD је полупречник полукруга, тј. аритметичка средина дужи AB и BC; катета BD је као висина правоуглог троугла DAC геометриска средина између отсечака AB и BC. На тај начин је доказано да је аритметичка средина два броја већа од њихове геометриске средине.

65) Да бисмо доказали да је $EF \parallel BC$, довољно је доказати да је $AE : AB = AF : AC$ (сл. 633).



Сл. 633

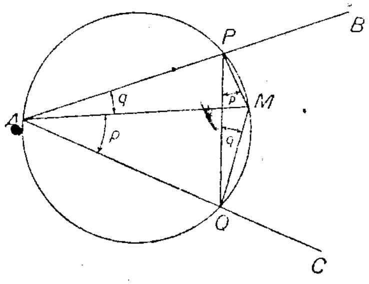
Углови у полукругу ABG и ACG су прави. Како су и углови AED и AFD прави, то је $ED \parallel BG$ и $FD = CG$; према томе:

$$AE : AB = AD : AG,\ AF : AC = AD : AG;$$

отуда:

$$AE : AB = AF : AC.$$

66) Повуцимо AM и PQ (сл. 634). Углови p су једнаки као периферски углови над истим луком; из истог разлога су једнаки и углови q.



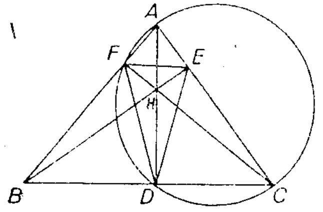
Сл. 634

Ови су углови непроменљиви; према томе, сви троугли MPQ имају по два угла једнака и зато су слични; отуда су им хомологе стране пропорционалне

$$MP : MQ = MP_1 : MQ_1 = \ldots\ldots.$$

Однос $\frac{MP}{MQ}$ је, дакле, сталан.

67) Троугли BDF и ABC (сл. 635) имају угао B заједнички. Углови ADC и AFC су прави; према томе, темена D и F леже на кругу пречника AC; $\sphericalangle BFD = \sphericalangle C$, јер су оба суплементи угла AFD.



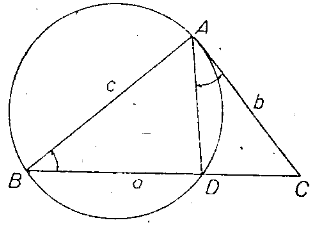
Сл. 635

Значи, троугли BDF и ABC имају по два угла једнака и према томе су слични.

На исти се начин доказује да су троугли AFE и CED слични троуглу ABC.

Кад је један од углова у троуглу ABC туп, ортоцентар је ван троугла, али је поставка тачна и утврђује се на исти начин.

68) Троугли ABC и DAC (сл. 636) су слични, јер имају по два угла једнака. Угао код C је заједнички, $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ (периферски углови над истим луком); према томе:

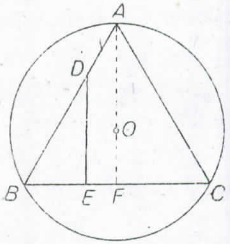


Сл. 636

$$BC : AC = AB : AD, \text{ или: } a : b = c : AD.$$

Значи, AD је четврта пропорционала за a, b, c.

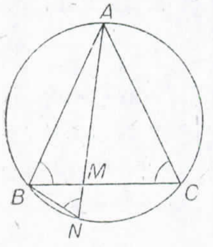
69) $BE = \frac{1}{3} BC$, или: $BE = \frac{2}{3} BF$ (сл. 637).



Сл. 637

$$AD = \frac{1}{3} AB, \text{ или: } BD = \frac{2}{3} AB.$$

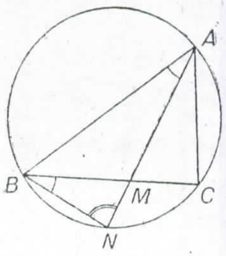
Према томе, у троуглу ABF, дуж DE је паралелна страни AF и једнака $\frac{2}{3} AF$. Међутим је и $AO = r = \frac{2}{3} AF$. Отуда следује: $DE = r$.



Сл. 638

70) Повуцимо BN (сл 638). Углови C и N су једнаки као периферiски углови над истим луком, а како је $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, то је $\sphericalangle B = \sphericalangle N$. Према томе, троугли ABM и ABN су слични, јер поред једнакости углова B и N имају заједнички угао A. Из њихове сличности имамо:

$AB : AN = AM : AB$ или $AB^2 = AN \cdot AM$.



Сл. 639

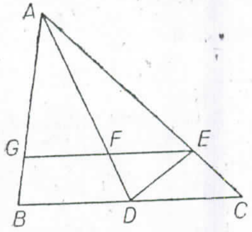
71) Симетрала угла A сече круг по средини лука BNC (сл. 639). Троугли BNM и ABN су слични, јер угао N им је заједнички, а углови код B и A су једнаки као периферiски углови над једнаким луцима. Из њихове сличности имамо:

$$NB : NA = MN : NB,$$

или:

$$NB^2 = NA \cdot MN.$$

72) Нека је G пресек праве EF са страном AB (сл. 640).

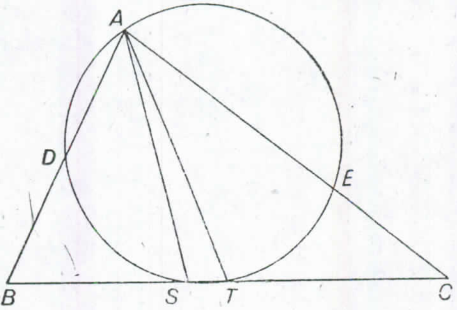


Сл. 640

По претпоставци је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABC$, али $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AGE$; према томе, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AGE$, што показује да се око четвороугла $AGDE$ може описати круг.

У овом кругу је $FE \cdot FG = FA \cdot FD$. Како је D на средини стране BC, F је на средини дужи GE; значи, $FG = FE$; према томе је $FE^2 = FA \cdot FD$.

73) Ако се посматрају две сечице BST и BDA (сл. 641), види се да је



Сл. 641

$$BS \cdot BT = BD \cdot BA.$$

Исто тако, ако се посматрају сечице CTS и CEA, може се написати:

$$CT \cdot CS = CE \cdot CA.$$

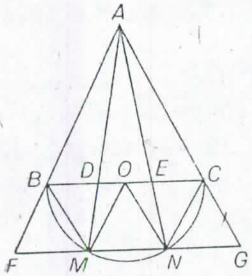
Деобом ове две једнакости добијамо:

$$\frac{BS}{CS} = \frac{BD}{CE} \cdot \frac{BA}{CA}.$$

Како је AS симетрала угла, зна се да је $BS : CS = BA : CA$, а отуда је

$$\frac{BD}{CE} = 1, \text{ или: } BD = CE.$$

74) Продужимо AB и AC до пресека са правом MN (сл. 642). Отсечци BD, DE, EC су пропорционални са отсечцима FM, MN, NG, и да бисмо доказали да су једнаки, довољно је доказати да су ова друга три отсечка једнака.



Сл. 642

Луци BM, MN, NC су једнаки, $\sphericalangle BOM = \sphericalangle MON = \sphericalangle NOC = 60^0$; према томе, троугли BMO, OMN, ONC су равнострани. Сем тога, и троугао BFM је равностран, јер је $\sphericalangle BMF = \sphericalangle OBM = 60^0$, $\sphericalangle BFM = \sphericalangle ABC = 60^0$. Исти је случај са троуглом CNG. Дакле, $FM = MN = NG$.

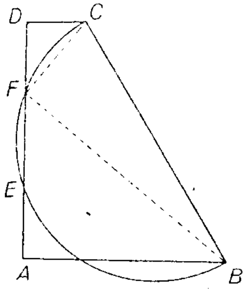
75) Претпоставимо да полукруг чији је пречник BC сече супротну страну у тачки F (сл. 643).

Треба доказати да је $DF \cdot FA = AB \cdot DC$.

Ако узмемо овај однос као тачан, може се написати:

$$DF : DC = AB : FA.$$

Тада би троугли CDF и ABF били слични. Довољно је доказати њихову сличност. Они имају по један угао прав; затим, углови CFD и AFB су комплементни, јер је угао CFB прав; са углом AFB комплементан је и угао ABF, што показује да је $\sphericalangle CFD = \sphericalangle ABF$. Према то́ме, троугли CDF и AFB су слични, па се из њихове сличности може написати горња пропорција, или: $DF \cdot FA = AB \cdot DC$.

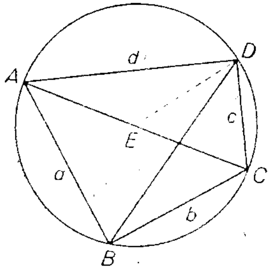


Сл. 643

Исто тако, може се извести: $DE \cdot EA = AB \cdot DC$.

Кад полукруг додирује страну AD, тачка додира је у њеној средини; значи, квадрат половине стране AD једнак је $AB \cdot DC$.

76) Треба доказати да је $AC \cdot BD = ac + bd$ (сл. 644).



Сл. 644

Нацртајмо $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$, па ће троугли ADE и BCD бити слични, јер су поред углова ADE и BDC и углови DAE и DBC једнаки као периферски углови над истим луком.

Из сличности троуглова имамо:

$$d : BD = AE : b,$$

а отуда: $bd = BD \cdot AE$. (1)

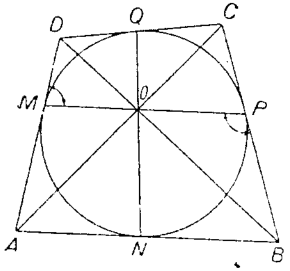
Троугли CDE и ABD су слични, јер су углови код C и B једнаки као периферски углови над истим луком, и $\sphericalangle CDE = \sphericalangle ADB$, јер је $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BDC + \sphericalangle BDE$ и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADE + \sphericalangle BDE = \sphericalangle BDC + \sphericalangle BDE$.

Према томе: $c : BD = CE : a$,

а отуда: $ac = BD \cdot CE$ (2).

Сабирањем једнакости (1) и (2) добија се: $ac + bd = BD \cdot (CE + AE) = BD \cdot AC$.

77) Нека је O пресек дијагонале BD и дужи MP (сл. 645). Троугли DOM и BOP имају једнаке углове код темена O, а углови код M и P су суплементни као углови које граде тангенте у крајњим тачкама исте тетиве MP. Према зад. 23 може се написати:



Сл. 645

$$DM : BP = DO : BO.$$

Нека је O_1 пресек BD и NQ. Из троуглова BO_1N и DO_1Q је:

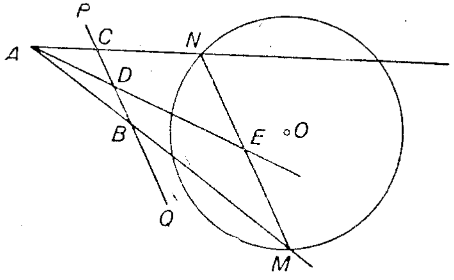
$$DQ : BN = DO_1 : BO_1$$

Због $DQ = DM$, $BP = BN$ имамо:

$$DO : BO = DO_1 : BO_1,$$

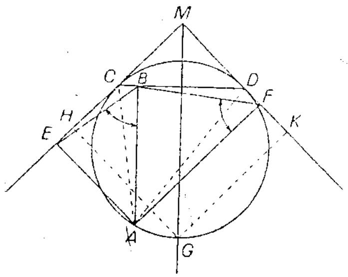
тј. тачке O и O_1 се поклапају.

78) Из слике 646 се јасно види да краци угла A и тежишна линија троугла ABC повучена из темена A чине прамен полуправих пресечених двема паралелним трансверзалама. Како су отсечци на трансверзалама пропорционални и отсечак BC преполовљен тачком D, то је и тетива MN преполовљена тачком E. (Види § 9, зад. 6).



Сл. 646

79) Треба доказати да је $AB^2 = AE \cdot AF$ (сл. 647).



Сл. 647

Претпоставимо да је овај однос доказан; тада можемо написати $AE : AB = AB : AF$.

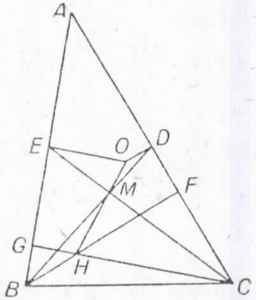
Углови EAB и BAF су једнаки, јер су једнаки угловима HGM и MGK.

Четвороугли $ABCE$ и $AFDB$ имају по два наспрамна угла права, па се око њих могу описати кругови. У том случају је $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ECA$ (зашто?); исто тако, $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BFA$.

Међутим, $\sphericalangle BDA = \sphericalangle CDA = \sphericalangle ECA$; значи, $\sphericalangle EBA = \sphericalangle BFA$.

Како, на овај начин, троугли ABE и AFB имају по два угла једнака, они су слични, а из њихове сличности следује пропорција хомологих страна: $AE:AB = AB:AF$, тј: $AB^2 = AE \cdot AF$, што је требало доказати.

80) Нека је H ортоцентар, а M тежиште (сл. 648).



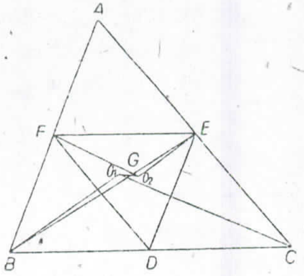
Сл. 648

Продужимо HM за $MO = \frac{HM}{2}$ и спојмо тачку O са тачкама D и E, срединама страна AC и AB. Довољно је доказати да су OD и OE нормале на странама AC и AB.

Знамо да је $MC = 2ME$ и да је $HM = 2MO$. Значи, троугли MHC и EMO су слични, јер су им по две стране пропорционалне а захваћени углови једнаки. Из тога следује $EO \| HC$, или: $OE \perp AB$.

Исто тако се доказује да је $OD \perp AC$; дакле, тачка O је пресек симетрала страна. Тачке O, M, H леже на једној правој и $HM = 2MO$.

81) Нека је O_1 центар уписаног круга у троуглу ABC (сл. 649), O_2 центар уписаног круга у троуглу DEF.



Сл. 649

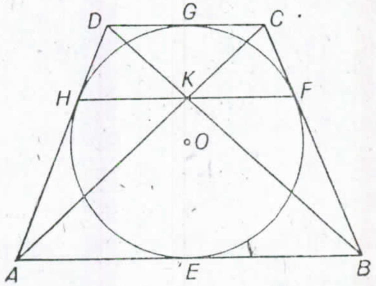
Симетрале BO_1 и EO_2 наспрамних углова једног паралелограма ($BDEF$) паралелне су међу собом. Исто тако, и $CO_1 \| FO_2$. Према томе, троугли BCO_1 и EFO_2 су слични, јер имају једнаке углове. $\sphericalangle O_1BC = \frac{1}{2} \sphericalangle B$, $\sphericalangle O_2EF = \frac{1}{2} \sphericalangle E$; према томе је $\sphericalangle O_1BC = \sphericalangle O_2EF$ итд.

Како је $FE = \frac{BC}{2}$, то је и $O_2E = \frac{1}{2} O_1B$.

Нека је G тачка у којој тежишна линија сече дуж O_1O_2. Слични троугли BGO_1 и EGO_2 дају: $EG:BG = O_2G:O_1G = EO_2:BO_1 = 1:2$.

Дакле, тачка G је тежиште, и $O_1G = 2 \cdot O_2G$.

82) Додирне тачке E и G паралелних страна и круга налазе се на средини основица (сл. 650). OA и OB су симетрале углова A и B трапеза; како су ови углови једнаки, то су једнаки и углови на основици троугла OAB; овај је троугао, према томе, равнокрак, а висина OE је тежишна линија. Исто се тако види да је G на средини стране DC.



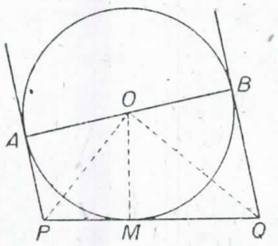
Сл. 650

Треба доказати да је права HK, која спаја додирну тачку H са пресеком дијагонала, паралелна страни DC, или да је $AH:HD = AK:KC$. Знамо да је $AK:KC = AB:DC$; сем тога, да је $AH = AE = \frac{AB}{2}$, $HD = DG = \frac{DC}{2}$; према томе: $AH:HD = AB:DC$; дакле: $AH:HD = AK:KC$, што је и требало доказати. Према томе, $HK \| DC$.

На исти начин се изводи да је $KF \| DC$.

Значи, тачке H, K, F су на истој правој.

83) Угао POQ је прав (сл. 651), јер је $\sphericalangle AOP = \sphericalangle POM$ и $\sphericalangle BOQ = \sphericalangle QOM$.



Сл. 651

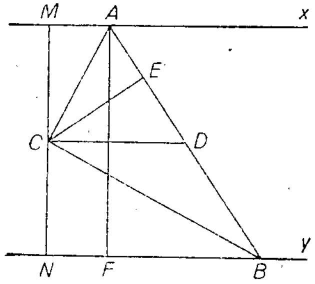
У правоуглом троуглу PQO дуж OM је висина хипотенузе; зато је $OM^2 = PM \cdot QM$, дакле,...

Исто тако је и $AP \cdot BQ = OM^2$.

84) Повуцимо AB, затим CD паралелно правима x и y, $CE \perp AB$ и $AF \perp y$ (сл. 652). У трапезу $MNBA$, CD је средња линија, тачка D је, према томе, на средини дужи AB.

Да бисмо доказали да је AB тангента круга, довољно је доказати да је $CE = CM$.

Правоугли троугли CDE и AFB су слични, јер имају по један оштар угао једнак, $\sphericalangle ECD = \sphericalangle FAB$ (нормални краци); из њихове сличности имамо: $CE : AF = CD : AB$. Како је $AF = MN = 2CM$, а у правоуглом троуглу ACB тежишна линија CD једнака половини хипотенузе AB, то је



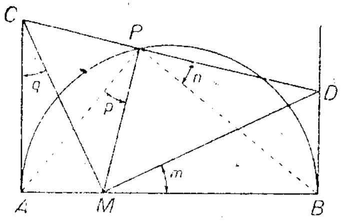
Сл. 652

$$CE : 2 \cdot CM = CD : 2 \cdot CD;$$

отуда је

$$CE = CM.$$

85) Повуцимо PA и PB (сл. 653). Четвороугао $MBDP$ има два наспрамна угла права, па се око њега може описати круг. Углови m и n су периферијски и леже над истим луком; зато су једнаки. Исто важи и за четвороугао $AMPC$, па су углови p и q једнаки. Углови n и p су једнаки, јер имају исти комплеменат $\sphericalangle MPB$. Према томе, правоугли троугли MAC и MBD су слични, а из њихове сличности следује:

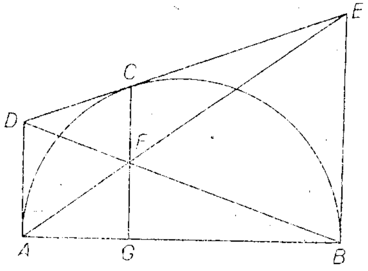


Сл. 653

$$AC : MB = MA : BD, \text{ или: } AC \cdot BD = MA \cdot MB.$$

Производ $AC \cdot BD$ остаје, дакле, сталан.

86) Из сличних троуглова DAF и EFB (сл. 654), у којима су стране AD и BE паралелне, имамо:



Сл. 654

$$AF : EF = AD : BE.$$

Знамо да је $AD = DC$, $BE = CE$; према томе: $AF : EF = DC : CE$, што доказује да је CF или CG паралелно са DA, тј. да је $CG \perp AB$.

Како су три праве AD, GC, BE паралелне међу собом, то је $CF : AD = EF : EA = BF : BD = FG : AD$;

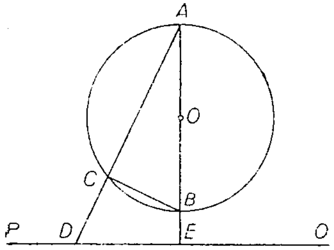
отуда следује:

$$CF = FG.$$

Тачка F је, дакле, на средини дужи CG.

---

87) Нека је пречник $AB \perp PQ$, а E пресек продушка пречника и праве PQ (сл. 655). Повуцимо CB. Правоугли троугли ACB и ADE су слични, јер имају један оштар угао заједнички, па се може написати:



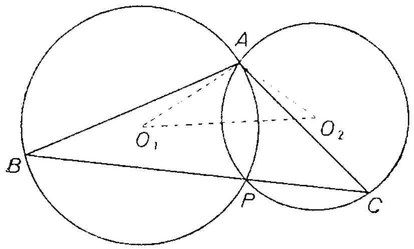
Сл. 655

$$AC : AE = AB : AD,$$

или: $$AC \cdot AD = AE \cdot AB.$$

Производ $AE \cdot AB$ остаје сталан кад се правац сечице ACD мења.

88) Нека су O_1 и O_2 центри кругова. Повуцимо O_1O_2 и полупречнике O_1A и O_2A (сл. 656).



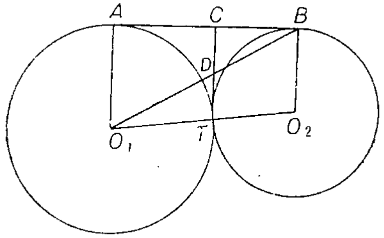
Сл. 656

Троугли ABC и AO_1O_2 су слични. Из односа који важи за периферијске и средишне углове над истим луком следује: $\sphericalangle B = \sphericalangle O_1$ и $\sphericalangle C = \sphericalangle O_2$. Из сличности троуглова имамо:

$$O_1A : BA = O_2A : AC,$$

што је и требало доказати.

89) Нека су R и r полупречници кругова O_1 и O_2, AB заједничка тангента, TC раздаљина додирне тачке кругова од заједничке тангенте (сл. 657).



Сл. 657

Да бисмо израчунали TC, посматрајмо трапез O_1O_2BA и повуцимо O_1B; тада имамо:

$$TD : r = R : (R + r);$$

отуда:

$$TD = \frac{R \cdot r}{R + r}.$$

На сличан начин добијамо:

$$DC : R = BD : O_1B = r : (R + r);$$

отуда:

$$DC = \frac{R \cdot r}{R + r}.$$

Према томе је $TC = TD + DC = \frac{2Rr}{R+r}$, што се може написати

и овако: $\frac{\frac{R+r}{2}}{R} = \frac{r}{TC}$, а из овога се јасно види да је TC четврта

пропорционала за $\frac{R+r}{2}$, R и r.

90) Нека су PQ, PR, PS раздаљине неке тачке P на кругу од тетиве AB и од тангената повучених на круг у тачкама A и B (сл. 658).

Треба доказати да је

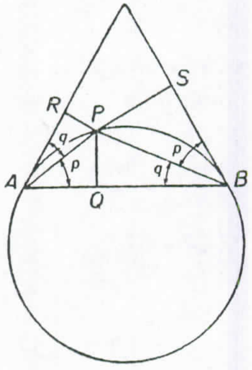
$$PQ^2 = PR \cdot PS.$$

Углови p су једнаки као перифериски над истим луком; из истог разлога су једнаки и углови q. Према томе су правоугли троугли AQP и PBS слични, јер имају по један оштар угао једнак. Исто тако су слични и троугли PQB и APR.

Из њихове сличности следује:

$$PQ : PS = PA : PB,\quad PR : PQ = PA : PB;$$

отуда: $PQ : PS = PR : PQ$, или: $PQ^2 = PR \cdot PS$.



Сл. 658

91) Троугли MTA и MTB су слични (сл. 659). Угао M је заједнички, а углови m су једнаки као перифериски над истим луком. Према томе:

$MT : MB = TA : TB = MA : MT$, или:

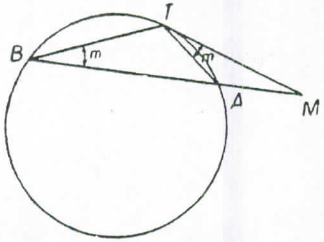
$$MT : MB = TA : TB$$

$$MA : MT = TA : TB.$$

Множећи ове пропорције добијамо:

$$MT \cdot MA : MB \cdot MT = TA^2 : TB^2 \text{ или:}$$

$$MA : MB = TA^2 : TB^2.$$



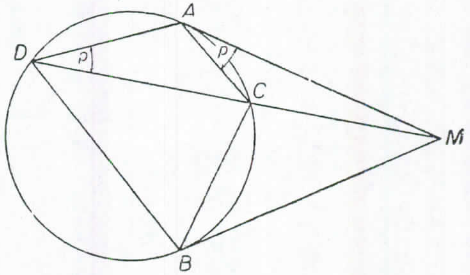
Сл. 659

92) Троугли MAC и MAD су слични (сл. 660). Угао M је заједнички, а углови p једнаки као перифериски над истим луком; према томе:

$$AC : AD = MA : MD.$$

На исти се начин може доказати сличност троуглова MCB и MDB, и из њихове сличности закључити:

$$BC : BD = MB : MD.$$



Сл. 660

У овим двема пропорцијама друге размере су једнаке ($MA = MB$), према томе:

$$AC : AD = BC : BD$$

или:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

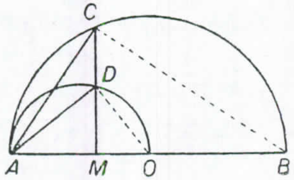
93) Повуцимо DO и CB (сл 661).

У правоуглим троуглима ADO и ACB имамо:

$$AD^2 = AM \cdot AO,$$

$$AC^2 = AM \cdot AB = 2 \cdot AM \cdot AO;$$

отуда: $AC^2 = 2 \cdot AD^2$.



Сл. 661

94) Нека су MA и MB тангенте повучене из M; C и D тачке у којима додирна тетива сече OM и пречник нормалан на XY (сл. 662).

Правоугли троугли OCD и OEM су слични, јер имају оштар угао код O заједнички. Из њихове сличности имамо:

$$OC : OE = OD : OM;$$

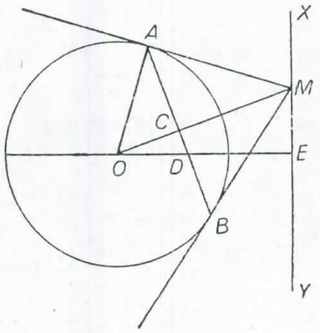
отуда:

$$OC \cdot OM = OE \cdot OD.$$

Из правоуглог троугла OAM имамо:

$$OC \cdot OM = OA^2 = r^2;$$

према томе је $OE \cdot OD = r^2$,

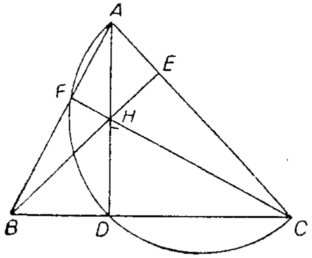


Сл. 662

или: $$OD = \frac{r^2}{OE}.$$

Раздаљина OD је, дакле, непромењива, или тачка D је стална, што је требало доказати.

95) Како су углови ADC, CFA прави (сл. 663), круг пречника AC пролази кроз њихова темена D и F.



Сл. 663

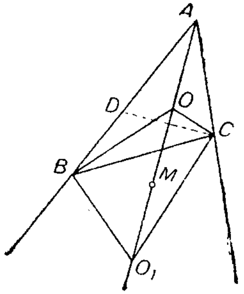
У овом кругу су CF и AD тетиве које се секу у тачки H, а зна се да између њихових отсечака постоји однос

$$HA \cdot HD = HC \cdot HF.$$

На сличан се начин доказује да је

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE.$$

96) Око четвороугла OBO_1C, чија су два угла OBO_1 и OCO_1 права, може се описати круг пречника OO_1 (сл. 664).



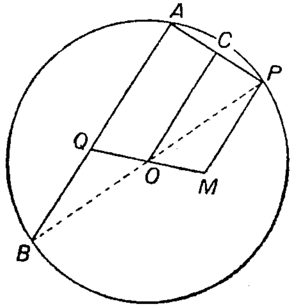
Сл. 664

Пренесимо на AB дуж $AD = AC$. У равнокраком троуглу ADC симетрала угла A је и симетрала стране DC; према томе, ако је M средина дужи OO_1 тада је $MC = MD$ и припада кругу описаном око четвороугла OBO_1C.

Тада је $AO \cdot AO_1 = AD \cdot AB$,

или: $AO \cdot AO_1 = AB \cdot AC$.

97) Повуцимо из центра O дуж $OC \perp PA$ (сл. 665); тада је тачка C на средини тетиве PA; ако је тачка Q пресек тетиве AB и праве MO, четвороугао $MPAQ$ је трапез, дуж CO је паралелна основицама, и како пролази кроз средину тетиве PA, то је и O на средини дужи QM, што значи, $OQ = OM$, тј. тачка Q је стална.

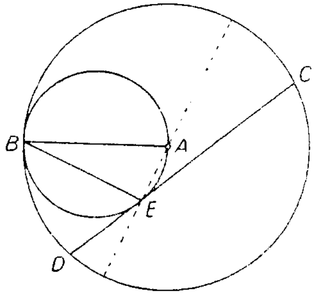


Сл. 665

Кад се P помера по кругу, тј. кад се AB обрће око Q, производ $QA \cdot QB$ остаје сталан.

Угао A је прав и BP је пречник. Троугли OQB и OMP су подударни, јер је $OQ = OM$, углови код O једнаки и $\sphericalangle PMO = \sphericalangle OQB$. Из подударности следује: $QB = MP$; отуда: $MP \cdot AQ = QB \cdot AQ$, тј. производ $MP \cdot AQ$ је сталан.

98) Спојмо A са E (сл. 666). Обележимо са R полупречник већег круга, са d тетиву AE; можемо написати:



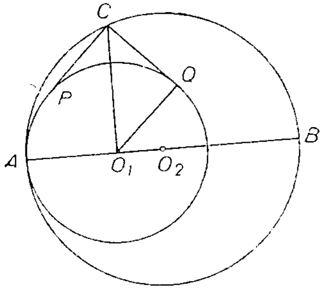
Сл. 666

$$ED \cdot EC = (R + d)\ (R - d) = R^2 - d^2.$$

Како је троугао ABE правоугли са правим углом код E, то је $R^2 - d^2 = BE^2$; према томе је

$$ED \cdot EC = BE^2.$$

99) Нека су CP и CQ тангенте мањег круга повучене из тачке C (сл. 667); треба доказати да је $\sphericalangle PCQ = 90^0$, или, како је O_1C симетрала угла PCQ, да је $\sphericalangle O_1CQ = 45^0$, или да је правоугли троугао CO_1Q равнокрак.



Сл. 667

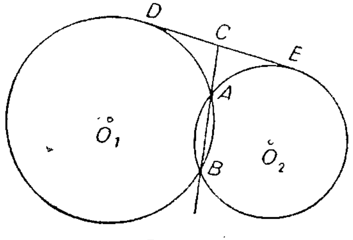
Ако претпоставимо да смо повукли AC и BC, у правоуглом троуглу CAB биће $CO_1{}^2 = AO_1 \cdot O_1B$, или:

$$CO_1{}^2 = 2a \cdot 4a = 8a^2.$$

Из правоуглог троугла O_1QC имамо:

$CQ^2 = O_1C^2 - O_1Q^2 = 8a^2 - 4a^2 = 4a^2$; отуда је $CQ = 2a$, тј. $CQ = O_1Q$, што показује да је троугао O_1QC равнокрак.

100) Нека је C пресек заједничке тангенте и заједничке сечице (сл. 668).

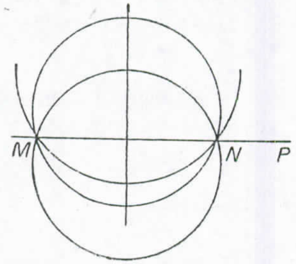


Сл. 668

CD је тангента, а CAB сечица за круг O_1; према томе је $CD^2 = CA \cdot CB$. Исто тако, CE је тангента и CAB сечица за круг O_2 и $CE^2 = CA \cdot CB$. Отуда следује: $CD^2 = CE^2$, или: $CD = CE$, што је и требало доказати.

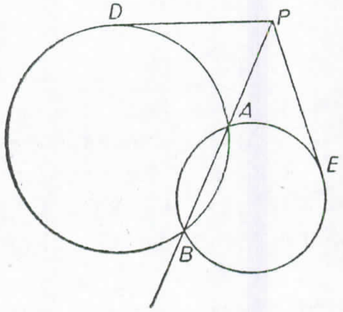
101) Ако је тачка P на правој MN (сл. 669), потенција тачке P за све кругове који пролазе кроз тачке M и N а средиште им је на симетрали дужи MN биће $PM \cdot PN$.

Док тачка P остане иста, тај производ остаје непромењен; зато је потенција за све кругове који пролазе кроз M и N иста.



Сл. 669

102) Нека се два круга секу у тачкама A и B, и нека су PD и PE тангенте повучене ма из које тачке P на заједничкој сечици (сл. 670).



Сл. 670

Знамо да је

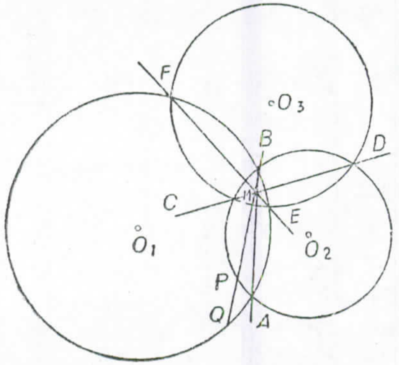
$$PD^2 = PA \cdot PB$$
$$PE^2 = PA \cdot PB,$$

отуда је $PD^2 = PE^2$,

или: $PD = PE$.

103) Нека су O_1, O_2, O_3 средишта трију датих кругова, и нека су: AB заједничка сечица кругова O_1 и O_2, CD кругова O_2 и O_3, и EF кругова O_1 и O_3 (сл 671).

Обележимо са M пресек сечица CD и EF; тада је M између тачака C и D и између E и F, и налази се у круговима O_2 и O_3. Повуцимо BM, и нека сý P и Q пресеци ове праве са круговима O_2 и O_1. Тачка M се налази између тачака B и P и између тачака B и Q, и тада је:



Сл. 671

$$MB \cdot MQ = ME \cdot MF,$$
$$MB \cdot MP = MC \cdot MD,$$
$$MC \cdot MD = ME \cdot MF;$$

значи, $MB \cdot MQ = MB \cdot MP$, а отуда $MQ = MP$, или, како су тачке P и Q са исте стране тачке M на сечици $BMPQ$, ове две тачке P и Q се поклапају. Међутим, тачка P је на кругу O_2 а тачка Q је на кругу O_1; тачка у којој се P и Q поклапају мора припадати и једном и другом кругу; према томе, она мора бити у тачки A. Тиме се доказује да AB пролази кроз тачку M.

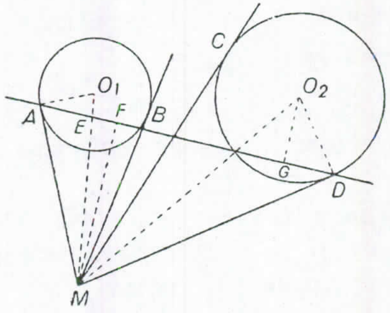
104) Довољно је доказати да је угао $AMO_1 = \sphericalangle DMO_2$.

На праву која сече кругове спустимо нормале O_1E, MF, O_2G. Троугли AEO_1 и AMF су слични а исто тако троугли DGO_2 и FDM, па се може написати:

$$\frac{AO_1}{AM} = \frac{AE}{MF}. \text{ Исто тако: } \frac{DO_2}{MD} = \frac{DG}{MF}.$$

Како је $AE = DG$, као половине једнаких тетива, то је

$$\frac{AE}{MF} = \frac{DG}{MF},$$



Сл. 672

а отуда:

$$\frac{AO_1}{AM} = \frac{DO_2}{MD}.$$

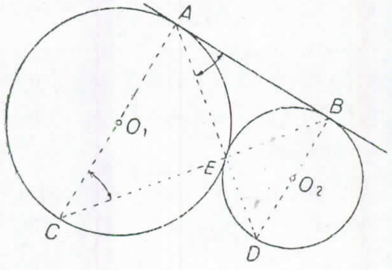
Дакле, троугли AMO_1 и MDO_2 су слични, што значи да је $\sphericalangle AMO_1 = \sphericalangle DMO_2$.

105) Нека су R и r полупречници кругова, а t растојање додирних тачака A и B.

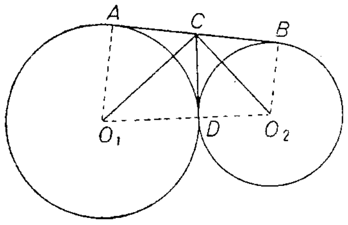
Први начин. (сл. 673). Правоугли троугли ABC и ABD су слични ($\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAD$).

Из њихове сличности имамо:

$$AB : BD = AC : AB,$$
$$AB^2 = AC \cdot BD = 2R \cdot 2r.$$



Сл. 673



Сл. 674

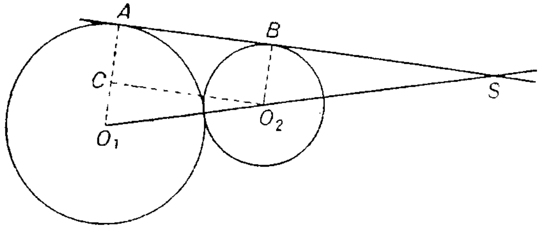
Други начин. Четвороугли $BCDO_2$ и O_1DCA су слични (сл. 674);

$$CA = CD = CB = \frac{t}{2}.$$

Правоугли троугао O_1O_2C даје:

$$\frac{t^2}{4} = O_1D \cdot O_2D = R \cdot r$$

$$t^2 = 4\,Rr = 2\,R \cdot 2r.$$



Сл. 675

Трећи начин (сл. 675).

$$AB^2 = O_1O_2{}^2 - O_1C^2$$

$$O_1O_2 = R + r$$

$$O_1C = R - r$$

$$t^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = \\ = 4\,Rr$$

$$t^2 = 2\,R \cdot 2\,r.$$

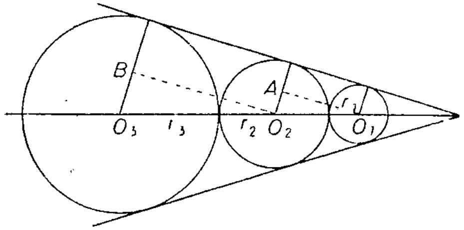
106) Нека су r_1, r_2, r_3 полупречници датих кругова (сл. 676). Треба доказати да је

$$r_3 : r_2 = r_2 : r_1,$$

или:

$(r_3 - r_2) : (r_3 + r_2) = (r_2 - r_1) : (r_2 + r_1)$, или: $O_3B : O_3O_2 = O_2A : O_2O_1$.

Троугли O_3O_2B и O_2O_1A су слични; дакле?



Сл. 676

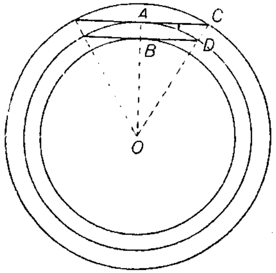
107) OC је полупречник круга описаног око спољашњег полигона, OB је полупречник круга уписаног у унутрашњем полигону (сл. 677).

Обими кругова су пропорционални са својим полупречницима. Довољно је, дакле, доказати да је

$$AO^2 = CO \cdot BO.$$

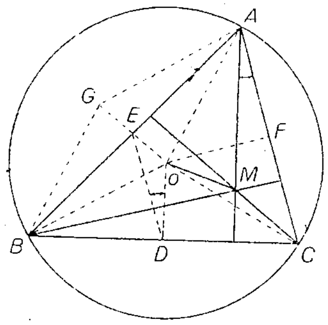
Из сличности троуглова AOC и BOD имамо: $CO : DO = AO : BO$, или: $CO : AO = AO : BO$; отуда:

$$AO^2 = CO \cdot BO.$$



Сл. 677

108) Зна се да је $OD = \frac{AM}{2}$ (сл. 678). (Види зад. 127 у § 6).

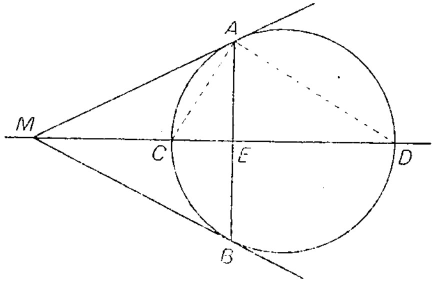


Сл. 678

Троугли AMC и OED су слични; затим $AC = 2\,DE$; према томе је $MC = 2 \cdot OE$, $AM = 2 \cdot OD$.

Одредимо тачку G симетрично тачки O у односу на AB. Слика $BOAG$ је паралелограм, што значи да је OG резултанта сила OA и OB. Четвороугао $OCMG$ је исто тако паралелограм, јер је $MC \parallel EO$ и $MC = 2 \cdot OE = OG$; значи, OM је резултанта сила OC и OG. Према томе, OM је резултанта сила OC, OA и OB.

109) У троуглу MAE праве AC и AD су симетрале унутрашњег и спољашњег угла (сл. 679).



Сл. 679

$\sphericalangle MAC = \sphericalangle ADC$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ADC$; отуда је $\sphericalangle MAC = \sphericalangle CAB$, што значи да је CA симетрала угла MAE.

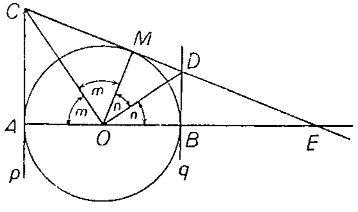
Угао CAD је прав; $AD \perp AC$; значи, AD је симетрала спољашњег угла троугла MAE.

Према томе:

$$MC : CE = MA : AE, \quad MD : ED = MA : AE.$$

Дакле: $MC : CE = MD : ED$.

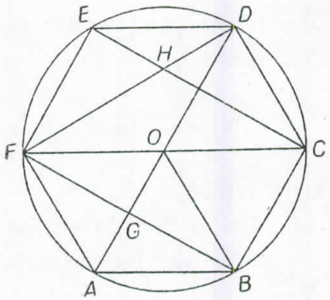
110) Спојмо центар са тачкама C, M, D (сл. 680).



Сл. 680

Знамо да су троугли AOC и OMC подударни, а исто тако и троугли MOD и OBD. Према томе: $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COM = m$, $\sphericalangle MOD = \sphericalangle DOB = n$. Значи да је OD симетрала унутрашњег, а OC симетрала спољашњег угла троугла OME, и тачке C, M, D, E су хармониски коњуговане.

111) а) AD је пречник; $ABOF$ је ромб, јер је $AB = AF = OB = OF$.



Сл. 681

Према томе је

$$AG = \frac{R}{2}, \quad GD = \frac{3\,R}{2},$$

или: $GD = 3 \cdot AG$ (сл. 681).

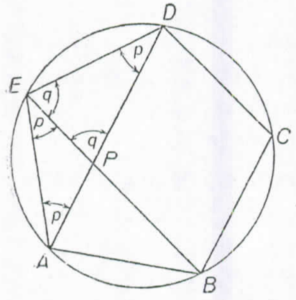
б) FC је пречник, страна ED и пречник FC су паралелни, јер су луци FE и CD између њих једнаки.

Из сличних троуглова FCH и EHD имамо:

$$HC : HE = FC : ED = 2\,R : R = 2 : 1\,;$$

отуда је $HC = 2 \cdot HE$.

112) Опишимо круг око петоугла. Углови обележени са p једнаки су као перифериски углови над једнаким луцима (петини кружне периферије), због чега су троугли APE и ADE слични (сл. 682), према томе: $AE : AD = AP : AE$.



Сл. 682

И углови обележени са q су једнаки; $\sphericalangle DEB$ лежи над $\frac{2}{5}$ круга, а углу EPD одговара лук од $\frac{2}{5}$ круга $(ED + AB)$; према томе је $DP = DE = AE$. Отуда: $DP : AD = AP : DP$. DP је, дакле, геометриска средина између AP и AD.

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

113) Ако је један део 12 cm, други део је 18 cm. Дуж треба поделити у размери 12 : 18, тј. 2 : 3.

114) Нека је дуж AB тачкама C и D подељена у размери 2 : 3 : 4 (сл. 683). Од средине дела AC до средине дела DB

Сл. 683

има 6 мерних делова; њихова дужина је 5,4 m. Према томе, један мерни део је $\frac{5,4}{6}$. Како у целој дужи има 9 мерних делова, то је дуж $AB = 9 \cdot \frac{5,4}{6} = 8,1$ m.

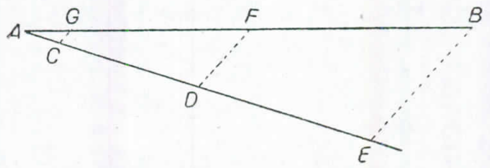
115) Како је дуж AB тачком C подељена у размери 5 : 7, то је $AC = \frac{5}{12}\,AB$. Исто тако је $AD = \frac{5}{16}\,AB$. Отуда:

Сл. 684

$$CD = AC - AD = \frac{5}{12}\,AB - \frac{5}{16}\,AB = 5 \cdot AB \cdot \frac{1}{48},$$

или: $10 = 5 \cdot AB \cdot \frac{1}{48}$, а отуда $AB = 96$ m (сл. 684).

116) Нека је $AB = 40$ (сл. 685). Кроз A повуцимо једну произвољну праву и на њу пренесимо $AC = 5$, $CD = 20$, $DE = 25$ (могле би се, исто тако, пренети три дужине пропорционалне овим дужинама, например 1, 4, 5). Спојмо тачке E и B, затим, повуцимо $DF \parallel EB$ и $CG \parallel EB$.



Сл. 685

Зна се да је $AG : AC = GF : CD = FB : DE$; према томе, AG, GF, FB су три тражена отсечка.

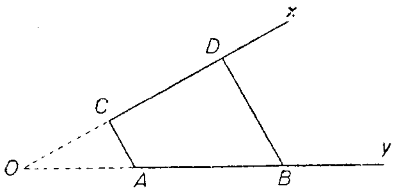
Ако обележимо $AG = x$, $GF = y$, $FB = z$, имаћемо: $x : 5 = y : 20 = z : 25 = (x + y + z) : (5 + 20 + 25) = 40 : 50 = 4 : 5$; отуда је $x = 4$, $y = 16$, $z = 20$.

117) Обележимо дужине ових делова са x, y, z. Према услову задатка имамо:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \quad \frac{y}{z} = \frac{4}{5}, \quad \text{или:} \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \quad \frac{y}{4} = \frac{z}{5}, \quad \text{или:} \quad \frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}.$$

Треба, дакле, дату дуж поделити по размери 8 : 12 : 15.

118) На праву y, почев од пресека O треба пренети три произвољне али једнаке дужи до тачке A (сл. 686); затим још четири исте толике дужи до тачке B. Из добијених тачака A и B треба спустити нормале на праву x. Тада је

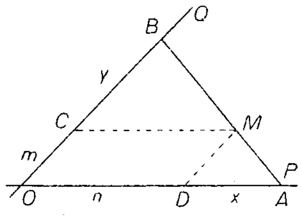


Сл. 686

$$AC:BD=OA:OB=3:7.$$

Како су дужи које смо преносили биле произвољне, то има безбројно много тачака A и B на правој y чије су раздаљине од праве x у размери $3:7$.

119) Како је тачка M дата, могу се повући праве MC и MD паралелно крацима OP и OQ и потражити однос $OA \cdot OB$ као функцију познатих дужина $OC=m$, $OD=n$. (сл. 687).



Сл. 687

Троугли MDA и BOA су слични и из њихове сличности имамо:

$$DM:OB=DA:OA,$$

или:
$$m:OB=(OA-n):OA;$$

отуда:
$$OB \cdot OA=m \cdot OA+n \cdot OB,$$

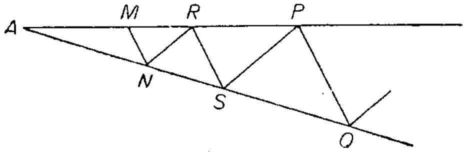
или:
$$\frac{m}{OB}+\frac{n}{OA}=1.$$

Како су положаји тачака C и D познати, можемо узети $DA=x$, $CB=y$, па из сличности троуглова MDA и BCM имамо:

$$DM:x=y:CM, \text{ или: } m:x=y:n; \text{ отуда је } x \cdot y=m \cdot n.$$

Значи, да је производ отсечака x и y сталан.

120) Обележимо са $m, n, r, s, p, q \cdots\cdots$ раздаљине AM, AN, AR, AS, $AP \cdots\cdots$ (сл. 688).



Сл. 688

Из конструкције се види да су дужи MN, RS, $PQ \cdots\cdots$ паралелне међу собом као и дужи NR, SP, $\cdots\cdots$ и да су сви троугли AMN, ANR, ARS, ASP, $\cdots\cdots$ слични. Ако се посматрају редом троугли први и други, други и трећи, трећи и четзрти итд., добија се бескрајан низ једнаких односа:

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AN}{AR}=\frac{AR}{AS}=\frac{AS}{AP}=\frac{AP}{AQ}=\cdots\cdots,$$

или:
$$\frac{m}{n}=\frac{n}{r}=\frac{r}{s}=\frac{s}{p}=\frac{p}{q}=\cdots\cdots$$

Ако се редом упоређују први однос са другим, други са трећим итд., добија се прво $mr=n^2$; како је $m=1$, то је $r=n^2$; затим: $ns=r^2=n^4$, или делећи са n, $s=n^3$;

$rp=s^2=n^6$, или $n^2 \cdot p=n^6$, одакле $p=n^4$;

$sq=p^2=n^8$, или $n^3q=n^8$, отуда, $q=n^5$ итд.

121) Нека је DEF троугао сличан троуглу ABC, и нека му је обим 20 cm.

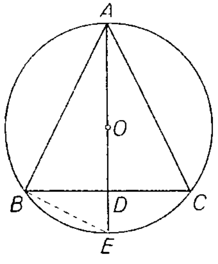
Тада је

$$DE:AB=EF:BC=DF:AC=(DE+EF+DF):(AB+BC+AC),$$

или:
$$DE:4=EF:5=DF:6=20:15;$$

отуда је $DE=\frac{16}{3}$, $EF=\frac{20}{3}$, $DF=8$.

122) Нека је ABC равнокраки троугао ($AB=AC$) у коме је $BC=8$ cm, $AD=8$ cm (сл. 689).



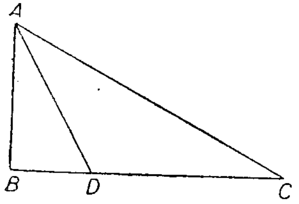
Сл. 689

Опишимо око троугла круг; његов центар O је на висини A, јер је AD симетрала стране BC. Ако је R полупречник описаног круга, а AE пречник из врха троугла, у правоуглом троуглу ABE имамо $BD^2=AD \cdot DE$, или, ако заменимо:

$$BD=4,\ AD=8,\ ED=2R-8,\ 16=8\ (2R-8),$$

или:
$$2=2R-8, \text{ а отуда } R=5 \text{ cm}.$$

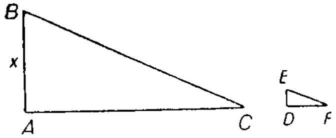
123) Обележимо отсечак DC са x (сл. 690); тада је $BD=$ $=x-3$.



Сл 690

Познато је да је $(x-3):x=8:14$; отуда је $x=7$, тј. $DC=7$, $BD=4$, $BC=$ $=11$ cm.

124) Како су стране AB и BC једнаке, троугао ABC је равнокрак, и висина из врха B полови основицу AC. Према томе, висина BD је у исто време тежишна линија из B, па је тежишна линија из A дели у размери $2:1$.



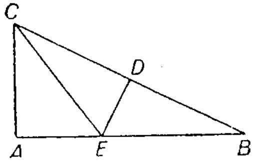
Сл. 691

125) Нека је AB дрво, а DE нека претставља човека (сл. 691); они имају исти вертикални правац; правци BC и EF су сунчеви зраци, и они су паралелни, а AC и DF су сенке на земљи које имају хоризонталан положај. Према томе, троугли ACB и DFE су слични; из њихове сличности се може написати пропорција:

$$x:1{,}6=19{,}2:2{,}4;$$

отуда је

$$x=12{,}8 \text{ m}.$$



Сл. 692

126) Троугао BCE је равнокрак (сл. 692); $\sphericalangle DCE=\sphericalangle DBE$; према томе, $\sphericalangle DBE$ и $\sphericalangle DCA$ стоје у размери $2:7$. Како је збир ова два угла 90^0, то је тражени угао $DCA=70^0$.

127) $AE:EB=7:5$; отуда:

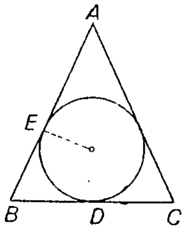
$$AB:EB=12:5 \text{ (сл. 693)}.$$

Како је $BE=BD$, а $BD=\frac{BC}{2}$, то је

$$AB:BD=12:5,$$

или:

$$AB:BC=12:10=6:5.$$

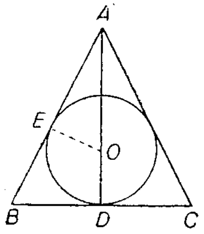


Сл. 693

128) Правоугли троугли ABD и AOE су слични (сл. 694), јер имају један оштар угао заједнички. Из њихове сличности имамо:

$$AB:BD=AO:EO=12:5 \ (EO=DO);$$

отуда је $BD=25$ cm, а $BC=50$ cm.



Сл. 694

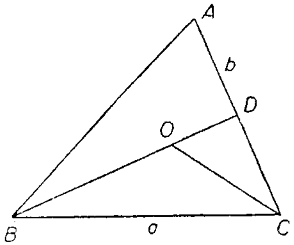
129) У троуглу ABC (сл. 695) симетрала угла B дели страну AC на два дела тако да је

$$DC:AD=a:c;$$

отуда: $(DC+AD):DC=(a+c):a$,

или: $b:DC=(a+c):a$, а одавде:

$$DC=\frac{a\cdot b}{a+c}.$$



Сл. 695

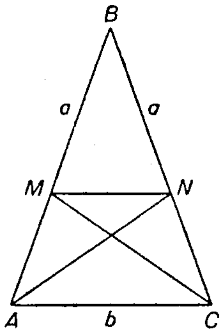
У троуглу BCD повучена је симетрала угла C; отуда је

$$\frac{OD}{OB}=\frac{DC}{a}=\frac{b}{a+c}.$$

130) У троуглу ABC (сл. 696) права CM је симетрала угла C; отуда:

$AM:MB=b:a$, или: $(AM+MB):MB=(a+b):a$, а одавде:

$$MB=\frac{a^2}{a+b}.$$

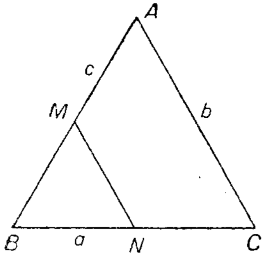


Сл. 696

Троугли BMN и BAC су слични, а из њихове сличности имамо $MN:BM=b:a$. Заменом вредности BM имамо:

$$MN=\frac{a\cdot b}{a+b}.$$

131) Троугли ABC и MBN су слични (сл. 697). Из њихове сличности имамо:



Сл. 697

$$BN : BM = a : c,$$

или, како је $BN = AM$;

$$AM : BM = a : c;$$

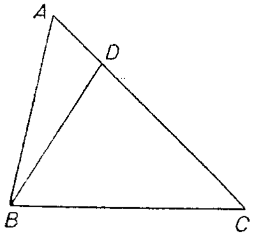
отуда: $(AM + BM) : BM = (a + c) : c,$

$$BM + \frac{c^2}{a + c}.$$

Сем тога, имамо: $MN : b = BM : c$. Заменом вредности BM добијамо:

$$MN = \frac{b \cdot c}{a + c}.$$

132) Троугли ABC и BCD су слични (сл. 698), јер имају један угао заједнички и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BDC$. Из њихове сличности имамо:



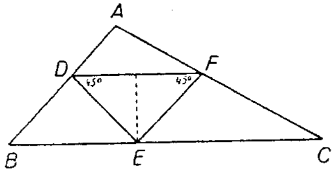
Сл. 698

$$BC : DC = AC : BC;$$

отуда $BC = 12$ cm.

Сем тога: $BD : BA = BC : AC = 12 : 16 = 3 : 4$.

133) Ако раздаљину хипотенузе DF од стране BC обележимо са x, тада је $DF = 2x$ (сл. 699).



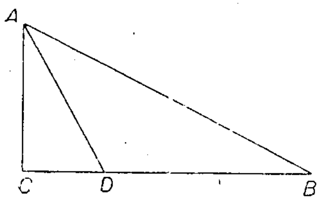
Сл. 699

Из сличности троуглова ABC и ADF имамо: $30 : 10 = 2x : (10 - x)$, или: $3 : 1 = 2x : (10 - x)$; отуда је

$$x = 6 \text{ cm}.$$

Према томе, хипотенуза $DF = 12$cm.

134) Ако је $\sphericalangle ADC = 90^0 - \sphericalangle B$, тада је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAC$; према томе, правоугли троугли ABC и ACD су слични (сл. 700).

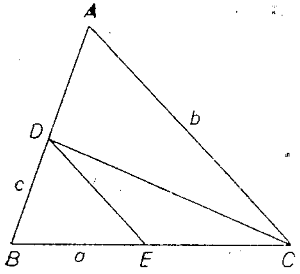


Сл. 700

Отуда: $CD : AC = AC : BC$, а из ове пропорције добијамо $CD = 3$ cm.

Даље, $DB = CB - CD = 9$ cm.

135) Како је CD симетрала угла C у троуглу ABC (сл. 701), то је



Сл. 701

$$BD : AD = a : b, \text{ или: } c : BD = (a + b) : a;$$

отуда је $$BD = \frac{a \cdot c}{a + b}.$$

Из сличности троуглова BED и BCA имамо:

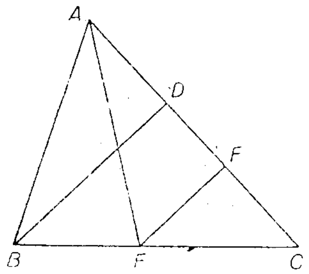
$$DE : BD = b : c.$$

Заменом вредности BD добијамо:

$$DE = \frac{a \cdot b}{a + b}.$$

136) AE је симетрала угла A у троуглу ABC (сл. 702); отуда

$$BE : EC = AB : AC = 7 : 8.$$



Сл. 702

Правоугли троугли DBC и FEC су слични, јер имају заједнички оштар угао C, а из њихове сличности имамо:

$$EF : BD = EC : BC.$$

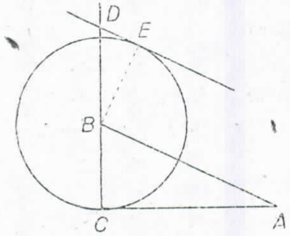
Међутим је:

$BE : EC = 7 : 8$. или: $BC : EC = 15 : 8$; отуда је

$$BC = \frac{15}{8} EC.$$

Заменом у претходној пропорцији добијамо: $EF : 30 = EC : \frac{15}{8} EC$, а отуда $EF = 16$ cm.

137) Правоугли троугли ABC и BED су слични (сл. 703); углови BDE и CBA су једнаки. Отуда: $BE : BD = CA : AB$, или: $12 : BD = 16 : 20$, одакле је $BD = 15$ dm.



Сл. 703

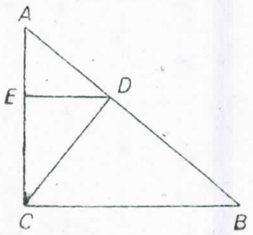
138) Знамо да је однос квадрата катета једнак односу отсечака хипотенузе (зад. 17), тј.:

$$AD : DB = 16 : 25.$$

Међутим, знамо да је $AE : EC = AD : DB$ (сл. 704).

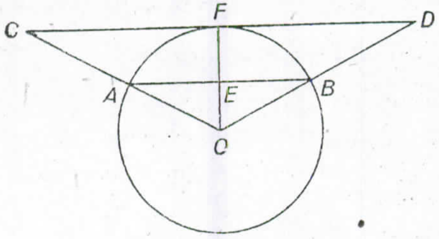
Према томе:

$$AE : EC = 16 : 25.$$



Сл. 704

139) Нека је AB страна у кругу уписаног равностраног троугла (сл. 705). Тангента у средини лука AFB сече продужене полупречнике OA и OB у тачкама C и D; дуж CD је паралелна са дужи AB, и то је страна равностраног око круга описаног троугла, јер је $\sphericalangle COD = 120^0$.



Сл. 705

Из сличних троуглова AOB и COD имамо: $CD : AB = OC : OA = OF : OE$.

Зна се да је централна раздаљина стране уписаног равностраног троугла једнака половини полупречника; значи, $OF : OE = 2$. Према томе је $CD : AB = 2$, тј. страна око круга описаног равностраног троугла двапут је већа од стране у кругу уписаног равностраног троугла.

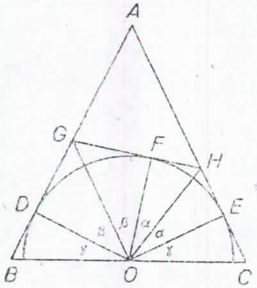
140) Троугли GBO и HOC имају једнаке углове (сл. 706), јер су углови код O два и два једнаки.

Збир углова $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$.

Угао код H је комплеменат углу α, а α је комплеменат углу $(\beta + \gamma)$; према томе, $\sphericalangle BOG = \sphericalangle H$; а како је и $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, троугли су слични. Отуда:

$$BG : BO = OC : HC,$$

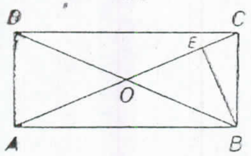
или: $BG \cdot HC = BO^2$, што показује да је производ $BG \cdot HC$ сталан.



Сл. 706

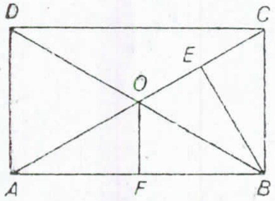
141) Углови EBC и EAB су једнаки (зашто?). Како је троугао ABO равнокрак, то је $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ABO$. (сл. 707).

Према услову задатка угао $EBC = \frac{1}{4} 90^0$ значи угао EBO је половина правог угла, тј. угао EBO износи 45^0.



Сл. 707

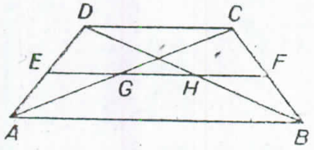
142) Према услову задатка је $EC : AE = 1 : 3$, тј. EC је $\frac{1}{4}$ дијагонале, или $\frac{1}{2} OC$. Према томе, троугао OBC је равностран; отуда $BC = BO = AO$. Правоугли троугли BCE и AFO су подударни, јер поред једнаких хипотенуза имају једнаке и оштре углове ECB и AOF; а отуда $EC = OF = 2$m. Најзад је $AC = 4 \cdot EC = 8$ m.



Сл. 708

143) Ако је $EG = \frac{1}{3} EF$, тада је $DC = \frac{2}{3} EF$ (сл. 709).

Ако је $EH = \frac{2}{3} EF$, тада је $AB = \frac{4}{3} EF$.



Сл. 709

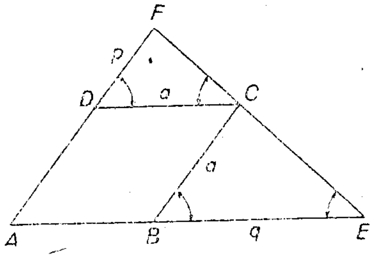
Према томе:

$$AB:DC=\frac{4}{3}EF:\frac{2}{3}EF=2.$$

144) Троугли BEC и DCF су слични (сл. 710), $\sphericalangle E=\sphericalangle C$, $\sphericalangle B=\sphericalangle D$. Из њихове сличности имамо:

$$q:a=a:p;$$

отуда $a=\sqrt{p\cdot q}$.

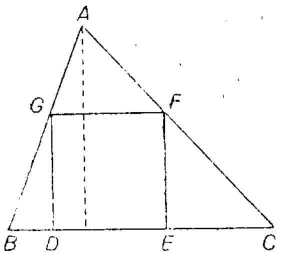


Сл. 710

145) Претпоставимо да је задатак решен и да је $DEFG$ уписан квадрат (сл. 711). Обележимо страну квадрата са x, стране троугла ABC са a, b, c, а висину из темена A са h.

Троугли ABC и AGF су слични; отуда: $a:x=h:(h-x)$, или: $a:h=x:(h-x)$, или: $(a+h):a=h:x$.

Страна квадрата је четврта пропорционала познатих дужи, па се може лако конструисати.

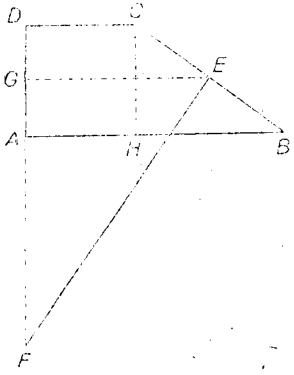


Сл. 711

146) Повуцимо висину CH и средњу линију GE (сл. 712). CH је катета правоуглог троугла CHB и износи 6dm, јер је $HB=AB-DC=8\,\text{dm}$;

$$GE=\frac{25+17}{2}=21\ \text{dm}.$$

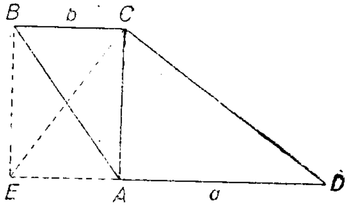
Правоугли троугли CHB и GFE су слични, јер је $\sphericalangle CBH=\sphericalangle GFE$. Из сличности ових троуглова имамо: $CH:CB=GE:FE$ или: $6:10=21:FE$; отуда је $FE=35$ dm.



Сл. 712

147) Нека је $AD=a$ и $BC=b$ (сл. 713).

Ако из темена b спустимо нормалу на продужак стране DA, добијамо правоугаоник $EACB$; тада је $BA=EC$. Како су углови BAC и ACD, по претпоставци, комплементни, а углови BAC и ECA једнаки, то је $\sphericalangle ECD=90^0$.



Сл. 713

У правоуглом троуглу CED је

$$EC^2=ED\cdot EA=(a+b)\cdot b$$

$$CD^2=ED\cdot AD=(a+b)\cdot a.$$

Према томе је

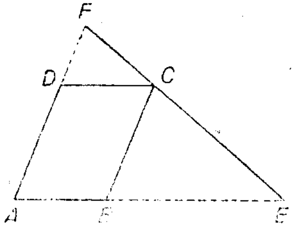
$$AB=EC=\sqrt{b(a+b)},\ \ CD=\sqrt{a(a+b)}.$$

148) Нека је $AB=DC=a$, $AD=BC=b$ (сл. 714).

Слични троугли CBE и FDC дају: $BE:a=b:DF$; отуда је

$$BE\cdot DF=ab.$$

Дакле, производ отсечака на странама је сталан.



Сл. 714

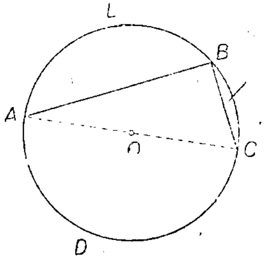
149) Нека је L лук чији се број степени тражи, а AB одговарајућа тетива (сл 715).

Ако је $BC\perp AB$, AC је пречник круга и лук ADC има 180^0.

Према услову задатка је

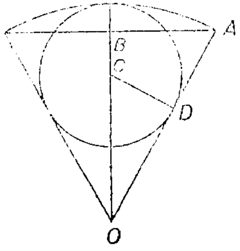
$$\overset{\frown}{ADC}:\overset{\frown}{CB}=5:2,\ \text{или:}$$

$180^0:\overset{\frown}{CB}=5:2$; отуда лук CB има 72^0, а лук ALB има 108^0.



Сл. 715

150) Правоугли троугли OCD и OAB су слични, јер имају један оштар угао заједнички (сл. 716); отуда, ако полупречник уписаног круга обележимо са x, имамо:



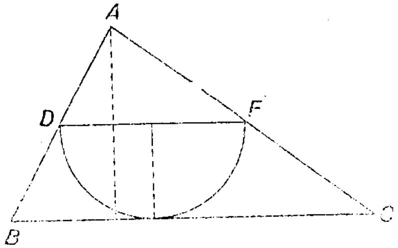
Сл. 716

$$x:(r-x)=\frac{a}{2}:r,\ \text{или:}\ x:(r-x)=a:2r,$$

или: $r:x=(a+2r):a$, и

$$x=\frac{ar}{a+2r}.$$

151) Претпоставимо да је задатак решен и да је DF пречник полукруга (сл. 717); обележимо са r његов полупречник.



Сл. 717

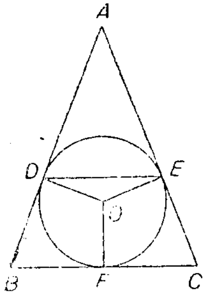
Троугли ABC и ADF су слични и отуда имамо:

$12:2r=9:(9-r)$, или:

$12\cdot(9-r)=2r\cdot 9$, одакле је

$r=3{,}6\,\text{cm}$.

152) Зна се да је $BD=BF=9$ cm (сл. 718); према томе, $AD=18$ cm.



Сл. 718

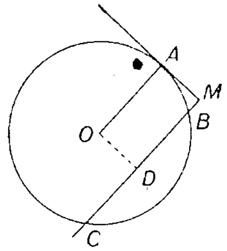
Из сличности троуглова ABC и ADE имамо:

$BC:DE=AB:AD$, или: $18:DE=27:18$; отуда је $DE=12$ cm.

153) Знамо да је $AM^2=MC\cdot MB$ (сл. 719).

$$144=(10+MB)\ MB.$$

Из ове једначине добијамо $MB=8$.

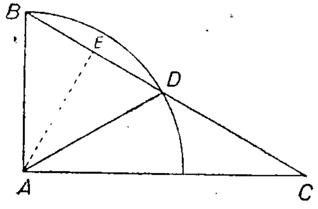


Сл. 719

Ако повучемо $OD\perp BC$, четвороугао $ODMA$ је правоугаоник; према томе:

$$OA=DM=\frac{BC}{2}+MB=13\ \text{cm}.$$

154) Дужина целе хипотенузе је 625.



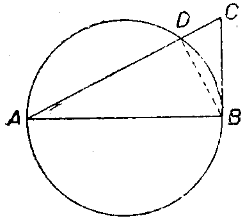
Сл. 720

Троугао ADB је равнокрак (сл. 720); према томе, висина хипотенузе AE полови основицу BD, а отсечци хипотенузе, на које је дели висина, 49 cm и 576 cm. Знамо да је

$AB^2=625\cdot 49$, или $AB=175$ cm,

$AC^2=625\cdot 576$, или $AC=600$ cm.

155) Троугли ABD и ABC су правоугли (сл. 721).



Сл. 721

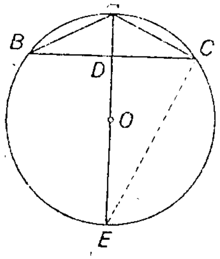
Отуда је

$$BC^2=AC\cdot DC,\ \text{или:}\ CD=\frac{BC^2}{AC};$$

$$AB^2=AC\cdot DA,\ \text{или:}\ DA=\frac{AB^2}{AC}.$$

Даље: $CD:DA=BC^2:AB^2=r^2:4r^2=1:4$.

156) По претпоставци је $a+h=2r$, где је a основица а h висина равнокраког троугла ABC (сл. 722);



Сл. 722

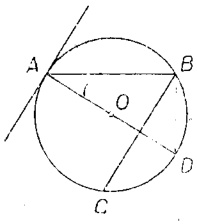
тада је $CD=\frac{a}{2}$.

У правоуглом троуглу AEC је

$$CD^2=AD\cdot DE,\ \text{или:}\ \left(\frac{a}{2}\right)^2=h\cdot(2r-h).$$

Заменом у овој једначини $a=2r-h$ добија се

$$h=\frac{2}{5}r.$$

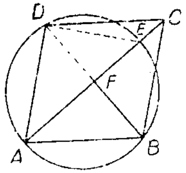


Сл: 723

157) Нормала на тангенти у додирној тачки пролази кроз средиште и нормална је на тетиви, јер је ова паралела тангенти.

Из правоуглог троугла ADB (сл. 723) имамо:

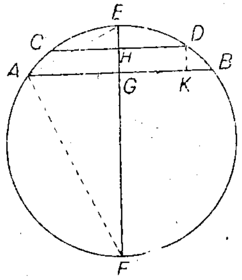
$$AB^2 = AD \cdot AE, \text{ или: } AE = \frac{12^2}{16}\text{dm} = 9\text{ dm}.$$



Сл. 724

158) У правоуглом троуглу AED страна AD је геометриска средина између AE и AF (сл. 724).

$AE + 5$ m, AF је половина дијагонале AC, која износи $5 + 1{,}4 = 6{,}4$, и, стога, $AF = 3{,}2$. Према томе, страна ромба $AD^2 = 5 \cdot 3{,}2 = 16$, или: $AD = 4$ m.



Сл. 725

159) Повуцимо пречник EF нормално на тетиве, а потом повуцимо дужи AE и AF (сл. 725).

У правоуглом троуглу EAF је $AG^2 = EG \cdot GF$. Међутим је

$$EG = \frac{2R}{5},\ GF = \frac{3R}{5} + R = \frac{8R}{5};$$

дакле:

$$AG^2 = \frac{2R}{5} \cdot \frac{8R}{5} = \frac{16R^2}{25},\ AG = \frac{4R}{5},\ AB = \frac{8R}{5}.$$

Ако посматрамо троугао ECF, видимо да је

$$CH^2 = EH \cdot HF.$$

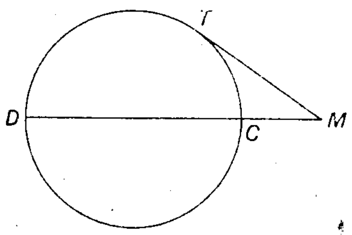
Међутим је

$$EH = \frac{R}{5},\ \ HF = 2R - \frac{R}{5} = \frac{9R}{5};$$

дакле:

$$CH^2 = \frac{9R^2}{25},\ \ CH = \frac{3R}{5},\ \ CD = \frac{6R}{5}.$$

Ако повучемо $DK \perp AB$, јасно је да је $DK = HG = \frac{R}{5}$, $KB = GB - GK = GB - HD = \frac{4R}{5} - \frac{3R}{5} = \frac{R}{5}$. Дакле, $\sphericalangle DBK = 45^0$ итд.



Сл. 726

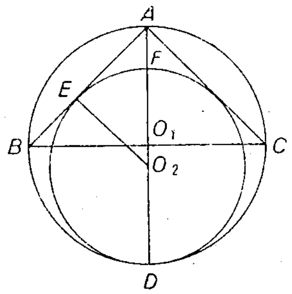
160) Претпоставимо да је задатак решен и да је M тачка на правој DC, тако да је $MT = 2 \cdot MC$ (сл. 726).

Зна се да је $MT^2 = MC \cdot MD$. Ако MT заменимо са $2 \cdot MC$, добијамо: $4 \cdot MC^2 = MC \cdot MD$, или: $4 \cdot MC = MD = DC + MC$.

Отуда је $MC = \frac{DC}{3}$.

Тачка M се налази на продушку пречника DC на раздаљини од C једнакој трећини пречника.

161) Нека је $BO_1 = AO_1 = DO_1 = R$ (сл. 727).



Сл. 727

Јасно је да је:

$$AE = EO_2 = DO_2 = r,$$

$$AE^2 = AF \cdot AD, \text{ или: } r^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$$

$$r^2 = 4R^2 - 4Rr$$

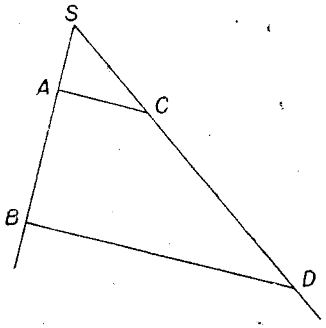
$$4R^2 = r^2 + 4Rr.$$

То је однос који постоји између R и r.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

162) Обележимо са x четврту пропорционалу, па имамо:

$$3 : 6 = 5 : x.$$



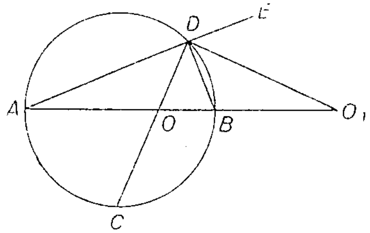
Сл. 728

Да бисмо извршили конструкцију, нацртајмо два зрака који полазе из исте тачке S (сл. 728), па на један пренесимо $SA = 3$, $AB = 6$, а на други $SC = 5$; спојмо тачке A и C и повуцимо $BD \parallel AC$. Четврта пропорционала биће CD.

Дужину четврте пропорционале наћи ћемо из горње пропорције:

$$x = \frac{6 \cdot 5}{3} = 10$$

163) Дуж AB треба поделити на $m+n$ (7) једнаких делова, па, почев од A, одвојити m (5) делова. Тако ће се добити тачка O на дужи AB (сл. 729); [$AO=15$ cm, $BO=6$ cm].

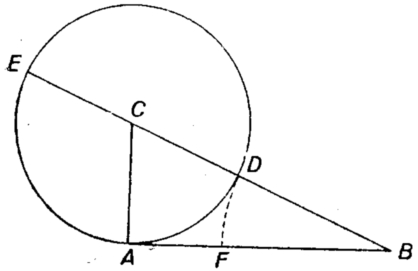


Сл. 729

Да бисмо нашли тачку O_1 на продушку AB, треба над дужи AB као над пречником описати круг. Кроз тачку C на средини једног полукруга и кроз тачку O треба повући COD до пресека са другим полукругом, па тачку D спојити са тачкама A и B. Затим AD, страну троугла ABD, треба продужити преко темена и повући симетралу угла BDE. Пресек ове симетрале са продушком AB даће тачку O_1. Јер: $AO_1:BO_1=$ $=AD:BD=AO:BO=m:n=5:2$ ($AO_1=35$, $BO_1=14$).

Ако је $m=n$, тачка O је на средини дужи AB, а тачка O_1 у бескрајности.

164) У крајњој тачки A (сл. 730) треба подићи на AB нормалу $AC=\frac{AB}{2}$, око тачке C описати круг полупречника CA и повући сечицу BC, која ће пресећи круг у тачкама D и E.



Сл. 730

Ако се сада BD пренесе на BF, тачка F ће делити дуж AB по златном пресеку, јер је $AB^2=$ $=BE\cdot BD=(BD+DC)\cdot BD=BD^2+$ $+AB\cdot BF=BF^2+AB\cdot BF$, због $DE=AB$ и $BD=BF$.

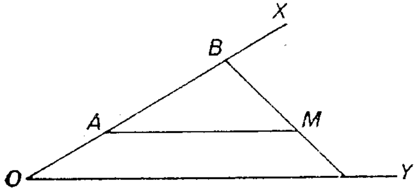
Према томе, из $AB^2=BF^2+AB\cdot BF$ имамо:

$$BF^2=AB^2-AB\cdot BF=AB\ (AB-BF)=AB\cdot AF,$$

или:

$$AB:BF=BF:AF.$$

165) Нека је XOY дати угао, а M дата тачка (сл. 731). Кроз M треба повући $MA \parallel OY$, OA поделити на два једнака дела и три таква дела пренети на крак OX, почев од A у правцу X до тачке B. Тачку B треба спојити са тачком M и продужити до тачке C, пресека са краком OY. Тада је $MC:MB=2:3$, јер је $MC:MB=$ $=AO:AB$.



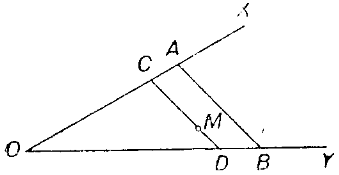
Сл. 731

166) Нека је XOY дати угао, а M дата тачка (сл. 732). Треба на OX пренети 5 једнаких делова а на OY 7 истих толиких делова и спојити крајње тачке A и B; затим, кроз M треба повући $CD \parallel AB$, тада је:

$$OC:OD=5:7,$$

јер је

$$OC:OD=OA:OB=5:7.$$

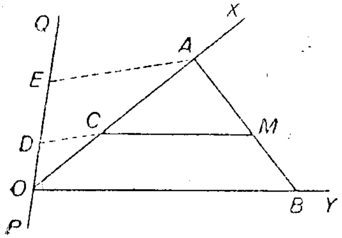


Сл. 732

167) Разликоваћемо два случаја:

а) Тачка M је у углу.

Претпоставимо да је задатак решен и да је дуж AB тачком M подељена у размери $m:n$, тј. да је $AM:BM=m:n$ (сл. 733).

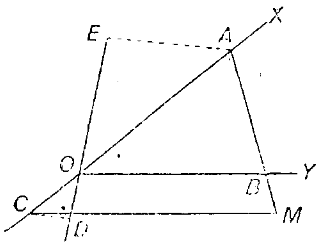


Сл. 733

Ако из M повучемо паралелу једном краку, например краку OY, биће:

$$AC:CO=m:n.$$

Да бисмо на краку OX, почев од O, одредили две дужи које стоје у размери $m:n$, повуцимо кроз теме O једну произвољну праву PQ, на њу пренесимо $OD=n$, $DE=m$, спојмо тачку D са тачком C, из E повуцимо $EA \parallel DC$ и повуцимо праву AMB; тада ће бити $AM:MB=m:n$, јер је $AM:BM=$ $=AC:CO=ED:DO=m:n$.



Сл. 734

б) Нека је тачка M изван угла.

Претпоставимо да је задатак решен и да је $AM:BM=m:n$ (сл. 734).

Ако из M повучемо паралелу краку OY до пресека C са краком OX, биће:

$$AM:BM=AC:OC.$$

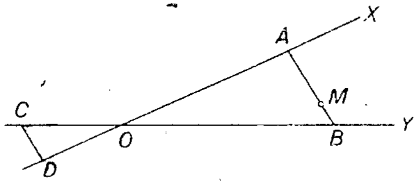
Слично случају а), повући ћемо произвољну праву кроз O и пренети $OD=n$, $OE=m$, спојити D са C итд.

168) Продужимо краке преко темена и пренесимо $OD=m$, $OC=n$; спојмо C са D и кроз M повуцимо $AB \parallel CD$ (сл. 735).

Троугли AOB и CDO су слични; према томе је

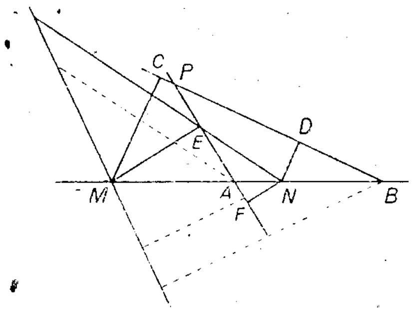
$$AO:BO=OD:OC=m:n.$$

(Види зад. 166).



Сл. 735

169) Једном унутрашњом тачком A и једном спољашњом тачком B треба поделити дуж MN у размери 8:3 (сл. 736). Затим, треба спојити тачку P са тачком B, па из M и N спустити нормале на BP; тада је $MC:ND=MB:NB=8:3$. Исто тако, треба спојити P са A, па из M и N спустити нормале на PA; у том случају је $ME:NF=MA:NA=8:3$.



Сл. 736

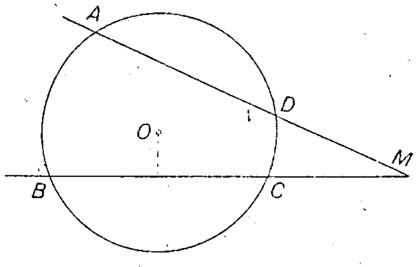
170) Нека је $MA=a$, $MB=b$, $MC=c$ (сл. 737).

На једну произвољну праву пренесе се MC, MB и над тетивом $BC=b-c$ опише круг O. Из тачке M полупречником $MA=a$ пресече се круг, тачка A споји са тачком M. Дуж MD биће четврта пропорционала. Јер је по правилу о сечицама:

$$MA \cdot MD=MB \cdot MC,$$

а отуда:

$$MA:MB=MC:MD.$$

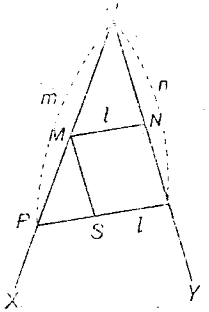


Сл. 737

171) Претпоставимо да је задатак решен и нека је MN отсечак дужине l, а $OM:ON=m:n$ (сл. 738).

На OX пренесимо $OP=m$ и на OY пренесимо $OQ=n$; повуцимо PQ, на PQ пренесимо $QS=l$, из S повуцимо $SM \parallel OY$ и из M повуцимо $MN \parallel PQ$; тада је

$$OM:OV=OP:OQ=m:n.$$



Сл. 738

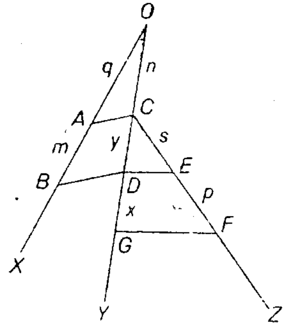
172) Услов задатка може се написати овако:

$$x=\frac{m \cdot n}{q} \cdot \frac{n}{s}.$$

Ставимо $\frac{m \cdot n}{q}=y$, или: $q:m=n:y$;

тада имамо:

$$x=\frac{y \cdot p}{s}, \text{ или: } s:p=y:x.$$



Сл. 739

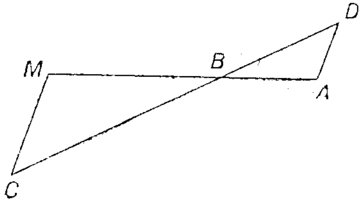
Прва пропорција показује да је y четврта пропорционала за q, m, n, и она ће се добити ако се на краке једног угла XOY (сл. 739) пренесе на OX дуж $OA=q$, $AB=m$ и на OY дуж $OC=n$, а затим повуче AC и $BD \parallel AC$. Тада је $CD=y$.

Друга пропорција показује да је x четврта пропорционала за s, p, y, и она се добија кад се повуче полуправа CZ и поступи као код одређивања y. Тада је $DG=x$.

173) Нека су две дужи MA и MB такве да је $MA-MB=AB=d$, а $MA:MB=m:n$ (сл. 740).

Ако кроз B повучемо произвољну праву, затим кроз M и A две паралеле, које је секу у C и D, тада можемо написати:

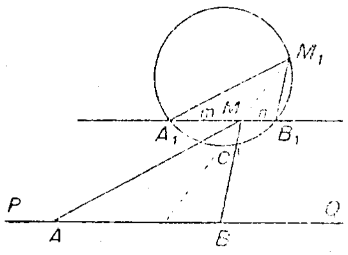
$$BC:BD=MB:AB, \text{ или}$$
$$(BC+BD):BC=(MB+AB):MB,$$
$$CD:BC=MA:MB=m:n.$$



Сл. 740

Конструкција се састоји у овоме: На једну праву треба пренети $BA = d$, кроз B повући произвољну праву, на ову праву пренети $BC = n$, а у супротном смеру $CD = m$, спојити A са D и најзад из C повући $CM \parallel AD$.

174) Кроз тачку M треба повући паралелу правој PQ и на њу пренети m и n с једне и друге стране тачке M (сл. 741). Над том дужи $A_1B_1 = m + n$ треба описати лук – геометриско место за темена углова α; тачку C на средини лука са друге стране тетиве A_1B_1 треба спојити са тачком M и продужити до пресека M_1 са луком. Периферијски угао $\alpha = \sphericalangle A_1M_1B_1$ биће преполовљен правом CMM_1, па је $A_1M_1 : M_1B_1 = m : n$.

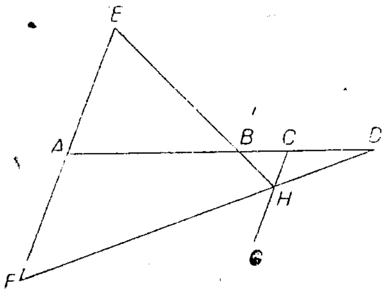


Сл. 741

Најзад, из тачке M треба повући $MA \parallel M_1A_1$ и $MB \parallel M_1B_1$ до пресека са правом PQ. Тачке A и B биће тражене тачке.

175) Нека су три дате тачке A, B, C (сл. 742).

Кроз тачку A у произвољном правцу треба повући праву и на њу, почев од A, на једну и на другу страну пренети једнаке дужи AE и AF; кроз тачку C треба повући паралелу правој EF; затим, кроз тачке E и B праву до пресека H са правом CG и кроз тачке F и H праву до тачке D, пресека са правом ABC. Добијена тачка D биће четврта хармониска тачка.



Сл. 742

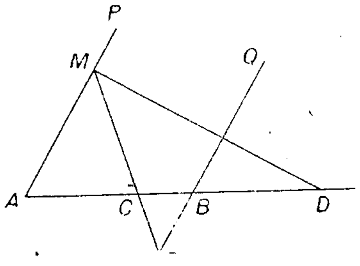
Из сличних троуглова ABE и BCH имамо: $AE : CH = AB : BC$, а из сличних троуглова AFD и CHD имамо: $AF : CH = AD : CD$. Како је $AE = AF$, то је $AB : BC = AD : CD$.

176) Из сличности троуглова MAC и CEB (сл. 743) следује:

$$CA : CB = AM : BE.$$

Затим, из сличности троуглова MAD и FBD добијамо:

$$DA : DB = AM : FB.$$



Сл. 743

Према услову задатка је

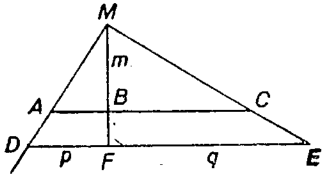
$$CA : CB = DA : DB;$$

према томе је $AM : BE = AM : FB$;

а отуда $BE = FB$.

Из овога излази да ће се хармониски спрегнуте тачке C и D добити ако се повуку две паралеле AP и BQ и на BQ пренесу две једнаке дужи BE и BF, па се повуче EC до пресека M са AP, и, најзад, MF до пресека D са AB.

177) Претпоставимо да је задатак решен и да су AB и BC тражене дужи (сл. 744).



Сл. 744

На нормалу подигнуту у B на AC пренесимо $BM = m$. Троугао MAE у коме је $MB^2 = AB \cdot BC$ мора бити правоугли са правим углом код M.

Ако замислимо $DFE \parallel ABC$ и тако да је $DF = p$, имаћемо:

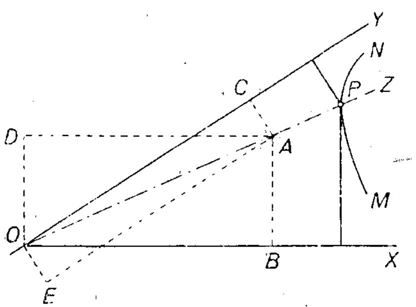
$$AB : BC = DF : FE = p : FE,$$

или, како је $AB : BC = p : q$, $p : q = p : FE$, а отуда $FE = q$.

Задатак се своди на ову конструкцију: На једну праву пренесе се $DF = p$, $FE = q$. Над DE као над пречником опише се полукруг, који ће нормалу подигнуту у F на DE сећи у M; затим се на M пренесе $MB = m$, и, најзад, кроз B повуче паралела са DE. На тај начин ће се добити тражене дужи AB и BC.

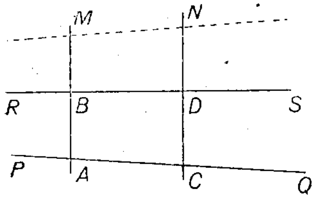
178) Треба наћи праву OZ, геометриско место тачака чија су растојања AB и AC у датој размери $m : n$ (сл. 745). Конструкцију треба извршити на овај начин:

У тачки O, пресеку правих OX и OY, треба подићи нормале на обе праве, на једну нормалу пренети $OD = m$, на другу нормалу $OE = n$; затим, треба повући $DA \parallel OX$ и $EA \parallel OY$; пресек ових паралела даје тачку A, и тада је $AB:AC = m:n$. Пресек праве OA и дате линије MN даће тражену тачку P.



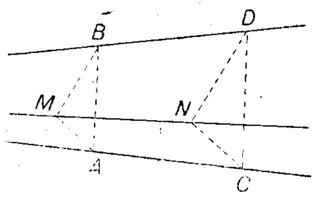
Сл. 745

179) *Прва конструкција*. Три праве PQ, RS, MN које треба да се секу у једној тачки секу пропорционално две ма које паралелне трансверзале (сл. 746). Зато се повуку две паралеле, једна кроз тачку M а друга произвољна CD. Тада је $AB:MB = CD:DN$, а из ове пропорције се може наћи четврта пропорционала DN, тиме добити положај тачке N, па према томе, и права MN.



Сл. 746

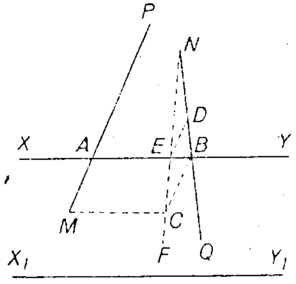
Друга конструкција. Повуку се две паралеле AB и CD (сл. 747), тако да секу дате праве и споји тачка M са тачкама A и B; затим се из C и D повуку паралеле дужима AM и BM. Пресек ових паралела даће тачку N; права MN биће тражена права.



Сл. 747

180) Претпоставимо да је задатак решен, да је $AB \parallel X_1Y_1$, или: $AB = l$ и $\frac{MA}{NB} = \frac{m}{n}$ (сл. 748).

Повуцимо најпре $BC \parallel MA$ и $MC \parallel AB$; тада се јасно види да прво треба одредити тачку C, па онда извести конструкцију. Зато се узме ND произвољно, из D се повуче $DE \parallel MP$ а по величини тако да је $\frac{DE}{ND} = \frac{m}{n}$; затим се повуче NEF.

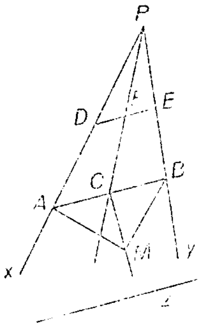


Сл. 748

а) Из M се повуче $MC \parallel X_1Y_1$, а потом $CB \parallel MP$ и $BA \parallel CM$.

б) Луком полупречника l чији је центар у M пресече се NF у C и даље поступи као у случају а).

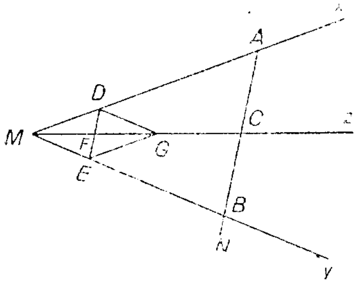
181) Претпоставимо да је задатак решен и нека је дуж $AB \parallel z$ а $MA = MB$ (сл. 749).



Сл. 749

Ако је C средина дужи AB, тада је MC нормално на AB, или на z. Сем тога, тачка C је на геометриском месту за средине дужи паралелних правој z, а то геометриско место је, као што знамо, права која пролази кроз тачку P. На основу тога конструкцију ћемо извршити на овај начин: Повући ћемо једну произвољну дуж $DE \parallel z$ и кроз њену средину F и тачку P праву PF; затим ћемо кроз тачку M повући нормалу на z. Пресек ове нормале и праве PF даће тачку C, а кроз C се може повући $AB \parallel z$.

182) Претпоставимо да је задатак решен и да је $NBCA$ тражена права, тј. да је C на средини дужи AB (сл. 750).



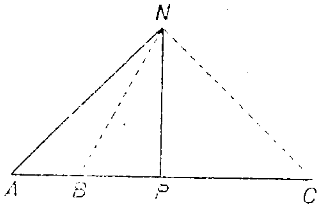
Сл. 750

Повуцимо једну праву DFE паралелно са ACB; тада је $DF:AC = FE:CB$.

Како је $AC = CB$, то је и $DF = FE$; према томе, ако се продужи MF за исту дужину FG, четвороугао $MDGE$ је паралелограм, јер му се дијагонале полове. На основу тога конструкција се изводи на овај начин:

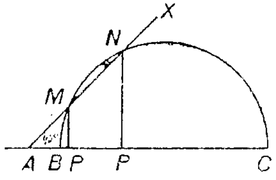
Кроз неку тачку G на правој z повуче се $GE \parallel x$ и $GD \parallel y$, споји се D са E, а затим из N повуче права $NBCA \parallel ED$.

183) Нека је P нека тачка на отсечку BC (сл. 751). На нормалу дигнуту у P на BC пренесимо $PN = AP$; тада је $\sphericalangle NAP = 45^0$, и да би било $AP^2 = PB \cdot PC$, потребно је и довољно да је $PN^2 = PB \cdot PC$, или да троугао NBC има прав угао код N.



Сл. 751

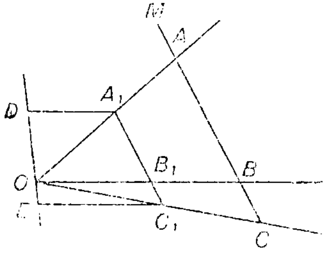
Према томе, тачка P ће се добити кад се над BC као над пречником опише полукруг (сл. 751а), па повуче полуправа AX тако да са AC гради угао од 45°. Ако су M и N пресеци полуправе и полукруга, из њих треба спустити нормале MP и NP_1 на BC.



Сл. 751 a

Задатак има два решења, једно, или ниједно, према томе да ли полуправа сече полукруг или га додирује, или нема са њиме заједничких тачака.

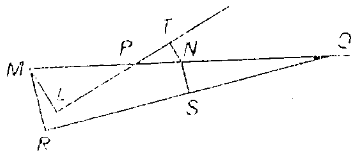
184) Претпоставимо да је задатак решен и да је $AB:BC = m:n$ (сл. 752).



Сл. 752

Види се да исти однос мора постојати између отсечака ма које праве $A_1B_1C_1$ паралелне правој ABC. Дакле, да би се повукла ова паралела, треба кроз пресек датих правих повући ма коју праву, на њу пренети дужи OD и OE, тако да је $OD:OE=m:n$; затим, треба повући $DA_1 \parallel OB$ и $EC_1 \parallel OB$ и спојити тачке A_1 и C_1. Најзад, из M треба повући праву паралелну правој A_1C_1.

185) Нека су дате тачке M и N (сл. 753).



Сл. 753

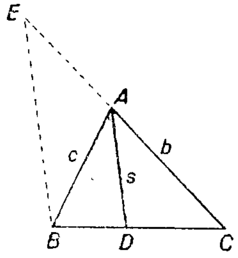
Довољно је на дужи MN или њеном продушку наћи тачку P или Q која одређује два отсечка у размери $m:n$. У том случају све праве повучене кроз P и Q одговарају постављеном задатку.

Повуцимо по једну праву кроз P и Q и на њих спустимо нормале из тачака M и N. Тада је

$$MR:NS = MQ:NQ = m:n,$$
$$ML:NT = MP:NP = m:n.$$

Ако је $m = n$, тачка P је на средини дужи MN а тачка Q у бескрајности, па би праве које одговарају правој RS биле њој паралелне.

186) Нека је ABC тражени троугао, страна $AB=c$, $AC=b$ а симетрала угла A нека је s (сл. 754).



Сл. 754

Ако повучемо $BE \parallel DA$, добијамо равнокраки троугао AEB ($\sphericalangle AEB = \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAD$). Основицу BE овог троугла можемо наћи. Троугао EBC је сличан троуглу ADC; отуда је

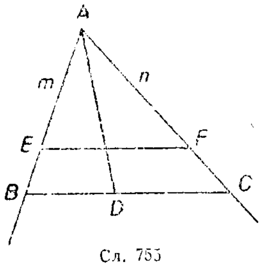
$$BE:s = EC:b, \text{ или:}$$

$$BE:s = (b+c):b, \text{ јер је } EA = c,$$

и, најзад: $BE = \dfrac{s\cdot(b+c)}{b}$.

Пошто се нађе BE као четврта пропорционала, треба конструисати равнокраки троугао EBA чија је основица BE а краци c; кроз врх A овог троугла треба повући паралелу страни BE и на ову паралелу пренети s; на тај начин ће се добити тачка D. Права повучена кроз B и D својим пресеком са продуженом страном EA даје теме C.

187) Нека троугао ABC испуњава услове задатка (сл. 755).

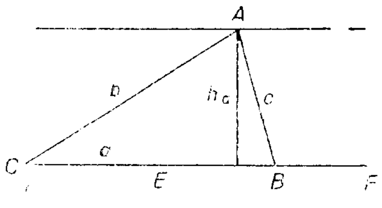


Сл. 755

Ако на стране AB и AC пренесемо $AE=m$ и $AF=n$, EF је паралелно са BC, јер је по услову задатка $AB:AC=m:n$, а $AB:AC = AE:AF$. Значи, треба нацртати угао A, на његове краке пренети m и n и спојити крајње тачке ових дужи. Затим, на симетралу угла A треба пренети $AD=l$ и кроз D повући паралелу страни EF.

Троугао ABC је тражени троугао.

188) Кад је дата страна $a=BC$, треба наћи теме A (сл. 756).



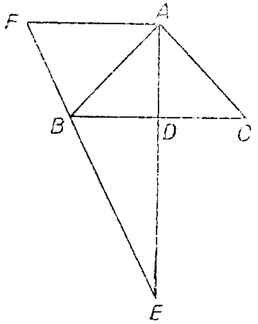
Сл. 756

Како је дата висина h_a која одговара страни a, то ће се теме A налазити на правој паралелној страни BC на раздаљини h_a.

Зна се да је $AC:AB=m:n$; према томе A ће се налазити на кругу пречника EF ако су тачке E и F узете на правој BC тако да је $EC:EB = FC:FB = m:n$.

Тачка A је у пресеку круга и већ повучене паралеле. Задатак може имати два решења, једно, или ниједно.

189) Претпоставимо да је задатак решен и нека је $BC + AD = l$ (сл. 757).



Сл. 757

Продужимо ли AD за $DE = BC$, имаћемо: $AE = AD + BC = l$ и $DE = 2BD$.

Повуцимо EB до пресека F са правом повученом из A паралелно са BC; тада је

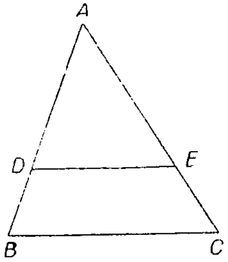
$$AF : DB = AE : DE, \text{ или: } AF : AE = DB : DE.$$

Како је $DB : DE = 1 : 2$, то је $AF : AE = 1 : 2$;

отуда је $$AF = \frac{AE}{2} = \frac{l}{2}.$$

Према овоме се врши конструкција. Нацрта се угао A једнак датом углу. На његову симетралу пренесе се $AE = l$, на нормалу симетрале у тачки A пренесе се $AF = \frac{l}{2}$; најзад се повуче EF; пресек ове дужи са једним краком угла A даће теме B. Преношењем $AB = AC$ на други крак угла A добија се троугао ABC.

190) Претпоставимо да је тражени троугао положен на дати, тако да се онај од његових углова који одговара углу A подудара са углом A; тада се добија троугао DEA (сл. 758). Страна DE паралелна је страни BC, јер је и $\sphericalangle D = \sphericalangle B$, и троугао DEA биће познат кад се одреди тачка D. Обележимо са $2p$ обим датог троугла. Према томе, можемо написати:

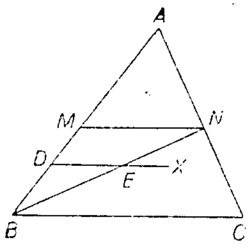


Сл. 758

$$AD : AB = DE : BC = AE : AC = (AD + DE + AE) : (AB + BC + AC) = \frac{2l}{2p};$$

отуда је $AD : AB = l : p$, или: $p : l = AB : AD$. AD ће се, дакле, добити као четврта пропорционала за p, l и AB.

191) Претпоставимо да је задатак решен, да је MN паралелно страни BC и да је $BM : MN = m : n$ (сл. 759).



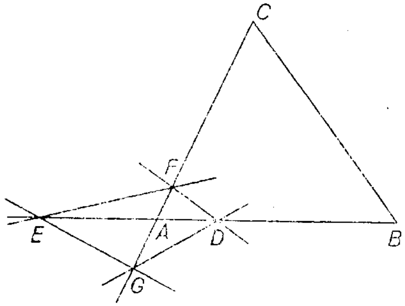
Сл. 759

На BA пренесимо $BD = m$ и повуцимо $DE \parallel BC$. Нека је E пресек дужи BN и DE; тада је $BM : BD = MN : DE$, или: $BM : MN = BD : DE$, или $m : n = m : DE$; дакле, $DE = n$.

Према томе, да бисмо добили паралелу MN, на BAпренећемо $BD = m$, повући ћемо $DX \parallel BC$ и са исте стране са које је AC на DX пренећемо $DE = n$; права која пролази кроз тачке B и E сећи ће страну AC у тачки N; кроз њу треба повући паралелу страни BC, па ће се добити MN.

192) Из задатка 169 видели смо како се кроз једну тачку повлачи права чија растојања од других двеју датих тачака стоје у датој размери.

Према томе, права чија су растојања од темена A и B у размери $1:3$ треба да пролази кроз тачку D или E на страни AB (сл. 760) које леже тако да је



Сл. 760

$$DA : DB = EA : EB = 1 : 3, \text{ или: }$$

$$\frac{DA}{1} = \frac{DB}{3} = \frac{AB}{4},$$

$$\text{а отуда } DA = \frac{AB}{4};$$

$$\text{и } \frac{EA}{1} = \frac{EB}{3} = \frac{AB}{2}, \text{ а отуда } EA = \frac{AB}{2}.$$

Исто тако, права чија растојања од темена A и C стоје у размери $1:5$ мора пролазити кроз тачку F или G на страни AC које леже тако да је

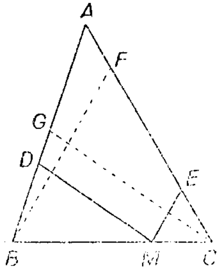
$$FA : FC = GA : GC = 1 : 5, \text{ или: }$$

$$\frac{FA}{1} = \frac{FC}{5} = \frac{AC}{6}, \text{ а отуда } FA = \frac{AC}{6};$$

$$\text{и}\ \frac{GA}{1} = \frac{GC}{5} = \frac{AC}{4},\ \text{а отуда}\ GA = \frac{AC}{4}.$$

Постоје, дакле, четири праве које испуњавају услов задатка, а то су праве DF, DG, EF, EG.

193) Претпоставимо да је задатак решен и да је $MD + ME = l$ (сл. 761).



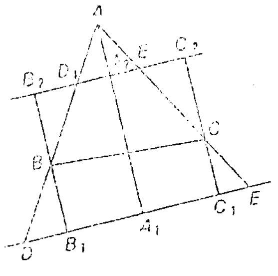
Сл. 761

Како збир треба да је сталан ма за коју тачку на основици, то за ту тачку можемо узети и тачку B. У том случају једна дуж би била $BF = l$ а друга нула. Исто тако, можемо узети тачку C, па би CG било l а друга дуж нула. Значи, треба из темена B луком полупречника l пресећи страну AC а из C луком истог полупречника пресећи страну AB, тачке пресека F и G спојити са теменима B и C а затим ма из које тачке M на страни BC повући паралеле дужима BF и CG.

Треба доказати да је $MD + ME = l$.

Из сличности троуглова EMC и FBC имамо: $ME : l = MC : BC$, одакле $ME = l \cdot \frac{MC}{BC}$. Из сличности троуглова DBM и GBC добијамо: $MD : l = BM : BC$, а отуда $MD = l \cdot \frac{BM}{BC}$. Према томе: $ME + MD = l \cdot \frac{MC + BM}{BC} = l$.

194) Узмимо да је $\frac{AA_1}{m} = \frac{BB_1}{n} = \frac{CC_1}{p}$ (сл. 762). Слични троугли DB_1B и DA_1A дају:



Сл. 762

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{m}{n};$$

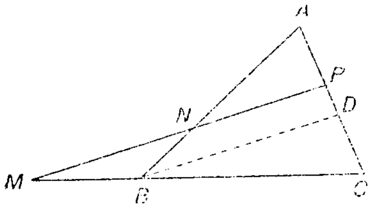
отуда: $$\frac{DA - DB}{DB} = \frac{m - n}{n},$$

или: $$DB = AB \cdot \frac{n}{m - n}.$$

Исто тако: $\frac{EA}{EC} = \frac{AA_1}{CC_1} = \frac{m}{p}$, $\frac{EA - EC}{EC} = \frac{m - p}{p}$, а отуда: $EC = AC \cdot \frac{p}{m - p}$.

Дужи DB и EC могу се, према томе, конструисати, па затим повући права DE. Ако права треба да сече троугао, тада је $\frac{D_1A}{D_1B} = \frac{AA_2}{BB_2}$, $\frac{D_1A + D_1B}{D_1B} = \frac{m + n}{n}$, а отуда $D_1B = AB \cdot \frac{n}{m + n}$; исто тако: $CE_1 = AC \cdot \frac{p}{m + p}$ (упореди са зад. 192).

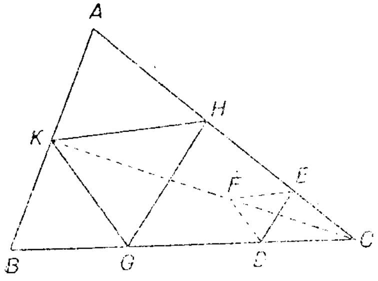
195) Према зад. 28 $BN \cdot AP \cdot CM \cdot = AN \cdot CP \cdot BM$ (сл. 763).



Сл. 763

Како је $BN = CP$, то скраћивањем добијамо: $AP \cdot CM = AN \cdot BM$, а отуда: $\frac{AP}{AN} = \frac{BM}{CM}$. Однос $\frac{BM}{CM}$ је познат. Довољно је узети две величине AD и AB пропорционалне са BM и CM, па из M повући $MNP \parallel BD$.

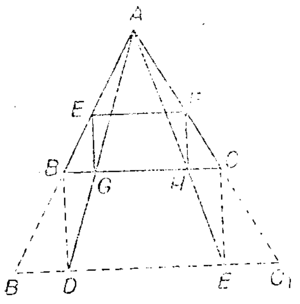
196) Треба повући дуж DE паралелно једној од датих правих, затим EF и DF паралелно другим двема датим правима (сл 764).



Сл. 764

Троугао DEF би одговарао услову задатка ако би теме F било на страни AB; довољно је, дакле, повући CFK, затим $KH \parallel FE$, $KG \parallel FD$; страна GH биће паралелна страни DE.

197) Над страном BC треба конструисати правоугаоник $BDEC$ сличан датом правоугаонику (сл. 765), па теме A спојити са тачкама D и E, затим повући $GE \perp BC$ и $EF \parallel BC$.



Сл. 765

Из сличности троуглова AEF и ABC следује:

$$EF : BC = AE : AB,$$

а из сличности троуглова AEG и ABD:

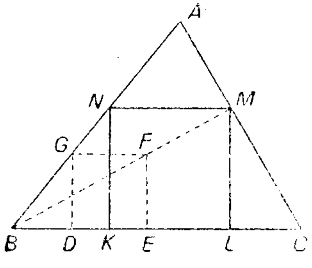
$AE : AB = EG : BD$; према томе је
$EF : BC = EG : BD$, или:
$EF : EG = BC : BD$.

Примедба. а) Како се над сваком страном троугла може конструисати један правоугаоник, то задатак може имати три решења.

б) Како се над сваком страном може конструисати и други правоугаоник сличан датом, то постоји шест решења.

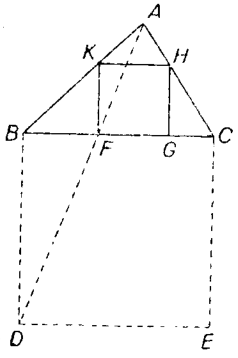
в) Да би се уписао квадрат, довољно је нацртати $BD = BC$, и тада имамо свега три решења.

198) *Прва конструкција.* Конструише се квадрат који има једну страну на основици BC (сл. 766) и једно теме на једној од других двеју страна. Затим се повуче BFM, из M повуче $ML \perp BC$, $MN \| BC$ и $NK \perp BC$.



Сл. 766

Друга конструкција. На основици BC конструише се квадрат (сл. 767), затим се повуче DA; пресек са страном A даће једно теме квадрата.



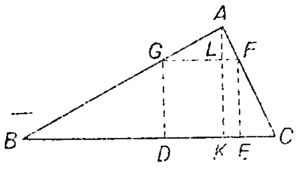
Сл. 767

Алгебарска метода. Нека је $BC = a$, $AK = h$, страна квадрата x (сл. 768). Јасно је да можемо написати:

$$GF : BC = AL : AK, \text{ или:}$$

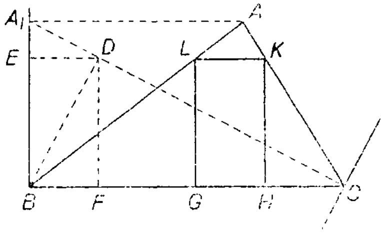
$$x : a = (h - x) : h;$$

отуда је $x = \dfrac{a \cdot h}{a + h}$.



Сл. 768

199) Троугао ABC претвори се у правоугли троугао A_1BC (сл. 769); затим се повуче $BD \| CP$, конструише правоугаоник $BFDE$, а помоћу њега и тражени правоугаоник $GHKL$.



Сл. 769

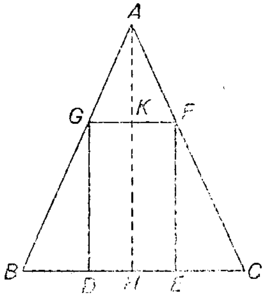
200) Обележимо основицу равнокраког троугла са $2a$, висину са h, крак AB са b и AK са x (сл. 770).

Према условy задатка је

$$AG + GK = \frac{2}{3}(GD + 2 \cdot GK), \text{ или:}$$

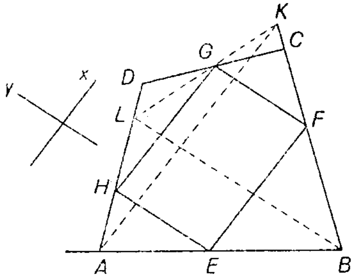
$$\frac{bx}{h} + \frac{ax}{h} = \frac{2}{3}\left(h - x + \frac{2ax}{h}\right); \text{ отуда:}$$

$$x = \frac{2h^2}{3b + 2h - a}.$$



Сл. 770

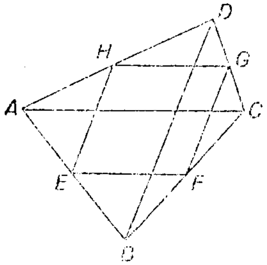
201) Нека је $EFGH$ тражени паралелограм (сл. 771). Ако из темена A повучемо праву $AK \| HG$ до пресека са страном BC и кроз тачке K и G повучемо праву до пресека L са страном AD, тада је $LB \| HE$, јер из пропорција $AK : EF = AB : BE$, $AK : HG = AL : HL$ и једнакости $EF = HG$ добијамо: $AB : BE = AL : LH$, што значи, да је $HE \| LB$.



Сл. 771

Дакле, да би се у четвороугао уписао паралелограм, треба из темена A повући паралелу правој x, а из темена B паралелу правој y. Пресеке L и K ових паралела са двема супротним странама четвороугла треба спојити. Та права ће својим пресеком са једном страном четвороугла дати једно теме паралелограма.

202) Нека је $EFGH$ тражени ромб (сл. 772). Из сличних троуглова DHG и DAC имамо:



Сл. 772

$HG:AC=DH:DA$; отуда: $HG=\frac{DH\cdot AC}{DA}$.

Из сличних троуглова AEH и ABD имамо:

$EH:BD=HA:DA$; отуда: $EH=\frac{HA\cdot BD}{DA}$.

Да би било $EH=HG$, потребно је и довољно да је $\frac{DH\cdot AC}{DA}=\frac{HA\cdot BD}{DA}$, или:

$DH:HA=BD:AC$.

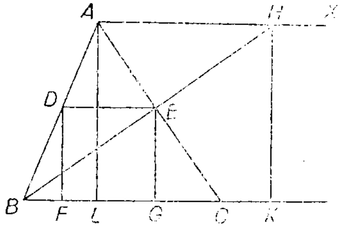
Однос дијагонала $BD:AC$ је познат; тачка H на AD има да се одреди у овој размери, а то се може конструисати; тиме је одређен и ромб.

203) Нека је H пресек праве BE и праве AX повучене паралелно страни BC (сл. 773) и нека је $HK\perp BC$. Тада је

$$DE:AH=BE:BH,$$
$$EG:HK=BE:BH;$$

према томе је

$$DE:AH=EG:HK.$$



Сл. 773

Да би $FGED$ био квадрат, или $DE=EG$, потребно је, према последњој пропорцији, да је $AH=HK$; нормала HK једнака је висини AL троугла.

Конструкција се, према томе, врши на овај начин: Кроз теме A се повуче полуправа $AX\parallel BC$, на њу пренесе, са оне стране са које је BC, $AH=AL$, затим се повуче дуж BH и на страни AC добије пресек E. Кад је позната ова тачка, квадрат се лако конструише.

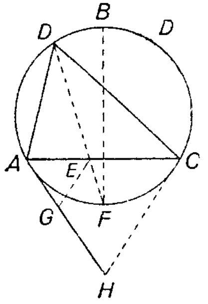
204) Нека је ABC дати лук (сл. 774). Претпоставимо да је задатак решен и да је

$$AD:CD=m:n.$$

Повуцимо симетралу угла D.

Према теореми по којој симетрала угла у троуглу дели наспрамну страну на два отсечка пропорционална оближњим странама можемо написати:

$$AE:CE=AD:CD=m:n.$$



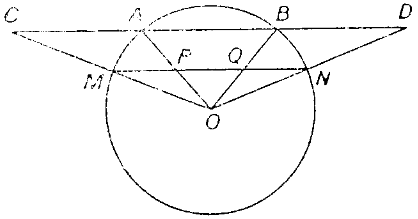
Сл. 774

Како симетрала угла D пролази кроз средину лука над којим лежи угао D, то треба само одредити положај тачке E, тј. поделити тетиву AC у размери $m:n$.

Да бисмо то урадили, повуцимо из A праву, на њу пренесимо $AG=m$, $GH=n$, спојмо H са C и из G повуцимо $GE\parallel HC$. Спојмо E и F и продужимо до пресека са луком, тј. до тачке D.

Тачка D_1 симетрична тачки D у односу на BF одговара исто тако услову задатка, јер је $CD_1:AD_1=m:n$.

205) Претпоставимо да је задатак решен и нека је тетива MN подељена на три једнака дела (сл. 775), $MP=PQ=QN$.



Сл. 775

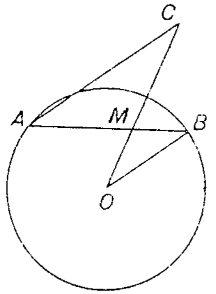
Повуцимо OM и ON; у равнокраком троуглу MON углови M и N на основици су једнаки; према томе, троугли OMP и ONQ су подударни; $\sphericalangle M=\sphericalangle N$, $MO=NO$, $MP=QN$ (по претпоставци). Из њихове подударности следује $OP=OQ$. Значи, троугли POQ и AOB су равнокраки, и како им је угао на врху заједнички, то су им углови на основици једнаки, из чега произилази да је тетива MN паралелна тетиви AB. Тада праве OMC, OA, OB, OND одређују на паралелама MN и CD пропорционалне отсечке, па је $CA=AB=BD$.

Дакле, да бисмо добили тетиву MN, продужимо AB с једне и друге стране за дужине CA и BD једнаке AB; OC и OD сећи ће круг у тачкама M и N. Тетива MN је тражена тетива, јер су MON и COD равнокраки троугли, MN је паралелно дужи CD и $MP=PQ=QN$ због $CA=AB=BD$.

206) Нека је тетива AMB тачком M подељена тако да је $AM:MB=m:n$ (сл. 776).

Повуцимо дуж OB, праву OM и из A паралелу дужи OB до њеног пресека C са правом OM. Из сличних троуглова MOB и

MCA имамо: $MA:MB=MC:MO=CA:OB$, или, ако је r полупречник круга:
$m:n=MC:MO=CA:r$, што се може и овако написати: $n:m=MO:MC, \frac{n}{m}=\frac{r}{CA}$.
Видимо да је MC четврта пропорционала за n, m, MO, а та нам је конструкција позната. Исто тако, можемо конструисати CA као четврту пропорционалу за n m, r.

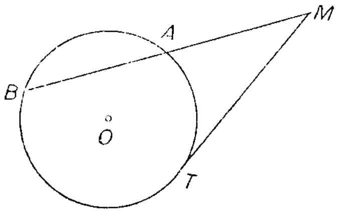


Сл. 776

Најзад, кад нађемо тачку C, из ње полупречником CA опишемо лук и пресечемо круг у A и A_1. Довољно је спојити A са M и A_1 са M, па ће се добити тражене тетиве.

207) Претпоставимо да је задатак решен и да је MB тражена сечица, тј. да је $MA=AB$ (сл. 777), или $MB=2\cdot MA$.

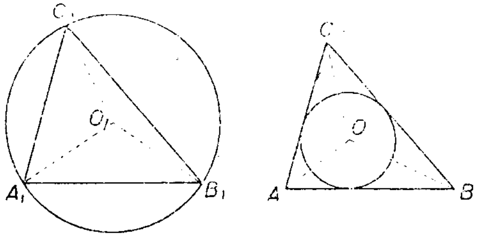
Са слике видимо да је $MA\cdot MB=$ $=MT^2$, $MA\cdot 2MA=MT^2$, $2\cdot MA^2=MT^2$, $MA^2=\frac{MT^2}{2}$, $MA=\frac{MT\sqrt{2}}{2}$. Значи, MA је половина дијагонале оног квадрата чија је страна MT.



Сл. 777

Треба, дакле, повући тангенту MT итд.

208) У дати троугао треба уписати круг, па спојити центар са теменима. Тако добијена три средишна угла треба пренети у дати круг, па крајње тачке полупречника редом спојити. Тако добијени троугао биће сличан датом троуглу. (сл.778).



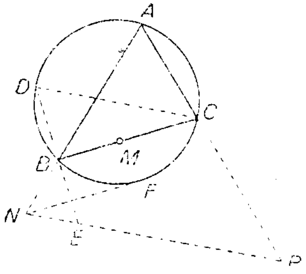
Сл. 778

209) Претпоставимо да је задатак решен и да је троугао ABC тражени троугао (сл. 779).

Довољно је да се одреди само једно теме. Да бисмо успоставили потребан однос између датих и непознатих количина, повуцимо $CD \parallel PN$ и повуцимо праву DBE

Периферијски углови A и D су једнаки; троугли BNE и ANP су слични, јер имају заједнички угао N и $\sphericalangle E=$ $=\sphericalangle D=\sphericalangle A$; према томе, може се написати:

$NE:NA=NB:NP$; отуда: $NE=\frac{NA\cdot NB}{NP}$.



Сл. 779

Дужине NB и NA нису познате, али њихов производ је једнак квадрату дирке; дакле:

$$NE=\frac{NF^2}{NP}.$$

На тај начин се може одредити тачка E и постављени задатак био би решен ако се може одредити тачка B тако да, спајајући ову тачку са M и E, тетива CD буде паралелна са NP. Задатак се своди на следећи (210) и на зад. 259 (§ 6).

Проблем је поставио Крамер (Cramer[1]) а решио Кастилон (Castillon[2]). Проблем је решио и Папо[3]), само у специјалном случају кад су тачке M, N, P на једној правој.

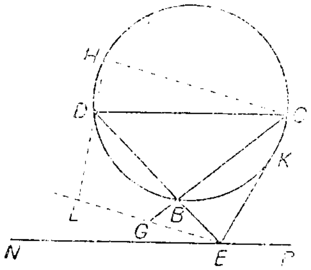
210) Претпоставимо да је задатак решен и да је $DC \parallel NP$ (сл. 780).

Слично задатку 209 повуцимо $CH \parallel$ $\parallel EG$ затим HDL и одредимо положај тачке L.

Троугли DLE и BGE су слични. Угао E је заједнички, а $\sphericalangle L=\sphericalangle B$, јер су ова два угла суплементна истом углу H.

Из њихове сличности следује:

$$EL:EB=ED:EG;$$



Сл. 780

---

[1]) Крамер (Cramer) (1704—1752), швајцарски геометар.

[2]) Кастилон (Castillon) (1709—1791), италијански геометар и књижевник.

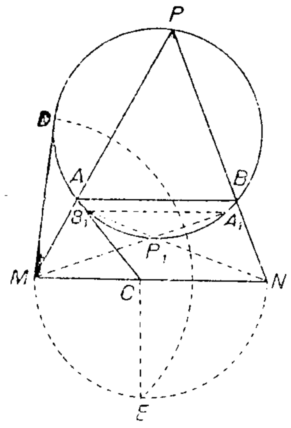
[3]) Папо је живео у Александрији пред крај IV века.

отуда је

$$EL=\frac{EB\cdot ED}{EG}=\frac{EK^2}{EG}.$$

На тај начин је положај тачке L одређен; како је $\sphericalangle HCD = \sphericalangle GEN$, довољно је кроз тачку L повући сечицу LDH, тако да је $\sphericalangle HCD = \sphericalangle GEN$.

211) Претпоставимо да је задатак решен и да је $AB \parallel MN$ (сл. 781).



Сл. 781

Довољно је одредити положај једне од тачака A или B. Да бисмо довели у везу положај непознате тачке A са датим количинама, повуцимо тангенту AC. Одређивање положаја тачке A своди се на одређивање положаја тачке C. Троугли AMC и PMN су слични; угао M је заједнички; угао MAC је суплеменат углу CAP, који је као периферискн једнак периферском углу са теменом на луку ADP; исто тако, угао ABP је суплеменат периферском углу чије је теме на луку ADP; значи, $\sphericalangle MAC = \sphericalangle ABP = \sphericalangle MNP$.

Из сличности троуглова добијамо;

$$MC:MP=MA:MN;\text{ отуда: } MC=\frac{MP\cdot MA}{MN}.$$

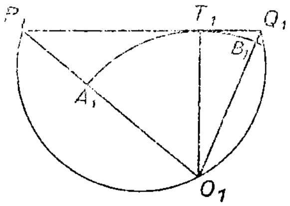
Међутим, $MP\cdot MA = MD^2$; према томе је $MC=\frac{MD^2}{MN}$.

Треба, дакле, конструисати трећу пропорционалу познатим дужима MD и MN.

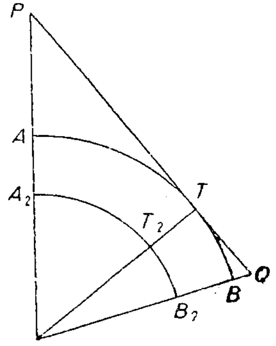
Конструкција. Над MN као над пречником опише се полукруг, пренесе се MD од M до E, повуче се $EC \perp MN$ и из тачке C тангента CA. Затим се повуку праве MAP и PN и, најзад, тетива AB.

Постоје два решења.

212) Можемо конструисати слику $O_1P_1Q_1$ сличну оној која се тражи, а то ћемо урадити овако (сл. 782): Узмимо $P_1T_1=3\cdot T_1Q_1$, над P_1Q_1 опишимо лук — геометриско место за темена углова величине угла AOB, повуцимо $T_1O_1 \perp P_1Q$ и из тачке O_1 као центра полупречником T_1O_1 опишимо лук $A_1T_1B_1$.



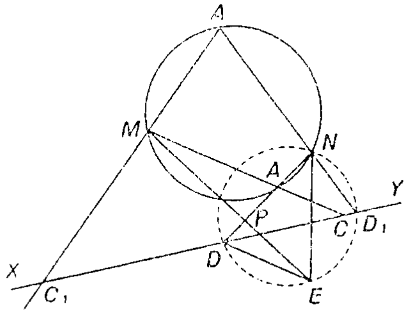
Сл. 782



Сл. 783

Сад можемо прећи на дати лук. Опишимо око O полупречником O_1A_1 лук $A_2T_2B_2$ (сл. 783); затим пренесимо лук $A_1T_1 = A_2T_2$, повуцимо OT_2T и кроз тачку T повуцимо $PT \perp OT$. Слике су сличне; зато је $PT=3\ TQ$.

213) Претпоставимо да је задатак решен и да је $PC:PD = m:n$ (сл. 784).



Сл. 784

Ако из D повучемо $DE \parallel MAC$ и повучемо MPE кроз дату тачку P, биће:

$$MP:PE=PC:PD=m:n.$$

Како је MC паралелно са DE, то је угао NDE суплементан углу MAN, а овај је угао познат, јер му је мера половина лука MA_1N; дакле, конструкцију можемо извршити на овај начин:

Треба тачку M спојити са датом тачком P, узети PE тако да је

$$MP:PE=m:n,$$

и над NE описати лук — геометриско место углова величине суплементних углова углу MAN.

Спајањем тачке D са N добићемо тачку A итд.
Тачка D_1 даје друго решење.
Повуче се D_1NA_1 и A_1MC_1; тада је

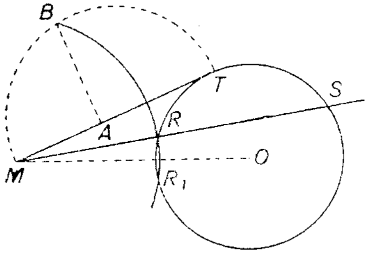
$$PC_1 : PD_1 = m : n.$$

214) Повуцимо тангенту MT (сл. 785); тада је

$$MR \cdot MS = MT^2;$$

међутим је

$$\frac{MR}{MS} = \frac{2}{5}.$$



Сл. 785

Множећи ове две једнакости добијамо:

$$MR^2 = \frac{2}{5}\ MT^2.$$

Отуда се изводи ова конструкција: Узме се $MA = \frac{2}{5}\ MT$, над MT опише се полукруг, повуче $AB \perp \perp MT$, из тачке M луком полупречника MB пресече круг и повуче MRS, тј. тражена сечица.

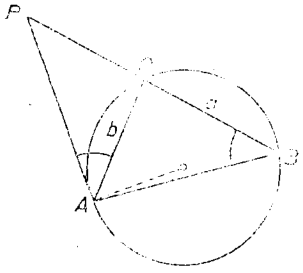
Јасно је да је $MR^2 = MB^2 = MT \cdot MA = MT \cdot \frac{2}{5} MT = \frac{2}{5}\ MT^2$.

Ако се овај однос $MR^2 = \frac{2}{5}\ MT^2$ подели познатим односом $MR \cdot \cdot MS = MT^2$, добија се:

$$\frac{MR}{MS} = \frac{2}{5}.$$

Из слике се види да постоје два решења.

215) Опишимо круг око троугла ABC и у темену A повуцимо тангенту на круг (сл. 786). Тачка P ће бити у пресеку тангенте и продужене стране BC. Троугли PAC и PAB су слични. Угао P је заједнички а углови PAC и PBA су једнаки као периферски над истим луком.
Отуда:



Сл. 786

$$PC : PA = PA : PB,$$

$$PA^2 = PC \cdot PB = PC \cdot (a + PC),$$

$$PA : AC = PB : AB,$$

$$PA = \frac{b \cdot (a + PC)}{c}$$

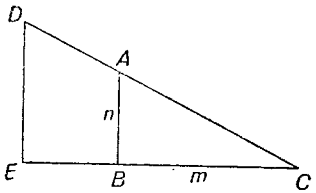
$$PA^2 = \frac{b^2 (a + PC)^2}{c^2} = PC \cdot (a + PC)$$

$$a \cdot b^2 + b^2 \cdot PC = c^2 \cdot PC$$

$$PC \cdot (c^2 - b^2) = a \cdot b^2$$

$$PC = \frac{a \cdot b^2}{c^2 - b^2}.$$

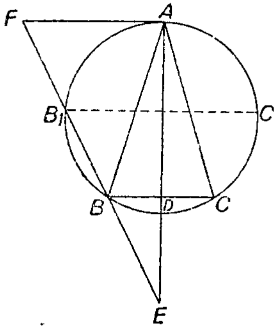
216) Треба најпре конструисати троугао ABC чије су катете m и n (сл. 787); затим, продужити хипотенузу CA и на њу пренети дату хипотенузу CD; најзад, из D треба повући $DE \parallel AB$. Троугао DEC биће тражени троугао, јер је $EC : DE = m : n$, због сличности троуглова DEC и ABC.



Сл. 787

217) Претпоставимо да је задатак решен. Нека је збир висине и основице $AD + BC = l$ или $AD + + 2 \cdot BD = l$ (сл. 788).

Продужимо AD за $DE = BC$; добијамо $AE = l$ и $2 \cdot BD = DE$, или: $\frac{BD}{DE} = \frac{1}{2}$.



Сл. 788

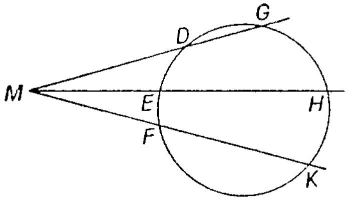
Дакле, ако продужимо EB до пресека F са тангентом повученом на круг у тачки A, из троуглова FEA и BED имамо

$AF : AE = BD : DE = 1 : 2$; отуда $AF = \frac{l}{2}$.

Према томе, конструкција се врши овако:

На пречник који полази из тачке A на кругу пренесе се $AE = l$; затим се на тангенту у A пренесе $AF = \frac{l}{2}$ и повуче EF. Ова права сече круг у B и B_1. Ако се повуку тетиве BC и B_1C_1, добијају се два троугла ABC и AB_1C_1 који задовољавају услове задатка.

Постоје два решења, једно, или ниједно, према томе да ли EF сече круг, или га додирује, или је ван њега.



Сл. 789

218) Нека су h_1, h_2 h_3 висине троугла чије су стране a, b, c. Зна се да је

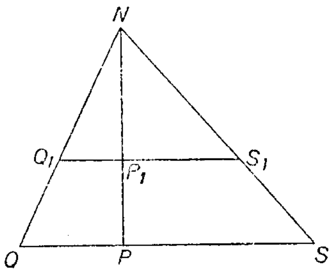
$$ah_1 = bh_2 = ch_3 \quad (1).$$

Кроз једну тачку M повуцимо три полуправе и на њих пренесимо $MD = h_1$, $ME = h_2$, $MF = h_3$ (сл. 789) и опишимо круг који пролази кроз тачке D, E, F. Ако су тачке G, H, K друге тачке пресека овог круга и трију полуправих, тада је

$$MG \cdot h_1 = MH \cdot h_2 = MK \cdot h_3 \quad (2).$$

Делећи једнакости (1) и (2) добијамо

$$\frac{a}{MG} = \frac{b}{MH} = \frac{c}{MK}.$$



Сл. 790

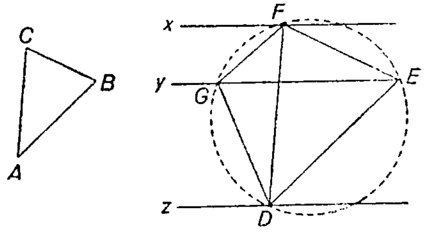
Ове једнакости нам казују да је тражени троугао сличан са троуглом чије су стране MG, MH, MK, јер су им стране пропорционалне.

Нацрта се, дакле, троугао NQS (сл. 790) чије су стране $NQ = MG$, $QS = MH$, $NS = MK$. Тражени троугао који је сличан троуглу NQS добиће се ако се повуче паралела Q_1S_1 страни QS тако да је висина NP_1 једнака висини h_2.

Да би задатак био могућ, довољно је да се може конструисати троугао NQS, а зато је потребан услов $MH - MK < MG < MH + MK$, или, ако обележимо са p заједничку вредност производа из једнакости (2):

$$\frac{p}{h_2} - \frac{p}{h_3} < \frac{p}{h_1} < \frac{p}{h_2} + \frac{p}{h_3}$$

и, најзад:
$$\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} < \frac{1}{h_1} < \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}.$$

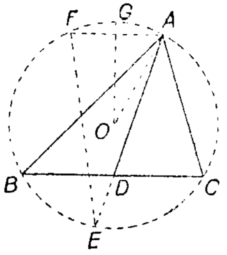


Сл. 791

219) Нека је EDF троугао сличан троуглу ABC (сл. 791). Посматрајмо три паралеле x, y, z повучене кроз темена троугла DEF; опишимо око њега круг и повуцимо GD и GF.

$\sphericalangle EGF = \sphericalangle EDF = \sphericalangle A$, који је познат; исто тако, $\sphericalangle EGD = \sphericalangle EFD = \sphericalangle C$, који је, исто тако, познат.

Може се, дакле, узети тачка G ма где на правој y, конструисати угао A изнад и угао C испод праве y, тако да им је теме у тачки G, описати круг који пролази кроз три тачке G, D, F. Троугао DEF биће тражени троугао.



Сл. 792

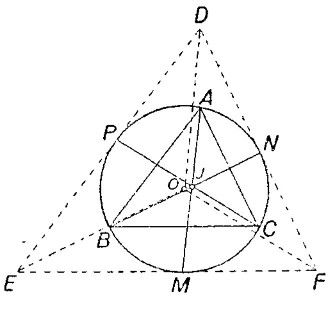
220) Нека је $AD = m$, $BC = a$, $\sphericalangle C - \sphericalangle B = \delta$ (сл. 792). Са слике видимо да је $AD \cdot DE = BD \cdot DC = DC^2 = \frac{a^2}{4}$; отуда је $DE = \frac{a^2}{4m}$.

Ако повучемо AF паралелно страни BC, тада је

$$\sphericalangle AOG = \sphericalangle AEF = \delta,$$
$$\sphericalangle AOD = 180^0 - \delta.$$

Дакле, троугао ћемо конструисати на овај начин: Над тежишном линијом AD описаћемо лук — геометриско место за темена углова величине $180 - \delta$, продужићемо AD за $DE = \frac{a^2}{4\,m}$, затим подићи нормалу у средини тетиве AE, да бисмо добили центар O описаног круга; најзад, из тачке D луком полупречника $\frac{a}{2}$ пресећи ћемо описани круг у B и C.

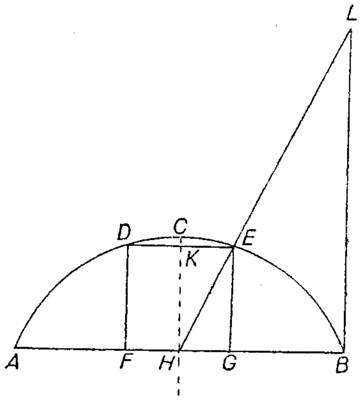
221) Тачка M је средина лука BC (сл. 793); значи, тангента повучена у тачки M паралелна је страни BC, и троугао DEF добијен повлачењем тангената у тачкама M, N, P хомотетичан траженом троуглу.



Сл. 793

Центар O датог описаног круга је тачка у којој се секу симетрале унутрашњих углова троугла DEF и одговара тачки J у троуглу ABC; према томе, кроз M, N, P треба повући паралеле симетралама углова D, E, F; на тај начин ће се добити темена троугла ABC.

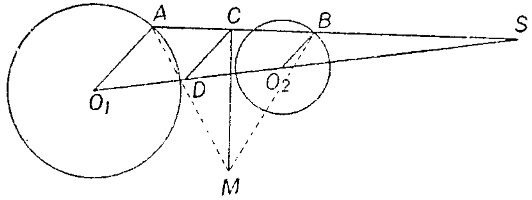
222) Зна се да пречник круга нормалан на AB пролази кроз тачку H на средини тетиве AB и кроз тачку K на средини DE (сл. 794); значи, H је средина и дужи FG, и, према томе, $\frac{EG}{HG}=2$. Ако је L пресек праве HE и нормале повучене на AB у тачки B, тада је $\frac{BL}{BH}=\frac{EG}{HG}=2$; отуда је $BL=2\cdot BH$.



Сл. 794

Конструкција се, према томе, изводи овако: На AB у тачки B дигне се нормала, на њу се пренесе $BL=BA$, затим се повуче HL; пресек ове дужи са луком даће теме E, из кога се повуче паралела тетиви AB и добија тражена тетива DE.

223) Претпоставимо да је задатак решен, и нека су O_1A и O_2B полупречници паралелни у истом смеру, тако да је $MA=MB$ (сл. 795).



Сл. 795

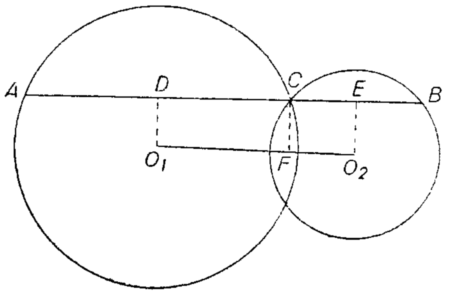
Означимо са R и r полупречнике кругова, са C средину дужи AB, са D средину дужи O_1O_2, са S пресек праве AB и средишне линије. Тада можемо написати:

$$SO_1:SO_2=R:r.$$

Тачка S је стална за све парове полупречника паралелних у истом смеру; па како је у равнокраком троуглу AMB тежишна линија MC у исто време и висина, тачка C се налази на кругу чији је пречник MS.

У трапезу AO_1O_2B дуж $CD=\frac{R+r}{2}$; према томе, C је и на кругу чији је центар у D а полупречник му је $\frac{R+r}{2}$. Тачка C је у том случају у пресеку ова два круга. Кад се одреди тачка C, повуче се CD, а затим, паралелно са CD, полупречници O_1A и O_2B

224) Претпоставимо да је задатак решен и да је $AC=2\cdot CB$ (сл. 796), или: $DC=2\cdot CE$; тада тачка C дели дуж DE у размери 2 1.



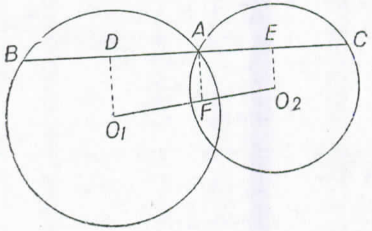
Сл. 796

Ако у трапезу DO_1O_2E из тачке C повучемо $CF \parallel DO_1 \parallel EO_2$, тачка F делиће страну O_1O_2 у размери $2:1$.

Према томе, треба средишну раздаљину O_1O_2 поделити у размери $2:1$, спојити тачку F са тачком C, подићи нормалу на CF; та нормала ће дати тетиву $AC=2\cdot CB$.

225) Претпоставимо да је задатак решен и да је $BA:AC = m:n$ (сл. 797), или, ако узмемо половине тетива:

$$DA:AE = m:n.$$

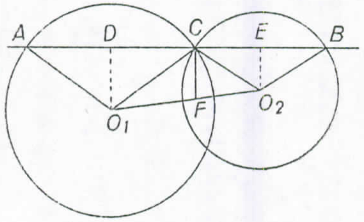


Сл. 797

Ако се повуче $AF \perp DE$, дуж O_1O_2 биће тачком F подељена у размери $m:n$.

Треба, дакле, централну раздаљину O_1O_2 поделити у датој размери, спојити деону тачку F са пресечном тачком кругова и на FA дићи нормалу BC.

226) Ако је $\sphericalangle AO_1C = \sphericalangle CO_2B$ (сл. 798), равнокраки троугли AO_1C и CO_2B су слични и њихови углови на основици једнаки, тј. $\sphericalangle DCO_1 = \sphericalangle ECO_2$. Ако повучемо $CF \perp AB$, тада је $\sphericalangle O_1CF = 90^0 - \sphericalangle DCO_1$, а $\sphericalangle O_2CF = 90^0 - \sphericalangle ECO_2$, или: $\sphericalangle O_1CF = \sphericalangle O_2CF$.

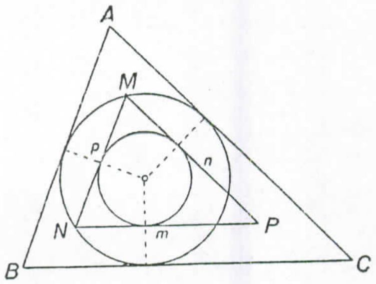


Сл. 798

Према томе, CF је симетрала угла O_1CO_2.

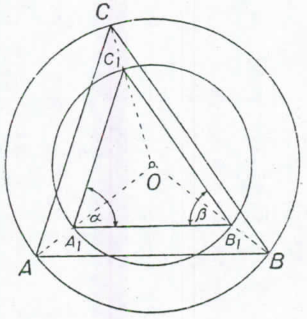
Треба, дакле, спојити центре са пресечном тачком кругова, повући симетралу угла чије је теме у пресечној тачки кругова и на ту симетралу повући нормалу. Та нормала је тражена сечица.

227) Треба нацртати троугао MNP чије су стране величине m, n, p (сл. 799); у тај троугао треба уписати круг, и око истог средишта полупречником датог круга описати други круг. Најзад се на тај круг повуку тангенте паралелне странама троугла MNP; на тај начин се добија троугао ABC који испуњава услов задатка.



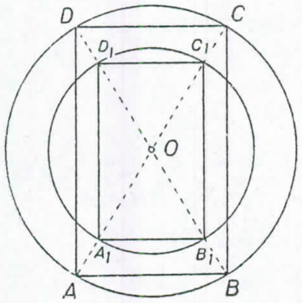
Сл. 799

228) Треба нацртати ма колики троугао, тако да његова два угла буду α и β, око њега описати круг и око истог центра описати круг полупречником датог круга. Заједнички центар кругова треба спојити са теменима првог троугла и те праве продужити до пресека са кругом једнаким датом кругу. Ти пресеци биће темена траженог троугла (сл. 800).



Сл. 800

229) Треба нацртати правоугаоник ма које величине чије стране стоје у размери 3 : 5 (сл. 801); око њега треба описати круг и око истог центра описати круг полупречником једнаким полупречнику датог круга. Затим, треба спојити заједнички центар кругова са теменима правоугаоника и продужити те праве до пресека са кругом једнаким датом кругу. Пресечне тачке даће темена траженог правоугаоника.

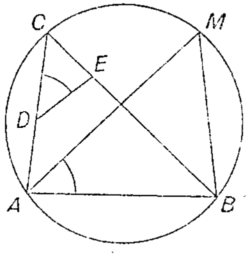


Сл. 801

230) Из задатка 53 знамо да је за сличност правоугаоника $ABCD$ и $EFGH$ потребно и довољно да им се дијагонале секу под једнаким угловима. Ако је правоугаоник уписан у кругу, његове дијагонале су пречници. Према томе, правоугаоник $EFGH$ ћемо уписати у круг ако најпре повучемо два пречника EG и FH, тако да захватају угао под којим се секу дијагонале правоугаоника $ABCD$.

231) Ако са друге стране пречника нацртамо симетричну слику, добићемо у кругу уписани правоугаоник чије стране стоје у размери 1 : 2, па се задатак своди на зад. 229.

232) Треба узети ма коју тачку C на кругу (сл 802), спојити је са крајњим тачкама тетиве AB, затим на CA пренети $CD=m$ и на CB пренети $CE=n$, па спојити тачке D и E. Код тачке A на тетиву AB треба пренети $\sphericalangle CDE = \sphericalangle MAB$. Тачка M биће тражена тачка.



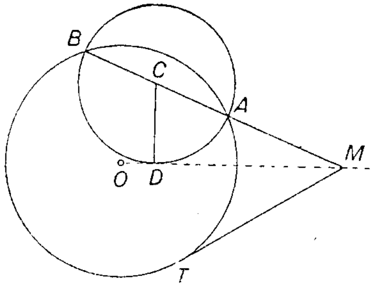
Сл. 802

Троугли CDE и MAB су слични, јер је $\sphericalangle C = \sphericalangle M$ и $\sphericalangle D = \sphericalangle A$. Из њихове сличности имамо:

$$MA:MB = CD:CE = m:n.$$

Постоје два решења, јер се исти поступак може извести и са друге стране тетиве AB.

233) Претпоставимо да је задатак решен и да је C средина тетиве AB, тј. центар круга пречника AB, (сл. 803) и да је тачка D тачка у којој круг пречника AB додирује праву MO; тада је $MD^2 = MA\cdot MB$.



Сл. 803

Ако повучемо тангенту MT на круг O, имамо:

$$MT^2 = MA\cdot MB,$$

отуда је

$$MD = MT.$$

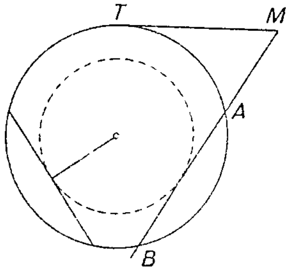
Тачка D ће се добити кад се пренесе $MD=MT$; она ће пасти између O и M, јер у правоуглом троуглу OTM имамо $MT<MO$.

Центар C ће се добити у пресеку нормале дигнуте на MO у тачки D и круга описаног над OM као над пречником, јер се зна да је угао OCM прав.

Нормала на MO у тачки D увек сече круг пречника MO, јер је D између O и M.

Задатак има два решења.

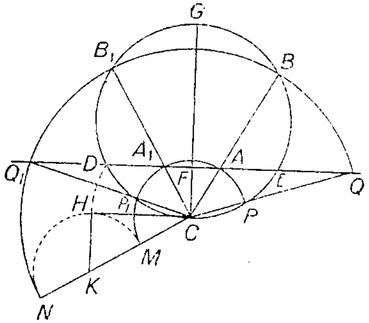
234) Претпоставимо да је задатак решен и да је MAB тражена сечица (сл. 804).



Сл. 804

Повуцимо тангенту MT. Зна се да је тангента геометриска средина између MA и MB, а по претпоставци и AB је геометриска средина између MA и MB. Према томе, треба да је $MT=AB$; значи, сечицу MAB треба повући тако да тетива AB има одређену дужину MT. Из ранијих задатака се зна како се врши ова конструкција.

235) Претпоставимо да је задатак решен и да је $AB=l$ (сл. 805).



Сл. 805

Узмимо CA или x за непознату, и нека је $CD=s$.

Правоугли троугли CAF и CBG су слични, јер имају један оштар угао заједнички; отуда:

$$CA:CG = CF:CB,$$

или:

$$CA\cdot CB = CG\cdot CF.$$

Међутим је у правоуглом троуглу CDG

$$CD^2 = CF\cdot CG = s^2.$$

Према томе: $x\cdot(x+l)=s^2$.

Непозната се може одредити као страна правоугаоника код кога је разлика страна l а површина s^2.

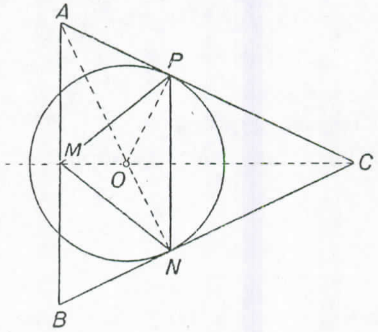
А може се добити и решењем горње једначине:

$$x = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4}+s^2}\,.$$

Конструкција. На једној правој паралелној тетиви DE узме се $CH=CD=s$, подигне се нормала $HK=\frac{l}{2}$ на CH, па ће бити $CK=\sqrt{\frac{l^2}{4}+s^2}$. Затим се пренесе $\frac{l}{2}$ из K до M и N. Дуж CM претставља први а CN други корен.

Постоје четири геометриска решења, јер и дужи PQ, A_1B_1, P_1Q_1 задовољавају услов задатка, ако се узме у обзир и продужак тетиве DE.

236) Претпоставимо да је задатак решен и да је $MNPM$ пређени пут (сл. 806).



Сл. 806

Полупречник NO је повучен нормално на криву у тачки додира.

Према закону о одбијању, праве MN и NP граде једнаке углове са нормалом NO, тј. $\sphericalangle MNO = \sphericalangle PNO$. Исто тако, $\sphericalangle NPO = \sphericalangle MPO$. Троугао NOP је равнокрак; исто тако и троугао NMP; дуж NP је нормална на OM.

Ако повучемо тангенте у тачкама N и P, затим $AB \perp MO$, добићемо равнокраки троугао ABC, и његова висина AON је симетрала угла MNP. Може се, дакле, сматрати да је троугао MNP добијен спајањем подножја висина троугла ABC, и унутрашњи троугао биће познат чим се зна спољашњи. А да бисмо знали овај спољашњи троугао, довољно је наћи дужину AM или OA.

Нека је $MO = d$, $ON = r$.

Правоугли троугли AMO и ANB су слични, јер имају један угао заједнички; према томе:

$$OA : MA = AB : AN,$$

или:

$$OA : MA = 2 \cdot MA : (OA + r),$$

или:

$$2 : MA^2 = OA \ (OA + r).$$

Најзад, да бисмо имали само једну непознату, заменимо $2 \cdot MA^2$ са $2 \cdot OA^2 - 2\,d^2$, па ћемо добити:

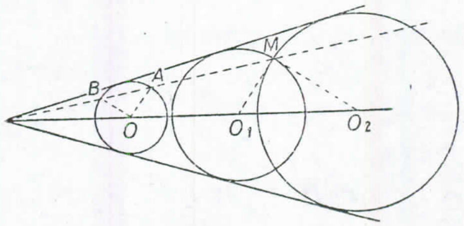
$$2 \cdot OA^2 - 2\,d^2 = OA^2 + OA \cdot r,$$

$$OA^2 - r \cdot OA - 2\,d^2 = O,$$

$$OA = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8\,d^2}}{2},$$

а ову је вредност лако конструисати.

237) Треба повући симетралу угла који граде дате праве и описати произвољан круг који додирује дате праве (сл. 807). Затим, кроз дату тачку M и теме угла треба повући праву; она ће произвољни круг сећи у двема тачкама A и B које треба спојити са центром круга. Најзад, треба повући из тачке M паралеле полупречницима AO и BO; пресек ових паралела са симетралом угла даће центре тражених кругова.



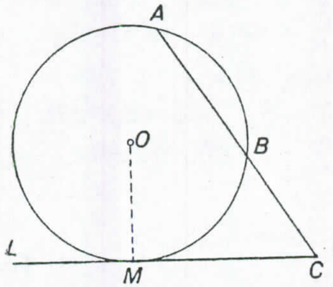
Сл. 807

Јасно је да постоје два решења.

238) Претпоставимо да је M додирна тачка на датој правој L, а A и B две дате тачке (сл. 808). Ако се кроз дате тачке A и B повуче права до пресека C са датом правом L, тада можемо написати:

$$CM^2 = CA \cdot CB,$$

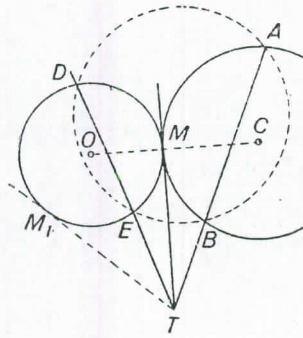
и на познати начин наћи дужину тангенте CM. На тај начин ће бити одређен положај тачке M, па се задатак своди на конструкцију круга, кад су дате три тачке кроз које он пролази.



Сл. 808

239) Претпоставимо да је задатак решен и да је круг са центром у C тражени круг који пролази кроз дате тачке A и B а дати круг O додирује у тачки M (сл. 809).

Ако повучемо заједничку тангенту у тачки додира M и праву кроз две дате тачке A и B, оне ће се сећи у тачки T. Тада је $TM^2 = TA \cdot TB$. Ако повучемо произвољну сечицу из тачке T, тако да она



Сл. 809

сече дати круг у тачкама D и E, биће:

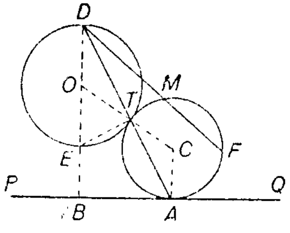
$$TM^2 = TD \cdot TE,$$

што значи да тачке A, B, D, E леже на обиму једног круга.

На основу тога може се извршити оваква конструкција: Кроз дате тачке A и B треба описати помоћни круг који ће дати круг сећи у тачкама D и E; затим треба повући праве AB и DE до узајамног пресека T; из T повући тангенту на дати круг. Њена додирна тачка са тачкама A и B потпуно одређују тражени круг.

Како се из тачке T на дати круг могу повући две дирке, то постоје два решења.

240) Претпоставимо да је тачка C центар траженог круга (сл. 810).



Сл. 810

Ако из центара O и C датог и траженог круга спустимо нормале на дату праву P, полупречници CA и OD биће у супротном смеру паралелни, па дуж DA мора пролазити кроз додирну тачку T.

Правоугли троугли DTE и DBA су слични, јер имају заједнички угао D. Из њихове сличности следује:

$$DT : DE = DB : DA,$$

или:

$$DT \cdot DA = DE \cdot DB.$$

Ако се из тачке D повуче права DM, биће:

$$DT \cdot DA = DM \cdot DF;$$

отуда:

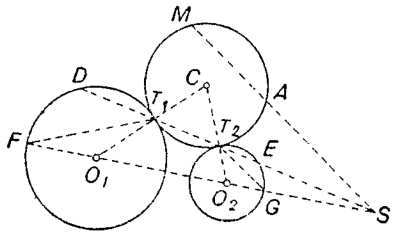
$$DM \cdot DF = DE \cdot DB,$$

и

$$DF = \frac{DE \cdot DB}{DM}.$$

На основу тога имамо ову конструкцију: Кроз средиште датог круга треба повући нормалу на дату праву PQ, па кроз D и M повући праву и на њу пренети, почев од D, дуж DF; затим се задатак своди на задатак 238.

241) Претпоставимо да је задатак решен и да је C центар траженог круга који пролази кроз дату тачку M и додирује дате кругове O_1 и O_2 у тачкама T_1 и T_2. Права T_1T_2 сећи ће централну линију датих кругова у тачки S (сл. 811). Ако повучемо праву MS, имаћемо:



Сл. 811

$$SM \cdot SA = ST_1 \cdot ST_2. \qquad (1)$$

Права T_1T_2 сече дате кругове у тачкама D и E, па ако те тачке спојимо са O_1 и O_2, биће: $\sphericalangle O_1DT_1 = \sphericalangle O_1T_1D = \sphericalangle CT_1T_2 = \sphericalangle CT_2T_1 = \sphericalangle OTE$, из чега произилази да је $O_1D \parallel O_2T_2$, тј. тачка S је спољашња тачка сличности датих кругова, па је, због тога, $O_1T_1 \parallel O_2E$, $\sphericalangle O_2O_1T_1 = \sphericalangle SO_2E$. И периферијски углови над луцима ових средишних углова су једнаки, тј. $O_1FT_1 = \sphericalangle GT_2E$; отуда су троугли ST_1F и SGT_2 слични, па је, према томе:

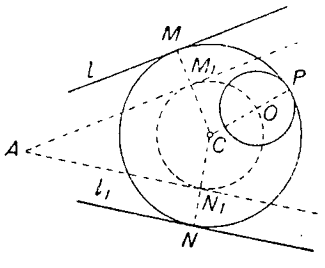
$$ST_1 : SF = SG : ST_2 \quad \text{или:} \quad ST_1 \cdot ST_2 = SF \cdot SG.$$

Кад се ова једнакост упореди са једнакошћу (1), добија се:

$$SM \cdot SA = SF \cdot SG, \quad \text{или:} \quad SA = \frac{SF \cdot SG}{SM}. \qquad (2)$$

На основу тога може се извести конструкција: Треба из спољне тачке сличности датих кругова повући праву SM и на њој одредити тачку A помоћу једнакости (2). Тиме је задатак сведен на задатак 239, тј. описати круг који пролази кроз тачке M и A и додирује један од датих кругова.

242) Нека је тражени круг C а додирне тачке нека су M, N, P; тада је $CM = CN = CP$ (сл. 812).

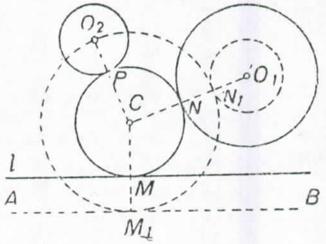


Сл. 812

Ако се око C опише помоћни круг, концентричан са траженим, полупречником CO, па се кроз пресечне тачке M_1, N_1 полупречника CM, CN, CP и помоћног круга повуку праве AM_1 и AN_1 паралелне правима l и l_1, оне ће бити дирке помоћног круга, а растојања $MM_1 = NN_1 = OP$, тј. једнака полупречнику датог круга.

Треба, дакле, повући праве AM_1 и AN_1 паралелно датим правима на растојању полупречника датог круга, па описати помоћни круг који додирује те две паралеле и пролази кроз центар датог круга (зад. 237). Центар помоћног круга биће центар траженог круга.

243) Претпоставимо да тражени круг са центром у C додирује дату праву и дате кругове у тачкама M, N, P (сл. 813).



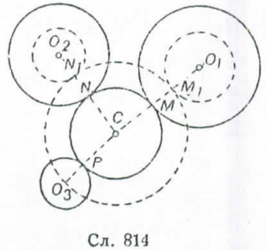
Сл. 813

Ако полупречником CO_2 опишемо око C помоћни круг који сече полупречник O_1N у N_1 а CM у M_1, тај ће круг додиривати други помоћни круг описан око O_1 полупречником O_1N_1 и праву AB повучену кроз M_1 паралелно правој l. Према томе је

$O_1N_1 = O_1N - NN_1 = O_1N - PO_2$, тј. полупречник другог помоћног круга једнак је разлици полупречника датих кругова, а растојање MM_1 једнако је полупречнику мањег датог круга.

Треба, дакле, око O_1 описати помоћни круг полупречника $O_1N_1 = O_1N - O_2P$, затим повући AB, паралелу правој l, на растојању $MM_1 = O_2P$, па према задатку 240 описати други помоћни круг који додирује први помоћни круг, паралелу AB и пролази кроз тачку O_2. Тражени круг је концентричан са другим помоћним кругом, а полупречник му је једнак разлици полупречника другог помоћног круга и мањег датог круга.

244) Нека је средиште траженог круга C и нека су додирне тачке M, N, P (сл. 814). Ако се полупречником CO_3 опише помоћни круг око C који пресеца средишне раздаљине CO_1 и CO_2 у тачкама M_1 и N_1, он ће додиривати друга два помоћна круга описана око O_1 и O_2 полупречницима O_1M_1 и O_2N_1. Према томе је



Сл. 814

$$O_1M_1 = O_1M - MM_1 = O_1M - O_3P$$

и

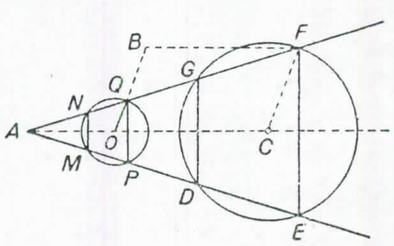
$$O_2N_1 = O_2N - NN_1 = O_2N - O_3P.$$

Треба, дакле, око средишта O_1 и O_2 описати помоћне кругове разликама полупречника $O_1M - O_3P$ и $O_2N - O_3P$, па, затим, описати и трећи помоћни круг који додирује прва два и пролази кроз тачку O_3 (према задатку 241). Тражени круг је концентричан са тим трећим помоћним кругом, а полупречник му је једнак разлици полупречника тог помоћног круга и полупречника најмањег датог круга.

Овај задатак има уопште осам решења, јер тражени круг може додиривати дате кругове или све споља, или све изнутра, или два споља а један изнутра, или обрнуто.

Задатак је поставио Аполоније, па је под његовим именом познат. Решењем овог задатка бавили су се многи математичари и до њега долазили на разне начине. Решење које је овде показано дао је француски математичар Вјет (Viète) (1540 – 1603).

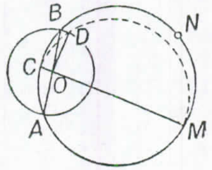
245) Центар се мора налазити на симетрали датог угла, а основице су нормалне на њој.



Сл. 815

Искористићемо сличност слика. Повуцимо две паралеле MN и PQ чије дужине стоје у датој размери $m:n$ (сл. 815). Око равнокраког трапеза $MPQN$ опишимо круг чији је центар у тачки O; његов полупречник је тада $OM = OP = OQ = ON$. Положај центра C се одређује на овај начин: Продужи се OQ тако да је $OB = r$, из тачке B се повуче BF паралелно симетрали угла до пресека F са једним краком датог угла; најзад, из тачке F повуче се паралела дужи BO до пресека са симетралом угла.

246) Претпоставимо да је задатак решен, и нека је заједничка тетива AB пречник датог круга (сл. 816).



Сл. 816

Ако повучемо MOC, биће:

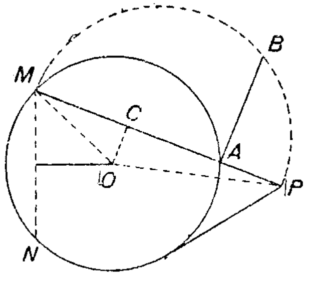
$$MO \cdot OC = OA \cdot OB = r^2.$$

Према томе, OC је трећа геометриска пропорционала за MO и r, и задатак се своди на конструкцију круга који пролази кроз три тачке M, N, C.

Да бисмо нашли дужину OC, треба описати полукруг чији је центар на MO и који пролази кроз тачку D, крајњу тачку полупречника OD нормалног на OM. Тада је

$$OC=\frac{OD^2}{MO}.$$

247) Претпоставимо да је задатак решен и да је $PT=l$ (сл. 817).



Сл. 817

Ако спојимо тачку P са тачком M, биће:

$$PA\cdot PM=PT^2=l^2.$$

Према томе, PA се може одредити. Опишимо полукруг над MP, узмимо $PB=l$ и повуцимо $BA\perp PA$.

Треба, значи, описати круг који пролази кроз три тачке M, N и A.

248) То је уствари задатак 247, јер је полупречник круга P (сл. 817) уствари l, позната дужина тангенте.

Али задатак се може решити и на други начин.

Претпоставимо да је центар O познат, па га спојмо са тачкама M, P, T.

Тада је $OP^2-OT^2=PT^2=l^2$, или: $OP^2-OM^2=l^2$.

Центар је на нормали CO узетој тако да је разлика квадрата растојања сваке њене тачке од тачака M и P једнака l^2. Према томе, положај тачке C, или MC се може одредити.

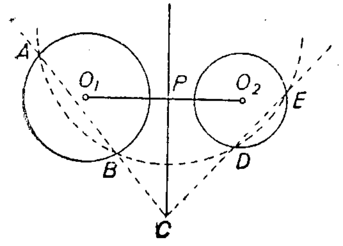
$$PO^2-MO^2=l^2,\quad PC^2+CO^2-MC^2-CO^2=l^2,\quad (MP-MC)^2-MC^2=l^2,$$

$$MP^2-2\cdot MP\cdot MC+MC^2-MC^2=l^2,$$

$$MC=\frac{MP^2-l^2}{2\cdot MP}.$$

Центар се налази и на симетрали дужи MN.

249) Треба из произвољне тачке ван њихове средишне раздаљине O_1O_2 описати трећи, помоћни, круг који ће пресецати оба дата круга, па повући заједничке тетиве AB и DE, које ће се у продушку сећи у средишту једнаких потенција сва три круга, тј. у тачки C (сл. 818). Кад се из те тачке спусти нормала на средишну раздаљину O_1O_2, она ће бити тражена радикална оса датих кругова O_1 и O_2.



Сл. 818

Тачка C има једнаке потенције за круг O_1 и помоћни круг исту потенцију има тачка C за круг O_2 и помоћни круг; према томе, тачка C има исту потенцију за кругове O_1 и O_2, и права која пролази кроз тачку C и стоји нормално на средишној раздаљини даје радикалну осу за кругове O_1 и O_2. Докажи да је $CP\perp O_1O_2$.

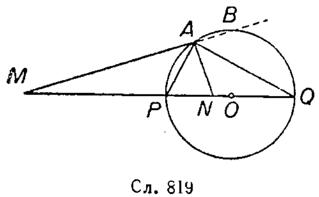
250) Задатак се своди на овај: Описати круг, тако да сече под правим углом три дата круга чији су центри у M, N, P а полупречници су им m, n, p.

Центар траженог круга је у пресеку радикалних оса ових трију кругова.

г) ГЕОМЕТРИСКА МЕСТА

251) На дужи MN и на њеном продушку одредимо две тачке P и Q, тако да је:

$$MP:PN=MQ:NQ=m:n \text{ (сл. 819).}$$



Сл. 819

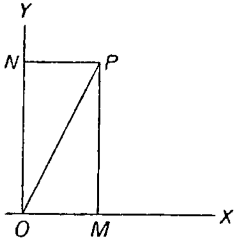
Ове две тачке припадају геометриском месту. За неку другу тачку A која припада геометриском месту, по претпоставци је:

$$AM:AN=MP:PN=MQ:NQ.$$

Али, исто тако, симетрала угла MAN и његовог упоредног угла QAB дале би на страни MN троугла AMN две тачке, тако да је однос њихових растојања од тачака M и N једнак $AM:AN$, или $m:n$; према томе, праве AP и AQ су те симетрале.

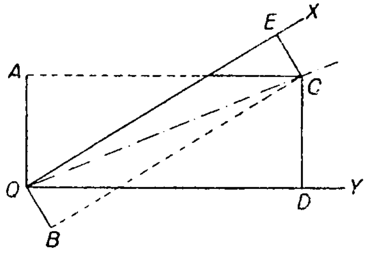
Симетрале два упоредна угла су узајамно нормалне; значи, угао PAQ је прав, и тачка A припада кругу описаном над PQ као над пречником. (Види зад. 109).

252) Треба конструисати правоугаоник, тако да му је једно теме у O, једна страна да лежи на OX, друга, двапут већа, на OY. Дијагонала OP биће геометриско место тачке P (сл. 820).



Сл. 820

253) У темену O повуцимо изван угла нормале на краке и пренесимо на те нормале $OA=m$, $OB=n$, па повуцимо $AC \parallel OY$, $BC \parallel OX$ (сл. 821). Тачка C ће бити једна од тражених тачака, јер је $CD:CE=m:n$.

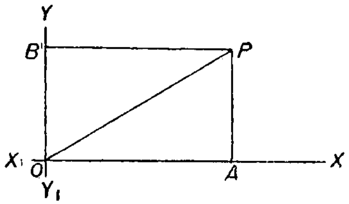


Сл. 821

Јасно је да ће се остале тачке које испуњавају услов задатка налазити на правој OC; права OC ће, према томе, бити тражено геометриско место. (Види зад. 178).

254) Задатак се своди на претходни. Најпре се нађе геометриско место тачака чија растојања од двеју страна троугла стоје у размери $m:n$, а затим геометриско место тачака чија растојања од других двеју страна троугла стоје у размери $n:p$. Пресек ових геометриских места даће тражену тачку.

255) Нека праве XX_1 и YY_1 граде прав угао и нека је P једна тачка чија су растојања од кракова правог угла PA и PB (сл. 822).



Сл. 822

Повуцимо OP и уочимо да је $PB=OA$.

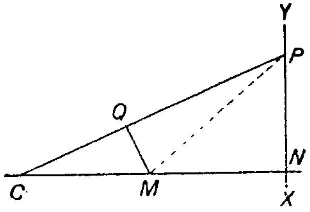
Тада је:

$$PA^2+PB^2=PA^2+OA^2=OP^2.$$

Према томе, да би било $PA^2+PB^2=a^2$, потребно је и довољно да буде $OP^2=a^2$, или $OP=a$.

Значи да је геометриско место тачке P круг описан око O као око центра полупречником a.

256) Према претпоставци је $CP \cdot CQ = CM \cdot CN$, а тачка C је ван дужи MN и QP; значи, тачке M, N, P, Q леже на кругу (сл. 823).

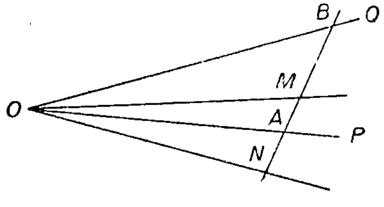


Сл. 823

Како је угао N прав, MP је пречник, и угао PQM мора бити прав. Према томе, угао CQM је прав и тачка Q припада кругу пречника CM.

Кад се тачка P креће по правој XY, тачка Q описује круг; значи, геометриско место тачке Q је круг пречника CM.

257) Нека је $m:n$ дата размера.



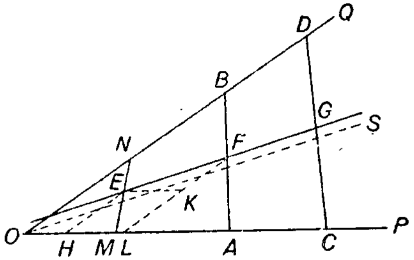
Сл. 824

а) Ако је $AM:BM=m:n$, тражено геометриско место је права OM (сл. 824).

б) Ако је $AN:BN=m:n$, тражено геометриско место је права ON.

Праве OA, OB, OM, ON чине један хармониски прамен.

258) Нека су E, F, $G \ldots$ средине дужи MN, AB, $CD \ldots$



Сл. 825

Ако повучемо паралеле EH, FL и EK правима OQ и OP (сл. 825), имаћемо:

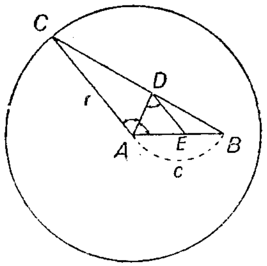
$EH=\frac{ON}{2}$, $LF=\frac{OB}{2}$; отуда: $FK=\frac{NB}{2}$.

Исто тако, $OH=\frac{OM}{2}$, $OL=\frac{OA}{2}$; отуда: $EK=\frac{MA}{2}$.

Значи, $FK=EK$, и троугао EKF је равнокрак. Према томе, EF је паралела симетрали OS угла POQ. То исто би се могло доказати и за FG.

Дакле, геометриско место је права повучена кроз средину дужи MN паралелно симетрали угла који граде две дате праве. Ову праву назвао је Шал (Chasles)*) *правом средина*.

259) Обележимо AB са c, а полупречник круга који описује теме C око темена A са r (сл. 826).



Сл. 826

Тражимо геометриско место тачке D, подножја симетрале угла A.

Повуцимо $DE \parallel CA$; тада је:

$$AE:EB=CD:DB.$$

Како је AD симетрала угла CAB, то је: $CD:DB=r:c$; отуда: $AE:EB=r:c$.

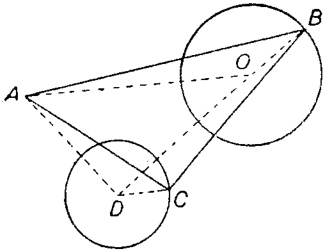
Ова пропорција показује да је тачка E између A и B и да је стална.

Сем тога, $\sphericalangle ADE=\sphericalangle DAC$; према томе је $\sphericalangle ADE=\sphericalangle DAE$, тј.: $DE=AE$.

Све тачке D су, значи, на кругу средишта E и полупречника AE.

Кад тачка C опише круг око центра A, полупречник ED, који је паралелан страни AC, као и тачка D описаће круг око центра E; дакле, геометриско место тачке D је круг са центром у E а полупречника AE.

260) Кад троугао ABC остаје сличан самом себи, размера $AB:AC$ је стална, а тако исто и угао BAC (сл. 827).



Сл. 827

Спојмо тачку A са центром O, нацртајмо угао OAD једнак углу BAC и узмимо AD, тако да је: $AO:AD=AB:AC$. Троугли BAO и CAD биће слични, јер су им углови између пропорционалних страна једнаки; према томе: $BO:CD=AB:AC$; отуда:

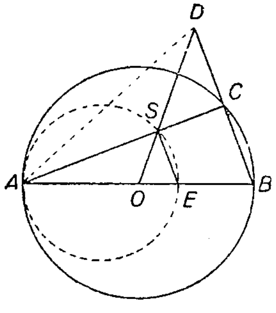
$$CD=BO\cdot\frac{AC}{AB}.$$

---

*) Шал (Chasles) (1793–1880), француски геометар.

Дужина CD је стална; према томе, геометриско место тачке C је круг описан око тачке D полупречника DC, а ову вредност смо нашли.

261) Повуцимо AD, затим $SE \parallel CB$ (сл. 828).

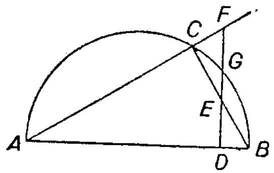


Сл. 828

У троуглу ABD дужи AC и DO су тежишне линије; према томе је $AS=\frac{2}{3}AC$; а како је $SE \parallel CB$, то је и $AE=\frac{2}{3}\cdot AB$.

Угао ASE је прав; значи, геометриско место тачке S је круг чији је пречник AE

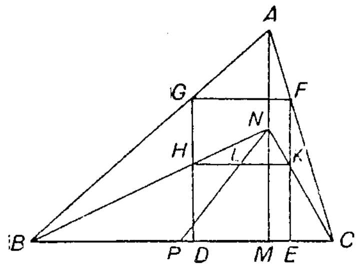
262) Правоугли троугли ADF и DBE (сл. 829) су слични, јер поред правих углова једнаки су и углови F и B, као комплементи углу A. Из њихове сличности имамо: $AD:DE=DF:BD$; отуда: $DE\cdot DF=AD\cdot BD$; дакле: $DG^2=AD\cdot BD$.



Сл. 829

Према томе, геометриско место тачке је круг описан над AB као над пречником.

263) Нека је $DEFG$ један правоугаоник уписан у троуглу ABC (сл. 830) чија се страна DE налази на страни BC; нека су H и K средине страна GD и FE и L средина дужи HK. У овој тачки L секу се дијагонале правоугаоника, и то је место тачке које тражимо.

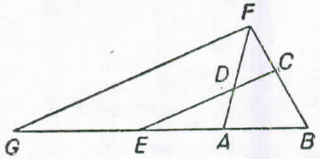


Сл. 830

BH сече висину AM у њеној средини N, јер је $NA:NM=HG:HD$. Исто тако, CK пролази кроз тачку N; најзад, NL пролази кроз P средину стране BC, јер је $PB:PC=HL:LK$. Тачка L припада отсечку NP, тј. дужи која спаја средину висине са средином стране BC. Кад се G помера по AB, H ће се померати по BN а L по NP.

Геометриско место тачке L је дуж NP.

264) Кроз тачку F повуцимо $FG \parallel CDE$ и потражимо однос који постоји између AG, FG и датих дужина (сл. 831).



Сл. 831

Нека је $EA=a$, $EB=b$, $AB=b-a=l$, $CE=c$, $DE=d$.

Троугли FGB и CEB су слични као и троугли FGA и DEA; отуда се добија:

$$FG:GB=CE:EB=c:b;\ FG=GB\cdot\frac{c}{b},$$

$$FG:GA=DE:EA=d:a;\ FG=GA\cdot\frac{d}{a}.$$

Према томе је $GB\cdot\frac{c}{b}=GA\ \frac{d}{a}$.

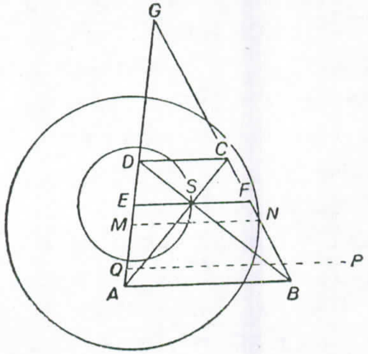
Међутим је $GB=GA+l$, а $GA\cdot\frac{d}{a}=GA\cdot\frac{c}{b}+l\cdot\frac{c}{o}$,

$$GA\ \frac{bd-ac}{ab}=l\cdot\frac{c}{b},\ GA=l\cdot\frac{ac}{bd-ac}.$$

Затим се из $FG=GA\ \frac{d}{a}$ добија: $FG=l\cdot\frac{cd}{bd-ac}$, тј. FG је стална количина.

Значи, геометриско место тачке F је круг чији је центар G на правој EAB.

265) Нека је AD стална дужина, $AB=a$ и $DC=b$ (сл. 832).



Сл. 832

Познато је да се дијагонале трапеза секу тако да су им делови пропорционални са основицама, тј.: $AS:SC=a:b$. (Види зад. 41).

Исто тако је познато да, кад се непаралелна страна AD подели у размери $m:n$, дуж повучена из деоне тачке паралелно основицама има сталну дужину, јер она зависи само од основица a и b и размере $m:n$. Из сличних троуглова ASE и ACD имамо: $ES:b=AS:AC$. Међутим, из горње пропорције имамо:

$(AS+SC):AS=(a+b):a=AC:AS=(a+b):a$, или: $AS:AC=a:(a+b)$;

отуда: $ES:b=a:(a+b)$, или: $ES=\frac{ab}{a+b}$. За MN се зна да је $MN=\frac{a+b}{2}$.

Дакле: а) геометриско место тачке S је круг описан око E полупречником $\frac{ab}{a+b}$.

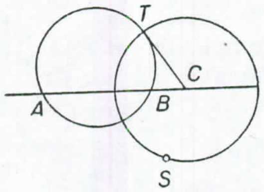
б) геометриско место тачке N је круг описан око M полупречником $\frac{a+b}{2}$.

Свака тачка дужи BCG, дужи AC или BD описује круг чији је центар на дужи ADG.

И тачка P, крајња тачка дужи PQ паралелне страни AB описиваће круг ако је Q на осовини AD.

266) Нека је CT једна тангента повучена из C на круг који пролази кроз тачке A и B (сл. 833); тада је

$$CT^2=CB\cdot CA.$$



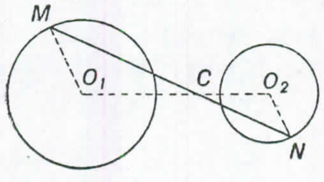
Сл. 833

Значи, тачка T припада кругу чији је центар у C а полупречник му је $\sqrt{CB\cdot CA}$.

Обрнуто, ако је S једна тачка овога круга, круг који пролази кроз три тачке A, B, S додирује CS у тачки S, јер је $CS^2=CT^2=CB\cdot CA$.

Геометриско место је, према томе, круг чији је центар у C а полупречник тангента CT повучена ма на који круг који пролази кроз тачке A и B.

267) Нека је тачка N једна од тачака траженог геометриског места (сл. 834).



Сл. 834

На правој O_1C узмимо дуж O_1C, тако да је: $O_1C=O_2C=m:n=CM:CN$. Троугли MO_1C и NO_2C су слични, јер имају по две стране пропорционалне и захваћене углове једнаке; према томе:

$$O_1M:O_2N=CM:CN=m:n;$$

отуда:

$O_2N = O_1M \cdot \frac{n}{m}$, тј. O_2N је стална количина.

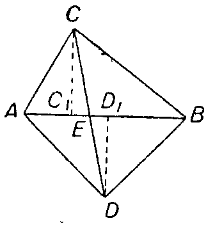
Значи, геометриско место тачака N је круг описан око тачке O_2 као центра полупречником $O_1M \cdot \frac{n}{m}$.

§ 10. Једнакост површина и мерење површина

а) ТЕОРЕМЕ

1) Троугли једнаких површина и једнаких основица морају имати и висине једнаке, тј.: $CC_1 = DD_1$ (сл. 835).

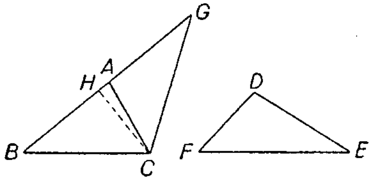
Сем тога је $\sphericalangle CC_1E = \sphericalangle DD_1E = 90^0$, $\sphericalangle C_1EC = \sphericalangle D_1ED$; према томе су троугли CC_1E и DD_1E подударни и $CE = DE$.



Сл. 835

2) Продужимо BA за $AG = DE = AB$ (сл. 836), па добијамо троугао ACG који је подударан са троуглом DEF; оба имају по две стране једнаке: $AC = DF$, $AG = DE$ и њима захваћене углове једнаке, као суплементе углу A, тј.

$$\sphericalangle GAC = \sphericalangle D.$$



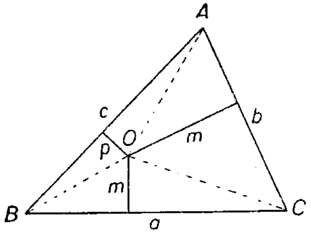
Сл. 836

Троугли ABC и ACG су једнаки, јер имају једнаке основице $AG = AB$ и исту висину CH.

3) Спојмо тачку O са теменима троугла (сл. 837). Површина $\triangle OBC$ + површина $\triangle OCA$ + површина $\triangle OAB$ = површини $\triangle ABC$,

или: $\frac{am}{2} + \frac{bn}{2} + \frac{cp}{2} = P$;

отуда: $am + bn + cp = 2P$.



Сл. 837

Ако је тачка O ван троугла, добија се на исти начин слична веза, која се изводи из претходне, посматрајући растојање тачке O као позитивне или негативне, према томе да ли се тачка O и супротно теме налазе са исте стране одговарајуће стране или се не налазе.

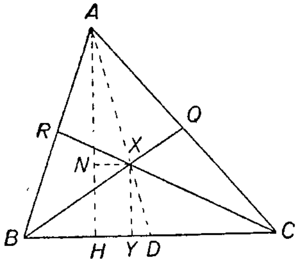
Тако, ако је O ван троугла, али у углу A, биће:

$$-am + bn + cp = 2P.$$

Ако је O у углу унакрсном углу A, биће:

$$am - bn - cp = 2P.$$

4) BQ и CR су тежишне линије; према томе је и дуж AXD тежишна линија (сл. 838)



Сл. 838

Ако повучемо из темена A висину AH и $XN \parallel BC$, тада је $HN = \frac{1}{3} AH$, јер је и $XD = \frac{1}{3} AD$. Висина троугла BCX је $XY = NH$; па, како $\triangle BCX$ и $\triangle BCA$ имају исте основице, то је $\triangle BXC = \frac{1}{3} \triangle ABC$. Из истих разлога је $\triangle ABX = \frac{1}{3} \triangle ABC$, $\triangle CAX = \frac{1}{3} \triangle ABC$.

Међутим, $\triangle AXR$ има исту висину као $\triangle ABX$, а упола мању основицу, па је $\triangle AXR = \frac{1}{2} \triangle ABX$, или $\triangle AXR = \frac{1}{6} \triangle ABC$.

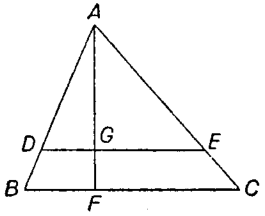
Исто тако је $\triangle AXQ = \frac{1}{6} \triangle ABC$. Сабирањем ових последњих двеју једнакости добија се:

$\triangle AXR + AXQ = \frac{1}{3} \triangle ABC$, или $\triangle AQXR = \frac{1}{3} \triangle ABC$, или:

$$\triangle BXC = \triangle AQXR.$$

5) Из услова задатка можемо написати:

$BC \cdot AF = 2 \cdot DE \cdot AG$, или: $BC : 2 \cdot DE = AG : AF$ (сл. 839).



Сл. 839

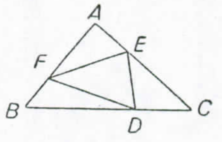
Из сличности троуглова ABC и ADE, затим троуглова ABF и ADG можемо написати:

$$BC : 2 \cdot DE = AB : 2 \cdot AD$$

и

$$AG : AF = AD : AB.$$

11) Троугли AFE и ABC (сл. 844) имају заједнички угао A, према томе је



Сл. 844

$$\frac{AFE}{ABC}=\frac{AF\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{\frac{2}{3}AB\cdot\frac{1}{3}AC}{AB\cdot AC}=\frac{2}{9}$$

или:

$$AFE=\frac{2}{9}\cdot ABC.$$

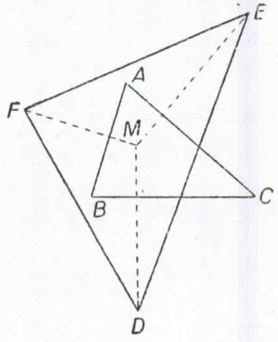
Исто тако је $BDF=\frac{2}{9}ABC$, $CED=\frac{2}{9}\cdot ABC$.

Значи, $DEF=ABC-\frac{6}{9}\cdot ABC=\frac{1}{3}\cdot ABC$.

12) Троугли MEF и ABC (сл. 845) имају по две стране једнаке и захваћене углове суплементне; према томе су једнаки.

Исто тако су и троугли MDE и MDF једнаки са троуглом ABC; отуда је површина $EDF=3$ површине ABC.

Како су троугли DME, EMF, DMF једнаки, то је тачка M у пресеку тежишних линија троугла DEF.



Сл. 845

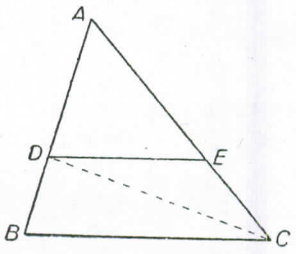
13) Троугли ADE и ADC (сл. 846) имају исту висину; отуда:

$$ADE:ADC=AE:AC.$$

Исто тако, имају исту висину и троугли ADC и ABC; отуда:

$$ADC:ABC=AD:AB.$$

Како је $AE:AC=AD:AB$, то је и $ADE:ADC=ADC:ABC$.



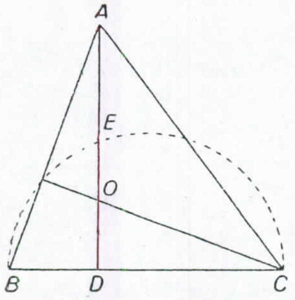
Сл. 846

14) Треба доказати да је

$$\left(\frac{BC\cdot DE}{2}\right)^2=\frac{BC\cdot AD}{2}\cdot\frac{BC\cdot DO}{2}\quad\text{(сл. 847)}$$

или да је $DE^2=AD\cdot DO$, или: $BD\cdot CD=AD\cdot DO$.

Правоугли троугли CDO и BDA су слични, јер су им оштри углови код C и A једнаки као комплементи истом углу B. Из њихове сличности имамо: $CD:AD=DO:BD$ или $BD\cdot CD=AD\cdot DO$, што је и требало доказати.



Сл. 847

15) Како троугли ABC, BCH, BCG (сл. 848) имају исту основицу BC, довољно је доказати да је

$$DH^2=AD\cdot DG$$

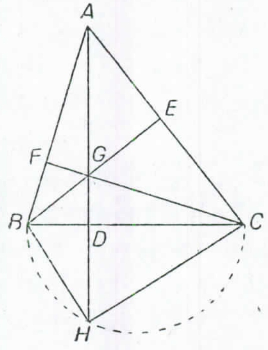
или да је $AD\cdot DG=BD\cdot CD$, јер је $DH^2=BD\cdot CD$.

Правоугли троугли BDG и ADC су слични, јер су углови код B и A једнаки; према томе је:

$$BD:AD=DG:DC;$$

отуда:

$$BD\cdot DC=DH^2=AD\cdot DG.$$

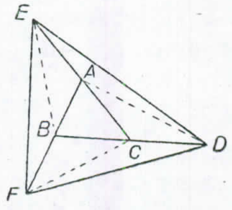


Сл. 848

16) Нека је ABC дати троугао, а DEF троугао добијен продужавањем страна AB, BC, CA за $BF=AB$, $CD=BC$, $AE=CA$ (сл. 849). Треба доказати да је површина $DEF=7\cdot$ површина ABC.

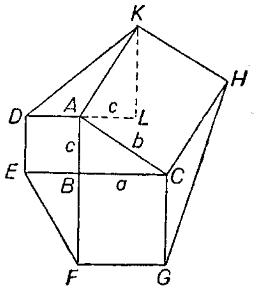
Ако повучемо AD, BE, CF, видимо да је троугао DEF састављен из 7 троуглова који су сви једнаки међу собом и једнаки троуглу ABC.

Заиста, троугли ABC и ACD су једнаки, јер имају једнаке основице $BC=CD$ и једнаке висине. Троугли ACD и ADE су једнаки, јер имају једнаке основице $CA=AE$ и једнаке висине итд.



Сл. 849

17) Продужимо DA и на ову праву повуцимо нормалу KL (сл. 850).



Сл. 850

а) Троугли AKL и ABC су подударни, троугли KDA и AKL су једнаки; према томе, троугли KDA и ABC су једнаки.

Исто тако, троугли CGH и ABC су једнаки.,

б) Из троугла KDA имамо:

$$KD^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot DA \cdot AL = b^2 + c^2 + 2 \cdot c^2 = $$
$$= b^2 + 3 \cdot c^2.$$

На исти начин бисмо нашли да је

$$GH^2 = b^2 + 3 \cdot a^2.$$

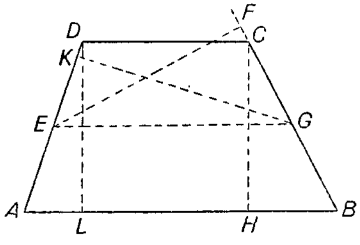
Квадрати других страна шестоугла дају

$$2 \cdot b^2 + a^2 + c^2.$$

Према томе, збир квадрата свих шест страна је: $4 \cdot b^2 + 4 \cdot c^2 + 4 \cdot a^2$, или: $4 \cdot b^2 + 4 \cdot b^2$ или, најзад, $8 \cdot b^2$. Теорему је поставио Вектен (Vecten).

18) Види задатак 2.

19) Правоугли троугли CHB и EFG су слични (сл. 851), а отуда:



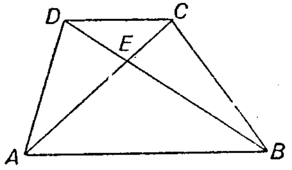
Сл. 851

$CH : EF = CB : EG$: или: $CH \cdot EG = EF \cdot CB =$ површини трапеза.

Примедба. Исто тако је $DL \cdot EG = GK \cdot AD$, или: $EF \cdot CB = GK \cdot AD$; најзад:

$$EF : GK = AD : CB,$$ тј. раздаљине средина једне непаралелне стране од друге обрнуто су пропорционалне са странама од којих су раздаљине рачунате.

20) Треба доказати да је $AED = BEC$ (сл. 852).

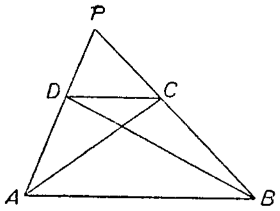


Сл. 852

Ако се од једнаких троуглова ABD и ABC одузме заједничка површина ABE, добија се

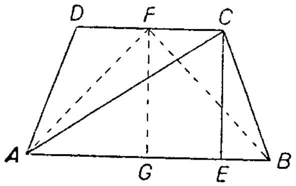
$$AED = BEC.$$

21) Троугли PAC и PBD имају заједнички део PDC (сл. 853), зато је довољно доказати да су други делови ACD и BCD једнаки. Ова два троугла су, међутим, једнака, јер имају исту основицу CD и једнаке висине.



Сл. 853

22) Нека је F средина стране DC (сл. 854). Повуцимо $FG \perp AB$. Троугли ADF и BCF су подударни, па је $FA = FB$, а у равнокраком троуглу FAB висина FG је тежишна линија; G је, значи, средина стране AB.

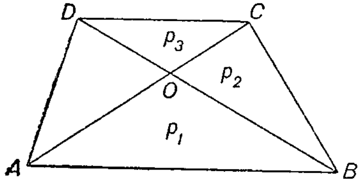


Сл. 854

Тада је $AE = AG + GE = AG + FC = \frac{AB + CD}{2}$.

Према томе, површина $ABCD = AE \cdot CE = 2$ површине ACE.

23) Нека су p_1, p_2, p_3 површине троуглова OAB, OBC, OCD (сл. 855).



Сл. 855

Треба да докажемо да је

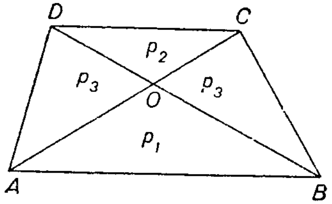
$$p^2_2 = p_1 \cdot p_3,$$ или да је $p_1 : p_2 = p_2 : p_3$.

Троугли OAB и OBC имају једнаке висине повучене из B; отуда је $p_2 : p_1 = OC : OA$.

Исто тако, троугли OBC и OCD имају једнаке висине из C, и зато је $p_3 : p_2 = OD : OB$.

Међутим, зна се да је $OC : OA = OD : OB$. Према томе је $p_2 : p_1 = p_3 : p_2$, или: $p_2{}^2 = p_1 \cdot p_3$.

24) Нека су p_1, p_2, p_3 површине троуглова OAB, OCD, OBC, OAD (сл. 856).

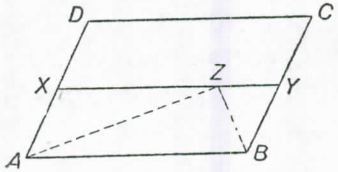


Сл. 856

По претпоставци је $p_1 = a^2$, $p_2 = b^2$.

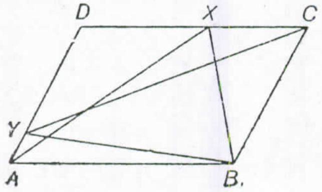
У задатку 23. видели смо да је $p_3 = \sqrt{p_1 \cdot p_2}$; отуда је $p_3 = \sqrt{a^2 b^2} = a \cdot b$. Тада је површина трапеза $ABCD = p_1 + p_2 + 2 \cdot p_3 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b = (a + b)^2$.

25) Троугао ABZ је половина паралелограма $ABYX$, јер имају исту основицу и исту висину; паралелограм $ABYX$ је половина паралелограма $ABCD$, јер имају исту основицу, а висина паралелограма $ABYX$ је половина висине паралелограма $ABCD$. Према томе, троугао ABZ је четвртина паралелограма $ABCD$ (сл. 857).



Сл. 857

26) Троугао AXB је половина паралелограма $ABCD$, јер имају исту основицу AB и исту висину (сл. 858). Троугао BYC је половина паралелограма $BCDA$; и они имају исту основицу BC и исту висину. Према томе су ова два троугла једнака, јер је сваки половина истог паралелограма.



Сл. 858

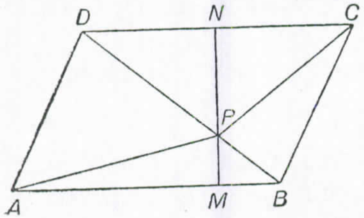
27) Површина троугла $PAB = \frac{AB \cdot PM}{2}$ (сл. 859).

Површина троугла

$$PCD = \frac{CD \cdot PN}{2} = \frac{AB \cdot PN}{2}.$$

Сабирањем ових једнакости добија се: Површина PAB + површина $PCD = \frac{AB \cdot PM}{2} + \frac{AB \cdot PN}{2} =$

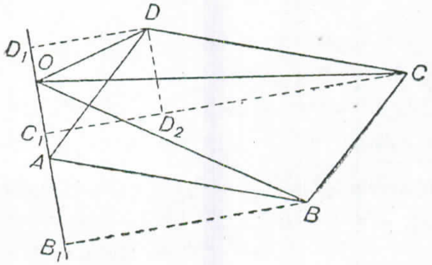
$$= \frac{AB}{2}(PM + PN) = \frac{AB \cdot MN}{2} = \frac{ABCD}{2}.$$



Сл. 859

28) $\triangle OAC = \triangle OAB + \triangle OAD$ (сл. 860), јер сва три троугла имају исту основицу OA а висина CC_1 троугла OAC једнака је збиру $BB_1 + DD_1$ висина троуглова OAB и OAD.

Повуцимо $DD_2 \perp CC_1$; тада је $DD_1 = .D_2C_1$. Троугли CDD_2 и BAB_1 су подударни ($CD = BA$, $\sphericalangle DCD_2 = \sphericalangle ABB_1$, $\sphericalangle D_2 = \sphericalangle B_1 = 90^0$; отуда је $CD_2 = BB_1$.



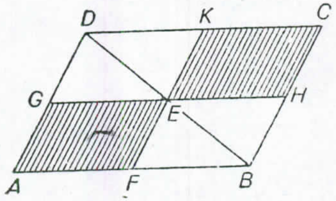
Сл. 860

Према томе:

$$CC_1 = CD_2 + D_2C_1 = BB_1 + DD_1.$$

29) Дијагонала дели паралелограм на два једнака дела; исти је случај и са паралелограмима; чије су дијагонале DE и EB (сл. 861) отуда је

$$AFEG = EHCK.$$

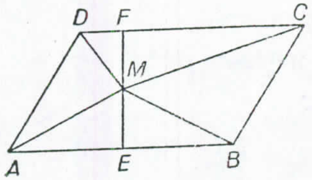


Сл. 861

30)

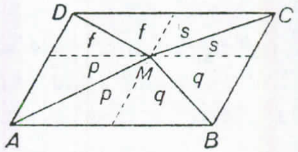
Први начин. Нека је $AB = DC = a$ (сл. 862), тада је $ABM = \frac{a \cdot ME}{2}$, $DCM = \frac{a \cdot FM}{2}$; отуда:

$$ABM + DCM = \frac{a}{2} \cdot EF = \frac{1}{2} ABCD = AMD + BMC.$$



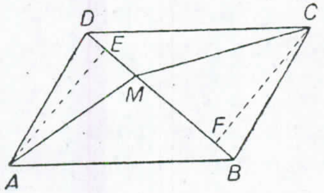
Сл. 862

Други начин. $MAB + MCD = p + q + s + f = MDA + MBC$ (сл. 863).



Сл. 863

31) Троугли AMD и DMC (сл. 864) имају заједничку основицу DM и једнаке висине AE и CF итд.



Сл. 864

32) Нека је a страна квадрата, x и y стране правоугаоника. По претпоставци је $x \cdot y = a^2$.

Обим квадрата је 4 a, обим правоугаоника $2x+2y$.

Треба да докажемо да је $2x+2y>4\ a$, или: $x+y>2a$.

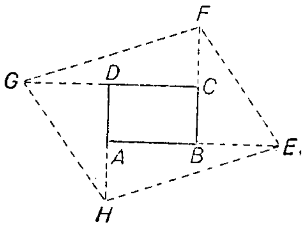
Можемо написати:

$$(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$$

или:
$$(x+y)^2=4a^2+(x-y)^2;$$

отуда:
$$(x+y)^2>4a^2,\ \text{или:}\ x+y>2a.$$

33) Правоугли троугли BEF и HDG су подударни, јер су им катете једнаке; отуда је $EF=GH$ (сл. 865).



Сл. 865

Исто тако се доказује да је $HE=FG$.

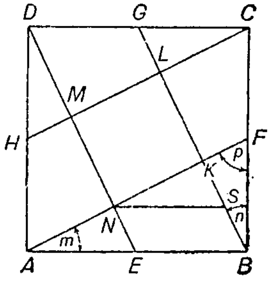
Из тога следује да је $EFGH$ паралелограм, јер су му супротне стране једнаке.

Овај паралелограм је састављен из правоугаоника $ABCD$ и четири правоугла троугла.

Сваки од ових троуглова једнак је правоугаонику $ABCD$; на пример: површина $EFB=\frac{BE\cdot BF}{2}=\frac{AB\cdot 2BC}{2}=AB\cdot BC.$

Према томе, паралелограм $EFGH$ је пет пута већи од правоугаоника $ABCD$.

34) Правоугли троугли ABF, BCG (сл. 866) су подударни, јер су им катете једнаке; отуда је угао $m=\sphericalangle n$. Али $\sphericalangle m+\sphericalangle p=90^0$; према томе је $\sphericalangle n+\sphericalangle p=90^0$; значи, троугао BFK је правоугли са правим углом код K.



Сл. 866

На исти се начин може доказати да су и троугли CGL, DHM, AEN правоугли.

Повуцимо $NS \parallel AB$. Правоугли троугли NSK и ABF су слични, јер су им оштри углови једнаки. Из њихове сличности имамо:

$$NK:AB=NS:AF;\ \text{отуда:}\ NK=\frac{AB\cdot NS}{AF}.$$

Ако је a страна датог квадрата, тј. $AB=a$, тада је $NS==EB=\frac{a}{2}$, а $AF^2=a^2+\frac{a^2}{4}$ или: $AF=\frac{a}{2}\sqrt{5}$.

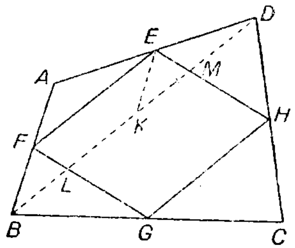
Тада је

$$NK=\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}=\frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Тако исто се може доказати да је $KL=\frac{a}{\sqrt{5}}$.

Четвороугао $NKLM$ је, према томе, квадрат чија је површина $\frac{a^2}{5}$, тј. пети део површине квадрата $ABCD$.

35) Повуцимо $EK \parallel AB$ (сл. 867).

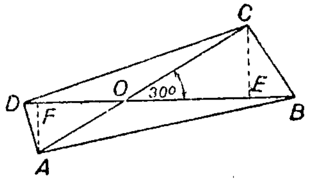


Сл. 867

Слика $FBKE$ је паралелограм и $FE=BK=KD$. Троугао AFE је подударан са троуглом EKD, половином паралелограма $FBKE$. Значи, паралелограм $FBKE$, или $FLME$ једнак је збиру троуглова AFE и EKD, или половини троугла ABD, јер се троугао ABD састоји из паралелограма $FBKE$ и троуглова AFE и EKD.

Исто тако је $LGHM$ половина троугла BCD. Према томе је и цео паралелограм $FGHE$ половина четвороугла $ABCD$. (Види § 3, зад. 33).

36) Површина $ABCD$ = површини DBC + површина DBA (сл. 868), или:

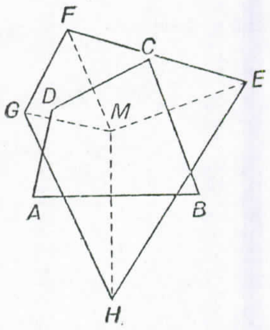


Сл. 868

$$\text{површина}\ ABCD=\frac{DB\cdot CE}{2}+\frac{DB\cdot AF}{2}=$$
$$=\frac{DB\cdot(CE+AF)}{2}.$$

По претпоставци, у правоуглим троуглима OEC и OAF углови код O су 30^0; зато је $CE=\frac{OC}{2}$, $AF=\frac{OA}{2}$; отуда: $CE+AF=\frac{AC}{2}$, и површина $ABCD=\frac{DB\cdot AC}{4}$.

37) Троугли EMH и ABC су једнаки (сл. 869), јер имају по две стране једнаке и захваћене углове суплементне. Исто тако су једнаки и троугли FMG и ACD.

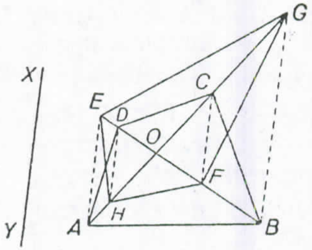


Сл. 869

Површина EMH + површина FMG = површини $ABCD$.

На исти начин се изводи да је површина GMH + површина EMF = површини $ABCD$, а из овога произилази да је површина $EFGH = 2$ површине $ABCD$.

38) Нека је O пресек дијагонала AC и BD (сл. 870).

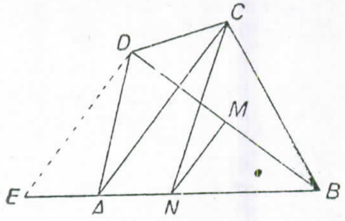


Сл. 870

Посматрајмо трапезе $BGCF$, $AEDH$, $ABGE$, $CDHF$. Према задацима 20 и 21, троугли OBC и OFG, OAD и OEH, OAB и OEG, OCD и OHF су једнаки. Отуда се добија:

$$ABCD = EHFG.$$

39) Претпоставимо да паралела дијагонали AC повучена из тачке M, средине дијагонале BD, сече страну AB. Повуцимо кроз D паралелу дијагонали AC до E, пресека са продуженом страном AB, и повуцимо CE (сл. 871).



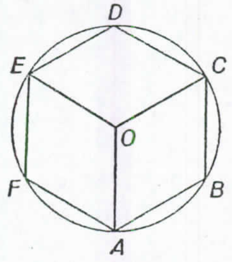
Сл. 871

Троугли CAD и CAE су једнаки, јер имају исту основицу AC и једнаке висине; према томе, четвороугао $CNAD$ = троуглу CNE. Али, како је M на средини дијагонале BD а $MN \parallel DE$, тачка N је на средини дужи EB, и из тога произилази да је троугао CNE = троуглу CNB.

Значи, четвороугао $CNAD$ је једнак троуглу CNB, а то је и требало доказати.

40) Види задатак 2 и 18.

41) Нека је $ABCDEF$ дати правилни шестоугао (сл. 872). Ако свако друго теме спојимо са центром описаног круга око правилног шестоугла, добијамо три четвороугла. Треба доказати да су они међу собом једнаки и да је сваки од њих ромб.

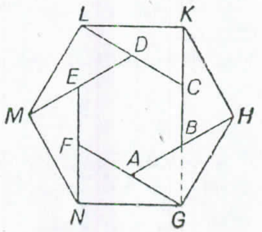


Сл. 872

Познато је да је страна правилног шестоугла једнака полупречнику описаног круга; према томе: $AB = BC = OC = OA$. Значи, да је четвороугао $ABCO$ ромб.

Ако бисмо и друга три темена шестоугла спојили са центром, шестоугао би био подељен на 6 једнаких равностраних троуглова, а сваки ромб би био састављен из два таква троугла. Према томе, ромбови би били међу собом једнаки. Они су уствари подударни.

42) Нека је $ABCDEF$ дати правилни шестоугао (сл. 873). Троугли AGH и BHK су подударни, јер имају по две стране и захваћене углове једнаке $AG = AF = AB = BH$;



Сл. 873

$$AH = 2AB = BK = 2BC.$$

Углови HAG и KBH износе по 60^0, јер је сваки од њих спољашњи угао датог правилног шестоугла. Према томе, $GH = HK$.

На исти начин бисмо доказали једнакост и осталих страна шестоугла $GHKLMN$.

У троуглу AGB страна $AG = AB$ и захваћени угао је 60^0 према томе, троугао AGB је равностран. Троугао GHB је у том случају равнокрак, па како је $\sphericalangle HBG = 120^0$, као спољашњи угао равностраног троугла AGB, то је $\sphericalangle BGH = \sphericalangle GHB = 30^0$.

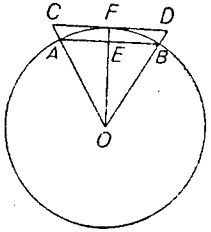
Значи: $\sphericalangle AGH = \sphericalangle AGB + \sphericalangle BGH = 60^0 + 30^0 = 90^0$.

На исти начин би се доказало да је $\sphericalangle BHK = 90^0$; према томе је $\sphericalangle GHK = \sphericalangle GHB + \sphericalangle BHK = 30^0 + 90^0 = 120^0$.

Површина шестоугла $GHKLMN$ = површини шестоугла $ABCDEF$ + 6 површина троугла AGH, јер су троугли AGH,

BHK, CKL, DLM, EMN и FNG међу собом подударни па, према томе, и једнаки. Међутим, правоугли троугао AGH је двапут већи од равностраног троугла ABG (дуж BG полови троугао AGH), или $\frac{1}{3}$ шестоугла $ABCDEF$. Према томе, површина шестоугла $GHKLMN$ = површини шестоугла $ABCDEF$ + $6 \cdot \frac{1}{3}$ шестоугла $ABCDEF$ = 3 површине шестоугла $ABCDEF$, тј. површина шестоугла $GHKLMN$ је трипут већа од површине шестоугла $ABCDEF$.

43) Нека су AB и CD стране правилних шестоуглова, уписаног у кругу и описаног око круга полупречника r (сл. 874).



Сл. 874

Троугли OAB и OCD су слични; према томе:

$$\frac{\text{површина } OAB}{\text{површина } OCD} = \frac{OA^2}{OC^2} = \frac{OE^2}{OF^2};\ OE = \frac{r\sqrt{3}}{2},\ OF = r;$$

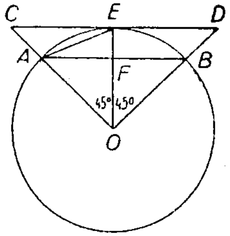
отуда:

$$\frac{\text{површина } OAB}{\text{површина } OCD} = \frac{\frac{3}{4}r^2}{r^2} = \frac{3}{4}.$$

Множећи са 6 чланове ове пропорције добијамо:

$$\frac{\text{површина уписаног шестоугла}}{\text{површина описаног шестоугла}} = \frac{3}{4}.$$

44) Нека су AB и CD стране уписаног и описаног квадрата, AE страна уписаног осмоугла (сл. 875).



Сл. 875

Према задатку 13: површина AOE^2 = = површини AOF · површина COE. Како су правоугли троугли AOB и COD равнокраки, то је $OF = AF$, $OE = CE$; стога је површина $AOF = \frac{AF^2}{2} = \frac{AB^2}{8}$; површина $COE = \frac{CE^2}{2} = \frac{CD^2}{8}$.

Према томе, површина $AOE^2 = \frac{AB^2 \cdot CD^2}{64}$;

а отуда:

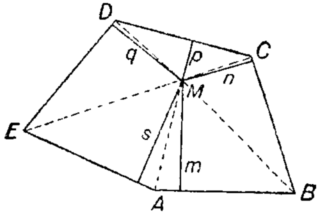
$$8 \text{ површина } AOE = AB \cdot CD.$$

45) Ако су a, b, c стране троугла ABC и ако су полигони конструисани над хипотенузом и катетама P, K, L, зна се да је

$$\frac{P}{a^2} = \frac{K}{b^2} = \frac{L}{c^2} = \frac{K+L}{b^2+c^2}.$$

Како је $a^2 = b^2 + c^2$, то је $P = K + L$.

46) Нека је a страна равностраног петоугла $ABCDE$, а m, n, p, q, s раздаљине неке тачке M у полигону од страна; најзад, нека је P површина полигона (сл. 876).



Сл. 876

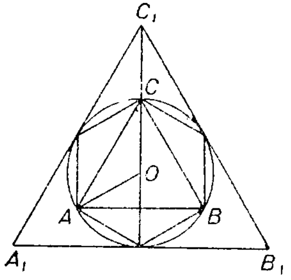
Спојмо тачку M са теменима; тада је:

$$\frac{am}{2} + \frac{an}{2} + \frac{ap}{2} + \frac{aq}{2} + \frac{as}{2} = P;$$

отуда: $m + n + p + q + s = \frac{2P}{a}$.

Из овога се види да збир $m+n+p+q+s$ има исту вредност за сваку тачку M у полигону.

47) Нека је $AB = s_3$, $A_1B_1 = S_3$, $OA = s_6 = r$ (сл. 877).



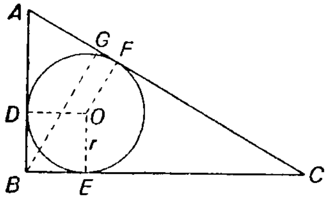
Сл. 877

Знамо да је $r = \frac{2}{3}\,\frac{s_3}{2}\sqrt{3} = \frac{s_3}{3}\sqrt{3}$; отуда: $s_3 = \frac{3r}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3}$, а површина уписаног троугла $\frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$.

Исто тако је $r = \frac{1}{3}\,\frac{S_3}{2}\sqrt{3} = \frac{S_8}{6}\sqrt{3}$; отуда: $S_3 = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}$, и, према томе, површина описаног троугла $\frac{12r^2}{4}\sqrt{3}$, или $3r^2\sqrt{3}$.

Међутим, површина правилног шестоугла је $6\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. Најзад, површина уписаног троугла према површини шестоугла: $\frac{3r^2}{4}\sqrt{3} : \frac{6r^2}{4}\sqrt{3} = 1:2$; површина шестоугла према површини описаног троугла: $\frac{6r^2}{4}\sqrt{3} : 3r^2\sqrt{3} = \frac{1}{2} : 1 = 1:2$; дакле,...

48) Нека су p и q отсечци на хипотенузи, r полупречник уписаног круга.



Сл 878

Зна се да је $BE = BD = r$ (сл. 878), $CF = CE = p$, $AF = AD = q$.

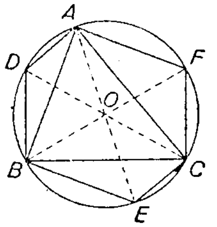
Удвојена површина троугла је $BC \cdot AB$, или $(BE + EC) \cdot (BD + AD)$, или:

$$2\,P = (r + p) \quad (r + q) = r^2 + r \;(p + q) + pq.$$

$r\;(p + q) + r^2$ је површина троугла, јер је pr удвојена површина троугла OEC, или површина четвороугла $OECF$; исто тако, qr је површина четвороугла $OFAD$, а r^2 површина квадрата $BEOD$.

Према томе је $2\,P = P + pq$ или $P = pq$.

49) Два четвороугла $ADBE$ и $AECF$ су подударна (сл. 879), јер су им једнаке стране ($AD = EC$, $DB = CF$, $BE = FA$) и одговарајући углови



Сл. 879

Довољно је да се докаже да је дати троугао једнак једном од два четвороугла.

Како су троугли једнаких основица и једнаких висина једнаки, то је:

$$\triangle ABO = \triangle AOF,$$
$$\triangle BCO = \triangle CFO,$$
$$\triangle AOC = \triangle OEC.$$

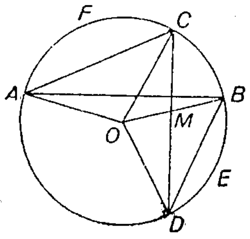
Сабирањем ових једнакости добијамо:

$$\triangle ABC = \square AECF.$$

50) Угао $AOB = 120^\circ$, $\sphericalangle COD = 60^\circ$; троугли ABO и CDO имају по две стране једнаке, $AO = CO$, $BO = DO$ и захваћене углове суплементне. Према задатку 2, ова два троугла су једнака.

51) Угао BMD одређен је полузбиром лукова BED и AFC (сл. 880). Како је по претпоставци овај угао 90°, то и збир лукова $BED + AFC = 180^\circ$, и, према томе, збир углова $BOD + AOC = 180^\circ$.

Троугли OAC и OBD имају по две стране једнаке а захваћене углове суплементне, па су, према задатку 2, једнаки.



Сл. 880

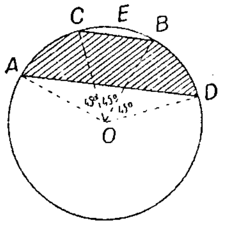
52) Нека је r полупречник уписаног круга, a страна полигона, а m, p, q, s, ... спуштене нормале.

Двострука површина полигона је $n \cdot a \cdot r$, а може се изразити и збиром $am + ap + aq + as + \ldots$; отуда:

$$n \cdot r = m + p + q + s + \ldots..$$

Ову теорему је поставио Вивијани (Viviani).

53) Отсечак $ADBC$ = отсечку AED — отсечак CEB (сл. 881), отсечак AED = исечку $OAED$ — троугао OAD, отсечак CEB = исечку $OCEB$ — троугао OCB.



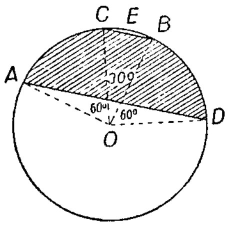
Сл. 881

Троугли OAD и OCB имају између једнаких страна захваћене углове суплементне, и зато су једнаки.

Отсечак $ADBC$ = исечку $OAED$ — исечак $OCEB$, или:

$$\text{отсечак } ADBC = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 135}{360} - \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 45}{360} = \frac{\pi \cdot R^2}{4}.$$

54) Отсечак $ADBC$ = отсечку AED — отсечак CEB (сл 882), отсечак AED = исечку $OAED$ — троугао OAD, отсечак CEB = исечку $OCEB$ — троугао OCB.



Сл. 882

Троугли OAD и OCB једнаки су, јер имају по две стране једнаке и захваћене углове суплементне.

Отсечак $ADBC$ = исечку $OAED$ — исечак $OCEB$, или:

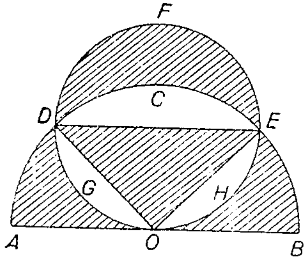
$$\text{отсечак } ADBC = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 150}{360} - \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi \cdot R^2}{3}.$$

55) а) $DE^2 = 2\,r^2 = \frac{1}{2}\,AB^2$ (сл. 883),

$$\text{троугао } DOE = \frac{r^2}{2};$$

према томе, полукруг DFE је половина полукруга ACB.

Отсечак OGD је половина отсечка DCE; отуда:



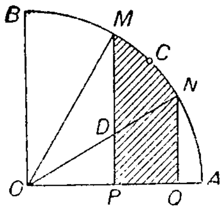
Сл. 883

полумесец $DCEF$ или полукруг DEF — отсечак DCE = полукругу DOE — отсечци $(OGD+OHE)$.

Према томе је полумесец $DCEF$ = троуглу DOE.

б) $AOGD+BOHE$ = исечцима $(AOD+BOE)$ — отсечци $(OGD+OHE)$; према томе је $AOGD+BOHE$ = исечку $DOEC$—отсечак DEC; дакле, $AOGD+BOHE$ = троуглу DOE.

56) Треба да докажемо да је исечак $ONCM$ једнак фигури $MPQNCM$ (сл. 884).



Сл. 884

Како исечак и поменута фигура имају заједничку површину $MDNC$, то треба доказати да је површина MOD = површини $PQND$, или, ако обема површинама додамо OPD, да је површина OPM = површини OQN.

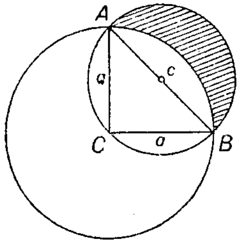
Правоугли троугли OPM и OQN су једнаки, јер су им једнаке хипотенузе $OM=ON$ и оштар угао: $\sphericalangle M = \sphericalangle MOB = \sphericalangle AON$.

57) Површина полукруга над хипотенузом је $\frac{\pi c^2}{8}$ (сл. 885). Површина мањег кружног отсечка над хипотенузом је $\frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{a^2}{2}$. Према томе, површина полумесеца је

$$\pi\frac{c^2}{8} - \left(\frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{a^2}{2}\right),$$

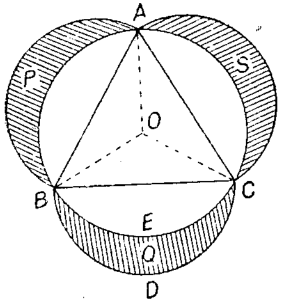
или:

$$\frac{2\pi a^2}{8} - \frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$



Сл. 885

58) Нека је r полупречник круга, а P, Q, S површине трију полумесеца (сл. 886).



Сл.886

$Q = \frac{1}{2}$ круга BCD − отсечак BCE,

$Q = \frac{1}{2}$ круга BCD − исечак $OBEC$+ + троугао OBC.

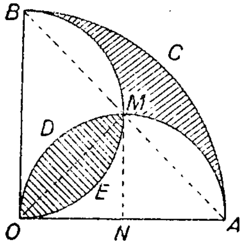
Како су сва три полумесеца једнака, то је

$P+Q+S = \frac{3}{2}$ круга BCD − круг O + троугао ABC; отуда: $P+Q+S$ − троугао ABC = $=\frac{3}{2}$ круга BCD − круг O.

Површина круга O је πr^2, $BC = r\sqrt{3}$, површина круга пречника BC је $\frac{3\pi r^2}{4}$; дакле:

$$P+Q+S - \text{троугао } ABC = \frac{9\pi r^2}{8} - \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{8}.$$

59) а) Повуцимо OM (сл. 887) Углови OMA и OMB су прави као перифериски углови у полукругу; значи, тачке A и B се налазе на правој нормалној на OM у тачки M.



Сл. 887

б) Треба да докажемо да су површине $ACBMA$ и $ODMEO$ једнаке, или, додајући обема површинама површину $OAMEO$, да је површина $OEMBCAO$ = површини $OAMDO$.

Прва површина је

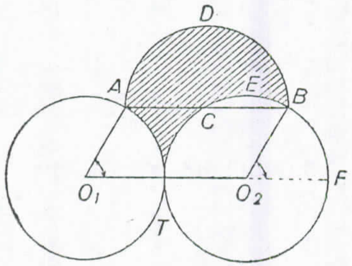
$$\frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{8};$$

друга, исто тако, износи $\frac{\pi R^2}{8}$.

в) У равнокраком троуглу OAB дуж OM је висина, тежишна линија и симетрала угла O; $OM = AM$; M је средина лука O_{MA}, и три отсечка OMD, OME, AMF су једнаки, јер су им тетиве једнаке. Тада је површина $OEMAO$ = површини $ODMAO$ = површина OEM – површина OMD, или: површина $OEMAO$ – површини $ODMAO$ – површина AFM - површина ODM = површини троугла OAM.

Троугао $OAM = \frac{OA \cdot MN}{2} = \frac{R^2}{4} = \frac{1}{4}$ квадрата стране R.

60) Треба да докажемо да је површина $ATCBDA$ = површини O_1O_2BA (сл. 888).



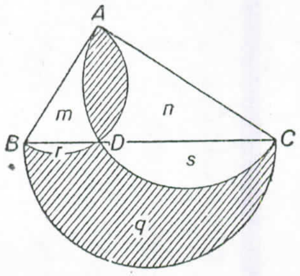
Сл. 888

Ако од обе површине одузмемо површину ATC, треба да докажемо следећу једнакост: површина $ACBDA$ = површини исечка O_1TA + површина TO_2BC; или, ако обема странама последње једнакости додамо површину отсечка CBE, треба да докажемо да је полукруг ABD = површини исечка O_1TA + површина исечка TO_2B.

Како је $AB = O_1O_2 = 2r$, то је површина полукруга $ABD = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$.

Површина исечка O_1TA + површина исечка TO_2B = површини исечка O_2FB + површина исечка $TO_2B = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$.

61) Треба да докажемо да је p + површина $ABC = q$ (сл. 889).



Сл. 889

Полукругови над AB и AC секу се у тачки D, подножју висине AD, јер је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90^0$.

Сем тога, $BC^2 = AB^2 + AC^2$, или:

$$\frac{\pi BC^2}{8} = \frac{\pi AB^2}{8} + \frac{\pi AC^2}{8},$$

што показује да је полукруг пречника BC једнак збиру полукругова пречника AB и AC; тако имамо:

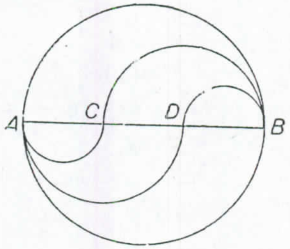
$$r+q+s=r+m+p+p+n+s,$$

или: $q=m+p+n+p$;

али је $m+p+n$ = површини ABC;

дакле, $q=p$ + површина ABC.

62) Површина фигуре BAC (сл. 890) добија се кад се полукругу над AB дода полукруг над AC и одузме полукруг над CB.



Сл. 890

Ако је $r = \frac{AB}{2}$, тада је $r_1 = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{3} = \frac{r}{3}$, а $r_2 = \frac{CB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} r$.

Површина полукруга над AB је $\frac{\pi r^2}{2}$.

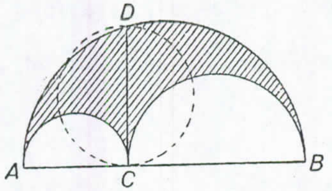
Површина полукруга над AC је $\frac{\pi r_1^2}{2} = \frac{\pi \left(\frac{r}{3}\right)^2}{2} = \frac{\pi r^2}{18}$.

Површина полукруга над CB је $\frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi \left(\frac{2}{3} r\right)^2}{2} = \frac{2}{9} \pi r^2$.

Површина фигуре $BAC = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{18} - \frac{2}{9} \pi r^2 = \frac{9\pi r^2 + \pi r^2 - 4\pi r^2}{18} = \frac{6\pi r^2}{18} = \frac{\pi r^2}{3}$.

На исти начин се доказује да је и површина фигуре $ABD = \frac{\pi r^2}{3}$; значи да је круг подељен на три једнака дела.

63) Површина српа добија се кад се од површине полукруга над AB одузму површине полукругова над AC и CB (сл. 891). Према томе, површина српа једнака је:



Сл. 891

$$\frac{\pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi \left(\frac{AC}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi \left(\frac{CB}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{AB^2}{4} - \left(\frac{AC^2}{4} + \frac{CB^2}{4}\right]=\right)$$

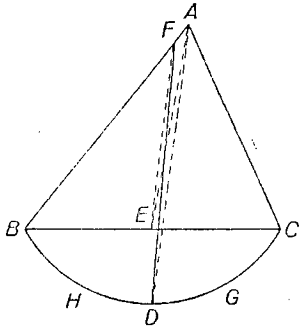
$$= \frac{\pi}{8}[(AC+CB)^2 - (AC^2 + CB^2)] = \frac{\pi}{8}[AC^2 + 2AC \cdot CB + CB^2 - AC^2 - CB^2] = \frac{\pi}{8}[2AC \cdot CB] = \frac{\pi}{4} AC \cdot CB.$$

Кад бисмо спојили тачку D са тачкама A и B, троугао DAB би био правоугли, дуж DC би била висина хипотенузе и $DC^2 = AC \cdot CB$. Заменом у горњем изразу за површину српа добијамо да је $\frac{\pi}{4} AC \cdot CB = \frac{\pi}{4} DC^2 = \pi \left(\frac{DC}{2} \right)^2$, тј. површина српа једнака је површини круга чији је пречник DC, што је и требало доказати.

64) Површина троугла ADE = површини троугла ADF, јер ови троугли имају исту основицу AD и једнаке висине (сл. 892).

Ако овим површинама додамо површину $ACGD$, биће површина $ACGDF$ = = површини ADE + површина $ACGD$, или: површина $ACGDF$ = површини ACE + површина $ECGD$.

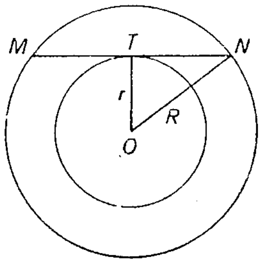
Површина ACE је половина површине троугла ABC, површина $ECGD$ је половина површине отсечка $BCGDH$, јер је DE нормално на BC; према томе, површина $ACGDF$ је половина целе површине $ACDBA$.



Сл. 892

65) Нека су R и r полупречници кругова.

Површина кружног прстена је $\pi R^2 - \pi r^2$ или $\pi \cdot (R^2 - r^2)$. Нека је MTN тетива већег круга која додирује мањи круг (сл. 893). У правоуглом троуглу ONT је $R^2 - r^2 = NT^2$; а отуда: површина $\pi(R^2 - r^2) = \pi \cdot NT^2$ = површини круга чији је пречник MN.

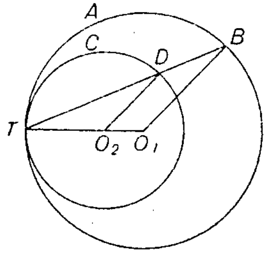


Сл. 893

66) Нека су r_1 и r_2 полупречници два дата круга. Треба да докажемо да је

$$\frac{\text{површина } TAB}{\text{површина } TCD} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \text{(сл. 894).}$$

Равнокраки троугли O_1TB и O_2TD су слични, јер имају један угао на основици T заједнички.



Сл. 894

Отуда: $\frac{\text{површина } O_1TB}{\text{површина } O_2TD} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$.

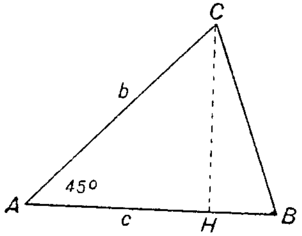
Сем тога, површине исечака O_1TAB и O_2TCD, чији су средишни углови O_1 и O_2 једнаки, пропорционалне су квадратима полупречника. Према томе је

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\text{површина } O_1TAB}{\text{површина } O_2TCD} = \frac{\text{површина } O_1TB}{\text{површина } O_2TD} =$$

$$= \frac{\text{површина } O_1TAB - \text{површина } O_1TB}{\text{површина } O_2TCD - \text{површина } O_2TD}, \text{ или: } \frac{r_1^2}{r_2} = \frac{\text{површина } TAB}{\text{површина } TCD}.$$

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

67) Нека је CH висина повучена из темена C троугла ABC (сл. 895).



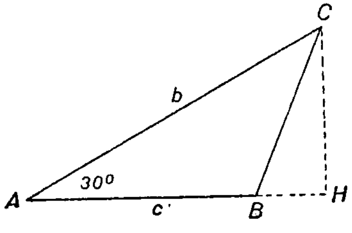
Сл. 895

Површина ABC је $\frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{c \cdot CH}{2}$.

Да бисмо израчунали CH, запазимо да је троугао AHC равнокрако-правоугли, па ће бити $2CH^2 = b^2$; отуда: $CH = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Најзад, површина $ABC = \frac{bc\sqrt{2}}{4}$.

68) Нека је CH висина повучена из темена C троугла ABC (сл. 896).



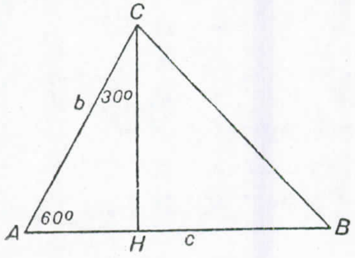
Сл. 896

Површина $ABC = \frac{c \cdot CH}{2}$.

У правоуглом троуглу CHA, у коме је $\sphericalangle A = 30^\circ$ супротна страна CH једнака је половини хипотенузе $= \frac{b}{2}$.

Отуда је површина $ABC = \frac{b \cdot c}{4}$.

69) Површина $ABC = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{c \cdot CH}{2}$ (сл. 897).



Сл. 897

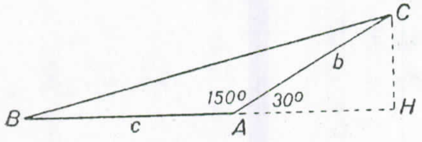
Треба да израчунамо CH. Посматрајмо правоугли троугао AHC. Како је $\sphericalangle ACH = 30^\circ$, то је страна AH половина хипотенузе $\frac{b}{2}$, и тада је

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3b^2}{4};$$

отуда је $CH = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Тада је површина $ABC = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$.

70) Ако је CH висина из темена C, површина $ABC = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{c \cdot CH}{2}$ (сл. 898).

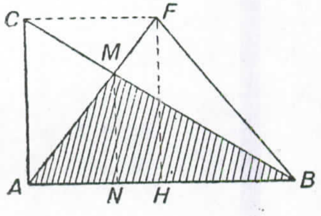


Сл. 898

У правоуглом троуглу CHA угао CAH је 30°; тада је наспрамна страна CH једнака половини хипотенузе $= \frac{b}{2}$; отуда је површина $ABC = \frac{b \cdot c}{4}$.

71) Стране сличних троуглова су пропорционалне, па се стране траженог троугла могу претставити са $3q$, $4q$, $5q$, где је q један произвољан број. Обим овог троугла је тада $12q$. Како је овај троугао правоугли, јер је квадрат једне стране једнак збиру квадрата других двеју, то се његова површина може изразити са $\frac{3q \cdot 4q}{2} = 6q^2$. Према услову задатка је $12q = 6q^2$; отуда је $q = 2$. Значи, стране траженог троугла су 6, 8, 10.

72) Да би равнокраки троугао ABF био једнак троуглу ABC, с обзиром на то што ова два троугла имају исту основицу AB, потребно је и довољно да висина FH буде једнака AC. Значи, тачка F се налази у пресеку симетрале дужи AB и паралеле страни AB повучене из C. Заједнички део ових троуглова је ABM (сл. 899).



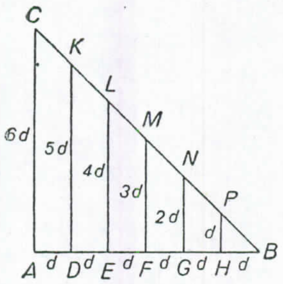
Сл. 899

Површина $ABM = \frac{AB \cdot MN}{2}$.

Знамо да је $AB = 4$, $AH = 2$.

Из сличности троуглова ANM и AFC имамо: $MN : 3 = AM : AF$. Из сличности троуглова ABM и CMF имамо: $AM : 4 = MF : 2 = (AM + MF) : (4 + 2) = AF : 6$; отуда: $AM : AF = 4 : 6 = 2 : 3$. Заменом у првој пропорцији добија се: $MN : 3 = 2 : 3$, или: $MN = 2$. Према томе, површина $ABM = 4$.

73) Нека је троугао ABC (сл. 900) равнокрако-правоугли са правим, углом код A. Поделимо AB, например на 6 једнаких делова чију ћемо дужину означити са d, и кроз деоне тачке повуцимо паралеле DK, EL, ... страни AC. Како су троугли BHP, BGN, ... равнокраки, то је $HP = d$, $GN = 2d$, $FM = 3d$, ... Површина троугла ABC може се изразити са $\frac{6d \cdot 6d}{2}$, или $\frac{36d^2}{2}$.



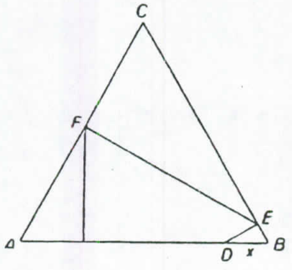
Сл. 900

Израчунајмо сад површину сваког дела. Површина $PHB = \frac{d \cdot d}{2} = \frac{d^2}{2}$, површина $HGNP = \frac{3d^2}{2}$, површина $GFMN = \frac{5d^2}{2}$, ... површина $DACK = \frac{11d^2}{2}$. Како је површина троугла ABC једнака збиру површина шест делова, добићемо:

$$\frac{36d^2}{2} = \frac{d^2}{2} + \frac{3d^2}{2} + \frac{5d^2}{2} + \frac{7d^2}{2} + \frac{9d^2}{2} + \frac{11d^2}{2},$$

или: $36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$, из чега видимо да је збир шест првих непарних бројева једнак 36.

74) Правоугли троугли BDE, CEF, AFG имају по један оштар угао од 60°; према томе је мања катета половина хипотенузе (сл. 901). Дакле:



Сл. 901

$$BE = \frac{x}{2},\quad CE = a - \frac{x}{2},\quad CF = \frac{CE}{2} = \frac{a}{2} - \frac{x}{4},\quad AF = a - \left(\frac{a}{2} - \frac{x}{4}\right) = \frac{a}{2} + \frac{x}{4},$$

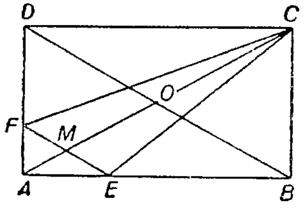
$$AG = \frac{AF}{2} = \frac{a}{4} + \frac{x}{8}.$$

Ако изразимо да су обим и површина једнаки, добићемо:

$$2ak+2bk=abk^2; \text{ отуда је } k=\frac{2(a+b)}{ab}.$$

Према томе је $x=\frac{2(a+b)}{b}$, $y=\frac{2(a+b)}{a}$

80) Означимо површину правоугаоника $ABCD$ са P, а са O пресек његових дијагонала (сл. 905).



Сл. 905

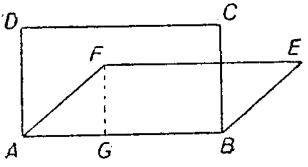
По претпоставци је $AM=\frac{AC}{6}$; значи, $AM=\frac{AO}{3}$.

Како је $EF \parallel BD$, биће $AE=\frac{AB}{3}$; $AF=\frac{AD}{3}$. Површина $BCE=\frac{\frac{2}{3}AB\cdot BC}{2}=\frac{AB\cdot BC}{3}=\frac{P}{3}$.

Површина $DCF=\frac{\frac{2}{3}AD\cdot DC}{2}=\frac{AD\cdot DC}{3}=\frac{P}{3}$.

Најзад, површина четвороугла $AECF$ се добија кад се од правоугаоника $ABCD$ одузму троугли BCE и DCF; његова површина ће бити $\frac{P}{3}$.

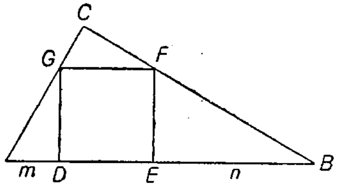
81) Ако је површина паралелограма половина површине правоугаоника, а основице су им једнаке, тада висина паралелограма мора бити половина висине правоугаоника. Према томе је $FG=\frac{AD}{2}=\frac{AF}{2}$, јер је $AF=AD$ (сл. 906). Кад је у троуглу AGF катета FG половина хипотенузе AF, тада је $\sphericalangle FAG=30^0$.



Сл. 906

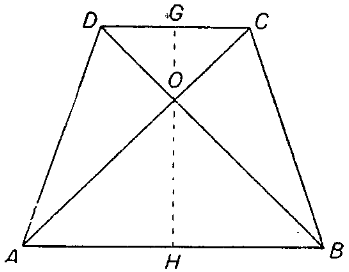
82) Правоугли троугли ADG и EBF (сл. 907) су слични, јер су им углови GAD и BFE једнаки. Из њихове сличности имамо: $m:GD=FE:n$.

Како је $GD=FE$, то је $GD^2=mn$, тј. површина квадрата је mn.



Сл. 907

83) Нека су у трапезу $ABCD$ основице $AB=6$, $CD=3$ и висина $GH=4$ (сл. 908). Израчунајмо најпре површине троуглова OAB, OCD; зато израчунајмо најпре њихове висине OH и OG.



Сл. 908

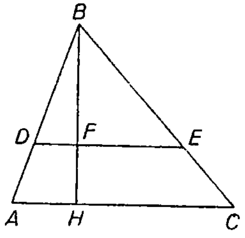
$OH:6=OG:3=(OH+OG):9=4:9$; отуда је $OH=\frac{8}{3}$, $OG=\frac{4}{3}$.

Тада је површина $OAB=\frac{6\cdot\frac{8}{3}}{2}=8$; површина $OCD=\frac{3\cdot\frac{4}{3}}{2}=2$.

Површина $OBC=$ површини $ABC-$ површина $OAB=4$.

Иста вредност би се добила и за површину OAD. Према томе, површине троуглова OAB, OCD, OBC, OAD су $8\,\text{cm}^2$, $2\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$.

84) Нека је $AC=b$, $DE=x$, $BH=h$, $BF=y$ (сл. 909).



Сл. 909

Површина трапеза $ACED=\frac{b+x}{2}(h-y)$.

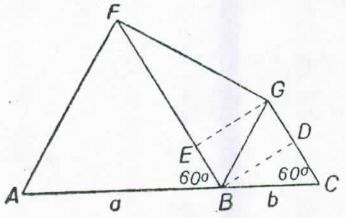
Површина троугла $ABC=\frac{bh}{2}$.

Површина троугла $DEB=\frac{xy}{2}$.

Према услову задатка је $\left[\frac{(b+x)(h-y)}{2}\right]^2=\frac{bh}{2}\cdot\frac{xy}{2}$.

Троугли ABC и DEB су слични; отуда: $b:x=h:y$, или: $y=\frac{h}{b}x$; тада је $\left[\frac{(b+x)\,(h-\frac{h}{b}\cdot x)}{2}\right]=\frac{bhx}{4}\cdot\frac{h}{b}x$; даљим развојем ове једначине добијамо: $x=\frac{-b\pm b\sqrt{5}}{2}$; затим у горњем изразу за y добијамо: $y=\frac{-h\pm h\sqrt{5}}{2}$.

85) Површина четвороугла $AFGC$ је збир површина троуглова ABF, BCG, BGF (сл. 910).



Сл. 910

Површина $ABF=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, површина $BCG=\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$.

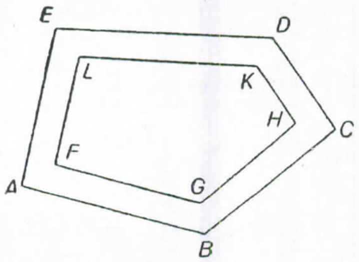
Ако је $GE\perp BF$, површина $BGF=\frac{BF\cdot GE}{2}$; $BF=a$, $GE=BD=\frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Према томе,

$$\text{површина } BGF=\frac{ab\sqrt{3}}{4}.$$

Најзад, површина $AFGC=(a^2+b^2+ab)\frac{\sqrt{3}}{4}$.

86) Нека су $ABCDE$ и $FGHKL$ два полигона, а P површина између њихових обима (сл. 911).



Сл. 911

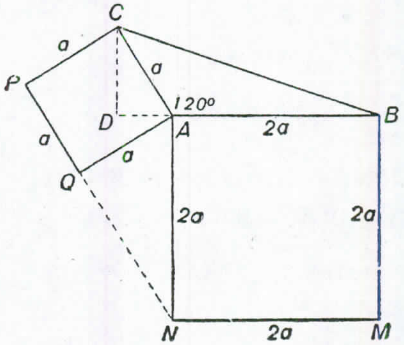
Ако повучемо AF, $BG,\ldots$, поделићемо P на трапезе који имају исту висину d. Тада можемо написати:

$$P=\frac{AB+FG}{2}\cdot d+\frac{BC+GH}{2}\cdot d+\ldots,$$

$$P=\frac{AB+BC+\ldots+FG+GH+\ldots}{2}\cdot d,$$

$$P=(S+s)\cdot d.$$

87) а) Нека је N_1 пресек праве PQ и AN. У правоуглом троуглу AQN_1 (сл. 912) угао N_1 је 30°; према томе, $AN_1=2AQ=2a=AN$, што доказује да се тачке N_1 и N поклапају.



Сл. 912

б) Обим петоугла $BCPNM$ је $2s=BC+CP+PQ+QN+NM+MB$. $CP=PQ=a$, $NM=MB=2a$.

Из правоуглог троугла AQN добијамо: $QN^2=4a^2-a^2=3a^2$; отуда је $QN=a\sqrt{3}$.

Израчунајмо BC. Повуцимо $CD\perp AB$. У троуглу ACD имамо: $\sphericalangle CAD=60^0$, $\sphericalangle ACD=30^0$, $AD=\frac{a}{2}$; затим, $CD^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$, а отуда $CD=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Тада је $BC^2=AB^2+AC^2+2\,AB\cdot AD=4a^2+a^2+2a^2=7a^2$; најзад, $BC=a\sqrt{7}$. Заменом у изразу за обим имамо:

$$2s=a\sqrt{7}+a+a+a\sqrt{3}+2a+2a=a(6+\sqrt{3}+\sqrt{7}).$$

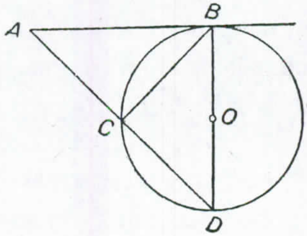
Петоугао $BCPNM$ је збир два квадрата и два троугла; ако је P његова површина, тада је $P=a^2+4a^2+$површина $ABC+$површина AQN.

$$\text{Површина } ABC=\frac{AB\cdot CD}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{површина } AQN=\frac{AQ\cdot QN}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Дакле: $P=5a^2+a^2\sqrt{3}=a^2(5+\sqrt{3})$.

88) Знамо да је $AC:AB=2:3$.

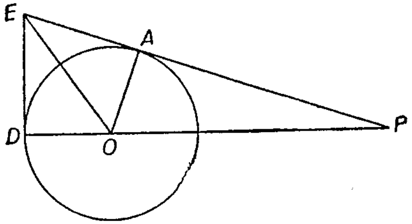


Сл. 913

Троугли ABC и ABD су сличн (сл. 913); отуда: $20:ABD=AC^2:AB^2=4:9$, а из ове пропорције $ABD=45$.

Према томе, површина троугла $BCD=25\text{ dm}^2$.

89) Из слике 914 јасно је да је



Сл. 914

$$DOAE = 2 \cdot DOE = 2 \cdot \frac{DE \cdot r}{2},$$

$$APO = \frac{AP \cdot r}{2}.$$

Према услову задатка је $DE \cdot r = \frac{AP \cdot r}{2}$; отуда је $AP = 2 \cdot DE$, или: $DE = AE = \frac{AP}{2}$;

$$PE = AP + \frac{AP}{2} = \frac{3AP}{2},$$

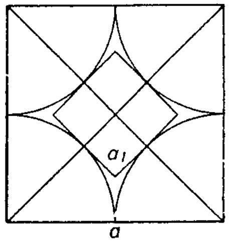
$$DP = \sqrt{\left(\frac{3AP}{2}\right)^2 - \left(\frac{AP}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9AP^2}{4} - \frac{AP^2}{4}} = \sqrt{2AP^2} = AP\sqrt{2}.$$

Међутим је
$$DEP = 2 \cdot APO,$$
$$\frac{DP \cdot DE}{2} = 2 \cdot \frac{AP \cdot r}{2},$$

$$\frac{AP\sqrt{2} \cdot \frac{AP}{2}}{2} = AP \cdot r; \quad \frac{AP\sqrt{2}}{4} = r; \quad AP = \frac{4r}{\sqrt{2}} = \frac{4r\sqrt{2}}{2}; \quad AP = 2r\sqrt{2}.$$

Значи, AP је дијагонала квадрата чија је страна $2r$.

90) Обележимо са a страну датог квадрата а са a_1 страну уписаног квадрата (сл. 915).



Сл. 915

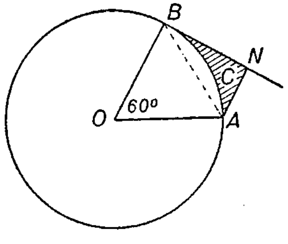
Из слике видимо да је

$$a_1 = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1);$$

према томе:

$$P = a_1{}^2 = a^2(2 - 2\sqrt{2} + 1) = a^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

91) Површина $ACBN$ = трапезу $OANB$ – исечак $OACB$ (сл. 916).



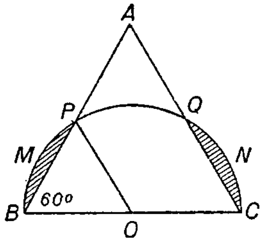
Сл. 916

Исечак $OACB$ је шести део круга и износи $\frac{\pi r^2}{6}$; површина трапеза $OANB = \frac{(OB + AN) \cdot BN}{2}$.

Ако повучемо AB, троугао OAB је равностран, јер има две стране једнаке и један угао од 60°; према томе, $AB = r$; затим, у троуглу ANB, $\sphericalangle NBA = 30^0$, $AN = \frac{r}{2}$, $BN = \frac{r\sqrt{3}}{2}$; дакле, површина трапеза $OANB = \frac{3r^2\sqrt{3}}{8}$.

Најзад, површина $ACBN = \frac{3r^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi r^2}{6} = \frac{9\sqrt{3} - 4\pi}{24} r^2$.

92) Нека је O средина стране BC, P и Q пресеци полукруга са странама AB и AC (сл. 917).



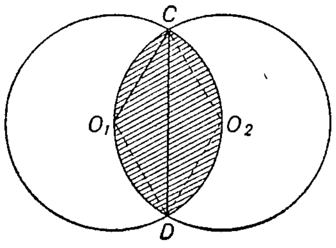
Сл. 917

Троугао OPB, у коме је $\sphericalangle B = 60^0$ и $OB = OP$, равностран је.

Отсечак BPM = исечку $OPMB$ – троугао OPB; ако са a обележимо страну троугла ABC, $OPMB$ је шестина круга чији је полупречник $\frac{a}{2}$; тада је отсечак $BPM = \frac{\pi a^2}{24} - \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^2}{48}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Отсечак CNQ има исту вредност.

93) Нека су C и D пресечне тачке два дата круга (сл. 918)



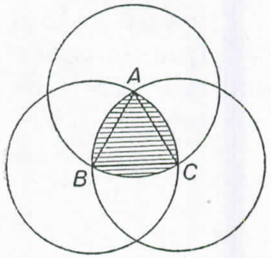
Сл. 918

Троугли O_1O_2C и O_1O_2D су равнострани, $\sphericalangle CO_1D = 120^0$.

Отсечак CDO_2 је разлика између исечка ограниченог полупречницима O_1C и O_1D и троугла O_1DC; овај исечак је трећина круга и износи $\frac{\pi r^2}{3}$, а троугао O_1DC једнак је троуглу $O_1O_2C = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$. Према томе, отсечак $CDO_2 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

Површина отсечка CDO_1 има исту вредност. Површина $O_1DO_2C=2$ отсечка $CDO_2=\frac{2\pi r^2}{3}-\frac{r^2\sqrt{3}}{2}=r^2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

94) а) Површина криволиниског троугла ABC (сл. 919) састављена је из равностраног троугла $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ и три отсечка од 60^0.



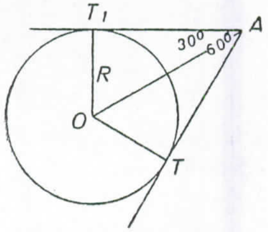
Сл. 919

Дакле: $ABC=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}+3\left(\frac{a^2\pi}{6}-\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right)=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}+a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}+\frac{a^2}{4}(2\pi-3\sqrt{3})=\frac{a^2}{4}(2\pi-3\sqrt{3}+\sqrt{3})=\frac{a^2}{2}(\pi-\sqrt{3})$.

б) Површина криволиниског троугла може се узети као да је састављена из три исечка од 60^0 смањена за два равнострана троугла, или полукруг смањен за два троугла, па имамо:

$ABC=\frac{a^2\pi}{2}-2\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{a^2}{2}(\pi-\sqrt{3})$.

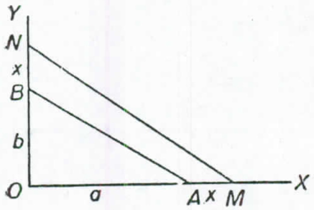
95) Ако је $\sphericalangle TAT_1=60^0$ (сл. 920), тада је $OA=2R$. Површина четвороугла TOT_1A једнака је површини равностраног троугла стране OA. Површина $ATCT_1A$ = површини четвороугла TOT_1A – површина исечка $OTCT_1=$
$=\frac{(2R)^2}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi\cdot r^2\cdot 120}{360}=R^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$.



Сл. 920

96) а) Са слике 921 видимо да је $MN=m=\sqrt{(a+x)^2+(b+x)^2}=$
$$=\sqrt{2x^2+2(a+b)x+a^2+b^2},$$
$$P=\frac{(a+x)\ (b+x)}{2}-\frac{a\,b}{2}=\frac{x^2+(a+b)\,x}{2}.$$

Из ових двеју једначина добија се:
$$a^2+b^2=m^2-4P.$$



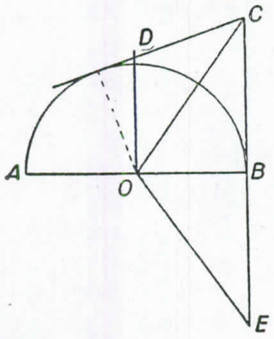
Сл. 921

б) Из горње прве једначине имамо:
$$x=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{2m^2-(a-b)^2}}{2}.$$

Да би x било стварно и позитивно, мора бити $m^2>a^2+b^2$, јер за $m^2=a^2+b^2$ x је или нула или негативно.

в) Из друге једначине под а) добија се:
$$x=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2+8P}}{2},$$
из чега се види да је вредност дискриминанте увек позитивна и већа од $(a+b)^2$. Према томе, да би се добила позитивна вредност за x, треба увек узети позитиван знак испред корена.

97) а) $BC \parallel OD$, $\sphericalangle COD=\sphericalangle BCO$ (сл. 922), $\sphericalangle DOC=\sphericalangle BCO$; отуда $\sphericalangle DCO=\sphericalangle DOC$, тј. троугао DOC је равнокрак, и $OD=DC$.



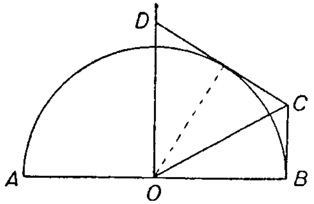
Сл. 922

б) Продужимо CB и пренесимо $BC=$ $=BE$, па спојмо тачку E са центром O. Равнокраки троугли ECO и OCD су слични, јер су им једнаки углови на основици. Из њихове сличности се добија:
$2x:OC=OC:DC$, или: $OC^2=2x\cdot DC$, или:
$r^2+x^2=2x\cdot DC$.

Најзад: $DC=\frac{r^2+x^2}{2x}=OD$.

Према томе, обим трапеза је
$$r+x+2\cdot\frac{r^2+x^2}{2x}=\frac{r^2+rx+2x^2}{x}.$$

Површина трапеза је
$$\left(x+\frac{r^2+x^2}{2x}\right)\cdot\frac{r}{2}=\frac{(3x^2+r^2)\cdot r}{4x}.$$



Сл. 923

в) Ако ставимо $\frac{(3x^2+r^2)\cdot r}{4x}=k^2$, добијамо једначину:

$3rx^2-4k^2x+r^3=0$; отуда је

$$x=\frac{2k^2\pm\sqrt{4k^4-3r^4}}{3r}.$$

Кад је $x>r$, површина трапеза k^2 мора бити већа од површине квадрата стране r, што се види из слике 922.

Кад је $k^2=r^2$, тада је $x=r$.

Кад је $x<r$, површина трапеза k^2 мора бити мања од површине квадрата стране r, што се види из слике 923.

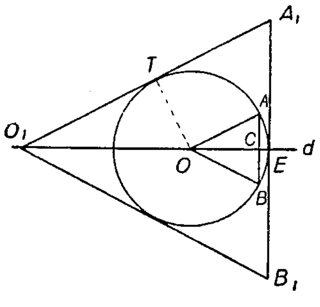
Да би се за x добила стварна вредност, треба да је $k^2\geq\frac{r^2}{2}\sqrt{3}$, тј. да површина трапеза буде већа од двоструке површине равностраног троугла стране r.

98) а) Повуцимо $OT\perp OA$ (сл. 924). Троугли O_1OT и OCA су слични, јер су им оштри углови TO_1O и AOC једнаки. Из њихове сличности имамо:

$O_1O:r=r:\frac{a}{2}$; отуда: $O_1O=\frac{2r^2}{a}=\frac{r}{x}$.

б) $O_1E=O_1O+r=\frac{r}{x}+r=\frac{r}{x}(1+x)$.

Троугли AOB и $A_1O_1B_1$ су слични; отуда: $A_1B_1:a=O_1E:OC$, или: $A_1B_1=\frac{a}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.



Сл. 924

Затим: $O_1A_1=O_1B_1=\frac{r}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

в) $OC=r\sqrt{1-x^2}$; $P=\frac{a}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot r\sqrt{1-x^2}=\frac{ar}{x}(1+x)$,

$$P_1=\frac{ar}{2}\sqrt{1-x^2},\quad P_2=\frac{ar}{2x^2}(1+x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

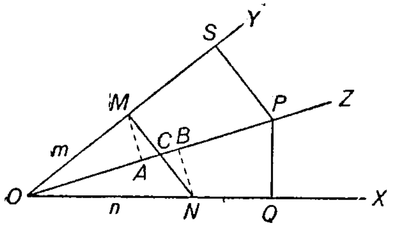
$$\left(\frac{P}{2}\right)^2=P_1\cdot P_2=\frac{a^2r^2}{4x^2}(1+x)^2.$$

г) $$\frac{P_1\cdot r^2}{P_2\cdot a^2}=\frac{\frac{ar^3}{2}\sqrt{1-x^2}}{\frac{a^3r}{2x^2}(1+x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=\frac{r^2x^2}{a^2}\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-x}{1+x}.$$

Ако x расте од 0 до 1, овај однос опада од $\frac{1}{4}$ до нуле.

в) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

99) Нека су PQ, PS нормале на OX и OY (сл. 925).



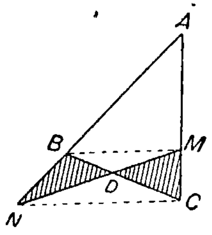
Сл. 925

$$\frac{\text{Површина } ONP}{\text{површина } OMP}=\frac{\frac{1}{2}\cdot n\cdot PQ}{\frac{1}{2}\cdot m\cdot PS}=\frac{n}{m}\cdot\frac{PQ}{PS}.$$

Да би постојао однос $\frac{FQ}{PS}=\frac{m}{n}$, потребно је и довољно да десна страна горње једнакости буде 1 или да буде површина ONP = површини OMP, или узимајући OP као заједничку основицу овим троуглима и повлачећи MA и NB нормално на OP, да је $MA=NB$, или, најзад, да је $CM=CN$.

Отуда је геометриско место тачака P у углу XOY, под условом да је $\frac{PQ}{PS}=\frac{m}{n}$, полуправа OZ која се добија спајањем тачке O са средином дужи MN.

100) Нека је равнокраки троугао ABC ($AB = AC$), тачка M на краку AC и MN права која сече основицу у тачки D (сл. 926).

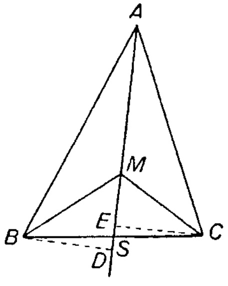


Сл. 926

Да би површина AMN била једнака површини ABC, потребно је и довољно да буду једнаки троугли DCM и DBN, или да буду једнаки троугли NCM и NCB.

Како ова два троугла имају исту основицу NC, потребно је да су им висине једнаке, или да је $BM \parallel NC$. Према томе, тражену ћемо праву добити ако повучемо дуж MB, затим $CN \parallel MB$ и спојимо тачке N и M.

101) Нека је M тачка у троуглу ABC (сл. 927).



Сл. 927

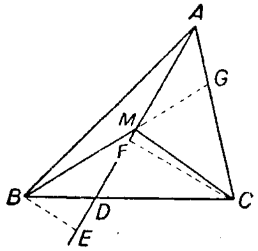
Ако су троугли MAB и MAC једнаки, висине BD и CE које одговарају заједничкој страни AM једнаке су. Према томе, правоугли троугли BDS и CES су подударни, јер су им једнаке стране $BD = CE$, као и оштри углови. Из подударности имамо $BS = CS$, што показује да M лежи на тежишној линији AS.

И, обрнуто, ако је M нека тачка на AS, тада је $BD = CE$; троугли MAB и MAC су једнаки.

Дакле, да би троугли MAB, MBC, MCA били једнаки, потребно је и довољно да се M налази на свакој тежишној линији, тј. у њиховом пресеку.

102) Нека су m, n, p три дате дужине; тада треба да је

$$\frac{\text{површина } MAB}{m} = \frac{\text{површина } MBC}{n} = \frac{\text{површина } MCA}{p}.$$



Сл. 928

Продужимо AM до пресека D са страном BC и повуцимо $BE \perp AD$ (сл. 928), тада можемо написати:

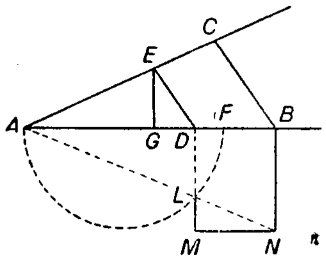
$$\frac{MAB}{MAC} = \frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD}.$$

Да би било $\frac{MAB}{MAC} = \frac{m}{p}$, потребно је и довољно да је $\frac{BD}{CD} = \frac{m}{p}$, а ова једнакост омогућава конструкцију тачке D на страни BC.

Исто тако, налазимо $\frac{CG}{AG} = \frac{n}{m}$, што омогућава конструкцију тачке G на страни AC.

Кад се одреде положаји тачака D и G, повуку се дужи AD и BG, и њихов пресек даје тачку M.

103) Кад су углови познати, може се конструисати један троугао ADE сличан траженом троуглу (сл. 929).



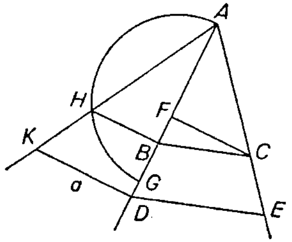
Сл. 929

Продужимо основицу AD за извесну дужину DF једнаку половини висине EG троугла ADE; над AF опишимо полукруг ALF; нормала DL је страна квадрата једнаког троуглу ADE, јер је $DL^2 = AD \cdot DF$. На DL пренесимо дужину $DM = k$, повуцимо ALN, повуцимо, затим, $MN \parallel AD$, $NB \perp AD$, и, најзад, $BC \parallel DE$.

Троугао ABC је тражени троугао. Троугли ABC и ADE су слични, а, исто тако, и троугли ANB и ALD. $ADE : ABC = AD^2 : AB^2 = DL^2 : BN^2 = DL^2 : k^2$.

Ако упоредимо прву и последњу размеру, видимо да су им први чланови једнаки, па морају и други бити једнаки, или, $ABC = k^2$.

104) Нека је ABC троугао са којим тражени троугао треба да је сличан, и нека је a страна квадрата са којим треба да је једнак (сл. 930).



Сл. 930

Тражени троугао ће се добити ако се повуче $DE \parallel BC$, тако да је $\triangle DEA = a^2$, или да је

$$\frac{AD^2}{AB^2} = \frac{a^2}{\text{површина } ABC}.$$

Ако је CF нормално на AB, продужимо AB за $BG=\frac{CF}{2}$ и повуцимо $BH\perp AB$ до пресека са полукругом пречника AG; тада је $BH^2=AB\cdot BG=\frac{AB\cdot CF}{2}$ = површина ABC; $\frac{AD^2}{AB^2}=\frac{a^2}{BH^2}$, или: $\frac{AD}{AB}=\frac{a}{BH}$.

Ако је DK нормално на AD, ова пропорција нам показује да је $DK=a$.

У исто време ова пропорција нам показује како се добија тачка D. Кад се одреди положај тачке D, повуче се $DE \parallel BC$.

105) Треба конструисати равнокрако-правоугли троугао код кога ће дата дуж бити збир катете и хипотенузе. Хипотенуза ће дати онај део дужи над којим је квадрат двапут већи од квадрата над другим делом једнаком катети.

Конструкција троугла се своди на конструкцију правоуглог троугла чија је једна катета дата дуж, а оштар угао на њој $\frac{45^0}{2}$. Симетрала хипотенузе овог троугла поделиће катету према захтеву задатка.

106) Треба конструисати правоугли троугао чија је хипотенуза једнака страни датог квадрата а дуж коју треба поделити једнака збиру катета.

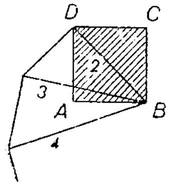
107) Ако страну датог троугла ABC обележимо са a, одговарајућу висину са h, а страну траженог квадрата са x, тада је

$$x^2=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{a}{2}\cdot h.$$

x је, према томе, геометриска средина за $\frac{a}{2}$ и h и може се конструисати.

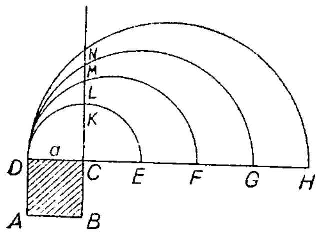
На исти се начин може конструисати равнострани троугао једнак датом троуглу или датом правоугаонику.

108) а) Нека је BC страна датог квадрата (сл. 931). Дијагонала је страна двапут већег квадрата. Правоугли троугао BDE, коме је једна катета BD а друга $DE=BC$, даје хипотенузу над којом је квадрат трипут већи од датог квадрата. Итд.



Сл. 931

б) Продужимо једну страну датог квадрата, например страну DC (сл. 932) и на ту полуправу пренесимо $CE=EF=FG=GH=$ итд. $=$ страни датог квадрата. Опишимо полукругове над пречницима DE, DF, DG, итд., па ће бити:



Сл. 932

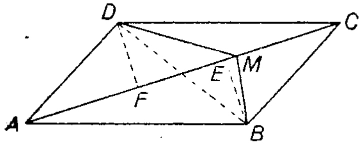
$CK^2=a^2,$

$CL^2=2\,a^2,$

$CM^2=3\,a^2,$

$CN^2=4\,a^2$ итд.

109) Спојмо M са A, B, D (сл. 933). Треба да је површина $MAB=$ површини $MAD=$ површини $MBCD$. (Види зад. 31). Повуцимо BE и DF нормално на AC. Како је $BS=DS$, правоугли троугли BSE и DSF су подударни и $BE=DF$.



Сл. 933

Према томе, за сваку тачку M на дијагонали AC биће:

површина MAB = површини MAD,

површина MBC = површини MDC,

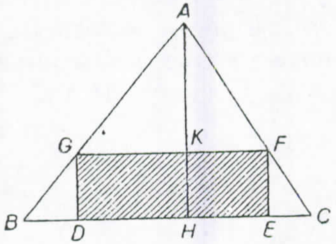
јер ови троугли имају једнаке основице и једнаке висине. Значи, да би био испуњен услов задатка, довољно је да је површина $MAD=2$ површине MCD, или:

$$\frac{MA\cdot DF}{2}=2\cdot\frac{MC\cdot DF}{2},$$

а отуда $MA=2\cdot MC$.

Тачка M је на трећини дијагонале AC рачунајући од темена C.

110) Нека је површина AGF = површини $DEFG$ (сл. 934),



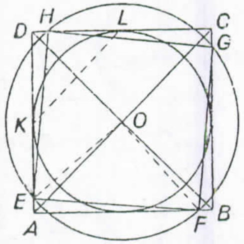
Сл. 934

или: $$\frac{GF \cdot AK}{2} = GF \cdot GD,$$

а отуда $$\frac{AK}{2} = GD.$$

Значи, висина троугла AGF је двапут већа од висине правоугаоника, тј. AK је $\frac{2}{3}$ од висине датог троугла а DG је $\frac{1}{3}$.

111) Нека је a страна датог квадрата а k страна траженог квадрата.



Сл. 935

Довољно је око пресека дијагонала датог квадрата описати круг полупречника $\frac{K}{\sqrt{2}}$.

$$OE^2 + OF^2 = \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2} = k^2 \text{ (сл. 935).}$$

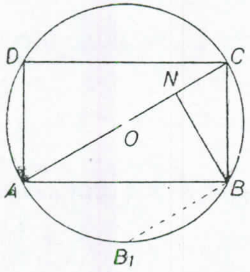
Минимум се добија кад круг додирује стране датог квадрата $ABCD$; тада је страна уписаног квадрата KL.

$$OL = OK = \frac{a}{2}, \quad KL^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Према томе, најмањи квадрат се добија кад се редом споје средине страна датог квадрата.

За k се могу узимати све вредности веће од $\frac{a}{\sqrt{2}}$ а мање од a. Круг ће сећи сваку страну квадрата у двема тачкама, па ће за једну исту вредност k бити два решења.

112) Нека је k^2 површина правоугаоника $ABCD$, а R полупречник описаног круга (сл. 936). Дијагонале овог правоугаоника су пречници и његова површина је двапут већа од површине троугла ABC. Значи,

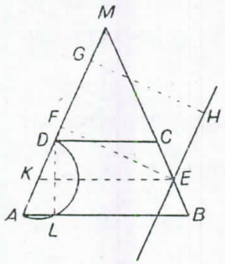


Сл. 936

$$2R \cdot BN = k^2; \text{ отуда је } BN = \frac{k^2}{2R}.$$

Према томе, конструише се, најпре, дужина $\frac{k^2}{2R}$, повуче се пречник AC и паралела пречнику на растојању $\frac{k^2}{2R}$. Ова права сећи ће круг у двема тачкама B и B_1.

113) У задатку 19 видели смо да се површина трапеза може добити ако једну непаралелну страну помножимо раздаљином њеном од средине друге непаралелне стране. Према томе, на крак угла M на коме су узете тачке A и D (сл. 937) треба подићи нормалу $GH = \frac{m^2}{AD}$ и повући $HE \parallel MA$; тако ће се добити тачка E, средина непознате стране BC; затим, треба спојити E са K, средином дужи AD, и повући DC и AB паралелно са KE.



Сл. 937

114) а) Над AD као над пречником (сл. 937) треба описати полукруг и из D пресећи луком полупречника DL; затим, треба повући ALB и $DC \parallel AB$.

б) Треба повући паралеле AB и CD, тако да на другом краку отсецају дуж d. Са слике 937 видимо да је

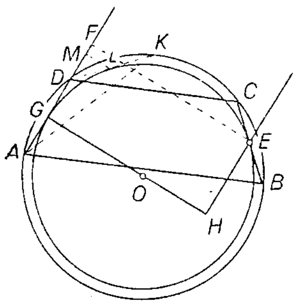
$$MC : d = MD : DA; \text{ отуда је } MC = \frac{d \cdot MD}{AD}.$$

115) Нека је $ABCD$ тражени трапез (сл. 938).

Површина се добија множењем једне непаралелне стране AD са висином EF спуштеном из средине E супротне стране. Значи, $AD \cdot EF = m^2$; отуда је

$$EF = \frac{m^2}{AD}.$$

Дуж EF је лако конструисати као трећу пропорционалу. Пренесимо нађену дужину на нормалу подигнуту у средини G стране AD до H, повуцимо $HE \parallel AD$ до пресека са кругом полупречника OG концентричним датом кругу.



Сл. 938

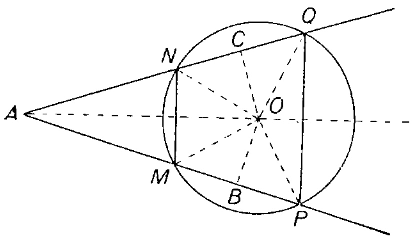
а) Постоје два решења, јер права HE сече круг у двема тачкама.

б) Максимум ће бити кад је GH или $\frac{m^2}{AD} = 2\,GO$; отуда је $m^2 = 2\,GO \cdot AD$.

в) Трапез се своди на троугао AKD кад трећа пропорционала постане ML (DL је дирка унутрашњег круга).

г) За вредност $m^2 < AD \cdot ML$ тетива AD није више једна од непаралелних страна; она постаје дијагонала трапеза кад се теме C налази у A или D. Кад AD постане дијагонала, трапез може све више опадати док не постане једнак нули.

116) Довољно је посматdати један од троуглова (сл. 939) јер су троугли MPO и NQO једнаки.



Сл. 939

Треба да је

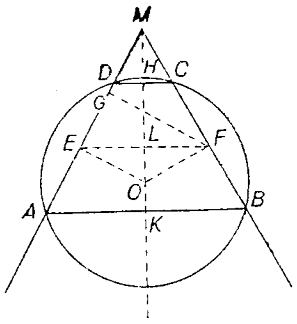
$$MPO = \frac{MP \cdot OB}{2} = \frac{k^2}{2};\text{ отуда је}$$

$$MP = \frac{k^2}{OB}.$$

MP је, према томе, трећа геометриска пропорционала. Треба, значи из O спустити на крак нормалу OB и на њега пренети половину MP с једне и друге стране тачке B, спојити M и P са тачком O и описати круг полупречником $OM = OP$.

117) Спустимо из центра нормале OE, OF и из F нормалу FG; тада је EF средња линија (сл. 940).

а) Довољно је одредити висину HK и по половину пренети на симетралу од L до H и од L до K, јер је



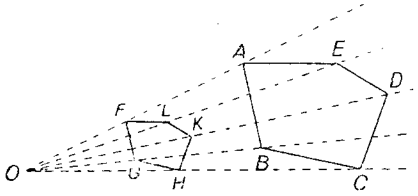
Сл. 940

$$EF \cdot HK = m^2,\text{ а отуда } HK = \frac{m^2}{EF}.$$

б) Може се одредити и AD и половина пренети од E до D а половина од E до A. Дуж AD добијамо овако:

$$AD \cdot FG = m^2,\ AD = \frac{m^2}{FG}.$$

118) Нека је a страна полигона M а x хомолога страна полигона X. У том случају је



Сл. 941

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\text{површина } X}{\text{површина } M}.$$

Како је по претпоставци површина X = површини N, то је

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\text{површина } N}{\text{површина } M},\text{ или,}$$

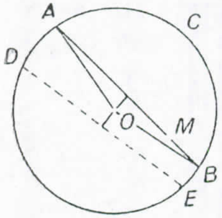
ако су m и n стране квадрата једнаких полигонима M и N:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{n^2}{m^2},\text{ а отуда: } \frac{x}{a} = \frac{n}{m}.$$

x се може конструисати као четврта пропорционала за m, n, a. Кад се одреди x, остаје да се конструише полигон X сличан полигону M тако да је x хомолога страна страни a полигона M. Зато се страна $FG = x$ постави паралелно страни $AB = a$ и повуку праве AF и BG чији је пресек тачка O (сл. 941). Тада се повуку праве OC, OD, OE; затим, $GH \parallel BC$, $HK \parallel CD$, $KL \parallel DE$. Полигон $FGHKL$ биће тражени полигон.

119) Како исечак $AOBC$ (сл. 942) треба да је $\frac{5}{12}$ од круга, лук ACB, или $2\,l$, треба исто тако да је $\frac{5}{12}$ од обима круга.

Поделимо обим на 12 једнаких делова повуцимо тетиву DE која одговара луку $\frac{5}{12}$. Довољно је кроз тачку M повући тетиву једнаку тетиви DE. Око тачке O опишимо круг који додирује тетиву DE и кроз тачку M, повуцимо тангенту AMB. Исечак $AOBC$ је $\frac{5}{12}$ круга.

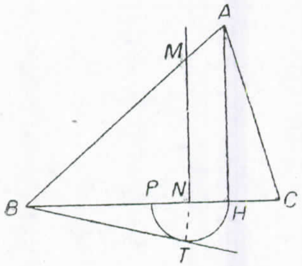


Сл. 942

Може бити једно решење, два, или ниједно, према томе да ли је тачка M на кругу, у кругу, или ван круга.

г) ПОДЕЛА И ПРЕТВАРАЊЕ СЛИКА

120) Нека је AH висина троугла ABC повучена из темена A (сл. 943). Хоћемо троугао ABC једном правом нормалном на BC да поделимо на два једнака дела.



Сл. 943

Претпоставимо да је $BH > HC$; тада је површина $BHA >$ површине HCA. По претпоставци је

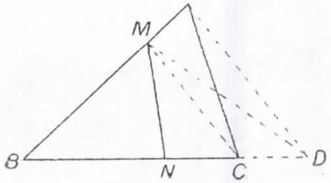
површина $BNM = \frac{1}{2}$ површине ABC,

или: $\frac{BN \cdot NM}{2} = \frac{1}{2} \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{1}{2} BP \cdot AH$,

где је P средина стране BC; отуда: $BN : BP = AH : NM$,
или: $BN : BP = BH : BN$, а отуда: $BN^2 = BP \cdot BH$.

Према томе, BN је геометриска средина између BP и PH. Опишимо неки круг који пролази кроз тачке P и H и повуцимо тангенту BT; тада је $BT^2 = BP \cdot BH$. Треба само пренети BT на BC да би се добила тачка N, а, затим, повући $NM \parallel BC$.

121) Нека је троугао ABC дати троугао и на страни AB нека је дата тачка M (сл. 944).



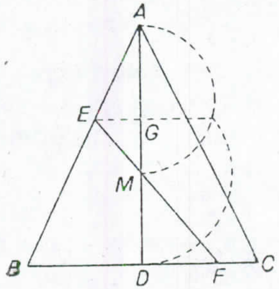
Сл. 944

Треба кроз M да повучемо праву која ће поделити троугао на два једнака дела.

Кад би M било на средини стране AB, тражена права би се поклапала са тежишном линијом. Претпоставимо да M није на средини стране AB и да је $AM < BM$. Тада би површина троугла AMC била мања од површине троугла BMC; тражена права, према томе, мора сећи страну BC. Нека је N та тачка пресека. Повуцимо $AD \parallel MC$. Троугли MCA и MCD су једнаки, јер имају исту основицу и једнаке висине; тада је четвороугао $MNCA$ једнак троуглу MND. Значи, да би $MNCA$ било једнако MND, потребно је и довољно да троугли MND и MBN буду једнаки, или да N буде на средини дужи BD.

Тачка N ће се добити ако се најпре повуче $AD \parallel MC$, па нађе средина дужи BD.

122) Нека је EMF тражена права (сл. 945).



Сл. 945

Троугао MEA треба да је једнак троуглу MDF, јер две једнаке површине ADC и $ACFE$ имају заједнички део $AMFC$; отуда је

$$AM \cdot EG = MD \cdot DF,$$

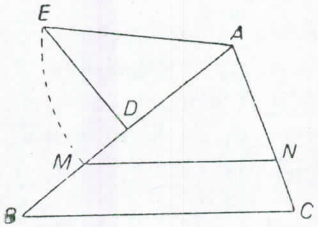
где је EG висина троугла AEM.

Знамо да је $DF : EG = MD : MG$, или: $DF \cdot MG = EG \cdot MD$.

Множећи прву и другу једнакост, добијамо:
$MG \cdot AM = MD^2$.

MG је, према томе, трећа пропорционала, коју је лако конструисати.

123) Нека је ABC дати троугао и $MN \parallel BC$ (сл. 946).

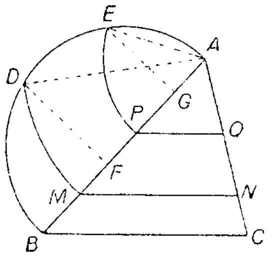


Сл. 946

Да би делови AMN и $BCNM$ били једнаки, треба да је троугао AMN једнак половини троугла ABC. Ова два троугла су слична, а за сличне троугле се зна да су им површине пропорционалне са квадратима хомологих страна; према томе, треба да је $AM^2 : AB^2 = 1 : 2$; отуда: $AM = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$, из чега видимо да је AM дијагонала квадрета стране $\frac{AB}{2}$.

На нормалу повучену на AB у њеној средини D пренесе се $DE = AD = \frac{AB}{2}$; тада је $AE = \frac{AB}{2}\sqrt{2}$. Тачка M се добије преношењем AE на AB.

124) Нека су MN, PQ паралеле које деле површину троугла ABC на три дела пропорционална тримa датим дужима m, n, p (сл. 947). Тада је $\frac{APQ}{m} = \frac{MNPQ}{n} = \frac{BCNM}{p}$, или:



Сл. 947

$$\frac{APQ}{m} = \frac{AMN - APQ}{n} = \frac{ABC - AMN}{p}. \qquad (1)$$

Троугли APQ, AMN, ABC су слични, и из њихове сличности добијамо:

$$\frac{APQ}{AP^2} = \frac{AMN}{AM^2} = \frac{ABC}{AB^2},$$

а отуда, ако са k обележимо заједничку вредност ових односа:

$$APQ = k \cdot AP^2,\ AMN = k \cdot AM^2,\ ABC = k \cdot AB^2.$$

Заменом у једнакостима (1) добија се:

$$\frac{AP^2}{m} = \frac{AM^2 - AP^2}{n} = \frac{AB^2 - AM^2}{p}. \qquad (2)$$

Опишимо полукруг над AB као над пречником; затим, лукове MD, PE око центра A; најзад, DF, EG нормално на AB. Тада је

$AM^2 = AD^2 = AB \cdot AF$, $AP^2 = AE^2 = AB \cdot AG$, и једнакости (2) постају:

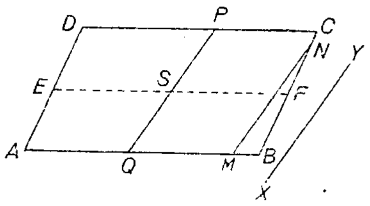
$$\frac{AG}{m} = \frac{AF - AG}{n} = \frac{AB - AF}{p}, \text{ или: } \frac{AG}{m} = \frac{FG}{n} = \frac{BF}{p}.$$

Према томе, тачке F и G ће се добити ако се страна AB подели на три дела пропорционална дужима m, n, p.

Кад су одређене тачке F и G, тада се одреде тачке D и E, затим M и P, и, најзад, повуку паралеле MN и PQ.

125) Страну на којој је дата тачка подели на 4, 5, 6 итд. делова, десну тачку спој са супротним теменом, па ради као у задатку 121.

126) Права која дели паралелограм на два једнака дела не сече две узастопне стране, јер свака права MN која сече, например, AB и BC гради троугао MBN чија је површина мања од површине ABC, тј. мања од половине површине паралелограма $ABCD$.



Сл. 948

Нека права PQ сече две супротне стране (сл. 948). Повуцимо дуж EF која спаја средине страна AD и BC; ова дуж је паралелна другим двема странама и сече PQ по средини S.

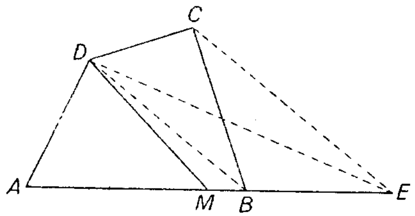
Трапези $AQPD$, $QBCP$ имају једнаке висине; да би били једнаки, потребно је и довољно да је

$$ES = SF.$$

Према томе, PQ ће се добити ако се повуче кроз S, средину дужи EF, паралела датој правој.

(S је пресек дијагонала паралелограма $ABCD$.)

127) Нека је $ABCD$ дати четвороугао. Треба да га поделимо на два једнака дела правом повученом кроз теме D (сл. 949).



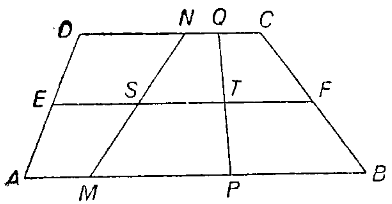
Сл. 949

Ако су троугли ABD и CBD једнаки, ова права је очевидно дијагонала DB. Претпоставимо да ABD и CBD нису једнаки и да је површина ABD већа од површине CBD; тада тражена права треба да сече страну AB. Нека је тачка пресека тачка M.

Повуцимо $CE \parallel DB$, затим повуцимо DE. Троугао DCB је једнак троуглу DBE и, према томе, троугао DME је једнак четвороуглу $DMBC$. Како права DM дели четвороугао $ABCD$ на два једнака дела, два троугла AMD и MED су једнака; тачка M је на средини дужи AE.

Према томе, тачка M се добија кад се најпре повуче $CE \parallel DB$ и одреди средина дужи AE.

128) Нека је дати трапез $ABCD$ а MN, PQ две праве које секу паралелне стране, али се не секу у унутрашњости трапеза (сл. 950).



Сл. 950

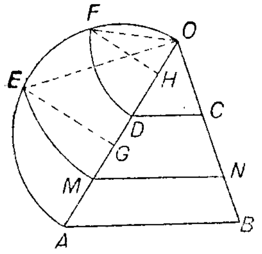
Повуцимо EF спајајући средине непаралелних страна AD и BC; ова дуж сече MN и PQ у њиховим срединама S и T.

Зна се да је површина трапеза једнака производу висине и средње линије. Према томе, како трапези $AMND$, $MPQN$, $PBCQ$ имају једнаке висине, њихове површине су пропорционалне њиховим средњим линијама ES, ST, TF; то значи, да би ова три дела трапеза $ABCD$ била једнака, потребно је и довољно да буде $ES = ST = TF$.

Дакле, EF се подели на три једнака дела тачкама S и T, па се повуку кроз њих произвољне праве MN и PQ које секу паралелне стране, а не секу се у трапезу $ABCD$.

Делећи средњу линију трапеза на n једнаких делова и поступајући даље као што је сад речено, трапез ће се поделити на n једнаких делова.

129) Нека је трапез $ABCD$ правом MN паралелном основицама подељен на два дела $ABNM$, $MNCD$ пропорционална датим дужинама m и n (сл. 951). (Види зад. 124.). Тада је



Сл. 951

$$\frac{OAB - OMN}{m} = \frac{OMN - ODC}{n}. \qquad (1)$$

Троугли OAB, OMN, ODC су слични, и отуда:

$$\frac{OAB}{OA^2} = \frac{OMN}{OM^2} = \frac{ODC}{OD^2}.$$

Ако са k обележимо заједничку вредност ових односа, биће:

$$OAB = k \cdot OA^2,\ OMN = k \cdot OM^2,\ ODC = k \cdot OD^2.$$

Једнакости (1) постају:

$$\frac{OA^2 - OM^2}{m} = \frac{OM^2 - OD^2}{n}. \qquad (2)$$

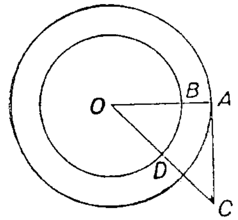
Опишимо полукруг над AO као над пречником, затим лукове ME и DF; повуцимо $EG \perp AB$ и $FH \perp AO$, тада је $OD^2 = OF^2 = OA \cdot OH$, $OM^2 = OE^2 = OA \cdot OG$.

Заменом у једнакостима (2) добија се:

$$\frac{OA - OG}{m} = \frac{OG - OH}{n}, \text{ или: } \frac{AG}{m} = \frac{GH}{n}.$$

Отуда ова конструкција: Тачка H се одреди као што смо показали. AH се подели на два дела AG и GH пропорционална са m и n; на тај начин се добије тачка G, затим E, и, најзад, тражена тачка M, из које се повуче MN паралелно основицама трапеза.

130) Нека је OA полупречник датог а OB полупречник траженог круга (сл. 952).



Сл. 952

Површина траженог круга треба да је половина датог круга:

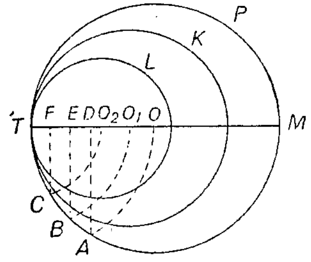
$$\pi OB^2 = \frac{1}{2} \pi OA^2, \text{ или}$$

$$OB^2 = \frac{OA^2}{2}, \text{ или } OB = \frac{OA\sqrt{2}}{2}.$$

Полупречник OB је, према томе, половина дијагонале квадрата стране OA.

Зато, повуцимо AC нормално и једнако са OA; тада је $OC = OA\sqrt{2}$, а OB је једнако OD, половини дужи OC.

131) Нека је круг P са центром у O подељен на три једнака дела круговима K и L чији су центри у O_1 и O_2 и који додирују круг P у тачки T (сл. 953). Тада можемо написати:



Сл. 953

$$\pi TO_2^2 = \pi (TO_1^2 - TO_2^2) = \pi (TO^2 - TO_1^2), \text{ или:}$$

$$TO_2^2 = TO_1^2 - TO_2^2 = TO^2 - TO_1^2. \qquad (1)$$

Из тачке T опишимо лукове OA, O_1B, O_2C полупречницима TO, TO_1, TO_2 и повуцимо AD, BE, CF нормално на TM. Ако претпоставимо да је повучено TA и MA, троугао TAM је правоугли, па добијамо:

$$TA^2 = TM \cdot TD, \text{ или: } TO^2 = TM \cdot TD.$$

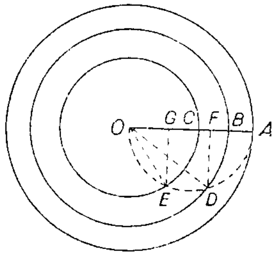
Слично томе:

$$TO_1^2 = TM\cdot TE,\quad TO_2^2 = TM\cdot TF.$$

Заменом у једнакостима (1) добија се: $TM\cdot TF = TM\cdot TE - TM\cdot TF = TM\cdot TD - TM\cdot TE$, или: $TF = TE - TF = TD - TE$, или: $TF = FE = ED$.

Дакле, да бисмо добили центре O_1 и O_2 опише се лук OA око тачке T полупречником TO, повуче се AD нормално на TM, подели се TD на три једнака дела $TF = FE = ED$ и, најзад, повуче се FC, EB нормално на TM, па пренесе TC и TB на TM, тако да је $TC = TO_2$ и $TB = TO_1$.

132) Нека је OA полупречник датог круга а OB и OC полупречници тражених кругова (сл. 954); тада можемо написати:



Сл. 954

$$\frac{\pi OA^2-\pi OB^2}{m}=\frac{\pi OB^2-\pi OC^2}{n}=\frac{\pi OC^2}{p},$$

или:

$$\frac{OA^2-OB^2}{m}=\frac{OB^2-OC^2}{n}=\frac{OC^2}{p}.$$

Опишимо полукруг пречника OA; нека су D и E његови пресеци са унутрашњим круговима; повуцимо DF и EG нормално на OA, тада је

$$OB^2 = OD^2 = OF\cdot OA,$$
$$OC^2 = OE^2 = OG\cdot OA,$$

$$\frac{OA^2 - OF\cdot OA}{m}=\frac{OF\cdot OA - OG\cdot OA}{n}=\frac{OG\cdot OA}{p}$$

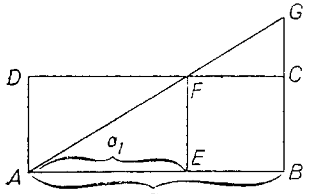
или, ако скратимо са OA,

$$\frac{AF}{m}=\frac{GF}{n}=\frac{OG}{p}.$$

Значи, деобом полупречника AO у размери $m:n:p$ добиће се тачке F, G; нормале на OA из ових тачака сећи ће полукруг у тачкама D и E; полупречници тражених концентричних кругова су OD и OE.

133) Ради као задатак 127, само теме споj са једном деоном тачком, пошто основицу поделиш на 4, 5, 6... делова.

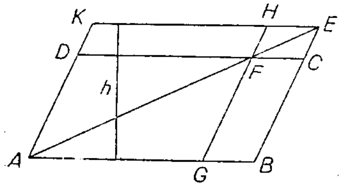
134) Ако су димензије другог правоугаоника a_1 и b_1, тада је $ab = a_1\cdot b_1$, или: $a:a_1 = b:b_1$.



Сл. 955

На основици AB одмери се основица другог правоугаоника AE (сл. 955), у E подигне нормала до F, пресека са страном DC; дуж AF продужи се до G, пресека са продуженом страном BC. Висина другог правоугаоника биће BG. Јер, AB и AG су две праве пресечене двема паралелним трансверзалама EF и BG; отуда; $a:a_1 = BG:b$, или: $a\cdot b = a_1\cdot BG$.

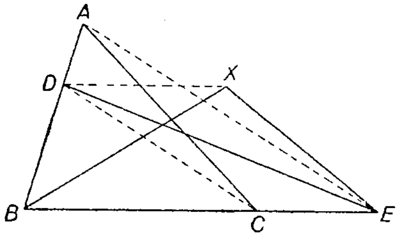
135) Нека је $ABCD$ дати паралелограм. На раздаљини дате висине h треба повући паралелу страни AB (сл. 956), продужити BC до тачке E, пресека са овом паралелом, и спојити тачку E са теменом A. Дуж AE сече страну CD у тачки F; кроз тачку F треба повући паралелу страни BC. На тај начин ће се добити паралелограм $AGHK$ једнак паралелограму $ABCD$.



Сл. 956

136) Равнострани троугао претвори најпре у правоугаоник исте основице; висина правоугаоника је у том случају половина висине троугла. Даље ради као у задатку 134.

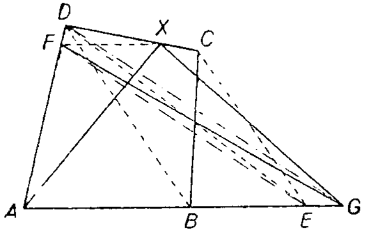
137) Треба повући $XD \parallel CB$ (сл. 957) и претворити најпре троугао ABC у други троугао стране BD. Тачка D се споји са теменом C, из темена A се повуче $AE \parallel DC$ и споји E са D. Троугли BED и BCA су једнаки, јер се добијају додавањем заједничком делу BCD троуглова CED и CAD, који су једнаки као троугли једнаких висина и заједничке основице. Најзад се X споји са B и E; тада је:



Сл. 957

$$\triangle BEX = \triangle BED = \triangle ABC.$$

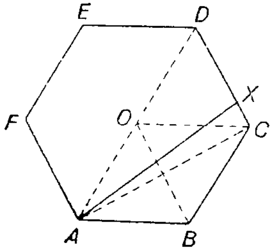
138) Четвороугао $ABCD$ се претвори у троугао AED (сл. 958), па се задатак своди на задатак 137.



Сл. 958

Да би се четвороугао $ABCD$ претворио у троугао, треба спојити теме B са теменом D и из темена C повући $CE \parallel BD$ до пресека са продуженом страном AB; затим, треба спојити тачку E са теменом D; тако ће се добити троугао AED= четвороуглу $ABCD$.

139) Ако је један део шестоугла трећина другог дела, он је четвртина шестоугла.



Сл. 959

Нека је O центар шестоугла; повуцимо OB, OC и AD и обележимо са P површину шестоугла (сл. 949).

Четвороугао $OABC$ је ромб, чија је површина $\frac{P}{3}$.

Површина $ABC = \frac{1}{2}$ површине $OABC = \frac{P}{6}$.

Површина $ABCD = \frac{P}{2}$.

Како је $\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, тачка X се мора налазити на страни CD. По претпоставци треба да је $ABCX = \frac{P}{4}$, или: $\frac{P}{6}$ + површина $ACX = \frac{P}{4}$; отуда је $ACX = \frac{P}{12}$.

Површина $ACD = \frac{P}{2} - \frac{P}{6} = \frac{P}{3}$, према томе, треба да је

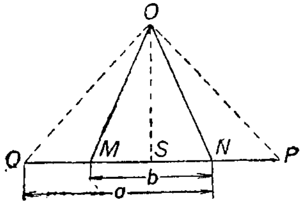
површина $ACX = \frac{1}{4}$ површине ACD.

Како ова два троугла имају исту висину повучену из A, CX треба да је четвртина од CD.

§ 11. Однос величина и израчунавања величина код равних слика

а) ТЕОРЕМЕ

1) Спустимо нормалу OS (сл. 960); тада је



Сл. 960

$$OM^2 = MS^2 + OS^2$$

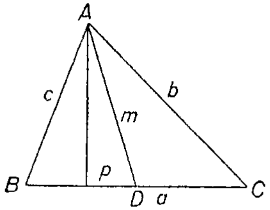
$$MS^2 = \frac{b^2}{4},\ OS^2 = OQ^2 - QS^2 = a^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2;$$

$$OS^2 = a^2 - a^2 + ab - \frac{b^2}{4} = ab - \frac{b^2}{4}.$$

Најзад:

$$OM^2 = \frac{b^2}{4} + ab - \frac{b^2}{4} = ab.$$

2) Познато је да је у оштроуглом троуглу ABD (сл. 961).



Сл. 961

$$c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot p,$$

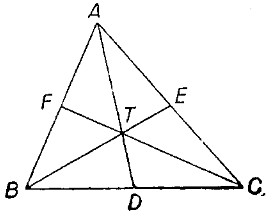
а у тупоуглом троуглу ADC

$$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot p.$$

Сабирањем ових двеју једнакости добијамо:

$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$, тј. доказано је да је збир квадрата двеју страна једнак удвојеном квадрату тежишне линије која одговара трећој страни увећаној за половину квадрата треће стране.

3) Означимо стране троугла са a, b, c, а тежишне линије са m, n, p.



Сл. 962

Зна се да је $TA = \frac{2m}{3}$, $TB = \frac{2n}{3}$, $TC = \frac{2p}{3}$ (сл. 962). Треба доказати да је

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3\left(\frac{4m^2}{9} + \frac{4n^2}{9} + \frac{4p^2}{9}\right),\ \text{или:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m^2 + n^2 + p^2).$$

Према задатку 2 можемо написати:

$$b^2+c^2=2\,m^2+\frac{a^2}{2},\ c^2+a^2=2n^2+\frac{b^2}{2},\ \ a^2+b^2=2\,p^2+\frac{c^2}{2}.$$

Сабирањем ових једнакости добијамо:

$2\ (a^2+b^2+c^2)=2\ (m^2+n^2+p^2)+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$; отуда је $a^2+b^2+c^2=$ $=\frac{4}{3}\ (m^2+n^2+p^2)$.

4) Обележимо тежишне линије из темена A, B, C троугла ABC са m, n, p. Према задатку 2 имамо:

$$b^2+c^2=2m^2+\frac{a^2}{2},\ \ a^2+c^2=2n^2+\frac{b^2}{2},\ \ a^2+b^2=2\,p^2+\frac{c^2}{2}.$$

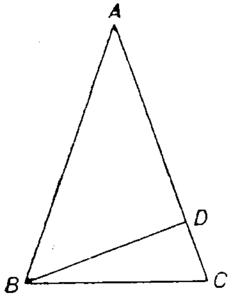
Према претпоставци је $b^2+c^2=2\,a^2$; отуда:

$$2\,a^2=2\,m^2+\frac{a^2}{2},\ c^2+\frac{b^2+c^2}{2}=2\,n^2+\frac{b^2}{2},\ \frac{b^2+c^2}{2}+b^2=2\,p^2+\frac{c^2}{2}.$$

Из ових једначина добијамо: $m=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ \ n=\frac{c\sqrt{3}}{2},\ \ p=\frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Троугао чије су стране m, n, p сличан је троуглу ABC, јер су им стране пропорционалне: $\frac{m}{a}=\frac{n}{c}=\frac{p}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Са слике 963 видимо:



Сл. 963

у троуглу BCD: $\quad BC^2=BD^2+CD^2$,

у троуглу ABD: $\quad AB^2=BD^2+AD^2$.

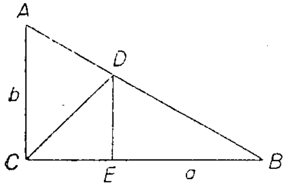
Како је $AC=AB$, то је и

$$AC^2=BD^2+AD^2.$$

Сабирањем ових једнакости добијамо:

$$AB^2+AC^2+BC^2=CD^2+2\cdot AD^2+3\cdot BD^2.$$

6) Нека је CD симетрала правог угла (сл. 964).



Сл. 964

Повуцимо из тачке D нормалу DE на страну CB. Троугао CED је равнокрако-правоугли, а троуглии ACB и DEB су слични, јер су оба правоугли и имају један оштар угао заједнички. Из њихове сличности следује:

$b:a=DE:EB=DE:(a-CE)=DE:(a-DE)$;

или:

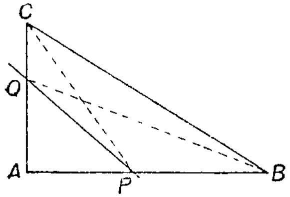
$$b\cdot(a-DE)=a\cdot DE,$$

а отуда:

$$DE=\frac{a\cdot b}{a+b}.$$

Симетрала $CD=DE\sqrt{2}=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

7) Из троугла ABQ (сл. 965) имамо:



Сл. 965

$$BQ^2=AQ^2+AB^2;$$

из троугла APC:

$$PC^2=AP^2+AC^2.$$

Сабирањем ових једнакости имамо:

$BQ^2+PC^2=(AQ^2+AP^2)+(AB^2+AC^2)=$ $=PQ^2+BC^2$.

8) Ако хипотенузу обележимо са x, тада је

$x^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+(\sqrt{ab})^2$, или: $x^2=\frac{a^2-2\,ab+b^2}{4}+ab=\frac{a^2+2\,ab+b^2}{4}$, тј.:

$x^2=\frac{(a+b)^2}{4}$; отуда: $x=\frac{a+b}{2}$, што је и требало доказати.

9) Нека је x хипотенуза правоуглог троугла чије су катете $b+c$ и h, тада је

$$x^2=(b+c)^2+h^2,\ \text{или: } x^2=b^2+c^2+2\,bc+h^2.$$

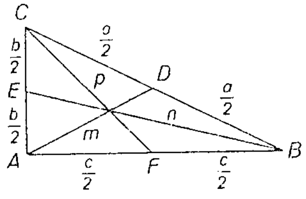
Из правоуглог троугла ABC имамо:

$$b^2+c^2=a^2\ \text{ и }\ bc=a\cdot h.$$

Заменом у горњој једначини имамо:

$$x^2 = a^2 + 2\,ah + h^2, \text{ или: } x^2 = (a+h)^2, \text{ а отуда: } x = a + h.$$

10) Нека правоугли троугао ABC има прав угао код A (сл. 966). Обележимо са a, b, c стране троугла а са m, n, p тежишне линије повучене из темена A, B, C.



Сл. 966

Знамо да је $m = \dfrac{a}{2}$.

У правоуглим троуглима ABE и ACF имамо:

$$n^2 = c^2 + \frac{b^2}{4}, \quad p^2 = b^2 + \frac{c^2}{4}.$$

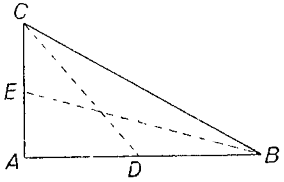
Сабирањем добијамо:

$$m^2 + n^2 + p^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 + \frac{b^2}{4} + b^2 + \frac{c^2}{4}.$$

Заменом $b^2 + c^2$ са a^2 добија се:

$$m^2 + n^2 + p^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3 \cdot a^2}{2}.$$

11) Из троугла ADC (сл. 967) је $\quad CD^2 = AC^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2;$



Сл. 967

из троугла ABE: $\quad BE^2 = AB^2 + \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2,$

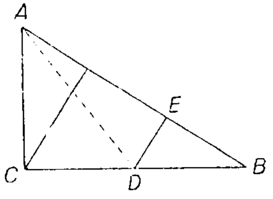
или:

$$4 \cdot CD^2 = 4 \cdot AC^2 + AB^2, \quad 4 \cdot BE^2 = 4 \cdot AB^2 + AC^2.$$

Сабирањем последњих двеју једнакости имамо:

$$4 \cdot CD^2 + 4 \cdot BE^2 = 5 \cdot AC^2 + 5 \cdot AB^2,$$
$$4\,(CD^2 + BE^2) = 5\,(AC^2 + AB^2) = 5 \cdot BC^2.$$

12) Нека је $CD = DB$, $BE = p$, $AE = q$ (сл. 968); тада је



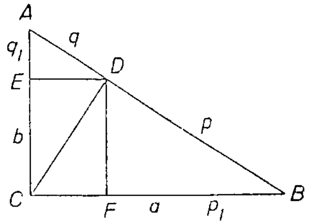
Сл. 968

$$p^2 = BD^2 - DE^2$$
$$q^2 = AD^2 - DE^2.$$

Одузимањем ових једнакости имамо:

$$q^2 - p^2 = AD^2 - BD^2 = AD^2 - CD^2 = AC^2.$$

13) Нека је $AC = b$, $BC = a$, $BD = p$, $AD = q$, $BF = p_1$, $AE = q_1$ (сл. 969); тада је



Сл. 969

$$a^2 = (p+q) \cdot p, \quad b^2 = (p+q) \cdot q,$$
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}, \text{ или: } \frac{a^4}{b^4} = \frac{p^2}{q^2}.$$

Из сличности троуглова BDC и BDF добијамо:

$$\frac{p}{a} = \frac{p_1}{p} \text{ или: } p^2 = ap_1.$$

Исто тако:

$$\frac{q}{b} = \frac{q_1}{q}, \text{ или: } q^2 = bq_1; \text{ отуда: } \frac{p^2}{q^2} = \frac{ap_1}{bq_1}.$$

Најзад:

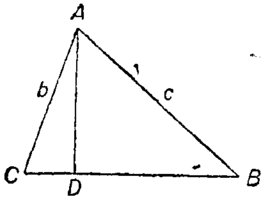
$$\frac{a^4}{b^4} = \frac{ap_1}{bq_1}, \text{ или: } \frac{a^3}{b^3} = \frac{p_1}{q_1}.$$

14) Треба доказати да је

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}, \text{ или: } \frac{b^2}{a^2 b^2} + \frac{a^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{h^2}, \text{ или: } \frac{c^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{h^2}, \text{ или: } \frac{c^2 h^2}{a^2 b^2} = 1.$$

Знамо да је $ch = a \cdot b$ удвојена површина троугла; дакле,...

15) Из слике 970 видимо да је



Сл. 970

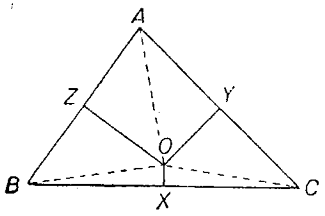
$$AD^2 = c^2 - BD^2,$$
$$AD^2 = b^2 - DC^2;$$

према томе је

$$c^2 - BD^2 = b^2 - DC^2,$$
$$c^2 - b^2 = BD^2 - DC^2.$$

16) Из слике 971 видимо да је $\quad AZ^2 = AO^2 - OZ^2,$

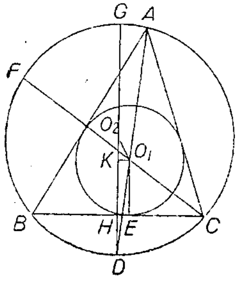
$$BX^2 = BO^2 - OX^2,$$
$$CY^2 = CO^2 - OY^2.$$



Сл. 971

Сабирањем ових једнакости добија се: $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 - OZ^2 - OX^2 - OY^2 = AO^2 - OY^2 + CO^2 - OX^2 + BO^2 - OZ^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$.

17) Нека је $O_1O_2 = d$, $O_2D = R$, $O_1E = r$ (сл. 972).



Сл. 972

Како су AO_1D и CO_1F симетрале углова A и C, то је $\widehat{BD} = \widehat{CD}$ и $\widehat{BF} = \widehat{FA}$; према томе, $\widehat{DBF} = \dot{C}D + \widehat{FA}$ и $\sphericalangle DCF = \sphericalangle CO_1D$; отуда је

$$DC = DO_1.$$

Пречник DO_2G је симетрала стране BC, па је CD^2 или $DO_1{}^2 = DH \cdot DG$, или: $DO_1{}^2 = 2R \cdot DH$.

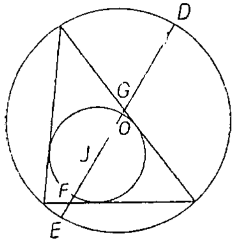
Из тачке O_1 повуцимо $O_1K \perp DG$, па ћемо имати: $DO_1{}^2 = O_1O_2{}^2 + DO_2{}^2 - 2 \cdot DO_2 \cdot O_2K$. Али, како је $DO_1{}^2 = 2R \cdot DH$, то је

$$2R \cdot DH = d^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot (O_2H - r),$$
$$d^2 + R^2 = 2R \cdot (DH + O_2H - r) =$$
$$= 2R \cdot (R - r) = 2R^2 - 2 \cdot R \cdot r;$$

отуда:

$$d^2 = R^2 - 2 \cdot R \cdot r = R \cdot (R - 2r).$$

18) Нека је $OD = OE = R$, $OJ = d$, $JG = JF = r$ (сл. 973); тада је



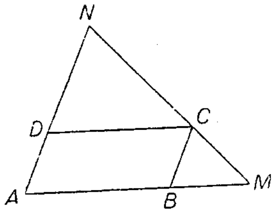
Сл. 973

$$DG = OD - OG = R - (r - d) = R - r + d,$$
$$EF = OE - FJ - OJ = R - r - d,$$
$$DG \cdot EF = (R - r)^2 - d^2.$$

Према Ојлеровој теореми (зад. 17) $d^2 = R(R - 2r) = R^2 - 2Rr$ следује:

$$DG \cdot EF = R^2 - 2Rr + r^2 - (R^2 - 2Rr)$$
$$DG \cdot EF = r^2.$$

19) Из троуглова NDC и NAM (сл. 974) имамо:



Сл. 974

$$\frac{DC}{AM} = \frac{NC}{MN};$$

из троуглова CBM и NAM имамо:

$$\frac{BC}{AN} = \frac{MC}{MN}.$$

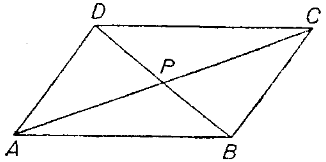
Сабирањем ових једнакости добијамо:

$$\frac{DC}{AM} + \frac{BC}{AN} + \frac{NC + MC}{MN} = 1,$$

или, ако заменимо DC и BC са AB и AD, произилази:

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = 1.$$

20) Према задатку 2 за троугле ABC и ADC (сл. 975) можемо написати:



Сл. 975

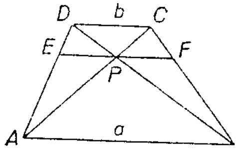
$$AB^2 + BC^2 = 2 \cdot PB^2 + 2 \cdot AP^2,$$
$$AD^2 + CD^2 = 2 \cdot PD^2 + 2 \cdot AP^2.$$

Сабирањем ових једнакости добијамо:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4 \cdot AP^2 + 4 \cdot PB^2,$$

или: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$.

21) *Први начин.* Са слике 976 видимо да је



Сл. 976

$$PF : DC = PB : DB = FB : CB = a : (a + b),$$
$$PF = DC \cdot \frac{a}{a + b} = \frac{a \cdot b}{a + b}.$$

Исто тако је

$$EP = \frac{a \cdot b}{a + b}; \text{ отуда је } EP = PF.$$

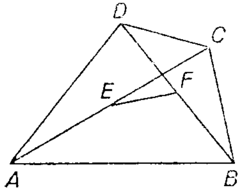
Други начин.

$EP : b = AP : AC = BP : BD = PF : b$; дакле, $EP = PF$.

Ако означимо EF са l, можемо добити овај однос:

$$\frac{2}{l} = \frac{1}{EP} = \frac{a + b}{a \cdot b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

22) Обележимо стране четвороугла $ABCD$ (сл. 977) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$; дијагонале $AC = m$, $BD = n$, а дуж која спаја средине дијагонала $EF = p$.



Сл. 977

Треба да докажемо да је

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + 4p^2.$$

Према задатку 2 за троугле ABC и ADC можемо написати:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot BE^2 + \frac{m^2}{2}, \; c^2 + d^2 = 2 \cdot DE^2 + \frac{m^2}{2}.$$

Сабирањем ових једнакости добијамо:

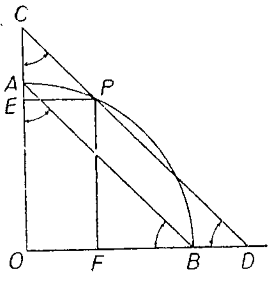
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2\,(BE^2 + DE^2) + m^2.$$

У троуглу EBD имамо $BE^2 + DE^2 = 2\,p^2 + \frac{n^2}{2}$; заменом у претходној једнакости произилази:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + 4\,p^2.$$

23) Знамо да је $a = R\sqrt{2}$, $b = R\sqrt{3}$; отуда $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $R = \frac{b}{\sqrt{3}}$ из чега следује: $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{3}$; најзад: $3a^2 = 2b^2$.

24) Повуцимо PE и PF нормално на OA и OB (сл. 978). Правоугли троугли PFD и PEC су слични правоуглом троуглу AOB, јер имају по један оштар угао једнак, $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D$; према томе, троугли су равнокраки и $PF = FD$, $PE = CE$.



Сл. 978

Даље, $PD^2 = PF^2 + FD^2 = 2 \cdot PF^2$,

$$PC^2 = PE^2 + CE^2 = 2 \cdot PE^2;$$

отуда: $PD^2 + PC^2 = 2\,(PF^2 + PE^2)$,

$$PF^2 + PE^2 = PF^2 + OF^2 = OP^2 = r^2,$$

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 = 2\,r^2;$$

најзад: $PD^2 + PC^2 = AB^2$.

25) Нека је R полупречник круга. Страна описаног квадрата је $2R$, обим квадрата је $8R$. Страна правилног уписаног шестоугла је R, а обим је $6R$. Обим круга се налази између ова два обима; према томе је

$$6\,R < 2\,\pi\,R < 8\,R,$$

или:

$$3 < \pi < 4.$$

26) Збир полукругова чији су пречници AB, $BC, \dots KL$ износи:

$$\frac{\pi AB}{2} + \frac{\pi BC}{2} + \dots + \frac{\pi KL}{2}, \text{ или: } \frac{\pi\,(AB + BC + \dots + KL)}{2}, \text{ или: } \frac{\pi AL}{2},$$

а толики је и полукруг чији је пречник AL.

27) Нека су полупречници кругова R и r, средишни углови m и n, луци који им одговарају l. Знамо да је

$$l = \frac{\pi \cdot R \cdot m}{180}, \qquad l = \frac{\pi \cdot r \cdot n}{180};$$

значи: $\frac{\pi \cdot R \cdot m}{180} = \frac{\pi \cdot r \cdot n}{180}$; отуда: $R \cdot m = r \cdot n$; најзад: $m : n = r : R$, што је и требало доказати.

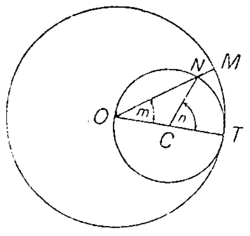
28) Страна уписаног квадрата је $R\sqrt{2}$ а страна уписаног равностраног троугла $R\sqrt{3}$, где је R полупречник круга. Њихов збир је $R\sqrt{2} + R\sqrt{3}$ или $R(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Знамо да је $\sqrt{2} = 1{,}41421\dots$, $\sqrt{3} = 1{,}73205\dots$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}14626\dots$ према томе: $R(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = R \cdot 3{,}14626\dots$

Дужина полукруга је πR или $R \cdot 3{,}\,1415\dots$; значи, разлика ових дужина је мања од $R \cdot 0{,}005$.

Тако, ако је $R = 1$ m, ова разлика је мања од 5 mm.

29) Зна се да центри кругова O и C са додирном тачком T леже на једној правој.

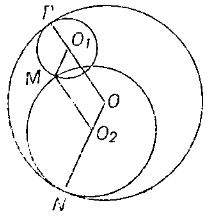


Сл. 979

Означимо са m и n средишне углове TOM и TCN (сл. 979). Угао $n = 2 \cdot \sphericalangle m$, јер је n спољашњи угао равнокраког троугла OCN.

Ако је R полупречник већег круга, тада је лук $MT = \frac{\pi \cdot R \cdot m}{180}$, а лук $TN = \frac{\pi \cdot \frac{R}{2}\,2\,m}{180} = \frac{\pi \cdot R \cdot m}{180}$. Као што се види, луци TM и TN имају једнаке дужине.

30) а) Нека су R, r_1 и r_2 полупречници кругова. По претпоставци је $r_1 + r_2 = R$; отуда: $OO_1 = R - r_1 = r_2$. $OO_2 = R - r_2 = r_1$ (сл. 980).



Сл. 980

Ако посматрамо O, O_1, O_2, видимо да је

$$OO_1 - OO_2 \leqslant O_1O_2 \leqslant OO_1 + OO_2,$$

или:

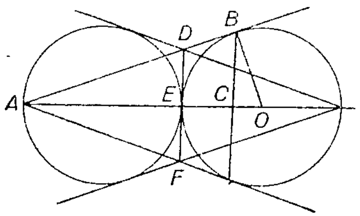
$$r_2 - r_1 \leqslant O_1O_2 \leqslant r_1 + r_2;$$

значи, кругови O_1 и O_2 се секу или изузетно додирују.

б) Претпоставимо да се кругови секу. Четвороугао O_1MO_2O је конвексан и супротне су му стране једнаке, јер је $OO_1=r_2==MO_2$, $OO_2=r_1=MO_1$; према томе, четвороугао је паралелограм.

в) Из горњег произилази да су углови MO_2N, MO_1P, NOP једнаки. Нека сваки од њих износи p^0; дужине лукова износе: $\overset{\frown}{MN}=\frac{\pi\cdot r_2\cdot p}{180}$, $\overset{\frown}{MP}=\frac{\pi\cdot r_1\cdot p}{180}$, а њихов збир $\frac{\pi\cdot(r_1+r_2)p,}{180}$, или $\frac{\pi\cdot R\cdot p}{180}$; међутим, то је дужина лука PN.

31) Из правоуглог троугла AOB (сл. 981) имамо: $BO^2=AO\cdot\cdot CO$, или $r^2=3r\cdot CO$; отуда $CO==\frac{r}{3}$; према томе, $AC=\frac{8r}{3}$.



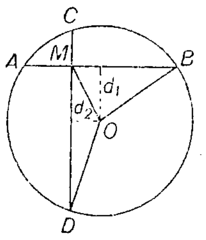
Сл. 981

Из правоуглог троугла COB имамо:

$$BC=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{9}}=\frac{2r}{3}\sqrt{2}.$$

Из сличности троуглова AED и ACB имамо: $DE:BC=AE:AC$, или: $DE:\frac{2r}{3}\sqrt{2}=2r:\frac{8r}{3}$; отуда: $DE=\frac{r\sqrt{2}}{2}$, $DF=r\sqrt{2}$. Међутим, зна се да је то страна квадрата уписаног у кругу полупречника r.

32) Ако са t_1 и t_2 обележимо половине тетива AB и CD (сл. 982), са r полупречник круга, са d_1 и d_2 растојања центра од ових тетива, треба доказати да је $4t_1^2+4t_2^2$ стално.

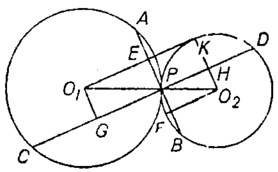


Сл. 982

Јасно је да је $t_1^2=r^2-d_1^2$, $t_2^2=r_2^2-d_2^2$; отуда: $t_1^2+t_2^2=2r^2-(d_1^2+d_2^2)$.

d_1 и d_2 су стране правоугаоника чија је дијагонала OM непроменљива, па је $t_1^2+t_2^2==2r^2-OM^2$ стална количина, чиме је теорема доказана.

33) Нека су O_1E, O_2F нормале повучене на AB; O_1G, O_2H нормале повучене на CD (сл. 983). Тачке E, F, G, H су средине тетива AP, BP, CP, DP; значи:



Сл. 983

$$AB=2EF=2O_2K,$$

$$CD=2GH=2O_1K,$$

$$AB^2+CD^2=4(O_2K^2+O_1K^2).$$

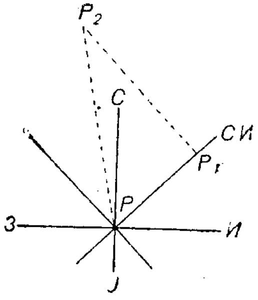
У правоуглом троуглу KO_1O_2 имамо:

$$O_1K^2+O_2K^2=O_1O_2^2=(R+r)^2,$$

$$AB^2+CD^2=4(R+r)^2.$$

б) РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

34) Означимо са PP_1 пут на североисток, са P_1P_2 пут на северозапад, тада је $\sphericalangle PP_1P_2=90^0$ (сл. 984).



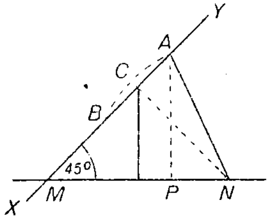
Сл. 984

Пут $PP_1=\frac{9}{60}\cdot 20=3$ km.

Пут $P_1P_2=\frac{9}{60}\cdot 35=5{,}25$ km.

$PP_2=\sqrt{3^2+5{,}25^2}=6{,}046$ km.

35) Нека је P нека тачка праве MN (сл. 985). Повуцимо кроз M праву XY нагнуту према MN под углом од 45^o; повуцимо $PA\perp MN$ а затим спојмо A са N. Тада можемо написати:



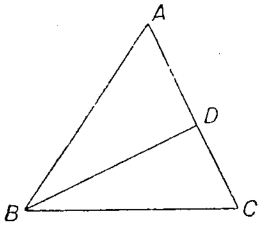
Сл. 985

$$PM^2+PN^2=PA^2+PN^2=AN^2.$$

Према томе, да би било $PM^2+PN^2=a^2$, потребно је и довољно да је $AN=a$. Значи, тачка P ће се добити кад се луком полупречника a из тачке N пресече права XY и из тих пресека спусте нормале на праву MN.

Задатак има два решења ако је $a > NC$, раздаљине тачке N од праве XY, тј. ако је $a > \frac{MN \cdot \sqrt{2}}{2}$; биће једно решење ако је $a = \frac{MN \cdot \sqrt{2}}{2}$; и нема решења ако је $a < \frac{MN \cdot \sqrt{2}}{2}$.

36) Обележимо стране са $AB = x$, $AC = y$ (сл. 986) и спустимо нормалу из B на AC.



Сл. 986

У правоуглом троуглу ABD је $\sphericalangle A = 60^0$, мања катета $AD = \frac{x}{2}$, већа катета $BD = \frac{x}{2}\sqrt{3}$.

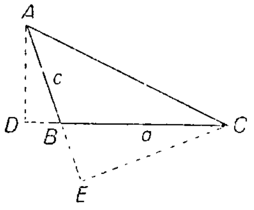
Из правоуглог троугла BCD имамо:

$$13^2 = \left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(y - \frac{x}{2}\right)^2;$$

по претпоставци је $x + y = 22$.

Из ових двеју једначина добијамо $x = 15$ cm, $y = 7$ cm.

37) Знамо да је $16^2 = a^2 + c^2 + 4a$ (сл. 987).



Сл. 987

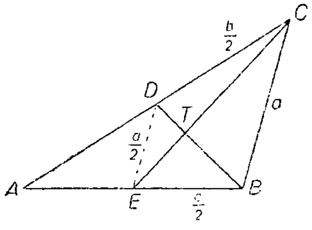
Правоугли троугли ADB и BEC су слични, јер су им оштри углови код B једнаки. Отуда:

$$c : 2 = a : 3, \quad \text{или:} \quad 2a = 3c.$$

Из ових једначина добијамо:

$$a = 12 \text{ cm}, \quad c = 8 \text{ cm}.$$

38) Дуж DE спаја средине двеју страна; зато је $DE = \frac{a}{2}$ (сл. 988).



Сл. 988

Ако обележимо EC са n и BD са m, тада је

$$ET = \frac{n}{3}, \quad CT = \frac{2n}{3}, \quad DT = \frac{m}{3}, \quad BT = \frac{2m}{3}.$$

У троуглу BCT је

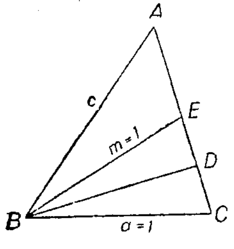
$$a^2 = CT^2 + BT^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{m^2}{9} + \frac{c^2}{4} - \frac{n^2}{9} = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{m^2 + n^2}{9}.$$

У троуглу DET је

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = DT^2 + ET^2 = \frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{9}.$$

Заменом у првој једнакости добија се $a^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{4}$, или: $4a^2 = b^2 + c^2 - a^2$; најзад: $5a^2 = b^2 + c^2$.

39) Троугао BCE је равнокрак; висина BD полови основицу CE (сл. 989).



Сл. 989

$$CD = DE, \quad CE = EA = 2 \cdot CD, \quad CA = 2 \cdot CE = 2 \cdot 2 \cdot CD = 4\,CD.$$

Према услову задатка је $CD \cdot CA = \frac{3}{4}$; отуда:

$$CD \cdot 4 \cdot CD = \frac{3}{4}, \quad 16 \cdot CD^2 = 3, \quad CD = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$b = CA = \sqrt{3}.$$

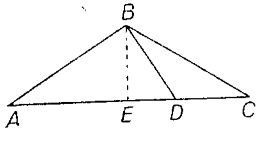
У троуглу BDA је $c^2 = BD^2 + AD^2$; отуда:

$$BD^2 = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}, \quad AD = 3 \cdot CD = \frac{3\sqrt{3}}{4};$$

према томе:

$$c^2 = \frac{13}{16} + \frac{27}{16} = 2{,}5; \quad c = \sqrt{2{,}5}$$

40) Висина равнокраког троугла ABC, израчуната по Питагориној теореми, износи 12 cm.



Сл. 990

Из правоуглог троугла BED (сл. 990) имамо:

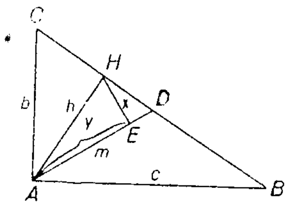
$$BD^2 + 144 + (16 - DC)^2;$$

из правоуглог троугла ABD имамо:

$$(32 - DC)^2 = 400 + BD^2.$$

Из ових двеју једначина добијамо: $DC = 7$ cm; према томе, $AD = 25$ cm.

41) Обележимо тежишну линију са m, растојање подножне тачке висине од тежишне линије са x, а растојање нормале x од темена правог угла са y.



Сл. 991

Знамо да је $m = \frac{a}{2}$ (1),

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad ah = bc, \quad h = \frac{b \cdot c}{a} \qquad (2).$$

У правоуглом троуглу ADH (сл. 991) је

$$h^2 = m \cdot y \qquad (3);$$

у правоуглом троуглу AEH:

$$x^2 = h^2 - y^2.$$

Заменом вредности (1) и (2) у (3) добија се:

$$\frac{b^2 \cdot c^2}{a^2} = \frac{a}{2} \cdot y, \text{ или: } y = \frac{2 \cdot b^2 c^2}{a^3};$$

тада је

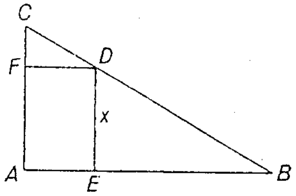
$$x^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2} - \frac{4 \cdot b^4 c^4}{a^6} = \frac{a^4 b^2 c^2 - 4 \cdot b^4 c^4}{a^6} = \frac{b^2 c^2}{a^6}(a^4 - 4 \cdot b^2 c^2) =$$

$$= \frac{b^2 c^2}{a^4 a^2}[(b^2 + c^2)^2 - 4 b^2 c^2] = \frac{b^2 c^2}{(b^2 + c^2)^2 \cdot (b^2 + c^2)} (b^2 - c^2)^2;$$

отуда:

$$x = \frac{b c (b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2) \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}.$$

42) а) Треба ставити $DE = x$ и израчунати вредност x (сл. 992).



Сл. 992

DF ће се наћи помоћу сличности троуглова CFD и ABC;

$$x : (b - x) = (c - FD) : FD;$$

отуда:

$$FD = \frac{c(b - x)}{b}.$$

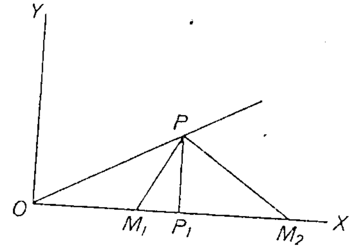
Заменом у $DE \cdot DF = k^2$ добија се: $cx^2 - bcx + bk^2 = 0$; отуда: $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{b}{c} \cdot k^2}$. x ће имати реалну вредност ако је $2k < \sqrt{bc}$; а ако је $2k = \sqrt{bc}$, x је једнако половини стране b.

x је позитивно ако је $\frac{b}{c} k^2 > 0$, а овај услов је увек испуњен.

б) Кад је $b = c$, x има две вредности: $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - k^2}$ и $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - k^2}$, и оне ће бити стварне за $k \leqslant \frac{b}{2}$. Израз $\sqrt{\frac{b^2}{4} - k^2}$ лако је конструисати, јер је то уствари катета оног правоуглог троугла чија је хипотенуза $\frac{b}{2}$ а друга катета k.

в) У случају да је $b \neq c$, конструкција се изврши ако се најпре конструише средња геометриска пропорционала за bc, тј. $m = \sqrt{bc}$, или $m^2 = bc$. Вредност за x биће: $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(\frac{mk}{c}\right)^2}$, што се може лако конструисати.

43) а) Познат је образац за једнако кретање $s = v \cdot t$ (где је s пређени пут, v стална брзина и t време за које је пређен пут s). Из ове једначине имамо: $t = \frac{s}{v}$; применом у овом задатку добијамо:



Сл. 993

$$t = \frac{OM}{v} = \frac{PM}{\frac{v}{2}} = \frac{2 \cdot PM}{v};$$

отуда: $OM = 2 \cdot PM$ (сл. 993).

Ако је P_1 пројекција тачке P на осовини OX, тада је $MP_1 = OP_1 - OM = a - x$, и

$$PM^2 = MP_1{}^2 + PP_1{}^2 = (a - x)^2 + b^2;$$

према томе је

$$x = 2 \cdot \sqrt{(a - x)^2 + b^2},$$

одакле се добија квадратна једначина

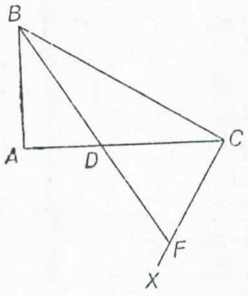
$$3x^2 - 8ax + 4a^2 + 4b^2 = 0.$$

x је реално ако је $a \geqslant b\sqrt{3}$.

б) Из решења горње једначине види се да су оба корена позитивна кад су решења стварна. Како је $PM = \frac{OM}{2} = \frac{x}{2}$, PM ће бити најмање кад x буде најмање, што се може видети из решења једначина.

в) Ако је $PM_1 \perp PM_2$, троугао PM_1M_2 је правоугли и PP_1 је висина хипотенузе, па је $PP_1^2 = b^2 = - P_1M_1 \cdot P_1M_2$. Међутим, $P_1M_1 = x_1 - a$, $P_1M_2 = x_2 - a$. Из ових односа добија се бројни однос између a и b ($a = b\sqrt{7}$).

44) а) Угао ADB је комплеменат углу $\frac{B}{2}$ (сл. 994), $\sphericalangle CDF = \sphericalangle ADB$, па је и $\sphericalangle CDF$ комплеменат углу $\frac{B}{2}$. Исто се тако види из троугла BCF да је $\sphericalangle CFD$ комплеменат углу $\frac{B}{2}$. Према томе, углови CDF и CFD су једнаки, а троугао CDF је равнокрак.



Сл. 994

б) Како је $CD = CF = m$, а $CB = a$, то се најпре конструише правоугли троугао BFC, у коме знамо обе катете. Затим се код темена B са спољашње стране троугла пренесе угао CBF на крак BF и из C спусти нармала на други крак BA.

в) У троуглу ABC симетрала угла B дели супротну страну AC на AD и DC; отуда:

$$AD : m = x : a, \text{ или: } AD = \frac{m \cdot x}{a}.$$

Из слике се види да је $y = AD + m$, или: $y = \frac{m \cdot x}{a} + m$. Међутим је $x^2 + y^2 = a^2$. Решењем ових последњих двеју једначина добија се x и y.

45) а) Знамо да је $d = a\sqrt{2}$, или: $a + a\sqrt{2} = s$. Отуда: $a = \frac{s}{1+\sqrt{2}}$;

исто тако: $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$; $\frac{d}{\sqrt{2}} + d = s$, отуда: $d = \frac{s\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

б) $a\sqrt{2} - a = q$, отуда: $a = \frac{q}{\sqrt{2} - 1}$;

$d - \frac{d}{\sqrt{2}} = q$, отуда: $d = \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$.

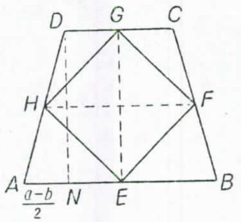
46) Нека су a и a_1, h и h_1 основице и висине троуглова који се добијају продужавањем непаралелних страна до њиховог пресека а H висина трапеза. Тада је површина трапеза

$$\frac{a h - a_1 h_1}{2}.$$

Међутим, зна се да је $h : h_1 = a : a_1$ и $h - h_1 = H$.

Елиминацијом h и h_1 добија се за површину трапеза $\frac{a + a_1}{2} \cdot H$.

47) Обележимо паралелне стране са a и b, непаралелну са c, а висину са h (сл. 995).



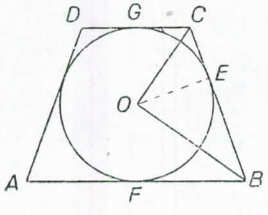
Сл. 995

Ако је четвороугао $EFGH$ квадрат, HF је дијагонала квадрата. Како су дијагонале квадрата једнаке, то је $h = \frac{a+b}{2}$.

Из правоуглог троугла AND имамо:

$$c^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

48) Знамо да је $BE = BF$, $CE = CG$, $BF = \frac{a}{2}$, $CG = \frac{b}{2}$, где су a и b паралелне стране трапеза (сл. 996); према томе, ако са c обележимо непаралелну страну, биће: $c = \frac{a+b}{2}$.



Сл. 996

У правоуглом троуглу OBC је

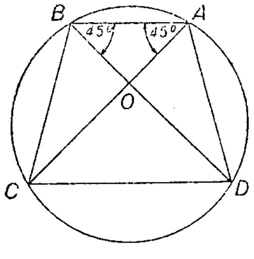
$$r^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}; \text{ отуда: } r = \frac{\sqrt{ab}}{2}.$$

Како је страна $AB=R$, однос страна два шестоугла је $GH:AB=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

52) Нека је a страна шестоугла. Према претпоставци је $6a=2\pi r$; отуда је $a=\frac{\pi r}{3}$. Површина круга је πr^2; површина шестоугла је шест пута површина равностраног троугла стране a и износи $6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, или заменом a са $\frac{\pi r}{3}$ добија се:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi^2\cdot r^2}{9}\sqrt{3}=\frac{\pi r^2\sqrt{3}}{6}.$$

53) а) Ако је лук $AB=60^0$, тетива AB је страна уписаног правилног шестоугла; отуда $AB=R$. Како је лук $BC=90^0$, тетива BC је страна уписаног квадрата; према томе $BC=R\sqrt{2}$.



Сл. 1000

Лук CD је 120^0; дакле, тетива CD је страна уписаног равностраног троугла; отуда је $CD=R\sqrt{3}$.

Најзад, лук DA је 90^0 и тетива $DA=R\sqrt{2}$ (сл. 1000).

б) $\sphericalangle DBA=45^0$ (половина средишног угла над луком од 90^0). Из истог разлога је и $\sphericalangle CAB=45^0$ У троуглу ABO је $\sphericalangle BOA=90^0$; према томе је $BD\perp AC$.

в) У троуглу ABO је

$$AO=BO=\frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

У троуглу CDO је

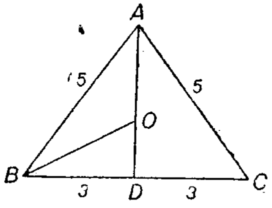
$$CO=DO=\frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

Четвороугао $ABCD$ је равнокраки трапез; отуда:

$$AC=BD=BO+DO=\frac{R(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}.$$

г) $P=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{R^2(2+\sqrt{3})}{2}.$

54) Центар уписаног круга у троуглу је тачка O, пресек симетрале угла B и симетрале угла A (сл. 1001); ова друга симетрала је у исто време и висина AD; полупречник уписаног круга је OD.



Сл. 1001

У троуглу ABD имамо:

$AD^2=AB^2=BD^2=25-9=16$; отуда $AD=4$.

Како је BO симетрала угла, то је

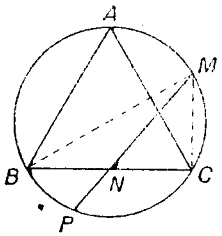
$$OD:BD=OA:BA,$$

или:

$$OD:3=OA:5=(OD+OA):(3+5)=4:8=1:2;$$

отуда: $OD=\frac{3}{2}=1{,}5$.

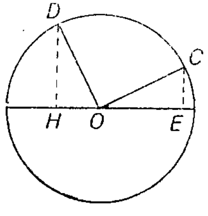
55) Страна равностраног троугла је $R\sqrt{3}$, а $MC=R$ јер је страна уписаног правилног шестоугла. Пречник из M је симетрала стране AC (сл. 1002); он пролази кроз теме B. Из овога следује да је троугао MNC правоугли са правим углом код C и да је $NC=\frac{R\sqrt{3}}{2}$, $MC=R$. Према томе је $MN^2=\frac{3R^2}{4}+R^2=\frac{7R^2}{4}$, отуда је $MN=\frac{R}{2}\sqrt{7}$.



Сл. 1002

Сад треба израчунати NP. Зна се да је $NP\cdot NM=NB\cdot NC$, или: $NP\cdot\frac{R}{2}\sqrt{7}=\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}$; отуда је $NP=\frac{3R}{2\sqrt{7}}$ или: $NP=\frac{3R\sqrt{7}}{14}$.

56) Правоугли троугли OEC и ODH (сл. 1003) су подударни, јер су им једнаке хипотенузе и оштри углови, $\sphericalangle COE=\sphericalangle ODH$.

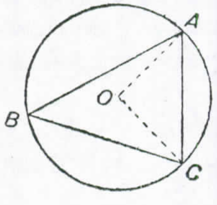


Сл. 1003

Из подударности следује $OE=DH$.

У правоуглом троуглу DOH је $OH^2+DH^2=OD^2$, или: $OH^2+OE^2=R^2$.

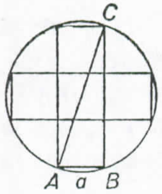
57) Ако је $\sphericalangle ABC = 45^0$ (сл. 1004), средишни угао над истим луком је $AOC = 90^0$; према томе је. AC страна уписаног квадрата и износи $R\sqrt{2}$.



Сл. 1004

58) Повуцимо пречник који спаја два темена спољашњих квадрата (сл. 1005).

Ако је a страна квадрата, из правоуглог троугла ABC имамо:



Сл. 1005

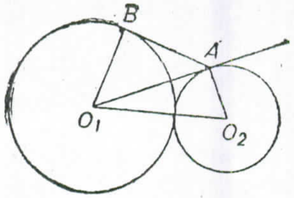
$$a^2 + (3\,a)^2 = (2r)^2,$$
$$a^2 + 9a^2 = 4r^2,$$
$$10a^2 = 4r^2,$$
$$a^2 = \frac{4r^2}{10},$$
$$a = \frac{2\,R}{\sqrt{10}} = \frac{2r\sqrt{10}}{10} = \frac{r\sqrt{10}}{5}.$$

59) Из правоуглог троугла O_1O_2A (сл. 1006) имамо:

$$O_1A^2 = O_1O_2{}^2 - O_2A^2 = (R+r)^2 - r^2 = R^2 + 2Rr.$$

Из правоуглог троугла O_1AB имамо:

$$AB^2 = \sqrt{O_1A^2 + O_1B^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr - R^2} = \sqrt{2Rr}.$$

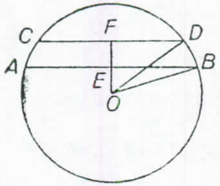


Сл. 1006

60) Земљин меридијан је 40 000 000 m; значи, 360^0 или 21 600′ меридијана имају дужину 40 000 000 m, а 1′ меридијана биће:

$$\frac{40\,000\,000}{21\,600} = 1852\,m.$$

61) $BE = 4$, $DF = 3$ (сл. 1007).



Сл. 1007

Ако ставимо $OE = x$, биће: $OF = x + 1$.

Из правоуглог троугла OBE је

$$r^2 = 16 + x^2;$$

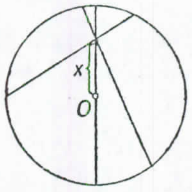
из правоуглог троугла ODF је

$$r^2 = 9 + (x+1)^2.$$

Према томе: $16 + x^2 = 9 + x^2 + 2x + 1$;

отуда: $x = 3$, а $r^2 = 16 + 3^2 = 25$, или $r = 5$.

62) Кроз пресек тетива повуцимо пречник (сл. 1008).



Сл. 1008

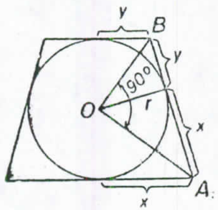
Ако растојање пресека тетива од центра обележимо са x, можемо написати:

$$(R+x)\ (R-x) = 200, \text{ или:}$$
$$R^2 - x^2 = 200, \text{ или:}$$
$$225 - x^2 = 200;$$

најзад, $x = 5$.

63) Са слике 1009 видимо да је

$$4x + 4y = 2p, \text{ или: } x + y = \frac{p}{2}.$$



Сл. 1009

Из правоуглог троугла AOB имамо:

$$x\,y = r^2.$$

Решавањем ових двеју једначина добијамо:

$$x = \frac{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4r^2}}{2},\quad y = \frac{\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4r^2}}{2} \text{ итд.}$$

64) Обележимо дијагонале ромба са d_1 и d_2, страну са a, полупречник уписаног круга са r. Јасно је да можемо написати:

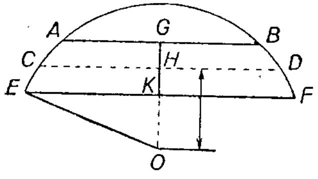
$$\left(\frac{d_1}{2}\right) + \left(\frac{d_2}{2}\right) = a^2, \text{ или: } d_1{}^2 + d_2{}^2 = 4a^2;$$

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 4 \cdot \frac{a \cdot r}{2},\ d_1 \cdot d_2 = 4ar.$$

Решавањем ових двеју једначина добијамо:

$$d_1 = \sqrt{a^2 + 2ar} + \sqrt{a^2 - 2ar},\ d_2 = \sqrt{a^2 + 2ar} - \sqrt{a^2 - 2ar}.$$

65) Ако полупречник обележимо са r, тетиву AB са $2t$, тетиву EF са $2l$, тетиву CD са $2c$, раздаљину између тетива са $2d$, и раздаљину средње тетиве од центра са s (сл. 1010), можемо написати:



Сл. 1010

$$OE^2 = EK^2 + OK^2,$$

$$r^2 = l^2 + (s-d)^2 = l^2 + s^2 + d^2 - 2ds,$$

$$r^2 = t^2 + (s+d)^2 = t^2 + s^2 + d^2 + 2ds,$$

$$r^2 = c^2 + s^2, \text{ или: } 2r^2 = 2c^2 + 2s^2.$$

Збир првих двеју једначина умањен за трећу даје:

$$O = l^2 + t^2 + 2d^2 - 2c^2, \text{ или: } l^2 + t^2 = 2c^2 - 2d^2.$$

Ако ову једначину помножимо са 4, добијамо: $4l^2 + 4t^2 = 8c^2 - 8d^2$, или:

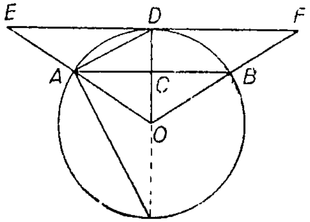
$$(2l)^2 + (2t)^2 = 2(2c)^2 - 2(2d)^2;$$

најзад:

$$EF^2 + AB^2 = 2 \cdot CD^2 - 2 \cdot GK^2, \text{ тј.}$$

збир квадрата двеју паралелних тетива једнак је удвојеном квадрату тетиве на средини између њих умањеном за удвојени квадрат раздаљине датих тетива.

66) Нека је $AB = s$ дата тетива, а $AO = r$ полупречник круга (сл. 1011).



Сл. 1011

а) У правоуглом троуглу ACO зна се хипотенуза AO и катета $AC = \frac{s}{2}$; према томе, средишна раздаљина тетиве може се израчунати овако:

$$OC^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}, \text{ или: } OC = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Висина лука

$$CD = OD - OC = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

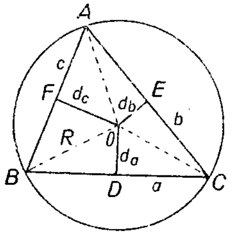
б) Тетива AD која одговара половини лука ADB је хипотенуза правоуглог троугла ACD чије су катете познате; према томе је

$$AD^2 = \frac{s^2}{4} + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right)^2.$$

в) Да бисмо израчунали EF, посматраћемо сличне троугле EOF и AOB. Из њихове сличности имамо: $EF : AB = OD : OC$; отуда је

$$EF = \frac{AB \cdot OD}{OC}, \text{ или: } EF = \frac{s \cdot r}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}.$$

67) Из троугла OBD (сл. 1012) можемо написати:



Сл. 1012

$$d_a = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

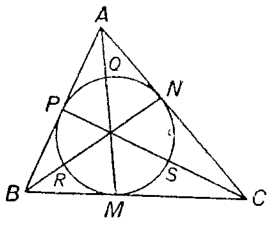
Ако се послужимо обрасцем за полупречник описаног круга изражен странама $R = \frac{abc}{4P}$ и Хероновим обрасцем за површину круга, имаћемо:

$$d_a = \sqrt{\frac{(abc)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)} - \frac{a^2}{4}}$$

$$d_b = \sqrt{\frac{(abc)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)} - \frac{b^2}{4}}$$

$$d_c = \sqrt{\frac{(abc)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)} - \frac{c^2}{4}}$$

68) Из слике 1013 видимо да је



Сл. 1013

$$AM \cdot AQ = AP^2, \; BN \cdot BR = BM^2, \; CP \cdot CS = CM^2$$

Међутим:

$$AP = \frac{b+c-a}{2}, \; BM = \frac{a+c-b}{2}, \; CM = \frac{a+b-c}{2},$$

јер је $AP = c - BP = c - BM = c - (a - CM) = c - a + CM = c - a + CN = c - a + b - AN = c - a + b - AP$; отуда је $2AP = b + c - a$, или: $AP = \frac{b+c-a}{2}$, итд.

Према томе, $AM \cdot AQ + BN \cdot BQ + CP \cdot CS = \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$. Кад се изврше означене рачунске радње и сведе, добија се: $AM \cdot AQ + BN \cdot BQ + CP \cdot CS = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{2}(ab+ac+bc)$.

69) Ако је r полупречник унутрашњег круга а d ширина кружног прстена, тада је полупречник спољашњег круга $r+d$. Обим унутрашњег круга је $2\pi r$, а спољашњег $2\pi(r+d)$ или $2\pi r + 2\pi d$. Отуда је

$$2\pi r + 2\pi d - 2\pi r = 2\pi d.$$

Разлика обима два концентрична круга једнака је обиму круга чији је полупречник једнак ширини кружног прстена.

Примедба. Лук од α^0 за унутрашњи круг има вредност $\frac{\pi r \alpha}{180}$, а за спољашњи $\frac{\pi(r+d) \cdot \alpha}{180}$, или $\frac{\pi r \alpha}{180} + \frac{\pi d \alpha}{180}$; отуда: $\frac{\pi r \alpha}{180} + \frac{\pi d \alpha}{180} - \frac{\pi r \alpha}{180} = \frac{\pi d \alpha}{180}$.

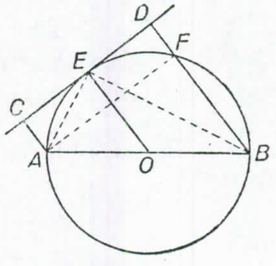
Разлика дужина сличних лукова двају концентричних кругова једнака је сличном луку оног круга чији је полупречник једнак ширини кружног прстена.

70) Половина заједничке тетиве је висина троугла чија су два темена центри кругова а треће пресечна тачка, тј. чија је једна страна централна раздаљина а друге две стране полупречници кругова. Израчуната по обрасцу за висину кад су познате све три стране, висина износи 0,8, а заједничка тетива 1,6. Питагорином теоремом израчуната, растојања тетиве од центара износе 0,6 и 1,5.

71) Четвороугао $ABCD$ је трапез, OE средња линија трапеза, јер је OE повучено нормално на CD (сл. 1014); према томе, $CE = ED$.

Правоугли троугли AEC и BDE су слични; из њихове сличности имамо:
$AC : CE = ED : BD$, или: $0{,}6 : CE = CE : 1{,}6$; отуда: $CE = \sqrt{0{,}96}$, $CD = 2\sqrt{0{,}96}$.

Ако повучемо $AF \parallel CD$, добијамо правоугли троугао ABF и отуда: $(2r)^2 = AF^2 + BF^2$, или: $(2r)^2 = (2\sqrt{0{,}96})^2 + 1 = 4{,}84$; $2r = 2{,}2$ cm.

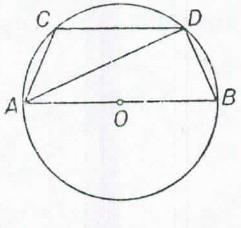


Сл. 1014

72) Луци AC и BD између паралелних тетива су једнаки; према томе, тетиве AC и BD су једнаке (сл. 1015).

Троугао ABD је правоугли; отуда:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 84^2 + 13^2;$$
$$AB = 85 \text{ cm}.$$



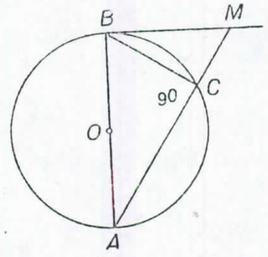
Сл. 1015

73) Знамо да је $MB^2 = MA \cdot 18{,}9$.

Ако спојимо тачке B и C, троугао ABC је правоугли са правим углом код C (сл. 1016).

У правоуглом троуглу ABM је

$$(2r)^2 = MA \cdot (MA - 18{,}9),$$
$$42^2 = MA^2 - 18{,}9 \cdot MA,$$
$$MA^2 - 18{,}9 \cdot MA - 1764 = 0;$$
$$\text{отуда: } MA = 52{,}5,$$
$$MB = \sqrt{52{,}5 \cdot 18{,}9} = 31{,}5.$$

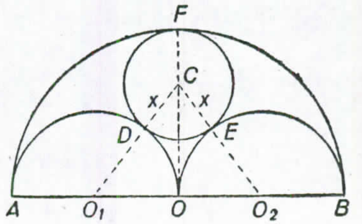


Сл. 1016

74) Нека је C центар круга који додирује три полукруга пречника AB, AO, BO, а x његов полупречник (сл. 1017).

O_1C и O_2C, дужи које спајају центре, пролазе кроз додирне тачке D и E и износе

$$O_1C = O_2C = \frac{r}{2} + x.$$



Сл. 1017

Троугао CO_1O_2 је равнокрак, и тежишна линија CO је висина; најзад: $OC = OF - CF = r - x$.

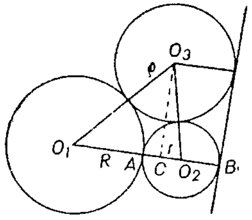
У правоуглом троуглу O_1OC имамо:

$$O_1C^2 = OC^2 + O_1O^2, \text{ или:}$$

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = (r - x)^2 + \frac{r^2}{4}.$$

Кад решимо ту једначину, добијамо $x = \frac{r}{3}$.

75) Претпоставимо да је задатак решен и да је центар траженог круга у O_8, а његов полупречник обележимо са ρ (сл. 1018).



Сл. 1018

Повуцимо $O_3C \perp O_1O_2$.

Из правоуглог троугла CO_2O_8 имамо:

$$O_8C = \sqrt{(\rho + r)^2 - (\rho - r)^2} = \sqrt{4r\rho} = 2\sqrt{r\rho};$$

из правоуглог троугла CO_1O_8:

$$O_3C = \sqrt{(R + \rho)^2 - (R + 2r - \rho)^2} =$$

$$= 2\sqrt{R\rho - r^2 - Rr + r\rho}.$$

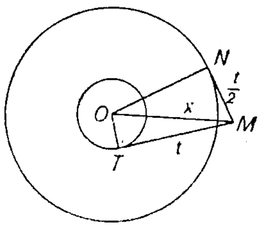
Према томе је

$$2\sqrt{r\rho} = 2\sqrt{R\rho - r^2 - Rr + r\rho},$$

а отуда:

$$\rho = \frac{r(R + r)}{R}.$$

76) Нека је $OM = x$, R и r полупречници кругова, $MT = t$, $MN = \frac{t}{2}$ (сл. 1019).



Сл. 1019

Из правоуглог троугла MON је

$$x^2 = R^2 + \frac{t^2}{4}, \text{ или: } 4x^2 = 4R^2 + t^2;$$

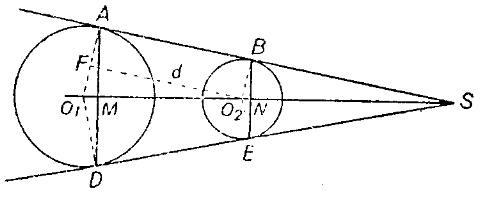
из правоуглог троугла OMT је

$$x^2 = r^2 + t^2.$$

Одузимањем ових једнакости добија се: $3x^2 = 4R^2 - r^2$, а отуда:

$$x = \sqrt{\frac{4R^2 - r^2}{3}}.$$

77) Повуцимо $O_2F \parallel BA$ (сл. 1020); тада је



Сл. 1020

$$O_1F = R - r,$$

$$d = \sqrt{c^2 - (R - r)^2}.$$

а) Из сличних троуглова AO_1S, FO_1O_2, BO_2S добијамо:

$$O_1S : O_1O_2 = O_1A : O_1F,$$

$$O_1S : c = R : (R - r),$$

$$O_1S = \frac{R \cdot c}{R - r}.$$

$$O_2S : O_1O_2 = O_2B : O_1F,$$

$$O_2S : c = r : (R - r),$$

$$O_2S = \frac{r \cdot c}{R - r}.$$

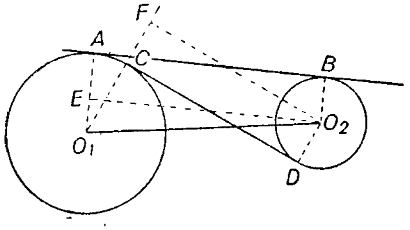
Исто тако добијамо: $AS = \frac{R \cdot d}{R - r}$, $BS = \frac{r \cdot d}{R - r}$.

б) $O_1M = \frac{R(R - r)}{c}$, $O_2N = \frac{r(R - r)}{c}$.

в) $AM = \sqrt{O_1M \cdot MS} = \frac{R \cdot d}{c}$, $BN = \frac{r \cdot d}{c}$.

г) $MN = \frac{d^2}{c}$.

78) Повуцимо $O_2E \parallel BA$ и $O_2F \parallel DC$ (сл. 1021).



Сл. 1021

Из правоуглог троугла O_1O_2E имамо:

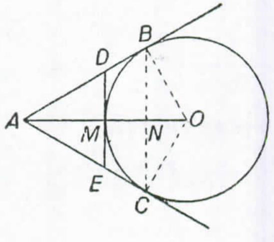
$$O_1E = R - r = \sqrt{65^2 - 63^2} = 16.$$

Из правоуглог троугла O_1O_2F имамо:

$$O_1F = R + r = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60.$$

Отуда: $R = 38$ dm, $r = 22$ dm.

79) Из правоуглог троугла AOB (сл. 1022) имамо:



Сл. 1022

$$AB=\sqrt{39^2-15^2}=36;\ 36^2=39\cdot AN;\ AN=\frac{432}{13};$$

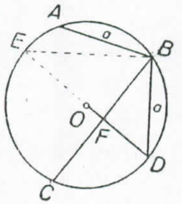
$$BN=\sqrt{AN\cdot NO};\ BN=\frac{180}{13}.$$

Из сличности троуглова ANB и AMD имамо:

$\frac{180}{13}:DM=\frac{432}{13}:24$ $(AM=AO-MO=39-$ $-15=24)$.

Отуда: $DM=10$, $DE=20$ dm.

80) Нека је лук BDC двапут већи од лука AB (сл. 1023); нормала повучена из центра на тетиву BC полови лук BDC; према томе, тетива BD је једнака тетиви AB.



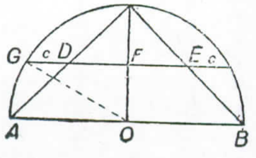
Сл. 1023

Обележимо тражену тетиву BC са x; тада је $BF=\frac{x}{2}$. Из правоуглог троугла BED имамо: $a^2=2r\cdot FD$; међутим, из правоуглог троугла BFD, $FD=\sqrt{a^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$;

отуда: $a^2=2r\cdot\sqrt{a^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$, а из ове једначине:

$$x=\frac{a}{r}\sqrt{4r^2-a^2}.$$

81) Троугао ABC је равнокрако-правоугли (сл. 1024). Дуж DE која спаја средине страна троугла ABC паралелна је страни AB и једнака $\frac{AB}{2}$, или r. Према томе, троугао CDF је равнокрако-правоугли, $CF=DF=\frac{r}{2}$.



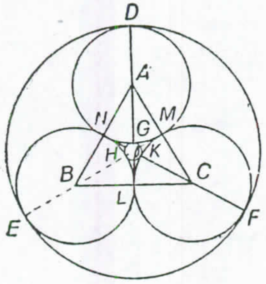
Сл. 1024

Из троугла GOF имамо: $r^2=\left(c+\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2.$

Решавањем ове једначине добијамо:

$$r=c(\sqrt{3}+1).$$

82) Да бисмо уопштили задатак, обележимо страну равностраног троугла са a.



Сл. 1025

а) Треба одредити центар равностраног троугла; OD и OG су тражени полупречници (сл. 1025), OL је полупречник уписаног круга у троуглу.

б) Зна се да је $AL=\frac{a}{2}\sqrt{3}$; затим, да је

$$AO=\frac{2}{3}AL=\frac{a}{3}\sqrt{3},$$

$$OD=AO+\frac{a}{2}=\frac{a}{3}\sqrt{3}+\frac{a}{2}=\frac{a}{6}(2\sqrt{3}+3),$$

$$OG=AO-\frac{a}{2}=\frac{a}{6}(2\sqrt{3}-3).$$

Геометриска средина је $\sqrt{\frac{a}{6}(2\sqrt{3}+3)\cdot\frac{a}{6}(2\sqrt{3}-3)}=\frac{a}{6}\sqrt{3}.$

в) $OL=\frac{AO}{2}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$; значи, према горњим вредностима $OL=$ $=\sqrt{OD\cdot OG}$.

Кад је $a=2$, тада је $OD=\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+3)$, $OG=\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-3)$.

83) Полупречник круга уписаног у троуглу је $r=\frac{p}{s}=$ $=\sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}}$, стране троугла су: r_1+r_2, r_1+r_3, r_2+r_3;

према томе,

$$r=\sqrt{\frac{(r_1+r_2+r_3-r_1-r_2)\ (r_1+r_2+r_3-r_1-r_3)\ (r_1+r_2+r_3-r_2-r_3)}{r_1+r_2+r_3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{r_1+r_2+r_3}}.$$

84) Повуцимо из O_1 паралелу страни AB а из O_2 паралелу страни CB (сл. 1026); тада је у правоуглом троуглу O_1EO_2:

$$O_1O_2{}^2=O_1E^2+O_2E^2,$$

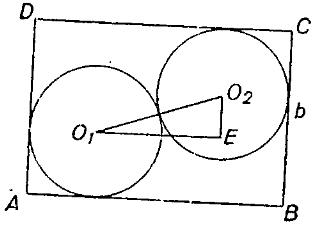
или:

$$(2r)^2=(a-2r)^2+(b-2r)^2;$$

отуда

$$r=\frac{a+b-\sqrt{2ab}}{2},$$

што је лако конструисати.



Сл. 1026

85) Опишимо круг око троугла ABC; нека је O његов центар а M тачка на страни BC, тако да је $AM^2=$ $=MB\cdot MC$ (сл. 1027).

Зна се да је

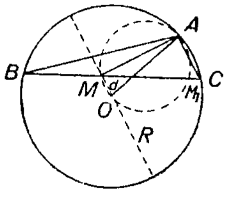
$$MB\cdot MC=(R+d)\ (R-d)=R^2-d^2=OA^2-OM^2;$$

према томе:

$$AM^2=OA^2-OM^2,$$

или:

$$AM^2+OM^2=OA^2.$$



Сл. 1027

Ова једнакост показује да је троугао AMO правоугли са правим углом код M; значи, тачка M се налази на кругу пречника AO.

Треба, дакле, спојити тачку A са центром O и над AO као над пречником описати круг; тачке M и M_1 у којима круг сече страну BC су тражене тачке.

Задатак има два решења, једно, или ниједно, према томе, да ли страна BC сече круг, или га додирује, или нема са њим заједничких тачака.

86) а) У правоуглом троуглу O_1CO_2 (сл. 1028) је

$O_1C=a-x,\ \ CO_2=a-y,\ \ O_1O_2=x+y;$

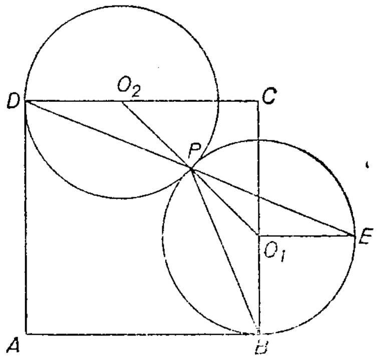
према томе:

$$(x+y)^2=(a-y)^2+(a-x)^2;$$

отуда:

$$y=\frac{a\,(a-x)}{a+x}.$$

б) Ако је $x=0$, тада је $y=a$. Кад x расте, бројилац израза $\frac{a\,(a-x)}{a+x}$ опада а именилац расте; према томе, вредност израза опада. Кад је $x=a$, тада је $y=0$.



Сл. 1028

в) DP се може продужити до E. Ако се повуче O_1E, добијају се два слична троугла O_1EP и O_2DP. Оба троугла су равнокрака и углови на основици су им једнаки, јер су углови код P унакрсни. Значи, $\sphericalangle O_1EP=\sphericalangle O_2DP$. Како су ови углови по положају наизменични, то је $O_1E \parallel DO$, што показује да је $\sphericalangle EO_1B=90^0$.

$\sphericalangle EPB=\frac{1}{2}\sphericalangle EO_1B=45^0$ (перифериски и средишни углови над истим луком).

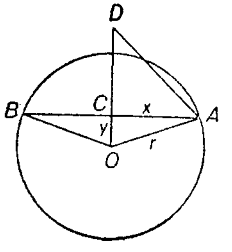
Тражени угао $BPD=180^0-\sphericalangle EPB=135^0$, тј. угао BPD има сталну вредност.

87) а) $x+y=a,\ x^2+y^2=r^2$ (сл. 1029). Одавде се добија једначина

$$2x^2-2ax+a^2-r^2=0.$$

Из решења ове једначине види се да ће x бити стварно и позитивно ако је $r<a\leq r\sqrt{2}$. То исто важи и за y.

б) У случају кад је $\sphericalangle OAB=60^0$, троугао OAB је равностран, $x=\frac{r}{2}$, $y=\frac{r}{2}\sqrt{3}$, $a=$ $=\frac{r}{2}\ (1+\sqrt{3})=1{,}3660\ r.$



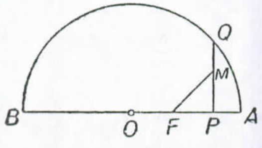
Сл. 1029

в) Ако се OC продужи за $CD = x$ и споји D са A, троугао ACD је равнокрако-правоугли, а $\sphericalangle D = 45°$.

Према томе, почев од центра, треба повући $OD = a = x + y$ и код D нацртати угао од 45°; пресек другог крака угла D са кругом даће крајњу тачку тетиве $2x$.

Биће два решења ако крак угла од 45° сече круг; једно решење ако додирује круг; или неће бити решења ако нема пресека. Другим речима, биће два решења ако је $a < r\sqrt{2}$, једно решење ако је $a = r\sqrt{2}$, и неће бити решења ако је $a > r\sqrt{2}$.

88) а) Са слике 1030 видимо да је



Сл. 1030

$$MF^2 = PF^2 + \left(\frac{3}{5}PQ\right)^2 = (x-a)^2 + \frac{9}{25}(r^2 - x^2) =$$

$$= \frac{16x^2 - 50ax + 25a^2 + 9r^2}{25}.$$

За $x = -r$, $MF^2 = (a+r)^2$,

за $x = 0$, $MF^2 = a^2 + \left(\frac{3}{5}r\right)^2$.

за $x = a$, $MF^2 = \frac{9}{25}(r^2 - a^2)$,

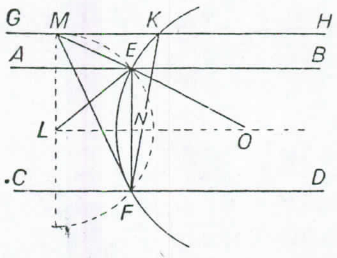
за $x = r$, $MF^2 = (r-a)^2$.

б) Израз за MF^2 биће потпун квадрат бинома првог степена ако је $a = \pm\frac{4}{5}r$. У том случају је $MF^2 = \left(\frac{5r \pm 4x}{5}\right)^2$; према томе: $MF_1 + MF_2 = \frac{5r+4x}{5} + \frac{5r-4x}{5} = 2r$.

§ 12. Максима и минима

1) Решимо обрнут задатак. Повуцимо GH паралелно са AB и CD (сл. 1031). Нека EF има одређен положај; потражимо на GH тачку M, тако да угао EMF буде максимум.

Ма за који круг са средиштем у O који пролази кроз E и F и сече паралелу GH у тачки K угао $K = \sphericalangle O$.



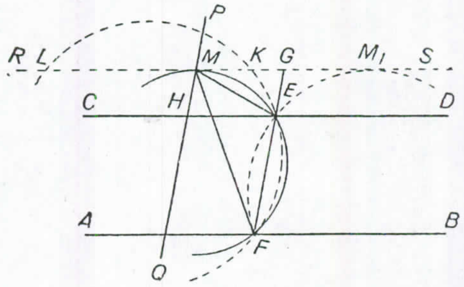
Сл. 1031

Дакле, угао ће бити максимум кад полупречник буде минимум. Зато опишимо круг који ће пролазити кроз тачке E, F и додиривати паралелу GH. Тада је $\sphericalangle M = \sphericalangle L$; а како је $LE < OE$, то је $\sphericalangle L > \sphericalangle O$.

Тражено растојање LN може се израчунати из троугла LNE. Ако је раздаљина двеју датих паралела d а растојање дате тачке од ближе паралеле l, онда је у троуглу LNE хипотенуза $LE = LM = l + \frac{d}{2}$, катета $NE = \frac{d}{2}$, па је

$$LN = \sqrt{\left(l + \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{l^2 + ld} = \sqrt{l(l+d)}.$$

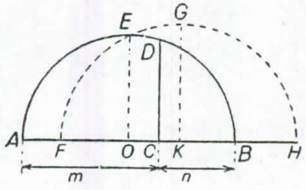
2) Решимо обрнут задатак. Повуцимо $RS \parallel CD$ (сл. 1032). За дати положај EF одредимо тачку M, тако да угао EMF буде максимум.



Сл. 1032

Кроз тачке E и F опишимо круг који додирује праву RS. Постоје два решења M и M_1. Кад се тачка L приближава правој PQ, полупречник лука чија је тетива EF стално се смањује до тачке M, затим се повећава. Дакле, угао се повећава; у тачки M је максимум. Затим се угао смањује; у тачки K је мањи а у тачки G је нула. Потом се опет повећава до M_1, где је нов максимум, а затим се опет смањује.

3) Ако се над AB, сталном збиру двају линеарних чинилаца m и n, опише полукруг (сл. 1033), познато је да је



Сл. 1033

$$m \cdot n = h^2.$$

Производ је, према томе, максимум кад је $CD = h$ максимум, а то је у случају кад су чиниоци AO и BO, јер тада је

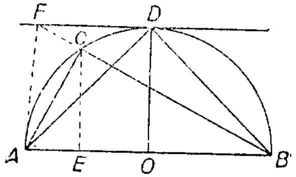
$$AO \cdot BO = OE^2,$$
$$OE > CD.$$

4) Овај закључак се изводи из задатка 3. Нека је OE сталан производ. Кад су чиниоци једнаки, збир је AB или $2\,OE$. Али, кад су они неједнаки, можемо их сматрати као отсечке добијене на пречнику полукруга $FEGH$ (сл. 1033) који пролази кроз тачку E, јер је тада

$$FO\cdot OH=OE^2,$$

$$FH=2\,KG;\ \text{а како је}\ KG>OE,\ \text{то је}\ AB<FH.$$

5) Можемо посматрати два чиниоца AC и BC као катете правоуглог троугла чија је хипотенуза једнака квадратном корену сталне вредности.



Сл. 1034

$$AC^2+BC^2=AB^2=AD^2+BD^2 \quad (\text{сл. } 1034).$$

Међутим, производ

$$AC\cdot BC=AB\cdot CE,$$

док је

$$AD\cdot BD=AB\cdot OD.$$

Како је $OD>CE$, то је $AD\cdot BD>AC\cdot BC$.

6) Кроз тачку D (сл. 1034) повуцимо паралелу са AB, продужимо BC и спојмо тачку F са тачком A.

Троугли AFB и ADB су једнаки, јер имају исту основицу и једнаке висине.

Јасно је да је

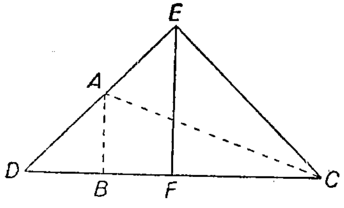
$$AD\cdot BD=BF\cdot AC,$$

$$AD^2+BD^2=AC^2+BC^2,$$

$$AD^2+BD^2<AC^2+BF^2.$$

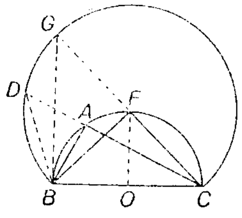
Примедба. На основу овога може се наћи минимум хипотенузе ако је збир катета сталан.

Нека је ABC један од ових троуглова (сл. 1035). Узмимо $BD=AB$; $\sphericalangle CDA=45^0$; геометриско место темена A је права DE; према томе, минимум хипотенузе је нормала CE спуштена на DE, а тада је $EF=FC$.



Сл. 1035

7) Нека је $AB^2+AC^2=a^2$.



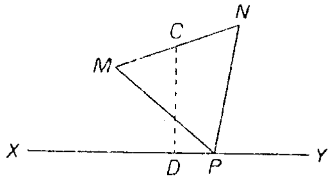
Сл. 1036

Ако узмемо $AD=AB$ (сл. 1036), збир CD дужи је тетива лука $BDGC$, чији је центар у F и који је геометриско место за темена периферискиx углова од 45°.

Максимум збира дужи је пречник CG, тј. у случају кад су дужи BF и CF једнаке.

8) Нека је $2s$ сталан збир двеју дужи; дужи означимо са $(s+x)$ и $(s-x)$. Збир квадрата је $2s^2+2x^2$; он је минимум кад је $x=0$; према томе, дужи треба да су једнаке.

9) Нека је P једна тачка на правој XY (сл. 1037). Према задатку 2 (§ 11) за троугао MPN може се написати:



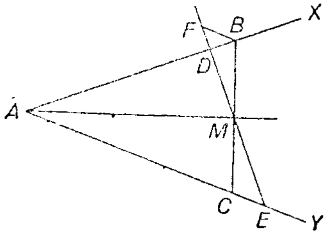
Сл. 1037

$$PM^2+PN^2=2\cdot MC^2+2\cdot PC^2.$$

Из ове једнакости се види да, како је MC непромењљиво, збир PM^2+PN^2 је минимум кад је PC^2, или PC, минимум.

PC је минимум кад се поклопи са нормалом CD спуштеном из C на праву XY.

10) Нека су BC и DE сечице које пролазе кроз тачку M на симетрали угла, од којих је $BC\perp AM$ (сл. 1038).



Сл. 1038

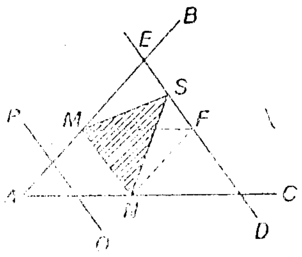
Треба да докажемо да је површина ACB мања од површине AED, или, ако од обе стране одузмемо заједнички део $ACMD$, да је површина MBD мања од површине CEM.

Повуцимо из B паралелу краку AY; ова паралела сече продужак дужи ED у тачки F; тада је површина $MBD<$ површине MBF.

Троугли CEM и MBF су подударни, јер су им једнаке стране MC и MB и на њима належи углови. Троугао $MBD < MBF$; према томе,

површина $MBD <$ површине MCE.

11) Нека троугао MNS има максималну површину (сл. 1039) Ако кроз S повучемо $DE \parallel PQ$, троугли који имају MN за основицу а треће теме на правој DE биће једнаки.

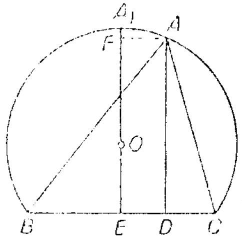


Сл. 1039

Највећи уписани паралелограм $ANFM$ добија се кад се кроз тачку F на средини дужи DE новуку паралеле са AB и AC (види зад. 21); троугао MNF, једнак троуглу MNS, јесте половина паралелограма $ANFM$.

Према томе, да бисмо добили троугао максималне површине, треба кроз дату тачку S повући паралелу датој правој PQ, затим, узимајући средину отсечка ове паралеле за теме паралелограма, треба конструисати највећи паралелограм и темена паралелограма која леже на крацима угла спојити са датом тачком.

12) Посматрајмо троугле исте основице BC и једнаких наспрамних углова A; геометриско место за темена углова A биће лук описан над страном BC као над тетивом, тако да су сви периферискиуглови над овом тетивом једнаки углу A (сл. 1040).

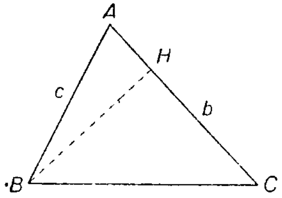


Сл. 1040

Површина троугла ABC је утолико већа уколико му је висина већа, и биће највећа кад је висина највећа, тј. кад се теме A буде налазило на средини лука BC. Јасно је да је $AD < AE$, јер ако из A спустимо нормалу на A_1E, тада је $AD = FE < A_1E$.

Кад се A налази на средини лука BC, тада је $A_1B = A_1C$, тј. троугао је равнокрак.

13) Нека троугао ABC има дате две стране $AB = c$ и $AC = b$.

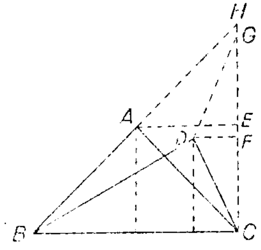


Сл. 1041

Површина троугла може се изразити са $\frac{b \cdot BH}{2}$ (сл. 1041), и она је максимум кад је висина BH највећа; или, ако запазимо да је $BH < BA$, или $BH < c$, кад је $BH = c$, тј. кад је угао A прав.

Троугао је, дакле, максимум кад је правоугли са правим углом код A.

14) *Први начин.* Посматрајмо два троугла ABC и DBC (сл. 1042), један равнокрак а други разностран, али тако да је $AB + AC = DB + DC$.



Сл. 1042

Кроз темена A и D повуцимо паралеле AE и DF са основицом BC. Одредимо тачку G симетрично тачки C у односу на DF и тачку H симетрично тачки C у односу на AE, тада је

$$BD + DG = BD + DC,$$

дуж $BAH = BA + AC$; отуда: $BH = BD + DG$.

Дакле, изломљена линија $BD + DG$, која је једнака дужи BH, треба да има крајњу тачку између C и H, иначе ће бити већа од BH; према томе CH, двострука висина равнокраког троугла, већа је од CG, двоструке висине другог троугла. Значи, равнокраки троугао има највећу површину.

Други начин. Површина једног троугла чије су стране a, b, c дата је обрасцем $P = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$.

Два чиниоца s и $(s-a)$ су непроменљиви, док се b и c мењају, али им је збир сталан; међутим, производ је максимум кад је $b = c$. Дакле, троугао треба да је равнокрак.

15) Нека су a, b, c три променљиве стране, $2s$ сталан обим, а P променљива површина.

$2s = a + b + c$ је стална количина.

За површину троугла имамо образац: $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

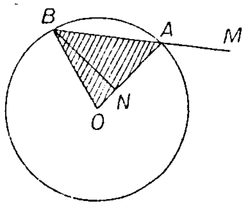
За чиниоце у овом обрасцу можемо написати:

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)=s,$$

тј. збир чинилаца је сталан. Међутим, знамо да, ако је збир чинилаца сталан, производ је максимум кад су чиниоци једнаки, тј.: $s-a=s-b=s-c$.

Према томе, троугао има највећу површину кад је равностран, тј. кад је $a=b=c=\frac{2s}{3}$.

16) Нека је BN нормално на OA (сл. 1043).



Сл. 1043

Површина $AOB=\frac{r \cdot BN}{2}$.

Површина AOB биће максимум кад је BN максимум, тј. $(BN<BO)$ кад се BN и BO поклопе, или кад је угао BOA прав.

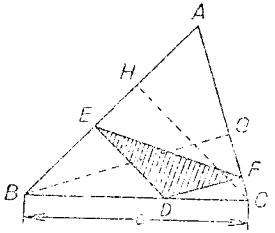
Тетива AB је у том случају страна уписаног крадрата, па ће се сечица MAB добити кад се из M повуче тангента на круг концентричан датом кругу чији је полупречник једнак централној раздаљини стране уписаног квадрата.

17) Нека је A један разнострани троугао, а B и C два равнострана троугла, од којих један има обим једнак обиму троугла A а други има површину једнаку површини троугла A. Обележимо са $2s$ обим троугла A, или троугла B, а са $2s_1$ обим троугла C.

Ако троугли A и B имају једнаке обиме, равнострани троугао B има већу површину (види зад. 14). Према томе $A<B$. Како је $A=C$, то је у $C<B$; отуда $2s_1<2s$.

Према томе, равнострани троугао C има мањи обим од свих троуглова са којима има једнаку површину. Другим речима, од свих троуглова једнаких површина равнострани троугао има најмањи обим.

18) а) Кад је покретна тачка у темену B или C, троугао је нула; максимум може бити само ако је тачка D између темена B и C (сл. 1044).



Сл. 1044

б) $\sphericalangle EDF$ је сталан, јер је увек суплементан углу A; троугли који имају по један угао једнак пропорционални су са производом страна које захватају тај угао. Довољно је проучити промене производа $DE \cdot DF$.

в) Изразимо овај производ као функцију познатих дужи и растојања BD и CD тачке D од темена. Повуцимо висине из темена B и C, $BG=h_1$ и $CH=h_2$; тада можемо написати:

$$\frac{DE}{h_2}=\frac{BD}{a}; \quad DE=\frac{h_2}{a} \cdot BD,$$

$$\frac{DF}{h_1}=\frac{DC}{a}; \quad DF=\frac{h_1}{a} \cdot DC.$$

$$DE \cdot DF=\frac{h_1 \cdot h_2}{a^2} BD \cdot DC.$$

Промене производа $DE \cdot DF$ зависе само од $BD \cdot DC$.

Максимум је кад је $BD=DC$. (Зад. 3).

19) Ако су x и y стране правоугаоника чији је обим $2s$, биће: $2x+2y=2s$, или: $x+y=s$. Површина правоугаоника је xy.

Познато је да се xy може овако изразити:

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$$

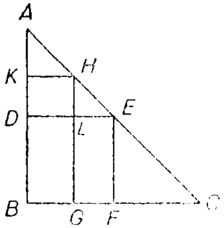
или

$$xy=\frac{s^2-(x-y)^2}{4}.$$

xy ће бити максимум кад $(x-y)^2$ буде минимум, тј. кад је $(x-y)^2=0$, или $x=y$.

20) Задатак се може овако исказати: Кад је збир двају чинилаца минимум ако је производ чинилаца сталан?

Задатак се своди на задатак 4.

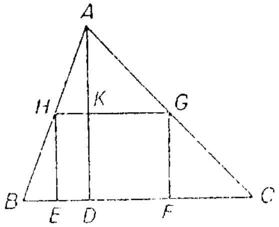


Сл. 1045

21) а) Ако је троугао ABC равнокрако-правоугли, са теменом правог угла у B, правоугаоник је максимум кад се из средине D стране AB повуче $DE \parallel BC$ и $EF \perp BC$ (сл. 1045) Правоугаоник $BFED = \frac{ABC}{2}$. Правоугаоници $BFED$ и $BGHK$ имају један део површине заједнички; треба само упоредити $GFEL$ и $DLHK$. Јасно је да је $LE = LH$; значи, њихова величина зависи од EF и HK. Међутим, EF или $DE > KH$.

Према томе, правоугаоник $BFED > BGHK$.

б) Троугао је разностран.

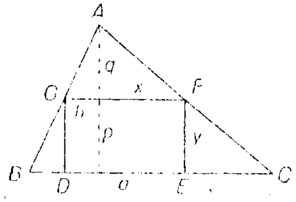


Сл. 1046

Троугао ABC можемо висином поделити на два правоугла троугла BDA и DCA (сл. 1046). Лако се може извести да за сваки правоугли троугао важи исто што и за равнокрако-правоугли. У правоуглом троуглу BDA уписани правоугаоник је максималне површине кад је једно теме на средини стране AB. Према томе, правоугаоник $EDKH$ је максимум.

Исто тако, правоугаоник $DEGK$ уписан у правоуглом троуглу DCA је максимум, јер је теме G на средини стране AC. Правоугаоник $EFGH$ уписан у троуглу ABC је састављен из правоугаоника $EDKH$ и $DFGK$. Значи, он је максимум кад му се темена налазе на срединама оних страна троугла, на којима не лежи једна страна правоугаоника.

в) Максимални правоугаоник може се добити и на овај начин:



Сл. 1047

Нека су x и y основица и висина правоугаоника, а p и q отсечци које на висини одређује паралела (сл. 1047). Тада можемо написати:

$$x : a = q : (p + q),$$

$$y : h = p : (p + q).$$

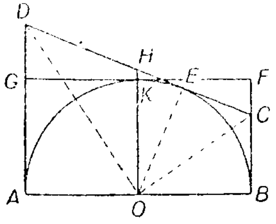
Множећи ове две пропорције добијамо:

$$xy : ah = pq : (v + q)^2; \text{ отуда:}$$

$$xy = ah \cdot \frac{pq}{h^2} = \frac{a}{h} pq.$$

Овде је само производ pq променљива количина; значи, максимум је кад је $p = q$, јер је $v + q = h$ стална вредност.

22) Полупречник додирне тачке OE и дужи OC и OD деле трапез на четири троугла, од којих су два и два једнака (сл. 1048). Према томе, COD је половина трапеза, а површина целе слике је $CD \cdot r$.



Сл. 1048

Значи, минимум површине је у случају кад је тангента CD минимум, а она ће бити минимум кад буде у положају FG паралелном са пречником. Полуквадрат $ABFG$ је минимум.

На основу теореме обрађене у задатку 19 (§ 10) потребно је и довољно да OH буде минимум, тј. једнако полупречнику.

Из посматрања минимума површине може се лако извести услов за минимум обима.

Површина $ABCD = \frac{r}{2}(BC + CD + DA)$;

површина $ABFG = \frac{r}{2}(BF + FG + GA)$.

Површина $ABFG$ је мања од површине $ABCD$; значи и обим $(BF + FG + GA)$ је мањи од обима $(BC + CD + DA)$.

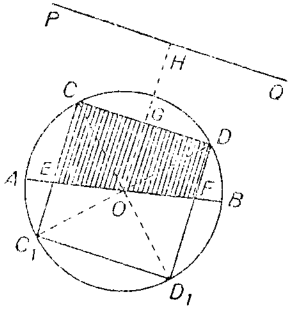
Према томе, описани полигон који има минимум површине има, исто тако, и минимум обима.

23) Нека је трапез $CDFE$ максимум (сл. 1049).

а) Ако продужимо стране CE и DF до пресека са кругом, добиће се правоугаоник двапут већи од трапеза.

Правоугаоник је максимум кад је квадрат.

$$OG=\frac{r}{\sqrt{2}},\ CD=r\sqrt{2}.$$



Сл. 1019

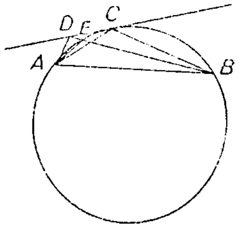
б) Површина трапеза $CDFE$ је $2\cdot CG\cdot OG$.

Површина ће бити максимум кад су променљиви чиниоци CG и OG једнаки, јер је збир њихових квадрата једнак OC^2, тј. сталан. (Зад. 5).

Према томе је

$$CG=OG=\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Да бисмо извршили конструкцију, треба повући $OH\perp PQ$ и на OH пренети $\frac{r}{\sqrt{2}}$.



Сл. 1050

24) Узмимо ма коју тачку D на дирки и спојмо је са крајњим тачкама тетиве AB (сл. 1050). Дуж DB сече круг у тачки E; затим спојмо тачку E са тачком A. Периферски угао AEB као спољашњи угао троугла ADE већи је од угла D. Може се, дакле, доказати да је сваки угао чије је теме ван круга а краци му пролазе кроз крајње тачке тетиве мањи од периферског угла над тетивом.

Према томе, највећи угао над тетивом, а чије теме је на дирки, јесте онај, чије је теме у додирној тачки.

САДРЖАЈ

стр.
1. § 1 Права линија и угао . . . 5—113
§ 2 Троугао . . . 7—120
2. а) Теореме . . . 7—120
1) Ма који троугао . . . 7—120
3. 2) Равнокраки и равнострани троугао . . . 12—139
3) Правоугли троугао . . . 13—145
б) Рачунски задаци . . . 15—149
в) Конструктивни задаци . . . 16—151
1) Ма који троугао . . . 16—151
2) Равнокраки троугао . . . 18—166
3) Правоугли троугао . . . 19—169
§ 3 Четвороугао . . . 20—173
а) Теореме . . . 20—173
1) Паралелограм . . . 20—173
2) Ма који четвороугао . . . 22—182
б) Рачунски задаци . . . 24—194
в) Конструктивни задаци . . . 25—197
1) Паралелограм . . . 25—197
2) Ма који четвороугао . . . 26—204
§ 4 Геометриска места . . . 27—210
§ 5 Максима и минима . . . 28—218
§ 6 Круг . . . 30—225
а) Теореме . . . 30—225
1) Пресек круга и праве. Лукови и тетиве . . . 30—225
2) Тангенте круга . . . 31—230
3) Узајамни положаји два круга . . . 32—233
4) Мерење лукова и углова. Око круга описане и у кругу уписане слике . . . 33—236
б) Рачунски задаци . . . 44—275
в) Конструктивни задаци . . . 47—284
§ 7 Геометриска места . . . 55—329
§ 8 Максима и минима . . . 59—346

стр.
§ 9 Пропорционалност дужи и сличност слика . . . . 61—353
  а) Теореме . . . . 61—353
    1) Дуж и угао . . . . 61—353
    2) Троугао . . . . 61—354
    3) Четвороугао . . . . 65—367
    4) Круг . . . . 67—376
  б) Рачунски задаци . . . . 72—394
  в) Конструктивни задаци . . . . 76—409
  г) Геометриска места . . . . 83—449
§ 10 Једнакост површина и мерење површина . . . . 84—456
  а) Теореме . . . . 84—456
  б) Рачунски задаци . . . . 92—479
  в) Конструктивни задаци . . . . 95—493
  г) Подела и претварање слика . . . . 97—502
§ 11 Однос величина и израчунавања величина код равних слика . 98—511
  а) Теореме . . . . 98—511
  б) Рачунски задаци . . . . 102—521
§ 12 Максима и минима . . . . 109—544

ДАРИНКА ЈАНОШЕВИЋ и д-р. НИКОЛА ЧЕПИНАЦ
ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ПЛАНИМЕТРИЈЕ
СА РЕШЕЊИМА

Редактор: Радмило Димитријевић
Технички уредник: Алојз Разборшек
Коректор: Ружа Марковић
Тираж: 15.000 примерака
Обим: $34^3/_4$ штампаних табака

Штампање завршено маја 1952 год. у „Југоштампи",
Булевар војводе Мишића 19, Београд.
