РИСТА КАРЉИКОВИЋ
директор гимназије у пензији

# ГЕОМЕТРИЈА

## ЗА ВИШЕ РАЗРЕДЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

ПРВИ ДЕО

## ПЛАНИМЕТРИЈА

Овај је уџбеник препоручен од Главног просветног савета С.бр. 1553/35 од 14 јануара 1936 год. и одобрен од Г. Министра просвете одлуком С.н.бр. 3090 од 13 марта 1936 год.

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЋУКОВИЋА
БЕОГРАД — ТЕРАЗИЈЕ

**Београд, 1938**

Штампа графичко предузеће „Давидовић“
Павловића и Друга
Таковска, 32

# УВОД

**§ 1. — Просторни или геометриски облици.** — *Простор* у коме се налазимо бескрајан је, али се дâ делити на веће и мање делове. Ма какав део простора, ограничен са свију страна, зове се *тело*, а обухваћени део простора зове се *запремина* или *волумен* тога тела. Тела могу бити *материјална* и *геометриска*. Прва постоје, испуњена су извесном материјом, а геометриска су само замишљена; до њихових појмова долазимо када материјалном телу изузмемо све особине осим *облика* и величине.

Тело је ограничено *површинама*. *Површина је, дакле, граница једног тела.* Она нема никакве дебљине и не може самостално да постоји, а само је можемо замислити као независну од тела. Површине могу бити *равне* и *криве*. Сваки део било равне, било криве површине опет се зове површина. Нека су тела ограничена само равним површинама (призме, пирамиде), нека само једном кривом површином (лопта, јаје), а има најзад тела ограничених и кривим и равним површинама (облица, купа). Тела ограничена равним површинама зову се *рогљаста*; а тела ограничена кривим, или кривим и равним површинама, зову се *обла* или *ваљкаста*.

Површине могу бити неограничене или ограничене *линијама*. *Линија је, дакле, граница једне површине.* Она само ограничава површину, а нема ни дебљине ни ширине. Линија, као и површина, не може самостално да постоји, већ је само замишљамо као независну од површине. Линије могу бити: *праве* и *криве*.

Сваки део једне линије ограничен је *тачкама*.

*Тачка је, дакле, граница једног дела линије.* Она нема ни дебљине, ни ширине, ни дужине. Геометриска тачка је само једно замишљено место у простору, на телу, површини, или на линији.

Тачке, линије, површине и тела једним се именом зову *просторни* или *геометриски ликови (облици)*. Осим тачке, сви други облици су *количине*, јер се дају мерити. Тако, код тела можемо да меримо дужину, ширину и висину (дебљину, дубину), код површина дужину и ширину, а код линија дужину.

Правац по коме се једно тело, једна површина, или линија простире, или по коме се мери, зове се *димензија*. Тела имају три димензије: дужину, ширину и висину (дебљину, дубину); површине имају две димензије: дужину и ширину; а линије само једну димензију, и то дужину. Тачка нема ниједне димензије. Има тела која имају по две димензије једнаке (цилиндар), или све три димензије једнаке (коцка); а тако исто има површина које имају обе димензије једнаке *(квадрат)*.

§ 2. — **Величине геометриских облика.** — Тела, а и површине и линије, ако их замислимо ограничене, имају своје *величине*. До величине једног ма ког геометриског облика долазимо када овај облик упоредимо са његовом *основном јединицом*. При мерењу узимамо као основну јединицу за дужине *метар* $(m)$, за површине *квадратни метар* $(m^2)$, а за запремине *кубни метар* $(m^3)$, те се величине дужинâ исказују у метрима или његовим деловима, површинâ у квадратним метрима или његовим деловима, а запреминâ у кубним метрима или његовим деловима. Величину линије зовемо *дужином*, површине *павршином* (*квадратуром*), а тела *запремином (кубатуром)*.

Ако линије или површине замислимо да се простиру до бесконачности, тј. да су неограничене, онда водимо једино рачуна о њиховом облику, а њихове величине, пошто су као бескрајне немерљиве, не узимамо у обзир.

§ 3. — **Упоређивање просторних облика.** — Код геометриских облика не само да водимо рачуна о њиховим величинама, већ и о њиховим облицима, тј. о распореду и склопу појединих елемената дотичне слике. При упоређивању два тела или двеју површина, може наступити један од ова четири случаја: 1) могу имати једнаке величине, а различите облике; 2) могу имати једнаке облике, а различите величине; 3) могу имати и једнаке облике и једнаке величине; и 4) могу имати и неједнаке облике и неједнаке величине. У првом су случају дотични облици *једнаки* $(=)$, у другом *слични* $(\sim)$, у трећем *подударни* $(\cong)$, а у четвртом *различити*.

§ 4. — **Задатак геометрије и њена подела.** — Геометрија је наука која се бави испитивањем особина просторних облика и израчунавањем њихових величина. Реч „геометрија" је грчка, и састављена је од речи γῆ (земља) и μετρία, γεωμετρία (мерење). Овакав је назив дат овој науци зато што јој је у старо време главни задатак био мерење растојања на земљиној површини. Она се дели на *планиметрију* и *стереометрију*. Прва се бави оним просторним облицима који се са свима својим деловима налазе у једној равни; друга се бави облицима који се налазе ван једне равнине, у простору. Стереометрија се бави углавноме телима*.

---

* Као нарочите гране геометрије јесу *тригонометрија* и *аналитика* које се опет са своје стране деле на равну и сферну тригонометрију и на равну и просторну аналитику, а о којима се говори у најстаријим разредима гимназије.

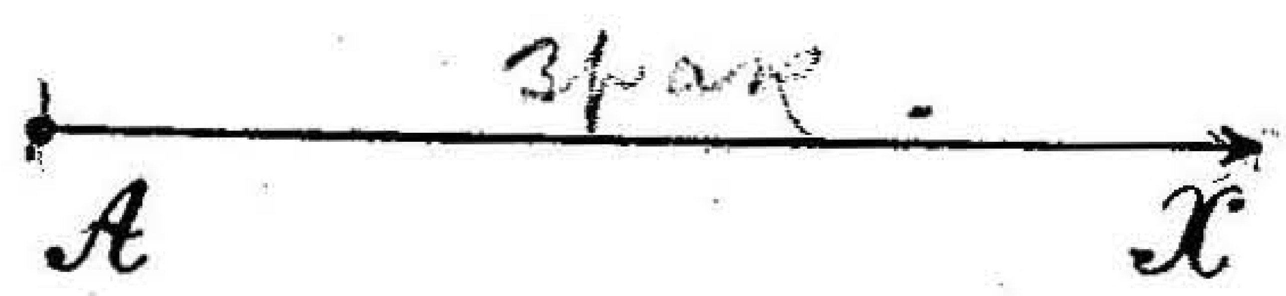
# ПРВИ ОДЕЉАК

## ПРАВА, КРУГ, УГЛОВИ И ПАРАЛЕЛНЕ ПРАВЕ

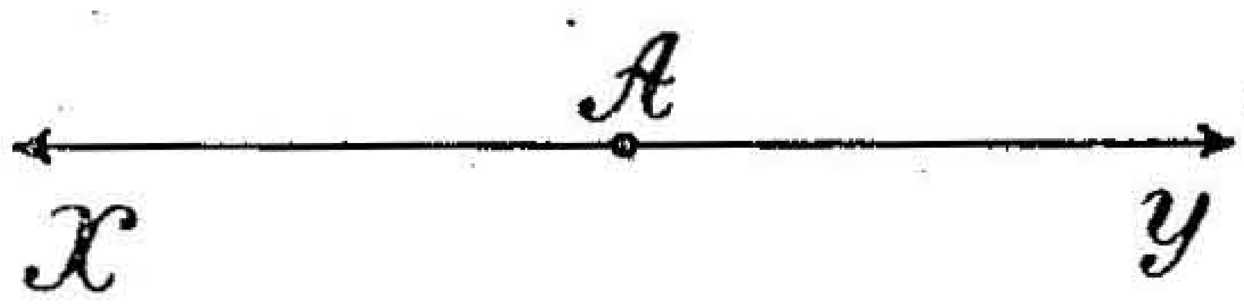
### I. Права

**§ 5. — Постанак и врсте правих линија.** — Линија чије се све тачке налазе у истом правцу зове се *права.* Она постаје кретањем једне тачке у истом правцу, или пресеком двеју равни. Права није ограничена ни с једне ни с друге стране и замишља се да се простире у бесконачност. Свака

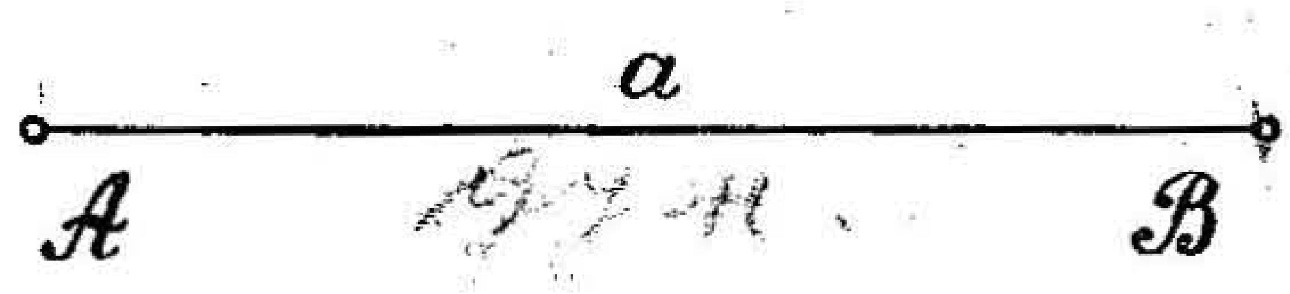

Сл. 1




Сл. 2




Сл. 3

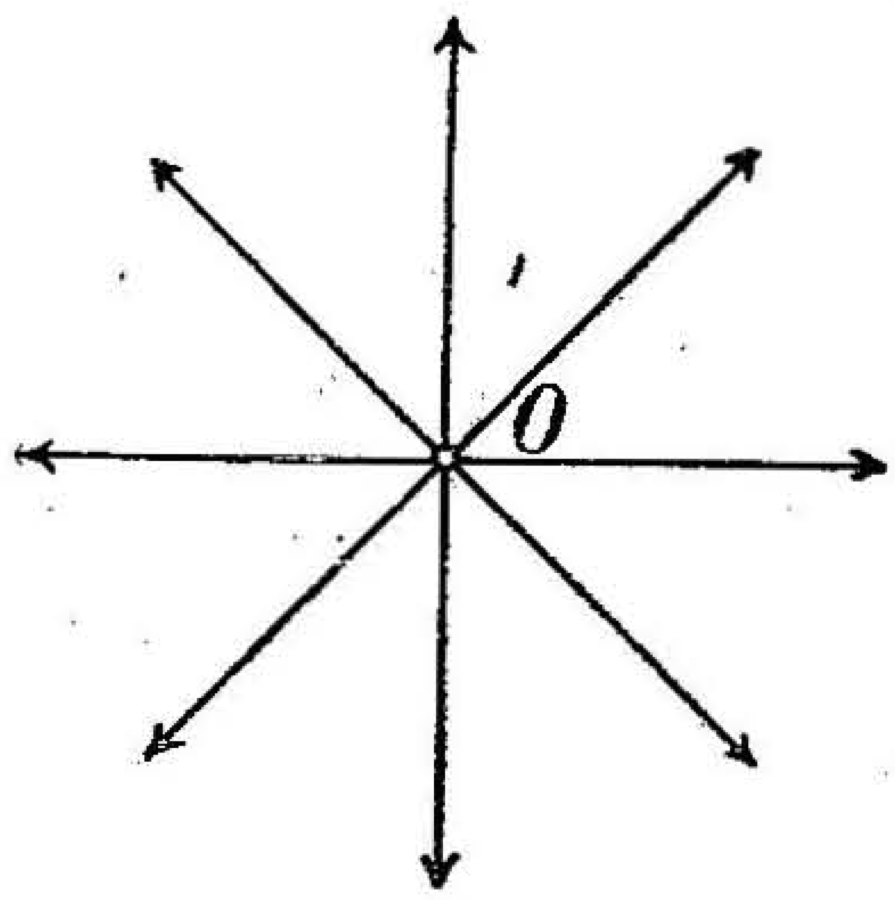



Сл. 4

права има два супротна смисла у своме простирању: *леви* и *десни,* а означава се са два велика писмена (сл. 1). Кроз једну тачку у равни можемо повући врло много правих, али кроз две тачке само једну.

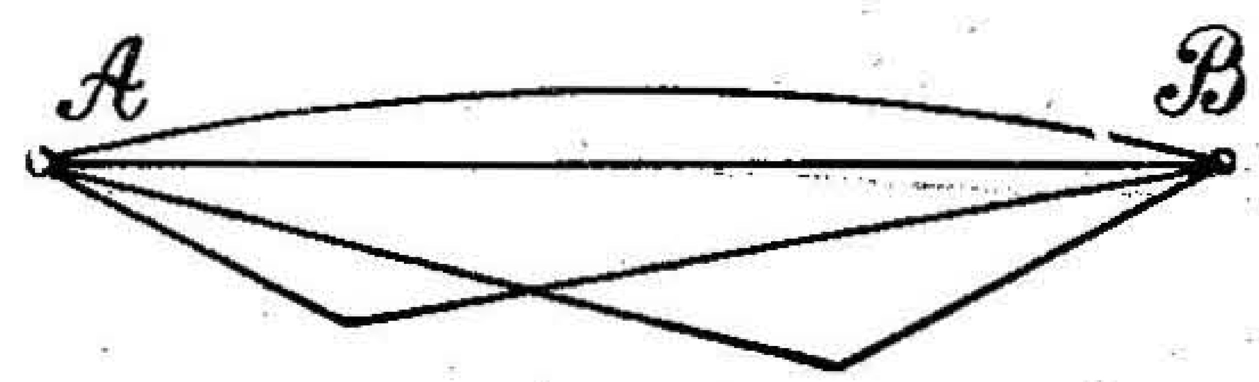
*Према томе, положај једне праве није одређен само једном њеном тачком, већ помоћу две њене тачке.*

Права која је само с једне стране ограничена зове се *зрак* (сл. 2). Тачка одакле зрак почиње зове се *почетна тачка.* Зрак се обично означава са два велика писмена, од којих се једно пише код његове почетне тачке, а друго близу стрелице, која нам само показује да се зрак не завршава том тачком, већ се продужава у бесконачност. Кад се на једној правој узме једна тачка, онда се права дели на два зрака, који су истога правца, али су у супротноме *смислу*, а узета тачка биће њихова заједничка почетна тачка (сл. 3). Ако из




Сл. 5

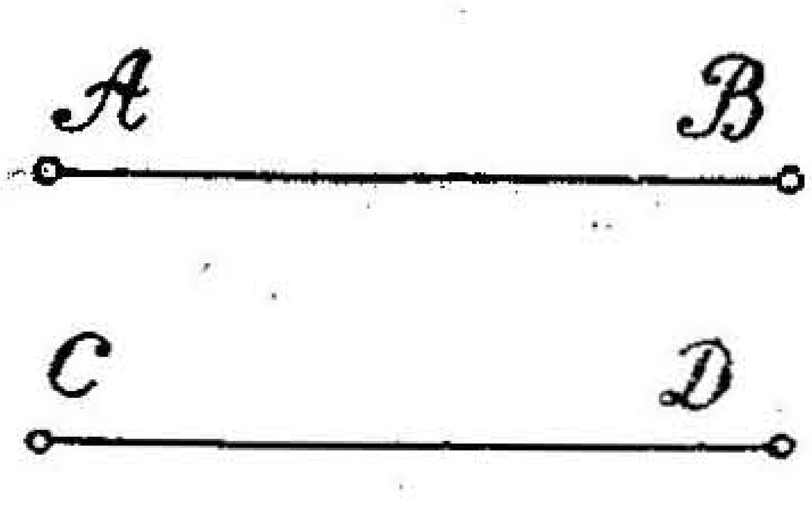
једне тачке у равни полазе *више* зракова разних праваца, онда они дају *сноп зракова* (сл. 5). Заједничка тачка *O* свију зракова снопа зове се *средиште* или *центар зрачног снопа.* Права која је ограничена и с једне и с друге стране зове се *дуж.* Свака дуж у ствари је отсечак (део) неке праве. Граничне тачке дужи зову се *крајње тачке.* Једна је *почетна*, а друга *завршна* (*A* и *B* на сл. 4). Дуж се означава или помоћу два велика писмена, која се пишу код крајњих тачака, или једним малим писменом, које се пише обично у средини и које једновремено претставља величину дотичне дужи. Када се две тачке у равни вежу једном правом, добија се дуж.



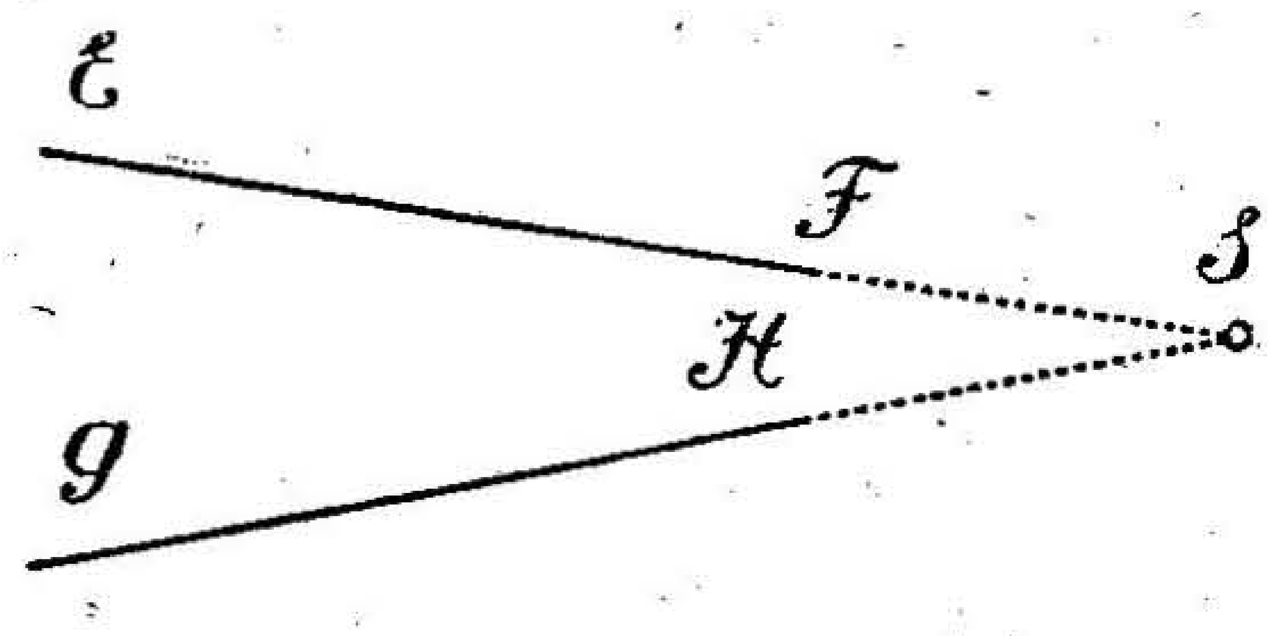

Сл. 6

Ова дуж је најкраћа од свију линија којима би се могле везати те две тачке (сл. 6). Дужина ове дужи је *раздаљина* или *отстојање* тих тачака.

**§ 6. — Положај двеју правих у равни.** — Две праве које се налазе у једној равни могу заузимати само двојак узајамни положај: могу бити паралелне или се сећи. Паралелне су ако се не секу, па ма колико их продужили (сл. 7). Да су праве *AB* и *CD* на сл. 7 паралелне, означавамо: *AB* || *CD*,



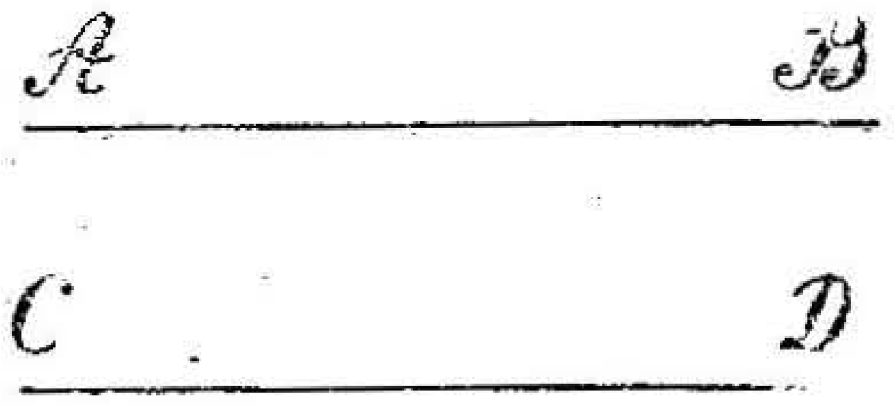

Сл. 7



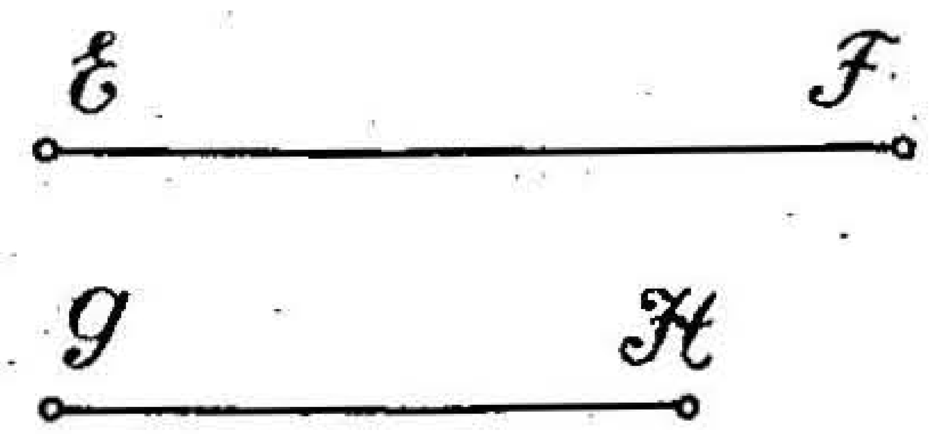

Сл. 8

а изговарамо: „права *AB* паралелна је с правом *CD*". Две праве нису паралелне ако се секу када их продужимо. Њихова заједничка тачка зове се пресечна тачка (*S* на сл. 8). Две праве могу се и поклапати, али у том случају дају једну праву. Овај случај наступа када праве имају две заједничке тачке.

**§ 7. — Упоређивање двеју дужи.** — Две дужи по величини могу бити *једнаке* или *неједнаке*. Једнаке су ако се потпуно поклапају када једну ставимо на другу. Дужи $AB$ и $CD$ на сл. 9 једнаке су, и та једнакост се означава: $AB=CD$, а чита се: „дуж $AB$ једнака је дужи $CD$“. Ако се дужи не поклапају, онда су




Сл. 9

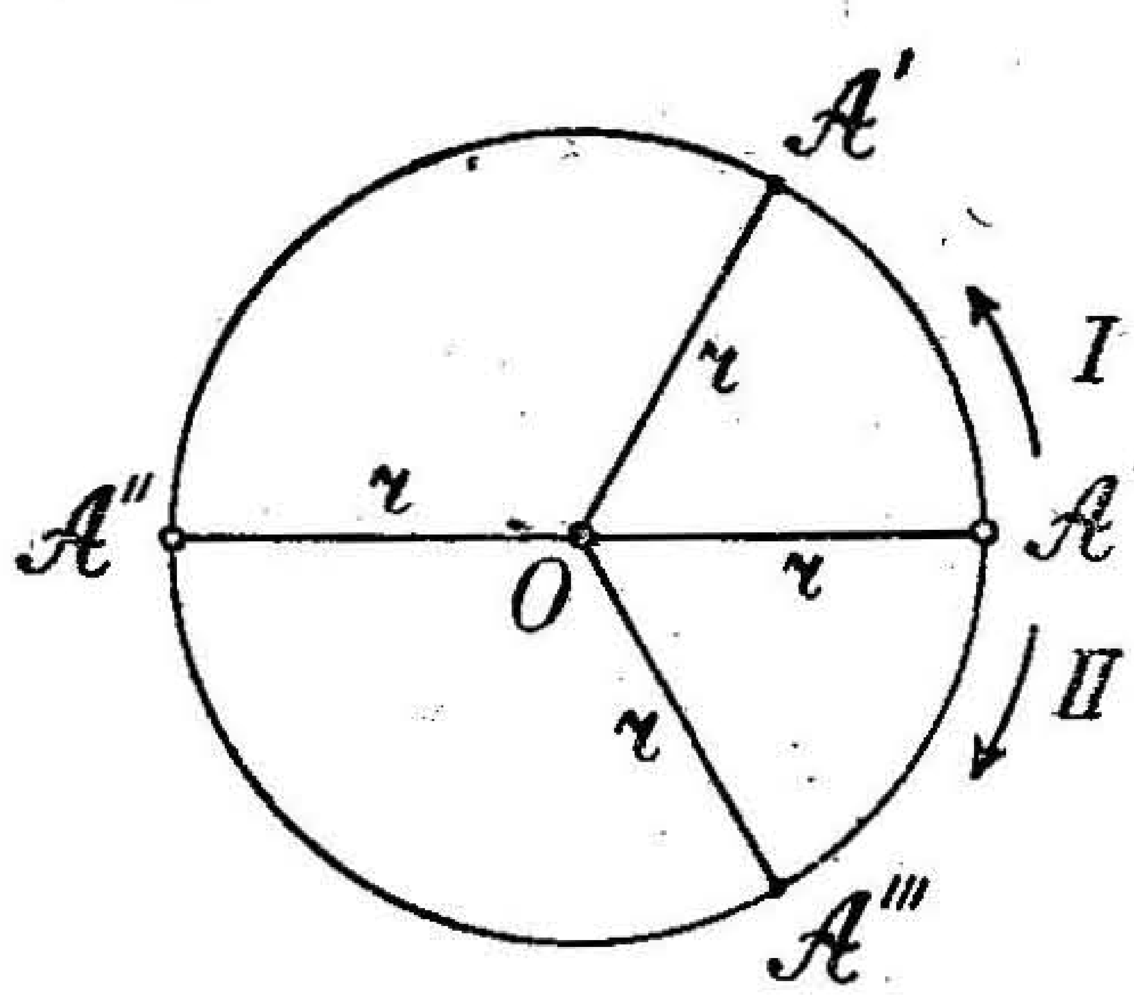



Сл. 10

неједнаке. Дуж $EF$ на сл. 10 већа је од дужи $GH$, и то се означава: $EF>GH$, а чита се: „дуж $EF$ већа је од дужи $GH$“. Да је дуж $GH$ мања од дужи $EF$, означава се: $GH<EF$, а чита се: „дуж $GH$ мања је од дужи $EF$“. Упоређивање двеју дужи врши се или помоћу лењира који је подељен на сантиметре, или помоћу шестара.

## II. Круг

**§ 8. — Постанак круга и његови делови.** — Ако се дуж $OA$ (сл. 11) обрће око своје крајње тачке у смислу стрелице I или II, па опет дође у свој првобитни положај, онда друга њена крајња тачка $A$ описује криву затворену линију, која се зове *кружна линија* или *кружна периферија*. Она има ту особину да су све њене тачке подједнако удаљене од тачке $O$, која се зове *средиште* или *центар*. Део равне површине који је обухваћен кружном линијом, зове се *кружна површина*.



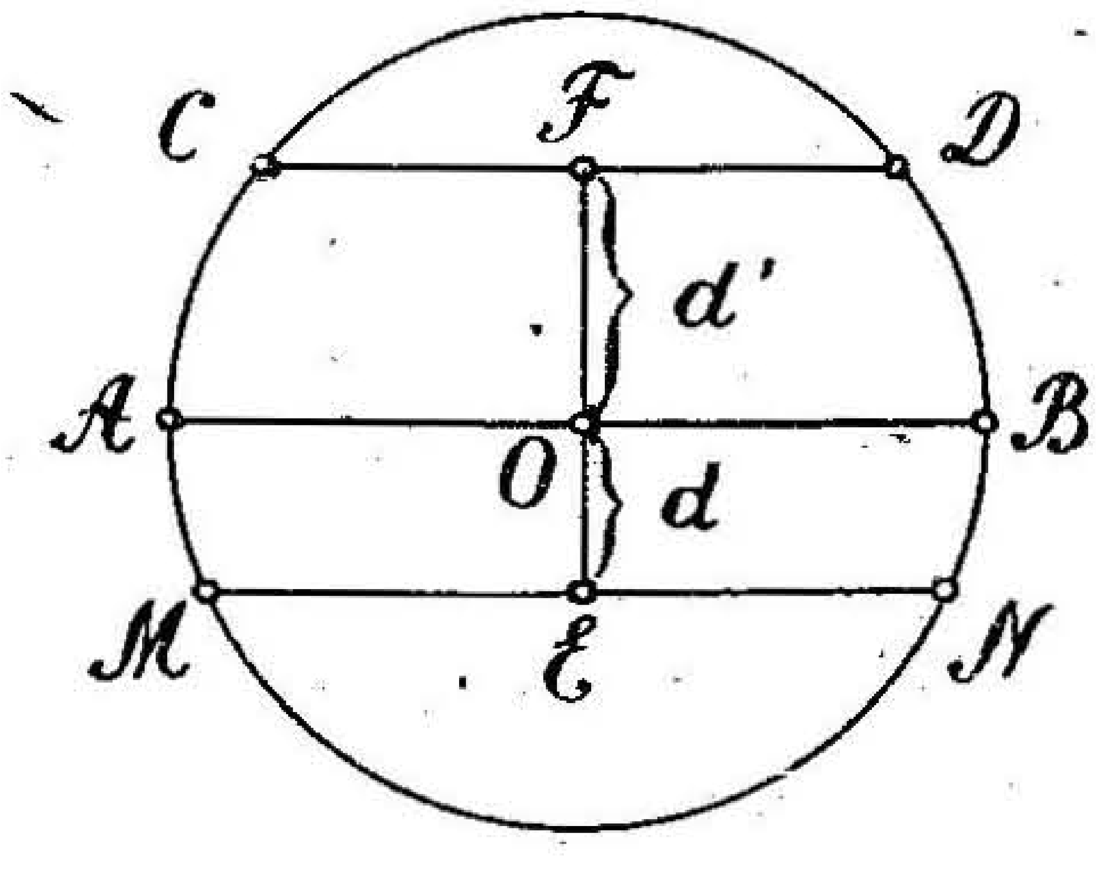

Сл. 11

Кружна линија и кружна површина зову се једним именом *круг*. Отстојање од центра до ма које тачке кружне линије зове се *полупречник*, а означава се обично латинским писменом $r$ (*radius*). *Сви полупречници једнога круга јесу једнаки* ($OA=OA'=OA''=OA'''$.... сл. 11). Два круга једнаких полупречника јесу подударне слике, пошто се потпуно поклапају.

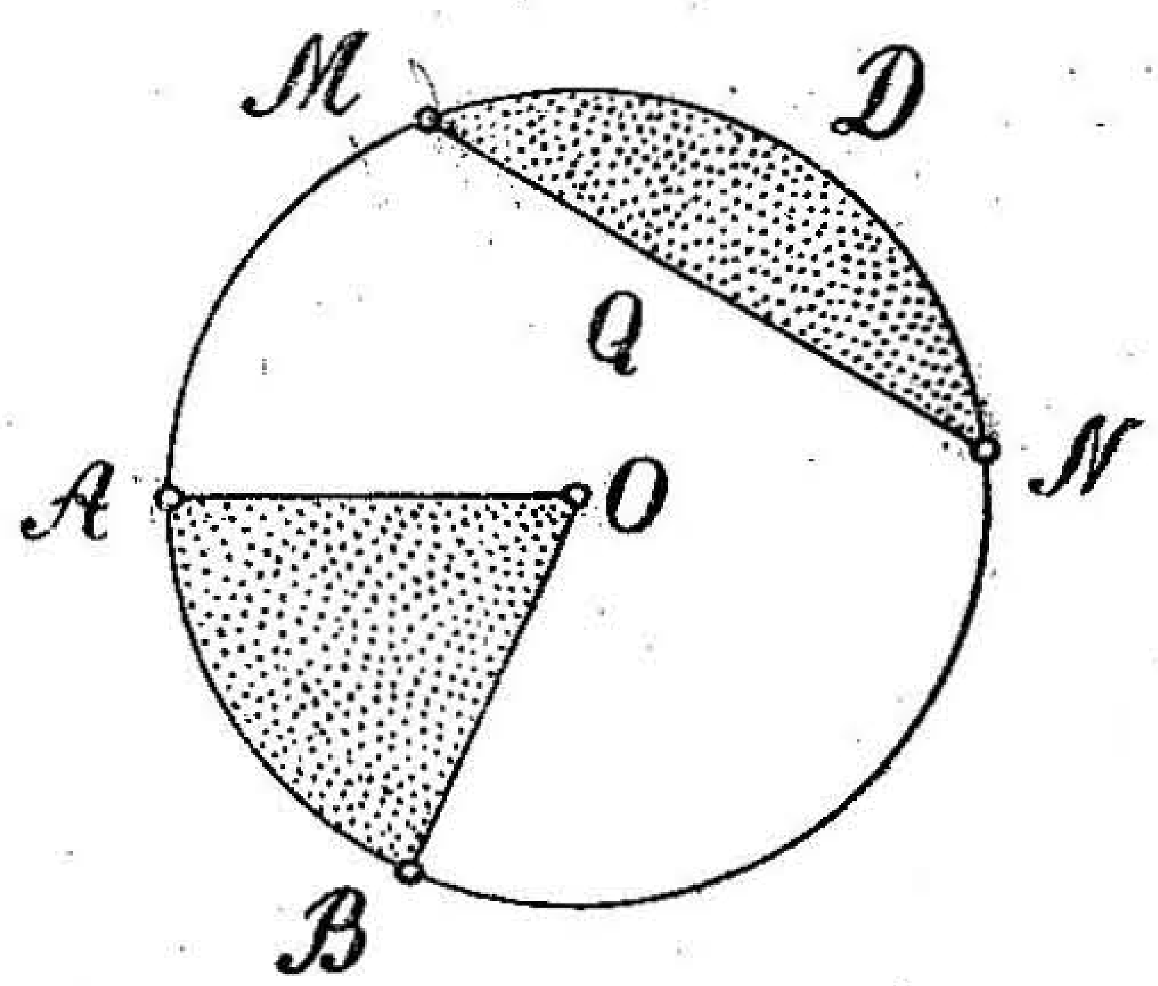
Дуж чије су крајње тачке на периферији једнога круга зове се *тетива* ($CD$, $AB$, $MN$ на сл. 12). Она тетива која пролази кроз центар зове се *пречник* или *дијаметар* ($AB$ на сл. 12). *Сви су пречници једнога круга једнаки, пошто је сваки двапут већи од полупречника.*

*Централном раздаљином* једне тетиве зовемо нормално отстојање центра круга до те тетиве ($OE$, $OF$ на сл. 12). Централна раздаљина једне тетиве увек је мања од полупречника тога круга. *Она је већа што је тетива мања, а мања што је тетива већа* ($d$ и $d'$ на сл. 12). Она постаје све мања кад се тетива приближује центру, а једнака је нули *(0)* када тетива постане пречник.

Део кружне линије зове се *кружни лук.* Онај лук који је 360-ти део кружне линије има нарочити назив: *лучни степен*




Сл. 12




Сл. 13

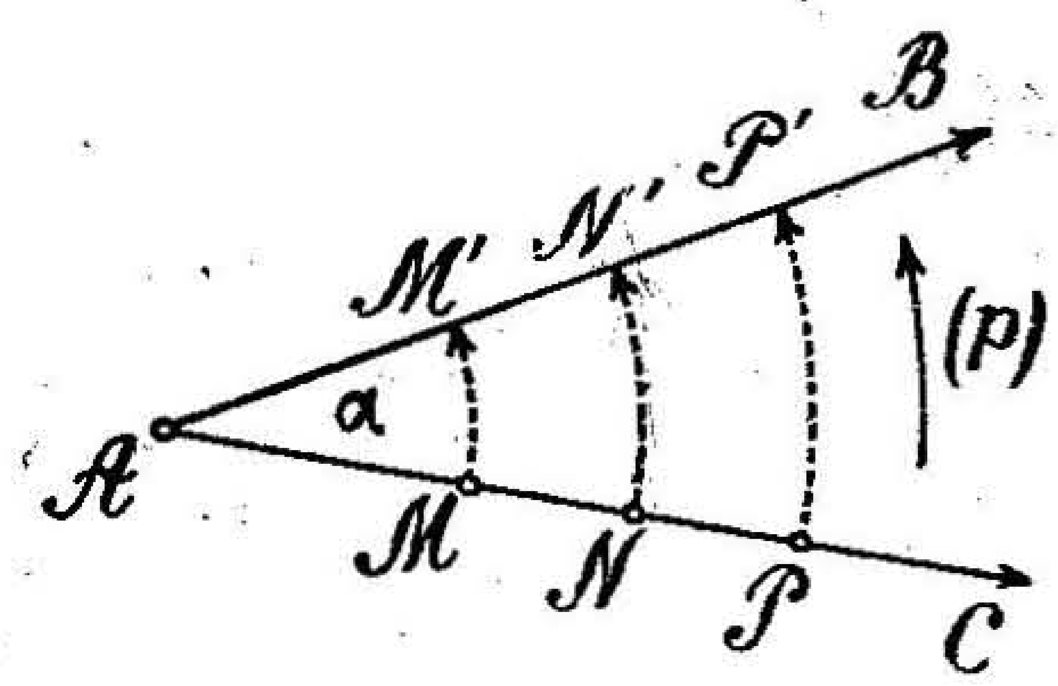
и служи као јединица за мерење лука. Лучни се степен означава малом нулом, која се пише десно горе ($^0$). Он се дели на *лучне минуте* ($'$), а ови на *лучне секунде* ($''$). Сваки лучни степен има $60'$, а сваки лучни минут $60''$. У новије доба унети су у употребу *градуси (g)*. Град је 400-ти део кружне периферије. Сваки град има 100 минута (`), а минут 100 секунада (``); запета (цртица) се пише с лева у десно.

Половина кружне линије зове се *полукруг*, четвртина *квадрант*, шестина *секстант*, а осмина *октант*. Полукруг има $180^0$ (200 *g*), квадрант $90^0$ (100 *g*), секстант $60^0$ ($66\frac{2}{3}$ *g*), а октант $45^0$ (50 *g*). *Кругови једнаких полупречника имају једнаке лучне степене, а различитих полупречника неједнаке. Уколико је полупречник већи, утолико је и лучни степен* *већи*, Како је $360^0 = 400\ g$, то је $1^0 = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}\ g$, а $1\ g = \left(\frac{9}{10}\right)^0$. Стога степене претварамо у граде када број степена помножимо са $\frac{10}{9}$, а граде у степене када број гради помножимо са $\frac{9}{10}$.

Делови кружне површине јесу *сектор* или *исечак* и *сегмент* или *отсечак*. Сектор је део кружне површине ограничен једним луком и са два полупречника крајњих тачака лука ($OAB$, сл. 13). Сегмент је део кружне површине ограничен луком и тетивом која спаја крајње тачке тога лука ($MQND$, сл. 13). Свака тетива дели кружну површину на два неједнака сегмента. Само пречник дели круг на два једнака отсечка-полукруга. Када се говори о једном кружном сегмету над једном тетивом, ако није нарочито наглашено, подразумевамо увек мањи сегмент. Исти је случај и са кружним луком над једном тетивом. Сектор који је 4-ти део кружне површине зове се *квадрант*, 6-ти *секстант*, а 8-ми *октант*.

# III. УГАО

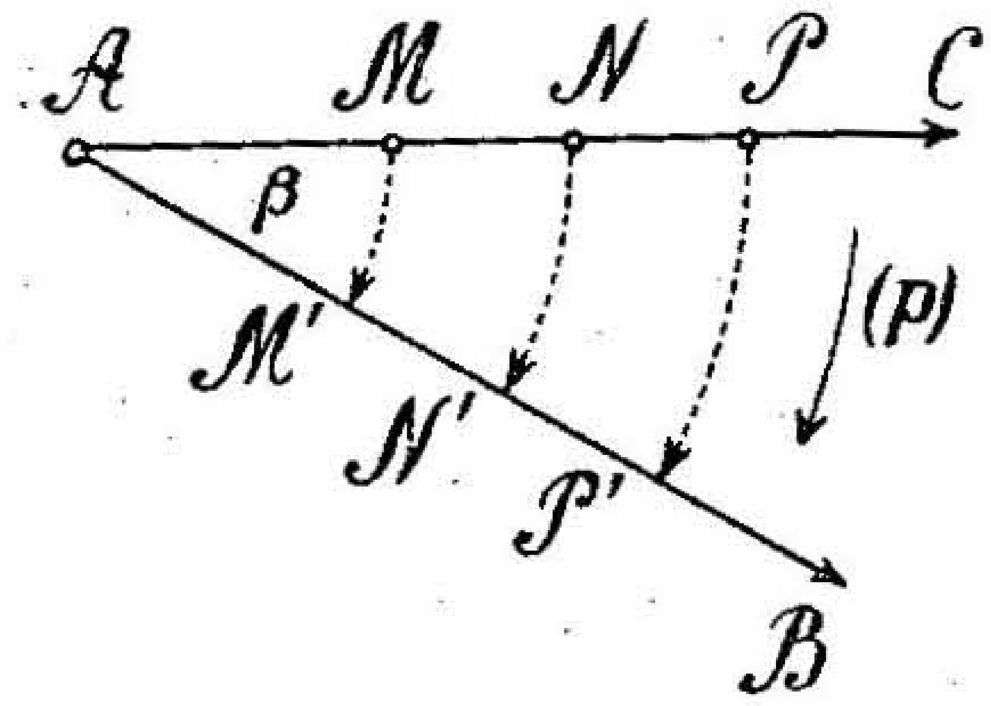
**§. 9, Постанак и означавање угла.** — Кад се зрак $AC$ (сл. 14) обрће око своје почетне тачке $A$, у смислу стрелице ($p$), па после извесног кретања заузме положај $AB$, добија се *угао*. Тада свака његова тачка ($M, N, P$...) описује по један лук ($MM', NN', PP'$...), који су различите величине, али сви имају исти број степена. Првобитни положај зрака ($AC$) и последњи ($AB$) јесу *краци* угла, а почетна




Сл. 14

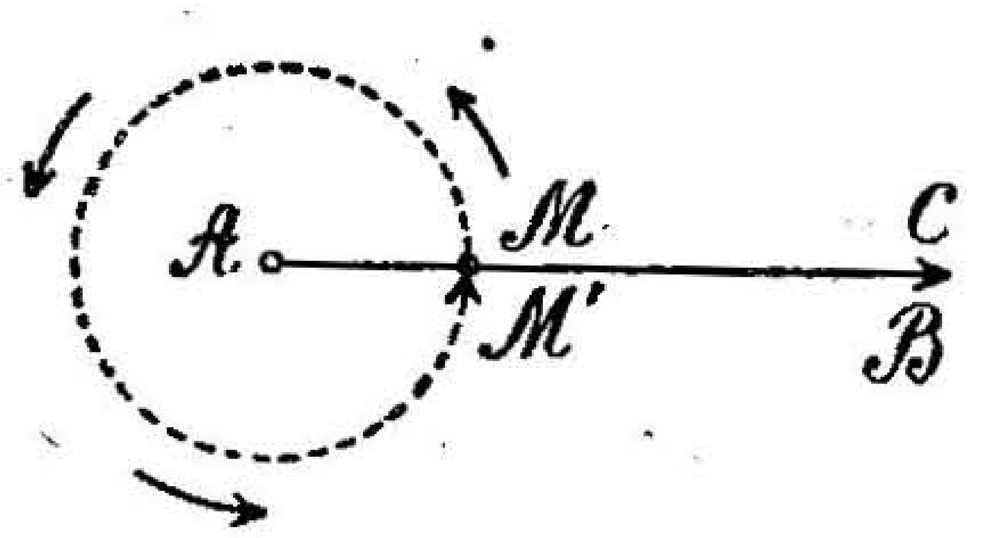
тачка $A$ *теме* угла. *Величина једног угла не зависи од дужине његових кракова, већ једино од њиховог размака, који се изражава бројем степена описаног лука ма које тачке зрака од његовог првобитног до последњег положаја.* Угао се означава на три начина: 1) помоћу три велика латинска писмена, од којих се једно пише код темена а по једно на крацима; 2) једним малим писменом (обично грчким), које се пише у углу код темена; и 3) једним великим писменом, које се пише код темена споља. Угао на сл. 14 изговарамо: „угао $CAB$“ или $BAC$, или „угао A“, или „угао $\alpha$“.

**§ 10. — Врсте углова.** — а) Према начину постанка, углове делимо на <u>*позитивне*</u> и <u>*негативне*</u>. Позитиван је онај угао који постаје обртањем зрака у смислу који је супротан кретању сказаљака на часовнику (угао α на сл. 14). Негативан је угао који постаје обртањем зрака у смислу кретања сказаљака на часовнику (угао β на сл. 15).

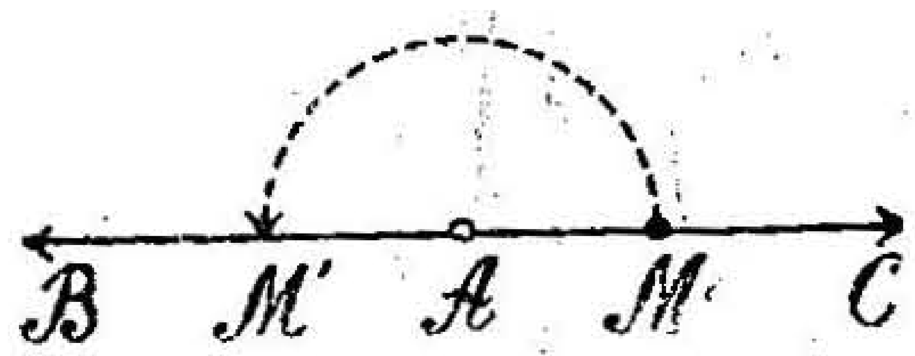



Сл. 15

b) <u>Према величини, углове делимо на</u>: *пуне, равне, издубљене* и *испупчене*. Ако зрак $AC$ (сл. 16) дође после обртања опет у свој првобитни положај ($AB$), онда ма која његова тачка ($M$) опише круг. Добивени се угао зове *пун* и има 360⁰. Ако краци једнога угла леже у истом правцу, али у супротноме смислу (сл. 17), онда се такав угао зове

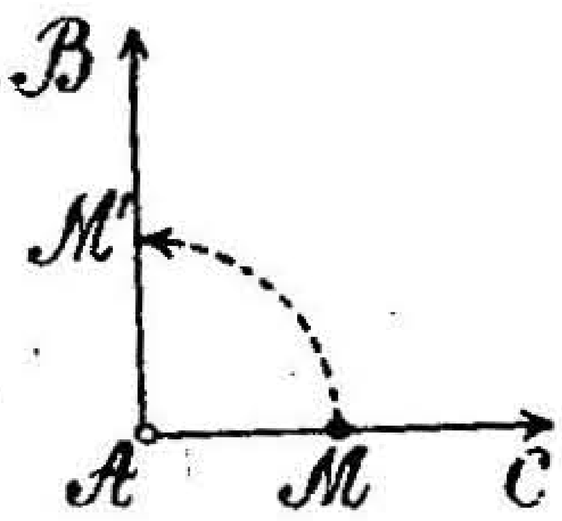



Сл. 16

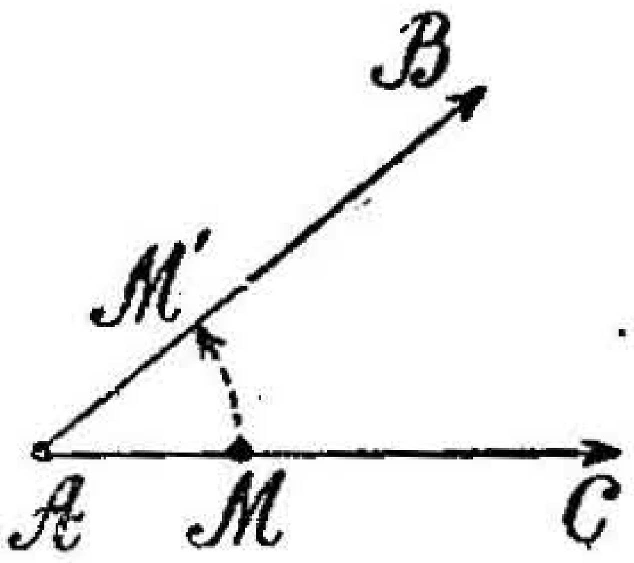



Сл. 17

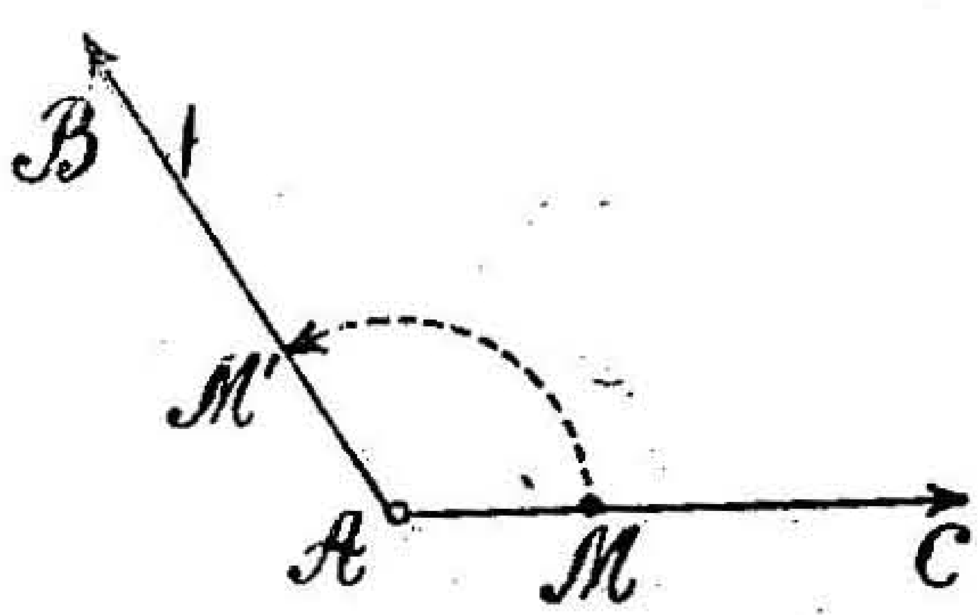
*раван* или *опружен*. Он је половина пуног угла, те има 180⁰. Сви углови који су мањи од равнога зову се *издубљени*, а сви већи *испупчени*. Издубљени се углови деле на: *праве, оштре* и *тупе*, а испупчени на: *тупо-испупчене, право-испупчене* и




Сл. 18

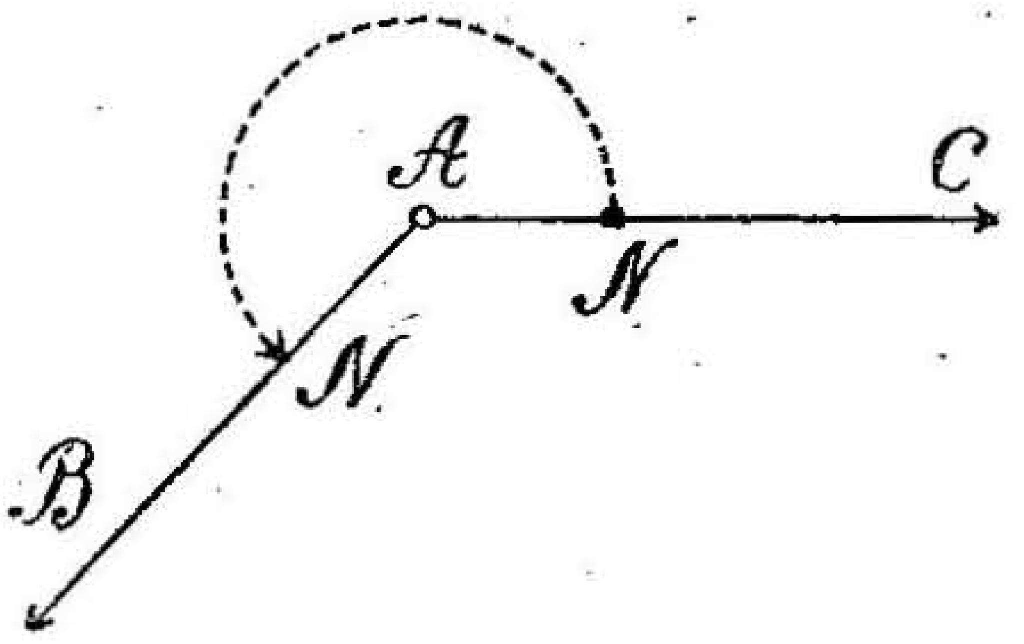



Сл. 19

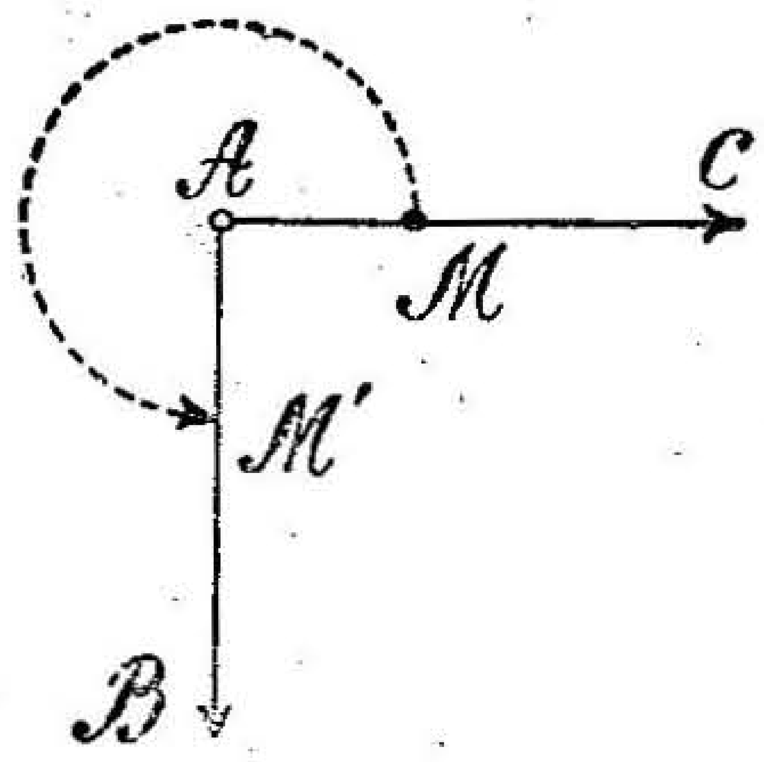



Сл. 20

*оштро-испупчене*. Прав је угао половина равнога или четвртина пуног угла (сл. 18), те има 90⁰. Код њега су краци нормални један према другом. Оштар је сваки угао који је мањи од правог (сл. 19). Туп угао је онај који је већи од правога а мањи од равног (сл. 20).

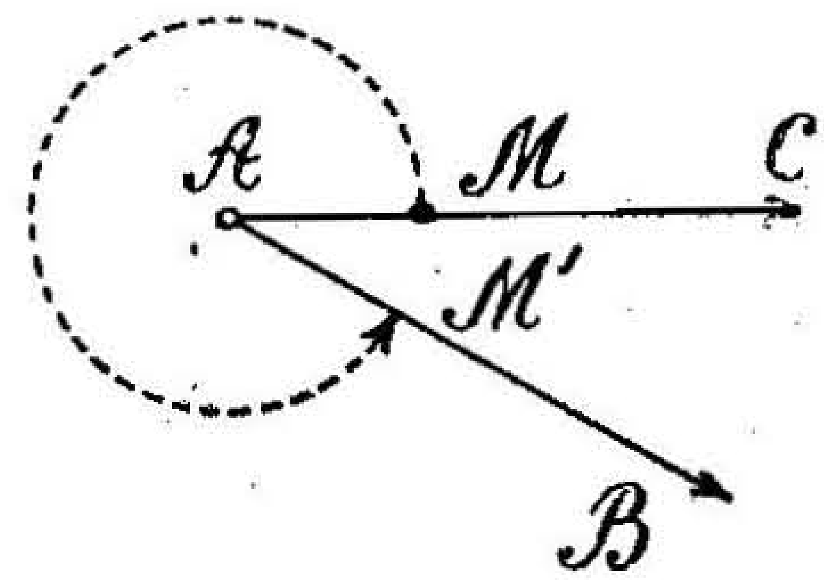



Сл. 21



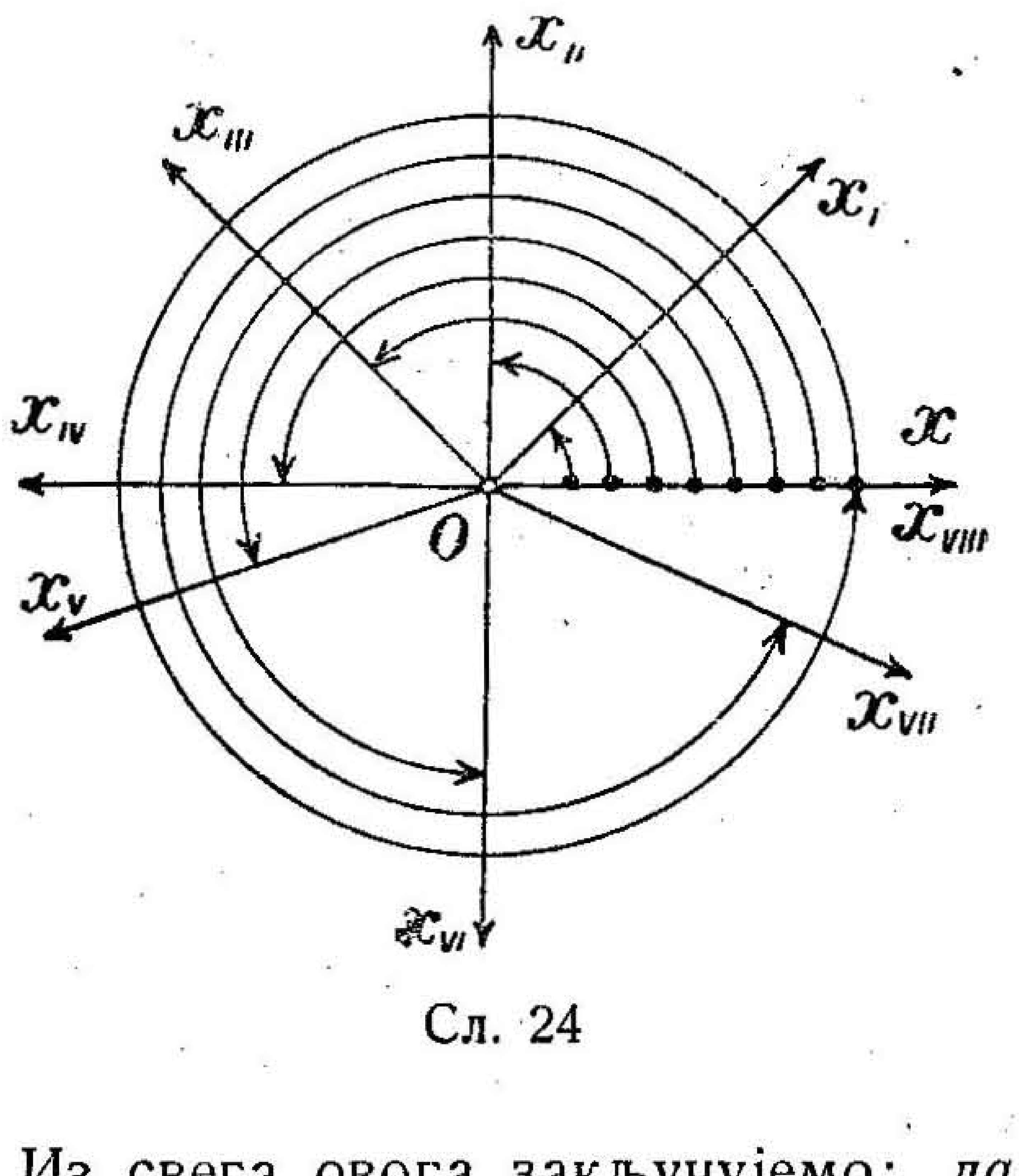

Сл. 22

Под *допуном* једнога угла разумемо онај угао који са првим углом даје пун угао ($360^0$). Тупо-испупчен угао је онај чија је допуна туп угао (сл. 21). Право-испупчен угао је онај чија је допуна прав угао (сл. 22). Он је $\frac{3}{4}$ пунога, те има $270^0$. Оштро-испупчен угао је онај чија је допуна оштар угао (сл. 23).




Сл. 23

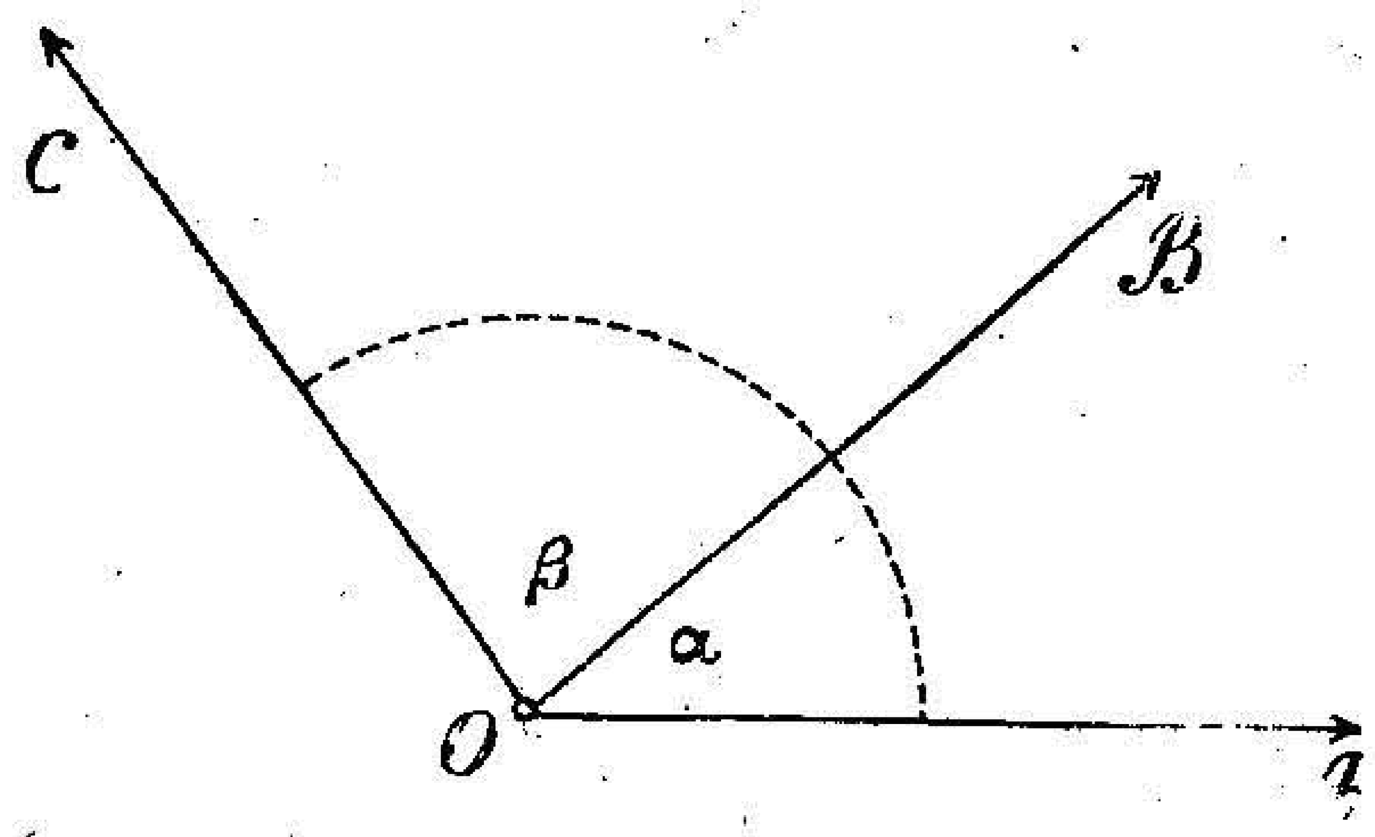
На сл. 24 угао $XOX_{\mathrm{I}}$ је оштар, $XOX_{\mathrm{II}}$ прав, $XOX_{\mathrm{III}}$ туп, $XOX_{\mathrm{IV}}$ раван, $XOX_{\mathrm{V}}$ тупо-испупчен, $XOX_{\mathrm{VI}}$ право-испупчен, $XOX_{\mathrm{VII}}$ оштро-испупчен, $XOX_{\mathrm{VIII}}$ пун. Ако зрак $OX$, после доласка у свој првобитни положај ($OX_{\mathrm{VIII}}$) продужи и даље своје обртање, онда се добијају углови већи од пуног угла, тј. углови који имају већи број степена од $360^0$. Тако, када зрак $OX$ поново дође у положај $OX_{\mathrm{II}}$, свака његова тачка чини обртање (лук) од $450^0$; а када дође у положај $OX_{\mathrm{IV}}$, добија се угао од $540^0$ итд. Из свега овога закључујемо: *да под углом не треба разумети ону површину између кракова угла, већ величину обртања ма које тачке зрака OX, изражену у степенима, од његовог првобитног до последњег положаја.*



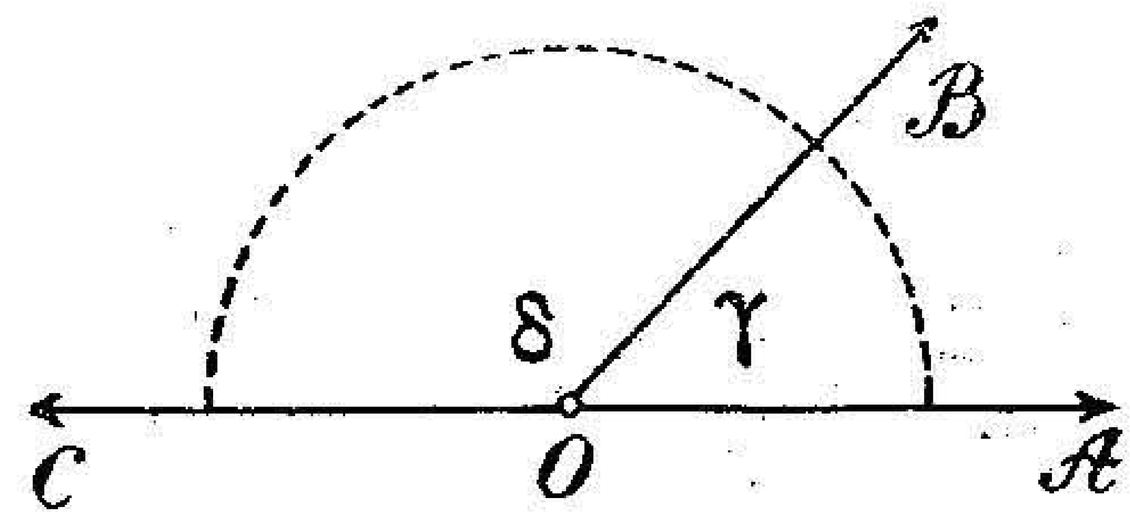

Сл. 24

**§ 11. — Веза између углова.** — *a)* За два угла каже се да су *комплементни* ако им збир износи $90^\circ$, а *суплементни* ако им збир износи $180^\circ$. Тако, углови од $60^\circ$ и $30^\circ$ јесу комплементни, а углови од $125^\circ$ и $55^\circ$ суплементни; углу од $70^\circ$ комплементан је угао од $20^\circ$, а суплементан угао од $110^\circ$.

*b)* За два угла каже се да су *суседни* ако имају заједнички крак и заједничко теме, а друга два крака могу имати или



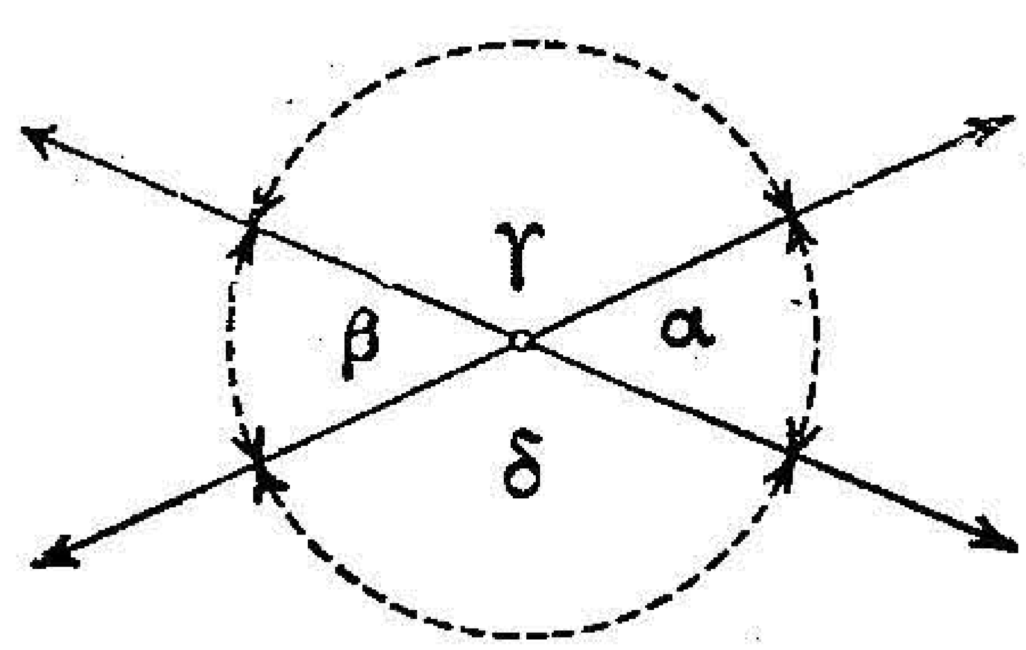

Сл. 25



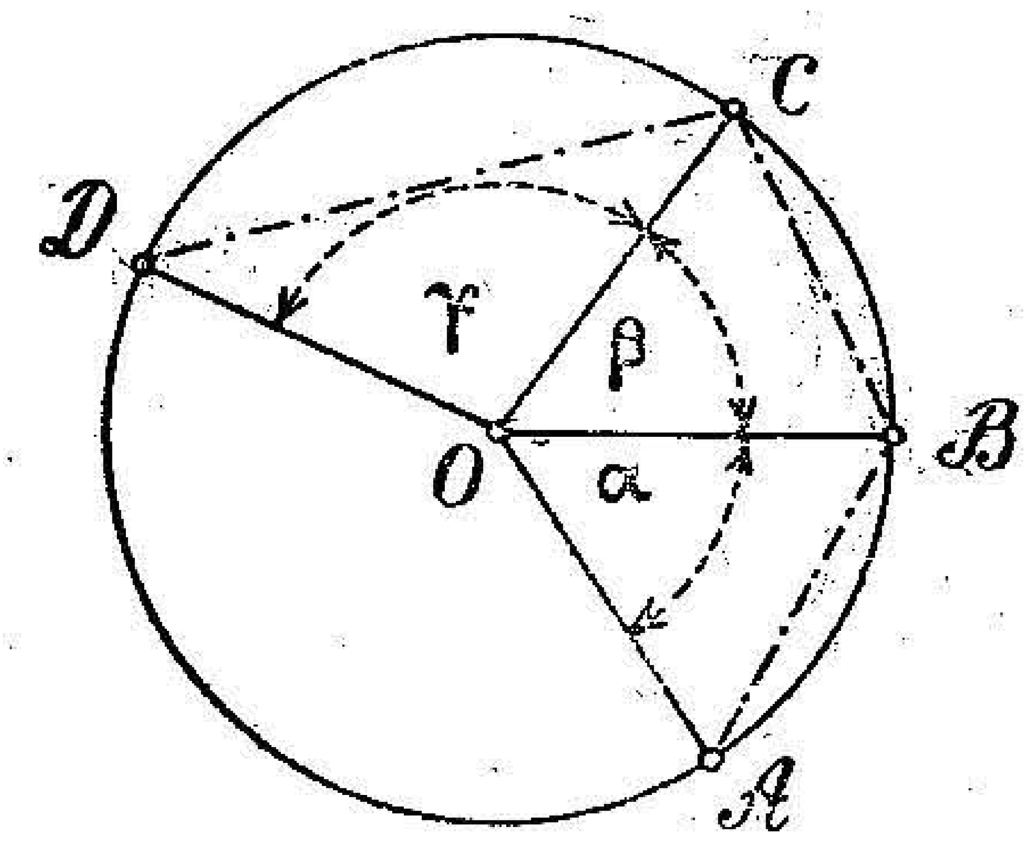

Сл. 26

немати исти правац. Такви су углови $\alpha$ и $\beta$ на сл. 25, или $\gamma$ и $\delta$ на сл. 26. Суседни углови, чији се спољњи краци налазе у истом правцу, али у супротном смислу, зову се *упоредни* (сл. 26). Како ови углови дају раван угао, а сваки раван угао има $180^\circ$, ***што су упоредни углови суплементни*** *(теорема 1)*.

*c)* За два угла каже се да су *унакрсни* ако имају заједничко теме, а краци једног угла јесу продужења кракова другог угла преко заједничког темена. Такви су углови $\alpha$ и $\beta$,




Сл. 27




Сл. 28

или $\gamma$ и $\delta$, на сл. 27. Како додавањем угла $\gamma$ најпре углу $\alpha$, а затим углу $\beta$, добијамо једнаке збирове од $180^\circ$ (I теорема), значи да су углови $\alpha$ и $\beta$ једнаки, тј. ***унакрсни углови су једнаки*** *(теорема 2)*.

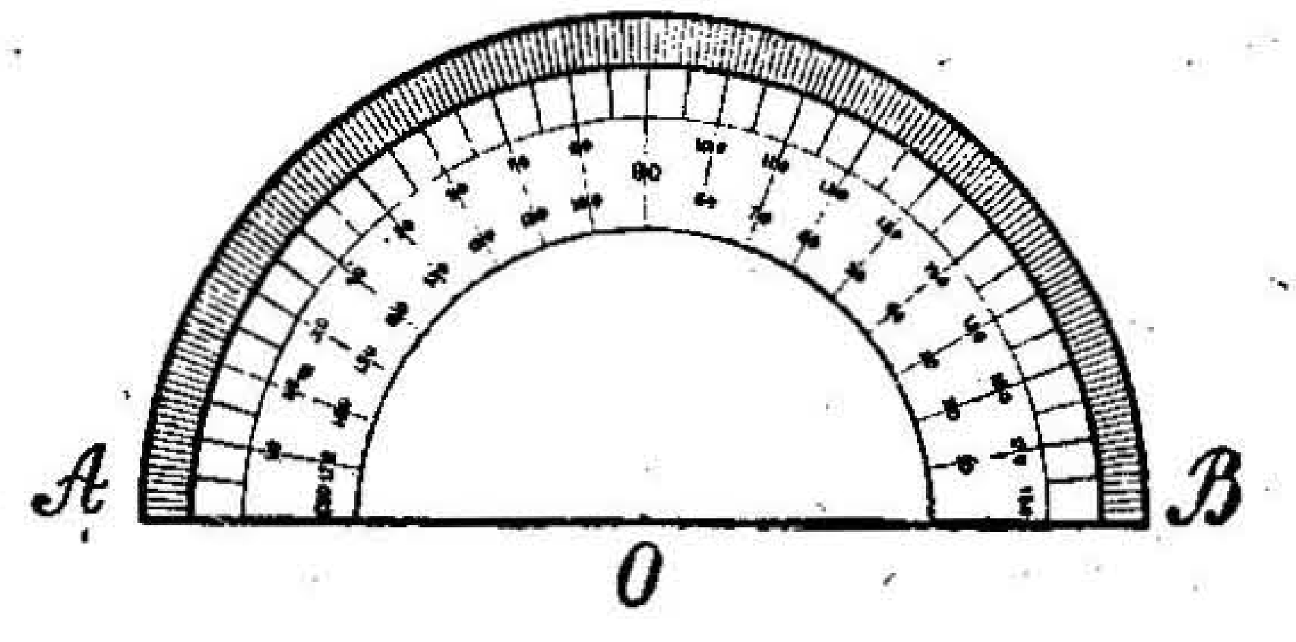
*d)* Угао чије се теме налази у центру круга, а краци су му полупречници, зове се *централни* или *средишни*. Такви су углови $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ на сл. 28. Ако су луци $AB$ и $BC$ једнаки, онда се сектори $AOB$ и $BOC$ поклапају кад их ставимо један на други. Поклапањем ових сектора доказује се једнакост углова $\alpha$ и $\beta$, а тако исто и тетивâ $AB$ и $BC$. Исто тако, ако су углови $\alpha$ и $\beta$ једнаки, онда се поклапају и сектори $AOB$ и $BOC$, те се тиме обелодањује једнакост лукова и тетивâ $AB$ и $BC$. Отуда имамо теорему: ***Једнаким луцима једнога круга (или кругова једнаких полупречника) одговарају једнаки средишни углови и једнаке тетиве; једнаким средишним угловима одговарају једнаки луци и једнаке тетиве*** (*теорема 3*). Иста теорема у важности је и за једнаке тетиве.

***Неједнаким луцима истог круга, или кругова једнаких полупречника, одговарају и неједнаки средишни углови и неједнаке тетиве, и то: већем луку одговара већи средишни угао, већа тетива; и обрнуто*** (*теорема 4*).

Да је и ова теорема тачна, можемо се уверити по томе што се сектори $AOB$ и $COD$ (сл. 28), чији лукови $AB$ и $CD$ (углови $\alpha$ и $\gamma$) нису једнаки, не могу поклопити када их ставимо један на други.

На основу горњих теорема увиђамо однос који постоји између средишних углова и њихових лукова. Ако замислимо да су једнаки луци $AB$ и $BC$ (сл. 28) подељени на $n$ делова и сваки део износи $1^0$ ($1'$ или $1''$), па све те деоне тачке спојимо са центром $O$, она се и средишни углови $\alpha$ и $\beta$ деле на $n$ углова и сваки такав угао има $1^0$ ($1'$ или $1''$). Према овоме, сваком лучном степену (минуту, секунду) одговара по један угаони степен (минут, секунд), или сваком луку од извесног броја степена, минута и секунада, одговара угао од истог броја степена, минута и секунада. Стога се лук узима као *мера* одговарајућег угла.

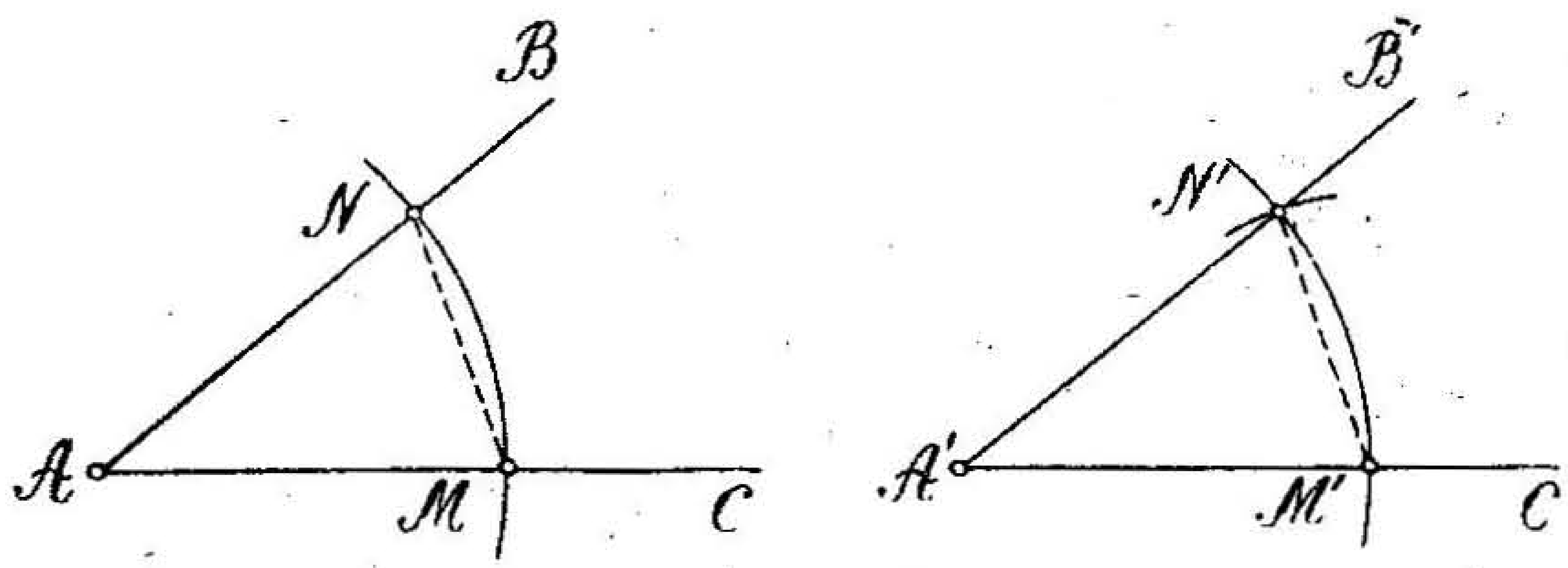
**§ 12. — Мерење и преношење угла.** — *а)* За мерење углова служимо се *угломером* (сл. 29). То је полукруг од хартије, дрвета или метала, подељен на $180^0$ степена. На њему тачка $O$ претставља центар, а $AB$ пречник. Када желимо да измеримо угао, стављамо угломер тако да центар падне на теме угла, а један крак да се поклопи



Сл. 29

с полупречником $OB$ или $OA$. После тога гледамо кроз који степен угломера пролази други крак угла. Дотични степен показује нам величину угла. При мерењу испупчених углова, меримо угломером њихове допуне. Одузимајући величину допуне од $360^0$, налазимо величину испупченог угла.

*b*) Да бисмо угао $BAC$ (сл. 30) пренели на друго место (на крак $A'C'$) тако да му тачка $A'$ буде теме, треба произвољним отвором шестара описати лук $MN$ око темена $A$. Истим отвором шестара описујемо око $A'$ лук који сече зрак $A'C'$ у $M'$. На овај лук, почевши од $M'$, преносимо шестаром тетиву $MN$ лука из датог угла. Углови $MAN$ и $M'A'N'$ јесу једнаки као централни углови над једнаким тетивама (§ 11, т. *d*).

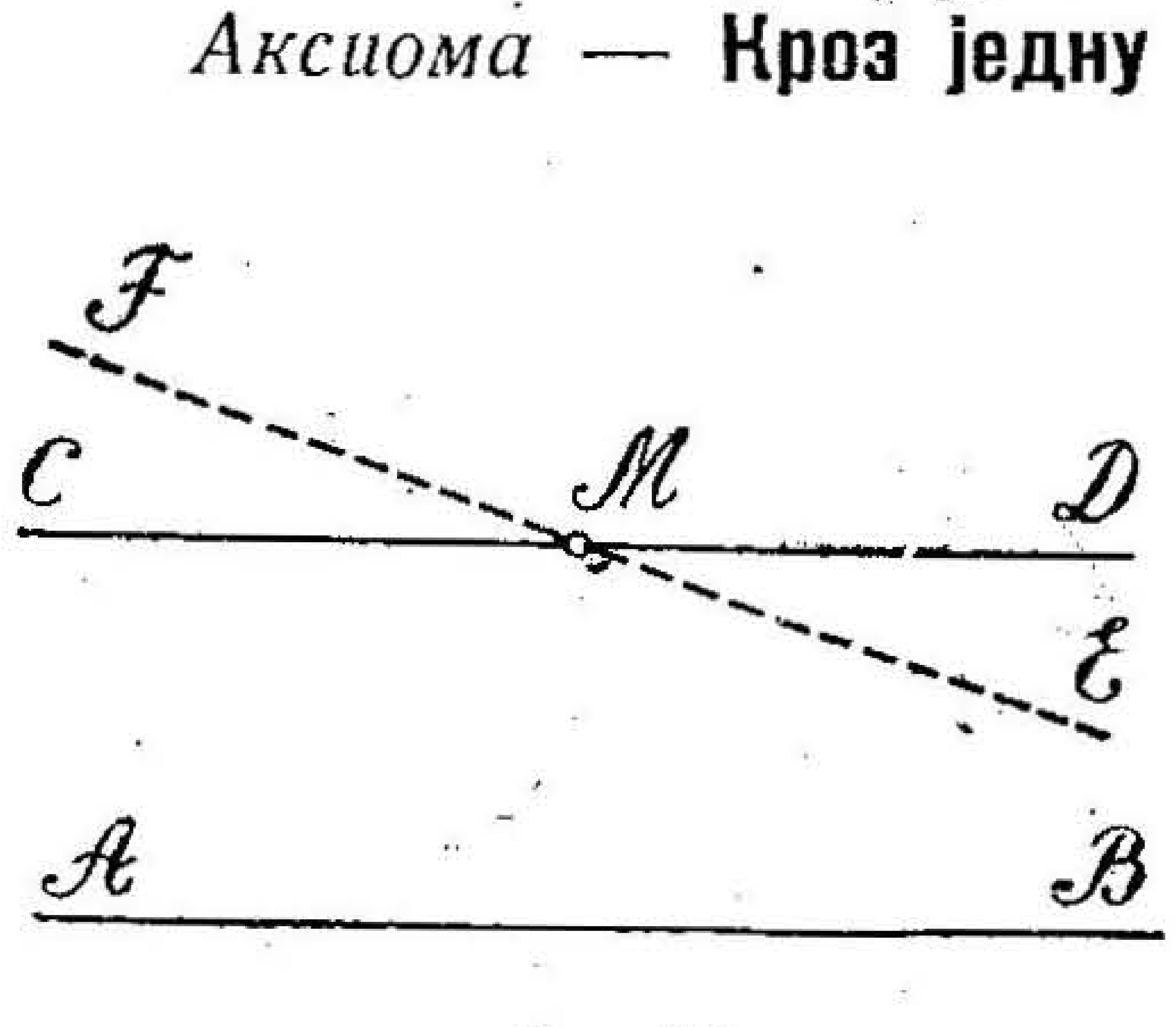


Сл. 30

## IV. Паралелне праве

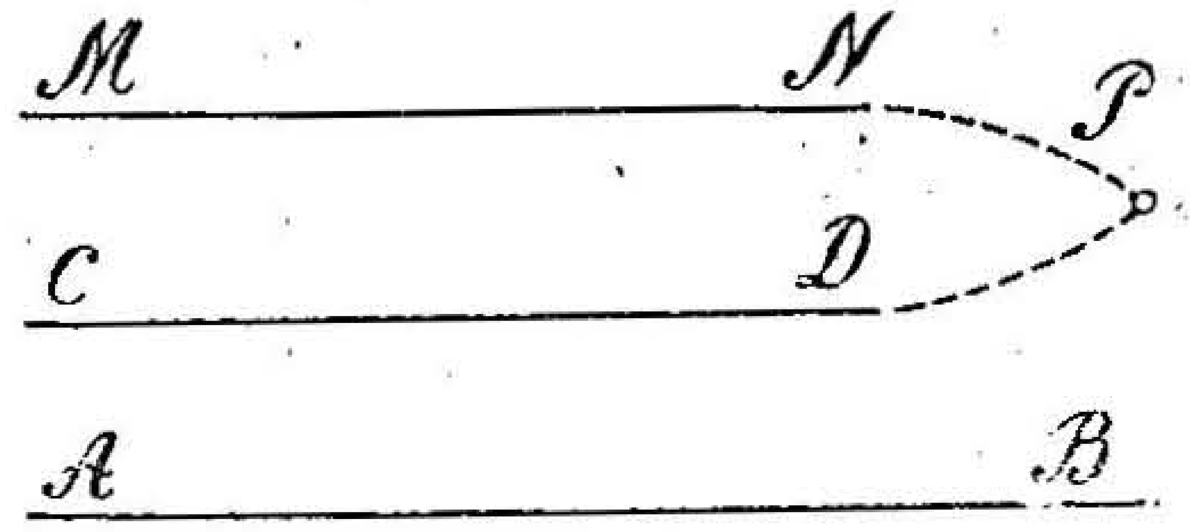
**§ 13.** — За две праве у једној равни каже се да су *паралелне* ако се никако не секу ма колико да их продужимо и с једне и с друге стране. Такве су праве $AB$ и $CD$ (сл 31), а њихова паралелност означава: $AB \parallel CD$ (§ 6). Ако праве у равни нису паралелне, онда се оне секу. Секу се двојако: *косо* и *нормално*, према томе да ли граде *косе* (оштре и тупе) или *праве* углове Да је нека права $AB$ нормална на правој $CD$, означава се: $AB \perp CD$.

*Аксиома* — **Кроз једну тачку ван неке праве може се повући само једна паралелна са том правом.** Заиста, ако је кроз тачку $M$ повучена права $CD$ паралелно са $AB$ (сл. 31), онда свака друга права $EF$, која пролази кроз $M$, сече при продужењу праву $AB$. На основу ове аксиоме могу се доказати следеће теореме:



Сл. 31

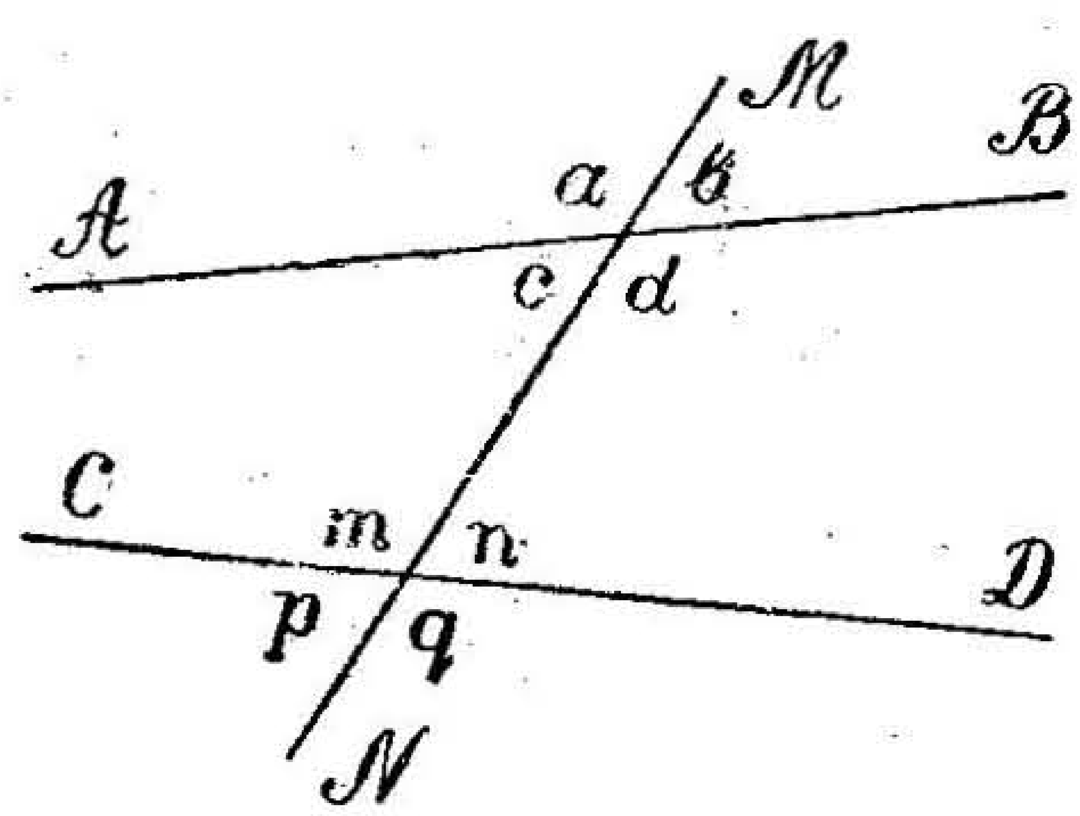
*Теорема 5.* — **Две паралелне с трећом правом паралелне су и међу собом.** Нека су праве *MN* и *CD* (сл. 32) паралелне с правом *AB*. Да бисмо доказали ову теорему, служимо се индиректним доказом*. Ако претпоставимо да није *MN* ∥ *CD*, онда би се оне предужене секле, на пример у тачци *P*. Тада бисмо имали две праве које пролазе кроз тачку *P*, ван праве *AB*, а обе су паралелне с правом *AB*. Како се ово коси са горњом аксиомом, то се праве *MN* и *CD* не могу сећи и онда остаје једино да су паралелне.



Сл. 32

*Теорема 6.* — **Ако су две праве паралелне, а нека трећа права сече једну од њих, онда она продужена сече и другу.** Нека су праве *AB* и *CD* (сл. 31) паралелне, а права *EF* сече *CD* у тачци *M*. Ако претпоставимо да *EF* продужена не сече и *AB*, онда би била с њом паралелна. Тада бисмо имали две праве *CD* и *EF*, које пролазе кроз тачку *M*, ван праве *AB*, а обе да су паралелне с њом, што је немогуће, пошто се коси са горњом аксиомом.

**§ 14. — Сагласни, наизменични и супротни углови.** — Права која сече друге две паралелне или непаралелне праве зове се *трансверзала.* Она гради са пресеченим правама осам углова, од којих су 4 спољашња а 4 унутрашња. Спољашњи су углови изван пресечених правих (*a*, *b*, *p*, *q*, на сл. 33), а унутрашњи између тих правих (*c*, *d*, *m*, *n*). Ове углове делимо на: *сагласне*, *наизменичне* и *супротне.*



Сл. 33

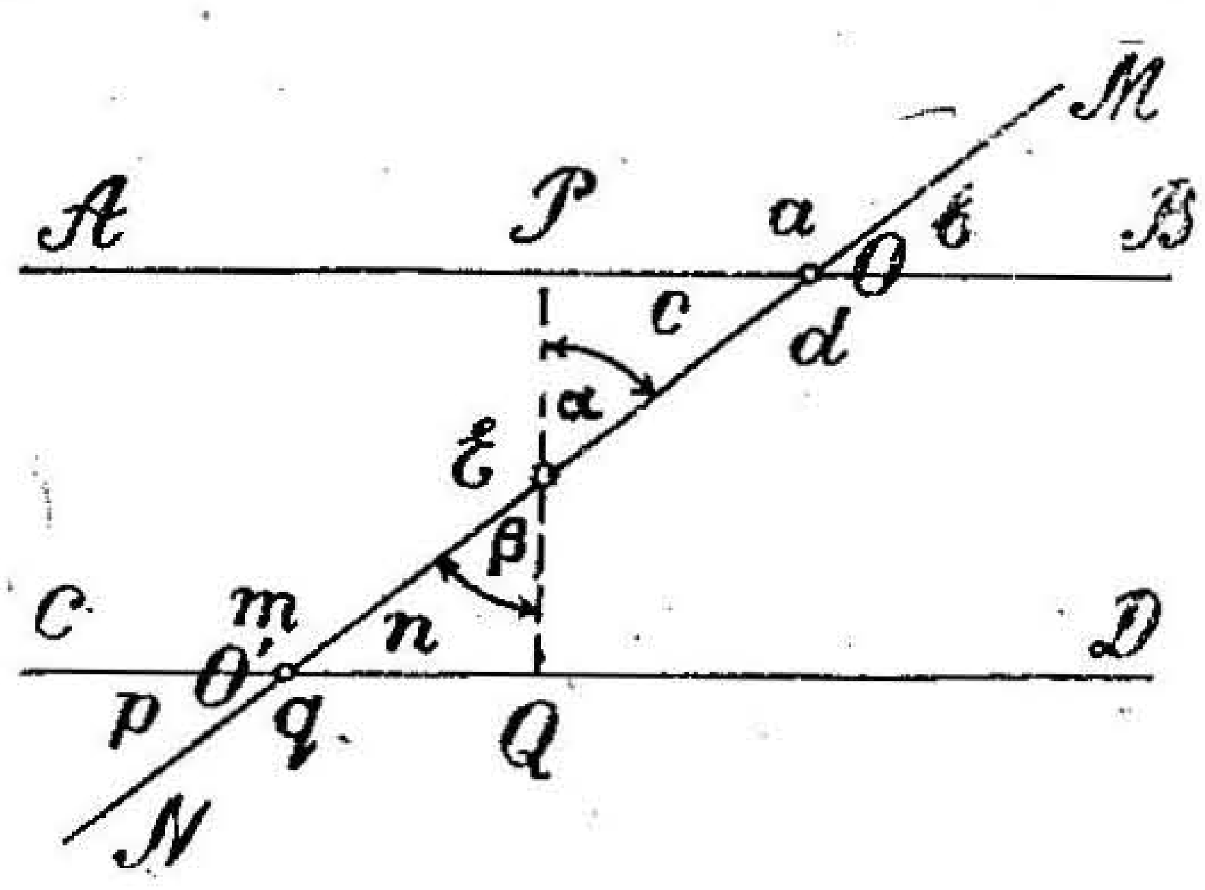
Сагласни су: *један спољашњи и један унутрашњи угао који се налазе на истој страни трансверзале, а са разним теменима (a и m, b и n, c и p, d и q).*

* То је доказ којим се истинитост теореме доказује тиме што се узима претпоставка супротна теореми, па применом ранијих теорема и аксиома наилазимо на закључак из кога се види погрешност наше претпоставке а тачност теореме.

Наизменични су: *два спољашња или два унутрашња угла који се налазе на разним странама трансверзале и са разним теменима ($a$ и $q$, $b$ и $p$, $c$ и $n$, $d$ и $m$).*

Супротни су: *два спољашња или два унутрашња угла који се налазе на истој страни трансверзале, а са разним теменима ($a$ и $p$, $b$ и $q$, $c$ и $m$, $d$ и $n$).*

*Теорема 7.* — **Ако су пресечене праве паралелне, онда су: 1) сагласни углови једнаки; 2) наизменични су углови такође једнаки; и 3) супротни су углови суплементни.**




Сл. 34

*Доказ.* — a) Ако претпоставимо да су праве $AB$ и $CD$ (сл. 34) паралелне и ако трансверзалу $MN$ пресечемо тачком $E$, на средини између пресечних тачака $O$ и $O'$, па обе праве $CD$ и $NE$ померамо тако да $NE$ клизи по $EM$, а да сваки доцнији положај праве $CD$ буде паралелан према правој $AB$, онда ће, после извесног померања, права $CD$ поклопити праву $AB$, $NE$ поклопити $EM$, а теме $O'$ пада на теме $O$. Тада се углови $m$ и $a$, $n$ и $b$, $p$ и $c$, $q$ и $d$ поклапају. Поклапањем тих углова, за које је горе казато да су сагласни, доказује се и њихова једнакост.

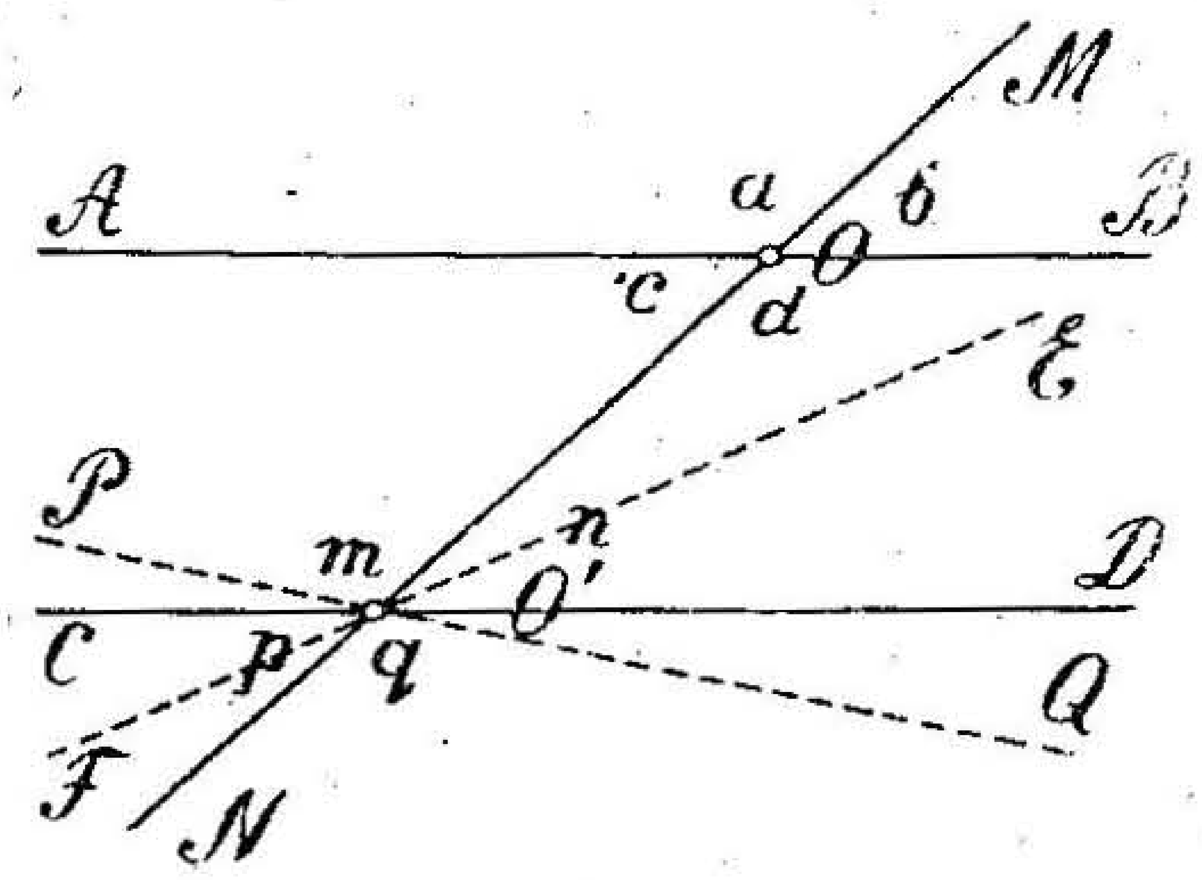
b) Ако су праве $AB$ и $CD$ паралелне, онда једнакост наизменичних углова доказујемо помоћу једнакости сагласних и унакрсних углова на следећи начин: $\sphericalangle q = \sphericalangle d$ као сагласни, а $\sphericalangle a = \sphericalangle d$ као унакрсни. Стога су и наизменични углови $a$ и $q$ једнаки, пошто су оба једнака са углом $d$, на основу аксиоме: две количине једнаке трећој једнаке су и међу собом. Исто тако:

$b = c$ као унакрсни, $p = c$ као сагласни, те је $b = p$;
$c = b$ „ „ , $n = b$ „ „ , „ „ $c = n$; и
$d = a$ „ „ , $m = a$ „ „ , „ „ $d = m$.

c) Ако су праве $AB$ и $CD$ паралелне, онда суплементност супротних углова доказујемо помоћу једнакости сагласних углова и суплементности упоредних углова (теорема 1, § 14) на следећи начин: $\sphericalangle m = \sphericalangle a$ као сагласни, а како је $a + c = 180^0$ као упоредни, то заменом у овој једначини $\sphericalangle a$ са $\sphericalangle m$ добијамо: $m + c = 180^0$. Истим путем налазимо да је: $n + d = 180^0$, $a + p = 180^0$ и $b + q = 180^0$.

*Напомена.* — Доказ ове теореме био би прегледнији помоћу теореме: *да је збир унутрашњих углова једнога троугла 180°*, која је наведена у следећем одељку, а која је свима ученицима позната из нижих разреда. Помоћу ове теореме најпре можемо доказати једнакост наизменичних углова $c$ а $n$ повлачењем $PQ$ кроз тачку $E$ (средина дужи $OO'$), а која је нормална на паралелним правама $AB$ и $CD$. Тада правоугли троуглови $EPO$ и $EQO'$ имају углове $\alpha$ и $\beta$ једнаке као унакрсне, те су једнаки и углови $c$ и $n$, као њихови комплементни углови. Из једнакости ових углова излази једнакост и њихових унакрсних углова $b$ и $p$, а затим и једнакост њихових суплементних углова $d$ и $m$, односно $a$ и $q$ итд.

*Теорема 8.* — **Ако су сагласни углови једнаки, или ако су наизменични углови једнаки, или ако су супротни углови суплементни, онда су пресечене праве паралелне.** а) Нека су сагласни углови $a$ и $m$ једнаки (сл. 35). Ако претпоставимо да права $CD$ није паралелна са $AB$, већ да је права $EF$, која пролази кроз $O'$, паралелна, онда би по претходној теореми био $\sphericalangle\, a = \sphericalangle\, OO'F$, као сагласни. Па како је $\sphericalangle\, a = \sphericalangle\, m$, то би и $\sphericalangle\, m = OO'F$, што је немогуће, пошто је $\sphericalangle\, m$ део угла $OO'F$. Ако затим претпоставимо да је $PQ \parallel AB$, онда би био $\sphericalangle\, a = OO'P$. Па како је $\sphericalangle\, a = \sphericalangle\, m$, то би и $\sphericalangle\, m = \sphericalangle\, OO'P$, што је опет немогуће, пошто је $\sphericalangle\, OO'P$ део угла $m$. Па како нису паралелне са $AB$ ни $EF$ ни $PQ$, то једино остаје да је $CD \parallel AB$.



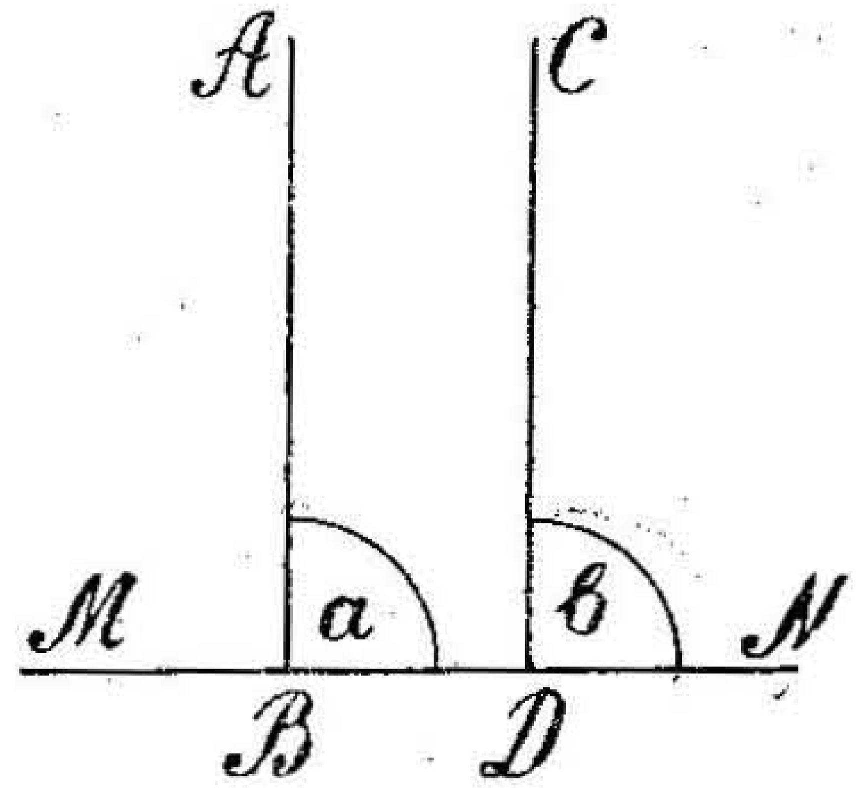
Сл. 35

b) Нека су наизменични углови $d$ и $m$ једнаки. Како је $\sphericalangle\, d = \sphericalangle\, a$ као унакрсни, то су и углови $a$ и $m$ једнаки. Стога је, према доказу под а), права $CD \parallel AB$.

c) Нека су супротни углови $a$ и $p$ суплементни, тј. $a + p = 180^0$. Па како је $p + m = 180^0$ као упоредни, то је $a + p = p + m$, или $a = m$. Стога, према доказу под а), $CD \parallel AB$.

**§ 15.** — Важност теорема 7 и 8 из претходног параграфа је велика, јер је њихова примена врло честа. Као последице ових теорема јесу ове теореме:

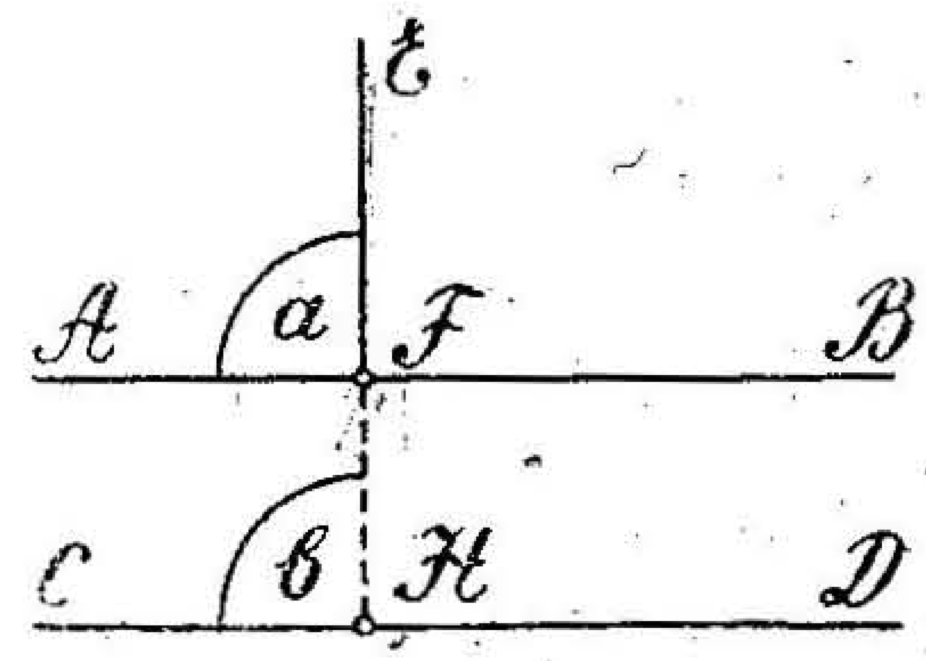
*Теорема 9.* — **Две праве нормалне на трећој правој паралелне су међу собом.** Ако је $AB \perp MN$ и $CD \perp MN$ (сл. 36), онда су углови $a$ и $b$, као прави, једнаки. Међутим, ови су углови сагласни, па пошто су и једнаки, то је по 8 теореми $AB \parallel CD$.




Сл. 36

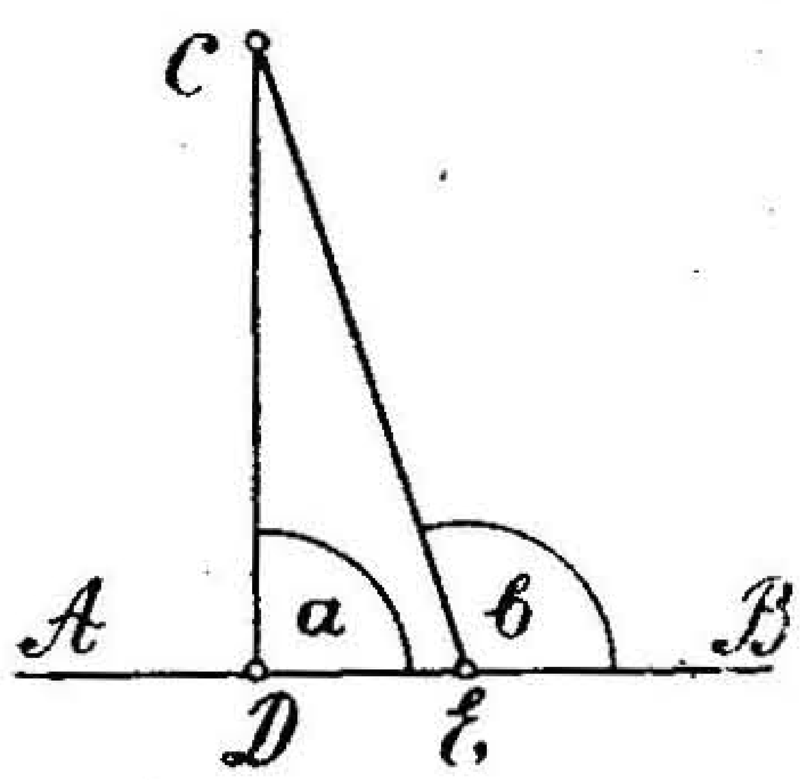
*Теорема 10.* — **Ако су две праве паралелне, па је једна од њих нормална на трећој правој, онда је друга нормална на њој.** Ако су праве $AB$ и $CD$ (сл. 36) паралелне и $AB \perp MN$, онда су углови $a$ и $b$, као сагласни једнаки. Па како је $AB \perp MN$, то је $\sphericalangle a$ прав. Стога је и $\sphericalangle b$, као једнак са $\sphericalangle a$, прав, те је и $CD \perp MN$.

*Теорема. 11.* — **Ако је једна права нормална на једној од двеју паралелних правих, нормална је и на другој.** Нека је $AB \parallel CD$ и $EF \perp AB$ (сл. 37). Ако $EF$ продужимо до пресека са $CD$, онда су углови $a$ и $b$, као сагласни, једнаки. Па како је $\sphericalangle a$ прав, то је и $\sphericalangle b$ прав, те је $EH \perp CD$. Теореме 10 и 11 у ствари имају једно исто значење.



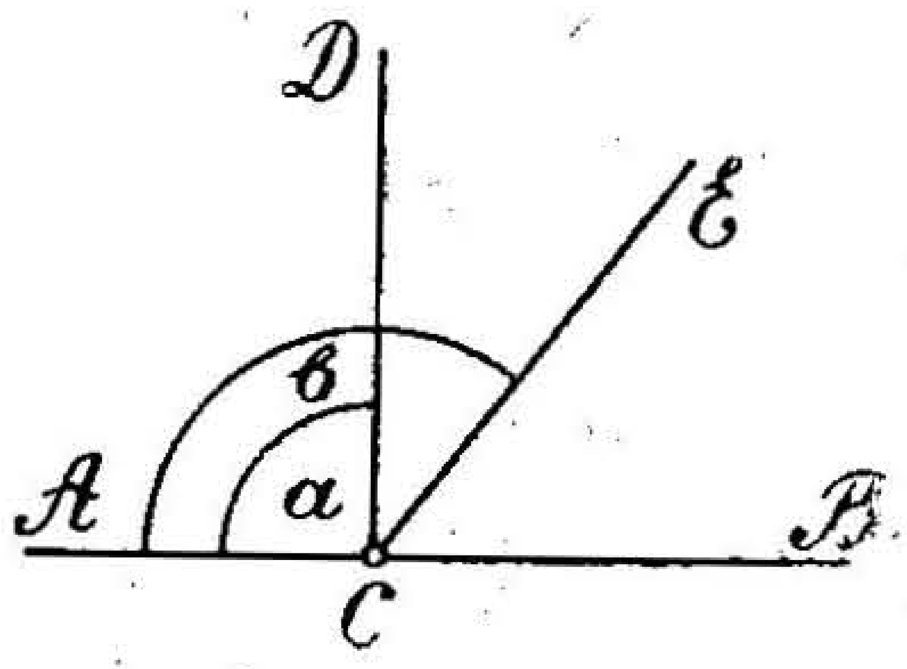

Сл. 37

*Теорема 12.* — **Из једне тачке ван неке праве може се спустити само једна нормална на ту праву.** Ако је дато да је $CD \perp AB$ (сл. 38), онда је $\sphericalangle a$ прав. Ако претпоставимо да је и права $CE \perp AB$, што се коси са овом теоремом, онда би и $\sphericalangle b$ био прав. Тада би углови $a$ и $b$, као прави, били једнаки. А како су ови углови сагласни, онда би праве $CD$ и $CE$ биле, према 8 теореми, паралелне, што није случај. Стога наша претпоставка, да је и права $CE \perp AB$, као нетачна, отпада. Према томе, само је $CD \perp AB$.




Сл. 38

*Теорема 13.* — **У једној тачки неке праве може се подићи само једна нормала на тој правој.** Ако је дато да је $CD \perp AB$ (сл. 39), онда је $\sphericalangle a$ прав. Ако претпоставимо да је права $CE \perp AB$, онда би и $\sphericalangle b$ био прав. У том случају углови $a$ и $b$ били би једнаки. Међутим, ово се коси са аксиомом

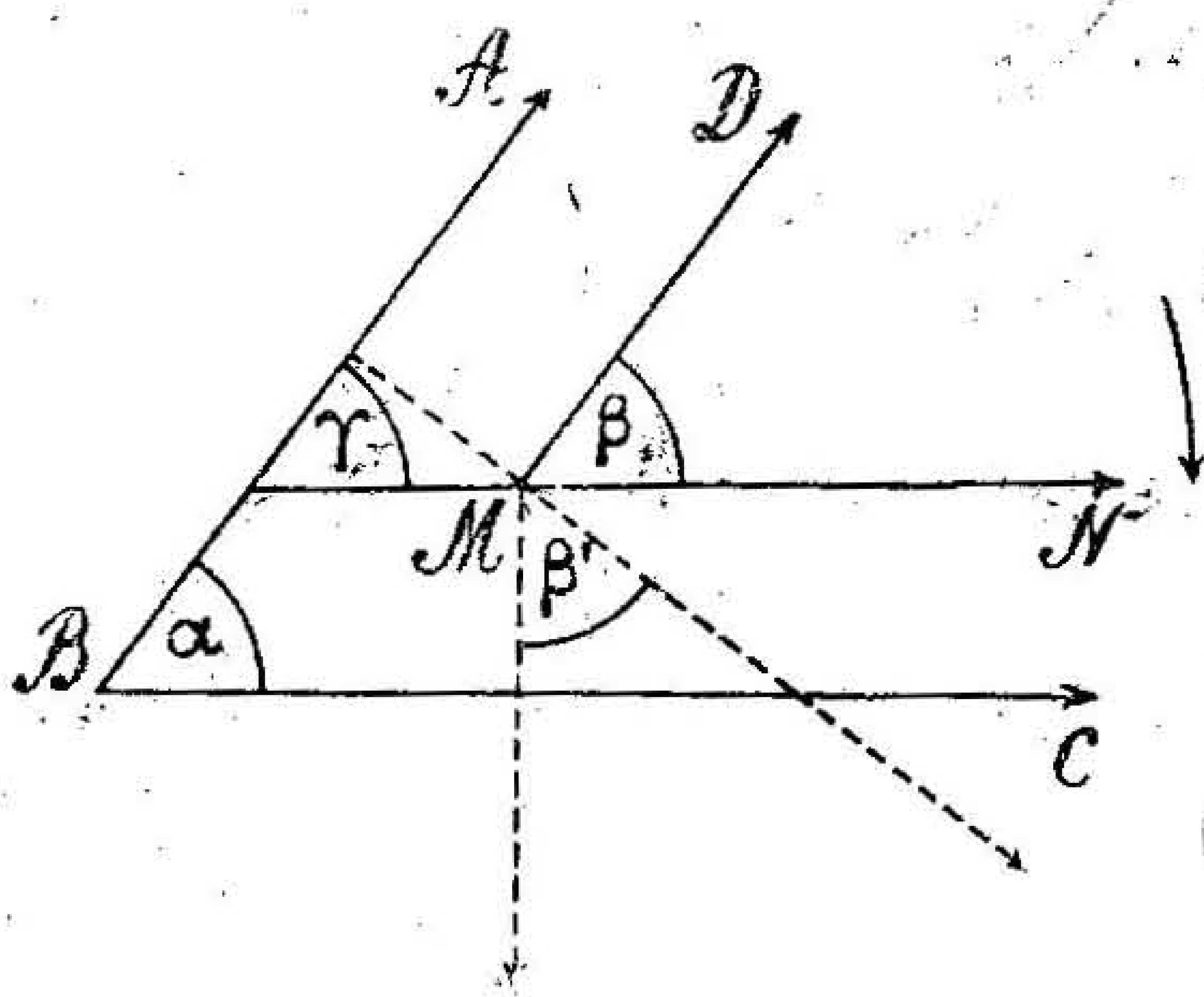



Сл. 39

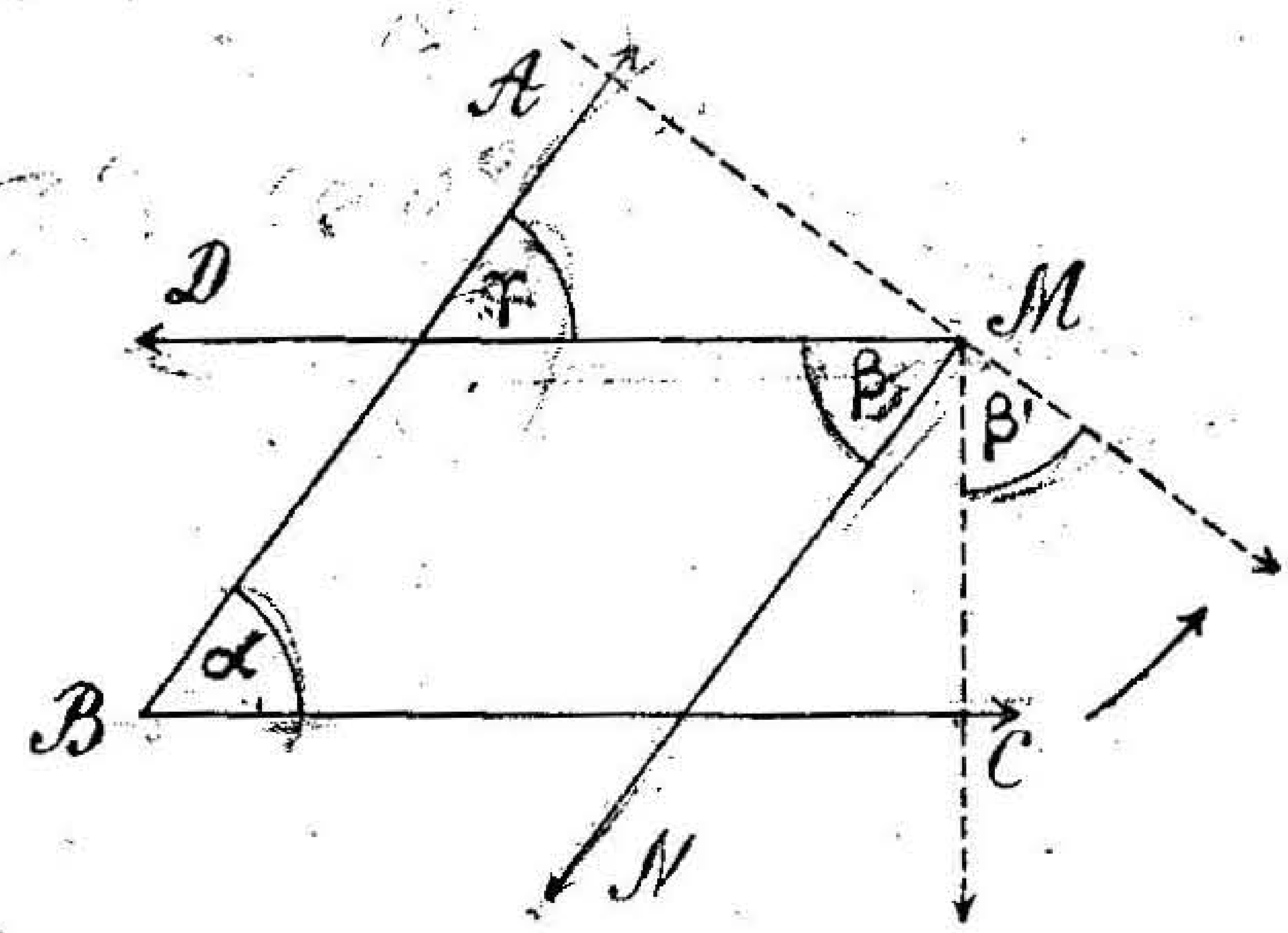
*да је сваки део мањи од своје целине.* Овде је $\sphericalangle a$, као део угла $b$, мањи од угла $b$. Стога $\sphericalangle b$ није прав, те наша претпоставка да је и $CE \perp AB$, као нетачна, отпада. Остаје једино да је $CD \perp AB$.

*Теорема 14.* — **Два су угла једнака ако су им оба пара кракова у истом или у супротном смислу паралелна, а суплементни су ако им је један пар кракова паралелан у истом, а други пар кракова у супротном смислу.**

а) Нека је $AB \parallel DM$ и $BC \parallel MN$ (сл. 40). Продужењем крака $MN$ до пресека са краком $AB$ добија се $\sphericalangle\gamma$. Тада је




Сл. 40

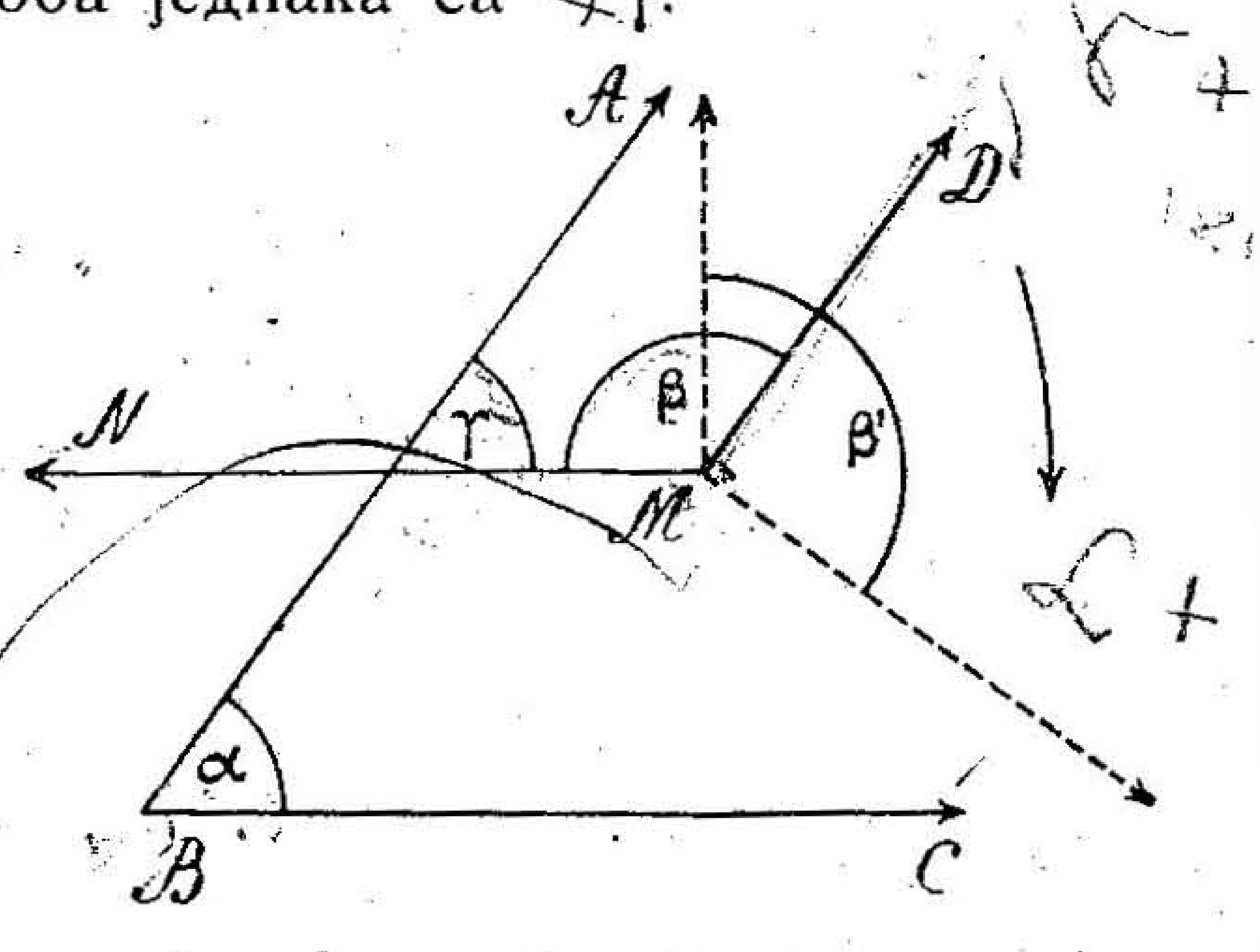



Сл. 41

$\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\gamma$ као сагласни, а $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma$ такође као сагласни. Стога је $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta$, пошто су оба једнака са $\sphericalangle\gamma$.

*b*) Нека је $AB \parallel MN$ и $BC \parallel MD$ (сл. 41) у супротноме смислу. Тада је $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\gamma$ као сагласни, а $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma$ као наизменични. Стога је и $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta$, пошто су оба једнака са $\sphericalangle\gamma$.

*c*) Нека је $AB \parallel MD$ у истом и $BC \parallel MN$ (сл. 42) у супротноме смислу. Тада је $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\gamma$ као сагласни, а $\sphericalangle\gamma + \sphericalangle\beta = 180^0$ као супротни.



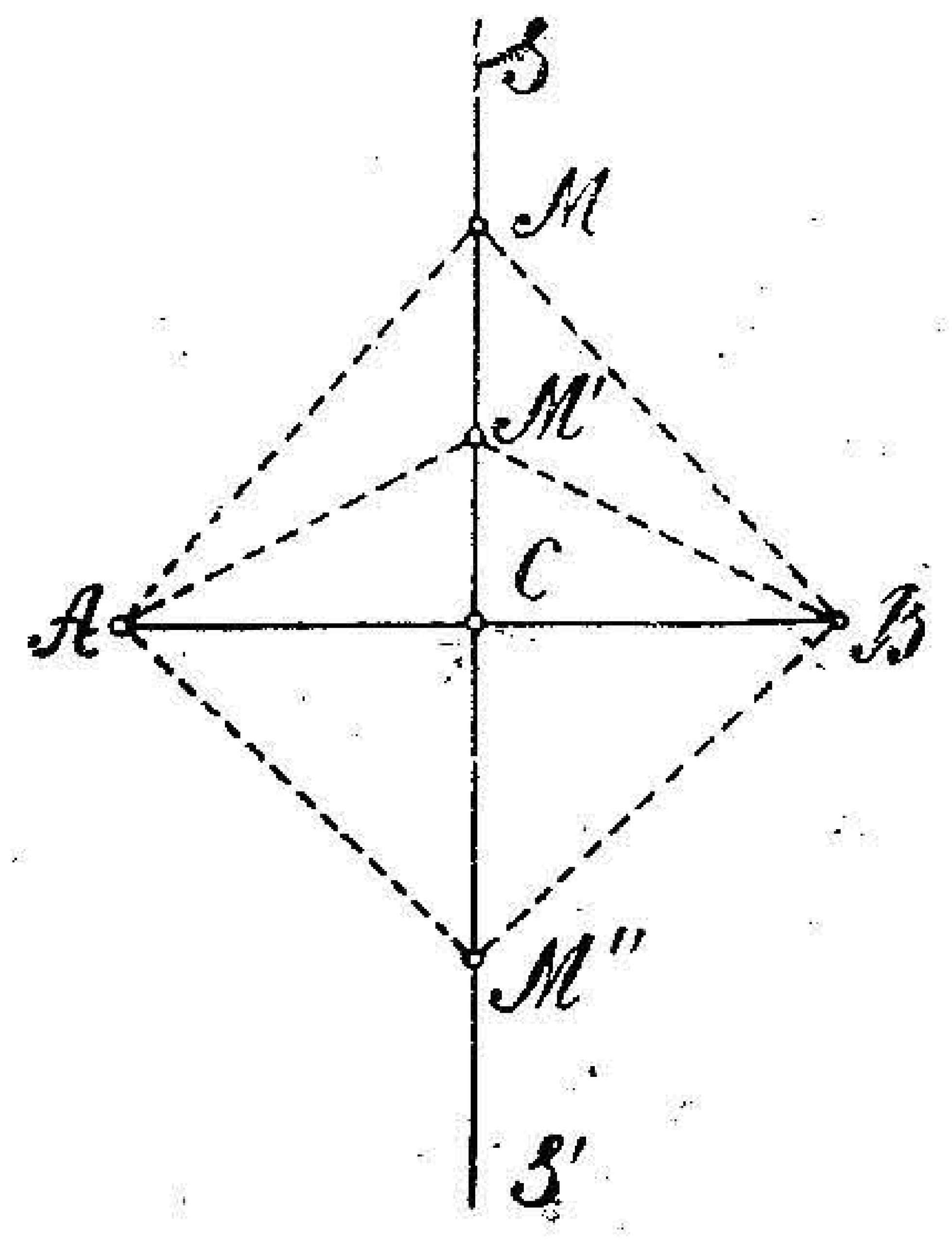

Сл. 42

Ако сабирак $\gamma$ заменимо са $\alpha$, добијамо $\alpha + \beta = 180^0$, тј. углови $\alpha$ и $\beta$ су суплементни.

*Теорема 15.* — **Када краци једног угла стоје нормално на крацима другог угла, онда су ти углови једнаки ако су им краци у истом или у супротном смислу нормални, а суплементни ако су**

**им два крака у истом, а два у супротном смислу нормални.** Ако угао $\beta$ код слика 40, 41 и 42 обрнемо за $90^0$ у смислу означених стрелица, онда ће краци овог угла бити нормални на крацима угла $\alpha$ и заузима положај угла $\beta'$. Како $\measuredangle\beta$ обртањем не мења своју величину, то је $\measuredangle\beta = \measuredangle\beta'$. Па како је по претходној теореми $\measuredangle\beta = \measuredangle\alpha$, код I и II случаја, а код III је $\alpha + \beta = 180^0$, то је, заменом $\measuredangle\beta$ са $\measuredangle\beta'$, $\alpha = \beta'$ у I и II случају, а у III је $\alpha + \beta' = 180^0$.

**§. 13. — Симетрала дужи и угла и њихове особине.** — а) Под симетралом једне дужи разумемо праву која полови ту дуж и стоји на њој нормално. Тако, права $SS'$ (сл. 43) је симетрала дужи $AB$. Особина симетрале дужи исказана је овом теоремом:

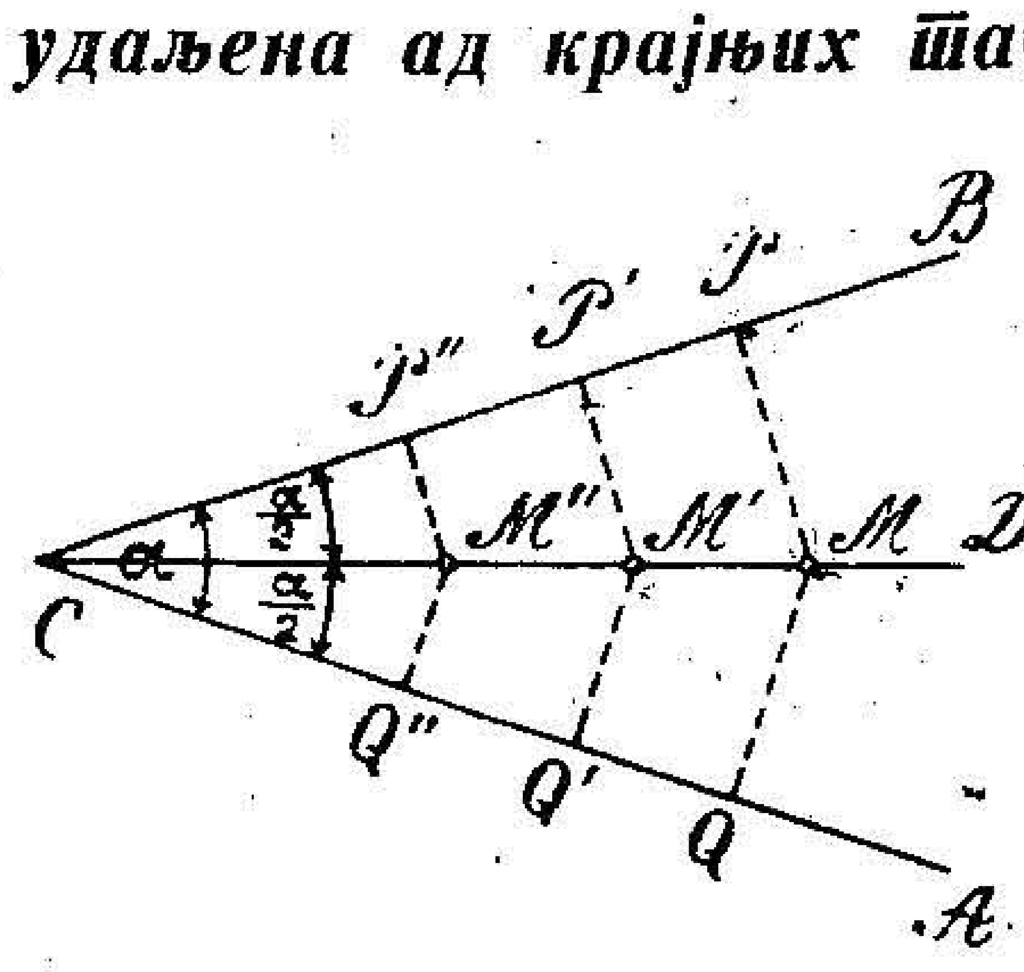


Сл. 43

*Теорема 16.* — **Свака тачка на симетрали једне дужи подједнако је удаљена од крајњих тачака те дужи.** Ако на симетрали $SS'$ узмемо произвољну тачку $M$ и спојимо је са крајњим тачкама дужи $AB$, добијамо троуглове $ACM$ и $BCM$. Обртањем троугла $ACM$ за $180^0$ око $CM$, поклопиће троугао $BCM$, пошто су углови код $C$, као прави, једнаки, затим дуж $AC$ иде правцем дужи $CB$ и као једнака поклапа се с њом. Како тачка $A$ поклапа тачку $B$, то се стране $AM$ и $BM$ поклапају, чиме се доказује њихова једнакост. Истим се путем доказује да су симетралине тачке $M'$, $M''$... подједнако удаљене од крајњих тачака дужи $AB$.

Очевидно је тачна и супротна теорема овој теореми; она гласи: ***Тачка која је подједнако удаљена ад крајњих тачака једне дужи налази се на њеној симетрали*** (*теорема 17*).

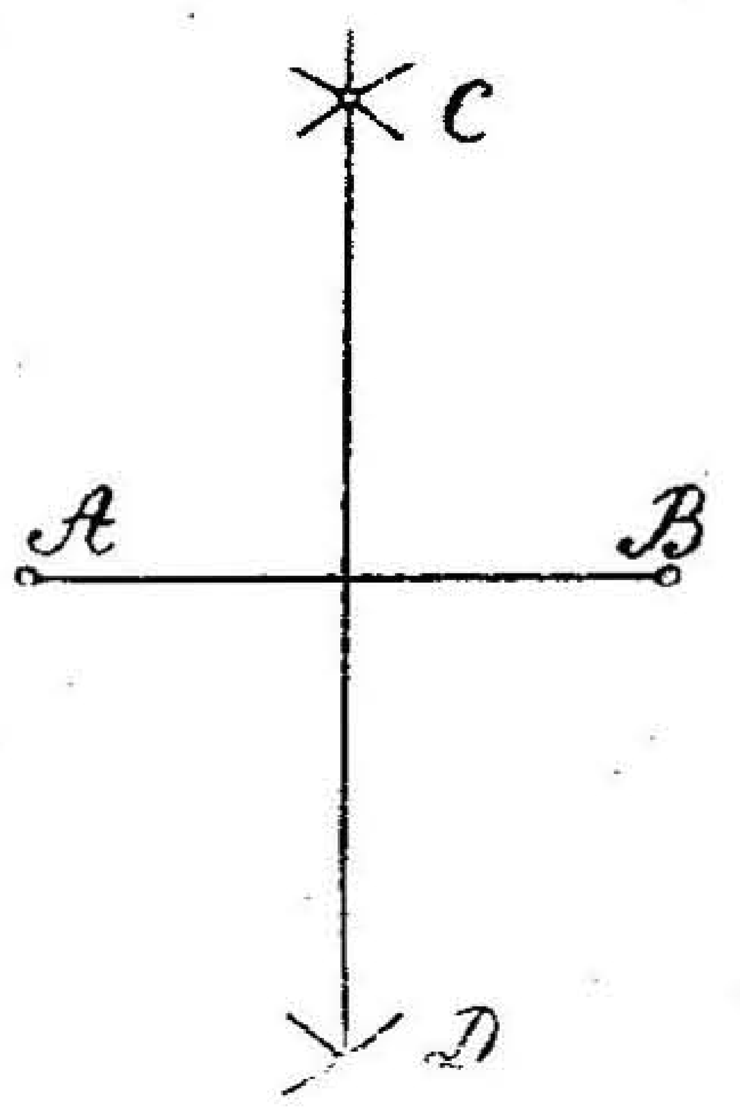
b) Под симетралом једног угла разумемо праву која полови угао. Таква је права $CD$ угла $ABC$ (сл. 44). Особина симетрале угла исказана је овом теоремом: ***Свака тачка на симетрали једнога угла подједнако је удаљена од кракова угла*** (*теорема* 18). Ако на симетрали $CD$ узмемо произвољну тачку $M$,



Сл. 44

па из ње спустимо нормале $MP$ и $MQ$ на краке угла, добијамо троуглове $MQC$ и $MPC$. Обртањем ма ког од тих троуглова око заједничке стране $CM$ за $180^0$, они се потпуно поклапају, пошто се поклапају краци $CB$ и $CA$, услед једнакости углова $BCD$ и $ACD$, и заузимају исти правац. Тада се поклапају и нормале $MQ$ и $MP$, јер се из једне тачке $(M)$ ван неке праве $(CA$ или $CB)$ може повући само једна нормала на ту праву (теорема 12), чиме је доказана и њихова једнакост. Истим се путем доказује да је $M'P' = M'Q'$, $M''P'' = M''Q''$ итд. Супротна теорема, која је очевидно тачна, гласи: **Тачка која је подједнако удаљена од кракова једног угла налази се на његовој симетрали** *(теорема 19)*.

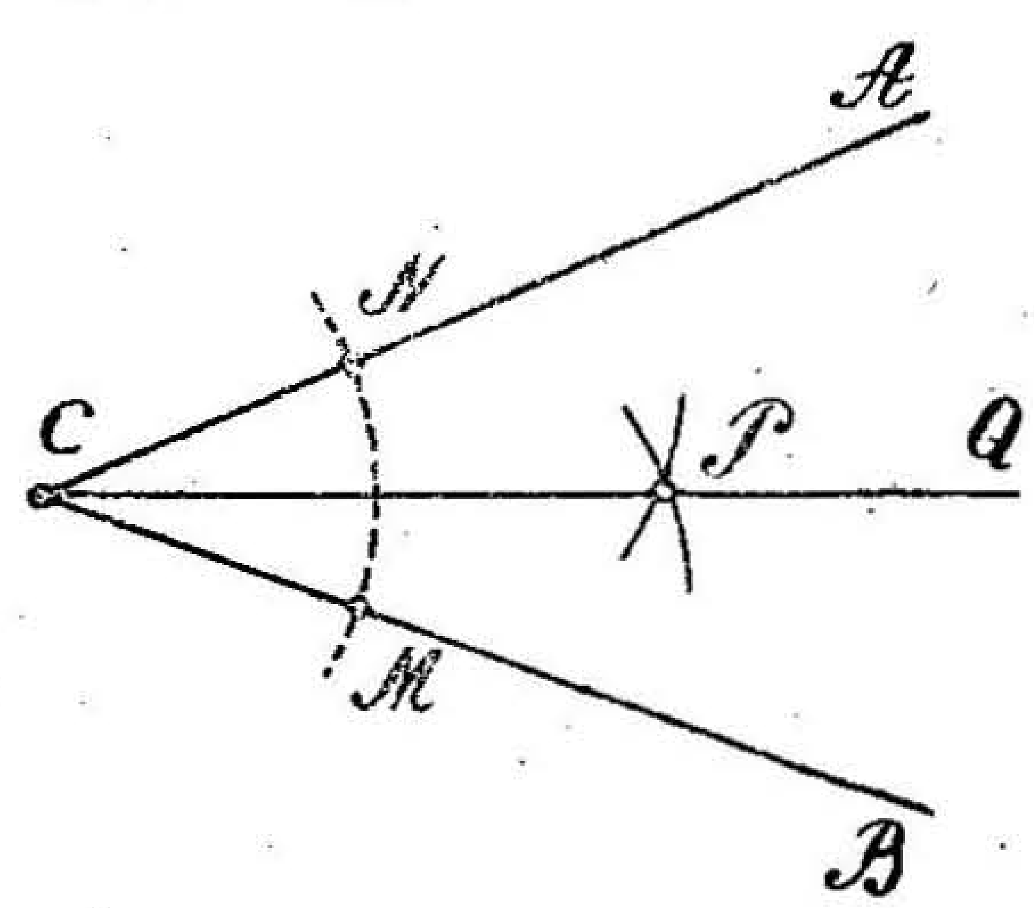
## § 17. — Основни конструктивни задаци из I одељка. —



Сл. 45

1) *Конструкција симетрале једне дужи.*— Треба најпре око једне крајње тачке дужи, отвором шестара са више од половине дате дужи описати лукове и с горње и с доње стране, а затим, истим отвором шестара, око друге крајње тачке описати лукове који секу прве. Спајањем пресечних тачака ових лукова, добија се тражена симетрала ($CD$, сл. 45). Овом конструкцијом чинимо да су тачке $C$ и $D$ подједнако удаљене од крајњих тачака дужи $AB$, које су узете за центре кругова једнаких полупречника. Стога је $CD$, по 17 теореми претходног параграфа, заиста симетрала дужи $AB$. Конструкцијом симетрале једне дужи делимо истовремено ту дуж на два једнака дела.

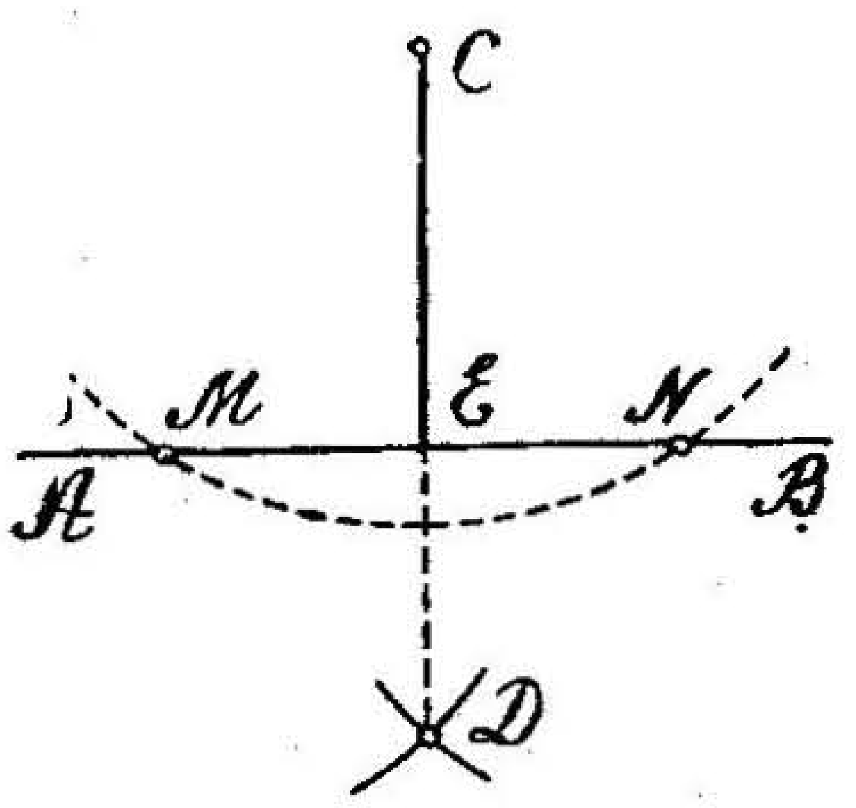
2) *Конструкција симетрале једног угла.* — Треба најпре произвољним отвором шестара описати око темена датог угла лук, који сече оба крака ($M$ и $N$, сл. 46), а затим истим отвором шестара, или отвором који је већи од половине лука између кракова, описати најпре око $M$, а затим око $N$, лукове у унутрашњости угла. Спајањем пресечне тачке $P$ ових лукова са теменом угла, добија се тражена симетрала $CQ$. Конструкцијом симетрале једног угла, делимо истовремено угао на два једнака дела.



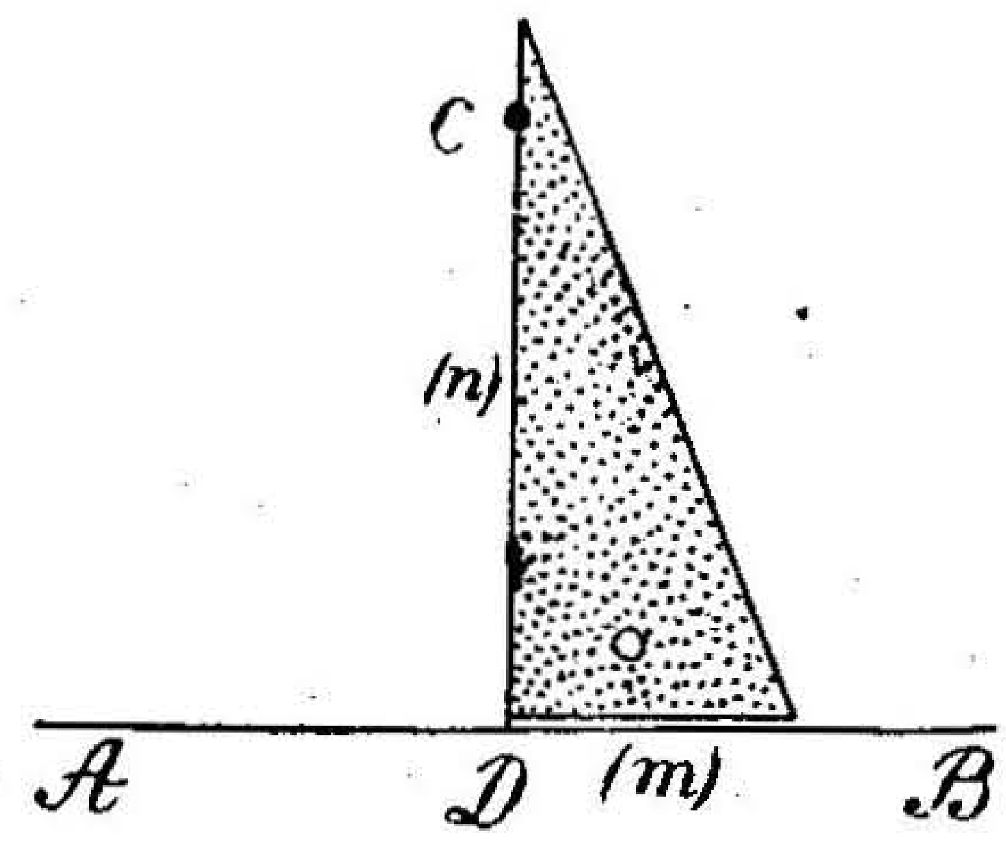
Сл. 46

3) *Спуштање нормале из неке тачке ван праве на праву.* —

а) Ако имамо да спустимо нормалу из тачке $C$ на праву $AB$ (сл. 47), треба најпре око тачке $C$, толиким отвором шестара описати лук, да овај сече дану праву (у $M$ и $N$). Затим конструисати симетралу добивене дужи $MN$. Симетрала ове дужи пролази кроз тачку $C$ (Зашто?).



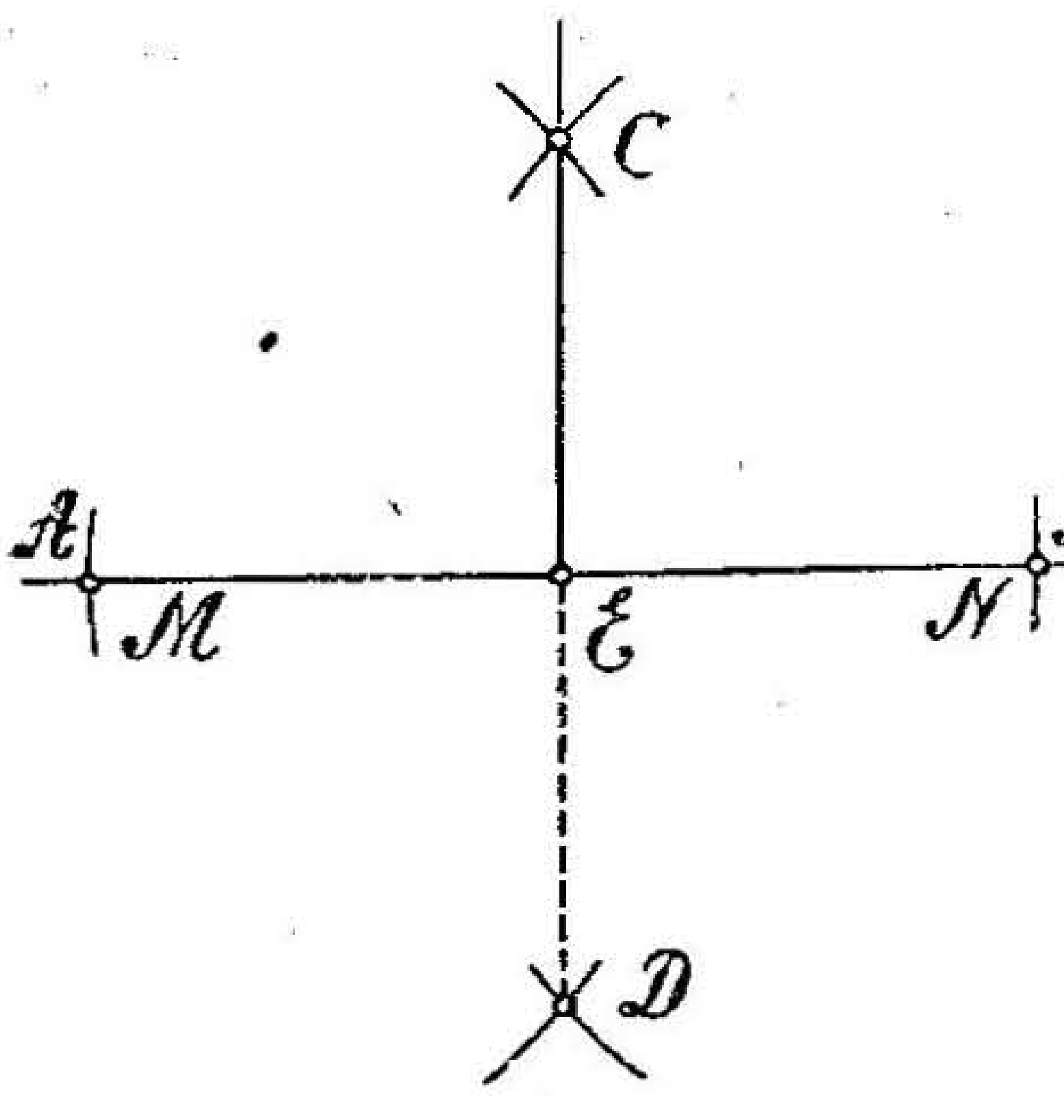

Сл. 47




Сл. 48

b) Ако желимо да из тачке $C$ спустимо нормалу на $AB$ (сл. 48) помоћу правоуглог троугаоника, онда треба најпре троугаоник наместити тако да се његова ивица ($m$) поклапа с правом $AB$, а тачка $C$ да се налази на ивици ($n$), а затим по ивици ($n$) повлачимо праву $CD$, која је нормална на $AB$.

4) *Подизање нормале из тачке на некој правој.* — а) Ако имамо да подигнемо нормалу у тачци $E$ на правој $AB$ (сл. 49), треба најпре произвољним отвором шестара и с једне и с друге стране тачке $E$ одвојити тачке $M$ и $N$ на правој $AB$, а затим за дуж $MN$ конструисати симетралу. Симетрала $CD$ пролази кроз $E$ и стоји нормално на $AB$, пошто је тачка $E$ средина дужи $MN$.

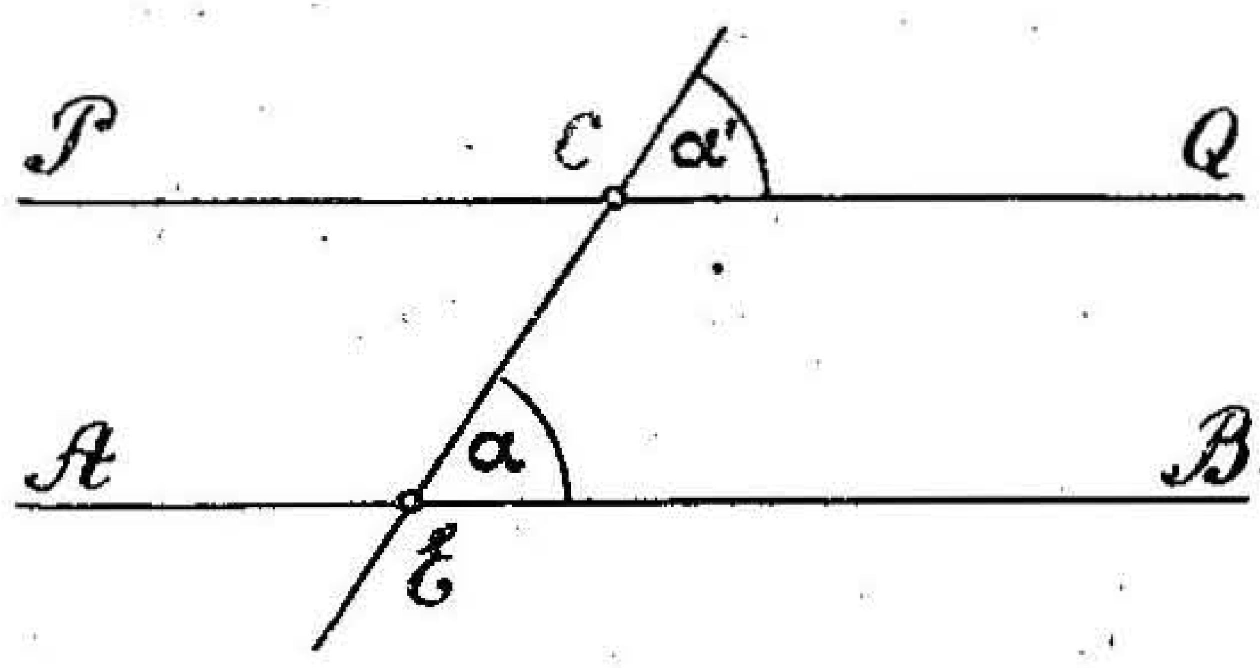



Сл. 49

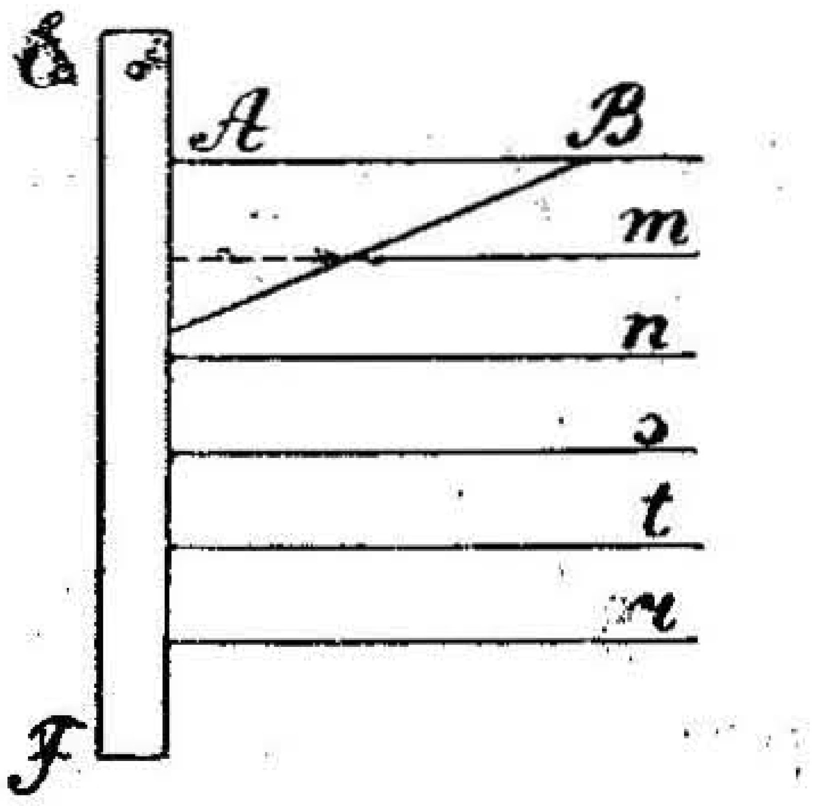
b) Помоћу троугаоника можемо подићи нормалу у тачци $D$ праве $AB$ (сл. 48) када троугаоник наместимо тако да се његова ивица *(m)* поклопи с правом $AB$, а теме правог угла с тачком $D$, и, најзад, по ивици *(n)* повлачимо праву $DC$, која је нормална на $AB$.

5) *Кроз тачку $C$ ван праве $AB$ (сл. 50) повући праву паралелну са $AB$.* — а) Треба најпре кроз тачку $C$ повући праву $CE$ која сече дану праву $AB$, а затим пренети добивени угао $\alpha$ код $C$. Како су углови $\alpha$ и $\alpha'$ једнаки, а сагласни су, то је по 8 теореми (§ 14), $PQ \parallel AB$.

b) Да бисмо повукли паралелне праве с правом $AB$ (сл. 51) помоћу троугаоника и лењира, треба најпре троугаоник да наместимо тако да се једна његова ивица поклапа с правом $AB$, а затим лењир положимо тако да се склапа с другом ивицом троугаоника, и, најзад, држећи чврсто лењир, померамо троугаоник да стално клизи по ивици лењира, а по његовој ивици, која се поклапала са правом $AB$, повлачимо праве: $m$, $n$, $s$ итд. Најлакше

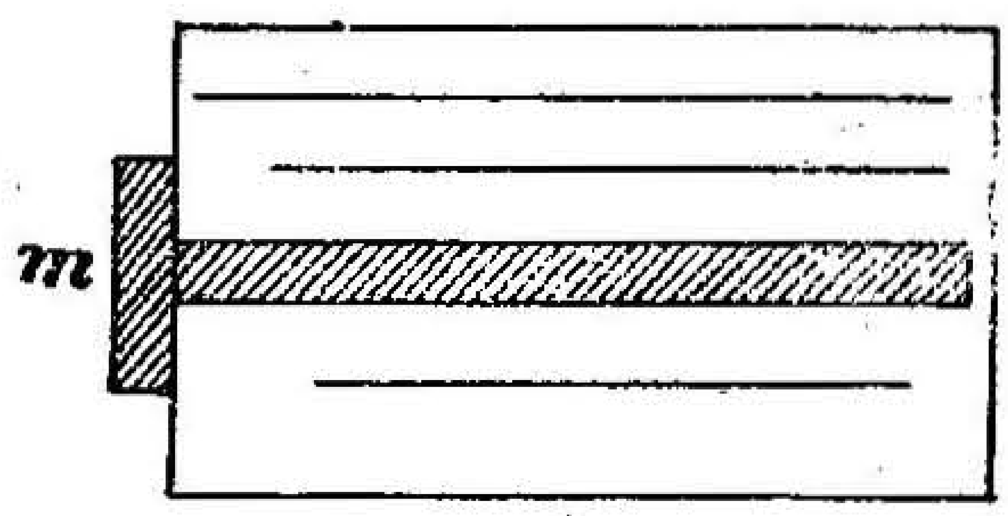



Сл. 50

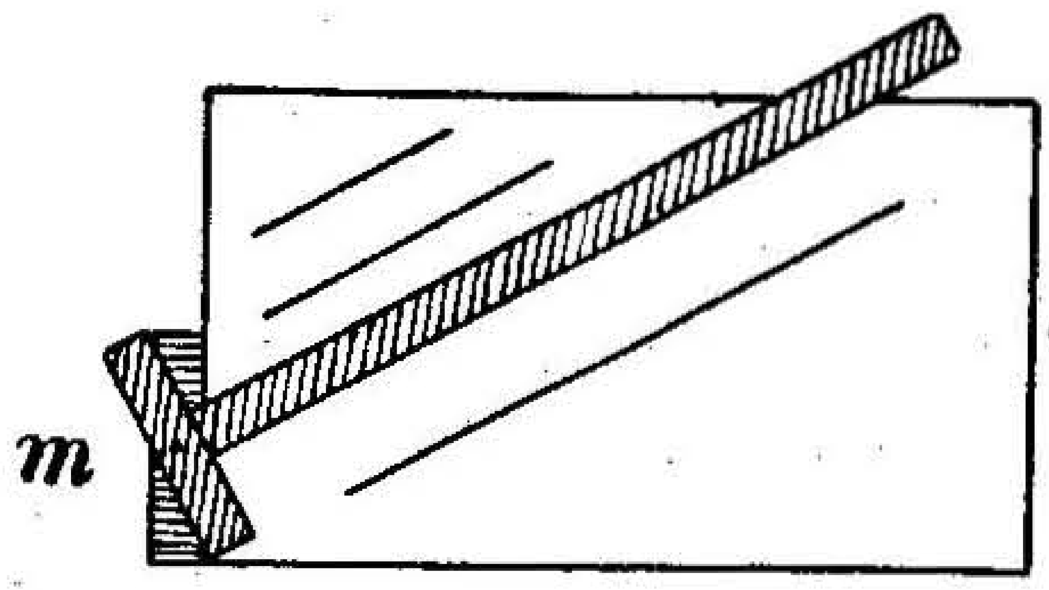



Сл. 51

се повлаче паралелне праве помоћу лењира с главом, као што показују слике 52 и 53. Положи се најпре лењир тако да се његова глава *m* поклапа



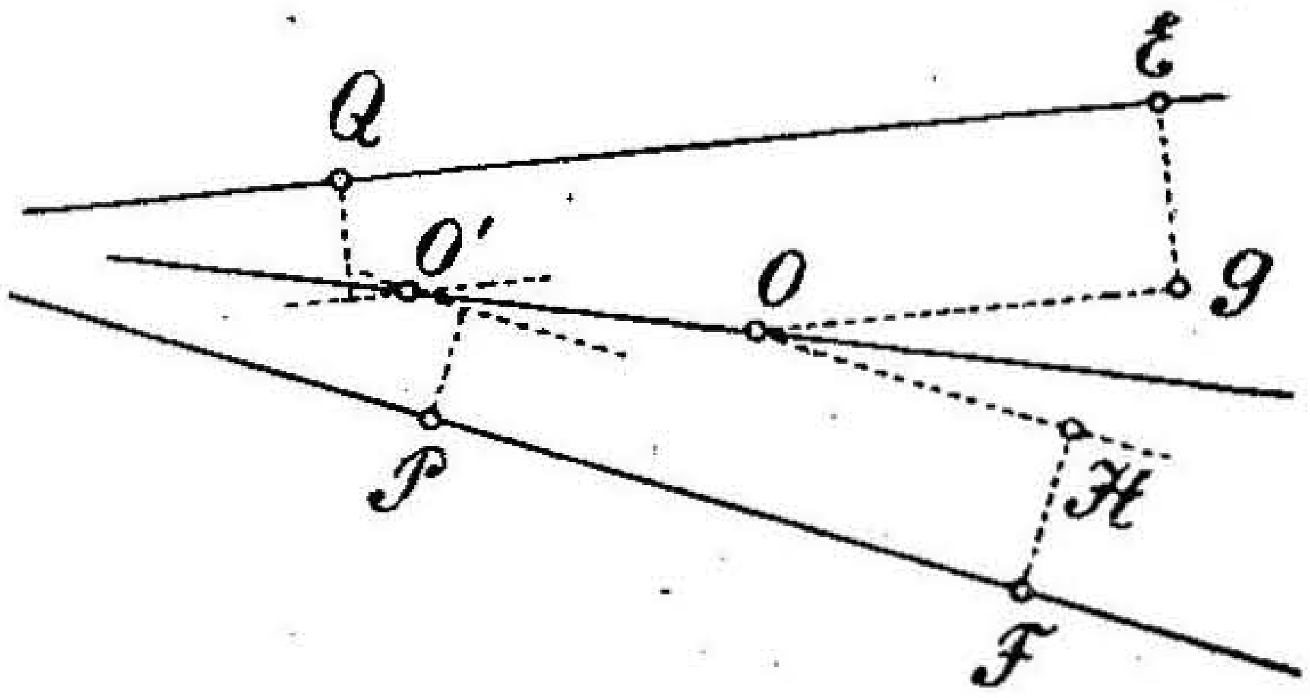

Сл. 52




Сл. 53

са ивицом табле, а затим лењир померамо и при сваком његовом заустављању повлачимо праве по његовој горњој или доњој ивици. Ове праве биће паралелне.

6) *Конструкција симетрале једног угла чији се краци не секу на цртежу.* — Нека су праве *QE* и *PF* (сл. 54) непаралелне, али се не секу на цртежу. Да бисмо конструисали симетралу угла који би оне градиле, треба да нађемо две тачке те симетрале. Једну тачку налазимо ако у произвољно узетој тачци *E* на правој *QE* и тачци *F* на правој *PF* подигнемо нормале *EG* и *FH* и учинимо да је *EG*=*FH*. Затим, кроз тачку *G* повлачимо паралелну са *QE*, и кроз тачку *H* повлачимо паралелну са *PF*. Пресек *O* ових двеју паралелних биће једна тачка симетралина, пошто је овај пресек подједнако удаљен од кракова угла (теорема 19). Истим путем нашли бисмо и другу тачку *O'*. Спајањем тачака *O* и *O'* добијамо тражену симетралу.




Сл. 54

# ДРУГИ ОДЕЉАК

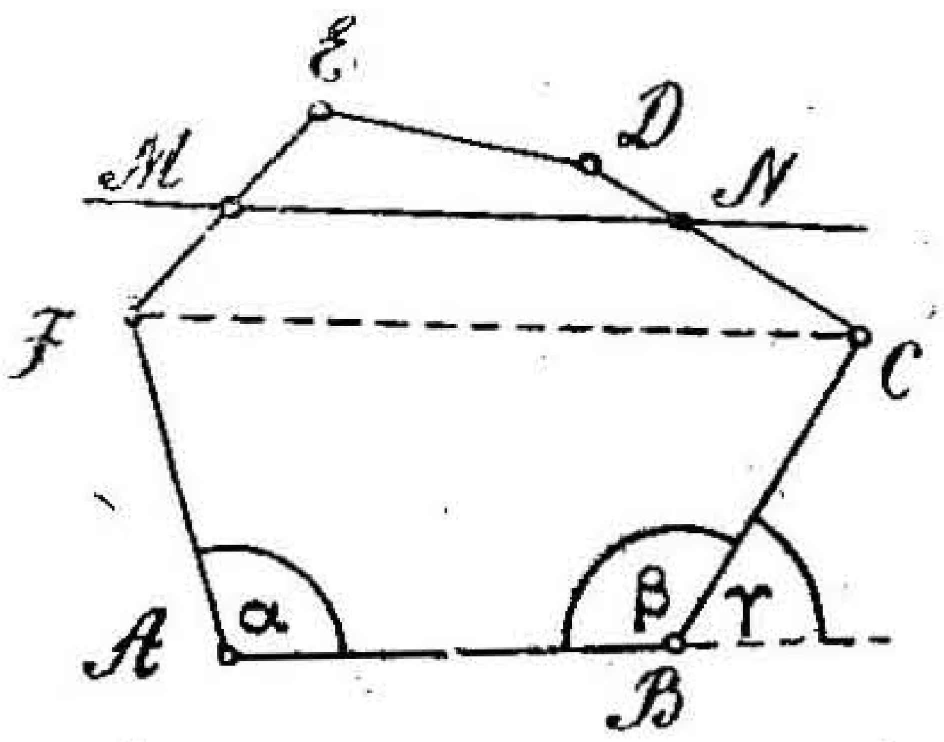
## ОПИС И ОСОБИНЕ СЛИКА И ЊИХОВА СИМЕТРИЧНОСТ

### I. Слике и њихова подела

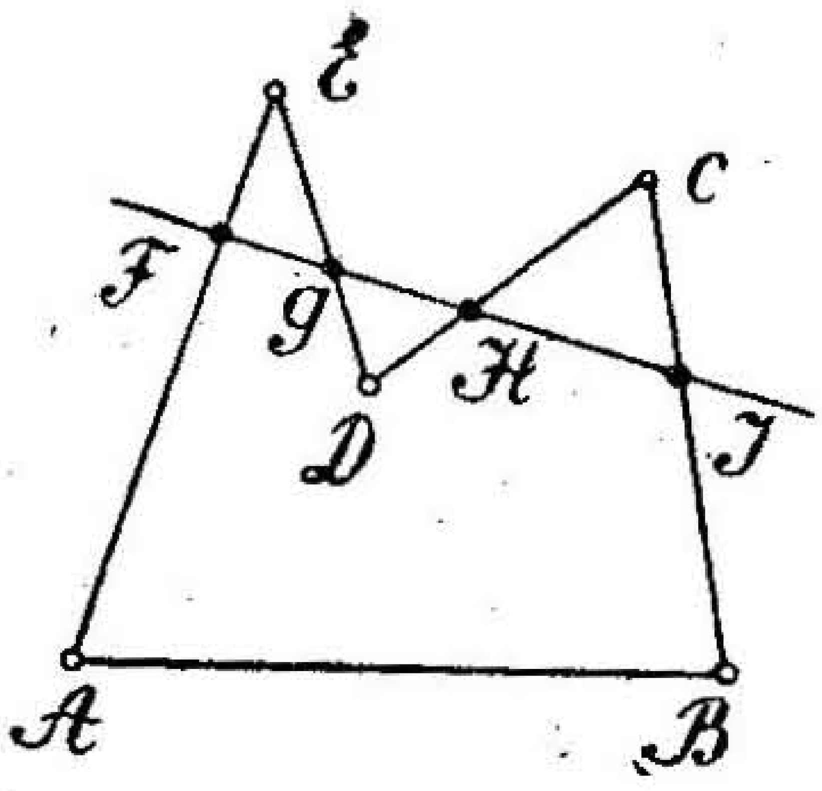
**§ 18.** — Под сликом у ширем смислу разумемо сваки цртеж састављен од тачака и линија; али под *сликом* (фигуром) у ужем смислу разумемо сваки део равнине који је ограничен правим или кривим линијама. Ако је део равнине ограничен само дужима, слика је *праволиниска;* а ако је ограничен правим и кривим, или само једном кривом линијом, слика је *криволиниска*. Дужи које ограничавају праволиниске слике јесу *стране*, а тачке у којима се стране састају јесу *темена* слике. Сваке две узастопне стране праволиниске слике праве њене углове. Свака праволиниска слика има онолико темена и углова колико и страна. Све стране и сви углови праволиниске слике чине њене *главне елементе*. Према броју страна, или према броју углова, праволиниске слике делимо на: *тростране (троугле)*, *четворостране (четвороугле)*, *петостране (петоугле)* итд. Праволиниске слике ограничене са више од четири стране зову се уопште *многостраници* (*многоугли, полигони*). Праволиниска слика која има све стране једнаке и све углове једнаке зове се *правилна*. У противном случају, слика је *неправилна*. Збир свију страна једне слике зове се *обим* или *периферија* те слике, а део равнине ограничен обимом зове се њена *површина*.

При упоређивању двеју праволиниских слика, упоређујемо њихове *облике* и *површине*. Ако су слике такве да имају и једнаке облике и једнаке површине тако да су њихови елементи по реду једнаки и да се могу потпуно поклопити, онда су те слике *подударне* ($\cong$); ако имају само једнаке облике а различите површине, онда су оне *сличне* ($\sim$); ако имају само једнаке површине а различите облике, оне су *једнаке* ($=$); и, најзад, могу имати и различите облике и различите површине, у коме су случају оне различне.

Код праволиниске слике разликујемо: *унутрашње* и *спољашње* углове. Први су углови они које стране граде у унутрашњости слике, а други су склопљени од једне стране и продужења друге стране преко заједничког темена. На сл. 55 углови $\alpha$ и $\beta$ јесу унутрашњи, а угао $\gamma$ спољашњи. Према томе да ли су сви унутрашњи углови једне праволиниске слике издубљени, или има међу њима и испупчених, ове слике делимо на: *конвексне* (сл. 55) и *конкавне* (сл. 56). Једна права сече обим конвексне слике само у двема тачкама




Сл. 55

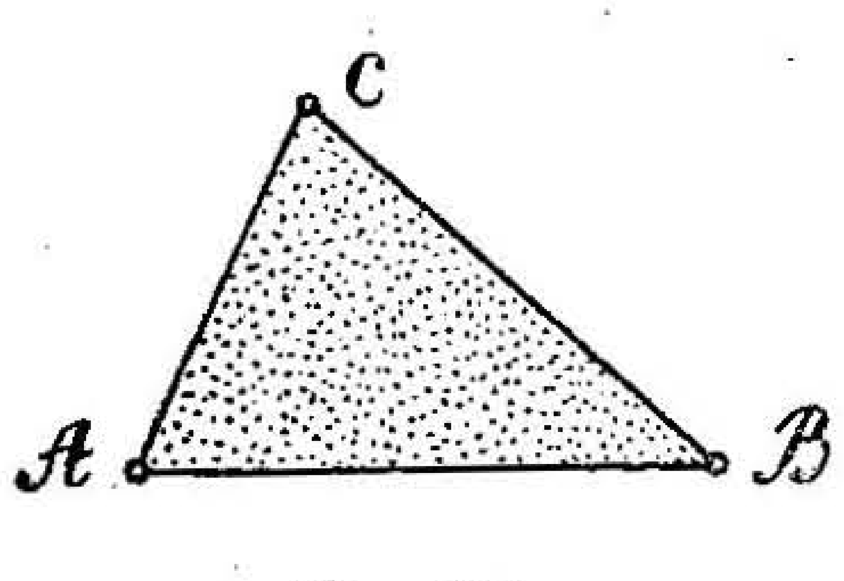



Сл. 56

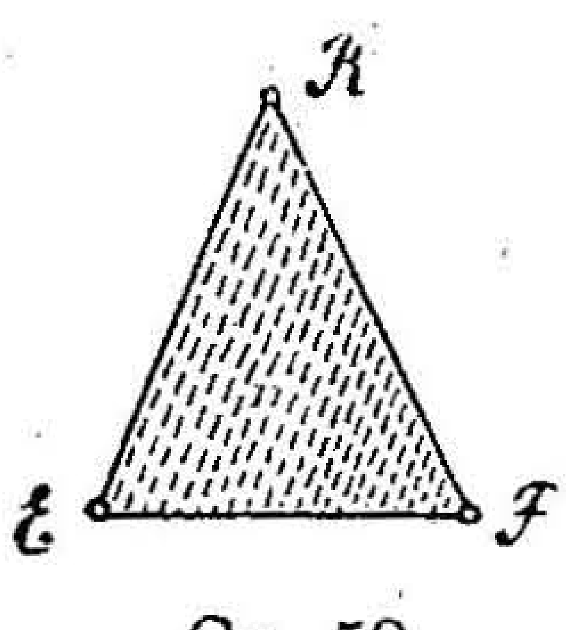
($M$ и $N$ на сл. 55), а обим конкавне слике може да сече у више ($F$, $G$, $H$, $J$, на сл. 56). Дуж која спаја два неузастопна темена праволиниске слике зове се *дијагонала* ($FC$ на сл. 55). Троуглови немају ниједне дијагонале, нити могу бити конкавне слике. Од криволиниских слика планиметрија испитује круг и његове делове.

## II. Врсте праволиниских слика

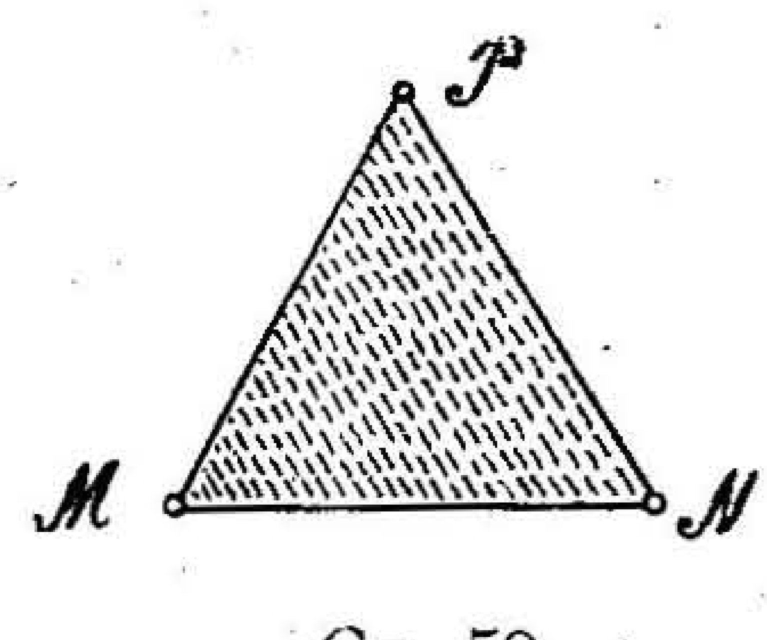
**§ 19. — Троуглови.** — С обзиром на дужине страна, троуглове делимо на: *разностране, равнокраке* и *равностране*. Код првих су све три стране различите дужине (сл. 57), код




Сл. 57



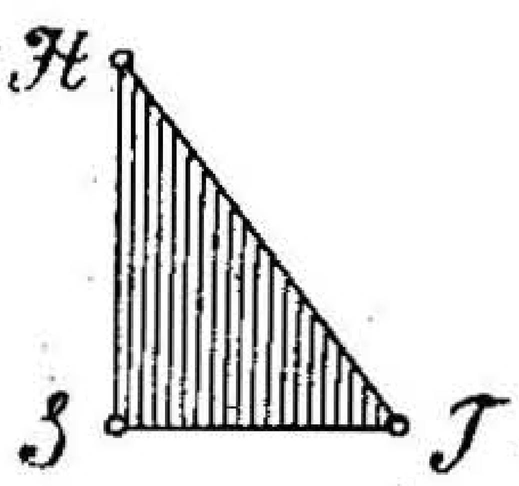

Сл. 58



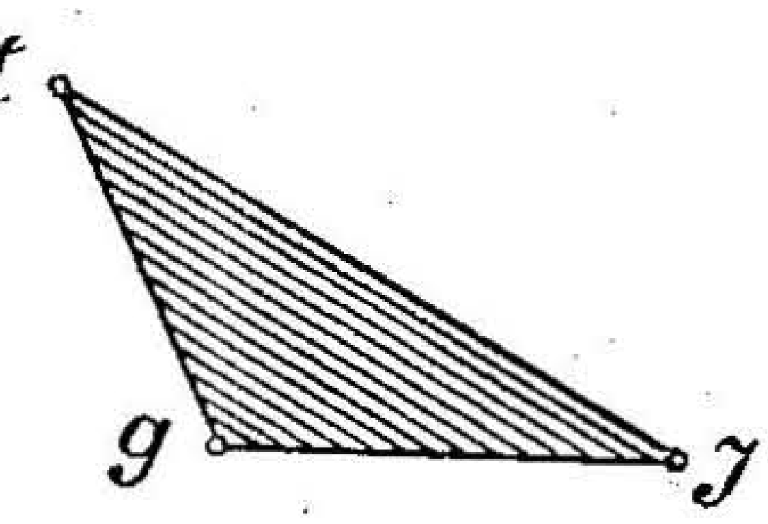

Сл. 59

других само су две стране, које се зову *краци*, једнаке (сл. 58); а код трећих су све три стране једнаке (сл. 59).

С обзиром на углове, троуглове делимо на: *оштроугле, правоугле* и *тупоугле*. Код првих су сви углови оштри (сл. 57, 58 и 59), код других један је прав а два су оштра (сл. 60), а код трећих један је туп а два су оштра (сл. 61). Стране правоуглог троугла које граде прави угао зову се *катете* ($SH$ и $ST$ на сл. 60), а страна наспрам правог угла *хипотенуза* ($HT$ сл. 60). Равнокрако-правоугли троугао је онај код кога су катете једнаке.

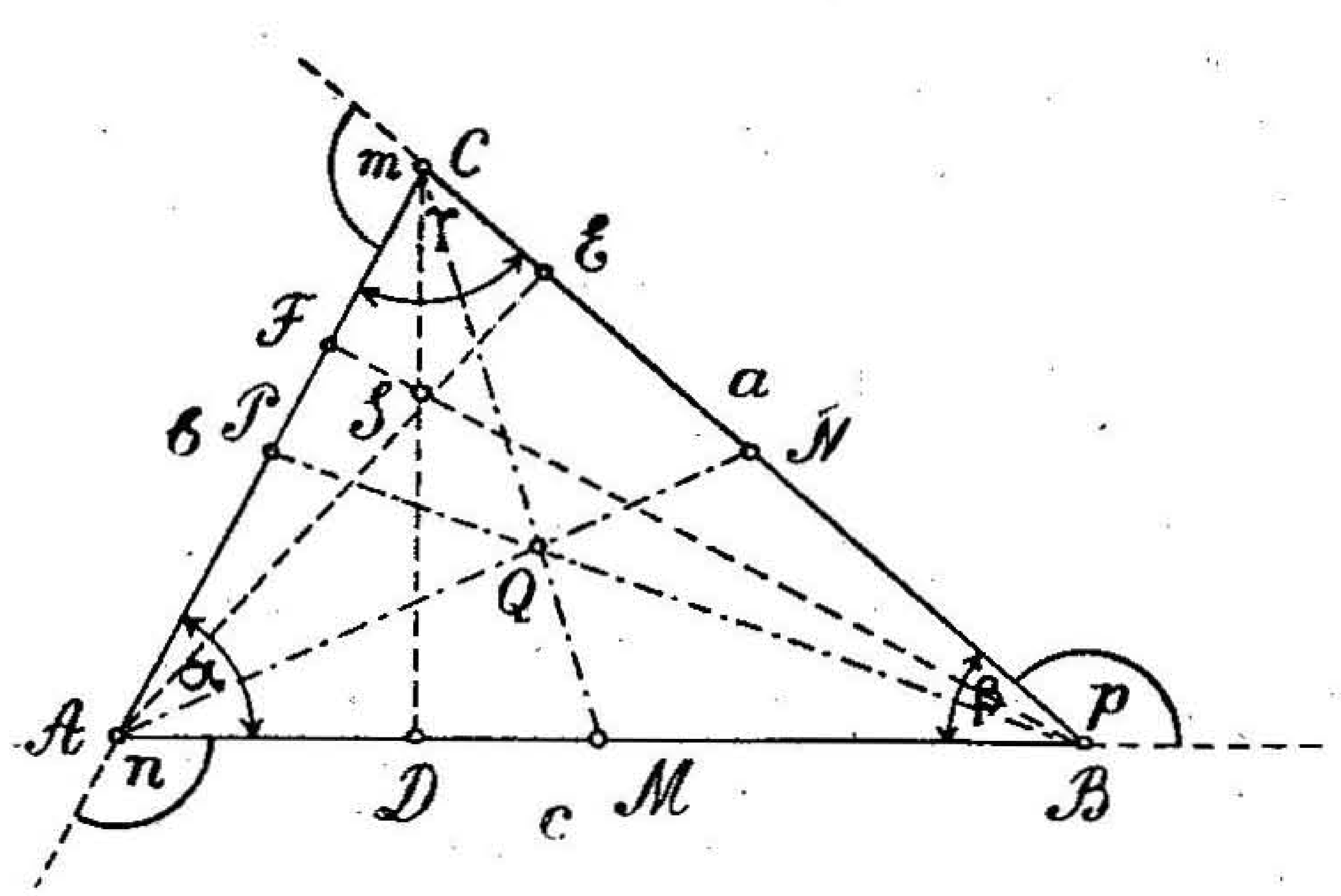


Сл. 60



Сл. 61

Оштроугли и тупоугли троуглови једним се именом зову *косоугли*, пошто су им углови коси.



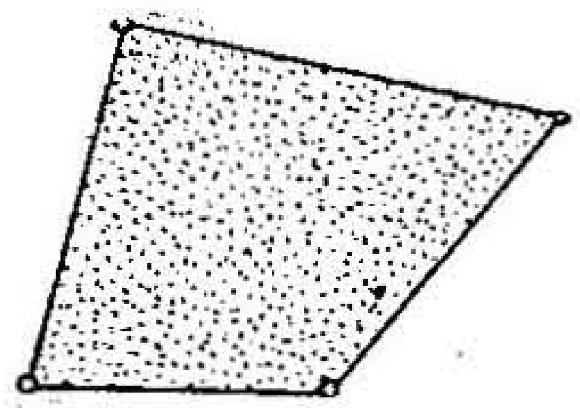
Сл. 62

Она троуглова страна на којој се замишља да троугао лежи, зове се *основица*, а теме наспрам основице зове се *врх*. Свака се страна троугла може узети за основицу, али код равнокраког троугла неједнака се страна обично узима за основицу. Троугао се означава са три велика писмена, која се пишу код темена. Ако је троугао означен писменима: $A$, $B$ и $C$, онда се обично страна наспрам $A$ означава са $a$, наспрам $B$ са $b$, а наспрам $C$ са $c$; угао код $A$ са $\alpha$, код $B$ са $\beta$, а код $C$ са $\gamma$.

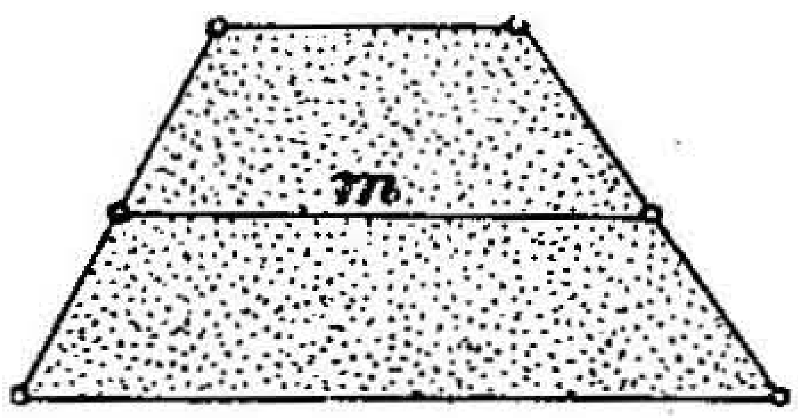
Осим страна и углова код свакога троугла разликујемо: три *висине*, три *средње* или *тежишне линије* (медијане), три *симетрале страна* и три *симетрале углова*. Нормално отстојање врха једнога троугла до основице, зове се *висина* и бележи се: $h_{(a)}$, $h_{(b)}$ и $h_{(c)}$, према томе да ли висина одговара страни $a$, страни $b$ или страни $c$. Код правоуглог троугла катете су истовремено висине, а код тупоуглог троугла висине страна које граде тупи угао секу супротне стране ван троугла. Средња линија троугла је дуж која спаја теме са средином супротне стране и бележи се: $t_{(a)}$, $t_{(b)}$ и $t_{(c)}$, према томе да ли спаја средину стране $a$, $b$ и $c$. Симетрале углова јесу праве које полове углове (било унутрашње, било спољашње), а симетрале страна јесу праве које полове стране и стоје на њима нормално.

§ 20. — **Четвороугли.** — Четвороугле делимо на: *трапезоиде, трапезе, паралелограме* и *делтоиде.*

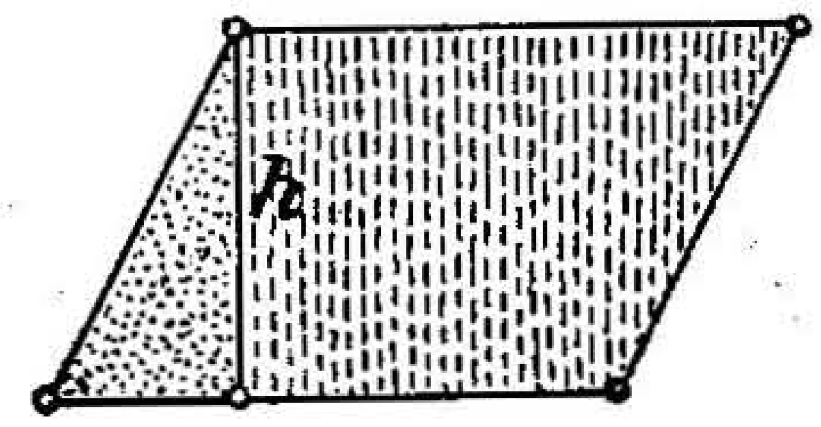
Трапезоид је четвороугао у коме нема ни паралелних ни једнаких страна (сл. 63). Трапез је четвороугао у коме



Сл. 63

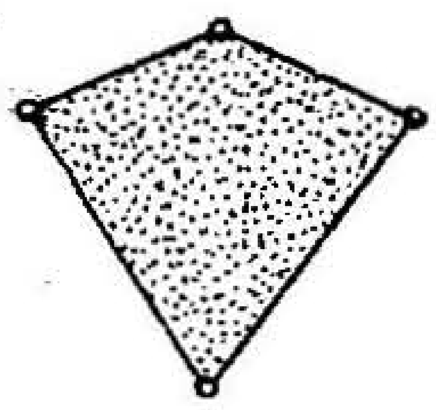



Сл. 64

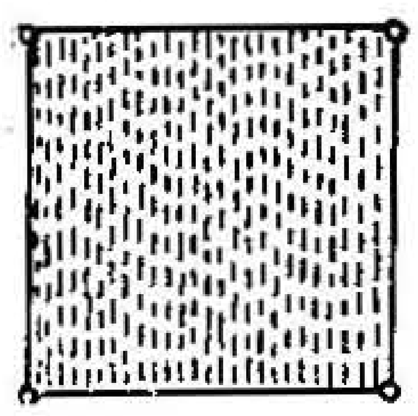



Сл. 65

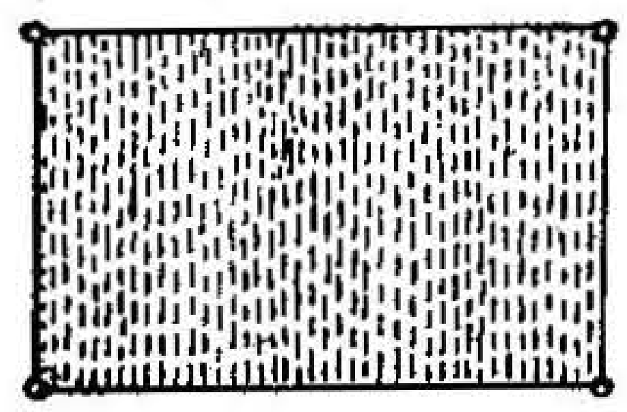
има две паралелне и две непаралелне стране (сл. 64, 70 и 71). Паралелограм је четвороугао у коме су супротне стране паралелне (сл. 65, 67, 68 и 69). Делтоид је четвороугао који нема



Сл. 66

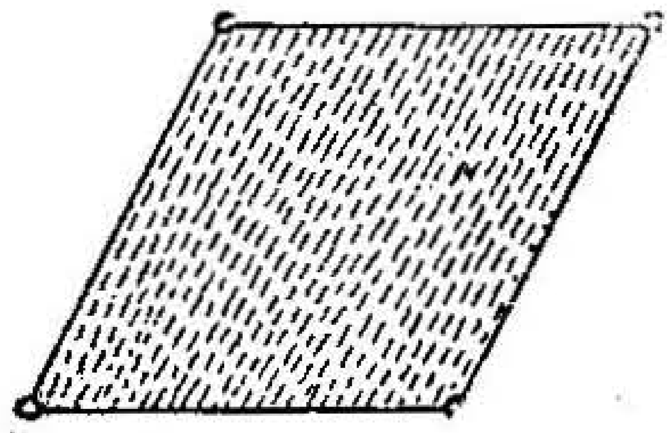


Сл. 67

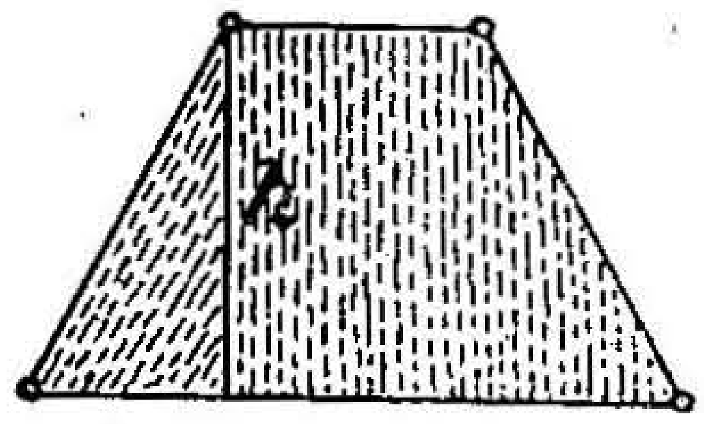


Сл. 68

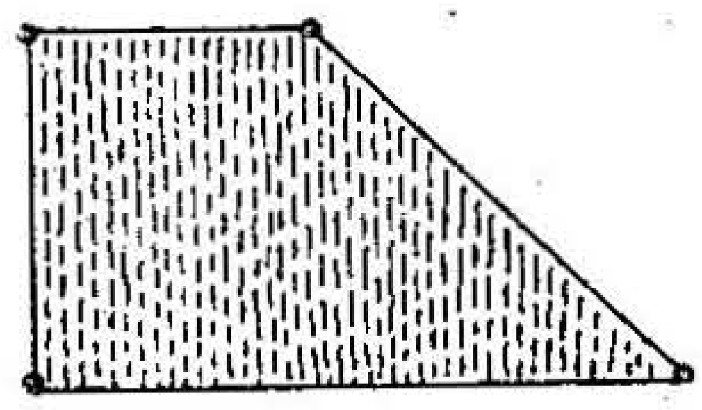
паралелних страна, али има две и две суседне стране једнаке (сл. 66). Трапез у коме су непаралелне стране једнаке зове се *равнокрак* (сл. 70). Непаралелне стране таквога трапеза



Сл. 69




Сл. 70



Сл. 71

зову се *краци*. Дуж која спаја средине непаралелних страна у трапезу зове се *средња линија трапеза* ($m$, сл. 64). Нормално отстојање паралелних страна трапеза зове се висина ($h$, сл. 70). Трапез у коме се једна од непаралелних страна поклапа са висином, или трапез у коме има два права угла, зове се *правоугли* (сл. 71). Паралелограме делимо на: *правоугле* и *косоугле*, према томе да ли су им углови прави или коси. Правоугле паралелограме делимо на: *квадрате* и *правоугаонике*, а косоугле на *ромбове* и *ромбоиде*. Код квадрата су све стране једнаке а углови прави (сл. 67); код правоугаоника су само супротне стране једнаке а углови прави (сл. 68), ромб је косоугли паралелограм са једнаким странама (сл. 69), а ромбоид је косоугли паралелограм код кога су само супротне стране једнаке (сл. 65.) Под *основицом* једнога паралелограма разумемо ону његову страну над којом је конструисан. Обично се за основицу узима доња паралелна страна. Под *висином* једнога паралелограма разумемо управну спуштену на основицу ма из које тачке супротне паралелне стране ($h$, сл. 65). Код квадрата и правоугаоника суседна страна основице истовремено је висина.

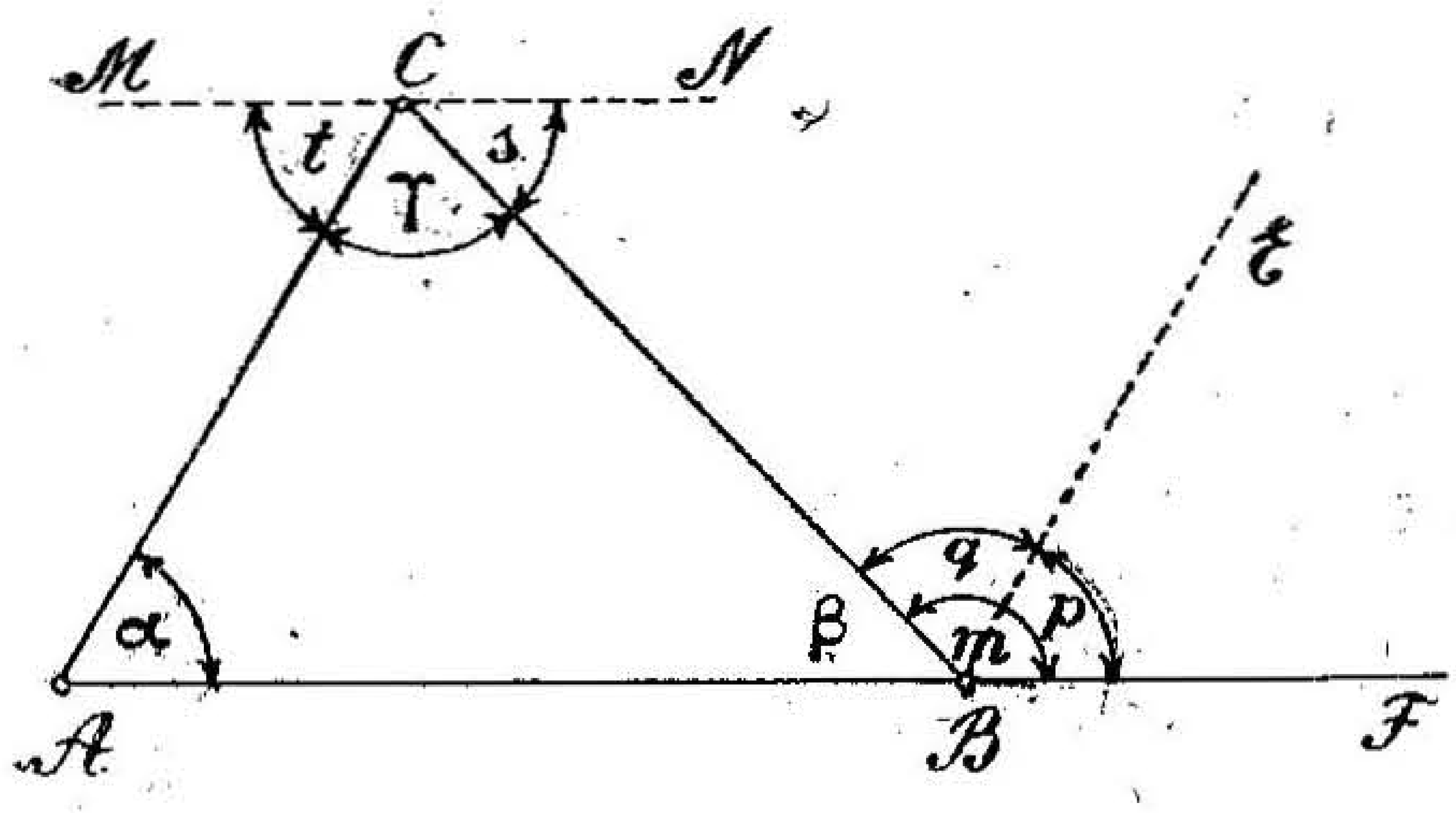
§ 21. — **Полигони.** — Према броју страна полигоне делимо на: петоугле, шестоугле и седмоугле итд., а према томе да ли имају све стране и све углове једнаке или не, полигоне делимо на *правилне* и *неправилне*.

§ 22. — **Број дијагонала код полигона.** — Ма код кога полигона из једног његовог темена можемо повући онолики број дијагонала колики је број његових страна мање три. Ако нам $n$ значи број страна једнога полигона, онда је број дијагонала повучених из једног темена тога полигона $n$-$3$. Тако, код петоугла можемо повући из једног темена 2 дијагонале, код шестоугла 3, код десетоугла 7 итд. Како је број темена полигона $n$, то би требало да буде број свих полигонских дијагонала $n \cdot (n-3)$. Међутим, овај је број двапута већи зато што је свака дијагонала заједничка за два темена која спаја. Стога прави број свих дијагонала једнога полигона налазимо по обрасцу: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

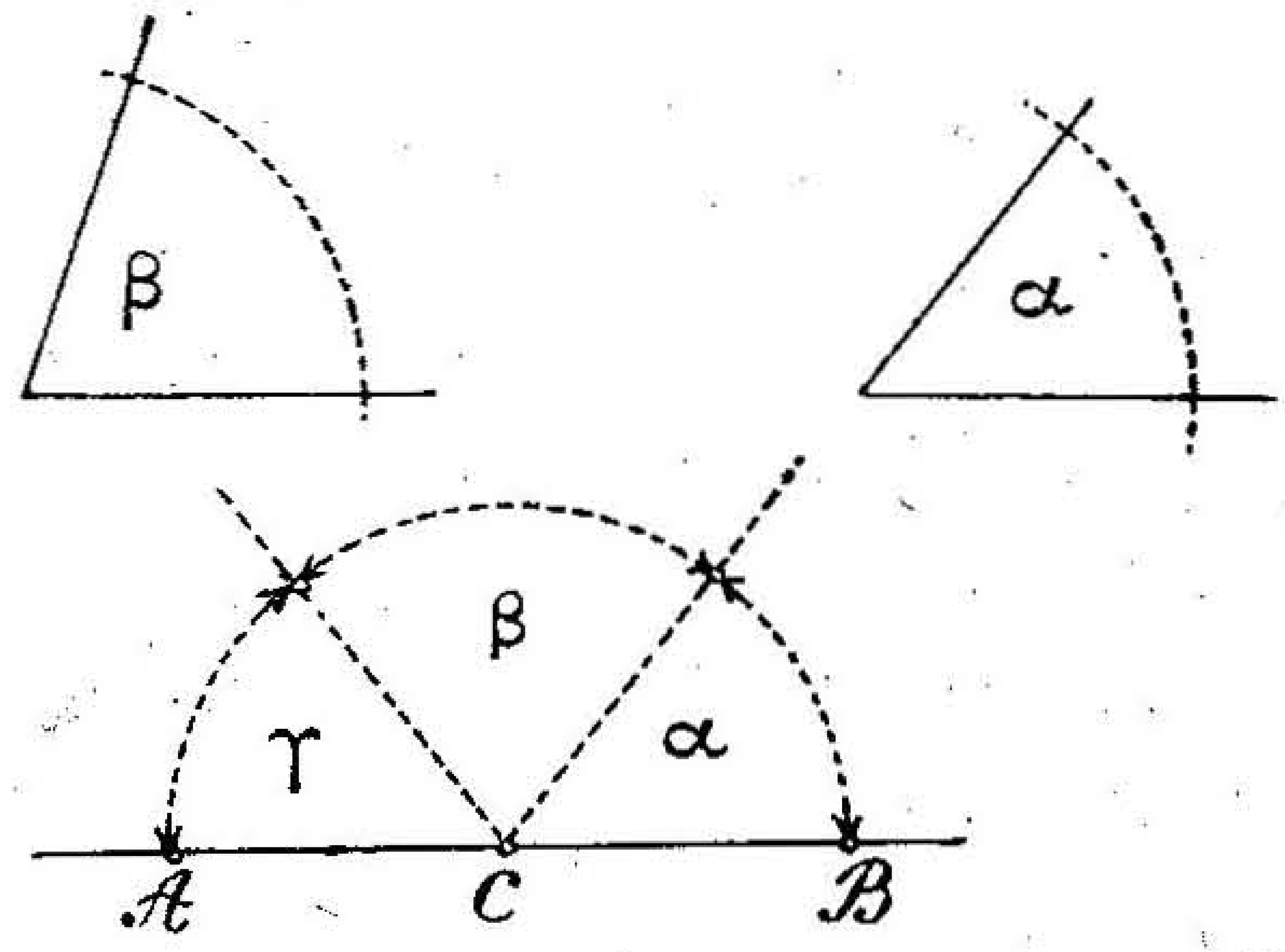
Тако, број свих дијагонала код петоугла је 5, код 10-тоугла 35, код 20-тоугла 170 итд. Формула $\frac{n\,(n-3)}{2}$ важи и за четвороуглове и троуглове. Код првих је број дијагонала 2, а код других 0, што нам је раније било познато, пошто код четвороугла имамо само два пара неузастопних темена, а код троуглова немамо неузастопних темена.

# III. Углови праволиниских слика

§ 23. — **Углови троуглова.** — *Теорема 20.* — **Сваки спољашњи угао једнога троугла једнак је збиру два унутрашња несуседна угла.** Ако кроз теме $B$ троугла $ABC$ (сл. 72) повучемо $BE \parallel AC$, онда се спољашњи угао $m$ дели на углове $p$ и $q$, од којих је $\sphericalangle p = \sphericalangle \alpha$ као сагласни, а $\sphericalangle q = \sphericalangle \gamma$ као наизменични. Па како је $m = p + q$, то је и $m = \alpha + \gamma$, пошто је $\sphericalangle p$ замењен њему једнаким углом $\alpha$, а $\sphericalangle q$ углом $\gamma$.




Сл. 72




Сл. 73

*Теорема 21.* — **Збир унутрашњих углова једнога троугла износи 180°.** Ако кроз теме $C$ троугла $ABC$ (сл. 72) повучемо $MN \parallel AB$, онда права $MN$ гради са страном $AC$ угао $t$, а са страном $BC$ угао $s$. Тада је $\sphericalangle t = \sphericalangle \alpha$ и $\sphericalangle s = \sphericalangle \beta$ као наизменични. Па како је $t + \gamma + s = 180^0$, то је, заменом $t$ са $\alpha$ и $s$ са $\beta$, $\alpha + \gamma + \beta = 180^0$.

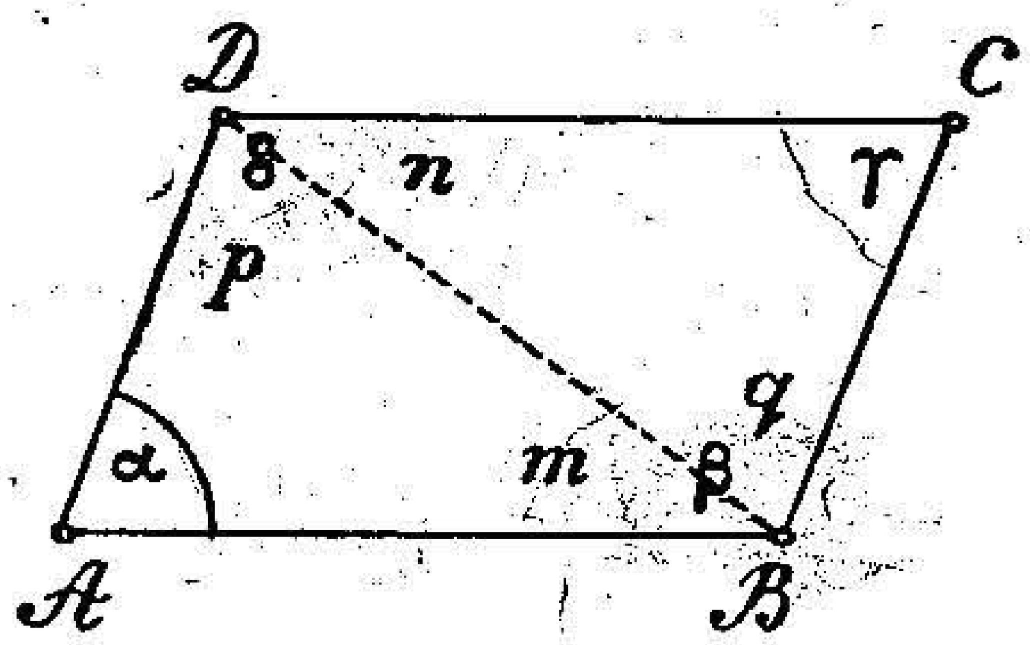
Помоћу ове теореме израчунавамо ма који угао једнога троугла ако су друга два позната. Треба да збир познатих углова одузмемо од $180^0$.

*Напомена.* — Конструктивним путем могли бисмо наћи трећи угао једнога троугла, ако су нам позната друга два, када код ма које тачке $C$ једне праве $AB$ (сл. 73) пренесемо шестаром најпре један угао ($\alpha$), а затим одмах до њега други угао ($\beta$). Трећи угао ($\gamma$), који допуњује прва два угла до $180^0$, јесте тражени угао.

§ 24. — **Углови четвороуглова.** — Повлачењем ма које дијагонале четвороугао се дели на два троугла, чији сви углови дају унутрашње углове четвороугла. Како збир углова у једном троуглу износи $180^0$, то је: ***збир унутрашњих углова једнога четвороугла 360°*** (*теорема 22*).

*Теорема 23.* — **Код паралелограма су супротни углови једнаки.**

Код правоуглих паралелограма ова је теорема очевидна, пошто су углови прави и као такви једнаки. Да бисмо доказали да су и код косоуглог паралелограма супротни углови једнаки, треба да повучемо ма коју дијагоналу ($BD$, сл. 74), чиме добијамо два троугла који имају по два угла једнака ($\sphericalangle m = \sphericalangle n$ и $\sphericalangle p = \sphericalangle q$ као наизменични), те и трећи, углови: $\alpha$ и $\gamma$, као допуна до $180^0$, јесу једнаки.



Сл. 74

**§ 25. — Углови полигона.** — a) Повлачењем свих дијагонала из једног темена једнога $n$-тоугла, овај се дели на онолики број троуглова колики је број страна мање два. Тако, петоугао се дели на 3 троугла, осмоугао на 6 итд. Па како је збир углова у једном троуглу $180^0$ и како углови свих троуглова дају углове полигона, то је збир свих унутрашњих углова једнога $n$-тоугла: $(n - 2) \cdot 180^0$.

Тако, збир унутрашњих углова код 5-тоугла износи $540^0$ ($3 \cdot 180^0 = 540^0$), код 6-тоугла: $4 \cdot 180^0 = 720^0$ итд. Формула: $(n - 2) \cdot 180^0$ важи и за четвороуглове, па и за троуглове. Код првих је $n - 2 = 2$, а код других $n - 2 = 1$. Стога је збир унутрашњих углова код четвороуглова: $2 \cdot 180^0 = 360^0$, а код троуглова: $1 \cdot 180^0 = 180^0$.

b) Како су сви углови код правилних многоуглова једнаки, то величину једног унутрашњег угла правилног многоугла налазимо када збир: $(n-2) \cdot 180^0$ поделимо бројем углова $n$. Дакле формула: $\frac{(n - 2) \cdot 180^0}{n}$ служи за израчунавање величине једног унутрашњег угла правилног $n$-тоугла.

*Теорема 24.* — **Збир спољашњих углова ма које равне праволиниске слике износи $360^0$.** Како сваки спољашњи угао са својим унутрашњим углом даје $180^0$, а таквих парова углова код $n$-тоугла има $n$, то је збир свих спољашњих и унутрашњих углова $n \cdot 180^0$. Па како је збир унутрашњих $(n - 2) \cdot 180^0$, то је збир само спољашњих углова:
$n \cdot 180^0 - (n - 2) \cdot 180^0 = n \cdot 180^0 - n \cdot 180^0 + 2 \cdot 180^0 = 360^0$. Стога спољашњи угао код правилног $n$-тоугла износи $\frac{360^0}{n}$.

*Напомена.* — Из претходних теорема о угловима праволиниских слика закључујемо: 1) да збир унутрашњих углова тих слика почиње са троугловима од 180°, а расте за 180° како се број страна слике повећава за један; и 2) да је збир спољашњих углова сталан и једнак 360°.

# IV. Однос између страна и углова праволиниских слика

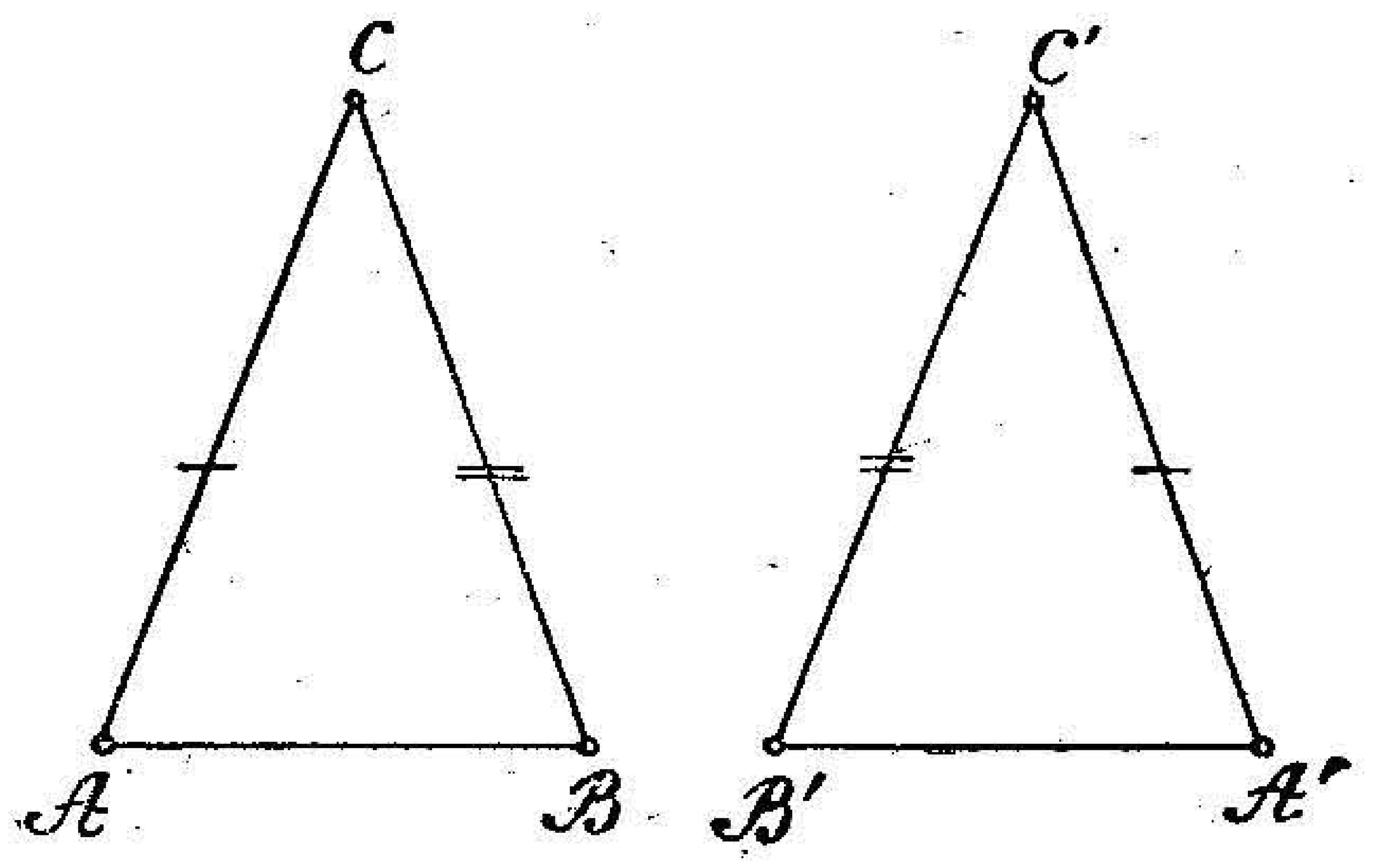
**§ 26. — Однос између страна и углова једнога троугла.** — Везе између страна и углова једног троугла исказане су помоћу следеће четири теореме:

*Теорема 25.* — **Наспрам једнаких страна једнога троугла леже једнаки углови.** Нека су код троугла $ABC$ (сл. 75) стране $AC$ и $BC$ једнаке. Ако овај троугао обрнемо за 180° тако да заузме положај $B'A'C'$, па тако изврнут ставимо на троугао $ABC$, онда се троуглови поклапају. Поклапањем ових троуглова доказује се да је $\sphericalangle A' = \sphericalangle B$ и $\sphericalangle B' = \sphericalangle A$. Па како су углови $A$ и $A'$, а тако исто и углови $B$ и $B'$ истоветни, то је $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

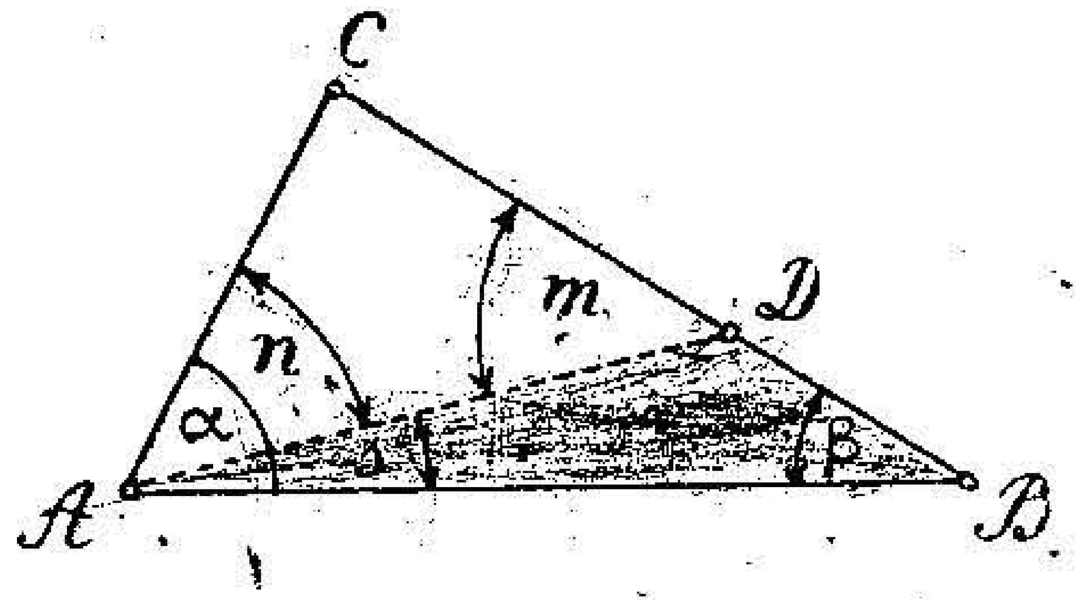
Последице ове теореме јесу:

1) *Углови на основици равнокраког троугла једнаки су;* и

2) *Сва три угла равностраног троугла једнаки су и сваки износи по 60°.*




Сл. 75




Сл. 76

*Теорема 26.* — **Наспрам неједнаких страна једнога троугла леже неједнаки углови, и то наспрам веће стране лежи већи угао.**

Нека је страна $BC$ троугла $ABC$ (сл. 76) већа од стране $AC$. Ако страну $AC$ пренесемо на $BC$ до $D$ $(AC = CD)$ и спојимо $A$ са $D$, добијамо равнокрак троугао $ADC$, те су углови $m$ и $n$ једнаки. Па како је $\sphericalangle m$ спољашан за троугао $ADB$, то је по 20 теореми (§ 23) $\sphericalangle m = \beta + s$, а од $\sphericalangle \beta$ је већи. Тада је и $\sphericalangle n$, као једнак са $\sphericalangle m$, већи од $\sphericalangle \beta$. Међутим, $\sphericalangle n$ је део $\sphericalangle \alpha$, па је $\sphericalangle \alpha$ тим пре већи од $\sphericalangle \beta$.

*Теорема 27.* — **Наспрам једнаких углова једнога троугла леже једнаке стране** (супротна теореми 25).

Нека је $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ троугла $ABC$ (сл. 75). Ако претпоставимо да супротне стране $AC$ и $BC$ нису једнаке, већ да је: a) $BC > AC$, онда је по 26 теореми $\sphericalangle A > \sphericalangle B$, што се коси с оним што је дато; b) за $BC < AC$ биће, према истој теореми, $\sphericalangle A < \sphericalangle B$, што се опет коси с оним што је дато. Па како $BC$ нити је већа нити мања од $AC$, то једино остаје да су те две стране једнаке.

*Теорема 28.* — **Наспрам неједнаких углова једнога троугла леже неједнаке стране, и то: наспрам већег угла лежи већа страна а наспрам мањег угла мања страна.** (Супротна теореми 26). Нека је $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$ троугла $ABC$ (сл. 76). Ако претпоставимо да страна $BC$ није већа од $AC$, већ да је: a) $BC = AC$, онда је по 25 теореми $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$, што се коси с оним што је дато. b) За $BC < AC$ биће, према 26 теореми, $\sphericalangle \alpha < \sphericalangle \beta$, што се опет коси с оним што је дато. Па како страна $BC$ није ни једнака, ни мања од стране $AC$, то једино остаје да је $BC > AC$.

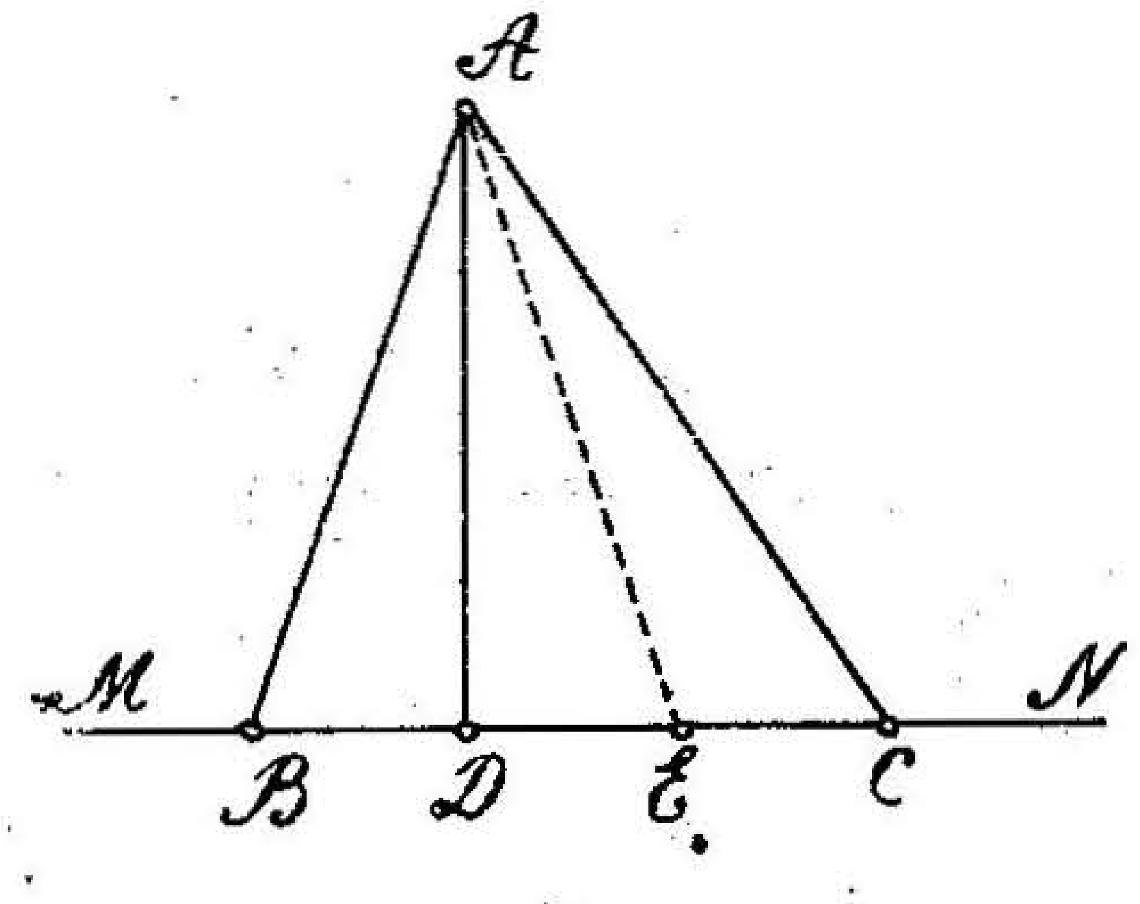
Последице ове теореме јесу следеће:

1) *Хипотенуза правоуглог троугла већа је од ма које његове катете;*

2) *Страна наспрам тупог угла у тупоуглом троуглу већа је од ма које друге његове стране;*

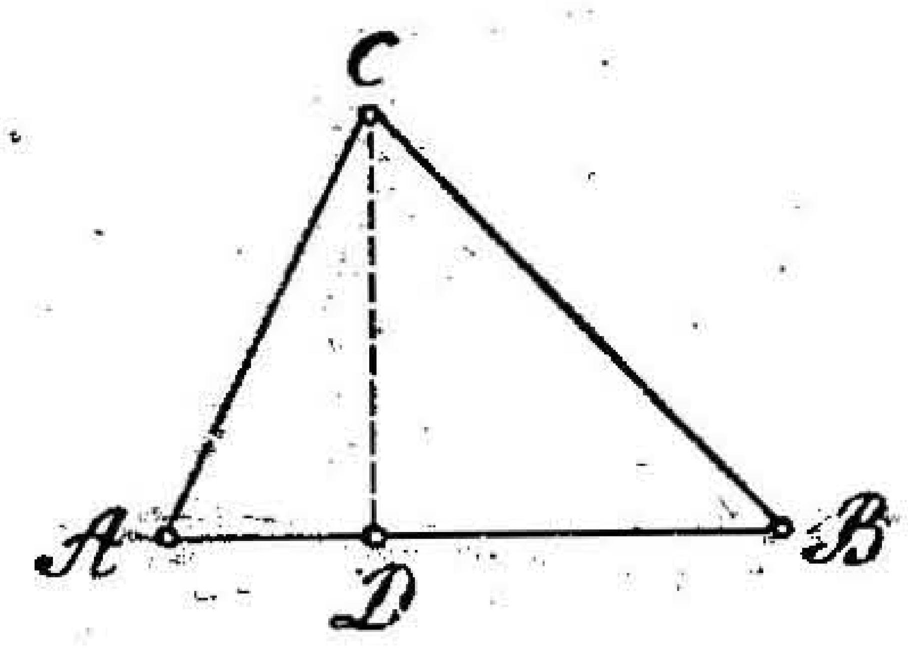
3) *Нормала је најкраћа дуж која се може повући од једне тачке до једне праве;* и

4) *Од двеју косих дужи повучених од једне тачке до једне праве, већа је она чија је подножна тачка удаљенија од подножне тачке нормале спуштене из исте тачке до те праве.*



Сл. 77

Прва и друга последица јасне су из 28 теореме, трећа је јасна из прве последице, а четврта из друге последице. Заиста, из сл. 77, код које су из тачке $A$, ван праве $MN$, повучене $AD$ нормално, а $AB$, $AE$ и $AC$ косо према правој $MN$, видимо да су троуглови, $ADB$, $ADE$ и $ADC$ правоугли, те су хипотенузе: $AB$, $AE$ и $AC$ веће од катете $AD$. Ако учинимо да је $DB=DE$, онда су косе $AB$ и $AE$ једнаке по 16 теореми (§ 16), пошто је $AD$ симетрала дужи $BE$. Па како је $\triangle AEC$ тупоугли, то је по другој последици $AC>AE$, односно $AC>AB$.



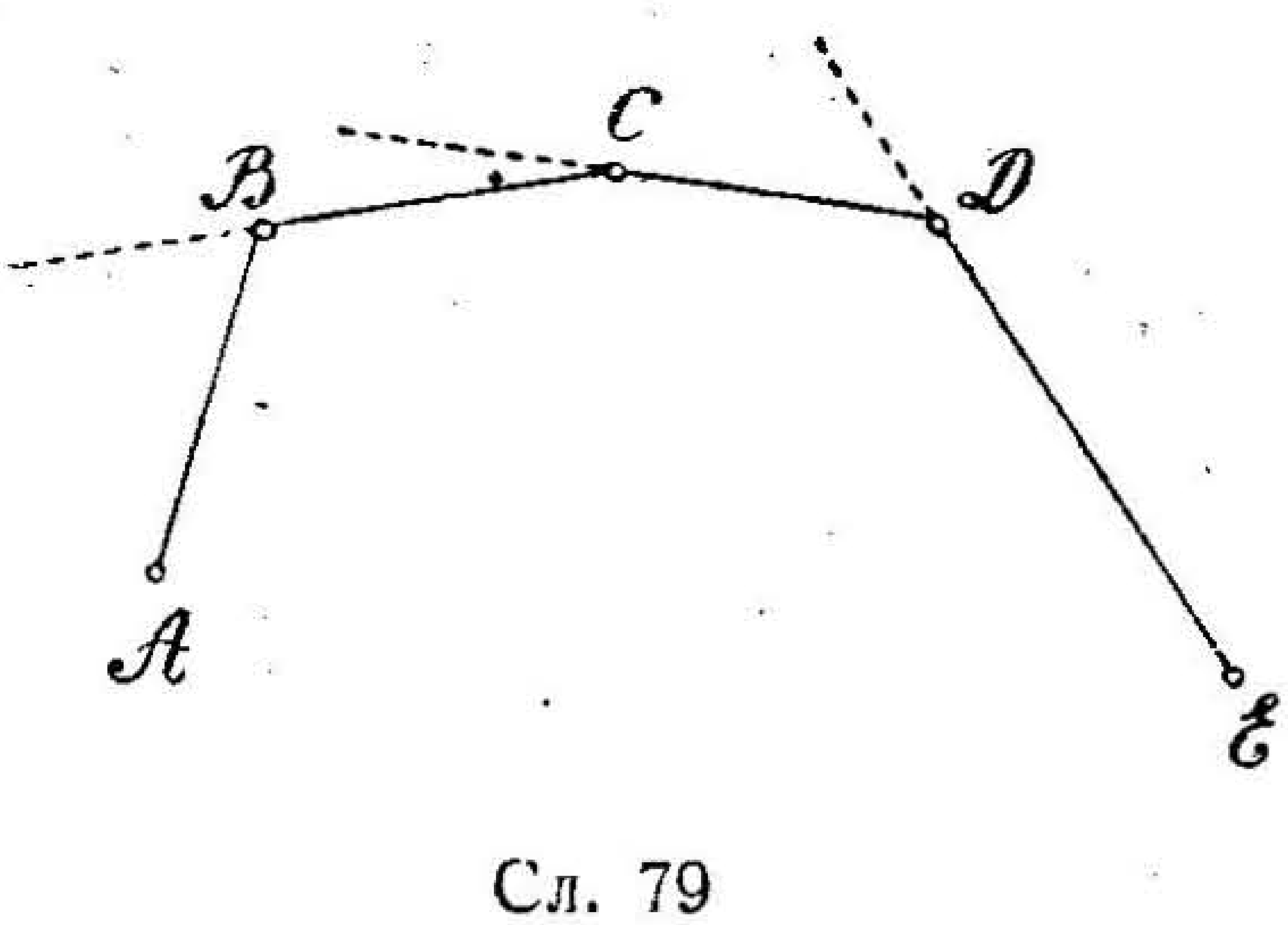
Сл. 78

**§ 27. — Однос између страна једног троугла.** — *Теорема 29.* — **Свака је страна троуглова мања од збира других двеју страна, а већа је од њихове разлике.** *a)* Да бисмо доказали да је страна $AB$ троугла $ABC$ (сл. 78) мања од збира страна $AC$ и $BC$, треба да повучемо $CD \perp AB$. Тада добијамо правоугле троуглове $ADC$ и $BDC$, те је, по првој последици претходне теореме, $AD < AC$ и $DB < BC$. Сабирањем ових двеју неједначина добијамо: $AD + DB < AC + BC$, или $AB < AC + BC \ldots$ (1) Истим путем нашли бисмо да је: $AC < AB + BC \ldots$ (2) и $BC < AB + AC \ldots$ (3).

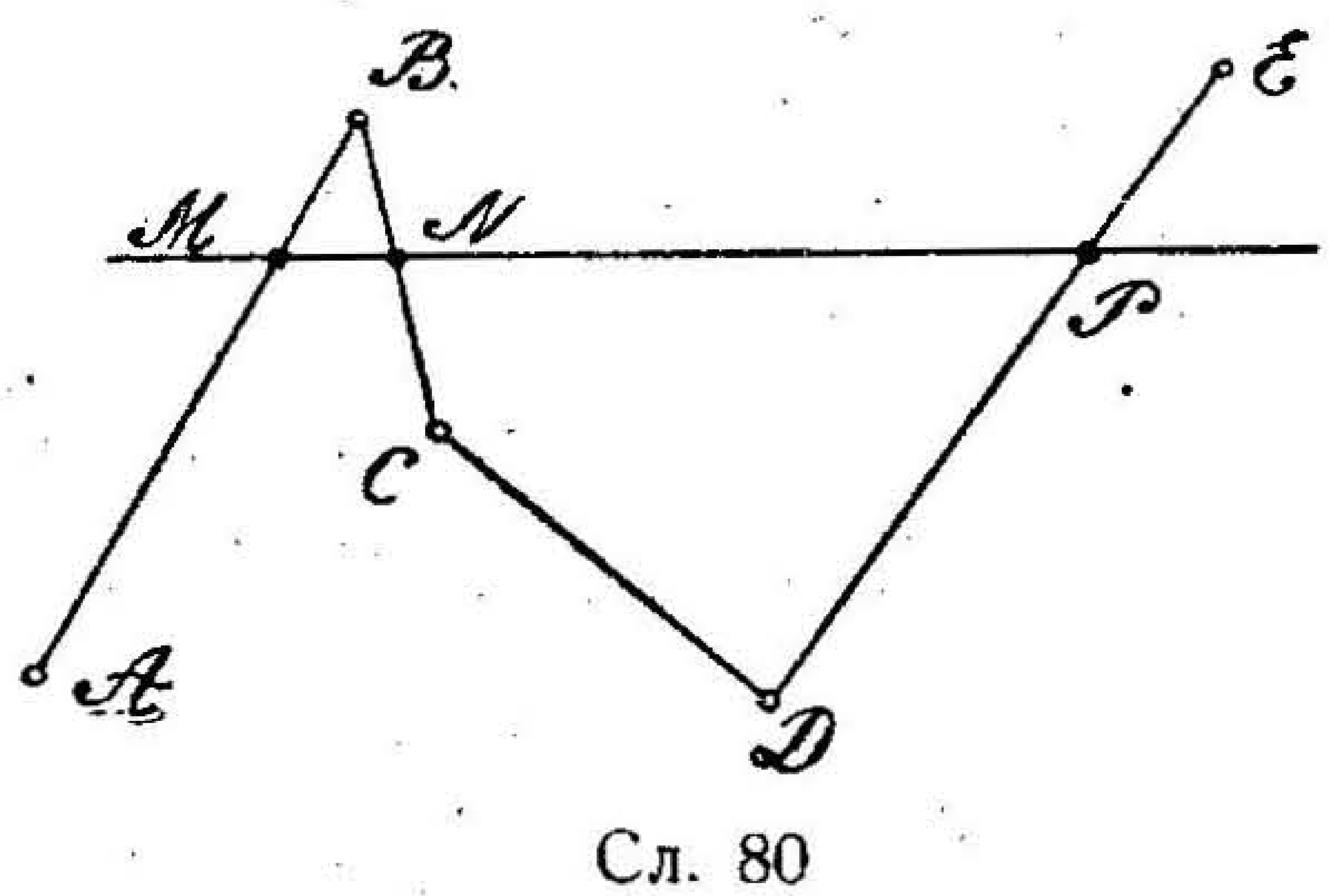
*b)* Како се неједнакост не мења ако и од једне и од друге њене стране одузмемо једну исту количину, то налазимо одузимањем $AC$ из прве неједнакости $BC > AB - AC$; ако из друге одузмемо $BC$, добијамо $AB > AC - BC$; и ако из треће одузмемо, $AB$, добијамо $AC > BC - AB$, чиме се доказује и други део ове теореме.

**§ 28. — Однос између страна полигона**

*Изломљена линија.* Линија састављена од више дужи које не леже на једној правој зове се *изломљена* (сл. 79 и 80). Дужи од којих је она



Сл. 79

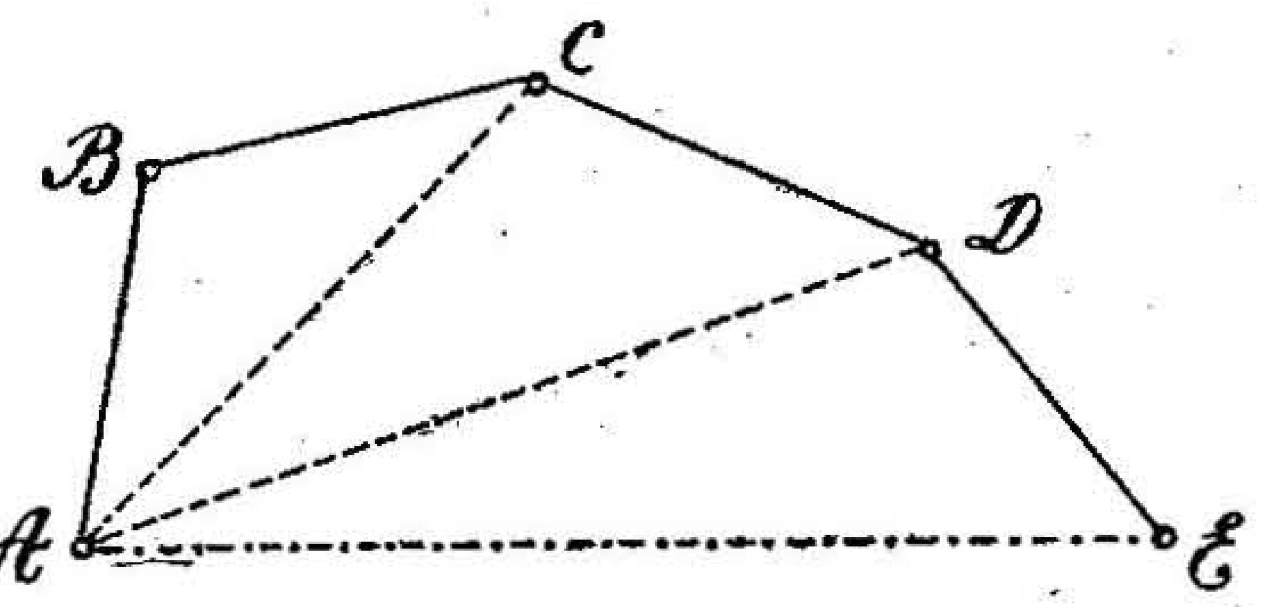


Сл. 80

састављена јесу њене *стране*, заједничке тачке јесу *темена* ($B$, $C$, $D$), а тачке $A$ и $E$ јесу њене *крајње тачке*. Изломљена линија је конвексна или *испупчена* ако се налази сва само с једне стране ма које њене дужи продужене неодређено. Таква је линија на сл. 79. *Права сече конвексну из-*

*ломљену линију само у двема тачкама.* Изломљена линија није конвексна, већ *конкавна,* ако је нека права може сећи у три и више тачака. Таква је линија на сл. 80. Ако се крајње тачке једне изломљене линије саставе, добија се затворена линија и део површине ограничен затвореном линијом је *полигон,* који је *конвексан* или *конкаван,* према томе да ли је добивен од једне конвексне или конкавне изломљене линије.

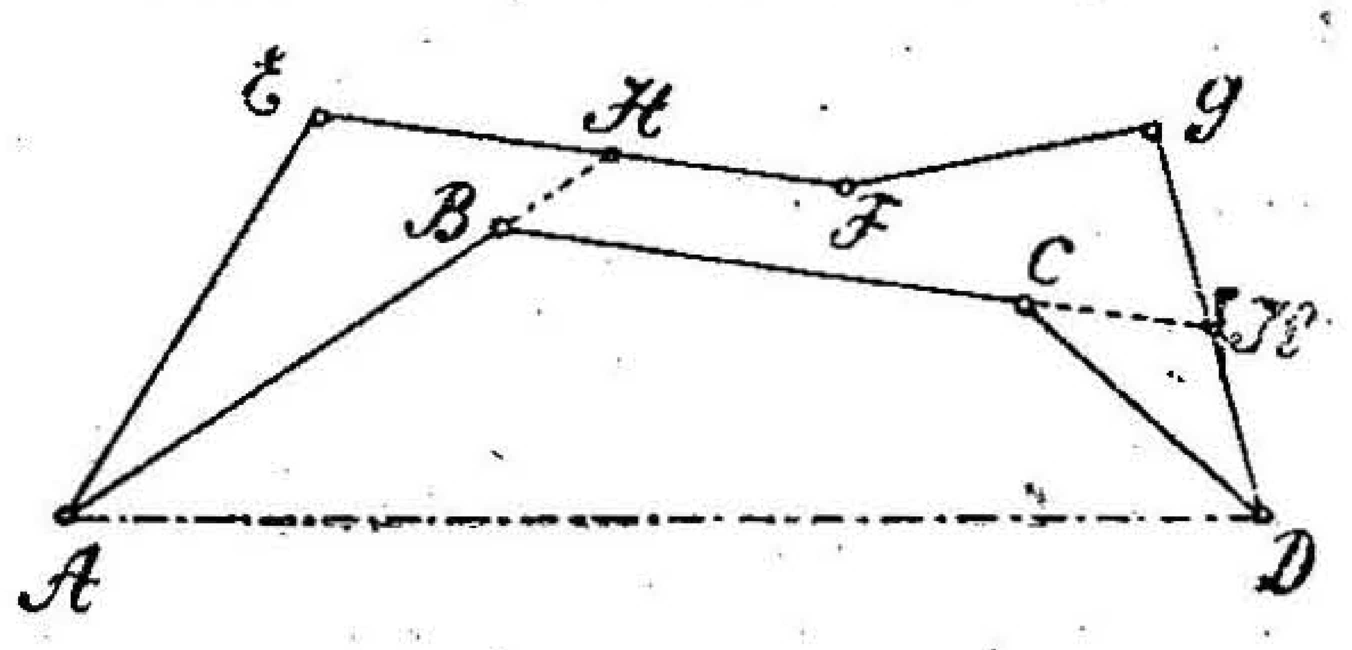
*Теорема 30.* — **Свака дуж чије се крајње тачке поклапају са крајњим тачкама једне изломљене линије, краћа је од те изломљене линије.**



Сл. 81

Нека је $ABCDE$ (сл. 81) изломљена линија повучена између крајњих тачака дужи $AE$. Када тачку $A$ спојимо са тачкама $C$ и $D$, онда, према 29 теореми, имамо: $AE < AD + DE$, $AD < AC + CD$ и $AC < AB + BC$. Сабирањем ових неједначина добијамо: $AE + AD + AC < AD + DE + AC + CD + AB + BC$, или $AE < AB + BC + CD + DE$, пошто се чланови $AD$ и $AC$ потиру.

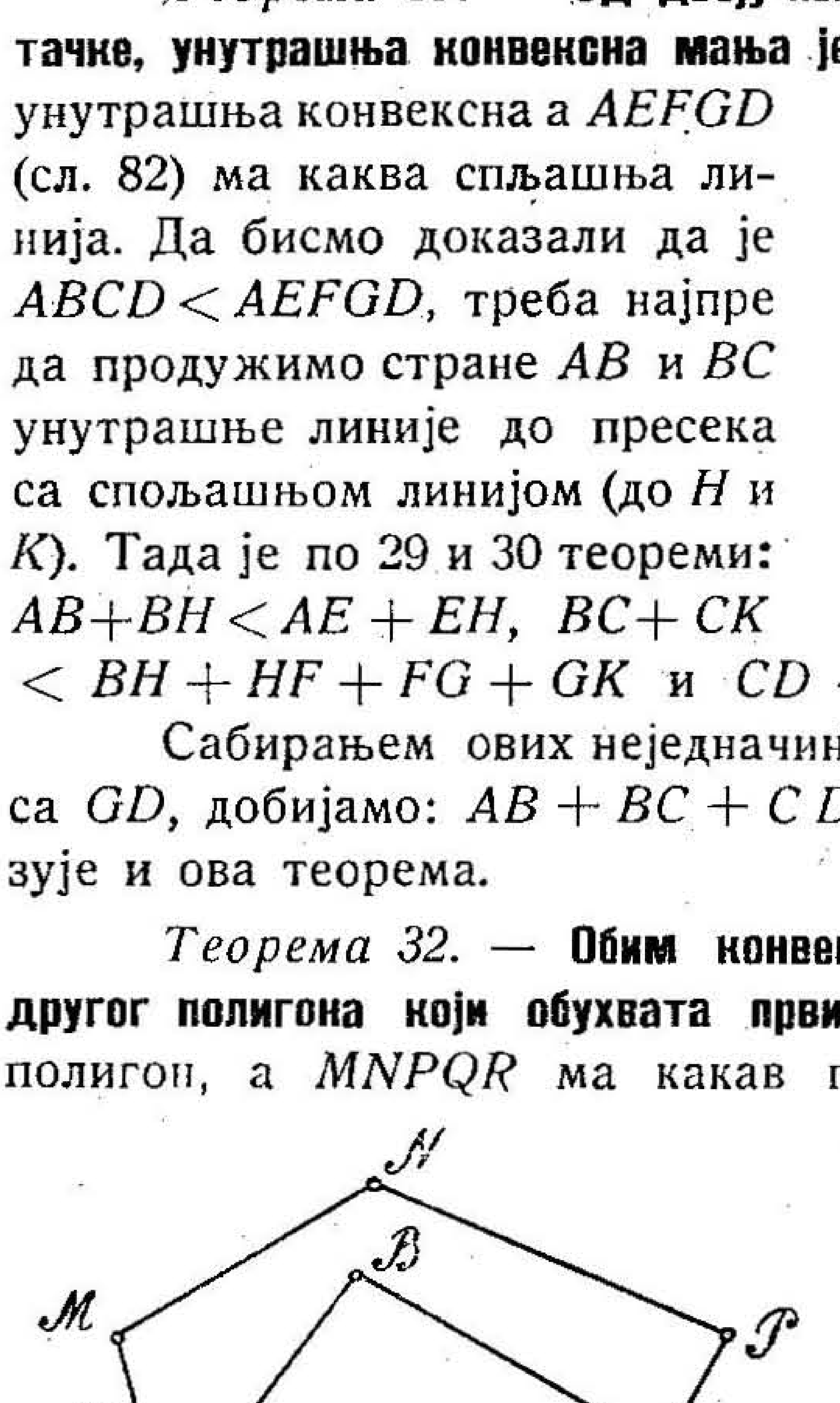
*Теорема 31.* — **Од двеју изломљених линија које имају заједничке крајње тачке, унутрашња конвексна мања је од ма какве спољашње.** Нека је $ABCD$ унутрашња конвексна а $AEFGD$ (сл. 82) ма каква спољашња линија. Да бисмо доказали да је $ABCD < AEFGD$, треба најпре да продужимо стране $AB$ и $BC$ унутрашње линије до пресека са спољашњом линијом (до $H$ и $K$). Тада је по 29 и 30 теореми: $AB + BH < AE + EH$, $BC + CK < BH + HF + FG + GK$ и $CD < CK + KD$.



Сл. 82

Сабирањем ових неједначина и заменом $EH + HF$ са $EF$, а $GK + KD$ са $GD$, добијамо: $AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD$, чиме се доказује и ова теорема.

*Теорема 32.* — **Обим конвексног полигона мањи је од обима ма кога другог полигона који обухвата први.** — Нека је $ABCD$ (сл. 83) конвексан полигон, а $MNPQR$ ма какав полигон у чијој се унутрашњости налази први. Ако продужимо ма коју страну унутрашњег полигона (на пример $AD$) са обе стране до пресека са обимом спољашњег полигона, онда је по претходној теореми:



Сл. 83

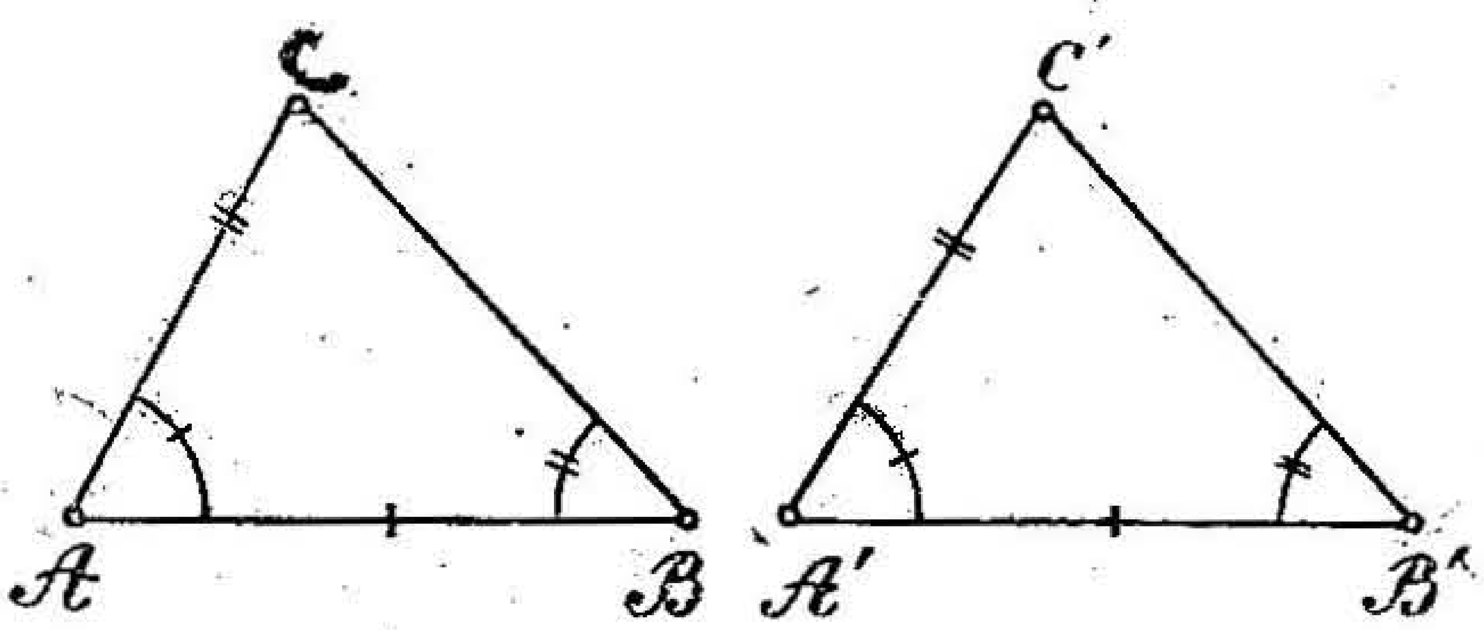
$AB + BC + CD < AF + FM + MN + NP + PQ + QS + SD$ и $AF + AD + DS < SR + RF$. Ако обе две неједначине најпре саберемо, а затим заменимо $RS + QS$ са $RQ$ и $RF + FM$ са $MR$, добијамо: $AB + BC + CD + DA < RM + MN + MP + PQ + QR$.

*Напомена.* — Како се круг сматра као полигон од бесконачно много страна, то је, према овој теореми, обим једног круга већи од обима ма кога у њему уписаног полигона, а мањи је од обима ма кога описаног полигона.

# V. Подударност праволиниских слика

**§ 29. — Подударност троуглова.** — За два троугла каже се да су подударни ако се потпуно поклапају, у ком случају имају не само одговарајуће стране и углове једнаке већ и одговарајуће висине и средње линије. Али, за утврђивање подударности троуглова није неопходно потребно да знамо једнакост свих његових главних елемената, свих његових страна и углова. Њихова подударност биће несумњива ако су само три елемента једнога троугла, међу којима мора бити бар једна страна, једнака са одговарајућим елементима другога троугла, јер смо тада у могућности да докажемо и једнакост осталих њихових елемената, а тиме и подударност троуглова. Следеће теореме показују нам четири најглавније погодбе за подударност троуглова:

*Теорема 33.* — **Два су троугла подударна ако имају једнаке по једну одговарајућу страну и њихове налегле углове** (I правило подударности). Нека су код троуглова $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 84) једнаке стране $AB$ и $A'B'$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Ако $\triangle A'B'C'$ положимо на $\triangle ABC$ тако да им се једнаке стране $AB$ и $A'B'$ поклопе, онда, услед једнакости углова $A$ и $A'$, страна

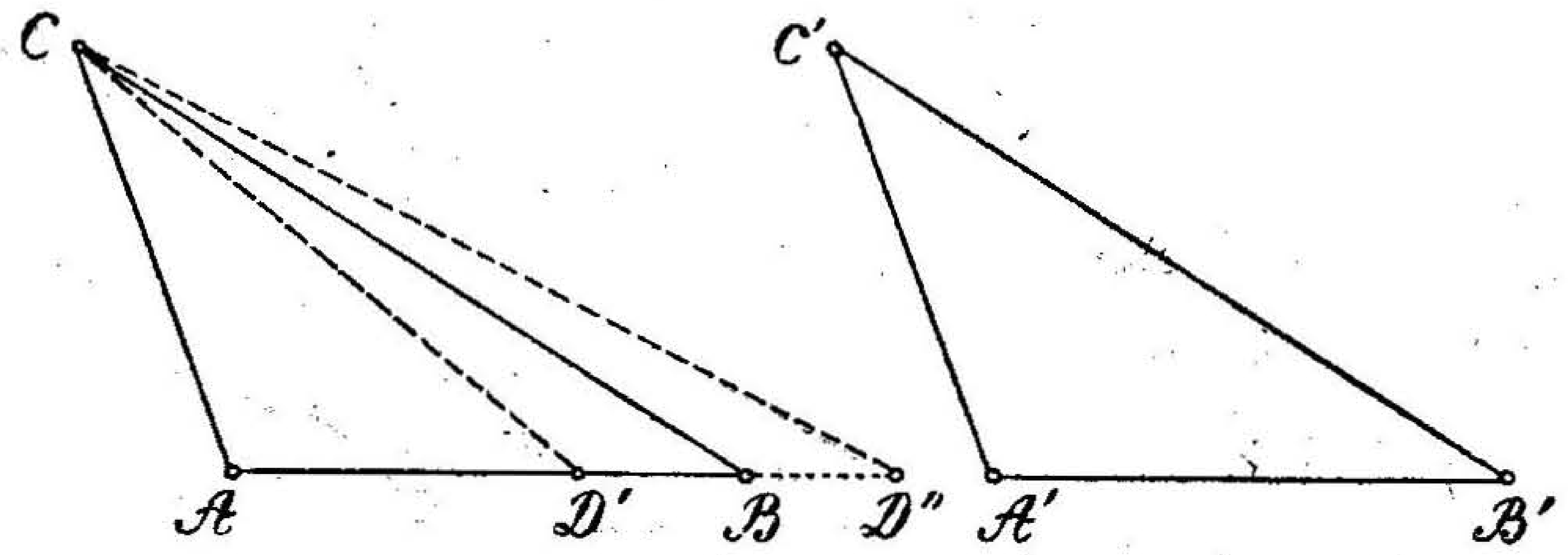


Сл. 84

$A'C'$ иде правцем стране $AC$, а услед једнакости угова $B$ и $B'$, страна $B'C'$ иде правцем стране $BC$. Па како две праве могу да се секу само у једној тачци, то теме $C'$ мора падати на теме $C$. Тиме се троуглови потпуно поклапају, те и остале елементе имају једнаке.

*Теорема 34.* — **Два су троугла подударна ако имају једнаке по две одговарајуће стране и захваћене углове** (II правило подударности). Нека троуглови $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 84) имају једнаке: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$. Ако $\triangle A'B'C'$ ставимо на $\triangle ABC$ тако да им се једнаке стране $AB$ и $A'B'$ поклопе, онда се поклапају и углови $A$ и $A'$ и стране $AC$ и $A'C'$ услед њихове једнакости. Тада се троуглови потпуно поклапају, јер им се поклапају и треће стране $BC$ и $B'C'$, пошто имају по две тачке на крајевима исте. Остали елементи морају такође бити једнаки.

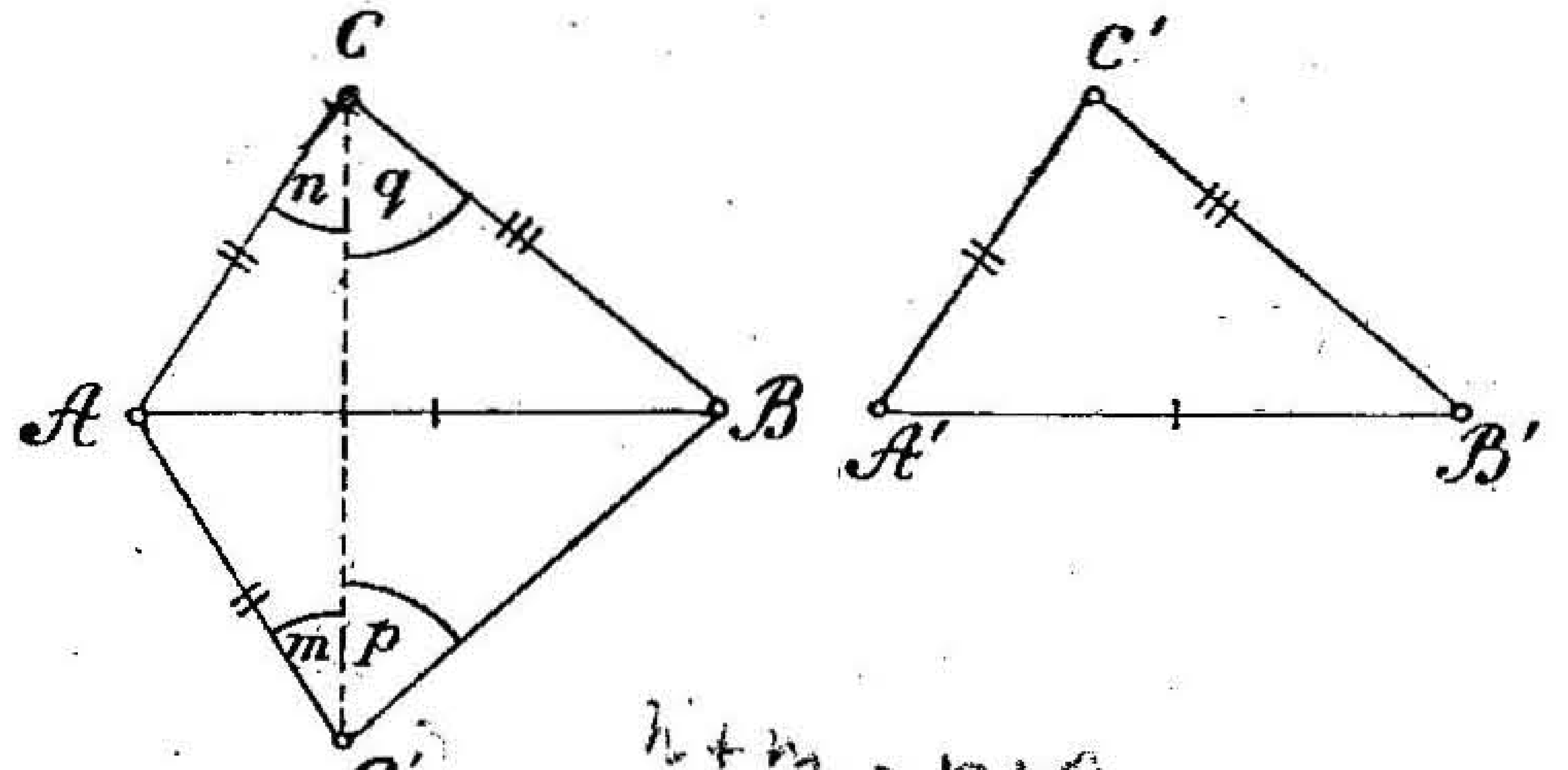
*Теорема 35.* — **Два су троугла подударна ако имају једнаке по две одговарајуће стране и углове наспрам већих од тих страна** (III правило подударности). Нека троуглови $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 85) имају једнаке: $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ и нека је $BC > AC$, као и $B'C' > A'C'$. Ако $\triangle A'B'C'$ положимо на $\triangle ABC$ тако да им се мање дате стране $AC$ и $A'C'$ поклопе, онда страна $A'B'$, услед једнакости углова $A$ и $A'$, иде правцем стране $AB$. Остаје у питању да ли и




Сл. 85

страна $C'B'$ иде правцем стране $CB$, пошто није дато да су углови $C$ и $C'$ једнаки. Ако претпоставимо да $C'B'$ не иде правцем стране $CB$, већ да заузима правац $CD'$, или $CD''$, онда би требало да је $CD' = C'B'$ и $CD'' = C'B'$, односно $CD' = CB$ и $CD'' = CB$. Па како овај случај не може бити, јер из тупоуглих троуглова $CBD'$ и $CBD''$ видимо да је $CB > CD'$ и $CB < CD''$, то страна $C'B'$ не може ићи ни правцем $CD'$, ни правцем $CD''$, већ једино правцем $CB$. Стога теме $B'$ поклапа теме $B$. Тада се троуглови потпуно поклапају, те имају и остале елементе једнаке.

*Теорема 36.* — **Два су троугла подударна ако су стране једног троугла једнаке са одговарајућим странама другога троугла** (IV правило подударности). Нека је код троуглова $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 86): $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$. Ако $\triangle A'B'C'$ ставимо на $\triangle ABC$ тако да им се само стране $AB$ и $A'B'$ поклопе, па се $\triangle A'B'C'$ изврне тако да заузме положај $ABC'$, и вежу темена $C$ и $C'$, онда добијамо равно-




$n + m = p + q$
$\sphericalangle C = C'$

Сл. 86

краке троуглове $CC'A$ и $CC'B$. У овим троугловима биће $\sphericalangle m = \sphericalangle n$ и $\sphericalangle p = \sphericalangle q$. Стога је и $m + p = n + q$, или $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. У том случају је $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$, јер имају по две стране и захваћене углове једнаке. Па како је $\triangle ABC'$ у ствари $\triangle A'B'C'$, то је и $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

## § 30. — Подударност правоуглих, равнокраких и равностраних троуглова

Како су код равнокраког троугла краци једнаки, а тако исто и углови на основици, а код правоуглог троугла прави је угао увек познат, то за подударност ових троуглова није нужно да знамо једнакост по три, већ по два елемента. Према томе, претходне четири теореме за равнокраке, правоугле и равностране троуглове гласиле би:

1) Два су правоугла троугла подударна: a) *ако су им катете једнаке* (јер и углови између њих као прави јесу једнаки); b) *ако имају по једну одговарајућу катету и по један оштар угао једнаке* (јер и други налегли углови тих катета као прави јесу једнаки); c) *ако имају хипотенузе и по један оштар угао једнаке* (јер тада и други оштри углови, као комплементни, јесу једнаки); и d) *ако имају хипотенузе и по једну одговарајућу катету једнаке* (јер и углови наспрам хипотенуза, као прави јесу једнаки).

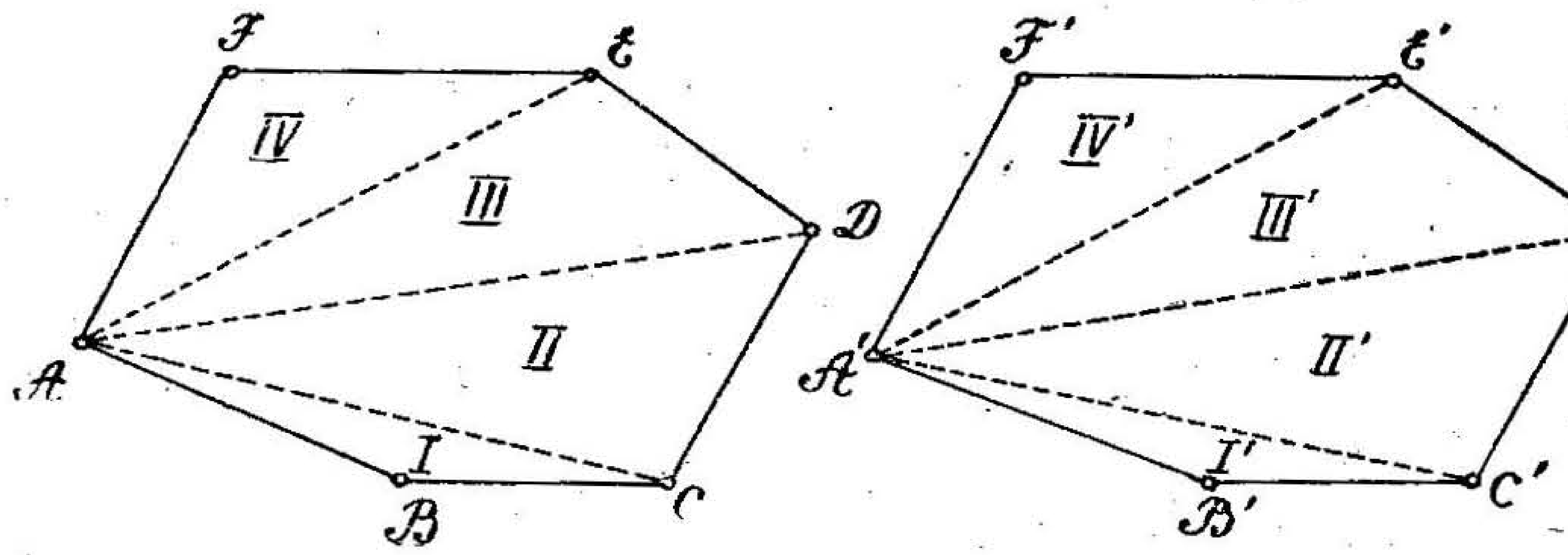
2) Два су равнокрака правоугла троугла подударна: a) *ако имају по једну катету једнаку*; и b) *ако имају хипотенузе једнаке* (јер ови троуглови имају катете једнаке, а углови на хипотенузи износе по 45°).

3) Два равнокрака троугла јесу подударни: a) *ако имају основице и по један угао једнаке*; b) *ако имају по један крак и по један угао једнаке*; c) *ако имају основице и по један крак једнаке*.

4) *Равнострани троугли су подударни чим имају страну једнаку.*

**§ 31. — Подударност четвороуглова и многоуглова.** — Два четвороугла, или ма која два многоугла од истог броја страна, подударни су ако се потпуно поклапају када један ставимо на други. У том случају они имају не само одговарајуће стране и углове једнаке, већ и одговарајуће дијагонале. Ако повлачењем одговарајућих дијагонала два $n$-тоугла поделимо на троуглове, онда ће многоуглови бити подударни ако су подударни добивени одговарајући троуглови; и обрнуто, ако су многоуглови подударни, онда су подударни и одговарајући троуглови. Међутим, као и код троуглова, није неопходно да знамо једнакост свију главних елемената, свију страна и углова, па да се утврди њихова подударност, већ је потребан мањи број елемената. Погодба за подударност два $n$-тоугла, који могу бити и четвороуглови, исказана је овом теоремом:

*Теорема 37.* — **Два су n-тоугла подударна ако имају једнака по (2n—3) одговарајућа елемента, која у оба многоугла иду један за другим истим редом, с тим да међу овим елементима буде страна (n—2).** Оба се многоугла, повлачењем дијагонала




Сл. 87

из два одговарајућа темена, деле на по ($n$—2) троугла. На сл. 87 подељени су на по 4 троугла. За подударност троуглова I и I′ потребна је једнакост *три* елемента, а за подударност следећих одговарајућих троуглова (II и II′, III и III′, IV и IV′...), чији је број ($n$—3), само по два елемента, пошто већ имају по један елеменат једнак из подударних претходних троуглова. Стога је број свију потребних елемената за подударност многоуглова:

$$3 + (n - 3)\cdot 2 = 2n - 3.$$

Па како се код једнога $n$-тоугла може знати ($n$—1) углова, то је број страна за подударност:

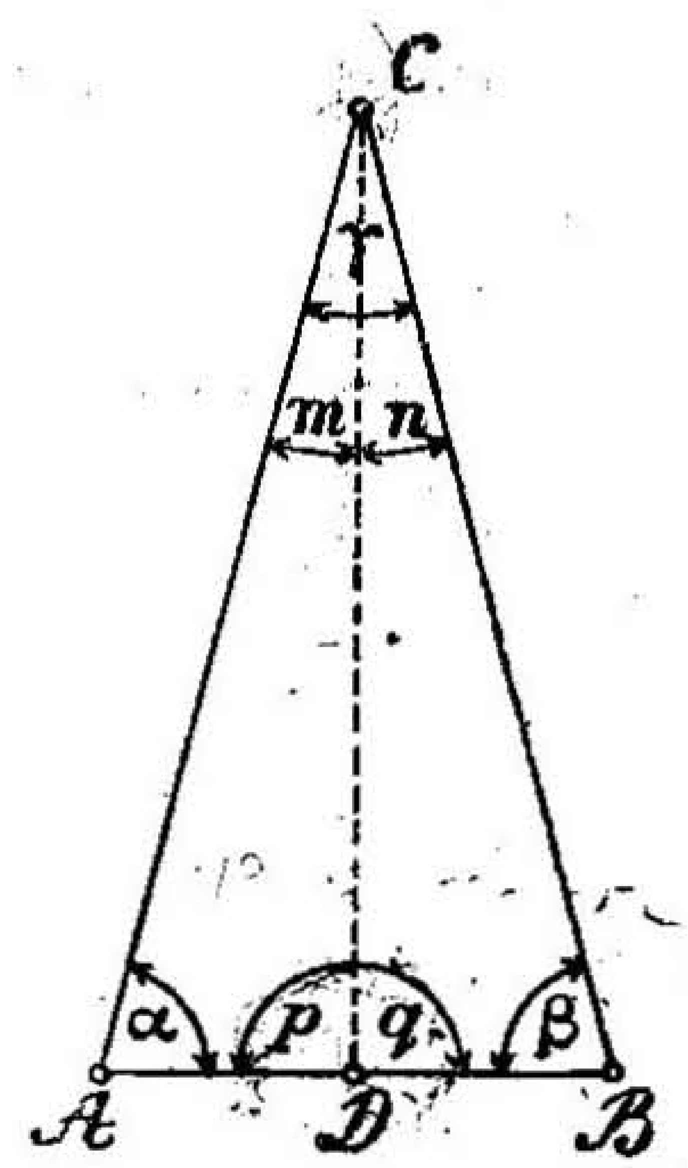
$$2n - 3 - (n - 1) = n - 2.$$

Тако, за подударност четвороуглова потребно је знати једнакост по 5 елемената, код петоуглова 7 итд. Разуме се, овај је број потребан само за трапезоиде и неправилне многоугле који немају једнаких елемената, а за остале четвороуглове и правилне многоуглове тај је број мањи и зависи од облика и особина дотичних слика. Тако, два правоугаоника су подударна ако имају по две суседне стране једнаке, јер тада имају и друге две стране једнаке, а углови су као прави једнаки. Два ма која правилна n-тоугла су подударни ако имају само по једну страну једнаку, јер тада имају и све стране једнаке, а тако исто имају и углове једнаке, пошто је сваки $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$.

# VI. Примена подударности, и особине слика

Тореме из подударности троуглова и осталих праволиниских слика од велике су важности, јер је њихова примена врло честа у геометрији. Помоћу њих испитујемо особине појединих слика и везу између њихових елемената, које затим примењујемо при решавању конструктивних и рачунских задатака.

**§ 32. — Примена подударности код равнокраког троугла.** — *Теорема 38* — **Основичина висина равнокраког троугла је истовремено средња линија основице, симетрала основице и симетрала угла на врху.** Нека је $\triangle\ ABC$ (сл. 88) равнокрак и нека је $CD \perp AB$. Тада је $\triangle\ ADC \cong \triangle\ BCD$, јер јер $AC = BC$, $CD$ заједничка страна и $\sphericalangle\ p = \sphericalangle\ q = 90^0$. Из њихове подударности излази да је: 1) $AD = DB$, тј. да је тачка $D$ средина основице $AB$, те је $CD$ и средња линија основице и њена симетрала; 2) $\sphericalangle\ m = \sphericalangle\ n$, те је $CD$ и симетрала угла на врху.



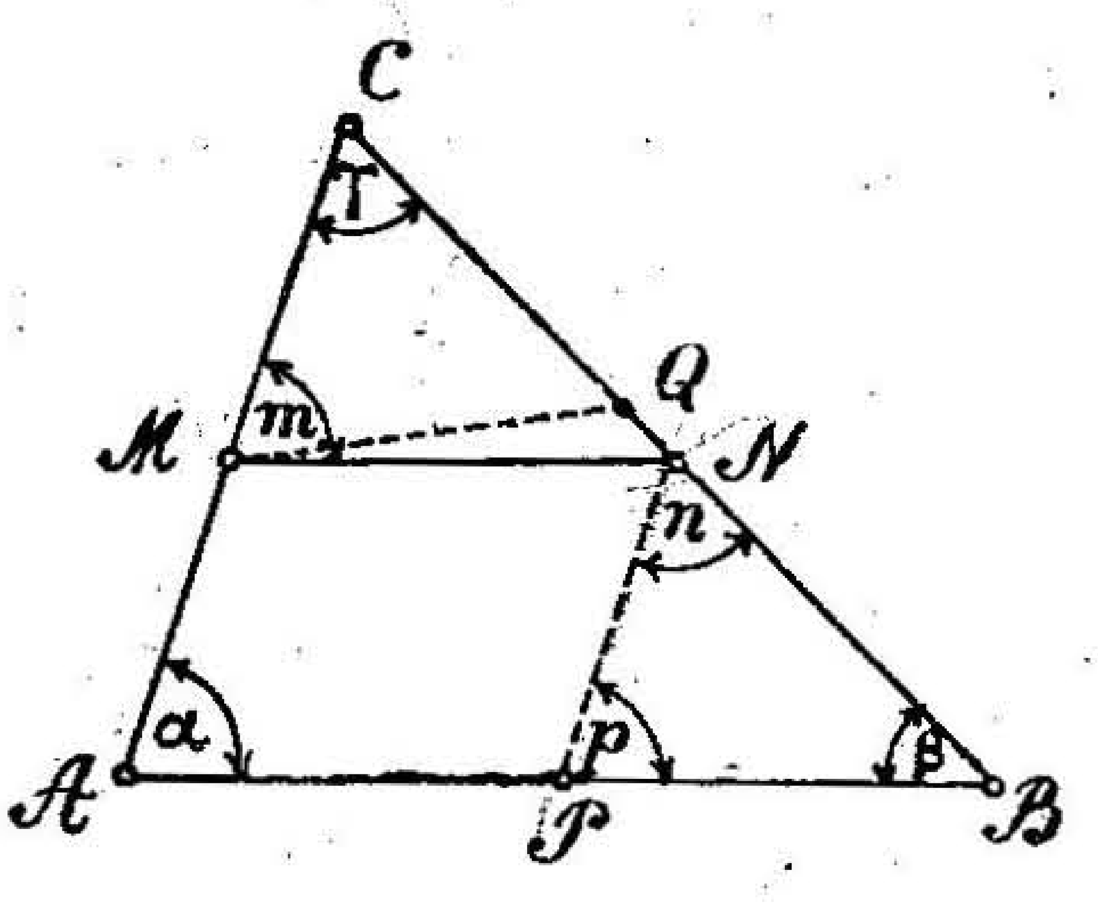
Сл. 88

*Теорема 39.* — **Симетрала угла на врху равнокраког троугла истовремено је и висина основице, средња линија и симетрала основице.** Нека је $\triangle\ ABC$ (сл. 88) равнокрак и нека је $CD$ симетрала угла $\gamma$. Тада је $\triangle\ ADC \cong \triangle\ BDC$, јер је $AC = BC$, $CD$ заједничка страна и $\sphericalangle\ m = \sphericalangle\ n = \frac{\gamma}{2}$. Из њихове подударности излази: 1) да је $\sphericalangle\ p = \sphericalangle\ q$, који су углови прави, пошто им збир износи $180^0$, те је $CD$ висина основичина; 2) да је $AD = DB$, тј. да је тачка $D$ средина основице, те је $CD$ и средња линија и симетрала основице.

*Теорема 40.* — **Средња линија основице равнокраког троугла истовремено је и висина, и симетрала основице, и симетрала угла на врху.** Нека је $\triangle\ ABC$ (сл. 88) равнокрак и нека је $CD$ средња линија основице. Тада је $\triangle\ ADC \cong DBC$, јер имају све три стране једнаке. Из њихове подударности излази: 1) да је $\sphericalangle m = \sphericalangle n$, те је $CD$ симетрала угла $\gamma$; 2) да је $\sphericalangle p = \sphericalangle q$, који су углови прави, јер дају раван угао, те је $CD$ и висина и симетрала основице.

*Напомена.* — Претходне три теореме, које се могу спојити у једну, у важности су и код равностраног троугла, и то за све три његове висине, симетрале страна, симетрале углова и средње линије. Према овим теоремама јасно је да управна подигнута из средине основице равнокраког или равностраног троугла пролази кроз његов врх. Ова констатација је важна, јер се врло често примењује при конструкцији равнокраког и равностраног троугла.

§ 33. — **Примена подударности код троуглова.** — *Теорема 41.* — **Кад се из средине једне троуглове стране повуче паралелна с другом страном, онда се и трећа страна дели овом паралелном на једнаке делове.** Нека је код $\triangle\ ABC$ (сл. 89) тачка $M$ средина стране $AC$ и нека је $MN \parallel AB$. Да бисмо доказали да је $CN = NB$, треба да повучемо кроз $N$ праву $NP \parallel AC$. У том случају добијамо паралелограм $AMNP$ и $\triangle\ BPN$ који је подударан са $\triangle\ MNC$. Ови су троуглови подударни, јер је $NP = MC$, пошто су обе једнаке са $AM$, $\sphericalangle n = \sphericalangle \gamma$ као сагласни, $\sphericalangle p = \sphericalangle m$, пошто су оба једнака са углом $\alpha$ као сагласни. Из њихове подударности излази да је $BN = NC$.



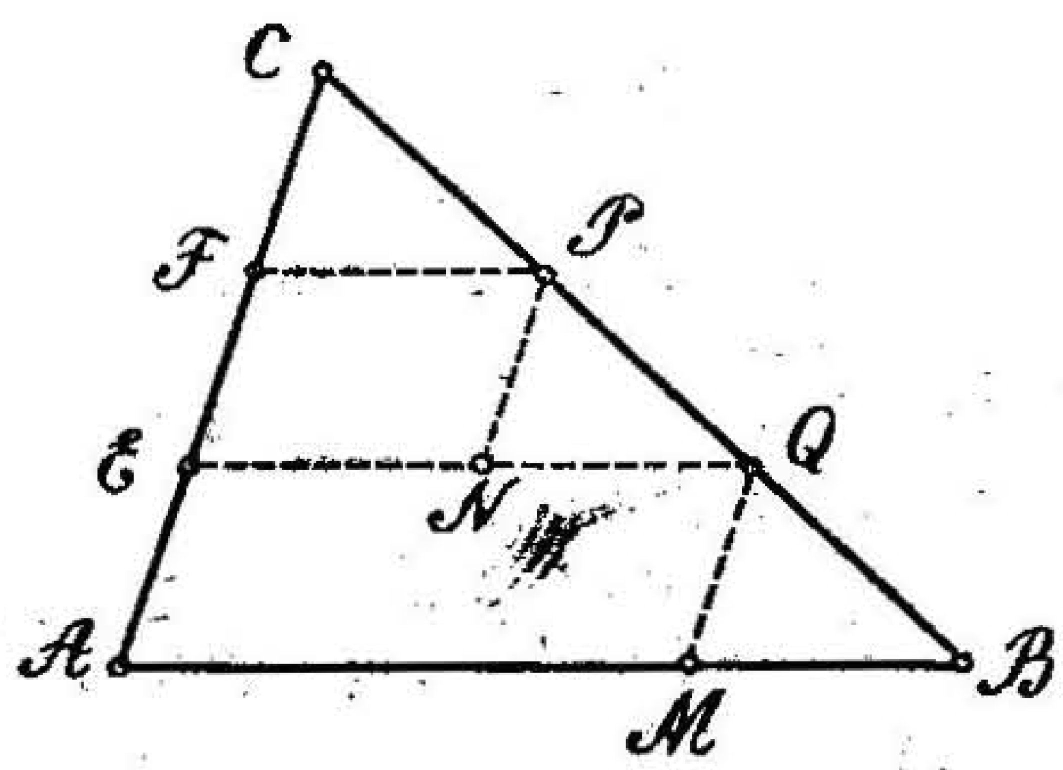
Сл. 89

*Теорема 42.* — **Права која спаја средине двеју страна једнога троугла паралелна је с трећом страном и једнака је с њеном половином.** Нека су тачке $M$ и $N$(сл. 89) средине страна $AC$ и $BC$ троугла $ABC$. Најпре ћемо доказати да је $MN \parallel AB$. Ако кроз тачку $M$ повучемо $MQ \parallel AB$ и претпоставимо да се $MQ$ не поклапа са $MN$, онда је по претходној теореми

$CQ = QB$, тј, тачка $Q$ је средина стране $BC$. Па како је дато да је тачка $N$ средина стране $BC$, значи да тачка $Q$ има да се поклопи са тачком $N$, а паралелна права $MQ$ са правом $MN$, чиме је доказан први део ове теореме.

Да бисмо доказали и други део, треба кроз тачку $N$ да повучемо $NP \parallel AC$, у ком случају добијамо паралелограм $AMNP$ и $\triangle BPN \cong \triangle MNC$, што смо видели из претходне теореме. Тада је из паралелограма; $NM = AP$, а из троуглова $MN = PB$, те је $2\,MN = AP + PB$, или $2\,MN = AB$, а $MN = \frac{AB}{2}$.

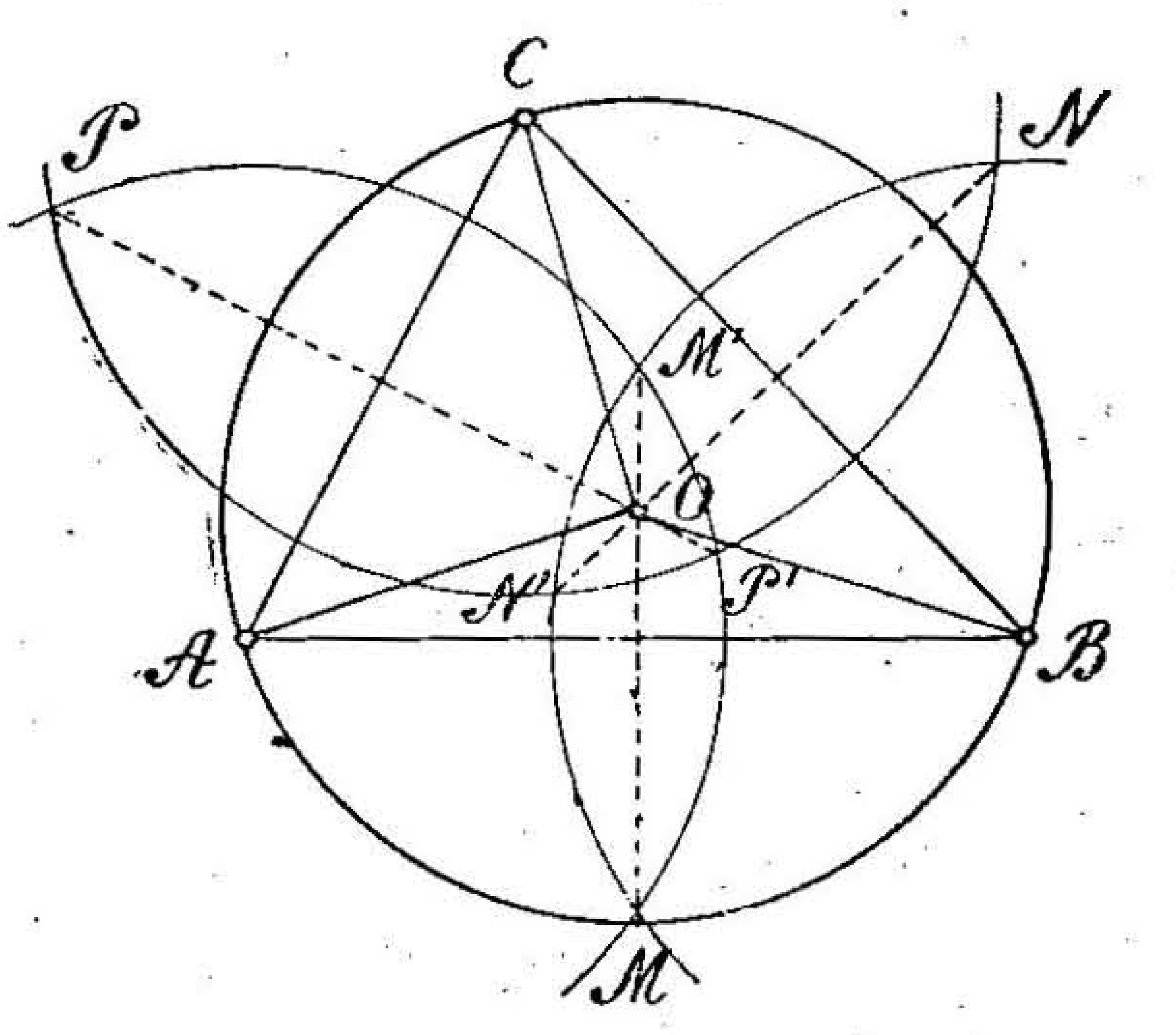
*Теорема 43.* — **Ако се једна троуглова страна подели на више једнаких делова, па се из деоних тачака повуку паралелне с другом страном, онда се и трећа страна дели на исти број делова једнаких међу собом.** Нека је страна $AC$ троугла $ABC$ (сл. 90) подељена на три једнака дела, а из деоних тачака $E$ и $F$ нека су повучене паралелне $EQ$ и $FP$ са страном $AB$. Ако из тачака $P$ и $Q$ повучемо $PN$ и $QM$ паралелно са $AC$, онда су добивени троуглови $CFP$, $PNQ$ и $QMB$ подударни, јер имају стране $CF$, $PN$ и $QM$ једнаке ($PN$ и $QM$ једнаке су са деловима стране $AC$) и једнаке углове код темена: $C$, $P$ и $Q$ као сагласни. Тако су исто једнаки и углови код темена: $F$, $N$ и $M$, као углови са паралелним крацима. Из подударности ових троуглова излази да је $CP = PQ = QB$, тј. и страна $BC$ подељена је такође на три једнака дела.



Сл. 90

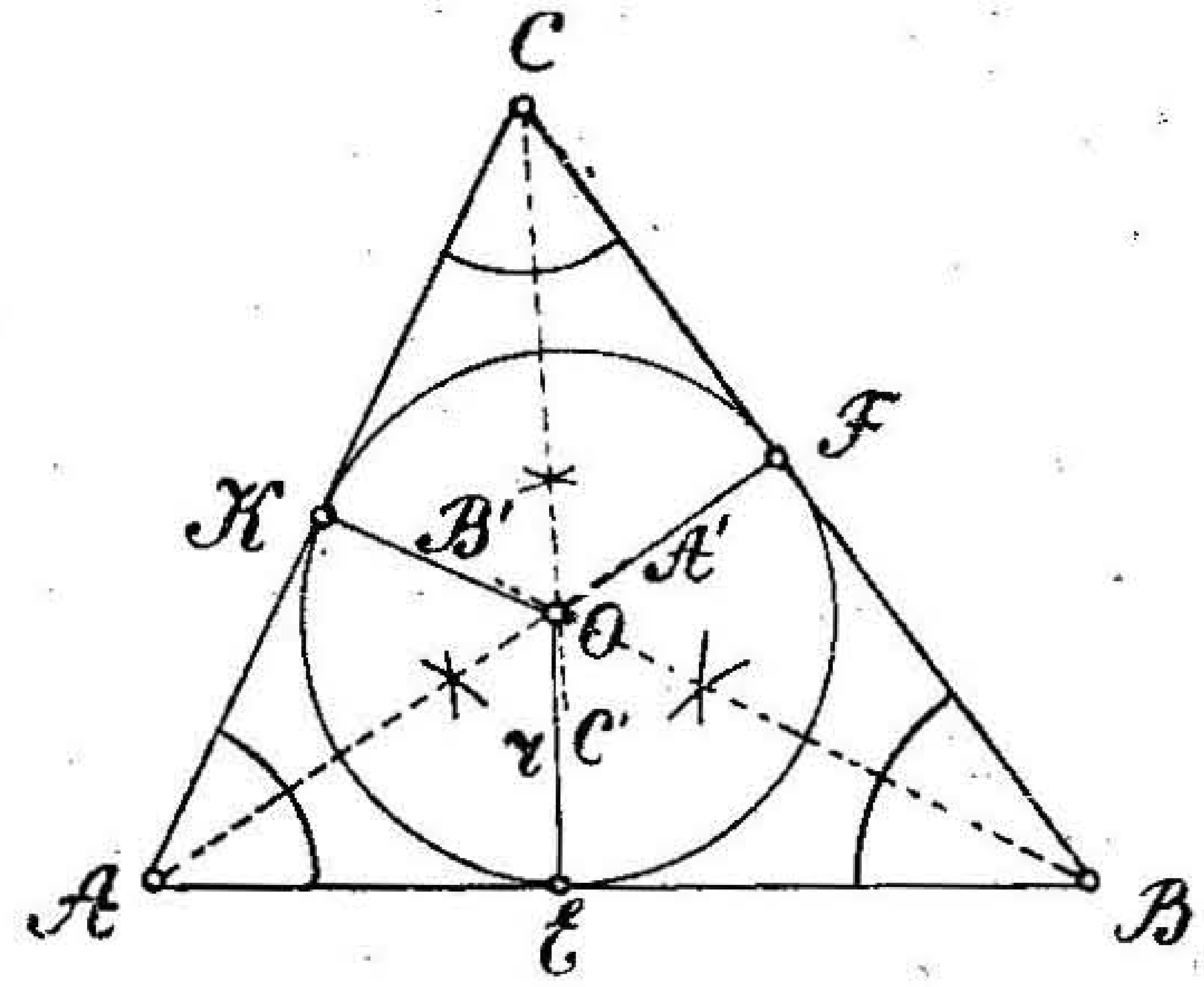
**§ 34. — Важне тачке једнога троугла.** — Код троуглова разликујемо четири значајне тачке, и то: пресек симетрала страна, пресек симетрала углова, пресек висина и пресек средњих линија.

*Теорема 44.* — **Све три симетрале страна једнога троугла секу се у истој тачци, која је подједнако удаљена од сва три троуглова темена.** — Нека су $MM'$, $NN'$ и $PP'$ симетрале страна $\triangle ABC$ (сл. 91). Да се прве две заиста секу, нема сумње, пошто су обе нормалне на крацима угла $\beta$. Остаје једино да докажемо да и трећа симетрала $PP'$ мора пролазити кроз исти пресек $O$. Ово увиђамо на следећи начин: Пресек $O$ налази се на симетрали $MM'$, те је $OA = OB$ (1) (теорема 16), али он се налази и на симетрали $NN'$, те је $OB = OC$ (2). Из једначина (1) и (2) излази да је $OA = OC$ (3), која нам једначина показује да је пресек $O$ подједнако удаљен од крајњих тачака стране $AC$. Стога се, по 17 теореми, пресек $O$ налази и на симетрали стране $AC$, или обрнуто: и симетрала стране $AC$ пролази кроз исти пресек $O$. Једначине (1), (2) и (3) показују нам да је пресек $O$ подједнако удаљен од сва три темена, те се из пресека $O$ може описати круг око троугла, због чега се овај пресек и зове *циркумцентар*. Дакле, *да бисмо описали круг око једнога троугла, треба најпре конструисати симетрале страна; њихов заједнички пресек биће центар, а за полупречник узети отстојање од пресека до ма ког темена.*



Сл. 91

*Теорема 45.* — **Све три симетрале углова једнога троугла секу се у истој тачци, која је подједнако удаљена од све три стране.** Да се симетрале $AA'$ и $BB'$ углова $\alpha$ и $\beta$ троугла $ABC$ (сл. 92) секу у тачци $O$ нема сумње, пошто полове два угла на истој страни једнога троугла. Да и симетрала $CC'$ угла $\gamma$ пролази кроз исти пресек $O$, уверавамо се на овај начин: Пресек $O$ налази се на симетрали $AA'$, те је по 18 теореми $OE = OK$ (1), а како се налази и на симетрали $BB'$, то је и $OE = OF$ (2). Из једначина (1) и (2) излази да је $OF = OK$ (3), која нам једначина показује да се пресек $O$ мора налазити и на симетрали $CC'$ угла $\gamma$ (теорема 19); или обрнуто, да и симетрала $CC'$ мора пролазити кроз пресек $O$. Једначине (1), (2) и (3) показују да је

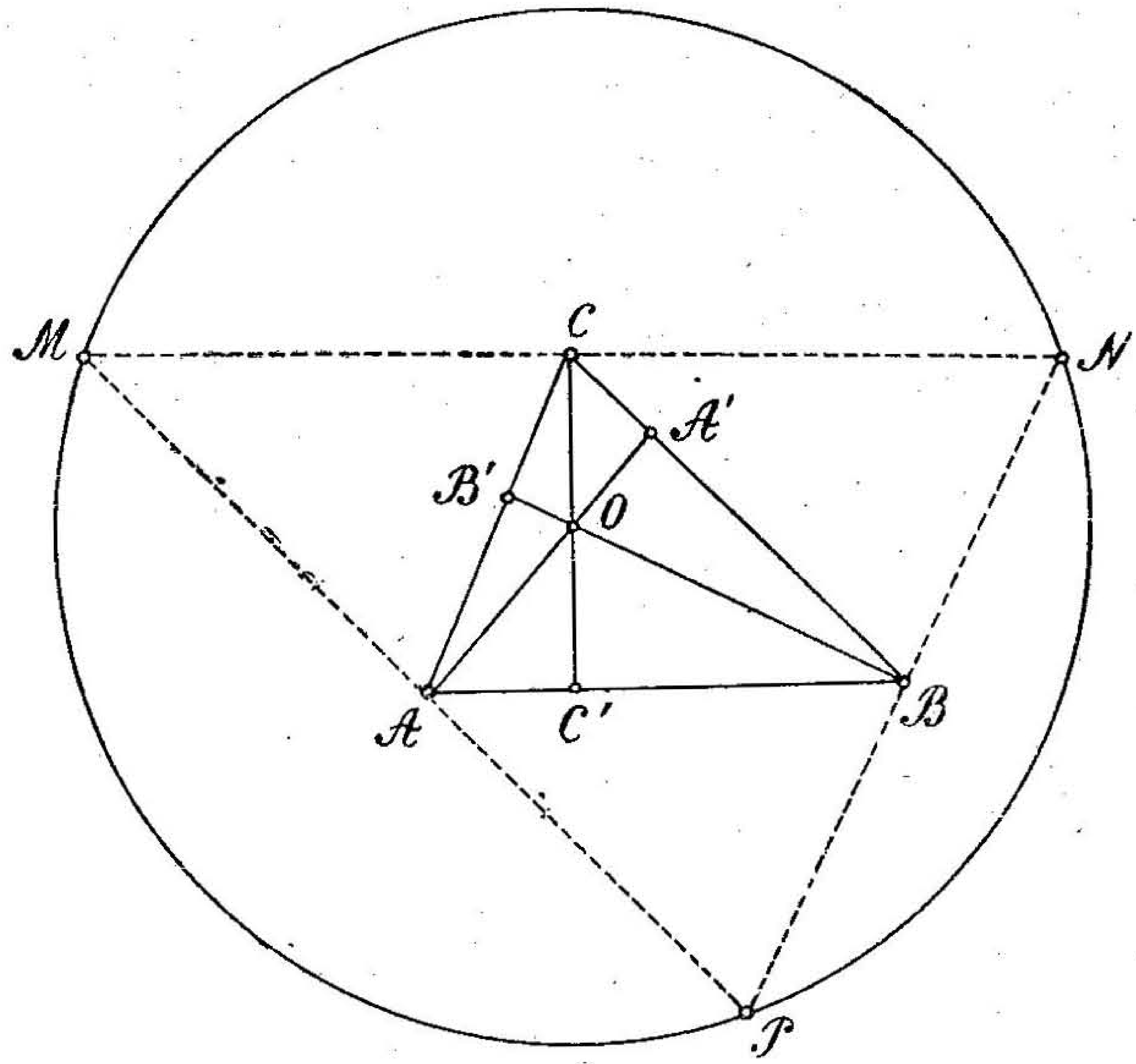


Сл. 92

пресек $O$ подједнако удаљен од страна троугла, чиме је доказан и други део теореме. Овај пресек је центар (*инцентар*) уписаног круга. Дакле, *да бисмо уписали круг у једноме троуглу, треба најпре да конструишемо симетрале углова тога троугла, њихов заједнички пресек да узмемо за центар, а за полупречник узимамо нормално отстојање од тога пресека до ма које троуглове стране.*

*Напомена.* — Поред унутрашњег уписаног круга $O$, код сваког троугла имамо још три *спољашња уписана* круга: $O_1$, $O_2$ и $O_3$, чији се центри добијају пресеком симетрале једнога унутрашњег угла и симетрала спољашњих углова на супротној страни. Сваки од ових кругова додирује једну троуглову страну и продужења других двеју страна. Да је центар једнога од спољашњих уписаних кругова подједнако удаљен од троуглових страна, уверавамо се на исти начин као и за центар унутрашњег круга.

*Теорема 46.* — **Све три висине једнога троугла секу се у истој тачци.** Нека су $AA'$, $BB'$ и $CC'$ висине $\triangle$ $ABC$ (сл. 93).

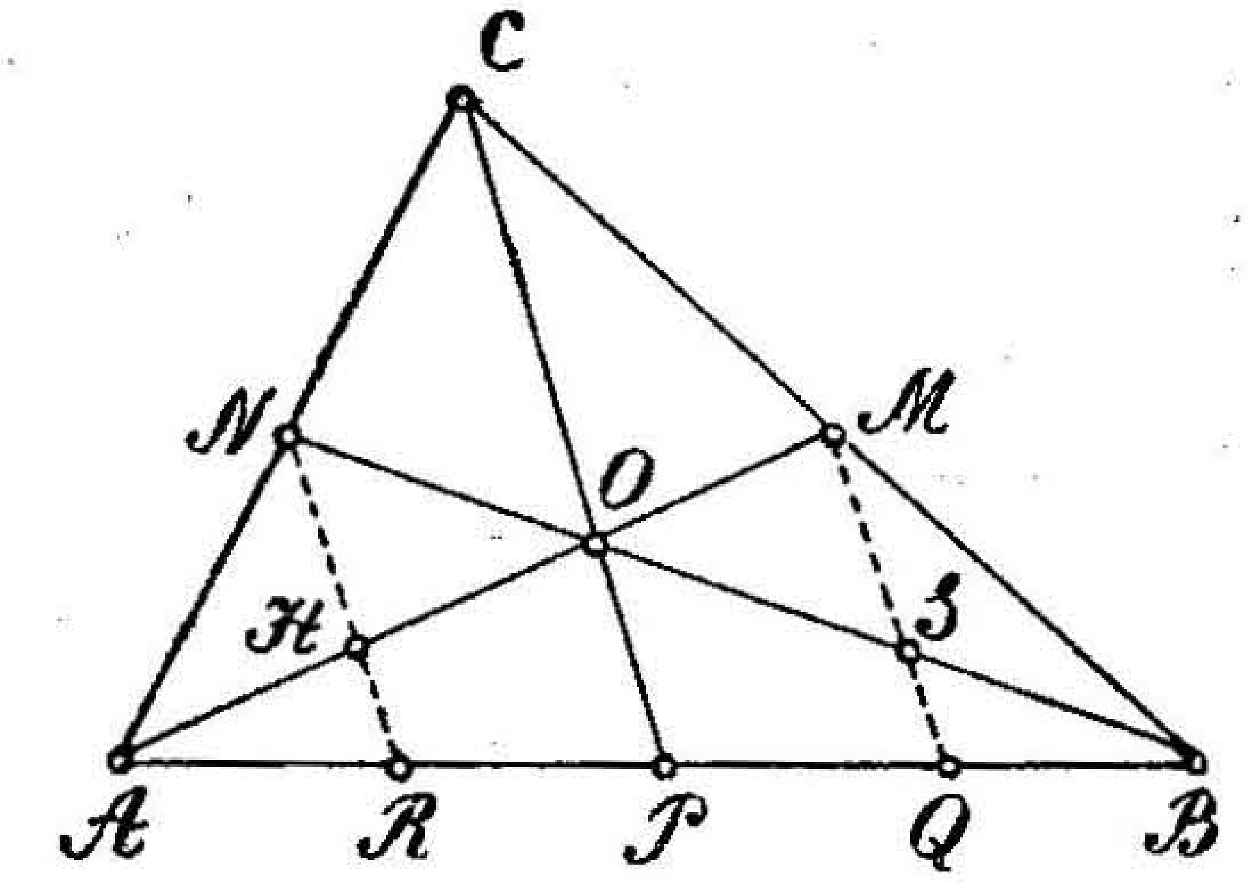



Сл. 93

Да бисмо доказали да се ове висине секу у истој тачци, треба да повучемо кроз теме $C$ праву $MN \parallel AB$, кроз теме $A$ праву $MP \parallel BC$ и кроз теме $B$ праву $NP \parallel AC$. Тада су висине $\triangle$ $ABC$ симетрале страна $\triangle$ $MNP$, о чему се можемо уверити на следећи начин: Из паралелограма $ABCM$ имамо $MC = AB$ (1), а из паралелограма $ABNC$ имамо $NC = AB$ (2). Једначине (1) и (2) показују нам да је $MC = NC$, тј. да је теме $C$ средина стране $MN$. Истим путем налазимо да је теме $B$ средина стране $NP$, а теме $A$ средина стране $MP$. Према теореми 11, висина $CC'$, која је нормална на $AB$, нормална је и на $MN$, пошто је паралелна са $AB$. Истим путем налазимо да је $AA' \perp MP$ и $BB' \perp NP$. Стога су висине $\triangle ABC$ заиста симетрале стрна $\triangle MNP$. Па како се симетрале страна $\triangle MNP$ секу у једној тачци, то се и висине $\triangle ABC$ секу у једној тачци. Пресек висина зове се *ортоцентар*. Он је центар круга описаног око троугла, чије стране пролазе кроз темена датога троугла, а паралелне су са супротним странама.

Код оштроуглога троугла ортоцентар се налази у троуглу, код правоуглога троугла у темену правога угла, а код тупоуглога ван троугла.

*Теорема 47.* — **Све три средње линије једнога троугла секу се у истој тачци, која дели сваку средњу линију на два дела тако да је део до темена двапута већи од дела до средине стране.** Нека су $AM$, $BN$ и $CP$ средње линије $\triangle ABC$ (сл. 94), које се секу у тачци $O$. Да бисмо доказали да је $AO = 2 \cdot OM$, треба да повучемо $NR$ и $MQ$ паралелно са $CP$. Тада је по 41 теореми $AR = RP$ и $BQ = QP$. Па како је $AP = PB$, то је и $RP = PQ$, као њихове половине. Стога је страна $AQ$ троугла $AQM$ подељена на три једнака дела, а из деоних тачака $R$ и $P$ повучене су $RH$ и $PO$ паралелно са страном $MQ$. По 43 теореми и страна $AM$ дели се на три једнака дела, те је заиста $AO = 2 \cdot OM$. Истим путем можемо доказати, из $\triangle NRB$, да је $BO = 2 \cdot ON$, а кад повучемо из средина $P$ и $N$ паралелне са $AM$, можемо доказати да је $CO = 2 \cdot OP$. Па како тачка $O$ дели сваку средњу линију у размери $2:1$, то се све три средње линије заиста секу у истој тачци. Ова се тачка зове *тежиште*, зато што троугао изрезан и подупрт у овој тачци стоји у равнотежи; због тога се средња линија зове још и *тежишна линија*.

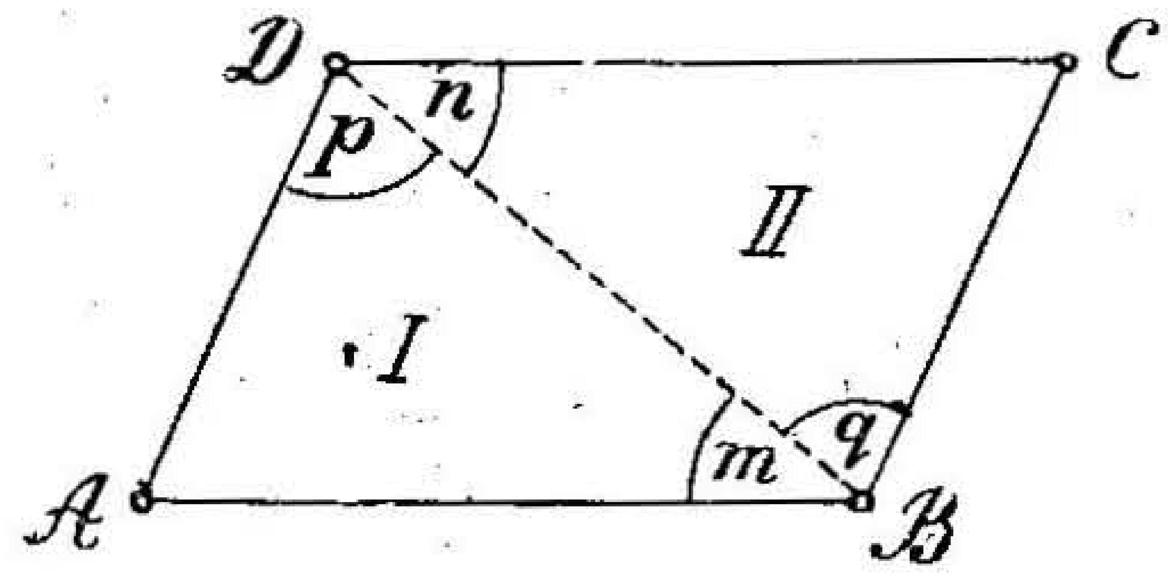


Сл. 94

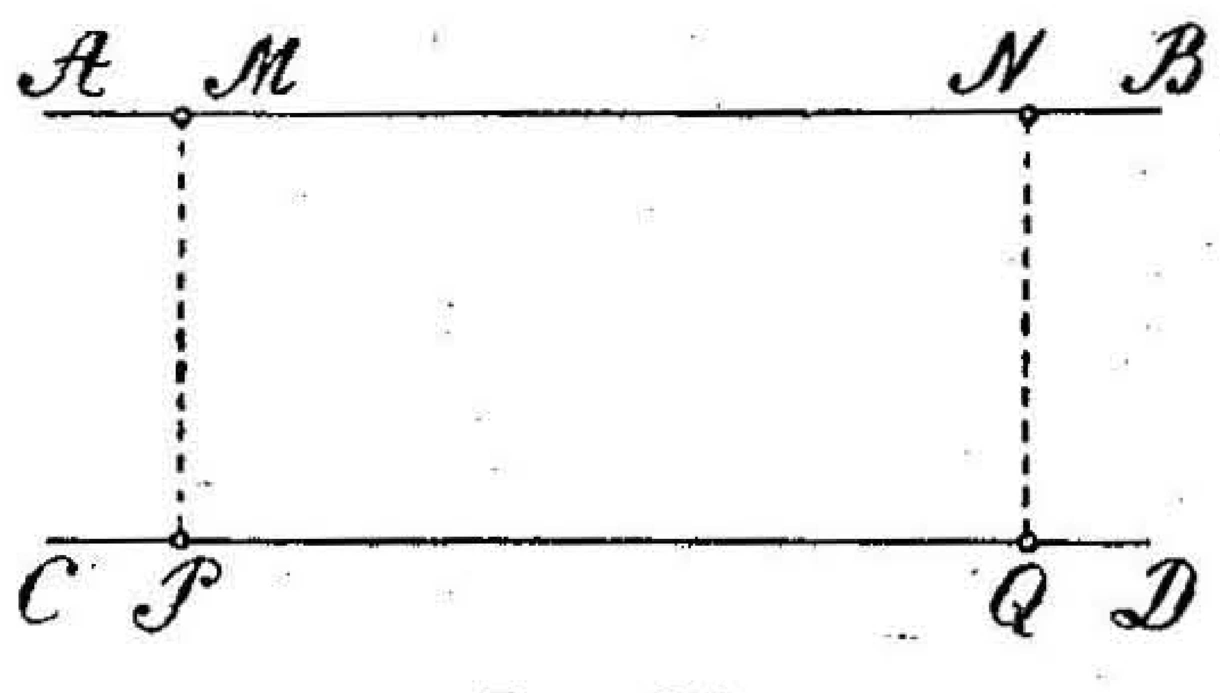
*Напомена.* — Све четири важне тачке код разностраног троугла заузимају различите положаје у равни, а код равностраног троугла све се поклапају. Код овога троугла симетрале страна истовремено су симетрале углова, висине и средње линије.

## § 35. — Примена подударности код четвороуглова — а) код паралелограма

*Теорема 48.* — **Код паралелограма су једнаки а) супротни углови, b) супротне стране.** Повлачењем дијагонале $BD$, паралелограм $ABCD$ (сл. 95) дели се на два подударна троугла $ABD$ и $BCD$, зато што је страна $BD$ заједничка, $\sphericalangle m = \sphericalangle n$ и $\sphericalangle q = \sphericalangle p$ као наизменични. Стога је: $AD = BC$, $AB = DC$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle C$. Па како је $m + q = n + p$, то је и $\sphericalangle B = \sphericalangle D$. Последице ове теореме јесу: 1) *Ако су код паралелограма две суседне стране једнаке, онда су једнаке и све четири стране* (квадрат, ромб); 2) *Ако је један угао код паралелограма прав, онда су сви углови прави;* 3) *Две паралелне праве свуда су подједнако удаљене једна од друге.*



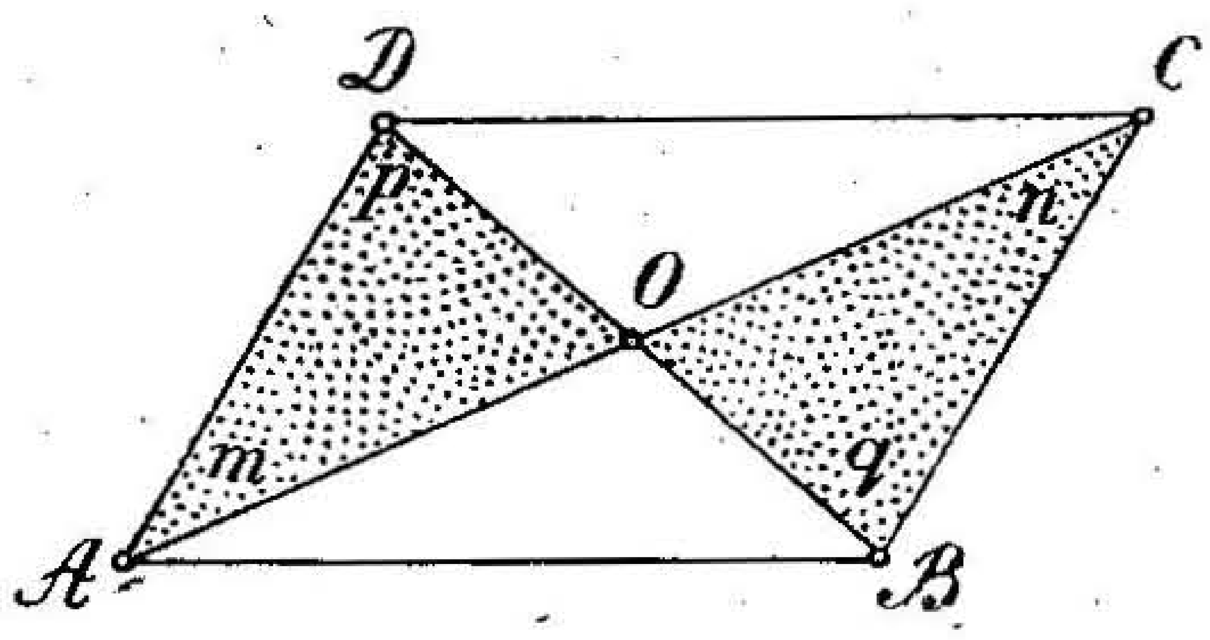
Сл. 95



Сл. 96

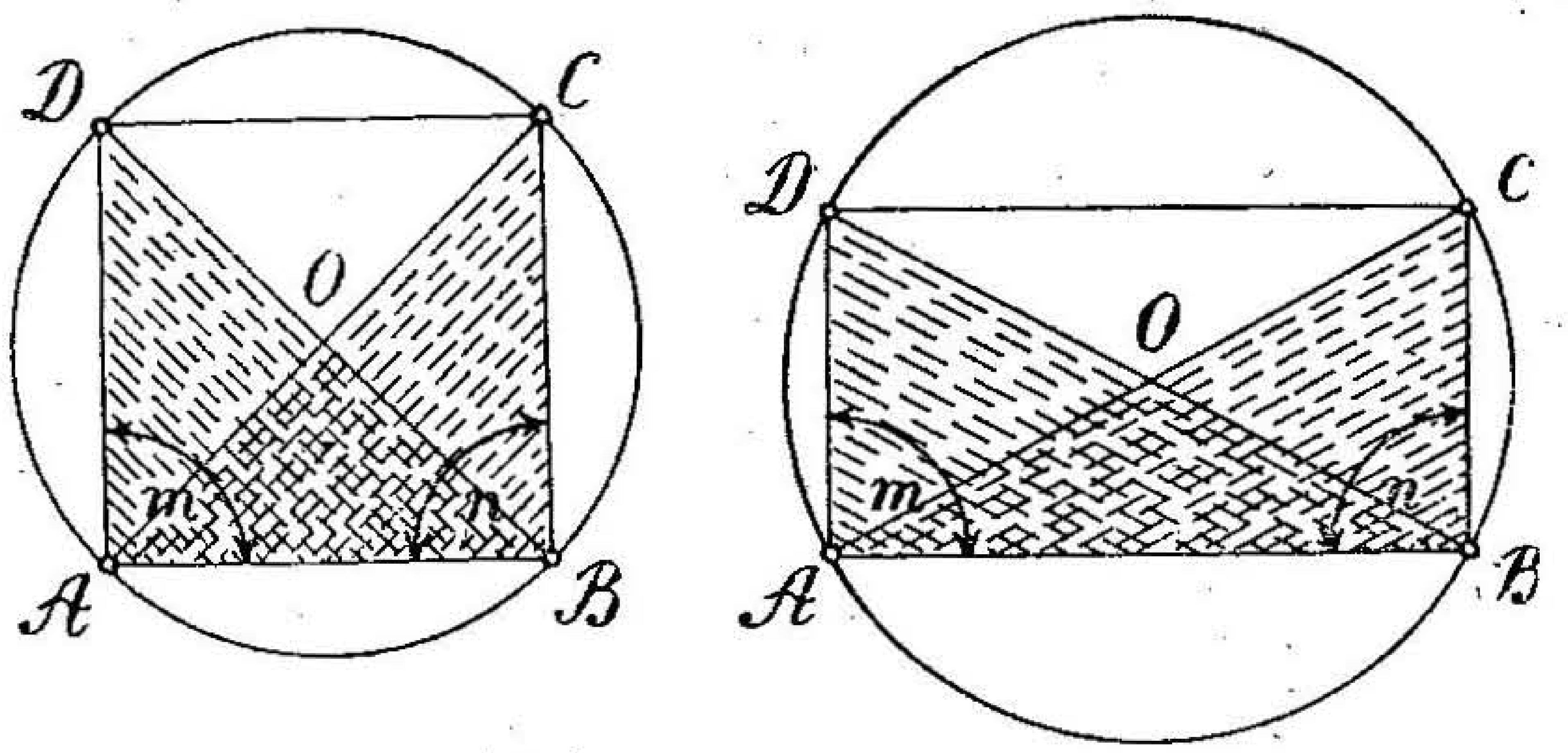
Заиста ако су праве $AB$ и $CD$ (сл. 96) паралелне, па ма из којих двеју тачака $M$ и $N$ праве $AB$ спустимо нормалне $MP$ и $NQ$ на $CD$, онда је $MP \parallel NQ$ (теорема 9). Стога је четвороугао $MPQN$ паралелограм (правоугаоник), те је $MP = NQ$.

*Теорема 49.* — **Дијагонале код паралелограма узајамно се полове.** *Нека је $ABCD$* (сл. 97) паралелограм, а $AC$ и $BD$ дијагонале. Тада је $\triangle ADO \cong \triangle BCO$, јер је $AD = BC$ по претходној теореми, $\sphericalangle m = \sphericalangle n$ и $\sphericalangle p = \sphericalangle q$ као наизменични. Стога су им остали хомологи елементи једнаки, тј. $AO = OC$ и $DO = OB$.



Сл. 97

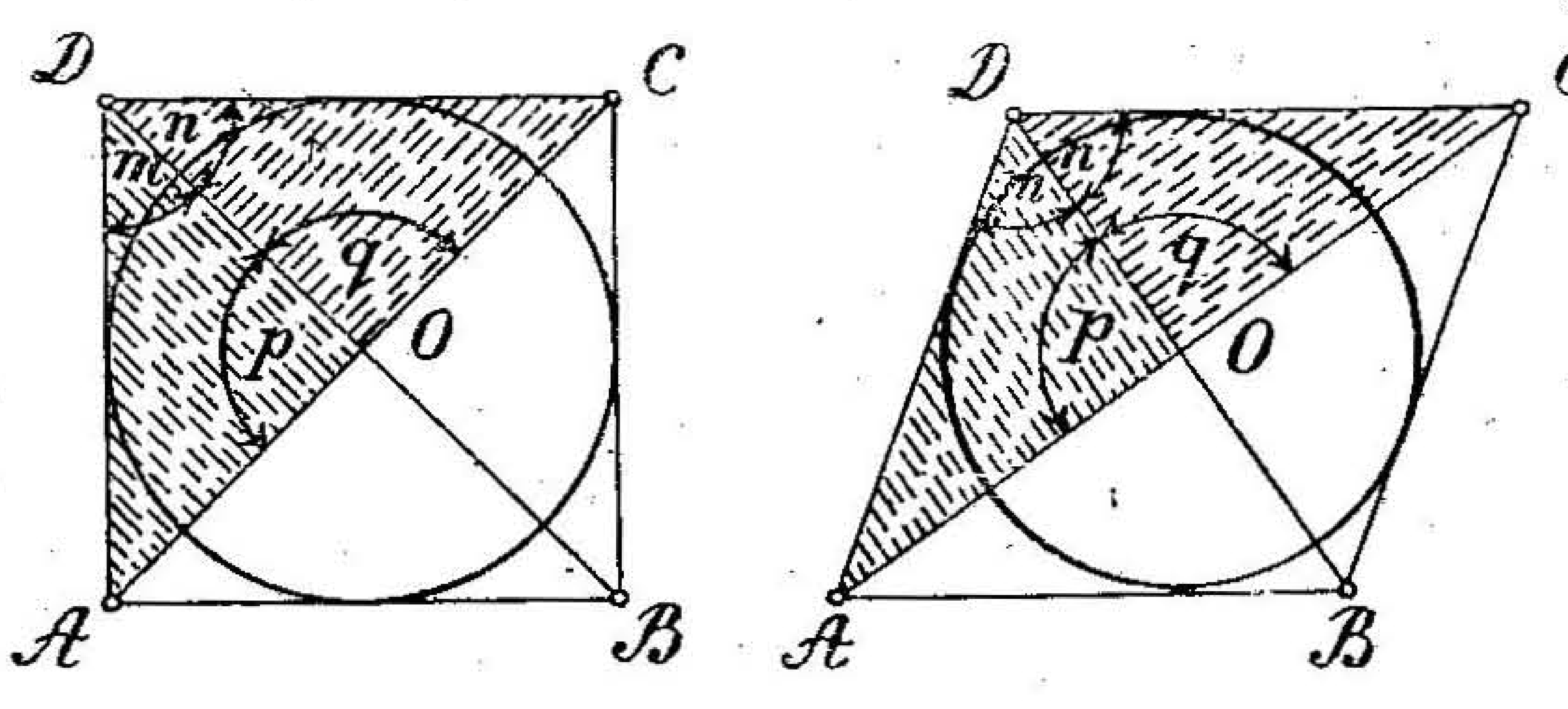
*Теорема. 50* — **Код квадрата и правоугаоника дијагонале су једнаке.** Нека је $ABCD$ (сл. 98) квадрат (правоугаоник). Да бисмо доказали да је $AC = BD$, треба да докажемо подударност троуглова $ABC$ и $ABD$. Ови су троуглови подударни, јер је $AD = BC$, $AB$ им је заједничка страна, а




Сл. 98

$\sphericalangle m = \sphericalangle n = 90^0$. Из њихове подударности излази да је $AC = BD$. Како су дијагонале код квадрата и правоугаоника једнаке, а узајамно се полове, то је њихов пресек $O$ подједнако удаљен од свих темена. Стога је он центар описаног круга. Дакле, *да бисмо описали круг око једнога квадрата или правоугаоника, треба да повучемо њихове дијагонале, пресек да узмемо за центар, а за полупречник узимамо отстојање од тога пресека до једнога темена.*

*Теорема 51.* — **Дијагонале код квадрата и ромба стоје нормално једна на другој и симетрале су углова чија темена спајају.** Нека је четвороугао $ABCD$ (сл. 99) квадрат (ромб). Да бисмо доказали да је $AC \perp BD$, треба да докажемо да је $\triangle AOD \cong \triangle COD$. Ови су троуглови подударни, јер је $AD = DC, AO = CO$ и $DO$ им је заједничка страна. Из њихове подударности излази да је $\sphericalangle p = \sphericalangle q = 90^0$, пошто оба дају раван угао, и $\sphericalangle m = \sphericalangle n$. Прва једначина показује нам да је $AC \perp BD$; а друга, да је $BD$ симетрала угла $D$. Исто бисмо нашли подударношћу ма која два суседна троугла (сл. 99).




Сл. 99

Пошто су дијагонале код квадрата и ромба истовремено симетрале углова, то је њихов пресек $O$ подједнако удаљен од свих страна. Стога је тај пресек центар уписаног круга. Према томе, *да бисмо уписали круг код квадрата или ромба, треба да повучемо њихове дијагонале, пресек да узмемо за центар, а за полупречник узимамо отстојање од тога пресека до ма које стране.*

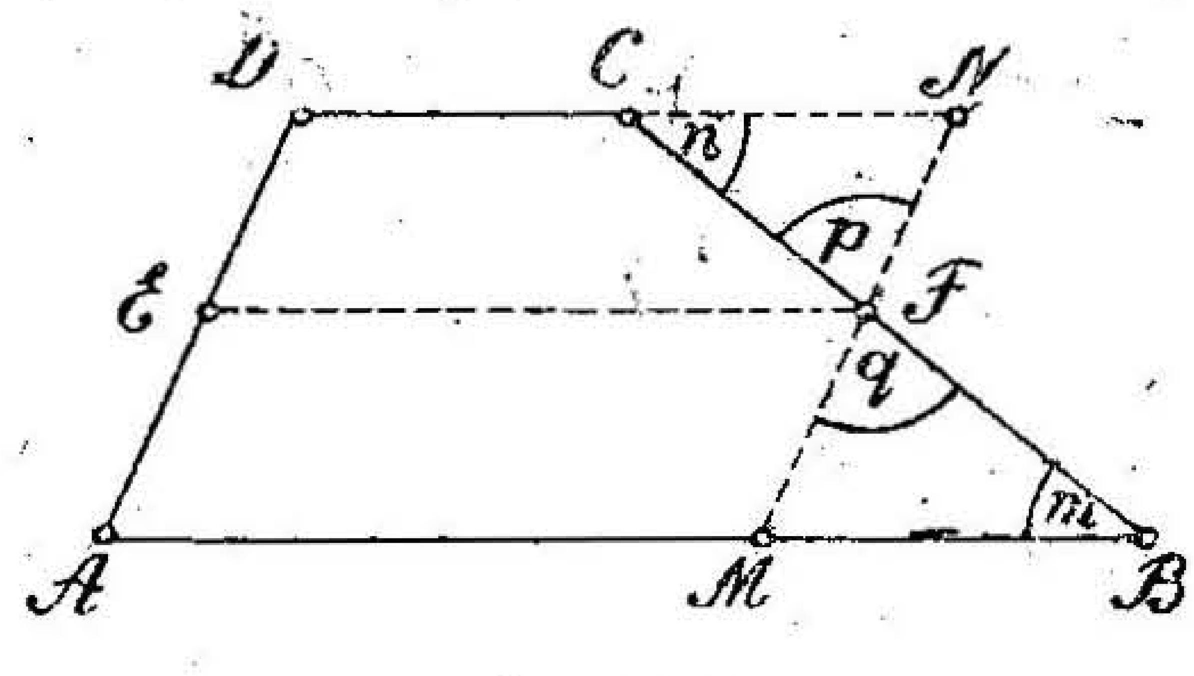
*Теорема 52.* — **Четвороугао је паралелограм ако су му: а) супротне стране једнаке; в) две супротне стране једнаке и паралелне.** *a*) Нека је $ABCD$ (сл. 95) четвороугао код кога је $AD = BC$ и $AB = DC$. Тада су троуглови $ABD$ и $BCD$ подударни, јер имају стране једнаке. Из њихове подударности излази да је $\sphericalangle m = \sphericalangle n$ и $\sphericalangle p = \sphericalangle q$. Стога је по 8 теореми: $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$, тј. $ABCD$ је паралелограм.

*b*) Нека је код истог четвороугла $AB = DC$ и $AB \parallel DC$; тада је $\triangle ABD \cong \triangle BCD$, јер је $AB = DC$, $\sphericalangle m = \sphericalangle n$ као наизменични, а $BD$ им је заједничка страна. Из њихове подударности излази да је $\sphericalangle p = \sphericalangle q$, те је, по 8 теореми, $AD \parallel BC$, тј. $ABCD$ је паралелограм.

X

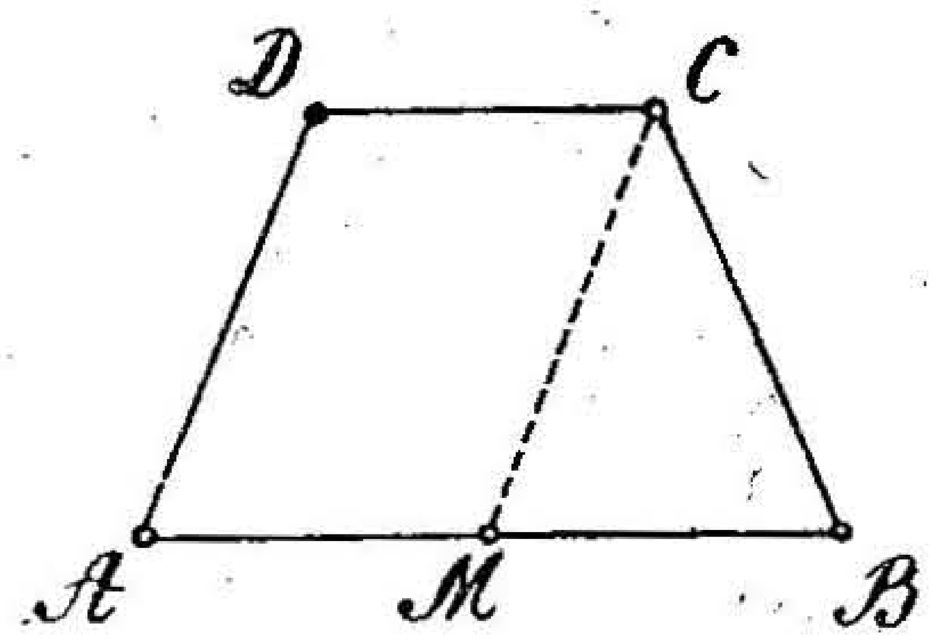
### b) Примена код трапеза

*Теорема 53.* — **Средња линија ма кога трапеза једнака је полузбиру паралелних страна.** Нека су тачке $E$ и $F$ средине непаралелних страна $AD$ и $BC$ трапеза $ABCD$ (сл. 100). Тада је $EF$ средња линија тога трапеза. Повлачењем кроз $F$ праве $MN \parallel AD$ и продужавањем стране $DC$ до $N$, добијамо подударне троуглове $MBF$ и $CNF$, јер је $BF = CF$, $\sphericalangle m = \sphericalangle n$ као наизменични и $\sphericalangle p = \sphericalangle q$ као унакрсни. Стога је $MB = CN$. Па како $EF$ спаја средине страна $AD$ и $MN$ паралелограма $AMND$, то је $EF \parallel AM$ и $EF \parallel DN$ (теорема 52) и једнака је са сваком од тих страна. Тада је $EF = DN = DC + CN$ (1) и $EF = AM = AB - MB$ (2). Сабирањем једначина (1) и (2) добијамо: $2EF = AB + DC$ (пошто се $CN$ и $MB$ потиру), а $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$.



Сл. 100

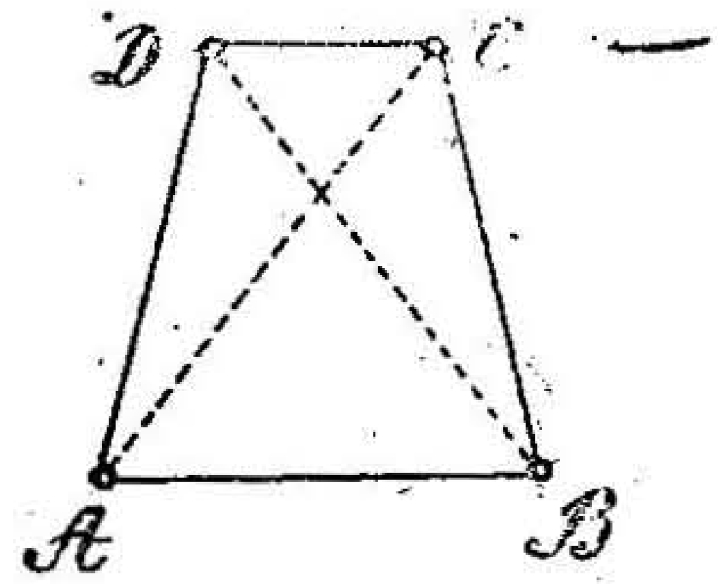
*Теорема 54.* — **Код равнокраког трапеза једнаки су углови**




Сл. 101

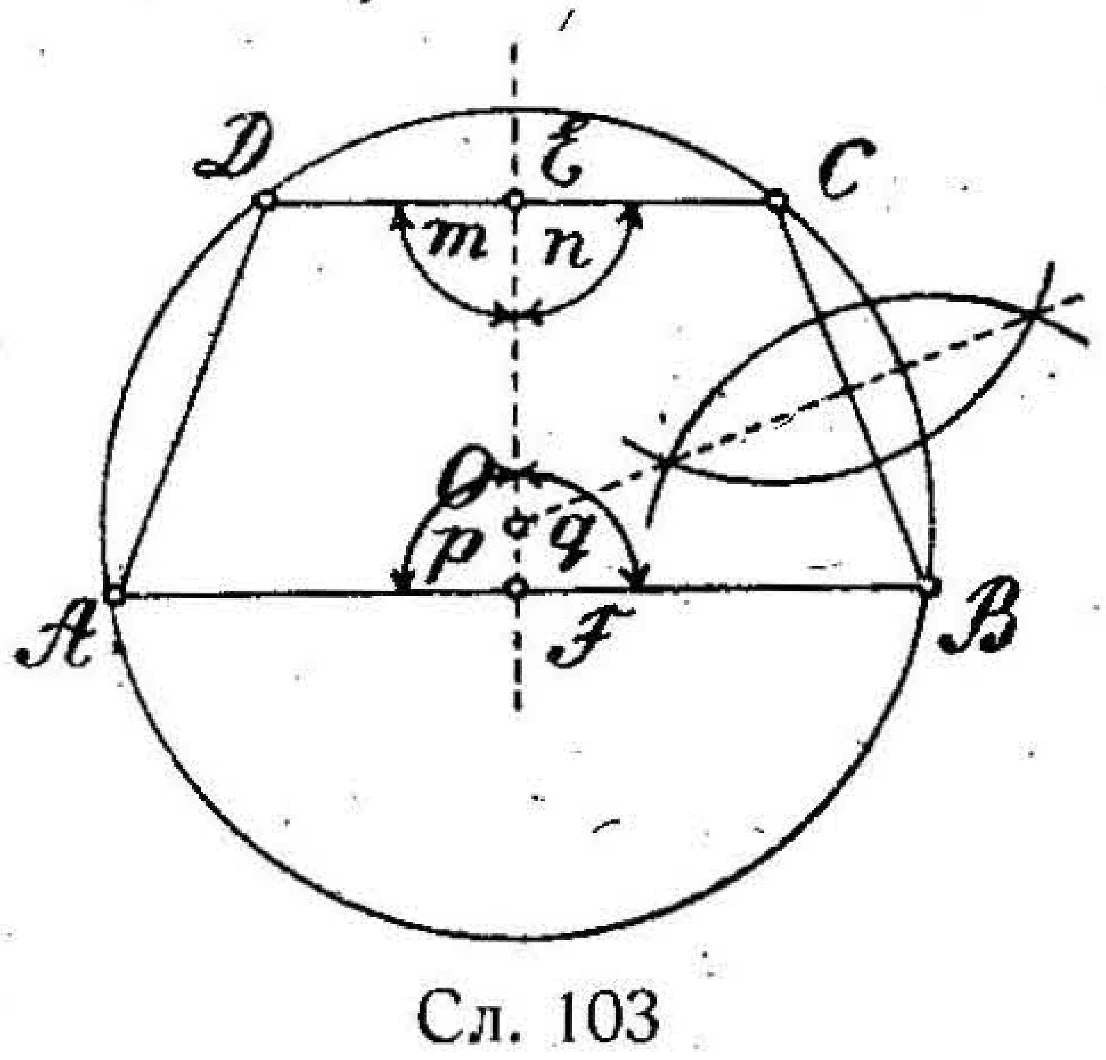
**на свакој паралелној страни.** Нека је трапез $ABCD$ (сл. 101) равнокрак. Повлачењем из $C$ праве $CM \parallel AD$, добијамо паралелограм $AMCD$ и равнокрак троугао $MBC$. Овај је троугао равнокрак, јер је $BC = CM$, пошто су обе ове стране једнаке са $AD$. Стога је $\sphericalangle B = \sphericalangle M$. Па како је $\sphericalangle M = \sphericalangle A$ као сагласни, то је и $\sphericalangle B = \sphericalangle A$. Углови $D$ и $C$ такође ту једнаки као суплементни углова $A$ и $B$.

*Теорема 55.* — **Код равнокраког трапеза дијагонале су једнаке.** Нека је трапез $ABCD$ (сл. 102) равнокрак. Ако му повучемо дијагонале $AC$ и $BD$, добијамо подударне троуглове $ABD$ и $ABC$. Ти су троуглови подударни, јер је $AD = BC$, $AB$ је заједничка страна и $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ према претходној теореми. Стога је $AC = BD$.




Сл. 102

*Теорема 56.* — **Права која спаја средине паралелних страна равнокраког трапеза заједничка је симетрала тих страна.** Нека су тачке $E$ и $F$ средине паралелних страна равнокраког трапеза $ABCD$ (сл. 103). Ако спојимо те две тачке и обрнемо четвороугао $AFED$ око $EF$ за $180^0$, поклопиће четвороугао $FBCE$, пошто знамо да имају све елементе, осим углова на заједничкој страни $EF$, једнаке. Овим поклапањем доказује се да је и $\sphericalangle m = \sphericalangle n$ и $\sphericalangle p = \sphericalangle q$. Па како су ови углови суплементни, то су они прави. Стога је $EF$ симетрала обеју паралелних страна.



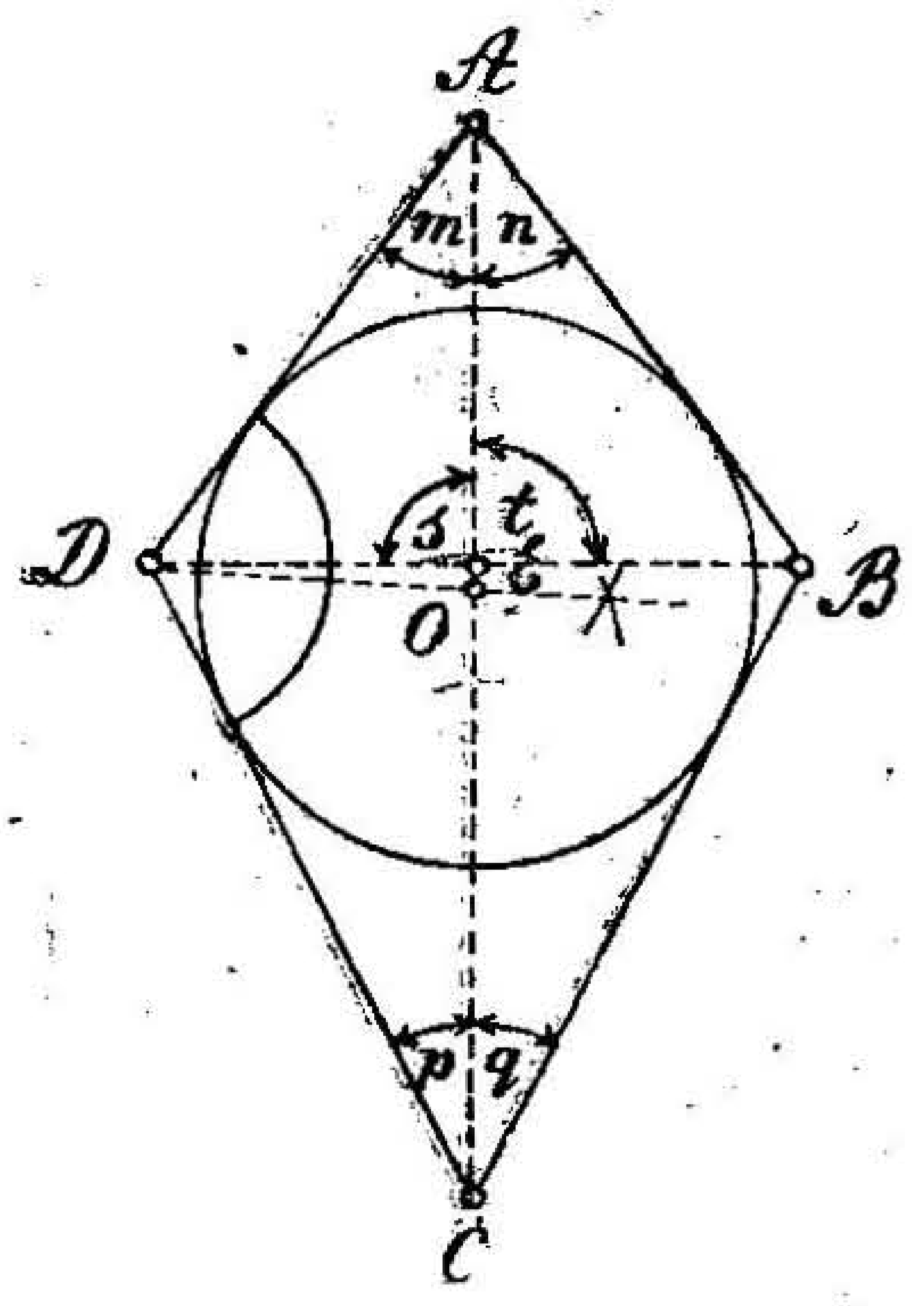

Сл. 103

На овој симетрали постоји само једна тачка $O$, која је подједнако удаљена од свих трапезових темена. Та је тачка центар круга описаног око равнокраког трапеза, а налази се у пресеку свих симетрала страна. Свака друга тачка заједничке симетрале $EF$ подједнако је удаљена од темена̂ $C$ и $D$, или од темена̂ $A$ и $B$, али није подједнако удаљена од свих темена. Стога, *да бисмо описали круг око равнокраког тра-*

*пеза, довољно је да конструишемо симетрале двеју суседних страна, њихов пресек да узмемо за центар, а за полупречник узимамо отстојање од тог пресека до ма кога трапезовог темена.*

### c) Примена код делтоида

*Теорема 57.* — **Дијагонала која спаја темена у којима се састају једнаке стране делтоидове, симетрала је: *a)* углова чија темена спаја; *b)* друге дијагонале.** a) Дијагонала $AC$ делтоида $ABCD$ (сл. 104) дели делтоид на подударне троуглове $ABC$ и $ADC$. Ови су троуглови подударни, јер имају стране једнаке. Из њихове подударности излази да је $\sphericalangle m = \sphericalangle n$ и $\sphericalangle p = \sphericalangle q$, те је $AC$ заиста симетрала углова $A$ и $C$. b) Да је $AC$ симетрала и дијагонале $BD$, доказујемо подударношћу троуглова $AED$ и $AEB$. Ови су троуглови подударни, јер је $AD = AB$, $AE$ им је заједничка страна и $\sphericalangle m = \sphericalangle n$. Стога је: 1) $DE = BE$ и 2) $\sphericalangle s = \sphericalangle t = 90^0$, пошто оба угла дају раван угао. Из ових двеју једначина увиђамо да је $AC$ симетрала дијагонале $DB$.




Сл. 104

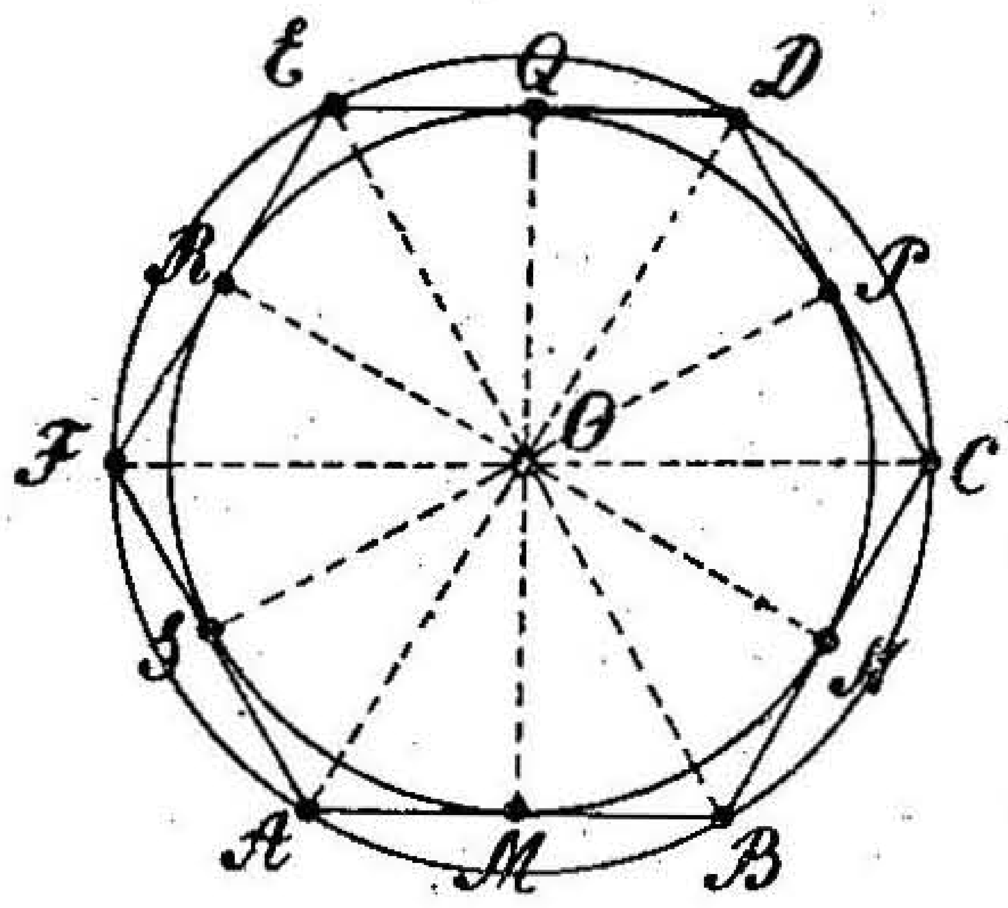
Како је $AC$ симетрала углова $A$ и $C$, то на њој постоји једна тачка која је подједнако удаљена од свих делтоидових страна. Та тачка је центар уписаног круга, а налазимо је кад конструишемо, поред симетрале $AC$, још и симетралу угла $B$ или угла $D$. Пресек ових симетрала је тражени центар, а полупречник је нормално отстојање од тога центра до ма које стране делтоида.

*Напомена.* Из градива овог параграфа увиђамо да се може описати круг око четвороуглова са једнаким дијагоналама (квадрат, правоугаоник и равнокрак трапез), а уписати код четвороуглова са нормалним дијагоналама (квадрат, ромб и делтоид).

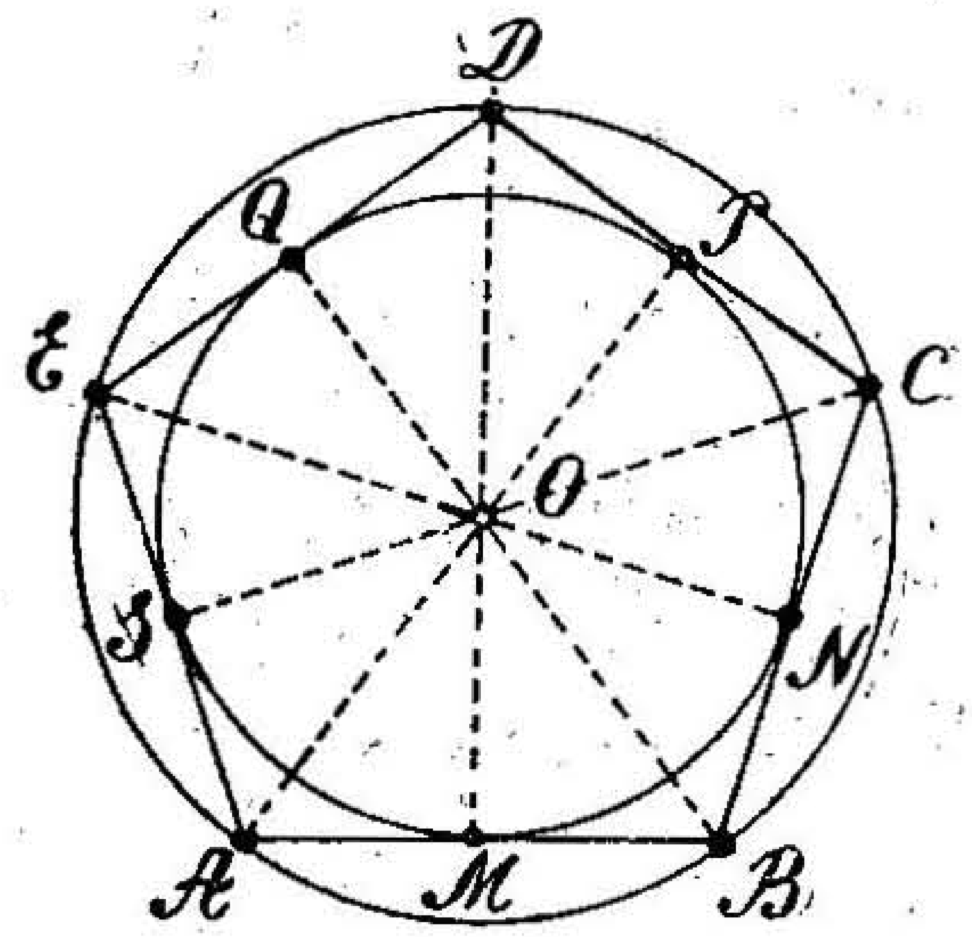
## § 36. Примена подударности код правилних полигона

*Теорема 58.* — **Код правилног полигона и симетрале страна и симетрале углова секу се у истој тачци која је подједнако удаљена од свих темена и свију страна.**

Ако код једног правилног полигона парног (сл. 105) или непарног (сл. 106) броја страна, конструишемо и симетрале страна и симетрале углова, видимо да се све те симетрале секу




Сл. 105




Сл. 106

у истој тачци $O$. Да је пресек $O$ подједнако удаљен и од свију полигонских темена и од свију његових страна увиђамо из подударности ма која два правоугла троугла који имају симетралу стране за заједничку катету ($AMO$ и $BMO$, $BNO$ и $CNO$,...), и из подударности ма која два правоугла троугла који имају симетралу угла за заједничку хипотенузу ($BMO$ и $BNO$, $NCO$ и $CPO$,...). Стога је пресек, било симетралâ страна, било симетралâ углова правилног полигона, центар и описаног и уписаног круга, а зове се *средиште* правилног полигона.

Када средиште правилног полигона спојимо са теменима, полигон се дели на онолико подударних равнокраких троуглова колики је број полигонских страна. Стога су углови код центра ($\sphericalangle\ AOB$, $\sphericalangle\ BOC$,...) једнаки и сваки износ $\frac{360^0}{n}$.

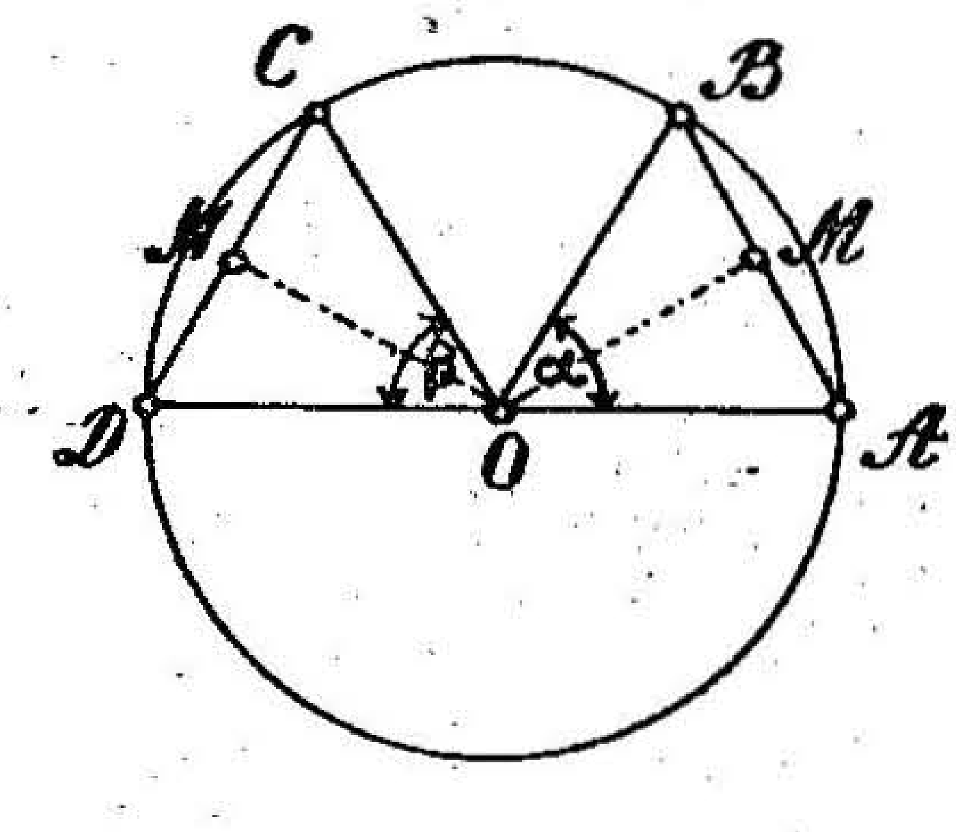
Посматрајући слике 105 и 106, увиђамо да се код правилних полигона непарног броја страна симетрала стране поклапа са симетралом супротног угла, и обрнуто; што није исти случај код правилних полигона парног броја страна. Код њих се пак поклапају симетрале двеју супротних страна, или симетрале двају супротних углова.

## § 37. — Примене подударности код круга

### а) Тетиве и њихове централне раздаљине

*Теорема 59.* — **Једнаким тетивама једнога круга (или кругова једнаких полупречника) одговарају једнаке централне разда-**

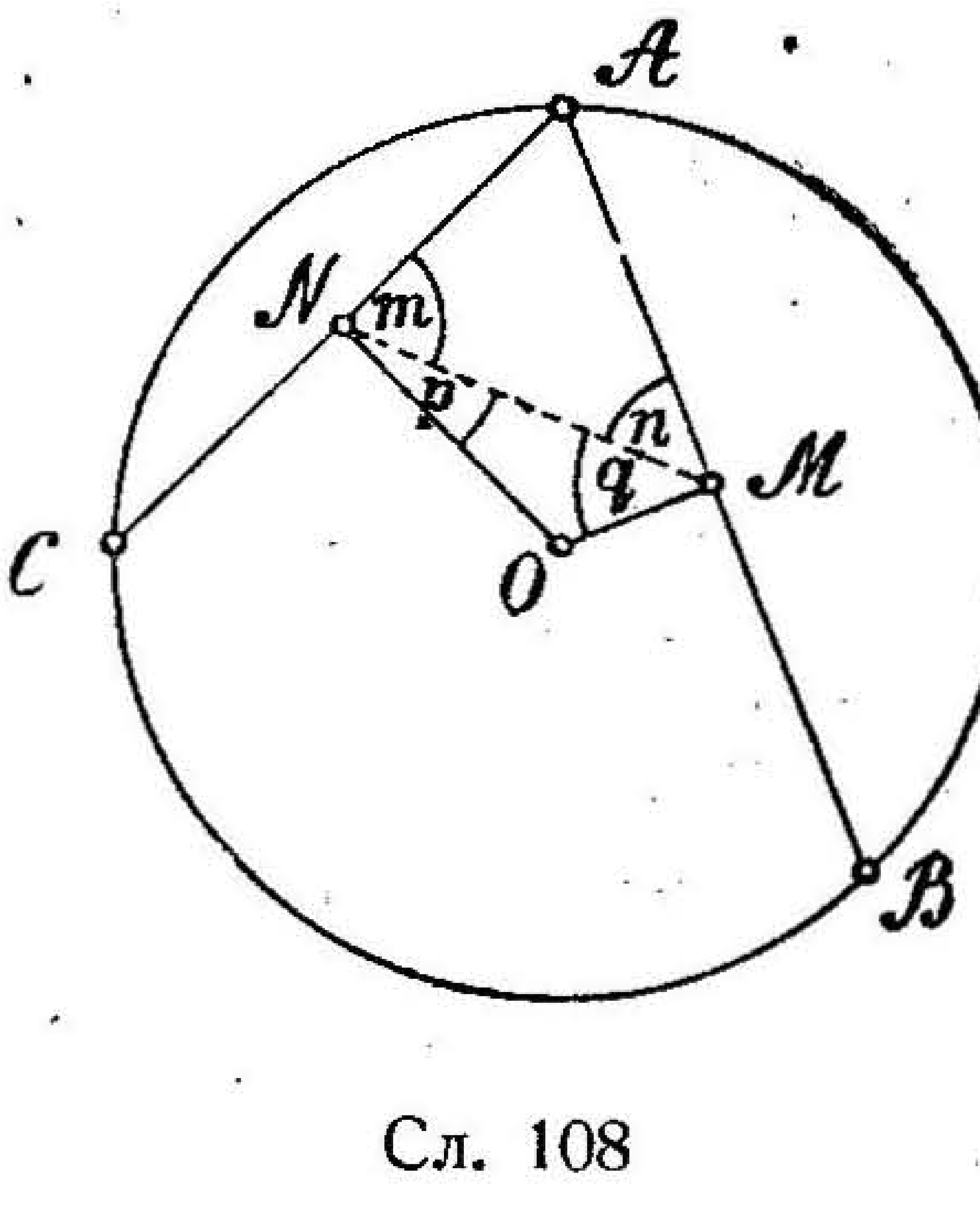
**љине, једнаки централни углови и једнаки луци.** Нека су тетиве $AB$ и $CD$ (сл 107) једнаке. Пошто су троуглови $ABO$ и $CDO$ равнокраки, онда средишње раздаљине $OM$ и $ON$, према 38 теореми, деле тетиве $AB$ и $CD$ на једнаке делове. Тада су правоугли троуглови $OMB$ и $ONC$ подударни, јер је $OB = OC$ и $BM = CN$. Из њихове подударности излази да је $OM = ON$, чиме је доказан први део ове теореме. Међутим, и троуглови $OAB$ и $OCD$ јесу такође подударни, пошто су им стране једнаке. Из подударности ових троуглова излази да су централни углови $\alpha$ и $\beta$ једнаки. Тада се сектори $OAB$ и $OCD$ поклапају ако један ставимо на други, чиме се доказује и једнакост лукова.



Сл. 107

*Теорема 60.* — **Једнаким централним раздаљинама двеју тетива једнога круга одговарају једнаке тетиве.** Нека су централне раздаљине $OM$ и $ON$ (сл. 107) једнаке. Тада су правоугли троуглови $OMB$ и $ONC$ подударни, јер је $OB = OC$ и $OM = ON$. Из њихове подударности излази да је $BM = CN$. Па како су $BM$ и $CN$ половине тетивâ $AB$ и $CD$, то су и ове тетиве једнаке.

*Теорема 61.* — **Једнаким централним угловима једнога круга одговарају једнаке тетиве и једнаки луци.** Нека су углови $\alpha$ и $\beta$ (сл. 107) једнаки. Тада су троуглови $ABO$ и $CDO$ подударни, пошто имају по две стране и захваћене углове једнаке. Стога су и тетиве $AB$ и $CD$, као треће њихове стране, једнаке, а у вези с тиме једнаки су и лукови $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$.



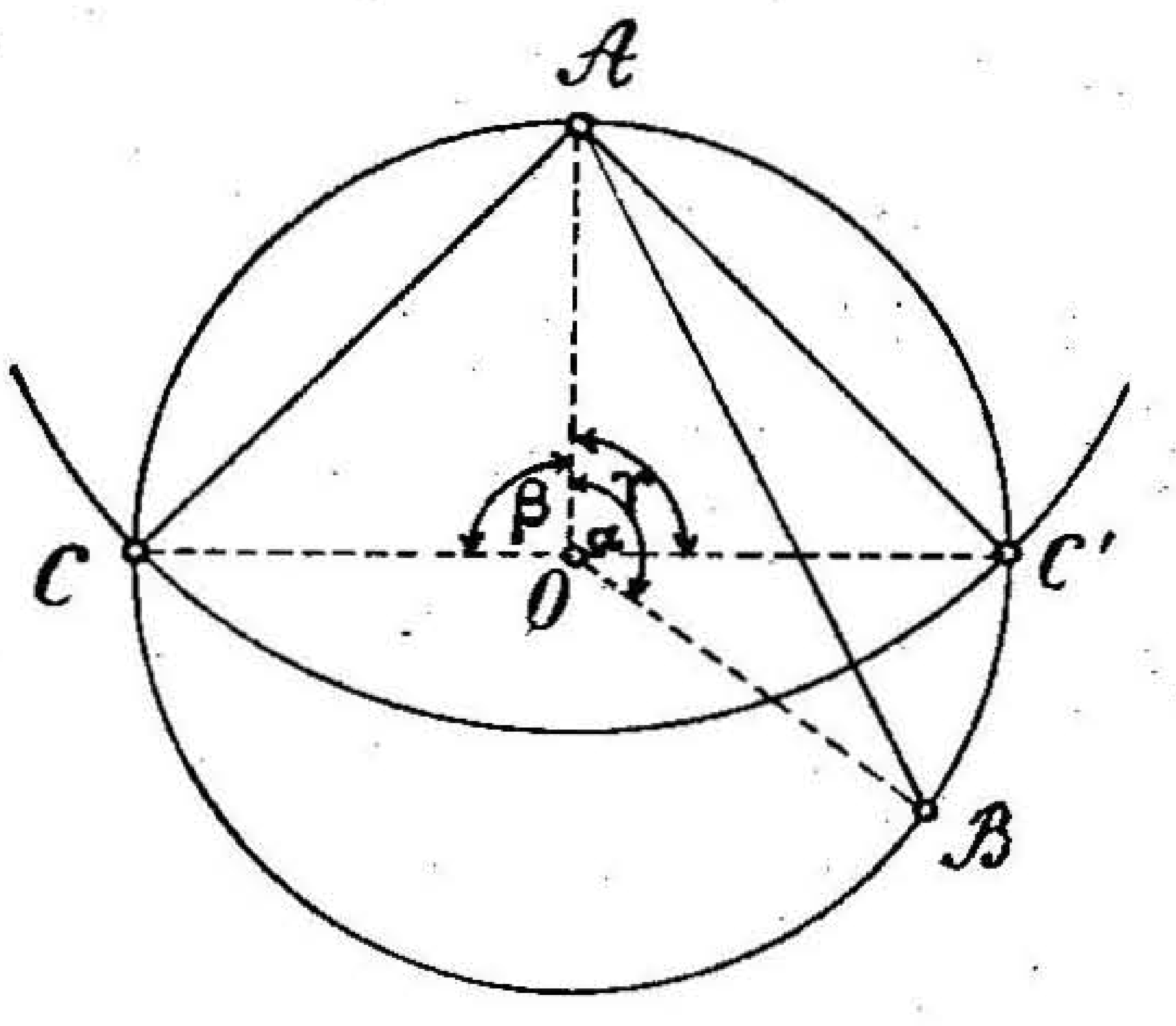
Сл. 108

*Теорема 62.* — **Неједнаким тетивама једнога круга одговарају неједнаке централне раздаљине, и то: већа тетива има мању централну раздаљину.** Нека је тетива $AB > AC$ (сл. 108), а $OM$ и $ON$ нека су њихове централне раздаљине. Ако им спојимо средине $M$ и $N$, имаћемо:

$\sphericalangle m + \sphericalangle p = 90^0$, $\sphericalangle n + \sphericalangle q = 90^0$ и $AM > AN$, као половине тих тетива. Тада је у троуглу $AMN \sphericalangle m > \sphericalangle n$ (теорема 26), па је $\sphericalangle p < \sphericalangle q$, као комплементни углова $m$ и $n$. У том случају је у троуглу $MNO$ страна $OM < ON$.

*Теорема 63.* — **Неједнаким средишњим раздаљинама двеју тетива једнога круга одговарају неједнаке тетиве, и то: мањој средишњој раздаљини одговара већа тетива.** Нека је средишња раздаљина $OM < ON$ (сл. 108). Тада је у троуглу $MNO \sphericalangle q > \sphericalangle p$ (теорема 26), па је $\sphericalangle n < \sphericalangle m$, као комплементни углова $p$ и $q$. У том случају је у троуглу $AMN$ страна $AN < AM$ (теорема 28). Па како су $AN$ и $AM$ половине тетивâ $AC$ и $AB$, то је и $AC < AB$.

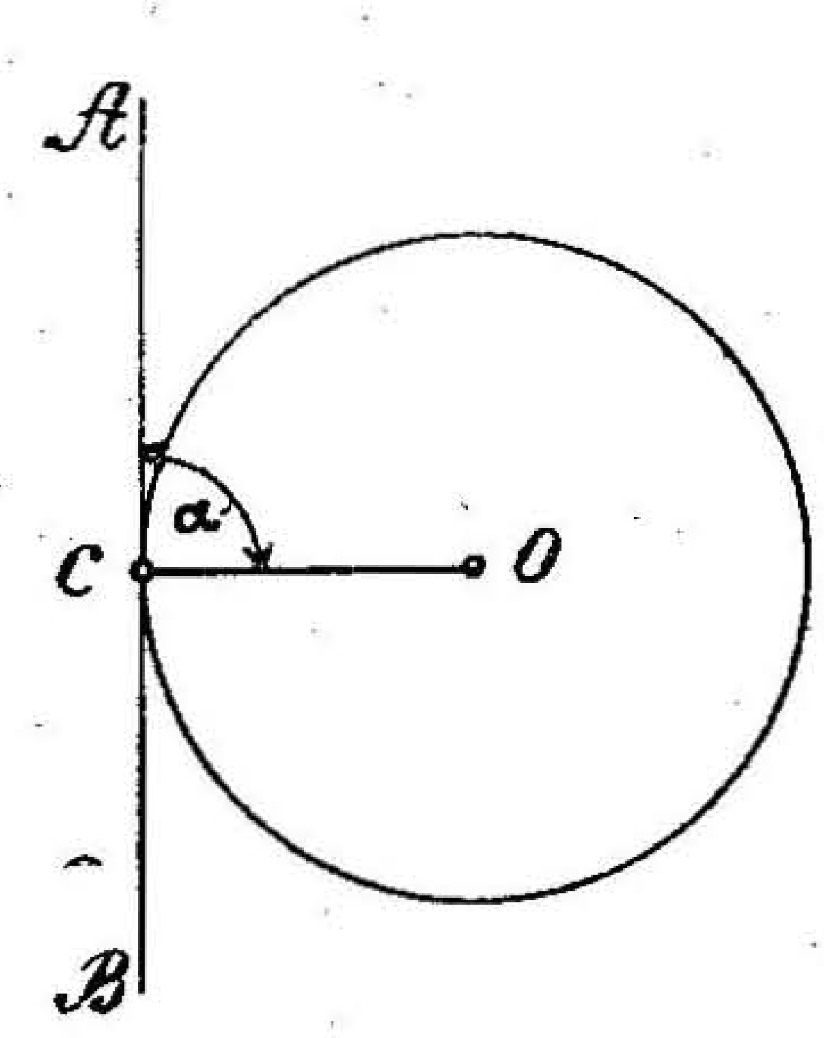
*Напомена.* — Како је пречникова централна раздаљина једнака нули, то је пречник највећа тетива у кругу. Уопште, у једноме кругу неједнаким тетивама одговарају неједнаки централни углови и неједнаки луци, и то: већој тетиви одговара већи централни угао и већи лук, и обрнуто. То можемо видети посматрањем сл. 109, код које је тетива $AC < AB$. Ако мањом тетивом $AC$ опишемо лук око $A$, који сече круг у $C'$, па ову тачку спојимо са $O$ и $A$, онда су троуглови $ACO$ и $AC'O$ подударни, пошто имају стране једнаке. Из њихове подударности излази да је $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$, те су луци $\widehat{AC}$ и $\widehat{AC'}$ једнаки (теорема 61). Па како је лук $AC'$, као део, мањи од лука $AB$, $\sphericalangle \gamma$ мањи од $\sphericalangle \alpha$, то је и $\sphericalangle \beta$, једнак са $\gamma$, мањи од $\sphericalangle \alpha$ и лук $\widehat{AC}$ мањи од лука $\widehat{AB}$.



Сл. 109

## b) Тангенте код круга

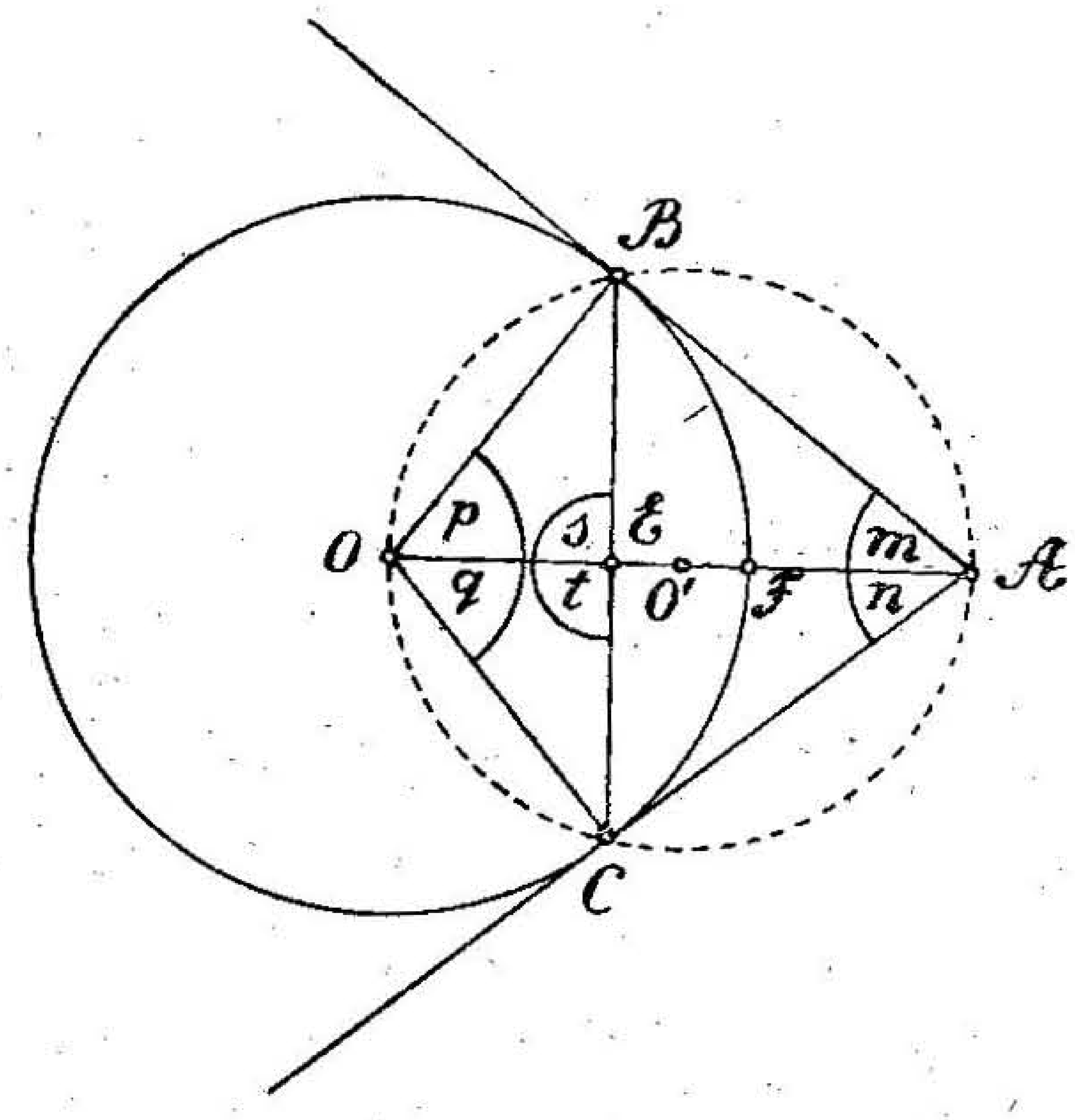
*Теорема. 64.* — **Угао између једне тангенте и додирног полупречника је прав.** Нека је $\alpha$ (сл. 110) угао између тангенте $AB$ и додирног полупречника $CO$. Како је овај додирни полупречник истовремено и централна раздаљина тангенте $AB$, а свака централна раздаљина једне праве захвата с правом праве углове, то је угао $\alpha$ прав.



Сл. 110

Из ове је теореме јасно: 1) да из кружног средишта спуштена нормала на дирку пролази кроз додирну тачку; и 2) кад се у додирној тачци подигне нормала на дирку, онда она пролази кроз центар круга. На основу ове теореме вршимо конструкцију дирке у датој тачци кружне линије, кад ту тачку спојимо најпре са центром, а затим подижемо у додирној тачци управну на додирни полупречник.

*Теорема 65.* — **Дирке повучене из једне тачке ван круга на круг јесу једнаке, а централна раздељина те тачке је и симетрала угла између дирака, и симетрала угла између додирних полупречника, и симетрала тетиве која спаја додирне тачке.** Нека су $AB$ и $AC$ две тангенте повучене из тачке $A$ на круг $O$ (сл. 111). Ако додирне тачке $B$ и $C$ спојимо са центром $O$ и повучемо централну раздаљину $OA$, онда је $\triangle ABO \cong \triangle AOC$, пошто имају по две стране и углове наспрам већих страна једнаке ($OA$ је заједничка, $OB = OC$ као полупречници истог круга и $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90^0$). Стога су и остали њихови елементи једнаки, тј. $AB = AC, \sphericalangle m = \sphericalangle n$ и $\sphericalangle p = \sphericalangle q$, чиме су доказана сва три прва дела ове теореме.




Сл. 111

Да бисмо доказали и четврти део, спајамо додирне тачке и тиме добијамо подударне троугле $BEO$ и $CEO$ ($BO = CO$, $\sphericalangle p = \sphericalangle q$ и $OE$ им је заједничка). Из подударности ових троуглова излази да је: 1) $BE = CE$, тј. да је тачка $E$ средина тетиве $BC$; и 2) да је $\sphericalangle s = \sphericalangle t = 90^0$, пошто су суплементни. Стога је заиста централна раздаљина $OA$ и симетрала додирне тетиве $BC$. Из једнакости централних углова $p$ и $q$ излази и једнакост њихових одговарајућих лукова $BF$ и $CF$, те централна раздаљина дели и лук између додирних тачака на два једнака дела.

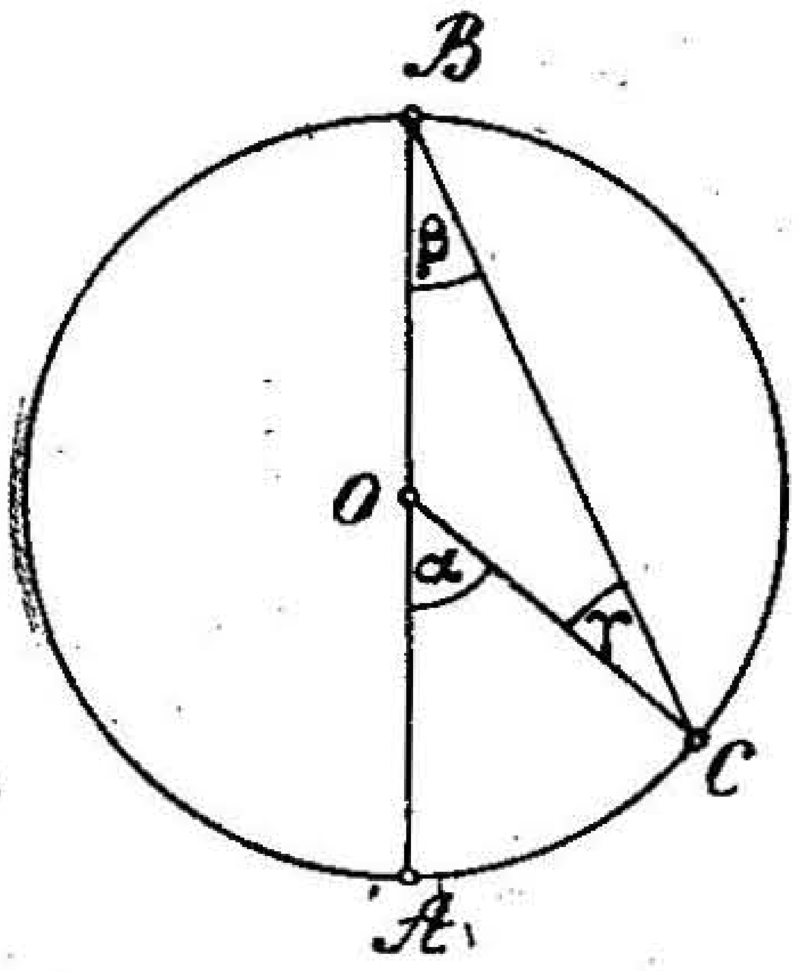
*Напомена.* — На основу ове теореме решава се задатак: из дате тачке $A$ ван круга повући дирке кругу. Треба над $AO$ (сл. 111), као над пречником, описати помоћни круг $O'$, па пресечне тачке датога и помоћнога круга ($B$ и $C$) спојити са тачком $A$.

# VII. Углови код круга и особине тетивних и тангентних четвороуглова

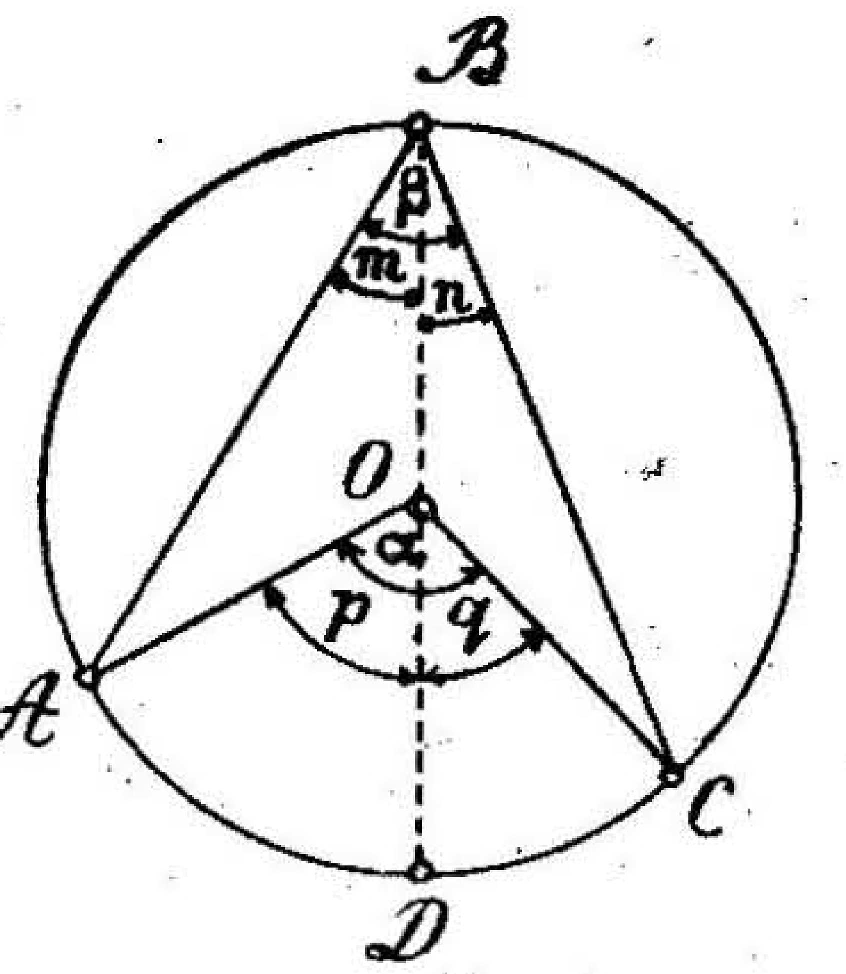
**§ 38. — Периферисни и централни углови над истим луком.—** За један угао каже се да је периферискн ако му се теме налази на периферији једнога круга, а краци су му тетиве тога круга. Такав је угао $\beta$ на сл. 112. Однос између једнога периферискоr и једног централног угла једнога круга над истим луком, или над једнаким луцима, исказан је овом теоремом:

*Теорема 66.* — **Централни је угао двапута већи од периферисног над истим луком, или над једнаким луцима.** Ако се периферискн и централни угао једнога круга налазе над истим луком, онда наилазимо на један од ових случајева:

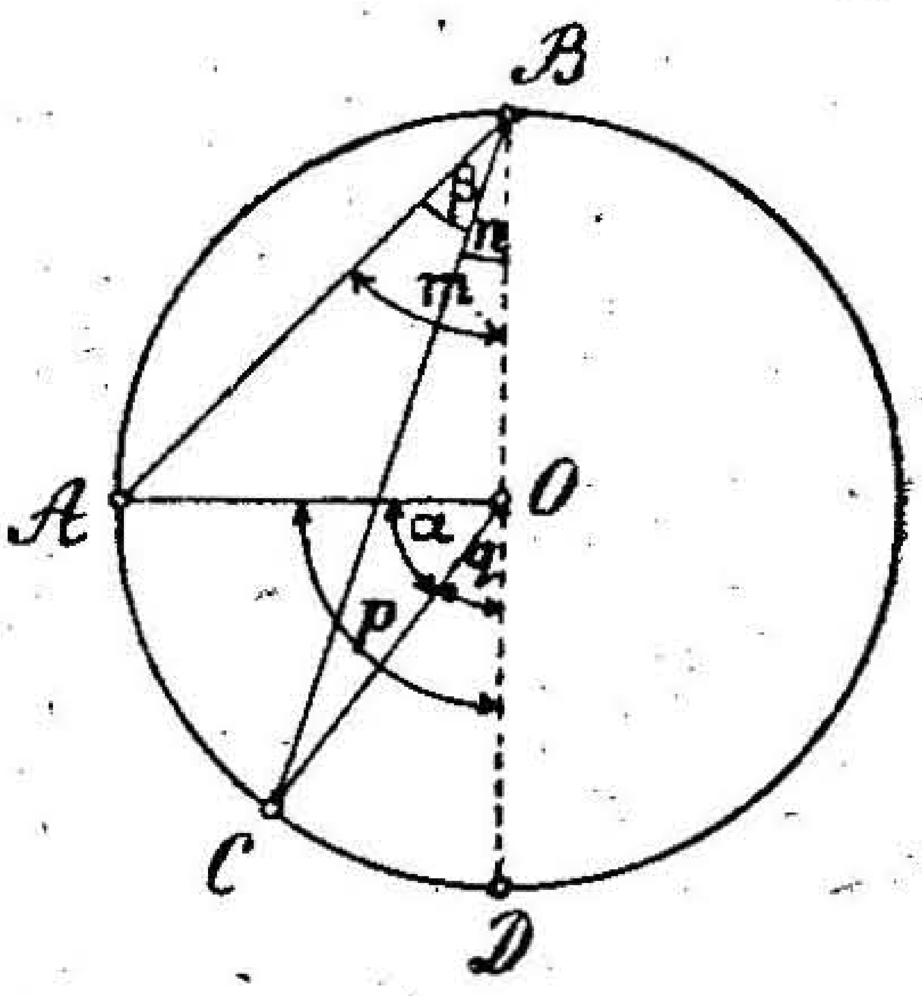
a) *Теме централног угла налази се на једном краку периферисног угла* (сл. 112). У овом случају централни угао




Сл. 112




Сл. 113




Сл. 114

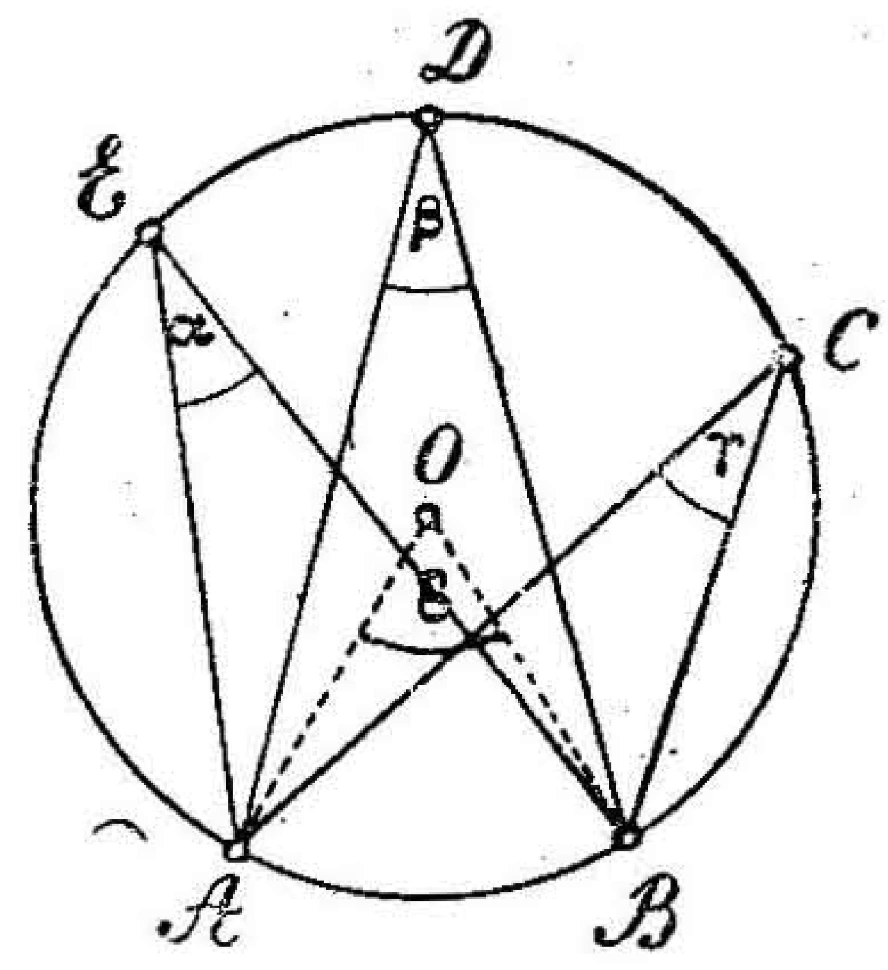
$\alpha$, као спољашњи угао за равнокраки троугао $OBC$, једнак је збиру углова $\beta$ и $\gamma$. Па пошто су углови $\beta$ и $\gamma$ једнаки, то је $\alpha$ двапута већи од ма кога од њих, тј. $\alpha = 2\beta$.

b) *Теме централног угла налази се у периферисном углу* (сл. 113). Спајањем темена периферисног и централног угла пречником $BD$, добијамо по првом случају: $\sphericalangle p = 2m$ и $\sphericalangle q = 2n$. Стога је $p + q = 2m + 2n = 2(m + n)$, или $\alpha = 2\beta$, пошто је $\alpha = p + q$ а $\beta = m + n$.

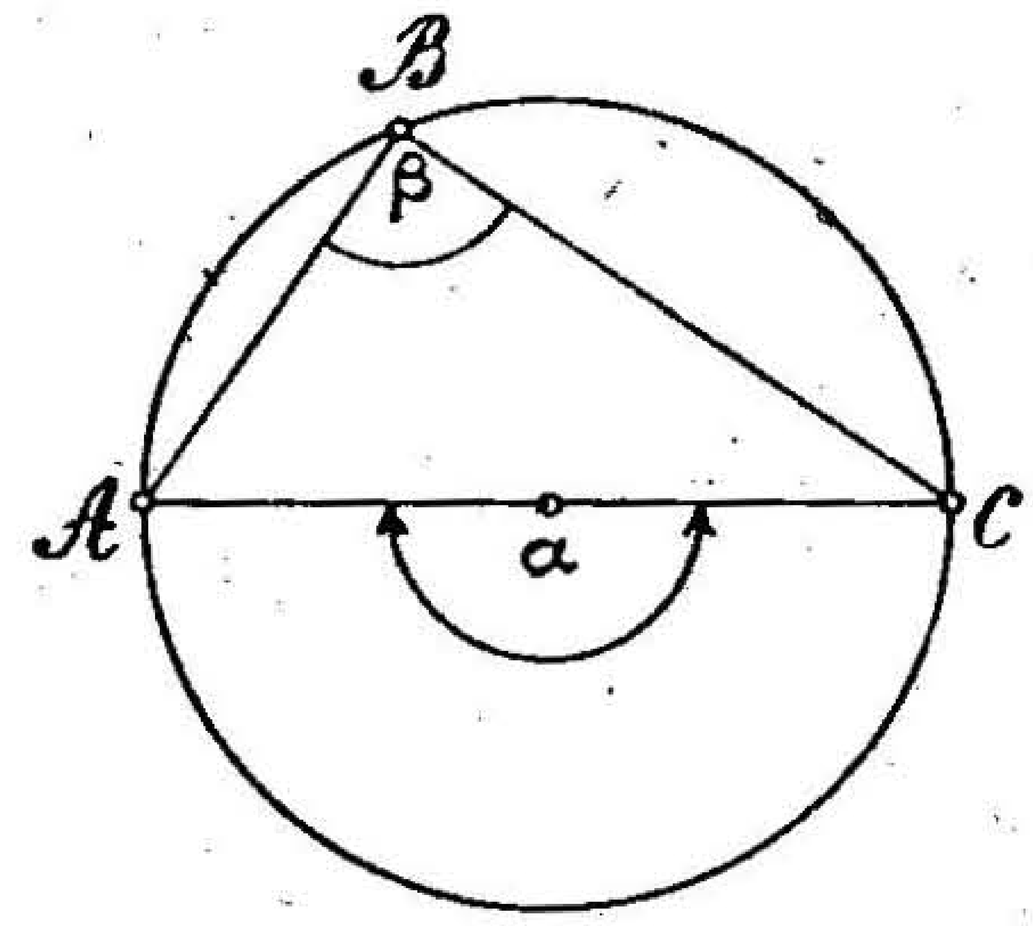
c) *Теме централног угла налази се ван периферисног угла* (сл. 144). Повлачењем пречника $BD$ добијамо по првом случају: $\sphericalangle p = 2m$ и $\sphericalangle q = 2n$. Стога је и $p - q = 2m - 2n = 2(m - n)$, или $\alpha = 2\beta$, пошто је $\alpha = p - q$ а $\beta = m - n$.

Последице ове теореме јесу следеће:

*1 Последица. — Периферискi углови над истим луком, или над једнаким луцима, јесу једнаки.* Нека су углови $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ три периферискa угла над истим луком $AB$ (сл. 115), а




Сл. 115

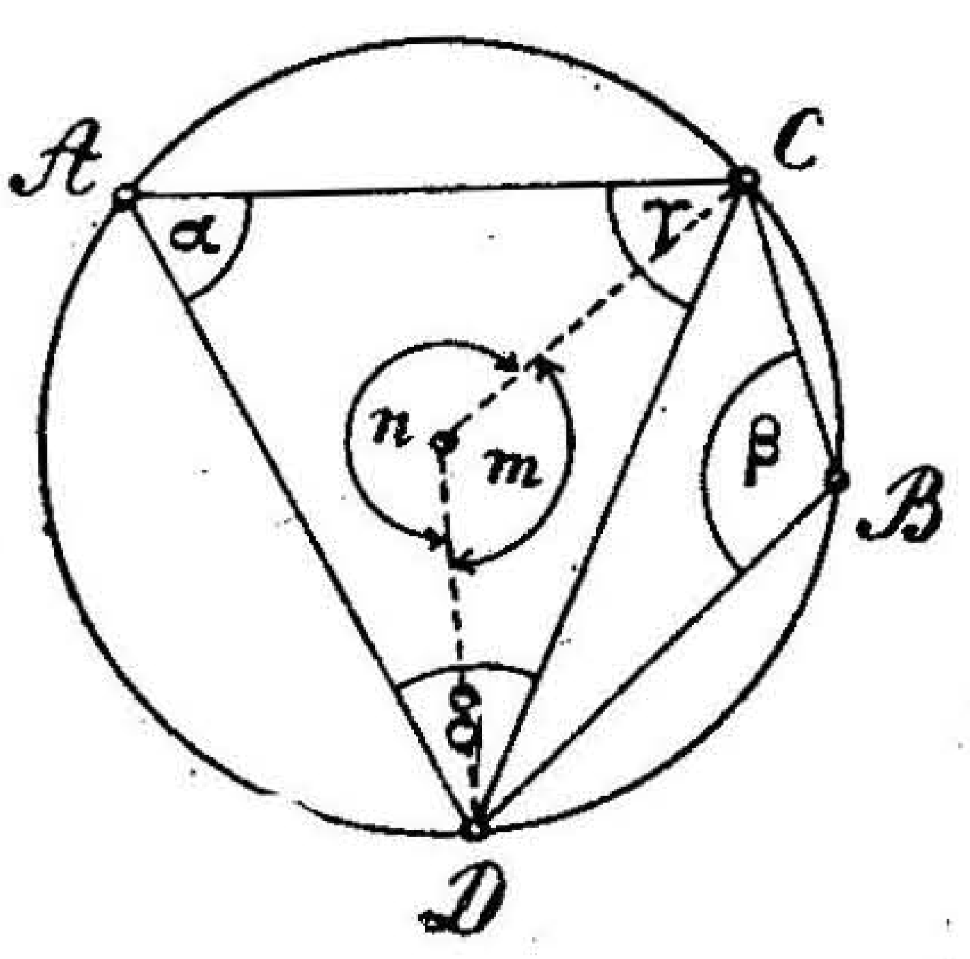



Сл. 116

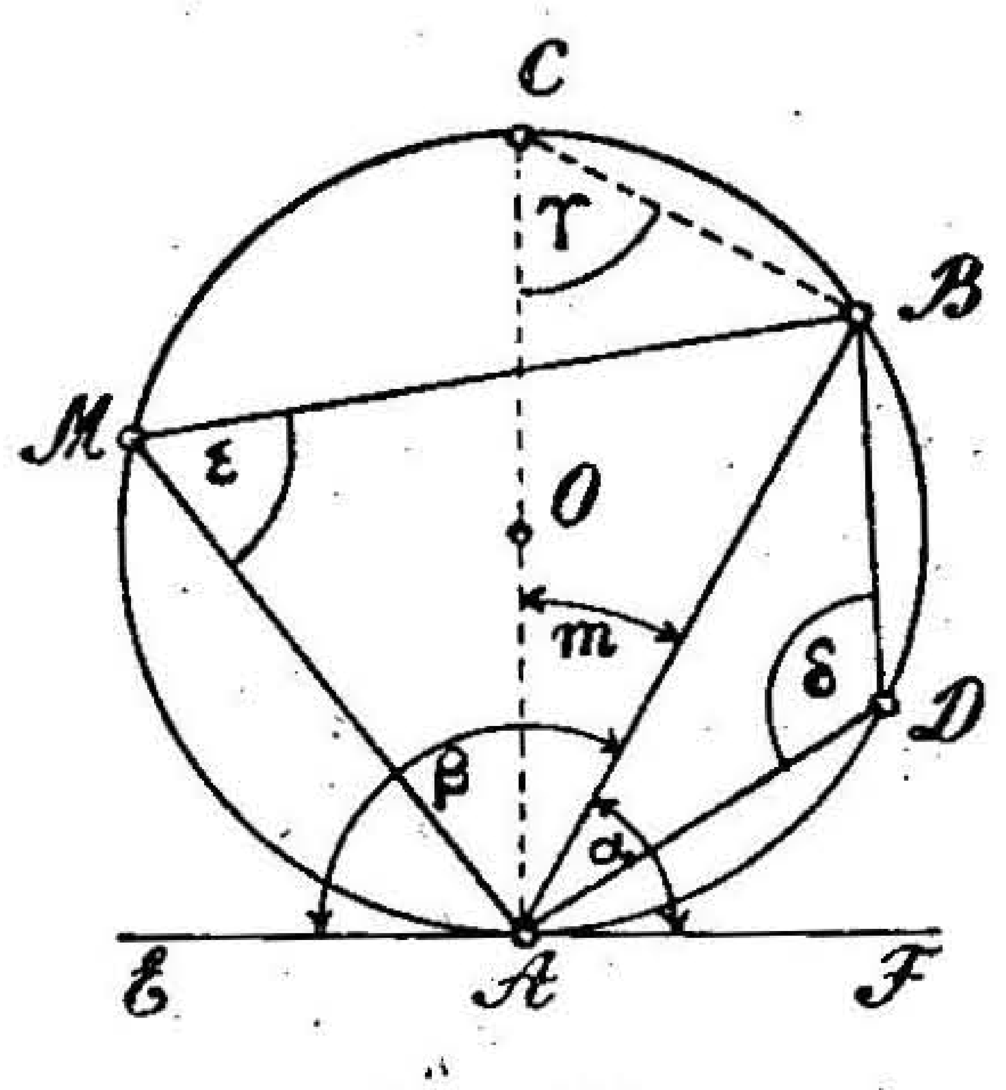
угао $\delta$ централни угао над истим луком. Тада су углови $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ једнаки, јер је сваки од њих половина централног угла $\delta$.

*2 Последица. — Периферискi угао у полукругу је прав.* Нека је $\beta$ периферискi угао у полукругу (сл. 116). Тада је по овој теореми $\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$.

*Напомена.* — На основу ове последице решава се неодређени задатак: *над датом дужи, као над хипотенузом, конструисати правоугли троугао.* Треба над датом дужи, као над пречником описати полукруг, а затим, спајањем ма које тачке периферије са крајњим тачкама дате дужи добијамо правоугли троугао. Таквих правоуглих троуглова можемо добити врло много, а имају сви за заједничку хипотенузу дату дуж.




Сл. 117

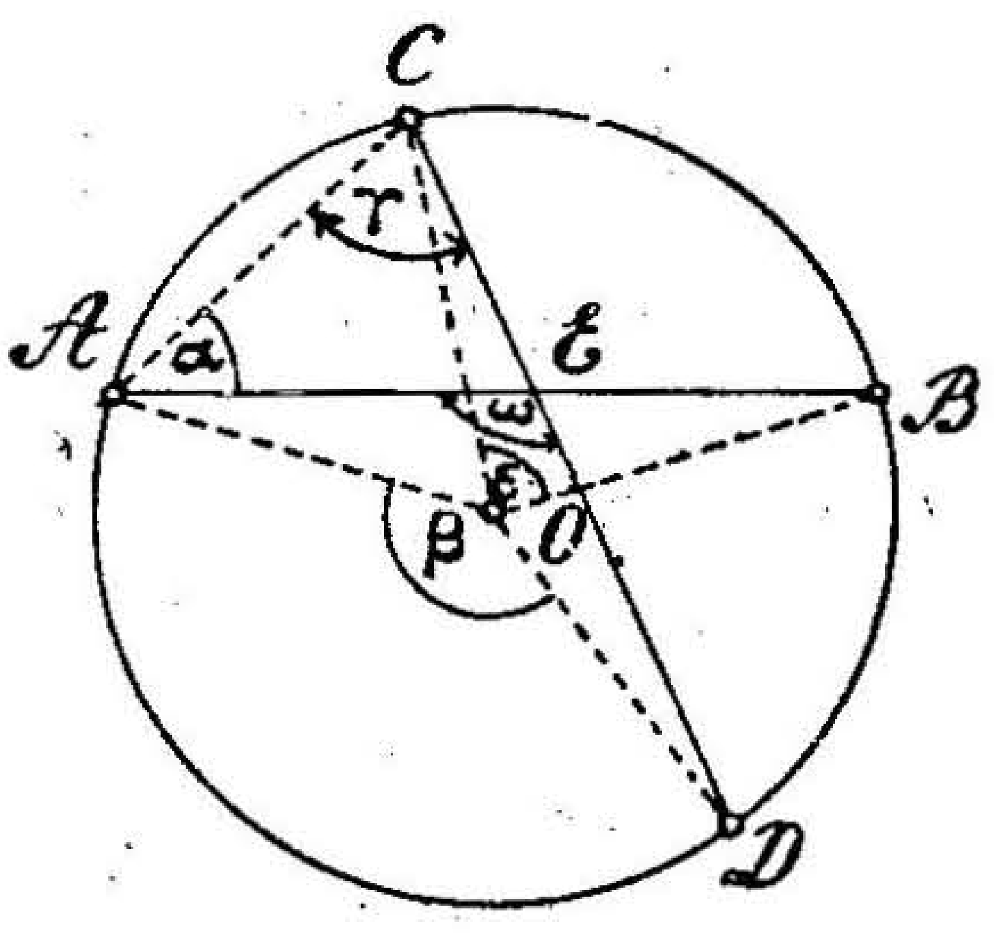



Сл. 118

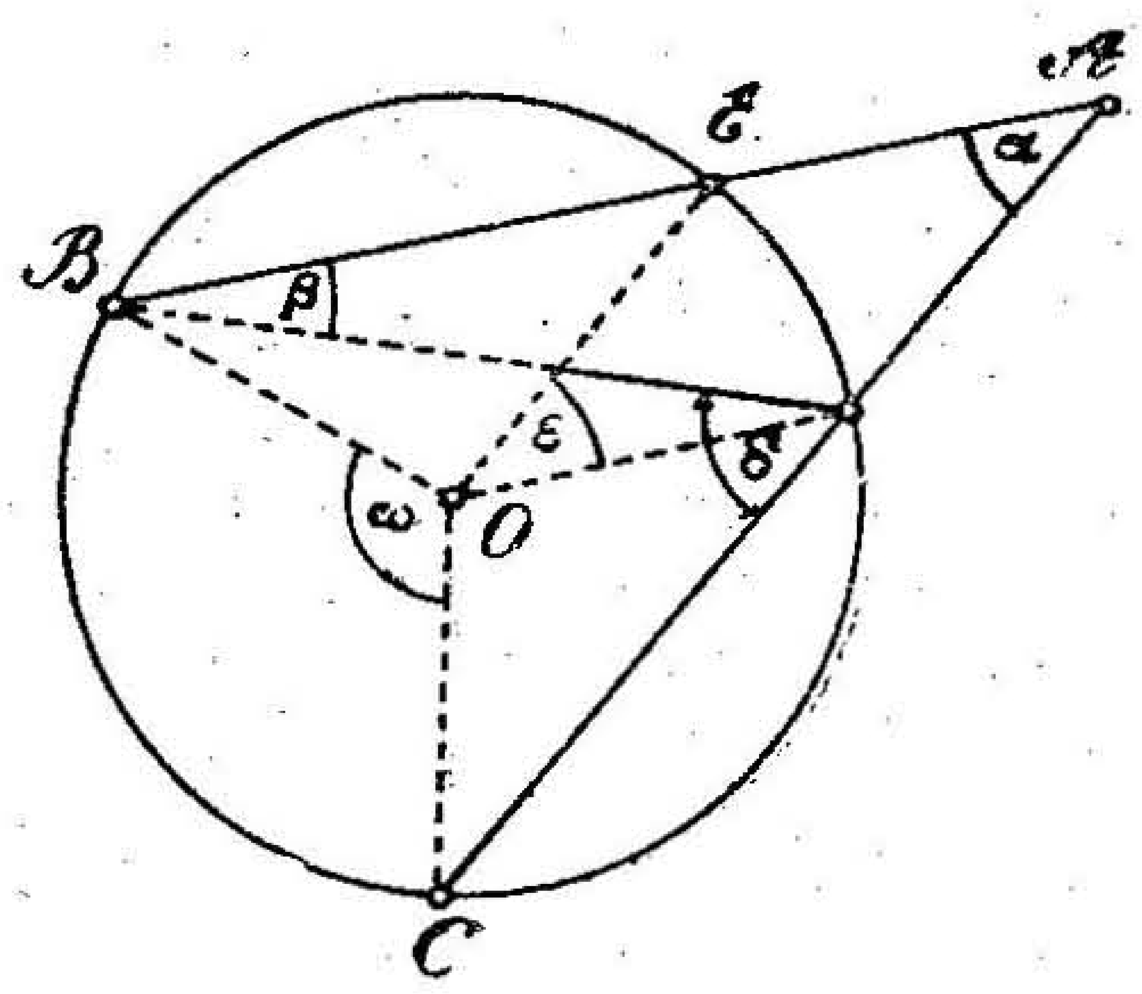
*3 Последица. — Збир два периферискa угла над истом тетивом, од којих се један налази у већем а други у мањем отсечку, износи $180^0$.* Нека су углови $\alpha$ и $\beta$ два периферискa угла над тетивом $CD$ (сл. 117), а њихови централни углови нека су $m$ и $n$. Тада је по овој теореми: $\alpha = \frac{m}{2}$ и $\beta = \frac{n}{2}$. Стога је $\alpha + \beta = \frac{m}{2} + \frac{n}{2} = \frac{m+n}{2} = \frac{360^0}{2} = 180^0$, пошто оба централна угла $m$ и $n$ дају пун угао.

4 *Последица. — Оштри угао између једне тетиве и дирке једнак је с периферискиим углом у већем отсечку над том тетивом, а тупи угао између тетиве и дирке једнак је с периферискиим углом у мањем отсечку.* Нека је $\alpha$ оштри а $\beta$ тупи угао између тангенте $EF$ и тетиве $AB$ у додирној тачци $A$ (сл. 118), а $\varepsilon$ и $\delta$ перифериски углови над истом тетивом. Ако у додирној тачци подигнемо $AC$ нормално на $EF$, онда је $AC$ пречник. Спајањем тачке $C$ са тачком $B$ добијамо правоугли троугао $ABC$ (2 последица). Стога је $\gamma + m = 90^0$. Па како је $\alpha + m = 90^0$ (теорема 64), то је $\alpha + m = \gamma + m$, или $\alpha = \gamma$. Како је $\gamma = \varepsilon$ (1 последица), то је и $\alpha = \varepsilon$. Тада су и углови $\beta$ и $\delta$ једнаки, јер је $\beta = 180^0 - \alpha$, а $\delta = 180^0 - \varepsilon$ (3 последица).

5 *Последица. — Угао између двеју тетива једнога круга, које се секу у кругу, једнак је полузбиру лукова између*




Сл. 119




Сл. 120

*крајњих тачака тих тетива.* Да бисмо доказали да је $\measuredangle\ \omega$ између тетива $AB$ и $CD$ (сл. 119) једнак полузбиру лукова $AD$ и $CB$, треба да вежемо тачке $A$ и $C$, чиме добијамо $\triangle\ AEC$, код кога је $\measuredangle\ \omega = \measuredangle\ \alpha + \measuredangle\ \gamma$ (теорема 20). Па како је $\measuredangle\ \alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ и $\measuredangle\ \gamma = \frac{\beta}{2}$, то је $\measuredangle\ \alpha$ једнак половини лука $CB$ а $\measuredangle\ \gamma$ половини лука $AD$. Стога је $\omega = \alpha + \gamma = \frac{\widehat{CB}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{CB} + \widehat{AD}}{2}$.

6 *Последица. — Угао између двеју сечица, које се секу ван круга, једнак је полуразлици лукова између тих сечица.* Да бисмо доказали да је $\measuredangle\ \alpha$ између сечица $AB$ и $AC$ (сл. 120) једнак полуразлици лукова $BC$ и $ED$, треба да повучемо тетиву $BD$, чиме добијамо $\triangle\ BDA$, код кога је $\measuredangle\ \alpha = \measuredangle\ \delta - \measuredangle\ \beta$ (теорема 20). Па како је $\measuredangle\ \delta = \frac{\omega}{2}$ и $\measuredangle\ \beta = \frac{\varepsilon}{2}$, а углови $\omega$ и $\varepsilon$ једнаки су са луцима $BC$ и $ED$, то је

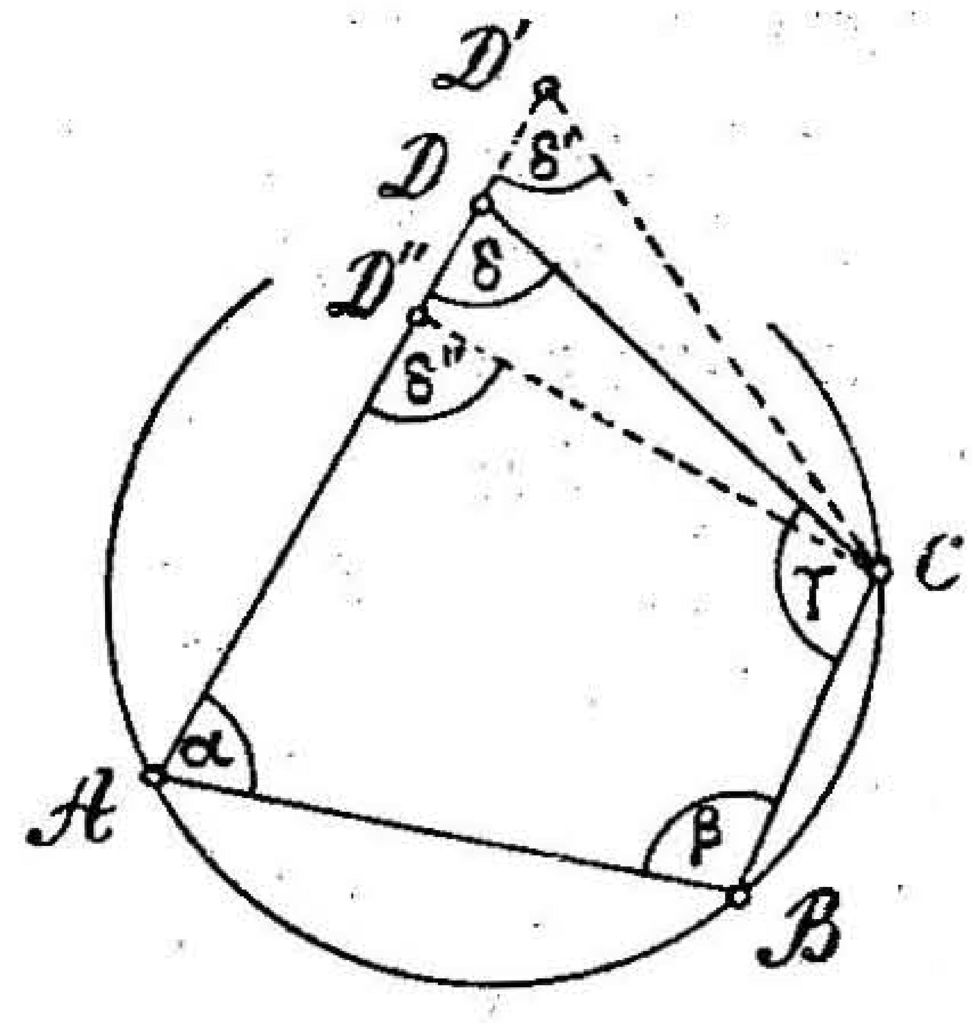
$$\measuredangle\ \alpha = \delta - \beta = \frac{\omega}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{ED}}{2} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{ED}}{2}.$$

**§ 39. — Тетивни и тангентни четвороуглови.** — а) За један четвороугао каже се да је тетиван ако су му стране тетиве једнога круга. Такав је четвороугао $ABCD$ (сл. 117). Особина тетивног четвороугла исказана је овом теоремом:

*Теорема 67.* — **Код тетивног четвороугла збирови супротних углова једнаки су.** Према 3 последици претходне теореме (сл. 117) имамо $\alpha + \beta = 180^0$. Па како је збир унутрашњих углова четвороуглова $360^0$ (теорема 32), то је и $\gamma + \delta = 180^0$. Стога је $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

Супротна теорема овој теореми гласи:

**Ако су збирови супротних углова једнога четвороугла једнаки, онда је он тетиван** (теорема 68). Нека је дато да је $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ (сл. 121). Ако претпоставимо да круг, који пролази кроз темена $A$, $B$ и $C$, не пролази кроз четврто теме $D$, већ сече страну $AD$ било у $D'$, било у $D''$, онда би било $\beta + \delta' = 180^0$ (3 последица 66 теореме), односно $\beta + \delta'' = 180^0$. Па како је дато да је $\beta + \delta = 180^0$, то би било $\beta + \delta = \beta + \delta'$, односно $\beta + \delta = \beta + \delta''$, или $\delta = \delta'$, односно $\delta = \delta''$. Па пошто је ово немогуће, јер је из $\triangle\ CDD'$ $\measuredangle\ \delta > \measuredangle\ \delta'$, а из $CDD''$ $\measuredangle\ \delta'' > \measuredangle\ \delta$ (теорема 20), то наша претпоставка, као нетачна, отпада. Стога круг пролази и кроз четврто теме $D$, тј. четвороугао $ABCD$ биће тетиван.

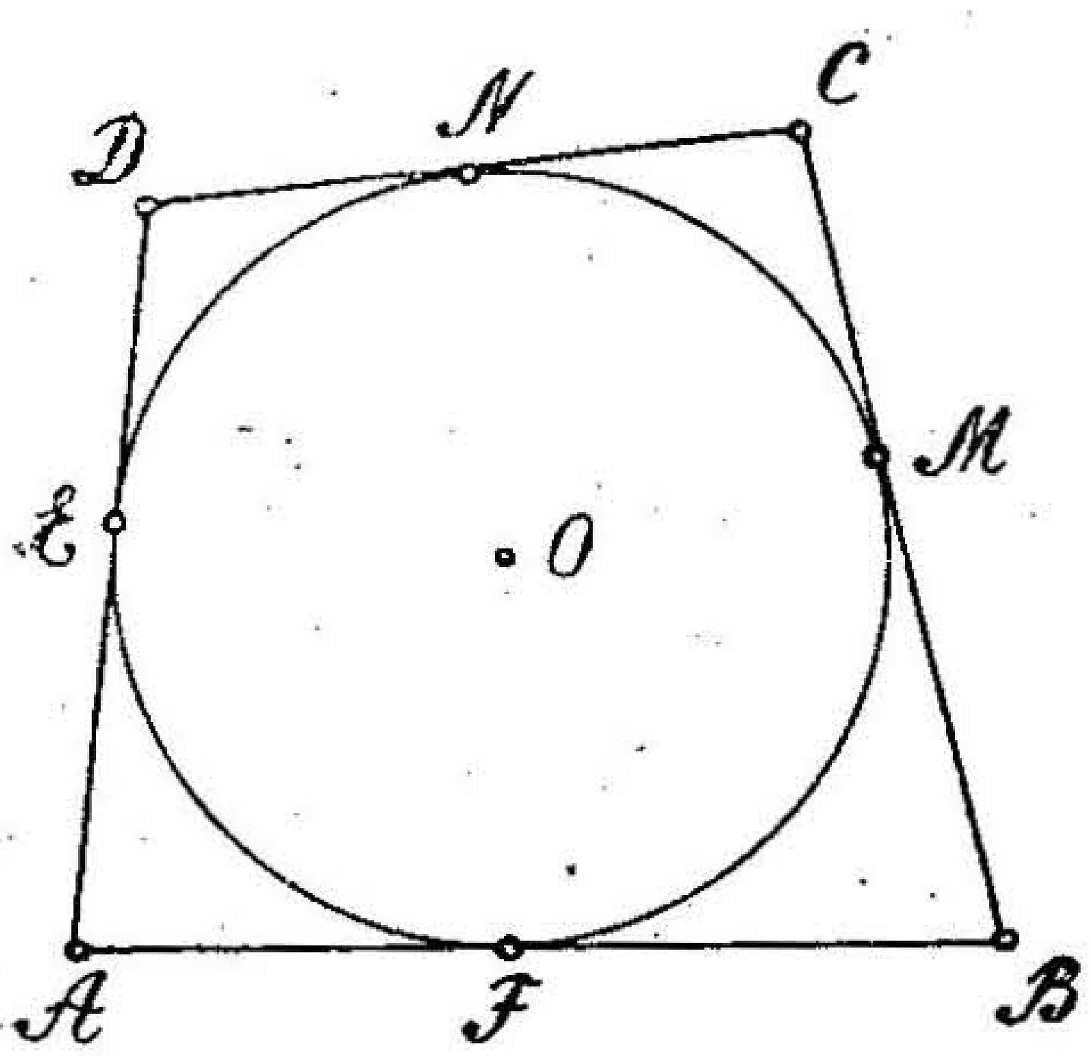


Сл. 121

b) За један четвороугао каже се да је тангентан ако су му стране тангенте једнога круга. Такав је четвороугао

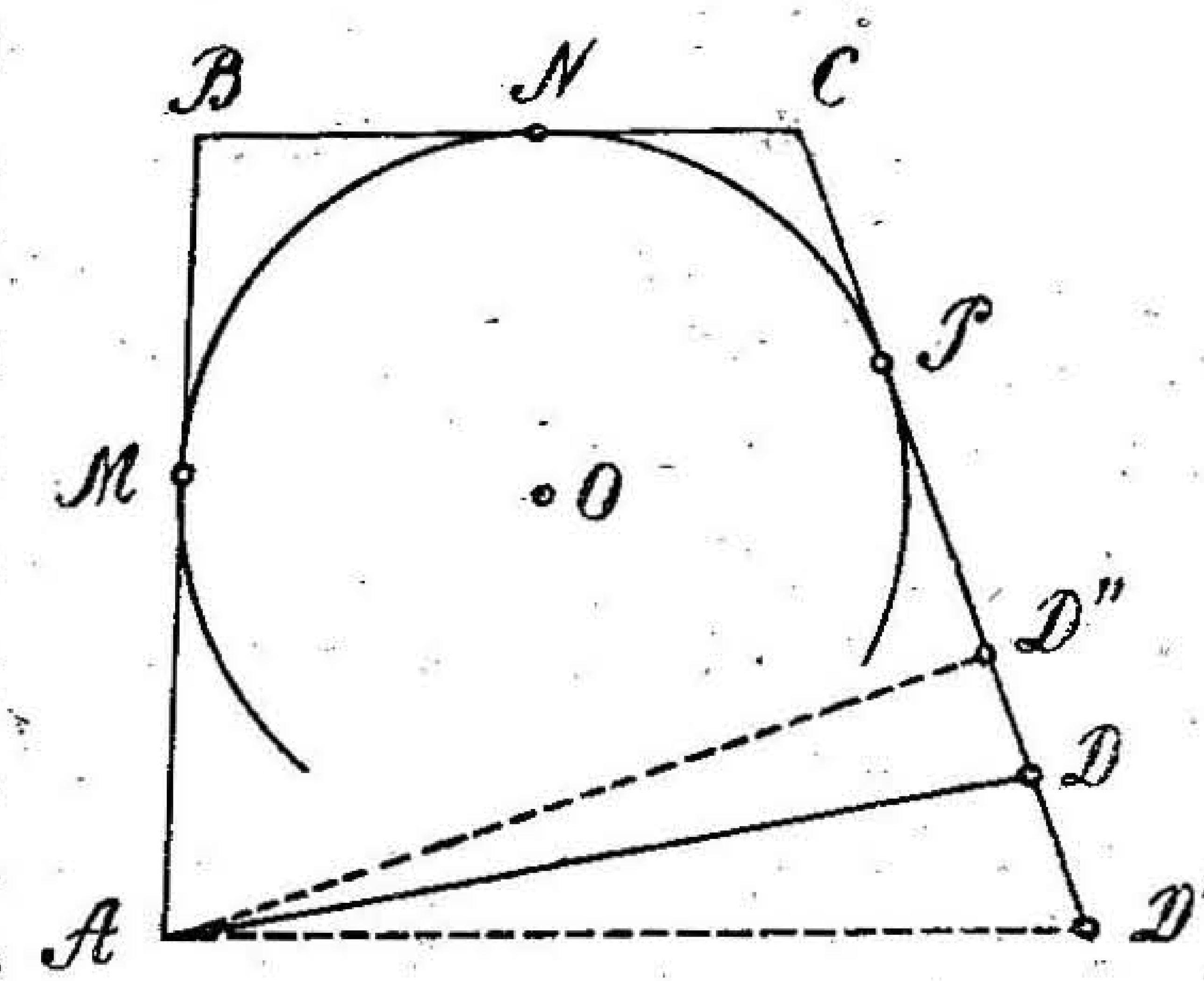
$ABCD$ (сл. 122). Особина тангентног четвороугла исказана је овом теоремом:

*Теорема 69.* — **Код тангентног четвороугла једнаки су збирови супротних страна.** Према теореми 65 под b), а из сл. 122 имамо: $AF = AE$; $BF = BM$, $DN = DE$ и $CN = CM$. Сабирањем ових једначина добијамо: $AF + BF + DN + CN = AE + BM + DE + CM$, или $AB + DC = AD + BC$, пошто је $AB = AF + BF$, $DC = DN + CN$, $AD = DE + AE$ и $BC = BM + DM$. Супротна теорема овој теореми гласи:



Сл. 122

**Конвексан четвороугао код кога су збирови супротних страна једнаки јесте тетиван** *(Теорема 70)*. — Нека је четвороугао $ABCD$ (сл. 123) такав да је $AB + CD = AD + BC$ (1). Ако претпоставимо да круг, који додирује стране $AB$, $BC$ и $CD$, не додирује и четврту страну $AD$, већ $AD'$, или $AD''$, онда би било по претходној теореми $AB + CD' = BC + AD'$, односно $AB + CD'' = BC + AD''$. Ако ову једначину одузмемо од дате, добијамо: $CD - CD' = AD - AD'$, односно $CD - CD'' = AD - AD''$, или $CD' - CD = AD' - AD$, или $DD' = AD' - AD$, односно $DD'' = AD - AD''$, што је немогуће, јер код троуглова $ADD'$ или $ADD''$, једна страна не може бити једнака разлици других двеју страна (теорема 29). Стога круг мора додиривати и четврту страну $AD$, тј. четвороугао $ABCD$ је тангентан.



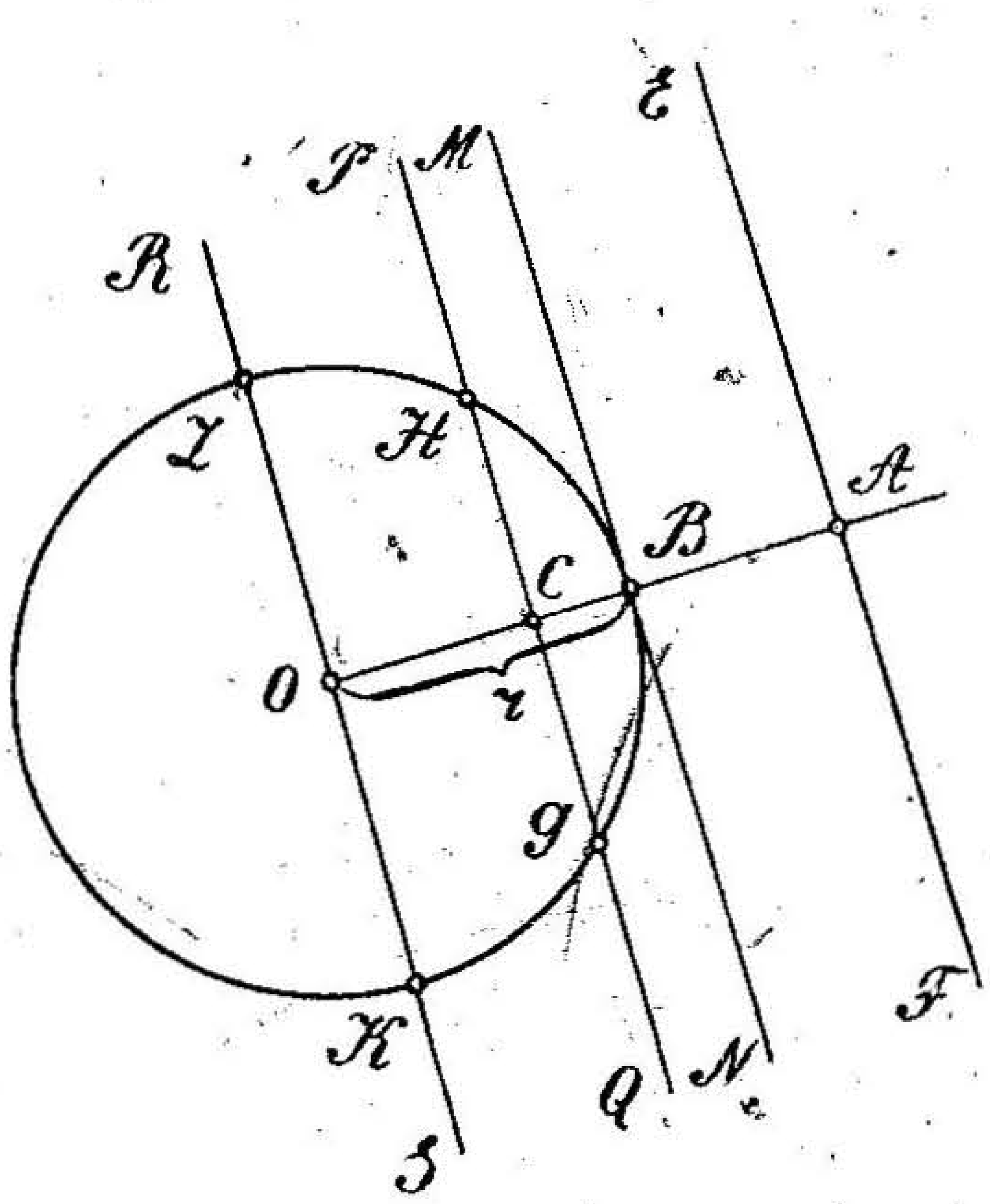
Сл. 123

*Напомена.* — На основу теорема из овог параграфа, изводимо закључак, да можемо описати круг код квадрата, правоугаоника и равнокраког трапеза, а уписати код квадрата, ромба и делтоида.

# VIII. Узајамни положаји тачке и круга, праве и круга и два круга

**§ 40. — Тачка и круг.** — Једна тачка и круг могу заузимати три узајамна положаја, и то: или је тачка ван круга, или је на кружној периферији, или је у кругу. Под *централном раздаљином* неке тачке разумемо отстојање те тачке до центра круга и означавамо га обично са $c$. Тачка је ван круга ако је њена централна раздаљина већа од полупречника круга ($c > r$); тачка је на кружној периферији ако је њена централна раздаљина једнака полупречнику круга ($c = r$); и најзад, тачка је у кругу ако је њена централна раздаљина мања од полупречника круга ($c < r$).

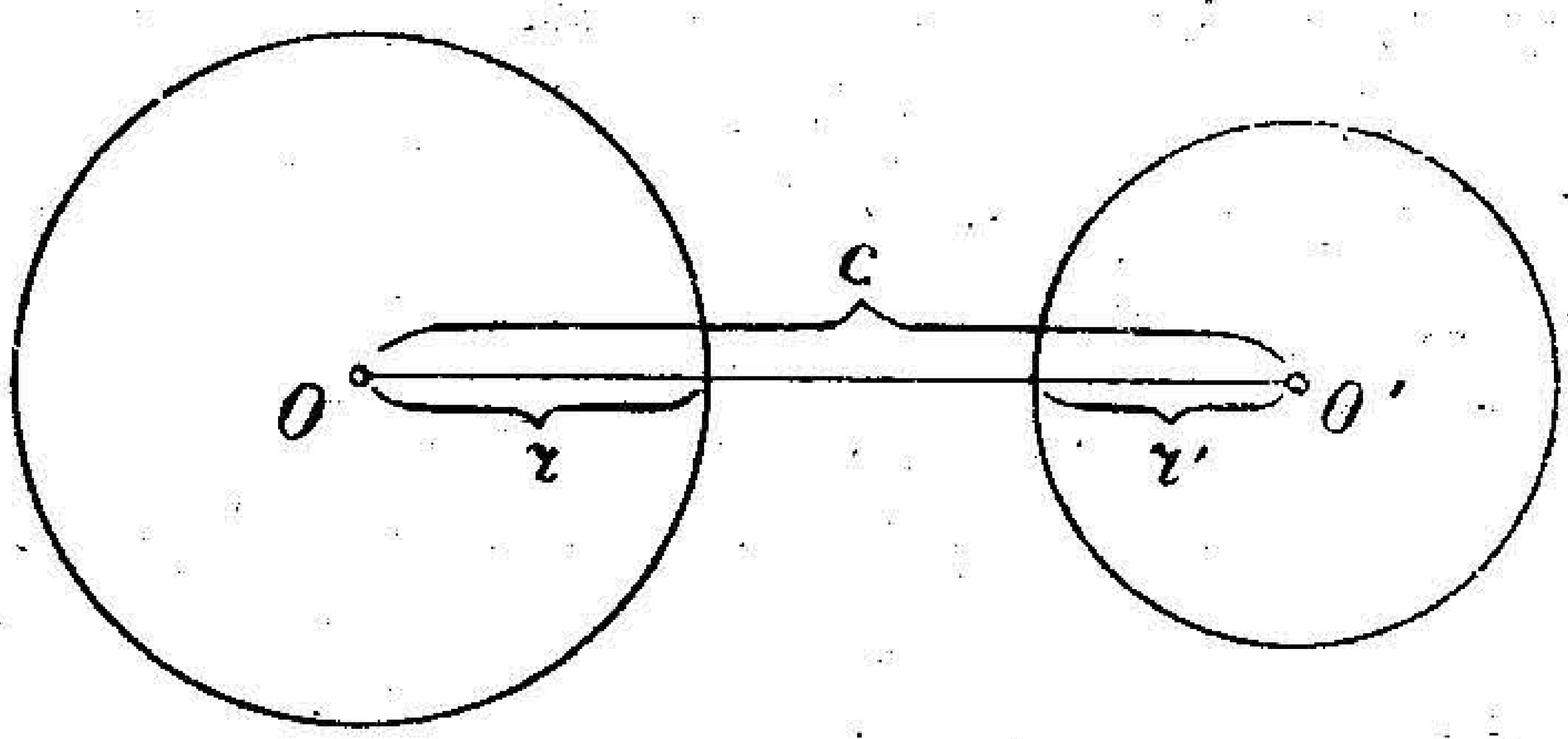
**§ 41. — Права и круг.** — Права и круг могу заузимати такође три узајамна положаја, и то: или је права сва ван круга и нема с њим ни једне заједничке тачке ($EF$, сл. 124); или додирује круг, у ком случају има с кругом једну заједничку тачку ($MN$); или сече круг, у ком случају има с кругом две заједничке тачке ($PQ$ и $RS$). Под *централном раздаљином* неке праве разумемо нормално отстојање центра круга до те праве. Права је ван круга ако је њена централна раздаљина већа од полупречника круга ($OA > r$); права додирује круг, или је дирка кругу, ако је њена централна раздаљина једнака полупречнику ($OB = r$); и права сече круг, или је сечица круга, ако је њена централна раздаљина мања од полупречника круга ($OC < r$). Део сечице између пресечних тачака је тетива код круга ($GH$). Ако права пролази кроз центар круга, онда је њена централна раздаљина једнака нули, а њена тетива постаје пречник. Кретањем праве ка центру круга тако да је сваки њен доцнији положај паралелан првобитном положају, њена се централна раздаљина поступно смањује; а удаљавањем од центра, њена се централна раздаљина увећава.



Сл. 124

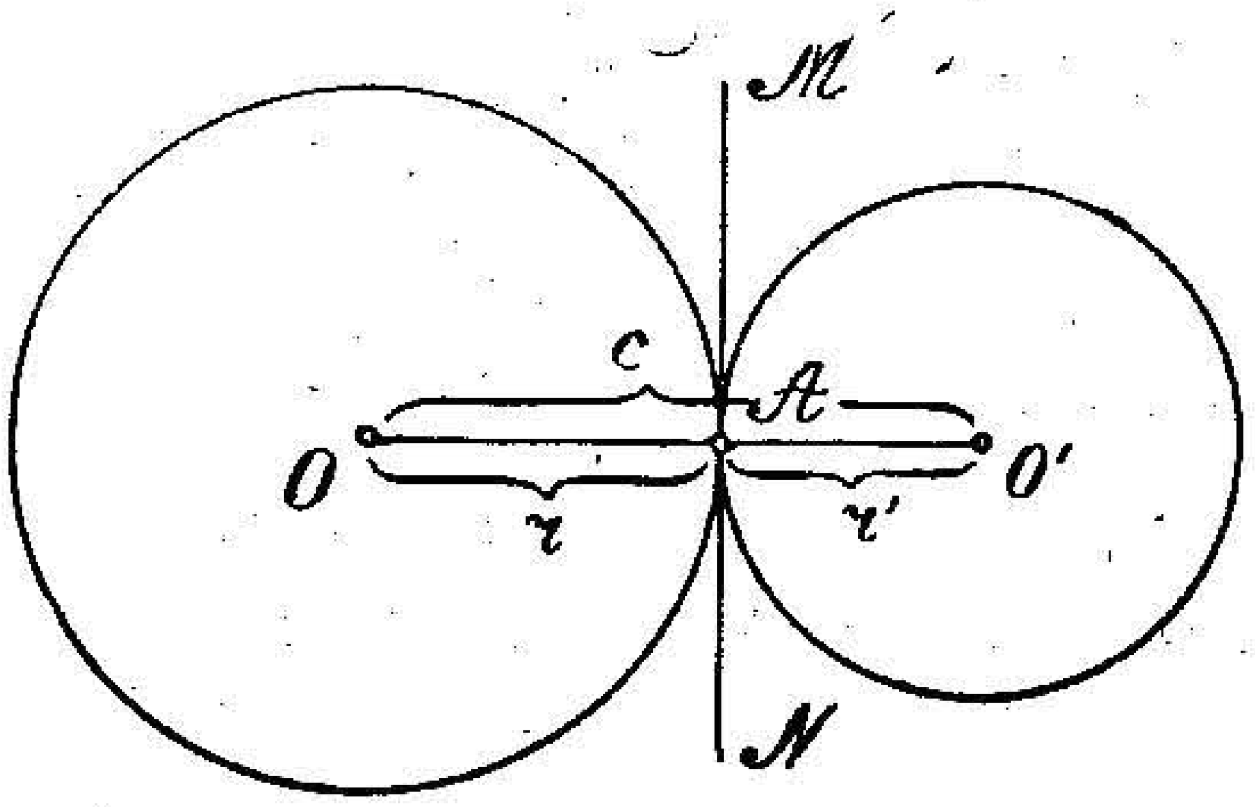
**§ 42. — Узајамни положаји два круга.** — Под *централном раздаљином* два круга разумемо отстојање њихових центара ($OO'$ на сл. 125), која се обично означава са $c$. Два круга могу имати ових шест међусобних положаја:

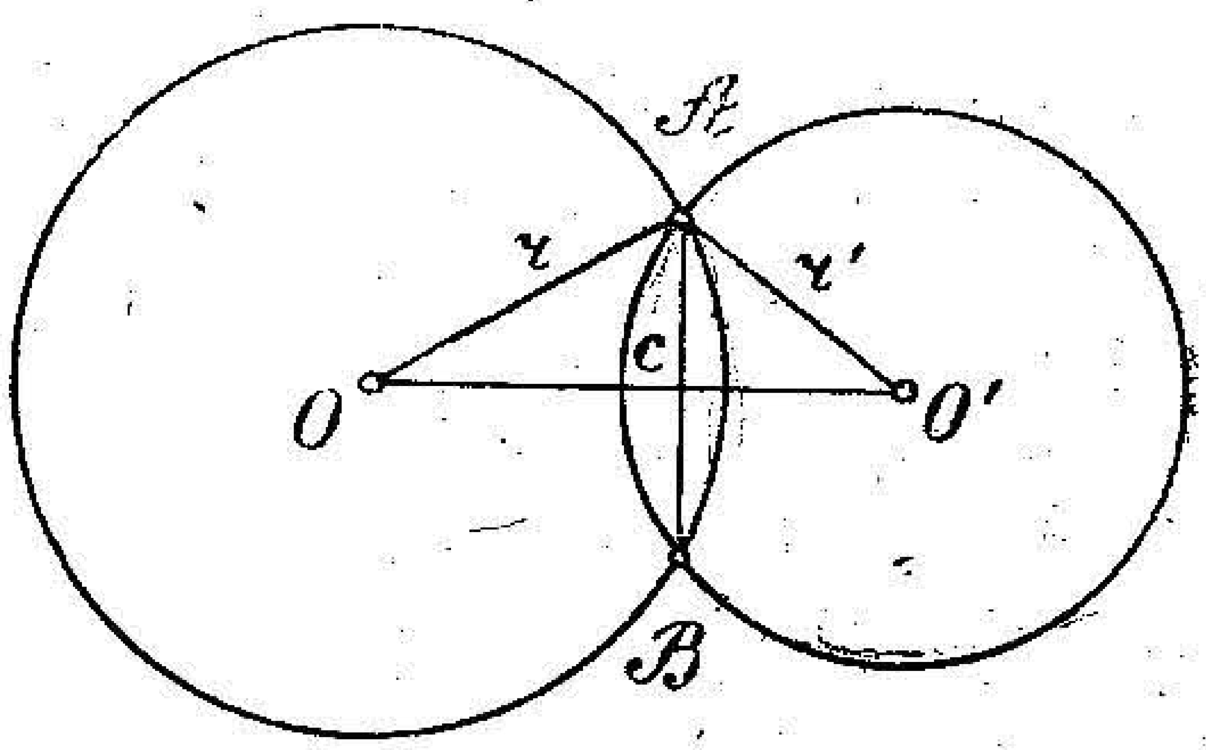
1. Кругови се налазе један ван другога (сл. 125). Тада је њихова централна раздаљина већа од збира полупречника ($c > r + r'$).




Сл. 125

2) Кругови се додирују споља (сл. 126). Тада је њихова централна раздаљина једнака збиру полупречника ($c = r + r'$), а имају једну заједничку тачку ($A$) и једну заједничку тангенту $MN$ у тој тачци.

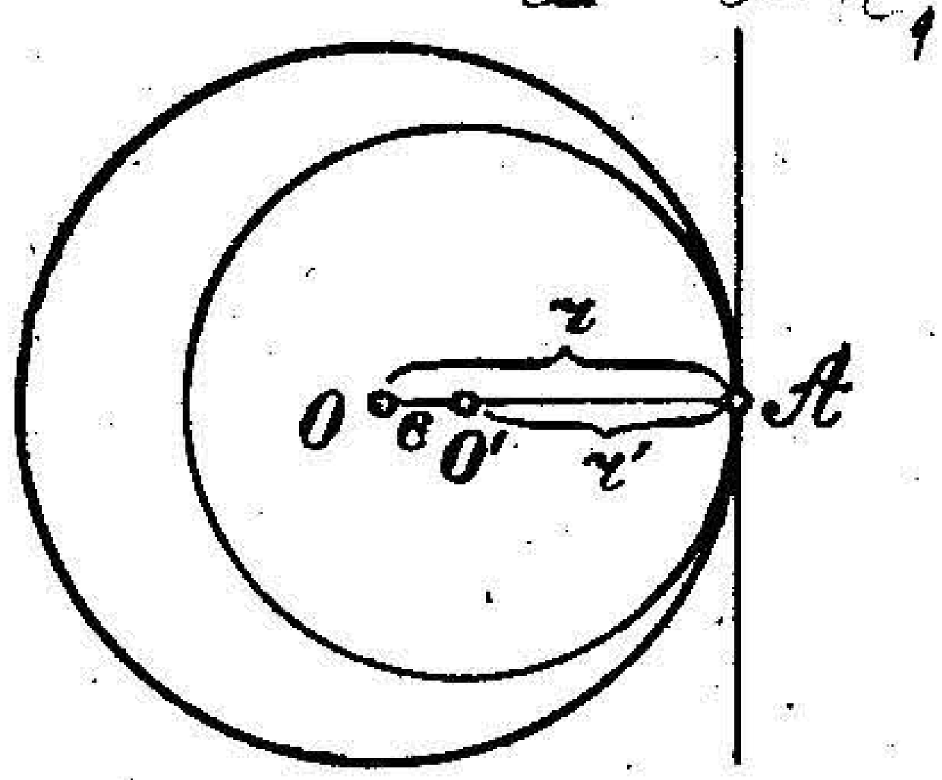


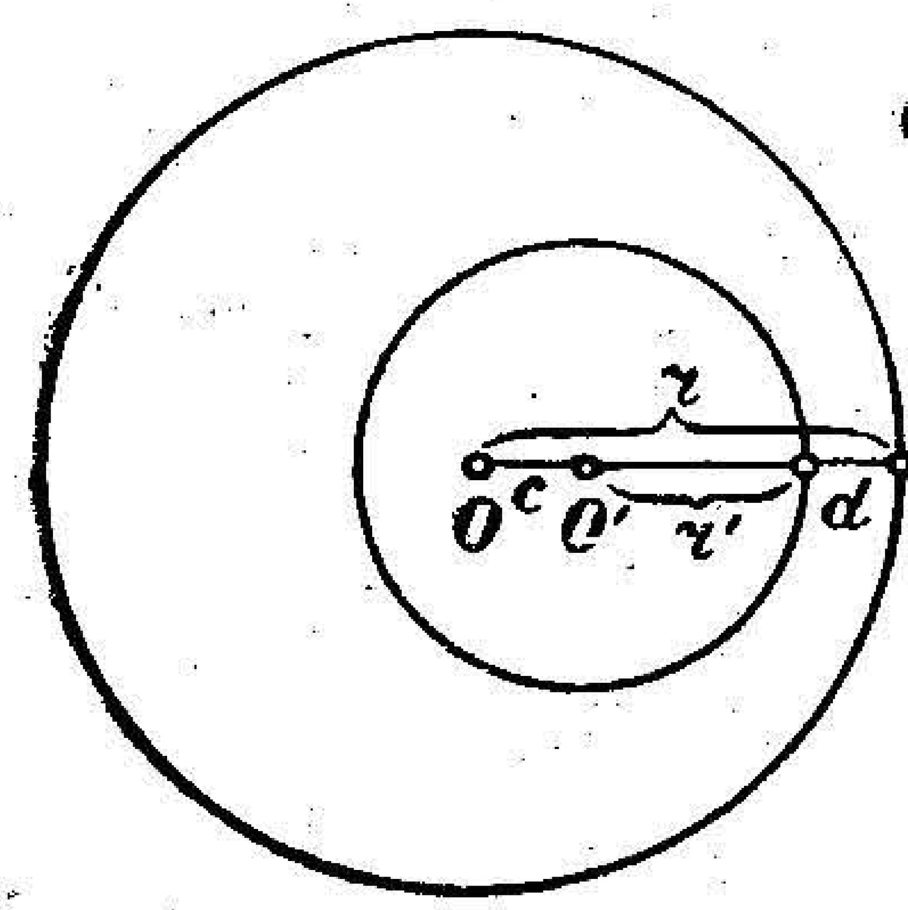




Сл. 126 Сл. 127

3) Кругови се секу (сл. 127). Тада је њихова централна раздаљина мања од збира полупречника ($c < r + r'$, теорема 29), а имају две заједничке тачке и заједничку тетиву $AB$, која спаја те две тачке.

$c = r - r_1$ $c < r$



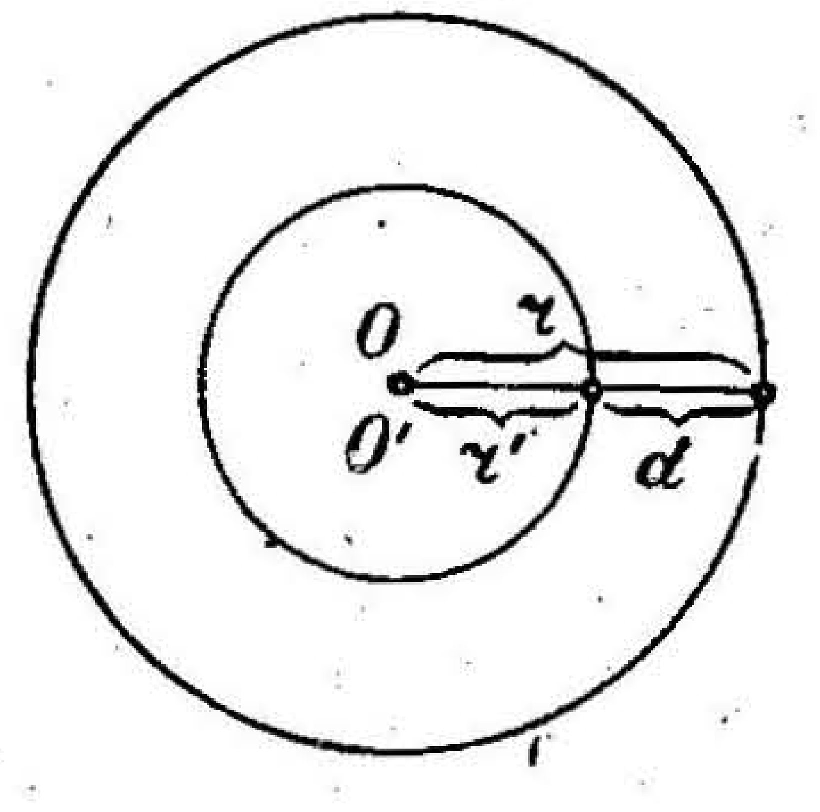




Сл. 128 Сл. 129

4) Кругови се додирују изнутра (сл. 128). Тада је њихова централна раздаљина једнака разлици полупречника ($c = r - r'$), а имају опет једну заједничку тачку $A$ и једну заједничку тангенту у тој тачци.

5) Кругови се налазе један у другоме, али немају заједнички центар (сл. 129). Тада је њихова централна раздаљина мања од разлике полупречника ($c < r - r'$), јер из слике 129 видимо да је $r = c + r' + d$, или $r - r' = c + d$.

6) Кругови се налазе један у другоме и имају заједнички центар (сл. 130). У овом случају је њихова централна раздаљина једнака нули ($c=0$), а њихове су периферије паралелне. За такве кругове каже се да су *концентрични*, а површина између њихових периферија зове се *кружни прстен*. Разлика $d$ (сл. 130) између полупречника концентричних кругова зове се *дебљина* кружног прстена. Кругови који немају заједничког центра зову се *ексцентрични*.



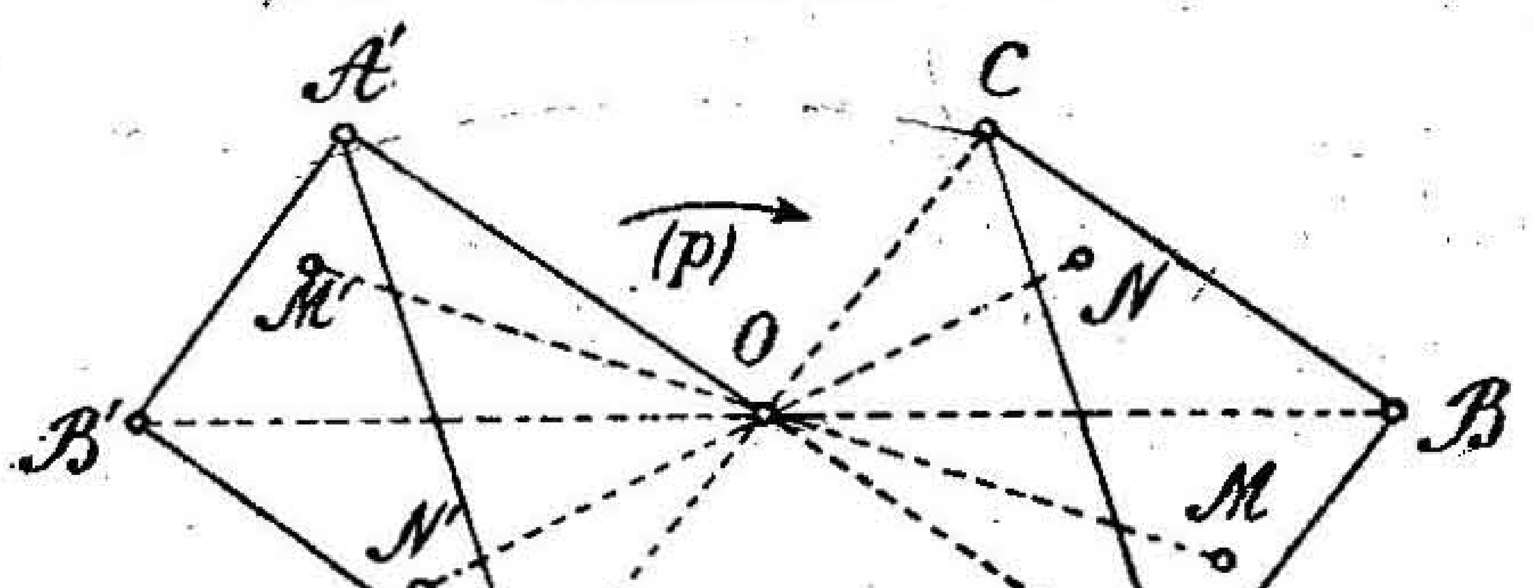

Сл. 130

# IX. Центрична и осна симетричност равних ликова

**§ 43. — Центрична симетричност.** — *a)* За две тачке $A$ и $A'$ (сл. 131) каже се да заузимају *симетричан* положај према тачци $O$ ако је тачка $O$ средина дужи $AA'$. Тачка $O$ зове се *центар* симетрије. Свака дата тачка $A$, према неком датом центру симетрије $O$, има само једну једину симетричну тачку $A'$, која се добија када дуж $AO$ продужимо преко $O$ за $OA'$ једнаку са $AO$, или обртањем дужи $AO$ за $180^0$ око центра $O$, која ће заузети положај $OA'$.


Сл. 131

*b)* За две слике каже се да заузимају симетричан положај према једном *центру* симетрије $O$ ако свакој тачци обима и површине једне слике одговара у симетричном положају по једна тачка друге слике. На сл. 132 заузимају симетричан положај према центру $O$ тачке: $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, $C$ и $C'$, $M$ и $M'$, $N$ и $N'$. Симетричну слику једне дате праволиниске слике према датом центру симетрије $O$ налазимо када сваком темену: $A, B, C, D\ldots$ дате слике нађемо симетрична темена $A', B', C', D'$, у односу на центар $O$. Тачке $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, $C$ и $C'$,... симетричних слика зову се *хомологе*. Код паралелограма, повлачењем једне ма које

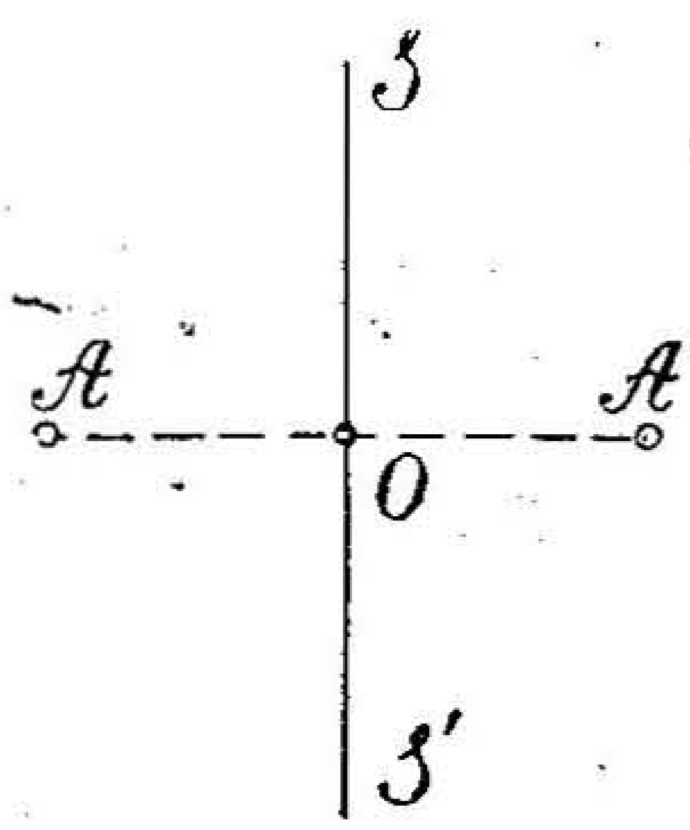



Сл. 132

дијагонале добијамо два троугла који су симетрични према пресеку дијагонала, који је њихов центар симетрије.

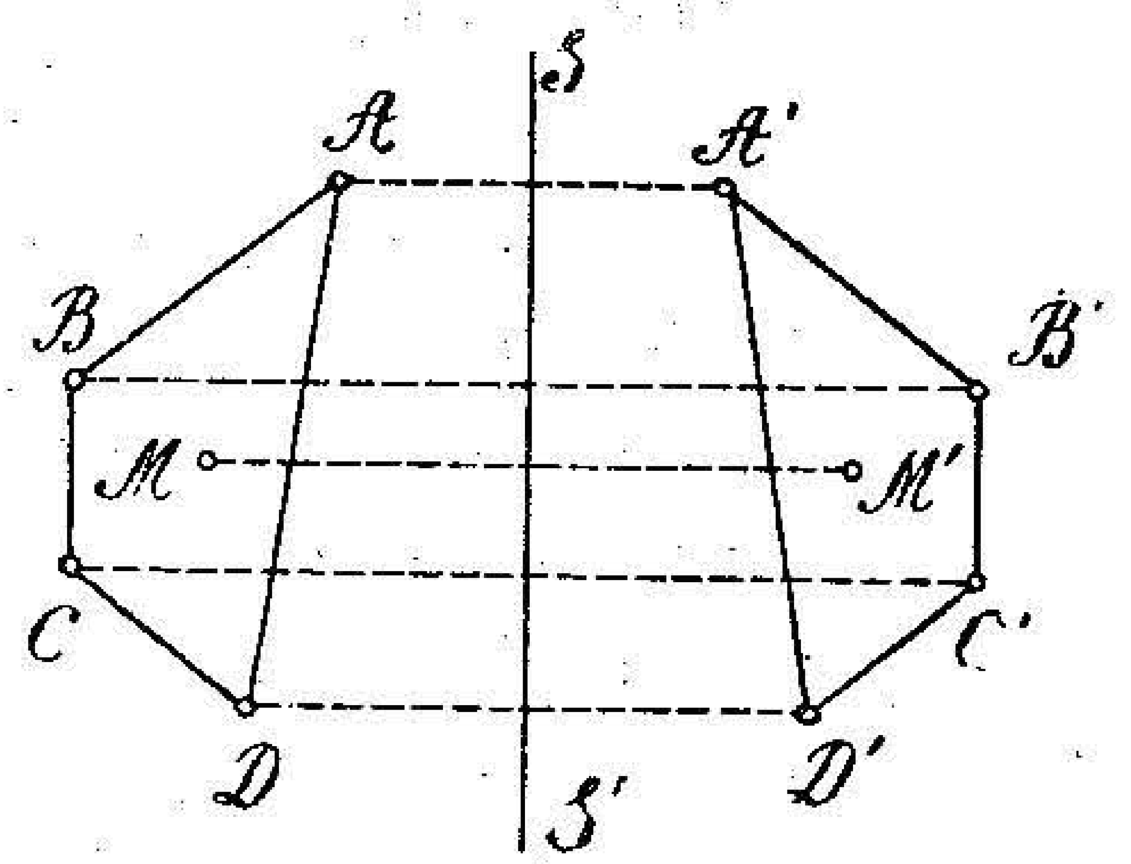
*Теорема 71.* — **Две слике које се налазе у истој равни, а симетрично положене према неком центру симетрије О, јесу једнаке.** — Нека је $\triangle A'B'C'$ симетричан са троуглом $ABC$ (сл. 132) према центру симетрије О. Ако троугао $A'B'C'$ обрнемо за $180^0$ у смислу стрелице *(p)*, онда се темена троугла $A'B'C'$ поклапају са теменима троугла $ABC$. Ти се троуглови потпуно поклапају, па су стога заиста једнаки. Исти је случај и са ма којим двема симетричним сликама према неком центру симетрије $O$, па биле те слике полигони или криволиниске, јер се обртањем за $180^0$ око центра симетрије $O$ свака тачка једне слике поклапа са својом хомологом тачком друге слике. Код симетричних слика хомологе стране и хомологи углови јесу једнаки, што увиђамо њиховим поклапањем.

**§ 44. — Осна симетричност.** — *a)* За две тачке $A$ и $A'$ (сл. 133) каже се да заузимају симетричан положај према правој $SS'$ ако је дуж $AA'$, која их везује, преполовљена правом $SS'$ и стоји на њој нормално. Права $SS'$ зове се *симетрала* или *осовина симетрије*, а тачке $A$ и $A'$ јесу према њој симетрично положене (поређане). Свака дата тачка $A$, према некој датој осовини симетрије $SS'$, има само једну једину симетричну тачку $A'$, која се добија када из $A$ спустимо нормалу $AO$ на $SS'$, а затим продужимо ову нормалу за $OA'$ једнаку са $AO$, или обртањем за $180^0$ полуравни $SS'A$ око $SS'$, у ком случају дата тачка $A$ пада на своју симетричну тачку $A'$.

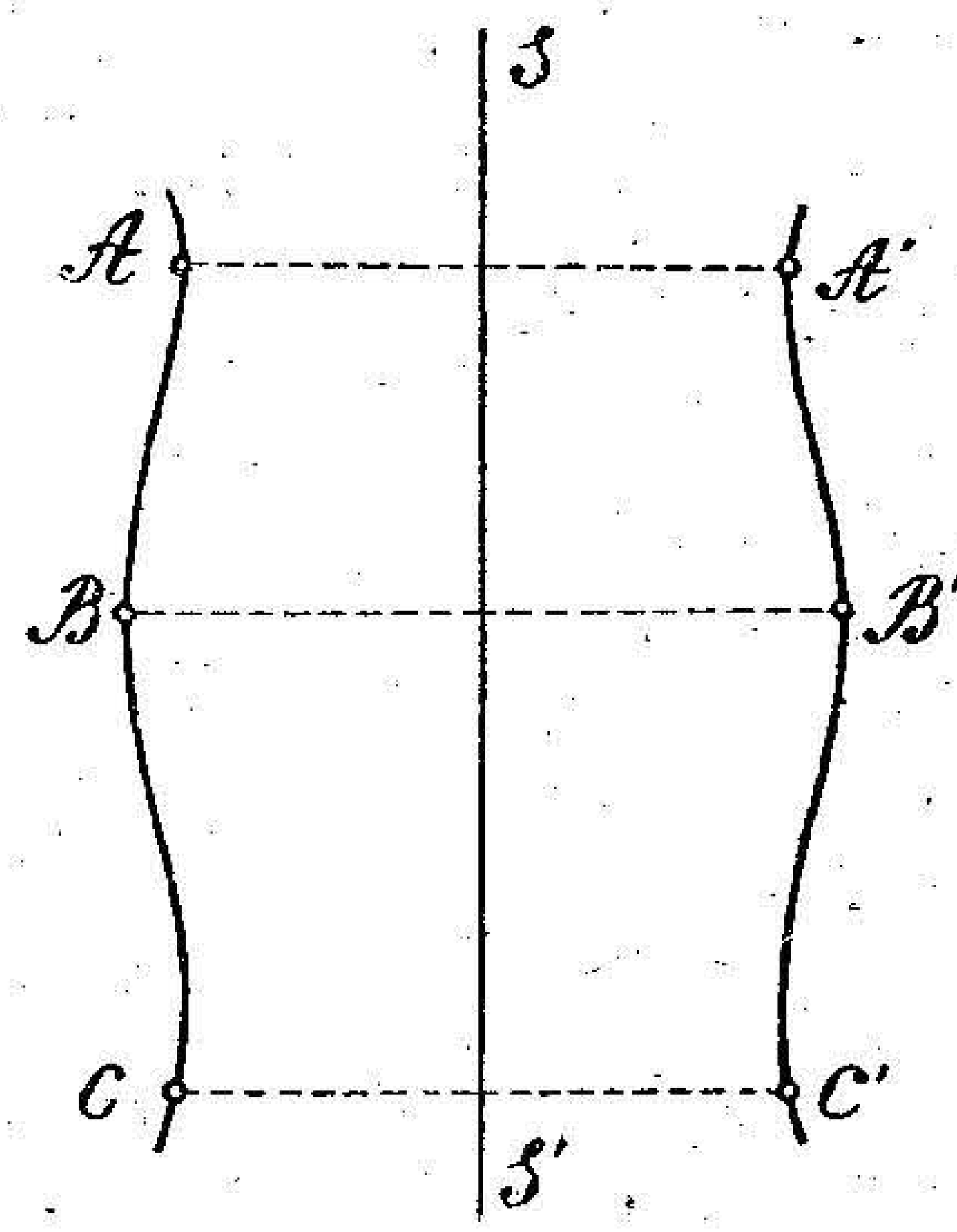


Сл. 133

*b)* За две слике каже се да заузимају симетричан положај према некој осовини симетрије $SS'$ ако свакој тачци обима и површине једне слике одговара у симетричном положају по једна тачка друге слике. Такви су четвороуглови $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (на сл. 134) и криве $ABC$ и $A'B'C'$ (на сл. 135). Симетричну слику једне дате слике према некој датој осовини симетрије $SS'$ налазимо када тачкама: $A, B, C, D, \ldots$ (теменима код праволиниских слика) дате слике нађемо њихове симетричне тачке $A', B', C', D', \ldots$ у односу на осовину $SS'$. Тачке $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, $C$ и $C'$ симетричних слика зову се хомологе.




Сл. 134




Сл. 135

*Теорема 72.* — **Две слике које се налазе у истој равни, а симетрично су положене према некој осовини симетрије $SS'$, јесу једнаке.** — Нека су четвороуглови $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (сл. 134) симетрични према осовини симетрије $SS'$. Ако четвороугао $ABCD$ обрнемо за $180^0$ око осовине $SS'$, онда ће се темена четвороугла $ABCD$ поклопити са теменима четвороугла $A'B'C'D'$, стране и углови једнога четвороугла поклапају се са хомологим странама и угловима другога четвороугла, па су стога заиста једнаки. Исти је случај и са ма којим двема симетричним сликама према некој осовини симетрије $SS'$, јер обртањем за $180^0$ око осовине симетрије свака тачка једне слике поклапа своју хомологу тачку друге слике.

**§ 45. — Симетричне слике.** — За једну слику каже се да је симетрична ако се може једном правом поделити на две половине у симетричном положају. Код такве слике оба њена дела једнака су и по облику и по површини. Има сликâ које се дају поделити симетрично само помоћу једне осовине симетрије, а има и таквих слика које се могу поделити симетрично помоћу две, три и више осовина симетрије. Стога имамо сликâ једно-осовно, дво-осовно и више-осовно симетричних. Уколико једна слика има више осовина, утолико је она правилнија.

Од слика до сада посматраних симетричне су:

1) *Равнокрак троугао*, који има за осовину симетрије основичину висину (једно-осовна симетрична слика);

2) *Равностран троугао*, који има за осовину симетрије висину ма које стране (тро-осовна симетрична слика);

3) *Квадрат*, који има за осовину симетрије ма коју дијагоналу, или праву која пролази кроз средине супротних страна (четворо-осовна симетрична слика);

4) *Правоугаоник*, који има за осовину симетрије праву која пролази кроз средине супротних страна (дво-осовна симетрична слика);

5) *Ромб* који има за осовину симетрије ма коју дијагоналу (дво-осовна симетрична слика);

6) *Равнокрак трапез*, који има за осовину симетрије праву која пролази кроз средине паралелних страна (једноосовна симетрична слика);

7) *Делтоид*, који има за осовину симетрије дијагоналу која везује темена, где се састају његове једнаке стране (једноосовна симетрична слика);

8) *Правилан полигон*, који има за осовину симетрије симетралу ма које стране, или симетралу ма кога угла (више-осовна симетрична слика); и

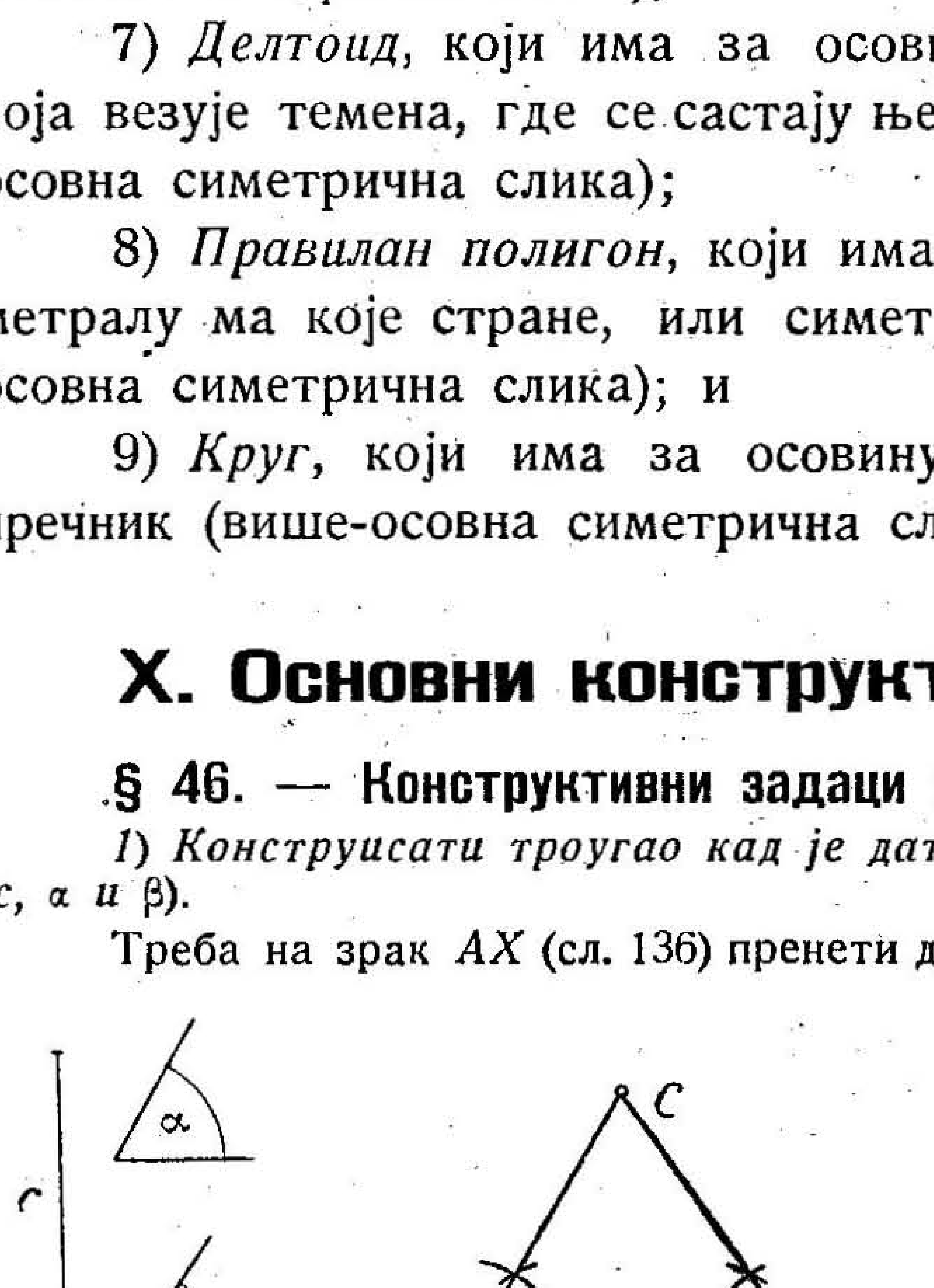
9) *Круг*, који има за осовину симетрије ма који свој пречник (више-осовна симетрична слика).

# X. Основни конструктивни задаци*

## § 46. — Конструктивни задаци из троуглова

*1) Конструисати троугао кад је дата једна страна и два угла. — ($c$, $\alpha$ и $\beta$).*

Треба на зрак $AX$ (сл. 136) пренети дату страну $c$, а затим код тачке $A$ угао $\alpha$, а код $B$ угао $\beta$. Продужењем кракова пренетих углова, добијамо пресек $C$ као треће теме траженог троугла. Ако је дат само један угао на познатој страни и њен супротни угао, онда најпре налазимо и други угао на тој страни. (Види напомену § 23.) Како су код равнокраког троугла углови на основици једнаки, а код правоуглог троугла прави је угао увек познат,

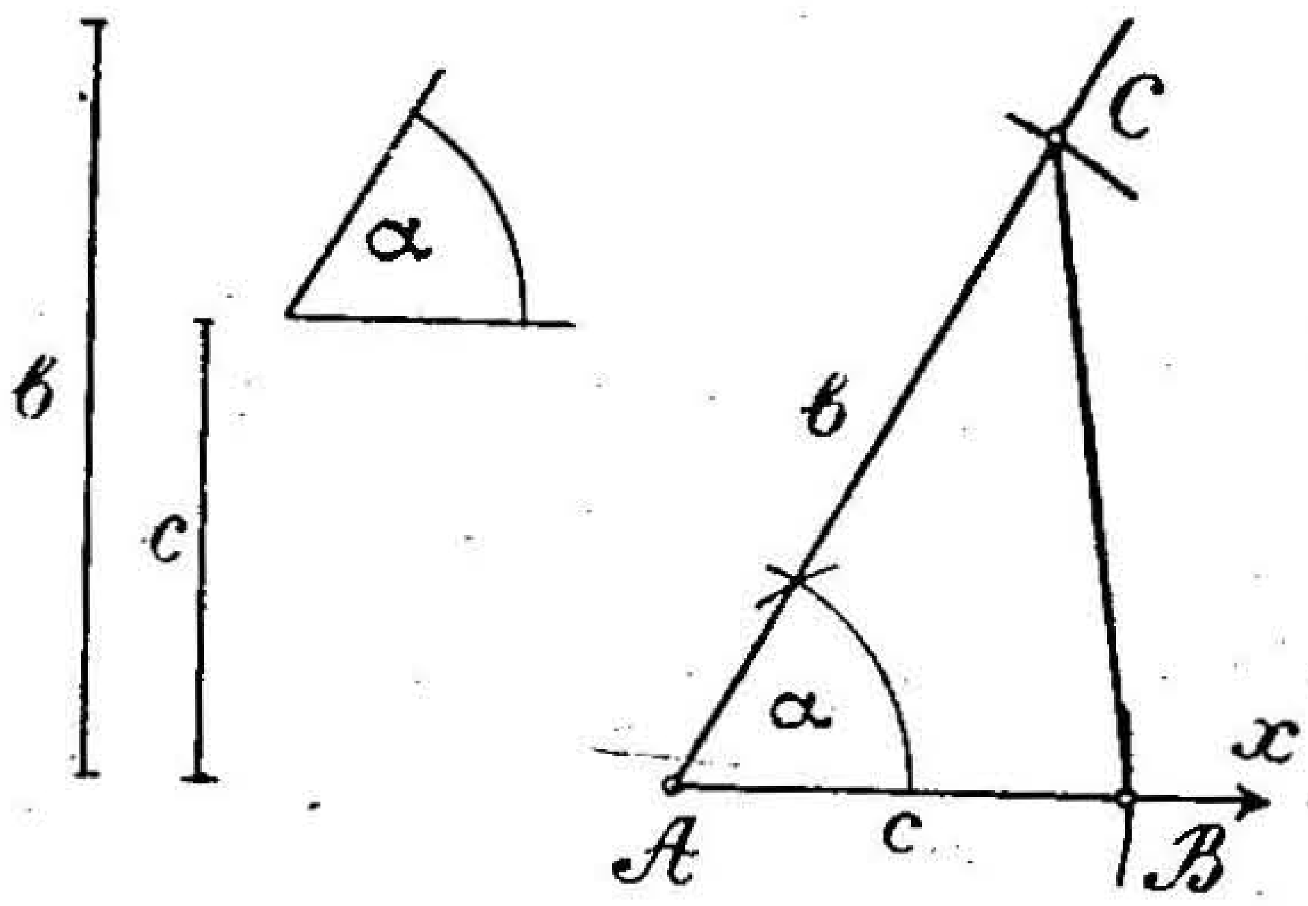



Сл. 136

* То су најпростији задаци који се решавају цртањем уз помоћ шестара и лењира, а на основу дефиниција и теорема посматраних у првом и другом одељку. Те су теореме излагале особине равних слика и везу између њихових елемената. Примена основних конструктивних задатака је врло честа при решавању сложенијих задатака у VI одељку ове Планиметрије.

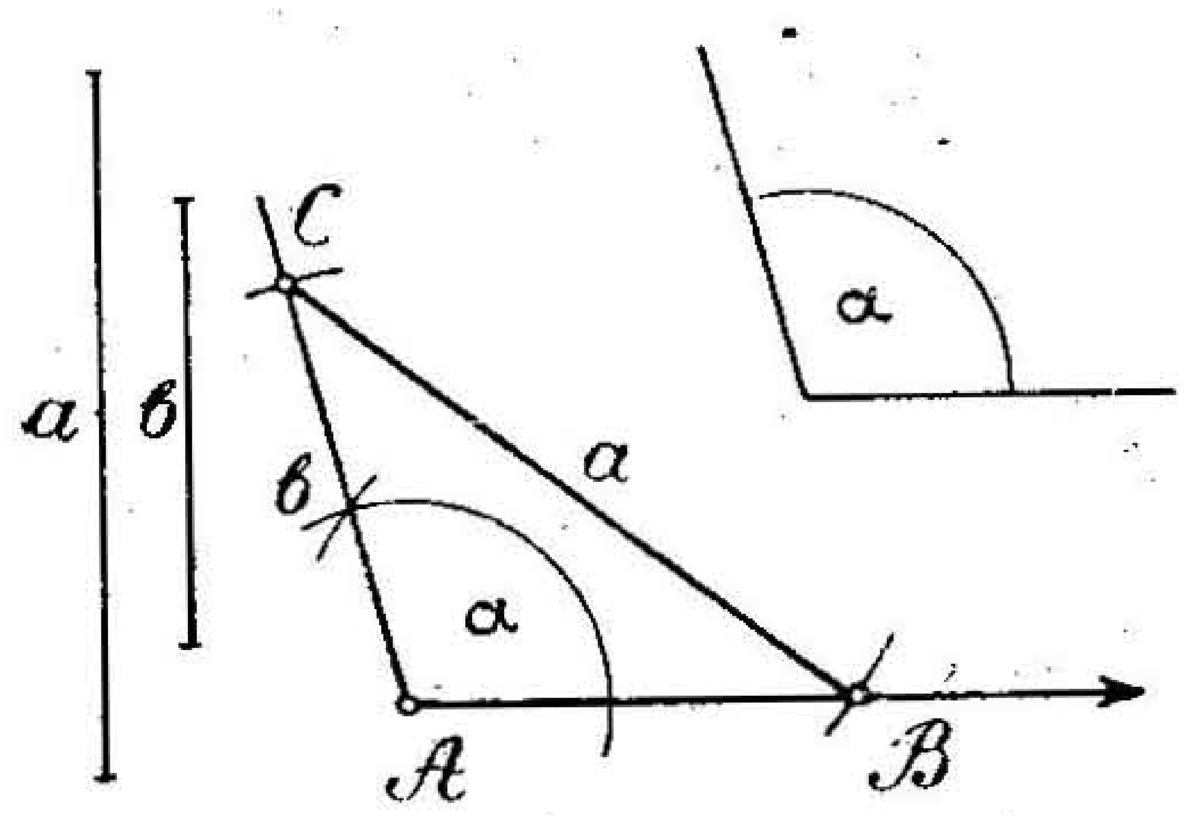
то се ти троуглови дају конструисати, према овоме задатку, само помоћу једне стране и једног угла.

2) *Конструисати троугао када су дате две стране и захваћени угао* $(b, c, \alpha)$. — Најпре на зрак $AX$ (сл. 137) преносимо страну $c$, затим код почетне тачке $A$ угао $\alpha$ и најзад, на други крак овог угла преносимо страну $b$. Спајањем тачака $C$ и $B$, добијамо тражени троугао $ABC$. На основу овог задатка, правоугли се троугао дâ конструисати када су дате само катете, пошто је прави угао између њих познат, а равнокрак троугао кад се зна крак и један угао.



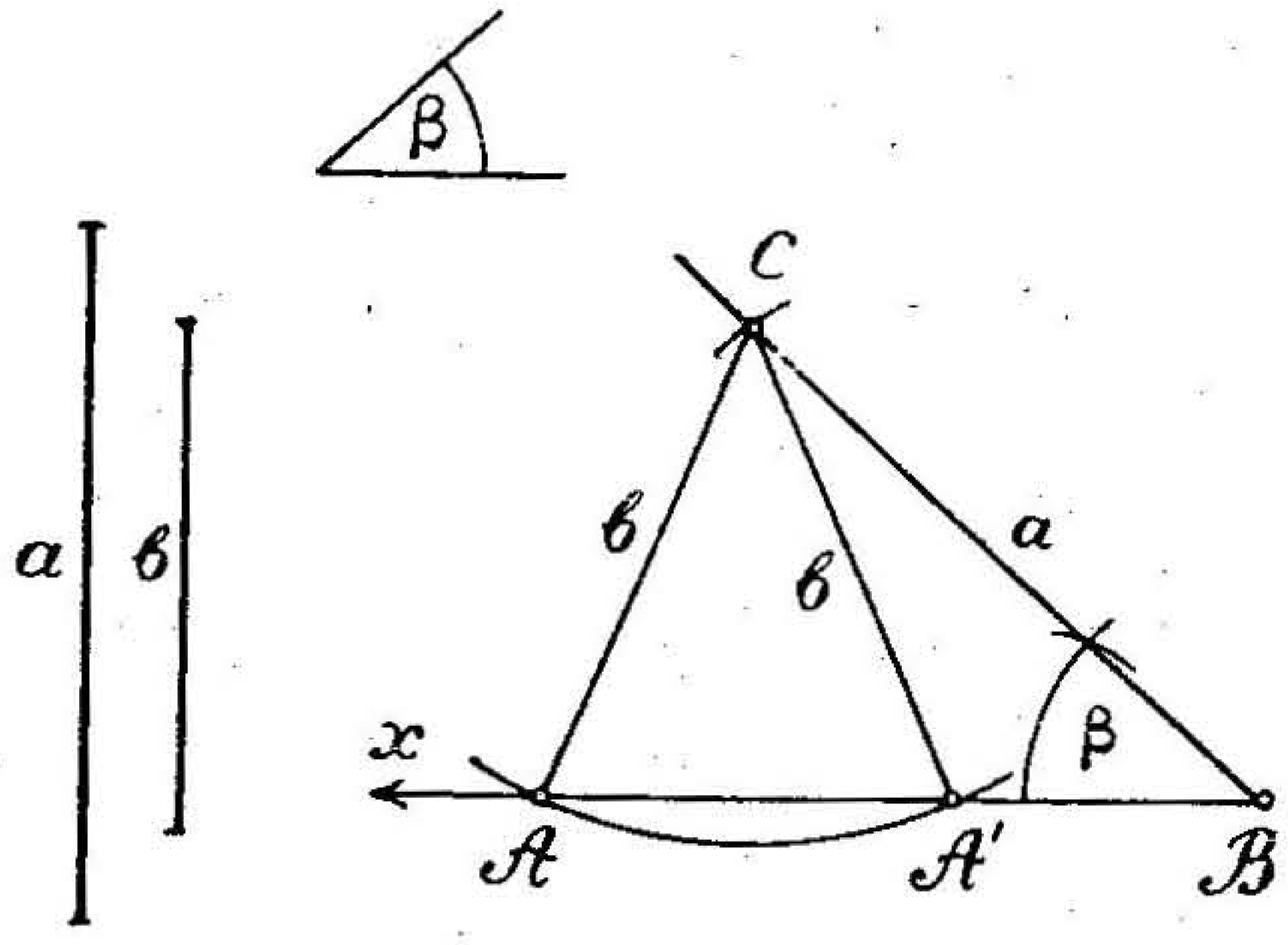
Сл. 137

3) *Конструисати троугао када су познате две стране и угао наспрам веће од тих страна* $(a, b, \alpha, a > b)$. — Треба најпре код почетне тачке зрака $AX$ (сл. 138) пренети угао $\alpha$, затим на други крак овога угла пренети *мању* страну $b$. Најзад из добивене тачке $C$, отвором шестара величине веће стране $a$, описати лук који сече зрак $AX$ у трећем темену $B$ траженог троугла $ABC$. Према овоме задатку, правоугли се троугао да конструисати када се зна хипотенуза и једна катета.



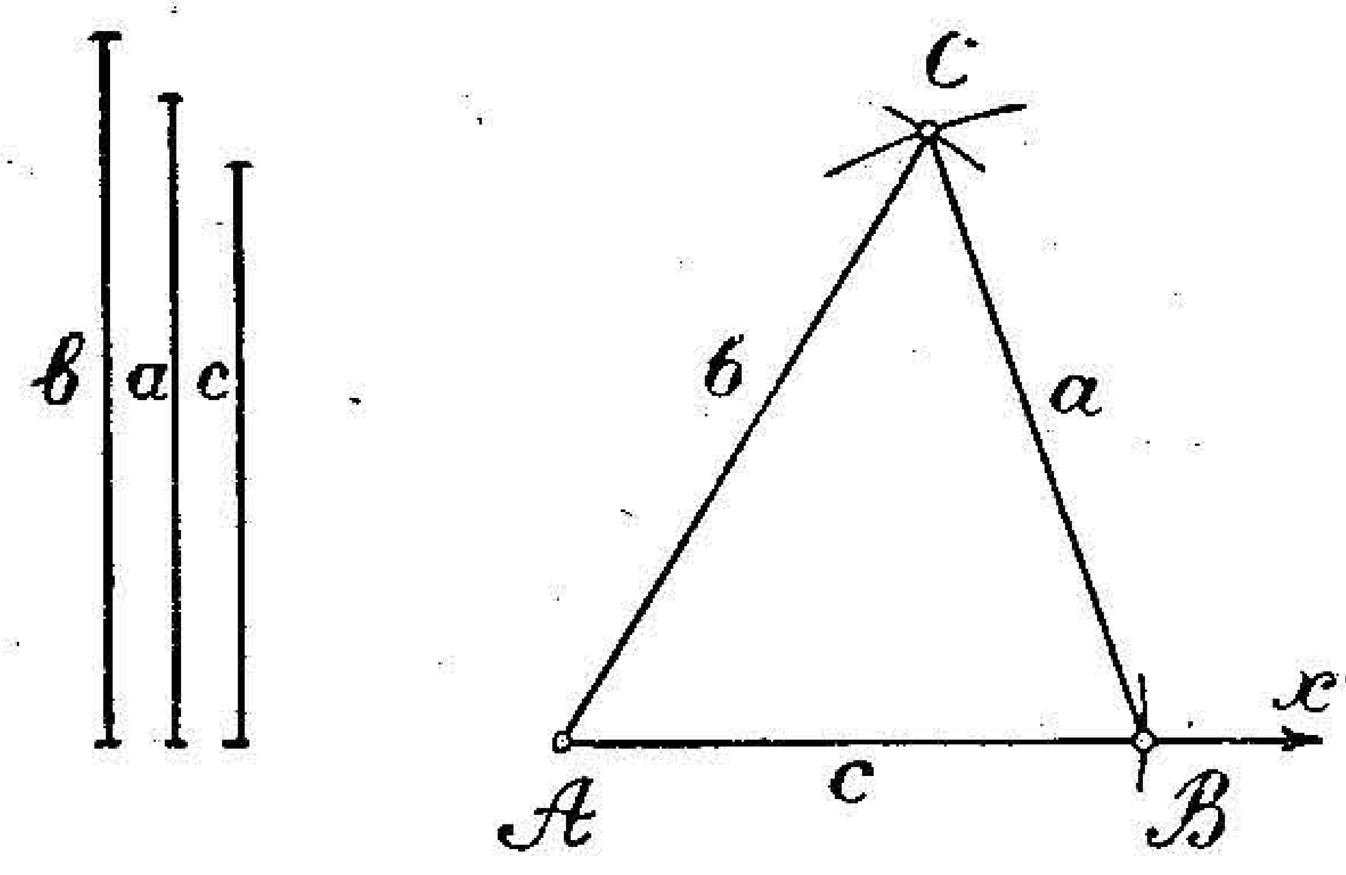
Сл. 138

*Напомена.* — Конструкција троуглова помоћу двеју страна и угла наспрам мање од тих страна, а која се врши обрнутим редом, није увек могућа, јер често отвором шестара величине стране $b$, из темена $C$ (сл. 139), не можемо сећи зрак $BX$, или, ако га сечемо, добијамо две пресечне тачке $A$ и $A'$, а тиме и два троугла: $ABC$ и $A'BC$, чиме задатак постаје неодређен. Врло је редак случај да се отвором $b$ из темена $C$, опише лук који додирује зрак $BX$. У овом случају добија се само једно и то добро решење (у овом случају добивени је троугао правоугли).



Сл. 139

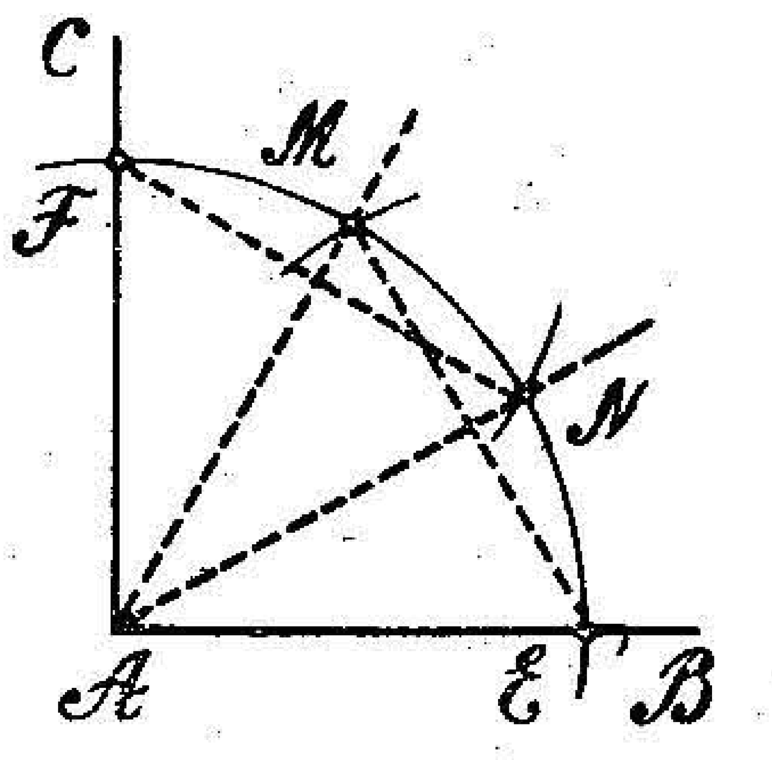
4) *Конструисати троугао, кад су дате све три стране.* — Треба на зрак $AX$ (сл. 140) пренети најпре страну $c$ ($AB = c$), чиме добијамо троуглова темена $A$ и $B$. Затим, отвором шестара стране $b$ описати из темена $A$ лук, а отвором шестара стране $a$ из темена $B$ описати други лук, који сече први у трећем темену траженог троугла $ABC$.




Сл. 140

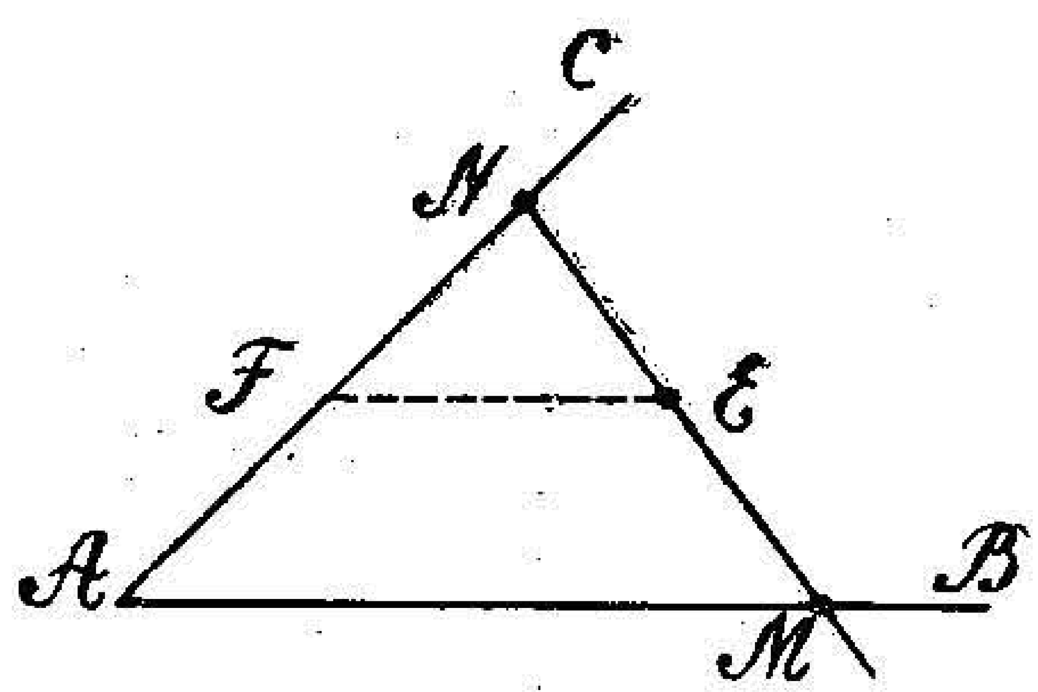
Према овој конструкцији, равностран се троугао да̂ конструисати кад се зна само једна страна.

5) *Прав угао $BAC$ (сл. 141) поделити на три једнака дела.* — Треба произвољним отвором шестара из темена $A$ описати лук $EF$, а затим истим отвором шестара, из пресечних тачака $E$ и $F$, пресећи исти лук у тачкама $M$ и $N$, које најзад спајамо са теменом $A$. Да праве $AN$ и $AM$ деле прави угао на три једнака дела, уверавамо се из троуглова $AEM$ и $AEN$, који су равнострани.




Сл. 141

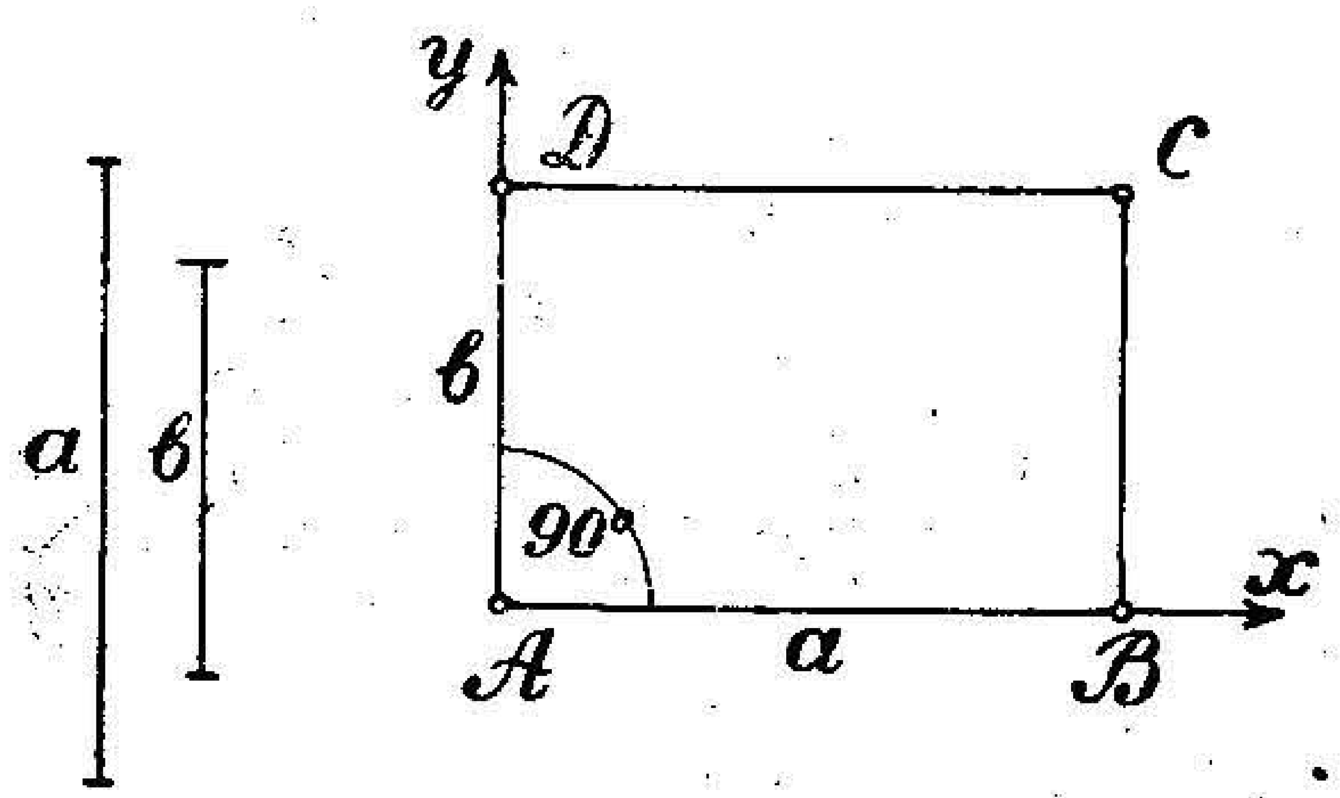
6) *Кроз тачку $E$ у углу $BAC$ (сл. 142) повући праву између кракова угла, која ће бити тачком $E$ преполовљена.* — Треба повући $EF \parallel AB$, а затим отсечак $AF$ пренети још једном на исти крак до $N$ ($AF = FN$) па спојити $N$ са $E$ и продужити до пресека $M$ с краком $AB$. Да је ова конструкција тачна, уверавамо се из теореме 41 (§ 33).




Сл. 142

## § 47. Конструктивни задаци из четвороуглова

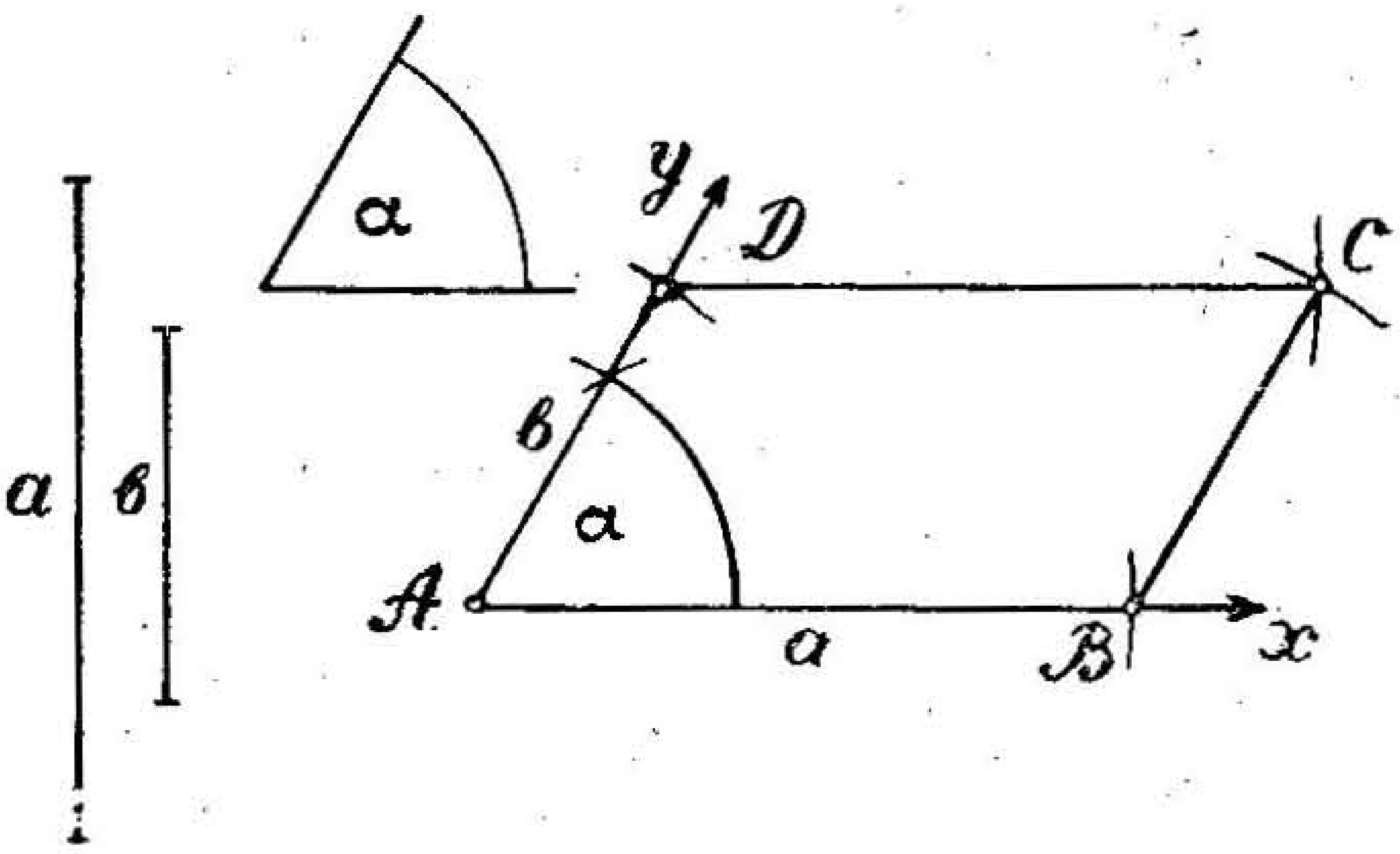
1) *Конструисати правоугаоник када су познате две суседне стране $a$ и $b$.* Треба најпре конструсати прав угао $XAY$ (сл. 143), а затим на крак $AX$ пренети страну $a = AB$, а на крак $AY$ страну $b = AD$. Најзад отвором шестара величине $b$ описати из $B$ лук, а отвором шестара величине $a$ описати из $D$ други лук који сече први. Пре-




Сл. 143

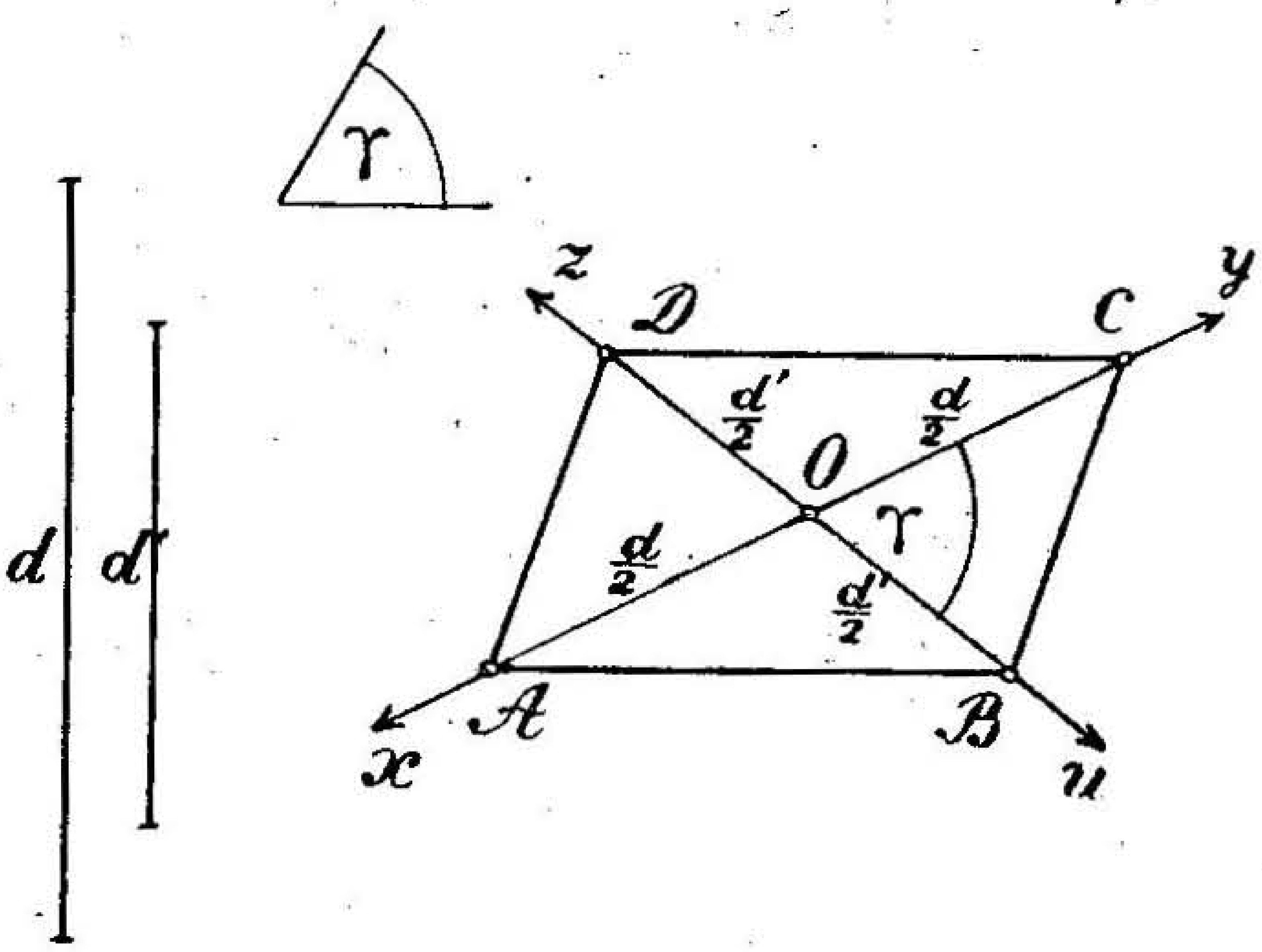
сех лукова $C$ је четврто теме траженог правоугаоника. Према овоме задатку, врши се и конструкција квадрата кад се зна његова страна, пошто су код њега све стране једнаке.

2) *Конструисати ромбоид, кад су познате две суседне стране $a$ и $b$ и захваћени угао $\alpha$.* — Треба најпре конструисати угао $XAY = \alpha$ (сл. 144), а затим поступамо као у претходном задатку. Према овоме задатку ромб се да конструисати кад се зна једна страна и један угао, пошто су код њега све стране једнаке.



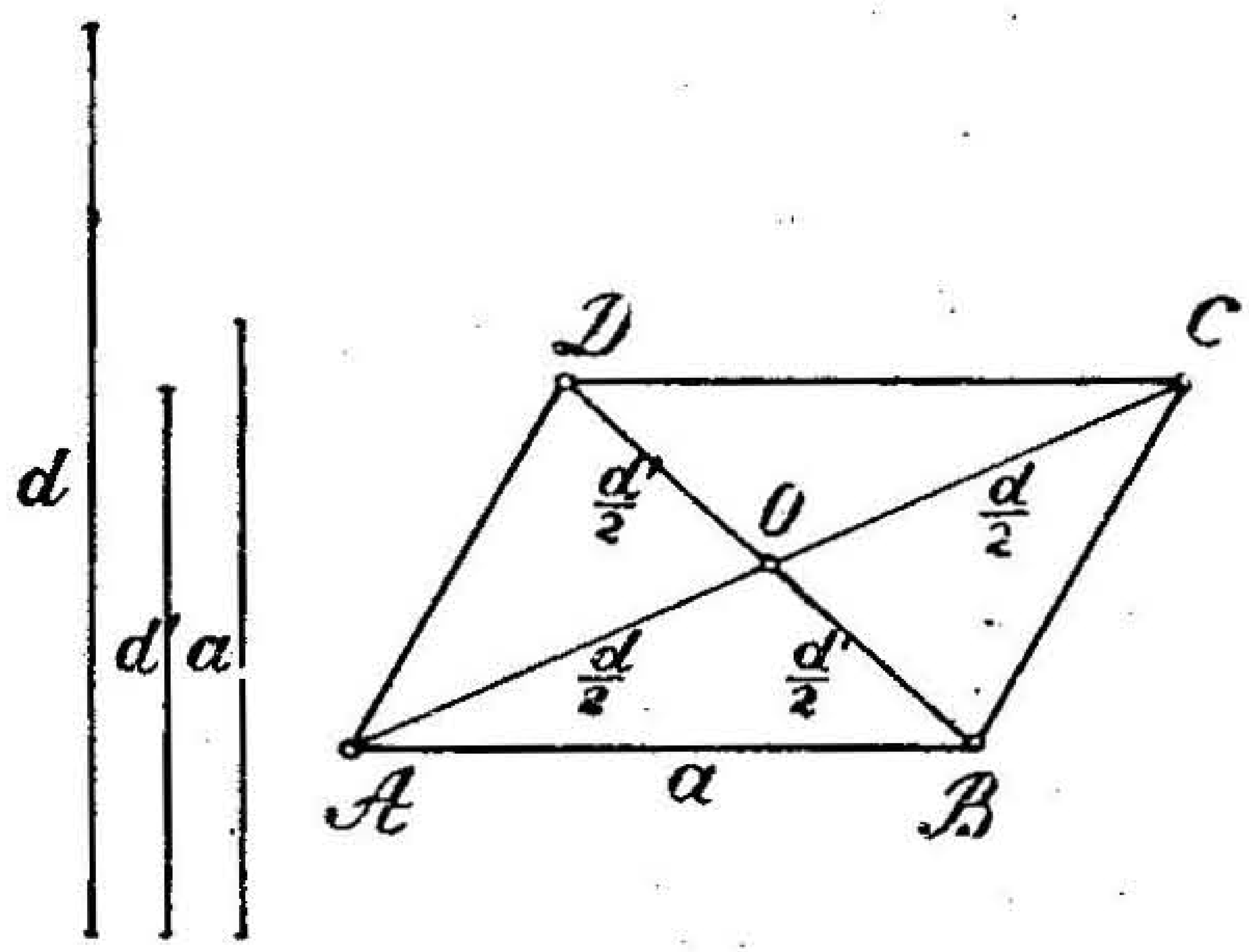

Сл. 144

3) *Конструисати ромбоид кад су познате дијагонале $d$ и $d'$ и њихов захваћени угао $\gamma$.* — Треба најпре конструисати угао $\gamma = YOU$ (сл. 145), а затим на краке овога и унакрсног угла $XOZ$ пренети половине датих дијагонала (теорема 49, § 35). Према овоме задатку правоугаоник се дâ конструисати кад се зна само једна дијагонала $d$ и угао између дијагонала $\gamma$; ромб се дâ конструисати кад су познате обе дијагонале, пошто је код њега $\sphericalangle \gamma = 90^0$; а квадрат се дâ конструисати кад се зна дијагонала $d$.




Сл. 145

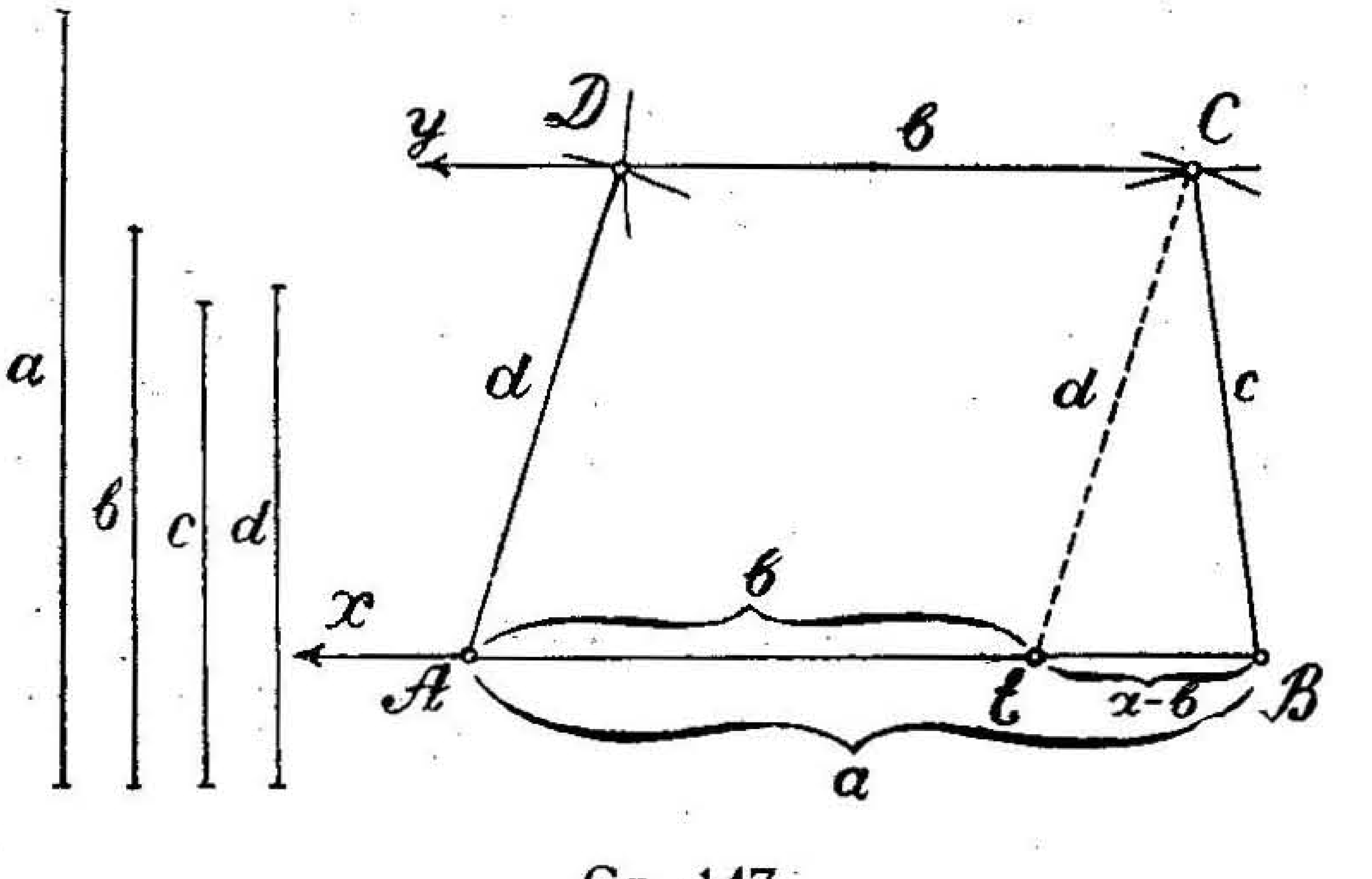
4) *Конструисати ромбоид, кад се зна једна његова страна и обе дијагонале.* — Пошто дијагонале деле ромбоид на четири троугла од којих су два и два подударна, то се његова конструкција помоћу датих елемената дâ извршити кад се најпре конструише троугао $ABO$ (сл. 146), узимајући за основицу страну $a$, а за друге две стране половине датих дијагонала, а затим продужавамо дијагонале преко темена $O$ за њихове половине, чиме добијамо и остала темена траженог ромбоида. Према овоме задатку, право-




Сл. 146

угаоник се дâ конструисати, кад се зна једна страна и једна дијагонала. Његова конструкција биће бржа ако најпре конструишемо троугао $ABD$ (сл. 146), узимајући да је угао код темена $A$ прав.

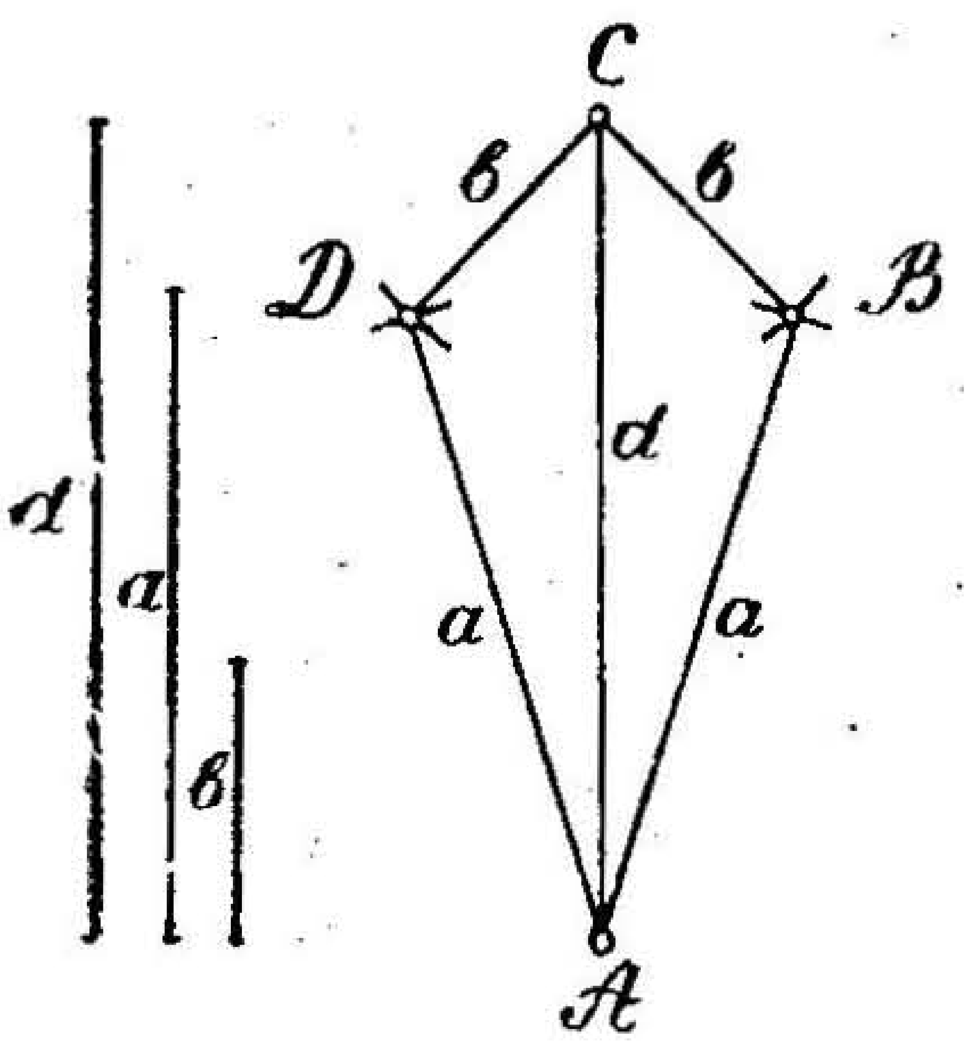
5) *Конструисати трапез када су му познате паралелне стране $a$ и $b$ и непаралелне стране $c$ и $d$.* — Треба најпре конструисати троугао $BEC$ (сл. 147), чије су стране: $a - b$, $c$ и $d$ познате, а затим кроз теме $C$ повлачимо $CY \parallel BX$ и на ту праву преносимо $b$ $(CD = b)$. Најзад, на зрак $BX$ преносимо $a = BA$ чиме добијамо и четврто теме $A$ траженог трапеза.



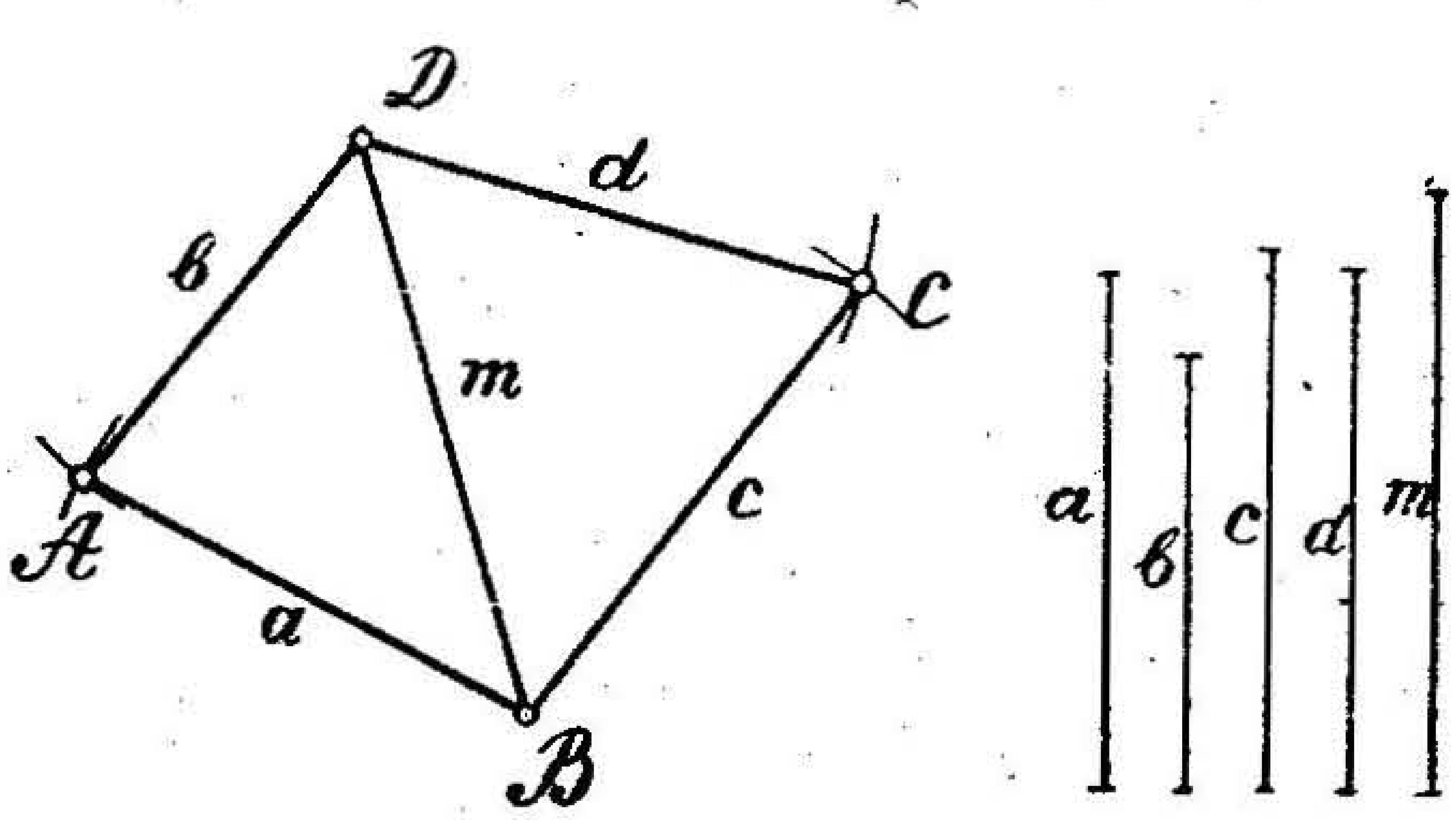
Сл. 147

За конструкцију равнокраког трапеза, према овоме задатку, треба да су познате обе паралелне стране и крак.

6) *Конструисати делтоид кад су познате две његове неједнаке стране и дијагонала.* — Треба помоћу страна $a$ и $b$ и дијагонале $d$ конструисати троуглове $ABC$ и $ADC$ (сл. 148).



Сл. 148

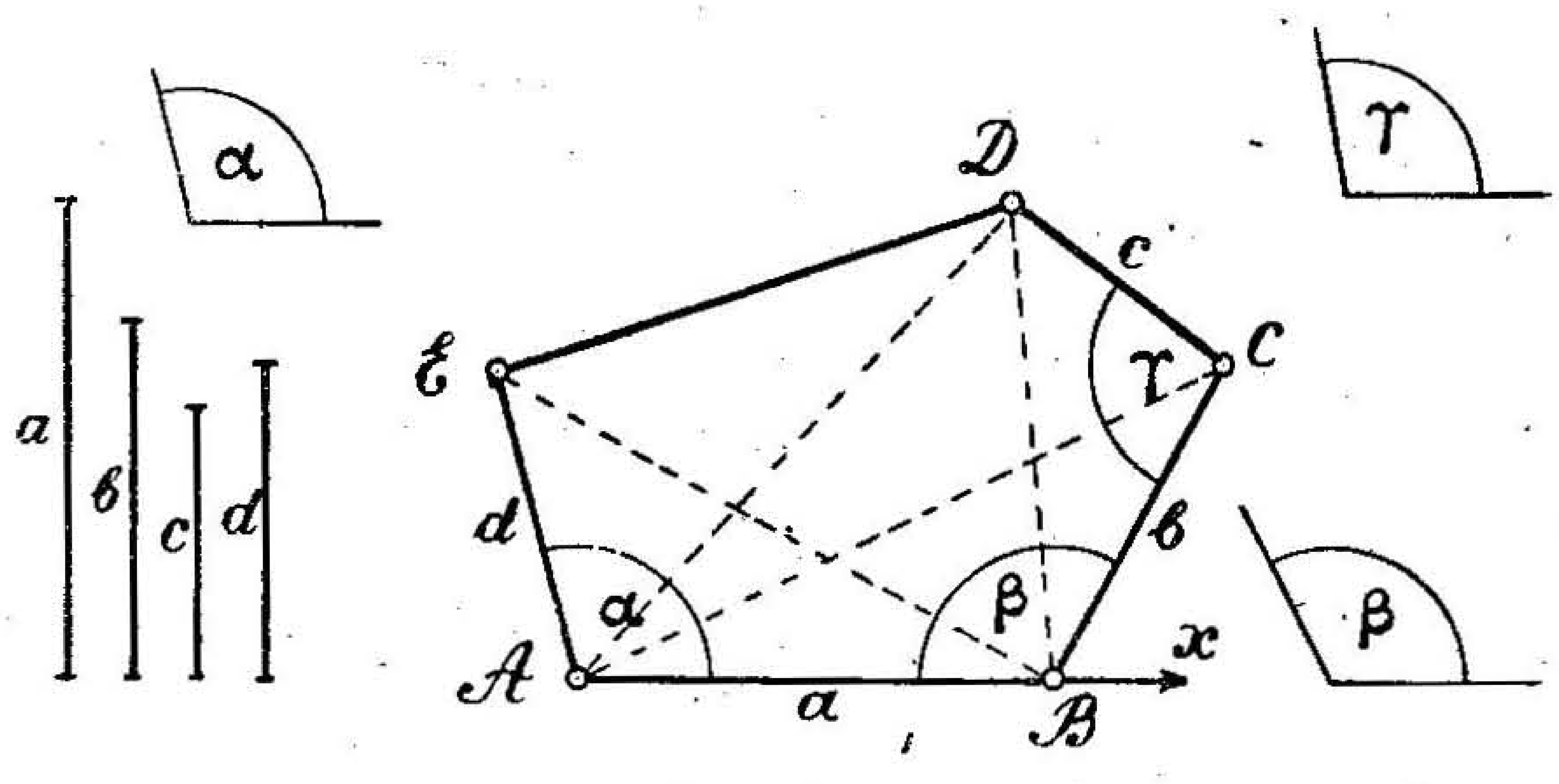


Сл. 149

7) *Конструисати трапезоид кад су познате све четири стране и једна дијагонала.* — Треба најпре помоћу две стране ($a$ и $b$) и дијагонале $(m)$ конструисати $\triangle$ $ABD$ (сл. 149), а затим помоћу других двеју страна ($c$ и $d$) конструисати троугао $BDC$.

## § 48. — Конструктивни задаци из полигона

1) *Конструисати петоугао ако су познате четири његове стране: $a$, $b$, $c$ и $d$ и три угла на тим странама: $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.* — Треба најпре



Сл. 150

на зрак $AX$ (сл. 150) пренети $AB = a$, а затим код темена $A$ пренети $\sphericalangle\ \alpha$, а код темена $B$ угао $\beta$. На други крак угла $\alpha$ пренети страну $AE = d$, а на други крак угла $\beta$ пренети $BC = b$. Код темена $C$ преносимо угао $\gamma$, а затим на други крак овога угла преносимо $CD = c$. Најзад спајамо темена $D$ и $E$.

*Напомена.* — За конструкцију једног ма ког неправилног $n$-тоугла потребно је знати, према теореми 37, $2n - 3$ елемента, од којих треба да буду најмање $n - 2$ стране. Међутим, број страна може бити замењен једним делом дијагонала $n$-тоугла. Тако, петоугао на сл. 150 да̂ се конструисати и помоћу стране $a$, углова $\alpha$ и $\beta$ и дијагонала повучених из темена $A$ и $B$. Најпре на зрак $AX$ преносимо страну $a = AB$, затим код темена $A$ и $B$ преносимо углове $\alpha$ и $\beta$ и друге краке ових углова сечемо познатим дијагоналама $AC$ и $BE$, чиме добијамо још два темена $C$ и $E$. Пето теме $D$ добијамо конструкцијом троугла $ABD$ помоћу познатих дијагонала $AD$ и $BD$.

2) *Конструисати правилан шестоугао.* — Треба произвољним отвором шестара најпре конструисати круг, а затим на његову периферију пренети полупречник као тетиву 6 пута, колико се тачно садржава.

Ако се захтева да над датом дужи конструишемо правилан шестоугао, треба ту дуж узети за полупречник круга.

Правилан 12-тоугао, 24-тоугао итд., даје се конструисати кад се кружна периферија подели на 12, 24,... једнаких делова, па се деоне тачке споје.

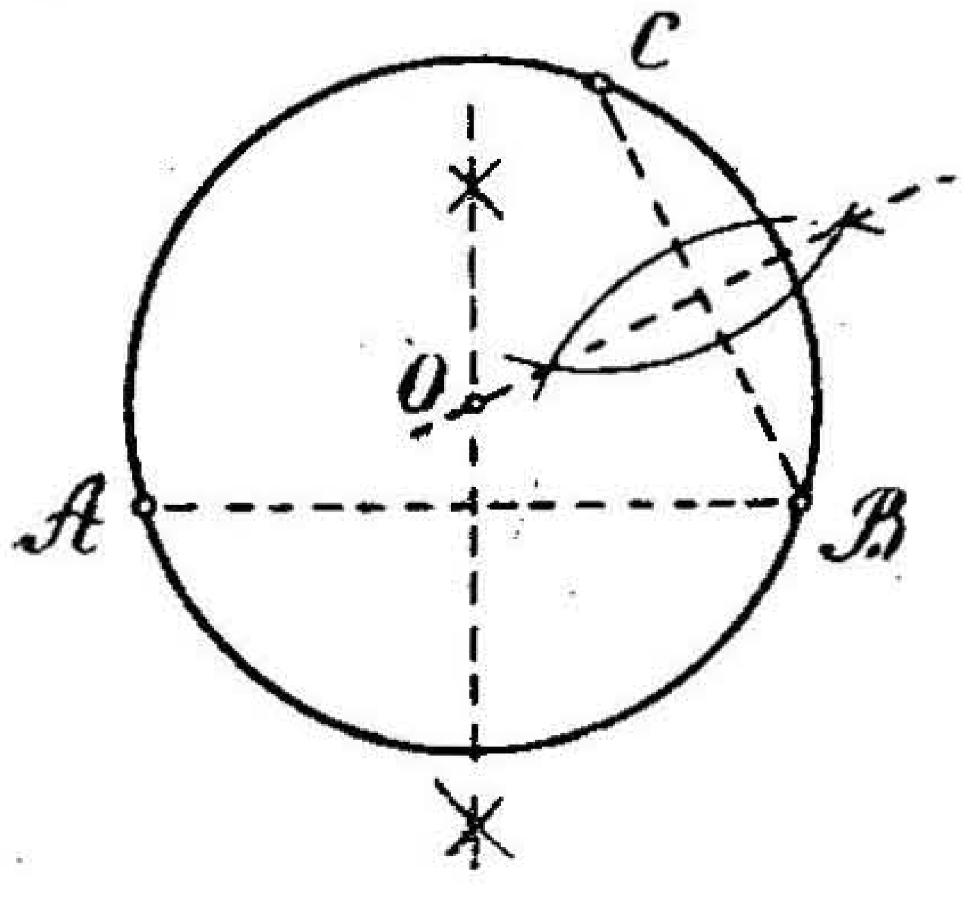
3) *Конструисати правилан осмоугао.* — Треба произвољним отвором шестара конструисати круг, а затим његову периферију најпре делимо помоћу два нормална пречника на 4 једнака дела, па се сваки квадрант дели на по два једнака дела. Најзад деоне тачке спајамо.

Правилан многоугао од 16, 32 итд. страна да̂ се конструисати кад се кружна периферија подели на 16, 32.... једнаких делова, па се деоне тачке споје.

*Напомена.* — Како се да̂ конструисати правилан полигон од 5, 10, 15, 20, 30, 40 итд. страна, показаће се у V одељку ове Планиметрије.

## § 49. — Конструктивни задаци из круга.

1) *Описати круг кроз три тачке које се не налазе на једној правој линији.* — Да бисмо описали круг који пролази кроз тачке: $A$, $B$ и $C$ (сл. 151), треба најпре да спојимо те тачке, а затим да конструи-

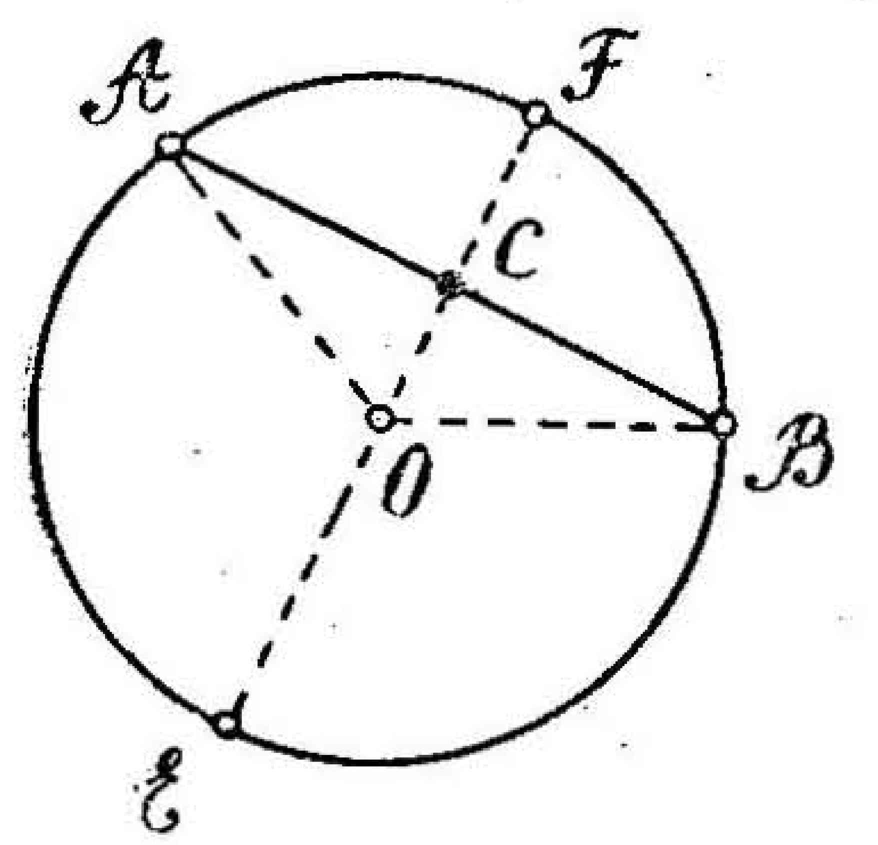



Сл. 151

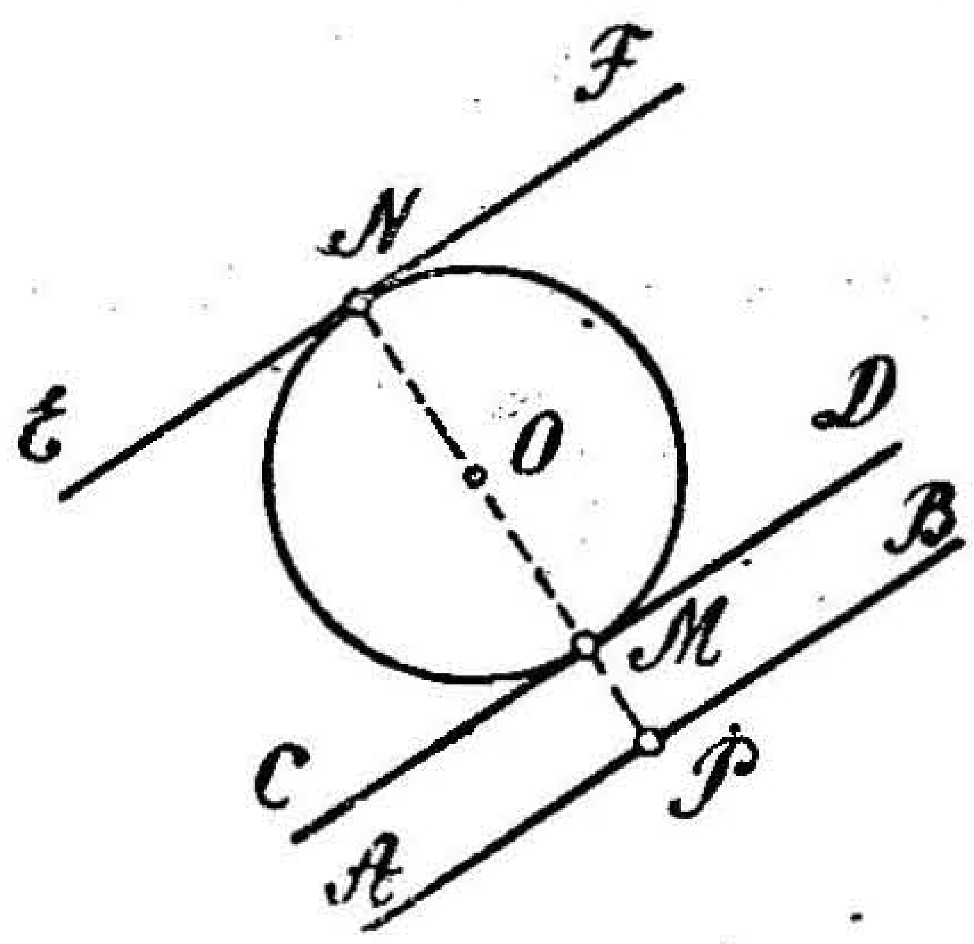
шемо симетрале дужи $AB$ и $BC$, које ће бити тетиве круга. Пресек симетрала̂ $O$ биће центар, а отстојање од тога пресека до ма које дате тачке је полупречник траженог круга.

2) *Наћи средиште даног круга или лука.* — Треба узети на периферији круга (или лука) три тачке, које ваља спојити и конструисати симетрале добивених тетива. Пресек ових симетрала биће тражени центар (сл. 151).

3) *Кроз дату тачку у кругу повући тетиву која ће том тачком бити преполовљена.* — Да бисмо кроз дату тачку $C$ (сл. 152) повукли тражену тетиву $AB$, треба најпре повући пречник $EF$ кроз $C$, а затим




Сл. 152

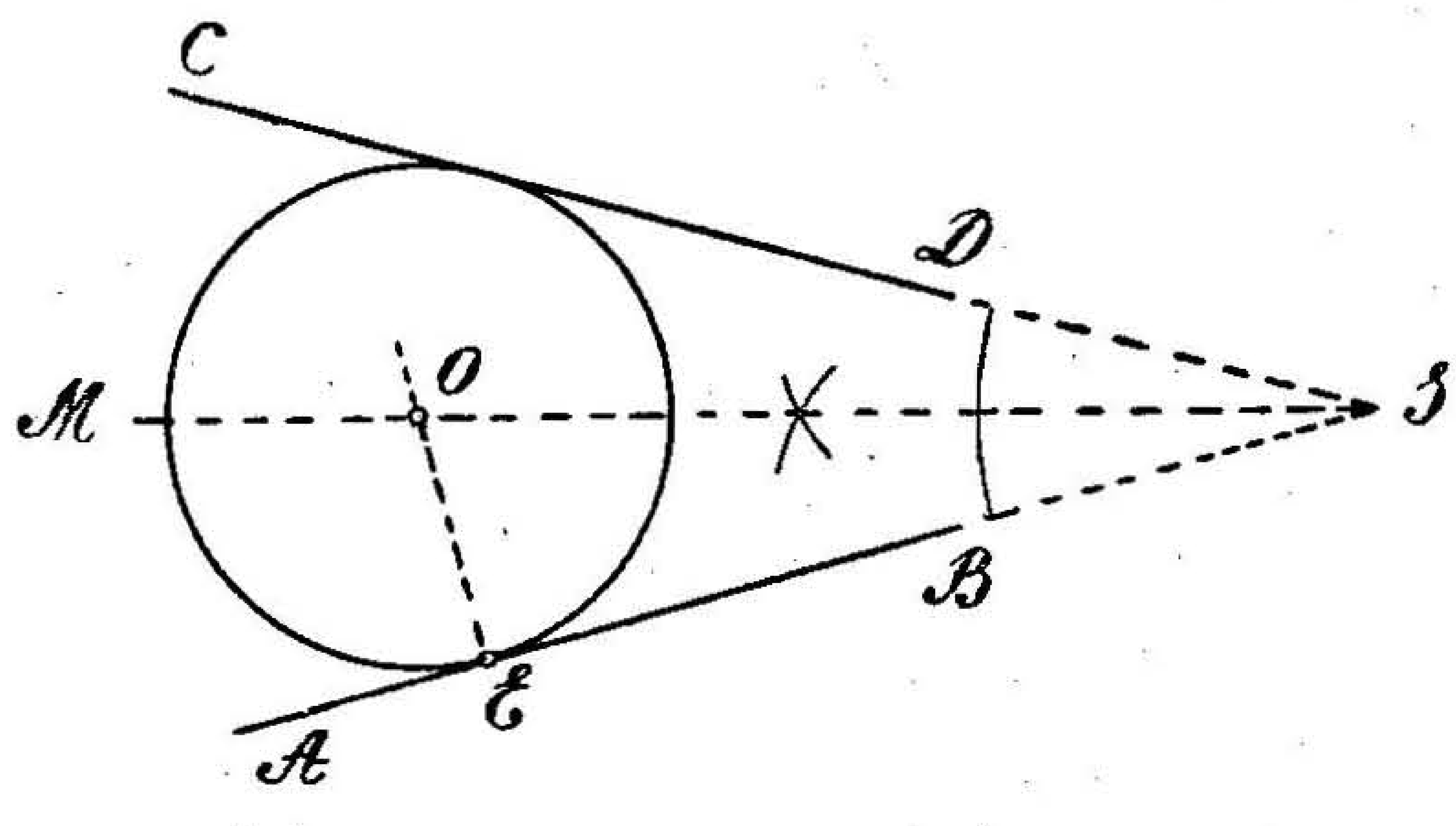



Сл. 153

подићи у $C$ праву $AB \perp EF$. Да је тетива $AB$ преполовљена тачком $C$, увиђамо из подударности троуглова $AOC$ и $BOC$.

4) *На дани круг повући дирку паралелну даној правој.* — Да бисмо кругу $O$ (сл. 153) повукли тангенте паралелне с датом правом $AB$, треба најпре повући кроз средиште управну $OP$ на дану праву, па кроз пресеке ове управне и периферије круга ($M$ и $N$) повући $CD$ и $EF$ паралелно с правом $AB$.

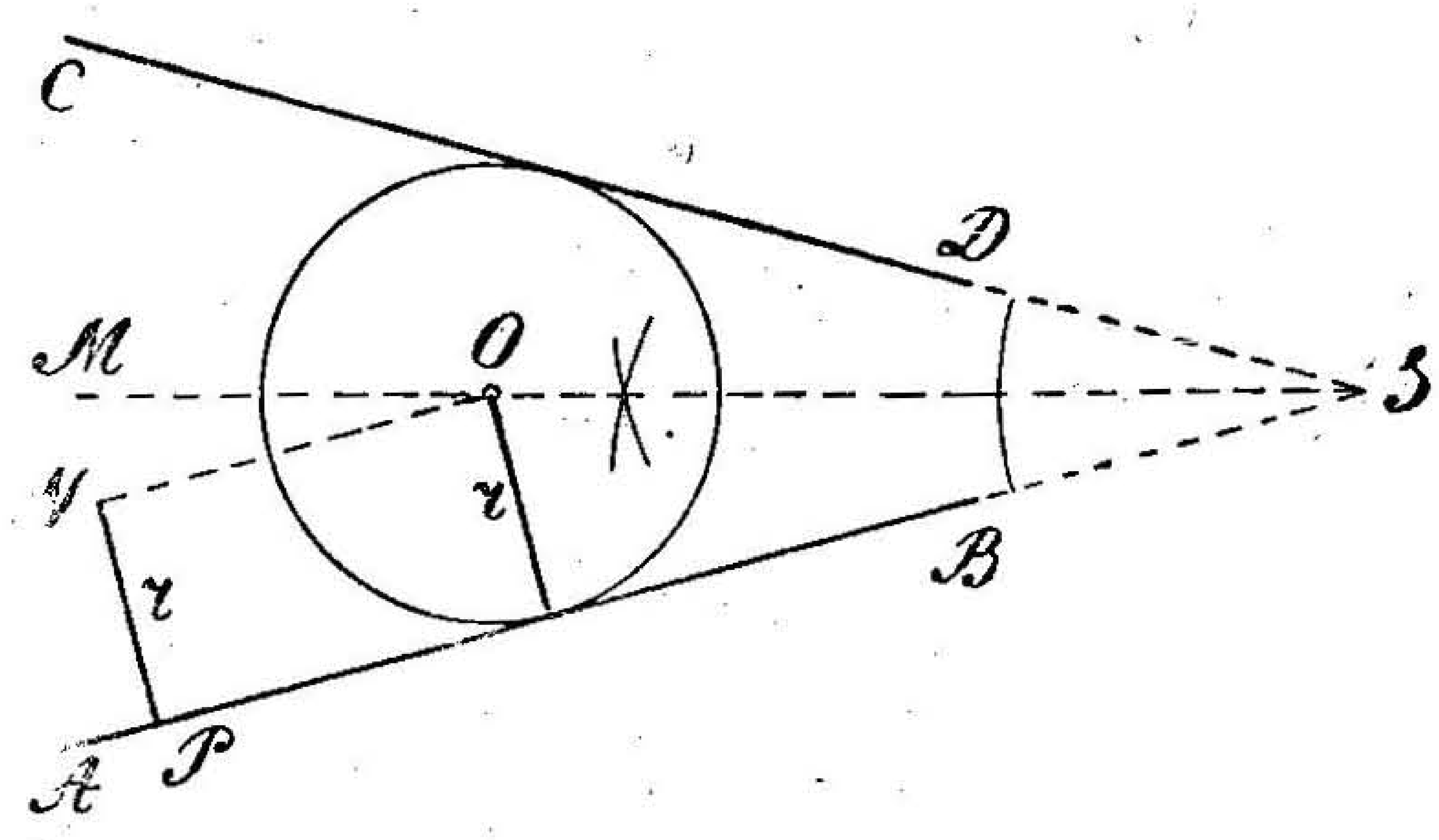
5) *Описати круг који додирује две дане праве, и то једну од њих у даној тачци.* — Да бисмо конструисали круг који ће додиривати праве $AB$ и $CD$ (сл. 154), и то прву у тачци $E$, треба најпре да конструишемо симетралу $SM$ угла $CSA$, а затим подићи у $E$ праву $EO \perp AB$. Пресек $O$ ове управне са симетралом угла биће центар тра-




Сл. 154

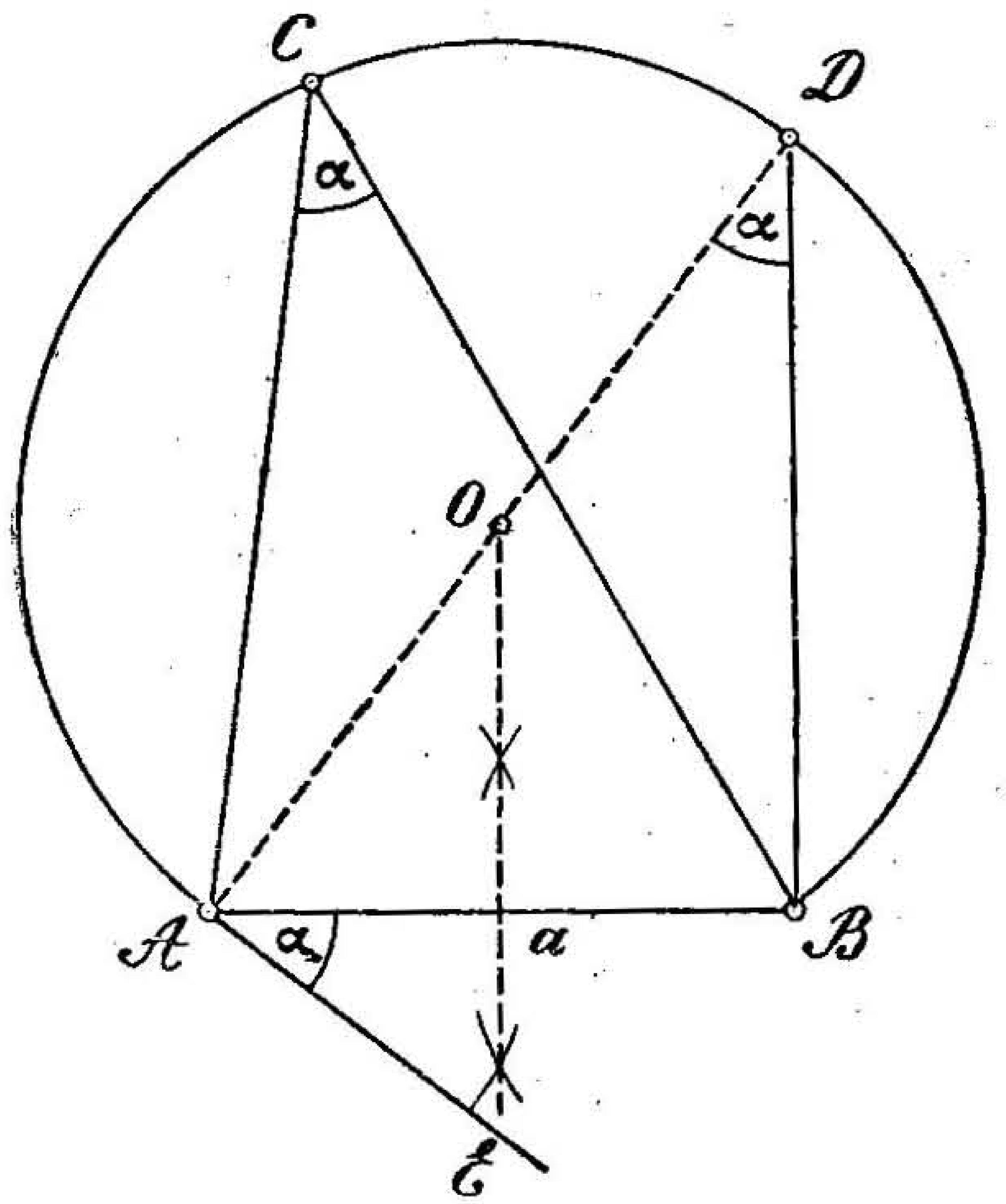
женог круга, а његов полупречник $OE$. Ако су дате праве паралелне, онда у тачци $E$ подижемо нормалу на $AB$ до пресека с правом $CD$, па ће центар круга бити средина подигнуте нормале.

6) *Даним полупречником r описати круг који додирује две непаралелне праве AB и CD* (сл. 155). — Треба, као у претходном задатку, конструисати најпре симетралу угла $ASC$, а затим у произвољно узетој тачци $P$ на $AB$ (или $CD$) подићи нормалу $PN$ на $AB$ и на ту нормалу пренети дани полупречник ($r = PN$). Кроз тачку $N$ повлачимо паралелну са $AB$. Пресек $O$ ове паралелне и симетрале угла биће центар траженог круга.




Сл. 155

7) *Над даном дужи a описати такав кружни лук који ће пролазити кроз темена свију перифериских углова величине α над том дужи, која ће бити њихова заједничка тетива.* — Конструкција овога задатка оснива се на 4 последици теореме 66. Треба код крајње тачке $A$ дужи $AB = a$ (сл. 156) пренети с доње стране угао $\alpha$, а затим подићи $AD \perp AE$. Најзад треба конструисати симетралу дужи $AB$. Пресек ове симетрале и нормале $AD$ је центар $O$ траженог лука, чији је полупречник $AO$ или $OB$.




Сл. 156

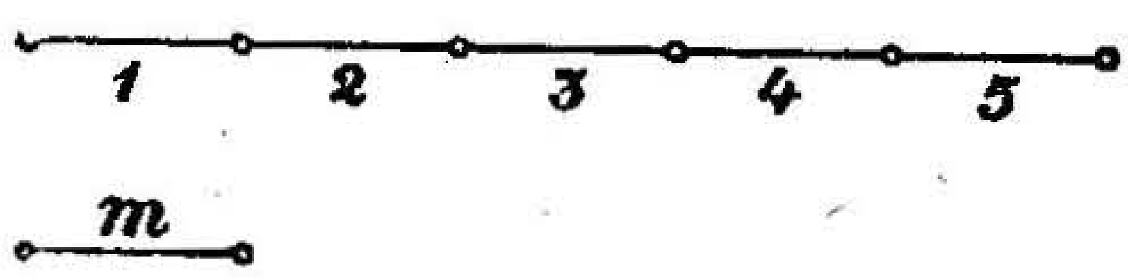
# ТРЕЋИ ОДЕЉАК

## ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ ДУЖИ, ГОНИОМЕТРИСКЕ ФУНКЦИЈЕ И ЊИХОВА ПРИМЕНА НА РЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА, СЛИЧНОСТ СЛИКА И ЊИХОВА КОНСТРУКЦИЈА

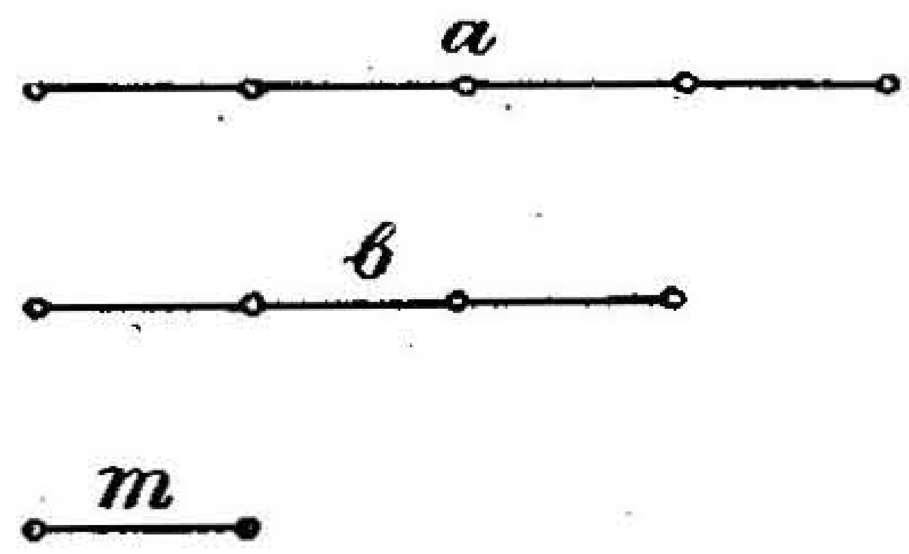
## I. Пропорционалност дужи

**§ 50. — Размера двеју дужи.** — Под мером једне дужи разумемо такву другу дуж која се потпуно садржава у првој два или више пута без остатка. Тако, дуж $m$ (сл. 157) је мера дужи $a$, јер се $m$ садржава у $a$ 5 пута.

Под *заједничком мером* двеју дужи разумемо такву једну дуж која је мера и за прву и за другу дуж. Тако, дуж $m$




Сл. 157




Сл. 158

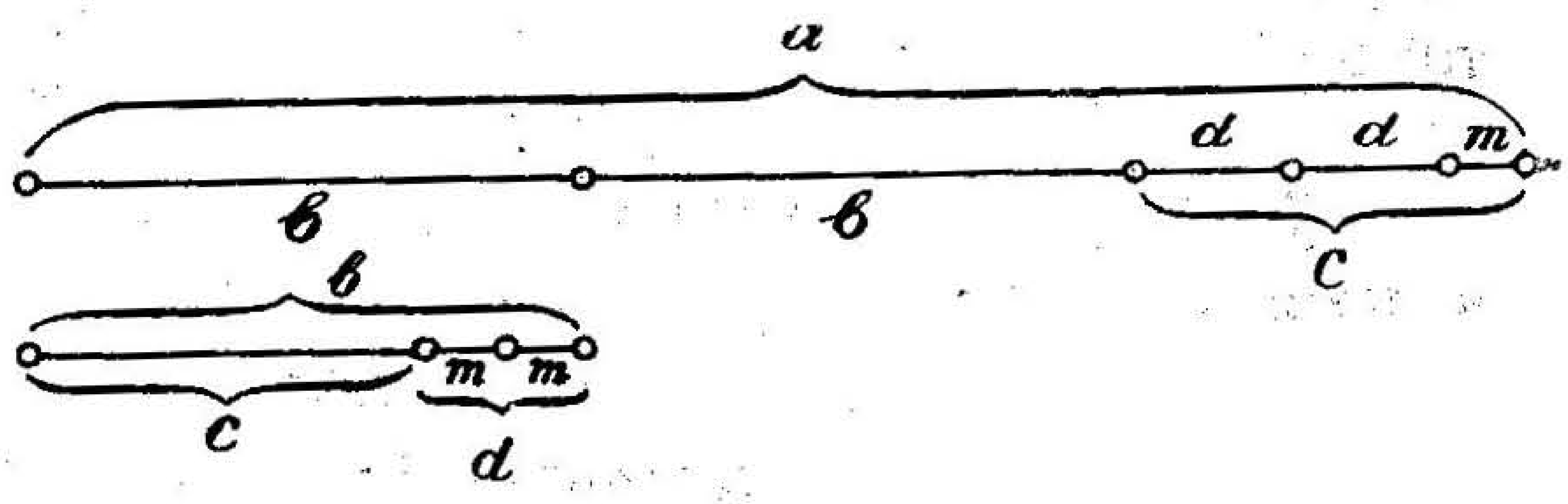
(сл. 158) је заједничка мера за дужи $a$ и $b$, јер се потпуно садржава у $a$ 4 а у $b$ 3 пута.

Под *мерним бројевима* двеју дужи разумемо оне резултате упоређивања који нам показују колико се пута заједничка мера тих дужи садржава у једној а колико у другој дужи. Тако, на сл. 158, мерни број дужи $a$ је 4 а дужи $b$ је 3.

*Под размером двеју дужи разумемо размеру њихових мерних бројева.* Тако, размера дужи $a$ и $b$ на сл. 158 је $4 : 3$. *Да бисмо нашли, дакле, размеру двеју дужи, треба пре свега да нађемо њихову заједничку меру, затим да испитамо колико се пута нађена заједничка мера садржава и у једној и у другој дужи, тј. да нађемо њихове мерне бројеве и, најзад, размера нађених мерних бројева је тражена размера датих дужи.*

*Напомена.* — Све што је казано о мери, заједничкој мери и размери двеју дужи у овоме параграфу, односи се и ма на које две друге количине исте врсте — на углове, лукове, површине и запремине — само што је код тих количина заједничка мера: угао, односно лук, површина, запремина.

**§ 51. — Изналажење заједничке мере двеју дужи.** — При изналажењу заједничке мере двеју дужи, преносимо мању дуж на већу онолико пута колико је могуће. Том приликом наилазимо на један од следећа три случаја: 1) Дешава се да се мања дуж потпуно садржава у већој дужи два или више пута и не преостаје никакав остатак. У овом случају мања је дуж тражена заједничка мера, а вредност размере њихових мерних бројева је цео број, узимајући размеру веће према мањој дужи. 2) Ако се мања дуж не садржава потпуно у већој дужи, већ преостаје какав остатак, онда се овај остатак преноси на мању дуж онолико пута колико је могуће. Ако се остатак садржава потпуно у мањој дужи, онда је он тражена заједничка мера. Ако не наступи тај случај, већ преостаје нов остатак, онда се нови остатак преноси на претходни остатак и све се тако поступа док се не добије остатак који се потпуно садржава у претходном. Тај остатак је тражена не само заједничка, већ и највећа заједничка мера за те дужи. Тако, на сл. 159 преношењем дужи $b$ на дуж $a$, видимо да се $b$ садржава у $a$ 2 пута и преостаје остатак $c$. Овај се остатак преноси на дуж $b$, у којој се садржава једанпут и преостаје остатак $d$. Нови остатак $d$ садржава се у $c$ два пута и преостаје остатак $m$, који се потпуно садржава у претходном остатку $d$ два пута. Према томе, остатак $m$ је тражена заједничка мера за дужи $a$ и $b$. У овом случају вредност размере њихових мерних бројева је или цео или разломљен број, што зависи једино од тога да ли су бројеви потпуно дељиви или не.



Сл. 159

3) Најзад, радећи по горњем упутству за изналажење заједничке мере двеју дужи, наилазимо на случај да добијамо све мање и мање остатке, али никако на остатак који се потпуно садржава у претходном. На такав случај наилазимо на пример када тражимо заједничку меру: а) за дијагоналу и страну једнога квадрата; b) за крак и основицу онога равнокраког троугла чији је угао на врху 36° итд. У овоме случају дужи немају заједничке мере и зову се *несамерљиве*. Напротив, дужи које имају заједничку меру, јесу *самерљиве*. Међу-

тим у строгом математичком смислу имамо несамерљивих дужи, а у пракси нисмо у могућности да се уверимо о њиховом постојању, јер радећи по горњем упутству наилазимо ипак на такав један врло мали остатак који се садржава у претходном остатку два или више пута. Може бити да се том приликом добива нов врло мали остатак, али услед *нетачности* инструмената с којима радимо, нисмо у стању да га запазимо. Стога у пракси за несамерљиве дужи одређује се само *приближно* заједничка мера. Вредност размере несамерљивих дужи није ни цео ни разломљен број, већ је *ирационалан* број, али се она ипак претставља децималним бројем са неколико децимала, колико ми хоћемо. Што је већи број децимала, тим је вредност размере несамерљивих дужи тачнија.

**§ 52. — Изналажење мерних бројева двеју дужи.** — Најпре налазимо колико се пута нађена заједничка мера садржава у претходном остатку, а затим поступно у сваком већем ранијем остатку, док не добијемо резултате који нам показују колико се пута заједничка мера садржава најпре у мањој, а затим у већој дужи.

Тако, код дужи $a$ и $b$ на сл. 159 имамо:

$d = 2m;$ $\quad b = c + d = 5m + 2m = 7m;$

$c = 2d + m = 4m + m = 5m;$ $\quad a = 2b + c = 14m + 5m = 19m.$

Према овоме, мерни број дужи $a$ је 19 а дужи $b$ 7.

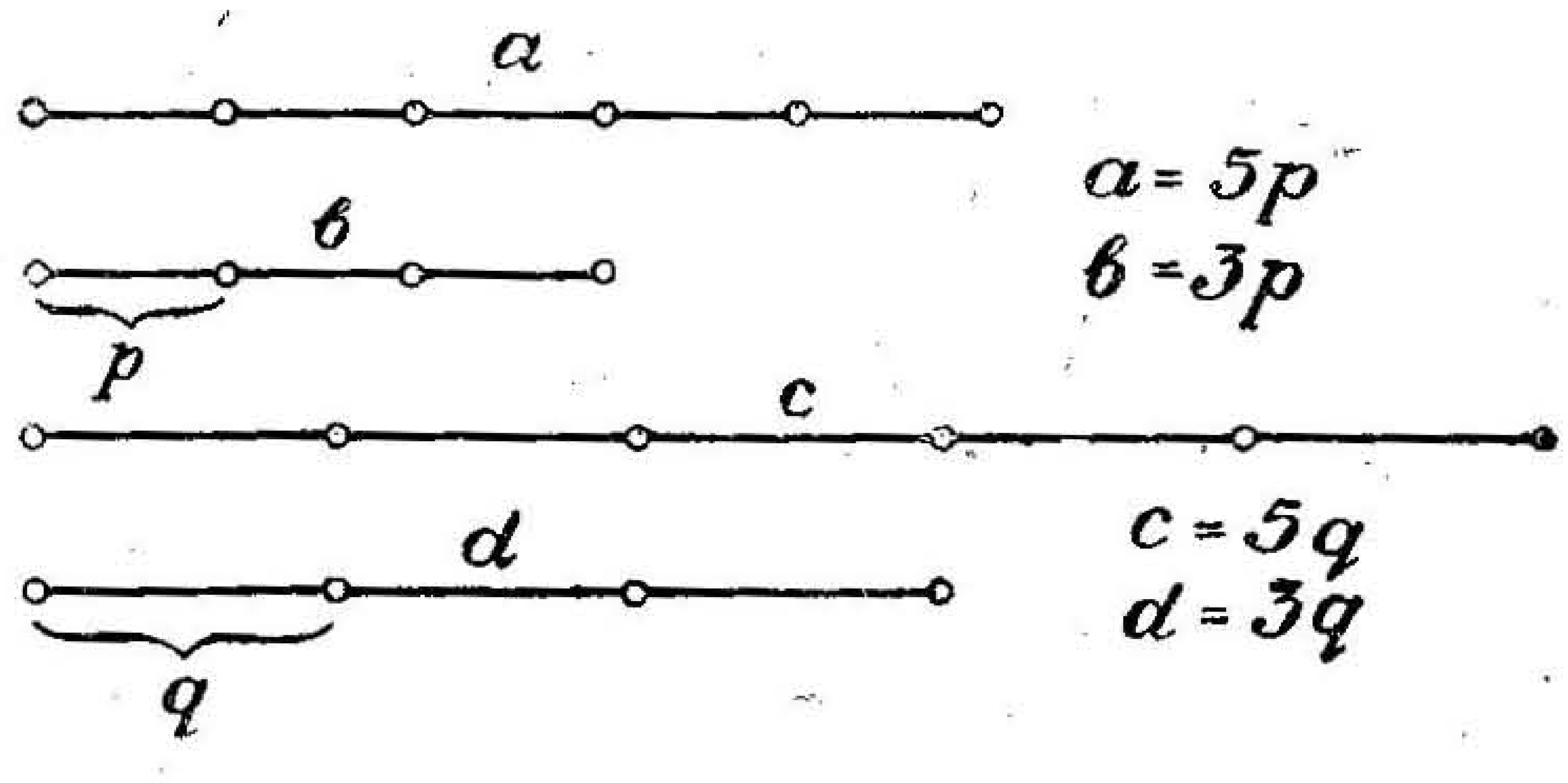
Размера дужи $a$ и $b$ биће 19 : 7.

Код несамерљивих дужи мерне бројеве налазимо по истом поступку, пошто им претходно нађемо приближну заједничку меру.

*Напомена.* — Ако су величине дужи (стране код слика) дате у метрима, десиметрима, сантиметрима, милиметрима, онда је $m$, $dm$, $cm$, $mm$ њихова заједничка мера, а апсолутне вредности величинâ јесу мерни бројеви тих дужи. Тако, размера двеју дужи, чије су величине 13 $cm$ и 5 $cm$, јесте 13 : 5.

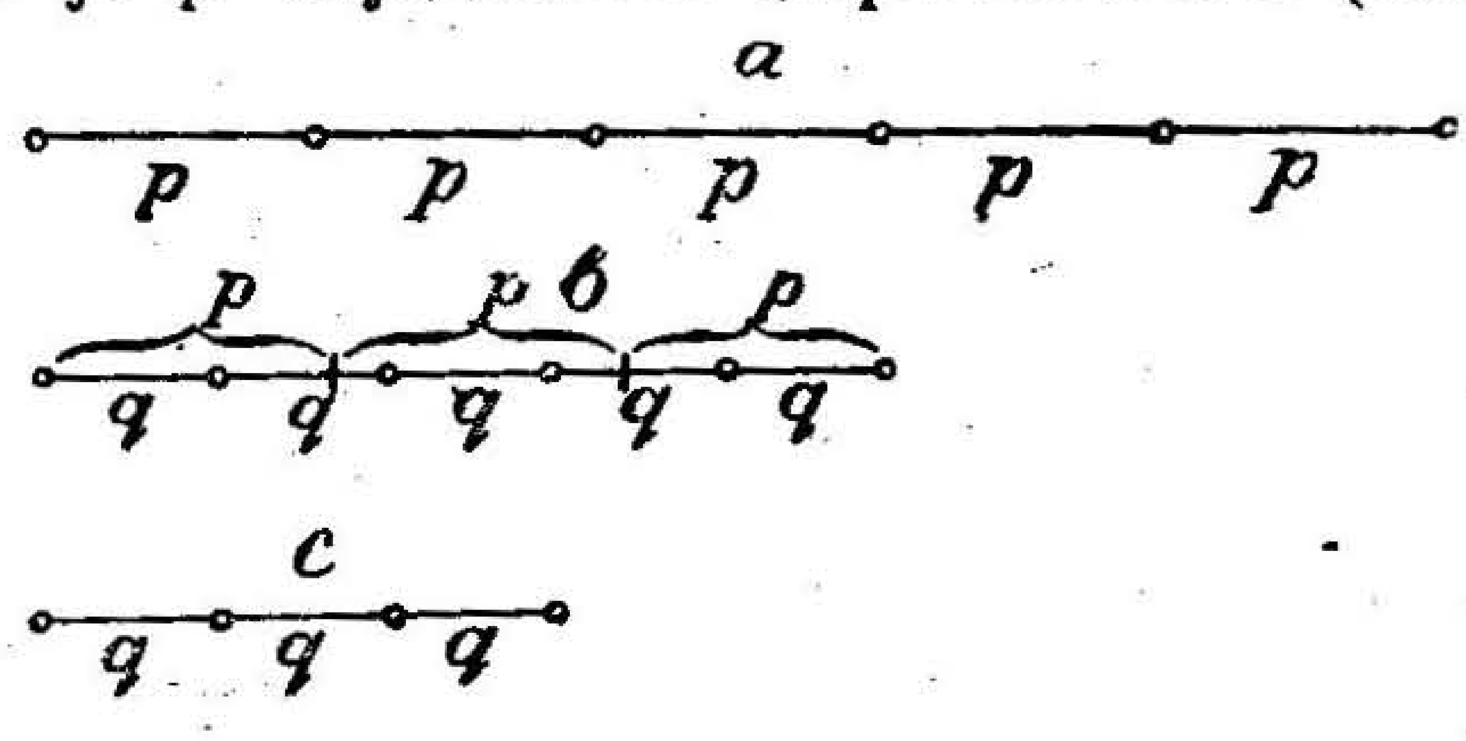
**§ 53. — Пропорционалне дужи.** — а) За четири дужи каже се да су пропорционалне, ако је размера мерних бројева првих двеју дужи једнака с размером мерних бројева других двеју. Тако, дужи $a$, $b$, $c$ и $d$ (сл. 160) јесу пропорционалне, јер је размера дужи $a$ и $b$ 5 : 3, а и размера дужи $c$ и $d$ такође је 5 : 3. Прве две дужи имају за заједничку меру дуж $p$, а друге две дужи $q$. Стога ове четири дужи дају пропорцију:

$a : b = c : d$ (1). Дуж $a$ је прва, $b$ друга, $c$ трећа, а $d$ четврта пропорционала. Дужи $a$ и $d$ јесу спољашње, а $b$ и $c$ унутрашње пропорционале. Пропорција (1) код које су сва четири члана различите величине зове се *обична пропорција.*




Сл. 160

b) Ако је друга дуж $b$ једнака с трећом $c$, онда пропорција (1) има облик: $a : b = b : d$ (2). Оваква се пропорција зове *непрекидна.* Три дужи $a$, $b$ и $c$ дају једну непрекидну пропорцију ако је размера мерних бројева прве и друге дужи једнака с размером мерних бројева друге и треће дужи. Тако, ако је $p$ заједничка мера за $a$ и $b$ (сл. 161), а $q$ заједничка мера за $b$ и $c$, и ако се $p$ садржава у $a$ 5 пута а у $b$ 3 пута, а $q$ се садржава у $b$ 5 пута а у $c$ 3 пута, онда је $a : b = 5 : 3$ и $b : c = 5 : 3$, те је $a : b = b : c$. Дуж $b$ зове се *средња геометриска пропорционала* између дужи $a$ и $c$; дуж $a$ зове се *прва* а дуж $c$ *трећа непрекидна пропорционала.*



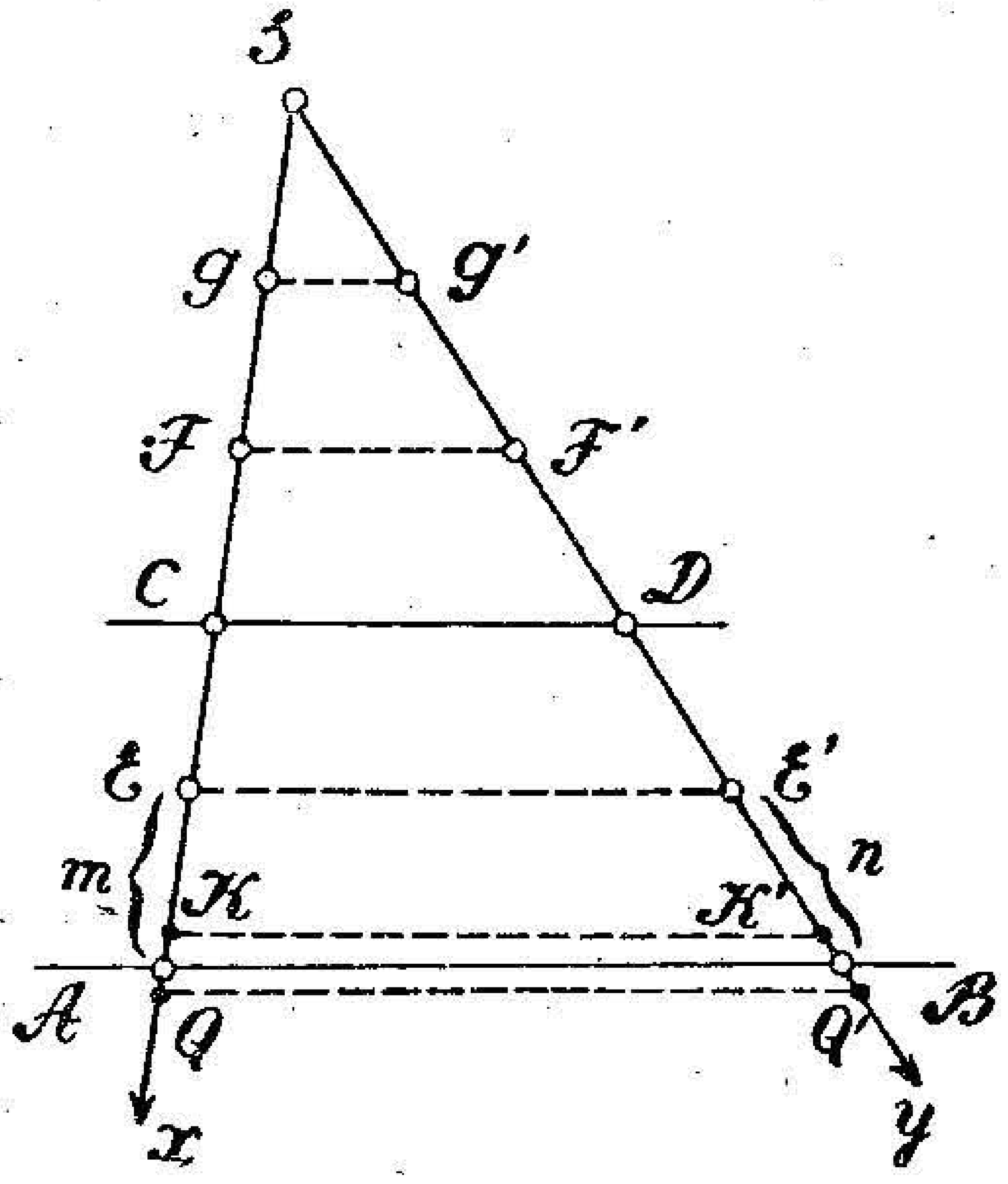

Сл. 161

c) Три и више парова дужи дају једну *продужну пропорцију,* ако је размера мерних бројева дужи првог пара једнака с размером мерних бројева дужи ма ког другог пара. Тако, ако су дати парови дужи: $a$ и $b$, $c$ и $d$, $e$ и $f$, $m$ и $n$, и ако замислимо да је размера мерних бројева сваког пара 7 : 4, онда је:

$$a : b = c : d = e : f = m : n.$$

*Напомена.* — По себи је јасно да све особине које се односе на пропорције у алгебри важе и за све врсте пропорција дужи. Тако, из обичне пропорције $a : b = c : d$ имамо изведене: $(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$; $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$; $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$. За непрекидну пропорцију $a : b = b : c$ имамо: $a = \frac{b^2}{c}$, $b = \sqrt{ac}$ и $c = \frac{b^2}{a}$.

**§ 54. — Теорема из пропорционалности дужи.** — *Теорема 73.* — **Две паралелне трансверзале секу два зрака на пропорционалне отсечке.** — Нека су трансверзале $AB$ и $CD$ (сл. 162) паралелне. Да бисмо доказали да су ма која два отсечка зрака $SX$ пропорционална са одговарајућим отсечцима зрака $SY$, поступамо овако: најпре претпостављамо да су отсечци $SC$ и $CA$ зрака $SX$ самерљиви и да је $m$ њихова заједничка мера. Нека се $m$ у $SC$ садржава 3 а у $CA$ 2 пута. Ако из деоних тачака $E$, $F$ и $G$ повучемо паралелне са трансверзалама, онда се отсечак $SD$ зрака $SY$ дели на три а отсечак $DB$ на два једнака дела величине $n$, који је заједничка мера за та два отсечка (теорема 43). Тада је:



Сл. 162

a) $SC : CA = 3 : 2$ и $SD : DB = 3 : 2$, те је $SC : CA = SD : DB$;
b) $SA : SC = 5 : 3$ и $SB : SD = 5 : 3$, „ „ $SA : SC = SB : SD$; и
c) $SA : CA = 5 : 2$ и $SB : DB = 5 : 2$, „ „ $SA : CA = SB : DB$.

*Напомена.* — Ако претпоставимо да отсечци $SC$ и $CA$ зрака $SX$ нису самерљиви и ако се нека врло мала мера $p$, садржава у $SC$ потпуно $a$ пута, а у $CA$ $b$ пута и преостаје $KA$, које је мање од $p$, онда, ако меру $p$ пренесемо на $CA$ још једаред ($b + 1$ пут), њена друга тачка пада ван $A$, на пр. у $Q$. Затим, ако из тачака $K$ и $Q$ повучемо паралелне са трансверзалом $AB$, онда су отсечци: $SC$ и $CK$, $SC$ и $CQ$, $SD$ и $DK'$, $SD$ и $DQ'$ самерљиви, те је по овој теореми:

$$\frac{SC}{CK} = \frac{a}{b},\ \frac{SD}{DK'} = \frac{a}{b},\ \frac{SC}{CQ} = \frac{a}{b+1} \text{ и } \frac{SD}{DQ'} = \frac{a}{b+1}. \text{ Стога је: } \frac{SC}{CK} = \frac{SD}{DK'} \text{ и}$$

$$\frac{SC}{CQ} = \frac{SD}{DQ'} \quad (1).$$

Па како се тачка $A$ налази између тачака $K$ и $Q$, а тачка $B$ између тачака $K'$ и $Q'$, то је размера:

$$\frac{SC}{CA} < \frac{SC}{CK} \text{ или } \frac{SC}{CA} < \frac{a}{b} \text{ и } \frac{SC}{CA} > \frac{SC}{CQ} \text{ или } \frac{SC}{CA} > \frac{a}{b+1}. \text{ Тако исто је:}$$

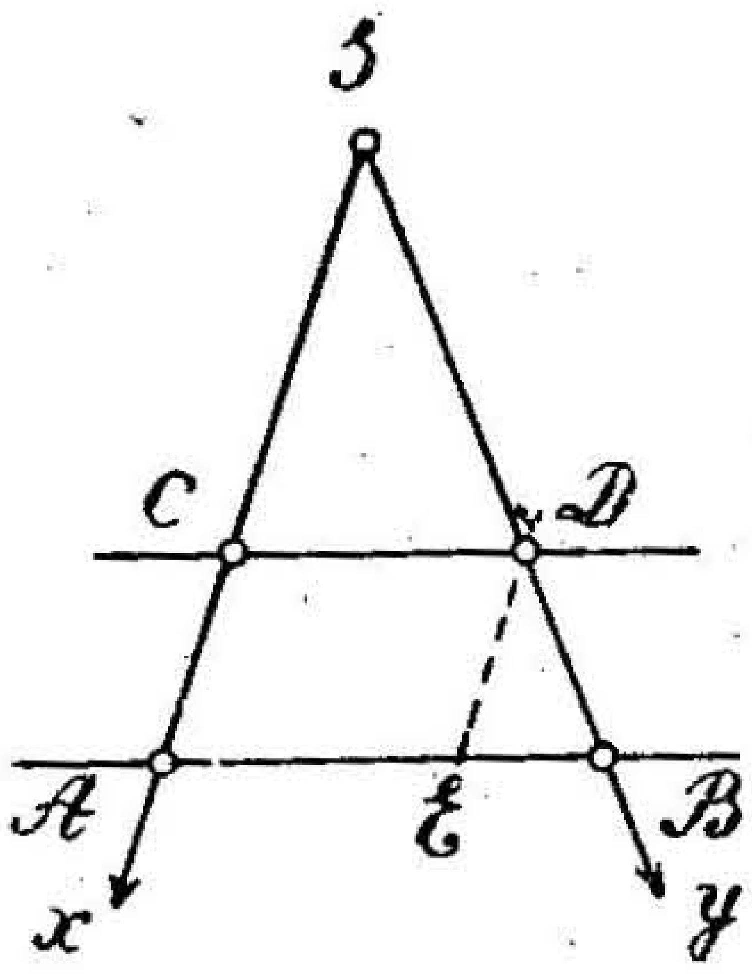
$$\frac{SD}{DB} < \frac{SD}{DK'} \text{ или } \frac{SD}{DB} < \frac{a}{b} \text{ и } \frac{SD}{DB} > \frac{SD}{DQ'} \text{ или } \frac{SD}{DB} > \frac{a}{b+1}.$$

Овим увиђамо да се вредности ирационалних размера $\frac{SC}{CA}$ и $\frac{SD}{DB}$ налазе између вредности размерâ $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{b+1}$, те су те размере једнаке. Ако најзад претпоставимо да је мера $p$ бескрајно мала, онда се тачке $K$ и $Q$ поклапају са тачком $A$, а тачке $K'$ и $Q'$ са тачком $B$. У том случају пропорције под (1) претварају се у пропорцију $\frac{SC}{CA} = \frac{SD}{DS}$, и тиме се доказује да је ова теорема тачна, па били отсечци зракова $SX$ и $SY$ самерљиви или несамерљиви.

*Последица.* — Свака права која је у неком троуглу повучена паралелно с једном троугловом страном, дели друге две троуглове стране на пропорционалне отсечке.

*Теорема 74.* — **Када две паралелне трансверзале секу два зрака, онда су и отсечци трансверзала пропорционални са отсечцима ма кога зрака.** — Нека су трансверзале $AB$ и $CD$ (сл. 163) паралелне, те је по претходној теореми $SA : SC = SB : SD$ (1). Ако из $D$ повучемо $DE \parallel SX$, и тачку $B$ сматрамо као почетну тачку зракова $BS$ и $BA$, а $DE$ и $SA$ као две паралелне трансверзале, онда је по истој теореми $SB : SD = AB : AE$, или заменом $AE$ са $CD$:

$$SB : SD = AB : CD \quad (2).$$




Сл. 163

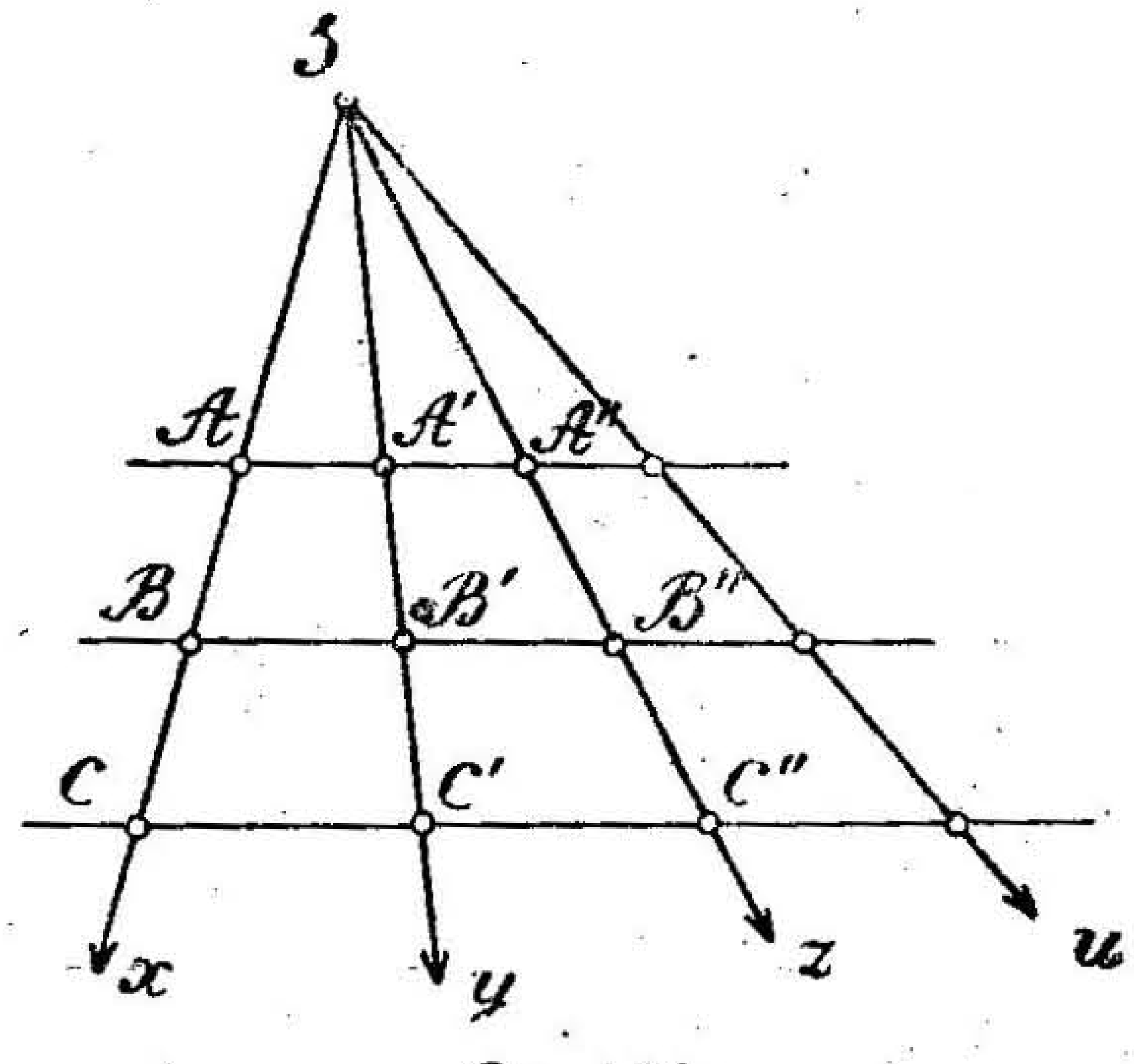
Из пропорција (1) и (2) увиђамо да је и:

$$AB : CD = SA : SC,$$

чиме је ова теорема доказана.

Као последица ових двеју теорема (73 и 74) јесте следећа теорема, која обухвата обадве:

*Теорема 75.* — **Кад се сноп зракова пресече паралелним трансверзалама, онда су: 1) ма која два отсечка једнога зрака пропорционална са одговарајућим отсечцима ма ког другог зрака; 2) отсечци трансверзала пропорционални су са отсечцима ма ког зрака; и 3) отсечци једне трансверзале пропорционални су са одговарајућим отсечцима ма које друге трансверзале.** — Заиста је, према теореми 73 из сл. 164:




Сл. 164

1) $SA : SB : SC = SA' : SB' : SC' = SA'' : SB'' : SC'' = \ldots$

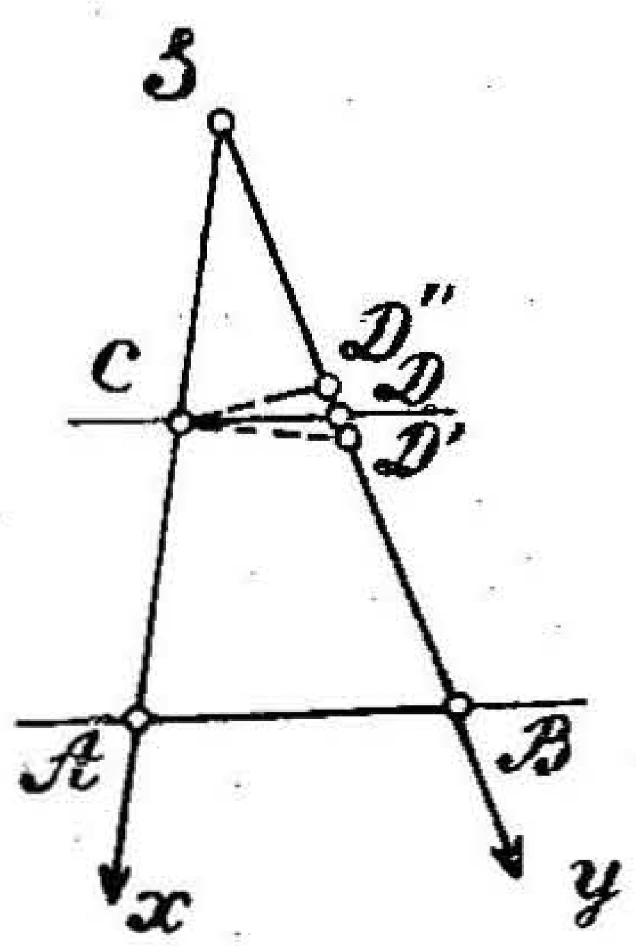
а према теореми 74:

$$\begin{aligned}
2)\ & SA : SB : SC = AA' : BB' : CC', \text{ или} \\
& SA' : SB' : SC' = AA' : BB' : CC', \text{ или} \\
& SA' : SB' : SC' = A'A'' : B'B'' : C'C'', \text{ или} \\
& SA'' : SB'' : SC'' = A'A'' : B'B'' : C'C'' \text{ итд.}
\end{aligned}$$

Из пропорција (1) и (2) увиђамо најзад да је:

3) $AA' : BB' : CC' = A'A'' : B'B'' : C'C''$ итд.

*Теорема 76.* — **Трансверзале које секу зракове на пропорционалне отсечке морају бити паралелне.** — Нека је дато да су отсечци зракова $SX$ и $SY$ пропорционални, тј. да је



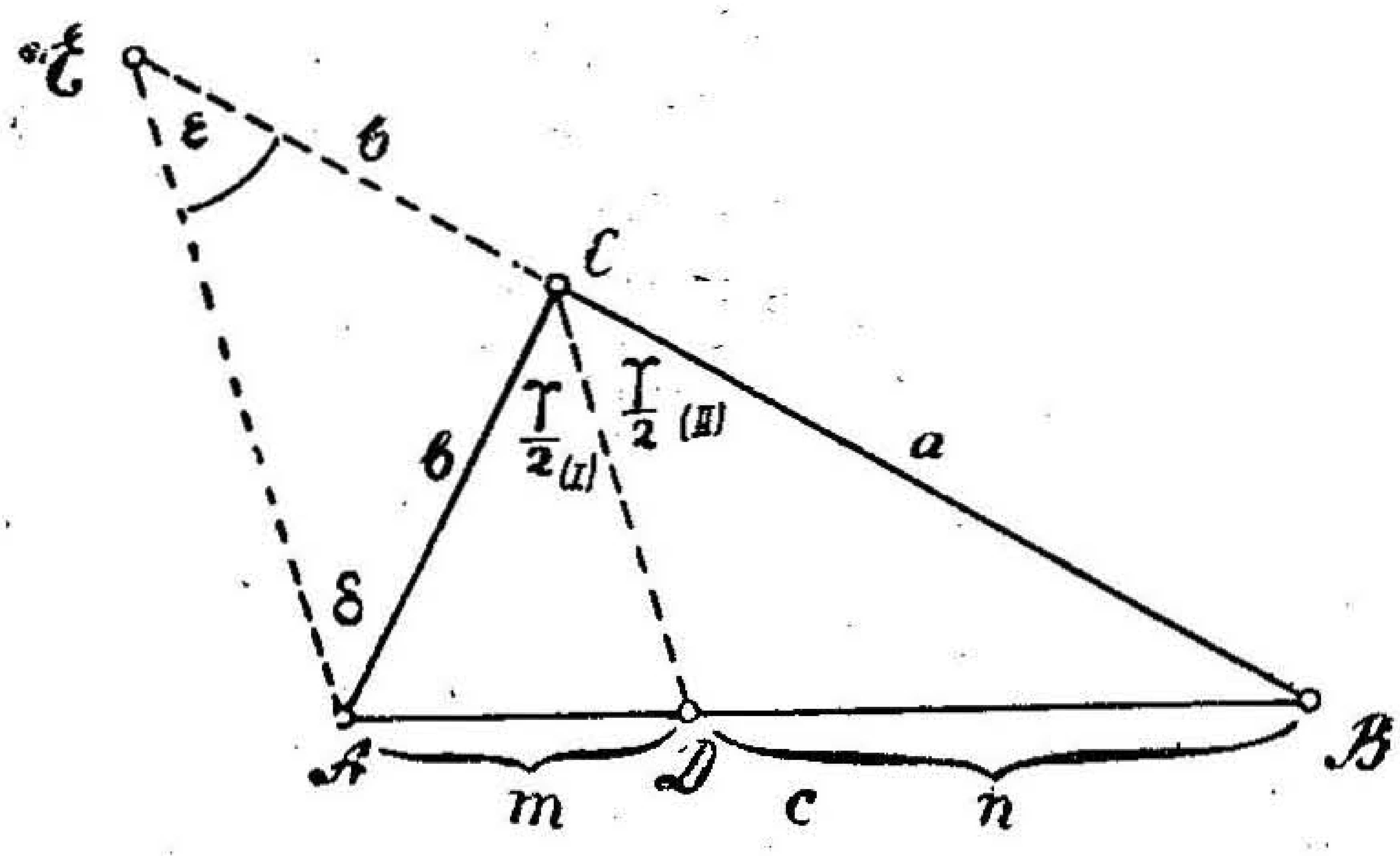
Сл. 165

$$SA : SC = SB : SD \quad (1).$$

Да бисмо доказали да су трансверзале $AB$ и $CD$ паралелне, служимо се индиректним доказом, који се састоји у овоме: Најпре претпостављамо да $CD$ није паралелно са $AB$, већ да је $CD' \parallel AB$. У том случају је, према 73 теореми: $SA : SC = SB : SD'$ (2). Упоређивањем дате пропорције (1) са нађеном (2), нашли бисмо да је $SD = SD'$, што је немогуће, пошто је $SD$ део од $SD'$. Стога наша претпоставка да је $SD' \parallel AB$, као нетачна, отпада. Ако претпоставимо да је $SD'' \parallel AB$, онда би било, опет по 73 теореми: $SA : SC = SB : SD''$ (3). Упоређивањем пропорцијâ (1) и (3) нашли бисмо да је $SD = SD''$, што је опет немогуће, пошто је $SD''$ део од $SD$. Стога и правац $SD''$ није паралелан са $AB$. Па како ни правац $SD'$, ни правац $CD''$ не могу бити паралелни са $AB$, то једино остаје да је само $CD \parallel AB$.

*Последица.* — Када нека трансверзала сече две троуглове стране на пропорционалне отсечке, онда је она паралелна с трећом страном тога троугла.

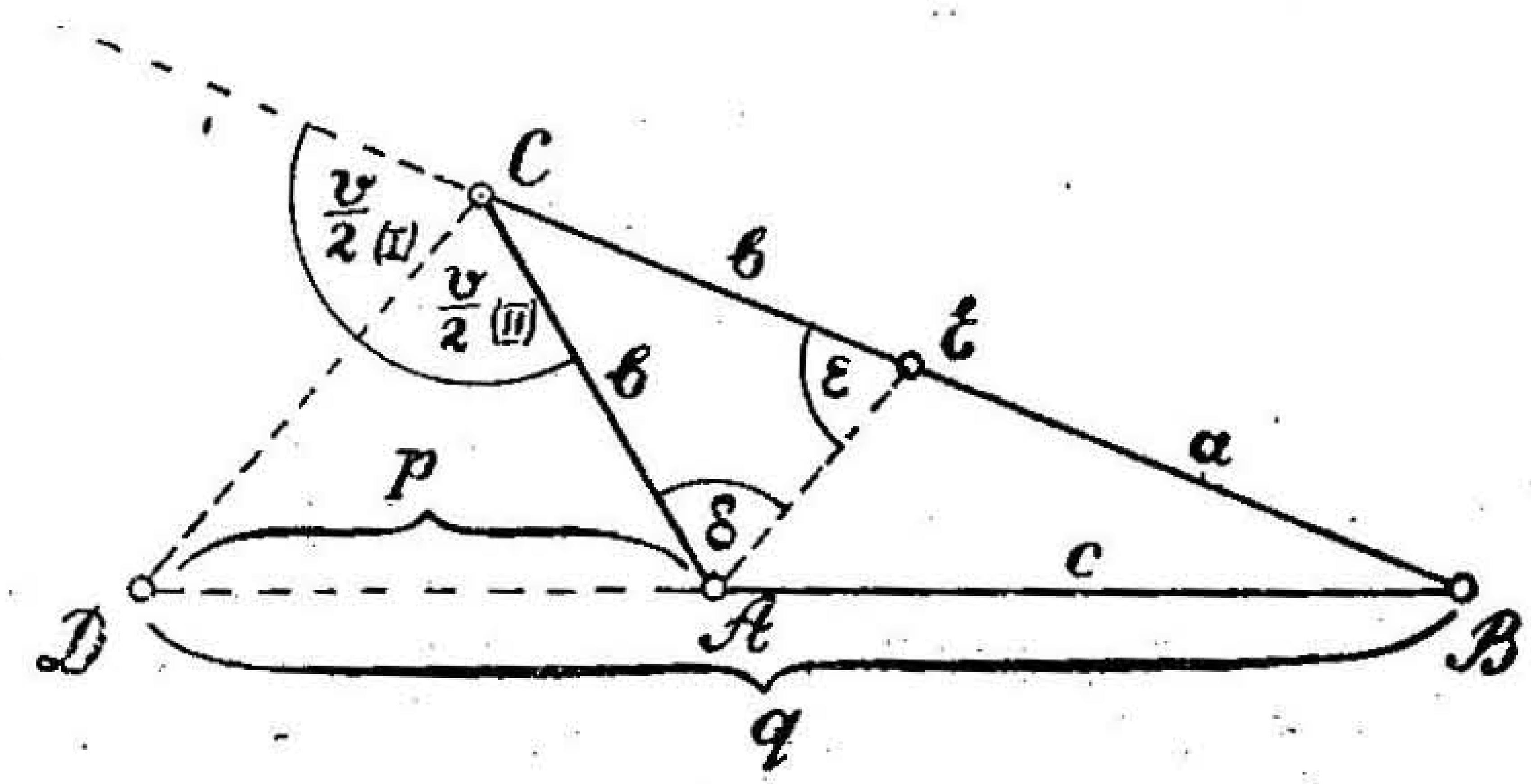
*Теорема 77.* — **Симетрала унутрашњег угла једнога троугла дели супротну страну на таква два отсечка да су пропорционални са странама које граде дотични угао.** — Нека у троуглу $ABC$ (сл. 166) симетрала угла $\gamma$ дели супротну страну $c$ на отсечке $m$ и $n$. Ако страну $a$ продужимо преко темена $C$ за $b$, и добивену тачку $E$ спојимо са $A$, добијамо равнокрак троугао $ACE$, те су углови $\delta$ и $\varepsilon$ једнаки. Угао $\gamma$ као спољашњи



Сл. 166

за троугао $ACE$, једнак је збиру углова $\varepsilon$ и $\delta$, или је двапута већи од ма кога од њих. Стога је $\sphericalangle \varepsilon = \frac{\gamma}{2}$ и $\sphericalangle \delta = \frac{\gamma}{2}$. Па како су углови $\varepsilon$ и $\frac{\gamma}{2}$ (II) сагласни, а углови $\delta$ и $\frac{\gamma}{2}$ (I) наизменични, то је $CD \parallel EA$ (теорема 8). Тада је по 73 теореми: $AD : DB = EC : CB$, или $AD : DB = AC : CB$, или $m : n = b : a$.

*Теорема 78.* — **Симетрала спољашњег угла једнога троугла дели супротну страну на таква два отсечка, да су пропорционални са странама које граде дотични угао.** — Нека у $\triangle ABC$ (сл. 167) симетрала спољашњег угла $\nu$ дели супротну страну $c$ на отсечке $AD = p$ и $BD = q$. Ако из темена $C$ пренесемо на $CB$ страну $b$ и добивену тачку $E$ спојимо са $A$,



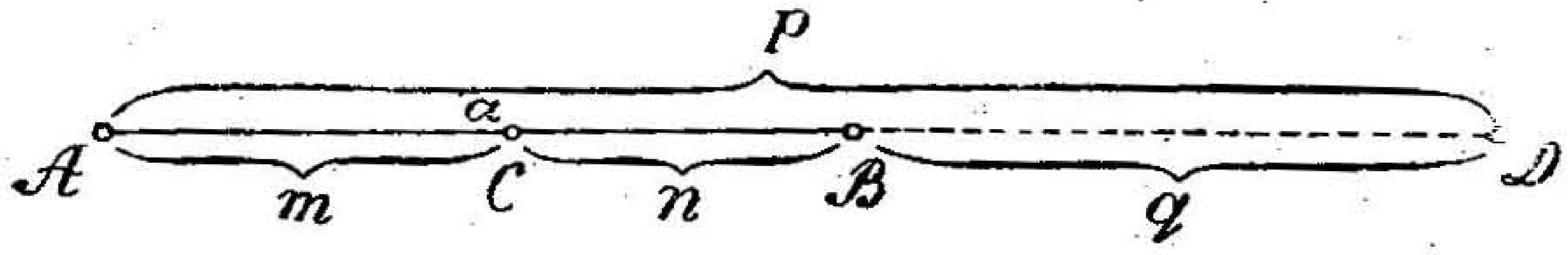
Сл. 167

добијамо равнокрак троугао $ACE$, у коме су углови $\delta$ и $\varepsilon$ једнаки. Како је $\delta + \varepsilon = \nu$ (теорема 20), то је $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$ и $\delta = \frac{\nu}{2}$.

Па како су углови $\delta$ и $\frac{\nu}{2}$ (II) наизменични, а углови $\varepsilon$ и $\frac{\nu}{2}$ (I) сагласни, то је $CD \parallel AE$ (теорема 8). Тада је по 71 теореми: $AD : BD = CE : CB$, или $AD : BD = AC : CB$, или $\boldsymbol{p : q = b : a}$.

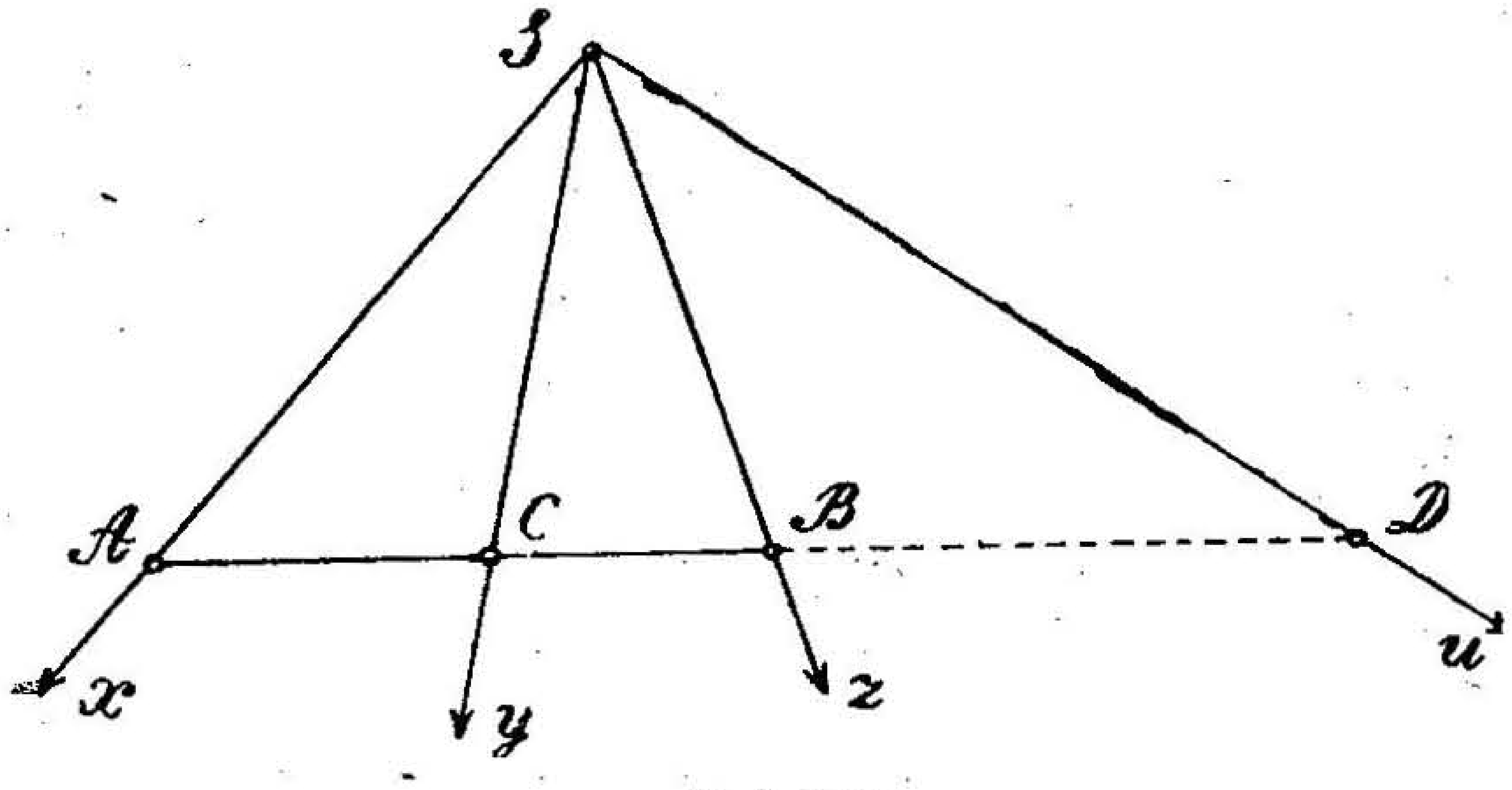
## § 55. — Хармониска подела једне дужи и хармониски зраци

— За једну дуж каже се да је двема тачкама подељена по хармониској пропорцији ако су отсечци те дужи створени првом тачком пропорционални са отсечцима исте дужи створени другом тачком. Тако, дуж $AB$ (сл. 168) биће тачкама $C$ и $D$ подељена по хармониској пропорцији ако је задовољена пропорција:



Сл. 168

$AC : BC = AD : BD$, или $m : n = p : q$ (1). Тачке $C$ и $D$ зову се *хармониске спрегнуте тачке*, јер је положај једне од тих тачака потпуно одређен положајем друге тачке. Тако исто, тачке $A$ и $B$ јесу две спрегнуте хармониске тачке, јер и оне деле дуж $CD$ по хармониској пропорцији. Заиста, из пропорције:




Сл. 169

$$AC:BC = AD:BD$$

или

$$AC:AD = BC:BD$$

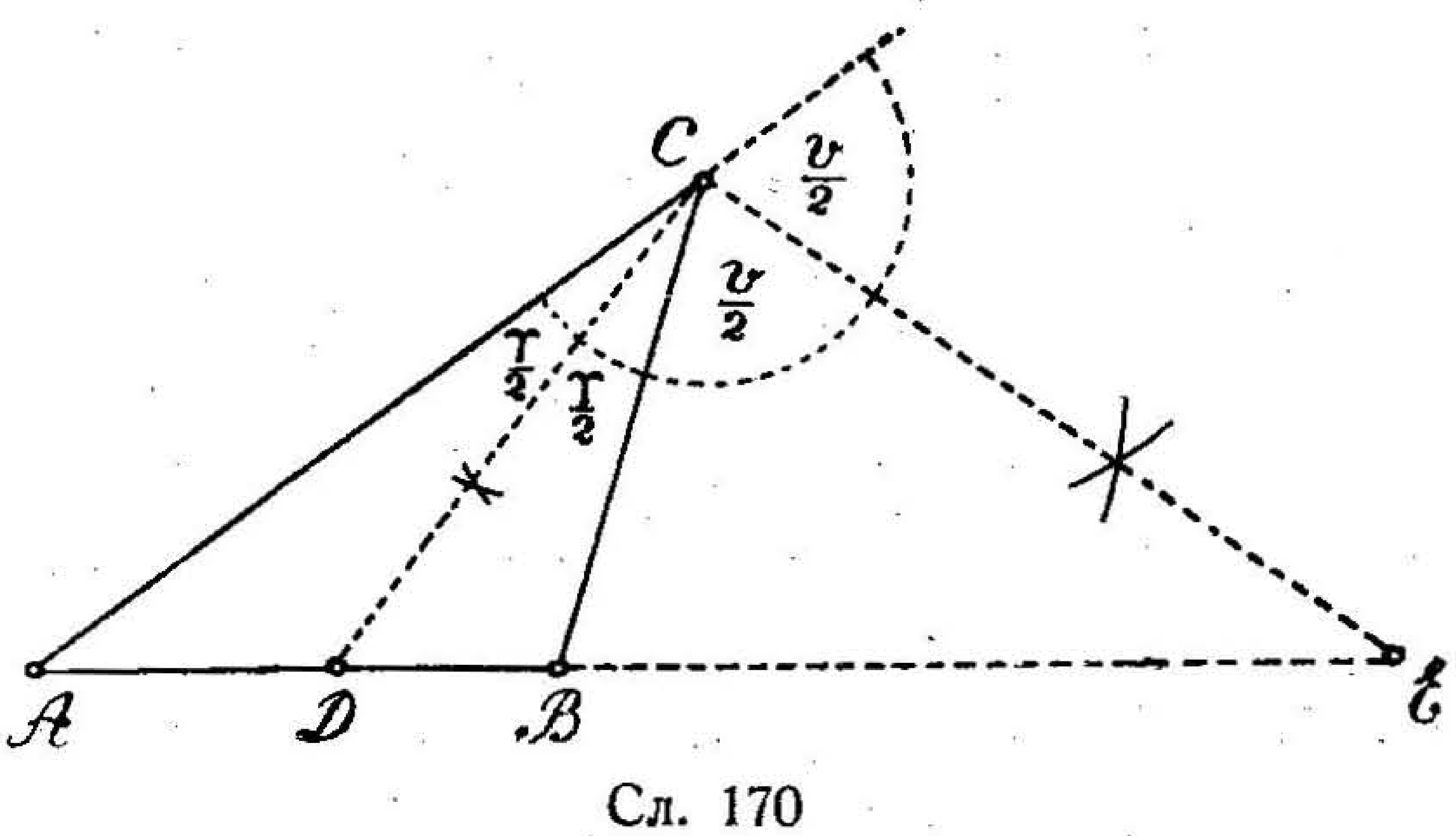
имамо:

$$CA:DA = CB:BD$$

која је опет једна хармониска пропорција. Тачке: $A$, $C$, $B$ и $D$ зову се хармониске тачке.

Ако ма из које тачке у равни $(S)$ повучемо зраке кроз хармониске тачке, онда зраци: $SX$, $SY$, $SZ$ и $SU$ (сл. 169) дају *хармониски сноп*, и то $SY$ и $SU$, а тако исто $SX$ и $SZ$, зову се *хармониски спрегнути зраци*. Тачка $S$ зове се *хармониски центар*.

*Теорема 79.* — **Симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена троугла деле супротну страну по хармониској пропорцији, а са странама тога угла граде хармониски сноп.** — Нека је $CD$ симетрала унутрашњег угла $\gamma$, а $CE$ симетрала спољашњег угла $\nu$ код темена $C$ троугла $ABC$ (сл. 170). Тада је по 77 теореми:




Сл. 170

$$AD : BD = AC : BC, \text{ а по 78:}$$

$$AE : BE = AC : BC.$$

Па како су десне стране ових двеју пропорција једнаке, то су једнаке и њихове леве стране, тј.

$$AD : BD = AE : BE.$$

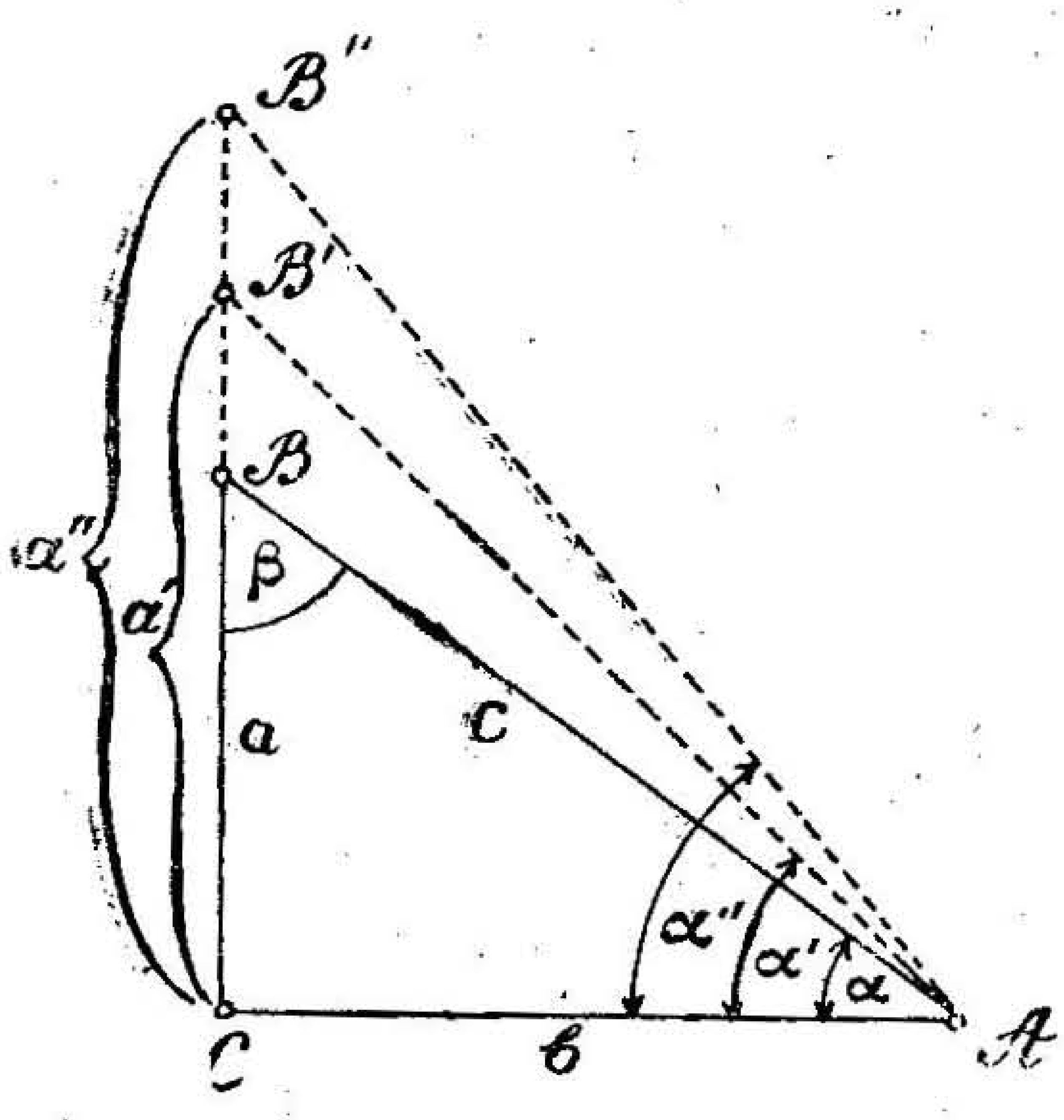
Како је ова пропорција хармониска, то је сноп: $CA$, $CD$, $CB$ и $CE$ хармониски, чиме је ова теорема доказана.

На основу ове теореме можемо ма коју дуж поделити по хармониској пропорцији на следећи начин: *треба над том* *дужи (на пр. над AB, сл. 170) конструисати ма какав разностран троугао (ABC), а затим конструисати симетрале и унутрашњег и спољашњег угла код супротног темена (C). Пресечне тачке D и E ових симетрала с датом дужи AB јесу две тражене спрегнуте хармониске тачке.*

*Напомена.* — Као што је раније напоменуто, положај једне спрегнуте хармониске тачке зависи од положаја друге спрегнуте тачке. Тако, ако је спрегнута тачка $D$ (сл. 170) на средини дужи $AB$, онда се друга спрегнута тачка $E$ налази у бесконачности, јер је тада $\triangle ABC$ равнокрак или равностран, па је симетрала $CE \parallel AB$. Ако се спрегнута тачка $D$ поступно приближује тачци $B$, онда се приближује истој тачци и друга спрегнута тачка $E$, и у тренутку, када $D$ пада на $B$, и $E$ пада на $B$. Напротив, ако се тачка $D$ приближује тачци $A$ и налази се на левој половини дужи $AB$, онда се тачка $E$ налази на продужењу ове дужи, али с леве стране тачке $A$. Приближује се овој тачци кад се и $D$ њој приближује, а пада на $A$ када и $D$ пада на ту тачку. Према овоме, увиђамо да хармониске тачке $E$ и $D$ не заузимају сталан положај на једној дужи, већ се положај једне од њих мења када друга промени свој положај.

# II. Тригонометриске функције и њихова примена на решавање правоуглог троугла

**§ 56. — Тригонометриске функције.** — Размера страна правоуглог троугла $ABC$ (сл. 171) јесу функције ма ког оштрог угла тога троугла, и обрнуто, можемо углове сматрати као функције тих размера. Тако, разрмеру $\frac{a}{b}$ сматрамо као функцију угла $\alpha$, јер се вредност те размере мења кад се угао $\alpha$ мења. Вредност ове размере се увећава када угао $\alpha$ расте, а смањује се када угао $\alpha$ опада. Та размера, која је размера између супротне и налегле катете угла $\alpha$, постаје $\frac{a'}{b}, \frac{a''}{b'}, \ldots$ када $\alpha$ постаје $\alpha', \alpha'', \ldots$ Она




Сл. 171

има све већу вредност растењем угла $\alpha$, јер је $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b} < \frac{a''}{b}$.

Размеру $\frac{b}{a}$ такође можемо сматрати као функцију угла $\alpha$, јер се вредност и те размере мења када се угао $\alpha$ мења, и то: она се смањује када угао расте, а увећава се када угао опада. Тако исто и размере: $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$ мењају своје вредности када се угао $\alpha$ мења, те су и те размере функције угла $\alpha$.

Од страна правоуглога троугла можемо да створимо *шест* размера, и то: три прâве и три обрнуте. Пошто је свака од тих размера функција ма кога оштрог угла правоуглога троугла, то имамо свега шест функција, које се, за разлику од осталих функција, зову *гониометриске* или *тригонометриске* функције. Вредност сваке од тих размера има свој нарочити назив, своје име, и то:

1) Вредност размере између супротне катете једног угла и хипотенузе зове се ***синус*** (sinus) тога угла, а означава се (сл. 171):

$$sin\ \alpha = \frac{a}{c}, \quad \text{a} \quad sin\ \beta = \frac{b}{c}.$$

2) Вредност размере између налегле катете једног угла и хипотенузе зове се ***косинус*** (cosinus) тога угла, а означава се:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c}, \quad \text{a} \quad cos\ \beta = \frac{a}{c}.$$

3) Вредност размере између супротне и налегле катете једног угла зове се ***тангенс*** (tangens) тога угла, а означава се:

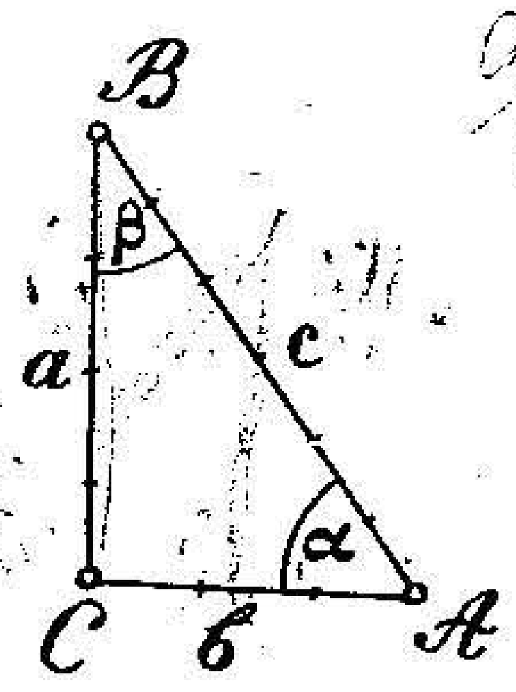
$$tg\ \alpha = \frac{a}{b}, \quad \text{a} \quad tg\ \beta = \frac{b}{a}.$$

4) Вредност размере између налегле и супротне катете једног угла зове се ***котангенс*** (cotangens) тога угла, а означава се:

$$cotg\ \alpha = \frac{b}{a}, \quad \text{a} \quad cotg\ \beta = \frac{a}{b}.$$

5) Вредност размере између хипотенузе и налегле катете једнога угла зове се ***секанс*** (secans) тога угла, а означава се:

$$sec\ \alpha = \frac{c}{b}, \quad \text{a} \quad sec\ \beta = \frac{c}{a}.$$



Сл. 172

6) Вредност размере између хипотенузе и супротне катете једног угла зове се ***косеканс*** (cosecans) тога угла, а означава се:

$$cosec\ \alpha = \frac{c}{a}, \quad \text{a} \quad cosec\ \beta = \frac{c}{b}.$$

Тако код троугла $ABC$ (сл. 172), код кога су *катете* $a = 4$, $b = 3$, а хипотенуза $c = 5$, вредности тригонометриских функција његових углова $\alpha$ и $\beta$ јесу:

$$sin\ \alpha = \frac{4}{5}, \quad cotg\ \alpha = \frac{3}{4}, \quad sin\ \beta = \frac{3}{5}, \quad cotg\ \beta = \frac{4}{3},$$

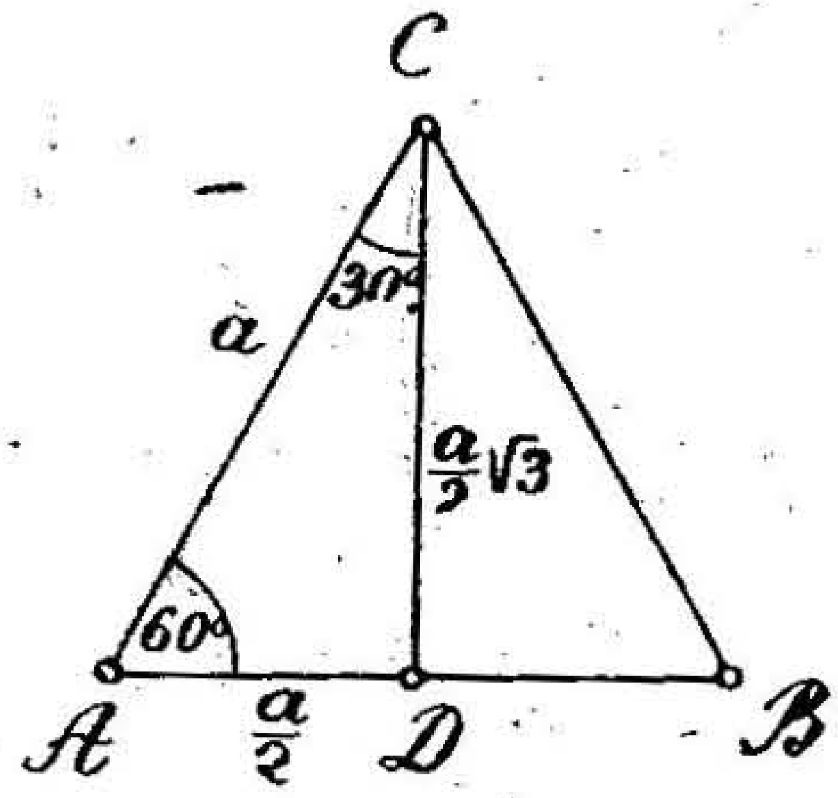
$$cos\ \alpha = \frac{3}{5}, \quad sec\ \alpha = \frac{5}{3}, \quad cos\ \beta = \frac{4}{5}, \quad sec\ \beta = \frac{5}{4} \text{ и}$$

$$tg\ \alpha = \frac{4}{3}, \quad cosec\ \alpha = \frac{5}{4}, \quad tg\ \beta = \frac{3}{4}, \quad cosec\ \beta = \frac{5}{3},$$

*Напомена.* — Из горе изложеног увиђамо: 1) да су функције: синус и косеканс, косинус и секанс, тангенс и котангенс једнога угла обрнуте функције, тј. косеканс је једнак реципрочној вредности синуса, секанс реципрочној вредности косинуса, а котангенс реципрочној вредности тангенса; и 2) ако су два угла комплементна ($\alpha$ и $\beta$ на сл. 172), онда је синус једнога угла једнак косинусу другога угла, и обрнуто; тангенс једнога једнак је котангенсу другога, и обрнуто, и секанс једнога једнак је косекансу другога, и обрнуто. Функције секанс и косеканс, које имају мању примену у *Геометрији*, не узимамо у обзир у даљем излагању градива.

## § 57. — Вредности функција углова од 60°, 30° и 45°. —

Ради израчунавања функција углова од 60° и 30°, треба да конструишемо најпре равностран троугао, а затим да спустимо једну његову висину. Тада у добивеним правоуглим троугловима оштри су углови од 60° и 30°. Из $\triangle\ ADC$ (сл. 173) имамо:




Сл. 173

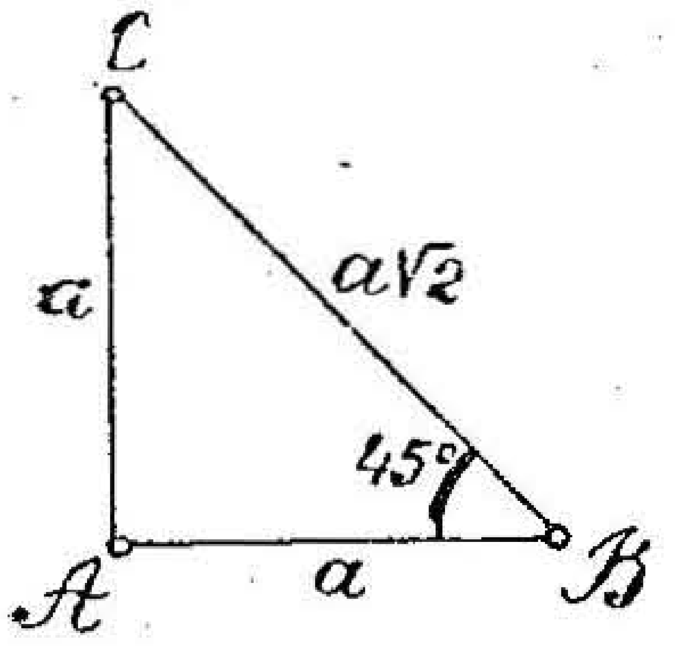
$$\text{a) } sin\ 60^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad cos\ 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}; \quad tg\ 60^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{2a} =$$

$$= \sqrt{3}; \text{ и } cotg\ 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{b) } sin\ 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}; \quad cos\ 30^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\ 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{ и } cotg\ 30^0 = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{2a} = \sqrt{3}.$$

c) Ради израчунавања функција угла од 45°, треба да конструишемо правоугли равнокрак троугао, код кога су оштри углови по 45°. Из $\triangle$ $ABC$ (сл. 174) имамо:




Сл. 174

$sin\ 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\ 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\ 45^0 = \frac{a}{a} = 1$; и $cotg\ 45^0 = \frac{a}{a} = 1$.

*Напомена.* — Посматрањем вредности функција углова од 30°, 45° и 60° увиђамо *да синуси и тангенси постају све већи, а косинуси и котангенси постају све мањи, кад оштри угао расте.* У тригонометрији упознаће се ученици опширније са растењем и опадањем тригонометриских функција не само оштрих већ и осталих углова, а засада треба да имају у виду ову констатацију за вредност функција оштрих углова.

**§ 58. — Таблица природних вредности тригонометриских функција оштрих углова.** — Истим путем, као у претходном параграфу, израчунали бисмо бројне вредности тригонометриских функција ма ког оштрог угла, ако знамо бројне вредности страна правоуглог троугла коме тај угао припада. У тригонометрији упознаће се ученици са елементарном методом израчунавања бројних вредности функција оштрих углова, и те су вредности прикупљене у нарочите таблице зване *тригонометриске таблице.* Како су вредности гониометриских функција понајвише ирационални бројеви, то су ове вредности утолико тачније израчунате, уколико имају више децимала. У таблицама вредности тригонометриских функција налазе се само за углове који имају степене и минуте. Ако угао има, поред степена и минута, још и секунде, онда за секунде израчунавамо *поправку,* која се код синуса и тангенса додаје, а код косинуса и котангенса одузима од вредности функције угла који има само степене и минуте. Поправка је количник између производа од разлике између вредности функције два угла који се разликују за 1′ и броја секунада датог угла, који се производ дели са 60.

Упутство о томе како ћемо наћи у таблицама вредност неке функције када нам је познат угао, и обрнуто: како ћемо наћи угао ако нам је позната вредност неке његове функције, састоји се у овоме:

А) **Изналажење вредности функције када је угао познат**

**I случај. — Угао има само степене и минуте.** Ако угао има само степене и минуте, онда се вредности његових функција налазе непосредно у таблицама, и то у колони дотичне функције наспрам минута датог угла. Ако је угао мањи од $45^0$, онда се вредност једне функције тражи у колони у којој је та функција горе означена; а кад је угао већи од $45^0$, онда се вредност једне функције тражи одоздо навише, у колони код које је доле означена дотична функција. Ово је стога што су синуси оштрих углова мањих од $45^0$ једнаки са косинусима њихових комплементних углова, косинуси са синусима, тангенси са котангенсима, а котангенси са тангенсима. Према томе, синусна колона, у којој се налазе вредности синуса свију оштрих углова мањих од $45^0$, у исто је време косинусна колона, и бројеви у тој колони јесу вредности косинусâ одговарајућих комплементних углова већих од $45^0$; косинусна у исто је време синусна; тангетна колона углова мањих од $45^0$ у исто је време котангентна њихових комплементних углова; и котангентна у исто је време тангентна.

*Решени примери:*

| | |
|---|---|
| 1) $\sin 35^0\,14' = 0{,}57691$ | 5) $tg\, 17^0\,25' = 0{,}31370$ |
| 2) $\sin 63^0\,38' = 0{,}89597$ | 6) $tg\, 68^0\,15' = 2{,}50652$ |
| 3) $\cos 40^0\,20' = 0{,}76229$ | 7) $cotg\, 10^0\,50' = 5{,}22567$ |
| 4) $\cos 75^0\,17' = 0{,}25404$ | 8) $cotg\, 80^0\,5' = 0{,}17483$ |

**II случај. — Угао има степене, минуте и секунде.** Ако дати угао има и секунде, онда, као у првом случају, налазимо најпре у таблицама вредност функције само за степене и минуте, а за секунде израчунавамо *поправку*. Та се поправка, као што је раније казано, код вредности синуса и тангенса додаје, а код вредности косинуса и котангенса одузима, јер су синус и тангенс већи што је угао већи; а напротив, косинус и котангенс су мањи кад је угао већи.

*Извођење обрасца за поправку* $P = \frac{D \cdot S}{60}$. Ако се углови разликују за $1'$, онда се вредности неке њихове функције разликују за $D$ (јединица петог десетног места); а кад се углови разликују за $S$ секунада, или $\frac{S}{60}$ минута, онда ће се вредност те функције разликовати за $P$. Тада је поправка $P$ толико пута већа од диференције $D$, колико су пута већи $\frac{S}{60}$ минута од $1'$, тј. $P : D = \frac{S}{60} : 1$. Одавде је $P = \frac{D \cdot S}{60}$.

*Решени примери:*

1) *Наћи* $\sin 38^0\, 50'\, 20''$.

$$\left.\begin{array}{l} \sin 38^0\, 50' = 0{,}62706 \\ \sin 38^0\, 51' = 0{,}62728 \end{array}\right\} D = 0{,}00022$$

$$P = \frac{0{,}00022 \cdot 20}{60} = 0{,}00007;$$

$$\sin 38^0 50' 20'' = 0{,}62706 + 0{,}00007 = 0{,}62713.$$

Скраћен поступак:

$$\begin{array}{r} \sin 38^0\, 50' = 0{,}62706, \; D = 22, \; P = \frac{22 \cdot 20}{60} = 7 \\ +7 \\ \hline \sin 38^0 50' 20'' = 0{,}62713. \end{array}$$

2) *Наћи* $\sin 56^0\, 15'\, 35''$.

$$\begin{array}{r} \sin 56^0\, 15' = 0{,}83147, \; D = 16, \; P = \frac{16 \cdot 35}{60} = 9 \\ +9 \\ \hline \sin 56^0\, 15'\, 35'' = 0{,}83156. \end{array}$$

3) *Наћи* $\cos 15^0\, 15'\, 30''$.

$$\begin{array}{r} \cos 15^0\, 15' = 0{,}96479, \; D = 8, \; P = \frac{8 \cdot 30}{60} = 4 \\ -4 \\ \hline \cos 15^0\, 15'\, 30'' = 0{,}96475. \end{array}$$

4) *Наћи* $\cos 72^0\, 24'\, 40''$.

$$\begin{array}{r} \cos 72^0\, 24' = 0{,}30237, \; D = 2, \; P = \frac{2 \cdot 40}{60} = 1 \\ -1 \\ \hline \cos 72^0\, 24'\, 40'' = 0{,}30236. \end{array}$$

5) *Наћи* $tg\, 40^0\, 38'\, 10''$.

$$\begin{array}{r} tg\, 40^0\, 38' = 0{,}85811, \; D = 51, \; P = \frac{51 \cdot 10}{60} = 9 \\ +9 \\ \hline tg\, 40^0\, 38'\, 10'' = 0{,}85820. \end{array}$$

6) *Наћи* $tg\, 61^0\, 51'\, 25''$.

$$\begin{array}{r} tg\, 61^0\, 51' = 1{,}86891, \; D = 131, \; P = \frac{131 \cdot 25}{60} = 55 \\ +55 \\ \hline tg\, 61^0\, 51'\, 25'' = 1{,}86946. \end{array}$$

7) *Наћи* $cotg\, 36^0\, 18'\, 22''$.

$$\begin{array}{r} cotg\, 36^0\, 18' = 1{,}36134, \; D = 83, \; P = \frac{83 \cdot 22}{60} = 30 \\ -30 \\ \hline cotg\, 36^0\, 18'\, 22'' = 1{,}36104. \end{array}$$

8) *Наћи* $cotg\ 81^0\,38'\,50''$.

$$\begin{array}{l} cotg\ 81^0\,38' = 0{,}14707,\ D = 30,\ P = \dfrac{30\cdot 50}{60} = 25 \\ \qquad\qquad\quad -\ 25 \\ \hline cotg\ 81^0\,38'\,50'' = 0{,}14682. \end{array}$$

В) **Изналажење угла када је позната вредност неке његове функције.** — Да бисмо нашли угао када је позната вредност неке његове функције, треба најпре да сравнимо дату вредност са вредношћу исте фунције угла од $45^0$. Ово је потребно ради сазнања да ли је тражени угао већи или мањи од $45^0$. Треба, дакле, дату вредност да сравнимо са 0,70711, који је број вредност функције синуса и косинуса угла од $45^0$, или са 1, колика је вредност тангенса и котангенса истог угла.

**I случај.** — Ако се зна вредност синуса неког угла, онда, да бисмо нашли угао, треба да упоредимо дату вредност са бројем 0,70711. Ако је дата вредност мања од овога броја, значи да је тражени угао мањи од $45^0$, јер мањем броју одговара мањи синус, а мањем синусу мањи угао. Напротив, ако је дана вредност већа од 0,70711, значи да је тражени угао већи од $45^0$, јер већој вредности одговара већи синус, а већем синусу већи угао. Тако, ако је $sin\ x = 0{,}52104$, онда је $sin\ x < sin\ 45^0$, јер је $0{,}52104 < 0{,}70711$, па је стога $x < 45^0$. Према томе, непознати угао $x$ треба да тражимо одозго наниже, а његову вредност налазимо у колони где горе пише „*sinus*“. Ако се дана вредност налази у тој колони, онда угао $x$ има само степене и минуте. Ако се дана вредност не налази у колони, значи да угао $x$, поред степена и минута, има још и секунде. У овом случају налазимо у синусној колони најближу мању вредност датој вредности, узимамо њој одговарајуће степене и минуте, а секунде израчунавамо када разлику између дате и приближно мање вредности (поправку $P$) помножимо најпре са 60, а затим добивени производ делимо табличном диференцијом, тј. разликом између приближно веће и приближно мање вредности дате вредности.

*Пример 1. — Наћи угао $x$ кад је $sin\ x = 0{,}62713$.* Овде је $0{,}62713 < 0{,}70711$, те је $x < 45^0$. Стога непознати угао тражимо у синусној колони одозго. Овде је приближно мања вредност 0,62706, а њој одговара угао од $38^0\,50'$. Секунде овога угла налазимо када $P = 7$ помножимо са 60 и добивени производ поделимо са $D = 22$, чиме добијамо $20''$. Тражени је угао $x = 38^0\,50'\,20''$.

*Пример 2. — Наћи угао x кад је sin* $x = 0{,}83156$. Овде је $0{,}83156 > 0{,}70711$, те је $x > 45^0$. Стога непознати угао тражимо у синусној колони одоздо. Овде је приближно мања вредност 0,83147, а њој одговара угао од $56^0\,15'$. Секунде овога угла налазимо када $P = 9$ помножимо са 60 и добивени производ поделимо са $D = 16$, чиме добијамо $34''$. Непознати је угао $x = 56^0\,15'\,34''$.

*Пример 3. — Наћи угао x кад је sin* $x = \frac{3}{4} = 0{,}75000$.

Овде је $0{,}75000 > 0{,}70711$, те је $x > 45^0$. Приближна је мања вредност 0,74992, а њој одговара угао од $48^0\,35'$. Његове секунде $S = \frac{P \cdot 60}{D} = \frac{8 \cdot 60}{19} = 25''$.

Непознати угао је $x = 48^0\,35'\,25''$.

**II случај.** — Ако је дата вредност тангенса неког угла, онда, да бисмо нашли угао, поступамо исто као у претходном случају с том разликом што дану вредност упоређујемо са 1, који је број *tg* $45^0$ и што га тражимо у тангентној колони.

*Пример 1. — Наћи угао x кад је tg* $x = 0{,}85820$. Овде је $0{,}85820 < 1$, те $x < 45^0$. Приближно мања вредност је 0,85811, а њој одговара угао од $40^0\,38'$. Његове секунде $S = \frac{P \cdot 60}{D} = \frac{9 \cdot 60}{51} = 10''$. Стога је $x = 40^0\,38'\,10''$.

*Пример 2. — Наћи угао x кад је tg* $x = 1{,}86945$. Овде је $1{,}86945 > 1$, те је $x > 45^0$. Приближно мања вредност је 1,86891, а њој одговара угао од $61^0\,51'$. Његове секунде $S = \frac{P \cdot 60}{D} = \frac{54 \cdot 60}{131} = 25''$. Стога је $x = 61^0\,51'\,25''$.

**III случај.** — Ако је дата вредност косинуса неког угла, онда, да бисмо нашли непознати угао, упоређујемо дату вредност са 0,70711, који је број *cos* $45^0$. Ако нађемо да је дана вредност већа од овога броја, значи да је тражени угао мањи од $45^0$, јер већој вредности одговара већи косинус, а већем косинусу мањи угао. Ако нађемо да је дана вредност мања од 0,70711, значи да је тражени угао већи од $45^0$, јер мањој вредности одговара мањи косинус, а мањем косинусу већи угао. Ако се дана вредност не налази у косинусној колони, значи да тражени угао, поред степена и минута, има још и секунде. У овоме случају, у колони за косинус, налазимо најпре најближу већу вредност, узимамо њој одговарајуће степене и минуте, а секунде израчунавамо када разлику између приближно веће и дане вредности (поправку $P$) помножимо најпре са 60, а затим добивени производ делимо табличном диференцијом.

*Пример 1. — Наћи угао $x$ кад је* $\cos x = 0{,}96475$. Овде је $0{,}96475 > 0{,}70711$, те је $x < 45^0$. Приближно већа вредност је 0,96479, а њој одговара угао од $15^0\,15'$. Његове секунде $S = \frac{P \cdot 60}{D} = \frac{4 \cdot 60}{8} = 30''$.

Стога је $x = 15^0\,15'\,30''$.

*Пример 2. — Наћи угао $x$ кад је* $\cos x = 0{,}30236$. Овде је $9{,}30236 < 0{,}70711$, те је $x > 45^0$. Приближно већа вредност је 0,30237, а њој одговара угао од $72^0\,24'$. Његове секунде $S = \frac{P \cdot 60}{D} = \frac{1 \cdot 60}{2} = 30''$. Стога је $x = 72^0\,24'\,30''$.

**IV случај.** — Ако је дата вредност котангенса неког угла, онда, да бисмо нашли угао, поступамо као у трећем случају, само с том разликом што дану вредност упоређујемо са 1, колики је $\operatorname{cotg} 45^0$, и што га тражимо у котангентној колони.

*Пример 1. — Наћи угао $x$ кад је* $\operatorname{cotg} x = 1{,}36103$. Овде је $1{,}36103 > 1$, те је угао $x < 45^0$. Приближно већа вредност је 1,36134, а њој одговара угао од $36^0\,18'$. Његове секунде $S = \frac{P \cdot 60}{D} = \frac{31 \cdot 60}{83} = 22''$. Стога је $x = 36^0\,18'\,22''$.

*Пример 2. — Наћи угао $x$ кад је* $\operatorname{cotg} x = 0{,}14684$. Овде је $0{,}14684 < 1$, те је угао $x > 45^0$. Приближно већа вредност је 0,14707, а њој одговара угао од $81^0\,38'$. Његове секунде $S = \frac{P \cdot 60}{D} = \frac{23 \cdot 60}{30} = 46''$. Стога је $x = 81^0\,38'\,46''$.

***Примери за вежбу***

Наћи вредност функција:

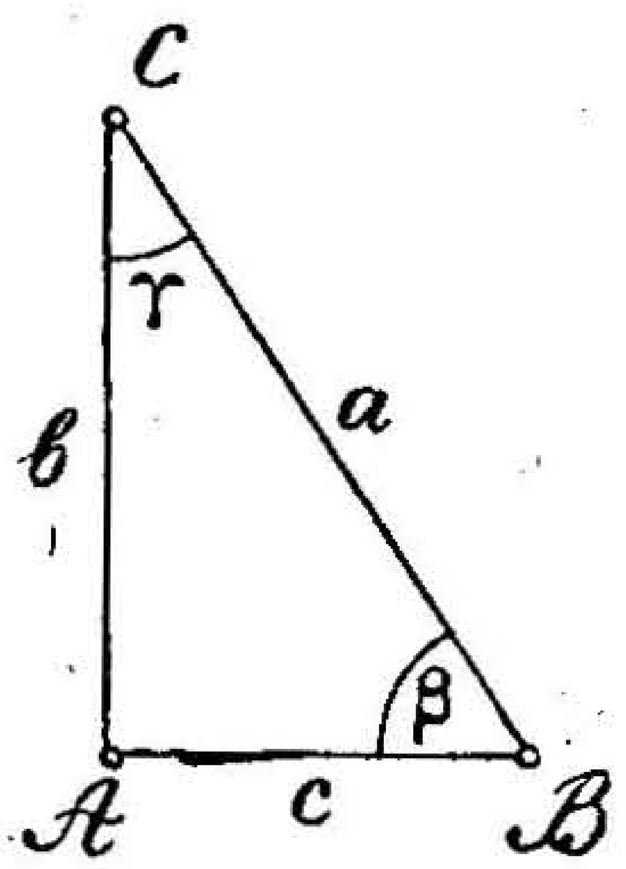
1) $\sin\ 5^0\,25'\,37''$ 3) $\cos 17^0\,18'\,20''$ 5) $\operatorname{tg} 28^0\,18'\,36''$
2) $\sin 51^0\ 8'\,40''$ 4) $\cos 82^0\,15'\,38''$ 6) $\operatorname{tg} 66^0\ 8'\,10''$
7) $\operatorname{cotg} 31^0\,6'\,28''$ 8) $\operatorname{cotg} 69^0\,10'15''$

Наћи углове кад је:

1) $\sin x = 0{,}52134$ 5) $\cos x = 0{,}78345$ 9) $\operatorname{tg} x = 1\frac{8}{9}$
2) $\sin x = 0{,}87356$ 6) $\cos x = \frac{3}{5}$ 10) $\operatorname{cotg} x = 0{,}51238$
3) $\sin x = \sqrt{\frac{5}{6}}$ 7) $\operatorname{tg} x = 0{,}81482$ 11) $\operatorname{cotg} x = 2{,}81345$ и
4) $\cos x = 0{,}49315$ 8) $\operatorname{tg} x = 1{,}85213$ 12) $\operatorname{cotg} x = 1{,}\dot{3}$

**§. 59. — Решавање код правоуглог троугла.** — Решити правоугли троугао значи наћи остале његове елементе ако су позната два његова елемента међу којима мора бити бар једна страна. Тригонометријско израчунавање непознатих елемената оснива се на следећим веома важним теоремама.

*Теорема 80.* — **Свака је катета једнака производу хипотенузе и синуса супротног угла, или производу хипотенузе и косинуса налеглог угла.** Заиста је из $\triangle\ ABC$ (сл. 175):



Сл. 175

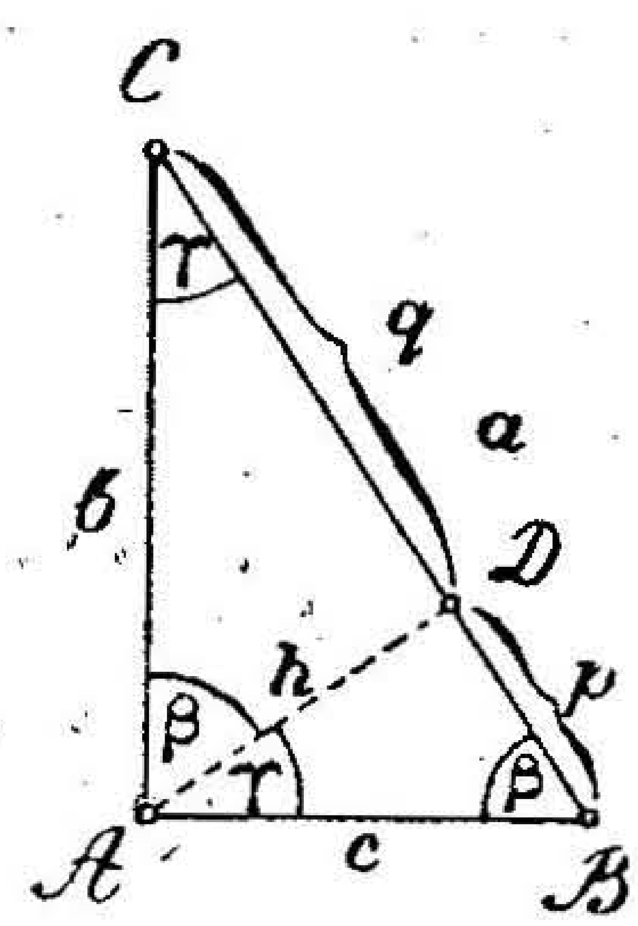
$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{b}{a}, \quad \text{а} \quad b = a\cdot\sin\beta;\\ \cos\gamma &= \frac{b}{a}, \quad \text{а} \quad b = a\cdot\cos\gamma;\\ \sin\gamma &= \frac{c}{a}, \quad \text{а} \quad c = a\cdot\sin\gamma \text{ и}\\ \cos\beta &= \frac{c}{a}, \quad \text{а} \quad c = a\cdot\cos\beta. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

*Теорема 81.* — **Свака је катета једнака производу од друге катете и тангенса супротног угла, или производу од друге катете и котангенса налеглог угла.** Заиста је из $\triangle\ ABC$ (сл. 175):

$$\left.\begin{aligned} tg\,\beta &= \frac{b}{c}, \quad \text{а} \quad b = c\cdot tg\,\beta; \quad tg\,\gamma = \frac{c}{b}, \quad \text{а} \quad c = b\cdot tg\,\gamma; \text{ и}\\ cotg\,\gamma &= \frac{b}{c}, \quad \text{а} \quad b = c\cdot cotg\,\gamma; cotg\,\beta = \frac{c}{b}, \quad \text{а} \quad c = b\cdot cotg\,\beta. \end{aligned}\right\} (2)$$

Једначине под (1) и (2) у којима се налазе увек по три елемента правоуглог троугла, пружају нам могућност за израчунавање једног елемента ако су друга два позната. Према овим једначинама, из правоуглих троуглова $ABD$ и $ADC$ (сл. 176) имамо:

1) $p = c\cdot\sin\gamma = c\cdot\cos\beta = h\cdot tg\,\gamma = h\cdot cotg\,\beta$;
2) $q = b\cdot\sin\beta = b\cos\gamma = h\cdot tg\,\beta = h\cdot cotg\gamma$ и
3) $h = c\ \sin\beta = c\cdot\cos\gamma = p\cdot tg\,\beta = p\cdot cotg\,\gamma = b\cdot\sin\gamma = b\cdot\cos\beta = q\cdot tg\,\gamma = q\cdot cotg\,\beta$, које нам једначине пружају могућност за израчунавање споредних елемената: $p$, $q$ и $h$. Главних случајева решавања правоуглог троугла има свега четири, кад су позната два главна елемента, и то: 1) кад је позната хипотенуза и једна катета ($a$ и $b$, или $a$ и $c$); 2) кад је позната хипотенуза и један оштар угао ($a$ и $\beta$, или $a$ и $\gamma$); 3) кад је позната катета и један оштар угао ($b$ и $\beta$ или $\gamma$, $c$ и $\beta$ или $\gamma$); и 4) кад су познате обе катете



Сл. 176

*Решени примери*:

1) *Позната је хипотенуза* $a = 12\ m$ *и катета* $b = 8\ m$; *наћи остале елементе* (сл. 176).

1) $\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0{,}66667$. Овде је угао $\beta < 45^0$. Приближно мања вредност је 0,66653, а њој одговара угао од $41^0\,48'$. Његове секунде $S = \frac{P\cdot 60}{D} = \frac{14\cdot 60}{22} = 38''$. Стога је $\sphericalangle\,\beta = 41^0\,48'\,38''$.

2) $\sphericalangle\,\gamma = 90^0 - \beta = 48^0\,11'\,22''$.

3) $c = a\cdot\cos\beta = 12\cdot\cos 41^0\,48'\,38'' =$
$= 12\cdot 0{,}74536 = 8{,}94432 = 8{,}94\ m$.

4) $h = b\cdot\cos\beta = 8\cdot\cos 41^0\,48'\,38'' = 8\cdot 0{,}74536 =$
$= 5{,}96288 = 5{,}95\ m$.

5) $q = b\cdot\sin\beta = 8\cdot\sin 4\ ^0\,48'\,38'' = 7\cdot 0{,}66667 =$
$= 5{,}33346 = 5{,}33\ m$.

6) $p = a - q = 12 - 5{,}33 = 6{,}67\ m$.

2) *Позната је хипотенуза* $a = 125\ cm$ *и* $\sphericalangle\,\gamma = 42^0 15' 35''$; *наћи остале елементе* (сл. 176).

1) $\sphericalangle\,\beta = 90^0 - \gamma = 47^0\,44'\,25''$ 2) $b = a\sin\beta = 125.$ $\sin 47^0\,44'\,25'' = 125\cdot 0{,}74010 = 92{,}512 = 92{,}51\ cm.$ 3) $c =$ $a\cdot\sin\gamma = 125\cdot\sin 42^0\,15'\,35'' = 125\cdot 0{,}67249 = 84{,}061 = 84{,}06\ cm.$

Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

4) *Позната је катета* $b = 8\ cm$ *и катета* $c = 6\ cm$; *наћи остале елементе* (сл. 176).

1) $tg\,\beta = \frac{b}{c} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1{,}33333.$ Овде је $\sphericalangle\,\beta > 45^0$.

Приближно мања вредност је 1,33268, а њој одговара угао од $53^0\,7'$.

Његове секунде $S = \frac{P\cdot 60}{D} = \frac{65\cdot 60}{81} = 48''$. Стога је $\sphericalangle\,\beta = 53^0\,7'\,48''$.

2) $\sphericalangle\,\gamma = 90^0 - \beta = 36^0\,52'\,12''$.

3) Из $b = a\sin\beta$ је $a = \frac{b}{\sin\beta}$, а $\frac{1}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{0{,}79996}{8} =$

$= 0{,}099\,995 = 0{,}10$, а $a = \frac{1}{0{,}10} = \frac{100}{10} = 10\ cm$.

Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

3) *Позната је катета* $b = 22\ cm$ *и угао* $\beta = 35^0\,50'$; *наћи остале елементе* (сл. 176).

1) $\sphericalangle\,\gamma = 90^0 - \beta = 54^0\,10'$.

2) $c = b \cdot tg\,\gamma = 22 \cdot 1{,}38484 = 30{,}46648 = 30{,}47\ cm.$

3) Из $b = a\,sin\,\beta$ је $a = \dfrac{b}{sin\,\beta} = \dfrac{22}{0{,}58543} = 2200000 :$ $: 58543 = 37{,}57\ cm.$

Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

**Примери за вежбу**

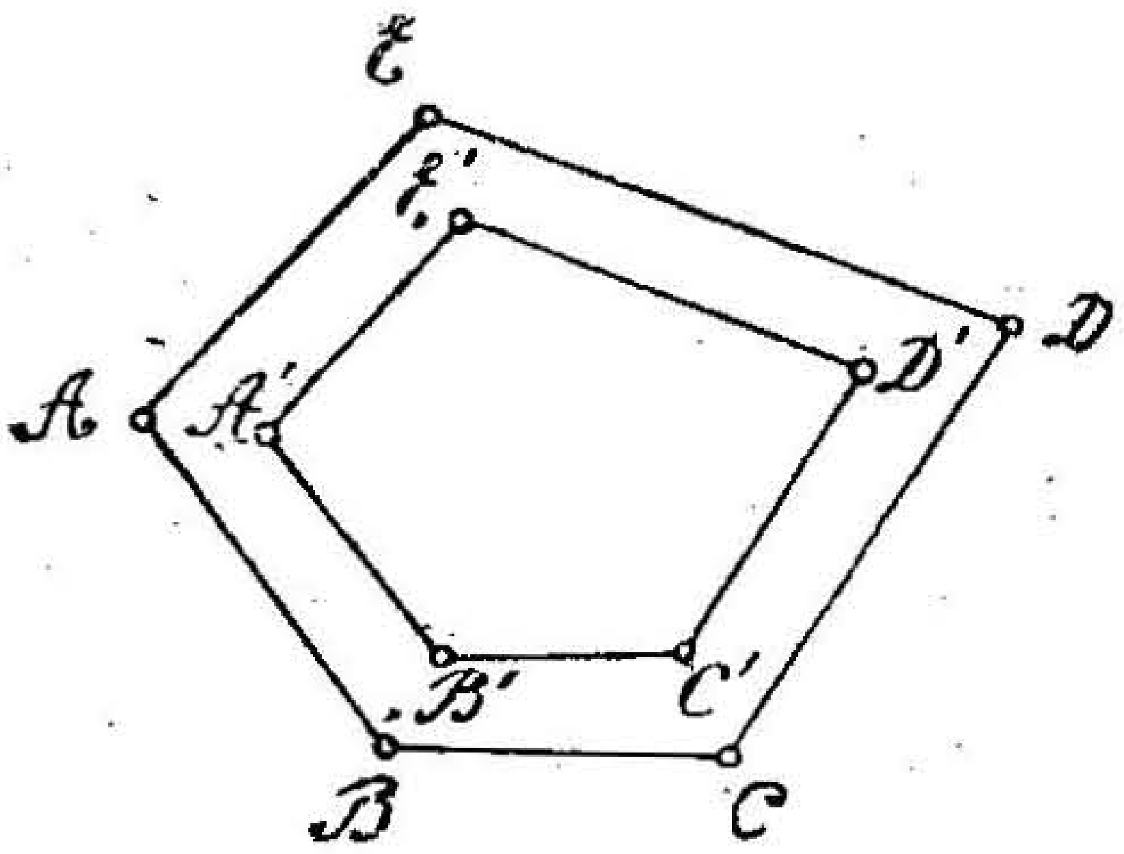
1) Решити правоугли троугао када су познате: a) хипотенуза 237 *m* а једна катета 194 *m*; b) хипотенуза 150 *m* а један оштар угао $62^0\ 25'\ 40''$; c) катете 320 и 280 *m*; d) једна катета 88 *m* а један оштар угао $52^0\ 7'\ 45''$.

2) Решити правоугли троугао када је: a) хипотенуза $a = 27\ m$ а $\beta : \gamma = 3 : 5$; b) катета $b = 58\ m$, а $\beta : \gamma = 6 : 7$; c) хипотенуза $a = 10\ m$ а размера катета $b : c = 4 : 3$; d) катета $b = 80$, а размера друге катете и хипотенузе $3 : 5$.

3) Наћи углове ромба чије су дијагонале 16 *m* и 12 *m*.

## III. Сличност равних слика

**§ 60. — О сличности равних слика уопште.** — За две равне праволиниске слике каже се да су сличне ако имају исте облике а различите површине. Код сличних слика су хомологи (одговарајући) углови једнаки, а хомологе стране пропорционалне. Тако, петоуглови $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ (сл. 177) биће слични ако су им углови: $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, $C$ и $C'$, $D$ и $D'$, $E$ и $E'$ једнаки, а стране дају пропорцију: $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A'$.



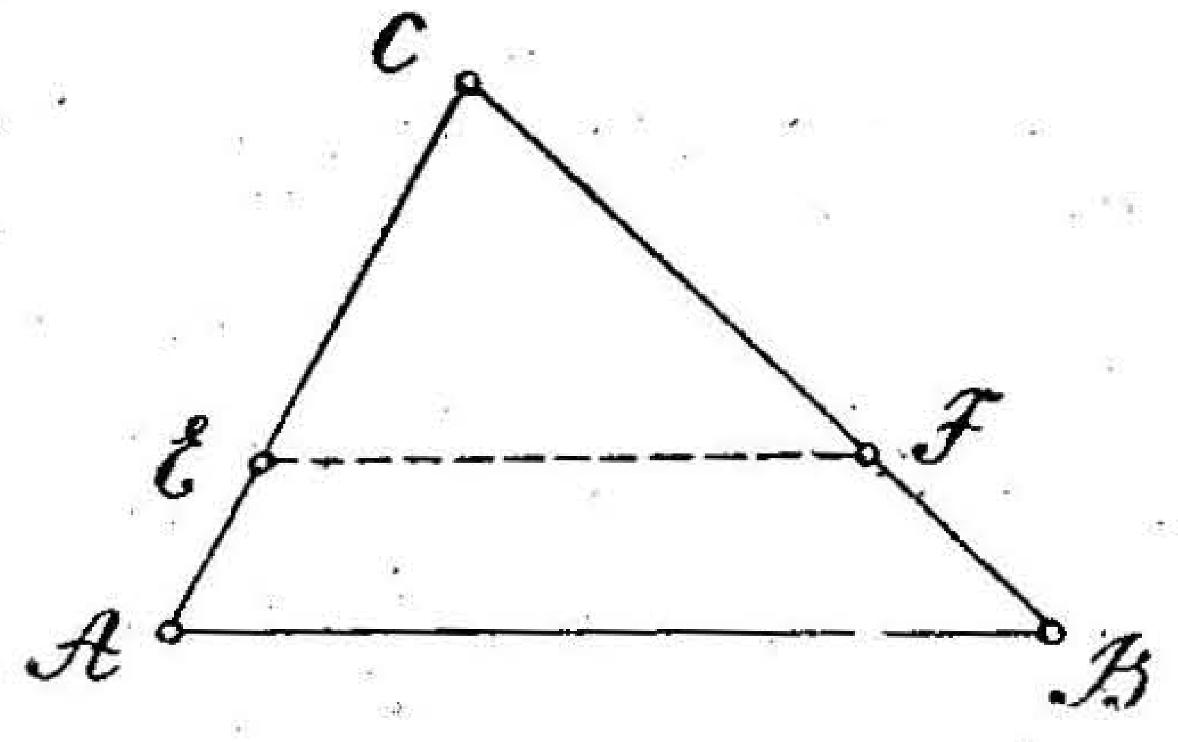
Сл. 177

Стална вредност размере ма којих двеју хомологих страна двеју сличних слика зове се *експонент* или *модуо сличности* тих слика. Код сличних троуглова хомологе стране су супротне хомологим угловима. Знак сличности је $\sim$ (почетно слово латинске речи similis).

*Теорема 82.* — **Ако из ма које тачке троуглове стране повучемо паралелну с другом страном, добија се троугао сличан датом троуглу.** Нека је $EF \parallel AB$ (сл. 178). Тада, сматрајући $CA$ и $CB$ као два зрака, а $EF$ и $AB$ као две паралелне трансверзале, биће, према 73 и 74 теореми (§ 54):

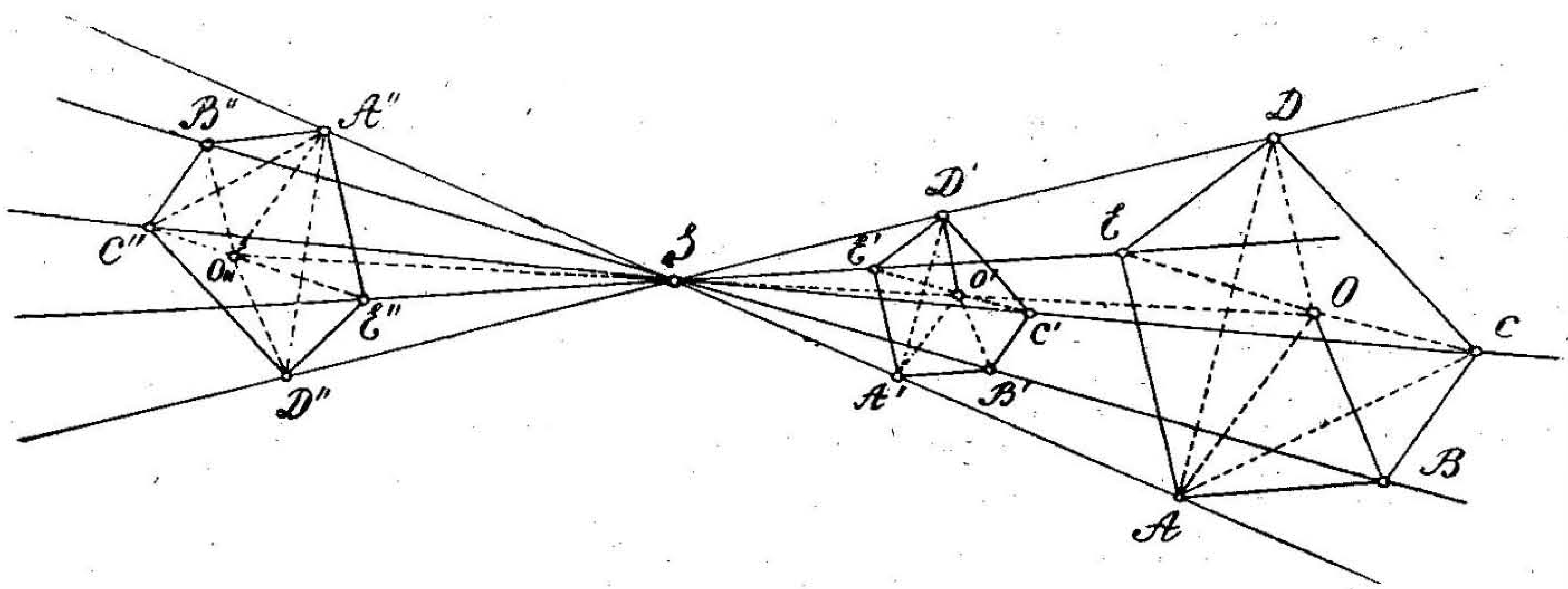
$$AC : CE = BC : CF = AB : EF.$$

Па како су још углови $A$ и $E$, $B$ и $F$ једнаки као сагласни, а угао $C$ је заједнички за оба троугла $ABC$ и $EFC$, то су ови троуглови заиста слични, пошто имају хомологе углове једнаке а хомологе стране пропорционалне.




Сл. 178

*Теорема 83.* — **Две равне слике сличне су ако њихове хомологе стране (хомолога темена) деле зраке зрачнога снопа на пропорционалне отсечке.** Нека темена петоуглова $A\,B\,C\,D\,E$, $A'B'C'D'E'$ и $A''B''C''D''E''$ деле зраке зрачног снопа $S$ (сл. 179) на пропорционалне отсечке. Тада су хомологе стране




Сл. 179

поменутих петоуглова, према 76 теореми (§ 54), паралелне, а по трећем ставу 75 теореме, пропорционалне. Па како су и хомологи углови ових петоуглова једнаки, пошто су им краци паралелни, то су ти петоуглови заиста слични.

*Напомена 1.* — Из ове је теореме јасно да се ма које две сличне слике дају тако положити на зраке зрачнога снопа, да им хомолога темена леже на истом зраку и да се тада зраци снопа деле на пропорционалне отсечке. Сличне слике стављене у овакав положај зову се *перспективне*, или: оне се налазе у *перспективном* положају. Сличне слике у перспективном положају имају хомологе стране и дијагонале у истом или супротноме смислу паралелне, што зависи једино од тога да ли се те две слике налазе са исте стране или на супротним странама центра $S$ зрачног снопа. Центар $S$ зове се *тачка сличности* перспективних слика, и то за $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ *спољашња*, а за $ABCDE$ и $A''B''C''D''E''$ *унутрашња* тачка сличности.

*Напомена 2.* — Ако су тачке: $A, B, C, D$ и $E$ на периферији једнога круга, онда су и тачке: $A', B', C', D'$ и $E'$ ($A'', B'', C'', D'', E''$) на периферији другога круга. Да је ова напомена тачна, доказујемо на следећи начин. Ако претпоставимо да је тачка $O$ центар круга који је описан око петоугла $ABCDE$, а тачка $O'$ ($O''$) лежи на зраку $SO$, онда је по трећем ставу теореме 75: $AO : A'O'$ $(A''O'') = BO : B'O'$ $(B''O'') = CO : C'O'$ $(C''O'')\ldots$ Па како је $AO = BO = CO\ldots$, то је и $A'O' = B'O' = C'O' = \ldots$ $(A''O'' = B''O'' = C''O'' = \ldots)$, што значи да су и тачке: $A', B', C', D'$ и $E'$ ($A'', B'', C'', D'', E''$) подједнако удаљене од тачке $O'$ ($O''$), тј. да се налазе на периферији једнога круга.

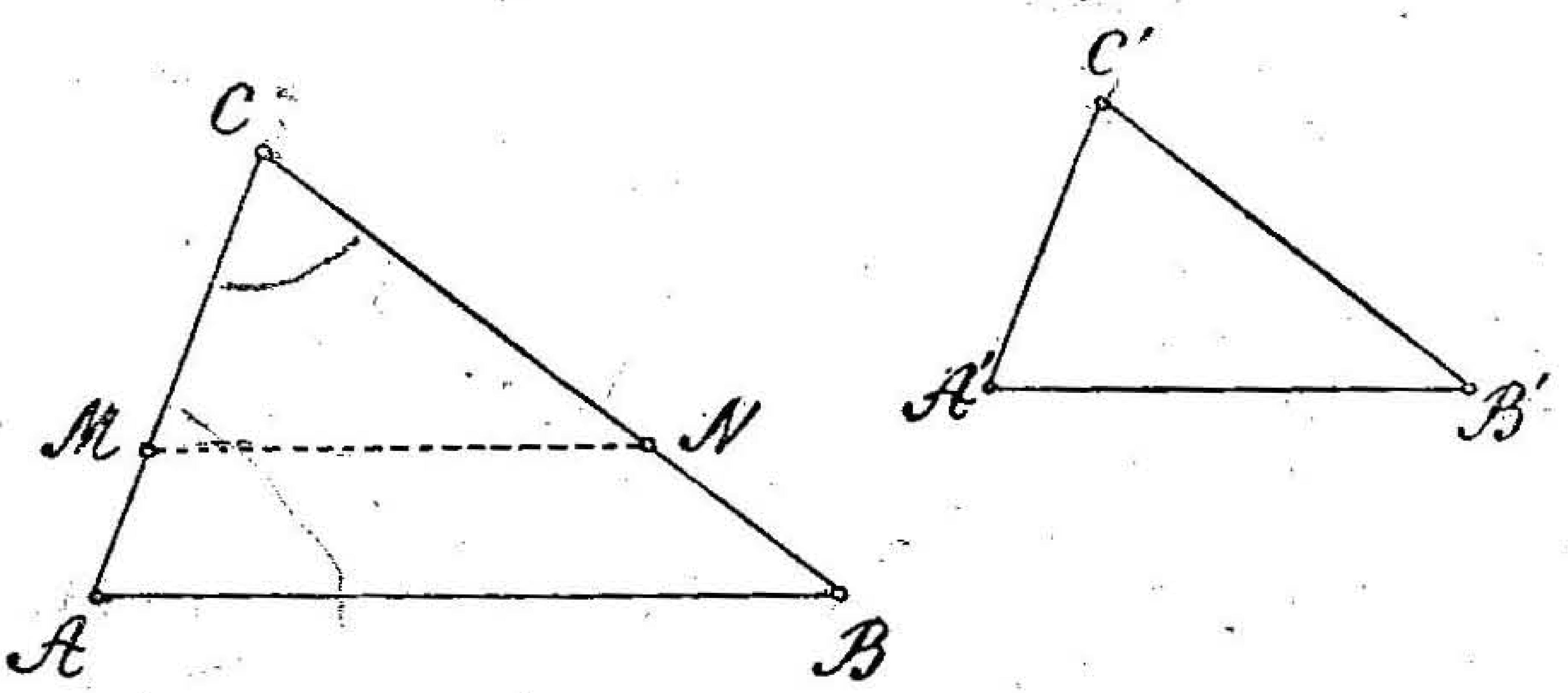
*Напомена 3.* — Ако се две сличне слике налазе у перспективном положају са исте стране или на супротним странама њихове тачке сличности, онда је модуо сличности тих слика једнак вредности размере отсечака зракова зрачнога снопа, или је једнак вредности размере ма којих двеју њихових хомологих дијагонала, или је једнак вредности размере полупречника описаних или уписаних кругова. Заиста је из сл. 179:

$$AB : A'B' \ (A''B'') = BC : B'C' \ (B''C'') = CD : C'D' \ (C''D'') = \ldots = SA : SA' \ (SA'') = SB : SB' \ (S''B'') = SC : SC' \ (SC'') = \ldots = AC : A'C' \ (A''C'') = AD : A'D' \ (A''D'') = \ldots = AO : A'O' \ (A''O'') = BO : B'O' \ (B''O'') = \ldots$$

Ако су перспективне слике са исте стране њихове тачке сличности, онда њихов модуо сличности има позитивну вредност, а ако су на супротним странама, негативну вредност. Подударне слике имају модуо $+1$, а симетричне $-1$. Дакле, разлика између подударних и сличних слика је та што је модуо код првих једнак јединици, а код других различит је од јединице.

**§ 61. — Сличност троуглова.** — И код сличних троуглова, као код осталих сличних слика, хомологи су углови једнаки, а хомологе стране пропорционалне. Међутим, није потребно да знамо да су углови једнога троугла једнаки са угловима другога троугла и да су им стране пропорционалне, па да смо начисто да су ти троуглови слични. Њихова сличност биће загарантована ако само три елемента једнога троугла буду једнака, односно пропорционална, са истим бројем хомологих елемената другога троугла, јер смо у стању да докажемо тада једнакост, односно пропорционалност, и осталих њихових елемената, а тиме и сличност троуглова. Отуда, као и за подударност троуглова, имамо четири правила о сличности троуглова, и то:

*Теорема 84.* — **Два су троугла слична ако су им углови једнаки** (довољно по два угла — I правило сличности). Нека је код троуглова $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 180) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ (онда је и $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ као допуна до $180^0$). Да бисмо доказали њихову сличност, треба још да докажемо пропорционалност њихових хомологих страна. Тога ради




Сл. 180

преносимо страну $A'C'$ на $AC$ $(CM = C'A')$ и из тачке $M$ повлачимо $MN \parallel AB$. Тада је по 82 теореми $\triangle\ MNC \sim ABC$, јер имају једнаке углове и пропорционалне стране. Па како је $\triangle\ MNC \cong A'B'C'$, јер имају по једну страну и углове једнаке ($MC = A'C'$, $\measuredangle\ M = \measuredangle\ A'$, пошто су оба једнака са $\measuredangle\ A$, и $\measuredangle\ C = \measuredangle\ C'$), то је и $\triangle\ A'B'C'$, као подударан са $\triangle\ MNC$, сличан са $\triangle\ ABC$.

*Последица. — Два правоугла троугла биће слична ако имају само по један оштар угао једнак; сви равнострани троуглови неједнаких страна слични су; два равнокрака троугла биће слична ако имају само по један угао једнак.*

*Теорема 85.* — **Два су троугла слична, ако имају по две стране пропорционалне и захваћене углове једнаке** (II правило сличности). Нека је код троуглова $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 180): $AC : A'C' = BC : B'C'$ и $\measuredangle\ C = \measuredangle\ C'$. Да бисмо доказали њихову сличност, преносимо опет страну $A'C'$ на $AC$ $(CM = C'A')$ и из тачке $M$ повлачимо $MN \parallel AB$. Тада је по 82 теореми прећашњег параграфа $\triangle\ MNC \sim \triangle\ ABC$, те је $AC : MC = BC : NC$. Ако ову пропорцију упоредимо са даном пропорцијом, увиђамо да су им прва три члана једнака. Стога су им једнаки и четврти чланови, тј. $NC = B'C'$. Тада је $\triangle\ MNC \cong \triangle\ A'B'C'$, јер имају по две стране и захваћене углове једнаке $(MC = A'C'$, $NC = B'C'$, $\measuredangle\ C = \measuredangle\ C')$. Стога је и $\triangle\ A'B'C'$, као подударан са $\triangle\ MNC$, сличан са $\triangle\ ABC$.

*Последица. — Правоугли троуглови су слични ако су им катете пропорционалне.*

*Теорема 86.* — **Два су троугла слична ако имају по две стране пропорционалне, а углове наспрам већих од тих страна једнаке** (III правило сличности). Нека је код троуглова $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 180) страна $BC > AC$, $B'C' > A'C'$, $AC : A'C' = BC : B'C'$ и $\measuredangle\ A = \measuredangle\ A'$. Да бисмо доказали њихову сличност, опет преносимо страну $A'C'$ на $AC$ ($MC = A'C'$) и из тачке $M$ повлачимо $MN \parallel AB$. Тада је по 82 теореми $\triangle\ MNC \sim \triangle\ ABC$, те је $AC : MC = BC : NC$. Упоређивањем ове пропорције са даном пропорцијом, увиђамо да су им њихови четврти чланови $NC$ и $B'C'$ једнаки. Тада је $\triangle\ MNC \cong \triangle\ A'B'C'$, јер имају по две стране једнаке ($MC = A'C'$, $NC = B'C'$), а углове наспрам већих од тих страна једнаке ($\sphericalangle\ M = \sphericalangle\ A'$, пошто су оба једнака са $\sphericalangle\ A$). Стога је и $\triangle\ A'B'C'$, као подударан са $\triangle\ MNC$, сличан са $\triangle\ ABC$.

*Теорема 87.* — **Два су троугла слична ако су им стране пропорционалне** (IV правило сличности). Нека је код троуглова $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 180):

1) $AC : A'C' = BC : B'C'$ и 2) $AC : A'C' = AB : A'B'$.

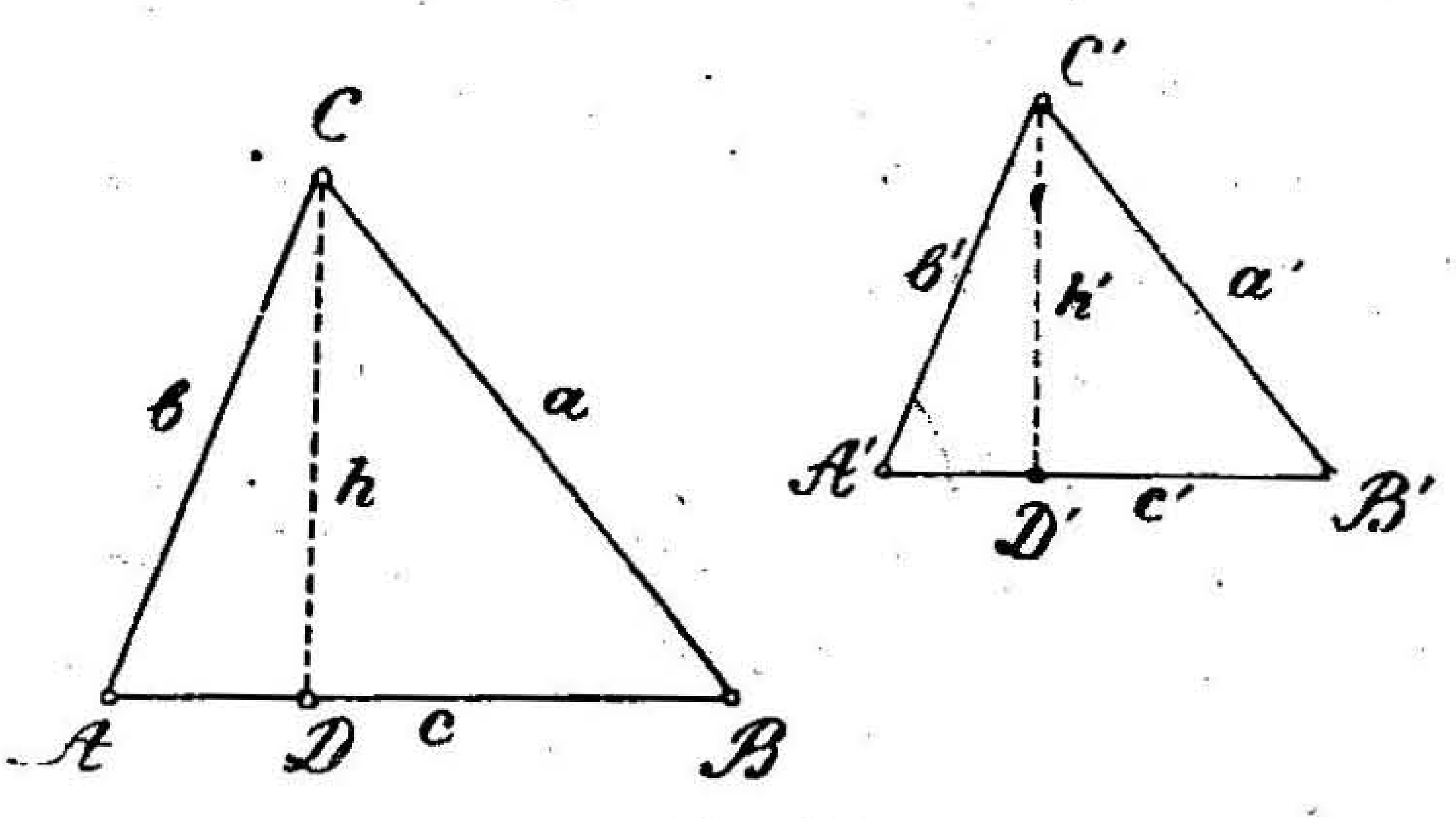
Ако страну $A'C'$ пренесемо на $AC$, а страну $B'C'$ на $BC$ ($MC = A'C'$ и $NC = B'C'$), па тачке $M$ и $N$ спојимо, онда је према првој датој пропорцији: $AC : MC = BC : NC$. Тада је по 76 теореми $MN \parallel AB$, те је $\triangle\ MNC \sim \triangle\ ABC$ (теорема 82). Из сличности ових троуглова излази да је: $AC : MC = AB : MN$. Ако ову пропорцију упоредимо са другом датом пропорцијом, налазимо да су им једнаки и четврти чланови $MN$ и $A'B'$. Тада су троуглови $MNC$ и $A'B'C'$ подударни, пошто имају стране једнаке. Стога је и $\triangle\ A'B'C'$, као подударан са $\triangle\ MNC$, сличан са $\triangle\ ABC$.

*Напомена.* — Од горња четири правила најчешћу примену има прво правило, пошто нам је најлакше доказати сличност троуглова доказивањем једнакости само два њихова угла, применом теорема о једнакости углова (2, 7, 14, 15, 59, 66).

## IV. Примена правила сличности троуглова

### § 62. — Примена правила сличности код самих троуглова

*Теорема 88.* — **Код сличних троуглова ма које две хомологе висине пропорционалне су са ма којим двема хомологим странама.**




Сл. 181

Нека су троуглови $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 181) слични, тј. нека је $a : a' = b : b' = c : c'$ и $\sphericalangle\ A = \sphericalangle\ A'$, $\sphericalangle\ B = \sphericalangle\ B'$ и $\sphericalangle\ C = C'$. Ако им спустимо хомологе висине $CD$ и $C'D'$, онда су троуглови $ADC$ и $A'D'C'$ слични, пошто имају једнаке углове. Стога је: $h : h' = b : b'$. Па како је

$b:b' = a:a' = c:c'$, то је и $h:h' = a:a'$ и $h:h' = c:c'$.

*Теорема 89.* — **Обими сличних троуглова имају се као ма које две хомологе стране, или као ма које две хомологе висине.** Нека су троуглови $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 181) слични, тј. нека је: $a : a' = b : b' = c : c'$, а хомологи углови једнаки. Тада из дате продужене пропорције имамо:

$(a + b + c) : (a' + b' + c') = a : a' = b : b' = c : c'$. Заменом $a + b + c = 0$, $a' + b' + c' = 0'$, имамо: $0 : 0' = a : a' = b : b' = c : c'$. Најзад, заменом десне размере са $h : h'$, према претходној теореми, добијамо: $0 : 0' = h : h'$.

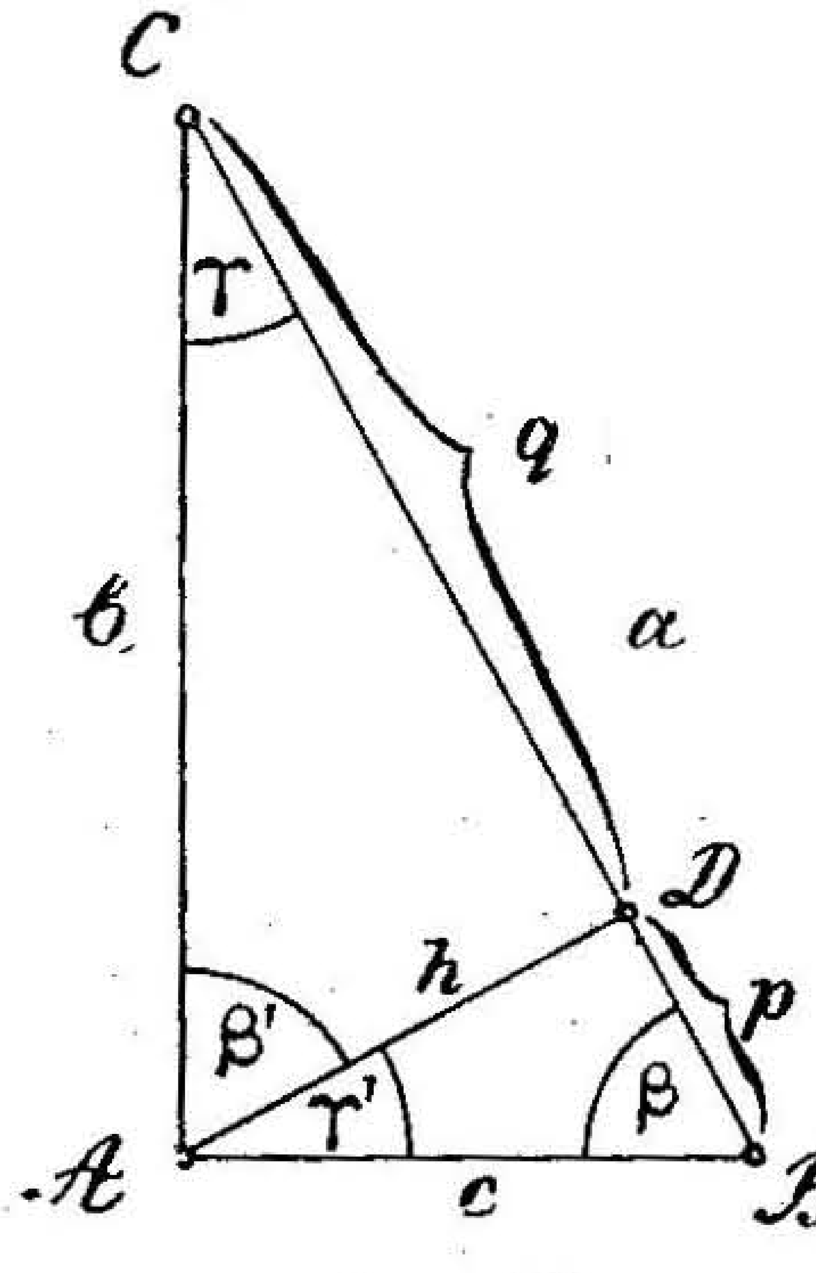
*Теорема 90.* — **Површине сличних троуглова имају се као квадрати ма којих двеју хомологих страна или висина.** Нека су троуглови $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 181) слични, тј. нека је $a : a' = b : b' = c : c'$, а хомологи углови једнаки. Тада је и $a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = c^2 : c_1^2$, а према теореми 88 је $h : h' = c : c'$. Ако I и III члан ове пропорције помножимо са $c$, а II и IV са $c_1$, што смемо чинити, пошто се пропорција не мења, ако један спољашњи и један унутрашњи члан помножимо једним истим бројем онда добијамо пропорцију $ch : c'h' = c^2 : c_1^2$. Дељењем I и II члана ове пропорције са 2, добијамо: $\frac{ch}{2} : \frac{c'h'}{2} = c^2 : c_1^2$, или, заменом $\frac{ch}{2}$ са $P$, а $\frac{c'h'}{2}$ са $P'$, имамо:

$$P : P' = c^2 : c_1^2.$$

Па како се десна размера ове пропорције да̂ заменити са $a^2 : a'^2$, или $b^2 : b'^2$, или $h^2 : h'^2$, то је и:

$$P : P' = a^2 : a'^2 = b^2 : b'^2 = h^2 : h'^2$$

*Теорема 91.* — **Код правоуглог троугла је: а) свака катета средња пропорционала између целе хипотенузе и оближњег отсечка; в) квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама** *(Питагорино правило)*; **с) хипотенузина висина је средња пропорционала између отсечака хипотенузиних.** *а)* Спуштањем висине $AD$, правоугли се троугао $ABC$ (сл. 182) дели на два правоугла троугла $ADB$ и $ADC$, који су слични не само међу собом, већ је сваки од њих сличан са $\triangle ABC$. Тако, $\triangle ADB \sim \triangle ABC$, јер имају углове једнаке ($\beta$ им је заједнички, $\sphericalangle D = \sphericalangle A = 90^0$, $\sphericalangle \gamma = \gamma'$, пошто имају нормалне краке, или као допуна до $180^0$). Стога је: $\boldsymbol{a : c = c : p}$ (1). Из сличности троуглова $ADC$ и $ABC$ нашли бисмо истим путем да је: $\boldsymbol{a : b = b : q}$ (2), чиме је први део ове теореме доказан.



Сл. 182

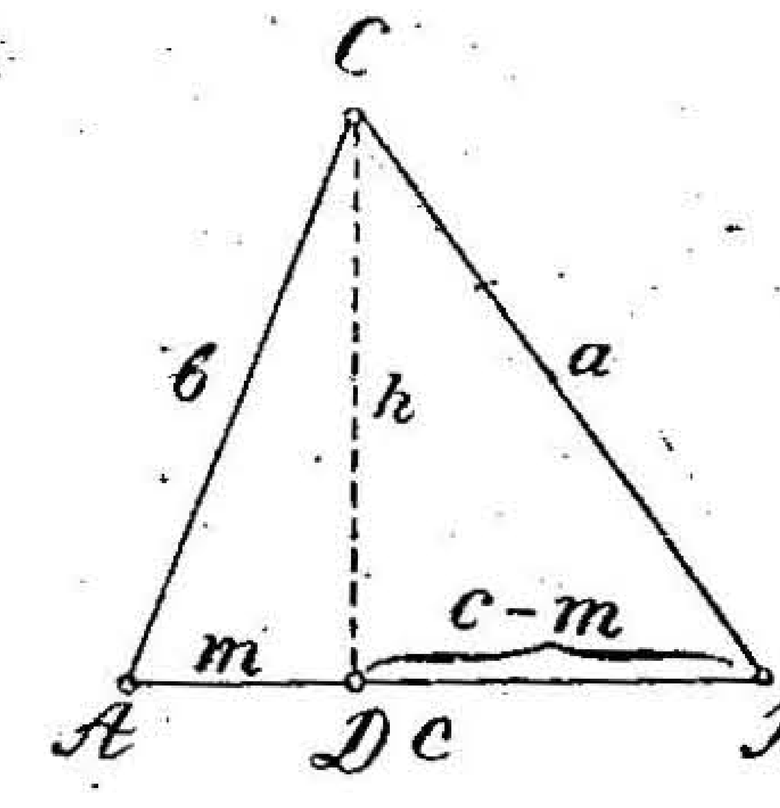
*b)* Из пропорције (1) имамо: $\boldsymbol{ap=c^2}$ (I), а из пропорције (2) имамо: $\boldsymbol{aq=b^2}$ (II). Сабирањем једначина (I) и (II) добијамо: $aq+ap=b^2+c^2$, или $a(q+p)=b^2+c^2$, или $\boldsymbol{a^2=b^2+c^2}$, чиме је доказан и други део ове теореме.

*c)* $\triangle ADB \sim \triangle ADC$, јер имају углове једнаке ($\beta=\beta'$ и $\gamma=\gamma'$, пошто су им краци нормални). Стога је: $\boldsymbol{q:h=h:p}$, чиме је доказан и трећи део ове теореме.

*Напомена.* — Једначине: 1) $a^2=b^2+c^2$, 2) $a:b=b:q$ (или $b^2=aq$), 3) $a:c=c:p$ (или $c^2=ap$) и 4) $q:h=h:p$ (или $h^2=pq$) имају велику примену у геометрији. Помоћу ових једначина и тригонометриских једначина из § 59 (теореме 80 и 81) израчунавамо све остале елементе правоуглога троугла ако знамо ма која два од елемената: $a$, $b$, $c$, $\beta$ или $\gamma$, $p$, $q$, и $h$.

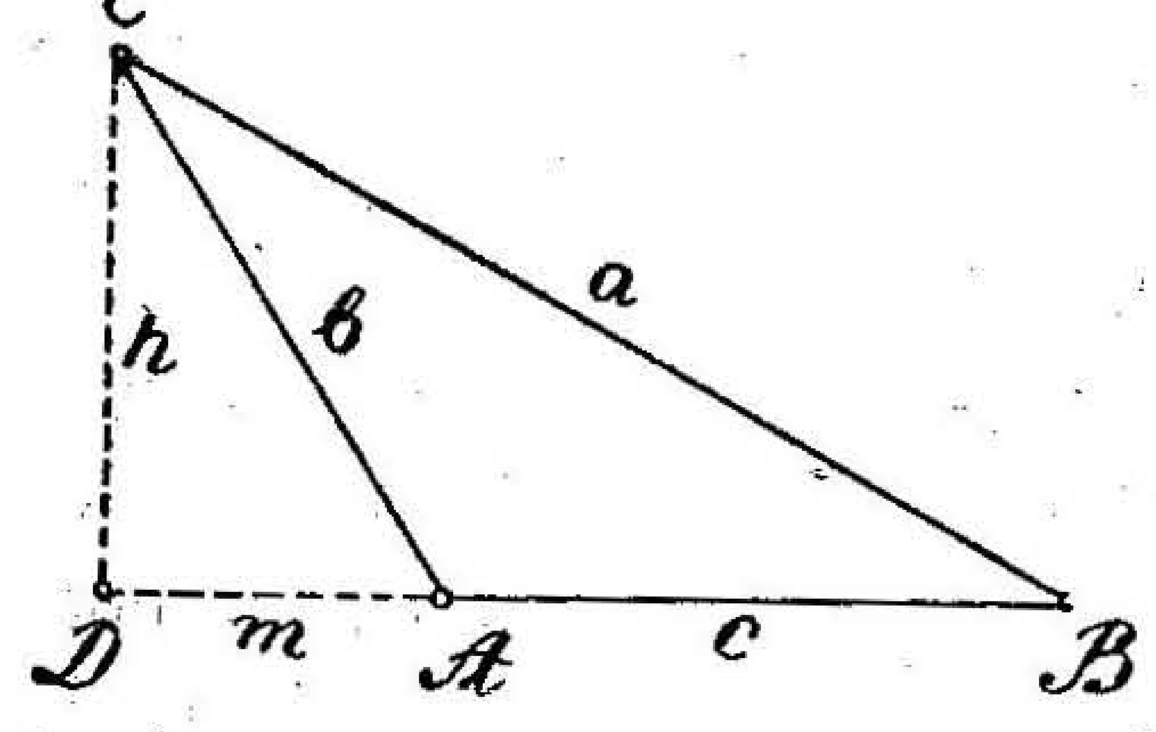
На основу ове теореме тачне су и следеће три теореме:

*Теорема 92.* — **Квадрат стране наспрам оштрог угла једнога троугла једнак је збиру квадрата других двеју страна, мање двоструки производ од једне од тих страна и пројекције друге стране на њој.** Заиста је из $\triangle BCD$ (сл. 183): $a^2=h^2+(c-m)^2$ (1), а из $\triangle ADC$: $h^2=b^2-m^2$ (2). Заменом у (1) $h^2$ са $b^2-m^2$, добијамо: $a^2=b^2-m^2+(c-m)^2$, или $a^2=b^2-m^2+c^2-2cm+m^2$, или $\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2cm}$.



Сл. 183

*Теорема 93.* — **Квадрат стране наспрам тупог угла једнога троугла једнак је збиру квадрата других двеју страна, више двоструки производ од једне од тих страна и пројекције друге стране на њој.** Заиста је из $\triangle BCD$ (сл. 184):

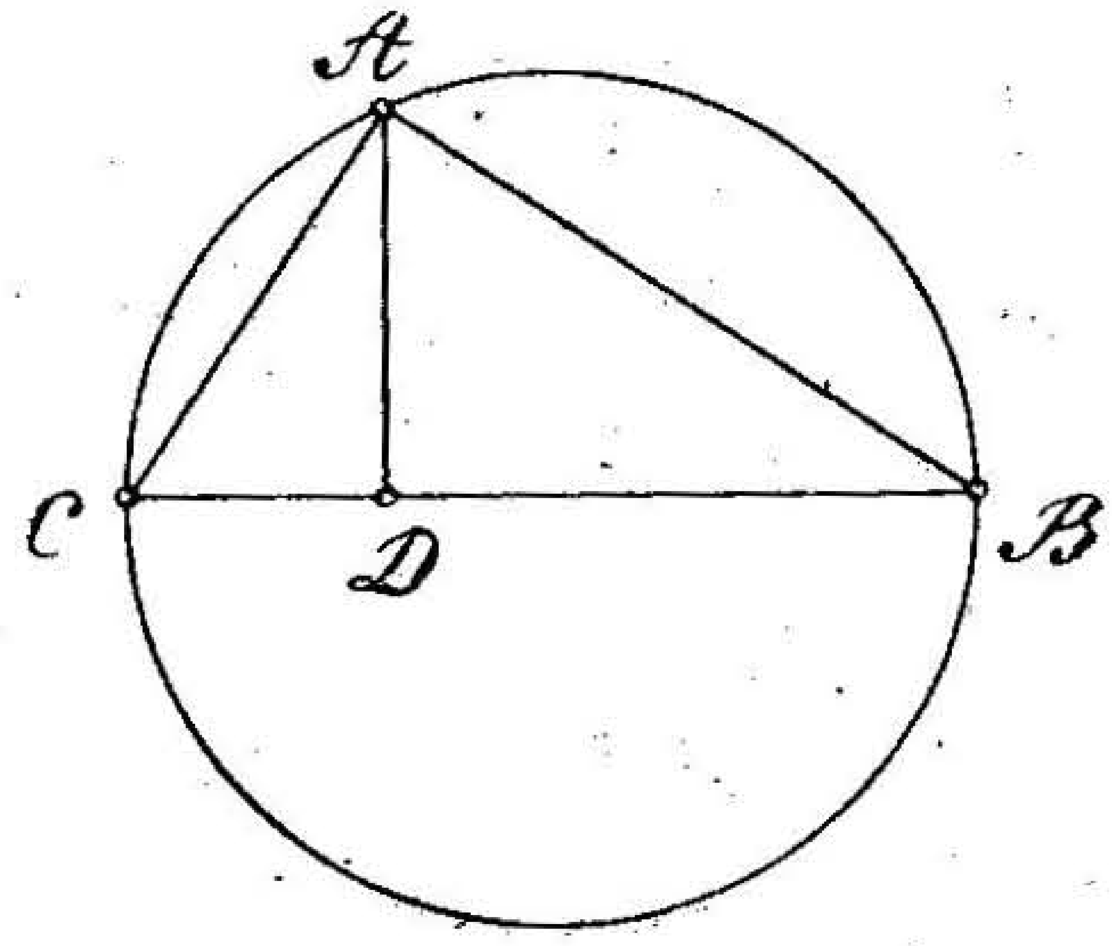


Сл. 184

$a^2=h^2+(c+m)^2{}_{(1)}$, а из $\triangle ACD$: $h^2=b^2-m^2{}_{(2)}$. Заменом у (1) $h^2$ са $b^2-m^2$ добијамо: $a^2=b^2-m^2+c^2+2cm+m^2$, или $\boldsymbol{a^2=b^2+c^2+2cm}$.

*Теорема 94.* — **Ако ма коју тачку кружне периферије спојимо са крајњим тачкама једнога пречника, онда је: а) свака тетива**

**средња пропорционала између целог пречника и њене пројекције на пречнику; b) нормала** $AD$ (сл. 185) **средња је пропорционала између обе пројекције тетива на пречнику.**



Сл. 185

Везивањем периферискe тачке $A$ са крајњим тачкама пречника $CB$ и спуштањем нормале $AD \perp CB$ добијамо правоугли троугао $ABC$, код кога је пречник хипотенуза, тетиве катете, а нормала $AD$ хипотенузина висина. Стога је по 91 теореми: а) $BC : AC = AC : CD$ и $BC : AB = AB : BD$; и b) $BD : AD = AD : CD$.

**§ 63. — Примена правилâ сличности код полигона.** — Као што је раније наговештено (§ 60), за два многоугла каже се да су слични ако имају хомологе углове једнаке, а хомологе стране пропорционалне. Међутим, као и за сличност троуглова, тако и за сличност многоулова, није потребно да знамо да су сви углови једнога многоугла једнаки са хомологим угловима другога многоугла и да су све стране првога многоугла пропорционалне са хомологим странама другога многоугла, па да будемо убеђени да су дотични многоуглови слични. Њихова сличност биће загарантована ако знамо мањи број погодбених једначина за једнакост њихових углова и пропорционалност њихових страна. Број тих погодбених једначина је **2n — 4**, о чему се уверавамо на следећи начин. — За подударност троуглова потребно је било 3 погодбене једначине, а за сличност 2, дакле једна мање; за подударност четвороуглова било је потребно 5 погодбених једначина (теорема 37), а за њихову сличност потребно је 4, јер две хомологе дијагонале деле сличне четвороуглове на по два пара сличних троуглова, дакле опет једна мање; за подударност петоуглова било је потребно 7 погодбених једначина, а за сличност 6, због деобе петоуглова хомологим дијагоналама на по три пара сличних троуглова, дакле опет једна мање итд. Из свега овога види се да је за сличност многоуглова потребно увек једна погодбена једначина мање него што је потребно за њихову подударност. Па како је број погодбених једначина за подударност многоуглова **2n — 3**, то је за њихову сличност потребно **2n — 4** погодбених једначина.

На основу теореме 83 (§ 60) и њених напомена, очевидне су следеће теореме о сличности многоуглова:

*Теорема 95.* — **Код сличних многоуглова, ма које две хомологе дијагонале пропорционалне су са ма којим двема хомологим странама;**

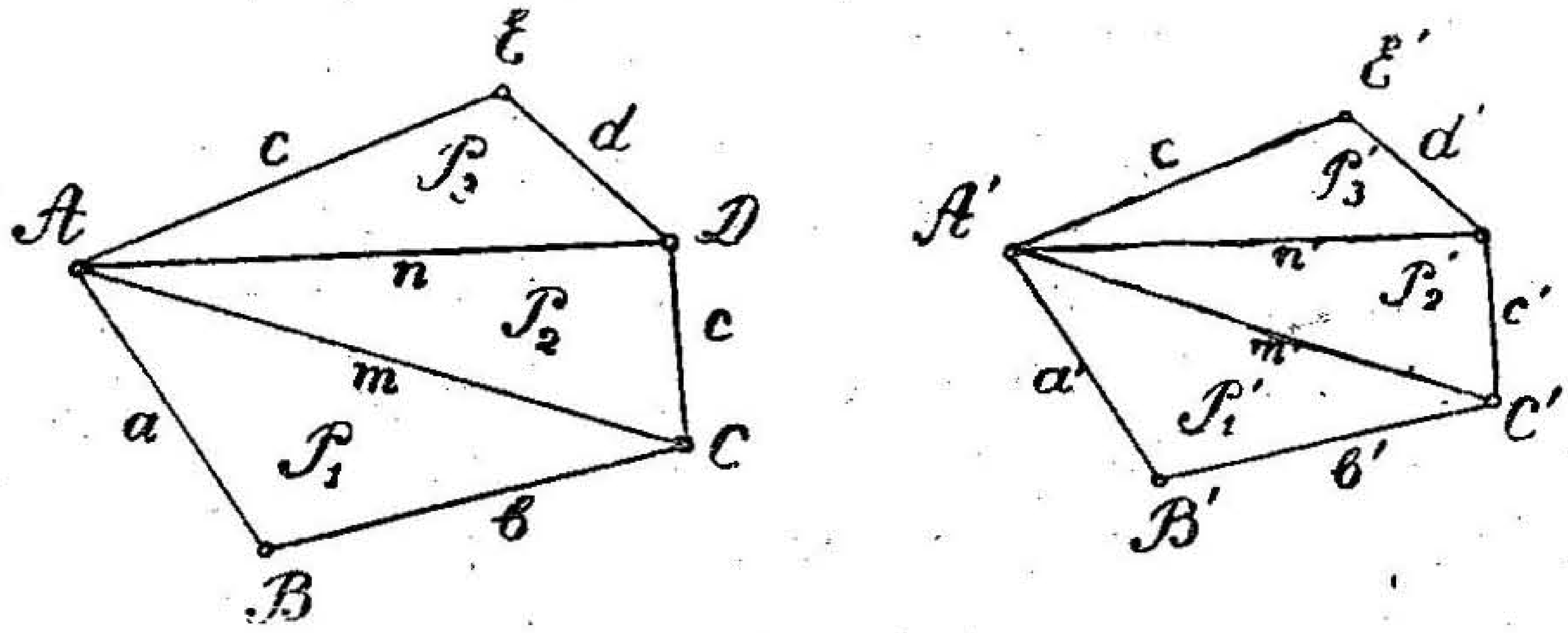
*Теорема 96.* — **Два полигона састављена од истог броја сличних троуглова, истим редом положених, слични су;**

*Теорема 97.* — **Слични полигони деле се хомологим дијагоналама на сличне троугле;**

*Теорема 98.* — **Правилни полигони од истог броја страна слични су;**

*Доказ.* — Ако је вредност размере (модуо сличности) двеју хомологих страна $m$, онда је иста вредност размере и ма којих других двеју хомологих страна, пошто су стране једнаке код сваког правилног полигона. Па како имају и једнаке углове, то су ти многоугли слични.

*Теорема 99.* — **Обими сличних полигона имају се као ма које две хомологе стране, или као ма које две хомологе дијагонале.**




Сл. 186

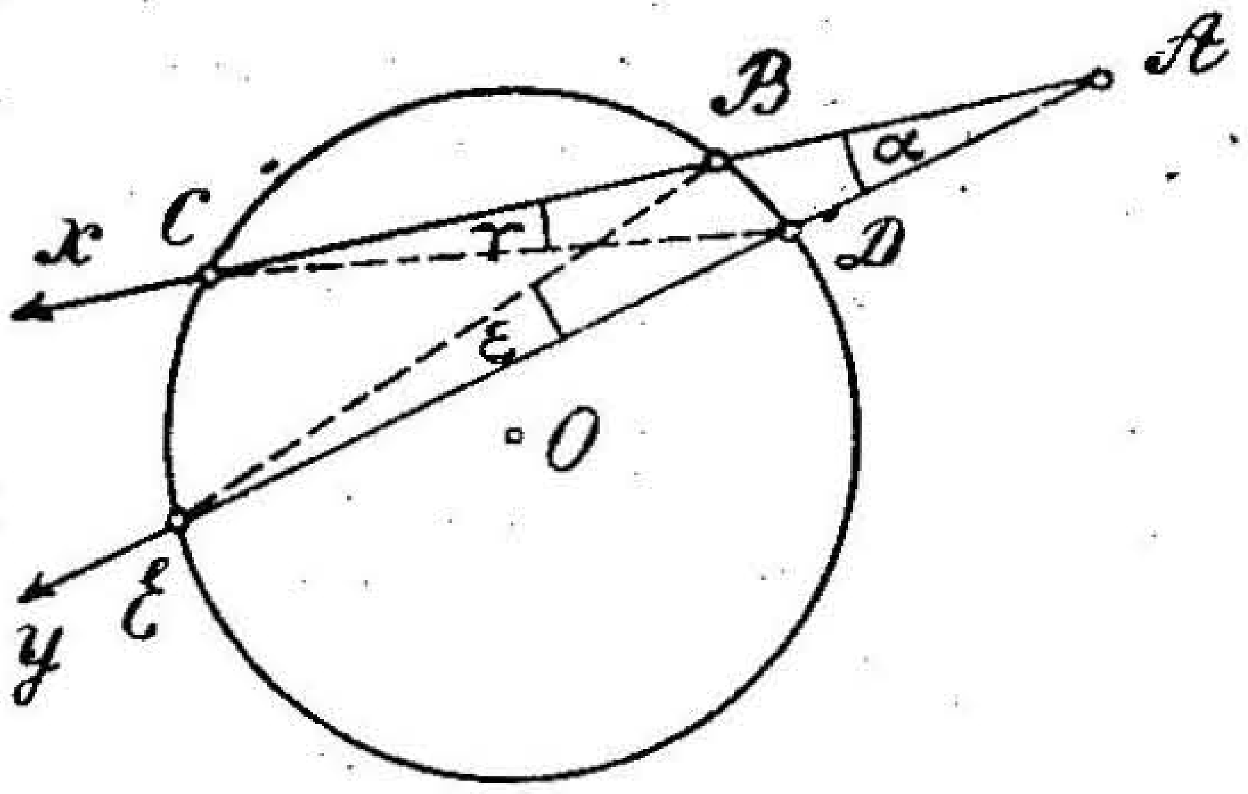
Нека су петоуглови $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ (сл. 185) слични, тј. нека су им хомологи углови једнаки, а њихове стране дају продужну пропорцију $a:a' = b:b' = c:c' = d:d' = e:e'$. Тада је, на основу особине продужних пропорција: $(a+b+c+d+e) : (a'+b'+c'+d'+e') = a : a' = b : b' = c : c' = d : d' = e : e'$, или $O : O' = a : a' = b : b' = c : c' = d : d' = e : e'$. Па како је $a : a' = m : m' = n : n'$, то је и $O : O' = m : m' = n : n'$, чиме је ова теорема доказана.

*Теорема 100.* — **Површине сличних полигона имају се као квадрати двеју хомологих страна или дијагонала.** Нека су петоуглови на сл. 186 слични, тј. нека је: $a : a' = b : b' = c : c' = d:d' = e:e'$, а хомологе углове имају једнаке. Тада су слични и одговарајући троуглови добивени повлачењем дијагонала из темена $A$ и $A'$ (теорема 97). Тада је по 90 теореми: $P_1 : P' = a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = m^2 : m_1^2$; $P_2 : P_2' = m^2 : m_1^2 = c^2 : c_1^2 = n^2 : n_1^2$; $P_3 : P_3' = n^2 : n_1^2 = d^2 : d_1^2 = e^2 : e_1^2$. Из ових пропорција увиђамо да је: $P_1 : P_1' = P_2 : P_2' = P_3 : P_3'$. Из ове продужне пропорције имамо: $(P_1 + P_2 + P_3) : (P_1' + P_2' + P_3') = P_1 : P_1' = P_2 : P_2' = P_3 : P_3'$, или $F : F' = P_1 : P_1' = P_2 : P_2' = P_3 : P_3' = a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = \ldots = m^2 : m_1^2 = \ldots$, где је $F = P_1 + P_2 + P_3$, а $F' = P_1' + P_2' + P_3'$.

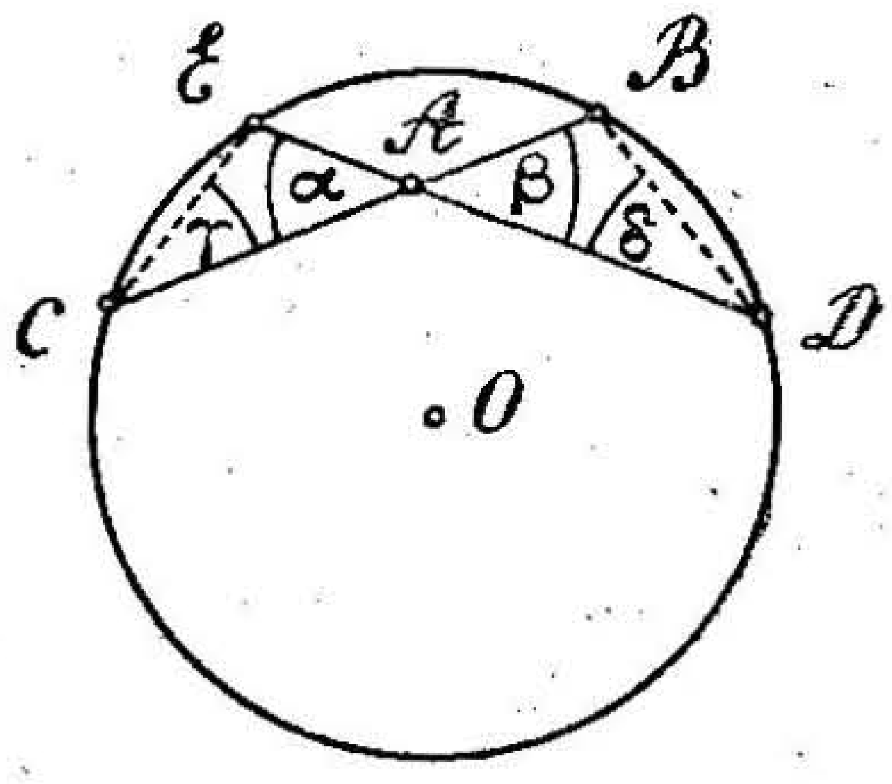
*Напомена.* — На основу теоремâ 99 и 100 имамо код сличних правилних полигона:

1) $O : O' = R : R'$; 2) $O : O' = r : r'$; 3) $P : P' = R^2 : R_1^2$; и 4) $P : P' = r^2 : r_1^2$, где нам $O$ и $O'$ значе обиме, $P$ и $P'$ површине, $R$ и $R'$ полупречнике описаних, а $r$ и $r'$ полупречнике уписаних кругова.

**§ 64. Примена правилâ сличности код круга*.** *Теорема 101.* — **Производ отсечака ма које сечице повучене из неке тачке на круг једнак је производу отсечака ма које друге сечице повучене из исте тачке на круг** *(Моћ или потенција неке тачке).* а) Нека

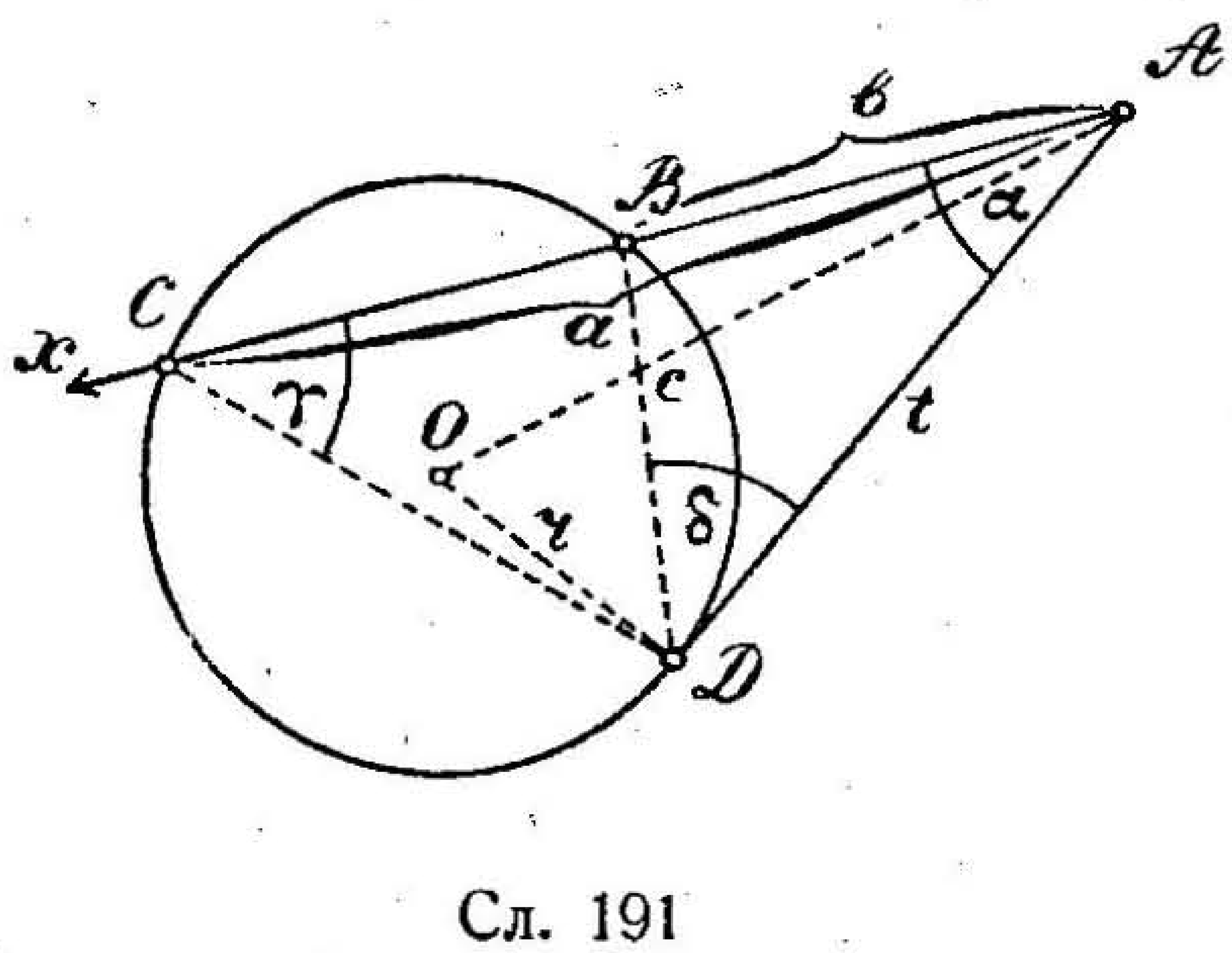


Сл. 189



Сл. 190

је тачка $A$ (сл. 189) ван круга $O$, из које су повучене сечице $AX$ и $AY$. Тада су отсечци прве сечице $AB$ и $AC$, а друге $AD$ и $AE$. Спајањем пресечних тачака $B$ и $E$, затим $C$ и $D$, добијамо сличне троуглове $ABE$ и $ACD$, пошто су им углови једнаки ($\alpha$ заједнички, $\gamma = \varepsilon$ као периферски углови над истим луком $BD$). Стога су им хомологе стра-



Сл. 191

* § 64, 65 и 66 намењени су ученицима реалке.

не пропорционалне, тј. $AC : AE = AD : AB$. Одавде је: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$. b) Нека је тачка $A$ у кругу $O$ (сл. 190). Тада су отсечци повучених сечица $AD$ и $AE$, затим $AC$ и $AB$. Спајањем тачака $C$ и $E$, $B$ и $D$, добијамо сличне троуглове. $ACE$ и $ABD$, пошто су им углови једнаки ($\alpha = \beta$ као унакрсни, а $\gamma = \delta$ као перифериски углови над истим луком $BE$). Из њихове сличности имамо пропорцију: $AC : AD = AE : AB$. Одавде је: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$.

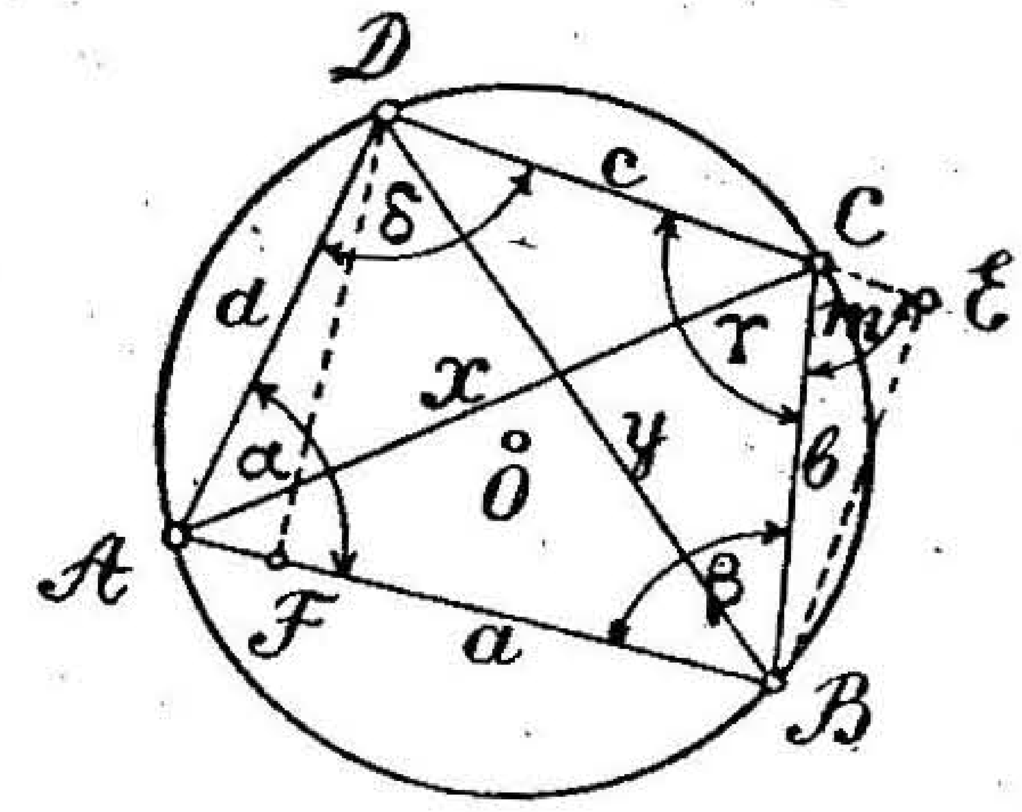
*Напомена.* — Овај сталан производ отсечака ма које сечице повучене из неке тачке ван круга, на кругу или у кругу, на круг, зове се *потенција* или *моћ* те тачке. Потенција неке тачке у ствари је површина правоугаоника, чија је дужина један отсечак а ширина је други отсечак *ма које сечице* повучене из те тачке на круг. Ако су $a$ и $b$ отсечци неке сечице повучене из тачке $A$ на неки круг $O$, онда је њена потенција $P = ab$. Одавде је $a = \frac{P}{b}$ и $b = \frac{P}{a}$, тј. ма који отсечак неке сечице добива се када потенцију тачке, одакле је та сечица повучена, поделимо другим њеним отсечком. Тако, ако је потенција неке тачке $64 \cdot cm^2$, а један отсечак неке њене сечице 16 $cm$, онда је други њен отсечак

$$x = 64 : 16 = 4\ cm.$$

*Теорема 102.* — **Потенција неке тачке ван круга једнака је квадрату тангенте повучене из исте тачке кругу, или разлици квадрата централне раздаљине те тачке и полупречника круга.** — a) Нека је из тачке $A$ (сл. 191) повучена сечица $AX$, чији су отсечци $AC$ ($a$) и $AB$ ($b$), и тангента $AD$ ($t$) кругу $O$. Ако спојимо тачке $B$ и $D$, затим $C$ и $D$, добијамо сличне троуглове $ABD$ и $ADC$, пошто су им углови једнаки ($\alpha$ им је заједнички, а $\gamma = \delta$ на основу 4 последице теореме 63). Из њихове сличности имамо пропорцију: $AC : AD = AD : AB$. Одавде је $AC \cdot AB = AD^2$, или $\boldsymbol{ab = t^2}$. b) Спајањем центра $O$ са тачком $A$ и додирном тачком $D$, добијамо правоугли троугао $ADO$, у коме је централна раздаљина $c$ хипотенуза, а полупречник круга $r$ и тангента $t$ катете. Стога је по Питагорином правилу: $\boldsymbol{t^2 = c^2 - r^2}$, чиме је и други део ове теореме доказан.

*Напомена.* — *Потенција неке тачке ван круга је позитивна, тачке на кругу једнака је нули, а тачке у кругу је негативна.* Ово се даје увидети или из израза $ab$, или из $t^2$, или из $c^2 - r^2$, а којима је претстављена потенција неке тачке. Али се ово увиђа најочигледније из израза $c^2 - r^2$. Тако, за тачку ван круга је $c > r$, па је и $c^2 > r^2$, те је $c^2 - r^2 > 0$. Ако је тачка на кругу, онда је $c = r$, па и $c^2 = r^2$, те је $c^2 - r^2 = 0$. Ако је тачка у кругу, онда је $c < r$, па и $c^2 < r^2$, те је $c^2 - r^2 < 0$. Једначине: $ab = t^2 = c^2 - r^2 = P$ употребљавамо при решавању рачунских задатака у којима су познате две од количина: $P$, $a$, $b$, $c$, $r$ и $t$, а траже се остале.

*Теорема 103.* — **Код тетивног четвороугла производ дијагонала једнак је збиру производа супротних страна, а количник дијагонала једнак је количнику збирова производа оних страна четвороугла које се стичу у крајеве дотичне дијагонале** *(Птоломејева теорема).* Ако стране тетивног четвороугла $ABCD$ (сл. 192) означимо са $a$, $b$, $c$ и $d$, а дијагонале са $x$ и $y$, и спустимо $BE \perp DC$ и $DF \perp AB$, онда добијамо сличне правоугле троуглове $AFD$ и $BEC$. Ти су троуглови слични, пошто имају углове једнаке ($\alpha = m$, јер су оба суплементни са $\gamma$). Па пошто су углови $\alpha$ и $\gamma$ ($\delta$ и $\beta$) суплементни (3 последица теореме 63), то је један од њих оштар а други туп. Стога је према 92 и 93 теореми (§ 62): $y^2 = a^2 + d^2 - 2a \cdot AF$ (1) и $y^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot CE$ (2), а из сличности троуглова $AFD$ и $BEC$ имамо: $AF : d = CE : b$, или $b \cdot AF = d \cdot CE$ (3). Овим смо добили три једначине са три непознате: $y$, $AF$ и $CE$. Да бисмо избацили $AF$ и $CE$, треба једначину (1) да помножимо са $bc$, а једначину (2) са $ad$, чиме добијамо једначине:



Сл. 192

$$bcy^2 = a^2bc + bcd^2 - 2abc \cdot AF \text{ (I) и}$$

$$ady^2 = ab^2d + ac^2d + 2acd \cdot CE \text{ (II).}$$

Заменом у (II) $d \cdot CE$ са $b \cdot AF$ према једначини (3), добијамо:

$$ady^2 = ab^2d + ac^2b + 2abc \cdot AF \text{ (III).}$$

Сабирањем једначина (I) и (III) добијамо:

$$(bc + ad)\ y^2 = a^2bc + bcd^2 + ab^2d + ac^2d = ab\ (ac + bd) + $$
$$+ cd\ (ac + bd) = (ac + bd)\ (ab + cd).$$

$$\text{Одавде је } y = \sqrt{\frac{(ac + bd)\ (ab + cd)}{bc + ad}} \ \ldots . \ (p)$$

Истим путем нашли бисмо да је друга дијагонала

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)\ (ad + bc)}{ab + cd}} \ \ldots . \ (q).$$

*Посматрањем израза нађених вредности $x$ и $y$ увиђамо да је један чинитељ бројитеља радиканда збир производâ супротних страна, а други чинитељ збир производâ странâ које се стичу у крајеве оне дијагонале која се тражи, а именитељ је збир производâ оних страна које се стичу у крајеве друге дијагонале.*

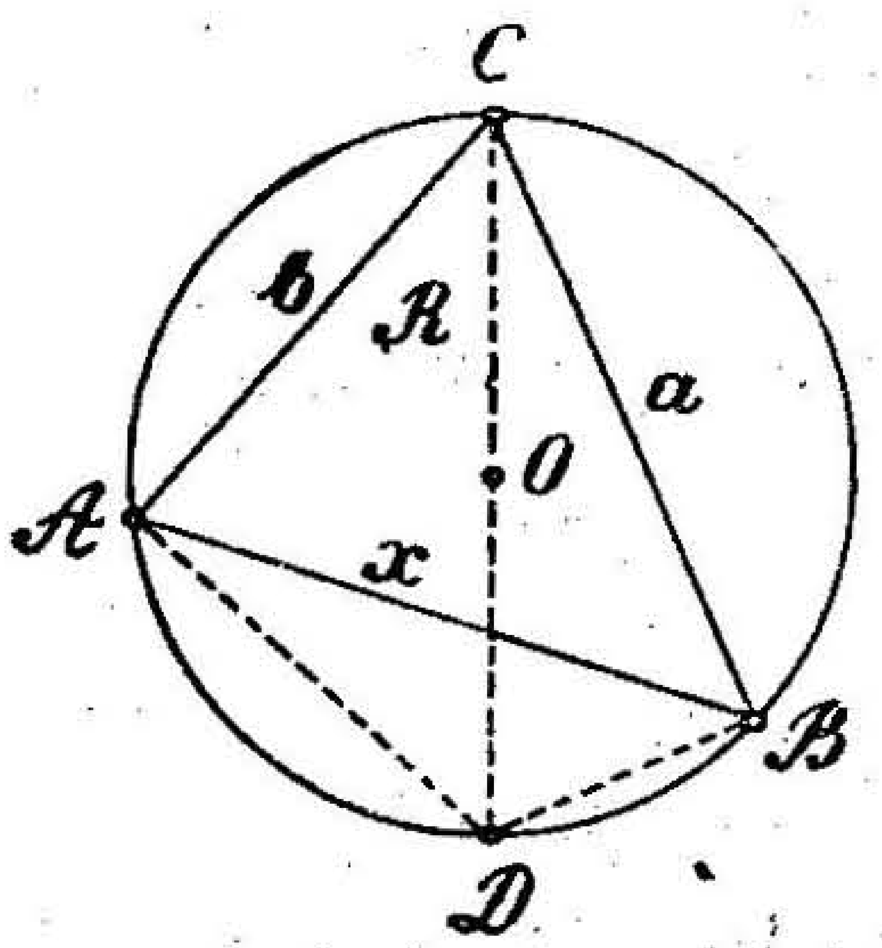
Обрасци под *(p)* и *(q)* пружају нам могућности да израчунамо дијагонале тетивног четвороугла, ако знамо његове стране.

Ако ове обрасце најпре помножимо, а затим поделимо, добијамо:

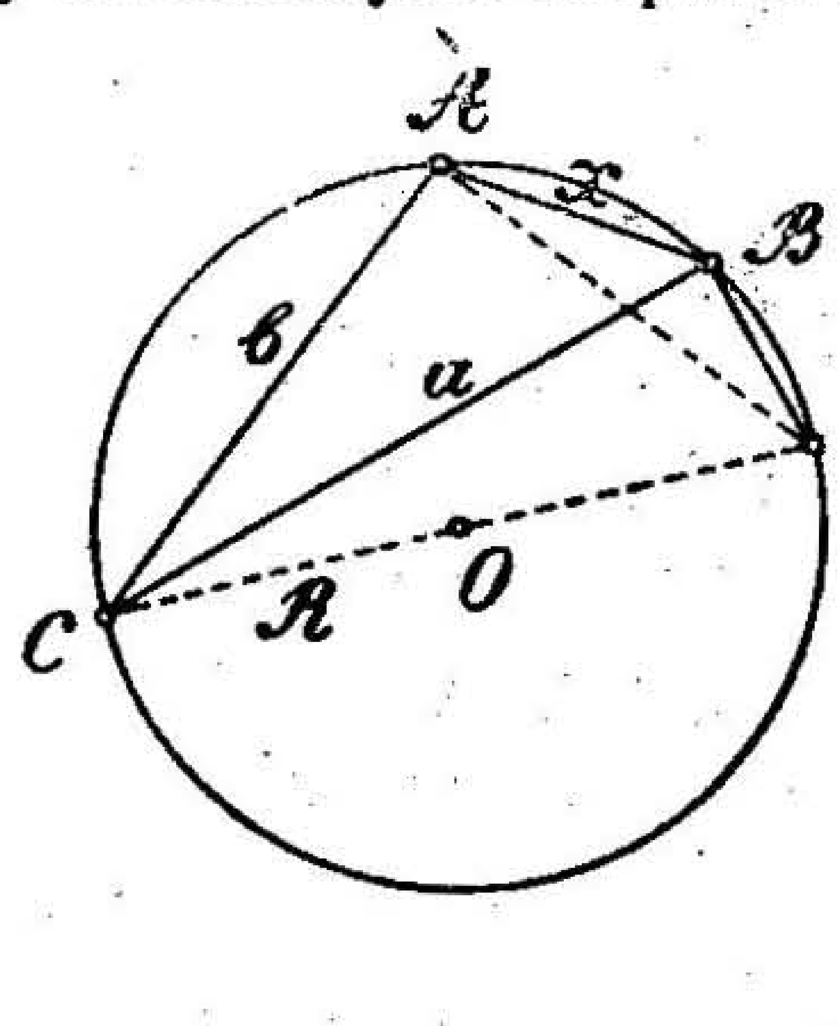
$$xy = ac + bd \text{ и } \frac{x}{y} = \frac{ab + bc}{ab + cd},$$

чиме су доказана оба дела Птоломејеве теореме.

*Напомена.* — Помоћу Птоломејеве теореме може се решити задатак: *Наћи трећу страну једнога троугла ако су познате две његове стране и полупречник описаног круга.* Нека су познате стране $a$ и $b$ троугла $ABC$ (сл. 193) и полупречник $R$ описаног круга, а тражи се страна $x$. Ако повучемо пречник $CD$ и спојимо тачку $D$ са $A$ и $B$, добијамо тетивни четвороугао $ADBC$, код кога је дијагонала $CD = 2R$, а друга дијагонала $AB = x$. Па како су троуглови $CDA$ и $CDB$ правоугли, то је $AD = \sqrt{4R^2 - b^2}$ и $BD = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Тада је по Птоломејевој теореми:



Сл. 193



Сл. 194

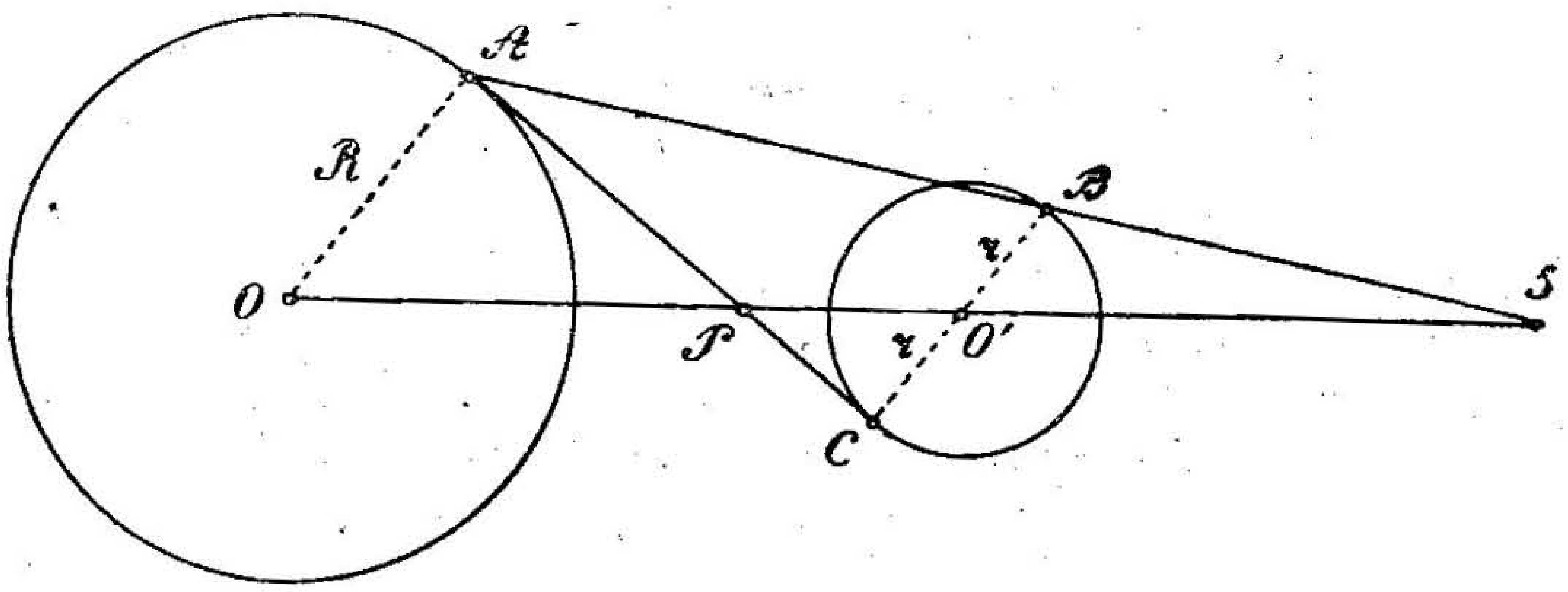
$$2R \cdot x = a \cdot \sqrt{4R^2 - b^2} + b \cdot \sqrt{4R^2 - a^2}, \text{ а}$$

$$x = \frac{1}{2R} (a \sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}).$$

Ако $\triangle ABC$ има такав положај да се центар $O$ не налази у углу који граде познате стране $a$ и $b$ (сл. 194), онда, радећи по истом поступку, добијамо $x = \frac{1}{2R} (a \sqrt{4R^2 - b^2} - b \sqrt{4R^2 - a^2})$.

**§ 65. — Тачке сличности два круга*).** — Као што постоје тачке сличности за ма које две сличне праволиниске слике (теорема 83), тако исто постоје тачке сличности за ма која два круга, који су увек слични, сматрајући их као правилне полигоне од бесконачно много бесконачно малих страна. Спољашњу тачку сличности $S$ за кругове $O$ и $O'$ (сл. 195) налазимо када повучемо ма која два у истом смислу паралелна полупречника $OA$ и $O'B$, па праву $AB$, која спаја крајње тачке повучених полупречника, продужимо дотле док не сече продужену централну раздаљину $OO'$. Унутрашњу тачку сличности $P$ добијамо повлачењем најпре два полупречника, у супротном смислу паралелна, $(OA$ и $O'C)$, па спојимо њихове

*) За ученике реалке.




Сл. 195

крајње тачке $A$ и $C$. Пресек праве $AC$ и централне раздаљине $OO'$ биће тражена тачка $P$.

Отстојања тачака сличности $S$ и $P$ од центра $O$ и $O'$ налазимо помоћу сличности троуглова $OAS$ и $O'BS$, затим $OAP$ и $O'CP$. Ови су троуглови слични, пошто имају углове једнаке. Ако полупречнике кругова $O$ и $O'$ означимо са $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}$, а њихову централну раздаљину са $\boldsymbol{c}$, онда је из сличности троуглова $OAS$ и $O'BS$:

$$R : r = OS : O'S \quad (1),$$

а из сличности троуглова $OAP$ и $O'CP$:

$$R : r = OP : O'P \quad (2).$$

Из пропорције (1) добијамо изведене пропорције:

$(R - r) : R = (OS - O'S) : OS$ и $(R - r) : r = (OS - O'S) : O'S$, или заменом $OS - O'S$ са $c$ имамо:

$$(R - r) : R = c : OS \text{ и } (R - r) : r = c : O'S.$$

Одавде је: $\boldsymbol{OS = \dfrac{Rc}{R-r}}$ и $\boldsymbol{O'S = \dfrac{rc}{R-r}}$ (I).

Из пропорције (2) добијамо изведене пропорције:

$(R + r) : R = (OP + O'P) : OP$ и $(R + r) : r = (OP + O'P) : O'P$, или, заменом $OP + O'P$ са $c$, имамо:

$$(R + r) : R = c : OP \text{ и } (R + r) : r = c : O'P.$$

Одавде је: $\boldsymbol{OP = \dfrac{Rc}{R+r}}$ и $\boldsymbol{O'P = \dfrac{cr}{R+r}}$ (II).

*Напомене о тачкама сличности двају кругова*:

1) Из образаца (I) и (II) увиђамо да су тачке сличности за два круга увек сталне, пошто њихова отстојања једино зависе од количина: $c$, $R$ и $r$, које су количине за два дана круга увек непроменљиве. Стога се у спољашњој тачци сличности секу све праве које спајају крајње тачке двају у истом смислу паралелних полупречника, а у унутрашњој се тачци секу све праве које спајају крајње тачке двају у супротноме смислу паралелних полупречника датих кругова. Све су те праве заједничке *сечице* датих кругова повучених из тачака сличности. а само су 4 од њих њихове

заједничке *тангенте*, и то: две *спољашње* и две *унутрашње*, према томе да ли се те тангенте секу у спољашњој или у унутрашњој тачци сличности. Конструкција ових тангената да̂ се извршити конструкцијом тангената, било из спољашње, било из унутрашње тачке сличности, једноме од датих кругова, а на основу теореме 65.

2) Положај спољашње тачке сличности за два круга зависи од полупречника кругова $R$ и $r$, о чему се уверавамо из образаца под (I). Код ових образаца је именитељ $R-r$, који може бити већи, једнак и мањи од нуле. За $R-r>O$, или $R>r$, $OS$ и $O'S$ имаће позитивну вредност, те се тачка $S$ налази на позитивној (десној) страни центара $O$ и $O'$; за $R-r=O$, или $R=r$, $OS$ и $O'S$ имају бесконачну вредност, те се тачка $S$ налази у бесконачности; и најзад, за $R-r<O$, или $R<r$, $OS$ и $O'S$ имаће негативну вредност, те се тачка $S$ налази на негативној (левој) страни центара $O$ и $O'$.

Из образаца под (II) увиђамо да је вредност отстојања̂ $OP$ и $O'P$ увек позитивна. те се унутрашња тачка сличности увек налази између центара кругова, а на њиховој централној раздаљини. За $R=r$ биће $OP=\frac{cR}{2R}=\frac{c}{2}$ и $O'P=\frac{cr}{2r}=\frac{c}{2}$, тј. тачка $P$ у овом случају полови централну раздаљину.

4) Ако се кругови додирују споља, онда им је додирна тачка истовремено њихова унутрашња тачка сличности, а ако се додирују изнутра $\frac{c}{2}$, онда им је додирна тачка истовремено спољашња тачка сличности.

5) Ако су кругови концентрични, онда се обе тачке сличности поклапају са њиховим заједничким центром, пошто је у овом случају $c=o$, те и раздаљине тачака сличности имају вредност $=o$, што се види из образаца (I) и (II).

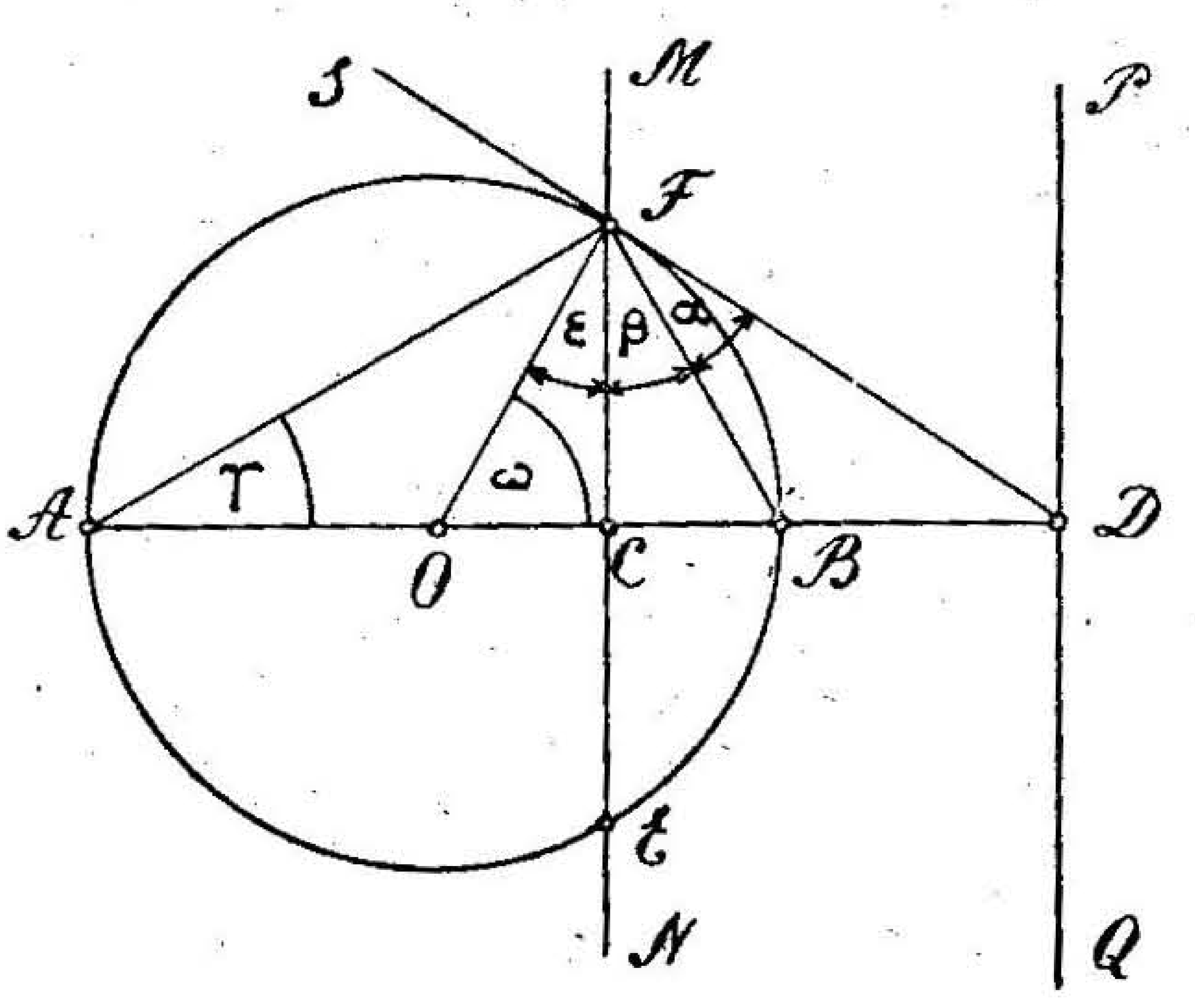
*Теорема 104.* — **Тачке сличности за два круга деле централну раздаљину по хармониској пропорцији.** Из пропорција (1) и (2) код тачака сличности за два круга, видимо да су њихове леве стране једнаке. Стога су им једнаке и њихове десне стране, тј. $OS:O'S=OP:O'P$, која пропорција задовољава услове хармониске пропорције (§ 55). Да је ова пропорција тачна, можемо се уверити заменом њених чланова са њиховим вредностима из образаца (I) и (II).

*Напомена.* — На основу ове теореме можемо неку дуж поделити по̄ хармониској пропорцији још на следећи начин: Треба конструисати два круга неједнаких полупречника у крајњим тачкама дате дужи, па наћи њихове тачке сличности. Тада је дата дуж централна раздаљина кругова, а нађене тачке сличности јесу тражене конјуговане хармониске тачке.

**§ 66. — Полови и полара*.** — Ако пречник $AB$ круга $O$ (сл. 196) поделимо тачкама $C$ и $D$ по хармониској пропор-

* За ученике реалке.

цији, па у овим тачкама подигнемо на пречник нормале $MN$ и $PQ$, онда се тачке $C$ и $D$ зову *полови*, а праве $PQ$ и $MN$ *поларе*, и то: тачка $C$ је пол за полару $PQ$, а тачка $D$ пол за полару $MN$; и обрнуто: права $PQ$ је полара за пол $C$, а права $MN$ је полара за пол $D$. Тачке $C$ и $D$ зову се *спрегнути* или *конјуговани полови*. Из свега овога је јасно да је пол ван круга ако је његова полара сечица круга а да је пол у кругу ако је његова полара ван круга. Према узајамном положају хармониских тачака (напомена теореме 79, § 55) изводе се ове последице: 1) *Сваком унутрашњем полу одговара само једна спољашња полара, а сваком спољашњем полу одговара само једна унутрашња полара;* 2) *Ако се пол приближује кружној периферији, онда се и његова полара приближује периферији круга; а када се пол налази на самој кружној периферији, онда је поларна тангента круга чија је додирна тачка пол;* 3) *Ако се пол приближује центру круга, онда се његова полара поступно удаљује од њега, и у тренутку када се пол поклопи са центром, полара се налази у бесконачности.*

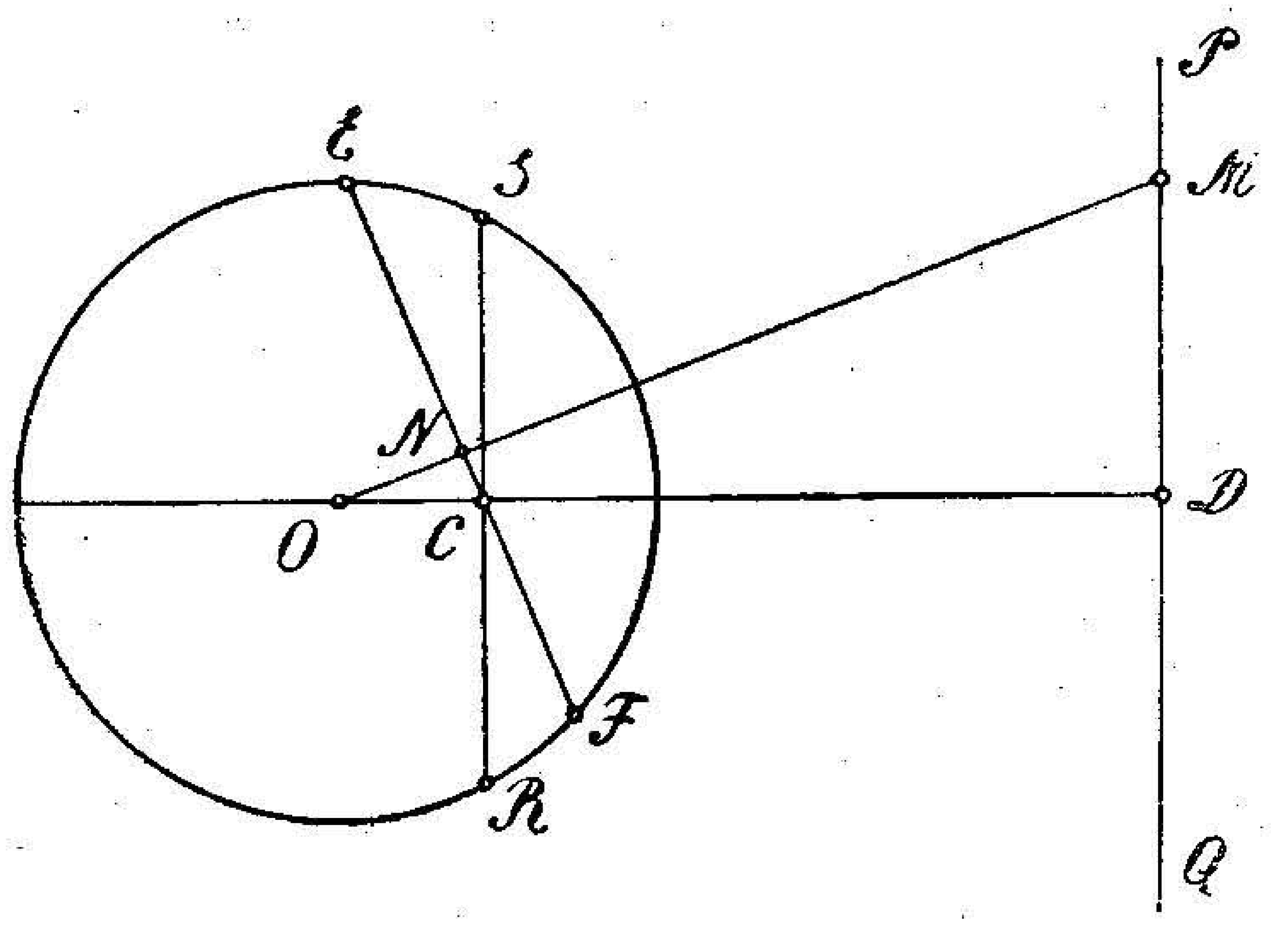


Сл. 196

*Теорема 105.* — **Полупречник круга средња је пропорционала између раздаљина полова од центра круга.** Нека су $C$ и $D$ (сл. 196) два спрегнута пола круга $O$. Ако просечну тачку $F$ поларе $MN$ и круга спојимо тачкама $A$, $O$ и $B$, добијамо правоугли троугао $ABF$, код кога је $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$, пошто су им краци нормални. Па како је и $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \gamma$ (4 последица теореме 66), то је $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$. Тада је $\triangle$ $OFD$ правоугли с правим углом $F$, јер је $\alpha + \beta + \varepsilon = 2\gamma + \varepsilon = \omega + \varepsilon = 90^0$. Стога је његова катета $OF$, заиста средња пропорционала између хипотенузе $OD$ и оближњег отсечка $OC$ (теорема 91), тј. $OD : OF = OF : OC$, или $OD : r = r : OC$, или $\boldsymbol{r^2 = OC \cdot OD}$.

На основу ове теореме можемо лако извести конструкцију поларе некога пола, и обрнуто, наћи пол неке дате поларе, па ма какав положај заузимали полови или поларе према кругу. Тако, а) *да бисмо нашли полару пола C (сл. 196), треба на пречнику круга, који пролази кроз дати пол, подићи нормалу на пречнику у полу, а затим, у једној од пресечних тачака ове нормале с кружном периферијом (F или E) да конструишемо тангенту. Пресек (D) ове тангенте са продуженим пречником (AB) биће спрегнути пол датог пола, а нормала на овом полу на пречнику биће тражена полара (PQ)*; b) *Да бисмо нашли полару некога пола ван круга (D), треба из те тачке повући тангенте кругу, па тетива (FE) која спаја додирне тачке тангената биће тражена полара;* c) *Да бисмо нашли пол неке поларе која сече круг (MN), треба у једној од пресечних тачака поларе с кружном периферијом да конструишемо тангенту. Пресек ове тангенте (D) с продуженим пречником круга, који је нормалан на полари, биће тражени пол дате поларе;* d) *Да бисмо нашли пол поларе ван круга, треба најпре да спустимо нормалу из центра круга на полару па из пресека (D) да повучемо тангенте кругу и спојимо додирне тачке (F и E). Пресек (C) тетиве (EF) с нормалним пречником на полари, биће тражени пол дате поларе ван круга.*

*Напомена.* — Како су спрегнути полови две конјуговане хармониске тачке, што се види из ове теореме, пошто су *FB* и *FA* симетрале углова *CFD* и *CFS* (сл. 196), то се изводи и трећи начин за поделу дужи по хармониској пропорцији: *треба над датом дужи, као над пречником, конструисати круг, а затим у ма којој тачци овога пречника (C) подићи нормалу (CF) до пресека F с кружном периферијом и у томе пресеку конструисати тангенту (FD). Пресек (D) ове тангенте с продуженим пречником (AB) биће друга конјугована хармониска тачка тачци C.*



Сл. 197

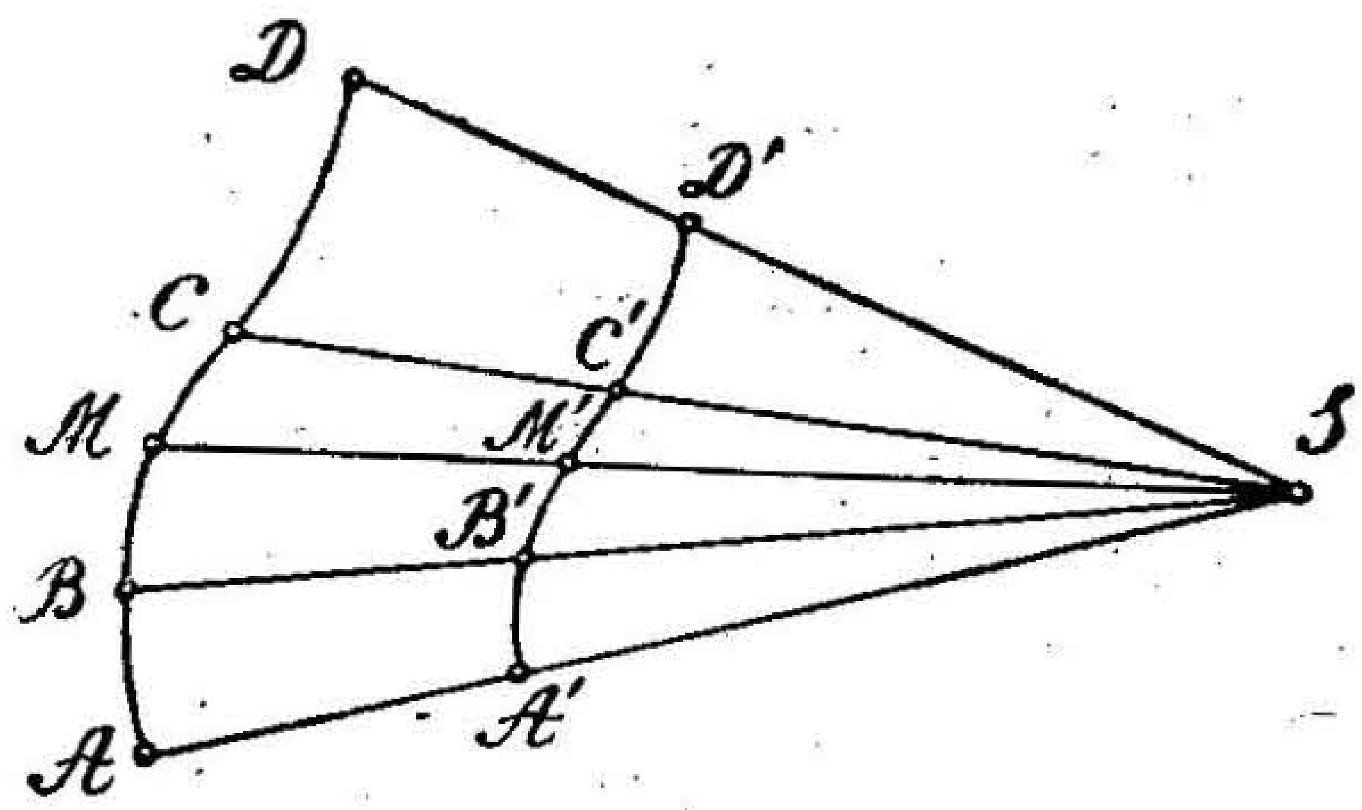
*Теорема 106.* — **Поларе свију тачака неке дате поларе пролазе кроз њен пол.** Нека је дата полара *PQ* и њен пол *C* (сл. 197). Да бисмо доказали да полара ма које њене тачке пролази кроз пол *C*, спајамо је са центром *O* и кроз пол *C* повлачимо $EF \perp OM$. Тада су правоугли троуглови $ODM$ и $ONC$ слични, јер им је угао код $O$ заједнички. Стога је $OM : OC = OD : ON$, или $OC \cdot OD = OM \cdot ON$. Па како је по пређашњој теореми $OC \cdot OD = r^2$, то је и $OM \cdot ON = r^2$, која нам једначина показује да су тачке $M$ и $N$ два конјугована пола, те је $EF$ полара тачке $M$. Истим путем доказујемо, кад би дата полара $PQ$ била сечица круга $O$, а тако исто бисмо доказали и обрнуту теорему:

***Полови свију полара које пролазе кроз неку дану тачку налазе се на полари те тачке*** *(Теорема 107).*

*Последица. — Ако се нека тачка креће по некој правој, онда се њена полара обрће око пола те праве; и обрнуто, ако се нека права обрће око једне сталне тачке на њој, онда се њен пол креће по полари те тачке.*

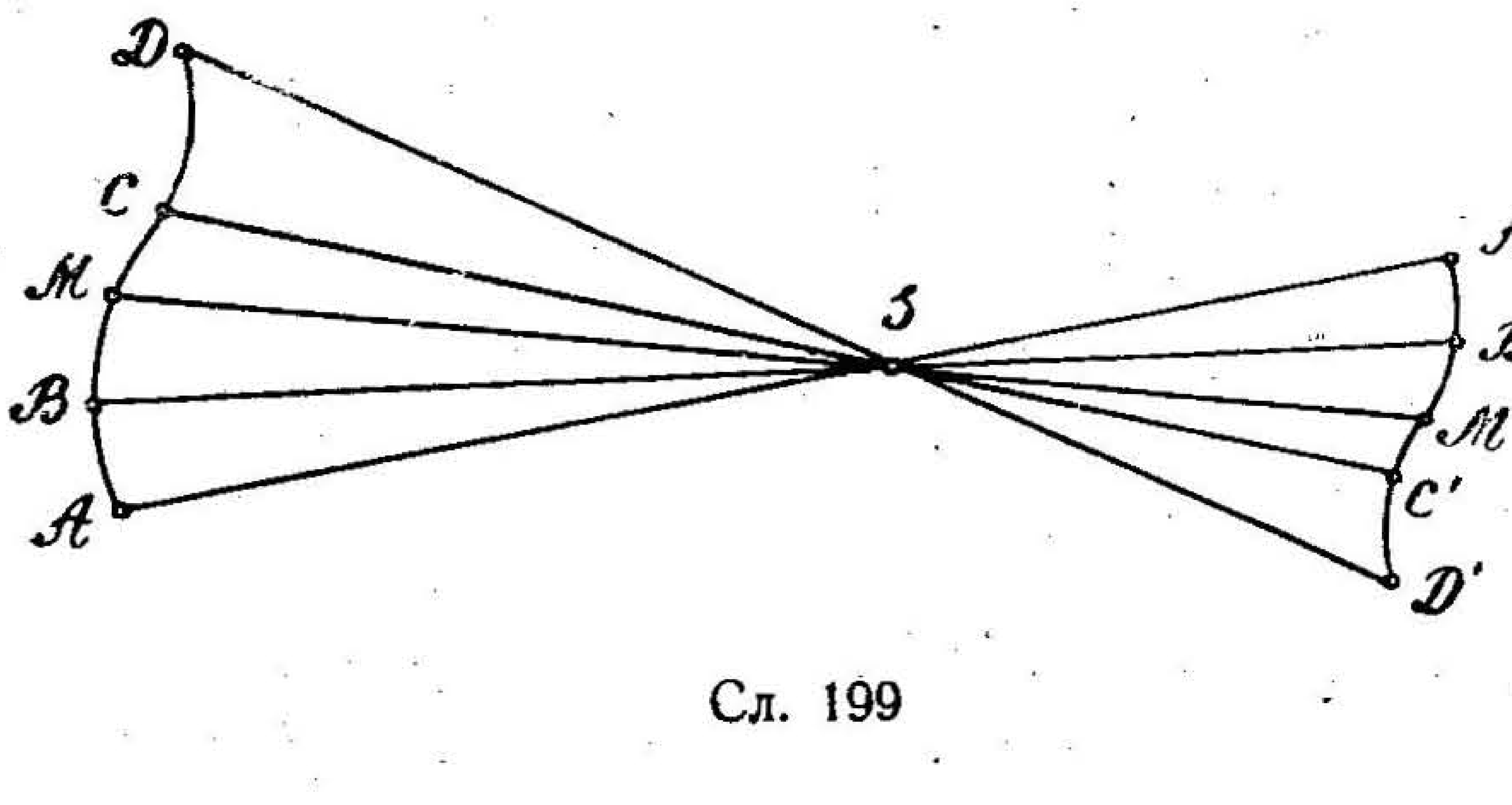
## V. Хомотетичне слике

**§ 67. — О хомотетији уопште.** — За две равне слике које се налазе у истој равни каже се да су *хомотетичне* (од грчких речи homos — сличан и thesis — положен), ако праве које спајају одговарајуће тачке тих слика, пролазе кроз једну утврђену тачку у истој равни, и деле се том тачком на таква два



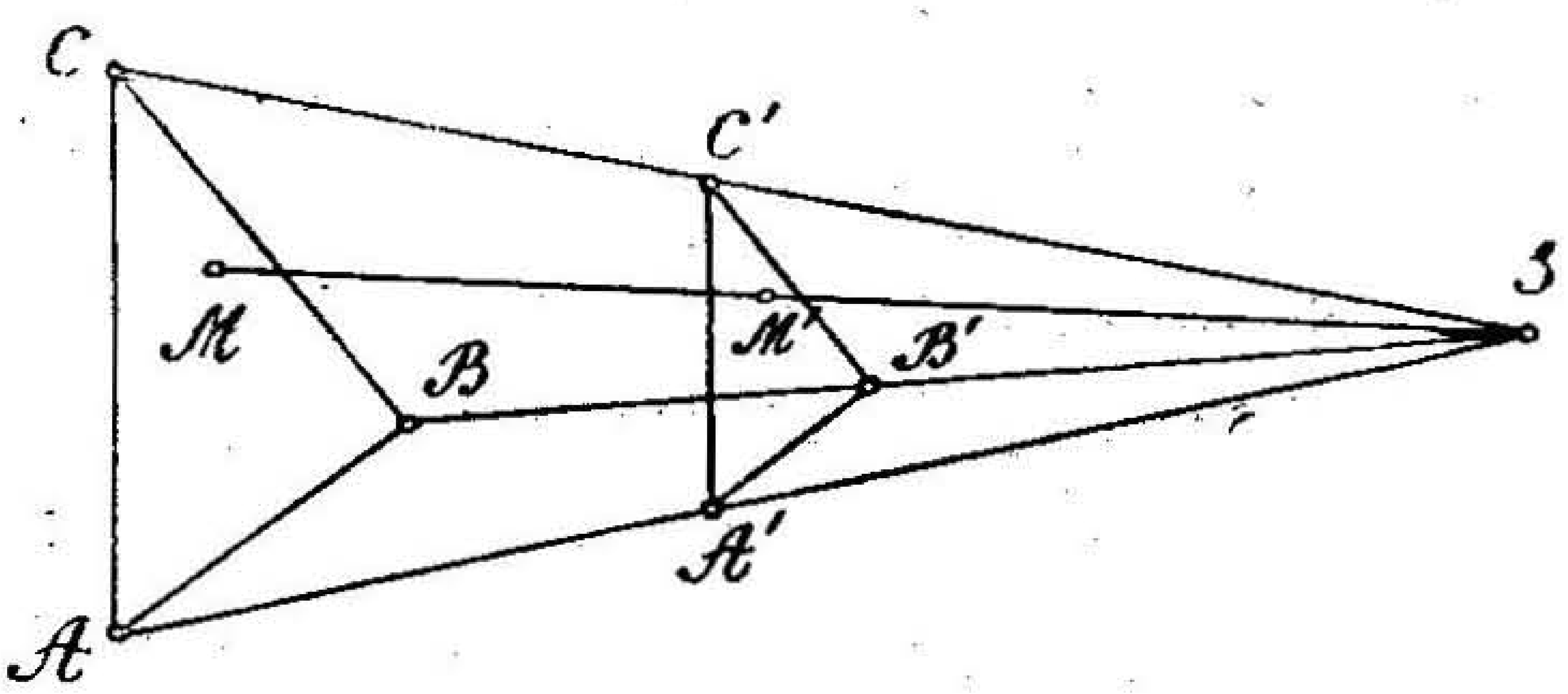

Сл. 198

отсечка чија размера има сталну вредност. Тако, криве $AD$ и $A'D'$ (сл. 198 и 199) биће хомотетичне, ако праве: $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$,... пролазе кроз исту тачку $S$, тако



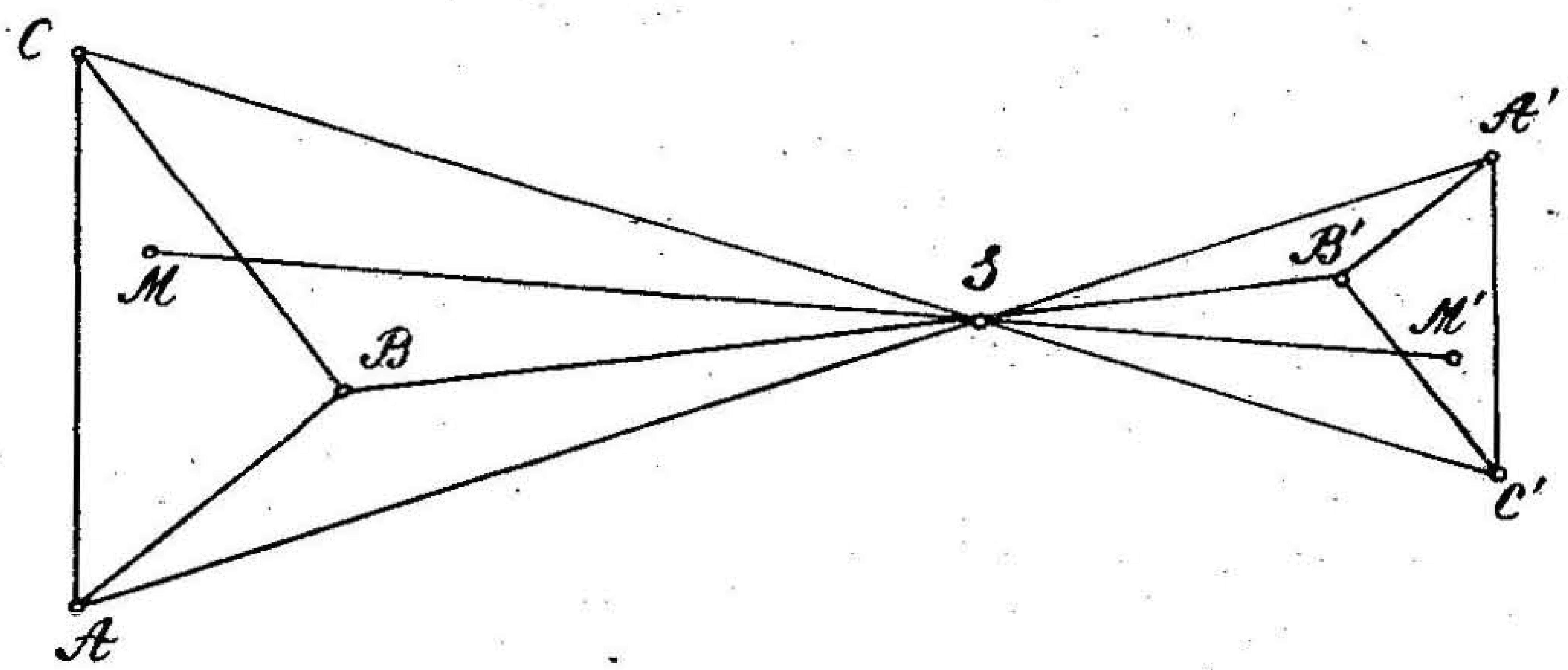

Сл. 199

да је $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \ldots = k = \text{constans}.$




Сл. 200

Троуглови $ABC$ и $A'B'C'$ (сл. 200 и 201) биће хомотетични, ако се спојне праве $AA'$, $BB'$, $CC'$, $MM'$,... деле тачком $S$ на отсечке чија је размера: $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SM'}{SM} = \ldots = \text{const}.$




Сл. 201

Тачка $S$ зове се *центар хомотетије*, а одговарајуће тачке хомотетичних слика ($A$ и $A'$, $B$ и $B'$,....I) зову се *хомологе*. Отсечци $SA$ и $SA'$, $SB$ и $SB'$,... зову се такође *хомологи*, а стална вредност њихове размере $\frac{SA'}{SA} = k$ зове се *однос (модуо) хомотетије*. Сличне слике у перспективном положају (сл. 179) јесу хомотетичне и све напомене уз теорему 83 за перспективе слике, важе и за хомотетичне.

Хомотетија двеју слика је *директна* (сл. 198 и 200) и *инверсна* (199 и 201). Код првих је центар хомотетије споља (са исте стране) хомотетичних слика, а кад других је тај центар изнутра, између хомотетичних слика. Однос (модуо) хомотетије је код првих позитиван, а код других негативан.

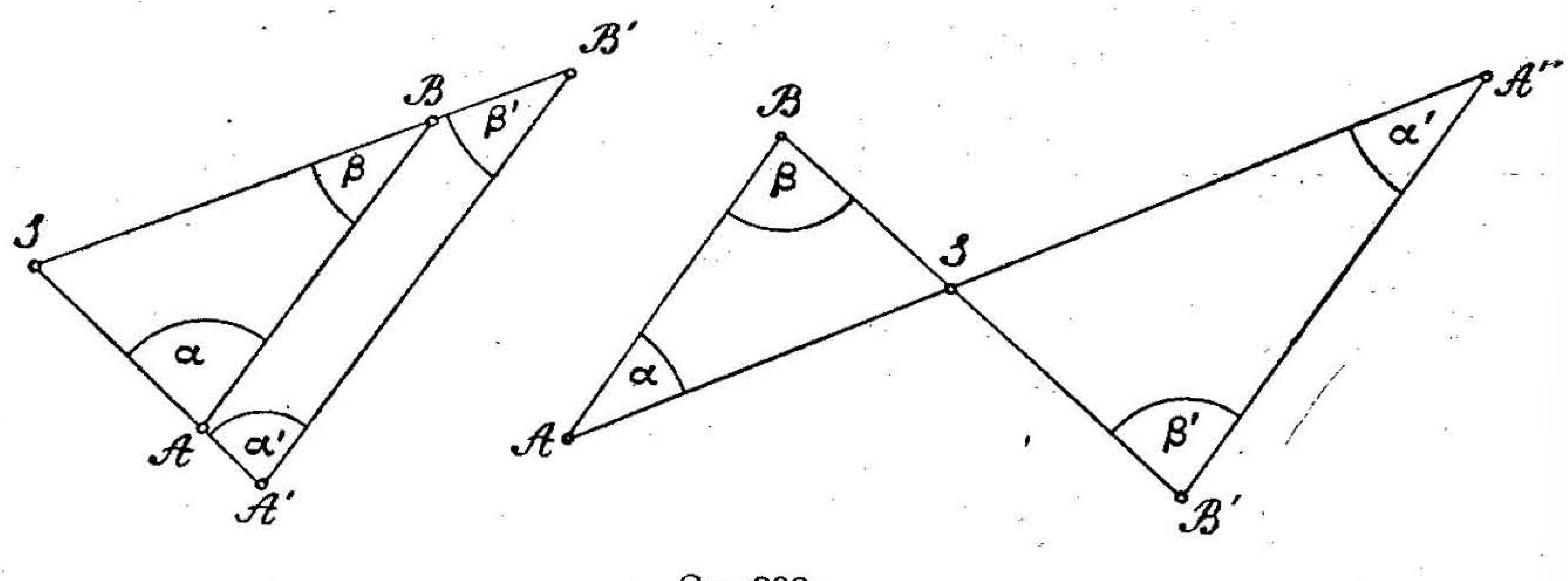
Да бисмо конструисали хомотетичну слику неке дате слике, треба да знамо центар $S$ и модуо хомотетије $K$. Ако је $A$ једна тачка дате слике, онда њену хомологу тачку у хомотетичној слици налазимо када ту тачку спојимо са центром $S$, а затим у оба смисла правца $AS$ преносимо отсечак $SA'$ израчунат из $\frac{SA'}{SA} = \pm K$. Код праволиниских хомотетичних слика налазимо овим путем хомолога темена: $A', B', C', \ldots$ теменима: $A, B, C, \ldots$, која спојена, дају хомотетичну слику $A' B' C' \ldots$..

Ако је $F'$ хомотетична слика слици $F$, онда слика $F$ остаје стална, а слика $F'$ мења и величину и положај ако центар хомотетије мења свој положај. Исти је случај ако и модуо хомотетије мења своју величину.

Подударне и симетричне слике према неком центру симетрије $S$, јесу такође хомотетичне слике. Код првих је модуо хомотетије $K = +1$, а код других је $K = -1$.

## § 68. — Теореме о хомотетичним сликама

*Теорема 108.* — **Ако су две слике хомотетичне, онда дуж AB, која везује ма које две тачке прве слике и дуж A' B', која везује хомологе тачке друге слике, јесу паралелне, а вредност њихове размере једнака је модуу хомотетије.** Нека је $S$ центар а $K$ модуо хомотетије, $AB$ и $A'B'$ две одговарајуће дужи




Сл. 202

(стране, дијагонале) хомотетичних слика. Тада су троуглови $SAB$ и $SA'B'$ слични, пошто имају по две стране пропорционале и захваћене углове једнаке. (II правило сличности). Тада су и углови $\alpha$ и $\alpha'$, $\beta$ и $\beta'$ једнаки. Па како су ови углови код директних слика сагласни, а код инверзних наизменични, то су дужи $AB$ и $A' B'$ паралелне, а њихова размера, као треће стране сличних троуглова, има вредност једнаку модуу $K$, тј. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \pm K$. Ако је модуо $K$ позитиван, дужи $AB$ и $A'B'$ јесу директно паралелне, а ако је $K$ негативан, онда су те две дужи инверзно паралелне.

На основу ове теореме јасне су последице:

*Последица 1. — Хомотетична слика неке праве је права;*

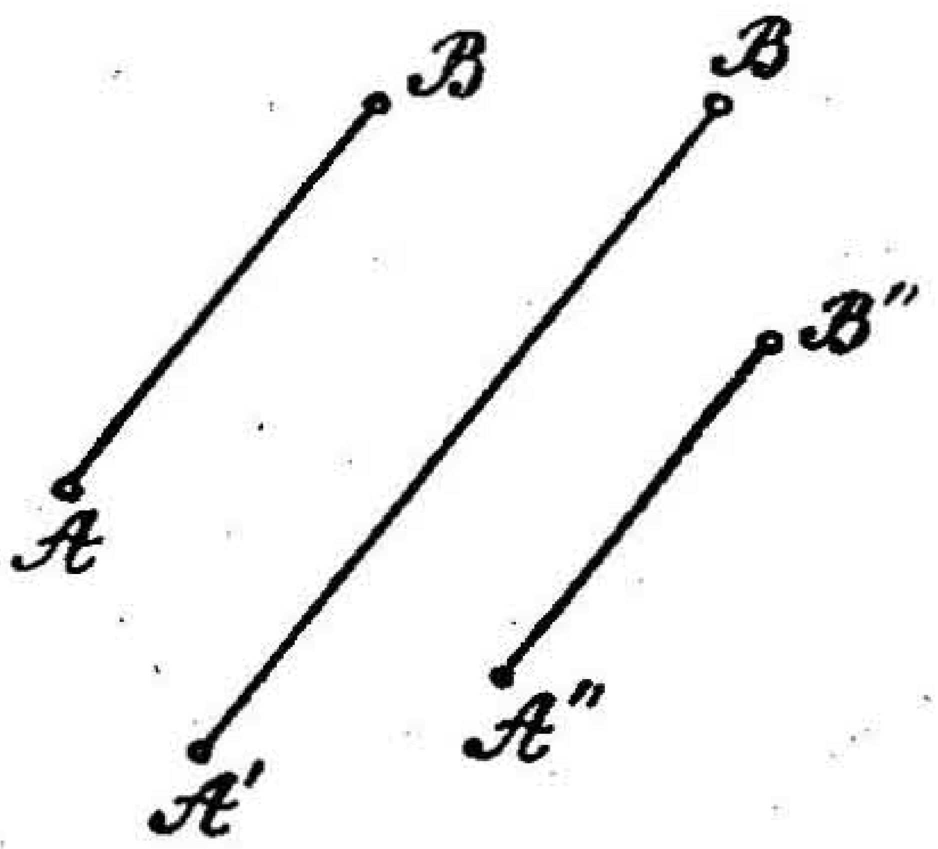
*Последица 2. — Хомотетична слика неког угла је угао;*

*Последица 3. — Хомотетична слика неког троугла је троугао.*

*Теорема 109.* — **Свака права која пролази кроз центар хомотетије поклапа се са својом хомологом.** Нека права $AB$ пролази кроз центар хомотетије $S$. Ма какав био модуо хомотетије, покретна тачка $M$, која се креће по правој $AB$, имаће хомологу тачку $M'$, која остаје стално на правој $SM$, тј. на правој $AB$, чиме је ова теорема доказана.

Сл. 202

*Теорема 110.* — **Ако су две слике (P') и (P'') хомотетичне са трећом сликом (P), хомотетичне су међу собом.** Нека су $A$ и $B$ две тачке слике $P$, $A'$ и $B'$ њихове хомологе тачке на слици $(P')$, а $A''$ и $B''$ хомологе тачке на слици $(P'')$ (сл. 203). Тада, према 108 теореми је $A'B' \parallel AB$ и $A''B'' \parallel AB$. Стога је и $A'B' \parallel A''B''$ (теорема 5). Тада и слике $(P')$ и $(P'')$ на којима се налазе паралелне дужи $A'B'$ и $A''B''$, јесу хомотетичне.



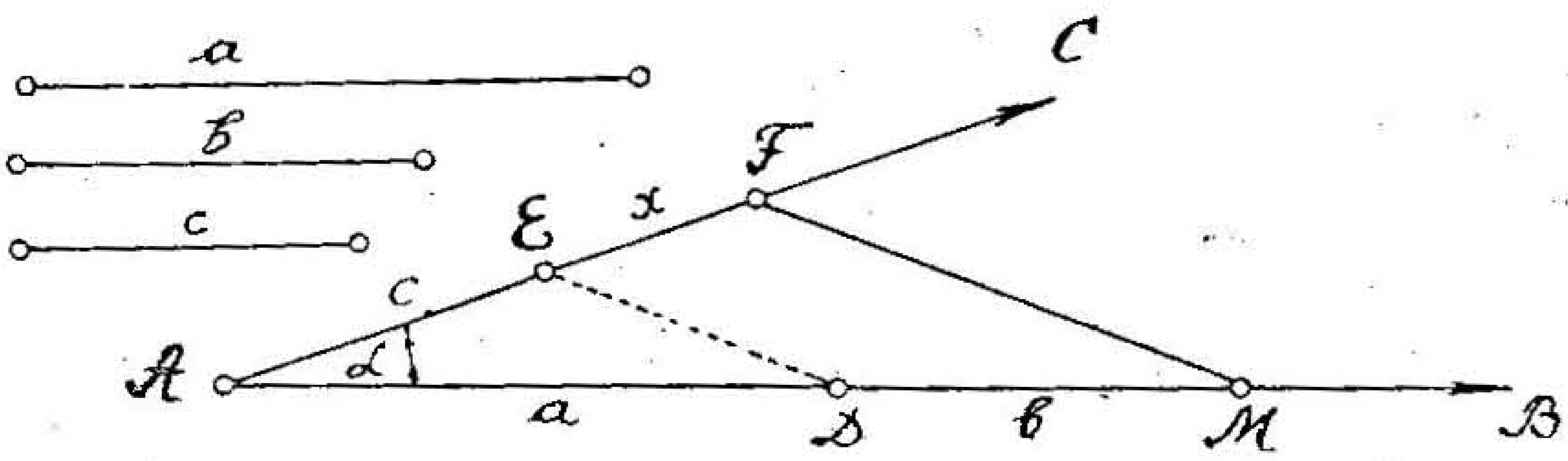
Сл. 203

*Последица.* — Када су три слике $(P')$, $(P'')$ и $(P)$ хомотетичне две и две, и ако тачка $A$ слике $(P)$ има хомологу тачку $A'$ на слици $(P')$, а хамологу тачку $A''$ на слици $(P'')$, онда су тачке $A'$ и $A''$ хомологе.

*Нопомена.* — Сличне праволиниске слике (троуглови, четвороуглови, полигони) стављене у перспективном положају код једног зрачног снопа јесу хомотетичне и модуо сличности тих слика једнак је односу хомотетије. Тачке сличности два круга $S$ и $P$ (сл. 195) јесу центри хомотетије, однос хомотетије је $R : r$, а кругови $O$ и $O'$ јесу у хомотетичном положају.

# VI. Конструктивни и рачунски задаци из трећег одељка

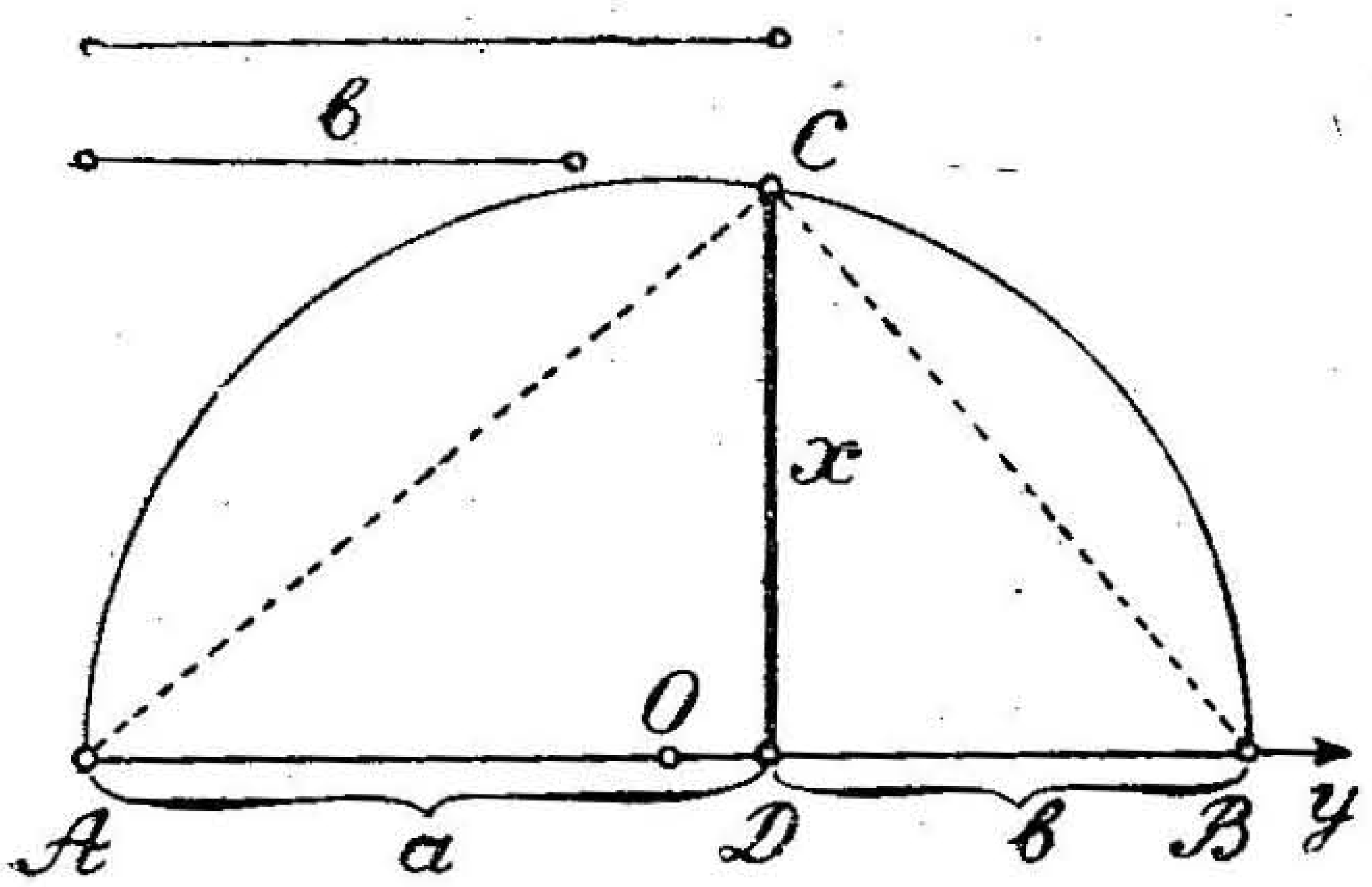
**§ 69. — Основни конструктивни задаци.** — *За три дане дужи a, b и c* (сл. 204) *наћи четврту пропорционалу.* —



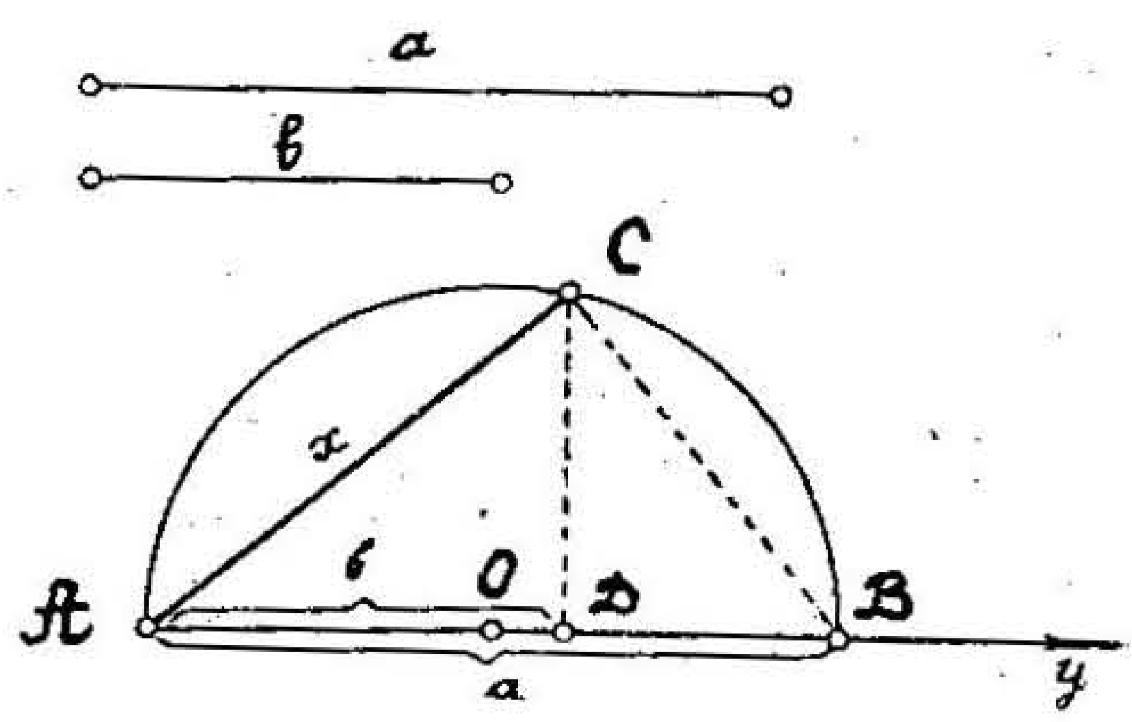

Сл. 204

Најпре треба конструисати угао $\alpha$ а затим на његове краке преносимо $AD = a$, $DM = b$, $AE = c$. Најзад спајамо тачке $D$ и $E$, а из тачке $M$ повлачимо $MF \parallel DE$. Отсечак $EF$ је тражена четврта пропорционала $x$ (теорема 73, § 54).

2) *За две дане дужи a и b наћи њихову трећу непрекидну пропорционалу.* — Овај се задатак ради као први, узимајући да је $b = c$.



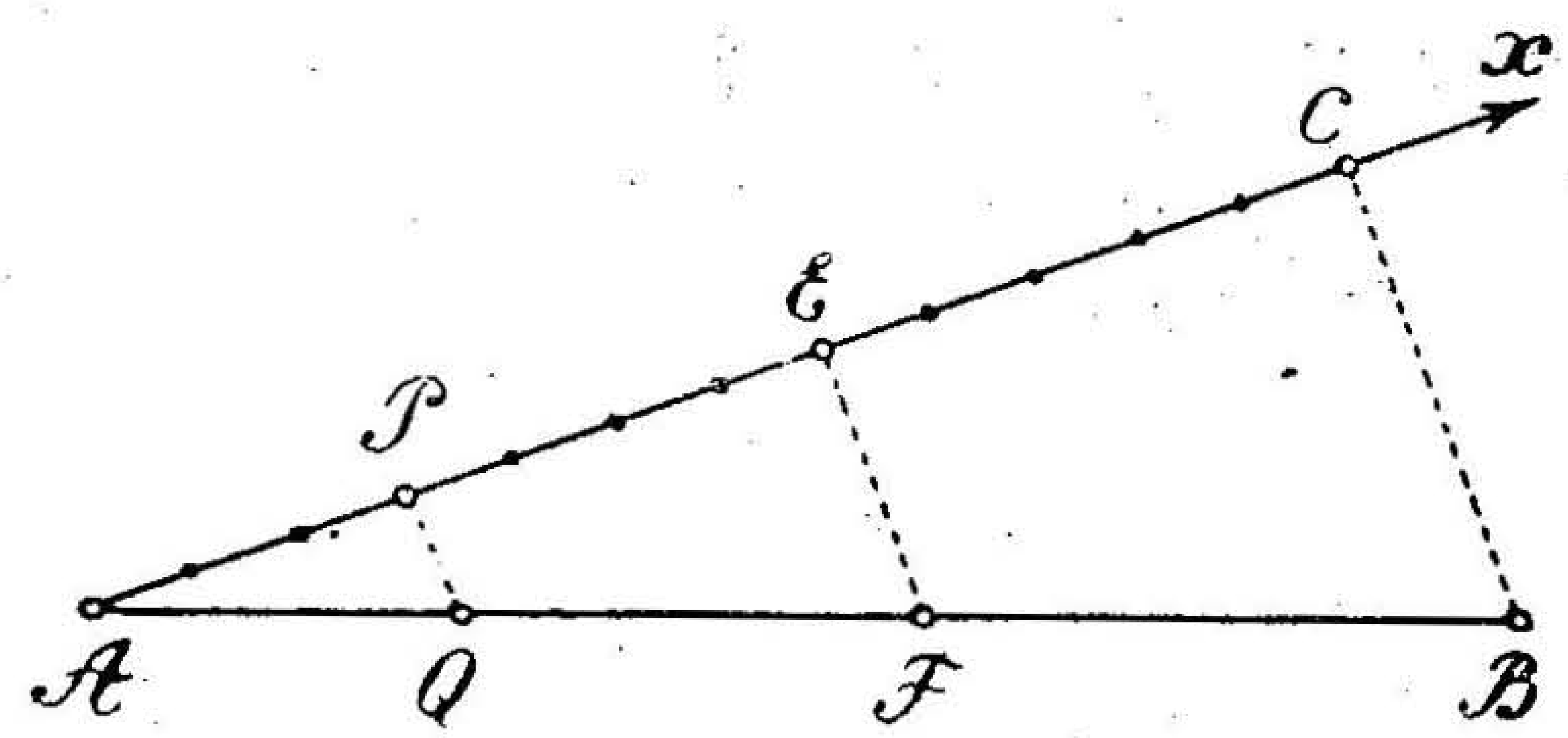

Сл. 205




Сл. 206

3) *За две дане дужи a и b наћи њихову средњу пропорционалу.* — a) Треба на зрак $AY$ (сл. 205) пренети најпре $a$ а затим $b$ ($AD = a$, $DB = b$). Затим над $AB$, као над пречником, описати полукруг и у $D$ подићи нормалу $DC$ до пресека са полукругом. Нормала $DC$ биће тражена средња пропорционала $x$ (теорема 91, под $c$). b) Треба на зрак $AY$ (сл. 206) пренети из $A$ најпре $AB = a$, а затим $AD = b$. Над $AB$, као над пречником, описати полукруг, а у тачци $D$ подићи нормалу $DC$ до пресека са полукругом. Тетива $AC$ биће тражена средња пропорционала $x$ (теорема 91, под $a$).

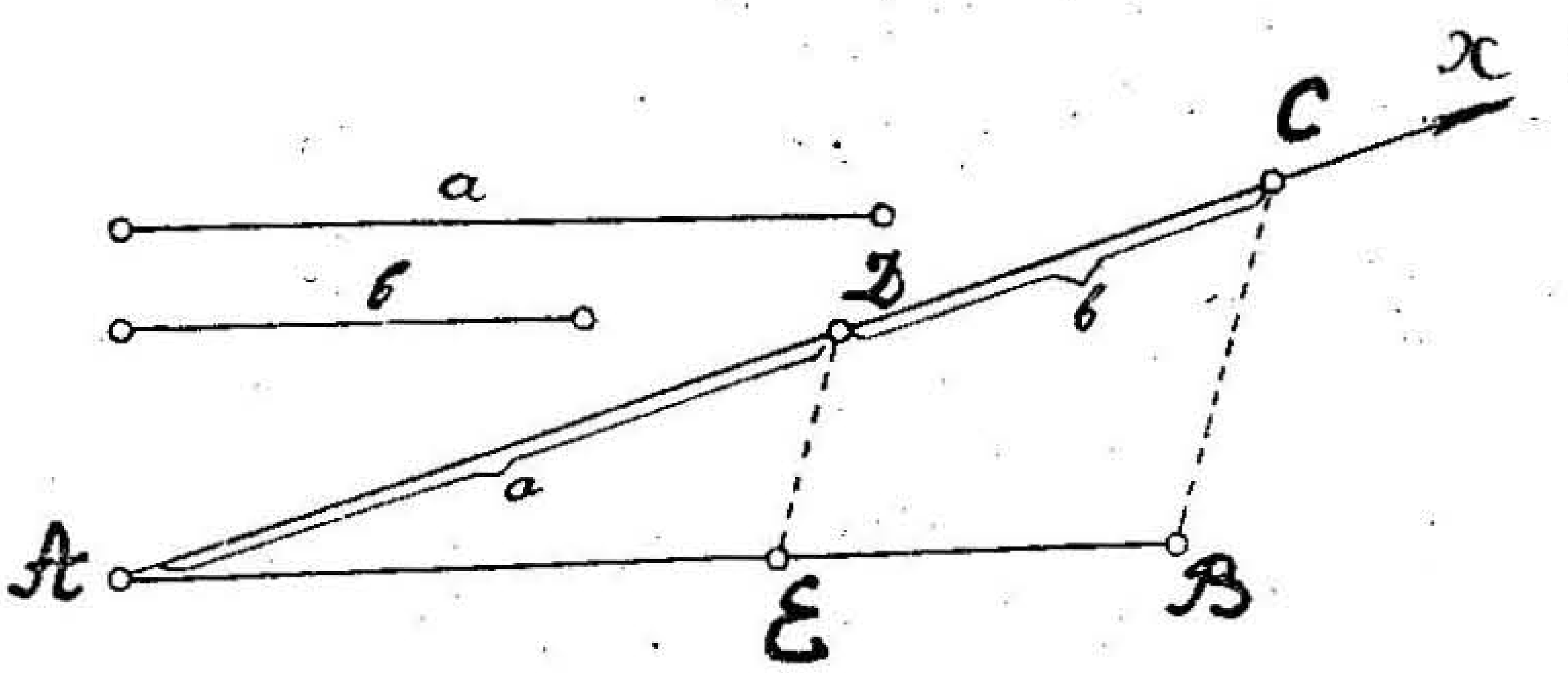
4) *Дану дуж поделити на два или више делова по некој даној размери.* — Да бисмо на пр. дуж $AB$ (сл. 207) поделили на три дела по размери $3 : 4 : 5$, треба најпре да повучемо зрак $AX$, затим на та



Сл. 207

зрак преносимо $12\ (3 + 4 + 5 = 12)$ једнаких произвољно узетих делова. Најзад 12-ту деону тачку $C$ спајамо са $B$, а из 3-ће $(P)$ и 7-ме $(E)$ повлачимо $PQ$ и $EF$ паралелно са $CB$ (теорема 75).

5) *Дану дуж поделити на два дела по размери двеју датих дужи.* — Да бисмо дуж $AB$ (сл. 208) поделили на два дела по размери $a : b$, треба најпре повући зрак $AX$ под произвољним углом, а затим на овај зрак пренети $AD = a$ и $DC = b$. Најзад спојити $C$ са $B$, а из $D$ повући $DE \parallel BC$ (теорема 73).



Сл. 208

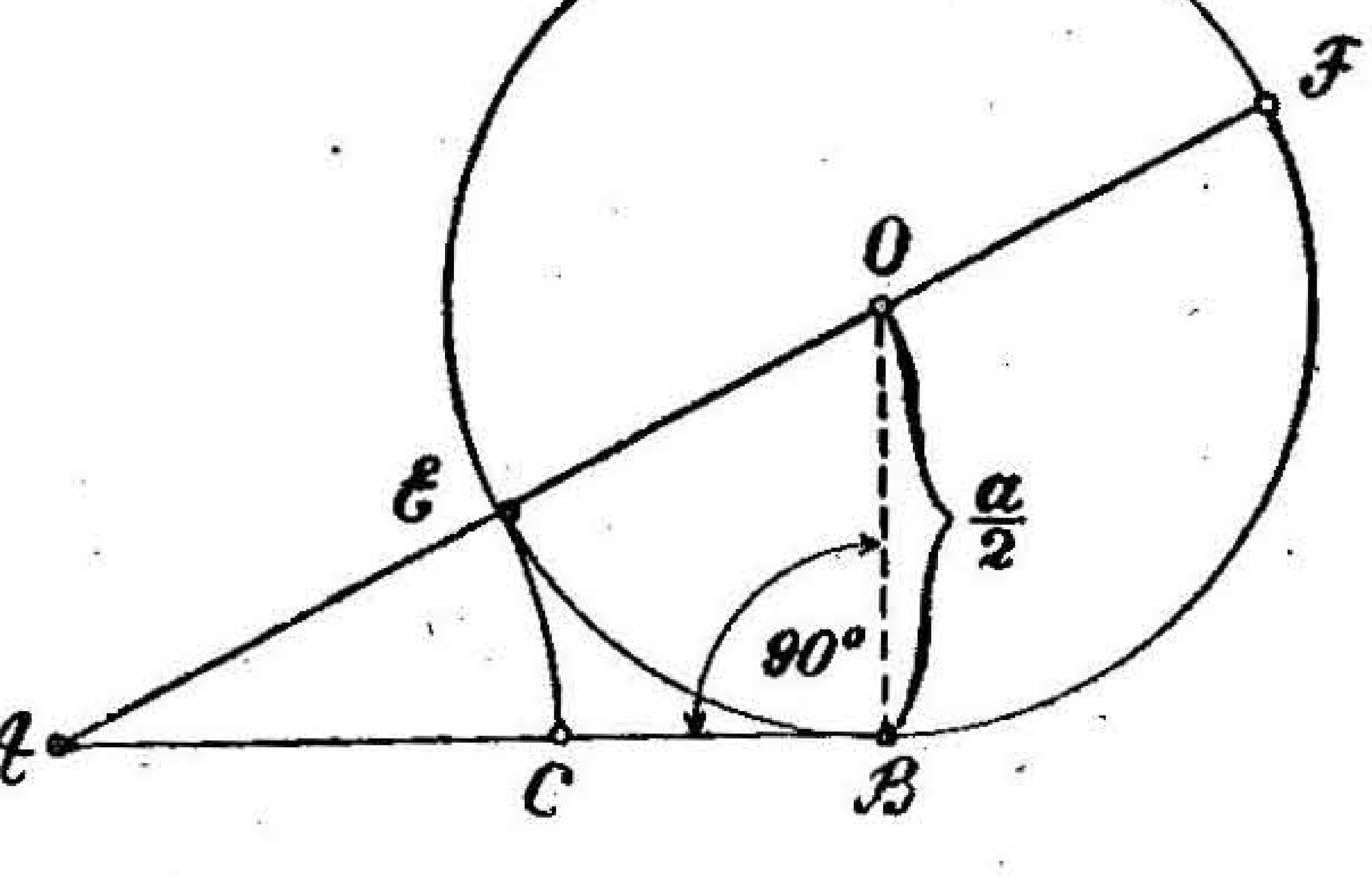
6) *Дану дуж увећати у размери $3 : 7$.* — Треба најпре дану дуж поделити на три једнака дела, а затим на њено продужење пренети још четири таква дела.

7) *Дану дуж умањити у размери $5 : 3$.* — Треба најпре дану дуж поделити на пет једнаких делова, а затим, почевши од почетка, узети за умањену дуж три таква дела.

8)* *Дану дуж поделити по непрекидној пропорцији (Златни пресек).* — Поделити једну дуж по непрекидној пропорцији, или по златном пресеку, значи поделити је на таква два неједнака дела, да је већи део средња пропорционала између целе дужи и мањег дела. Да бисмо дуж $AB = a$ (сл. 209) поделили по златном пресеку, треба најпре у $B$ подићи

* За ученике реалке.

нормалу $BO = \frac{a}{2}$, а затим из $O$ описати полупречником $OB$ круг и спојити $A$ са $O$. Најзад отсечак $AE$ добивене сечице $AF$ преносимо на $AB$ $(AC = AE)$. Тада $C$ дели дуж $AB$ по непрекидној пропорцији.




Сл. 209

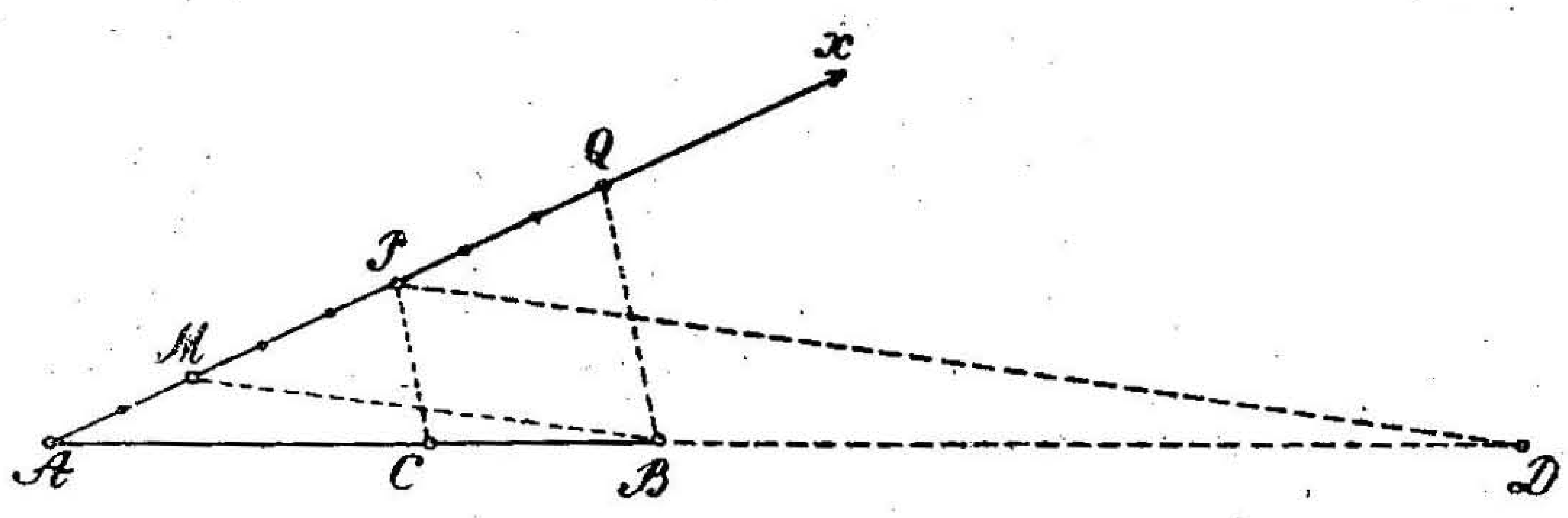
*Доказ.* — Према теореми 102 (§ 64) под а) биће $AB^2 = AF \cdot AE$.

Одавде је: $AF : AB = AB : AE$,

или $(AF - AB) : AB = (AB - AE) : AE$, или $(AF - EF) : AB = (AB - AC) : AC$, или $AE : AB = BC : AC$,

или $AC : AB = BC : AC$, или $AB : AC = AC : BC$.

9) *Дану дуж $AB$ поделити по хармонијској пропорцији, а по даној размери $m : n$.* — Да бисмо дуж $AB$ (сл. 210) по-

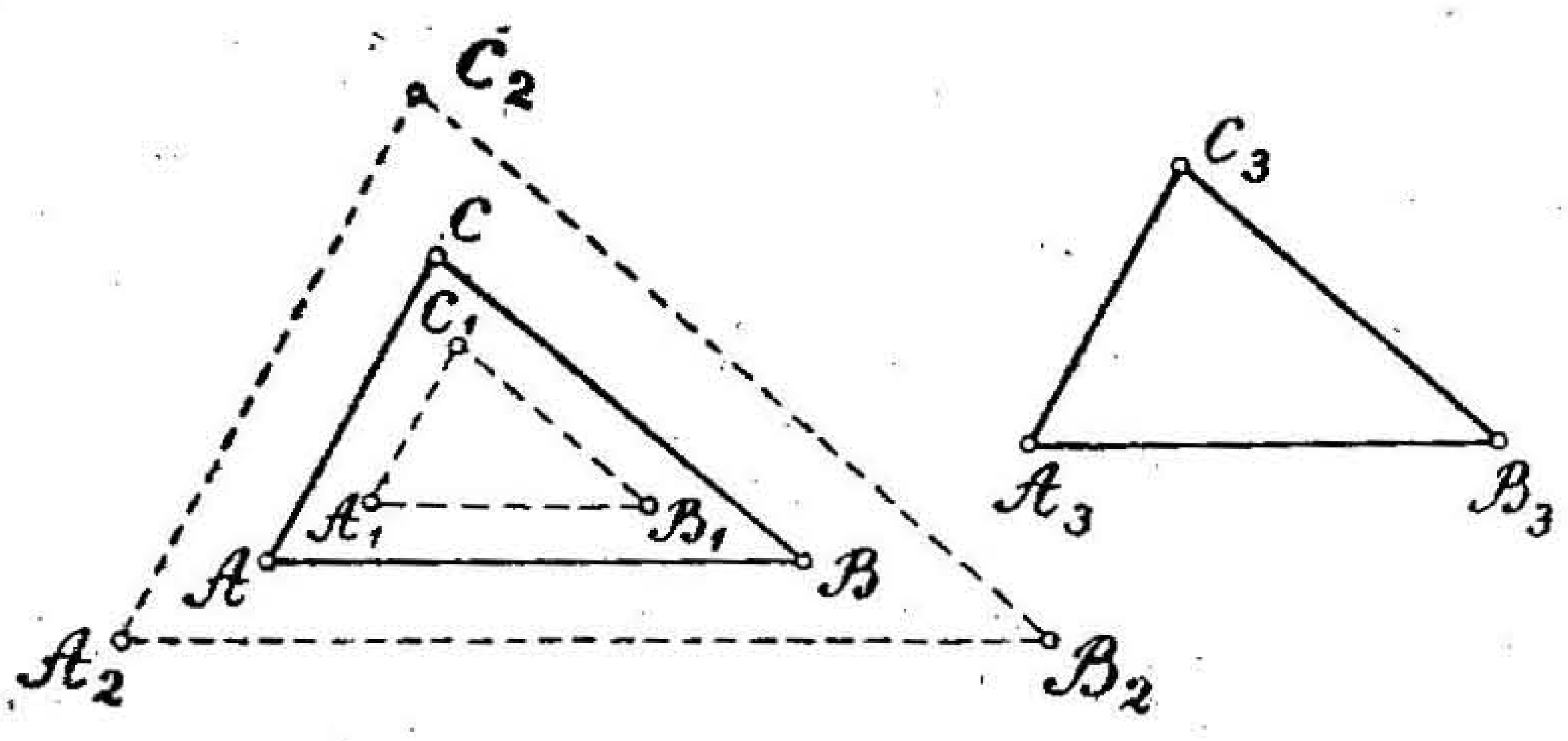



Сл. 210

делили хармониски, на пр. по размери 5 : 3, треба најпре из $A$ повући зрак $AX$ и на тај зрак пренети најпре 5 а затим 3 једнака дела. Добивену крајњу тачку $Q$ спојити са $B$, а из деоне тачке $P$ повући $PC \parallel QB$. Затим из $P$ ка $A$ узети 3 дела и спојити добивену тачку $M$ са $B$, а из $P$ повући $PD \parallel MB$. Тачке $C$ и $D$ биће две конјуговане хармониске тачке, јер је по 73 теореми: $AC : BC = AP : PQ = 5 : 3$, а

$AD : BD = AP : MP = 5 : 3$, те је: $AC : BC = AD : BD$.

10) *Конструисати троугао сличан неком даном троуглу.* — Повлачењем паралелних са странама датог троугла $ABC$ (сл. 211), добијамо троуглове: $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$, који су слични, јер имају углове једнаке (теорема 14 и 84).

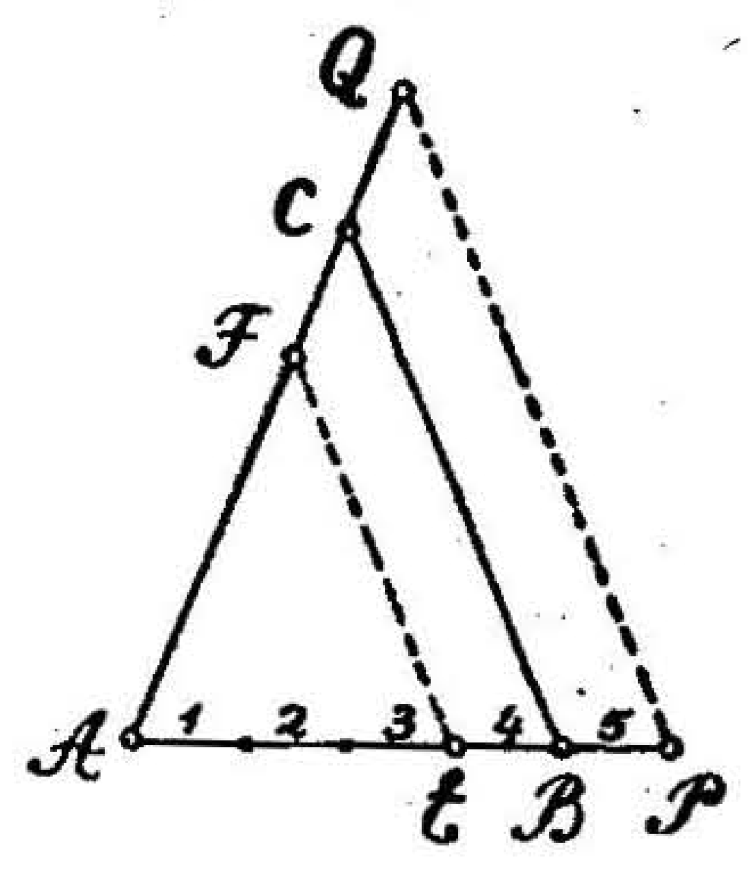


Сл. 211

Овај је задатак неодређен, пошто добијамо више троуглова сличних датом троуглова $ABC$.

11) *Над датом дужи $A_3B_3$ (сл. 211) конструисати троугао сличан троуглу $ABC$.* — Треба код $A_3$ конструисати $\sphericalangle A$, а код $B_3$ угао $B$. Добивени троугао $A_3B_3C_3 \sim \sim \triangle ABC$, пошто имају углове једнаке. Овај је задатак одређен, јер се добија само један троугао $A_3B_3C_3$ сличан троуглу $ABC$.

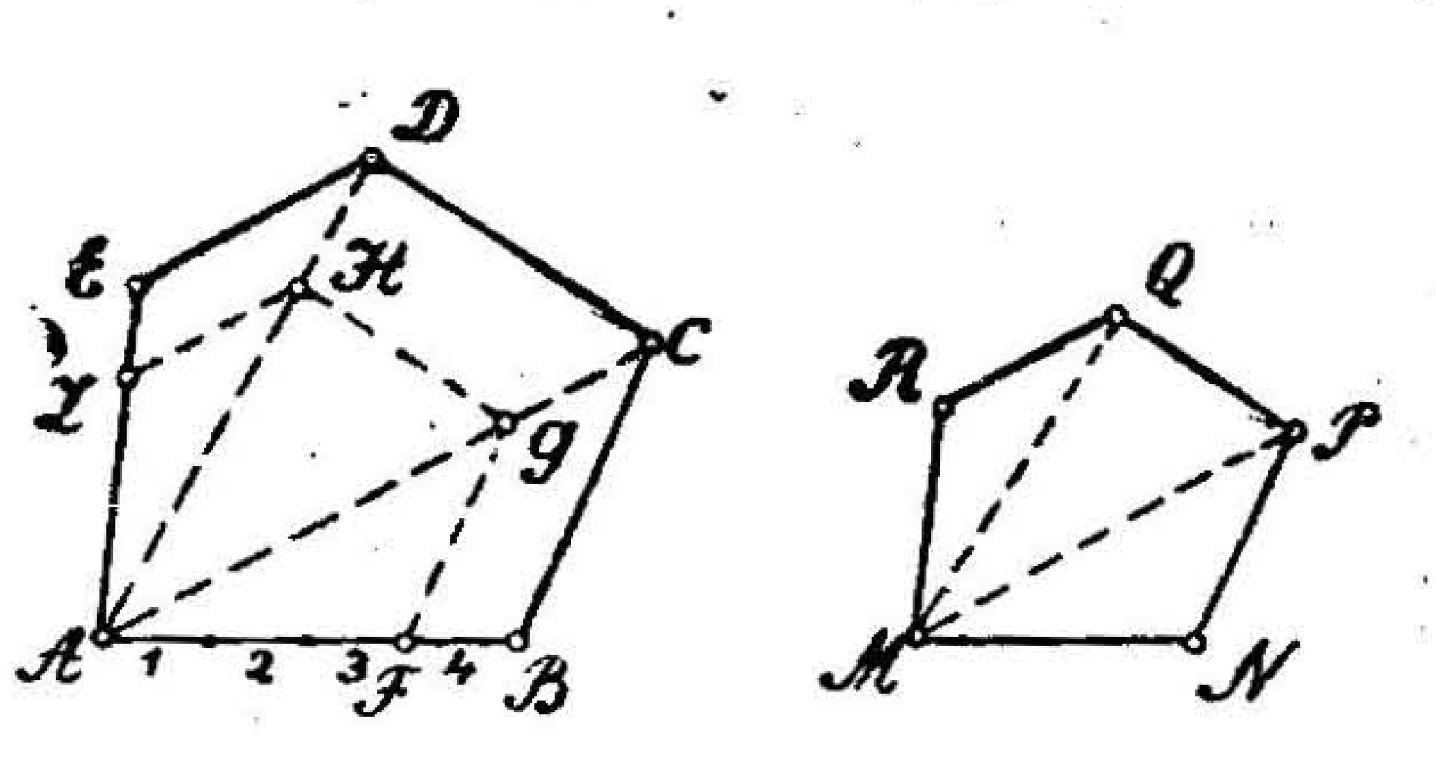
12) *Даном троуглу $ABC$ (сл. 212) конструисати сличан троугао тако a) да стране даног троугла стоје према хомологим странама траженог троугла као $m : n$; b) да њихови обими стоје као $m : n$; c) да њихове површине стоје као $m^2 : n^2$.* a) Ако је $m : n = 4 : 3$, онда треба страну $AB$ даног троугла $ABC$ поделити најпре на 4 једнака дела, па из 3-ће деоне тачке $E$ повући $EF \parallel BC$. Добивени $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, а хомологе им стране, а тако исто и обими, стоје као 4 : 3, а површине као 16 : 9 (теорема 89 и 90). b) Ако је $m : n = = 4 : 5$, онда треба $AB$ поделити опет на 4 једнака дела, па на њено продужење пренети још један такав део $\left(BP = \frac{1}{4} AB\right)$,



Сл. 212

а затим из тачке $P$ повући $PQ \parallel BC$. Тражени троугао биће $APQ$. Хомологе стране и обими даног и добивеног троугла стоје као 4:5, а површине као 16:25.

13) *Над даном дужи $MN$ (сл. 213) конструисати многоугао који је сличан даном многоуглу $ABCDE$.* — Најпре треба код даног многоугла да повучемо дијагонале $AC$ и $AD$, а затим на страну $AB$ преносимо $MN$ ($AF = MN$). Повлачимо затим $FG \parallel BC$,



Сл. 213

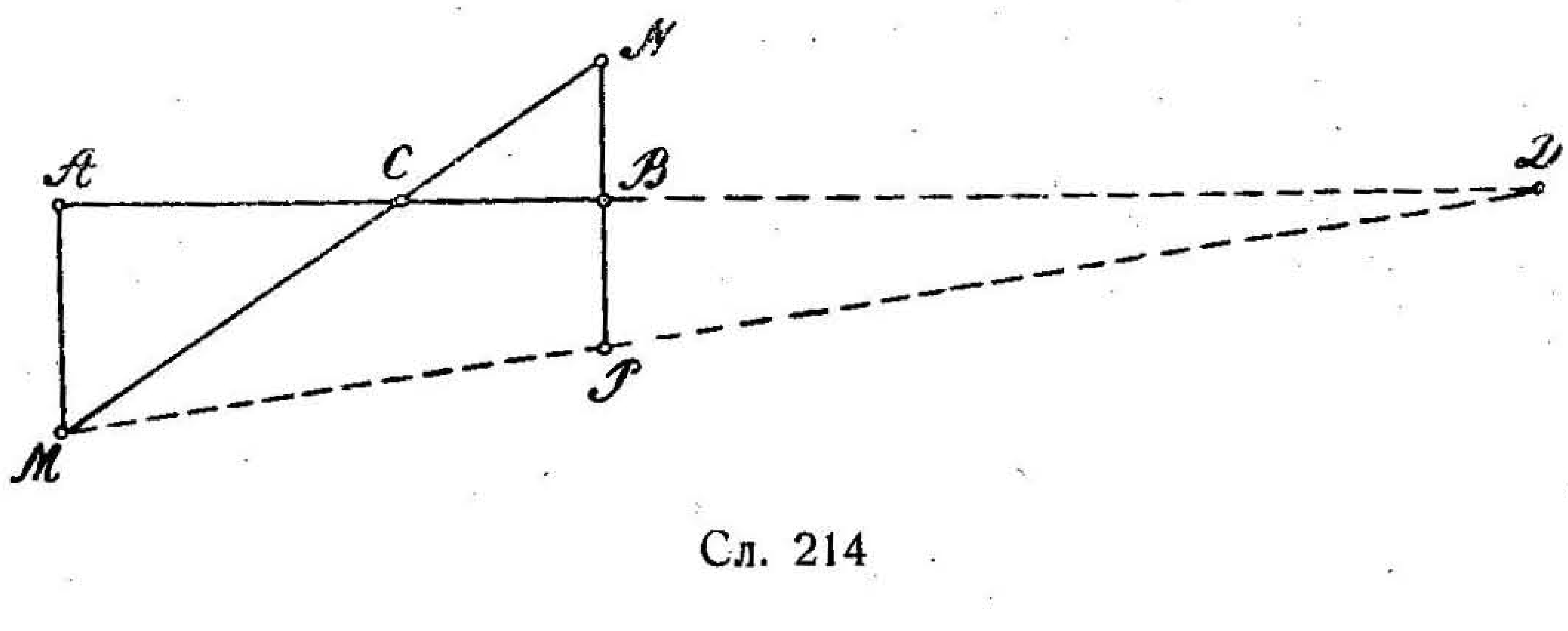
$GH \parallel CD$ и $HL \parallel DE$, чиме добијамо многоугао $AFGHL$ сличан многоуглу $ABCDE$. Најзад нам $MN$ треба конструисати $MNPQR \cong AFGHL$. Тада је $MNPQR$ тражени многоугао.

14) *Нацртај многоугао сличан даноме многоуглу $ABCDE$* (сл. 213) *тако да се стране (обим) датог многоугла имају према хомологим странама (обиму) траженог многоугла као $m:n$, а њихове површине да се имају као $m^2:n^2$.*

Ако претпоставимо да је дата размера $m:n = 4:3$, онда треба најпре код датог многоугла повући дијагноле $AC$ и $AD$, а затим поделити страну $AB$ на 4 ($m$) једнака дела. Најзад из 3-ће ($n$-те) деоне тачке $F$ повући $FG \parallel BC$, затим $GH \parallel CD$ и најзад $HL \parallel DE$. Тражени многоугао је $AFGHL$. Стране (обим) датог многоугла имају се према странама (обиму) добивеног као $4:3$, а њихове се површине имају као $16:9$ (теорема 99 и 100).

15*) *На два дата круга $O_1$ и $O_2$ повући заједничке тангенте* — (види напомену под 1 код § 65).

16) *За три дане тачке које се налазе у истом правцу одредити четврту њима хармониску тачку.* — Ако су дате тачке $A$, $B$ и $C$, па желимо да нађемо четврту хармониску тачку $D$ (сл. 214), треба кроз тачку $C$ најпре повући праву




Сл. 214

$MN$, а из тачака $A$ и $B$ повући паралелне праве $AM$ и $BN$. Затим продужимо $BN$ с друге стране и на то продужење преносимо $BP = BN$. Најзад, права која спаја $M$ и $P$ продужена сече продужење од $AB$ у тачци $D$, која је тражена четврта хармониска тачка. Заиста је из сличности троуглова $AMC$ и $BNC$: $AC:BC = AM:BN$ (1), а из сличности троуглова $ADM$ и $BDP$: $AD:BD = AM:BP$ (2). Из пропорција (1) и (2), чије су десне стране једнаке, имамо: $AC:BC = AD:BD$.

* За ученике реалке.

## § 70. — Рачунски задаци

1) Решити правоугли троугао (сл. 176) кад се зна:
1) $a$ и $b$; 2) $a$ и $p$; 3) $b$ и $c$; 4) $b$ и $h$ 5) $b$ и $q$; 6) $h$ и $p$; 7) $p$ и $q$; 8) $a$ и $\frac{b}{c}$; 9) $b$ и $\frac{a}{c}$; 10) $a$ и $b+c$; 11) $a$ и $b-c$; 12) $b$ и $a+c$; 13) $b$ и $a-c$; 14) $a$ и $\beta$; 15) $b$ и $\beta$; 16) $h$ и $\beta$; 17) $q$ и $\beta$; 18) $p$ и $\beta$. (За први пример узми $a = 20$ cm и $b = 16$ cm, па нађи остале количине: $c$, $h$, $p$, $q$, и $\beta$ ($\gamma$), а за остале примере узми нађене вредности дотичних количина.)

2) Код равностраног троугла је $a$ страна, $h$ висина, $R$ и $r$ полтпречници описаног и уписаног круга; из једне од тих количина нађи остале.

3) Код равнокраког троугла је $b$ крак, $c$ основица, $h$ основичина висина, $\alpha$ угао на основици; из две од ових количина нађи друге две.

4) Код равностраног троугла је збир стране и висине 15 cm; нађи страну и висину.

5) Код квадрата је $a$ страна а $d$ дијагонала; из једне од тих количина нађи другу.

6) Код квадрата зна се збир (разлика) дијагонале и стране; нађи страну и дијагоналу.

7) Паралелне стране једнога трапеза јесу 18 m и 16 m, а висина 9 m; колика је управна спуштена из пресека непаралелних страна на краћу паралелну страну?

8) Колика је видна даљина посматрачевог ока, тј. колика је дирка повучена из ока једнога посматрача ка Земљи, ако се посматрач налази у балону, на висини од 2000 m над Земљом, кад је полупречник Земље 6378 km?

9) Стране једног троугла јесу 12, 15 и 17 m, а најмања страна једнога њему сличног троугла је 7 m; наћи остале две стране овога троугла.

10) Један троугао има основицу 15 cm а висину 9 cm, а основица једног њему сличног троугла је 12 cm; наћи њену висину.

11) Основица једног троугла је 8 m, а висина му је 5 m; на ком отстојању од врха треба да повучемо праву паралелну са основицом да њен отсечак између страна троуглових буде 3 m?

12) Основица једнога троугла је 18 cm, а на отстојању од 14,1 cm од основице повучена је паралелна са основицом, чији отсечак између троуглових страна износи 8,6 cm; наћи висину троугла.

13) Вертикални предмет висине 5 m баца сенку од 8 m. Наћи висину предмета који у исто време баца сенку од 25 m.

14) Паралелне стране једног трапеза јесу 15 и 5 cm, а једна од непаралелних страна 8 cm. За колико cm треба продужити ову страну до пресека са продуженом другом непаралелном страном?

15) Основица једнога троугла је 24 cm, а висина му је 20 cm. У овоме троуглу уписан је квадрат тако да му се једна страна поклапа с правцем основице, а да се супротна темена налазе на странама троугла. Наћи страну квадрата.

16) Дијагонале једног ромба јесу 10 и 24 m; нађи његов обим.

17) Стране једног троугла јесу 3, 4 и 5 m; какав је овај троугао?

18) Обим правоуглог троугла је 12,5 m, а размера његових катета 3:2. Нађи његове стране.

19) У кругу пречника 5 m повучена је тетива дужине 3 m; наћи њену централну раздаљину.

20) У кругу полупречника 5 m повучена је тетива чија је централна раздаљина 3 m; наћи дужину тетиве.

21) Тетива дужине 10 m има централну раздаљину 4 m; наћи полупречник круга.

22) Из тачке чија је централна раздаљина 5 m повучена је тангента кругу полупречника 4 m; наћи дужину тангенте.

23) Тетива дели кружну периферију у размери 5:4; наћи периферијске углове над том тетивом.

24) Из крајње тачке једнога пречника, чија је дужина 8 m, повучена је тетива која заклапа с пречником угао од 30°. Наћи дужину ове тетиве и тетиве која спаја други крај пречника с другом крајњом тачком повучене тетиве.

25*) Две тетиве секу се у кругу. Отсечци једне тетиве јесу 6 и 14 m, а отсечци друге тетиве имају се као 7:3; наћи отсечке друге тетиве.

26) У кругу полупречника 4,5 m повучена је из крајње тачке једнога пречника тетива, чија је пројекција на пречнику 0,6 m; наћи дужину повучене тетиве.

27) Тетива дужине 0,3 m нормална је на једном полупречнику круга и дели га по размери 8:9; наћи пречник круга.

28*) Из тачке ван круга повучене су две сечице на круг. Већи отсечак једне сечице је 13,75 m, а њена је тетива 6,25 m; наћи другу сечицу ако је њен спољашњи отсечак 10 m.

29*) Из тачке ван круга повучена је на круг сечица, чији је спољашњи отсечак 5,25 m а тетива 7,5 m. Наћи дужину тангенте повучене из исте тачке кругу.

30*) Из тачке ван круга повучене су кругу тангента дужине 5 m и сечица, чија је тетива 3,2 m; наћи отсечке сечице.

31*) Потенција неке тачке је 100 m², а полупречник круга $r = 5$ m; наћи централну раздаљину ове тачке и дужину тангенте повучене из те тачке на круг.

32*) Потенција неке тачке је 60 m², а тетива неке сечице повучене из те тачке на круг је 11 m; наћи отсечке сечице.

33*) Наћи потенцију неке тачке и дужину тангенте поучене из те тачке кругу, ако је њена централна раздаљина 10 m; а полупречник круга 6 м.

34) Стране једнога многоугла јесу 4, 6, 7, 8 и 11 m, а најмања страна једнога њему сличног многоугла је 3 m; наћи остале његове стране и обим.

35) Обими два слична полигона имају се као 5:3, а једна страна мањег многоугла је 4 m; наћи њену хомологу страну другог многоугла.

36) Стране једног троугла јесу $3\frac{5}{6}$ m, 2,4 m и $1\frac{23}{30}$ m; наћи стране њему сличног троугла, ако је његов обим 16 m.

37) Обими два слична равнокрака троугла јесу 31,7 и 18,2 m, а основица првог троугла је за 8,1 m већа од основице другога. Наћи стране ових троуглова.

38*) Из једне тачке ван круга повучене су на дати круг дирка и сечица. Колики су отсечци сечице а колика дирка, ако је разлика између већег отсечка сечице и дирке 18 dm, а збир отсечака сечице 30 dm (I београдска, 1900).

39*) У неком кругу кроз средину тетиве $s$ повучена је друга тетива $s_1$; да се израчунају њени отсечци уопште, а затим и за $s = 4{,}2$ dm и $s_1 = 5{,}8$ dm (Ниш, 1903).

40) Пречник једнога круга је 30 cm. Тај је пречник подељен на три једнака дела. Наћи дужине тетива које пролазе кроз деоне тачке а нормалне су на пречнику (Београд, III мушка, 1923).

41) Израчунати дијагонале ромба, кад је дата његова страна $a = 5$ m, а полупречник уписаног круга у њему $r = 2{,}4$ m (Београд, Реалка 1923).

---

*) За ученике реалке.

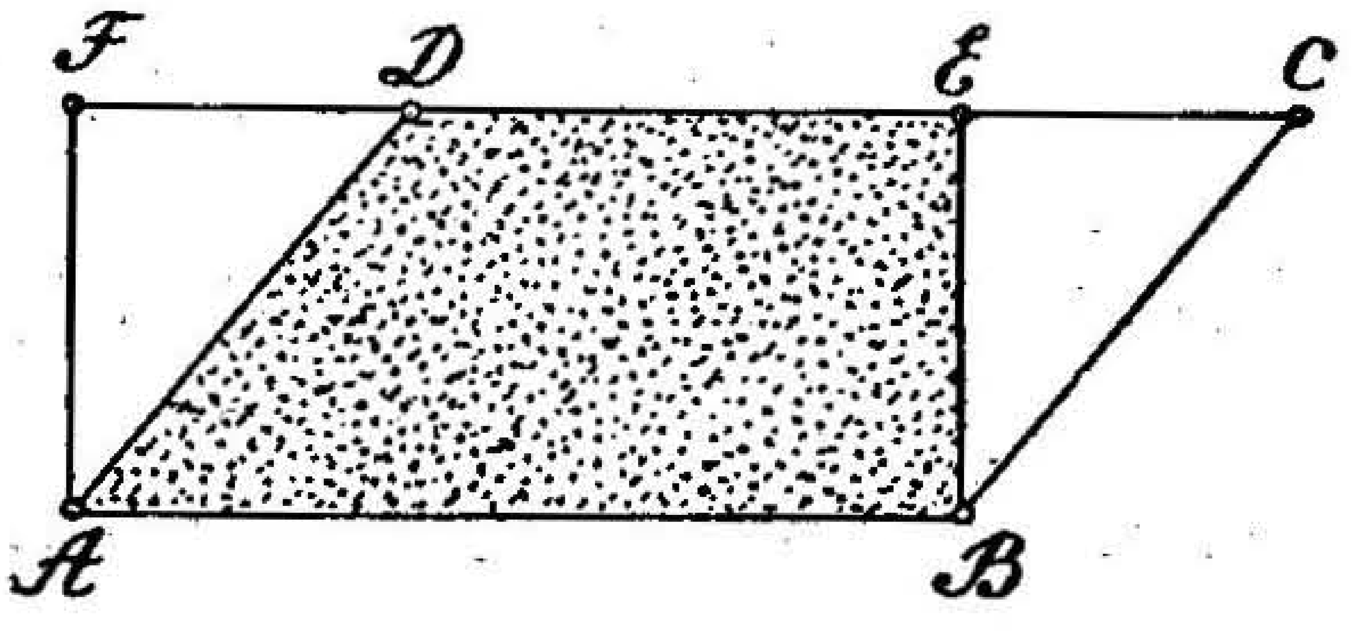
# ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

## ЈЕДНАКОСТ И ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНА ПРАВОЛИНИСКИХ СЛИКА, ИЗРАЧУНАВАЊЕ КОД ТЕТИВНИХ И ТАНГЕНТНИХ ПОЛИГОНА

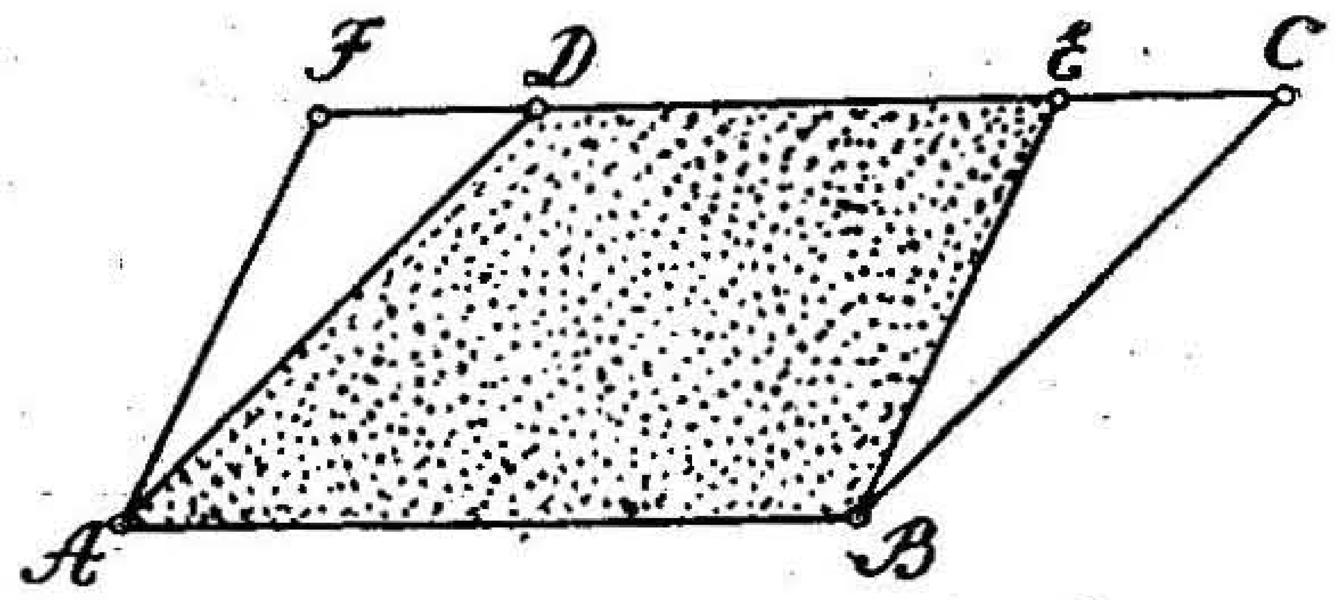
## I. Једнакост површина

§ 71. — **Погодбе једнакости праволиниских слика.** — У другом и трећем одељку упознали смо се са погодбама подударности и сличности слика, а о погодбама једнакости слика упознаћемо се у овоме одељку уз помоћ следећих теорема:

*Теорема 111.* — **Сваки косоугли паралелограм има једнаку површину с правоугаоником једнаке основице и висине.** — Да



Сл. 215

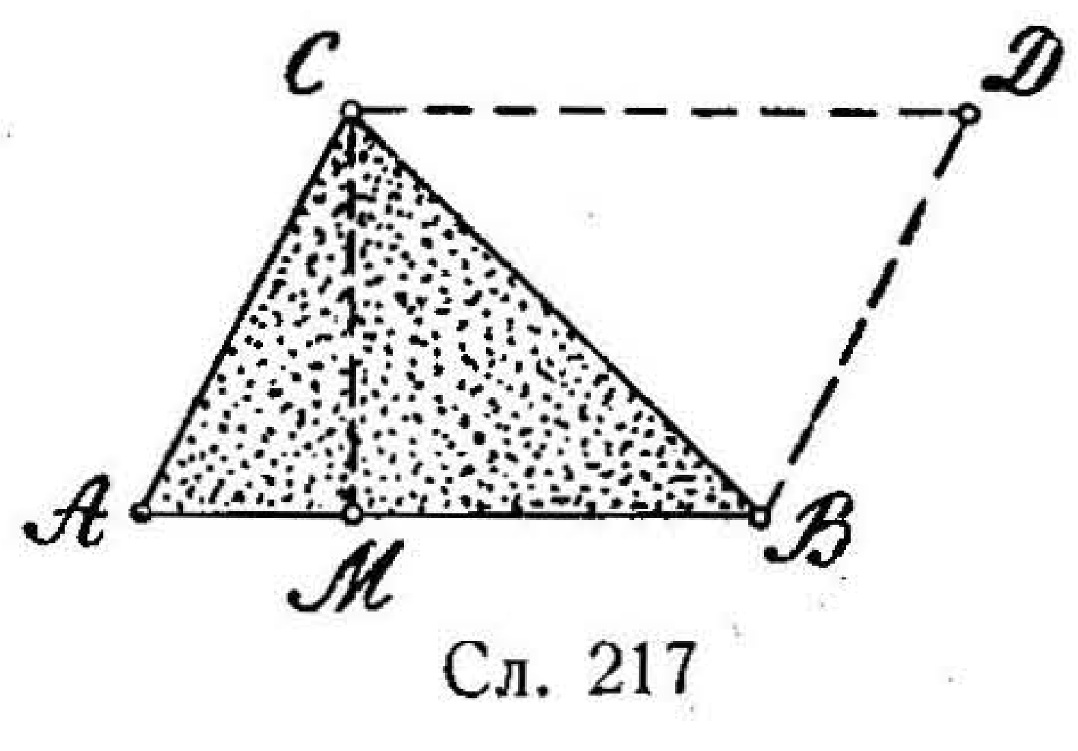


Сл. 216

бисмо доказали једнакост ромбоида $ABCD$ и правоугаоника $ABEF$, који имају једнаке основице и висине, треба да докажемо само једнакост троуглова $ADF$ и $BCE$, пошто те две слике имају као заједничку површину трапез $ABED$. Троуглови $ADF$ и $BCE$ јесу једнаки, јер су подударни ($AF = BE$, $AD = BC$ и $\sphericalangle F = \sphericalangle E = 90^0$. Стога је $ABCD = ABEF$.

Ова је теорема у важности не само за правоугаоник и ромбоид, већ и за ма која два паралелограма једнаких основица и висина, што се види из сл 216. Овде су троуглови $ADF$ и $BCE$ подударни, јер је $AF = BE$, $AD = BC$, а $\sphericalangle F = \sphericalangle E$ као сагласни.

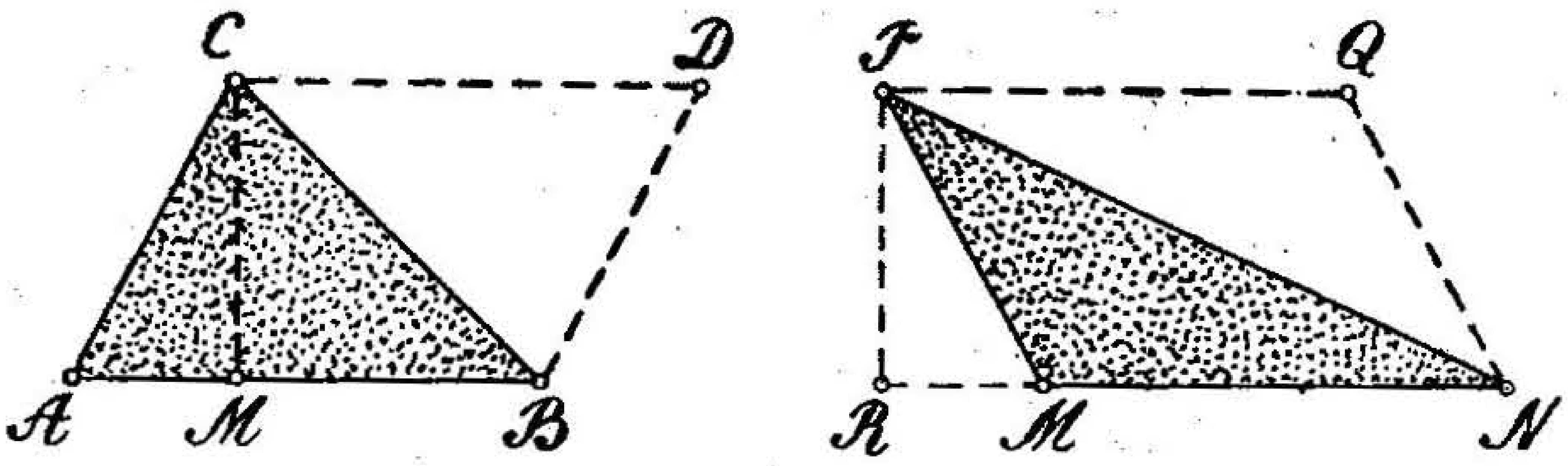
*Теорема 112.* — **Сваки је троугао, по површини, половина од онога паралелограма с којим има једнаку основицу и висину.**



Сл. 217

Нека $\triangle ABC$ (сл. 217) и паралелограм $ABCD$ имају заједничку основицу $AB$ и заједничку висину $CM$. Да је $\triangle ABC = \frac{ABDC}{2}$, уверавамо се из једнакости троуглова $ABC$ и $BDC$. Ови су троуглови једнаки, јер су подударни. Подударни су зато што су им стране једнаке. Па како им збир даје паралелограм *ABDC*, а једнаки су, то је сваки од њих половина тога паралелограма.

*Теорема 113.* — **Два су троугла једнаке површине, ако имају једнаке основице и висине.** Нека троуглови *АБС* и *MNP* имају једнаке основице ($AB = MN$) и једнаке висине ($CM = PR$). Повлачењем $CD \parallel AB$, $BD \parallel AC$, $PQ \parallel MN$ и $NQ \parallel MP$ добијамо

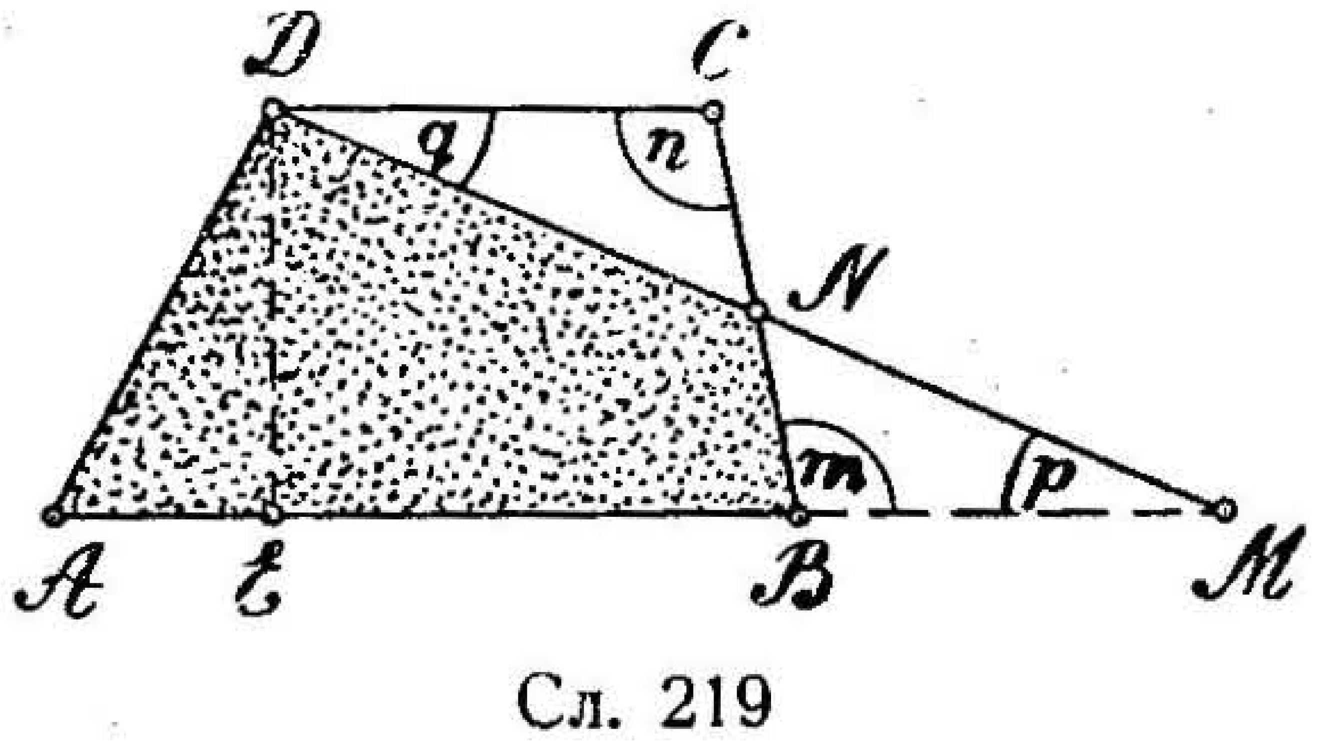



Сл. 218

паралелограме *ABDC* и *MNQP*, који су једнаки, пошто имају једнаке основице и висине (теорема 111). Па како је по 112 теореми $\triangle\ ABC = \frac{ABDC}{2}$, а $\triangle\ MNP = \frac{MNQP}{2}$, то су и троуглови *ABC* и *MNP*, као половине једнаких паралелограма, једнаки.

*Напомена.* — До сада смо могли доказати једнакост троуглова само помоћу њихове подударности, а од сада и помоћу једнакости њихових основица и висина.

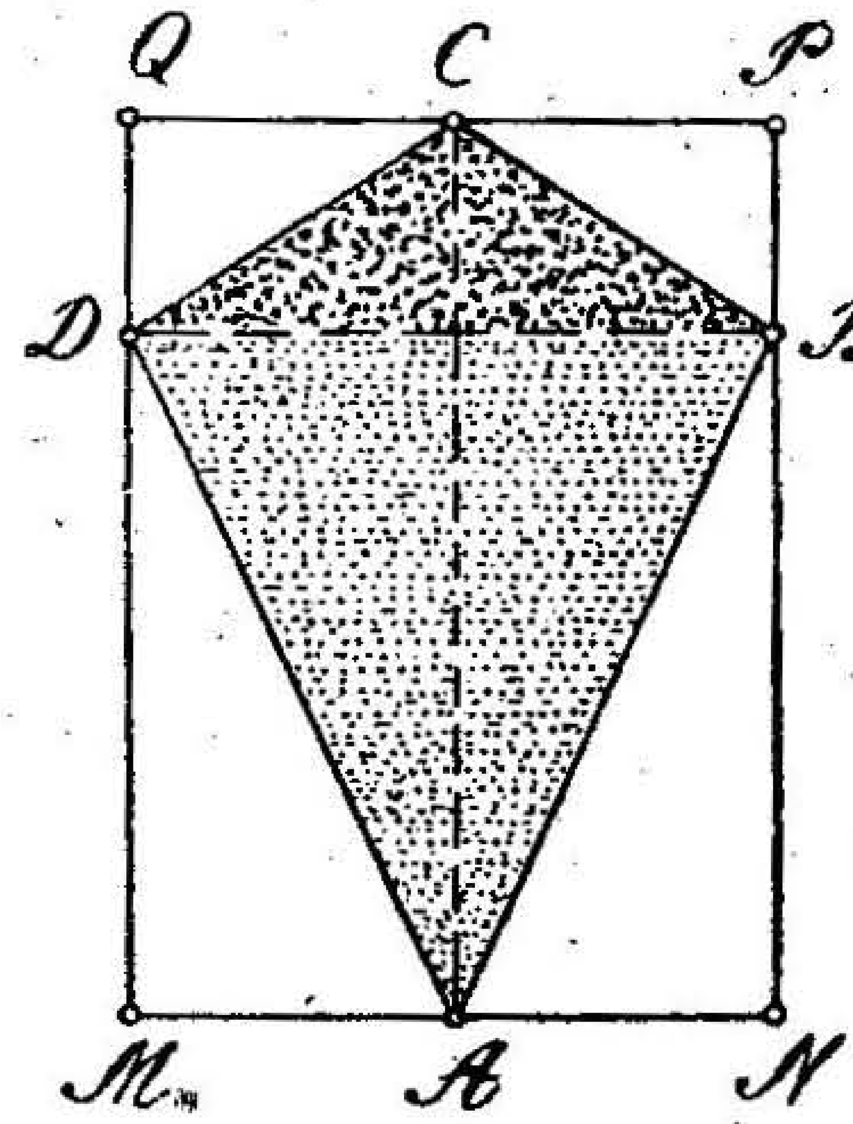
*Теорема 114.* — **Сваки је трапез по површини једнак с оним троуглом чија је основица једнака збиру паралелних страна трапезових а висина му је једнака са висином троугловом.**




Сл. 219

Ако страну *AB* трапеза *ABCD* (сл. 219) продужимо за *BM* тако да је $BM = DC$ а тачку *M* спојимо са *D*, онда добијамо троугао *AMD*, чија је основица једнака збиру паралелних страна трапезових, а има исту висину *DE* као и трапез. Да бисмо доказали једнакост овога троугла и трапеза *ABCD*, довољно је да докажемо једнакост троуглова *BMN* и *DCN*, пошто троугао *AMD* и трапез *ABCD* имају као заједничку површину трапезоид *ABND*. Троуглови *BMN* и *DCN* јесу једнаки, пошто су подударни ($BM = DC$, $\sphericalangle\ m = \sphericalangle\ n$ и $\sphericalangle\ p = \sphericalangle\ q$ као наизменични).

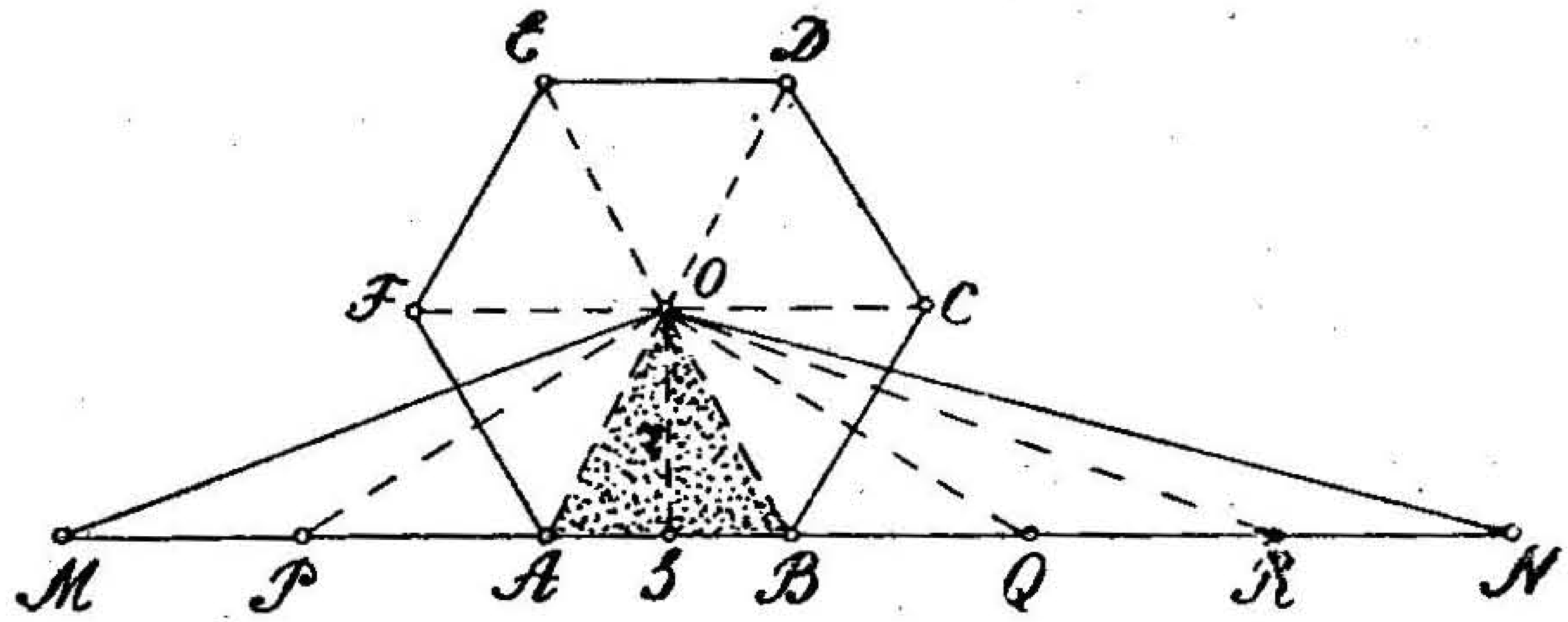
*Теорема 115.* — **Сваки четвороугао са нормалним дијагоналама** (квадрат, ромб, делтоид) **половина је по површини од онога правоугаоника, чије су стране једнаке са дијагоналама четвороугловим.** Ако кроз темена $D$ и $B$ делтоида $ABCD$ (сл. 220) повучемо $MQ$ и $NP$ паралелно са дијагоналом $AC$, а кроз темена $A$ и $C$ повучемо $MN$ и $QP$ паралално са дијагоналом $DB$, онда добијамо правоугаоник $MNPQ$, чије су стране једнаке са дијагоналама делтоидовим. Да бисмо доказали да је делтоид половина овога правоугаоника, служимо се теоремом 113, по којој је: $\triangle\ DBC = \frac{DBPQ}{2}$, $\triangle\ DBA = \frac{DBNM}{2}$. Стога је:



Сл. 220

$$\triangle\ DBC + \triangle\ DBA = \frac{DBPQ}{2} + \frac{DBNM}{2} =$$
$$= \frac{DBPQ + DBNM}{2}, \text{ или } ABCD = \frac{MNPQ}{2}.$$

*Теорема 116.* — **Сваки правилан полигон једнак је по површини са оним троуглом, чија је основица једнака обиму многоугловом, а висина му је једнака полупречнику круга уписаног у многоуглу.** Ако страну $AB$ правилног 6-тоугла $ABCDEF$ (сл. 221)

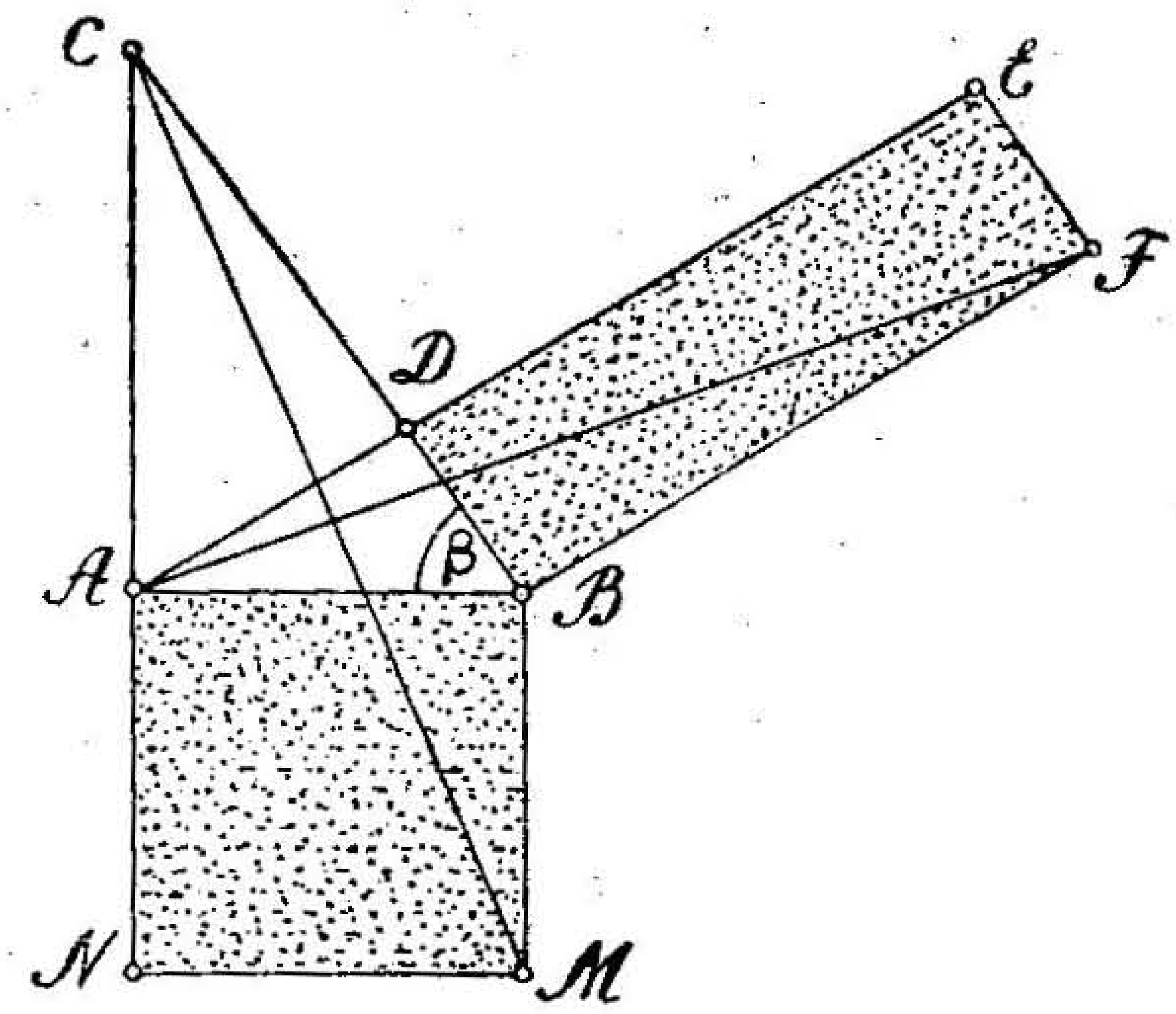


Сл. 221

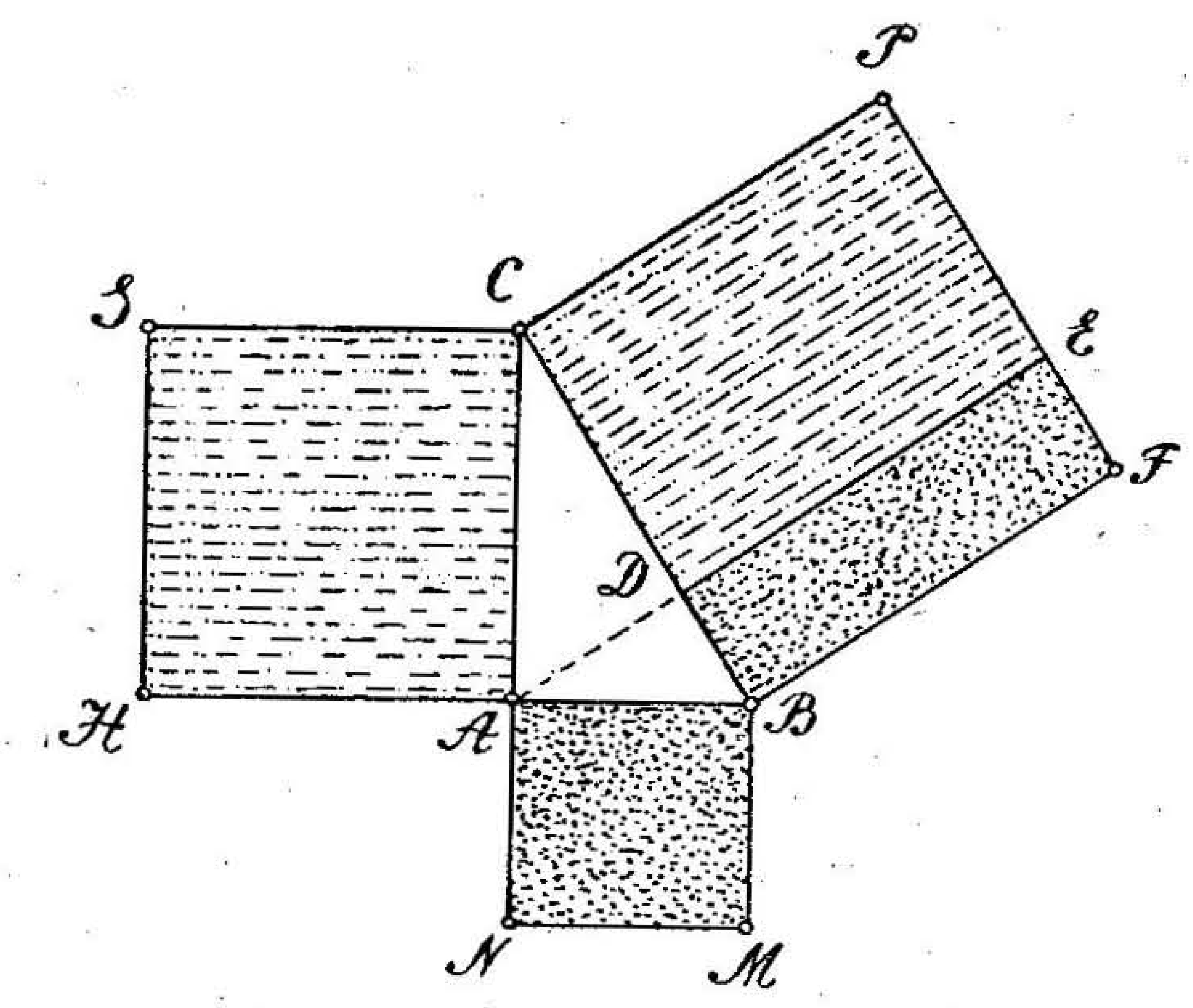
продужимо и с једне и с друге стране и на њу пренесемо све остале стране 6-тоугла, и крајње тачке $M$ и $N$ спојимо са центром $O$ уписаног круга, онда добијамо $\triangle\ MNO$, чија је основица $MN$ једнака обиму 6-тоугла, а висина $OS$ једнака полупречнику $r$ круга уписаног у 6-тоуглу. Да бисмо доказали да је $\triangle\ MNO = ABCDEF$, треба једино да докажемо да је и $\triangle\ MNO$ и 6-тоугао $ABCDEF$ шест пута већи од $\triangle\ ABO$. Да је то тачно увиђамо, ако тачке $P$, $Q$ и $R$, а тако исто и темена 6-тоугла спојимо са центром $O$. Тада су троуглови: $MPO$, $PAO$, $ABO$, $BQO$, $QRO$ и $RNO$ једнаки, јер имају једнаке основице и заједничку висину $OS = r$. Стога је $\triangle\ MNO$ шест пута већи од ма кога од тих троуглова, па и од $\triangle\ ABO$. Тако исто, 6-тоугао $ABCDEF$ шест пута је већи од $\triangle\ ABO$, пошто су троуглови: $ABO$, $BCO$, $CDO$, $DEO$, $EFO$ и $FAO$ као подударни једнаки. Па како је и $\triangle\ MNO$ и 6-тоугао $ABCDEF$ шест пута већи од $\triangle\ ABO$, то су те две слике једнаке. Истим путем доказује се ова теорема, ако место правилног шестоугла узмемо ма који правилан $n$-тоугао.

*Напомена.* — Како круг сматрамо као правилан многоугао од бесконачног броја страна, то је, на основу ове теореме, површина круга једнака површини троугла чија је основица једнака обиму, а висина му је једнака полупречнику круга.

*Теорема 117.* — **Квадрат над једном катетом правоуглог троугла једнак је по површини с оним правоугаоником коме је једна страна једнака са хипотенузом, а друга са хипотенузиним отсечком до те катете.** Да бисмо доказали да је квадрат $ABMN$ (сл. 222) над катетом $AB$ једнак правоугаонику $BFED$, коме је дужина $BF$ једнака хипотенузи $BC$, а ширина отсечку $BD$, треба најпре да спојимо $M$ са $C$, затим $A$ са $F$ и најзад да докажемо једнакост троуглова $ABF$ и $CBM$. Ти су троуглови једнаки, јер су подударни ($BC = BF$, $AB = BM$ и $\sphericalangle\ ABF = \sphericalangle\ CBM = 90^0 + \beta$). Па како је по 113 теореми $\triangle ABF = \frac{BFED}{2}$, $\triangle\ CBM = \frac{ABMN}{2}$, то је и половина квадрата $ABMN$ једнака половини правоугаоника $BFED$. Тада су једнаке и њихове целине, тј. $ABMN = BFED$.



Сл. 222



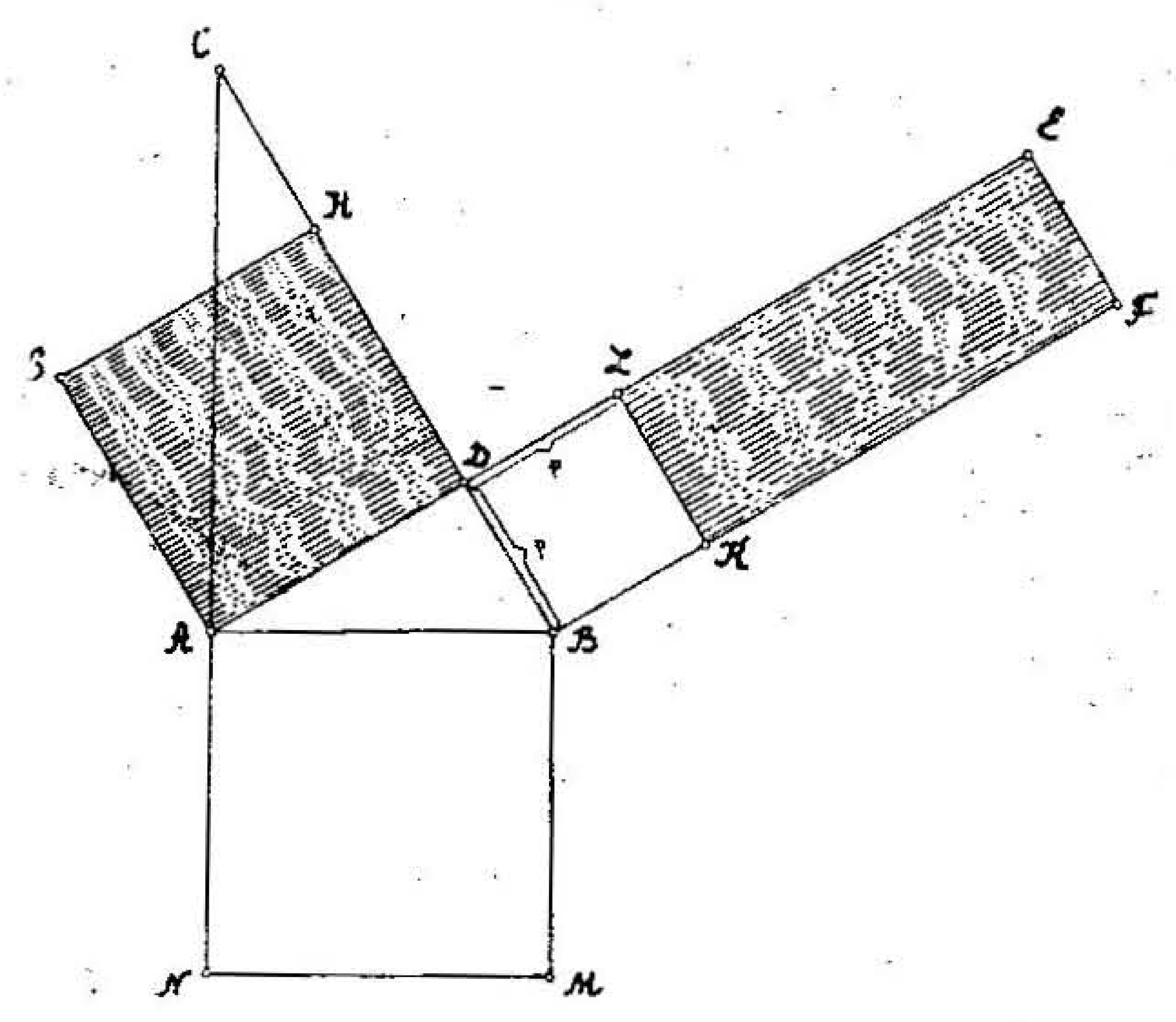

Сл. 223

*Теорема 118.* — **Квадрат над хипотенузом правоуглог троугла једнак је са збиром квадрата над катетама.** *(Питагорино правило)* По претходној теореми имамо: $ABMN = BFED$, а $ACSH = DEPC$ (сл. 223). Сабирањем ових двеју једначина добијамо:

$$ABMN + ACSH = \\ = BFED + DEPC,$$

или $ABMN + ACSH = BFPC$, чиме је ова врло важна теорема доказана.

*Теорема 119.* — **Квадрат над хипотенузином висином правоуглог троугла једнак је правоугаонику, коме су стране једнаке са отсечцима хипотенузиним.** Нека је $ADHS$ квадрат над висином $AD$ (сл. 224), $BKLD$ квадрат над отсечком хипотенузиним $BD$, $ABMN$ квадрат над катетом $AB$, а $BFED$ правоугаоник, чија је дужина једнака хипотенузи $BC$ а ширина отсечку $BD$. Тада је према претходној теореми: $ADHS = ABMN - BKLD$, или, заменом $ABMN$ са $BFED$ (теорема 117):




Сл. 224

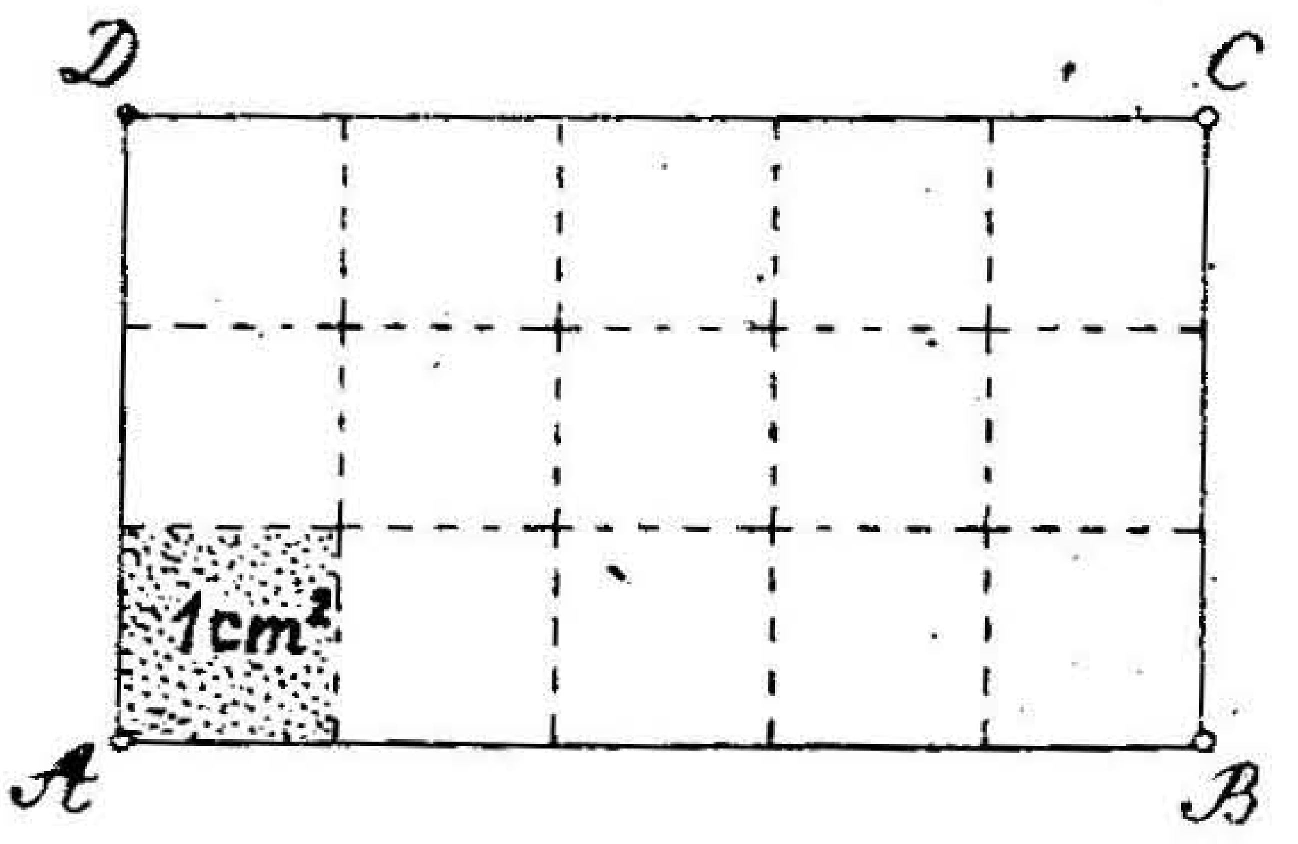
$$ADHS = BFED - BKLD = KFEL,$$

чиме је и ова теорема доказана.

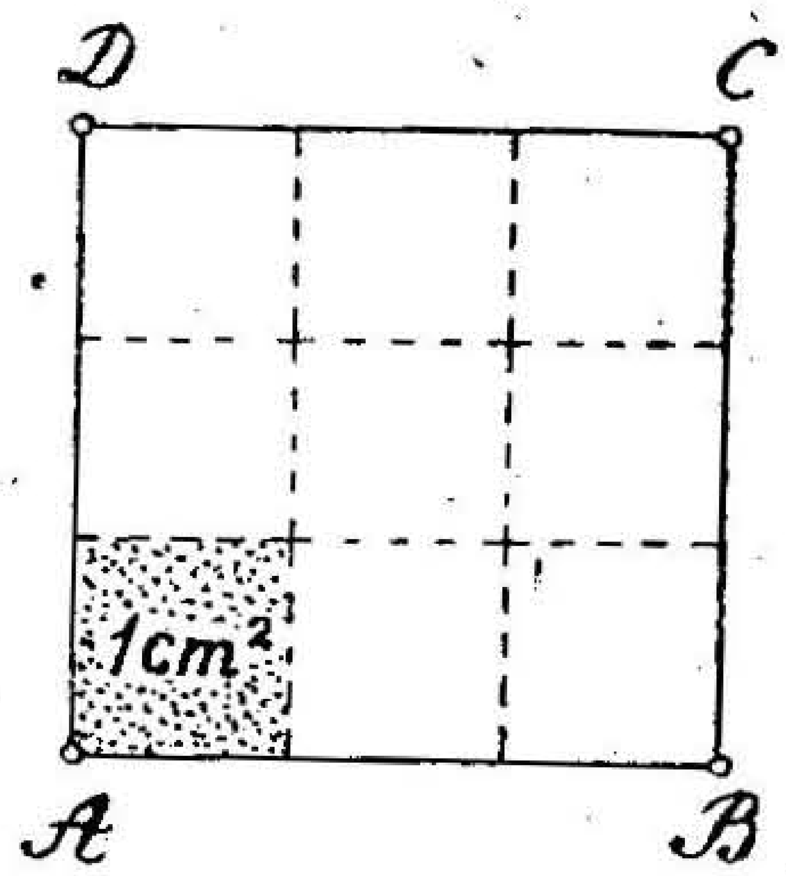
# II. Израчунавање и размера површина праволиниских слика

§ 72. — **Површина слике.** — Под површином неке слике разумемо површину ограничену странама те слике. До величине ове површине долазимо упоређивањем те површине са површином ма које основне јединице за површину (1 $m^2$, 1 $dm^2$, 1 $cm^2$ или 1 $mm^2$). Резултат упоређивања, који нам показује колико се пута садржава узета основна јединица у површини једне слике, даје нам величину или бројну вредност површине дотичне слике. Површину слике не израчунавамо непосредним преношењем узете јединице по површини слике, јер је тај посао тегобан и често неизводљив. То се обично врши посредно, мерењем оних дужина слике од којих зависи њена површина и помоћу њих, применом теорема из једнакости слика, рачунским путем долазимо до величине површине слике.

§ 73. — **Површина правоуглих паралелограма.** — a) Нека је код правоуганика $ABCD$ (сл. 225) дужина $AB = 5\ cm$, a




Сл. 225




Сл. 226

ширина $AD = 3\ cm$. Ако из сваке деоне тачке дужине повучемо паралелне са ширином, а из сваке деоне тачке ширине повучемо паралелне са дужином, онда се његова површина дели на 15 квадратних сантиметара. До ове величине дошли бисмо множењем мерних бројева 5 и 3 његове дужине и ширине ($5 \cdot 3 = 15\ cm^2$). Ако су стране другога правоуганика 10 $cm$ ($dm, mm$) и 6 $cm$ ($dm$, $mm$), онда бисмо истим путем нашли да је његова површина $10 \cdot 6 = 60\ cm^2$ ($dm^2, mm^2$). Уопште, ако је $a$ мерни број дужине, $b$ мерни број ширине једнога правоуганика, онда је формула (образац) за његову површину

$$P = a\,b \quad (1)$$

b) Из обрасца (1) видимо да величина површине $P$ зависи од дужине $a$ и ширине $b$. Увећавањем страна увећава се и површина, а смањивањем страна смањује се и површина. Према томе, површина $P$ је функција странâ $a$ и $b$, или само једне од њих, ако је друга стална. Код другога правоугаоника странâ $a'$ и $b'$, биће површина:

$$\mathbf{P'} = \mathbf{a'} \cdot \mathbf{b'} \quad (2)$$

Дељењем једначина (1) и (2) добијамо пропорцију:

$$\mathbf{P} : \mathbf{P'} = \mathbf{a\,b} : \mathbf{a'\,b'} \quad (3), \text{ тј.}$$

*површине два правоугаоника имају се као производи мерних бројева њихових дужина и ширина.* Ако је $a = a'$, или $b = b'$, онда пропорција (3) добија облик:

$$P : P' = b : b', \text{ односно } P : P' = a : a', \text{ тј.}$$

*површине двају правоугаоника једнаких дужина имају се као и ширине, а једнаких ширина, имају се као и дужине.*

c) Како је квадрат у ствари правоугаоник код кога је дужина једнака са ширином ($a = b$), то је његова површина:

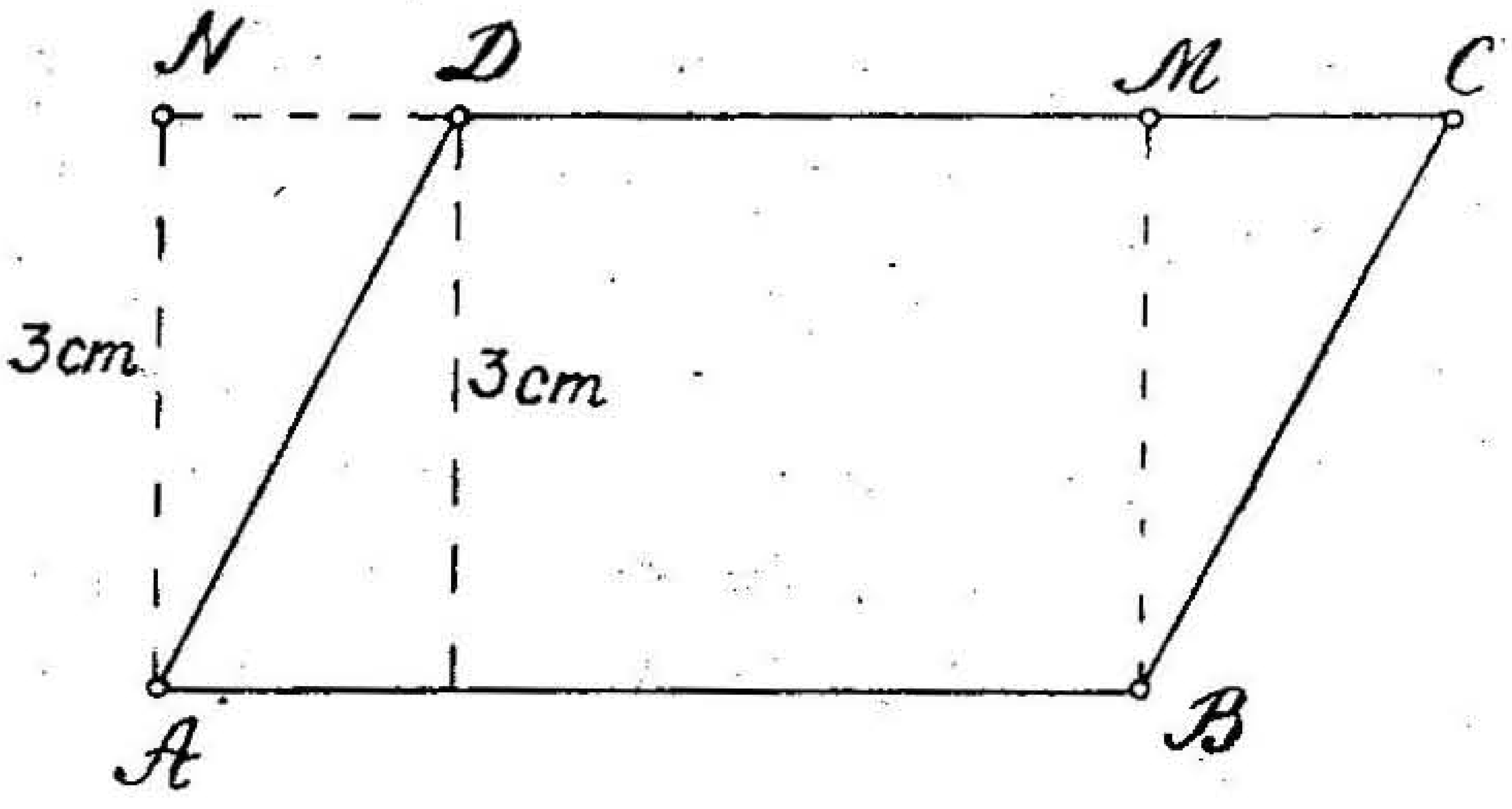
$$\mathbf{P} = \mathbf{a}^2 \qquad (4)$$

Код другога квадрата стране $a'$, биће површина $P' = a_1^2$ (5). Дељењем једначина (4) и (5) добијамо пропорцију:

$$\mathbf{P} : \mathbf{P'} = \mathbf{a}^2 : \mathbf{a}_1^2 \qquad (6), \text{ тј.}$$

*површине двају квадрата имају се као квадрати мерних бројева њихових страна.* Из обрасца (4) увиђамо да је површина квадрата функција његове стране, пошто она мења своју вредност кад и страна мења своју вредност.

**§ 74. — Површина косоуглих паралелограма.** — Како је по 111 теореми (§ 71) површина једнога ромбоида једнака с површином правоугаоника једнаке основице и висине, а површина се правоугаоника налази множењем мерних бројева његове дужине и ширине, онда је јасно да се површина ромбоида израчунава множењем мерних бројева његове основице и висине, пошто основица заступа дужину, а висина ширину првоугаоника, што се види из сл. 227.




Сл. 227

Ако је мерни број основице $a$, а мерни број висине $h$, онда је образац за површину ромбоида:

$$P = ah \qquad (1)$$

*b*) Како се ромб сматра као ромбоид једнаких страна, то се и његова површина израчунава множењем мерних бројева његове основице и висине. Ако је његова страна $a$, а висина $h$, онда је његова површина: $P = ah$ (2)

*c*) Ако су дата два косоугла паралелограма основицâ $a$ и $a'$ и висинâ $h$ и $h'$, онда су њихове површине $P = ah$ и $P' = a'h'$. Дељењем ових двеју једначина добијамо пропорцију:

$$P : P' = ah : a'h' \qquad (3);$$ тј.

*површине паралелограма имају се као производи мерних бројева њихових основица и висина.* За $a = a'$, или $h = h'$, пропорција (3) добија облик:

$P : P' = h : h'$, односно $P : P = a : a'$, тј.

*површине паралелограма једнаких основица имају се као и мерни бројеви њихових висина, а једнаких висина, имају се као мерни бројеви њихових основица.* Из обрасца (1) увиђамо да је површина функција било само основице, било само висине, или и основице и висине.

*Напомена.* — Уопште, површина ма кога паралелограма израчунава се множењем мерних бројева његове основице и висине. Код правоугаоника висина је заступљена ширином, а код квадрата страном. Разуме се, при израчунавању површине паралелограма, а то исто важи и за остале слике, треба мерни бројеви основице и висине да буду изражени у истој јединици дужине. Ако нису, онда их ваља претходно довести на исту јединицу. Тако, за $a = 10\ dm$ и $h = 7\ cm$, је $P = 100 \cdot 7 = 700\ cm^2$, или $P = 10 \cdot 0{,}7 = 7\ dm^2$. Треба, дакле, 10 $dm$ и 7 $cm$ претходно претворити или у $dm$ или у $cm$, па затим вршити множење.

**§ 75. — Површина троугла.** — *a*) На основу 112 теореме (§ 71), површина троугла израчунава се када се мерни бројеви основице и висине помноже и добивени производ подели са два. Тако, површину троугла $ABC$ (сл. 217) израчунавамо по обрасцу $P = \frac{AB \cdot CM}{2}$, пошто нам производ $AB \cdot CM$ претставља површину паралелограма $ABCD$, који је два пута већи од $\triangle ABC$. Уопште, ако су $a$, $b$ и $c$ стране једнога троугла, а $h_{(a)}$, $h_{(b)}$ и $h_{(c)}$ њихове одговарајуће висине, онда је површина троугла:

$$P = \frac{1}{2}\, ah_{(a)}, \text{ или } P = \frac{1}{2}\, bh_{(b)}, \text{ или } P = \frac{1}{2}\, ch_{(c)}.$$

Из ових образаца увиђамо да је површина троугла функција мерних бројева једне ма које његове стране и њене висине, или само једне од тих количина, ако је друга стална.

b) Ако су дата два троугла основицâ $c$ и $c'$ и висинâ $h$ и $h'$, онда су њихове површине $P = \frac{ch}{2}$ и $P = \frac{c'h'}{2}$. Дељењем ових двеју једначина добијамо пропорцију:

$$P : P' = ch : c'h' \quad (1), \text{ тј.}$$

*површине двају троуглова имају се као производи мерних бројева основица и висина.* За $c = c'$, или $h = h'$, пропорција (1) добија облик:

$$P : P' = h : h', \text{ односно } P : P' = c : c', \text{ тј.}$$

*површине двају троуглова једнаких основица имају се као њихове одговарајуће висине, а једнаких висина, као њихове одговарајуће основице.*

c) Како је $P = \frac{ah_{(a)}}{2} = \frac{bh_{(b)}}{2} = \frac{ch_{(c)}}{2}$, то је

$$ah_{(a)} = bh_{(b)} = ch_{(c)}. \text{ Одавде је:}$$

$$a : b = h_{(b)} : h_{(a)}, \text{ или } a : c = h_{(c)} : h_{(a)}, \text{ или } b : c = h_{(c)} : h_{(b)},$$

тј. **две стране једнога троугла обрнуто су пропорционалне са одговарајућим висинама** (*Теорема 120*). — Ова се теорема често примењује при решавању рачунских задатака код троуглова.

d) Како код правоуглог троугла једна катета заступа основицу а друга висину, то је површина правоуглога троугла катета $b$ и $c$, $P = \frac{bc}{2}$, а правоуглога равнокраког троугла $P = \frac{b^2}{2}$, пошто је код њега $b = c$.

§ **76. — Површина трапеза.** — На основу 114 теореме (§ 71), површина једнога трапеза израчунава се када се збир паралелних страна помножи висином и добивени производ подели са два. Тако је површина трапеза $ABCD$ (сл. 219) $=$ $= \triangle AMD$. Па како је површина овога троугла $P = \frac{AM \cdot DE}{2}$ или заменом $AM$ са $AB + DC$, $P = \frac{(AB + DC) \cdot DE}{2}$, то нам овај образац једновремено претставља и површину трапеза $ABCD$. Уопште, ако су $a$ и $b$ паралелне стране једнога трапеза, а $h$ његова висина, онда је његова површина:

$$P = \frac{1}{2}(a + b)\, h\ .$$

Из овога обрасца увиђамо да је поаршина $P$ функција или само једне паралелне стране $a$ или $b$, или само висине $h$, или обеју паралелних страна и висине.

**§ 77. — Површина четвороуглова са нормалним дијагоналама** *(квадрата, ромба и делтоида)*. — На основу теореме 115 (§ 71), површина свакога четвороугла са нормалним дијагоналама израчунава се кад се производ мерних бројева његових дијагонала подели са два. Тако, површина делтоида $ABCD$ (сл. 220) половина је правоугаоника $MNPQ$. Па како је површина овога правоугаоника $P = MN \cdot NP$, то је његова површина $P = AC \cdot BD$, ако заменимо $MN$ са $BD$ и $NP$ са $AC$. Стога је површина делтоида $P = \frac{1}{2} AC \cdot BD$. Уопште, ако су $d$ и $d'$ дијагонале једнога делтоида или ромба, онда је образац за њихову површину:

$$P = \frac{dd'}{2} \quad (1).$$

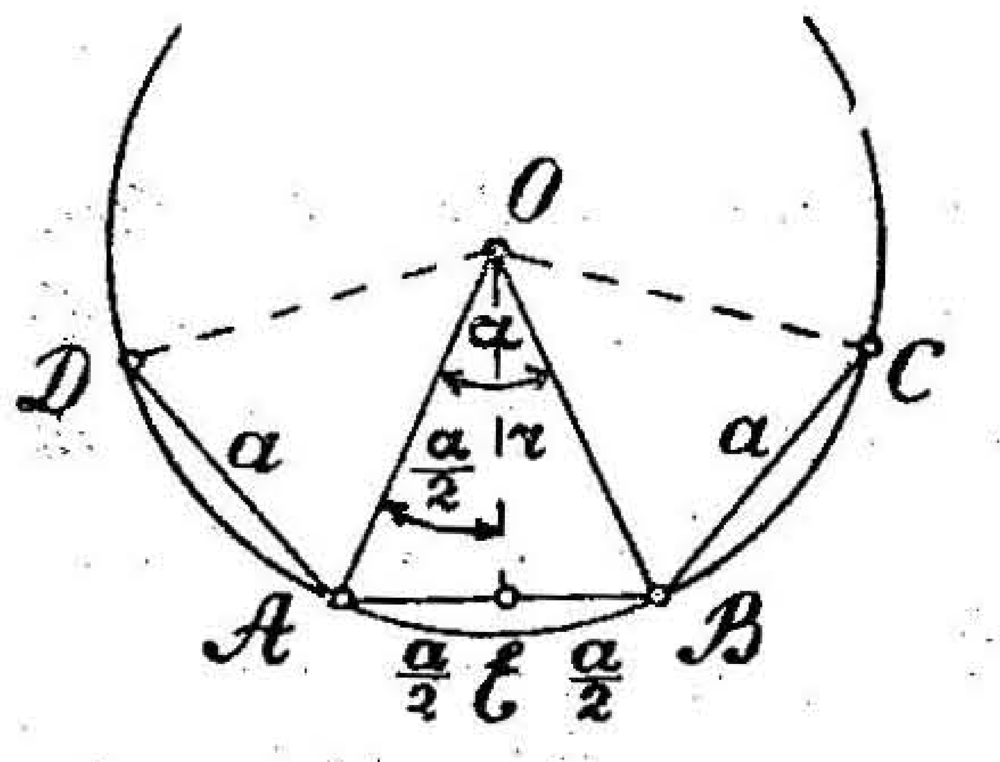
Како су код квадрата дијагонале једнаке, то је његова површина $P = \frac{d^2}{2}$ (2). Из образаца (1) и (2) опет увиђамо да су површине ромба, делтоида и квадрата функције њихових дијагонала.

**§ 78. — Површина правилног многоугла.** — На основу теореме 116 (§ 71), површина правилног многоугла израчунава се када се његов обим помножи полупречником круга уписаног у многоуглу, и добивени производ подели са два. Ово можемо увидети и из сл. 221, где је полигон $ABCDEF$ једнак троуглу $MNO$. Па како је површина овога троугла $P = \frac{MN \cdot OS}{2}$, или, заменом $MN$ са $O$ (обим полигона), а $OS$ са $r$ (полупречник уписаног круга у полигону), $P = \frac{O \cdot r}{2}$, који нам образац једновремено претставља површину полигона $ABCDEF$. Ако је страна правилног полигона $a$, број његових страна $n$, онда је његов обим $O = na$, а површина

$$P = \frac{nar}{2} \quad (1).$$

*Напомена.* — Код једног правилног n-тоугла, површина $P$ није функција и стране $a$ и полупречника $r$, већ само стране. То је зато што се полупречник $r$ дâ израчунати из правоуглог троугла $AEO$ (или

BEO), ако се зна страна $a$ n-тоугла. У томе троуглу угао $\frac{\alpha}{2}$ је увек



Сл. 228

познат, пошто је једнак $\frac{180^0}{n}\left(\alpha = \frac{360^0}{n}\right)$.

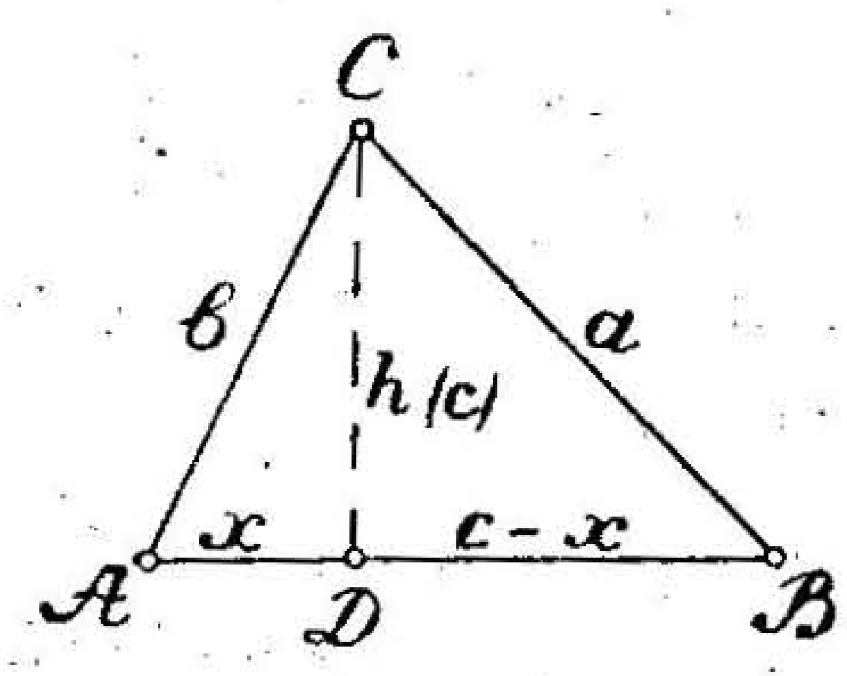
Стога је $r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$.

Заменом у (1) добијамо:

$P = \frac{1}{4}\, na^2 \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$ (2), који нам образац обелодањује тачност ове напомене. Тако, код правилног 5-угла је $P = \frac{5}{4}\, a^2 \operatorname{cotg} 36^0$; код 8-угла је $P = 2a^2 \operatorname{cotg} 22^0\, 30'$; код 15-угла је $P = \frac{15}{4}\, a^2 \operatorname{cotg} 12^0$ итд.

§ 79. — **Посебна израчунавања код троугла.** — *1) Познате су све три стране a, b и c једнога троугла; наћи: a) његове висине; b) површину; c) полупречник описаног круга R; d) полупречник уписаног круга r; и e) дужине тежишних (средњих) линија* $t_{(a)}$, $t_{(b)}$, $t_{(c)}$.

a) Према 92 теореми (§ 62) имамо из $\triangle\ ABC$ (сл. 229):



Сл. 229

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$, а $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

Тада је из $\triangle\ ADC$ : $h^2_{(c)} = b^2 - x^2 =$

$$= (b + x)(b - x) = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) =$$

$$= \frac{(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)\ (a^2 - b^2 + 2bc - c^2)}{4c^2} =$$

$$= \frac{(b + c + a)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)}{4c^2};\ \text{a}$$

$$h_{(c)} = \frac{1}{2c}\sqrt{(a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)}\ (1).$$

Ако ставимо да је обим троугла $a+b+c=2s$, па код ове једначине и с једне и с друге стране одузмемо најпре $2a$, затим $2b$ и најзад $2c$, добијамо:

$b + c - a = 2\ (s - a)$, $a + c - b = 2\ (s - b)$ и $a + b - c = 2\ (s - c)$. Заменом у (1) добијамо:

$$h_{(c)} = \frac{2}{c}\sqrt{s\ (s - a)\ (s - b)\ (s - c)}.$$

Повлачењем висина $h_{(a)}$ и $h_{(b)}$ код троугла $ABC$ нашли бисмо истим путем да је:

$h_{(a)} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, а $h_{(b)} = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

*Посебни пример.* — За $a = 6$, $b = 4$ и $c = 8$ *cm* биће $2s = 18$, $s - a = 3$, $s - b = 5$ и $s - c = 1$,
а $h_{(a)} = \frac{2}{6}\sqrt{9\cdot3\cdot5\cdot1} = \sqrt{15}$, $h_{(a)} = \frac{2}{4}\sqrt{9\cdot3\cdot5\cdot1} = \frac{3}{2}\sqrt{15}$ и

$$h_{(a)} = \frac{2}{8}\sqrt{9\cdot3\cdot5\cdot1} = \frac{3}{4}\sqrt{15}\ cm.$$

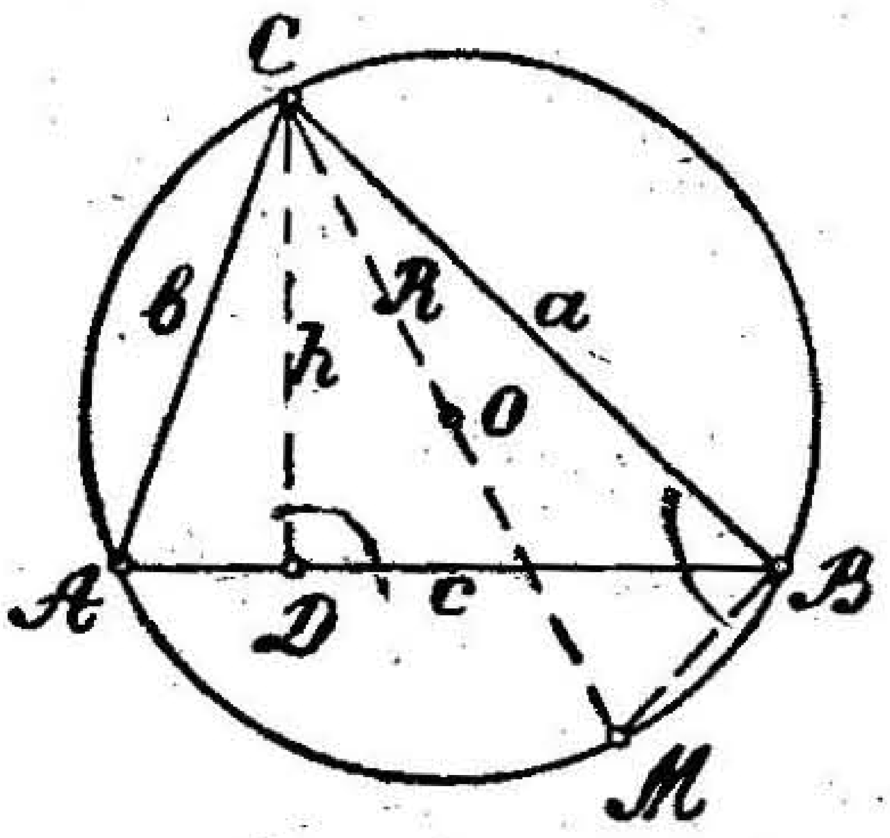
b) Како је површина једнога троугла

$$P = \frac{ah_{(a)}}{2} = \frac{bh_{(b)}}{2} = \frac{ch_{(c)}}{2},$$

то заменом висинâ $h_{(a)}$, $h_{(b)}$ и $h_{(c)}$ са њиховим вредностима, нађеним под a) добијамо:

$$\boldsymbol{P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Овај се образац зове *Херонов* и има врло честу примену у рачунским задацима. Код горњег примера биће $P = \sqrt{9\cdot3\cdot5\cdot1} =$
$= 3\sqrt{15}\ cm^2$.


Сл. 230

c) Нека је полупречник круга $O$ (сл. 230), описан око $\triangle ABC$, $R$. Ако кроз теме $C$ повучемо пречник $CM$ и тачку $M$ вежемо за $B$, добијамо правоугли троугао $MBC$, који је сличан са $\triangle ADC$; пошто имају углове једнаке ($\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^0$, а $\sphericalangle A = \sphericalangle M$ као периферискиуглови над истим луком $\widehat{BC}$). Из сличности ових троуглова имамо $2R : b = a : h$, или $2Rh = ab$. Ако и једну и другу страну ове једначине помножимо са $c$, добијамо $2Rch = abc$ (1)

Како је $P = \frac{ch}{2}$, то је $ch = 2P$. Заменом у (1) добијамо: $4RP = abc$. Одавде је:

$$\boldsymbol{R = \frac{abc}{4P} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}.$$

Код горњег примера биће $R = \frac{6\cdot4\cdot8}{4\cdot3\sqrt{15}} = \frac{16}{\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}\ cm$.

d) Полупречник уписаног круга $O$ (сл. 92) израчунавамо на овај начин: Површина $P$ троугла $ABC$ је: $P = \triangle BCO +$

$$+ \triangle ACO + \triangle ABO = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = (a+b+c)\frac{r}{2} =$$

$= 2s\cdot\frac{r}{2} = sr$. Одавде је:

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad (1).$$

*Напомена.* — Истим путем налазимо и полупречнике спољашње уписаних кругова $O_1$, $O_2$ и $O_3$, и то:

$$r_1 = \frac{P}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}\,;\; r_2 = \frac{P}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{(s-b)}}; \text{ и}$$

$$r_3 = \frac{P}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}} \quad (2)$$

Множењем једначина под (1) и (2) добијамо:

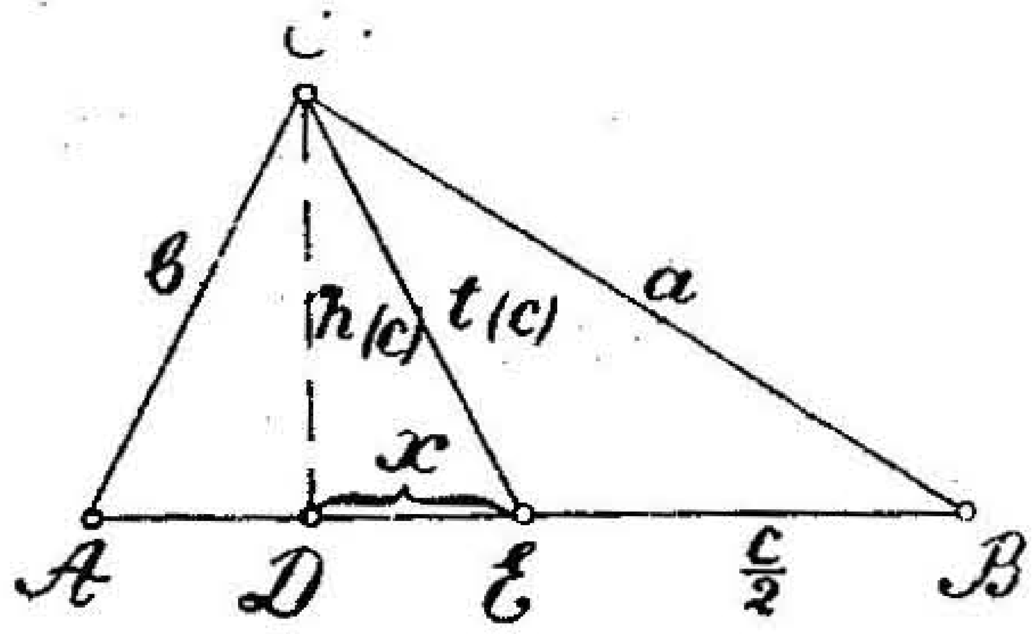
$$r\,r_1 r_2 r_3 = \frac{P^4}{s(s-a)(s-b)(s=c)} = \frac{P^4}{P^2} = P^2.$$

Сабирањем реципрочних вредности полупречника спољашње уписаних кругова добијамо:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{s-a}{P} + \frac{s-b}{P} + \frac{s-c}{P} = \frac{3s-(a+b+c)}{P} = \frac{3s-2s}{rs} = \frac{s}{rs} = \frac{1}{r}$$

*Дакле, производ од сва четири полупречника уписаних кругова код једнога троугла једнак је квадрату његове површине, а збир реципрочних вредности полупречникâ спољашње уписаних кругова једнак је реципрочној вредности полупречникâ унутрашње уписаног круга.*

е) Нека су $t_{(a)}$, $t_{(b)}$ и $t_{(c)}$ средње линије троугла $ABC$ (сл. 231), које одговарају странама $a$, $b$ и $c$. Тада је из $\triangle\ BCE$ по 93 теореми (§ 62):



Сл. 231

$$a^2 = t_{(s)}^2 + \frac{c^2}{4} + cx \quad (1).$$

а из $\triangle\ ACE$ по 92 теореми имамо:

$$b^2 = t_{(c)}^2 + \frac{c^2}{4} - cx \quad (2)$$

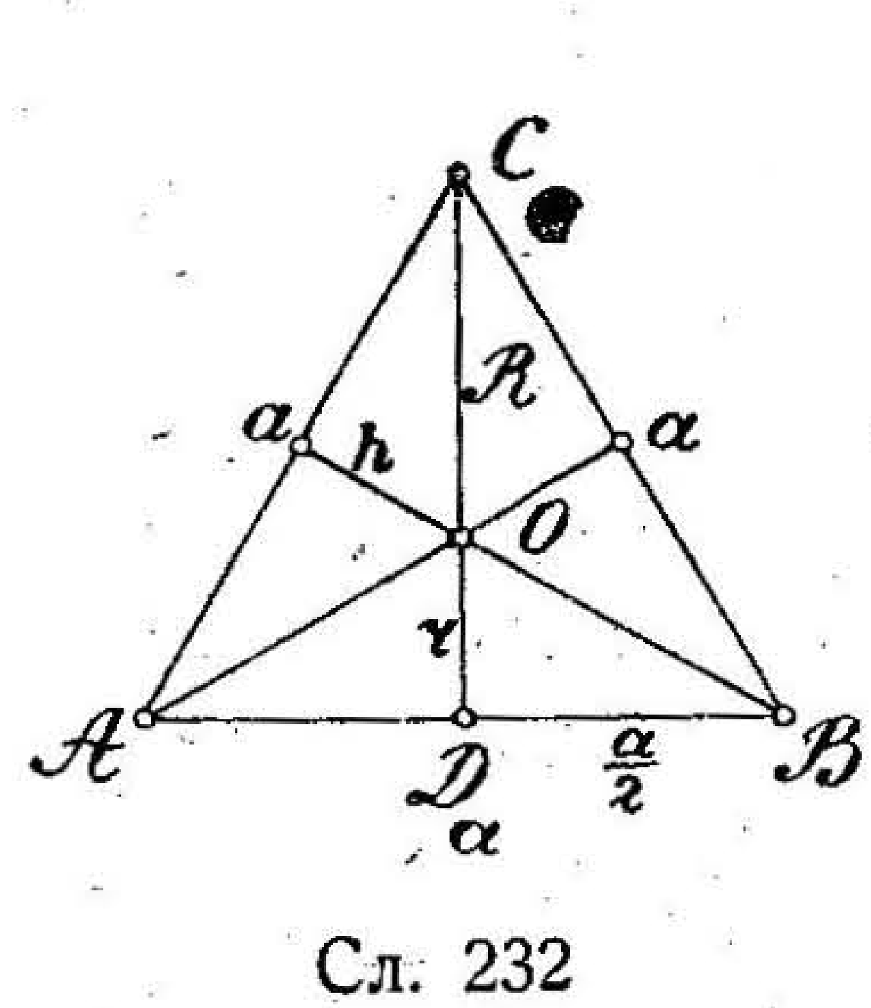
Сабирањем једначина (1) и (2) добијамо:

$$a^2 + b^2 = 2t_{(c)}^2 + \frac{c^2}{2}, \text{ а одавде је } t_{(c)} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Истим путем нашли бисмо да је:

$$t_{(a)} = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \text{ и } t_{(b)} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

2) *Дата је страна равностраног троугла $a$; наћи: његову висину $h$, полупречник описаног круга $R$, полупречник уписаног круга $r$ и површину $P$.*



Сл. 232

Како су код равностраног троугла висине једновремено и симетрале страна, и симетрале углова и тежишне линије троугла, а ове се секу тако да је део до темена два пута већи од дела до средине стране (теорема 47), то је пресек $O$ и ортоцентар, и центар описаног круга, и центар уписаног круга и тежиште. Стога је $R = \frac{2}{3}h$, а

$r = \frac{1}{3}h$. Па како је из $\triangle BDC$: $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$,

то је $R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, а $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$,

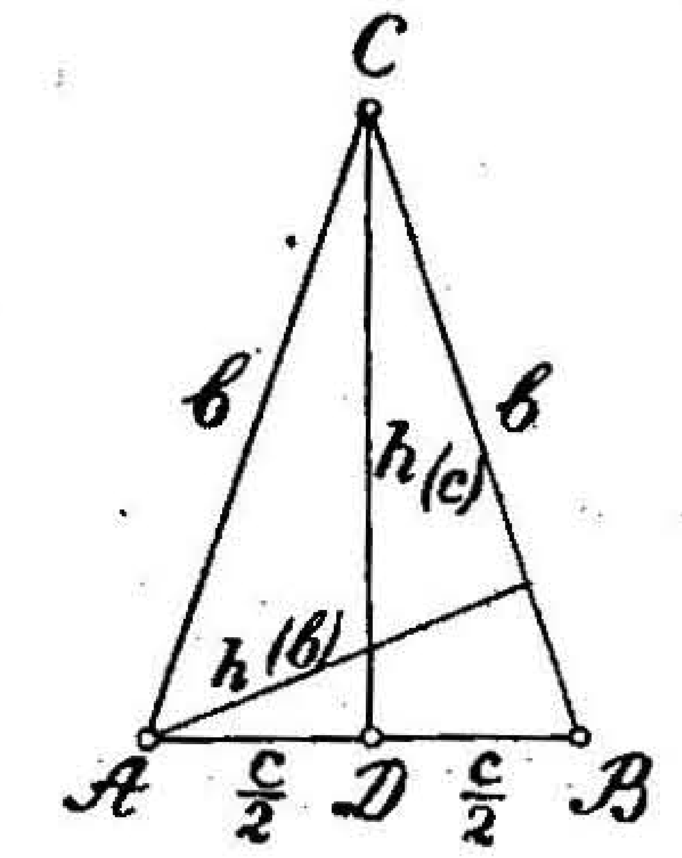
тј. из стране $a$ равностраног троугла налазимо: *висину када половину стране помножимо са* $\sqrt{3}$; *полупречник описаног круга, када трећину стране помножимо са* $\sqrt{3}$; *а полупречник уписаног круга, када шестину стране помножимо са* $\sqrt{3}$. Површина равностраног троугла биће:

$$P = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Разуме се, до истог обрасца дошли бисмо и помоћу Хероновог обрасца, узимајући да је $s = \frac{3a}{2}$ и $a = b = c$.

3. *Дата је основица $c$ и крак $b$ равнокраког троугла; наћи: висине $h_{(c)}$ и $h_{(b)}$, полупречнике описаног и уписаног круга $R$ и $r$, и површину $P$.*

Како висина основичина дели основицу на два једнака дела, то је из $\triangle BCD$ (сл. 233) $h_{(c)} = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - c^2}$, а површина $P = \frac{ch_{(c)}}{2} = \frac{c}{4}\sqrt{4b^2 - c^2}$.



Сл. 233

За израчунавање полупречника $R$ и $r$, узимамо обрасце под c) и d) из првог задатка овога параграфа, узимајући да је $a = b$ и $s = \frac{2b + c}{2}$. Тада је:

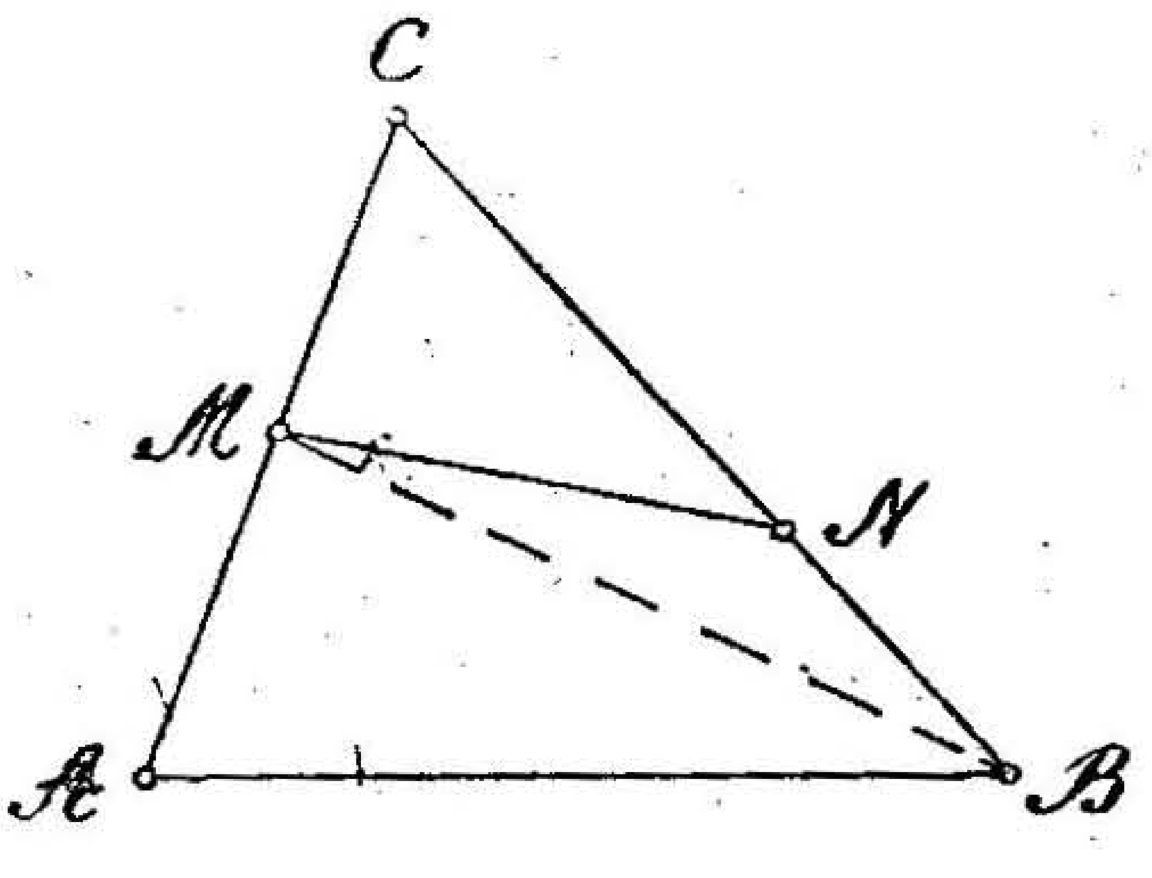
$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{b^2c}{4\cdot\frac{c}{4}\sqrt{4b^2 - c^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - c^3}},$$

$$\text{а } r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{c}{4}\sqrt{4b^2 - c^2}}{\frac{2b + c}{2}} = \frac{c\sqrt{4b^2 - c^2}}{2(2b + c)}.$$

Најзад $h_{(b)} = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-b)(s-b)(s-c)} = \frac{2(s-b)}{b}\sqrt{s(s-c)}.$

*Теорема 121.* — **Површине двају троуглова који имају један**

**заједнички угао, стоје у размери као производи страна које граде тај угао.** — Нека троуглови $ABC$ и $MNC$ (сл. 234) имају заједнички угао $C$. Ако $M$ спојимо са $B$, онда троуглови $ABC$ и $MCB$ имају заједничко теме $B$, те имају исту висину за стране $AC$ и $MC$. Исти је случај и са троугловима $BCM$ и $NCM$, који имају заједничко теме $M$. Па како се површине двају троуглова имају као основице, ако имају одговарајуће висине једнаке (§ 75), то је:



Сл. 234

$\triangle ABC : \triangle MCB = AC : MC$ (I) и $\triangle MCB : \triangle NCM = BC : MC$ (2). Из пропорције (1) и (2) добијамо сложену пропорцију:
$\triangle ABC \cdot \triangle MCB : \triangle MCB \cdot \triangle NCM = AC \cdot BC : MC \cdot NC$. Скраћивањем I и II члана ове пропорције са $\triangle$ $MCB$, добијамо:

$$\triangle ABC : \triangle MNC = AC \cdot BC : MC \cdot NC,$$

чиме је доказана ова теорема, која има честу примену у рачунским задацима.

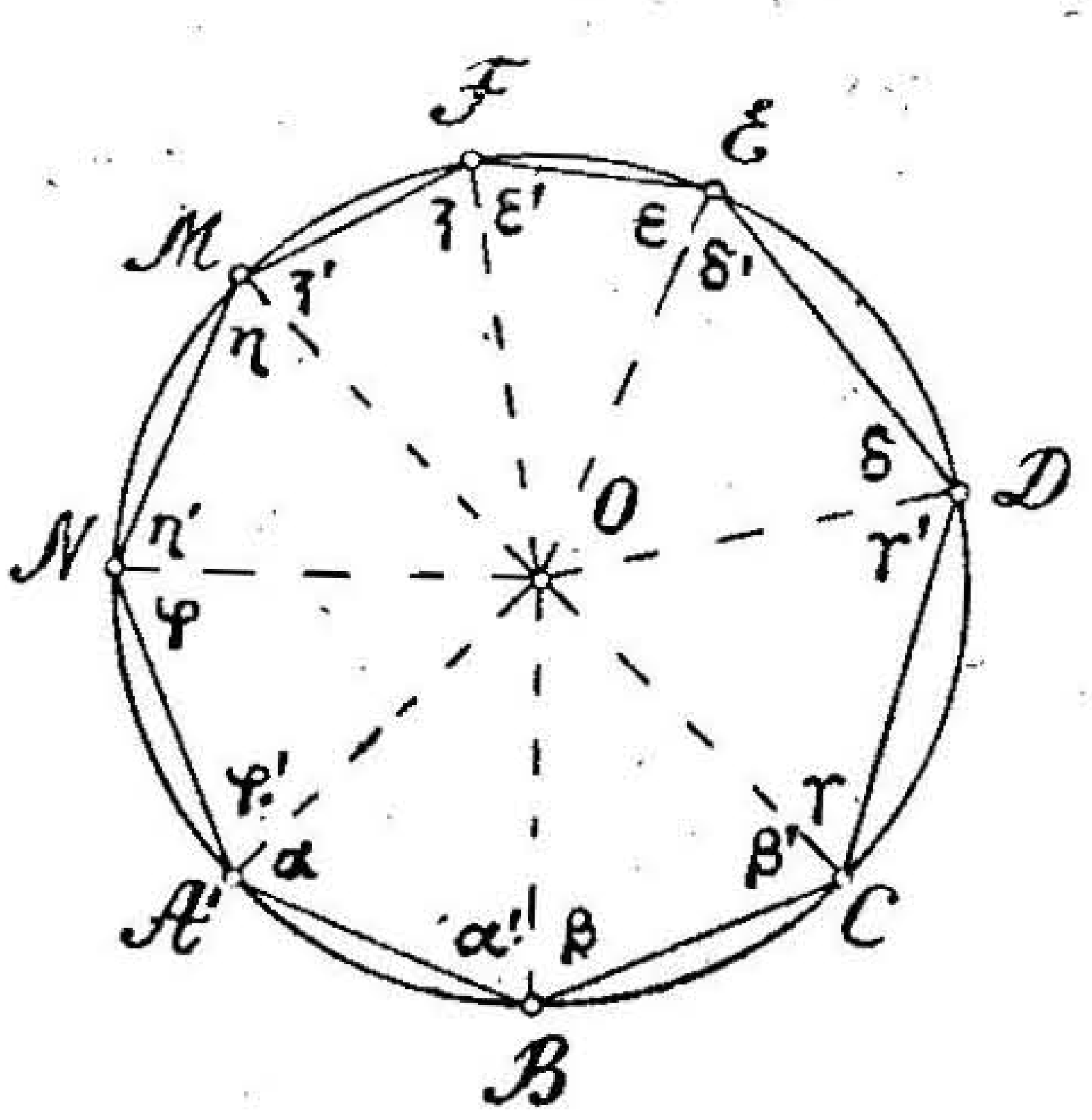
## III. Израчунавања код тетивних и тангентних полигона

### § 80. — Теореме из тетивних и тангентних полигона

*Теорема 122.* — **У сваком тетивном полигону с парним бројем страна, збир углова на непарним местима једнак је збиру углова на парним местима.** Нека на сл. 235 имамо тетиван осмоугао $ABCDEFMN$. Ако његова темена спојимо са центром $O$, онда добијамо 8 равнокраких троуглова, те сваки од њих има углове на основици једнаке, тј. $\alpha = \alpha'$, $\beta' = \beta$, $\gamma = \gamma'$, $\delta' = \delta$, $\varepsilon = \varepsilon'$, $\xi' = \xi$, $n = n'$ и $\varphi' = \varphi$. Сабирањем ових једначина добијамо:

$$\alpha + \beta' + \gamma + \delta' + \varepsilon + \xi' + n + \varphi' =$$
$$= \alpha' + \beta + \gamma' + \delta + \varepsilon' + \xi + n' + \varphi,$$

или $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E + \sphericalangle M =$
$= \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F + \sphericalangle N.$



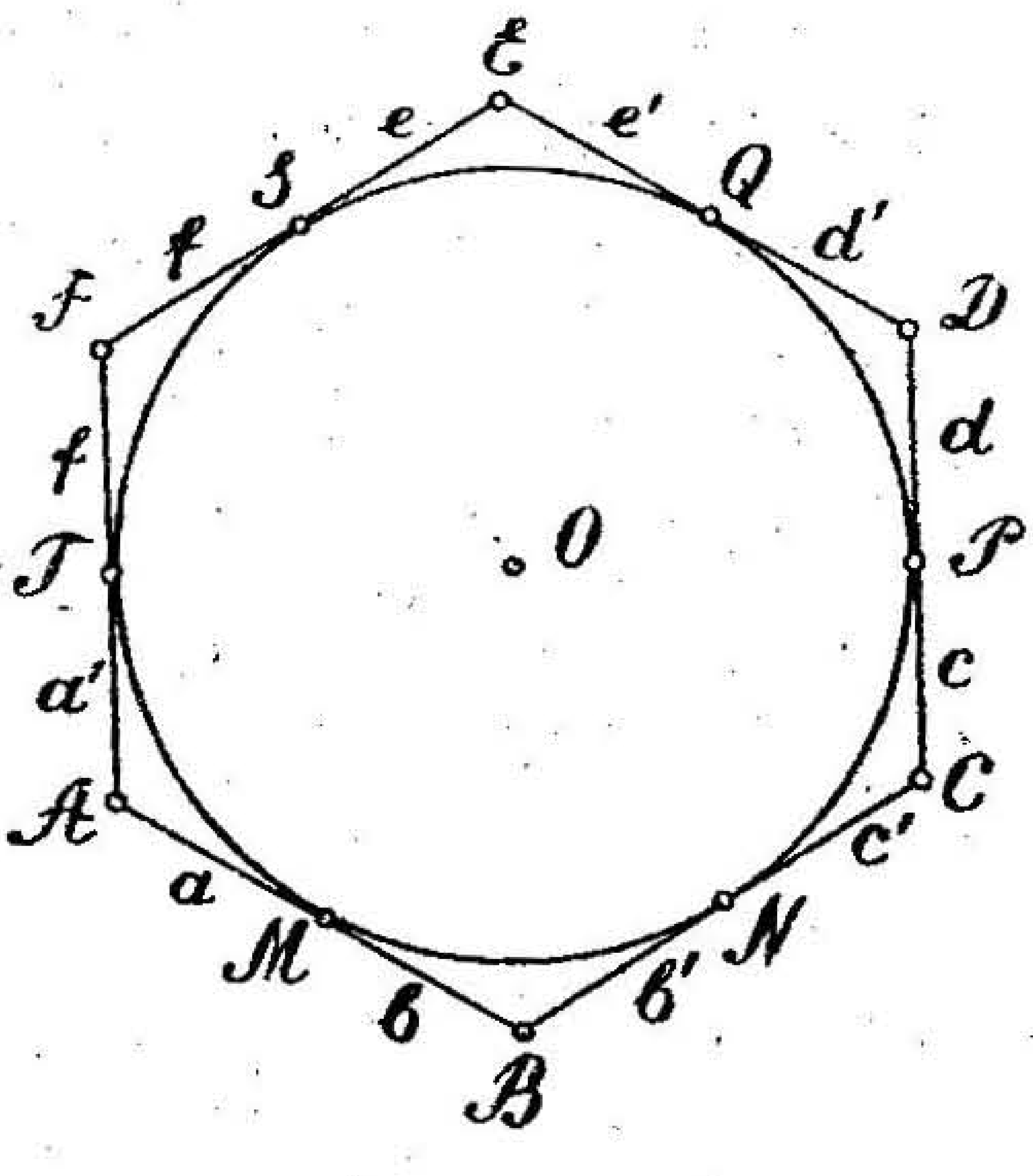
Сл. 235

*Теорема 123.* — **У сваком тангентном многоуглу с парним**

**бројем страна, збир страна на непарним местима једнак је збиру страна на парним местима.** Нека је на сл. 236 тангентан 6-тоугао $ABCDEF$. Тада је на основу теореме 65:

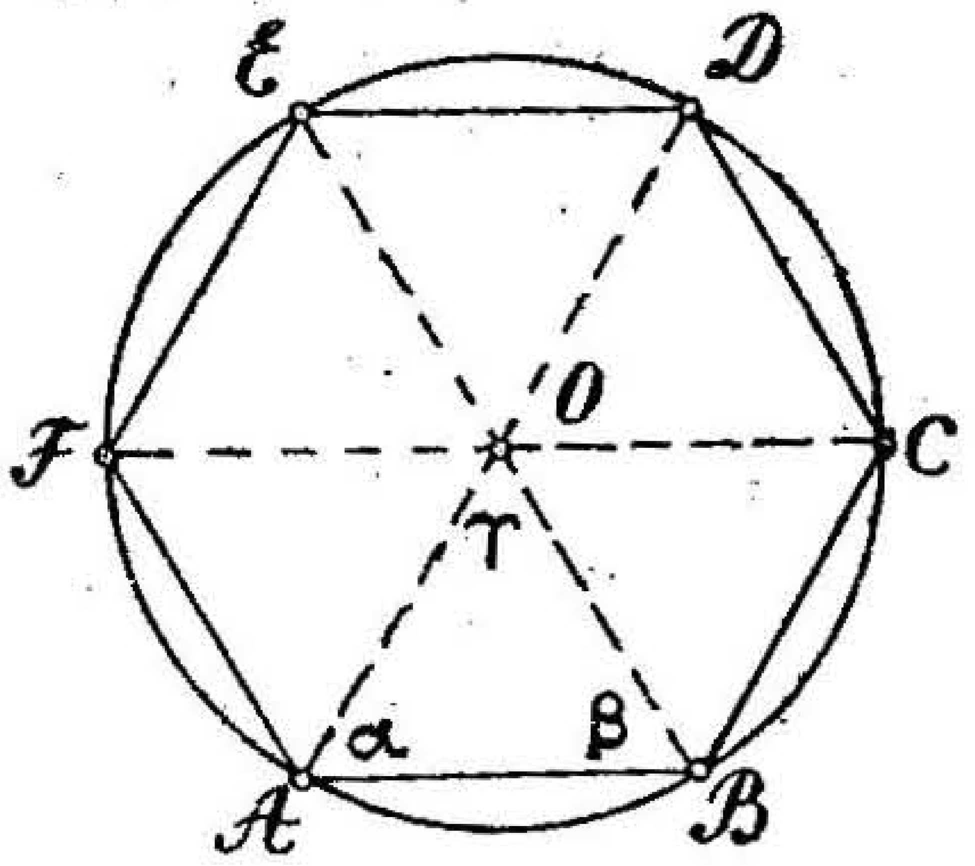
$a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$, $e = e'$ и $f = f'$. Сабирањем ових једначина добијамо:

$a + b + c + d + e + f = a' + b' + f' + c' + d' + e'$, или $(a + b) + (c + d) + (e + f) = (a' + f') + (b' + c') + (d' + e')$, или $AB + CD + EF = AF + BC + ED$.



Сл. 236

*Теорема 124.*—**Страна правилног тетивног шестоугла једнака је кружном полупречнику.** Нека је шестоугао $ABCDEF$ (сл. 237) правилан. Ако његова темена спојимо са средиштем $O$, добијамо 6 подударних троуглова, чији су углови код средишта $O$ по $60^0$. Па како су углови $\alpha$ и $\beta$ једнаки, као и углови наспрам једнаких страна, а збир им износи $120^0$, то је сваки од њих од по $60^0$. Стога је троугао $ABO$ равностран, те је $AB = AO$.



Сл. 237

*Теорема 125*).* — **Страна правилног десетоугла уписаног у кругу једнака је с већим отсечком полупречника круга подељеног по златном пресеку.** — Нека је $AB$ (сл. 238) страна правилног 10-тоугла уписаног у кругу $O$. Везивањем њених крајњих тачака са центром $O$, добијамо равнокрак троугао $ABO$, чији је угао $\gamma = \frac{360^0}{10} = 36^0$. Тада је $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = 72^0$. Ако угао $\beta$ преполовимо правом $BC$, добијамо два нова равнокрака троугла $ACB$ и $OBC$,

Сл. 238

* За ученике реалке.

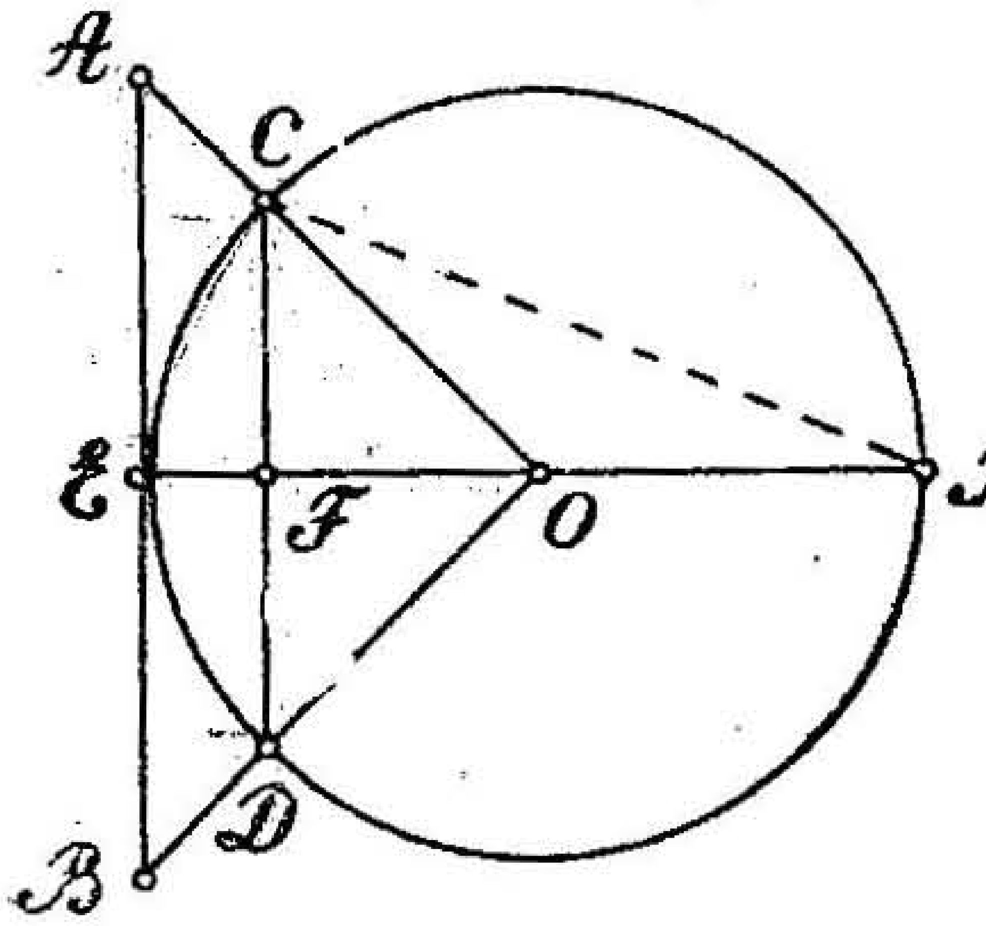
те је $AB = BC = CO$ (1). Па како су троуглови $ABO$ и $ABC$ слични услед једнакости својих углова, то је: $AO : AB = AB : AC$ (2). Ова пропорција показује нам да је страна правилног десетоугла средња геометриска пропорционала између целог полупречника и његовог мањег дела $AC$. Ако у овој пропорцији заменимо $AB$ са $CO$, које су дужи, према једначини (1), једнаке, онда пропорција (2) добија облик: $AO : CO = CO : AC$ (3), која нам пропорција показује да заиста тачка $C$ дели полупречник $AO$ по златном пресеку, а једначина (1), да је заиста његов већи отсечак $CO$ једнак страни $AB$ уписаног 10-угла.

*Напомена.* 1. — На овој се теореми оснива конструкција правилног многоугла од 5, 10, 20, 40,... страна. Треба произвољним полупречником описати круг, затим његов полупречник поделити по златном пресеку (задатак 8, § 69). Његов већи отсечак једнак је страни уписаног правилног 10-угла. Преношењем овог отсечка по обиму круга, кружна се периферија дели на 10 једнаких делова. Спајањем свих деоних тачака, добијамо правилан 10-угао, а спајањем само парних или само непарних деоних тачака, добијамо правилан 5-угао. Даљом деобом на једнаке делове добивених лукова и спајањем деоних тачака, добијамо правилне полигоне од 20, 40... страна. На сл. 238 полупречник $AO$ подељен је тачком $F$ по златном пресеку.

*Напомена* 2. — Правилан полигон од 15 страна можемо констуисати на основу једначине $\frac{P}{6} - \frac{P}{10} = \frac{P}{15}$. Треба, дакле, произвољним отвором шестара описати круг и његов полупречник пренети као тетиву једанпут, чиме добијамо 6-ти део кружне периферије. Затим треба полупречник круга поделити по златном пресеку и већи отсечак узети за страну правилног уписаног 10-угла. Кад пренесемо овај отсечак полупречника као тетиву из почетне тачке секстанта, добијамо 10-ти део кружне периферије. Тада је тетива која спаја друге две тачке добивених лукова једнака страни уписаног правилног 15-угла. Деобом лукова, кружна се периферија дели на 30 једнаких делова, а тиме добијамо и правилан 30-угао. Даљом деобом добијамо правилне полигоне од 60, 120, ... страна.

## § 81. — Израчунавање страна правилних полигона

1) *Зна се страна правилног уписаног полигона $s_n$ и полупречник круга $r$; наћи страну $S_n$ правилног описаног полигона од истог броја страна.* Нека је $CD$ страна $s_n$ (сл. 239) једнога правилног уписаног многоугла од $n$ страна, а $r$ полупречник круга. Тада је $AB$ страна $S_n$ правилног полигона од истог броја страна описаног око истог круга. Па како су троуглови $ABO$ и $CDO$ слични, то је $AB : CD = EO : FO$, или




Сл. 239

$S_n : s_n = r : FO$ (1). Међутим, $\triangle$ $CFO$ је правоугли, те је

$$FO = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}.\text{ Заменом у (1) добијамо:}$$

$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}},\text{ а одавде је } S_n = \frac{rs_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}\ (1).$$

2) *Зна се страна* $s_n$ *правилног уписаног полигона од* $n$ *страна и полупречник круга* $r$*; наћи страну* $s_{2n}$ *правилног полигона од двоструког броја страна уписаног у истом кругу* — Нека је $CD$ страна $s_n$ правилног уписаног полигона од $n$ страна (сл. 239), а $r$ полупречник круга. Тада је $EC$ страна правилног уписаног полигона од $2n$ страна. Везивањем $C$ са $P$, добијамо правоугли троугао $ECP$ у коме је $s_{2n}$ једна катета, $EP = 2r$ хипотенуза, а $CF = \frac{s_n}{2}$ висина хипотенузина. Стога је по 91 теореми:

$$EP : EC = EC : EF,\text{ или } 2r : s_{2n} = s_{2n} : (EO - FO),$$

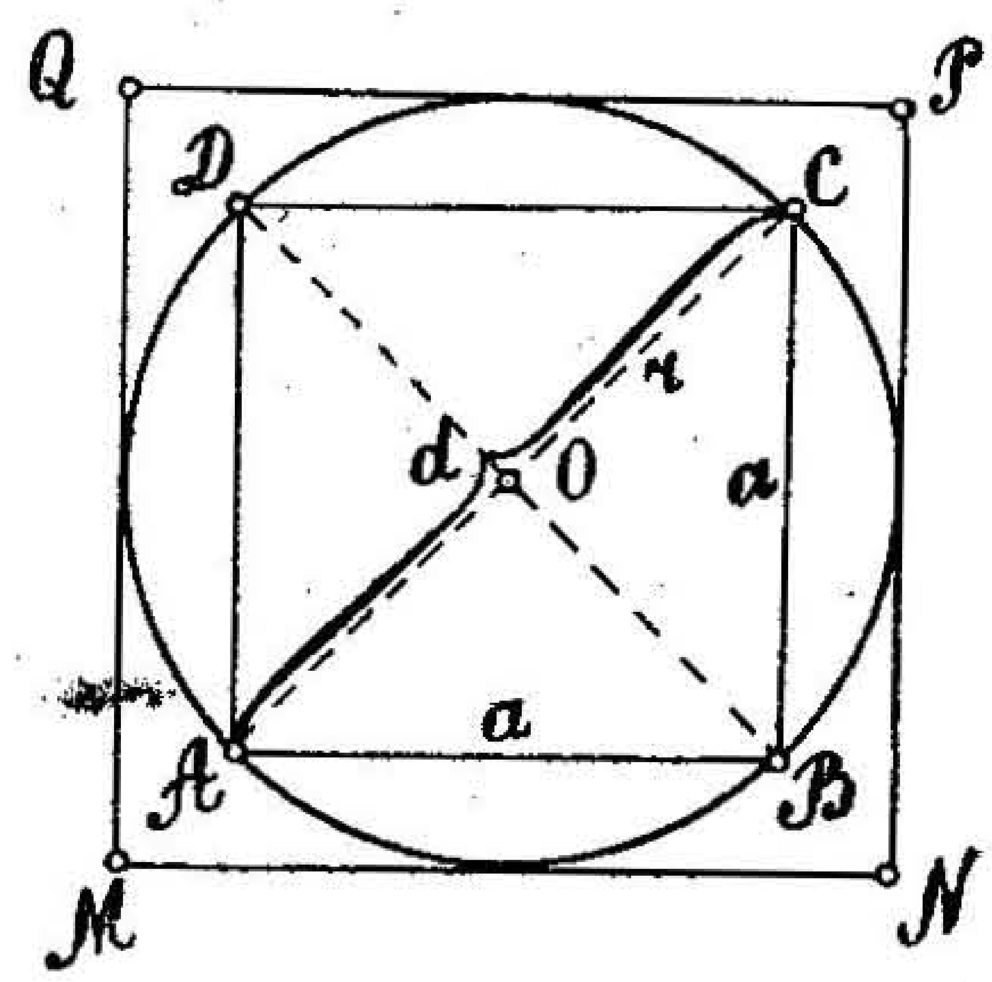
$$\text{или } 2r : s_{2n} = s_{2n} : \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right).\text{ Одавде је:}$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}\quad \text{(II)}.$$

3) *Дат је полупречник круга* $r$*; наћи стране правилног уписаног и описаног:* а) *квадрата*; b) *осмоугла;* c) *16-угла* итд.

Ако је $AB = a$ страна уписаног квадрата $ABCD$ (сл. 240), онда је из правоуглог троугла $ABC: d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, а $r = \frac{d}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Одавде је

$a = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$. Страна $MQ = S_4 = 2r$. Тада је, на основу обрасца под (II):




Сл. 240

$$s_8 = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right)} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

$$= \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_8^2}{4}}\right)};\ s_{32} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_{16}^2}{4}}\right)};\text{ итд.}$$

Према обрасцу под (I) имамо;

$$S_8 = \frac{rs_8}{\sqrt{r^2 - \frac{s_8^2}{4}}} = \frac{r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2(2-\sqrt{2})}{4}}} = 2r\,(\sqrt{2}-1);$$

$$S_{16} = \frac{rs_{16}}{\sqrt{r^2 - \frac{s_{16}^2}{4}}};\ S_{32} = \frac{rs_{32}}{\sqrt{r^2 - \frac{s_{32}^2}{4}}};\ \text{итд.}$$

4) *Дат је полупречник круга* $r$; наћи а) $s_6$, $s_{12}$, $s_{24}$, ... b) $S_6$, $S_{12}$, $S_{24}$, ... — Према 124 теореми претходног параграфа је $s_6 = r$, те је по обрасцу (II):

$$s_{12} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}\right)} = r\sqrt{2-\sqrt{3}};\ s_{24} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_{12}^2}{4}}\right)};$$

итд. Према обрасцу под (I) имамо:

$$S_6 = \frac{r \cdot s_6}{\sqrt{r^2 - \frac{s_6^2}{4}}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3};\qquad S_{12} = \frac{r \cdot s_{12}}{\sqrt{r^2 - \frac{s_{12}^2}{4}}};$$

$$S_{24} = \frac{r \cdot s_{24}}{\sqrt{r^2 - \frac{s_{24}^2}{4}}};\ \text{итд.}$$

5) *Дат је полупречник круга* $r$; наћи: а) $s_5$, $s_{10}$, $s_{20}$, ... b) $S_5$, $S_{10}$, $S_{20}$, ... — Према 125 теореми претходног параграфа имамо: $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$, или $s_{10}^2 + rs_{10} - r^2 = 0$.

Одавде је $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Како је у обрасцу (II):

$$s_{10} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_5^2}{4}}\right)},\ \text{то је: } \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_5^2}{4}}\right)}.$$

Решењем ове једначине по $s_5$ добијамо:

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.\ \text{Тада је } s_{20} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_{10}^2}{4}}\right)}.$$

$$S_5 = \frac{r \cdot s_5}{\sqrt{r^2 - \frac{s_5^2}{4}}};\ S_{10} = \frac{r \cdot s_{10}}{\sqrt{r^2 - \frac{s_{10}^2}{4}}};\ S_{20} = \frac{r \cdot s_{20}}{\sqrt{r^2 - \frac{s_{20}^2}{4}}};\ \text{итд.}$$

## § 82. — Рачунски задаци из четвртог одељка

1) Терен облика правоугаоника од 125,5 $m$ дужине и 65,5 $m$ ширине продаје се по 35 дин. од 1 $m^2$. Наћи његову цену.

2) Наћи површину равностраног троугла, чија је страна 5,25 $m$.

3) Основица равнокраког троугла је 6,18 $cm$, а крак 7,75$m$; наћи његову површину.

4) Хипотенуза правоуглог троугла је 13,20, а једна катета 7,75 $m$; наћи његову површину.

5) Ромб стране 21 $m$ има један оштар угао од 60°; наћи његову површину.

6) Наћи већу паралелну страну трапеза, када је мања паралелна страна 6,10 $m$, висина 52 $m$, а површина 475 $m^2$.

7) Наћи површину равнокраког трапеза, чије су паралелне стране 42 и 27 $m$, а један оштар угао 60°.

8) Израчунати површину правоуглог троугла, код кога су: *a)* хипотенуза 10 $m$, а збир катета 14 $m$; *b)* једна катета 3 $m$, а збир хипотенузе и друге катете 9 $m$.

9) Решити правоугли троугао, чија је површина 34,19 $m^2$, а висина хипотенузина 5,2 $m$.

10) Решити правоугли троугао, чији је обим 72 $m$, а површина 216 $m^2$.

11) Наћи површину квадрата, кад је збир његове стране и дијагонале 24,1 $m$.

12) Наћи површину правоугаоника: *a)* ако му је обим 26 $m$ а дијагонала 10 $m$; *b*) ако му је дужина 8 $m$ а дијагонала 10 м.

13) Наћи дијагоналу и страну квадрата, чија је површина 162 $m^2$.

14) Наћи површину равностраног троугла, ако је збир његове стране и висине 18,65 $m$.

15) Наћи површину и висине троугла, чије су стране: 25, 19 и 36 $m$.

16) Стране једнога троугла јесу 13, 14 и 15 $m$; наћи *a)* полупречник описаног круга $R$; *b)* полупречнике уписаних кругова $r$, $r_1$, $r_2$ и $r_3$; и *c)* његове тежишне линије $t_{(a)}$, $t_{(b)}$ и $t_{(c)}$.

17) Наћи полупречник описаног круга око троугла чије су стране 8, 9 и 11 $m$.

18) Израчунати површину трапеза, кад су му познате све четири стране.

19) Три круга полупречника 5, 6 и 7 $m$, додирују се узајамно споља; наћи површину троугла чије су стране централне раздаљине кругова.

20) Код једног троугла познати су полупречници спољашње уписаних кругова $r_1=6$ $m$, $r_2=3$ $m$ и $r_3=2$ $m$; наћи полупречник $r$ уписаног круга, површину и стране троугла.

21) Код једнога троугла познато је: $r_1 = 4$ $m$, $r_2 = 3$ и површина $P = \sqrt{96}$; наћи полупречнике $r$ и $r_3$ и страну $a$.

22) Равностран троугао уписан је у кругу полупречника 2,25 $m$; наћи површину троугла.

23) Наћи површину правилног шестоугла уписаног у кругу полупречника 12 $m$.

24) Наћи размеру површинâ између правилног шестоугла и равностраног троугла уписаних у истом кругу.

25) Наћи размеру површинâ између описаног и уписаног правилног шестоугла код истог круга.

26) Основица једног троугла је 23 $m$ а њена висина 15 $m$; наћи површину квадрата уписаног у троуглу тако да му се једна страна по правцу поклапа са основицом, а супротна темена се налазе на другим двема странама троугловим.

27) Доказати да је површина правилног шестоугла уписаног у једноме кругу средња геометриска пропорционала између површинâ описаног и уписаног равностраног троугла код истог круга.

28) Паралелне стране једнога трапеза јесу 58 $m$ и 34 $m$, и висина му је 25 $m$; наћи површину троуглова који постају повлачењем његових дијагонала.

29) Наћи основицу и висину једнога троугла, чија је површина 486 $m^2$, кад се зна да је основица $\frac{3}{4}$ од висине.

30) Стране једнога троугла јесу 7, 8 и 9 $m$; наћи његове тежишне линије.

31) Наћи површину правоугаоника, чији је обим 8,6 $m$, а разлика двеју страна 1,8 $m$.

32) Правоугаоник, чија је дужина 20 $m$ а ширина 15 $m$, једнак је другом правоугаонику, чија је дужина $\frac{3}{5}$ дужине првога. Наћи обим другога правоугаоника.

33) Од једнога табака облика правоугаоника, дужине 90 $cm$ а ширине 40 $cm$, желимо да начинимо квадрат. Са колико сантиметара треба да смањимо дужину, а са колико да увећамо ширину табака?

34) Површина једног трапеза је $54\frac{3}{16}$ $m^2$, а његова висина 8,5 $m$; наћи његову средњу линију.

35) Наћи површину паралелограма, чије су две стране 8 и 11 $m$, а једна дијагонала 14 $m$.

36) Наћи површину четвороугла, чије су стране 8, 7, 3 и 4 $m$, а дијагонала повучена из темена прве и друге стране 6 $m$.

37) Полупречник једног круга је 2,5 $m$; наћи површину: a) уписаног квадрата; b) уписаног правилног осмоугла; c) описаног правилног шестоугла; e)* уписаног правилног десетоугла; f)* уписаног правилног петоугла.

38) Троугао $ABC$ има основицу $AB=6$ $m$, а површину 24 $m^2$. Код овога троугла повучена је права $EF \parallel AB$, која отсеца троугао површине 9 $m^2$. На ком је отстојању од врха повучена права $EF$?

39) Стране једног троугла јесу 5, 4 и 8 $m$. Најмања страна њему сличног троугла је 12 $m$. Наћи површине ових троуглова.

40) Обим једног троугла је 24 $m$, а једна му је страна 8 $m$. Њена хомолога страна једнога сличнога троугла је 1 $m$. У којој су размери површине ових троуглова?

41) Површине двају паралелограма стоје као 15 : 11. Ти паралелограми имају једнаке висине, а разлика њихових основа је $3\frac{3}{5}$ $m$. Наћи њихове основице.

---

* За ученике реалке.

42) Збир двеју страна једнога троугла је 124 $m$, а одговарајуће висине јесу 159 $m$ и 50 $m$; наћи површину троугла.

43) Страна једнога квадрата је 8,75 $m$. Наћи страну другог квадрата, чија је површина два пута већа од површине првога квадрата.

44) Полупречник једнога круга је $r = 5$ $m$; наћи површину између описаног и уписаног код тога круга: а) равностраног троугла; b) квадрата; c) правилног шестоугла; d)* правилног десетоугла; e)* правилног петоугла.

45) Око круга полупречника $r$ описан је равностран троугао $ABC$ и повучена је дирка $DE$ паралелно страни $BC$. Израчунати површину трапеза $BCDE$ (I београдска, 1910).

46) Дате су две тачке $A$ и $B$ на једној правој која је паралелна са датом правом $XY$; њихово је отстојање $AB = 2a$, а отстојање двеју паралелних је $b$. Тражи се на коме се отстојању од праве $AB$ налази средиште круга који пролази кроз тачке $A$ и $B$ и додирује праву $XY$ (I београдска, 1906).

47) У трапезу чија је велика основица 18 $m$, углови на њој су по $45^0$, а свака непаралелна страна по 7 $m$. Наћи: 1) површину трапеза и 2) површину троугла који граде продужене непаралелне стране и мања паралелна страна (I београдска, 1905).

48) Троугао не мења своју површину ($P = 120$ $m^2$) ако му основица порасте а висина се у исти мах смањи за 1 $m$. Наћи основицу и висину (I београдска, 1900).

49) Колики је полупречник и колика је површина онога круга који пролази кроз три тачке, а њихове су раздаљине: од $A$ до $B$ 248 $m$, од $B$ до $C$ 332 $m$, од $C$ до $A$ 425 $m$? (II београдска, 1910)

50) Основице једног трапеза су 130 и 30, а краци 60 и 80. Доказати да се тај трапез може раставити на један паралелограм и један правоугли троугао и израчунати његову висину и површину (Београдска реалка, 1931).

51) Један плац облика трапеза од 3600 $m^2$ дели једна дијагонала на један равностран и један разностран троугао: Колике су стране тог земљишта, ако се површине троуглова имају као 5 : 4 (Петровград, 1925)?

52) Површина равностраног троугла је 100 $cm^2$. Ако око троугла опишемо круг, а у кругу упишемо квадрат, онда колика ће бити површина тога квадрата? (Петровград, 1923)

53) Код равнокраког трапеза је $a = 100$ $m$, $b = 40$ $m$ и крак $c = 50$ $m$. Одредити површину трапеза и површину троугла који се добива продужењем кракова (Београдска женска, 1910).

54) Троугао има стране $a = 13$ $cm$, $b = 15$ $cm$, а површину $P = 24$ $cm^2$. Израчунај му трећу страну, полупречник описаног и полупречник уписаног круга (В. Кикинда, 1926).

55) У правоуглом троуглу хипотенузина висина $h = 5$ $cm$, а разлика отсечака хипотенузиних $q - p = 2{,}25$. Наћи полупречник уписаног круга (Нови Сад, Мушка, 1931).

56) Наћи површину правилне шестостране звезде створене од два равнострана троугла уписана у кругу полупречника $r = 5$ $m$ (Нови Сад Мушка, 1930).

---

*) За ученике реалке.

57) Две супротне стране правилног осмоугла и две дијагонале, које на тим странама стоје нормално, граде правоугаоник. Израчунати полупречник описаног круга и површину правоугаоника, кад је дата страна $a$ осмоугла (Ниш, 1908).

58) Размера између висине и обе паралелне стране у трапеза је $2:3:5$, а површина му је $1\,270{,}08\ dm^2$. Колика је висина и паралелне стране? (Нови Сад, Женска, 1927)

59) У равнокраком троуглу познат је полупречник уписаног круга $r = 2\frac{1}{4}\ dm$, а основица је $a = 18\ dm$. Наћи полупречник описаног круга (Пожаревац, 1933).

60) У једном трапезу је већа паралелна страна за $3\ m$ дужа од мање паралелне стране, а висина трапеза је средња аритметичка средина обеју паралелних страна. Кад је површина трапеза за $7{,}75\ m^2$ мања од двоструке површине квадрата над мањом паралелном страном, колике су паралелне стране и висина трапеза (Пожаревац, 1910)?

61) У равнокраком трапезу је збир основâ $48\ cm$; дијагонала је једнака већој а висина мањој основи. Израчунати стране и површину тога трапеза (Ср. Митровица, 1934).

62) Дуж $AB = 1{,}8\ m$ подељена је тачком $M$ по размери $1:2$ на два отсечка. Кад се над сваким отсечком нацрта равностран троугао, а њихова темена $C$ и $D$ вежу, добија се четвороугао $ABCD$. Израчунати његову површину (Београд, I женска, 1922).

63) Паралелне стране једнога трапеза јесу $45\ m$ и $30\ m$ а непаралелне $17\ m$ и $25\ m$. Наћи површину троугла који се добива продужавајући непаралелне стране до њиховог пресека (Београд, III мушка, 1925)

64) Трапез, чије су паралелне стране $a$ и $b$ а висина $h$, подељен је двема дужима које су паралелне са основицама, на три трапеза једнаких површина. Наћи дужине ових двеју дужи и делове на које је њима подељена висина датога трапеза (Београд, III мушка, 1931).

65) Дате су трапезове паралелне стране $a = 18\ cm$, $b = 12\ cm$ и висина $h = 9\ cm$. Висина је подељена на три једнака дела и кроз деоне тачке повучене су паралелне са основицама. У каквој размери стоје површине тако добивена три трапеза (Београд, III мушка, 1933)?

66) За два правоугла троугла, који имају хипотенузе исте дужине, зна се још да се катете првог разликују за $9\ cm$, катете другог за $13\ cm$ и да је збир њихових површина $90\ cm^2$. Колике су катете тих троуглова? (Београд, IV мушка, 1921).

67) Око две тачке чије је растојање $18\ cm$ треба описати два круга тако да се они додирују споља и да је уписани квадрат у једном кругу једнак квадрату уписаном у другом кругу. Колики су полупречници кругова? (Београд, II женска, 1924).

68) У кругу чији је полупречник $r = 20\ cm$ повучена је тетива $AB = 24\ cm$. У крајњим тачкама тетиве повучене су тангенте које се секу у тачци $S$. Наћи централну раздаљину тачке $S$, површину и обим четвороугла $AOBS$.

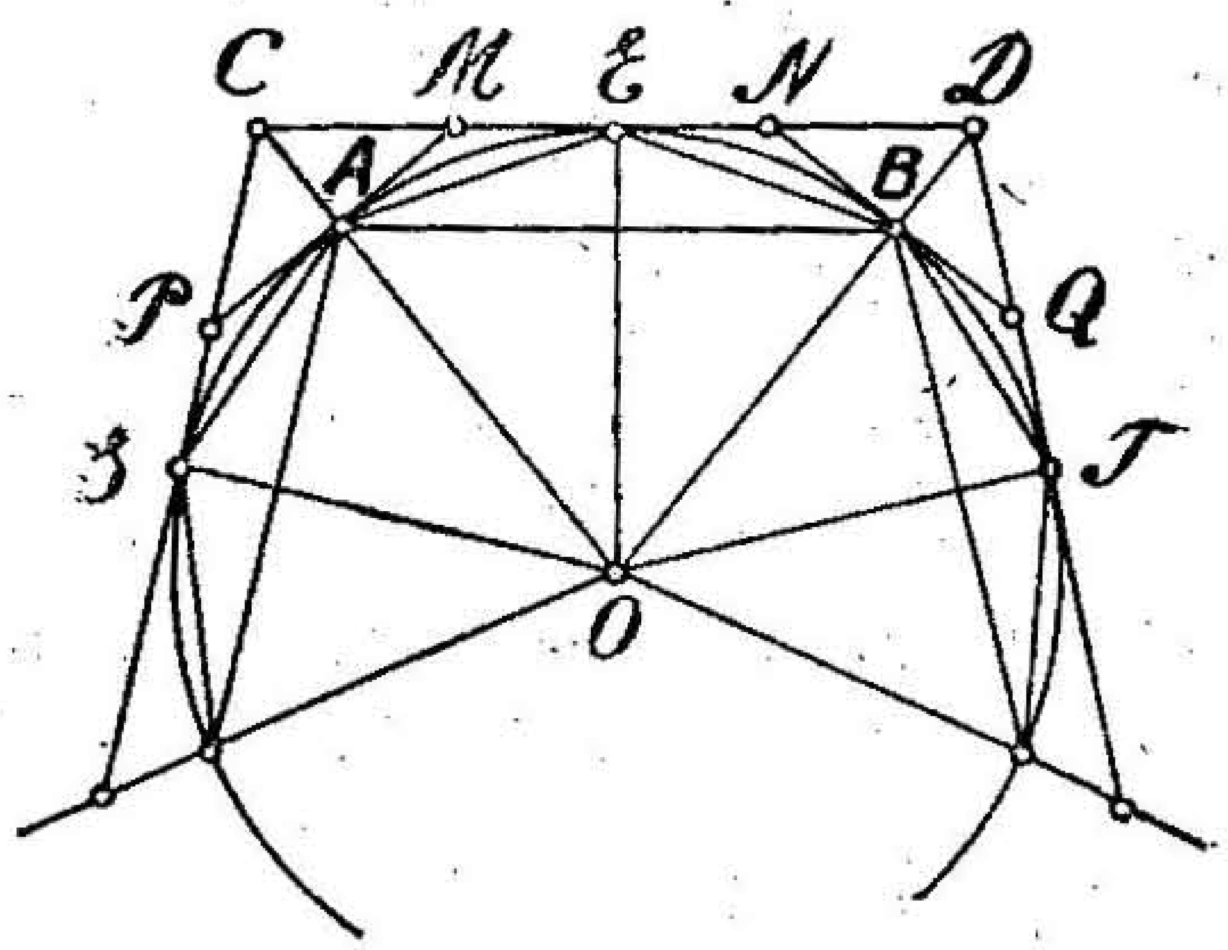
69) Колика је висина, крак и основица једног равнокраког троугла површине $a^2$, кад је збир његове основице и висине једнак двоструком краку, и у каквој размери стоје те три количине (Београд, I мушка, 1923)

70) Три круга се додирују споља. Њихови полупречници стоје у овим односима: $R_1 : R_2 = 0{,}8$; $R_3 : R_2 = 0.9$; $R_2 + R_1 = 9$. Колика је површина троугла чија су темена у центрима тих кругова? (Београд, II мушка 1924).

# ПЕТИ ОДЕЉАК

## Израчунавања код круга и његових делова

**§ 83. — Упоређивање кружног обима са обимима уписаних и описаних правилних полигона.** — Ако је $AB$ (сл. 241) страна једног уписаног правилног $n$-тоугла, $CD$ страна описаног многоугла од истог броја страна, онда $CD > \widehat{AEB} > AB$. Тада је и $n \cdot CD > n \cdot \widehat{AEB} > n \cdot AB$, тј. *обим круга мањи је од обима описаног, а већи је од обима уписаног полигона.* Ако број страна и уписаног и описаног полигона удвостручимо, онда се обим уписаног полигона повећава, а обим описаног се смањује, али је и тада обим круга мањи од обима описаног а већи од обима уписаног полигона. О томе се уверавамо посматрањем сл. 241, где је $AE + EB > AB$ и $AM + MN + NB < CD$. Ако продужимо поступно удвостручавање броја страна и уписаног и описаног многоугла, добијамо обиме правилних полигона од $4n$, $8n$, $16n$, .... страна, и ти обими постају поступно све већи код тетивних а све мањи код тангентних полигона, али се и један и други све више приближују обиму круга.




Сл. 241

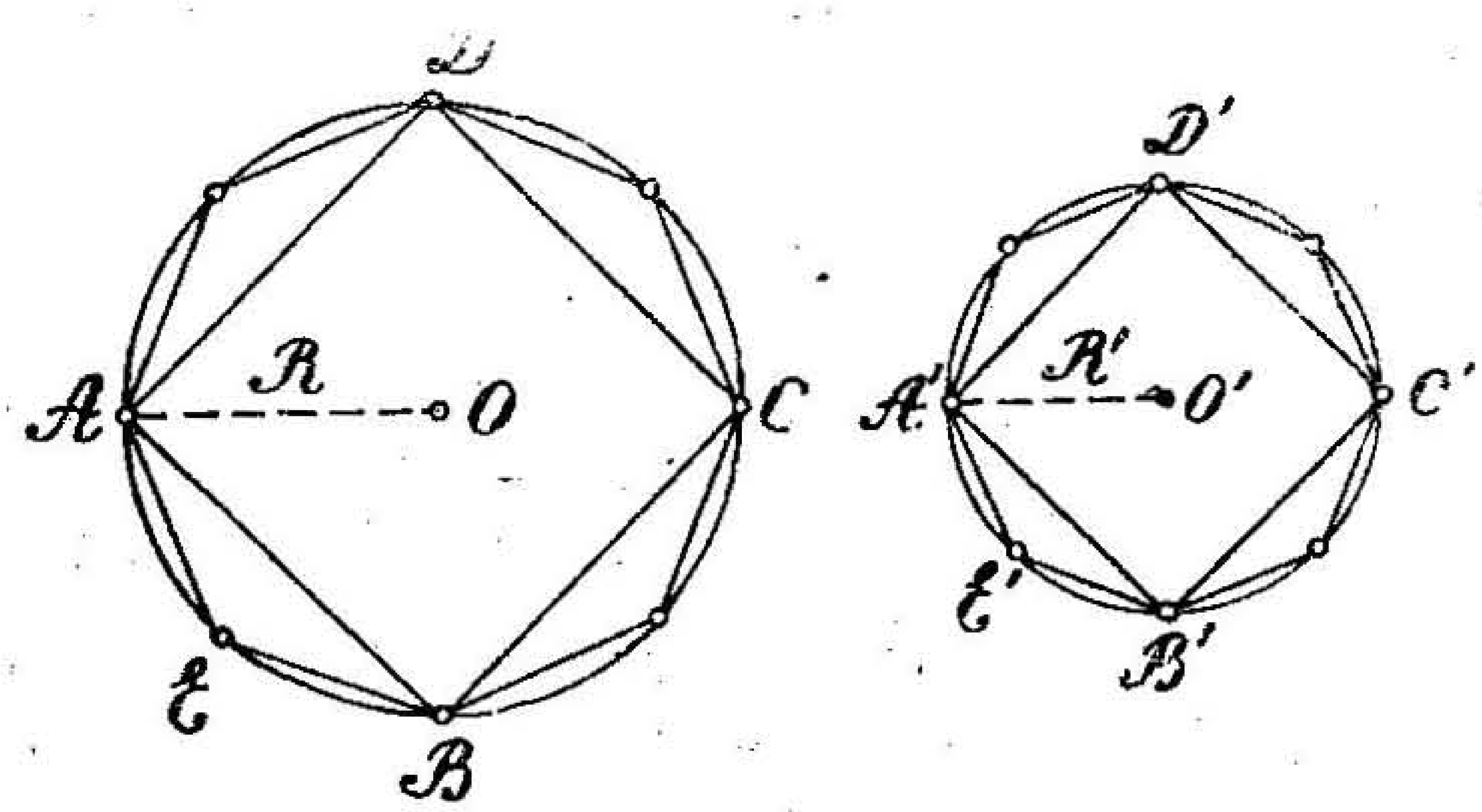
Ако замислимо да повећавање броја страна иде до бесконачности, онда се обими описаног и уписаног многоугла толико приближавају да се готово поклапају са обимом круга. Према овоме, *изводимо закључак, да је обим круга гранична вредност којој теже обими од неколико тетивних и тангентних полигона од бесконачног броја страна.* Да је овај закључак тачан, уверавамо се из следеће табеле, где су израчунати обими од неколико правилних полигона, употребом образаца (I) и (II) из § 81, уписаних и описаних код круга полупречника $r = 1$.

| Број стр. n | Обим уписаног полигона | Обим описаног полигона |
|---|---|---|
| 6 | 6,000 000 | 6,928 204 |
| 12 | 6,211 656 | 6,430 780 |
| 24 | 6,265 256 | 6,319 320 |
| 48 | 6,278 700 | 6,292 172 |
| 96 | 6,282 062 | 6,285 430 |
| 192 | 6,282 904 | 6,283 746 |
| 384 | 6,283 112 | 6,283 324 |
| 768 | 6,283 166 | 6,283 220 |
| 1536 | 6,283 181 | 6,283 194 |

Из горњих вредности увиђамо да се обими описаног и уписаног правилног полигона од 1536 страна разликују тек код 5-ог децимала, и то за 0,000013, а та је разлика тако мала да се може занемарити за обична практична израчунавања. Према овоме, за приближну вредност обима круга, за $r = 1$, можемо узети 6,28318 . . . .

## § 84. — Израчунавање Лудолфова броја П

*Теорема 126.* — **Обими два круга имају се као њихови полупречници, или као њихови пречници.** Из теореме 99 § 63 видели смо да се обими сличних полигона имају као две хомологе стране, или две хомологе дијагонале, а из теореме 68 истог параграфа, да су правилни полигони истог броја страна слични. Да бисмо доказали ову теорему,




Сл. 242

посматрамо кругове $O$ и $O'$ (сл. 242) у којима су уписани правилни полигони истог броја страна. Према 68 теореми обими ових полигона имају се као две њихове стране. Па како се стране ових полигона имају као полупречници $R : R'$, то се и обими полигонâ имају као $R : R'$. Поступним удвостручавањем полигонских страна, обими постају све већи, али стално се имају као $R : R'$. Овај однос постаје исти и кад број полигонских страна постане бесконачно велики, тј. кад обими полигона̂ теже својим граничним вредностима $O$ и $O'$ (обимима кругова). Стога је заиста:

$$O : O' = R : R', \text{ или } O : O' = 2R : 2R'.$$

Пропорција $O : O' = 2R : 2R'$ даје се написати и у облику $\frac{O}{2R} = \frac{O'}{2R'}$, а овај нам облик показује да је количник између обима круга и његовог пречника сталан број, пошто се исти количник добија када поделимо обим ма ког круга са његовим пречником. Тај сталан количник означава се са $\pi$ (пи) а зове се *Лудолфов број*, по имену математичара Лудолфа (1539—1610), који га је израчунао са 35 децимала. Број $\pi$ је ирационалан број, а израчунат је засада до свога 500-ог децимала. Најлакше његово израчунавање добијамо код круга полупречника $r = 1$. Обим тога круга, према излагању у претходном параграфу, је $O = 6{,}2831853070...$, па је $\pi = \frac{O}{2r} = \frac{6{,}2831853070}{2} = 3{,}1415926535...$ За обична израчунавања узима се $\pi = 3{,}14$. Памћење 10 првих децимала броја $\pi$ може се лако извести према броју писмена сваке речи француске реченице:

Que j' aime à faire connaître un nombre utile aux sages.
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

**§ 85. — Израчунавање кружног обима.** — Из једначине $\frac{O}{2r} = \pi$ имамо $\boldsymbol{O = 2r\pi}$, тј. *дужину кружног обима добијамо када пречник круга помножимо бројем* $\pi$. Ако су полупречници двају кругова $r_1$ и $r_2$, онда су њихови обими: $O_1 = 2r_1\pi$ и $O_2 = 2r_2\pi$. Дељењем ових једначина добијамо: $O_1 : O_2 = 2r_1\pi : 2r_2\pi$ или $O_1 : O_2 = 2r_1 : 2r_2$, или $O_1 : O_2 = r_1 : r_2$, што смо видели и код 126 теореме претходног параграфа.

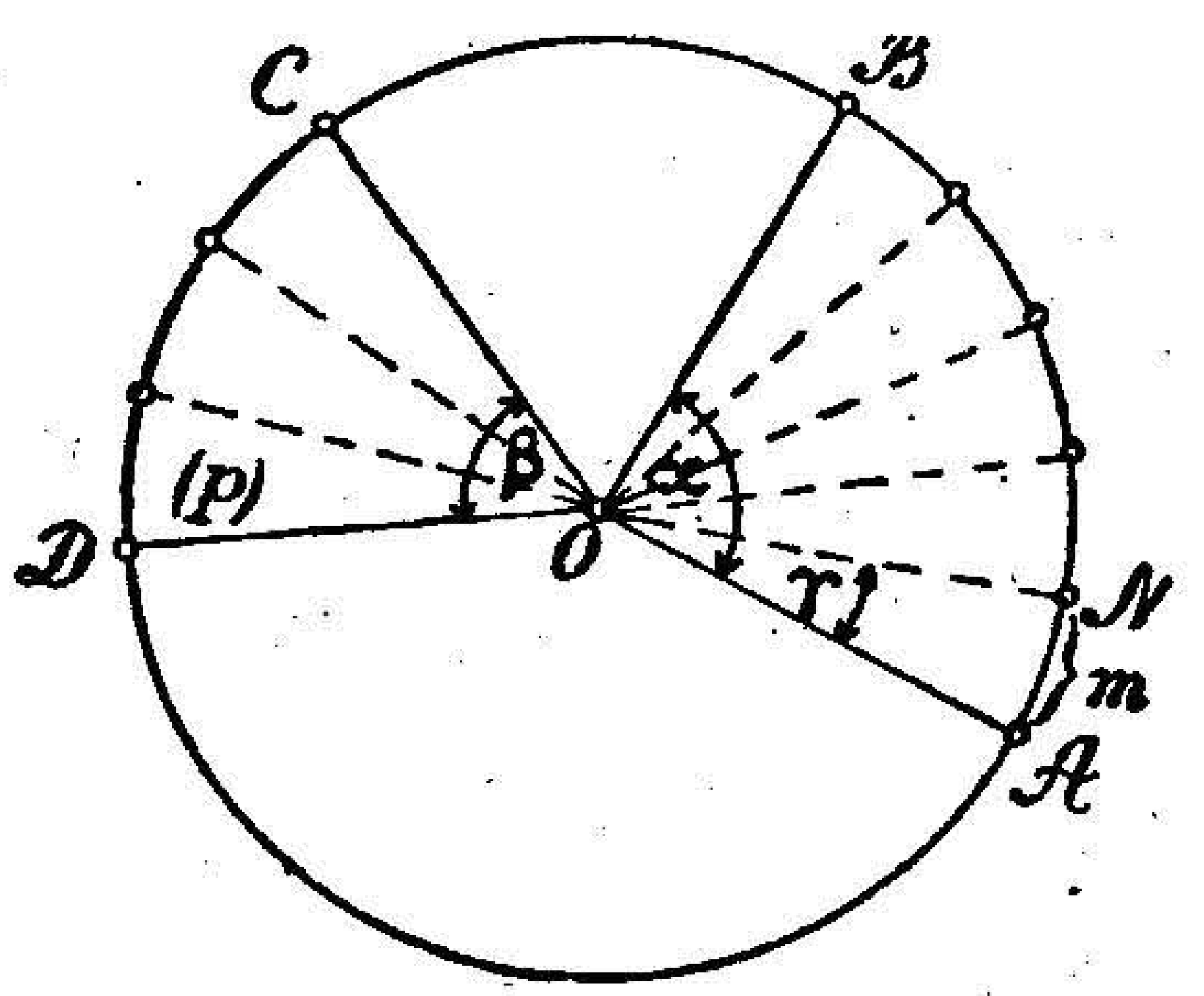
*Напомена.* — Израчунавање дужине кружног обима може бити само приближно тачно, пошто је број $\pi$ ирационалан број. Тачност ће бити утолико већа уколико је број $\pi$ узет са већим бројем децимала.

**§ 86. — Израчунавање кружног лука**

*Теорема 127.* — **Луци једнога круга, или кругова једнаких полупречника, имају се као њихови средишњи углови.** Нека је лук $m$ заједничка мера лукова $AB$ и $CD$ (сл. 243) и нека се $m$ садржава у $AB$ 5 пута, а у $CD$ 3 пута. Тада је $AB = 5\ m$, а $CD = 3\ m$. Стога је:

$$AB : CD = 5m : 3m, \quad \text{или} \quad AB : CD = 5 : 3 \quad (1)$$

Па како једнаким луцима једнога круга, или кругова једнаких полупречника, одговарају једнаки средишњи углови (теорема 3), то спајањем деоних тачака лукова $AB$ и $CD$ са центром $O$, угао $\alpha$ дели се на 5, а угао $\beta$ на 3 једнака дела, величине $\gamma$. Стога је $\alpha = 5\gamma$ и $\beta = 3\gamma$, а $\alpha : \beta = 5\gamma : 3\gamma$, или $\alpha : \beta = 5 : 3 (2)$. Из пропорције (1) и (2), код којих су десне стране једнаке, добијамо:



Сл. 243

$$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD} = \alpha : \beta,$$

чиме је ова теорема доказана.

*На основу ове теореме, сваки кружни лук има се према целој периферији круга, као што се има средишњи угао тога лука према 360⁰, који је средишњи угао кружне периферије.*

Ако дужину једнога лука означимо са $l$, његов средишњи угао са $\alpha$, а кружну периферију са $O$, онда је према овој теореми: $l : O = \alpha : 360^0$ или $l : 2r\pi = \alpha : 360^0$. Одавде је $l = \dfrac{r\pi\alpha}{180^0}$.

*Напомене.* — 1) Како је сваки лук по дужини онај део од периферије круга, који је део и његов средишњи угао од 360⁰, то је јасно да је:

а) дужина лука над страном уписаног равностраног троугла $l = \frac{1}{3} \cdot 2r\pi$;

b) дужина лука над страном уписаног квадрата $l = \frac{1}{4} \cdot 2r\pi = \frac{r\pi}{2}$; c) над страном уписаног правилног шестоугла $l = \frac{1}{6} \cdot 2r\pi = \frac{r\pi}{3}$ итд.

2) Образац $l = \frac{r\pi\alpha}{180^0}$ подесан је за логаритмовање, али треба пре прелаза на логаритмовање претворити размеру $\frac{\alpha}{180^0}$ у размеру са једноименим члановима, па ту размеру претворити са истим али неименованим члановима. Тако, за $r = 5m$ и $\alpha = 50^0 25' 40''$, биће:

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^0} = \frac{5 \cdot 3{,}14 \cdot 50^0 25' 40''}{180^0} = \frac{5 \cdot 3{,}14 \cdot 181540''}{1048000''} = \frac{5 \cdot 3{,}14 \cdot 181540}{1048000} = \frac{1{,}57 \cdot 9077}{5240};$$

$\log l = \log 1{,}57 + \log 9077 - \log 5240 = 0{,}43451$, а $l = N\overline{0{,}43451} = 2{,}7196\ m$

3) Ако се зна дужина једнога лука $l$ и његов полупречник $r$, а тражи се величина средишњег угла $\alpha$, или, што је свеједно, лук у степенима, онда из обрасца за дужину лука је $\alpha = \frac{180^0 \cdot l}{r\pi} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{l}{r}$. При овоме израчунавању корисно је знати да је $\frac{180^0}{\pi} = 57^0 17' 44{,}8''$ која је вредност једног радијанта, тј. лука који је по дужини једнак полупречнику круга ($l = r$).

4) Из обрасца $l = \frac{r\pi\alpha}{180^0}$ имамо $\frac{l}{r} = \frac{\pi\alpha}{180^0}$, која нам једнакост показује да је размера између дужине једнога лука и његовог полупречника стална (константна) за исти број степенâ $\alpha$, па ма колико се увећавао полупречник $r$. Ако је полупречник круга $r = 1$, онда се дужина лука од $\alpha$ степенâ означава са $arc\alpha$, а једнака је:

$$\boldsymbol{arc\alpha} = \frac{l}{r} = \frac{l}{1} = l = \frac{\pi\alpha}{180^0} \ (1). \text{ Одавде је } \alpha = \frac{\boldsymbol{arc\alpha \cdot 180^0}}{\pi} = \boldsymbol{arc\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{180^0}}{\pi} \ (2).$$

За $\alpha = 360^0$, $270^0$, $180^0$ и $90^0$ биће према обрасцу (1): $\boldsymbol{arc\ 360^0} = 2\pi$, $\boldsymbol{arc\ 270^0} = \frac{3\pi}{\boldsymbol{2}}$, $\boldsymbol{arc\ 180^0} = \pi$ и $\boldsymbol{arc\ 90^0} = \frac{\pi}{\boldsymbol{2}}$. Међутим, $\frac{\pi\alpha}{180^0}$ не само да претставља дужину лука полупречника $r = 1$, већ и угао $\omega$ од $\alpha$ степена, који има за основну јединицу радијант, тј. угао код кога је $l = r$. Да је ово тврђење тачно, уверавамо се по томе што је за $l = r$, по обрасцу (1), $arc\alpha = 1$, по обрасцу (2) је угаона основна јединица (радијант), $\alpha = \frac{180^0}{\pi} = 57^0 18' 44{,}8''$, а вредност $\omega$ угла $\alpha$, за јединицу $\alpha'$, је $\omega = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\alpha}{\frac{180^0}{\pi}} = \frac{\pi\alpha}{180^0}$. Према овоме, $2\pi$ претставља и цео обим и пун угао, $\pi$ половину обима и раван угао, $\frac{\pi}{2}$ четвртину обима и прав угао, $\frac{3\pi}{2}$ три четвртине обима и правоиспупчени угао итд. Из свега овога изводимо закључак *да се лук и његов централни угао претстављају не само истим бројем степена, када је за њихову јединицу узет степен, већ се претстављају истим бројем и онда када се за јединицу лука узме полупречник ($r = 1$), а за јединицу угла узме угао чије је $l = r$.*

§ 87. — **Површина круга.** — Како је круг у ствари један правилан многоугао од бескрајно много страна, то се, као и код свакога правилног полигона, а на основу 116 теореме из једнакости слика (§ 71), његова површина израчунава када се обим $\boldsymbol{O}$ помножи полупречником $\boldsymbol{r}$ и добивени производ подели са 2. Стога је површина круга:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{Or}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{2r\pi \cdot r}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{r^2}\pi$$

Ако су $r_1$ и $r_2$ полупречници два круга, а $P_1$ и $P_2$ њихове површине, онда је $P_1 = r_1^2\pi$ и $P_2 = r_2^2\pi$. Тада је:

$P_1 : P_2 = r_1^2\pi : r_2^2\pi$, или $\boldsymbol{P_1 : P_2 = r_1^2 : r_2^2}$, тј.

површине два круга имају се као квадрати њихових полупречника, што је исти случај и код свих сличних правилних полигона истог броја страна.

### § 88. — Површина кружног исечка (сектора)

*Теорема 128.* — **Сектори једнога круга, или кругова једнаких полупречника, имају се као њихови луци, или као њихови средишњи углови.** — Ако сектор $AON = p$ (сл. 243) узмемо за јединицу сектора $AOB$ и $COD$, онда је $AOB = 5p$, а $COD = 3p$. Стога је: $\boldsymbol{AOB : COD = 5 : 3}$ (1). Па како је из исте слике $\boldsymbol{\widehat{AB} : \widehat{CD} = 5 : 3}$ (2) и $\alpha : \beta = \boldsymbol{5 : 3}$ (3), то је из пропорције (1), (2) и (3):

$$\boldsymbol{AOB : COD = \widehat{AB} : \widehat{CD}} \text{ и } \boldsymbol{AOB : COD} = \alpha : \beta,$$

чиме је ова теорема доказана.

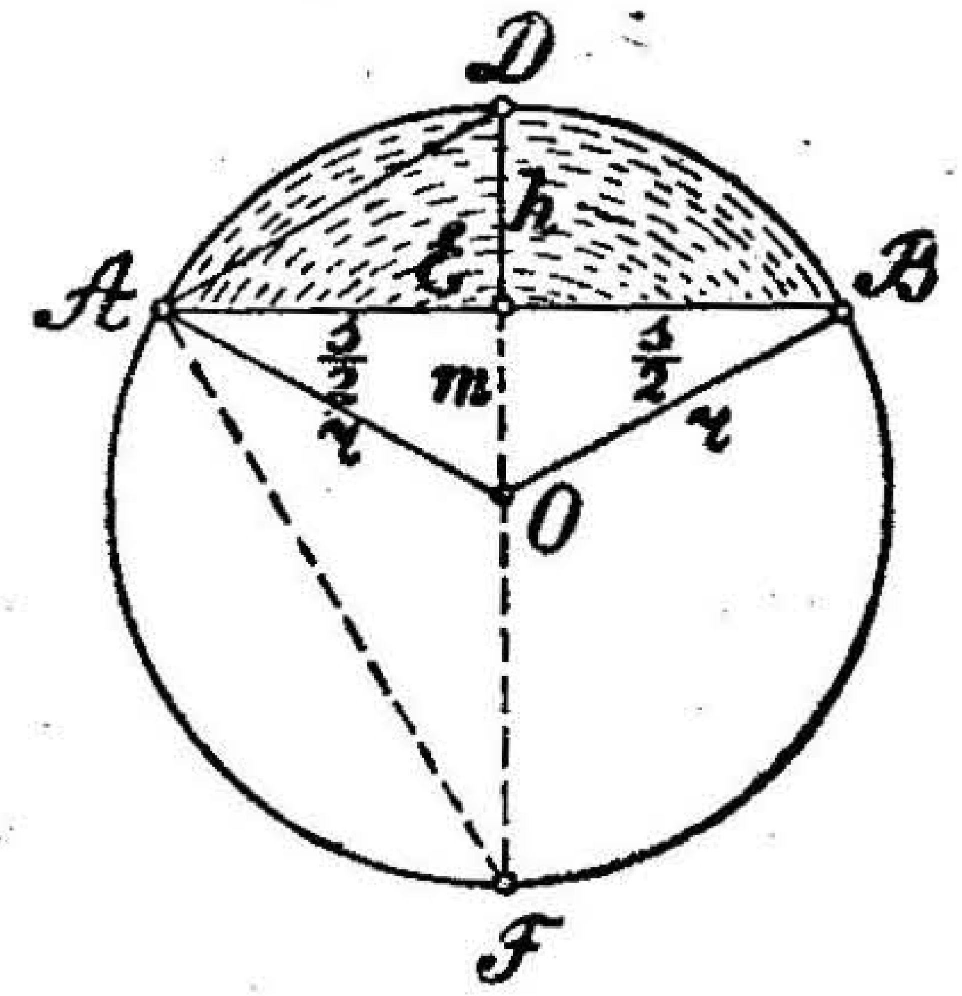
На основу ове теореме, површина кружног исечка $\boldsymbol{F}$ има се према површини круга $\boldsymbol{P}$, као што се има или лук исечка $l$ према обиму круга $\boldsymbol{O}$, или средишњи угао $\alpha$ према $360^0$, тј.:

a) $F : P = l : O$, или $F : r^2\pi = l : 2r\pi$ и

b) $F : P = \alpha : 360^0$, или $F : r^2\pi = \alpha : 360^0$.

Из (a) је $\boldsymbol{F = \frac{lr}{2}}$ (I), а из (b) је $\boldsymbol{F = \frac{r^2\pi\alpha}{360^0}}$ (II).

Образац (I) употребљавамо када је позната дужина лука и полупречник, а образац (II), када се зна полупречник и средишњи угао исечка или, што је свеједно, лук у степенима. По себи се разуме, при употреби другог обрасца, ако желимо да применимо логаритме, треба претходно и $\alpha$ и $360^0$ довести на једноимене бројеве (на степене, минуте или секунде), а затим на неименоване бројеве избацивањем знакова: $^0$, $'$, $''$. Други образац можемо добити из првог, ако у њему заменимо $l$ са $\frac{r\pi\alpha}{180^0}$.



Сл. 244

### § 89. — Површина кружног отсечка (сегмента).

— Да бисмо израчунали површину мањег кружног отсечка, треба најпре да израчунамо површину њему одговарајућег исечка, а затим да од ове површине одузмемо површину троугла $ABO$ (сл. 244). Напротив, ако желимо да израчунамо површину већег отсечка, онда површини одговарајућег исечка додајемо површину троугла $ABO$. Ако површину троугла $ABO$ означимо са $P$ $\left(P=\frac{sm}{2}=\frac{s}{2}\sqrt{r^2-\frac{s^2}{4}}\right)$, површину мањег исечка са $f$ $\left(f=\frac{r^2\pi\alpha}{360^0}\right)$, а површину већег исечка са $F$ $\left(F=\frac{r^2\pi(360^0-\alpha)}{360^0}\right)$, онда је површина мањег отсечка $S=f-P$, а површина већег отсечка $S'=F+P$.

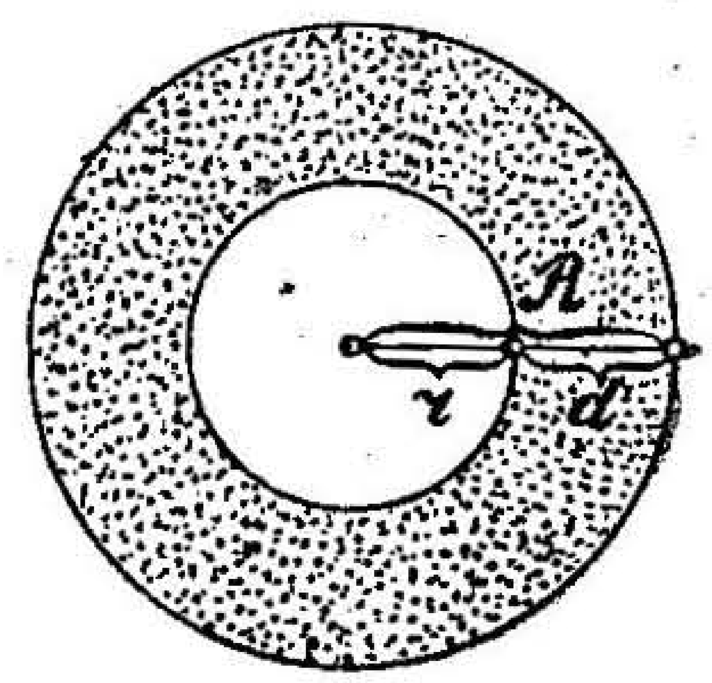
*Напомена.* — У рачунским задацима, често, или није дат полупречник $r$, или тетива $s$, а дата је висина отсечка $DE=h$. Тада, из правоуглог троугла $ADF$, у коме су $FE$ и $ED$ хипотенузини отсечци, а $\frac{s}{2}$ висина хипотенузина, имамо пропорцију:

$$h:\frac{s}{2}=\frac{s}{2}:(2r-h),$$

из које пропорције израчунавамо непознату количину потребну за даље рачунање.

## § 90. — Површина кружног прстена.

Површина кружног прстена (сл. 245) добија се, када се од површине спољашњег круга одузме површина унутрашњег. Ако нам $P$ прéтставља површину прстена, $R$ полупречник спољашњег круга, $r$ полупречник унутрашњег круга, а $d$ дебљину прстена ($d=R-r$), онда је:



Сл. 245

$$\mathbf{P}=\mathbf{R}^2\pi-\mathbf{r}\pi^2=(\mathbf{R}^2-\mathbf{r}^2)\,\pi=(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\pi=(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,\mathbf{d}\pi.$$

## § 91. — Рачунски задаци из петог одељка *

(Узимај увек $\pi=3{,}14$)

1) Наћи обим и површину круга, чији је полупречник: a) $1{,}8m$; b) $2{,}75\,m$; c) $2m\ 3\ dm\ 4\ cm$.

2) Наћи полупречник круга, чији је обим: a) $62{,}8m$; b) $31{,}4\ dm$; c) $126{,}6\ cm$.

3) Наћи полупречник круга, чија је површина: $78{,}5m^2$; b) $314\ m^2$; c) $706{,}5cm^2$.

4) Наћи дужину лука од: a) $72^0$; b) $50^0\ 10'$; c) $62^0\ 15'\ 25''$, кад му је полупречник: a) $3{,}5\ m$; b) $7{,}2\ dm$; c) $3\ m\ 2\ dm\ 5\ cm$.

5) Колико степена, минута и секунада има лук: a) ако је $l=41\frac{13}{15}\ m$ a $r=8\ m$; b) $l=5{,}25\ m$ a $r=3{,}6\ m$; c) $l=4\frac{7}{8}\ m$ и $r=5\frac{3}{5}\ m$?

6) Наћи полупречник лука: a) од $105^0$ а дужине $15{,}4\ m$; b) од $75^040'$ а дужине $20\ dm$; c) од $50^030'50''$ и дужине $25\ cm$.

---

* Задаци означени звездицом намењени су ученицима реалке.

7) Колико степена, минута и секунада има лук, који се има према полупречнику као: a) 4 : 5; b) 6 : 5; c) 13 : 7?

8) Колико степена, минута и секунада има лук, који је по дужини једнак полупречнику (радијант)?

9) У кругу полупречника $r = 8\,m$ уписан је перифериски угао од $60^0\,50'$; наћи дужину његовог лука.

10) У кругу полупречника $r = 4{,}5\,m$ уписан је перифериски угао над луком дужине $l = 6{,}2\,m$; колики је тај угао?

11) Обим једнога круга је 157 $cm$; наћи његову површину.

12) Површина једнога круга је 314 $dm^2$; наћи његов обим.

13) Обим једног круга је 314 $cm$; наћи страну квадрата, који има једнаку површину с кругом.

14) У кругу полупречника 10 $m$ уписан је равностран троугао; наћи површину једнога од добивена три отсечка.

15) Страна равностраног троугла је 25 $cm$; наћи обим и површину: a) описаног; b) уписаног круга.

16) Наћи $arc\ 1^0$, $arc\ 1'$, $arc\ 1''$.

17) Колика је брзина тачке на екватору Земље услед обртања око осовине, ако је пречник Земље 12756 $km$?

18) Фабрични точак од 4 $m$ у полупречнику обрне се 150 пута у минуту; колика је брзина једне тачке на његовом обиму?

19) Обим једнога фабричног точка је 15 $m$; наћи број његових обртања у минуту, ако се тачке на његовом обиму крећу брзином од 20 $m$.

20) Наћи полупречник точка који се обрће 80 пута у минуту, кад је брзина једне тачке његовог обима 20 $m$.

21) Наћи полупречник круга, чији је обим 5 пута већи од обима круга полупречника 3,25 $m$.

22) Наћи полупречник круга, чија је површина 3 пута мања од површине круга полупречника 9,45 $cm$.

23) Наћи полупречник круга, чији је: a) обим једнак збиру обимā двају кругова полупречникā 3,5 $m$ и $4\frac{3}{4}m$; b) површина једнака збиру површинā двају кругова полупречникā 5,25 $m$ и 2,75 $m$.

24) Два концентрична круга имају обиме 62,8 $cm$ и 43,96 $cm$; наћи дебљину и површину кружног прстена.

25) Две вароши истог упоредника имају географске дужине $75^0\,25'$ и $60^0\,45'$ источно од париског меридијана; наћи отстојање ових вароши, ако је полупречник њиховог упоредника 5730 $km$.

26) Збир обима двају кругова је 125,6 $m$, а разлика њихових полупречника је 2 $m$; наћи њихове полупречнике.

27) Збир површинā двају кругова је 467,86 $cm^2$, а разлика њихових полупречника је 3 $cm$; наћи њихове обиме.

28) Обими двају кругова, чији је збир полупречника 14 $cm$, имају се као 4 : 3; наћи њихове површине.

29) Наћи обим и површину круга, чији је полупречник једнак страни уписаног квадрата у кругу полупречника 5,3 $m$.

30) Наћи обим круга, чији је полупречник једнак страни уписаног равностраног троугла у кругу полупречника 3,5 $m$.

31) Наћи површину круга, чији је полупречник једнак обиму описаног правилног шестоугла око круга полупречника 0,15 $m$.

32)* Обим правилног 10-угла је 5 $m$; наћи полупречник описаног круга.

33) Катете једнога правоуглог троугла јесу 3 и 4; наћи површину уписаног круга.

34) Наћи полупречник круга, чији је обим средња геометриска пропорционала између обима описаног и обима уписаног равностраног троугла код круга полупречника $r = 4{,}5$ $cm$.

30) Ако полупречник неког круга увећавамо или умањимо $n$ пута, за колико пута се увећава или смањује: *a)* обим, *b)* површина тога круга?

36) У којој размери стоје површине двају кругова, ако су њихови обими $4\frac{4}{15}$ и 3,2 $m$?

37) У којој размери стоје полупречници двају кругова, ако су њихове површине 314 $m^2$ и 113,04 $m^2$?

38) Збир полупречника двају кругова је 16 $m$, а њихови се обими имају као 5:3; наћи њихове површине.

39) Површине двају кругова имају се као 9:2, а разлика њихових полупречника је 4,5 $dm$; наћи њихове обиме.

40) Наћи површину кружног сектора полупречника $r = 5$ $cm$, ако је средишњи угао: *a)* $65^0$; *b)* $70^0$ $35'$; *c)* $50^0$ $40'$ $50''$.

41) Површина једног сектора је 25 $cm^2$, а средишњи му је угао $30^0$ $20'$; наћи његов полупречник.

42) Кружни исечак има 18 $cm^2$ површине, а полупречник му је 3 $cm$; наћи његов средишњи угао.

43) Колики је полупречник круга, ако је једна његова тетива $s = 6$ $cm$, а висина лука над том тетивом $h = 2$ $cm$?

44) Полупречник једног круга је 6 $cm$; колики је полупречник концентричног круга који полови његову површину?

45) Колики је средишњи угао кружног исечка, чија је површина једнака с површином: *a)* уписаног равностраног троугла, *b)* уписаног квадрата?

46) Колика је површина сегмента, ако му је тетива страна: *a)* уписаног равностраног троугла, *b)* уписаног квадрата, *c)* уписаног правилног шестоугла, *d)* уписаног правилног осмоугла, а полупречник круга је 10 $cm$?

47) У кругу, чији је полупречник $r = 5$ $m$, уписан је и око њега описан: *a)* равностран троугао, *b)* квадрат, *c)* правилан шестоугао, *d)** правилан десетоугао; наћи површину између та два полигона.

48)* Позната је страна правилног десетоугла уписаног у кругу полупречника $r = 15$ $cm$; израчунати површину уписаног правилног петоугла.

49) Три једнака круга додирују се узајамно; пзрачунај површину слике између њих.

50) Израчунај површину сегмента, чија је тетива једнака полупречнику круга.

51) Код равностраног троугла стране 7 $cm$ описан је око једног његовог темена круг троугловом висином као полупречником; наћи површину делова на које је троугао подељен.

52) Колика је површина прстенова исечка чији је средишњи угао $50^0\ 40'$, а полупречници су 7 и 5 *cm*?

53) Наћи површину правоугаоника уписаног у кругу полупречника $r = 10\ m$, ако му је једна страна 12 *m*.

54) У квадранту неког круга, чији је полупречник $r$, уписан је круг тако да додирује краке и лук квадранта; наћи површину круга, чији је полупречник збир квадрантовог полупречника и полупречника уписаног му круга (Одговор: $2r^2\pi$).

55) Над правом дужине 8 *cm* описан је полукруг и правоугаоник, чије су стране дирке полукругове; наћи површину између правоугаоника и полукруга.

56) Круг, чији је полупречник $r = 3\ cm$, окружен је прстеном површине 5,2 $cm^2$; наћи ширину прстена.

57) У полукругу пречника 12 *cm* описани су полукрузи над половинама пречника; наћи површину између та три полукруга.

58) У квадранту полупречника $r = 10\ cm$ описан је полукруг над једним полупречником; наћи осталу површину.

59) Колики је средишњи угао оног сектора чији је цео обим једнак обиму његовог круга?

60) Колики је средишњи угао оног сектора чија је површина једнака пречниковом квадрату?

61) Стране једнога троугла јесу 13, 14 и 15 *cm*; наћи збир површина̂ сегмената који се добијају када се око троугла опише круг.

62) У равностраном троуглу стране 16 *cm* уписана су три круга једнаког полупречника а који се додирују и међу собом и са странама троугловим; наћи површину слике између кругова.

63) У кругу полупречника 20 *m* уписана су три јаднака круга, који се додирују узајамно и са даним кругом; наћи обим и површину једног од тих кругова.

64) Основица неког правоугаоника једнака је са страном равностраног троугла уписаног у кругу полупречника $r$, а висина му је једнака са страном правилног шестоугла који је око истог круга описан; наћи обим оног круга који има с тим правоугаоником једнаку површину (Одговор: $2\ r\ \sqrt{2\pi}$).

65) Два места на Земљи имају географску ширину $60^0$, а њихово је отстојање 450 *km*; наћи: *a)* разлику њихових географских дужина; *b)* разлику њихових часовних времена, када је полупречник Земље 6378 *km*.

66) Наћи површину између двеју паралелних тетива, од којих је једна једнака полупречнику круга, а друга је једнака страни уписаног равностраног троугла.

67) У кругу полупречника 12 *dm* уписане су са једне исте стране центра две паралелне тетиве. Једна је страна уписаног равностраног троугла, а друга је страна уписаног правилног шестоугла. Колика је површина ограничена тим тетивама и кружним луцима? (II београдска, 1912).

68) Над странама једног троугла конструисани су: квадрат, равностран троугао и полукруг, сви једнаких површина. Колика је површина датог троугла, ако је дијагонала квадрата 15,5 *dm* (Петровград, 1931)?

69) Над странама правоуглог троугла конструисани су полукрузи; израчунати површину добивених полумесеца, кад је мања катета 4 *m* а хипотенуза двапут већа од мање катете (Београд, Женска, 1914).

70) У кругу полупречника $R = 2m$ повучене су с једне и с друге стране центра две паралелне тетиве. Једна $AB$ једнака је страни уписаног равностраног троугла, а друга $CD$ страни уписаног квадрата. Крајње тачке тих тетива јесу темена једнога трапеза. Наћи површину трапеза $ABCD$ и површину отсечка ограниченог тетивом $AB$ и луком $AB$ (Битољ, 1931).

71) На једној дужи $AD = 3$ налази се дуж $BC = b$. Опиши над $AB$ и $AC$ полукругове с једне, а над $BD$ и $CD$ полукругове с друге стране. Колика је површина тако постале слике облика брадве (т. зв. пеликоида) и како се односи површина тога пеликоида према површини круга чији је пречник $AD$? (Зајечар, 1932)

72) На сваком углу једног квадрата, чија је страна $a = 1m$, исечен је известан део тако да се добије правилан осмоугао, па је од исечених делова образован један кружни прстен, чији је мањи круг описан око осмоугла. Колика је дебљина тога прстена? (Зајечар, 1910)

73) У кругу, чији је полупречник 32 $cm$, уписана су два концентрична круга тако да се површина унутрашњег круга има према површинама оба прстена као 4 : 5 : 7. Колики су полупречници у ова два концентрична круга? (Нови Сад, Женска 1930)

74) Позната је разлика $m$ између дијагонале и стране квадрата уписаног у неком кругу. Израчунати површину полумесеца који се добија кад се на страни тога квадрата опише споља полукруг као над пречником. (Пљевља, 1932)

75) У кругу полупречника $r = 12$ $cm$ уписан је равностран троугао, а на свакој страни тога троугла описан је полукруг као над пречником. Израчунати површину трију полумесеца који се тако добијају (Пљевља, 1930).

76) Површина правилног шестоугла је 80 $m^2$; колика је страна шестоугла и површина између описаног и уписаног круга? (Ужице, 1930).

77) Квадрат чија је површина 136 $cm^2$ пресечен је кругом коме је средиште у пресеку његових дијагонала тако да му је свака страна подељена на три једнака дела. Израчунај површину кружних отсечака изван квадрата (Скопље, Женска, 1931).

78) Колики је обим правилног шестоугла, ако је тај шестоугао једнак лику омеђеном двама круговима од којих је један уписан а други описан код троугла са странама $a = 14$, $b = 19$ и $c = 23$ (Загреб, II мушка реална, 1934).

79) У полукругу су задане две паралелне тетиве $a = 8{,}8$ $dm$ и $b = 5{,}6$ $dm$ и њихова међусобна раздаљина $h = 3$ $dm$. Израчунај полупречник тога круга (Загреб, II мушка реална, 1930).

80) Наћи површину оног дела кружног прстена коме одговара средишњи угао $60^0$, ако су полупречници дати једначинама: $R^2 + r^2 = 89$, $Rr = 40$ (Београд, I женска, 1919).

81) Круг има пречник $d = 8$ $dm$. Над сваким полупречником (на том пречнику) описан је по један круг, а у празнинама између спољашњег и унутрашњих кругова описани су кругови, који додирују спољашњи и два унутрашња круга. Израчунати површину фигуре ограничене периферијама спољашњег и свих унутрашњих кругова (Београд, I женска, 1921).

82) Дата је површина кружног исечка $p = 15,7\ m^2$ и средишњи угао $\alpha = 72^0$; израчунати површину оног кружног прстена, чији унутрашњи круг ($\rho$) има исти обим као исечак, а ширина прстена је $d = 0,07\ m$ (Београд, I женска, 1922).

83) Око тачке $A$ дужи $AB = 4\ cm$ описан је лук полупречником $AB$ почев од $B$; исто тако око тачке $B$ описан је лук полупречником $AB$ почев од $A$, а са исте стране дуж $AB$, док не пресече први лук. Израчунати површину тако добивене фигуре (Београд, I женска, 1924).

84) Два се круга додирују изнутра. Наћи површину ограничену њиховим периферијама, кад мањи круг дели пречник већег круга по размери $1:2$, а полупречник већег круга је $3\ cm$ (Београд, I женска, 1927).

85) Колики је полупречник оног круга чија је површина једнака површини једног равнокраког троугла, кад је његова основица једнака страни равностраног троугла уписаног у кругу полупречника $r = 15\ cm$, а крак му је једнак страни правилног шестоугла описаног око истог круга (Београд, Реалка 1920).

86) Дат је равностран троугао стране $a$. Кад се из сваког његовог темена опише лук полупречника $a$ над супротном страном, добија се криволиниски равностран троугао. Наћи површину овога троугла (Београд, IV мушка, 1928).

87) Око круга описан је равнокрак трапез чије су паралелне стране 2,4 $dm$ и 0,7 $dm$. Наћи површину између круга и трапеза.

88) Око теменâ равностраног троугла стране $a$ описани су кругови полупречником $r = \frac{a}{2}$. Израчунати површину која је ограничена луцима сва три круга (Београд, II мушка, 1920).

# ШЕСТИ ОДЕЉАК*

## КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ ПО МЕТОДИ: A) ГЕОМЕТРИСКИХ МЕСТА; B) ПОМОЋНИХ СЛИКА; C) СЛИЧНИХ СЛИКА; И D) АЛГЕБАРСКЕ АНАЛИЗЕ

X

**§ 92. — Геометриска места.** — Под геометриским местом разумемо такву једну линију, праву или криву, или такву једну површину, равну или криву, чије све тачке одговарају једној истој погодби. Тако, кружна периферија је једно геометријско место, пошто све њене тачке одговарају погодби: *да су подједнако удаљене од центра круга.* Површина лопте такође је једно геометријско место, јер све њене тачке од-

* Само за ученике реалке.

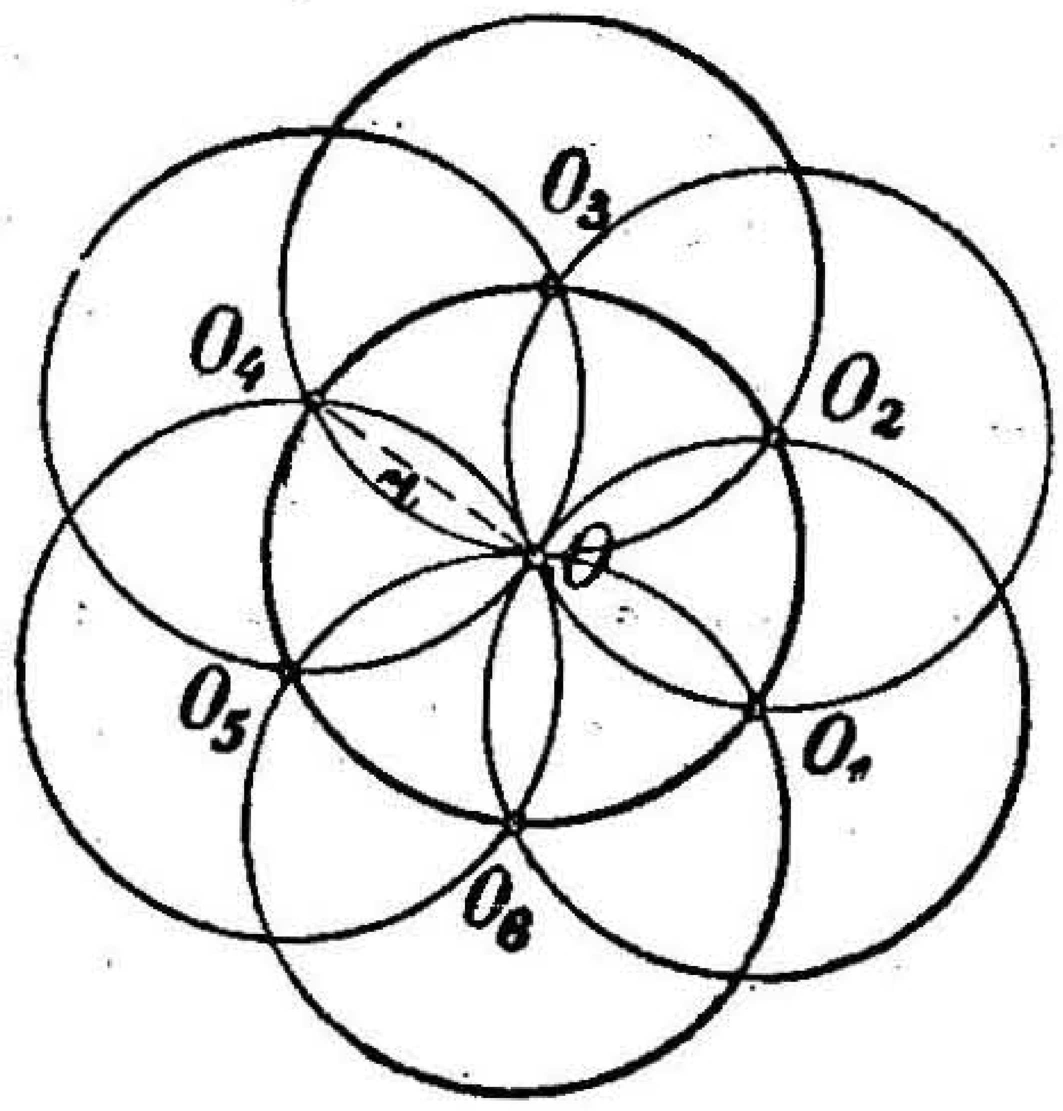
говарају погодби: *да су подједнако удаљене од центра лопте.* Симетрала једне дужи такође је једно геометријско место, пошто ма која тачка те симетрале одговара погодби: *да је подједнако удаљена од крајњих тачака дужи.*

Наћи геометријско место тачака које испуњавају једну исту погодбу, значи наћи ону линију, или ону површину, чије све тачке испуњавају дотичну погодбу. Тако, наћи геометриско место свих тачака које су подједнако удаљене од двеју правих које се секу, значи пронаћи линију чија је свака тачка подједнако удаљена од датих пресечних правих. Та линија је симетрала угла који граде дате праве, јер је свака тачка те симетрале подједнако удаљена од кракова угла, односно од датих правих (теорема 18, § 16).

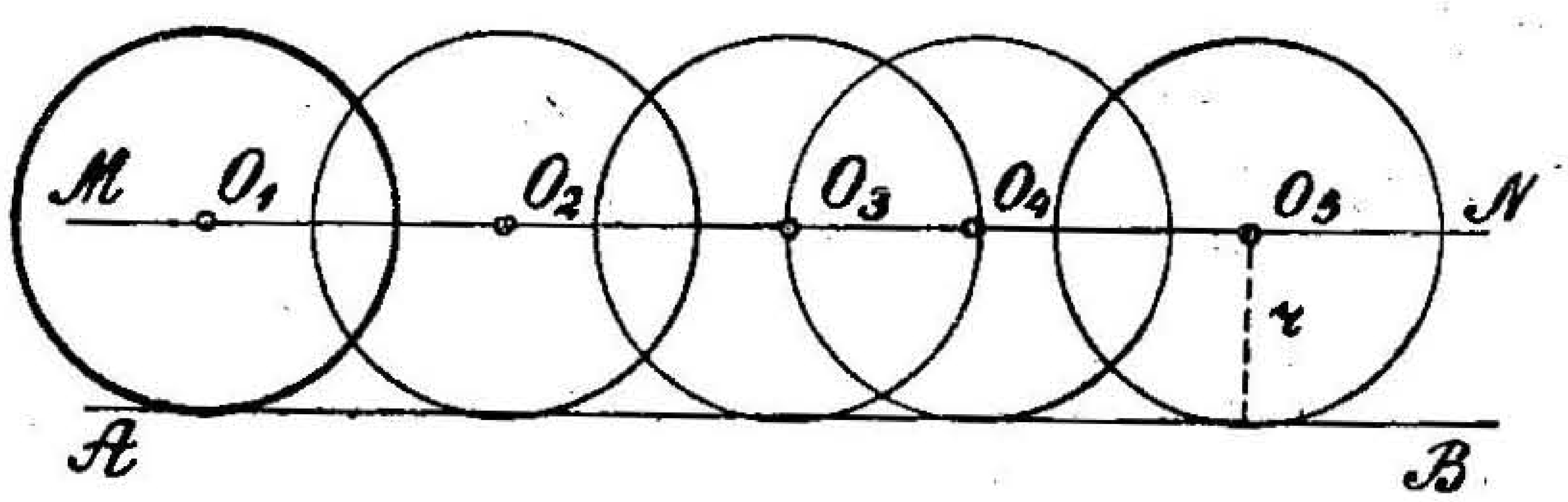
Најзначајнија геометријска места, која имају велику примену при решавању конструктивних задатака, јесу:

1) *Геометриско место свих тачака у равни, удаљених за дуж r од неке дане тачке O, јесте кружна периферија, чији је центар тачка O, а полупречник дата дуж r* (сл. 246);

2) *Геометриско место центара свих кругова истог полупречника r, а који пролазе кроз тачку O, јесте кружна периферија, чији је центар дата тачка O, а полупречник r* (сл. 246);



Сл. 246

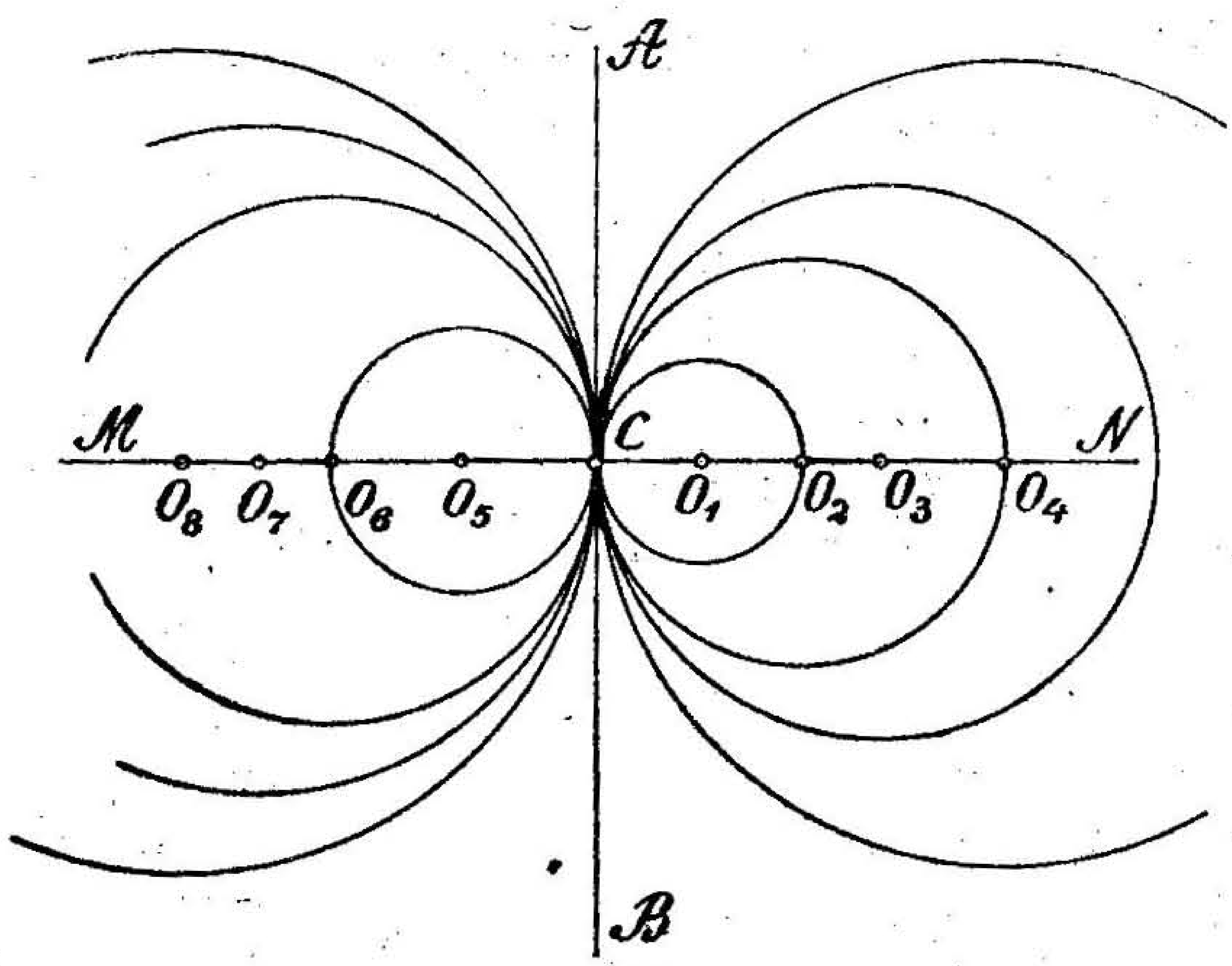


Сл. 247

3) *Геометриско место свих тачака, које су за дуж r удаљене с једне стране неке дане праве, јесте права паралелна с датом правом a на отстојању r (MN на сл. 247);*

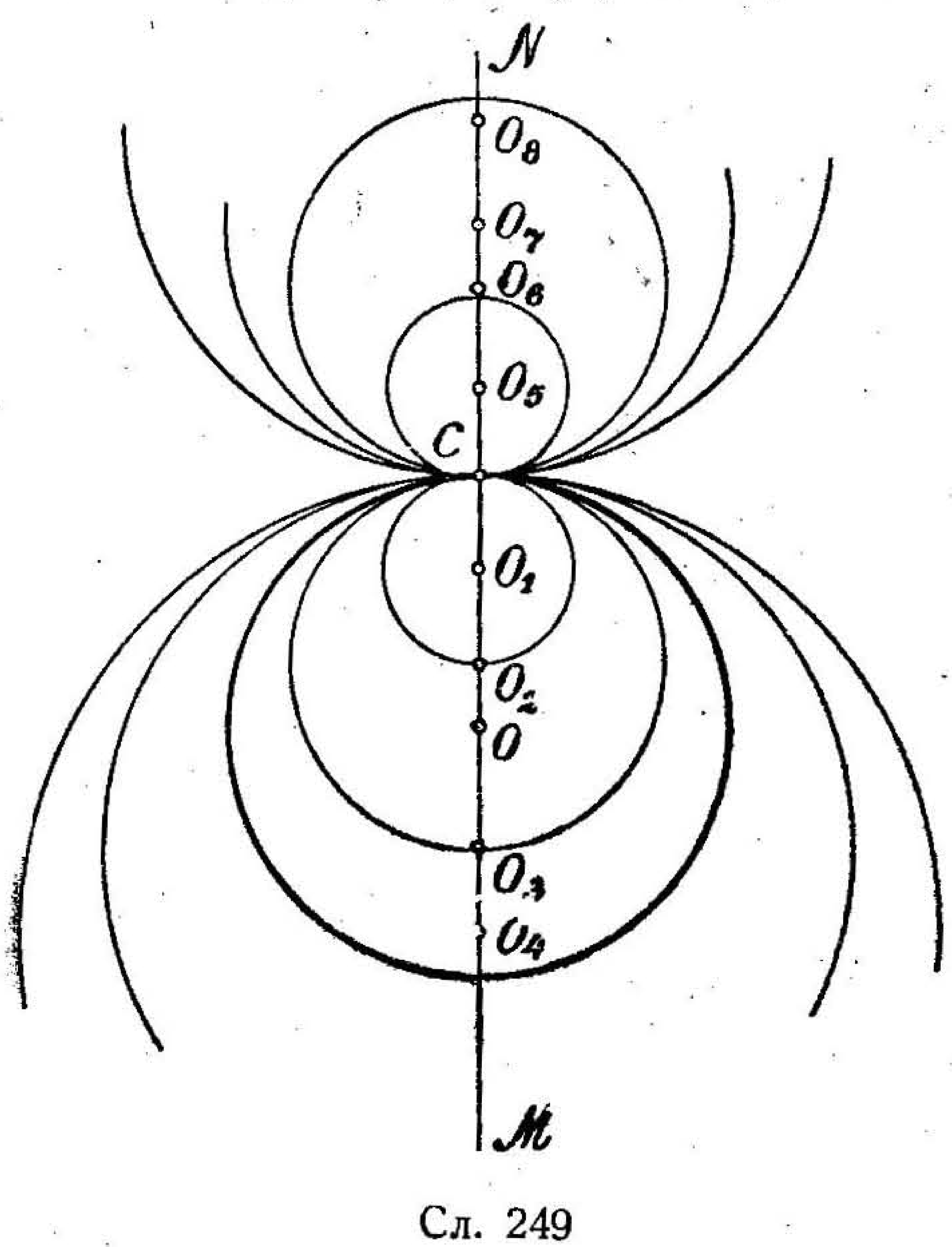
4) *Геометриско место свих центара кругова истог полупречника r, а који с једне стране додирују неку дану праву, јесте права паралелна с датом правом, а на отстојању r (MN, сл 247).*

5) *Геометријско место центара свих кругова, који додирују дану ӣраву у некој њеној даној тачци, јесте права нормална на датој ӣравој у датој тачци (MN, сл. 248);*




Сл. 248

6) *Геометриско место центара свих кругова, који додирују неки дани круг O, споља или изнутра, у некој даној тачци C, јесте права која пролази кроз дату тачку и кроз центар круга (сл. 249);*




Сл. 249

7) *Геометриско место свих тачака ӣодједнако удаљених од двеју датих тачака јесте симетрала дужи која спаја дане тачке (MN, сл. 250);*

8) *Геометриско место центара свих*

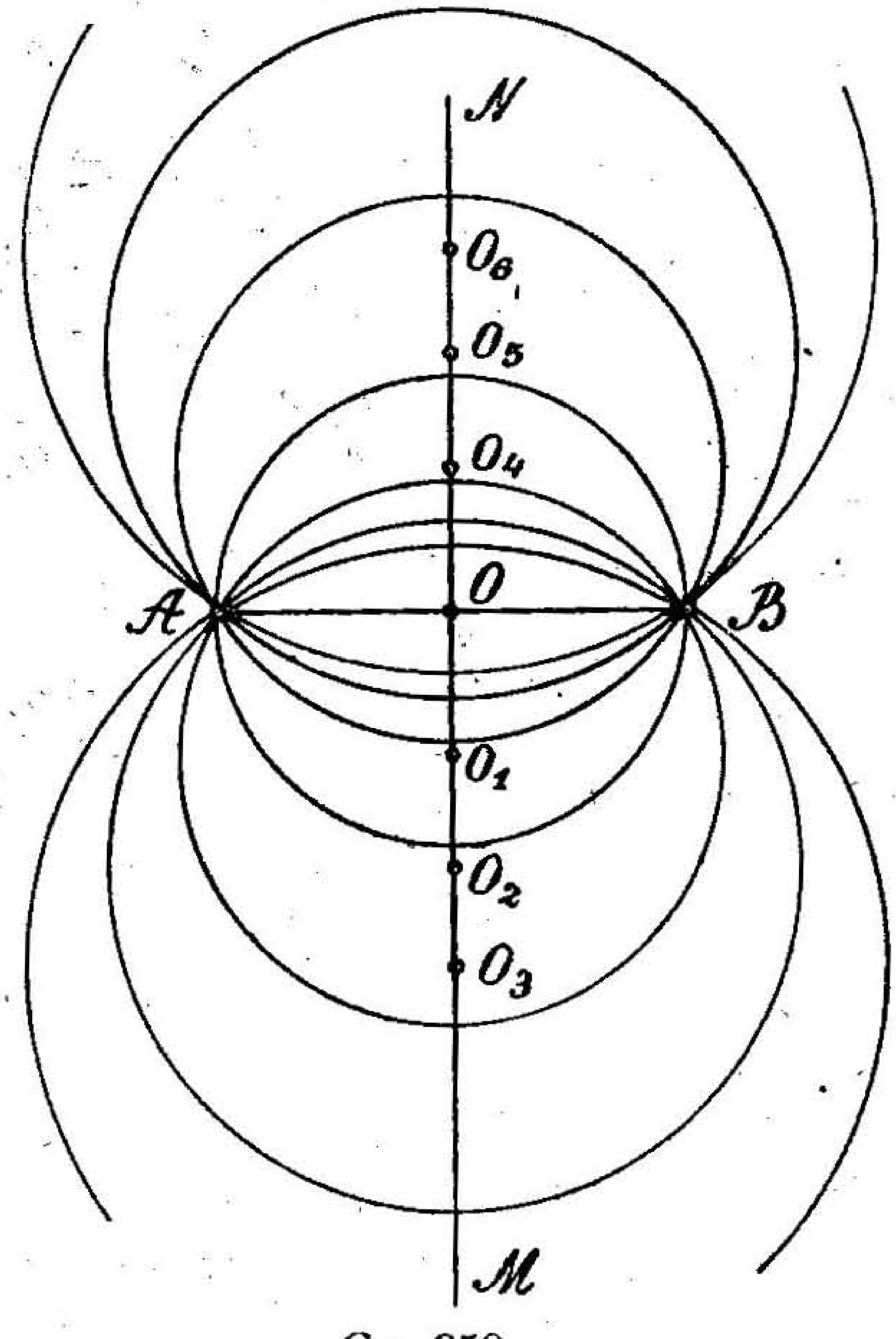
*кругова, који пролазе кроз две дане тачке, јесте симетрала дужи која спаја те две тачке (MN, сл. 250);*

*9) Геометриско место свих тачака једнако удаљених од двеју непаралелних правих у равни јесте симетрала угла који граде дате праве (MN, сл. 251);*

*10) Геометриско место центара свих кругова који додирују две непаралалне праве јесте симетрала угла који граде дате праве (MN, сл. 251);*

*11) Геометриско место центара свих кругова истог полупречника $r_1$, који додирују дани круг полупречника $r$, споља или изнутра, јесте концетричан круг даноме кругу, а описан је збиром полупречника $(r + r')$, или разликом полупречника $(r - r')$ (сл. 252);*

*12) Геометриско место темена правих углова правоуглих троуглова, који имају дану дуж за заједничку хипотенузу, јесте круг описан над датом дужи, као над пречником (сл. 253, 2 последица теореме 66);*

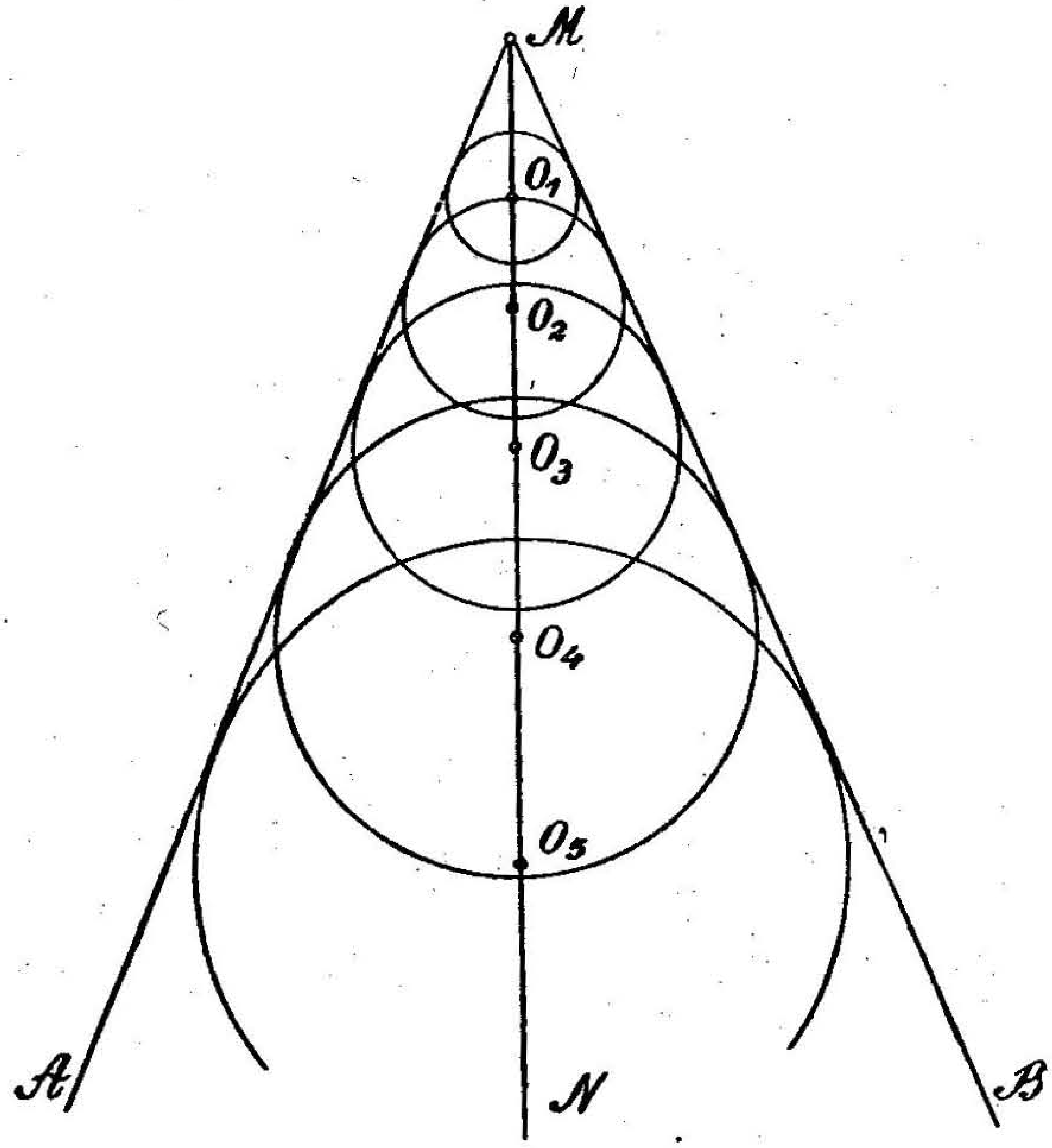



Сл. 250

*13) Геометриско место темена свих троуглова који имају неку дану дуж за заједничку страну, а наспрамни јој углови јесу дате величине α, јесте лук описан над датом дужи, као над тетивом, а чији су перифериски углови над том тетивом величине датог угла α (сл. 254, 4 последица теореме 66);*

*14) Геометриско место центара свих кругова једнаких полупречника, који додирују две паралелне праве, јесте права паралелна с датим правама, а пролази кроз средину отстојања датих правих;*

*15) Геометриско место центара свих кругова једнаких полупречника, који додирују два концентрична круга, јесте круг* *концентричан с датим круговима, а пролази кроз средину дебљине кружног прстена датих кругова;*



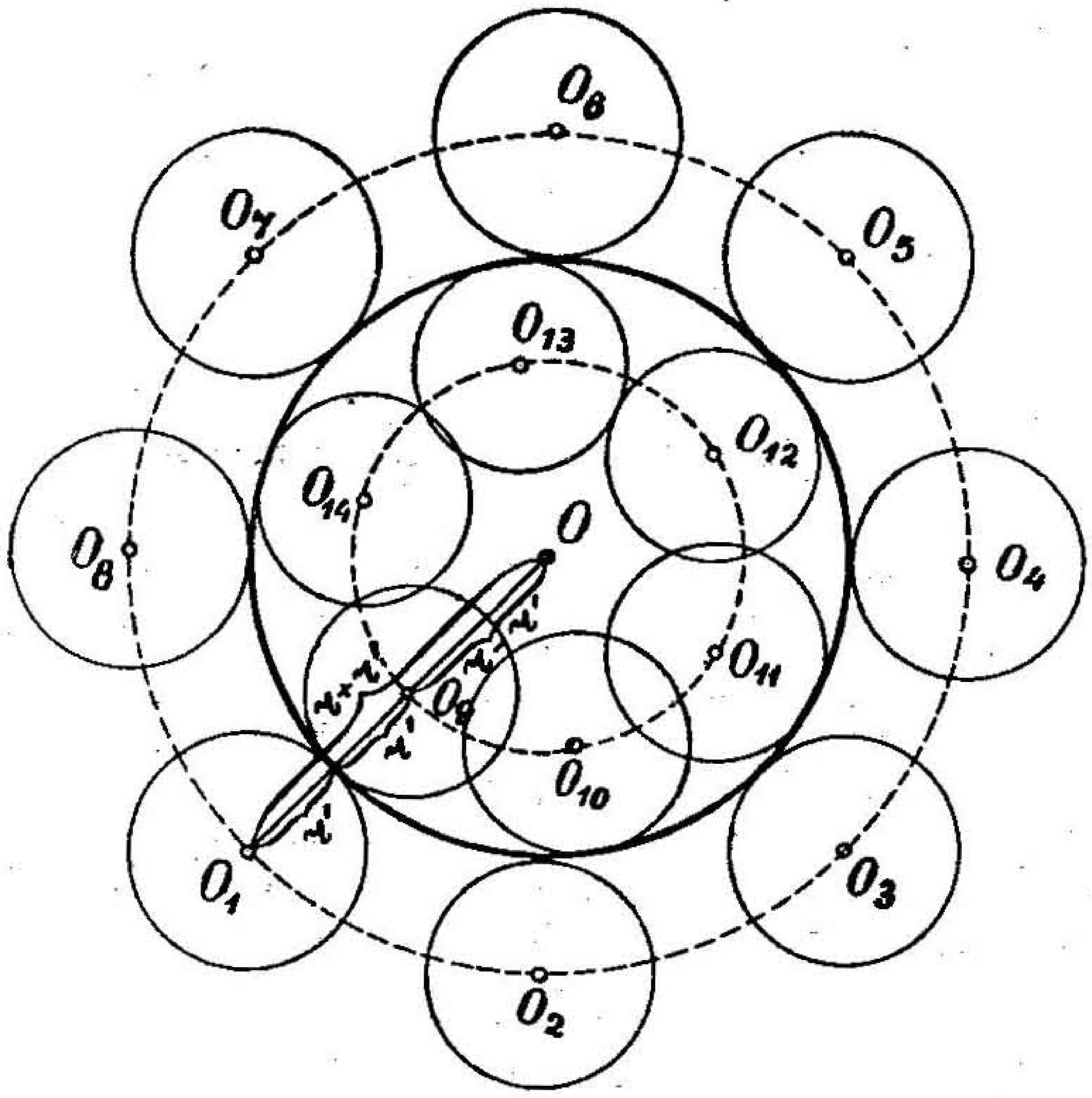

Сл. 251

*16) Геометриско место додирних тачака свих тангената повучених из неке дане тачке ван више концентричних кругова на те кругове, јесте круг описан над централном раздаљином дате тачке, као над пречником (сл. 255, теорема 65).*

*Напомена.* — Посматрањем слике 255 видимо да су тангенте једнога круга, повучене из тачке *A*, сечице за следећи концентрични круг и да је додирна тачка једнога круга средина тетиве коју отсеца следећи круг од сечице, односно од тангенте претходног круга. Стога горње геометриско место можемо сматрати као геометриско место средина̂ свих тетива једног датог круга које он отсеца од сечица повучених из неке дане тачке ван круга или у томе кругу. Конструиши ово геометриско место, када се дата тачка *A* налази: а) ван круга; b) у кругу; и с) на кругу.

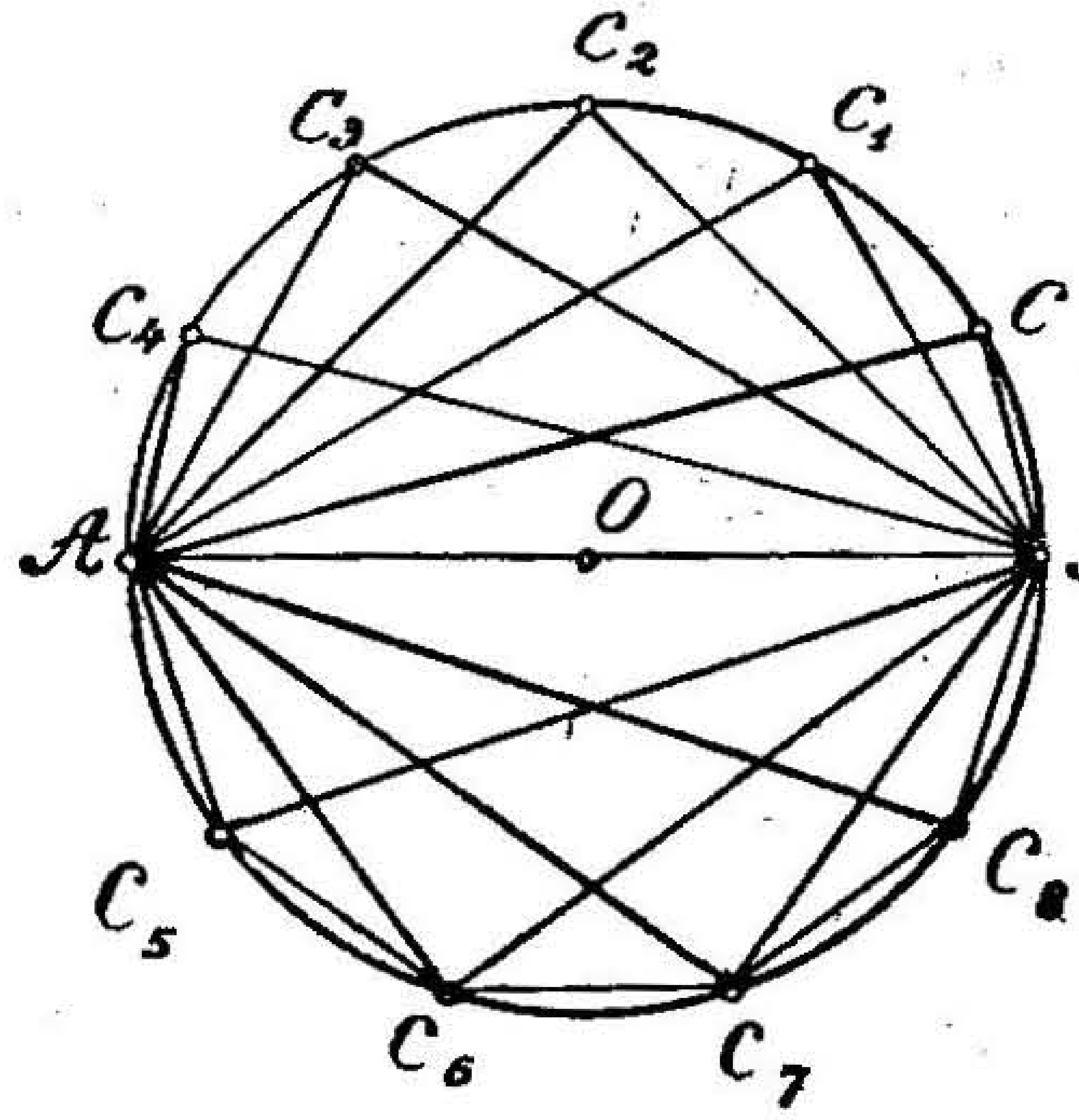
## § 93. — Методе решавања конструктивних задатака

Као што је раније напоменуто, један задатак је *конструктиван,* ако се да решити помоћу шестара и лењира. Да бисмо могли извести решење једнога конструктивног задатка,

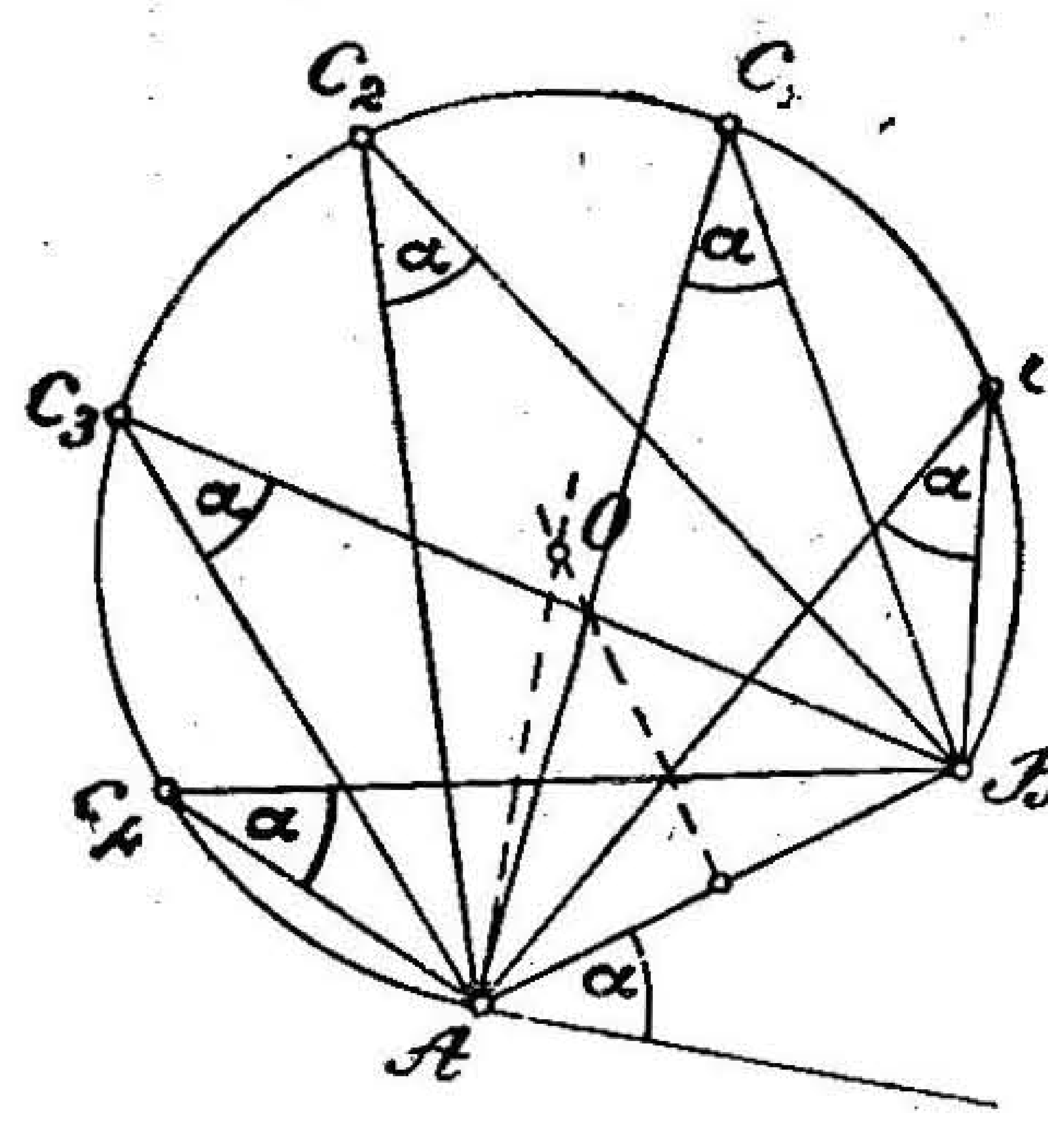



Сл. 252

потребно је не само да се има довољан број елемената и погодаба, већ и добро познавање геометриских теорема и дефиницијâ које излажу особине геометриских облика и везу између њихових елемената.

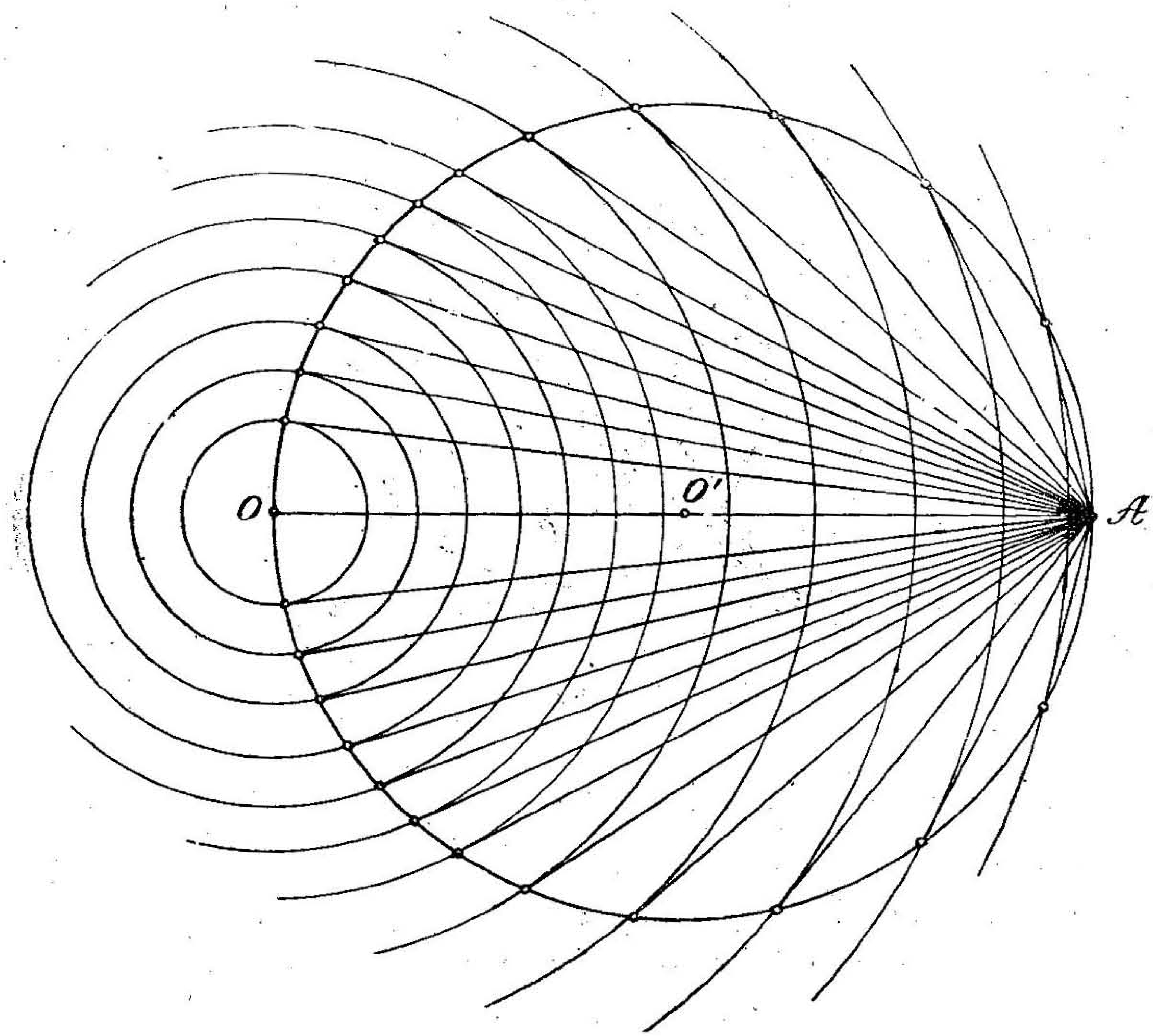



Сл. 253




Сл. 254

Све конструктивне задатке делимо на: *непосредне* или *основне* и *посредне*. Први се решавају непосредно помоћу датих елемената и погодаба, а на основу теорема и особина геометриских слика. Код ових задатака није потребно какво нарочито размишљање, каква нарочита *анализа* о начину




Сл. 255

решавања и проналаска нових помоћних елемената, поред датих, као што смо то видели при њиховом решавању код параграфа: 17, 46, 47, 48, 49 и 69. Посредни задаци јесу сложенији. Код њих нису довољни само дати елементи и погодбе, већ је потребна нарочита анализа, ради проналаска још каквих непознатих елемената, а потребних за решење задатака.

Поступак решавања једног простог задатка састоји се из ова четири дела: *из анализе, конструкције, доказа и детерминације.*

*Анализом* налазимо начин решења задатка овако: најпре претпостављамо да је задатак решен и слободном руком цртамо приближну слику која задовољава дате погодбе, а затим код нацртане слике тражимо везу и зависност која постоји између датих и осталих њених елемената и тиме изналазимо нове помоћне елементе, потребне за решење задатка. При вршењу анализе често нацртану приближну слику делимо на делове, које се посебице могу конструисати.

*Конструкција* изводи се после анализе а помоћу датих и новопронађених помоћних елемената, и то обрнутим путем него што је вршена конструкција привремене слике.

*Доказом* има да се утврди да је конструисана слика тачна и да одговара погодбама изложеним у задатку. При доказивању служимо се познатим теоремама, које се односе на дотичну слику.

*Детерминацијом* испитујемо погодбе под којима је решење могућно и да ли задатак има једно или више решења.

Код многих простијих задатака изостављамо покоји од ова четири дела, а особито доказ и детерминацију, ако су из конструкције јасни и ако се види одређеност задатка. Такви су задаци унети у следећи параграф, а решавају се као и *основни задаци*, пошто је и њихова конструкција лако изводљива и заснива се на особинама слика.

Има више метода којима се служи анализа при решавању задатака, али су најважније ове: *метода геометриских места, метода помоћних слика, метода сличних слика и метода алгебарске анализе.*

## § 94. — Конструктивни задаци који се решавају помоћу особина равних слика.

1) *Конструисати равностран троугао* кад се зна: *a*) његова висина; *b)* полупречник описаног круга; *c*) полупречник уписаног круга.

2) *Конструисати правоугли троугао* кад се знају: *a*) обе катете; *b*) једна катета и хипотенуза; *c*) катета и један оштар угао; *d*) хипотенуза и један оштар угао; *e*) отсечци хипотенузини; *f*) једна катета и њена тежишна линија; *g*) висина и један хипотенузин отсечак; *h*) висина и један оштар угао; *i*) висина и једна катета; *j*) катета и оближњи јој хипотенузин отсечак.

3) *Конструисати ровнокрако-правоугли троугао* кад се зна: *a*) катета: *b*) хипотенуза; *c*) висина; *d*) један отсечак хипотенузин.

4) *Конструисати равнокрак троугао* кад се зна: *a)* основица и угао на врху; *b*) основица и један угао на њој; *c)* основица и њена висина; *d*) основица и висина крака; *e*) крак и један ма који угао; *f*) крак и висина основице; *g*) крак и његова висина; *h*) основичина висина и један ма који угао.

5) *Конструисати разностран троугао* кад се знају: *a*) једна страна и ма која два угла; *b*) две стране и висина једне од тих страна; *c*) једна страна, њена висина и један угао на тој страни; *d*) две стране и висина треће стране; *e*) једна страна, њена тежишна линија и један угао на тој страни; *f*) висина једне стране и ма која два угла; *g*) једна страна, висина друге стране и угао наспрам ове друге стране; *h*) висина и средња линија

једне стране и један угао на тој страни; *i*) две стране и тежишна линија треће стране (Узми двоструку тежишну линију).

6) *Конструисати трапезоид* кад се зна: *a*) три угла и две стране које граде четврти угао(Нађи најпре конструктивним путем четврти угао); *b*) три стране и обе дијагонале; *c*) две суседне стране, обе дијагонале и њихов захваћени угао; *d*) једна страна, један угао на тој страни, обе дијагонале и њихов захваћени угао; *e*) три узастопне стране и два угла на једној од тих страна.

7) *Конструисати квадрат* кад се зна: *a*) страна; *b*) дијагонала.

8) *Конструисати правоугаоник* кад се знају: *a*) једна страна и дијагонала; *b*) једна страна и ма који угао између дијагонала; *c*) дијагонала и угао између дијагонала.

9) *Конструисати ромб* кад се знају: *a*) страна и један угао; *b*) страна и висина; *c*) страна и једна дијагонала; *d*) обе дијагонале; *e*) једна дијагонала и висина повучена из једнога од темена која спаја позната дијагонала; *f*) једна дијагонала и наспрамни јој угао; *g*) једна дијагонала и један од углова чија темена спаја.

10) *Конструисати ромбоид* кад се знају: *a*) две суседне стране и дијагонала; *b*) основица, њена висина и једна дијагонала; *c*) две стране и висина једне од тих страна; *d*) једна страна и обе висине; *e*) висина и обе дијагонале.

11) *Конструисати равнокрак трапез* кад се знају: *a*) обе паралелне стране и крак; *b*) обе паралелне стране и висина; *c*) једна од паралелних страна, један угао и висина; *d*) крак, дијагонала и висина: *e*) једна паралелна страна крак и дијагонала; *f*) једна паралелна страна, крак и висина.

12) *Конструисати трапез* кад се знају: *a*) доња паралелна страна, један угао на њој и обе непаралелне стране; *b*) разлика паралелних страна, обе непаралелне стране и једна дијагонала; *c*) једна паралелна страна, висина и обе дијагонале; *d*) три стране и висина; *e*) једна паралелна страна, оба угла на њој и једна дијагонала; *f*) обе паралелне стране, једна непаралелна страна и једна дијагонала; *g*) обе непаралелне стране, једна дијагонала и висина.

13) *Конструисати делтоид* кад су познате обе дијагонале и једна страна.

14) Конструисати полигон подударан датом полигону.

15) Конструисати полигон од $n$ страна кад су познате $n$-2 узастопне стране и $n$-1 угао на тим странама.

16) На дани круг повуци две дирке, које граде код свог пресека дани угао $\alpha$ (Нацртај најпре централни угао $180^0 - \alpha$).

17) Ван једнога круга одредити тачку, да тангенте из те тачке граде с додирном тетивом равностран троугао (Види решење 16 задатка).

18) У даном кругу повуци тетиву дате дужине $a$, која је паралелна с неком датом правом.

19) Дат је круг $O$ и права $MN$ ван круга; да се на правој нађе тачка тако да су дирке повучене из те тачке кругу прописане дужине $m$. (У ма којој тачци кружне периферије нацртај најпре дирку дужине $m$ и спој крајњу тачку са центром. Овим отстојањем нацртај концетричан круг датом кругу. Пресеци овога круга са датом правом јесу тражене тачке).

20) У даноме кругу уписати троугао кад се зна: a) једна страна и један угао на њој; b) два угла $\alpha$ и $\beta$ (Конструиши најпре централни угао $2\alpha$ и тетиву овога угла, чиме се задатак своди на задатак под a); c) две стране; *d*) једна страна и њена средња линија.

21) Око даног круга описати троугао кад се зна: два угла $\alpha$ и $\beta$ (Конструиши најпре централни угао $180^0 - \alpha$, а затим тангенте у крајњим тачкама полупречника); b) једна страна и један угао на њој.

22) Конструисати тетивни четвороугао кад се зна, поред полупречника круга *r*, још: a) једна страна и два налегла угла; b) две супротне стране и један угао; c) три стране.

23) Конструисати тангентан четвороугао кад се зна, поред полупречника круга *r*, још: a) две суседне стране са захваћеним углом $\alpha$ (Нацртај најпре централни угао $180^0 - \alpha$, па конструиши тангенте у крајњим тачкама полупречника); b) једна страна, један угао на њој и други угао код једне њене суседне стране.

24) Конструисати троугао кад су дате дужине средњих линија. (Ако су $AM$, $BN$ и $CP$ средње линије $\triangle\ ABC$, а тежиште $Q$, онда повлачењем из $M$ паралелне са $CP$ до пресека са $QB$ (нека је пресек $E$), добија се $\triangle\ QME$, чије су стране трећине датих средњих линија и који се може према томе конструисати. Тада је $AQ = 2QM$, $BE = QE$ и $BM = MC$).

25) Конструисати троугао кад су дате средине двеју страна и тежиште.

26) Дата је једна права и две тачке ван ње; наћи на правој тачку која, повезана са датим тачкама, даје дужи које граде са датом правом једнаке углове (Спусти из једне дате тачке на праву нормалу, продужи је за њену дужину и вежи њену крајњу тачку са другом датом тачком. Пресек ове спојне дужи са датом правом је тражена тачка).

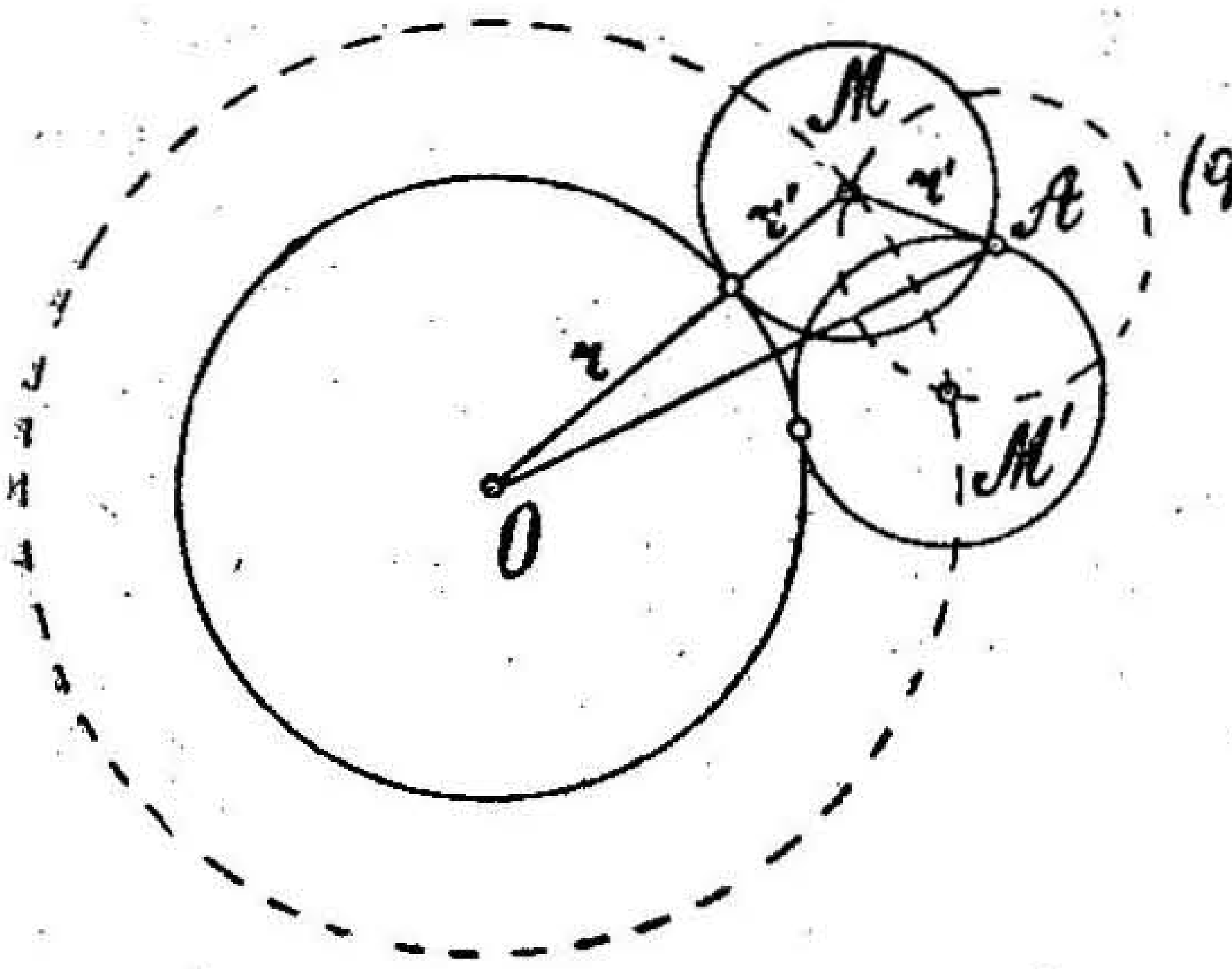
27) Дат је један угао и једна тачка у углу; кроз ову тачку повуци дуж између кракова угла, а која ће бити датом тачком преполовљена (Кроз дату тачку повуци паралелну с једним краком даног угла, пренеси добивени отсечак другог крака на исти крак, али с друге стране паралелне праве и вежи крајњу тачку пренетог отсечка с датом тачком у углу).

**§ 95. — Метода геометриских места.** — Ова се метода примењује код оних задатака чије решење зависи од проналаска једне или више тачака. Те тачке налазимо помоћу погодаба у задатку као пресеке двају геометриских места, конструисаних према датим погодбама. Поступак решавања састоји се у овоме: *најпре треба помоћу једне погодбе да конструишемо геометриско место чије тачке задовољавају ту погодбу, а затим помоћу друге погодбе задатка треба да конструишемо друго геометриско место, чије тачке задовољавају другу погодбу. Тада пресеци конструисаних геометриских места задовољавају и прву и другу погодбу, пошто се налазе на оба геометриска места, и те пресеке узимамо за тражене тачке, од којих зависи даље решење задатка.*

Ако добијемо два пресека конструисаних геометриских места, значи да задатак има два решења; ако добијемо само један пресек, задатак има само једно решење; ако се, најзад, геометриска места не секу, значи да дати елементи задатака или не задовољавају какву геометриску истину (теорему), или су такве величине да конструисана геометриска места не могу имати заједничких тачака.

**а) Решени примери:**

1) *Даним полупречником описати круг, који додирује дани круг и пролази кроз дану тачку ван круга.*




Сл. 256

*Анализа.* — Нека је $r'$ полупречник траженог круга, а $M$ његов центар. Како се захтева да он додирује круг $O$, чији је полупречник $r$, и да пролази кроз тачку $A$ (сл. 256), значи да његов центар $M$, од чијег проналаска зависи решење задатка, треба да буде удаљен и од периферије круга $O$ и од тачке $A$ за $r'$. Па како се центри свих кругова полупречника $r'$, који додирују неки дани круг споља, налазе на концентричном кругу описаном збиром полупречника (11 геометриско место, § 92), то се тражени центар $M$ налази на периферији круга чији је центар $O$, а полупречник $r + r'$ (круг $p$). Тако исто, центри свих кругова полупречника $r'$, који пролазе кроз дату тачку $A$, јесте кружна периферија полупречника $r'$, а чији је центар дата тачка $A$ (2 геометриско место, § 92). Стога се тражени центар налази и на периферији круга чији је центар дата тачка $A$, а полупречник $r'$ (круг $q$). Према томе пресек геометриских места (p) и (q) биће центар траженог круга.

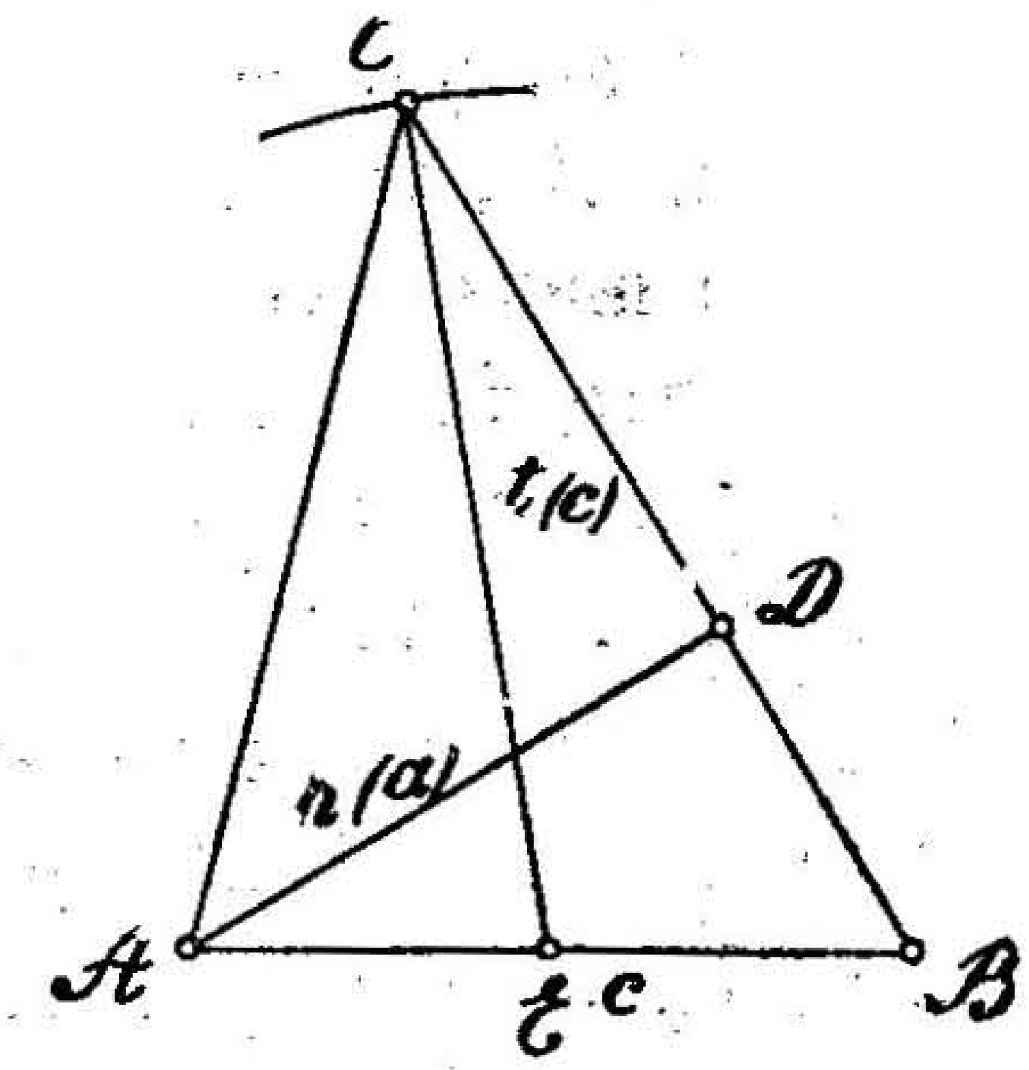
*Конструкција.* — Треба полупречником $r + r'$ конструисати концентричан круг датоме кругу, а затим полупречником $r'$ описати око $A$ други круг. Пресек $M$ ових кругова биће центар траженог круга.

*Доказ.* — Јасан је из анализе и конструкције.

*Детерминација.* — Задатак ће имати: два решења, ако се геометриска места (p) и (q) секу, као што је случај на сл. 256; једно решење, ако се ова геометриска места додируjу; и најзад, ни једно, ако геометриска места немају ни једне заједничке тачке, који случај наступа, ако је дати полупречник $r' < \frac{OA - r}{2}$.

2) *Конструисати троугао, кад се зна једна страна, њена средња линија и висина друге њене стране.*

*Анализа.* — Нека је тражени троугао $ABC$ (сл. 257), код кога знамо $c$, $t_{(c)}$ и $h_{(a)}$. Правоугли троугао $ABD$ дâ се лако коструисати, пошто му знамо хипотенузу $c$ и катету $h_{(a)}$. Остаје да одредимо још теме $C$ траженог троугла, од чијег проналаска зависи решење задатка. Па како је ово теме удаљено од средине $E$ стране $c$ за $t_{(c)}$, то се оно налази на геометриском месту чије су тачке удаљене од $E$ за $t_{(c)}$ (1 геом. место, § 92). А како се теме $C$ налази и на $BC$, то је тражено теме $C$ пресек стране $BC$ и круга описаног из $E$ полупречником $t_{(c)}$.



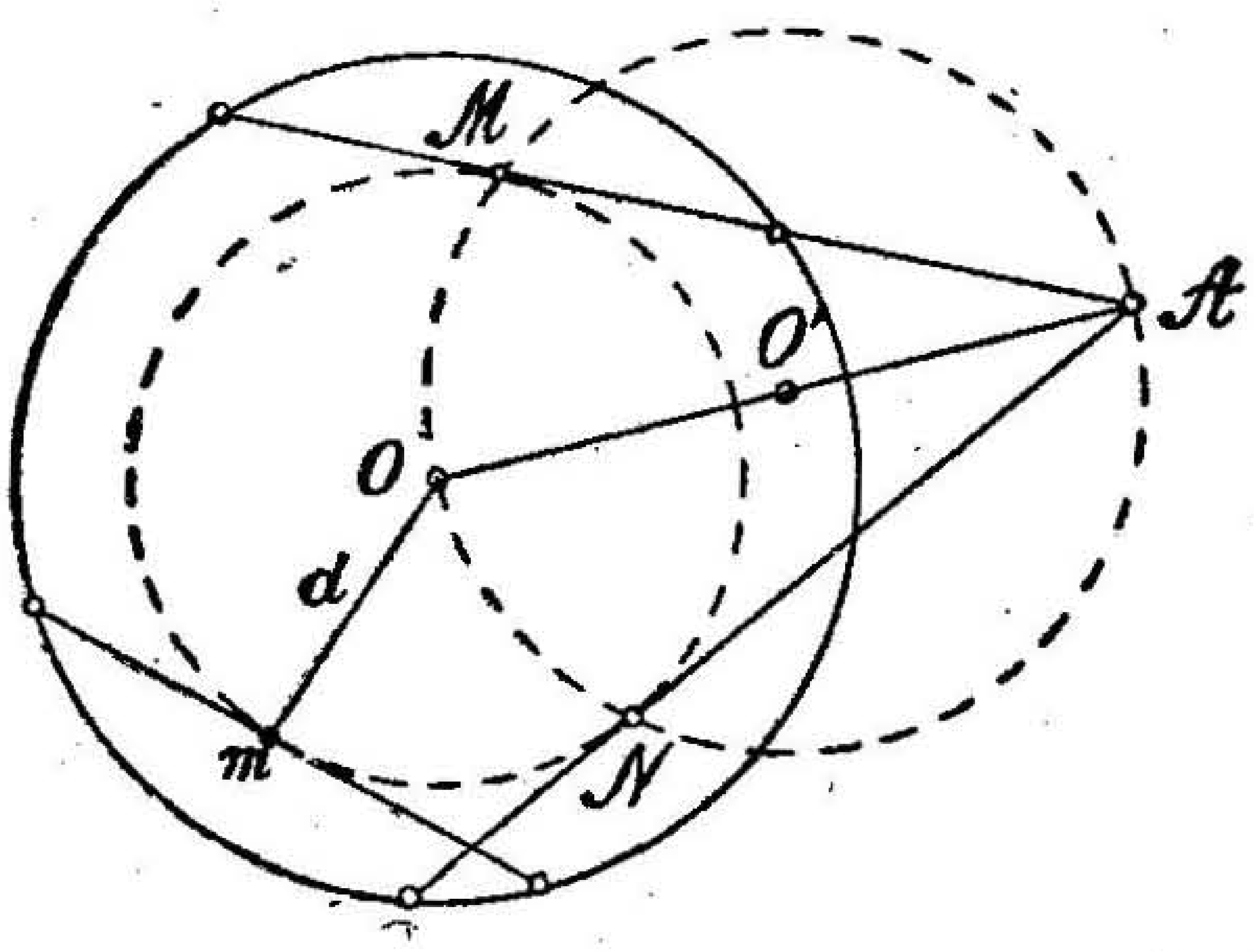
Сл. 257

*Конструкција.* — Треба најпре помоћу $c$ и $h_{(a)}$ конструисати $\triangle$ $ABD$, а затим из средине стране $AB$ описати полупречником $t_{(c)}$ лук који сече продужену страну $BD$ у трећем темену $C$ траженог троугла.

*Доказ и детерминација.* — Јасни су из анализе и конструкције.

3) *Из дане тачке повући датом кругу такву сечицу да је њена тетива дате дужине $m$.*

*Анализа.* — Нека је дата тачка $A$, круг $O$, и тетива дужине $m$ (сл. 258). Па како је геометриско место средина свих једнаких тетива некога круга, њему концентричан круг описан централном раздаљином једне тетиве, то су средине свих тетива $m$ датог круга $O$ на концентричном кругу полупречника $d$. Према напомени код 16 геометриског места (§ 92), средине



Сл. 258

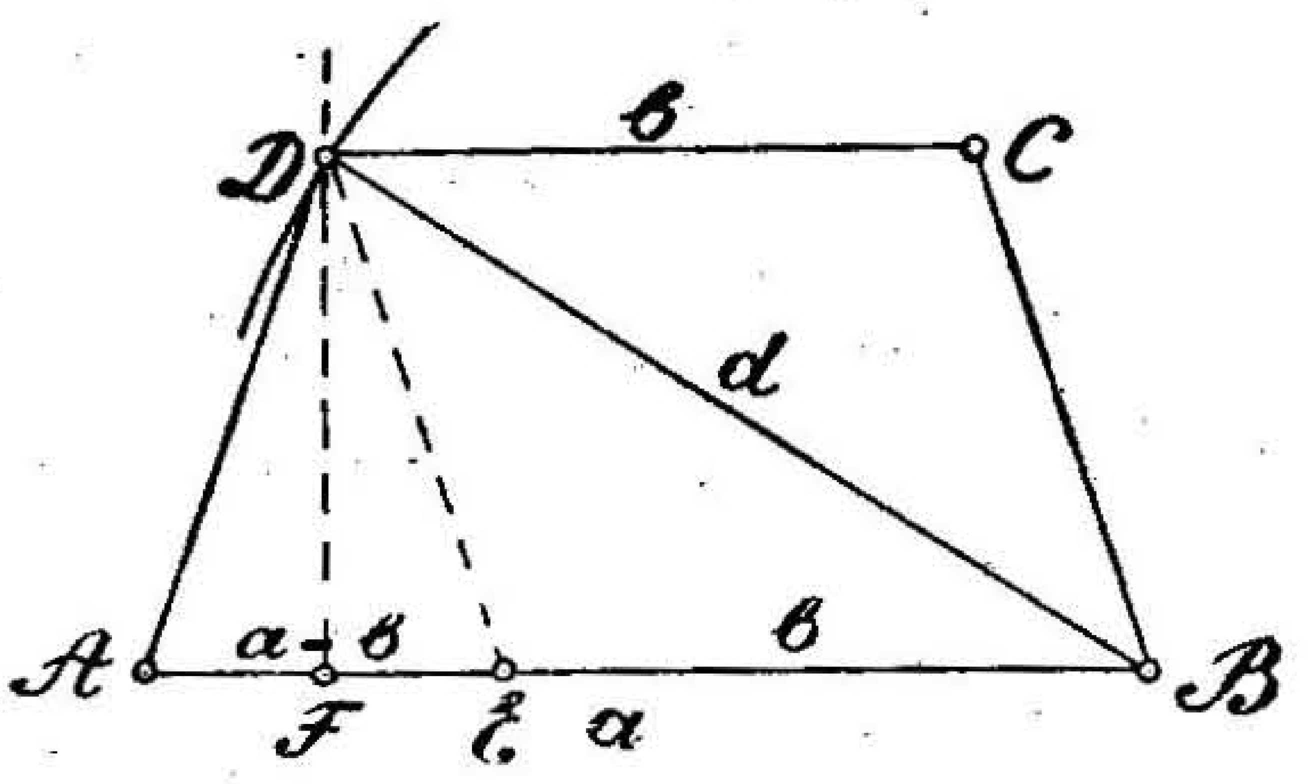
свију тетива $m$ налазе се и на кругу $O'$ описаном над $OA$ као над пречником. Према томе пресеци ових геометриских места $M$ и $N$ задовољавају обе погодбе задатка, а ма који од ових пресека је потребан за решење задатка.

*Конструкција.* — Треба најпре код датога круга $O$ пренети дану тетиву $m$, а затим, централном раздаљином ове тетиве конструисати концентричан круг. Најзад треба конструисати круг над $OA$ као над пречником и повући из $A$ сечице које пролазе кроз пресечне тачке $M$ и $N$.

*Детерминација.* — Задатак има два решења све дотле док се тачка $A$ налази ван концентричног круга датог круга $O$, тј. док је њена централна раздаљина већа од централне раздаљине дате тетиве $m$; једно решење, ако су обе централне раздаљине једнаке, а ни једно решење, ако је централна раздаљина тачке $A$ мања од централне раздаљине тетиве $m$.

4) *Конструисати равнокрак трапез, кад су дате обе паралелне стране $a$ и $b$ и дијагонала $d$.*

*Анализа.* — Нека је $ABCD$ (сл. 259) тражени трапез. Његова темена $A$ и $B$ јесу позната, јер је $a = AB$. Повлачењем из темена $D$ паралелне са $CB$, добијамо равнокрак троугао $AED$ и паралелограм $DCBE$. Даље решење задатка једино зависи од проналаска темена $D$. Међутим ово теме је пресек симетрале дужи $AE = a - b$ и круга описаног из $B$ полупречником $d$ (7 и 1 геометриско место, § 92).



Сл. 259

*Конструкција.* — Треба на знак $AX$ најпре пренети доњу паралелну страну $a = AB$, а из $B$ пренети на $a$ горњу паралелну страну $b = BE$, затим конструисати симетралу дужи $AE = a - b$ и описати лук из $B$ полупречником $d$, који сече симетралу у $D$. Најзад из $D$ повлачимо $DC \parallel AB$ и преносимо $b = DC$. Тиме добијамо и четврто теме $C$ траженог трапеза.

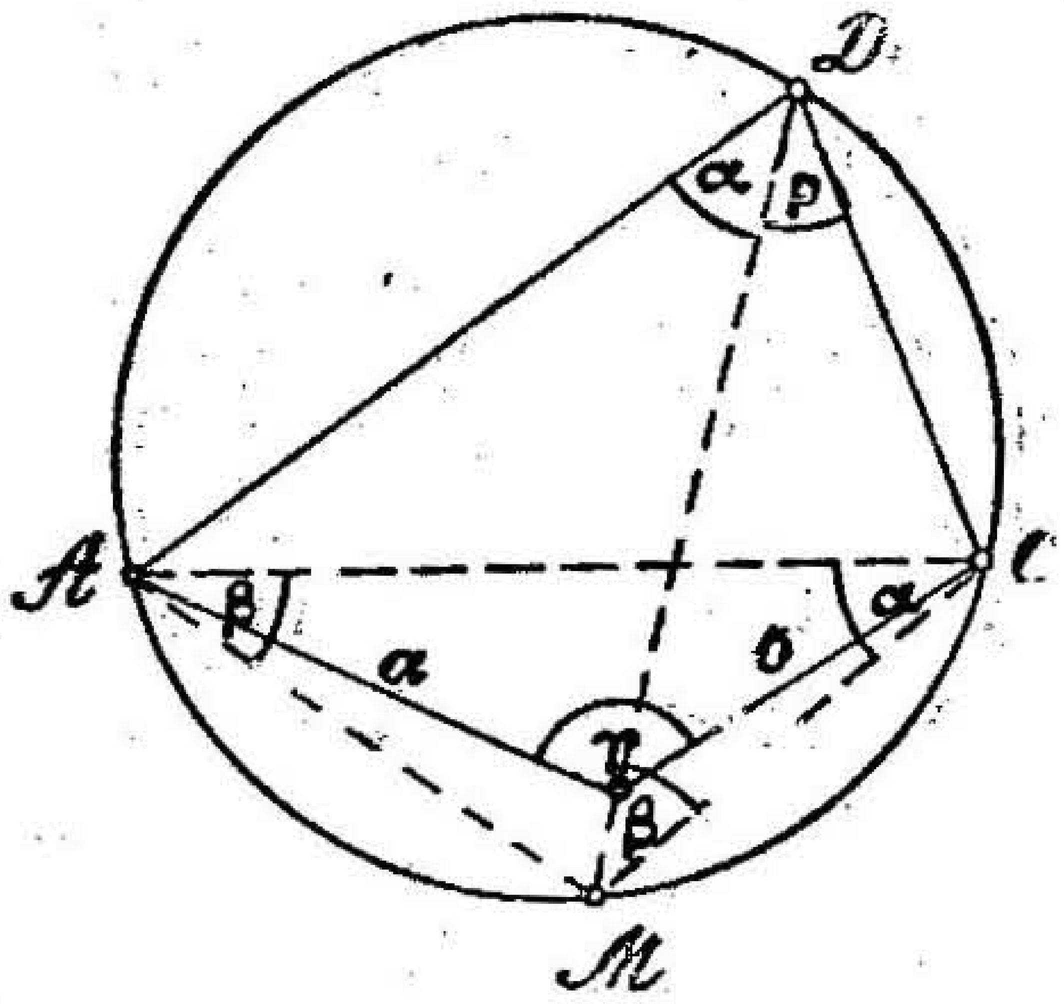
*Доказ.* — Из анализе и конструкције је јасно да је $AD = DE = CB$, тј. да је $ABCD$ равнокрак трапез.

*Детерминација.* — Задатак би био немогућан само онда ако је $d < BF$.

5) *Конструисати четвороугао, кад се знају: две суседне*

*стране $a$ и $b$, угао између њих $\gamma$, и углови $\alpha$ и $\beta$ које гради дијагонала из темена угла $\gamma$ са другим непознатим странама четвороугла (Патенотов задатак).*

*Анализа.* — Нека је тражени четвороугао $ABCD$ (сл. 260), коме знамо: $a, b, \gamma, \alpha$ и $\beta$. Помоћу $a$, $b$ и $\gamma$ даје се конструисати $\triangle\ ABC$. Тачка $M$ на кружној линији одређује се или преношењем $\sphericalangle\beta$ код $A$, или преношењем $\sphericalangle\alpha$ код $C$, пошто је $\sphericalangle\beta = \sphericalangle CAM$ и $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle ACM$, као перифериски углови над истим луком. Решење задатка, дакле, једино зависи од проналаска четвртог темена $D$. Међутим, ова тачка је пресек круга и тетиве која пролази кроз $M$ и $B$.

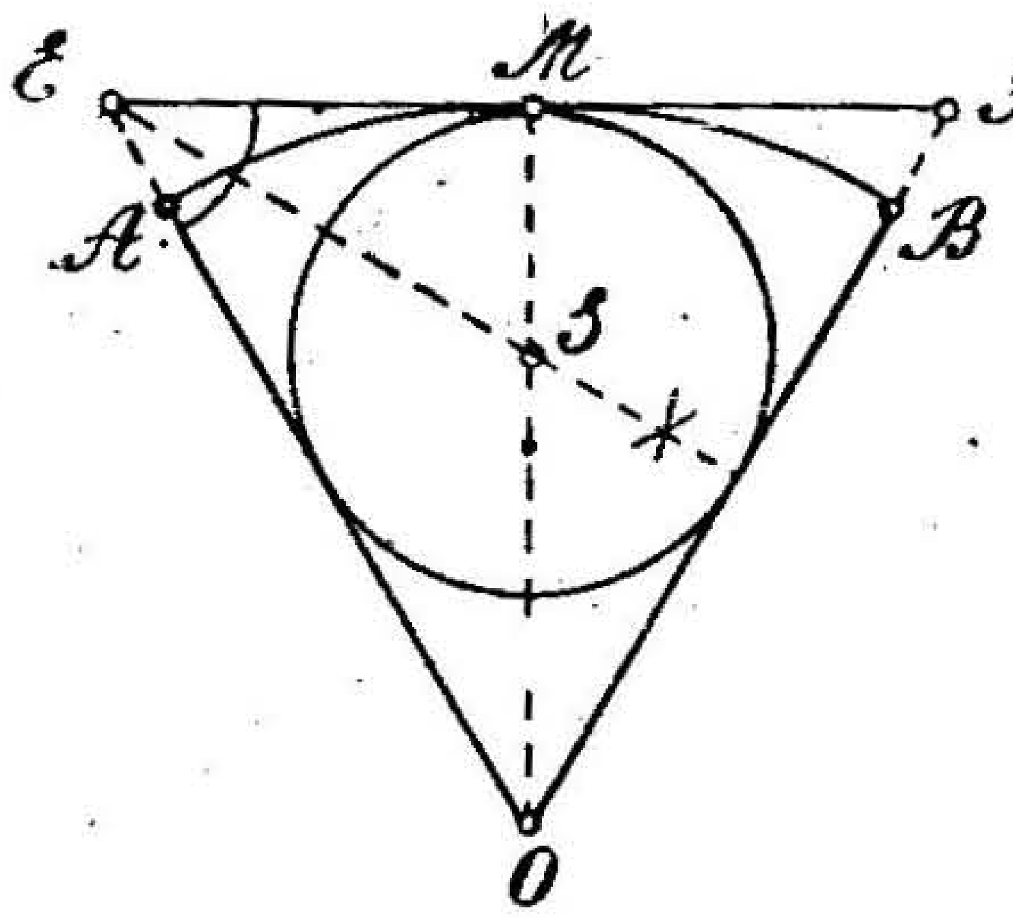


Сл. 260

*Конструкција и доказ* јасни су из анализе.

*Детерминација.* — Задатак постаје неодређен када је четвороугао $ABCD$ тетиван, тј. када је $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

6) *У кружном сектору уписати круг који додирује његове полупречнике и лук.* — *Анализа.* — Нека је дати сектор $OAB$ (сл. 261). Центар $S$ уписаног круга налази се на симетрали $OM$ његовог централног угла (10 геом. место, § 92). Па како се тражени круг $S$ и дати $O$ додирују изнутра, значи да се њихова заједничка тачка $M$ налази на продужењу њихове централне раздаљине $OS$. Стога је тачка $M$ средина лука $AB$. Та тачка је средина и основице $EF$ равнокраког троугла $OEF$ добивеног повлачењем дирке кроз $M$, а чије стране додирују тражени круг $S$. Стога је центар овога круга пресек симетрала̄ углова троугла $OEF$. Центар $S$ траженог круга, дакле, је пресек симетрале централног угла код $O$ и симетрале угла код $E$, или угла код $F$. Конструкција је јасна из анализе.



Сл. 261

**b) Примери за вежбу:**

1) *Конструисати правоугли троугао* кад се зна: *a*) катета и полу-

пречник описаног круга; *b*) катета и полупречник уписаног круга; *c*) хипотенуза и полупречник уписаног круга; *d*) хипотенуза и њена висина.

2) *Конструисати равнокрак троугао* кад се зна: *a*) један угао и полупречник уписаног круга; *b*) један угао и полупречник описаног круга; *c*) основичина висина и полупречник уписаног круга; *d*) висина крака и ма који угао.

3) *Конструисати троугао* кад се зна: *a*) једна страна, њена висина и њена средња линија; *b*) две стране и тежишна линија једне од тих страна; *c*) један угао и висине које одговарају странама тога угла; *d*) једна страна, њена висина и висина друге које стране; *e*) једна страна и висине других двеју страна; *f*) висина и средња линија једне стране и полупречник описаног круга; *g*) висина једне стране, један угао на тој страни и полупречник описаног круга.

4) *Даним полупречником описати круг*: *a*) који ће додиривати дану праву у даној тачки; *b*) који ће додиривати дану праву и пролазити кроз дану тачку ван ње; *c*) који ће пролазити кроз две дане тачке; *d*) који ће додиривати две непаралелне праве; *e*) који додирује дану праву и дани круг; *f*) који додирује дани круг у даној тачки; *g*) који додирује једну праву и од друге праве отсеца тетиву дужине *s*.

5) *Описати круг који*: *a*) додирује две паралелне праве и пролази кроз дану тачку између тих правих; *b*) додирује две праве, и то једну од њих у даној тачки; *c*) додирује три дане праве од којих су две паралелне; *d*) додирује дану праву и дани круг у једној његовој даној тачци; *e*) додирује дану праву у даној тачци и пролази кроз дану тачку ван праве; *f*) додирује дани круг у даној тачци и пролази кроз дану тачку ван круга; *g*) додирује три дана круга једнаких полупречника (центар овога круга идентичан је са центром круга описаног око троугла чије су стране централне раздаљине датих кругова); *h*) додирује дану праву и пролази кроз две дане тачке ван праве једнако удаљене од те праве; *i*) додирује две праве које се секу, а тетива између додирних тачака је дате дужине *s*; *j*) додирује две паралелне праве и дани круг између ових правих; *k*) додирује дану праву у једној тачци и додирује дани круг.

6) Дате су две тачке *A* и *B*. Повуци две праве кроз *A* које су удаљене од *B* за *r*.

7) Дата је тачка *A* ван дате праве *MN*; конструиши праву паралелну са *MN*, а да је удаљена од тачке *A* за *r*.

8) У даноме кругу уписати троугао, кад се зна: а) једна страна и њена висина; b) једна страна и висина друге стране.

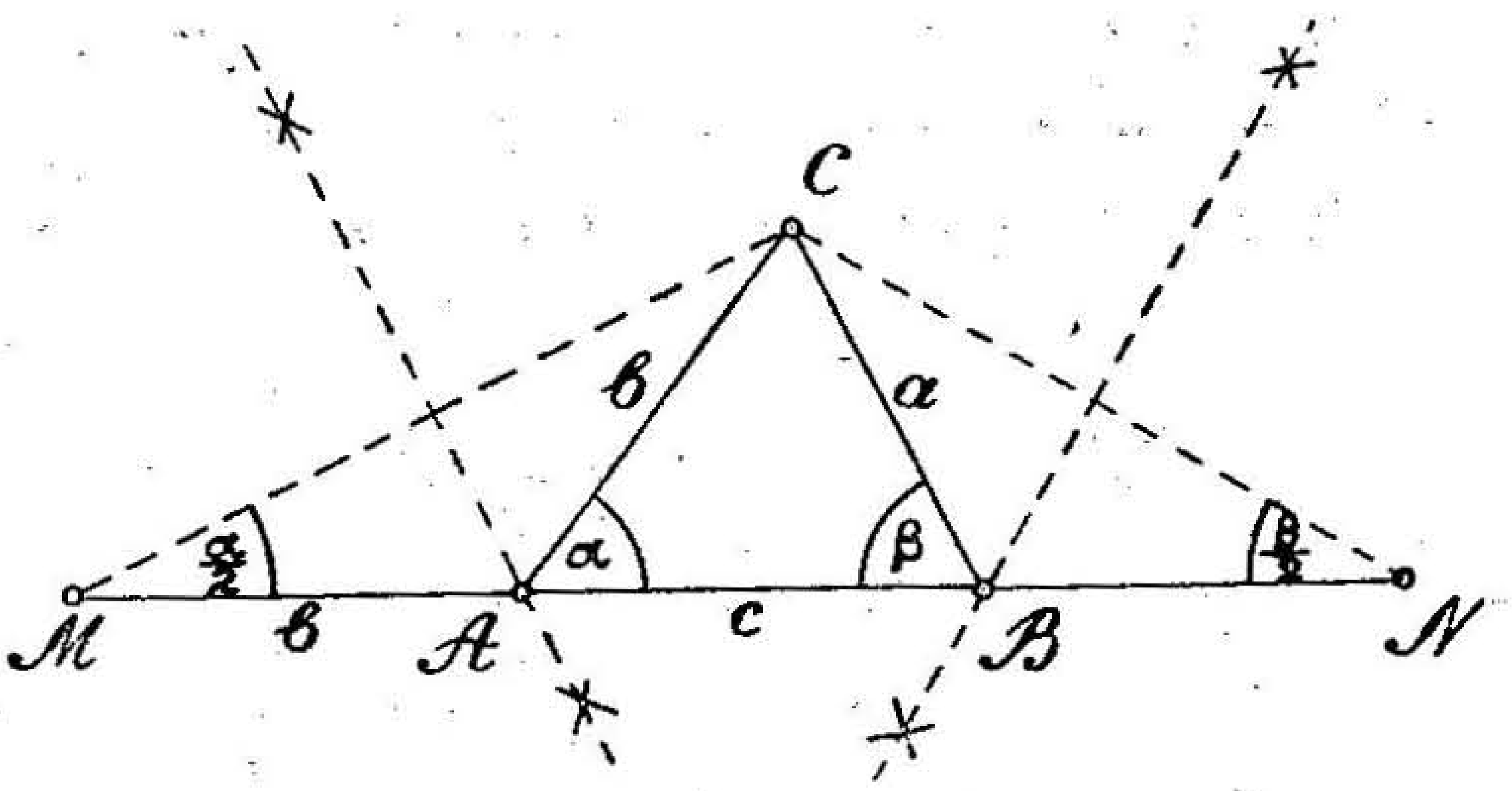
9) Око даног круга описати троугао, кад се зна једна страна и висина која одговара другој којој страни.

10) У кружном квадранту уписати круг који ће додиривати оба полупречника и квадрантов лук.

**§ 96. — Метода помоћних слика.** — Ова се метода састоји у томе што се помоћу свих или једног дела датих елемената у задатку, дâ конструисати једна *помоћна слика*. Ову слику испитујемо и налазимо везу између њених елемената и елемената тражене слике. Та веза даје нам потребно упутство за даљу конструкцију тражене слике. Ова се метода највише употребљава при решавању конструктивних задатака у којима су подаци комбиновани, тј. у којима су дати збирови или разлике страна једне слике, збирови или разлике углова те слике, размера страна или углова итд.

**а) Решени примери:**

1) *Конструисати троугао кад се зна његов обим и два угла.* — *Анализа.* — Нека је тражени троугао $ABC$ (сл. 262), чији је обим $s$, а познати углови $\alpha$ и $\beta$. Ако његову страну $c$ продужимо и с једне и с друге стране, и на продужену пренесемо $AM = b$ и $BN = a$, па добивене тачке $M$ и $N$ спојимо са теменом $C$, онда добијамо троугао $MNC$, који ће бити помоћна слика,




Сл. 262

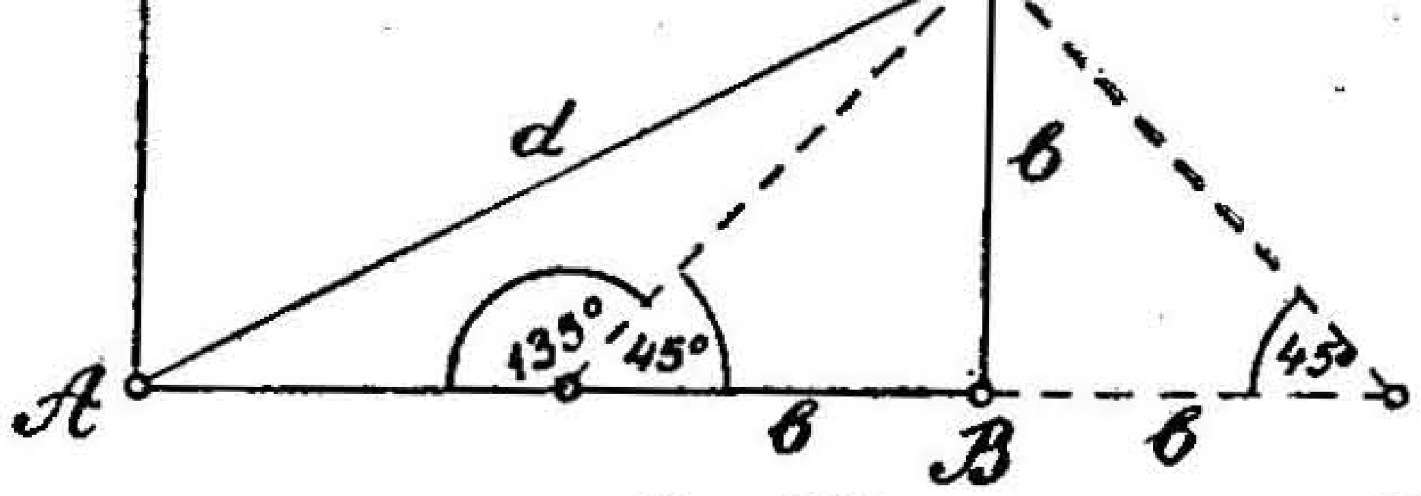
пошто се дâ конструисати помоћу датих елемената. У њему је основица $MN$ једнака познатом обиму троугла, а $\sphericalangle M = \frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle N = \frac{\beta}{2}$, јер су троуглови $MAC$ и $NBC$ равнокраки. Конструкцијом овог помоћног троугла, налазимо и теме $C$ траженог троугла. Остала два темена $A$ и $B$ јесу пресеци симетралâ странâ $MC$ и $NC$ са основицом $MN$.

*Конструкција.* — Треба најпре помоћу познатог обима $s$ и углова $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ конструисати $\triangle MNC$, а затим конструисати симетрале страна $MC$ и $NC$, а пресеке $A$ и $B$ ових симетрала са страном $MN$ спојити са $C$.

*Доказ.* — Јасан је из анализе.

*Детерминација.* — Задатак биће могућан, ако је збир познатих углова мањи од $180^0$.

2) *Конструисати правоугаоник, кад се зна збир двеју страна, и дијагонала.* — *Анализа.* — Нека је тражени правоугаоник $ABCD$ (сл. 263), чији је збир страна $a + b = s$, а дијагонала $d$. Ако страну $AB$ продужимо за $BM = BC$

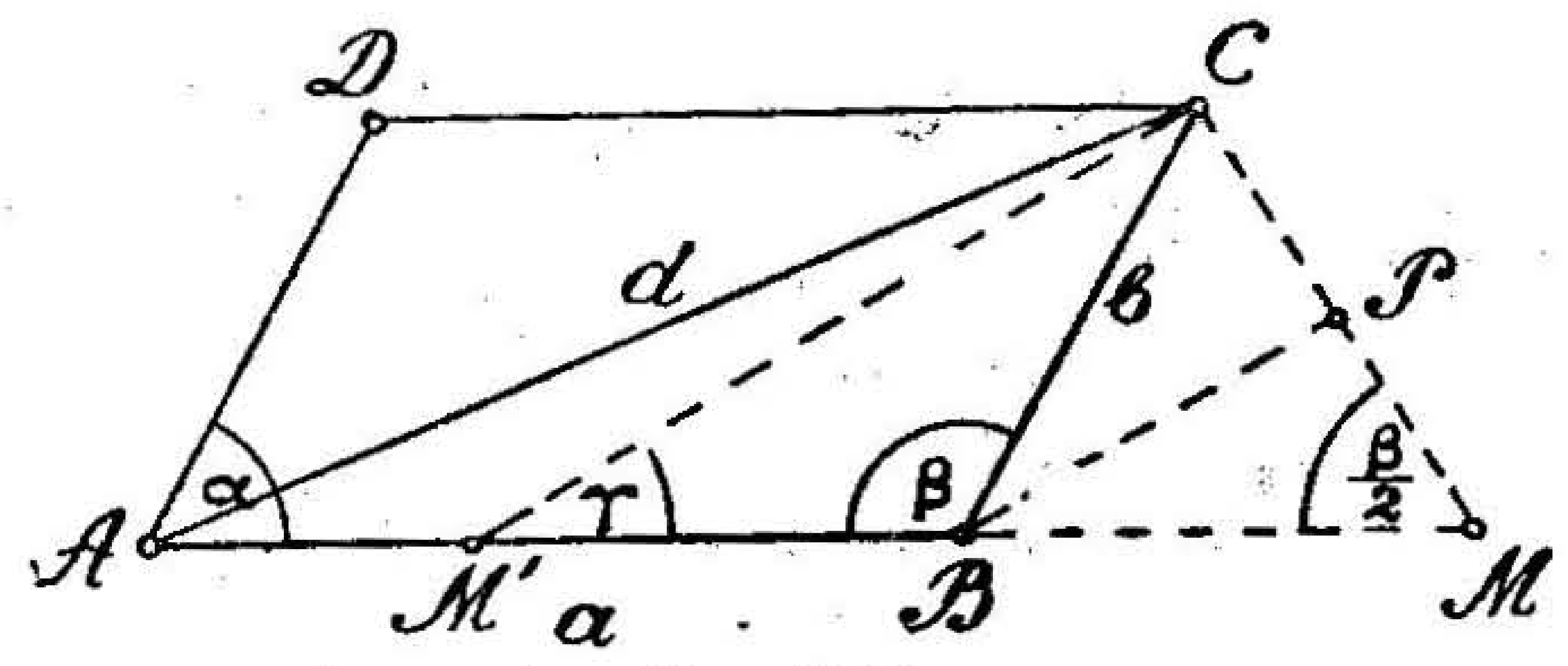



Сл. 263 M

и спојимо $M$ са $C$, онда $\triangle AMC$ биће помоћна слика, која се да конструисати, пошто знамо $AM = s$, $AC = d$ и $\sphericalangle M = 45^0$. Конструкцијом овог троугла налазимо темена $A$ и $C$ траженог правоугаоника, а остала два темена $B$ и $D$ добијамо спуштањем $CB \perp AM$ и повлачењем $AD \parallel BC$ и $CD \parallel AM$. *Конструкција и доказ* јасни су из анализе.

*Детерминација.* — Задатак имаће два, једно или ниједно решење према томе да ли лук, описан из $A$ полупречником $d$, сече праву $MC$ у двема тачкама, или је додирује, или нема са $MC$ ни једне заједничке тачке.

3) *Конструисати ромбоид кад се зна збир двеју страна, дијагонала и један угао.*



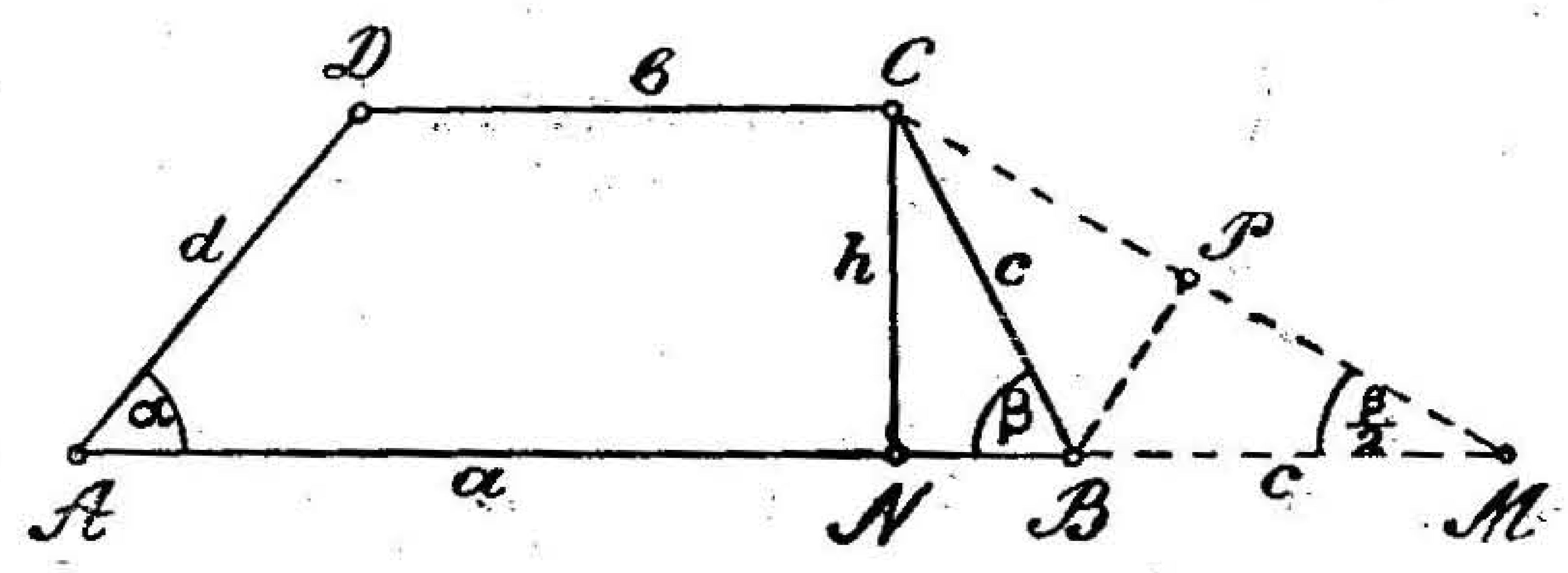
Сл. 264

*Анализа.* — Нека је тражени ромбоид $ABCD$ (сл. 264), чији је збир страна $a + b = s$, дијагонала $d$, а познати угао $\beta$ (Кад је познат угао $\alpha$, онда је $\beta = 180^0 - \alpha$). Ако страну $AB$ продужимо за $BM = BC$ и тачку $M$ спојимо са $C$, онда $\triangle AMC$ биће помоћна слика. Овај троугао дâ се конструисати, јер знамо $AM = s$, $AC = d$ и $\sphericalangle M = \frac{\beta}{2}$, пошто је $\triangle BMC$ равнокрак. Конструкцијом троугла $AMC$, добијамо темена $A$ и $C$ траженог ромбоида, а остала два темена $B$ и $D$ добијамо када конструишемо симетралу стране $MC$ и када повучемо затим $AD \parallel BC$ и $CD \parallel AM$.

*Конструкција* и *доказ* јасни су из анализе, а *детерминација* је истоветна као код претходног задатка. Слично се решава задатак, кад се зна: *разлика двеју страна, дијагонала и један угао*. Код овога задатка биће помоћна слика $\triangle AM'C$ (сл. 264), а $\sphericalangle \gamma = \frac{180^0 - \beta}{2}$.

4) *Конструисати трапез кад се зна: збир једне паралелне и једне непаралелне стране, углови на тој паралелној страни и висина.*

*Анализа.* — Нека је тражени трапез $ABCD$ (сл. 265), код кога знамо збир $a + c = s$, углове $\alpha$ и $\beta$ и висину $h$. Ако страну $AB$ продужимо за $BM = BC$, па тачку $M$ спојимо са $C$, и из $C$ спустимо $CN \perp AB$, онда је помоћна слика правоугли троугао $NMC$, код кога знамо катету $CN = h$ и оштри угао $M = \frac{\beta}{2}$. Кон-



Сл. 265

струкцијом овога троугла налазимо теме $C$ траженог трапеза. Остала три темена трапеза налазимо на следећи начин: теме $B$ налазимо конструкцијом симетрале стране $MC$, теме $A$ преношењем $MA = s$, а теме $D$ повлачењем $CD \parallel MA$ и конструкцијом угла $\alpha$ код темена $A$.

Конструкција, доказ и детерминација јасни су из анализе.

### б) Примери за вежбу:

1) *Конструисати равностран троугао* кад се зна: a) збир стране и висине; b) разлика стране и висине.

2) *Конструисати правоугли троугао* кад се зна: a) обим и један оштар угао; b) збир (разлика) двеју катета и један оштар угао; c) збир (разлика) хипотенузе и једне катете и један оштар угао; d) збир (разлика) хипотенузе и једне катете и друга катета; e) збир (разлика) катета, и хипотенуза; f) збир (разлика) катета и разлика њихових супротних углова (Нађи најпре углове из једначина $\alpha - \beta = \omega$ и $\alpha + \beta = 90^0$).

3) *Конструисати равнокрак троугао* кад се зна: a) збир (разлика) основице и крака и један угао (на основици или на врху); b) збир (разлика) крака и висине основице и основица; c) збир (разлика) крака и основичине висине и један угао (на основици или при врху); d) основичина висина и полупречник уписаног круга.

4) *Конструисати троугао* кад се зна: a) једна страна, њена висина и угао између средње линије те стране и друге стране; b) две стране и угао између средње линије једне од тих страна и друге дате стране; c) висине двеју страна и угао наспрам једне од тих страна; d) збир (разлика) двеју страна, трећа страна и угао наспрам треће стране; e) збир (разлика) двеју страна, и два угла; f) збир (разлика) двеју страна, трећа страна и један угао на трећој страни; g) збир (разлика) двеју страна, висина једне од тих страна и угао наспрам треће стране.

5) *Конструисати ромб* кад се зна: збир (разлика) стране и висине и један угао.

6) *Конструисати правоугаоник* кад се зна: једна страна и збир (разлика) дијагонале и друге стране.

7) *Конструисати ромбоид* кад се зна: a) збир (разлика) двеју страна, једна дијагонала и један угао: b) збир (разлика) дијагонала, угао између дијагонала и једна страна; c) једна страна и обе висине.

8) *Конструисати равнокрак трапез* кад се зна: a) збир (разлика) једне од паралелних страна и крака, један угао и дијагонала; b) обе паралелне стране и полупречник описаног круга.

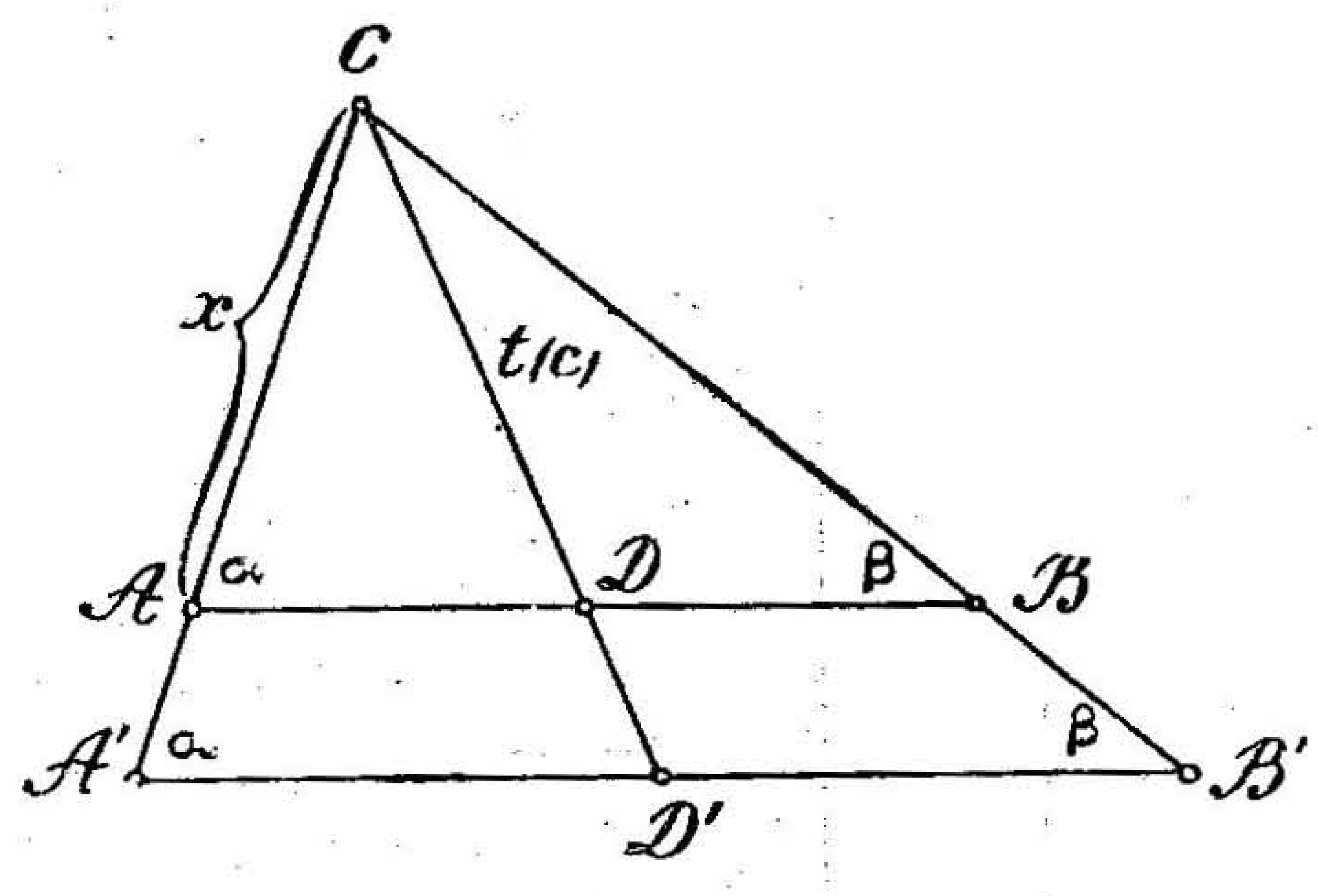
9) *Конструисати трапез* кад се зна: a) збир (разлика) једне од паралелних и једне од непаралелних страна, обе друге стране и дијагонала наспрам угла ових двеју страна; b) збир паралелних страна, висина и оба угла на једној паралелној страни.

**§ 97. Метода сличних слика.** — По методи сличних слика решавају се они конструктивни задаци код којих се може од једног дела датих елемената конструисати помоћна слика ма које величине, а која ће имати исти облик као и тражена слика. Упутство за решавање задатака по методи сличних слика састоји се у овоме: *најпре помоћу једног дела датих елемената, који су довољни за конструкцију једне помоћне слике, ма које величине, али која је слична траженој слици, конструишемо ту помоћну слику, а затим у овој помоћној слици налазимо елеменат (страну, висину, дијагоналу, збир стране и висине, збир стране и дијагонале) који је хомолог датом елементу тражене слике, а који није употребљен при конструкцији помоћне слике. Тиме налазимо две пропорционалне дужи помоћне и тражене слике. Помоћу ових двеју пропорционалних дужи и једне ма које друге дужи (страна, дијагонала, висина) помоћне слике, које сматрамо као трећу пропорционалу, налазимо њој хомологу дуж (страну, дијагоналу, висину...) тражене слике. Нађена четврта пропорционала пружа нам најзад могућност за даљу конструкцију тражене слике.*

Често није нужно да цртамо целу помоћну слику, већ само један њен део, разуме се, ако је тај део довољан да из њега одредимо један или више елемената тражене слике потребних за њену даљу конструкцију.

**a) Решени примери:**

1) *Конструисати троугао из два угла и средње линије треће стране.* — *Анализа.* — Нека су дати углови $\alpha$ и $\beta$ и средња линија $t_{(c)}$. Најпре помоћу углова $\alpha$ и $\beta$ можемо конструисати $\triangle$ $A'B'C$ (сл. 266), који ће бити сличан траженом троуглу. Средња линија овога троугла, хомолога датој средњој линији, јесте $CD'$. Ова средња линија има се према датој средњој линији $t_{(c)}$, као што се има ма која страна помоћне




Сл. 266

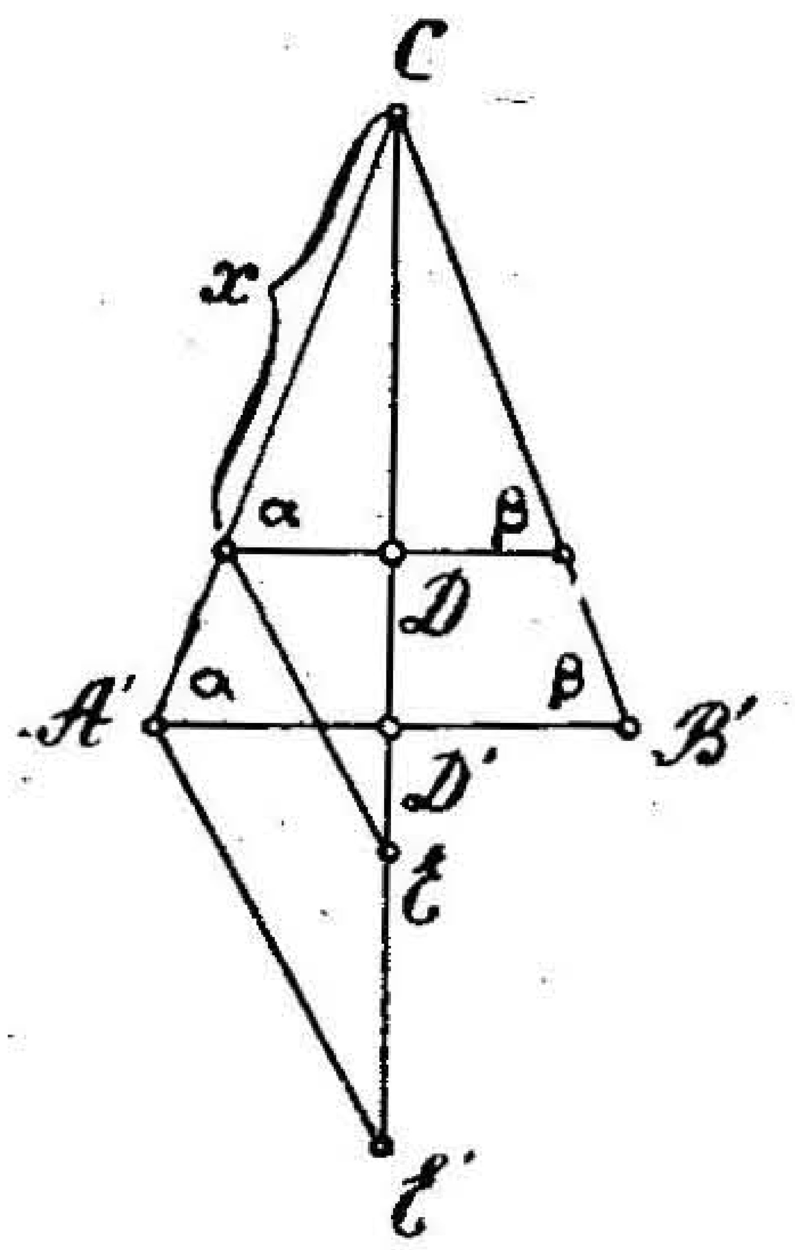
слике, према хомологој страни тражене слике, тј. $CD' : t_{(c)} = A'C : x$. Непознату пропорционалу $x$, која је једнака страни $AC$, налазимо када на $CD'$ пренесемо $t_{(c)}$ $(CD = t_{(c)})$, а затим кроз $D$ повлачимо $AB \parallel A'B'$.

*Конструкција.* — Нацртамо најпре произвољну дуж $A'B'$, а затим код $A'$ преносимо $\sphericalangle\, \alpha$ а код $B'$ угао $\beta$, и тиме добијамо помоћну слику $\triangle\ A'B'C$. Повлачимо затим његову средњу линију $CD'$ и на њу преносимо $t_{(c)} = CD$ а кроз $D$ повлачимо $AB \parallel A'B'$. Тада је $\triangle\ ABC$ тражени.

*Доказ* је јасан из анализе и конструкције.

*Детерминација.* — Задатак је одређен, пошто се само један троугао може конструисати од датих елемената.

2) *Конструисати равнокрак троугао, кад се зна један угао и збир основице и висине.* — *Анализа.* — Нека су дати угао на основици $\alpha$ и збир основице и висине $s$. Најпре помоћу угла $\alpha$ можемо конструисати помоћни троугао $A'B'C$ (сл. 267), који је сличан траженом троуглу. У њему је збир основице и висине $CE'$. Овај збир има се према $s$, као што се има страна $A'C$ према страни $x$ траженог троугла. Ову страну, као четврту пропорционалу налазимо када на $CE'$ пренесемо $s = CE$, затим $E'$ спојимо са $A'$, и из $E$ повлачимо $EA \parallel E'A'$. Тада $CA$ биће хамолога страни $CA'$. Повлачењем, најзад, $AB \parallel A'B'$ добијамо тражени троугао $ABC$.

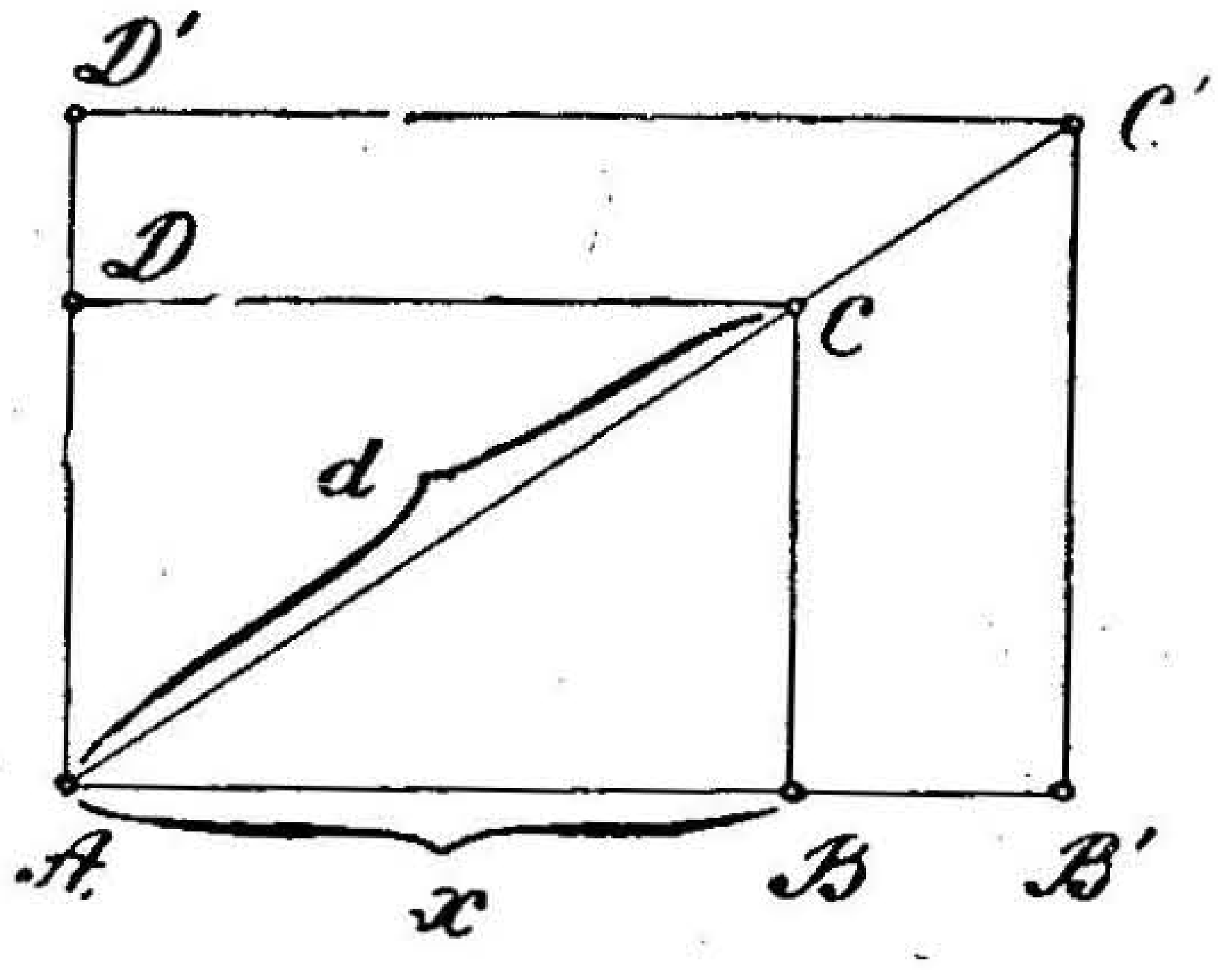



Сл. 267

*Конструкција* и *доказ* јасни су из анализе.

*Детерминација.* — Задатак је одређен, пошто се може конструисати помоћу датих елемената само један троугао.

3) *Конструисати правоугаоник из размере двеју страна и дијагонале.* — *Анализа.* — Ако се ширина према дужини има на пр.: као 1:2, а дијагонала $d$, онда најпре цртамо помоћни правоугаоник $AB'C'D'$ (сл. 268), код кога стоје стране као 1:2. Његова дијагонала $AC'$ има се према $d$, као што се има страна $AB'$ према хомологој страни $x$ траженог правоугаоника. Ову четврту пропорционалу налазимо када на $AC'$ пренесемо $d$ $(AC = d)$, па из $C$ повлачимо $CB \parallel C'B'$. Најзад из $C$ повлачимо $CD \parallel C'D'$ и тиме добијамо тражени правоугаоник $ABCD$. Конструкција и доказ јасни су из анализе, а задатак је одређен, пошто се може конструисати само један правоугаоник помоћу датих елемената.



Сл. 268

## Примери за вежбу:

1) *Конструисати правоугли троугао* кад се зна: *a*) један оштар угао и збир хипотенузе и њене висине; *b)* један оштар угао и средња линија хипотенузина; *c)* размера двеју катета и хипотенуза; *d)* размера двеју катета и хипотенузина висина; *e)* размера једне катете према оближњем хипотенузином отсечку и хипотенузина висина; *f)* размера једне катете и оближњег отсечка и други отсечак хипотенузин.

2) *Конструисати равнокрак троугао* кад се зна: *a*) размера крака према основици и основичина висина; *b*) размера крака према основици и висина крака; *c*) један угао и збир крака и основичине висине; *d*) један угао и збир основице и крака.

3) *Конструисати троугао* кад се зна: *a*) један угао, размера његових страна и средња линија треће стране; *b*) један угао, размера његових страна и супротна страна; *c*) два угла и збир једне супротне стране и њене висине; *d*) два угла и симетрала треће стране; *e*) размера двеју страна, њихов захваћени угао и збир треће стране и њене висине; *f*) основица, размера основице према једној другој страни и угао на основици; *g*) једна страна и њене размере према другим двема странама; *h*) једна страна, размера других двеју страна и њихова разлика; *i*) једна страна, размера других дреју страна и њихов збир.

4) *Конструисати правоугаоник* кад се зна: *a*) размера једне стране и дијагонале и збир друге стране и дијагонале; *b*) размера двеју страна и збир дијагонале и једне стране.

5) *Конструисати ромбоид* кад се зна: a) размера двеју страна, њихов захваћени угао и висина; *b*) размера двеју страна, њихов захваћени угао и збир дијагонале и једне стране; *c*) размера двеју страна, захваћени угао и збир дијагонала.

# АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА

**§ 98. — Степен алгебарских израза и њихово геометриско значење.** — Под *степеном* једног целог монома разумемо збир изложитељâ свих чинитеља његове главне количине. Тако, мономи: $2a, 3b, 4c, \ldots$ јесу првог степена; мономи: $2ab$, $3a^2$, $5bc, \ldots$ јесу другог степена; мономи: $3abc$, $4a^2d$, $5mn^2, \ldots$ јесу трећег степена; мономи: $3abcd$, $5a^2b^2$, $2a^3b, \ldots$ јесу четвртог степена итд.

Под степеном једног разломљеног монома разумемо разлику између степена бројитеља и степена именитеља тога монома. Тако, $\frac{a}{b}$ је моном нултог степена, $\frac{2ab}{c}$ првог степена, $\frac{2}{3}\frac{a^2bc}{mn}$ другог степена, $\frac{4a^3b}{c}$ трећег степена, итд.

Под степеном једнога полинома разумемо највише степен једног од његових чланова. Тако, полиноми: $a - b + c$, $3a + 2b - 4d + 5c$ јесу првог степена; полиноми: $3x^2 + 2x - 5$ и $4ab - 3c^2 + 5bc - 2ac$ јесу другог степена; полином $2a^3 - 4abc + 3m^2n + 5d^3$ је трећег степена; полином $2a^4 - 3a^3c + 5b^2c^2$ је четвртог степена итд. Према томе да ли су сви чланови полинома истог степена или нису, полиномѐ делимо на *хомогене* и *хетерогене*. Тако, полиноми: $2a + 3b - 4c$, $\frac{3ab}{c} - \frac{2cd}{5m}$, $2x^2 + 3y^2 - 4z^2$, $2abc - 3a^3 + 4a^2b$ јесу хомогени, а полиноми: $x^2 - 3x + 4$ и $\frac{3}{4}a^3 + 5b^2 + 3c - 2$ јесу хетерогени.

Под степеном једнога израза облика корена разумемо количник између степена радиканда и изложитеља корена. Тако, $\sqrt{ab}$ је првог степена, $\sqrt{a^2 + b^2}$ опет је првог степена, $\sqrt{\frac{a^3bc^2}{mn}}$ другог степена итд.

*Напомена.* — Неименовани бројеви, а тако исто и посебни бројеви јесу бројеви нултог степена и не утичу на степен израза. Тако, $3a$ претставља дуж која је само три пута већа од дужи $a$; $\frac{a}{b}$, где су $a$ и $b$ дужи, има за количник неименован број, па је тај израз нултог степена.

Изрази, мономи или хомогени полиноми првог, другог и трећег степена имају своје значење у геометрији, док изрази ма ког другог степена немају никаквог значења у геометрији. Тако, израз $5a$ претставља дуж 5 пута већу од дужи $a$; израз $3a - 2b$ претставља опет дуж која се добива када од троструке дужи $a$ одузмемо двоструку дуж $b$; израз $3ab$ претставља површину три пута већу од површине правоугаоника чије су стране једнаке дужима $a$ и $b$; израз $2abc$ претставља запремину која је два пута већа од запремине правоуглог паралелопипеда чије су димензије једнаке дужима $a$, $b$ и $c$; израз $5a^3$ претставља запремину која је 5 пута већа од запремине коцке чија је ивица једнака дужи $a$; израз $3ab + a^2$ претставља површину добивену када троструку површину правоугаоника $ab$ саберемо са двоструком површином квадрата $a^2$; израз $4a^2b + 3c^3$ претставља запремину добивену када четворострукој запремини паралелопипеда $ab^2$ додамо троструку запремину коцке $c^3$ итд. Међутим израз трећег степена: $3a^3 + 2ab + 2c - 5$ нема никаквог значења у геометрији, пошто не можемо сабирати или одузимати количине разнородне (тело са површином и дужи). Исти је случај са мономима и полиномима (хомологим и хетерогеним) четвртог, петог итд. степена.

**§ 99. — Геометриске конструкције алгебарских израза.** — Ако су дане дужи изражене својим мерним бројевима: $a$, $b$, $c$, $d$, ....., које дужи могу бити и стране или дијагоналне код неке праволиниске слике, или тетиве, пречници, полупречници, отсечци сечицâ, централне раздаљине код круга, онда се и за друге дужи, које зависе од датих дужи, добивају изрази који претстављају њихове величине. Тако, ако је $a$ страна квадрата, онда је израз за величину његове дијагонале $a\sqrt{2}$, или $\sqrt{2a^2}$, или $\sqrt{a^2 + a^2}$, тј. она је хипотенуза правоуглог равнокраког троугла чија је катета $a$. Конструкцијом правоуглог равнокраког троугла катете $a$, добијамо хипотенузу $x = a\sqrt{2}$.

Конструкција дужи чија је величина $x$ одређена неким алгебарским изразом првог степена, своди се на један од ових главних случајева:

1) $\boldsymbol{x = a \pm b}$. Овај израз значи збир или разлику познатих дужи $a$ и $b$. Непозната дуж $\boldsymbol{x}$ добија се, дакле, сабирањем, или одузимањем, ових двеју дужи.

2) $\boldsymbol{x = \frac{ab}{c}}$. Овај се израз дâ исписати и у облику:

$cx = ab$. Из ове једначине добијамо пропорцију $c : a = b : x$, из које видимо да непозната $x$ значи четврту пропорционалу за дужи $c$, $a$ и $b$, а налази се конструкцијом показаном у првом задатку § 69.

3) $x = \frac{a^2}{b}$. Овај се израз даје написати као $bx = a^2$, а из ове једначине имамо пропорцију $b : a = a : x$. Ова нам пропорција показује да је непозната $x$ трећа непрекидна пропорционала за дужи $b$ и $a$, а налази се конструкцијом изведеном у 2 задатку параграфа 69.

4) $x = \sqrt{ab}$. Овај се израз даје претставити као $x^2 = ab$, а одавде имамо пропорцију $a : x = x : b$. Ова нам пропорција показује да је непозната дуж $x$ средња процорционала за дужи $a$ и $b$, а налази се конструкцијом изведеном у 3 задатку § 69.

5) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Овај се израз даје претставити као $x^2 = a^2 + b^2$, а из њега се види да непозната дуж $x$ претставља хипотенузу правоуглог троугла чије су катете $a$ и $b$. Конструкција је изведена у 2 задатку § 46.

6) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Овај се израз даје претставити као $x^2 = a^2 - b^2$, а показује да је непозната дуж $x$ катета правоуглог троугла, чија је хипотенуза $a$, а друга катета $b$. Конструкција је изведена у 3 задатку § 46.

Следећи случајеви такође имају чешћу примену при конструкцији сложенијих израза:

1) $x = 3a$. Овде дуж $x$ налазимо када дуж $a$ пренесемо узастопце 3 пута на један зрак.

2) $x = \frac{a}{5}$. Овде дуж $x$ налазимо узимајући један 5-ти део дужи $a$, када је поделимо на 5 једнаких делова.

3) $x = a\sqrt{2}$. Овде је $x = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2}$ дијагонала квадрата стране $a$, или хипотенуза равнокрако-правоуглог троугла катете $a$, или је, из $x = \sqrt{2a \cdot a}$, средња пропорционала између $2a$ и $a$.

4) $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Овде је $x$ или висина равностраног троугла стране $a$, или је, из $x = \sqrt{\frac{3a}{4} \cdot a}$, средња пропорционала између $\frac{3a}{4}$ и $a$.

5) $x = a\sqrt{5}$. Одавде је $x = \sqrt{5a^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$ хипотенуза правоуглог троугла чије су катете $2a$ и $a$, или је, из $x = \sqrt{5a \cdot a}$, средња пропорционала између $5a$ и $a$.

Сложенији изрази првог степена своде се на један од претходних случајева. Тако се своди:

1) $x = 2a - 3b + 4c - 2d = (2a + 4c) - (3b + 2d) = p - q$, када заменимо $p = 2a + 4c$ и $q = 3b + 2d$;

2) $x = \frac{abc}{df} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{f} = \frac{pc}{f}$, кад се нађе претходно $p = \frac{ab}{d}$;

3) $x = \frac{ab + cd}{f} = \frac{ab}{f} + \frac{cd}{f} = p + q$, кад се нађе и замени претходно $p = \frac{ab}{f}$ и $q = \frac{cd}{f}$;

4) $x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 + de} = \sqrt{m^2 + c^2 + de} = \sqrt{q^2 + p^2}$, кад се најпре замени и нађе $m^2 = a^2 - b^2$, затим $q^2 = m^2 + c^2$ и најзад $p^2 = de$;

5) $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} =$ $= p - q$, кад се нађе и замени $p = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ и $q = \frac{a}{2}$;

6) $x = \sqrt{2a^2 - ab} = \sqrt{a(2a - b)} = \sqrt{ap}$, кад се замени $p = 2a - b$;

7) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab} = \sqrt{(a - b)^2 + c^2} = \sqrt{d^2 + c^2}$, кад се замени $d = a - b$;

8) $x = \sqrt{ab + cd - ef} = \sqrt{p^2 + q^2 - m^2} = \sqrt{n^2 - m^2}$, кад се најпре нађе и замени $b^2 = ab$, $q^2 = cd$, $m^2 = ef$, а затим $n^2 = p^2 + q^2$;

9) $x = a\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 + a^2 - a\sqrt{2a^2}} =$ $= \sqrt{a^2 + a^2 - a\sqrt{a^2 + a^2}} = \sqrt{m^2 - am} = \sqrt{m^2 - p^2}$, кад се најпре нађе и замени $m^2 = a^2 + a^2$, а затим $p^2 = am$; и

10) $x = \sqrt{\frac{a^2b + c^2d}{e - f}} = \sqrt{\frac{a^2b + c^2d}{m}} = \sqrt{\frac{a^2b}{m} + \frac{c^2d}{m}} =$ $= \sqrt{\frac{a^2}{m} \cdot b + \frac{c^2}{m} \cdot d} = \sqrt{pb + qd} = \sqrt{s^2 + t^2}$, кад се најпре нађе и замени $m = e - f$, затим $p = \frac{a^2}{m}$, $q = \frac{c^2}{m}$ и најзад $s^2 = pb$ и $t^2 = qd$.

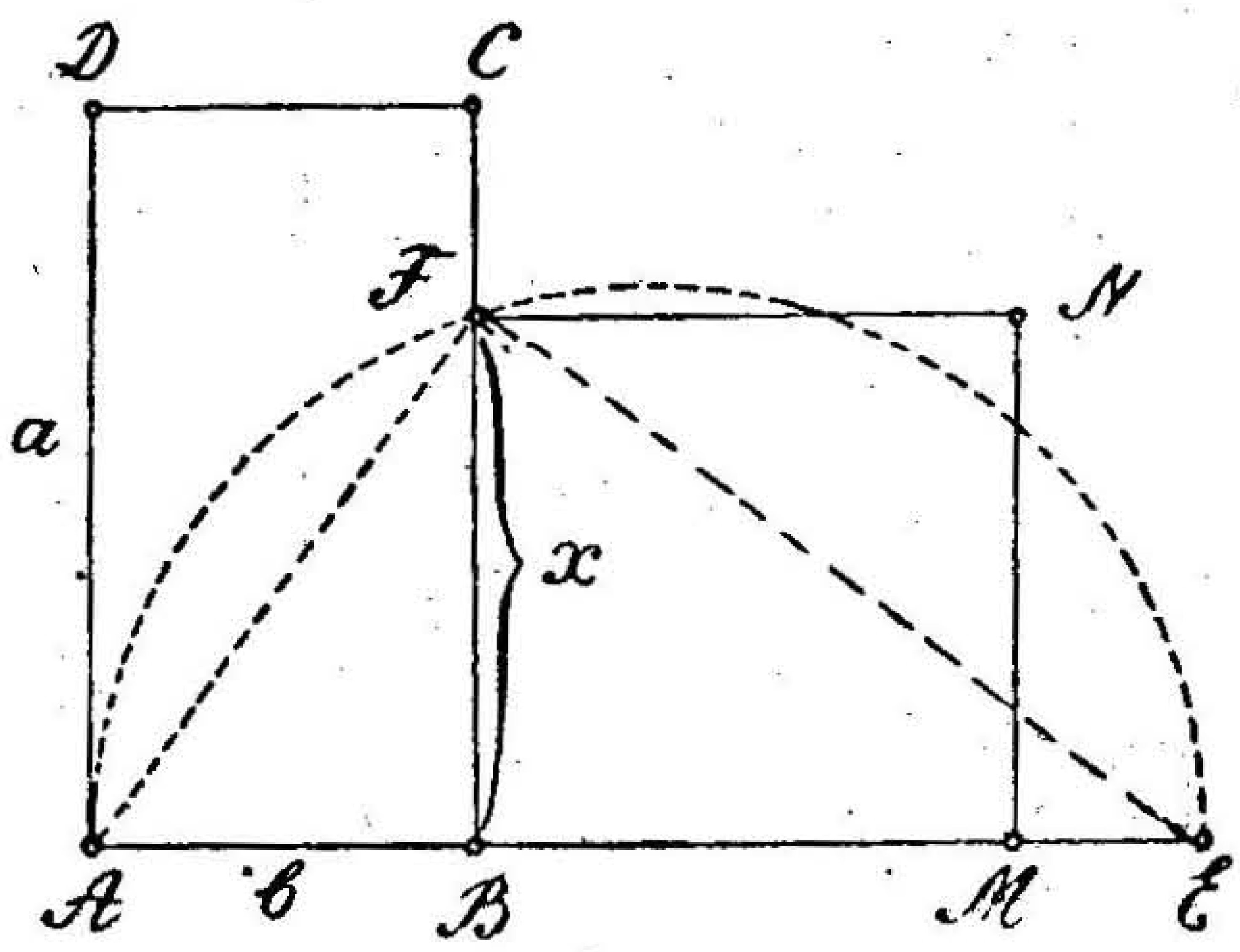
**§ 100. — Решавање конструктивних задатака по методи алгебарске анализе.** — Упутство за решавање конструктивних задатака по методи алгебарске анализе састоји се у овоме: *најпре претпостављамо да је задатак решен и цртамо слику која одговара датим погодбама у задатку; затим у тој слици означавамо са x ону дуж (страну, дијагоналу итд.) од чијег изналаска зависи решење задатка, потом налазимо везу између непознате x и осталих елемената слике, чије величине означавамо: a, b, c, . . . . , уз помоћ геометриских теорема, и ту везу изражавамо једном једначином; и, најзад, решењем ове једначине добијамо за непознату x алгебарски израз, који сводимо на геометриско значење и чијом конструкцијом добијамо величину непознате x.*

*Доказ* се оснива на анализи и конструкцији, а *детерминација* се одређује испитивањем израза добивеног за непознату $x$.

**Решени примери:**

1) *Правоугаоник претворити у квадрат.* — *Анализа.* — Ако су стране датог правоугаоника $ABCD$ (сл. 269) $a$ и $b$, а страну траженог квадрата означимо са $x$, онда је:

$$x^2 = ab, \text{ и } x = \sqrt{ab}.$$




Сл. 269

Из ове једначине увиђамо да је страна траженог квадрата геометриска средина између $a$ и $b$.

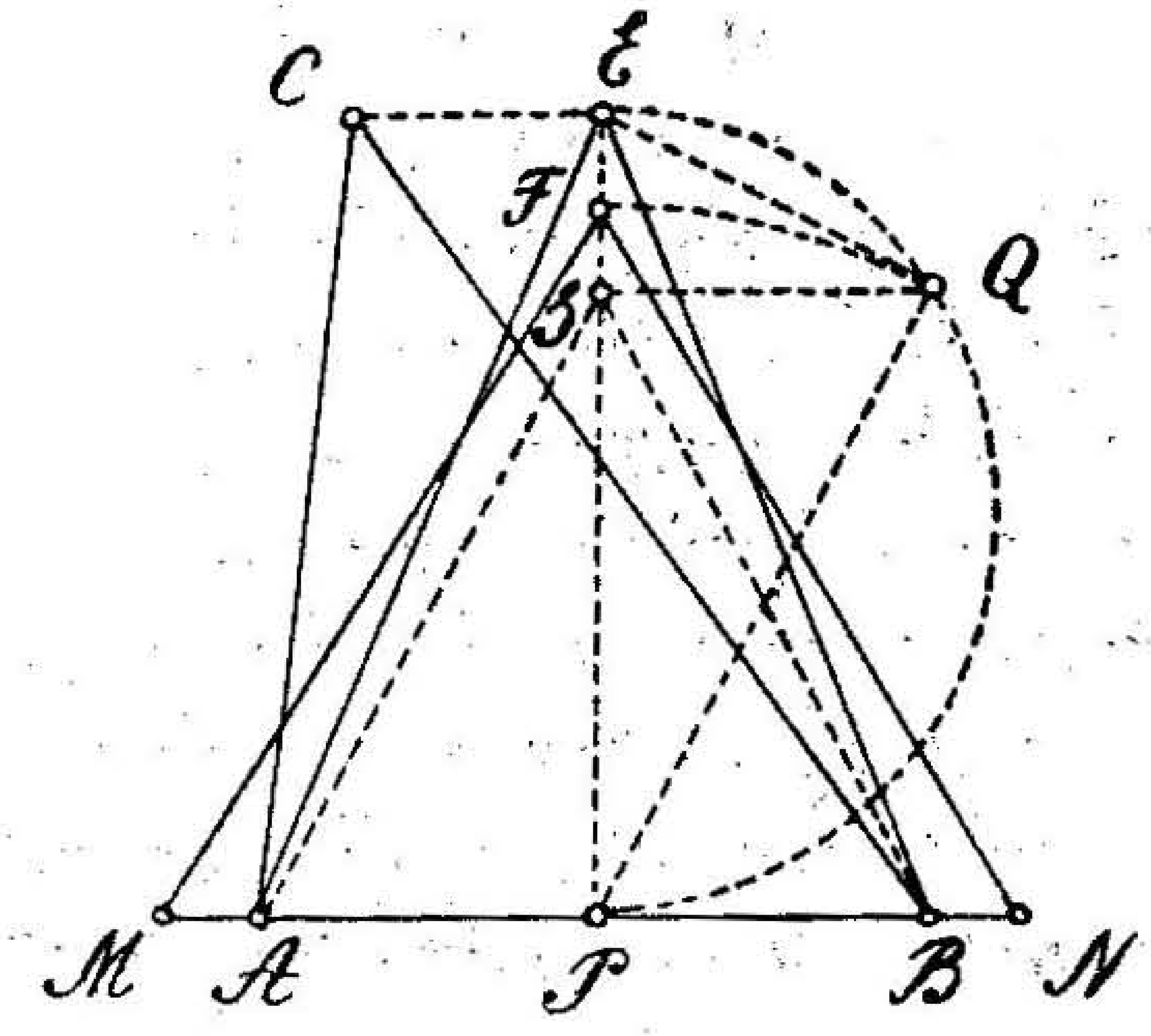
*Конструкција.* — Треба најпре страну $AB$ продужити за $BE = a$, а затим над $AE$, као над пречником, описати полукруг. Тада отсечак $BF$ биће страна $x$ траженог квадрата.

*Доказ.* — Да је заиста $x^2 = ab$, уверавамо се из правоуглог троугла $AEF$, у коме је $BF = x$ хипотенузина висина, а $a$ и $b$ отсечци хипотенузини, те је $a : x = x : b$, или $x^2 = ab$.

2) *Дани троугао претворити у равностран.*

*Анализа.* — Нека је дани троугао $ABC$ (сл. 270). Најпре овај троугао претварамо у равнокрак $\triangle ABE$ када из средине

$P$ основице $AB$ подигнемо $PE \perp AB$, а затим повучемо $CE \parallel AB$ (теорема 113, § 71). Нека је тражени равностран троугао $MNF$, који је сличан са троуглом $ABS$ конструисан над основицом $AB$. Као што се из слике види, решење овога задатка зависи од проналаска темена $F$, односно од висине $PF=x$. Ако висину равнокраког троугла означимо са $h$ $(PE=h)$, а висину помоћног равностраног троугла $ABS$ са $m$ $(SP=m)$, онда је према 90 теореми параграфа 62:




Сл. 270

$\triangle FMP : \triangle SAP = x^2 : m^2$, или $\triangle APE : \triangle SAP = x^2 : m^2$ (1) пошто је $\triangle FMP = \triangle APE$. Па како троуглови $APE$ и $SAP$ имају заједничку основицу $AP$, то им површине стоје у размери њихових висина, тј.

$$\triangle APE : \triangle SAP = h : m \qquad (2)$$

$$x^2 : m^2 = h : m, \text{ или } x^2 : m = h : 1.$$

Одавде је $x = \sqrt{mh}$, тј. висина траженог равностраног троугла средња је пропорционала између висине $h$ равнокраког троугла $ABE$ и висине $m$ помоћног равностраног троугла $ABS$.

*Конструкција.* — Треба над висином $EP$, као над пречником описати круг, затим у темену $S$ подићи $SQ \perp EP$ и најзад тетиву $PQ$ пренети на $PE$ $(FP = PQ)$. Најзад из $F$ повући $FM \parallel SA$ и $FN \parallel SB$ и продужити основицу $AB$ до њених пресека са овим паралелнима.

*Доказ.* — У правоуглом троуглу $PQE$ је $PQ$ једна катета, $PE$ хипотенуза, а $PS$ хипотенузин отсечак оближњи катети $PQ$. Стога је према 91 теореми § 62 : $PE : PQ = PQ : PS$, или заменом $PQ$ са $PF$:

$$PE : PF = PF : PS, \text{ или } h : x = x : m, \text{ или } x = \sqrt{hm}.$$

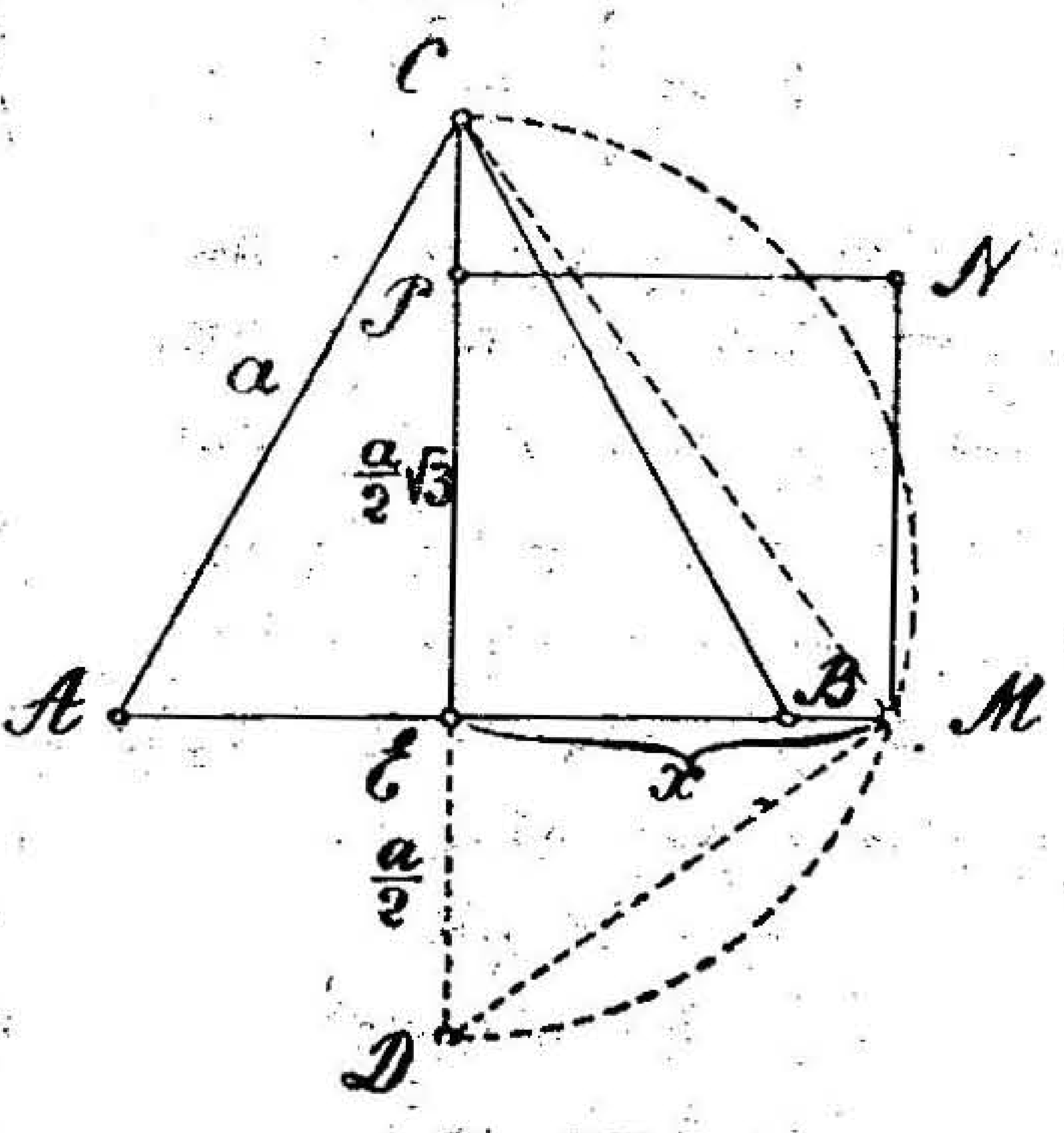
3) *Равностран троугао претворити у квадрат.*

*Анализа.* — Ако је страна датог равностраног троугла $ABC$ (сл. 271) $a$, а страна траженог квадрата $x$, онда је:

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = x^2, \text{ или } x = \sqrt{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}}.$$

Из ове једначине увиђамо да је страна траженог квадрата средња пропорционала између половине стране датог троугла и његове висине.

*Конструкција.* — Треба најпре продужити висину за $\frac{a}{2}$ и над $CD$ описати полукруг, а страну $AB$ продужити до пресека са полукругом. Тада $ME$ биће једнака страни траженог квадрата.

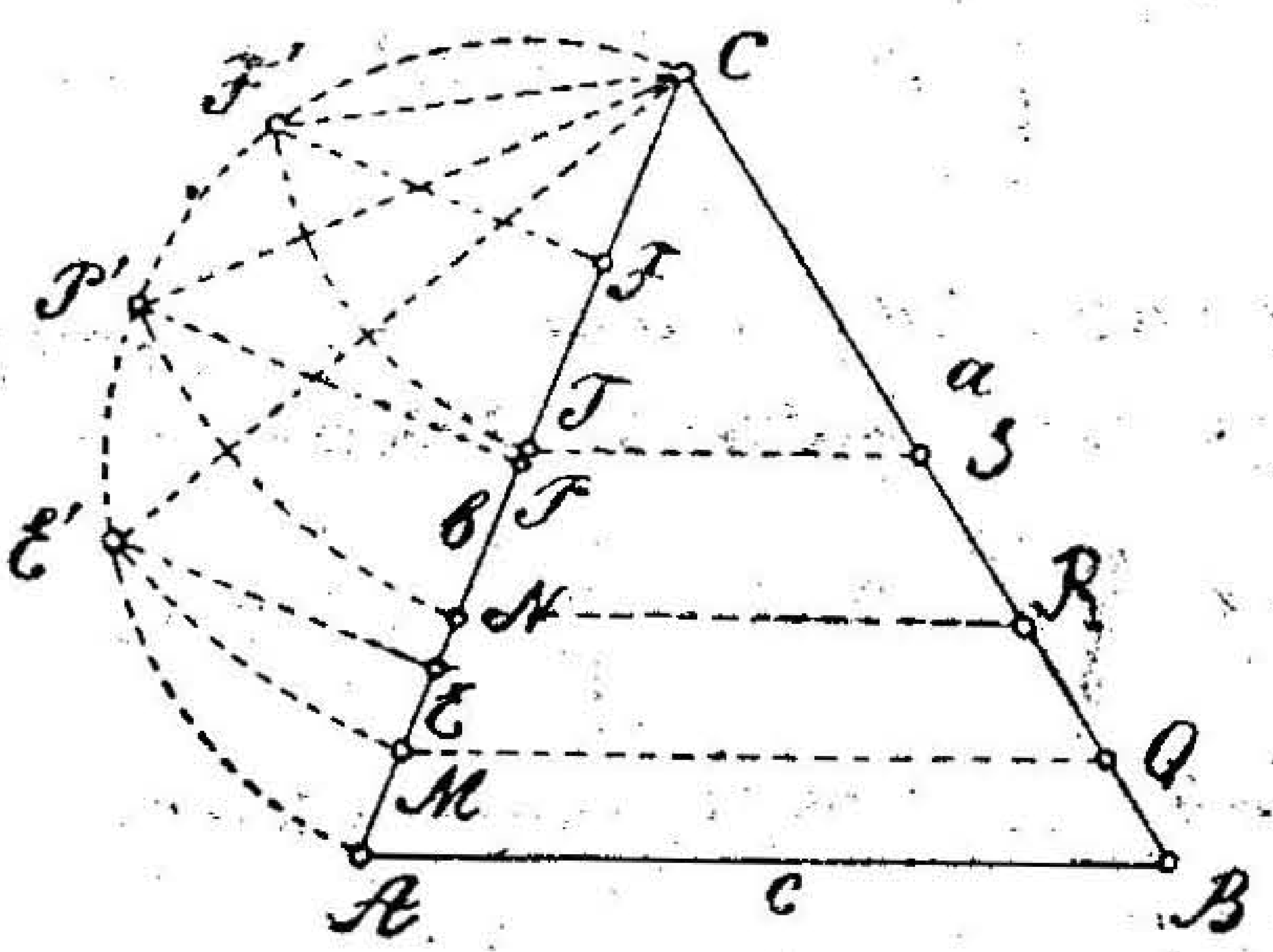


Сл. 271

*Доказ.* — Из правоуглог троугла $DCM$ је: $CE : EM = EM : ED$ (теорема 91 под *c*, § 62), или $\frac{a}{2}\sqrt{3} : x = x : \frac{a}{2}$. Одавде је

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}.$$

4) *Троугао ABC (сл. 272) поделити на више једнаких делова правама паралелним са основицом AB.*



Сл. 272

*Анализа.* — Нека је дат $\triangle ABC$ (сл. 272), који треба поделити правама $TS$, $NR$ и $MQ$, паралелним са $AB$, на 4 једнака дела. Задатак биће решен ако знамо делове стране $b$: $CT = x$, $CN = y$ и $CM = z$.

Ове делове одређујемо из сличности троуглова $CTS$, $CNR$, $CMQ$ и $CAB$, који су слични, пошто су им углови једнаки. Тада је, на основу 90 теореме § 62, $\triangle CTS : \triangle CRN : \triangle CMQ : \triangle CAB = x^2 : y^2 : z^2 : b^2$ (1).

Па како површине ових троуглова стоје као $1 : 2 : 3 : 4$, то заменом у (1) имамо: $1 : 2 : 3 : 4 = x^2 : y^2 : z^2 : b^2$. Из ове продужне пропорције стварамо пропорције: *a*) $1 : 4 = x^2 : b^2$; *b*) $2 : 4 = y^2 : b^2$; и *c*) $3 : 4 = z^2 : b^2$.

Тада је: из (*a*) $x = \frac{b}{2}$, из (*b*) $y = \frac{b}{2}\sqrt{2}$, а из (*c*) $z = \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

**Увлачењем $\frac{b}{2}$ у корен добијамо:**

$$x=\sqrt{\frac{b}{4}\cdot b},\quad y=\sqrt{\frac{2b}{4}\cdot b}\ \text{и}\ z=\sqrt{\frac{3b}{4}\cdot b},$$

које нам једначине показују да је непозната $x$ средња пропорционала између четвртине и целине стране $b$; непозната $y$ средња пропорционала између половине и целине исте стране $b$; и непозната $z$ средња пропорционала између три четвртине и целине опет исте стране $b$.

*Конструкција.* — Траба страну $b$ поделити најпре на 4 једнака дела, затим описати над $b$, као над пречником, полукруг, а у деоним тачкама $E$, $P$ и $F$ подићи нормале: $EE'$, $PP'$ и $FF'$ до пресека са полукругом, и најзад тетиве $CF'$, $CP'$ и $CE'$ пренети луковима на $b$.

*Доказ.* — Из правоуглих троуглова: $ACF'$, $ACP'$ и $ACE'$ имамо, на основу 81 теореме § 62:

$$b : CF' = CF' : \frac{b}{4};\ b : CP' = CP' : \frac{2b}{4};\ \text{и}\ b : CE' = CE' : \frac{3b}{4},\ \text{или}$$

$$b : CT = CT : \frac{b}{4};\ b : CN = CN : \frac{2b}{4};\ \text{и}\ b : CM = CM : \frac{3b}{4},\ \text{или}$$

$$b : x = x : \frac{b}{4};\ b : y = y : \frac{2b}{4};\ \text{и}\ b : z = z : \frac{3b}{4},\ \text{а одавде је:}$$

$$x=\sqrt{\frac{b}{4}\cdot b};\ y=\sqrt{\frac{b}{2}\cdot b}\ \text{и}\ z=\sqrt{\frac{3b}{4}\cdot b},\ \text{што смо и видели}$$

код анализе.

На исти начин даје се троугао $ABC$ поделити на ма колико једнаких делова. Ако се дели на $n$ једнаких делова, онда је

$$x=\sqrt{\frac{b}{n}\cdot b};\ y=\sqrt{\frac{2b}{n}\cdot b};\ z=\sqrt{\frac{3b}{n}\cdot b};\ u=\sqrt{\frac{4b}{n}\cdot b}\ \text{итд.}$$

**§ 101. — Задаци за вежбу.** — Конструисати изразе:

1) $x=\frac{a^2-b^2}{c}$; 2) $x=\frac{a^2+b^2-c^2}{2d}$; 3) $x=\sqrt{\frac{ab}{3}}$;

4) $x=\sqrt{a^2-b^2+c^2-e^2+d^2}$; 5) $x=a(1+\sqrt{2})$;

6) $x=\sqrt{a^2-2ab+b^2+c^2-d^2}$; 7) $x=\frac{abc}{(a-b)d}$;

8) $x=\frac{a^2+ab}{c}$; 9) $x=\sqrt{ab+cd-e^2+pq}$;

10) $x=\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}$; 11) $x=\sqrt{\frac{a^2b+c^2d}{e+f}}$;

12) $x=\sqrt{\frac{abc}{d}-e^2}$.

13) Конструисати правоугли троугао, кад се зна: *a)* хипотенуза и површина; *b)* хипотенуза, а једна је катета геометриска средина између хипотенузе и друге катете; *c)* једна катета и збир хипотенузе и друге катете; *d)* збир катета и висина хипотенузина; *e)* разлика катетâ и висина хипотенузина; *f)* збирови од хипотенузе и по једне катете; *g)* разлике од хипотенузе и по једне катете; *h)* хипотенуза, а да је једна катета једнака трострукој разлици између хипотенузе и друге катете; *i)* обим, а да је једна катета два пута већа од друге; *j)* хипотенуза, а да је висина хипотенузина једнака разлици катета; *k)* хипотенуза и разлика квадратâ катетâ; *l)* хипотенуза, а да је површина једнака квадрату над разликом његових катета; *m)* једна катета и пројекција друге катете на хипотенузи.

14) Конструисати квадрат, кад се зна: *a)* збир стране и дијагонале; *b)* разлика дијагонале и стране.

15) Квадрат претворити у ромб чији је збир дијагоналâ једнак обиму квадрата.

16) Конструисати правоугаоник, кад се зна: *a)* збир и разлика двеју његових страна; *b)* његова дијагонала и разлика двеју страна; *c)* обим и површина.

17) Дани правоугаоник претвори у правоугли троугао чија је хипотенуза дане дужине.

18) Конструисати равнокрак троугао, кад се зна: *a)* збир основице и крака, и висина основице; *b)* збир основице и њене висине, и крак; *c)* разлика основице и крака, и површина.

19) Конструисати троугао, кад му је $\alpha = 60^0$ ($30^0$, $45^0$), а осим тога познато је: *a)* страна $a$ и површина $P$; *b)* страна $a$ и разлика квадратâ странâ $b$ и $c$; *c)* збир квадратâ странâ $a$ и $b$ и разлика квадратâ странâ $b$ и $c$; *d)* страна $b$ и однос $a:c = c:b$; *e)* страна $a$ и услов $b = 3\,(a-c)$; *f)* страна $a$ и услов $a - b = b + c$.

20) У равнокраком троуглу повући према основици паралелну која је геометриска средина између крака и његовог горњег отсечка.

21) У даноме троуглу повући паралелну према једној страни, а која је геометриска средина између оба отсечка једне од других двеју страна.

22) Дуж $a$ поделити на два отсечка тако да је квадрат над једним отсечком три пута већи од квадрата над другим отсечком.

23) Дате су дужи $a$, $b$ и $c$; да се дуж $c$ тако подели да је правоугаоник од једног њеног отсечка и $a$, једнак правоугаонику из другог отсечка и $b$.

24) У даноме троуглу повући с једном страном паралелну која ће бити једнака с неком даном дужи.

25) Над једном страном каквог троугла конструисати правоугаоник тако да његова површина буде једнака с правоугаоником других двеју страна.

26) Да се у равностраном троуглу продужи висина толико да је страна геометриска средина између дане и продужене висине.

27) У равностраном троуглу скратити висину толико да је цела висина геометриска средина између стране и скраћене висине.

28) Из темена даног троугла повући ону трансверзалу која га дели на троугле једнаких обима.

29) Конструисати равнокрак трапез кад се зна мања основица и крак, а обе дијагонале стоје нормално на крацима.

30) Конструисати равнокрако-правоугли троугао кад се зна његов обим.

31) Трапез преполовити једном правом која је са основицом паралелна.

32) Дану тетиву $a$ једнога круга продужити толико да дирка повучена из крајње тачке продушка има дужину $t$.

33) Кружни прстен претворити у круг.

34) Дани круг претворити у кружни прстен дане ширине.

35) У даноме полукругу уписати квадрат.

36) Дани круг поделити концентричним круговима на 2, 3, .... $n$ једнаких делова.

37) У даноме кружном квадранту уписати квадрат.

38) Дану дуж $a$ продужити за $x$ толико да је квадрат над $a + x$ пет пута већи од правоугаооика из $a$ и $x$.

39) Од дане дужи $a$ отсећи са обе стране једнаке делове тако да је квадрат над средњим делом једнак правоугаонику из $a$ и збира оба отсечка.

40) Дат је круг $O$ и тачка $A$ у кругу или ван круга; да се кроз $A$ повуче тетива (сечица) чији се отсечци имају као $2:3$.

## ПРВИ ДЕО

# ПЛАНИМЕТРИЈА

## УВОД



## ПРВИ ОДЕЉАК

### Права, круг, углови и паралелне праве



## ДРУГИ ОДЕЉАК

### Опис и особине слика и њихова симетричност



* Параграфи означени звездицом намењени су ученицима реалке.

## ТРЕЋИ ОДЕЉАК

**Пропорционалност дужи, гониометриске функције и њихова примена на решавање правоуглог троугла, сличност слика и њихова конструкција**

* Само за ученике реалке.