Dr. МАРЦЕЛ ШНАЈДЕР

МАТУРА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАЦИ ЗА ПИСМЕНИ И УСМЕНИ ВИШИ ТЕЧАЈНИ ИСПИТ СА РЕШЕЊИМА

БЕОГРАД
ИЗДАВАЧКО И КЊИЖАРСКО ПРЕДУЗЕЋЕ ГЕЦА КОН А. Д.
Кнез Михаилова улица 12
1939

3. Извести помоћу интегралног рачуна образац за запремину лоптиног отсечка:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}\left(3r - h\right).$$

15

1. Три броја имају ту особину да чине геометријски ред. Ако се први број подели са 4, други смањи за 30, а трећи смањи за суму прва два, добије се опет геометријски ред, и то с истим количником.

Који су то бројеви?

2. Колике су осе оне елипсе $x^2 + 4y^2 = c$ којој је права $x + y = 5$ тангента? У којој тачки дира тангента елипсу?

3. Површина кружног прстена што га образују описани и уписани круг правилног полигона увек је једнака $\frac{a^2\pi}{4}$, где је a страница полигона.

16

1. Три полигона имају заједно 28 страница и 105 дијагонала. Који су то многоугаоници ако бројеви њихових дијагонала чине аритметички ред?

2. У елипсу

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

треба уписати правоугаоник тако да му два супротна темена леже у фокусима. Колика је његова површина? — Да ли је овај правоугаоник увек могућ!

3. Оштри углови правоуглог троугла јесу α и β. Доказати да је

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1.$$

17*

1. Странице троугла јесу три узастопна цела броја, а најмањи угао у троуглу је половина највећег угла.

Израчунати површину и углове троугла.

2. У круг (r) уписан је равнострани троугао који претставља базу тетраедра. Израчунати површину и запремину лопте уписане у тетраедар.

Одредити величину датог полупречника за случај да површина уписане лопте износи π и наћи колика је онда њена запремина.

3. Из крајње тачке мале осе елипсе

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$$

повући максималну тетиву. Наћи

a) њену дужину,

b) површину омеђену већим делом тетиве, луком елипсе и осом X,

c) запремину тела које настаје ротацијом поменуте површине око осе X.

18*

1. Решити једначину

$$2x^6 + 3x^5 - 18x^4 + 18x^2 - 3x - 2 = 0.$$

2. У круг полупречника $R = 12{,}5$ cm уписан је равнокраки троугао коме је угао на основици $\alpha = 53^0\,7'\,49''$, а на круг је повучена тангента паралелно са висином троугла..

Израчунати површину и запремину тела које настаје ротацијом троугла око дате тангенте.

3. Из жиже елипсе, чији је линеарни ексцентрицитет за 1 мањи од мале, а за 2 мањи од велике полуосе, повучена је тангента на параболу $y^2 = \frac{256}{75}x$.

Треба израчунати површину што је затвара тангента са великом осом елипсе и луком параболе, и угао под којим она сече елипсу.

19

1. Две тачке на параболи имају ординате a и $3a$, а међусобно растојање ордината износи $6a$.

Како гласи једначина параболе?

Колики је сегмент што га отсеца тетива која спаја поменуте тачке?

2. Странице троугла чине геометријски ред са количником $q = \frac{4}{3}$. Колики је најмањи угао троугла? Када би се највећа страница троугла смањила за 1, троугао би постао правоугли. Колика је површина заданог троугла?

3. Ако се из произвољне тачке која лежи унутар равностраног троугла спусте окомице на све три странице, сума њихова је стална и једнака висини троугла? — Доказати (планиметријски).

20

1. Синуси углова у троуглу односе се као **3**:**4**:5. Колики је највећи угао? — Израчунати странице троугла ако се узме да му је површина једнака 1.

2. Одредите x-ти члан геометријске прогресије чија прва три члана гласе:

$$11 - x^{\log x},\ x^{\log x} - 5,\ 35 - x^{\log x}.$$

3. Ако се располове странице произвољног четвероугла и половишта редом споје, увек се добије паралелограм. — Доказати аналитички.

21*

1. Елипсу код које је $2a + 3b = 45$, а линеарни ексцентрицитет $e = 10\sqrt{2}$, пресеца права $x = 3(7y - 25)$. Настали елиптични сегмент ротира око осе X. Израчунати запремину обртног тела и изразити је као функцију запремине E ротационог елипсоида.

2. Троугао је задан односом својих страница

$$a:b:c = 9:10:17$$

и полупречником уписаног круга $r = 2$.

Колико је растојање центра описаног круга од најближе странице и колико је растојање центра уписаног круга од најближег темена троугла?

3. Наћи екстремне вредности функције

$$y = 3x^4 - 16x^3 - 54x^2 + 432x$$

и испитати их помоћу другог извода.

22*

1. Решити троугао ако су две његове странице и угао међу њима дати једначинама:

$$a + b = 3$$
$$a^2 + b^2 = 4 + ab\cos\gamma$$
$$ab\sin\gamma = \sqrt{3}.$$

2. У лопту (r) уписана је купа максималног волумена, а у купу максимални ваљак.

Одредити у ком односу стоје запремине ова три тела.

3. Кроз тачку M (1, 4) на параболи $y^2 = 2px$ повучена је нормала. Израчунати површину ограничену нормалом, директрисом, осом X и луком параболе.

Наћи запремину тела које настаје ротацијом поменуте површине око апсцисне осе.

23

1. Решити једначину:

$$\int_0^x \cos x dx - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \sqrt{\sin 2x}.$$

2. На висини равнокраког троугла чија је база $14 cm$, а крак $25 cm$ треба одредити тачку тако да збир квадрата њених отстојања од сва три темена троугла буде минималан.

У ком односу дели та тачка висину?

3. Површина троугла што га затварају асимптоте хиперболе $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ са макојом хиперболином тангентом константна је и једнака продукту полуоса хиперболе. — Доказати.

24

1. Решити једначину

$$\frac{\log 10x}{\log x^2} - \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{\log x}} = \frac{1}{2}.$$

2. У хиперболу $25x^2 - 9y^2 = 400$ уписан је квадрат, а око квадрата описан је круг.

Колико тело настаје када површина ограничена кругом, хиперболом и осом Y ротира око апсцисне осе?

3. Ако један угао (γ) троугла износи 45^0, постоји релација

$$a^2 + b^2 - c^2 = 4P,$$

где P значи површину троугла. — Доказати.

25

1. Три броја чине аритметички ред тако да је разлика реда једнака четвероструком првом члану *(a)*. За колико треба смањити средњи члан да се добије геометријски ред, и колики је количник тога реда?

2. Из тачке $A\ (x_1, y_1)$ на хиперболи $x^2 - y^2 = a^2$ спустити нормале на обе асимптоте и израчунати површину насталог правоугаоника. Показати да је његова површина независна о координатама дате тачке.

3. Доказати да је први извод функције $y = tgx$

$$y' = \frac{1}{cos^2 x}.$$

26

1. Израчунати x и y из овог система једмачина:

$$\log^3 x - \log^3 y = 8,$$
$$\log x^3 - \log y^3 = 6.$$

2. Ромбоид је састављен од два троугла чије су странице

$$a = 24$$
$$b = 11$$
$$c = 31,$$

тако да им је страница c заједничка.

Израчунати углове и другу дијагоналу ромбоида.

3. Извести образац за једначину тангенте параболе $x^2 = 2py$:

$$xx_1 = p\,(y + y_1).$$

27*

1. Решити једначину

$$9\,(x - 2)^6 - 91\,(x - 2)^4 + 91\,(x - 1)^2 - 9 = 0.$$

2. Елипса

$$3x^2 + 4y^2 = 108$$

ротира око осе X. У настали елипсоид треба уписати ваљак максималне запремине. Колика је та запремина и у ком односу стоји она према запремини елипсоида?

3. Око једног темена троугла чије су странице

$$a = 10cm,$$
$$b = 17cm,$$
$$c = 21cm$$

описан је круг који тангира страницу c. Кружни лук дели површину троугла на три дела. Колики је сваки од њих?

28

1.

$$\int_{4}^{81} \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int_{x}^{1} (3x^2 + 10x + 7)\, dx + \int_{-17}^{17} dx = 0.$$

Одредити границу средњег интеграла.

2. Непаралелне странице трапеза јесу:

$$BC = 8 \ cm,$$
$$AD = 6 \ cm.$$

Када се оне продуже, секу се под правим углом. Израчунати углове трапеза и његову висину. — Могу ли се из горњих података израчунати и непознате странице трапеза?

3. Извести обрасце за линеарни ексцентрицитет e, нумерички ексцентрицитет ε, полупараметар p код равностране хиперболе $x^2 - y^2 = a^2$, као специјалне случајеве тих величина код хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Тако исто, једначину тангенте и услов да права $y = kx + n$ буде тангента равностране хиперболе.

29*

1. Хипербола је задана линеарним ексцентрицитетом $e = 2\sqrt{14}$ и једначином асимптоте $y = \frac{\sqrt{5}}{3} x$. Кроз тачку $M(-9, -y)$ на хиперболи повучена је тангента која је у исто време тангента параболе ($y^2 = 2px$). Око координатног почетка описати круг коме је заједничка тангента хиперболе и параболе такође тангента.

a) Поставити једначине све три криве.

b) Наћи однос у коме дели додирна тачка на кругу дужину тангенте између додирних тачака на хиперболи и параболи.

2. Решити једначину

$$2^{5x+3} - 31.2^{4x+1} + 155.2^{3x} - 155.2^{2x} + 31.2^{x+1} - 8 = 0.$$

3. У равнострану купу (r) уписане су, једна над другом, две лопте које се додирују.

Израчунати у ком односу стоје површине, а у ком запремине ова три тела.

30*

1. Екстремне вредности функције

$$y = x^3 - 12x^2 + 45x - 49$$

претстављају прва два члана геометријске прогресије која расте, а вредности аргумента (x) које одговарају тим екстремима, прва два члана аритметичке прогресије која расте.

Како гласе обе прогресије?

Да ли се оне подударају у којем члану?

Који је члан аритметичке прогресије једнак четвртом члану геометријске?

Који је члан геометријског реда једнак 312-том члану аритметичког?

2. Над кружном базом ($r = 6cm$) дижу се на исту страну две усправне купе чије се стране односе као $\sqrt{3}:1$, а углови што их оне затварају с базом као $2:1$. Наћи величину простора између омотача купа. Изразити ту запремину као функцију запремине K оне равностране купе чији је полупречник базе $\rho = 1cm$.

3. Дата је елипса $E(0, 0, 4, 3)$ и на њој две тачке $D_1\left(\frac{16}{5}, +y\right)$ и $D_2\left(\frac{16}{5}, -y\right)$. Кроз те тачке положе се тангенте на елипсу, а затим се конструише круг који пролази кроз D_1 и D_2 и пресечну тачку тангената.

Како гласи једначина тога круга?

На колике делове деле тангенте површину круга?

31

1 Задан је један корен

$$x_1 = -2$$

једначине $x^6 + x^5 - 2x^4 - x^2 - x + 2 = 0$. Наћи остале.

2. Под којим се углом види из координатног почетка онај део криве линије

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$$

који лежи између њеног максимума и минимума?

3. Ако се у усправну купу упише лопта, однос површина оба тела је исти као однос запремина. — Доказати.

32

1. Поставити једначину трећег степена ако њени корени чине аритметички ред чија је сума 12, а продукт 15.

2. Дат је троугао страница

$$AB = 8,$$

$$AC = 2\tfrac{1}{2},$$

$$BC = 7\tfrac{1}{2}.$$

Израчунати површину елипсе чије су жиже темена A и B и која пролази кроз теме C.

3. Површина правилног n-тоугаоника странице a износи

$$P = \frac{a^2 n}{4} \cdot cotg \frac{180^0}{n}.$$ — Доказати.

Специјални случајеви: $n = 3, 4, 6$.

33

1. Три рационална броја који чине геометријски ред имају особину да је њихов збир једнак збиру њихових реципрочних вредности, то јест $\frac{111}{10}$.

Који су то бројеви?

2. Поставити једначину круга који пролази кроз лево, горње и десно теме елипсе

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1.$$ — Шта следује у случају $a = b$?

3. Доказати Питагорино правило

$$a^2 + b^2 = c^2$$

а) помоћу сличности на правоуглом троуглу,

в) као специјални случај косинусне теореме.

34*

1. Неки дуг отплаћује се годишњим отплатама од 5000 динара. После 6 година отплаћено је пола дуга. Колики је тај дуг? — Колико је довољно отплаћивати следећих 6 година да се остатак дуга потпуно исплати? Рачунати 4%.

2. У елипсу (a, b) уписан је правоугаоник максималне површине, у правоугаоник елипса, у елипсу опет највећи правоугаоник, и тако даље у бесконачност.

Израчунати: *a)* суму површина свих елипса, *b)* суму површина свих правоугаоника.

3. Дата су два круга чији су полупречници $R = 15cm$, $r = 5cm$, а централна раздаљина $c = 26cm$. Њихове заједничке вањске тангенте секу се у тачки M. Израчунати растојање тачке M од центра већег круга, дужине тангената, угао између тангената и, напослетку, површину коју затварају тангенте са најмањим кружним луком.

35

1. Решити једначину

$$\sqrt[3]{log x(log^2 x - 1)} - \sqrt{log^2 x - 1} = 0.$$

2. Од свих ваљака површине $P = 2a^2\pi$ одредити омотач ономе који има максималну запремину. Какав је то ваљак? Који део површине износи омотач?

3. $$\cos 75^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}). \text{ — Доказати.}$$

36*

1. Око правоугаоника $(2a, b)$ описан је равнокраки троугао минималне површине тако да његова основица и дужина правоугаоника леже на истој правој. Оба се лика заврте око заједничке симетрале. У ком односу стоје запремине ротационих тела? Израчунати однос њихових површина за случај $a = \frac{3}{4} b$.

2. У којим се тачкама и под којим углом секу два круга који додирују обе координатне осе, а пролазе кроз тачку $A\ (8,\ 4)$?

3. На хоризонталном терену стоји стуб непознате висине x. Посматран са удаљености од $370m$ његов се врх види под извесним углом елевације који се утростручи када се стубу примакнемо за $260m$. Одредити висину стуба. — Претпоставити да се посматрање стуба у оба случаја вршило са места које је издигнуто $1m$ изнад терена.

37

1. Једна тачка на елипси

$$3x^2 + 4y^2 = 300$$

удаљена је од центра елипсе за $\frac{5}{2}\sqrt{13}$. Колики су њени радији вектори?

2. Лопта је пресечена на два дела тако да се површине насталих калота односе као $1:5$. У ком односу стоје запремине припадних лоптиних отсечака?

3. Збир квадрата корена једначине

$$x^2 + ax + b = 0$$

једнак је $a^2 - 2b$. — Доказати.

38

1. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned}(x + y)\,(3y + x) &= 15,\\ (y - x)\,(3y - x) &= -\,1.\end{aligned}$$

2. Дате су једначине двају пречника круга:

$$\begin{aligned}3x - 5y + 12 &= 0,\\ 4x - y - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Како гласи једначина тога круга ако је мањи лук што га захватају поменути пречници једнак π?

3. Ако странице правоуглог троугла чине аритметички ред, разлика тога реда увек је једнака полупречнику уписаног круга.

39

1. У геометријском реду са непарним бројем чланова први члан је 3, средњи 24, а сума свих чланова 381.

Како гласи последњи члан?

2. Око паралелепипеда чије су ивице

$$a = 12\,cm,$$
$$b = 15\,cm,$$
$$c = 16\,cm$$

описана је лопта. Колика је површина највеће калоте над једном проширеном страном паралелепипеда?

3. Ако се у макојој тачки параболе ($y^2 = 2px$) повуку тангента и нормала, жижа параболе лежи на средини између пресечних тачака тангенте и нормале с осом X. — Доказати.

40*

1. Задан је бесконачни низ квадрата тако да је страница сваког претходног квадрата једнака дијагонали следећег. Страница највећег квадрата је a.

Израчунати: a) збир обима и површина свих квадрата b) који квадрат по реду има површину $1 cm^2$ ако је $a = 1 dm\ 6 cm$.

2. Код косе купе нагибни угао највеће странице $S = 15$ према бази два пута је мањи од нагибног угла најмање странице $s = 9$. Колика је запремина ове купе? Наћи однос њене запремине према запремини уписане лопте.

3. Око десног темена елипсе

$$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{25} = 1$$

описан је круг који пролази кроз крајње тачке мале осе. Треба израчунати под којим се углом секу ове две криве, колика је њихова заједничка површина и колика је запремина тела које настаје ротацијом те површине око осе X.

41

1. Краци полуге износе $12 cm$ и $81 cm$. О краћи крак обешен је масивни тетраедар ивице $a = 3 cm$, а о дужи крак треба обесити масиван октаедар од истог материјала.

Одредити ивицу x октаедра тако да тела буду у равнотежи.

2. У десну половину елипсе $E(0, 0; 10, 6)$ уписан је круг тако да тангира малу осу у координатном почетку. Како гласи једначина тога круга, и који смер имају заједничке тангенте кривих?

3. Ако бројеви a, b, c чине геометријски ред, једначина $ax^2 + 2bx + c = 0$ има оба корена једнака.

42*

1. Четири броја чине аритметички ред. Сума реципрочних вредности првог и четвртог члана износи $\frac{1}{8}$, а сума реципрочних вредности другог и трећег $\frac{1}{12}$. Који су то бројеви? Између средња два члана добивеног реда интерполирати нови аритметички ред тако да његова сума буде једнака квадрату броја његових чланова? Колика је диференција уметнутог реда?

Упутство. Чланови реда: $a - 3d$, $a - d$, $a + d$, $a + 3d$

2. Решити троугао ако је задано:
полупречник уписаног круга $r = 2cm$,
збир страница $a + c = 25cm$,
површина троугла $P = 30cm^2$.

3. Хипербола пролази кроз тачке $A\,(13, 3\frac{3}{4})$ и $B\,(20, 12)$. Мањи радији вектори датих тачака затварају с луком хиперболе исечак. Колика је запремина тела које настаје његовом ротацијом око осе X?

43

1. Одредити вредност коефицијената a, b, c функције $y = ax^2 + bx + c$ тако да за $x = 1$ њена вредност буде 0 и да она за $x = 2$ има минимум -1.

2. Под којим се углом из центра уписаног круга види већа катета правоуглог троугла чија је хипотенуза $c = 89m$, а једна катета $b = 39m$?

3. Ако се капитал K уложи под сложен интерес уз $p^0/_0$, он ће после n година, уз годишње капиталисање, нарасти на

$$K_n = K.\, q^n, \text{ где је } q = 1 + \frac{p}{100}. —$$

Извести тај образац.

44

1. Решити једначину

$$\frac{1 - ax}{1 + ax}\sqrt{\frac{1 + bx}{1 - bx}} = 1.$$

Које вредности имају корени ако је $a = 10$, $b = 4$?

2. Колика је површина оне лопте која има исту запремину као елипсоид који је настао обртањем елипсе ($2a = 16$, $2e = 6\sqrt{7}$) око велике осе?

3. Кроз n година, на крају сваке године, улаже се извесни улог r под сложен интерес, уз $p^0/_0$ и годишње капиталисање.

Извести образац за вредност свих тих улога на крају n-те године.

45*

1. Правоугаоник дужине x и ширине y може се на два начина савити у омотач ваљка. Једанпут се добије ваљак запремине $1232 cm^3$, други пут ваљак запремине $224 cm^3$. Израчунати димензије правоугаоника и површину омотача. — $\pi = \frac{22}{7}$.

2. У круг је уписан правилни 18-угаоник странице $s = 2 cm$, у 18-угаоник круг, а у овај опет правилни полигон са 18 страница.

Треба израчунати за колико се површина између оба круга разликује од површине између заданих полигона.

3. Из тачке $M(-\frac{36}{5}, 0)$ повучене су обе тангенте на параболу $y^2 = 20x$. Израчунати површину што је оне затварају с осом Y и луком параболе. Колика је запремина тела

које настаје када површина између тангената и параболиног лука ротира око осе X?

46

1. Решити једначину:

$$(11^x - 11)^2 = 11^x + 99.$$

2. Над страницама правоугаоника чији је обим $O = 4dm$ описани су споља полукругови. Како треба подесити његове димензије да површина целе слике буде минимална?

3. Запремину лоптиног исечка изразити као функцију полупречника r припадне лопте и угла 2α осног пресека исечка.

47

1. Три броја чине аритметички ред. Ако се средњи повећа за $7\frac{1}{2}$, добије се геометријски ред са количником који је једнак разлици заданог реда.

Који су то бројеви?

2. Поставити једначину оне тангенте параболе $2y^2 = 5x$ која затвара с координатним осама троугао површине 100.

3. Максимални правоугаоник који се може уписати у дати троугао (a, h) заузима 50% троуглове површине. — Доказати.

48*

1. Два се тела почну истовремено кретати по обиму правоуглог троугла у супротном смеру, сталним брзинама које се односе као 5:7. Она крену из једне крајње тачке хипотенузе те се сретну први пут у другој крајњој тачки хипотенузе, а други пут на удаљености 20 метара од полазне тачке.

Одредити странице троугла.

2. Елипса пролази кроз тачке $A(3,1\frac{3}{5})$ и $B(4,1\frac{1}{5})$. Тетива AB је пречник круга. Како гласи његова једначина и под којим се угловима секу обе криве?

3. Лопту полупречника r треба пресећи двема паралелним равнима на једнаком растојању од центра и у сваки од добивена три дела уписати лопту тако да додирује пресечни круг у средини.

На којем растојању од центра треба положити те пресеке па да збир запремина све три лопте буде минималан? Како се односи њихова укупна запремина према запремини дате лопте?

49

1. Две тачке A и B удаљене су једна од друге $1dm$, а њихова растојања од равног огледала износе $1cm$ и $7cm$. Колики је упадни угао оног светлосног зрака који долази из тачке A те се рефлектује кроз тачку B?

2. Елипса пролази кроз тачку $A(1\frac{1}{5}, y)$, а једначина њене нормале у тој тачки гласи $40x - 15y - 36 = 0$. Колика је површина те елипсе?

3. Извести образац за решавање квадратне једначине

$$x^2 + ax + b = 0.$$

50

1. Кроз тачку M (3, 4) пролази бескрајно много елипса са центром у координатном почетку. Која од њих има најмању површину?

2. У празан суд облика равностраног конуса, окренутог врхом према доле, убаци се тешка кугла пречника $6cm$. Колико воде треба насути у суд па да кугла буде управо покривена?

3. Ако за углове троугла важи релација

$$sin\gamma = \frac{sin\alpha + sin\beta}{cos\alpha + cos\beta},$$

троугао је правоугли. — Доказати.

51

1. Решити једначине:

$$\frac{a^{x^2 + 5xy + 3y^2}}{a^{x^2 - 5xy + 3y^2}} = (a^2)^{10},$$

$$a^{logy - logx} = (a^3)^{log2}.$$

2. Косо пресечени усправни ваљак има полупречник базе $4cm$, највећу страницу $18cm$, најмању страницу $12cm$. Израчунати његову површину и запремину.

3. Равнострана хипербола $x^2 - y^2 = a^2$ и концентричан круг чији је полупречник једнак линеарном ексцентрицитету хиперболе секу се под углом од 60^0. — Доказати.

52

1. Од картона који има облик квадрата странице a отсече се на сваком темену квадрат, а од осталог се направи кутија. Колика мора бити страница отсеченог квадрата да запремина кутије буде што већа? — Колика мора бити страница датог квадрата ако се хоће да запремина кутије у том најповољнијем случају износи $2dm^3$?

2. Од два равнокрака троугла базе $a = 16cm$ и кракова $b = 10cm$, односно $b_1 = 17cm$ састави се делтоид и у њега се упише круг. — Колики је обим тога круга и колики је угао делтоида између неједнаких страница?

3. Круг описан око жиже параболе $y^2 = 2px$ са полупречником $r = p$ сече параболу под углом од 45^0. — Доказати.

53*

1. Задан је низ правоугаоника једнаких дужина, а ширине им чине аритметички ред. Површина првог правоугаоника је $5cm^2$, обим другога износи $14cm$, а пети правоугаоник је квадрат.

Колика је дужина сваког правоугаоника? Како гласи ред што га чине ширине?

2. Дужину $3b$ разделити на два дела тако да они, узети као полупречних базе и висина усправне купе, образују купу максималног волумена. — Колики је омотач те купе и колики је угао при врху њеног осног пресека?

3. Колика је заједничка површина линија

$$x^2 + y^2 = 144 \text{ и}$$
$$y^2 = 18x?$$

За колико се разликују запремине два тела која настају када две површине, од којих је свака ограничена луком круга и параболе, ротирају око осе X?

54

1. У троуглу је задано:

$$a = 7cm,$$
$$b = 3\sqrt{3}\,cm,$$
$$\alpha = 30^0.$$

Наћи трећу страницу c, без употребе логаритамских таблица.

2. Кроз тачку $A(8,6)$ повучена је права тако да са координатним осама затвара троугао минималне површине.

Како гласи једначина круга уписаног у тај троугао?

3. Формула за суму свих природних бројева од 1 до n гласи:

$$S = \frac{n^2+n}{2}.$$

Како се долази до те формуле?

55

1. Који део површине елипсе

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

износи онај круг који је описан око њене жиже, а из њеног центра се види под правим углом?

2. Израчунати све вредности

$$\sqrt[5]{-1}.$$

3. Омотач усправне правилне шестостране пирамиде два пута је већи од њене основице. Израчунати запремину пирамиде као функцију полупречника r круга уписаног у базу.

56

1. Дата је функц

$$y = \sin x \cos x.$$

Наћи за коју је вредност x-а функција максимум, за коју минимум и израчунати њене екстремне вредности.

2. Додирна тачка круга који је уписан у троугао површине $P=210 cm^2$ дели једну страницу на делове $5 cm$ и $7 cm$. Израчунати странице троугла. Какав је то троугао?

3. Треба доказати да тангента на елипсу $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, повучена кроз крајњу тачку параметра, затвара се координатним осама троугао чија је површина

$$P=\frac{a^3}{2e}.$$

57

1. Решити једначину:

$$9.5^{2x}-34.15^x+25.3^{2x}=0.$$

2. Површина елипсе је P. Колико је површина отсечка елипсе ограниченог тетивом која спаја крајње тачке велике и мале осе?

3. Извршити интеграцију:

$$\int tg^2 x\, dx.$$

58*

1. Решити једначину:

$$3^{4 \log x}=\frac{13.9^{\log x}-3}{13-3^{2\log x+1}}.$$

Показати да њени корени чине прогресију. Наћи суму те прогресије ако се претпостави да она опада и да јој број чланова постане бесконачан.

2. Кроз тачку $M(1,\frac{5}{2})$ повучена је на елипсу $3x^2+4y^2=$ $=12$ она тангента која се позитивним смером осе X затвара оштар угао. Над делом те тангенте између темених тангената елипсе (лево и десно теме) као пречником конструисан је круг. Поставити његову једначину и показати да он пролази кроз обе жиже елипсе.

3. Од свих равнокраких троуглова којима је обим $O=2x+2y$ сталан и једнак 10 одредити онај који ротацијом око своје висине даје купу максималне запремине. Колика је та запремина? Уписати, затим, у купу лопту и наћи однос омотача купе према површини лопте.

59

1. Над осама елипсе $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ описани су полукругови. Треба израчунати у ком односу стоји полумесечаста површина омеђена луком већег круга и луком елипсе према истоветној површини између лука елипсе и мањег круга.

2. Колика је површина највећег троугла основице 18 и обима 100?

3. Довести на најпростији облик:

$$\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

60

1. Решити:

$$x^y + 100x^{-y} = 20,$$
$$y + 3\log x = 4.$$

2. Око правоугаоника чија је страница a описан је круг чији је полупречник такође a.

Израчунати за колико се разликују површине кружних отсечака над већом и мањом страницом правоугаоника.

3. Параболоид висине h који је настао ротацијом параболе $y^2 = 2px$ око осе X има запремину

$$V = h^2 p \pi. \text{ — Доказати.}$$

61*

1. Имамо четири броја. Ако се одбаци први, остане геометријски ред. Ако се одбаци последњи, остане аритметички ред.

Одредити те бројеве кад збир првога реда износи 19, а другога 12.

2. Праве $3x - 2y - 6 = 0$ и $x + y - 12 = 0$ секу се на параболи $(y^2 = 2px)$.

Колика је површина исечка што га оне затварају с параболиним луком?

3. Израчунати страницу и омотач зарубљене купе чија је висина $h = 4cm$, површина $P = 42\pi cm^2$, а запремина $V = 28\pi cm^3$.

Упутство. Ставити: $R^2 + r^2 = u$, $Rr = v$. Онда је: $R + r = \sqrt{u + 2v}$, $R - r = \sqrt{u - 2v}$.

62

1. Одредити коефицијенте a и b у једначини $x^2 + ax + b = 0$ тако да они буду истовремено и корени дате једначине.

2. Кроз тачку $M(x, 2p)$ на параболи $y^2 = 2px$ повучене су тангента и нормала, а из фокуса параболе спуштене су на њих окомице.

Израчунати површину насталог четвероугла.

3. $tg\, 3\alpha$ изразити помоћу $tg\alpha$.

63

1. Дат је бесконачни ред

$$z, \sqrt{z}, \sqrt[4]{z}, \sqrt[8]{z}, - - - - - - -$$

Израчунати суму логаритама његових чланова. Из добивеног резултата одредити колики је продукт свих чланова заданог реда. — Може ли се тај продукт израчунати и непосредно?

2. Дужину $AB[A(7,3), B(1,-5)]$ разделити тачком C на два дела тако да збир $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ буде минималан.

Које координате има тачка C?

3. Површина лоптиног отсечка, заједно с основним кругом, једнака је

$$P = \pi h(4r - h),$$

где је r полупречник лопте, а h висина отсечка.

64*

1. Чаша има облик ротационог параболоида висине $10cm$, а ширине $20cm$.

a) Колико литара може у њу стати?

b) До које ће висине напунити чашу пола литра течности?

2. Два тела, удаљена од темена правога угла за $103m$ и $108m$, крећу се по крацима тога угла. Прво се удаљује од темена и пређе у првој секунди $1m$, у другој $3m$, у трећој $5m$, и т. д. Друго се приближује темену и прелази у првој секунди $2m$, у другој $4m$, у трећој $6m$, и т. д.

После колико ће секунда међусобно растојање ова два тела бити минимално и колико је оно?

3. Израчунати запремину косе купе чија је највећа страница $S=8$, а угао између највеће и најмање странице $\varphi=70^\circ$, кад се у базу купе може уписати троугао коме је једна страница $a = 6$, а супротни угао $\alpha = 40^\circ$.

65

1. Максимум функције

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

је доња, а њен минимум горња граница интеграла

$$\int \frac{(2x-\sqrt{x})^2}{x}\, dx.$$

Израчунати његову вредност.

2. Угао при врху равнокраког троугла је α, а крак је 1.

a) Колика је површина троугла?

b) Како се односи висина која припада краку према висини на бази?

c) На колике делове дели висина крак? Колико је α ако су оба дела једнака?

3. Дати су полупречници база R, r и висина h зарубљене купе. Показати да за запремину њене допунске купе важи образац

$$V = \frac{r^3 \pi h}{3(R-r)}.$$

66

1. Решити:

$$\sqrt[y]{3x-3y} = 3,$$
$$(x-y).\ 5^y = 75.$$

2. У мањи сегмент елипсе ($a = 4\sqrt{3}$, $b = 4\sqrt{2}$), отсечен параметром, уписан је правоугаоник максималне површине. Колики му је обим?

3. Ако се у усправну зарубљену купу може уписати лопта, њен је полупречник геометријска средина полупречника база купе. — Доказати.

67*

1. На параболи $y^2 = 4x$ повучен је радиј вектор дужине 5. Израчунати површину исечка ограниченог луком параболе, радијем вектором и апсцисном осом. Наћи колика је запремина тела које настаје ротацијом тога исечка око осе X.

2. Задане су две странице троугла $a = 9$, $b = 17$ и његова површина $P = 36$. Наћи трећу страницу c из једначине која се добије заменом датих вредности у Херонову формулу. Испитати, затим, тригонометријски да ли је дати троугао оштроугли или тупоугли.

3. Износ од 39000 динара може се на два начина разделити међу особе A, B, C: тако да делови чине аритметички ред или пак да чине геометријски ред. У првом случају добија особа A два пута више, а особа C за 7000 динара мање него кад би се дељење вршило у геометријском реду. — Који је од поменута два начина дељења повољнији за особу B и за колико?

68

1. Одредити геометријску прогресију од 10 чланова тако да продукт свих чланова буде 243, а толики да буде и продукт чланова на непарним местима.

2. У равнокраком троуглу дат је крак b и угао при врху 2α. Паралелно са базом треба повући дужину ($2x$) тако да она буде једнака збиру доњих отсечака на крацима троугла. Колика је та дужина и како се она односи према основици троугла?

3. Доказати да крива $y = x^2 + ax + b$ сече осу X под суплементним угловима.

69

1. Поставити једначину хиперболе чије се асимптоте секу под углом од 60^0, а са продуженим параметром затварају троугао површине $\frac{64}{9}\sqrt{3}$.

2. На коју ће суму (x) нарасти неки капитал који уз $p^0/_0$ донесе за n година i динара интереса на интерес? — Решити у општем случају, а онда узети специјално:

$$p = 5,$$
$$n = 10,$$
$$i = 6000.$$

3. Доказати да је извод константе једнак нули и дати за то геометријско објашњење.

70

1. Израчунати обим и површину правилног петоугаоника који има дијагоналу $d = 4cm$.

2. Нумерички ексцентрицитет Земљине путање око Сунца износи $\frac{1}{59}$. Израчунати у ком односу стоји удаљеност Земље од Сунца у време перихела према удаљености у време афела.

3. Ако апсцисе тачака које леже на правој линији ($y = kx + n$) чине аритметички ред, онда стоје и припадне ординате у аритметичком реду. — Доказати.

71*

1. Задан је бесконачан геометријски ред коме је први члан $sin 2\alpha$, а збир $cotg\alpha$. Други такав ред има исти количник као први ред, а збир му је једнак квадрату збира првога реда. Множењем одговарајућих чланова поменутих редова треба образовати нови ред, наћи његов збир и упоредити га са збиром првог заданог реда.

2. У полулопту (R) уписане су две купе са заједничким врхом у центру: равнострана купа и купа максималне запремине. У ком односу стоје њихове запремине и њихови омотачи?

3. На параболу $y^2 = 24x$ повучене су три тангенте са коефицијентима смера $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Кроз пресечне

тачке тангената пролази круг. Поставити његову једначину и показати да он пролази кроз жижу параболе.

72

1. Решити:
   a) $(x-1)(x+2)(x-3)=0$.
   b) $(x-1)(x+2)(x-3)=6$.

2. У квадрант елипсе уписати правоугаоник максималне површине. Какав однос мора постојати између велике и мале полуосе елипсе да та површина буде једнака квадрату над малом полуосом?

3. *Архимед* даје у свом делу о лопти следеће правило: Површина лоптине калоте једнака је површини круга чији је полупречник једнак растојању калотиног темена од периферије основног круга.

Доказати да је то правило тачно.

73

1. Тачка параболе има ординату 6 и радиј вектор 10. — Како гласи једначина параболе?

2. Решити једначину:

$$a^{\sqrt{\log x}-1}=b^{1-\sqrt{\log x}}.$$

3. Ако се полукруг (R) савије у омотач купе, добије се равнострана купа. — Доказати.

74

1. Решити једначину:

$$\log\left(\frac{x+7}{x-2}\right)^2+\log\left(\frac{x-2}{x+7}\right)-1=0.$$

2. Како гласе једначине парабола $y^2=2px$ и $x^2=2py$ ако је њихова заједничка површина једнака 1?

3. Доказати тачност тригонометријског обрасца:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

$$t_a = 4cm,$$
$$t_b = 7cm.$$

Колики је угао између њих?

3. Извести услов да права
$$y = kx + n$$
буде тангента круга
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

85*

1. Бочна висина усправне квадратичне пирамиде већа је од висине пирамиде за $1cm$, а од основне ивице за $3cm$. Израчунати површину пирамиде. — Наћи однос њене запремине и запремине уписане лопте.

2. Из удаљености a метара посматра се на хоризонталном земљишту вертикални објект те се његов врх види под углом елевације α. За колико (x) се метара треба приближити објекту да се угао елевације подвостручи? — Резултат приказати у облику који се може лагаритмовати Узети, затим: $a = 100m$, $\alpha = 24^0\,5'\,38''$. —

3. На елипсу чије се осе односе као $5:1$ повучена је у њеној тачки $D(-3, \frac{4}{5})$ тангента. За који би се угао морала тангента обрнути око своје пресечне тачке с осом X да постане тангента централног круга чији је пречник једнак великој оси елипсе?

86

1. Дат је систем једначина
$$x - y = m,$$
$$x^2 + y^2 = 50.$$
Одредити m тако да се добије само једна вредност за сваку непознату. — Задатак објаснити и геометријски.

2. Два ваљка имају заједно запремину $V = 12\pi$, а висине су им $h_1 = 1$, $h_2 = 2$.

Одредити запремину сваког од њих у случају да је збир њихових омотача максималан.

3. $1 + cos2\alpha + sin2\alpha$, претворити у облик који се може логаритмовати.

87

1. Сума прве половине геометријског реда са количником $q = \frac{1}{4}$ износи 1344, а сума друге половине 21.

Колико чланова има ред и како гласи последњи члан?

2. Око координатног почетка описана су два круга који образују кружни прстен површине 80π. Поставити једначине тих кругова ако један од њих пролази проз тачку $A(x_1, 2)$ а други кроз тачку $B(x_1+2, 8)$.

3. Доказати идентитет:

$$\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{cotg^2\alpha}{1+cotg^2\alpha} = 1.$$

88

1. У реду природних бројева дељивих са 7 одредити онај који износи $\frac{1}{24}$ збира *свих* претходних природних бројева.

2. Наћи екстремне вредности функције

$$y = \frac{sinx}{1+tgx}.$$

3. Аналитички образац за површину троугла гласи:

$2P = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$, или:

$2P = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)$.

Показати да су ови обрасци еквивалентни. У чему је разлика?

89

1. $x + y = 120^0$,
$sinx - siny = sin\alpha$. Наћи x и y.

2. Израчунати запремину зарубљеног ротационог параболоида чији су полупречници база $r = 6cm$, $R = 12cm$, а висина $h = 18cm$.

3. Извести образац за суму бесконачног конвергентног геометријског реда.

90*

1. Ивице a, b, c правоуглог паралелепипеда чија је површина $1022cm^2$ имају ту особину да се од њих може сло-

жити правоугли троугао обима 40*cm*. — Израчунати запремину паралелепипеда и његову дијагоналу.

2. Дата су темена троугла:

$$A(5,5),$$
$$B(-2,4),$$
$$C(2,-4).$$

Поставити једначину круга чији центар лежи у пресеку троуглових висина, а пролази кроз центар круга описаног око троугла. — Израчунати и однос површина оба круга.

3. Дате су странице троугла:

$$a=2,$$
$$b=1+\sqrt{3},$$
$$c=\sqrt{6}.$$

Колики су његови углови? За колико би требало продужити страницу a преко темена B да се добије правоугли троугао ACD? За колико је његова површина већа од површине датог троугла?

91*

1. Зајам од 50 милиона динара треба да се отплати у 20 једнаких годишњих оброка. Отплаћивање почиње 10 година после закљученог зајма, капиталисање се врши полугодишње, а проценат је 6. Колики је ануитет?

2. Над кругом полупречника $r=5cm$ стоје, на истој страни, усправни ваљак и усправна купа. Колике морају бити њихове висине (x, y) ако хоћемо да оба тела имају једнаку површину и једнаку запремину? Колики је омотач оног дела купе који лежи унутар ваљка? Одредити угао што га затварају странице ваљка и купе?

3. Дате су једначине двеју тангената хиперболе:

$$3y=5x-32,$$
$$17x=15y+64.$$

Под којим угловима сече хиперболу тетива која спаја додирне тачке тангената?

92

1. Колики је производ

$$(\sin\alpha+\cos\alpha+1)\,(\sin\alpha+\cos\alpha-1)?$$

Одредити α тако да тај производ буде максималан?

2. Колико чланова има геометријски ред чији је први члан 20, количник $\frac{4}{5}$, а збир 100?

3. Растојање темена хиперболе $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ од њене асимптоте је

$$d = \frac{ab}{e}. \text{ — Доказати.}$$

Какав се резултат добија код равностране хиперболе?

93

1. Решити једначине:

$$x^2 - y^2 = 2000,$$
$$\frac{2}{log(x+y)} = 3 - log(x+y).$$

2. Половина кружног прстена (R, r) савије се у омотач зарубљене купе. Израчунати њену запремину и нагибни угао странице према бази.

3. Површина најмањег троугла што га затвара тангента елипсе $E(0, 0, a, b)$ са координатним осама износи ab. — Доказати.

94

1. Решити једначину

$$log\left(7 + 4^{2\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x}}\right) = 1,36173.$$

2. На параболу $y^2 = 9x$ повучене су две тангенте у тачкама $M_1(x_1, 3)$ и $M_2(4, -y_2)$, а око пресечне тачке тангената описан је круг који сече параболу под правим углом. Како гласи једначина круга?

3. Израз

$$\frac{2cos\alpha + \sqrt{3}}{2sin\alpha - 1}$$ преудесити за логаритмовање.

95

1. Решити једначину

$$\frac{1 + x^4}{(1 + x)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

2. Странице троугла чине аритметички ред са диференцијом 2, а један угао троугла износи 120^0. Израчунати обим и површину троугла.

3. Доказати да је субнормала параболе $y^2 = 2px$ стална и једнака p.

96

1. Решити једначине:

$$tg2x + tg2y = -1,$$
$$tgx + tgy = 2.$$

2. Лук параболе $y^2 = 4x$ дели круг $x^2 + y^2 = 32$ на два дела. Колики су они?

3. Доказати да логаритми чланова геометријског реда чине аритметички ред. Колика је диференција тога реда?

97*

1. Особа A улаже кроз n година, крајем сваке године, r динара, а особа B улаже кроз исто време, крајем сваке друге године, $2r$ динара.

Која ће особа на крају n-те године имати више и за колико? Интересни фактор q. —

У крајњем резултату заменити:

$$n = 18$$
$$r = 11\,000$$
$$q = 1{,}05.$$

2. Дате су две странице делтоида

$$a = 5cm,$$
$$b = 16cm,$$

а угао међу њима је $\alpha = 120^0$. Делтоид ротира око осовине која пролази кроз једно његово теме, паралелно са већом дијагоналом.

Израчунати површину и запремину обртног тела.

3. У сегмент што га отсеца оса X на параболи

$$y = x^2 - 8x + 12$$

уписан је круг. Наћи:

a) једначину круга и однос његове површине према површини отсечка,

b) растојање пресечне тачке заједничких тангената од центра круга.

98*

1. Имамо два ваљка. Полупречник (x) базе првог ваљка једнак је висини другога, а полупречник (y) базе другога висини првога.

Треба израчунати за колико се разликују њихове површине, а за колико њихове запремине кад је збир површина 200π, а збир запремина 240π.

2. Око тачке на ординатној оси описан је круг који дира параболу $y^2 = 32x$ у тачки $M(8, +y)$. Поставити његову једначину и израчунати површину ограничену осом Y, луком параболе и круга.

3. Два места M и N на морској обали удаљена су једно од другог $25km$. Нека лађа плови право према удаљенијем месту M те је прешла пут $AB = 9km$. Из тачке A види се растојање MN под углом $\alpha = 59^0 5'$, а из тачке B под углом $\beta = 88^0 50'$.

Колико износи удаљеност лађе од места M?

99

1. Извесни капитал, уложен под сложен интерес, потростручи се за 20 година. За колико би се година потростручио кад би проценат био за 1 већи?

2. У елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ је уписан и око ње описан квадрат. У ком односу стоје њихове површине? — Шта се добија у специјалном случају $a = b$?

3. Угао између дијагонала правоугаоника чије су странице m и n дат је обрасцем

$$tg\varepsilon = \frac{2mn}{m^2 - n^2}.$$ — Извести тај образац.

100*

1. Позитивни корени једначина

$$5^{xy} + 2^{\frac{x}{y}} = 133,$$

$$5^{2xy} - \sqrt[y]{4^x} = 15\,561$$

претстављају први и шеснаести члан опадајућег аритметичког реда.

Колико чланова тога реда треба сабрати да се добије максимална сума и колика је она?

2. Хипербола је задана једном својом асимптотом $3x - 5y = 0$ и једном тангентом $x - y = 8$. Кроз додирну тачку тангенте пролази темена парабола. Израчунати угао под којим се секу те криве и наћи запремину тела које настаје када површина ограничена луком хиперболе и параболе ротира око апсцисне осе.

3. Мрежа усправне зарубљене пирамиде састоји се од два равнострана троугла чије су површине $B_1 = 25\sqrt{3}$ и $B_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ и од три трапеза који заједно имају површину $M = \frac{99}{4}\sqrt{7}$.

Колика је запремина пирамиде? Колики је нагибни угао бочне ивице према бази пирамиде и угао што га затвара бочна ивица с основном?

101

1. Суд облика полулопте ($r = 1dm$) напуњен је водом. Колико ће воде истећи ако се он нагне за 37^0?

2. Израчунати површину тетивног четвероугла чија темена леже у пресечним тачкама круга $K(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2})$ са координатним осама.

3. Ако су бројеви p, q, r три узастопна члана аритметичког реда, онда они задовољавају једначину

$$(2q + r)^2 = p^2 + 8qr.$$

(Диофант, око 300 г. после Хр.).

102*

1. У усправну купу (r, h) уписана је купа максималне запремине тако да јој врх лежи у центру базе задане купе. У простор изнад ове купе уписана је на исти начин друга максимална купа. И тако даље у бесконачност.

Израчунати збир запремина свих уписаних купа и наћи у ком односу стоји та сума према запремини задане купе.

2. Под којим се углом секу елипса

$$x^2 + 4y^2 = 100$$

и парабола

$$y^2 = \frac{8}{3} x?$$

Израчунати запремину тела које настаје када површина омеђена осом Y, луком елипсе и параболе ротира око осе X.

3. Два круга чији су полупречници $R = 18cm$ и $r = 6cm$ додирују се извана. На кругове се повуче једна заједничка вањска тангента. Колику површину затвара она с кружним луковима?

103*

1. Неко уплаћује 15 година, на почетку сваке године, 6000 динара да би на тај начин стекао право на годишњу ренту од 9875 динара која ће почети годину дана иза последњег улога. Колико ће година моћи да ужива ту ренту ако се рачуна 4% сложеног интереса?

2. Решити троугао коме је дата површина, збир двеју страница и угао међу њима.

$$P = 80\sqrt{3},$$
$$b + c = 42,$$
$$\alpha = 120^\circ.$$

3. Кроз ону тачку параболе $y^2 = 4x$ чија је апсциса два пута већа од ординате повучена је тангента, а кроз тачку чија је ордината два пута већа од апсцисе, нормала на параболу.

Одредити у ком односу стоје удаљености ових двеју правих од жиже параболе и наћи површину коју оне затварају са луком параболе.

104

1. Равнострана купа пресечена је једном равни паралелном са базом тако да је површина лопте уписане у отсечени део једнака омотачу настале зарубљене купе. У ком односу стоји омотач целе купе према омотачу отсечене купе?

2. Дат је бесконачан ред

$$\frac{1}{7^x + 1}, \quad \frac{1}{(7^x+1)^2}, \quad \frac{1}{(7^x+1)^3}, \quad - - - - - - -$$

Одредити x тако да сума реда буде 7.

3. Дужине тежишних линија у троуглу чије су странице a, b, c нађу се према обрасцима

$$=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},$$
$$t_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4},$$
$$t_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

Извести те обрасце тригонометријски.

105

1. У равнострани троугао странице a уписан је равнострани петоугаоник, тако да му једно теме пада у теме троугла, а остала четири на странице. Израчунати страницу петоугаоника и његове углове.

2. Како гласи једначина чији су корени реципрочне вредности логаритама корена једначине

$$x^2-100{,}1x+10=0?$$

3. Ротацијом елипсе (a, b) око велике осе $2a$ настаје тело чија је запремина

$$V=\frac{4ab^2\pi}{3}.$$

Извести тај образац.

106*

1. Усправни ваљак и усправна купа имају једнаке висине, једнаке површине и једнаке запремине.

Израчунати полупречнике x и y њихових база ако је дата висина $h=4$. — Одредити однос њихових омотача.

2. Пет реалних бројева чине геометријску прогресију. Њихова је сума 11, а продукт 1024.

Нађи те бројеве.

3. Дате су једначине страница четвероугла:

$$AB \equiv x-2y+7=0,$$
$$BC \equiv 3x+y+7=0,$$
$$CD \equiv x-3y-1=0,$$
$$DA \equiv 2x+y-16=0.$$

Израчунати његову површину, доказати да се око њега може описати круг и показати да центар круга лежи на једној дијагонали.

107

1. На колике је делове подељена површина елипсе (a, b) тетивом која је повучена нормално на велику осу у удаљености $\frac{a}{2}$ од центра елипсе?

2. У четвероуглу $ABCD$ дијагонала $AC = 15cm$. Странице AD и CD чине с њом један, а странице AB и BC други аритметички ред. Разлика другога реда три пута је већа од разлике првога, а обим четвероугла износи $48cm$.

Израчунати његову површину и угао чије је теме B.

3. Израз

$$\frac{tg\alpha + sin\alpha}{tg\alpha - sin\alpha}$$ преудесити за логаритмовање.

108

1. База пирамиде је троугао чије су странице $a = 21$, $b=20$, $c=13$, а бочне ивице стоје једна на другој нормално. Колика је површина и запремина те пирамиде? Показати да је висина пирамиде у заданом положају најмања.

2. На параболу $y^2 = 2px$ треба повући нормалу која сече осу X под углом од 45^0 и наћи величину сегмента што га она отсеца на параболи.

3. Ако коефицијенти a, b, c једначине

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

чине аритметички ред, онда једначина има само реалне корене.

Који су то корени?

109*

1. Основне ивице и висина усправне пирамиде којој је база правоугаоник јесу три узастопна члана геометријског реда. Запремина пирамиде је $576cm^3$, а површина њеног дијагоналног пресека $120cm^2$.

Израчунати површину пирамиде и разлику између углова под којим су бочне стране и бочне ивице нагнуте према бази.

2. Основица троугла је $a = 7cm$, припадна висина $h = 12cm$, а друге две странице се односе као $3:4$. Овај троугао претворити у равнокраки исте основице и наћи за колико се разликују њихови обими. — Показати да је крак равнокраког троугла једнак полупречнику круга описаног око датог троугла. — Извести конструктивно.

3. Задана је елипса

$$4x^2 + 9y^2 = 144$$

и конфокална равнострана хипербола.

Под којим се углом секу ове криве?

110*

1. У усправну правилну четверострану пирамиду основне ивице a и бочне ивице $\frac{3}{4}a$ уписана је коцка тако да њена горња база претставља један пресек пирамиде. У простор над првом коцком уписана је на исти начин друга, и тако даље у бесконачност.

Израчунати у ком односу стоји збир запремина свих уписаних коцака према запремини пирамиде.

2. У троуглу ABC угао $\beta = 60^\circ$, а страница $b = 13cm$. На страници a налази се тачка D тако да је $\overline{CD} = 10cm$ а $\overline{AD} = 7cm$.

Израчунати непознате странице и углове заданог троугла.

3. Из центра круга $x^2 + y^2 + 24 = 10x$ повучене су обе тангенте на централну елипсу која дира дати круг, а пролази кроз тачку $M(2\frac{2}{5},\ 2\frac{2}{5})$. Израчунати:

a) површину кружног исечка што га захватају тангенте,

b) запремину тела које настаје ротацијом површине ограничене тангентама и луком круга и елипсе око осе X.

111

1. $$\frac{tg(45^\circ + x) + tg(45^\circ - x)}{tg(45^\circ + x) - tg(45^\circ - x)} = 2.$$

Наћи x и извршити пробу.

2. Нова фабрика претставља вредност од 1000000 франака. Колико ће износити њена вредност после 3 године ако се сваке године отписује 5% њене моментане вредности?

3. Услов да права

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

буде тангента елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ гласи:}$$

$$\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}=1. \text{ Доказати.}$$

112*

1. Странице троугла чине аритметички ред. Производ полупречника круга описаног и уписаног у троугао износи 130, а косинус најмањег угла $\frac{3}{5}$.

Израчунати све поменуте елементе троугла.

2. За колико треба продужити полупречник r базе и висину датог равностраног ваљка ако се хоће да се његова површина попетеростручи?

a) Како се мења горњи резултат ако се претпостави да висина ваљка остаје иста?

b) Одредити однос запремина ова три ваљка.

3. Дате су линије

$$y^2 = x \text{ и}$$
$$y = \frac{1}{x^2}.$$

a) Поставити једначине њихових тангената у пресечној тачки и израчунати угао пресека.

b) Колика је површина омеђена њиховим луковима и осом X?

c) Израчунати запремину тела које настаје ротацијом површине под b) око осе X.

113

1. Последњи члан геометријског реда је 486, претпоследњи 162, а сума реда 728.

Колико чланова има ред?

2. У троугао што га затвара права

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}-1=0$$

са координатним осама треба уписати правоугаоник максималне површине тако да му једно теме лежи у координатном почетку. Израчунати његову површину и одредити координате његових темена.

3. Доказати овај идентитет:

$$\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma+\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha+\sin(\gamma-\alpha)\cos\beta=0,$$

114*

1. Који углови из првог квадранта задовољавају једначину

$$\sin 3\alpha-\cos 3\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^3,$$

и како гласи алгебарска једначина чији су корени једнаки тангенсима тих углова?

2. Димензије правоуглог паралелепипеда чине аритметички ред. Површина паралелепипеда је $94dm^2$, а дијагонала $5\sqrt{2}dm$. Колика је његова запремина?

3. Поставити једначину круга који пролази кроз обе жиже елипсе

$$25x^2+16y^2+150x+64y=111,$$

а површина му је једнака површини елипсе.

115

1. Полупречник круга уписаног у троугао износи 4 и он чини са страницама троугла четири узастопна члана аритметичког реда.

Израчунати површину троугла.

2. База усправне призме је правоугаоник састављен од три квадрата, а запремина призме износи $36cm^3$. Колика је њена дијагонала

a) ако је висина призме $1cm$,

b) у случају да је површина призме минимална?

3. Извести аналитичку формулу за површину четвероугла:

$$2P=x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_1-y_3).$$

116*

1. У тачкама A и B у којима права $y+2x-12=0$ сече параболу $y^2=4x$ повучене су тангенте које се секу у тачки C.

a) Израчунати површину ограничену тангентама и луком параболе.

b) Доказати да је троугао ABC правоугли и равнокраки.

c) Поставити једначину круга описаног око троугла ABC.

2. Површина усправне купе једнака је бројно њеној запремини, а омотач износи $\frac{5}{8}$ целокупне површине. Израчунати запремину купе. — У ком односу стоји та запремина према запремини лопте чије су површина и запремина такође бројно једнаке? Показати да је то лопта уписана у купу.

3. Капитал уложен под сложен интерес нарасте за m година на a динара, за n година на b динара. Колики је капитал и колики је проценат? Који се резултати добију у специјалном случају:

$$m=2$$
$$n=7$$
$$a=11025$$
$$b=14071?$$

117

1. Решити једначину

$$2.\left(\frac{3}{4}\right)^{sin^2 x}+\frac{7}{2}=5.\left(\frac{4}{3}\right)^{-cos^2 x}.$$

2. Постоји ли многоугаоник са 100 дијагонала?

3. Извести помоћу интегралног рачуна формулу за запремину зарубљене купе.

118*

1. Корени једначине

$$m^2(m^2-2x)=1-x^2$$

претстављају једну страницу и дијагоналу правоугаоника. Како гласи једначина чији корени претстављају обим и површину тога правоугаоника? — Одредити m тако да површина правоугаоника буде за 4 мања од обима.

2. Неко израчуна запремину зарубљене купе (R, r, h) приближно тако да купу замени са ваљком исте висине, а као полупречник базе ваљка узме

a) аритметичку,

b) геометријску средину полупречника база купе.

Колика је грешка у поједином случају?

Како се односе грешке под a) и под b)?

3. Круг чији центар лежи на апсцисној оси тангира параболу $y^2 = 2x$ у тачки $M(4, y)$. Како гласи његова једначина? Израчунати запремину тела које настаје када полумесечаста површина омеђена луком параболе и круга ротира око осе X.

119

1. Како гласи аритметички ред коме је n-ти члан једнак 0, а сума од n чланова $\frac{n-1}{2}$?

2. Око елипсе

$$9x^2 + 13y^2 = 117$$

описан је равнокраки трапез тако да му је основица паралелна са великом осом елипсе а угао на основици 60^0. Израчунати његову површину. — Како изгледа описани трапез минималне површине?

3. Извести тригонометријски образац за површину троугла ако су дати углови троугла и једна његова страница.

120

1. Око елипсе

$$x^2 + 3y^2 = 3b^2$$

описан је правоугли троугао тако да теме правога угла лежи на ординатној оси. У ком односу стоји његова површина према површини елипсе?

2. $$\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=2-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}},$$
$$x^4+y^4=1.$$ Решити.

3. Аритметичка средина двају позитивних реалних бројева већа је од њихове геометријске средине. Доказати. — Када је аритметичка средина једнака геометријској?

121

1. Између 2^n и 2^{2n} треба интерполирати $(n-1)$ чланова тако да се добије геометријски ред. Одредити суму тога реда, заједно с крајњим члановима. — Колику вредност мора имати n да сума реда износи 120?

2. У пресечним тачкама праве
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$
и елипсе
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)=1$$
повучене су тангенте. Показати да су оне паралелне с правом
$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

3. За сваки правоугли троугао важи једначина
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2},$$
где су a и b катете, а h хипотенузина висина. — Доказати.

122*

1. Дат је бесконачан низ кугала чији полупречници образују ред $r, \frac{r}{3}, \frac{r}{9}, \frac{r}{27}$, — — — — — —. Израчунати:

a) запремину оне кугле чија је површина једнака збиру површина свих заданих кугала и наћи однос у коме та запремина стоји према суми запремина датих кугала,

b) која кугла по реду има запремину отприлике $1 mm^3$ ако је полупречник највеће кугле $r=0{,}5 m$.

2. $M(4,\frac{9}{5})$ је крајња тачка параметра централне елипсе. Кроз ту тачку повучена је тангента, а из обе жиже елипсе

спуштене су на њу окомице. Израчунати површину насталог трапеза. Доказати да подножја окомица леже на кругу који је описан над великом осом елипсе.

3. Тангенси углова у троуглу односе се као 5 : 11 : 44. Како се односе његове странице? Колике су оне ако је полупречник круга описаног око троугла за $4\sqrt{3}$ већи од полупречника уписаног круга?

123

1. Решити систем:

$$x^{\log x} \cdot y^{\log y} = 100\,000,$$
$$1 - \log \frac{y}{x} = 0.$$

2. Кроз крајњу тачку параметра параболе $y^2 = 2px$ повучена је нормала. У ком односу дели лук параболе површину троугла што га нормала затвара са координатним осама?

3. Збир квадрата над дијагоналама паралелограма једнак је збиру квадрата над његовим страницама:

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. — Доказати.

124*

1. Решити систем једначина:

$$x\,(ax + by) = a\,(a^2 - y^2),$$
$$x\,(bx + ay) = b\,(b^2 - y^2).$$

2. База модела усправне тростране призме је равнокраки троугао. Постављена на базу призма има висину $15 cm$. Положен на мању бочну страну модел је висок $6 cm$, а ако се стави на већу бочну страну, висина му је $4\frac{8}{13} cm$.

Израчунати површину и запремину модела.

3. Нормала параболе $y^2 = 8x$, повучена у крајњој тачки параметра, тангира елипсу чији центар лежи у координатном почетку, и која је са датом параболом конфокална.

У ком односу дели додирна тачка на елипси дужину нормале?

125

1. Катете, хипотенуза и површина правоуглог троугла јесу четири узастопна члана аритметичког реда. Одредити те величине.

2. Како гласи једначина параболе $(y^2 = 2px)$ коју дира права $y = kx + n$, које су координате додирне тачке, и колика је дужина радија вектора те тачке?

3. Доказати да за углове троугла важи једначина:

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma.$$

126

1. решити једначину:

$$\sqrt[5]{(3-x)^2} = (x-3)^{\frac{4}{5}} - 12.$$

2. Ромб има сталну страницу (a) и променљив угао $(2x)$. Одредити овај последњи тако да збир дијагонала ромба буде максималан.

3. Ротацијом елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ око осе Y настаје тело чија је запремина

$$V = \frac{4a^2b\pi}{3}. \text{ — Извести.}$$

127*

1. Два угла у троуглу дата су једначинама

$$2^{tg\alpha - tg\beta} = 2\sqrt[8]{2},$$

$$4^{\frac{tg\alpha}{tg\beta}} = 32,$$

а полупречник описаног круга је $R = 14\frac{1}{6}$. Троугао се обрће око највеће странице. Израчунати површину и запремину добивеног ротационог тела. —

Задатак се може решити без употребе логаритамских таблица.

2. Из координатног почетка повучене су обе тангенте на круг $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$. Други круг конструисан

је тако да пролази кроз додирне тачке тангената и кроз координатни почетак. Треба поставити његову једначину и наћи угао под којим се кругови секу.

3. Решити једначину

$$ax^3 - (a^2 - a + 1)\,x\,(x + 1) + a = 0$$

и наћи вредност коју мора имати a да збир корена једначине буде минимум. — Како гласи у том случају дата једначина?

128*

1. У оштри угао (2α) што га затварају праве

$$2x - y - 1 = 0 \text{ и}$$
$$2x + 11y - 13 = 0$$

уписан је круг површине $P_1 = \frac{15}{16}\pi$. Њега додирује други мањи уписани круг, овога опет трећи, и тако даље у бесконачност. Израчунати збир површина свих кругова.

2. У лопту (R) уписан је ваљак чији је омотач једнак суми база, и ваљак максималног омотача. У ком односу стоје запремине ова три тела?

3. Линија

$$y = 2\int (x - 2)dx$$

пролази кроз тачку $M(6, 15)$. Који однос постоји између површине коју та линија затвара с осама X и Y и површине што је она затвара с осом X?

129*

1. Између два броја x и y ($x > y$) треба уметнути по један број тако да једанпут та три броја чине аритметички, а други пут геометријски ред. Интерполирани члан аритметичког реда треба да је за 6 већи од интерполираног члана геометријског реда и да се према њему односи као $5:3$.

Како гласе оба реда?

Колико чланова аритметичког реда треба сабрати да се добије сума једнака вредности његовог интерполираног члана?

2. Два пречника круга секу се под углом од 30^0. Ако се споје њихове крајње тачке тетивама, једна је тетива за $12\sqrt{2}$ већа од друге. Израчунати дужину тетива и наћи колики су делови на које већа тетива дели кружну површину.

3. Из тачке $A(-1, 4\frac{1}{5})$ повучене су обе тангенте на елипсу $9x^2 + 25y^2 = 225$, а кроз тачку $M(0, -3)$ положена је трећа тангента.

Израчунати површину тангентног троугла и наћи који део његове површине заузима елипса.

130

1. Задана су три бесконачна геометријска реда с истим количником, а и почетни члан првога реда једнак је количнику. Први чланови сва три реда чине опет три узастопна члана аритметичког реда чија је разлика такође једнака количнику.

Колика је сума сваког од заданих геометријских редова ако сума сва три реда износи 1?

2. Усправна купа висине $h = 12 cm$ расечена је паралелно са базом на два дела тако да доњи део има запремину $312\pi\, cm^3$, а горњи $12\pi\, cm^3$.

Израчунати омотач сваког дела.

3. Ако се темена једног троугла налазе у половиштима страница другога, онда та два троугла имају заједничко тежиште. — Доказати аналитички.

131

1. Три угла чине аритметички ред са диференцијом $60°$, а збир њихових синуса је 2. Који су то углови?

2. Око лопте полупречника r описати концентричну лопту тако да тангентна раван положена на мању лопту отсеца од веће лопте калоту једнаку површини дате лопте.

3. Заједничка тетива парабола

$$y^2 = 2px \text{ и}$$
$$x^2 = 2py$$

једнака је дијагонали квадрата чија је страница параметар параболе, а њихова заједничка површина једнака је $\frac{1}{3}$ површине тога квадрата. — Доказати.

132

1. Страница усправне купе нагнута је према бази под датим углом α. За колико (x) би тај угао требало повећати па да се, при истој бази, запремина купе подвостручи? — Колико износи повећање ако је дата купа равнострана?

2. У којој тачки тангира права $3x + 4y = 15$ централни круг?

3. Извести правила о коренима квадратне једначине $x^2 + ax + b = 0$:

$$x_1 + x_2 = -a,$$
$$x_1 \, x_2 = b.$$

133

1. Правоугли троугао чији углови α и β задовољавају једначину

$$sin\alpha + cos\beta = 1$$

ротира, најпре око мање катете затим око хипотенузе. У ком односу стоје запремине насталих обртних тела?

2. За које време треба одложити извесну годишњу ренту да се њена вредност, уз исти број оброка, удвостручи?

3. Доказати да је продукт нормала спуштених из жижа елипсе (a, b) на макоју елипсину тангенту сталан и једнак квадрату мале полуосе:

$$d_1 \, . \, d_2 = b^2.$$

134

1. Применом бесконачне геометријске прогресије одредити вредност количника:

$$\frac{0{,}6\dot{3} - 0{,}\dot{6}\dot{3}}{0{,}63}.$$

2. Којом брзином (километара на час) ротира Београд око Земљине осе, и колика је дужина једног степена на његовом упореднику? — Дата је географска ширина Београда $\varphi = 44^\circ 47' 57''$ и полупречник земље $R = 6370 km$.

3. Ако две праве затварају угао од 45^0, њихови коефицијенти смера k_1 и k_2 задовољавају једначину

$$k_1 = \frac{1 + k_2}{1 - k_2}. \text{ — Доказати.}$$

135

1 За колико ће се година извесни капитал потростручити ако је уложен уз $5^0/_0$:

a) под прост интерес,

b) под сложен интерес, уз годишње капиталисање,

c) под сложен интерес, уз семестрално капиталисање?

2. Кроз жижу параболе $y^2 = 8x$ повучена је паралелно са правом $8x - 6y = 1$ тетива, и над њом је конструисан полукруг. Израчунати полумесечасту површину ограничену луковима обеју кривих.

3. Извести тригонометријску формулу за површину троугла

$$P = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

136*

1. Око темена параболе $y^2 = 8x$ описан је круг ($r = 3$), а у њиховим пресечним тачкама повучене су тангенте на обе криве, до пресека с осом X. Цео се систем заврти око апсцисне осе при чему настане пет ротационих тела са заједничком базом.

Израчунати њихове запремине и изразити их као функције запремине K лопте чији је полупречник $\rho = 1$.

2. Од три једнаке даске ширине a треба направити жлеб у који ће моћи да стане што више воде. Одредити горњу ширину жлеба и нагибни угао бочних дасака према основној.

3. Дата су два аритметичка реда. Сума првих чланова оба реда је 0, диференција других чланова је -2, продукт трећих 3, а квоцијент четвртих $\frac{1}{2}$. — Који су то редови?

137*

1. Полупречник базе, висина и страница усправне купе јесу три узастопна члана аритметичког реда. Омотач купе је $375\pi\, cm^2$, а површина осног пресека $300 cm^2$.

Израчунати запремину купе и централни угао оног кружног исечка чијим је савијањем настао омотач купе.

2. Суме од 300 000 динара и 200 000 динара дате су под сложен интерес. На крају 11 године вредност прве суме прелази вредност друге за 221 105 динара, а њихова укупна вредност износи 805 093 динара.

Уз колики је проценат уложена свака сума?

3. Под којим се углом секу елипсе

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1,$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1$$

и како гласе једначине њихових заједничких тангената?

138*

1. Четири броја чине аритметички ред. Збир кубова најмањег и највећег броја је 2198, а збир кубова средња два 854. Који су то бројеви? — Претпоставимо да ред опада. Колико чланова треба сабрати да збир буде једнак кубу броја сумираних чланова?

Упутство: — Чланови реда: $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$.

2. Дате су две тростране пирамиде подударних база, основних ивица $a=15cm$, $b=13cm$, $c=14cm$. Подножје висине прве пирамиде пада у центар круга описаног око базе, а подножје висине друге пирамиде у центар уписаног круга. Позната је бочна ивица $d=21\frac{1}{8}cm$ усправне пирамиде и омотач $M=105cm^2$ друге пирамиде.

Треба израчунати разлику запремина ових двају тела.

3. Из центра круга $x^2+y^2-10x+9=0$ повучене су обе тангенте на елипсу $9x^2+16y^2=144$ и, обрнуто, из центра елипсе обе тангенте на круг. Поставити њихове једначине и наћи површину четвероугла што га оне затварају.

139

1. Решити:

$$2^{2x}+2^{x+3y}-2^{6y}=20,$$

$$2^{2x}-2^{x+3y}+2^{6y}=12.$$

2. Колики је нумерички ексцентрицитет оних елипса чији је линеарни ексцентрицитет аритметичка средина полуоса

3. Доказати да је површина сваког четвероугла једнака половини производа његових дијагонала помноженим са синусом захваћеног угла.

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin\varphi. —$$

Специјални случај ако је $\varphi = 90^0$.

140*

1. Коефицијенти a, b, c једначине

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

чине растући геометријски ред, тако да је

$$a + b + c = 14$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 84.$$

Наћи корене те једначине.

2. Око теменâ равнокраког троугла чија је база $a = 6cm$, а супротни угао $\alpha = 120^0$ описана су три круга који се међусобно додирују извана.

Треба израчунати обим и површину лика ограниченог кружним луковима.

3. У елипсу која пролази кроз тачке

$$A(3, \tfrac{16}{5}) \text{ и } B(-4, -\tfrac{12}{5})$$

уписан је правоугаоник тако да му је једна страница параметар елипсе.

Наћи разлику запремина тела која постају обртањем елипсе и правоугаоника око апсцисне осе.

141*

1. Корени једначине

$$\log\sqrt[3]{30 - x} - 1 = -(\log 2 + \tfrac{1}{3}\log x)$$

претстављају број чланова (n) и суму (S_n) аритметичког реда($n < S_n$).

Колика мора бити диференција тога реда да збир квадрата прва три члана буде минималан?

2. Из центра круга

$$x(x+4)+y^2+3=0$$

повучене су обе тангенте на параболу $y^2=24x$.

Израчунати: *a*) површину ограничену тангентама и луковима круга и параболе, *b*) запремину тела које настаје ротацијом те површине око осе X.

3. У полулопти стоји тространа пирамида тако да јој врх лежи у темену полулопте, а база у основном кругу. Основне ивице пирамиде јесу $a=14cm$, $b=30cm$, $c=40cm$. Одредити:

a) запремину пирамиде

b) дужину бочних ивица и највећи угао између њих

c) омотач пирамиде.

142

1. Наћи корене једначине

$$2x\sqrt{1-x^2}=sin\alpha$$

и свести их на најпростији облик.

2. Мања паралелна страница, крак и већа паралелна страница равнокраког трапеза чине аритметички ред. Обим трапеза износи $40cm$, а његова дијагонала $2\sqrt{41}\,cm$. Колика му је површина?

У тај трапез се може уписати круг. Зашто?

3. Дефиниције коничних пресека.

143

1. База купе чија је највећа страница $S=15cm$, а најмања $s=13cm$ је елипса. Врх купе налази се над центром елипсе и удаљен је од њене жиже $10\sqrt{2}cm$. — Израчунати запремину купе.

2. Решити једначину:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{x-1}-\left(\frac{b}{a}\right)^{x-2}=\left(\frac{b}{a}\right)^{x-1}-\left(\frac{a}{b}\right)^{x}.$$

3. Извести помоћу интегралног рачуна образац за запремину лопте.

144

1. Решити једначину:

$$m^{tg^2 x} + m^{1 - tg^2 x} = m + 1.$$

2. Неко има право на годишњу ренту од 10 000 динара кроз 14 година. Он жели да повећа износ ренте на тај начин што је 7 година уопште неће уживати, а после тога ће примити само 7 оброка.

Колико износи повишена рента? ($p = 5\%$).

3, Доказати да додирна тачка хиперболине тангенте располавља онај део тангенте који лежи између асимптота.

145*

1. Неко уложи суму од a динара, уз интересни фактор q. Крајем сваке године одузима r динара. За колико ће се година уложени капитал подвостручити? Капиталисање годишње. Решити најпре са општим бројевима, а онда узети специјално:

$$a = 70000$$
$$q = 1{,}045$$
$$r = 1000$$

2. Странице карактеристичног осног пресека косе купе чине аритметички ред у коме је пречник базе средњи члан. Диференција реда $d = 1$.

Израчунати запремину купе кад се зна да је њена оса једнака најмањој страници и одредити угао између осе и висине.

3. Четири тангенте хиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$, повучене у крајњим тачкама параметра, образују ромб. Израчунати његов обим и површину и поставити једначину уписаног круга.

146*

1. Површина усправне квадратне пирамиде је $96\,cm^2$, а запремина $48\,cm^3$.

Израчунати њен омотач и угао између висине и бочне стране.

2. У троугао чије су странице

$$a = 35\ cm,$$
$$b = 75\ cm,$$
$$c = 1\ m$$

уписан је круг, а у круг троугао који је датом троуглу сличан.

Израчунати за колико су странице уписаног троугла мање од одговарајућих страница датог троугла, и колико је међусобно растојање највећих страница оба троугла ако се претпостави да су оне паралелне.

3. Дате су једначине двеју тангената централне елипсе:

$$3x + 10y = 25 \text{ и}$$
$$8x + 15y = 50.$$

Како гласе једначине припадних нормала?

147*

1. Корени једначина

$$3^{2x} - 4^{2y} = 65,$$
$$3^{x+2} - 2^{2y+2} = 65$$

претстављају суме двају бесконачних геометријских редова који имају заједнички количник $q = \frac{y}{x}$.

Како гласе ти редови?

За колико би требало повећати количник у реду мањег збира да му, уз непромењени почетни члан, збир постане једнак збиру другог заданог реда?

2. Наћи заједничке тачке линија

$$xy = 4 \text{ и}$$
$$x^2 + y^2 + 4x + 4y = 24$$

и угао под којим се оне секу. Израчунати површину праволинијске слике чија су темена у заједничким тачкама кривих.

3. Око лопте датог полупречника r описан је усправни ваљак и усправна купа. Колики мора бити угао при врху осног пресека купе да запремина ваљка буде аритметичка средина запремина лопте и купе?

Показати да је у том случају и површина ваљка аритметичка средина површина других двају тела.

148*

1. Дата је једначина

$$\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 25 = 0.$$

Треба поставити једначину чији су корени аритметичка и геометријска средина корена дате једначине.

2. Кроз тачку $A(5,2)$ повући праву тако да на параболи $y^2 = 4x$ отсеца сегмент минималне површине.

3. Израчунати површину, обим и углове трапеза код кога је:

$$\begin{aligned} a &= 71\ cm, \\ c &= 29\ cm, \qquad (a \parallel c) \\ d &= 20\ cm, \\ \beta - \alpha + \gamma &= 126^0\,52'\,11''. \end{aligned}$$

149*

1. Странице троугла јесу три узастопна парна броја, а површииа му је 24. Над средњом страницом треба у троугао уписати правоугаоник максималне површине и наћи његов обим.

У ком односу стоји површина круга описаног око правоугаоника према површини круга описаног око троугла?

2. Треба израчунати површину појаса на лопти ($R = 5\,dm$) између два паралелна круга чија угловна растојања („географске ширине") φ_1 и φ_2 од паралелног главног круга задовољавају једначину

$$3\,sin^2\varphi + 4\,cos^2\varphi = 3{,}5\,sin\,2\varphi.$$

3. Задане су две тачке $A(2,2)$ и $B(5,6)$. Одредити координате тачака C и D тако да $ABCD$ буде квадрат и поставити једначину уписаног круга. — Два решења.

150*

1. Парабола ($y^2 = 2px$) има заједничку жижу са хиперболом $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Поставити једначине њихових заједничких тангената и наћи површину трапеза чија су темена додирне тачке тангената.

2. Имамо две усправне правилне пирамиде подударних база. Нагибни угао бочне стране према бази код једне пирамиде два пута је већи него код друге. У ком односу стоје њихове запремине? Колики морају бити поменути углови да би тај однос био 3 : 1? За колико се, у последњем случају, разликују њихове запремине ако су им базе троуглови ивице $a = 36 cm$?

3. Дат је квадрат странице $a = 12 cm$. Све његове странице разделе се редом у односу $1 : x$, и добивене тачке споје, те се тако добије други квадрат. Странице овог квадрата поделе се на исти начин те се опет добију четири темена трећег квадрата. И тако даље у бесконачност.

а) Одредити x тако да сума површина *свих* квадрата износи $2\frac{1}{24}$ површине датог квадрата.

b) Одредити x тако да сума површина свих квадрата буде минимална и наћи ту суму.

c) Колика је сума обима свих квадрата ако је $x = \frac{5}{12}$?

151

1. Који оштри углови задовољавају једначину

$24 - 10 tg x = 7 sin 2x (1 + cos^2 x + cos^4 x + \ldots\ldots)$?

2. Одредити радије векторе оне тачке на хиперболи $8x^2 - y^2 = 8$ која је најближа тачки $M(27,0)$.

3. Када се на два круга који се додирују споља повуче заједничка тангента, дужина између додирних тачака је геометријска средина пречника кругова. — Доказати.

152

1. Наћи растојање тачака $A(sin\alpha, cos\alpha)$ и $B(sin\beta, cos\beta)$. Резултат свести на облик подесан за логаритмовање. — Шта се добија у специјалном случају $\alpha = 80^0$, $\beta = 20^0$?

2. Решити једначину:

$\frac{1}{4}\sqrt{6.5^{x+}} - 5 = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} + \ldots\ldots in\ inf.$

3. Доказати да је збир катета правоуглог троугла једнак збиру пречника уписаног и описаног круга.

153

1. Израчунати:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx.$$

2. Троугао чија су темена

$$A(-3, 1)$$
$$B(5, 7)$$
$$C(2, 3)$$

ротира око највеће странице. Колика је запремина обртног тела?

3. Логаритамски системи.

154

1. $\sin 2x = \frac{1}{2}\sqrt{4-y^3},$

$\sin x + \cos x = \sqrt{1 + \frac{y}{2}\sqrt{3y}}.$ — Решити.

2. У кружни квадрант полупречника r уписан круг. Наћи површину онога круга чији је полупречник једнак збиру полупречника квадранта и полупречника уписаног круга.

3. Површина произвољног отсечка параболе $y^2 = 2px$ нађе се према обрасцу:

$$P = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12p}.$$

Који облик добија овај израз ако се узме да је сегмент отсечен правом која стоји нормално на оси X?

155*

1. Пред сочивом чија је жижна даљина $f = 30cm$ стоји предмет. Ако се он одмакне од сочива за $15cm$, његова се слика, с друге стране сочива, примакне за $5cm$.

Одредити првобитну удаљеност предмета и слике од сочива.

Упутство. Формула за сочиво гласи:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

где су a и b растојања предмета и његове слике од сочива

2. Израчунати запремину косог ваљка чија је база елипса, страница једнака великој оси елипсе, а нагибни угао странице према бази $\alpha = 38^0\,40'\,57''$. Осе елипсе $(2a, 2b)$ дате су паром позитивних корена једначине

$$a^b = 16,$$
$$\sqrt[b]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{2}.$$

3. Темена троугла јесу: $A(0,14)$, $B(11\frac{1}{5}, -2\frac{4}{5})$, $C(-8,2)$.

Како гласи једначина круга који тангира странице AB и AC, а центар му лежи на страници BC?

156

1. Под којим се углом секу линије

$$y = tgx \quad \text{и}$$
$$y = cotgx\,?$$

2. Две дрвене лопте имају полупречнике $R = 5dm$, $r = 3dm$, а растојање њихових средишта је $c = 1{,}2m$.

На којој даљини од мање лопте треба ставити на централној линији светлосни извор па да већа лопта буде управо сва у сени?

Колико износи осветљена површина мање лопте?

3. Доказати идентитет:

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

(Лајбниц).

157

1. У зарубљеној купи горња база је 5 пута мања од доње, а доња 8 пута мања од омотача.

Колики је нагибни угао бочне стране према доњој бази?

2. Наћи корене једначине:

$$logx - (log\sqrt[6]{x})^{-1} = 1$$

ако се као логаритамска база узме:

a) 10

b) $\frac{1}{2}$.

3. Два темена троугла леже у жижама елипсе (a, b), а треће се теме креће по периферији елипсе.

Доказати да се тежишта насталих троуглова налазе такође на елипси и одредити њене осе.

158

1. Под којим се углом секу линије:

$$log\left(\frac{x}{6}+\frac{y}{5}\right)+log\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{5}\right)=0 \text{ и}$$

$$\sqrt[y]{10^{y-1}}=\sqrt[2x]{100^{x-2}} \text{ ?}$$

2. Две кугле чији се полупречници разликују за 1 *cm* котрљају се низ стрми пут дуг 38,72*m*. Једна кугла изврши 11 обртаја мање него друга. За колико се разликују њихове површине? — ($\pi=\frac{22}{7}$).

3. Површину правилног шестоугаоника изразити као функцију његове краће дијагонале d.

159*

1. Кроз 10 година, почетком сваке године, улаже се 1700 динара. Колико је потраживање на крају десете године ако се рачуна 4% уз:

a) прост интерес,

b) сложен интерес?

2. Зарубљена квадратна пирамида стоји на хоризонталној равни. Њена висина је 6*cm*, разлика база 5*cm*^{2}, а запремина 38*cm*^{3}.

За колики угао би се она морала окренути око основне ивице па да јој једна бочна страна дође у вертикални положај?

3. Из жиже хиперболе $H(0,0,4,3)$ спуштена је окомица на асимптоту. Израчунати:

a) површину троугла ограниченог окомицом, асимптотом и X-осом,

b) однос запремина тела која настају ротацијом тога троугла прво око осе X, затим око осе Y.

160

1. Дата су два броја a и b. За колико (x) треба један од њих (a) смањити и други повећати да се добије максимални производ? — За колико је добивени производ већи од производа датих бројева?

2. Обим кружног исечка је $O = 16cm$, а његова површина $P = 15cm^2$.

Израчунати централни угао исечка.

3. Ако се на параболу $y^2 = 2px$ повуче тангента у крајњој тачки параметра, њену дужину располавља оса Y. — Доказати.

161*

1. Претставити графички функцију

$$y = -x^4 + 10x^2 - 9$$

и наћи површине отсечака што их та линија затвара с осом X.

2. Око лопте (r) описан је равнострани ваљак и равнострана купа. Површине ова три тела стоје у истом односу као њихове запремине. Који је то однос? — Показати да површине, а тако исто и запремине, чине геометријски ред.

3. У троуглу дата је једна страница ($c = 16$), припадна висина $h_c = \frac{3\sqrt{15}}{2}$ и припадна тежишна линија $(t_c = 2\sqrt{10})$. Одредити остале странице и углове троугла, као и површину кружног прстена што га образују његов описани и уписани круг.

Задатак решити конструктивно и рачунски.

162

1. У лоптин отсечак висине $h = \frac{3}{4}r$ треба уписати ваљак највеће запремине и наћи у ком односу она стоји према запремини самог отсечка.

2. Биљар има облик правоугаоника, а димензије су му $AB = 1{,}2m$ и $BC = 1{,}8m$. Уз ивицу AB, на њеној средини, лежи лопта. Под којим углом треба она да удари о ивицу BC дн би после одбијања погодила лопту која лежи у углу D? У коју тачку на ивици BC треба гађати?

3. Ако су a и b катете, c хипотенуза правоуглог троугла, полупречник уписаног круга је

$$r = \frac{a + b - c}{2}. \text{ — Доказати.}$$

Решења

1

1. Деобом једначине са x^4 добија се:

$\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)^4 - 26\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right) + 25 = 0$. Ставимо ли $\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)^2 = u$, добијамо: $u_1 = 25, u_2 = 1$. Резултати су: $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15}$; $x_{3,4} = -1$; $x_{5,6} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_{7,8} = 1$.

2. Тражена тачка на параболи је додирна тачка тангенте паралелне с датом правом. A (8, 12).

Решењем једначина $y = \frac{3}{4}x + 11$ и $y - 12 = -\frac{4}{3}(x-8)$ добија се B $\left(\frac{28}{5}, \frac{76}{5}\right)$. Растојање $AB = 4$.

3. Код купе је $r = 0$, па имамо $V = \frac{R^2\pi h}{3}$. Код ваљка је $r = R$, па добијамо $V = R^2\pi h$.

2

1. $y' = \frac{(x^2+2x-3)(2x-2)-(x^2-2x+3)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} = 0$, $4x^2 - 12x = 0$, одатле: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Тражена једначина гласи: $y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$.

2. Висина једног дела је $\frac{R}{2}$, а другог $\frac{3R}{2}$. Помоћу обрасца за запремину лоптиног отсечка $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ добија се:

$$V_1 : V_2 = 5 : 27.$$

3. Из $\sqrt{a^2 - b^2} = b$ следује: $a^2 = 2b^2$. Према томе је параметар $2p = \frac{2b^2}{a} = a$, дакле једнак великој полуоси.

3*

1. Одузимањем једначина добија се $x_1 + x_2 = 1$; $x_1 x_2 = a - 1$. Тражена једначина гласи: $x^2 - x + a - 1 = 0$. Њени су корени $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4a}}{2}$. Из $5 - 4a = 0$ следује $a = \frac{5}{4}$.

2. $Vk = \frac{y^2\pi(9 - x)}{3}$; $y^2 = 8x$. Дакле је $f(x) = x(9 - x)$;

$f'(x) = 9 - 2x = 0$, $x = \frac{9}{2}$. $N(\frac{9}{2}, \pm 6)$. — $Vk = 54\pi$.

$$Vp = \pi \int_0^{\frac{9}{2}} 8x dx = 81\pi.$$

$$Vk : Vp = 2 : 3.$$

3. $cotg\alpha = \frac{x + 5}{H}$, где је $x = Hcotg\beta$.

$$H = \frac{5}{cotg\alpha - cotg\beta} = \frac{5 sin\alpha\, sin\beta}{sin(\beta - \alpha)} = 1{,}5 km.$$

4

1. $aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} + 1$. Због $a = 1$ добија се:
$q^n - 2q^{n-1} = q - 2$, $q^{n-1}(q-2) = q - 2$. Дакле: $q - 2 = 0$, $q = 2$.
Ред гласи: 1, 2, 4, 8, 16, ...

2. Из $\frac{(n - 2)\,180}{n} = 135$ следује $n = 8$.

$$P = 8 . \frac{r^2}{2} sin\, 45^0 = 2\sqrt{2}.$$

3. Из једначина

$$\frac{a^2}{x_1} = \frac{b^2}{y_1}, \quad b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$

добија се: $x_1^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}$, $y_1^2 = \frac{b^4}{a^2 + b^2}$. Према томе:

$x_1^2 - y_1^2 = a^2 - b^2 = e^2$.

5*

1. Када се једначина помножи са $mnx(m+n+x)$, уреди, затим скрати са $m+n$, добије се:

$x^2+(m+n)x+mn=0$, одакле: $x_1=-m$, $x_2=-n$.

Производ корена је $mn=\frac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\frac{cotg^2\alpha-1}{cotg\alpha}=$

$=\frac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\frac{tg\alpha(1-tg^2\alpha)}{tg^2\alpha}=1.$

2. $y^2=36x$. Помоћу услова за тангенту параболе ($p=2kn$) добија се $n=12$. Једначина тангенте гласи: $y=\frac{3}{4}x+12$. Из $\frac{(y_1-y_2)^3}{12p}=64$ следује: $y_1-y_2=24$. Решењем једначина: $y=\frac{3}{4}x+n_1$, $y^2=36x$ имамо: $y_1=24+\sqrt{576-48n_1}$, $y_2=24-\sqrt{576-48n_1}$. Заменом у: $y_1-y_2=24$ добија се: $n_1=9$. Једначина помакнуте праве гласи: $3x-4y+36=0$, а растојање правих је $d=\frac{12}{5}$.

3. Висина призме нека је x, висина пирамиде y. Из једнакости запремина следује $y=3x$, а из једнакости површина:

$2a^2+4ax=a^2+2ah$, где је $h=\sqrt{y^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{9x^2+\frac{a^2}{4}}$.

Добија се: $20x^2-8ax=0$.

Дакле: $x=\frac{2a}{5}, y=\frac{6a}{5}; h=\frac{13a}{10}$.

6

1. $S_1=\frac{1}{1-sin^2\alpha}$; $S_2=\frac{sin\alpha}{1-sin^2\alpha}$.

Из $\frac{1}{1+sin\alpha}=\frac{2}{3}$ следује: $sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=30^0\ (150^0)$. Сума целог реда је $S_1+S_2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$.

2. Из једначина $\sqrt{4x_1^2+y_1^2}=\frac{2p}{3}$ и $y_1^2=2px_1$ добију се координате додирне тачке: $\frac{p}{6}, \frac{p\sqrt{3}}{3}$ (I квадрант).

Једначина нормале гласи: $6x + 6y\sqrt{3} - 7p = 0$, а тражена површина је $P = \frac{17p^2\sqrt{3}}{72}$.

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a)$

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

7

1. $\int_1^9 \frac{(x+A)(A\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^9 \frac{Ax\sqrt{x} + A^2\sqrt{x} - x - A}{\sqrt{x}}\,dx =$

$$\int_1^9 \left(Ax + A^2 - x^{\frac{1}{2}} - Ax^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \Big/_1^9 \frac{Ax^2}{2} + A^2x - \frac{2x\sqrt{x}}{3} - 2A\sqrt{x}.$$

Из једначине $A^2 + \frac{9}{2}A - 13 = 0$ имамо: $A_1 = 2$, $A_2 = -\frac{13}{2}$.

2. Из $\frac{s\pi.\,130}{180} = 2r\pi$ добијамо $r = \frac{13s}{36}$.

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s} = \frac{13}{36};\ \beta = 42^0\ 20'\ 11.''$$

3. $2(ab + ac + bc) = abc$. Дата релација добија се дељењем са abc.

8

1. Најближа пресечна тачка датих кривих је $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, а коефицијенти смера тангената у тој тачки: $y'_1 = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'_2 = -\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$tg\varphi = 2\sqrt{2},\ \varphi = 70^0\ 31'\ 43.''$$

2. $x : y : z = 3 : 4 : 5$. Ставимо ли: $x = 3k$, $y = 4k$, $z = 5k$ и заменимо у једначину $4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 200\pi$, добијамо $k = 1$.

$R = 6$; $P = 144\pi$.

3. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\,x_2}=-\frac{a}{b};\ \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{b}\cdot$ Једначина гласи: $x^2+\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=0$ или: $bx^2+ax+1=0$.

9*

1. $P=absin\alpha$. По синусној теореми је $a:r=sin(\alpha-x):sin\alpha$, одатле : $a=\frac{r}{sin\alpha}sin(\alpha-x)$;

$b:r=sinx:sin\alpha$, одатле: $b=\frac{r}{sin\alpha}sinx$. Површина је

$P=\frac{r^2}{sin\alpha}\cdot sinx\,sin(\alpha-x)$, $f(x)=sinx\,sin(\alpha-x)$; $f'(x)=$ $=sin(\alpha-x)\,cosx-cos(\alpha-x)\,sinx=0$, одакле $x=\frac{\alpha}{2}\cdot$ Површина је дакле $P=\frac{r^2}{2}tg\frac{\alpha}{2}\cdot$ Паралелограм је ромб јер је $a=b=\frac{r}{2cos\frac{\alpha}{2}}\cdot$ Обим је $O=\frac{2r}{cos\frac{\alpha}{2}}\cdot$ — Ако је $\alpha=90^0$, добија се: $P=\frac{r^2}{2}$, $a=\frac{r\sqrt{2}}{2}$, $O=2r\sqrt{2}$.

2. Полупречник базе нека је x, страница y. Добијамо једначине: $x^2+xy=24$, $x^2\sqrt{y^2-x^2}=36$. Заменом $y=\frac{24-x^2}{x}$ из прве једначине у другу добија се биквадратна једначина. Две купе: $x_1=3$, $x_2=\sqrt{3}$; $y_1=5$, $y_2=7\sqrt{3}$; $h_1=4$, $h_2=12$; $M_1=15\pi$, $M_2=21\pi$.

3. $a^2-b^2=75$, а помоћу услова за тангенту елипсе $(a^2k^2+b^2=n^2)$ добијамо: $\frac{9}{64}a^2+b^2=\frac{625}{16}$, одакле $a=10$, $b=5$. Једначина елипсе је $x^2+4y^2=100$, а додирна тачка тангенте $D\,(6,4)$. Једначина круга гласи: $(x-6)^2+(y-4)^2=50$. Његова површина (50π) *једнака* је површини елипсе.

10*

1. Из једначина: $R^2+Rr+r^2=133$, $R^2+r^2=97$ добија се једноставнији систем: $Rr=36$, $R^2+r^2=97$, а одатле $R=9$, $r=4$.

a) $M = 169\pi$

b) У купу се може уписати лопта јер је $2R + 2r = 2s$ (правило о страницама тангентног четвероугла).

$P_1 = 266\pi$; $P_2 = 144\pi$; $P_1 - P_2 = 122\pi$.

2. $A(2, -2)$, $B(6, 0)$.

Теме D се налази решењем једначине круга са једначином пречника $BD: y = -\frac{3}{4}(x - 6)$. $D(-2, 6)$.

Координате темена C нађу се решењем једначине круга са једначином праве која пролази кроз A нормално на поменути пречник: $y = \frac{4}{3}x - \frac{14}{3}$. $C(\frac{34}{5}, \frac{22}{5})$.

$$P = \overline{AB} \,.\, \overline{AD} = 40.$$

3. Из једначине $\frac{ab\sin\gamma}{2} + 29 = \frac{(a+4)(b+4)\sin\gamma}{2}$ имамо: $\sin\gamma = \frac{1}{2}$; $\gamma = 30^0$ или 150^0. Ако је $\gamma = 30^0$, трећа је страница $c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = 9{,}3$ cm; ако је $\gamma = 150^0$, $c_2 = \sqrt{337 + 144\sqrt{3}} = 24{,}2$ cm.

По синусној теореми добија се: $\alpha_1 = 28^0 56' 18''$, $\alpha_2 = 10^0 43'$; $\beta_1 = 121^0 3' 42''$, $\beta_2 = 19^0 17'$.

11

1. Из једначина: $a + b + c = 4$, $a - b + c = -14$, $c = 1$ добија се: $a = -6$, $b = 9$. Једначина криве гласи: $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Коефицијент смера тангенте у тачки P_4 $(2, 3)$ је $y' = 3x^2 - 12x + 9 = -3$, а једначина тангенте гласи: $y = -3x + 9$.

2. $l = \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{\pi}{10}$, јер је $\alpha = 18^0$. Страница $a = 2\sin 9^0$; $l - a = 0{,}31416 - 0{,}31286 = 0{,}0013$.

3. Купа настаје ротацијом праве $y = kx$ око осе X, у границама од 0 до h.

$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = k^2\pi\int_0^h x^2 dx = k^2\pi.\frac{h}{3}$. Из $r = kh$ добија се $k = \frac{r}{h}$, па је $V = \frac{r^2\pi h}{3}$.

12

1. Делогаритмовањем добија се

$$\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)^2 = 100; \quad x^2 - \frac{9}{4} = \pm 10.$$

$x_{1\,2} = \pm \frac{7}{2}$. Друга два корена су имагинарна.

2. а) $ab\pi - r^2\pi = r^2\pi$, $r^2 = \frac{ab}{2} = 36$, а једначина круга гласи: $x^2 + y^2 = 36$

б) $R^2\pi - ab\pi = ab\pi$, $R^2 = 2ab = 144$, а једначина круга гласи $x^2 + y^2 = 144$.

3. Ставимо ли $sin\alpha + cos\alpha = a$, онда квадрирањем добијамо: $a^2 = 1 + sin2\alpha$. Како је $0 < 2\alpha < 180^0$, то је $sin2\alpha$ веће од 0, а износи максимално 1 (ако је $2\alpha = 90^0$). Према томе: најмања вредност од a^2 прелази 1, а највећа износи 2.

13*

1. Полупречник најмањег круга је r, а највећег $r + 6d$. Из једначина $2\pi(2r + 6d) = 44\pi$ и $(r + 6d)^2\pi - r^2\pi = 396\pi$ добија се: $d = 3$, $r = 2$. Полупречници су: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

$$2x\pi = 154\pi, \; x = 77; \; P = x^2\pi = 5929\pi.$$

2. Сменом $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$ добија се из дате једначине $cos\alpha = \frac{1}{3}$ (друга је вредност неупотребива). Како је $2R + 2\rho = 2s$ (тангентни четвероугао), то је $s = R + \rho$. А из $\frac{R - \rho}{R + \rho} = cos\alpha = \frac{1}{3}$ добија се $R = 2\rho$. По Питагорином правилу је $4r^2 = s^2 - (R - \rho)^2 = 4R\rho = 8\rho^2$. Дакле $\rho = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. $R = r\sqrt{2}$. Запремина купе $Vk = \frac{7r^3\pi}{3}$.

$$Vl : Vk = 4 : 7$$

$$Pk = \pi[R^2 + \rho^2 + s(R + \rho)] = 7r^2\pi$$

$$Pl : Pk = 4 : 7$$

3. Једначина тангенте је $y = x + 5$. Помоћу услова за тангенту елипсе $(a^2k^2 + b^2 = n^2)$ и датог ексцентрицитета добија се: $a = 4$, $b = 3$. Једначина елипсе: $9x^2 + 16y^2 = 144$. Координате додирних тачака јесу $D_1(5, 10)$ и $D_2\left(-\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Евентуална тачка на оси X је $M(x,0)$. $k_1 = \frac{10}{5-x}$,

$k_2 = \frac{\frac{9}{5}}{-\frac{16}{5} - x} = -\frac{9}{16+5x}$. Да би угао D_1MD_2 био

прави, мора бити $\frac{10}{5-x} = \frac{16+5x}{9}$ т. ј. $x^2 - \frac{9}{5}x + 2 = 0$.
Корени ове једначине нису стварни, дакле тачка M *не* постоји.

14

1. Кад се једначина уреди, добија се $27x^4 - 46x^3 + 46x - 27 = 0$.

$$27(x^2+1)(x^2-1) - 46x(x^2-1) = 0$$
$$(x^2-1)(27x^2 - 46x + 27) = 0$$

Нулифицирањем оба фактора добија се:

$$x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \frac{23 \pm 10i\sqrt{2}}{27}.$$

2. *a*) $h = 3\sqrt{3}$, $P = 27\sqrt{3}$, $d = 6\sqrt{3}$. Углови су 60° и 120°.

b) Удаљеност пресечне тачке од основице је x.

$$x : 3\sqrt{3} = 6 : 9,\ x = 2\sqrt{3}.$$

Угао између дијагонала је 120°.

3. Отсечак настаје ротацијом круга $x^2 + y^2 = r^2$ око осе X, у границама од $r-h$ до r.

$$\frac{V}{\pi} = \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \Big/ r^2x - \frac{x^3}{3} \Big/_{r-h}^{r} = \frac{h^2}{3}(3r - h).$$

15

1. Бројеви су: a, aq, aq^2, а после промене: $a_1 = \frac{a}{4}$, $a_2 = aq - 30$, $a_3 = aq^2 - aq - a$.

$$\frac{a_3}{a_2} = q, \frac{a_2}{a_1} = q.$$

Добију се једначине: $aq = 40$, $a + 40 = 30q$,

Тражени бројеви јесу: 20, 40, 80 или: -60, 40, $-\frac{80}{3}$.

2. Једначина елипсе може се написати у облику $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{\frac{c}{4}} = 1$, одакле је $a^2 = c, b^2 = \frac{c}{4}$ · Помоћу услова за тангенту елипсе добија се $c = 20$. Осе елипсе јесу $4\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$, а једначина елипсе $x^2 + 4y^2 = 20$. Додирна тачка је $D(4, 1)$.

3. $P = \pi(R^2 - r^2)$. Ставимо ли $\frac{180^0}{n} = \alpha$, добијамо:

$$R = \frac{a}{2sin\alpha}, r = \frac{a}{2tg\alpha}, P = \pi\left(\frac{a^2}{4sin^2\alpha} - \frac{a^2}{4tg^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{a^2\pi}{4}\left(\frac{1}{sin^2\alpha} - \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}\right) = \frac{a^2\pi}{4}. \frac{1 - cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

16

1. Добију се једначине: $x + y + z = 28$, $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{y(y-3)}{2} + \frac{z(z-3)}{2} = 105$, $\frac{y(y-3)}{2} - \frac{x(x-3)}{2} = \frac{z(z-3)}{2} - \frac{y(y-3)}{2}$. Заменом $x(x-3) + z(z-3) = 2y(y-3)$ из треће једначине у другу, добија се $3y(y-3) = 210$; $y = 10$, $x_1 = 13$, $x_2 = 5$, $z_1 = 5$, $z_2 = 13$. Дакле: 5-угаоник (5 дијагонала), 10-угаоник (35 дијагонала) и 13-угаоник (65 дијагонала).

2. Коефицијенти смера двеју страница правоугаоника јесу $k_1 = \frac{y}{x-e}$, $k_2 = \frac{y}{x+e}$. Из једначина $\frac{y^2}{x^2-e^2} = -1$ и $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ добија се $x_{1,2} = \pm\frac{a}{e}\sqrt{e^2 - b^2}, y_{1,2} =$

$$= \pm\frac{b^2}{e};\ P = 2e.y = 2b^2.$$

Правоугаоник је могућ само ако је $e \geqq b$ (видети вредност за x).

3. $\beta = 90^0 - \alpha$, $sin\beta = sin(90^0 - \alpha) = cos\alpha$, $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

17*

1. Странице троугла јесу: a, $a+1$, $a+2$, а углови: α, $180^0-3\alpha$, 2α.

По синусној теореми је $a:(a+2)=sin\alpha:2\,sin\alpha cos\alpha$, ода тле $cos\alpha=\frac{a+2}{2a}$.

По косинусној теореми имамо: $a^2=(a+1)^2+(a+2)^2-$ $-2(a+1)(a+2)\cdot\frac{a+2}{2a}$. Добија се: $a=4$. Странице троугла јесу 4, 5, 6, а површина $P=\frac{15}{4}\sqrt{7}$. Углови: $\alpha=41^0\,24'\,34''$, $2\alpha=82^0\,49'\,8''$, $180^0-3\alpha=55^0\,46'\,18''$.

2. Ивица тетраедра $a=r\sqrt{3}$.

Полупречник x уписане лопте наће се изједначивањем запремине тетраедра са збиром запремина четири пирамиде чији врхови леже у центру лопте, а базе су им стране тетраедра.

$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot x$, одатле $x=\frac{r\sqrt{2}}{4}$; $P=4x^2\pi=\frac{r^2\pi}{2}$.

$V=\frac{4\pi}{3}x^3=\frac{r^3\pi\sqrt{2}}{24}$. Из $P=\pi$ добијамо $r=\sqrt{2}$. У том је случају $V=\frac{\pi}{6}$.

3. a) $d=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, где је $x^2=3-3y^2$.
$f(y)=4-2y-2y^2$. Из $f'(y)=0$ имамо $y=-\frac{1}{2}$, $x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}$; $d=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

b) Тражена површина је површина елипсиног квадранта минус површина троугла: $P=\frac{ab\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-1\right)$.

c) Запремина је: запремина половине елипсоида минус запремина купе. $V=\frac{2ab^2\pi}{3}-\frac{r^2\pi h}{3}=\frac{\pi}{3}\,(2\sqrt{3}-\ )$.

18*

1. $2(x^6-1)+3x(x^4-1)-18x^2(x^2-1)=0$,
$2(x^2-1)(x^4+x^2+1)+3x(x^2+1)(x^2-1)-18x^2(x^2-1)=0$,

$(x^2-1)(2x^4+3x^3-16x^2+3x+2)=0;\ x_{1,2}=\pm 1$. Друга једначина је симетрична па се решава дељењем са x^2 и увођењем нове непознате: $x+\frac{1}{x}=u;\ x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$.

$$x_3=2,\ x_4=\frac{1}{2};\ x_{5,6}=-2\pm\sqrt{3}.$$

2. Крак $b=2R\sin\alpha=20\ cm$. Основица $a=24\ cm$, висина $h=16\ cm$.

Површина обртног тела састоји се од кружног прстена и омотача двеју зарубљених купа:

$$P=\pi\left[\left(R+\frac{a}{2}\right)^2-\left(R-\frac{a}{2}\right)^2\right]+\pi b\left(2R+\frac{a}{2}\right)+\pi b\left(2R-\frac{a}{2}\right)=$$
$$=1600\pi\ cm^2.$$

Запремина тела једнака је разлици запремина двеју зарубљених купа:

$$V=\frac{\pi h}{3}\left[\left(R+\frac{a}{2}\right)^2+\left(R+\frac{a}{2}\right)R+R^2\right]-$$
$$-\frac{\pi h}{3}\left[R^2+R\left(R-\frac{a}{2}\right)+\left(R-\frac{a}{2}\right)^2\right]=4800\pi cm^3.$$

3. Из једначина: $\sqrt{a^2-b^2}=b-1,\ \sqrt{a^2-b^2}=a-2$ добија се: $a=5,\ b=4$. Једначина тангенте параболе повучене из жиже $F(-3,0)$ гласи: $y=\frac{8}{15}x+\frac{8}{5}$.

Тражена површина једнака је површини троугла минус површина параболе. $P=\frac{48}{5}-\frac{32}{5}=\frac{16}{5}$.

Пресечне тачке тангенте с елипсом: $A(3,\frac{16}{5})$ и $B(-\frac{63}{13},-\frac{64}{65})$. Угао пресека у тачки $A: tg\alpha=\frac{5}{3},\ \alpha=59^0 2'10''$; у тачки B: $tg\beta=\frac{65}{12},\ \beta=79^0 32'24''$.

19

1. Тачке на параболи: $A(x_1, a)$ и $B(x_1+6a, 3a)$. Заменом у једначину параболе ($y^2=2px$) имамо: $a^2=2px_1$, $9a^2=2p(x_1+6a)$, одакле: $p=\frac{2a}{3}$.

Једначина параболе је $3y^2=4ax$, а површина отсечка $P=\frac{(y_1-y_2)^3}{12p}=a^2$.

2. Странице троугла јесу: a, $\frac{4a}{3}$, $\frac{16a}{9}$. По косинусној теореми добија се $\cos\alpha = \frac{319}{384}$, $\alpha = 33^0\,49'\,31''$.

Из једначине $\left(\frac{16a}{9} - 1\right)^2 = a^2 + \frac{16a^2}{9}$ добија се $a = 9$. Странице заданог троугла јесу: 9, 12, 16, а површина му је $\frac{1}{4}\sqrt{45695}$.

3. $\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{2}(d_1 + d_2 + d_3)$, $d_1 + d_2 + d_3 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = h$.

20

1. $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 3 : 4 : 5$, а према синусној теореми $a : b : c = 3 : 4 : 5$. Према томе је $a = 3k$, $b = 4k$, $c = 5k$, а по косинусној теореми добија се $\cos\gamma = 0$, $\gamma = 90^0$. Троугао је дакле правоугли. Због $\frac{a\,.\,b}{2} = 1$ имамо да је $k = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

$a = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $b = \frac{2\sqrt{3}}{6}$, $c = \frac{5\sqrt{6}}{6}$.

2. Из једначине $\frac{x^{\log x} - 5}{11 - x^{\log x}} = \frac{35 - x^{\log x}}{x^{\log x} - 5}$ добија се $x^{\log x} = 10$; $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{10}$. Ред гласи: 1, 5, 25, ... Десети члан реда је $aq^9 = 5^9 = 1\,953\,125$.

3. Темена четвероугла јесу $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ и $D(x_4, y_4)$. а половишта његових страница:

$E\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, $F\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$, $G\left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}\right)$ и $H\left(\frac{x_1 + x_4}{2}, \frac{y_1 + y_4}{2}\right)$. Коефицијент смера странице EF је $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, а добија се да је толики и коефицијент смера странице GH. Аналогно се доказује да је и FG паралелно са EH.

21*

1. $a = 15$, $b = 5$. Једначина елипсе је $x^2 + 9y^2 = 225$. Пресечне тачке праве и елипсе: $M(-12, 3)$, $N(9, 4)$. Запре-

мина обртног тела једнака је запремини дела елипсоида минус зарубљена купа.

$$V = \pi \int_{-12}^{9} \frac{225 - x^2}{9} dx - \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = 434\pi - 259\pi = 175\pi.$$

$$E = 2\pi \int_{0}^{15} \frac{225 - x^2}{9} dx = 500\,\pi.$$

$$\frac{V}{E} = \frac{7}{20}, \text{ дакле је } V = \frac{7}{20} E.$$

2. $a = 9k$, $b = 10k$, $c = 17k$. Помоћу обрасца $r = \frac{P}{s}$ добија се да је $k = 1$. Полупречник описаног круга је $R = \frac{abc}{4P} = \frac{85}{8}$. Центру описаног круга најближа је највећа страница: $D = \sqrt{R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{51}{8}$.

Центру уписаног круга најближе је теме највећег угла: $d = \frac{r}{sin\frac{\gamma}{2}}$. А како је по косинусној теореми $cos\gamma = -\frac{3}{5}$, то је: $sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\gamma}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Дакле: $d = \sqrt{5}$.

3. $y' = 12x^3 - 48x^2 - 108x + 432 = 0$, $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$, $(x - 4)(x^2 - 9) = 0$, дакле: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$. Други извод је $y'' = 36x^2 - 96x - 108$. За $x_1 = 4$ и за $x_3 = -3$ његова је вредност позитивна, а функција има минимум 608 одн. -1107. За $x_2 = 3$ функција има максимум 621.

22*

1. Квадрирањем прве једначине добија се: $a^2 + b^2 = 9 - 2ab$, а заменом у другу: $ab(cos\gamma + 2) = 5$. Дељењем ове једначине са трећом добија се напослетку: $cos\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = 60^0$ (друга је вредност неупотребива). Из $a + b = 3$, $ab = 2$, излази: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Трећа страница је $c = \sqrt{3}$. $sin\alpha = \frac{a\,sin\gamma}{c}$. Дакле: $\alpha_1 = 30^0$, $\beta_1 = 90^0$; $\alpha_2 = 90^0$, $\beta_2 = 30^0$.

2. Полупречник базе купе нека је x, а растојање базе од центра y.

$V_1 = \frac{x^2\pi(y+r)}{3}$, где је $x^2 = r^2 - y^2$; $f(y) = -y^3 - ry^2 + r^2y + r^3$; $f'(y) = -3y^2 - 2ry + r^2 = 0$. Добија се:

$$y = \frac{r}{3}, \quad x = \frac{2r}{3}\sqrt{2}; \quad V_1 = \frac{32r^3\pi}{81}.$$

Полупречник базе ваљка нека је z, висина h. Из сличности имамо $\frac{2r}{3}\sqrt{2} : \frac{4r}{3} = z : \left(\frac{4r}{3} - h\right)$, одатле: $h = \frac{4r - 3z\sqrt{2}}{3}$

$f(z) = 4rz^2 - 3z^3\sqrt{2}$. Добија се: $z = \frac{4r}{9}\sqrt{2}$, $h = \frac{4r}{9}$; $V_2 = \frac{128r^3\pi}{729}$.

$$V : V_1 : V_2 = 243 : 72 : 32.$$

3. Једначина параболе је $y^2 = 16x$, а једначина нормале $x + 2y - 9 = 0$. Тражена површина је трапез минус површина параболе: $P = \frac{a+c}{2} \cdot h - \frac{2}{3} x_1 y_1 = \frac{105}{4} - \frac{8}{3} = \frac{283}{12}$. Запремина = зарубљена купа минус параболоид: $V = \frac{5\pi}{3}\left(\frac{169}{4} + 26 + 16\right) - \pi \int_0^1 16x\,dx = \frac{1685\pi}{12} - 8\pi = \frac{1589\pi}{12}$.

23

1. $\left. \sin x \right|_0^x - \left. -\cos x \right|_x^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\sin 2x}$, $(\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$,

$1 - \sin 2x = \sin 2x$, $\sin 2x = \frac{1}{2}$; $x_1 = 15^0 = \frac{\pi}{12}$; $x_2 = 75^0 = \frac{5\pi}{12}$.

2. Удаљеност тачке од базе нека је x.

$f(x) = (24 - x)^2 + 2(x^2 + 49)$, $f'(x) = 6x - 48 = 0$, $x = 8$. Збир квадрата удаљености од сва три темена износи 482. Тачка дели висину у односу $1 : 2$, рачунајући од базе. Тежиште!

3. Једно теме троугла је O, а друга два се нађу решењем $y = \pm \frac{b}{a} x$ са $b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2$. Имамо:
$A\left(\frac{a^2 b}{b x_1 - a y_1}, \frac{a b^2}{b x_1 - a y_1}\right)$, $B\left(\frac{a^2 b}{b x_1 + a y_1}, -\frac{a b^2}{b x_1 + a y_1}\right)$. Заменом у образац за површину троугла добија се: $2P = \frac{2a^3 b^3}{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2} = \frac{2a^3 b^3}{a^2 b^2}$, $P = ab$.

24

1. $$\frac{1 + logx}{2logx} - \frac{logx}{2\sqrt{logx}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1 + logx}{2logx} - \frac{\sqrt{logx}}{2} = \frac{1}{2}.$$
Даље је: $logx\sqrt{logx} = 1$, $log^3 x = 1$, $x = 10$.

2. $x = y$. Темена квадрата имају координате $(\pm 5, \pm 5)$, једначина круга је $x^2 + y^2 = 50$.
$$\frac{V}{\pi} = \int_0^5 (50 - x^2)\, dx - \frac{25}{9} \int_4^5 (x^2 - 16)\, dx = \frac{5300\pi}{27}.$$

3. По косинусној теореми је $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\gamma$. Површина троугла је $P = \frac{absin\gamma}{2} = \frac{abcos\gamma}{2}$, ако је $\gamma = 45^0$. Дакле: $c^2 = a^2 + b^2 - 4P$, или: $a^2 + b^2 - c^2 = 4P$.

25

1. Чланови реда: a, $5a$, $9a$. Из једначине $\frac{5a - x}{a} = \frac{9a}{5a - x}$ добија се: $x_1 = 8a$, $x_2 = 2a$. Геометријски ред: $a, -3a, 9a$, или: $a, 3a, 9a$. Количник је $q = \pm 3$.

2. $P = d_1 . d_2$
$$d_1 = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}, \quad d_2 = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}, \quad P = \frac{x_1^2 - y_1^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

3. $y = tgx = \frac{sinx}{cosx}$. Према обрасцу за извод количника $y = \frac{u}{v} \left(y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}\right)$ добија се:

$$y' = \frac{\cos x \, . \cos x - (-\sin x) \, . \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

26

1. Заменом $\log x = u$, $\log y = v$ добија се систем: $u^3 - v^3 = 8$, $u - v = 2$; $u_1 = 2$, $u_2 = 0$; $v_1 = 0$, $v_2 = -2$. $x_1 = 100$, $x_2 = 1$; $y_1 = 1$, $y_2 = 0{,}01$.

2. Већи угао се израчуна по косинусној теореми. Добија се $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, дакле $\alpha = 120^0$. Мањи је угао 60^0. Друга дијагонала се нађе такође по косинусној теореми. Добија се $d = 20{,}8$.

3. Једначина тангенте гласи $y - y_1 = y'(x - x_1)$, па због $y' = \frac{2x_1}{2p} = \frac{x_1}{p}$ имамо: $py - py_1 = xx_1 - x_1^2$. Супституцијом $x_1^2 = 2py_1$ имамо: $xx_1 = p(y + y_1)$. — Аналогни образац за једначину тангенте параболе $y^2 = 2px$ гласи: $yy_1 = p(x + x_1)$.

27*

1. $(x - 2)^2 = u$. Добија се: $u_1 = 1$, $u_2 = 9$, $u_3 = \frac{1}{9}$.
$x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$, $x_4 = -1$, $x_5 = \frac{7}{3}$, $x_6 = \frac{5}{3}$.

2. $V = 2y^2\pi x$, $y^2 = \frac{3}{4}(36 - x^2)$, $f(x) = 36x - x^3$, $x = 2\sqrt{3}$, $y = 3\sqrt{2}$; $V = 72\pi\sqrt{3}$.

Запремина елипсоида је $Ve = 216\pi$.

$V : Ve = 1 : \sqrt{3}$.

3. Полупречник круга је висина троугла која припада страници c; $r = \frac{2P}{c} = \frac{168}{21} = 8$; $\gamma = 98^0\,47'\,13''$;

$P_1 = \frac{r^2\pi\gamma}{360} = 55{,}172 cm^2$. P_2 и P_3 нађе се одузимањем кружног исечка од површине правоуглог троугла. $P_2 = 3{,}409 cm^2$, $P_3 = 25{,}419 cm^2$.

28

1. $\Big/ 2\sqrt{x} \Big/_{4}^{81} - \Big/ x^3 + 5x^2 + 7x \Big/_{x}^{1} + \Big/ x \Big/_{-17}^{17} = 0.$

$x^3 + 5x^2 + 7x + 35 = 0$, $(x + 5)(x^2 + 7) = 0$
$x_1 = -5$, $(x_{2,3} = \pm i\sqrt{7})$.

2. Ако се из темена C повуче паралела са страницом DA, добије се правоугли троугао у коме је: $cotg\alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha = 53^0\,7'\,49''$. Остали су углови: $\beta = 90^0 - \alpha$, $\gamma = 90^0 + \alpha$, $\delta = 180^0 - \alpha$. $h = \frac{24}{5}$. — Паралелне странице трапеза нису одређене.

3. Код равностране хиперболе $b = a$. Дакле:
$e = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$, $\varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{2}$, $p = \frac{b^2}{a} = a$. Једначина тангенте је $xx_1 - yy_1 = a^2$, а из $a^2k^2 - b^2 = n^2$ добија се условна једначина за тангенту равностране хиперболе:

$$a^2(k^2 - 1) = n^2.$$

29*

1. a) Из једначина $a^2 + b^2 = 56$, $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ добија се: $a = 6$, $b = 2\sqrt{5}$. Једначина хиперболе: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{20} = 1$. Једначина тангенте хиперболе је $y = x + 4$, а помоћу услова за тангенту параболе ($p = 2kn$) добија се једначина параболе $y^2 = 16x$. Полупречник круга једнак је растојању коорд. почетка од тангенте: $r = 2\sqrt{2}$. Једначина круга је $x^2 + y^2 = 8$.

b) Додирна тачка тангенте на параболи је D_1 (4,8), а на кругу D_2 (—2, 2). Тражени однос је $7:6$.

2. Супституцијом $2^x = z$ добија се:
$8z^5 - 62z^4 + 155z^3 - 155z^2 + 62z - 8 = 0$,
$(z - 1)(8z^4 - 54z^3 + 101z^2 - 54z + 8) = 0$.
$z_1 = 1$, $z_2 = 4$, $z_3 = \frac{1}{4}$, $z_4 = 2$, $z_5 = \frac{1}{2}$. Тражене вредности јесу: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$, $x_5 = -1$.

3. Полупречник веће лопте је $x = \frac{r}{3}\sqrt{3}$. Повући полупречнике обе лопте у додирне тачке на страници купе, затим из центра мање лопте повући паралелу са страницом. Полупречник мање лопте (y) нађе се из:

$$sin\ 30^0 = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{2},\ y = \frac{x}{3} = \frac{r}{9}\sqrt{3}.$$

$P_1 : P_2 : P_3 = 81 : 36 : 4.$
$V_1 : V_2 : V_3 = 243 : 108 : 4.$

30*

1. $y' = 3x^2 - 24x + 45 = 0$. Добија се: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$; $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Аритметички ред: 3, 5, 7, ...; геометријски: 1, 5, 25, ... Редови се подударају у другом члану. Из $125 = 3 + (n-1)2$ имамо $n = 62$. Из $a_{312} = 625 = 5^{n-1}$ добија се $n = 5$.

2. $S = s\sqrt{3}$; $r = scos\alpha = Scos2\alpha = scos2\alpha\sqrt{3}$. Из једначине $cos\alpha = cos2\alpha\sqrt{3}$ добија се: $\alpha = 30^0$, $2\alpha = 60^0$.

$h = rtg\alpha = 2\sqrt{3},\ H = rtg2\alpha = 6\sqrt{3}.$

$$V_1 = \frac{r^2\pi H}{3} = 72\pi\sqrt{3},\ V_2 = \frac{r^2\pi h}{3} = 24\pi\sqrt{3},$$

$V_1 - V_2 = 48\pi\sqrt{3}$. — $K = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. Дакле: $V_1 - V_2 = 144\,K$.

3. $D_1\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $D_2\left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$. Тангенте се секу у тачки $S(5, 0)$. Из $\left(\frac{16}{5} - p\right)^2 + \frac{81}{25} = r^2$ и $(5-p)^2 = r^2$ добија се: $p = \frac{16}{5}$, $r = \frac{9}{5}$. Једначина круга гласи: $\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{81}{25}$. — Тангенте стоје једна на другој нормално.

$$P_1 = P_2 = \frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{81}{100}(\pi - 2).\ P_3 = r^2\pi - 2P_1 = \frac{81}{50}(\pi + 2)$$

31

1. Полином једначине треба поделити заданим кореним фактором.

$(x^6 + x^5 - 2x^4 - x^2 - x + 2) : (x+2) = x^5 - x^4 - x + 1.$
$x^4(x-1) - (x-1) = 0,\quad (x-1)(x^4-1) = 0.$
$x_2 = 1,\quad x_3 = 1,\quad x_4 = -1,\quad x_5 = i,\quad x_6 = -i.$

2. $y' = 3x^2 - 18x + 24 = 0$, одатле $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. Максимум је $A(2, 6)$, минимум $B(4, 2)$.

$k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 3$, $tg\alpha = 1$, $\alpha = 45^0$.

3. $P_1 = R\pi(R+s)$, $P_2 = 4r^2\pi$. Како је $r = \frac{Rh}{R+s}$, добијамо однос $P_1 : P_2 = R(R+s) : \frac{4R^2h^2}{(R+s)^2} = (R+s)^3 : 4Rh^2$.

Исто је тако $V_1 : V_2 = R^2h : \frac{4R^3h^3}{(R+s)^3} = (R+s)^3 : 4Rh^2$.
Дакле $P_1 : P_2 = V_1 : V_2$.

32

1. $3a + 3d = 12$, $a(a+d)(a+2d) = 15$. Из тих једначина добија се: $a_1 = \frac{15}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = -\frac{7}{2}$, $d_2 = \frac{7}{2}\cdot$ Тражени корени јесу: $\frac{15}{2}$, 4, $\frac{1}{2}$, а једначина гласи:
$(x - \frac{15}{2})(x-4)(x-\frac{1}{2}) = 0$. или: $4x^3 - 48x^2 + 143x - 60 = 0$.

2. $AB = 2e, e = 4$; $AC + BC = 2a, a = 5$; $b = \sqrt{a^2 - e^2} = 3$. Површина је $ab\pi = 15\pi$.

3. $P = n.\frac{ar}{2}$; $r = \frac{a}{2} cotg \frac{180^0}{n}$, дакле: $P = \frac{a^2n}{4} cotg \frac{180^0}{n}$.

За $n = 3$, $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (равнострани троугао).

За $n = 4$, $P = a^2$ (квадрат).

За $n = 6$, $P = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$.

33

1. Из једначина: $a + aq + aq^2 = \frac{111}{10}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + \frac{1}{aq^2} = \frac{111}{10}$ добија се: $q_1 = 10$, $q_2 = \frac{1}{10}$; $a_1 = \frac{1}{10}$, $a_2 = 10$. Тражени бројеви: $\frac{1}{10}$, 1, 10 $\left(\text{или: } 10, 1, \frac{1}{10}\right)$. Осим ових решења постоје још два ирационална.

2. Из једначина: $(-b-p)^2+q^2=r^2$, $p^2+(a-q)^2=r^2$, $(b-p)^2+q^2=r^2$ добија се: $p=0$, $q=\frac{a^2-b^2}{2a}$, $r=\frac{a^2+b^2}{2a}$. У случају $a=b$ елипса постаје круг, а тражени круг поклапа се са заданим.

3. a) Хипотенузина висина дели правоугли троугао на два троугла од којих је сваки сличан великом троуглу. Ако су p и q отсечци на хипотенузи, онда је: $a^2=pc$, $b^2=qc$, а сабирањем се добија: $a^2+b^2=c(p+q)=c^2$.

b) Ако у косинусној теореми: $c^2=a^2+b^2-2abcos\gamma$ ставимо да је $\gamma=90^0$ ($cos\,90^0=0$), имамо: $c^2=a^2+b^2$.

34*

1. $K.\,1{,}04^6-5000.\frac{1{,}04^6-1}{0{,}04}=\frac{K}{2}$. Добија се:

$$K=43\,350 \text{ динара.}$$

Из једначине: $21675.\ 1{,}04^6=r.\frac{1{,}04^6-1}{0{,}04}$ излази:

$$r=4140 \text{ динара.}$$

2. Површина прве елипсе је $ab\pi$, површина првог правоугаоника $4xy$, где је $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; $f(x)=a^2x^2-x^4$, $f'(x)=$ $=2a^2x-4x^3=0$, а одатле $x=\frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y=\frac{b}{2}\sqrt{2}$. Површина првог правоугаоника износи дакле $2ab$. Површина друге елипсе је $\frac{ab\pi}{2}$, а површина другог правоугаоника ab. — Површине елипса, а тако исто и површине правоугаоника чине геометријски ред.

a) $S=\frac{ab\pi}{1-\frac{1}{2}}=2ab\pi$,

b) $S=\frac{2ab}{1-\frac{1}{2}}=4ab$.

3. Удаљеност тачке M од периферије мањег круга нека је x. Из пропорције $5:(5+x)=15:(31+x)$ добија се $x=8$; $d=31+8=39cm$. $T_1=12cm$. $T_2=36cm$. $sin\alpha=\frac{5}{13}$,

$2\alpha = 45^0\,14'\,22''$. $P = 2\left[30 - \frac{25\pi\,(90-\alpha)}{360}\right] = 40,48 cm^2$.

35

1. $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$.

2. $V = x^2 y\pi$. Из $2x^2\pi + 2xy\pi = 2a^2\pi$ добија се:
$y = \frac{a^2 - x^2}{x}$; $f(x) = a^2x - x^3$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$; $y = 2x$; ваљак је равностран. $M = \frac{4a^2}{3}$, $M = \frac{2}{3}P$.

3. $y = -\,cotgx = -\frac{cosx}{sinx}$;

$$y' = -\frac{sinx(-sinx) - cosx\cdot cosx}{sin^2x} = \frac{1}{sin^2x};$$

$\int y'dx = y + C$. Дакле: $\int\frac{dx}{sin^2x} = -\,cotgx + C$.

36*

1. База троугла $2x$, висина y; $P = xy$. Из $x\!:\!y = a : (y - b)$ имамо $x = a\,\frac{y}{y-b}$; $f(y) = \frac{y^2}{y-b}$; $y = 2b$, $x = 2a$. Запремина ваљка је $a^2b\pi$, запремина купе је $\frac{8a^2b\pi}{3}\cdot$ Однос запремина је $3:8$. Површина ваљка је $2a\pi(a+b)$, а површина купе $2a\pi(2a + 2\sqrt{a^2+b^2})$. Ако је $a = \frac{3}{4}b$, онда је однос површина $7:16$.

2. Из једначине $(8-p)^2 + (4-p)^2 = p^2$ добија се: $p_1 = 20$, $p_2 = 4$. Једначине кругова: $(x-20)^2 + (y-20)^2 = 400$, $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$. Осим у датој тачки кругови се секу и у тачки $B(4, 8)$. У тој тачки је $k_1 = -\frac{4}{3}$, $k_2 = 0$; $tg\varphi = \frac{4}{3}$, $\varphi = 53^0 7'48''$.

3. Висина $x = y + 1$. Из $y = 370\,tg\alpha = 110\,tg3\alpha$ добија се — кад се $tg3\alpha$ замени са $\frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$ — да је $tg\alpha = \frac{1}{5}\cdot$ Дакле $x = 75\ m$.

37

1. Координате тачке добију се решењем једначина: $x^2 + y^2 = \frac{325}{4}$, $3x^2 + 4y^2 = 300$. $M\left(\pm 5, \pm\frac{15}{2}\right)$, крајња тачка параметра. $r_1 = a + \frac{ex}{a} = \frac{25}{2}$; $r_2 = a - \frac{ex}{a} = \frac{15}{2}$.

2. $h : (2r - h) = 1 : 5$, $h = \frac{r}{3}$.

$$V_1 : V_2 = 2 : 25.$$

3. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Због: $x_1 + x_2 = -a$ $x_1x_2 = b$ имамо: $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2b$.

38

1. $x^2 + 4xy + 3y^2 = 15$, $x^2 - 4xy + 3y^2 = -1$. Одузимањем једначина добија се $8xy = 16$, а супституцијом $y = \frac{2}{x}$ у прву: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$; $y_{1,2} = \pm 1$, $y_{3,4} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Пресек правих је $C(1, 3)$, а мањи угао међу њима 45^0. $\frac{r\pi\alpha}{180} = \pi$, $r = 4$. Једначина круга: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

3. Из једначине $(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2$ добија се:

$$a = 3d. \quad r = \frac{P}{s} = \frac{a\,(a + d)}{3\,(a + d)} = d.$$

39

1. Ред има $(2n + 1)$ чланова, средњи је члан a_{n+1}. Из $aq^n = 24$ следује $q^n = 8$. Ако у једначину: $381 = 3 \cdot \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1}$ заменимо: $q^{2n+1} = q^{2n} \cdot q = 64q$, добијамо: $q = 2$; $n = 3$. Ред има 7 чланова; последњи је члан $a_7 = aq^6 = 192$.

2. $r = \frac{D}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = 12\frac{1}{2}\,cm$. Највећа калота има

висину $h = r - \frac{a}{2} = 6\frac{1}{2} cm$. $P = 2r\pi h = 162\frac{1}{2}\pi cm^2$.

3. Пресечна тачка тангенте $yy_1 = p(x + x_1)$ с осом X је $A(-x_1, 0)$, а пресечна тачка нормале $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$ је $B(p + x_1, 0)$. Половиште дужине AB је жижа $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

40*

1. a) Странице квадрата јесу: $a, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2}, - - - - -$

Збир обима је $S_1 = \frac{4a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 4a(2 + \sqrt{2})$. Збир површина је

$S_2 = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$.

b) $aq^{n-1} = 1$; $256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$; $n = 9$, девети квадрат.

2. По синусној теореми је $sin\alpha : sin2\alpha = 9 : 15$, одатле: $cos\alpha = \frac{5}{6}$. По косинусној теореми је $(2r)^2 = 9^2 + 15^2 - 2 \cdot 9 \cdot 15 cos(180^0 - 3\alpha)$. Како је $cos3\alpha = cos^3\alpha - 3sin^2 cos\alpha = \frac{125}{216} - 3 \cdot \frac{11}{36} \cdot \frac{5}{6} = -\frac{5}{27}$, то је $(2r)^2 = 81 + 225 - 270 \cdot \frac{5}{27} = 256$, $r = 8$. Висина $h = 15 sin\alpha = \frac{5\sqrt{11}}{2}$. Запремина купе је

$V_1 = \frac{160\pi\sqrt{11}}{3}$. Запремина лопте је $V_2 = \frac{4\rho^3\pi}{3}$, где је $\rho = \frac{P}{s_1} = \sqrt{11}$.

$$V_1 : V_2 = 40 : 11.$$

3. $r^2 = a^2 + b^2 = 100$. Једначина круга гласи: $(x - 5\sqrt{3})^2 + y^2 = 100$. Криве се секу под углом од 60^0. Заједничка површина састоји се од половине елипсе и кружног отсечка чији је централни угао 60^0. $P = \frac{ab\pi}{2} + \frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = 25\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$. Запремина се састоји од лоптиног отсечка висине $h = 10 - 5\sqrt{3}$ и половине ротационог елипсоида.

$$V = \frac{125\pi}{3}(16 - 7\sqrt{3}).$$

41

1. Запремина тетраедра је $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, запремина октаедра $\frac{x^3\sqrt{2}}{3}$. Из једначине $12\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 81\cdot\frac{x^3\sqrt{2}}{3}$ добија се:

$$a^3 = 27x^3, \quad x = \frac{a}{3} = 1\ cm.$$

2. Једначина круга је $(x-p)^2+y^2=p^2$ или: $y^2=2px-x^2$. Заменом у једначину елипсе добија се:

$x_{1,2} = \frac{25p}{16} \pm \sqrt{\frac{625p^2}{256}-\frac{225}{4}}$. Из $\frac{625p^2}{256} - \frac{225}{4} = 0$ имамо $p = \frac{24}{5}$. Круг: $\left(x-\frac{24}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{576}{25}$. Додирне тачке кривих јесу $D\left(\frac{15}{2}, \pm\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$, а коефицијенти смера заједн. тангената: $k_{1,2} = \pm\frac{9}{35}\sqrt{7}$.

2. $b = aq,\ c = aq^2;\ ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0;$
$x^2 + 2qx + q^2 = 0$. Корени су $x_{1,2} = -q$.

42*

1. $\frac{1}{a-3d}+\frac{1}{a+3d}=\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{a-d}+\frac{1}{a+d}=\frac{1}{12};$

$2a = \frac{1}{8}(a^2-9d^2)$, $2a = \frac{1}{12}(a^2-d^2)$. Кад се изједначе десне стране, добија се $d^2 = \frac{a^2}{25}$, а заменом: $a = 25$, $d = \pm 5$. Тражени бројеви јесу: 10, 20, 30, 40, или: 40, 30, 20, 10. Из $n^2 = \frac{n}{2}(20+30)$ имамо $n = 25$. Диференција $d_1 = \pm\frac{5}{12}$.

2. $r = \frac{P}{s},\ s = 15;\ b = 5\ cm;\ tg\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b} = \frac{1}{5},$

$\beta = 22^\circ 37' 12''$. Помоћу Молвајдове једначине $\frac{a+c}{b} = \frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

добија се $\alpha - \gamma = 22^\circ 37' 12''$; $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 67^\circ 22' 48''$; $c = 12 cm$, $a = 13 cm$. — Задатак се може решавати и тако да се, после b, нађу странице a и c помоћу Херонове формуле.

3 Из једначина $169b^2 - \frac{225}{16}a^2 = a^2b^2, 400b^2 - 144a^2 = a^2b^2$ добија се: $a = 12, b = 9$. Једначина хиперболе је $9x^2 - 16y^2 = 1296$. — Запремина ротационог тела састоји се од слоја ротационог хиперболоида смањеног за две купе: $V = V_1 - (V_2 + V_3)$; $\frac{V_1}{\pi} = \frac{9}{16}\int_{13}^{20}(x^2 - 144)\,dx = \frac{8337}{16}$; $V_2 = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{75\pi}{8}$; $V_3 = 240\pi$; $V = \frac{4347\pi}{16}$.

43

1. $a + b + c = 0$, $y' = 2ax + b = 4a + b = 0$, $4a + 2b + c = -1$. Из те три једначине добија се: $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$. Функција гласи: $y = x^2 - 4x + 3$.

2. Друга је катета $a = 80\,m$. Тражени угао је

$$\varphi = 180^\circ - \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 135^\circ - \frac{\beta}{2} = 122^\circ\, 0'\, 20''.$$

3. $K_1 = K + K \cdot \frac{p}{100} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right) = Kq$,

$K_2 = Kq + Kq.\ \frac{p}{100} = Kq\left(1 + \frac{p}{100}\right) = Kq^2$. Уопште: $K_n = K.\,q^n$.

44

1. $\sqrt{\frac{1 + bx}{1 - bx}} = \frac{1 + ax}{1 - ax}$. Квадрирањем се долази до једначине: $2a^2bx^3 + 2bx - 4ax = 0$, $x(a^2bx^2 + b - 2a) = 0$. Корени су: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{2a - b}{a^2b}}$. У специјалном случају имамо корене $\pm\frac{1}{5}$.

2. Запремина елипсоида је $V = 2\pi\int_0^8 \frac{64 - x^2}{64}\,dx =$

$= \frac{\pi}{32} \Big/ 64x - \frac{x^3}{3} \Big/_0^8 = \frac{32\pi}{3}$. Из $\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}$ следује $r = 2$. Површина лопте је 16π.

3. Вредности појединих улога на крају n-те године јесу: $K_1 = rq^{n-1}$, $K_2 = rq^{n-2}$, $K_3 = rq^{n-3}$ $K_n = r$. Сума свих улога је $S = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots\ldots K_n = r\,(1 + q + q^2 + \ldots\ldots q^{n-1}) = r.\frac{q^n - 1}{q - 1}$.

45*

1. $V_1 = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \pi y = \frac{x^2 y}{4\pi}$, $V_2 = \left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 \pi x = \frac{xy^2}{4\pi}$.

Заменом $\pi = \frac{22}{7}$ добију се једначине: $x^2 y = 176 \cdot 88$, $xy^2 = 32 \cdot 88$, а њиховим дељењем $\frac{x}{y} = \frac{11}{2}$. Резултати: $x = 44\ cm$, $y = 8\ cm$; $M = 352\ cm^2$.

2. Површина већег полигона је $P_{18} = \frac{9s^2}{2} cotg\ 10^0$, а површина мањег $p_{18} = 9r^2 sin\ 20^0$, где је $r = \frac{s}{2} cotg\ 10^0$, па трансформисањем добијамо: $p_{18} = \frac{9s^2}{2} cotg\ 10^0 cos^2\ 10^0$. Разлика $P_{18} - p_{18} = \frac{9s^2}{2}\ cotg\ 10^0\ (1 - cos^2\ 10^0) = \frac{9s^2}{4} sin\ 20^0 = 3{,}07818\ cm^2$.

Површина кружног прстена је $\pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\frac{s^2}{4sin^2 10^0} - \frac{s^2}{4tg^2 10^0}\right) = \frac{s^2\pi}{4} = \pi = 3{,}14159\ cm^2$. — Тражена разлика износи $0{,}06341\ cm^2$.

3. Додирна тачка тангенте у првом квадранту је $D(\frac{36}{5},\ 12)$, а њена једначина $6y = 5x + 36$. Тражена површина једнака је површини трапеза умањеној за параболин отсечак $(\frac{4}{3} x_1\ y_1)$. $P = \frac{72}{5}$. Запремина је једнака запремини купе минус запремина параболоида. $V = \frac{r^2\pi h}{3} - \pi \int_0^{\frac{36}{5}} 20x dx = \frac{3456\pi}{5} - \frac{2592\pi}{5} = \frac{864\pi}{5}$.

46

1. $11^x = u$; $u_1 = 22$, $u_2 = 1$.

$$x_1 = \frac{log 22}{log 11} = 1,28\ldots, \quad x_2 = 0.$$

2. $P = xy + \frac{x^2\pi}{4} + \frac{y^2\pi}{4}$; $y = \frac{O - 2x}{2} = 2 - x$.

$P = 2x - x^2 + \frac{x^2\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(4 - 4x + x^2) = f(x)$. Из $f'(x) = 0$ добија се $x = 1dm$; $y = 1dm$. Правоугаоник је квадрат. $f''(x) > 0$.

3. $V = \frac{2r^2\pi h}{3}$, $cos\alpha = \frac{r - h}{r}$, а одатле:

$h = r(1 - cos\alpha) = 2r\,sin^2\frac{\alpha}{2}$. Према томе $V = \frac{4r^3\pi}{3}\cdot sin^2\frac{\alpha}{2}$.

За $2\alpha = 360^0$, добија се образац за запремину лопте.

47

1. $\frac{a + d + \frac{15}{2}}{a} = d$, $\frac{a + 2d}{a + d + \frac{15}{2}} = d$. Даље се добија: $2a + 2d + 15 = 2ad$, $2a + 4d = 2ad + 2d^2 + 15d$. Одузимањем једначина излази: $d_1 = -\frac{3}{2}$, $d_2 = -5$; $a_1 = -\frac{12}{5}$, $a_2 = -\frac{5}{12}$.

Тражени бројеви јесу: $-\frac{12}{5}$, $-\frac{39}{10}$, $-\frac{27}{5}$, или: $-\frac{5}{12}$, $-5\frac{5}{12}$ $-10\frac{5}{12}$.

2. Тангента $yy_1 = p(x+x_1)$ отсеца на координатним осама $-x_1$ и $\frac{px_1}{y_1}$. Имамо једначине: $\frac{5x_1^2}{8y_1} = 100$, $y_1^2 = \frac{5}{2}x_1$, одакле: $x_1 = 40$, $y_1 = \pm 10$. Једначина тангенте гласи:

$$x - 8y + 40 = 0, \text{ или: } x + 8y + 40 = 0.$$

3. $P = x.y$. Из сличности троуглова добија се $a : h = x : (h - y)$, $x = \frac{a}{h}(h - y)$. Према томе $P = \frac{a}{h}(hy - y^2)$; $f(y) = hy - y^2$, $f'(y) = h - 2y = 0$. Дакле: $y = \frac{h}{2}$, $x = \frac{a}{2}$;

$P = \frac{ah}{4} = \frac{1}{2}P_\Delta$.

48*

1. Катете су x и y, хипотенуза z. Имамо једначине: $\frac{x+y}{7}=\frac{z}{5}$, $\frac{z+20}{7}=\frac{x+y-20}{5}$, $x^2+y^2=z^2$. Из прве две једначине добија се: $x+y=70$, $z=50$. Странице троугла износе: $30m$, $40m$, $50m$.

2. Кад се изједначе леве стране једначина: $9b^2+\frac{64}{25}a^2=a^2b^2$, $16b^2+\frac{36}{25}a^2=a^2b^2$, добија се $b^2=\frac{4a^2}{25}$, а заменом излази: $a=5$, $b=2$. Центар круга је $C(\frac{7}{2}, \frac{7}{5})$, а његова једначина: $(x-\frac{7}{2})^2+(y-\frac{7}{5})^2=\frac{29}{100}$.

$tg\alpha$ (у тачки A) је $\frac{56}{5}$, $\alpha=84^0 53' 52''$; у тачки B је $tg\beta=\frac{91}{10}$, $\beta=83^0 43' 43''$.

3. $x+2y=r$. Збир запремина је $S=\frac{4\pi}{3}(x^3+2y^3)$; $f(y)=(r-2y)^3+2y^3$, $f'(y)=-18y^2+24ry-6r^2=0$, одатле: $y=\frac{r}{3}$; $x=\frac{r}{3}$. Све три лопте су једнаке. $S=\frac{4r^3\pi}{27}$. Тражени однос је $1:9$.

49

1. Растојање нормала спуштених из A и B на раван огледала износи $8cm$. Из једначина: $x=tg\alpha$, $8-x=7tg\alpha$ добија се: $tg\alpha=1$, $\alpha=45^0$.

2. $A\left(1\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Коефицијент смера нормале је $k=\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}=\frac{2a^2}{3b^2}=\frac{8}{3}$, а одатле $a^2=4b^2$. Заменом у једначину $\frac{36}{25}b^2+\frac{16}{25}a^2=a^2b^2$ добија се: $b=1$, $a=2$. Површина је 2π.

3. На обе стране једначине додамо $\frac{a^2}{4}$, па имамо: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-b$, а затим: $x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$; $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$.

50

1. $9b^2 + 16a^2 = a^2 b^2,\ b^2 = \dfrac{16a^2}{a^2-9}.$

$$P = ab\pi = 4\pi \frac{a^2}{\sqrt{a^2-9}};\quad f(a) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-9}}.\quad \text{Из}\ f'(a) = 0$$

добија се $a = 3\sqrt{2}$. Једначина елипсе: $16x^2 + 9y^2 = 288$, а њена површина 24π.

2. Тражена запремина једнака је разлици запремина купе (R) и лопте ($r = 3cm$).

$V = \dfrac{R^3\pi\sqrt{3}}{3} - 36\pi$. Из $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ имамо $R = r\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
$V = 45\pi\, cm^3 = 0{,}141\ l$.

3. $$\sin\gamma = \frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = tg\frac{\alpha+\beta}{2}.$$ Даље је

$$2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = cotg\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\dfrac{\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}},$$ а одатле $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{\gamma}{2} = 45^0,\ \gamma = 90^0.$$

51

1. Из прве једначине се добија: $10xy = 20$, $xy = 2$; из друге: $\dfrac{y}{x} = 8$. Резултат: $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2}$, $y_{1,2} = \pm 4$.

2. Површина се састоји од круга, елипсе, омотача ваљка висине $12\ cm$ и половине омотача висине $6\ cm$.
$P = 16\pi + 20\pi + 96\pi + 24\pi = 156\ cm^2$.
$V = 192\pi + 48\pi = 240\pi\ cm^3$.

3. Координате пресечних тачака јесу: $\pm\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $\pm\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Коефицијенти смера тангената у I квадранту: $k_1 = \dfrac{x_1}{y_1} = \sqrt{3}$,
$k_2 = -\dfrac{x_1}{y_1} = -\sqrt{3}$; $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^0$.

52

1. $V = x(a - 2x)^2 = f(x)$. Први извод даје корене $x_1 = \frac{a}{2}$ (минимум), $x_2 = \frac{a}{6}$ (максимум). $V = \frac{2a^3}{27}$. — Из $\frac{2a^3}{27} = 2$ добија се $a = 3\ dm$.

2. $d_1 = 16$, $d_2 = 21$; $P = 168\ cm^2$.
$168 = 10r + 17r$, $r = \frac{56}{9}$. Обим круга је $\frac{112\pi}{9}\ cm$. — Угао се може израчунати по косинусној теореми:
$\cos\alpha = -\frac{13}{85}$, $\alpha = 98^0\ 47'\ 52''$.

3. Тангента круга у пресечној тачки паралелна је с осом X. Коефицијент смера тангенте параболе једнак је 1.

53*

1. Из једначина: $ab = 5$, $2(a + b + d) = 14$, $a = b + 4d$ добија се: $b = 1$, $d = 1$, $a = 5$. Дужина правоугаоника је дакле 5 *cm*, а ред што га чине ширине гласи: 1, 2, 3, 4, ...

2. Полупречник базе нека је x; висина је $3b - x$. $f(x) = 3bx^2 - x^3$; $f'(x) = 6bx - 3x^2 = 0$, $x = 2b$. Висина је b. $V = \frac{4b^3\pi}{3}$. Омотач $M = 2b^2\pi\sqrt{5}$. Тражени угао $\alpha = 126^0 52' 11''$.

3. Пресек линија је $M\ (6, \pm 6\sqrt{3})$. Заједничка површина је $P = \frac{4}{3}x_1y_1 + \frac{r^2\pi\alpha}{360} - x_1y_1$, где је $\alpha = 120^0$.

$$P = 12(\sqrt{3} + 4\pi).$$

$$V_1 = \pi\int_0^6 18x\,dx + \pi\int_6^{12}(r^2 - x^2)\,dx = 684\pi.$$

$$V_2 = \pi\int_{-12}^{6}(r^2 - x^2)\,dx - \pi\int_0^6 18x\,dx = 1620\pi.$$

$V_2 - V_1 = 936\pi$

54

1. По косинусној теореми је: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Заменом датих вредности добија се:

$$c^2 - 9c - 22 = 0; \; c = 11cm.$$

2. $\frac{8}{m} + \frac{6}{n} = 1$. Површина троугла је: $\frac{mn}{2} = \frac{3m^2}{m-8}$. Нулифицирањем првог извода добија се $m = 16$; $n = 12$. Једначина праве гласи: $3x + 4y - 48 = 0$. Код круга је $p = q = r$. Из: $r = -\frac{3r + 4r - 48}{5}$ добија се $r = 4$. Једначина круга: $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$.

3. Природни бројеви чине аритметички ред са диференцијом 1. Ако се у формулу за суму аритметичког реда $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ замени: $a_1 = 1$, $a_n = n$, добија се:

$$S = \frac{n^2 + n}{2}.$$

55

1. Полупречник круга је растојање жиже $F(2\sqrt{3}, 0)$ од тангенте $y = x$; $r = \sqrt{6}$. Површина круга је 6π и износи $\frac{3}{4}$ површине елипсе.

2. $\sqrt[5]{-1} = x$; $x^5 + 1 = 0$; $(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$; $x_1 = -1$; $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$; $x + \frac{1}{x} = u$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$; $u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x_{2,3} = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$; $x_{4,5} = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)$.

3. $3ah = 3a^2\sqrt{3}$, $h = a\sqrt{3}$; $H = \sqrt{h^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$. Запремина $V = \frac{B.H}{3} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. Због $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ или $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ имамо: $V = 2r^3$.

56

1. $y' = \cos^2 x - \sin^2 x = 0$; $tg^2 x = 1$; $x_1 = 45^0$, $x_2 = 135^0$. За $x_1 = 45^0$ други извод $y'' = -2\sin 2x$ је негативан, функција је максимум; за $x_2 = 135^0$ други извод је позитиван, функција је минимум. $y_{max} = \frac{1}{2}$, $y_{min} = -\frac{1}{2}$.

2. Странице троугла јесу: 12, $5 + x$, $7 + x$. По Хероновом обрасцу добија се $x = 30$. Троугао је правоугли јер је $12^2 + 35^2 = 37^2$.

3. Једначина тангенте (додирна тачка у I квадранту) је $b^2ex + a^2py = a^2b^2$, њени отсечци на координатним осама јесу $x = \frac{a^2}{e}$, $y = \frac{b^2}{p}$; $P = \frac{xy}{2} = \frac{a^2b^2}{2ep}$, а јер је $p = \frac{b^2}{a}$, $P = \frac{a^3}{2e}$.

57

1. $15^x = 5^x \cdot 3^x$ — Поделити једначину са 3^{2x} и увести нову непознату: $(\frac{5}{3})^x = u$. Добија се: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

2. $P = ab\pi$. Површина отсечка је:

$$S = \frac{P}{4} - \frac{ab}{2} = \frac{P}{4} - \frac{P}{2\pi} = \frac{P}{4\pi}(\pi - 2).$$

3. $$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

58*

1. $3^{6\log x + 1} - 13 \cdot 3^{4\log x} + 13 \cdot 3^{2\log x} - 3 = 0$. Ставимо: $3^{2\log x} = u$. Добија се: $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = \frac{1}{3}$; $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{10}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Бројеви $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 1, $\sqrt{10}$ или: $\sqrt{10}$, 1, $\frac{1}{\sqrt{10}}$ јесу узастопни чланови геометријског реда. Други је ред конвергентан. $S_\infty = \frac{10}{9}(\sqrt{10} + 1)$.

2. Из једначина: $3x_1 + 10y_1 = 12$, $3x_1^2 + 4y_1^2 = 12$ добија се додирна тачка $D(-1, \frac{3}{2})$. Једначина тангенте гласи $2y - x = 4$, а њене пресечне тачке са теменим тангентама

($x = 2$ и $x = -2$) јесу $A(2, 3)$ и $B(-2, 1)$. Центар круга је $C(0, 2)$. Једначина круга гласи: $x^2 + (y - 2)^2 = 5$. Жиже $F_1(1, 0)$ и $F_2(-1, 0)$ задовољавају ову једначину.

3. $V = \frac{x^2\pi h}{3}$, $h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{25 - 10x}$.

$f(x) = 25x^4 - 10x^5$; $f'(x) = 100x^3 - 50x^4$; $x = 2$, $y = 3$, $h = \sqrt{5}$.

$$V = \frac{4\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Полупречник уписане лопте је $r = \frac{P}{s} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Тражени однос је $15:8$.

59

1. $P_1 = \frac{a^2\pi}{2} - \frac{ab\pi}{2} = \frac{a\pi}{2}\left(a - b\right)$; $P_2 = \frac{ab\pi}{2} - \frac{b^2\pi}{2} = \frac{b\pi}{2}\left(a - b\right)$.

$$P_1 : P_2 = a : b.$$

2. $x + y = 82$, $y = 82 - x$. Према Хероновој формули $P = \sqrt{50.32(50 - x)(x - 32)}$, $f(x) = (50 - x)(x - 32)$, $f'(x) = 82 - 2x = 0$. $x = y = 41$. Троугао је равнокраки, а површина му је 360.

2. $\frac{(sin\alpha + sin\beta)(sin\alpha - sin\beta)}{(cos\alpha + cos\beta)(cos\alpha - cos\beta)} =$

$$= \frac{2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \left(-2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = -1.$$

60

1. Из прве једначине се добија: $x^y = 10$, а логаритмовањем: $logx = \frac{1}{y}$. Заменом у другу једначину добија се: $y_1 = 3$, $y_2 = 1$; $x_1 = \sqrt[3]{10}$, $x_2 = 10$.

2. Дијагонале овог правоугаоника секу се под углом од 60^0. $P_1 = \frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, $P_2 = \frac{a^2\pi}{3} - \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; $P_2 - P_1 = \frac{a^2\pi}{6}$ т.ј. шестина површине круга.

3. $$V = \pi\int_0^h 2pxdx = 2p\pi \left/ \frac{x^2}{2} \right/_0^h = h^2 p\pi.$$

61*

1. Бројеви су: a, $a + d$, $a + 2d$, x. Имамо једначине: $\frac{a+2d}{a+d} = \frac{x}{a+2d}$, $3a + 3d = 12$, $2a + 3d + x = 19$. Заменом $a + d = 4$ у прву једначину и елиминисањем a из треће једначине добија се: $d_1 = 2$, $d_2 = -14$, $a_1 = 2$, $a_2 = 18$, $x_1 = 9$, $x_2 = 25$. Тражени бројеви гласе: 2, 4, 6, 9, или: 18, 4, — 10, 25.

6. Пресечна тачка правих је (6, 6), а једначина параболе $y^2 = 6x$. Тражена површина је разлика двају отсечака параболе. $P_1 = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12p} = \frac{(6+2)^3}{36} = \frac{128}{9}$. $P_2 = \frac{(6 + 12)^3}{36} = 162$. Разлика је $\frac{1330}{9}$.

3. Добијамо једначине: $R^2 + r^2 + s\,(R + r) = 42$, $R^2 + Rr + r^2 = 21$, $s^2 - (R - r)^2 = 16$, затим: $u + s\sqrt{u + 2v} = 42$. $u + v = 21$, $s^2 - u + 2v = 16$. Супституцијом $s = \sqrt{16 + u - 2v}$ и заменом $v = 21 - u$ добијамо: $u = 17$, $v = 4$; $s = 5$; $R = 4$, $r = 1$. Омотач износи $25\pi\ cm^2$.

62

1. Помоћу правила о коренима квадратне једначине добијамо: $a + b = -a$, $ab = b$, одатле: $a = 1$, $b = -2$. Једначина гласи: $x^2 + x - 2 = 0$.

2. Једначина тангенте је $x - 2y + 2p = 0$, а нормале $2x + y - 6p = 0$. $d_1 = \frac{p\sqrt{5}}{2}$, $d_2 = p\sqrt{5}$. Површина је $P = d_1 \,.\, d_2 = \frac{5p^2}{2}$.

3. $tg3\alpha = tg(2\alpha+\alpha) = \dfrac{\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}+tg\alpha}{1-\dfrac{2tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}} = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}.$

63

1. $log z + \frac{1}{2} log z + \frac{1}{4} log z + \ldots\ldots = S = \dfrac{log z}{1-\frac{1}{2}} =$ $= 2 log z = log z^2$. Дакле, продукт чланова је $p = z^2$. Непосредно: $p = z.\ \sqrt{z}.\ \sqrt[4]{z}.\ \sqrt[8]{z}.\ldots = z^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\ldots} = z^2$.

2. $\overline{AB} = 10$; $f(x) = x^2 + (10-x)^2$, $x = 5$. Дату дужину треба дакле располовити, $C(4, -1)$.

3. Површина се састоји од калоте и основног круга. $P = 2r\pi h + \rho^2\pi$, $\rho^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$; $P = 4r\pi h - h^2\pi =$ $= \pi h(4r - h)$.

64*

1. a) Парабола пролази кроз тачку (10, 10), њена је једначина $y^2 = 10x$; $V = \pi\int_0^{10} 10x dx = 500\pi = 1570 cm^3 = 1{,}57 l$.

b) Из једначине $500 = \pi\int_0^{x} 10x dx = 5\pi x^2$ добија се $x = \dfrac{10}{\sqrt{\pi}} = 5{,}6 cm$.

2. Растојање првога тела од темена правог угла после n секунда јест $103 + \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = 103 + n^2$, другога: $108 - \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = 108 - n^2 - n$.

$d = \sqrt{(103+n^2)^2 + (108-n^2-n)^2}$; $f(n) = 2n^4 + 2n^3 -$ $- 9n^2 - 216n + C$, $f'(n) = 8n^3 + 6n^2 - 18n - 216 = 0$; $4(n^3 -$ $- 27) + 3n(n-3) = 0$, $(n-3)(4n^2 + 15n + 36) = 0$, одатле $n = 3$. $d = \sqrt{112^2 + 96^2} = 147{,}5 m$.

3. $r = \dfrac{a}{2 sin\alpha}$. По синусној теореми је $2r : S = sin\varphi : sin\varepsilon$.

$sin\varepsilon = \frac{Ssin\varphi}{2r} = \frac{Ssin\alpha sin\varphi}{a}$. Висина купе је $h = S \,.\, sin(\varphi + \varepsilon)$. Запремина је $V = \frac{a^2\pi .\, sin(\varphi + \varepsilon)}{12 sin^2\alpha} \cdot S$. Нумерички се добија: $\varepsilon = 53^0 39'$, а $V = \frac{24\pi sin 56^0 21'}{sin^2 40^0} = 151{,}9$.

65

1 $y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Заменом у други извод ($y'' = 2x - 2$) налази се да је функција за x_1 максимум, а за x_2 минимум. $y_{max} = 0$, $y_{min} = 4$.

$$\int_0^4 \frac{(2x - \sqrt{x})}{x} dx = \int_0^4 (4x - 4\sqrt{x} + 1)\, dx = \frac{44}{3}.$$

2) a) $P = \frac{1}{2} sin\alpha$. b) $h_1 = sin\alpha$; $h_2 = cos\frac{\alpha}{2}$; $h_1 : h_2 = 2 sin\frac{\alpha}{2} : 1$. c) $m = cos\alpha$; $n = 1 - cos\alpha = 2 sin^2\frac{\alpha}{2}$. Из $cos\alpha = 1 - cos\alpha$ добија се: $\alpha = 60^0$, троугао је равностран.

3. Висина x допунске купе налази се из сличности троуглова. $R : r = (h + x) : x$, $x = \frac{rh}{R - r}$. Запремина $V = \frac{r^2\pi x}{3} = \frac{r^3\pi h}{3(R-r)}$.

66

1. $3x - 3y = 3^y$, $x - y = 3^{y-1}$. Заменом у другу једначину добија се: $15y = 225$; $y = 2$, $x = 5$.

2. $e = 4$; $P = 2y\,(x - 4)$. Из једначине елипсе $y = \sqrt{\frac{96 - 2x^2}{3}}$; $f(x) = (x - 4)\sqrt{48 - x^2}$; $f'(x) = \sqrt{48 - x^2} - \frac{x\,(x-4)}{\sqrt{48 - x^2}} = 0$.

Функција је максимум за $x = 6$; $y = 2\sqrt{2}$. Обим је $4y + 2(x - 4) = 4(2\sqrt{2} + 1)$.

3. $2R + 2r = 2s$ (тангентни четвероугао). Висина купе једнака је пречнику лопте. $h = 2\rho = \sqrt{s^2 - (R - r)^2} = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}$; $\rho = \sqrt{Rr}$.

67*

1. $r = x + \frac{p}{2}$, $x = 4$, $y = \pm 4$. $P = \frac{2}{3}xy$ минус површина троугла. $P = \frac{32}{3} - 6 = \frac{14}{3}$.

$$V = \pi \int_0^4 4x dx - \frac{r^2 \pi h}{3} = 32\pi - 16\pi = 16\pi.$$

2. $36 = \sqrt{\frac{26 + c}{2} \cdot \frac{8 + c}{2} \cdot \frac{c - 8}{2} \cdot \frac{26 - c}{2}}$ Из једначине $c^4 - 740c^2 + 64000 = 0$ добија се: $c_1 = 8\sqrt{10}$, $c_2 = 10$. У првом случају највећи угао γ је *туп* јер је

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{15}{17}.$$

У другом случају троугао је такође тупоугли јер је

$$\cos\beta = -\frac{3}{5}.$$

3. Чланови геометријског реда јесу: a, aq, aq^2, чланови аритметичког: $2a$, $2a + d$, $2a + 2d$. Из једначина $2a + d = 13000$, $a(1 + q + q^2) = 39000$, $2a + 2d = aq^2 - 7000$ добија се елиминисањем непознате d из прве и треће једначине: $a(q^2 + 2) = 33000$. *Два решења*: $a_1 = 3000$, $a_2 = 4000$, $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{5}{2}$, $d_1 = 7000$, $d_2 = 5000$. Први начин дељења је повољнији за особу B и то за 4000, односно 3000 динара.

68

1. $a^{10}q^{45} = 243$, $a^5q^{20} = 243$; $a^2q^9 = 3$, $aq^4 = 3$; $q = \frac{1}{3}$; $a = 243$. Прогресија: $243, 81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$.

2. $\sin\alpha = \frac{x}{b - x}$, $x = \frac{b\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{b\sin\alpha}{2\sin^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}$.

Коефицијенти смера у пресечним тачкама: $y_1' = 2x_1 + a = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, $y_2' = 2x_2 + a = -\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$.

69

1. $\dfrac{\frac{b}{a} + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}, \dfrac{b(a^2 + b^2)}{a} = \frac{64}{9}\sqrt{3}.$ Из прве се једначине

добија $a = b\sqrt{3}$, а заменом у другу: $b = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $a = 4$. Једначина хиперболе је $x^2 - 3y^2 = 16$. — Има ли овај задатак још једно решење?

2. $x = (x - i)\, q^n$, одатле $x = i\,\frac{q^n}{q^n - 1}$. У специјалном примеру: $x = 15545$ динара.

3. $y = C,\ y + \Delta y = C,\ \Delta y = C - y = 0,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0;$

$lim\ \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ако Δx тежи нули, $= y' = 0$.

Функција $y = C$ претставља праву паралелну с осом X, а коефицијент смера такве праве једнак је нули.

70

1. $d^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 108^0 = 2a^2 + 2a^2 \cos 72^0;$

$a = \sqrt{\frac{d^2}{2(1 + \cos 72^0)}} = \sqrt{\frac{d^2}{2.\ 2\cos^2 36^0}} = \frac{d}{2\cos 36^0}$. Обим је

$O = \frac{5d}{2\cos 36^0} = 12{,}3\ cm$. Површина је $P = O \cdot \frac{r}{2}$, где је

$r = \frac{a}{2}\, cotg\, 36^0 = \frac{d}{4\sin 36^0}$. Дакле, $P = \frac{5d}{2\cos 36^0} \cdot \frac{d}{8\sin 36^0} =$

$= \frac{5d^2}{8\sin 72^0} = 10{,}5\ cm^2.$

2. $\frac{e}{a} = \frac{1}{59}$, $a = 59e$.

$(a - e) : (a + e) = 58e : 60e = 29 : 30.$

3. $y = kx + n,$

$y_1 = k(x + d) + n = kx + n + kd,$

$y_2 = k(x + 2d) + n = kx + n + 2kd,$ и т. д.

Разлика реда је kd.

71*

1. $S_1 = cotg\alpha = \frac{sin2\alpha}{1 - q}$; $q = \frac{cotg\alpha - sin2\alpha}{cotg\alpha} = 1 - 2sin^2\alpha$ $= cos2\alpha$. Ред гласи: $sin2\alpha$, $sin2\alpha cos2\alpha$, $sin2\alpha cos^2 2\alpha$, — — —

$S_2 = cotg^2\alpha = \frac{a}{1 - cos2\alpha}$; $a = 2cos^2\alpha$. Ред гласи: $2cos^2\alpha$, $2cos^2\alpha cos2\alpha$, $2cos^2\alpha cos^2 2\alpha$, — — — — — Сума трећег реда: $S_3 = \frac{2sin2\alpha cos^2\alpha}{1 - cos^2 2\alpha} = \frac{2sin2\alpha cos^2\alpha}{sin^2 2\alpha} = cotg\alpha.$

Дакле: $S_3 = S_1$.

2. $V_1 = \frac{R^3\pi\sqrt{3}}{24}$; $V_2 = \frac{x^2\pi y}{3} = \frac{\pi}{3}(R^2y - y^3)$; $f(y) = R^2y - y^3$, $f'(y) = R^2 - 3y^2 = 0$; $y = \frac{R\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{R\sqrt{6}}{3}$. Према томе $V_2 = \frac{2R^3\pi\sqrt{3}}{27}$; $V_1 : V_2 = 9 : 16$; $M_1 = \frac{R^2\pi}{2}$, $M_2 = \frac{R^2\pi\sqrt{6}}{3}$, $M_1 : M_2 =$ $= 3 : 2\sqrt{6}$.

3. Једначине тангената јесу: $y = x + 6$, $y = 2x + 3$, $y = 3x + 2$, а њихове пресечне тачке: $A(3,9)$, $B(2,8)$, $C(1,5)$. — Из једначина: $(3 - p)^2 + (9 - q)^2 = r^2$, $(2 - p)^2 + (8 - q)^2 =$ $= r^2$, $(1 - p)^2 + (5 - q)^2 = r^2$ добија се: $p = 6$, $q = 5$, $r =$ $= 5$. Једначину круга $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 25$ задовољава жижа $F(6,0)$.

72

1. a) Нулифицирањем појединих фактора добија се: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

b) $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$, $x(x^2 - 2x - 5) = 0$: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{6}$.

2. $P = xy = \frac{b}{a} x\sqrt{a^2 - x^2}$; $f(x) = a^2x^2 - x^4$, $f'(x) = 2a^2x - 4x^3 = 0$, $2x(a^2 - 2x^2) = 0$; $(x = 0)$, $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Из $\frac{ab}{2} = b^2$ добија се: $a = 2b$.

3. Растојање калотиног темена од периферије основног круга је геометријска средина пречника круга и висине калоте: $\rho = \sqrt{2r \cdot h}$. Калота је $K = 2r\pi h = \rho^2\pi$.

73

1. $r = x + \frac{p}{2}$, $x = \frac{y^2}{2p}$. Дакле: $\frac{18}{p} + \frac{p}{2} = 10$, а одатле: $p_1 = 18$, $p_2 = 2$.

Две параболе: $y^2 = 36x$ и $y^2 = 4x$.

2. $\frac{a^{\sqrt{\log x}}}{a} = \frac{b}{b^{\sqrt{\log x}}}, (ab)^{\sqrt{\log x}} = ab$, $\log x = 1$, $x = 10$.

3. $R\pi = 2r\pi$, $r = \frac{R}{2}$. А како је R страница купе, то је осни пресек купе троугао страница R, R, $2r = R$, тј. равнострани троугао.

74

1. Антилогаритмовањем добија се:

$$\frac{x+7}{x-2} = 10;\ x = 3.$$

2. Пресечне тачке парабола јесу $O\ (0,\ 0)$ и $A\ (2p,\ 2p)$ Заједничка површина је

$$P = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\,dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p}dx = \left[\frac{2x\sqrt{2px}}{3}\right]_0^{2p} - \left[\frac{x^3}{6p}\right]_0^{2p} = \frac{4p^2}{3}.$$

Из $\frac{4p^2}{3} = 1$ имамо $2p = \sqrt{3}$. Једначине парабола гласе: $y^2 = x\sqrt{3}$, $x^2 = y\sqrt{3}$.

3. $sin3\alpha = sin(2\alpha + \alpha) = sin2\alpha cos\alpha + cos2\alpha sin\alpha =$
$= 3sin\alpha cos^2\alpha - sin^3\alpha = 3sin\alpha(1 - sin^2\alpha) - sin^3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha.$

75

1. $3^{x+y}(1 - \frac{1}{3} + 9) = 261$; $3^{x+y} = 27$. Добијамо систем: $x + y = 3$, $x^3 + y^3 = 27$. Заменом $y = 3 - x$ у другу једначину: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; $y_1 = 3$, $y_2 = 0$.

2. $r^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$; $p = \frac{y^2}{2x} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{10}{3}} = \frac{15}{8}$.

Једначина праве кроз дате две тачке гласи: $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$. Ту исту једначину добијамо када поставимо једначину тангенте круга ($xx_1 + yy_1 = r^2$) у тачки M или једначину тангенте параболе $[yy_1 = p(x + x_1)]$ у тачки N.

3. $cotg\alpha - cotg\,\beta = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} - \frac{cos\beta}{sin\beta} = \frac{sin\beta cos\alpha - cos\beta sin\alpha}{sin\alpha sin\beta}$
$= \frac{sin(\beta - \alpha)}{sin\beta sin\alpha}$.

76*

1. $y' = 2x(2 - p) + p + 1 = 0$, а одатле $x = -\frac{p+1}{2(2-p)}$.

Заменом у дату функцију имамо: $\frac{(p+1)^2}{4(2-p)} - \frac{(p+1)^2}{2(2-p)} -$
$-(p+1) = 0$, $(p+1)^2 - 2(p+1)^2 - 4(p+1)(2-p) = 0$. $p_1 = -1$, $p_2 = 3$. Други извод је $y'' = 2(2-p)$; $y_1'' = 6$, $y_2'' = -2$. За $p = -1$ функција има минимум 0, за $p = 3$ функција има максимум 0.

2. $P_1 = \frac{R^2}{2} sin2\alpha$, $P_2 = r\,.\,h = Rsin\alpha\,.\,R(1 + cos\alpha) =$
$= R^2 sin\alpha\,(1 + cos\alpha)$. Из $R^2 sin\alpha cos\alpha = \frac{R^2 sin\alpha(1 + cos\alpha)}{10}$ добија се $cos\alpha = \frac{1}{9}$, $\alpha = 83^0\ 37'\ 15''$, $2\alpha = 167^0\ 14'\ 30''$. Површина

отсечка је $S = \frac{R^2\pi(180-\alpha)}{360} - \frac{R^2 sin(180-\alpha)}{2} = 0{,}84 -$
$- 0{,}497 = 0{,}343$ јединица.

3. Из услова $a^2k^2 + b^2 = n^2$ за тангенту елипсе добија се: $\frac{16a^2}{25} + b^2 = 25$; $a = 5$, $b = 3$. Једначина елипсе је $9x^2 +$ $+ 25y^2 = 225$. Једначина пречника је $y = \frac{4}{5}x$, а његова пресечна тачка с елипсом $M\left(\pm 3, \pm\frac{12}{5}\right)$.

$$V_1 = \frac{9\pi}{25}\int_0^r (25 - x^2)dx - \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{594\pi}{25} - \frac{144\pi}{25} = 18\pi.$$

$$V_2 = \frac{r^2\pi h}{3} + \frac{9\pi}{25}\int_3^5 (25 - x^2)dx = \frac{144\pi}{25} + \frac{156\pi}{25} = 12\pi.$$

$V_1 : V_2 = 3:2.$

77

1. Странице ромбоида x и y. Површина $P = xy sin 60^0 =$ $= \frac{xy\sqrt{3}}{2}$, одакле $xy = 56$. По косинусној теореми је $169 =$ $= x^2 + y^2 - 2xy cos 120^0 = x^2 + y^2 + xy$. Из једначина: $xy =$ $= 56$, $x^2 + y^2 = 113$ следује: $x_1 = 8$, $x_2 = 7$; $y_1 = 7$, $y_2 = 8$. Обим је $30 cm$.

2. $V_1 = \frac{4\rho^3\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$; $V_2 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) =$ $= \frac{2\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$. $V_1 : V_2 = 2:(R^2 + Rr + r^2)$. Ако се у једначину: $\pi[R^2 + r^2 + s\,(R + r)] = 8\pi$ замени $s = R + r$ (тангентни четвероугао!), добија се: $R^2 + Rr + r^2 = 4$. Дакле: $V_1 : V_2 =$ $1:2$. Однос запремина исти је као и однос површина.

3. Тежиште $T\,(x, y)$ дели сваку тежишну линију троугла у односу $2:1$ (познато из планиметрије). Половиште странице $AB : D\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$; $\lambda = 2$.

$$x=\frac{x_3+2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{y_3+2\cdot\frac{y_1+y_2}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

78

1. $a=3k$, $b=4k$, $c=12k$. Заменом у $abc=2(ab+ac+bc)$, добија се $k=\frac{4}{3}$. Дакле: $a=4$, $b=\frac{16}{3}$, $c=16$.

$D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{52}{3}$.

2. $a=\frac{2P}{h_a}=100$; $b=\frac{2P}{h_b}=35$. Из $\frac{ab\sin\gamma}{2}=P$ добија се: $\sin\gamma=\frac{3}{5}$. Онда је $\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\frac{4}{5}$. По косинусној теореми: $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=75$. Дакле, $h_c=\frac{2P}{c}=28cm$.

— *Има ли овај задатак још које решење?*

3. Ако се у једначину нормале $y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$, замени $y=0$, добија се апсциса пресечне тачке с осом X: $x=\frac{a^2x_1-b^2x_1}{a^2}=\frac{e^2x_1}{a^2}=m$. Други је део: $n=x_1-m=$ $=x_1-\frac{a^2x_1-b^2x_1}{a^2}=\frac{b^2x_1}{a^2}$. Дакле, $m:n=e^2:b^2$.

79

1. $a(a+2d)=\sin^2\alpha$, $\frac{a}{a+2d}=tg^2\frac{\alpha}{2}$. Заменом $a+2d=\frac{a}{tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

у прву једначину добија се: $a_{1,2}=\pm\,2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\pm\,(1-\cos\alpha)$. $d_{1,2}=\pm\cos\alpha$. Редови гласе:

I	$1-\cos\alpha$,	1,	$1+\cos\alpha$;	или:
II	$-1+\cos\alpha$,	-1,	$-1-\cos\alpha$.	

Ако је $\alpha = 60^0$, имамо:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I} & \frac{1}{2}, & 1, & \frac{3}{2}; \text{ или:} \\ \mathrm{II} & -\frac{1}{2}, & -1, & -\frac{3}{2}. \end{array}$$

2. Из једначина: $-x_1 + 7y_1 = 25$, $x_1^2 + y^2_1 = 25$ добију се додирне тачке тангената: $D_1(3, 4)$ и $D_2(-4, 3)$. $k_1 = -\frac{3}{4}$, $k_2 = \frac{4}{3}$; тангенте стоје једна на другој нормално: $\varphi = 90^0$.

a) $l = \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{5\pi}{2}$. *b*) $P = r^2 - \frac{r^2\pi\alpha}{360} = 25\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Висина пирамиде је $h = \frac{D}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}$.

Запремина сложеног тела је $V_1 = a^3 + 2a^2h = a^3\sqrt{3}$.

Запремина лопте је $V_2 = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{2}$.

$$V_1 : V_2 = 2 : \pi.$$

80

1. $$\begin{array}{llll} \mathrm{I} & a, & a+d, & a+2d, \ldots \\ \mathrm{II} & d, & d+a, & d+2a, \ldots \\ \mathrm{III} & a+d, & 2(a+d), & 3(a+d), \ldots \end{array}$$

Из једначина: $ad(a+d) = 90$, $2(a+d)^3 = 2000$ добија се даље: $a + d = 10$, $ad = 9$, одакле је: $d_1 = 9$, $d_2 = 1$; $a_1 = 1$, $a_2 = 9$.

Редови гласе: 1, 10, 19, . . .; 9, 10, 11, . . .; 10, 20. 30, . . .

2. $A(1, 1)$, $B(2, \frac{1}{2})$.

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2dx = \pi\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\int_1^2 x^{-2}dx = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{\pi}{2}$$

3 $h_c = a sin\beta$; $a = 2R sin\alpha$; дакле: $h_c = 2R sin\alpha sin\beta$,

Према томе: $\frac{h_c}{R} = 2 sin\alpha sin\beta$. Аналогно се добија:

$\frac{h_b}{R} = 2 sin\alpha sin\gamma$; $\frac{}{R} = 2 sin\beta sin\gamma$. — Код равностраног троугла је $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$, па је: $\frac{h}{R} = 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$.

1. Углови су : α, $90^0-\alpha$, 90^0, а њихови синуси: $sin\alpha$, $cos\alpha$, 1. Из једначине: $cos\alpha - sin\alpha = 1 - cos\alpha$ следује $sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha = 36^0\,52'\,11''$, $90^0-\alpha = 53^0\,7'\,49''$.

Из $\cos\frac{90^0-\alpha}{2} = \frac{a}{3\sqrt{5}}$ добија се: $a=6$, па због $sin\alpha = \frac{3}{5}$ имамо: $c=10$; $b=8$.

2. $V_1 - V_2 = \frac{\pi h^2}{3}\left(3r-h\right) - \frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \pi\left(rh^2-\frac{h^3}{2}\right)$; $f(h) = rh^2 - \frac{h^3}{2}$, $f'(h) = 2rh - \frac{3h^2}{2} = 0$, одакле $h=\frac{4r}{3}\cdot f''(h) = 2r - 3h = -2r$. Површина отсечка $P = 2r\pi h + \rho^2\pi = \frac{8r^2\pi}{3} + \frac{8r^2\pi}{9} = \frac{32r^2\pi}{9}\cdot$ Површина лопте $L = 4\pi.\left(\frac{2r}{3}\right)^2 = \frac{16r^2\pi}{9}$; $P:\,L = 2:1$.

3. Из једначина: $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 4p^2$, $y^2 = 2px$ добија се $x_1 = \frac{3p}{2}$, $y_1 = p\sqrt{3}$; $k_1 = \frac{p}{y_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $k_2 = -\frac{x_1-p}{y_1-q} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $tg\varphi = \frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2} = \sqrt{3}$, $\varphi = 60^0$.

82*

1. $x_1 = 3a+7$, $x_2 = 3a+3$.
$f(a) = (3a+7)^3 + (3a+3)^2 = 27a^3 + 198a^2 + 459a + 352$,
$f'(a) = 81a^2 + 396a + 459 = 0$, одакле: $a_1 = -\frac{17}{9}$, $a_2 = -3$.
$f''(a) = 162a + 396$.

За $a = -\frac{17}{9}$, други извод има вредност 90, а функција минимум $m = \frac{256}{27}$.

За $a = -3$, други извод је -90, а функција има максимум $M = 28$.

Дата једначина гласи у првом случају:

$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{32}{9} = 0$, а у другом:

$x^2 + 8x + 12 = 0$.

2. $h=\sqrt{100-36}=8$; $P_1=\frac{28.8}{2}=112$; $P_2=xy=56.$

Из сличности троуглова добија се однос $8:6=y:\left(10-\frac{x}{2}\right)$

$y=\frac{40-2x}{3}$ Дакле: $\frac{x(40-2x)}{3}=56$, $x=14$; $y=4$. Друге су вредности неупотребиве.

$$V_1=\frac{8\pi}{3}(100+40+16)=416\,\pi$$
$$V_2=49\pi.\ 4=196\pi.$$
$$V_1:V_2=104:49.$$

3. Из једначина: $\frac{25}{4}b^2-\frac{9}{16}a^2=a^2b^2$, $\frac{2b^2}{a}=1$ добија се: $b=1$, $a=2$; једначина хиперболе је $x^2-4y^2=4$.
$k_{1,2}=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{1}{2}$; $tg\varphi=\frac{4}{3}$, $\varphi=53^0\,7'\,48''$.

Пресечна тачка асимптоте $y=\frac{1}{2}x$ и елипсе $x^2+4y^2=4$ у првом квадранту је $M\left(\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, а коефицијент смера тангенте елипсе у тој тачки је $-\frac{1}{2}$. Тангента је дакле паралелна с другом асимптотом. Према томе, *угао под којим асимптота сече елипсу једнак је углу између асимптота.*

83*

1. $\overline{BD}=x$; $t_1=\frac{\sqrt{8100+x^2}}{40}$, $t_2=\frac{200-x}{50}$; $t_1+t_2=f(x)$;
$f'(x)=\frac{1}{40}\cdot\frac{x}{\sqrt{8100+x^2}}-\frac{1}{50}=0$, одакле: $x=120\ km$.

$$t_1+t_2=5\quad 21^m$$

2. $a^2+b^2=25$; $a=4$, $b=3$. Једначина хиперболе: $9x^2-16y^2=144$. Полупречник круга је отстојање жиже од асимптоте. $r=3$. Једначина круга је $(x-5)^2+y^2=9$. Пресечна тачка хиперболе и круга има апсцису $x_1=\frac{28}{5}$.

$$V = \pi \int_2^{\frac{28}{5}} [9 - (x-5)^2]\,dx - \frac{9\pi}{16} \int_4^{\frac{28}{5}} (x^2 - 16)\,dx =$$

$$= \pi \left[-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 16x \right]_2^{\frac{28}{5}} - \frac{9\pi}{16} \left[\frac{x^3}{3} - 16x \right]_4^{\frac{28}{5}} = \frac{2916\pi}{125} -$$

$-\frac{816\pi}{125} = \frac{84\pi}{5}$. — Запремина лоптиног отсечка може се израчунати и према обрасцу $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$, где је $h = \frac{18}{5}$.

3. $R - r = s\cos\alpha = 8$; $R^2 + r^2 + 10(R + r) = 320$. Добија се: $R = 12$, $r = 4$; $h = 6$; $V = 416\pi\,cm^3$.

Из сличности троуглова следује $12 : x = 4 : (6 - x)$, одакле $x = \frac{9}{2}$. Висина друге купе је $\frac{3}{2}$. Збир запремина исечених купа је 224π, а преостали део купе је $192\pi = \frac{6}{13}V$.

84

1. $K . 1{,}055^{15} = 8000 \cdot \frac{1{,}055^{15} - 1}{0{,}055}$, одатле:

$$K = 8000 \cdot \frac{1{,}055^{15} - 1}{0{,}055 \cdot 1{,}055^{15}} = 80000 \text{ динара.}$$

2. По Питагорином правилу добију се једначине: $b^2 + \frac{a^2}{4} = 16$, $\frac{b^2}{4} + a^2 = 49$, одатле: $a = 4\sqrt{3}$, $b = 2$.

Угао између тежишних линија може се наћи по косинусној теореми из троугла чије су странице: $\frac{b}{2}$, $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{1}{3}t_b$. Добија се: $\cos\varepsilon = \frac{13}{14}$, $\varepsilon = 21^0\,47'\,23''$.

3. Ако је права тангента круга, њено је отстојање од центра круга једнако полупречнику:

$$r = \frac{n}{\pm\sqrt{k^2 + 1}}, \text{ одатле: } n^2 = r^2(k^2 + 1).$$

85*

1. $h - H = 1$, $h - a = 3$. Заменом $H = \sqrt{h^2 - \frac{a^2}{4}}$ добија се: $(h-1)^2 = h^2 - \frac{a^2}{4}$, а због $h = a + 3$ следује: $a = 10$, $h = 13$, $H = 12$.

$$P = a^2 + 2ah = 360\ cm^2.$$

Полупречник r уписане лопте једнак је полупречнику круга уписаног у равнокраки троугао страница a, h, h. Добија се: $r = \frac{10}{3}$.

$$V_1 = 400\ cm^3,\quad V_2 = \frac{4000\pi}{81}\ cm^3;\quad V_1 : V_2 = 81 : 10\pi.$$

2. Ако је висина објекта y, имамо: $y = a tg\alpha = (a - x) \cdot tg\, 2\alpha$, одатле: $x = a\,\frac{tg 2\alpha - tg\alpha}{tg 2\alpha} = a\,\frac{tg\alpha + tg^3\alpha}{2tg\alpha} =$

$$= \frac{a}{2}(1 + tg^2\alpha) = \frac{a}{2cos^2\alpha}.$$

У специјалном случају: $x = 60\ m$.

3. Из $9b^2 + \frac{16}{25}a^2 = a^2b^2$ и $a : b = 5 : 1$ следује: $a = 5$, $b = 1$. Једначина тангенте гласи: $3x - 20y + 25 = 0$, а њена пресечна тачка с осом X је $S\left(-\frac{25}{3}, 0\right)$. Једначине тангената повучених из те тачке на круг $x^2 + y^2 = 25$ гласе:
$3x - 4y + 25 = 0$, $3x + 4y + 25 = 0$. Угао између тангенте елипсе и прве тангенте круга: $tg\varphi_1 = \frac{48}{89}$, $\varphi_1 = 28^0 20' 20''$; а угао између тангенте елипсе и друге тангенте круга:
$tg\varphi_2 = \frac{72}{71}$, $\varphi_2 = 45^0 24' 2''$. Углови φ_1 и φ_2 супротног су предзнака.

86

1. Заменом $x = y + m$ у квадратну једначину добија се: $y_{1,2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{100 - m^2}{4}}$. Да оба корена буду једнака,

мора бити $100 - m^2 = 0$, т. ј. $m = \pm 10$. У том су случају корени датог система: $y = -5$, $x = 5$, или: $y = 5$, $x = -5$.

Линеарна једначина претставља праву, а квадратна централни круг. Ако је $m = \pm 10$, права је тангента круга, а добивена решења су координате додирне тачке.

2. Полупречници база су x и y. $M_1 + M_2 = 2\pi(x+2y)$. Из $x^2\pi + 2y^2\pi = 12\pi$ добија се $x = \sqrt{12 - 2y^2}$. Дакле: $f(y) = \sqrt{12 - 2y^2} + 2y$; $f'(y) = \frac{-4y}{2\sqrt{12-2y^2}} + 2 = 0$, одатле: $y = 2$; $x = 2$; $(M_1 + M_2)_{max} = 12\pi$; $V_1 = 4\pi$; $V_2 = 8\pi$.

3. $1 + cos 2\alpha + sin 2\alpha = (sin^2\alpha + cos^2\alpha) + (cos^2\alpha - sin^2\alpha) + 2 sin\alpha\, cos\alpha = 2cos\alpha(sin\alpha + cos\alpha) = 2cos\alpha\,[sin\alpha + sin\,(90^0 - \alpha)] = 2cos\alpha.\ 2sin\,45^0\,cos\,(\alpha - 45^0) = 2\sqrt{2}\,cos\alpha cos(\alpha - 45^0)$. — Ако се место $1 + cos\,2\alpha + sin 2\alpha$ напише: $sin\,90^0 + sin\,(90^0 - 2\alpha) + sin 2\alpha$, задатак се може решити применом обрасца: $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = 4cos\frac{\alpha}{2} cos\frac{\beta}{2} cos\frac{\gamma}{2}$, за $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. —

87

1. Дељењем једначина: $a\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = 1365$ и $a\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = 1344$ добијамо: $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} + 1 = \frac{1365}{1344} = \frac{65}{64}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$, $n = 6$.

Први члан је $a = 1024$, а последњи $a_6 = aq^5 = 1$.

2. $x_1^2 + 4 = r^2$, $(x_1 + 2)^2 + 64 = R^2$. Одузимањем ових једначина добија се: $4x_1 + 64 = R^2 - r^2 = 80$. Имамо: $x_1 = 4$; $r^2 = 20$, $R^2 = 100$. Тражене једначине: $x^2 + y^2 = 20$, $x^2 + y^2 = 100$.

3. $$\frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} + \frac{cotg^2\alpha}{1 + cotg^2\alpha} = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} + \frac{\frac{1}{tg^2\alpha}}{1 + \frac{1}{tg^2\alpha}} =$$

$$= \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} + \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{tg^2 + 1}{1 + tg^2\alpha} = 1.$$

88

1. Тражени број је $7m$, а број свих претходних бројева је $7m-1$. Из једначине:

$7m = \frac{1}{24} \cdot \frac{7m-1}{2} [2+(7m-2)]$ добија се: $m = 7$. Тражени број је 49.

2. $$y' = \frac{(1+tgx)cosx - sin\,x.\frac{1}{cos^2x}}{(1+tgx)^2} = 0,$$

$cos^3x + sinx\,cos^2x - sinx = 0, \quad cos^3x - sinx(1-cos^2x) = 0,$ $cos^3x - sin^3x = 0$, а дељењем са cos^3x добија се: $tg^3x = 1$. Најближе вредности за x јесу: $x_1 = 45^0$, $x_2 = 225^0$.

Ако ставимо $y' = \frac{u}{v}$, онда је $y'' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, па због $\frac{u}{v} = 0$ имамо: $y'' = \frac{u'}{v}$. Како је v позитивно, предзнак израза u' показује да ли је функција максимум или минимум.

$$u' = -3sinx\,cos^2x - 3sin^2x\;cosx.$$

За $x = 45^0$, други је извод негативан, функција дакле има максимум $M = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

За $x = 225^0$, други извод је позитиван, функција има минимум $m = \frac{-\sqrt{2}}{4}$.

3. Ако се изврше назначена множења, види се да се изрази за двоструку површину разликују само у предзнаку. То значи: ако према првом обрасцу добијемо за површину датог троугла позитивну вредност, добићемо по другом — задржавајући смер обилажења темена — негативну. И обрнуто.

89

1. $sinx - siny = 2\,cos\,\frac{x+y}{2}\,sin\,\frac{x-y}{2}$. Заменимо ли $cos\frac{x+y}{2} = cos60^0 = \frac{1}{2}$, добијамо: $sin\,\frac{x-y}{2} = sin\alpha$, а одатле $x - y = 2\alpha$; $x + y = 120^0$. Дакле: $x = 60^0 + \alpha$, $y = 60^0 -$

2. Одговарајуће тачке параболе $y^2 = 2px$ имају координате $(x, 6)$ и $(x+18, 12)$. Заменом у једначину параболе:

$36 = 2px$, $144 = 2p(x+18)$; $p = 3$, $x = 6$.

$$V = \pi \int_6^{24} 6x dx = 3\pi \Big[x^2\Big]_6^{24} = 1620\pi \ cm^3.$$

3. Сума геометријског реда је

$$S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Код бесконачног конвергентног геометријског реда $n \to \infty$, $|q| < 1$, па $|q^n| \to 0$. Дакле је

$$S_\infty = \frac{-a}{q-1} = \frac{a}{1-q}.$$

90*

1. $2(ab + ac + bc) = 1022$, $a + b + c = 40$, $a^2 + b^2 = c^2$. Квадрирањем друге једначине добија се: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 1600$, а заменом из прве и треће: $2c^2 = 578$; $c = 17$. Из $a + b = 23$, $a^2 + b^2 = 289$ имамо: $a_1 = 15 = b_2$, $a_2 = 8 = b_1$.

$$V = 2040 \ cm^3; \ D = 17\sqrt{2} \ cm.$$

2. Једначина висине h_c гласи: $y = -7x + 10$, а једначина висине h_b: $y = -\frac{x}{3} + \frac{10}{3}$. Пресек висина је $S(1,3)$. Из једначина: $(5-p)^2 + (5-q)^2 = R^2$, $(-2-p)^2 + (4-q)^2 = R^2$, $(2-p)^2 + (-4-q)^2 = R^2$ следује: $p = 2$, $q = 1$, $R = 5$.

Тражена једначина круга гласи: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$. Однос површина је $1:5$.

3. По косинусној теореми је $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\alpha = 45°$. Тако исто: $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$; $\gamma = 60°$; $\beta = 75°$.

$$a + x = 2b, \ x = 2b - a = 2\sqrt{3}.$$

$$P_1 = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}; \ P_2 = 2\sqrt{3}+3; P_2 - P_1 = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

91*

1. $50\,000\,000\ 1{,}03^{58} = a\dfrac{1{,}03^{40}-1}{1{,}03^{2}-1}$, одатле:

$$a = \frac{500\,000\,000.\ 1{,}03^{58}}{1{,}03^{40}-1}(1{,}03^2-1) = 7\,475\,900 \text{ динара.}$$

2. Из једначина:

$2r(r+x) = r(r+\sqrt{y^2+r^2}),\ y=3x$

добија се: $x = \dfrac{4r}{5} = 4, y = 12.$ — $M = \pi s\,(r+\rho) = \pi(r+\rho)\cdot$ $\cdot\sqrt{x^2+(r-\rho)^2}$. Из пропорције $r : y = \rho : (y-x)$ следује $\rho = \dfrac{r(y-x)}{y} = \dfrac{10}{3}$. Омотач износи $\dfrac{325\pi}{9}$ cm^2.

$\cos\alpha = \dfrac{x}{s} = \dfrac{12}{13}$; $\alpha = 22^0\,37'\,15''$.

3. Помоћу услова $a^2k^2 - b^2 = n^2$ за тангенту хиперболе добијамо једначине: $\dfrac{25a^2}{9} - b^2 = \dfrac{1024}{9}$, $\dfrac{289a^2}{225} - b^2 = \dfrac{4096}{225}$, одакле: $a = 8$, $b = 8$; равнострана хипербола: $x^2 - y^2 = 64$. Решењем сваке од датих једначина са једначином хиперболе добију се додирне тачке: D_1 (10, 6), D_2 (17, 15).

За углове пресека имамо: у тачки $D_1 : tg\alpha = \frac{4}{33}$, $\alpha = 6^0\,54'\,41''$; у тачки $D_2 : tg\beta = \frac{8}{129}$, $\beta = 3^0\,32'\,55''$.

92

1. Добија се: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. Максимална вредност синуса је 1, дакле: $\sin 2\alpha = 1, 2\alpha = 90^0$, $\alpha = 45^0$.

2. $100 = 20.\dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}{\frac{4}{5}-1}$. Добија се: $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$, што значи да је $n = \infty$. Ред је бесконачан.

3. Растојање темена $(a, 0)$ од асимптоте $bx - ay = 0$ је $d = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{ab}{e}$. — Код равностране хиперболе је: $b = a$, $e = a\sqrt{2}$, према томе: $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

93

1. $log^2(x+y)-3log(x+y)+2=0$, одатле: $(x+y)_1 = 100$, $(x+y)_2=10$. Из система: $x^2-y^2=2000$, $x+y=100$ добија се: $x_1=60$, $y_1=40$. А из система: $x^2-y^2=2000$, $x+y=10$ имамо: $x_2=105$, $y_2=-95$.

2. Полупречници база купе јесу x и y. Из $R\pi=2x\pi$, $r\pi=2y\pi$ имамо: $x=\frac{R}{2}$, $y=\frac{r}{2}$. Како је $s=R-r$, то је

$$h=\sqrt{(R-r)^2-\frac{(R-r)^2}{4}}=\frac{R-r}{2}\sqrt{3}.$$

$$V=\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\,(R^3-r^3);\ \alpha=60^0.$$

3. Отсечци тангенте $b^2xx_1+a^2yy_1=a^2b^2$ на координатним осама јесу: $m=\frac{a^2}{x_1}$, $n=\frac{b^2}{y_1}$. Површина троугла је $P=\frac{mn}{2}=\frac{a^2b^2}{2x_1y_1}$. Уместо минимума површине тражићемо максимум њене реципрочне вредности. $y_1=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}$, па је $x_1y_1=\frac{b}{a}x_1\sqrt{a^2-x_1^2}$.

$f(x)=a^2x_1^2-x_1^4$, $f'(x_1)=2a^2x_1-4x_1^3=0$, одатле: $x_1=\frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y_1=\frac{b}{2}\sqrt{2}$. — $P_{min}=\frac{a^2b^2}{2}\cdot\frac{2}{ab}=ab$.

94

1. Антилогаритмовањем добијамо: $7+4^{2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}}=23$; $4^{2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}}=4^2$, $2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}=2$. Ставимо ли: $\sqrt[4]{x}=u$, налазимо: $u_1=2$, $u_2=-\frac{1}{2}$; $x_1=16$, $x_2=\frac{1}{16}$.

2. Додирне тачке су: $M_1(1,3)$, $M_2(4,-6)$. Једначине тангената гласе: $3x-2y+3=0$, $3x+4y+12=0$, а њихов пресек је $S\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$. — Тражени круг мора пролазити кроз једну од додирних тачака јер је само у том случају тангента параболе уједно нормала круга.

Два круга: $(x+2)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{117}{4}$,

$(x+2)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{225}{4}$.

3. $\frac{2\cos\alpha+\sqrt{3}}{2\sin\alpha-1}=\frac{\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\alpha-\frac{1}{2}}=\frac{\cos\alpha+\cos 30^0}{\sin\alpha-\sin 30^0}=$

$$=\frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+15^0\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^0\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+15^0\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^0\right)}=\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}-15^0\right).$$

95

1. Добија се симетрична једначина:

$7x^4-4x^3-6x^2-4x+7=0$. Дељењем са x^2 излази: $7\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$, а заменом $x+\frac{1}{x}=u$, $x^2+\frac{1}{x^2}=$ $=u^2-2$, добијамо: $u_1=2$, $u_2=-\frac{10}{7}$; $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=\frac{-5\pm 2i\sqrt{6}}{7}$.

2. Странице троугла јесу: a, $a+2$, $a+4$. По косинусној теореми имамо: $(a+4)^2=a^2+(a+2)^2+a(a+2)$. Одатле: $a=3$. Странице су: 3, 5, 7; $O=15$; $P=\frac{15}{4}\sqrt{3}$.

3. $Sn=y.\,y'=y.\,\frac{p}{y}=p$. — Задатак се може решити и без употребе извода. Пресек нормале $y-y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1)$ с осом X је $A\,(p+x_1,\,0)$. Субнормала је $Sn=p+x_1-x_1=p$.

96

1. $\frac{2tgx}{1-tg^2x}+\frac{2tgy}{1-tg^2y}=-1$, а заменом $tgy=2-tgx$ добија се: $\frac{2tgx}{1-tg^2x}+\frac{4-2tgx}{-3+4tgx-tg^2x}=-1$. Даље је: $-3+4tgx-tg^2x=(1-tgx)(tgx-3)$, па се добија: tg^3x- $-3tg^2x+3tgx-1=0$, $tgx-1=0$; $tgx=1$, $tgy=1$; $x=y=45^0$.

2. Пресечна тачка кривих је $M\ (4, \pm 4)$. Десни део је $P_1 = \frac{4}{3} x_1 y_1 + \left(\frac{r^2 \pi \alpha}{360^0} - x_1 y_1 \right)$. Због $\alpha = 90^0$ имамо:

$$P_1 = 8\left(\frac{2}{3} + \pi\right), \quad P_2 = 32\pi - P_1 = 8\left(3\pi - \frac{2}{3}\right).$$

3. $\log a,\ \log a + \log q,\ \log a + 2\log q,\ \log a + 3\log q, \ldots$ Разлика реда је $d = \log q$.

97*

1. Вредност свих улога особе A на крају n-те године је $r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, а особе B: $2r \cdot \frac{q^n - 1}{q^2 - 1}$ Разлика је $d = \frac{r(q^n - 1)(q+1) - 2r(q^n - 1)}{q^2 - 1} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q + 1}$. У специјалном случају: $d = 7540$ динара.

2. Површина се састоји од омотача двеју зарубљених и омотача двеју обичних купа. Запремину чине две зарубљене купе, минус две обичне.

$d_1 = \sqrt{5^2 + 16^2 - 2 . 5 . 16 . \cos 120^0} = 19$. Из $\frac{5 . 16 . \sin 120^0}{2} = \frac{19 . d_2}{4}$ добијамо: $d_2 = \frac{80\sqrt{3}}{19}$; $M_1 = \frac{600\pi\sqrt{3}}{19}$, $M_2 = \frac{1920\pi\sqrt{3}}{19}$, $M_3 = \frac{200\pi\sqrt{3}}{19}$, $M_4 = \frac{640\pi\sqrt{3}}{19}$, $P = \frac{3360\pi\sqrt{3}}{19}\ cm^2$.

$$V_1 + V_2 = \frac{11200\pi}{19}, \quad V_3 + V_4 = \frac{1600\pi}{19}; \quad V = \frac{9600\pi}{19}\ cm^3.$$

3. Парабола сече осу X у тачкама $A(2,0)$ и $B(6,0)$. Површина отсечка је

$$P = \int_2^6 (x^2 - 8x + 12)\,dx = -\frac{32}{3}.$$

Код круга је: $p = 4$, $r = q$. Из једначине: $(x-4)^2 + (y-q)^2 = q^2$ добијамо — заменом $x^2 - x + 12 = y$ —: $y^2 - y\ (2q - 1) + 4 = 0$, $y_{1,2} = \frac{2q-1}{2} \pm \sqrt{\frac{4q^2 - 4q - 15}{4}}$.

Пошто су ординате додирних тачака једнаке, то мора бити:

$4q^2 - 4q - 15 = 0$, $q_1 = -\frac{3}{2}$, ($q_2 = \frac{5}{2}$, за круг који дира осу X одозго). Једначина круга је: $(x-4)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$. Површине се односе као $27\pi : 128$.

b) Координате додирних тачака параболе и круга јесу: $D_1\,(4+\sqrt{2}, -2)$, $D_2\,(4-\sqrt{2}, -2)$. Једначина заједничке тангенте у D_1 гласи: $y = 2x\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 6$, а тангенте у D_2: $y = -2x\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 6$. Њихова пресечна тачка је

$$S(4, -6);\ d = 6 - 1\tfrac{1}{2} = 4\tfrac{1}{2}.$$

98*

1. Добија се: $x^2 + y^2 + 2xy = 100$, $xy(x+y) = 240$, а одатле: $x + y = 10$, $xy = 24$; $x_1 = y_2 = 6$; $x_2 = y_1 = 4$. Разлика површина је 40π, а разлика запремина 48π.

2. $M\,(8, 16)$. Нормала параболе у тој тачки има једначину: $y = -x + 24$, и она сече осу Y у тачки $N\,(0, 24)$. То је центар круга. Полупречник $r = \overline{MN} = 8\sqrt{2}$. Једначина круга гласи: $x^2 + (y-24)^2 = 128$. Тражена површина је $P =$ трапез — кружни исечак — површина параболе.

$$P = 160 - 16\pi - \frac{256}{3} = 16\left(\frac{14}{3} - \pi\right).$$

3. По синусној теореми имамо:

$$BN : AB = \sin\alpha : \sin(\beta - \alpha),\quad BN = \frac{AB \cdot \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Означимо ли угао код M са ε, онда је по синусној теореми:

$$\sin\varepsilon = \frac{BN \cdot \sin\beta}{MN} = \frac{AB \cdot \sin\alpha \sin\beta}{MN \cdot \sin(\beta - \alpha)},\ \varepsilon = 38^0\,29'.$$

Напослетку, по синусној теореми:

$$BM = \frac{MN \cdot \sin(\beta + \varepsilon)}{\sin\beta} = \frac{25 \sin 52^0\,41'}{\sin 88^0\,50'} = 20 km.$$

99

1. Из једначине $3\,K = K \cdot q^{20}$ добија се: $q = 1{,}055$, $p = 5{,}5\%$. Из једначине $3\,K = K \cdot 1{,}065^n$ следује: $n = 17{,}44$ год.

2. Темена уписаног квадрата имају координате $(\pm x, \pm x)$. Из $b^2x^2 + a^2x^2 = a^2b^2$ имамо: $x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$; $P_1 = (2x)^2 =$

$=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$. Површина описаног квадрата наће се најлакше помоћу услова за тангенту елипсе. Због $k=\pm 1$, имамо: $n^2=a^2+b^2$; $P_2=2n^2=2(a^2+b^2)$.

$P_1:P_2=2a^2b^2:(a^2+b^2)^2$. Ако је $a=b$ (круг), однос је $1:2$.

3. $tg\frac{\varepsilon}{2}=\frac{n}{m}$.

$$tg\varepsilon=\frac{2tg\frac{\varepsilon}{2}}{1-tg^2\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{\frac{2n}{m}}{1-\frac{n^2}{m^2}}=\frac{2mn}{m^2-n^2}.$$

100*

1. $5^{xy}=u, 2^{\frac{x}{y}}=v$; $u+v=133$, $u^2-v^2=15561$; $u=$ $=125, v=8$. Даље је: $xy=3$, $\frac{x}{y}=3$; $y_{1,2}=\pm 1$, $x_{1,2}=\pm 3$. Први члан реда је 3, а разлика $-\frac{2}{15}$.

$$S_n=\frac{n}{2}\left[6-(n-1)\tfrac{2}{15}\right]=f(n);\ f'(n)=\frac{46}{15}-\frac{2n}{15}=0, n=23.$$

Тражена сума $S_{23}=35\frac{4}{15}$.

2. $\frac{b}{a}=\frac{3}{5}$, $a^2-b^2=64$ (услов за тангенту). Добија се: $a=10$, $b=6$. Једначина хиперболе: $9x^2-25y^2=900$. Координате додирне тачке јесу $\left(\frac{25}{2},\frac{9}{2}\right)$. Једначина параболе гласи: $y^2=\frac{81}{50}x$.

$$\frac{V}{\pi}=\frac{81}{50}\int_x^{\frac{25}{2}}xdx-\frac{9}{25}\int_{10}^{\frac{25}{2}}(x^2-100)dx=\frac{81}{100}\cdot\frac{625}{4}-$$

$$-\frac{9}{25}\left[\left(\frac{15625}{24}-1250\right)-\left(\frac{1000}{3}-1000\right)\right]=\frac{1635\pi}{16}.$$

3. $a_1=10$, $a_2=1$. Из $\frac{a_1+a_2}{2}$. $h=\frac{33}{4}\sqrt{7}$ имамо бочну висину $h=\frac{3}{2}\sqrt{7}$.

Висина пирамиде је $H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a_1\sqrt{3} - a_2\sqrt{3}}{6}\right)^2} = 3.$

$V = \frac{111}{4}\sqrt{3}.$

$$tg\alpha = \frac{H}{\frac{a_1\sqrt{3} - a_2\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \alpha = 30^0.$$

$$tg\beta = \frac{h}{\frac{a_1 - a_2}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{3};\ \beta = 41^0\,24'36''.$$

101

1. $V = \frac{2r^3\pi}{3} - \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$

$sin\ 37^0 = \frac{r - h}{r},\ h = r\,(1 - sin 37^0) = 0{,}4r.$

$V = \frac{2\pi}{3} - \frac{0{,}416\pi}{3} = 1{,}66$ литара.

2. Решењем једначине круга са једначином осе $X(y=0)$ добија се: $x_1 = 2,\ x_2 = -3$; а решењем са једначином осе $Y(x=0)$: $y_1 = 1,\ y_2 = -6.$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{(2+3)(1+6)}{2} = \frac{35}{2}.$$

3. $q - p = r - q$

$2q - r = p$

$2q + r = p + 2r$

$(2q + r)^2 = (p + 2r)^2 = p^2 + 4r\,(p + r)$

$p + r = 2q$

Дакле: $(2q + r)^2 = p^2 + 8qr.$

102*

1. $V_1 = \frac{x^2\pi y}{3}\cdot$ Из сличности добија се однос $r : h = x : (h - y)$, одатле: $x = \frac{r}{h}(h - y)$; $f(y) = (h - y)^2 y,\ f'(y) = 3y^2 - 4hy + h^2 = 0$, одатле: $y = \frac{h}{3}$; $x = \frac{2r}{3}\cdot$ — $V_1 = \frac{4r^2\pi h}{81}\cdot$ Запремина друге уписане купе је $V_2 = \frac{z^2\pi u}{3}\cdot$ Ана-

ю је: $u = \frac{1}{3} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{2h}{9}$, $z = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r}{3} = \frac{4r}{9}$.

ма томе: $V_2 = \frac{32r^2\pi h}{27 \,.\, 81}$ — Запремине уписаних купа чине-метријски ред чији је количник $q = \frac{V_2}{V_1} = \frac{8}{27}$.

Збир запремина је $S = \frac{4r^2\pi h}{57}$.

$$S : V = 4 : 19$$

2. Пресечна тачка у I квадранту је $D(6, 4)$. Коефицијенти ера тангената су: $k_1 = \frac{p}{y_1} = \frac{1}{3}$; $k_2 = \frac{-b^2x_1}{a^2y^1} = -\frac{3}{8}$; $tg\varphi = \frac{17}{21}$, $\varphi = 38^0 59' 28''$.

$$V = \frac{\pi}{4}\int_0^6 (100 - x^2)dx - \frac{8\pi}{3}\int_0^6 x dx = 84\pi.$$

3. Тражена површина се састоји од површине трапеза мањене за два кружна исечка. $P = P_t - (J_1 + J_2)$.

$P_t = \frac{R+r}{2} \cdot h$, где је $h = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 12\sqrt{3}$;

$P_t = 144\sqrt{3}$. Централни угао исечка већег круга наће се из:

$\cos\alpha = \frac{R-r}{R+r}$; $\alpha = 60^0$, дакле $\beta = 120^0$. — $J_1 = 54\pi$, $J_2 = 12\pi$.

$$P = 6(24\sqrt{3} - 11\pi).$$

103*

1. Садања вредност свих уплаћених улога је

$$S_1 = \frac{6000(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04 .\ 1{,}04^{14}},$$

садања вредност свих исплаћених рента:

$$S_2 = \frac{9875(1{,}04^n - 1)}{0{,}04 .\ 104,^{14+n}}.$$ Из $S_1 = S_2$ следује:

$$6000(1{,}04^{15} - 1) = \frac{9875(1{,}04^n - 1)}{1{,}04^n},$$ а одатле:

$$1{,}04^n = \frac{9875}{9875 + 6000 - 6000 .\ 1{,}04^{15}} = \frac{9875}{15875 - 6000 .\ 1{,}801} = \frac{9875}{5069};$$

$$n = \frac{\log 9875 - \log 5069}{\log 1{,}04} = \frac{0,\ 28962}{0,\ 01703} = 17 \text{ година.}$$

2. $P = \frac{bc}{2} \cdot sin\alpha$, одатле: $bc = 320$. Добија се: $b_1 = 32$, $b_2 = 10$; $c_1 = 10$, $c_2 = 32$.

Страница $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc cos\alpha} = 38$.

Из $P = \frac{ac}{2} sin\beta$ добија се: $sin\beta = \frac{8\sqrt{3}}{19}$; $\beta_1 = 46^0 49' 35'' = \gamma_2$; $\gamma_1 = 13^0 10' 25'' = \beta_2$.

3. Тачке се добију заменом $x = 2y$, односно $y = 2x$ у једначину параболе. $A(16, 8)$, $B(1, 2)$. Једначина тангенте је $x - 4y + 16 = 0$, а једначина нормале $x + y - 3 = 0$; $d_1 = \sqrt{17}$, $d_2 = \sqrt{2}$; $d_1 : d_2 = \sqrt{17} : \sqrt{2}$. Пресечна тачка тангенте и нормале је $C\left(-\frac{4}{5}, \frac{19}{5}\right)$. Површина троугла ABC је $\frac{189}{10}$, а површина параболиног отсека је $\frac{(y_1 - y_2)^3}{12p} = 9$. Тражена површина $P = \frac{189}{10} - 9 = \frac{99}{10}$.

104

1. R нека је полупречник базе дате, а r полупречник базе отсечене купе. Полупречник лопте је $\frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{r}{3}\sqrt{3}$, страница зарубљене купе $s = 2R - 2r$. Из једначине: $\frac{4r^2\pi}{3} = 2\pi(R^2 - r^2)$ добија се: $r^2 = \frac{3R^2}{5}$; $M_1 : M_2 = 2R^2\pi : 2r^2\pi = 5 : 3$.

2. Количник овог бесконачног геометријског реда је $q = \frac{1}{7^x + 1}$. Из једначине: $7 = \frac{\frac{1}{7^x + 1}}{1 - \frac{1}{7^x + 1}}$ следује: $7^{x+1} = 1$; $x + 1 = 0$, $x = -1$.

3. Углови што их затвара тежишна линија t_a са страницом a јесу φ и $180^0 - \varphi$.

Применом косинусне теореме на добивене троуглове имамо:

$$b^2 = t_a^2 + \frac{a^2}{4} - t_a \cdot a \cdot cos\varphi,$$

$$c^2 = t_a^2 + \frac{a^2}{4} + t_a \cdot a \cdot cos\varphi.$$

Сабирањем једначина добија се: $b^2 + c^2 = 2t_a^2 + \frac{a^2}{2}$, $t_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. — Аналогно за t_b и t_c.

105

1. Петоугаоник се састоји од равностраног троугла странице x и квадрата исте странице. Добија се $x = a\,(2\sqrt{3} - 3)$.
Углови: 60°, 150°, 90°, 90°, 150°.

2. $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{10}$; $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = -1$. Тражена једначина гласи: $y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$.

3. Из $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ имамо: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Половина запремине ротационог елипсоида

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{b^2\pi}{a^2} \Big/_0^a \, a^2 x - \frac{x^3}{3} \Big/ = \frac{2ab^2\pi}{3}.$$

$$V = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

106*

1. $2x\pi\,(x + h) = y\pi\,(y + \sqrt{y^2 + h^2})$, $x^2\pi h = \frac{y^2\pi h}{3}$.

Из друге једначине је $y = x\sqrt{3}$. Заменом у прву, скраћивањем и квадрирањем добија се: $x = \frac{h}{4}(\sqrt{3} - 1) = 0{,}73 cm$; $y = \frac{h}{4}(3 - \sqrt{3}) = 1{,}27\ cm$. Страница купе је $s = \frac{h}{4}\sqrt{28 - 6\sqrt{3}}$.

$M_1 : M_2 = 2xh : ys = 8 : \sqrt{84 - 18\sqrt{3}} = 8 : 7{,}26$.

2. $a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 = 11$, $a^5 q^{10} = 1024$. Вађењем петог корена добија се из друге једначине: $a = \frac{4}{q^2}$. Заменом у прву излази: $4\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 4\left(q + \frac{1}{q}\right) - 7 = 0$. Ста-

вимо $q + \frac{1}{q} = u$, онда је $q^2 + \frac{1}{q^2} = u^2 - 2$. Добија се: $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = -\frac{5}{2}$. Из u_1 следују комплексна решења, а из u_2 имамо: $q_1 = -\frac{1}{2}$, $q_2 = -2$; $a_1 = 16$, $a_2 = 1$. Тражени ред гласи: 16, -8, 4, -2, 1 или: 1, -2, 4, -8, 16.

3. Темена четвероугла јесу: $A(5,6)$; $B(-3,2)$; $C(-2,-1)$; $D(7,2)$. Површина четвероугла нађе се као збир површина два троугла. Може се употребити и аналитички образац за површину четвероугла: $2P = x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)$. Добија се: $P = 35$. — Једначина круга који пролази кроз проивољна три од четири задана темена гласи: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$. Једначину задовољавају и координате четвртог темена. — Центар $(2,2)$ лежи на дијагонали BD која има једначину: $y = 2$.

107

1. Тражени отсечак елипсе нађе се тако да се припадни кружни отсечак ($r = a$) помножи са $\frac{b}{a}$. Кружни отсечак једнак је разлици површина кружног исечка ($\alpha = 120^0$) и троугла.

$$P_1 = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2\pi}{3} - \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right) = ab\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$P_2 = ab\pi - P_1 = ab\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

2. $AD = 15 - 2d$, $CD = 15 - d$; $AB = 15 - 6d$, $BC = 15 - 3d$; $60 - 12d = 48$, $d = 1$.

Површина троугла ABC је $54cm^2$, а површина троугла ACD износи $84cm^2$. $P = 54 + 84 = 138cm^2$. Угао $\beta = 90^0$.

3. $$\frac{tg\alpha + sin\alpha}{tg\alpha - sin\alpha} = \frac{\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + sin\alpha}{\frac{sin\alpha}{cos\alpha} - sin\alpha} = \frac{sin\alpha\,(1 + cos\alpha)}{sin\alpha\,(1 - cos\alpha)} =$$

$$= \frac{2cos^2\frac{\alpha}{2}}{2sin^2\frac{\alpha}{2}} = cotg^2\,\frac{\alpha}{2}.$$

108

1. $B = 126$. Бочне ивице x, y, z нађу се из једначина: $x^2 + y^2 = 441$, $x^2 + z^2 = 400$, $y^2 + z^2 = 169$. Добија се: $x = 4\sqrt{21}$, $y = \sqrt{105}$, $z = 8$. Бочне стране јесу: $S_1 = \frac{xy}{2} = 42\sqrt{5}$, $S_2 = \frac{xz}{2} = 16\sqrt{21}$, $S_3 = 4\sqrt{105}$; $P = B + S_1 + S_2 + S_3$.

Да се нађе запремина, треба замислити да је пирамида положена на једну бочну страну.

$V = \frac{xyz}{6} = 112\sqrt{5}$.

Из $112\sqrt{5} = \frac{126 \cdot h}{3}$ имамо $h = \frac{8\sqrt{5}}{3}$.

Како је $B > S_1 > S_2 > S_3$, то је: $h < z < y < x$.

2. Из: $\frac{-y_1}{p} = 1$ имамо: $y_1 = -p$, $x_1 = \frac{p}{2}$. Једначина нормале гласи: $y = x - \frac{3p}{2}$. Њена друга пресечна тачка са параболом је $B\left(\frac{9p}{2}, 3p\right)$.

$P = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p} = \frac{16p^2}{3}$.

3. $b = a + d$, $c = a + 2d$. Једначина гласи:

$x^2 - \frac{2(a+d)}{a}x + \frac{a+2d}{a} = 0$; $x_1 = \frac{a+2d}{a}$, $x_2 = 1$.

109*

1. Основне ивице: a, aq; висина: aq^2.

Из једначина: $a^3q^3 = 1728$, $aq^2\sqrt{a^2 + a^2q^2} = 240$ добија се даље: $aq = 12$, $a^2q^2\sqrt{1 + q^2} = 240$. Одатле следује: $q = \frac{4}{3}$, $a = 9$. Основне су ивице $a = 9$, $b = 12$, а висина $H = 16$.

$P = ab + ah_1 + bh_2$; $h_1 = \sqrt{H^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 2\sqrt{73}$, $h_2 = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1105}$.

$$tg\alpha=\frac{H}{\frac{a}{2}}=\frac{32}{9};\quad \alpha=74^0 17'30''$$

$$tg\beta=\frac{H}{\frac{b}{2}}=\frac{8}{3};\ \beta=69^0 26'39''$$

$$tg\gamma=\frac{H}{\frac{d}{2}}=\frac{32}{15};\ \gamma=64^0 53'7''$$

$\alpha-\gamma=9^0 24'23''$; $\beta-\gamma=4^0 33''32''$.

2. $P=\frac{ah}{2}=42$. Ставимо ли: $b=3k$, $c=4k$, добијамо према Хероновој формули: $42=\sqrt{\frac{7k+7}{2}\cdot\frac{7k-7}{2}\cdot\frac{7+k}{2}\cdot\frac{7-k}{2}}$ Решење ове једначине даје $k=5$. Обим троугла је $O_1=42$. Ако је x крак равнокраког троугла, онда је:

$$\frac{7\sqrt{x^2-\frac{49}{4}}}{2}=42, \text{ одакле } x=\frac{25}{2};\ O_1-O_2=10cm.$$

$$R=\frac{abc}{4P}=\frac{25}{2}=x.$$

3. $a=6, b=4$, $e=2\sqrt{5}$. Из $a_1\sqrt{2}=2\sqrt{5}$ добијамо $a_1=\sqrt{10}$, једначина хиперболе гласи: $x^2-y^2=10$. Пресечна тачка елипсе и хиперболе је $M(3\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$. Коефицијенти смера тангената у тој тачки јесу: $k_1=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}=-\frac{2}{3}, k_2=\frac{x_1}{y_1}=\frac{3}{2}$. Линије се секу под правим углом јер је $k_1 k_2=-1$. *Уочите*: елипса и конфокална хипербола секу се под правим углом.

110*

1. Висина пирамиде: $h=\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{a}{4}$; запремина пирамиде је $V=\frac{a^3}{12}$.

Запремина прве коцке: $V_1=x^3$. Према правилу да се површине пресека пирамиде паралелних са базом односе као квадрати њихових растојања од врха, имамо: $a^2 : x^2 = h^2 : (h - x)^2$, или: $a : x = h : (h - x)$, одатле: $x = \frac{a}{5}$; $V_2 = y^3$.

Аналогно је: $a : y = h : (h - x - y)$, $y = \frac{a}{25}$. Запремине коцака чине геометријски ред чији је количник $q = V_2 : V_1 = \frac{1}{125}$. Збир запремина је $S = \frac{a^3}{124}$. — $S : V = 3 : 31$.

2. По косинусној теореми добијамо из два троугла са заједничким теменом у B ове једначине: $a^2 + c^2 - ac = 169$, $(a - 10)^2 + c^2 - c(a - 10) = 49$. Одузимањем једначина добијамо: $2a - c = 22$, а онда: $a = 15cm$, $c = 8cm$. $\gamma = 32^0 12' 14''$, $\alpha = 87^0 47' 46''$.

3. Круг је $(x - 5)^2 + y^2 = 1$, полуосе елипсе: $a = 4$, $b = 3$. Ако се у $b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2$ замени $x = 5$, $y = 0$, добија се: $x_1 = \frac{16}{5}$; $y_{1,2} = \pm \frac{9}{5}$. Коефицијент смера једне тангенте је $k_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = -1$; $k_2 = 1$. Тангенте стоје једна на другој нормално. $P = \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

b) Тражена запремина налази се одузимањем отсечка елипсоида и лоптиног исечка од запремине купе. $V = V_1 - V_2 - V_3$. $V_1 = \frac{243\pi}{125}$, $V_2 = \frac{9\pi}{16}\int_{\frac{16}{5}}^{4} (16 - x^2)dx = \frac{168\pi}{125}$; $V_3 = \frac{2r^2\pi h}{3} = \frac{\pi}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)$, јер је $h = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

$$V = \frac{\pi}{15}(5\sqrt{2} - 1).$$

111

1. $tg\,(45^0 + x) + tg\,(45^0 - x) = 2\,tg\,(45^0 + x) - 2tg\,(45^0 - x)$, $3\,tg\,(45^0 - x) = tg\,(45^0 + x)$; 3. $\frac{1 - tgx}{1 + tgx} = \frac{1 + tgx}{1 - tgx}$; $tgx_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_1 = 75^0$, $x_2 = 15^0$.

2. $K_3 = K.q^3$, где је $q = 1 - \frac{p}{100}$.

$K_3 = 1\,000\,000.\ 0{,}95^3 = 857\,375$ франака.

3. Да би апсцисе пресечних тачака праве и елипсе

$$x_{1,2} = \frac{a^2mn^2 \pm \sqrt{a^2b^4m^4 - a^2b^2m^4n^2 + a^4b^2m^2n^2}}{b^2m^2 + a^2n^2}$$

биле једнаке, мора дискриминанта бити једнака нули.

Добија се: $a^2n^2 + b^2m^2 = m^2n^2$ или: $\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} = 1$. Аналогно се може доказати и помоћу ордината пресечних тачака.

112*

1. Странице су троугла: $a - d,\ a,\ a + d$;

$R.\, r = \frac{abc}{4P} \cdot \frac{R}{s} = \frac{a\,(a^2 - d^2)}{6a} = 130,\ a^2 - d^2 = 780.$

По косинусној теореми: $(a - d)^2 = a^2 + (a + d)^2 - \frac{6a}{5} \cdot (a + d)$, а одатле: $a = 14d$. Супституцијом у прву једначину добијамо: $d = 2$; $a = 28$. Странице су троугла: 26, 28, 30. $R = \frac{65}{4}$; $r = 8$; најмањи угао износи $53^0 7' 50''$

2. $2\pi\,(r + x)\ (3r + 2x) = 30r^2\pi$. Одатле: $x = \frac{3r}{2}$.

a) $2\pi\,(r + x)\ (3r + x) = 30r^2\pi$. Одатле: $x = 2r$.

б) $V_1 = 2r^3\pi,\ V_2 = \frac{175r^3\pi}{8},\ V_3 = 18r^3\pi.$

$V_1 : V_2 : V_3 = 16 : 175 : 144.$

3. a) Пресечна тачка је $S\,(1, 1)$. Коефицијент смера тангенте прве криве $k_1 = \frac{p}{y_1} = \frac{1}{2}$, а друге $k_2 = y' = -\frac{2}{x^3} = -2$. Тангенте стоје једна на другој *нормално*. Једначине тангената гласе: $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, $y = -2x + 3$.

$$б)\ P = \int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \Big/_{0}^{1} \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \Big/_{1}^{\infty} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$c)\ V=\pi\int_0^1 x\,dx+\pi\int_1^\infty x^{-4}\,dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

113

1. $q=\frac{486}{162}=3$. Сума je $728=a\cdot\frac{3^n-1}{2}$. Из $a\cdot 3^{n-1}=$ $=486$ добија се: $a.\ 3^n=1458$. Заменом имамо: $728=\frac{1458-a}{2}$; $a=2$, $n=6$. Ред гласи: 2, 6, 18, 54, 162, 486.

2. $P=xy$. Из једначине праве имамо:
$y=\frac{n(m-x)}{m}$; $f(x)=mx-x^2$, $f'(x)=m-2x=0$, $x=\frac{m}{2}$; $y=\frac{n}{2}$; $P=\frac{mn}{4}$. Координате темена: $(0, 0)$, $\left(\frac{m}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$, $\left(0, \frac{n}{2}\right)$.

3. Добија се: $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma-$ $-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$, а то je једнако нули.

114*

1. $\sin 3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\sin^2\cos\alpha$. Добија се: $6\sin^2\alpha\cos\alpha-2\sin^3\alpha=0$, $\sin^2\alpha(3\cos\alpha-\sin\alpha)=0$; $\alpha_1=0$, $tg\alpha_2=3$, $\alpha_2=71^\circ 33' 54''$, Корени алгебарске једначине jecy: $x_1=0$, $x_2=3$. Једначина гласи: $x^2-3x=0$.

2. Димензије паралелепипеда: a, $a+d$, $a+2d$. Из једначина: $3a^2+6ad+2d^2=47$, $3a^2+6ad+5d^2=50$ добија се одузимањем: $d_1=1$, $d_2=-1$; $a_1=3$, $a_2=5$. Димензије су: 3, 4, 5. Запремина $V=60dm^3$.

3. Уређени облик једначине елипсе гласи:
$\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$. Полуосе су $a=4$, $b=5$; центар $C(-3, -2)$. Жиже: $F_1(-3,1)$, $F_2(-3, -5)$. Површина $P=$ $=20\pi$ Из једначина: $(-3-p)^2+(1-q)^2=20$, $(-3-p)^2+$ $+(-5-q)^2=20$, добија се: $q=-2$, $p_{1,2}=-3\pm\sqrt{11}$.
Два круга: $(x+3-\sqrt{11})^2+(y+2)^2=20$,
$(x+3+\sqrt{11})^2+(y+2)^2=20$.

115

1. Странице су троугла: $4+d,\ 4+2d,\ 4+3d$;
$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$; $4=\sqrt{\frac{(2+2d)(2+d)2}{6+3d}}=2\sqrt{\frac{1+d}{3}}$; $d=11$.
Странице су: 15, 26, 37. $P=156$.

2 Основне ивице су x и $3x$, висина y.

a) $3x^2y=36,\ y=1, x^2=12$; $D=\sqrt{10x^2+y^2}=11cm$.

b) $P=2(3x^2+4xy),\ y=\frac{12}{x^2}$; $P=6\left(x^2+\frac{16}{x}\right)$.

$f(x)=x^2+\frac{16}{x},\ f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=0;\ x=2,\ y=3;\ D=7cm.$

3. Ако се у четвероуглу $[A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3),\ D(x_4,y_4)]$ повуче дијагонала (AC), добијамо два троугла:

$$2P_1=x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2),$$
$$2P_2=x_1(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_3).$$

Сабирањем:

$2(P_1+P_2)=2P=x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+$
$+x_4(y_1-y_3)$.

116*

1. Пресечне тачке параболе и праве: $A(4,4),\ B(9,-6)$.
Једначина тангенте у $A: y=\frac{x}{2}+2$, једначина тангенте у $B: y=-\frac{x}{3}-3$. Њихов пресек је $C(-6,-1)$.

a) Од површине троугла ABC треба одузети површину параболиног отсечка $\frac{(y_1-y_2)^3}{12p}$. $P=\frac{125}{2}-\frac{125}{3}=\frac{125}{6}$.

b) Коефицијент смера дате праве је -2, а коефицијент смера тангенте у A је $\frac{1}{2}$. Дакле, угао код A је *йрави*. — $-\overline{AB}=\overline{AC}=5\sqrt{5}$.

c) Једначина круга гласи:

$$(x-\tfrac{3}{2})^2+(y+\tfrac{7}{2})^2=\tfrac{125}{2}.$$

2. $r^2+rs=\frac{r^2h}{3},\ rs=\frac{5}{8}(r^2+rs)$. Обе једначине

скратити са r. Из друге је: $s = \frac{5r}{3}$; $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \frac{4r}{3}$. Заменом у прву једначину добија се: $r = 6$; $s = 10$, $h = 8$.

$$V = 96\pi.$$

Из $4R^2\pi = \frac{4R^3\pi}{3}$ $R = 3$; $V_1 = 36\pi$.

$V : V_1 = 8 : 3$. — Полупречник лопте уписане у купу:

$$R_1 = \frac{P}{s_1} = \frac{48}{16} = 3 = R.$$

3. Из једначина:

$K.q^m = a$,

$K.q^n = b$ добија се дељењем: $q = \sqrt[n-m]{\frac{b}{a}}$;

$p = 100 \cdot \left(\sqrt[n-m]{\frac{b}{a}} - 1\right)$. Капитал је $K = \sqrt[n-m]{\frac{a^n}{b^m}}$.

У специјалном случају: $q = 1{,}05$, $p = 5\%$; $K = 10\,000$ динара.

117

1. $2.\left(\frac{3}{4}\right)^{sin^2x} - 5.\left(\frac{3}{4}\right)^{1-sin^2x} + \frac{7}{2} = 0$. Ставимо ли: $\left(\frac{3}{4}\right)^{sin^2x} = u$, добијамо: $u_1 = \frac{3}{4}$, $\left(u_2 = -\frac{5}{2}\right)$. $sinx_{1,2} = \pm 1$; $x_1 = 90^0$, $x_2 = 270^0$.

2. $\frac{n(n-3)}{2} = 100$; $n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{809}}{2}$. — *Не* постоји јер се за n не добија целобројно решење. —

15-угаоник има 90 дијагонала, а 16-угаоник већ 104 дијагонале.

3. Зарубљена купа настаје ротацијом праве $y = kx$ око осе X, у границама од x_1 до x_2.

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2dx = k^2\pi\int_{x_1}^{x_2} x^2dx = \frac{k^2\pi}{3}(x_2^3 - x_1^3) =$$

$= \frac{k^2\pi h}{3}(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)$. Из $r = kx_1$ следује $x_1 = \frac{r}{k}$, а из $R = kx_2$, $x_2 = \frac{R}{k}$.

$$V = \frac{k^2\pi h}{3} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{k^2} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

118*

1. Из једначине: $x^2 - 2m^2x + m^4 - 1 = 0$ добија се: $x_1 = m^2 + 1$, $x_2 = m^2 - 1$. Друга страница правоугаоника је $\sqrt{(m^2 + 1)^2 - (m^2 - 1)^2} = 2m$.

$O = 2(m^2 + 2m - 1)$; $P = 2m(m^2 - 1)$. Тражена једначина гласи: $y^2 - 2(m^3 + m^2 + m - 1)y + 4m(m^2 + 2m - 1) \cdot (m^2 - 1) = 0$. — Из једначине: $2m(m^2 - 1) = 2(m^2 + 2m - 1) - 4$ имамо: $m^3 - m^2 - 3m + 3 = 0$, $(m - 1)(m^2 - 3) = 0$. Једино решење које има смисла је $m = \sqrt{3}$. У том случају $O = 4(1 + \sqrt{3})$, $P = 4\sqrt{3}$.

2. a) $V_1 - V_2 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \pi h\left(\frac{R + r}{2}\right)^2 = \frac{\pi h}{12}(R - r)^2$.

b) $V_1 - V_3 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \pi h \, Rr = \frac{\pi h}{3}(R - r)^2$.

$$G_1 : G_2 = 1 : 4.$$

3. $M(4, \pm 2\sqrt{2})$. Заједничка нормала $y = -2x\sqrt{2} + 10\sqrt{2}$ сече осу X у тачки $C(5, 0)$. $r = \sqrt{1 + 8} = 3$. Једначина круга гласи: $(x - 5)^2 + y^2 = 9$.

$$V = \pi\int_0^4 2x\,dx - \pi\int_2^4 (10x - 16 - x^2)\,dx = 16\pi - \frac{28\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

119

1. Помоћу обрасца за суму: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ добијамо: $\frac{n-1}{2} = \frac{n}{2} \cdot a$, одатле: $a = \frac{n-1}{n}$. Даље је: $0 = \frac{n-1}{n} + (n -$

$-1)d$, $d \quad -\frac{1}{n}$. Ред гласи: $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \ldots$

2. Из услова за тангенту елипсе $(a^2k^2 + b^2 = n^2)$ имамо: $n = 4\sqrt{3}$. Једначина десног крака трапеза гласи: $y = -x\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$. Решимо ли је са једначинама паралелних страница $(y = 3, y = -3)$, добијамо половине паралелних страница трапеза: $4 - \sqrt{3}$, $4 + \sqrt{3}$.

$$P = 8 \cdot 6 = 48.$$

Најмањи трапез је правоугаоник јер је у том случају средња линија трапеза најмања и једнака великој оси елипсе.

3. $P = \frac{ab\sin\gamma}{2}$. По синусној теореми је: $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Дакле: $P = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$. — Аналогно се добија: $P = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$.

$P = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{h_2 h_3}{h_2 + h_3}$

120

1. Полуосе елипсе: $b\sqrt{3}$, b. Из услова за тангенту елипсе добија се, због $k = \pm 1$, отсечак на оси Y: $n = \pm 2b$.

$$P_\Delta = \frac{6b \cdot 3b}{2} = 9b^2, \quad P_e = b^2\pi\sqrt{3}.$$

$$P_\Delta : P_e = 3\sqrt{3} : \pi.$$

2. $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = u$; $u_{1,2} = 1$; $y = 0$. Биномна једначина $x^4 - 1 = 0$ даје решења: $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i$.

3. $A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$; $A^2 - G^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 > 0$,

дакле $A > G$.

Ако је $a = b$, онда је $A = G$.

121

1. Цео ред има $(n+1)$ чланова.

$$2^n \cdot q^n = 2^{2n}, \quad q = 2.$$

$$S_{n+1} = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 2^n(2^{n+1} - 1) = 2^{2n+1} - 2^n.$$

Ако је сума реда 120, онда је: $2^{2n+1} - 2^n - 120 = 0$.

Ставимо: $2^n = u$; $u_1 = 8$, $\left(u_2 = -\frac{15}{2}\right)$; $n = 3$.

Ред има ове чланове: 8, 16, 32, 64.

2. Пресечне тачке су: $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$ и $B\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$ Коефицијенти смера тангената су: $k_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = \frac{b}{a}$, $k_2 = \frac{-b^2x_2}{a^2y_2} = \frac{b}{a}$. Тангенте су дакле паралелне са правом $y = \frac{b}{a}x$.

3. Површина троугла је $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$, одакле: $c = \frac{ab}{h}$. Заменом ове вредности у Питагорино правило добија се: $a^2 + b^2 = \frac{a^2b^2}{h^2}$, а дељењем с a^2b^2:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}.$$

122*

1. a) $P_1 = 4r^2\pi$; $P_2 = \frac{4r^2\pi}{9}$; $P_3 = \frac{4r^2\pi}{81}$. Површине чине геометријски ред, $q = \frac{1}{9}$. Збир површина је $S_p = \frac{9r^2\pi}{2}$. Из $4x^2\pi = \frac{9r^2\pi}{2}$ добија се: $x = \frac{3r}{2\sqrt{2}}$. Запремина је $V = \frac{9r^3\pi\sqrt{2}}{8}$. Запремине кугала чине геометријски ред, $q = \frac{1}{27}$. Збир запремина је $S_v = \frac{18r^3\pi}{13}$.

$$V : S_v = 13\sqrt{2} : 16.$$

b) $a_n = a.\ q^{n-1}$

$1 = \frac{4\pi}{3} \cdot 125\,000\,000. \left(\frac{1}{27}\right)^{n-1}$; $n - 1 =$

$= \frac{\log 500\,000\,000 + \log\pi - \log 3}{\log 27}$, $n = 7$, седма кугла.

2. Из $a^2 - b^2 = 16$, $\frac{b^2}{a} = \frac{9}{5}$ добија се $a = 5$, $b = 3$. Једначина тангенте гласи: $4x + 5y - 25 = 0$. Дужине окомица јесу: $d_1 = \frac{9\sqrt{41}}{41}$; $d_2 = \sqrt{41}$; њихове једначине: $y = \frac{5}{4}x - 5$, $y = \frac{5}{4}x + 5$. Подножја окомица: $N_1\left(\frac{200}{41}, \frac{45}{41}\right)$ и $N_2(0, 5)$. Висина трапеза је $N_1N_2 = \frac{40\sqrt{41}}{41}$. — $P = \frac{1000}{41}$. Једначину круга $x^2 + y^2 = 25$ задовољавају координате тачака N_1 и N_2: $0 + 5^2 = 25$, $\left(\frac{200}{41}\right)^2 + \left(\frac{45}{41}\right)^2 = 25$.

3. Ставимо ли: $tg\alpha = 5k$, $tg\beta = 11k$, $tg\gamma = 44k$ и заменимо у образац: $tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha tg\beta tg\gamma$, добијамо: $k = \frac{\sqrt{3}}{11}$. Дакле: $tg\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{11}$, $tg\beta = \sqrt{3}$, $tg\gamma = 4\sqrt{3}$. Како је $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{\sqrt{1 - sin^2\alpha}}$, то је: $sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{14}$; $sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$a : b : c = sin\alpha : sin\beta : sin\gamma = 5 : 7 : 8$.

Ставимо ли сада: $a = 5m$, $b = 7m$, $c = 8m$, то је површина троугла $P = 10m^2\sqrt{3}$. Дакле: $R = \frac{abc}{4P} = \frac{7m\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{P}{s} = m\sqrt{3}$.

Како је $\frac{7m\sqrt{3}}{3} - m\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, то је $m = 3$.

Странице су троугла: $a = 15$, $b = 21$, $c = 24$.

123

1. $log^2x + log^2y = 5$, $1 = logy - logx$. Заменом: $logy = 1 + logx$ из друге једначине у прву добијамо: $logx_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$. Дакле: $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{100}$; $y_1 = 100$, $y_2 = \frac{1}{10}$.

2. Једначина нормале је $y = -x + \frac{3p}{2}$, површина троугла $P = \frac{9p^2}{8}$.

$$P_1 = \frac{2}{3}x_1y_1 + \frac{1}{2} \cdot p \cdot p = \frac{5p^2}{6}.$$

$$P_2 = \frac{9p^2}{8} - \frac{5p^2}{6} = \frac{7p^2}{24}.$$

$$P_1 : P_2 = 20:7.$$

3. Обележимо ли један угао паралелограма са α, онда је суседни $180^0 - \alpha$; по косинусној теореми имамо:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$
$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

а сабирањем: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

124*

1. $ax^2 + bxy + ay^2 = a^3$, $bx^2 + axy + by^2 = b^3$. — Овакве се једначине („хомогене") могу решити супституцијом: $x = y \,.\, t$. Дењењем једначина добија се квадратна једначина по t. Резултати су: $t_1 = -\frac{a}{b}$, $t_2 = -\frac{b}{a}$; $y_{1,2} = \pm b$; $x_{1,2} = \mp a$; $y_{3,4} = \pm a$, $x_{3,4} = \mp b$.

2. Висина призме $H = 15$, висине на бази су $h_1 = 6$, $h_2 = \frac{60}{13}$. Из $ah_1 = bh_2$, $h_1^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$, добијамо основне ивице: $a = 5cm$, $b = \frac{13}{2}cm$. — $P = ah_1 + aH + 2bH = 300cm^2$. — $V = 225cm^3$.

3. Једначина нормале гласи: $y = -x + 6$. Помоћу условне једначине за тангенту елипсе добија се: $a^2 + b^2 = 36$; $a^2 - b^2 = 4$. Једначина елипсе: $4x^2 + 5y^2 = 80$. Додирна тачка је $D\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$, а пресечна тачка нормале с осом X: $A(6{,}0)$. Тражени однос је $1:2$.

125

1. Из једначине $a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2$ добија се: $a = 3d$, а заменом у једначину: $\frac{a(a + d)}{2} = a + 3d$ имамо: $d = 1$, $a = 3$.

Странице су 3, 4, 5, а површина 6.

2. Услов за тангенту параболе гласи: $p = 2kn$. Једначина параболе: $y^2 = 4knx$. Решењем ове једначине са једна-

чином дате праве добија се $D\left(\frac{n}{k}, 2n\right) - r = x + \frac{p}{2} =$ $= \frac{(1+k^2)n}{k}$.

3. $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha g\beta}$. Како је $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$, то је $tg(\alpha+\beta) = -tg\gamma$. Дакле: $\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = -tg\gamma$, а затим: $tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha tg\beta tg\gamma$.

126

1. $(3-x)^2 = (x-3)^2$. Ставимо: $\sqrt[5]{(x-3)^2} = u$. Онда имамо: $u^2 - u - 12 = 0$; $u_1 = 4$, $u_2 = -3$. Резултати су ови: $x_1 = 35$, $x_2 = -29$, $x_{3,4} = 3(1 \pm 3i\sqrt{3})$.

2. Дијагонале ромба су: $d_1 = 2a sin x$, $d_2 = 2a cos x$; $d_1 + d_2 = 2a(sin x + cos x)$.

$f(x) = sin x + cos x$; $f'(x) = cos x - sin x = 0$, $tg x = 1$, $x = 45^0$. $f''(x) = -(sin x + cos x)$, дакле негативан за нађену вредност x-а.

$2x = 90^0$; ромб је квадрат. Максимални збир дијагонала је $2a\sqrt{2}$.

3. Помоћу обрасца:

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \text{ добијамо:}$$

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right) dy = \frac{a^2\pi}{b^2} \Big/_0^b \, b^2 y - \frac{y^3}{3} = \frac{2a^2 b\pi}{3}.$$

Дакле: $V = \frac{4a^2 b\pi}{3}$.

127*

1. $tg\alpha - tg\beta = \frac{9}{8}$, $\frac{2tg\alpha}{tg\beta} = 5$; $tg\alpha = \frac{15}{8}$, $tg\beta = \frac{3}{4}$

Помоћу обрасца: $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$ добија се: $tg\gamma=\frac{84}{13}$.

$$sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{15}{17};\ sin\beta=\frac{3}{5},\ sin\gamma=\frac{84}{85}.$$

Странице су троугла: $a=2Rsin\alpha=25$; $b=2Rsin\beta=17$; $c=2Rsin\gamma=28$. Висина која припада највећој страници је $h=asin\beta=15$.

$$P=M_1+M_2=h\pi(a+b)=630\pi.$$

$$V=\frac{h^2\pi c}{3}=2100\pi.$$

2. $(x-3)^2+(y-1)^2=2$. — Координате додирних тачака тангената нађу се из једначина: $-3(x_1-3)-(y_1-1)=2$, $(x_1-3)^2+(y_1-1)^2=2$. Добија се: $D_1(2,2)$, $D_2\left(\frac{14}{5}, -\frac{2}{5}\right)$. — Из једначина: $(2-p)^2+(2-q)^2=r^2$, $\left(\frac{14}{5}-p\right)^2+\left(-\frac{2}{5}-q\right)^2=r^2$, $p^2+q^2=r^2$ следује: $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $r=\sqrt{\frac{5}{2}}$. Једначина круга гласи: $x^2+y^2-3x-y=0$.

Коефицијенти смера тангената у тачки D_1: $k_1=1$, $k_2=-\frac{1}{3}$; $tg\varphi=2$; $\varphi=63^0 26' 5''$.

3. $a(x^3+1)-(a^2-a+1)x(x+1)=0$;
$(x+1)[ax^2-(a^2+1)x+a]=0$.

$$x_1=-1;\ x_2=a;\ x_3=\frac{1}{a}.$$

$$f(a)=a+\frac{1}{a}-1,$$

$$f'(a)=1-\frac{1}{a^2}=0,\ \text{одатле: } a=1.$$

Дата једначина гласи: $x^3-x^2-x+1=0$.

128*

1. $k_1=2$, $k_2=-\frac{2}{11}$; $tg2\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{24}{7}$. Даље имамо:

$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{24}{7}$, одатле: $tg\alpha=\frac{3}{4}$ (друга вредност је неупотребива).

Ако се повуку полупречници (R, r) двају највећих кругова у додирне тачке, затим из додирне тачке на мањем кругу повуче паралела са симетралом угла, добија се правоугли троугао у коме је: $sin\alpha = \frac{R-r}{R+r}$, а одатле: $r = R \cdot \frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}$. На исти начин одређује се полупречник трећег круга. — $sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{3}{5}$.

$P_1 = R^2\pi = \frac{15\pi}{16}$; $P_2 = R^2\pi\left(\frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}\right)^2 = \frac{15\pi}{16}\cdot\frac{1}{16}$; $P_3 = \frac{15\pi}{16}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2$, итд. Површине чине геометријски ред са количником $q = \frac{1}{16}$. Збир површина:

$$S = \frac{\frac{15\pi}{16}}{1-\frac{1}{16}} = \pi.$$

2. $V_1 = \frac{4R^3\pi}{3}$; $V_2 = r^2\pi h$. Из $2r\pi h = 2r^2\pi$ имамо: $h = r$. Из $5r^2 = 4R^2$ следује: $r = \frac{2R}{\sqrt{5}}$. Према томе: $V_2 = \frac{8R^3\pi}{5\sqrt{5}}$.

$$M = 2x\pi y;\ y = 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

$f(x) = R^2x^2 - x^4$; $f'(x) = 2R^2x - 4x^3 = 0$; $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $y = R\sqrt{2}$;

$M_{max} = 2R^2\pi$. — $V_3 = x^2\pi y = \frac{R^3\pi\sqrt{2}}{2}$.

$$V_1 : V_2 : V_3 = 40\sqrt{5} : 48 : 15\sqrt{10}.$$

3. $y = x^2 - 4x + C$. Заменом: $x = 6$, $y = 15$ добија се: $C = 3$. Из: $x^2 - 4x + 3 = 0$ следује: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

$$P_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \frac{4}{3}.$$

$$P_2 = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = (-)\frac{4}{3}.$$

Површине су једнаке.

129*

1. Интерполирани члан аритметичког реда је $\frac{x+y}{2}$, а геометријског $\sqrt{xy}$.

$\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}+6, \frac{x+y}{2} : \sqrt{xy} = 5 : 3$. Ставимо ли: $\frac{x+y}{2} = u$, $\sqrt{xy} = v$, добијамо: $u = 15$, $v = 9$. Затим: $x_1 = 27$, $(x_2 = 3)$; $y_1 = 3$, $(y_2 = 27)$.

Ариметички ред: 27, 15, 3,

Геометријски ред: 27, 9, 3,

Из једначине: $15 = \frac{n}{2}\left[54 - 12(n-1)\right]$ имамо: $n = 5$.

2. $t_1 = t_2 + 12\sqrt{2}$; $t_1 = 2r\cos 15^0$, $t_2 = 2r\sin 15^0$; $2r(\cos 15^0 - \sin 15^0) = 12\sqrt{2}$, $r(\sin 75^0 - \sin 15^0) = 6\sqrt{2}$; $2r\cos 45^0 \sin 30^0 = 6\sqrt{2}$. Дакле: $r = 12$; $t_1 = 23{,}18$; $t_2 = 6{,}21$.

$$P_1 = \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{r^2\sin\alpha}{2} = 12(5\pi - 3).$$

$$P_2 = 144\pi - P_1 = 12(7\pi + 3).$$

3. Додирне тачке првих двеју тангената су: $D_1\left(3, \frac{12}{5}\right)$ и $D_2\left(-4, \frac{9}{5}\right)$. Њихове једначине гласе: $9x + 20y = 75$, $-4x + 5y = 25$. Једначина треће тантенте: $y = -3$. Темена троугла су: $A\left(-1, \frac{21}{5}\right)$, $B(-10, -3)$, $C(15, -3)$, а његова површина $P_\Delta = 90$.

$$\frac{P_e}{P_\Delta} = \frac{\pi}{6}.$$

130

1. Редови су:

$q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ ---$

$2q,\ 2q^2,\ 2q^3,\ 2q^4,\ ---$

$3q,\ 3q^2,\ 3q^3,\ 3q^4,\ ---$

$$\frac{q}{1-q} + \frac{2q}{1-q} + \frac{3q}{1-q} = 1;\ q = \frac{1}{7}$$

$S_1 = \frac{1}{6}$; $S_2 = \frac{1}{3}$; $S_3 = \frac{1}{2}$.

2. Запремина целе купе је 324π.
$324\pi = 4r^2\pi$; $r = 9$; $s = 15$. — Полупречник пресека нека је x, висина отсечене купе y.

$$9 : 12 = x : y;\ \frac{x^2\pi y}{3} = 12\pi.\ \text{Дакле: } x = 3,\ y = 4.$$

Страница отсечене купе је 5, а зарубљене 10.

$$M_1 = 120\pi cm^2;\ M_2 = 15\pi cm^2.$$

3. Координате тежишта већег троугла јесу:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Заменом координата темена мањег троугла $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}; \frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$ у горње обрасце добију се опет исте вредности за x и y:

$$\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{x_1 + x_3}{2}}{3} = x.$$ — Тако и за y.

131

1. $\sin x + \sin(x + 60^0) + \sin(x + 120^0) = 2$.
Добија се једначина: $\sin x + \cos x \sqrt{3} = 2$. Заменом: $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ имамо: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Углови су: 30^0, 90^0, 150^0.

2. Висина калоте је $R - r$.
$2 R\pi (R - r) = 4 r^2\pi$, одатле: $R = 2 r$.

3. Пречечне тачке парабола: $0(0, 0)$ и $A(2p, 2p)$; $\overline{OA} = 2p\sqrt{2}$.

$$P = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\, dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p} dx = \frac{2x_1 y_1}{3} - \frac{1}{2p} \Big/ \frac{x^3}{3} \Big/_0^{2p} = \frac{8p^2}{3} - \frac{4p^2}{3} = \frac{4p^2}{3}.$$

132

1. $V_1 = \frac{r^3 \pi \, tg\alpha}{3}$; $V_2 = \frac{r^3 \pi \, tg(\alpha + x)}{3}$.

Из једначине: $tg(\alpha + x) = 2 tg\alpha$ добија се: $tg x = \frac{tg\alpha}{1 + 2 tg^2\alpha}$.

Код равностране купе $\alpha = 60^0$; $tg x = \frac{\sqrt{3}}{7}$, $x = 13^0 53' 52''$.

2. Додирна тачка је пресек дате тангенте и нормалног полупречника $\left(y = \frac{4}{3} x\right)$.

Добија се: $x = \frac{9}{5}, y = \frac{12}{5}$.

3. Корени једначине $x^2 + ax + b = 0$ јесу;

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Прво правило добија се сабирањем тих двеју једначина, а друго њиховим множењем.

133

1. $\beta = 90^0 - \alpha$; $2 sin\alpha = 1$, $sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$.

Хипотенуза је a, мања катета $\frac{a}{2}$, већа катета $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; хипотенузина висина је $\frac{a}{4}\sqrt{3}$.

$$V_1 = \frac{a^3\pi}{8};\ V_2 = \frac{a^3\pi}{16}.$$

$$V_1 : V_2 = 2 : 1.$$

2. $r\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^x = 2r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$.

$q^x = 2$; $x = \frac{log 2}{log q}$, где је q интересни фактор.

3. Једначина тангенте је $b^2 x x_1 + a^2 y y_1 - a^2 b^2 = 0$. Растојање жижа од тангенте:

$$d_1 = \frac{b^2 e x_1 - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}},\ d_2 = \frac{-b^2 e x_1 - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}.$$

Из једначине елипсе је $a^2 y_1^2 = a^2 b^2 - b^2 x_1^2$, па заменом имамо:

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{a^4 b^4 - b^4(a^2 - b^2)x_1^2}{b^4 x_1^2 + a^2(a^2 b^2 - b^2 x_1^2)} = \frac{b^4(a^4 - a^2 x_1^2 + b^2 x_1^2)}{b^2(b^2 x_1^2 + a^4 - a^2 x_1^2)} = b^2.$$

134

1. $0{,}\dot{6}\dot{3} = \frac{63}{100} + \frac{63}{100^2} + \frac{63}{100^3} + \ldots = \frac{7}{11}$;

$$0.6\dot{3} = \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \ldots = \frac{19}{30};$$

Вредност датог количника је $\frac{10}{2079}$.

2. $c = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi}{24} = \frac{R\pi cos\varphi}{12} = 1183{,}350 km$. Дужина једног степена је $\frac{R\pi cos\varphi}{180} = 78{,}890 km$.

3. Следује из:

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = 1.$$

135

1. a) Интерес је једнак двоструком капиталу:
$2K = \frac{K.5.n}{100}$, одатле: $n = 40$ година.

b) $3K = K.\,1{,}05^n$; одатле: $n = 22{,}5$ година.

c) $3K = K.\,1{,}025^{2n}$; одатле: $n = 22{,}25$ година.

2. Једначина тетиве гласи: $y = \frac{4x}{3} - \frac{8}{3}$, а њене пресечне тачке са параболом јесу: $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ $B(8,8)$. Површина параболиног отсечка је $P_1 = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12p} = \frac{125}{6}$, а површина полукруга $P_2 = \frac{625\pi}{32}$.

$$P_2 - P_1 = \frac{125}{2}\left(\frac{5\pi}{16} - \frac{1}{3}\right).$$

3. $P = \frac{absin\gamma}{2}$; $a = 2Rsin\alpha$, $b = 2Rsin\beta$;

$$P = 2R^2 sin\alpha sin\beta sin\gamma.$$

136*

1. Настала обртна тела су: параболоид, купа и већи лоптин отсечак, а десно: мањи лоптин отсечак и купа.

Пресечна тачка кривих је $D(1,\ 2\sqrt{2})$. Једначина тангенте параболе гласи: $y\sqrt{2} = 2(x + 1)$, а пресек тангенте с осом X је $A(-1, 0)$. — Једначина тангенте круга је: $x + 2y\sqrt{2} = 9$, а њен пресек с осом X је $B(9, 0)$.

$$K = \frac{4\pi}{3}.$$

$$V_1 = \pi\int_0^1 8x dx = 4\pi = 3K.$$

$$V_2 = \frac{16\pi}{3} = 4K.$$

$$V_3 = \frac{80\pi}{3} = 20K.$$

$$V_4 = \frac{28\pi}{3} = 7K.$$

$$V_5 = \frac{64\pi}{3} = 16K.$$

2. Пресек жлеба је равнокраки трапез чија површина треба да буде максимална.

$P = \frac{a+x}{2}\cdot h$, где је $= \sqrt{a^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 2ax - x^2}$;

$$f(x) = (a+x)\sqrt{3a^2 + 2ax - x^2},$$

$$f'(x) = \sqrt{3a^2 + 2ax - x^2} + \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{3a^2 + 2ax - x^2}} = 0.$$

Добија се: $x = 2a$; $\alpha = 120^0$.

3. I: $a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d$.
II: $b,\ b + g,\ b + 2g,\ b + 3g$.

Добију се једначине: $a + b = 0$; $a + d - b - g = -2$; $(a + 2d)(b + 2g) = 3$; $\frac{a + 3d}{b + 3g} = \frac{1}{2}$.

Због $b = -a$ имамо из четврте једначине: $g = a + 2d$, а заменом тих вредности у другу и трећу једначину следује: $d_1 = 1,\ a_1 = -1,\ g_1 = 1$; $d_2 = \frac{1}{15},\ a_2 = -1\frac{14}{15},\ g_2 = -1\frac{4}{5}$.

Редови гласе:

I: $-1, 0, 1, 2$	или:	I:	$-1\frac{14}{15}$,	$-1\frac{13}{15}$,	$-1\frac{12}{15}$,	$-1\frac{11}{15}$
II: $1, 2, 3, 4$		II:	$1\frac{14}{15}$,	$\frac{2}{15}$,	$-1\frac{10}{15}$,	$-3\frac{7}{15}$

137*

1. $r = a,\ h = a + d,\ s = a + 2d$.

Из једначина: $a(a + 2d) = 375$, $a(a + d) = 300$ добија се: $a = 15$, $d = 5$.

$$V = 1500\pi cm^3.$$

Из једначине: $2r\pi = \frac{s\pi\alpha}{180}$ имамо: $\alpha = 216^0$.

2. $300\,000 . q^{11} - 200\,000 . q_1^{11} = 221\,105,$
$300\,000 . q^{11} + 200\,000 . q_1^{11} = 805\,093.$
$q = 1{,}05;\ p = 5\%$
$q_1 = 1{,}035;\ p_1 = 3{,}5\%.$

3. Пресечна тачка у првом квадранту је $D\left(\frac{24}{5}, \frac{24}{5}\right)$. Коефицијенти смера тангената у пресечној тачки:
$k_1 = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{9}{16}$; $k_2 = -\frac{a^2}{b^2} = -\frac{16}{9}$; $tg\varphi = \frac{a^4 - b^4}{2a^2b^2} = \frac{175}{288}$; $\varphi = 31^0\,17'\,4''$.

Заједничке тангенте налазе се помоћу условне једначине за тангенту елипсе. Из једначина: $64k^2 + 36 = n^2$, $36k^2 + 64 = n^2$ добија се: $k_{1,2} = \pm 1$; $n_{1,2} = \pm 10$. Заједничке тангенте:

$$y = x + 10,$$
$$y = x - 10,$$
$$y = -x + 10,$$
$$y = -x - 10.$$

138*

1. Добију се једначине: $2a^3 + 54ad^2 = 2198$, $2a^3 + 6ad^2 = 854$, одакле: $a = 7$, $d_{1,2} = \pm 2$.

Бројеви су: 1, 5, 9, 13; 13, 9, 5, 1.

Из једначине: $\frac{n}{2}[26 - (n - 1)\,4] = n^3$ имамо: $n = 3$.

2. $R = \frac{abc}{4P} = \frac{65}{8}$. Висина прве пирамиде је: $H_1 = \sqrt{d^2 - R^2} = \frac{39}{2}$, а запремина $V_1 = 546 cm^3$. Код друге пирамиде: $r = \frac{P}{s} = 4$; $M = s.h$, одакле $h = 5$ (бочна висина). Висина пирамиде је $H_2 = \sqrt{h^2 - r^2} = 3$, а запремина $V_2 = 84 cm^3$.

$$V_1 - V_2 = 462 cm^3.$$

3. Круг је $(x - 5)^2 + y^2 = 16$.

Заменом $x = 5$, $y = 0$ у једначину $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$ добија се $x_1 = \frac{16}{5}$, а из једначине елипсе $y_{1,2} = \pm\frac{9}{5}$. Једначине тангената елипсе гласе: $x + y = 5$, $x - y = 5$. Тангента круга ($y = kx$) удаљена је од центра круга за полупречник. Из: $4 = \frac{5k}{\sqrt{k^2+1}}$ добија се: $k_{1,2} = \pm\frac{4}{3}$. Једначине тангената круга гласе: $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$.

Пресечне тачке тангената круга и елипсе су $M\left(\frac{15}{7}, \pm\frac{20}{7}\right)$.

Површина делтоида је $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{100}{7}$.

139

1. Сабирањем једначина добијамо:

$$2^{2x} = 16, \ x = 2.$$

Онда је: $2^{3y} = 2, y = \frac{1}{3}$.

2. Из: $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{a+b}{2}$ следује $b = \frac{3a}{5}$.

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{a+b}{2a} = \frac{4}{5}.$$

3. Отсечци дијагонала нека су x, y, z, u, тако да је: $x + y = d_1$, $z + u = d_2$.

$$P = \frac{xz}{2}\sin\varphi + \frac{yz}{2}\sin\varphi + \frac{yu}{2}\sin\varphi + \frac{xu}{2}\sin\varphi =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{2}\Big[z(x+y) + u(x+y)\Big] = \frac{(x+y)(z+u)}{2}\sin\varphi = \frac{d_1.d_2}{2}\sin\varphi.$$

140*

1. $a(1 + q + q^2) = 14, \quad a^2(1 + q^2 + q^4) = 84.$

Дељењем једначина добијамо: $a\,(1 - q + q^2) = 6$, а поновним дељењем са првом једначином: $\frac{1 - q + q^2}{1 + q + q^2} = \frac{3}{7}$.

Имамо: $q_1 = 2$, $a_1 = 2$; ($q_2 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 8$).
Коефицијенти су: $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$.

Једначина гласи: $x^3+2x^2+4x+8=0$; $x^2(x+2)+4(x+2)=$ $=0$, $(x+2)(x^2+4)=0$.

$$x_1=-2,\ x_{2,3}=\pm 2i.$$

2. Крак $b=2\sqrt{3}$; полупречници кругова су: $r_1=r_2=3$; $r_3=2\sqrt{3}-3$.

Обим $O=2l_1+l_2$; $l_1=\frac{\pi}{2}$, $l_2=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{3}-3)$.

$$O=\pi\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}-1\right)cm.$$

Површина $P=P_\Delta-(2J_1+J_2)$.

$P_\Delta=3\sqrt{3}$; $J_1=\frac{3\pi}{4}$; $J_2=\pi(7-\sqrt{3})$.

$$P=3\sqrt{3}-\pi\left(\frac{17}{2}-4\sqrt{3}\right)cm^2.$$

3, Полуосе елипсе добијамо из једначина:

$9b^2+\frac{256}{25}a^2=a^2b^2$, $16b^2+\frac{144}{25}a^2=a^2b^2$.

Једначина елипсе је $16x^2+25y^2=400$, странице провоугаоника су: $2e=6$, $2p=\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{5}$.

Запремина елипсоида је $V_1=2\pi.\frac{16}{25}\int_0^5(25-x^2)\,dx=\frac{320\pi}{3}$.

Запремина ваљка је $V_2=\frac{1536\pi}{25}$.

$$V_1-V_2=\frac{3392\pi}{75}.$$

141*

1. Антилогаритмовањем добија се једначина: $x^2-30x+125=0$. Дакле: $n=5$, $S_5=25$.

Из: $25=\frac{5}{2}(2a+4d)$ имамо: $a+2d=5$.

Тражена сума је:

$S=a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=(5-2d)^2+(5-d)^2+$ $+25=f(d), f'(d)=10d-30=0$; $d=3$, $a=-1$; $f''(d)=10$.

Ред гласи: -1, 2, 5, 8, 11

$$S_{min}=30.$$

2. Додирне тачке тангената: $D_{1,2}\ (2, \pm 4\sqrt{3})$. Коефицијент смера једне тангенте је $\sqrt{3}$, дакле угао између тангената $\alpha = 120^0$.

$$P = P_\Delta - \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{4x_1y_1}{3} = 16\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}(16\sqrt{3} - \pi).$$

Запремина обртног тела састоји се од купе умањене за параболоид и лоптин исечак.

$$V_1 = 64\pi;\quad V_2 = 24\pi\int_0^2 x dx = 48\pi;\quad V_3 = \frac{\pi}{3}.$$

$$V = \frac{47\pi}{3}.$$

3. Висина пирамиде једнака је полупречнику круга описаног око базе.

a) $V = \frac{B.\,R}{3} = \frac{168.\,25}{3} = 1400 cm^3.$

b) $s = R\sqrt{2} = 25\sqrt{2} cm.$

$$sin\frac{\gamma}{2} = \frac{20}{25\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5};\quad \gamma = 68^0 54'.$$

c) $M = \frac{1}{2}(ah_1 + bh_2 + ch_3)$, где је: $h_1 = \sqrt{1201}$, $h_2 = 5\sqrt{41}$, $h_3 = 5\sqrt{34}$.

142

1. Квадрирањем једначине добијамо:

$$x^4 - x^2 + \frac{sin^2\alpha}{4} = 0;\ x_1^2 = \frac{1 + cos\alpha}{2} = cos^2\frac{\alpha}{2},\quad \text{дакле: } x_{1,2} =$$

$$= \pm\, cos\frac{\alpha}{2};\quad x_2^2 = \frac{1 - cos\alpha}{2} = sin^2\frac{\alpha}{2},\quad \text{дакле: } x_{3,4} = \pm\, sin\frac{\alpha}{2}$$

2. $a + 2(a + d) + (a + 2d) = 40$, одатле: $a + d = 10$. По Питагорином правилу имамо:

$(2\sqrt{41})^2 = h^2 + 100$, а како је $h^2 = 100 - d^2$, то добијамо: $d = 6$, $a = 4$; $h = 8$.

$$P = 80 cm^2.$$

То је тангентни трапез јер је збир његових паралелних страница једнак збиру кракова.

3. Круг, елипса, хипербола и парабола зову се конични пресеци јер се могу добити као пресечне линије конуса и равни.

Елипса је геометријско место тачака за које је збир отстојања од две сталне тачке (жиже) константан, једнак великој оси. — Елипса чије се жиже поклапају је *круг*.

Хипербола је геометријско место тачака за које је разлика отстојања од две сталне тачке (жиже) константна, једнака реалној оси.

Парабола је геометријско место тачака које имају од једне сталне тачке (жижа) и од једне сталне праве (директриса) једнака отстојања.

143

1. Из једначина:
$h^2 + a^2 = 225$, $h^2 + b^2 = 169$, $h^2 + a^2 - b^2 = 200$ добија се $a^2 - b^2 = 56$, $h^2 = 144$; $h = 12$, $a = 9$, $b = 5$.

$$V = \frac{ab\pi h}{3} = 180\pi cm^3.$$

2. $$\left(\frac{a}{b}\right)^{x-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{x-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{x-2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left[\frac{b}{a} + 1\right] = \left(\frac{b}{a}\right)^{x}\left[\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right];$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2};$$

$$x = 1.$$

3. Круг $x^2 + y^2 = r^2$ ротира око осе X.

$$V = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)dx = 2\pi \Big/ r^2x - \frac{x^3}{3} \Big/_0^r = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

144

1. Ставимо: $m^{tg^2 x} = y$, онда имамо:
$y^2 - (m + 1)y + m = 0$, одатле: $y_1 = m$, $y_2 = 1$.
Корени су: $x_1 = 45^0$, $x_2 = 135^0$; $x_{3,4} = 0^0$; 180^0.

2. Из једначине:

$$r.\frac{q^{14} - 1}{q - 1} = R\cdot\frac{q^7 - 1}{q - 1} \text{ добијамо:}$$

$$R = r(q^7 + 1) = 24071 \text{ дин.}$$

3. Пресечне тачке асимптота $y = \pm \frac{b}{a} x$ и тангенте $b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2$ jесу:

$$A\left(\frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1}, \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}\right) \text{ и } B\left(\frac{a^2 b}{bx_1 + ay_1}, \frac{-ab^2}{bx_1 + ay_1}\right).$$

Половиште дужине AB има координате:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1} + \frac{a^2 b}{bx_1 + ay_1}\right) =$$

$$= \frac{a^2 b^2 x_1 + a^3 b y_1 + a^2 b^2 x_1 - a^3 b y_1}{2(b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2)} = \frac{2a^2 b^2 x_1}{2a^2 b^2} = x_1$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} - \frac{ab^2}{bx_1 + ay_1}\right) = \frac{2a^2 b^2 y_1}{2a^2 b^2} = y_1.$$

145*

1. $aq^n - r . \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2a$, одатле:

$$n = \frac{log[2a(q-1) - r] - log[a(q-1) - r]}{logq}.$$

У специјалном случају: $n = 20$ година.

2. Чланови реда су: a, $a + 1$, $a + 2$. По Питагорином правилу следује из два правоугла троугла:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a+1}{4}\right)^2 = (a+2)^2 - \left[\frac{3(a+1)}{4}\right]^2, \text{ одатле: } a = 7.$$

Највећа страница купе je 9, полупречник базе 4, а висина $3\sqrt{5}$.

$$V = 16\pi\sqrt{5}$$

$$sin\varepsilon = \frac{2}{7};\ \varepsilon = 16^0\,36'\,6''.$$

3. Крајња тачка параметра у првом квадранту je $D\left(5, \frac{9}{4}\right)$, једначина тангенте у тој тачки: $5x - 4y = 16$, а отсечци тангенте на координатним осама: $\frac{16}{5}$ и 4. Обим je:

$$O = 4\sqrt{\frac{256}{25} + 16} = \frac{16}{5}\sqrt{41}$$

Површина je: $P = \frac{128}{5}$.

Полупречник уписаног круга једнак je отстојању тангенте од координатног почетка. Једначина круга:

$$41x^2 + 41y^2 = 256.$$

146*

1, $a^2 + 2ah = 96$, $a^2 H = 144$. Заменом $H = \sqrt{h^2 - \frac{a^2}{4}}$ у другу једначину добија се: $a^4 h^2 - \frac{a^6}{4} = 20736$, а заменом $h = \frac{96 - a^2}{2a}$ долази се до биквадратне једначине

$$a^4 - 48a^2 + 432 = 0.$$

Резултати су: $a_1 = 6$, $a_2 = 2\sqrt{3}$; $h_1 = 5$, $h_2 = 7\sqrt{3}$; $H_1 = 4$, $H_2 = 12$.

Две пирамиде:

$$M_1 = 60 cm^2$$
$$M_2 = 84 cm^2;$$
$$\alpha_1 = 36^0\, 52'\, 11''; \ \alpha_2 = 8^0\, 12'\, 47''.$$

2. $r = \frac{P}{s} = \frac{1050}{105} = 10.$

Странице сличног троугла су: $a_1 = 35k$, $b_1 = 75k$, $c_1 = 100k$. Према обрасцу за полупречник описаног круга имамо: $10 = \frac{35 \cdot 75 \cdot 100k^3}{4 \cdot 1050k^2}$, одатле $k = \frac{4}{25}$. Странице су: $a_1 = 5\frac{3}{5}$, $b_1 = 12$, $c_1 = 16$; $a - a_1 = 29\frac{2}{5} cm$, $b - b_1 = 63 cm$, $c - c_1 = 84 cm$.

Тражено растојање: $d = r \pm \sqrt{r^2 - \left(\frac{c_1}{2}\right)^2}$.

$$d_1 = 16 cm, \ d_2 = 4 cm.$$

3. Из услова за тангенту елипсе добијамо:
$\frac{9a^2}{100} + b^2 = \frac{25}{4}$, $\frac{64a^2}{225} + b^2 = \frac{100}{9}$. Одатле: $a = 5$, $b = 2$.

Додирне тачке тангената добију се решењем једначина тангената са једначином елипсе. $D_1(3, \frac{8}{5})$, $D_2(4, \frac{6}{5})$. Једначина прве нормале је:

$y - \frac{8}{5} = \frac{10}{3}(x - 3)$ или: $50x - 15y = 126$.

Једначина друге нормале:

$y - \frac{6}{5} = \frac{15}{8}(x - 4)$ или: $75x - 40y = 252$.

147*

1. Ставимо: $3^x = u$, $4^y = v$; онда имамо: $u^2 - v^2 = 65$, $9u - 4v = 65$. Одатле: $u = 9$, $v = 4$; $x = 2$, $y = 1$; $q = \frac{1}{2}$.

Редови гласе: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots$

Из: $2 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2} + z\right)}$ добија се: $z = \frac{1}{4}$.

Нови ред би гласио:

$\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}, \frac{27}{128}, \ldots\ldots$

2. Дате линије су равнострана хипербола и круг. Заменом $y = \dfrac{4}{x}$ добијамо: $x^2 + \dfrac{16}{x^2} + 4x + \dfrac{16}{x} - 24 = 0$.

Ставимо ли: $x + \dfrac{4}{x} = u$, онда је: $x^2 + \dfrac{16}{x^2} = u^2 - 8$, па имамо: $u^2 + 4u - 32 = 0$; $u_1 = 4$, $u_2 = -8$.

Заједничке тачке: $A(2, 2)$, $B(-4 + 2\sqrt{3}, -4 - 2\sqrt{3})$ и $C(-4 - 2\sqrt{3}, -4 + 2\sqrt{3})$.

У тачки A линије се *додирују*, заједничка тангента има коефицијент смера -1.

У тачки B коефицијенти смера су: $k_1 = -\dfrac{4}{x^2} = -7 - 4\sqrt{3}$; $k_2 = -\dfrac{x-p}{y-q} = 2 - \sqrt{3}$.

$tg\varphi = 3\sqrt{3}$, $\varphi = 79^0\, 6'\, 24''$.

Аналогно се налази угао у тачки C.

Површина лика (равностраног троугла): $P = 24\sqrt{3}$.

3. $V_1 = \dfrac{4r^3\pi}{3}$; $V_2 = 2r^3\pi$; $V_3 = \dfrac{x^2\pi y}{3}$.

Из сличности троуглова следује:

$r : (y - r) = x : \sqrt{x^2 + y^2}$, одатле: $y = \dfrac{2rx^2}{x^2 - r^2}$.

Према томе: $V_3 = \dfrac{2r\pi x^4}{3(x^2 - r^2)}$.

Како је $V_2 = \dfrac{V_1 + V_3}{2}$, то се добије једначина:

$x^4 - 4r^2x^2 + 4r^4 = 0$; $x = r\sqrt{2}$, $y = 4r$.

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2}}{4};\ \alpha=38^{0}56'30''.$$

$$P_1=4r^2\pi;\ P_2=6r^2\pi;\ P_3=8r^2\pi.$$

Дакле је: $P_2=\frac{P_1+P_3}{2}$.

148*

1. $\sqrt[3]{x}=u;\ u_{1,2}=3\pm 4i;\ x_1=(3+4i)^3=44i-117,\ x_2=$
$=-44i-117$

$$y_1=\frac{x_1+x_2}{2}=-117;\ y_2=\sqrt{x_1 . x_2}=125.$$

Једначина гласи: $y^2-8y-14625=0$.

2. Треба наћи коефицијент смера праве. Решавањем једначина $y^2=4x,\ y-2=k(x-5)$ добија се: $y_{1,2}=$
$=\frac{2\pm\sqrt{4-8k+20k^2}}{k}$. Како је површина отсечка $P=\frac{(y_1-y_2)^3}{12p}$,

имамо: $P=\frac{1}{24}\cdot\left(2\sqrt{\frac{4-8k+20k^2}{k^2}}\right)^3$.

$$f(k)=\frac{1-2k+5k^2}{k^2};\ f'(k)=\frac{k^2(10k-2)-2k(1-2k+5k^2)}{k^4}=0.$$

Добија се: $k=1$. Једначина праве гласи: $y=x-3$, а њене пресечне тачке са параболом јесу $M(9,6)$ и $N(1,-2)$.

$$P=\frac{64}{3}.$$

Обртно тело састоји се од параболоида умањеног за купу.

$$V=\pi\int_0^9 4x\,dx-\frac{r^2\pi h}{3}=162\pi-72\pi=90\pi.$$

3. Како је $\beta+\gamma=180^0$, то је $\alpha=53^07'49''$. Из темена C повучемо паралелу са страницом d. Висина $h=d\sin\alpha=16$. Површина $P=800cm^2$. — По Питагорином правилу:

$$x=\sqrt{d^2-h^2}=12,\ b=\sqrt{h^2+(a-c-x)^2}=34.$$

Обим је: $O=154cm$.

$\sin\beta=\frac{h}{b},\ \beta=28^04'21'';\ \gamma=180^0-\beta=151^055'39'';\ \delta=$
$=180^0-\alpha=126^052'11''$.

149*

1. Странице троугла треба означити са: $a-2$, a, $a+2$. Применом Херонове формуле добијамо:

$$24=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a+4}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a-4}{2}}=\sqrt{\frac{3a^4-48a^2}{16}}.$$

Резултат је: $a=8$. Странице су: 6, 8, 10.

Странице правоугаоника x и y.

$$8:h=x:(h-y),\text{ где је } h=\frac{2P_\Delta}{a}=\frac{48}{8}=6.$$

Површина правоугаоника $P=xy=\frac{4}{3}(6-y)y$.

Дакле је: $f(y)=6y-y^2$; $f'(y)=6-2y=0$, $y=3$, $x=4$. Обим: $O=2(x+y)=14$.

$$r=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=\frac{5}{2};\ \ R=\frac{abc}{4P_\Delta}=5;\ P_1:P_2=1:4.$$

2. Дељењем једначине са $cos^2\varphi$ добија се: $3tg^2\varphi-7tg\varphi+$ $+4=0$, одатле: $tg\varphi_1=\frac{4}{3}$, $\varphi_1=53^07'48''$; $tg\varphi_2=1$, $\varphi_2=45^0$.

$$P=2R\pi h=2R\pi(h_1-h_2)=2R\pi(Rsin\varphi_1-Rsin\varphi_2)=$$
$$=4R^2\pi cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}=14{,}591dm^2.$$

3. Кроз сваку од датих тачака могу се повући по две дијагонале квадрата. Оне затварају с правом AB угао од 45^0, дакле стоје једна на другој нормално,

Коефицијент смера једне дијагонале из A добија се једначином:

$$1=\frac{\frac{4}{3}-k}{1+\frac{4}{3}k}.\ \ \text{Према томе: } k=\frac{1}{7};\ \ k'=-7.$$

Једначине дијагонала гласе:

$$y=\frac{1}{7}x+\frac{12}{7},\ y=-7x+16.$$

У тачки B: $k_1=-7$, $k_1'=\frac{1}{7}$.

Једначине дијагонала: $y=-7x+41$, $y=\frac{1}{7}x+\frac{37}{7}$. Пресек дијагонала је $S\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right)$, односно: $S_1\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$. Помоћу обрасца за координате половишта дужине налазимо: $C(9,3)$, $D(6,-1)$, односно: $C_1(1,9)$, $D_1(-2,5)$.

Полупречник траженога круга: $r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{5}{2}$.

Једначина круга:

$x^2+y^2-11x-5y+\frac{121}{4}=0$, односно:

$x^2+y^2-3x-11y+\frac{105}{4}=0.$

150*

1. $F(5,0)$. Једначина параболе: $y^2 = 20x$. Једначине заједничких тангената нађу се помоћу услова: $5 = kn$, $9k^2 - 16 = n^2$. Одатле: $k_{1,2} = \pm \frac{5}{3}$, $n_{1,2} = \pm 3$. Једначине гласе:

$$y = \frac{5}{3}x + 3, \qquad y = -\frac{5}{3}x - 3.$$

Додирне тачке на параболи: $D_1(\frac{9}{5}, 6)$, $D_2(\frac{9}{5}, -6)$.

Додирне тачке на хиперболи: $D_3(-5, \frac{16}{3})$, $D_4(-5, -\frac{16}{3})$.

Површина: $P = \frac{h}{2}(a + c) = \frac{17}{5}\left(12 + \frac{32}{3}\right) = \frac{1156}{15}$.

2. $H_1 = r tg 2\alpha$; $H_2 = r tg\alpha$.
$V_1 : V_2 = tg 2\alpha : tg\alpha = 2 : (1 - tg^2\alpha) = 2cos^2\alpha : cos 2\alpha$.

Из $2cos^2\alpha : cos2\alpha = 1 : 3$ следује: $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\alpha = 30^0$, $2\alpha = 60^0$.

$$B = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 324\sqrt{3};$$

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}; \ H_1 = 18; \ H_2 = 6.$$

$$V_1 = 1944\sqrt{3}; \ V_2 = 648\sqrt{3}.$$

$$V_1 - V_2 = 1296\sqrt{3}\, cm^3.$$

3. *a*) $m : n = 1 : x$, дакле: $m = k$, $n = kx$. Површина првог квадрата $P_1 = a^2$, површина другог $P_2 = b^2 = k^2 + k^2x^2$. А пошто је: $k + kx = a$, то је: $P_2 = \frac{a^2(1 + x^2)}{(1 + x)^2}$. Аналогно је: $P_3 = \frac{a^2(1 + x^2)^2}{(1 + x)^4}$. Површине чине геометријски ред. Збир површина:

$$S = \frac{49a^2}{24} = \frac{a^2}{1 - \frac{1 + x^2}{(1 + x)^2}}. \quad \text{Добија се: } x_1 = \frac{4}{3}, \ x_2 = \frac{3}{4}.$$

b) $S = \frac{a^2(1+x)^2}{2x}$.

$f(x) = \frac{1 + 2x + x^2}{x}$. Из $f'(x) = 0$ добија се $x = 1$.

Странице треба располовити.

$S_{min} = 2a^2 = 288 cm^2$.

$c)\ O_1 = 4a;\quad O_2 = 4b;\ b = k\sqrt{1+x^2} = \frac{12a}{17}\cdot\frac{13}{12} = \frac{13a}{17}.$

Количник геометријског реда је: $q = \frac{b}{a} = \frac{13}{17}$.

$S = 17a = 204cm.$

151

1. Десна страна једначине је:

$7sin2x\ \frac{1}{sin^2x} = \frac{14sinx\,cosx}{sin^2x} = \frac{14}{tgx}$. Из квадратне једначине:

$24 - 10tgx = \frac{14}{tgx}$ добија се $tgx_1 = \frac{7}{5}$, $x_1 = 54^0\,27'\,44''$; $tgx_2 = 1$, $x_2 = 45^0$.

2. $d = \sqrt{(x-27)^2 + y^2} = \sqrt{(x-27)^2 + 8x^2 - 8}$.

$f(x) = 9x^2 - 54x + 721$; $f'(x) = 18x - 54 = 0$, $x = 3$; $y = \pm 8$.

Нађена тачка је крајња тачка параметра!

$r_1 = 8$: $r_2 = 10$.

3. Из правоуглог троугла добија се:

$d = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{2R\cdot 2r}$.

152

1. $d = \sqrt{(sin\alpha - sin\beta)^2 + (cos\alpha - cos\beta)^2} =$

$$= \sqrt{\left(2cos\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \left(-2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{a-\beta}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \sqrt{4sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}} =$$

$$= 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

У специјалном случају: $d = 2sin30^0 = 1$.

2. $\frac{1}{4}\sqrt{6.5^{x+1} - 5} = 5^x\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots\right)$.

$\frac{1}{4}\sqrt{30.5^x - 5} = 5^x\cdot\frac{5}{4}$ — Квадрирањем и увођењем $5^x = u$, добија се:

$u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{5}$; $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

3. $R+r=\frac{c}{2}+\frac{ab}{a+b+c}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}+\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}=$

$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}+\frac{ab(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{2ab}=\frac{a+b}{2}.$

Дакле: $a+b=2R+2r.$

153

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos x dx=\sqrt{2}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1.$

2. Странице су: $AB=10$, $AC=\sqrt{29}$, $BC=5$. Површина троугла је 7, а висина која припада највећој страници $h=\frac{7}{5}$.

$$V=\frac{h^2\pi}{3}\cdot AB=\frac{98\pi}{15}.$$

3. *Логаритамски систем* чине сви логаритми који се односе на исту базу. Логаритамска база може бити сваки позитиван број, изузев 1. Према томе могућ је неограничен број логаритамских система. Данас се у математици употребљавају само два и то:

a) *декадски* или Бриксов систем коме је база 10.

b) *природни* или Неперов систем коме је база Неперов број

$$e=2{,}71828\,.\,.\,.\,.\,.$$

Први се логаритамски систем обично употребљава у нижој математици, други у вишој.

154

1. Квадрирањем друге једначине добија се: $1+\sin 2x=$ $=1+\frac{y}{2}\sqrt{3y}$. Заменом из прве налази се: $y=1$; $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_1=30^0$, $x_2=60^0$.

2. Полупречник уписаног круга нека је x. Из: $x\sqrt{2}+$ $+x=r$ добијамо: $x=r(\sqrt{2}-1)$. Како је $R=r+x=r\sqrt{2}$ то је $P=R^2\pi=2r^2\pi$.

3. У том је случају: $y_2 = -y_1$, па имамо:

$$P = \frac{8y_1^3}{12p} = \frac{2y_1^3}{3p} = \frac{2y_1}{3p} \cdot y_1^2 = \frac{2y_1}{3p} \cdot 2px_1 = \frac{4x_1x_1}{3}.$$

155*

1. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{30}$, $\frac{1}{a+15} + \frac{1}{b-5} = \frac{1}{30}$. Из прве једначине: $ab = 30a + 30b$; заменом у другу добија се: $a = 3b - 75$; када се ова вредност супституира у прву једначину, имамо: $b^2 - 65b + 750 = 0$.

$b = 50$, $a = 75$ ($b = 15$, $a = -30$).

2. $a^b = 2^4$, $a^{-\frac{1}{b}} = 2^{-1}$. Логаритмовањем се добија:

$b\log a = 4\log 2$, $-\frac{\log a}{b} = -\log 2$. Дељењем једначина излази: $b^2 = 4$, $b = 2$; $a = 4$.

Висина ваљка је $h = 2a\sin\alpha = 5$.

$V = ab\pi h = 40\pi$.

3. Центар круга је пресечна тачка симетрале угла код A са страницом BC. Једначина странице AB: $3x + 2y - 28 = 0$, једначина странице AC: $3x - 2y + 28 = 0$; једначина симетрале:

$$\frac{3x + 2y - 28}{\sqrt{13}} - \frac{3x - 2y + 28}{-\sqrt{13}} = 0, \text{ тј. } x = 0.$$

Како страница BC има једначину: $y = -\frac{x}{4}$, то центар круга лежи у координатном почетку. $r = \frac{28}{\sqrt{13}}$.

Једначина круга: $13x^2 + 13y^2 = 784$.

156

1. $tgx = cotgx$: $x = 45^0$; $y = 1$. Најближа пресечна тачка кривих је дакле $M\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, а коефицијенти смера тангената у тој тачки:

$$y'_1 = \frac{1}{\cos^2 x} = 2; \; y_2' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -2;$$

$$tg\varphi = \tfrac{4}{3}; \; \varphi = 53^0 7' 48.''$$

2. Нека је x тражено растојање. Помоћу сличности добијамо:

$(x+3):3=(x+15):5$, одатле: $x=1{,}5m$.

Расветљени део је калота. $P=2r\pi h$, где је $h=r-y$. Помоћу правила да је катета правоуглог троугла геометријска средина припадног отсечка на хупотенузи и хипотенузе имамо:

$y=\frac{r^2}{x+3}=\frac{1}{2}dm$. Према томе: $P=15\pi dm^2$.

3. Идентитет се доказује квадрирањем дате једначине.

157

1 $R^2\pi=5r^2\pi$, одатле: $R=r\sqrt{5}$.

$\pi s(R+r)=8R^2\pi$, одатле: $s=\frac{8R^2}{R+r}=\frac{40r^2}{r(\sqrt{5}+1)}=10r(\sqrt{5}-1)$

$$\cos\alpha=\frac{R-r}{s}=\frac{1}{10};\ \alpha=84^0 15'39''$$

2. $\log x-\frac{1}{\log\sqrt[6]{x}}-1=0$; $\log x-\frac{6}{\log x}-1=0$; одатле: $\log x_1=3$, $\log x_2=-2$. a) $x_1=1000$; $x_2=0{,}01$ b) $x_1=\frac{1}{8}$; $x_2=4$.

3. Промењљиве координате темена нека су x, y, а промењљиве координате тежишта u, v.

Према обрасцу за координате тежишта троугла имамо:

$$u=\frac{x}{3},\ v=\frac{y}{3};\ \text{одатле: } x=3u,\ y=3v.$$

Заменом у једначину елипсе добијамо:

$9b^2u^2+9a^2v^2=a^2b^2$, или: $\frac{u^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2}=1$. Осе елипсе су: $\frac{2a}{3}$, $\frac{2b}{3}$.

158

1. Антилогаритмовањем прве једначине добијамо:

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1,$$

а из друге једначине:

$$10^{\frac{y-1}{y}} = 10^{\frac{x-2}{x}}; \quad x = 2y.$$

Линије су хипербола и права. Њихове пресечне тачке: $A(\frac{15}{2}, \frac{15}{4})$, $B(-\frac{15}{2}, -\frac{15}{4})$.

$k_1 = \frac{1}{2}$; $k_2 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = \frac{25}{18}$; $tg\varphi = \frac{32}{61}$, $\varphi = 27^0 40' 53''$.

2. $\frac{3872}{2r\pi} - \frac{3872}{2(r+1)\pi} = 11$. Добија се једначина: $r^2 + r - 56 = 0$. Полупречници су $7cm$ и $8cm$. Разлика површина је $188,4cm^2$.

3. $d = 2.\frac{a}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

$$P = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{d^2}{2}\sqrt{3}.$$

159*

1. a) Вредности појединих улога на крају десете године.

$$a_1 = 1700 + \frac{1700.\ 4.\ 10}{100} = 2380$$

$$a_2 = 1700 + \frac{1700.\ 4.\ 9}{100} = 2312$$

— — — — — — — — — —

$$a_{10} = 1700 + \frac{1700.\ 4}{100} = 1768.$$

Сума овог аритметичког реда је:

$S_1 = 5\,(2380 + 1768) = 20740$ динара.

b) $S_2 = aq\frac{q^{10}-1}{q-1} = 1700.\ 1,04\ \frac{1,04^{10}-1}{0,04} = 21226$ дин

2. Из једначина: $B_1 - B_2 = 5$, $B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2 = 19$ добија се: $B_1 = 9$, $B_2 = 4$. (Други пар решења: $B_1 = 21\frac{1}{3}$, $B_2 = 16\frac{1}{3}$ задовољавао би другу једначину само када би корен у њој имао негативан предзнак. Последице квадрирања једначине!). Основне су ивице: $a_1 = 3$, $a_2 = 2$.

Тражени угао је комплемент нагибног угла бочне стране према бази.

$$tg\alpha = \frac{2H}{a_1 - a_2} = 12, \quad \alpha = 85^0 14'11''; \quad 90^0 - \alpha = 4^0 45'49''.$$

3. $F_1(5, 0)$. Једначина окомице на асимптоту $y = \frac{3}{4}x$ гласи: $y = -\frac{4}{3}\left(x - 5\right)$, а њихова пресечна тачка $M\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

a) $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{12}{5} = 6$

b) $V_x = \frac{48\pi}{5}; V_y = \frac{5124\pi}{125} - \frac{1024\pi}{125} = \frac{164\pi}{5}$.

$$V_x : V_y = 12 : 41.$$

160

1. $y = (a - x)(b + x)$; $y' = -(b + x) + a - x$, одатле: $x = \frac{a - b}{2}$. Добивени је производ: $y = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$. — Разлика је

$$d = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a - b}{2}\right)^2.$$

2. Из једначина; $2r + l = 16$, $lr = 30$ добија се: $l_1 = 6$, $l_2 = 10$; $r_1 = 5$, $r_2 = 3$.

$$\alpha = \frac{180l}{r\pi}; \quad \alpha_1 = 68{,}78^0; \quad \alpha_2 = 191{,}08^0.$$

3. Једначина тангенте у крајњој тачки параметра $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ гласи: $y = x + \frac{p}{2}$. Пресечне тачке тангенте с осом X и Y јесу: $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ и $B\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; 0 = \frac{-\frac{p}{2} + \frac{p}{2}}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \; \frac{p}{2} = \frac{0 + p}{2}.$$

161*

1. Линија сече осу X у тачкама чије су апсцисе ± 3, ± 1, а осу Y у тачки $(0, -9)$. Први извод функције је $y' = -4x^3 + 20x$, а други извод $y'' = -12x^2 + 20$.

Из $y' = 0$ добија се: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{5}$. За $x_1 = 0$ функција има минимум -9, за $x_{2,3} = \pm\sqrt{5}$ функција има максимуме 16. — Први извод је позитиван од $x = -\infty$ до $x = -\sqrt{5}$ и од $x = 0$ до $x = \sqrt{5}$, а негативан од $x = -\sqrt{5}$ до $x = 0$ и од $x = \sqrt{5}$ до $x = \infty$.

Ток функције види се прегледно из ове схеме:

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{5}$	-1	0	1	$\sqrt{5}$	3	∞
y'	$+$		0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	0	16	0	-9	0	16	0	$-\infty$
			maks.		min.		maks.		

Површине су:

$$P_1 = P_2 = \int_1^3 (-x^4 + 10x^2 - 9)\,dx = \frac{304}{15}.$$

$$P_3 = \int_{-1}^{1} (-x^4 + 10x^2 - 9)dx = -\frac{176}{15}.$$

2. $P_1 = 4r^2\pi$

$P_2 = 6x^2\pi;\ x = r;\ P_2 = 6r^2\pi$

$P_3 = 3y^2\pi;\ r = \frac{y\sqrt{3}}{3},\ y = r\sqrt{3};\ P_3 = 9r^2\pi$

$V_1 = \frac{4r^3\pi}{3};\ V_2 = 2x^3\pi = 2r^3\pi;\ V_3 = \frac{y^3\pi\sqrt{3}}{3} = 3r^3\pi.$

$P_1 : P_2 : P_3 = 4 : 6 : 9 = V_1 : V_2 : V_3.$

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3}{2};\ \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{3}{2}.$

3. Део странице c између подножја висине и тежишне линије је $x = \sqrt{t_c{}^2 - h_c{}^2} = \frac{5}{2}$; $b = \sqrt{h_c{}^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2} = 8;$

$$cos\alpha = \frac{\frac{c}{2} - x}{b} = \frac{11}{16}, \quad \alpha = 46^0 34'; \quad a = \sqrt{h_c{}^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2} =$$

$$= 12; \; sin\beta = \frac{h_c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{8}, \quad \beta = 28^0 57' 16''; \; \gamma = 104^0 28' 44''.$$

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{32}{\sqrt{15}}; \; r = \frac{P}{s} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Површина кружног прстена износи $\frac{308\pi}{5}$.

162

1. Полупречник базе ваљка нека је x, висина y. Запремина ваљка $V = x^2 \pi y$; $x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{4} + y\right)^2 = \frac{15r^2}{16} - \frac{r}{2}y - y^2$. Према томе је $f(y) = \frac{15r^2}{16}y - \frac{r}{2}y^2 - y^3$. Из $f'(y) = 0$ добија се: $y = \frac{5r}{12}$; $x^2 = \frac{5r^2}{9}$. Запремина ваљка је $V = \frac{25r^3\pi}{108}$, а запремина отсечка $V_1 = \frac{27r^3\pi}{64}$.

$$V : V_1 = 400 : 729$$

2. Упадни угао једнак је одбојном углу. — Означимо ли са x отстојање погођене тачке од B, онда имамо:

$$cotg\alpha = \frac{x}{0,6} \text{ и } cotg\alpha = \frac{1,8 - x}{1,2}. \qquad \text{Одатле:}$$

$$x = 0,6m; \; \alpha = 45^0.$$

3. $r = \frac{P}{s} = \frac{ab}{a + b + c} = \frac{ab(a + b - c)}{(a + b)^2 - c^2}$. Заменом $a^2 + b^2 = c^2$ у имениоцу и скраћивањем разломка с ab добија се:

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

РЕГИСТАР

Сваки задатак обележен је са два броја. Први се односи на групу, а други је број задатка у групи.

I. Једначине

1,1	31,1	73,2	127,3
2,1	32,1	74,1	132,3
3,1	35,1	75,1	139,1
5,1	37,3	86,1	140,1
8,3	38,1	90,1	141,1
9,2	44,1	93,1	142,1
10,1	45,1	94,1	143,2
11,1	46,1	95,1	144,1
12,1	48,1	98,1	146,1
14,1	49,3	100,1	147,1
18,1	51,1	105,2	148,1
20,2	55,2	110,2	152,2
21,3	57,1	114,1	154,1
22,1	58,1	117,1	155,1
24,1	60,1	118,1	156,3
26,1	61,3	120,2	157,2
27,1	62,1	123,1	158,1
28,1	66,1	124,	158,2
29,2	72,1	126,1	159,2

2. Аритметички и геометријски редови

4,1	47,1	96,3	125,1
6,1	53,1	100,1	128,1
13,1	54,3	101,3	129,1
15,1	61,1	102,1	130,1
16,1	63,1	104,2	131,1
19,2	67,3	106,2	134,1
20,2	68,1	107,2	136,3
25,1	70,3	108,3	137,1
30,1	71,1	109,1	138,1
32,1	79,1	110,1	140,1
33,1	80,1	112,1	141,1
34,2	81,1	113,1	145,2
38,3	87,1	114,2	147,1
39,1	88,1	115,1	149,1
40,1	89,3	119,1	150,3
41,3	92,2	121,1	
42,1	95,2	122,1	

3. Интересни рачун, ренте

34,1	91,1	111,2	137,2
43,3	97,1	116,3	144,2
44,3	99,1	133,2	145,1
69,2	103,1	135,1	159,1
84,1			

4. Планиметрија

14,2	52,2	105,1	151,3
16,1	56,2	107,1	152,3
19,3	59,2	109,2	154,2
21,2	60,2	117,2	158,3
27,3	66,3	121,3	160,2
33,3	67,2	140,2	161,3
34,3	77,1	142,2	162,3
47,3	102,3	146,2	

5. Стереометрија

1,3	50,2	85,1	127,1
2,2	51,2	90,1	128,2
5,3	55,3	91,2	130,2
7,3	58,3	93,2	131,2
8,2	61,3	97,2	133,1
9,2	63,3	100,3	138,2
10,1	65,3	101,1	141,3
13,2	66,3	104,1	143,1
17,2	71,2	106,1	145,2
18,2	72,3	108,1	146,1
29,3	73,3	109,1	147,3
31,3	77,2	110,1	150,2
36,1	78,1	112,2	153,2
37,2	79,3	115,2	155,2
39,2	81,2	116,2	156,2
41,1	82,2	118,2	159,3
45,1	83,3	124,2	161,2

6. Тригонометрија

3,3	30,2	80,3	119,3
4,2	32,3	81,1	122,3
5,1	34,3	83,3	123,3
6,1	35,3	84,2	125,3
7,2	40,2	85,2	127,1
8,1	42,2	86,3	128,1
9,1	43,2	87,3	129,2
10,3	45,2	89,1	131,1
11,2	46,3	90,3	132,1
12,3	49,1	92,1	133,1
13,2	50,3	94,3	134,2
14,2	52,2	95,2	135,3
15,3	54,1	96,1	139,3
16,3	59,3	97,2	148,3
17,1	62,3	98,3	149,2
18,2	64,3	99,3	150,2
19,2	65,2	101,1	151,1
20,1	67,2	103,2	152,1
21,2	68,2	104,3	157,1
22,1	70,1	107,3	159,2
23,1	71,1	110,2	161,3
24,3	74,3	111,1	162,2
26,2	75,3	112,1	
27,3	76,2	113,3	
28,2	78,2	114,1	

7. Аналитичка геометрија

1,2	36,2	71,3	101,2
2,3	37,1	73,1	102,2
3,2	38,2	74,2	103,3
4,3	39,3	75,2	106,3
5,2	40,3	76,3	108,2
6,2	41,2	77,3	109,3
9,3	42,3	78,3	110,3
10,2	45,3	79,2	111,3
12,2	47,2	81,3	112,3
13,3	48,2	82,3	113,2
15,2	49,2	83,2	114,3
16,2	51,3	84,3	115,3
18,3	52,3	85,3	116,1
19,1	53,3	87,2	118,3
20,3	54,2	88,3	119,2
21,1	55,1	90,2	120,1
23,3	56,3	91,3	121,2
24,2	57,2	92,3	122,2
25,2	58,2	93,3	123,2
26,3	59,1	94,2	124,3
27,2	61,2	95,3	125,2
28,3	62,2	96,2	127,2
29,1	63,2	97,3	129,3
30,3	67,1	98,2	130,3
32,2	69,1	99,2	131,3
33,2	70,2	100,2	132,2

133,3	139,2	146,3	154,3
134,3	140,3	147,2	155,3
135,2	141,2	149,3	157,3
136,1	142,3	150,1	158,1
137,3	144,3	151,2	159,3
138,3	145,3	153,2	160,3

8. Диференцијални и интегрални рачун

2,1	27,2	54,2	80,2
3,2	28,1	56,1	81,2
6,3	30,1	57,3	82,1
7,1	31,2	58,3	83,1
8,1	34,2	59,2	83,2
9,1	35,2	60,3	86.2
11,1	36,1	63,2	88,2
11,3	40,3	64,1	89,2
14,3	42,3	64,2	93,3
17,3	43,1	65,1	100,1
21,1	44,2	66,2	100,2
21,3	45,3	67,1	102,1
22,2	46,2	68,3	102,2
22,3	47,3	69,3	105,3
23,1	48,3	71,2	110,3
23,2	50,1	72,2	112,3
24,2	52,1	74,2	113,2
25,3	53,2	76,1	115,2
26,3	53,3	76,3	117,3

126,2	131,3	143,3	156,1
126,3	136,1	148,2	160,1
127,3	136,2	149,1	161,1
128,2	141,1	150,3	162,1
128,3	141,2	153,1	

Обрасци

Аритметика

Важни производи:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
5. $a^5 \pm b^5 = (a \pm b)\, a^4 \mp a^3b + a^2b^2 \mp ab^3 + b^4)$,
6. Паскалов троугао:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

и т. д.

Аритметичка и геометријска средина:

1. $$A = \frac{a+b}{2}$$

2. $$G = \sqrt{ab}$$

Квадратна једначина:

1. $$x^2 + ax + b = 0;$$

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 \,.\, x_2 = \;\;\; b \end{array}\right\}$$

3. $$x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Аритметички ред:

1. $a, + d,\ a + 2d,\ a + 3d, \ldots.$
2. $a_n = a + (n - 1)\, d$
3. $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)\, d]$

Геометријски ред:

1. $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots.$
2. $a_n = aq^{n-1}$
3. $S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$
4. $S\infty = \frac{a}{1 - q} \qquad |q| < 1$

Сложен интерес и ренте:

1. $K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = Kq^n$
2. $S_n = r\frac{q^n - 1}{q - 1}$ *у време последње уплате*
3. $S_n = rq\frac{q^n - 1}{q - 1}$ *годину дана иза последње уплате*
4. $Kq^n - r\frac{q^n - 1}{q - 1} = C$ *отплаћивање дуга*

Диференцијални и интегрални рачун:

1. $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = tg\alpha = k$
2. $y = a$
   $y' = 0$
3. $y = a \,.\, x^n$
   $y' = a \,.\, nx^{n-1}$
4. $y = u \pm v;\ u = f_1(x);\ v = f_2(x)$
   $y' = u' \pm v'$
5. $y = uv$
   $y' = u'v + v'u$
6. $y = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

7. $$y = u^n$$
$$y' = nu^{n-1}.u'$$

8. $$y = sinx$$
$$y' = cosx$$

9. $$y = cosx$$
$$y' = -sinx$$

10. $$y = tgx$$
$$y' = \frac{1}{cos^2x}$$

11. $$y = cotgx$$
$$y' = -\frac{1}{sin^2x}$$

12. $y = f(x)$ има за $x = a$
максимум, кад је $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$
минимум, кад је $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$

---

13. $$\int adx = a\int dx = ax + C$$

14. $$\int ax^n dx = a\int x^n dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ n \neq -1$$

15. $$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

16. $$\int sinxdx = -cosx + C$$

17. $$\int cosxdx = sinx + C$$

18. $$\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$$

19. $$\int \frac{dx}{sin^2x} = -cotgx + C$$

20. $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

21. $$P = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$ *површина линије* $y = f(x)$

22. $$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$$ *запремина обртног тела; ротација око осе X*

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy$$ *запремина обртног тела; ротација око осе Y.*

Геометрија

I Планиметрија

Правоугаоник $P = ab$

Паралелограм $P = ah$

Трапез $P = \frac{a + c}{2} \cdot h$

Четвороугао с нормалним дијагоналама $P = \frac{d_1 d_2}{2}$

Троугао

1. $P = \frac{ah}{2}$
2. $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ *Херонов образац*
3. $R = \frac{abc}{4P}$
4. $r = \frac{P}{s}$

а) *Правоугли троугао*

1. $a^2 + b^2 = c^2$
2. $h^2 = pq;\ a^2 = pc,\ b^2 = qc$

Круг и његови делови

1. $O = 2r\pi;\ P = r^2\pi$
2. $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ *лук*

3. $P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{lr}{2}$ *исечак*

4. $P = \pi(R^2 - r^2)$ *прстен*

Правилни ликови

Квадрат

1. $P = a^2 = \frac{d^2}{2}$
2. $d = a\sqrt{2}$

Равнострани троугао

1. $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
2. $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
3. $R = \frac{2}{3}h = \frac{a}{3}\sqrt{3}$
4. $r = \frac{R}{2} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$

Правилан шестоугаоник

$$P = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3R^2}{2}\sqrt{3}$$

Многоугаоник

1. $\frac{n(n-3)}{2}$ *број свих дијагонала*
2. $(n-2)180^0$ *збир углова*
3. $\frac{(n-2)180^0}{n}$ *угао правилног многоугаоника*

II Стереометрија

Призма

1. $P = 2B + M$
2. $V = B \cdot H$

а) Правоугли паралелепипед

1. $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
2. $P = 2(ab + ac + bc)$
3. $V = abc$

Пирамида

1. $P = B + M$
2. $V = \frac{B \cdot H}{3}$

Усправни ваљак

1. $M = 2r\pi h$
2. $P = 2r\pi(r + h)$

Ваљак

3. $V = r^2\pi h$

а) Равнострани ваљак

1. $h = 2r$
2. $M = 4r^2\pi$
3. $P = 6r^2\pi$
4. $V = 2r^3\pi$

Усправна купа

1. $M = r\pi s$
2. $P = r\pi(r + s)$

Купа

3. $V = \frac{r^2\pi h}{3}$

а) Равнострана купа

1. $s = 2r$
2. $M = 2r^2\pi$
3. $P = 3r^2\pi$
4. $V = \frac{r^3\pi\sqrt{3}}{3}$

Зарубљена пирамида

1. $P = B_1 + B_2 + M$
2. $V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2)$

Зарубљена купа

1. $M = \pi s(R + r)$
2. $P = \pi[R^2 + r^2 + s(R + r)]$
3. $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$