Јов Симовљевић

Г. Н. БЕРМАН

ЗБИРКА ЗАДАТАКА

ИЗ

МАТЕМАТИЧКЕ АНАЛИЗЕ

ЗА ТЕХНИЧКЕ ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1951

Наслов оригинала:

Г. Н. БЕРМАН

СБОРНИК ЗАДАЧ

по курсу

МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

для втузов

Превео

ЗАРИЈА БУЛАТОВИЋ

предавач Т. В. Ш.

Штампарија и књиговезница „НАУЧНА КЊИГА" Београд, Народног Фронта број 12

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР РЕДАКТОРА

Ова „Збирка" састављена је уз мој „Курс математичке анализе за Више техничке школе", књ. I и II. Задаци и вежбања су систематски одабрани у пуној сагласности са теориским одељцима уџбеника, и нумерација појединих рубрика „Збирке" поклапа се, осим малог броја изузетака, са рубрикацијом „Курса".

Аутор је имао за циљ да пружи студенту у довољно великом обиму методски распоређен материјал за самосталан рад на решавању задатака, развијању неопходних навика у математичкој техници, а исто тако и за размишљање о њему доступним проблемима, који на овај или онај начин објашњавају или продубљују теориска питања курса. Значај тог самосталног рада у процесу изучавања курска математичке анализе, специјално намењеног студентима виших техничких школа и инжењерима, не може се ни у ком случају умањити. Мени се чини да је ова „Збирка" изванредно важна и драгоцена допуна уџбеника, и ја дозвољавам себи слободу да изразим овде своје уверење у то да је аутор с успехом постигао циљ који је себи поставио.

У сагласности са руководећим идејама „Курса" основна тенденција „Збирке" усмерена је на осветљавање основних појмова анализе, како у њиховој суштини, тако и са формалне стране, и на савладавање принципа и технике примене ових појмова у физичким и техничким наукама. На основу тога, упоредо са обавезним вежбањима срачунатим на стицање и васпитавање алгоритамско-рачунских навика, у „Збирци" се дају и разна питања, која су у вези са читавим контекстом поменутог курса анализе, и велики број задатака конкретне (геометриске, механичке, физикалне, хемиске, техничке) садржине, који се решавају методама анализе. Све то скупа треба да потпомогне успешно испуњавање оне улоге коју је позван да игра курс математичке анализе у техничкој школи, наиме: да буде основно средство теориског изучавања техничких дисциплина и, самим тим, ефикасно оруђе у рукама инжењера у његовој научној и практичној делатности.

Све примедбе које указују на недостатке, и предлози о евентуалним изменама које би побољшале „Збирку", примају се са захвалношћу.

Москва, 21 април 1946 г. *А. Ф. Бермант*

ПРЕДГОВОР АУТОРА

О замислима које леже у основи избора и распореда материјала речено је у предговору редактора. Ја ћу се ограничити на указивање неких техничких детаља.

„Курс математичке анализе за Више техничке школе“ од проф. А. Ф. Берманта у тексту се скраћено означава са Курс*). Теориска објашњења и напомене о потребним формулама, које обично претходе појединим одељцима збирке, у овој „Збирци“ нису наведени, јер их читалац може наћи у одговарајућим параграфима Курса. Неки параграфи „Збирке“ су, ради згодније употребе подељени на мање одељке, који нису нумерисани. Групи сродних задатака претходи општа напомена. Уз задатке с физикалном садржином дати су потребни обрасци из физике. Иначе у тексту задатака нема никаквих других формула ни објашњења. Ако је задатак више или мање тежак упуства су дата у резултатима; такви су задаци обележени звездицом (*). Ако је за боље разумевање услова задатка потребан цртеж, он је приложен у тексту. У осталим случајевима он је дат у резултатима. Тако например, сви одговори уз задатке из испитивања функција и кривих линија пропраћени су одговарајућим цртежима. Типични задаци, искоришћени за илустрацију у Курсу, као и сви други задаци посматрани у Курсу, не понављају се у „Збирци“. У читавој збирци спроведена је јединствена нумерација задатака.

На крају сматрам својом пријатном дужношћу захвалити редактору књиге проф. А. Ф. Берманту, који јој је поклонио нарочиту пажњу, и Б. А. Кордемском, који је проконтролисао све задатке и дао ми низ драгоцених савета, као и свима онима који су непосредно или посредно сарађивали на изради ове збирке.

Москва, 21 априла 1946 г. *Г. Н. Берман*

ПРЕДГОВОР ПРЕВОДИОЦА

Наша домаћа уџбеничка литература још увек је врло оскудна у систематским збиркама задатака из појединих области Више математике. Надам се да ће овим преводом „Збирке задатака“ од Г. Н. Бермана та празнина бити бар донекле, и бар за извесно време, попуњена.

Као што се види из предговора редактора и аутора, „Збирка“ Г. Н. Бермана по својој тематици и распореду материјала везана је за „Курс математичке анализе“ од проф. А. Ф. Берманта. То, међутим, не значи да се књига не може користити и сама за себе, без познавања поменутог „Курса“; она претставља засебну целину, и сва објашњења за која аутор збирке упућује читаоца на поједина поглавља из „Курса“,

*) А. Ф. Бермант, Курс математичке анализе за Више техничке школе, књ. I и II, издање II, 1944 г., издање III, 1946 г., М. — Л. Гостехиздат.

могу се наћи и у било којем другом уџбенику математичке анализе. Уосталом пожељно би било да се и сам „Курс“ А. Ф. Берманта појави на нашем језику, и сигурно ће пре или после, то и бити.

Главна одлика и преимућство ове збирке над другима сличне врсте јесте, поред поступности и систематичности у распореду материјала, то, што она садржи огроман број задатака нешаблонских, тесно везаних за разумевање основних појмова анализе. Овакве задатке, међутим, студенти већином инстинктивно избегавају, сматрајући их исувише „тешким“ и неприступачним. Велики број студената под задацима подразумева искључиво такве „задатке“, у којима има само да се врше рачунске операције, закључно са диференцирањем и интегрирањем; све друго што је макар и мало везано за математичко расуђивање, за дискусију, и што иоле отступа од непосредних, интуитивних, често површних и погрешних претстава о појмовима, они сматрају за „теорију“, мирећи се унапред са тим да је то њима неприступачно и непотребно. Овако неправилно гледање на ствари, одвајање теорије математике од њене праксе, од њених примена, је прилично распрострањено код наших студената, и мора се најенергичније сузбијати; рад у том смислу мора стајати у првом плану борбе против формализма у настави и усвајању математике. Надам се да ће ова збирка оваквим избором задатака знатно допринети што бољем успеху те борбе.

Са гледишта чисто школске праксе несумњиво је да би вредност збирке била још већа да је на крају VII и XIII главе придодато још по једно поглавље, посвећено комбинованим задацима, од којих би сваки у више разних потпитања, везаних једном заједничком основном идејом, обухватао и повезивао што већи део од читавог претходног градива.

С друге стране, мора се имати у виду да ова збирка садржи задатке само из области математичке анализе, тј. диференцијалног и интегралног рачуна, диференцијалних једначина и теорије редова; остале дисциплине које улазе у програм математике на високим техничким школама: алгебра, теорија детермината, теорија вектора, аналитичка геометрија у равни и простору и диференцијална геометрија у простору, — остале су, углавном, ван оквира ове збирке.

Приликом проверавања решења задатака нађен је приличан број погрешних резултата. Осим тога неки су задаци били погрешни или непрецизно формулисани, а код неких, опет, слике су биле нетачне. Сви примећени недостаци ове врсте у преводу су отклоњени.

Децембра 1949 год.
Београд

З. Булатовић

ИСПРАВКЕ

ЗАДАЦИ

Задатак	Стоји	Треба
	слика 3	слика 4
	слика 4	слика 3
14	која изражава дужину ...	која изражава зависност дужине ...
82 b)	$-1{,}7$	$-1{,}6$
131	зависности x; v?	зависности x и v?
	слика 12 један зрак (компонента) треба да буде A_2 а не A.	
171	(види сл. 11)	(види сл. 10).
254	$\sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$
264, б)	функција x^x	функција $y = x^x$
294	у имениоцу: $\alpha^2 - \beta_2$	$\alpha^2 - \beta^2$
317	$y = x^2$	$y = x^3$
339	за $x + 0$	за $x = 0$
458	$y = (1 - 2^2)^{10}$	$y = (1 - x^2)^{10}$
509	$y = a\,\mathrm{tg}^3 \ldots$	$y = a\,\mathrm{tg} \ldots$
755	$\mathrm{tg}\, h$	th
783	$1 - au \sin x$	$1 - \arcsin x$
855	$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + (\cdots)$	$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + \cdots)$
сл. 22	тачку на замајцу, од које полази крива линија са стрелицом, треба обележити са A.	
1075	$y = 2 \sin 2x - x$	$y = \sin 2x - x$
1226	$\lim \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$
1239	$x^2(x^2 + 1)$	$y^2(x^2 + 1)$
1364	$d \sin d$	$d \sin \alpha$
1444	$y = \frac{x^2}{4}$	$y = \frac{x^3}{4}$
1818	у имениоцу: $\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x - 1})$	$\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 1)$
1877	смена $x = \varphi(t)$	смена $x = \varphi(z)$
1999	у имениоцу: $\sin^4 x \cos x$	$\sin^4 x \cos^4 x$
2068	$\sqrt[x]{a + x}$	$\sqrt[3]{a + x}$
2304	до $\rho = \pi$	$\varphi = \pi$
2394	$\rho = \frac{\Omega m}{m\, m^2}$	$\rho\, \frac{\Omega m}{m\, m^2}$

Задатак	Стоји	Треба
2474	$u=(\xi+\eta)^2+$	$u=(\xi+\eta)^2+\cdots$
2544	у имениоцу: $x^2=y^2$	x^2+y^2
2620	$z+\ln(\cdots$	$z=\ln(\cdots$
2782	Наћи највећу вредност.	Наћи највећу и најмању вредност..
2835	$z=\frac{1}{3}at^2$	$z=\frac{1}{3}at^3$
3094 b)	у бројиоцу: $2b+2\alpha b^2$	$2b+3\alpha b^2$
3111	под знаком другог интеграла: $e^{-z^2}x\,dx$	$e^{-z^2x}dx$
3164	под знаком интеграла: $+x\,dy$	$+x^2dy$
3453	$(za-x)y^2=$	$(2a-x)y^2=$
3896	$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+$	$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=$

РЕШЕЊА

Задатак	Стоји	Треба
380	$y=-\frac{\pi}{2}$	$y=-\frac{\pi}{2}x$
453	Треба да стоји испред разломачке црте знак минус	
611	$\frac{1}{1e}$	$\frac{1}{2e}$
866	у имениоцу другог разломка: $\sin\frac{3}{2}t$	$\cos\frac{3}{2}t$
316	[illegible] $x + x \sin x$	$=$ [illegible]
1533	$\frac{a}{2}t^2$	$\frac{\alpha}{2}t^2$
1909	$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x^3$	$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x^2$
2033	у бројиоцу трећег разломка: $4(x+2)^2$	$4(x+2)^3$
2078	$1-2\operatorname{tg}x$	$1+2\operatorname{tg}x$
2452	$z=\frac{\pi}{3}(x^2y-x^3)$	$z=\frac{\pi}{3}(x^2y-y^3)$
2592	$x\,dx-y\,dy$	$x\,dx+y\,dy$
3271	$-C$	$=C$
3458	у првој једначини: $-t\cos t$	$+t\sin t$
3453	у другој једнач.: $y=a(\sin t+t\sin t)$	$y=a(-\sin t+t\cos t)$
3813	$-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}$	$-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\frac{x^{13}}{13}$
3814	$\frac{x^{10}}{19}$	$\frac{x^{19}}{19}$

ГЛАВА I

ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ

§ 1. Функције и начини њиховог дефинисања

1. Зависност пута (s), који пређе нека покретна тачка, од времена (t) дата је следећом таблицом:

(t у sec)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(s у cm)	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31

Конструисати график спајањем тачака непрекидном линијом.

2. Дата је таблица значења логаритамске функције:

Број	0,25	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	0	20
log	– 0,60	– 0,30	0	0,18	0,30	0,48	0.60	0,70	0,78	0,84	0,90	0,96	1	1,3

Конструисати график спајањем тачака непрекидном кривом.

3. Нека функција дата је следећом таблицом:

Независно промен-љива x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Функција y	– 1,5	– 1	0	3,2	2,6	0	– 1,8	– 2,8	0	1.1	1,4	1,9	2,4

Конструисати њен график спајањем тачака непрекидном кривом, и помоћу графика „употпунити“ таблицу одредивши вредности функције за $x=2{,}5;\ 3{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5;\ 6{,}5;\ 7{,}5;\ 8{,}5;$ и $9{,}5$.

4. Функција је дата графиком претстављеним на сл. 1. Пренети цртеж на милиметарску хартију, изабрати јединицу и саставити таблицу вредности функције.

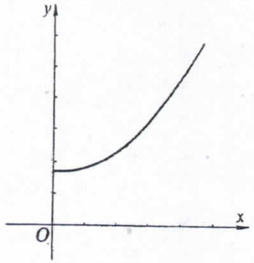
5. Исто за функцију дату графиком нацртаним на сл. 2. Показати за које је вредности аргумента функција позитивна, а за које је негативна. Наћи вредности независно промењиве за које је вредност функције једнака нули.

6. Функција је дата графиком нацртаним на сл. 3. По графику одговорити на следећа питања:

а) за које је вредности независне променљиве вредност функције равна нули?

б) за које је вредности аргумента функција позитивна?

в) за које је вредности аргумента функција негативна?


Сл. 1

7. Исто за функцију задату графиком нацртаним на слици 4.

8. По Омовом закону зависност јачине струје од отпора изражава се формулом:

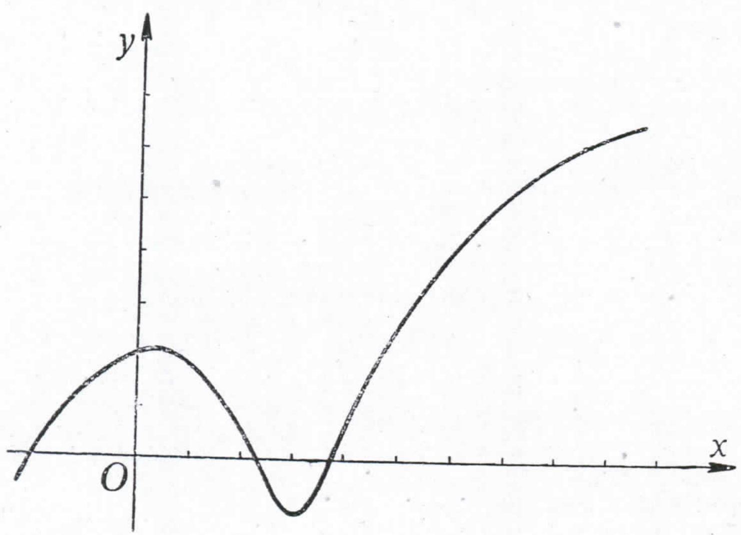
$$I=\frac{E}{R}.$$

Конструисати график ове функције за $E=10\,(V)$.

9. Зависност силе узајамног дејства два електрична набоја од растојања између њих изражава се формулом (Кулонов закон):

$$F=\frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2}.$$

Саставити таблицу вредности ове функције и нацртати њен график за $e_1=e_2=1$ и $\varepsilon=1$.

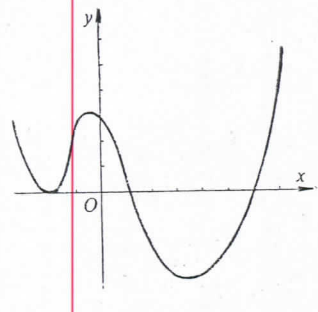

Сл. 2

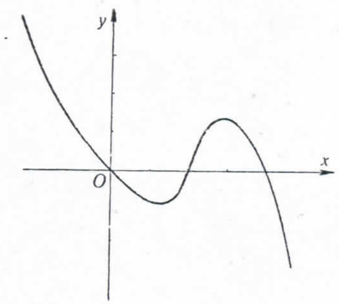
10. Формула $s=v_0 t+\frac{gt^2}{2}$ изражава зависност пута који пређе тело које пада, од времена. Нацртати график функције за $v_0=2$ m/sec и $g=9{,}8$ m/sec².

11. Нацртати тачку по тачку дијаграме следећих функција:

1) $y=2x-5$ 2) $y=3x^2-1$ 3) $y=\frac{2}{x}$ 4) $y=2^x$

5) $y=\frac{4}{4-x}$ 6) $y=\frac{x^2}{1-x^2}$ 7) $y=\sin x$.


Сл. 3


Сл. 4

12. Неки се порез наплаћује по следећој скали: на приход до 100 д. закључно порез се не наплаћује. На приход од 100 д. (искључно) до 200 д. (закључно) — 1 д. На приход од 200 д. (искључно) до 500 д. (закључно) — 3 д. На приход од 500 д. (искључно) до 1.000 д. (закључно) — 8 д. На приход преко 1.000 д. — 1% од прихода. Нацртати дијаграм функције која претставља зависност пореза (y) од прихода (x).

13. Изразити полупречник цилиндра као функцију његове висине за дату запремину $v(=1)$ и конструисати дијаграм те функције.

14. Исто за функцију која изражава дужину једне катете правоуглог троугла од дужине друге катете, при сталној хипотенузи $c\,(=5)$.

15. Изразити површину равнокраког трапеза са основама a и b као функцију угла α на основици. Нацртати дијаграм за $a=2$, $b=1$.

16. Исто то за функцију која изражава зависност бочне површине s цилиндра од његовог полупречника r при датој сталној запремини $v\left(=\frac{1}{2}\right)$.

17. Исто то за функцију која изражава зависност запремине v конуса од његове висине h за дату сталну генератрису $l\,(=2)$.

18. Равнокраки троугао обима $p=10$, обрће се око основице. Изразити запремину добијеног обртног тела као функцију троугловог крака x; нацртати дијаграм те функције.

§ 2. Симболика и класификација функција

Симболика

19. Дата је функција:

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1}.$$

Наћи $f(10)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(\sqrt{2})$.

20. Дата је функција:

$$\psi(t)=t^3-1.$$

Наћи $\psi(1)$; $\psi(a)$; $\psi(a+1)$; $\psi(a-1)$.

21. Дата је функција:

$$F(z)=2^{z-2}.$$

Наћи $F(0)$; $F(2)$; $F(3)$; $F(-1)$; $F(2{,}5)$.

22. Дата је функција;

$$\varphi(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Наћи $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$; $\varphi(b)$; $\varphi\left(\frac{1}{b}\right)$; $\varphi(\sqrt{b})$.

23. Дата је функција:

$$f(u)=ua^u.$$

Наћи $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$; $f\left(\frac{1}{a}\right)$; $f(a)$; $f(-a)$.

24. $f(x)=x^2-2x+3$. Решити једначине: $f(x)=f(0)$; $f(x)=f(-1)$.

25. $\varphi(t)=t^3+1$. Наћи $\varphi(t^2)$ и $[\varphi(t)]^2$.

26. $F(x)=x^4-2x^2+5$. Доказати да је $F(a)=F(-a)$.

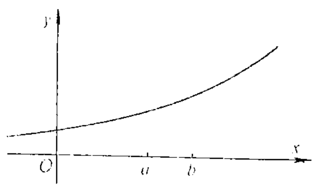
27. $\Phi(z)=z^3-5z$. Доказати да је $\Phi(-z)=-\Phi(z)$.

28. $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$. Доказати да је $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

29. $f(x)=\sin x-\cos x$. Доказати да је $f(1)>0$.

30. $\psi(x)=\log x$. Доказати да је $\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$.

31. $F(z)=a^z$. Доказати да је за свако z: $F(-z)\cdot F(z)-1=0$.



Сл. 5

32. Дат је дијаграм функције и вредности a и b независно промењиве x (сл. 5). Конструисати на цртежу $f(a)$ и $f(b)$. Какво је геометриско значење количника $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

***33.** Нек функција $\varphi(x)$ за свако x и t задовољава једначину $\varphi(x+t)=\varphi(x)+\varphi(t)$. Показати да у том случају $\varphi(x)$ задовољава и једначину $\varphi(kx)=k\varphi(x)$ за свако рационално k.

Сложене функције

34. Дато је $y=z^2$, $z=x+1$. Изразити y као функцију од x.

35. Дато је $y=\sqrt{z+1}$, $z=tg^2 x$. Изразити y као функцију од x.

36. Дато је $y=z^2$, $z=\sqrt[3]{x+1}$, $x=a^t$. Изразити y као функцију од t.

37. Дато је $y=\sin x$; $v=\log y$; $u=\sqrt{1+v^2}$. Изразити u као функцију од x.

38. Дато је $y=1+x$; $z=\cos y$; $v=\sqrt{1-z^2}$. Изразити v као функцију од x.

39. Следеће сложене функције рашчланити у ланац састављен од елементарних функција:

а) $y=\sin^3 x$; б) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$; в) $y=\ln \operatorname{tg} x$;

г) $y=\sin^3(2x+1)$; д) $y=5^{(3x+1)^2}$.

40. За $f(x)=x^3-x$ наћи $f[f(x)]$ и $f\{f[f(0)]\}$.

41. Написати у експлицитном облику функције дате имплицитно следећим једначинама:

1) $x^2+y^2=1$; 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 3) $x^3+y^3=a^3$;

4) $xy=c$; 5) $2^{xy}=5$; 6) $\log x+\log(y+1)=4$.

Имплицитне функције

42. Двозначна функција $y=\pm\sqrt{x^2}$ има једнозначне гране $y=x$ и $y=-x$. Издвојити једнозначне гране ове функције на други начин, користећи се знаком за апсолутну вредност. Нацртати дијаграме тих функција.

43. Наћи једнозначне гране двозначне функције y, имплицитно дефинисане једначином:

$$x^2-y^2+3x+y+2=0.$$

44. Написати експлицитно по y изразе за све једнозначе гране многозначне функције y, имплицитно дате једначином $(y^2-16)^2=25-x^2$. Нацртати дијаграме тих грана.

45. Функција y дата је имплицитно једначином $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$. Какве услове морају задовољавати стални коефициенти a, b, c, d, e, f да би једнозначне гране ове функције имале облик: $y=kx+l_1$ и $y=kx+l_2$ где су k, l_1 и l_2 константе, и $l_1\neq l_2$.

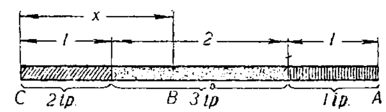
§ 3. Најпростије испитивање функција

46. Саставити таблицу вредности функције целобројног аргумента $y=\frac{1}{x!}$ за $1\leqslant x\leqslant 6$.

47. Вредност функције целобројног аргумента $y=\varphi(x)$ равна је броју простих бројева који нису већи од x. Саставити таблицу вредности y за $1\leqslant x\leqslant 20$.

48. Вредност функције целобројног аргумента $y=f(x)$ равна је броју целих чинилаца аргумента различитих од 1 и од самог x. Саставити таблицу вредности y за $1\leqslant x\leqslant 20$.

49. Функција $y=f(x)$ дефинише се као број ивица правилног полиедра чији је број страна x. За које је вредности аргумента функција дефинисана?



Сл. 6

50. Из комадâ дужине 1; 2; 1 дужинских јединица, чије су тежине респективно 2; 3; 1 тежинских јединица, састављен је брус (сл. 6). Тежина отсечка CB дужине x биће функција од x. За које је вредности од x дефинисана ова функција? Написати је помоћу аналитичких израза. Нацртати њен дијаграм.

51. Кула има следећи облик: на усправну кружну зарубљену купу са полупречницима основâ $2R$ (доње) и R (горње) и висином R, постављен је цилиндар полупречника R и висине $2R$, а на цилиндар — полулопта полупречника R. Центри основа конуса, цилиндра и полулопте леже на једној правој. Изразити површину S попречног пресека куле као функцију отстојања пресека од доње основе конуса. Нацртати график функције $S=\varphi(x)$.

52. Наћи интервале дефинисаности следећих функцијâ:

1) $y=1-\log x$; 2) $y=\log(x+3)$; 3) $y=\sqrt{5-2x}$;

4) $y=1-\sqrt{1-x^2}$; 5) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; 6) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$;

7) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$; 8) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$; 9) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

10) $y=\dfrac{1}{x^3-x}$; 11) $y=\log(ax^2+bx+c)$; 12) $y=\sqrt{\log_{10}\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$;

13) $y=\log_x 2$.

53. Одредити интервале дефинисаности следећих функција:

1) $y=\arcsin(x-2)$; 2) $y=\arcsin(2x-5)$;

3) $y=\arccos(1-2x)$; 4) $y=\arcsin\dfrac{x}{4}$; 5) $y=\arccos\dfrac{1-2x}{4}$;

6) $y=\arcsin\sqrt{2x}$; 7) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$;

8) $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\log(x^2-x)$; 9) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$;

10) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\log(2x-3)$; 11) $y=\dfrac{1}{\log(1-x)}+\sqrt{x+2}$;

12) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 13) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\log_2(4-x)$;

14) навести пример функције дефинисане само у интервалу $-2\leqslant x\leqslant 2$;

15) навести пример функције дефинисане само у интервалу $-2< x< 2$ и недефинисане за $x=0$.

16) навести пример функције дефинисане свуда осим за $x=2$, $x=3$, $x=4$.

54. Однос катете правоуглог троугла према хипотенузи, је функција угла. У ком је интервалу дефинисана ова функција? У ком је интервалу дефинисан одговарајући аналитички израз.

55. У лопту полупречника R уписан је цилиндар. Изразити запремину V цилиндра као функцију његове висине x. Одредити интервал дефинисаности ове функције и интервал дефинисаности одговарајућег аналитичког израза.

56. У лопту полупречника R уписана је купа. Изразити бочну површину S као функцију генератрисе x. Одредити интервал дефинисаности ове функције као и интервал дефинисаности одговарајућег аналитичког израза.

57. Вишезначна функција $y=\varphi(x)$ имплицитно је дефинисана једначином: $y^4-2xy^2+x^2-x=0$. Наћи интервал дефинисаности све четири једнозначне гране ове функције.

58. Које од доле наведених функција су парне, које непарне, а које нису ни парне ни непарне?

1) $y=x^4-2x^2$; 2) $y=x-x^2$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=2^x$;

5) $y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$; 6) $y=\sin x$; 7) $y=\sin x-\cos x$;

8) $y=1-x^2$; 9) $y=\sqrt{1-x^2}$; 10) $y=\operatorname{tg} x$; 11) $y=2^{-x^2}$

12) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$; 13) $y=x^2-2px+q, p\neq 0$; 14) $y=2^{x-x^4}$;

15) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$; 16) $y=\dfrac{x}{a^x-1}+\dfrac{x}{2}$.

59. Следеће функције претставити сваку у облику збира парне и непарне функције:

1) $y=x^2+3x+2$; 2) $y=1-x^3-x^4-2x^5$;
3) $y=\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x$; 4) $y=(1+x)^{20}$.

60. а) Претставити функцију $y=f(x)$ дефинисану у неком интервалу $-\alpha\leqslant x\leqslant\alpha$ у облику збира парне и непарне функције.

б) Доказати да је производ две парне функције опет парна функција, производ две непарне функције парна функција, а производ парне и непарне функције — непарна функција.

61. Које су од следећих функција периодичне?

1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\sin x^2$; 3) $y=x\cos x$; 4) $y=\sin\dfrac{1}{x}$;

5) $y=1+\operatorname{tg} x$; 6) $y=5$; 7) $y=E(x)$; 8) $y=x-E(x)$.

Напомена. Функција $E(x)$ дефинише се овако: $E(x)=$ највећем целом броју који није већи од x. Например: $E(2)=2$, $E(3{,}25)=3$, $E(-1{,}37)=-2$.

62. Нека су $f(x)$ и $\varphi(x)$ функције дефинисане за свако x, и нека је при том $\varphi(x)$ периодична функција са периодом ω. Показати да је и $f[\varphi(x)]$ периодична функција са периодом ω. Показати да ће и $\varphi[f(x)]$ бити периодична функција са периодом $\dfrac{\omega}{n}$, ако је $f(x)=nx+a$, где је n цео број.

63. Наћи интервале позитивности, негативности и корене следећих функција:

1) $y=3x-6$; 2) $y=x^2-5x+6$; 3) $y=2^{x-1}$;
4) $y=x^3-3x^2+2x$; 5) $y=|x|$.

64. Наћи интервале рашћења и опадања функције $y=|x|$.

65. Наћи интервале монотоности функције $y=|x|-x$.

66. Сабрати графички следеће парове функцијâ:

1) $y=x^2$ и $y=x^4$; 2) $y=x^2$ и $y=-x^4$;

3) $y=2^x$ и $y=x^2$; 4) $y=x$ и $y=\frac{1}{x}$;

5) $y=\sin x$; и $y=\cos x$; 6) $y=\sin x$ и $y=\sin 2x$;

7) $y=\sin x$ и $y=\sin 3x$; 8) $y=\cos x$ и $y=\cos\frac{5x}{2}$;

9) $y=x$ и $y=\sin x$; 10) $y=x$ и $y=\log\frac{1}{x}$.

67. Одредити графички све реалне корене следећих једначина:

1) $x^4-x-3=0$; 2) $x^4-x^3-3=0$; 3) $x^5+x-2=0$;

4) $x^5-x-1=0$; 5) $x=2\sin x$; 6) $x=\cos x$;

7) $2^x=2x$; 8) $x=0{,}1\sin x+2$.

68. Функција $\varphi(x)$ дефинисана је овако: $\varphi(x)=2x-1$ у интервалу $-\infty<x\leqslant 1$; $\varphi(x)=6-5x$ у интервалу $1<x<+\infty$. Наћи аналитички и графички корене једначине $\varphi(x)=3x-3$.

69. Функција $\varphi(x)$ дефинисана ја овако: $\varphi(x)=4x-7$ у интервалу $\left(-\infty<x\leqslant\frac{8}{3}\right)$; $\varphi(x)=x+1$ у интервалу $\left(\frac{8}{3}<x<+\infty\right)$. Наћи аналитички и графички реалне корене једначине $[\varphi(x)]^2=4x+1$.

70. Нацртати дијаграм функције $y=x^2+1$; на истом цртежу добити без даљих израчунавања дијаграме функцијâ: $y=\frac{1}{2}[(x+1)^2+1]$ и $y=\frac{1}{3}(x^2+1)$.

71. Нацртати дијаграм функције $y=2^x$. На истом цртежу добити без даљих израчунавања дијаграме функцијâ: $y=\frac{1}{12}2^{\frac{x}{2}}$; $y=2^{x-1}$; $y=\frac{1}{3}2^{\frac{x-1}{2}}+1$.

72. Нацртати дијаграм функције $y=\log_{10}x$. На истом цртежу добити без даљих израчунавања дијаграме функцијâ: $y=\frac{1}{2}\log_{10}(x+1)$; $y=2\log_{10}\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

73. Функција је дефинисана овако: за $x\neq 0$ $y=\frac{x}{|x|}$, а за $x=0$ $y=0$. За коју ће вредност аргумента x функција бити прекидна?

74. а) Нацртати дијаграм функције $y=\frac{x}{E(x)}$. Где је та функција дефинисана? Где је прекидна?

б) Исто то за функцију $y=(-1)^{E(x)}$.

75. Где је дефинисана и где има прекиде функција $y=\frac{1}{x-E(x)}$?

76. Функција је дефинисана овако: за $n<x<n+1$ када је n цео паран број, $f(x)=+1$; за $n<x<n+1$, када је n непаран број, $f(x)=-1$; за $x=n$ кад је n цео број, $f(x)=0$. Нацртати дијаграм ове функције. За које је вредности x функција прекидна? Упоредити је са функцијом $(-1)^{E(x)}$.

77. Уверити се да дијаграм двозначне функције, имплицитно дефинисане једначином $y^4+x^4=1$ претставља затворену криву без двојних тачака (тј. без тачака у којима крива пресеца саму себе).

§ 4. Најпростије функције

Линеарна функција

78. Нека је за напон $E=2{,}4\ V$ јачина струје $I=0{,}8\ A$. Изразити аналитички, користећи се Омовим законом зависност јачине струје од напона; конструисати дијаграм нађене функције.

79. У суд произвољног облика усута је течност. На дубини $h=25{,}3$ cm влада притисак $p=18{,}4\ \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}$. 1) Изразити притисак у функцију од дубине. 2) Израчунати притисак на дубини $h=14{,}5$ cm; 3) на којој је дубини притисак $p=26{,}5\ \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}$?

80. Под условима претходног задатка изразити зависност између притиска и дубине, ако се притисак мери у $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$, а дубина у dm.

81. Изразити силу F као функцију убрзања кад се зна да та сила при убрзању $W=12\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ на путу $S=15$ cm изврши рад $A=32$ erg.

82. Одредити линеарну функцију $y=ax+b$ из следећих података:

а)

x	y
0	4
3	6

б)

x	y
2	4,3
−1,7	0

в)

x	y
2,5	7,2
3,2	6,8

83. Као што је познато, 0°C одговара $32^\circ F$, а 100°C одговара $212^\circ F$. Саставити формулу за прелаз од скале C на F скалу.

84. Нека количина гаса заузимала је на 20° C запремину од 107 cm³; на 40° C запремина је постала 114 cm³. а) Изразити запремину v у функцији од температуре t; б) Колика ће бити запремина на 0° C?

85. Тачка се креће равномерно и после 12 sec. од почетка кретања налази се на растојању од 32,7 cm од неке почетне тачке; после 20 sec. од почетка кретања растојање износи 43,4 cm. Изразити растојање s као функцију времена t.

86. Напон у неком колу опада равнвмерно (по линеарном закону). У почетку опита напон је износио $12\ V$, а по свршетку опита који је трајао 8 sec. напон је спао на $6{,}4\ V$. Изразити напон v као функцију времена t и нацртати дијаграм ове функције.

87. Наћи прираштај линеарне функције $y=2x-7$ кад се x промени од $x_1=3$ на $x_2=6$.

88. Наћи прираштај линеарне функције $y=-3x+1$ који одговара прираштају независне промењљиве $\Delta x=2$.

89. Функција $y=2{,}5\,x+4$ добила је прираштај $\Delta\, y=10$. Наћи прираштај аргумента.

90. Дата је функција $y=\dfrac{x-a}{a^2-b^2}$ и почетна вредност независно променљиве $x_1=a-b$. За коју је коначну вредност аргумента $\Delta\, y=\dfrac{1}{a-b}$?

91. Функција је дефинисана на следећи начин: у сваком од интервала $n\leqslant x<n+1$, где је n позитивни број, $f(x)$ се мења линеарно, при чему је $f(n)=-1$, $f\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=0$. Нацртати дијаграм ове функције. Саставити њен аналитички израз, користећи се симболом $E(x)$.

Квадратна функција

92. Нацртати дијаграм следећих функцијâ:

1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$; 2) $y=2\,x^2+3$; 3) $y=x^2-1$;
4) $y=1-x^2$; 5) $y=2\,x^2-6\,x+4$; 6) $y=x^2-x+4$;
7) $y=-3\,x^2+6\,x-1$; 8) $y=x-x^2$.

93. Нацртати на милиметарској хартији параболу $y=x^2$ и искористити је за графичко решавање једначина:

1) $x^2-x-2{,}25=0$; 2) $2\,x^2-3\,x-5=0$;
3) $3{,}1x^2-14\,x+5{,}8=0$; 4) $4\,x^2-12\,x+9=0$;
5) $3\,x^2-8\,x+7=0$.

94. Показати графички да за $b^2-4\,ac>0$ једначина $ax^2+bx+c=0$ има два реална различита корена, за $b^2-4\,ac=0$ има један двоструки корен, а за $b^2-4\,ac<0$ нема реалних корена.

95. Наћи највеће вредности функцијâ:

1) $y=-2\,x^2+x-1$; 2) $y=-x^2-3\,x+2$; 3) $y=5-x^2$;
4) $y=-2\,x^2+ax-a^2$; 5) $y=a^2\,x-b^2\,x^2$.

96. Наћи највеће вредности функцијâ:

1) $y=x^2+4\,x-2$; 2) $y=2\,x^2-1{,}5\,x+0{,}6$;
3) $y=1-3\,x+6\,x^2$; 4) $y=a^2\,x^2-a^4$;
5) $y=(ax+b)\,(ax-2\,b)$.

97. Претставити број a у облику збира два броја тако да производ тих бројева буде највећи.

98. Претставити број a у облику збира два броја тако да збир квидрата тих бројева буде најмањи.

99. Око мањег каменог зида треба подигнути дрвени плот да би оградили правоугаоно парче земље. Дужина читавог плота износи 8 m. Колика треба да буде дужина оног дела плота који је паралелан зиду да би плот обухватио највећу површину?

100. Колики треба да буде полупречник круга да би исечак обима 100 cm имао највећу површину?

101. У троуглу ABC угао A износи 30^0, а збир страна које заклапају тај угао износи 100 cm. Колика мора бити страна AB да би површина троугла била највећа?

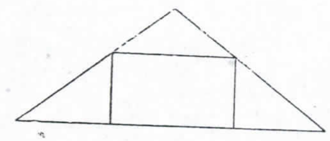
102. Који цилиндар са датим обимом осовинског пресека $p=100$ cm, има највећу бочну површину?

103. Који конус са обимом осовинског пресека равним p, има највећу бочну површину?

104. У равнокраки троугао основице a и висине h уписан је правоугаоник како је то показано на сл. 7. Колика мора бити висина правоугаоника да би он имао највећу површину?

105. Уписати у дати конус цилиндар највеће бочне површине под условом да се површине и центри кружних основа цилиндра и конуса поклапају.

106. Уписати у дати конус цилиндар највеће површине тако да се површине и центри кружних основа цилиндра и конуса поклапају, за случај кад висина конуса H буде већа од његовог полупречника R. Шта ће бити у случају кад висина конуса није већа од његовог полупречника?



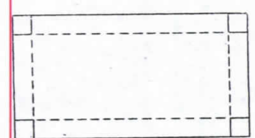
Сл. 7

107. Тело претставља цилиндар на који је постављен конус (с истом основом). Угао при врху конуса износи 60^0. Обим осовинског пресека тела износи 100 cm. Колики мора бити полупречник r цилиндра да би бочна површина тела била највећа?

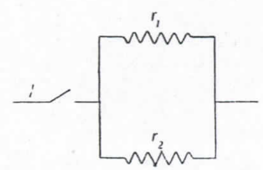
108. Прозор има облик правоугаоника који се на врху завршава равностраним троуглом. Обим прозора је p. Колика мора бити основица a правоугаоника да би прозор имао највећу површину?

109. Нормандски прозор има облик правоугаоника који се горе завршава полукругом. Колика мора бити основа a правоугаоника да би при обиму од 2 m прозор имао највећу површину?

110. Лист картона облика правоугаоника величине 30×50 cm² треба обрезати с крајева тако да кад се савије по тачкастим линијама (сл. 8), да се добије кутија највеће бочне површине. Израчунати величину исечених делова.



Сл. 8



Сл. 9

111. Од правоугаоника дужине 120 cm треба направити модел правоуглог паралелопипеда са квадратном основом. Колика треба да је страна a основе да би укупна површина паралелопипеда била највећа?

112. Од жице дужине 90 cm треба направити модел призме са равностраним троуглом у основи. Колика мора бити страна a основе призме, да би бочна површина призме била највећа?

113. Електрична струја јачине I грана се на две гране са отпорима r_1 и r_2 (сл. 9). Показати да је најмањи губитак услед загревања проводника количина топлоте која се при том развија дата Џаул-Ленцовим законом: $Q=0{,}24\,I^2Rt$ у јединици времена одговара расподели струја на јачине обрнуто пропорционалне отпорима грана̂?

114. Наћи на правој $y=x$ (у правоуглим декартовим координатама) тачку за коју би збир квадрата растојања од тачака $(-a,\ 0)$, $(a,\ 0)$ и $(0,\ b)$ био најмањи.

115. Углови на основици трапеза су по 60^0, његов обим износи 200 cm. Колика мора бити основица трапеза да би његова површина била највећа?

116. Комад жице дужине 34 cm треба поделити на два дела, од једног дела направити квадрат, од другог правоугаоник чија је основица двапут већа од висине. Где треба пресећи жицу да би збир површина тако добијених фигура био најмањи?

117. Комад жице дужине a cm треба поделити на два дела, од једног направити квадрат а од другог равнострани троугао. Где треба пресећи жицу да би збир површина тако добијених фигура био највећи?

Кубна функција

118. Нацртати дијаграме функција̂:

1) $y=\frac{1}{3}x^3$; 3) $y=x^3+3x$; 5) $y=x^3-x+1$;

2) $y=-\frac{1}{2}x^3$; 4) $y=x^3-2x$; 6) $y=-x^3+2x-2$.

119. Нацртати на милиметарској хартији кубну параболу и искористити је код графичког решавања следећих једначина̂:

1) $x^3-3x^2-x+3=0$; 2) $x^3-6x^2+9x-4=0$;

3) $x^3-3x^2-9x-5=0$; 4) $x^3+3x^2+6x+4=0$.

Једначине на које се своде задаци 120—123 решити графички.

120. Дрвена лопта полупречника 10 cm и густине $0{,}8\ g/cm^3$ плива на површини воде. Притом део лопте вири из воде. Наћи висину h овог дела лоптиног сегмента.

121. Наћи број чији је квадрат једнак збиру тог броја са својом реципрочном вредношћу.

122. Дрвена коцка и пирамида са квадратном основом теже заједно 0,8 kg. Ивица коцке је равна основној ивици пирамиде, а висина пирамиде је 45 cm. Наћи ивицу коцке. Специфична тежина дрвета је 0,8.

123. Са крајева квадратног листа картона величине $30\times30\ cm^2$ треба исећи једнаке квадратиће тако да кад се картон склопи, да се добије кутија запремине $1600\ cm^3$. Колико мора бити дугачка страна a сваког изрезаног квадратића?

124. Наћи графички најмање и највеће вредности следећих функција у датим интервалима

1) $y=\frac{2x^3-6x^2-18x}{15}$ у интервалу $-2\leqslant x\leqslant 4$

2) $y=3x^2-2x^3$ у интервалу $-2\leqslant x\leqslant 2$

3) $y=3x-x^3$ у интервалу $-1\leqslant x\leqslant 1$

4) $y=2-3x+x^3$ у интервалу $-2\leqslant x\leqslant 2$.

125. Обим осовинског пресека цилиндра је 60 cm. Колики мора бити полупречник r цилиндра да би његова запремина била највећа?

Упутство: Наћи функционалну зависност између полупречника и запремине цилиндра, нацртати дијаграм те функције и по дијаграму наћи њену највећу вредност.

126. Са крајева квадратног листа картона $6\times6\ cm^2$ треба исећи једнаке квадратиће тако да се од преосталог картона добије кутија највеће запремине. Колика је величина изрезаних квадратића?

127. У купу полупречника $R=15$ cm и висине $H=20$ cm уписати цилиндар највеће запремине. Колики мора бити полупречник r цилиндра?

***128.** Уверити се да дијаграм двозначне функције дефинисане имплицитном једначином $(y^3+y)^2=1-x^2$ претставља затворену криву која нема тачака у којима та крива пресеца саму себе.

Разломљено-линеарна функција

129. Саставити функцију која изражава зависност запремине гаса од притиска при $t=$ const., ако се зна да је на 760 mm притиска запремина гаса 2,3 l. Нацртати дијаграм те функције.

130. Саставити функцију која изражава зависност јачине струје од отпора кад се зна да је за $R=3{,}2\ \Omega$, јачина струје $I=0{,}15\ A$. Саставити таблицу дајући за R вредности са размаком од $\frac{1}{2}\Omega$ почев од $R_0=1\ \Omega$ до $R_1=5\ \Omega$.

131. x је обрнуто пропорционално y; y је обрнуто пропорционално z; z је са своје стране обрнуто пропорционално v. У каквој су зависности x; v?

132. x је обрнуто пропорционално y; y је пропорционално z; z је пропорционално u; u је обрнуто пропорционално v. У каквој су зависности x и v?

133. При електролизи количина издвојене материје на електроди пропорционална је јачини струје; јачина струје пропорционална је конпроводљивости електролита. Проводљивост је пропорционална датој количини материје концентрацији електролита. Концентрација при датој количини материје је обрнуто пропорционална запремини растварача. Како зависи количина материје која се издваја на електроди од запремине растварача?

134. Нацртати графике следећих разломљено-линеарних функција:

1) $y=\frac{x-1}{x-2}$; 2) $y=\frac{2x}{3-x}$; 3) $y=\frac{2x-5}{3x-7{,}5}$;

4) $y=\frac{x}{1-\frac{1}{2}x}$; 5) $y=\frac{4-3x}{3-2{,}25x}$.

135. Наћи по графику највеће и најмање вредности разломљено-линеарних функција у датим интервалима

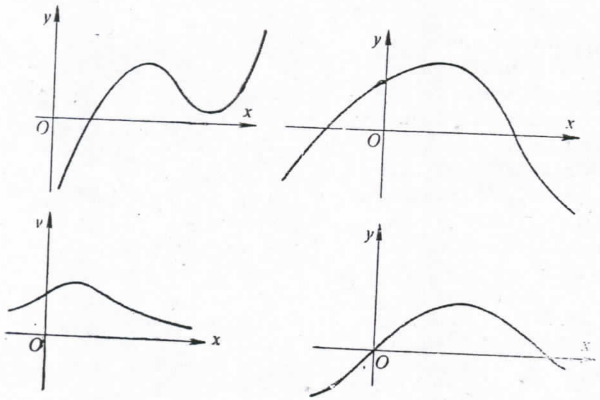
1) $y=\dfrac{4}{x}$ у интервалу $1 \leqslant x \leqslant 5$.

2) $y=\dfrac{x}{2x-5}$ у интервалу $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ у интервалу $0 \leqslant x \leqslant 4$.

§ 5. Степена, експоненцијална и логаритамска функција

136. Показати: а) да је функција инверзна линеарној опет линеарна; б) да је функција инверзна разломљено-линеарној опет разломљено линеарна.



Сл. 10

137. Наћи функције инверзне функцијама:

1) $y=x$; 2) $y=2x$; 3) $y=1-3x$; 4) $y=x^2+1$;

5) $y=\dfrac{1}{1-x}$; 6) $y=10^x$; 7) $y=x^2-2x$; 8) $y=\dfrac{1}{x}$;

9) $y\sqrt[3]{x^2+1}$; 10) $y=\log_x 2$.

138. Пресликати на милиметарску хартију криве са сл. 10 и што је могуће тачније конструисати дијаграме инверзних функција.

139. Наћи функцију $\varphi(x)$ инверзну функцији $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ где је $a>0$. Доказати да је дијаграм функције $\varphi(x)$ симетричан у односу на осу OX. Нацртати дијаграме дате и инверзне функције за $a=2$.

140. Показати да је график функције $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ симетричан у односу на координатни почетак. Наћи инверзну функцију.

141. Уверити се да је функција $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ инверзна сама себи. Наћи још примера таквих функција.

142. Какав облик има дијаграм функције индентичне са себи инверзном функцијом?

143. Шта се може казати за функције $y=f(x)$ и $y=g(x)$ ако се зна да је $f[g(x)]=x$? Чему ће бити равно $g[f(x)]$ ако су $f(x)$ и $g(x)$ једнозначне?

144. Нацртати следеће политропне криве:

1) $y=2x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y=\dfrac{1}{2}x^{\frac{5}{4}}$; 3) $y=x^{0,3}$; 4) $y=x^{2,1}$;

5) $y=x^{0,62}$; 6) $y=\dfrac{1}{2}x^{-0,2}$; 7) $y=5x^{-2,5}$.

145. Нацртати дијаграме следећих функција:

1) $y=2^x$; 2) $y=3^{-x}$; 3) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; 4) $y=2^{-x^2}$;

5) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$; 6) $y=\log_2 x$; 7) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$;

8) $y=x-\log_2 x$; 9) $y=2^{x+3}$; 10) $y=\log_x 2$.

146. Дата је функција $y=x-\log_{10} x$. Наћи графички најмању вредност те функције у интервалу (0; 2).

147. Доказати рачунски да је функција $y=\log_a x$ за $a>1$ растућа у целом интервалу $(0; \infty)$. Исто то за функције $y=a^x$ и $y=x^n$ $(a>1;\ n>0)$.

148. Означимо $h_1(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$; $h_2(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$; доказати следеће идентичности:

а) $1-\left(\dfrac{h_2(x)}{h_1(x)}\right)^2=\dfrac{1}{[h_1(x)]^2}$;

б) $h_1(x+y)=h_1(x)\,h_1(y)+h_2(x)\,h_2(y)$.

149. Доказати да се дијаграми функција $y=\log_a x$ и $y=\log_{a^n} x$ добијају један из другога мењањем свих ордината у односу $1:\dfrac{1}{n}$.

150. Показати да за дијаграм функције $y=ka^x$ служи иста крива као и за функцију $y=a^x$, само померена по апсцисној оси.

§ 6. Тригонометриске и инверзне тригонометриске функције

Тригонометриске функције

151. Нацртати дијаграме следећих функција:

1) $y=\operatorname{ctg} x$; 2) $y=\sec x$; 3) $y=\operatorname{cosec} x$;
4) $y=1-\cos x$; 5) $y=1-\sin x$.

152. Стране троугла су 1 и 2 cm. За коју ће вредност угла између ове две стране површина троугла бити највећа?

153. У круг полупречника R уписан је равнокраки троугао. За коју ће вредност угла α између кракова тога троугла, површина троугла бити највећа?

Упутство: Наћи функционалну зависност површине троугла од угла при врху. Нацртати дијаграм и помоћу њега наћи тражени угао.

154. Нацртати дијаграме функција:

1) $y=\cos 2x$; 2) $y=-2\sin\frac{1}{3}x$; 3) $y=2\sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)$;

4) $y=2+2\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$; 5) $y=2\cos\frac{x-\pi}{3}$.

155. Сабрати графички функције:

1) $y=\sin x$ и $y=2\cos x$;
2) $y=\sin 2\pi x$ и $y=\sin 3\pi x$;
3) $y=2\sin\frac{x}{2}$ и $y=3\sin\frac{x}{3}$.

156. Решити графички једначине: а) $\operatorname{tg} x=x$; б) $4\sin x=4-x$.

157. Одредити амплитуде и периоде следећих хармониских осцилација:

1) $y=\sin 3x$; 2) $y=5\cos 2x$; 3) $y=4\sin\pi x$;

4) $y=2\sin\frac{x}{2}$; 5) $y=\sin\frac{3\pi x}{4}$; 6) $y=3\sin\frac{5x}{8}$.

158. Наћи амплитуду, периоду, фреквенцију и почетну фазу следећих хармониских осцилација:

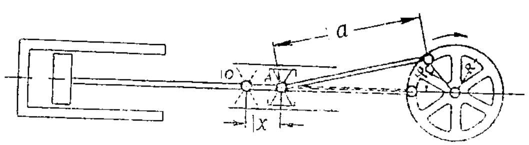
1) $y=2\sin(3x+5)$; 2) $y=-\cos\frac{x-1}{2}$;

3) $y=\frac{1}{3}\sin 2\pi\left(\omega-\frac{1}{6}\right)$; 4) $y=\sin\frac{2t+3}{6\pi}$.

159. Тачка се креће равномерно по кругу полупречника R са центром у координатном почетку, у смеру супротном казаљци на сату, линеарном брзином v cm/sec. У почетном моменту времена апсциса ове тачке била је a. Наћи зависност апсцисе тачке од времена, периоду, фреквенцију и почетну фазу хармонике.

160. Тачка се креће равномерно по кругу $x^2+y^2=1$. У моменту t_0 њена ордината је била y_0, у моменту t_1 ордината је била y_1. Наћи зависност ординате тачке од времена, периоду и почетну фазу осциловања.

161. На сл. 11 нацртан је клипни механизам. Замајац се обрће равномерно у смеру казаљке на сату, и изврши n обрта у секунди. Изразити зависност отстојања x укрсне главе A од времена, узимајући за почетни положај укрсне главе тачку O, која одговара положају криваје и клипне полуге кад ове леже на једној истој правој („мртви“ положај). Полупречник замајца је R, а дужина криваје a.



Сл. 11

162. Наћи периоде следећих сложених хармоника:

1) $y=2\sin 3x+3\sin 2x$; 2) $y=\sin t+\cos 2t$;

3) $y=\sin\frac{\pi t}{3}+\sin\frac{\pi t}{4}$;

4) $y=\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(3\pi t+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin 5\pi t$.

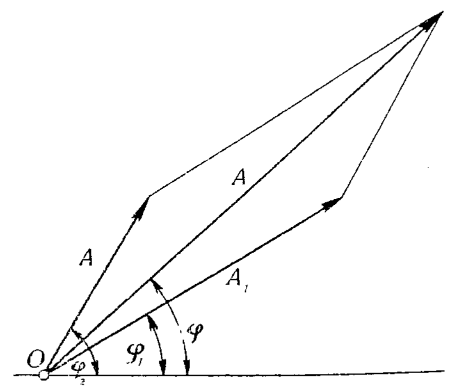
163. Сложити аналитички следеће парове простих хармоника са једнаким периодама:

а) $y=\sin x+\cos x$;

б) $y=\sin x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

164. Образложити следећи графички начин слагања хармониских осцилација. Нека су дата осциловања $A_1\sin(\omega x+\varphi_1)$ и $A_2\sin(\omega x+\varphi_2)$. Нацртајмо зраке под угловима φ_1 и φ_2 према хоризонталној оси (сл. 12). На тим зрацима одмеримо отсечке дужине респективно A_1 и A_2 јединица. Слагањем добијених вектора (по правилу паралелограма) добијамо вектор дужине A, који заклапа са хоризонталном осом угао φ. То A и φ биће респективно амплитуда и почетна фаза осциловања:

$$A_1\sin(\omega x+\varphi_1)+A_2\sin(\omega x+\varphi_2)=A\sin(\omega x+\varphi).$$



Сл. 12

Инверзне тригонометриске функције

165. Конструисати дијаграме функција:

1) $y=\operatorname{arc\,tg} x$; 2) $y=\operatorname{arc\,sec} x$; 3) $y=\operatorname{arc\,cosec} x$;

4) $y=2\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{2}$; 5) $y=1+\operatorname{Arc\,tg} 2x$; 6) $y=\frac{1}{4}\arcsin\frac{x}{10}$;

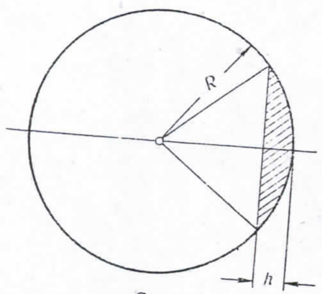
7) $y=\frac{\pi}{2}-\arccos 2x$; 8) $y=\arcsin\frac{1-x}{4}$.

166. Уверити се да дијаграм имплицитне функције дефинисане једначином $(y-\arcsin x)^2=1-x^2$ претставља затворену криву без тачака у којима та крива пресеца саму себе.

167. Од кружног исечка са промењљивим централним углом α савијен је и слепљен конус. Наћи зависност угла ω при врху конуса, од угла α.

168. Наћи зависност површине кружног отсечка полупречника R од висине h (сл. 13). Саставити таблицу вредности ове функције узимајући за h вредности: 0; 0,1 R; 0,2 R итд., и нацртати њен дијаграм.

169. Уска слика висока a метара, виси на зиду вертикално; њен доњи крај је за b метара изнад нивоа посматрачевих очију. Наћи зависност између угла α под којим посматрач види слику, и растојања x (у метрима) од посматрача до зида. Нацртати дијаграме те функције за $a=1$, $b=1$, а дајући независно промењивој x вредности од 2 до 10 са размаком од 1 метра.



Сл. 13

170. Уска слика висине a метара виси косо на зиду образујући са зидом угао φ. Нижи је крај слике за b метара изнад нивоа посматрачевих очију, који стоји на l метара од зида. Наћи везу између угла α под којим посматрач види слику и угла φ.

171. Код клипног механизма (види слику 10) наћи везу између угла α за који се окрене криваја, и померања x укрсне главе. Почетни положај је исти као и у задатку 161. Полупречник замајца је R, а дужина клипне полуге a.

У задацима 172—182 доказати идентичности и утврдити у којим областима вреди свака од њих:

172. $\arccos\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,sec} x$.

173. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,ctg} x$.

174. $\arcsin\sqrt{1-x^2}=\arccos x$.

175. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{+\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$.

176. $\sin(\arccos x)=+\sqrt{1-x^2}$.

177. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

178. $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2}$.

179. $\cos(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1}{+\sqrt{1+x^2}}$.

180. $\arcsin(\cos x)=\frac{\pi}{2}-x$.

181. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})=2\arcsin x$.

182. $\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}=2\operatorname{arc\,tg} x$.

Доказати да је:

183. $2\operatorname{arc\,tg} 10+\arcsin\frac{20}{101}=\pi$.

184. $4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

185. Нацртати дијаграм функције $y=\arcsin(\sin x)$. Уверити се да је дата функција периодична.

186. Нацртати дијаграм функције $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$. Упоредити са функцијом $y=x-\pi E\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$.

ГЛАВА II

ПОЈАМ ГРАНИЦЕ

§ 1. Основне дефиниције

187. Функција u_n целобројног аргумента n добија вредности:

$$u_1=0{,}9,\quad u_2=0{,}99,\quad u_3=0{,}999,\ \dots,\quad u_n=0{,}\underbrace{999\dots9}_{n\ \text{пута}}.$$

Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Колико треба да буде n да апсолутна вредност разлике $u_n-\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ не буде већа од 0,0001?

188. Функција u_n добија вредности:

$$u_1=\frac{1}{2},\quad u_2=\frac{2}{3},\quad u_3=\frac{3}{4},\ \dots,\ u_n=\frac{n}{n+1},\ \dots$$

Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Колико треба да буде n да би било $|u_n-\lim\limits_{n\to\infty} u_n|<\varepsilon\ (=0{,}001)$?

189. Функција u_n добија вредности:

$$u_1=1,\quad u_2=\frac{1}{4},\quad u_3=\frac{1}{9},\ \dots,\quad u_n=\frac{1}{n^2},\ \dots$$

Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Колико треба да буде n да би било $|u_n-\lim\limits_{n\to\infty} u_n|<\varepsilon$?

190. Функција v_n добија вредности:

$$v_1=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1},\quad v_2=\frac{\cos\pi}{2},\quad v_3=\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{3},\ \dots,\quad v_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n},\ \dots$$

Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Колико треба да буде n да би било $|v_n-\lim\limits_{n\to\infty} v_n|<0{,}001$? Шта је веће: вредност v_n или $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$?

191. Функција v_n добија вредности:

$$v_1=a,\quad v_2=\frac{a(a-1)}{1\cdot2},\quad v_3=\frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot2\cdot3},\ \dots$$

$$\dots,\quad v_n=\frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(n-1)]}{1\cdot2\cdot3\dots n},\ \dots$$

(a — је цео позитивни број). Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

192. Показати да $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ тежи ка 1 кад n неограничено расте. Наћи n почев од којег је $|u_n - \lim_{n\to\infty} u_n| \leqslant \varepsilon$.

193. Показати да $u_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$ тежи ка $\frac{4}{3}$ кад n неограничено расте. Наћи n почев од којег је $\left|\frac{4}{3} - u_n\right| \leqslant \varepsilon$.

194. Показати да $u_n = \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$ тежи ка 1 кад n неограничено расте. Одредити n почев од којег величина $|u_n - 1|$ није већа од произвољног позитивног ε.

195. Показати да $u_n = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{a}}{\sqrt{n+a}}$ кад n неограничено расте, тежи ка 1. Наћи n почев од којег је $|1-u_n| \leqslant \varepsilon$.

196. Шта је граница дужине a_n стране правилног n-тоугла уписаног у круг, кад број n његових страна неограничено расте?

197. Доказати теорему: ако низ $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ тежи граници a, онда и сваки бесконачан парцијални низ овога низа тежи истој граници. Важи ли обрнута теорема?

198. Доказати теорему: ако низови $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ и $v_1, v_2, \ldots v_n, \ldots$ теже истој граници a онда и низ $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n, \ldots$, тежи истој граници a. Важи ли обрнута теорема?

199. Дато је $y = x^2$. Кад $x \to 2$ онда $y \to 4$. Колико мора бити δ да би из $|x-2| < \delta$ следило $|y-4| < \varepsilon = 0{,}001$?

200. Нека је $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. За $x \to 2$ имамо $y \to \frac{3}{5}$. Колико мора бити δ да би из $|x-2| < \delta$ следило $\left|y - \frac{3}{5}\right| < 0{,}1$?

201. Нека је $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$. За $x \to 3$ имамо $y \to \frac{1}{4}$. Колико мора бити δ да би из $|x-3| < \delta$ следило $\left|\frac{1}{4} - y\right| < 0{,}01$?

202. Дата је функција $y = \sqrt{x^2-9}$. Ако $x \to 5$, онда $y \to 4$. Колико мора бити δ да би из $|x-5| < \delta$ следило $|y-4| < \varepsilon = 0{,}01$?

203. Показати да је $\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1} \frac{2x-\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$. Које неједначине мора задовољавати x да би било $\left|y - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$?

204. Доказати да $\sin x \to 1$ кад $x \to \frac{\pi}{2}$. Које неједначине мора задовољавати x да би било $|1 - \sin x| < 0{,}01$?

§ 2. Бесконачно велике и бесконачно мале величине

205. Функција u_n целобројног аргумента n добија вредности:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \log 2, \quad u_3 = \log 3, \ldots, \quad u_n = \log n, \ldots$$

Којој граници тежи u_n?

206. Функција x_n добија вредности

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 7, \ldots, \quad x_n = 2n+1, \ldots,$$

Уверити се да је x_n бесконачно велика величина кад $n \to \infty$. Одредити n почев од којег x_n постаје веће од N.

207. Функција u_n добија вредности:

$$u_1 = 5, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 3, \quad u_4 = 2, \ldots, \quad u_n = 6 - n, \ldots$$

Одредити n за које је u_n по апсолутној вредности веће од 1000.

208. Функција добија вредности 0,1; 0,2; 0,3;... Показати да је она бесконачно велика. Почев од ког члана њене вредности постају веће од 1000?

209. Уверити се да функција $y = \frac{x}{x-3}$ постаје бесконачно велика за $x \to 3$. Какве неједначине мора задовољавати x да би $|y|$ било веће од 1000?

210. Кад $x \to 0$ тада $y = \frac{1+2x}{x} \to \infty$. Какве услове мора задовољавати x да би било $|y| > 10\,000$.

211. Кад x тежи ка 1 функција $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ неограничено расте. Колико мора бити δ да би из $|x-1| < \delta$ следило $\frac{1}{(x-1)^2} > N = 10\,000$?

212. Функција $y = \frac{1}{2^x - 1}$ постаје бесконачно велика кад $x \to 0$. Које неједначине мора задовољавати x, да би $|y|$ било веће од 100?

213. Кад $x \to \infty$ $y = \log x \to \infty$. Колико мора бити M да би из $x > M$ следило $y > N = 100$?

214. Кад x неограничено расте функција $y = \frac{1}{x^2+1}$ тежи нули: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. Колико мора бити N да би из $|x| > N$ следило $|y-0| < \varepsilon = 0{,}001$?

215. Је ли увек неограничена функција бесконачно велика? Навести примере.

216. Јесу ли следеће функције бесконачно велике: а) $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ за $x \to 0$; б) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ за $x \to 0$?

217. Навести примере бесконачно малих величина растућих, опадајућих и немонотоних.

218. Функција x_n добија вредности

$$x_1=2,\ x_2=\frac{3}{4},\ x_3=\frac{4}{9},\ldots,\ x_n=\frac{n+1}{n^2},\ldots$$

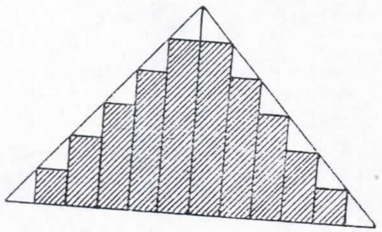
Уверити се да је x_n бесконачно мала величина кад $n\to\infty$.

219. Функција u_n добија вредности:

$$u_1=-7,\ u_2=-\frac{1}{2},\ u_3=\frac{1}{27},\ u_4=\frac{1}{8},\ldots,\ u_n=\frac{n^2-8}{n^3},\ldots$$

Уверити се да је u_n бесконачно мала величина кад $n\to\infty$.

220. У равнокраки правоугли троугао ABC (сл. 14) чија је основица подељена на $2n$ једнаких делова, уписана је степенаста фигура, као што је показано на слици. Уверити се да је, кад n неограничено расте, разлика између површине троугла и површине степенасте фигуре бесконачно мала.



Сл. 14

221. Доказати да разлика између полупречника и отстојања центра круга од правилног уписаног многоугла тежи нули кад се број страна неограничено повећава.

222. Показати да кад $x\to\infty$ функција $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\to 0$. Колико мора бити N да би за $x>N$ било $|y|<\varepsilon$?

223. Показати да кад $x\to 10$ функције $y=1-\log_{10}x$ постаје бесконачно мала. Какву неједначину мора задовољавати x да би било $|y|<\varepsilon$?

224. Уверити се да $y=\dfrac{x}{x+1}\to 0$ кад $x\to 0$. Какве услове треба да задовољава x да би било $|y|<0{,}0001$?

225. Следеће функције које имају границу кад $x\to\infty$, претставити сваку у облику збира сталне величине (равне граници) и неке функције; уверити се у то да је та функција кад $x\to\infty$ бесконачно мала:

$$1)\ \frac{x^3}{x^3-1};\qquad 2)\ \frac{x^2}{2x^2+1};\qquad 3)\ \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

226. Је ли маса атома водоника бесконачно мала? А маса и пречник електрона? А разлика између температуре усијаног тела и температуре околине? Могу ли све вредности бесконачно мале величине бити мање од неке сталне величине? А веће од неке сталне величине?

§ 3. Правила прелаза на границе. Еквивалентне бесконачно мале величине

227. $y=\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$; наћи $\lim\limits_{x\to 2} y$.

228. $y=\dfrac{x}{1-x}$; наћи $\lim\limits_{x\to 1} y$.

229. $y=\dfrac{3}{x^2-5}+2$; наћи $\lim\limits_{x\to\infty} y$.

Наћи:

230. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

231. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

232. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{1+3x+5x^2}$.

233. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$.

234. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

235. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

236. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

237. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

238. Како се мењају корени квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ када b и c задржавају сталне вредности, а a тежи нули?

Наћи:

239. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)$.

240. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}$.

241. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)}{n^3}$.

242. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$.

243. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+n)}{n^3}$.

244. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$.

245. Дуж дужине a подељена је на n једнаких делова. Над сваким појединим делом нацртан је полукруг (сл. 15). Наћи дужину s_n криве која се састоји из тих полукругова. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

246. У равнокраки правоугли троугао катете a, хипотенуза је подељена на n једнаких делова, и из деоних тачака повучене су праве паралелне катетама. Тако се добије изломљена крива $AKLMNOPQRTB$ (сл. 16). Дужина ове изломљене линије за макакво n једнака је $2a$; но с друге стране кад n неограничено расте изломљена линија се неограничено приближава хипотенузи троугла. Према томе дужина хипотенузе једнака је збиру дужинâ катетâ. Наћи грешку у закључивању?

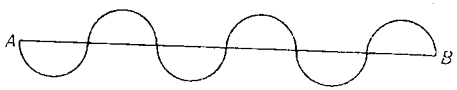
247. Функција u_n добија вредности:

$$u_1=1,\quad u_2=\frac{1}{2},\quad u_3=\frac{1}{3},\ldots,\ u_n=\frac{1}{n},\ldots$$

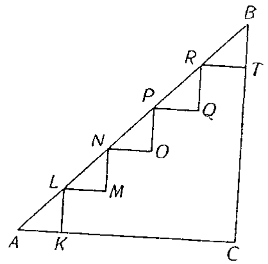
а функција v_n добија вредности:

$$v_1=1,\quad v_2=\frac{1}{2!},\quad v_3=\frac{1}{3!},\ldots,\ v_n=\frac{1}{n!},\ldots$$

Упоредити u_n и v_n; која је од њих бесконачно мала вишега реда?



Сл. 15



Сл. 16

248. Функција u_n добија вредности:

$$u_1=0,\quad u_2=\frac{3}{8},\quad u_3=\frac{8}{27},\ldots,\ u_n=\frac{n^2-1}{n^3},\ldots$$

а функција v_n добија вредности:

$$v_1=2,\quad v_2=\frac{5}{8},\quad v_3=\frac{10}{27},\ldots,\quad v_n=\frac{n^2+1}{n^3},\ldots$$

Која је од њих бесконачно мала вишега реда?

249. Бесконачно мала величина u_n добија вредности:

$$u_1=0,\quad u_2=\frac{1}{4},\quad u_3=\frac{2}{9},\ldots,\ u_n=\frac{n-1}{n^2},\ldots$$

а бесконачно мала v_n добија вредности:

$$v_1=3,\quad v_2=\frac{5}{4},\quad v_3=\frac{7}{9},\ldots,\quad v_n=\frac{2n+1}{n^2}.$$

Уверити се да су u_n и v_n бесконачно мале истога реда, али нису еквивалентне.

250. Кад $x\to 1$ функције $\frac{1-x}{1+x}$ и $1-\sqrt{x}$ постају бесконачно мале. Која је од њих вишега реда?

251. Уверити се у то да су прираштај Δy функције $y=x^2$ и прираштај Δx независно промењљиве кад $\Delta x\to 0$, у општем случају бесконачно мале истога реда. За коју ће специјалну вредност x ред прираштâ бити различит? За коју ће вредност x прираштаји Δx и Δy бити еквивалентни?

252. Уверити се да ће, кад $x\to 1$, бесконачно мале величине $1-x$ и $1-\sqrt[3]{x}$ бити истог реда. Јесу ли оне еквивалентне?

253. Нека је x бесконачно мала величина. Онда је и $\sqrt{x^3+a}-\sqrt{a}$ бесконачно мала. Одредити ред последње у односу на x, тј. одредити такав изложитељ n степена, да x^n и дата величина, кад $x\to 0$, буду истог реда.

254. Одредити ред (види задатак 253) следећих функција, бесконачно малих кад $x\to 0$:

$$1)\ x^3+1000\,x^2;\qquad 2)\ \sqrt[3]{x^3}-\sqrt[2]{x};$$

$$3)\ \frac{x\,(x+1)}{1+\sqrt{x}};\qquad 4)\ \frac{7\,x^{10}}{x^2+1}.$$

255. Уверити се да ће прираштаји функција $u=a\sqrt{x}$ и $v=bx^2$ за $x\neq 0$ и за заједнички прираштај $\Delta x\to 0$ бити истог реда. За коју ће вредност независно промењљиве x они бити еквивалентни?

256. Доказати следеће теореме:

а) Ако количник две функције, које при истом варирању независно промењљиве имају границе, — задржава сталну вредност, онда ће и количник њихових граница имати исту вредност.

б) Ако је разлика две функције при истом варирању независно промењљиве, бесконачно мала, и при том једна од функција расте, а друга опада, — онда обе теже истој граници.

257. u_n добија вредности:

$$u_1=\frac{1}{4},\quad u_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{10},\quad u_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{28},\ldots,$$

$$u_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\ldots+\frac{1}{3^n+1},\ldots$$

уверити се да кад $n\to\infty$, u_n тежи некој граници.

Упутство: Упоредити са збиром прогресије $\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ldots,\frac{1}{3^n}$.

258. u_n добија вредности:

$$u_1=\frac{1}{2},\quad u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4},\quad u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6},\ldots$$

$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 4\ldots(2n)},\ldots$$

Уверити се да кад $n\to\infty$, u_n тежи некој граници.

***259.** Показати да функција целобројног аргумента $u_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$ кад $n\to\infty$ тежи некој граници која није већа од 1.

§ 4. Непрекидне функције

Непрекидне функције

260. Доказати да је функција $y=5x^4-7x^2+2$ непрекидна за свако x.

261. Доказати: а) да је функција $y=\frac{2x-1}{x^2+2}$ непрекидна за свако x;

б) да је функција $y=\frac{1}{x}$ непрекидна за свако $x\neq 0$.

262. Доказати да је функција $y=\sin x$ непрекидна за свако x.

263. Доказати да је за свако x које задовољава услов $|x|<\frac{\pi}{2}$;

а) функција $\sec x$ непрекидна; б) функција $\operatorname{tg} x$ непрекидна.

264. Доказати следећа тврђења:

1) функција $y=a^x\ (a>0)$ је непрекидна за $x=0$;

2) функција $y=a^x\ (a>0)$ је непрекидна за произвољно x;

3) функција $y=\log_a x\ (a>0)$ је непрекидна за сваку позитивну вредност x;

4) функција $y=x^\alpha$ је непрекидна за сваку позитивну вредност x.

5) $\lim\limits_{\beta\to 0}(b+\beta)^\beta=1$;

6) функција x^x је непрекидна за сваку позитивну вредност x.

265. Користећи се особинама непрекидних функција, уверити се да једначина $x^5-3x=1$ има бар један корен који лежи између 1 и 2.

266. Показати да сваки полином непарног степена има најмање један реалан корен.

267. Показати да једначина $x\cdot 2^x=1$ има најмање један позитиван корен мањи од 1.

268. Показати да једначина $x=\alpha\sin x+b$ где је $0<\alpha<1$ и $b>0$ (тзв. Кеплерова једначина), има најмање један позитиван корен, а који није већи од $b+\alpha$.

269. Показати да у случају непрекидне функције $\varphi(x)$ и произвољних x и a, из $\varphi(x+a)=\varphi(x)+\varphi(a)$ следи $\varphi(kx)=k\varphi(x)$ не само за које рационално k (као у задатку бр. 33 гл. I), већ и за ма какво ирационално k (искористити околност да је сваки ирационални број граница низа u_n рационалних бројева).

270. Одредити интервал непрекидности функције $y=x^2\sin\frac{1}{x}$.

271. Има ли тачака прекида функција $f(x)$, дефинисана овако: $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ за $x\neq 0$ и $f(0)=0$?

272. За које ће вредности x бити прекидна функција дефинисана на следећи начин: за свако рационално x $f(x)=0$, за свако ирационално x $f(x)=1$?

273. За које ће вредности независно промењиве x функција дефинисана на следећи начин: за свако рационално x $f(x)=0$, за свако ирационално x $f(x)=x$ бити прекидна?

274. Функција $\varphi(x)$ дефинисана је на следећи начин: ако је x рационално, тј. равно неком разломку $\frac{p}{q}$ који се не може кратити, онда је $\varphi(x)=\frac{1}{q}$ ако је x ирационално, онда је $\varphi(x)=0$. Доказати да је $\varphi(x)$ непрекидна за сваку ирационалну вредност независно промењиве x, а прекидна за сваку рационалну вредност x.

275. Функција $f(x)$ дефинисана је овако:

$$f(x)=(x+1)\,e^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}\quad \text{за } x\neq 0 \text{ и } f(0)=0.$$

Уверити се да у интервалу $-2\leqslant x\leqslant 2$ функција $f(x)$ узима све без изузетка вредности које леже између $f(-2)$ и $f(2)$, а да је ипак прекидна (у којој тачки?). Нацртати.

276. Нацртати график функције дефинисане следећим условима:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2x}\quad \text{за } x\neq 0,\quad \text{а } f(0)=1.$$

Испитати функцију у вези са непрекидношћу.

277. Функција $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$ није дефинисана за $x=1$. Коју вредност треба узети за $f(1)$ да би тако допуњена функција постала непрекидна за $x=1$?

278. Нацртати график функције дефинисане релацијом $f(x)=x\cdot\sin\frac{\pi}{x}$ за $x\neq 0$. Коју вредност треба да има $f(0)$ да би функција f била свуда непрекидна?

279. Испитати карактер прекида функције $y=2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$ у тачки $x=1$. Може ли се тако дефинисати y за $x=1$ да би функција постала непрекидна за $x=1$?

280. Функције $f(x)=2^{\operatorname{tg} x}$ и $\varphi(x)=2^{-\operatorname{tg}^2 x}$ нису дефинисане за $x=\frac{(2n+1)\pi}{2}$, где је n цео број. Какве вредности треба узети за $f\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]$ и $\varphi\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]$ да би тако допуњене функције постале непрекидне за свако x?

Израчунавање граничних вредности функцијâ

Наћи:

281. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. **282.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

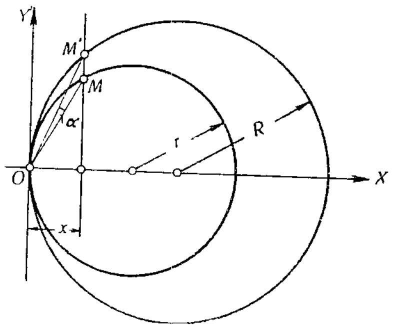
283. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-ax}{\sqrt{x^2+b^2}-bx}$. **284.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)$.

285. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$. **286.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

287. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

288. Кад $x\to 0$ функције x^2 и $1-\cos x$ су бесконачно мале истог реда (уверити се у то). Јесу ли оне еквивалентне?

289. Два круга полупречника R и $r\ (R>r)$ додирују у координатном почетку OY осу и леже десно од ње (сл. 17). Каквог ће реда у односу на x кад $x\to 0$, бити бесконачно мали отсечак MM' и бесконачно мали угао α?



Сл. 17

Наћи:

290. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}$.

291. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}$.

292. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

293. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha^2}{\sqrt{\sin\alpha}}$.

294. $\lim\limits_{\alpha\to \beta} \dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\alpha^2 - \beta_2}$.

295. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$.

296. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$.

297. Уверити се да кад $x \to \dfrac{\pi}{2}$ функције $\sec x - \operatorname{tg} x$ и $\pi - 2x$ биће бесконачно мале истог реда. Хоће ли бити еквивалентне?

Наћи:

298. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

299. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.

300. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \arcsin x}{3x}$.

301. $\lim\limits_{\alpha\to \pi} \dfrac{\sin\alpha}{1-\dfrac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

302. $\lim\limits_{z\to 1} (1-z) \operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2}$.

303. $\lim\limits_{y\to \alpha} \left(\sin\dfrac{y-\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2\alpha}\right)$.

304. $\lim\limits_{\varphi\to 0} \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \varphi - \arccos\varphi}{\dfrac{\pi}{2} + \varphi - \arccos\varphi}$.

305. $\lim\limits_{t\to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^t$.

306. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

307. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{a \sec x}$.

308. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\operatorname{cosec} x}$.

309. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$.

310. $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^{n-1}}$.

311. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$.

312. $\lim\limits_{x\to \infty} \{x[\ln(x+a) - \ln x]\}$.

313. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(ax+b)^p - (ax)^p}{cx^{p-1}}$; p је цео позитиван број.

Разни задаци

314. Полазећи од еквивалентности $\sqrt{1+x} - 1$ и $\dfrac{1}{2}x$ кад $x \to 0$ израчунати приближно:

1) $\sqrt{105}$; 2) $\sqrt{912}$; 3) $\sqrt{260}$; 4) $\sqrt{1632}$,

315. Показати да су, кад $x \to 0$, функције $\sqrt[n]{1+x} - 1$ и $\dfrac{1}{n}x$ еквивалентне. Искористити то за приближно израчунавање следећих корена:

1) $\sqrt[3]{1047}$; 2) $\sqrt[3]{8144}$; 3) $\sqrt[5]{1,1}$; 4) $\sqrt[5]{3\,251\,865}$.

316. Искористити еквивалентност $\ln(1+x)$ и x кад $x \to 0$ за приближно израчунавање $\ln(1{,}01)$; $\ln(1{,}02)$; $\ln(1{,}1)$; $\ln(1{,}2)$. Даље наћи $\log_{10} 1{,}01$; $\log_{10} 1{,}02$; $\log_{10} 1{,}1$; $\log_{10} 1{,}2$; упоредити са вредностима које дају таблице.

317. Наћи главну вредност прираштаја функције $y = x^2$ пропорционалну прираштају независно променљиве за произвољну вредност x.

Г Л А В А III

ИЗВОД И ДИФЕРЕНЦИЈАЛ. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН

§ 1. Појам извода и диференцијала

Појам извода

318. Угаона брзина обртног кретања дефинише се као количник (однос) угла обртања и одговарајућег интервала времена. Дати дефиницију угаоне брзине обртног кретања у општем случају.

319. Кад би процес радиоактивног распадања текао равномерно, онда би под брзином распадања требало разумети количину материје која се распадне у јединици времена. Стварно се, међутим, процес одвија неравномерно. Дати дефиницију брзине радиоактивног распадања.

320. Дати дефиницију брзине реагирања неке материје у хемиској реакцији.

321. Кроз отвор у резервоару истиче течност. Кад би истицање било равномерно, онда би под брзином пражњења резервоара требало подразумети количину течности која истече у јединици времена. Дати општу дефиницију брзине пражњења суда.

322. Јачина сталне струје дефинише се као количина електрицитета, која прође кроз попречни пресек проводника у јединици времена. Дати дефиницију јачине промењиве струје.

323. Термичким коефицијентом линеарног ширења штапа назива се прираштај јединице његове дужине кад му се температура повиси за 1^0 C. При томе се, наравно, претпоставља равномерност топлотног ширења. Стварно, међутим, процес тече неравномерно. Нека је $l=f(t)$, где је l дужина штапа, а t — температура. Дати дефиницију коефицијента α линеарног ширења за општи случај.

324. Коефициентом истезања опруге назива се прираштај јединице дужине опруге под дејством јединичне силе, која дејствује на сваки cm^2 пресека опруге. При томе се претпоставља пропорционалност истезања дејствујућој сили (Хуков закон). Дати дефиницију коефициента истезања k у случају отступања од Хуковог закона. (Нека је l — дужине опруге, s — површнна попречног пресека, P — сила која изазива истезање, и $l=\varphi(P)$.

325. Какав је геометриски смисао извода површине круга промењљивог полупречника по полупречнику?

326. Какав је физикални смисао извода рада по пређеном путу?

327. Наћи прираштај функције $y=x^3$ у тачки $x_1=2$, узимајући да је прираштај Δx независно промењљиве: а) 2; б) 1; в) 0,5; г) 0,1.

328. Дата је функција $y=x^2$. Наћи приближне вредности извода у тачки $x=3$ дајући прираштају Δx вредности: а) 0,5; б) 0,1; в) 0,01; г) 0,001. Каквом броју теже приближне вредности извода кад $\Delta x \to 0$?

329. Наћи однос $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ за функције:

а) $y=2x^3-x^2+1$ за $x=1$ $\Delta x=0{,}1$;

б) $y=\frac{1}{x}$ за $x=2$ $\Delta x=0{,}01$;

в) $y=\sqrt{x}$ за $x=4$ $\Delta x=0{,}4$.

Показати да за $\Delta x \to 0$ овај однос тежи у првом случају ка 4, у другом ка $-\frac{1}{4}$; у трећем ка $\frac{1}{4}$.

330. $f(x)=x^2$; наћи $f'(5)$, $f'(-2)$, $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

331. $f(x)=x^3$; наћи $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(-\sqrt{2})$, $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

332. $f(x)=x$; наћи $f'(3)$, $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)$, $f'\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$.

333. $f(x)=x^2$ у којој је тачки $f(x)=f'(x)$.

334. Проверити да за функцију $f(x)=x^2$ важи однос: $f'(a+b)=f'(a)+f'(b)$. Важи ли тај идентитет и за функцију $f(x)=x^3$?

335. Наћи извод функције $y=\sin x$ за $x=0$.

336. Наћи извод функције $y=\log x$ за $x=1$.

337. Наћи извод функције $y=10^x$ за $x=0$.

338. Којој граници тежи израз $\frac{f(x)}{x}$ кад $x \to 0$ ако је $f(0)=0$.

339. Доказати теорему: ако су $f(x)$ и $\varphi(x)$ за $x+0$ обе равне нули: $f(0)=0$ и $\varphi(0)=0$, а $\varphi'(0) \neq 0$, онда је $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$. (Лопиталово правило).

340. Наћи изводе следећих функција:

1) x^5; 2) x^{10}; 3) $x^{\frac{3}{7}}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) x^{-3}; 7) $\frac{1}{x}$; 8) $\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}$; 9) $x\sqrt[4]{x}$; 10) $0{,}7\,x^5$; 11) $\frac{1}{12}x^{12}$; 12) ax^{-7}; 13) $n\sqrt{x}$; 14) $\frac{p}{x}$; 15) $ax^{-\frac{2}{3}}$.

Тангенте и нормале

341. Може ли тангента кубне параболе $y=x^3$ заклапати са осом Ox тупи угао?

342. Наћи угаони коефицијенат тангенте повучене на параболу $y=x^2$: 1) у координатном почетку; 2) у тачки $x=3$; 3) у тачки $x=-2$; 4) у тачки њеног пресека са правом $y=3x-2$?

343. У којим је тачкама угаони коефицијенат тангенте кубне параболе $y=x^3$ једнак 3?

344. У којој је тачки тангента параболе $y=x^2$ а) паралелна оси Ox; б) заклапа са осом Ox угао од 45^0?

345. Наћи угао пресека параболе $y=x^2$ са правом $3x-y-2=0$.

346. Под којим се углом секу параболе $y=x^2$ и $y^2=x$?

347. а) Под којим се углом секу хипербола, $y=\frac{1}{x}$ и парабола $y=\sqrt{x}$? б) Која од правих које пролазе кроз координатни почетак сече ову хиперболу под правим углом?

348. Написати једначину тангенте и нормале за криву $y=x^3$ у тачки чија је апсциса $x=2$. Наћи субтангенту и субнормалу.

349. За коју су вредност независно променљиве тангенте кривих $y=x^2$ и $y=x^3$ паралелне?

350. У којој је тачки тангента параболе $y=x^2$ а) паралелна правој $y=4x-5$; б) нормална на правој $2x-6y+5=0$, в) заклапа с правом $3x-y+1=0$ угао од 45^0?

351. На параболи $y=x^2$ узете су тачке са апсцисама $x_1=1$, $x_2=3$; кроз ове тачке повучена је сечица. У којој тачки параболе ће тангента бита паралелна са повученом сечицом?

352. Кроз жижу параболе повучена је тетива нормална на осу параболе. Кроз пресечне тачке те тетиве са параболом повучене су тангенте. Доказати да се те тангенте секу под правим углом.

353. Дат је радиус вектор параболе. Како се може најпростије конструисати тангента паралелна томе радиус вектору?

354. Написати једначину тангенте и нормале хиперболе $y=\frac{1}{x}$ у тачки са апсцисом $x=-\frac{1}{2}$. Наћи субтангенту и субнормалу.

355. Показати да се отсечак тангенте хиперболе $y=\frac{a}{x}$ који лежи између коордннатних оса, полови додирном тачком.

356. Показати да је за равнокраку хиперболу $xy=a$ површина троугла који заклапа ма која тангента са координатним осама, једнака површини квадрата конструисаног над реалном полуосом.

357. Дати начине конструисања тангенте кривих:

$$y=x^3;\quad y^2=x^3;\quad xy^2=1.$$

358. Показати да је субтангента параболе n-тог реда $y=x^n$ равна n-том делу апсцисе додирне тачке. Дати начин конструкције тангенте за криву $y=x^n$.

359. Показати да за ма коју криву $y=f(x)$ апсциса x_0 тачке којој одговара нормала која пролази кроз координатни почетак, задовољава једначину $f(x_0)\cdot f'(x_0)+x_0=0$. Специјално, уверити се у то да је код кривих $y=x^k$ кад је k цео позитиван број, могућа само једна нормала која пролази кроз координатни почетак.

Диференцијали функција

360. Дата је функција $y=f(x)$. У некој тачки x дат је независно промењљивој прираштај $\Delta x=0{,}2$, и показало се да одговарајући главни део прираштаја функције износи 0,8. Наћи извод функције у тачки x.

361. Дата је функција $f(x)=x^2$. Зна се да је у некој тачки прираштају независно промењљиве $\Delta x=0{,}2$ одговара главни део прираштаја фунције $df(x)=-0{,}8$. Наћи почетну вредност независно промењљиве.

362. Наћи прираштај и диференцијал функције $y=x^2-x$ за $x=10$ и $\Delta x=0{,}1$. Израчунати апсолутну и релативну грешку које настају при замени прираштаја диференцијалом. Направити цртеж.

363. Наћи прираштај и диференцијал функције $y=\sqrt{x}$ за $x=4$ и $\Delta x=0{,}41$. Израчунати апсолутну и релативну грешку. Направити цртеж.

364. $y=x^3-x$. За $x=2$ наћи Δy и dy дајући прираштају независно промењљиве вредности: $\Delta x=1$; $\Delta x=0{,}1$; $\Delta x=0{,}01$. Наћи одговарајуће вредности релативне грешке $\delta=\frac{|\Delta y-dy|}{|dy|}$.

365. Наћи дужину отсечка ординате $x=2$, који лежи између криве $y=x^3-x^2$ и њене тангенте у тачки $(1;0)$; шта претставља тај отсечак?

366. Наћи графички (помоћу цртежа рађеног на милиметарској хартији у великој размери) прираштај, диференцијал, а такође апсолутну и релативну грешку која настаје при замени прираштаја диференцијалом за функцију $y=2^x$ за $x=2$ и $\Delta x=0{,}4$.

367. Страна квадрата износи 8 cm. За колико се повећа његова површина ако му се свака страна повећа за: а) 1 cm; б) 0,5 cm; в) 0,1 cm? Наћи линеарни главни део прираштаја површине овог квадрата и оценити релативну грешку (у процентима) која настаје при замени стварног прираштаја његовим главним делом.

368. Зна се да је при повећању стране датог квадрата за 0,3 cm, линеарни главни део прираштаја површине 2,4 cm². Наћи линеарни главни део прираштаја површине, који одговара прираштају сваке стране за а) 0,6 cm; б) 0,75 cm; в) 1,2 cm.

369. Наћи диференцијале следећих функција:

1) $0{,}25\sqrt{x}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{0{,}2}$; 3) $\frac{1}{0{,}5\,x^2}$; 4) $\frac{1}{4x^4}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

6) $\frac{1}{n\sqrt[3]{x}}$; 7) $\frac{\sqrt{x}}{a+b}$; 8) $\frac{p}{qx}$; 9) $\frac{m-n}{x^{0,2}}$; 10) $\frac{m+n}{\sqrt{x}}$.

Разни задаци

370. Доказати да је извод парне функције непарна, а извод непарне — парна функција.

371. Доказати да извод $\varphi'(x)$ периодичне функције $\varphi(x)$ са периодом ω, има такође периоду ω.

372. Функција $y=|x|$ је непрекидна за свако x. Уверити се да за $x=0$ није диференцијабилна.

373. Функција $\varphi(x) = \operatorname{sign} x$ (чита се: сигнум од икс) дефинише се овако: $\varphi(0) = 0$; за $x \neq 0$ $\varphi(x) = \dfrac{d|x|}{dx}$. Нацртати график функције $y = \operatorname{sign} x$.

374. Функција $y = |\sin x|$ је непрекидна за свако x. Уверити се да за $x = 0$ није диференцијабилна. Има ли још каквих вредности независно промењиве за које функција није диференцијабилна?

375. Испитати функцију $y = e^{-|x|}$ у погледу непрекидности и диференцијабилности за $x = 0$.

376. Шта се може рећи о изводима функција: $y = \sqrt[5]{x}$; $y = \sqrt[5]{x^3}$; $y = \sqrt[5]{x^4}$; $y = \sqrt[5]{x^6}$ за $x = 0$?

377. $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ за $x \neq 0$; $f(0) = 0$. Хоће ли $f(x)$ бити диференцијабилна за $x = 0$?

378. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}}$ за $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Хоће ли $f(x)$ за $x = 0$ бити непрекидна и диференцијабилна?

379. Дата је функција $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$. Показати да за $x = 1$ није могуће издвојити линеарни главни део, и према томе $f(x)$ за $x = 1$ нема извода. Протумачити резултат геометриски.

380. $f(x) = x \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$ за $x \neq 0$ $f(0) = 0$. Хоће ли $f(x)$ бити за $x = 0$ непрекидна и диференцијабилна? Протумачити резултат геометриски.

§ 2. Диференцирање функцијâ

Полиноми и збирови степених функцијâ

381. Продиференцирати следеће функције:

1) $3x^2 - 5x + 1$; 2) $x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 - 0{,}3x + 0{,}1$;

3) $ax^2 + bx + c$; 4) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$;

5) $2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$; 6) $0{,}8\sqrt[4]{y} - \dfrac{y^3}{0{,}3} + \dfrac{1}{5y^2}$;

7) $\dfrac{x}{m} + \dfrac{n}{x} + \dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{n^2}{x^2}$; 8) $\dfrac{mx^2}{\sqrt{x}} + \dfrac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{p\sqrt{x}}{x}$;

9) $\dfrac{mz^2 + nz + 4p}{p+q}$; 10) $0{,}1\, t^{-\frac{2}{3}} - \dfrac{5{,}2}{t^{1,4}} + \dfrac{2{,}5}{\sqrt[5]{x}}$

11) $(x - 0{,}5)^2$; 12) $\sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$; 13) $(v+1)^2(v-1)$;

14) $0{,}5 - 3(a-x)^2$; 15) $\dfrac{ax^3 + bx^2 + c}{(a+b)\,x}$; 16) $\left(\dfrac{mu+n}{p}\right)^3$.

382. $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$; Наћи:

$f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

383. $f(t) = \dfrac{t^2 - 5t - 1}{t^3}$. Наћи: $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

384. $f(z) = \dfrac{2z^3 - 3z + \sqrt{z} - 1}{z}$; Наћи: $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

385. $f(x) = 4 - 5x + 2x^3 - x^5$; Показати да је $f'(a) = f'(-a)$.

386. $f(x) = x^2 + bx + c$; Одредити b и c знајући да је $f(0) = 3$ и $f'(0) = -1$.

387. За криве а) $y = x^2(x-2)^2$; б) $y = 3x^5 - 25x^3 + 90x + 15$; наћи тачке у којима су тангенте паралелне x оси.

388. Показати да крива $y = x^5 + 5x - 12$ у свим својим тачкама заклапа са x осом оштар угао.

389. У којим је тачкама криве $y = x^3 + x - 2$ њена тангента паралелна са правом $y = 4x - 1$?

390. Написати једначине тангената криве $y = x - \dfrac{1}{x}$ у пресечним тачкама ове криве са x осом.

391. Написати једначину оне тангенте криве $y = x^3 + 3x^2 - 5$ која је нормална на правој $2x - 6y + 1 = 0$.

392. Тетива параболе $y = x^2 - 2x + 5$ спаја тачке чије су апсцисе $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Написати једначину оне тангенте ове параболе, која је паралелна поменутој тетиви.

393. Написати једначину нормале криве $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ у тачки апсцисе $x = 3$.

394. Написати једначину нормале криве $y = -\sqrt{x} + 2$ у тачки њеног пресека са бисектрисом координатног угла (првога).

395. Написати једначину оне нормале параболе $y = x^2 - 6x + 6$ која је нормална на правој што спаја координатни почетак са теменом параболе.

396. Показати да се нормале на криву $y = x^2 - x + 1$ повучене у тачкама чије су апсцисе $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \dfrac{5}{2}$, секу у једној тачки.

397. У тачкама пресека праве $x - y + 1 = 0$ и параболе $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су нормале на параболу. Наћи површину троугла који заклапају нормале и тетива између пресечених тачака.

398. Тело бачено вертикално у вис креће се по закону $s = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$ где је v_0 почетна брзина, а g убрзање земљине теже. Наћи брзину тог кретања у произвољном тренутку t. Израчунати колико ће се времена тело пењати и до које ће се висине оно попети, ако је почетна брзина $v_0 = 40$ m/sec.

399. Ако је тело бачено у вис под углом α према хоризонту онда је једначина његове трајекторије $y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ (трајекторија хитца), где је v_0 почетна брзина. Израчунати највећу висину до које се тело уздигне, ако је $\alpha=45^0$, $v_0=10$ m/sec.

400. Тачка се креће по правој тако да њено отстојање s (у cm) од почетне тачке, након t секунди износи $s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$. У ком је тренутку тачка била у полазном положају? У ком је тренутку њена брзина равна нули?

401. Тело масе 3 kg креће се праволиниски по закону $s=1+t+t^2$; s је изражено у cm., t у sec. Одредити кинетичку енергију $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ тела након 5 секунди од почетка кретања.

402. Угао заокрета замајца у зависности од времена дат је једначином:

$$\alpha=t^2+3t-5.$$

Наћи средњу угаону брзину између треће и пете секунде и угаону брзину за $t=5$ секунди.

403. Точак се обрће тако да је угао обртања пропорционалан квадрату времена. Први окрет извршио је точак за 8 sec. Одредити угаону брзину након 32 sec од почетка обртања.

404. Угао θ (у радијанима), за који се обрнуо точак у току t sec, износи $\theta=at^2-bt+c$, где су a, b, c позитивне константе. Одредити угаону брзину обртања точка. После ког времена ће се точак зауставити?

405. Дат је танки нехомогени штап AB дужине $L=20$ cm. Распоред масе на штапу дат је једначином $m=3l^2+5l$, где је l дужина штапа мерена од тачке A. Наћи линеарну густину: а) у тачки удаљеној од тачке A за $l=5$ cm: б) у самој тачки A; в) на крају штапа.

406. Штап направљен од метала чија је густина d, има облик јако истегнутог (издуженог) конуса. Дужина конуса је 50 cm. Пречник дебљег краја износи 1 cm. Наћи линеарну густину у средини штапа.

407. Количина топлоте Q потребна да се загреје јединица масе воде од нула степени до t^0, одређује се формулом $Q=t+0{,}00002\,t^2+0{,}0000003\,t^3$ [Кал/kg]. Израчунати специфичну топлоту воде за $t=30^0$, $t=100^0$.

408. Количина топлоте Q, потребна за загревање 1 g диаманта од 0^0 до t^0 C изражава се формулом $Q=0{,}0947\,t+0{,}000497\,t^2-0{,}00000012\,t^3$ малих калорија. Наћи специфичну топлоту дијаманта за 10^0; 100^0.

409. Количина електрицитета која прође кроз проводник почев од момента $t=0$ даје се обрасцем $Q=2t^2+3t+1$ (кулона). Наћи јачину струје на крају пете секунде.

410. Јачина струје i (у амперима) мења се тако да после t секунди износи: $i=20+21t-14t^2$. Разлика потенцијала дата је формулом: $v=Ri+L\frac{di}{dt}$, где је R отпор кола, а L самоиндукција. Узимајући да је $R=0{,}5$ ома и $L=0{,}01$ анri-а, израчунати v у тренутку $t=2$ sec.

Производ и количник

У задацима 411—428 наћи изводе датих функција:

411. $y=(x^2-x+3)(x^2+2x-1)$.

412. $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$.

413. $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$.

414. $y=\frac{x+1}{x-1}$. **415.** $y=\frac{x}{x^2+1}$. **416.** $s=\frac{3t^2+1}{t-1}$.

417. $u=\frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$. **418.** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

419. $z=\frac{x+1}{3(x^2-1)}+(x^2-1)(1-x)$.

420. $u=\frac{v^5}{v^3-2}$. **421.** $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$. **422.** $y=\frac{2}{x^3-1}$.

423. $u=\frac{v^2-v+1}{a^2-3}$. **424.** $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$.

425. $z=\frac{1}{t^2+t+1}$. **426.** $y=\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$.

427. $y=\frac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$. **428.** $y=\frac{ax+bx^2}{am+bm^2}$.

У задацима 429—437 наћи диференцијале датих функција:

429. $y=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

430. $y=(x^5-x^2)(x^5+x^3+1)$.

431. $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$. **432.** $v=\frac{(s+4)^2}{s+3}$. **433.** $s=\frac{t^3}{(1+t)^2}$.

434. $u=\left(\frac{v}{1-v}\right)^m$. **435.** $y=\frac{x^3+x-1}{x^3+1}$. **436.** $s=\frac{1}{t^2-3t+6}$.

437. $I=\frac{E_0}{w+w_0}$ (E_0 и w_0 су константе).

438. $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; наћи $f'(0)$ и $f'(1)$.

439. $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; наћи $F'(0)$, $F'(1)$ и $F'(2)$.

440. $F(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2+1}$. Наћи $F'(0)$ и $F'(-1)$.

441. $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$. Наћи $s'(0)$ и $s'(2)$.

442. $y(x)=(1+x^3)\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$. Наћи $y'(1)$ и $y'(a)$.

443. $\rho(\varphi)=\frac{\varphi}{1-\varphi^2}$. Наћи $\rho'(2)$ и $\rho'(0)$.

444. $\varphi(z)=\frac{a-z}{1+z}$. Наћи $\varphi'(1)$.

У задацима 445—454 наћи изводе датих функција:

445. $y=(x+1)(x^2+1)(x^3+1)$.

446. $y=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$.

447. $y=(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$.

448. $y=(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$.

449. $y=(ax^2+bx+c)^2$.

450. $y=\dfrac{1}{3(x^3-2x^2+3x-4)}$.

451. $y=\dfrac{2}{(x^2-x+1)^2}$.

452. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$.

453. $y=\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

454. $y=\dfrac{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}{1+2x}$.

455. Сабирањем прогресије $1, x, x^2, \ldots\ldots, x^n$, добијамо образац $1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$; извести одавде образац за збир: $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

Сложене функције

У задацима 456—495 наћи изводе датих функција:

456. $y=(1+2x)^{30}$.

457. $y=(1-x)^{20}$.

458. $y=(1-2^2)^{10}$.

459. $y=(x^3-x)^6$.

460. $y=\sqrt{1-x^2}$.

461. $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

462. $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$.

463. $y=(1-2\sqrt{x})^4$.

464. $y=(ax+b)^m$.

465. $y=\sqrt{x^5-5x^3+x}$.

466. $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

467. $y=(2x^3+3x^2+6x+1)^4$.

468. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$.

469. $y=\sqrt{1+\sqrt{2px}}$.

470. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$.

471. $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

472. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

473. $y=\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x}}}$.

474. $y=x\sqrt{1-x^2}$.

475. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$.

476. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

477. $y=\sqrt[7]{2-x^4}$.

478. $y=x^5\sqrt[3]{x^6-8}$.

479. $y=\dfrac{\sqrt{4x^5+2}}{3x^4}$.

480. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

481. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$.

482. $y=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

483. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

484. $y=(2x-1)\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$.

485. $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

486. $u=\dfrac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

487. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$.

488. $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

489. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$.

490. $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

491. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}}{x}$.

492. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

493. $y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$.

494. $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$.

495. $y=\sqrt[3]{7-3\sqrt[7]{x^6}}$.

496. Показати аналитички да је тангента у свакој тачки круга нормална на полупречнику.

Тригонометриске функције

497. Извести непосредно (не користећи се формулом за извод синуса) формуле за извод косинуса и тангенса.

У задацима 498—537 наћи изводе датих функција;

498. $y=\sin x+\cos x$.

499. $\rho=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$.

500. $y=\cos^2 x$.

501. $u=\dfrac{\operatorname{tg} v}{v}$.

502. $z=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$.

503. $y=x\sec^2 x-\operatorname{tg} x$.

504. $s=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$.

505. $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$.

506. $y=\sin 3x$.

507. $\rho=a\cos\dfrac{\varphi}{3}$.

508. $y=3\sin(3x+5)$.

509. $y=a\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{x}{k}+b\right)$.

510. $y=3\sin^2 x-\sin^3 x$.

511. $y=5\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{5}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$.

512. $y=\sin\frac{1}{x}$.

513. $y=\frac{x}{1-\cos x}$.

514. $y=\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$.

515. $y=\sin(\sin x)$.

516. $y=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

517. $y=\sin^2\frac{x}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

518. $\rho=a\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2$.

519. $y=0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\sin 0{,}8\,x\right)^2$.

520. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

521. $\rho=\frac{1}{18}\sin^6 3\theta-\frac{1}{24}\sin^8 3\theta$.

522. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x$.

523. $z=\frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x$.

524. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$.

525. $y=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$.

526. $y=\cos\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cos x$.

527. $y=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

528. $y=\sin\frac{x}{2}\sin 2x$.

529. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}$.

530. $y=\sin\sqrt{1+x^2}$.

531. $y=\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$.

532. $y=\sec(x-\cos x)$.

533. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

534. $y=\sqrt{1+a^2\cos^2 x}$.

535. $y=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

536. $y=\cos\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}$.

537. $y=x\sqrt{1+x^2}\sin x$.

538. За које вредности коефицијената A и B функција $y=A\sin 3x+B\cos 3x$ задовољава једначину $y'=y+6\cos 3x$?

У задацима 539—543 одредити диференцијале функција:

539. $y=\frac{1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}$ кад се независно променљива промени од $x=\frac{\pi}{6}$ на $x=\frac{61\pi}{360}$.

540. $y=\cos^2 2\varphi$ кад се φ промени од 60^0 на $60^0 30'$.

541. $y=\sin 2\varphi$ кад се φ промени од $\frac{\pi}{6}$ на $\frac{61\pi}{360}$.

542. $y=\sin 3\varphi$ кад се φ промени од $\frac{\pi}{6}$ на $\frac{61\pi}{360}$.

543. $y=\sin\frac{\vartheta}{3}$ кад се ϑ промени од $\frac{\pi}{6}$ на $\frac{61\pi}{360}$.

544. Под којим углом синусоида сече x осу? У којим тачкама синусоида има тангенту паралелну апсцисној оси?

545. Под којим се углом секу синусоида и косинусоида у тачки $M\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

546. $F(x)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$; наћи $F'(0)$ и $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

547. $\varphi(u)=\sqrt{\cos u}$; наћи $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

548. $y=\frac{\cos x}{1-x^2}$; наћи dy.

549. Наћи приближну вредност прираштаја функције $y=\sin x$ кад се x промени од 30^0 на $30^0\ 1'$. Колики је $\sin 30^0\ 1'$?

550. Наћи приближну вредност прираштаја функције $y=\operatorname{tg}x$ кад се x промени од 45^0 на $45^0\ 10'$.

551. Наћи приближну вредност прираштаја функције $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ кад се x промени од $\frac{\pi}{3}$ на $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}$.

Инверзне тригонометриске функције

У задацима 552—589 наћи изводе датих функција:

552. $y=(\operatorname{arc}\sin x)^2$.

553. $y=\operatorname{arc}\cos(x^2)$.

554. $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}(x^2-3x+2)$.

555. $y=\frac{1}{\operatorname{arc}\sin x}$.

556. $y=\frac{\operatorname{arc}\cos x}{x}$.

557. $y=\sqrt{x}\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$.

558. $y=(\operatorname{arc}\cos x+\operatorname{arc}\sin x)^n$.

559. $y=\operatorname{arc}\sec x$.

560. $y=\operatorname{arc}\operatorname{cosec}x$.

561. $y=\operatorname{arc}\sin\frac{2}{x}$.

562. $y=\frac{\operatorname{arc}\sin x}{\operatorname{arc}\cos x}$.

563. $y=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\frac{x}{1+x}$.

564. $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x+1}{x-1}$.

565. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

566. $y=x\operatorname{arc}\sin x+\sqrt{1-x^2}$.

567. $y=\frac{2}{3}\operatorname{arc}\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{1-x^2}$.

568. $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)$.

569. $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

570. $y = \arcsin(n \sin x)$.

571. $y = \cos\left(\frac{\arcsin x}{2}\right)$.

572. $y = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

573. $y = \arccos\sqrt{1-3x}$.

574. $y = \arcsin\sqrt{ax^2+bx+c}$.

575. $y = x \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$.

576. $y = x^3 \operatorname{arc\,tg} x^3$.

577. $y = x \cdot \sin x \cdot \operatorname{arc\,tg} x$.

578. $y = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arc\,tg} x$.

579. $y = \sqrt{1-(\arccos x)^2}$.

580. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

581. $y = \arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}$.

582. $y = 2 \cdot \arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$.

583. $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

584. $y = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x}$.

585. $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

586. $y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

587. $y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

588. $y = \arccos\frac{\sqrt{5}}{x+1}$.

589. $y = \arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$.

590. $f(x) = \arcsin 2x$; наћи $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

591. $f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{arc\,tg} x}$; наћи $f'(1)$.

592. $f(x) = \frac{\arcsin 4x}{1-4x}$; наћи $f'\left(\frac{1}{8}\right)$.

593. $f(x) = \arcsin\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$; наћи $f'(2)$.

***594.** $f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$; наћи општи израз за $f'(x)$; наћи $f'(0)$.

595. $y(x) = \arcsin(\sqrt{\sin x})$; наћи $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

596. $y(x) = x \arcsin x$; наћи $y'(0)$.

597. $y(x) = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$; наћи $y'(-1)$.

598. $y(x) = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$; наћи dy.

599. $y(x) = \arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$; наћи dy.

Логаритамске функције

600. $y = \log_3(x^2-1)$; наћи y'.

601. $y = \log_5(x^2+1)$ наћи y'.

602. $y = \log(x - \cos x)$; наћи y'.

603. $y = \log\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)$; наћи y'.

604. $y = \log_2(1 - x\cos x)$; наћи y'.

605. $y = \log_3(x^2 - \sin x)$; наћи y'.

606. $f(x) = \log_2(1-2x)$; наћи $f'(3)$.

607. $f(x) = \log(x^2-2x+3)$; наћи $f'(10)$.

608. $f(x) = \log_3(1-x)$; наћи $f'(0)$.

609. $f(x) = x \cdot \log x$; наћи $f'(1)$.

610. $f(x) = \frac{x-1}{\log_2 x}$; наћи $f'(2)$.

611. $f(x) = \sqrt{\ln x}$; наћи $f'(e)$.

612. $y = x^2 \ln x$; наћи dy.

613. $y = \log_2(1-\sqrt{x})$; наћи dy.

614. $y = \ln\operatorname{tg} x$; наћи dy.

615. $y = \ln\sin x$; наћи dy.

616. $f(x) = \ln\cos x$; наћи $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

617. $y = \ln(1-\cos x)$; наћи y'.

У задацима 618—662 наћи изводе датих функција:

618. $y = \sin(\ln x)$.

619. $y = \frac{1}{\ln x}$.

620. $y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$.

621. $y = \ln[\ln(\ln x)]$.

622. $y = \frac{\ln x}{x^n}$.

623. $y = x\sin x\ln x$.

624. $y = \cos 2x\log x$.

625. $y = \log(\log x)$.

626. $y = \log_2[\log_3(\log_5 x)]$.

627. $y = \ln\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$.

628. $y = \ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

629. $y = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

630. $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

631. $y = x^n \ln x$.

632. $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

633. $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$.

634. $y = x \cdot \arcsin (\ln x)$.

635. $y = \ln (\sin x + \cos x)$.

636. $y = \ln (1 + \operatorname{tg} x)$.

637. $y = \ln \sqrt[3]{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}$.

638. $y = \ln (1 + \cos x + \cos^2 x)$.

639. $y = \ln \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1+x}$.

640. $y = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$.

641. $y = \operatorname{arc\,tg} [\ln (ax + b)]$.

642. $y = \sin \left(\frac{1 - \ln x}{x}\right)$

643. $y = (1 + \ln \sin x)^n$.

644. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$.

645. $y = \ln \arccos 2x$.

646. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$.

647. $y = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$.

648. $y = \sqrt{a^2 + x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}$.

649. $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}$.

650. $y = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

651. $y = x \sqrt{(x^2 + a^2)^3} + \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{3a^4}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

652. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x$.

653. $y = \frac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln \sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arc\,tg} x$.

654. $y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$.

655. $y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

656. $y = \ln \frac{\sqrt[4]{x^8 + 1}}{x}$.

657. $y = \ln \sqrt[10]{\frac{x^5 - 1}{x^5 + 1}}$.

658. $y = \ln \sqrt[8]{\frac{(x^3 - 8)^3}{x}}$.

659. $y = \ln \sqrt[8]{\frac{(x^4 - 1)^3}{x^4 + 1}}$.

660. $y = \ln (x \sin x \cdot \sqrt{1 - x^2})$.

661. $y = \log_{10} (\cos x \cdot \sqrt{1 - x})$.

662. $y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right)$.

Експоненцијалне функције

663. $y = 2^x$; нaђи y'.

664. $y = 10^x$; нaђи dy.

665. $y = 10^{2x-3}$; нaђи y'.

666. $y = e^{x^2 - x + 2}$; нaђи dy.

667. $y = \frac{1}{3^x}$; нaђи dy.

668. $y = \frac{x}{4^x}$; нaђи y'.

669. $y = \sin 2^x$; нaђи y'.

670. $y = x^3 - 3^x$; нaђи y'.

671. $y = e^{\sqrt{x} + 1}$; нaђи dy.

672. $y = 7^{1 - \sqrt{x}}$ нaђи y'.

673. $y = 2^{2x - 1}$; нaђи dy.

674. $y = 10^{\frac{1}{x}}$; нaђи dy.

675. $y = 10^{-3x^3}$; нaђи y'.

676. $f(x) = 10^x$; нaђи $f'(1)$.

677. $f(x) = 2^{x^2 - 1}$; нaђи $f'(3)$.

678. $f(x) = 3^{\sin x}$; нaђи $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

679. $f(x) = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$; нaђи $f'(16)$.

680. $\varphi(x) = x \cdot e^x$; нaђи $\varphi'(0)$.

681. $\varphi(x) = \frac{x}{e^x}$; нaђи $\varphi'(0)$.

682. $f(x) = \frac{e^x}{x}$; нaђи $f'(1)$.

У задацима 683 – 732 нaђи изводе датих функција:

683. $y = x \cdot e^x$.

684. $y = (x^2 - 2x + 3) e^x$.

685. $y = e^{-x} \cdot (x^3 + 2x)$.

686. $y = e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$.

687. $y = e^x \cdot \sin x$.

688. $y = e^x \cdot \cos x$.

689. $y = \frac{e^x}{\sin x}$.

690. $y = \frac{\cos x}{e^x}$.

Разне функције

691. $y = x \cdot e^x (\cos x + \sin x)$.

692. $y = e^{-x^2} \cdot \ln x$.

693. $y = e^{l^x}$.

694. $y = 2^{3^x}$.

695. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$.

696. $y = e^{x^2}$.

697. $y = e^{\sin x}$.

698. $y = e^{\cos x}$.

699. $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$.

700. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

701. $y = x \cdot e^{1 - \cos x}$.

702. $y = \operatorname{tg} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

703. $y = \ln \frac{1 - e^x}{e^x}$.

704. $y = x \cdot \ln (1 - 2e^{x^2})$.

705. $y = 10^{x \operatorname{tg} x}$.

706. $y = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$.

707. $y = a^{\sin^3 x}$.

708. $y = e^x \sin x \cos^3 x$.

709. $y = a^{ax} (a \cdot \sin x - \cos x)$.

710. $y = \sin \sqrt{1 - 2^x}$.

711. $y = 5x - 3\sqrt{1 + e^x}$.

712. $y = \ln (e^x + e^{-x} + 2)$.

713. $y = x^2 \cdot e^{x^2}$.

714. $y = \frac{e^x}{1 + x}$.

715. $y=e^x(\sin 3x-3\cos 3x)$. **716.** $y=\sqrt{1+e^{2x}}$.

717. $y=\dfrac{e^x}{1+x^2}$. **718.** $y=\dfrac{x^3}{1+e^x}$. **719.** $y=\dfrac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$.

720. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$. **721.** $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$. **722.** $y=\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} e^{-2x}}$.

723. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$. **724.** $y=\ln\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$.

725. $y=e^{\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$. **726.** $y=\dfrac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg}\left(e^{mx}\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$.

727. $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$. **728.** $y=\ln(e^x\cdot\cos x+e^{-x}\sin x)$.

729. $y=\log\sqrt[3]{1+e^x+e^{2x}}$. **730.** $y=\ln\sin\sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg} e^{3x}}$.

731. $y=\sqrt[5]{\left(1+x\cdot e^{\sqrt{x}}\right)^3}$. **732.** $y=x-\ln(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1})$.

У задацима 733—739, ослањајући се на задатак број 339, наћи граничне вредности следећих израза:

733. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{x}$. **734.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$.

735. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x+\cos x)^n-1}{x}$. **736.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x+\operatorname{tg} x)^5-\cos^5 x}{x}$.

737. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x}$. **738.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x-1)+\dfrac{\pi}{4}}{x}$.

739. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x}$.

740. Уверити се у то да функција $y=\ln\dfrac{1}{1+x}$ задовољава диференцијалну једначину $x\dfrac{dy}{dx}+1=e^y$.

741. Уверити се у то да функција $y=\dfrac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ задовољава диференцијалну једначину

$$2x^2\,dy=(x^2y^2+1)\,dx.$$

742. Уверити се да функција

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$$

задовољава диференцијалну једначину $2y=xy'+\dfrac{1}{2}\ln y'$.

743. $f(x)=e^{0,1x(1-x)}$. Очевидно је $f(1)=1$. Израчунати приближну вредност $f(1{,}05)$.

744. Израчунати $\operatorname{arc\,tg} 1{,}02$; $\operatorname{arc\,tg} 0{,}97$.

745. Израчунати приближно $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2-1}{(2{,}037)^2+1}}$.

746. Израчунати приближно $\arcsin 0{,}4983$.

747. Доказати теорему: ако апсолутна грешка величине x_0 износи α, онда апсолутна грешка величине $f(x_0)$ за довољно мало α износи $|f'(x_0)|\cdot|\alpha|$.

748. Доказати теорему: ако релативна грешка величине x_0 износи δ, онда релативна грешка величине $f(x_0)$ за довољно мало δ не прелази $\dfrac{|x_0|\cdot|\delta|\cdot|f'(x_0)|}{|f(x_0)|}$.

749. Уверити се у то да је за добијање при логаритмисању, резултата са n тачних децимала, довољно служити се n-то цифарним логаритамским таблицама. Колико тачних децимала различитих од нуле даје логаритмар, ако се рачуна да се при визирању учини погрешка од 0,1 mm, а дужина логаритмара износи 250 mm? Рачуни код хемиских анализа (прецизних) морају се вршити са тачношћу до 0,02%; могу ли се они обављати помоћу логаритмара? Каквим се логаритамским таблицама морамо служити при прорачунавању ових анализа?

750. Колика ће бити апсолутна грешка ако се стави

$$\frac{10.25\cdot 20{,}13\cdot 498}{0{,}1008}=1\,000\,000\,?$$

751. У техничким рачунима често се скраћује π и $\sqrt{g}$ (g – убрзање силе земљине теже) кад један од ових бројева стоји у бројитељу а други у имenитељу. Колика се релативна грешка чини при томе?

Хиперболичне функције

У задацима 752—765 наћи изводе датих функција:

752. $y=\operatorname{sh}^3 x$. **753.** $y=\ln\operatorname{ch} x$.

754. $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th} x)$. **755.** $y=\operatorname{tg} h(1-x^2)$.

756. $y=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$. **757.** $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.

758. $y=\sqrt{\operatorname{ch} x}$. **759.** $y=e^{\operatorname{ch}^2 x}$. **760.** $y=\operatorname{th}(\ln x)$.

761. $y=x\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x$. **762.** $y=\sqrt[4]{(1+\operatorname{th}^2 x)^2}$.

763. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{6}\operatorname{th}^3\dfrac{x}{2}$. **764.** $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$.

765. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} h\,x+\dfrac{1}{8}\sqrt{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

Логаритамски извод

766. Какав геометриски смисао има логаритамски извод ординате криве по њеној апсциси?

767. Какав физикални смисао има логаритамски извод дужине штапа по температури?

У задацима 768—788 наћи изводе датих функција помоћу правила о логаритамским изводима:

768. $y=x^{x^2}$. **769.** $y=x^{\frac{1}{x}}$. **770.** $y=x^{x^x}$ **771.** $y=x^{\sin x}$.

772. $y=(\sin x)^{\cos x}$. **773.** $y=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$. **774.** $y=(\ln x)^x$.

775. $y=2\,x^{\sqrt{x}}$. **776.** $y=\sqrt[x]{(x+1)^2}$. **777.** $y=(x^2+1)^{\sin x}$.

778. $y=\log_x a$. **779.** $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$. **780.** $y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

781. $y=\sqrt{x\sin x\cdot\sqrt{1-e^x}}$. **782.** $y=\frac{x\,e^x\operatorname{arc\,tg} x}{(\ln x)^5}$.

783. $y=\sqrt{\frac{1-a u\sin x}{1+\arcsin x}}$. **784.** $y=\frac{(1-x^2)\,e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

785. $y=\sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$. **786.** $y=\frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$.

787. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{x^2-\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\ln x+1}$.

788. $y=u^v v^u$ (u и v су функције исте независно променљиве).

789. Извести формуле за извод производа и количника применом правила о логаритамском изводу.

Инверзне функције

790. Претпоставимо да је правило за извод степена доказано само за целе позитивне изложиоце. Извести формулу за извод корена применом правила за извод инверзне функције.

791. Означимо функцију инверзну степено-експоненцијалној функцији, $y=x^x$ симболом $\alpha(x)$, тј. ставимо да из $y=x^x$ следи $x=\alpha(y)$. Наћи формулу за извод функције $y=\alpha(x)$.

792. Функције инверзне хиперболичним означавају се симболима: Arsh x, Arch x, Arth x (чита се areasinus hiperbolikus, areakosinus hiperbolikus, areatanges hiperbolikus). Наћи обрасце за изводе ових функција.

Имплицитне и параметарски задане функције

У задацима 793—806 наћи изводе имплицитних функција:

793. $x^2+y^2=r^2$. **794.** $y^3-3y+2ax=0$. **795.** $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

796. $y^2-2xy+b^2=0$. **797.** $x^3+y^3-3axy=0$.

798. $x^y=y^x$. **799.** $y^2\cos x=a^2\sin 3x$.

800. $y=\cos(x+y)$. **801.** $\cos(xy)=x$. **802.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

803. $y=1+x e^y$. **804.** $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$.

805. $y\sin x-\cos(x-y)=0$. **806.** $y=x+\operatorname{arc\,tg} y$.

807. Уверити се у то да функција y, дефинисана једначином $xy-\ln y=1$, задовољава диференцијалну једначину $y^2+(xy-1)\frac{dy}{dx}=0$.

808. Уверити се у то да функција y, дефинисана једначином $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, задовољава диференцијалну једначину $x(dy-dx)=y(dy+dx)$.

809. Како проверити да ли тачка дата декартовим координатама лежи на кривој чија је једначина дата у параметарском облику?

810. Какве услове мора задовољавати функција $f(t)$ да би за дијаграме параметарски задатих функција $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и $x=\varphi[f(t)]$, $y=\psi[f(t)]$ служила једна иста крива.

811. Нацртати тачку по тачку дијаграме параметарски задатих функција:

а) $x=3\cos t$; $y=4\sin t$; б) $x=t^2-2t$; $y=t^2+2t$;

в) $x=\cos t$; $y=t+2\sin t$; г) $x=2^{t-1}$; $y=\frac{1}{4}(t^3+1)$,

812. У следећим функцијама задатим у параметарском облику, елиминисати параметар:

а) $x=3t$; $y=6t-t^2$; б) $x=\cos t$; $y=\sin 2t$;

в) $x=t^3+1$; $y=t^2$; г) $x=\varphi-\sin\varphi$; $y=1-\cos\varphi$;

д) $x=\operatorname{tg} t$; $y=\sin 2t+2\cos 2t$.

813. Наћи вредност параметра која одговара датим координатама тачке на кривој, чија је једначина дата у параметарском облику:

а) $x=3(2\cos t-\cos 2t)$; $y=3(2\sin t-\sin 2t)$; $(-9;\ 0)$;

б) $x=t^2+2t$; $y=t^3+t$; $(3;\ 2)$;

в) $x=2\operatorname{tg} t$; $y=2\,\mathrm{siu}^2 t+\sin 2t$; $(2;\ 2)$;

г) $x=t^2-1$; $y=t^3-t$; $(0;\ 0)$.

У задацима 814—823, где су y и x задати као функција параметра, наћи изводе од y по x:

814. $x=a\cdot\cos\varphi$; $y=b\sin\varphi$.

815. $x=a\cdot\cos^3\varphi$; $y=b\sin^3\varphi$.

816. $x=a(\varphi-\sin\varphi)$; $y=a(1-\cos\varphi)$.

817. $x=1-t^2$; $y=t-t^3$; **818.** $x=\frac{t+1}{t}$; $y=\frac{t-1}{t}$.

819. $x=\ln(1+t^2)$; $y=t-\operatorname{arc\,tg} t$.

820. $x=\varphi(1-\sin\varphi)$; $y=\varphi\cos\varphi$.

821. $x=\frac{1+t^3}{t^2-1}$; $y=\frac{t}{t^2-1}$.

822. $x=e^t\cdot\sin t$; $y=e^t\cos t$. **823.** $x=\frac{3at}{1+t^3}$; $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

У задацима 824—827 наћи угаоне коефициенте тангената кривих:

824. $x=3\cos t$; $y=4\sin t$ у тачки $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\ 2\sqrt{2}\right)$.

825. $x=t-t^4;\ y=t^2-t^3$ у тачки $(0;\ 0)$.

826. $x=t^3+1;\ y=t^2+t+1$ у тачки $(1;\ 1)$.

827. $x=2\cos t;\ y=\sin t$ у тачки $\left(1;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

828. Уверити се у то да функција, задата параметарски једначинама:

$$x=2t+3t^2,\quad y=t^2+2t^3,$$

задовољава диференцијалну једначину $y=y'^2+2y'^3$. (Цртица означава диференцирање по x, тј. $y'=\frac{dy}{dx}$).

829. Уверити се у то да функција, задата параметарски једначинама

$$x=\frac{1+t}{t^3},\quad y=\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t},$$

задовољава диференцијалну једначину:

$$xy'^3=1+y'\quad\left(y'=\frac{dy}{dx}\right).$$

830. Уверити се у то да функција, задата параметарски једначинама

$$x=\frac{at}{1+t^3};\quad y=\frac{a^2}{6}\cdot\frac{4t^3+1}{(1+t^3)^2},$$

задовољава диференцијалну једначину

$$x^3+y'^3=axy'\left(y'=\frac{dy}{dx}\right).$$

831. Уверити се у то да функција, задата параметарски једначинама:

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t};\quad y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

задовољава диференцијалну једначину

$$y\sqrt{1+y'^2}=y'\quad\left(y'=\frac{dy}{dx}\right).$$

832. Уверити се у то да функција, задата параметарски једначинама

$$x=\frac{1+\ln t}{t^2};\quad y=\frac{3+2\ln t}{t},$$

задовољава диференцијалну једначину

$$yy'=2xy'^2+1\quad\left(y'=\frac{dy}{dx}\right).$$

У задацима 833—839 наћи углове под којима се секу дате криве:

833. $x^2+y^2=8$ и $y^2=2x$.

834. $x^2+y^2-4x=1$ и $x^2+y^2-2y=9$.

835. $x^2-y^2=5$ и $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$.

836. $x^2+y^2=8ax$ и $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$.

837. $x^2=4ay$ и $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

838. $y=x^2$ и $x=\frac{5}{3}\cos t;\ y=\frac{5}{4}\sin t$.

839. $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=a\sin\varphi\end{cases}$ и $x=\frac{at^2}{1+t^2};\ y=\frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}$.

Тангенте и нормале

У задацима 840—848 написати једначине тангенте и нормале датих кривих:

840. Синусоиде $y=\sin x$ у тачки $M(x_0,\ y_0)$.

841. Логаритамске криве $y=\ln x$ у тачки $M(x_0,\ y_0)$.

842. Цисоиде $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ у тачки $M(x_0,\ y_0)$.

843. Увојка $y=\frac{1}{1+x^2}$ у тачки $M(x_0,\ y_0)$.

844. $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ за $x=2a$.

845. $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ за $x=a$.

846. $x^2(x+y)=a^2(x-y)$ за $x=0$.

847. $x=2e^t;\ y=e^{-t}$ за $t=0$.

848. $x=\sin t;\ y=\cos 2t$ за $t=\frac{\pi}{6}$.

849. Показати да једначина тангенте елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ у тачки $M(x_0,\ y_0)$ гласи: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

850. Показати да једначина тангенте хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ у тачки $M(x_0,\ y_0)$ гласи $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

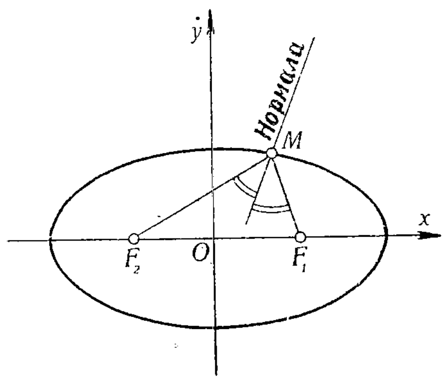
851. Доказати да нормала елипсе полови угао између радиус векторâ (види сл. 18). Извести одатле начин за конструкцију тангенте и нормале елипсе.

852. Решити аналоган задатак за хиперболу.

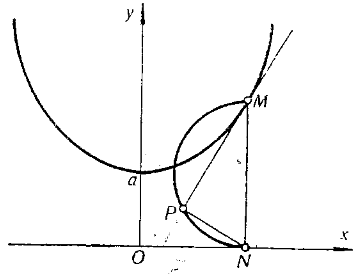
853. Показати да отсечак тангенте астроиде $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ који лежи између координатних оса, има сталну дужину a.

854. Решити претходни задатак користећи се параметарском једначином астроиде $x=a\cos^3 t$; $y=a\sin^3 t$.

855. За конструкцију тангенте ланчанице $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ примењује се следећи начин: над ординатом MN тачке M као над пречником конструише се полукруг (сл. 19), и одмери се отсечак $NP=a$. Права MP биће тражена тангента. Доказати то.



Сл. 18



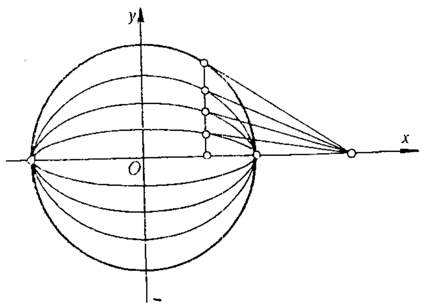
Сл. 19

856. Доказати да отсечак тангенте трактрисе

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2},$$

који лежи између ординатне осе и додирне тачке, има сталну дужину.

857. Доказати да се код елипси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2}=1$ које имају заједничку велику осу $2a$, а различите мале осе 2λ (сл. 20), тангенте повучене у тачкама са истом апсцисом, секу у једној тачки која лежи на апсцисној оси. Користећи се овим показати прост начин конструкције тангенте на елипсу.



Сл. 20

858 Показати да крива $y=e^{kx}\sin mx$ додирује сваку од кривих $y=e^{kx}$, $y=e^{-kx}$ у свим заједничким с њима тачкама.

859 Показати да за било који положај круга генератора циклоиде, тангента и нормала у одговарајућој тачки циклоиде пролазе кроз његову највишу и најнижу тачку.

860. Показати да је за било коју тачку $M(x_0, y_0)$ равностране хиперболе $x^2-y^2=a^2$ отсечак нормале од тачке M до тачке пресека са апсцисном осом, једнак радиус вектору тачке M.

861. Доказати да дужина тангенте криве (тј. дужина отсечка тангенте између додирне тачке и апсцисне осе) износи $y\sqrt{1+\frac{1}{y'^2}}$, где је $y=f(x)$ једначина криве.

862. Доказати да дужина нормале (тј. дужина отсечака нормале од тачке у којој ова сече криву, до апсцисне осе) износи $y\sqrt{1+y'^2}$.

863. Доказати да је дужина субтагенте $\frac{y}{y'}$.

864. Доказати да је дужина субнормале yy'.

× **865**. Показати да субтангента криве $y=ae^{bx}$ има сталну дужину.

866. Наћи дужину тангенте, нормале, субтангенте и субнормале кардиоиде

$$x=a(2\cos t-\cos 2t);\qquad y=a(\sin t-\sin 2t)$$

у тачки која одговара произвољној вредности параметра t.

867. Наћи дужину тангенте, нормале, субтангенте и субнормале астроиде

$$x=a\sin^3 t;\qquad y=a\cos^3 t.$$

868. Уверити се израчунавањем да је тангента круга $x^2+y^2=a^2$ у исто време и нормала еволвенте круга

$$x=a(\cos t+t\sin t);\qquad y=a(\sin t-t\cos t).$$

869. Наћи тангенту, нормалу, субтангенту и субнормалу еволвенте круга (њену једначину види у претходном задатку).

870. Показати да је тангента циклоиде нормална на правој која спаја додирну тичку с тачком додира круга генератора са x осом.

§ 3 Даљи примери примене извода

871. Тачка се креће по Архимедовој спирали $\rho=a\varphi$. Кад је $\varphi=\frac{\pi}{2}$ брзина мењања угла φ износи ω радиjан/sec. Наћи брзину мењања радиус вектора ρ.

872. Тачка се креће по кругу $\rho=2r\cos\varphi$. Наћи брзине мењања апсцисе и ординате тачке ако се радиус вектор обрће угаоном брзином ω. Поларна оса служи као апсцисна оса, а пол као почетак декартовог координатног система.

873 Тачка се креће по логаритамској спирали $\rho=e^{a\varphi}$. Наћи брзину мењања радиус вектора ако је његова угаона брзина обртања ω.

874. Круг полупречника R котрља се без клизања по правој. Центар круга креће се сталном брзином v. Наћи брзину мењања апсцисе x и ординате y тачке која лежи на периферији круга.

875. Наћи угао θ између радиус вектора и тангенте, и угао α између поларне осе и тангенте круга $\rho=2r\sin\varphi$.

876. Уверити се да је код параболе $\rho = a\sec^2\dfrac{\varphi}{2}$ збир углова које заклапа тангента са радиус вектором и са поларном осом, једнак 180^0. Искористити ову особину за конструкцију тангенте параболе.

877. Дата је конхоида $\rho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$; показати да је $\alpha = 4\theta$ (ознаке су исте као и у задатку бр. 875).

878. Показати да се параболе $\rho = a\sec^2\dfrac{\varphi}{2}$ и $\rho = b\operatorname{cosec}^2\dfrac{\varphi}{2}$ секу под правим углом.

879. Наћи тангенс угла између поларне осе и тангенте криве $\rho = a\sec^2\varphi$ у тачки у којој је $\rho = 2a$.

880. Наћи тангенс угла између поларне осе и тангенте у координатном почетку: а) криве $\rho = \sin^3\varphi$; б) криве $\rho^2 = \sin 3\varphi$.

881. Показати да се две кардиоиде $\rho = a(1+\cos\varphi)$ и $\rho = a(1-\cos\varphi)$ секу под правим углом.

882. Једначина криве у поларним координатама задана је параметарски: $\rho = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$. Изразити тангенс угла θ између тангенте и радиус вектора у функцији од t.

883. Крива је задата једначинама: $\rho = a t^3$, $\varphi = b t^2$. Наћи угао између радиус вектора и тангенте.

884. Дата је елипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Изразити радиус вектор ρ и поларни угао φ као функције параметра t. Искористи добијени облик задавања елипсе за израчунавање угла између тангенте и радиус вектора.

Поларном субтангентом зове се пројекција отсечка тангенте од додирне тачке до њеног пресека са нормалом подигнутом на радиус вектор у полу, на ову нормалу. Аналого се дефинише и поларна субнормала. Узимајући ово у обзир решити задатке 885 - 889.

885. Извести формуле за дужину поларне субтангенте и поларне субнормале криве $\rho = f(\varphi)$.

886. Показати да је дужина поларне субтангенте хиперболичне спирале $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ стална.

887. Показати да је дужина поларне субнормале архимедове спирале $\rho = a\varphi$ стална.

888. Наћи дужину поларне субтангенте логаритамске спирале $\rho = a^{\varphi}$.

889. Наћи дужину поларне субнормале логаритамске спирале $\rho = a^{\varphi}$.

Ако се из произвољне непокретне тачке Q равни спусте нормале на све тангенте неке криве, онда основе тих нормала (тј. пресечне тачке нормала са одговарајућим тангентама) образују другу криву звану подера дате криве у односу на пол Q.

890. Написати једначину подере елипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ у односу на координатни почетак.

891. Написати једначину подере равностране хиперболе $x^2 - y^2 = a^2$ у односу на координатни почетак.

892. Уверити се да подера круга у односу на његов центар претставља сам тај круг, а у односу на тачку круга — кардиоиду.

893. Доказати да подера параболе у односу на жижу претставља тангенту параболе повучену у темену.

894. Доказати да подера елипсе која одговара било којој од жижа, претставља круг конструисан над великом осом као пречником.

У задацима 895—905 наћи диференцијале dS лукова датих кривих:

895. Праве линије $y = ax + b$.

896. Круга $x^2 + y^2 = r^2$.

897. Елипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

898. Параболе: $y^2 = 2px$.

899. Семикубне параболе $y^2 = ax^3$.

900. Синусоиде $y = \sin x$.

901. Ланчанице $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(y = \operatorname{ch} x)$.

902. Круга $x = r\cos t$, $y = r\sin t$.

903. Циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.

904. Астроиде $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

905. Архимедове спирале $x = at\sin t$, $y = at\cos t$.

906. y је везано са x релацијом: $y^2 = 12x$. Аргумент x расте равномерно брзином 2 јединице у секунди. Каквом брзином расте y за $x = 3$?

907. Ордината тачке која описује круг $x^2 + y^2 = 25$ опада брзином 1,5 cm/sec. Којом се брзином мења апсциса тачке кад ордината постане 4 cm?

908. У којој тачки елипсе $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината опада истом брзином којом апсциса расте?

909. Страна квадрата се повећава брзином v cm/sec. Колика је брзина мењања обима, и површине квадрата у моменту кад је дужина његове стране a cm?

910. Полупречник круга мења се брзином v. Којом се брзином мења површина круга и дужина његова обима?

911. Полупречник лопте мења се брзином v. Којом се брзином мења запремина и површина лопте?

912. За коју се вредност угла синус мења два пут спорије од аргумента?

913. За коју су вредност угла брзина мењања синуса и тангенса једног истог угла једнаке?

914. Брзина рашћења синуса увећала се n пута. Колико се пута изменила брзина рашћења тангенсе тог истог угла.

915. Под претпоставком да је запремина дебла дрвета пропорционална трећем степену његовог пречника, и да се последњи равномерно повећава из године у годину, показати да је брзина рашћења запремине, кад је пречник 90 cm, 25 пута већа него кад је пречник 18 cm.

916. Мердевине дужине 10 m прислоњене су једним крајем уз вертикални зид, а другим крајем се опиру о хоризонталну подлогу. Доњи се крај одмиче од зида брзином од 2 m/min. Којом се брзином спушта горњи крај кад је доњи удаљен од зида 6 m?

917. Воз и ваздушна лопта стартују истог тренутка из истог места. Воз се креће равномерно брзином 50 km/час, балон се диже (такође равномерно) брзином од 10 km/час. Којом се брзином удаљују једно од другога?

918. Човек раста 1,8 m удаљава се од светлосног извора који лежи на висини 3 m, брзином 6,34 km/час. Којом се брзином креће сенка његове главе?

919. Човек диже терет помоћу котураче утврђене на зиду на висини 15 m од земље. Он вуче уже брзином од 3 m/min, и у исто време удаљава се од зида брзином 1,5 m/min. Којом ће се брзином подизати терет на крају друге минуте?

920. Коњ трчи по кругу брзином 20 km/час. У средини круга налази се фењер. Којом се брзином креће сенка коња дуж ограде постављене по тангенти круга у тачки одакле коњ почиње да трчи, у моменту кад је он већ оптрчао 1/8 круга?

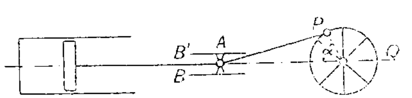
921. Круг се котрља по правој, при чему се његов центар креће брзином од v cm/sec. Којом се брзином креће тачка на обиму круга?

922. Тачка P, крећући се сталном брзином по периферији круга полупречника a, обиђе овај круг за време T. Колике су брзине пројекција ове тачке на два међу собом нормална пречника овог круга, од којих један пролази кроз тачку од које је почело кретање?

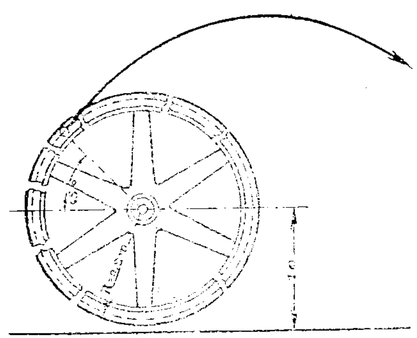
923. На сл. 21 претстављен је шематски клипни механизам парне машине: A — је укрсна глава, B, B — усмерачи, AP криваја, P — ручица криваје, Q — замајац. Замајац се обрће равномерно угаоном брзином ω. Његов је полупречник R; дужина криваје је l. Коликом се брзином креће укрсна глава кад је замајац окренут за угао φ?

924. Замајац који је чинио 80 обрта у минуту, раскинуо се. Полупречник замајца је 90 cm, а центар му лежи изнад пода у висини 1 m. Коју ће брзину имати одломак означен на сл. 22 словом A у моменту пада на земљу?

925. Ходографом (просто) или ходографом брзине кретања неке



Сл. 21

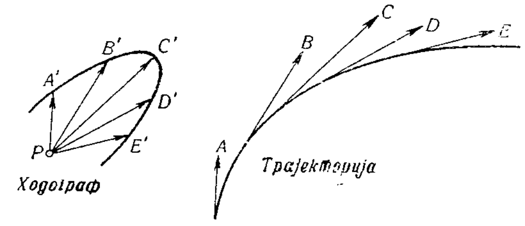


Сл. 22

тачке зове се геометриско место крајева вектора брзине кретања, рачунатих од координатног почетка. На сл. 23 претстављена је трајекторија кретања тачке (са векторима брзине) и одговарајући ходограф.

Очевидно је да ходограф праволиниског равномерног кретања дегенерише у тачку; ходограф равномернога кретања по кругу полупречника R угаоном брзином ω је круг полупречника ωR.

Уверити се у то да ходограф праволиниског неравномерног кретања преставља праву линију.



Сл. 23

926. Тачка се креће по кругу полупречника R угаоном брзином пропорционалном времену: $\omega = kt$. Написати у поларним координатама једначину ходографа брзине. Конструисати ходограф (за $k=2$, $k=0,1$). Види задатак 925.

927. Капитал од 1000 динара дат је под сложени интерес од 6% годишње, при чему се приначунавање процената врши сваког месеца. Колико ће износити капитал после 3 године и 5 месеци?

928. Решити претходни задатак под претпоставком да се интерес приначунава непрекидно.

929. За два претходна задатка конструисати дијаграме зависности капитала A од времена t. Упоредити дијаграме за случај прекидног и непрекидног приначунавања интереса.

930. Дата је функција $y = Ae^{-kx}$. Изразити dx у функцији y и dy.

931. Разлагање неке хемиске материје врши се према једначини $m = m_0 e^{-kt}$, где је m количина материје у тренутку t, m_0 почетна количина материје, а k позитивна константа. Наћи брзину v процеса у функцији времена t.

§ 4. Изводи вишега реда. Тајлорова формула за полиноме

Виши изводи

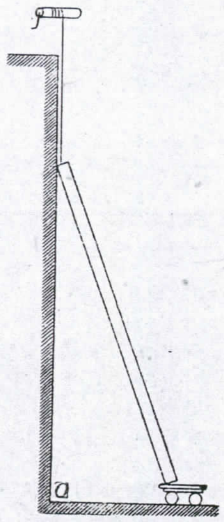
932. Тачка се креће праволиниски, при чему је $s = \frac{4}{3}t^3 - t + 5$. Наћи убрзање a на крају друге секунде (s је изражено у метрима, t у секундима).

933. Тачка се креће праволиниски при чему је $s = \frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2} + s_0$. Наћи убрзање a на крају прве секунде (s је изражена у cm, t у секундима).

934. Тачка се креће праволиниски при чему је $s = \sqrt{t}$. Уверити се да је кретање успорено и да је убрзање a пропорционално трећем степену брзине v.

935. Тешка греда дужине 13 m спушта се на земљу тако да је њен доњи крај причвршћен за вагонет (сл. 24), а горњи се држи ужетом које је намотано на вратило. Уже се одмотава брзином 2 m/min. Којом се брзином откотрљава вагонет у тренутку кад се исти налази на растојању 5 m од тачке O?

936. Шлеп чија је палуба за 4 m нижа од нивоа дока, привлачи се доку помоћу ужета које се намотава на вратило брзином од 2 m/sec. Коликом се брзином креће шлеп у тренутку кад је удаљен од дока 8 m (по хоризонтали)?



Сл. 24

937. Сила која дејствује на материјалну тачку је обрнуто пропорционално брзини кретања тачке. Показати да такво кретање постаје под дејством сталне силе.

938. Тачка се креће тако да се њена брзина мења пропорционално квадратном корену из пређеног пута. Доказати да је кинетичка енергија тачке линеарна функција времена.

939. $y=x^2-3x+2$; $\quad y''=?$

940. $y=1-x^2-x^4$; $\quad y'''=?$

941. $f(x)=(x+10)^6$; $\quad f'''(2)=?$

942. $f(x)=x^6-4x^3+4$; $\quad f^{IV}(1)=?$

943. $y=(x^2+1)^3$; $\quad d^2y=?$

944. $y=\cos^2 x$; $\quad d^3y=?$

945. $f(x)=e^{2x-1}$; $\quad f''(0)=?$

946. $f(x)=\text{arc tg}\, x$; $\quad f''(1)=?$

947. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; $\quad f^{V}(x)=?$

948. $y=x^3 \ln x$; $\quad y^{IV}=?$

949. $f(x)=\dfrac{a}{x^n}$; $\quad y''(x)=?$

950. $\rho=a \sin a\varphi$; $\quad \dfrac{d^4\rho}{d\varphi^4}=?$ **951.** $y=\dfrac{1-x}{1+x}$; $\quad y^{(n)}=?$

952. $z=(q^2+a^2)\,\text{arc tg}\,\dfrac{q}{a}$; $\quad \dfrac{d^3 z}{d q}=?$

953. $y=(x+3)(2x^2-1)(x^3+x^2-5)$; $\quad y^{VI}=?$

954. $y=\dfrac{(x^3+2)^5}{15!}$; $\quad y^{XII}=?$

У задацима 955 до 964 наћи други извод датих функција.

955. $y=x\,e^{x^2}$. **956.** $y=\dfrac{1}{1+x^3}$.

957. $y=(1+x^2)\cdot \text{arc tg}\, x$. **958.** $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

959. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **960.** $y=\dfrac{1}{a+\sqrt{x}}$.

961. $y=e^{\sqrt{x}}$. **962.** $y=\sqrt{1-x^2}\cdot \text{arc sin}\, x$.

963. $y=\text{arc sin}(a \sin x)$. **964.** $y=x^x$.

У задацима 965 до 974 наћи опште изразе за изводе n-тог реда датих функција:

965. $y=e^{ax}$. **966.** $y=e^{-x}$. **967.** $y=\sin ax+\cos bx$.

968. $y=\sin^2 x$. **969.** $y=xe^x$. **970.** $y=x\ln x$.

971. $y=\log_a x$. **972.** $y=\dfrac{x}{x^2-1}$. **973.** $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

974. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

975. Доказати да је

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}+nu^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\cdot\cdot\cdot+nu'v^{(n-1)}+v^{(n)},$$

где су $\binom{n}{i}$ — биномни коефицијенти. (Лајбницова формула).

976. Уверити се у то да функција $y=e^x \sin x$ задовољава диференцијалну једначину $y''-2y'+2y=0$, а функција $y=e^{-x}\sin x$ једначину $y''+2y'+2y=0$.

977. Уверити се у то да функција $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ задовољава диференцијалну једначину $2y'^2=(y-1)y''$.

978. Уверити се у то да функција $y=\sqrt{2x-x^2}$ задовољава диференцијалну једначину $y^3y''+1=0$.

979. Уверити се у то да функција $y=e^{4x}+2e^{-x}$ задовољава диференцијалну једначину $y'''-13y'-12y=0$.

980. Уверити се у то да функције $e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ задовољава диференцијалну једначину $xy''+\dfrac{1}{2}y'-\dfrac{1}{4}y=0$.

981. Уверити се у то да функција $y=\cos e^x+\sin e^x$ задовољава диференцијалну једначину $y''-y'+y\cdot e^{2x}=0$.

982. Уверити се у то да функција

$$y=A\sin(wt+w_0)+B\cos(wt+w_0)$$

(A, B, w и w_0 су константе), задовољава диференцијалну једначину $\dfrac{d^2y}{dt^2}+w^2y=0$.

983. Уверити се у то да функција

$$a_1e^{nx}+a_2e^{-nx}+a_3\cos nx+a_4\sin nx$$

(где су a_1, a_2, a_3, a_4, и n – константе) задовољава диференцијалну једначину $\dfrac{d^4y}{dx^4}=n^4y$.

984. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; $\quad \dfrac{d\,y}{dx^2}=?$ **985.** $x^2+y^2=r^2$; $\quad \dfrac{d^3y}{dx^3}=?$

986. $y=\text{tg}(x+y)$; $\quad \dfrac{d^3y}{dx^3}=?$ **987.** $s=1+te^s$; $\quad \dfrac{d^2s}{dt^2}=?$

988. $y^3+x^3-3axy=0$; $\quad y''=?$

989. $y=\sin(x+y)$; $\quad y''=?$ **990.** $e^{x+y}=xy$; $\quad y''=?$

991. Извести формулу за други извод функције, инверзне датој функцији $y=f(x)$.

992. $e^y+xy=e$; наћи $y''(x)$ за $x=2$.

993. $y^2=2px$; одредити израз $k=\dfrac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

994. Уверити се да из $y^2+x^2=R^2$ следи $k=\pm\dfrac{1}{R}\left(\text{где је } k=\dfrac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}\right)$.

995. $k=\dfrac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$; наћи $\dfrac{dk}{dx}$.

У задацима 996—1002 наћи више изводе функција датих у параметарском облику.

996. $x=at^2, \quad y=bt^3; \quad \dfrac{d^2x}{dy^2}=?$

997. $x=a\cos t, \quad y=a\sin t; \quad \dfrac{d^3y}{dx^3}=?$

998. $x=a\cos t, \quad y=b\sin t; \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

999. $x=a(\varphi-\sin\varphi), \quad y=a(1-\cos\varphi); \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

1000. $x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t; \quad \dfrac{d^3y}{dx^3}=?$

1001. $x=a\cos^2 t, \quad y=a\sin^2 t; \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$ (објаснити резултат).

1002. $x=at\cos t, \quad y=at\sin t; \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

1003. Уверити се у то да функција $y=f(x)$ задата параметарски једначинама $y=e^t\cdot\cos t$; $x=e^t\sin t$ задовољава диференцијалну једначину $y''(x+y)^2=2(xy'-y)$.

1004. Уверити се у то да функција $y=f(x)$ задата параметарски једначинама $y=3t-t^3$; $x=3t^2$, задовољава диференцијалну једначину $36y''(y-\sqrt{3x})=x+3$.

Тајлорова формула за полиноме

1005. Развити полином $x^4-5x^3+x^2-3x+4$ по степенима од $x-4$.

1006. Развити полином x^3+3x^2-2x+4 по степенима од $x+1$.

1007. Развити полином $x^{10}-3x^5+1$ по степенима од $x-1$.

1008. Може ли се полином:

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

претставити (идентично) у облику

$$b_0+b_1(x-x_0)+\cdots b_m(x-x_0)^m$$

ако је $m\neq n$.

1009. Изразити коефицијенте a_k полинома $a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$ помоћу његових узастопних извода.

1010. $f(0)=1, \quad f(1)=-2, \quad f(2)=-3, \quad f(3)=22, \quad f(4)=121.$

Наћи полином четвртог степена $f(x)$ користећи се методом неодређених коефицијената.

1011. $f(x)$ је полином четвртог степена. Знајући да је $f(2)=-1$, $f'(2)=0$, $f''(2)=2$, $f'''(2)=-12$, $f^{IV}(2)=24$, израчунати $f'(0)$, $f''(1)$.

1012. $f(x)=x^{10}-3x^6+x^2+2$. Наћи прва четири члана овог полинома развијеног по степенима бинома $\Delta x=x-1$. Израчунати приближно $f(1{,}03)$.

1013. $f(x)=x^8-2x^7+5x^6-x+3$. Наћи прва три члана овог полинома развијеног по степенима од $x-2$, и израчунати приближно $f(2{,}02)$ и $f(1{,}97)$.

1014. $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20}$. Наћи прва три члана функције $f(x)$ развијене по степенима од $x-1$, и израчунати приближно $f(1{,}005)$.

1015. $f(x)=x^5-5x^3+x$. Наћи прва три члана функције $f(x)$ развијене по степенима од $x-2$. Израчунати приближно $f(2,1)$. Израчунати тачно $f(2,1)$ и наћи апсолутну и релативну грешку.

1016. Оценити грешку која настаје кад се полином n-тог степена замени Тајлоровим полиномом k-тог степена $(k<n)$ за $|x-x_0|<1$ и за $|x-x_0|>1$.

1017. Полином $P(x)$ n-тог степена дељив је без остатка са $(x-a)^k$ $(k\leqslant n)$. Показати да у њему одговарајућем Тајлоровом полиному, уређеном по степенима од $x-a$, недостаје првих k чланова.

ГЛАВА IV

ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА И КРИВИХ ЛИНИЈА

§ 1. Примена првог извода

Изучавање функције помоћу њених елемената

1018. Дата је функција $y=\dfrac{100}{25x^2-120x+147}$. Нацртати дијаграм ове функције дајући независно променљивој вредности 0; 1; 2; 3; 4. Спајањем добијених тачака непрекидном кривом наћи графички вредност функције за $x=\dfrac{12}{5}$. Добија се $\cong 12$. Израчунати затим тачну вредност функције y за $x=\dfrac{12}{5}$. Уверити се у непрецизност графика конструисаног тачку по тачку.

1019. Конструисати помоћу елемената график функције задате таблицом:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	3	2	1	1	4
y'	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{3}{2}$	1	1	4

1020. Конструисати график функције по следећим њеним елементима:

x	0	1	-1	2	-2	3	4	5	6
y	3	-1	9	-3	17	-3	-1	3	9
y'	-5	-3	-7	-1	-9	1	3	5	7

1021. Конструисати по елементима график функције

$$y=\frac{1}{2}x^3-x^2+2x-3.$$

1022. Конструисати по елементима график функције

$$y=3x^4-4x^3-12x+1.$$

1023. Конструисати по елементима график функције

$$y=\ln(x^2+x+1).$$

1024. Конструисати по елементима график функције

$$y=\ln\sin x.$$

1025. Испитати понашање следећих функција у тачки $x=0$.

1) $y=x^2$; 2) $y=1-x^4$; 3) $y=\sqrt{x}$;
4) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 5) $y=1-\sqrt[5]{x^4}$; 6) $y=|\operatorname{tg} x|$;
7) $y=\arccos|x|$; 8) $y=1+|x^3|-x^3$; 9) $y=x^3$;
10) $y=e^{-|x|}$; 11) $y=e^{x-2|x|}$; 12) $y=+\sqrt{x^3+x^2}$.

Примена Лагранжове теореме

1026. Нека је непрекидни лук AB криве линије, који има тангенту у свакој тачки, дат параметарски: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$. Изразити аналитички чињеницу да постоји тачка M, у којој је тангента паралелна тетиви AB.

1027. Доказати теорему: разлика радиус-вектора крајева непрекидног лука AB, који има у свакој тачки тангенту, једнака је производу угла између радиус-векторâ са поларном субнормалом у некој тачки C, која лежи на луку AB између A и B.

1028. Доказати теорему: ако једначина

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+a_{n-1}x=0$$

има позитиван корен $x=x_0$, онда и једначина

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdot\cdot\cdot+a_{n-1}=0$$

има такође позитиван корен и притом мањи од x_0.

1029. Функција $y=|x|$ добија исте вредности на крајевима интервала $(-a, a)$. Уверити се да извод ове функције нигде у том интервалу није 0, и објаснити ово отступање од Ролове теореме.

1030. Наћи тачку у којој је тангента лука кубне параболе $y=x^3$, који лежи између тачака са апсцисама $x=a$ и $x=b$ паралелна тетиви која спаја те тачке. Испитати одговор у зависности од знакова вредности a и b.

1031. Доказати применом Лагранжове формуле важење за $a>b$ следећих неједнакости: $nb^{n-1}(a-b)>a^n-b^n>na^{n-1}(a-b)$, ако је $n>1$, и обрнутих неједнакости ако је $n<1$.

1032. Нека је $f(x)=x^n$. Уверити се да ξ, одређено из Лагранжове формуле за интервал $(0, a)$ износи $\dfrac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$.

***1033.** Посматрајмо функцију $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ за $x\neq 0$, $f(0)=0$. Ова је функција диференцијабилна за ма које x. Применимо ли на њу

Лагранжову формулу у интервалу $[0, x]$ имаћемо:

$$f(x)-f(0)=xf'(\xi),\quad 0<\xi<x,\quad \text{тј.}\quad x^2\sin\frac{1}{x}=x\left(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}\right).$$

Одавде је $\cos\frac{1}{\xi}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-x\sin\frac{1}{x}$. Пустимо сада x да тежи ка нули, тада ће и ξ тежити нули, и добијамо $\lim\limits_{\xi\to 0}\cos\frac{1}{\xi}=0$. Објаснити овај парадоксални резултат!

У задацима 1034—1038 применом формула

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cong f'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Израчунати приближно вредности следећих израза:

1034. а) $\operatorname{arc\,tg} 1,1$, б) $\arcsin 0{,}54$.

1035. $\log 11$ (упоредити са табличном вредношћу)[1].

1036. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ за $x=0{,}2$.

1037. $\log 7$, знајући $\log 2=0{,}30103$ и $\log 3=0{,}47712$. Упоредити резултат са табличним.

1038. $\log 61$ (упоредити са таблицама).

1039 Уверити се да примењујући формулу

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

на израчунавање логаритма од $N+0{,}01\,N$, тј. стављајући

$$\log(N+0{,}01\,N)=\log N+\frac{0{,}43429}{N+\dfrac{0{,}01\,N}{2}}\,0{,}01\,N=\log N+\frac{0{,}43429}{100{,}5},$$

чинимо грешку мању од 0,00001, тј. добијамо пет сигурних децимала, само ако нам је $\log N$ дат са пет сигурних децимала.

1040 Доказати да при употреби логаритамских таблица коришћење „пропорционалних делова“ (partes proportionales) даје мантису логаритма који се не налази у таблици, са истим бројем сигурних децимала са којим су дати и логаритми у таблици.

Рашћење и опадање функција. Највећа и најмања вредност

1041. Одредити интервале монотоности функције: $y=x^2-5x+3$.

1042. Показати да функција $y=x^3+x$ стално расте.

1043. Показати да функција $y=1-x^5$ стално опада.

1044. Показати да функција $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ расте у ма ком интервалу који не садржи тачку $x=0$.

[1]) Решење задатка бр. 1035 и неких следећих ослања се на знање броја $M=\log e=0{,}43429$.

1045. Одредити интервале монотоности функције

$$y=x^3-6x^2+9x-4$$

и нацртати дијаграм ове функције помоћу њених елемената у интервалу $(-1, 4)$.

1046. Одредити интервале монотоности функције

$$y=3x^4-8x^3-18x^2+7$$

и конструисати тачку по тачку њен график у интервалу $(-4, 2)$.

1047. Исто то за функцију

$$y=3x^5-25x^3+60x-1$$

и интервал $(-3, +3)$.

У задацима 1048—1058 наћи интервале монотоности датих функција.

1048. $y=(x-2)^5(2x+1)^4$. **1049.** $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$.

1050. $y=a+b\sqrt[3]{(x-c)^2}$. **1051.** $y=a+b\sqrt[3]{x-c}$.

1052. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. **1053.** $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

1054. $y=\dfrac{x}{\ln x}$. **1055.** $y=2x^2-\ln x$.

1056. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1057. $y=+x\sqrt{ax-x^2}$; $a>0$. **1058.** $y=x+\operatorname{tg} x$.

У задацима 1059—1069 наћи екстремуме датих функција.

1059. 1) $y=3x^2-9x+5$; 2) $y=ax^2+2bx+c$; 3) $y=2x^3-3x^2$; 4) $2x^3-6x^2-18x+7$.

1060. $y=\dfrac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$. **1061.** $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.

1062. $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$. **1063.** $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

1064. $y=x-\ln(x^2+1)$. **1065.** $y=x-\ln(1+x)$.

1066. $y=\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$. **1067.** $y=ae^{px}+be^{-px}$.

1068. $y=\cos x+\sin x$. **1069.** $y=\dfrac{\sin^3 x}{1-\cos x}$.

У задацима 1070—1079 наћи највеће и најмање вредности функција у датим интервалима:

1070. а) $y=x^4-2x^2+5$ у интервалу $[-2, 2]$;
б) $y=x+2\sqrt{x}$ у интервалу $[0, 4]$;
в) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ у интервалу $[-1, 2]$;
г) $y=x^3-3x^2+6x-2$ у интервалу $[-1, 1]$.

1071. $y=+\sqrt{100-x^2}$ $(-6\leqslant x\leqslant 8)$.

1072. $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ **1073.** $y=\frac{x-1}{x+1}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$.

1074. $y=\ln x$ $(0<x\leqslant 1)$.

1075. $y=2\sin 2x-x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1076. $y=2\,\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}^2 x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1077. $y=x^x$ $(1\leqslant x<\infty)$.

1078. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$.

1079. $y=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-x}{1+x}$ $(0\leqslant x<1)$.

Доказивање неједнакости

У задацима 1080—1091 доказати важење неједнакости:

1080. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}>1$ $(x\neq 0)$. **1081** $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$; $x>1$.

1082. $2x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\geqslant\ln(1+x^2)$.

1083. $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

1084. $\ln(1+x)>\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{1+x}$ $(x>0)$.

1085. $e^x>1+x$ $(x\neq 0)$. **1086** $\cos x+\frac{x^2}{2}>1$ $(x\neq 0)$.

1087. $\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ $(x>0)$.

1088. $\sin x+\mathrm{tg}\,x>2x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

1089. а) $x>\ln(1+x)$ $(x>0)$; б) $\ln x>2\frac{x-1}{x+1}$ $x>1$.

1090. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\frac{x^2}{2}$ $(x\neq 0)$.

1091. $e^x<\frac{1+x+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{1-\frac{x^n}{n!}}$ $(0<x<\sqrt[n]{n!})$

Разни задаци у вези са тражењем највећих и најмањих вредности функција

1092. Раставити број 8 на два сабирка тако да збир њихових кубова буде најмањи.

1093. Који позитиван број сабран са својом реципрочном вредношћу даје најмањи збир?

1094. Број 36 раставити на два чиниоца тако да збир њихових квадрата буде најмањи.

1095. Треба направити сандук са поклопцем, запремине 72 cm³, чије би основне ивице стајале у размери 1 : 2. Колике су стране сандука ако му је површина најмања могућа?

1096. Кишна кап почетне масе m_0 пада под дејством силе теже, испаравајући се равномерно тако да је губитак масе пропорционалан времену (коефицијенат пропорционанности је k). После колико ће секунди од почетка падања кинетичка енергија капи бити највећа и колика ће бити та енергија? (Отпор ваздуха се занемарује).

1097. Запремина правилне тростране призме је v. Колика треба да буде страна основе да би укупна површина призме била најмања могућа?

1098. Наћи однос између полупречника R и висине h цилиндра тако да његова укупна површина буде најмања, ако је његова запремина утврђена.

1099. Отворени лонац има облик цилиндра. За дату запремину v колики мора бити полупречник основе и висина цилиндра да би његова површина била најмања?

1100. Треба направити конични левак дужине генератрисе $l=20$ cm. Колика треба да буде висина левка да би његова запремина била највећа?

1101. Обим равнокраког троугла износи $2p$. Колике морају бити његове стране да би запремина обртног тела, насталог обртањем троугла око своје основице, била највећа?

1102. Обим равнокраког троугла износи $2p$. Колике морају бити његове стране да би запремина конуса који настаје обртањем овог троугла око своје висине, била највећа?

1103. Наћи висину цилиндра највеће запремине који се може уписати у лопту полупречника R.

1104. Наћи висину h конуса највеће запремине који се може уписати у лопту полупречника R.

1105. У прави кружни конус полупречника R и висине H треба уписати цилиндар највеће укупне површине. Наћи полупречнике цилиндра r.

1106. Полуга има ослонац у својој крајњој тачки A. У тачки B $(AB=a)$ обешен је терет P. Тежина јединице дужине полуге износи k. Колика мора бити дужина полуге да би терету P држала равнотежу најмања сила?

1107. Расходи на гориво потребно за ложење парооброда пропорционални су кубу његове брзине. Познато је да за брзину од 10 km час. расходи на гориво износе 30 динара на сат, а остали расходи (који не зависе од брзине) износе 480 дин. на сат. За коју ће брзину пароброда, укупни збир расхода на 1 km пута бити најмањи? Колики ће у том случају бити укупни збир расхода на сат?

1108. Три тачке A, B и C не леже на једној правој; $\sphericalangle ABC=60^0$. У истом тренутку из тачке A полази аутомобил, а из тачке B воз. Ауто се креће према тачки B брзином од 80 km час, а воз се креће према тачки C брзином од 50 km час. У ком ће тренутку t (од почетка кретања) растојање између воза и аутомобила бити најмање ако је AB 200 km?

1109. На кругу је дата тачка A. Повући тетиву BC паралелно тангенти у тачки A тако да би површина троугла ABC била највећа.

1110. Око датог цилиндра описати конус најмање запремине. (Раван основе цилиндра поклапа се са равни основе конуса).

1111. Наћи висину H правог кружног конуса најмање запремине, описаног око лопте полупречника r.

1112. Наћи угао при врху осовинског пресека конуса најмање бочне површине, описаног око дате лопте.

1113. Колики мора бити угао при врху равнокраког троугла дате површине да би полупречник круга уписаног у тај троугао био највећи?

1114. Наћи висину H конуса најмање запремине описаног око полулопте полупречника R тако да му центар основе лежи у центру лопте.

1115. Колика мора бити висина H конуса уписаног у лопту полупречника r, да би његова бочна површина била највећа?

1116. У дати отсечак круга уписати правоугаоник највеће површине.

1117. Доказати да је за конични шатор дате запремине потребна најмања количина материје кад му је висина $\sqrt{2}$ пута већа од полупречника основе.

1118. Кроз дату тачку $P(a, b)$ повући праву која не пролази кроз координатни почетак тако да би збир отсечака, које та права отсеца на координатним осама, био најмањи.

1119. Наћи стране правоугаоника највеће површине, уписаног у елипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

1120. Наћи површину најмање од свих елипса које се могу описати око датог правоугаоника (површина елипсе са полуосама a и b износи πab).

1121. На оси параболе $y^2=2px$ дата је тачка на растојању a од темена. Наћи апсцису оне тачке на кривој, која је најближа датој тачки.

1122. За коју тачку P параболе $y^2=2px$ отсечак нормале у P, који лежи унутар криве, има најмању дужину?

1123. Плехану пантљику ширине a треба савити у виду отвореног цилиндричног жљеба (пресек жљеба има облик кружног отсечка). Наћи вредност централног угла φ који одговара луку тог сегмента, за који ће запремина жљеба бити највећа.

1124. Доказати Штајнерову теорему: ако је за два правоугла троугла дата по једна катета и познат збир две друге катете, онда ће збир хипотенуза бити најмањи ако су ти троугли слични.

1125. Из круга полупречника R изрезан је исечак са централним углом α. Из исечка је савијена конична површина. За који ће угао α запремина добијеног конуса бити највећа?

1126. Дебло дужине 20 m има облик зарубљеног конуса, чији су пречници 2 и 1 m. Из дебла треба изрезати греду са квадратним попречним пресеком чија би се оса поклапала са осом дебла, а чија би запремина била највећа. Наћи димензије греде.

1127. Низ опита довео је до n различитих вредности $x_1, x_2 \cdots x_n$ за испитивање величине A. Често се за вредност A узима она вредност x за коју збир квадрата отступања ове вредности од $x_1, x_2 \cdots x_n$ има најмању вредност. Наћи x које задовољава овај услов.

1128. Миноносац стоји укотвљен на 9 km од најближе тачке обале. Са миноносца треба послати курира у логор који се налази на отстојању од 15 km рачунајући по обали од миноносцу најближе тачке обале (логор се налази на обали). Ако курир прелази пешке по 5 km на сат, а весла брзином од 4 km/сат, у којој тачки обале треба да пристане да би стигао у логор за најкраће време?

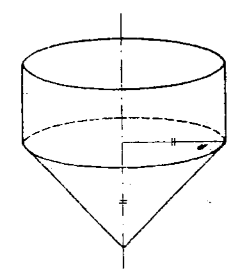
1129. Тачно изнад центра кружне површине полупречника R треба обесити фењер. На којој висини треба ово учинити да би он најјаче осветљавао пут који опасује кружну површину. (Степен осветљености неке површине управо је пропорционалан косинусу упадног угла зракова, а обрнуто пропорционалан квадрату растојања од светлосног извора).

1130. На отсечку дужине l, који спаја два светлосна извора јачине I_1 и I_2 наћи најмање осветљену тачку.

1131. Слика висока 1,4 m обешена је на зид тако да њен нижи крај лежи за 1,8 m изнад посматрачевих очију. На коликом се растојању од зида мора налазити посматрач да би његов положај био најпогоднији за посматрање слике (тј. да би видни угао био највећи)?

1132. На страници књиге штампан текст мора заузимати s cm². Горње и доње поље морају бити по a cm, десно и лево поље по b cm. Ако се узима у обзир само економија хартије какве морају бити најпогодније димензије страница?

1133. Запремина v суда отвореног према горе, а који има облик кружног цилиндра са коничним дном, треба при датој површини s да буде највећа. Колики треба да буде полупречник r ако се захтева да је висина конуса једнака полупречнику (сл. 25)?



Сл. 25

1134. За параболу $y^2=2px$ повући тетиву нормалну на оси тако да троугао, који ту тетиву има за основицу а врх му лежи у датој тачки $(b, 0)$ на оси, има највећу површину.

1135. Показати да је тангента елипсе, чији отсечак међу осама има најмању дужину, подељена додирном тачком на два дела респективно равна полуосама елипсе.

1136. У правоуглом координатном систему xOy дата је тачка (a, b) и крива $y=f(x)$. Показати да растојање између сталне тачке (a, b) и променљиве $(x, f(x))$ може достићи екстремум само у правцу нормале на криву $y=f(x)$.

1137. Сума од A динара подељена је на два дела у односу $1:2$. Први део у току 20 година доноси 5% сложеног интереса годишње (интерес се додаје капиталу непрекидно). Други (већи) део равномерно се расходује (без остатка) у току истих 20 година. Кад ће за тих 20 година укупна сума бити највећа а кад најмања. Колике ће бити те вредности?

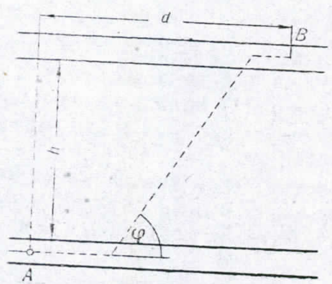
1138. У току времена t_1, у електрично коло равномерно се уводи реостат, чији отпор расте од R_0 до R_1. Притом напон у колу равномерно расте од E_0 до E_1. Кроз колико ће времена после почетка опита снага (ефекат) струје бити најмања и колика ће бити та најмања снага?

§ 2. Примена другог извода

Примена другог извода на изналажење екстремума

1139. Доказати да од свих троуглова са задатом основом и датом површином најмањи обим има равнокраки троугао.

1140. Пешак мора да из тачке A, која лежи на једном тротоару (сл. 26), пређе у тачку B на другом тротоару. Знајући да је брзина кретања по тротоару μ пута ($\mu > 1$) већа него преко улице, наћи под којим углом треба да пресече улицу да би прешао пут за најкраће време. Објаснити у којим ће случајевима најпогоднији пут бити права линија, која спаја тачке A и B.



Сл. 26

1141. За које вредности a функција $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ има екстремум за $x = \frac{\pi}{3}$? Хоће ли то бити максимум или минимум?

1142. Помоћу другог извода уверити се у то да функција $y = x^{\frac{1}{x}}$ има максимум за $x = e$.

1143. Доказати да у елипси растојање од центра до ма које нормале није веће од разлике полуоса (згодно се послужити параметарским обликом једначине елипсе).

1144. Конус полупречника основе r и висине h пресечен је равни паралелном генератриси. Колико мора бити растојање између линије пресека ове равни са основом конуса, и центра основе да би површина пресека била највећа? (Површина симетричног параболичног сегмента једнака је $^2/_3$ производа његове основице и „висине").

Превојне тачке, конвексност, конкавност

У задацима 1145—1156 наћи превојне тачке дијаграма датих функција:

1145. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. **1146.** $y = (x+1)^4 + e^x$.

1147. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$. **1148.** $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.

1149. $y = x^6 - 5x^3 - 5x + 1$. **1150.** $y = (x+2)^6 + 2x + 2$.

1151. $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$. **1152.** $y = a - \sqrt[3]{x - b}$.

1153. $y = e^{\sin x}$. **1154.** $y = \ln(1 + x^2)$.

1155. $y = \frac{a}{x} \ln \frac{x}{a}$. **1156.** $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$.

1157. Има ли график функције $y = e^{\operatorname{arc tg} x}$ превојних тачака?

1158. Уверити се да је график функције $y = x \operatorname{arc tg} x$ свуда конкаван у позитивном смеру y осе?

1159. У ком је смеру y осе конвексна крива $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ у тачкама (1, 11) и (3, 3)?

1160. Изабрати α и β тако да би крива $x^2 y + \alpha x + \beta y = 0$ имала тачку A (2; 2,5) као превојну тачку. Које ће још превојне тачке она имати?

1161. Показати да крива $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ има три превојне тачке које леже на једној правој?

1162. За које ће вредности коефицијената a, b и c график функције $y = e^x + ax^3 + bx + c$ имати превојне тачке?

1163. Клаузијусова једначина (гасног стања) има облик: $p = \frac{RT}{v-a} - \frac{c}{T(v+b)^2}$. Ако је $T = \text{const}$ онда једначина даје изотерму. За коју изотерму (тј. за које T) је тангента у превојној тачки графика функције $p = f(v)$ паралелна са апсцисном осом?

1164. Нека је $P(x)$ полином са позитивним коефицијентима и парним изложитељима степена. Показати да је дијаграм функције $y = P(x) + ax + b$ свуда конкаван и да функција има само један минимум.

1165. Нека су дијаграми функција $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ конкавни. Доказати а) да је крива $y = \varphi(x) + \psi(x)$ конкавна; б) ако су $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ позитивни и имају заједничку тачку минимума, онда је график функције $y = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ конкаван.

1166. Показати да апсцисе превојних тачака криве $y^2 = f(x)$ задовољавају једначину $y'^2(x) = 2f(x) f''(x)$. (Јесу ли могуће превојне тачке које задовољавају једначину $f(x) = 0$?).

1167. Може ли се превојна тачка криве поклапати са тачком чија је ордината једнака екстремној вредности одговарајуће функције?

1168. Уверити се у то да дијаграми функција $y = \pm e^{-x}$ и $y = e^{-x} \sin x$ (амортизоване осцилације) имају заједничке тангенте у превојним тачкама криве $y = e^{-x} \sin x$.

1169. Показати да код сваке двапут диференцијабилне функције између две тачке екстремума лежи бар једна апсциса превојне тачке графика функције.

1170. Показати да међу апсцисама превојних тачака графика функције $y = x^4 - 6x^2 - 8x$ нема тачака акстремума функције (функција има само једну тачку екстремума за $x = 2$).

1171. Према графику функције (сл. 27) нацртати слободном руком графике њеног првог и другог извода.

1172. 1) описати облик графика функције ако се зна да је у интервалу (a, b), $(0 < a < b)$ $y > 0$, $y' < 0$, $y'' > 0$;

2) исто то у случају $y > 0$, $y' > 0$, $y'' > 0$;

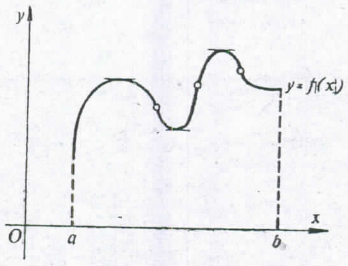
3) исто то у случају $y < 0$, $y' > 0$, $y'' > 0$.

1173. Описати изглед графика функције по графику њеног извода, датом на сл. 28.

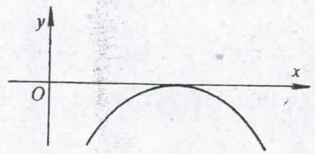
1174. Показати да превојне тачке криве $y = x \sin x$ леже на кривој $x^2y^2 = 4(x^2 - y^2)$.

1175. Показати да превојне тачке криве $y = \frac{\sin x}{x}$ (амортизоване осцилације) леже на кривој $y^2(4 + x^4) = 4$.

1176. Крива је дата параметарски једначинама $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Уверити се у то да ће превојне тачке одговарати вредностима t за које израз $\frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'}$ мења знак (цртица означава диференцирање по t).



Сл. 27



Сл. 28

1177. Наћи превојне тачке криве $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$.

1178. Наћи превојне тачке криве $x = \sin t$, $y = \cos 2t$.

1179. Наћи превојне тачке криве $x = e^t$, $y = \sin t$.

1180. Крива је дата једначином у поларним координатама $\rho = F(\varphi)$. Показати да ће превојне тачке одговарати оним вредностима угла φ за које израз: $\frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi}$ мења знак.

1181. Наћи превојне тачке криве $\rho^2\varphi = a^2$, зване „жезло" (lituus).

1182. Наћи превојне тачке пужа $\rho = a\cos\varphi + b$, $a > 0$, $b > 0$. Под којим условима пуж има превојне тачке?

1183. Показати да се превојне тачке криве $\rho = \frac{1}{f(\varphi)}$ добијају из једначине $f(\varphi) + f''(\varphi) = 0$, само ако је $f(\varphi) \neq 0$ и $f(\varphi)\sin\varphi + f'(\varphi)\cos\varphi \neq 0$.

§ 3. Допунска питања. Општа шема испитивања функција

Кошијева формула и Лопиталово правило

1184. Нека је $f(x) = x^3$, $\varphi(x) = x^2 + 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Наћи вредност ξ у Кошијевој формули.

1185. Две се тачке крећу праволиниски у току извесног интервала времена $(t_1\, t_2)$, при чему ни једна од њих не мења правац кретања. Показати да је за време кретања био најмање један такав моменат кад је однос правих брзина тачака био једнак односу средњих брзина тачака за интервал времена (t_1, t_2).

У задацима 1186—1225 наћи граничне вредности функција:

1186. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

1187. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x}$.

1188. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^3}$.

1189. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$.

1190. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$.

1191. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

1192. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$.

1193. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$.

1194. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.

1195. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$.

1196. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

1197. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$.

1198. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$.

1199. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin\sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x - x^2}}$.

1200. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

1201. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$.

1202. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

1203. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

1204. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}$.

1205. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6(2x)}$.

1206. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^4 - 4 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4}{6\sin x - 6x + x^3}$.

1207. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^n \cdot e^{-x})$.

1208. $\lim\limits_{x\to \infty} (\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x) \ln x$.

1209. $\lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \sin\frac{a}{x}$.

1210. $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x$ $(n > 0)$.

1211. $\lim\limits_{\varphi\to a} (a^2 - \varphi^2) \operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}$.

1212. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$.

1213. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \sec x)$.

1214. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2} \ln(1 - x)}$.

1215. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

1216. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

1217. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x\right]$.

1218. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

1219. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(1-e^x)}}$.

1220. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

1221. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1222. $\lim\limits_{x\to 0}\,(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$. **1223.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$. **1224.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

1225. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$.

1226. Уверити се да $\lim \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ постоји, али се не може израчунати по Лопиталовом правилу.

1227. Која функција при довољно великим вредностима независно променљиве x брже расте: $a^x \cdot x^a$ или x^x?

1228. Упоредити брзине рашћења функција $y_0=f(x)$, $y_1=\ln f(x)$, $y_2=\ln\ln f(x)$ итд. под условом да $f(x)\to\infty$ кад $x\to\infty$.

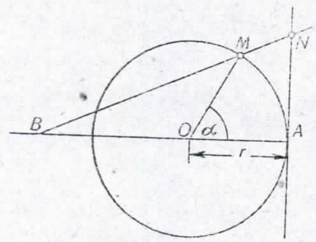
1229. Нека $x\to 0$. Колики је ред бесконачно мале величине $e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ у односу на x?

1230. Нека $x\to 0$. Колики је ред бесконачно мале величине $\ln(1+x)-e\ln\ln(e+x)$ у односу на x?

1231. На кругу полупречника r повучена је тангента у тачки A (сл. 29), и на њој је одмерен отсечак AN чија је дужина равна дужини лука AM. Права MN сече продужетак пречника AO у тачки B. Није тешко уверити се да је

$$OB=\frac{r(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha-\alpha},$$

где је α централни угао мерен у радијанима који одговара луку AM. Показати да је $\lim\limits_{\alpha\to 0} OB=2r$ и искористити овај резултат за приближно израчунавање дужине невеликог кружног лука.



Сл. 29

Асимптоте

1232. Уверити се да крива $xy^2+x^2y=a^3$ има асимптоту $x+y=0$.

1233. Применити општи метод за налажење асимптоте хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1234. Уверити се да се криве $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$ и $y=\frac{x^2}{x-1}$ асимптотски приближавају једна другој кад $x\to\pm\infty$.

1235. Уверити се да се функције $f(x)=\sqrt[3]{x^6+2x^4+7x^2+1}$ и $\varphi(x)=x^3+x$ асимптотски приближавају једна другој кад $x\to\infty$. Искористити ову околност за приближно израчунавање $f(115)$ и $f(120)$. Колику грешку чинимо ако ставимо $f(100)=\varphi(100)$?

У задацима 1236—1249 наћи асимптоте датих кривих.

1236. $y=\frac{x\cdot f(x)+a}{f(x)}$ где је $f(x)$ полином, $a\neq 0$.

1237. $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$. **1238.** $y^3=a^3-x^3$.

1239. $x^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$. **1240.** $y^3=6x^2+x^3$.

1241. $2y(x+1)^2=x^3$. **1242.** $xy^2+x^2y=a^3$.

1243. $y(x^2-3bx+2b^2)=x^3-3ax^2+a^3$.

1244. $(y+x+1)^2=x^2+1$. **1245.** $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

1246. $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$. **1247.** $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

1248. $y=x\operatorname{arc\,sec} x$. **1249.** $y=2x+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$.

1250. Под којим условима, колико и каквих асимптота има крива: $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$?

1251. Нека је крива задата параметарски једначинама: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Уверити се да асимптота непаралелних ни са једном од оса, може имати само за оне вредности $t=t_0$ за које је једновремено $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty$ и $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=\infty$. Притом ако је једначина асимптоте $y=ax+b$, онда је

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)},\quad b=\lim_{t\to t_0}[\psi(t)-a\varphi(t)].$$

1252. Крива је задата параметарски. Како наћи њене асимптоте паралелне координатним осама?

1253. Наћи асимптоте криве: $x=\frac{t-8}{t^2-4}$; $y=\frac{3}{t(t^2-4)}$.

1254. Наћи асимптоте криве: $x=\frac{2e^t}{t-1}$; $y=\frac{te^t}{t-1}$.

1255. Наћи асимптоте криве: $x=\frac{2t}{1-t^2}$; $y=\frac{t^2}{1-t^2}$.

1256. Наћи асимптоте декартова листа:

$$x=\frac{3at}{1+t^3};\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

1257. Нека је крива дата у поларним координатама једначином $\rho=f(\varphi)$. Кад се узме поларна оса за апсцисну осу а пол за координатни почетак наћи једначину асимптоте $y=kx+b$ у овом декартовом координатном систему. Доказати да је 1) $k=\operatorname{tg}\theta$, где је θ угао који задовољава услов $\lim\limits_{\varphi\to\theta} f(\varphi)=\infty$; 2) $b=\lim\limits_{\varphi\to\theta} f(\varphi)(\sin\varphi-k\cos\varphi)$.

1258. Наћи асимптоте хиперболичне спирале $\rho=\frac{n}{\varphi}$.

1259 Наћи асимптоте криве $\rho^2\varphi=a^2$ (жезло).

1260. Наћи асимптоте криве $\rho=a\sec 2\varphi$.

Испитивање функција и кривих линија

У задацима 1261—1327 извести потпуно испитивање датих функција и нацртати њихове графике:

1261. $y=(x^2-1)^3$. **1262.** $y=\frac{1}{10}(10x^6-36x^5+45x^4-20x^3+1)$.

1263. $y=32x^2(x^2-1)^3$. **1264.** $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1265. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$. **1266.** $y=\frac{1}{1-x^2}$.

1267. $y=\frac{x}{1+x^2}$. **1268.** $y=\frac{1}{x-x^2}$. **1269.** $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

1270. $y=\frac{1}{x}+4x^2$ (једначина Њутновог трозупца).

1271. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$. **1272.** $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

1273. $y=\frac{x^3}{3-x^2}$. **1274.** $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

1275. $y(x-1)=x^3$. **1276.** $y(x^3-1)=x^4$.

1277. $y=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$. **1278.** $xy=(x^2-1)(x-2)$.

1279. $(y-x)x^4+8=0$. **1280.** $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.

1281. $(y-x)^2=x^5$. **1282.** $(y-x^2)^2=x^5$. **1283.** $y^2=x^3+1$.

1284. $y^2=x^3-x$. **1285.** $y^2=x(x-1)^3$. **1286.** $y^2=x^2(x-1)$.

1287. $y^2=\frac{x^3-2}{3x}$ (једначина тзв. кубне параболе).

1288. $yx^2+xy^2=2$. **1289.** $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$ (једначина строфоиде). $a>0$.

1290. $9y^2=4x^3-x^4$. **1291.** $x^2y^2=4(x-1)$. **1292** $y^2=x^2-x^4$.

1293. $y^3=6x^2-x^3$. **1294.** $y^2(2a-x)=x^3$; $(a>0)$ (једначина цисоиде).

1295. $x^2y^2=(x-1)(x-2)$.

1296. $x^2y^2=(a+x)^3(a-x)$; $(a>0)$ (једначина конхоиде).

1297. $y^2=x^2(x+1)^2(1-x)$. **1298.** $16y^2=(x^2-4)^2(1-x^2)$.

1299. $y^2=(1-x^2)^3$. **1300.** $y^2x^4=(x^2-1)^3$.

1301. $x^3(y-x)^3=x^3+1$. **1302.** $(3y+x)^3=27x$.

1303. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}+1$. **1304.** $y=\frac{1}{e^x-1}$.

1305. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$. **1306.** $y=x^2e^{-x^2}$. **1307.** $y=x^3e^{-x}$.

1308. $y^2=2exe^{-2x}$. **1309.** $y=e^{\frac{1}{x}}-x$. **1310.** $y=\frac{e^x}{x}$.

1311. $y=e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$. **1312.** $y=x-\ln(x+1)$.

1313. $y=\ln(x^2+1)$. **1314.** $y=x+\frac{\ln x}{x}$. **1315.** $y=x\sin x$.

1316. $y=x+\sin x$. **1317.** $y=\ln\cos x$. **1318.** $y=\cos x-\ln\cos x$.

1319. $y=x-2\operatorname{arc\,tg} x$. **1320.** $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; $f(0)=1$.

1321. $y=x+\frac{0{,}001}{\pi}\sin(1000\pi x)$. **1322.** $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

1323. $y=e^{\sin x}-\sin x$. **1324.** $y=e^{\operatorname{tg} x}$.

1325. $y=x^2-4|x|+3$. **1326.** $y=1-xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$ за $x\neq 0$, $y=1$ за $x=0$.

*1327. $y=\ln(ax^2+bx+c)$ за различите вредности a, b и c.

1328. Показати да једначина $f(x)=a\neq 0$, где је $f(x)$ полином са позитивним коефицијентима, чији су изложитељи степена свих чланова непарни, има један и само један реалан корен (који може бити и вишеструки). Продискутовати случај кад је $a=0$. (Имати у виду да ако је $f(a)=f'(a)=\cdots f^{(k-1)}(a)=0$, $f^{(k)}(a)\neq 0$, онда се a назива k-струком нулом или k-струким кореном функције. Једноструки корен зове се иначе и прости).

1329. Нека је $F(x)$ функција која има реалне просте корене $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Показати да график функције $y=[F(x)]^2$ додирује апсцисну осу у тачкама $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2, \ldots, x_n=\alpha_n$.

1330. Доказати теорему: да би једначина $x^3+px+q=0$ имала три различита реална корена, потребно је и довољно да коефицијенти p и q задовољавају неједначину $4p^3+27q^2<0$.

1331. Показати да једначина $x^2\operatorname{arc\,tg} x=a$, где је $a\neq 0$, има један реалан корен. (Ако је $a=0$, онда је $x=0$ троструки корен једначине).

1332. Показати да једначина $x\operatorname{arc\,tg} x=a$ има два различита, два једнака (тј. један двоструки) или ни један реалан корен у зависности од тога да ли је $a>0$, $a=0$, или $a<0$.

1333. Показати да једначина $xe^x=2$ има само један корен који припада интервалу $(0; 1)$.

1334. Показати да једначина $x+\cos x=a$ нема позитивних корена за $a\leqslant 1$. Шта ће бити у случају $a>1$?

1335. Показати да тзв. Кеплерова једначина $x=\varepsilon\sin x+a$ где је $0<\varepsilon<1$ има само један реалан корен.

1336. Уверити се да једначина $e^{-(ax+b)^2}=x$ има само један реалан корен, и то позитиван. Међутим једначина $e^{-(ax+b)^2}=x^2$ има два различита реална корена: један позитиван и други негативан.

1337. Показати да једначина $x\ln x=a$ нема уопште реалног корена за $a<-\frac{1}{e}$, има два једнака реална корена (тј. један двоструки) за $a=-\frac{1}{e}$, два различита реална корена за $-\frac{1}{e}<a<0$. За $a\geqslant 0$ једначина има један реалан корен.

1338. За које вредности a једначина $e^{\frac{1}{x}}=ax$ има један, два или ни један реалан корен?

1339. Показати да једначина $a^x = ax$ за $a > 1$ има увек два (и само два) реална корена $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, при чему је $x_1 = 1$, а x_2 веће, мање или једнако јединици према томе да ли је a веће, мање или једнако e.

1340. За коју основу a система логаритама постоје бројеви једнаки својим логаритмима? Колико таквих бројева може постојати?

У задацима 1341—1345 испитати криве задате параметарски:

1341. $y = t^3 - 3t + 1;\quad x \quad t^3 + 3t + 1.$

1342. $x \quad t^3 - 3\pi;\quad y = t^3 - 6 \operatorname{arc\,tg} t.$

1343. $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3};\quad x = \dfrac{3t}{1+t^3}.$ **1344.** $x = te^t;\quad y = te^{-t}.$

1345. $x = 2a\cos t - a\cos 2t;\quad y = 2a\sin t - a\sin 2t$ (кардиоида).

У задацима 1346—1353 испитати криве чије су једначине дате у поларним координатама.

1346. $\rho = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\varphi}{\pi}.$ **1347.** $\rho = a\sin 3\varphi$ (тролисна ружа).

1348. $\rho = a\operatorname{tg}\varphi.$ **1349.** $\rho = a(1 + \operatorname{tg}\varphi).$

1350. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида).

1351. $\rho = a(1 + b\cos\varphi$ $(a > 0;\ b > 1)$ (пуж).

1352. $\rho = +\sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$ (жезло).

1353. $\rho = +\sqrt{1-t^2};\quad \varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}.$

У задацима 1354—1358 претходно трансформисати једначине кривих на поларне координате. Испитати и нацртати криве:

1354 $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2.$ **1355.** $(x^2 + y^2)x = a^2y.$

1356. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$ **1357.** $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2.$

1358. $(x^2 + y^2)^7 = y^4(3x^2 - y^2)^4$ (шестолисна ружа).

§ 4. Кривина

1359. Уверити се да за $x = 3$ функција $y = \sqrt[3]{(x-3)^4}$ нема другог извода. Како изгледа график функције у околини тачке $(3, 0)$?

1360. Функција $f(x)$ дефинисана је овако: у интервалу $-\infty < x \leqslant 1$, $f(x) = x^3$; у интервалу $1 < x < \infty$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Колики морају бити a, b, c да би $f(x)$ била непрекидна и двапута диференцијабилна за свако x? Колики морају бити a, b, c да би $f(x)$ за све x била трипут диференцијабилна?

1361. Средња кривина лука AB једнака је нули. Може ли се из овога закључити да AB претставља праволиниски отсечак?

1362. У којим је тачкама кривина криве једнака другом изводу?

1363. Показати да је кривина у тачки P криве $y = f(x)$ једнака $y''\cos\alpha$, где је α угао који заклапа тангента криве у тачки P са позитивним правцем апсцисне осе.

1364. Показати да се кривина неке криве у произвољној тачки може претставити изразом $K = \dfrac{d\sin d}{dx}$, где α има исто значење као и у претходном задатку.

Наћи кривину кривих:

1365. Хиперболе $xy = 4$ у тачки $(2, 2)$.

1366. Елипсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ у теменима.

1367. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ у координатном почетку.

1368. $y^2 = 8x$ у тачки $\left(\dfrac{9}{8}, 3\right).$

1369. $y = \ln x$ у тачки $(1, 0)$.

1370. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ у координатном почетку.

1371. $y = \sin x$ у екстремним тачкама.

У задацима 1372—1377 наћи кривину датих кривих у произвољној тачки (x, y).

1372. $y = x^3.$ **1373.** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

1374. $y = \ln\sec x.$ **1375.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

1376. $\dfrac{x^m}{a^m} + \dfrac{y^m}{b^m} = 1.$ **1377.** $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}.$

У задацима 1378—1384 наћи кривину датих кривих:

1378. $x = 3t^2,\quad y = 3t - t^3$ за $t = 1$.

1379. $x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t$ за $t = t_1$.

1380. $x = a(\cos t + t\sin t),\quad y = a(\sin t - t\cos t)$ за $t = \dfrac{\pi}{2}.$

1381. $x = 2a\cos t - a\cos 2t,\quad y = 2a\sin t - a\sin 2t.$ у произвољној тачки.

1382. $\rho = a\varphi$ у произвољној тачки.

1383. $\rho = a\varphi^k$ у произвољној тачки.

1384. $\rho = a^{\varphi}$ у тачки $\rho = 1$, $\varphi = 0$.

1385. Наћи полупречник кривине елипсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ у оној њеној тачки у којој се отсечак тангенте који лежи међу координатним осама полови додирном тачком.

1386. Показати да је кривина лемнискате $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ пропорционална радиус-вектору.

У задацима 1387—1390 наћи темена (тачке у којима кривина добија екстремне вредности) датих кривих.

1387. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (парабола).

1388. $y = \ln x$.

1389. $y = e^x$. **1390.** $x = a(3\cos t + \cos 3t)$, $y = a(3\sin t + \sin 3t)$.

1391. Наћи највећу вредност полупречника кривине криве

$$\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}.$$

У задацима 1392—1396 наћи координате центра кривине и једначину еволуте датих кривих:

1392. Параболе n-тог реда $y=x^n$. Обратити пажњу на полупречник кривине у темену.

1393. Хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **1394.** Астроиде $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

1395. Кубне параболе $y^3=a^2x$.

1396. Параболе $x=3t$, $y=t^2-6$.

1397. Наћи једначину круга кривине криве $y=e^x$ тачки $(0, 1)$.

1398. Наћи једначину круга кривине који одговара тачки (a, a) цисоиде $(x^2+y^2)x-2ay^2=0$.

1399. Показати да је еволута кардиоиде $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$ такође кардиоида слична датој.

Упутство: Кад се добију параметарске једначине еволуте трансформисати их на нове координате и параметар, стављајући: $x=-x_1$, $y=-y_1$, $t=t_1+\pi$.

1400. Показати да је еволута трактрисе $x=-a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)$, $y=a\sin t$ ланчаница.

1401. Показати да је еволута логаритамске спирале $\rho=a^{\varphi}$ исто таква спирала, само обрнута за неки угао. Може ли се тако изабрати a да би се еволута поклопила са самом кривом?

1402. Показати да се било која еволвента круга може добити обртањем једне од њих за одговарајући угао.

1403. Доказати да је полупречник кривине циклоиде у било којој њеној тачки два пут већи од дужине нормале у истој тачки.

1414. Показати да је растојање неке тачке циклоиде од центра кривине еволуте одговарајуће тачке, једнако двоструком пречнику круга генератора.

1405. Еволута параболе $y^2=4px$ је семикубна парабола

$$py^2=\frac{4}{27}(x-2p)^3.$$

Наћи дужину лука семикубне параболе од шиљка до тачке (x, y).

1406. Наћи дужину целе еволуте елипсе чије су полуосе a и b.

1407. Показати да је еволута астроиде $y=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ астроида двапут већих димензија, заокренута за 45°. Искористити ову околност за израчунавање дужине дате астроиде.

1408. Користећи се резултатом задатка 1399 наћи дужину лука целе кардиоиде $\rho=b(1+\cos\varphi)$.

1409. Доказати теорему: Ако кривина лука неке криве само расте, или само опада, онда се кругови кривине који одговарају разним тачкама овог лука, не пресецају и леже један у другоме. (Искористити зависност између дужине еволуте и прираштаја радиуса кривине).

§ 5. Тејлорова формула. Појам Тајлоровог реда

***1410.** Показати да број ϑ који фигурише у Тајлоровој формули првог реда

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\vartheta h),$$

тежи ка $\frac{1}{3}$ кад $h\to0$, ако је $f'''(x)$ непрекидан за $x=a$, а $f'''(a)\neq0$. Уопштити овај резултат.

1411. Развити e^x по степенима разлике $x-2$.

1412. Развити $+\sqrt{x}$ по степенима разлике $x-4$.

1413. Развити $\cos x$ по степенима разлике $x-\frac{\pi}{4}$.

1414. Развити $\sin(x+a)$ по Маклореновој формули.

У задацима 1415—1418 развити по Маклореновој формули дате функције.

1415. $y=\sin^2 x$. **1416.** $y=\frac{1}{1-x^2}$.

1417. $y=\ln(ax+b)$, $b\neq0$. **1418.** $y=a^x$.

1419. Развити функцију $y=x^2\ln x$ по степенима разлике $x-1$.

У задацима 1420—1423 наћи неколико првих чланова који нису идентички равни нули, Маклореновог полинома датих функција:

1420. $y=\operatorname{tg}x$ (4 члана). **1421.** $y=\sec x$ (4 члана).

1422. $y=e^{\sin x}$ (5 чланова). **1423.** $y=\ln(1+\sin x)$ (3 члана).

1424. Развити $y=e^{x^2}$ по степенима од x (наћи чланове до четвртога реда и R_4).

1425. Развити $y=\ln(1+e^x)$ по степенима од x (наћи чланове до четвртога реда и R_4).

1426. Уверити се да ће за углове $\alpha<28^0$ грешка која се чини кад се место $\sin\alpha$ узме израз $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ бити мања од 0,000001. Користећи се овом околношћу израчунати $\sin 20^0$ са шест тачних децимала.

1427. Функција $(1+x)^{\alpha}$ развија се по степенима од x на следећи начин:

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots$$

Уверити се да је остатак

$$R_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}\,\frac{x^{n+1}(1+\vartheta x)^{\alpha}}{(1+\vartheta x)^{n+1}},\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant1.$$

Доказати да за $0<\alpha<1$ и $0<x<1$, $R_n\to0$. (R_n тежи нули и за $-1<x<1$ и произвољном α; међутим општи доказ је прилично компликован).

1428. Уверити се да за остатак Тајлоровог реда функције $y=\sqrt[3]{1+x}$ развијене по x, важи:

$$|R_n| \leq \frac{(3-1)(3\cdot 2-1)\ldots(3\cdot n-1)(1+|x|)\cdot |x|^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!},$$

$(0<x<1)$. На основу овога израчунати $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ са два тачна децимала. Уверити се да је за ову сврху довољно узети четири члана реда. Израчунати $\sqrt[3]{1,125}$ узимајући три члана реда. Уверити се да су тиме обезбеђена три тачна децимала.

1429. Испитати понашање датих функција у датим тачкама:

1) $y=2x^6-x^5+3$ у тачки $x=0$;
2) $y=x^{11}+3x^8+1$ у тачки $x=0$;
3) $y=2\cos x+x^2$ у тачки $x=0$;
4) $y=\ln(x^6)-2x^3+9x^2-18x$ у тачки $x=1$;
5) $y=24e^x-24x-12x^2-4x^3-x^4-20$ у тачки $x=0$.

1430. Да ли ће дате тачке бити превојне тачке датих кривих:

1) $(0;\ 1)$ за криву $y=x^4+x+1$;
2) $(1;-1)$ за криву $y=x^5-5x^4+10x^3-10x^2-x+4$;
3) $(0;\ 0)$ за криву $y=6\sin x+x^3$;
4) $(1;\ 1)$ за криву $y=6\ln x-2x^3+9x^2-6x$.

ГЛАВА V.

ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Појам одређеног интеграла

1431. Топлотни капацитет тела C је дата функција температуре $C=f(t)$. Изразити количину топлоте Q коју добије тело при загревању од $t=t_1$ до $t=t_2$ а) приближно, помоћу интегралног збира: б) тачно — интегралом.

1432. Брзина радиоактивног распадања је дата функција времена $v=v(t)$. Дати израз за количину m радиоактивне материје, која се распадне од момента t_1 до момента t_2: а) приближно — збиром; б) тачно — интегралом.

1433. Брзина загревања тела је дата функција времена $\psi(t)$. За колико се степени T загреје тело за време од момента t_1 до момента t_2. Изразити решење: а) приближно — збиром, и б) тачно — интегралом.

1434. Јачина I промењљиве струје је дата функција времена: $I=I(t)$. Изразити (приближно — збиром и тачно — интегралом) количину електрицитета Q који прође кроз попречни пресек проводника за време t рачунато од почетка огледа.

1435. Напон E промењљиве струје је дата функција времена $E=\varphi(t)$; јачина струје I је такође дата функција времена: $I=\psi(t)$. Изразити рад A струје за време од $t=t_1$ до $t=t_2$ приближно — збиром и тачно — интегралом.

1436. Правоугаони зид акваријума напуњеног до крајева водом, има основицу a и висину b. Изразити величину притиска P воде на читав зид: а) приближно — помоћу интегралног збира, и б) тачно — помоћу интеграла.

1437. Изразити помоћу интеграла површине ограничене следећим линијама:

1) координатним осама, правом $x=3$ и параболом $y=x^2+1$;

2) апсцисном осом, правима $x=a$, $x=b$ и хиперболом $y=\frac{1}{x}$;

3) апсцисном осом и луком синусоиде $y=\sin x$, који одговара првом полупериоду.

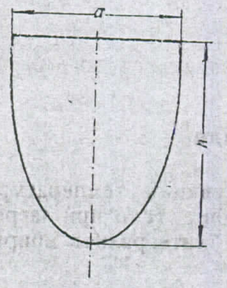
1438. Површина је ограничена апсцисном осом и правима: $y=2x$; $x=4$; $x=6$ (направити цртеж). Наћи површине уписане и описане степенасте фигуре, растављајући интервал [4; 6]: а) на 5 једнаких делова;

б) на 10 једнаких делова; в) на 20 једнаких делов; г) на n једнаких делова.

У сваком од поменутих случајева наћи разлику између описане и уписане степенасте површине.

Показати да ова разлика неограничено опада кад број подеока неограничено расте. Одредити тачну вредност s дате површине. Оценити грешку δ за дато n.

1439. Урадити исто то за површину ограничену апсцисном осом, параболом $y=x^2$ и правима $x=2$, $x=3$. Наћи апсолутну и релативну грешку која се чини кад се површина параболичног трапеза замени површином уписане степенасте фигуре за $n=10$.



Сл. 30

1440. Израчунати површину фигуре ограничене параболом $y=\frac{x^2}{2}$, правима $x=3$, $x=6$ и апсцисном осом.

1441. Израчунати површину отсечка који отсеца права $y=2x+3$ од параболе $y=x^2$.

1442. Израчунати површину параболичног отсечка са основом $a=10$ cm и висином $h=6$ cm. (За основу служи тетива, нормална на оси параболе, слика 30).

1443. Израчунати површину криволиниског трапеза ограниченог кубном параболом $y=x^3$, апсцисном осом и правом $x=a$.

1444. Израчунати површину фигуре ограничене параболом $y=\frac{x^2}{4}$ и правом $y=x$.

1445. Израчунати површину фигуре ограничене параболом $y=x^2$ и $y=\frac{x^3}{3}$.

1446. Основа параболичног (несиметричног) отсечка износи a, растојање од основе до њој паралелне тангенте износи b. Наћи површину отсечка.

1447. Нека материјална тачка креће се брзином $v=2t+4$ cm/сек. Одредити пут који тачка пређе за првих 10 sec.

1448. Брзина v при слободном падању износи gt. Наћи пут пређен за 4 sec падања.

1449. Брзина кретања, пропорционална квадрату времена, на крају 4-те sec износи 1 cm/sec. Колики је пут пређен за првих 10 sec?

1450. У коло струје равномерно се укључује напон. У почетку опита напон је био $=0$. По истеку једне минуте напон износи 120 V. Отпор кола је 100 Ω. Самоиндукција и капацитет се занемарују. Наћи рад струје у току једне минуте (в. задатак 1435).

§ 2. Основне особине интеграла. Приближно интегрирање

Израчунавање интеграла сабирањем

1451. Непосредним сабирањем и затим прелазом на граничну вредност, израчунити интеграл: $\int_0^1 e^x\,dx$. (Интервал интеграције делити на n једнаких делова).

1452. Непосредним сабирањем, и затим прелазом на граничну вредност, израчунати интеграл $\int_0^1 a^x\,dx$.

***1453.** Непосредним сабирањем, и затим прелазом на граничну вредност, израчунати интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

1454. За интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ саставити интегрални збир разбивши интервал интеграције на n једнаких делова. Упоредивши са резултатом претходног задатка израчунати $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

1455. Израчунати $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{an}\right)$ (a је цео број). Израчунати приближно $\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{300}\right)$.

1456. Израчунати $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\right)$. Израчунати приближно $1^5+2^5+3^5+\cdots+100^5$.

1457. Непосредним сабирањем и затим прелазом на граничну вредност израчунати $\int_1^a \ln x\,dx$.

*1458. Наћи: $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\ln 2}{n}$.

1459. Непосредним сабирањем и затим прелазом на граничну вредност израчунати интеграле: 1) $\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$; 2) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$; 3) $\int_0^b x e^x\,dx$.

Интегрирање степена и збира степена

У задацима 1460—1462 израчунати дате интеграле:

1460. 1) $\int_0^{10} x\,dx$; 2) $\int_{-2}^{3} x\,dx$; 3) $\int_{0,12}^{2,21} x\,dx$; 4) $\int_3^4 x^2\,dx$; 5) $\int_{-4,1}^{2,3} x^2\,dx$;

6) $\int_2^3 dx$; 7) $\int_0^{a+1} x\,dx$; 8) $\int_{\frac{a}{2}}^{a} x^2\,dx$; 9) $\int_{a-2}^{a+2} dx$; 10) $\int_{a^2}^{a^2+b^2} x\,dx$.

1461. 1) $\int\limits_2^3 6\,x\,dx$; 2) $\int\limits_a^b (b^2+a^2)\,x\,dx$; 3) $\int\limits_n^m \frac{2\,x\,dx}{m-n}$; 4) $\int\limits_1^3 \frac{2x^2}{3}\,dx$;

5) $\int\limits_a^{2a} \frac{b^2 x^2}{a^2}\,dx$; 6) $\int\limits_0^a (3\,x^2-x+1)\,dx$; 7) $\int\limits_1^3 \frac{x+1}{2}\,dx$; 8) $\int\limits_0^m \frac{x^2+m^2}{m^2}\,dx$;

9) $\int\limits_1^{2,5} (2\,x+1)^2\,dx$; 10) $\int\limits_{m-n}^{m+n} (mn\,x^2-m\,x^2)\,dx$; 11) $\int\limits_a^b (x-a)\,(x-b)\,dx$;

12) $\int\limits_{-a}^0 \frac{(a+x)^2}{a}\,dx$; 13) $\int\limits_0^1 \left(\frac{ax-b}{a-b}\right)^2 dx$.

1462. 1) $\int\limits_0^2 x^3\,dx$; 2) $\int\limits_1^3 \frac{x^4}{3}\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 (x+1)^3\,dx$; 4) $\int\limits_1^9 3\sqrt{x}\,dx$;

5) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2}$; 6) $\int\limits_4^1 \frac{dx}{x^3}$; 7) $\int\limits_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$; 8) $\int\limits_4^9 \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})\,dx$; 9) $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$;

10) $\int\limits_1^{1,5} \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx$; 11) $\int\limits_{0,8}^{1,2} \left(x^2+3\,x+\frac{1}{x^2}\right) dx$; 12) $\int\limits_1^2 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\,dx$;

13) $\int\limits_2^4 \frac{x^3-3\,x^2+5}{x^2}\,dx$; 14) $\int\limits_{-5}^{-3,3} \frac{1-x^3}{x^2}\,dx$; 15) $\int\limits_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2\,ax}}$; 16) $\int\limits_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt$;

17) $\int\limits_{z_0}^{z_1} (\sqrt{z}-1)^2\,dz$; 18) $\int\limits_a^{3a} \frac{a+z}{\sqrt{z}}$; 19) $\int\limits_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy$; 20) $\int\limits_{a^3}^{b^3} \frac{u+1}{\sqrt[3]{u}+1}\,du$.

1463. Израчунати површину ограничену кривом линијом $y=x^2-4x+5$, апсцисном осом и правима $x=3$, $x=5$.

1464. Израчунати површину ограничену параболом $y=-x^2+4$ и апсцисном осом.

1465. а) Израчунати површину фигуре ограничене луковима парабола $y=\frac{1}{4}x^2$; $y=3-\frac{x^2}{2}$;

б) Израчунати површину фигуре ограничене параболама $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

1466. Израчунати површину ограничену кривом $y=x^3+2\,x^2+3\,x+4$ и правима $x=0$; $y=0$; $x=3$.

1467. Израчунати површину ограничену кривом $y=x\,(x-1)^2$ и апсцисном осом.

1468. Израчунати површину ограничену кривом $(y-x)^2=x^5$ и апсцисном осом.

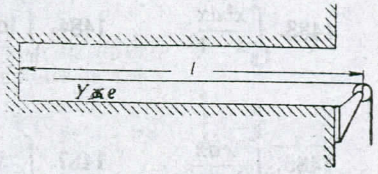
1469. Израчунати површину ограничену кривом $y=x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ и апсцисном осом.

1470. Израчунати површину ограничену кривом $(y-x-2)^2=9\,x$ и координатним осама.

1471. Израчунати површину ограничену параболом $y=x^2-2\,x+2$, њеном тангентом у тачки $(3; 5)$ и ординатном осом.

1472. Израчунати површину ограничену параболом $y=-x^2+4\,x-3$ и њеним тангентама у тачкама $(0; -3)$ и $(3; 0)$.

1473. Уже дужине l, површине попречног пресека s, направљено од материјала чија је специфична тежина γ, извлачи се из шахта на површину земље. Израчунати рад који се при том изврши (сл. 31).



Сл. 31

1474. Из физике је познато да је сила која дејствује насупрот истезању завојнице пропорционална њеном истезању (Хуков закон). Кад опругу истегнемо за 4 cm изврши се рад од 10 kgm. Колики се рад изврши кад истегнемо опругу за 10 cm?

1475. Да би се истегнула нека опруга за 2 cm треба извршити рад од 20 kgm. За колико се може истегнути опруга ако се изврши рад од 80 kgm?

1476. Распоред линеарне густине штапа дужине 10 cm дат је једначином $\delta=0{,}3\,l^2$, где је δ густина у тачки удаљеној од једног краја штапа за растојање l. Одредити масу целог штапа.

1477. Штап има облик јако истегнутог конуса. Дужина штапа је 50 cm, пречник дебљег краја конуса је 1 cm. Густина материјала је пропорционална растојању од врха конуса, и на дебљем крају износи 10 g/cm³. Наћи масу штапа.

1478. Специфична топлота дијаманта за обичне температуре даје се формулом: $C=0{,}0947+0{,}000994\,t-0{,}00000036\,t^2$ kal/степен, где је t температура по Целзију. Колику количину топлоте даје дијамант масе 0,1 g кад се охлади од 100° до 10° C (В. зад. 1431).

1479. Коло струје напаја се акумулаторском батеријом. У току 10 min напон на клемама равномерно пада од $E_0=60\,V$ до $E=40\,V$. Отпор кола је $R=20\,\Omega$. Израчунати количину електрицитета која прође кроз коло за 10 min. (В. зад. 1434).

1480. Напон кола струје равномерно пада, смањујући се за $a=1{,}5\,V$ у минуту. Почетни напон кола износи $E_0=120\,V$. Израчунати рад кола за 5 min. Отпор кола је $R=60\,\Omega$. (В. зад. 1435).

Оцена интеграла

1481. Доказати да је $\int\limits_0^{10} \frac{x\,dx}{x^3+16}$ позитиван али мањи од $\frac{5}{6}$.

1482. Доказати да се $\int\limits_0^2 e^{x^2-x}\,dx$ налази између $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$ и $2e^2$.

У задацима 1483—1488 оценити интеграле:

1483. $\int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2\,dx}{x-1}$. **1484.** $\int\limits_{10}^{100} \log x\,dx$. **1485.** $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)\,dx$.

1486. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x\,dx}{1+x^2}$. **1487.** $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$. **1488.** $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1489. Утврдити (не израчунавајући) који је већи од интеграла:

а) $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ или $\int\limits_0^1 x^3\,dx$? б) $\int\limits_1^2 x^2\,dx$ или $\int\limits_1^2 x^3\,dx$?

1490. Утврдити који је интеграл већи

а) $\int\limits_0^1 2^{x^2}\,dx$ или $\int\limits_0^1 2^{x^3}\,dx$? б) $\int\limits_1^2 2^{x^2}\,dx$ или $\int\limits_1^2 2^{x^3}\,dx$?

в) $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$ или $\int\limits_1^2 (\ln x)^2\,dx$? г) $\int\limits_3^4 \ln x\,dx$ или $\int\limits_3^4 (\ln x)^2\,dx$?

1491. Користећи се неједнакостима: $x \geqslant \sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$, које важе за $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ оценити $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x}\,dx$.

1492. Уверивши се у тачност неједнакости $\frac{x}{e} > \ln x > 1$ $(x > e)$, показати да је интеграл $\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$ мањи од 1, али већи од 0,92.

1493. Доказати на основу геометриских расматрања, следеће ставове:

а) ако је $f(x)$ растућа функција у интервалу $[a;\ b]$ и има у њему конкаван график, онда је

$$(b-a)\,f(a) < \int\limits_a^b f(x)\,dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a);$$

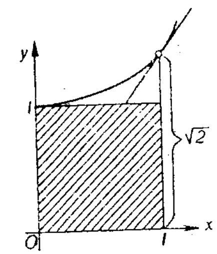
б) ако је $f(x)$ растућа функција у интервалу $[a;\ b]$ и има у њему конвексан график, онда је

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) < \int\limits_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,f(b);$$

в) ако $f(x)$ и $f'(x)$ расту у интервалу $[a;\ b]$, онда је

$$(b-a)\left[f(a)+\frac{b-a}{2}f'(a)\right] < \int\limits_a^b f(x)\,dx < \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a).$$

1494. Изменивши други део тврђења из претходног задатка за случај растуће функције са опадајућим изводом, показати да је $\int\limits_2^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$ већи од 0,85, али мањи од 0,88.



Сл. 32

***1495.** Доказати да је

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)^2 < (b-a)\int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx,$$

ако $f(x)$ није константа (Шварцова неједначина).

1496. Доказати да је $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$ (искористити неједнакост из претходног задатка). Уверити се да примена општег правила даје грубљу оцену.

1497. Очевидно је $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx > 1$. Оценити горњу вредност овог интеграла користећи се:

а) основном теоремом о оцени интеграла;
б) резултатом тачке в) зад. 1493;
в) неједнакошћу $\sqrt{1+x^4} < 1+\frac{x^4}{2}$;
г) Шварцовом неједначином (зад. 1495).

1498. Користећи се сликом 32 уверити се да је интеграл из претходног задатка већи од 1,061.

Приближно интегрирање

У задацима 1499—1508 израчунати приближну вредност датих интеграла, применом Симсонове формуле

1499. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1+x^3}$. **1500.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2-x^4}$. **1501.** $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

1502. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$. **1503.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}}$. **1504.** $\int\limits_1^5 \log x\,dx$.

1505. $\int\limits_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$. **1506.** $\int\limits_0^1 10^x\,dx$. **1507.** $\int\limits_0^1 2^{1-x}\,dx$.

1508. $\int\limits_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

1509. Израчунати $\ln 10 = \int_1^{10} \frac{dx}{x}$ применом Симпсонове формуле. Наћи $\frac{1}{\ln 10}$ (модуо прелаза од природних логаритама на десетичне).

1510. Применивши формулу $\log a = 0{,}4343 \int_1^a \frac{dx}{x}$, израчунати приближно логаритме са основом десет бројева 2, 3, 7.

1511. Површина четвртине круга, чији је полупречник јединица, износи $\frac{\pi}{4}$. С друге стране, узевши јединични круг са центром у координатном почетку, чија је једначина $x^2 + y^2 = 1$, и применивши за израчунавање површине четвртине овога круга интеграцију, добијамо

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx, \quad \text{тј.} \quad \pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Одавде по трапезној формули израчунати приближно број π.

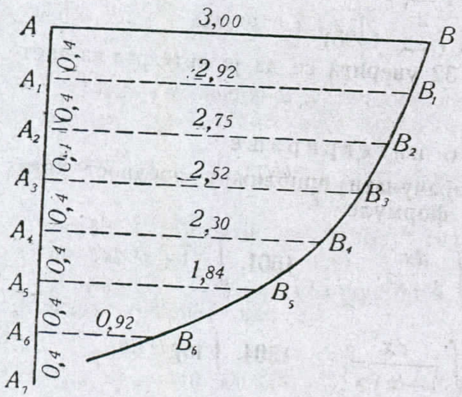
У задацима бр. 1512 – 1513 искористити Симпсонову формолу.

1512. Израчунати површину, ограничену кривом $y = \operatorname{tg} x$, апсцисном осом и правима: $x = -\frac{\pi}{8}$ и $x = \frac{\pi}{4}$.

1513. Израчунати величину притиска воде на сваку од страна у воду вертикално потопљеног полукруга полупречника 10 cm (основа полукруга додирује површину воде). (Види задатак 1436).

1514. Помоћу Симпсонове формуле израчунати интеграл $\int_{1,05}^{1,35} f(x)\, dx$ према следећој таблици вредности за x и $f(x)$:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60



Сл. 33

1515. Права линија додирује реку у тачкама A и B. За израчунавање површине парчета између реке и праве AB повучено је на праву AB 11 нормала од реке на размаку од по 5 m (према томе дуж AB има дужину 60 m). Дужине тих нормала износе 3,28; 4,02; 4,64; 5,26; 4,98; 3,62; 3,82; 4,68; 5,26; 3,82; 3,24 m. Израчунати тражену површину (по Симпсоновој формули).

1516. Израчунати по трапезној формули главни шпангоут (тј. пресек на најширем делу брода) малог пароброда према следећим подацима (види сл. 33):

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = 0{,}4\ \text{m};$$
$$AB = 3\ \text{m}; A_1B_1 = 2{,}92\ \text{m};\ A_2B_2 = 2{,}75\ \text{m};\ A_3B_3 = 2{,}52\ \text{m};$$
$$A_4B_4 = 2{,}30\ \text{m};\ A_5B_5 = 1{,}84\ \text{m};\ A_6B_6 = 0{,}92\ \text{m}.$$

§ 3. Теорема о средњој вредности. Интеграл с промењивом горњом границом. Њутн-Лајбницова формула

1517. Израчунати средњу вредност функције $y = 2x^2 + 3x + 3$ у интервалу (1; 4).

1518. Израчунати средњу вредност функције $y = \sqrt{x}$ у интервалу (0; 10).

1519. Израчунати средњу вредност функције $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ у интервалу (1; 8).

1520. Израчунати средњу вредност функције $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ у интервалу (1; 4).

1521. Полазећи од геометриских расматрања, израчунати средњу вредност функције $y = +\sqrt{1 - x^2}$ у интервалу $(-1;\ 1)$.

1522. Пресек олука има облик параболичног сегмента. Његова основа је $a = 1$ m, дубина $h = 1{,}5$ m (слика 30). Израчунати средњу дубину олука.

1523. Напон у електричном колу равномерно пада, смањујући се за 0,4 V у минуту. Почетни напон у колу је 100 V. Отпор кола је 5 Ω. Наћи средњу снагу (ефекат) кола у току првог часа рада кола (види зад. бр. 1435).

1524. Напон електричног кола у току једног минута равномерно расте од $E_0 = 100\ V$ до $E_1 = 120\ V$. Израчунати средњу јачину струје за то време. Отпор кола је 10 Ω (види задатак 1434).

У задацима 1525—1529 помоћу уопштене теореме о средњој вредности, оценити следеће интеграле:

1525. $I = \int_0^1 \frac{x^{19}\, dx}{\sqrt[3]{1 + x^7}}$.

1526. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x^3 \operatorname{tg} x\, dx$.

1527. $I = \int_0^1 x^2 e^x\, dx$.

1528. $I = \int_1^e \sqrt{x} \ln x\, dx$.

1529. $I = \int_1^9 \sqrt{x}(2 + \cos x)\, dx$.

1530. Наћи следеће интеграле с промењљивом горњом границом:

$$1)\ \int_0^x x^2\,dx;\quad 2)\ \int_a^x x^5\,dx;\quad 3)\ \int_0^x \sqrt{x}\,dx;\quad 4)\ \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$5)\ \int_2^x (x^2-3x+5)\,dx;\quad 6)\ \int_{a+b}^x \frac{(x-a)^2}{b}\,dx.$$

1531. Брзина кретања некога тела пропорционална је квадрату времена. Наћи зависност између пређеног пута s и времена t, ако се зна да је за прве 3 sec тело прешло 18 cm, а у почетном моменту $t=0$ пут је био раван нули.

1532. Сила, која дејствује на материјалну тачку, мења се равномерно у зависности од пређеног пута. На почетку пута она је износила 100 дина. Док се тачка покренула за 10 cm, она је порасла на 600 дина. Наћи функцију која изражава зависност рада од пута.

1533. Топлотни капацитет тела зависи од температуре овако $C=C_0+\alpha t+\beta t^2$. Наћи функцију која изражава зависност количине топлоте коју тело добија при загревању од 0^0 до t^0, од температуре t (види задатак 1431).

1534. Напон у електричном колу мења се равномерно. За $t=t_1$ он износи E_1, а за $t=t_2$ напон је E_2. Отпор R је сталан, самоиндукцију и капацитет занемарујемо. Изразити рад кола као функцију времена t, протеклог од почетка огледа (види зидатак 1435).

1535. Непокретна тачка масе m_1 привлачи по Њутновом закону тачку масе m_2. Последња се креће праволиниски у правцу прве тачке. Почетно растојање међу тачкама је r_0, гравитациона константа је k. Наћи зависност између рада A привлачне силе и растојања r покретне тачке од непокретне.

1536. Чему је раван извод интеграла с промењљивом доњом и сталном горњом границом, по доњој граници?

1537. а) Наћи $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\right)$; б) наћи $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^{\varphi(x)} f(x)\,dx\right)$.

1538. Криволиниски трапез је ограничен параболом $y=x^2$, апсцисном осом и покретном ординатом. Наћи прираштај ΔS и диференцијал dS површине трапеза, за $x=10$ и $\Delta x=0{,}1$.

1539. Криволиниски трапез је ограничен кривом $y=+\sqrt{x^2+16}$, координатним осама и покретном ординатом. Наћи диференцијал dS површине трапеза ако је $x=3$ и $\Delta x=0{,}2$.

1540. Еластична сила P, која се супротставља истезању опруге, износи $0{,}03\,l$, где је l издужење опруге. Наћи прираштај и диференцијал рада еластичне силе ако је $l=3$ и $\Delta l=0{,}01$.

1541. Криволиниски трапез је ограничен кривом $y=x^3$, апсцисном осом и покретном ординатом. Наћи прираштај ΔS површине, њен диференцијал dS, апсолутну (α) и релативну $\left(\delta=\dfrac{\alpha}{dS}\right)$ грешку која настаје при замени прираштаја диференцијалом, ако је $x=4$ и: а) $\Delta x=1$; б) $\Delta x=0{,}1$; в) $\Delta x=0{,}01$.

1542. Наћи вредност извода функције $y=\displaystyle\int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}\,dt$ за $x=1$.

1543. Наћи вредност извода функције $y=\displaystyle\int_0^x \sin x\,dx$ за $x=0$; $x=\dfrac{\pi}{4}$; $x=\dfrac{\pi}{2}$.

1544. Наћи вредност извода функције $y=\displaystyle\int_x^5 \sqrt{1+x^2}\,dx$ за $x=0$ и $x=\dfrac{3}{4}$.

1545. Наћи извод функције $y=\displaystyle\int_0^{e^x} e^x\,dx$ по x.

1546. Наћи извод функције $y=\displaystyle\int_{\alpha^2}^1 \ln t\,dt$ по α.

1547. Наћи вредност другог извода функције $y=\displaystyle\int_0^{z^2}\frac{dx}{1+x^3}$ по z за $z=1$.

1548. За које вредности x функција $I(x)=\displaystyle\int_a^x \frac{x(x^2-1)}{x+3}\,dx$ има екстремуме $(a>-3)$?

X **1549.** Наћи кривину криве $y=\displaystyle\int_0^x (1+t)\ln(1+t)\,dt$ у тачки (0; 0).

1550. Наћи полином најнижег степена, који достиже максималну вредност 6 за $x=1$, и минималну вредност 2 за $x=3$.

1551. Наћи полином најнижег степена, чији график има три превојне тачке: $(-1;-1)$, $(1;1)$ и тачку с апсцисом 0 у којој је крива нагнута према апсцисној оси под углом од 60^0.

1552. Развити функцију $y=\displaystyle\int_0^x e^{x^2}\,dx$ по Маклореновој формули 3-ег реда.

1553. Знајући да је извод од $\operatorname{arc\,tg} x$ једнак $\dfrac{1}{1+x^2}$, израчунати вредност интеграла $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

1554. Из релације $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$ (види претходни задатак) одредити број π помоћу Симпсонове формуле.

1555. Знајући да је извод од $\arcsin x$ раван $\dfrac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$, израчунати средњу вредност функције $y=\dfrac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$ у интервалу $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1556. Знајући да је извод од $\ln\cos x$ једнак $-\operatorname{tg} x$ израчунати $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx$.

1557. Функција $\varphi(x)$ задовољава релацију $\varphi(x)=\alpha\varphi'(x)+\beta\varphi''(x)$. Осим тога познато је да је $\varphi'(a)=\varphi'(b)$. Наћи вредност интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\, dx$.

1558. Показати да је свака примитивна функција непарне функције, дефинисане и непрекидне за $x=0$, парна. Да ли ће свака примитивна функција парне функције, дефинисане и непрекидне за $x=0$, бити непарна?

1559. Извод периодичне функције увек је периодична функција (с истим периодом). Да ли је увек примитивна функција од периодичне функције периодична функција?

ГЛАВА VI

НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

§ 1. Најпростији интеграли

У задацима 1560—1683 наћи дате неодређене интеграле:

1560. $\int 3{,}4\, x^{-0{,}17}\, dx$. **1561.** $\int (2x^{-1{,}2}+3x^{-0{,}8}-5x^{0{,}33})\, dx$.

1562. $\int (x+1)^{15}\, dx$. **1563.** $\int (\sin x+\cos x)\, dx$.

1564. $\int (\arcsin x+\arccos x)\, dx$. **1565.** $\int \dfrac{dx}{(2x-3)^5}$.

1566. $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+1}$. **1567.** $\int \sin 5x\, dx$. **1568.** $\int \dfrac{dx}{2\cos^2 x}$.

1569. $\int \cos 3x\, dx$. **1570.** $\int e^{2x}\, dx$. **1571.** $\int \dfrac{dx}{1+9x^2}$.

1572. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$. **1573.** $\int \dfrac{2\,dx}{\sqrt{2+2x^2}}$. **1574.** $\int a^{-x}\, dx$.

1575. $\int a^{3x}\, dx$. **1576.** $\int \dfrac{3\,dx}{2\sin^2 x}$. **1577.** $\int \sqrt{x+1}\, dx$.

1578. $\int \dfrac{dx}{x+1}$. **1579.** $\int \dfrac{dx}{1-x}$. **1580.** $\int \dfrac{dx}{3x-1}$.

1581. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$. **1582.** $\int \sin(2x-3)\, dx$.

1583. $\int \cos(1-2x)\, dx$. **1584.** $\int e^{1-x}\, dx$. **1585.** $\int (2x+5)^3\, dx$.

1586. $\int a^{2x-1}\, dx$. **1587.** $\int \dfrac{dx}{1+(2+3x)^2}$. **1588.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4+(1-x)^2}}$.

1589. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$. **1590.** $\int \dfrac{a\,dx}{\sin^2(ax+b)}$. **1591.** $\int \dfrac{dx}{\cos^2(1-ax)}$.

1592. $\int \dfrac{dx}{(x+7)^5}$. **1593.** $\int \dfrac{dx}{(11+5x)^3}$.

1594. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2}$; $(c \neq 1)$. 1595. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\, dx$.

1596. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$. 1597. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. 1598. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$.

1599. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$. 1600. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$. 1601. $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$.

1602. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+4}$. 1603. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$. 1604. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

1605. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$. 1606. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx$. 1607. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

1608. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^4}}$. 1609. $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}$. 1610. $\int e^{x^2} x\,dx$.

1611. $\int e^{-x^3} x^2\,dx$. 1612. $\int e^{ax+b}\,dx$. 1613. $\int \frac{dx}{2^x}$.

1614. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4}$. 1615. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 1616. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

1617. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. 1618. $\int \cos^5 x \sin x\,dx$.

1619. $\int \sin^3 x \cos x\,dx$. 1620. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. 1621. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$.

1622. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. 1623. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$. 1624. $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$.

1625. $\int \operatorname{ctg}(2x+1)\,dx$. 1626. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$. 1627. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

1628. $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx$. 1629. $\int \frac{x\,dx}{\ln(x^{x^2})}$. 1630. $\int e^{e^x+x}\,dx$.

1631. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$. 1632. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+\operatorname{tg} x)}$.

1633. $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2\,dx}{1+x^2}$. 1634. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

1635. $\int e^x \sin e^x\,dx$. 1636. $\int \operatorname{sh} x\,dx$. 1637. $\int \operatorname{ch} x\,dx$.

1638. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$. 1639. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x+8}$.

1640. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$. 1641. $\int \frac{Ax}{a+bx}\,dx$. 1642. $\int \frac{x\,dx}{2x+1}$.

1643. $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$. 1644. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$. 1645. $\frac{dx}{x(x+1)}$.

1646. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$. 1647. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$.

1648. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$. 1649. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$. 1650. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

1651. $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$. 1652. $\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+10}$. 1653. $\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-7x+12}$.

1654. $\int \frac{ab\,dx}{(x-a)(x-b)}$. 1655. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$. 1656. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$.

1657. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-10}$. 1658. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}\,dx$.

1659. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$. 1660. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$. 1661. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x+8}$.

1662. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$. 1663. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 1664. $\int \cos^2 x\,dx$.

1665. $\int \sin^2 x\,dx$. 1666. $\int \cos 2x \cos 3x\,dx$.

1667. $\int \cos x \sin 3x\,dx$. 1668. $\int \sin 2x \sin 5x\,dx$.

1669. $\int \cos^3 x\,dx$. 1670. $\int \sin^5 x\,dx$. 1671. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

1672. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$. 1673. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\,dx$. 1674. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

1675. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$. 1676. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$. 1677. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$.

1678. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$. 1679. $\int \sin x \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$.

1680. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x}$. 1681. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x}$.

1682. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$. 1683. $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx$.

У задацима 1684—1751 израчунати дате одређене интеграле:

1684. $\int_0^1 \sqrt[m]{x^n}\,dx$. 1685. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 1686. $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

1687. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$. 1688. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$. 1689. $\int_0^a \sin x\,dx$.

1690. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 1691. $\int_0^1 e^x\,dx$. 1692. $\int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

1693. $\int_1^2 10^x\,dx.$ 1694. $\int_1^x (4-3x)^4\,dx.$ 1695. $\int_0^4 \sqrt{8-2x}\,dx.$

1696. $\int_a^x \sqrt{8-2x}\,dx.$ 1697. $\int_1^z \frac{dx}{2x-1}.$ 1698. $\int_a^u \frac{3\,dx}{2b-x}.$

1699. $\int_a^b \frac{dx}{cx+m}.$ 1700. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}.$

1701. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) dx.$ 1702. $\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right) dt.$

1703. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{\cos^2 2\varphi}.$ 1704. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}.$ 1705. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2}.$

1706. $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx.$ 1707. $\int_a^x \sqrt{x^2-a^2}\;x\,dx.$ 1708. $\int_a^z \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

1709. $\int_1^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^3}.$ 1710. $\int_0^x \frac{x\,dx}{a^2-x^2}.$ 1711. $\int_0^1 e^{\frac{1}{2}x+1}\,dx.$

1712. $\int_e^{e^e} \frac{dx}{x\ln x}.$ 1713. $\int_0^2 \frac{dx}{2^x}.$ 1714. $\int_1^2 \frac{1+\log x}{x}\,dx.$

1715. $\int_{\sqrt[4]{\ln 2}}^{\sqrt[4]{\ln 3}} x^3 e^{x^4}\,dx.$ 1716. $\int_0^1 (e^x+1)^3\,dx.$ 1717. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx.$

1718. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^2}.$ 1719. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 1720. $\int_0^1 \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx.$

1721. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}.$ 1722. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}.$ 1723. $\int_0^2 \frac{3+x}{3-x}\,dx.$

1724. $\int_{10}^{11} \frac{2x-1}{x-2}\,dx.$ 1725. $\int_3^5 \frac{x}{x+4}\,dx.$ 1726. $\int_{-1}^{+1} \frac{4x-3}{2x+5}\,dx.$

1727. $\int_a^z \frac{x+2}{2x-1}\,dx.$ 1728. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}.$ 1729. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x^2-1}.$

1730. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}.$ 1731. $\int_6^{12} \frac{x\,dx}{x^2-7x+12}.$ 1732. $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a\,dx}{(x-a)(x-2a)}.$

1733. $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}.$ 1734. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)(2+x)}.$

1735. $\int_0^x \frac{dx}{(a-x)(b-x)}.$ 1736. $\int_0^x \frac{dx}{4x^2-4x+1}.$

1737. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx.$ 1738. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\,dx.$

1739. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\,dx.$ 1740. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx.$ 1741. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx.$

1742. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx.$ 1743. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx.$ 1744. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx,$

1745. $\int_0^{\pi} \cos 2x\cos 3x\,dx.$ 1746. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}.$

1747. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) dt.$ 1748. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right) dt.$

1749. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx.$ 1750. $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t+a)\,dt.$ 1751. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} \operatorname{ctg}^4 x\,dx.$

1752. Одредити средњу вредност функције $y=\cos x$ у интервалу $(0;\pi)$.

1753. Одредити средњу вредност функције $y=\sin^2 x$ у интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

1754. Одредити средњу вредност функције $y=x\,e^{-x^2}$ у интервалу $(1;e)$.

1755. Одредити средњу вредност функције $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ у интервалу $(0;1)$.

1756. Одредити средњу вредност функције $y=\frac{1}{1+x^2}$ у интервалу $(-1;1)$.

1757. Наћи највеће и најмање вредности функције $I(x)=\int\limits_0^x \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$ у интервалу $(0;1)$.

1758. Конструисати график функције $y=\int\limits_0^x \frac{1-2x+x^2}{1+x^2}\,dx$.

1759. Функција $y=\varphi(x)$ задовољава релацију: $y=y'y''$. Наћи $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.

§ 2. Основне методе интеграције

Парцијална интеграција

1760. $\int x\sin x\,dx$. **1761.** $\int x\cos x\,dx$. **1762.** $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

1763. $\int \arcsin x\,dx$. **1764.** $\int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$. **1765.** $\int xe^{-x}\,dx$.

1766. $\int x^n \ln x\,dx$; $(n\neq -1)$. **1767.** $\int x3^x\,dx$.

1768. $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$. **1769.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. **1770.** $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

1771. $\int \frac{\log x}{x^3}\,dx$. **1772.** $\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. **1773.** $\int \frac{\ln\ln x}{x}\,dx$.

1774. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. **1775.** $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **1776.** $\int \ln(x^2+1)\,dx$.

1777. $\int x\sin x\cos x\,dx$. **1778.** $\int x\cos^2 x\,dx$. **1779.** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

1780. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$. **1781.** $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$. **1782.** $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

1783. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} \operatorname{arc\,tg} x\,dx$. **1784.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}$.

1785. $\int x^2\ln(1+x)\,dx$. **1786.** Наћи неодређени интеграл $\int \frac{dx}{x\ln x}$ методом парцијалног интегрирања, стављајући $\frac{dx}{x}=dv$, $\frac{1}{\ln x}=u$. Објаснити добијени резултат.

1787. $\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^3}$. **1788.** $\int x^3e^x\,dx$. **1789.** $\int x^2a^x\,dx$.

1790. $\int x^2e^{-x}\,dx$. **1791.** $\int x^2\cos x\,dx$. **1792.** $\int x^2\cos^2 x\,dx$.

1793. $\int \ln^2 x\,dx$. **1794.** $\int x^3\sin x\,dx$. **1795.** $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$.

1796. $\int e^{2x}x^3\,dx$. **1797.** $\int e^{-x^2}x^5\,dx$. **1798.** $\int (\arcsin x)^2\,dx$.

1799. $\int (\operatorname{arc\,tg} x)^2 x\,dx$. **1800.** $\int \frac{x^2e^x\,dx}{(x+2)^2}$. **1801.** $\int e^x\sin x\,dx$.

1802. $\int e^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)\,dx$. **1803.** $\int e^{ax}\cos nx\,dx$.

1804. $\int e^x\sin^2 x\,dx$. **1805.** $\int \sin\ln x\,dx$. **1806.** $\int \cos\ln x\,dx$.

1807. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$. **1808.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **1809.** $\int x^2\sin x e^x\,dx$.

1810. $\int \ln^2(1+x)\,dx$. **1811.** $\int (11x^2+3)\sqrt[3]{(1+x^2)}\,dx$.

1812. $\int (2x-1)e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

Смена променљиве

1813. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. **1814.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$. **1815.** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$.

1816. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(x+1)}$. **1817.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. **1818.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$.

1819. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx$. **1820.** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$. **1821.** $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1822. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. **1823.** $\int x\sqrt{a+x}\,dx$. **1824.** $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$.

1825. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$. **1826.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **1827.** $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1828. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. **1829.** $\int \sin\sqrt{x}\,dx$. **1830.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

1831. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (смена $x=\operatorname{sh} z$ или $x=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$).

1832. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ (смена $x=\operatorname{tg} z$).

1833. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$ (смена $x=\frac{1}{z}$).

1834. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$ $\left(\text{смена } x = \frac{1}{z}\right)$.

1835. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ $(\text{смена } e^x+1=z)$.

1836. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$ $(\text{смена } x=a \sec z)$.

1837. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx$. **1838.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. **1839.** $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$.

1840. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$ $\left(\text{смена } z=1-\frac{1}{x}\right)$.

1841. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+3x^2+1}$ $\left(\text{смена } z=x+\frac{1}{x}\right)$.

1842. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{3x^2-x^4-1}}$ $\left(\text{смена } z=x-\frac{1}{x}\right)$.

1843. $\int \frac{e^x(1+e^x)\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **1844.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$.

1845. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. **1846.** $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}$.

1847. $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx$. **1848.** $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,dx$.

1849. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^4+3x^2+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2+1}{x}}$.

1850. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)}$. **1851.** $\int \frac{(1+\ln x)\,x^x\,dx}{\sqrt{1+x^x}}$.

У задацима 1852—1853 извршити најпре смену променљиве, а затим интегрирати методом парцијалне интеграције:

1852. $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. **1853.** $\frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x\,dx}{1+x^2}\,dx$.

У задацима 1854—1876 израчунати дате одређене интеграле:

1854. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^5 x\,dx$. **1855.** $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

1856. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$. **1857.** $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

1858. $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$. **1859.** $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

1860. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$. **1861.** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

1862. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **1863.** $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}$. **1864.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

1865. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. **1866.** $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,dx$. **1867.** $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

1868. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. **1869.** $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$. **1870.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$.

1871. $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$. **1872.** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$. **1873.** $\int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x^3-x}}$.

1874. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. **1875.** $\int_{-a}^a \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **1876.** $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$.

1877. Дат је интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$; наћи такву линеарну смену $x=\varphi(t)$ да би границе интегрирања по z биле 0 и 1. Да ли је задатак увек решљив?

1878. Доказати да је

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

1879. Уверити се да је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$$

Применити добијени резултат за брзо израчунавање интеграла:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \text{ и } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx.$$

1880. Доказати тачност идентитета:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx.$$

1881. Доказати тачност идентитета

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx.$$

Примена рекурентних образаца

У задацима 1882—1885 уверити се да важе дате једнакости:

1882. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10} \sin^9 x \, dx = 0.$ **1883.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2 x} \, dx = 0.$

1884. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{\cos x} \, dx = 2 \int_0^1 e^{\cos x} \, dx.$ **1885.** $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx = 0.$

У задацима 1886—1890 израчунати интеграле:

1886. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx.$ **1887.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{10} e^x \, dx.$ **1888.** $\displaystyle\int_1^e \ln^3 x \, dx.$

1889. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \, dx.$ **1890.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{11} x \, dx.$

1891. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$, где је n цео позитиван број, на два начина: развијањем степена бинома по Њутновој биномној формули, и сменом $x = \sin \varphi$.

Упоређивањем добијених резултата добити следећи збирни образац (C_n^k су биноми коефицијенти):

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}.$$

***1892.** Извести образац

$$\int_0^1 x^{2m} (1-x^2)^n \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3 \cdot 1 (2n+1)(2n-1)\ldots 3 \cdot 1}{2^{m+n+1}(m+n+1)!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(m и n су цели бројеви).

У задацима 1893—1896 израчунати интеграле:

1893. $\displaystyle\int_0^1 x^8 (1-x^2)^3 \sqrt{1-x^2} \, dx.$ **1894.** $\displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-\sqrt{x}} \, dx.$

1895. $\displaystyle\int_0^1 x^5 (1-\sqrt{x})^7 \, dx.$ **1896.** $\displaystyle\int_1^e x^m (\ln x)^n \, dx.$

1897. а) Извести образац

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}},$$

и помоћу овог израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

б) Извести образац

$$\int \frac{x^{2k} \, dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{x^{2k \cdot 1}}{(1+2k-2n) \, b \, (a+bx^2)^{n-1}} + \frac{(2k-1)a}{(zn-2k-1)b} \int \frac{x^{2k-2} \, dx}{(a+bx^2)^n}$$

(k и n су цели бројеви).

***1898.** Доказати да је $\displaystyle\lim_{\omega \to \infty} \frac{e^{k\omega^2 x^2}}{\int_0^1 e^{k\omega^2 x^2} \, dx}$, $l > 0$, $\omega > 0$, једнак нули ако је $x < l$, и једнак ∞ ако је $x = l$.

***1899.** Доказати идентитет:

$$\int_0^x e^{2x} e^{-z^2} \, dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}} \, dz.$$

1900. Интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3\cos x}$ лако се израчунава сменом $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$.

Тада је

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad x = 2 \operatorname{arc\,tg} z \quad \text{и} \quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},$$

дакле

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3\cos x} = \int_0^0 \frac{2\,dz}{(1+z^2)\left(5 - 3\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 0.$$

Но с друге стране је $-3 < -3\cos x < 3$, дакле $2 < 5-3\cos x < 8$ и $\frac{1}{2} > \frac{1}{5-3\cos x} > \frac{1}{8}$. Одавде је

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dx > \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} > \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\,dx,$$

и, према томе $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} > \frac{\pi}{4}$. Наћи грешку.

§ 3. Основне класе интеграбилних функција

Разломљене рационалне функције

1901. $\int \frac{x^3\,dx}{x+1}$. **1902.** $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$. **1903.** $\int \frac{(x^3-x)\,dx}{x^4-2x^2+4}$.

1904. $\int \frac{dx}{x^6+x^4}$. **1905.** $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$. **1906.** $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$.

1907. $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx$. **1908.** $\int \frac{x^7\,dx}{(1-x^2)^5}$. **1909.** $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$.

1910. $\int \frac{11x-4}{x^2+2x-8}\,dx$. **1911.** $\int \frac{0{,}12x-2{,}25}{x^2-1{,}32x-0{,}45}\,dx$.

1912. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

1913. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$. **1914.** $\int \frac{x^2-2x+2}{x(x-1)(x+2)(x-3)}\,dx$.

1915. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. **1916.** $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$.

1917. $\int \frac{(2x^2-5)\,dx}{x^4-5x^2+6}$. **1918.** $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

1919. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx$. **1920.** $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

1921. $\int \frac{x^4-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}$. **1922.** $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5x^2+8x+4}$.

1923. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. **1924.** $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$.

1925. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx$. **1926.** $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$.

1927. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$. **1928.** $\int \frac{dx}{(x-2)^3(x+1)^2}$.

1929. $\int \frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5}\,dx$. **1930.** $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2(x-2)^2}$.

1931. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2-2x+2)}\,dx$. **1932.** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

1933. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$. **1934.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

1935. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$. **1936.** $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx$.

1937. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$. **1938.** $\int \frac{dx}{1+x^3}$. **1939.** $\int \frac{dx}{1-x^3}$.

1940. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$. **1941.** $\int \frac{dx}{1-x^4}$. **1942.** $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$.

1943. $\int \frac{dx}{1+x^4}$. **1944.** $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$. **1945.** $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$.

1946. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. **1947.** $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$.

1948. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$. **1949.** $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$. **1950.** $\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2-3x+3)^2}$.

1951. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$. **1952.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$. **1953.** $\int \frac{x\,dx}{(2x^2+6x+5)^3}$.

1954. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$. **1955.** $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}$. dx

1956. $\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$.

Неке ирационалне функције

1957. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$. **1958.** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$.

1959. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}$. **1960.** $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

1961. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$. **1962.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

1963. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$. **1964.** $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$. **1965.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

1966. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx$. **1967.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

1968. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

1969. $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\, dx$.

1970. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

1972. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

1973. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-4}}$.

1974. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\, dx$.

1975. $\int \frac{(3x-1)\, dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1976. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

1977. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\, dx$.

1978. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1979. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

1980. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

1981. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\, dx$.

1982. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\, dx$.

1983. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\, dx$.

1984. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

1985. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.

1986. $\frac{x^3\, dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.

1987. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

1988. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

1989. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\, dx$.

1990. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

1991. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

1992. $\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Тригонометриске функције

1993. $\int \cos^6 x\, dx$.

1994. $\int \sin^8 x\, dx$.

1995. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

1996. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$.

1997. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, dx$.

1998. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x}$.

1999. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$.

2000. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

2001. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

2002. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$.

2003. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$.

2004. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$.

2005. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

2006. $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\, dx$.

2007. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

2008. $\int \frac{dx}{a\cos + b\sin x}$.

2009. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$.

2010. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.

2011. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

2012. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

2013. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

2014. $\int \frac{dx}{4+3\sin x+4\cos x}$.

2015. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

2016. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

2017. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

2018. $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\, dx$.

Рационалне функције од x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

2019. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\, dx$.

2020. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2021. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

2022. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

2023. $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\, dx$.

2024. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$.

2025. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\, dx$.

2026. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

2027. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\, dx$.

2028. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\, dx$.

2029. $\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

2030. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{3x^2+2x+5}}$.

2031. $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\, dx$.

2032. $\int \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}$.

2033. $\int \frac{(3x+2)\, dx}{(x^2+4x+1)^{\frac{5}{2}}}$.

2034. $\int \frac{(2x+3)\, dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

2035. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

2036. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$.

2037. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx$.

2038. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$.

2039. $\int_1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

2040. $\int\limits_{1}^{\frac{5}{4}} \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$. **2041.** $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}-1} \frac{(x+2)\,dx}{(x+\sqrt{x^2+2x+2})^2\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Хиперболичне функције

2042. $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$. **2043.** $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$. **2044.** $\int \operatorname{th}^4 x\,dx$.

2045. $\int \operatorname{cth}^5 x\,dx$. **2046.** $\int \operatorname{ch}^3 x\,dx$. **2047.** $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

2048. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\,dx$. **2049.** $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx$. **2050.** $\int\limits_0^1 \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

2051. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x}$. **2052.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$. **2053.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

Разне функције

2054. $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$. **2055.** $\int \frac{x^{11}\,dx}{(x^8+1)^2}$.

2056. $\int \frac{(5x^2-12)\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$. **2057.** $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

2058. $\int \frac{(3+x^2)^2 x^2\,dx}{(1+x^2)^3}$. ***2059.** $\int \frac{x^2(x^2-1)\,dx}{(x^4+x^3+2x^2+x+1)^2}$.

2060. $\int \frac{5x^3-12x^2+15x-12}{x^4-3x^3+5x^2-6x}\,dx$. **2061.** $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$.

2062. $\int \frac{dx}{x^5-1}$. **2063.** $\int \frac{x^9\,dx}{x^8-1}$. **2064.** $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

***2065.** $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$. **2066.** $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,dx$.

***2067.** $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$. **2068.** $\int^{x} x\sqrt{a+x}\,dx$.

2069. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{\sqrt{(1+x^6)(1+x^2)}}$. **2070.** $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}\,dx$.

2071. $\int (x^3-2x^2+5)e^{3x}\,dx$. **2072.** $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx$.

2073. $\int x^2 \cos x e^x\,dx$. **2074.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

2075. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\frac{1}{6}\sin^2 x}$. **2076.** $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

2077. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x+\cos x)\,dx}{3+\sin 2x}$. **2078.** $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}$.

2079. $\int \left(\frac{4\sin x+\cos x+5}{\sin x+\cos x+1}\right)^2 dx$. **2080.** $\int \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^3}$.

2081. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^5 x}$. **2082.** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

2083. $\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{\sqrt{x+1}}$. **2084.** $\int \frac{(x+\sin x)\,dx}{1+\cos x}$.

2085. $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^2}$. **2086.** $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}$.

2087. $\int xe^{x^2}(x^2+1)\,dx$. **2088.** $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx$.

2089. $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$. **2090.** $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^4\,dx$.

2091. $\int \operatorname{arc\,tg}(1+\sqrt{x})\,dx$. **2092.** $\int \frac{xe^x\,dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

2093. $\int \ln(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2)\,dx$. **2094.** $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x^4}$.

2095. $\int\limits_1^{16} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$. **2096.** $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

2097. $\int xe^{\sqrt[3]{x}}\,dx$. **2098.** $\int x\ln(1+x^3)\,dx$.

2099. $\int \ln(x^4+1)\,dx$. **2100.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$.

2101. $\int \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

2102. $\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ (p и q су цели позитивни бројеви).

2103. $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$. **2104.** $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}x^2\,dx$.

2105. $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}\,dx$. **2106.** $\int \frac{x(1-x^4)\,\mathrm{arc\,tg}\,(x^2)\,dx}{(1+x^4)^2}$.

2107. $\int e^{e^x}\left(xe^x+\frac{1}{e^x}\right)dx$. **2108.** $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

2109. $\int \frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{(1+x)^3}\,dx$. **2110.** $\int e^{ax^2+bx+c}\,\frac{x(2ax+b)+2a}{(2ax+b)^2}\,dx$.

2111. $\int \frac{dx}{(1-2^x)^4}$.

2112. Показати да је $0{,}78<\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}<0{,}93$, користећи за доњу оцену очевидну неједнакост $1+x^4<(1+x^2)^2$, а за горњу — Шварцову неједначину (види задатак 1495).

2113. Користећи неједнакост $\sin x\geqslant x-\frac{x^3}{6}$, која важи за $x\geqslant 0$, и Шварцову неједначину (в. задатак 1495), показати да је

$$1{,}098<\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x\sin x}\,dx<1{,}253.$$

§ 4. Проширење појма одређеног интеграла

У задацима 2114—2133 израчунати дате интеграле:

2114. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$. **2115.** $\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\,dx;\quad a>0$.

2116. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **2117.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **2118.** $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2119. $\int\limits_0^1\ln x\,dx$. **2120.** $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}$. **2121.** $\int\limits_{-1}^1\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

2122. $\int\limits_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$. **2123.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$. **2124.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

2125. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{arc\,tg}\,(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\,dx$. **2126.** $\int\limits_0^{+\infty}x\sin x\,dx$. **2127.** $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx$.

2128. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$. **2129.** $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **2130.** $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\ln x}$.

2131. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. **2132.** $\int\limits_0^1(\ln x)^n\,dx$. **2133.** $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(x^2-3x+2)^3}}$.

2134. За какве позитивне вредности n интеграл $\int\limits_a^b\frac{dx}{(b-x)^n}$ $(b>a)$ има смисла?

2135. Користећи се резултатима задатака 1879 и 1881 израчунати вредности интеграла:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$.

У задацима 2136—2144 решити питање конвергенције датих интеграла:

2136. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{18}\,dx}{(1+x+x^5)^3}$. **2137.** $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **2138.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$.

2139. $\int\limits_0^{+\infty}x\sin^m(x^2)\,dx$ (m — паран број).

2140. $\int\limits_0^{+\infty}x^m e^{-\alpha x}\,dx$ $(\alpha>0;\ m>-1)$.

2141. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. **2142.** $\int\limits_0^1\frac{\cos x}{x^m}\,dx$ $(0<m<1)$.

2143. $\int\limits_0^2\frac{dx}{\ln x}$. **2144.** $\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$.

У задацима бр. 2145—2149 искористити методе и резултате задатака 1891—1898, и применити на дате интеграле (m и n су цели позитивни бројеви):

2145. $\int\limits_0^1\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; за m: а) парно; б) непарно.

2146. $\int\limits_0^1\frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$. **2147.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$.

2148. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{2m}\,du}{(1+u^2)^n}$ $(n\geqslant m+1)$. **2149.** $\int\limits_0^{+\infty}x^n e^{-x}\,dx$.

ГЛАВА VII

ПРИМЕНЕ ИНТЕГРАЛА

§ 1. Неки задаци из геометрије и статике

Површине равних фигура

2150. Израчунати површину ограничену луком синусоиде $y=\sin x$ који одговара половини периоде, и апсцисном осом.

2151. Израчунати површину ограничену апсцисном осом и луком деформисане синусоиде који одговара половини периоде. Амплитуда синусоиде је 3 cm, полупериода 2 cm.

2152. Израчунати површину ограничену линијама $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$.

2153. Израчунати површину ограничену параболом $y=\sqrt{2px}$ и нормалом на њој која заклапа са апсцисном осом угао од 135^0.

2154. Израчунати површину ограничену кривима $y=\cos 2x$ и $y=\operatorname{tg}^2 x$ (тј. површину једног месеца).

2155. Наћи површину криволиниског трапеза ограниченог хиперболом $y=\dfrac{k}{x}$, апсцисном осом, и ординатама $y=a$ и $y=b$.

2156. Израчунати површину ограничену кривим чије су једначине:
$$y^2=2x+1 \quad \text{и} \quad x-y-1=0.$$

2157. Израчунати површину ограничену логаритамском кривом $y=\ln x$, апсцисном осом и ординатама $x=1$ и $x=a$.

2158. Наћи површину петље строфоиде $y^2(2a-x)=x(x-a)^2$.

2159. Наћи целу површину ограничену затвореном кривом
$$x^4-ax^3+a^2y^2=0.$$

2160. Наћи целу површину ограничену кривом $y^2=x^2-x^4$.

2161. Одредити површину петље криве $y^2=x(x-1)^2$.

2162. Израчунати површину ограничену кривом $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и параболом $y=\dfrac{1}{2}x^2$.

2163. Израчунати површину ограничену кривом $x^2y^2=4(x-1)$ и правом која пролази кроз њене превојне тачке.

2164. Одредити површину ограничену апсцисном осом и кривом
$$(y-x)^2=x^3.$$

2165. Одредити површину ограничену ординатном осом и кривом
$$x=y^2(y-1).$$

2166. Наћи површину ограничену целом кривом $(y-\arcsin x)^2=1-x^2$.

2167. Израчунати површину фигуре „ограничене" кривом $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и њеном асимптотом.

2168. Наћи површину између цисоиде $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ и њене асимптоте.

2169. Наћи целу површину ограничену кривом $x^2y^2=4(x-1)$.

2170. Наћи површину ограничену петљом криве $x=3t^2$, $y=3t-t^3$.

2171. Наћи површину ограничену петљом Декартова листа:
$$x=\frac{3at}{1+t^3}, \quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

2172. Наћи површину ограничену једним сводом циклоиде $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ и апсцисном осом.

2173. Израчунати површину ограничену астроидом
$$x=a\cos^3\varphi, \quad y=a\sin^3\varphi.$$

2174. Израчунати површину ограничену еволутом елипсе
$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t, \quad y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t.$$

2175. Наћи површину дела петље развучене циклоиде
$$x=a\varphi-(a+b)\sin\varphi, \quad y=a-(a+b)\cos\varphi,$$
који лежи испод x осе.

2176. Наћи целу површину ограничену кардиоидом $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

2177. Израчунати површину коју опише радиус вектор Архимедове спирале $\rho=a\varphi$ у току једног његовог обрта, почињући кретање од $\varphi=0$.

2178. Наћи целу површину ограничену кривом $\rho=a\sin 2\varphi$.

2179. Наћи целу површину ограничену кривом $\rho=a\sin 3\varphi$.

2180. Наћи површину унутарње петље криве $\rho=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

2181. Показати да је површина ограничена било којим двама радиус векторима хиперболичне спирале $\rho\varphi=a$ и њеним луком, пропорционална разлици тих радиус вектора.

2182. Наћи површину ограничену каповом кривом $\rho=a\operatorname{tg}\varphi$ и правом $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

2183. Наћи површину ограничену Паскаловим пужем
$$\rho=2a(2+\cos\varphi).$$

У задацима 2184—2187 згодно је прећи претходно на поларне координате.

2184. Наћи сву површину ограничену кривом (т.зв. подера елипсе):

$$(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2=0.$$

2185. Наћи целу површину ограничену Бернулиевом лемнискатом

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

2186. Наћи целу површину ограничену кривом

$$x^4+y^4=x^2+y^2.$$

2187. Наћи целу површину ограничену кривом

$$(x^2+y^2)^3=4a^2xy(x^2-y^2).$$

Дужина лука равних кривих

2188. Наћи дужину лука семикубне параболе $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ од тачке (1,0) до тачке $\left(a+1, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}\right)$.

2189. Израчунати дужину лука криве

$$y=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]$$

у интервалу: $1\leqslant x\leqslant a+1$.

2190. Ректифицирати хипоциклоиду $y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

2191. Наћи дужину криве $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$ у интервалу $0\leqslant x\leqslant a$.

2192. Израчунати дужину лука ланчанице $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, у интервалу $0\leqslant x\leqslant b$.

2193. Одредити дужину лука параболе $y^2=2px$ од темена до тачке $M(x_1, y_1)$. (Узети за независно промењљиву y).

2194. Наћи обим параболичног отсечка чија је основа a, висина h, а тетива му је нормална на оси параболе.

2195. Највећи распон Делаварског ланчаног моста у Америци износи 534 m.

Челична ужад на којима се држи мост, опиру се о потпорне стубове на крајевима распона, чија је висина око 60 m изнад пода моста. Знајући да је облик ужади парабола, одредити дужину ужади.

2196. Наћи дужину лука логаритамске криве

$$y=\ln x \quad (\text{од } x_1=\sqrt{3} \text{ до } x_2=\sqrt{8}).^{*)}$$

---

*) У овом и следећим задацима у вези са израчунавањем дужине лукова, у заградама ће стајати интервал у којему се мења независно промењљива, а који одговара луку који се ректифицира.

2197. Наћи дужину лука криве $y=1-\ln\cos x$ $\left(\text{од } x_1=0 \text{ до } x_2=\frac{\pi}{4}\right)$.

2198. Наћи дужину целе криве $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

2199. Наћи дужину лука криве

$$y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1} \quad (\text{од } x_1=a \text{ до } x_2=b).$$

2200. Наћи дужину лука трактрисе:

$$x=a\ln\frac{\sqrt{a^2-y^2}+a}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$$

(од $y_1=b$ до $y_2=a$), $(0<b<a)$. (За независно промењљиву узети y).

2201. Одредити дужину лука криве

$$y=\frac{x-3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

(од $x=0$ до $x=x_1$).

2202. Наћи дужину лука криве $y=\ln(1-x^2)$ $\left(\text{од } x_1=0 \text{ до } x_2=\frac{1}{2}\right)$.

2203. Наћи дужину лука цисоиде $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ од повратне тачке до тачке $(x_0; y_0)$.

2204. На кривој $(5y)^4=256x^5$ посматра се лук између повратне тачке и оне тачке до које је дужина пројекције лука на осу симетрије криве равна јединици дужине. Израчунати дужину овог лука.

2205. Израчунати дужину лука криве

$$y=\frac{1}{2}(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x-\sqrt{x}}-\ln\sqrt{2\sqrt{x}-1+2\sqrt{x-\sqrt{x}}}$$

(од $x_1=1$ до $x_2=2$).

2206. Наћи дужину криве $(y-\arcsin x)^2=1-x^2$.

2207. Дата је астроида $x=R\cos^3 t$; $y=R\sin^3 t$ и тачке на њој: $A(R; 0)$, $B(0; R)$. Наћи на луку $\overset{\frown}{AB}$ таку тачку M да би лук $\overset{\frown}{AM}$ чинио једну четвртину лука $\overset{\frown}{AB}$.

2208. На циклоиди $x=a(\varphi-\sin\varphi)$; $y=a(1-\cos\varphi)$ наћи тачку која дели први свод циклоиде у односу 1 : 3.

2209. Наћи дужину петље криве $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$.

2210. Наћи дужину целе криве $x=a\cos^5\varphi$, $y=a\sin^5\varphi$.

2211. Наћи дужину лука еволвенте круга

$$x=R(\cos t+t\sin t), \quad y=R(\sin t-t\cos t)$$

(од $t=0$ до $t=\pi$).

2212. Израчунати дужину лука криве

$$x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t; \quad y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$$

(од $t=0$ до $t=\pi$).

2213. Одредити дужину једног свода епициклоиде, настале котрљањем круга полупречника b по спољашњој страни круга полупречника a.

2214. Доказати теорему: Дужина лука криве чије су параметарске једначине

$$x=f(t)\cos t-f'(t)\sin t,$$
$$y=f(t)\sin t+f'(t)\cos t,$$

износи

$$[f(t)+f''(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

2215. Применити теорему из претходног задатка на израчунавање дужине лука криве $x=e^t(\cos t-\sin t)$, $y=e^t(\cos t+\sin t)$ (од $t=0$ до $t=t_1$).

2216. Уверити се у то да дужина лука криве

$$x=t^m\,[t\cos t-(m+1)\sin t],$$
$$y=t^m\,[t\sin t+(m+1)\cos t]$$

(од $t_1=0$ до $t_2=1$) износи $1+m\,(m+1)$.

2217. Наћи дужину целе кардиоиде $\rho=a\,(1+\cos\varphi)$.

2218. Наћи дужину целе криве $\rho=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

2219. Наћи дужину лука Архимедове спирале $\rho=a\varphi$ од почетка до краја првог завијутка.

2220. Израчунати дужину лука хиперболичне спирале $\rho\varphi=1$ од $\varphi_1=\dfrac{3}{4}$ до $\varphi_2=\dfrac{4}{3}$.

2221. Наћи дужину лука логаритамске спирале $\rho=e^{a\varphi}$ који се (лук) налази унутар круга $\rho=1$. (Овај је задатак први решио Торичели).

2222. Нацртати шематску криву $y=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos x}\,dx$ (узима се позитивна вредност корена). Наћи целу дужину ове криве.

2223. Израчунати дужину лука криве

$$x=\int_1^t\frac{\cos z}{z}\,dz,\quad y=\int_1^t\frac{\sin z}{z}\,dz$$

од координатног почетка до најближе тачке са вертикалном тангентом.

2224. Применом Симпсонова правила израчунати приближно дужину целе елипсе са полуосама 8 cm и 6 cm.

2225. За које се вредности изложитеља k дужина лука криве $y=ax^k$ изражава помоћу елементарних функција. (Искористити услове интеграбилности диференцијалног бинома).

2226. Доказати да је дужина целе криве $\rho=a\sin^m\dfrac{\varphi}{m}$ (m – је цео број) самерљива са a за парно m, и самерљива са дужином круга полупречника a за m непарно.

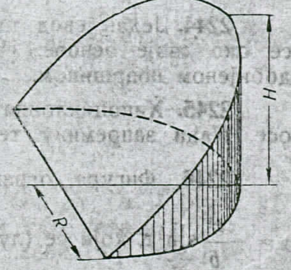
2227. Уверити се у то да је дужина синусоиде $y=\sin x$, која одговара периоди синуса, равна дужини целе елипсе чије су полуосе $\sqrt{2}$ и 1.

2228. Показати да је дужина лука „стегнуте" или „развучене" циклоиде $x=mt-n\sin t$, $y=m-n\cos t$ (m и n су позитивни) у интервалу од $t_1=0$ до $t_2=2\pi$ једнака дужини елипсе са полуосама $a=m+n$, $b=|m-n|$.

Запремине

2229. Израчунати запремину тела ограниченог обртним параболоидом и равнином нормалном на његовој оси, при чему је полупречник основе $=10$ cm., а висина $=4$ cm.

2230. Елипса чија је велика оса $=2a$, а мала $=2b$ обрће се око велике осе чиме се добија тело које се зове обртни елипсоид (издужени елипсоид). Наћи његову запремину. Отуда као специјалан случај извести запремину лопте.



Сл. 34

2231. Одредити запремину тела отсеченог од кружног цилиндра равнином која пролази кроз пречник основе (цилиндрични отсечак, сл. 34). Конкретно, узети $R=10$ cm., $H=6$ cm.

2232. Симетричан параболичан отсечак основе a, и висине R обрће се око основе. Израчунати запремину обртног тела које се тако добија (Каваљеријев „лимун").

2233. Фигура образована луковима парабола $y=x^2$ и $y^2=x$ обрће се око апсцисне осе. Израчунати запремину тела које се овим добија.

2234. Парабола $y=x^2+1$ обрће се око апсцисне осе. Израчунати запремину тела ограниченог добијеном обртном површином и двема равнима нормалним на апсцисној оси и удаљеним од координатног почетка за јединицу.

2235. Површина ограничена хиперболом $x^2-y^2=a^2$ и правом $x=a+h$ обрће се око апсцисне осе. Наћи запремину обртног тела.

2236. Наћи запремину тела добијеног обртањем око апсцисне осе криволинијског трапеза, ограниченог кривом $y^2=\dfrac{k}{x}$, осом Ox и правима $x=a$ и $x=b$.

2237. Израчунати запремину „вретена" које настаје обртањем око апсцисне осе оног лука синусоиде $y=\sin x$ који одговара половини периода.

2238. Израчунати запремину тела које настаје обртањем криве $y=e^x$ око апсцисне осе (од $x_1=0$ до $x_2=1$).

2239. Израчунати запремину тела које настаје обртањем око осе сегмента, отсеченог овом осом од криве $y=\sec x-2$ (тј. обртањем једног месеца).

2240. Ланчаница $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ се обрће око апсцисне осе. Тако се добија површина звана катедоид. Одредити запремину ограничену катедоидом и двема равнима удаљеним од почетка за a и b јединица и нормалним на апсцисној оси.

2241. Наћи запремину тела које се добија обртањем око апсцисне осе криве $(x-4a)y^2=ax(x-3a)$ (од $x=0$ до $x=3a$).

2242. Криволиниски трапез ограничен кривом $y=xe^x$ и правима $x=1$ и $y=0$, обрће се око апсцисне осе. Наћи запремину тако насталог тела.

2243. Лемниската $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ обрће се око апсцисне осе. Наћи запремину тела ограниченог тако насталом површином.

2244. Један свод циклоиде $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$, обрће се око своје основе. Израчунати запремину тела ограниченог добијеном површином.

2245. Хипоциклоида $x=a\cos^3\varphi$, $y=a\sin^3\varphi$ обрће се око апсцисне осе. Наћи запремину тела ограниченог тако добијеном површином.

2246. Фигура ограничена луком еволуте елипсе $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, који се (лук) налази у првом квадранту, и координатним осама, обрће се око апсцисне осе. Колика је запремина тако добијеног тела?

2247. Фигура ограничена ординатном осом, правом $y=1$ и луком синусоиде $y=\sin x$ који лежи између координатног почетка и најближег темена, обрће се око ординатне осе. Израчунати запремину тако насталог тела.

2248. Израчунати запремину бескрајног вретена насталог обртањем криве $y=\frac{1}{1+x^2}$ око њене асимптоте.

2249. Крива $y^2=2exe^{-2x}$ обрће се око своје асимптоте. Наћи запремину тела које се добија овим обртањем.

2250. Наћи запремину тела ограниченог површином насталом обртањем цисоиде $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ око своје асимптоте.

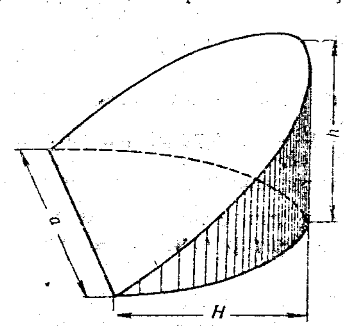
2251. Фигура ограничена кривом $y=e^{-x^2}$ и њеном асимптотом обрће се око ординатне осе. Израчунати запремину „тела" које се притом добија.

2252. Фигура ограничена кривом $y=\frac{1}{1+x^2}$ и њеном асимптотом обрће се око OY осе. Израчунати запремину тако добијеног „тела".

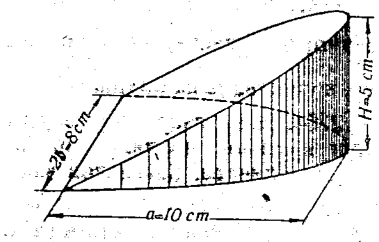
2253. Параболични цилиндар пресечен је двема равнима, од којих је једна нормална на генератриси. Тако настаје клинасто тело претстављено на сл. 35. Заједничка основа параболичних сегмената је $a=10$ cm, висина параболичног сегмента у основи је $H=8$ cm, а висина тела је $h=6$ cm. Израчунати запремину тела.

2254. Цилиндар чија је основа елипса, пресечен је косом равни која пролази кроз малу осу елипсе. Одредити запремину тела које тако настаје. Димензије су дате на сл. 36.

2255. Прав кружни конус полупречника R и висина H расечен је на два дела равнином која пролази кроз центар основе паралелно генератриси. Наћи запремине оба дела конуса.

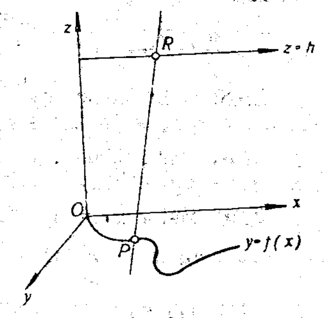


Сл. 35



Сл. 36

Уочимо три међусобом нормалне праве Ox, Oy, Oz. У равни xOy дата је крива $y=f(x)$ (директриса); у равни xOz дата је права $z=h$. Права PR (генератриса, в. сл. 37), паралелна равни zOy, креће се тако да пресеца криву $y=f(x)$ и праву $z=h$. Тако се добија површина, која претставља специјалан случај површине зване коноид. У задацима 2256—2258 имају се у виду управо такви коноиди.



Сл. 37

2256. Доказати теорему: прав кружни коноид једнак је по запремини са обртним параболоидом исте основе и исте висине.*)

2257. За директрису коноида служи парабола $y^2=2px$. Наћи запремину тела ограниченог коноидом, равни xOy и равни паралелној са yOz и удаљеној од ове за растојање a.

2258. За директрисе служе пар правих $y^2-k^2x^2=0$. Наћи запремину тела ограниченог коноидом, равни xOy, равни yOz и равни паралелној са yOz и удаљеној од ове за растојање a.

2259. Центар квадрата креће се дуж пречника круга полупречника a, при чему раван у којој лежи квадрат, остаје нормална на равни круга, а два супротна темена квадрата крећу се по кругу. Наћи запремину тела образованог овим покретним квадратом.

2260. Над свим тетивама круга полупречника R, паралелним једном правцу, конструисани су симетрични параболични сегменти сталне висине H. Равни сегмената нормалне су на равни круга. Наћи запремину тако добијеног тела.

*) Коноид се зове прави кружни ако као директорна крива служи круг, а као директорна права служи права која се у ортогоналној пројекцији пројицира на пречник овог круга, при чему је генератриса нормална на директорној правој.

2261. Над тетивом астроиде $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, паралелном ординатној оси, као над основом, конструисан је равнострани троугао, чија је висина једнака полутетиви, и који лежи у равни нормалној на равни астроиде. Нађи запремину тела које постаје кретањем овог троугла.

2262. Круг променљивог полупречника креће се тако да једна његова тачка остаје стално на апсцисној оси, центар му се креће по кругу $x^2+y^2=r^2$ а раван му је нормална на апсцисној оси. Нађи запремину тако добивеног тела.

2263. Круг се креће тако да му једна тачка остаје стално на ординатној оси, центар му описује елипсу, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а раван у којој лежи круг, нормална је на ординатној оси. Нађи запремину тако насталог тела.

2264. Нађи запремину заједничког дела лопте полупречника R и правог кружног цилиндра пречника R, ако центар лопте лежи на површини цилиндра. (Вивианов задатак).

Компланација обртних површина

2265. Нађи величину површине која настаје обртањем параболе $y^2=4ax$ око апсцисне осе од темена до тачке са апсцисом $x=3a$.

2266. Израчунати величину површине настале обртањем кубне параболе $3y-x^3=0$ око апсцисне осе (од $x_1=0$ до $x_2=a$).

2267. Израчунати површину катеноида, насталог обртањем ланчанице $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ око апсцисне осе (од $x_1=0$ до $x_2=a$).

2268. Нађи величину површине настале обртањем око апсцисне осе кардиоиде $x=a(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)$, $y=a(2\sin\varphi-\sin 2\varphi)$.

2269. Нађи величину површине настале обртањем око апсцисне осе петље криве $9ay^2=x(3a-x)^2$.

2270. Нађи величину површине настале обртањем око апсцисне осе лука криве $x=e^{\varphi}\sin\varphi$, $y=e^{\varphi}\cos\varphi$ $\left(\text{од } \varphi_1=0 \text{ до } \varphi_2=\frac{\pi}{2}\right)$.

2271. Нађи величину површине која постаје обртањем хипоциклоиде $x=a\cos^3\varphi$, $y=a\sin^3\varphi$ око апсцисне осе.

2272. Обртањем елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ око велике осе добија се површина звана дугуљасти обртни елипсоид, обртањем око мале осе — површина звана пљоснати обртни елипсоид (сфероид). Нађи њихове површине.

2273. Израчунати величину вретенасте површине која настаје обртањем једног свода синусоиде $y=\sin x$ око апсцисне осе.

2274. Лук тангенсоиде $y=\operatorname{tg} x$ од тачке $(0, 0)$ до тачке $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ обрће се око апсцисне осе. Нађи величину тако добијене површине.

2275. Лемниската $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ обрће се око поларне осе. Нађи величину целе површине добијене на тај начин.

2276. Круг $\rho=2r\sin\varphi$ обрће се око поларне осе. Нађи величину целе површине добијене на тај начин.

2277. Цела крива $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+\frac{\pi}{2}$ (пред кореном знак $+$), обрће се око апсцисне осе. Израчунати величину тако настале површине.

2278. Лук хиперболе $xy=1$ од тачке $M(1;1)$ до покретне тачке $M_1\left(x;\frac{1}{x}\right)$ обрће се око апсцисне осе. Нађи величину обртне површине као функцију од x.

2279. Бесконачни лук криве $y=e^{-x}$ који одговара позитивним вредностима x, обрће се око апсцисне осе. Нађи величину тако настале површине.

Моменти и тежишта

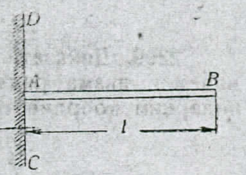
(Овде се свуда густина узима равном 1).

2280. Не користећи се појмом тежишта дати аналитички израз за моменат силе целе хоризонталне греде AB (сл. 38) тежине m у односу на зид CD.

2281. Израчунати статички моменат правоугаоника основице a и висине h у односу на његову основицу.

2282. Израчунати статички моменат равнокрако-правоуглог троугла чије су катете a, у односу на сваку од његових страна.

2283. Нађи статички моменат параболичног сегмента чија је основа нормална на оси параболе, а висина му је h, — у односу на основу.



Сл. 38

2284. Нађи координате тежишта половине кружне линије

$$y=+\sqrt{r^2-x^2}.$$

2285. Нађи координате тежишта половине кружне површине, ограничене апсцисном осом и полукругом $y=+\sqrt{r^2-x^2}$.

2286. Нађи координате тежишта фигуре ограничене координатним осама и елипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (у првом квадранту).

2287. Нађи координате тежишта фигуре ограничене луком синусоиде и отсечком апсцисне осе од $x=0$ до $x=\pi$.

2288. Нађи координате тежишта првог свода циклоиде

$$x=a(\varphi-\sin\varphi),\quad y=a(1-\cos\varphi).$$

2289. Нађи координате тежишта фигуре ограничене првим сводом циклоиде $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ и апсцисном осом.

2290. Нађи статички моменат лука елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ који (лук) лежи у првом квадранту, — у односу на апсцисну осу.

2291. Доказати теорему: статички моменат произвољног лука параболе у односу на њену осу пропорционалан је разлици полупречника кривине у крајевима тога лука. Коефицијенат пропорционалности износи $\frac{p}{3}$, где је p параметар параболе.

2292. Наћи статички моменат фигуре ограничене кривама $y=\frac{2}{1+x^2}$ $y=x^2$ у односу на апсцисну осу.

2293. Исто то за криве: $y=\sin x$ и $y=\frac{1}{2}$ (једног сегмента) у односу на апсцисну осу.

2294. Исто то за криве $y=x^3$ и $y=\sqrt{x}$ у односу на апсцисну осу.

2295. Наћи тежиште кружног лука који одговара централном углу α; полупречник круга је r.

2296. Наћи тежиште лука хипоциклоиде $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ који (лук) лежи у првом квадранту.

2297. Наћи тежиште параболичног сегмента основе a и „висине" h (основа је нормална на оси параболе).

2298. Наћи тежиште фигуре ограничене затвореном кривом

$$y^2=ax^3-x^4.$$

2299. Доказати да се апсциса и ордината тежишта сектора, ограниченог двама радиус векторима и кривом чија је једначина дата у поларним координатама $\rho=\rho(\varphi)$, изражава овако

$$x=\frac{2}{3}\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\cos\varphi\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi},\qquad y=\frac{2}{3}\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\sin\varphi\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi}.$$

2300. Користећи се формулама из претходног задатка наћи Декартове координате тежишта сектора, ограниченог једном половином завијутка Архимедове спирале $\rho=a\varphi$ (од $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=\pi$).

2301. Исто то за фигуру ограничену кардиоидом $\rho=a(1-\cos\varphi)$.

2302. Исто то за фигуру ограничену једном петљом Бернулиеве лемсикате $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

2303. Показати да се Декартове координате тежишта лука криве чија је једначина дата у поларним координатама, изражавају овако

$$x=\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi},\qquad y=\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}.$$

2304. Применом формула из претходног задатка наћи Декартове координате тежишта лука логаритамске спирале

$$\rho=ae^{\varphi}\left(\text{од } \varphi=\frac{\pi}{2} \text{ до } \rho=\pi\right).$$

2305. Наћи тежаште површине полулопте.

2306. Наћи тежиште површине обртног параболоида чији је полупречник основе r а висине h.

2307. Дат је прав кружни конус полупречника основе r и висине h. Наћи растојање од основе конуса до тежишта његове бочне површине, укупне површине и запремине.

2308. На ком растојању од геометриског центра лежи тежиште полулопте полупречника R?

2309. На ком растојању од основе лежи тежиште тела ограниченог обртним параболоидом и равнином нормалном на његовој оси. Висина тела је h.

2310. Израчунати моменат инерције дужи $AB=l$ у односу на осу која лежи у истој равни са овом дужи, знајући да је крај A удаљен од осе за a јединица, а крај B за b јединица.

2311. Израчунати моменат инерције круга полупречника r у односу на било који његов дијаметар.

У задацима 2312—2316 израчунати моменте инерције у односу на обртну осу:

2312. Цилиндра, полупречника основе r и висине h.

2313. Конуса, полупречника основе r, и висине h.

2314. Лопте, полупречника R.

2315. Обртног елипсоида.

2316. Обртног параболоида полупречника основе r, и висине h.

Примена Гулденове теореме

2317. Наћи ординату тежишта фигуре ограничене апсцисном осом, правом $x=a$ и параболом $y^2=2px$.

2318. Фигура образована првим сводовима циклоида

$$x=r(\varphi-\sin\varphi),\quad y=r(1-\cos\varphi)$$
$$\text{и}\quad x=r(\varphi-\sin\varphi),\quad y=-r(1-\cos\varphi),$$

обрће се око ординатне осе. Наћи запремину тела које се добија на овај начин (види задатак 2172 и 2244).

2319. Користећи се резултатима задатака 2173 и 2245 наћи координате тежишта фигуре ограничене апсцисном осом и делом астроиде који (део) лежи у горњој полуравни.

2320. Елипса чије су осе $AA_1=2a$ и $BB_1=2b$ обрће се око праве паралелне оси AA_1 и удаљене од ове за $3b$. Наћи запремину тако добијеног тела.

2321. Астроида параметра a обрће се око осе која пролази кроз шиљак паралелно правој која спаја два њему најближа шиљка. Наћи запремину тако насталог тела.

2322. Правилни шестоугао стране a обрће се око једне од страна. Наћи запремину тако добијеног тела.

§ 2. Неки задаци из физике

2323. Брзина тела дата је обрасцем $v=\sqrt{1+t}$ m/sec. Наћи пут који пређе тело за првих 10 sec од почетка кретања.

2324. За хармониско осцилаторно кретање по апсцисној оси око координатног почетка брзина $\frac{dx}{dt}$ се изражава обрасцем

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$$

(t – је текуће време, T – период осциловања, φ_0 – почетна фаза). Наћи положај тачке у моменту t_2 ако је познато да се у моменту t_1 она налазила у тачки $x=x_1$.

2325. На материјалну тачку дејствује сила, обрнуто пропорционална брзини кретања. Показати да кинетичка енергија тела зависи од времена линеарно.

2326. Колоидна честица масе m пада у течности чији је отпор пропорционалан брзини кретања честице (коефициенат пропорционалности је k). Наћи зависност брзине кретања честице од времена (време се рачуна од почетка кретања). Која је гранична вредност брзине кад $t\to\infty$? Наћи такође пут који прође честица за првих t секунди свога падања.

2327. Моторни чамац креће се у мирној води брзином $v=10$ km на час. У пуном ходу његов је мотор одједанпут искључен, и после 20 sec брзина чамца се смањила на $v_1=6$ km на час. Узимајући да је отпор који вода пружа кретању чамца пропорционалан његовој брзини наћи брзину чамца након 2 мин. од искључења мотора; наћи такође растојање које прође чамац у току једне минуте од искључења мотора.

2328. Зрно улази у даску дебљине $h=10$ cm брзином $v_0=200$ m/sec а излази из даске, пробивши је, брзином $v_1=80$ m/sec. Узимајући да је отпор који пружа даска кретању зрна пропорционалан квадрату брзине кретања, наћи колико је времена трајало кретање зрна кроз даску.

2329. Успоравајуће дејство трења на плочу која се обрће у течности, пропорционално је угаоној брзини обртања. Плоча, која је почела да се обрће угаоном брзином од 3 обрта у секунди, после једног минута обрће се брзином од 2 обрта у секунди. Колика ће бити њена угаона брзина после 3 минута од почетка обртања.

2330. Плоча која почиње да се обрће угаоном брзином од 5 обрта у секунди, после 2 минута обрће се угаоном брзином од 3 обрта у секунди. После колико ће времена од почетка обртања плоча имати угаону брзину од 1 обрта у секунди (види задатак 2329).

2331. Капља почетне масе M грама пада под дејством силе теже и равномерно се испарава губећи сваке секунде m грама. Колики је рад силе теже за време од почетка кретања до потпуног испарења капље? Отпор ваздуха се не узима у обзир.

2332. Колики рад треба извршити да би се насула гомила песка коничног облика, чији је полупречник основе 1,2 m а висина 1 m? Специфична тежина песка је 2 (песак се диже са површине земље).

2333. Димензије Хеопсове пирамиде су приближно следеће: висина 140 m, ивица (квадратне) основе 200 m. Специфична тежина камена од којег је пирамида саграђена износи приблажно 2,5. Израчунати рад утрошен при њеном грађењу на савлађивању силе теже.

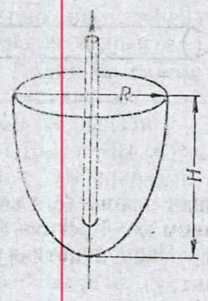
2334. Израчунати рад који треба извршити да би се извукла вода довољна да напуни цилиндрични резервоар висине $H=5$ m, који има за основу круг полупречника $R=3$ m.

2335. Израчунати рад који треба извршити да би се исцрпла течност специфичне тежине γ из резервоара коничног облика (теме конуса окренуто је горе), чија је висина H а полупречник основе R.

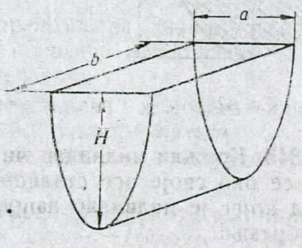
2336. Израчунати рад који треба извршити да би се извукла вода довољна да напуни суд облика полулопте, полупречника $R=0{,}6$ m.

2337. Израчунати рад који треба извршити да би се исцрпла течност специфичне тежине γ из резервоара који има облик конуса са теменом окренутим доле, чија је висина H а полупречник основе R.

2338. Котао има облик обртног параболоида (сл. 39). Полупречник основе је $R=2$ m, дубина котла $H=4$ m. Напуњен је течношћу специфичне тежине $\gamma=0{,}8$. Одредити рад који се мора извршити да би се исцрпла сва течност из котла.



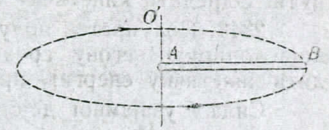
Сл. 39



Сл. 40

2339. Одредити рад који се мора извршити да би се исцрпла вода ($\gamma=1$) из корита које има следеће димензије (сл. 40): $a=0{,}75$ m; $b=1{,}2$ m; $H=1$ m. Површина која ограничава корито је параболички цилиндар.

2340. Котао има облик елиптичног цилиндра са хоризонталном осом. Велика оса елипсе која чини основу котла ($2a$) је хоризонтална; мала оса ($2b$) је вертикална. Генератриса цилиндра је L. У котао је тачно до половине насута вода (специфична тежина γ). Колики се рад мора извршити да би се вода исцрпла из котла (вода се подиже до највише генератрисе цилиндра).



Сл. 41

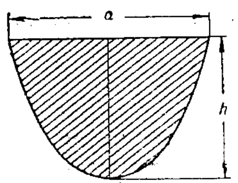
2341. Штап AB (сл. 41) обрће се у хоризонталној равни око осе OO' угаоном брзином $\omega=10\pi\,\text{sec}^{-1}$. Попречни пресек штапа је $S=4\ \text{cm}^2$, његова дужина $l=20$ cm, густина материјала од којег је саграђен $\gamma=7{,}8$. Наћи кинетичку енергију обртања штапа.

Кинетичка енергија материјалне тачке (или тела које се креће транслаторно) износи $\frac{mv^2}{2}$, где је m – маса тачке, v – њена брзина. Тачка која се при обртању тела налази на растојању r од осе, има линеарну брзину $v=\omega r$, где је ω угаона брзина.

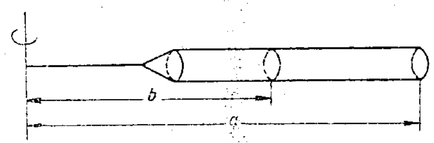
2342. Правоугаона плочица чије су стране $a=50$ cm и $b=40$ cm обрће се сталном угаоном брзином $\omega=3\pi\,\text{sec}^{-1}$ око стране a. Наћи кинетичку енергију обртања плочице. Дебљина је плочице $d=0{,}3$ cm, густина материјала од којег је плочица направљена $\gamma=8$ g/cm³.

2343. Троугаона плочица основице $a=40$ cm и висине $h=30$ cm обрће се око своје основице сталном угаоном брзином $\omega=5\pi\,\text{sec}^{-1}$. Наћи кинетичку енергију плочице ако се зна да је њена дебљина $d=0{,}2$ cm, а густина материјала од којега је плочица направљена је $\gamma=2{,}2$ g/cm³.

2344. Плочица облика параболичног сегмента (сл. 42) обрће се око осе параболе сталном угаоном брзином $\omega=4\pi\,\text{sec}^{-1}$. Основа параболе је $a=20$ cm, висина $h=30$ cm, дебљина плочице $d=0{,}3$ cm, густина материјала од којег је плочица направљена $\gamma=7{,}8$ g/cm³. Наћи кинетичку енергију плочице.



Сл. 42



Сл. 43

2345. Кружни цилиндар чији је полупречник основе R, а висине h, обрће се око своје осе сталном угаоном брзином ω. Густина материјала од којег је цилиндар направљен износи γ. Наћи кинетичку енергију обртања.

2346. Уски цилиндрични суд с водом обрће се око вертикалне осе онако како је то претстављено на сл. 43. Растојање од осовине обртања до дна суда је $a=40$ cm, растојање од осе обртања до површине воде је $b=15$ cm. Суд изврши два обрта у секунди. Наћи притисак воде на дно суда. (Притисак проузрокује центрифугална сила $f=m\,\omega^2 r$).

2347. Половина прстена, полупречника R и масе M, обрће се око осе OO' која пролази кроз његове крајеве, брзином од n обрта у минути. Одредити кинетичку енергију прстена.

2348. Полупрстен полупречника R и масе M обрће се око осе OO' која додирује његову средину, брзином од n обрта у минути. Одредити кинетичку енергију прстена.

Сила f узајамног дејства две материјалне тачке одређена је формулом $f=k\frac{m\cdot M}{r^2}$, где су m и M масе тачака, r растојање између њих, а k, коефицијент пропорционалности, износи у CGS систему 6,66 10^{-8}. (Њутнов закон. Види Курс, т. I стр. 294). Имајући ово у виду решити задатке 2349—2359.

2349. Штап AB дужине l, масе M, привлачи тачку C масе m, која лежи на његовом продужетку на растојању a од ближег краја B штапа. Наћи силу узајамног дејства штапа и тачке. Какву материјалну тачку треба ставити у A да би она дејствовала на C истом силом којом и штап AB?

2350. Два једнака штапа (сваки дужине l и масе M) леже на једној правој на растојању l један од другога. Израчунати силу њиховог узајамног дејства.

2351. Коликом силом полупрстен полупречника r и масе M дејствује на материјалну тачку масе m стављену у његов центар?

2352. Коликом силом жичани прстен масе M, полупречника R дејствује на материјалну тачку C масе m која лежи на правој што пролази кроз центар прстена нормално на његовој равни? Растојање од тачке до центра прстена је a. Какав ће бити резултат ако је место полупречника прстена дат угао φ под којим се тај полупречник види из тачке C?

2353. Користећи се резултатом претходног задатка израчунати коликом силом равна плоча полупречника R, масе M, дејствује на материјалну тачку масе m, која (тачка) лежи на оси плоче на растојању a од центра.

2254. Користећи се резултатом задатка 2353 израчунати коликом силом дејствује на материјалну тачку масе m бесконачна раван по којој је равномерно распоређена маса површинске густине σ. Растојање од тачке до равни износи a.

2355. Коликом силом материјална преломљена линија $y=|x|+1$ (линеарна густина материје на њој је γ) привлачи материјалну тачку масе m, која се налази у координатном почетку?

2356. Доказати да материјална преломљена хомогена линија $y=a|x|+1$ $a\geqslant 0$ привлачи материјалну тачку у координатном почетку истом силом независно од величине a, тј. независно од величине угла између полуправих које чине преломљену праву.

2357. Полупречници основа зарубљеног правог кружног конуса су R и r висина је h, густина γ. Коликом силом дејствује он на материјалну тачку масе m, која се налази у његовом темену.

2358. Штап дужине l и масе M привлачи по Њутновом закону материјалну тачку масе m која лежи на истој правој на којој и штап; при томе сила узајамног дејства износи $F=\frac{kMm}{x(x+l)}$ где смо са x означили растојање од тачке до ближег краја штапа (в. зад. 2349). Колики рад изврши привлачна сила кад се тачка која је била удаљена од штапа на растојању r, приближи њему на растојање r_1 крећући се дуж праве која чини продужење штапа?

2359. Колики рад изврши сила теже у условима задатка 2352 при померању тачке из бесконачности у центар круга?

2360. Одредити силу P којом вода којом је напуњен акваријум, притискује на један од његових зидова. Зид има облик правоугаоника. Дужина му је $a=60$ cm, висина $b=25$ cm.

2361. Поделити хоризонталном правом зид акваријума из претходног задатка тако да би силе притиска на оба дела зида биле једнаке.

2362. Плочица облика равнокраког троугла потопљена је вертикално у воду тако да јој основица лежи на површини воде. Основица плочице је a, висина h. Израчунати силу притиска воде на сваку од страна плочице.

2363. Плочица из претходног задатка потопљена је (вертикално) у воду тако да јој врх лежи на површини воде, а основица јој је паралелна тој површини. Коликом силом вода притискује на сваку од страна плочице?

2364. Квадратна плочица потопљена је вертикално у воду тако да једно од темена квадрата лежи на површини воде, а једна од дијагонала је паралелна површини. Страна квадрата је a. Коликом силом вода притискује на сваку страну квадрата?

2365. Израчунати силу којом вода притискује на брану (насип), која има облик равнокраког трапеза, чија је горња основица $a = 6{,}4$ m, доња $b = 4{,}2$ m. а висина $H = 3$ m.

2366. Плочица облика половине елипсе, потопљена је вертикално у течност тако да јој осовина $2b$ лежи на површини течности. Колика је сила притиска течности на свакој од страна ове плочице, ако је дужина потопљене полуосе a, а специфична тежина течности је γ?

2367. Дрвени пловак облика цилиндра чија је површина основе $S = 4000$ cm² а висина $H = 50$ cm, плива на површини воде. Колики рад треба извршити да би извукли пловак из воде? (специфична тежина дрвета је 0,8).

2368. Израчунати колики рад треба извршити да би се пловак из претходног задатка потпуно потопио у воду.

2369. Лопта полупречника R cm, густине 1g/cm³ потопљена је цела у воду. Она ће бити у равнотежи на било којој дубини ако се само ниједан њен део не налази над површином воде. Узмимо да лопта додирује површину. Колики рад треба извршити да бисмо извукли лопту из воде?

Задаци 2370—2375 су у вези са истицањем течности кроз мали отвор. Брзина истицања течности изражава се такозваном Торичелиевом формулом: $v = \sqrt{2gh}$, где је h висина стуба течности над отвором а g убрзање силе теже*), (види такође и Курс математичке анализе од Берманта, том I стр. 293).

2370. У танком зиду призматичког суда са вертикалном осом, напуњеног водом, пробушен је правоугаони вертикални отвор, чија је висина 1 cm, ширина 0,2 cm, горњи крај отвора удаљен је 10 cm од нивоа течности, који се све време одржава на истој висини. Колико воде истече из суда за 1 секунд?

2371. У дну цилиндричног суда чија је површина основе 100 cm² а висина 30 cm, има отвор. Израчунати површину овог отвора кад се зна да вода, којом је суд напуњен, истече из њега у току 2 минута.

2372. Конични левак висине $H = 20$ cm напуњен је водом. Полупречник горњег отвора левак је $R = 12$ cm. Доњи отвор кроз који вода

*) У овде датом облику Торичелијев закон је примењљив само за идеалну течност. На ту идеалну течност односе се и дати одговори на задатке 2370—2375. У пракси се примењује формула $v = \mu\sqrt{2gh}$, где је μ коефициенат који зависи од вискозности течности и карактера отвора кроз који течност истиче. За воду у најпростијем случају је $\mu = 0{,}6$.

истиче из левка, има полупречник $r = 0{,}3$ cm. За које ће време вода истећи из левка?

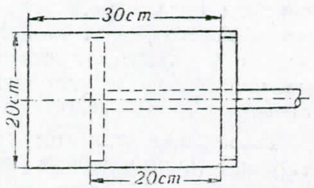
2373. У дну котла који има облик полулопте полупречника $R = 43$ cm, направљен је отвор површине $s = 0{,}2$ cm². За које ће време вода, којом је напуњен котао истећи из њега?

2374. Котао има облик елиптичног цилиндра са хоризонталном осом. Полуосе елиптичног пресека (нормалног на оси цилиндра) су: a (хоризонтална) и b (вертикална); генератриса цилиндра је L. Котао је напуњен водом до половине. За које ће време вода истећи из котла кроз отвор у дну њега, кад је површина отвора s?

2375. У резервоар дубок 4 m, чији је попречни пресек квадрат стране 6 m, сваке минуте утиче 10 m³ воде. За које ће се време резервоар напунити ако у исто време вода истиче из њега кроз отвор на дну, чија је површина $\frac{1}{144}$ m^2?

2376. Цилиндар полупречника основе 10 cm а висине 30 cm, напуњен је ваздухом чији је притисак једнак спољњем притиску (1,033 kg/cm²). Израчунати рад који се мора извршити да би се сабио ваздух утеривањем клипа за 20 cm, (сл. 44) ако се рачуна да процес тече адиабатично, тј. да су запремина и притисак везани Пуасоновом једначином: $pv^{\gamma} = p_0 v_0^{\gamma}$, где је $\gamma = 1{,}41$.

2377. У цилиндрични суд чија је површина основе 10 cm² а висина 30 cm, затворен је атмосферски ваздух. Колики рад треба извршити да се утера клип за 20 cm, тј. да се угура тако да се заустави на 10 cm од дна цилиндра? Атмосферски притисак је 1033g/cm², процес тече изотермично, тј. при сталној температури.



Сл. 44

2378. У цилиндрични суд попречног пресека 100 cm² затворен је ваздух под атмосферским притиском. У суду је клип. Његово почетно отстојање од дна суда је 0,1 m. Цилиндар је унешен у празан простор услед чега се ваздух шири истискујући клип. Израчунати рад који врши ваздух у цилиндру подижући клип на висину од 0,2 m; 0,5 m; 1 m. Може ли се овај рад неограничено повећавати при неограниченом ширењу гаса? Процес, исто као и у претходном задатку, тече изотермично.

***2379.** У цилиндру с клипом налази се гас под притиском од 2000 g/cm². Површина попречног пресека цилиндра износи 1000 cm², у почетном тренутку ($t = 0$) клип је удаљен од дна цилиндра за 40 cm. За 20 мин. клип се равномерним кретањем утискује у цилиндар за 10 cm. За то исто време температура гаса равномерно се пење од 27 на 87° C. Одредити рад утрошен на утискивање клипа.

2380. Ваздух којим је напуњен суд запремине 3 l садржи 20% кисеоника. Суд има две цеви. Кроз једну од њих почиње се у суд пуштати чисти кисеоник, кроз другу истиче напоље толико исто ваздуха колико притиче у суд кисеоника. Колико ће бити кисеоника у суду након оног времена за које кроз њега протече 10 l гаса?

2381. Ваздух садржи $a\%$ ($=8\%$) CO_2; он се пропушта кроз цилиндрични суд са апсорбујућом масом. Танак слој масе апсорбује количину гаса пропорционалну његовој концентрацији и дебљини слоја. Ако ваздух који прође кроз слој дебео H cm ($=10$ cm) садржи $b\%$ ($=2\%$) CO_2, колику онда дебљину H_1 мора имати апсорбујући слој, да би, по изласку из филтра, ваздух садржао само $c\%$ ($=1\%$) угљендиоксида? Колико процената угљендиоксида остаје у ваздуху који прође кроз филтар, ако је дебљина апсорбујућег слоја 30 cm?

2382. Ако се при пролазу кроз слој воде дебео 3 m упије половина првобитне количине светлости, колики део ове количине допире до дубине од 30 m? (Количина светлости која се упија при пролазу кроз танки слој воде, пропорционална је дебљини слоја и количини светлости која пада на површину слоја).

2383. Количина топлоте коју прима од сунца 1 m² земљине површине за дати елеменат времена, пропорционална је синусу угла који зраци сунца заклапају са хоризонтом, и времену. На екватору земља добија највише топлоте на дан равнодневнице, кад се нагиб сунчаних зракова може рачунати равним 0° у 6ʰ ујутро и увече, а 90° у подне. На полу се највише топлоте добија на дан летње солстиције. Тога дана нагиб сунчаних зракова у току целих 24 часа износи тамо нешто више од 23°. Шта је, и колико пута веће: максимална количина топлоте коју добије квадратна јединица површине за дан и ноћ на екватору, или количина топлоте коју прими за дан и ноћ квадратна јединица површине земље на полу на дан летње солстиције?

2384. Усијани бескрајни конац обешен вертикално изнад равни, завршава се на висини a изнад равни. Сваки дужински cm конца зрачи у секунди 1 erg зрачне енергије. Наћи јачину осветљења бесконачно малог дела $\Delta\sigma$ равни, који лежи на растојању R од пројекције конца на раван. (Јачина осветљења је директно пропорционална јачини извора и косинусу упадног угла зракова, и обртно пропорционална квадрату растојања од тачкастог извора до осветљене површинице).

2385. Користећи резултат претходног задатка наћи (за случај бескрајног конца) укупну количину енергије коју добије од конца у јединици времена круг полупречника R, кад тај круг лежи у равни нормалној на концу (конац се ортогонално пројицира у центар круга). Растојање од краја конца до те равни је a.

2386. Тело чија је температура 25° потопљено је у термостат (његова се температура одржава на 0°). Знајући да је брзина хлађења тела пропорционална разлици између температуре тела и околне средине (закон хлађења који је открио Њутн), наћи за које се време тело охлади за 10°, ако се за 20 минута оно охлади за 20°?

2387. Тело чија је температура 30°, за 30 минута стајања у термостату чија је температура 0°, охладило се до 22,50. Колика ће бити температура тела после 3 сата од почетка опита?

2388. Наелектрисано тело губи постепено свој набој услед несавршене изолације. Узимајући да је брзина разелектризовања пропорционална набоју, наћи набој као функцију времена. (Почетни набој тела је E_0, а коефицијенат пропорционалности k).

2389. Потенцијалом неке тачке електричног поља назива се рад који произведу силе поља при померању позитивне електростатичке јединице набоја из дате тачке у бесконачност. Одредити потенцијал

тачкастог набоја равног E позитивних електростатичких јединица на растојању r cm од набоја (узимајући диелектричну константу средине равну јединици).

2390. Бесконачна права равномерно је набијена позитивним електрицитетом (линеарна густина електрицитета је σ). Коликом силом дејствује ова права на јединични набој који се налази у тачки A на растојању a од ње? Диелектрична константна средине је 1 (за независно променљиву узети растојање елемента праве од основе нормале спуштене из A на праву).

2391. Повећавајући или смањујући електрични набој проводника ми самим тим мењамо и његов потенцијал. При томе је промена потенцијала пропорционална промени набоја проводника: $E=cV$. Коефицијенат пропорционалности C зове се капацитет проводника. Нека се тело сталног капацитета c празни кроз проводник великог отпора R. Почетни потенцијал тела је V_0; празни се у земљу. Извести образац који даје зависност потенцијала проводника од времена.

2392. Два електрична набоја: $e_1=20$ и $e_2=30$ електростатичких јединица налазе се на растојању од 10 cm један од другога. Дилектрикум је ваздух. У почетку су оба набоја утврђени непомично, а затим се набој e_2 ослобађа. Тада се под дејством одбојне силе набој e_2 почиње померати удаљавајући се од набоја e_1. Колики рад изврши одбојна сила кад се набој e_2 удаљи на растојање од 30 cm?

2393. Два електрична набоја: $e_1=100$ електростатичких јединица и $e_2=120$ електростатичких јединица налазе се на растојању 20 cm један од другога. Колико ће бити растојање између набоја кад приближимо други првоме извршивши при томе рад од 300 erga. (Дилектрикум је ваздух).

2394. Електрични проводник има облик зарубљеног конуса. Дужина проводника (висина конуса) је $l\,m$, полупречник веће основе је $a\,mm$, мање основе $b\,mm$. Специфични отпор материјала је $\rho=\frac{\Omega\,m}{mm^2}$.

Наћи отпор проводника.

2395. Проводник има облик зарубљеног обртног параболоида; дужина проводника је $l\,m$, полупречник веће основе $a\,mm$, полупречник мање основе $b\,mm$. Специфични отпор проводника је ρ. Наћи отпор проводника.

2396. Напон на клемама електричног кола је $v=120\,V$. У коло се равномерно укључује отпор брзином $0{,}1\,\Omega$ у секунди. Осим тога у коло је укључен стални отпор $r=10\,\Omega$. Колико кулона електрицитета прође кроз коло за 2 минута?

2397. Напон на клемама електричног кола који у почетку износи $120\,V$, равномерно пада снижавајући се за $0{,}01\,V$ у секунди. Истовремено у коло се уводи отпор сталном брзином од $0{,}1\,\Omega$ у секунди. Осим тога у коло је укључен сталан отпор од $12\,\Omega$. Колико кулона електрицитета прође кроз коло за 3 минута?

2398. Мењањем температуре отпор металних проводника се мења (на обичним температурама) по закону: $R=R_0\cdot(1+0{,}004\,\vartheta)$, где је R_0 отпор на $0^\circ C$, а ϑ температура по Целзиусу. (Овај закон важи за већину чистих метала). Проводник чији отпор на температури од $0^\circ C$ износи $10\,\Omega$ загрева се равномерно од $\vartheta_1=20^\circ$ до $\vartheta_2=200^\circ$ у току 10 минута. За то време кроз њега тече струја под напоном од 120 V. Колико кулона електрицитета прође за то време кроз проводник?

2399. Закон по коме се мења напон обичне наизменичне струје (градске), која има 50 перода у секунду, изражава се следећом формулом: $E = E_0 \sin(100\pi t)$, где је E_0 максималан напон а t време. Наћи средњу вредност квадрата напона за 0,01 секунд. (За један полупериод).

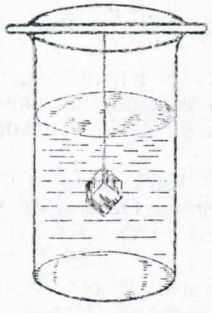
2400. Напон синусоидалне електричне струје дат је формулом: $E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, а јачина струје формулом: $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi_0\right)$, где су E_0 и I_0 константне величине (највећа вредност напона и јачине струје), T — период, а φ_0 тзв. фазна разлика. Израчунати рад струје за време од $t_1 = 0$ до $t_2 = T$ и показати да ће овај рад имати највећу вредност тада кад фазна разлика φ_0 буде нула.

***2401.** Наћи време за које се 1 kg воде загреје електричним апаратом од 20° на 100°C ако је напон струје 120 V, отпор спирале 14,4 Ω, температура ваздуха у соби 20°, и ако се зна да се 1 kg воде расхлади од 40° на 30° C за 10 минута.

***2402.** У електролитичком купатилу има 10 литара воде закисељене сумпорном киселином. Кроз воду се пропушта струја сталног напона. Након једног часа остало је у купатилу 9,5 l воде. Колико ће воде остати после 4 часа?

***2403.** У електролитичком купатилу има 1 l воде, у којој је растворено 0,5 мола $Na\,Cl$. За 30 минута од укључења струје разложило се 0,1 мола соли. Колико је времена потребно да се разложи 0,4 мола $Na\,Cl$? Решити задатак узимајући, и не узимајући, у обзир мењање запремине воде. Упоредити резултате.

2404. Два kg соли растварају се у 30 l воде. За 5 минута раствори се 1 kg соли. За које се време раствори 99% првобитне запремине соли. (Брзина растварања пропорционална је количини нерастворене соли и разлици између концентрације засићеног раствора која је једнака 1 kg, на 3 литра, и концентрације раствора у датом тренутку).



Сл. 45

2405. Брзина растварања кристала пропорционална је његовој површини и разлици између концентрације засићеног раствора C_z и стварне концентрације у датом моменту. Коцкасти кристал масе M_0, густине γ, у тренутку $t = 0$ потопљен је у чисту воду (њена је запремина V). Наћи зависност масе кристала од времена. Сав кристал раствара се за T секунди, при чему концентрација раствора постаје равна половини C_z. У сваком тренутку концентрација је у целом суду иста, што се постиже мешањем (сл. 45).

2406. Ако првобитна количина квасца од 1 g после 1 сата постане 1,2 g, колика ће она бити након 5 сати од почетка врења, ако се узме да је брзина нарастања квасца пропорционална присутној количини истог?

2407. Ако количина квасца након 2 сата од почетка врења износи 2 g, а након 3 сата 3 g, колика је била почетна количина квасца? (Види задатак 2406).

2408. Фактични прираштај градског становништва пропорционалан је одговарајућој количини становништа и интервалу времена. Осим тога градско становништво повећава се и услед имиграције: сваке године придолази n житеља (равномерно). Време се рачуна од оног тренутка кад је у граду било A_0 становника. Наћи зависност броја становника A од времена.

Задаци 2409—2415 посвећени су хемиској кинетици (Види Курс, том I стр. 321).

2409. При загревању раствора дибромћилибарске киселине она се разлаже по једначини

$$H_2\,C_4\,H_2\,Br_2\,O_4 = H_2\,C_4\,HBr\,O_4 + HBr.$$

При температури од 50° C константа брзине је 0,000261. Почетна концентрација дибромћилибарске киселине била је 0,025 мол/литар. Каква ће бити њена концентрација после 3 сата од почетка опита? За које ће се време од почетка опита разложити 99,9% киселине (тј. практично реакција извршити до краја)? Кад ће се разложити свих 100% киселине?

2410. Супероксид водоника разлаже се при загревању или у присуству катализатора према једначини:

$$H_2\,O_2 = H_2\,O + O.$$

После 10 минути од почетка реакције концентрација $H_2\,O_2$ била је 0,276 мол/литар, после 20 минута 0,165 мол/литар. Израчунати константу брзине реакције.

2411. У затвореном суду изнад течног сумпора налази се водоник. Првобитна његова количина је 1 g. После 12 сати остало је још 0,832 g воданика. Колико ће водоника остати након 24 сата? (Реакција тече овако: $H_2 + S = H_2 S$. Добијени $H_2 S$ бива апсорбован, тако да се реакција може сматрати иреверзибилном. Концентрација сумпорне паре је стална услед присуства течног сумпора).

2412. Реакција сапонифицирања сирћетно-етилног етера натриум хидроксидом развија се према једначини:

$$CH_3\,COOC_2H_5 + Na\,OH = CH_3\,COONa + C_2\,H_5\,OH.$$

У почетку огледа раствор етера имао је концентрацију $a = 0{,}01$ мол/литар, а натриум хидроксид био је заступљен у концентрацији $b = 0{,}002$ мол/литар. По истеку 23 минута концентрација етера смањила се за 10% почетне вредности. За које ће се време она смањити за 15%?

2413. Реакција између гвозденог хлорида и калајног хлората развија се према једначини:

$$2\,Fe\,Cl_3 + Sn\,Cl_2 = 2\,Fe\,Cl_2 + Sn\,Cl_4.$$

У литру воде садржи се $\frac{1}{8}$ мола $Fe\,Cl_3$ и $\frac{1}{16}$ мола $Sn\,Cl_2$. После 3 минута остаје $\frac{1}{20}$ мола $Sn\,Cl_2$. Колико ће остати после 10 минута под претпоставком да реакција тече иреверзибилно?

2414. Реверзибилна хемиска реакција тече по шеми $A+B\rightleftarrows C+D$. Почетне концентрације A и B респективно су равне a и b, почетне концентрације C и D равне су нули. Сaставити диференцијалну једначину такве реакције.

2415. Дато је M_0 gr материје. Та се материја равномерно испарава (m gr у секунди). Осим тога она се хемиски разлаже (брзина разлагања пропорционална је присутној количини материје), при чему се производи реакције тренутно удаљавају из сфере реакције. Написати зависност преостале количине материје M од времена.

§ 3. Диференцијалне једначине са промењљивима које се могу раздвојити

У задацима 2416–2424 наћи општа решења датих диференцијалних једначина:

2416. $(xy'+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$.

2417. $(xy^2+x)+(x^2y-y)\,y'=0$.

2418. $xyy'=1-x^2$.

2419. $y'\operatorname{tg}x-y=a$.

2420. $xy'+y=y^2$.

2421. $(a^2+y^2)\,dx=2x\sqrt{ax-x^2}\,dy$.

2422. $y'=10^{x+y}$.

2423. $y'=\dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

2424. $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$.

У задацима 2425—2428 наћи партикуларна решења диференцијалних једначина која задовољавају дате почетне услове:

2425. $y'\sin x=y\ln y$; за $x=\dfrac{\pi}{2}$ $y=1$.

2426. $y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$; за $x=0$ $y=1$.

2427. $\sin y\cos x\,dy=\cos y\sin x\,dx$; за $x=0$ $y=\dfrac{\pi}{4}$.

2428. $y-xy'=b(1+x^2y')$; за $x=1$ $y=1$.

2429. Наћи криву која пролази кроз тачку (2,3) и има особину да се отсечак ма које њене тангенте, који лежи између координатних оса, полови додирном тачком.

2430. Наћи све криве код којих се отсечак тангенте између додирне тачке и апсцисне осе полови тачком пресека са ординатном осом.

2431. Наћи криве код којих је површина ограничена апсцисном осом, луком криве од њеног пресека са апсцисном осом до промењиве ординате, и овом последњом, пропорционална n-том степену дужине ординате ($n\neq 1$; коефицијенат пропорционалности је k).

2432. Наћи криве код којих отсечак нормале од тачке криве до апсцисне осе, има константну вредност a.

2433. Наћи криву која пролази кроз тачку (2,0) и има особину да отсечак тангенте између додирне тачке и ординатне осовине има сталну дужину $=2$.

2434. Наћи криву која пролази кроз тачку $(a, 1)$ и има сталну субтангенту $(=a)$.

2435. Наћи све криве код којих је нормала једнака апсциси додирне тачке.

2436. Наћи криве код којих збир дужина нормале и субнормале има сталну вредност $=a$.

2437. Наћи криве код којих је збир дужине тангенте и субтангенте пропорционалан производу координата додирне тачке.

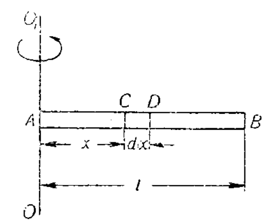
2438. Уверити се да само праве које пролазе кроз координатни почетак, и хиперболе које за асимптоте имају координатне осе, имају ту особину да им је радиус вектор било које тачке раван дужини тангенте повучене у тој тачки.

2439. Материјална тачка масе 1 g креће се праволиниски под дејством силе директно пропорционалне времену рачунатом од момента $t=0$, а обрнуто пропорционалне брзини кретања тачке. У моменту $t=10$ секунди брзина је износила 20 cm/sek, а сила 10 дина. Колика ће бити брзина после једне минуте од почетка кретања?

2440. Капља воде која има почетну масу M_0 и испарава се брзином m gr/sek, креће се по инерцији (на пример, у Вилсоновој комори) почетном брзином v_0. Отпор средине пропорционалан је брзини кретања капље и њеном полупречнику (Штоксов закон). У почетном моменту ($t=0$) он износи f_0 дина. Наћи зависност брзине капље од времена.

2441. Материјална тачка креће се праволиниски тако да је њена кинетичка енергија пропорционална средњој брзини кретања, рачунајући од почетка кретања ($t=0$, $s=0$) до текућег момента t. Показати да је кретање равномерно.

*2442. У уској хоризонталној цилиндричној цевчици AB херметички затвореној, затворен је гас. Цевчица се равномерно обрће око вертикалне осе OO_1 (сл. 46), која пролази кроз један од њених крајева, угаоном брзином ω. Дужина цевчице је l cm., попречни пресек s cm², маса затвореног у њој гаса M грама, притисак у мирној цевчици (сталан дуж целе цевчице) p_0. Наћи распоред притиска дуж цевчице, тј. p као функцију од x, при обртању цевчице (упореди са задатком 2346).



Сл. 46

2443. У дну цилиндричног суда са попречним пресеком S cm² и вертикалном осом налази се мали кружни отвор површине s cm², прекривен дијафрагмом (као код објектива фотографског апарата). У суд је усута идеална течност до висине h. У моменту $t=0$ дијафрагма се почиње откривати, при чему је површина отвора пропорционална времену, и потпуно се открива за T секунди. Колика ће бити висина H течности у суду након T секунди од почетка опита? (Види задатке 2370—2375).

2444. Брзина хлађења тела пропорционална је разлици између температуре тела и околине. У задацима 2366—2387 сматрали смо коефицијенат пропорционалности сталним. У неким рачунима узима се да он линеарно зависи од времена $k=k_0(1+\alpha t)$. Под овом претпоставком наћи интегрални закон хлађења тела (стављајући да је за $t=0$, $\vartheta=\vartheta_0$, а температура околне средине θ).

2445. 1 kg воде чији се топлотни капацитет узима као сталан $\left(1 \frac{\text{vel. kal.}}{\text{step.}}\right)$, а почетна температура је ϑ_0, загрева се електричним апаратом, чији отпор зависи линеарно од температуре: $R = R_0 (1 + 0{,}004\, \vartheta)$ (види задатак 2398). Напон се уводи равномерно од $E = 0$ до $E = E_1$ у току T секунди. Термоизолација суда је толико добра да се расипање топлоте може занемарити. Наћи зависност између температуре ϑ и времена t у интервалу $0 \leqslant t \leqslant T$.

2446. У електролитичкој кади има A_0 литара воде закисељене сумпорном киселином (види задатак 2402). Кроз воду се пропушта електрична струја, чији напон у току T секунди равномерно пада од E_0 до E_1. По истеку тих T секунди у кади остаје A_1 литара воде. Наћи зависност између количине воде A у суду и времена $t\,(0 \leqslant t \leqslant T)$.

2447. Две течности кључају у суду. Нађено је да је однос количина сваке од њих, које прелазе у пару, у ма ком тренутку времена пропорционалан односу оних количина тих течности, које се још налазе у течном стању. Доказати да су те количине x и y везане релацијом: $y = Cx^k$, где је C константа.

У хемиској производњи често је потребно очистити гас од неке гасовите примесе, пропуштајући га кроз суд, који садржи ово или оно апсорбујуће средство. Количина гасовите примесе коју апсорбује танки слој апсорбујућег средства при одређеном режиму апарата, пропорционална је концентрацији примесе, дебљини и површини попречног пресека слоја. Полазећи од тога решити задатке 2448—2450.

2448. Апарат за филтрирање има облик конуса, чији је полупречник основе R, а висина H. Концентрација примесе у гасу који треба очистити равна је $a^0/_0$, а у очишћеном гасу $b^0/_0$. Извести образац који даје концентрацију c гасовите примесе у апарату, у завности од растојања h слоја од врха конуса (гас иде од врха конуса ка његовој основи).

2449. Апарат за филтрирање има облик конуса полупречника основе R и висине H. Гас улази у апарат од основе имајући $a^0/_0$ примеса. На растојању h од основе налази се сифон који омогућава да се узме проба гаса за анализу. Проба показује $b^0/_0$ примеса. Колико ће процената примеса садржати гас по излазу из апарата? Излазна цев почиње од врха конуса.

2450. Апарат за филтрирање има облик лопте (полупречника R). Гас улазећи у суд садржи $a^0/_0$ примеса, а излазећи из суда на дијаметрално супротној страни његовој, садржи $b^0/_0$. Извести образац који везује процентну садржину c примесе у гасу са растојањем x слоја од краја цеви кроз коју улази гас.

***2451.** Брзина рашћења површине младог листа victoriae regiae, који има, као што је познато, облик круга, пропорционална је обиму листа и количини сунчане светлости која пада на лист. Ова последња је са своје стране пропорционална површини листа и косинусу угла између правца зракова и вертикале. Наћи зависност између површине S листа и времена t, ако се зна да је у 6^h изјутра та површина била $1600\ \text{cm}^2$, а у 6^h увече истог дана $2500\ \text{cm}^2$. Посматрање је вршено на екватору на дан равнодневнице (види задатак 2383).

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ. ПОЈАМ ИЗВОДА И ДИФЕРЕНЦИЈАЛА

§ 1. Функције више променљивих

2452. Изразити запремину z конуса као функцију његове генератрисе x и висине y.

2453. Изразити површину U троугла као функцију његових трију страна x, y, z.

2454. Наћи зависност генератрисе z зарубљеног конуса од његове запремине V и полупречника̂ x и y његове доње и горње основе.

2455. Наћи зависност притиска гаса p од његове запремине v и температуре t, рачунајући да почетни притисак износи 1,03 атмосфера. Почетна запремина је 4,2 l а коефицијенат ширења $\alpha = 0{,}00366$. Температура се рачуна по Целзијусу.

2456. Саставити таблицу вредности за функцију $z = 2x - 3y + 1$, дајући независно променљивим вредности од 0 до 5 напредујући по једну јединицу.

2457. Саставити таблицу вредности функције $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$, дајући независно променљивим вредности од 0 до 1 напредујући по 0,1. Вредности функције израчунати са тачношћу од 0,01.

2458. Наћи вредност функције $z = \left(\frac{\operatorname{arc\,tg}(x+y)}{\operatorname{arc\,tg}(x-y)}\right)^2$ за $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

2459. Дата је функција: $z = \frac{(u-x)(v-y)}{(u-y)(v-x)}$. Нека вредности независно променљивих x, y, u, v (овим редом) образују аритметичку прогресију. Показати да је у том случају вредност функције равна $\frac{4}{3}$. Ако пак вредности x, y, u, v образују геометриску прогресију, онда је вредност функције позитивна али мања од 2.

2460. $F(x; y) = \frac{\varphi(x)\,\psi(y) - \psi(x)\,\varphi(y)}{\varphi(xy)\,\psi(xy)}$. Наћи $F\left(a; \frac{1}{a}\right)$. Специјално, ставити $\varphi(u) = u^3$, $\psi(u) = u^2$ и понова наћи $F\left(a; \frac{1}{a}\right)$.

2461. $F(x; y) = \varphi(x)\,\psi(y) + \psi(x)\,\varphi(y)$. Изабрати такве функције φ и ψ да би било идентички $F(x; y) = \varphi(x + y)$.

2462. $F(x,y)=y^x-\frac{1}{2}x^y$. Ако се x и y мењају истом брзином, која функција за $x=3$, $y=2$ расте брже: да ли она која се добија из F фиксирајући y (тако да се мења само x) или пак она која се добија фиксирајући x (тако да се мења само y)?

2463. $\varphi(x;y;z)=y^z-(y\cos z+z\cos y)x+x^{\frac{y+z}{y-z}}$. Променљиве y и z задржавају фиксиране вредности y_0 и z_0, при чему је $y_0=3z_0$. Шта претставља график функције $v=\varphi(x;y_0;z_0)$?

2464. Нека симбол $\sqrt{\ }$ означава обе гране квадратног корена. Уверити се да је функција $z=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ двозначна. Колико ће једнозначних грана имати функција:

$$v=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\,^2?$$

2465. Функција $z=f(x;y)$ која идентички задовољава однос $f(mx;my)=m^k f(x;y)$ зове се хомогена функција k-тог степена хомогенитета (k-те димензије). Показати да се хомогена функција k-тог степена хомогонитета $z=f(x;y)$ увек може претставити у облику $z=x^k F\left(\frac{y}{x}\right)$.

2466. Из једначине $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ одредити z као експлицитну функцију од x и y. Хоће ли ова функција бити једнозначна?

2467. Нека је функција $F(x;y;z)$ хомогена нултог степена хомогенитета (види задатак 2465). Показати да функција $z=f(x;y)$, дефинисана једначином $F(x;y;z)=0$, задовољава идентитет $1=f\left(\frac{x}{f(x;y)};\ \frac{y}{f(x;y)}\right)$. Проверити ово за функцију $F(x;y;z)\equiv\frac{x+y+z}{x+y-z}$.

2468. Показати да функција $z=F(x;y)\equiv xy$ задовољава функционалну једначину:

$$F(ax+bu;\ cy+dv)=ac\,F(x;y)+bc\,F(u;y)+ad\,F(x;v)+bd\,F(u;v).$$

2469. Показати да функција $z=F(x;y)\equiv\ln x\ln y$ задовољава функционалну једначину $F(xy;uv)=F(x;u)+F(x;v)+F(y;u)+F(y;v)$.

2470. Дата је сложена функција $z=u^v$, где је $u=x+y$, $v=x-y$. Наћи посебне вредности функције: 1) за $x=0$, $y=1$; 2) за $x=1$, $y=1$; 3) за $x=2$, $y=3$; 4) за $x=0$, $y=0$; 5) за $x=-1$, $y=-1$.

2471. $z=\frac{u+v}{uv}$; $\begin{matrix} u=w^t \\ v=w^{-t} \end{matrix}$; $\begin{matrix} w=\sqrt{x+y} \\ t=2(x-y) \end{matrix}$. Изразити z непосредно као функцију од x и y.

2472. Уверити се да сложена функција $z=F\left(\frac{u-x}{u-y};\ \frac{v-x}{v-y}\right)$ не мења своју вредност ако се вредности све четири независно променљиве мењају у истом односу. Ако x, y, u, v образују (овим редом) аритметичку прогресију, онда функција има исту вредност па ма каква била та прогресија.

2473. Дата је сложена функција $z=u^w+w^{u+v}$ где је $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy$. Изразити z непосредно као функцију од x и y.

2474. $u=(\xi+\eta^2-\xi^3-\eta^3$; $\xi=\frac{e^\omega+e^\varphi}{2}$; $\eta=\frac{e^\omega-e^\varphi}{2}$; $\omega=\ln(x^2+y^2+z^2)$; $\varphi=2\ln(x+y+z)$. Изразити u непосредно као функцију од x, y и z.

2475. Сложену функцију $z=\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}+x^2+y^2$ претставити у облику функционалног „ланца" од две карике.

2476. Сложену функцију

$$u=\frac{1-xyz}{\sqrt{(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2}}\cdot\ln\frac{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2}{1-xyz}+(1-xyz)^3$$

претставити у облику функционалног „ланца" од три карике.

2477. Испитати методом пресека график функције $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$. Шта претстављају пресеци равнима $x=\text{const}$? $y=\text{const}$? $z=\text{const}$?

2478. Испитати методом пресека график функције $z=xy$. Шта претстављају пресеци равнима $x=\text{const}$? $y=\text{const}$? $z=\text{const}$?

2479. Испитати методом пресека површину $z=y^2-x^3$.

2480. Испитати методом пресека површину $z^3=ax^2+by^2$ ($a>0$; $b>0$).

2481. Испитати методом пресека а) површину $z^2=y^6-x^3$; б) површину $z=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$; нацртати шематски ове површине.

§ 2. Најпростије испитивање функција више променљивих

У задацима 2482—2501 наћи области дефинисаности наведених, аналитички задатих функција:

2482. $z=+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

2483. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

2484. $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$.

2485. $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

2486. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

2487. $z=\ln[x\ln(y-x)]$.

2488. $z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arc\,sec}(x^2+y^2)$.

2489. $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

2490. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

2491. $z=\sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2492. $z=\ln xy$.

2493. $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$.

2494. $z=xy+\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

2495. $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$. **2496.** $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$.

2497. $z=\sqrt{x\sin y}$. **2498.** $z=\ln x-\ln\sin y$.

2499. $z=\arcsin[2y(1+x^2)-1]$.

2500. $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.

2501. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\ (R>r)$.

2502. Дефинициона област функције $z=f(x;y)$ је паралелограм са странама: $y=0$; $y=2$; $y=\frac{1}{2}x$; $y=\frac{1}{2}x-1$; границе се искључују. Како претставити ову област неједначинама?

2503. Дефинициона област функције $z=f(x;y)$ је фигура ограничена параболама $y=x^2$ и $x=y^2$ (укључујући и границе). Дати ову област неједначинама.

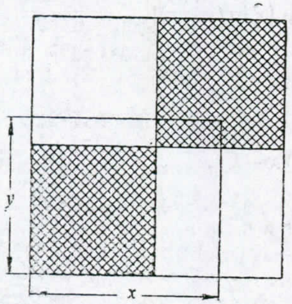
2504. Претставити неједначинама отворену област коју чини равнострани троугао са теменом у координатном почетку, са странама равним a, при чему се једна од њих поклапа са позитивном полуосом Ox.

2505. Област је ограничена бесконачним кружним цилиндром полупречника R (границе се искључују) са осом паралелном оси Oz и која пролази кроз тачку $(a;b;c)$. Задати ову област помоћу неједначина.

2506. Записати помоћу неједначина област ограничену лоптом полупречника R, са центром у тачки $(a;b;c)$ (укључујући границу).

2507. Темена правоуглог троугла леже строго унутар круга полупречника R. Површина S троугла је функција његових катета x и y $[S=\varphi(x;y)]$. Какви су: а) дефинициона област функције φ; б) дефинициона област одговарајућег аналитичког израза?

2508. У лопту полупречника R уписана је пирамида с правоугаоном основом, чији се врх ортогонално пројектује у тачку пресека дијагонала основе. Запремина V пирамиде је функција ивица x и y њене основе. Хоће ли ова функција бити једнозначна? Саставити за њу аналитички израз. Наћи дефинициону област функције и дефинициону област одговарајућег аналитичког израза.



Сл. 47

2509. Квадратна даска састоји се из 4 квадратића наизменично црних и белих: страна сваког од њих равна је јединици дужине. Посматрајмо правоугаоник чије су стране x и y паралелне ивицама даске, и чији се један угао поклапа са црним углом даске. Површина црног дела овог правоугаоника биће функција од x и y. Где је та функција дефинисана? Претставити је аналитички (в. сл. 47).

2510. Наћи прекидне тачке функције $z=\frac{2}{x^2+y^2}$. Како се понаша функција у околини прекидне тачке?

2511. Наћи прекидне тачке функције $z=\frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

2512. Где ће бити прекидна функција $z=\frac{1}{x-y}$?

2513. Где ће бити прекидна функција $z=\frac{1}{\sin\pi x}+\frac{1}{\sin\pi y}$?

2514. Где ће бити прекидна функција $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$?

2515. Под $E(u)$ подразумева се највећи цео број који није већи од u (в. зад. 61 гл. 1). Испитати карактер прекида следећих функција: 1) $z=E(x+y)$; 2) $z=E(+\sqrt{x^2+y^2})$; 3) $z=E\left(\frac{y}{x}\right)$.

2516. Навести примере тачака у којима је функција

$$z=\frac{xy}{(x^2+y^2)(x+1)(y+1)}$$

за $x\neq0$, $y\neq0$; $z=0$ за $x=0$ и $y=0$:

1) непрекидна у односу на x и прекидна у односу на y;
2) непрекидна у односу на y и прекидна у односу на x;
3) непрекидна у односу на сваку од променљивих, али прекидна у односу на њихов скуп;
4) непрекидна у односу на скуп променљивих.

У задацима 2517—2522 израчунати границе датих функција узимајући да независно променљиве произвољно теже својим граничним вредностима:

2517. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{+\sqrt{xy+1}-1}$. **2518.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{+\sqrt{xy-1}-1}{x+y}$.

2519. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(xy)}{x}$. **2520.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

2521. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$. **2522.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

2523. Уверити се да израз $u=\frac{x+y}{x-y}$ за $x\to0$, $y\to0$ може тежити произвољној граници (у зависности од тога како теже нули x и y). Навести пример таквог мењања x и y да би био $\lim u=1$; $\lim u=2$.

2524. Нацртати фамилију нивоских линија функције $z=xy$ дајући променљивој z вредности од -5 до $+5$ напредујући по једну јединицу (види задатак 2478).

2525. Исто то за функцију $z=x^2-y$.

2526. Исто то за функцију $z=x^2y+x$ дајући променљивој z вредности од -4 до $+4$ напредујући по једну јединицу.

2527. Исто то за функцију $z=y(x^2+1)$.

2528. Исто то за функцију $z=\frac{xy-1}{x^2}$.

2529. Исто то за функцију $z=(x^2+y^2)-2(x^2-y^2)$ од $z=-1$ до $z=\frac{3}{2}$, напредујући по $\frac{1}{2}$. Наћи екстремуме ове функције (види задатак 2481 б).

2530. Нацртати фамилију ниво-линија функције z, дефинисане имплицитно једначином $\left(\frac{3}{2}\right)^z[(x-5)^2+y^2]=\left(\frac{2}{3}\right)^z[(x+5)^2+y^2]$, дајући промењивој z вредности од -4 до $+4$ напредујући по једну јединицу.

2531. Нацртати фамилију ниво-линија функције z дефинисане имплицитно једначином $y^2=2^{-z}(x-z)$, дајући промењивој z вредности од -3 до 3 напредујући по $\frac{1}{2}$.

2532. Једначина стања угљене киселине која везује њену запремину v, притисак p и температуру T, има по Van-der-Valsu облик

$$\left(p+\frac{0{,}00874}{v^2}\right)(v-0{,}0023)=0{,}00389\ T.$$

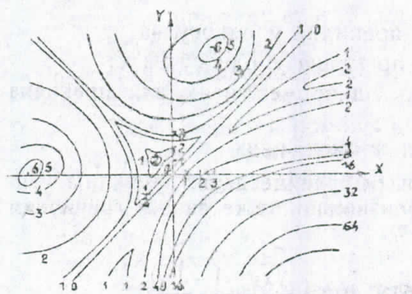
Сматрајући T функцијом од p и v нацртати фамилију ниво-линија за T (Van-der-Valsove изотерме), дајући промењивој T вредности од 200^0 до 300^0 напредујући по 10^0 (тј. у размацима од по 10^0).

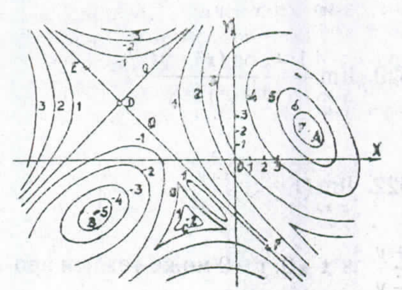
2533. На сл. 48 нацртане су ниво-линије функције $z=f(x;y)$. Нацртати графике функција:

1) $z=f(x;0)$; 2) $z=f(x;4)$;
3) $z=f(1;y)$; 4) $z=f(-5;y)$;
5) $z=f(x;3x)$; 6) $z=f(x;x^2)$.

Где функција $z=f(x;y)$ има екстремуме и колики су они?

2534. На сл. 49 претстављена су ниво-линије функције $z=f(x;y)$. Какве особености има функција у тачкама A, B, C, D и на линији EF?





Сл. 48 и 49

§ 3. Изводи и диференцијали функција више промењљивих

2535. Запремина гаса v је функција његове температуре и притиска: $v=f(p;T)$. Средњи коефицијент ширења гаса при сталном притиску и промени температуре од T_1 до T_2 зове се израз $\frac{v_2-v_1}{v_2(T_2-T_1)}$. Шта је природно назвати коефицијентом ширења при сталном притиску на датој температури T_0?

2536. Вертикално померање y тачке под утицајем таласа (фреквенције ν и амплитуде A) који се креће дуж осе Ox брзином v, дато је обрасцем $y=A\sin\left[\frac{2\pi\nu}{v}(x-vt)\right]\equiv F(x;t)$. Какав физикални смисао имају парцијални изводи $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ у тачки x_0 и у тренутку t_0?

2537. Температура у датој тачки A штапа Ox је функција апсцисе x тачке A и времена t: $\vartheta=f(x;t)$. Какав физикални смисао имају парцијални изводи $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$?

2538. Површина S правоугаоника изражава се преко основице b и висине h обрасцем $S=bh$. Наћи $\frac{\partial S}{\partial h}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$ и објаснити геометриски смисао добијених резултата.

2539. Имамо две функције $u=\sqrt{a^2-x^2}$ (a је константа) и $z=\sqrt{y^2-x^2}$. Наћи $\frac{du}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$. Упоредити резултате.

У задацима 2540—2572 наћи парцијалне изводе датих функција (по свакој од независно промењљивих):

2540. $z=x-y$. **2541.** $z=x^3y-y^3x$.

2542. $\vartheta=axe^{-t}+bt$. (a и b су константе).

2543. $z=\frac{u}{v}+\frac{v}{u}$. **2544.** $z=\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$.

2545. $z=(5x^2y-y^3+7)^3$. **2546.** $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

2547. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

2548. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$. **2549.** $z=\frac{1}{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

2550. $z=x^y$. **2551.** $z=\ln(x^2+y^2)$.

2552. $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. **2553.** $z=\arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2554. $z=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$. **2555.** $z=e^{-\frac{x}{y}}$.

2556. $z=\ln(x+\ln y)$. **2557.** $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{v+w}{v-w}$.

2558. $z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$. **2559.** $z=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$.

2560. $z=(1+xy)^y$. **2561.** $z=xy\ln(x+y)$.

2562. $z=x^{x^y}$. **2563.** $u=xyz$.

2564. $u=xy+yz+zx$.

2565. $u=x^4+yz^2+3yx-x+z$.

2566. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2567. $w=xyz+yzv+zvx+vxy$.

2568. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

2569. $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$.

2570. $u=\ln(x+y+z)$.

2571. $u=x^{\frac{y}{z}}$.

2572. $u=x^{y^z}$.

2573. $f(x;y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$; наћи $f_x'(3;4)$.

2574. $z=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$; наћи $(z_y')_{\substack{x=1\\y=0}}$.

2575. $u=\dfrac{\cos(\varphi-2\psi)}{\cos(\psi+2\varphi)}$; наћи $\left(\dfrac{\partial u}{\partial\psi}\right)_{\substack{\varphi=\pi\\ \psi=\frac{\pi}{4}}}$.

2576. $u=\sqrt{az^3-bt^3}$; наћи вредности $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ за $z=b$, $t=a$.

2577. $z=\dfrac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$; наћи $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ за $x=y=0$.

2578. $u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$; наћи $\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}$.

2579. $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$; наћи $u_x'+u_y'+u_z'$ за $x=y=z=1$.

2580. $f(x;y)=x^3y-y^3x$; наћи $\left(\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}}\right)_{\substack{x=1\\y=2}}$.

2581. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$; наћи $d_y z$ за $x=2$, $y=5$, $\Delta y=0{,}01$.

2582. $z=\sqrt{\ln xy}$; наћи $d_x z$ за $x=1$, $y=1{,}2$, $\Delta x=0{,}016$.

2583. $u=p-\dfrac{qr}{p}+\sqrt{p+q+r}$; наћи $d_p u$ за $p=1$, $q=3$, $r=5$, $\Delta p=0{,}01$.

2584. Колики угао заклапа са позитивним смером апсцисне осе тангента на криву $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ у тачки (2; 4; 5)?

2585. Колики угао заклапа са позитивним смером ординатне осе тангента на криву $\begin{cases} z=+\sqrt{1+x^2+y^2}\\ x=1\end{cases}$ у тачки $(1;\ 1;\ \sqrt{3})$?

2586. Под којим се углом секу равне криве, које се добијају кад се површине $z=x^2+\dfrac{y^2}{6}$ и $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ пресеку равнином $y=2$?

У задацима 2587—2590 наћи парцијалне диференцијале датих функција по свакој од независних променљивих:

2587. $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$.

2588. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

2589. $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

2590. $u=\ln(x^3+2y^3-z^3)$.

У задацима 2591—2601 наћи тоталне диференцијале датих функција:

2591. $z=x^2y^4-y^3x^3+x^4y^2$.

2592. $z=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

2593. $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$.

2594. $u=\dfrac{s+t}{s-t}$.

2595. $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

2596. $z=\sin(xy)$.

2597. $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

2598. $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

2599. $z=\operatorname{arc\,tg}(xy)$.

2600. $z=y^x$.

2601. $u=x^{yz}$.

2602. Наћи вредност тоталног диференцијала функције $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ за $x=3$; $y=4$; $\Delta x=0{,}1$; $\Delta y=0{,}2$.

2603. Наћи вредност тоталног диференцијала функције $z=e^{xy}$ за $x=1$; $y=1$; $\Delta x=0{,}15$; $\Delta y=0{,}1$.

2604. Наћи вредност тоталног диференцијала функције $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ за $x=2$; $y=1$; $\Delta x=0{,}01$; $\Delta y=0{,}03$.

2605. Израчунати приближно промену функције $z=\dfrac{x+3y}{y-3x}$ за промену независно промењљивих: x од $x_1=2$ до $x_2=2{,}5$ и y од $y_1=4$ до $y_2=3{,}5$.

2606. Израчунати приближно вредност $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$.

2607. Израчунати приближно вредност $1{,}04^{2{,}03}$.

2608. Наћи отсечак праве $x=2$; $y=3$ који лежи између површине $z=x^2+y$ и њене тангентне равни у тачки (1; 1; 2).

2609. Тело је измерено у ваздуху (4,1 ± 0,1 gr) и у води (1,8 ± 0,2 gr). Наћи специфичну тежину тела. Оценити грешку.

2610. Полупречник основе конуса је 10,2 ± 0,1 cm, генератриса је 44,6 ± 0,1 cm. Наћи запремину конуса. Оценити грешку.

2611. За израчунавање површине троугла помоћу стране a и углова B и C користимо се обрасцем

$$S=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)}.$$

Наћи апсолутну грешку δS површине, ако су апсолутне грешке датих елемената респективно равне δA, δB, δC.

2612. Страна троугла има дужину 2,4 m и расте брзином 10 cm/sek; друга страна дужине 1,5 m опада брзином 5 cm sec. Угао између ових страна, који износи 60°, расте брзином од 2° у секунди. Како се и којом брзином мења површина троугла?

2613. У зарубљеној купи полупречници основа су $R=30$ cm и $r=20$ cm; висина $h=40$ cm. Како се мења запремина конуса ако се R повећа за 3 mm, r за 4 mm, h за 2 mm?

2614. Показати да при израчунавању периода T осциловања клатна по формули $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l је дужина клатна, g је убрзање земљине теже), релативна грешка не премашује полузбир релативних грешака дозвољених при одређивању величина l и g (претпоставља се да су све грешке довољно мале).

§ 4. Извод по правцу. Појам градијента.

2615. Наћи извод функције $z=3x^4+xy+y^3$ у тачки $M(1;2)$ по правцу који са позитивним смером осе Ox заклапа угао од 135^0.

2616. Наћи извод функције $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ у тачки $M(3;1)$ по правцу који иде од ове тачке ка тачки $(6;5)$.

2617. Наћи извод функције $z=\operatorname{arc\,tg} xy$ у тачки $(1;1)$ у правцу бисектрисе 1-ог координатног угла.

2618. Наћи извод функције $u=xy^2+z^3-xyz$ у тачки $M(1;1;2)$ у правцу који са координатним осама заклапа респективно углове 60^0, 45^0, 60^0.

2619. Наћи извод функције $w=xyz$ у тачки $A(5;1;2)$ у правцу који иде од ове тачке ка тачки $B(9;4;14)$.

2620. Наћи извод од $z+\ln(e^x+e^y)$ у координатном почетку у привцу α.

2621. Хоће ли бити диференцијабилне у координатном почетку функције: 1) $z=+\sqrt{x^2+y^2}$; 2) $z=\ln(e^x+e^y)$; 3) $z=e^{xy}$.

2622. $\psi(x;y)=x^2-2xy+3y-1$. Наћи компоненте градијента у тачки $(1;2)$.

2623. $u=5x^2y-3xy^3+y^4$. Наћи компоненте градиента.

2624. $z=x^2+y^2$. Наћи градиент z у тачки $(1;2)$ и изразити га помоћу ортова $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

2625. $z=+\sqrt{4+x^2+y^2}$. Наћи $\operatorname{grad} z$ у тачки $(2;1)$.

2626. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$. Наћи $\operatorname{grad} z$.

2627. Наћи највећу стрмину уздизања површине $z=\ln(x^2+4y^2)$ у тачки $(6;4;\ln 100)$.

2628. Наћи највећу стрмину уздизања површине $z=x^y$ у тачки $(2;2;4)$.

2629. $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$. Наћи угао између градијената ове функције у тачкима $(1;1)$ и $(3;4)$.

2630. Дате су функције $z=+\sqrt{x^2+y^2}$ и $u=x-3y+\sqrt{3xy}$. Наћи угао између градијената ових функција у тачки $(3;4)$.

2631. У којој је тачки градијент функције $z=\ln\left(x+\frac{1}{y}\right)$ раван $\vec{i}-\frac{16}{9}\vec{j}$?

2632. Наћи тачке у којима апсолутна вредност градијента функције $u=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ износи 2.

Сингуларним тачкама функције зову се тачке у којима је градијент једнак нули или не постоји.

У задацима 2633—2637 наћи сингуларне тачке датих функција:

2633. $z=x^2+y^2+1$. **2634.** $\varphi=x^2-2x-y^4+3$.

2635. $u=x^3+y^3+x+y$. **2636.** $u=2x^2-4x$.

2637. $w=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

2638. $\varphi(x;y;z)=x^3y^2z$; наћи компоненте $\operatorname{grad}\varphi$.

2639. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; наћи $\operatorname{grad} u$ и изразити га помоћу ортова $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

2640. $u=\frac{a}{x^2+y^2+z^2}$; показати да је $\operatorname{grad} u=-\frac{2u^2}{a}\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$.

2641. Показати да функција $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ задовољава једначину $u=2\ln 2-\ln(\operatorname{grad} u)^2$.

2642. Наћи сингуларне тачке функције:

$$\varphi(x;y;z)=x^3+3xyz+3y-3z.$$

2643. Ако је $\vec{u}=\vec{u}(x;y;z)=\vec{i}\,u_1(x;y;z)+\vec{j}\,u_2(x;y;z)+\vec{k}\,u_3(x;y;z)$ променљиви вектор, онда се збир $\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}$ назива његовом дивергенцијом; оно се обележава са $\operatorname{div}\vec{u}$ (в. Курс, т. II. стр. 214): $\operatorname{div}\vec{u}=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}$.

Нека је дата функција $\varphi(x;y;z)$ и променљиви вектор $\vec{u}=\vec{u}(x;y;z)$; тада производ $\varphi\vec{u}$ даје, очевидно, неки променљиви вектор. Доказати теорему: $\operatorname{div}(\varphi\vec{u})=\varphi\operatorname{div}\vec{u}+\vec{u}\operatorname{grad}\varphi$. Други сабирак на десној страни је скаларни производ

ГЛАВА IX

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН И ЊЕГОВЕ НАЈПРОСТИЈЕ ПРИМЕНЕ

§ 1. Правила диференцирања

2644. $u=\ln(x^2+y^2)$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=?$

2645. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=?$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=?$

2646. $z=(2x+y)^{2x+y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2647. $z=(1+\log_y x)^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2648. $z=xy\,e^{\sin \pi xy}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2649. $z=(x^2+y^2)\,\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2650. $z=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2651. $z=\ln\left(xy^2+yx^2+\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}\right)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2652. $z=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2653. $z=\sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2}+\arcsin\dfrac{x+y}{xy}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2654. $z=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}-1}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+1}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

2655. $u=\dfrac{k}{(x^2+y^2+z^2)^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=?$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=?$

2656. $u=\operatorname{arc\,tg}(x-y)^z$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=?$

2657. $u=\ln\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=?$

2658. $w=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x^2y^2+z^2v^2-xyzv)+\ln\cos(x^2y^3+z^2v^2-xyvz)$; $\dfrac{\partial w}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial w}{\partial y}=?$; $\dfrac{\partial w}{\partial z}=?$; $\dfrac{\partial w}{\partial v}=?$

2659. $u=e^{x-2y}$, где $x=\sin t$, $y=t^3$; $\dfrac{du}{dt}=?$

2660. $u=\arcsin\dfrac{x}{z}$, где $z=\sqrt{x^2+1}$; $\dfrac{du}{dx}=?$

2661. $u=\ln(e^x+e^y)$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=?$ Одредити $\dfrac{du}{dx}$, ако је $y=x^3$?

2662. $z=\operatorname{arc\,tg}(xy)$; наћи $\dfrac{dz}{dx}$, ако је $y=e^x$.

2663. $u=z^2+y^2+zy$; $z=\sin t$; $y=e^t$; $\dfrac{du}{dt}=?$

2664. $z=\operatorname{tg}(3t+2x^2-y)$; $x=\dfrac{1}{t}$; $y=\sqrt{t}$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

2665. $z=\arcsin(x-y)$; $x=3t$; $y=4t^3$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

2666. $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$; $y=a\sin x$; $z=\cos x$; $\dfrac{du}{dx}=?$

2667. $z=x^2y-y^2x$; $x=u\cos v$; $y=u\sin v$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

2668. $z=x^2\ln y$; $x=\dfrac{u}{v}$; $y=3u-2v$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

2669. $z=\dfrac{xy\operatorname{arc\,tg}(xy+x+y)}{x+y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$, $dz=?$

2670. $z=(x^2+y^2)\,e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$; $dz=?$

2671. Уверити се да функција $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$, где је $x=u-v$; $y=u+v$, задовољава диференцијалну једначину $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{v-u}{v^2+u^2}$.

2672. Уверити се да функција $z=\dfrac{x+y}{x-y}$, где је $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{\partial z}{\partial v}-u\operatorname{ctg}v\,\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2z}{\cos 2v}.$$

2673. $z=f(x^2-y^2;\ e^{xy})$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$; $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

2674. $u=\sin x+F(\sin y-\sin x)$; уверити се да је $\frac{\partial u}{\partial y}\cos x+\frac{\partial u}{\partial x}\cos y=$ $=\cos x\cos y$, па ма каква била диференцијабилна функција F.

2675. $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$; уверити се да је $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$, па ма каква била диференцијабилна функција f.

2676. Показати да хомогена диференцијабилна функција нултог степена хомогености $z=F\left(\frac{y}{x}\right)$ (в. зад. 2465, глава VIII) задовољава диференцијалну једначину $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

2677. Показати да хомогена функција k-тог степена хомогености $u=x^kF\left(\frac{z}{x};\ \frac{y}{x}\right)$, где је F диференцијабилна функција, задовољава једначину $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=k\cdot u$.

У задацима 2678—2688 наћи $\frac{dy}{dx}$ датих имплицитних функција.

2678. $x^3y-y^3x=a^4$. **2679.** $x^2y^2-x^4-y^4=a^4$

2680. $xe^y+ye^x-e^{xy}=0$. **2681.** $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$.

2682. $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$. **2683.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

2684. $xy-\ln y=a$. **2685.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{a}-\frac{y}{a}=0$.

2686. $yx^2=e^y$. **2687.** $ye^x+e^y=0$. **2688.** $y^x=x^y$.

2689. $F(x;y)=F(y;x)$. Показати да се извод од y по x може изразити разломком чији се бројитељ добија из именитеља узајамном заменом места y и x.

2690. $x^2+y^2-4x-10y+4=0$; наћи $\frac{dy}{dx}$ за $x=6$; $y=2$ и за $x=6$; $y=8$. Дати геометриско тумачење добијених резултата.

2691. $x^4y+xy^4-ax^2y^2=a^5$; наћи $\frac{dy}{dx}$ за $x=y=a$.

2692. Доказати да из $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$ следи:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

2693. Доказати да из $a+b(x+y)+cxy=m(x-y)$ следи:

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{dy}{a+2by+cy^2}.$$

2694. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$; $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

2695. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$; $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

2696. $z^3+3xyz=a^3$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$; $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

2697. $e^z-xyz=0$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$; $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

2698. Показати да из релације $\varphi(cx-az;\ cy-bz)=0$ следи: $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$ па ма каква била диференцијабилна функција φ.

2699. Наћи тотални диференцијал функције z дефинисане једначином

$$\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1.$$

2700. Функција z променљивих x и y дата је параметарски:

$$x=a\sin u\cos v;\quad y=a\cos u\cos v;\quad z=a\sin v.$$

Елиминацијом параметара u и v прећи на имплицитни облик функције z давши му по могућству симетричан склоп.

2701. Функција z дата је параметарски $x=u+v$; $y=u-v$; $z=u\,v$. Изразити z као експлицитну функцију од x и y.

2702. $x=u+v$; $y=u^2+v^2$; $z=u^3+v^3$; изразити z као експлицитну функцију од x и y.

2703. $x=u\cos v$; $y=u\sin v$; $z=kv$; изразити z као експлицитну функцију од x и y.

2704. а) $\begin{cases} x=\frac{u^2+v^2}{2}; & \frac{\partial z}{\partial x}=?\\ y=\frac{u^2-v^2}{2}; & \frac{\partial z}{\partial y}=?\\ z=uv; & dz=?\end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\sqrt{a}(\sin u+\cos v); & \frac{\partial z}{\partial x}=?\\ y=\sqrt{a}(\cos u-\sin v); & \frac{\partial z}{\partial y}=?\\ z=1+\sin(u-v); & dz=?\end{cases}$

2705. а) $\begin{cases} x=u+v; & \frac{\partial z}{\partial x}=?\\ y=u-v; & \frac{\partial z}{\partial y}=?\\ z=u^2v^2; & dz=?\end{cases}$ б) $\begin{cases} x=e^u\cos v; & \frac{\partial z}{\partial x}=?\\ y=e^u\sin v; & \frac{\partial z}{\partial y}=?\\ z=uv; & dz=?\end{cases}$

У задацима 2706—2707 наћи тоталне диференцијале функција датих параметарски:

2706. $x=u\cos v$; $y=u\sin v$; $z=u^2$.

2707. $x=v\cos u-u\cos u+\sin u$;
$y=v\sin u-u\sin u-\cos u$;
$z=(u-v)^2$.

2708. u и v су функције од x, y, z, које задовољавају једначине:

$$uv = 3x - 2y + z; \quad v^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Показати да је

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

2709. Нека је $y = f(x; t)$; $F(x; y; t) = 0$. Показати да је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

§ 2. Виши изводи. Тајлорова формула

2710. $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. Уверити се да је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

2711. $z = x^y$. Уверити се да је $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

2712. $z = e^x (\cos y + x \sin y)$. Уверити се да је $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

2713. $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$. Уверити се да је $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

У задацима 2714—2721 наћи $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ датих функција

2714. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$. **2715.** $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

2716. $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$. **2717.** $z = \sin^2(ax+by)$.

2718. $z = e^{xe^y}$. **2719.** $z = \frac{x-y}{x+y}$. **2720.** $z = y^{\ln x}$.

2721. $z = \operatorname{arc\,cin}(xy)$. **2722.** $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = ?$

2723. $z = e^{xy^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$ **2724.** $z = \ln(x^2+y^2)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = ?$

2725. $z = \sin(xy)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = ?$ **2726.** $w = e^{xyz}$; $\frac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

2727. $v = x^m y^n z^p$; $\frac{\partial^6 v}{\partial x\, \partial y^3\, \partial z^2} = ?$

2728. $z = \ln(e^x + e^y)$; уверити се да је $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ и да је $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$.

2729. $z = \frac{x^2 y^2}{x+y}$; показати да је $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$.

2730. $v = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; показати да је $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$.

2731. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; показати да је $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$ и $\frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}$.

2732. $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$; показати да је $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2733. $v = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$; показати да је

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\, \partial x}\right) = 0.$$

2734. $y = \varphi(x + \mu t) + \psi(x - \mu t)$; показати да је $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ па ма какве биле двапут диференцијабилне функције φ и ψ.

2735. $u = \varphi(x) + \psi(y) + (x-y)\psi'(y)$; показати да је $(x-y)\frac{\partial^2 x}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$; ($\varphi$ и ψ су двапут диференцијабилне функције).

2736. $z = y \cdot \varphi(x^2 - y^2)$; показати да је $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ (φ је диференцијабилна функција).

2737. $z = x\cdot\varphi(x+y) + y\cdot\psi(x+y)$; показати да је $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (φ и ψ су двапут диференцијабилне функције).

2738. $z = f[x + \varphi(y)]$; показати да је $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (φ је диференцијабилна, а f двапут диференцијабилна функција).

2739. $u = xe^y + ye^x$; показати да је $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} + y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y}$.

2740. $u = \ln\frac{x^2 - y^2}{xy}$; показати да је $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial u^3} = 2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right)$.

2741. $u^4 - 4xyzu = a^4$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = ?$

***2742.** Колико различитих парцијалних извода p-тог реда има функција од n променљивих?

У задацима 2743—2747 наћи диференцијале другог реда датих функција (x и y су независно променљиве):

2743. $z = xy^2 - x^2 y$. **2744.** $z = \ln(x-y)$.

2745. $z = \dfrac{1}{2(x^2+y^2)}$. **2746.** $z = x \sin^2 y$. **2747.** $z = e^{xy}$.

2748. $u = xyz$. (x, y, z су независно променљиве); $d^2 u = ?$

2749. $z = \sin(2x+y)$; (x, y су независно променљиве); $d^3 z = ?$

2750. $u = \sin(x+y+z)$; (x; y, z су независно променљиве); $d^2 u = ?$

2751. $u = \ln(x+y+z)$; (x, y, z су независно променљиве); $d^4 u = ?$

2752. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; ($x$, y су независне променљиве, z је њихова функција); наћи $d^2 z$.

2753. $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$; разложити $f(x+h;\ y+k)$ по степенима од h и k.

2754. $f(x;\ y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4$; наћи прираштај који добија функција прелазом независних променљивих x и y од вредности $x=5$, $y=6$ на вредности $x=5+h$, $y=6+k$.

2755. $f(x;\ y) = \dfrac{xy^3}{4} - yx^3 + \dfrac{x^2 y^2}{2} - 2x + 3y - 4$; наћи прираштај који добија функција прелазом независно променљивих од вредности $x=1$, $y=2$ на вредности $x=1+h$, $y=2+k$. Задржавајући чланове до другог степена закључно израчунати $f(1{,}02;\ 2{,}03)$.

2756. $f(x;\ y;\ z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$; разложити $f(x+h;\ y+k;\ z+l)$ по степенима од h, k, l.

2757. Разложити $z = \sin x \sin y$ по степенима од $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right)$; дати чланове првог и другог реда и R_2.

2758. $z = x^y$; разложити по степенима од $(x-1)$, $(y-1)$ дајући чланове до трећег реда закључно. Искористити добијени резултат за израчунавање (без таблица!) вредности $1{,}1^{1{,}02}$.

2759. $f(x,\ y) = e^x \sin y$; разложити $f(x+h;\ y+k)$ по степенима од h и k заустављајући се на члановима трећег реда по h и k.

2760. Написати неколико првих чланова Маклореновог реда функције $e^x \sin y$.

2761. Написати неколико првих чланова Маклореновог реда функције $e^x \ln(1+y)$.

2762. Изразити прираштај Δz функције $z = \ln(x+y)$ помоћу вредности независно променљивих x и y и њихових прираштаја Δx и Δy.

У задацима 2763—2766 разложити у Маклоренов ред дате функције:

2763. $z = \dfrac{1}{1-x-y+xy}$. **2764.** $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x-y}{1+xy}$.

2765. $z = \ln(1-x)\ln(1-y)$. **2766.** $z = \ln \dfrac{1-x-y+xy}{1-x-y}$.

§ 3. Екстремне вредности функција више променљивих

***2767.** Наћи стационарну тачку функције $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$. Уверити се да је нађена тачка — тачка максимума.

2768. Наћи стационарну тачку функције $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$. Уверити се да је нађена тачка — тачка максимума.

2769. Наћи стационарну тачку функције $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$. Уверити се да је нађена тачка — тачка максимума.

У задацима 2770—2779 наћи стационаране тачке датих функција:

2770. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. **2771.** $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

2772. $z = xy(a-x-y)$. **2773.** $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$.

2774. $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4};\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2775. $z = \dfrac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$. **2776.** $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$.

2777. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

2778. $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22-x-y-z)$.

2779. $z = 4u + 2v + 2w + \sqrt{1-u^2-v^2-w^2}$.

2780. Функција z дата је имплицитно: $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$. Наћи стационарне тачке.

2781. Функција z дата је имплицитно:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$$

Наћи стационарне тачке.

2782. Наћи највећу и најмању вредност функције $z = x^2 - y^2$ у кругу $x \leqslant 2\cos t$, $y \leqslant 2\sin t$.

2783. Наћи највећу вредност функције $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ у правоугаонику, ограниченом правима: $x=0$, $y=0$, $x=1$; $y=2$.

2784. Наћи највећу вредност функције $z = yx^2(4-x-y)$ у троуглу ограниченом правима: $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

2785. Разложити позитиван број a на 3 позитивна сабирка тако да њихов производ буде највећи.

2786. Претставити позитивни број a у облику производа од четири позитивна множитеља тако да њихов збир буде најмањи,

2787. У равни XOY наћи тачку такву да збир квадрата растојања те тачке од три праве: $x=0$, $y=0$, $x+2y-16=0$ буде најмањи.

2788. Кроз тачку $(a; b; c)$ провести раван тако да запремина тетраедра који та раван отсеца од координатног триедра, буде највећа.

2789. Дато је n тачака: $A_1(x_1; y_1; z_1), \ldots, A_n(x_n; y_n; z_n)$. У равни XOY наћи тачку такву да збир квадрата њених растојања од свих датих тачака буде најмањи.

2790. Дате су три тачке: $A(0; 0; 12)$, $B(0; 0; 4)$ и $C(8; 0; 8)$. У равни XOY наћи тачку D такву да лопта која пролази кроз A, B, C и D има најмањи полупречник.

2791. Уверити се да се најекономичнији облици и димензије правоугаоног басена добијају у случају кад је основа квадрат, а дубина је једнака половини основне ивице.

*__2792.__ Дат је један од углова четвороугла уписаног у круг. Какав треба да буде облик четвороугла да би он имао највећу могућу површину?

2793. У дату лопту пречника $2d$ уписати правоугли паралелопипед највеће запремине.

2794. Уверити се да функција $z=x^2+xy+y^2+\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{a^3}{y}$ има минимум у тачки $x=y=\dfrac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

2795. Уверити се да за $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ функција $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ има минимум.

2796. Уверити се да за $x=5$, $y=6$ функција $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$ има минимум.

2797. Наћи стационарне тачке функције $z=x^3y^2(12-x-y)$, које задовољавају услов $x>0$, $y>0$, и испитати њихов карактер.

У задацима 2798—2803 наћи стациониране тачке датих функција и њихове одговарајуће вредности.

2798. $z=x^m+y^m$ за $x+y=2$.

2799. $z=xy$ за $x^2+y^2=2a^2$.

2800. $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ за $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}$.

2801. $z=a\cos^2 x+b\cos^2 y$ за $y-x=\dfrac{\pi}{4}$.

2802. $u=x+y+z$ за $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$.

2803. $u=xyz$ за $\begin{cases} x+y+z=5, \\ xy+xz+yz=8. \end{cases}$

*__2804.__ Доказати да важи неједнакост:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2.$$

Уопштити.

Задатке 2805—2823 најподесније је решавати као задатке условног екстремума.

2805. У равни $3x-2z=0$ наћи тачку за коју је збир квадрата отстојање од тачака $A(1; 1; 1)$ и $B(2; 3; 4)$ најмањи.

2806. У равни $x+y-2z=0$ наћи тачку за коју је збир квадрата отстојање од равни $x+3z=6$ и $y+3z=2$ најмањи.

2807. Дате су тачке $A(4; 0; 4)$; $B(4; 4; 4)$; $C(4; 4; 0)$. На површини лопте $x^2+y^2+z^2=4$ наћи тачку S такву да запремина пирамиде $SABC$ буде а) највећа; б) најмања. Проверити одговор методама елементарне геометрије.

2808. Наћи правоугли паралелопипед дате запремине v, а најмање површине.

2809. Наћи правоугли паралелопипед дате површине S а највеће запремине.

2810. Наћи запремину највећег правоуглог паралелопипеда који се може уписати у елипсоид са полуосама a, b, c.

2811. Комора има облик цилиндра с насађеним на њега коничним завршетком. Какав треба да буде однос димензија такве коморе при датој запремини, па да се за њену израду утроши најмања количина материјала?

2812. Од свих правоуглих паралелопипеда који имају дату дијагоналу наћи онај који има највећу запремину.

2813. Одредити спољашње димензије отвореног (без поклопца) сандука облика правоуглог паралелопипеда са датом дебљином зидова α и запремином v, да би се на њега утрошила најмања количина материјала.

2814. Наћи највећу запремину паралелопипеда за дати збир $12a$ свих његових ивица.

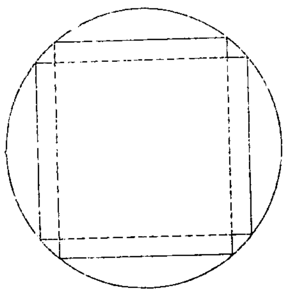
2815. Око дате елипсе описати троугао са основом паралелном великој оси, чија би површина била најмања.

2816. Наћи стране правоуглог троугла који при датој површини S има најмањи обим.

2817. У прав елиптични конус, чије су полуосе основе равне a и b cm, висина h cm, уписана је пирамида с правоугаоном основом тако да су основне ивице паралелне осама, а пресек дијагонала основе лежи у центру елипсе. Колике морају бити основне ивице и висина ове пирамиде да би њена запремина била највећа? Колика је та највећа запремина?

2818. Наћи правилну тространу пирамиду дате запремине која има најмањи збир ивица.

2819. Из круга полупречника R треба изрезати симетричну фигуру у облику крста (в. сл. 50) тако да кад је савијемо по тачкастим линијама, добијемо кутију а) највеће бочне површине; б) највеће запремине. Колике морају бити димензије изрезане фигуре?



Сл. 50

2820. На елипси дате су две тачке. Наћи на истој елипси трећу тачку тако да троугао са теменима у поменутим тачкама, има највећу површину.

2821. На елипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ повући нормалу највећег отстојања од координатног почетка.

2822. На обртном елипсоиду $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ наћи тачке најмање и највише удаљене од равни $3x+4y+12z=288$.

2823. Дате су равне криве $f(X;\ Y)=0$ и $\varphi(X;\ Y)=0$. Показати да екстремна вредност растојања између тачака $(x;\ y)$ и $(\xi;\ \eta)$, које леже респективно на овим кривим, постоји ако је задовољен услов:

$$\frac{x-\xi}{y-\eta}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{\substack{X=x\\ Y=y}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{\substack{X=x\\ Y=y}}}=\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)_{\substack{X=\xi\\ Y=\eta}}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y}\right)_{\substack{X=\xi\\ Y=\eta}}}.$$

Користећи се овим резултатом наћи најкраће растојање између елипсе $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ и праве $x+y-8=0$.

§ 4. Геометриске примене

Тангенте и нормале. Сингуларне тачке кривих

У задацима 2824—2826 за дате криве саставити једначине тангенте и нормале у датим тачкама.

2824. $x^3y+y^3x=3-x^2y^2$ у тачки $(1;\ 1)$.

2825. $a^2(x^4+y^4)-x^3y^3=9a^6$ у тачки $(a;\ 2a)$.

2826. $\cos xy=x+2y$ у тачки $(1;\ 0)$.

У задацима 2827—2833 наћи сингуларне тачке датих кривих.

2827. $y^2=x^2(x-1)$. **2828.** $a^2x^2=(x^2+y^2)\,y^2$ **2829.** $y^2=ax^2+bx^5$.

2830. $y^2=x(x-a)^2$. **2831.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

2832. $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0$.

2833. $x^4+12x^3-6y^3+36x^2+27y^2-81=0$.

У задацима 2834—2838 за сваку од датих кривих написати једначине тангенте и нормалне равни у датим тачкама.

2834. $x=a\cos\varphi;\quad y=a\sin\varphi;\quad z=\frac{k}{2\pi}\varphi$ у тачки $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

2835. $x=at;\quad y=\frac{1}{2}at^2;\quad z=\frac{1}{3}at^3$ у тачки $t=6$.

2836. $y=t-\sin t;\quad y=1-\cos t;\quad z=4\sin\frac{t}{2}$ у тачки $t=\frac{\pi}{2}$.

2837. $y^2+z^2=25;\quad x^2+y^2=10$ у тачки $(1;\ 3;\ 4)$.

2838. $2x^2+3y^2+z^2=47;\quad x^2+2y^2=z$ у тачки $(-2;\ 1;\ 6)$.

Израчунавање дужине лука просторних кривих

У задацима 2839—2846 наћи дужину лука датих кривих:

2839. $x^2=3y;\quad 2xy=9z$ од тачке $(0;\ 0;\ 0)$ до тачке $(3;\ 3;\ 2)$.

2840. $z^2=2ax;\quad 9y^2=16xz$ од тачке $(0;\ 0;\ 0)$ до тачке $\left(2a;\ \frac{8a}{3};\ 2a\right)$.

2841. $4ax=(y+z)^2;\quad 4x^2+3y^2=3z^2$ од координатног почетка до тачке $(x,\ y,\ z)$.

2842. $y=+\sqrt{2ax-x^2};\quad z=a\ln\frac{2a}{2a-x}$ од координатног почетка до тачке $(x,\ y,\ z)$.

2843. $y=\arcsin\frac{x}{a};\quad z=\frac{1}{4}a\ln\frac{a+x}{a-x}$ од координатног почетка до тачке $\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\pi}{6},\ \frac{a}{4}\ln 3\right)$.

2844. $x=2a^2t;\quad y=3abt^2;\quad z=3b^2t^3$ од координатног почетка до тачке $(x,\ y,\ z)$.

2845. $x=a\cos\varphi;\quad y=a\sin\varphi;\quad z=a\ln\cos\varphi$ од тачке $(a;\ 0;\ 0)$ до тачке $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ -\frac{a}{2}\ln 2\right)$.

2846. $x=e^t\cos t;\quad y=e^t\sin t;\quad z=e^t$ од тачке $(1;\ 0;\ 1)$ до тачке која одговара промењивој вредности параметра $t\ (t>0)$.

Тангенцијалне равни и нормале на површину

У задацима 2847—2856 за дате површине наћи једначине тангенцијалних равни и нормала у датим тачкама.

2847. $z=2x^2-4y^2$ у тачки $(2;\ 1;\ 4)$.

2848. $z=xy$ у тачки $(1;\ 1;\ 1)$.

2849. $z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$ у тачки $(a;\ a;\ -a)$.

2850. $z=+\sqrt{x^2+y^2}-xy$ у тачки $(3;\ 4;\ -7)$.

2851. $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$ у тачки $\left(1;\,1;\,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2852. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ у тачки $\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};\,\dfrac{b\sqrt{3}}{3};\,\dfrac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

2853. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ у тачки $(1;\,2;\,-1)$.

2854. $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$ у тачки $(1;\,1;\,1)$.

2855. $(z^2-x^2)\,xyz-y^5=5$ у тачки $(1;\,1;\,2)$.

2856. $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=y+x+z$ у тачки $(2;\,3;\,6)$.

2857. Показати да једначина тангенцијалне равни за површину другог реда:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

у тачки $(x_0;\,y_0;\,z_0)$ има облик

$$a_{11}xx_0+a_{22}yy_0+a_{33}zz_0+a_{12}(xy_0+yx_0)+a_{13}(xz_0+zx_0)+$$
$$+a_{23}(yz_0+zy_0)+a_{14}(x+x_0)+a_{24}(y+y_0)+a_{34}(z+z_0)+a_{44}=0.$$

2858. За елипсоид $x^2+2y^2+z^2=1$ одредити тангенцијалну раван паралелну са равни $x-y+2z=0$.

2859. За елипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ одредити тангенцијалну раван која отсеца на позитивним координатним полуосама једнаке отсечке.

2860. Показати да се површине

$$x+2y-\ln z+4=0 \quad \text{и} \quad x^2-xy-8x+z+5=0$$

додирују (тј. имају заједничку тангентну раван) у тачки $(2;\,-3;\,1)$.

2861. Доказати да, ако нормала у било којој тачки елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ заклапа са координатним осама углове α, β, γ, а углови радиус-вектора исте тачке са координатним осама су респективно λ, μ, ν, онда важи релација:

$$\frac{\cos\lambda}{a^2\cos\alpha}=\frac{\cos\mu}{b^2\cos\beta}=\frac{\cos\nu}{c^2\cos\gamma}.$$

2862. Показати да тангенцијалне равни површине $xyz=a^3$ образују са координатним равнима тетраедар сталне запремине. Наћи ту запремину.

2863. Показати да тангенцијалне равни површине $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ отсецају на координатним осама отсечке чији је збир сталан $(=a)$.

2864. Показати да је за површину $x^2+y^2+z^2=y$ дужина отсечка нормале између површине и равни XOY равна растојању од координатног почетка до трага нормале на равни XOY.

2865. Одредити геометриско место подножја нормала спуштених из координатног почетка на тангенцијалне равни обртног параболоида $x^2+y^2=2pz$.

2866. Наћи геометриско место подножја нормала спуштених из координатног почетка на тангенцијалне равни површине $xyz=a^3$.

Обвојнице

2867. Наћи једначину обвојнице фамилије правих $y=ax+f(a)$. Посебно узети $f(a)=\cos a$.

2868. Наћи обвојницу фамилије правих $y=2mx+m^4$.

2869. Наћи обвојницу фамилије парабола $y^2=a(x-a)$.

2870. Наћи обвојницу фамилије парабола $ax^2+a^2y=1$.

2871. Наћи обвојницу фамилије кривих $x^2+ay^2=a^3$.

2872. Наћи обвојницу фамилије елипси $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ под условом да је збир полуоса сваке елипсе d.

2873. Права се креће тако да збир дужина отсечака које она отсеца на координатним осама, остаје сталан. Какву криву претставља обвојница добијене фамилије правих?

2874. Наћи обвојницу пречника круга који се котрља без клизања по датој правој.

2875. Над тетивама круга, паралелним датом правцу, као над пречницима, описују се кругови. Наћи обвојницу ове фамилије кругова.

2876. Права се креће тако да производ отсечака које она отсеца на координатним осама, има сталну вредност a. Наћи обвојницу ових правих.

2877. Показати да је свака крива обвојница фамилије својих тангената.

2878. Показати да је еволута криве — обвојница фамилије њених нормала. Наћи еволуту параболе $y^2=2px$ као геометриско место центара кривине и као обвојницу фамилије нормала. Упоредити добијене резултате.

2879. Доказати теорему: ако је крива (A) обвојница фамилије правих $x\cos t+y\sin t-f(t)=0$, онда је еволута криве (A) обвојница фамилије правих $-x\sin t+y\cos t-f'(t)=0$.

ГЛАВА X

ВИШЕСТРУКИ ИНТЕГРАЛИ И ВИШЕСТРУКО ИНТЕГРИРАЊЕ

§ 1. Двоструки и троструки интеграли

2880. Танка плочица (њену дебљину занемарујемо) лежи у равни XOY, заузимајући област D. Густина плочице је функција тачке $\gamma=\gamma(P)=\gamma(x;y)$. Одредити масу плочице.

2881. Тело заузима просторну област D; његова је густина функција тачке $\gamma=\gamma(P)=\gamma(x;y;z)$. Одредити масу тела.

2882. На плочици из задатка 2880 распоређен је електрични набој површинске густине $\pi=\pi(P)=\pi(x;y)$. Колики је укупан набој плочице?

У задацима 2883—2887 наћи неједначине које дају оцену датих интеграла:

2883. $\iint\limits_D (x+y+10)\,d\sigma$ где је D круг $x^2+y^2\leqslant 4$.

2884. $\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma$ где је D круг $x^2+y^2\leqslant 4$.

2885. D је правоугаоник $0\leqslant x\leqslant 1$; $0\leqslant y\leqslant 2$; оценити интеграле а) $\iint\limits_D (x+y+1)\,d\sigma$; б) $\iint\limits_D (x+xy-x^2-y^2)\,d\sigma$.

2886. D је квадрат $0\leqslant x\leqslant 2$; $0\leqslant y\leqslant 2$; оценити интеграле:

1) $\iint\limits_D xy(x+y)\,d\sigma$; 2) $\iint\limits_D (x+1)^y\,d\sigma$; 3) $\iint\limits_D (x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+2)\,d\sigma$.

2887. Оценити $\iint\limits_D (x^2+y^2-4x-4y+10)\,d\sigma$, где је D област ограничена елипсом $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$ (укључујући и границу).

***2888.** Наћи средњу вредност функције $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ у кругу $x^2+y^2\leqslant R^2$.

2889. Наћи средњу вредност функције $z=12-2x-3y$ у области ограниченој правима $12-2x-3x=0$; $x=0$; $y=0$.

У задацима 2890—2892 наћи неједначине које ограничавају вредности датих интеграла.

2890. $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)\,dv$, где је D лопта $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

2891. $\iiint\limits_D (x+y+z)\,dv$, где је D коцка $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$; $z\geqslant 1$; $x\leqslant 3$; $y\leqslant 3$; $z\leqslant 3$.

2892. $\iiint\limits_D (x+y-z+10)\,dv$, где је D лопта $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$.

2893. Доказати да ако је у области D функција $\varphi(x;y)\geqslant 0$, а функција $f(x;y)$ непрекидна, онда је

$$\iint\limits_D f(x;y)\cdot\varphi(x;y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D \varphi(x;y)\,d\sigma,$$

где су ξ и η координате неке тачке која припада области D.

§ 2. Вишеструко интегрирање

У задацима 2894—2901 израчунати дате двоструке интеграле (правоугаона област D дата неједначинама).

2894. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$; $0\leqslant x\leqslant 1$; $0\leqslant y\leqslant 2$.

2895. $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$; $0\leqslant x\leqslant a$; $0\leqslant y\leqslant b$.

2896. $\iint\limits_D \rho\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi$; $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$; $1\leqslant\rho\leqslant 2$.

2897. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy$; $0\leqslant x\leqslant 1$; $0\leqslant y\leqslant 1$.

2898. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$; $0\leqslant x\leqslant 1$; $0\leqslant y\leqslant 1$.

2899. $\iint\limits_D \frac{x^2\,dx\,dy}{1+y^2}$; $0\leqslant x\leqslant 1$; $0\leqslant y\leqslant 1$.

2900. $\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $0\leqslant x\leqslant 1$; $0\leqslant y\leqslant 1$.

2991. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$; $3\leqslant x\leqslant 4$; $1\leqslant y\leqslant 2$.

2902. Доказати Шварцову неједначину:

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx\cdot\int\limits_a^b [g(x)]^2\,dx$$

полазећи од идентитета

$$\iint\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ a \leqslant y \leqslant b}} [f(x)\, g(y) - f(y)\, g(x)]^2\, d\sigma \geqslant 0$$

(упореди са задатком 1495).

2903. 1) $\int\limits_{x=0}^{x=a} \int\limits_{y=0}^{y=+\sqrt{x}} dy\, dx$; 2) $\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{x}^{2x} \frac{y\, dy}{x}$; 3) $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\ln y} e^x\, dx$.

У задацима 2904—2909 наћи границе двоструког интеграла равног $\iint\limits_D f(x;\, y)\, dx\, dy$ за дате области интегрирања D:

2904. Паралелограм са странама:

$x=3$; $x=5$; $3x-2y+4=0$; $3x-2y+1=0$.

2905. $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $x^2+y^2 \leqslant 1$.

2906. $x+y \leqslant 1$; $x-y \leqslant 1$; $x \geqslant 0$. **2907.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqslant 1$.

2908. Паралелограм са странама

$y=x$; $y=x+3$; $y=-2x+1$; $y=-2x+5$.

2909. Област D је ограничена параболама: $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$.

У задацима 2910—2913 изменити ред интегрирања у датим интегралима:

2910. $\int\limits_{1}^{2} \int\limits_{x}^{2x} f(x;\, y)\, dy\, dx$. **2911.** $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{y}^{+\sqrt{y}} f(x;\, y)\, dx\, dy$.

2912. $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{+\sqrt{1-x}} f(x;\, y)\, dy\, dx$. **2913.** $\int\limits_{0}^{r} \int\limits_{x}^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x;\, y)\, dy\, dx$.

У задацима 2914—2918 израчунати дате троструке интеграле:

2914. $\int\limits_{x=0}^{x=1} \int\limits_{y=0}^{y=2} \int\limits_{z=0}^{z=3} dx\, dy\, dz$. **2915.** $\int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1} \int\limits_{\beta=1}^{\beta=2} \int\limits_{\gamma=2}^{\gamma=3} \alpha\beta\gamma\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$.

2916. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{b} dy \int\limits_{0}^{c} (x+y+z)\, dz$.

2917. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{y} xyz\, dz$. **2918.** $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{xy} x^3 y^2 z\, dz$.

2919. $\iint\limits_D x^3 y^2\, dx\, dy$, D је круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

2920. $\iint\limits_D (x^2+y)\, dx\, dy$, D је област ограничена параболама: $y=x^2$ и $y^2=x$.

2921. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$, D је област ограничена правима $x=2$, $y=x$ и хиперболом $xy=1$.

2922. $\iint\limits_D \cos(x+y)\, dx\, dy$. D је троугао ограничен правима $x=0$, $y=\pi$; $y=x$.

2923. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$, D је четвртина круга $x^2+y^2 \leqslant 1$ која лежи у првом квадранту.

2924. Наћи средњу вредност функције $z=2x+y$ у троуглу ограниченом координатним осама и правом $x+y=3$.

2925. Наћи средњу вредност функције $z=x+6y$ у троуглу ограниченом правима $y=x$; $y=5x$; $x=1$.

2926. $\iiint\limits_D \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z+1)^3}$, D је тетраедар ограничен равнима $x=0$; $y=0$; $z=0$; $x+y+z=1$.

У задацима 2927—2946 наћи двоструким интегрирањем запремине тела, ограничених датим површинама:

2927. Координатним равнима, равнима $x=4$ и $y=4$ и обртним параболоидом $z=x^2+y^2+1$.

2928. Координатним равнима, равнима $x=a$; $y=b$ и елиптичким параболоидом $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$.

2929. Равнима $z=0$; $x=a$; $x=b$; $y=c$; $y=p$ и површином $z=\frac{xy}{m}$.

2930. Равни $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ и координатним равнима (пирамида).

2931. Равнима: $x=0$; $y=0$; $x+y=1$; $z=0$ и $x+y+z=4$ (засечена призма).

2932. Хиперболичким параболоидом $z=x^2-y^2$ и равнима: $z=0$, $x=3$.

2933. Координатним равнима, равни $2x+3y-12=0$, и цилиндром $z=\frac{1}{2}y^2$.

2934. Цилиндрима $y=+\sqrt{x}$, $y=+2\sqrt{x}$, и равнима $z=0$ и $x+z=6$.

2935. Кружним цилиндром полупречника r, чија се оса поклапа са ординатном осом, координатним равнима и равни $\frac{x}{r}+\frac{y}{a}=1$.

2936. Цилиндром $2z=x^2$, и равнима: $z=0$, $y=0$ и $3x+2y=12$.

2937. Цилиндром $z=9-y^2$, координатним равнима и равни $3x+4y=12$.

2938. Цилиндром $z=4-x^2$, координатним равнима и равни $2x+y=4$.

2939. Обртним параболоидом $z=x^2+y^2$, координатним равнима и равни $x+y=1$.

2940. Цилиндрима $x^2+y^2=R^2$ и $x^2+z^2=R^2$.

2941. Цилиндрима $z=4-y^2$, $y=\dfrac{x^2}{2}$ и равнима $x=0$ и $z=0$.

2942. Цилиндрима $z=y^2$, $x=4-y^2$ и равнима $z=0$; $y=0$, $x=0$.

2943. Цилиндром $x^2+y^2=R^2$, $z=\dfrac{x^3}{a^2}$ и равни $z=0$.

2944. Цилиндром $2y^2=x$, равни $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1$ и равни $z=0$.

2945. Обртним параболоидом $z=x^2+y^2$ и равнима $z=0$, $y=1$, $y=2x$ и $y=6-x$.

2946. Елиптичким цилиндром $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ и равнима $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=0$, $z=0$.

2947. Наћи троструким интегрирањем запремину заједничког дела параболоида $2az=x^2+y^2$ и лопте $x^2+y^2+z^2=3a^2$.

§ 3. Смена променљивих

У задацима 2948—2950 дате двоструке интеграле трансформисати на поларне координате:

2948. $\displaystyle\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy.$ **2949.** $\displaystyle\int_0^{2R}\int_0^{+\sqrt{2Ry-y^2}} f(x;y)\,dx\,dy.$

2950. $\displaystyle\iint_D f(x;y)\,dx\,dy$, где је област D одређена неједнакостима: $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$; $(x^2+y^2)^3\leqslant 4r^2x^2y^2$.

У задацима 2951—2953 наћи функционалне детерминанте (јакобијане) датих трансформација:

2951. $x=u+v,\quad y=\dfrac{uv}{a}.$ **2952.** $x=u^2-v^2,\quad y=2uv.$ **2953.** $x=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{u}{v},\quad y=u^2+v^2.$

У задацима 2954—2955 дате двојне интеграле трансформисати на нове променљиве:

2954. $\displaystyle\int_0^a dx\int_{bx}^{cx} f(x;y)\,dy;$ $\quad u=x+y,\quad uv=y.$

2955. $\displaystyle\iint_D x^2y^2\sqrt[3]{1-x^3-y^3}\,dx\,dy;$ $\quad x=\rho\cos^{\frac{2}{3}}\vartheta;\quad y=\rho\sin^{\frac{2}{3}}\vartheta;$

област D одређена је неједнакостима: $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$; $x^3+y^3\leqslant 1$.

У задацима 2956—2959 израчунати помоћу смене променљивих дате интеграле:

2956. $\displaystyle\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)\,dy$ (в. зад. 2948).

2957. $\displaystyle\iint_D (h-2x-3y)\,dx\,dy$; D је круг $x^2+y^2=R^2$.

2958. $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$; D је круг $x^2+y^2=Rx$.

2959. $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$; D је област ограничена кривом $x^4+y^4=x^2+y^2$.

У задацима 2960—2964 израчунати помоћу смене променљивих (прелазом од Декартових на цилиндричне или сферне координате) дате интеграле:

2960. $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy\int_0^a dz;$ **2961.** $\displaystyle\int_0^2 dx\int_0^{+\sqrt{2x-x^2}} dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz;$

2962. $\displaystyle\int_{-R}^R dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dz;$

2963. $\displaystyle\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz.$

2964. $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$; D је област одређена неједнакостима: $z\geqslant 0$; $r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

§ 4. Примене двоструких и троструких интеграла

Разни задаци

2965. Плочица из задатка 2880 обрће се око осе OX угаоном брзином ω. Написати израз за кинетичку енергију плочице.

2966. Специфична топлота плочице из задатка 2880 мења се од тачке до тачке по закону $c=c(P)=c(x;y)$. Написати израз за количину топлоте коју добије плочица при загревању од температуре t_1 до t_2. Плочица заузима област D.

2967. У телу из задатка 2881 неравномерно је распоређен електрични набој; густина набоја је функција тачке $\delta=\delta(x;y;z)$. Наћи укупни набој E тела.

2968. Тело, које заузима област D, и чија је густина функција тачке $\gamma=\gamma(x;y;z)$, привлачи по Њутновом закону тачку масе m, која има координате ξ, η, ζ, и лежи изван области D. Написати израз за силе њиховог узајамног привлачења.

2969. Течност тече кроз област D у равни XOY, при чему је правац протицања течности нормалан на ту раван. Брзина протицања зависи како од тачке P области D, тако и од времена $v=v(x;y;t)$. Написати израз за запремину течности која протече кроз област D за време од момента t_1 до момента t_2.

2970. Специфична топлота тела дата је као функција тачке $P(x;y;z)$ и температуре: $c=c(x;y;z;t)$. Како се изражава количина топлоте која загрева тело од температуре $t=t_0$ до $t=t_1$? Тело заузима област D.

Површине равних фигура

У задацима 2971—2986 одредити двоструким интегрирањем површине:

2971. Троугла, ограниченог правима $x=0$; $y=0$; $x+y=1$.

2972. Троугла, ограниченог правима $y=x$; $y=5x$; $x=1$.

2973. Круга полупречника R и елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2974. Области затворене између параболе $y^2=\frac{b^2}{a}x$ и праве $y=\frac{b}{a}x$.

2975. Области ограничене параболама $y=+\sqrt{x}$, $y=+2\sqrt{x}$ и правом $x=4$.

2976. Области ограничене хиперболама $xy=\alpha$; $xy=\beta$ и правима $x=a$; $x=b$ $(0<\alpha<\beta;\ 0<a<b)$.

2977. Области ограничене хиперболама $xy=\alpha$; $xy=\beta$ и параболама $y^2=px$; $y^2=qx$ $(0<\alpha<\beta;\ 0<p<q)$.

2978. Области ограничене кривом $(x^2+y^2)^2=2ax^3$.

2979. Области ограничене кривом $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$.

2980. Области ограничене кривом $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{c^2}$.

2981. Области ограничене кривом $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^3}{c^3}$.

2982. Области ограничене кривом $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$.

2983. Области ограничене кривом $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (лемниската).

2984. Петље криве $x^3+y^3=2xy$.

2985. Петље криве $(x+y)^3=xy$.

2986. Петље криве $(x+y)^5=x^2y^2$.

Запремине

У задацима 2987—3003 израчунати троструким (или двоструким) интегрирањем запремине тела ограничених датим површинама:

2987. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и равни $z+c=0$.

2988. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$.

2989. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2990. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$.

2991. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$.

2992. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4$.

2993. $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3z$.

2994. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

2995. $(x^2+y^2+z^2)^2=\frac{a^6}{x^2+y^2}$.

2996. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2(x^2+y^2)^2$.

2997. Конусом $x^2+y^2=z^2$, првим завијутком хеликоида $z=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ и равни $z=0$.

***2998.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

***2999.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3=\frac{x^2z}{h^3}$.

***3000.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3=\frac{xyz}{h^3}$.

***3001.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3=\frac{z^4}{h^4}$.

3002. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$; $x=0$; $y=0$; $z=0$.

3003. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^6=\frac{xyz}{abc}$; $x=0$; $y=0$; $z=0$.

Комппланација кривих површина

У задацима 3004—3016 наћи вредности делова датих површина:

3004. $x^2+y^2+z^2=R^2$, исеченог површином $x^2+y^2=Rx$ (Вивианиев задатак).

3005. $z=xy$, исеченог површином $x^2+y^2=R^2$.

3006. $bx^2+ay^2=2abz$, исеченог површином $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2c^2$

3007. $y^2+z^2=x^2$, који лежи унутар површине $x^2+y^2=R^2$ (конус и цилиндар).

3008. Сферне површине ограничене меридијанима $\varphi=30^0$, $\varphi=60^0$ и упоредницима $\vartheta=45^0$ и $\vartheta=60^0$.

3009. $z^2=2xy$, који се налази изнад правоугаоника, који у равни $z=0$ образују праве $x=0$, $y=0$, $x=3$, $y=6$.

3010. $y^2+z^2=x^2$, који исеца цилиндар $x^2=2py$.

3011. $x^2+y^2=2rz$, који исеца површина $(x^2+y^2)^2=r^2(x^2-y^2)$.

3012. $x^2+y^2+z^2=R^2$, који исеца површина $(x^2+y^2)^2=R^2(x^2-y^2)$.

3013. $(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+z^2=a^2$, који исецају површине $x=0$; $y=0$; $z=0$.

3014. $z=\frac{x+y}{x^2+y^2}$, који исецају површине $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$; $x=0$; $y=0$.

3015. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$, који исеца површина $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3016. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$, који исеца површина $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

Моменти и тежишта

У задацима 3017—3021 наћи двоструким интегрирањем статичке моменте датих хомогених фигура (густина је $\gamma=1$).

3017. Правоугаоника са странама a и b, у односу на страну a.

3018. Троугла (основице a и висине h) у односу на основицу.

3019. Круга у односу на тангенту.

3020. Шестоугаоника у односу на страну.

3021. Полукруга у односу на пречник.

У задацима 3022—3026 наћи двоструким интегрирањем тежишта датих хомогених фигура.

3022. Кружног сектора који одговара централном углу α. Полупречник круга је R.

3023. Кружног сегмента који одговара централном углу α. Полупречник круга је R.

3024. Половине елипсе која лежи изнад велике осе.

3025. Фигуре ограничене половином таласа синусоиде $y=\sin x$ и осом Ox.

3026. Фигуре ограничене затвореном кривом $y^2=ax^3-x^4$.

У задацима 3027—3039 наћи моменте инерције датих хомогених равних фигура (густина је $\gamma=1$).

3027. Правоугаоника са странама a и b у односу на страну a.

3028. Троугла (основице a и висине h) у односу на основицу.

3029. Круга полупречника R у односу на тангенту.

3030. Елипсе у односу на њене осе.

3031. Полукруга у односу на његов пречник.

3032. Круга у односу на његов центар.

3033. Елипсе у односу на њен центар.

3034. Правоугаоника са странама a и b, у односу на тачку пресека његових дијагонала.

3035. Равнокраког троугла у односу на његов врх. Основица троугла је a, а висина h.

3036. Круга полупречника R у односу на тачку која лежи на кругу.

3037. Квадрата са страном a у односу на његово теме.

3038. Фигуре ограничене кривом $x^4+y^4=x^2+y^2$ у односу на координатни почетак.

3039. Сегмента параболе са тетивом нормалном на оси, у односу на теме параболе. Дужина тетиве је a, а „висина" сегмента је h.

У задацима 3040—3043 израчунати моменте инерције хомогених делова датих површина (маса сваког дела је $=M$):

3040. Конуса $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$, отсеченог равни $z=H$, у односу на осу Oz.

3041. Лопте полупречника R у односу на пречник.

3042. Параболоида $x^2+y^2=2cz$, отсеченог равни $z=c$, у односу на осу Oz.

3043. Лопте $x^2+y^2+z^2=R^2$, отсеченог равнином $z=H$, у односу на осу Oz.

У задацима 3044—3047 наћи статичке моменте датих хомогених тела (густина је $\gamma=1$):

3044. Правоуглог паралелопипеда (ивице су му a, b и c) у односу на његове стране.

3045. Половине елипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ у односу на раван XOY.

3046. Правог кружног конуса (полупречник основе му је R, а висина h), у односу на раван која пролази кроз теме а паралелна је основи.

У задацима 3047—3055 наћи тежишта датих хомогених тела:

3047. Полулопте полупречника R.

3048. Лоптиног исечка. Полупречник лопте је R, централни угао осовинског пресека је 2α.

3049. Засечене призме, ограничене равнима $x=0$; $y=0$; $z=0$; $x=2$; $y=4$; $x+y+z=8$.

3050. Обртног параболоида, чији је полупречник основе R, а висина h.

3051. Тела ограниченог координатним равнима, равни $2x+3y-12=0$, и цилиндром $z=\frac{1}{2}y^2$.

3052. Тела ограниченог цилиндрима $y=\sqrt{x}$ и $y=2\sqrt{x}$, и равнима $z=0$ и $x+z=6$ $(y>0)$.

3053. Заједничког дела параболоида $2az=x^2+y^2$ и лопте $x^2+y^2+z^2=3a^2$.

3054. Заједничког дела лопте $x^2+y^2+z^2=R^2$ и конуса $x^2=y^2+z^2$ $(x\geqslant 0)$.

3055. Тела, ограниченог површином $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.

У задацима 3056—3059 наћи моменте инерције датих хомогених тела (густина је $\gamma=1$):

3056. Лопте у односу на праву која је додирује.

3057. Елипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ у односу на три његове осе.

3058. Правог кружног цилиндра, чији је полупречник основе R, а висина H, у односу на пречник основе.

3059. Елиптичног цилиндра у односу на његову осу. Висина цилиндра је H, осе елипсе које леже у основи су $2a$ и $2b$.

У задацима 3060—3063 наћи моменте инерције датих хомогених тела, чија је маса M:

3060. Правоуглог паралелопипеда у односу на ивице a, b и c.

3061. Паралелопипеда из претходног задатка у односу на његово тежиште.

3062. Правог кружног цилиндра у односу на пречник његовог средњег пресека. Висина цилиндра је h, полупречник r.

3063. Шупље лопте, спољњег полупречника R, унутрашњег r, у односу на пречник.

3064. Наћи масу квадратне плочице стране $2a$, ако је густина материјала плочице пропорционална квадрату отстојања од тачке пресека дијагонала, и на теменима квадрата износи 1 gr/cm².

3065. Раван прстен ограничен је двама концентричним круговима, чији су полупречници R и r ($R > r$). Знајући да је густина материјала обрнуто пропорционална отстојању од центра кругова, наћи масу прстена. Густина на периферији унутрашњег круга је 1 gr/cm².

3066. На елипси са полуосама a и b распоређена је маса тако да је њена густина пропорционална растојању од велике осе, при чему је на јединици растојања од ове осе она равна γ gr/cm²; наћи укупну масу.

3067. Тело је ограничено двема концентричним сферним површинама чији су полупречници r и R ($R > r$). Знајући да је густина материја обрнуто пропорционална растојању од центра сфера, а на растојању од 1 cm износи γ gr/cm³, израчунати сву масу тела.

3068. Израчунати масу правог кружног цилиндра полупречника R и висине h, ако је његова густина у било којој тачки бројно једнака квадрату растојања те тачке од центра основе цилиндра.

3069. Густина лопте $x^2+y^2+z^2=2Rz$ у било којој њеној тачки бројно је једнака квадрату растојања те тачке од координатног почетка. Наћи тежиште лопте.

3070. Наћи статички моменат заједничког дела лопти $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $x^2+y^2+z^2=2Rz$ у односу на раван XOY. Густина у произвољној тачки тела бројно је једнака растојању те тачке од равни XOY.

3071. Наћи Њутнову силу којом маса хомогеног цилиндра привлачи материјалну тачку јединичне масе, која лежи у центру основе цилиндра. Густина цилиндра је γ, полупречник његове основе је R, а висина h.

3072. У врху хомогеног конуса (висине h, генератрисе l) концентрисана је јединична маса. Наћи Њутнову силу узајамног дејства између конуса и ове масе. Густина конуса је γ.

3073. Тачка у којој је концентрисана јединична маса, налази се на растојању b од центра хомогене лопте масе M, полупречника R ($R < b$). Наћи Њутнову силу узајамног дејства између тачке и лопте.

3074. Доказати да је Њутнова сила узајамног дејства између две хомогене лопте таква као кад би маса лопти била сконцентрисана у њиховим центрима.

§ 5. Даљи проблеми интегралног рачуна

Проширење појма вишеструког интеграла

У задацима 3075—3077 израчунати дате интеграле, који се простиру на целу раван XOY:

3075. $\displaystyle\iint \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$. **3076.** $\displaystyle\iint \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

3077. $\displaystyle\iint e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy$.

3078. Израчунати интеграл:

$$\iiint e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz\,.$$

распрострт на цео простор.

У задацима 3079—3082 испитати који су од датих интеграла, узетих по кругу полупречника R, са центром у координатном почетку, конвергентни:

3079. $\displaystyle\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$. **3080.** $\displaystyle\iint_D \frac{xy\,dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

3081. $\displaystyle\iint_D \frac{e^{-x^2-y^2}dx\,dy}{x^2+y^2}$. **3082.** $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy$.

У задацима 3083—3084 испитати да ли конвергирају дати интеграли узети по лопти полупречника R са центром у координатном почетку:

3083. $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

3084. $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

3085. Израчунати интеграл $\displaystyle\iiint_D \ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, узет по целој запремини лопте полупречника R са центром у координатном почетку.

8086. $\displaystyle\iiint_D \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$ по целом првом октанту.

3087. $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$ по целом првом октанту.

3088. Доказати теорему: ако је $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ и интеграл $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,\frac{1-x}{(1+x)^3}$ конвергира, онда је његова вредност једнака нули.

Одређени интеграл као функција параметра

3089. Израчунати приближно (без помоћи таблица) интеграл $\int\limits_0^1 1{,}01^{100x}\,dx$

3090. Наћи кривину криве $y=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$ у тачки с апсцисом $x=1$.

3091. Чиме се разликују једна од друге функције $\varphi(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}|\alpha|$ и $\psi(\alpha)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$? Не може ли се тако допунити $\varphi(\alpha)$ да би било $\varphi(\alpha)\equiv\psi(\alpha)$.

3092. Израчунати површину бесконачног појаса између позитивне апсцисне полуосе и криве $y=x\int\limits_0^1\frac{\alpha^4\,d\alpha}{(1+\alpha^4x^2)^2}$.

Диференцирање под знаком интеграла

***3093.** Нацртати график функције $y=\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{(x^2+z^2)^3}}$, дајући за x вредности од 0 до 5 у размацима од 0,5.

3094. Користећи се једнакошћу $\int\limits_0^b\frac{dx}{1+\alpha x}=\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha b)$, добити путем диференцирања по параметру, следеће формуле:

a) $\int\limits_0^b\frac{x\,dx}{(1+\alpha x)^2}=\frac{1}{\alpha^2}\ln(1+\alpha b)-\frac{b}{\alpha(1+\alpha b)}$;

б) $\int\limits_0^b\frac{x^2\,dx}{(1+\alpha x)^3}=\frac{1}{\alpha^3}\ln(1+\alpha b)-\frac{2b+2\alpha b^2}{2\alpha^2(1+\alpha b)^2}$.

3095. Полазећи од једнакости

$$\int\limits_0^b\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\quad\text{израчунати}\quad\int\limits_0^b\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}.$$

3096. Полазећи од интеграла

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a},\ \text{израчунати}\ \int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

3097. Користећи се идентитетом $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi}{2}\ (x>0)$, показати да функција $y=\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos x\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha$ (Лапласов интеграл) задовољава диференцијалну једначину $y''=y$.

У задацима 3098—3109 израчунати помоћу диференцирања по параметру дате интеграле:

***3098.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)\,dx$. **3099.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx$; $(\alpha>-1)$.

3100. $\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x\,dx}{x(1+x^2)}$; $(\alpha>-1)$. **3101.** $\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3102. $\int\limits_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $(\alpha^2<1)$. **3103.** $\int\limits_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $(\alpha^2<1)$.

3104. $\int\limits_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $(\alpha^2<1)$. **3105.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\,dx$; $(\alpha^2<1)$.

3106. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+\alpha\sin x}{1-\alpha\sin x}\,\frac{dx}{\sin x}$; $(\alpha^2<1)$. **3107.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arc\,tg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$.

3108. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg}x}\,dx$. **3109.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$.

Интегрирање под знаком интеграла

3110. Полазећи од једнакости $\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{1+\alpha^2}$, која се добија непосредно, наћи, применом интегрирања по параметру, вредност интеграла $\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$.

3111. Из релације $\int\limits_0^{\infty}e^{-z^2}\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ извести једнакост:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-z^2x}\,dz\ (x>0)$$

и искористити је за израчунавање интеграла:

$$\text{а)} \int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}}; \qquad \text{б)} \int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}}.$$

У задацима 3112—3116 израчунати помоћу интегрирања по параметру дате интеграле:

3112. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx.$ **3113.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$

3114. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx.$ **3115.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx.$ **3116.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\, dx.$

3117. Доказати теорему: нека је $f(u)$ дефинисана и непрекидна за $0 < u < +\infty$, при чему $\lim\limits_{u\to 0} f(u)$ и $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)$ постоје и интеграл $\displaystyle\int_0^\infty f'(\alpha x)\, dx$ конвергира за $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$; тада је $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = [f(\infty) - f(0)] \ln\frac{a}{b}$, где је $f(\infty) = \lim\limits_{u\to+\infty} f(u)$; $f(0) = \lim\limits_{u\to 0} f(u)$.

У задацима 3118—3121 израчунати, користећи се резултатом задатка 3117, дате интеграле ($a > 0$, $b > 0$):

3118. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} ax - \operatorname{arc\,tg} bx}{x}\, dx.$ **3119.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax - a \sin bx}{x^2}\, dx.$

***3120.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x\, dx}{x^2}.$ ***3121.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^3}\, dx.$

3122. Израчунати помоћу Кошијеве формуле (Курс, т. II, стр. 156) интеграле:

$$\text{а)} \int_0^x (x-t)^n e^t\, dt; \qquad \text{б)} \int_0^x (x-t)^5 \cos t\, dt.$$

§ 6. Задаци о потенцијалу

3123. У равни XOY распоређена је маса густине γ, која опада са растојањем ρ од координатног почетка по обрасцу $\gamma = \dfrac{1}{1+\rho^2}$. Наћи Њутнов потенцијал у тачки $(0; 0; h)$, $h > 1$.

3124. Наћи Њутнов потенцијал квадрата који има страну a и сталну површинску густину γ, у једном од његових темена.

3125. Наћи Њутнов потенцијал правог кружног цилиндра (полупречника R и висине h) у центру његове основе. Густина цилиндра је γ.

3126. Наћи Њутнов потенцијал правог кружног хомогеног ($\gamma = 1$) конуса у центру његове основе. Полупречник основе је R, висина h, а генератриса l.

3127. Наћи Њутнов потенцијал масивне хомогене полулопте $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, масе M, у тачки $A(0; 0; a)$, $a > R$.

ГЛАВА XI

КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛИ И ИНТЕГРАЛИ ПО ПОВРШИНИ

§ 1. Криволиниски интеграли по дужини

У задацима 3128—3136 израчунати дате интеграле:

3128. $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где је L отсечак праве $y=\frac{1}{2}x-2$ од тачке $A\,(0;\,-2)$ до тачке $B\,(4;\,0)$.

3129. $\int\limits_L xy\,ds$, где је L контура правоугаоника који чине праве $x=0$; $y=0$; $x=4$; $y=2$.

3130. $\int\limits_L xy\,ds$, где је L, је четвртина елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, која (четвртина) лежи у првом квадранту.

3131. $\int\limits_L y\,ds$, где је L лук параболе $y^2=2px$ од тачке $(0;\,0)$ до тачке $(x_0;\,y_0)$.

3132. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds$, где је L први свод циклоиде $\begin{cases} x=a\,(t-\sin t), \\ y=a\,(1-\cos t). \end{cases}$

3133. $\int\limits_L (x^2+y^2)^n\,ds$, где је L круг $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t. \end{cases}$

3134. $\int\limits_L ye^{-x}\,ds$, где је L лук криве: $\begin{cases} x=\ln\,(1+t^2), \\ y=2\,\mathrm{arctg}\,t-t+3, \end{cases}$ од тачке, која одговара вредности $t=0$, до тачке која одговара вредности $t=1$.

3135. $\int\limits_L xyz\,ds$, где је L лук криве $x=t$, $y=\frac{\sqrt{8t^3}}{3}$, $z=\frac{t^2}{2}$, од тачке која одговара вредности $t=0$, до тачке која одговара вредности $t=1$.

3136. $\int\limits_L \frac{z^2\,ds}{x^2+y^2}$, где је L први завијутак завојне линије $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$.

3137. Дати формулу за израчунавање интеграла $\int\limits_L F\,(x;\,y)\,ds$, ако је крива L дата једначином $\rho=\rho\,(\varphi)$ $(\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2)$ у поларним координатама.

***3138.** На сферној површини $x^2+y^2+z^2=R^2$ дата је линија, чија пројекција на раван XOY има поларну једначину $\rho=\frac{2R}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}=\frac{R}{ch\,\varphi}$, ако је оса OX узета за поларну осу. Наћи дужину лука ове криве од тачке $(R;\,0;\,0)$ до произвољне тачке $(x;\,y;\,z)$.

3139. Наћи масу дела (парчета) криве $y=\ln x$ између тачака са апсцисама x_1 и x_2, ако је густина криве у свакој тачки једнака квадрату апсцисе тачке.

3140. Наћи масу парчета ланчанице $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ између тачака $x=0$ и $x=a$, ако је густина криве у свакој њеној тачки обрнуто пропорционална ординати тачке, при чему је густина у тачки $(0;\,a)$ равна γ.

3141. Наћи масу четвртине елипсе која (четвртина) лежи у првом квадранту, ако је густина у свакој тачки криве једнака производу њене апсцисе и ординате. Једначина елипсе је дата у облику $z=a\cos t$, $y=b\sin t$.

3142. Наћи масу првог завијутка завојнице $x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=bt$, чија је густина у свакој тачки једнака квадрату радиус-вектора те тачке.

3143. Наћи масу лука криве $x=e^t\cos t$; $y=e^t\sin t$; $z=e^t$ од тачке која одговара вредности $t=0$, до произвољне тачке, ако је густина лука обрнуто пропорционална квадрату радиус-вектора, и у тачки $(1;\,0;\,1)$ износи 1.

У задацима 3144—3149 искористити Био-Саваров закон: Елеменат струје дејствује на магнетну масу m силом јачине $\frac{mI\,ds\sin\alpha}{r^2}$, где је I јачина струје, ds елеменат дужине проводника, r растојање од елемента струје до магнетне масе, α угао између праве која спаја магнетну масу и елеменат струје, и правца самог елемента струје.

3144. Одредити силу, којом струја I у бесконачном праволиниском проводнику, дејствује на тачкасту магнетну масу m, која се налази на растојању a од проводника.

3145. По контури која има облик квадрата стране a, тече струја I. Коликом силом ова струја дејствује на тачкасту магнетну масу m, која се налази у центру квадрата?

3146. Коликом силом струја I, која тече по бесконачном параболичном проводнику, дејствује на тачкасту магнетну масу m, која се налази у жижи параболе? Растојање од темена до жиже је $\frac{p}{2}$.

3147. Показати да струја I, која тече по луку криве, чија једначина у поларном координату има облик $\rho=\rho\,(\varphi)$, дејствује на тачкасту магнетну масу, која се налази у полу, силом $f=mI\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\rho}$.

3148. Коликом силом струја I, која тече по затвореној елиптичној контури, дејствује на тачкасту магнетну масу m, која се налази у жижи елипсе?

3149. Коликом силом струја I, која тече по бесконачном праволиниском проводнику, дејствује на магнетну масу m, распоређену равномерно по квадрату стране a? Проводник лежи у равни квадрата паралелно једној од његових страна, при чему растојање од проводника до најближе стране квадрата износи b. Квадрат и проводник се не секу.

3150. Наћи потенцијал круга $x^2+y^2=R^2$, $z=0$ у тачки $(R;\ 0;\ 2R)$, ако је густина у свакој тачки криве једнака апсолутној вредности синуса угла између радиус-вектора тачке и апсцисне осе.

3151. Наћи потенцијал првог завијутка хомогене (густина је γ) завојнице $x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=bt$ у координатном почетку.

У задацима 3152—3156 израчунати површине делова датих цилиндричних површина, који (делови) леже између равни XOY и површина, датих у сваком задатку:

3152. $x^2+y^2=R^2$; $\quad z=R+\dfrac{x^2}{R}$. **3153.** $y^2=2xpx$; $z=\sqrt{2px-4x^2}$.

3154. $y^2=\dfrac{4}{9}(x-1)^3$; $z=2-\sqrt{x}$. **3155.** $x^2+y^2=R^2$; $2Rz=xy$.

3156. $y^2=2px$; $z=y$ и $x=\dfrac{8}{9}p$.

3157. Колику површину исеца из кружног цилиндра полупречника R исти такав цилиндар, ако се осе ових цилиндара секу под правим углом?

3158. Наћи површину дела цилиндра $x^2+y^2=Rx$, који (део) лежи унутар лопте $x^2+y^2+z^2=R^2$.

§ 2. Криволиниски интеграл по координатама

У задацима 3159—3178 израчунати дате криволиниске интеграле:

3159. $\int\limits_L x\,dy$, где је L отсечак праве $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ од тачке њеног пресека с апсцисном осом до тачке њеног пресека са ординатном осом.

3160. $\int\limits_L x\,dy$, где је L обим троугла, који образују координатне осе и права $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$, у позитивном смеру обилажења (тј. насупрот обртању казаљке на сату).

3161. $\int\limits_L (x^2-y^2)\,dx$, где је L лук параболе $y=x^2$ од тачке $x=0$ до тачке $x=2$.

3162. $\int\limits_L y\,dx$, где је L обим правоугаоника, чије су једначине страна $x=0$; $y=0$; $x=2$; $y=4$, у позитивном смеру обилажења.

3163. $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dy$, где је L обим правоугаоника, који образују праве: $x=1$; $y=1$; $x=3$; $y=5$, у позитивном смеру обилажења.

3164. $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} 2xy\,dx+x\,dy$, дуж сваке од следеће четири криве: 1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^3$; 4) $x=y^2$.

3165. $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} (xy\,dx+(y-x)\,dy$, дуж сваке од следеће четири криве: 1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y^2=x$; 4) $y=x^3$.

3166. $\int\limits_L y\,dx+x\,dy$, где је L четвртина круга $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ од $t=0$ до $t=\dfrac{\pi}{2}$.

3167. $\int\limits_L y\,dx-x\,dy$, где је L елипса $x=a\cos t$; $y=b\sin t$, у позитивном смеру обилажења.

3168. $\int\limits_L \dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$, где је L круг $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, у позитивном смеру обилажења.

3169. $\int\limits_{(0;\,0)}^{(3;\,6)} x\cos y\,dx-y\sin x\,dy$, дуж праве линије.

3170. $\int\limits_L (2a-y)\,dx-(a-y)\,dy$, где је L први од (координатног почетка) свод циклоиде $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$.

3171. $\int\limits_L \dfrac{dy}{x}-\dfrac{dx}{y}$, где је L четвртина круга $x=r\cos t$; $y=r\sin t$, од $t=0$ до $t=\dfrac{\pi}{2}$.

3172. $\int\limits_L (x^2+2xy)\,dy$, где је L горња половина елипсе $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, у позитивном смеру обилажења.

3173. $\int\limits_L \dfrac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$, где је L астроида $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$, од тачке $(R;\ 0)$ до тачке $(0;\ R)$.

3174. $\int\limits_L x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$, где је L отсечак праве од тачке $(1;\ 1;\ 1)$ до тачке $(2;\ 3;\ 4)$.

3175. $\int\limits_L yz\,dx + z\sqrt{r^2-y^2}\,dy + xy\,dz$, где је L лук завојнице $x=r\cos t$; $y=r\sin t$; $z=\frac{at}{2\pi}$, од тачке пресека криве са равни $z=0$ до тачке њеног пресека са равни $z=a$.

3176. $\int\limits_L \frac{x\,dx+y\,dy+5z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$, где је L круг $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$; $z=0$, у позитивном смеру обилажења.

3177. $\int\limits_{(1;1;1)}^{(4;4;4)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, дуж праве линије.

3178. $\int\limits_L \frac{dx+dy+dz}{x^2+y^2+z^2}$, где је L круг $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=0$.

3179. На материјалну тачку A дејствује у правцу координатног почетка O привлачна сила обрнуто пропорционална квадрату растојања OA. Одредити рад који се мора извршити да се тачка A помери из положаја $A_1(a_1;\,b_1;\,c_1)$ у положај $A_2(a_2;\,b_2;\,c_2)$. Показати да тај рад не зависи од пута по којему се тачка A помера из положаја A_1 у положај A_2.

3180. Дато је поље силе, чији је смер према координатном почетку, а интензитет јој је раван производу масе тачке и њеног отстојања од почетка. Наћи рад поља при померању тачке масе m из положаја A у положај B. Уверити се да рад не зависи од пута.

3181. Дато је поље силе сталне јачине F и смера који се поклапа са позитивним смером x осе. Наћи рад A поља кад се тачка масе m помера по луку круга $x^2+y^2=R^2$, који (лук) лежи у првом квадранту.

3182. Дато је поље силе обрнуто пропорционалне растојању њене нападне татке од равни XOY, и усмерене према координатном почетку. Одредити рад поља при кретању тачке по правој $x=at$, $y=bt$, $z=ct$ од тачке $M(a;\,b;\,c)$, до тачке $N(2a;\,2b;\,2c)$.

3183. Силе поља су обрнуто пропорционалне растојању њихових нападних тачака од осе Oz, нормалне су на ту осу и усмерене к њој. Наћи рад поља при кретању тачке по кругу $x=\cos\varphi$; $y=1$; $z=\sin\varphi$, од тачке $M(1;\,1;\,0)$ до тачке $N(0;\,1;\,1)$.

У задацима 3184—3191 израчунати површине фигара, ограничене датим затвореним кривим:

3184. Елипсом $x=a\cos t$; $y=b\sin t$.

3185. Хипоциклоидом $x=a\cos^3 t$; $y=b\sin^3 t$.

3186. Кардиоидом $x=2r\cos t-r\cos 2t$; $y=2r\sin t-r\sin 2t$.

***3187.** Лемнискатом $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

3188. Петљом криве $(x+y)^4=x^2y$.

3189. Петљом криве $(x+y)^3=xy$.

3190. Петљом криве $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy$.

3191. Кривом $x^3+y^3=x^2+y^2$ и координатним осама.

У задацима 3192—3198 доказати да су дати интеграли, узети по затвореним контурама, једнаки нули:

3192. $\int\limits_L \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy$. **3193.** $\int\limits_L \cos(xy)\cdot(ydx+xdy)$.

3194. $\int\limits_L \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (координатни почетак лежи ван контуре L).

3195. $\int\limits_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ (координатни почетак лежи ван контуре L).

3196. $\int\limits_L x^y\left(\frac{y}{x}\,dx+\ln x\,dy\right)$ (контура L лежи у десној полуравни XOY).

3197. $\int\limits_L \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (контура L не пролази кроз координатни почетак).

3198. $\int\limits_L yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$.

У задацима 3199—3206 наћи функције из датих диференцијала.

3199. $du=x^2dx+y^2dy$. **3200.** $du=4(x^2-y^2)(x\,dx-y\,dy)$.

3201. $du=\frac{(x+2y)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}$.

3202. $du=xy(xy\,dx+y^2dy)$. **3203.** $du=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$.

3204. $du=(2x\cos y-y^2\sin x)\,dx+(2y\cos x-x^2\sin y)\,dy$.

3205. $du=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy$.

3206. $du=\frac{(3y-x)\,dx+(y-3x)\,dy}{(x+y)^3}$.

3207. Изабрати број n тако да израз

$$\frac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^n}$$

буде тотални диференцијал; наћи одговарајућу функцију.

3208. Изабрати константе a и b тако да израз

$$\frac{(y^2+2xy+ax^2)\,dx-(x^2+2xy+by^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

буде тотални диференцијал; наћи одговарајућу функцију.

У задацима 3209—3213 наћи функције из датих диференцијала:

3209. $du=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **3210.** $du=\frac{yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz}{1+x^2y^2z^2}$.

3211. $du = \dfrac{2\,(zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx)}{(x-yz)^2}$. **3212.** $du = \dfrac{dx - 3\,dy}{z} + \dfrac{3\,y - x}{z^2}\,dz$.

3213. $du = \dfrac{x+y+z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,\{(y^2+z^2-xy-xz)\,dx + (z^2+x^2-yz-yx)\,dy + (x^2+y^2-zx-zy)\,dz\}$.

§ 3. Неке примене криволиниских интеграла

3214. Граммол идеалног гаса преводи се политропски (тј. по једначини $pv^{\varkappa} = \mathrm{const}$) из стања $(p_1;\ T_1)$ у стање $(p_2;\ T_2)$. Показати да се топлота коју гас добија споља, изражава формулом

$$Q = (T_2 - T_1)\left(C_v - \frac{R}{\varkappa - 1}\right)$$

(R је гасна константа, C_v специфична топлота при сталној запремини — такође константа).

3215. Ван-дер-Валсова једначина за реалне гасове има облик:

$$\left(p + \frac{\alpha}{v^2}\right)(v - \beta) = RT,$$

где су α и β константе. Показати да се količина топлоте коју добије гас при прелазу из стања $(p_1,\ v_1)$ у стање $(p_2,\ v_2)$, може изразити формулом:

$$Q = a\int_L p\,dv + \frac{C_v}{R}\left[\,p_2(v_2-\beta) - p_1(v_1-\beta) + \frac{\alpha}{v_2} - \frac{\alpha}{v_1} - \frac{\alpha\beta}{v_2^2} + \frac{\alpha\beta}{v_1^2}\right],$$

где је $a = \dfrac{1}{427}$ термички еквивалент рада, а L крива процеса: $f(p;v) = 0$.

3216. Силе равног поља усмерене су према координатном почетку и обрнуто су пропорционалне n-том степену растојања од почетка. Уверити се да је поље конзервативно.

3217. Показати да је магнетно поље бесконачног правог проводника, по којем тече струја сталне јачине I, конзервативно (применити Био-Саваров закон, в. зад. 3144).

3218. Силе поља пропорционалне су квадрату растојања њихових нападних тачака од z осе, а имају смер ка координатном почетку. Хоће ли поље бити конзервативно?

3219. У стационарној струји нестишљиве течности брзина ма које тачке једнака је њеном радиус-вектору. Наћи количину течности која истече из произвољног тела, чија је запремина једнака v, у јединици времена.

§ 4. Површински интеграли

У задацима 3220—3224 израчунати дате интеграле:

3220. $\displaystyle\iint_S x\,dq$, где је S горња полусфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3221. $\displaystyle\iint_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dq$, где је S горња половина лопте $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3222. $\displaystyle\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dq$, где је S део равни $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ који лежи у првом октанту.

3223. $\displaystyle\iint_S xyz\,dq$, где је S део равни $x+y+z=1$ који лежи у првом октанту.

3224. $\displaystyle\iint_S x^2y^2\,dq$, где је S горња половина површине лопте полупречника R са центром у координатном почетку.

У задацима 3225—3228 израчунати дате површинске интеграле по координатама:

3225. $\displaystyle\iint_S x^2y^2z\,dx\,dy$, где је S позитивна страна доње половине лопте $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3226. $\displaystyle\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, где је S позитивна страна површине коцке, ограничене равнима: $x=0;\ y=0;\ z=0;\ x=1;\ y=1;\ z=1$.

3227. $\displaystyle\iint_S z\,dx\,dy$, где је S спољна страна елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3228. $\displaystyle\iint_S z^2\,dx\,dy$, где је S спољна страна елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3229. Наћи масу површине лопте, ако је њена површинска густина у свакој тачки једнака растојању те тачке од неког одређеног пречника лопте.

3230. Наћи масу површине лопте ако је њена површинска густина у свакој тачки једнака квадрату растојања те тачке од неког одређеног пречника лопте.

3231. Наћи Њутнову силу којом бочна површина правог кружног цилиндра привлачи јединицу масе смештену у центар основе тог цилиндра, сматрајући бочну површину хомогеном (густина је γ). Полупречник основе цилиндра је R, а висина h.

3232. Израчунати Њутнов потенцијал хомогене бочне површине правог кружног конуса (полупречник основе је R, висина је h) у његовом врху.

3233. Израчунати Њутнов потенцијал хомогене бочне површине правог кружног цилиндра у средини његове осе (полупречник цилиндра је R, висина h).

§ 5. Веза између интеграла разних типова

У задацима 3234—3238 криволиниске интеграле по затвореним контурама $\left(\oint\right)$, узете у позитивном смеру обилажења, трансформисати у двоструке интеграле по областима ограниченим овим контурама:

3234. $\displaystyle\oint \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$. **3235.** $\displaystyle\oint x\,dy - y\,dx$.

3236. $\oint (1-x^2)\, y\, dx + x\,(1+y^2)\, dy.$

3237. $\oint (e^{xy}+2\,x\cos y)\, dx + (e^{xy}-x^2\sin y)\, dy.$

3238. $\oint \frac{(2\,x - y^2\sqrt{x^2+4\,y^3})\, dx + (12\,y^2 + x^2\sqrt{x^2+4\,y^3})\, dy}{2\sqrt{x^2+4\,y^3}}.$

3239. Уверити се формалним путем да се површина, ограничена равном затвореном кривом L, изражава интегралом

$$\frac{1}{2}\int_L \{x\cos(N, x) + y\sin(N, x)\}\, ds,$$

узетим дуж ове криве, где је $(N,\ x)$ угао између спољашње нормале на криву и позитивног смера апсцисне осе.

3240. Извести формулу из претходног задатка непосредно из геометриских расуђивања и искористити је за изражавање површине криволиниским интегралом по координатама.

3241. Интеграл $\oint (y^2+z^2)\, dx + (x^2+z^2)\, dy + (x^2+y^2)\, dz$, узет по некој затвореној контури, трансформисати помоћу Штоксове формуле у интеграл по површини „натегнутој" на ту контуру.

3242. Проверити Штоксову формулу за функције $X=x$; $Y=y$; $Z=z$, ако је контура L круг $x^2+y^2=r^2$; $z=0$, а површина S произвољна површина која пролази кроз тај круг.

3243. Проверити Штоксову формулу за функције $X=x^2\,y^3$; $Y=1$; $Z=z$, ако је контура L иста као и у претходном задатку, а површина S је полусфера $z=+\sqrt{r^2-x^2-y^2}$.

У задацима 3244—3246 површинске интеграле по затвореним површинама трансформисати помоћу формуле Грин—Остроградског у троструке интеграле по запреминама, ограниченим овим површинама.

3244. $\iint\limits_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + z^2\, dx\, dy.$

3245. $\iint\limits_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy.$

3246. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\{\cos(N, x) + \cos(N, y) + \cos(N, z)\}\, d\sigma,$

где је N спољна нормала на површину S.

ГЛАВА XII

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

§ 1. Једначине првог реда

Основне дефиниције

3247. Одредити ред датих једначина:

1) $y''=1-y'^3$; 2) $\frac{yy''}{y''^2-y'y'''}=x^n$; 3) $x\,dy-y\,dx=0$;

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\,y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\,x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; 5) $2\,d^2y-3\,dy^2=y^3\,dx^2$;

6) $5\,dx-x\,dy=2$; 7) $\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z}=-xyzu$; 8) $d^2y=2\,dy+1$.

У задацима 3248—3257 саставити диференцијалне једначине датих фамилија кривих:

3248. Кругова $x^2+y^2=R^2$. 3249. Кругова $(x-a)^2+y^2=1$.

3250. Парабола $y^2=2\,px$. 3251. Елипси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3252. Парабола са осом паралелном оси OY.

3253. Кругова чији центри леже на симетрали првог и трећег квадранта.

3254. Правих које леже у равни XOY и нису паралелне са ординатном осом.

3255. Кривих другог реда чије се осе поклапају са координатним осама. Упоредити са резултатом задатка 3251. Објаснити резултат.

3256. Ланчаница $y=C_1\operatorname{ch}x+C_2$. 3257. Кругова у равни XOY.

3258. Доказати да из $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, при $a+d=0$ следи $(y-x)\,y''=2\,y'(1+y')$.

3259. Вредности функције $y=x^2$ и њеног извода $y'=2\,x$ за вредност $x=2$ задовољавају једначину $y'=y$. Може ли се тврдити да је $y=x^2$ решење те једначине?

3260. Нека је $y=f(x)$ решење једначине $y'=F(x;y)$ у околини тачке $(x_0;y_0)$. Може ли се тврдити да је за $x=x_0$ функција $y=f(x)$ непрекидна?

Хомогене једначине

У задацима 3261—3277 решити дате хомогене једначине:

3261. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$ **3262.** $y' = \frac{x+y}{x-y}.$ **3263.** $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$

3264. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$ **3265.** $y' = \frac{y^3}{x^3}.$ **3266.** $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}.$

3267. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$ **3268.** $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$ **3269.** $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$

3270. $xy' = y \ln \frac{y}{x}.$ **3271.** $x\,dy - y\,dx = y\,dy.$

3272. $(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0.$

3273. $\frac{x}{x^2 - xy + y^2} = \frac{\sigma y}{2y^2 - xy}.$ **3274.** $y^2 + x^2 y' = xyy'.$

3275. $x^3 y' = y(y^2 + x^2).$ **3276.** $(xy' - y) \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = x.$

3277. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x}\, dy = 0.$

3278. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$; наћи интеграл који задовољава услов $y|_{x=0} = 1.$

3279. $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$; наћи решење које задовољава услов $y|_{x=1} = -1.$

3280. Доказати теорему: све интегралне криве хомогене једначине могу се добити из једне интегралне криве трансформацијом сличности са центром сличности у координатном почетку.

3281. Наћи криве код којих је квадрат дужине отсечка који отсеца било која тангенте од ординатне осе, једнак производу апсцисе и ординате додирне тачке.

3282. Наћи криве код којих је отсечак на ординати произвољне тангенте једнак одговарајућој субнормали.

3283. Наћи криве код којих произвољна тангента сече ординатну осу у тачки подједнако удаљеној од додирне тачке и од координатног почетка.

3284. Наћи криве код којих је дужина радиус-вектора произвољне тачке M једнака растојању између тачке пресека тангенте у тачки M са осом OY, и координатног почетка.

3285. Какав облик треба дати огледалу рефлектора да би светлосни зраци, полазећи од тачкастог извора, после одбијања били паралелни?

Линеарне једначине

У задацима 3286—3302 решити дате линеарне једначине.

3286. $y' + y - 2x = 0.$ **3287.** $y' + 2y = 4x.$ **3288.** $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

3289. $y' + \frac{2y}{x} + 2xe^{x^2} = 0.$ **3290.** $y' - \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$ **3291.** $y' + ye^x = e^{2x}.$

3292. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$ **3293.** $x(x^2 + 1)y' + y = x(1 + x^2)^2.$

3294. $y' = \frac{y+1}{x}.$ **3295.** $y' + y = \cos x.$

3296. $y' + ay = e^{mx}.$ **3297.** $x^2\,dy + (3 - 2xy)\,dx = 0.$

3298. $2y\,dx + (y^2 - 6x)\,dy = 0.$ **3299.** $(x - 2yx - y^2)\,dy + y\,dx = 0.$

3300. $y' = \frac{1}{2x - y^2}.$ **3301.** $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}.$

3302. $y' + y\Phi'(x) - \Phi(x)\Phi'(x) = 0.$

3303. Доказати теорему: ако су y_1 и y_2 два партикуларна интеграла линеарне диференцијалне једначине првог реда, а y трећи партикуларни интеграл, онда однос $\frac{y_2 - y}{y - y_1}$ задржава сталну вредност за макакво x.

У задацима 3304—3311 наћи партикуларна решења датих линеарних једначина, која (решења) задовољавају дате почетне услове:

3304. $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x;\ y|_{x=0} = 0.$ **3305.** $y' - 2y + 3 = 0;\ y|_{x=0} = 1.$

3306. $xy' + y - e^x = 0;\ y|_{x=a} = b.$ **3307.** $xy' - \frac{y}{x+1} = x;\ y|_{x=0} = 1.$

3308. $y' = x(2y + x^2 - 1);\ y|_{x=\sqrt{2e}} = e^{2e} - e.$

3309. $t(1 + t^2)\,dx = (x + xt^2 + t^2)\,dt;\ x|_{t=1} = -\frac{\pi}{4}.$

3310. $y' - \frac{y}{1 - x^2} = 1 + x;\ y|_{x=0} = 1.$ **3311.** $y' = 3x^2y + x^5 + x^2;\ y|_{x=0} = 1.$

3312. Доказати идентитет (в. зад. 1899):

$$\int_0^x e^{zx-z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz,$$

саставивши за функцију $I(x) = \int_0^x e^{zx-z^2}\,dz$ диференцијалну једначину и решивши је.

3313. Наћи криве код којих је отсечак на ординатној оси произвољне тангенте једнаке апсциси додирне тачке.

3314. Наћи криве код којих је површина правоугаоника, конструисаног над апсцисом произвољне тачке и отсечком на ординатној оси тангенте у тој тачки, стална величина $(= a^2)$.

3315. Наћи криве код којих је површина трапеза, којег чине координатне осе, ордината произвољне тачке и тангента у тој тачки, једнака половини квадрата апсцисе.

3316. Наћи криве које имају следећу особину: површина правоугаоника чије су стране субтангента и разлика између ординате и апсцисе произвољне тачке криве, пропорционална је ординати додирне тачке.

3317. Наћи криве код којих је површина троугла, којег чине апсцисна оса, тангента и радиус-вектор додирне тачке, стална ($=a^2$).

3318. Наћи криве код којих би апсциса тежишта криволиниског трапеза, којег чине координатне осе, права $x=a$ и тражена крива, била равна $\frac{3a}{4}$ за произвољно a.

3319. На тело*) масе m дејствује сила пропорционална времену (коефициенат пропорционалности је $=k_1$) протеклом од тренутка кад је брзина била нула. Осим тога на тело дејствује и отпор средине, који је пропорционалан брзини (коефицијенат пропорционалности је $=k_2$). Наћи зависност брзине од времена.

3320. На тело масе m дејствује сила пропорционална трећем степену времена, протеклог од тренутка кад је брзина тела била v_0. Осим тога на тело дејствује отпор средине, пропорционалан брзини тела и времену. Наћи зависност брзине од времена.

3321. На тело дејствује сила пропорционална времену. Осим тога на тело дејствује отпор средине, пропорционалан брзини тела. Наћи закон кретања тела (зависност пута од времена).

3322. Капља масе $M\,gr$ слободно пада у ваздуху равномерно се испаравајући, губећи сваке секунде $m\,gr$. Сила отпора ваздуха пропорционална је брзини кретања капље (коефициенат пропорционалности је $=k$). Наћи зависност брзине кретања капље од времена, протеклог од почетка падања капље. Узети да је $m\neq k$.

3323. Решити претходни задатак за капљу сферног облика, претпостављајући да је сила отпора ваздуха пропорционална брзини капље и њеној површини. Густина течности је γ. (Довести до квадратура).

3324. Ефективни (стварни) прираштај становништва великог града пропорционалан је постојећој количини житеља и интервалу времена. Осим тога становништво града се повећава услед имиграције: брзина пораста становништва овим путем пропорционална је времену рачунатом од момента кад је становништво града износило A_0. Наћи зависност броја становника града од времена?

3325. Почетна температура тела $\vartheta_0{}^0\,C$ једнака је температури околине. Тело доби а топлоту од апарата за загревање (брзина давања топлоте је дата функција времена $c\cdot\varphi(t)$, где је c константни топлотни капацитет тела). Осим тога тело одаје топлоту околној средини (брзина хлађења пропорционална је разлици између температуре тела и околине). Наћи зависност између температуре тела и времена, рачунатог од почетка опита.

3326. Литар воде загрева се спиралом, чији је отпор $24\,\Omega$. Напон се уводи равномерно од $E_0=0$ до $E_1=120\,V$ у току 10 минута. При том вода одаје топлоту околини, која има температуру 20^0 C (в. претходни задатак). До које се температуре загреје за 10 минута вода, која претходно има темцературу од 20^0 C? (Ако се струја искључи онда се вода охлади од 40^0 на 30^0 C за 10 минута).

3327. У цилиндричном суду са покретним поклопцем (клипом) налази се етер. Брзина испаравања етера пропорционална је разлици између концентрације паре етера која засићује простор (при датој температури), и стварне концентрације његове паре у суду. Поклопац се диже сталном брзином од a cm/sec. Површина попречног пресека суда је $S\,\text{cm}^2$. Засићујућа концентрација етерске паре је C_H. Занемарујући мењање запремине течног етера наћи зависност између количине етера који испари и времена.

*) У овом и следећа четири задатка сматрати тело довољно малим и применити на њега законе кретања материјалне тачке.

3328. У резервоару запремине 100 литара, налази се слани раствор, који садржи 10 kg растворене соли. У резервоар се улива вода брзином 3 l/min, а смеса се том истом брзином прелива у други резервоар, такође запремине 100 l, који је претходно био напуњен чистом водом, а из њега се вишак течности прелива. Колико ће соли садржати други резервоар по истеку једног часа? Колика је максимална количина соли у другом резервоару? Кад ће та максимална количина бити достигнута? Концентрација соли у сваком резервоару мешањем се одржава равномерном.

У задацима 3329—3331 решити дате задатке узимајући у обзир да, ако променљива електрична струја јачине $I=I(t)$ тече по проводнику коефициента самоиндукције L и отпора R, онда ће пад напона дуж проводника бити $L\frac{dI}{dt}+RI$.

3329. Разлика потенцијала на крајевима калема равномерно пада од $E_2=2\,V$ до $E_1=1\,V$ у току 10 sek. Колика ће бити јачина струје на крају десете секунде, ако је у почетку опита она била $16\frac{2}{3}$ ампера? Отпор калема је $0{,}12\,\Omega$, коефиценат самоиндукције је 0,1 ханриа.

3330. Наћи јачину струје у калему у моменту t, ако је његов отпор R, а коефиценат самоиндукције L. Почетна јачина струје је I_0; електромоторна сила мења се по закону $E=E_0\sin\omega t$.

3331. Напон и отпор кола мењају се равномерно у току 1 минута респективно од 0 до 120 V и од 0 на 120 Ω. Самоиндукција кола је стална (1 ханри). Почетна јачина струје је I_0. Наћи зависност између јачине струје и времена у току прве минуте опита.

Једначине које се своде на хомогене и линеарне

3332. $y'=\dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$.

3333. $y'=\dfrac{x+y-2}{y-x-4}$.

3334. $y'=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$.

3335. $(x+y+1)\,dx=(2x+2y-1)\,dy$.

3336. $y'(3x-7y-3)=3y-7x+7$.

3337. $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

3338. $y'=\dfrac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$.

3339. $y'=\dfrac{y^2-x}{2y(x+1)}$.

3340. $y'=\dfrac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$.

3341. $(1+y^2)\,dx=x\,dy$.

3342. $(x^2y^2-1)\,y'+2xy^3=0$.

3343. $yy'+x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)^2$.

3344. $xy'+1=e^y$.

3345. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0$.

3346. $x\,dx+y\,dy+x(x\,dy-y\,dx)=0$.

3347. $(x^2+y^2+y)\,dx=x\,dy$.

Бернулијева једначина

3348. $y'+2xy=2x^3y^3$. **3349.** $y^{n-1}(ay'+y)=x$.

3350. $xy'+y=y^2\ln x$. **3351.** $y'-y\,\mathrm{tg}\,x+y^2\cos x=0$.

3352. $y'-y+y^2\cos x=0$. **3353.** $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

3354. $y\,dy-\dfrac{ay^2}{x^2}dx=\dfrac{b\,dx}{x^3}$. **3355.** $y'=\dfrac{y\varphi'(x)-y^2}{\varphi(x)}$.

3356. $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$. **3357.** $y'(x^2y^3+xy)=1$.

3358. Наћи криве које имају следећу особину: ординате произвољне њихове тачке је средња пропорционала између апсцисе и збира апсцисе и субнормале повучене за криву у тој тачки.

Једначине тотални диференцијали

У задацима 3359—3370 решити дате једначине тоталне диференцијале.

3359. $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^3-x^2y)\,dy=0$.

3360. $\dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$. **3361.** $\dfrac{2x\,dx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

3362. $e^y\,dx+(xe^y-2y)\,dy=0$. **3363.** $yx^{y-1}\,dx+x^y\ln x\,dy=0$.

3364. $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$.

3365. $\dfrac{y+\sin x\cdot\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\dfrac{x}{\cos^2(xy)}dy+\sin y\,dy=0$.

3366. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$. **3367.** $y'=\dfrac{3x^2+2xy^3}{4y^3-3y^2x^2}$.

3368. $y'=\dfrac{1+x\sqrt{x^2+y^2}}{y\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)}$.

3369. $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)dy=0$.

3370. $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{y}\right)dy=0$.

Интеграциони фактор

У задацима 3371—3379 наћи интеграциони фактор и решити диференцијалне једначине:

3371. $(x^2+y)\,dx-x\,dy=0$. ***3372.** $y(1+xy)\,dx-x\,dy=0$.

3373. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2y\,dy=0$. **3374.** $(xy^2+y)\,dx=x\,dy$.

3375. $(2y+xy^3)\,dx+(x+x^2y^2)\,dy=0$.

3376. $(4xy^2+3y)\,dx+(3x^2y+2x)\,dy=0$.

3377. $(2xy^2-y)\,dx+(y^2+x+y)\,dy=0$.

3378. $(x\cos y-y\sin y)\,dy+(x\sin y+y\cos y)\,dx=0$.

3379. $\left(2xy+x^2y+\dfrac{1}{3}y^3\right)dx+(x^2$ [illegible] $)\,dy=0$.

3380. Наћи интеграциони фактор Бернулијеве једначине:

$$y'+P(x)\cdot y=y^n\cdot Q(x).$$

3381. Наћи услове под којима једначина $X(x;y)\,dx+Y(x;y)\,dy=0$ допушта интеграциони фактор $M=F(x+y)$.

3382. Наћи услове под којима једначина $X(x;y)\,dx+Y(x;y)\,dy=0$ допушта интеграциони фактор $M=F(xy)$.

Једначине разних типова

У задацима 3383—3401 решити дате диференцијалне једначине, бирајући најрационалнији (најпогоднији) начин интегрирања.

3383. $xy'=y(1-x^2y^2)$. **3384.** $y'=\dfrac{y^2+xy-x^2}{y^2}$.

3385. $y'=\dfrac{a^2}{(x+y)^2}$. **3386.** $y(x^2+y^2)\,dx+x(x\,dy-y\,dx)=0$.

3387. $y'=\dfrac{x\sin y+y\cos y}{y\sin y-x\cos y}$. **3388.** $y^3\,dx+2(x^2-xy^2)\,dy=0$.

3389. $2yy'=e^{\frac{x^2+y^2}{x}}+\dfrac{x^2+y^2}{x}-2x$. **3390.** $y'(y^2-x)=y$.

3391. $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)\,y'=0$. **3392.** $y'=x\sqrt{y}+\dfrac{xy}{x^2-1}$.

3393. $x\,dy+y\,dx+y^2(x\,dy-y\,dx)=0$.

3394. $y'=\dfrac{x}{\cos y}-\mathrm{tg}\,y$. **3395.** $y'=\dfrac{x(y-1)}{y+x^2}$. **3396.** $y'=ax+by+c$.

3397. $(x^2+y^2+2x-2y)\,dx+2(y-1)\,dy=0$.

3398. $x\cos\dfrac{y}{x}\cdot y'=y\cos\dfrac{y}{x}-x$. **3399.** $y-y'\cos x=y^2\cos x(1-\sin x)$.

3400. $\left(x\cos\dfrac{y}{x}+y\sin\dfrac{y}{x}\right)y\,dx+\left(x\cos\dfrac{y}{x}-y\sin\dfrac{y}{x}\right)x\,dy=0$.

3401. $y\cos^2y\,(1-y\sin x)\,dx-(y^2+x\cos^2y)\,dy=0$.

3402. Наћи криву код које се субнормала у произвољној тачки тако односи према збиру апсцисе и ординате тачке, као што се односи ордината према апсциси исте тачке.

3403. Наћи криве које се одликују тиме да је отсечак тангенте у произвољној тачки, који лежи између осе OX и праве $y=ax+b$, тачком додира подељен попола.

3404. Наћи криве за које је производ произвољне субнормале са сталним отсечком $(=a)$ једнак квадрату одговарајућег радиус-вектора.

3405. Наћи криве за које је површина, ограничена осом OX, траженом кривом, сталном ординатом $x=a$ и променљивом ординатом, једнака количнику трећег степена ординате и апсцисе.

3406. Наћи криве за које је растојање од координатног почетка до тангенте у произвољној тачки криве, једнако растојању од координатног почетка до нормале у истој тачки.

3407. Наћи криве чија је субнормала једнака збиру апсцисе и ординате.

3408. Наћи криву која пролази кроз координатни почетак и одликује се следећом особином: површина правоугаоника конструисаног над сталним отсечком a и субнормалом, једнака је разлици површина квадрата, конструисаних над одговарајућом апсцисом и ординатом.

3409. Наћи криве код којих збир радиус-вектора и поларне субнормале (в. зад. 885 - 889), има сталну вредност a.

3410. Наћи криве које пролазе кроз пол, код којих је разлика између радиус-вектора и поларне субнормале пропорционална поларном углу.

3411. Двострука хипотенуза троугла којег чине радиус-вектор PA неке криве, поларна оса и нормала на радиус-вектору, подигнута у тачки A, једнака је збиру поларне субтангенте и субнормале.

***3412.** Из високог суда запремине $Q\,\text{cm}^3$, црпи се ваздух брзином $q\,\text{cm/sec}$. Истовремено са почетком дејства пумпе у суд почиње падати материјална честица. Сила отпора ваздуха је пропорционална његовој густини и брзини честице. Наћи зависност између брзине честице и времена (довести задатак до квадратура).

3413. У електрично коло отпора $R=\dfrac{3}{2}\,\Omega$ у току два минута равномерно се уводи напон (од 0 до 120 V). Осим тога аутоматски се уводи самоиндукција, тако да је број анрија у колу бројно једнак јачини струје изражене у амперима. Наћи зависност јачине струје од времена у току прве две минуте опита.

§ 2. Једначине првог реда (наставак)

Изоклине

3414. Изоклине (в. курс, т. II, стр. 234) дате диференцијалне једначине су праве које пролазе кроз координатни почетак. Написати ту једначину.

3415. Написати диференцијалну једначину чије су изоклине параболе $y^2=2px$.

3416. Написати диференцијалну једначину чије су изоклине кругови $x^2+y^2=R^2$.

3417. Написати диференцијалну једначину чије су изоклине равностране хиперболе $xy=a$.

3418. Наћи изоклине диференцијалне једначине фамилије парабола $y=ax^2$. Направити цртеж. Интерпретирати резултат геометриски.

3419. Уверити се да су изоклине хомогене једначине праве, које пролазе кроз координатни почетак.

3420. Навести диференцијалне једначине чије су изоклине праве.

3421. Нека су y_1, y_2, y_3 ординате трију произвољних изоклина неке линеарне једначине, које (ординате) одговарају једној апсциси. Уверити се да односи $\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$ задржавају исту вредност па ма каква била та апсциса.

Сингуларна решења. Клеро-ове и Лагранжове једначине

У задацима 3422—3433 решити дате једначине (Лагранжове и Клеро-ове):

3422. $y=xy'+y'^2$. **3423.** $y=xy'-3y'^3$. **3424.** $y=xy'+\dfrac{1}{y'}$.

3425. $y=xy'-\sqrt{1+y'^2}$ **3426.** $y=y'x+\sin y'$. **3427.** $y=2xy'+y^2y'^3$.

3428. $y=y'^2(x+1)$. **3429.** $2yy'=x(y'^2+4)$. **3430.** $y=yy'^2+2xy'$.

3431. $y=x(1+y')+y'^2$. **3432.** $xy'^2-2yy'+4x=0$.

3433. $y=y'(x+1)+y'^2$.

У задацима 3434—3437 наћи сингуларне интеграле датих једначина применом истог начина који се примењује у случају Лагранжових и Клеро-ових једначина.

3434. $y'^2-yy'+e^x=0$. **3435.** $x^2y'^2-2(xy-2)y'+y^2=0$.

3436. $y'(y'-2x)=2(y-x^2)$. **3437.** $y^2(1+y'^2)=x$.

3438. Доказати теорему: ако је линеарна диференцијална једначина Клеро-ова једначина, онда је фамилија њених интегралних кривих прамен правих.

3439. Доказати теорему: Произвољна крива која одговара партикуларном интегралу Лагранжове једначине, дели у сталном односу отсечке изоклина исте једначине, који (отсечци) леже између двеју кривих које одговарају њеним другим двама партикуларним решењима.

3440. Површина троугла који чине тангента тражене криве и координатне осе, је стална величина. Наћи ту криву.

3441. Наћи криву чије тангенте отсецају на координатним осама отсечке, чији збир износи $2a$.

3442. Наћи криве за које је производ растојања произвољне тангенте од две дате тачке сталан.

3443. Наћи криве код којих је површина правоугаоника, чије су стране тангента и нормала у произвољној тачки, једнака површини правоугаоника са странама равним по дужини апсциси и ординати те тачке.

3444. Наћи криве код којих је збир нормале и субнормале пропорционалан апсциси.

3445. Наћи криве код којих отсечак нормале, који лежи између координатних оса, има сталну дужину a.

3446. Брзина материјалне тачке у произвољном тренутку времена разликује се од средње брзине (од почетка кретања до тог тренутка) за величину пропорционалну кинетичкој енергији тачке и обрнуто пропорционалну времену рачунатом од почетка кретања. Наћи зависност пута од времена.

Ортогоналне трајекторије и еволвенте

У задацима 3447—3454 наћи ортогоналне трајекторије датих фамилија кривих линија:

3447. Елипси, које имају заједничку велику осу, једнаку $2a$.

3448. Парабола $y=ax^2$.

3449. Парабола $y^2=2p(x-\alpha)$ (α је параметар фамилије).

3450. Кругова $x^2+y^2=2ax$.

3451. Подударних парабола, које додирују дату праву, при чему као додирна тачка сваке параболе служи њено теме.

3452. Кругова истог полупречника чији центри леже на датој правој.

3453. Цисоида $(2a-x)\ y^2=x^3$.

3454. Лемнискáта $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3455. Наћи криве које секу под углом од 45^0 тангенте на круг $x^2+y^2=R^2$.

У задацима 3456—3460 наћи еволвенте датих кривих:

3456. Круга $x^2+y^2=R^2$. **3457.** Ланчанице $y=a\cosh\text{yp}\,\dfrac{x}{a}$.

3458. Еволвенте круга $x=a(\cos t+t\sin t)$; $y=a(\sin t-t\cos t)$.

3459. Хипоциклоиде $x=a\cos^3 t$; $y=a\sin^3 t$.

3460. Семикубне параболе $y=3t^2$; $x=-2t^3$.

Приближно интегрирање диференцијалних једначина

3461. Дата је једначина $y'=y^3x+x^2$. Израчунати y за $x=1$, ако је y решење које одговара почетном услову $y|_{x=0}=0$.

3462. Дата је једначина $y'=x^2y^2+1$. Израчунати вредност y за $x=1$, ако је y решење које одговара почетном услову $y|_{x=0}=0$.

3463. Дата је једначина $y'=x\ln y-y\ln x$. Израчунати вредност y за $x=1{,}6$ ако је y решење које одговара почетном услову $y|_{x=1}=1$.

3464. Дата је једначина $y'=\dfrac{xy}{2}$ и почетни услов $y|_{x=0}=1$. Решити ову једначину тачно и наћи y за $x=0{,}9$. Даље, решити једначину приближно, делећи интервал $0\leqslant x\leqslant 0{,}9$ на 9 једнаких делова. Наћи релативну грешку резултата добијеног приближном интеграцијом.

3465. Дата је једначина $y'=0{,}1y^2+2xy+x$. Саставити таблицу вредности решења, које одговара почетном услову $y|_{x=0}=1$, дајући за x вредности од 0 до 0,8 са размаком од 0,1.

3466. Дата је једначина: $y'=\dfrac{x}{y}-x^2$. Саставити таблицу вредности решења, које одговара почетном услову $y|_{x=1}=1$, дајући за x вредности од 1 до 1,5 са размаком од 0,05.

3467. Дата је једначина $y'=\dfrac{x^2+y^2}{10}$. Конструисати приближно интегралну криву која одговара интервалу $1\leqslant x\leqslant 5$ и пролази кроз тачку $M(1;1)$.

3468. Дата је једначина $y'=\dfrac{1}{x^2+y^2}$. Конструисати приближно интегралну криву која одговара интервалу $0{,}5\leqslant x\leqslant 3{,}5$ и пролази кроз тачку $(0{,}5; 0{,}5)$.

3469. $y'=y^2+xy+x^2$. Наћи методом сукцесивних апроксимација y_2, које одговара почетном услову $y|_{x=0}=1$.

3470. $y'=y^2-x$. Наћи методом сукцесивних апроксимација y_3, које одговара почетном услову $y|_{x=0}=1$. Израчунати $y_3|_{x=0{,}5}$ са три децимала.

3471. Израчунати за $x=1$ вредност оног тачног решења диференцијалне једначине $y'=y+x$, које одговара почетном услову $y|_{x=0}=1$. Израчунати затим y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 методом сукцесивних апроксимација. Упоредити добијене резултате.

3472. Познато је да се интеграл $\int e^{-x^2}dx$ не може претставити у коначном облику помоћу елементарних функција. Користећи се тиме што је функција $y=e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-x^2}dx$ решење једначине $y'=2xy+1$, за почетни услов $y|_{x=0}=0$, израчунати $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}dx$. Користити се методом сукцесивних апроксимација, заустављајући се на петој апроксимацији. Упоредити резултат са приближном вредношћу, израчунатом по Симпсоновом правилу.

3473. $y'=xy^3-1$; наћи вредност за $x=1$ оног решења ове једначине, које одговара почетном услову $y|_{x=0}=0$. Зауставити се на трећој апроксимацији радећи по методи сукцесивних апроксимација.

§ 3. Једначине другог и вишег реда

Општа теорија

У задацима 3474—3480 наћи функцију кад је дат извод:

3474. $y''=x+\sin x$. **3475.** $y''=\operatorname{arctg} x$. **3476.** $y'''=x^{10}$.

3477. $y'''=\dfrac{1}{x}$. **3478.** $y'''=\cos 2x$. **3479.** $y'''=\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x}$.

3480. $y^x=e^{ax}$.

У задацима 3481—3498 решити дате диференцијалне једначине другога реда:

3481. $y''=ae^y$. **3482.** $xy''=y'$. **3483.** $y''=2yy'$.

3484. $yy''^2=1$. **3485.** $1+y'^2=2yy''$. **3486.** $2y'^2=(y-1)y''$.

3487. $yy''=y'^2$. **3488.** $y''=y'+x$. **3489.** $y''=\dfrac{y'}{x}+x$.

3490. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$. **3491.** $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$.

3492. $(y'')^2=y'$. **3493.** $y'+\dfrac{1}{4}y''^2=xy''$. **3494.** $xy''=y'(e^y-1)$.

3495. $2xy'y''=y'^2+1$. **3496.** $yy''+y'^2=x$. **3497.** $(1+x^2)y''-2xy=0$.

3498. $xyy''+xy'^2=3yy'$.

У задацима 3499—3508 решити дате диференцијалне једначине другога реда за дате почетне услове:

3499. $2y''=3y^2$; $y|_{x=-2}=1$; $y'|_{x=-2}=-1$.

3500. $y''=y'x+y+1$; $y|_{x=0}=1$; $y'|_{x=0}=0$.

3501. $y''(x^2+1)=2xy'$; $y|_{x=0}=1$; $y'|_{x=0}=3$.

3502. $y''=e^{2y}$; $y|_{x=0}=0$; $y'|_{x=0}=1$.

3503. $xy''+xy'^2-y'=0$; $y|_{x=2}=0$; $y'|_{x=2}=1$.

3504. $2y'^2=y''(y-1)$; $y|_{x=1}=2$; $y'|_{x=1}=-1$.

3505. $y''=\dfrac{y'}{x}+\dfrac{x^2}{y'}$; $y|_{x=0}=1$; $y'|_{x=0}=0$.

***3506.** $x^4y''=(y-xy')^3$; $y|_{x=1}=1$; $y'|_{x=1}=1$.

3507. $y^4-y^3y''=1$; $y|_{x=0}=\sqrt{2}$; $y'|_{x=0}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3508. $y^3y''=-1$; $y|_{x=1}=1$; $y'|_{x=1}=0$.

3509. $yy''=y'^2-y'^3$; $y|_{x=1}=1$; $y'|_{x=1}=1$.

У задацима 3510—3518 решити дате диференцијалне једначине вишег реда:

3510. $y'''=(y'')^3$. **3511.** $y'''+(y'')^2=0$. **3512.** $y'y'''=3(y'')^2$.

3513. $x^2y'''=y''^2$. **3514.** $y''^2-y'y'''=\left(\dfrac{y'}{x}\right)^2$. **3515.** $xy^{\mathrm{V}}=y^{\mathrm{IV}}$.

3516. $yy'''-y'y''=0$. **3517.** $y'y'''=y''^2$. **3518.** $y'''(1+y'^2)=3y'y''^2$.

3519. Наћи криве код којих је полупречник кривине једнак дужини нормале.

3520. Наћи криве код којих је полупречник кривине пропорционалан углу између тангенте и апсцисне осе.

3521. Наћи криве код којих је пројекција полупречника кривине на OY оси стална величина, једнака a.

3522. Наћи криву чија је дужина лука, мерена од неке тачке, пропорционална тангенсу угла између тангенте и апсцисне осе.

3523. Танак, еластичан и нерастегљив конац обешен је за оба краја. Какав равнотежни положај заузима конац под дејством оптерећења, равномерно распоређеног по пројекцији конца на хоризонталну раван? (Властита тежина конца се занемарује).

3524. Наћи закон праволиниског кретања ако се зна да је рад активне силе пропорционалан времену, рачунатом од почетка кретања.

***3525.** Зрак светлости из ваздуха (индекс преламања је m_0) пада под углом α_0 према вертикали у течност промењивог индекса преламања, који линеарно зависи од дубине и сталан је у равни паралелној хоризонту; на површини течности он износи m_1, а на дубини h раван је m_2. Наћи облик светлосног зрака. (Индекс преламања средине обрнуто је пропорционалан брзини распростирања светлости; в. Курс, т. I стр. 155).

Линеарне једначине

3526. Функције x^3 и x^4 образују фундаментални систем решења линеарне хомогене једначине другог реда. Написати ту једначину.

3527. Функције e^x и x^2e^x образују фундаментални систем решења линеарне хомогене једначине другога реда. Написати ту једначину.

3528. Функције x; x^3 и e^x образују фундаментални систем решења линеарне хомогене једначине трећега реда. Написати ту једначину.

3529. Функције x^2 и x^3 образују фундаментални систем решења линеарне хомогене једначине другога реда. Написати ту једначину. Наћи решење ове једначине које задовољава почетне услове:

$$y|_{x=1}=1;\quad y'|_{x=1}=0.$$

3530. Доказати теорему: ако је y_1 партикуларно решење линеарне једначине $y''+y'P(x)+yQ(x)=0$, онда је

$$y_2=Cy_1\int e^{-\int P(x)\,dx}\cdot\frac{dx}{y_1^2},$$

где је C константа, такође решење.

3531. Наћи потребне и довољне услове да би једначина $y''+y'P(x)+ +yQ(x)=0$ имала два различита партикуларна решења y_1 и y_2 која задовољавају услов $y_1y_2=1$.

3532. Једначина $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0$ има решење $y=e^x$. Наћи решење једначине које задовољава почетне услове: $y|_{x=1}=0$; $y'|_{x=1}=1$.

У задацима 3533—3535 лако је изабрати једно партикуларно решење (не рачунајући тривијално $y=0$) датих једначина. Наћи општа решења ових једначина:

3533. $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 2y = 0$. **3534.** $y'' - y' + \dfrac{y}{x} = 0$.

3535. $y'' - \dfrac{2x}{x^2+1} \cdot y' + \dfrac{2y}{x^2+1} = 0$.

У задацима 3536—3540 наћи решења датих нехемогених једначина:

3536. $x^2 y'' - xy' = 3x^3$. **3537.** $\dfrac{y''}{x+1} + \dfrac{y'}{(x+1)^2} = 16(x+1)$.

3538. $(3x + 2x^2) y'' - 6(1+x) y' + 6y = 6$.

3539. $y'' - \dfrac{3x^2}{x^3+1} y' + \dfrac{3x}{x^3+1} y = 4(x^3+1)$.

3540. Једначина $(1+x^2) y'' + 2xy' - 6x^2 - 2 = 0$ допушта партикуларно решење $y = x^2$. Наћи решење ове једначине, које задовољава услове $y|_{x=-1} = 0$; $y'|_{x=-1} = 0$.

***3541.** Унутрашњост цилиндричне цеви проводника топлоте напуњена је водом чија је температира ϑ. Спољни зид услед хлађења има температуру θ, унутрашњи полупречник цеви је r, спољашњи R. Наћи температуру на растојању ρ од ове цеви ($r \leqslant \rho \leqslant R$). При стационарном, тј. независном од времена, распореду температуре у хомогеном телу она задовољава Лапласову једначину

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

3542. Унутрашњи полупречник сферног аутоклава је r, а спољашњи R. Температура унутрашњег зида је ϑ (она се одржава сталном), а спољашњи зид има такође сталну температуру θ. Наћи распоред температуре у зидовима аутоклаве при стационарном режиму апарата (види претходни задатак).

У задацима 3543—3545 трансформисати дате једначине у Беселову једначину $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$ (види такође задатке 3861—3868 у гл. XIII).

3543. $a(x-b)^2 y'' + a(x-b) y' + x(x-2b) \cdot y = 0 \cdot (a > 0)$.

3544. $x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - p^2) y = 0$. ***3545.** $xy'' + ay' + xy = 0$.

§ 4. Линеарне једначине са сталним коефицијентима

3546. $y'' - 3y' + 2y = 0$. **3547.** $y'' - 9y = 0$.

3548. $y'' - 4y' = 0$. **3549.** $y'' - 5y' + 6y = 0$.

3550. $y'' + y' - 2y = 0$. **3551.** $y'' - 2y' - y = 0$.

3552. $3y'' - 2y' - 8y = 0$. **3553.** $y'' + y = 0$.

3554. $y'' + 6y' + 13y = 0$. **3555.** $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

3556. $y'' - 2y' + y = 0$. **3557.** $2y'' + y' = 0$.

3558. $y''' = y'$. **3559.** $y''' - 13y' - 12y = 0$.

3560. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$. **3561.** $y''' + 9y' = 0$. **3562.** $y^{IV} = 16y$.

3563. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$. **3564.** $y^{IV} = 8y'' - 16y$. **3565.** $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.

3566. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. **3567.** $64y^{VIII} + 48y^{VI} + 12y^{IV} + y'' = 0$.

3568. $y^{VI} - 2y^{V} + 3y^{IV} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$. **3569.** $y^{IV} + y = 0$.

3570. $y^{(n)} + \dfrac{n}{1} y^{(n-1)} + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{(n-2)} + \cdots + \dfrac{n}{1} y' + y = 0$.

У задацима 3571—3575 наћи решења датих једначина које задовољавају дате почетне услове:

3571. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y|_{x=0} = 6$; $y'|_{x=0} = 10$.

3572. $y'' = 2y'$; $y|_{x=1} = 0$; $y'|_{x=1} = 1$.

3573. $4y'' + 4y' + y = 0$; $y|_{x=0} = 2$; $y'|_{x=0} = 0$.

3574. $y''' = -y'$; $y|_{x=0} = 2$; $y'|_{x=0} = 0$; $y''|_{x=0} = -1$.

3575. $y^{V} = y'$; $y|_{x=0} = 0$; $y'|_{x=0} = 1$; $y''|_{x=0} = 0$; $y'''|_{x=0} = 1$; $y^{IV}|_{x=0} = 2$.

3576. Наћи интегралну криву једначине $y'' - k^2 y = 0$, која пролази кроз тачку $M(x_0; y_0)$ и додирује у тој тачки праву $y - y_0 = a(x - x_0)$.

3577. Наћи интегралну криву једначине $y'' + k^2 y = 0$, која пролази кроз тачку $M(x_0; y_0)$ и додирује у тој тачки праву $y - y_0 = a(x - x_0)$.

У задацима 3578 - 3611 дате нехомогене једначине решити, одређујући партикуларно решење или пробањем (Курс, II, стр. 269 - 272), или методом варијације произвољних констаната (Курс, II, стр. 261 - 265), или применом опште формуле (Курс, II, стр. 272 - 275):

3578. $y'' - 2y' + 2y = 2x$. **3579.** $y'' + 2y = x^2 + 1$.

3580. $2y'' + y' - y = 2e^x$. **3581.** $y'' - y' + 3x^2 - 2x - 1 = 0$.

3582. $y'' + y' - 6y = e^x(3 - 4x)$. **3583.** $y'' + 4y' = 5y + 1$.

3584. $y'' + a^2 y = e^x$. **3585.** $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

3586. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$. **3587.** $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x$.

3588. $y'' + y = \sin x \sin 2x$. **3589.** $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$.

3590. $y'' - y = 1 - x^2 + e^{2x}$. **3591.** $y'' - 7y' + 10y = 10(\sin x + x)$.

3592. $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$. **3593.** $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

3594. $y'' + 4y = \sin 2x$.

3595. $y'' = y' + 3x(4 - x)\cos 3x - (9x^2 + 2x - 2)\sin 3x$.

3596. $y'' - 2y' + y + \dfrac{e^x}{x^2+1} = 0$. **3597.** $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

3598. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y|_{x=0} = 2$; $y'|_{x=0} = 2$.

3599. $4y'' + y = 0$; $y|_{x=0} = a$; $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = b$.

3600. $y'' - 3y' - 4y = 0$; $y|_{x=0} = 0$; $y|_{x=1} = 1$.

3601. $y'' + y' = 2(1 - x)$; $y|_{x=0} = y|_{x=1} = 0$.

3602. $y'' + y + \sin 2x = 0;\ y|_{x=0} = y|_{x=\pi} = 1.$

3603. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$

3604. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10).$

3605. $y''' + y = 2xe^x(12 + 18x + 6x^2 + x^3).$

3606. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 e^x.$ **3607.** $y^{V} + y''' = x^2 - 1.$

3608. $y''' - y' = 3(2 - x^2);\ y_{x=0} = y'_{x=0} = y''_{x=0} = 1.$

3609. $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0;\ y|_{x=0} = 2;\ y'|_{x=0} = 1;\ y|_{x=\infty} = 1.$

***3610.** а) $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$; б) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$; в) $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x.$

3611. $y'' + y = \sin^4 x.$

У задацима 3612—3616 дате једначине своде се на једначине са сталним коефицијентима сменом $x = e^t$.

3612. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0.$ **3613.** $x^2y'' + xy' + y = x.$

3614. $x^2y''' + xy' - y = 0.$ **3615.** $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{2}{x}.$

3616. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0.$

3617. Материјална тачка масе 1 gr одбија се од центра силом пропорционалном њеном растојању од тог центра (коефицијенат пропорционалности је 4). Отпор средине пропорционалан је брзини кретања (коефицијенат пропорционалности је 3). У почетку кретања растојање од центра је 1 cm, а брзина је 0. Наћи закон кретања.

3618. Материјална тачка масе m креће се из A у B под дејством сталне силе F. Отпор средине је пропорционалан растојању тела од B и у почетном моменту (у тачки A) износи $f\,(f < F)$. Почетна брзина тачке је 0. Колико ће се времена тачка кретати из A у B? $(AB = a)$.

3619. Тело масе 200 gr обешено је о федер и изведено из равнотежног положаја истезањем федера за 2 cm, после чега је пуштено (без почетне брзине). Наћи једначину кретања тела, узимајући да је отпор средине пропорционалан брзини кретања. Ако се тело креће брзином од 1 cm/sek, онда средина пружа отпор од 0,1 gr; еластична сила федера при његовом истезању за 2 cm, равна је 10 kg. Тежина се не узима у обзир.

***3620.** Дрвени цилиндрични пањ ($S = 100$ cm², $h = 20$ cm, $\gamma = 0{,}5$ g/cm³) потопљен је цео у воду и пуштен без почетне брзине. Рачунајући да је сила трења пропорционална висини потопљеног дела, испитати колики мора бити коефицијенат пропорционалности k да би се у првом подизању изнад површине воде показала тачно половина пања? Колико ће времена трајати прво подизање? Каква ће бити једначина кретања при првом уздизању?

***3621.** Горњи крај танког вертикалног штапа је утврђен, а за доњи његов крај причвршћен је диск. Штап је усукан тако да је његова оса задржала свој положај, а диск се заокренуо за извесан угао. Затим је штап остављен сам себи, при чему је настало торзионо осциловане. Познато је да је моменат еластичних сила штапа, који (моменат) тежи

да врати штап у првобитни положај, пропорционалан углу заокрета диска (тј. углу увртања). Наћи коефицијенат пропорционалности, ако период насталих торзионих осцилација износи T sek, а моменат инерције диска у односу на осу штапа је I.

***3622.** Танка дугачка цевчица обрће се сталном угаоном брзином ω око вертикалне осе нормалне на њој. У почетном моменту на растојању a_0 од осе у цевчици се налазила лоптица масе m. Узимајући да је у почетном моменту брзина лоптице у односу на цевчицу била једнака 0, наћи закон релативног кретања лоптице.

3623. Решити претходни задатак под претпоставком да је лоптица везана у тачки 0 опругом. Сила дејства опруге на лоптицу пропорционална је деформацији опруге; сила од k дина изазива промену дужине опруге за 1 cm. Дужина опруге у слободном стању је a_0.

3624. Разлика потенцијала на облогама кондензатора износи V волти, његов капацитет је C фарада. Облоге кондензатора укључују се у коло чији је отпор $R\,\Omega$, самоиндукција L хенриа (види зад. 3329—3331 ове главе). Знајући да је при равномерном процесу промена набоја кондензатора једнака његовом капацитету, помноженом променом разлике потенцијала $(I\,t = -C\,V)$, написати диференцијалну једначину пражњења кондензатора, испитати у ком ће случају пражњење бити периодично, и наћи период пражњења.

§ 5. Системи диференцијалних једначина

3625. $\begin{cases} y' + 3y + z = 0, \\ z' - y + z = 0. \end{cases}$ **3626.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$

3627. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$ **3628.** $\begin{cases} yzy' = x; & \left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right); \\ y^2z' = x; & \left(z' = \dfrac{dz}{dx}\right). \end{cases}$

3629. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t. \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$ **3630.** $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{z}, \\ z' = \dfrac{x-y}{y}. \end{cases}$

3631. $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ **3632.** $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ z' = \dfrac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$

3633. $\begin{cases} z = y'(z - y)^2, \\ y = z'(z - y)^2. \end{cases}$ **3634.** $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}.$

У задацима 3635—3639 наћи партикуларна решења система диференцијалних једначина, која (решења) задовољавају наведене почетне услове:

3635. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - yz}{x^2 - yz}; \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z(x+y)}{x^2 - yz}; \qquad x_0 = 0; \quad y_0 = 1; \quad z_0 = -1.$

3636. $y' = z + x; \quad z' = y - x; \qquad x_0 = 0; \quad y_0 = 3; \quad z_0 = 1.$

3637. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{2x}{t}; \quad \dfrac{dy}{dt} = x + y - 1 + \dfrac{2x}{t}; \qquad t_0 = 1; \quad x_0 = \dfrac{1}{3}; \quad y_0 = -\dfrac{1}{3}.$

3638. $\dfrac{dx}{dt} = z + y - x; \quad \dfrac{dz}{dt} = x + y + z; \quad \dfrac{dy}{dt} = z + x - y; \qquad t_0 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = z_0 = 0.$

3639. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z; & \dfrac{dz}{dt} = x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x; & t_0 = 0; \quad x_0 = -1; \quad y_0 = 1; \quad z_0 = 0. \end{cases}$

3640. Наћи пар кривих, следећих особина: 1) тангенте повучене у тачкама са једнаким апсцисама, секу се на ординатној оси; 2) нормале повучене у тачкама са једнаким апсцисама, секу се на апсцисној оси; 3) једна од кривих пролази кроз тачку $(1; 1)$, друга кроз тачку $(1; 2)$.

3641. Дате су криве $y = f(x)$, која пролази кроз тачку $(0; 1)$, и $y = \int f(x)\,dx$, која пролази кроз тачку $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. Тангенте повучене за обе криве у тачкама са једнаким апсцисама, секу се на апсцисној оси. Наћи криву $y = f(x)$.

3642. Наћи пар кривих, следећих особина: 1) поларна субнормала прве једнака је одговарајућем радиус-вектору друге; 2) поларна субнормала друге једнака је одговарајућем радиус-вектору прве; 3) прва крива пролази кроз пол, а друга кроз тачку $(\varphi = 0; \rho = 1)$.

3643. Две криве имају следеће особине: 1) површина исечка образованог почетним и покретним радиус-вектором и луком прве криве, мања је за сталну величину од квадрата, конструисаног над одговарајућим радиус-вектором друге криве; 2) поларна субнормала прве двапут је већа од поларне субнормале друге; 3) прва пролази кроз тачку $(\varphi = 0; \rho = 1)$, друга кроз тачку $\left(\varphi = 0; \ \rho = \dfrac{1}{2}\right)$. Наћи криве.

3644. Наћи просторну криву која пролази кроз тачку $(0; 1; 1)$ и има следеће особине: 1) продор тангенте у равни XOY описује бисектрису угла између позитивних смерова оса OX и OY; 2) растојање овог продора од координатног почетка једнако је координати z додирне тачке.

3645. Две лоптице, свака масе 1 gr, везане су сасвим лаком опругом (њоно истезање је пропорционално сили која истеже). Дужина неистегнуте опруге је l_0. Опруга је истегнута до дужине l_1, а затим, у моменту $t = 0$ обе лоптице, налазећи се вертикално једна изнад друге, почну падати (отпор средине се занемарује). По истеку T секунди дужина опруге се скраћује на l_0. Наћи закон кретања сваке лоптице.

3646. Хоризонтална цевчица обрће се око вертикалне осе, као у задацима 3622 и 3623, са угаоном брзином од 2 радијана у sek. У цевчици налазе се две лоптице маса 300 gr и 200 gr, везане сасвим лаком еластичном опругом дугачком 10 cm, при чему је опруга неистегнута, а лоптице су подједнако удаљене од осовине обртања. Сила јачине 24000 дина истеже опругу за 1 cm. Лоптице се држе у описаном положају неким механизмом. У тренутку, који узимамо за почетак рачунања времена, дејство механизма престаје и лоптице почињу да се крећу. Наћи закон кретања сваке лоптице у односу на цевчицу. Трење се занемарује.

3647. У градовима A и B у неком тренутку времена (који узимамо за почетак рачунања) било је респективно A_0 и B_0 становника ($A_0 > B_0$). Брзина стварног нарастања броја становника пропорционална је броју постојећих становника, при чему су коефициенти пропорционалности за A и B једнаки (и износе k). Осим тога, из града B у град A у малом интервалу времена Δt пресељава се број становника, пропорционалан разлици становника градова A и града B и интервалу Δt (коефициенат пропорционалности је k_1). Колико ће становника бити у A, а колико у B након t година?

× **3648.** Брзина рашћења колоније микроорганизама пропорционална је њиховој постојећој количини и постојећој количини хранљиве материје (коефициенат пропорционалности је k). Утрошак хранљивих материја пропорционалан је постојећој количини микроорганизама и времену (коефициенат пропорционалности је k_1). У почетку опита у суду је било A_0 gr микроорганизама, и B_0 gr хранљивих материја. Наћи зависност количине A микроорганизама, и количине B хранљивих материја од времена. 17.8.52.

3649. Два цилиндра чије основе леже у једној равни, спојени при дну капиларном цевчицом, напуњени су течношћу до разних висина (H_1 и H_2). Кроз цевчицу у јединици времена протече запремина течности, пропорционална разлици висина, тј. равна $\alpha(h_1 - h_2)$. Наћи закон по коме се мења висина течности у судовима изнад капиларне цевчице. Попречни пресек судова је S_1 и S_2.

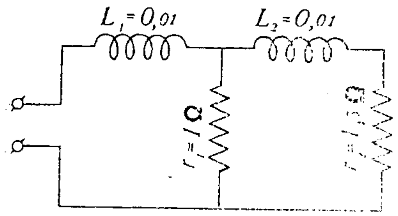
Ако су у електрично коло укључени самоиндукција и капацитет, при чему коло не претставља просто везивање проводника у серији, већ има разграњавања, онда се при састављању диференцијалних једначина јачине струје морају узети у обзир следећи закони (Кирховљева правила):

1) Количина електрицитета која притиче у чворну тачку (тачку разграњавања), мора бити једнака количини електрицитета, која истиче.

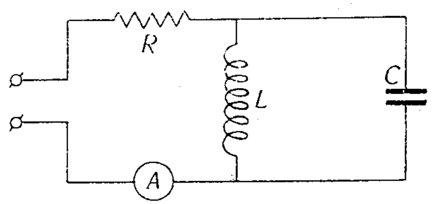
2) Алгебарски збир свих електромоторних сила ма које затворене контуре једнака је нули. (Електромоторна сила у елементу омског отпора је RI, у елементу самоиндукције је $L\dfrac{dI}{dt}$; у елементу капа-

цитета је $\left\{\frac{Q_0}{C}+\frac{1}{C}\int_0^t I\,dt\right\}$, где је Q_0 почетна количина електрицитета у кондензатору.

3650. На слици 51 претстављена је шема са самоиндукцијама и отпорима. $E=200\sin(100\pi t)$. Самоиндукције оба калема су једнаке (по 0,01 ханриа). Отпори реостата су $1\,\Omega$ и $1{,}5\,\Omega$. Одредити зависност јачине струје у калемима самоиндукције од времена.



Сл. 51



Сл. 52

3651. На сл. 52. дата је шема са самоиндукцијом L, капацитетом C и отпором R. Напон на клемама је $E=E_0\sin\omega t$. У тренутку укључивања струје $t=0$ кондензатор није био напуњен. Наћи зависност јачине струје (коју показује амперметар; види слику) од времена. Узети да је $4CLR^2-L^2=\Omega^2>O$.

ГЛАВА XIII

РЕДОВИ

§ 1. Бројни редови

Критериум конвергенције

У задацима 3652—3669 испитати који су од датих редова конвергентни.

3652. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$ **3653.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{9}+\cdots$

3654. $1+\frac{2}{1001}+\frac{4}{2001}+\frac{8}{3001}+\cdots$ **3655.** $1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots$

3656. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+\frac{16}{81}+\cdots$ **3657.** $\frac{2!}{10}+\frac{3!}{10^2}+\frac{4!}{10^3}+\cdots$

3658. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$

***3659.** $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}+\cdots$

3660. $1+\frac{3}{100}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{100^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{100^3}+\cdots$

3661. $\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\sin^2\frac{2\pi}{4}}{2^2}+\frac{\sin^2\frac{3\pi}{4}}{2^3}+\cdots+\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{2^n}+\cdots$

***3662.** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ **3663.** $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\cdots$

3664. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\cdots$ **3665.** $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots$

3666. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$

3667. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\cdots$ **3668.** $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

3669. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+\frac{1}{\ln^4 5}+\cdots$

У задацима 3670—3679 испитати, који су од датих редова апсолутно конвергентни, а који су дивергентни:

3670. $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots$ **3671.** $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$

3672. $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{4}+\frac{\sin 3\alpha}{9}+\cdots$ **3673.** $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$

3674. $2-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\frac{7}{6}+\cdots$

3675. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$

3676. $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}.$ **3677.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$

3678. $\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}.$ ***3679.** $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}(-1)^{n+1}.$

У задацима 3680—3684 питање конвергенције датих редова решити помоћу интегралног критериума конвергенције.

3680. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\left(\frac{1+3}{1+3^2}\right)^2+\left(\frac{1+4}{1+4^2}\right)^2+\cdots$

3681. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\frac{1}{5\ln^2 5}+\cdots.$

3682. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\frac{1}{5\ln 5}+\cdots$

3683. $\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}.$ **3684.** $\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2.$

Сумирање бројних редова

У задацима 3685—3694 израчунати збирове датих редова:

***3685.** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots$

3686. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\cdots$

3687. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots$

3688. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 13}+\cdots$

3689. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$

3690. $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\frac{35}{216}+\frac{97}{1296}+\cdots$ **3691.** $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots$

3692. $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\frac{3}{5^2\cdot 7^2}+\cdots$

3693. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}+\cdots+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2}+\cdots$

***3694.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+\cdots+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n^2+n+1}+\cdots$

Неке граничне вредности

3695. Показати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$

3696. Показати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0\ (a>1).$

3697. Показати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$

3698. Показати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0.$

§ 2. Функционални редови

Конвергенција функционалних редова

У задацима 3699—3711 испитати за које ће вредности x дати редови бити конвергентни:

3699. $1+x+x^2+x^3+\cdots$ **3700** $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\cdots$

3701. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\cdots$ **3702.** $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\cdots$

3703. $\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^6}+\cdots$

3704. $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{n^2}}{n!}.$ **3705.** $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$ **3706.** $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}.$

3707. $10x+100x^2+1000x^3+\cdots$ **3708.** $x+x^4+x^9+x^{16}+\cdots$

3709. $1+x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots$ **3710.** $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}a^n x^n}{n!}.$

3711. $1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\frac{x^3\ln^3 a}{3!}+\cdots.$

Униформна конвергенција

3712. Показати да ред

$$\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}+\cdots+\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}+\cdots$$

униформно конвергира за све $x>1$. Уверити се да је за свако x из интервала $(2\leqslant x\leqslant 100)$ довољно узети седам чланова да би се добила тачност од 0,01.

3713. Показати да ред

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}+\cdots$$

униформно конвергира на целој позитивној полуоси $(0\leqslant x\leqslant +\infty)$. Колико треба узети чланова да би се за произвољно x имала тачност од 0,001?

***3714.** Показати да ред

$$\sqrt{1+2x}+\frac{\sqrt{1+2^2x}}{2!}+\cdots+\frac{\sqrt{1+2^nx}}{n!}+\cdots$$

униформно конвергира за све вредности $x\geqslant 0$.

3715. Показати да ред

$$\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2}+\frac{1}{4+[\varphi(x)]^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2}+\cdots$$

униформно конвергира на целој бројној линији, па ма каква била функција $\varphi(x)$.

У задацима 3716—3719 уверити се да дати редови униформно конвергирају на целој x-оси:

3716. $1+\dfrac{\sin x}{1!}+\dfrac{\sin 2x}{2!}+\dfrac{\sin 3x}{3!}+\cdots$

3717. $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$. **3718.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$. **3719.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}x^{2n}e^{-n^2x^2}$.

3720. Функција $f(x)$ дефинисана је овако:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+n\omega)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x-n\omega)^2}.$$

Показати да је функција $f(x)$ дефинисана и непрекидна за произвољно x. Уверити се да је $f(x)$ периодична функција са периодом ω.

Диференцирање и интегрирање редова

3721. Полазећи од прогресије $1+x+x^2+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$, наћи збирове редова $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ и $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$

3722. Функција $f(x)$ дефинисана је редом $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2}$. Уверити се да ред униформно конвергира на целој бројној линији. Израчунати

$$\int_0^{\infty}f(x)\,dx.$$

3723. Наћи збир реда: $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot 2^n}+\cdots$

3724. Ред $\dfrac{\sin 2\pi x}{2}+\dfrac{\sin 4\pi x}{4}+\dfrac{\sin 8\pi x}{8}+\cdots+\dfrac{\sin 2^n\pi x}{2^n}+\cdots$ као што је лако видети, конвергира униформно на целој бројној линији. Може ли се он диференцирати члан по члан? Ако може, онда у каквом интервалу?

3725. Полазећи од релације $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$, наћи збирове редова:

а) $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{3n+1}+\cdots$

б) $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{13}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{4n+1}+\cdots$

3726. Полазећи од интеграла:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,dx=\frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}$$

(в. Курс, I, стр. 253) наћи збир реда:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}+\cdots$$

3727. Уверити се да функција $y=f(x)$ дефинисана редом:

$$f(x)=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots$$

задовољава диференцијалну једначину $xy'=y(x+1)$. Наћи ову функцију.

3728. Уверити се да функција $y=f(x)$, дефинисана редом

$$f(x)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}+\cdots,$$

задовољава диференцијалну једначину: $y' = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$. Наћи ову функцију.

3729. Наћи збир реда $f(x) = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \cdots$ састављањем и интегрирањем диференцијалне једначине за $f(x)$.

У задацима 3730—3731 наћи збирове датих редова:

3730. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^{11}}{11}+\cdots$ **3731.** $x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\cdots$

3732. Функција $f(x)=1+2\cdot 3x+3\cdot 3^2x^2+4\cdot 3^3x^3+\cdots$ дефинисана је за $|x|<\frac{1}{3}$; за $|x|\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{3}$ ред, који дефинише функцију, конвергира униформно. Израчунати $\int_0^{0,125} f(x)\,dx$.

§ 3. Потенцијални редови

Полупречник конвергације

У задацима 3733—3742 одредити полупречнике конвергације датих потенцијалних редова:

3733. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ **3734.** $x+\frac{x^2}{20}+\frac{x^3}{300}+\frac{x^4}{4000}+\cdots$

3735. $1+2x^2+4x^4+8x^6+\cdots$ **3736.** $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\cdots$

3737. $1+x+4x^2+27x^3+\cdots+(nx)^n+\cdots$

3738. $1+3x+2\cdot 3^2x^2+3\cdot 3^3x^3+\cdots$

3739. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$ **3740.** $1+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(4x)^4}{4!}+\cdots$

3741. $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\frac{\ln 4}{4}x^4+\cdots$

3742. $2x+\left(\frac{9}{4}x\right)^2+\left(\frac{64}{27}x\right)^3+\left(\frac{625}{256}x\right)^4+\cdots+\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n+\cdots$

Аритметичке операције са редовима

3743. Написати израз за производ редова: $\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n+\cdots$ и $\beta_0+\beta_1x+\cdots+\beta_nx^n$.

3744. Написати израз за квадрат реда: $\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n+\cdots$

3745. Наћи ред реципрочан реду $\sum_0^\infty \alpha_n x^n$ (тј. такав ред $\sum_0^\infty \beta_n x^n$, да је $\sum_0^\infty \alpha_n x^n \cdot \sum_0^\infty \beta_n x^n = 1$).

3746. Наћи потенцијални ред чији је квадрат раван реду $1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$ Доказати идентитет

$$\left[\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right]^2=\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2},$$

који важи за $|x|<1$.

3747. Помножити редове: $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)$ и $(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots)$.

Развијање функција у редове

3748. Развити функцију $y=\sqrt{x^3}$ у ред по степенима разлике $(x-1)$.

3749. Развити функцију $y=\frac{1}{x}$ у ред по степенима разлике $(x-3)$.

3750. Развити функцију $y=\sin\frac{\pi x}{4}$ у ред по степенима од $(x-2)$.

3751. Развити функцију $y=e^{\frac{x^2}{8}}$ у ред по степенима разлике $(x-2)$.

У задацима 3752—3765 развити у Маклоренов ред дате функције

3752. $\frac{1}{1+x^3}$. **3753.** $\frac{x}{2-x}$. **3754.** $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. **3755.** $\operatorname{tg} x$.

3756. e^{x^2}. **3757.** $(x-\operatorname{tg} x)\cos x$. **3758.** $\cos(x+\alpha)$. **3759.** $\sin^3 x$.

3760. $y=\frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{2x^3}$. **3761.** $y=\frac{\ln(1-x)}{x-1}$. **3762.** $y=e^{\frac{1}{1+x}}$.

3763. $e^x\sin x$. **3764.** $\cos x\operatorname{ch} x$. **3765.** $\ln(1-x+x^2)$.

3766. Развити у Маклоренов ред функцију $y=\frac{1+x}{(1-x)^3}$. Користивши се овим редом наћи збир реда $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{4}+\frac{16}{8}+\cdots+\frac{n^2}{2^{n-1}}+\cdots$

3767. Наћи вредност за $x=0$ 1) седмог извода функције $y=\frac{x}{1+x^2}$; 2) Петог извода функције $y=x^2\sqrt[4]{1+x}$; 3) Десетог извода функције $y=x^6e^x$.

3768. Наћи кривину криве $y=x\left[\sqrt[3]{(1+x)^4}-1\right]$ у координатном почетку (без писмених израчунавања).

У задацима 3769—3774 написати првих пет чланова Маклореновог реда за дате функције:

3769. $y = \ln(1+e^x)$. **3770.** $y = e^{\cos x}$. **3771.** $y = \cos^n x$.

3772. $y = -\ln\cos x$. **3773.** $y = \frac{e^x}{1-x}$. **3774.** $y = (1+x)^x$.

3775. Вредности узастопних извода парног реда функције

$$\varphi(x) = \frac{x}{e^x - 1}\,(x \neq 0),\quad \varphi(0) = 1,$$

узете за $x = 0$, зову се Бернулијеви бројеви и означавају се са $B_n = \varphi^{(2n)}(0)$. Наћи B_1, B_2, B_3 и B_4.

3776. Развити $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ у Маклоренов ред полазећи од релације $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

3777. Развити $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ у Маклоренов ред користећи релацију $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^2}$.

Примена редова код приближних израчунавања

У задацима 3778—3784, користећи се биномним обрасцем израчунати приближно (са тачношћу од 0,001) дате корене:

3778. $\sqrt[3]{30}$. **3779.** $\sqrt[3]{70}$. **3780.** $\sqrt[3]{500}$. **3781.** $\sqrt[3]{1{,}015}$.

3782. $\sqrt[5]{250}$. **3783.** $\sqrt[7]{129}$. **3784.** $\sqrt[10]{1027}$.

3785. Израчунати $\sqrt[3]{10}$ по биномном обрасцу узимајући 4 члана реда. Колика се грешка чини притом?

3786. Израчунати $\sin 1^0$ са тачношћу од 0,0001.

3787. Израчунати $\cos 1^0$ са тачношћу од 0,001.

3788. Израчунати $\sin 10^0$ са тачношћу од 0,00001.

3789. Израчунати $\cos 10^0$ са тачношћу од 0,0001.

3790. Узимајући у обзир идентитет $\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{239}$ (зад. 184, гл. 1), израчунати π са 10 тачних децимала.

3791. Искористивши редове за $\ln(1+x)$ и $\ln(1-x)$ добити ред за $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

3792. Применити резултат претходног задатка на израчунавање $\ln 2$ с тачношћу од 0,000001.

3793. Израчунати $\ln 3$ с тачношћу од 0,0001.

3794. Израчунати $\log e = \frac{1}{\ln 10}$ с тачношћу од 0,000001.

3795. Израчунати $\log 5$ с тачношћу од 0,0001.

3796. Уже обешено крајевима, узима облик ланчанице $y = a\cosh\mathrm{yp}\,\frac{x}{a}$. Показати да се у оном делу ужета где је вредност x знатно мања од $a^{\frac{3}{4}}$, ланчаница може заменити параболом, при чему ће разлика између ордината ових линија бити реда $\frac{x^4}{24a^3}$.

3797. Користећи се резултатима претходног задатка израчунати са коликом се тачношћу може параболом сматрати ланац висећег кабла, чији је распон 50 m, а угнуће на средини („висина") 1 m.

У задацима 3798—3804, користећи се развијањем у ред, израчунати границе следећих израза:

3798. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}$. **3799.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\mathrm{tg}\,x - \sin x) - x^3}{x^5}$.

3800. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x-x^2)}{x(e^x-1)}$.

3801. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. **3802.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \mathrm{ctg}^2 x\right)$.

3803. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\mathrm{ctg}\,x}{x}\right)$. **3804.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\sin x} - \frac{3}{x^4}\right)$.

3805. Показати да кад $\alpha\to 0$, функције $\alpha\sin(\sin\alpha) - \sin^2\alpha$ и $\mathrm{tg}(\sin\alpha) - \sin(\mathrm{tg}\,\alpha)$ су мале респективно шестог и седмог реда у односу на α.

У задацима 3806—3815 изразити у облику реда дате интеграле, користећи развијање у ред подинтегралних функција:

3806. $\int\frac{\sin x}{x}\,dx$. **3807.** $\int\frac{\cos x}{x}\,dx$. **3808.** $\int\frac{e^x}{x}\,dx$.

3809. $\int\frac{e^x}{x^2}\,dx$. **3810.** $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$. **3811.** $\int\limits_0^x\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{x}\,dx$.

3812. $\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **3813.** $\int\limits_0^x\sqrt{1+x^3}\,dx$. **3814.** $\int\limits_0^x\frac{dx}{1-x^3}$.

3815. $\int\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}\,dx$.

У задацима 3816—3821 израчунати приближно вредности датих одређених иетеграла, узимајући наведени број чланова реда, различитих од нуле; оценити грешку.

3816. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x}\, dx$ (3 члана). **3817.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ (3 члана).

3818. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ (2 члана). **3819.** $\displaystyle\int_{0,1}^{1} \frac{e^x\, dx}{x}$ (6 чланова).

3820. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}} dx$ (5 чланова). **3821.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arc\,tg} x\, dx$ (2 члана).

У задацима 3822—3825, израчунати са тачношћу од 0,001 дате интеграле:

3822. $\displaystyle\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\, dx.$ **3823.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx.$

3824. $\displaystyle\int_0^{0,8} x^{10} \sin x\, dx.$ **3825.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}.$

3826. Показати да у интервалу $(-0,1;\, 0,1)$ функција $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2} dx$ разликује се од функције $\operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x^5}{10}$ за не више од 0,0000001.

3827. Израчунати $\displaystyle\lim_{a\to 0}\left[\left\{a - \int_0^a e^{-x^2}\, dx\right\} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}\right].$

3828. Израчунати са тачношћу од 0,01 сву површину ограничену затвореном кривом $(y^3+y-x)^2 = 2-x^2$.

***3829.** Израчунати са тачношћу од 0,001 површину овала $x^4+y^4=1$.

3830. Израчунати са тачношћу од 0,0001 дужину лука криве $25y^2=4x^5$, од повратне тачке до тачке пресека са параболом $5y=x^2$.

9831. Фигура ограничена луком криве $y=\operatorname{arc\,tg} x$, апсцисном осом и правом $2x-1=0$, обрће се око апсцисне осе. Израчунати са тачношћу од 0,001 запремину тела које се при том добија.

3832. Развити у Маклоренов ред функцију $y=e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-x^2} dx$ на три начина:

1) непосредним израчунавањем узастопних извода за $x=0$;
2) множењем редова;

3) користећи се линеарном диференцијалном једначином коју задовољава y.

Упоредити ефикасност метода. Наћи $y^{(n)}_{x=0}$.

***3833.** Израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^1 x^x\, dx.$

У задацима 3834—3849 наћи неколико првих чланова редова оних решења датих једначина, која задовољавају наведене почетне услове.

3834. $y'=x^2-y^2;\ y|_{x=0}=0.$ **3835.** $y'=y^2+x^3;\ y|_{x=0}=\dfrac{1}{2}.$

3836. $y'=x^2y^2-1;\ y|_{x=0}=1.$ **3837.** $y'=y^3-x;\ y|_{x=0}=1.$

3838. $y'=x+x^2+y^2;\ y|_{x=0}=1.$ **3839.** $y'=\dfrac{1-x^2}{y}+1;\ y|_{x=0}=1.$

3840. $y'=\dfrac{xy}{1+x+y};\ y|_{x=0}=0.$ **3841.** $y'=y+\dfrac{x^2}{y};\ y|_{x=0}=1.$

3842. $y'=e^{xy}-\dfrac{3}{4};\ y|_{x=0}=0.$ **3843.** $y'=e^y+xy;\ y|_{x=0}=0.$

3844. $y'=\sin y-\sin x;\ y|_{x=0}=0.$ **3845.** $y'=1+x+x^2-2y^2;\ y|_{x=0}=1.$

3846. $y''=x^2y-y';\ y|_{x=0}=1;\ y'|_{x=0}=0.$

3847. $y''=yy'-x^2;\ y|_{x=0}=1;\ y'|_{x=0}=1.$

3848. $y''=xy'-y+1;\ y|_{x=0}=0;\ y'|_{x=0}=0.$

3849. $y''=\dfrac{y'}{y}-\dfrac{1}{x};\ y|_{x=1}=1;\ y'|_{x=1}=0.$

***3850.** $f(x)=y$ је решење диференцијалне једначине $y''=y'-y+x$ за почетне услове: $y|_{x=1}=1;\ y'|_{x=1}=0$. Наћи $f(1,21)$ са тачношћу од 0,000001.

***3851.** $f(x)=y$ је решење диференцијалне једначине $y''=xy'-y+e^x$ за почетне услове $y|_{x=0}=1;\ y'|_{x=0}=0$. Наћи $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ са тачношћу од 0,0001.

3852. Написати у облику реда општи интеграл једначине $y''=ye^x$.

3853. Крива је дата једначином $y=f(x)$. Наћи ред у који се развија функција $f(x)$ знајући да она задовољава диференцијалну једначину $y''=yx$ и почетне услове $y|_{x=0}=0;\ y'|_{x=0}=1$. Израчунати са тачношћу од 0,0001 кривину криве у тачки са апсцисом 1.

3854. Наћи ред у који се развија оно решење диференцијалне једначине $yy''+y'+y=0$, које задовољава почетне услове: $y|_{x=0}=1$; $y'|_{x=0}=0$. Којега ће реда бити бескрајно мала величина $y-(2-x-e^{-x})$ у односу на x кад $x\to 0$?

3855. Развити у ред оно решење диференцијалне једначине $y''+yy'-2=0$, које задовољава почетне услове: $y|_{x=0}=1$; $y'|_{x=0}=0$.

Израчунати $\int_0^1 y\,dx$ са тачношћу од 0,001. Израчунати $y'|_{x=0,5}$ са тачношћу од 0,00001.

3856. Честица масе 1 g. креће се по правој ка тачки A под дејством привлачне силе пропорционалне њеном растојању од тачке A. На растојању од 1 cm дејствује сила од 0,1 дин. Отпор средине је пропорционалан брзини кретања, и износи 0,4 дина при брзини од 1 cm/sek. У тренутку $t=0$ честица се налази на 10 cm десно од тачке A, а брзина јој је нула. На коликом ће растојању од A бити честица после 3 sek од почетка кретања (с тачношћу од 0,01 cm)?

3857. У вертикалном цилиндру с клипом, масе m, налази се ваздух под притиском p_0, једнаким спољнем притиску. У тренутку $t=0$ клип почиње да пада. Наћи зависност (у облику реда) између растојања y од клипа до дна суда, и времена. У тренутку $t=0$ клип се налазио на растојању h од дна суда; површина попречног пресека цилиндра је S; трење се занемарује.

3858. Развити у ред оно решење једначине $y''+ayy'+b=0$, које задовољава почетне услове: $y|_{x=0}=\alpha_0$; $y'|_{x=0}=\alpha_1$.

3859. Развити у ред оно решење диференцијалне једначине $yy''+ay'+by=0$, које задовољава почетне услове: $y|_{x=0}=\alpha_0$; $y'|_{x=0}=\alpha_1$.

***3860.** Коло струје састоји се из серијски везаних самоиндукција $L=0{,}4$ ханрија, и електролитичке каде. У кади се налази литар воде закисељене мањом количином сумпорне киселине. Вода се разлаже струјом при чему се мења концентрација, а самим тим и отпор раствора у кади. Напон на клемама одржава се сталним (20 V).

Количина материје која се издваја при електролизи пропорционална је јачини струје, времену и електрохемиском еквиваленту материје (Фарадијев закон). Електрохемиски еквивалент воде је 0,000187 g/кулон. Отпор раствора у почетку опита је $R_0=2\,\Omega$, почетна јачина струје је 10 ампера. Наћи зависност запремине воде у суду од времена.

***3861.** Коло струје састоји се из серијски везаних самоиндукција $L=0{,}4$ ханрија и електролитичке каде, чији је почетни отпор $2\,\Omega$. У кади је у једном литру воде растворено 10 g хлороводоника. Киселина се разлаже струјом, при чему се мења концентрација раствора (упореди са претходним задатком, где се количина растворене материје није мењала, већ се мењала само запремина растварача). Напон на клемама кола износи 20 V, електрохемиски еквивалент k хлороводоника је 0,000381 g/кулон, почетна јачина струје је 10 ампера. Наћи зависност између количине соне киселине у раствору и времена.

Беселове једначине

Једначина $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)\,y=0$ зове се Беселова једначина (в. такође задатке 3543—45, гл. XII). Интеграли једначина овога типа су, у општем случају, неелементарне функције, зване Беселове функције.

Беселовом функцијом прве врсте n-тог реда, зове се функција дефинисана следећим редом:

$$I_n(x)=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1-\frac{x^2}{2^2\cdot 1!\,(n+1)}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!\,(n+1)\,(n+2)}-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}+\cdots\right\}$$

Овде је $\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$ (Ајлеров интеграл прве врсте). За целе позитивне n је $\Gamma(n+1)=n!$ (при том се узима $0!=1$). За произвољно n је $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$. Према томе је:

$$I_n(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!\,\Gamma(n+2)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!\,\Gamma(n+3)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+6}}{3!\,\Gamma(n+4)}+\cdots$$

3862. Написати ред за $I_2(x)$ и испитати његову конвергентност. Израчунати $I_2(3)$ с тачношћу од 0,1 и $I_2(2)$ с тачношћу од 0,001.

3863. Колико чланова реда треба узети да би се израчунало $I_0(4)$ са тачношћу а) од 0,01; б) од 0,0001.

3864. Уверити се да за n које није једнако целом броју или нули, општи интеграл Беселове једначине има облик $y=c_1I_n(x)+c_2I_{-n}(x)$.

3865. Доказати да је $I_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$; $I_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$.

3866. Изразити помоћу Беселових функција опште решење једначине $9x^2y''+9xy'+(x^2-1)\,y=0$.

3867. Изразити помоћу Беселових функција опште решење једначине $xy''+(2n+1)\,y'+xy=0$.

За $n=$цео број, функције $I_n(x)$ и $I_{-n}(x)$ су линеарно зависне. Линеарно независно од $I_n(x)$ решење Беселове једначине биће у том случају функција:

$$K_n(x)\equiv\beta\,I_n(x)\cdot\ln x+x^{-n}\sum_0^\infty\beta_i x^i,$$

где су β и β_i стални коефицијенти, зависни од n. Ова се функција зове Беселова функција друге врсте, n-тог реда.

3868. Одредити коефицијенте β и β_i функције $K_0(x)$.

3869. Изразити помоћу Беселових функција опште решење једначине

$$2x^2y''+2xy'+(x^2-2)\,y=0.$$

§ 4. Тригонометриски редови

Фуриеови редови

3870. Уверити се да је функција $f(x)$, дефинисана овако:

$$f(x)\equiv x\sin\frac{1}{x},\ \text{ако је } x\neq 0,\ f(0)=0,$$

непрекидна на целој бројној оси, али није Дирихлеова функција.

б) Уверити се да функција $\frac{E(x)}{1+x^2}$ има бесконачно много прекида, а ипак је Дирихлеова функција.

3871. Је ли функција $y=\arcsin(\sin x)$ Дирихлеова функција?

3872. Показати да се за Дирихлеову функцију $y=\varphi(x)$ са периодом 2π, која има непрекидан трећи извод, Фуријеови коефицијенти могу израчунати по формулама:

$$a_n=\frac{1}{\pi n^3}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'''(x)\sin(nx)\,dx; \qquad b_n=-\frac{1}{\pi n^3}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'''(x)\cos(nx)\,dx.$$

Како се може уопштити овај резултат?

У задацима 3873—3885 развити у Фуриеов ред дате функције у наведеним интервалима:

3873. Функцију равну -1 у интервалу $(-\pi; 0)$ и $+1$ у интервалу $(0; \pi)$.

3874. Функцију $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ у интервалу $(0; \pi)$ по косинусима вишеструких углова.

3875. Функцију $y=x^2$ у интервалу $(-\pi; \pi)$.

3876. Функцију $y=x^2$ у интервалу $(0; 2\pi)$.

3877. Функцију $y=|x|$ у интервалу $(-l; l)$.

3878. Функцију $y=e^x$ у интервалу $(-l; l)$.

3879. Функцију $y=\ln\cos\frac{x}{2}$ у интервалу $(-\pi; \pi)$.

3880. Функцију $y=\cos ax$ у интервалу $(-\pi; \pi)$.

3881. Функцију $y=\sin ax$ у интервалу $(-\pi; \pi)$.

3882. Функцију $y=\sin\text{hyp}\,(ax)$ у интервалу $(-\pi; \pi)$.

3883. Функцију $f(x)$, равну 1 за $-\pi<x<0$, и равну 3 за $0<x<\pi$.

3884. Функцију $y=x^3$ у интервалу $(-\pi; \pi)$.

3885. Функцију $y=e^x-1$ у интервалу $(0; 2\pi)$.

3886. Функција $\varphi(x)$ дефинисана је овако: 1) у интервалу

$$-\pi\leqslant x\leqslant\pi, \quad \varphi(x)\equiv(\pi^2-x^2)^2;$$

2) она је периодична са периодом 2π. Развити $\varphi(x)$ у Фуриеов ред. Израчунати збир реда

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}.$$

3887. Израчунати збир реда $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$. Применити добијени резултат на израчунавање интеграла

$$\int_{0}^{1}\frac{\ln(x+1)}{x}\,dx.$$

***3888.** Израчунати збир реда $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots$

3889. Израчунати збир реда $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$

3890. Користећи резултат зад. 3879 ове главе наћи збир реда

$$\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\cdots; \quad 0<x<2\pi.$$

3891. Наћи збир реда

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots; \quad (0<x<\pi).$$

Неколико задатака математичке физике који се могу решити помоћу Фуриеових редова

3892. Жица дужине l учвршћена крајевима у тачкама $(0; 0)$ и $(l; 0)$ затегнута је у тачки $x=c$ за растојање h од апсцисне осе [жици је дат облик преломљене дужи, која се састоји из два парчета, при чему је тачка $(c; 0)$ померена у тачку $(c; h)$, h је мало]. Наћи закон кретања жице ако су напон жице T_0 и линеарна густина ρ дати. Жица је пуштена да трепери без давања њеним тачкама почетне брзине.

3893. Жица из претходног задатка има у почетном тренутку облик параболе, симетричне у односу на праву $2x-l=0$. Наћи закон слободних осцилација жице под претпоставком да нема почетних брзина.

3894. Саставити диференцијалну једначину слободних осцилација жице, која трепери у средини, чији је отпор пропорционалан брзини кретања и дужини елемента жице који се креће. Напон жице је T, линеарна густина γ, а коефициенат пропорционалности је k.

3895. Танак призматични хомогени штап, чија је дужина l, линеарна густина γ, Хуков коефициенат k, чији је један крај учвршћен, истегнут је тако да је његова тачка, која се пре истезања налазила на растојању x од учвршћеног краја, прешла у тачку са растојањем $(1+\alpha)x$. У тренутку $t=0$ штап је остављен самом себи. Наћи закон кретања штапа. (Претпоставити да се попречни пресеци штапа, који остају равни и нормални на његовој оси, померају дуж те осе).

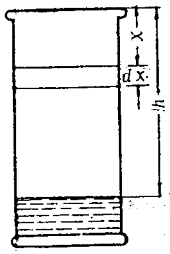
3896. Танак штап дужине l, чија бочна површина не спроводи топлоту, положен је по апсцисној оси тако да његов леви крај лежи у координатном почетку. Показати да температура тачака штапа задовољава једначину

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+\frac{k}{c\rho}\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2},$$

где је ϑ температура, t време, k коефициенат топлотне проводљивости, ρ густина материјала штапа, c његов топлотни капацитет.

Узимајући да је $k=0{,}9$; $c=0{,}094$; $\rho=8{,}9$ (константе бакра) $l=100$ cm, температура на крајевима одржава се на 0^0 C и у тренутку $t=0$ распоред температуре дат је формулом $\vartheta_0=50\sin\frac{\pi x}{50}$; наћи зависност температуре од апсцисе тачке и времена. После ког ће времена од почетка опита максимална температура бити $6\frac{3}{4}{}^{0}$C?

3897. У отворени цилиндрични суд усуто је мало воде (сл. 53). Вода се испарава, и водена пара дифундује у ваздух.



Сл. 53

1) Уверити се да концентрација $C(x, t)$ паре задовољава једначину

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

где је $D > 0$ тзв, коефицијенат дифузије.

2) Наћи закон мењања концентрације у зависности од x и t, ако је концентрација засићене водене паре равна C_{zas}, концентрација паре у атмосферском ваздуху равна C_0, и по истеку довољно дугог времена концентрација се распоређује по висини равномерно (линеарно).

РЕЗУЛТАТИ

Уз главу I

5. Позитивне од $x=-2$ до $x=2{,}2$ и од $x=3{,}6$ до $x=10$. Вредност једнаку нули добија за $x=-2$, $x=2{,}2$ и $x=3{,}6$.

6. Функција добија вредност нулу за $x=0$, $x=2$ и $x=4$. Функција је позитивна за негативне вредности x и за x, која лежи између 2 и 4. Функција је негативна за x, која лежи између 0 и 2, и за $x>4$.

7. Функција је позитивна за $x<-2$, за $-2<x<1$ и за $x>6$. Када x узима вредности између 1 и 6 функција је негативна. Функција добија вредност нулу за $x=-2$, $x=1$ и $x=6$.

13. $r=\sqrt{\frac{1}{\pi h}}$. **14.** $b=\sqrt{25-a^2}$. **15.** $\frac{a^2-b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

16. $s=\frac{1}{r}$. **17.** $v=\frac{1}{3}\pi h(4-h^2)$.

18. $v=\frac{10}{3}\pi(-2x^2+15x-25)$.

19. $f(0)=-2$; $f(1)=-\frac{1}{2}$; $f(2)=0$; $f(-2)=4$;

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-5;\quad f(\sqrt{2})=-0{,}245\ldots$$

20. $\psi(1)=0$; $\psi(a)=a^2-1$; $\psi(a+1)=a^3+3a^2+3a$; $\psi(a-1)=a^3-3a^2+3a-2$.

21. $F(0)=\frac{1}{4}$; $F(2)=1$; $F(3)=2$; $F(-1)=\frac{1}{8}$; $F(2{,}5)=\sqrt{2}$.

22. $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=4$; $\varphi(b)=\frac{1}{b^2}$; $\varphi\left(\frac{1}{b}\right)=b^2$; $\varphi(\sqrt{b})=\frac{1}{b}$.

23. $f(0)=0$; $f(1)=a$; $f(-1)=-\frac{1}{a}$; $f\left(\frac{1}{a}\right)=a^{\frac{1-a}{a}}$; $f(a)=a^{a+1}$;

$$f(-a)=-a^{1-a}.$$

24. $x_1=0$, $x_2=2$; $x_1=-1$, $x_2=3$.

25. $\varphi(t^2)=t^6+1$; $[\varphi(t)]^2=t^6+2t^3+1$.

32. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=$ тангенсу угла који заклапа права што пролази кроз тачке $(a;\ f(a))$ и $(b;\ f(b))$ са OX осом.

33. Приметимо да је $\varphi(x+t+\cdots+z)=\varphi(x)+\varphi(t)+\cdots+\varphi(z)$, јер је $\varphi[x+(t+\cdots+z)]=\varphi(x)+\varphi[t+(\cdots+z)]=\varphi(x)+\varphi(t)+\varphi(\cdots+z]$ итд. Кад је k цео број, имамо

$$\varphi(kx)=\varphi(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{k\ \text{пута}})=\underbrace{\varphi(x)+\varphi(x)+\cdots+\varphi(x)}_{k\ \text{пута}}=k\,\varphi(x).$$

На основу тога за $k=\frac{1}{n}$, где је n цео број, добијамо $\varphi(x)=$ $=\varphi\left[n\left(\frac{1}{n}x\right)\right]=n\varphi\left(\frac{1}{n}x\right)$; одавде је $\varphi\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}\varphi(x)$. Најзад, за $k=\frac{p}{q}$, где су p и q цели бројеви, имаћемо: $\varphi\left(\frac{p}{q}x\right)=p\cdot\varphi\left(\frac{1}{q}x\right)=\frac{p}{q}\varphi(x)$, што је и требало доказати.

34. $y=(x+1)^2$. **35.** $y=\frac{1}{\cos x}$. **36.** $y=\sqrt[3]{(a^t+1)^2}$.

37. $u=\sqrt{1+(\log\sin x)^2}$. **38.** $v=\sin(1+x)$.

39. а) $y=v^3$, $v=\sin x$; б) $y=\sqrt[3]{v}$, $v=u^2$, $u=x+1$; в) $y=\ln v$, $v=\operatorname{tg}x$; г) $y=u^3$, $u=\sin v$, $v=2x+1$; д) $y=5^u$, $u=v^2$, $v=3x+1$.

40. $x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x$; 0.

41. 1) $y=\pm\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$; 3) $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$; 4) $y=\frac{c}{x}$; 5) $y=\frac{\log_2 5}{x}$; 6) $y=\frac{10\,000}{x}-1$.

42. $y=|x|$ и $y=-|x|$. **43.** $y=-(x+1)$ и $y=x+2$.

44. $y=\sqrt{16+\sqrt{25-x^2}}$; $y=-\sqrt{16+\sqrt{25-x^2}}$; $y=\sqrt{16-\sqrt{25-x^2}}$; $y=-\sqrt{16-\sqrt{25-x^2}}$.

45. $ac=b^2$; $be=cd$; $e^2\neq 4cf$.

46.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$

47.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	8	8

48.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	0	0	0	1	0	2	0	2	1	2	0	4	0	2	2	3	0	4	0	3

49. За $x=4$; 6; 8; 12; 20.

50. Ако је $\varphi(x)$ тежина отсечка CB, онда је $\varphi(x)=2x$ за $0\leqslant x\leqslant 1$; $\varphi(x)=2+\frac{3}{2}(x-1)$ за $1<x\leqslant 3$; $\varphi(x)=x+2$ за $3<x\leqslant 4$. Функција је дефинисана за $0\leqslant x\leqslant 4$.

51. За $0\leqslant x\leqslant R$ $\quad S=\pi(2Rx-x^2)$;
за $R\leqslant x\leqslant 3R$ $\quad S=\pi R^2$;
за $3R\leqslant x\leqslant 4R$ $\quad S=\pi(6Rx-x^2-8R^2)$.

Изван интервала $[0;\ 4R]$ функција $S=\varphi(x)$ није дефинисана.

52. 1) $x>0$; 2) $x>-3$; 3) $x\leqslant\frac{5}{2}$; 4) $-1\leqslant x\leqslant 1$; 5) свуда осим за $x=\pm 1$; 6) свуда; 7) свуда, осим за $x=1$ и $x=2$; 8) $-\infty<x\leqslant 1$ и $3\leqslant x<\infty$; између 1 и 3 функција није дефинисана; 9) $-\infty<x<1$ и $2<x<\infty$; између 1 и 2 (а такође и за $x=1$ и $x=2$) функција није дефинисана; 10) недефинисана за $x=0$, $x=-1$ и $x=1$; 11) ако је $b^2-4ac>0$ и $a>0$, онда је функција недефинисана за $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, где су x_1 и x_2 корени тринома. За $b^2-4ac>0$ и $a<0$ функција је дефинисана само за $x_1<x<x_2$. Ако је $b^2-4ac<0$ и $a>0$, онда је функција дефинисана за све вредности x. Ако је $b^2-4ac<0$ и $a<0$, онда функција није нигде дефинисана. Најзад, за $b^2-4ac=0$ функција је или свуда дефинисана, осим у једној тачки, или само у једној тачки, што зависи од знака коефицијента a; 12) $1\leqslant x\leqslant 4$; 13) $0<x<1$ и $1<x<+\infty$.

53. 1) $1\leqslant x\leqslant 3$; 2) $2\leqslant x\leqslant 3$; 3) $0\leqslant x\leqslant 1$; 4) $-4\leqslant x\leqslant 4$; 5) $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$; 6) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; 7) $-1\leqslant x\leqslant 3$; 8) $-2<x<0$ и $1<x<2$; 9) $-4\leqslant x\leqslant -\pi$ и $0\leqslant x\leqslant\pi$; 10) $\frac{3}{2}\leqslant x<2$ и $2<x<+\infty$; 11) $-2\leqslant x<0$ и $0<x<1$; 12) $-\infty<x<0$ и $4<x<\infty$; 13) $1\leqslant x<4$; 14) $y=\sqrt{4-x^2}$; 15) $y=\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$; 16) $y=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}$ (разуме се да је могуће навести и безброј других примера).

54. а) $0<x<\frac{\pi}{2}$; б) $-\infty<x<+\infty$.

55. $v=\pi x\left(R^2-\frac{x^2}{4}\right)$; $0<x<2R$; $-\infty<x<+\infty$.

56. $S=\frac{\pi x^2}{2R}\sqrt{4R^2-x^2}$; $0<x<2R$; $-2R\leqslant x\leqslant 2R$.

57. $0\leqslant x<+\infty$ за две гране и $1\leqslant x<+\infty$ за две друге гране.

58. Функције 1), 3), 8), 9), 11), 12), 16) су парне; 5), 6), 10), 15) су непарне; 2), 4), 7), 13), 14) нису ни парне, ни непарне.

59. 1) $y=(x^2+2)+3x$; 2) $y=(1-x^4)+(-x^3-2x^5)$;

3) $y=\cos x+(\sin x+\operatorname{tg} x)$; 4) $\dfrac{(1+x)^{20}+(1-x)^{20}}{2}+\dfrac{(1+x)^{20}-(1-x)^{20}}{2}$.

60. а) $y=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

61. Функције 1), 5), 6), 8).

62. $f[\varphi(x+\omega)]=f[\varphi(x)]$; тиме је доказано да је $f[\varphi(x)]$ периодична функција. Ако је $f(x)=nx+a$, онда је $\varphi[f(x+\omega)]=\varphi[n(x+\omega)+a]=$ $=\varphi[(nx+a)+n\omega]=\varphi[f(x)+n\omega]=\varphi[f(x)]$.

63. 1) $y>0$ за $x>2$.
$y<0$ за $x<2$,
корен $x=2$.
2) $y>0$ за $x<2$ и $x>3$.
$y<0$ за $2<x<3$.
$y=0$ за $x=2$ и $x=3$.
3) $y>0$ у интервалу $(-\infty, \infty)$, корена нема.
4) $y>0$ у интервалу $(0, 1), 2, +\infty)$.
$y<0$ у интервалу $(-\infty, 0), (1, 2)$;
$y=0$ за $x=0$; $x=1$; $x=2$.
5) $y>0$ за $x\neq 0$.
$y=0$ за $x=0$.

64. За $x<0$ опада, за $x>0$ расте.

65. У интервалу $(-\infty, 0)$ опада, у интервалу $[0, \infty)$ задржава стално вредност нулу.

67. 1) $x_1=1{,}453$, $x_2=-1{,}164$; 2) $x_1=1{,}658$, $x_2=-1{,}120$; 3) $x=1$; 4) $x=1{,}167$; 5) $x=\pm 1{,}896$; 6) $x=0{,}739$; 7) $x_1=2$; $x_2=1$; 8) $x=2{,}086$.

68. $x=\dfrac{9}{8}$; код графичког решавања тражи се тачка пресека графика функције $y=\varphi(x)$ и праве $y=3x-3$.

69. $x_1=\dfrac{15-\sqrt{33}}{8}$ и $\dfrac{15+\sqrt{33}}{8}$. Код графичког решавања тражи се тачка пресека графика функције $y=\varphi(x)$ и параболе $y^2=4x+1$.

73. За $x=0$.

74. а) Дефинисана за $x>1$ и за $x<0$. Прекидне тачке за целе вредности x; б) дефинисана свуда, прекидна за целе вредности x.

75. Дефинисана је за све вредности x, изузев за целе вредности, за које је прекидна.

76. Прекидне тачке су све целе вредности независно промењиве x.

77. Обе гране функције су дефинисане и непрекидне за $-1\leqslant x\leqslant 1$. За $x=-1$ обе гране имају исту вредност $y_1=y_2=0$. Исти је случај и за $x=1$. Осим тачака $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ дијаграми једнозначних грана

наше функције не могу имати никаквих других заједничких тачака, зато што је за $-1<x<1$ једна грана позитивна, а друга негативна.

78. $I=\dfrac{E}{3}$. **79.** 1) $p=0{,}728\,h$; 2) $10{,}5\ g/cm^2$; 3) $36{,}3\ cm$.

80. $p=0{,}728\,h$. **81.** $F=\dfrac{8}{45}W$. **82.** а) $y=\dfrac{2}{3}x+4$;

б) $y=1{,}195x+1{,}910$; в) $y=-0{,}572x+8{,}63$.

83. $F=\dfrac{9}{5}C+32$. **84.** а) $v=100+0{,}35\,t$; б) $100\ cm^3$.

85. $s=16{,}6+1{,}34\,t$. **86.** $v=12-0{,}7\,t$. **87.** $\Delta y=6$. **88.** $\Delta y=-6$.

89. $\Delta x=4$. **90.** Коначна вредност аргумента је $x_2=2a$.

91. $y=2[x-E(x)]-1$.

93. 1) $x_1=2{,}08$, $x_2=-1{,}08$; 2) $x_1=\dfrac{5}{2}$, $x_2=-1$; 3) $x_1=4{,}05$. $x_2=0{,}47$; 4) $x_{12}=\dfrac{3}{2}$; 5) нема реалних корена.

95. 1) $y=-\dfrac{7}{8}$ за $x=\dfrac{1}{4}$; 2) $y=\dfrac{17}{4}$ за $x=-\dfrac{3}{2}$;

3) $y=5$ за $x=0$; 4) $y=-\dfrac{7a^2}{8}$ за $x=\dfrac{a}{4}$;

5) $y=\dfrac{a^4}{4b^2}$ за $x=\dfrac{a^2}{2b^2}$.

96. 1) $y=-6$ за $x=-2$; 2) $y=0{,}31875$ за $x=\dfrac{3}{8}$;

3) $y=\dfrac{5}{8}$ за $x=\dfrac{1}{4}$; 4) $y=-a^4$ за $x=0$;

5) $y=-\dfrac{9}{4}b^2$ за $x=\dfrac{b}{2a}$.

97. $a=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}$. **98.** $a=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}$. **99.** 4 m. **100.** 25 cm. **101.** 50 cm.

102. Онај чији је осовински пресек квадрат.

103. Што је мања висина конуса, утолико је већа његова бочна површина. Функција достиже највећу вредност кад је полупречник базиса $\dfrac{P}{4}$, тј. кад конус дегенерише у кружну плочу.

104. Висина правоугаоника мора бити једнака половини висине троугла.

105. Полупречник цилиндра мора бити једнак половини полупречника конуса.

106. Полупречник цилиндра мора бити $\dfrac{RH}{2(H-R)}$; за $H\leqslant R$ цела површина уписаног цилиндра биће утолико већа, уколико је већи полупречник његове основе.

107. $r = 12{,}5$ cm. **108.** $a = \dfrac{p}{6-\sqrt{3}}$. **109.** $a = \dfrac{4}{\pi + 4}$.

110. Страна исеченог парчета мора бити 10 cm.

111. $a = 10$ cm. **112.** $a = 7{,}5$ cm. **113.** $r = \dfrac{a}{8\pi}$.

114. Тражена тачка je $\left(\dfrac{b}{6}; \dfrac{b}{6}\right)$. **115.** $a = 75$ cm.

116. Страна квадрата мора бити 4 cm.

117. Страна троугла мора бити $\dfrac{3a}{9+4\sqrt{3}}$ cm.

119. 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$; 2) $x_1 = 4$, $x_2 = x_3 = 1$; 3) $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 = -1$; 4) $x_1 = -1$; остали корени су комплексни.

120. $h = 7{,}5$ cm. **121.** 1,4655... **122.** Скоро 6,8 cm.

123. $a = 2{,}60$ или 7,85 cm.

124. 1) за $x = -1$ je $y = \dfrac{2}{3}$ – највећа вредност;

за $x = 3$ je $y = -3{,}6$ – најмања вредност;

2) за $x = 2$ je $y = -4$ – најмања вредност;

за $x = -2$ je $y = 28$ – највећа вредност;

3) за $x = -1$ je $y = -2$ – најмања вредност;

за $x = 1$ je $y = 2$ – највећа вредност;

4) за $x = 2$ и -1 je $y = 4$ – највећа вредност;

за $x = -2$ и 1 je $y = 0$ – најмања вредност. **125.** $r = 10$ cm.

126. Страна исеченог квадрата мора бити 1 cm. **127.** $r = 10$ cm.

128. Имплицитна функција, дефинисана једначином $(y^3 + y)^2 = 1 - x^2$, има две једнозначне непрекидне гране имплицитно дате једначинама: $y_1^3 + y_1 = +\sqrt{1-x^2}$ и $y_2^3 + y_2 = -\sqrt{1-x^2}$. Лако je видети, да свакој вредности x из интервала $[-1; 1]$ одговара једна вредност y_1 и једна вредност y_2 (особина кубне функције!), при чему je $y_1 \neq y_2$ за $-1 < x < 1$, а за $x = \pm 1$ je $y_1 = y_2 = 0$. На тај начин, само на крајевима интервала дефинисаности обе гране имају једнаке вредности.

29. $pv = 1748$. **130.** $RI = 0{,}48$.

131. x je обрнуто пропорционално са v.

132. x je директно пропорционално са v.

133. У условима задатка количина издвојене материје je обрнуто пропорционална запремини растварача.

135. 1) за $x = 1$ je $y = 4$ — највећа вредност;

за $x = 5$ je $y = \dfrac{4}{5}$ — најмања вредност;

2) за $x = -1$ je $y = \dfrac{1}{7}$ — највећа вредност;

за $x = 2$ je $y = -2$ — најмања вредност;

3) за $x = 0$ je $y = 1$ — највећа вредност;

за $x = 4$ je $y = -\dfrac{3}{5}$ — најмања вредност.

137. 1) $y = x$; 2) $y = \dfrac{x}{2}$; 3) $y = \dfrac{1-x}{3}$; 4) $y = \pm\sqrt{x-1}$; 5) $y = \dfrac{x-1}{x}$; 6) $y = \log_{10} x$; 7) $y = 1 \pm \sqrt{1+x}$; 8) $y = \dfrac{1}{x}$; 9) $y = \pm\sqrt{x^3-1}$; 10) $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

139. $y = \log_a (x \pm \sqrt{x^2-1})$; **140.** $y = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$.

142. Крива симетрична у односу на праву $y = x$.

143. $g[f(x)]$ биће такође $= x$. **146.** $y_{\min} \approx 0{,}88$ за $x \approx 0{,}43$.

152. За $\alpha = 90^0$. **153.** За $\alpha = 60^0$.

156. а) $x = 0$; $\pm 4{,}50$; $\pm 7{,}72$; даље се са великом тачношћу може узети $x \approx \pm \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$ $(n > 3)$; б) $x_1 = 0{,}90$; $x_2 = 2{,}85$; $x_3 = 5{,}80$.

157. 1) $A = 1$, $T = \dfrac{2}{3}\pi$; 2) $A = 5$; $T = \pi$; 3) $A = 4$, $T = 2$; 4) $A = 2$, $T = 4\pi$; 5) $A = 1$, $T = \dfrac{8}{3}$; 6) $A = 3$, $T = \dfrac{16\pi}{5}$.

158. 1) 2; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{3}{2\pi}$; 5; 2) 1; 4π; $\dfrac{1}{4\pi}$; $\dfrac{3\pi-1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{3}$; 1; 1; $-\dfrac{\pi}{3}$; 4) 1; $6\pi^2$; $\dfrac{1}{6\pi^2}$; $\dfrac{1}{2\pi}$.

159. $x = R \sin\left(\dfrac{vt}{R} + \dfrac{\pi}{2} + \arccos\dfrac{a}{R}\right)$; $\dfrac{2\pi R}{v}$; $\dfrac{v}{2\pi R}$; $\dfrac{\pi}{2} + \arccos\dfrac{a}{R}$.

160. $y = \sin\left[\dfrac{t-t_0}{t_1-t_0}(\arcsin y_1 - \arcsin y_0) + \arcsin y_0\right]$.

$$T = \frac{2\pi(t_1 - t_0)}{\arcsin y_1 - \arcsin y_0}; \quad \varphi_{\text{поч}} = \frac{t_1 \arcsin y_0 - t_0 \arcsin y_1}{t_1 - t_0}.$$

161. $x = R(1-\cos\varphi) - a + \sqrt{a^2 - R^2\sin^2\varphi}$.

162. 1) 2π; 2) 2π; 3) 24; 4) 2.

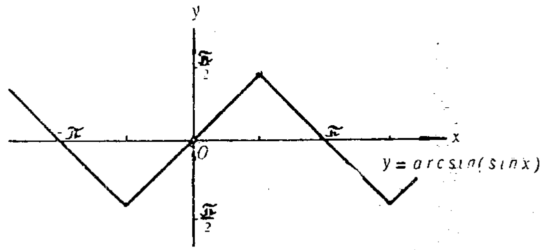
163. а) $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sqrt{5+2\sqrt{3}}\sin(x + \varphi_0)$, где je $\varphi_0 = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$.

166. Једнозначне гране функције, тј: $y_1 = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ и $y_2 = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, су дефинисане и непрекидне у интервалу $[-1; +1]$. За $x = \pm 1$ $y_1 = y_2$; а за $-1 < x < 1$ $y_1 \neq y_2$.

167. $\omega = 2\arcsin\dfrac{a}{2\pi}$.

168. $S = R^2 \arccos\dfrac{R-h}{R} - (R-h)\sqrt{h(2R-h)}$.

169. $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{ax}{(a+b)\,b+x^2}$. **170.** $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{al\sec\varphi}{l^2+b\,(b+a\sec\varphi)}$.



Сл. 54

171. $\alpha=\arccos\left[1-\dfrac{x\,(2a-x)}{2R(a+R-x)}\right]$.

172. $-\infty<x\leqslant-1$ и $1\leqslant x<+\infty$. **173.** $x\neq 0$.

174. $0\leqslant x\leqslant 1$.

175. $-1<x<1$.

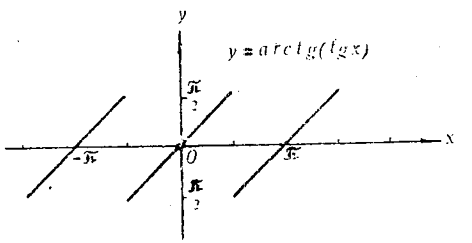
176. $-1\leqslant x\leqslant 1$.

177. $-1\leqslant x\leqslant 1$.

178. $-\infty<x<0$; $0<x<+\infty$.

179. $-\infty<x<+\infty$.

180. $0\leqslant x\leqslant\pi$.



Сл. 55

181. $-\dfrac{\sqrt2}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt2}{2}$. **182.** $-\dfrac{\sqrt2}{2}<x<\dfrac{\sqrt2}{2}$. **183.** Види сл. 54.

186. Види слику 55. Функција није дефинисана за $x=(2k-1)\dfrac{\pi}{2}$, чиме се и одликује од друге функције, дефинисане свуда. Иначе су обе функције једнаке.

Уз главу II

187. $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=1$; $n>4$. **188.** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$; $n>999$; $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$.

189. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$; $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

190. $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$; $n>1000$; v_n је час веће, час мање, час једнако својој граничној вредности.

191. $\lim v_n=0$; v_n достиже своју граничну вредност за $n=a+1$ јер почев од овог n је v_n једнако нули.

192. $n>19999$. **193.** $n>\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}$; $0<\varepsilon<\dfrac{5}{6}$.

194. $n>\dfrac{a}{\varepsilon}$. **195.** $n>2a\left[\dfrac{1}{(2\varepsilon+\varepsilon^2)^2}\left(1+\sqrt{1-(2\varepsilon+\varepsilon^2)^2}\right)-\dfrac{1}{2}\right]$.

196. 0. **197.** Обрнута теорема важи.

198. Обрнута теорема важи (види задатак 197).

199. $\delta=\sqrt{4+\varepsilon}-2$; $\delta=0{,}00025$. **200.** $\delta=2-\sqrt3$.

201. $\delta=\dfrac{2}{13}$. **202.** $\delta<5-\sqrt{25-8\varepsilon+\varepsilon^2}$; $\delta=0{,}007996$.

203. $\left(\dfrac{4-3\varepsilon}{4+6\varepsilon}\right)^2<x<\left(\dfrac{4+3\varepsilon}{4-6\varepsilon}\right)^2$. **204.** $1{,}42928<x<1{,}71232$.

205. u_n неограничено расте.

206. $n>\dfrac{N-1}{2}$. **207.** $n>1006$. **208.** $n>10\,000$.

209. $\dfrac{3000}{1001}<x<\dfrac{3000}{999}$. **210.** $-\dfrac{1}{10002}<x<\dfrac{1}{9998}$.

211. $\delta<\dfrac{1}{\sqrt N}$; $\delta<0{,}01$. **212.** $\log_2 0{,}99<x<\log_2 1{,}01$.

213. $M>10^N=10^{100}$. **214.** $N>\sqrt{\left|\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right|}=\sqrt{999}$.

215. Неограничена функција не мора бити бесконачно велика; например, функција целобројног аргумента n, која добија вредности

$$u_1=1,\ u_2=0,\ u_3=3,\ u_4=0,\dots,\ u_{2n}=0,\ u_{2n+1}=2n+1,\dots,$$

је неограничена, али не и бесконачно велика.

216. а) Не. Функција $f(x)$ за $x\to 0$ је неограничена; б) такође.

222. $N>\left(\dfrac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2$. **223.** $10^{1-\varepsilon}<x<10^{1+\varepsilon}$.

224. $-\dfrac{1}{10001}<x<\dfrac{1}{9999}$.

225. 1) $1+\dfrac{1}{x^3-1}$; 2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1}{2\,(2x^2+1)}$; 3) $-1+\dfrac{2}{1+x^2}$.

227. 9. **228.** ∞. **229.** 2. **230.** $-\dfrac{2}{5}$. **231.** $\dfrac{1}{2}$. **232.** 0.

233. nx^{n-1}. **234.** $\dfrac{1}{2}$. **235.** 6. **236.** -1. **237.** $\dfrac{4}{3}$.

238. Један корен је бесконачно велики, а други тежи ка $-\dfrac{c}{b}$.

239. $\dfrac{1}{2}$. **240.** а) $\dfrac{1}{3}$; б) 1. **241.** $\dfrac{1}{3}$. **242.** 2. **243.** $\dfrac{1}{6}$. **244.** $\dfrac{3}{4}$.

245. $S_n = \frac{a\pi}{2}$ је константна величина; према томе је $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a\pi}{2}$; на тај начин, иако крива, која се састоји из полукругова, тежи да се поклопи с правом AB, дужина њена не тежи дужини AB.

246. Види претходни задатак.

247. Ред величине v_n је виши у поређењу са u_n.

248. Обе бесконачно мале величине су истог реда. Још више — оне су еквивалентне.

250. Оне су истог реда.

251. За $x=0$ ред је различит. За $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ прираштаји су еквивалентни.

252. Дате величине нису еквивалентне.

253. $\sqrt{x^3+a}-\sqrt{a}$ је бесконачно мала величина трећег реда у односу на x.

254. 1) другога; 2) реда једна половина; 3) првога; 4) десетога.

255. За $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b^2}}$.

259. Треба показати да кад n расте функција u_n опада $\left(\text{посматрати однос } \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. Пошто је u_n позитивна, то она има граничну вредност кад $n\to\infty$, која није већа од 1, јер је за свако $n>2$, $u_n<1$. Може се доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$. Ради тога ставимо $\sigma_n=\frac{u_n}{u_{n+1}}$. Тада је $u_{n+1}=\frac{1}{\sigma_n}\cdot u_n<\frac{1}{\sigma_n}$; пошто $\sigma_n\to\infty$ (види задатак 310), то $n_{n+1}\to 0$.

269. Искористити ове чињенице: 1) сваки ирационалан број је гранична вредност низа рационалних бројева, и 2) гранична вредност непрекидне функције једнака је њеној вредности за граничну вредност аргумента.

270. Функција је непрекидна свуда осим у тачки $x=0$.

271. $f(x)$ је непрекидна на читавој бројној оси.

272. Функција је прекидна за свако x.

273. Функција је непрекидна само за $x=0$.

275. Прекидна тачка је $x=0$. **277.** $f(1)=\frac{2}{3}$. **278.** $f(0)=0$.

279. Кад $x\to 1$ с десна $y\to 1$, кад $x\to 1$ с лева $y\to 0$. Према томе је немогуће „дотерати“ функцију, тј. учинити је непрекидном за $x=1$.

280. Функцију $f(x)$ немогуће је учинити непрекидном. За функцију $\varphi(x)$ треба ставити $\varphi\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]=0$.

281. 4. **282.** 3. **283.** $\frac{a-1}{b-1}$. **284.** 0. **285.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

286. 0. **287.** $\frac{a+b}{2}$. **288.** Не. **289.** И отсечак и угао биће реда једна половина. **290.** $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$. **291.** $\frac{1}{2}$. **292.** k. **293.** 0.

294. $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$. **295.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **296.** $\sqrt{2}$. **297.** Не. **298.** ∞.

299. 1. **300.** $\frac{2}{3}$. **301.** $\frac{\pi}{2}$. **302.** $\frac{2}{\pi}$. **303.** $-\frac{a}{\pi}$.

304. 0. **305.** $\frac{1}{e}$. **306.** $\frac{1}{e}$. **307.** e^a. **308.** e.

309. $\begin{cases} +1 \text{ кад } x\to 0 \text{ с десна;} \\ -1 \text{ кад } x\to 0 \text{ с лева.} \end{cases}$ **310.** ∞. **311.** $\frac{1}{a}$. **312.** a.

313. $\frac{pba^{p-1}}{c}$. **314.** 1) 10,25; 2) 30,2; 3) 16,56; 4) 40,4.

315. 1) 10,157; 2) 20,12; 3) 1,02; 4) 20,065. **317.** $3x^2\,\Delta x$.

Уз главу III

У задацима 318—322 треба увести средњу брзину мењања одговарајуће функције, а затим прелазом на граничну вредност добити тражену величину као брзину мењања дотичне функције.

323. $\alpha=\frac{1}{l}f'(t)=\frac{f'(t)}{f(t)}$. **324.** $k=\frac{s}{l}\varphi'(P)=s\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$.

325. Дужина круга. **326.** Активна сила.

327. а) 56; б) 19; в) 7,624; г) 1,261.

328. а) 6,5; б) 6,1; в) 6,01; г) 6,001.

329. а) 4,5[illegible]; б) $-0{,}249$; в) 0,244.

330. 10; -4; -3. **331.** 3; 0; 6; $\frac{1}{3}$. **332.** 1. **333.** 0 и 2. **335.** 1.

336. 0,4343. **337.** 2,303. **338.** $kf'(0)$.

340. 8) $-\frac{3}{5x\sqrt[5]{x^3}}$; 9) $\frac{5\sqrt[4]{x}}{4}$. **341.** Не.

342. 1) 0; 2) 6; 3) -4; 4) 4 и 2. **343.** 1 и -1.

344. а) $x=0$; б) $x=\frac{1}{2}$.

345. $\alpha_1=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}\cong 8^\circ 10'$; $\alpha_2=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13}\cong 4^\circ 25'$.

346. $\alpha_1=90^\circ$; $\alpha_2=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}\cong 37^\circ$.

347. а) $\alpha=\operatorname{arc\,tg} 3\cong 71^\circ 35'$; б) $y=x$.

348. $y=12x-16$; $12y+x=98$; $\frac{2}{3}$; 96.

349. 0 и $\frac{2}{3}$. **350.** а) 2; б) $\frac{-3}{2}$; в) $\frac{1}{4}$ и -1.

351. (2; 4). **354.** $y+4x-4=0$; $8y-2x-15=0$; $\frac{1}{2}$; 8.

360. 4. **361.** -2.

362. $\Delta y=1{,}91$; $dy=1{,}9$; $\alpha=0{,}01$; $\delta=0{,}005$.

363. $\Delta y=0{,}1$; $dy=0{,}1025$; $\alpha=0{,}0025$; $\delta=0{,}025$.

364.

Δx:	1	0,1	0,01
Δy:	18	1,161	0,110601
dy:	11	1,1	0,11
δ:	0,636	0,0555	0,0055.

365. 3. **366.** $\Delta y=1{,}278$; $dy=1{,}109$; $\alpha=0{,}169$; $\delta=0{,}153$.

367. Релативна грешка у процентима је: а) 6,25; б) 3,125; в) 0,625.

368. а) 4,8 cm^2; б) 6 cm^2; в) 9,6 cm^2.

374. Функција је недиференцијабилна за све $x=k\pi$, где је k цео број.

375. За $x=0$ функција је недиференцијабилна (угласта тачка).

376. За $x=0$ извод прве три функције је бесконачан. Четврта функција је свуда диференцијабилна.

377. $f'(0)=0$. **378.** Непрекидна, али није диференцијабилна.

379. Довољно је уверити се у то да су $\Delta f(x)$ и Δx бесконачно мале величине различитог реда.

380. Непрекидна, али није диференцијабилна; за $x=0$ график има две различите тангенте: $y=\frac{\pi}{2}x$; $y=-\frac{\pi}{2}$.

381. 8) $\frac{3m\sqrt{x}}{2}+\frac{7n\sqrt[3]{x}}{6}+\frac{p}{2x\sqrt{x}}$; 11) $2x-1$; 12) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(7x^3-2\sqrt{x}+1)$; 13) $3v^2+2v-1$; 14) $6(a-x)$; 16) $\frac{3m(mu+n)^2}{p^3}$.

382. 1; 2; 8; 2,5; $3a^2-2a$; $3-\frac{1}{a}$.

383. -5; -8; $\frac{19}{16}$; $-a^2+10a^3+3a^4$. **384.** 13.

386. $b=-1$; $c=3$. **387.** а) $x=0$; 1; 2; б) $x=\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$.

389. При $x=\pm 1$. **390.** $2x-y-2=0$; $2x+y+2=0$

391. $3x+y+6=0$. **392.** $2x-y+1=0$.

393. $27x-3y-79=0$. **394.** $2x-y-1=0$.

395. $4x-4y-21=0$. **397.** 3,75. **398.** $\sim 4{,}1$ sek.; 81,5 m.

399. 2,55 m. **400.** $t=0$ и 8 sek.; $t=0$; 4; 8.

401. $181{,}5\cdot 10^3$ ерга. **402.** 11; 13. **403.** $2\pi\,\frac{\text{rad.}}{\text{sek.}}$.

404. $2at-b$; $\frac{b}{2a}$. **405.** а) 35; б) 5; в) 125. **406.** $\frac{\pi d}{16}$.

407. $\sim 1{,}002$; $\sim 1{,}013$. **408.** 0,1046; 0,1905.

409. 23 amp. **410.** $v=2{,}65$.

411. $y'=2(x^2-x+3)(x+1)+(2x-1)(x^2+2x-1)=4x^3+3x^2+7$.

412. $y'=2(x^3-3x+2)(2x^3+x)+3(x^2-1)(x^4+x^2-1)$.

413. $y'=2x[(x^2-4)(x^2-9)+(x^2-1)(x^2-9)+(x^2-1)(x^2-4)]$.

414. $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$. **415.** $y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

416. $s'=\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$. **417.** $u'=\frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$.

418. $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. **419.** $z'=-\frac{(x+1)^2}{3(x^2-1)^2}-3x^2+2x+1$.

420. $u'=\frac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}$. **421.** $y'=-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$.

422. $y'=-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}$. **423.** $u'=\frac{2v-1}{a^2-3}$. **424.** $y'=-\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$.

425. $z'=-\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$. **426.** $y'=\frac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$.

427. $y'=-\frac{a^2b^2c^2[(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)]}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$.

428. $y'=\frac{a+2bx}{am+bm^2}$.

429. $[(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)(x-d)+$
$+(x-a)(x-c)(x-d)+(x-b)(x-c)(x-d)]\,dx$.

430. $[x^4(x^3-1)(5x^2+3)+x(5x^3-2)(x^5+x^3+1)]\,dx$.

431. $dy=\frac{8b^2x^3-4x^5}{(b^2-x^2)^2}\,dx$. **432.** $dv=\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^3}\,ds$.

433. $\frac{(3+t)t^2\,dt}{(1+t)^3}$. **434.** $\frac{mv^{m-1}\,dv}{(1-v)^{m+1}}$. **435.** $\frac{1+6x^2-2x^3}{(1+x^3)^2}\,dx$.

436. $\frac{(3-2t)\,dt}{(t^2-3t+6)^2}$. **437.** $dI=-\frac{E_0\,dw}{(w+w_0)^2}$. **438.** $f'(0)=0$; $f'(1)=6$.

439. $F'(0)=11$; $F'(1)=2$; $F'(2)=-1$.

440. $F'(-1)=\frac{1}{2}$; $F'(0)=-\frac{1}{4}$. **441.** $s'(0)=\frac{3}{25}$; $s'(2)=\frac{17}{15}$.

442. $y'(1)=16$; $y'(a)=\frac{2(1+a^3)}{a^3}+3a^2\left(5-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{15a^5-a^3+2}{a^3}$.

443. $\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}=\frac{5}{9}$; $\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}=1$. **444.** $\varphi'(1)=-\frac{a+1}{4}$.

445. $(x^2+1)(x^3+1)+2x(x+1)(x^3+1)+3x^2(x+1)(x^2+1)$.

446. $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}+1\right)$.

447. $\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})+\frac{1}{\sqrt{2x}}(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{3x}+$

$+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})$.

448. $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+2\right)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)+(\sqrt[3]{x}+2x)\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+3\right)$.

449. $2(ax^2+bx+c)(2ax+b)$. **450.** $-\frac{3x^2-4x+3}{3(x^3-2x^2+3x-4)^2}$.

451. $-\frac{4(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$. **452.** $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$.

453. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^2}$.

454. $\frac{(1+2x)(1+x+x^2)(2x-1)+(1+2x)^2(1-x+x^2)-2(1+x+x^2)(1-x+x^2)}{(1+2x)^2}$

455. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$. **456.** $60(1+2x)^{29}$.

457. $-20(1-x)^{19}$. **458.** $-20x(1-x^2)^9$. **459.** $6(x^3-x)^5(3x^2-1)$.

460. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **461.** $\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. **462.** $\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.

463. $-\frac{4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$. **464.** $am(ax+b)^{m-1}$. **465.** $\frac{5x^4-15x^2+1}{2\sqrt{x^5-5x^3+x}}$.

466. $5\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^4\frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$. **467.** $24(2x^3+3x^2+6x+1)^3(x^2+x+1)$.

468. $\frac{x^3(2x^4+1)}{\sqrt[4]{(1-x^4-x^8)^5}}$. **469.** $\frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}}\cdot\sqrt{2px}}$.

470. $\frac{2\sqrt{x}+1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$. **471.** $5\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9\frac{x-1}{\sqrt{x^3}}$.

472. $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

473. $\frac{1}{27\sqrt[3]{(1-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x}})^2(1-\sqrt[3]{x})^2x^2}}$. **474.** $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

475. $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$. **476.** $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$. **477.** $-\frac{4x^3}{7\sqrt[7]{(2-x^4)^6}}$.

478. $\frac{7x^{10}-40x^4}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$. **479.** $-\frac{4}{27}\frac{31x^5+18}{x^5\sqrt[9]{(4x^5+2)^8}}$. **480.** $\frac{x^3+2a^2x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

481. $\frac{54}{55}\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[11]{(9+6\sqrt[5]{x^9})^{10}}}$. **482.** $-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}$.

483. $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$. **484.** $\frac{7+4x}{3(1+x)}\sqrt[3]{\frac{2}{1+x}}$. **485.** $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1$.

486. $-\frac{v+\sqrt{a^2+v^2}}{a^2\sqrt{a^2+v^2}}$. **487.** $-\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}-\frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2+2)^7}}$.

488. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. **489.** $-\frac{2}{3(x^2-1)\sqrt[3]{(x^2-1)x}}$.

490. $2x\sqrt{1+\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. **491.** $-\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}$.

492. $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **493.** $\frac{x+2}{2\sqrt{x+3}\sqrt[3]{(1+x\sqrt{x+3})^2}}$.

494. $\frac{2-3x-x^3}{2(1+x^2)\sqrt{(1-x)(1+x^2)}}$. **495.** $-\frac{6}{7\sqrt[7]{x}\sqrt[3]{(7-3\sqrt[7]{x^6})^2}}$.

498. $\cos x-\sin x$. **499.** $\varphi\cos\varphi$. **500.** $-\sin 2x$.

501. $\frac{v\sec^2 v-\operatorname{tg} v}{v^2}$. **502.** $\frac{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\alpha^2}+\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

503. $2x\frac{\sin x}{\cos^3 x}$. **504.** $\frac{1}{1+\cos t}$.

505. $\frac{\sin x-\cos x+x(\sin x-\cos x)}{1+\sin 2x}$. **506.** $3\cos 3x$.

507. $-\frac{a}{3}\sin\frac{\varphi}{3}$. **508.** $9\cos(3x+5)$. **509.** $\frac{a}{k\cos^2\left(\frac{x}{k}+b\right)}$.

510. $3\sin x\cos x(2-\sin x)$. **511.** $2\operatorname{tg}\frac{x}{5}\sec^2\frac{x}{5}$.

512. $-\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$. **513.** $\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

514. $\dfrac{(1+\operatorname{tg} x)(\sin x + x\cos x) - x\sin x \sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$ **515.** $\cos(\sin x)\cos x$.

516. $-\dfrac{2(x\cos x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}$. **517.** $\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{2}{3}x$. **518.** $4a\sin^3\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$.

519. $-0{,}8\left(\cos\dfrac{2x+1}{2}-\sin 0{,}8x\right)\sin\left(\dfrac{2x+1}{2}+0{,}8\cos 0{,}8x\right)$.

520. $-\sin^3 x$. **521.** $\sin^5 3\theta\cos^3 3\theta$. **522.** $\operatorname{tg}^4 x$.

523. $\operatorname{tg}^6 x\sec^4 x$. **524.** $\operatorname{tg} x\sec^2 x$. **525.** $\sin^4 x$.

526. $\cos\dfrac{3}{4}x\sin\dfrac{1}{4}x$. **527.** $-\dfrac{4}{\operatorname{tg} 2x\sin^2 2x}$.

528. $2\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}\sin 2x$.

529. $\dfrac{\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}}$. **530.** $\dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

531. $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\cdot\sin\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$. **532.** $\dfrac{\sin(x-\cos x)}{\cos^2(x-\cos x)}(1+\sin x)$.

533. $\dfrac{x^2-1}{2x^2\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$. **534.** $-\dfrac{a^2\cos x\sin x}{\sqrt{1+a^2\cos^2 x}}$.

535. $-\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}$. **536.** $\dfrac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}$.

537. $\sin x\sqrt{1+x^2}+x\cos x\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x^2\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$.

538. $A=1{,}8$, $B=-0{,}6$. **539.** $-0{,}0059$. **540.** $0{,}0151$.

541. $\dfrac{\pi}{360}$. **542.** 0. **543.** 0,00286. **544.** 45°; $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

545. $\operatorname{arc\,tg}(2\sqrt{2})\cong 70^\circ 32'$. **546.** -2; 0.

547. $-\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2\sqrt{2}}$. **548.** $dy=\dfrac{2x\cos x+(x^2-1)\sin x}{(1-x^2)^2}dx$.

549. $\Delta y\cong 0{,}000252$; $\sin 30^\circ 1'\cong 0{,}500252$. **550.** 0,005818.

551. 0,069282. **552.** $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **553.** $-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

554. $\dfrac{2x-3}{1+(x^2-3x+2)^2}$. **555.** $-\dfrac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

556. $-\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. **557.** $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}+\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2\sqrt{x}}$.

558. 0. **559.** $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **560.** $-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

561. $-\dfrac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$. **562.** $\dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

563. $-\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$. **564.** $-\dfrac{1}{1+x^2}$. **565.** $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.

566. $\arcsin x$. **567.** $\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$. **568.** $\dfrac{ab}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

569. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x^2}}$. **570.** $\dfrac{n\cos x}{\sqrt{1-n^2\sin^2 x}}$.

571. $-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **572.** $-\dfrac{1}{\sqrt{2x}\sqrt{1-x}(1+x)}$.

573. $\dfrac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$. **574.** $\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{1-ax^2-bx-c}\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

575. $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$. **576.** $\dfrac{3x^5}{1+x^6}+3x^2\operatorname{arc\,tg} x^3$.

577. $\sin x\operatorname{arc\,tg} x+x\operatorname{arc\,tg} x\cos x+\dfrac{x\sin x}{1+x^2}$.

578. $-\dfrac{2x^3}{(1+x^2)^2}$. **579.** $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-(\arccos x)^2}\sqrt{1-x^2}}$.

580. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$. **581.** $\dfrac{3}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

582. $\dfrac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$. **583.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **584.** $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$.

585. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. **586.** $\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}}$. **587.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$.

588. $\dfrac{\sqrt{5}}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-4}}$. **589.** $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$.

590. $\sim 2{,}31$. **591.** $\sim 1{,}735$. **592.** $\sim 17{,}5$. **593.** $-\dfrac{4}{5}$.

594. $y'=-\dfrac{2x}{|x|(1+x^2)}$, а не $-\dfrac{2}{1+x^2}$, као што би на први поглед могло изгледати. $f'(0)$ не постоји!

595. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **596.** 0. **597.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **598.** $\dfrac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

599. $-\dfrac{2nx^{n-1}dx}{x^{2n}+1}$. **600.** $\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$. **601.** $\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 5}$.

602. $\dfrac{0{,}4343(1+\sin x)}{x-\cos x}$. **603.** $\dfrac{0{,}4343(6x^3+1)}{3x^4-x}$.

604. $\frac{x\sin x-\cos x}{(1-x\cos x)\ln 2}$. **605.** $\frac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\ln 3}$. **606.** $\sim 0{,}576$.

607. $\sim 0{,}0942$. **608.** $-0{,}91$. **609.** $\sim 0{,}4343$.

610. $\sim 0{,}281$. **611.** $\frac{1}{1e}$. **612.** $x(2\ln x+1)\,dx$.

613. $-\frac{dx}{2(\sqrt{x}-x)\ln 2}$. **614.** $\frac{2\,dx}{\sin 2x}$. **615.** $\operatorname{ctg} x\,dx$.

616. -1. **617.** $\frac{\sin x}{1-\cos x}$. **618.** $\frac{\cos\ln x}{x}$.

619. $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$. **420.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **621.** $\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$.

622. $\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$. **623.** $\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x$.

624. $\frac{0{,}4343\cos 2x}{x}-2\sin 2x\log x$. **625.** $\frac{0{,}1886}{x\log x}$.

626. $\frac{1}{x\log_5 x\log_3\log_5 x\ln 2\ln 3\ln 5}$. **627.** $\frac{2x^3}{1-x^4}$.

628. $\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}}$. **629.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

630. $-\frac{2}{(1+\ln x)^2x}$. **631.** $nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}$. **632.** $\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$.

633. $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$. **634.** $\arcsin(\ln x)+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

635. $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$. **636.** $\frac{1}{\cos x(\cos x+\sin x)}$.

637. $\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\left(3\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}\right)}$. **638.** $-\frac{\sin x(1+2\cos x)}{1+\cos x+\cos^2 x}$.

639. $-\frac{1}{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+x}\,(2+2x+x^2)}$. **640.** $\frac{\operatorname{ctg}x\ln\cos x+\operatorname{tg}x\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$.

641. $\frac{a}{(ax+b)[1+\ln^2(ax+b)]}$. **642.** $-\frac{2-\ln x}{x^2}\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$.

643. $n(1+\ln\sin x)^{n-1}\operatorname{ctg}x$. **644.** $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

645. $-\frac{2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$. **646.** $-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.

647. $-\frac{a}{x\sqrt{a^2-x^2}}$. **648.** $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. **649.** $\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$.

650. $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. **651.** $4\sqrt{(x^2+a^2)^3}$. **652.** $\frac{x^2}{1-x^4}$.

653. $\frac{x^5+1}{x^6+x^4}$. **654.** $\frac{1}{x^2+1}$. **655.** $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

656. $\frac{x^8-1}{x(x^8+1)}$. **657.** $\frac{x^4}{x^{10}-1}$. **658.** $\frac{x^3+1}{x(x^3-8)}$. **659.** $\frac{x^7+2x^3}{x^8-1}$.

660. $\frac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\frac{x}{1-x^2}$. **661.** $-0{,}4343\left(\operatorname{tg}x+\frac{1}{2(1-x)}\right)$.

662. $\frac{1}{x^4+x^2+1}$. **663.** $2^x\ln 2$. **664.** $10^x\ln 10\,dy$.

665. $10^{2x-3}\,2\ln 10$. **666.** $e^{x^2-x+2}(2x-1)\,dx$.

667. $-\frac{\ln 3\,dy}{3^x}$. **668.** $\frac{1}{4^x}(1-x\ln 4)$.

669. $\cos 2^x\cdot 2^x\ln 2$. **670.** $3x^2-3^x\ln 3$. **671.** $\frac{e^{\sqrt{x}+1}\,dx}{2\sqrt{x}}$.

672. $-\frac{\ln 7\cdot 7^{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. **673.** $2^{2x}\ln 2\,dx$. **674.** $-\frac{2{,}303\cdot 10^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^2}$.

675. $-9x^2\,10^{-3x^3}\ln 10$. **676.** $\sim 23{,}026$. **677.** $\sim 1064{,}6$.

678. $\sim 1{,}689$. **679.** 56052. **680.** 1. **681.** 1. **682.** 0.

683. $e^x(x+1)$. **684.** $(x^2+1)e^x$. **685.** $-e^{-x}(x^3+2x-3x^2-2)$.

686. $2x^2e^{2x+3}$. **687.** $e^x(\cos x+\sin x)$. **688.** $e^x(\cos x-\sin x)$.

689. $e^x\frac{\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$. **690.** $-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$.

691. $e^x(\cos x+\sin x+2x\cos x)$. **692.** $\frac{e^{-x^2}(1-2x^2\ln x)}{x}$.

693. e^{x+e^x}. **694.** $2^{3x}\cdot 3^x\ln 2\cdot\ln 3$.

695. $(\cos x-\sin^2 x)\,e^{\cos x}$. **696.** $2xe^{x^2}$. **697.** $e^{\sin x}\cos x$.

698. $-e^{\cos x}\sin x$. **699.** $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.

700. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. **701.** $e^{1-\cos x}(1+x\sin x)$.

702. $-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1-e^x}{1+e^x}}$. **703.** $\frac{1}{e^x-1}$.

704. $\ln(1-2e^{x^2})-\frac{4x^2e^{x^2}}{1-2e^{x^2}}$. **705.** $10^{x\operatorname{tg}x}\ln 10\left(\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)$.

706. $-\frac{2\cdot 10^x\ln 10}{(1+10^x)^2}$. **707.** $a^{\sin^3 x}\,3\sin^2 x\cos x\ln a$.

708. $e^x\sin x\cos^3 x\,(1+\operatorname{ctg}x-3\operatorname{tg}x)$.

709. $e^{ax}\sin x\,(1+a^2)$. **710.** $-\dfrac{\cos\sqrt{1-2^x}}{2\sqrt{1-2^x}}\,2^x\ln 2$.

711. $5-\dfrac{3e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$. **712.** $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. **713.** $2xe^{x^2}(x^2+1)$.

714. $\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$. **715.** $10e^x\sin 3x$. **716.** $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

717. $\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x$. **718.** $\dfrac{3x^2(1+e^x)-x^3e^x}{(1+e^x)^2}$.

719. $\dfrac{2x(e^x+e^{-x})-e^x+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}+2}\,e^{x^2}$. **720.** $-\dfrac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$.

721. $2^{\frac{x}{\ln x}}\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ln 2$. **722.** $\dfrac{2e^{-2x}}{(\operatorname{arc\,tg} e^{-2x})^2(1+e^{-4x})}$.

723. $\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}$. **724.** $\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$.

725. $\dfrac{e^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{[2+\ln(2x+3)](2x+3)\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$. **726.** $\dfrac{1}{ae^{mx}+be^{-mx}}$.

727. $e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\,\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}\,(ax^2+bx+c)}$.

728. $\dfrac{(\cos x-\sin x)(e^x+e^{-x})}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}$. **729.** $\dfrac{e^x+2e^{2x}}{3(1+e^x+e^{2x})\ln 10}$.

730. $\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{\operatorname{arc\,tg} e^{3x}}\cdot e^{3x}}{\sqrt[3]{(\operatorname{arc\,tg} e^{3x})^2}\,(1+e^{6x})}$. **731.** $\dfrac{3e^{\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})}{10\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^2}}$.

732. $\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$. **733.** 0. **734** $\dfrac{1}{2}$. **735.** n.

736. 10. **737.** 0. **738.** $\dfrac{1}{2}$. **739.** 0. **743.** $\sim 0{,}995$.

744. $\sim 0{,}795$. $\sim 0{,}770$. **745.** $\sim 0{,}782$. **746.** $\sim 0{,}52165$.

750. 4,4%. **751.** 0,3%. **752.** $3\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch} x$. **753.** $\operatorname{th} x$.

754. $\dfrac{1}{(1+\operatorname{th}^2 x)\operatorname{ch}^2 x}$. **755.** $-\dfrac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$. **756.** $4\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$.

757. $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x$. **758.** $\dfrac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$. **759.** $2e^{\operatorname{ch}^2 x}\operatorname{ch} x\operatorname{sh} x$.

760. $\dfrac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$. **761.** $x\operatorname{ch} x$. **762.** $\dfrac{3\operatorname{th} x}{2\sqrt[4]{1+\operatorname{th}^2 x}\cdot\operatorname{ch}^2 x}$.

763. $\dfrac{1}{(1+\operatorname{ch} x)^2}$. **764.** $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}}{2(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)}$. **765.** $\dfrac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.

766. Величина реципрочна субтангенти.

767. Коефициенат (термички) линеарног ширења штапа (види задатак 323).

768. $x^{x^2+1}(1+2\ln x)$. **769.** $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

770. $x^{x^x}[x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}]$.

771. $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

772. $(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}+\sin x\ln\sin x\right)$.

773. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$.

774. $(\ln x)^x\left(\dfrac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$. **775.** $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\ln(e^2x)$.

776. $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$.

777. $(x^2+1)^{\sin x}\left(\cos x\ln(x^2+1)+\dfrac{2x\sin x}{x^2+1}\right)$.

778. $-\dfrac{\ln a}{x(\ln x)^2}$. **779.** $\dfrac{-6x^2-x^4-1}{3x(x^2+1)(x^2-1)}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

780. $\dfrac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}\,\dfrac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

781. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\dfrac{1}{x}+\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^x}{1-e^x}\right)$.

782. $\dfrac{xe^x\operatorname{arc\,tg} x}{(\ln x)^5}\left(\dfrac{1+x}{x}+\dfrac{1}{(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x}-\dfrac{5}{x\ln x}\right)$.

783. $-\dfrac{1}{[1-(\arcsin x)^2]\sqrt{1-x^2}}\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$.

784. $\dfrac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}\left(\dfrac{3x^2+2x-3}{x^2-1}-\operatorname{tg} x+\dfrac{3}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}\right)$.

785. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{5(x^2+4)}\right)$.

786. $y' = \dfrac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}\left(\dfrac{1}{2(x+2)} - \dfrac{4}{3-x} - \dfrac{5}{x+1}\right).$

787. $y' = \left(2x - \dfrac{1}{1+x^2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{x}}\, e^{x^2 - \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{3}\ln x + 1}$

788. $u^v v^u \left(\dfrac{v^2 u' + u^2 v'}{uv}\right) + \ln(u^{v'} v^{u'})$. **791.** $\alpha'(x) = \dfrac{1}{x\,[1 + \ln\alpha(x)]}.$

792. $(\mathrm{Arsh}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $(\mathrm{Arch}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(\mathrm{Arth}\, x)' = \dfrac{1}{1-x^2}.$

793. $-\dfrac{x}{y}$. **794.** $\dfrac{2a}{3(1-y^2)}$. **795.** $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. **796.** $\dfrac{y}{y-x}$.

797. $\dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$. **798.** $\dfrac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$. **799.** $\dfrac{3a^2\cos 3x + y^2\sin x}{2y\cos x}$.

800. $-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. **801.** $-\dfrac{1+y\sin xy}{x\sin xy}$. **802.** $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

803. $\dfrac{e^y}{2-y}$. **804.** $\dfrac{\sin y}{2\sin 2y - x\cos y - \sin y}$.

805. $\dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$. **806.** $\dfrac{1+y^2}{y^2}$.

810. Ако је D заједнички део области дефинисаности функција φ и ψ, онда $f(t)$ мора узимати све вредности које припадају овој области.

812. а) $y = 2x - \dfrac{1}{9}x^2$; б) $y = 2x\sqrt{1-x^2}$; в) $y = (x-1)^{\frac{2}{3}}$;

г) $x = \arccos(1-y) - \sqrt{2y - y^2}$; д) $y = \dfrac{2(1+x-x^2)}{1+x^2}$.

813. а) $t = \pi$; б) $t = 1$; в) $t = \dfrac{\pi}{4}$; г) $t = 1$ и $t = -1$ (двострука тачка).

814. $-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. **815.** $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$. **816.** $\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. **817.** $\dfrac{1-3t^2}{1-2t}$.

818. -1. **819.** $\dfrac{t}{2}$. **820.** $\dfrac{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1 - \sin\varphi - \varphi\cos\varphi}$. **821.** $\dfrac{1+t^2}{t(2+3t-t^2)}$.

822. $\dfrac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$. **823.** $\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **824.** $-\dfrac{4}{3}$. **825.** 0 и $\dfrac{1}{3}$.

826. $\dfrac{dx}{dy} = 0$. **827.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **833.** $\operatorname{arc\,tg} 3 \cong 71°36'$. **834.** $45°$.

835. $90°$. **836.** $45°$ и $90°$ (у коорд. поч.). **837.** $\operatorname{arc\,tg} 3 \cong 71°36'$.

838. $\alpha_1 = \alpha_2 \cong 87°10'$. **839.** $\varphi_1 = \varphi_2 = 150°$; $\varphi_3 = 0$.

840. $y - y_0 = (x - x_0)\cos x_0$; $(y - y_0)\cos x_0 + x - x_0 = 0$.

841. $y - y_0 = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0)$; $y - y_0 + x_0(x - x_0) = 0$.

842. $\begin{cases} (y - y_0)(2a - x_0)^2 = (3a - x_0)\sqrt{2ax_0 - x_0^2}\,(x - x_0); \\ (y - y_0)(3a - x_0)\sqrt{2ax_0 - x_0^2} + (2a - x_0)^2(x - x_0) = 0. \end{cases}$

843. $\begin{cases} (1 + x_0^2)^2(y - y_0) + 2x_0(x - x_0) = 0; \\ (y - y_0)\,2x_0 = (1 + x_0^2)^2(x - x_0). \end{cases}$

844. $x + 2y = 4a$; $y = 2x - 3a$.

845. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$; $by - ax = b^2 - a^2$. **846.** $y = x$; $y = -x$.

847. $x + 2y - 4 = 0$; $2x - y - 3 = 0$. **848.** $2y + 4x - 3 = 0$; $4y - 2x - 1 = 0$.

866. $\dfrac{y}{\sin\frac{3}{2}t}$; $\dfrac{y}{\sin\frac{3}{2}t}$; $y\operatorname{ctg}\dfrac{3}{2}t$; $y\operatorname{tg}\dfrac{3}{2}t$.

867. $\dfrac{y}{\sin t}$; $\dfrac{y}{\cos t}$; $-y\operatorname{ctg} t$; $-y\operatorname{tg} t$. **869.** $\dfrac{y}{\sin t}$; $\dfrac{y}{\cos t}$; $y\operatorname{ctg} t$; $y\operatorname{tg} t$.

871. $a\omega$ cm/sek. **872.** x се мења брзином $-2r\omega\sin 2\varphi$, а y брзином $2r\omega\cos 2\varphi$.

873. $a\omega e^{a\varphi}$. **874.** Брзина мењања величине x је: $v\cdot(1-\cos t)$, а величине y је: $v\sin t$.

875. $\theta = \varphi$, $\alpha = 2\varphi$. **879.** -3. **880.** а) 0; б) 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$.

882. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{f_1(t)\,f'_2(t)}{f'_1(t)}$. **883.** $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{3}bt^2$.

884. $\rho = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t\right)$; $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2ab}{(b^2 - a^2)\sin 2t}$.

885. $\dfrac{\rho^2}{\frac{d\rho}{d\varphi}}$; $\dfrac{d\rho}{d\varphi}$. **888.** $\dfrac{\rho}{\ln a}$. **889.** $\rho\ln a$. **890.** $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.

891. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (Бернулијева лемниската).

895. $\sqrt{1 + a^2}\,dx$. **896.** $ds = \dfrac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

897. $ds = \sqrt{1 + \dfrac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\,dx$. **898.** $ds = \sqrt{1 + \dfrac{p}{2x}}\,dx$.

899. $ds = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 + 9ax}\,dx$. **900.** $ds = \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$.

901. $ds = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx$. **902.** $ds = r\,dt$. **903.** $ds = 2a\sin\dfrac{t}{2}\,dt$.

904. $ds = 3a\cos t\sin t\,dt$. **905.** $ds = a\sqrt{1+t^2}\,dt$.

906. ± 2 јединице у секунди. **907.** ± 2 cm/sek.

908. $M_1\left(3,\ \frac{16}{3}\right)$, $M_2\left(-3,\ -\frac{16}{3}\right)$. **909.** $4v$ cm/sek; $2av$ cm²/sek.

910. $2\pi rv$; $2\pi v$. **911.** $4\pi r^2 v$; $8\pi rv$. **912.** За $\pm 60^\circ + 360^\circ \cdot n$.

913. За $360^\circ \cdot n$. **914.** $\frac{1}{n^2}$ пута. **916.** $\frac{3}{2}$ m/min. **917.** ~ 51 km/час.

918. 15,85 km/час. **919.** 3,29 m/min. **920.** 40 km/час.

921. $2v\sin\frac{t}{2}$. **922.** $v_x = -\frac{2a\pi}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}$, $v_y = \frac{2a\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}$.

923. $v = R\omega\left(\sin\varphi + \frac{R\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2+R^2\sin^2\varphi}}\right)$. **924.** 880 cm/sek.

926. Спирала $\rho^2 = 2kR^2\varphi$. **927.** 1227 д. 40 п. **928.** 1227 д. 50 п.

930. $dx = -\frac{dy}{ky}$. **931.** $v = -km$. **932.** $a = 16$ m/sek².

933. $a = -\frac{\pi^2}{18}$ cm/sek². **935.** $a = -0{,}0015$ m/sek². **936.** $-\frac{1}{8}$ m/sek².

939. 2. **940.** $-24x$. **941.** 207360. **942.** 360. **943.** $6(5x^4+6x^2+1)\,dx^2$.

944. $4\sin 2x\,dx^3$. **945.** $\frac{4}{e}$. **946.** $-\frac{1}{2}$. **947.** $\frac{4!}{(1-x)^5}$. **948.** $\frac{6}{x}$.

949. $\frac{an(n+1)}{x^{n+2}}$. **950.** $a^5\sin a\varphi$. **951.** $2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

952. $\frac{4a^3}{(a^2+q^2)^2}$. **953.** 1440. **954.** $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2730}$. **955.** $2e^{x^2}(3x+2x^3)$.

956. $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$. **957.** $\frac{2x}{1+x^2} + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x$. **958.** $-\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

959. $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **960.** $\frac{a+3\sqrt{x}}{4(a+\sqrt{x})^3\sqrt{x^3}}$. **961.** $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$.

962. $-\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. **963.** $\frac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$.

964. $x^x(1+\ln x)^2 + x^{x-1}$. **965.** $a^n e^{ax}$. **966.** $(-1)^n e^{-x}$.

967. $a^n\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right) + b^n\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)$. **968.** $2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)$.

969. $xe^x + ne^x$. **970.** $(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}\ (n>1)$. **971.** $(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n\ln a}$.

972. $\frac{1}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

973. $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$. **974.** $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

984. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$. **985.** $-\frac{3r^2x}{y^5}$. **986.** $-\frac{2(5+8y^2+3y^4)}{y^8}$.

987. $\frac{3-S}{(2-S)^3}e^{2S}$. **988.** $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$. **989.** $-\frac{y}{[1-\cos(x+y)]^3}$.

990. $-\frac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$. **991.** $-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$. **992.** e^{-2}.

993. $-\frac{p^2}{\sqrt{(y^2+p^2)^3}}$. **995.** $\frac{y''\sqrt{(1+y'^2)^3} - 3y'y''\sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^3}$.

996. $-\frac{2a}{9b^2t^4}$. **997.** $-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$. **998.** $-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$.

999. $-\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$. **1000.** $\frac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t\sin^3 t}$.

1001. 0; $x+y=a$. **1002.** $\frac{2+t^2}{a(\cos t - t\sin t)^3}$.

1005. $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$.

1006. $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.

1007. $(x-1)^{10} + 10(x-1)^9 + 45(x-1)^8 + 120(x-1)^7 +$
$+ 210(x-1)^6 + 249(x-1)^5 + 195(x-1)^4 +$
$+ 90(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 5(x-1) - 1$.

1008. Не може. **1009.** $a_0 = f(0)$; $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ (k \neq 0)$.

1010. $x^4 - 2x^3 - 2x + 1$. **1011.** $f'(0) = -60$; $f''(1) = 26$.

1012. $f(x) = 1 - 6(x-1) + (x-1)^2 + 60(x-1)^3 + \ldots$; $f(1{,}03) \cong 0{,}82$.

1013. $f(x) = 321 + 1087(x-2) + 3296\frac{(x-2)^2}{2!} + \cdots$;

$f(2{,}02) \cong 343{,}4$; $f(1{,}97) \cong 289{,}9$.

1014. $f(x) = 1 + 60(x-1) + 5140\frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots$; $f(1{,}005) \cong 1{,}364$.

1015. $f(x) = -6 + 21(x-2) + 100\frac{(x-2)^2}{2!} + \cdots$;

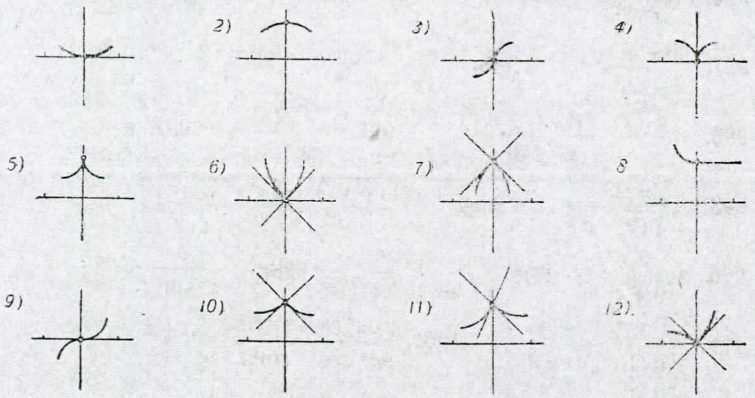
$f(2{,}1) \cong -3{,}4$; $f(2{,}1) = -3{,}364$; $x = 0{,}036$; $\delta \cong 0{,}011 = 1{,}1\,\%$.

Уз главу IV

1025. Види слику 56. **1026.** $\frac{\psi(t_2)-\psi(t_1)}{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)} = \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\ (t_1 \leqslant \xi \leqslant t_2)$.

1030. $\xi = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$.

1033. Кад $x \to \infty$, тада ξ тежи нули узимајући не све међувредности, већ само један такав низ вредности за које $\cos\frac{1}{\xi}$ тежи нули.



Сл. 56

1034. а) 0,833. б) 0,57. **1035.** 1,0414; таблична вредност је 1,04139.
1036. 0,1990. **1037.** 0,84496; таблична вредност је 0,84510.
1038. 1,78533; таблична вредност је 1,78533.

1041. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$ опада, $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ расте.

1045. $(-\infty, 1)$ расте, $(1,3)$ опада, $(3, +\infty)$ расте.
1046. $(-\infty, -1)$ опада, $(-1,0)$ расте, $(0,3)$ опада, $(3, \infty)$ расте.
1047. $(-\infty, -2)$ расте, $(-2, -1)$ опада, $(-1, +1)$ расте, $(+1, +2)$ опада, $(+2, +\infty)$ расте.

1048. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{18}\right)$; $\left(\frac{11}{18}, \infty\right)$.

1049. $\left(-\infty, \frac{2}{3}a\right)$; $\left(\frac{2}{3}a, a\right)$; (a, ∞).

1050. $(-\infty, c)$; (c, ∞). **1051.** Функција је монотона.
1052. $(-\infty; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; +\infty)$.

1053. $(-\infty, 0)$; $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ $(1; \infty)$. За $x=0$ функција није дефинисана.

1054. $(0; 1)$; $(1; e)$; $(e; \infty)$. **1055.** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

1056. Функција је монотона. **1057.** $\left(0; \frac{3}{4}a\right)$; $\left(\frac{3}{4}a; a\right)$.

1058. Функција је монотона; за $x = \pm\frac{k\pi}{2}$ (k је произвољан непаран број) функција није дефинисана.

1059. 1) min. $-\frac{7}{4}$ за $x=\frac{3}{2}$; 2) за $x=-\frac{b}{a}$ min. $C-\frac{b^2}{a}$, ако је $a>0$ и maks. $C-\frac{b^2}{a}$, ако је $a<0$; 3) maks. 0 за $x=0$ и min. -1 за $x=1$; 4) maks. 17 за $x=-1$ и min. -47 за $x=3$.
1060. Min. -2 за $x=-1$; maks. 2 за $x=1$.

1061. Min. $\frac{8}{3}$ за $x=-2$; maks. 4 за $x=0$.

1062. Maks. $\frac{\sqrt{820}}{20}$ за $x=\frac{12}{5}$.

1063. Maks. $\frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$ за $x=\frac{1}{2}$ и min. 0 за $x=-1$ и $x=5$.

1064. Функција је монотона. **1065.** Min. 0 за $x=0$.
1066. Maks. $a\sqrt[3]{a}$ за $x=0$ и min. 0 за $x=-a$ и за $x=a$.
1067. Ако a и b имају различите знаке, онда нема екстремума. Ако a и b имају исте знаке, онда је минимум $2\sqrt{ab}$ за $x=\frac{\ln b-\ln a}{2p}$.

1068. Максимуми за $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, минимуми за $x=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$; k је ма који цео број.

1069. Максимуми за $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, минимуми за $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$; k је ма који цео број.

1070. а) Највећа вредност $=13$, најмања $=4$; б) највећа вредност $=8$, најмања $=0$; в) највећа вредност $=2$, најмања $=-10$; г) највећа вредност $=2$, најмања $=-12$.
1071. Највећа за $x=0$ $(y=10)$, најмања за $x=8$ $(y=6)$.

1072. Највећа за $x=0$ и 1 $(y=1)$, најмања за $x=\frac{1}{2}$ $\left(y=\frac{3}{5}\right)$.

1073. Највећа за $x=4$ $\left(y=\frac{3}{5}\right)$, најмања за $x=0$ $(y=-1)$.

1074. Највећа за $x=1$ $(y=0)$, најмања вредност не постоји.

1075. Највећа за $x=-\frac{\pi}{2}$ $\left(y=\frac{\pi}{2}\right)$, најмања за $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(y=-\frac{\pi}{2}\right)$.

1076. Највећа за $x=\frac{\pi}{4}$ $(y=1)$, најмања вредност не постоји.

1077. Највеће вредности нема, најмања за $x=\frac{1}{e}$ $\left(y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)$.

1078. Највећа за $x=3$ $(y=\sqrt[3]{9})$, најмања за $x=0$ и 2 $(y=0)$.

1079. Највећа за $x=0$ $\left(y=\frac{\pi}{4}\right)$, најмања за $x=1$ $(y=0)$.

1092. 4 и 4. **1093.** 1. **1094.** 6 и 6. **1095.** 3; 6 и 4.

1096. $t=\dfrac{2\,m_0}{3\,k}$; $E_{\text{max}}=\dfrac{2}{27}\dfrac{g^2 m_0^3}{k^2}$. **1097.** $\sqrt[3]{4\nu}$. **1098.** $\dfrac{R}{h}=\dfrac{1}{2}$.

1099. $R=H=\sqrt[3]{\dfrac{\nu}{\pi}}$. **1100.** $h=\dfrac{l\sqrt{3}}{3}$.

1101. Бочна страна $=\dfrac{3\,p}{4}$, основ. $=\dfrac{p}{2}$.

1102. Бочна страна $=\dfrac{3}{5}\,p$, основ. $=\dfrac{4}{5}\,p$. **1103.** $h=\dfrac{2\,R\sqrt{3}}{3}$.

1104. $h=\dfrac{4}{3}\,R$. **1105.** $r=\dfrac{RH}{2\,(H-R)}$. **1106.** $\sqrt{\dfrac{2\,a\,P}{k}}$.

1107. 20 km/час, 720 дин. **1108.** Кроз 1,63 часа.

1109. Висина троугла мора бити једнака три четвртине пречника круга.

1110. Пречник основе конуса мора бити један и по пута већи од полупречника цилиндра.

1111. $H=4\,r$. **1112.** $\sim 49°$. **1113.** 60°.

1114. $H=R\sqrt{3}$. **1115.** $H=\dfrac{4}{3}\,r$.

1116. Висина правоугаоника је $\dfrac{-3\,h+\sqrt{h^2+8\,r^2}}{4}$, где је h растојање тетиве која одговара луку сегмента, од центра, а r полупречника круга.

1118. Тражени отсечци су $a+\sqrt{ab}$ и $b+\sqrt{ab}$.

1119. $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$. **1120.** Површ. елипсе $=\dfrac{\pi}{2}$ површ. правоуг.

1121. $x=a-p$, ако је $a>p$; $x=0$ за $a\leqslant p$. **1122.** $P\,(p, \pm p\sqrt{2})$.

1123. $\varphi=\pi$. Пресек олука има облик полукруга.

1125. За $\alpha=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cong 293°24'$.

1126. Дужина дебла је $13\,\dfrac{1}{3}$ m, дијагонала попречног пресека је $1\,\dfrac{1}{3}$ m.

1127. Тражена вредност једнака је аритметичкој средини резултата мерења: $x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

1128. На 3 km од логора. **1129.** На висини $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

1130. Растојање од извора силе I_1 је $\dfrac{l\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1}+\sqrt[3]{I_2}}$; другим речима тражена тачка дели растојање l у односу $\sqrt[3]{I_1}:\sqrt[3]{I_2}$.

1131. На растојању 2,4 m.

1132. $2\,b+\sqrt{\dfrac{sb}{a}}$ и $2\,a+\sqrt{\dfrac{sa}{b}}$ су дужине доње, односно бочне ивице стране.

1133. $r=\sqrt{\dfrac{s}{\pi\,(3\sqrt{2}-2)}}$. **1134.** Једначина тетиве је $x=\dfrac{b}{3}$.

1137. Највећа сума је A за $t=0$. Најмања је 0,871 A за $t\cong 13$ год. 10 мес. 10 дана.

1138. Ако је $bE_0\leqslant 2\,a\,R_0$ $\left(\text{где је } a=\dfrac{E_1-E_0}{t_1};\ b=\dfrac{R_1-R_0}{t_1}\right)$, онда се најмања вредност $W_{\min}=\dfrac{E^2}{R_0}$ достиже за $t=0$. Ако је $bE_0>2\,a\,R_0$, али $\dfrac{bE_0-2\,a\,R_0}{ab}<t_1$, онда се најмања вредност $W_{\min}=\dfrac{4a}{b^2}(bE_0-aR_0)$ достиже за $t=\dfrac{bE_0-2\,a\,R_0}{ab}$. Најзад, за $bE_0>2\,a\,R_0$, али $\dfrac{bE_0-2\,a\,R_0}{ab}\geqslant t_1$, онда се најмања вредност $W_{\min}=\dfrac{(at_1+E_0)^2}{bt_1+R_0}$ достиже за $t=t_1$.

1140. $\cos\varphi=\dfrac{1}{\mu}$; кад је $\mu=\dfrac{\sqrt{d^2+h^2}}{d}$. **1141.** Maks. за $a=2$.

1144. $x=\dfrac{r}{2}$. **1145.** Превојна тачка је $\left(\dfrac{5}{3};\ -\dfrac{250}{27}\right)$.

1146. Нема превојних тачака.
1147. Превојне тачке су (2; 62) и (4; 206).
1148. Превојне тачке су (2; 114) и (−3; 294).
1149. Превојне тачке су (−1; 12) и (1; −8).
1150. Нема превојних тачака.

1151. Превојне тачке су $\left(-3\,a;\ -\dfrac{9a}{4}\right)$; (0; 0); $\left(3\,a;\ \dfrac{9a}{4}\right)$.

1152. Превојна тачка је $(b;\ a)$.

1153. Превојна тачка је $\left(\operatorname{Arc\,sin}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\ e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$.

1154. Превојна тачка је $(\pm 1;\ \ln 2)$.

1155. Превојна тачка је за $x=ae^{\frac{3}{2}}$.

1156. Крива нема превојних тачака. **1157.** Има $\left(\dfrac{1}{2};\ e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$.

1159. У тачки (1, 11) крива је конвексна, а у тачки (3, 3) – конкавна.

1160. $\alpha=-\dfrac{20}{3}$, $\beta=\dfrac{4}{3}$; превојне тачке биће такође за $x=0$ и $x=-2$.

1162. $-\infty<a\leqslant-\dfrac{e}{6}$; $0<a<+\infty$; b и c су произвољни.

1163. $T = \dfrac{\sqrt{3c}}{4(a+b)\sqrt{R}}$ и одгов. притисак $p = \dfrac{\sqrt{3cR}}{12(a+b)^2}$.

1167. Не. **1177.** Нема превојних тачака.

1178. Превојна тачка је за $t = \dfrac{\pi}{2}$.

1179. Превојне тачке су за $t = \dfrac{3\pi}{4} \pm k\pi,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

1181. $\varphi = \dfrac{1}{2}\ (\cong 28^\circ\,38'52'')$. **1182.** $\cos\varphi = -\dfrac{2a^2+b^2}{3ab};\ 2a^2+b^2 < 3ab$.

1184. $\xi = \dfrac{14}{9}$. **1186.** 1. **1187.** $\dfrac{\alpha}{\beta}$. **1188.** $\dfrac{1}{3}$. **1189.** $-\dfrac{a}{\sqrt{b}}$.

1190. $-\dfrac{1}{2}$. **1191.** 2. **1192.** $\dfrac{m}{n}\,a^{m-n}$. **1193.** $\dfrac{\ln\dfrac{a}{b}}{\ln\dfrac{c}{d}}$. **1194.** -2.

1195. 2. **1196.** $\ln\dfrac{a}{b}$. **1197.** $\cos a$. **1198.** $\sqrt{2}$. **1199.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1200. 2. **1201.** 0,5. **1202.** 1. **1203.** 1. **1204.** 1. **1205.** $\dfrac{1}{128}$.

1206. 16. **1207.** 0 за свако n. **1208.** 0. **1209.** a. **1210.** 0.

1211. $\dfrac{4a^2}{\pi}$. **1212.** -1. **1213.** 0. **1214.** ∞. **1215.** 1. **1216.** ∞.

1217. $\dfrac{a+b+c}{3}$. **1218.** 1. **1219.** e. **1220.** 1. **1221.** 1. **1222.** e^2.

1223. $e^{\frac{2}{\pi}}$. **1224.** 1. **1225.** $\dfrac{1}{2}$. **1227.** x^x расте брже $a^x x^a$.

1229. Први. **1230.** Други. **1235.** $f(115) \cong 1520990;\ f(120) \cong 1728120;$ $\delta_{x=100} \cong 0{,}03$ (апсолутна грешка).

1236. $y = x$, ако $f(x)$ није идентички једнако константи b, у противном случају је $y = x + \dfrac{a}{b}$.

1237. $y = c,\ x = b$. **1238.** $x + y = 0$. **1239.** $y = \pm x$. **1240.** $y = x + 2$.

1241. $x = -1,\ y = \dfrac{1}{2}x - 1$. **1242.** $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 0$.

1243. $x = b,\ x = 2b,\ y = x + 3(b - a)$. **1244.** $y + 2x + 1 = 0;\ y + 1 = 0$.

1245. $ex + 1 = 0;\ y = x + \dfrac{1}{e}$. **1246.** $x = 0;\ y = x$. **1247.** $x = 0;\ y = x + 3$.

1248. $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$. **1249.** $y = 2x \pm \dfrac{\pi}{2}$.

1250. Ако је $4ac - b^2 > 0$, онда је једина асимптота апсцисна оса. Ако је $4ac - b^2 = 0$, онда су асимптоте апсцисна оса и права $x = -\dfrac{b}{2a}$.

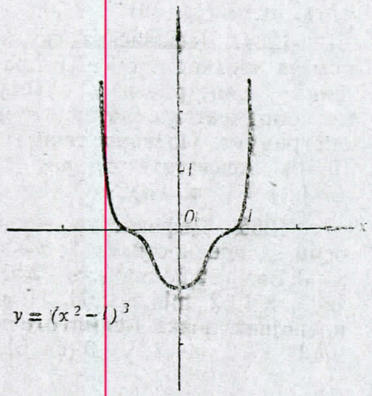
Ако је $4ac - b^2 < 0$, онда су асимптоте праве $y = 0;\ y = \alpha;\ y = \beta$, где су α и β корени тринома.

1253. $x = 2;\quad 2x + 8y + 1 = 0;\quad 6x - 40y + 9 = 0$. **1254.** $y = \dfrac{1}{2}x + e$.

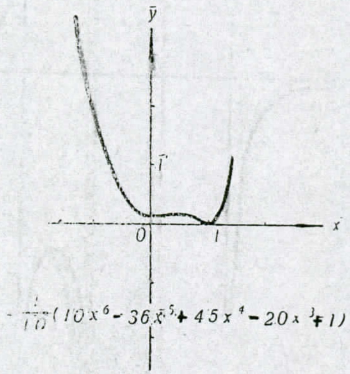
1255. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2};\quad y = -\dfrac{1}{2}x$. **1256.** $x + y + a = 0$.

1258. $y = n$. **1259.** Поларна оса. **1260.** $y = x \pm \sqrt{2};\ y = -x \pm \sqrt{2}$.

1261. Дефинисана свуда; график је симетричан у односу на ординатну осу. За $x = 0$ функција има min. $= -1$. Тачке $(1; 0)$ и $(-1; 0)$

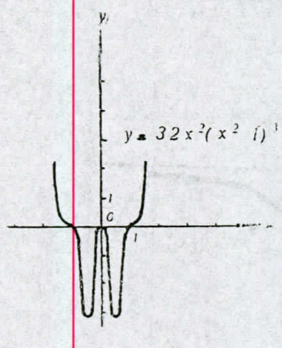


Сл. 57.

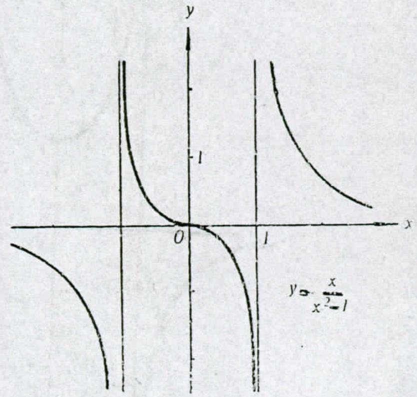


Сл. 58.

су превојне тачке графика с тангентом паралелном x-оси. Тачке $\left(\dfrac{\pm\sqrt{5}}{5};\ -\dfrac{64}{125}\right)$ су привојне тачке. Асимптоте нема (сл. 57).



Сл. 59.



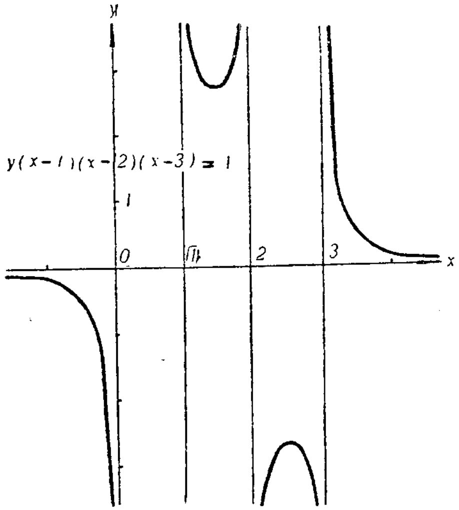
Сл. 60.

1262. Дефинисана свуда. За $x = 1$ min. $= 0$. Тачка $(0; 0{,}1)$ је превојна тачка графика с тангентом паралелном x-оси; за $x = 0{,}4$ превојна тачка с косом тангентом. Асимптота нема (сл. 58).

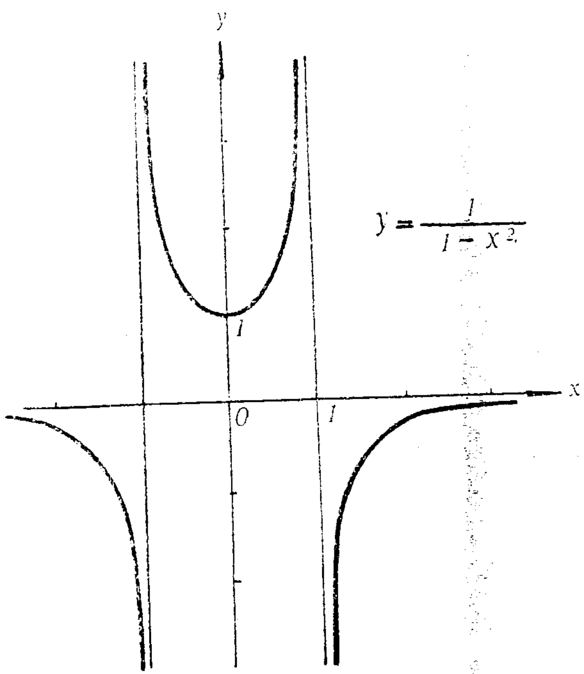
1263. Дефинисана свуда; график је симетричан у односу на ординатну осу. За $x=0$ максимум функције $=0$. За $x=\pm\frac{1}{2}$ минимум $=-\frac{27}{8}$. Превојне тачке графика с тангентом паралелном x-оси су $(\pm 1; 0)$. За $x \cong \pm 0{,}7$ и $x \approx \pm 0{,}25$ још четири превојне тачке графика. Асимптота нема (сл. 59).

1264. Дефинисана свуда, сем за вредности $x=\pm 1$. График је симетричан у односу на координатни почетак. Нема екстремума. Превојна тачка је $(0; 0)$. Асимптоте су $x=-1$; $x=1$; $y=0$ (сл. 60).

1265. Дефинисана свуда осим за вредности $x=1$; $x=2$; $x=3$. За $x \approx 2{,}58$ maks.$\approx -2{,}51$; за $x \approx 1{,}42$ min $\approx 2{,}60$. Нема превојних тачака. Асимптоте су $x=1$; $x=2$; $x=3$; $y=0$ (сл. 61).



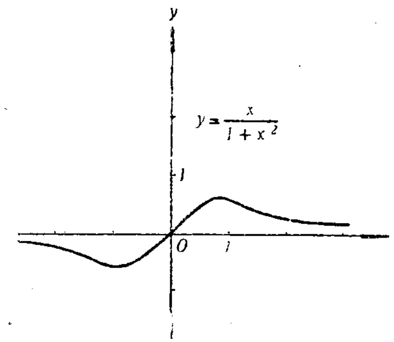
Сл. 61



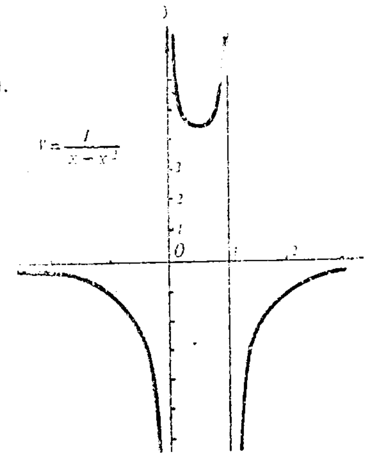
Сл. 62

1266. Дефинисана свуда осим за вредности $x=\pm 1$. График је симетричан у односу на ординатну осу. Максимума нема. За $x=0$ min.$=1$. Нема превојних тачака. Асимптоте су: $x=\pm 1$; $y=0$ (сл. 62).

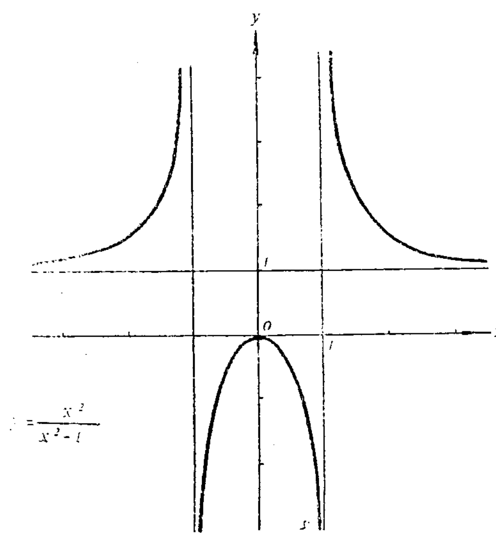
1267. Дефинисана свуда. График је симетричан у односу на координатни почетак. За $x=1$ maks.$=\frac{1}{2}$; за $x=-1$ min.$=-\frac{1}{2}$. Превојне тачке графика су: $(0; 0)$, $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота је $y=0$ (сл. 63).



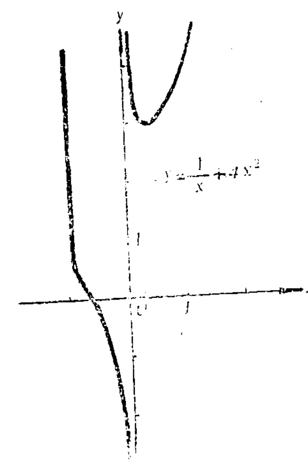
Сл. 63



Сл. 64



Сл. 65



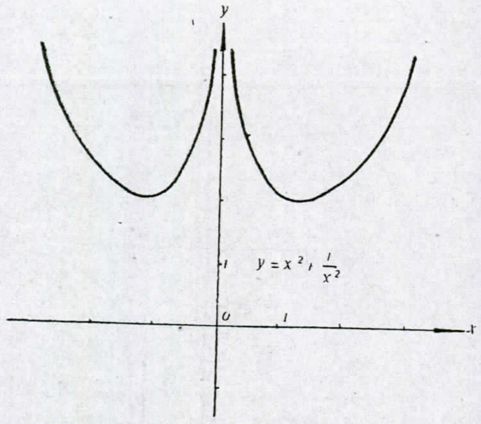
Сл. 66

1268. Недефинисана за $x=0$ и $x=1$. Нема максимума; за $x=\frac{1}{2}$ min.$=4$. График нема превојних тачака. Асимптоте су $x=0$; $x=1$; $y=0$ (сл. 64).

1269. Недефинисана за $x=\pm 1$. За $x=0$ maks. $=0$. Минимума нема. За $x<-1$ расте, за $x>1$ опада. График је без превојних тачака. Асимптоте су $x=\pm 1$; $y=1$ (сл. 65).

1270. Недефинисана за $x=0$. За $-\infty<x<0$ и $0<x<\frac{1}{2}$ опада, за $x=\frac{1}{2}$ min. $=3$; максимума нема. Превојна тачка графика је $\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{4}};\ 0\right)$. Асимптота је $x=0$ (сл. 66).

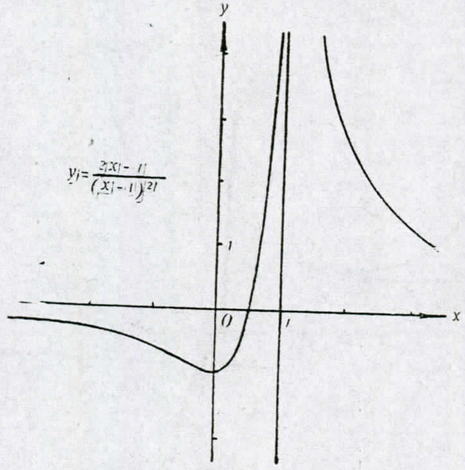
1271. Недефинисана само за $x=0$. График је симетричан у односу на ординатну осу. Максимума нема; за $x=\pm 1$ минимуми $=2$. График нема превојних тачака. Асимтота је $x=0$ (сл. 67).



Сл. 67

1272. Недефинисана само за $x=1$. Максимума нема, за $x=0$ min. $=-1$. Превојна тачка је $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{8}{9}\right)$. Асимптоте су $x=1$; $y=0$ (сл. 68).

1273. Недефинисана само за $x=\pm\sqrt{3}$. График је симетричан у односу на координатни почетак. За $x=3$ maks. $=-4{,}5$; за $x=-3$ min. $=4{,}5$. Превојна тачка графика је $(0;\ 0)$. Асимптоте су $x=\pm\sqrt{3}$ и $x+y=0$ (сл. 69).



Сл. 68.

1274. Недефинисана за $x=-1$. Минимума нема; за $x=-3$ maks. $=-3\frac{3}{8}$. Превојна тачка графика је $(0;0)$. Асимптоте су $x=-1$ и $y=\frac{1}{2}x-1$ (сл. 70).

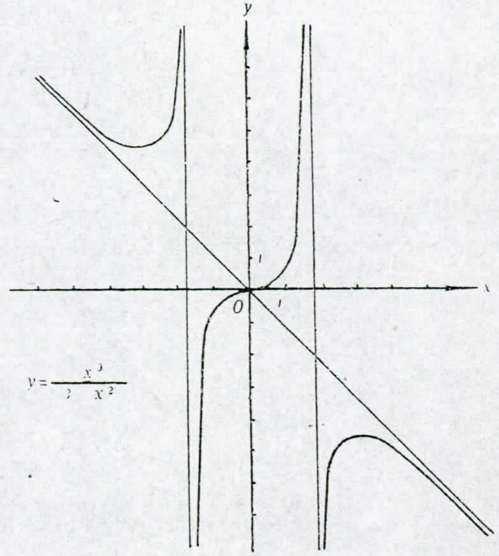
1275. Дефинисана за $x\neq 1$; за $x=0$ вредност функције је 0; за $x=\frac{3}{2}$ min. $=\frac{27}{4}$; максимума нема. График има превојну тачку $(0;0)$. Асимптота је $x=1$ (сл. 71).

1276. Недефинисана за $x=1$. За $x=0$ maks. $=0$; за $x=\sqrt[3]{4}$ min. $=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$. Превојна тачка графика је $\left(-\sqrt[3]{2};\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. Асимптоте су $x=1$ и $y=x$ (сл. 72).

1277. Дефинисана за $x\neq 0$. За $x=1$ maks. $=\frac{7}{2}$; за $x=-3$ maks. $=-\frac{11}{6}$; за $x=2$ min. $=\frac{27}{8}$. График има превојну тачку за $x=\frac{9}{7}$. Асимптоте су $x=0$ и $y=\frac{1}{2}x+1$ (сл. 73).

1278. Дефинисана за $x\neq 0$. Нуле: $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=2$. За $x\approx 1{,}464$ функција има минимум; максимума нема. График има превојну тачку за $x=-\sqrt[3]{2}$. Асимптота је $x=0$ (сл. 74).

1279. Дефинисана за $x\neq 0$. За $x=\sqrt[3]{8}$ вредност функције је нула; за $x=-2$ maks. $=-2{,}5$; минимума нема. График нема превојних тачака. Асимптоте су $x=0$ и $y=x$ (сл. 75).

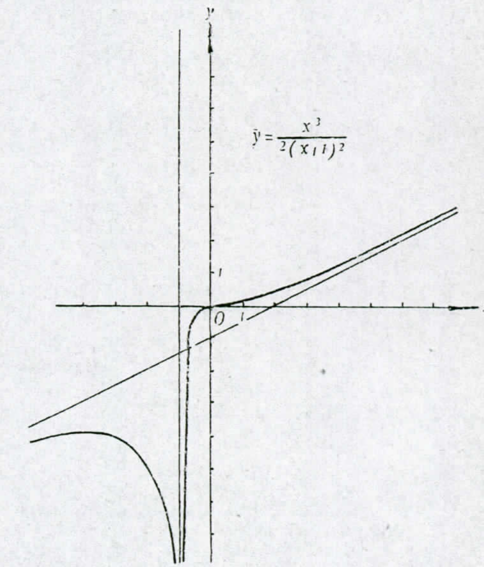


Сл. 69

1280. Дефинисана свуда. Нуле функције: $x_1=0$ и $x_2=1$. За $x=\frac{8}{27}$ maks. $=\frac{4}{27}$; за $x=0$ min. $=0$ (повратна тачка графика). График нема ни асимптоте ни превојних тачака (сл. 76).

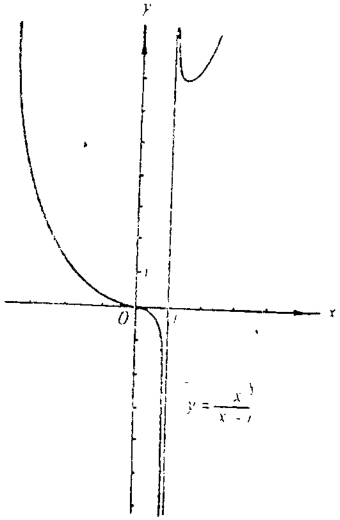
Примедба. Повратном тачком назива се тачка, у којој две гране криве имају заједничку тангенту, а леже с исте стране нормале (сл. 76). Подробније види у маком курсу диференцијалне геометрије).

1281. Функција је дефинисана за $x\geqslant 0$, двозначна. За обе гране за $x=0$ — нула. Грана $y=x+\sqrt{x^5}$ монотоно расте. Грана $y=x-\sqrt{x^5}$ за $x=1$ има вредност нулу; за $x=\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ maks. $=\sqrt[3]{\frac{4}{25}}-\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^5}$. Минимума

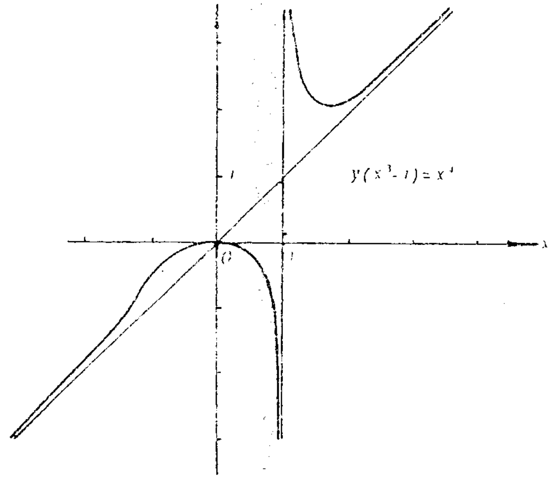


Сл. 70

нема ни једна грана. График нема ни превојних тачака ни асимптоте. Координатни почетак је повратна тачка (види претходни задатак) гра-



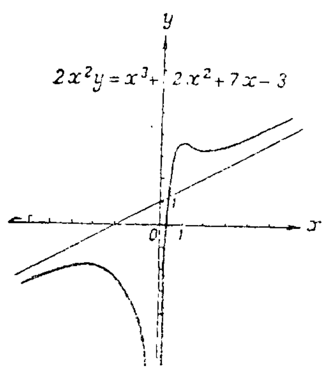
Сл. 71.



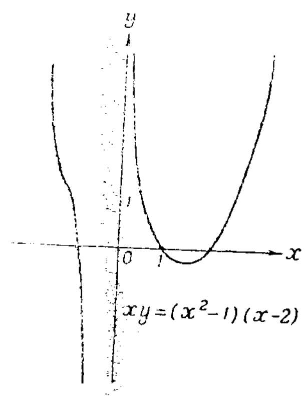
Сл. 72.

фика, у којој је тангента нагнута према апсцисној оси под углом од 45° (сл. 77).

1282. Дефинисана за $x \geqslant 0$, двозначна. За обе гране за $x=0$ — нула. Грана $y=x^2+\sqrt{x^5}$ монотоно расте. За грану $y=x^2-\sqrt{x^5}$ за $x=\frac{16}{25}$ maks. $=\frac{256}{3125}$; за $x=1$ — нула.



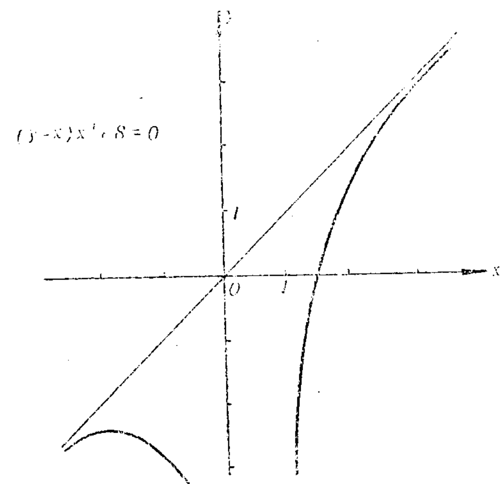
Сл. 73.



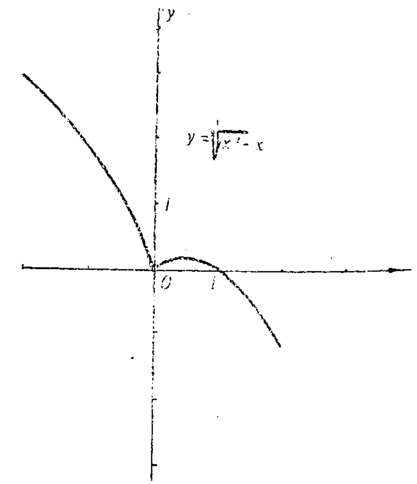
Сл. 74.

Минимума нема ни једна грана (сл. 78). График има превојну тачку на доњој грани за $x=\frac{64}{225}$; асимптота нема; координатни почетак је повратна тачка (сл. 78).

1283. Дефинисана за $x \geqslant -1$; двозначна. Нема екстремума; за $x=-1$ извод је за обе гране бесконачан. График је симетричан у односу на апсцисну осу, има превојне тачке (0; 1) и (0; −1). Асимптота нема (сл. 79).



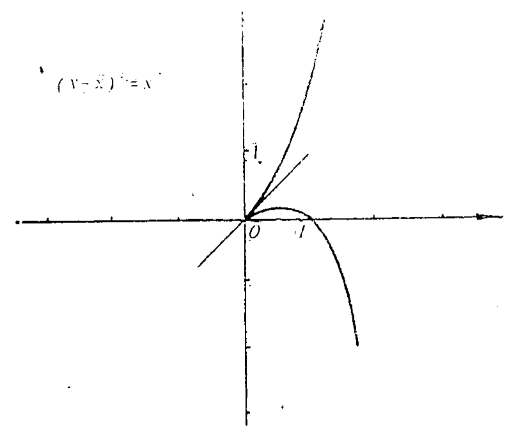
Сл. 75.



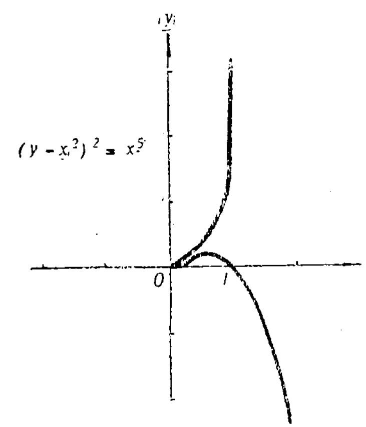
Сл. 76.

1284. Дефинисана у интервалима $[-1; 0]$ и $[1; +\infty]$; двозначна. Позитивна грана има, за $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, maks. $=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}$; негативна грана за

$$x=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{min.}=-\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3};\ \text{за } x=\pm 1 \text{ и } x=0$$

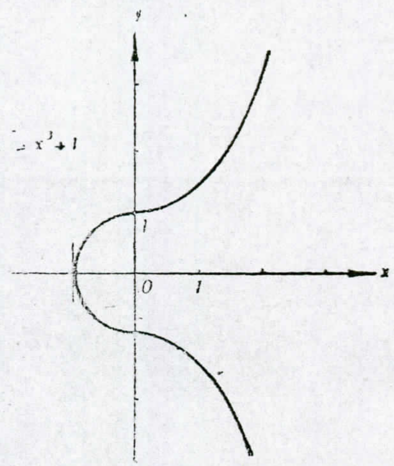


Сл. 77.

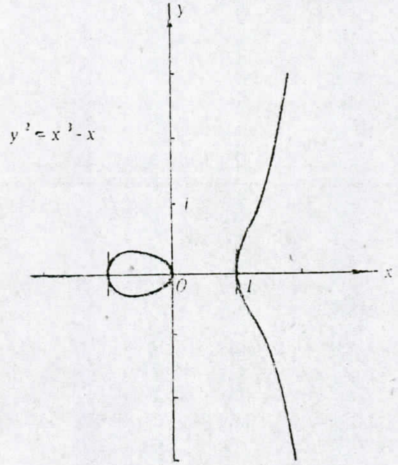


Сл. 78.

обе гране имају бескрајан извод. График је симетричан у односу на апсцисну осу, нема асимптота; превојна тачка за $x = +\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}$ (сл. 80).

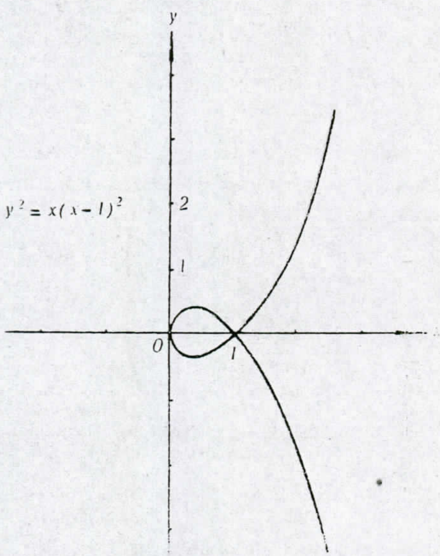


Сл. 79.

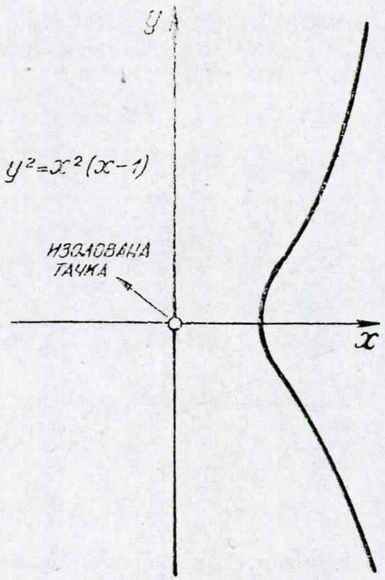


Сл. 80.

1285. Дефинисана за $x \geqslant 0$; двозначна. Обе гране имају нуле $x=0$ и $x=1$. За $x=0$ обе гране имају бесконачан извод. Позитивна



Сл. 81.

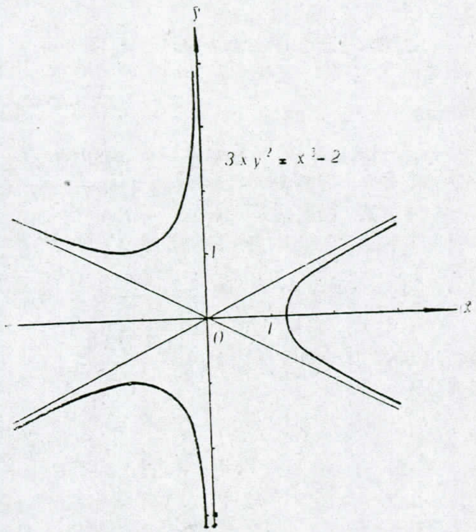


Сл. 82.

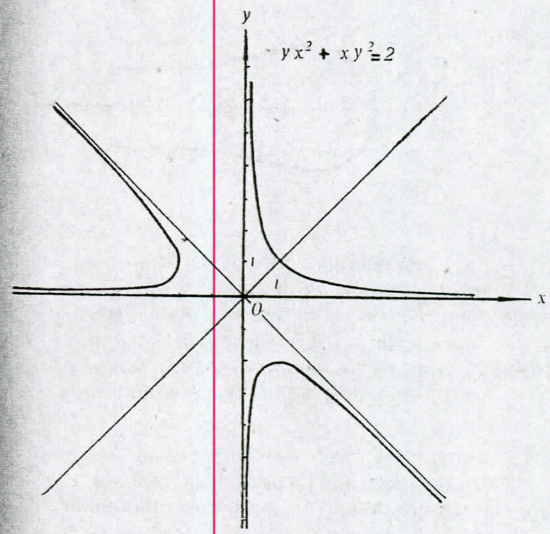
грана има за $x=\frac{1}{3}$ maks.$=\frac{2}{9}\sqrt{3}$; негативна грана — за $x=\frac{1}{3}$ min.$=-\frac{2}{9}\sqrt{3}$. График је симетричан у односу на апсцисну осу, нема ни превојних тачака, ни асимптота; тачка (1; 0) је тачка у којој се гране међу собом секу (сл. 81).

1286. Дефинисана за $x=0$ и $x\geqslant 1$; двозначна. Обе гране монотоне; $x=0$ и $x=1$ су нуле обеју грана. График је симетричан у односу на x осу; нема асимптота; има превојне тачке за $x=\frac{22}{21}$. Координатни почетак је изолована тачка. (сл. 82).

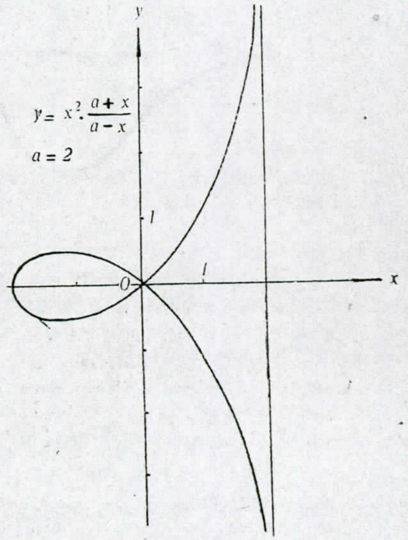
1287. Дефинисана за $x<0$ и $x\geqslant\sqrt[3]{2}$; двозначна. За $x=\sqrt[3]{2}$, нула с бесконачним (за обе гране) изводом; позитивна грана има за $x=-1$ min.$=1$; негативна



Сл. 83



Сл. 84.

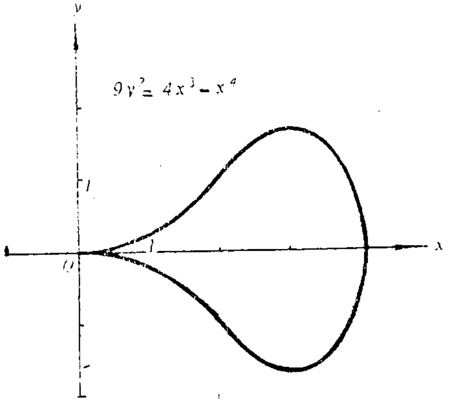


Сл. 85.

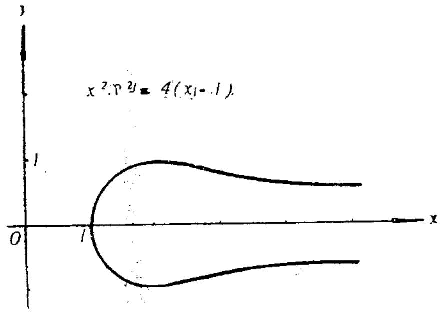
грана има за $x=-1$ maks. $=-1$. График је симетричан у односу на апсцисну осу, нема превојних тачака, има три асимптоте: $x=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$ (сл. 83).

1288. Дефинисана за $x \leqslant -2$ и за $x>0$; двозначна; нема нула; за $x=-2$ обе гране функције имају једнаке вредности $y=1$ и бесконачан извод. Грана $y=\frac{-x^2-\sqrt{x^4+8x}}{2x}$ има за $x=1$ maks. $=-2$. График је симетричан у односу на праву $x=y$, састоји се из три одвојене гране, има асимптоте: $x=0$; $y=0$; $x+y=0$; нема превојних тачака (сл. 84).

1289. Дефинисана за $-a \leqslant x < a$; двозначна. За $x=-a$ обе гране имају заједничку вредност $y=0$ и бесконачан извод. Позитивна грана има за $x=a\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ maks. $=a\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$; негативна грана за исту вредност x има min. $=-a\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$. График је симетричан у односу на апсцисну осу, има асимптоту $x=a$ и тачку у којој се узајамно пресецају обе гране $(0; 0)$; превојних тачака нема (сл. 85).



Сл. 86



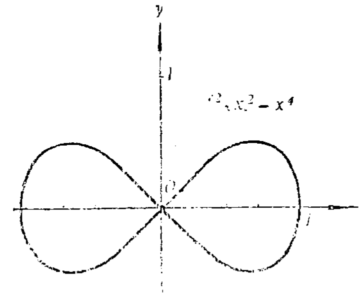
Сл. 87

1290. Дефинисана за $0 \leqslant x \leqslant 4$; двозначна. За $x=0$ обе гране имају заједничку вредност $y=0$ и извод једнак нули; за $x=4$ обе гране имају исту вредност $y=0$ и бескрајан извод. Позитивна грана има за $x=3$ maks. $=\sqrt{3}$; негативна за $x=3$ има min. $=-\sqrt{3}$. График је непрекидна затворена крива симетрична у односу на апсцисну осу, с повратном тачком (в. задатак 1280) у координатном почетку, и превојним тачкама за $x=3-\sqrt{3}$ (сл. 86).

1291. Дефинисана за $x \geqslant 1$; двозначна. За $x=1$ обе гране имају нулу с бесконачним изводом. За $x=2$, позитивна грана има maks. $=1$; негативна има min. $=-1$. График је симетричан у односу на апсцисну осу, која му служи као асимптота. За $x=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ има две превојне тачке (сл. 87).

1292. Дефинисана за $-1 \leqslant x \leqslant 1$; двозначна. За $x=\pm 1$ обе гране имају нулу с бесконачним изводом. Позитивна грана, за $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ има максимуме једнаке $\frac{1}{2}$; за те исте вредности x негативна грана има минимуме $=-\frac{1}{2}$. График претставља затворену криву, симетричну у односу на обе осе, с тачком узајамног пресецања грана у координатном почетку („осмица", слична лемнискати (сл. 88).

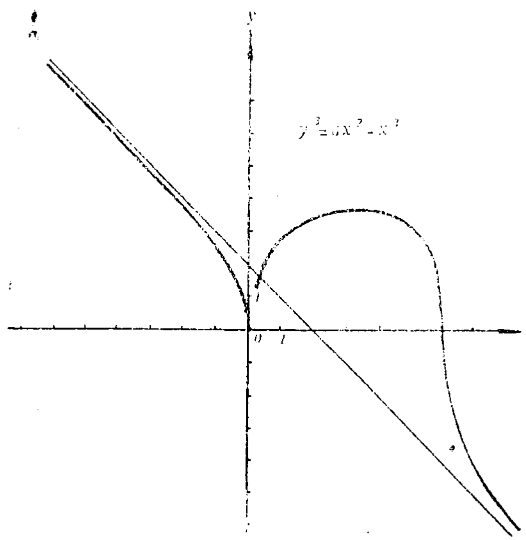
1293. Дефинисана, једнозначна; непрекидна за све вредности x. За $x=0$ и $x=6$ функција има нуле с бесконачним изводом; за $x=0$ min. $=0$; за $x=4$ maks. $=\sqrt[3]{32}$. График има асимптоту $y=-x+2$ и повратну тачку $(0, 0)$ (види зад. 1280) (сл. 89).



Сл. 89.

1294. Дефинисана за $0 \leqslant x < 2a$, двозначна. Нема екстремума. График симетричан у односу на апсцисну осу, има асимптоту $x=2a$, повратну тачку $(0; 0)$ (в. зад. 1280). Превојних тачака нема (сл. 90).

1295. Дефинисана за $x<0$, $0<x \leqslant 1$ и $x \geqslant 2$; двозначна. $x=1$ и $x=2$ су нуле с бесконачним изводом (за обе гране), екстремума нема. График је симетричан у односу на апсцисну осу, има асимптоте $x=0$; $y=1$; $y=-1$ и две превојне тачке (сл. 91).

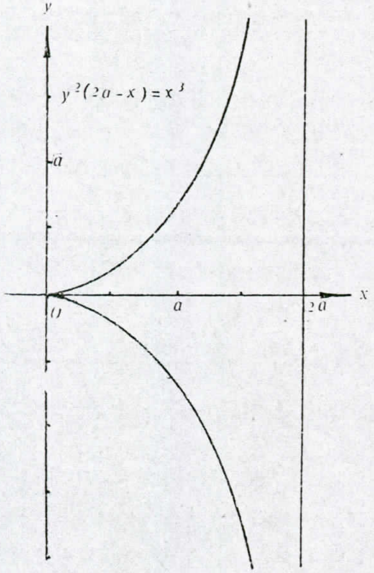


Сл. 88.

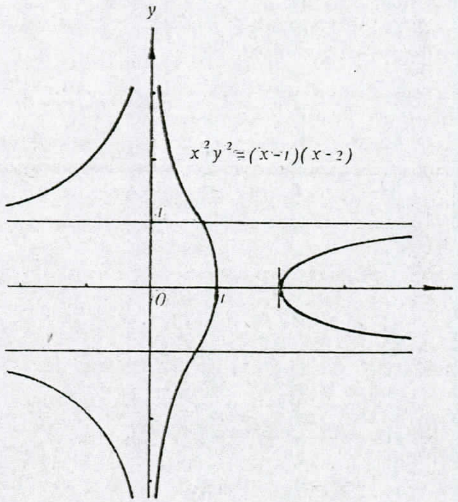
1296. Дефинисана за $-a \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant a$; двозначна; за $x=-a$ функција је нула; за $x=a$ нула с бесконачним изводом (за обе гране); екстремума нема. График је симетричан у односу на апсцисну осу, има асимптоту $x=0$, две превојне тачке и повратну тачку $(-a; 0)$ (сл. 92).

1297. Дефинисана за $x \leqslant 1$; двозначна; $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ су нуле за обе гране; за $x=1$ извод је бесконачан. Свака грана функције има по два екстремума. График је симетричан у односу на апсцисну осу, има две превојне тачке и две тачке у којима се гране узајамно пресецају: $(-1; 0)$ и $(0; 0)$. Асимптота нема (сл. 93).

1298. График ове двозначне функције дефинисане за $x=-2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $x=2$, јесте овал, симетричан у односу на обе осе, и две изоловане тачке: $(-2; 0)$ и $(2; 0)$ (сл. 94).

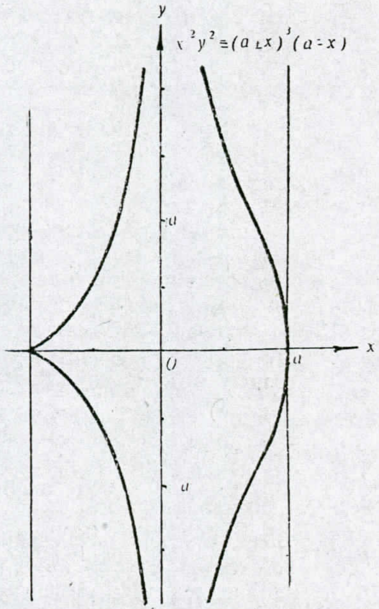


Сл. 90.

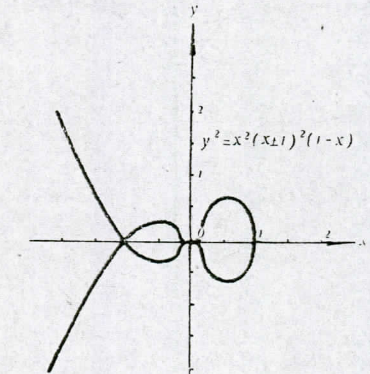


Сл. 91.

1299. Дефинисана за $-1 \leqslant x \leqslant 1$; двозначна; за $x=0$ обе гране имају екстремум: позитивна — maks. $=1$, негативна min. $=-1$. График претставља непрекидну затворену криву с четири превојне тачке, симетричну

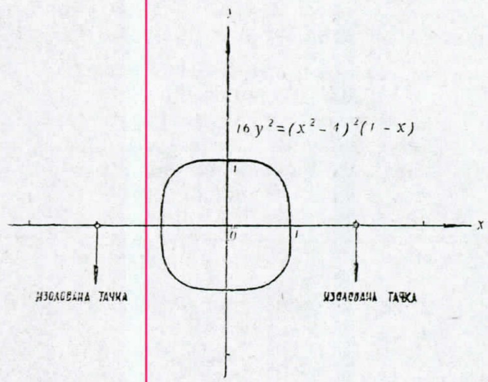


Сл. 92.

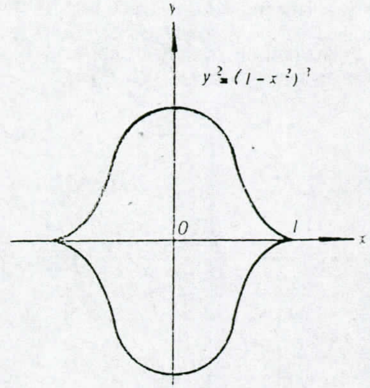


Сл. 93.

у односу на обе осе; $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ су повратне тачке с апсцисном осом као тангентом (сл. 95).



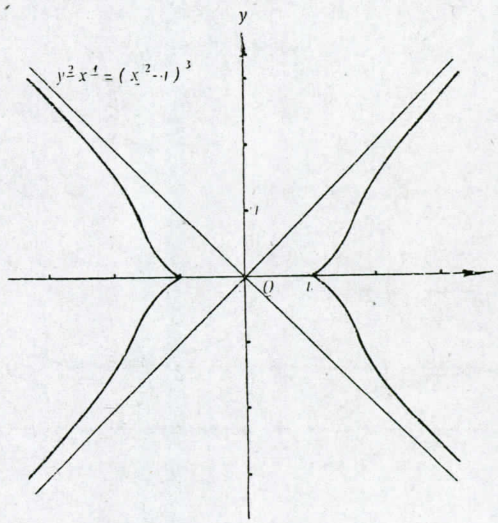
Сл. 94.



Сл. 95.

1300. Дефинисана за $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$; двозначна, нема екстремума. График је крива, симетрична у односу на обе осе, с асимптотама $y=x$ и $y=-x$ и с четири превојне тачке; $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ су повратне тачке с апсцисном осом као тангентом (сл. 96).

1301. Дефинисана за $x \neq 0$, једнозначна. Тачке екстремума су корени једначине $x^5+x^3 \pm 1=0$ (за $x>0$ — минимум, за $x<0$ —

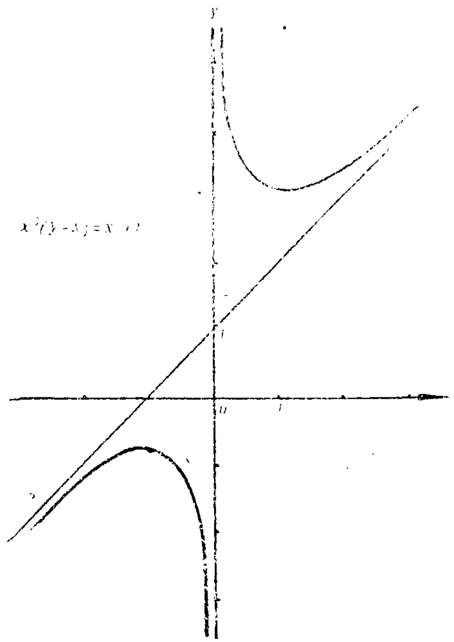


Сл. 96.

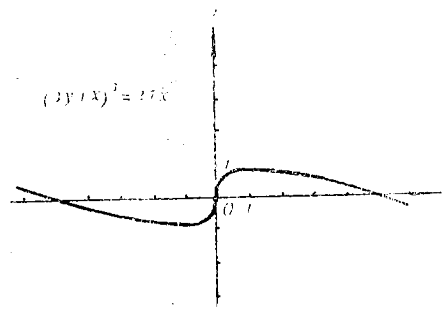
максимум). График несиметричан, без превојних тачака; асимптоте су $x=0$ и $y=x+1$ (сл. 97).

1302. Дефинисана за свако x, једнозначна; $x=0$ је корен с бесконачним изводом; за $x=-1$ $\min.=-\dfrac{2}{3}$; за $x=1$ $\text{maks.}=\dfrac{2}{3}$. График је симетричан у односу на координатни почетак, који је превојна тачка. Асимптота нема (сл. 98).

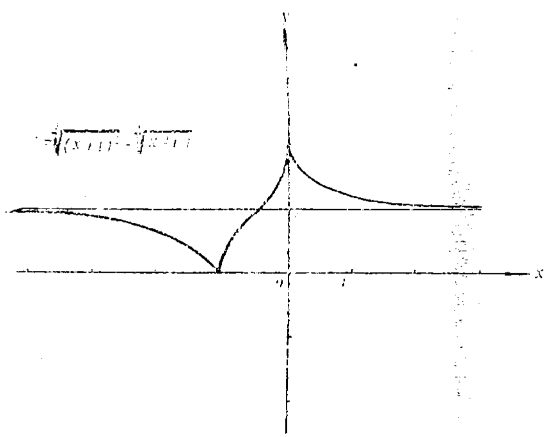
1303. Дефинисана и једнозначна за свако x; стационарних тачака нема; има два екстремума, који одговарају бесконачној вредности извода: за $x=0$ $\text{maks.}=2$; за $x=-1$ $\min.=0$. График има превојну тачку $\left(-\dfrac{1}{2};\ 1\right)$ и две повратне тачке с вертикалним тангентама: $(-1;0)$ и $(0;2)$. Асимптота је $y=1$ (сл. 99).



Сл. 97.



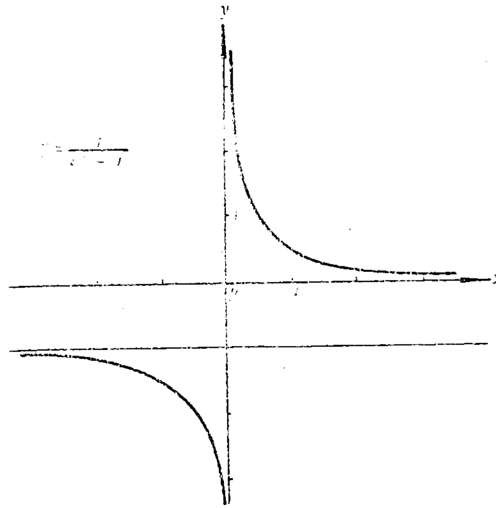
Сл. 98.



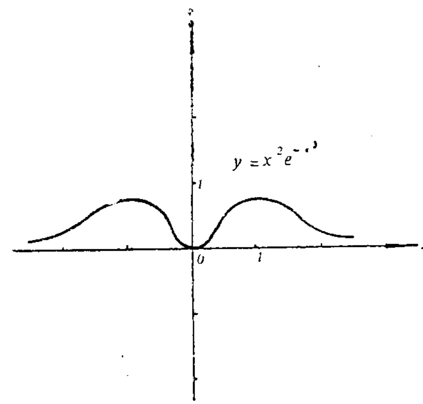
Сл. 99.

1304. Дефинисана за $x\neq 0$, једнозначна; за макакво $x\neq 0$ опада. График нема превојних тачака. Асимптоте су координатне осе и права $y=-1$ (сл. 100).

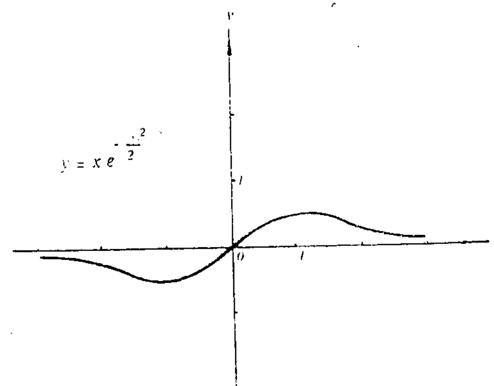
1305. Дефинисана и једнозначна за свако x; за $x=0$ — нула; за $x=-1$ $\min.=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; за $x=1$ $\text{maks.}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. График је симетричан у односу на координатни почетак, има асимптоту $y=0$ и превојне тачке за $x=0$ и $x=\pm\sqrt{3}$ (сл. 101).



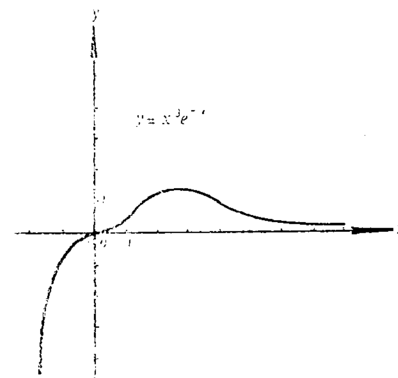
Сл. 100.



Сл. 102.

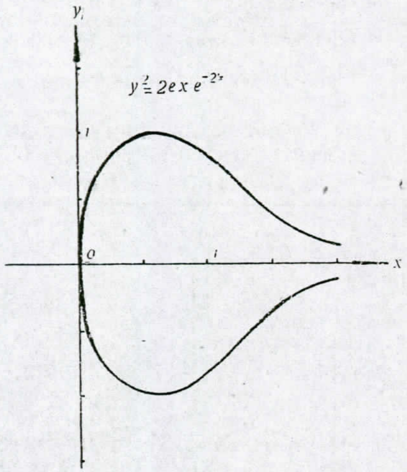


Сл. 101.

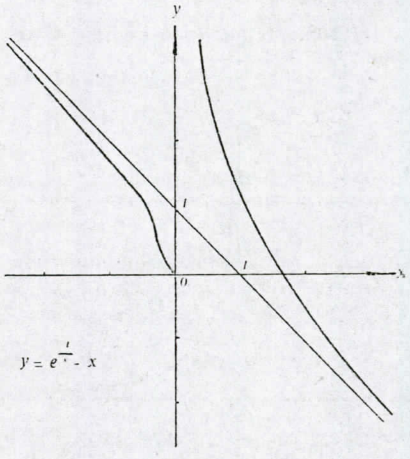


Сл. 103.

1306. Дефинисана и једнозначна за свако x; $x=0$ — нула; за $x=-1$ и $x=1$ максимуми, равни $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; за $x=0$ $\min.=0$. График је симетричан у односу на ординатну осу, има четири превојне тачке и асимптоту — апсцисну осу (сл. 102).



Сл. 104.

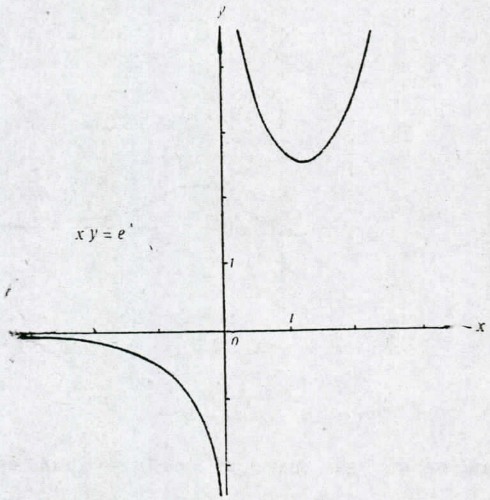


Сл. 105.

1307. Дефинисана и једнозначна за свако x; за $x=0$ — нула, за $x=3$ maks. $=27\,e^{-3}$; минимума нема. График има асимптоту — апсцисну осу и превојне тачке за $x=0$ и $x=3\pm\sqrt{3}$ (сл. 103).

1308. Дефинисана за $x \geqslant 0$, двозначна; за $x=0$ — нула с бесконачним изводом; за $x=\frac{1}{2}$ позитивна грана има maks. $=1$, негативна има min. $=-1$. График је симетричан у односу на апсцисну осу, која је истовремено асимптота; постоје две превојне тачке за $x=1$ (сл. 104).

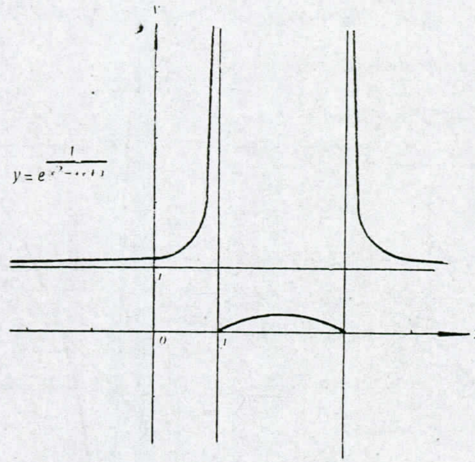
1309. Дефинисана и једнозначна за $x \neq 0$. Кад $x \to 0$ $(x>0)$ имамо да $y \to +\infty$; кад $x \to 0$, $(x<0)$ имамо да $y \to 0$; функција опада за свако $x \neq 0$. График има асимптоте: $x=0$ и $y+x=1$, и превојну тачку $\left(-\frac{1}{2};\ e^{-2}+\frac{1}{2}\right)$ (сл. 105).



Сл. 106.

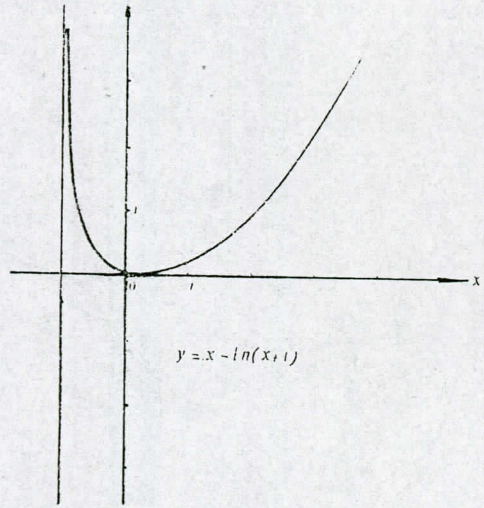
1310. Дефинисана и једнозначна за $x \neq 0$; максимума нема; за $x=1$ min. $=e$; кад $x \to +\infty$, $y \to +\infty$; кад $x \to -\infty$, $y \to 0$. График има асимптоте: $x=0$ и $y=0$; нема превојних тачака (сл. 106).

1311. Дефинисана и једнозначна за $x \neq 1$ и $x \neq 3$; за $x=1$ и $x=3$ прекиди су исте врсте као и код функције у задатку 1309; минимума нема, за $x=2$ maks. $=e^{-1}$. График има асимптоте: $x=1$; $y=1$ и $x=3$; превојних тачака нема (сл. 107).



Сл. 107.

1312. Дефинисана за $x > -1$, једнозначна; за $x=0$ min. $=0$. График је конкаван, има асимптоту $x+1=0$ (сл. 108).

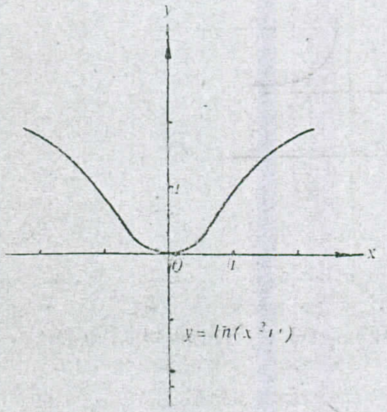


Сл. 108.

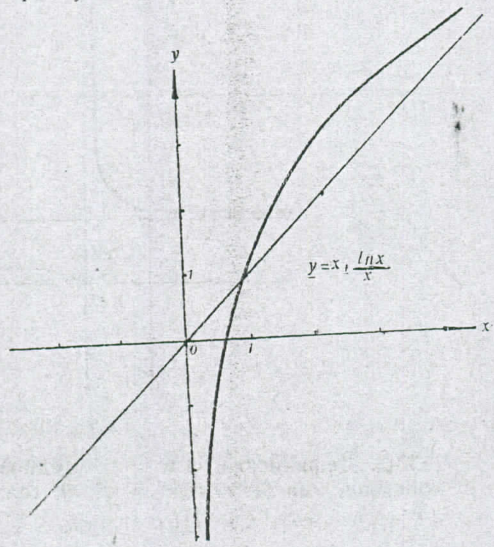
1313. Дефинисана и једнозначна за свако x; има нулу и min. за $x=0$. График је симетричан у односу на ординатну осу, има превојне тачке $(\pm 1;\ \ln 2)$, нема асимптота (сл. 109).

1314. Дефинисана за $x > 0$; свуда расте. График има асимптоте: $x = 0$; $y = x$, и превојну тачку $\left(e^{\frac{3}{2}};\ e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)$ (сл. 110).

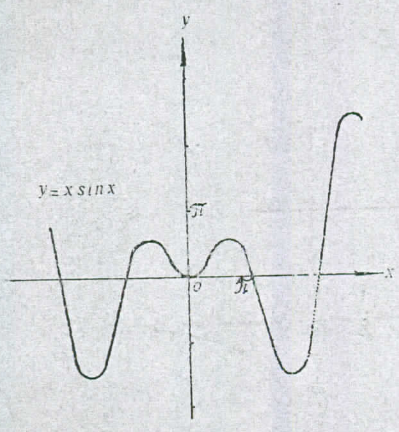
1315. Дефинисана и једнозначна за свако x; вредности $x = \pm k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) су нуле функције; апсцисе екстремних тачака задовољавају једначину $\operatorname{tg} x = -x$. График је симетричан у односу на ординатну осу, нема асимптота; апсцисе превојних тачака задовољавају једначину $x \operatorname{tg} x = 2$ (сл. 111).



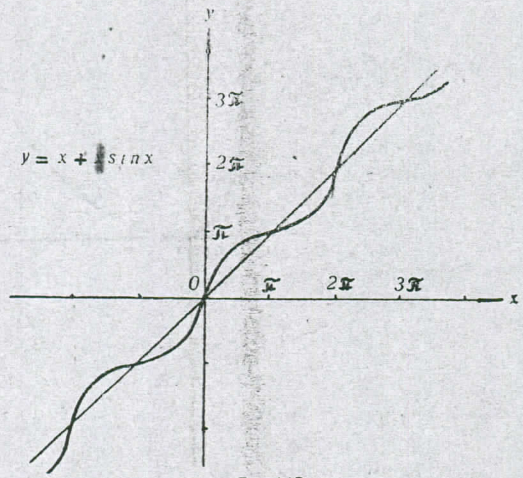
Сл. 109.



Сл. 110.



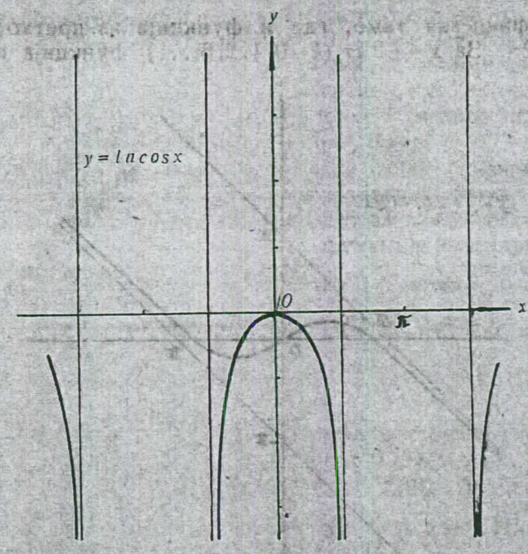
Сл. 111.



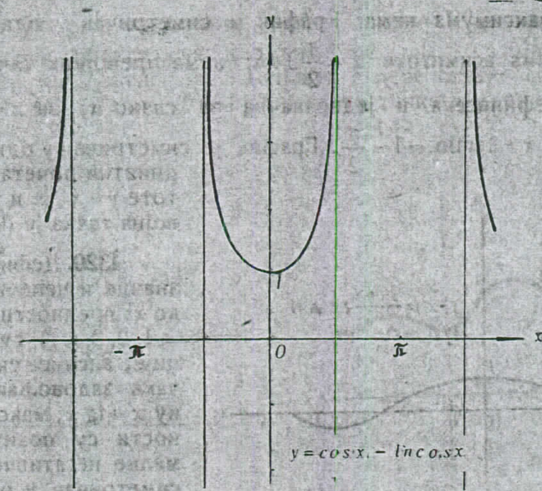
Сл. 112.

1316. Дефинисана и једнозначна за свако x; за $x = 0$ — нула; функција нема екстремума (не опада ни за какво x); за $x = \pm k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$)

функција је стационарна. График је симетричан у односу на координатни почетак, нема асимптота; превојне тачке су $x = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$); у превојним тачкама график пресеца праву $y = x$. (сл. 112).



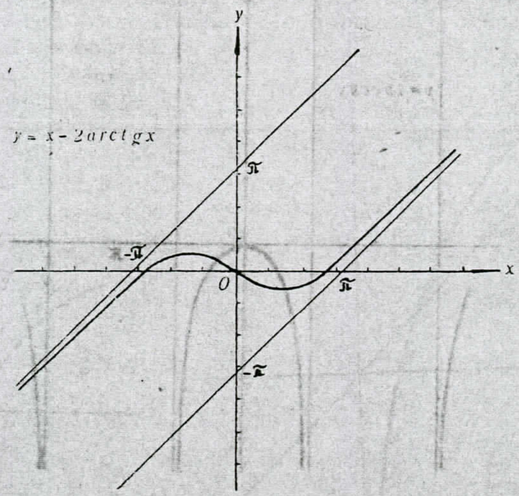
Сл. 113.



Сл. 114.

1317. Дефинисана за $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi$ итд.; има период 2π; за $x = 2k\pi$ (k је цео број) функција има максимуме, једнаке нули. График је симетричан у односу на ординатну осу; асимптоте су $x=\frac{\pi}{2}\pm k\pi$; превојних тачака нема (сл. 113).

1318. Дефинисана тамо, где и функција из претходног задатка; има период 2π. За $x=\pm 2k\pi$ $(k=0, 1, 2, 3, \ldots)$ функција има минимуме

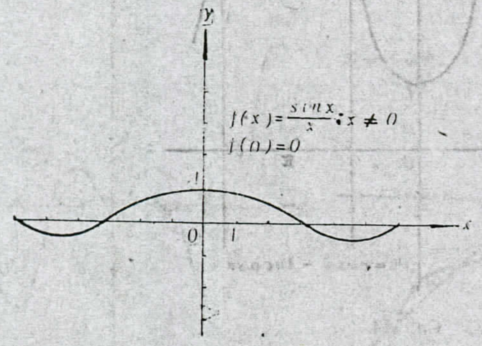


Сл. 115.

једнаке 1; максимума нема. График је симетричан у односу на ординатну осу, има асимптоте $x=\frac{\pi}{2}\pm k\pi$; нема превојних тачака (сл. 114).

1319. Дефинисана и једнозначна за свако x; за $x=-1$ maks. $=\frac{\pi}{2}-1$; за $x=1$ min. $=1-\frac{\pi}{2}$. График је симетричан у односу на координатни почетак, има асимптоте $y=x+\pi$ и $y=x-\pi$; превојна тачка је (0; 0) (сл. 115).

1320. Дефинисана, једнозначна и непрекидна за свако x; вредности $x=\pm k\pi$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ су нуле функције; апсцисе екстремних тачака задовољавају једначину $x=\operatorname{tg} x$; максималне вредности су позитивне, минималне негативне. График је симетричан у односу на ординатну осу, апсцисна оса је асимптота (сл. 116).

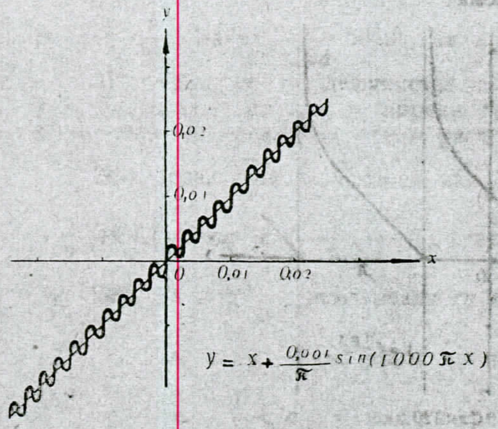


Сл. 116.

1321. Функција је дефинисана и једнозначна за свако x. Екстремуми су за $x=\frac{2k+1}{1000}$, где је k ма какав цео број или нула. График

претставља таласасту линију, врло тесно приљубљену уз праву $y=x$ (сл. 117).

1322. Функција је дефинисана за $-\infty<x<-1$ и за $0<x<+\infty$; једнозначна је. У интервалу $(-\infty; -1)$ расте од e до ∞, у интервалу $(0; +\infty)$ расте од 1 до e. График се састоји из две одвојене гране, има асимптоте $y=e$ и $x=-1$, и завршну тачку (0; 1) (сл. 118).



Сл. 117

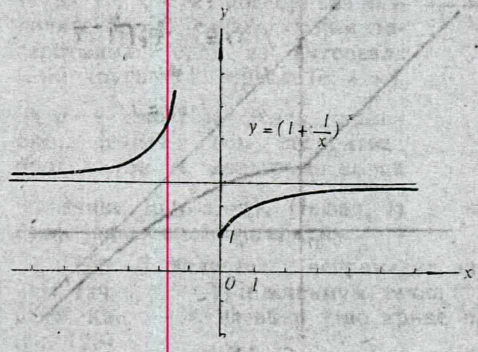
1323. Дефинисана и једнозначна за свако x; има период 2π; за $x=\pm k\pi$ $(k=0, 1, 2, 3\ldots)$ функција има минимуме, једнаке 1; за $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ има максимуме, једнаке $e-1$; за

$$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

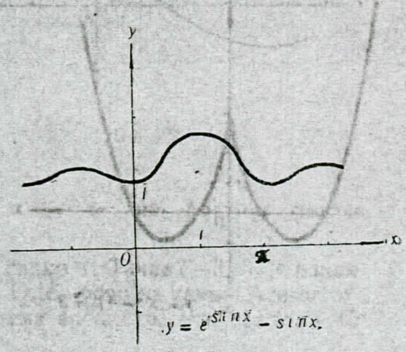
има максимуме, једнаке $1+\frac{1}{e}$ (сл. 119).

1324. Недефинисана за $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Има асимптоте $x=\frac{\pi}{2}\pm k\pi$. Прекидне тачке су исте врсте као и код функције $y=e^{\frac{1}{x}}$ (в. зад. 1309). Свуда је позитивна и расте, график је конкаван (сл. 120).

1325. График претставља део параболе $y=x^2-4x+3$ који лежи с десне стране ординатне осе, допуњен с леве стране симетрично у односу на осу OY. Тачка (0; 3) је угласта тачка с двема различитим тангентама (сл. 121).



Сл. 118



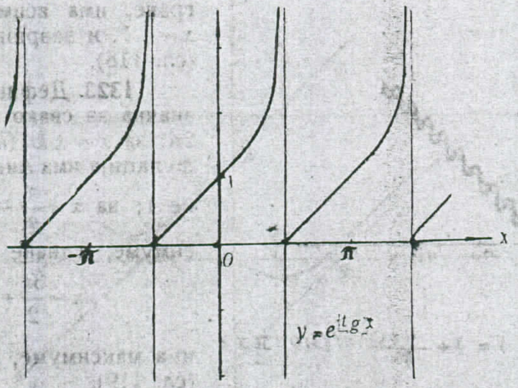
Сл. 119

1326. Функција је свуда дефинисана, непрекидна, и свуда опада, за $x\leqslant 0$ идентична је с функцијом $y=1-x$; за $x>0$ график је конвексан. Тачка (0; 1) је угласта тачка графика с двема различитим тангентама. Има асимптоту $y=3-x$ (сл. 122).

1327. I. $a < 0$.

1) $b^2 - 4ac \leqslant 0$ — функција није нигде дефинисана.

2) $b^2 - 4ac > 0$ — функција је дефинисана за $\alpha_1 < x < \alpha_2$ где су α_1 и α_2 корени тринома. Праве $x = \alpha_1$ и $x = \alpha_2$ су асимптоте. Максимум за $x = -\dfrac{b}{2a}$; превојних тачака нема.

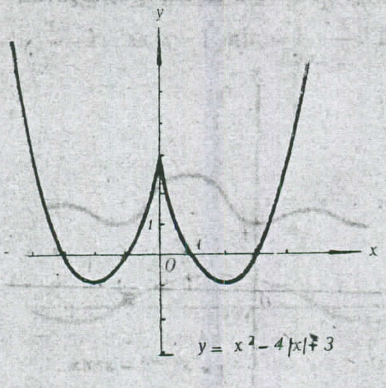


Сл. 120

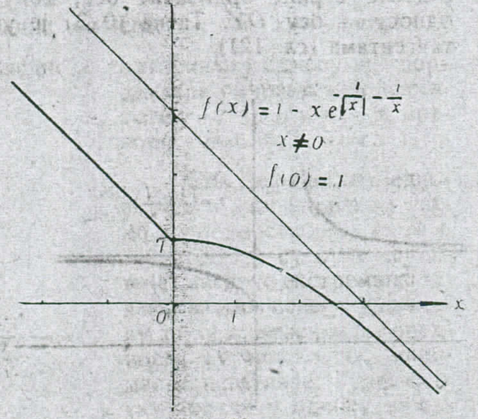
II. $a = 0$.

1) $b > 0$ — дефинисана је за $x > -\dfrac{c}{b}$, асимптота је $x = -\dfrac{c}{b}$; свуда расте.

2) $\left.\begin{matrix} b = 0 \\ c > 0 \end{matrix}\right\}$ права, паралелна апсцисној оси.



Сл. 121



Сл. 122

3) $\left.\begin{matrix} b = 0 \\ c \leqslant 0 \end{matrix}\right\}$ функција није нигде дефинисана.

4) $b < 0$ — дефинисана за $x < -\dfrac{c}{b}$; асимптота је $x = -\dfrac{c}{b}$. Функција опада.

III. $a > 0$.

1) $b^2 - 4ac < 0$ — дефинисана и непрекидна свуда, асимптота нема. За $x = -\dfrac{b}{2a}$ — минимум. Има две превојне тачке.

2) $b^2 - 4ac = 0$ — дефинисана свуда, осим за $x = -\dfrac{b}{2a}$. Асимптота је $x = -\dfrac{b}{2a}$. За $x < -\dfrac{b}{2a}$ опада, за $x > -\dfrac{b}{2a}$ расте. Конвексна је.

3) $b^2 - 4ac > 0$ — дефинисана свуда, осим за тачке интервала $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2$, где су α_1 и α_2 корени тринома. Асимптоте су $\alpha = \alpha_1$ и $x = \alpha_2$; за $x < \alpha_1$ опада, за $x > \alpha_2$ расте. Конвексна је.

1334. Један позитиван корен, ако је $a \neq \dfrac{\pi}{2}(4k+1)$. Ако је $a = \dfrac{\pi}{2}(4k+1)$, онда је $x = \dfrac{\pi}{2}(4k+1)$ троструки корен једначине.

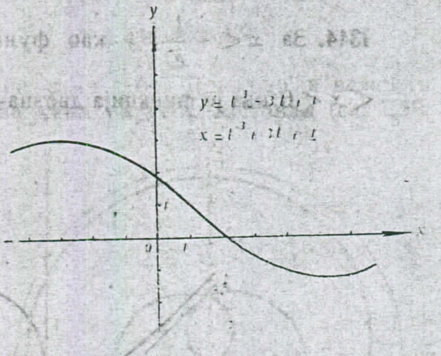
1338. За $a < -\dfrac{1}{e}$ нема реалнога корена.

за $a = -\dfrac{1}{e}$ има један двоструки реални корен $x = -1$.

за $-\dfrac{1}{e} < a < 0$ има два реална различита корена (оба су негативни).

за $a = 0$ нема реалних корена.

за $a > 0$ има један реалан позитиван корен, утолико већи уколико је a мање.



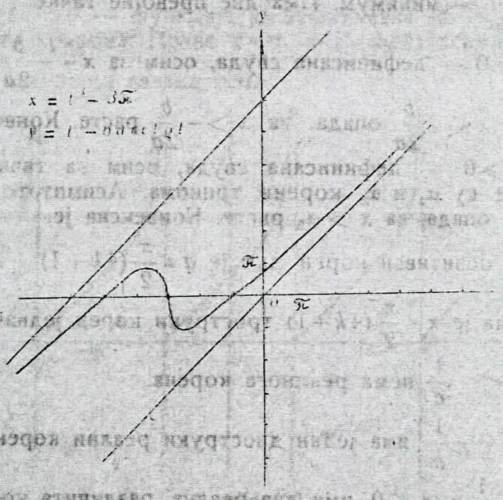
Сл. 123

1340. За $0 < a < 1$ постоји један једини реалан број, једнак свом логаритму, притом мањи од 1. За $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ постоје два различита броја, једнака својим логаритмима: један из интервала $(1; e)$, други из интервала $(e; +\infty)$. За $a = e^{\frac{1}{e}}$ постоји један једини број, једнак свом логаритму: број e (он је двоструки корен једначине $\log_{e^{\frac{1}{e}}} x = x$). Најзад, за $e^{\frac{1}{e}} < a < +\infty$ не постоји реалан број, једнак свом логаритму.

1341. Дефинисана и непрекидна за свако t. Тачка $(-3; 3)$ је максимум, тачка $(5; -1)$ је минимум, тачка $(1; 1)$ је превојна тачка. Асимптота нема. Кад $x \to \infty$ нагибни угао криве према апсцисној оси тежи ка 45^{0} (сл. 123).

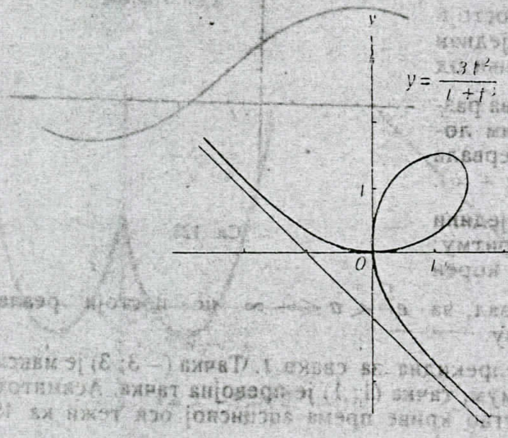
1342. Дефинисана и непрекидна свуда, асимптоте су $y = x$ и $y = x + 6\pi$ (сл. 124). Тачка $\left(-1 - 3\pi;\ -1 + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ је максимум, $\left(1 - 3\pi;\ 1 - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ је минимум, а $(-3\pi; 0)$ је превојна тачка.

1343. Асимптота је $y+x+1=0$. Крива пресеца саму себе у тачки $(0;0)$; координатне осе су тангенте у тој тачки. Превојних тачака нема. У првом квадранту крива прави затворену петљу (сл. 125).



Сл. 124

1344. За $x<-\dfrac{1}{e}$, y као функција од x није дефинисана; за $-\dfrac{1}{e}<x<0$ ова је функција двозначна; за $x>0$ је једнозначна. Крива



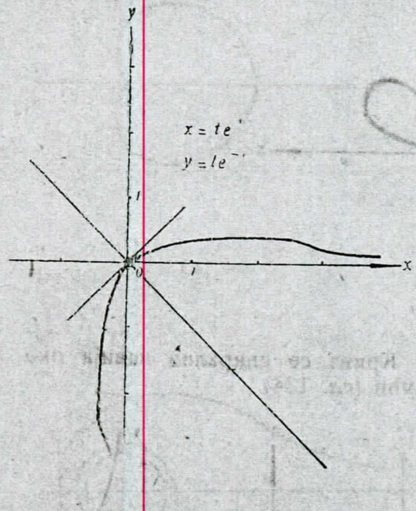
Сл. 125

је симетрична у односу на праву $x+y=0$. Максимум је $\left(e;\dfrac{1}{e}\right)$. Има две превојне тачке. Координатне осе су асимптоте (сл. 126).

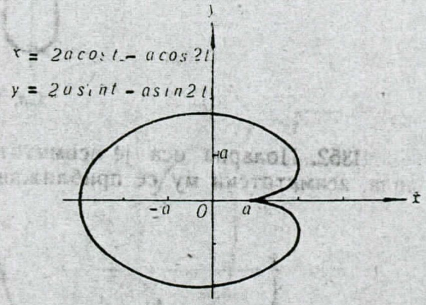
1345. Затворена крива. Тачка $(a;0)$ је повратна тачка с апсцисном осом као тангентом (сл. 127).

1346. За $\varphi \geqslant 0$ спирала, која полази од пола, и асимптотски се приближава кругу $\rho=1$. За $\varphi<0$ добија се претходна крива пресликана симетрично у односу на ординатну осу (сл. 128).

1347. Затворена тролиста крива. Додирује апсцисну осу и праве $y=x\sqrt{3}$ и $y=-x\sqrt{3}$. Екстремуми за $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$, $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Пол је тро-



Сл. 126



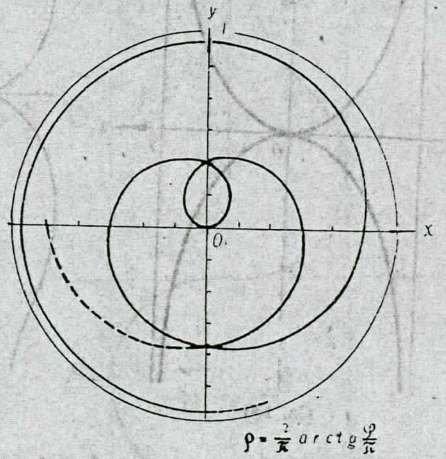
Сл. 127

струка тачка у којој крива пресеца саму себе. Довољно је испитати криву за $0\leqslant\varphi<\pi$. Даље се она сама на себе наставља (сл. 129).

1348. График се састоји из две гране које се додирују у полу тако да је поларна оса заједничка тангента. Праве $x=-a$ и $x=a$ су асимптоте*) (сл. 130).

1349. Асимптоте су исте као и код криве у претходном задатку. $(0;a)$ и $(\pi;a)$ су повратне тачке с поларном осом као тангентом; крива се налази изван појаса, ограниченог правима $x=-a$ и $x=a$ (сл. 131).

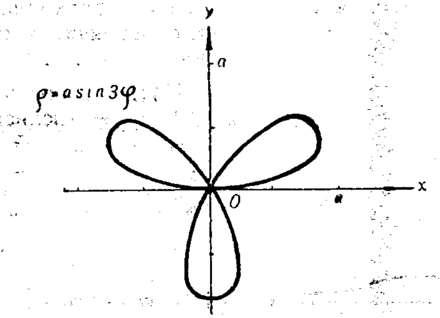
1350. Довољно је испитати криву за $0\leqslant\varphi<2\pi$. Даље се она наставља сама на себе. За $\varphi=0$ maks. $=2a$, за $\varphi=\pi$ min. $=0$. Крива је затворена и симетрична у односу на поларну осу. Пол је повратна тачка (сл. 132).



Сл. 128

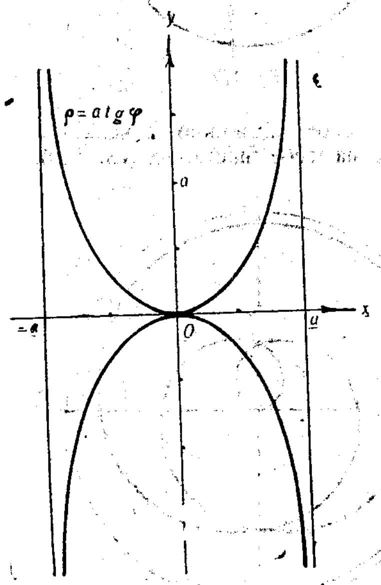
*) У овом и следећим задацима асимптоте су дате у Декартовом координатном систему у коме је апсцисна оса поларна оса, а ординатна оса — нормала на поларну осу, која пролази кроз пол.

1351. Довољно је испитати криву за $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (види претходни задатак). За $\varphi=0$ — maks.$=a(1+b)$, за $\varphi=\pi$ — min.$=a(1-b)$. Крива пресеца саму себе у полу (сл. 133).

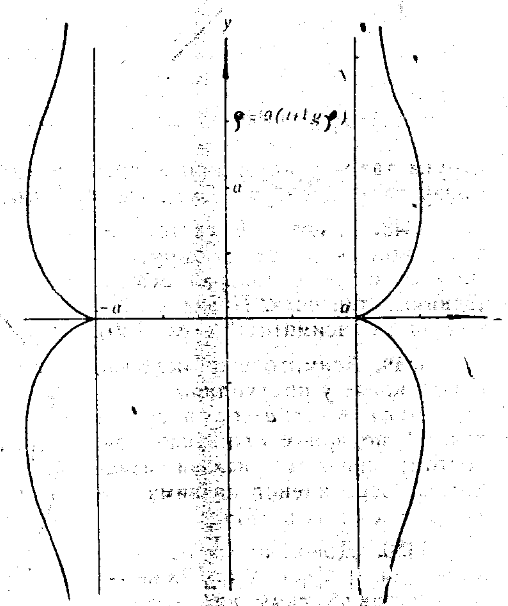


Сл. 129

1352. Поларна оса је асимптота. Крива се спирално завија око пола, асимптотски му се приближавајући (сл. 134).



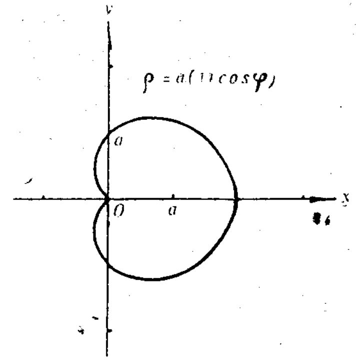
Сл. 130



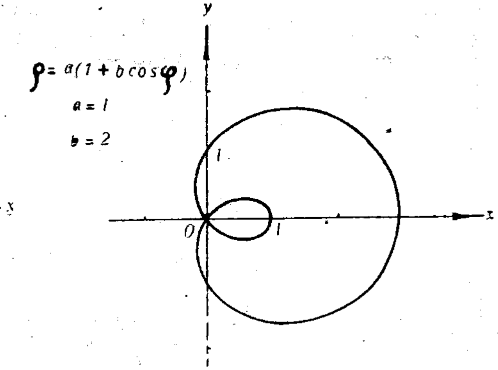
Сл. 131

1353. Дефинисана за $-1 \leqslant t \leqslant 1$, лежи цела с десне стране ординатне осе, затворена крива. Максимум за $t=0$ ($\varphi=1$ радијан, $\rho=1$). Нема превојних тачака. За $t=\pm 1$ додирује ординатну осу (сл. 135).

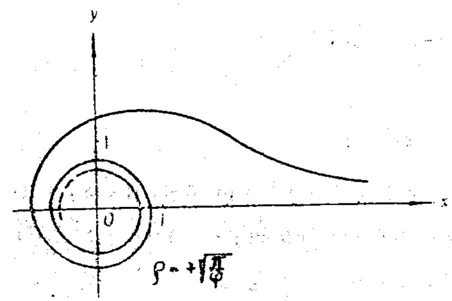
1354. Ружа са четири листа (сл. 136).



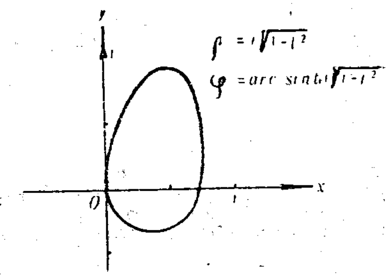
Сл. 132



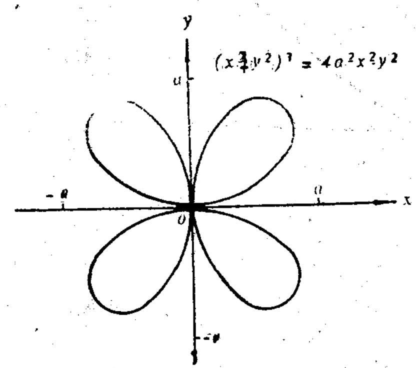
Сл. 133



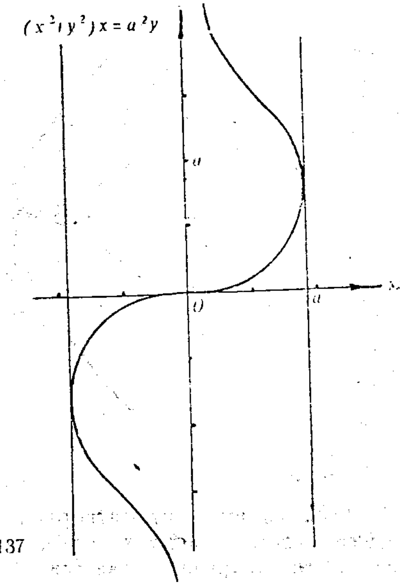
Сл. 134



Сл. 135

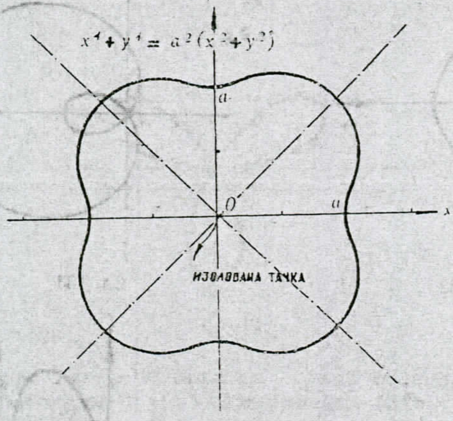


Сл. 136



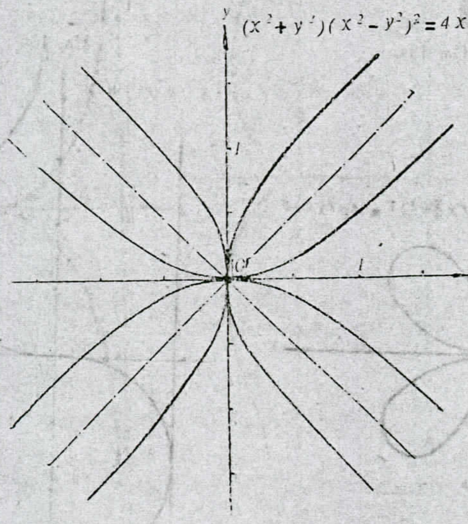
Сл. 137

1355. Цела крива лежи у појасу $-\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Симетрична је у односу на почетак. Асимптота је $x=0$. Тангенте у тачкама



Сл. 138

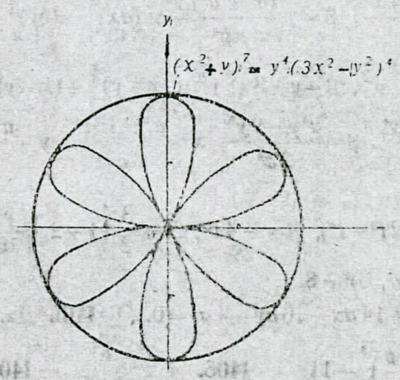
$\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};\ -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ су вертикалне. $(0;\,0)$ је превојна тачка с апсцисном осом као тангентом. Има још две превојне тачке (сл. 137).



Сл. 139

1356. Симетрична затворена крива, сече координатне осе под правим углом у тачкама $(a;\,0)$, $(0;\,a)$, $(-a;\,0)$, $(0;\,-a)$. Координатни почетак је изолована тачка (сл. 138).

1357. Крива је симетрична у односу на обе осе и обе симетрале координатних углова. Праве $(x \pm y)^2 = \frac{1}{2}$ су асимптоте. Координатни почетак је четворострука тачка у којој се гране криве узајамно пресецају. У њој поједине гране криве додирују координатне осе. Уопште крива има облик „ветрењаче" (сл. 139).



Сл. 140

1358. Симетрична затворена крива с шестоструком тачком у координатном почетку. Састоји се из шест „листића" састављених у координатном почетку (сл. 140).

1360. За $a=3$, $b=-3$, $c=1$ функција има други извод за свако x; за $x=1$ трећи извод не постоји, па ма какви били a, b и c.

1362. У стационарним тачкама.

1365. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **1366.** $\frac{a}{b^2};\ \frac{b}{a^2}$. **1367.** 36. **1368.** 0,128. **1369.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

1370. 0. **1371.** 1. **1372.** $\frac{6x}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$. **1373.** $\frac{a^4 b^4}{(b^4 x + a^4 y)^{\frac{3}{2}}}$,

где $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. **1374.** $\cos x$. **1375.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{axy}}$.

1376. $\frac{(1-m)\ (xy)^{m-2}}{(ab)^m}\left(\frac{x^{2m-2}}{a^{2m}} + \frac{y^{2m-2}}{b^{2m}}\right)^{-\frac{3}{2}}$. **1377.** $\frac{1}{a\operatorname{ch}\frac{2x}{a}}$.

1378. $\frac{1}{6}$. **1379.** $\frac{1}{3a\sin t_1 \cos t_1}$. **1380.** $\frac{2}{\pi a}$. **1381.** $\frac{3}{8a}\operatorname{cosec}\frac{t}{2}$.

1382. $\frac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{3/2}}$. **1383.** $\frac{k(k+1)+\varphi^2}{a\varphi^{k-1}(k^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$. **1384.** $\frac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$.

1385. $R = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2ab}}$. **1387.** $\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$. **1388.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

1389. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **1390.** При $t=k\pi$. **1391.** $\frac{3}{4}a$.

1392. $x=t-\frac{[1+n^2t^{2(n-1)}]\,t}{n-1}$; $y=t^n+\frac{1+n^2t^{2(n-1)}}{n(n-1)\,t^{n-2}}$.

1393. $\alpha=\frac{(a^2+b^2)\,x^3}{a^4}$, $\beta=-\frac{(a^2+b^2)\,y^3}{b^4}$; $(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$.

1394. $\alpha=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $\beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$; $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

1395. $\alpha=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}$, $\beta=\frac{a^4y-9y^5}{2a^4}$; $x=\frac{a^4+15t^4}{6a^2t}$, $y=\frac{a^4t-9t^5}{2a^4}$.

1396. $\alpha=\frac{3}{2}(1+2t^2-t^4)$, $\beta=-4t^3$; $x=\frac{3}{2}\left(1+2\sqrt[3]{\frac{y^2}{16}}-\sqrt[3]{\frac{y^4}{256}}\right)$.

1397. $(x+2)^2+(y-3)^2=8$.

1398. $3(x^2+y^2)+14ax-16ay-4a^2=0$. **1401.** Да.

1405. $2p\left(\sqrt{\left(\frac{x+p}{3p}\right)^3}-1\right)$. **1406.** $4\frac{a^3-b^3}{ab}$. **1407.** $6a$. **1408.** $8b$

1410. Упуство. На основу егзистенције трећег извода имамо:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a+\vartheta_1 h).$$

Упоређујући с изразом у тексту, добијамо:

$$\frac{h^2}{2}[f''(a+\vartheta h)-f''(a)]=\frac{h^3}{3!}f'''(a+\vartheta_1 h),$$

тј.

$$\frac{f''(a+\vartheta h)-f''(a)}{h}=\frac{1}{3}f'''(a+\vartheta_1 h).$$

Остаје још да се изврши прелаз на граничну вредност кад $h\to 0$.

1411. $e^2\left(1+\frac{x-2}{1!}+\frac{(x-2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\vartheta(x-2)}\right)$.

1412. $2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(x-4)^3}{512}-\cdots+$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!\,(x-4)^n}{n!\,(n-1)!\,2^{4n-2}}+\frac{(2n)!\,(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1}\,n!\,(n+1)\sqrt{[4+\vartheta(x-4)]^{2n+1}}}.$$

1413. $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots+R_n$.

1414. $\sin a+x\cos a-\frac{x^2}{1\cdot 2}\sin a-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cos a+\cdots+R_n$.

1415. $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\frac{2^7x^8}{8!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots+R_n$.

1416. $1+x^2+x^4+\cdots+\frac{x^{n+1}}{2}(-1)^n\left[\frac{1}{(\xi-1)^{n+2}}-\frac{1}{(\xi+1)^{n+2}}\right]$.

1417. $\ln b+\frac{ax}{b}-\frac{1}{2}\left(\frac{ax}{b}\right)^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{ax}{a\xi+b}\right)^{n+1}$.

1418. $1+x\ln a+\frac{1}{2!}(x\ln a)^2+\frac{1}{3!}(x\ln a)^3+\cdots+\frac{a\xi}{(n+1)!}(x\ln a)^{n+1}$.

1419. $x+1+\frac{5}{2!}(x-1)^2+\frac{11}{3!}(x-1)^3+\frac{6}{4!}(x-1)^4+\cdots$

$$\cdots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 6\,(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)\,\xi^{n-2}}.$$

1420. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots+R_n$.

1421. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}+\frac{61x^6}{6!}+\cdots+R_n$.

1422. $1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}-\frac{8x^5}{5!}+\cdots+R_n$. **1423.** $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{6}+\cdots+R_n$.

1424. $1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^5}{15}(15+20\xi^2+4\xi^4)\,\xi e^{\xi^2}$.

1425. $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{4}\cdot\frac{e^{3\xi}-4e^{2\xi}+e^{\xi}}{(1+e^{\xi})^4}$.

1426. 0,342020. **1428.** 1,14; 1,040.

1429. 1) превојна тачка; 2) минимум; 3) минимум; 4) максимум; 5) превојна тачка.

1430. 1) не; 2) да; 3) да; 4) не.

Уз главу V

1431. а) $Q_n=\sum_1^n f(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$; б) $Q=\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$.

1432. а) $m_n=\sum_1^n v(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$; б) $m=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$.

1433. а) $T_n=\sum_1^n \psi(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$; б) $T=\int_{t_1}^{t_1}\psi(t)\,dt$.

1434. а) $Q_n=\sum_1^n I(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$; б) $Q=\int_0^{t_1} I(t)\,dt$.

1435. а) $A_n = \sum_1^n \varphi(\xi_i)\psi(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$ б) $A = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\psi(t)\,dt$.

1436. а) $P_n = \sum_1^n a\xi_i (x_{i+1} - x_i)$; б) $P = \int_0^b ax\,dx$.

1437. 1) $\int_0^3 (x^2+1)\,dx$; 2) $\int_a^b \frac{dx}{x}$, 2) $\int_0^\pi \sin x\,dx$.

1438. а) 19,2 и 20,8; б) 19,6 и 20,4; в) 19,8 и 20,2;

г) $20 - \frac{4}{n}$ и $20 + \frac{4}{n} \cdot S = 20 \cdot \delta = \frac{1}{5n}$.

1439. а) 5,84 и 6,84; б) 6,085 и 6,585; в) 6,20875 и 6,45875;

г) $6\frac{1}{3} - \frac{5}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ и $6\frac{1}{3} + \frac{5}{2n} + \frac{1}{6n^2} \cdot S = 6\frac{1}{3}$; $\delta = \frac{15n+1}{38n^2}$.

1440. 31,5. **1441.** $10\frac{2}{3}$. **1442.** 40. **1443.** $\frac{a^4}{4}$. **1444.** 2.

1445. $2\frac{1}{4}$. **1446.** $\frac{2}{3}ab$. **1447.** 140 cm. **1448.** $\frac{25}{2}g$.

1449. $20\frac{5}{6}$ cm. **1450.** 288 цаула. **1451.** $e-1$. **1452.** $\frac{a-1}{\ln a}$. **1453.** $\ln 2$.

Упутство. Интервал интеграције поделити на делове, чије апсцисе чине геометриску прогресију.

1454. $\ln 2$. **1455.** $\ln a$; $\sim 1{,}1$. **1456.** $\frac{1}{k+1}$; $\sim 1{,}67 \cdot 10^{11}$.

1457. $a\ln a - a + 1$. **1458.** $\ln 4 - 1$;

Упутство. Интервал интеграције интеграла $\int_1^2 \ln x\,dx$ поделити на једнаке делове и искористити резултат задатка 1457.

1459. а) $\frac{(\ln b)^2 - (\ln a)^2}{2}$; б) $\frac{1-\ln 2}{2}$; в) $be^b - e^b + 1$.

1460. 1) 50; 2) 2,5; 3) $\sim 2{,}43$; 4) $\sim 12{,}3$; 5) $\sim 27{,}03$; 6) 1;

7) $\frac{(a+1)^2}{2}$; 8) $\frac{7}{24}a^3$; 9) 4; 10) $a^2b^2 + \frac{b^4}{2}$;

1461. 1) 15; 2) $\frac{b^4 - a^4}{2}$; 3) $m+n$; 4) $\frac{52}{9}$; 5) $\frac{7ab^2}{3}$;

6) $\frac{a}{2}(2a^2 - a + 2)$; 7) 3; 8) $\frac{4}{3}m$; 9) 31,5;

10) $\frac{2mn}{3}(n-1)(3m^2+n^2)$; 11) $\frac{(a-b)^3}{6}$; 12) $\frac{a^2}{3}$;

13) $\frac{a^2 - 3ab + 3b^2}{3(a-b)^2}$.

1462. 1) 4; 2) $\sim 16{,}1$; 3) 20,25; 4) 52; 5) 0,75;

6) $-\frac{15}{32}$; 7) $4\frac{5}{6}$; 8) $45\frac{1}{6}$; 9) $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)$; 10) $\sim 0{,}45$; 11) $\sim 2{,}022$;

12) $\sim 0{,}08$; 13) 1,25; 14) $\sim 7{,}15$; 15) $\sim 0{,}59$; 16) $6\frac{2}{3}$;

17) $\frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2) - \frac{4}{3}(\sqrt{z_1^3} - \sqrt{z_0^3}) + z_1 - z_0$; 18) $\frac{4}{3}a\sqrt{a}(3\sqrt{3} - 2)$;

19) $7\frac{2}{3}$; 20) $\frac{3}{5}(b^5 - a^5) - \frac{3}{4}(b^4 - a^4) + b^3 - a^3$.

1463. $10\frac{2}{3}$. **1464.** $10\frac{2}{3}$. **1465.** а) 8; б) $\frac{1}{3}$.

1466. $63\frac{3}{4}$. **1467.** $\frac{1}{12}$. **1468.** $\frac{3}{14}$. **1469.** $1\frac{19}{30}$.

1470. 1. **1471.** 9. **1472.** $2\frac{1}{4}$. **1473.** $\frac{1}{2}l^2 s\gamma$. **1474.** 62,5 kgm.

1475. На 4 cm. **1476.** 100 g. **1477.** $31{,}25\,\pi$ g. **1478.** $\sim 1{,}33$ кал.

1479. 1500 кулона. **1480.** $\sim 67\,600$ цаула. **1483.** $8 < I < 9{,}8$.

1484. $90 < I < 180$. **1485.** $\pi < I < 2\pi$. **1486.** $\frac{20}{29} < I < 1$.

1487. $\frac{\pi}{9} < I < \frac{2\pi}{3}$. **1488.** $\frac{1}{2} < I < \frac{\sqrt{2}}{2}$. **1489.** а) први; б) други.

1490. а) први; б) други; в) први; г) други. **1491.** $\frac{\pi}{8}\sqrt{2\pi} < I < \frac{\pi^2}{8}$.

1495. Упутство. Поћи од тога да је $\int_a^b [\alpha + f(x)]^2\,dx > 0$ за свако α; применити услов да квадратни трином нема реалних корена.

1497. а) $I < \sqrt{2} \cong 1{,}414$; б) $I < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cong 1{,}207$; в) $I < 1{,}1$;

г) $I < \frac{\sqrt{30}}{5} \cong 1{,}095$.

Уз задатке 1499—1502 дата су по два одговора: у одговору без заграда све су децимале тачне; одговор у заградама израчунат је по Симпсоновој формули дељењем интервала интеграције на $2n = 10$ делова. Уз задатке 1503—1510 и 1512—1516 све су децимале тачне; у зависности од броја подеока интервала интеграције добија се већа или мања приближност тачном резултату.

1499. $\sim 1{,}090$; $(1{,}086)$. **1500.** $\sim 0{,}575$; $(0{,}572)$. **1501.** $\sim 1{,}147$; $(1{,}148)$.
1502. $\sim 0{,}830$; $(0{,}837)$. **1503.** $\sim 0{,}747$. **1504.** $\sim 1{,}76$. **1505.** $\sim 0{,}79$.
1506. $\sim 3{,}91$. **1507.** $\sim 1{,}45$. **1508.** $\sim 0{,}44$. **1509.** 2,303.
1510. 0,301; 0,477; 0,845. **1512.** 0,425. **1513.** 666 g. **1514.** 0,96.
1515. 239 m^2. **1516.** 11,8 m^2. **1517.** 24,5. **1518.** 2,108. **1519.** $\frac{6}{7}$.
1520. $\frac{20}{9}$. **1521.** $\frac{\pi}{4}$. **1522.** $\frac{2}{3}h = 1$ m. **1523.** 1558 w.
1525. $0{,}0435 < I < 0{,}05$. **1526.** $0{,}00211\,\pi^4 < I < 0{,}00366\,\pi^4$.
1527. $0{,}33 < I < 0{,}905$. **1528.** $0 < I < 2{,}31$. **1529.** $\frac{52}{3} < I < 52$.
1530. 1) $\frac{x^3}{3}$; 2) $\frac{x^6 - a^6}{6}$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$; 4) $2(\sqrt{x} - 1)$; 5) $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x - 6\frac{2}{3}$; 6) $\frac{(x-a)^4}{4b} - \frac{b^3}{4}$.
1531. $S = \frac{2}{3}t^3$. **1532.** $A = 100\,S + 25\,S^2$ ерга.
1533. $Q = c_0 t + \frac{a}{2}t^2 + \frac{\beta}{3}t^3$.
1534. $A = \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha^2 t^3}{3} + \alpha\beta t^2 + \beta^2\right)t$, где $\alpha = \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1}$, $\beta = \frac{E_1 t_2 - E_2 t_1}{t_2 - t_1}$.
1535. $A = k m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$.
1536. Подинтегралној функцији са супротним знаком.
1537. а) $f(x)$; б) $f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$.
1538. $\Delta S = 10{,}10033\ldots$, $dS = 10$. **1539.** $dS = 1$.
1540. $\Delta A = 0{,}0009015$; $dA = 0{,}0009$.

1541.

Δx	ΔS	dS	α	δ
1	92,25	64	28,25	0,442
0,1	6,644	6,4	0,244	0,0382
0,01	0,6424	0,64	0,0024	0,00376.

1542. $\frac{1}{3}$. **1543.** 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1. **1544.** -1 и $-\frac{5}{4}$.
1545. $e^{e^x} e^x$. **1546.** $-4\alpha \ln \alpha$. **1547.** -2.
1548. За $x = -1$ и $x = 1$ — минимум, за $x = 0$ — максимум.
1549. 1. **1550.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2 = x(x-3)^2 + 2$.
1551. $y = \frac{\sqrt{3} - 1}{7}(3x^5 - 10x^3) + x\sqrt{3}$.

1552. $y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{\xi e^{\xi^2}(3 + 2\xi^2)}{6}x^4$, где $0 < \xi < x$. **1553.** $\frac{\pi}{4}$.
1554. 3,14159.

Упутство. Поделити интервал интеграције на 10 делова ($2n = 10$) и израчунати вредности функције са шест децимала. Тада се добија вредност за π са пет тачних децимала.

1555. $\frac{\pi}{3(\sqrt{3} - 1)}$. **1556.** $\frac{1}{2}\ln 2$.
1557. $\alpha[\varphi(b) - \varphi(a)] = \alpha\beta[\varphi''(b) - \varphi''(a)]$. **1558.** Не. **1559.** Не.

Уз главу VI.

1560. $4{,}1\,x^{0{,}83} + C$. **1561.** $-10\,x^{-0{,}2} + 15\,x^{0{,}2} - 3{,}76\,x^{1{,}33} + C$.
1562. $\frac{(x+1)^{16}}{16} + C$. **1563.** $\sin x - \cos x + C$. **1564.** $\frac{\pi}{2}x + C$.
1565. $-\frac{1}{8(2x-3)^4} + C$. **1566.** $C - \frac{1}{x+1}$. **1567.** $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$.
1568. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$. **1569.** $\frac{1}{3}\sin 3x + C$. **1570.** $\frac{1}{2}e^{2x} + C$.
1571. $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} 3x + C$. **1572.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C$.
1573. $\sqrt{2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C$. **1574.** $-\frac{a^{-x}}{\ln a} + C$. **1575.** $\frac{1}{3}\frac{a^{3x}}{\ln a} + C$.
1576. $-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} x + C$. **1577.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$. **1578.** $\ln(x+1) + C$.
1579. $-\ln(1-x) + C$. **1580.** $\frac{1}{3}\ln(3x-1) + C$. **1581.** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x)^2} + C$.
1582. $-\frac{1}{2}\cos(2x-3) + C$. **1583.** $-\frac{1}{2}\sin(1-2x) + C$.
1584. $-e^{1-x} + C$. **1585.** $\frac{1}{8}(2x+5)^4 + C$. **1586.** $\frac{a^{2x-1}}{2\ln a} + C$.
1587. $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(2+3x) + C$. **1588.** $-\ln(1 - x + \sqrt{4 + (1-x)^2}) + C$.
1589. $\frac{1}{2}\arcsin(2x+3) + C$. **1590.** $-\operatorname{ctg}(ax+b) + C$.
1591. $-\frac{1}{a}\operatorname{tg}(1-ax) + C$. **1592.** $-\frac{1}{4}\frac{1}{(x+7)^4} + C$.
1593. $-\frac{1}{10}\frac{1}{(11+5x)^2} + C$. **1594.** $\frac{-1}{b(c-1)}\frac{1}{(a+bx)^{c-1}} + C$.
1595. $-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{11}\sqrt[5]{(8-3x)^{11}} + C$. **1596.** $\frac{3}{b}\sqrt[3]{a+bx} + C$.

1597. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$ **1598.** $\frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C.$

1599. $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$ **1600.** $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{3}+C.$

1601. $\frac{1}{2a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{a}+C.$ **1602.** $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^3}{2}+C.$

1603. $\sqrt{x^2+1}+C.$ **1604.** $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C.$

1605. $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C.$ **1606.** $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C.$

1607. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$ **1608.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a}+C.$ **1609.** $\frac{1}{n}\arcsin\frac{x^n}{a}+C.$

1610. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$ **1611.** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C.$ **1612.** $\frac{1}{a}e^{ax+b}+C.$

1613. $-\frac{1}{2^x\ln 2}+C.$ **1614.** $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{e^x}{2}+C.$ **1615.** $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$

1616. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$ **1617.** $2\sqrt{1+x^2}+3\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

1618. $-\frac{\cos^6 x}{6}+C.$ **1619.** $\frac{\sin^4 x}{4}+C.$

1620. $3\sqrt[3]{\sin x}+C.$ **1621.** $\frac{1}{\cos x}+C.$

1622. $-\ln\cos x+C.$ **1623.** $\ln\sin x+C.$

1624. $-\frac{1}{3}\ln\cos 3x+C.$ **1625.** $\frac{1}{2}\ln\sin(2x+1)+C.$

1626. $\frac{(\ln x)^2}{2}+C.$ **1627.** $\ln\ln x+C.$ **1628.** $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C.$

1629. $\ln\ln x+C.$ **1630.** $e^{e^x}+C.$ **1631.** $-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C.$

1632. $\ln(1+\operatorname{tg}x)+C.$ **1633.** $\frac{1}{3}(\operatorname{arc\,tg}x)^3+C.$ **1634.** $e^{\sin x}+C.$

1635. $-\cos e^x+C.$ **1636.** $\operatorname{ch}x+C.$ **1637.** $\operatorname{sh}x+C.$

1638. $\operatorname{th}x+C.$ **1639.** $\ln(x^2-3x+8)+C.$ **1640.** $\sqrt{3x^2-5x+6}+C.$

1641. $\frac{A}{b}x-\frac{aA}{b^2}\ln(a+bx)+C.$ **1642.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln(2x+1)+C.$

1643. $x-2\ln(x+1)+C.$ **1644.** $\ln\frac{x-1}{x}+C.$ **1645.** $\ln\frac{x}{x+1}+C.$

1646. $\ln\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}+C.$ **1647.** $\frac{1}{5}\ln\frac{2x-3}{x+1}+C.$ **1648.** $\frac{1}{12}\ln\frac{2x-3}{2x+3}+C.$

1649. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}+C.$ **1650.** $\frac{1}{3}\ln\frac{x-5}{x-2}+C.$

1651. $\ln\frac{x+2}{x+3}+C.$ **1652.** $\frac{1}{3}\ln\frac{(x-5)^5}{(x-2)^2}+C.$ **1653.** $\ln\frac{(x-4)^2}{x-3}+C.$

1654. $\frac{ab}{b-a}\ln\frac{x-b}{x-a}+C.$ **1655.** $\frac{1}{5}\ln[(x-2)^2\sqrt{2x+1}]+C.$

1656. $\frac{1}{7}\ln\frac{x-2}{x+5}+C.$ **1657.** $\frac{1}{7}\ln[(x-5)^5(x+2)^2]+C.$

1658. $C-\ln(2x^2-3x+1).$ **1659.** $x-2\operatorname{arc\,tg}x+C.$

1660. $x+\ln\frac{x-1}{x+1}+C.$ **1661.** $\ln(x^2-3x+8)+C.$

1662. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$ **1663.** $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{2}+C.$

1664. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$ **1665.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$

1666. $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C.$ **1667.** $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

1668. $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C.$ **1669.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

1670. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$ **1671.** $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C.$

1672. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C.$ **1673.** $\ln(1+\sin x)+C.$ **1674.** $\operatorname{tg}x-x+C.$

1675. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C.$ **1676.** $-\operatorname{ctg}x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C.$

1677. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x+C.$ **1678.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg}x+x+C.$

1679. $\frac{x\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C.$ **1680.** $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln\cos x+C.$

1681. $\ln\sin x-\frac{\sin^2 x}{2}+C.$ **1682.** $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C.$

1683. $2\operatorname{tg}x+\frac{2}{\cos x}-x+C.$ **1684.** $\frac{m}{m+n}.$ **1685.** $\frac{\pi}{4}.$ **1686.** $\operatorname{ctg}a.$

1687. 0. **1688.** 2. **1689.** $1-\cos a.$ **1690.** $\arcsin\frac{b}{2}-\arcsin\frac{a}{2}.$

1691. $e-1.$ **1692.** $\operatorname{ctg}x-1.$ **1693.** $\sim 39{,}1.$ **1694.** $\frac{1}{15}-\frac{1}{15}(4-3x)^5$

1695. $\frac{16}{3}\sqrt{2}$. **1696.** $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(8-2a)^3}-\sqrt{(8-2x)^3}\right)$.

1697. $\frac{1}{2}\ln(2z-1)$. **1698.** $3\ln\frac{a-2b}{u-2b}$. **1699.** $\frac{1}{c}\ln\frac{cb+m}{ca+m}$.

1700. $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4})$. **1701.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1702.** $\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0$. **1703.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1704. $\frac{1}{4}$. **1705.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **1706.** $\sqrt{3}$. **1707.** $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}$.

1708. $\sqrt{z^2-a^2}$. **1709.** $\frac{1}{3}\ln 14$. **1710.** $\frac{1}{2}\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}$.

1711. $2e(\sqrt{e}-1)$. **1712.** 1. **1713.** $\frac{3}{4\ln 2}$. **1714.** $\sim 0{,}798$.

1715. $\frac{1}{4}$. **1716.** $\frac{e^3}{3}+\frac{3e^2}{2}+3e-3\frac{5}{6}$. **1717.** $\frac{1}{5}(e-1)^5$.

1718. $e-\sqrt{e}$. **1719.** Интеграл нема смисла. **1720.** $\ln 2e$. **1721.** 12.

1722. $1-\frac{\pi}{4}$. **1723.** $6\ln 3-2$. **1724.** $2+3\ln\frac{9}{8}$.

1725. $2+4\ln\frac{7}{9}$. **1726.** $\frac{13}{2}\ln\frac{3}{7}+4$. **1727.** $\frac{z-a}{2}+\frac{5}{4}\ln\frac{2z-1}{2a-1}$.

1728. $\ln 3$. **1729.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **1730.** $\ln\frac{4}{3}$. **1731.** $4\ln 4-3\ln 3$.

1732. $\ln\frac{3}{2}$. **1733.** $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$. **1734.** $\frac{1}{3}\ln 5$. **1735.** $\frac{1}{a-b}\ln\frac{b(x-a)}{a(x-b)}$.

1736. $\frac{x}{1-2x}$. **1737.** $\frac{1}{2}$. **1738.** $\frac{1}{3}$. **1739.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

1740. $\ln 2$. **1741.** $\frac{2}{3}$. **1742.** $\frac{\pi}{4}$. **1743.** $\frac{\pi}{4}$. **1744.** $1-\frac{\pi}{4}$.

1745. 0. **1746.** 2. **1747.** $\frac{(2-\pi)\sqrt{2}}{8}$. **1748.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. **1749.** 1.

1750. $\frac{\pi}{2\omega}$. **1751.** $\varphi+\operatorname{ctg}\varphi-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\varphi-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$. **1752.** 0.

1753. $\frac{1}{2}$. **1754.** $\frac{e^{e^2}-e}{2e(e-1)e^{e^2}}$. **1755.** $\ln\frac{e^2+1}{2e}$. **1756.** $\frac{\pi}{4}$.

1757. За 0 и 1 највећа вредност; једнака 0; за $x=\frac{1}{2}$ – најмања вредност $=\ln\frac{3}{4}$.

1758. Функција је свуда дефинисана, непрекидна и расте. График пролази кроз координатни почетак. Тачка $\left(1;\ -\ln\frac{e}{2}\right)$ је превојна тачка

с тангентом паралелном x оси; тачка $(-1;\ -\ln 2e)$ је превојна тачка с тангентом која заклапа са x осом угао $\operatorname{arc\,tg} 2$. Асимптота нема.

1759. $\frac{[\varphi'(b)]^2-[\varphi'(a)]^2}{2}$.

1760. $\sin x - x\cos x + C$. **1761.** $x\sin x+\cos x+C$.

1762. $x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **1763.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

1764. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{2}+C$. **1765.** $C-e^{-x}(x+1)$.

1766. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$. **1767.** $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$.

1768. $x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C$.

1769. $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$.

1770. $x\operatorname{tg} x-\frac{x^2}{2}+\ln\cos x+C$. **1771.** $C-\frac{1}{2x^2}\log(x\sqrt{e})$.

1772. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$. **1773.** $\ln x\ln\ln x-\ln x+C$.

1774. $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$. **1775.** $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$.

1776. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arc\,tg} x+C$.

1777. $\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+C$.

1778. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

1779. $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$. **1780.** $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$.

1781. $C-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg} x\right)$. **1782.** $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2}+C$.

1783. $\frac{(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x-2x}{\sqrt{x}}+C$. **1784.** $x\sqrt{1+2x}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$.

1785. $\frac{(x^3+1)\ln(1+x)}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$.

1787. $-\frac{1}{4}\frac{x^3}{(1+x^2)^2}-\frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x+C$.

1788. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$. **1789.** $a^x\left(\frac{x^2}{\ln a}-\frac{2x}{\ln^2 a}+\frac{2}{\ln^3 a}\right)+C$.

1790. $-e^{-x}(2+2x+x^2)+C$. **1791.** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$.

1792. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

1793. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$.

1794. $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$.

1795. $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C.$

1796. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)+C.$

1797. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)+C.$

1798. $x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\sqrt{1-x^2}-2x+C.$

1799. $\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2-x\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

1800. $\frac{x-2}{x+2}e^x+C.$ **1801.** $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C.$

1802. $\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x-5\cos 2x)+C.$

1803. $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\sin nx+a\cos nx)+C.$

1804. $\frac{e^x}{2}\left(1-\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{5}\right)+C.$ **1805.** $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.$

1806. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$

1807. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$

1808. $-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

1809. $\frac{e^x}{2}\{(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x\}+C.$

1810. $(1+x)\ln^2(1+x)-2x\ln(1+x)+2x-2\ln(1+x)+C.$

1811. $3x\sqrt[3]{(1+x^2)^4}+C.$ **1812.** $x^2e^{\frac{1}{x}}+C.$

1813. $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C.$ **1814.** $2[\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})]+C.$

1815. $2(\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})+C.$ **1816.** $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C.$

1817. $2\arcsin\sqrt{x}+C.$ **1818.** $3\sqrt[3]{x}+3\ln(\sqrt[3]{x}-1)+C.$

1819. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+C.$ **1820.** $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C.$

1821. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$ **1822.** $\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+C.$

1823. $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C.$

1824. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$

1825. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{1+x}-1)+C.$

1826. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln(1+\sqrt[3]{x+1})+C.$

1827. $\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$ **1828.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$

1829. $2(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C.$ **1830.** $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$

1831. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$ **1832.** $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{1+x^2}\right]+C.$

1833. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$ **1834.** $\ln\frac{x}{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}+C.$

1835. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C.$ **1836.** $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$

1837. $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$

1838. $\ln\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$ **1839.** $\ln(e^x+e^{-x}+2)+C.$

1840. $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C.$ **1841.** $\operatorname{arc\,tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)+C.$

1842. $\arcsin\left(x-\frac{1}{x}\right)+C.$ **1843.** $\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C.$

1844. $\ln(\ln x+\sqrt{\ln^2 x-1})+C.$ **1845.** $\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})+C.$

1846. $\operatorname{arc\,sec} x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$

1847. $C-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right).$ (Смена $u=1+\frac{1}{x}$).

1848. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}}+C.$

1849. $\ln\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2+1}{x}+C.$ (Смена $u=x+\frac{1}{x}$).

1850. $\ln\frac{xe^x}{1+xe^x}+C.$ **1851.** $2\sqrt{1+x^x}+C.$

1852. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$

1853. $x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+C.$

1854. $\frac{203}{480}$. **1855.** $7+\ln 4$. **1856.** $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$.

1857. π. **1858.** $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$. **1859.** $4-\pi$.

1860. $\frac{4-\pi}{2}$. **1861.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **1862.** $\frac{\pi}{3}$. **1863.** $\frac{\pi}{32}$.

1864. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1865.** 2. **1866.** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$.

1867. $\frac{\pi}{4}$. **1868.** $\frac{\pi}{6}$. **1869.** $\frac{1}{2}\ln\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}$. **1870.** $2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

1871. $10\frac{2}{3}$. **1872.** $\frac{5}{3}-2\ln 2$. **1873.** $\ln(1+\sqrt{2})$. **1874.** $\frac{\pi a^2}{4}$.

1875. $a^2[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$. **1876.** 1.

1877. $x=(x_2-x_1)z+x_1$; увек кад је $x_1\neq x_2$.

1879. Вредност сваког интеграла је $=\frac{\pi}{4}$. **1886.** $\pi^3-6\pi$.

1887. $10!\left[1-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{10!}+\frac{1}{9!}+\cdots+\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{0!}\right)\right]$. **1888.** $6-2e$.

1889. $\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\,\frac{\pi}{2}\cong 0{,}429$. **1890.** $\frac{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}{11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3}$.

1892. Упутство. Применити смену $x=\sin z$ и искористити по-знати рекурентни образац.

1893. $\frac{35\pi}{2^{16}}$. **1894.** $\frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{1\cdot3\cdot5\ldots(4n+3)(4n+5)}$. **1895.** $\frac{11!\,7!\,2}{19!}$.

1896. $\frac{e^{m+1}}{m+1}\left(1-\frac{n}{m+1}+\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}\right)+$

$+(-1)^{m+1}\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$.

1897. $\frac{11}{48}+\frac{5\pi}{64}$.

1898. Извршити смену променљиве у интегралу, стављајући $k\omega^2x^2=z$, а затим применити Лопиталово правило.

1899. Заменити интеграциону променљиву по обрасцу $2z=x-t$.

1900. Смена $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ се не сме користити зато што је функција $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ за $x=\pi$ прекидна.

1901. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)+C$. **1902.** $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arc\,tg}x+C$.

1903. $\ln\sqrt[4]{x^4-2x^2+4}+C$. **1904.** $\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$.

1905. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C$. **1906.** $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C$.

1907. $C-\frac{1}{3}\ln(1+3x^3-x^6)$. **1908.** $\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}+C$. (Смена $x=\sin u$).

1909. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$. **1910.** $\ln[(x-2)^3(x+4)^8]+C$.

1911. $0{,}296\ln(x+0{,}28)-0{,}176\ln(x-1{,}6)+C$.

1912. $\frac{3}{11}\ln(3x+1)+\frac{2}{33}\ln(2x-3)-\frac{1}{3}\ln x+C$.

1913. $\ln\frac{(x-1)^1(x-4)^5}{(x+3)^7}+C$. **1914.** $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2(x-3)}{(x+2)^2(x-1)}+C$.

1915. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}+C$.

1916. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^3}+C$.

1917. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}+C$.

1918. $\frac{x^2}{2}+\ln\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}+C$.

1919. $-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}+C$.

1920. $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln(x-1)+\frac{1}{8}\ln(x+1)+C$.

1921. $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln(x-5)+C$. **1922.** $\frac{4}{x+2}+\ln(x+1)+C$.

1923. $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+2\ln\frac{x+4}{x+2}+C$.

1924. $-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln(x-2)+C$.

1925. $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\frac{x-5}{x+2}+C$.

1926. $\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C$.

1927. $-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C$.

1928. $\frac{1}{27}\ln\frac{x-2}{x+1}-\frac{1}{18(x-2)^2}+\frac{2}{27(x-2)}+\frac{1}{27(x+1)}+C.$

1929. $-\frac{15}{4(x-3)^4}-\frac{10}{3(x-3)^3}-\frac{1}{2(x-3)^2}+C.$

1930. $-\frac{1}{8x^2}-\frac{3}{4x}-\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{x-1}+\frac{23}{16}\ln x-\frac{7}{16}\ln(x-2)-\ln(x-1)+C.$

1931. $\ln x-\operatorname{arc\,tg}(x-1)+C.$ **1932.** $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

1933. $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C.$

1934. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$

1935. $-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$

1936. $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}+\operatorname{arc\,tg}x-\frac{7}{(x-1)^2}\right]+C.$

1937. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{x-1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C.$

1938. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

1939. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

1940. $\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

1941. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$

1942. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$

1943. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

1944. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

1945. $\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-2\ln(x^2+x+1)+$

$+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+C.$

1946. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

1947. $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C.$

1948. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C.$

1949. $\frac{1}{648}\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{3}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right\}+C.$

1950. $\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$

1951. $\frac{2}{3}\ln\frac{x^3+1}{x^3}-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{3(x^3+1)}+C.$

1952. $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arc\,tg}x+C.$

1953. $C-\frac{1+6(2x+3)(3x^2+9x+8)}{8(2x^2+6x+5)^2}-\frac{9}{4}\operatorname{arc\,tg}(2x+3).$

1954. $\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{3}{16}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{4}\frac{x}{x^4-1}+C.$

1955. $C-\frac{x}{8(x^2+4)}-\frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}-\operatorname{arc\,tg}(x+2).$

1956. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+C.$

1957. $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C.$

1958. $\frac{2}{a}\left[\sqrt{ax+b}-m\ln(\sqrt{ax+b}+m)\right]+C.$

1959. $-\frac{3\sqrt[3]{x}}{2}\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{2}\arcsin\sqrt[3]{x}+C.$

1960. $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C.$

1961. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C.$

1962. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}-3\ln(1+\sqrt[12]{x})+$

$+\frac{15}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\frac{165}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$

1963. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C.$

1964. $\ln\frac{u^2-1}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2u^2}{\sqrt{3}}+C$, где je $u=\sqrt[8]{\frac{1-x}{1+x}}$.

1965. $\ln \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$.

1966. $-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\ln \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}+C$. **1967.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$.

1968. $\frac{1}{2} \ln (\sqrt[3]{x^2+1}-1)-\frac{1}{4} \ln [\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1]+$

$+\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2 \sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$.

1969. $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5} \sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$.

1970. $\frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$.

1971. $\frac{1}{3} \ln (3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C$.

1972. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$. **1973.** За реалне вредности x израз под интегралом је имагинаран.

1974. $\frac{2}{9} \sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9} \ln (3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})+C$.

1975. $3 \sqrt{x^2+2x+2}-4 \ln (x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$.

1976. $-\sqrt{2+4x-x^2}+2 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}}+C$.

1977. $\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}+C$.

1978. $\frac{1}{2}(3-x) \sqrt{1-2x-x^2}+2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

1979. $\ln \frac{Cx}{2+x+2 \sqrt{x^2+x+1}}$.

1980. $\operatorname{arc\,tg} \frac{x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2}+C$.

1981. $\frac{1}{2}(x-1) \sqrt{x^2-2x-1}-\ln (x-1+\sqrt{x^2-2x-1})+C$.

1982. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \sqrt{3x^2-3x+1}+$

$+\frac{1}{8 \sqrt{3}} \ln \left(\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right)+C$.

1983. $\ln (x+1+\sqrt{2x+x^2})-\frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}}+C$.

1984. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. **1985.** $\frac{1}{a} \ln \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}+a}+C$.

1986. $\frac{1}{6}(x^2-1) \sqrt{1+2x^2}+C$.

1987. $\left(\frac{1}{4} x^3-\frac{3}{8} x\right) \sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8} \ln (x+\sqrt{x^2+1})+C$.

1988. $-\frac{x(x^2-3)}{2 \sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2} \arcsin x+C$.

1989. $\frac{2}{3} x \sqrt{x}+\frac{24}{11} x \sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13} x^2 \sqrt[6]{x}+\frac{8}{5} x^2 \sqrt{x}+\frac{6}{17} x^2 \sqrt{x^5}+C$.

1990. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7} x \sqrt[6]{x}+\frac{9}{5} x \sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13} x^2 \sqrt[6]{x}+C$.

1991. $\frac{1}{5} \ln \frac{\sqrt[3]{1+x^5}-1}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^5)^2}+\sqrt[3]{1+x^5}+1}}+\frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arc\,tg} \frac{1+2 \sqrt[3]{1+x^5}}{\sqrt{3}}+C$.

1992. $\frac{1}{\ } \ln \frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, где је $u=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$.

1993. $\frac{5}{16} x-\frac{1}{6} \sin x \cos x\left(\cos^4 x+\frac{5}{4} \cos^2 x+\frac{15}{8}\right)+C$.

1994. $\frac{35}{128} x-\frac{1}{4} \sin 2x+\frac{7}{128} \sin 4x+\frac{1}{24} \sin^3 2x+\frac{1}{1024} \sin 8x+C$.

1995. $\frac{1}{15} \cos^3 x(3 \cos^2 x-5)+C$. **1996.** $\frac{1}{3 \cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$.

1997. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{2} \sin x \cos x-\frac{3}{2} x+C$.

1998. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2 \ln \operatorname{tg} x+C$.

1999. $\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10 \operatorname{tg}^2 x+1)}{3 \operatorname{tg}^3 x}+C$.

2000. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x)+C$. **2001.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+C$.

2002. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2} \operatorname{tg} x+\sqrt{1+2 \operatorname{tg}^2 x})+C$.

2003. $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x-\ln \cos x+C$.

2004. $-\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x+\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x-\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x+C$.

2005. $\frac{1}{2}[x+\ln (\sin x+\cos x)]+C$. **2006.** $\ln (\sin x+\cos x)+C$.

2007. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)$.

2008. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x+\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}}{2}\right)+C$.

2009. $\ln\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x-1}}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{3}}+C$.

2010. $C-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$. **2011.** $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

2012. $\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$. **2013.** $\frac{1}{4}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}+C$.

2014. $\frac{1}{3}\ln\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4\right)+C$. **2015.** $\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}+C$.

2016. $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$. **2017.** $\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\operatorname{tg} x}{b}+C$.

2018. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C$.

2019. $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$. **2020.** $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$.

2021. $-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$. **2022.** $\frac{11}{48}+\frac{5\pi}{64}$. **2023.** $\frac{3}{16}\pi$. **2024.** $\frac{\pi}{16}$.

2025. $\frac{848}{105}$. **2026.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}+C$.

2027. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.

2028. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.

2029. $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}+\frac{1}{16}\operatorname{arc\,sec}\frac{x+1}{2}+C$.

2030. $\frac{x-1}{6}\sqrt{3x^2+2x+5}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+15}+C\right.$.

2031. $(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x-7}\right)+C$.

2032. $\frac{x}{9\sqrt{x^2+3}}-\frac{x^3}{27\sqrt{(x^2+3)^3}}+C$.

2033. $-\frac{1}{\sqrt{(x^2+4x+1)^3}}-\frac{4(x+2)}{9\sqrt{x^2+4x+1}}+\frac{4(x+2)^2}{27\sqrt{(x^2+4x+1)^3}}+C$.

2034. $\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}+C$.

2035. $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$.

2036. $1-\frac{\pi}{4}$. **2037.** $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

2038. $\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\ln\frac{2+\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{2})}$. **2039.** $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.

2040. $\frac{5}{48}$. **2041.** $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. **2042.** $x-\operatorname{th} x+C$. **2043.** $x-\operatorname{cth} x+C$.

2044. $x-\operatorname{th} x-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x+C$. **2045.** $\ln\operatorname{sh} x-\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{cth}^4 x+C$.

2046. $\operatorname{sh} x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+C$. **2047.** $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{ch} x+C$.

2048. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x+C$. **2049.** $\frac{1}{2}(x+\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x)+C$.

2050. $\frac{e^4-4e^2-1}{8e^2}$. **2051.** $\frac{66}{125}$. **2052.** $\ln\operatorname{th} x+C$.

2053. $\ln\operatorname{th}\frac{x}{2}+C$. **2054.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-2)^2(x-4)}{(x-3)^3(x-1)}+C$.

2055. $-\frac{1}{8}\frac{x^4}{x^8+1}+\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} x^4+C$.

2056. $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}+C$.

2057. $C-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$.

2058. $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{(1+x^2)^2}+C$.

2059. $2\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-\frac{2x^3+x^2+2x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}+C$. (Извршити смену $z=x+\frac{1}{x}$). **2060.** $\ln(x^5-3x^4+5x^3-6x^2)+C$.

2061. $\frac{1}{6}\left(\ln\frac{x^6}{x^6+1}+\frac{1}{1+x^6}\right)+C$.

2062. $\frac{1}{5}\ln(x-1)-\frac{\sqrt{5}+1}{20}\ln\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)+$

$+\frac{\sqrt{5}-1}{20}\ln\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)-$

$-\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{5-\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x+1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-$

$-\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{5+\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x+1-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+C.$

2063. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}x^2+C.$

2064. $\frac{1}{2}x(x+\sqrt{x^2-1})-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C.$

2065. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C.$ (Поделити бројитељ и именитељ са x^2 и применити смену $x+\frac{1}{x}=z$).

2066. $\frac{3}{2}\left(\arcsin\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\right)+3\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^3}+C.$

2067. $\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}+C.$ **2068.** $\frac{3\sqrt[3]{(a+x)^4}}{4}\,\frac{4x-3a}{7}+C.$

2069. $\frac{\sqrt{3}}{3}\arccos\frac{x\sqrt{3}}{x^2+1}+C.$

2070. $\ln(\sqrt{1-x^2}+x)-\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

2071. $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{9}\right)+C.$

2072. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}\right)\sin 2x+C.$

2073. $\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x]+C.$

2074. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}+C.$ **2075.** $\frac{\pi}{10}\sqrt{30}.$

2076. $\ln(2-\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$ **2077.** $\frac{1}{4}\ln 3.$

2078. $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1-2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}.$

2079. $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+5\ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-7\ln\cos\frac{x}{2}+12x+C.$

2080. $\frac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}{8}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-\frac{1}{2\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}+C.$

2081. $\frac{1}{4}(\operatorname{tg}^4x-\operatorname{ctg}^4x)+2(\operatorname{tg}^2x-\operatorname{ctg}^2x)+6\ln\operatorname{tg}x+C.$

2082. $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}^2x)+C.$ **2083.** $2\sqrt{x+1}\,[\ln(x+1)-2]+C.$

2084. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$ **2085.** $\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{\arcsin x}{x}+C.$

2086. $\frac{e^x}{1+x}+C.$ **2087.** $\frac{x^2e^{x^2}}{2}+C.$

2088. $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+\;.$

2089. $3[(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}]+C.$ **2090.** $\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24.$

2091. $x\operatorname{arc\,tg}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln(x+2\sqrt{x}+2)+C.$

2092. $2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$

2093. $x\ln(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2)-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}-\frac{5}{3}\sqrt{x}+\frac{7}{2}\sqrt[3]{x}-9\sqrt[6]{x}-$

$-\ln(\sqrt[6]{x}-1)+16\operatorname{arc\,tg}(\sqrt[6]{x}+1)+C.$

2094. $\frac{1}{6}\ln\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+C.$

2095. $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}.$ **2096.** $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C.$

2097. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120)+C.$

2098. $\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^3)-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+$

$+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

2099. $x\ln(x^4+1)-4x+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

2100. $\ln \dfrac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}+C.$

2101. $-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\dfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x+\dfrac{1}{4}\,\dfrac{x}{1+x^2}+C.$

2102. $\dfrac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$. (Смена $x=\sin^2 t$).

2103. $\dfrac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg}\left(e^{mx}\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)+C.$

2104. $\dfrac{x^2\sin x}{\cos^2 x}-\dfrac{2x}{\cos x}+\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}+C.$

2105. $\operatorname{arc\,tg}(e^x-e^{-x})+C.$ **2106.** $\dfrac{2x^2\operatorname{arc\,tg} x^2+1}{4(1+x^4)}+C.$

2107. $e^{e^x}(x-e^{-x})+C.$ **2108.** $e^{\sin x}(x-\sec x)+C.$

2109. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{4(x+1)}+C.$

2110. $e^{ax^2+bx+c}\,\dfrac{2ax^2+bx-1}{2ax+b}+C.$

2111. $x-\log_2(1-2^x)+\dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{1}{1-2^x}+\dfrac{1}{2(1-2^x)^2}+\dfrac{1}{3(1-2^x)^3}\right)+C.$

2114. $\dfrac{1}{3}$. **2115.** $\dfrac{1}{a}$. **2116.** Не постоји. **2117.** $\dfrac{\pi}{2}$.

2118. 2. **2119.** -1. **2120.** Не постоји. **2121.** $14\dfrac{4}{7}$.

2122. Не постоји. **2123.** $\dfrac{\pi}{2}$. **2124.** Не постоји.

2125. $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}\pi-\dfrac{3}{2}\ln 2.$ **2126.** Интеграл не постоји. **2127.** $\dfrac{1}{2}$.

2128. $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2129.** $\dfrac{\pi}{2}$. **2130.** Интеграл не постоји. **2131.** π.

2132. $(-1)^n n!$ **2133.** Интеграл не постоји. **2134.** При $n<1$.

2135. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

2136. Конвергира. **2137.** Конвергира. **2138.** Дивергира.
2139. Дивергира. **2140.** Конвергира. **2141.** Конвергира.
2142. Конвергира. **2143.** Дивергира. **2144.** Конвергира.

2145. а) $\dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 3\cdot 1}$.

2146. $2\,\dfrac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}$. **2147.** $\dfrac{\pi}{2a^{2n-1}}\,\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}$.

2148. $\dfrac{(2n-2m-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1\,(2m-1)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2^{n-1}(n-1)!}$. **2149.** $n!$

Уз главу VII

2150. 2. **2151.** $\dfrac{12}{\pi}$. **2152.** $e+\dfrac{1}{e}-2$. **2153.** $5\dfrac{1}{3}p^2$.

2154. $\sim 0{,}767$. **2155.** $k\ln\dfrac{b}{a}$. **2156.** $\dfrac{16}{3}$. **2157.** $a(\ln a-1)+1$.

2158. $a^2\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)$. **2159.** $\dfrac{\pi a^2}{8}$. **2160.** $\dfrac{2}{3}$ кв. јед. **2161.** $\dfrac{8}{15}$.

2162. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{3}$. **2163.** $8\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}}\right)$.

2164. 0,1 кв. јед. **2165.** $\dfrac{1}{12}$ кв. јед. **2166.** π. **2167.** π.

2168. $3\pi a^2$. **2169.** Говорити о овој површини нема смисла, јер одговарајући интеграл није конвергентан.

2170. $\dfrac{72\sqrt{3}}{5}$. **2171.** $\dfrac{3}{2}a^2$. **2172.** $3\pi a^2$. **2173.** $\dfrac{3}{8}\pi a^2$.

2174. $\dfrac{3\pi c^4}{8ab}$. **2175.** $(3a^2+2ab+b^2)\arccos\dfrac{a}{a+b}-3a\sqrt{b^2+2ab}$.

2176. $\dfrac{3}{2}\pi a^2$. **2177.** $\dfrac{4}{3}\pi^3a^2$. **2178.** $\dfrac{1}{2}\pi a^2$. **2179.** $\dfrac{1}{4}\pi a^2$.

2180. $\dfrac{5\pi-9\sqrt{3}}{32}a^2$. **2182.** $a^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **2183.** $18\pi a^2$.

2184. $\dfrac{\pi(a^2+b^2)}{2}$. **2185.** a^2. **2186.** $\pi\sqrt{2}$. **2187.** a^2.

2188. $\dfrac{4}{9}\left\{\sqrt{\left(1+\dfrac{3}{2}a\right)^3}-1\right\}$. **2189.** $\dfrac{a(a+2)}{2}$. **2190.** $6a$.

2191. $2\sqrt{a}$. **2192.** $\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}}-e^{-\frac{b}{a}}\right)$.

2193. $\dfrac{y_1}{2p}\sqrt{y_1^2+p^2}+\dfrac{p}{2}\ln\dfrac{y_1+\sqrt{y_1^2+p^2}}{p}$.

2194. $a+\frac{1}{2}\left\{\sqrt{16h^2+a^2}+\frac{a^2}{4h}\ln\frac{4h+\sqrt{16h^2+a^2}}{a}\right\}$.

2195. Приближно 550 m. **2196.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **2197.** $\ln \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

2198. $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. **2199.** $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+a-b$. **2200.** $a\ln\frac{a}{b}$.

2201. $\frac{x_1+3a}{3}\sqrt{\frac{x_1}{a}}$. **2202.** $\ln 3-\frac{1}{2}$.

2203. $2a(z-2)+a\sqrt{3}\ln\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}+2a\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})$,

где је $z=\sqrt{\frac{8a-3x_0}{2a-x_0}}$.

2204. $\frac{8}{15}(\sqrt{2}+1)$. **2205.** $\frac{4}{5}(\sqrt{32}-1)$. **2206.** 8 дужинских јединица

2207. За $t=\frac{\pi}{6}$. **2208.** За $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. **2209.** $4\sqrt{3}$.

2210. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$. **2211.** $\frac{\pi^2}{2}R$. **2212.** $\frac{\pi^3}{3}$.

2213. $\frac{8b(a+b)}{a}$. **2215.** $2(e^{\pi}-1)$. **2217.** $8a$. **2218.** $\frac{3}{2}\pi a$.

2219. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **2220.** $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.

2221. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. **2222.** 4. **2223.** $\ln\frac{\pi}{2}$. **2224.** $\sim 46{,}60$ cm.

2225. k мора бити позитиван разломак код кога је бројитељ за 1 мањи или за 1 већи од именитеља.

2229. $\frac{\pi R^2h}{2}=200\pi\,\mathrm{cm}^2$. **2230.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **2231.** $\frac{2}{3}R^2h=400\ \mathrm{cm}^3$.

2232. $\frac{8\pi aR^2}{15}$. **2233.** $0{,}3\pi$. **2234.** 11,73 запр. јед.

2235. $\frac{h^2}{3}(3a+h)\pi$. **2236.** $k\pi\ln\frac{b}{a}$. **2237.** $\frac{\pi^2}{2}$. **2238.** $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$.

2239. $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}-4\ln\frac{1+\sin\frac{\pi}{3}}{1-\sin\frac{\pi}{3}}$.

2240. $\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}-\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2}+2(b-a)\right)$.

2241. $\frac{1}{2}\pi a^3(15-16\ln 2)$. **2242.** $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

2243. $\frac{\pi a^3}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+\sqrt{8})-\frac{2}{3}\right]$. **2244.** $5\pi^2a^3$.

2245. $\frac{32}{105}\pi a^3$. **2246.** $\frac{16\pi c^6}{105ab^2}$. **2247.** $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$.

2248. $\frac{\pi^2}{2}$ запр. јед. **2249.** $\frac{1}{2}\pi e$. **2250.** $2\pi^2a^3$. **2251.** π.

2252. Говорити о запремини нема смисла, јер одговарајући интеграл не конвергира.

2253. $\frac{4}{15}ahH=128\ \mathrm{cm}^3$. **2254.** $\frac{2}{3}abh=133\frac{1}{3}\ \mathrm{cm}^3$.

2255. $\frac{R^2H}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\right)$ и $\frac{R^2H}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$. Пресеци паралелни генератриси су параболични сегменти, чије се површине могу лако израчунати.

2257. $\frac{h\sqrt{8pa^3}}{3}$. **2258.** $\frac{ka^2h}{2}$. **2259.** $\frac{8}{3}a^3$. **2260.** $\frac{2}{3}\pi R^2H$.

2261. $\frac{32}{105}a^3$. **2262.** $\frac{8}{3}\pi r^3$. **2263.** $\frac{8}{3}\pi ab^2$. **2264.** $\frac{2}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.

2265. $\frac{56}{3}\pi a^2$. **2266.** $\frac{\pi}{9}\sqrt{(1+a^4)^3}-1)$. **2267.** $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$.

2268. $\frac{128}{5}\pi a^2$. **2269.** $3\pi a^2$, **2270.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(e^{\pi}-2)$. **2271.** $\frac{12}{5}\pi a^2$.

2272. $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\arcsin e$; $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}$, где је e — ексцентрицитет елипсе.

2273. $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

2274. $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}\ln\frac{9-3\sqrt{5}+3\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{2}$.

2275. $4\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **2276.** $4\pi^2r^2$. **2277.** $\frac{8\pi}{3}(3\pi-4)$.

2278. $\pi\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}-\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}+\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right\}$.

2279. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **2280.** $\frac{ml}{2}$. **2281.** $\frac{ah^2}{2}$.

2282. $\frac{a^3}{6}$; $\frac{a^3}{6}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **2283.** $\frac{4}{15}ah^2$. **2284.** $\left(0;\ \frac{2r}{\pi}\right)$.

2285. $\left(0;\ \frac{4r}{3\pi}\right)$. **2286.** $\left(\frac{4a}{3\pi};\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. **2287.** $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{8}\right)$.

2288. $\left(\pi a,\ \frac{4}{3}a\right)$. **2289.** $\pi a,\ \frac{5}{6}a$.

2290. $\frac{ab}{2}\left(\sqrt{1-e^2}+\frac{1}{e}\arcsin e\right)$, где $e=\sqrt{a^2-b^2}:a$.

2292. $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}$. **2293.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$. **2294.** 0,15.

2295. Тежиште лежи на симетрали централног угла α, и његово се растојање од центра круга односи према полупречнику као дужина тетиве која одговара луку, према дужини самог лука.

2296. $\overline{x}=\frac{2a}{5}$, $\overline{y}=\frac{2a}{5}$.

2297. Тежиште лежи на оси параболе на растојању $\frac{3}{5}h$ од темена.

2298. $\overline{x}=\frac{5}{8}a$; $\overline{y}=0$. **2300.** $\overline{x}=\frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3}$; $\overline{y}=\frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2}$.

2301. $\overline{x}=-\frac{5}{6}a$; $\overline{y}=0$. **2302.** $\overline{x}=\frac{a\pi\sqrt{2}}{8}$; $\overline{y}=0$.

2304. $\overline{x}=-\frac{1}{5}a\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$; $\overline{y}=\frac{1}{5}a\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$.

2305. Тежиште лежи на оси симетрије на растојању $\frac{R}{2}$ од центра.

2306. Тежиште лежи на оси симетрије. Његово је растојање од темена

$$\frac{3\sqrt{(r^2+4h^2)^5}-5r^2\sqrt{(r^2+4h^2)^3}+2r^5}{20h(\sqrt{r^2+4h^2})^3-r^3)}.$$

2307. $\frac{h}{3}$; $\frac{h\sqrt{r^2+h^2}}{3(r+\sqrt{r^2+h^2})}$; $\frac{h}{4}$. **2308.** $\frac{3}{8}R$. **2309.** $\frac{h}{3}$.

2310. $\frac{1}{3}l(a^2+b^2+ab)$. **2311.** $\frac{\pi r^4}{4}$. **2312.** $\frac{\pi r^4 h}{2}$. **2313.** $\frac{\pi r^4 h}{10}$.

2314. $\frac{8}{15}\pi R^5$. **2315.** $\frac{8}{5}\pi ab^4$. **2316.** $\frac{\pi r^4 h}{6}$. **2317.** $y=\frac{3}{8}\sqrt{2pa}$.

2318. $12\pi^3 r^2$. **2319.** $\left(0,\ \frac{256a}{315\pi}\right)$. **2320.** $6\pi^2 ab^2$. **2321.** $12\pi a^2$.

2322. $\frac{9}{2}\pi a^2$. **2323.** 23,7 m.

2324. $x_2=x_1+\sin\left(\frac{2\pi t_2}{T}+\varphi_0\right)-\sin\left(\frac{2\pi t_1}{T}+\varphi_0\right)$.

2326. $v=\frac{mg}{k}(1+e^{-\frac{kt}{m}})$; $v_\infty=\frac{mg}{k}$; $s=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}-\frac{m}{k}\right)$.

2327. 0,466 km/час. **2328.** 0,00082 sek.

2329. $\frac{8}{9}$ обрта у sek. **2330.** Кроз 6 min. 18 sek.

2331. $\frac{g^2M^3}{6m^2}$ ерга. **2332.** 240π kgm. **2333.** $16{,}3\cdot 10^{10}$ kgm.

2334. 353 250 kgm. **2335.** $\frac{\pi\gamma R^2H^2}{4}$.

2336. $250\pi R^4=101{,}8$ kgm. **2337.** $\frac{\pi\gamma R^2H^2}{12}$.

2338. $\frac{\pi\gamma R^2H^2}{6}=26\,800$ kgm. **2339.** $\frac{4\gamma abH^2}{15}=240$ kgm.

2340. $\frac{ab^2L\gamma}{6}(3\pi+4)$. **2341.** $\frac{Sl^3\omega^2\gamma}{6}\cong 4{,}1\cdot 10^8$ ерга.

2342. $\frac{ab^3d\omega^2\gamma}{6}\cong 1{,}152$ kgm. **2343.** $\frac{ah^3d\omega^2\gamma}{24}\cong 0{,}05$ kgm.

2344. $\frac{a^3hd\omega^2\gamma}{60}\cong 0{,}016$ kgm. **2345.** $\frac{\pi R^4h\omega^2\gamma}{4}$.

2346. ~ 110 g/cm². **2347.** $\frac{\pi^2R^2Mn^2}{3600}$ ерга.

2348. $\frac{\pi R^2Mn^2}{1800}\left(\frac{3}{2}\pi-4\right)$ ерга. **2349.** $\frac{kmM}{a(a+l)}$; $\frac{a+l}{a}M$.

2350. $\frac{kM^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}$. **2351.** $\frac{2kmM}{\pi r^2}$. **2352.** $\frac{kmMa}{(R^2+a^2)^{3/2}}=\frac{kmM\cos^3\varphi}{a^2}$.

2353. $\frac{2kmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$. **2354.** $2\pi km\sigma$. **2355.** $2km\gamma$.

2357. $2km\gamma h\left\{1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2-r^2}}\right\}$. **2358.** $\frac{kmM}{l}\ln\frac{r(r_1+l)}{r_1(r+l)}$.

2359. $\frac{kmM}{R}$. **2360.** $\frac{ab^2}{2}=18{,}75$ kg. **2361.** 17,7 cm. од површине.

2362. $\frac{ah^2}{6}$. **2363.** $\frac{ah^2}{3}$. **2364.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **2365.** 22,5 тоне.

2366. $\frac{2}{3}\cdot\gamma a^2 b$. **2367.** $\frac{\gamma^2 H^2 S}{2}=32$ kgm.

2368. $\frac{1}{2}SH^2(1-\gamma)^2=2$ kgm. **2369.** $\frac{4}{3}\pi R^4$. **2370.** 28,4 cm³.

2371. $\sim 0{,}206$ cm². **2372.** 64,6 sek. **2373.** 1 час 6 min. 53 sek.

2374. $\frac{2aL\sqrt{2\delta}}{3s\sqrt{g}}(2\sqrt{2}-1)$. **2375.** Кроз 20 min. **2376.** ~ 135 kgm.

2377. $\sim 3{,}4$ kgm. **2378.** 7,16 kgm.; 16,63 kgm.; 23,82 kgm.; ıa.
2379. 278 kgm.

Упутство. Искористити формулу $pv=\frac{p_0v_0}{273}(273+\vartheta)$, где је ϑ температура по Целзијусу; остале ознаке су јасне.

2380. 2,914. **2381.** $H_1=H\frac{\ln\frac{a}{c}}{\ln\frac{a}{b}}=15$ cm; $\frac{1}{8}$ %.

2382. $\frac{1}{1024}$ од првобитне количине светлости.

2383. На полу више: $\frac{Q_{\text{пол}}}{Q_{\text{екв}}}=\pi\sin 23^0>1$.

2384. $\frac{kI}{\sqrt{a^2+R^2}}$, где је k неки коефициент пропорционалности

2385. $k_1 I(\sqrt{a^2+R^2}-a)$. **2386.** За 82 min. **2387.** Нешто више од 5°

2388. $E=E_0e^{-kt}$. **2389.** $\frac{E}{r}$. **2390.** $\frac{2\sigma}{a}$.

2391. $v=v_0e^{-\frac{1}{cR}t}$. **2392.** 40 ерга. **2393.** 5 cm.

2394. $\frac{\rho l}{\pi ab}$ ом. **2395.** $\frac{2\rho l}{\pi(a^2-b^2)}\ln\frac{a}{b}$ ом. **2396.** 946,2 кулона.

2397. 1092,5 кулона. **2398.** 1609 кулона. **2399.** $\frac{E_c^2}{2}$.

2400. $\frac{E_0I_0T}{2}\cos\varphi_0$. **2401.** $\sim$ за 7 min. 4 sek.

Упутство. Поћи од Џаул-Ленкова закона: $Q=0{,}24\cdot I^2Rt$, где је Q количина топлоте (у малим калоријама), I – јачина струје (у амперима), R – отпор спирале (у омима), t – време (у секундима), — и од Њутновог закона хлађења (види задатке 2388–2389).

2402. 7,8 литара.

Упутство. Искористити Фарадејев закон (количина материје која се издвоји на електродама при електролизи, пропорционална је

јачини струје и времену), и правило према којему електрична проводљивост (величина реципрочна отпору) слабог раствора је пропорционална његовој концентрацији.

2403. Тачан одговор је 217,5 минута; ако се занемари промена запремине воде, добија се 216,4 мин. Према томе, у конкретном случају је потпуно дозвољено не узимати у обзир мењање запремине воде.

Упутство. Да би се могло одговорити на друго питање задатка, мора се узети у обзир да се со и вода разлажу у еквивалентним количинама. Док се разложи a мола соли разложи се a мола воде, што даје 18 a cm³ (молекуларна тежина воде је 18).

2404. Кроз 37 min. 20 sek.

2405.
$$t=\frac{3T}{\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\left\{\frac{1}{3}\ln\frac{2\sqrt{\sqrt[3]{\frac{M^2}{M_0^2}}-\sqrt[3]{\frac{M}{M_0}}+1}}{\sqrt[3]{\frac{M}{M_0}}+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{\frac{M}{M_0}}-1}{3}\right\}.$$

2406. 2,488 g. **2407.** $\frac{8}{9}$ g. **2408.** $A=\frac{(kA_0+n)e^{kt}-n}{k}$.

2409. 0,0239 мол/литар; кроз 18 дана и 9 часова; 100 % се никада неће разложити (теориски реакција неће никад доћи до краја).

2410. $k=0{,}0514$. **2411.** 0,692 g. **2412.** Кроз 47 min. 50 sec.

2413. 0,0368 мола. **2414.** $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)-k_1x^2$.

2415. $t=\frac{1}{k}\ln\frac{m+kM_0}{m+kM}$. **2416.** $1+y^2=C(1-x^2)$.

2417. $x^2y^2+x^2-y^2=C$. **2418.** $y^2+x^2=\ln Cx^2$. **2419.** $y+a=C\sin x$.

2420. $Cx=\frac{y-1}{y}$. **2421.** $y=a\operatorname{tg}\left(C-\frac{\sqrt{ax-x^2}}{x}\right)$.

2422. $10^x+10^{-y}=C$. **2423.** $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$.

2424. $y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}=C$. **2425.** $y=1$. **2426.** $y=\frac{1+x}{1-x}$.

2427. $\frac{\cos x}{\cos y}=\sqrt{2}$. **2428.** $y=\frac{b+x}{1+bx}$. **2429.** Хипербола $xy=6$.

2430. Парабола $y^2=Cx$. **2431.** $x=x_0+\frac{kn}{n-1}y^{n-1}$.

2432. $(x-C)^2+y^2=a^2$. **2433.** Трактриса $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$.

2434. $y=e^{\frac{x-a}{a}}$. **2435.** Равностране хиперболе $y^2-x^2=C$.

2436. $y^2=a^2+Ce^{-\frac{x}{a}}$. **2437.** $e^y=C(kx^2-1)$. **2439.** $\sim 135{,}6$ cm/sek.

2440. $V=V_0e^{\frac{3k}{m}\left(\sqrt[3]{M_0-mt}-\sqrt[3]{M_0}\right)}$, где је

$$k=\sqrt[3]{\frac{3M_0}{4\pi}}\,\frac{f_0}{M_0V_0}.$$

2442. $p=\frac{Me^{l\omega^2x^2}}{\int_0^1 e^{k\omega^2x^2}\,dx}$. Практично је важан случај кад је ω врло велико (центрифуге). Уместо да се израчунава интеграл у имениоцу (он се не може изразити помоћу елементарних функција) ставља се $\omega=\infty$, тачније говорећи израчунава се $\lim\limits_{\omega\to\infty} p$. То доводи управо до задатка 1898 главе VI.

Упутство. Резонујући исто као код извођења хипсометриске формуле (види Курс, том I, стр. 320), добија се диференцијална једначина $s\,dp=\omega^2x\,dm$, где је dm маса елемента CD. Даље је $\gamma=2kp$ (један од облика Бојл-Мариотовог закона; коефицијенат пропорционалности означен је са $2k$ ради упрошћавања даљих извођења). Као резултат се добија једначина са раздвојљивим променљивим. Њена интеграција даје $p=Cf(x)$, где је C интеграциона константа. Очигледно је $dm=\gamma\,s\,dx=2kps\,dx$, дакле

$$M=2ksC\int_0^1 f(x)\,dx,$$

одакле се одређује константа C.

2443. $H=\left[\sqrt{h}-\frac{\sqrt{2gs}}{4S}\,T\right]^2$. **2444.** $\ln\frac{\vartheta+\theta}{\vartheta_0+\theta}=\frac{k_0}{2}(2t+\alpha t^2)$.

2445. $\vartheta-\vartheta_0+0{,}002(\vartheta^2-\vartheta_0^2)=0{,}00008\,\frac{E_1^2t^3}{R_0T^2}$.

2446. $\frac{A^2-A_0^2}{A_1^2-A_0^2}=\frac{2E_0t-\alpha t^2}{2E_0T-\alpha T^2}$, где је $\alpha=\frac{E_0-E_1}{T}$.

2448. $c=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x^3}{H^3}}$. **2449.** $c=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1-\left(1-\frac{h}{H}\right)^3}}$.

2450. $\ln\frac{c}{a}=\frac{3Rx^2-x^3}{4R^3}\ln\frac{b}{a}$.

2451. Ако је t време рачунато од поноћи и изражено у часовима, онда диференцијална једначина задатка има облик:

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}}=k\cos\frac{\pi(t-12)}{12}\cdot dt,$$

а S као функција од t – облик:

$$S=\frac{160\,000}{\left[9-\sin\frac{\pi(t-12)}{12}\right]^2}.$$

Функција $S(t)$ дефинисана је за $6\leqslant t\leqslant 18$.

Уз главу VIII

2452. $z=\frac{\pi}{3}(x^2y-x^3)$.

2453. $U=+\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}$.

2454. $z=+\sqrt{(x-y)^2+\frac{9v^2}{\pi^2(x^2+xy+y^2)^2}}$.

2455. $p=\frac{4{,}32(1+0{,}00366\,t)}{v}$.

2456.

y \ x	0	1	2	3	4	5
0	1	3	5	7	9	11
1	—2	0	2	4	6	8
2	—5	—3	—1	1	3	5
3	—8	—6	—4	—2	0	2
4	—11	—9	—7	—5	—3	—1
5	—14	—12	—10	—8	—6	—4

2457.

y \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	0,10	0,14	0,22	0,32	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,90	1,00
0,2	0,20	0,22	0,28	0,36	0,45	0,54	0,63	0,73	0,82	0,92	1,01
0,3	0,30	0,32	0,36	0,42	0,50	0,58	0,67	0,76	0,85	0,95	1,04
0,4	0,40	0,41	0,45	0,50	0,57	0,64	0,72	0,81	0,89	0,98	1,08
0,5	0,50	0,51	0,54	0,58	0,64	0,71	0,78	0,86	0,94	1,03	1,12
0,6	0,60	0,61	0,63	0,67	0,72	0,78	0,85	0,92	1,00	1,08	1,16
0,7	0,70	0,71	0,73	0,76	0,81	0,86	0,92	0,99	1,06	1,14	1,22
0,8	0,80	0,81	0,82	0,85	0,89	0,94	1,00	1.06	1,13	1,20	1,28
0,9	0,90	0,90	0,92	0,95	0,98	1,03	1,08	1,14	1,20	1,27	1,34
1	1,00	1,00	1,01	1,04	1,08	1,12	1,16	1,22	1,28	1,34	1,41

2458. $\frac{9}{16}$. **2460.** $\frac{\varphi(a)\,\psi\left(\frac{1}{a}\right)-\psi(a)\,\varphi\left(\frac{1}{a}\right)}{\varphi(1)\cdot\psi(1)}$; $a-\frac{1}{a}$.

2461. $\varphi(u)\equiv\sin u$; $\psi(u)\equiv\cos u$. **2462.** Друга се брже мења.

2463. Парабола с осом паралелном ординатној оси.

2464. Функција v је четворозначна.

2465. У идентитет $f(mx;my)=m^k f(x;y)$ ставимо $m=\frac{1}{x}$; тада добијамо $f\left(1;\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^k}f(x,y)$. Стављајући сада $f\left(1;\frac{y}{x}\right)=F\left(\frac{y}{x}\right)$, добијамо $f(x;y)=x^k F\left(\frac{y}{x}\right)$, што и треба доказати.

2466. $z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

2467. У идентитет $F(mx;my;mz)\equiv F(x;y;z)$; ставити $m=\frac{1}{z}$ итд.

2470. а) $z_1=1$; б) $z_2=1$; в) $z=\frac{1}{\cdot 5}$; г) није дефинисана; д) $z=\div 1$.

2471. $z=(x+y)^{x-y}+(x+y)^{y-x}$. **2473.** $z=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

2474. $U=(x^2+y^2+z^2)^2-\frac{x^2+y^2+z^2}{4}[(x^2+y^2+z^2)+3(x+y+z)^4]$.

2475. $z=\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^v+u$; $u=x^2+y^2$; $v=xy$.

2476. $u=\frac{\omega}{\sqrt{\xi+\eta+\zeta}}+\ln\frac{\xi+\eta+\zeta}{\omega}+\omega^3$;

$\omega=1-\alpha$; $\xi=\beta^2$; $\eta=\gamma^2$; $\zeta=\delta^2$;

$\alpha=xyz$; $\beta=x+y$; $\gamma=x+z$; $\delta=y+z$.

2477. $x+$const. и $y=$const. – парабола; $z=$const. $\neq 0$ – γ, хиперболе; $z=0$ – пар правих. Површина је хиперболички параболоид („седло") (в. сл. 141).

2478. $x=$const и $y=$const – праве; $z=$const – хиперболе ($z=0$ – пар правих). Такође „седло" као и у претходном задатку, само окренуто за 45° (в. сл. 142).

2479. $x=$const – параболе; $y=$const – кубне параболе; $z=0$ семикубна парабола (в. сл. 143).

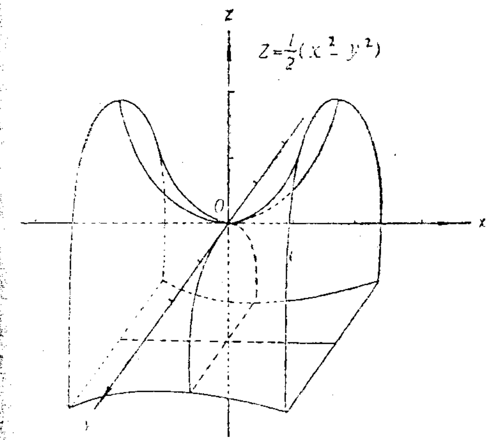
2480. Пресеци су елипсе и семикубне параболе (в. сл. 144).

2481. Види слику 145 и 146.

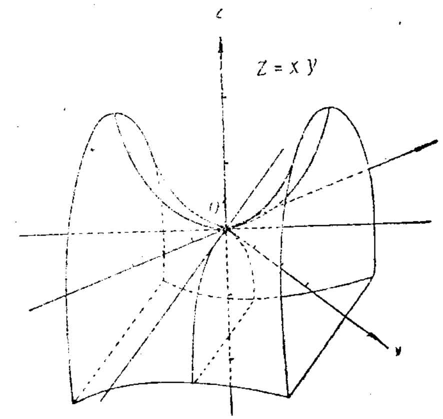
2482. Унутрашњост елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и њена контура.

2483. Област ван параболе $y^2=4x-8$.

2484. Унутрашњи део десног и левог бочног угла који чине праве $y=1+x$ и $y=1-x$, укључујући и ове праве, али без тачке $(0;1)$.

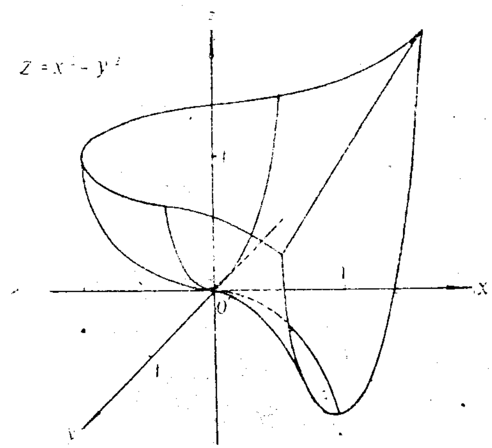


Сл. 141

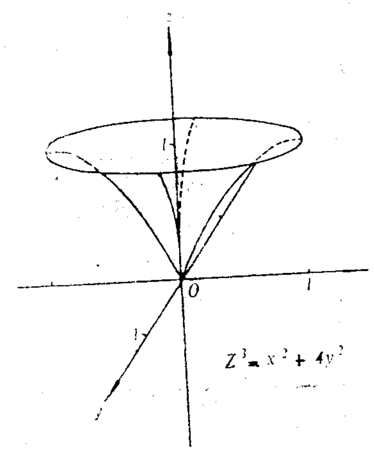


Сл. 142

2485. Унутрашњост угла између полуправих које иду десно од OY осе по бисектрисама координатних углова (укључујући и границу).



Сл. 143



Сл. 144

2486. Иста област као и у претходном задатку, али без границе.

2487. Отворена област, шрафирана на слици 147.

2488. Прстен између кругова $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$.

2489. Фигура ограничена параболом $y^2=4x$ и кругом $x^2+y^2=1$, укључујући лук параболе и искључујући лук круга.

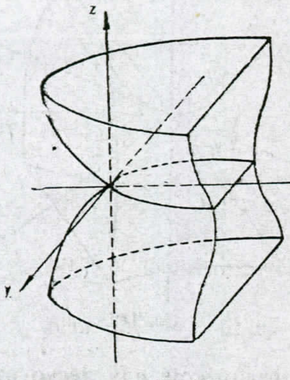
2490. Затворена област ограничена позитивним делом апсцисне осе и параболом $y=x^2$ (укључујући границу).

2491. Део равни XOY, који лежи изван јединичних кругова са центрима $(-1;$ и $(1;\ 0)$.

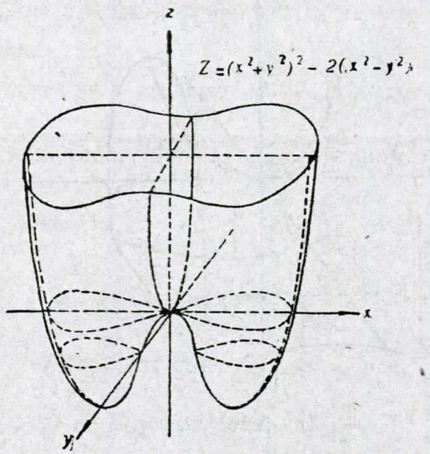
2492. Први и трећи координатни угао искључујући границу.

2493. Цела раван XOY искључујући тачке круга $x^2+y^2=R^2$.

2494. Само на кругу $x^2+y^2=R^2$.



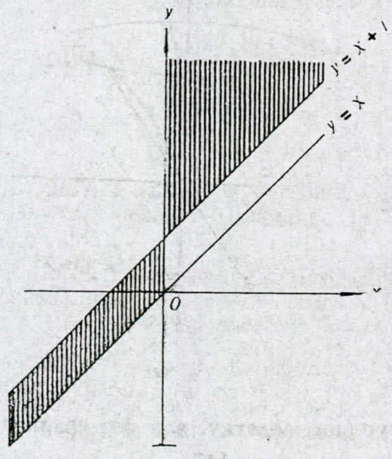
Сл. 145



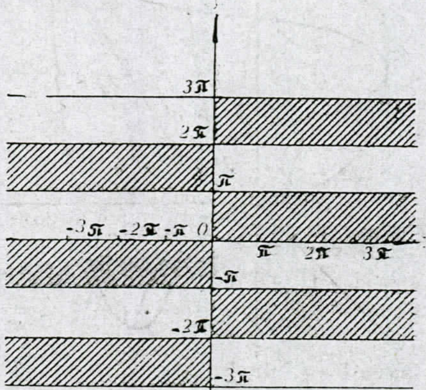
Сл. 146

2495. Цела раван искључујући праве $x+y=n$, где је n цео број.

2496. Унутрашњост круга $x^2+y^2=1$ и прстен $2n<x^2+y^2<2n+1$ (n је природан број), укључујући границе.



Сл. 147



Сл. 148

2497. Област шрафирана на сл. 148, укључујући границе.

2498. Иста област као у претходном задатку, искључујући границе.

2499. Део равни XOY између увојка $y=\frac{1}{1+x^2}$ и његове асимптоте, укључујући границе.

2500. Први октант, искључујући границе.

2501. Део простора између сфера $x^2+y^2+z^2=r^2$ и $x^2+y^2+z^2=R^2$, укључујући спољашњу и искључујући унутрашњу сферу.

2502. $0<y<2;\quad -1<y-\frac{1}{2}x<0.$ **2503.** $x^2\leqslant y\leqslant+\sqrt{x}.$

2504. $y>0;\quad y<x\sqrt{3};\quad y<(a-x)\sqrt{3}.$

2505. $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2;\quad -\infty<z<+\infty.$

2506. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2.$

2507. а) $x^2+y^2<4R^2;\quad x>0;\quad y>0;$

б) $-\infty<x<+\infty;\quad -\infty<y<+\infty.$

2508. $v=\frac{1}{6}xy\,(2R\pm\sqrt{4R^2-x^2-y^2})$, функција је двозначна; област дефинисаности функције је $x^2+y^2\leqslant 4R^2;\ x>0;\ y>0$. Област дефинисаности аналитичког израза је $x^2+y^2\leqslant 4R^2$.

2509. За $0\leqslant x\leqslant 1;\quad 0\leqslant y\leqslant 1\quad U=xy.$

За $0\leqslant x\leqslant 1;\quad 1<y\leqslant 2\quad U=x.$

За $1<x\leqslant 2;\quad 0\leqslant y\leqslant 1\quad U=y.$

За $1<x\leqslant 2;\quad 1<y\leqslant 2\quad U=xy-x-y+2$. Изван показаних области функција није дефинисана.

2510. Једна тачка $(0;\ 0)$. У близини те тачке функција може да узима колико год се хоће велике позитивне вредности.

2511. Све тачке чије су координате цели бројеви.

2512. На симетрали координатнога угла $y=x$.

2513. На правим $x=m$, $y=n$, где су m и n цели бројеви.

2514. На параболи $y^2=2x$.

2515. а) линија прекида је права $x+y=m$, где је m цео број. „Степенаста" површина: при прелазу на раван XOY кроз праву $x+y=m$ функција скоком порасте за 1.

б) линије прекида су кругови чији су полупречници цели бројеви. На сваком таквом кругу вредност функције порасте за 1.

в) За $x=0$ функција није дефинисана, дуж правих $y=kx$ (k је цео број) функција је прекидна. Има облик степеница које се дижу у виду завртња.

2517. 2. **2518.** 0. **2519.** 0. **2520.** Нема граничне вредности.

2521. 0. **2522.** 0.

2524. Хиперболе, чији заједнички центар лежи у координатном почетку и за које су координатне осе асимптоте.

2525. Кубна парабола.

2529. Касинијеви овали. Минимуми у тачкама $A(-1;0)$ и $B(1;0)$.

2534. A и C су максимуми, B је минимум; у околини тачке D површина има облик „седла"; дуж линије EF функција задржава сталну вредност, тако да је EF нивоска линија.

2535. Посебна вредност израза $\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial T}$ за $T=T_0$.

2536. $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ је тангенс нагибног угла тангенте криве у тачки x_0 и у тренутку t_0, $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ је брзина вертикалног померања тачке за $x=x_0$ и $t=t_0$.

2537. $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ је брзина мењања температуре; $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ је брзина мењања температуре по дужини.

2540. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1;\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-1.$ **2541.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3;\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x.$

2542. $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}=ae^{-t};\quad \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}=-axe^{-t}+b.$

2543. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2};\quad \dfrac{\partial z}{\partial v}=-\dfrac{u}{v^2}+\dfrac{1}{u}.$

2544. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}.$

2545. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=30xy(5x^2y-y^3+7)^2;\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2).$

2546. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\dfrac{1}{3}\dfrac{y}{x\sqrt[3]{x}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

2547. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}.$

2548. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2+x^2}.$

2549. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}^2\dfrac{y}{x}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}^2\dfrac{y}{x}}.$

2550. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$

2551. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2};$

2552. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2x}{y\sqrt{(x^2+y^2)}}.$

2553. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.$

2554. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{y\sin\dfrac{2x}{y}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x}{y^2\sin\dfrac{2x}{y}}.$

2555. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}.$

2556. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\ln(x+\ln y)};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y\ln(x+\ln y)}.$

2557. $\dfrac{\partial u}{\partial v}=-\dfrac{w}{v^2+w^2};\quad \dfrac{\partial u}{\partial w}=\dfrac{v}{v^2+w^2}.$

2558. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x};$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}.$

2559. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2y}{x^3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x^2}}\ln 3;\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x^2}}\ln 3.$

2560. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{yx}{1+xy}\right].$

2561. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y}.$

2562. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x^{x^y}\cdot x^{y-1}(y\ln x+1);\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^{x^y}\cdot x^y\cdot\ln^2 x.$

2563. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz;\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=xz;\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=xy.$

2564. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+z;\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=x+z;\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y.$

2565. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y-1;\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=z^2+3x;\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=2yz+1.$

2566. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

2567. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=yz+zv+vy;\quad \dfrac{\partial w}{\partial y}=xz+zv+vx;$

$\dfrac{\partial w}{\partial z}=xy+yv+vx;\quad \dfrac{\partial w}{\partial v}=yz+zx+xy.$

2568. $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

2569. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2+z^2)$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=2z\cos(x^2+y^2+z^2)$.

2570. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}$.

2571. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

2572. $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z}\cdot zy^{z-1}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}y^z\cdot\ln x\cdot\ln y$.

2573. $\frac{2}{5}$. **2574.** $\frac{1}{2}$. **2575.** $2\sqrt{2}$.

2576. $\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$ и $-\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$.

2577. 1 и -1. **2578.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2579.** $\frac{3}{2}$. **2580.** $-\frac{13}{22}$.

2581. $\frac{1}{270}$. **2582.** $\sim 0{,}0187$ **2583.** $\frac{97}{600}$. **2584.** 45°.

2585. 30°. **2586.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{7}$.

2587. $d_xz=(y^3-6xy^2)\,dx$; $d_yz=(3xy^2-6x^2y+8y^3)\,dy$.

2588. $d_xz=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d_yz=\frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2589. $d_xz=\frac{y(y^2-x^2)\,dx}{(x^2+y^2)^2}$; $d_yz=\frac{x(x^2-y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$.

2590. $d_xu=\frac{3x^2\,dx}{x^3+2y^3-z^3}$; $d_yu=\frac{6y^2\,dy}{x^3+2y^3-z^3}$; $d_zu=\frac{-3z^2\,dz}{x^3+2y^3-z^3}$.

2591. $xy\{(2y^3-3xy^2+4x^2y)\,dx+(4y^2x-3yx^2+2x^3)\,dy\}$.

2592. $\frac{x\,dx-y\,dy}{x^2+y^2}$. **2593.** $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$.

2594. $\frac{2(s\,dt-t\,ds)}{(s-t)^2}$. **2595.** $\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

2596. $\cos xy\cdot(y\,dx+x\,dy)$.

2597. $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$. **2598.** $\frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}(x\,dy-y\,dx)$.

2599. $\frac{y\,dx+x\,dy}{1+x^2y^2}$. **2600.** $y^{x-1}(y\ln y\cdot dx+x\,dy)$.

2601. $x^{zy-1}(yz\,dx+zx\ln x\cdot dy+xy\ln x\cdot dz)$.

2602. 0,08. **2603.** 0,25 e. **2604.** $\frac{1}{36}$. **2605.** $\sim 7{,}5$.

2606. $\sim 0{,}005$. **2607.** $\sim 1{,}08$. **2608.** 5. **2609.** $1{,}8\pm0{,}2$.

2610 4740 ± 90. **2611.** $\delta S=2\delta a+\frac{B\sin C}{\sin B\cdot\sin(B+C)}\delta B+$

$+\frac{C\cdot\sin B}{\sin C\cdot\sin(B+C)}\delta C$.

2612. Расте брзином 443 cm²/sek. **2613.** $\Delta v\approx 2575$ cm³.

2615. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2616** 0. **2617.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2618.** 5. **2619.** $\frac{98}{13}$.

2620. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}$. **2621.** а) не; б) да; в) не. **2622.** $\{-2;\,1\}$.

2623. $\{10xy-3y^3;\ 5x^2-9xy^2+4y^3\}$. **2624.** $2\bar{i}+4\bar{j}$.

2625. $\frac{2\bar{i}+\bar{j}}{3}$. **2626.** $\frac{x\bar{j}-y\bar{i}}{x^2+y^2}$. **2627.** $\operatorname{tg}\varphi\approx 0{,}341$; $\varphi\approx 18°50'$.

2628. $\operatorname{tg}\varphi\approx 4{,}86$; $\varphi\approx 78°24'$. **2629.** $\cos\alpha\approx 0{,}990$; $\alpha\approx 8°$.

2630. $\cos\alpha\approx -0{,}199$; $\alpha\approx 101°30'$.

2631. $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{7}{3};\ -\frac{3}{4}\right)$.

2632. Све тачке кружне линије $x^2+y^2=\frac{2}{3}$. **2633.** $(0;0)$.

2634. $(1;0)$. **2635.** Нема сингуларних тачака. **2636.** Тачке праве $x=1$.

2637. $(0;0)$; у овој тачки градијент не постоји.

2638. $\{3x^2y^2z;\ 2x^3yz;\ x^3y^2\}$. **2639.** $\frac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2642. $(1;\ 1;\ -1)$ и $(-1;\ -1;\ 1)$.

Уз главу IX

2644. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

2645. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2646. $\frac{\partial z}{\partial x}=2\,(2\,x+y)^{2x+y}\,[1+\ln(2\,x+y)];$

$\frac{\partial z}{\partial y}=(2\,x+y)^{2x+y}\,[1+\ln(2\,x+y)].$

2647. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{x\ln y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3\ln x}{y\ln^2 y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right).$

2648. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{\sin\pi xy}\,[1+\pi xye^{\sin\pi xy}\cos\pi\,xy];$

$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\sin\pi xy}\,[1+\pi\,xye^{\sin\pi xy}\cos\pi xy].$

2649. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}\,2\,x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}\,2\,y.$

2650. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yx^{y-1}}{2\,(1+x^y)\sqrt{x^y}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^y\ln x}{2\,(1+(x^y)\sqrt{x^y}}.$

2651. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2+2\,xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2+2\,xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}.$

2652. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}.$

2653. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}.$

2654. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1+\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^4}{1-\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^4};$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1+\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^4}{1-\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^4}.$

2655. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{4\,kx}{(x^2+y^2+z^2)^3};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{4\,ky}{(x^2+y^2+z^2)^3};$

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{4\,kz}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$

2656. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z\,(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z\,(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$

2657. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2\,x}{x^2+y^2+z^2-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ итд.

2658. $\frac{\partial w}{\partial x}=\operatorname{tg}^3(x^2y^2+z^2v^2-xyzv)\cdot(2\,xy^2-yzv)$ итд.

2659. $(\cos t-6\,t^2)\,e^{\sin t-2\,t^3}.$ **2660.** $\frac{1}{1+x^2}.$

2661. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y};\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x+3\,x^2\,e^{x^3}}{e^x+e^{x^3}}.$ **2662.** $\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}.$

2663. $2\,e^{2t}+e^t(\sin t+\cos t)+\sin 2\,t.$

2664. $\frac{3-4\,t^{-3}-\frac{1}{2}\,t^{-\frac{1}{2}}}{\cos^2(3\,t+2\,t^{-2}-\sqrt{t})}.$ **2665.** $\frac{3}{\sqrt{1-t^2}}.$

2666. $e^{ax}\sin x.$ **2667.** $\frac{\partial z}{\partial u}=3\,u^2\cos v\sin v\,(\cos v-\sin v);$

$\frac{\partial z}{\partial v}=u^3\,[\cos^3 v+\sin^3 v-2\cos v\sin v\,(\cos v+\sin v)];$

2668. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2\,x\ln y}{v}+\frac{3\,x^2}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2\,ux\ln y}{v^2}-\frac{2\,x^2}{y}.$

2669. $dz=\frac{xy}{(x+y)^2}\left[\frac{x+y}{1+(yx+x+y)^2}-\operatorname{arc\,tg}(xy+x+y)\right](dx+dy)+$

$+\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}(xy+x+y)}{x+y}+\frac{1}{(x+y)\,[1+(xy+x+y)^2]}\right](1+xy)(xdy+ydx).$

2670. $dz=\frac{1}{x^2y^2}\,e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\,[(2\,x^3y+2\,x^4+2\,x^2y^2-x^2-y^2)\,y\,dx+$

$+(2\,xy^3+2\,x^2y^2+2\,y^4-x^2-y^2)\,x\,dy].$

2673. $\frac{\partial z}{\partial x}=2\,x\frac{\partial}{\partial u}f(u,v)+ye^{xy}\frac{\partial}{\partial v}f(u,v),$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\,y\frac{\partial}{\partial u}f(u,v)+xe^{xy}\frac{\partial}{\partial v}f(u,v),$ где $u=x^2-y^2,\quad v=e^{xy}.$

2678. $\frac{y\,(3\,x^2-y^2)}{x\,(3\,y^2-x^2)}.$ **2679.** $\frac{x\,(y^2-2\,x^2)}{y\,(2\,y^2-x^2)}.$

2680. $-\frac{e^y+ye^x-ye^{xy}}{e^x+xe^y+xe^{xy}}.$ **2681.** $-\frac{x}{y}\cdot\frac{2\,(x^2+y^2)-a^2}{2\,(x^2+y^2)+a^2}.$

2682. $\frac{y\,(\cos(xy)-e^{xy}-2\,x}{x\,[x+e^{xy}-\cos(xy)]}.$ **2683.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$

2684. $\frac{y^2}{1-xy}.$ **2685.** $\frac{a^2}{(x+y)^2}.$ **2686.** $-\frac{2\,y}{x\,(1-y)}.$

2687. $\frac{y}{y-1}$. **2688.** $\frac{yx^{y-1}-y^x \ln y}{xy^{x-1}-x^y \ln x}$. **2690.** $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3}$.

2691. -1. **2694.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2 x}{a^2 z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2 y}{b^2 z}$.

2695. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{1+z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+z}$.

2696. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{z^2+xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{z^2+xy}$.

2697. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x(z-1)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y(z-1)}$.

2699. $dz=-\frac{1}{\sin 2x}(\sin 2x\, dx+\sin 2y\, dy)$.

2700. $x^2+y^2+z^2=a^2$ **2701.** $z=\frac{x^2-y^2}{4}$. **2702.** $z=\frac{3xy-x^3}{2}$.

2703. $z=k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$. **2704.** а) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{a}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{a}$.

2705. а) $\frac{\partial z}{\partial x}=x\sqrt{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-y\sqrt{z}$; б) $\frac{\partial z}{\partial x}=ve^{-u}\cos v-ue^{-u}\sin v$;

$\frac{\partial z}{\partial y}$ $ve^{-u}\sin v+ue^{-u}\cos v$.

2706. $2(x\,dx+y\,dy)$. **2707.** $2(x\,dx+y\,dy)$.

2714. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2y^2+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2715. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}+x^3}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2(x^2+y^2)^{3/2}}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

2716. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$.

2717. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2ab\cos 2(ax+by)$.

2718. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{xe^y+2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(xe^y+1)e^{xe^y+y}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=e^{xe^y+y}(xe^y+1)$.

2719. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

2720. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\ln y\cdot(\ln y-1)\cdot x^{\ln y-2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\ln x\cdot(\ln x-1)\cdot y^{\ln x-2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{yx}e^{\ln x\cdot\ln y}(1+\ln y\ln x)$.

2721. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{yx^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

2722. $\frac{y(x-z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}$. **2723.** $2y^2e^{xy^2}(2+xy^2)$.

2724. $\frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$. **2725.** $-x^2y\cos(xy)-2x\sin(xy)$.

2726. $(x^2y^2z^2+3xyz+1)e^{xyz}$.

2727. $mn(n-1)(n-2)p(p-1)x^{m-1}y^{n-3}z^{p-2}$.

2741. $\frac{(u^6-x^2y^2z^2-3u^3xyz)uz}{(u^3-xyz)^3}$.

2742. $\frac{\overbrace{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}^{(n-1)\text{ множитеља}}}{n-1}$.

Упутство: Нека су $x_1,\ldots,x_n$ независно промењиве. Исто као и за диференцијал функције двеју независно промењиве, тако се и овде може израз за диференцијал p-тог реда написати симболички

$$d^p z=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^p z.$$

Одавде следи да ће различитих парцијалних извода p-тог реда бити онолико колико буде различитих чланова после свођења у изразу $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^p$, а овај број може се израчунати полазећи од Њутновог биномног обрасца и применом закона индукције.

2743. $-2y\,dx^2+4(y-x)\,dx\,dy+2x\,dy^2$.

2744. $\frac{-dx^2+2\,dx\,dy-dy^2}{(x-y)^2}$.

2745. $\frac{(3x^2-y^2)\,dx^2+8xy\,dx\,dy+(3y^2-x^2)\,dy^2}{(x^2+y^2)^3}$.

2746. $2\sin 2y\,dx\,dy + 2x\cos 2y\,dy^2$.

2747. $e^{xy}(y\,dx + x\,dy)^2 + 2e^{xy}\,dx\,dy$.

2748. $2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx)$.

2749. $-\cos(2x+y)(2\,dx+dy)^3$.

2750. $-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

2751. $-\dfrac{6(dx+dy+dz)^4}{(x+y+z)^4}$.

2752. $-\dfrac{c^4}{z^3}\left\{\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dx^2}{a^2}+\dfrac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy+\left(\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dy^2}{b^2}\right\}$.

2753. $(x^3+2y^3-xy)+(3x^2-y)h+(6y^2-x)k+3xh^2-$
$-hk+6yk^2+h^3+2k^3$.

2754. $15h^2-6hk+k^2+h^3$.

2755. $\Delta z = -2h+7k-4h^2+4hk+2k^2-2h^3-h^2k+$
$+\dfrac{5}{2}hk^2+\dfrac{1}{4}k^3-h^8k+\dfrac{1}{2}h^2k^2+\dfrac{1}{4}hk^3; \quad z_1 \cong 2{,}1726.$

2756. $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+(2Ax+Dy+Fz)h+$
$+(2By+Dx+Ez)k+(2Cz+Ey+Fx)l+Ah^2+Bk^2+Cl^2+$
$+Dhk+Ekl+Fhl.$

2757. $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)-$

$$-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2}{4}-\frac{1}{6}\left\{\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\right.$$
$$+3\sin\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+$$
$$\left.+\sin\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right\}.$$

2758. $z=x+(x-1)(y-1)+\dfrac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\cdots;\ 1{,}1^{1{,}02}\approx 1{,}1021.$

2759. $e^x\sin y+e^x(h\sin y+k\cos y)+\dfrac{e^x}{2!}\{(h^2-k^2)\sin y+2hk\cos y\}+$
$+\dfrac{e^x}{3!}\{(h^3-3hk^2)\sin y+(3h^2k-k^3)\cos y\}+\cdots$

2760. $y+xy+\dfrac{3x^2y-y^3}{3!}+\cdots$

2761. $y+\dfrac{1}{2!}(2xy-y^2)+\dfrac{1}{3!}(2y^3-3xy^2+3x^2y)+\cdots$

2762. $\Delta z=\dfrac{\Delta x+\Delta y}{x+y}-\dfrac{2}{(2!)^2}\left(\dfrac{\Delta x+\Delta y}{x+y}\right)^2+$
$+\dfrac{3}{(3!)^2}\left(\dfrac{\Delta x+\Delta y}{x+y}\right)^3+\cdots\dfrac{n(-1)^n}{(n!)^2}\left(\dfrac{\Delta x+\Delta y}{x+y}\right)^n+\cdots$

2763. $1+(x+y)+\cdots+\dfrac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+\cdots$

2764. $x-y-\dfrac{x^3-y^3}{3}+\dfrac{x^5-y^5}{5}+\cdots$

2765. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^n y^m}{n\,m}$.

2766. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{(x+y)^n-x^n-y^n}{n}$.

2767. $x=0$; $y=0$. Да би се уверили да је нађена тачка — тачка максимума, довољно је претставити функцију у облику

$$z=10-(x-y)^2-2x^2-y^2.$$

2768. $(2;\ -2)$. **2769.** $(-1;\ 1)$.

2770. $(0;0)$, $\left(-\dfrac{5}{3};\ 0\right)$, $(-1;2)$, $(-1;\ -2)$. **2771.** $\left(\dfrac{1}{2};\ -1\right)$.

2772. $(0;0)$, $(0;a)$, $(a;0)$, $\left(\dfrac{a}{3};\ \dfrac{a}{3}\right)$. **2773.** $(a;b)$, $(0;0)$.

2774. $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{6}\right)$. **2775.** $\left(\dfrac{b}{a};\ \dfrac{c}{a}\right)$.

2776. $\left(\dfrac{2}{3};\ -\dfrac{2}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5};\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5};\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

2777. $(2;1;7)$. **2778.** $(6;4;10)$. **2779.** $\left(\dfrac{4}{5};\ \dfrac{2}{5};\ \dfrac{2}{5}\right)$.

2780. $(-2;\ 0)$ и $\left(\dfrac{16}{7};\ 0\right)$. **2781.** $(1;1)$ и $(-1;\ -1)$.

2782. Највећа и најмања вредност леже на граници области; највећа је $z=4$ у тачкама $(2;0)$ и $(-2;0)$; најмања: $z=-4$ у тачкама $(0;2)$ и $(0;-2)$. Стационарна тачка $(0;0)$ не даје екстремума.

2783. Највећа вредност је $z=17$ у тачки $(1;2)$; најмања вредност је $z=-3$ у тачки $(1;0)$; стационарна тачка $(-4;6)$ лежи ван задате области.

2784. Највећа вредност је $z=4$ у стационарној тачки $(2;1)$ (тачка је, према томе, тачка максимума).

2785. $a=\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{3}$. **2786.** $a=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$.

2787. $\left(\dfrac{8}{5};\ \dfrac{16}{5}\right)$. **2788.** $\dfrac{x-a}{a}+\dfrac{y-b}{b}+\dfrac{z-c}{c}=0$.

2789. $x=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$; $y=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$. **2790.** $(;3\sqrt{39};\ 0)$.

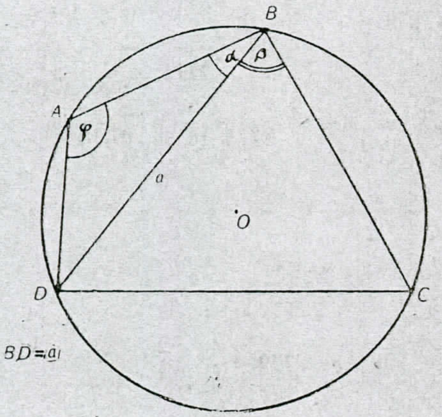
2792. Дијагонала четвороугла, која лежи наспрам датог угла, мора делити четвороугао на два равнокрака троугла.

Упутство: Посматрајмо четвороугао са датим углом, уписан у круг полупречника R (види слику 149). Датом углу одговара потпуно одређена тетива a и обрнуто. Сматраћемо R и a као дате. Узимајући произвољно вредности углова α и β (у границама које је лако одредити) добићемо све могуће четвороугле који задовољавају услове задатка. Површина таквог четвороугла биће функција од α и β, тј. $S=F(\alpha;\beta)$. Остаје још да се нађу вредности α и β за које функција $F(\alpha;\beta)$ има највећу вредност.

2793. Коцка. **2797.** У тачки (6; 4) — максимум.

2798. У тачки (1; 1) — минимум; $z=1$.

2799. $x=y=a$ или $x=y=-a$; $z=a^2$ (максимум) $x=a$; $y=-a$ или $x=-a$; $y=a$; $z=-a^2$ (минимум).



Сл. 149

2800. $x=y=-a\sqrt{2}$; $z=-\frac{\sqrt{2}}{a}$ (минимум). $x=y=a\sqrt{2}$; $z=\frac{\sqrt{2}}{a}$ (макс.)

2801. Стационарне тачке:

$x=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$; $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$.

2802. $x=y=z=3$; $u=9$ (мин.).

2803. Две од промењљивих једнаке су по 2, трећа је 1 (минимум, једнак 4); две од промењљивих једнаке су по $\frac{4}{3}$, трећа је $\frac{7}{3}$ $\left(\text{максимум, једнак } \frac{112}{27}\right)$.

2804. Испитати минимум функције $\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}$ за $x_1+\cdots+x_n=A-\text{const.}$ Уопште важи релација $\frac{\Sigma x_i^k}{n}\geqslant\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^k$, $k\geqslant 1$.

2805. $\left(\frac{21}{13};\ 2;\ \frac{63}{26}\right)$. **2806.** $(3;\ -1;\ 1)$.

2807. а) $(-2;\ 0;\ 0)$; в) $(2;\ 0;\ 0)$. **2808.** Коцка.

2809. Коцка. **2810.** $\frac{8\,abc}{3\sqrt{3}}$.

2811. Ако је x полупречник основе коморе, y висина цилиндричног дела, и z висина коничног завршетка онда морају постојати следеће релације: $2x=z\sqrt{5}$; $2y=z$. **2812.** Коцка.

2813. Свака страна основе је $2\alpha+\sqrt[3]{2v}$, а висина је двапут мања.

2814. $v_{max}=a^3$. **2815.** $S_{min}=3\sqrt{3}\,ab$. **2816.** $\sqrt{2S}$; $\sqrt{2S}$; $2\sqrt{S}$.

2817. Висина је $\frac{h}{3}$, стране основе $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$; $\frac{2b\sqrt{2}}{3}$, и запремина $\frac{8}{81}abh$. **2818.** Правилни тетраедар.

2819. а) $x=\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$; $y=\frac{R\sqrt{10}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$;

б) $y=\frac{R\sqrt{5}}{\sqrt{3(7+2\sqrt{11})}}$; $x=\frac{2R\sqrt{5}(1+\sqrt{11})}{5\sqrt{3(7+2\sqrt{11})}}$.

2820. Нормала на елипсу у траженој тачки мора бити нормална на праву која спаја дате тачке.

2821. Нормала мора бити повучена кроз тачку са координатама $x=\pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$; $y=\pm b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$.

2822. $\left(9;\ \frac{1}{8};\ \frac{3}{8}\right)$ и $\left(-9;\ -\frac{1}{8};\ -\frac{3}{8}\right)$. **2823.** $\sqrt{8}$.

2824. $x+y-2=0$; $y=x$. **2825.** $y-x=a$; $y+x=3a$.

2826. $x+2y-1=0$; $2x-y-2=0$. **2827.** (0; 0).

8228. (0; 0). **2829.** (0; 0). **2830.** $(a;\ 0)$.

2831. $(\pm a;\ 0)$, $(0;\ \pm a)$ (четири тачке).

2832. $(2;\ 0)$; $(-2;\ 0)$. **2833.** $(0;\ 3)$; $(-3;\ 0)$; $(-6;\ 3)$.

2834. $\frac{a\sqrt{2}-2x}{a\sqrt{2}}=\frac{2y-a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=\frac{\pi(8z-k)}{4k}$; $-a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+$

$+a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{k}{2\pi}\left(z-\frac{k}{8}\right)=0.$

2835. $x-6a=\frac{y-18a}{6}=\frac{z-72a}{36}$; $x+6y+36z-2706a=0$.

2836. $x-\frac{\pi}{2}+1=y-1=\frac{z\sqrt{2}-4}{2}$; $x+y+z\sqrt{2}-\left(4+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

2837. $\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$; $12x-4y+3z-12=0$.

2838. $\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}$; $27x+28y+4z+2=0$.

2839. 5. **2840.** $4a$. **2841.** $z\sqrt{2}$. **2842.** $a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}$.

2843. $\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}\ln 3\right)$. **2844.** $x+z$. **2845.** $a \ln(1+\sqrt{2})$.

2846. $\sqrt{3}(e^t-1)$. **2847.** $8x-8y-z=4$; $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}$.

2848. $x+y-z-1=0$; $x-1=y-1=1-z$.

2849. $z+a=0$; $\left\{\begin{matrix} x=a \\ y=a \end{matrix}\right\}$.

2850. $17x+11y+5z-60=0$; $\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}$.

2851. $2x-2y+4z-\pi=0$; $2(x-1)=-2(y-1)=-\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$.

2852. $\frac{x\sqrt{3}}{3a}+\frac{y\sqrt{3}}{3b}+\frac{z\sqrt{3}}{3c}=1$;

$$a\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)=b\left(y-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)=c\left(z-\frac{c\sqrt{3}}{3}\right).$$

2853. $x+11y+5z-18=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$.

2854. $3x-2y-2z+1=0$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-2}$.

2855. $2x+y+11z-25=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{11}$.

2856. $5x+4y+z-28=0$; $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=z-6$.

2858. $x-y+2z=\sqrt{\frac{11}{2}}$ и $x-y+2z+\sqrt{\frac{11}{2}}=0$.

2859. $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **2862.** $\frac{9}{2}a^3$.

2865. $(x^2+y^2+z^2)z=-\frac{p}{2}(x^2+y^2)$. **2866.** $(x^2+y^2+z^2)^3=27a^3xyz$.

2867. $x=-f'(a)$; $y=-af'(a)+f(a)$;

за $f(a)\equiv\cos a$ добијамо: $y=x \arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

2868. $16y^3+27x^4=0$. **2869.** $y=\pm\frac{x}{2}$. **2870.** $y=-\frac{x^4}{4}$.

2871. $x^2\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}y^3=0$. **2872.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=d^{\frac{2}{3}}$.

2873. Парабола. **2874.** Циклоида.

2875. Елипса с полуосама R и $R\sqrt{2}$.

2876. Хипербола $4xy=a$.

Уз главу X

2880. $\iint\limits_D \gamma(x,y)\,d\sigma$. **2881.** $M=\iiint\limits_D \gamma(x;y;z)\,dv$.

2882. $\iint\limits_D \pi(x;y)\,d\sigma$. **2883.** $8(5-\sqrt{2})\pi<\iint<8(5+\sqrt{2})\pi$.

2884. $36\pi<\iint<100\pi$. **2885.** а) $2<\iint<8$; б) $-8<\iint<\frac{2}{3}$.

2886. а) $0<\iint<64$; б) $4<\iint<36$; в) $4<\iint<8(5-2\sqrt{2})$.

2887. $4\pi<\iint<22\pi$. **2888.** $\frac{2}{3}R$.

Упутство. Обратити пажњу на тело чија се запремина изражава интегралом

$$\iint\limits_D +\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma.$$

2889. 4. **2890.** $0<\iiint<\frac{4}{3}\pi R^5$. **2891.** $24<\iiint<72$.

2892. $28\pi\sqrt{3}<\iiint<52\pi\sqrt{3}$. **2894.** 1. **2895.** $\frac{4}{9}ab\sqrt{ab}$.

2896. $\frac{3}{2}$. **2897.** $(e-1)^2$. **2898.** $\ln\frac{4}{3}$. **2899.** $\frac{\pi}{12}$.

2900. $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. **2901.** $\ln\frac{25}{24}$. **2903.** а) $\frac{2}{3}\sqrt{a^3}$; б) 9; в) $\frac{1}{2}$.

2904. $\int\limits_3^5 dx \int\limits_{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}x+2} f(x;y)\,dy$. **2905.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{+\sqrt{1-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2906. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{1-x} f(x;y)\,dy$. **2907.** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{+\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2908. $\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} dx \int\limits_{1-2x}^{x+3} f(x;y)\,dy+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx \int\limits_{x}^{x+3} f(x;y)\,dy+\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} dx \int\limits_{x}^{5-2x} f(x;y)\,dy$.

2909. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{+\sqrt{x}} f(x;y)\,dy$. **2910.** $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^y f(x;y)\,dx+\int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{2} f(x;y)\,dx$.

2911. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x;y)\,dy.$ **2921.** $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x;y)\,dx.$

2913. $\int_0^1 dy \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x;y)\,dx.$ **2914.** 6. **2915.** $\frac{15}{8}.$

2916. $\frac{abc\,(a+b+c)}{2}.$ **2917.** $\frac{a^6}{48}.$ **2918.** $\frac{a^{11}}{110}.$ **2919.** 0.

2920. $\frac{33}{140}.$ **2921.** $\frac{9}{4}.$ **2922.** $-2.$ **2923.** $\frac{\pi}{6}.$ **2924.** 3.

2925. $12\frac{2}{3}.$ **2926.** $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$ **2927.** $\frac{560}{3}.$

2928. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$ **2929.** $\frac{(p^2-c^2)(b^2-a^2)}{4m}.$ **2930.** $\frac{1}{6}abc.$

2931. $\frac{5}{3}.$ **2932.** 27. **2933.** 16. **2934.** $\frac{48}{5}\sqrt{6}.$

2935. $ar^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right).$ **2936.** 16. **2937.** 45. **2938.** $\frac{40}{3}.$

2939. $\frac{1}{6}.$ **2940.** $\frac{16}{3}R^3.$ **2941.** $\frac{128}{21}.$ **2942.** $\frac{64}{15}.$

2943. $\frac{8R^5}{15a^2}.$ **2944.** $\frac{81}{5}.$ **2945.** $78\frac{15}{32}.$

2946. $\frac{1}{3}abc.$ **2947.** $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5).$

2948. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R} f(\rho^2)\,\rho\,d\rho.$ **2949.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$

2950. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$ **2951.** $\frac{u-v}{a}.$

2952. $4(u^2+v^2).$ **2953.** 2. **2954.** $\int_{\frac{b}{1+b}}^{\frac{c}{1+c}} \int_0^{\frac{a}{1-v}} f(u-uv;\ uv)\,u\,du\,dv.$

2955. $\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 \rho^5 \sqrt[3]{1-\rho^3}\,\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\rho.$

2956. $\frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2].$ **2957.** $\pi R^2 h.$

2958. $\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$ **2959.** $\frac{3}{4}\pi\sqrt{2}.$ **2960.** $\frac{\pi a}{2}.$

2961. $\frac{8}{9}a^2.$ **2962.** $\frac{4}{15}\pi R^5.$ **2963.** $\frac{\pi R^4}{8}.$

2964. $\frac{4}{15}\pi(R^5-r^5).$ **2965.** $E_k=\frac{\omega^2}{2}\iint_D y^3\cdot\gamma(x;y)\,d\sigma.$

2966. $(t_2-t_1)\iint_D c(x;y)\cdot\gamma(x;y)\,d\sigma.$ **2967.** $E=\iiint_D \delta(x;y\,z)\,dv.$

2968. $km\iiint_{D'}\frac{\gamma(x;y;z)\,dv}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$

2969. $\iiint_{D'} v(x;y;t)\,dt\cdot d\sigma$; са D' је овде означена заједничка област мењања све три промењљиве: x, y, t, одређена облашћу D и интервалом $t_1\leqslant t\leqslant t_2$.

2970. $\iiiint_{D'} c(x;y;z;t)\,dv\,dt$, где је D' четвородимензионална област мењања промењљивих x, y, z, t, одређена облашћу D и температурским интервалом $t_0\leqslant t\leqslant t_1$.

2971. $\frac{1}{2}.$ **2972.** 2. **2973.** $\pi R^2.$ **2974.** $\frac{ab}{6}.$

2975. $\frac{16}{3}.$ **2976.** $(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}.$ **2977.** $\frac{\beta-\alpha}{3}\ln\frac{q}{p}.$

2978. $\frac{5}{8}\pi a^2.$ **2979.** $\frac{a^2b^2}{2c^2}.$ **2980.** $\frac{\pi ab}{2c^2}(a^2+b^2).$

2981. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{16}\frac{a^7b}{c^6}.$ **2982.** $\frac{3}{4}\pi.$ **2983.** $2a^2.$ **2984.** $\frac{2}{3}.$

2985. $\frac{1}{60}.$ **2986.** $\frac{1}{1260}.$ **2987.** $2\pi abc.$ **2988.** $\frac{8}{5}\pi abc.$

2989. $\frac{\pi^2}{2}abc.$ **2990.** $\frac{1}{3}\pi a^3.$ **2991.** $\frac{a^3}{360}.$ **2992.** $\frac{4\pi a^3}{21}.$ **2993.** $\frac{\pi^2a^3}{6}.$

2994. $\frac{4}{3}\pi a^3.$ **2995.** $\frac{2}{3}\pi^2a^3.$ **2996.** $\frac{64\pi}{105}a^3.$

2997. $8\pi.$ **2998.** $\frac{\pi}{3}\frac{a^2bc}{h}.$

Упутство. Овде је згодно увести нове промењиве:

$$x = a\rho\cos\vartheta\cos\varphi; \qquad y = b\rho\cos\vartheta\sin\varphi; \qquad z = c\rho\sin\vartheta.$$

2999. $\frac{\pi}{12}\,\frac{a^3 bc^2}{h^3}$ *). **3000.** $\frac{a^2 b^2 c^2}{6h^3}$ *). **3001.** $\frac{4\pi}{21}\,\frac{abc^7}{h^6}$ *).

3002. $\frac{2}{21}abc.$ **3003.** $\frac{abc}{360}.$ **3004.** $4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$

3005. $\frac{2}{3}\{(1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1\}\pi$ **3006.** $\frac{2\pi ab}{3}\{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}-1\}.$ **3007.** $2\pi R^2.$

3008. $\frac{\pi R^2}{12}(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$ **3009.** 36. **3010.** $\frac{4\pi p^2}{\sqrt{2}}.$

3011. $\frac{r^2}{9}(20-3\pi).$ **3012.** $2\pi R^2-8R^2(\sqrt{2}-1).$ **3013.** $\frac{2a^2}{\sin 2\alpha}.$

3014. $\frac{\pi}{4}\left\{3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2+\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right\}.$

3015. $\frac{2}{3}\pi ab(2\sqrt{2}-1).$ **3016.** $\frac{ab}{9}(20-3\pi).$ **3017.** $\frac{ab^2}{2}.$

3018. $\frac{ah^2}{6}.$ **3019.** $\pi r^3.$ **3020.** $\frac{9a^3}{4}.$ **3021.** $\frac{2}{3}r^3.$

3022. Тежиште лежи на симетрали угла α, и његово је растојање од центра круга равно $\frac{4R}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}.$

3023. Тежиште лежи на симетрали угла α, и његово је растојање од центра круга равно $\frac{4R}{3}\,\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}.$

3024. $\bar{x}=0;\ \bar{y}=\frac{4b}{3\pi}.$ **3025.** $\bar{x}=\frac{\pi}{2};\ \bar{y}=\frac{\pi}{8}.$

3026. $\bar{x}=\frac{5}{8}a;\ \bar{y}=0.$ **3027.** $\frac{ab^3}{3}.$ **3028.** $\frac{ah^3}{12}.$

3029. $\frac{5}{4}\pi R^4.$ **3030.** $\frac{\pi}{4}ab^3$ и $\frac{\pi}{4}ba^3.$ **3031.** $\frac{\pi R^4}{8}.$

3032. $\frac{\pi R^4}{2}.$ **3033.** $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2).$ **3034.** $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}.$

3035. $\frac{ah}{48}(a^2+12h^2).$ **3036.** $\frac{3\pi R^4}{2}.$ **3037.** $\frac{2}{3}a^4.$

---

*) Види упутство уз задатак 2998.

3038. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}.$ **3039.** $ah\left(\frac{2h^2}{7}+\frac{a^2}{30}\right).$ **3040.** $\frac{1}{2}R^2M.$

3041. $\frac{4}{3}MR^2.$ **3042.** $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}Mc^2.$ **3043.** $\frac{1}{3}M(R-H)(2R+H).$

3044. $\frac{a^2 bc}{2}$ итд. **3045.** $\frac{\pi abc^2}{4}.$ **3046.** $\frac{\pi R^2 h^2}{4}.$

3047. Тежиште лежи на оси симетрије, на растојању $\frac{3}{8}R$ од центра.

3048. Тежиште лежи на оси симетрије исечка, на растојању $h=\frac{3}{4}R\cos^2\frac{\alpha}{2}$ од центра.

3049. $\bar{x}=\frac{14}{15};\ \bar{y}=\frac{26}{15};\ \bar{z}=\frac{8}{3}.$

3050. Тежиште лежи на оси параболоида, на растојању $\frac{h}{3}$ од основе.

3051. $\bar{x}=\frac{6}{5};\ \bar{y}=\frac{12}{5};\ \bar{z}=\frac{8}{5}.$ **3052.** $\bar{x}=\frac{18}{7};\ \bar{y}=\frac{15}{16}\sqrt{6};\ \bar{z}=\frac{12}{7}.$

3053. $\bar{x}=0;\ \bar{y}=0;\ \bar{z}=\frac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5).$

3054. $\bar{x}=\frac{3R}{16}(2+\sqrt{2});\ \bar{y}=\bar{z}=0.$ **3055.** $\bar{x}=\bar{y}=0;\ \bar{z}=\frac{9a}{20}.$

3056. $\frac{28}{15}\pi R^5.$ **3057.** $\frac{4}{15}\pi abc(b^2+c^2)$ итд.

3058. $\pi RH\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{3}\right).$ **3059.** $\frac{\pi abh}{4}(a^2+b^2).$

3060. $\frac{1}{3}M(b^2+c^2)$ итд. **3061.** $\frac{1}{12}M(a^2+b^2+c^2).$

3062. $\frac{M}{12}(h^2+3R^2).$ **3063.** $\frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}.$ **3064.** $\frac{4}{3}a^2.$

3065. $2\pi r(R-r).$ **3066.** $\frac{3}{4}\gamma ab^2.$ **3067.** $2\pi\gamma(R^2-r^2).$

3068. $\frac{\pi R^2 h}{6}(3R^2+2h^2).$ **3069.** $\bar{x}=\bar{y}=0;\ \bar{z}=\frac{5}{4}R.$

3070. $\frac{59}{480}\pi R^5.$

3071. $2k\pi\gamma(R+h-\sqrt{R^2+h^2});$ k је гравитациона константа.

3072. $\dfrac{2\pi kh\gamma}{l}(l-h)$; k је гравитациона константа.

3073. $\dfrac{kM}{b^2}$; k је гравитациона константа. **3075.** Не постоји.

3076. 2π. **3077.** 4. **3078.** $\pi\sqrt{\pi}$. **3079.** Конвергира.

3080. Конвергира. **3081.** Дивергира. **3082.** Конвергира.

3083. Дивергира. **3084.** Дивергира. **3085.** $\dfrac{8}{3}\pi R^3\left(\ln R-\dfrac{1}{3}\right)$.

3086. $\dfrac{\pi}{16}$. **3087.** $\dfrac{8}{15}$. **3089.** $\sim 1{,}72$. **3090.** 3π.

3091. $\varphi(\alpha)$ није дефинисана за $\alpha=0$. Ставимо ли $\varphi(0)=0$, добијамо $\varphi(\alpha)\equiv\psi(\alpha)$. **3092.** $\dfrac{1}{2}$.

3093. Упутство. Продиференцирати по x идентитет

$$\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{x^2+z^2}}=\ln\frac{1+\sqrt{1+x}}{x}$$

и наћи коначни израз за y.

3095. $\dfrac{b}{8a^4}\left\{\dfrac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2}+\dfrac{3}{ab}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}\right\}$.

3096. $\dfrac{\pi}{4a^3}$. **3098.** $\pi\ln\dfrac{a+b}{2}$.

Упутство. Наћи најпре $\dfrac{\partial I}{\partial a}$, где је I дати интеграл.

3099. $\ln(1+\alpha)$. **3100.** $\dfrac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$. **3101.** $\dfrac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$.

3102. $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$. **3103.** $-(\arcsin\alpha)^2$. **3104.** $\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

3105. $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{1}{2}(\arccos\alpha)^2$. **3106.** $\pi\arcsin\alpha$.

3107. $\dfrac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$. **3108.** $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. **3109.** $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

3110. $\operatorname{arc\,tg}\alpha$. **3111.** а) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$; б) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. **3112.** $\dfrac{\pi}{2}(|b|-|a|)$.

3113. $\dfrac{\pi}{2}$. **3114.** $\dfrac{\pi}{4}$. **3115.** $\dfrac{\pi}{4}$. **3116.** $\dfrac{\pi}{4}$.

3118. $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{a}{b}$. **3119.** $ab\ln\dfrac{b}{a}$. **3120.** $\dfrac{3}{4}\ln 3$.

Упутство. Имамо познати образац: $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$; одавде је: $\sin^3 x=\dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$.

Користећи се овим лако је свести дати интеграл на интеграл из зад. 3118 (за $a=1$; $b=3$).

3121. $\ln 2$.

Упутство. Применом простих тригонометриских трансформација довести израз под интегралом на облик:

$$\left\{\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\right\}:x.$$

3122. а) $n!\left(e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2!}-\ldots-\dfrac{x^n}{n!}\right)$; б) $5x^4-60x^2+120(1-\cos x)$.

3123. $\dfrac{\pi}{\sqrt{h^2-1}}\ln\dfrac{h+\sqrt{h^2-1}}{h-\sqrt{h^2-1}}$. **3124.** $2\gamma a\ln(1+\sqrt{2})$.

3125. $\pi R^2\gamma\ln\dfrac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R}+\pi h\gamma(\sqrt{R^2+h^2}-h)$.

3126. $\dfrac{\pi R^2h^3}{l^3}\ln\dfrac{R(R+l)}{h(l-h)}+\dfrac{\pi hR^2}{l^2}(R-h)$.

3127. $\dfrac{M}{a}\left\{\left(1+\dfrac{a^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{a}{R}\right)^3-\dfrac{3}{2}\,\dfrac{a}{R}+1\right\}$.

Уз главу XI

3128. $\ln\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$. **3129.** 24. **3130.** $\dfrac{ab}{3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

3131. $\dfrac{1}{3p}\{(y_0^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\}$. **3132.** $4\pi a\sqrt{a}$. **3133.** $2\pi a^{2n+1}$.

3134. $\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{3\pi}{4}$. **3135.** $\dfrac{16\sqrt{2}}{143}$. **3136.** $\dfrac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}$.

3137. $\displaystyle\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}F(\rho\cos\varphi;\quad\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

3138. $R\sqrt{2}\arccos\left(\dfrac{+\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)$.

Упутство. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_L ds$ по задатој кривој написавши њену једначину у параметарском облику и узимајући за параметар φ:

$$x=\frac{R\cos\varphi}{\operatorname{ch}\varphi};\quad y=\frac{R\sin\varphi}{\operatorname{ch}\varphi};\quad z=R\operatorname{th}\varphi.$$

3139. $\dfrac{1}{3}\{(x_2^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}\}$. **3140.** γa.

3141. $\frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

3142. $\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3 b^2}{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}$. **3143.** $(1-e^{-1})\sqrt{3}$.

3144. $\frac{2\,l\,m}{a}$. **3145.** $\frac{8\,ml\sqrt{2}}{a}$. **3146.** $\frac{2\pi ml}{p}$. **3148.** $\frac{2\pi ml}{ep}$.

3149. $\frac{2\,l\,m}{a}\ln\frac{a+b}{b}$. **3150.** $4\,k(\sqrt{2}-1)$.

3151. $\frac{k\gamma\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2 b^2}}{a}$. **3152.** $3\pi R^2$.

3153. $\frac{\pi p^2}{4}$. **3154.** $\frac{11}{3}$. **3155.** R^2. **3156.** $\frac{98}{81}p^2$. **3157.** $8\,R^2$.

3158. $4\,R^2$. **3159.** $\frac{ab}{2}$. **3160.** 3. **3161.** $-\frac{56}{15}$.

3162. 8. **3163.** 32.

3164. У сва четири случаја вредност интеграла је 1.

3165. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{17}{30}$; г) $-\frac{1}{20}$. **3166.** 0.

3167. $-2\pi ab$. **3168.** -2π.

3169. $\frac{1}{4}\cos 6 + \frac{3}{2}\sin 6 - 4\sin 3 + 12\cos 3 - \frac{1}{4}$.

3170. πa^2. **3171.** π. **3172.** $-\frac{4}{3}ab^2$. **3173.** $\frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}$.

3174. 13. **3175.** 0. **3176.** 0. **3177.** $3\sqrt{3}$. **3178.** 0.

3179. $k\left(\frac{1}{OA_1}-\frac{1}{OA_2}\right)$, где је k коефицијенат пропорционалности.

3180. $\frac{(OA)^2-(OB)^3}{2}m$. **3181.** $|A| = mFR$.

3182. $\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$. **3183.** $\frac{k}{2}\ln 2$. **3184.** πab.

3185. $\frac{3}{8}\pi a^2$. **3186.** $6\pi r^2$. **3187.** $2\,a^2$.

Упутство. Увести параметар, стављајући $y = x\,\mathrm{tg}\,t$. **3188.** $\frac{1}{210}$.

Упутство. Увести параметар, стављајући $y = xt$.

3189. $\frac{1}{60}$. **3190.** $\frac{1}{30}$. **3191.** $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$.

3199. $u = \frac{x^3+y^3}{3} + C$. **3200.** $u = x^4 - 2\,x^2y^2 + y^4 + C$.

3201. $\ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + C$.

3202. Дати израз није тотални диференцијал.

3203. $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + C$. **3204.** $x^2\cos y + y^2\cos x + C$.

3205. $\frac{e^y-1}{1+x^2} + C$. **3206.** $\frac{x-y}{(x+y)^2} + C$.

3207. $n = 1$; $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + C$.

3208. $a = b = -1$; $\frac{x-y}{x^2+y^2} + C$. **3209.** $\sqrt{x^2+y^2+z^2} + C$.

3210. $\operatorname{arc\,tg} xyz + C$. **3211.** $\frac{x+yz}{x-yz} + C$. **3212.** $\frac{x-3y}{z} + C$.

3213. $\frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)} + C$. **3218.** Не. **3219.** $3\,v$. **3220.** 0.

3221. πR^3. **3222.** $4\sqrt{61}$. **3223.** $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

3224. $\frac{2\pi R^6}{15}$. **3225.** $\frac{2\pi R^7}{105}$. **3226.** 3. **3227.** $\frac{4}{3}\pi abc$.

3228. 0. **3229.** $\pi^2 R^3$. **3230.** $\frac{8}{3}\pi R^4$.

3231. $2\,k\pi R\gamma\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right.$. **3232.** $2\pi Rk\gamma$.

3233. $2\pi Rk\gamma\ln\frac{\sqrt{4R^2+h^2}+h}{\sqrt{4R^2+h^2}-h} = 4\pi R\gamma\ln\frac{\sqrt{4R^2+h^2}+h}{2R}$.

3234. 0. **3235.** $2\iint\limits_D dx\,dy$. **3236.** $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

3237. $\iint\limits_D (y-x)\,e^{xy}\,dx\,dy$. **3238.** $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$.

3241. $2\iint\limits_S (x-y)\,dx\,dy + (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx$.

3242. Интеграли на обема странама једначине су равни нули.

3143. Интеграли на обема странама једначине имају вредност $-\frac{\pi r^6}{8}$.

3244. $2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$ **3245.** $3\,V.$

3246. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz.$

Уз главу XII

3247. 1) Обична 2-ог реда; 2) обична 3-ег реда; 3) обична 1-ог реда; 4) парцијална другог реда; 5) обична 2-ог реда; 6) нема смисла; 7) парцијална 5-ог реда; 8) нема смисла.

3248. $y' = -\frac{x}{y}.$ **3249.** $yy' + \sqrt{1-y^2} = 0.$

3250. $y = 2xy'.$ **3251.** $yy'' + y'^2 - \frac{yy'}{x} = 0.$

3252. $y''' = 0.$ **3253.** $(x-y)\,y'' = (1+y'^2)\,(1+y').$

3254. $y'' = 0.$ **3255.** $yy' - x\,(y'^2 + yy'') = 0.$

3256. $y' = y''\,\mathrm{th}\,x.$ **3257.** $3\,y'y''^2 - (1+y'^2)\,y''' = 0.$

3259. Не, јер за друге вредности x једначина неће бити задовољена.

3260. Да. То следи из диференцијабилности.

3261. $y - 2x = Cx^3\,(y+x).$ **3262.** $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}.$

3263. $y = x\sqrt{\ln Cx^2}.$ **3264.** $x^2 + y^2 = Cy.$ **3265.** $y^2 - x^2 = Cx^2y^2.$

3266. $x = Ce^{\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}}.$ **3267.** $x^2 = C^2 + 2\,Cy.$ **3268.** $\sin\frac{y}{x} = Cx.$

3269. $\ln Cx = -e^{-\frac{y}{x}}.$ **3270.** $y = xe^{1+Cx}.$ **3271.** $\ln y + \frac{x}{y} - C.$

3272. $(x+y)^2\,(2x+y)^3 = C.$ **3273.** $y\,(y-2x)^3 = C\,(y-x)^2.$

3274. $e^{\frac{y}{x}} = Cy.$ **3275.** $x = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}.$ **3276.** $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\frac{y}{x}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}}.$

3277. $\sin\frac{y}{x} + \ln x = C.$ **3278.** $y^3 = y^2 - x^2.$ **3279.** $y = -x.$

3281. $\frac{C}{x} = e^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}.$ **3282.** $x = y\ln Cy.$ **3283.** $y^2 + x^2 = Cx.$

3284. $x^2 = 2\,Cy + C^2.$ **3285.** Облик обртног параболоида.

3286. $y = Ce^{-x} + 2x - 2.$ **3287.** $y = Ce^{-2x} + 2x - 1.$

3288. $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right).$ **3289.** $\frac{e^{x^2}(1-x^2)+C}{x^2}.$

3290. $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2.$ **3291.** $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1.$

3292. $y = (x+C)\,(1+x^2).$ **3293.** $y = \frac{C}{x}\sqrt{x^2+1} + \frac{(1+x^2)^2}{3x}.$

3294. $y = Cx - 1.$ **3295.** $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$

3296. $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}.$ **3297.** $y = Cx^2 + \frac{1}{x}.$

3298. $y^2 - 2x = Cy^2.$ **3299.** $x = y^2(1 + Ce^{\frac{1}{y}}).$

3300. $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}.$ **3301.** $x = y\ln y + \frac{C}{y}.$

3302. $y = Ce^{-\Phi(x)} + \Phi(x) - 1.$ **3304.** $y = \frac{x}{\cos x}.$

3305. $y = \frac{3-e^{2x}}{2}.$ **3306.** $y = \frac{e^x}{x} + \frac{ab-e^a}{x}.$

3307. Не постоје решења која задовољавају дате почетне услове.

3308. $y = e^{x^2} - \frac{1}{2}x^2.$ **3309.** $x = t\,\mathrm{arc\,tg}\,t.$

3310. $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\{2 + x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{arc\,sin}\,x\}.$

3311. $y = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}(2+x^3).$ **3313.** $y = Cx - x\ln x.$

3314. $y = Cx + \frac{a^2}{2x}.$ **3315.** Параболе $y = x + Cx^2.$

3316. $y = +k + x + Ce^{+\frac{x}{k}}.$ **3317.** $x = Cy + \frac{a^2}{y}.$ **3318.** $y = Cx^2.$

3319. $v = \frac{k_t}{k}\left(t - \frac{m}{k} + \frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}\right).$

3320. $v = (v_0 + b)\,e^{-at^2} + b\,(at^2 - 1)$, где су a и b позитивне константе, које зависе од m, k и k_1.

3321. $x = C_1 + C_2e^{-k_2t} + \frac{k_1}{2k_2}\cdot t^2 - \frac{k_1}{k_2^2}\cdot t.$

3322. $v = \frac{g}{m-k}\left[\frac{(M-mt)^{\frac{k}{m}}M}{M^{\frac{k}{m}}} - M + mt\right].$

3323. $v = ge^{\frac{3k}{2m}\sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2}(M-mt)^2}} \cdot \int\limits_0^t e^{-\frac{3k}{2m}\sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2}(M-mt)^2}} \cdot dt.$

3324. $A = \left(A_0 + \frac{k_2}{k_1^2}\right)e^{k_1 t} - \frac{k^2}{k_1^2}(k_1 t + 1).$

3325. $\vartheta = \vartheta_0 + e^{-kt}\int\limits_0^t \varphi(t)\, e^{kt}\, dt.$

3326. $\vartheta = \frac{k_1}{k_2^3}(k_2^2 t^2 - 2k_2 t + 2) - \frac{2k_1}{k_2^3} e^{-k_2 t} + 20;$

$$k_1 = 0{,}000004 = \frac{0{,}24 \cdot 0{,}2^2}{24 \cdot 1000}; \quad k_2 = \frac{1}{600}\ln 2 = 0{,}00115; \quad \vartheta_{10} = 45{,}3^0.$$

3327. Диференцијална једначина задатка је $\frac{dx}{dt} + \frac{kx}{aSt} = k \cdot C_H$, где је x количина испарелог етера у кубним сантиметрима, а k је коефицијенат пропорционалности. Интеграл даје:

$$x = At^{-\frac{k}{aS}} + \frac{kaSC_H t}{aS + k};$$

константу интеграције A треба одредити из допунских услова.

3328. 2,97 kg соли. Максимум се достиже за $t = 33\frac{1}{3}$ мин. и износи 3,68 kg. **3329.** 9,03 ампера.

3330. $I = \frac{e_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\{\omega L e^{-\frac{Rt}{L}} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t\}.$

3331. $I = 1 + (I_0 - 1)e^{-t^2}$. **3332.** $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3).$

3333. $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C.$ **3334.** $x^2 - xy + y^2 + x - y = C.$

3335. $x + 2y + 3\ln(2 - x - y) = C.$ **3336.** $(y + x - 1)^5 (y - x + 1)^2 = C.$

3337. $e^{-2\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y + 2).$ **3338.** $(y + 1)e^{-\frac{y+1}{x}} = C.$

3339. $y^2 - x = (x + 1)\ln\frac{C}{x+1}.$ **3340.** $y^2 e^{-\frac{y^2}{x}} = C.$

3341. $y = \mathrm{tg}\ln(Cx).$ **3342.** $x^2 y^2 + 1 = Cy.$ **3343.** $Cx = 1 - \frac{x}{x^2 + y^2}.$

3344. $e^y(1 + Cx) = 1.$ **3345.** $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C.$

3346. $x^2 + y^2 = C(y - 1)^2.$ **3347.** $x + \mathrm{arc\,tg}\frac{x}{y} = C.$

3348. $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}.$ **3349.** $ny^n = Ce^{-\frac{nx}{a}} + nx - a.$

3350. $y(1 + \ln x + Cx) = 1.$ **3351.** $y(x + C) = \sec x.$

3352. $y = \frac{2e^x}{C + e^x(\cos x + \sin x)}.$ **3353.** $y = \left(\frac{C + \ln\cos x}{x} + \mathrm{tg}\, x\right)^2.$

3354. $y^2 = Ce^{-\frac{2a}{x}} + \frac{b}{2a^2}\left(1 - \frac{2a}{x}\right).$ **3355.** $y = \frac{\varphi(x)}{x + C}.$

3356. $y = x^4\left(C + \frac{1}{2}\ln x\right)^2.$ **3357.** $\frac{1}{x} = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} - y^2 + 2.$

3358. $y = x\sqrt{\ln\frac{C}{x^2}}.$ **3359.** $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C.$

3360. $x + \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} = C.$ **3361.** $x^2 - y^2 = Cy^3.$ **3362.** $xe^y - y^2 = C.$

3363. $x^y = C.$ **3364.** $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C.$ **3365.** $\mathrm{tg}(xy) - \cos x - \cos y = C.$

3366. $x + ye^{\frac{x}{y}} = C.$ **3367.** $x^3 + x^2y^3 - y^4 = C.$

3368. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + x - \frac{1}{2}y^2 = C.$

3369. $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C.$ **3370.** $\frac{xy}{x - y} + \ln\frac{x}{y} = C.$

3371. $x - \frac{y}{x} = C.$ **3372.** $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C.$

Упутство. Тражити интеграциони фактор у облику функције само од y.

3373. $(x^2 + y^2)e^x = C.$ **3374.** $x^2 + \frac{2x}{y} = C.$ **3375.** $3x^2y + x^3y^3 = C.$

3376. $x^4y^3 + x^3y^2 = C.$ **3377.** $x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln y = C.$

3378. $(x \sin y + y \cos y - \sin y)e^x = C.$

3379. $ye^x\left(x^2 + \frac{1}{3}y^2\right) = C.$ **3380.** $\mu = y^{-n} e^{-(n-1)\int P(x)\,dx}.$

3381. $\frac{Y_x' - X_y'}{X - Y}$ мора бити функција од $(x + y)$.

3382. $\frac{Y_x' - X_y'}{xX - yY}$ мора бити функција од xy.

3383. $y\sqrt{\frac{c}{x^2} + \frac{x^2}{2}} = 1.$ **3384.** $\frac{2x}{x - y} + \ln(y + x) + 3\ln(y - x) = C.$

3385. $x + y = a\,\mathrm{tg}\left(C + \frac{y}{a}\right).$ **3386.** $x^2 + y^2 = Cy^2e^{2x}.$

3387. $x \sin y + y \cos y - \sin y = Ce^{-x}$.

3388. $y^2 e^{-\frac{y^2}{x}} = C$. **3389.** $\ln Cx = -e^{-\frac{x^2+y^2}{x}}$.

3390. $y^3 - 3xy = C$. **3391.** $\frac{x^2y^2}{2} + \ln \frac{x}{y} = C$.

3392. $3\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} + x^2 - 1$. **3393.** $y^2 - 1 + 2cxy = 0$.

3394. $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$. **3395.** $x^2 + y^2 = C(y-1)^2$.

3396. $abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}$. **3397.** $x^2 + y^2 - 2y = Ce^{-x}$.

3398. $xe^{\sin \frac{y}{x}} = C$. **3399.** $y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{\sin x + C}$. **3400.** $xy \cos \frac{y}{x} = C$.

3401. $x + y(\cos x - \operatorname{tg} y) = Cy$. **3402.** $x = Ce^{\frac{y}{x}}$.

3403 $y^2 - by - axy = C$.

3404. $x = \frac{a}{2} \ln \left\{ \frac{2(x^2+y^2)}{a} + 2x + a \right\} + C$. **3405.** $(2y^2 - x^2)^3 = Cx^2$.

3406. Логаритамске спирале: $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}$.

3407. $x = y \ln Cy$. **3408.** $y^2 = x^2 - ax + \frac{a^2}{2}(1 - e^{-\frac{2x}{a}})$.

3409. Конхоиде логаритамске спирале: $\rho - a = e^{\varphi_0 - \varphi}$.

3410. $\rho = k(\varphi + 1 - e^{\varphi})$. **3411.** $\rho = C(1 + \sin\varphi)$; $\rho = \frac{C}{1 - \sin\varphi}$.

3412. $v = ge^{\frac{kQ}{q} \cdot e^{-\frac{q}{Q}t}} \int_0^t e^{-\frac{kQ}{q} e^{-\frac{q}{Q}t}} dt$.

Упутство. Најпре наћи зависност густине ваздуха од времена. Тога ради треба саставити и решити просту диференцијалну једначину. Затим треба саставити једначину самога задатка (то ће бити линеарна једначина). Коефициенат отпора средине је k_1, маса m тачке и почетна густина γ_0 улазе у ову једначину у облику комбинације $\frac{k_1\gamma_0}{m}$, која је у резултату означена словом k $\left(k = \frac{k_1\gamma_0}{m}\right)$. Ваздушну струју која се образује у вези с дејством пумпе, занемарујемо.

3413. $I = \frac{t}{2}$. **3414.** $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. **3415.** $y' = f\left(\frac{y^2}{x}\right)$.

3416. $y' = f(x^2 + y^2)$. **3417.** $y' = f(xy)$.

3418. Праве $\frac{y}{x} = \text{const}$. Резултат се може изразити и у облику следеће геометриске теореме: ако се фамилија парабола, које имају заједничку осовину и заједничко теме, пресече правом која пролази кроз теме, онда ће тангенте разних парабола у тачкама њиховог пресека с правом, бити паралелне међу собом.

3420. $y' = \varphi(x)$; $y' = \frac{ay+b}{x} + C$; $y' = ay + bx + C$.

3422. $y = Cx + C^2$; сингуларни интеграл: $x^2 + 4y = 0$.

3423. $y = Cx - 3C^3$; сингуларни интеграл: $9y - 2x\sqrt{x} = 0$.

3424. $y = Cx + \frac{1}{C}$; сингуларни интеграл: $y^2 = 4x$.

3425. $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$; сингуларни интеграл: $y^2 + x^2 = 1$.

3426. $y = Cx + \sin C$; сингуларно решење: $y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1 - x^2}$.

3427. $y^2 = 2Cx + C^3$; сингуларни интеграл: $27y^4 + 32x^3 = 0$.

3428. $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$; сингуларно решење: $y = 0$.

3429. $y = Cx^2 + \frac{1}{C}$; сингуларни интеграл: $y^2 - 4x^2 = 0$.

3430. $4Cx = 4C^2 - y^2$; сингуларног интеграла нема.

3431. $x = Ce^{-t} + 2(1 - t)$; $y = x(1 + t) + t^2$.

3432. $2Cy = 4 + C^2x^2$; сингуларни интеграл: $y = \pm 2x$.

3433. $y = Cx + C + C^2$; сингуларни интеграл: $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2$.

3434. $y^2 = 4e^x$. **3435.** $xy = 1$. **3436.** $2y = x^2$. **3437.** $y^2 = x - \frac{1}{4}$.

3440. Равнострана хипербола $4xy = \pm a^2$; тривијално решење је свака права из фамилије $y = Cx \pm a\sqrt{C}$.

3441. $(y - x - 2a)^2 = 8ax$ **3442.** Елипсе и хиперболе.

3443. $x = p + \frac{1}{p}$; $y = \frac{p^2}{2} - \ln Cp$. **3444.** $y^2 = Cx^{-\frac{1}{k}} + \frac{k^2x^2}{2k+1}$.

3445. $x = \sin p\left(a - C - \frac{1}{2}a\sin^2 p\right)$; $y = \cos p\left(C + \frac{1}{2}a\sin^2 p\right)$.

3446. $S = at^2$; где је a извесна одређена константа.

3447. $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln Cx$. **3448.** $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$. **3449.** $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$.

3450. $y = C(x^2 + y^2)$.

3451. Ако је параметар параболе $2p$, а права узета за ординатну осу, онда ће једначина трајекторије бити:

$$y + C = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^3}{p}}.$$

3452. Трактрисе. **3453.** $(y^2 + x^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

3454. $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$.

3455. $x = Ce^{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi) - R\sqrt{2}\sin\varphi$;

$$y = Ce^{\varphi}(\sin\varphi - \cos\varphi) + R\sqrt{2}\cos\varphi.$$

3456. $x = C\sin t + R(\cos t + t\sin t)$; $y = -C\cos t + R(\sin t - t\cos t)$.

3457. $x = \dfrac{C}{cht} + a(t - tht)$; $y = Ctht + \dfrac{a}{cht}$.

3458. $x = a(\cos t - t\cos t) - \cos t \cdot \left(\dfrac{at^2}{2} + C\right)$;

$$y = a(\sin t + t\sin t) - \sin t \cdot \left(\frac{at^2}{2} + C\right).$$

3459. $x = \sin t \cdot \left(C - \dfrac{a}{2}\sin^2 t\right)$; $y = \cos\cdot t\left(a - C + \dfrac{a}{2}\sin^2 t\right)$.

3460. $x = C\sin t + 2\,\mathrm{tg}\, t$; $y = \mathrm{tg}^2 t - C\cos t - 2$.

3461. $\sim 0{,}834$. **3462.** $\sim 1{,}175$. **3463.** $\sim 0{,}86$.

3464. Тачно решење је $y = e^{\frac{x^2}{4}} = f(x)$; $f(0{,}9) = 1{,}2244$. Приближно решење је $f(0{,}9) = 1{,}1942$. Релативна грешка износи приближно $2{,}5\%$.

3465.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y	1,000	1,010	1,030	1,062	1,107	1,168	1,257	1,354	1,492

3466.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
y	1,000	1,000	0,997	0,992	0,984	0,973	0,959	0,942	0.923	0,901	0,876

3469. $y_2 = 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{13}{24}x^4 + \dfrac{1}{4}x^5 + \dfrac{1}{18}x^6 + \dfrac{1}{63}x^7$.

3470. $y_2 = 1 + x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{7}{24}x^4 - \dfrac{x^5}{60} - \dfrac{5}{72}x^6 -$

$$- \frac{35}{1008}x^7 - \frac{x^8}{192} + \frac{x^9}{144};\quad 1{,}726.$$

3471. $y|_{x=1} = 2e - 2 = 3{,}43656\ldots$;

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
2,5	3,16667	3,37500	3,42500	3,43472

y_5 даје релативну грешку приближно $0{,}1\%$.

3472. 0,46128; то исто даје Симпсонова формула за $2n = 10$. Све су децимале тачне.

3473. —1,28. **3474.** $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$.

3475. $y = \dfrac{\mathrm{arc\,tg}\, x}{2}(x^2 - 1) - \dfrac{x}{2}\ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2$.

3476. $\dfrac{x^{13}}{11 \cdot 12 \cdot 13} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

3477. $y = x^2 \ln\sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

3478. $y = -\dfrac{1}{8}\sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

3479. $y = \ln\sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

3480. $y = \dfrac{e^{ax}}{a^{10}} + P_9$ (P_9 је полином 9-ог степена по x с произвољним коефициентима).

3481. $x = \dfrac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\dfrac{\sqrt{C_1 + ae^y} - \sqrt{C_1}}{\sqrt{C_1 + ae^y} + \sqrt{C_1}} + C_2$. **3482.** $y = C_1 x^2 + C_2$.

3483. У зависности од знака произвољне константе, уведене првим интегрирањем, добијају се два израза за општи интеграл:

$$y = C_1\,\mathrm{tg}\,[C_1(x - C_2)] \quad \text{и} \quad y = C_1\frac{1 - e^{2C_1(x - C_2)}}{1 + e^{2C_1(x - C_2)}};$$

помоћу комплексних бројева оба се решења могу изразити једном формулом.

3484. $x = \dfrac{2}{3}(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1} + C_2$. **3485.** $(x - C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$.

3486. $y = \dfrac{C_1 + x}{C_2 + x}$. **3487.** $y = C_1 e^{C_2 x}$. **3488.** $y = C_1 e^x + C_2 - x - \dfrac{x^2}{2}$.

3489. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + C_1 x^2 + C_2$.

3490. $y = (1 + C_1^2)\ln(x + C_1) - C_1 x + C_2$.

3491. $y = (C_1 x - C_1^2)\,e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2$.

3492. $y=\frac{1}{12}(x-C_1)^3+C_2$. **3493.** $y=C_1x\,(x-C_1)+C_2$.

3494. $y=\ln\frac{C_1C_2x^{C_1}}{1-C_2x^{C_1}}$. **3495.** $y=\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2$.

3496. $y=\sqrt{\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2}$. **3497.** $y=C_1\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+C_2$.

3498. $y^2=C_1x^4+C_2$. **3499.** $yx^2=4$. **3500.** $y=2e^{\frac{1}{2}x^2}-1$.

3501. $y=x^3+3x+1$. **3502.** $y=\ln\frac{1}{1-x}$. **3503.** $y=\ln\frac{x^2}{4}$.

3504. $y=\frac{1+x}{x}$. **3505.** $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}+1$.

3506. $y=x$; извршити смену $y=ux$.

3507. $y=\sqrt{1+e^{2x}}$. **3508.** $y=\sqrt{2x-x^2}$.

3509. $y=x$. **3510.** $y=\frac{1}{3}(C_1-2x)^{\frac{3}{2}}+C_2x+C_3$.

3511. $y=(x+C_1)\ln(x+C_1)+C_2x+C_3$ **3512.** $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

3513. $y=\frac{1-C_1x}{C_1^3}\ln(1-C_1x)-\frac{x^2}{2C_1}+C_2x+C_3$.

3514. $y=C_2\left(xe^{C_1x}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right)+C_3$.

3515. $y=C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5$.

3516. $y=C_2e^{x\sqrt{C_1}}+C_3e^{-x\sqrt{C_1}}$. **3517.** $y=C_2e^{C_1x}+C_3$.

3518. $(x-C_2)^2+(y-C_3)^2=C_1^2$.

3519. Ланчанице и кругови с центром у коорданатном почетку.

3520. Еволвенте кругова. **3521.** $e^{ay}+C_2=\sec(ax+C_1)$.

3522. Ланчаница. **3523.** Парабола.

3524. $S=\frac{m}{3k}\left[\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t+C\right)^3}-\sqrt{C^3}\right]$.

3525. Упутство. Нека је апсциснa оса управљена вертикално наниже, координатни почетак на површини течности, а једначина зрака $y=f(x)$. На дубини x имамо:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+d\alpha)}=\frac{m+dm}{m},$$

где је m индекс преламања на дубини x, а α је угао између вертикале и тангенте на светлосни зрак. Очевидно је да је $\operatorname{tg}\alpha=y'$. Из једначине $m\sin\alpha=(m+dm)(\sin\alpha\cos d\alpha+\cos\alpha\sin d\alpha)$, кад отворимо заграде

и занемаримо бесконачно мале величине реда вишег од првог, добијамо: $m\,d\alpha=-dm\operatorname{tg}\alpha$, одакле је $\frac{dm}{m}=-\frac{dy'}{y'(1+y'^2)}$. Интегрирањем ове једначине добијамо y' као функцију од m. Ставимо ли уместо m његову вредност изражену помоћу x и интегрирамо још једанпут, добијамо резултат:

$$y=\frac{m_0\sin\alpha_0}{2}\ln\frac{(m_2-m_1)x+m_1h+\sqrt{[(m_2-m_1)x+hm_1]^2-m_0^2\sin^2\alpha_0}}{(m_2-m_1)x+m_1h-\sqrt{[(m_2-m_1)x+hm_1]^2-m_0^2\sin^2\alpha_0}}+C.$$

3526. $x^2y''-6xy'+12y=0$. **3527.** $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$.

3528. $(-2x^3+6x^2-6x)y'''+(2x^3-6x+6)y''+6x(1-x)y'-6(1-x)y=0$.

3529. $y=3x^2-2x^3$.

3531. Функције P и Q морају бити везане релацијом $Q'+2PQ=0$.

3532. $y=x^2-e^{x-1}$.

3533. $y=C_1\sin x+C_2\left\{1-\sin x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right\}$.

3534. $y=C_1x+C_2x\int\frac{e^x\,dx}{x^2}$.

3535. $y=C_1x+C_2(x^2-1)$. **3536.** $y=x^3+C_1x^2+C_2$.

3537. $y=(x+1)^4+C_1+C_2\ln(x+1)$.

3538. $y=C_1x^3+C_2(x+1)-x$. **3539.** $y=\frac{x^5}{2}+2x^2+C_2x^3+C_1x-2C_3$.

3540. $y=\pi-1+4\operatorname{arc\,tg}x+x^2$. **3541.** $T=\frac{\theta-\vartheta}{\ln\frac{R}{r}}\ln\frac{\rho}{R}+\theta$.

Упутство. Очевидно је да T не зависи од z и функција је од $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, ако се z оса напери по оси цеви.

3542. $T=\frac{R\theta-r\vartheta}{R-r}-\frac{Rr(\theta-\vartheta)}{\rho(R-r)}$.

3543. $t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\frac{at^2-b^2}{a}y=0$, где је $t=\frac{x-b}{\sqrt{a}}$.

3544. $t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-p^2)y=0$, где $t=kx$.

3545. $x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+\left[x^2-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right]u=0$.

Упутство. Ставити $y=ux^{\frac{1-a}{2}}$.

3546. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. **3547.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

3548. $y=C_1e^{4x}+C_2$. **3549.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. **3550.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

3551. $y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$. **3552.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$.

3553. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **3554.** $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

3555. $y = e^x\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right)$. **3556.** $y = e^x(C_1 + C_2 x)$.

3557. $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2$. **3558.** $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

3559. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} + C_3^{-3x}$.

3560. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$.

3561. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3$.

3562. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

3563. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$.

3564. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x e^{-2x}$.

3565. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x^{n-3} + \cdots + C_{n-1} x + C_n$.

3566. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$.

3567. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\cos\frac{x}{2} + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2)\sin\frac{x}{2} + C_7 x + C_8$.

3568. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x + C_5 \cos x + C_6 x \cos x$.

3569. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

3570. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_n x^{n-1})$.

3571. $y = 4e^x + 2e^{3x}$. **3572.** $y = \frac{1}{2}(e^{2(x-1)} - 1)$.

3573. $y = e^{-\frac{x}{2}}(2 + x)$. **3574.** $y = 1 + \cos x$. **3575.** $y = e^x + \cos x - 2$.

3576. $y = \frac{a + ky_0}{2k} e^{k(x-x_0)} + \frac{ky_0 - a}{2k} e^{-k(x-x_0)}$.

3577. $y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k}\sin k(x - x_0)$.

3578. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1$.

3579 $y = C_1 \cos x\sqrt{2} + C_2 \sin x\sqrt{2} + \frac{x^2}{2}$.

3580. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$.

3581. $y = C_1 e^x + C_2 + 3x + 2x^2 + x^3$. **3582.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x e^x$.

3583. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}$.

3584. $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{a^2 + 1}$.

3585. $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2\right)$.

3586. $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{5\sin x + 7\cos x}{74}$.

3587. $y = e^{-x}\{C_1 + C_2 x + 4x\sin x - (x^2 - 6)\cos x\}$.

3588. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4}x\sin x + \frac{1}{16}\cos 3x$.

3589. $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{x}$. **3590.** $C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} + x^2 + 1$.

3591. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x} + \frac{9\sin x + 7\cos x}{13} + x + \frac{7}{10}$.

3592. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}xe^{2x}$. **3593.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x$.

3594. $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x$.

3595. $y = C_1 e^x + C_2 + x^2 \sin 3x$.

3596. $y = e^x(C_1 + C_2 x + \ln\sqrt{x^2 + 1} - x\,\mathrm{arc\,tg}\,x)$.

3597. $y = 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

3598. $y = e^x(e^x - x^3 - x + 1)$. **3599.** $y = a\cos\frac{x}{2} + (b\sqrt{2} - a)\sin\frac{x}{2}$.

3600. $y = \frac{e^{4x+1} - e^{1-x}}{e^5 - 1}$. **3601.** $y = \frac{e^x - 1}{1 - e} + x^2$.

3602. Не постоје решења која задовољавају дате граничне услове.

3603. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x} - x - 4$.

3604. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-2x} + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

3605. $y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + x^4 e^x$.

3606. $y = \left(\frac{1}{60}x^5 + C_1 x^2 + C_2 x + C_2\right)e^x$.

3607. $y = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x$.

3608. $y = e^x + x^3$. **3609.** $y = 3xe^{-x} + e^{-2x} + 1$.

3610. а) $y = e^x (x + C_1) - (e^x + 1) \ln (e^x + 1) + C_2$;

б) $y = \frac{1}{2} e^x \{\arc\sin e^x + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + C_1\} + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2$;

в) $y = C_1 e^x - \cos e^x + C_2$.

Упутство. Сва три се резултата лако добијају помоћу опште формуле (Курс, II, стр. 274).

3611. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{5} \sin^6 x + \frac{1}{5} \cos^6 x + \cos^2 x - \frac{2}{3} \cos^4 x$.

3612. $y = x^3 (C_1 + C_2 x^4)$. **3613.** $y = \frac{1}{2} x + C_1 \cos (\ln x) + C_2 \sin (\ln x)$.

3614. $y = x (C_1 + C_2 \ln x + C_3 \ln^2 x)$. **3615.** $y = x (C_1 + C_2 \ln x + \ln^2 x)$.

3616. $y = x \ln x + C_1 x + C_2 x^2 + x^3$. **3617.** $S = \frac{1}{5} (4 e^t + e^{-4t})$.

3618. $t_B = \sqrt{\frac{ma}{f}} \ln \frac{F + \sqrt{f (2F - f)}}{F - f}$.

3619. $S = e^{-0,245 t} [2 \cos (157 t) + 0,00312 \sin (157 t)]$.

3620. $k = 33 \frac{1}{3}$ g/cm $= 33 \frac{1}{3} \cdot$ g дин/cm; $t = 0,38$ sek; $x = 5 (1 - \cos 8,16 t)$.

Упутство. При састављању једначине узети $g = 1000$ cm/sek².

3621. $k = \frac{4 \pi^2}{T^2} I$.

Упутство. Поћи од основне једначине механике за обртно кретање $M = I\dot{\omega}$: моменат активне силе једнак је производу момента инерције тела и његовог угаоног убрзања.

3622. $r = \frac{a_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$.

Упутство. Све се догађа тако као кад би цев била непомична, а на лопту би дејствовала сила, јачине $m\omega^2 r$ (r је растојање од осе обртања до лоптице).

3623. Ако је $k > m\omega^2$, онда је

$$r = \frac{a_0}{k - m\omega^2} \left[k - m\omega^2 \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}\right)\right];$$

ако је $k = m\omega^2$, онда је $r = a_0 \left(1 + \frac{k}{2m} t^2\right)$;

ако је $k < m\omega^2$, онда је

$$r = \frac{a_0}{m\omega^2 - k} \left[m\omega^2 \operatorname{ch} \left(t \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\right) - k\right].$$

3624. $\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0$; $4L > R^2 C$; $T = \frac{4 LC \pi}{\sqrt{4LC - R^2 C^2}}$.

3625. $\begin{cases} y = (C_1 + C_2 - C_1 x) e^{-2x}. \\ z = (C_1 x - C_2) e^{-2x}. \end{cases}$

3626. $\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t} \{(C_2 + C_1) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t\}. \end{cases}$

3627. $\begin{cases} x = (0,5\, t + C_1) e^t + (-0,5\, t + C_2) e^{-t}. \\ y = (0,5\, t + C_1 + 0,5) e^t + (0,5\, t - C_2 - 0,5) e^{-t}. \end{cases}$

3628. $\begin{cases} z = C_1 y; \\ zy^2 - \frac{3}{2} x^2 = C_2. \end{cases}$

3629. $\begin{cases} x = 2 C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \frac{7}{40} e^t + \frac{1}{27} e^{2t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \frac{1}{40} e^t + \frac{7}{54} e^{2t}. \end{cases}$

3630. $y = \frac{\sqrt{C_1 + x^2}}{\ln \frac{C_2}{a + \sqrt{x^2 + C_1}}}$; $z = \sqrt{C_1 + x^2} \ln \frac{C_2}{x + \sqrt{x^2 + C_1}}$.

3631. $\frac{y}{x} = C_1$; $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. **3632.** $x^2 + y^2 + z^2 = C_1 y$; $z = C_2 y$.

3633. $y^2 - z^2 = C_1$; $yz - y^2 - x = C_2$.

3634. $x + y + z = C_1$; $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

3635. $z = x - y$; $y (y - 2x)^3 = (x - y)^2$.

3636. $y = 2 (e^x + e^{-x}) + x - 1$; $z = 2 (e^x - e^{-x}) - x + 1$.

3637. $x = \frac{t}{3}$; $y = -\frac{t}{3}$.

3638. $\begin{cases} x = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-2t}. \\ y = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t}. \\ z = -\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}. \end{cases}$

3639. $x = -e^{-t}$; $y = e^{-t}$; $z = 0$.

3640. Криве $y_1 = \frac{C_1 x^2 - C_2}{2x}$ и $y_2 = -\frac{C_1 x^2 + C_2}{2x}$. За дате почетне услове добијају се хиперболе: $y_1 = \frac{3 - x^2}{2x}$; $y_2 = \frac{3 + x^2}{2x}$.

3641. $y = e^{2x}$. **3642.** $\rho_1 = \sin \operatorname{hyp} \varphi$; $\rho_1 = \cos \operatorname{hyp} \varphi$.

3643. Логаритамске спирале: $\rho_1 = e^{\varphi}$; $\rho_2 = \frac{1}{2} e^{\varphi}$.

3644. Равна крива $x - y + z = 0$; $x = -\frac{z \ln z}{\sqrt{2}}$.

3645.
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left[g t^2 + (l_1 - l_0)\left(1 - \cos\frac{\pi t}{2T}\right)\right], \\ y = \frac{1}{2}\left[g t^2 + l_1 + l_0 + (l_1 - l_0)\cos\frac{\pi t}{2T}\right]. \end{cases}$$

3646.
$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} 2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49}, \\ y = \operatorname{ch} 2t - \frac{6}{49}\cos 14t + \frac{300}{49}, \end{cases}$$

где је x пут теже, а y пут лакше лоптице, при чему се y рачуна на супротну страну од x.

3647.
$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2}\left[(A_0 + B_0) e^{kt} + (A_0 - B_0) e^{(k+2k_1)t}\right], \\ y_B = \frac{1}{2}\left[(A_0 + B_0) e^{kt} - (A_0 - B_0) e^{(k+2k_1)t}\right]. \end{cases}$$

3648. $A = \frac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1 - \left(\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right]$; $B = \alpha\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$,

где је $\alpha = \sqrt{B_0^2 + \frac{2k_1}{k} A_0}$, $\beta = \frac{\alpha - B_0}{\alpha + B_0}$.

3649. $h_1 = \frac{S_1}{S_1 + S_2} H_1 + \frac{S_2}{S_1 + S_2}\left\{H_2 + (H_1 - H_2) e^{-a\frac{S_1+S_2}{S_1 S_2}t}\right\}$.

3650.
$$\begin{cases} I_2 = C_1 e^{-50t} + C_2 e^{-200t} + A\sin(100\pi t) + B\cos(100\pi t); \\ I_1 = 0{,}01\, I_2' + 2{,}5\, I_2; \end{cases}$$
$$A = \frac{2000(15 - 10\pi^2)}{35^2\pi^2 + (15 - 10\pi^2)^2}; \qquad B = -\frac{70\,000\,\pi}{35^2\pi^2 + (15 - 10\pi^2)^2}.$$

3651. $I_1 = e^{-\frac{t}{2CR}}\left\{C_1\cos\frac{\Omega t}{2CRL} + C_2\sin\frac{\Omega t}{2CRL}\right\} + A\sin\omega t + B\cos\omega t$;

$I_2 = LCI_1''$; $\Omega^2 = 4\,CLR^2 - L^2$; $C_1 = -B$;

$C_2 = \frac{B}{2L\Omega}(\Omega^2 - L^2 - 4C^2R^2L^2\omega^2)$.

Уз главу XIII

3652. Конвергира. **3653.** Конвергира. **3654.** Дивергира.
3655. Конвергира. **3656.** Конвергира. **3657.** Дивергира.
3658. Конвергира. **3659.** Конвергира.

Упутство. Обратити пажњу на то да множитељи у бројитељима и именитељима чланова реда образују респективно аритметичке прогресије.

3660. Дивергира. **3661.** Конвергира. **3662.** Конвергира.

Упутство. Упоредити с редом $\frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \cdots$

3663. Конвергира. **3664.** Дивергира. **3665.** Конвергира.
3666. Конвергира. **3667.** Дивергира. **3668.** Конвергира.
3669. Конвергира. **3670.** Конвергира апсолутно.
3671. Конвергира, али не апсолутно.
3672. Конвергира, апсолутно.
3673. Конвергира, али не апсолутно. **3674.** Дивергира.
3675. Конвергира, али не апсолутно.
3676. Конвергира, али не апсолутно. **3677.** Апсолутно конвергира.
3678. Апсолутно конвергира. **3679.** Дивергира.

Упутство. Уверити се у то да општи члан не тежи нули. Посматрати $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

3680. Конвергира. **3681.** Конвергира. **3682.** Дивергира.
3683. Конвергира. **3684.** Конвергира. **3685.** $\frac{1}{2}$.

Упутство. Имамо $2S = \frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{5-3}{3\cdot 5} + \frac{7-5}{5\cdot 7} + \cdots = 1 - \frac{1}{3} +$
$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = 1.$$

3686. $\frac{1}{3}$. **3687.** $\frac{11}{18}$. **3688.** $\frac{23}{90}$. **3689.** $\frac{1}{4}$. **3690.** $\frac{3}{2}$.

3691. 1. **3692.** $\frac{1}{8}$. **3693.** $\frac{\pi}{4}$. **3694.** $\frac{\pi}{4}$.

Упутство. Поћи од једнакости:
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2} = \int_n^{n+1}\frac{dx}{1+x^2}.$$

3699. $-1 < x < 1$. **3700.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **3701.** $-1 \leqslant x < 1$.
3702. $|x| > 1$. **3703.** $x \neq \pm 1$. **3704.** $|x| \leqslant 1$. **3705.** За свако x.
3706. $x > 0$. **3707.** $|x| < 0{,}1$. **3708.** $|x| < 1$. **3709.** Само за $x = 0$.
3710. За свако x. **3711.** За свако x. **3713.** 11 чланова.

3714. Упутство. Најпростије је диференцирати ред и уверити се да изводни ред униформно конвергира за све $x \geqslant 0$.

3720. Непрекидност функције $f(x)$ доказује се упоређивањем оба реда са редом $\sum \frac{1}{n^2}$. За доказ периодичности треба објаснити шта ће бити са редовима кад се x замени са $x+\omega$.

3721. $\frac{1}{1-x^2}$; $\frac{1}{1-x^3}$. **3722.** $\frac{\pi^3}{12}$. **3723.** $\ln 2$.

3724. Дати ред не може се диференцирати члан по члан ни у каквом интервалу. Заиста, општи члан изводног реда има облик $\pi\cos(2^n\pi x)$. Ма како мали био интервал (α, β) и ма где на бројној оси он лежао, увек ће се унутар њега наћи бројеви облика $\frac{k}{2^N}$, где је k цео број, а N довољно велики позитиван број. Но за $x = \frac{k}{2^N}$ изводни ред дивергира, јер за све $n > N$ његови чланови постају једнаки π.

3725. а) $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2\right)$; б) $\frac{1}{4\sqrt{2}}[\pi + \ln(3+2\sqrt{2})]$. **3726.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3727. xe^x. **3728.** $x\ln(1+x)$. **3729.** $\frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{cos\,hyp} x)$.

3730. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$. **3731.** $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$.

3732. 0,2. **3733.** 1. **3734.** 10. **3735.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3736.** ∞.

3737. 0. **3738.** $\frac{1}{3}$. **3739.** 1. **3740.** $\frac{1}{e}$.

3741. 1. **3742.** $\frac{1}{e}$.

3743. $\alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \beta_0\alpha_1)x + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)x^2 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}\right)x^n + \cdots$

3744. $\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 x + (\alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2)x^2 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}\right)x^n + \cdots$

3745. $\frac{1}{\alpha_0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0^2}x - \cdots + \beta_n x^n + \cdots$, где се β_n дефинише рекурентно:

$$\beta_n = -\frac{\sum_{1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}}{\alpha_0}.$$

3746. $\pm(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)$. **3747.** $1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + 5x^8 + \cdots$

3748. $y = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{3}{8\cdot 3!}(x-1)^3 + \frac{9}{2^4\cdot 4!}(x-1)^4 - \ldots$

3749. $y = \frac{1}{3} - \frac{x-3}{9} + \frac{(x-3)^2}{27} - \frac{(x-3)^3}{81} + \cdots + (-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}} + \cdots$

3750. $y = 1 - \frac{\pi^2}{4^2\cdot 2!}(x-2)^2 + \frac{\pi^4}{4^4\cdot 4!}(x-2)^4 - \frac{\pi^6}{4^6\cdot 6!}(x-2)^6 + \cdots$

3751. $y = \sqrt{e}\left[1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2\cdot 2!}(x-2)^2 + \frac{2}{4\cdot 3!}(x-2)^3 + \right.$
$\left. + \frac{5}{8\cdot 4!}(x-2)^4 + \cdots\right]$.

3752. $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots$ **3753.** $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} + \cdots$

3754. $1 - 2x + 2x^2 - 2x^4 + 2x^5 - 2x^7 + \cdots$

3755. $y = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \frac{272}{7!}x^7 + \cdots + \alpha_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots$

где се α_{2n-1} дефинише рекурентним обрасцем:

$$\alpha_{2n-1} = (-1)^{n-1}\Big[\underbrace{\frac{1}{(2n-1)!} - \frac{\alpha_1}{(2n-2)!} + \frac{\alpha_3}{(2n-4)!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\alpha_{2n-3}}{2!}}_{n+1 \text{ чланова}}\Big]$$

3756. $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots$ **3757.** $-2\left[\frac{x^3}{3!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{3x^7}{7!} - \frac{4x^9}{9!} + \cdots\right]$

3758. $\cos\alpha - x\sin\alpha - \frac{x^2}{2!}\cos\alpha + \frac{x^3}{3!}\sin\alpha + \cdots$

3759. $x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{32x^6}{6!}$. **3760.** $1 + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + \cdots + \frac{x^{6n}}{(2n+1)!} + \cdots$

3761. $x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n + \cdots$

3762. $e\left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{6}x^3 + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots\right)$, где се α_n дефинише рекурентним обрасцем:

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)\alpha_{n-1} + (n-2)\alpha_{n-2}}{n}.$$

3763. $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{4x^5}{5!} - \cdots$; општи члан реда је

$$\sqrt{2}^n \sin\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

3764. $1 - \frac{4x^4}{4!} + \frac{4^2x^8}{8!} - \frac{4^3x^{12}}{12!} + \cdots$

3765. $-2\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos\frac{\pi n}{3}\cdot\frac{x^n}{n}$. **3766.** $\sum_{1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$; 12.

3767. а) -5040; б) $\frac{105}{16}$; в) $5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$.

3768. $\frac{8}{3}$. **3769.** $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^3}-\frac{x^4}{2^2\cdot 4!}+\cdots$

3770. $e\left(1-\frac{x^3}{2!}+\frac{4x^4}{4!}+\cdots\right)$. **3771.** $1-\frac{nx^2}{2!}+\frac{n(3n-2)}{4!}x^4+\cdots$

3772. $\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}+\cdots$ **3773.** $1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+\cdots$

3774. $1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{6}x^4-\cdots$

3775. $B_1=\frac{1}{6}$; $B_2=-\frac{1}{30}$; $B_3=\frac{1}{42}$; $B_4=-\frac{1}{30}$.

3776. $x-\frac{x^3}{6}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots$

3777. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$ **3778.** 3,107. **3779.** 4,121. **3780.** 7,937.

3781. 1,005. **3782.** 3,017. **3783.** 2,002. **3784.** 2,001.

3785. 2,153; грешка је 0,0014. **3786.** $0{,}0174<\sin 1^\circ<0{,}0175$.

3787. $0{,}999<\cos 1^\circ<1$. **3788.** $0{,}17364<\sin 10^\circ<0{,}17365$.

3789. $0{,}9848<\cos 10^\circ<0{,}9849$. **3790.** 3,1415926536.

3791. $2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right\}$. **3792.** 0,693147. **3793.** 1,0986.

3794. 0,434294. **3795.** 0,6990. **3797.** Највећа разлика ордината не прелази 0,6 mm.

3798. $\frac{1}{6}$. **3799.** $\frac{1}{4}$. **3800.** 1. **3801.** $\frac{1}{2}$.

3802. $\frac{2}{3}$. **3803.** $\frac{1}{3}$. **3804.** $\frac{1}{60}$.

3806. $C+x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\cdots$

3807. $\ln C|x|-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\frac{x^6}{6\cdot 6!}\cdots$ $x\neq 0$.

3808. $\ln C|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\cdots$ $x\neq 0$.

3809. $\ln C|x|+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 3!}+\frac{x^3}{3\cdot 4!}+\cdots$ $x\neq 0$.

3810. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots$ **3811.** $x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\frac{x^7}{7^2}+\cdots$

3812. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^{13}}{13}+\cdots, |x|<1$.

3813. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{x^7}{7}+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^{10}}{10}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots, |x|<1$.

3814. $x+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{10}}{19}+\frac{x^{28}}{28}+\cdots, |x|<1$.

3815. $\frac{x^3}{2^2\cdot 3}-\frac{1\cdot 3}{2!}\frac{x^7}{2^4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{3!}\frac{x^{11}}{2^6\cdot 11}-\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4!}\frac{x^{15}}{2^8\cdot 15}+$
$+\cdots, -1\leqslant x<1$.

3816. 0,3230; 0,0001. **3817.** 0,44890; 0,000002.

3818. 0,497; 0,0001. **3819.** 3,518, 0,0005.

3820. 0,74; 0,005. **3821.** 0,0118; 0,00001.

3822. 32,831 (5 чланова реда). **3823.** 0,487 (3 члана реда).

3824. 0,006 (1 члан реда). **3825.** 0,494 (2 члана реда).

3827. $\frac{\pi}{12}$. **3828.** 3,73. **3829.** 3,642.

Примедба. Незгодно је израчунавати површину по обрасцу

$$S=4\int_0^1\sqrt[4]{1-x^4}\,dx,$$

зато што одговарајући ред за $x=1$ споро конвергира. Треба израчунати површину сектора ограниченог кривом, ординатном осом и симетралом првог координатног угла. То даје ред који брзо конвергира.

3830. 0,2546. **3831.** 0,119.

3832. $y=x+\frac{2}{1\cdot 3}x^3+\frac{2^2}{1\cdot 3\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{2^{n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}x^{2n-1}+\cdots$

Најбрже доводи до циља трећи метод:

$$y^{(2n)}|_{x=0}=0;\; y^{(2n-1)}|_{x=0}=2^{n-1}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2).$$

3833. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots$

Упутство. Претставити x^x у облику $e^{x \ln x}$, развити у ред по степенима од $x \ln x$ и интегрирати изразе облика $x^n \ln^n x$.

3834. $y = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7 \cdot 9} x^7 - \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 27} x^{11} - \ldots$

3835. $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 + \frac{9}{32} x^4 + \ldots$

3836. $y = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

3837. $y = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4} x^4 + \ldots$

3838. $y = 1 + x + \frac{3}{2!} x^2 + \frac{10 x^3}{3!} + \frac{38}{4!} x + \frac{210}{5!} x^5 + \ldots$

3839. $y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3} x^3 + \ldots$ **3840.** $y = 0$.

3841. $y = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3 \ldots$

3842. $y = \frac{1}{4} x + \frac{x^3}{12} + \frac{11}{5 \cdot 96} x^5 + \cdots$

3843. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11 x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$ **3844.** $y = -\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$

3845. $y = 1 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \frac{4(x-1)^4}{4!} + \frac{60(x-5)^5}{5!} + \ldots$

3846. $y = 1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} + \ldots$

3847. $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{14x^5}{5!} + \ldots$

3848. $y = x^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{6!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^6}{8!} + \ldots \right)$.

3849. $y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{3(x-1)^5}{5!} + \ldots$ **3850.** 1,001625.

Упутство. Резултат се најбрже добија ако се тражена функција тражи одмах у облику потенцијалног реда.

3851. 1,0242. Види упутство уз претходни задатак.

3852. $y = C_1 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \ldots \right) +$

$$+ C_2 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \ldots \right).$$

3853. $y = x + \frac{2}{4!} x^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} x^7 + \ldots + \frac{2 \cdot 5 \ldots (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1} + \ldots$

$$k_{x-1} = 0{,}2297.$$

3854. $y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5} - \frac{14x^6}{6} + \ldots$; петога.

3855. $y = x^2 - \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{80} x^8 - \frac{7}{4400} x^{11} + \ldots$; 0,318; 0,96945.

3856. На 7,07765 cm десно од тачке A.

3857. $y = h - \frac{gt^2}{2} + \frac{gp_0 Sm^3}{h} \left[\frac{1}{4!} \left(\frac{t}{m} \right)^4 + \frac{6gm^2 - p_0 Sm}{6!\,h} \left(\frac{t}{m} \right)^6 + \ldots \right.$

3858. $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$, где је $\alpha_1 = -\frac{a\alpha_0\alpha_1 + b}{1 \cdot 2}$, а α_n се одређује рекурентним обрасцем:

$$\alpha_n = \frac{-a[(n-1)\alpha_{n-1}\alpha_0 + (n-2)\alpha_{n-2}\alpha_1 + \ldots + 2\alpha_2\alpha_{n-3} + \alpha_3\alpha_{n-2}]}{(n-1)n}.$$

3859. $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$, где је $\alpha_2 = -\frac{b\alpha_0 + a\alpha_1}{2\alpha_0}$, а α_n се израчунава по рекурентном обрасцу:

$$\alpha_n = -\frac{b\alpha_{n-2} + (n-1)a\alpha_{n-1} + \overbrace{(n-1)(n-2)\alpha_1\alpha_{n-1} + (n-2)(n-3)\alpha_2\alpha_{n-2} + \ldots}^{\text{свега } (n-2) \text{ сабирака}}}{n(n-1)\alpha_0}$$

3860. Диференцијална једначина задатка је

$$E = L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \frac{V_0 - kQ}{k_1},$$

где је Q количина електрицитета, која прође кроз коло за интервал времена од почетка огледа до момента t. Изразимо ли Q помоћу V (V је количина воде која се налази у суду у моменту t), и одредимо ли из услова задатка коефициенте, доћи ћемо до једначине $V'' + aVV' + b = 0$, где је $a = \frac{1}{k_1 L} = 0{,}005$; $b = \frac{kE}{L} = 0{,}00935$. Интеграцијом ове једначине за почетне услове $V_0 = 1000$ cm³, $V_0' = -kI_0 = -0{,}00187$ cm³/sek, добијамо ред:

$$V = 1000 - 0{,}00187\,t - 10^{-9}[3t^3 - 3{,}75\,t^4 + 3{,}75\,t^5 - 3{,}13\,t^6 + \ldots].$$

Ред је алтернативан, коефициенти, почев од шестог, опадају тежећи нули, тако да је ред подесан за израчунавања.

3861. Диференцијална једначина задатка има облик

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \frac{k_1}{M_0 - kQ} = E.$$

Узмемо ли за тражену функцију количину y још неразложеног хлороводника у тренутку t, једначина добија облик $yy'' + ay' + by = 0$, где је $a=\frac{k_1}{L}=50$, $b=\frac{kE}{L}=0,0191$. Интеграцијом ове једначине за почетне услове $y_0=M_0=10$; $y_0'=-kI_0=-0,00381$, добијамо ред:

$$y=10-0,00381\,t+10^{-10}t^3\,(1,21-1,52\,t+\dots).$$

3862. $I_2(x)=\frac{x^2}{4\cdot 2!}\left\{1-\frac{x^2}{2^2\cdot 1!\cdot 3}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\dots\right\}$; конвергенција за свако x; $I_2(3)<0,5$; $I_2(2)\cong 0,353$.

3863. а) 7; б) 9. **3866.** $y=C_1\,I_{\frac13}\left(\frac{x}{3}\right)+C_2\,I_{-\frac13}\left(\frac{x}{3}\right)$.

3867. $y=\frac{1}{x^n}\{C_1 I_n(x)+C_2 I_{-n}(x)\}$.

3868. $K_0=I_0(x)\cdot\ln x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac12\right)+$

$+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1+\frac12+\frac13\right)-\cdots$ (с тачношћу до константног множитеља).

3869. $y=C_1\,I_1\left(\frac{x}{\sqrt2}\right)+C_2\,K_1\left(\frac{x}{\sqrt2}\right)$.

3870. а) У сваком интервалу који садржи нулу лежи бескрајно мноштво екстремума.

б) Тачке екстремума су прекидне тачке, тј. целе вредности од x. На тај начин сваки коначан интарвал садржи само коначан број екстремума.

3871. а) Да.

3872. Доказ се изводи аналогно доказу изведеном у Курсу (књ. II, стр. 322) за изводе другог реда. Уопштење се тиче израза за коефициенте a_n и b_n функције, диференцијабилне k-пута.

3873. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$. **3874.** $\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

3875. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}$.

3876. $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos kx}{k^2}-4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$.

3877. $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{\cos\left[\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right]}{(2k+1)^2}$.

3878. $\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)\,k\cos\frac{k\pi x}{l}}{l^2+k^2\pi^2}+$

$+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k+1}k\sin\frac{k\pi x}{l}}{l^2+k^2\pi^2}$.

3879. $-\ln 2+\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k}$.

3880. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\frac{a\cos x}{1-a^2}-\frac{a\cos 2x}{2^2-a^2}+\cdots\right)$.

3881. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1-a^2}-\frac{2\sin 2x}{2^2-a^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2-a^2}+\cdots\right)$.

3882. $\frac{2\sin\mathrm{hyp}\,a\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1+a^2}-\frac{2\sin 2x}{2^2+a^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2+a^2}-\cdots\right)$.

3883. $2+\frac{4}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

3884. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2\pi^2}{n}+\frac{12}{n^3}\right)\cos nx$.

3885. $\frac{e^{\pi}(e^{2\pi}-2)}{\pi}\left[\frac12+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n}{1+n^2}\sin nx\right)\right]-1$.

3886. $\varphi(x)=\frac{8}{15}\pi^4+48\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\cos nx$; $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$.

Упутство. Да би се упростио рачун треба искористити непрекидност функције $\varphi''(x)$.

3887. $\frac{\pi^2}{12}$; $\frac{\pi^2}{12}$; искористити развијање фуниције $y=x^2$ у Фурије-ов ред.

3888. $\frac{\pi^3}{32}$.

Упутство. Искористити развијање функције $y=\frac{\pi}{8}x(\pi-x)$ у ред по синусима вишеструких углова у интервалу $(0\leqslant x\leqslant\pi)$; затим ставити $x=\frac{\pi}{2}$.

3889. $\frac{\pi^2}{8}$. **3890.** $S = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$. **3891.** $\frac{\pi}{4}$.

3892. $y = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{nc\pi}{l} \sin nx \cdot \cos n \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\, t.$

3893. $u = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi a t}{l} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^3}.$

3894. $\gamma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k\frac{\partial y}{\partial t}.$

3895. $y = \frac{4\alpha}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos\frac{(2n+1)}{2l} \sqrt{\frac{k}{\gamma}}\, \pi t.$

3896. $T = 50\, e^{-0{,}004\, t} \sin\frac{\pi x}{50}$; кроз 500 минута.

3897. $C = C_0 + (C_{\text{зас}} - C_0)\left\{\frac{x}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{h^2}} \sin\frac{n\pi x}{h}\right\}.$