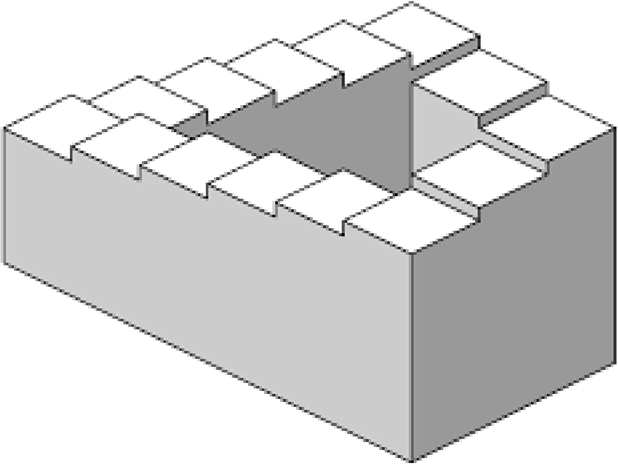
Mišljenje i računanje

Slobodan Vujošević

HEK, 3. januar 2017.

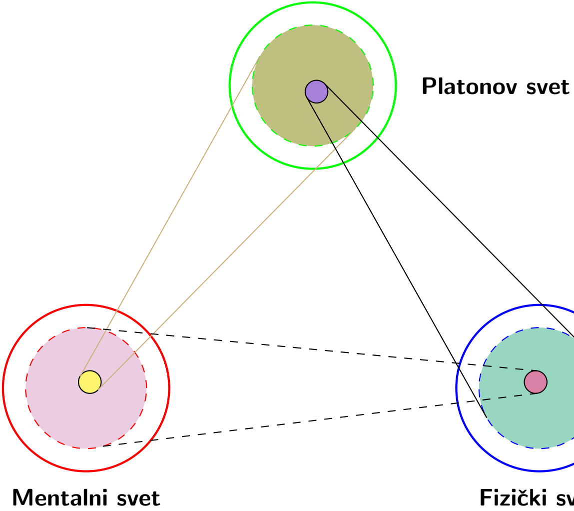


Platonizam

"Pogrešno je stanovište da su značenja čovekova tvorevina ili da se ona sastoje od semantičkih konvencija. Značenja su pojmovi koji formuraju *objektivnu sopstvenu realnost*, koja se ne može kreirati ili menjati, već samo istraživati, razmatrati i opisivati."

Kurt Gedel, Gibsovo predavanje, 1951.

Gedelova metafizika



Gedelova metafizika

U osnovi izložene metafizičke koncepcije su sledeća stanovišta:

- Postoje fenomeni fizičkog sveta koji se ne mogu izraziti matematčkim zakonima.
- Svest i mišljenje se ne mogu svesi na čisto fizičke procese.
- Postoje matematičke istine, koje se mogu precizno formulisati, ali se u principu ne mogu i dokazati.

Ključni argument koji govori u prilog ovim stanovištima je Gedelova teorema nepotpunosti:

- Za svaki konzistentan logički sistem T koji sadrži aritmetiku, postoji istinita rečenica G_T koja nije dokaziva u T.

Logički sistem

Logički sistem sastoji se od *sintakse* i *semantike*. Da bi se sačuvao njegov deduktivni integritet, sintaksa i semantika logičkog sistema su striktno razdvojene.

Sintaksa je data u formalnom jeziku i sastoji se od rekurzivnog skupa aksioma i skupa pravila zaključivanja pomoću kojih, polazeći od aksioma, generišemo teoreme logičkog sistema.

Semantiku čini konkretna matematička struktura ili klasa struktura koja opredeljuje istinitost rečenica formalnog jezika.

Teorija brojeva

Ovde ćemo se baviti sistemima formulisanim u jeziku predikatske logike, čija semantika će biti struktura prirodnih brojeva

$$\mathbf{N} = (N, +, \cdot, S, 0),$$

gde je $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ skup prirodnih brojeva, operacije $+$, $\cdot$ i S redom sabiranje, množenje i sukcesor prirodnih brojeva, dok je 0 najmanji prirodan broj. Pre svega imamo u vidu logičke sisteme poput *Peanove aritmetike*, njenih rekurzivnih proširenja ili njenih finitističkih fragmenata poput *primitivno rekurzivne aritmetike*.

Konzistentnost, kompletnost i odlučivost

- Logički sistem je *konzistentan* ako se u njemu ne mogu istovremeno dokazati rečenice A i $\neg A$.
- Logički sistem je *kompletan* ako se u njemu za svaku rečenicu A može dokazati A ili $\neg A$.
- Logički sistem je *odlučiv* ako se za svaku njegovu rečenicu može efektivno proveriti istinita ili neistinita.

Od uobičajenih logičkih sistema, *iskazna logika* je konzistentna, semantički kompletna i odlučiva, *geometrija* takodje, *predikatska logika* je konzistentna i semantički kompletna, ali nije odlučiva, dok za Peanovu aritmentiku ne znamo da li je konzistentna, znamo da nije kompletna i znamo da nije odlučiva.

Peanova aritmetika

Peanova aritmetika formuliše se u jezuku predikatske logike $L = \{+, \cdot, S, 0\}$, a njene aksiome su sledeće rečenice:

- $\forall x \neg(S(x) = 0)$
- $\forall x \forall y((S(x) = S(y)) \rightarrow (x = y))$
- $\forall x((x + 0) = x)$
- $\forall x \forall y((x + S(y)) = S(x + y))$
- $\forall x((x \cdot 0) = 0)$
- $\forall x \forall y((x \cdot S(y)) = (x \cdot y + x))$
- $A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(S(x))) \rightarrow \forall x A(x)$,
  gde je $A(x)$ formula aritmetike sa jednim parametrom.

Π_1 rečenice u teoriji brojeva

Već u starijim razredima osnovne škole, deca saznaju za neke po formulaciji sasvim razumljive probleme teorije brojeva:

- Svaki prirodan broj je suma četiri kvadrata.
- Za sve prirodne brojeve x, y, z, n, $x^{n+3} + y^{n+3} \neq z^{n+3}$.
- Svaki paran broj veći od 2 je suma dva prosta broja.

Prvi problem ili *problem četiri kvadrata* postavio je antički matematičar Diofant. Rešen je 1770. godine.

Drugi ili *Fermatova hipoteza*, postavljen je 1637., a rešen tek nedavno, 1993. godine.

Treći je *Goldbahova hipoteza.* Postavljena je 1742. godine i jedan je od najstarijih i najpoznatijih nerešenih problema.

Π_1 rečenice i Turingova mašina

Svi navedeni problemi se jednostavno formulišu rečenicom u Peanovoj aritmetici koja ima oblik

$$\forall x\, A(x),$$

gde je $A(x)$ Bulova kombinacija aritmetičkih jednakosti sa jednim parametrom.

Rrečenice oblika $\forall x A(x)$ nazivaćemo Π_1-rečenicama. One su zanimljive zato što se njihova istinitost može utvrditi ne samo deduktivno već se to može učiniti i računski.

Računsku proveru istinitosti Π_1-rečenica vršićemo na *Turingovoj mašini*. To je računar sasvim sličan realnom, a razlika je u tome što on nema ograničenja na kapacitet, veličinu ulaza, izlaza i vreme rada, kao i u tome što ne greši i ne kvari se.

Π_1 rečenice i Turingova mašina

Neka je P program na Turingovoj mašini koji za bilo koji ulaz n počinje da se izvršava tako što jednu po jednu generiše sve četvorke brojeva (x, y, z, t) i proverava da li zadovoljavaju uslov $x^{t+3} + y^{t+3} = z^{t+3}$, pa kada naidje na takvu četvorku zaustavlja se. Inače, izračunavanje se nikada ne zaustavlja.

To znači da je Fermatova hipoteza istinita ako i samo ako "izračunavanje po programu P za ulaz n se nikada ne zaustavlja."

Sa $P(n) \downarrow$ označavamo da se izračunavanje po programu P za ulaz n završava, a sa $P(n) \uparrow$ da se to izračunavanje ne završava.

Za svaku Bulovu kombinaciju aritmetičkih jednakosti $A(x)$ postoji program P koji proverava $A(x)$, pa je Π_1-rečenica $\forall x A(x)$ istinita ako i samo ako $P(n) \uparrow$, za svaki prirodan broj n.

Univerzalna Turingova mašina

Programi na Turingovoj mašini su konačni spiskovi instrukcija i mogu se efektivno prebrojati, pa neka je

$$(P_0, P_1, P_2, \ldots)$$

lista svih programa jedne promenljive. Zbog efektivnosti liste programa, funkcija

$$U(m, n) = P_m(n)$$

je *izračunljiva.* po obe promenljive m i n. Mašina koja izračunava fukciju U naziva se *univerzalnom Turingovom mašinom*.

Gedelova rečenica

Pretpostavimo da je $C = (C_n : n \geq 0)$ familija Π_1-rečenica takva da za svako n, možemo efektivno odrediti program P_m koji proverava rečenicu C_n i neka je T logički sistem koji je saglasan sa familijom C, tj. u sistemu T moguće je dokazati neke istinite rečenice familije C, ne obavezno sve, ali nijdenu neistinitu.

Pretpostavimo da je M program sa dve promenljive (m, n) koji potvrdjuje dokazivost Π_1-rečenica familije C u sistemu T, tj. ako se izračunavanje $M(m, n)$ završi to potvrdjuje Π_1-irečenicu "izračunavanje $P_m(n)$ se nikada ne završava," tj.

$$M(m,n)\downarrow \;\Rightarrow\; P_m(n)\uparrow .$$

Gedelova rečenica

Od programa M zahtevamo da kada se izračunavanje $M(m, n)$ zaustavi, to potvrdjuje da je rečenica $P_m(n)\uparrow$ familije C, zaista istinita. Program M ne mora da potvrdi sve istinite rečenice familije C, ali ako neku od njih potvrdi, ona ne može biti neistinita.

Ako u prethodnoj relaciji stavimo da je $m = n$, ona postaje

$$M(n, n)\downarrow \;\Rightarrow\; P_n(n)\uparrow,$$

pa kako je $M(n, n)$ izračunavanje sa jednom promenljivom, za neko on k, $M(n, n) = P_k(n)$. Ako stavimo $n = k$, $M(k, k) = P_k(k)$, pa prethodna relacija postaje

$$P_k(k)\downarrow \;\Rightarrow\; P_k(k)\uparrow.$$

Gedelova rečenica

Kako je rečenica $(A \Rightarrow \neg A)$ isto što i rečenica $\neg A$, prethodna relacija se svodi na rečenicu $P_k(k)\uparrow$.

Dakle, Π_1-rečenica $P_k(k)\uparrow$ je istinita, ali kako

$$P_k(k)\uparrow \Leftrightarrow M(k,k)\uparrow,$$

program M ne može da potvrdi $P_k(k)\uparrow$ kao istinitu rečenicu.

Ako $P_k(k)\uparrow$ označimo sa G_T *(Gedelova rečenica logičkog sistema T)*, dobijeni rezultat možemo parafrazirati:

Rodžer Penrouz (1989): Za svaki efektivno proverljiv logički sistem T, saglasan sa nekom nepraznom familijom Π_1-rečenica, u toj familiji postoji rečenica G_T, koja je istinita, ali nije dokaziva sredstvima logičkog sistema T.

Penrouzovo stanovište

Polazeći od prethodnog rezultata, Penrouz je formulisao stanovište da *mišljenje prevazilazi računanje.* Ipak, on smatra da mišljenje, jednako kao i računanje, ima čisto fizičku osnovu. Razlika u moći mišljenja i računanja javlja se zbog toga što su u mišljenje upleteni i "neizračunljivi fizički fenomeni."

Penrouz veruje da takvi neizračunljivi fenomeni mogu postojati u kvantnoj mehanici, ali ne navodi njihove primere. U matematici, najpoznatiji neizračunljiv problem je takozvani *Halting problem:*

- Ne postoji program koji proverava rečenicu $P_m(n)\downarrow$.

Sistem sa samo dva stanja 0 i 1, koji je u stanju 0 ako $P_m(n)\uparrow$, a u stanju 1 ako $P_m(n)\downarrow$, jeste *deterministički neizračunljiv sistem* i Penrouz veruje da takav sistem u prirodi postoji.

Čerčova teza

Važnu ulogu u ovom delu filozofije mišljenja ima takozvana *Čerčova teza* (ili Čerč-Turingova teza) koja glasi:

- Sve efektivno izračunljive funkcije su Turing izračunljive,

Čerčova teza pre svega opravdava ovde izloženu i sve druge deinicije Turingove mašine jer tvrdi da se svaka definicija efektivne izračunljivosti svodi na determinističku Turingovu mašinu (uključujući i *kvantni računar*.) Ona ima mnogo varijanti, a nama je ovde zanimljiva sledeća:

- Sve funkcije fizičkog sveta su Turing izračunljive.

Ova varijanta Čerčove teze je u osnovi takozvane *digitalne fizike* u kojoj je ceo univerzum jedna univerzalna Turingova mašina.

Digitalna fizika

Stanovište digitalne fizike je jasno suprotstavljeno Penrouzovom. Ključni argumenti te teorije zasnivaju se činjenici da je svaki prenos informacija ograničen brzinom svetlosti, te da se univerzum ne može zamisliti kao neka vrsta Penrouzovog *hiperkompjutera*.

Stanovište da mozak jeste Turingova mašina se u filozofiji mišljenja naziva *mehanicizmom*. Nije mali broj zastupnika tog stanovišta, pa su Penrouzovi rezultai imali zanimljiv odjek. Glavni mehanicistički prigovor Penrouzovom stanovištu jeste da njegov i Gedelov argument imaju kondicionalni oblik:

$$(T \text{ je konzistentan sistem}) \Rightarrow G_T.$$

Hilbertova teza

Čerčova teza je neobično tvrdjenje. Ona izjednačava intuitivnu ideju efektivnosti sa matematičkim pojmom izračunljivosti na Turingovoj mašini. U suštini ona nije matematičko tvrdjenje i izlišno je očekivati njen dokaz. Može se samo potvrdjivati, u manoj ili većoj meri i ima status opšteg principa u teoriji izračunljivosti.

Nedavno je (2013. godine) Saul Kripke ipak formulisao njen dokaz tako što je Čerčovu tezu sveo na jednu *Hilbertovu tezu:*

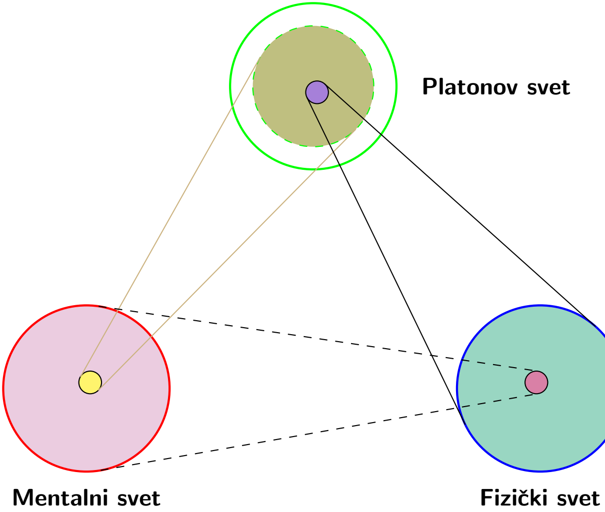
- Sve što je dokazivo ima dokaz u predikatskoj logici.

Hilbertova hipoteza

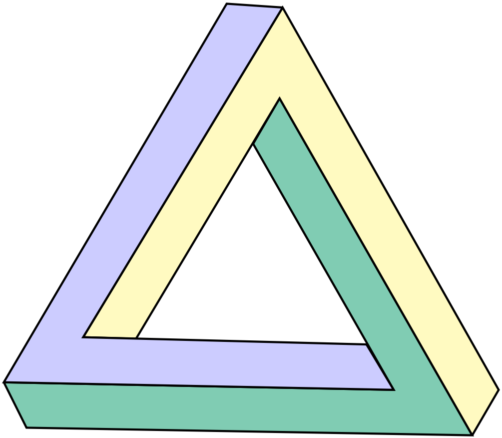
Naime, izračunavanje na Turingovoj mašini se može formulisati kao poseban oblik dedukcije tako što se njegovi koraci predstave dedukcijama u predikatskoj logici, pa se Čerčova teza time svodi na posledicu Gedelove teoreme potpunosti predikatske logike.

U definiciji logičkog sistema pretpostavlja se izračunljivost njegovog skupa aksioma, pa izgleda da je pojam računanja primitivniji od dedukcije. Svodjenje Čerčove na Hilbertovu tezu pokazuje da je dedukcija, a ne računanje, osnovni pojam mišljenja. Ovo jeste argument u prilog stanovištu da mišljenje prevazilazi računanje.

Penrouzova metafizika



Ešer-Penrouzov trougao



Roger Penrose, British Journal of Psychology, 1958.

Gedelova dihotomija

Gedelovo stanovište je takodje suprotstavljeno mehanicizmu, ali je znatno opreznije formulisano od Penrouzovog.

- Ili mišljenje beskonačno prevazilazi moć svake finitističke mašine ili postoje apsolutno nerešivi diofantski problemi.

O ovom tvrdjenju Gedel govori kao o "matematički utvrdjenoj činjenici" i zaključuje da su filozofske posledice svake od alternativa "nedvosmisleno suprotstavljene materijalističkoj filozofiji."

"Apsolutno nerešivi problemi" su neodlučivi problemi, ne samo u nekom logičkom sistemu, već u odnosu na "bilo kakav matematički dokaz neodlučivosti koji se može zamisliti."

Gedelova dihotomija

Prema Gedelu, alternativa "da postoje apsolutno nerešivi matematički problemi" opovrgava stanovište da je matematika naša sopstvena tvorevina.

- "Tvorac nužno zna sva svojstva svoje tvorevine tako da izgleda da ova alternativa implicira da matematički objekti i njihova svojstva postoje objektivno i nezavisno od naših mentalnih akata."

Ipak, bio je sklon da odbaci alternativu o postojanju apsolutno nerešivih problema. Za veru u matematički platonizam imao je sasvim druge razloge i uopšte nije tvrdio da teoreme nepotpunosti potvrdjuju platonizam.

Gedelova dihotomija

Gedel je verovao u prvu alternativu da "mišljenje beskonačno prevazilazi moć svake finitističke mašine," ali pod uslovom da se odbaci druga alternativa. Ipak, bio je oprezan znajući da mehanicizam i postojanje apsolutno nerešivih problema mogu istovremeno biti konzistentni sa teoremom nepotpunosti.

Ključni razlozi za Gedelovo odbacivanje druge alternative mogu biti i prevashodno filozofski. On je pomalo na Kantov način smatrao da bi naš razum bio "fatalno iracionalan" ako bi bio u stanju da postavi pitanja na koja ne može da odgovori.