

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Дејана Глушац

**КАРТОГРАФСКА ПРОЈЕКЦИЈА - ПРАВА
СЛИКА СВЕТА**

мастер рад

Београд, 2022.

Ментор:

Вукмировић Срђан

Чланови комисије:

Тијана Шукиловић

Анђелка Ковачевић

Датум одбране:

06.10.2022.

* * *

Велику захвалност желим да искажем свом ментору, др Срђану Вукмировићу на подршци при избору теме, као и на несебичној помоћи и залагању да конструктивним саветима и сугестијама овај рад достигне форму коју сада има. Такође, захвалност дугујем и др Анђелки Ковачевић и др Тијани Шукиловић што су пристале да буду чланови комисије за одбрану овог рада.

Посебну захвалност дугујем својим родитељима и брату који су ми великодушну подршку, пажњу и љубав пружали током целог школовања. Велико хвала и свим мојим пријатељима који су били и остали уз мене.

Картографска пројекција – права слика света

Резиме:

Свака географска карта света коју сте имали прилике до сада да видите је у извесној мери погрешна, што је последица геометријске чињенице да не постоји изометрија дела сфере и дела равни. Карте света које се користе у нашој наставној пракси креиране су у највећој мери на основу Меркаторове пројекције, коју је развио фламански географ Герардус Меркатор 1569. Ова несавршена пројекција произвела је карту која је била уредна и корисна за бродску навигацију, али је као последицу имала искривљене величине копнених маса као и растојања између њих.

У картографској пракси постоје различити начини пројектовања криве површи елипсоида Земље на равну површ или на неке друге површи које се могу развити у раван (нпр. цилиндар, конус). У нашој званичној картографији примењују се најчешће две групе картографских пројекција, то су цилиндричне и конусне пројекције. Цилиндричне картографске пројекције се више примењују за премер и картирање у крупнијој размери (нпр. 1:25.000 - топографске карте), а конусне картографске пројекције за карте у ситнијој размери (1:1.000.000 - прегледне или тематске карте).

Циљ овог рада је презентација математичких својстава картографских пројекција и основна подела према тим својствима.

Кључне речи:

Картографска пројекција, Меркаторова пројекција, аутаграф (AuthaGraph)

Садржај

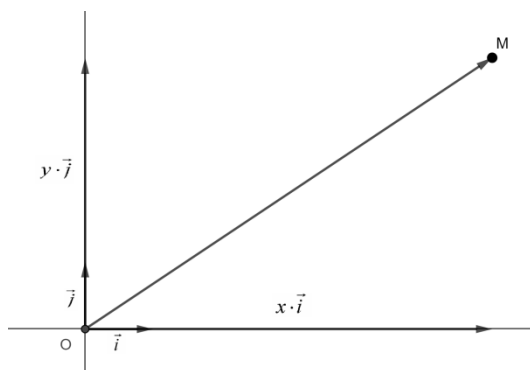
1. Координате и координатни систем	7
1.1. Декартове координате.....	7
1.2. Поларне координате.....	8
1.3. Цилиндричне координате	8
1.4. Сферне координате	9
2. Параметризација у \mathbb{R}^3	10
3. Облик и величина Земље	13
3.1. Елементи Земљиног елипсоида	13
3.2. Једначине Земљиног елипсоида.....	14
3.3. Елементи Земљине сфере	15
4. Увод у картографске пројекције	17
4.1. Подела картографских пројекција.....	18
5. Купаста (конусна) пројекција.....	21
5.1. Усправне конформне купасте пројекције	22
5.2. Усправна еквивалентна купаста пројекција	23
5.3. Усправне еквилистантне купасте пројекције	24
6. Ваљкасте (цилиндричне) пројекције	25
6.1. Усправне конформне ваљкасте пројекције.....	27
6.2. Усправне еквивалентне ваљкасте пројекције.....	28
6.3. Усправне еквилистантне ваљкасте пројекције.....	29
7. Азимутне пројекције	29
7.1. Усправне конформне азимутне пројекције.....	30
7.2. Усправне еквивалентне азимутне пројекције.....	31
7.3. Усправне еквилистантне азимутне пројекције.....	32
8. Меркаторова пројекција.....	34
9. АутоГраф (AuthaGraph).....	38
9.1. Наукавин опис АутоГрафа	38
9.2. Алтернативне формуле за АутоГраф пројекцију.....	43

Литература:	47
Биографија аутора.....	49

1. Координате и координатни систем

У овом поглављу ћемо се подсетити Декартовог, поларног, сферног и цилиндричног координатног система и начина одређивања положаја тачке у њима.

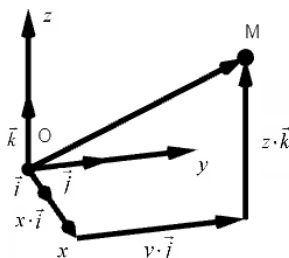
1.1. Декартове координате



Слика 1: Декартов координатни систем у равни

Још у шестом разреду основне школе на часовима математике ученици се први пут сусрећу са Декартовим координатним системом и представљањем тачке у равни. Декартов координатни систем се састоји од две међусобно нормалне координатне осе x и y , а чији се пресек назива координатним почетком и обележава са O . Вертикална оса се назива y – оса или ордината, а хоризонтална оса x – оса или апсциса. Координатне осе су уједно и носиоци јединичних ортогоналних вектора \vec{i} и \vec{j} . Положај тачке M у равни задат је уређеним паром бројева (x, y) , који представљају коефицијенте уз базне векторе које добијамо када вектор положаја тачке M представимо као линеарну комбинацију базних вектора $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Аналогно се дефинише Декартов координатни систем у простору, задавањем координатног почетка O и три јединична некомпланарна вектора \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} међу којима су свака два узајамно нормална. Положај тачке M у простору задат је уређеном тројком бројева (x, y, z) , који представљају коефицијенте уз базне векторе које добијамо када вектор положаја тачке M представимо као линеарну комбинацију базних вектора $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Трећа координатна оса, односно z – оса се још назива и апликата.

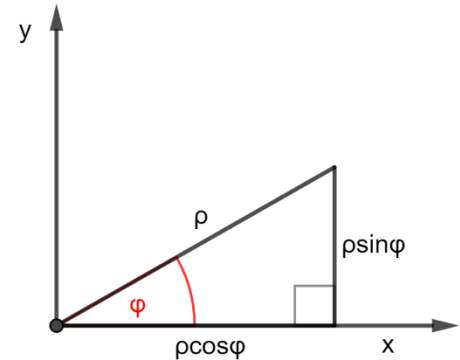


Слика 2: Декартов координатни систем у простору

1.2. Поларне координате

Осим помоћу Декартових координата, положај тачке се може представити и помоћу поларних координата φ и ρ . Веза између поларних и Декартових координата следи из дефиниције синуса и косинуса и задата је следећим једначинама:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \\ \rho &\in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (1)\end{aligned}$$



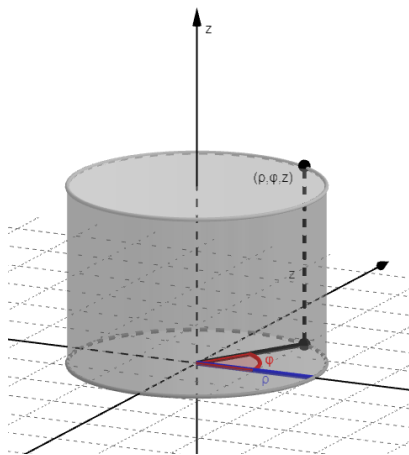
Слика 3: Поларни координатни систем

Дводимензионални поларни координатни систем чини једна оса која се назива поларна оса и која се поклапа са позитивним делом x – осе. Положај тачке описан је на основу параметара φ и ρ , тако што ротирамо поларну осу за угао φ , а потом одредимо тачку на њој која је на растојању ρ од координатног почетка. Добијамо позицију тачке чије су поларне координате (ρ, φ) .

У математичкој картографији поларне координате се користе код купастих и азимутних пројекција, а веза са Декартовим координатама задата је формулама (1).

За примену и оријентацију положаја тачака у простору најчешће се користе сферне и цилиндричне поларне координате.

1.3. Цилиндричне координате

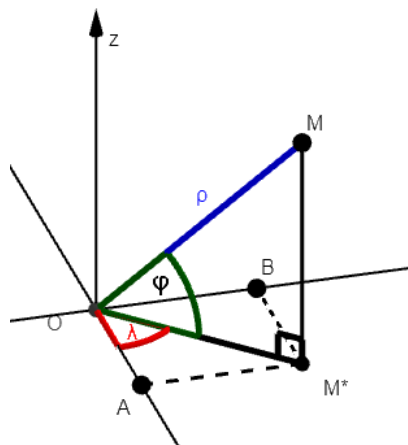


Слика 4: Цилиндричне координате

Цилиндричне координате узимају у обзир параметре ρ и φ са истим значењем као што је случај са поларним координатама, али уз исте везује се још један параметар, означен са z , а он представља растојање задате тачке од Oxy – равни. Односно, тачку у равни (ρ, φ) померамо вертикално у правцу z – осе и тако добијамо положај тачке (ρ, φ, z) .

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

1.4. Сферне координате



Слика 5: Сферни координатни систем (мерање се врши од северног пола)

Сферни поларни координатни систем има две поларне осе: хоризонталну која одговара позитивном смеру x – осе Декартовог координатног система у равни, и вертикалну поларну осу која одговара z – осе Декартовог координатног система у простору.

Положај тачке M у простору је одређен угловима:

1. λ – угао између пројекције вектора \overrightarrow{OM} на Ox у равни и x – осе
2. φ – угао између вектора \overrightarrow{OM}^* и вектора \overrightarrow{OM} , где M^* прдставља ортогоналну пројекцију тачке M на Oxy равни.

Применом тригонометријских формула на правоугле троуглове MOM^* и OAM^* на слици 5 добијамо следеће:

$$\sphericalangle MOM^* = \varphi \Rightarrow \cos \sphericalangle MOM^* = \cos \varphi,$$

$$\cos \lambda = \frac{x}{OM^*} \Rightarrow x = \cos \lambda OM^* = OM \cos \lambda \cos \varphi = \rho \cos \lambda \cos \varphi,$$

$$y = \sin \lambda OM^* = \rho \sin \lambda \cos \varphi,$$

$$\sin \varphi = \frac{z}{OM} \Rightarrow z = \rho \sin \varphi.$$

Овим смо добили веза између сферних и Декартових координата у простору.

$$x = \rho \cos \varphi \cos \lambda, y = \rho \sin \lambda \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi,$$

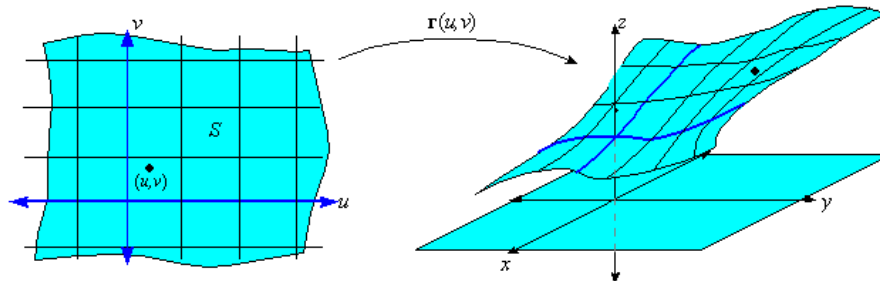
$$\rho \in [0, \infty), \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \lambda \in (-\pi, \pi].$$

Угао $\varphi = \sphericalangle M^*OM$ зовемо географска дужина, а угао λ географска ширина.

Сферни координатни систем представљен је сфером са центром $O(0,0,0)$, која може бити подељена на кружнице паралелне Oxy – паралеле (екваторијална је главна) и кружнице које пролазе кроз полюсе – меридијане (Гринич се узима за главну кружницу). Сходно томе, положај тачке одређујемо одређеним угловима у смислу удаљености од фиксног меридијана и фиксне паралеле, након чега преостаје одредити удаљеност од координатног почетка.

2. Параметризација у \mathbb{R}^3

Дефиниција 1: Нека је U отворен скуп у \mathbb{R}^2 . Параметризована површ у \mathbb{R}^3 је непрекидно – диференцијабилно пресликавање $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Слика 6: Регуларна параметризована површ

Површ задајемо на следеће начине:

1. имплицитно:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0,$$

односно $F(x, y, z) = 0$;

2. параметарски:

$$(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \text{ односно } r : (u, v) \rightarrow (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v));$$

3. као график функције:

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}, \text{ где је } U \subset \mathbb{R} \text{ област дефинисаности функције.}$$

Парцијални изводи првог реда параметризоване површи r су:

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u, v) = r_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)),$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}(u, v) = r_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)).$$

Дефиниција 2: Нека је $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и фиксирајмо тачку $P(u_0, v_0) \in U$. Криве $u \rightarrow r(u, v_0)$ и $v \rightarrow r(u_0, v)$ су u – параметарска крива и v – параметарска крива површи r или координатне криве које садрже тачку $P(u_0, v_0)$.

Дефиниција 3: Параметризовану површ $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ називамо регуларном у тачки $P(u_0, v_0) \in U$ ако важи $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) \neq 0$. У супротном дата тачка је сингуларна тачка површи r .

Дефиниција 4: Нека је $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна елементарна површ и $P \in r(U)$. Тангентни вектор на r у P је вектор $X \in \mathbb{R}^3$ за који постоји крива $\alpha : (a, b) \subset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ таква да је:

$\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, ($a < t < b$), при чему су $u(t)$ и $v(t)$ диференцијабилне функције и $\alpha(0) = P$, $\alpha'(0) = X$.

Дефиниција 5: Скуп свих тангентних вектора на регуларну површ $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ у тачки $P(u_0, v_0) \in r(U)$, заједно са нула вектором¹, је реални векторски простор димензије 2, чија је једна база $(r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0))$. Скуп свих тангентних вектора на r у P означавамо са $T_p(r)$ и називамо **тангентни простор**.

Дефиниција 6: За регуларну површ $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ и тачку $P = r(u, v)$ квадратну форму $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0$, $w \in T_p(r)$ називамо **прва основна (фундаментална) форма** површи r у тачки $P \in r(U)$.

Како је тангентни вектор $w \in T_p(r)$ (по дефиницији) тангентни вектор неке криве $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$, $t \in (a, b)$, са $P = \alpha(0) = r(u_0, v_0)$, па је:

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle u'r_u + v'r_v, u'r_u + v'r_v \rangle_p \\ &= (u')^2 \langle r_u, r_u \rangle_p + 2u'v' \langle r_u, r_v \rangle_p + (v')^2 \langle r_v, r_v \rangle_p \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

при чему $E(u_0, v_0) = \langle r_u, r_u \rangle_p$, $F(u_0, v_0) = \langle r_u, r_v \rangle_p$, $G(u_0, v_0) = \langle r_v, r_v \rangle_p$ (коэффициенти прве основне форме) и u', v' су израчунати у $t = 0$.

Одредимо коэффицијенте прве фундаменталне форме за неке познате површи:

- **Сфера**

$$\begin{aligned} r(\varphi, \lambda) &= (\sin \varphi \cos \lambda, \sin \varphi \sin \lambda, \cos \varphi), \\ E = r_\varphi \cdot r_\varphi &= \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi = 1, \\ F = r_\varphi \cdot r_\lambda &= -\cos \varphi \cos \lambda \sin \varphi \sin \lambda + \cos \varphi \cos \lambda \sin \varphi \sin \lambda + 0 = 0, \\ G = r_\lambda \cdot r_\lambda &= \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + 0 = \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

- **Купа (конус)**

$$\begin{aligned} r(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, u), \\ E = r_u \cdot r_u &= \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2, \\ F = r_v \cdot r_u &= -u \cos v \sin v + u \sin v \sin v + 0 = 0, \\ G = r_v \cdot r_v &= u^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = u^2. \end{aligned}$$

¹ Овај услов можемо изоставити уколико дозволимо да криве нису регуларне.

- **Ваљак (цилиндар)**

$$r(u, v) = (\cos v, \sin v, u),$$

$$E = r_u \cdot r_u = 1,$$

$$F = r_v \cdot r_u = 0,$$

$$G = r_v \cdot r_v = 1.$$

- **Ротациони елипсоид**

$$r(\varphi, \lambda) = (x(\varphi, \lambda), y(\varphi, \lambda), z(\varphi, \lambda)) = \left(\frac{a}{W} \cos \varphi \cos \lambda, \frac{a}{W} \cos \varphi \sin \lambda, \frac{a(1-e^2)}{W} \sin \varphi \right),$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

$$x_\varphi = \sin \varphi \cos \lambda \frac{a(e^2-1)}{W^3}, y_\varphi = \sin \lambda \sin \varphi \frac{a(e^2-1)}{W^3}, z_\varphi = \cos \varphi \frac{a(1-e^2)}{W^3},$$

$$x_\lambda = -\sin \lambda \cos \varphi \frac{a}{W}, y_\lambda = \cos \lambda \cos \varphi \frac{a}{W}, z_\lambda = 0.$$

Ради једноставнијег записа уведемо следеће ознаке: $R_1 = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$ и $R_2 = \frac{a}{W}$.

$$r_\varphi = (-R_1 \sin \varphi \cos \lambda, -R_1 \sin \lambda \sin \varphi, R_1 \cos \varphi),$$

$$r_\lambda = (-R_2 \sin \lambda \cos \varphi, R_2 \cos \lambda \cos \varphi, 0),$$

$$E = r_\varphi \cdot r_\varphi = R_1^2,$$

$$F = r_\varphi \cdot r_\lambda = 0,$$

$$G = r_\lambda \cdot r_\lambda = R_2^2 \cos^2 \varphi.$$

Напомена: На основу прве диференцијалне форме елипсоида, полупречник закривљености меридијана је R_1 , а паралеле $R_2 \cos \varphi$. Ради једноставнијег записа уведемо следеће картографске ознаке које ћемо користити у наставку текста:

$$M = R_1, N = R_2, r = N \cos \varphi, m^2 = \frac{E}{M^2}, n^2 = \frac{G}{r^2}, \quad (2)$$

где је r – полупречник паралеле, m – мерило² у правцу меридијана, а n – мерило у правцу паралеле.

² Мерило представља однос дужина на карти и одговарајућих дужина на Земљиној елипсоиди.

3. Облик и величина Земље

Приликом решавања задатака у картографији и геодезији облик Земље сматрамо ротационим елипсоидом или апроксимирамо сфером. Како бисмо боље разумели наредна поглавља, навешћемо основне елементе Земљиног елипсоида и Земљине сфере.

3.1. Елементи Земљиног елипсоида

Ротацијом меридијанске елипсе око њене краће осе (по претпоставци се подудара са Земљиним осом) настаје Земљин елипсоид. Основне елементе елипсе чине велика полуоса коју обележавамо са a и мала полуоса коју обележавамо са b . Димензије елипсоида се могу задати и помоћу велике полуосе a и спљоштености елипсоида (однос разлике полуоса и одговарајуће полуосе) коју обележавамо са f и дефинише на следећи начин:

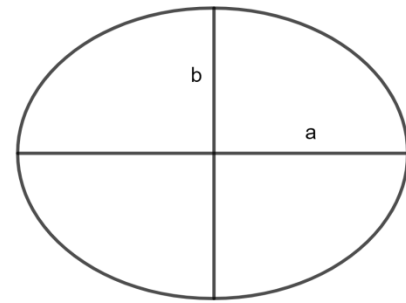
$$f = \frac{a-b}{a}.$$

Дефинишимо и другу спљоштеност:

$$f' = \frac{a-b}{b},$$

и трећу спљоштеност (однос разлике полуоса и збира полуоса):

$$n = \frac{a-b}{a+b}.$$



Слика 7: Меридијанска елипса

У рачунању сретнемо се и са првим и другим ексцентритетима које обележавамо, респективно e и e' и дефинишемо следећим једначинама:

$$(3) \quad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad e' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Између горе наведених величина лако се изводе следеће једнакости:

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \text{ односно } b = a\sqrt{1-e^2};$$

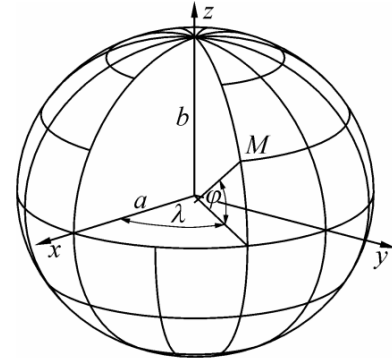
$$e^2 = 2f - f^2, \text{ односно } f = 1 - \sqrt{1-e^2}.$$

Елементи елипсе су истовремено и елементи ротационог елипсоида чија је изводница та елипса. Сходно томе, сви елементи и релације горе наведене елипсе се могу пренети и на Земљин елипсоид. Дакле, величина и облик елипсоида су потпуно одређени великом и мало полуосом. Међутим, обртни елипсоид је у потпуности одређен и са било која два

горе наведена параметра, под условом да је бар један од њих линеаран. Најчешће су то велике полуосе a и спљоштености елипсоида f .

3.2. Једначине Земљиног елипсоида

Положај тачке на Земљиним елипсоидом одређујемо помоћу географске мреже, односно мреже меридијана и паралела. Меридијани су полуелипсе на површини ротационог елипсоида добијене пресеком елипсоида равнима које пролазе кроз малу осу, док су паралеле кружнице добијене пресеком елипсоида равнима нормалним на малу осу. У односу на слику 8, означимо са λ географску дужину тачке – угао који образују раван Гринича и раван меридијана кроз дату тачку, а са φ географску ширину тачке – угао између нормале на елипсоид у датој тачки и равни екватора.



Слика 8: Географске координате Земљиног ротационог елипсоида
Извор: [2]

Ротациони елипсоид у \mathbb{R}^3 са полуосама a и b и центром у координатном почетку је скуп

$$E = \left\{ (X, Y, Z) : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Једначина ротационог елипсоида у параметарском облику дата је са:

$$r(\varphi, \lambda) = (x(\varphi, \lambda), y(\varphi, \lambda), z(\varphi, \lambda)) = \left(\frac{a}{W} \cos \varphi \cos \lambda, \frac{a}{W} \cos \varphi \sin \lambda, \frac{a(1-e^2)}{W} \sin \varphi \right),$$

где је $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$, e – ексцентритет дат формулом (3).

3.3. Елементи Земљине сфере

У проучавању картографских пројекција Земљу посматрамо као сферу. Користећи услов да сфера и елипсоид имају једнаке површине, полупречник сфере R можемо одредити из формуле за површину елипсоида:

$$P = 4R^2\pi,$$

где је P одређена изразом:

$$P = 2b^2\pi \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \text{ или}$$

$$P = 2a^2\pi \left(1 + \frac{1-e^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right),$$

па је:

$$R^2 = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{1-e^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right).$$

Искористимо услов да меридијани на сфери и елипсоиди имају једнаке дужине, па одатле следи:

$$R\pi = 2s_m \left(\frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow R = A$$

где је:

$s_m(\varphi)$ – дужина лука меридијана од Екватора до тачке са географском ширином φ

$$A = a(1-n)(1-n^2) \left(1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \dots \right),$$

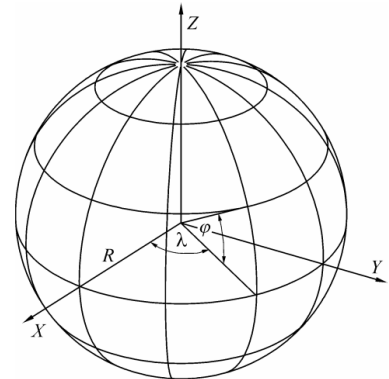
где је n један од израза за спљоштеност елипсоида дат формулом $n = \frac{a-b}{a+b}$.

Уколико желимо читаву елипсоиду апроксимирати сфером, за средњи полупречник Земљине сфере се може користити и аритметичка средина:

$$R = \frac{a+a+b}{3},$$

или полупречник сфере која има исту запремину као и елипсоида:

$$R = \sqrt[3]{a^2b}.$$



Слика 9: Елементи Земљине сфере
Извор: [2]

Географска параметризација сфере у \mathbb{R}^3 полупречника R са центром у координатном почетку дата је следећим једнакостима:

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda, y = R \cos \varphi \sin \lambda, z = R \sin \varphi.$$

Нека су T_1 и T_2 тачке на меридијану чије су географске ширине φ_1 и φ_2 , респективно. Дужина лука меридијана од тачке T_1 до T_2 једнака је:

$$s_m = R(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Нека су T_1 и T_2 тачке на паралели чије су географске дужине λ_1 и λ_2 , респективно. Како је паралела на сфери полупречника R кружница полупречника $r = R \cos \varphi$ дужина лука паралеле на сфери од тачке T_1 до T_2 једнака је:

$$s_p = r(\lambda_2 - \lambda_1) = R \cos \varphi (\lambda_2 - \lambda_1).$$

На основу тога, површина P криволинијског трапеза на сфери ограниченог меридијанима λ_1 и λ_2 и паралелама φ_1 и φ_2 израчунава се на основу формуле:

$$P = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda = R^2 (\lambda_2 - \lambda_1) (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

4. Увод у картографске пројекције

Картографска пројекција је начин пресликавања површине елипсоида или лопте, којима се у картографији апроксимира површина Земље, осталих небеских тела и небеских сазвежђа на равну површину користећи се посебним математичким поступцима. Сврха изучавања картографских пројекција је стварање математичке основе за израду карата и решавање теоријских и практичних задатака у картографији, геодезији, географији, астрономији, навигацији и другим сродним наукама.

За картографску пројекцију важно је одредити релацију између координата тачака на Земљи, тј. на елипсоиду или сфери, и координата њихових слика у пројекцији. Те релације се задају основним картографским једначинама:

$$x = f_1(\varphi, \lambda), \quad y = f_2(\varphi, \lambda),$$

где су φ и λ географске координате на елипсоиду или сфери, а x и y координате правоуглог координатног система у равни пројекције. Пројекција се може задати и описом конструкције мреже меридијана и паралела, на равној површини. Приказ Земљине површине, сфере или елипсоида на равни није могућ без деформација. Сходно томе, један од циљева картографа и математичара који су се бавили картографским пројекцијама био је наћи пројекцију са минималном деформацијом. Савршена картографска пројекција очувала би пропорционалну удаљеност између сваке две тачке на сфери и у равни (на карти), па би према томе и сви облици били сачувани. Међутим, како не постоји изометрија дела сфере и дела равни не постоји ни савршена картографска пројекција.

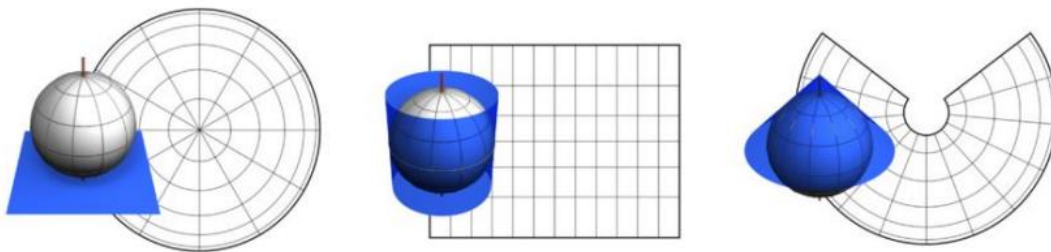
Како би деформитети били прихватљиви, картографи користе информације о врстама и величинама деформитета, добијене из математичке конструкције координатних линија. Математичке линије на картама губе односе дужина, углова пресека и међусобних положаја које имају на Земљиној површини што доводи до деформација дужина, површина и углова.

4.1. Подела картографских пројекција

Постоји велики број картографских пројекција, које се могу поделити у односу на врсту деформације, положај картографске пројекционе мреже и облик картографске пројекционе мреже.

У односу на врсту деформације картографске пројекције делимо на:

- конформне пројекције које чувају вредност углова,
- еквивалентне пројекције које чине да вредност површина остане иста,
- еквилине пројекције које чине да вредност дужина у једном правцу остане иста,
- произвољне пројекције не чувају ни један од три карактеристична елемента.



Слика 10: а) азимутна пројекција

б) цилиндрична пројекција

в) конусна пројекција

У односу на облик картографске пројекционе мреже картографске пројекције делимо на:

- 1. конусне** или купасте пројекције – добијају се пројектовањем географских координата на пројекцијску раван савијену у конус. Меридијани су представљени правим линијама које се зракасто шире из пола, а паралеле су лукови концентричних кружница са центром у полу (слика 10.в).
 - 1.1. псеудоконусне** пројекције – паралеле су представљене као лукови концентричних кружница, док је Гринич права линија, а остали меридијани симетричне криве у односу на Гринич.
 - 1.2. поликонусне** пројекције – централни меридијан и екватор су праве линије, док су остали меридијани симетрични у односу на Гринич, а паралеле су лукови ексцентричних кругова – центри су на продужетку централног меридијана.
- 2. цилиндричне** или ваљкасте пројекције – добијају се пројектовањем географских координата на површину замишљеног цилиндра који додирује Земљину лопту. Меридијани представљају паралелне вертикалне линије на истом растојању, а паралеле су усправно постављене на меридијане и сви су дужине екватора, тј. секуће линије (слика 10.б).

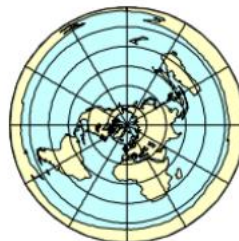
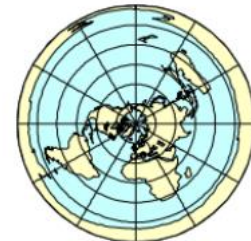
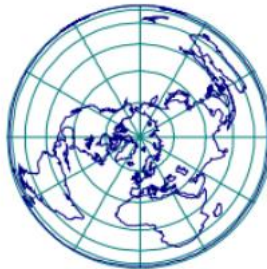
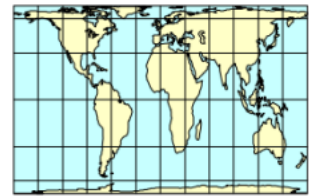
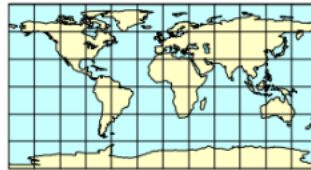
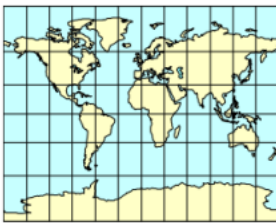
2.1. псеудоцилиндричне пројекције – смањују деформације у поларним пределима тако што се дужине паралела свде на дужине сличније оним на Земљиној површини, док истовремено остају праве паралелне линије. Скраћивање паралела доводи до савијања меридијана.

3. **азимутне** или **зенитне** пројекције – добијају се пројекцијом сфере на тангентну раван. Меридијани представљају праве које се секу у једној тачки под угловима једнаким одговарајућим разликама географских дужина, а паралеле су лукови концентричних кружница са центром у пресеку меридијана (слика 10.а). Азимутне пројекције делимо на:

3.1. перспективне азимутне пројекције

3.2. неперспективне азимутне пројекције

4. **конвенционалне** или **условне** пројекције – се конструишу по неким унапред одређеним математичким условима, односно без пројектовања географских координата на пројекциону раван.



Слика 11: а) конформне пројекција;

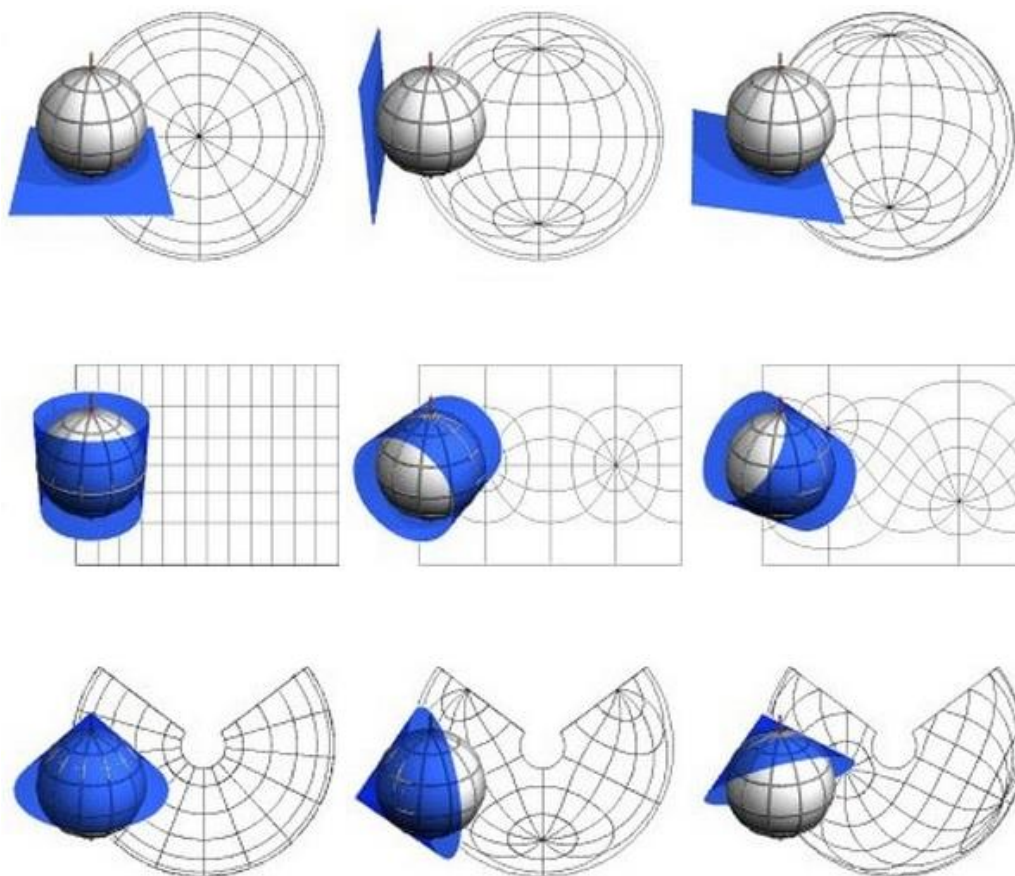
б) еквивалентне пројекција;

в) еквилистантне пројекција

Извор: <https://repozitorij.fazos.hr/islandora/object/pfos%3A535/datastream/PDF/view>

У односу на положај равни пројектовања мреже картографске пројекције делимо на:

- 1) поларне – пол мреже се подудара са географским полом.
- 2) екваторијалне – пол мреже се налази на екватору.
- 3) косе – пол мреже се налази на некој тачки између екватора и географског пола.



Слика 12: а) поларне пројекција; б) екваторијалне пројекција; в) косе пројекција
Извор: https://eipd.dcs.wisc.edu/for-credit/GIS-cert/summer2017/geog370_m1/lesson_4.html

5. Купаста (конусна) пројекција

Пројектовање географских координата на конусну пројекциону раван назива се купаста (конусна) пројекција. Меридијани су представљени правим линијама које се зракасто шире из пола, а паралеле су лукови концентричних кружница са центром у полу. За пол поларних координата узима се тачка пресека меридијана, а за осу поларних координата један од меридијана (најчешће меридијан који се налази у средини пројекције).

Једначине купасте пројекције у поларним координатама задате су:

$$\rho = f(\varphi), \quad \delta = k(\lambda - \lambda_0),$$

δ – угао под којим се меридијани секу,

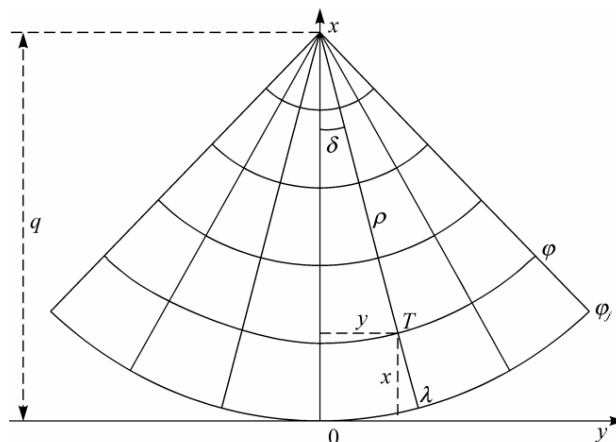
ρ – полупречник паралела,

k – константа пропорционалности,

λ – географска дужина,

λ_0 – географска дужина средњег меридијана (Гринича) на делу који се пресликава,

φ – географска ширина.



Слика 13: Елементи купасте пројекције
Извор: [2]

Како купасте пројекције делимо на усправне, попречне и косе, облик функције f одређујемо из услова конформности, еквивалентности или еквиливантности.

Однос између поларних и Декартових координата дат је са:

$$x = q - \rho \cos \delta,$$

$$y = \rho \sin \delta,$$

где је q полупречник паралеле најмање ширине φ . Одредимо коефицијенте прве фундаменталне форме на основу горе изведених једнакости:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \delta, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \delta, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = k\rho \sin \delta, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = k\rho \cos \delta.$$

$$E = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2, \quad G = \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = k^2 \rho^2, \quad F = 0.$$

Односно, мерило у правцу меридијана – m , и мерило у правцу паралеле – n :

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M}, \quad n = \frac{\sqrt{G}}{r},$$

$$m = -\frac{d\rho}{M d\varphi}, \quad n = \frac{k\rho}{r}.$$

Предзнак минус у изразу за m уводи се јер се φ повећава од екватора према полу, а ρ од пола према екватору (у супротном смеру).

5.1. Усправне конформне купасте пројекције

Теорема 1: Функција $\rho = f(\varphi)$ која задовољава услов конформности дата је са:

$$\rho = \frac{K}{U^k}, \quad \text{при чему је } U = \frac{\tan\left(\frac{\pi + \varphi}{4}\right)}{\tan^e\left(\frac{\pi + \psi}{4}\right)},$$

где је K константа интеграције, k константа из формуле $\delta = k(\lambda - \lambda_0)$, а ψ функција ширине за коју важи $\sin \psi = e \sin \varphi$.

Доказ: Из услова конформних пројекција следи $m=n$:

$$-\frac{d\rho}{M d\varphi} = \frac{k\rho}{r},$$

У претходну једначину уврстимо $r = N \cos \varphi$, као и изразе обележене са (1) за M и N :

$$-\frac{d\rho}{\rho} = k \frac{M}{N} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = k \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)} \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

интеграљењем израза добијамо:

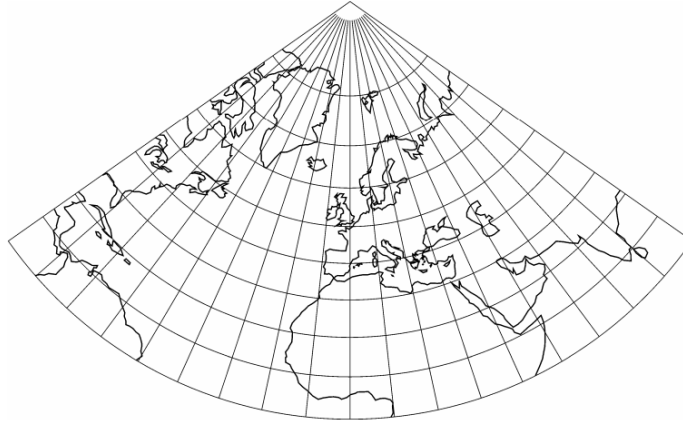
$$\ln \rho = -k \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + k e \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) + \ln K,$$

$$\ln \rho = \ln K - k \left(-\ln \tan^e \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) + \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right),$$

$$\ln \rho = \ln K - k \ln \frac{\tan\left(\frac{\pi + \varphi}{4}\right)}{\tan^e\left(\frac{\pi + \psi}{4}\right)} = \ln K - \ln U^k = \ln \frac{K}{U^k}, \quad \text{где је } U = \frac{\tan\left(\frac{\pi + \varphi}{4}\right)}{\tan^e\left(\frac{\pi + \psi}{4}\right)}.$$

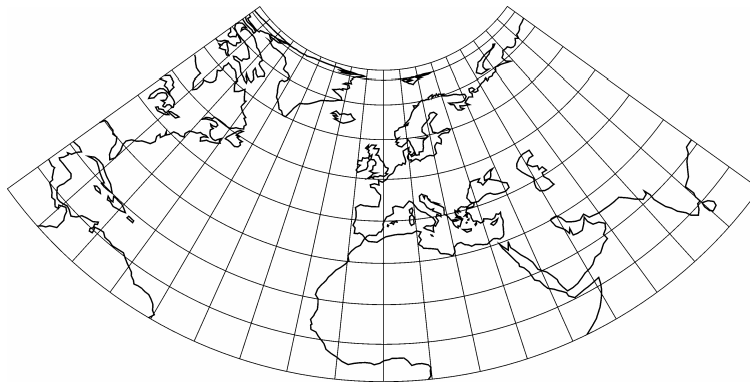
При чему је K – константа интеграције, а ψ – функција ширине $\sin \psi = e \sin \varphi$. ■

За сферу ова једначина има облик $\rho = K \tan^k \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$.



Слика 14: Усправна конформна купаста пројекција
Извор: [2]

5.2. Усправна еквивалентна купаста пројекција



Слика 15: Усправна еквивалентна купаста пројекција
Извор: [2]

Теорема 2: Функција $\rho = f(\varphi)$ која задовољава услов еквивалентности дата је са

$$\rho^2 = \frac{2}{k}(K - S), \quad S = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right),$$

где је k константа из формуле $\delta = k(\lambda - \lambda_0)$.

Доказ: Како се меридијани и паралеле секу под правим углов, услов еквивалентности је дат следећом једначином: $p = ab = mn = 1$.

Из овога следи

$$-\frac{d\rho}{M d\varphi} \frac{k\rho}{r} = 1,$$

$$-\rho d\rho = \frac{1}{k} Mr d\varphi,$$

У претходну једначину уврстимо $r = N \cos \varphi$ и интегралимо:

$$\frac{1}{2} \rho^2 = -\frac{1}{k} \int_0^\varphi MN \cos \varphi d\varphi + K.$$

Интеграл са десне стране једнакости је површина елипсоидног трапеза и рачуна се по формули:

$$S = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right).$$

Одатле следи да је:

$$\rho^2 = \frac{2}{k} (K - S).$$

■

5.3. Усправне еквилистантне купасте пројекције

Код усправних еквилистантних купастих пројекција постављамо услов да се меридијани пресликавају без деформација, тј. да је $m=1$.

$$m = -\frac{d\rho}{M d\varphi} = 1,$$

$$d\rho = -M d\varphi,$$

$$\rho = -\int_0^\varphi M d\varphi.$$

Овај интеграл решавамо његовим развијањем у ред:

$$\int_0^\varphi M d\varphi = A(\varphi + \sin 2\varphi(c_1+(c_2+(c_3+(c_4+c_5 \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) + \dots,$$

при чему је:

$$A = a(1-n)(1-n^2) \left(1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \dots \right),$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}n + \frac{31}{24}n^3 - \frac{669}{640}n^5,$$

$$c_2 = \frac{15}{8}n^2 - \frac{435}{128}n^4,$$

$$c_3 = -\frac{35}{12}n^3 + \frac{651}{80}n^5,$$

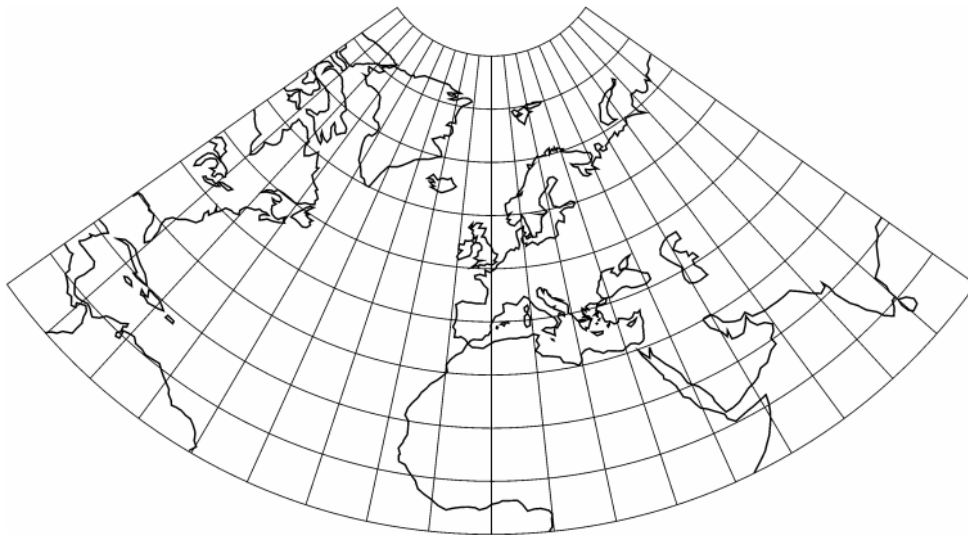
$$c_4 = \frac{315}{64} n^4,$$

$$c_5 = -\frac{693}{80} n^5,$$

$$n = \frac{a-b}{a+b}.$$

Овде a и b означавају полуосе елипсоида, а n један од израза за спљоштеност елипсоида. Одатле следи:

$$\rho = K - \int_0^\varphi M d\varphi.$$



Слика 16: Усправна еквидастантна купаста пројекција
Извор: [2]

6. Ваљкасте (цилиндричне) пројекције

Пројектовањем географских координата на површину замишљеног ваљка који се навуче на Земљину лопту настаје ваљкаста (цилиндрична) пројекција. Мериђијани представљају паралелне вертикалне линије на истом растојању, а паралеле су нормални на мериђијане и сви су дужине екватора, тј. секуће линије.

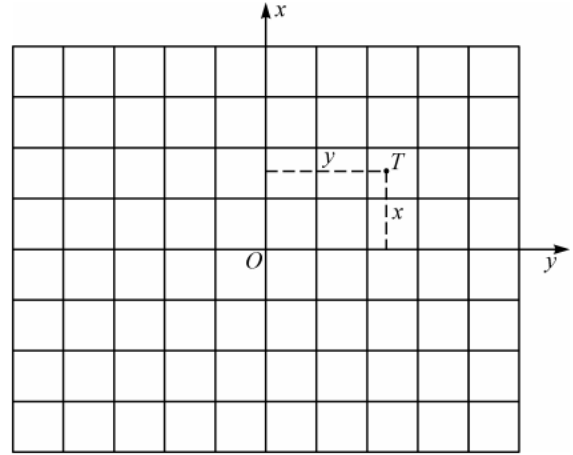
Једначине усправне ваљкасте пројекције у поларним координатама задате су:

$$x = f(\varphi), y = k(\lambda - \lambda_0),$$

при чему су x и y координате Декартовог координатног система, док пројекције гринича и екватора одговарају x -оси и y -оси респективно.

Како ваљкасте пројекције делимо на усправне, попречне и косе облик функције f одређујемо из услова конформности, еквивалентности или еквиливантности.

Главни правци се подударају с правцима меридијана и паралела, што имплицира да су њихове дужине екстремне вредности.



Слика 17: Координатни систем усправних ваљкастих пројекција
Извор: [2]

Одредимо коефицијенте прве фундаменталне форме:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$m^2 = \frac{E}{M^2} \Rightarrow m = \frac{dx}{Md\varphi},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = k^2, \quad F = 0,$$

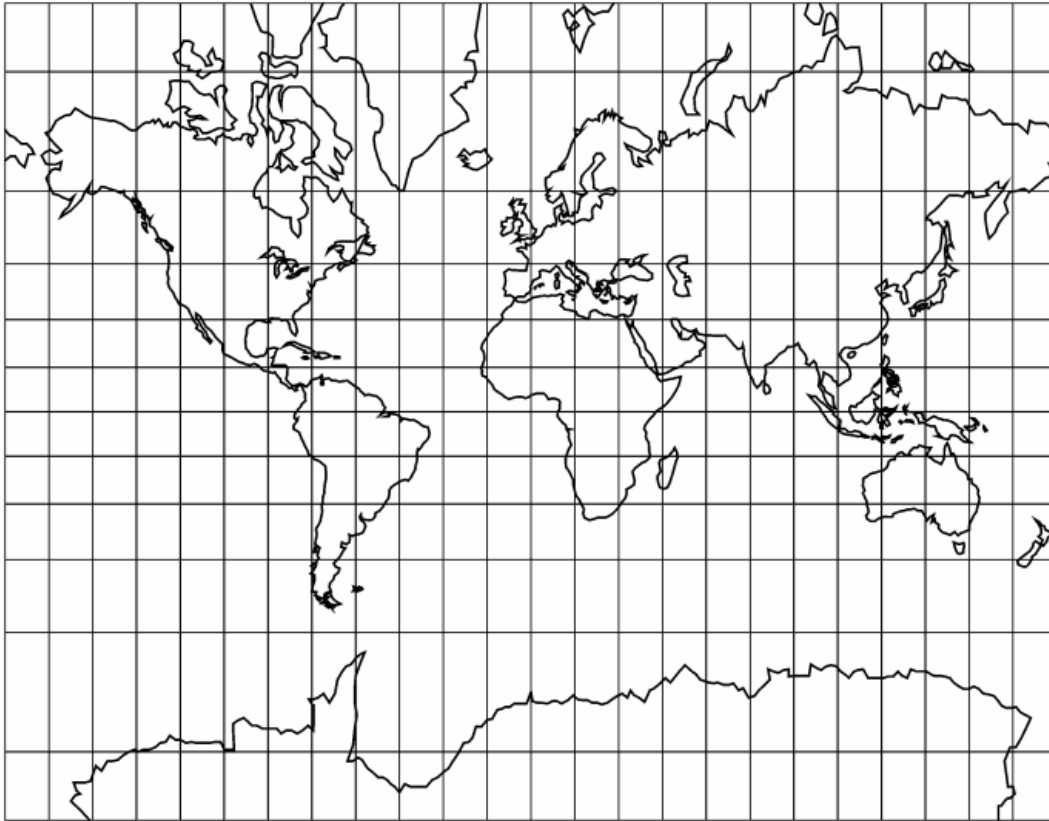
$$n^2 = \frac{G}{r^2} \Rightarrow n = \frac{k}{r}, \quad r = N \cos \varphi,$$

$$p = mn.$$

Уколико усправне ваљкасте пројекције применимо за пресликавање сфере, формуле за израчунавање m и n су:

$$m = \frac{dx}{Rd\varphi} \quad \text{и} \quad n = \frac{k}{R \cos \varphi}.$$

6.1. Усправне конформне ваљкасте пројекције



Слика 18: Усправна конформна ваљкаста пројекција
Извор: [2]

Из услова конформних пројекција следи $m=n$:

$$\frac{dx}{M d\varphi} = \frac{k}{N \cos \varphi}.$$

У претходну једначину уврстимо вредности за M и N :

$$dx = k \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)} \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

интеграљењем израза добијамо:

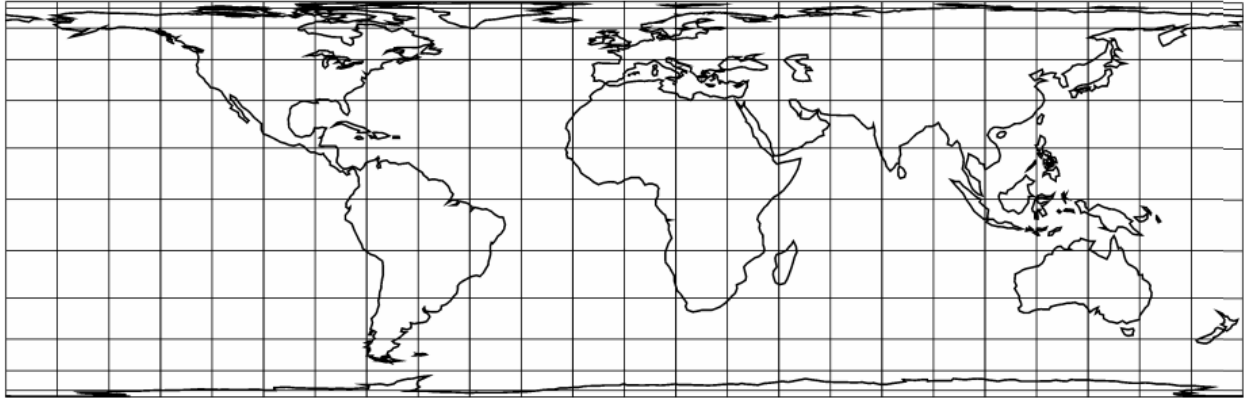
$$x = k \left[\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \ln \tan^e \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) \right] + K,$$

Како се u -оса подударе са екватором, $K = 0$, па је

$$x = k \ln U, \text{ где је } U = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\tan^e \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right)}, \text{ а } \sin \psi = e \sin \varphi.$$

За сферу $e = 0$, па је $x = k \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$. Константу k одређујемо из услова да је $n_0=1$.

6.2. Усправне еквивалентне ваљкасте пројекције



Слика 19: Усправна еквивалентна ваљкаста пројекција (пресликавање екватора без деформација)
Извор: [2]

Код ове врсте пројекција, Земљину површину апроксимирамо сфером, а како се меридијани и паралеле секу под правим углов, услов еквивалентности је дат следећом једначином: $p=mn=1$. Из овога следи:

$$\frac{dx}{R d\varphi} \frac{k}{R \cos \varphi} = 1,$$

$$dx = \frac{1}{k} R^2 \cos \varphi d\varphi,$$

$$x = \frac{R^2}{k} \sin \varphi + K,$$

где је K – константа интеграције. Како се у-оса подударе са екватором $K = 0$, па је

$$x = \frac{R^2}{k} \sin \varphi.$$

Константу k одређујемо из услова да је $n_0=1$.

6.3. Усправне еквилистантне ваљкасте пројекције

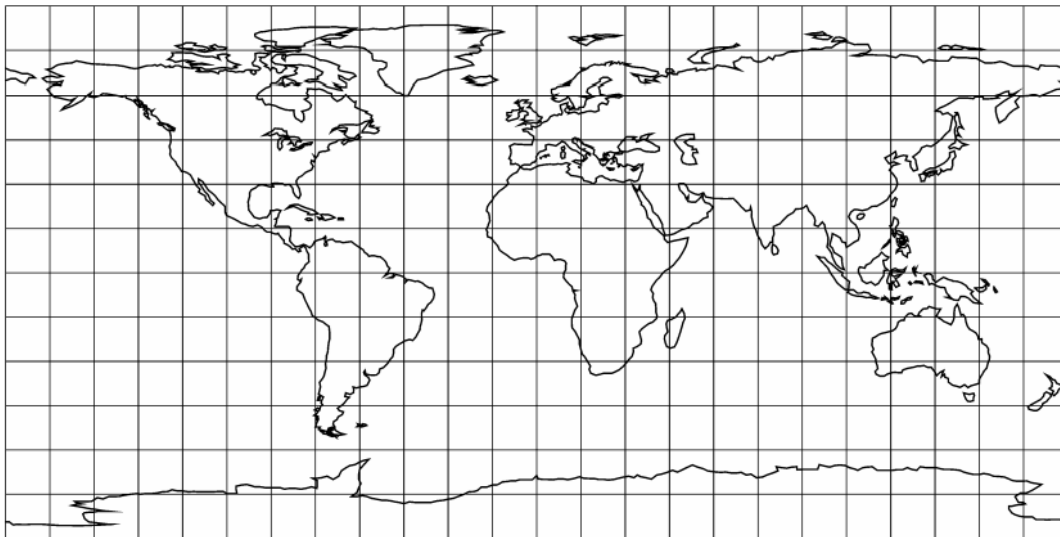
Код ове врсте пројекција, Земљину површину апроксимирамо сфером и постављамо услов да се меридијани пресликавају без деформација, тј. да је $m=1$.

$$m = \frac{dx}{Rd\varphi} = 1,$$

$$dx = Rd\varphi,$$

$$x = R\varphi + K,$$

Како се у-оса подудара са екватором $K = 0$, па је $x = R\varphi$. Константу k одређујемо из услова да је $n_0=1$.

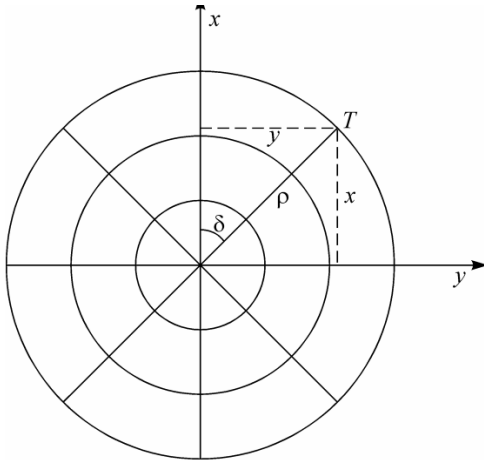


Слика 20: Усправна еквилистантна ваљкаста пројекција
Извор: [2]

7. Азимутне пројекције

Ове пројекције су замишљене тако да је пројекциона раван равна површина која у једној тачки додирује Земљину површину, а ређе је сече по једном великом кругу. Углови – азимути у центру пројекције једнаки су истим угловима на Земљи и по томе су пројекције добиле име.

Меридијани представљају праве које се секу у једној тачки под угловима једнаким одговарајућим разликама географских дужина, а паралеле су лукови концентричних кружница са центром у пресеку меридијана.



Слика 21: Координатни систем усправних азимутних пројекција
Извор: [2]

Једначине усправне азимутних пројекција у поларним координатама задате су:

$$\rho = f(\varphi), \delta = \lambda - \lambda_0.$$

Ако посматрамо координатни систем чији се координатни почетак поклапа са центром пројекције, тада су Декартове координате:

$$x = \rho \cos \delta \text{ и } y = \rho \sin \delta.$$

Главни правци се подударају с правцима меридијана и паралела, што имплицира да су њихове дужине екстремне вредности.

Одредимо коефицијенте прве фундаменталне форме:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cos \lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin \lambda\right)^2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$m^2 = \frac{E}{M^2} \Rightarrow m = -\frac{d\rho}{M d\varphi},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = (-\rho \sin \lambda)^2 + (\rho \cos \lambda)^2 = \rho^2,$$

$$n^2 = \frac{G}{r^2} \Rightarrow n = \frac{\rho}{r}, r = N \cos \varphi.$$

Код ове врсте пројекција, Земљину површину апроксимирамо сфером. Уколико усправне азимутне пројекције применимо за пресликавање сфере, формуле за израчунавање m и n су:

$$m = -\frac{d\rho}{R d\varphi} \text{ и } n = \frac{\rho}{R \cos \varphi}.$$

7.1. Усправне конформне азимутне пројекције

Теорема 3: Функција $\rho = f(\varphi)$ која задовољава услов конформности дата је са:

$$\rho = K \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Доказ: Из услова конформних пројекција следи $m=n$:

$$-\frac{d\rho}{Rd\varphi} = \frac{\rho}{R \cos \varphi},$$

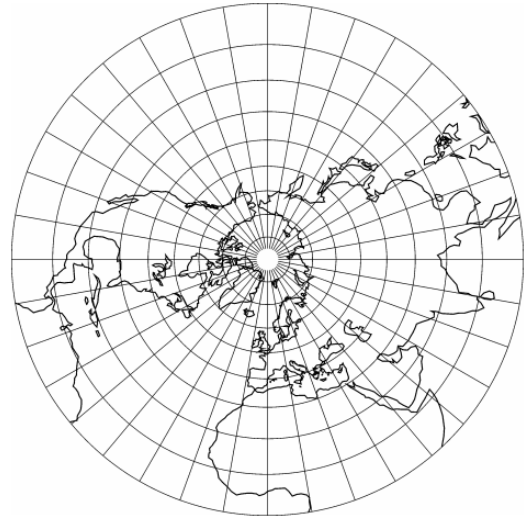
$$-\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

интеграљењем израза добијамо:

$$-\ln \rho = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + K,$$

$$\ln \rho = \ln K - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\rho = \frac{K}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} = K \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$



Слика 22: Усправна конформна азимутна пројекција
Извор: [2]

■

Константу K одређујемо из услова да је $n_0=1$.

$$n = \frac{\rho}{R \cos \varphi} = \frac{K \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{R \cos \varphi},$$

$$n = \frac{K}{2R} \sec^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = 1,$$

$$K = 2R \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$K = 2Rk, \text{ при чему је } k = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

7.2. Усправне еквивалентне азимутне пројекције

Теорема 4: Функција $\rho = f(\varphi)$ која задовољава услов еквивалентности дата је са:

$$\rho = 2R \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Доказ: Услов еквивалентности је дат следећом једначином $p = mn = 1$. Из чега следи:

$$-\frac{d\rho}{Rd\varphi} \frac{\rho}{R \cos \varphi} = 1,$$

$$\rho d\rho = -R^2 \cos \varphi d\varphi,$$

$$\frac{\rho^2}{2} = -R^2 \sin \varphi + K,$$

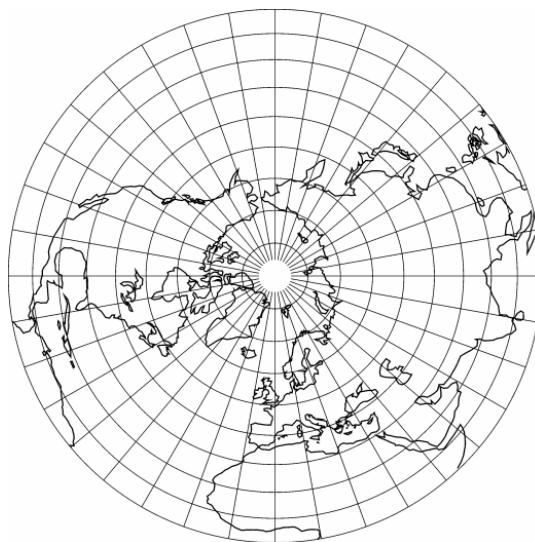
где је K – константа интеграције. Искористимо услов да се пол пресликава као тачка (за $\varphi = \frac{\pi}{2}$, треба $\rho = 0$), па имамо:

$$R^2 = K,$$

$$\frac{\rho^2}{2} = R^2(1 - \sin \varphi),$$

$$\rho^2 = 2R^2(1 - \sin \varphi) = 4R^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\rho = 2R \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right). \quad \blacksquare$$



Слика 23: Усправна еквивалентна азимутна пројекција
Извор: [2]

7.3. Усправне еквилистантне азимутне пројекције

Теорема 5: Функција $\rho = f(\varphi)$ која задовољава услов еквилистантности дата је са:

$$\rho = -R\varphi + K.$$

Доказ: Услов еквилистантности је дат следећом једначином $m=1$. Из чега следи:

$$-\frac{d\rho}{Rd\varphi} = 1,$$

$$d\rho = -Rd\varphi,$$

$$\rho = -R\varphi + K,$$

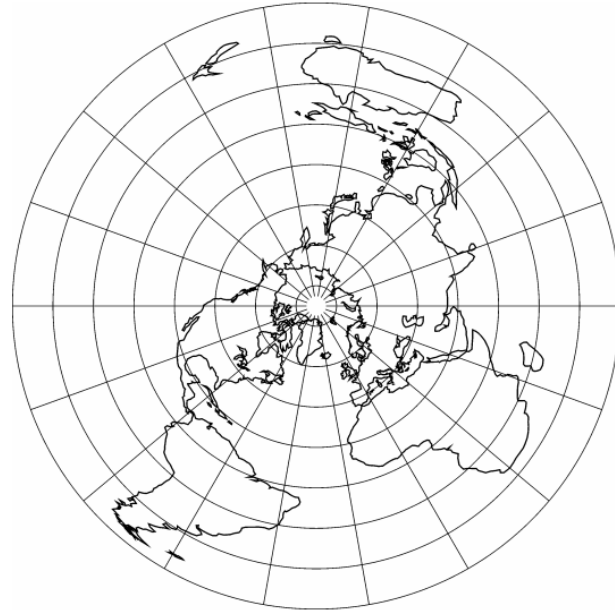
где је K – константа интеграције. ■

Искористимо услов да се пол пресликава као тачка (за $\varphi = \frac{\pi}{2}$, треба $\rho = 0$), па имамо:

$$\frac{\pi}{2}R = K,$$

$$\rho = R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$n = \frac{\rho}{R \cos \varphi} = \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\cos \varphi}.$$



**Слика 24: Усправна еквилистантна
азимутна пројекција
Извор: [2]**

8. Меркаторова пројекција

Карте света које се користе у нашој наставној пракси креиране су на основу Меркаторове пројекције, коју је развио фламански географ Герардус Меркатор 1569. године. Ова несавршена пројекција произвела је карту која је била уредна и корисна за бродску навигацију, али је као последицу имала искривљене величине копнених маса као и растојања између њих.

Као последица геометријске чињенице да не постоји изометрија дела сфере и дела равни свака географска карта света, па тако и Меркаторова карта је у извесној мери погрешна. У првом плану ове карте налазе се Евроазија и Северна Америка, као доминантни делови света, што је касније утицало на свест људи о величинама Африке и Јужне Америке.



Слика 25: Меркаторова карта света
Извор: Wikipedia

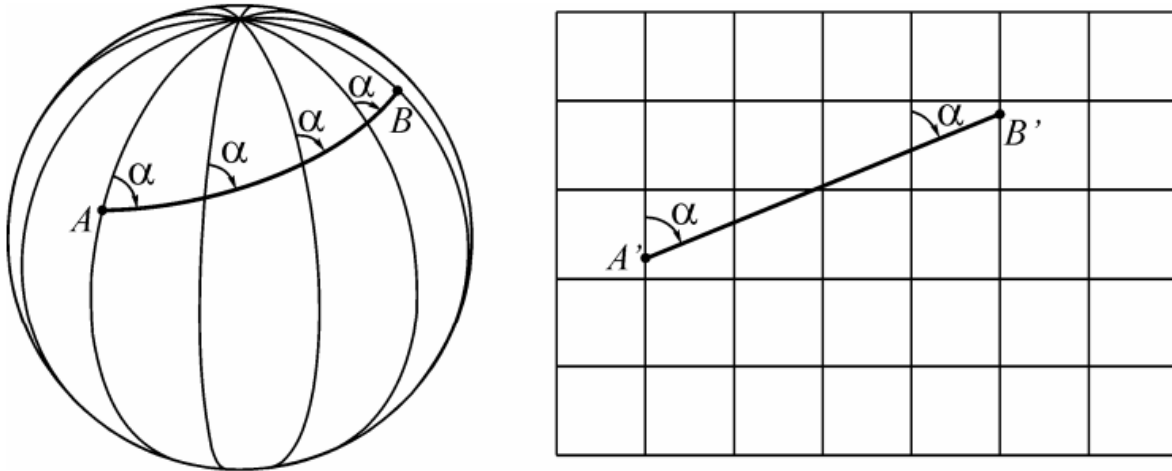
Једна од предности Меркаторове карте је једноставно одређивање путање од тачке А до тачке Б. Иако то није увек најкраћа путања, довољно је спојити тачке правом линијом, а угао између добијене линије и меридијана морепловци су пратили помоћу компаса.

Предности Меркаторове пројекције су:

1. меридијани и паралеле се пресликавају у праве;
2. конформност – сачувана је једнакост углова;
3. локсодорме³ се пресликавају у праве.

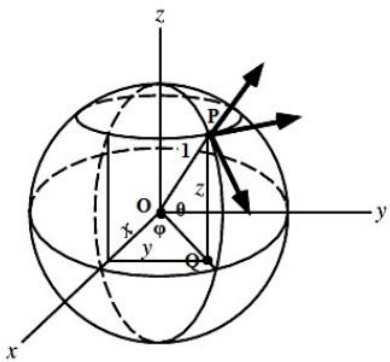
Меркаторова карта је дизајнирана тако да се све линије које заклапају једнаке углове α са меридијанима на сфери, посматрано од севера у смеру кретања казаљке на сату, пресликавају у праве линије једнаког угла α у равни (карти), слика 25.

³ Крива на елипсоиду која са свим меридијанима преко којих пролази заклапа исти угао.



Слика 26: Локсодорма на сфери и у Меркаторовој пројекцији
Извор: [2]

Због једноставности, посматрајмо Земљу као сферу полупречника 1. Претпоставио да смо сферу обмотали ваљком (као на слици 10.б) и свакој тачки на површини сфере придружили по једну тачку на ваљку. Затим, ваљак развијмо у раван и пређимо на Декартове координате. При развијању ваљка у раван, претпоставимо да се x – оса поклапа са изводницом ваљка, а y – оса са екватором.



Слика 27: Параметризација јединичне сфере
Извор: [2]

Нека је P тачка на сфери, па из тога следи да је $|OP| = 1$.

Посматрајмо правоугли троугао OPQ и применимо дефиниције косинуса и синуса.

$$\cos \theta = \frac{|OQ|}{|OP|} = |OQ|.$$

Сад посматрајмо троугао OXQ :

$$\cos \varphi = \frac{|OX|}{|OQ|} = \frac{x}{\cos \theta},$$

$$x = \cos \varphi \cos \theta.$$

Применимо тригонометријске формуле и на правоугли троугао OYQ :

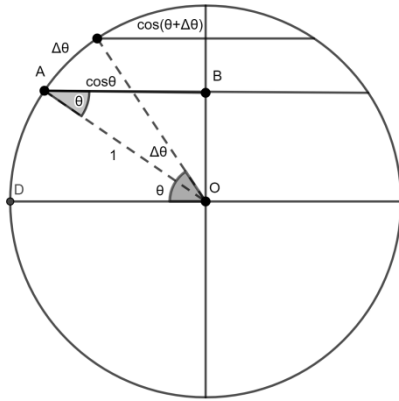
$$\sin \varphi = \frac{|OY|}{|OQ|} = \frac{y}{\cos \theta},$$

$$y = \cos \theta \sin \varphi.$$

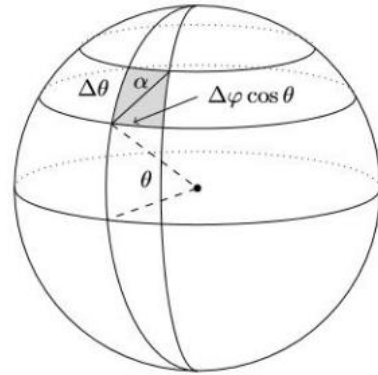
Преосталу променљиву можемо одредити применом дефиниције синуса и косинуса на правоугли троугао OQR :

$$\sin \theta = \frac{|PQ|}{|OP|} = z,$$

при чему је $\varphi \in [-\pi, \pi]$ дужина, а $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ширина. Уведимо следеће ознаке за Декартове координате у равни: $x = u(\varphi, \theta)$ и $y = v(\varphi, \theta)$, при чему је $\varphi \in [-\pi, \pi]$, а $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Слика 29: Пресек сфере



Слика 28: Мали правоугаоник на сфери
Извор: [2]

Посатрајмо линију константног угла α . Из услова да је очувана дужина екватора имамо да је $u = \varphi$ (кружница која чини екватор и сваки њен лук се преносе у стварној дужини).

Посматрајмо правоугаоник на сфери у тачки (φ, θ) као и пресек сфере по главној кружници која садржи центар, тачку (φ, θ) и осу која пролази кроз половине. Применом дефиниције косинуса на правоугли троугао АОВ закључујемо да кружница паралелна главној кружници на ширини θ има полупречник $\cos \theta$.

Сходно томе, правоугаоник на слици 29 има дужину $\Delta\varphi \cos \theta$, а ширину $\Delta\theta$, где су $\Delta\varphi$ и $\Delta\theta$ одређени константним углом α (слика 27).

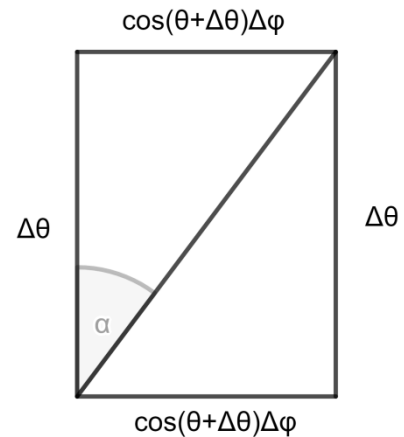
Приметимо да је:

$$\cot \alpha = \frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi \cos(\theta + \Delta\theta)} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi \cos \theta}.$$

Да би све линије које заклапају једнаке углове на сфери биле равне линије на карти мора да буде испуњено и:

$$\cot \alpha \approx \frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{\Delta v}{\Delta \varphi}.$$

Што значи да је:



Слика 30: Мали правоугаоник у равни

$$\frac{\Delta v}{\Delta \varphi} = \frac{\Delta \theta}{\Delta \varphi \cos \theta},$$

$$\Delta v = \frac{\Delta \theta}{\cos \theta} = \Delta \theta \sec \theta,$$

$$\frac{dv}{d\theta} = \sec \theta,$$

$$v'(\theta) = \sec \theta,$$

$$v(\theta) = \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta = \int \frac{1}{1 - t^2} dt = \int \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt,$$

$$v(\theta) = \int \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt,$$

$$v(\theta) = -\frac{1}{2} \ln(1-t) + \frac{1}{2} \ln(1+t) + C,$$

$$v(\theta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} + C,$$

$$v(\theta) = \ln \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} + C,$$

$$v(\theta) = \ln \sqrt{\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta}} + C,$$

$$v(\theta) = \ln \sqrt{\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} \frac{1+\sin \theta}{1+\sin \theta}} + C,$$

$$v(\theta) = \ln \sqrt{\frac{(1+\sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}} + C,$$

$$v(\theta) = \ln \left(\frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} \right) + C,$$

$$v(\theta) = \ln \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) + C,$$

$$v(\theta) = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + C.$$

Како је $v(0) = 0$ имамо да је $C = 0$, односно:

$$x = u(\varphi, \theta) = \varphi, y = v(\varphi, \theta) = \ln(\sec \theta + \tan \theta), \varphi \in [-\pi, \pi], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

То значи да се тачка $P(\varphi, \theta)$ на сфери пресликава у тачку $Q(x, y)$ на карти.

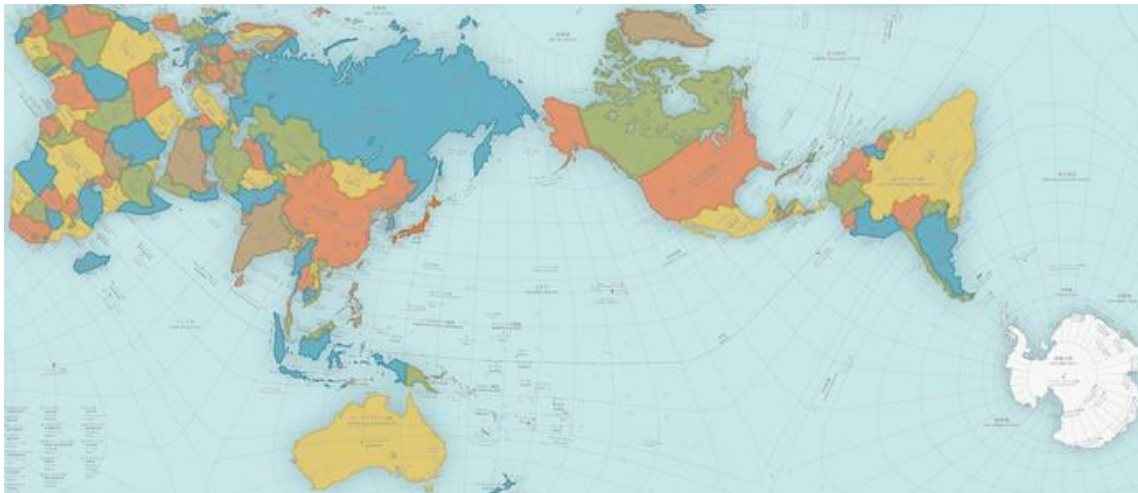
9. АутаГраф (AuthaGraph)

Годинама је АутаГраф била интригантна, али неухватљива пројекција карте која је импресионирала лаике и збунила картографе. Након што је 2016. године Хајиме Нарукава, творац АутаГраф-а освојио „Награду за најбољи дизајн“ коју додељује Јапански институт за дизајн, АутаГраф је постао тема медија. АутаГраф се сматра „најтачнијом картом коју ћете икада видети“. Штавише, Јапанска влада је најавила да ће постепено користити АутаГраф у средњошколским уџбеницима. Међутим, како Нарукава није објавио једначине, нико не зна да направи АутаГраф карте, а свако ко то жели да учини мора се обратити њему лично. Из тог разлога велики број математичара, картографа, инжењера, геодета, али и људи других занимања је покушало да открије једначине АутаГраф-а. У том покушају највише се истакао Џастин Кунимун, који је користећи неколико слика АутаГраф карте доступних на интернету и објашњење како је АутаГраф направљен успешно направио инжењеринг апроксимације АутаГраф-а, који се не разликује на око.

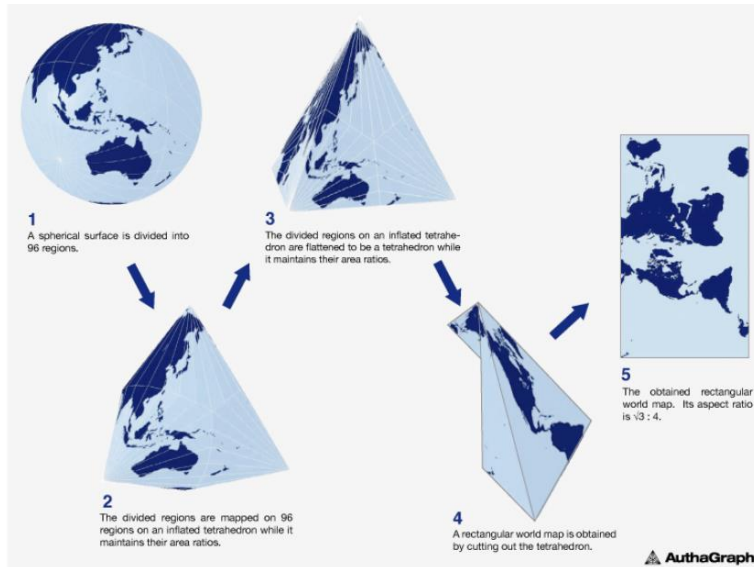
Оригинални метод за одржавање пропорција области назива се „мапирање изо области“, а оригинални процес мапирања комбиновањем различитих метода пројекције преко посредних објеката назива се „вишеслојно мапирање“. Ове идеје за мапирање имају за циљ да смање грешке током пројектовања сфере на тетраедар јер једноставна оптичка пројекција са сфере на тетраедар изазива огромна изобличења.

9.1.Нарукавин опис АутаГрафа

Ова правоугла карта под називом AuthaGraph карта света направљена је дељењем сферне површи на 96 сферних троуглова, а затим њиховим преношењем на тетраедар, уз задржавање пропорција површине, који се на крају „размота“ у правоугаоник.



Слика 31: AuthaGraph карта света; Извор: [АутаГраф](#)



Слика 32: Израда АутаГраф мапе

Извор: [АутаГраф](#)

It shows an air route from Tokyo to Brasilia via Houston as it were a big detour.

<Mercator projection>
There is no perfect resolution in representing a spherical image on a rectangular piece of paper. In its long history Mercator Projection is one of a few prior arts which fits in a rectangle and has been familiar for 440 years since it guided explorers to the new world. However the shortest distance between two points is described as a curve and it can not describe the polar regions properly. When Mercator made his map in the 16th century, Antarctica has not found yet.

<Dymaxion map>
Dymaxion map invented by Buckminster Fuller in 1946 properly represents shapes of continents and a confrontation between U.S. and U.S.S.R around the Arctic Ocean not between east and west. However it gives a priority to keep the shape of continents. The outlines of oceans are interrupted.

<AuthaGraph>
Thus existing maps either contain distortion when transforming an entire sphere to a rectangle, or when correcting distortions, they are unable to fit the outlines in a rectangle without gaps, so called mechanical vignetting. The proposed world map was developed by multi-layers of projections (mapping) via a tetrahedron. By the method it is able to transform an entire sphere to a rectangle as Mercator projection does while it substantially keeps sizes and shapes of continents as Dymaxion map does.

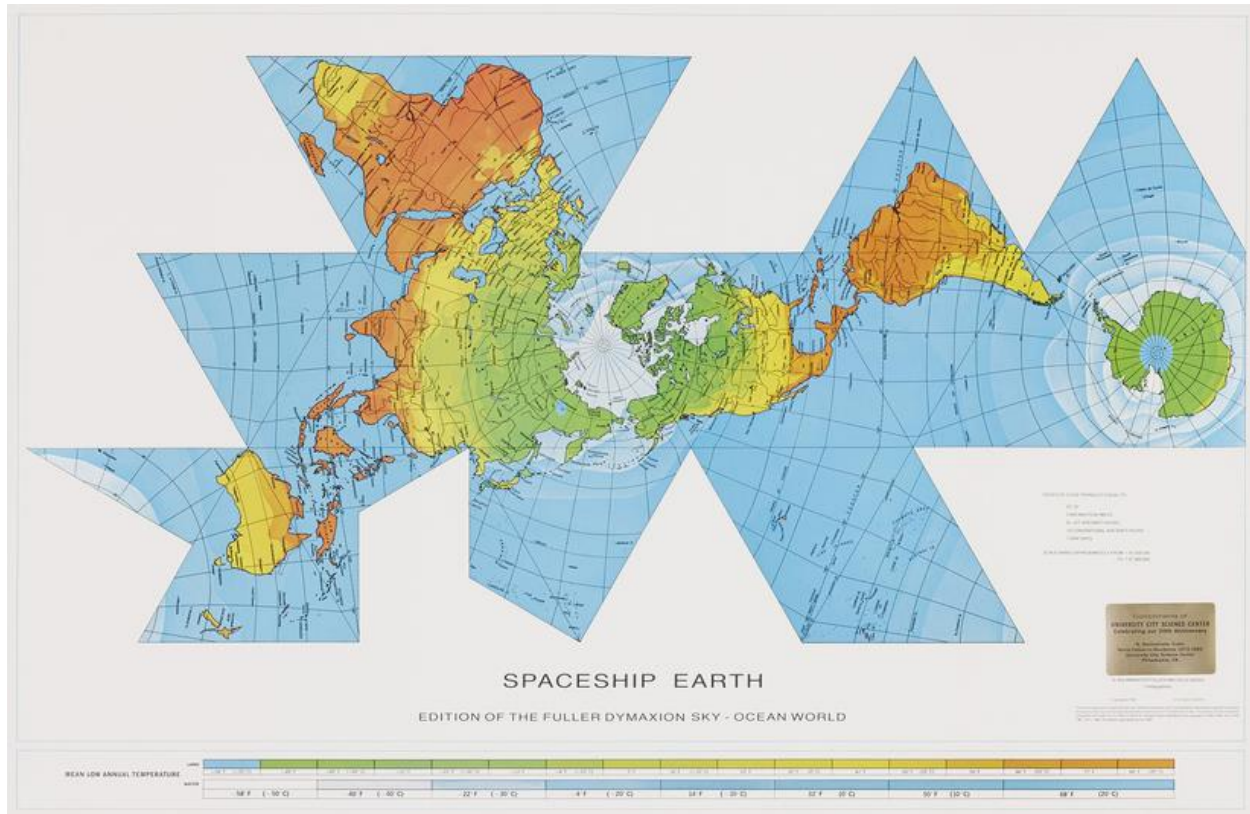
It shows a flight from Tokyo to Europe via Anchorage is one of the shortest routes.

AuthaGraph

Слика 33: Приказ Меркаторове пројекције, Димаксион карте и АутаГраф пројекције

Извор: [АутаГраф](#)

АутаГраф карта је у стању да трансформише читаву сферу у правоугаоник као што то чини Меркаторова пројекција, док у великој мери задржава величине континената и океана као Димаксион⁴ карта.

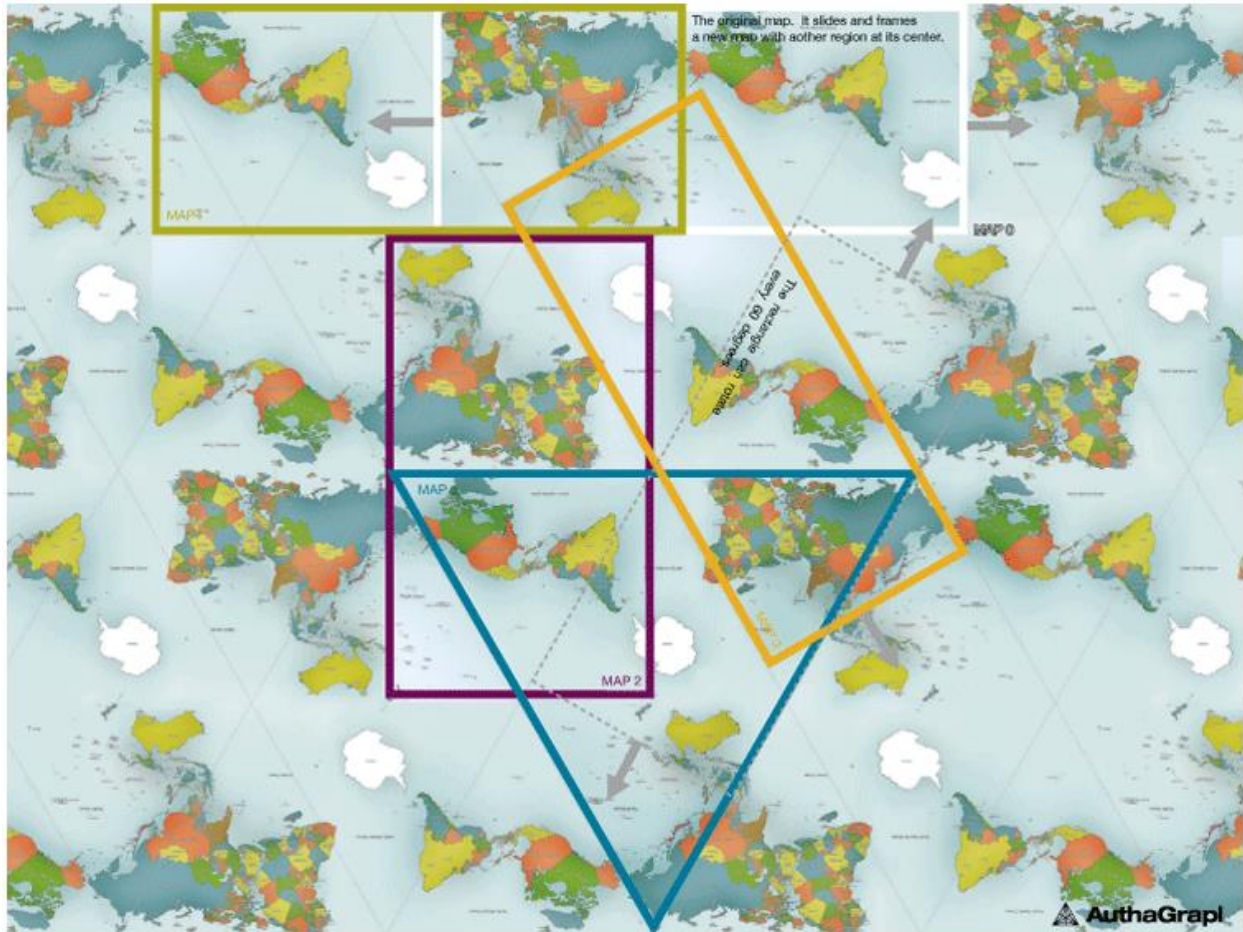


Слика 34: Димаксион карта света

Извор: <https://optolov.ru/bs/the-design-of-the-corridor/samye-neobychnye-geograficheskie-karty-mira-alternativnaya-karta-mira.html>

Размотавање икосаедра у мрежу: <https://sketchfab.com/3d-models/dimaksion-mapa-dymaxion-map-f19ef0412c9d4be4b06d1425fcc19be5>

⁴ Димаксион (Dymaxion) пројекција, пројекција Р. Букминистера Фулера, је пројекција Земље на икоседрар који се потом разлаже у мрежу.



Слика 35: Приказ размотане мапе света

Извор: [АутаГраф](#)

Можемо „поплочати“ АутаГраф карту света без празнина и преклапања. Начин теселације⁵ има беспрекорне везе између карата као да је то ЕшEROVA плочица⁶. Као и рибе и птице на његовој слици, шест континента није фрагментирано, а седам океана одржава своје непрекидне мреже. Сматрало се да је свет на бесконачној равни, јер су геометрије сфере и бесконачне равни сличне. Крећући се по обе површине, не наилазимо на крај. Географска мрежа на карти може да се прошири на било који правац на картама са „плочицама“. Стога карта света



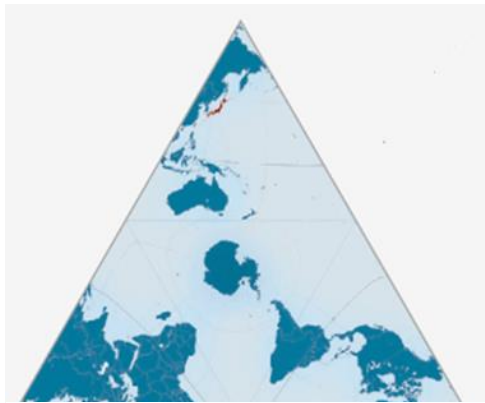
Слика 36: ЕшEROVA плочица

⁵ Теселација или поплочавање равни је поступак постављања геометријских облика у равни, без преклапања и празнина. Може се говорити и о теселацији делова равни или других површи. Могућа су и уопштења на више димензија.

⁶ Морис Корнелис Ешер (1898-1972), холандки уметник и графичар, посебно познат по својим представама парадоксалних и немогућих призора.

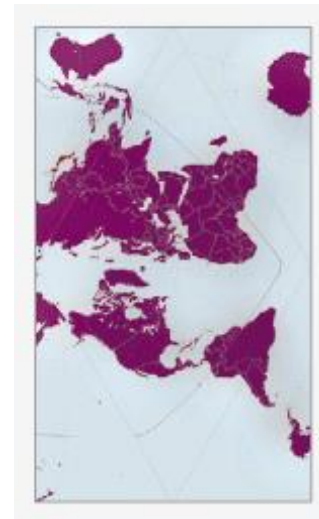
репродукује сферни свет без „ћорсокака“ на равни, односно карта света може бити поплочана у било ком правцу без „шавова“. На основу тога, из ове карте може бити направљена нова карта света правоугаоног или троугаоног облика са различитом области у свом центру.

На картама са „поплочавањем“ може се уоквирити поље приказа које покрива цео свет. Оквир функционише као прегледник који омогућава кориснику да се креће и помера, а затим да уоквири нову карту света са пожељним регионом у центру. Они пружају нови угао перспективе како би се свет подједнако сагледао, односно како би се ослободили постојећих перцепција дефинисаних уобичајеним фразама као што су „далеки исток“, „иди на север“, „западно“.



Слика 37: Поглед света са Антарктика
Извор: [АутаГраф](#)

На слици 37 је приказана обала Антарктика са погледом на сва три океана (Атлантски океан, Тихи океан и Индијски океан), док слика 38 приказује распоред света који га дели на нови свет – испод и стари свет – изнад.



Слика 38: Поглед на свет са Северног пола и првог меридијана
Извор: [АутаГраф](#)



Слика 39: Поглед на свет из Бразила
Извор: [АутаГраф](#)



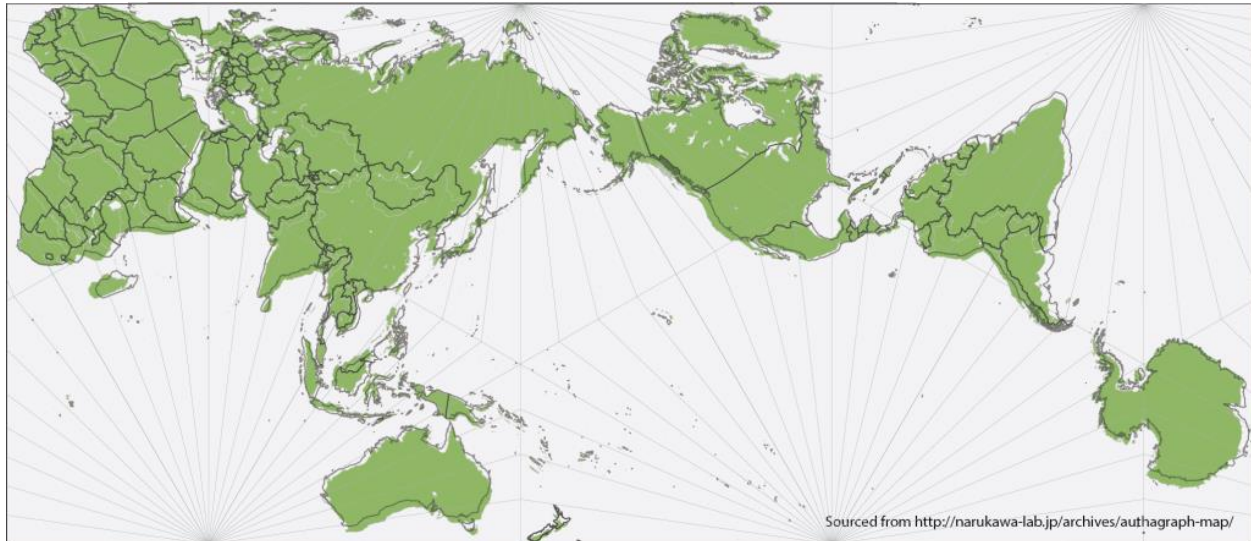
Слика 40: Поглед на свет из Јужне Африке
Извор: [АутаГраф](#)

9.2. Алтернативне формуле за АутаГраф пројекцију

Да би започео инверзни инжењеринг ове пројекције, Џастин Кунимуне је користио Нарукавине описе стварања АутаГраф-а и искористио их за формирање математичких формула. Конструисао је 96 области које описује на слици 41. Како је број области тежио бесконачности, поставио је ограничење и одредио формулу за израчунавање угаоне координате тачке у равни – θ :

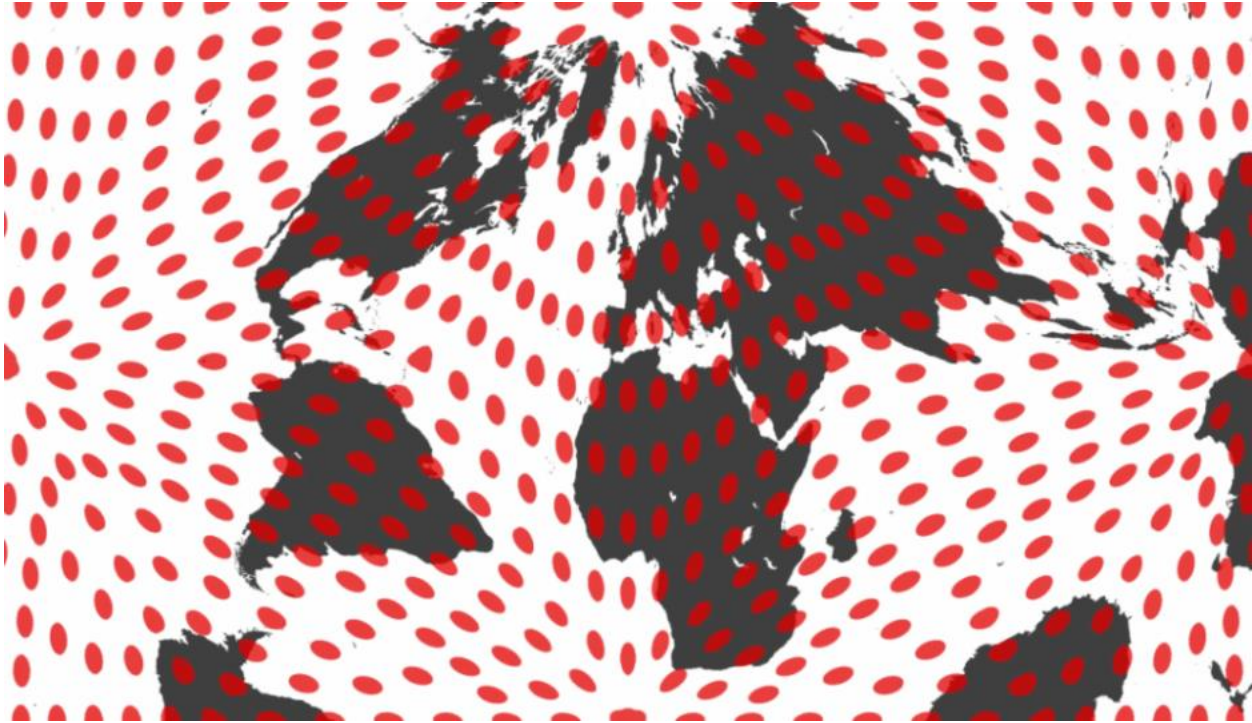
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{12}}{\pi} \left(\Lambda - \sin^{-1}\left(\frac{\sin \Lambda}{\sqrt{3}}\right)\right)\right),$$

где Λ представља релативну географску дужину на глобусу. Као резултат је добио мапирање углова које је пресликало те области, из троуглова на сфери, у шестоуглове на равни, док је њихова релативна површина остала иста. Резултат примене тог пресликавања на тетраедар приказан је на слици 44.



Слика 41: АутаГраф мапа је обележена зеленом бојом, док је Кунимунеова пројекција престављена црним линијама

Извор: [17]



Слика 42: Мапирање углова које Норукава описује примењено на једноставну тетраедарску мапну пројекцију.
Извор: [17]

Приметимо да су на слици 41, 96 регија веома дугачке. АутаГраф тврди да одржава њихове релативне величине, али не говори како су копнене масе распоређене унутар њих. Најбоље поклапање са АутаГраф-ом, Кунимуне је добио применивши степену функцију унутар њих тако да је растојање тачке у равни од најближег врха било пропорционално растојању на сфери од најближег врха до 68-ог степена, са одговарајућим нормализацијама како би обезбедио непрекидност.

$$r = \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \phi}{\tan^{-1}(\sqrt{2} \sec \Lambda)} \right)^{0,68} \sqrt{3} \sec \theta.$$

Ово гура тачке од врха, где је изобличење веће, смањујући укупно изобличење облика.



Слика 43: Исто угаоно пресликавање, али са степеном функцијом као мапирање удаљености, а не линеарно коришћено изнад.
Извор: [17]

Затим је применио ротацију како би променио аспект. Посматрањем АутаГраф карте установио је да је локација Северног пола око $77^\circ \text{ N } 143^\circ \text{ E}$, северно од Љаховских острва, са стандардном паралелом од око 17° W .

Затим га је мерењем линија на објављеним АутаГраф картама преуредио у конфигурацију коју су објавили. Имајући на уму да Тисотови индикатори (црвене тачке – све имају исти полупречник) откривају значајно изобличење величина, најгори део је ограничен на океане и Сибир.

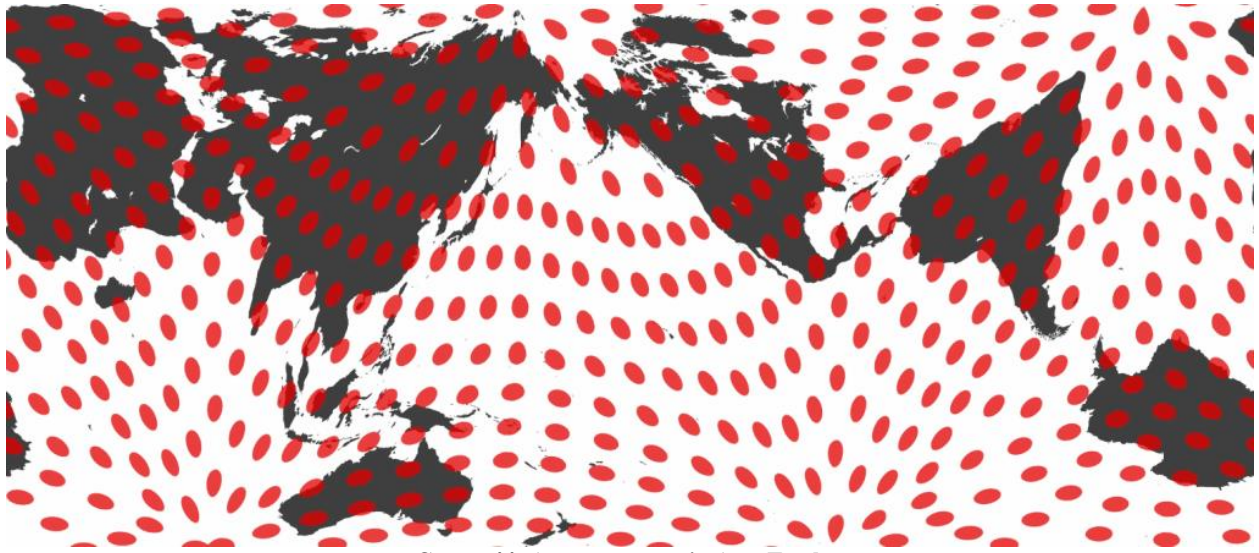
Затим је заменио степену функцију са тригонометријском функцијом која даје карту једнаке површине.

$$r = \sqrt{\frac{1 - \sin \phi}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \sec \Lambda^2}}}} \sqrt{3} \sec \theta$$

На овај начин долази до повлачења копнених маса у оштре углове и много већег изобличења. Кунимунеов АутаГраф није савршен, међутим није ни оригинални АутаГраф.

У метрици изобличења коју је направио, где θ није изобличење а већи бројеви су лошији, АутаГраф се рангира на 0,265 узимајући у обзир просечну угаону дисторзију. АутаГраф жртвује ауталичност⁷, стварајући просечну дисторзију од 0,399, која је знатно мања од Меркаторове која има вредност 0,845.

⁷ енг. authalic projection (equal-area projection) – пројекција која обезбеђује једнакост површина



Слика 44: Аутална верзија АутаГраф-а
Извор: [17]

Литература:

- [1] Пашић В: „Еуклидска диференцијална геометрија кривих и површи у три димензије“, ПМФ Тузла, 2016.
- [2] Ракић З.: „Геометрија 3“, Београд, 2016
- [3] Салиховић А.: „Примјењена картографија“, Сарајево, 1974.
- [4] Седлар Ј.: „Диференцијална геометрија – 2016/17“, Сплит
- [5] Томић Н.: „Меркаторова и сродне картографске пројекције“, Загреб, 2017.
- [6] Ђурчић С.: „Картографија“, Нови Сад, 2003.
- [7] Урошев Н.: „Утицај деформација картографских пројекција на генерализације садржаја карата“, 2009.
- [8] Франкић К.: „Проблем оптималних картографских пројекција“, Геодетски гласник број 45, 2014.
- [9] Франчула Н.: „Картографске пројекције“, Загреб 2004.
- [10] Хак С., Урош М.: „Гаусова и средња закривљеност плоха“, Загреб, 2004.
- [11] Benitez J., Thome N.: „Applications of differential geometry to cartography“, Валенсија, 2004.
- [12] Deetz C., Adams O.: „Elements of map projection“, Вашингтон, 1938.
- [13] Thomas P.: „Conformal projections in geodesy and cartography“, Вашингтон, 1952.
- [14] Wolfgang K.: „Differential geometry: curves-surfaces-manifolds“, 2006.
- [15] Димаксион пројекција, линк сајта:
<https://www.atlasofplaces.com/cartography/dymaxion-world-map/>
- [16] Deakin R.: “A guide to the mathematics of map projections”, 2002., линк:
<https://www.researchgate.net/publication/228492443>

[17] **AuthaGraph**, линк сајта: <http://www.authagraph.com>

[18] Kunimune Justin: „**The secrets of the AuthaGraph revealed**“, 2017., линк сајта:
<https://kunimune.home.blog/2017/11/23/the-secrets-of-the-authagraph-revealed/>

[19] „**This weird Globe-folding map isn't perfect, but it's close**“, 2016., линк сајта:
www.wired.com/2016/11/weird-globe-folding-map-isnt-perfect-close/amp

Биографија аутора



Дејана Глушац је рођена 26.08.1995. у Врбасу. Основну школу „Вук Караџић“ у Црвенки завршава 2010. године као носилац Вукове дипломе, након чега уписује природни смер гимназије „Жарко Зрењанин“ у Врбасу коју завршава 2014. и исте године уписује Природно – математички факултет у Новом Саду, смер дипломирани професор математике. По завршетку основних студија уписује мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер мастер математичар – теоријска математика и примена. Положивши све испите предвиђене планом и програмом наведеног студијског програма, стиче право на одбрану овог мастер рада.

Београд, 2022.

Глушац Дејана