РИСТА КАРЉИКОВИЋ
директор гимн. у пензији

АЛГЕБРА

ЗА VIII РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

Овај је уџбеник препоручен од Главног просветног савета С.бр. 517 од 26-III-1938 и одобрен од Г. Министра просвете одлуком IV бр. 5470 од 17-IV-1938 год.

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЂУКОВИЋА
БЕОГРАД — ТЕРАЗИЈЕ

Цена 20 дин.

РИСТА КАРЉИКОВИЋ
директор гимназије у пензији

АЛГЕБРА

ЗА VIII РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

Овај је уџбеник препоручен од Главног просветног савета С.бр. 517 од 26-III-1938 и одобрен од Г. Министра просвете одлуком IV бр. 5470 од 17-IV-1938 год.

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЋУКОВИЋА
БЕОГРАД — ТЕРАЗИЈЕ

ПРВИ ОДЕЉАК

Теорија извода и појам максимума и минимума

§ 1. **О функцијама уопште**. Из градива ранијих разреда видели смо да под функцијом разумемо такву једну променљиву количину чија вредност зависи од вредности једне друге такође променљиве количине, а са којом стоји у вези исказаној једном једначином. Тако, ако једначину

$$y - 2x = 12$$

решимо по y, добијамо $y = 2x + 12$. Тада променљиву y сматрамо као функцију променљиве x, јер њена вредност зависи од вредности променљиве x.

За $x = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ биће: $y = 12, 14, 10, 16, 8, 18, 6, \ldots$

Овде вредност променљиве y зависи од вредности променљиве x, те је променљива y ***зависна количина*** или ***функција***, а променљива x, којој ми дајемо различите произвољне вредности, је ***независна***. Ако нашу једначину решимо по x, добијамо

$$x = \frac{y - 12}{2}.$$

Сматрајући сада y као независно променљиву и дајући јој произвољне вредности:

$y = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ добијамо за $x = -6, -5\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2}, -5, -7, -4\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2}, \ldots$

У овом случају, променљиву x сматрамо као функцију независно променљиве y.

Познате количине у једначини сматрају се као ***сталне***, пошто се оне не мењају.

Обим O и површину P једног круга сматрамо као функције његовог полупречника r, јер се и обим и површина увећавају или смањују, ако се полупречник увећава или смањује. Њихова је веза дата једначинама:

$$O = 2\Pi r \quad \text{и} \quad P = r^2\Pi.$$

Површину P и запремину V једне лопте такође сматрамо као функције полупречника r, јер се и површина и запремина увећавају или смањују, ако се полупречник увећава или смањује. Њихова је веза дата једначинама:

$$P = 4\Pi r^2 \quad \text{и} \quad V = \frac{4}{3}\Pi r^3.$$

Површину P и запремину V једне коцке такође сматрамо као функцију њене ивице a, јер се и површина и запремина увећавају или смањују, ако се ивица увећава или смањује. Њихова је веза дата једначинама:

$$P = 6a^2 \quad \text{и} \quad V = a^3.$$

Ако је дата веза између двеју промењљивих количина, тј. ако је дата једначина у којој постоје те две непознате количине, поред других сталних количина, у теорији је све једно коју ћемо од промењљивих количина узети за функцију, а коју за независно промењљиву. Међутим, у пракси обично узимамо за функцију ону промењљиву до чије вредности брже и лакше долазимо дајући различите вредности независно промењљивој. Тако, боље је сматрати запремину коцке као функцију ивице, него ивицу као функцију запремине, јер из једначине $V = a^3$ много лакше и брже налазимо вредност за V, него што налазимо вредност за a из једначине $a = \sqrt[3]{V}$, ако a сматрамо као функцију запремине V.

Дешава се да једна функција зависи не од једне већ од две и више независно промењљивих количина. Тако, површина правоугаоника P зависи и од дужине a и од ширине b. Њихова је веза дата једначином $P = ab$. Запремина правоуглог правог паралелопипеда V зависи, тј. функција је и од дужине a, и од ширине b и од висине c. Њихова је веза дата једначином: $V = abc$.

Да је једна количина y функција друге промењљиве x, симболички се означава са $y = f(x)$, а чита са „y је функција од x“.

Из свега овога увиђамо *да под функцијом разумемо ону промењљиву количину чија вредност зависи од вредности једне или више промењљивих количина, а са којима стоји у вези израженој једном једначином.*

§ 2. **Врсте функција.** И функције, као и једначине, делимо на ***алгебарске*** и ***трансцендентне.*** Ако је веза између функције и независно промењљивих изражена алгебарском једначином, тј. једначином у којој су независно промењљиве количине повезане са осталим сталним количинама само знацима сабирања, одузимања, множења и дељења, или у којој се независно промењливе јављају само као основе степена, онда је функција *алгебарска*. Такве су функције: $y = 3x + 5$; $y = 4x^2 - 2x + 7$; $y = 5xz$; $y = 3x^2 - 2z^2$; итд.

Ако је веза између функције и независно промењливе количине изражена трансцендентном једначином, тј. једначином у којој независно промењлива количина заузима место једног изложитеља, степена или корена, или се налази под логаритамским знаком, или се налази под неким од тригонометриских знакова, онда је функција *трансцендентна*. Такве су функције: $y = e^x$; $y = \sqrt[x]{5}$; $y = \log x$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; итд.

Функције могу бити *експлицитне* (откривене) и *имплицитне* (скривене). Код експлицитних функција једначина је решена по зависно промењливој количини (по функцији), а код имплицитних није. Тако функције: $y = ax^2 + bx + c$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \log(3 + x)$, итд., јесу експлицитне, а једначине: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$; $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$; $y^2 - 2px = 0$; итд. јесу имплицитне.

Алгебарске функције могу бити ***рационалне*** (целе и разломљене) и ***ирационалне***. Тако функција $y = ax + b$ је рационална цела I степена; функције: $y = ax^2 + bx + c$ и $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ јесу рационалне целе II и III степена; функције: $y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}$ и $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ јесу рационалне разломљене; а функције $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$ јесу ирационалне.

§ 3. **Бесконачно велики и бесконачно мали бројеви:** Да бисмо стекли појам о бесконачно великим и бесконачно малим бројевима, посматрамо бројне вредности функција $y = 3^x$ и $y_1 = \frac{1}{x}$. Ако независно промењливој количини x дамо вредности:

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \ldots 20, \ldots$$

онда су бројне вредности прве функције:
$y = 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ 2187, \ldots 3486784401, \ldots$, а бројне вредности друге функције:

$$y_1 = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7}, \ldots \frac{1}{20}, \ldots$$

Видимо, дакле, да вредности прве функције поступно расту, а вредности друге поступно опадају. Па како је природни бројни ред: $1, 2, 3, 4, \ldots \infty$ бескрајан, то независно промењивој количини x можемо дати врло велику вредност, у ком случају добијамо за прву функцију врло велику, а за другу врло малу вредност. Ма каква да је велика, односно мала, вредност посматраних функција, могу те функције имати веће, односно мање, вредности, ако независно промењивој x дамо веће вредности. Тако, за $x = 21$, биће вредност прве функције $y = 31^{21} = 10460353203 > 3^{20} = 3486784401$, а вредност друге функције $y_1 = \frac{1}{21} < \frac{1}{20}$. Из посматрана два примера увиђамо да има таквих промењивих бројних вредности које у свим променама постају све веће и веће, односто све мање и мање, од ма које замишљене сталне вредности, ма колико да је велика, односно мала, та стална вредност. Такве бројне вредности, односно такви бројеви, јесу бесконачно велики, или бесконачно мали бројеви. **Дакле, бесконачно велики, или бесконачно мали број, зове се онај промењиви број чија апсолутна вредност може постати већа, односно мања, од ма ког сталног позитивног броја, па ма колики да је велики, односно мали, тај број.** Бесконачно велике и бесконачно мале бројеве не сматрамо као сталне, већ као промењиве. Бесконачно велике бројеве означавамо са ∞, а бесконачно мале са $\frac{1}{\infty}$.

§ 4. **Појам границе.** 1) Ако у једном кругу упишемо и опишемо по један правилан многоугао од n страна, онда је, као што знамо из планиметрије, обим круга већи од обима уписаног, а мањи од обима описаног многоугла. Повећавањем броја страна n и уписаног и описаног многоугла, обим уписаног многоугла се увећава, а обим описаног се смањује, те се оба обима све више и више приближују обиму круга. Ако замислимо да је број страна и уписаног и описаног многоугла бесконачно велики, онда се обими тих многоуглова за бескрајно мали број разликују од обима круга и можемо замислити да се, у том случају, готово поклапају с обимом круга. **Обим круга биће, дакле, граница којој теже и обими уписаних и обими описаних правилних многоуглова чији се број страна поступно увећава и постаје бесконачно велики.**

2) Из планиметрије такође знамо да је величина једног унутрашњег угла правилног n-тоугла $\frac{(n-2)\ 180^0}{n}$. Ако вредност једног таквог угла означимо са α, онда је $\alpha = \frac{(n-2)\ 180^0}{n} =$

$= 180^0 - \frac{360^0}{n}$, а одавде је $\frac{360^0}{n} = 180^0 - \alpha$. Ако сада замислимо да се број страна n правилног многоугла поступно повећава и постане бесконачно велики, онда $\frac{360^0}{n}$ постаје све мањи и мањи и постаје бесконачно мали број за $n = \infty$. Како сваки бесконачно мали број тежи нули, то и вредност разломка $\frac{360^0}{n}$, односно њему једнака разлика $180^0 - \alpha$, тежи нули за $n = \infty$. Међутим, да би једна разлика тежила нули, треба њен умалитељ поступно да расте и све више и више да се прибижује умањенику. Исти је случај и са разликом $180^0 - \alpha$. **Према томе, граница којој тежи један унутрашњи угао правилног многоугла, чији број страна поступно расте и постаје бесконачно велики, јесте угао од 180^0.** Разуме се, угао α никад не може имати величину од 180^0, пошто у том случају не бисмо имали правилан многоугао, јер би се претворио у праву.

3) Посматрајмо сада вредности функције $y = \frac{6 - x}{2 + x^2}$, када се независно промењива x поступно смањује и тежи нули. Ако x-у дамо вредности $x = 7$, 6, 5, 4, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, онда за функцију добијамо вредности $y = -\frac{1}{51}$, $0, \frac{1}{27}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{4}{9}$, $2\frac{26}{33}$, $2\frac{118}{129}$. Све ове вредности функције постају све веће и теже граници 3, што год се вредности независно промењиве приближују нули. Вредност функције постоје 3 за $x = 0$. **Према овоме, број 3 је граница којој тежи вредност функције $y = \frac{6 - x}{2 + x^2}$, кад независно помењива x тежи нули.**

Из горњих примера увиђамо да под границом једне промењиве количине разумемо такву једну сталну количину којој се промењива све више и више приближује, тако да је разлика између сталне и промењиве количине бесконачно мала.

На основу стеченог појма о границама, можемо увидети да је: 1) **граница бесконачног малог броја нула;** и 2) **граница сталног броја је сам тај број.** Заиста, ако је дат бескрајно мали број

$$x = 0{,}1, \quad 0{,}01, \quad 0{,}001, \quad 0{,}0001, \quad 0{,}00001 \ldots.$$

који се у свом смањивању приближује нули, онда су разлике између узастопних вредности x и нуле:

$$x - 0 = 0{,}1, \quad 0{,}01, \quad 0{,}001, \quad 0{,}0001, \quad 0{,}00001 \ldots\ldots$$

Па како је нула сталан број, а x променљив број, то је њихова разлика бескрајно мали број, те променљиви број x има за границу нулу.

Тако исто, иако стални бројеви не могу имати границе, ипак, потпуности ради, ако сматрамо и њих као променљиве, онда граница таквог броја је разлика између тога сталног броја и истог сталног броја, сматраног као променљив. Па како је оваква разлика увек нула, то је заиста граница једног сталног броја сам тај број.

Да бисмо симболички означили да је неки сталан број a граница променљиве x, пишемо $lim\ x = a$, (од *limes*-граница) а изговара се: „граница x-а је a“.

Ако је променљива количина, која има своју границу, функција друге променљиве количине која такође има своју границу, онда се означава и граница функције и граница независно променљиве. Тако, ако је y функција чија је граница a, а независно променљива је x, чија је граница b, онда се то означава:

$$\lim_{(x = b)} y = a,$$

а изговара се: „граница y-на, за $x = b$, је а“. Тако, код другог горњег примера, означавамо да је $\lim\limits_{n = \infty} \alpha = 180^0$,

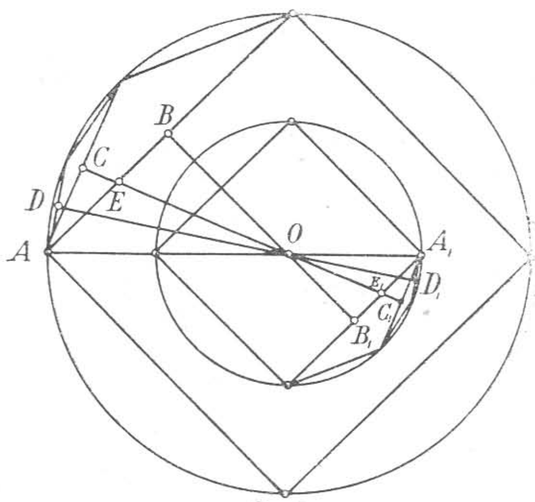
или $\lim\limits_{n = \infty} \left(180^0 - \frac{360^0}{n}\right) = 180^0$, а код трећег $\lim\limits_{(x = 0)} y = 3$,

или $\lim\limits_{(x = 0)} \frac{6 - x}{2 + x^2} = 3.$

§ 5. Теореме које се односе на границе

1) **Граница збира од две или више променљивих количина једнака је збиру граница тих количина.** Тачност ове теореме можемо увидети посматрањем сл. 1, на којој имамо два концентрична круга полупречника R и r, у којима су уписани квадрати. Ако централне раздаљине страна тих квадрата означимо са x и y ($OB = x$ и $OB' = y$), онда је из слике јасно да је збир ових централних раздаљина $x + y$ мањи од збира полупречника $R + r$, или $BB' < AA'$. Ако сада упишемо у овим концентричним круговима правилне осмоугле, чије су централне раздаљине страна x и y, ($OC = x$ и $OC' = y$), онда је и збир ових централних раздаљина, иако је већи од збира разда-

љина квадратових страна, опет мањи од збира полупречника или $CC' < AA'$. Ако најзад продужимо уписивати у овим концентричним круговима правилне 16-тоугле, 32-угле итд. и централне раздаљине њихових страна опет означимо са x и y, онда збир ових централних раздаљина постаје све већи, али је опет сваки такав збир мањи од збира полупречника. Тако, код 16-тоугла биће опет $DD' < AA'$. Из свега овога је јасно да при одвајању страна уписаних правилних многоуглова у овим концентричним круговима, збирови $x + y$ централних раздаљина страна јесу променљиве количине, који имају за границу AA', тј.



Сл. 1

$$\lim_{n=\infty} (x + y) = AA' = R + r \cdots (1)$$

Па како је $\lim\limits_{n=\infty} x = R$ и $\lim\limits_{n=\infty} y = r$, то заменом у (1) добијамо

$$\boldsymbol{\lim (x + y) = \lim x + \lim y.}$$

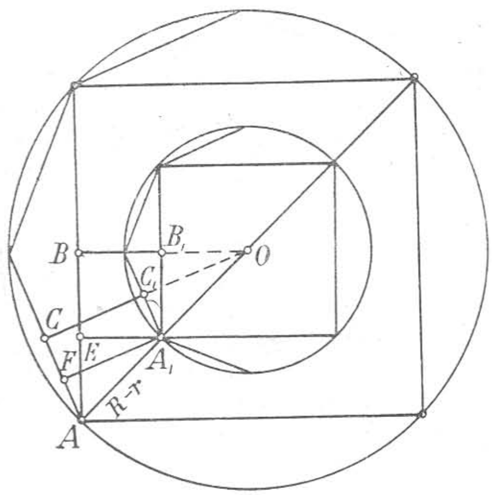
Ако је дат збир од више променљивих количина $x + y + z + u$, онда је $\lim (x + y + z + u) = \lim [(x + y) + (z + u)] = \lim (x + y) + \lim (z + u) = \lim x + \lim y + \lim z + \lim u$.

Ако у збиру, поред променљивих сабирака, има и сталних, онда је на основу ове теореме:

$$\lim (x + y + a) = \lim x + \lim y + \lim a = \lim x + \lim y + a.$$

2) **Граница разлике двеју променљивих једнака је разлици граница умаљеника и умалитеља.** Тачност и ове теореме најбоље увиђамо посматрањем сл. 2, у којој опет имамо два концентрична круга полупречника R и r, а у којима су уписани квадрати. Ако сада сматрамо разику $x - y$ централних раздаљина страна тих квадрата, видимо да је $x - y = OB - OB' = BB' = A'E < AA'$, тј. $x - y < R - r$. Разлика централних раздаљина страна уписаних осмоуглова $x - y =$

$OC - OC' = CC' = A'F < AA'$, тј. $x - y < R - r$. Исти случај ће бити са свима разликама централних раздаљина страна свију уписаних 16-тоуглова, 32-углова и т д. Према томе, ове разлике сматрамо као промењиве количине, које постају све веће удвајањем страна уписаних многоуглова, али које су увек мање од разлике полупречника, а која је разлика њихова граница. Дакле је:



Сл. 2

$$\lim_{n=\infty} (x - y) = R - r \ldots (2).$$

Како је $\lim x = R$ и $\lim y = r$, то заменом у (2) добијамо:

$$\lim_{n=\infty} (x - y) = \lim_{n=\infty} x - \lim y.$$

Напомена. На основу горњих теорема можемо извести општу теорему: Граница алгебарског збира једнака је алгебарском збиру граница појединих чланова. Тако,

$$\lim (x \pm y \pm z \pm a) = \lim x \pm \lim y \pm \lim z \pm a.$$

3) **Граница производа од промењивих чинитеља једнака је производу граница појединих чинитеља.** Тачност ове теореме можемо најбоље увидети посматрањем промењивих бројева:

$x = 5{,}1;\ 5{,}01;\ 5{,}001;\ 5{,}0001;\ 5{,}00001, \ldots$

$y = 3{,}2;\ 3{,}02;\ 3{,}002;\ 3{,}0002;\ 3{,}00002, \ldots$

и њиховог производа:

$xy = 16{,}32;\ 15{,}1302;\ 15{,}013002;\ 15{,}00130002;\ 15{,}0001300002; \ldots$

Јасно је да промењива x има за границу 5, промењива y има за границу 3, а граница њиховог производа је 15, а тај производ је такође промењива количина која тежи броју 15.

Дакле је: $\boldsymbol{\lim (x\,y) = 15 = 5 \cdot 3 = \lim x \cdot \lim y}$, чиме је ова теорема доказана.

Ако имамо производ од више промењивих количина, онда је према овој теореми:

$$\lim (x\,y\,z\,u) = \lim [(x\,y) \cdot (z\,u)] = \lim (x\,y) \cdot \lim (zu) =$$
$$= \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z \cdot \lim u.$$

Као специјалан случај био би:

$$lim\ (5\,x\,y) = lim\,5 \cdot lim\,x \cdot lim\,y = 5 \cdot lim\,x \cdot lim\,y.$$

4) **Граница степена, чија је основа променљива а изложитељ сталан број, једнака је граници основе степеноване истим изложитељем.** Како је степен производ од онолико једнаких чинитеља, као што је основа, колики је број изложитеља, то је на основу треће теореме $lim\,x^3 = lim\,(x \cdot x \cdot x) = lim\,x \cdot lim\,x \cdot lim\,x = (lim\,x)^3$. Уопште је:

$$\boldsymbol{lim\,x^n = (lim\,x)^n}\,.$$

5) **Граница разломка (количника) једнака је граници бројитеља (дељеника) подељена границом именитеља (делитеља).** Тачност ове теореме можемо увидети посматрањем променљивих бројева:

$x = 16{,}32;\ 15{,}1302;\ 15{,}013002;\ 15{,}00130002;\ 15{,}0001300002;\ldots$
$y = 3{,}2;\ \ 3{,}02;\ \ 3{,}002;\ \ 3{,}0002;\ \ 3{,}00002;\ldots$

и њиховог количника, који је такође променљив:

$\frac{x}{y} = 5{,}1;\ \ 5{,}01;\ \ 5{,}001;\ \ 5{,}0001;\ \ 5{,}00001\ldots.$

Јасно је да је граница броја x 15, броја y 3, а њиховог количника 5. Дакле је:

$$lim\,\frac{x}{y} = 5 = \frac{15}{3} = \frac{lim\,x}{lim\,y},\ \text{или}\ \boldsymbol{lim\,\frac{x}{y} = \frac{lim\,x}{lim\,y}}.$$

Као специјални случајеви били би:

a) $lim\,\frac{a}{x} = \frac{lim\,a}{lim\,x} = \frac{a}{lim\,x}$; b) $lim\,\frac{x}{a} = \frac{lim\,x}{lim\,a} = \frac{lim\,x}{a}$.

Поменуте теореме зову се основне и примењују се при тражењу граница код функција.

Решени примери:

1) Наћи границу функције $y = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 6$ за $lim\,x = 0$. Према основним теоремама имамо:

$lim\,y = lim\,(4x^3 + 5x^2 - 3x + 6)_{x=0} = lim\,(4x^3)_{x=0} + lim\,(5x^2)_{x=0} - lim\,(3x)_{x=0} + lim\,6 = lim\,4 \cdot lim\,x^3{}_{x=0} + lim\,5 \cdot lim\,x^2{}_{x=0} - lim\,3 \cdot lim\,x_{x=0} + lim\,6 = 4 \cdot (lim\,x)^3{}_{x=0} + 5 \cdot (lim\,x)^2{}_{x=0} - 3 \cdot lim\,x_{x=0} + 6 = 4 \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 6 = 6.$

Стога је $lim\,y = lim\,(4x^3 + 5x^2 - 3x + 6)_{x=0} = 6$.

2) Наћи границу функције $y = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 6$, ако x тежи к ∞, тј. за $lim\,x = \infty$.

Ако ову функцију најпре поделимо а затим помножимо са x^3, добијамо:

$$y = x^3\left(4 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)$$

Тада је по основним теоремама:

$$\lim y = \lim\left[x^3.\left(4+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)\right]=(\lim_{x=\infty} x)^3.\left[\lim_{x=\infty} 4+\lim_{x=\infty}\left(\frac{5}{x}\right)-\right.$$

$$\left.-\lim_{x=\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right)+\lim_{x=\infty}\left(\frac{6}{x^3}\right)\right].$$

Па како је $\lim x=\infty$, то су разломци: $\frac{5}{x}$, $\frac{3}{x^2}$, $\frac{6}{x^3}$ бескрајно мали бројеви. Стога је:

$$\lim\ y=\infty^3\cdot(4+0-0+0)=\infty^3\cdot 4=\infty, \quad \text{или}$$
$$\lim\ y=\lim\,(4x^3+5x^2-3x+6)_{x=\infty}=\infty.$$

3) Наћи границу функције $y=\frac{5x^3-2x^2+4x-12}{4x^2-3x+4}$, за $\lim x=0$.

Према основним теоремама имамо:

$$\lim\ y=\lim\left(\frac{5x^3-3x^2+4x-12}{4x^2-3x+4}\right)_{x=0}=$$
$$=\frac{\lim\,(5x^3-2x^2+4x-12)\ x=0}{\lim\,(4x^2-3x+4)\ x=0}=\frac{-12}{4}=-3.$$

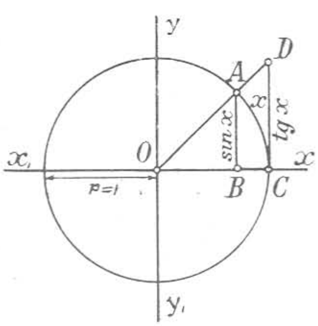
4) Наћи границу функције $y=\frac{2x^3+3x^2-9x}{4x^3-3x^2-x}$ за $\lim x=\infty$.

Решење: $\lim y=\lim\left(\frac{2x^3+3x^2-9x}{4x^3-3x^2-x}\right)_{x=\infty}=$

$$=\lim\left[\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}{x^3\left(4-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}\right]_{x=\infty}=\lim\left\{\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}}{4-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right\}_{x=\infty}=$$

$$=\frac{\lim\left(2+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}\right)_{x=\infty}}{\lim\left(4-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)_{x=\infty}}=\frac{2+\frac{3}{\infty}-\frac{9}{\infty^2}}{4-\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{2+0-0}{4-0-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\,.$$

5) Наћи границу функције $y=\frac{\sin x}{x}$, за $\lim\ x=0$.



Сл. 3

Ако конструишемо круг O (сл. 3) полупречника $r=1$ и посматрамо функције $\sin x$ и $tg\ x$ лука $\widehat{AC}=x$, онда из тригониметрије знамо да је $\sin x<x<tg\,x$, или $tg\,x>x>\sin x$.

На основу ове неједначине, ако $\sin x$ поделимо поступно са $tg\,x$, затим са x и најзад са $\sin x$, добијамо неједначину:

$$\frac{\sin x}{tg\,x}<\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin x}{\sin x}\quad\text{или}$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Из ове последње неједначине увиђамо да је функција $\frac{sin\,x}{x}$ увек већа од $cos\,x$ а мања од 1. Па како је граница за $cos\,x = 1$, ако x тежи нули, то и функција $\frac{sin\,x}{x}$, за $x = 0$, тежиће истој вредности 1, као и $cos\,x$. Стога је

$$lim\, y = \lim_{x=0} \frac{sin\,x}{x} = 1.$$

Примери за вежбу:

Наћи границе за a) $lim\, x = 0$, b) $lim\, x = \infty$, c) $lim\, x = -\infty$ ових функција:

1) $y = 5x$; 2) $y = -7$; 3) $y = -3x + 5$; 4) $y = 15x + 4$; 5) $y = 6x^2 - 3$; 6) $y = 8 - 5x^2$; 7) $y = -3x^2 - 5$;

8) $\lim_{x=\infty} (3y^2 - 4x + 2)$ (одг. ∞); 9) $\lim_{x=\infty} (x^3 - 2x^2 + x - 2)$ (одг. ∞);

10) $\lim_{x=\infty} (-x^2 + x - 2)$(одг. ∞); 11) $\lim_{x=\infty} (-5x^3 + 2x^2 - x + 1)$(одг. $-\infty$)

12) $\lim_{x=0} (4x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 5x + 7)$ (одг. 7);

13) $\lim_{x=0} (2 + x - x^2 - 7x^3 - 4x^4 - 8x^5)$ (одг. 2);

14) $\lim_{x=0} \left(\frac{3}{x}\right)$ (одг. ∞); 15) $\lim_{x=0} \left(\frac{2}{2+x}\right)$ (одг. 1); 16) $\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x-1}\right)$(одг. -1);

17) $\lim_{x=0} \left(\frac{2}{2x^3 + 2x + 1}\right)$ (одг. 2); 18) $\lim_{x=0} \left(\frac{10x - x^2 - x^3}{2x + x^2 - 3x^3}\right)$ (одг. 5);

19) $\lim_{x=0} \left(\frac{4x - 2x^2}{2x + 3x^2}\right)$ (одг. 2); 20) $\lim_{x=0} \left(\frac{-9x^4 + 13x^3 - 6x + 4}{12x^2 - 5x + 1}\right)$ (одг. 4);

21) $\lim_{x=\infty} \frac{7x + 3x^2 - 5x^3}{x - 2x^2 - x^3}$ (одг. 5); 22) $\lim_{x=\infty} \frac{3x - 5x^2 + 2x^3}{2x + 4x^2 + x^3}$ (одг. 2);

23) $\lim_{x=\infty} \frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 3}$ (одг. 1); 24) $\lim_{x=\infty} \frac{4 + x - 9x^2}{2 - 3x^2}$ (одг. 3);

25) $\lim_{x=\infty} \frac{3x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - x + 1}$ (одг. ∞); 26) $\lim_{x=\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{4x^3 + 5x^2 - 7x + 2}$ (одг. 0);

27) $\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \cdots + \frac{1}{3^n}\right)$ (одг. $\frac{1}{2}$);

28) $\lim_{n=\infty} \left[1 - \frac{4}{5} + \frac{16}{25} - \frac{64}{125} + \cdots + \left(-\frac{4}{5}\right)^n\right]$ (одг. $\frac{5}{8}$);

29) $0{,}\overline{27} = \lim_{n=\infty} \left(\frac{27}{100} + \frac{27}{100^2} + \cdots + \frac{27}{100^n}\right)$ (одг $\frac{3}{11}$);

30) $\lim\limits_{x=2} \left(\frac{?x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right)$ (одг. 0,25); 32) $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{\sin 5x}{x} \right)$ (одг. 5);

31) $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)$ (одг. 2); 33) $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{tg\, 4x}{x} \right)$ (одг. 4);

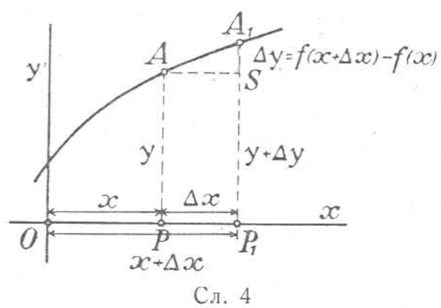
§ 6. **Прираштаји функција.** 1) Ако једној промењљивој количини x дамо најпре вредност a, звана *првобитна,* а затим вредност b, звана *потоња,* онда разлика између потоње и првобитне вредности те промењљиве зове се њен *прираштај.*

Тако, ако x-у дамо вредности $x = 4$ и $x = 7$, онда је $7 - 4 = 3$ прираштај промењљиве x. Ако је првобитна вредност $x = 5$, а потоња $x = 3$, онда је њен прираштај $3 - 5 = - 2$. Најзад ако је првобитна вредност $x=8$, а потоња $x=8$, онда је прираштај $8 - 8 = 0$. Из ових примера увиђамо да прираштај једне промењљиве може бити позитиван, негативан и једнак нули. Прираштај једне промењљиве обично се означава, кад се пред том промењљивом стави грчко слово Δ (делта). Тако, $\Delta\, x$, $\Delta\, y$, $\Delta\, z$ означавају прираштаје промењљивих x, y и z. Код горњих примера први је прираштај $\Delta x = 7 - 4 = 3$, други $\Delta x = 3 - 5 = - 2$, а трећи $\Delta x = 8 - 8 = 0$.

Под прираштајем једне функције разумемо разлику између промењене и првобитне функције. Ако имамо функцију $y = f\,(x)$, па је независно промењљива x добила прираштај $\Delta\, x$, онда је потоња или промењена вредност функције $f\,(x + \Delta\, x)$, а њен прираштај Δy биће:

$$\Delta\, y = f\,(x + \Delta\, x) - f\,(x).$$

Овај прираштај графички је претстављен на сл. 4. *Тај прираштај је, дакле, разлика ордината двеју тачака A_1 и A криве $y = f\,(x)$, чије су апсцисе $x + \Delta\, x$ и x.*



Сл. 4

Да бисмо нашли прираштај једне функције, треба најпре образовати разлику $f\,(x + \Delta\, x) - f\,(x)$ и у њој свести једноимене чланове.

Резултат биће тражени прираштај функције.

Решени примери: 1) Наћи прираштај функције $y = 4\,x - 3$.

Овде је $\Delta\, y = 4\,(x + \Delta\, x) - 3 - (4x - 3) = 4x + 4\Delta x - 3 - 4x + 3 = 4\Delta x.$

2) Наћи прираштај функције $y = 3x^2 - 4x + 5$.

Овде је $\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 5 - (3x^2 - 4x + 5) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 4x - 4\Delta x + 5 - 3x^2 + 4x - 5 = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 4\Delta x = (6x - 4 + 3\Delta x) \cdot \Delta x$.

3) Наћи прираштај функције $y = \frac{3x - 2}{x - 1}$.

Овде је $\Delta y = \frac{3(x + \Delta x) - 2}{x + \Delta x - 1} - \frac{3x - 2}{x - 1} =$

$$= \frac{(3x + 3\Delta x - 2)(x - 1) - (x + \Delta x - 1)(3x - 2)}{(x - 1 + \Delta x)(x - 1)} = \frac{-\Delta x}{(x - 1 + \Delta x)(x - 1)}.$$

4) Наћи прираштај функције $y = x^5$.

Овде је $\Delta y = (x + \Delta x)^5 - x^5 = x^5 + \binom{5}{1} x^4 \Delta x + \binom{5}{2} x^3 \Delta x^2 + \binom{5}{3} x^2 \Delta x^3 + \binom{5}{4} x \Delta x^4 + \binom{5}{5} \Delta x^5 - x^5 = 5x^4 \Delta x + 10x^3 \Delta x^2 + 10x^2 \Delta x^3 + 5x \Delta x^4 + \Delta x^5 = (5x^4 + 10x^3 \Delta x + 10x^2 \Delta x^2 + 5x \Delta x^3 + \Delta x^4) \cdot \Delta x$.

Примери за вежбу: Наћи прираштаје функција:

1) $y = 6x - 5$; 2) $y = 4x^2 - 5x + 1$; 3) $y = ax + b$;
4) $y = ax^2 + bx + c$; 5) $y = x^7$;
6) $y = \frac{x - 3}{x^2 - 2x - 3}$; 7) $y = \frac{ax + b}{mx + n}$.

§ 7. **Појам о непрекидности функција.** За једну функцију, која зависи од једне независно промењљиве количине, каже се да је *непрекидна*, ако се она поступно и неосетно мења, када се и независно промењљива поступно и неосетно мења. Код непрекидне функције њен прираштај тежи нули истовремено кад тежи нули и прираштај независно промењљиве количине. Код ових функција независно промењљива може се повећати од неке одређене вредности a за врло малу вредност, да би се и функција увећала за толику малу вредност, колико се жели. Такве су све целе рационалне функције, пошто код свију тих функција њени прираштаји теже нули кад и прираштаји независно промењљивих количина теже нули. Тако:

a) Код линеарне функције: $y = ax + b$ видимо да њен прираштај:

$\Delta y = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) = a \cdot \Delta x$

тежи нули кад и прираштај Δx;

b) Код квадратне функције:

$$y = ax^2 + bx + c$$

видимо да и њен прираштај

$$\Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x = (2ax + a\Delta x + b) \cdot \Delta x$$

тежи нули кад и прираштај Δx.

c) Код функције трећег степена:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

видимо да и њен прираштај

$$\Delta y = a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x)^2 + c(x + \Delta x) + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (3ax^2 + 3ax\Delta x + a\Delta x^2 + 2bx + b\Delta x + c) \cdot \Delta x$$

тежи нули, кад и прираштај Δx.

Исти ће случај бити и са ма којом целом рационалном, функцијом ма ког степена била она, а уверавамо се истим путем.

Од трансцендентних функција непрекидне су:

$y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = \log x$, јер и њихови Δy теже 0, кад и Δx. Тако:

a) $\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$;

b) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$;

c) $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$;

d) $\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\frac{x + \Delta x}{x} = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Код свију ових примера је $\Delta y = 0$ за $\Delta x = 0$.

Међутим, има функција такве особине да се постепено и неосетно мењају, док се постепено и неосетно мења x у неком интервалу, али за извесне специјалне вредности x-функција прави нагли скок и добија вредност, која се сасвим разликује од пређашњих њених вредности. Таква се функција зове *прекидна*. Таква је $y = \frac{1}{x-3}$. Она је непрекидна за све могуће вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, осим за вредност $x = 3$, када функција постаје бесконачно велика, јер је у том случају $y = \frac{1}{0} = \infty$. Прираштај ове функције би био:

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 3} - \frac{1}{x - 3} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 3)(x - 3)}.$$

Из његовог израза видимо да је Δy врло мала количина кад и Δx, осим када x-у дамо вредност $x = 3$. Оне вредности независно промењиве количине, за коју функција показује скокове, зову се *прекиди*. Код нашег примера прекид је $x = 3$.

Од алгебарских функција прекидне су рационалне разломљене функције, а њихови су прекиди оне вредности независно промењиве количине, за које именитељ постаје нула. Тако, функција

$$y = \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^2 - 9x + 14} = \frac{3x^2 - 7x + 1}{(x-2)(x-7)}$$

је непрекидна за све могуће вредности x-а од $-\infty$ до вредности < 2, од вредности > 2 до вредности < 7 и од вредности > 7 до $+\infty$, а има прекиде за $x = 2$ и $x = 7$, за које именитељ постаје нула.

Ово се дâ најбоље увидети из њеног прираштаја

$$\Delta y = \frac{3(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) + 1}{(x+\Delta x - 2)(x+\Delta x - 7)} - \frac{3x^2 - 7x + 1}{(x-2)(x-7)} =$$
$$= \frac{(20x^2 - 20x\,\Delta x + 82x + 41\,\Delta x - 89)\cdot \Delta x}{(x+\Delta x - 2)(x+\Delta x - 7)(x-2)(x-7)},$$

који тежи нули кад и прираштај Δx, осим за $x = 2$ и $x = 7$, када тај прираштај постаје бесконачно велики.

Графички претставник непрекидне функције је линија без прекида. Њено се повлачење врши без подизања руку, што није тај случај код прекидне функције. При повлачењу линије прекидне функције стане се код прекида, па се повлачење наставља од друге тачке.

Функције $y = tg\,x$ и $y = cotg\,x$ имају прекиде, и то: код прве за вредности $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$, а код друге за $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, пошто је $tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$ а $cotg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x}$.

Напомена. — Ако имамо више функција непрекидних у неком датом интервалу x-а, онда и њихове комбинације добивене: сабирањем, одузимањем и множењем тих функција, јесу непрекидне у томе интервалу. Ово не важи за комбинацију добивену дељењем двеју непрекидних функција, пошто оваква комбинација има прекида за све вредности x-а, за које именитељ (делитељ) постаје нула. Тачност ове напомене увиђамо из комбинација: $sin\,x \pm cos\,x$, $sin\,x \cdot cos\,x$ и $\frac{sin\,x}{cos\,x}$ добивених сабирањем, одузимањем, множењем и дељењем функција $sin\,x$ и $cos\,x$, за које смо видели да су непрекидне за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$. При испитивању функција од велике је важности претходно сазнање да ли је дотична функција непрекидна или прекидна и који су јој прекиди.

Примери за вежбу:

Које су од ових функција прекидне а које не:

1) $y = 3x + 10$; 2) $y = -5x + 6$; 3) $y = 2 - x$;

4) $y = 5 - 3x - 2x^2$; 5) $y = -3x^2 - x$; 6) $y = \frac{4x-1}{x-2}$;

7) $y = \frac{2x^2+1}{4x-3}$; 8) $y = \frac{x^2+5x-10}{x^2+8x+16}$ $=0$; 9) $y = \frac{5x-7}{x^2-6x+9}$ $=0$

Наћи прекиде функција:

10) $y=\frac{x^2+2}{x-3}$ (одг. 3); 11) $y=\frac{2x+1}{x^2-7x+12}$ (одг. 4 и 3);

12) $y=\frac{x^2+2}{x^2-6x+5}$ (одг. 5 и 1);

13) $y=\frac{x+1}{(x-2)(x^2+2x-15)}$ (одг. 2, 3 и -5);

14) $y=\frac{2x^2+3}{x^3-3x^2-4x+12}$ (одг. 3, 2 и -2).

§ 8. **Изводи функција.** Ако је дата непрекидна функција $y=f(x)$ и ако независно промењљива x добије врло мали прираштај Δx, онда и функција y добија врло мали прираштај Δy. Најзад, ако такав прираштај функције поделимо с прираштајем независно промењљиве количине, добијамо количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, који при $lim\,\Delta x=0$ и $lim\,\Delta y=0$, добија неодређен облик $\frac{0}{0}$. Међутим, количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ има одређену вредност и зове се *извод* функције.

Дакле, под изводом једне непрекидне функције разумемо границу којој тежи количник између прираштаја функције и независно промењљиве количине, када овај последњи прираштај постане бескрајно мали број.

Извод се означава тиме што се функција, чији се извод тражи, обележава запетом. Тако, извод функције y означава се са y', а чита се „y прим“. Извод функције $y=f(x)$ је:

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right).$$

Извод се обележава и са $\frac{dy}{dx}$, који се често срета у инфинитезималном рачуну. Заиста, код извода функције условљавамо да прираштаји Δx и Δy теже нули, да постају бесконачно мале количине, тј. да

$$\Delta x \rightarrow 0, \qquad \Delta y \rightarrow 0, \text{ или}$$
$$lim\,\Delta x=0, \quad lim\,\Delta y=0.$$

Да су количине Δx и Δy бескрајно мале, означава се још симболима dx и dy, где је $dx=\lim\limits_{(\Delta x\rightarrow 0)}\Delta x$, а $dy=\lim\limits_{(\Delta y\rightarrow 0)}\Delta y$. Па како је $lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{lim\,\Delta y}{lim\,\Delta x}$ (§ 5 т. 5), то је $lim\,\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$. Пошто је лева страна ове једначине извод функције $y=f(x)$, то је према томе $y'=\frac{dy}{dx}$. Дакле, $\frac{dy}{dx}$ је други симбол који претставља извод функције y по x-у.

Према свему овоме, да бисмо нашли извод неке функције, потребно је најпре да независно промењивој количини x дамо прираштај Δx, затим да се одреди одговарајући прираштај Δy функције y и да се прираштај Δy подели прираштајем Δx и, најзад, да се тражи граница добивеног количника којој он тежи када претпоставимо да је Δx бескрајно мали број (Δx тежи 0).

Решени примери:

1) ***Извод линеарне функције***

Ако је дата линеарна функција $y = ax + b$, онда је њен извод $y' = \lim\limits_{(\Delta x = 0)} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} = \lim\limits_{(\Delta x = 0)} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a.$

Дакле, извод линеарне функције једнак је коефицијенту уз независно промењиву количину.

Посебни пример: Извод функције $y = 3x - 4$ је $y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{3(x + \Delta x) - 4 - (3x - 4)}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3.$

Напомена. Ако је $a = 0$ у функцији $y = ax + b$, онда је $y = b$, а $y' = a = 0$, тј. **извод сталног броја је нула**.

Ако је у функцији $y = ax + b$, $a = 1$ и $b = 0$, онда је $y = x$, а $y' = a = 1$, тј. **извод независно промењиве је јединица.**

2) ***Извод квадратне функције.*** Ако је дата квадратна функција $y = ax^2 + bx + c$, онда је њен прираштај $\Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) = (2ax + b + a\Delta x)\Delta x$, а количник $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x.$

Тада, за $\lim \Delta x = 0$, је $y^1 = \lim\limits_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 2ax + b.$

Посебни пример: за $y = 3x^2 - 5x + 10$ је $y' = 6x - 5$.

3) ***Извод функције трећег степена.*** Ако је дата функција трећег степена $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, онда је њен прираштај $\Delta y = a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x)^2 + c(x + \Delta x) + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (3ax^2 + 3ax\Delta x + a\Delta x^2 + 2bx + b\Delta x + c)\Delta x$, а количник $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3ax^2 + 2bx + c + 3ax\Delta x + b\Delta x + a\Delta x^2$. Тада, за $\lim \Delta x = 0$ је $\lim\limits_{\Delta x = 0.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3ax^2 + 2bx + c.$

Посебни пример: за $y = 5x^3 - 7x^2 - 6x + 1$ је $y' = 15x^2 - 14x - 6$. Радећи као код претходна три примера налазимо да је извод функције четвртог степена ($y = ax^4 + bx^3 + cx^2 +$

$dx + e)$ $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, петог степена $(y = ax^5 + + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)$ $y' = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$ итд. Радећи по истом поступку, нашли бисмо да извод функције $y = x^n$ је $\boldsymbol{y' = nx^{n-1}}$.

4) ***Извод разломљене функције.*** Ако је дата разломљена функција $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, онда је њен прираштај $\Delta y = \frac{a\,(x+\Delta x) + b}{c\,(x+\Delta x) + d} - \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{(ad - bc)\cdot\Delta x}{(cx + c\Delta x + d)\,(cx + d)}$, а количник $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ad - bc}{(cx + c\Delta x + d)\,(cx + d)}$. Тада је за $lim\ \Delta x = 0$,

$$y' = \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

Посебни пример. Извод функције $y = \frac{-3x + 10}{5x - 7}$ је

$$y' = \frac{(-3)\cdot(-7) - 5\cdot 10}{(5x - 7)^2} = \frac{-29}{(5x - 7)^2}.$$

5) ***Извод функције $y = sin\ x$.***

Њен је прираштај $\Delta y = sin\,(x + \Delta x) - sin\ x = 2\,cos\,\frac{2x + \Delta x}{2}\,sin\,\frac{\Delta x}{2} = 2\,cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot sin\,\frac{\Delta x}{2}$, а количник

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) sin\,\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Тада је тражени извод:

$$y' = lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0}\left[cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{sin\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]_{\Delta x = 0} = cos\ x,$$ пошто је

$lim\ \Delta x = 0$, то је и $lim\ \frac{\Delta x}{2} = \frac{0}{2} = 0$, $lim\left\{\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right\}_{\Delta x = 0} = 1$

(види 5 задатак § 5 код сл. 3).

6) ***Извод функције $y = cos\ x$.***

Њен је прираштај $\Delta y = cos\,(x + \Delta x) - cos\ x = -2\cdot sin\,\frac{2x + \Delta x}{2}\cdot sin\,\frac{\Delta x}{2} = -2\,sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) sin\,\frac{\Delta x}{2}$, а извод, за $lim\ \Delta x = 0$,

биће: $$y' = lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0}\left[-sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{sin\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]_{\Delta x = 0} =$$

$$= -\sin x, \text{ пошто је } \lim_{\Delta x = 0} \left\{ \frac{\sin \frac{\Delta x}{\Delta x}}{\frac{\Delta x}{2}} \right\} = 1$$

7) ***Извод функције*** $\boldsymbol{y = \log x}$. Њен је прираштај $\Delta y =$ $= \log(x + \Delta x) - \log x = \log \frac{x + \Delta x}{x} = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$, а извод, за $\lim \Delta x = 0$, биће

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0} \left[\frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\right] \cdots (1)$$

Међутим, за $\lim \Delta x = 0$, десна се страна овог иззвода (1) претвара у неодређен облик $\frac{0}{0}$, пошто је тада $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0}{x} = 0$, $\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log(1 + 0) = \log 1 = 0$. Како је $\lim \Delta x = 0$, то разломак $\frac{\Delta x}{x}$ можемо заменити изразом $\frac{1}{n}$, где је $n = \infty$, пошто су оба израза тада једнака нули. Заменом $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$ у (1), добијамо:

$$y' = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \frac{n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{x} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{x} \cdots (2)$$

Тада израз $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ добија опет неодређен облик 1^∞. Међутим, овај израз има своју одређену вредност, коју добијамо када га развијемо по Њутоновом обрасцу. Тада је:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \binom{n}{4} \cdot \frac{1}{h^4} + \cdots (3)$$

Како је: $\binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$; $\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} =$

$$= \frac{n^2 - n}{1 \cdot 2n^2} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2}; \quad \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{n^3} = \frac{n^3 - 3n^2 - 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} = \frac{1 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1 - \frac{3}{\infty} - \frac{2}{\infty^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ итд.,}$$

то заменом у (3) добијамо:

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots\cdots (4)$, чија је вредност Неперове логаритамске основе $e = 2{,}718\,281\,828 \ldots$, као што смо видели код логаритама. Најзад заменом у (2) добијамо да је извод

$$y' = (\log x)' = \frac{\log e}{x} = \frac{\log 2{,}718281\ldots}{x} \; (5).$$

Овај образац важи за сваку логаритамску основу. Ако узмемо Неперову логаритамску основу e, онда је $log\ e_{(e)} = 1$, па се за ту основу образац (5) претвара у

$$y' = (log\ x)' = \frac{1}{x} \cdots (6).$$

8) ***Извод функције $y = a^x$.*** Њен је прираштај $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$, а количник $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, а извод за $lim\ \Delta x = 0$ био би: $y' = (a^x)' = lim\left(a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) = a^x \cdot \frac{0}{0} \cdots (1)$, те опет добијамо неодређен облик $\frac{0}{0}$. Праву вредност израза $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ наћи ћемо, ако извршимо замену $a^{\Delta x} - 1$ са $\frac{1}{n}$, где би n био бесконачно велики број, пошто су оба израза једнака нули ($a^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ и $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$). Стављајући да је $a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{n}$, или $a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{n}$, онда логаритмовањем добијамо:

$$\Delta x\ log\ a = log\left(1 + \frac{1}{n}\right), \text{ а } \Delta x = \frac{log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{log\ a} \cdots (2).$$

Тада је израз $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\dfrac{log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{log\ a}} = \dfrac{log\ a}{n\, log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$

$= \dfrac{log\ a}{log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{log\ a}{log\ e}$, пошто је $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Заменом у (1) добијамо да је извод функције $y = a^x$:

$$\boldsymbol{y' = (a^x)' = a^x \cdot \frac{log\ a}{log\ e}} \cdots (3).$$

За специјални случај $a = e$, функција ће бити $y = e^x$, а њен извод, према обрасцу (3), биће:

$$y' = (e^x)' = e^x \cdot \frac{log\ e}{log\ e} = e^x, \text{ тј.:}$$

Извод из функције e^x једнак је њој самој. Ово је једина функција која има ту особину.

Примери за вежбу: Наћи изводе ових функција:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = -5x + 6$; 3) $y = 0{,}35x + 4$;
4) $y = 7x$; 5) $y = -x$; 6) $y = -2{,}5x - 9$;
7) $y = -8x$; 8) $y = 5$; 9) $y = -6$;
10) $y = 5x^2 - 4x + 2$; 11) $y = -3x^2 + 5x - 3$;
12) $y = -4x^2 + 3x$; 13) $y = 7x^2 - 5$; 14) $y = 4 - 7x^2$;

15) $y = -8x^2$; 16) $y = -x^2$;
17) $y = 4x^7 - 5x^5 + 3x^3 + 8x - 7$; 18) $y = x^9$;
19) $y = 7x^{12}$; 20) $y = \frac{2x+1}{8x-5}$; 21) $y = \frac{-2x+11}{4x-7}$;
22) $y = \frac{4x}{5x+2}$; 23) $y = \frac{1}{4x-3}$; 24) $y = \frac{1}{8x}$;
25) $y = x^4 + 12x^3 - 29x^2 - 61x - 134$; 26) $y = \frac{1}{x}$;
27) $y = \frac{x-1}{x+1}$; 28) $y = \frac{a+x}{b+x}$; 29) $y = \frac{3x-4}{7x-5}$; 30) $y = \frac{20}{8x-5}$.

§ 9. Теореме о изводима

I) **Извод алгебарског збира.** Нека су u, v и t различите непрекидне функције, чија је независно променљива x. Тада и њихов алгебарски збир је очевидно непрекидна функција исте независно променљиве x. Нека је дакле

$$y = u - v + t.$$

Ако независно променљивој количини дамо прираштај Δx, онда и функције: u, v, t и y добијају своје прираштаје Δu, Δv, Δt и Δy, па ће бити:
$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) + (t + \Delta t) - (u - v + t) = \Delta u - \Delta v + \Delta t$. Ову једначину поделимо најпре са Δx, а затим ставимо да је $lim\, \Delta x = 0$, добијамо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x = 0,}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

или $y' = u' - v' + t'$, тј.:

Извод алгебарског збира од неколико функција исте независно променљиве количине једнак је алгебарском збиру њихових извода.

Примери:

Ако је:

1) $u = 3x^2 - 5x - 2$, $v = sin\, x$, $t = cos\, x$, онда је
$$y' = u' + v' + t' = 6x - 5 + cos\, x - sin\, x.$$

2) Ако је $u = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ и $v = 5x^2 - 4x - 7$, онда је $y' = u' + v' = 12x^2 - 6x + 5 + 10x - 4 = = 12x^2 + 4x + 1$.

II) **Извод производа.** Нека су u и v две непрекидне функције исте независно променљиве x. Тада је очевидно да је и њихов производ $y = uv$ функција исте независно променљиве x. Ако је прираштај независно промењиве Δx, онда и функције: y, u и v добијају своје прираштаје: Δy, Δu и Δv, те је: $\Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - uv = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$. Ако ову једначину поделимо са Δx и узмемо да је $\lim \Delta x = 0$, добијамо:

$$\lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v\right) = u \cdot \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) +$$

$$+ v \cdot \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) \cdot \lim_{\Delta x = 0} \Delta v.$$ Па како је $\lim \Delta x = 0$, то је и $\lim\limits_{\Delta x = 0} \Delta v = 0$. Заменом у претходној једначини добијамо:

$$y' = u \cdot v' + v \cdot u' + u' \cdot 0 = uv' + vu' \cdot (1)$$

Ако је дат производ од више функција исте независно промењиве x, на пр. $y = uvtz$, онда је према једначини (1): $y' = (uvtz)' = [(uv) \cdot (tz)]' = (uv) \cdot (tz)' + (tz) \cdot (uv)' = uv\,(tz' + zt') + tz\,(uv' + vu') = \boldsymbol{uvtz' + uvzt' + utzv' + vtzu'}$, тј.:

Извод производа од неколико непрекидних функција исте независно промењиве количине једнак је збиру производа који је састављен тако да је у сваком производу извод једне од датих функција помножен производом осталих функција.

Примери:

1) За $y = \sin x \cdot \cos x$, биће $y' = (\sin x)' \cos x + (\cos x)' \cdot \sin x = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

2) За $y = (3x^2 + 4x + 5)\,(4x - 3)\,\cos x \cdot \sin x$ биће:
$y' = (6x + 4)\,(4x - 3) \cos x \sin x + (3x^2 + 4x + 5) \cdot 4 \cos x \sin x - (3x^2 + 4x + 5)\,(4x - 3) \sin^2 x + (3x^2 + 4x + 5)\,(4x - 3) \cos^2 x = (14x^2 + 10x + 4) \sin 2x + (12x^3 + 7x^2 + 8x - 15) \cos 2x$.

Последица. Ако је $y = au$, где је a сталан број а u функција независно промењиве x, онда је према горњем правилу:

$$y' = au' + a'u = au' = 0 \cdot u = au', \text{ тј.:}$$

Извод производа од једног сталног броја и једне функције једнак је производу од сталног броја и извода функције.

Примери:

1) За $y = 3 \sin x$, биће $y' = 3 \cos x$.

2) За $y = 9x^5$, биће $y' = 45x^4$.

III) **Извод степена.** Нека је u непрекидна функција независно промењиве x, а желимо да нађемо извод функције

$y = u^4$. Како је $y = u^4 = u \cdot u \cdot u \cdot u$, то је по правилу за извод производа:

$$y' = u'uuu + uu'uu + uuu'u + uuuu' = 4u^3\,u'.$$

Тако исто за $y = u^5$, биће $y' = 5u^4u'$; за $y = u^7$, биће $y' = 7u^6u'$ итд., а за $y = u^n$, биће $y' = nu^{n-1}\,u'$, тј.: **Извод степена неке дате функције добија се, када изложитељ степена помножимо степеном исте функције, чији је изложитељ за 1 мањи, и изводом функције.**

Примери:

1) За $y = sin^5 x$, биће $y' = 5\ sin^4 x\ cos\, x$.
2) За $y = (2x^2 - 3x - 5)^3$ биће $y' = 3\,(2x^2 - 3x - 5)^2\,(4x - 3)$.

Напомена. У претходном параграфу нашли смо да је извод функције $y = x^n$ $y' = n\,x^{n-1}$. До овог истог резултата дошли бисмо и применом горњег правила. По овом правилу биће: $y' = nx^{n-1}\,x'$ . . . (1). Како је извод од $x = 1$, то заменом у (1) имамо: $y' = n\,x^{n-1}$. Тако, за $y = x^{11}$, биће $y' = 11\,x^{10}$; за $y = 10x^7$, биће $y' = 70\,x^6$ итд.

IV) **Извод разломка (количника).** Нека су u и v две непрекидне функције исте независно промењиве x. Тада је и $y = \frac{u}{v}$ функција исте промењиве x. Извод ове функције можемо добити поступајући истоветно као код претходних случајева, а може се добити и помоћу правила о изводу производа. Тако, из $y = \frac{u}{v}$ (1) имамо $u = y\ v$ (2), а $u' = y'\,v + v'\,y$ (3).

Одавде је $y' = \frac{u' - v'\,y}{v} = \frac{u' - v'\,\frac{u}{v}}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, тј.:

Извод разломка једнак је изводу бројитеља помножен именитељем, мање извод именитеља помножен бројитељем, и све то подељено квадратом именитеља.

Примери:

1) За $y = \frac{2x^2 - x + 1}{3x + 1}$, биће $y' = \frac{(4x - 1)(3x + 1) - 3\,(2x^2 - x + 1)}{(3x + 1)^2} =$

$$= \frac{6x^2 + 4x - 4}{(3x + 1)^2};$$

2) За $y = tgx = \frac{sin\ x}{cos\ x}$, биће $y' = \frac{cos\,x \cdot cos\,x + sin\,x \cdot sin\,x}{cos^2\,x} =$

$$= \frac{cos^2\,x + sin^2\,x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x};$$

3) За $y = cotg\ x = \frac{cos\ x}{sin\ x}$ биће $y' = \frac{-\,sin\,x \cdot sin\,x - cosx \cdot cos\,x}{sin^2 x} =$

$$= -\frac{sin^2\,x + cos^2\,x}{sin^2\,x} = -\frac{1}{sin^2\,x}.$$

Напомена. Ако се тражи извод једног количника између сталног броја и функције, или обрнуто, служимо се правилом о изводу количника.

Тако, извод од $y = \frac{a}{f(x)}$ је $y' = \frac{a' f(x) - f'(x)\, a}{[f(x)]^2} =$
$= \frac{0 \cdot f(x) - af'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{a f'(x)}{[f(x)]^2}$; а извод од $y = \frac{f(x)}{a} =$

$$= \frac{f'(x) \cdot a - 0 \cdot f(x)}{a^2} = \frac{af'(x)}{a^2} = \frac{f'(x)}{a}.$$

До овог последњег резултата пре бисмо дошли служећи се правилом о изводу производа од једног сталног броја и функције. Тако $y = \frac{f(x)}{a} = \frac{1}{a} \cdot f(x)$, а $y' = \frac{1}{a} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{a}$.

V) **Извод корена.** Нека је u функција независно промењиве количине x, а желимо да нађемо извод функције $y = \sqrt[4]{u}$.

1) За $n = 2$, биће $y = \sqrt{u}$, или $y^2 = u$. По правилу о изводу степена, биће $2yy' = u'$, а $y' = \frac{u'}{2y} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

2) За $n = 3$, биће $y = \sqrt[3]{u}$, или $y^3 = u$. Одавде је $3y^2 y' =$
$= u'$, а $y' = \frac{u'}{3y^2} = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

3) За $n = 4$, биће $y = \sqrt[4]{u}$, или $y^4 = u$. Одавде је $4y^3 y' =$
$= u'$, а $y' = \frac{u'}{4y^3} = \frac{u'}{4\sqrt[4]{u^3}}$.

Аналого са горња три примера, извод од $y = \sqrt[n]{u}$ биће

$$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

Ако тражимо извод функције $y = \sqrt[n]{u^p}$, радимо по истом поступку. Тада је:

$y^n = u^p$, $ny^{n-1}y' = pu^{p-1}u'$, а $y' = \frac{pu^{p-1}u'}{ny^{n-1}} = \frac{pu^{p-1}u'}{u\sqrt[n]{u^{p(n-1)}}} =$

$$= \frac{p\sqrt[n]{n^{n(p-1)}}\,u'}{n\sqrt[n]{u^{p(n-1)}}} = \frac{pu'}{n}\sqrt[n]{u^{p-n}} = \frac{p}{n}\, u^{\frac{p-n}{n}} \cdot u' = \frac{p}{n}\, u^{\frac{p}{n}-1}\, u'.$$

Примери:

1) За $y = \sqrt{4x^2 - 5x + 2}$, биће $y' = \frac{1}{3}(4x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{3}-1}$.
$\cdot (8x - 5) = \frac{1}{3}(4x^2 - 5x + 2)^{-\frac{2}{3}}(8x - 5) = \frac{8x - 5}{3\sqrt[3]{(4x^2 - 5x + 2)^2}}$;

2) За $y = \sqrt[n]{(ax-b)^q}$, биће $y' = \frac{q}{n}(ax+b)^{\frac{q}{n}-1} \cdot a =$

$$= \frac{aq}{n} \sqrt[n]{(ax+b)^{q-n}};$$

3) За $y = \sqrt[5]{\sin^4 x}$, биће $y' = \frac{4}{5}(\sin x)^{\frac{4}{5}-1} \cdot \cos x =$

$$= \frac{4}{5} \sqrt[5]{(\sin x)^{-1}} \cdot \cos x = \frac{4 \cos x}{5\sqrt[5]{\sin x}}.$$

I **напомена.** — На основу овога, лако налазимо извод степена $x^{-\frac{p}{q}}$, а на основу правила о изводу разломка, налазимо и извод степена x^{-n}.

a) Тако, извод функције $y = x^{\frac{p}{q}}$, или $x = \sqrt[q]{x^p}$ je

$$y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \cdot x' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}};$$

b) Извод функције $y = x^{-\frac{p}{q}}$ je $y' = \left(-\frac{p}{q}\right) \cdot x^{-\frac{p}{q}-1} \cdot x' =$

$$= -\frac{p}{q} \cdot x^{-\frac{p}{q}-1} \cdot 1 = \boldsymbol{-\frac{p}{q} \cdot x^{-\frac{p}{q}-1}};$$

c) Извод функције $y = x^{-n}$, или $y = \frac{1}{x^n}$ je

$y' = \frac{1' \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$; тj. *извод степена x^n добијамо, када изложитељ n помножимо са x^{n-1}, па био изложитељ цео или разломљен, позитиван или негативан број.*

Примери:

1) За $y = x^{\frac{3}{4}}$, je $y' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$;

2) За $y = x^{-\frac{5}{4}}$, je $y' = -\frac{5}{4} \cdot x^{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{5}{4} x^{-\frac{9}{4}} =$

$$= -\frac{5}{4\sqrt[4]{x^9}} = -\frac{5}{4x^2\sqrt[4]{x}};$$

3) За $y = -x^{-5}$, je $y' = -5 \cdot x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$;

4) За $y = -4x^{-\frac{3}{4}}$, je $y' = (-4) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) x^{-\frac{3}{4}-1} = 3x^{-\frac{7}{4}} =$

$$= \frac{3}{\sqrt[4]{x^7}} = \frac{2}{x\sqrt[4]{x^3}};$$

5) За $y = \sqrt[5]{\sin^4 x} = (\sin x)^{\frac{4}{5}}$, je $y' = \frac{4}{5}(\sin x)^{\frac{4}{5}-1} \cdot (\sin x)' =$

$= \frac{4}{5}(\sin x)^{-\frac{1}{5}} \cdot \cos x = \frac{4 \cos x}{5\sqrt[5]{\sin x}}$. (Види 3 пример испред напомене.)

Из свега овога закључујемо да при тражењу извода једног корена, чији је радиканд независно промењива x, или ма која њена функција, треба само дати корен да претворимо најпре у степен, а затим да тражимо извод добивеног степена по правилу о изводима степена.

II **напомена.** Изложене теореме у овоме параграфу зову се *опште теореме извода*, а служе да лакше и брже нађемо функцијама изводе, него на начин изложен у претходном параграфу (9). Ако је дата функција $y = 4x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 4x - 5$, онда је њен први извод $y' = 20x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 14x + 4$. Ако сада тражимо извод добивеног извода, који се означава са y'' и зове се други извод дате функције, добијамо $y'' = 80x^3 - 36x^2 + 30x - 14$. Трећи извод дате функције биће извод од другог извода. Он је $y''' = 240x^2 - 72x + 30$.

Четврти извод биће:

$y^{IV} = 480x - 72$, а пети извод $y^{V} = 480$, а шести $y^{VI} = 0$.

Други, трећи итд. изводи зову се *изводи вишег реда.*

§ 10. **Изводи циклометријских функција**. У параграфима 8 и 9 упознали смо се са изводима алгебарских функција (целих и разломљених и ирационалних), затим са изводима трансцендентних функција a^x, $log\,x$, $sin\,x$, $cos\,x$, $tg\,x$ и $cotg\,x$ а сада прелазимо на изводе циклометријских функција:

$$arc\ sin\ x,\ arc\ cos\ x,\ arc\ tg\ x \text{ и } arc\ cotg\ x.$$

1) **Извод од arc sin x**. Нека је дата функција $y = arc\,sin\,x$. Како је y лук полупречника $r = 1$, чији је синус x, то је

$$x = sin\,y.$$

Сматрајући сада x као функцију, а y као независно промењиву количину, то је

$$lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = cos\,y,$$

$$\text{а } lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{cos\,y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{Дакле, } y' = (arc\ sin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2) **Извод од arc cos x**

За $y = arc\ cos\ x$, биће $x = cos\,y$. Тада је $lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = -sin\,y$,

$$\text{а } lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{sin\,y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{Дакле, } y' = (arc\ cos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3) **Извод од arc tgx**

За $y = arc\ tg\, x$, биће $x = tg\, y$. Тада је $lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{cos^2 y}$. (Види 2 пример код IV параграфа 9.) Како је $\frac{1}{cos^2 y} = \left(\frac{1}{cos\ y}\right)^2 = sec^2 y = 1 + tg^2 y$, то је $lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{cos^2 y} = 1 + tg^2 y = 1 + x^2$, а

$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1 + x^2}$. Дакле, $\boldsymbol{y' = (arc\ tg\ x)' = \frac{1}{1 + x^2}}$.

4) **Извод од *arc cotg x***

За $y = arc\ cotg\, x$, биће $x = cotg\, y$, а $lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{sin^2 y}$.

(Види 3 пример код IV § 9.) Како је:
$\frac{1}{sin^2 y} = \left(\frac{1}{sin\ y}\right)^2 = cosec^2 y = 1 + cotg^2 y = 1 + x^2$, то је
$lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{sin^2 y} = -(1 + x^2)$, а $lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{1 + x^2}$. Дакле,

$$\boldsymbol{y' = (arc\ cotg\ x)' = -\frac{1}{1 + x^2}}.$$

§ 11. **Изводи посредних функција.** Ако је $y = F(u)$, а $u = f(x)$, онда се каже да је y посредна функција од x. Заменом у првој једначини u са $f(x)$, можемо наћи извод од $F[f(x)]$. Међутим, ово замењивање избегавамо, јер се служимо идентичном једначином

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Ако Δx тежи нули, онда је исти случај и са Δy и Δu. Како $lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, $lim \frac{\Delta y}{\Delta u} = F'(u)$ и $lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x)$, а граница производа једнака је производу граница његових чинитеља, то је

$$y' = F'(u) \cdot f'(x).$$

Исто тако, ако је $y = F(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = f(x)$, онда је $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$, или у граници: $y' = F'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot f'(x)$.

Пример: Наћи извод функције $y = sin^4 x^2$. Стављајући да је $u = x^2$, $v = sin\, u$ и $y = v^4$, имамо $lim \frac{\Delta y}{\Delta v} = 4v^3$, $lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = cos\, u$ и $lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = 2x$. Стога је

$$y' = 4\, v^3 \cdot cos\, u \cdot 2\, x = 4\, sin^3 x^2\, cos\, x^2 \cdot 2x.$$

§ 12. **Примери за вежбу**. Наћи изводе следећих функција:

1) $y = 0{,}2x^5$; 2) $y = 0{,}75x^8$; 3) $y = \frac{1}{3} x^3$; 4) $y = -5x + 1$;

5) $y = 6x^2 - 4x + 6$; 6) $y = -\frac{1}{2} x^2 + x + 3$;

7) $y = 1 - 2x + 4x^2$; 8) $y = -4x^3 + x^2 - 3x + 2$;

9) $y = x^4 - x^3 + x^2 - x$; 10) $y = 1 + x - x^2 + x^3$;

11) $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 3$;

12) $y = x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1$;

13) $y = -0{,}5x^6 - x^3 + 3x$; 14) $y = 2x^5 + x^3 - 4x^2 + 3x + 1$;

15) $y = (2x - 3)\cdot(x + 4)$; 16) $y = (4 - 3x)(1 + x)$;

17) $y = (x^2 + 2x - 1)(2x^2 + 3x + 2)$;

18) $y = (1 + x - x^2)(3x^2 - 2x - 4)$;

19) $y = (3x + 1)(2x - 3)(x - 1)$;

20) $y = (3 - 2x)(5x - 1)(1 - 4x)$;

21) $y = (x - 1)(1 + 2x^2)(x^2 + 3)$;

22) $y = 2x^2(7x - 1)(x^2 - 2x + 1)$;

23) $y = 7\sqrt[3]{x^2}\left(\text{одг. } \dfrac{14}{3\sqrt[3]{x}}\right)$; 24) $y = 5\sqrt[4]{x^7}\left(\text{одг. } \dfrac{35}{4}\sqrt[4]{x^3}\right)$;

25) $y = \dfrac{4}{5\sqrt[3]{x}}\left(\text{одг. } \dfrac{-4}{15\sqrt[3]{x^4}}\right)$;

26) $y = \dfrac{5x - 1}{x}\left(\text{одг. } \dfrac{1}{x^2}\right)$; 27) $y = \dfrac{x + 2}{2x}\left(\text{одг. } -\dfrac{1}{x^2}\right)$;

28) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{2x}\left(\text{одг. } \dfrac{x^2 - 2}{2x^2}\right)$; 29) $y = \dfrac{x^2 - 3}{3x}\left(\text{одг. } \dfrac{x^2 + 3}{3x^2}\right)$;

30) $y = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 5}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{3x^2 - 4x}{\sqrt{2x^3 - 4x^2 + 5}}\right)$;

31) $y = \dfrac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - dx$ $\left(\text{одг. } -\dfrac{a}{2\sqrt{x^3}} + \dfrac{c}{2\sqrt{x}} - d\right)$;

32) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{2}{(x + 1)^2}\right)$; 33) $y = \dfrac{5}{2x - 1}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{-10}{(2x - 1)^2}\right)$;

34) $y = \dfrac{x^2}{4x^2 + 1}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{2x}{(4x^2 + 1)^2}\right)$; 35) $y = \dfrac{x^3}{x^3 + 2}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{6x^2}{(x^3 + 2)^2}\right)$;

36) $y = \dfrac{5x^2 - 1}{3x^2}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{2}{3x^3}\right)$; 37) $y = \dfrac{x^3}{a^2} + \dfrac{a^2}{x}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{3x^2}{a^2} - \dfrac{a^2}{x^2}\right)$;

38) $y = \dfrac{4}{x^2 - 3x + 1}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{12 - 8x}{(x^2 - 3x + 1)^2}\right)$;

39) $y = \dfrac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2x^2 + x^4}$ $\left[\text{одг. } \dfrac{2x(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4)}{(x^4 + a^2x^2 + a^4)^2}\right]$;

40) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 4}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{2}{(2 - x)^3}\right)$;

41) $y = (x^2 + 2)\dfrac{3x - 1}{x}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{6x^3 - x^2 + 2}{x^2}\right)$;

42) $y = (a + x)\sqrt{a - x}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{a - 3x}{2\sqrt{a - x}}\right)$;

43) $y = (a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$ $\left[\text{одг. } \dfrac{x(a^2 - 3x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]$;

44) $y = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{a^4 + a^2x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$;

44) $y=\frac{x}{\sqrt{a-bx^2}}$ $\left(\text{одг. } \frac{a}{\sqrt{(a-bx^2)^3}}\right)$;

45) $y=\frac{m}{n}\sqrt[p]{x^q}$ $\left(\text{одг. } \frac{mq}{np}\sqrt[p]{x^{q-p}}\right)$;

46) $y=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x-2}$ $\left(\text{одг. } \frac{2x^3-24x-28}{(x-2)^2}\right)$;

47) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\text{одг. } \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right)$;

48) $y=\frac{x^2}{\sqrt{a^4+x^4}}$ $\left(\text{одг. } \frac{2a^4x}{\sqrt{(a^4+x^4)^3}}\right)$;

49) $y=\frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\left(\text{одг. } \frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$;

50) $y=x\sqrt{a+bx+cx^2}$ $\left(\text{одг. } \frac{2a+3bx+4cx^2}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)$;

51) $y=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$ $\left(\text{одг. } \frac{2a+bx}{2x^2\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)$;

52) $y=(-3a+2bx^2)\sqrt[3]{(a+bx^2)^2}$ $\left(\text{одг. } \frac{20b^2x^2}{3\sqrt[3]{a+bx^2}}\right)$;

53) $y=(-4a+3bx^2)\sqrt[4]{(a+bx^2)^3}$ $\left(\text{одг. } \frac{21b^2x^3}{2\sqrt[4]{a+bx^2}}\right)$;

54) $y=(-4a+3bx)\sqrt[4]{(a+bx)^3}$ $\left(\text{одг. } \frac{21b^2x}{4\sqrt[4]{a+bx}}\right)$;

55) $y=(x^2-x)^3$ (одг. $6x^5-15x^4+12x^3-3x^2$);

56) $y=(x^2+2x)^3$ (одг. $6x^5+30x^4+48x^3+24x^2$);

57) $y=(2x^2+3x-1)^3$ [одг. $(12x+9)(2x^2+3x-1)^2$];

58) $y=(x^2+1)^4$ (одг. $8x^7+24x^5+24x^3+8x$);

59) $y=(5x^3+3x-1)^4$ [одг. $(60x^2+12)(5x^3+3x-1)^3$];

60) $y=a\sin x\cos x$ (одг. $a\cos 2x$);

61) $y=\sin x+\cos x$ [одг. $\sqrt{2}\sin(45^0-x)$];

62) $y=\sin x+\cos x\,tg\,x$ (одг. $2\cos x$);

63 $y=\cos x+\sin x\cdot tg\,x$ $\left(\text{одг. } \frac{cin\,x}{\cos^2 x}\right)$;

64) $y=\sqrt{3x-1}$ $\left(\text{одг. } \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}\right)$;

65) $y=\sqrt[3]{(4x^2-2x+5)^2}$ $\left(\text{одг. } \frac{4(4x-1)}{3\sqrt[3]{4x^2-2x+5}}\right)$;

66) $y=\sqrt[5]{(2x^3-3x^2+4x-5)^3}$ $\left(\text{одг. } \frac{6(3x^2-3x+2)}{5\sqrt[5]{(2x^3-3x^2+4x-5)^2}}\right)$;

67) $y = \sqrt[6]{(5x^2 - 2x)^5}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{5(5x-1)}{3\sqrt[6]{5x^2-2x}}\right)$;

68) $y = e^x x^m$ [одг. $e^x x^{m-1}(x+m)$];

69) $y = (x-1)a^x$ $\left[\text{одг. } a^x \ [1+(x-1)\cdot\dfrac{\log a}{\log e}\right]$;

70) $y = (x-1)e^x$ (одг. xe^x);

71) $y = \left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)e^x$ $\left[\text{одг. } \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}\right)e^x\right]$;

72) $y = \left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2x}\right)e^x$ $\left[\text{одг. } \left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{x^4}\right)e^x\right]$;

73) $y = x - \sin x \cos x$ (одг. $2\sin^2 x$);

74) $y = \dfrac{\sin x}{a - b\cos x}$ $\left[\text{одг. } \dfrac{a\cos x - b}{(a-b\cos x)^2}\right]$;

75) $y = 2x\sin x + (2-x^2)\cos x$ (одг. $x^2 \sin x$);

76) $y = 3\,tg\,x + tg^3 x$ $\left(\text{одг. } \dfrac{3}{\cos^4 x}\right)$;

77) $y = 3\,cotg\,x + cotg^3\,x$ $\left(\text{одг. } -\dfrac{3}{\sin^4 x}\right)$;

78) $y = tg\,x - \dfrac{1}{3}tg^3\,x$ $\left(\text{одг. } \dfrac{\cos 2x}{\cos^4 x}\right)$;

Наћи други извод функције:

79) $y = 3x^2 - 6x + 2$ (одг. 6);

80) $y = 3 + 0{,}5x^2 - \dfrac{1}{3}x^4$ (одг. $1 - 4x^2$);

81) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{4}{(x-1)^3}\right)$;

82) $y = \dfrac{x^3}{x-1}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x}{(x-1)^4}\right)$.

Наћи трећи извод функције:

83) $y = 0{,}4x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ (одг. $24x^2 + 24x - 12$);

84) $y = \dfrac{5}{4}x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ (одг. $30x + 8$);

85) $y = \dfrac{2x^2-2}{x}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{12}{x^4}\right)$; 86) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x}$ $\left(\text{одг. } \dfrac{-6}{x^4}\right)$.

Наћи изводе функција:

87) $y = \sin 2x$; 88) $y = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x$;

89) $y = \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x$;

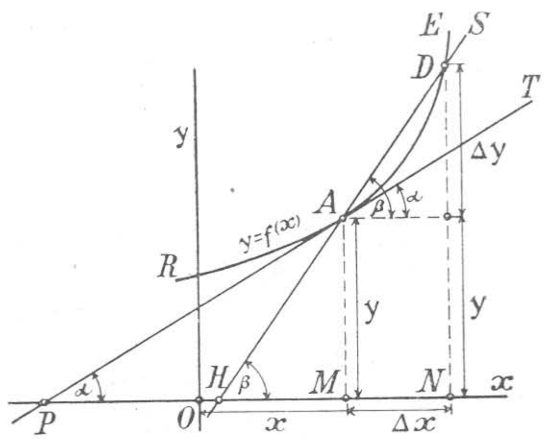
90) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x(1-\cos x)}$; 91) $y = \sin^3 5x^2$;

92) $y = 3x\cos x + (x^3 + 5x^2 + 4)\sin x$;

93) $y = \cos 2x$; 94) $y = tg\,2x$; 95) $y = cotg\,2x$.

§ 13. Геометриски значај извода и његова примена

Нека је крива RE (сл. 5) графички претставник непрекидне функције $y=f(x)$ и нека њена тачка A има координате x и y. Ако независно промењивој дамо прираштај Δx, онда функција добија прираштај Δy. Из слике видимо да су $x+\Delta x$ и $y+\Delta y$ координате тачке D. Ако повучемо $AC \parallel 0X$, а кроз D и A повучемо сечицу SH, добијамо правоугли троугао ACD, чије су катете прираштај Δx и Δy, $\sphericalangle BAC$ једнак је углу β који сечица гради с позитивним правцем апцисне осовине. Из овога троугла видимо да је $\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\,\beta$. Ако сада замислимо да се Δx постепено смањује и тежи нули, онда се и Δy постепено смањује и



Сл. 5

тежи нули, пошто је дата функција непрекидна, што се, уосталом, види и из саме слике. У том се случају тачка D поступно приближује тачки A, сечица SH обрће се око тачке A и поступно тежи да заузме положај тангенте TP у тачки A, а угао β поступно се смањује и приближује се углу α, који гради тангента TP са позитивним правцем апсцисне осовине. Када Δx добије своју граничну вредност, тј. кад је $lim\,\Delta x=0$, тада се сечица SH претвара у тангенту TP, угао β у α, а $tg\,\beta$ у $tg\,\alpha$, тј.

$$lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}=lim\,(tg\,\beta)_{\Delta x=0}=tg\,\alpha.$$

Из овога обрасца увиђамо да први извод функције $y=f(x)$ има своје геометриско значење. Он нам претставља тангенс правца дирке криве $y=f(x)$ у једној датој тачки.

Према овоме, ако желимо да нађемо једначину тангенте ма које криве линије $y=f(x)$, у некој њеној тачки апсцисе $x=x_1$, онда налазимо најпре и ординату те тачке y_1 [из $y_1=f(x_1)$]; а затим тангенс правца тражене дирке $tg\alpha=$ $=lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}=\frac{dy}{dx}$, тј. једнак је вредности првог извода дате функције за $x = x_1$. Тражена једначина тангенте биће: $y - y_1 = f'(x_1)\,(x - x_1)$, или $y - y_1 = \frac{dy}{dx}\,(x - x_1)$.

Пример. 1) *Наћи једначину тангенте криве* $y = x^2 - 3x + 1$ *у тачки апсцисе* $x_1 = 2$. Ордината те тачке биће $y_1 = 4 - 6 + 1 = -1$, $y' = 2x - 3$ а тангента правца $f'(x_1) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Тражена једначина биће:

$$y + 1 = 1 \cdot (x - 2), \text{ или } y - x + 3 = 0.$$

Примери за вежбу: Наћи једначине тангенте код:

1) $y = 5x^2 + x + 2$ у тачки $x_1 = 0{,}5$ одг. $y - 6x - 0{,}75 = 0$.
2) $y = -2x^2 - 3x + 5$ „ „ $x_1 = -1$ „ $y - x - 7 = 0$.
3) $y = 4x^2 - 3x + 1$ „ „ $x_1 = 3$ „ $y - 21x + 35 = 0$.
4) $y = -x^2 + 2x + 1$ „ „ $x_1 = -3$ „ $y - 8x - 10 = 0$.
5) $y = -3x^2 + 7x + 5$ „ „ $x_1 = 2$ „ $y + 5x - 17 = 0$.

§ 14. **Парцијални (делимични) изводи.** Нека је дата функција $y = F(u, v)$ од двеју промењљивих u и v. Ако v сматрамо као сталну количину, онда извод функције само за независно промењљиву u, која се означава $F'_u(u, v)$ или $\frac{\partial F}{\partial u}$, зове се *парцијални извод узет по u.* Ако пак u сматрамо за сталну количину, а v за промењљиву, онда извод функције само за промењљиву v, који се бележи $F'_v(u, v)$ или $\frac{\partial F}{\partial v}$, зове *парцијални извод узет по v*. Ако најзад u и v сматрамо као функције промењљиве x, онда за прираштај Δx, прираштаји од y, u, v биће Δy, Δu и Δv. У том случају прираштај функције биће:

$$\Delta y = F(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - F(u, v) \cdots (1)$$

или, ако овој једначини додамо и одузмемо $F(u, v + \Delta v)$, добијамо идентичну једначину:

$$\Delta y = [F(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v)] + [F(u, v + \Delta v) - F(u, v)] \cdots (2)$$

Разлику у првој загради у граничној вредности можемо сматрати као бесконачно мали прираштај функције, када је само u промењљива, а разлику у другој загради сматрамо као бесконачно мали прираштај функције, када је само v промењљива.

Ако прву разлику помножимо и поделимо са Δu, а другу са Δv, а затим целу једначину поделимо са Δx, добијамо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - F(u,\ v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{F(u,\ v + \Delta v) - F(u,\ v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdots (3).$$

Најзад, за $\lim \Delta x = 0$, биће:

$$y' = F'_u\,(u, v)\,u' + F'_v\,(u, v)\,v',$$

$$\text{или}\quad y' = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot u' + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot v' \cdots (4)$$

Једначина (4) казује **да је извод једне функције од двеју промењљивих једнак збиру њених делимичних извода, сваки помножен са изводом те промењљиве у односу по независно промењљиву количину.** Исти је случај и са изводом од трију и више промењљивих.

§ 15. **Извод имплицитних функција**. Као што смо видели код § 2, за једну функцију $F(x, y) = 0$ каже се да је *имплицитна* (скривена), ако није решена по зависно промењљивој количини. Таква је функција $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Напротив, функција решена по зависно промењљивој количини тако да је само она на левој страни, зове се *експлицитна* (откривена). Таква је функција $y = ax + b$. Извод имплицитне функције можемо наћи помоћу обрасца под (4) претходног параграфа, а да претходно не решавамо једначину по y. Тако, да бисмо нашли извод имплицитне функције $F(x, y) = 0$, ставимо да је $z = F(x, y)$. Тада је према обрасцу (4) претходног параграфа: $Z' = F'_x\,(x, y)\cdot x' + F'_y\,(x, y)y'$, али $z' = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'$.

Како је у овом случају $z = 0$, то је и $z' = 0$. Стога је

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' = 0,\quad \text{или како је } x' = 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' = 0.\quad \text{Одавде је } y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\ \text{тј.:}$$

Извод једне имплицитне функције налазимо, када најпре нађемо делимични извод функције по x, сматрајући y као сталну количину, затим налазимо делимични извод функције по y, сматрајући x као сталну количину, па најзад парцијални извод по x поделимо парцијалним изводом по y и добивеном количнику променимо знак.

Примери:

1) *Наћи извод имплицитне функције* $3x + 4y - 32 = 0$. Овде је $\frac{\partial F}{\partial x} = 3$, а $\frac{\partial F}{\partial y} = 4$, те је $y' = -\frac{3}{4}$. Да је ово тачно, можемо се уверити, ако претходно ову имплицитну функцију доведемо на експлицитни облик $y = -\frac{3}{4}x + 8$, чији је извод $y' = -\frac{3}{4}$.

2) Наћи извод функције $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Овде је $\frac{\partial F}{\partial x} = By + 2Cx + D$, а $\frac{\partial F}{\partial y} = 2Ay + Bx + E$, па је

$$y' = -\frac{By + 2Cx + D}{2Ay + Bx + E}.$$

Овај начин налажења извода имплицитних функција олакшава нам решење проблема изналажења једначина тангената и нормала код кривих, чије су једначине дате у имплицитном облику.

Ако је $A\ (x_1,\ y_1)$ додирна тачка криве $E\ (x,\ y) = 0$, онда је једначина тангенте у тој тачки:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m\,(x - x_1)}, \text{ а нормале: } \boldsymbol{y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)},$$

где је $m = tg\,\alpha$. Па како је $tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = y'$, то је једначина тангенте:

$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)}, \text{ а нормале: } y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1),$$

$$\text{где је } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\begin{pmatrix} x = x_1 \\ y = y_1 \end{pmatrix}$$

Примери:

1) *Код круга:* $x^2 + y^2 = r^2$ биће $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2\,y$, а $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x_1}{2y_1} = -\frac{x_1}{y_1}$, те је једначина тангенте:

$$\boldsymbol{y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)}, \text{ а нормале: } \boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)}.$$

2) *Код елипсе:* $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ биће $\frac{\partial F}{\partial x} = 2b^2\,x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2a^2\,y$, а $\frac{dy}{dx} = -\frac{2b^2\,x_1}{2a^2\,y_1} = -\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}$, те је једначина тангенте:

$$\boldsymbol{y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)}, \text{ а нормале: } \boldsymbol{y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}\cdot(x - x_1)}.$$

3) *Код хиперболе:* $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ биће $\frac{\partial F}{\partial x} = 2b^2\,x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2a^2\,y$, а $\frac{dy}{dx} = \frac{2b^2\,x_1}{2a^2\,y_1} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, те је једначина тангенте:

$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)}, \text{ а нормале: } \boldsymbol{y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)}.$$

4) *Код параболе:* $y^2 - 2p\,x = 0$ је $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -2p$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$,

а $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2p}{2y_1} = \dfrac{p}{y_1}$, те је једначина тангенте: $\boldsymbol{y - y_1 = \dfrac{p}{y_1}(x - x_1)}$,

а нормале: $\boldsymbol{y - y_1 = -\dfrac{y_1}{p}(x - x_1)}$.

5) *Код круга:* $x^2 + y^2 - 2\,px - 2\,qy + (p^2 + q^2 - r^2) = 0$ је

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2p$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2q$, а $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x_1 - 2p}{2y_1 - 2q} = -\dfrac{x_1 - p}{y_1 - q}$,

те је једначина тангенте: $\boldsymbol{y - y_1 = -\dfrac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1)}$, или

$\boldsymbol{(x - x_1)(x_1 - p) + (y + y_1)(y - q) = 0}$, а нормале:

$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - x_1)}.$$

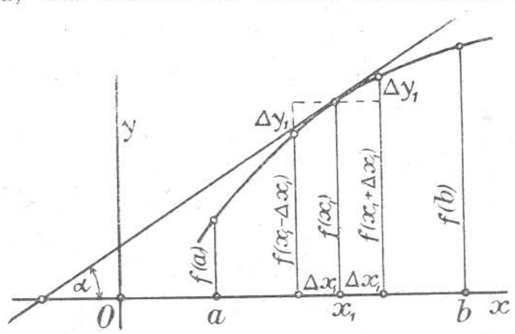
Примери за вежбу: Наћи једначине тангената и нормала кривих линија:

1) $x^2 + y^2 = 232$ у тачки $(14, -6)$; 2) $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$ у тачки $(10,9)$; 3) $4x^2 + 9y^2 = 36$ у тачки $\left(-\dfrac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$.

4) $9x^2 - 4y^2 = 36$ у тачки $(4, -3\sqrt{3})$;

5) $y^2 = 10x$ у тачки $(7, \sqrt{70})$.

§ 16. **Растуће и опадајуће функције.** Нека је дата функција $y = f(x)$, која је непрекидна у неком датом интервалу (a, b). Како је функција непрекидна, то ће сваком бесконачно малом прираштају $\boldsymbol{\Delta x}$ независно промењиве x, одговарати бесконачно мали прираштај $\boldsymbol{\Delta y}$ функције $\boldsymbol{y}$. Дата функција биће *растућа*, ако бесконачно малом позитивном прираштају

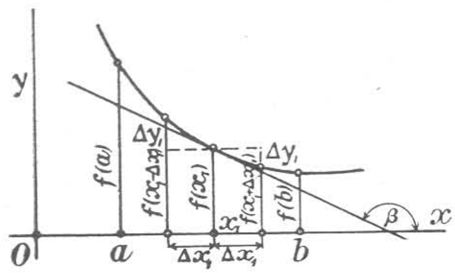


Сл. 6

$\boldsymbol{\Delta x_1}$, где је $\boldsymbol{a < x_1 < b}$, одговара бесконачно мали позитивни прираштај Δy_1, или бесконачно малом негативном прираштају Δx_1, одговара бесконачно мали негативни прираштај Δy_1, тј. функција је растућа, ако су оба прираштаја Δx_1 и Δy_1 истог знака. Функција је *опадајућа*, ако су ови прираштаји различитог знака, тј. за $\Delta x_1 > 0$ је $\Delta y_1 < 0$, или за $\Delta x_1 < 0$ је $\Delta y_1 > 0$.

Ово се да најбоље увидети и посматрањем слика 6 и 7.

Посматрањем прве слике увиђамо да се ордината увећава или смањује према томе да ли се апсциса увећава или смањује, а посматрањем друге слике уваћамо да се ордината смањује, када се апсциса повећава, а повећава се, када се апсциса смањује.



Сл. 7

Дакле, функција $y = f(x)$, која је непрекидна у интервалу (a, b) је растућа, ако се, повећавањем x, повећава и функција, или, смањивањем x, смањује и функција; напротив, функција је опадајућа ако се, увећавањем x, функција смањује, или, смањивањем x, функција повећава.

Теорема. Код растуће непрекидне функције $y = f(x)$ у неком интервалу, први је извод позитиван, а код опадајуће тај је извод негативан.

Тачност ове теореме можемо увидети и посматрањем слика 6 и 7. Код прве тангента у тачки апсцисе x_1 гради с позитивном страном апсцисне осовине оштар угао, а код друге, ова тангента гради туп угао. Како тангенси ових углова претстављају прве изводе $f'(x_1)$, то је заиста $f'(x_1)$, код растуће функције позитиван, као тангенс оштрог угла, а код опадајуће функције, тај је извод негативан, као тангенс тупог угла.

§ 17. **Појам о максимуму и минимуму функција**. Нека је дата функција $y = f(x)$, која је непрекидна у неком интервалу (a, b). Ако независно промењљивој x дамо различите вредности између a и b, онда и функција y, односно $f(x)$, добија различите вредности. У овим променама функције, наилазимо на такву једну вредност која је већа од својих суседних блиских вредности, или наилазимо на такву једну њену вредност која је мања од својих суседних блиских вредности. Ако први случај наступа за $x = x_1$, а други за $x = x_2$, онда се каже да дата функција има свој максимум $f(x_1)$ за $x = x_1$, а свој минимум $f(x_2)$ за $x = x_2$.

Код максимума за бесконачно мали прираштај Δx_1, биће

$$f(x_1 - \Delta x_1) < f(x_1) > f(x_1 + \Delta x_1),$$

а код минимума, за бесконачно мали прираштај Δx_2, биће

$$f(x_2 - \Delta x_2) > f(x_2) < f(x_2 + \Delta x_2),$$

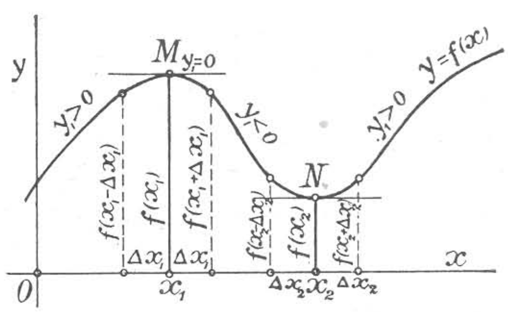
као што се јасно види из слике 8.

Када дата функција тежи своме максимуму, онда је растућа, те јој је први извод, према теореми из пређашњег параграфа, позитиван, тј. $y' = f'(x) > 0$, а кад прође свој максимум, функција постаје опадајућа, те јој је први извод, према истој теореми, негативан, тј. $y' = f'(x) < 0$.

Према овоме, код максимума, први извод функције од позитивности прелази на негативност, те мора прећи и кроз вредност нулу. Ту вредност добија извод, када функција има свој максимум. Тада је дакле $y' = f'(x) = 0$.

Међутим, када функција тежи своме минимуму, она је опадајућа, те је њен први извод негативан, тј. $y' = f'(x) < 0$, а чим пређе свој минимум, она постаје растућа, те јој први извод постаје позитиван, тј. $y' = f'(x) > 0$. **Према овоме, код минимума, први извод функције од негативне вредности прелази на позитивну вредност, те мора прећи и кроз вредност нулу.** Ту вредност добија извод када функција има баш свој минимум. Тада је дакле $f'(x) = 0$.

Да је заиста први извод функције и код максимума и код минимума једнак нули, можемо увидети и из сл. 8, јер су и тангента у максималној тачки M, и тангента у минималној тачки N, криве једначине $y = f(x)$, паралелне са апсцисном осовином, те су њихови угаони коефицијенти, тј. извод $f'(x)$, једнаки нули. Из свега изложеног до сада изводимо овај важан закључак:



Сл. 8

Дата функција $y = f(x)$ имаће максимум или минимум само за ону вредност независно промењиве количине x, за коју вредност први извод функције постаје једнак нули.

Како код максимума први извод, од позитивног постаје негативан, тј. *смањује се*, тада, према теореми из пређашњег параграфа, његов први извод, односно други извод дате функције, треба да има негативну вредност, тј. $y'' = f''(x) < 0$. Код минимума, први извод од негативног постаје позитиван, тј. *повећава се*, те његов први извод, односно други извод дате функције, треба да има позитивну вредност, тј. $y'' = f''(x) > 0$. **Према овоме, изводимо закључак да када функција има максимум, онда је $y' = 0$ а $y'' < 0$, а када има минимум, онда је $y' = 0$ а $y'' > 0$.**

Из свега овога изводимо следеће уп,тство за тражење максимума или минимума неке дате функције:

Одређујемо најпре први извод дате функције и стављамо да је тај извод једнак нули. Затим решавамо добивену једначину да бисмо нашли њене корене, који су у ствари оне вредности x-а, за које дата функција има свој максимум или минимум. Најзад налазимо други извод дате функције и одмах одређујемо његов знак за оне вредности x-а, који су били корени једначине $f'(x) = 0$. Тада за $y'' < 0$ функција има максимум, а за $y'' > 0$ функција има минимум.

Решени примери:

1) *Наћи максимуме и минимуме функције* $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Овде је први извод $y' = 3x^2 - 12x + 9$, а други $y'' = 6x - 12$. Стављајући да је први извод раван нули, добијамо:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0, \text{ или } x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Одавде је $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Тада је $f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$ и $f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0$. Према томе, дата функција има један минимум за $x = 3$, и то $y = 1$ и један максимум за $x = 1$, и то $y = 5$.

2) *Наћи максимуме и минимуме функције* $y = \frac{5x^2+8x-1}{x^2+1}$.

Овде је $y' = \frac{(10x+8)(x^2+1) - (5x^2+8x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-8x^2+12x+8}{(x^2+1)^2}$

Стављајући да је први извод раван нули добијамо:

$\frac{-8x^2+12x+8}{(x^2+1)^2} = 0$, или $-8x^2+12x+8 = 0$, или $2x^2-3x-2 = 0$.

Одавде је $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$. Да бисмо нашли сада вредности од $f''(2)$ и $f''\left(-\frac{1}{2}\right)$, довољно је наћи извод само бројитеља од $f''(x)$, јер именитељ не утиче на знак другог извода.

Извод овог бројитеља је $-16x + 12$, па је

$$f''(2) = -32 + 12 = -20 < 0 \text{ и } f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 8 + 12 = 20 > 0.$$

Према томе, дата функција има један максимум за $x = 2$, и то $y = 7$, и један минимум за $x = -\frac{1}{2}$, и то $y = -3$.

3) *Наћи максимуме и минимуме функције* $y = \frac{a + x}{a^2 + x^2}$.

Овде је $y' = \frac{1 \cdot (a^2 + x^2) - 2x(a + x)}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{a^2 - 2ax - x^2}{(a^2 + x^2)^2}$.

Стављајући да је овај извод раван нули, добијамо:
$\frac{a^2 - 2ax - x^2}{(a^2 + x^2)^2} = 0$, или $a^2 - 2ax - x^2 = 0$, или $x^2 + 2ax - a^2 = 0$.

Одавде је $x_1 = a(\sqrt{2} - 1)$ и $x_2 = -a(\sqrt{2} + 1)$.

Да бисмо нашли знак од $F''(x)$, опет налазимо, као код пређашњег примера, само извод бројитеља, пошто именитељ не утиче на знак другог извода. Извод овог бројитеља је $-2a - 2x$, те је $F''[a(\sqrt{2}-1)] = -2a - 2a(\sqrt{2}-1) = -2a\sqrt{2} < 0$, а $F''[-a(\sqrt{2}+1)] = -2a + 2a(\sqrt{2}+1) = 2a\sqrt{2} > 0$. Према томе, дата функција има један максимум за $x = a(\sqrt{2}-1)$, и то $y = \frac{\sqrt{2}+1}{2a}$ и један минимум за $x = -a(\sqrt{2}+1)$, и то $y = \frac{1-\sqrt{2}}{2a}$.

4) *Наћи максимуме и минимуме функције* $y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$.

Овде је први извод $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - 1 \cdot (x^2 - x - 4)}{(x-1)^2} =$
$= \frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$. Стављајући да је први извод једнак нули, добијамо: $\frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2} = 0$, или $x^2 - 2x + 5 = 0$. Одавде је $x_1 = 1 + 2i$ и $x_2 = 1 - 2i$. Како ови корени нису стварни, већ имагинарни, то дата функција нема ни максимума ни минимума.

5) *Од 64 палидрвца начинити правоугаоник максималне површине.*

Ако је дужина траженог правоугаоника x, онда је његова ширина $32 - x$, а његова површина $y = x(32 - x)$. Први извод ове функције је $y' = 1 \cdot (32 - x) + x \cdot (-1) = 32 - 2x$. Стављајући да је овај извод једнак нули, добијамо $32 - 2x = 0$, а одавде је $x = 16$.

Како је други изнад $f''(x) = -2$, то ће овај правоугаоник имати максималну површину, ако му је дужина 16, а ширина $32 - 16 = 16$, тј. ако је он квадрат стране 16 палидрваца.

6) *Наћи максимуме и минимуме функције*

$$y = \sin x \cos(\alpha - x).$$

Овде је први извод $y' = \cos(2x - \alpha)$. Стављајући да је овај извод једнак нули, добијамо $\cos(2x - \alpha) = 0$, а овде је

$2x - \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, или $x = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{4}$.

Други извод је $y'' = -2\ sin\ (2x - \alpha)$, те је

$$F''\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -2\,sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -2\,sin\,\frac{\pi}{2} = -2,$$

$$F''\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -2\,sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -2\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Према томе, дата функција има један максимум за

$$x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}, \text{ и то}$$

$$y = sin\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\right) cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \left(sin\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\pi}{4} + cos\,\frac{\alpha}{2}\,sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(cos\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\pi}{4} + sin\,\frac{\alpha}{2}\,sin\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(sin\,\frac{\alpha}{2} + cos\,\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\,\frac{\alpha}{2} + sin\,\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(sin\,\frac{\alpha}{2} + cos\,\frac{\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(sin^2\,\frac{\alpha}{2} + cos^2\,\frac{\alpha}{2} + 2\,sin\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\,(1 + sin\,\alpha)$$

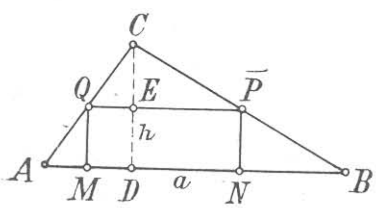
и један минимум за $x = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}$, и то $y = sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cdot$

$$\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \left(sin\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\pi}{4} - cos\,\frac{\alpha}{2}\,sin\,\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\pi}{4} - sin\,\frac{\alpha}{2}\,sin\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(sin\,\frac{\alpha}{2} - cos\,\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\,\frac{\alpha}{2} - sin\,\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(sin\,\frac{\alpha}{2} - cos\,\frac{\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(sin^2\,\frac{\alpha}{2} + cos^2\,\frac{\alpha}{2} - 2\,sin\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,(1 - sin\,\alpha).$$



Сл. 9

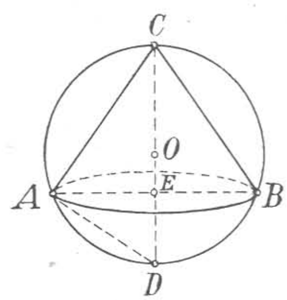
7) *У датом троуглу* ABC *уписати правоугаоник максималне површине.*

Нека је тражени правоугаоник $MNPQ$ (сл. 9), чија је дужина $MN = x$ а ширина $MQ = z$. Тада из сличности троуглова ABC и QPC имамо: $AB : QP = CD : CE$, или $a : x = h : (h - z)$, а одавде је $z = \frac{h}{a}\,(a - x)$. Површина правоугаоника биће: $y = xz = x\cdot\frac{h}{a}\,(a - x) = \frac{h}{a}\,x\,(a - x)$. Овде је $y' = \frac{h}{a}\,(a - 2x)$. Стављајући да је овај извод једнак нули, добијамо $\frac{h}{a}\,(a - 2x) = 0$, а одавде је $x = \frac{a}{2}$. Како је други извод $y'' = -2$, то ће тражени правоугаоник бити максималне површине $y = \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ah}{4}$, ако му је основица $x = \frac{a}{2}$ а висина $z = \frac{h}{2}$.

8) *У датој лопти полупречника* **r** *уписати купу максималне запремине.*

Ако полупречник купине основе AE означимо са x, а њену висину CE са z, онда је запремина купе

$$y = \frac{1}{3} x^2 \pi \cdot z \cdots (1)$$



Сл. 10

Да бисмо израз на десној страни свели на једну непознату, а затим да му нађемо први извод, треба да елиминирамо x. Из правоуглог троугла ACD имамо: $CE : AE = AE : DE$, или $z : x = x : (2r - z)$. Одавде $x^2 = z(2r - z)$. Заменом у (1) добијамо $y = \frac{\pi}{3} z^2 (2r - z)$. Његов први извод је $y' = \frac{\pi z}{3}(4r - 3z)$. Тада је $\frac{\pi z}{3}(4r - 3z) = 0$, а $z = \frac{4r}{3}$ и $x = \frac{2r}{3}\sqrt{2}$. Како је други извод $y'' = \frac{\pi}{3}(4r - 6z)$, који има негативну вредност при замени $z = \frac{4r}{3}$, то уписана купа биће максималне запремине, ако је полупречник базиза $x = \frac{2r}{3}\sqrt{2}$, а висина $z = \frac{4r}{3}$.

Задаци за вежбу. Одреди максимуме или минимуме ових функција:

1) $y = 16x - x^2$ (*max* 64 за $x = 8$);
2) $y = 12x + 2x^2$ (*min* -18 за $x = -3$);
3) $y = 20 - 3x^2$ (*max* 20 за $x = 0$);
4) $y = x^2 + 8x$ (*min* -16 за $x = -4$);
5) $y = 7 + 2x^2$ (*min* 7 за $x = 0$);
6) $y = x^2 - 4x - 5$ (*min* 1 за $x = 2$);
7) $y = 17 + 8x - x^2$ (*max* 33 за $x = 4$);
8) $y = 6x - x^2 - 21$ (*max* -12 за $x = 3$);
9) $y = 8x - 2x^2 - 9$ (*max* -1 за $x = 2$);
10) $y = (x - 1)(x - 7)$ (*min* -9 за $x = 4$);
11) $y = x^3 - 3x + 5$ (*min* 3 за $x = 1$, *max* 7 за $x = -1$);
12) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ (*min* -28 за $x = 5$, *max* 4 за $x = 1$);

13) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ (min — 15 за $x = 2$, max 12 за $x = -1$);

14) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 12$ (min — 100 за $x = 4$, max 25 за $x = -1$);

15) $y = \dfrac{x^2 - 7}{x + 4} \begin{pmatrix} min - 2 \text{ за } x = -1, \\ max - 14 \text{ за } x = -7 \end{pmatrix}$;

16) $y = \dfrac{x^2}{x - 1} \begin{pmatrix} max\ 0 \text{ за } x = 0, \\ min\ 4 \text{ за } x = 2 \end{pmatrix}$;

17) $y = 3x + \dfrac{27}{x} \begin{pmatrix} min\ 18 \text{ за } x = 3, \\ max - 18 \text{ за } x = -3 \end{pmatrix}$;

18) $y = \dfrac{15 - 4x^2}{8 - 4x} \begin{pmatrix} min\ 5 \text{ за } x = \frac{5}{2} \\ max\ 3 \text{ за } x = \frac{3}{2} \end{pmatrix}$;

19) $y = \dfrac{3x}{x^2 + x + 1} \begin{pmatrix} max\ 1 \text{ за } x = 1, \\ min - 3 \text{ за } x = -1 \end{pmatrix}$;

20) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 23}{2x - 9} \begin{pmatrix} max\ 3 \text{ за } x = 2, \\ min\ 8 \text{ за } x = 7 \end{pmatrix}$;

21) $y = \dfrac{3 - 2x}{x^2 - 2x + 7} \begin{pmatrix} max \frac{1}{2} \text{ за } x = -1, \\ min - \frac{1}{3} \text{ за } x = 4 \end{pmatrix}$;

22) $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1} \begin{pmatrix} \text{нема ни } max \\ \text{ни } min \end{pmatrix}$;

23) $y = \dfrac{2x^2 + 10x + 8}{2x^2 - 2x + 1} \begin{pmatrix} min - 1 \text{ за } x = \frac{3}{2} \\ max\ 9 \text{ за } x = \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

24) $y = \dfrac{4x^2 - 20x + 16}{4x^2 - 12x + 9} \left(max\ \dfrac{9}{5} \text{ за } x = \dfrac{1}{4} \right)$;

25) $y = x^4 (4a^2 - x^2) \left(max\ \dfrac{256\,a^6}{27} \text{ за } x = \pm \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} \right)$;

26) $y = \dfrac{x - 2a}{x^3} \left(max\ \dfrac{1}{27a^2} \text{ за } x = 3a \right)$;

27) $y = \dfrac{x^2 - a^2}{x^3} \left(max\ \dfrac{2\sqrt{3}}{9a} \text{ за } x = a\sqrt{3} \right)$;

28) $y = \dfrac{x^3}{(x - a)^2} \left(min\ \dfrac{27a}{4} \text{ за } x = 3a \right)$;

29) У функцији $y = 2x^2 - px - 1$ наћи p, кад се зна да ова функција добија минимум за $x = 3$ (одг. 12).

30) У функцији $y = -4x^2 + dx - 1$ одреди d, кад се зна да ова функција добија максимум за $x = 3$ (одг. 24).

31) Да се одреди a у функцији $y = ax^2 - 14x + 2$, кад се зна да она добија минимум за $x = 1$ (одг. 7).

32) Одреди a и b у функцији $y = ax^3 - bx^2 - 36x - 1$, кад се зна да она добија минимум за $x = 3$, а максимум за $x = -2$ (одг. 2 и 3).

33) Број 6 поделити на таква два дела да је збир њихових кубова минимум (одг. сваки је део 3, *min* 54).

34) Број 95 поделити на таква два цела дела да је њихов производ максимум (47 и 48).

35) Број 18 раставити на таква два цела чинитеља да је њихов збир минимум (одг. 3 и 6).

36) Поделити дуж $AB = 20\,m$ тачком C на таква два дела да је збир $AC^2 + 3CB^2$ минимум ($AC = 15\,m$, $CB = 5\,m$).

37) У датој лопти уписати облицу чија ће омотачева површина бити максимална (облица је равнострана).

38) Од свију правоуглих троуглова, којима је хипотенуза $4\,m$, који има највећи обим? (Равнокрако-правоугли катете $\sqrt{8}$ а обима $9{,}65\,m$).

39) Наћи бочну ивицу правилне и праве четворостране призме, која има запремину $v = 343cm^3$, а има најмању површину (одг. 7).

40) Да се одреди полупречник базиса и висина оне облице чија је површина $471\,cm^2$, а има највећу запремину (за $\pi = 3{,}14$ је $r = 5$, $h = 10$).

41) Од свију *равнокраких* троуглова уписаних у кругу полупречника r, који има максималну површину? (Одг. равностран троугао висине $\frac{3r}{2}$ а површине $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$)

Матурски задаци

(за домаћу вежбу ученика)

42) Дата је квадратна функција $y = ax^2 + bx + c$. Одредити a, b и c кад је познато да за $x = \frac{1}{2}$ функција има *minimum* који износи -49; и кад је збир квадрата корена квадратне једначине која се добива изједначењем функције са кореном једнаким 25. (Београд, II мушка, 1934)

43) Наћи за које вредности x-а функција $y = 3x^4 + 14x^3 + 21x^2 + 12x + 6$ има максимум или минимум и које су те вредности? (Смедерево, 1934)

44) Раван сече лопту полупречника R на два дела чије се висине имају као $3:5$. У мањем делу уписана је облица максималне запремине. У ком односу стоји висина те облице према полупречнику лопте? (Београд, I женска, 1934)

45) У правој купи полупречника $r = 6\,cm$ и висине $h = 18\,cm$ уписати облицу највеће површине. (Нови Сад, Мушка, 1932)

46) Равнокрак трапез има крак $6\,dm$ и мању паралелну страну $4\,dm$. Он се окреће око веће паралелне стране. Колико треба да буде већа страна да би запремина обртног тела била максимум? (Чачак, 1934)

47) У полукругу заданог полупречника нека се повуче тетива паралелна са полупречником, тако да површина трапеза одређена тетивом и пречником буде што већа.

(Вировитица, 1934)

48) Из лопте полупречника $r = 10cm$ треба исећи ваљак, коме се оса поклапа са пречником лопте, тако да преостала површина буде максимум. Колике су димензије тога ваљка?

(Вуковар, 1931)

49) На ком отстојању од центра круга полупречника R треба повући тетиву CD паралелно пречнику AB да би површина коју описује троугао OCD при обртању око пречника била максимална? (Београд, I женска, 1934)

50) Дуж $AB = a$ дели тачка M на два дела: x и $x - a$. Над AM и BM описани су кругови. Цела слика обрће се око осовине која пролази кроз A и B. Одредити између A и B место тачци M тако да збир запремина обрнутих тела: $y = V_1 + V_2$ достигне највећу вредност. Ради проверавања добивеног резултата, израчунати збир тих двеју запремина за $AM = \frac{a}{8}$ и $AM = \frac{a}{4}$. (Београд, II мушка, 1932)

§ 18. **Појам диференцијала.** Бесконачно мали прираштај неке променљиве количине, зове се диференцијал те количине, а означава се, кад се пред том количином стави знак d. Тако диференцијали променљивих x, y и z означавају се dx, dy и dz.

А) *Диференцијал функције од једне независно променљиве.* Да бисмо нашли диференцијал dy функције $y = f(x)$, када је dx бесконачно мали прираштај независно променљиве x, служимо се једначином

$$y + dy = f(x + dx).$$

Из ње је $dy = f(x + dx) - y = f(x + dx) - f(x)$.

Ако ову једначину поделимо са dx, добијамо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Како је десна страна ове једначине у ствари први извод дате функције, то је

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \text{ а одавде је } \boldsymbol{dy = f'(x)\, dx}, \text{ тј.}$$

да бисмо нашли диференцијал једне функције од једне независно променљиве количине, треба први извод те функције да помножимо са бесконачно малим прираштајем независно променљиве количине.

Примери: Наћи диференцијале функције:

a) $y = x^m$, *b)* $y = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 6$, *c)* $y = \sin x$, *d)* $y = \cos x$, *e)* $y = e^{x^2}$. Тражени диференцијали биће: *a)* $dy = mx^{m-1}dx$; *b)* $dy = (9x^2 + 8x - 5)\,dx$; *c)* $dy = \cos x \cdot dx$;

d) $dy = -\sin x \cdot dx$; *e)* За $x^2 = u$, биће $du = 2xdx$, а за $y = e^u$, биће $dy = e^u du$, или заменом $dy = e^{x^2} \cdot 2xdx = 2xe^{x^2}dx$.

Напомена. — Образац $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ даје нову дефиницију извода, која би гласила: *извод је количник између диференцијала функције и диференцијала независно промењљиве количине*. Из овог обрасца увиђамо да диференцијал једне функције зависи од ова три елемента: *a*) од облика функције; *b*) од вредности независно промењљиве количине; и *c*) од вредности прираштаја независно промењљиве количине. Сва правила која су служила за одређивање извода функција у важности су и за одређивање њихових диференцијала.

В) Диференцијал функције која зависи од више промењљивих количина. Нека је дата функција $z = f(x, y)$, чији се диференцијал тражи. Применом правила о *парцијалним* изводима (§ 14) имамо:

$$z' = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' \text{ или, за } x' = 1, \text{ имамо}$$

$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$, или, множењем са dx, имамо:

$$\boldsymbol{dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy}, \text{ тј.:}$$

Диференцијал функције од две и више промењљивих количина једнак је збиру делимичних диференцијала.

Пример. Наћи диференцијал функције $z = x^2 y - xy^2$.

Овде је $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2$, а $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy$, те је

$$dz = (2xy - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy)\, dy.$$

С) *Диференцијал имплицитних функција.* Нека је дата имплицитна функција $f(x, y) = 0$. Код § 15 видели смо да је њен извод:

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0.$$

Пример. Наћи диференцијал функције $x^2 + y^2 = 25$.

Овде је $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, а $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, па је $2x\, dx + 2y\, dy = 0$.

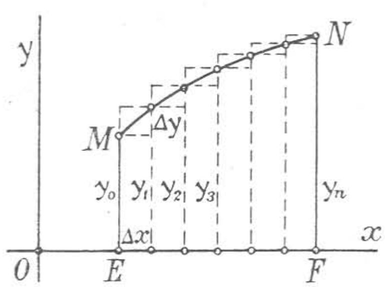
Одавде је $dy = -\frac{x}{y} dx$.

Примери за вежбу могу се узети из § 12.

ДРУГИ ОДЕЉАК

Основи интегралног рачуна

§ 19. **Инфинитезимални рачун.** Овај се рачун бави операцијама са бесконачно великим и бесконачно малим количинама, и те се количине могу употребити за израчунавање коначних количина. Како се рачун са бесконачно великим количинама дâ свести на рачун са бесконачно малим количинама, то одређивање коначних количина може се извршити употребом бесконачно малих количина, и то на следећа два начина: 1) *што коначну количину можемо сматрати као количник двеју бесконачно малих количина*; и 2) *што коначну количину можемо сматрати као границу збира од бесконачно много бесконачно малих количина.* Тачност првог начина најбоље се дâ увидети из теорије извода, где смо видели да количник $\frac{dy}{dx}$ између бесконачно малог прираштаја функције y и бесконачно малог прираштаја независно променљиве x, претставља угаони коефицијенат дирке у некој тачки M криве $y = f(x)$. Тачност другог начина можемо увидети посматрањем сл. 11, где површину $MEFN$ између криве MN, апсцисне осовине и ордината ME и NF, сматрамо као граничну вредност збира од бесконачно много бесконачно малих трапеза. На употреби бесконачно малих количина првим начином, ради израчунавања коначних количина, оснива се *диференцијални рачун,* а на другој *интегрални рачун*. Оба ова рачуна сматрају се као две гране инфинитезималног рачуна.



Сл. 11

§ 20. **Задатак интегралног рачуна.** Интегрални рачун има за задатак: 1) *да одреди границу збира од бесконачно малих количина чији је број бесконачно велики*; 2) *да одреди функцију чији је извод или диференцијал познат*. Оба ова задатка, на први поглед различита, своде се на један, што можемо увидети из следећег излагања.

1) Нека је $y = f(x)$ једначина криве MN (сл. 11), а желимо да одредимо површину ограничену овом кривом, апсци-

сном осовином OX и ординатама y_0 и y_n. Ако отстојање EF између ордината y_0 и y_n поделимо на n једнаких делова величине Δx и из деоних тачака повучемо паралелне са ординатном осовином до пресека са кривом MN, онда се површина $MNFE$ дели на n малих површина, облика и особина тражене површине. Ма која од ових малих површина, већа је од одговарајућег унутрашњег правоугаоника, а мања од спољашњег правоугаоника, нацртаних на слици. Ако означимо са P_1 збир површина свих унутрашњих правоугаоника, са P_2 збир површина свих спољашњих правоугаоника, а са P тражену површину, онда је очевидно:

$$P_1 < P < P_2 \ldots (1)$$

Како је $P_1 = y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x$, а

$$P_2 = y_1\Delta x + y_2\Delta x + y_3\Delta x + \ldots + y_n\Delta x,$$

то одузимањем ових двеју једначина, добијамо:

$$P_2 - P_1 = (y_n - y_0)\,\Delta x \ldots (2)$$

Ако сада замислимо да је Δx бесконачно мала количина, онда ће разлика $P_2 - P_1$, као производ од једне коначне и једне бесконачно мале количине, тежити нули. У том случају површина P тежи било површини P_1, било површини P_2 и поклапа се са ма којом од тих површина. Биће, дакле:

$$P = lim\,[y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x \ldots + y_{n-1}\Delta x] \ldots (3).$$

Једначина (3) показује да је заиста површина P граница којој тежи збир од бесконачно много бесконачно малих количина: $y_0\Delta x,\ y_1\Delta x,\ y_2\Delta x, \ldots y_{n-1}\Delta x$. Узимајући сада да је $\Delta x = dx$, онда је из дате једначине $y = f(x)$: $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 + dx)$, $y_2 = f(x_0 + 2dx), \ldots y_{n-1} = f[x_0 + (n-1)\,dx]$. Заменом у једначини (3) добијамо:

$$P = lim\,\{f(x_0)\,dx + f(x_0 + dx)\,dx + f(x_0 + 2dx)\,dx + \ldots f[x_0 + (n-1)\,dx]\,dx\} \quad (4) \text{ или}$$

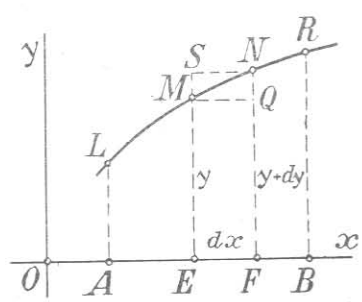
$$P = lim \sum_{n=1}^{\infty} f[x_0 + (n-1)\,dx]\,dx = lim \sum f\,(x_0 + kdx)\,dx. \quad (5)$$

Збир на десној страни једначине (4), односно (5), зове се *интегралом* функције $f(x)$, а бележи се симболички $\int f\,(x)\,dx$.* Ма који од сабирака овога збира зове се *елементом* интеграла. Из свега овога закључујемо: **да је интеграл једне функције $f\,(x)$ збир од бесконачно много сабирака облика $f(x + kdx)\,dx$, узимајући поступно $k = 1, 2, 3, \ldots$, а сматра**

* Интегрални знак $\int$ је деформација писмена S (suma = збир).

се као површина ограничена кривом $y=f(x)$, апсцисном осовином и двема крајњим ординатама y_0 и y_n, које одговарају апсцисама x_0 и x_n. Ова дефиниција само утврђује појам интеграла, али не служи и за његово израчунавање.

II) Израчунавање интеграла неке дате функције $y=f(x)$ оснива се на дефиницији: *да је интеграл неке дате функције $f(x)$ друга нека функција $\varphi(x)$ чији је извод по x раван функцији под интегралним знаком.* Да је ова дефиниција тачна, уверавамо се на следећи начин: Нека је LR (сл. 12) крива дате функције $y=f(x)$ и на њој бесконачно блиске тачке M и N. Посматрајући површину $ABRL$, чију величину означавамо са P и коју, према првој дефиницији, сматрамо као интеграл функције $y=f(x)$, онда површину $MNFE$ можемо сматрати као диференцијал површине P, тј. $dP=MNFE$. Из слике се види да је диференцијал $MNFE$ већи од правоугаоника $MQFE=ydx$, а мањи од правоугаоника $SNFE=(y+dy)\cdot dx$, тј.



Сл. 12

$$(y+dy)\cdot dx > dP > y\cdot dx \ldots (6).$$

Како се вредности: $(y+dy)\,dx$ и $y\,dx$ разликују за $dy\,dx$, који је производ бесконачна мала количина другог реда, то се ова разлика, као бесконачно мала, занемарује и узима се да је $dP=y\cdot dx$. Одавде је $\frac{dP}{dx}=y \ldots (7)$. Међутим, из једначине (4) знамо да је $P=\int f(x)\,dx$. Заменом у једначини (7) P са $\int f(x)\,dx$ и y са $f(x)$, добијамо:

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx}=f(x)\ldots(8),$$

која нам једначина доказује тачност друге дефиниције интеграла. Разуме се ова дефиниција интеграла, простија и важнија од прве, служи за израчунавање интеграла неке дате функције. Упутство за ово израчунавање састојало би се у овоме: **треба наћи такву једну функцију $\varphi(x)$ да је њен извод по x једнак функцији $f(x)$ под интегралним знаком.** Функција под интегралним знаком зове се *интегрант*. Из једначина (4) и (8) види се да су оба задатка интегралног рачуна, поменута у почетку овог параграфа, у ствари иста и своде се на један. Једначина (8) показује да су диференцијални и интегрални рачун две супротне операције које се поништавају ако се изводе једновремено на једној функцији, ма којим редом.

Примери :

1) $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, јер је $\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = \frac{(m+1)\,x^m}{m+1} = x^m$;

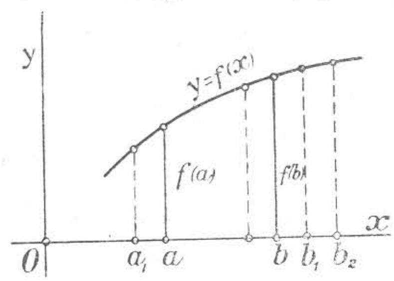
2) $\int sin\,x\,dx = -\,cos\,x$, јер је $(-\,cos\,x)' = -(-\,sin\,x) = sin\,x$;

3) $\int cos\,x\,dx = sin\,x$, јер је $(sin\,x)' = cos\,x$.

§ 21. **Појам о одређеним и неодређеним интегралима.** Из друге дефиниције интегралног рачуна увиђамо да један интеграл нема само једну, већ бесконачно много вредности, пошто и функције $\varphi(x)$ и $\varphi(x)+C$, где је C константна количина ма које вредности, имају један исти извод, рецимо $f(x)$. Стога, ако је $\varphi(x)$ један интеграл функције $f(x)$, остали интеграли биће $\varphi(x)+C$. Ово претстављамо обрасцем

$$\int f(x)\;dx = \varphi(x) + C \cdots (1).$$

Осим ових вредности, које се разликују за сталну количину C, интеграл не може имати друге вредности, јер из теорије извода знамо да две функције имају само онда једнаке изводе ако су оне једнаке, или се разликују за једну сталну количину C. Тачности једначине (1) можемо увидети и геометриским путем посматрањем сл. 13. Према првој дефиницији интеграла, интеграл $\int f(x)\,dx$ претставља површину између криве апсцисне осовине и ордината $f\,(a)$ и $f\,(b)$ апсциса a и b. Из слике видимо да ова површина, тј. интеграл, не зависи само од апсцисе a, већ и од апсцисе b. Ако је једна од ових апсциса утврђена на пр. b, онда интеграл зависи од апсцисе a, који се повећава или смањује према томе да ли a опада или расте. Ако су обе апсцисе a и b утврђене, онда и вредност интеграла била би потпуно одређена и биће један апсолутан број. Такав се интеграл бележи $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$. Због овога интеграл $\int f(x)\,dx$ зове се *неодређеним*, а интеграл $\int_a^b f\,(x)\;dx$ *одређеним* ин-



Сл. 13

тегралом функције од x између a и b. Апсцисе a и b зову се интегралне границе. У претходном параграфу упознали смо се са упутством за одређивање неодређеног интеграла неке функције, а сада имамо да се упознамо и са начином одређивања вредности једног одређеног интеграла неке функције.

Једначина (1) у важности је, па ма у којим границама узели интеграл. Ако су ове границе a и x, онда је

$$\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) + C \cdots (2).$$

Међутим, ако се границе a и x поклапају, онда интеграл постаје нула, тј. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. У овом случају и десна је страна једначине (2) једнака нули за $x = a$, тј. $\varphi(a) + C = 0$. Онда је $C = -\varphi(a)$. Заменом у (2) добијамо:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a) \cdots (3).$$

Најзад, ако место променљиве границе x узмемо утврђену b, имамо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) \cdots (4).$$

Једначина (4) даје упутство за одређивање вредности једног одређеног интеграла: **Треба, дакле, најпре наћи неодређени интеграл $\varphi(x)$, а затим у њему сменити x најпре горњом а затим доњом границом и резултате одузети.**

Примери:

2) *Наћи* $\int_2^4 x^3\,dx$. Овде је неодређени интеграл $\frac{x^4}{4}$, те је вредност датог интеграла $\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 60$.

2) *Наћи* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. Овде је неодређени интеграл $\sin x$, те је $\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0^0 = 1 - 0 = 1$.

3) *Наћи* $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$. Овде је неодређени интеграл $arc\,tg\,x$, те је $\Big[arc\,tg\,x\Big]_0^\infty = arc\,tg\,\infty - arc\,tg\,0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

§ 22. **Особине неодређених интеграла**

I) *Општа вредност интеграла* $\int f(x)\,dx$ *добија се, када се нађеној вредности* $\varphi(x)$ *дода произвољна константа* C, тј.

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

Тачност ове особине очевидна је из излагања у претходном параграфу.

II) *Ако под интегралним знаком постоји као чинитељ нека константа, онда је интеграл једнак производу од константе и интеграла осталих чинитеља,* тј.

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

Тачност ове особине увиђамо из сличног правила које се односи на изводе. (Види последицу II теореме § 9.)

Пример. $\int 3 \cos x\, dx = 3 \int \cos x\, dx = 3 \sin x.$

III) *Интеграл алгебарског збира ма коликог броја функција једнак је алгебарском збиру интеграла тих функција,* тј.

$$\int [f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \mu(x) \ldots] dx = \int f(x)\, dx + \int \varphi(x)\, dx + \\ + \int \psi(x)\, dx + \int \mu(x)\, dx + \ldots$$

Тачност и ове особине увиђамо из сличног правила о изводима. (Види I теорему § 9.)

Пример. $\int (x^5 + \cos x)\, dx = \int x^5\, dx + \int \cos x\, dx = \frac{x^6}{6} + \sin x.$

§ 23. Методе за израчунавање неодређених интеграла

I) **Непосредна интеграција.** Ова интеграција оснива се на познатим изводима простих функција и на особинама неодређених интеграла из претходног параграфа. Овде је интеграле лако наћи помоћу формула за изводе простих функција. Ти интеграли зову се *основни.*

Основни интеграли били би:

1) $\int dx = x + C;$ 2) $\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C;$

3) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C;$ 4) $\int e^x\, dx = e^x + C;$

5) $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$ 6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$ 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g\, x + C;$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arc\sin x + C; \\ -\arc\cos x + C; \end{cases}$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arc tg\, x + C; \\ -\arc \cot g\, x + C; \end{cases}$

11) $\int \frac{dx}{x} = \log x + C;$

12) $\int 3(a+b)\, x^2 dx = 3(a+b) \int x^2 dx = 3(a+b) \cdot \frac{x^3}{3} + C =$
$= (a+b)\, x^3 + C;$

13) $\int\left(\frac{a}{x}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\int\frac{adx}{x}-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=a\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$
$= a\log x - arc\sin x + C;$

14) $\int\frac{3a\,dx}{5b\,(1+x^2)}=\frac{3a}{5b}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{3a}{5b}\,arc\,tg\,x+C;$

15) $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C=$
$=\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C;$

16) $\int\sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+C=\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+C=$
$=\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}+C;$

17) $\int\frac{6x^4+8x^{\frac{3}{2}}-5x+2}{x}\,dx=\int 6x^3dx+\int 8x^{\frac{1}{2}}dx-\int 5\,dx+$
$+\int\frac{2dx}{x}=6\int x^3\,dx+8\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-5\int dx+2\int\frac{dx}{x}=6\cdot\frac{x^4}{4}+$
$+8\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-5x+2\log x+C=\frac{3\,x^4}{2}+\frac{16x\sqrt{x}}{3}-5x+2\log x+C;$

18) $\int(5x^3-4x^2-3x+5)\,dx=5\int x^3dx-4\int x^2dx-3\int xdx+$
$+5\int dx=\frac{5}{4}\,x^4-\frac{4}{3}\,x^3-\frac{3}{2}\,x^2+5x+C.$

II**) Метода замене.** Ако дати интеграл $\int F(x)\,dx$ не потпада ни под један од основних интеграла, а облика је таквог да постаје основним интегралом $\int f(u)\;du$ сменом $x=f(u)$ и и $dx=f'(u)\,du$, онда налазимо основни интеграл за независно промењиву u, а затим у томе интегралу вршимо замену u са њему једнаким изразом, у коме фигурише x.

Примери:

1) *Наћи* $\int\frac{dx}{a+x}$. За $a+x=u$, биће $x=u-a$, $dx=du$.

Тада је $\int\frac{dx}{a+x}=\int\frac{du}{u}=\log u+C=\log(a+x)+C.$

2) *Наћи* $\int(ax+b)^m\,dx$. За $ax+b=u$, биће $x=\frac{u}{a}-\frac{b}{a}$,

$dx = \frac{du}{a}$. Тада је $\int (ax+b)^m dx = \int u^m \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int u^m du =$
$= \frac{1}{a}\cdot\frac{u^{m+1}}{m+1} + C = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C.$

3) *Наћи* $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-ax^4}}$. За $ax^4 = u^2$, биће $u = x^2\sqrt{a}$,

$x^2 = \frac{u}{\sqrt{a}}$, $2xdx = \frac{du}{\sqrt{a}}$, $xdx = \frac{du}{2\sqrt{a}}$. Тада је $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-ax^4}} =$

$= \int \frac{du}{2\sqrt{a}\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\, arc \sin u + C =$

$= \frac{1}{2\sqrt{a}}\, arc \sin x^2\sqrt{a} + C.$

4) *Наћи* $\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. За $\cos x = u$, биће

$-\sin xdx = du$, $dx = \frac{du}{-\sin x}$. Тада је $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$

$= \int \frac{\sin x}{u}\cdot\frac{du}{-\sin x} = -\int\frac{du}{u} = -\log u + C = -\log\cos x + C.$

5) *Наћи* $\int cotgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. За $\sin x = u$, биће $\cos xdx =$

$= du$. Тада је $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \log u + C = \log \sin x + C.$

6) *Наћи* $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$*. За $x + \sqrt{a^2+x^2} = u$, или $u - x =$
$= \sqrt{a^2+x^2}$, или $u^2 - 2ux + x^2 = a^2 + x^2$, или $u^2 - 2ux = a^2$,
биће $2udu - 2udx - 2xdu = 0$, или $udu - udx - xdu = 0$, а
одавде $(u-x)du = udx$, а $\frac{du}{u} = \frac{dx}{u-x} = \frac{dx}{x+\sqrt{a^2+x^2}-x} =$
$= \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Тада је $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{du}{u} = \log u + C = \log(x +$
$+ \sqrt{a^2+x^2}) + C.$

Примери за вежбу:

1) $\int \frac{dx}{x-a}$; 2) $\int \cos(x \pm a)\,dx$; 3) $\int \sin(x \pm a)\,dx$;

4) $\int \sin(a+bx)\,dx$ [одг. $-\frac{1}{b}\cos(a+bx) + C$];

5) $\int \cos\frac{x}{2}\,dx$ (одг. $2\sin\frac{x}{2} + C$);

---

* Врло важан због своје честе примене *Ајлеров* интеграл.

6) $\int e^{\frac{x}{a}} dx$ (одг. $ae^{\frac{x}{a}} + C$);

7) $\int \frac{dx}{1+(a+bx)^2}$ [одг. $\frac{1}{b} \cdot arc\, tg\, (a+bx) + C$];

8) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ (Замени $bx = au$; одг. $\frac{1}{ab} arc\, tg \frac{bx}{a} + C$);

9) $\int \frac{bx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$ (Замени $bx = au$; одг. $\frac{1}{b}\, arc\, sin\, \frac{bx}{a} + C$);

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ [Ради као 6 решени пример; одг. $log\, (x +$ $+ \sqrt{x^2-a^2} + C$];

11) $\int \frac{xdx}{a^2+x^2}$ [Замени $a^2 + x^2 = u$, одг. $\frac{1}{2} log\, (a^2 + x^2) + C$];

12) $\int (sin^4 x - 3\, sin^3 x)\, cos\, xdx$ (Замени $u = sin\, x$; одг. $\frac{sin\, x^5}{5} -$ $- \frac{3\, sin\, x^4}{5} + C$);

13) $\int \frac{dx}{2x-3}$ [одг. $\frac{1}{2} log\, (2x-3) + C$].

III) **Делимична интеграција.** Оснива се на правилу диференцијаљења производа: $d\,(uv) = udv + vdu$ (1). Из ове једначине је: $udv = d\,(uv) - vdu$ (2).

Ако обе стране једначине (2) интегралимо, добијамо:
$\int udv = \int d\,(uv) - \int vdu$, или $\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$ (3),
пошто је $\int d\,(uv) = uv$ услед потирања интегралног и диференцијалног знака. Једначина (3) даје нам следеће упутство за интеграцију по овој методи: *старајмо се најпре да функцију под интегралним знаком претставимо као производ двеју функција. Једну од ових функција означавамо са u, а другу заједно са чинитељем dx, са dv, чиме дати интеграл добија облик $\int udv$. Затим применом обрасца (3) дати интеграл сводимо на интеграл $\int vdu$, који ће се дати одредити, ако спада у групу основних или простих интеграла. Израчунавањем овог интеграла, израчунао би се и дати интеграл помоћу обрасца (3).*

Решени примери:

1) *Наћи* $\int xe^x\, dx$. За $x = u$ и $e^x\, dx = dv$, биће $du = dx$, а $v = \int e^x\, dx = e^x$. Тада је $\int xe^x\, dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x = (x-1)\, e^x$.

2) *Наћи* $\int x^3 e^x\, dx$. За $u = x^3$ и $e^x\, dx = dv$, биће $du = 3x^2\, dx$, а $v = \int e^x\, dx = e^x$. Тада је $\int x^3\, e^x\, dx = \int udv = uv -$

$-\int v du = x^3e^x - \int e^x \cdot 3x^2 dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$ (1). За интеграл $\int x^2e^x dx$, радећи по истом поступку, добијамо да је једнак $(x^2e^x - \int xe^x dx)$, а из првог решеног примера знамо да је $\int xe^x dx = (x-1)e^x$. Поступном заменом добијамо: $\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3[x^2e^x - 2(x-1)e^x] = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$.

Напомена. По истом поступку налазимо $\int x^4 e^x dx$, $\int x^5e^x dx$ итд.

3) *Наћи* $\int \log x\, dx$. За $\log x = u$ и $dx = dv$, биће $du = \frac{dx}{x}$ а $v = x$. Тада је $\int \log x\, dx = \int u dv = uv - \int v du = x \log x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \log x - \int dx = x \log x - x = x(\log x - 1) + C$.

4) *Наћи* $\int x^2 \sin x\, dx$. За $x^2 = u$ и $\sin x\, dx = dv$, биће $du = 2x\, dx$ а $v = -\cos x$. Тада је $\int x^2 \sin x\, dx = \int u dv = uv - \int v du = -x^2 \cos x - \int -2x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$ (1). Вредност $\int x \cos x\, dx$ налазимо истим путем. Овде је за $x = u$ и $\cos x\, dx = dv$, биће $du = dx$ а $v = \int \cos x\, dx = \sin x$. Стога је $\int x \cos x\, dx = \int u dv = uv - \int v du = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x$ (2).

Заменом (2) у (1) добијамо:

$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$.

Примери за вежбу:

1) $\int x \sin x\, dx$; 2) $\int \operatorname{arc} \sin x\, dx$;

3) $\int \operatorname{arc} tg\, x\, dx$; 4) $\int \cos^2 x\, dx$;

5) $\int \sin^2 x\, dx$ $\left[\text{одг. } \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\right]$.

§ 24. **Примена интегралног рачуна.** Примена интегралног рачуна је врло велика не само у геометрији већ и у механици, физици итд. Најважнија његова примена у геометрији је при израчунавању: 1) дужина лукова кривих линија, 2) површина ограничених луцима кривих линија и 3) запремина добивених обртањем кривих линија око неке осовине обртања.

Како су нама познати само основни појмови интегралног рачуна, можемо помоћу нашег уског знања овог рачуна израчунати интеграле само неких простијих функција, наведених у претходним параграфима. Стога ћемо се у овом параграфу упознати само с начином израчунавања површине параболе и запремина обртног параболоида, елипсоида и лопте. (Са применом интегралног рачуна за израчунавање дужина лукова, површина и обртних запремина других кривих линија (елипсе, хиперболе итд.) ученици ће се упознати на универзитету.)

I) **Површина параболе.** Видели смо код § 20 и 21 да се површина, ограничена луком криве $y = f(x)$, апсцисном осовином и ординатама, које одговарају апсцисама a и b ($b > a$), дâ израчунати интегралом:

$$P = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

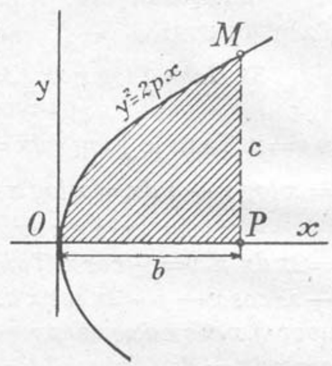
Како је једначина параболе $y^2 = 2px$, то је површина њеног дела OPM (сл. 14):

$$P = \int_0^b y\, dx = \int_0^b \sqrt{2px}\, dx = \int_0^b \sqrt{2p}\,\cdot$$

$$\cdot\, x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p} \int_0^b x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p} \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^b =$$

$$= \sqrt{2p} \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^b = \sqrt{2p} \cdot \frac{2b\sqrt{b}}{3} =$$

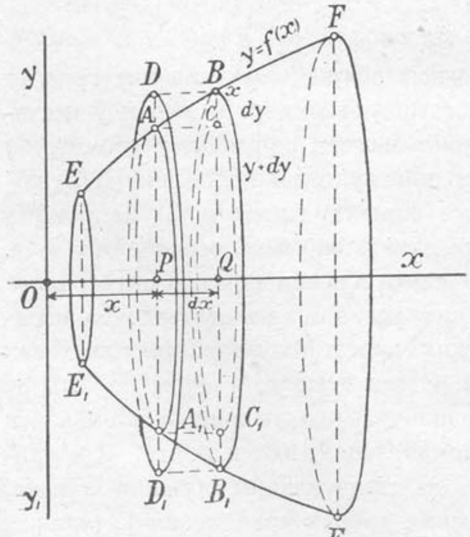
$$= \frac{2}{3}\, b\sqrt{2pb}.$$



Сл. 14

Како је $\sqrt{2pb}$ једнако ординати c тачке M, то је $P = \frac{2}{3} bc$, тј. *површина дела параболе ограничена луком и координатама* (x_1, y_1) *неке тачке лука, износи две трећине производа координата.*

II) **Обртна запремина.** Нека је једначина криве EF $y = f(x)$ и претпоставимо да се та крива обрће око апсцисне осовине.



Сл. 15

Ако на овој кривој узмемо две бесконачно блиске тачке A (x, y) и B ($x + dx$, $y + dy$), онда је обртна запремина $AA'B'B$, која постаје обртањем лука AB, већа од обртне запремине цилиндра $AA'C'C$ (висине dx, а полупречника базиса y), а мања је од обртне запремине цилиндра $DD'B'B$ (висине dx, а полупречника базиса ($y + dy$). Ако са dv означимо запремину овог бесконачно малог дела $AA'B'B$ обртне запремине добивене обртањем линије

$y = f(x)$ око апсцисне осовине, онда је очевидно: $V_{(AA, C, C)} < dv < < V_{(DD, B, B)}$, или

$$y^2\pi \cdot dx < dv < (y + dy)^2 \pi \cdot dx, \text{ или}$$

$$y^2 \pi \, dx < dv < y^2 \pi \, dx + 2y \pi \, dy \, dx \, \pi dy^2 dx \; (1)$$

Како су тачке A и B бесконачно близу, то су dx и dy бесконачно мале количине. Због овога чланови: $2 y \pi \, dy \, dx$ и $\pi dy^2 \, dx$ неједначине (1), као бесконачно мале количине другог и трећег реда занемарују се, па се неједначина (1) своди на једначину

$$dv = y^2 \pi \, dx.$$

Из ове једначине имамо једначину:

$$\boldsymbol{v = \int y^2 \pi dx = \pi \int y^2 dx} \cdots (2),$$

која даје општи образац за израчунавање обртних запремина добивених обртањем неког лука криве $y = f(x)$ око апсцисне осовине. Ако су апсцисе крајњих тачака овог лука a, b $(b > a)$, онда је његова обртна запремина

$$\boldsymbol{v = \pi \int_a^b y^2 dx} \cdots (3)$$

Примери:

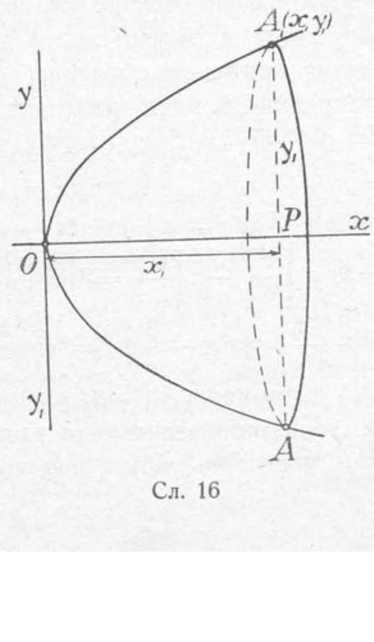
1) **Запремина обртног параболоида.** Једначина параболе је $y^2 = 2px$. Да бисмо нашли обртну запремину добивену луком OA, треба да применимо образац (3). Овде је $a = 0$, $b = x_1$, те је:

$$\boldsymbol{v} = \pi \int_0^{x_1} y^2 \, dx = \pi \int_0^{x_1} 2\, px dx = 2p\pi \int_0^{x_1} x dx =$$

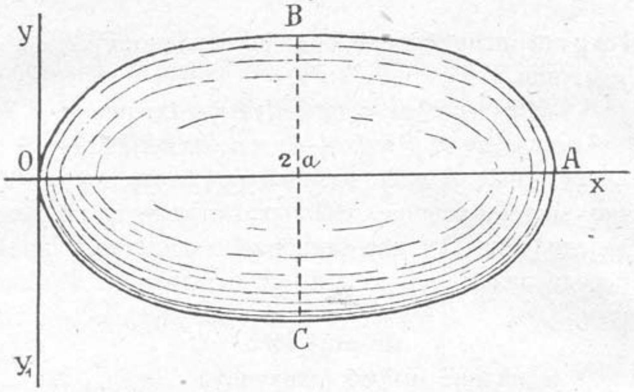
$$= 2\, p\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_1} = 2\, p\pi \cdot \frac{x_1^2}{2} = \boldsymbol{p\pi x_1^2}.$$

Посебни пример. Код параболе $y^2 = 8x$, биће обртна запремина лука OA, чије су апсцисе 0 и 5, $v = 4 \cdot 3,\ 14 \cdot 25 = 314$.

2) **Запремина елипсоида.** Централна једначина елипсе је $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, а темена $b^2 (x - a)^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, или $y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$. Ако сада замислимо да се цела елипса OA (сл. 17) обрће око апсцисне осовине OX, онда обртну запремину добијамо применом обрасца (3). Овде су границе 0 и $2a$, те је



Сл. 16



Сл. 17

$$v=\pi\int_a^{2a} y^2\,dx=\pi\int_0^{2a}\left(\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^{2a}(2ax-$$

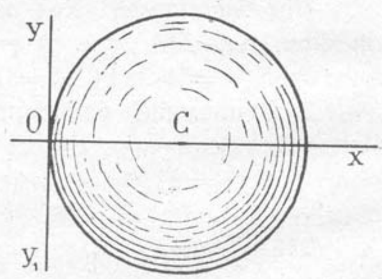
$$-x^2)\,dx=\frac{b^2\pi}{a^2}\int_0^{2a}2\,axdx-\frac{b^2\pi}{a^2}\int_0^{2a}x^2\,dx=\frac{2b^2\pi}{a}\int_0^{2a}xdx-$$

$$-\frac{b^2\pi}{a^2}\int_0^{2a}x^2\,dx=\frac{2b^2\pi}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a}-\frac{b^2\pi}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a}=\frac{2b^2\pi}{a}\cdot\frac{4a^2}{2}-$$

$$-\frac{b^2\pi}{a^2}\cdot\frac{8a^3}{3}=4\,ab^2\pi-\frac{8\,ab^2\pi}{3}=\frac{12ab^2\,\pi-8ab^2\,\pi}{3}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\,\mathbf{ab^2}\,\pi.$$

Ако се елипса обрће око осовине *ОУ*, онда је запремина $v=\frac{4}{3}\,ba^2\pi$.

3) **Запремина лопте.** Темена једначина круга C (сл. 18) је $x^2+y^2=2rx$. Ако се овај круг обрће око осовине *ОХ*, онда запремину добивене лопте добијамо применом обрасца (3) а за границе 0 и $2r$. Овде је:



Сл. 18

$$v=\pi\int_0^{2r}y^2dx=\pi\int_0^{2r}(2rx-x^2)\,dx=$$
$$=\pi\int_0^{2r}2r\,xdx-\pi\int_0^{2r}x^2\,dx=$$
$$=2r\,\pi\int_0^{2r}xdx-\pi\int_0^{2r}x^2\,dx=$$
$$=2r\,\pi\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2r}-\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2r}=2r\pi\cdot\frac{4r^2}{2}-$$
$$-\frac{8r^3\,\pi}{3}=4r^3\,\pi-\frac{8r^3\,\pi}{3}=\frac{12r^3\,\pi-8r^3\,\pi}{3}=\frac{4}{3}\,r^3\,\pi.$$

Напомена. До овога резултата дошли бисмо из обрасца за запремину елипсоида узимајући да је $a=b=r$, пошто је круг у ствари елипса, код које је $a=b$.

§ 25. Мешовити матурски задаци

(за домаћу вежбу ученика)

1) Два тела, удаљена од темена правог угла за 492 m и 500 m, крећу се по крацима правог угла. Прво се удаљује од темена и прелази у првој секунди 1 m, у другој 3, у трећој 5 итд. Друго се приближује темену и прелази у првој секунди 2 m, у другој 4, у трећој 6 итд. Када ће међусобно растојање ова два тела бити најкраће и колико је оно? (Сарајево, II мушка, 1933)

2) Крива линија дата је једначином $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$ и дата је тачка на њој M (6, 12). Нађи максимум и минимум ове криве линије, конструиши њу и израчунај површину која је ограничена кривом линијом, комадом апсцисне осовине и ординатом у тачки M (6, 12). (В. Кикинда, 1932)

3) Два воза полазе једновремено, из два места A и B која су удаљена 615 km, један другоме у сусрет. Први воз прелази на час онолико километара колики је први члан аритметичке прогресије којој је последњи члан 49, а збир њена прва четири члана 154. Други воз прелази на час онолико километара колики је корен једначине $\sqrt[5]{x} + 4x^{-\frac{1}{5}} = 4$. По колико су километара прешли возови до сусрета? (Београд, II мушка, 1909)

4) Неки је позајмио 23 675 динара а отплаћује дуг са 1 600 дин. годишње. Од колико динара остаће дуг после 12 година, ако је проценат једнак позитивном корену једначине $2^{x^2 + \frac{3}{2}x\sqrt{2}} = \sqrt{2^{5(2x + 3\sqrt{2})}}$. (Београд, III мушка, 1913)

5) Из једног места крене се један путник и пређе првог часа 3,5 km, а затим стално убрзава кретање са 0,2 km на час. Један час доцније крене из истог места у истом правцу други путник који прелази стално по 5 km на час. Други путник ће после извесног времена стићи (и претећи) првог, па ће затим први путник, после извесног времена стићи другог. Кад ће други путник стићи првог, а кад први другог, рачунајући време од поласка првог путника? (Заечар, 1910)

6) Неки је капитал дат под интерес и доноси 90 пута већи интерес од позитивног корена једначине $x^2 - 6x - 16 = 0$. Проценат је једнак вредности y-а из једначина $y^2 - z^2 = 27$, $y - z = 3$. Време (број година) је три пута веће од вредности z-а из истих једначина. Колики је тај капитал? (Скопље, 1914)

7) Неко узајми од штедионице 8000 динара с погодбом да дуг исплати за онолико година колики је број чланова аритметичке прогресије која почиње са 3, разлика јој је 2, а збир чланова 255, плаћајући крајем сваке године једнаке суме. Колика је свака отплата, када штедионица наплаћује 5% интереса на интерес за узајмљени новац, а 4% за примљени? (Ница, 1917)

8) Неко поклони својој општини 36 000 динара за зидање школе. По предрачуну зидање би стало 150 000 динара. Колико времена треба да буде поклоњена сума под сложен интерес док не порасте толико да се може приступити зидању, кад банка плаћа толики проценат колики је први члан геометриске растуће прогресије у којој је производ од три прва члана једнак 1000, а збир истих чланова је 35. Интерес се капиталише у толико месеца колика је вредност једне половине коефицијента k у једначини $x^2 - kx + 20 = 0$, која има један корен 5 пута већи од другог. (Призрен, 1931)

9) У почетку сваке године улаже се у банку иста сума која је једнака вредности корена једначине $92 \log x = 778\,688$. За колико ће година ти улози порасти на 18 295,60 динара, кад се рачуна толико процената сложеног интереса, колика је вредност количника геометриске прогресије у којој је збир првог и другог члана 9, а трећег и четвртог 110,25.

(Призрен, 1932)

10) Девети и једанаести члан опадајуће аритметичке прогресије су корени једначине

$$\frac{1}{2} \log 2 + \log \sqrt{x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{2}\left[\log (x^2 - 4x + 5) + \log 10\right];$$

збир свих чланова, почев од првог, 10 пута је већи од броја година за које ће капитал 2518 динара, уложен по $5^0/_0$ сложеног интереса порасти на 4522 динара. Одреди број чланова аритметичке прогресије. (Призрен, 1933)

11) Корени једначине $\frac{1}{2} \log 2 + \log \sqrt{x^2 + 4x + 5} =$
$= \frac{1}{2}\left[\log (x^2 + 4x + 5) + 1\right]$ дају нам једанаести и девети члан аритметичке прогресије. Збир од 30 чланова те прогресије претставља ануитет што га плаћа нека особа кроз 25 година на почетку сваке године. Колика је садашња вредност дуга, ако се рачуна $5^0/_0$ интереса? (Сарајево, II мушка, 1933)

12) Седми члан аритметичке прогресије једнак је максимуму функције $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 13$, а збир првог и трећег члана износи 22. Нађи прогресију. (Цетиње, 1933)

13) Корени једначине четвртог степена чине аритметички ред. Збир тих корена једнак је нули, а збир њихових квадрата једнак је минимуму функције $y = x^2 + 2x + 21$. Како гласи једначина и којега је типа? (Крк, 1933)

14) Први члан аритметичке прогресије једнак је именитељу разломка који претставља површину параболиног сегмента који се добива пресеком праве $\frac{3}{8} y - \frac{1}{4} x = 1$ са параболом $y^2 = 8x$. Ако производ прва три члана поделимо поступно са сваким од ових чланова, онда је збир добивених количника 299. Нађи збир првих 10 чланова ове аритметичке прогресије.

(Котор, 1933)

15) Неко дугује 220 000 дин. Дуг исплаћује годишњим ануитетима од 23 400 дин. За колико ће година дуг исплатити, ако је проценат једнак првом члану аритметичке прогресије у којој је збир I и IV члана $= 17$, а њихов је производ три пута већи од површине омеђене кривом $y = 2x^2$, апсцисном осовином и ординатама на местима $x = 1$, $x = 3$? (Котор, 1932)

16) Први корен неке квадратне једначине раван је броју који се добија кад се у првом изводу функције $y = 3\sqrt[3]{x^3} + 2x$ замени x са 1, други корен те квадратне једначине истоветан је са кореном једначине $3^x = 270 - 9^{x-2}$. Саставити ту квадратну једначину. (Шабац, 1934)

17) Наћи 4 позитивна броја који чине пропорцију по овим условима: 1) први члан пропорције једнак је другом повећаном за производ $2\sqrt{1 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{-2(1 + \sqrt{3})}$; 2) трећи члан већи је од четвртог за основу логаритма при којој је $log\, 177\,147 = 11$; 3) збир квадрата сва четири члана пропорције је 62,5. (Крушевац, 1930)

18) Радник би могао да сврши рад за 1 час брже него његова жена. За које време могу да сврше рад: a) радник, b) жена, ако заједнички могу свршити посао за број часова који је једнак суми бесконачне опадајуће геометриске прогресије чији је први члан $\frac{1}{2}$ а количник $\frac{7}{12}$. (В. Кикинда, Руска, 1931)

19)* Број кватерна без понављања одређенога броја елемената је 20 пута већи неголи број амба без понављања од тих елемената. Колики је број елемената? (Шибеник, 1930)

20)* Развити по биномном обрасцу до четири прва члана $(4 + 3x)^{\frac{3}{2}}$ (Београд, Реалка 1928)

21) Седми члан аритметичке прогресије једнак је максимуму функције $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 13$, а минимум те функције је за 3 мањи од збира првог и шестог члана. Нађи прогресију. (Петровград, 1934)

22) Први члан једне аритметичке прогресије једнак је апсциси, а разлика те прогресије једнака је ординати оне тачке у којој функција $y = x^2 - 4x + 5$ има минимум. Наћи девети члан и збир од првих двадесет чланова те прогресије. (Неготин, 1934)

23) Шест бројева чине аритметичку прогресију. Збир два средња члана је 29, а производ првог и последњег члана једнак је вредности интеграла $\int_0^{729} \frac{x}{\sqrt{x^3}} dx$. Који су то бројеви? (Никшић, 1934)

24) Бројна вредност одређеног интеграла функције $y = 8x^3 + 3x^2 + 11x - \frac{373}{10}$ у границама од 0—5 претставља производ VII и VIII члана растуће аритметичке прогресије, а производ

*) Задаци означени звездицом јесу само за ученике реалке.

I и XIV члана исте прогресије претставља вредност одређеног интеграла од извода горње функције у границама 0—3. Како гласи тај ред и колики је збир првих 14 чланова?

(Сарајево, Шеријетска, 1934)

25) Производ II и IV члана једне геометриске прогресије једнак је $\int_0^3 \frac{24}{\sqrt[3]{9x}}\,dx$, а збир III и V члана је 222. Која је та прогресија? (Суботица, Женска, 1934)

26) Један брат добива 27 000 динара а други 36 000 дин. годишње. Сваки од њих троши годишње по 21000 дин., а остали новац даје у банку која плаћа $p^0/_0$ интереса на интерес. Колика ће бити разлика између капитала једног и другог брата кроз 25 година, ако се годишњи добитак додаје капиталу $\left(p = \frac{1}{5}\right.$ вредности $\left.\int_0^{64} \frac{10}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx\right)$? (Цетиње, 1934)

27) Максимум и минимум функције $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$ су горња и доња граница $\int \frac{x^3 + \sqrt{x} + 3}{x^2}\,dx$. Израчунати вредност интеграла. (Цетиње, 1932)

28) Која је то геометриска прогресија чији је пети члан

$$a_5 = \int_1^2 (x^2 + x^{-2})\,dx, \text{ а количник } q = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos x + \sin x)\,dx\ ?$$

(Ћуприја, 1934)

29) Од праве облице ($M = 2{,}5\ cm^2$) отесана је највећа правилна тространа призма. Колика је запремина отпадака, ако је висина облице h једнака коефицијенту уз a, кад се реши $\int_0^{2a} \frac{\sqrt{2a}}{x}\,dx$ (Котор, 1932)

30) Одредити помоћу интеграла површину лика омеђеног линијама $y = 2x^2 - 10$, $y = 4x^2 - 2$. (Сисак, 1934)

31) Доња граница интеграла $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x}\,dx$ је корен једначине $4^{3x-2} - 5^{2x-1} = \frac{1}{9}\,(4^{3x-1} - 5^{2x})$, а горња граница је сума реда $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \cdots$ Нађи вредност интеграла.

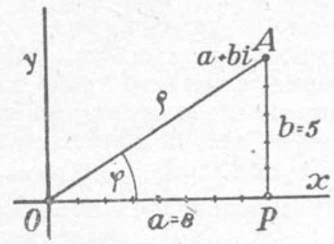
(Нова Градишка, 1933)

ТРЕЋИ ОДЕЉАК[1]

Комплексни бројеви, Моавров образац, једначине трећег степена

§ 26. Тригонометриски облик комплексног броја

При графичком претстављању свих бројева видели смо да се комплексни бројеви претстављају тачкама у квадратима правоуглог координатног система. Тако, тачка A (сл. 19) претставља комплексан број $8+5i$, пошто је њена апсциса 8 а ордината 5. Отстојање ове тачке до координатног почетка $AO = \rho$ зове се *модуо* комплексног броја, а угао $AOP = \varphi$, који модуо ствара с позитивним правцем апсцисне осовине, зове се *амплитуда* или *аргуменат* комплексног броја. Модуо ρ је увек позитиван број, а тако исто је позитиван и угао φ, тј. он постаје у обрнутом смислу него што је кретање сказаљки на часовнику.



Сл. 19

Из слике видимо да је:

$$a = \rho\, cos\, \varphi \text{ и } b = \rho\, sin\, \varphi \ldots (1),$$

те је комплексни број $a + bi = \rho\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi) \ldots (2)$, који се облик зове тригонометриски облик комплексног броја. Па како су обе стране једначине (2) идентичне, то је

$$a = \rho\, cos\, \varphi \quad \text{и} \quad b = \rho\, sin\, \varphi.$$

Подизањем најпре на квадрат ових једначина, а затим њиховим сабирањем, добијамо:

$$a^2 + b^2 = \rho^2\, cos^2\, \varphi + \rho^2\, sin^2\, \varphi = \rho^2\,(cos^2\,\varphi + sin^2\,\varphi) = \rho^2.$$

Одавде је $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Дељењем тих једначина добијамо

$$\frac{b}{a} = \frac{\rho\, sin\, \varphi}{\rho\, cos\, \varphi} = \frac{sin\, \varphi}{cos\, \varphi} = tg\, \varphi.$$

Једначине $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $tg\,\varphi = \dfrac{b}{a}$ дају нам могућност да сваком комплексном броју нађемо одговарајући тригонометриски облик. Тако, тригонометриски облик комплексног броја $4 - 3i$ биће $5\,(cos\, 323^0\, 7'\, 49'' + i\, sin\;\, 323^0\, 7'\, 49'')$, јер је

$$\rho = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5, \quad \text{а} \quad tg\,\varphi = \frac{-3}{4}.$$

Овде угао φ припада четвртом квадранту, што увиђамо из

[1] Само за ученике реалке.

једначина $\rho \cos\varphi = 4$ и $\rho \sin\varphi = -3$, где је $\cos\varphi$ позитиван а $\sin\varphi$ негативан. Стога је $tg\,\varphi = tg\,(360^0 - \alpha) = -tg\alpha = -\frac{3}{4}$, а $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$, где је $\sphericalangle\,\alpha$ допуна угла φ до 360^0. Употребом логаритама добијамо $\log tg\,\alpha = \log 3 - \log 4 = 0{,}47712 - 0{,}60206 = \bar{1}{,}87506$, $\alpha = 36^0 52' 11''$, а $\varphi = 360^0 - \alpha = 323^0 7' 49''$.

Примери за вежбу: Одреди модуо и аргуменат комплексних бројева:

1) $4 + 3i$, 2) $5 - 12i$, 3) $-10 + 6i$, 4) $-4 - 3i$, 5) $-7 + 4i$.

§ 27. **Операције с комплексним бројевима.** 1) Познато нам је да сабирање, одузимање, множење, дељење и степеновање с комплексним бројевима вршимо као и са полиномима, само што треба да имагинарни део комплексног броја претходно доведемо на облик bi.

Тако, a) збир бројева $a + bi$ и $c + di$ биће:

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)\,i,$$

тј. *збир од два комплексна броја је комплексан број;*

b) разлика бројева $a + bi$ и $c + di$ биће:

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)\,i,$$

тј. *разлика два комплексна броја је комплексан број;*

c) производ бројева $a + bi$ и $c + di$ биће:

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + \\ + (bc + ad)\,i,$$

тј. *производ од два комплексна броја је комплексан број;*

d) количник бројева $a + bi$ и $c + di$ биће:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bci - adi + bd}{c^2 + d^2} = \\ = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\,i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i,$$

тј. *количник два комплексна броја је комплексан број.*

e) При степеновању комплексног броја $a+bi$ са 2 имамо:

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

При степеновању са 3 добијамо:

$$(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = a^3 + 3a^2bi - \\ - 3ab^2 - b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\,i.$$

При степеновању са ма којим другим већим бројем, примењујемо Њутонов образац. Тако,

$$(a + bi)^5 = a^5 + \binom{5}{1} a^4bi + \binom{5}{2} a^3 b^2 i^2 + \binom{5}{3} a^2 b^2 i^3 + \\ + \binom{5}{4} ab^4i^4 + \binom{5}{5} b^5i^5 = a^5 + 5a^4bi - 10a^3b^2 - \\ - 10a^2b^2i + 5ab^4 + b^5i = (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) + \\ + (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)i, \text{ итд.}$$

1. **Напомена.** При сабирању и множењу два комплексна конјугована броја, добијамо стварне резултате. Тако,

a) $(a+bi)+(a-bi)=a+bi+a-bi=2a$;

b) $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$.

2. Међутим, горње операције с комплексним бројевима можемо вршити, када претходно ове бројеве доведемо на тригонометричан облик. Тако, ако је :

$a+bi=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $c+di=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$,

онда је :

a) *њихов збир:*

$$\rho_1\cos\varphi_1+\rho_1 i\sin\varphi_1+\rho_2\cos\varphi_2+\rho_2 i\sin\varphi_2=(\rho_1\cos\varphi_1+\rho_2\cos\varphi_2)+(\rho_1\sin\varphi_1+\rho_2\sin\varphi_2)\,i;$$

b) *њихова разлика:*

$$\rho_1\cos\varphi_1+\rho_1 i\sin\varphi_1-\rho_2\cos\varphi_2-\rho_2 i\sin\varphi_2=(\rho_1\cos\varphi_1-\rho_1\cos\varphi_2)+(\rho_1\sin\varphi_1-\rho_2\sin\varphi_2)\,i;$$

c) *њихов производ:*

$$\begin{aligned}\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)&=\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\\&+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=\\&=\rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\\&+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)];\end{aligned}$$

d) *њихов количник:*

$$\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\Big[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big]$$

e) Степеновањем са 2 комплексног броја имамо :

$$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^2=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi);$$

Степеновањем са 3 добијамо :

$$\begin{aligned}[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^3&=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^2\cdot\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\\&=\rho^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)\cdot\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\\&=\rho^3[\cos(2\varphi+\varphi)+i\sin(2\varphi+\varphi)]=\rho^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi);\end{aligned}$$

Степеновањем са 4 добијамо :

$$\begin{aligned}[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^4&=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^3\cdot\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi);\\&=\rho^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)\cdot\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\\&=\rho^4[\cos(3\varphi+\varphi)+i\sin(3\varphi+\varphi)]=\rho^4(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi).\end{aligned}$$

Уопште, ако имамо да степенујемо бројем n, добијамо

$$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

§ 28. Примери за вежбу

1) Наћи збир комплексних бројева :

a) $4+6i$ и $8+3i$; *b*) $-5+4i$ и $-7+5i$; *c*) $-5-7i$ и $9-5i$; *d*) $0{,}7+0{,}6i$ и $-5+0{,}9i$; *e*) $0{,}4-4i$ и $8-7i$.

2) Наћи разлику бројева:

a) $(5+7i)-(3+3i)$; b) $(10-4i)-(2+3i)$; c) $(8+5i)-(4-5i)$; d) $(-8+10i)-(5+4i)$; e) $(-9+8i)-(5-6i)$; f) $(-10-8i)-(8+2i)$.

3) Наћи производ бројева:

a) $(4+5i)(2+2i)$; b) $(-3+3i)(6+4i)$; c) $(-4-2i)\cdot(-3+4i)$; d) $(5+2i)(6-3i)$; e) $(-6+4i)(-5-6i)$; f) $(5-i)(3+2i)$.

4) Одредити модуо и аргуменат производа:

a) $(4+3i)(8+7i)$; b) $(-5-4i)(-10-8i)$; c) $(8-3i)\cdot(-7-4i)$.

5) Одредити количник бројева:

a) $\frac{7+5i}{4-2i}$; b) $\frac{8-5i}{2+i}$; c) $\frac{-5+2i}{4+4i}$; d) $\frac{6-4i}{2+3i}$; e) $\frac{4+3i}{3-5i}$.

6) Наћи модуо и аргуменат количника:

a) $\frac{4+2i}{3-5i}$; b) $\frac{6-5i}{3+2i}$; c) $\frac{-5+4i}{-3-5i}$.

7) Наћи степене комплексних бројева:

a) $(4+3i)^3$; b) $(2+4i)^4$; c) $(\sqrt{10}-6i)^5$; d) $(2-5i)^6$; e) $(-1+2i)^7$.

§ 29. **Моавров образац.** Код степеновања комплексног броја (§ 27, 2, *e*) видели смо да је:

$$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\ldots(1).$$

Ако извршимо степеновање производа на левој страни једначине (1), добијамо:

$$\rho^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\ldots(2).$$

Дељењем ове једначине са ρ^n, добијамо Моавров образац:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Тако:

a) $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5=\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi$ и b) $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^9=\cos 9\varphi+i\sin 9\varphi$.

§ 30. **Примена Моавровог обрасца**

1) *Израчунавање функција n-污тоструког угла помоћу синуса и косинуса тога угла.*

Да бисмо израчунали ма коју функцију n-тоструког угла помоћу Моавровог обрасца, ако знамо ма коју функцију тога угла, треба претходно да израчунамо помоћу основних образаца синус и косинус тога угла. Тако, ако је

$$tg\,\alpha=\frac{3}{4}\text{ биће }\sec\alpha=\sqrt{1+tg^2\alpha}=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4},\ \cos\alpha=$$

$$=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{4}{5},\text{ а }\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$$

Ако желимо да израчунамо ма коју функцију од $n\alpha$, треба помоћу Моавровог обрасца да израчунамо $sin\, n\alpha$ и $cos\, n\alpha$. По овоме обрасцу имамо:

$$cos\, n\alpha + i\, sin\, n\alpha = (cos\,\alpha + i\, sin\,\alpha)^n = cos^n\alpha + \binom{n}{1} i\, sin\,\alpha\, cos^{n-1}\alpha +$$

$$+ \binom{n}{2} i^2 sin^2\alpha\, cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{3} i^3 sin^3\alpha\, cos^{n-3}\alpha +$$

$$+ \binom{n}{4} i^4 sin^4\alpha\, cos^{n-4}\alpha + \binom{n}{5} i^5 sin^5\alpha\, cos^{n-5}\alpha + \cdots =$$

$$= \left[cos^n\alpha - \binom{n}{2} sin^2\alpha\, cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4} sin^4\alpha\, cos^{n-4}\alpha - \cdots\right] +$$

$$+ i\left[\binom{n}{1} sin\,\alpha\, cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} sin^3\alpha\, cos^{n-3}\alpha +\right.$$

$$\left. + \binom{n}{5} sin^5\alpha\, cos^{n-5}\alpha - \cdots\right].$$

Па како су добивени комплексни бројеви и на левој и на десној страни ове једначине једнаки, то су им једнаки и њихови стварни и имагинарни делови, тј.

$$\left.\begin{aligned} &cos\, n\alpha = cos^n\alpha - \binom{n}{2} sin^2\alpha\, cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4} sin^4\alpha\, cos^{n-4}\alpha - \cdots \\ &\text{и } sin\, n\alpha = \binom{n}{1} sin\,\alpha\, cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} sin^3\alpha\, cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5} sin^5\alpha\, cos^{n-5}\alpha - \ldots \end{aligned}\right\} [1].$$

Ови обрасци дају могућност да израчунамо синус и косинус n-тоструког угла, ако знамо синус и косинус тога угла.

1) *Пример. Зна се* $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$ *; наћи све остале функције од* 5α. Из $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$ је $sin\,\alpha = \frac{3}{5}$ и $cos\,\alpha = \frac{4}{5}$. Тада је према обрасцима (1)

$$cos\, 5\alpha = cos^5\alpha - \binom{5}{2} sin^2\alpha\, cos^3\alpha + \binom{5}{4} sin^4\alpha\, cos\,\alpha =$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3 + 5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{4}{5} = -\frac{3116}{3125},$$

$$sin\, 5\alpha = \binom{5}{1} sin\,\alpha\, cos^4\alpha - \binom{5}{3} sin^3\alpha\, cos^2\alpha + \binom{5}{5} sin^5\alpha =$$

$$= 5\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4 - \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^5 = -\frac{237}{3125},$$

$$tg\, 5\alpha = \frac{sin\, 5\alpha}{cos\, 5\alpha} = \frac{237}{3116},\ cotg\, 5\alpha = \frac{3116}{237},\ sec\, 5\alpha = -\frac{3125}{3116}$$

и $cosec\, 5\alpha = -\frac{3125}{237}$.

2) *Пример. Зна се* $cotg\, 30^0 = \sqrt{3}$*; наћи синус и косинус 7-моструког угла, тј. угла од* 210^0.

Зна се да је $sin\, 30^0 = \frac{1}{2}$, а $cos\, 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тада је по обрасцима (1):

$$cos\, 210^0 = cos\, 7 \cdot 30^0 = cos^7\, 30^0 - \binom{7}{2} sin^2\, 30^0\, cos^5\, 30^0 + \\ + \binom{7}{4} sin^4\, 30^0\, cos^3\, 30^0 - \binom{7}{6} sin^6\, 30^0\, cos\, 30^0 = \\ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7 - \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 7 \cdot \\ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{128} - \frac{189\sqrt{3}}{128} + \frac{105\sqrt{3}}{128} - \frac{7\sqrt{3}}{128} = - \\ - \frac{64\sqrt{3}}{128} = - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$sin\, 210^0 = sin\, 7 \cdot 30^0 = \binom{7}{1} sin\, 30^0\, cos^6\, 30^0 - \\ - \binom{7}{3} sin^3\, 30^0\, cos^4\, 30^0 + \binom{7}{5} sin^5\, 30^0\, cos^2\, 30^0 - \binom{7}{7} sin^7\, 30^0 = \\ = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \\ \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = - \left(\frac{1}{2}\right).$$

Разуме се, до ових резултата дошли бисмо пре применом образаца за претварање функција *тупоиспупчених* углова у функције оштрих углова. Тако, $sin\, 210^0 = sin\,(180 + 30^0) = - sin\, 30^0 = - \frac{1}{2}$, а $cos\, 210^0 = cos\,(180^0 + 30^0) = - cos\, 30^0 = - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Рађено је горњим обилазним путем. да би се видела тачност Моавровог обрасца.

Примери за вежбу: 1) Зна се $sin\, \alpha = \frac{2}{3}$; наћи функције угла 3α, 4α и 5α;

2) Зна се $cos\, \alpha = \frac{3}{4}$; наћи функције угла 8α;

3) Зна се $tg\, \alpha = 2$; наћи функције угла $10\, \alpha$.

Једначине трећег степена

§ 31. **Облици једначина трећег степена и њихове особине**
Општи облик једначине трећег степена је:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \ldots (1).$$

Коефицијенти: A, B, C и D јесу стварни бројеви, а могу бити *општи* или *посебни*. У првом се случају једначина зове *општа* а у другом *посебна* или бројна. Ми ћемо се бавити само бројним једначинама трећег степена. Ако поједини коефицијенти, осим A, буду једнаки нули, онда једначина (1) има један од следећих облика:

$$A\,x^3 + C\,x + D = 0,\ A\,x^3 + B\,x^2 + D = 0,\ A\,x^3 + B\,x^2 + Cx = 0, \\ A\,x^3 + B\,x^2 = 0,\ A\,x^3 + C\,x = 0,\ A\,x^3 + D = 0 \text{ и } A\,x^3 = 0.$$

Код квадратних једначина с једним непознатим, а тако исто и код једначина вишег степена, које се своде на квадратне, видели смо: 1) *да свака једначина има онолико корена колики је њен степен;* 2) *да је полином једначине дељив ма којим својим кореним чинитељем;* и 3) *да је полином једначине једнак производу од коефицијента уз непознату на највишем степену и корених чинитеља.* Сва три ова правила вреде и за једначине трећег степена, о чему се можемо уверити код решавања тих једначина, а можемо их и доказати овако:

1) *Правило. Полином једначине дељив је сваким својим кореним чинитељем.* Ако претпоставимо да је x_1 један корен једначине $A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D = 0$, онда је њен први корени чинитељ $x - x_1$. Деобом полинома једначине тим кореним чинитељем добијамо

$$(Ax^3+Bx^2+Cx+D):(x-x_1) = Ax^2 + (B+Ax_1)x + [C+(B+Ax_1)]$$

$$\begin{array}{l}
Ax^3 - Ax_1x^2 \\
\underline{- \quad +} \\
(B + Ax_1)\,x^2 + Cx + D \\
(B + Ax_1)\,x^2 - (B + Ax_1)\,x_1\,x \\
\underline{- \qquad\qquad +} \\
[C + (B + Ax_1)\,x_1]\,x + D \\
[C + (B + Ax_1)\,x_1]\,x - [C + (B + Ax_1)\,x_1]\,x_1 \\
\underline{- \qquad\qquad\qquad\qquad +}
\end{array}$$

Остатак: $[C + (B + Ax_1)\,x_1]\,x_1 + D$ или $Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D$.

Па како је по претпоставци x_1 један корен дате једначине, који као сваки корен задовољава једначину, то је остатак $Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D$ раван нули, чиме је ово правило доказано.

2) *Правило. Једначина трећег степена има три корена.* Како је $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D):(x - x_1) = Ax^2 + (B + Ax_1)\,x + [C + (B + Ax_1)\,x_1]$, то је $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - x_1)\cdot\{Ax^2 + (B + Ax_1)\,x + [C + (B + Ax_1)\,x_1]\}$, или заменом $B + Ax_1 = E$ и $C - (B + Ax_1)\,x_1 = F$,

$$Ax^3 + B^2 + Cx + D = (x - x_1)\,(Ax^2 + Ex + F) \cdots (2)$$

Како је лева страна ове једначине јаднака нули, то је и

$$(x - x_1)\,(Ax^2 + Ex + F) = 0 \cdots (3)$$

Из једначине (3) имамо једначине:

$$\left.\begin{array}{r} x - x_1 = 0 \text{ и} \\ Ax^2 + Ex + F = 0 \end{array}\right\} (4)$$

Прва има само један корен $x = x_1$, а друга, као квадратна, има два корена

$$x_2 = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4AF}}{2A} \text{ и } x_3 = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4\,AF}}{2A},$$

чиме је ово правило доказано.

3) *Правило. Полином једначине трећег степена једнак је производу од коефицијента уз x^3 и њених корених чинитеља.*

Из теорије крадратних једначина знамо да је полином друге једначине групе (4):

$$Ax^2 + Ex + F = A(x - x_2)(x - x_3).$$

Заменом у (2) добијамо:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

чиме је и ово правило доказано.

Напомена. — Сва три горња правила су општа за све једначине ма ког степена. На основу I правила, ако знамо један корен једне једначине n-тог степена, онда од те једначине добијамо другу једначину $(n - 1)$-ог степена, ако полином прве поделимо са одговарајућим кореним чинитељем и добивени количник стављамо да је једнак нули. На основу III правила, ма који се полином n-тог степена даје раставити на чинитеље, ако се претходно стави да је једнак нули, затим добивену једначину решавамо да бисмо добили корене: x_1, x_2, $x_3 \cdots x_n$ и најзад чинитељи датог полинома биће: коефицијенат уз x^n и корени чинитељи: $(x - x_1)$, $(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

§ 32. **Врсте корена.** — *Правило.* — *Свака једначина трећег степена са стварним коефицијентима, ако има један имагинаран корен облика $a + bi$, онда она има као корен његов конјуговани број $a - bi$.*

Заиста, ако претпоставимо да је један корен једначине

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \cdots (1)$$

$x = a + bi$, онда заменом у (1) имамо:

$$A(a + bi)^3 + B(a + bi)^2 + C(a + bi) + D = 0\text{; или}$$

$$Aa^3 - 3Aab^2 + Ba^2 - Bb^2 + Ca + D) + (3Aa^2b - Ab^3 + 2Bab + + Cb)\, i = 0 \cdots (2)$$

Ако у полиному једначине (1) заменимо x са $a - bi$, добијамо израз

$$(Aa^3 - 3Aab^2 + Ba^2 - Bb^2 + Ca + D) - (3Aa^2b - Ab^3 + 2Bab + + Cb)\, i. \ (3).$$

Како је комплексан број једнак нули, ако му је и стварни и имагинарни део једнак нули, то из једначине (2) излази да је

$$Aa^3 - 3Aab^2 + Ba^2 - Bb^2 + Ca + D = 0 \quad \text{и}$$
$$3Aa^2b - Ab^3 + 2Bab + Cb = 0 \ldots (4).$$

Из ових једначина увиђамо да је и израз (3) једнак нули, што значи да је и $a - bi$ корен дате једначине.

Пошто једначина трећег степена мора имати три корена, то, на основу овог правила, изводимо закључак да корени једне једначине трећег степена са стварним коефицијентима јесу: 1) *или сва три стварни бројеви,* или 2) *један је стваран, а друга два имагинарна конјугована броја.*

Напомена. Ово је правило у важности за све једначине n-тог степена. Број имагинарних корена је увек паран, и то по два и два конјугована комплексна броја.

§ 33. **Веза између корена и коефицијената.** Свака једначина III-ег степена облика $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0\,(1)$ деобом са A да̂ се свести на облик $x^3+\frac{B}{A}x^2+\frac{C}{A}x+\frac{D}{A}=0$, или,

$x^3+mx^2+nx+p=0\ldots.(2)$, где је $m=\frac{B}{A}$, $n=\frac{C}{A}$ и $p=\frac{D}{A}$.

Ако су x_1, x_2 и x_3 корени једначине (2), онда је на основу трећег правила § 31:

$$x^3+mx^2+nx+p=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

или, ако извршимо множење на десној страни,

$$x^3+mx^2+nx+p=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+ \\ +x_2x_3)x-x_1x_2x_3\ldots.(3).$$

Па како су обе стране ове једначине једнаке, то су једнаки и коефицијенти уз непознате истог степена, тј.

$$\left.\begin{aligned} m &= -(x_1+x_2+x_3), \\ n &= \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \text{ и} \\ p &= -x_1x_2x_3 \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Једначине под (4) дају тражену везу између корена и коефицијената једначине трећег степена сведене на облик (2). Према овим једначинама имамо правило: 1) *коефицијенат уз непознату на другом степену једнак је збиру комбинација прве класе од корена са промењеним знаком*; 2) *коефицијенат уз непознату на првом степену једнак је збиру комбинација друге класе од корена* и 3) *независни је члан једнак производу корена са промењеним знаком.* И ово је правило опште за све алгебарске једначине n-тог степена са стварним коефицијентима, чији је коефицијенат уз x^n једнак 1, а гласило би:

Коефицијенат уз x^{n-1} једнак је збиру комбинација прве класе од корена с промењеним знаком; коефицијенат уз x^{n-2} једнак је збиру комбинација друге класе од корена; коефицијенат уз x^{n-3} раван је збиру комбинација треће класе с промењеним знаком итд., а независни члан једнак је производу корена без или са промењеним знаком, према томе да ли је степен једначине паран или непаран (или је број корена паран или непаран).

На основу овог правила, у стању смо да склопимо једначину трећег степена, ако знамо њене корене. Тако, ако су корени $x_1=1$, $x_2=-2$ и $x_3=5$, онда је, према једначинама под (4),

$m=-(1-2+5)=-4$, $n=1\cdot(-2)+1\cdot5+(-2)\cdot5=-7$ и $p=-[1\cdot(-2)\cdot5]=10$. Тражена једначина биће:

$$x^3-4x^2-7x+10=0.$$

До ове једначине долазимо, ако ставимо да је производ корених чинитеља раван нули и извршимо множење. Тако,

$$(x-1)(x+2)(x-5)=0, \text{ или } (x^2+x-2)(x-5)=0, \text{ или} \\ x^3-4x^2-7x+10=0.$$

Напомена. — На основу овог правила, ако у једначини трећег степена нема члана са x^2, тј. ако је $m=0$, онда је

$-(x_1+x_2+x_3)=0$, а одавде је $x_1=-(x_2+x_3)$; тј. *код једначине облика* $x^3+nx+p=0$ *један је корен раван збиру других корена с променљивим знаком*. Ако у једначини нема независнога члана ($p=0$), онда је $-x_1x_2x_3=0$. Како је овај производ раван нула, ако му је један од чинитеља једнак нули, то изводимо закључак *да једначина облика* x^3+mx^2+ $+nx=0$ *има један карен једнак нули.*

§ 34. **Свођење потпуних једначина трећег степена на простији облик.** Свођење дате једначине облика Ax^3+Bx^2+Cx+ $+D=0$ (1) на облик $y^3+py+q=$ (2) вршимо, ако заменимо $x=y+K$, где је y нова непозната, а K привремено неодређена количина. Овом заменом једначина (1) добија облик:

$$A(y+K)^3+B(y+K)^2+C(y+K)+D=0, \text{ или}$$

$$Ay^3+(3AK+B)y^2+(3AK^2+2BK+C)y+(AK^3+BK^2+$$
$$+CK+D)=0. \quad (3)$$

Да би нестао у овој једначини члан са y^2, треба да је $3AK+B=0$, а одавде је $K=-\frac{B}{3A}$. Према томе, *ако желимо да једначину (1) сведемо на једначину облика (2), треба да извршимо замену* $x=y+K=y-\frac{B}{3A}$. Дакле, решавање потпуних једначина облика (1) своди се на решавање једначина облика (2). Остаје да се упознамо само с начинима решавања једначина трећег степена облика $x^3+px+q=0$, с којима се упознајемо у идућем параграфу.

Међутим, при замени $x=y-\frac{B}{3A}$ у једначини (1) наилазимо врло често на једначине облика $y^3\pm q=0$, $y^3+py=0$ и $y^3=0$, тј. на једначине чије даље решавање знамо. Такав је случај код следећих примера:

1) $x^3+9x^2+27x+19=0$. Овде је $K=-\frac{B}{3A}=-\frac{9}{3\cdot 1}=$ $=-3$, а $x=y-3$. Дата једначина добија облик

$$(y-3)^3+9(y-3)^2+27(y-3)+19=0, \text{ или}$$
$$y^3-9y^2+27y-27+9y^2-54y+81+27y-81+19=0, \text{ или}$$
$$y^3-8=0.$$

Из ове биномне једначине имамо

$(y-2)(y^2+2y+4)=0$. Одавде је $y-2=0$ и y^2+2y+ $+4=0$. Из прве је $y_1=2$, а из друге $y_2=-1+i\sqrt{3}$ и $y_3=-1-i\sqrt{3}$. Тада је $x_1=2-3=-1$, $x_2=-1+i\sqrt{3}-$ $-3=-4+i\sqrt{3}$ и $x_3=-1-i\sqrt{3}-3=-4-i\sqrt{3}$.

2) $x^3-39x^2+507x-2197=0$. Овде је $K=-\frac{-39}{3\cdot 1}=$ $=13$, а $x=y+13$. Заменом у датој једначини добијамо: $(y+13)^3-39(y+13)^2+507(y+13)-2197=0$, или $y^3=0$.

Према томе је

$y_1=y_2=y_3=0$, те је $x_1=x_2=x_3=0+13=13$.

3) $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$. Овде је $K = -\frac{-12}{3 \cdot 1} = 4$, а $x = y + 4$. Заменом добијамо:

$(y+4)^3 - 12(y+4)^2 + 44(y+4) - 48 = 0$ или $y^3 - 4y = 0$.

Ову једначину пишемо у $(y^2 - 4) = 4$. Из ње је $y = 0$ и $y^2 - 4 = 0$. Из прве је $y_1 = 0$, а из друге $y_2 = 2$ и $y_3 = -2$. Корени дате једначине биће:

$$x_1 = 0 + 4 = 4,\ x_2 = 2 + 4 = 6 \text{ и } x_3 = -2 + 4 = 2.$$

Решавање једначине $x^3 + px + q = 0$.

§ 35. I случај. — Једначина има имагинарних корена

Једначина $x^3 + px + q = 0$ (1) имаће један стваран и два имагинарна корена, ако је испуњен услов:

$$4p^3 + 27\,q^3 > 0 \cdots (2).$$

Да је ово тачно, уверавамо се на следећи начин. Непознату x у једначини (1) замењујемо са збиром непознатих u и v $(x = u + v)$ и тиме једначина (1) добија облик $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$, или

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3\,uv + p) + q = 0 \cdots (3).$$

Непознате u и v бирају се тако да испуњавају услове: $u + v = x$ и $3\,uv + p = 0$, или $uv = -\frac{p}{3}$. Тада једначина (3), за $uv = -\frac{p}{3}$, добија облик

$$u^3 + v^3 = -q \cdots (4).$$

Решењем једначина $u\,v = -\frac{p}{3}$ и $u^3 + v^3 = -q$, добијамо вредности непознатих u и v. Како је друга од ових једначина трећег степена, то ћемо добити за непознате u и v по три вредности, а од сваке групе ових вредности по једну вредност за непознату x.

Једначине $u\,v = -\frac{p}{3}$ и $u^3 + v^3 = -q$ решавамо, када најпре прву степенујемо са 3, а затим u^3 и v^3 сматрамо као корене квадратне једначине, код које је коефицијенат уз непознату на првом степену $-(u^3 + v^3) = q$, а независни члан $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Та квадратна једначина имаће облик:

$t^2 + q\,t - \frac{p^3}{27} = 0$ или $27\,t^2 + 27\,q\,t - p^3 = 0 \cdot (5)$.

Из ње је: $t_1 = u^3 = \frac{-27\,q + \sqrt{27^2\,q^2 + 4 \cdot 27\,p^3}}{54}$ и

$$t_2 = v^3 = \frac{-27\,q - \sqrt{27^2\,q^2 + 4 \cdot 27\,p^3}}{54}.$$

Стога је $u = \sqrt[3]{\frac{-27\,q + \sqrt{27^2\,q^2 + 4 \cdot 27\,p^3}}{54}}$ и

$$v = \sqrt[3]{\frac{-27\,q - \sqrt{27^2\,q^2 + 4\cdot 27\,p^3}}{54}} \quad (6).$$

Корени једначине (5) t_1 и t_2 односно u^3 и v^3, биће стварни, ако је дискриминанта $27^2\,q^2 + 4\cdot 27\,p^3 > 0$, или $27\,q^2 + 4p^3 > 0$, чиме је доказан услов под (2).

Ако поткорене изразе једначина (6) краткоће ради означимо привремено са M и N, онда је $u = \sqrt[3]{M}$ и $v = \sqrt[3]{N} \cdots$ (7).

Како сваки кубни корен од стварног броја има по три вредности, од којих је једна стварна а две имагинарне, то је из једначина (7): $u = \sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{1\cdot M} = \sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{M}$ и и $v = \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{1\cdot N} = \sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{N}$. А како је

$\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{1} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ и $\sqrt[3]{1} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, то је:

$$\left.\begin{array}{ll} U_1 = 1\cdot\sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{M} & V_1 = 1\cdot\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{N}, \\ U_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{M}, & V_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{N} \text{ и} \\ U_3 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{M}, & V_3 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{N} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Како је $x = u + v$, а за u и v имамо по три различите вредности, то заменом ових вредности у $x = u + v$, добили бисмо за x 9 различитих вредности, који је број за 6 већи од броја вредности x-а, који треба да добијемо, пошто је дата једначина трећег степена. Тих 9 вредности x-а биле би:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = u_1 + v_1, & x_4 = u_2 + v_1, & x_7 = u_3 + v_1, \\ x_2 = u_1 + v_2, & x_5 = u_2 + v_2, & x_8 = u_3 + v_2 \quad \text{и} \\ x_3 = u_1 + v_3, & x_6 = u_2 + v_3, & x_9 = u_3 + v_3 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Од ових девет вредности x-а узимамо у корене само оне које задовољавају једначину $u\,v = -\dfrac{p}{3}$, коју је у ствари требало решавати са $u^3 + v^3 = -q$.

Према овоме је само: $u_1 v_1 = \sqrt[3]{M}\cdot\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{MN} =$

$$= \sqrt[3]{\frac{-27\,q + \sqrt{27^2 q^2 + 4\cdot 27\cdot p^3}}{54}\cdot\frac{-27\,q - \sqrt{27^2 q^2 + 4\cdot 27 p^3}}{54}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{729 q^2 - 729 q^2 - 4\cdot 27 p^3}{54^2}} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3};$$

$$u_2\,v_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\,\sqrt[3]{M}\cdot\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\,\sqrt[3]{N} = \frac{(-1)^2 - 3\,i^2}{4}\,\sqrt[3]{MN} =$$

стварне корене, пошто би се у овом случају добила три имагинарна корена, што је немогуће, јер је број имагинарних корена сваке једначине паран. За ове једначине, тј. за једначине $x^3+px+q=0$, код којих није $27q^2+4p^3>0$, употребљавају се тригонометријске методе при њиховом решавању с којима ћемо се упознати у следећем параграфу.

Решени примери:

1) $\boldsymbol{x^3+6x-7=0}$. Овде је дискриминанта $27q^2+4p^3=$ $=27(-7)^2+4\cdot 6^3=2087$, тј. >0, те ћемо применити Карданов образац. Овим обрасцем имамо: $u=\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}+8}}=$ $=2$ и $v=\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}+8}}=-1$, те су корени $x_1=2-1=1$;

$$x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\cdot 2+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)=-\frac{1+3i\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot 2+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)=\frac{-1-3i\sqrt{3}}{2}.$$

2) $\boldsymbol{x^3-9x+28=0}$. Овде је $p=-9$, $q=28$, а дискриминанта $27q^2+4p^3=27\cdot 28^2+4\cdot(-9)^3>0$, те се може применити Карданов образац. Стога је $u=\sqrt[3]{-14+\sqrt{196-27}}=$ $=-1$, $v=\sqrt[3]{-14-\sqrt{196-27}}=\sqrt[3]{-27}=-3$, а корени: $x_1=-1-3=-4$; $x_2=-1\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-3\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=$ $=2+i\sqrt{3}$; и $x_3=2-i\sqrt{3}$.

3) $\boldsymbol{x^3+12abx+8(b^3-a^3)=0}$. Овде је $p=12ab$, $q=8(b^3-a^3)$, а дискриминанта $27q^2+4p^3=27\cdot 64(b^6-2a^3b^3+a^6)+4\cdot 1728a^3b^3=$ $=1728(a^3+b^3)^2>0$, па се може применити Карданов образац. Стога је $u=\sqrt[3]{-4(b^3-a^3)+\sqrt{16b^6-32a^3b^3+16a^6+64a^3b^3}}=$ $=\sqrt[3]{-4(b^3-a^3)+4(b^3+a^3)}=\sqrt[3]{8a^3}=2a$, $v=\sqrt[3]{-4(b^3-a^3)-4(b^3+a^3)}=$ $=\sqrt[3]{-8b^3}=-2b$, а корени:

$$x_1=2a-2b=2(a-b);\quad x_2=2a\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-2b\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{3}=$$
$$=-(a-b)+(a+b)i\sqrt{3};\ \text{и}\ \ x_3=-(a-b)-(a+b)i\sqrt{3}.$$

4) $\boldsymbol{x^3-2x-4=0}$. Овде је $p=-2$, $q=-4$, а дискриминанта $27q^2+4p^3=27(-4)^2+4(-2)^3=27\cdot 16-4\cdot 8>$ >0, те се примењује Карданов образац. Стога је:

$$u=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{100}{27}}}=\sqrt[3]{2+\frac{10}{2\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{2+\frac{10}{5{,}1961524228}}=$$

$$= \sqrt[3]{\frac{20{,}3923048456}{5{,}1961524228}},\ v = \sqrt[3]{2 - \frac{10}{5{,}1961524228}} = \sqrt[3]{\frac{0{,}3923048456}{5{,}1961524228}}.$$

Помоћу логаритама налазимо да је

$$u = 1{,}577 \text{ и } v = 0{,}423.$$

Тада корени дате једначине биће:

$$x_1 = 1{,}577 + 0{,}433 = 2\ ;\ x_2 = 1{,}577 \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 0{,}433 \cdot$$

$$\cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -1 + i;\ x_2 = -1 - i.$$

Примери за вежбу:

1) $x^3 + 72x + 152 = 0$;
2) $x^3 + 72x - 152 = 0$;
3) $x^3 + 24x - 56 = 0$;
4) $x^3 + 36x - 208 = 0$;
5) $x^3 - 6x - 9 = 0$;
6) $x^3 - 3a^3\,bx - a^3\,(a^3b^3 + 1) = 0$;
7) $x^3 + 60x + 992 = 0$;
8) $x^3 - 2x - 5 = 0$;
9) $x^3 + 6ax^2 - 35a^3 = 0$;
10) $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$.

§ 36. II **случај.** — ***Једначина*** $\boldsymbol{x^3 + px + q = 0}$ ***има само стварне корене.*** Пре него што се упознамо с начином решавања једначине $x^3 + px + q = 0$, која има само стварне корене, испитајмо једначину

$$\boldsymbol{\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha} \cdots (1)$$

За коју из тригонометрије знамо да је тачна. Ако у овој једначини заменимо $3\alpha = \varphi$, онда је $\alpha = \frac{\varphi}{3}$, а једначина (1) добија облик:

$$\cos \varphi = 4\cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3\cos^3 \frac{\varphi}{3}, \text{ или}$$

$$\boldsymbol{\cos^3 \frac{\varphi}{3} - \frac{3}{4}\cos \frac{\varphi}{3} - \frac{1}{4}\cos \varphi = 0} \cdots (2)$$

Међутим, из тригонометрије знамо да су сви углови који би задовољили једначину $\cos \varphi = k$, где је k познат број, дати обрасцем

$$\varphi = 2\,n\,\pi \pm \alpha,$$

где је α најмањи од њих, а израчунава се помоћу логаритамских таблица. Тада је и $\frac{\varphi}{3} = \frac{2\,n\,\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}$, те је $\cos \frac{\varphi}{3} = \cos\left(\frac{2\,n\,\alpha}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right)$. Међутим косинуси од $\frac{\varphi}{3}$, односно од $\left(\frac{2\,n\,\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right)$, могу имати само 3 различите вредности, и то: $\cos \frac{\alpha}{3}$, $\cos \frac{2\,\pi \pm \alpha}{3}$ и $\cos \frac{4\,\pi \pm \alpha}{3}$, за $n = 0$, 1 и 2, јер се и косинуси свих осталих углова за $n = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ своде на те вредности $\left\{\cos\left(\frac{2\,\pi \cdot 3}{3} \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(2\,\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}\right.;$

$$\cos\left(\frac{2\pi\cdot4}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{2\pi(3+1)}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right)=\cos\frac{2\pi\pm\alpha}{3};\ \cos\left(\frac{2\pi\cdot5}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi(3+2)}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{4\pi\pm\alpha}{3}\right)=$$
$$=\cos\frac{4\pi\pm\alpha}{2};\ \cos\left(\frac{2\pi\cdot6}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(4\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2},\ \text{итд.}\ \Big|,$$

а бројне вредности од $\cos\frac{\alpha}{3}$, $\cos\frac{2\pi\pm\alpha}{3}$ и $\cos\frac{4\pi\pm\alpha}{3}$ могу се израчунати уз помоћ логаритама. Ове вредности јесу једини корени једначине (2).

После овога, пређимо на решавање једначине x^3+px+ $+q=0$, која има само стварне корене. Ако у овој једначини заменимо $x=\rho\cos\frac{\varphi}{3}$, добијамо:

$$\rho^3\cos^3\frac{\varphi}{3}+p\rho\cos\frac{\varphi}{3}+q=0,\quad \text{или}$$

$$\cos^3\frac{\varphi}{3}+\frac{p}{\rho^2}\cos\frac{\varphi}{3}+\frac{q}{\rho^3}=0\ldots..(3)$$

Упоређивањем ове једначине с једначином (2), које су идентичне, налазимо да је

$$\frac{p}{\rho^2}=-\frac{3}{4}\ \text{ и }\ \frac{q}{\rho^3}=-\frac{1}{4}\cos\varphi\ldots.(4)$$

Из прве је $\rho=\pm2\sqrt{-\frac{p}{3}}$, а заменом у другој имамо:

$$\cos\varphi=-\frac{4q}{\rho^3}=-\frac{4q}{\pm8\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}=\mp\frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Тада једначина (3) добија облик:

$$\boldsymbol{\cos^3\frac{\varphi}{3}-\frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3}\mp\frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}=0}\ldots.(5)$$

Како једначина (2) има као корене:

$$\cos\frac{\alpha}{3},\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)\ \text{и}\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\ \text{а}\ x=\rho\cos\frac{\varphi}{3},$$

то ће једначина $x^3+px+q=0$ имати као корене:

$$x_1=\rho\cos\frac{\varphi}{3}=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3};$$
$$x_2=2\sqrt{-\frac{p}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right);\ \text{и}$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Разуме се, ови ће корени постајати само ако је $p<0$, пошто се из једначине $\cos\varphi = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}$ види да ће $\cos\varphi$ бити стваран број, ако је $p<0$, тј. ако је p негативан број, а осим овога, ако је $\cos^2\varphi<1$. Из овог последњег услова излази да је $\frac{9q^2}{4p^2\left(-\frac{p}{3}\right)}<1$, или $9q^2 < -\frac{4p^3}{3}$, или $27q^2+4p^3<0$.

Из свега овога закључујемо *да ће једначина* x^3+px+ $+q=0$ *имати сва три корена стварна, ако је задовољен услов* $27q^2+4p^3<0$.

Решени примери:

1) $\boldsymbol{x^3-7x-6=0}$. Овде је $p=-7$ и $q=-6$, а дискриминанта $27q^2+4p^3=27(-6)^2+4\cdot(-7)^3=27\cdot 36-$ $-4\cdot 343<0$, те су корени ове једначине стварни.

Овде је $\rho = 2\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\cos\varphi = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}} =$

$$= \frac{3\cdot(-6)}{2\cdot(-7)\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{243}{343}}.$$

Тада је $\log\cos\varphi = \frac{1}{2}(\log 243 - \log 343) = \overline{1},92516$, а

$\varphi = 32^0\,40'\,49'' = \alpha$, те је $\frac{\alpha}{3} = 10^0\,53'\,46''$.

Најзад, корени дате једначине јесу:

$$x_1 = \rho\cos\frac{\alpha}{3} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos 10^0\,53'\,46'' = \sqrt{\frac{28}{3}}\cos 10^0\,53'\,36'' =$$

$$= N\overline{\frac{1}{2}(\log 28 - \log 3) + \log\cos 10^0\,53'\,36''} =$$

$$= N\overline{\frac{1}{2}(1,44716 - 0,47712) + \overline{1},99210} = N\overline{0,47712} = 3;$$

$$x_2 = \rho\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{\frac{28}{3}}\cos\left(\frac{2\pi}{3}+10^0\,53'\,36''\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{28}{3}}\cos 130^0\,53'\,36'' = -\sqrt{\frac{28}{3}}\cdot\sin 40^0\,53'\,36'' =$$

$$= -N\overline{\frac{1}{2}(\log 28 - \log 3) + \log\sin 40^0\,53'\,36''} = -N\overline{0,30103} = -2;$$

и $x_3 = \rho\, cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{\frac{28}{3}}\, cos\left(\frac{4\pi}{3} + 10^0\, 53'\, 36''\right) =$

$= \sqrt{\frac{28}{3}}\, cos\, 250^0\, 53'\, 36'' = -\sqrt{\frac{28}{3}}\, cos\, 70^0\, 53'\, 36'' =$

$= -N\overline{\frac{1}{2}\ (log\, 28 - log\, 3) + log\, cos\, 70^0\, 53'\, 36''} = -1.$

2) $\boldsymbol{x^3 - 63x + 162 = 0}$. Овде је $p = -63$ и $q = 162$, а дискриминанта $27q^2 + 4p^3 = 27 \cdot 162^2 + 5 \cdot (-63)^3 < 0$, те су корени једначине стварни.

Овде је $\rho = 2\sqrt{\frac{63}{3}} = 2\sqrt{21} = \sqrt{84}$, $cos\, \varphi = \frac{3 \cdot 162}{2 \cdot (-63)\sqrt{21}} =$

$= -\frac{27}{7\sqrt{21}}$, $cos\ (180^0 - \varphi) = -\ cos\ \varphi = \frac{27}{7\sqrt{21}}$. Тада је:

$log\, cos\, (180^0 - \varphi) = log\, 27 - log\, 7 - \frac{1}{2}\, log\, 21 = 1{,}43136 - 0{,}84510 -$

$- 0{,}66111 = \overline{1}{,}92516$, а $180^0 - \varphi = 32^0\, 40'\, 48''$, $\varphi = 212^0\, 40'\, 48''$,

$\frac{\alpha}{3} = 70^0\, 53'\, 36''$. Стога су корени ове једначине:

$x_1 = \sqrt{84}\ cos\, 70^0\, 53'\, 36'' = N\overline{\tfrac{1}{2}\, log\, 84 + log\, cos\, 70^0\, 53'\, 36''} =$

$= N\overline{0{,}96214 + \overline{1}{,}51498} = N\overline{0{,}47712} = 3$;

$x_2 = \sqrt{84} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{84}\, cos 190^0 53' 36'' = -\sqrt{84} cos 10^0 53' 36'' =$

$= -N\overline{\tfrac{1}{2}\, log\, 84 + log\, cos\ 10^0 53' 36''} = -N\overline{0{,}96214 + \overline{1}{,}99210} =$

$= -N\overline{0{,}95424} = -9$;

$x_3 = \sqrt{84}\, cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{84}\, cos\, 310^0 53' 36'' = \sqrt{84}\, cos\, 49^0 6' 24'' =$

$= N\overline{\tfrac{1}{2}\, log\, 84 + log\, cos\, 49^0\, 6'\, 24''} = N\overline{0{,}77815} = 6.$

Примери за вежбу:

1) $x^3 - 39x - 70 = 0$;
2) $x^3 - 9x - 10 = 0$;
3) $x^3 - 3x + 1 = 0$;
4) $x^2 - 0{,}13x + 0{,}012 = 0$;
5) $x^3 - 112x + 384 = 0$;
6) $x^3 - 363x - 2662 = 0$;
7) $x^3 - 7x + 6 = 0$;
8) $x^3 - 7x + 7 = 0$.

§ 37. III **случај. — Једначина $\boldsymbol{x^3 + px + q = 0}$ има стварне корене, од којих су два једнака.** Видели смо у претходна два случаја да ће корени једначине $x^3 + px + q = 0$ бити један стваран и два имагинарна, ако је дискриминанта $27q^2 + 4p^3 > 0$, а сва три корена стварна и неједнака, ако је дискриминанта $27q^2 + 4p^3 < 0$. Остаје да видимо какви ће бити корени једначине $x^2 + px + q = 0$, ако је дискриминанта $27q^2 + 4p^3 = 0$. У овом случају једначине (6), параграфа 35, претварају се у:

$u = \sqrt[3]{-\frac{27q}{54}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ и $v = \sqrt[3]{-\frac{27q}{54}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, тј.

$u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, или, на основу једначине (7) истог параграфа,

$$\sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Тада су корени дате једначине, према обрасцима под 10, параграфа 34:

$$x_1 = \sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N} = 2\sqrt[3]{M} = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};$$

$$x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{M} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{N} =$$

$$= \sqrt[3]{M}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2} = -\sqrt[3]{M} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};$$ и

$$x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{M} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{N} =$$

$$= \sqrt[3]{M}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{2} = -\sqrt[3]{M} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Према овоме, за $27q^2 + 4p^3 = 0$, сва три корена су стварна, од којих су два једнака.

Напомена. Корене x_1, x_2 и x_3 можемо изразити и помоћу израза у којима фигуришу коефицијенти p и q. То успевамо помоћу једначине $27q^2 + 4p^3 = 0$. Из ње је

$$q = \pm\sqrt{-\frac{4p^3}{27}} = \pm\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}; -\frac{q}{2} = \mp\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}; \sqrt{-\frac{p}{3}} = \frac{3q}{2p};$$

$-\frac{p}{3} = \frac{9q^2}{4p^2}$. Тада је $-\frac{q}{2} = \frac{9q^2}{4p^2}\cdot\frac{3q}{2p} = \frac{27q^3}{8p^3}$, а $\sqrt[3]{-\frac{p}{2}} = \frac{3q}{2p}$.

Одавде је $x_1 = \frac{3q}{p}$, а $x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p}$.

Мешовити примери за вежбу

1) $x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = 0$; 2) $x^3 + x^2 - x + 2 = 0$;
3) $3x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$; 4) $8x^3 + 12x^2 + 17x - 4 = 0$;
5) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$; 6) $x^3 - 3x^2 + 4x = 0$;
7) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$; 8) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$;
9) $3x^2 - 2x^2 - 2x + 3 = 0$; 10) $2x^3 + 3x^2 - 4x + 10 = 0$.

ДОДАТАК

§ 38. Кратак приказ историског развитка аритметике и алгебре

1) Због реткости старих књига које говоре о првим почецима делања математичких наука: *аритметике, алгебре, геометрије* и *астрономије*, и због тешкоће читања тих књига услед неједнакости конвенционалних знакова, тешко је дати тачан историски преглед где се појавила математика и какав је био њен почетак рада. Из досад нађених записа и из споменика старих народа: *Феничана, Египћана, Индијаца, Вавилоњана* и *Халдејаца,* ипак се дâ увидети да први почеци о бројевима и њиховом рачунању потичу код ових народа на преко 3000 година пре Христа. Иако немамо сасвим поуздане податке где се најпре појавише и какво је било прво делање математичких наука, ипак је њихово напредовање код поменутих народа тако поуздано и верно испитано, да се ово не може рећи за другу ма коју науку. Математика, по својој природи најистинитија наука, и по садржини и по облику, развијала се увек само унапред, иако понекад споро, па често и читавих векова тапкала у место, али никада није учинила корак уназад, никада није скренула са свога правог пута и није никада узела заблуду за истину.

2) Први трагови ове науке јављају се са првим развијањем људског духа. Први појмови о броју, простору и времену, јављају се код примитивних народа још у почетку њиховог развијања. Пастир приморан је да броји своју стоку, земљорадник упоређује величину свог имања са суседовим, а разне небеске појаве: помрачање сунца и месеца, лепо и ружно време, дан и ноћ и периодичне појаве звезда скрећу пажњу човекову и изазивају у њему мисао о уређеном стању звезданог царства. Док ти први појмови остају у своме почетку код неких народа, као што је и данас случај код полудивљих племена, ти су појмови код напреднијих народа повезивани били и утврђени су им извесни закони по којима се збивају и тиме су доведени до једног одређеног система, до једне науке.

3) Од историских народа старога века који имају највише заслуга за оснивање и напредовање математичких наука јесу:

a) ***Феничани,*** који се сматрај устворитељима *аритметике.* Као трговачки народ са великом пажњом неговали су ову науку пре свију других народа.

b) ***Египћани,*** који се сматрају створитељима *геометрије* и *старих мера за дужине и запремине.* Они су ставили први темељ геометрији копањем и израдом канала за спровођење воде из њиховог светог Нила за наводњавање земљишта, а тако исто и израдом планова земљишта око ове реке, по којима су долазили до своје сопствености после периодичних поплава Нила, када је нанети муљ кварио границе имања.

c) ***Халдејци и Вавилоњани***, који се сматрају створитељима *астрономије.* Ови народи, одани култу сунца, и по самој њиховој вери одани су били небеским појавама и ревносно су их посматрали и испитивали њихове узроке збивања. Временске јединице: *дан, час, недеља* и *година* њихов су проналазак. Њихова је година имала 360 дана.

d) ***Стари Грци,*** иако се не сматрају проналазачима ма које гране математике, ипак уживају пуно признање за развитак ове науке, а нарочито геометрије. Без претеривања Стара Грчка се сматра отаџбином геометрије, иако је Египат стварна колевка те науке. Док је математика у Египту само тињала и у своме усавршавању врло полако напредовала, дотле је она у Старој Грчкој, у њеним славним школама, дошла до доста високог ступња истинског свог изражаја, а нарочито њена грана геометрија. Неколико векова пре Христовог рођења синови Старе Грчке: *Талес* (VI век), *Питагора* (око 580 г.), *Хипократ* (око 450 г.), *Платон* (430—347), *Анаксагора* (око 430), *Диностраш, Персеул, Архитас, Аристеј, Никомед, Диоклес, Еуклид* (285 г.), *Архимед* (287—212) и *Аполонијус* (око 247 г.), створитељи славних грчких школа у којима се математика изучавала са највећом љубављу и агилношћу, уживали су и уживају светски глас научника и потомство је сачувало њихова имена.

e) ***Индијци*** и ***Арабљани*** били су такође даровити математичари. До ког степена је дошао код њих развитак математике, није нам сасвим поуздано познато за доба пре Христа и за прве векове после Христа, пошто су сачувана и стигла код нас само дела њихових математичара из V и VI века после Христа.

4) До сада најстарија пронађена аритметика је египатског порекла, од неког ***Ахмеса***, а писана је између 20 и 17 века пре Христа. Занимљиво је да је ова аритметика писана не хијероглифским цифрама, које су цифре Египћани махом употребљавали у рачунима. Написана је на једном папирусу дужине 20 m а ширине 30 cm. Пронашао ју је у једној плеханој кутији око средине прошлога века Енглез *Ринд* и позната је још под именом *„Риндов папирус“*. Данас се налази у Британском музеју у Лондону. У овој аритметици обрађено је градиво основних рачунских радњи, и то, што је врло интересантно, мање са целим именованим и неименованим бројевима, а више са обичним разломцима. Египћани, као и већина старих народа, бавили су се само обичним разломцима, а не и десетним. У рачунима узимали су само *разломљене јединице*, тј. разломке бројитеља 1, а остале разломке претстављали су збиром разломљених јединица. Тако, $\frac{2}{5}$ са $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$; $\frac{5}{19}$ са $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{114}$; итд.

Друго старо и врло значајно дело математике од пре Христа јесу чувени Еуклидови ***„Елементи“***. Ово дело написано је у 13 књига, од којих је сачувано само првих шест, једанаеста и дванаеста. У овим „Елементима“ изложено је на научној основи дотле познато градиво из аритметике и геометрије, а наилазимо на прве елементе *алгебре*: о пропорцијама, о степенима и коренима, о ирационалним бројевима, о проблемима првог и другог степена и најзад о геометриским редовима. Овом чувеном Еуклидовом делу придодате су још две књиге, око 150 година после његове смрти, а које се приписују његовом такође славном следбенику ***Хипсиклу***, геометру из Александрије.

5) Иако су поједине гране математике међусобно повезане и својом зависношћу једна другу помажу, ипак њихов историски развитак није био једновремен. Док су аритметика, геометрија и астрономија постојале читавих векова пре и после Христа, алгебра се појављује много доцније, иако су, као што смо малопре напоменули, њени елементарни принципи били изнети у „Елементима" Еуклидовим. Нема сумње да су алгебарски принципи били познати, поред Еуклиду, и осталим математичарима пре Христа, а нарочито Архимеду и Аполонијусу, па ипак, све до IV века после Христа, алгебра је остала у своме почетку. Њој грчки математичари нису поклањали довољну пажњу, ваљда зато што Грци уопште нису волели знаке за скраћивање у рачунским радњама.

Прво дело из алгебре објавио је у IV веку после Христа ***Диофант Александриски*** (325—409), које је, као и Еуклид, поделио на 13 књига, од којих је данас сачувано првих шест књига. У овом делу налазе се решења у целим бројевима неодређених једначина првог степена са две непознате и велики број решених проблема из једначина првог и другог степена. Од знакова за рачунске операције Диофант је употребљавао једино знак одузимања, а знаке за остале рачунске операције замењивао је речима.

6) ***Индијци*** имали су добро знање из аритметике и астрономије. Они су стварни проналазачи данашњих цифара употребљених у математици, и пренетих у Европу преко *Арабљана*. Па и врло важни знак (0) сматра се као проналазак индиски. Они су радње сабирања, одузимања и множења са именованим и неименованим бројевима вршили на начине како се данас обављају, а једино радњу дељења вршили су обилазним путем. И њима су били познати обични разломци, и то само њихове разломљене јединице. У астрономији употребљавали су нарочито разломљене јединице са имениоцем 60, или ма којим степеном овог броја. Разломачку црту нису употребљавали $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}, \frac{1}{60^3}, \ldots\right)$. Опробали су се, као и Грци, и у алгебарским рачунима, али без каквог значајног успеха. Њихове алгебарске методе рада разликују се од данашњих. Од њихових математичара V и VI века после Христа заслужују помена *Ариобата, Баскора*, а нарочито ***Брамагупта*** (598), који је у VI веку издао своју чувену расправу о аритметици, алгебри и геометрији, а у којој аритметика и алгебра заузимају највећи део. Због овог заиста савршеног Брамагуптовог дела у погледу уређености, јасноће и методског излагања градива, доста велики број матемаричара мисле да је алгебра постојала у Индији дуго пре VI века и да треба Индију сматрати као њену колевку. Што се тиче овог спора о првенству познавања алгебре између Грчке и Индије, ипак већи део математичара сматра Грчку као првакињу, пошто су Грци били далеко јачи у геометрији, где алгебра налази своју примену и што се индиска наука јавља на хоризонту тек у VI веку после Христа, па се мисли да су индиски математичари имали и сувише времена да оберучке искоришћавају радове грчких научника. Најзад, иако је Брамагуптово дело боље уређено и јасно, ипак није на већем научном нивоу од Диофантовог дела.

7) ***Арабљани***, насељени између Грка и Индијаца, били су у могућности да искоришћавају и црпу знања и од једних и од других. Од њихових научника највећу је славу стекао ***Мухамед бен Муса***, рођен 795 године, који је 820 године, по наредби калифе *Ал Малуна*, написао и издао своје чувено дело из аритметике и алгебре под насловом „*Алджебр*", што значи „постављање", тј. методско решавање једначина. Ова је књига преведена у XII и XIII веку на више језика и била је, после Библије, најраспрострањенија књига у своје доба. Због ње многи писци сматрају Мухамеда бен Мусу као стварног проналазача алгебре. Међутим, зна се да је овај велики арапски математичар и астроном црпао известан део својих знања од Индијаца, па се држи да је и алгебру примио од њих. Па ипак, од свих старих народа, Арабљани имају ту славу да су преносиоци математичких наука у Европу, и то најпре, преко Мавра, у Шпанију. Маври су у Шпанији дали математици такав велики полет да се убрзо пренео на осталу Европу. Њихова је заслуга што су сви народи Европе усвојили начин писања и рачунања посебних бројева. Под владавином Арабљана математика је цветала више од 700 година у свима земљама. Разломачка црта је проналазак Западних Арапа.

8) У средњем веку био је релативно мали број научника који су се одали изучавању и проширивању математичких наука, али међу њима је било врло истакнутих, а нарочито ***Жербер*** (930 — 1003) у Француској и ***Леонардо из Пизе*** у Италији.

Жербер, калуђер манастира Сен-Жароа у Ориňаку, био је један од истакнутијих учењака, филозофа и математичара свога доба. Он је оснивач чувене школе у Бабио-у која је уживала дуго одличан глас у Европи. Био је извесно време на студијама у Кордову, где је убрзо превазишао и своје учитеље. При повратку у Француску ватрено је радио на распростирању знања у својој отаџбини, а нарочито је развио живљи рад кад је постао архиепископ у Ремсу, где је основао нову школу и снабдео богатом библиотеком и астрономским инструментима. Године 999 попео се и на престо св. Петра, под именом Силвестар II, али ни тада, поред управљања католичком црквом, није престао да се интересује и да шири математичке науке. Он је први решио правоугли троугао кад су познате хипотенуза и површина, а које је решење у вези са једначинама другог степена. Творац је више геометриских образаца и збирног обрасца аритметичких прогресија.

Леонардо из Пизе (1175 а умро средином XIII века) у својој младости дуго се бавио на истоку. По своме повратку у отаџбину, пресадио је у Западну Европу арабљанску и индијску аритметику и алгебру. Он је писац чувеног дела „***Liber abbaci***" (књига за рачунање), коју је издао 1202 год., а у коју је унео индијско-арапске цифре и арапско-индијске методе рада рачунских операција са целим и разломљеним бројевима, затим тројно правило, аритметичке прогресије и тиме је потиснуо у позадину употребу римских цифара. Појавом ове књиге, талијанска је трговина знатно коракнула унапред, а убрзо после тога пронађене су и згодније методе за решавање задатака из процентног и интересног рачуна. У овој књизи изнет је и начин сабирања и одузимања разломака различитих именитеља.

Ово дело показује нам да је у то доба алгебра била ограничена само на решавање једначина првог и другог степена, пошто је прелаз на решавање једначина вишег степена био за то доба још тежак. Ипак Италији припада слава што је проширила алгебру општим решавањем једначина трећег и четвртог степена.

Леонардо из Пизе, познат и под именом *Фибозачи*, покретач је оних чувених математичких утакмица, врло занимљивих научничких мегдана при крају средњег и у почетку новог века, у којима су математичари, као и некада песници на олимпијадама, један другоме јавно постављали математичка питања на решавање. Ове утакмице донеле су велике користи развијању појединих грана ове корисне науке.

Од математичара средњега века заслужују помена још:

Јорданус Немораријус (1278) који је био такође истакнут научник свога доба. Дао је јасна и кратка правила рачунања са целим и разломљеним бројевима, и

Јован Видман (1489) који је био одличан математичар у своје време. Он је први у Немачкој увео у рачунању знак сабирања „+" и знак одузимања „—".

9) Како у почетку новог века, тако и у току тога века, велики народи Европе: Французи, Немци, Талијани и Енглези као да су се такмичили која ће нација избацити на површину што веће математичаре светског гласа. Имена и кратак приказ радова ових славних математичара изнећемо хронолошким редом:

Адам Ризе (1492—1559) био је један од најистакнутијих математичара у Немачкој у почетку новог века. Он је дао врло прецизна упутства за темељно проучавање математике. Његова аритметика била је изобилна врло лепим и практичним примерима и тако мајсторски написана да је била у употреби по немачким школама око 200 година.

Михаел Штифел (1486—1567), савременик Адама Ризе, дао је правила о дељивости декадних бројева, увео је у употребу негативне бројеве, дао је правило о дељењу обичних разломака које се и данас примењује, упростио је употребу знакова у алгебри и издао је многе примере за примену алгебре и геометрије.

Тарталија Николо (1500—1559), рођен у Брешчији, својим проницљивим умом и великом својом вредноћом постао је један од првих математичара свога века. Био је професор у Венецији када је примио изазивање на утакмицу од ***Антонија дел Фиоре*** да реши 30 питања, у року од 40 дана, а која су се односила на решавање једначина трећег степена. Он је решио сва та питања за непуна два часа и тиме је задивио цео тадањи научнички свет.

Кардан (рођен у Паризу 1501 а умро у Риму 1576) био је један од најнеобичнијих људи свога доба. Кад је Тартаља добио ону славну победу на утакмици са Антонијем дел Фиоре, Кардан је састављао своје велико дело ***„Ars magna"***. Кардан је у почетку узалуд молио Тартаљу да му саопшти методу решавања једначина трећег степена, да би и том методом обогатио своју књигу „Ars magna". Најзад је ипак успео у своме наваљивању, давши реч да тајну чува. Није одржао реч, јер је ускоро у сарадњи са својим учеником ***Ферари*** (1522—1565), проширио Тартаљина правила и на решавање једначина четвртог степена и пожурио се да све то објави у своМ делу. Ни незадовољство Тартаљино, ни његово јавно позивање Кардана на такмичење у Милану (на које није отишао, већ је послао свога ученика Ферарија) није помогло да формула за решавање једначина трећег степена не носи данас име свога правог творца Тартаљије, већ име Карданово. Кардан је проналазач имагинарних бројева и рачунања са тим бројевима. Њему се дугује и метода решавања бројних једначина замењивањем и проналазак везе између корена и сачинитеља код једначина. Изгледа да је Кардан назрео већину теорема које се односе на општу теорију једначина.

Франсоа Вијет (рођен 1540 у Фонтенеју, а умро у Паризу 1603) још од своје ране младости бавио се страсно математиком и својом невероватном оштроумношћу створио је данашњу модерну алгебру увођењем општих бројева. Пре Вијета математичке операције вршене су само са посебним бројевима, а једино непозната и њени степени означавала се општим бројевима. Увођењем општих бројева, упростио је и математичке операције и ставио је алгебру на достојну висину. Вијет се бавио и решавањем бројних једначина свих степена и први је показао немењање вредности непознатих количина када се изврше подједнаке промене и на једној и на другој страни једначине. Он је показао и начин склапања једне једначине помоћу њених корена одређивањем коефицијената у функцији корена. Његовом графичком конструкцијом једначина другога и трећега степена, показао је геометричарима свога доба вештину геометриског претстављања алгебре, што је доцније дало потстрека славном ***Декарту***, створитељу аналитичне геометрије, да открије тешњу везу између алгебре и геометрије.

Захваљујући многобројним радовима Вијета на пољу алгебре, могли су убрзо математичари свих земаља усавршавати алгебру и довести је на данашњу висину. Од математичара који су највише допринели томе усавршавању алгебре заслужују помена :

Томас Харинг (1568—1621) који је усавршио теорију о једначинама, и

Жан Непер (1550—1617) који се нарочито прославио проналаском логаритама за основу $e = 2{,}71828\ldots$, а и навео добру страну логаритамског система за основу 10.

Хенри Бригс (1556— 1630), професор математике у Оксфорду, Неперов добар пријатељ, остварио је његову идеју о логаритмима за основу 10, са којима се данас служимо. Неперови логаритми имају примену у вишој математици.

10) Средина XVII века је доба највиших и најсјајнијих открића у математици. Готово истовремено јављају се славни математичари: *Галилео, Кавалцери* и *Гулдин* у Италији, *Декарт, Ферма* и *Паскал* у Француској и *Валис* у Енглеској.

Галилео (1564 — 1642) прославио се нарочито својим радовима и открићима у астрономији. Био је професор математике у Пизи. Алгебра њему дугује проналазак образаца из комбинаторике.

Кавалиери (1598 — 1647) био је професор универзитета у Болоњи. Прославио се својом теоријом о недељивим количинама и својом чувеном теоремом из стереометрије.

Гулдин (1577 — 1643), исусовац, прославио се нарочито својим проналасцима у механици. Он је установио везу између слика и обртних површина и запремина које постају обртањем слика око једне осовине.

Декарт (1596 — 1650) творац је аналитичке геометрије у равни и простору. Од свих старих и нових математичара он је највише допринео општем унапређену математичких наука усавршавајући примену алгебре у геометрији, чиме је математици дао снажан полет ка њеној будућности. Теорија неодређених коефицијената је једна од најгенијалнијих творевина овога славног математичара. Он се овом теоријом послужио при решавању једначина четвртог степена. Поступак овог решавања у многоме се разликује од поступка Вијета и Ферариа. Најзад, алгебра много дугује Декарту за чувену теорију, која носи његово име, а по којој се може на први поглед означити граница броја позитивних и негативних, тј. стварних, корена једне једначине ма ког степена.

Ферма (1601 — 1665) проналазач је рачуна максимума и минимума и рачуна вероватноће. За њега је Паскал казао да је први човек у свету.

Паскал (1623 — 1662) био је славан математичар још у својој раној младости. Његова истраживања готово су се примакла *интегралном рачуну*. Његов троугао који се примењује при степеновању бинома ма којим бројем једна је од његових најгенијалнијих замисли.

Валис (1616 — 1703), који је био професор математике у Оксфорду, применио је Кавалиерове методе и објавио је методу о интерполацији.

11) Пола века после појаве Декартове аналитичке геометрије, појавила се теорија *инфинитезималног рачуна*, творевина генијалних научника ***Лајбница*** (1646 — 1716) у Немачкој и ***Њутона*** (1642 — 1727) у Енглеској, коју су пронашли радећи потпуно независно један од другога, а која је теорија највише размакла границе домена математичких наука. Ова велика творевина људског духа, примењује се са великом лакоћом у астрономији, геометрији и механици.

У XVIII и XIX веку имамо читаву плејаду славних математичара који су својим радовима допринели да се математика подигне на данашњу завидну висину и да буде од велике користи у механици, астрономији и техници. Од тих математичара заслужују помена и свако признање покољења: *Ајлер, Даламбер, Безут, Лаплас, Ланграж, Монж, Карно, Аргон, Мурej, Гаус, Коши* и *Јакоби*.

12) *Подаци о времену проналаска знакова у математици.* Данашње арапско-индиске цифре претрпеле су у току векова велике промене, док нису добиле садањи облик. *Мисирцима* нису биле познате ове цифре. Они су употребљавали хијероглифске цифре. *Грци*, уместо цифара, употребљавали су слова из њихове азбуке. Тако, α за 1, β за 2, γ за 3 итд. *Јевреји, Асирци*, па и *Словени*, употребљавали су такође слова својих азбука за цифре. *Римљани* су имали своје специјалне цифре које се и данас примењују у датумима и редним бројевима. Знаци „+“ и „—“ налазе се најпре код Леонарда из Пизе, па су затим пренети у Немачку,

где су 1489 први пут штампани. Знак „$\times$" увео је Енглез *Утред* (1631). Знак множења ($\cdot$) употребио је први *Лајбниц* (1694), али се мисли да га је он негде нашао. Разломачка црта дуго је служила као знак дељења, док није Лајбниц увео знак (:). Знак једнакости (=) проналазак је *Рекорда* (1552). Знаке неједнакости $>$ и $<$ увео је Енглез *Хариот* (1600), а знак $\neq$, који се чита „није једнако" и који се данас све чешће употребљава, изумео је *Христофел*. Као што знамо, *Вијет* је 1591 год. увео опште бројеве, а помагао му је у томе његов пријатељ *Марин Геталдић* (1566—1628), наш Дубровчанин. Нула се јавља најпре у Индији (738 год. после Христа) заједно са негативним бројевима, али су их у рачунима избацивали. Тек их је *Кардан* 1545 год. у свом делу „Ars magna" признавао као бројеве и дао им име „numero fisti". Имена „позитивни" и „негативни" потичу од *Вијета*. Данашње писање степена и корена потиче од Декарта. Степеновање и кореновање са негативним, разломљеним и ирационалним изложитељима потичу од *Штифела* и *Стевина* (Холанђанин). *Стевину* се дугује и увођење у употребу децималних бројева.

САДРЖАЈ

Први одељак

Теорија извода и појам максимума и минимума

Стр.

§ 1. О функцијама уопште 3
„ 2. Врсте функција 4
„ 3. Бесконачно велики и бесконачно мали бројеви 5
„ 4. Појам границе 6
„ 5. Теореме које се односе на границе 8
„ 6. Прираштаји функција 14
„ 7. Појам о непрекидности функција 15
„ 8. Изводи функција 18
„ 9. Теореме о изводима 23
„ 10. Изводи циклометријских функција 28
„ 11. Изводи посредних функција 29
„ 12. Примери за вежбу 29
„ 13. Геометриски значај извода и његова примена 33
„ 14. Парцијални (делимични) изводи 34
„ 15. Извод имплицитних функција 35
„ 16. Растуће и опадајуће функције 37
„ 17. Појам о максимуму и минимуму функција 38
„ 18. Појам диференцијала 46

Други одељак

Основи интегралног рачуна

§ 19. Инфинитезимални рачун 48
„ 20. Задатак интегралног рачуна 48
„ 21. Појам о одређеним и неодређеним интегралима 51
„ 22. Особине неодређених интеграла 52
„ 23. Методе за израчунавање неодређених интеграла 53
„ 24. Примена интегралног рачуна 57
„ 25. Мешовити матурски задаци 61

Трећи одељак[1]

Комплексни бројеви, Моавров образац, једначине трећег степена

§ 26. Тригонометричан облик комплексног броја 65
„ 27. Операције с комплексним бројевима 66
„ 28. Примери за вежбу 67
„ 29. Моавров образац 68

[1] За ученике реалке.

Стр.

§ 30. Примена Моавровог обрасца за израчунавање функција n-то струког угла 68
„ 31. Облици једначина трећег степена и њихове особине 70
„ 32. Врсте корена једначина трећег степена 72
„ 33. Веза између корена и коефицијената 72
„ 34. Свођење потпуних једначина трећег степена на простији облик 74
„ 35. Решавање једначине $x^3+px+q=0$, ако има имагинарне корене 75
„ 36. „ „ $x^3+px+q=0$, ако има само стварне корене 79
„ 37. „ „ $x^3+px+q=0$, ако има стварне корене од којих су два једнака 82

Додатак

„ 38. Кратак приказ историског развитка аритметике и алгебре . . . 85