РИСТА КАРЉИКОВИЋ
директор гимн. у пензији

АЛГЕБРА

ЗА

ВИШЕ РАЗРЕДЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

ПРВИ ДЕО

ЗА V и VI РАЗРЕД

Овај је уџбеник препоручен од Главног просветног савета
С.бр. 133 од 9-VII-37 и одобрен од Г. Министра просвете
одлуком С.н.бр. 27394 од 12-VIII-1937 г.

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЂУКОВИЋА
БЕОГРАД — ТЕРАЗИЈЕ
Цена 45 дин.

РИСТА КАРЉИКОВИЋ
директор гимн. у пензији

АЛГЕБРА

ЗА

ВИШЕ РАЗРЕДЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

ПРВИ ДЕО

ЗА V и VI РАЗРЕД

Овај је уџбеник препоручен од Главног просветног савета С.бр. 133 од 9-VII-37 и одобрен од Г. Министра просвете одлуком С.н.бр. 27394 од 12-VIII-1937 г.

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЋУКОВИЋА
БЕОГРАД — ТЕРАЗИЈЕ

ШТАМПАРИЈА „ДАВИДОВИЋ“, ПАВЛОВИЋА и ДРУГА
БЕОГРАД, 1937 — ТАКОВСКА 32

ПРЕДГОВОР I ИЗДАЊУ

При изради ове Алгебре, старао сам се да будем што популарнији у излагању градива, да њена правила у више случајева објасним на примерима; да дам што већи број решених примера и тиме пружим нашој послератној генерацији ученика што популарнији уџбеник. Уз важније параграфе и одељке додао сам велики број задатака за вежбу из разлога што је наша литература оскудна у алгебарским збиркама и што ми је била жеља да вреднијим ученицима пружим што већи број задатака за вежбу.

Иако су у најновијем наставном програму избачени одељци I и III (основне радње са општим и алгебарским бројевима и изразима; размере и пропорције), ја сам их ипак унео у уџбеник ради његове потпуности, пошто је уџбеник тако удешен да послужи ученицима учитељских школа, трговачких академија, а нарочито сиромашним приватним ученицима.

Уџбеник је подесан и за ученике класичних гимназија, само треба наставници да изоставе оне параграфе и одељке који нису предвиђени наставним програмом за те гимназије.

21-VI-1930
у Београду

Риста Карљиковић,
дир. II женске гимназије у Београду

ПРЕДГОВОР III ИЗДАЊУ

У овом издању исправљене су ситне штампарске грешке и сведени су логаритми на пет децимала. Ово издање попуњено је следећим параграфима којих није било у првом и другом издању:

код IV одељка: Графичко решавање неједначина првог степена;
„ V „ : a) Конструкција израза $\sqrt{n}$, где је *n* цео број; b) Четири рачунске радње с приближним вредностима ирационалних бројева; c) Кологаритми и њихова примена; и d) Графичко претстављање функција 10^x, $\log_{(10)} x$, n^x и $\log_{(n)} x$.
„ VI „ : Пребацио сам из другог дела моје алгебре параграфе: a) Графичко претстављање квадратног тринома и испитивање његових промена; и b) Графичко решавање једначина другог степена с једном непознатом, који припадају према програму градиву VI разреда.

Поред овога, унео сам у ово издање и приличан број матурских задатака рађених код нас пре и после светског рата, за домаћу вежбу ученика. И у овом издању задржао сам одељке: a) Основне радње са општим и алгебарским бројевима и изразима; b) Размере и сразмере и њихова примена, — који нису предвиђени наставним програмом, јер из искуства знам да многи ученици при прелазу у виши течај поборавe те радње које у нижем течају површно и без довољног разумевања прелазе. Корисност од знања пропорција у математици и физици толико је велика да се ничим не може правдати изостављање овог одељка из програма. Најзад, оба ова одељка предвиђена су програмима за учитељске школе и трговачке академије, те је њихово уношење и у ово издање оправдано, пошто је овај уџбеник удешен и за те стручне школе.

Фебруара 1937
у Београду

Риста Карљиковић,
директор гимназије у пензији

УВОД[1]

§ 1) **Количине и њихове величине.** Под **количином** разумемо све оно што се може мерити или бројати, или што се дâ увећати или смањити. Тако, дужина учионице је количина, јер се дâ метром измерити. Стадо оваца је такође количина, јер се дâ избројати. Имамо разних врста или родова количина: дужина, површина, запремина, тежина итд., али свака врста количина има своју **основну количину,** или **основну јединицу.** Ова јединица у ствари је количина која служи за то да помоћу ње измеримо или упоредимо количине истог рода или исте врсте. Тако, *метар* (m) је јединица за дужину, *квадратни метар* (m^2) за површину, *кубни метар* (m^3) за запремину, *литар* (l) за течност, *грам* (gr) за тежину, *динар* за новац, једна *клупа* за све клупе у разреду, један *ђак* за ђаке у разреду или школи, једно *дрво* за сва дрвета у врту или гори итд.

Упоређивањем неке количине са њеном основном јединицом сазнајемо колико је пута та количина већа или мања од основне јединице, тј. сазнајемо њену *величину* или *бројну вредност*. Тако, ако по дужини неке учионице преносимо метар и ако се он садржава у тој дужини, рецимо, десет пута, онда је резултат нашег мерења или упоређивања *десет* величина или бројна вредност дужине дотичне учионице. Величина или бројна вредност неке количине укратко се назива *бројем. Број је, дакле, онај резултат мерења или упоређивања неке количине са њеном основном јединицом, који нам показује колико је пута та количина већа или мања од своје основне јединице.*

§ 2) **Именовани и неименовани бројеви.** Када кажемо 50, ми знамо да је то величина неке количине која је 50 пута већа од своје основне јединице, али није нам позната врста или род те количине. Не знамо да ли та количина припада дужинама, површинама, тежинама итд. Напротив, ако ка-

---

[1] Увод сами ученици понављају.

жемо 50 m, онда не само да знамо да је та количина 50 пута већа од своје основне јединице, већ знамо да је та количина једна дужина у којој се основна јединица, *метар*, садржава потпуно 50 пута. Отуда бројеве делимо на *именоване* и *неименоване*. Први су бројеви они поред којих се помиње име какве основне јединице (15 m, 20 m^3, 8 m^2, 250 gr, 80 кућа, 25 клупа, 30 села, 40 ученика, 300 оваца итд.), а други јесу бројеви поред којих се не помињу имена основних јединица (5, 8, 15, 50, итд.).

§ 3) **Једнородни и разнородни бројеви.** Једнородни су они именовани бројеви који су различитог имена, али су истог рода или исте врсте (8 km, 28 m, 7 cm; 3 месеца, 8 дана, 15 часова, 35 минута), а разнородни су бројеви не само различитих имена већ припадају количинама различитих врста (10 оваца, 8 m, 25 динара).

§ 4) **Цели, разломљени и мешовити бројеви.** Број је цео, ако нам претставља величину количине у којој се њена основна јединица садржава потпуно (5m, 13gr, 70m^3, 95 динара итд.). Разломљени број претставља нам величину количине која је мања од њене основне јединице, тј. количину која је део основне јединице $\left(\frac{3}{4}\,m, \frac{5}{6}\,m^2,\right.$ 0,5 gr, 0,35 динара итд.$\left.\right)$. Мешовит број претставља нам величину оне количине која садржава у себи известан број целих јединица, а поред њих, још какав део од те јединице ($2^1/_2$ часа, 3,8 m, 8,25 дин.).

§ 5) **Посебни и општи бројеви.** За писање бројева употребљавамо *цифре:* арапске (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) или римске (I, V, X, L, C, D, M), или *слова* ма које азбуке (највише латинске и грчке). Број означен цифрама зове се *посебан*, а означен словима *општи*. Посебан број одмах нам обелодањује величину количине коју он претставља, тј. показује нам број основних јединица које се садржавају у дотичној количини. Посебни број показује нам, дакле, *одређену* множину јединица. Напротив, општи број претставља *неодређену* множину јединица. Свако слово a, b, c, . . . x, y, z може да претставља сваку произвољну множину јединица или део јединице, али у једном задатку једна иста величина количине увек се означава једним истим словом. Тако, ако општи број a претставља у једном задатку вредност 7, онда то слово у томе задатку не може у исто време да претставља какву другу множину јединица осим 7. У математици од веће су употребе општи бројеви. Њихово преимућство над посебним састоји се у томе што употребом општих бројева математичке операције вршимо много брже и лакше, и што помоћу општих бројева добијамо математичке формуле (обрасце), које се примењују за решавање свих сличних задатака. Тако, запремину правоуглог правог паралелопипеда налазимо употребом формуле $V = abc$, па ма које величине биле димензије a, b и c.

§ 6) **Упоређивање бројева.** Упоређивањем два броја a и b налазимо да су они *једнаки* или *неједнаки*. Бројеви a и b биће једнаки, ако свака јединица првог одговора свакој јединици другог броја. Њихову једнакост означавамо везујући их знаком $=$ ($a = b$), а чита се: „a једнако b“. Оваква веза назива се *једначином*. (a је лева а b десна страна).

Ако су бројеви a и b неједнаки, онда се њихова неједнакост означава:

$a > b$, ако је a веће од b, или
$a < b$, ако је a мање од b.

Мањи се број пише, дакле, увек при врху знака „$<$“ а већи при отвору. Овакве везе између неједнаких бројева зову се *неједначинама*, и оне имају, као и једначине, такође две стране: леву a и десну b.

Ако однос између два општа броја a и b не би био познат, а зна се само да они нису једнаки, онда се то пише овако: $a \neq b$, тј. a није једнако b, а који је од та два броја већи а који мањи, то се из овога не види.

§ 7) **Рачунске операције и њихови знаци.** Све целе бројеве *природног бројног реда:*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\ldots \infty$$

можемо замислити да су постали од *јединице* (1), додавањем 1 сваком претходном броју. Ма који број овога реда за 1 је већи од претходног а за један мањи од узастопног задњег. Овај је ред бескрајан. Знак „∞“ претставља у математици бескрајно велики број.

Међутим, све бројеве природног бројног реда можемо добити не само на горе показани начин већ и њиховим *везивањем*, и то на више начина. Тако, број 6 можемо добити сабирањем бројева 2 и 4, или одузимањем броја 2 од 8, или множењем броја 2 и 3, или дељењем броја 12 са 2 итд. Оваква везивања бројева зову се *рачунске радње* или *операције*, којих има седам: *сабирање, одузимање, множење, дељење,* *степеновање, кореновање* и *логаритмовање*. За везивање бројева при вршењу операција, како са посебним бројевима тако и са општим, служимо се знацима за *операције:* знаком *„више“* (plus) + за сабирање, знаком *„мање“* (minus) — за одузимање, знаком *„пута“* (·)[1] за множење, знаком (:) за дељење, знаком $\sqrt{}$ за кореновање и знаком *log* за логаритмовање. За степеновање немамо нарочитог знака, а да број *a* степенујемо бројем *n* означавамо a^n.

Напомена. Степен a^n претставља производ: a · a · a... (*n* пута). Тако a^2 значи a·a; a^4 = a·a·a·a; $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ Дакле производ од више једнаких чинитеља пише се краткоће ради тако што се напише само један чинитељ, а затим горе, мањом цифром, напише се број чинитеља. Такав производ, означен у овом другом облику, зове се *степен*. Код сваког степена разликујемо два дела: *основу* и *изложитељ*. Основа је један од чинитеља производа означен у облику степена, а изложитељ је део степена који нам показује колико чинитеља, као што је основа, има у производу који је степеном претстављен. Код степена: a^3, b^2, c^n, основе су: *a, b* и *c*, а изложитељи 3, 2 и *n*. Степеновати један број другим значи узети први број онолико пута као чинитељ колико други број има јединица.

Поред поменутих знакова за рачунске операције, у математици имају врло значајну улогу и заграде: *мале* ( ), *средње* [ ] и *велике* { }. Њихово је значење двојако: прво нам показују којим редом треба да вршимо означење рачунске операције, а друго, треба целокупну везу између бројева у загради сматрати као један број.

§ 8) **Алгебарски изрази.** Веза између два или више бројева, рачунским знацима означена, зове се *алгебарски израз*. То је у ствари скуп бројева, који могу бити посебни и општи, везаних међусобно знацима рачунских операција.

Алгебарске изразе делимо на *мономе* и *полиноме*. У вези бројева који чине моном не постоје знаци + и —, а бројеви су везани знацима осталих рачунских радњи. Изузетак чине разломци, код којих у бројитељу и именитељу може бити и знакова + и —, али се ипак цео разломак сматра као моном. Такви су изрази:

---

[1] Уобичајено је да се знак пута (·) не ставља између посебног и општег броја, нити између општих бројева.

$$2a,\ abc,\ 5ab,\ \frac{3a}{4},\ 8a^2b,\ \frac{5ab^2}{6c},\ \text{итд.}$$

Код сваког монома разликујемо два дела: *сачинитељ* или *коефицијенат* и *главну количину*. Коефицијенат чине сви чинитељи монома који су посебни бројеви. Код горе наведених монома коефицијенти су: 2, 1, 5, $\frac{3}{4}$, 8, $\frac{5}{6}$. Када је коефицијенат неког монома 1, он се изоставља (не пише се, нити се изговара), јер се број не мења када се помножи са 1. Отуда сваки се број: a, b, c, ... сматра као моном, јер сваки претставља производ код кога је један чинитељ 1 а други чинитељ је сам тај број. Главну количину чине сви чинитељи монома који су општи бројеви. Код горњих монома главне су количине: a, abc, ab, a, a^2b, $\frac{ab^2}{c}$.

Мономи могу бити *цели* и *разломљени*. Моном је цео, ако су му сви чинитељи главне количине само у бројитељу, а разломљен је, ако има чинитеља главне количине који су у именитељу. Од горе наведених монома разломљен је једино $\frac{5ab^2}{6c}$, а сви су остали цели. Мономи могу бити *једноимени* и *разноимени*. Први су мономи они који имају једнаке, а други различите главне количине. Тако, једноимени су мономи: $2a$, $6a$ и $8a$; затим $3ab$ и $5ab$; $\frac{3}{4}a^2b$, $5a^2b$ и $\frac{7}{9}a^2b$, и тако даље. Разноимени су мономи: $4a$, $5bc$, $3ab$ итд.

Мономе разликујемо и по *степенима*. Под степеном једног целог монома разумемо збир изложитељâ свих чинитеља његове главне количине. Тако, моном $3a$ је првог, $5ab$ другог, $4a^2b$ и $5abc$ трећег, $2a^2bc$ четвртог степена итд. Под степеном једног разломљеног монома разумемо разлику између степена бројитеља и степена именитеља његове главне количине. Тако моном $4\frac{ab}{c}$ је првог, $\frac{3a^2b}{4cd}$ такође првог, $5\frac{a^2b^2}{cd}$ другог степена итд. Коефицијенат не утиче на степен монома.

Напомена. Мономи првог степена претстављају у геометрији дужи, другог степена површине, а трећег степена запремине. Тако, ако a претставља величину неке дужи, онда моном $3a$ претставља дуж 3 пута већу од дужи a; $4ab$ претставља површину 4 пута већу од површине правоугаоника дужине a

и ширине b; $2a^2$ претставља површину 2 пута већу од површине квадрата стране a; $3a^3$ претставља запремину 3 пута већу од запремине коцке ивице a; $4abc$ претставља запремину 4 пута већу од запремине правоуглог правог паралелопипеда димензијâ a, b и c итд.

Под *полиномом* разумемо израз у коме има више монома повезаних знацима сабирања и одузимања. Полиноми су изрази: $a + b$, $a + b + c$, $3a^2 - 2b^2 + 4c^2$, $2ab + 3bc + 4mn$; $2x^2 + 3x + 5$ итд. Поједини мономи у полиному зову се члановима. Према броју чланова полиноме делимо на: двочлане *(биноме)*, трочлане *(триноме)*, четворочлане *(катриноме)*, петочлане *(сенкиноме)*,... и на n-то члане полиноме. Полиноми могу бити *хомогени* и *хетерогени*. Хомогени су полиноми они чији су сви чланови истог степена. Такви су сви горе наведени полиноми, осим последњег. У хетерогеном полиному сви чланови нису истог степена. Такав је полином $2x^2 + 3x + 5$.

Полиноме, као и мономе, разликујемо и по њиховим степенима. Под степеном једног хомогеног полинома разумемо степен ма кога његовог члана. Тако, полиноми: $a + b - c$ и $2a - 3b + 4c$ јесу првог, полиноми $2a^2 - 3b^2$ и $4ab + 3bc + 4cd$ јесу другог, полином $2abc + 3a^2b - 2b^2d$ је трећег степена итд. Под степеном једног хетерогеног полинома разумемо степен оног његовог члана који има највиши степен. Тако, полином $2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$ је трећег степена, јер његов члан $2x^3$ је тога степена, а сви остали његови чланови јесу нижег степена. Посебни број као члан у полиному сматра се као члан нултог степена.

Напомена. Хомогени полиноми првог степена претстављају нам дужи, другог степена површине, трећег степена запремине.

§ 9) **Аксиоме, теореме и дефиниције у математици.** Да би математика постигла свој задатак, служи се при својим испитивањима *аксиомама, теоремама* и *дефиницијама.* Под *аксиомом* разумемо истину која је јасна и очигледна, те је није потребно доказивати, нити се може доказати. Тако, следеће истине јесу аксиоме:

1. *Две количине једнаке трећој, једнаке су и међу собом;*
2. *Свака је количина сама себи једнака;*
3. *Целина је већа од ма ког свог дела или од више својих делова;* итд.

Под *теоремом* разумемо истину која на први поглед није очигледна као аксиома, али се њена тачност дâ доказати. Тако, теорема је: *Производ не мења своју вредност, ако његови чинитељи узајамно промене своја места.*

Под *дефиницијом* разумемо исказивање битних (својствених) знакова неког појма по којима се он разликује од других појмова исте врсте.

Поред теорема и аксиома у математици важну улогу имају и *последице*. То су правила (теореме) које се непосредно изводе из каквог претходног правила (теореме).

§ 10) **Израчунавање бројних вредности алгебарских израза.** Да бисмо нашли бројну вредност каквог алгебарског израза — монома или полинома — треба најпре да извршимо супституцију (замењивање) општих бројева у томе изразу са њиховим посебним вредностима, а затим да извршимо означене рачунске радње са добивеним посебним бројевима. При овоме послу ваља се придржавати следећих правила:

1. *Ако у алгебарском изразу нема заграда, онда, после супституције, треба најпре извршити множење и дељење, а затим сабирање и одузимање;*

2. *Ако у алгебарском изразу има заграда, онда, после супституције, треба наћи најпре бројну вредност израза у загради, а затим поступити по првом правилу;*

3. *Ако у алгебарском изразу има разломака и заграда, онда, после супституције, најпре треба израчунати бројне вредности бројитеља и именитеља, затим бројне вредности израза у заградама и најзад поступити по првом правилу.*

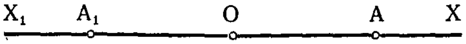
Решени примери: Наћи бројне вредности израза:

1) $x = ab - ac + bc$, за $a = 10$, $b = 6$ и $c = 3$. Супституцијом биће: $x = 10 \cdot 6 - 10 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 60 - 30 + 18 = 30 + 18 = 48$.

2) $x = a - (b + c) d$, за $a = 30$, $b = 4$, $c = 2$ и $d = 5$. Заменом биће: $x = 30 - (4 + 2) \cdot 5 = 30 - 6 \cdot 5 = 30 - 30 = 0$.

3) $x = 4(3a^2 + b) - 3(2a^2 - b)$, за $a = 8$ и $b = 5$. Заменом биће: $x = 4 \cdot (3 \cdot 8^2 + 5) - 3 \cdot (2 \cdot 8^2 - 5) = 4 \cdot (3 \cdot 64 + 5) - 3 \cdot (2 \cdot 64 - 5) = 4 \cdot (192 + 5) - 3 \cdot (128 - 5) = 4 \cdot 197 - 3 \cdot 123 = 788 - 369 = 419$.

§ 11) **Релативни или алгебарски бројеви.** Положај тачке A на правој XX_1 неће бити прецизно одређен, ако знамо само њено отстојање ОА од неке тачке О на истој правој, јер постоји још једна тачка A_1 на тој правој, која има од тачке О



Сл. 1

исто отстојање. Потребно је, дакле, да се још објасни да ли тачка А лежи с десне или с леве стране тачке О.

Ако знамо само број степена неке температуре, она неће бити потпуно одређена, ако се не објасни да ли су прочитани степени изнад или испод нуле.

Датум неког догађаја неће бити прецизно одређен, ако се зна само број година које раздвајају овај догађај од Христова рођења, јер постоје два таква датума: један пре а други после Христова рођења. Треба, дакле, још објаснити да ли се тај догађај догодио пре или после Христова рођења.

Положај неког места на географском глобусу неће бити прецизно одређен, ако су познати само степени његове географске ширине и дужине. Потребно је да се објасни да ли су степени ширине *северни* или *јужни*, а степени дужине *источни* или *западни*.

Из горњих примера види се да има количина које се могу мерити и посматрати у *два супротна смисла*, које имају два супротна *значења*. Такве количине зову се *релативним*. Такве су количине: супротне раздаљине од неке тачке, датуми пре и после Христова рођења, зарада и губитак при продаји неке робе, температура изнад и испод нуле, прошло и будуће време итд. При давању бројних вредности релативних количина, потребна су нам објашњења речима да бисмо прецизно одредили њихово значење или смисао, а та су објашњења често опширна. Да бисмо избегли сувишна објашњења, у алгебри употребљавамо знаке + (плус) и — (минус), а које стављамо испред бројних вредности релативних количина. Први се знак зове *позитиван* а други *негативан*. Позитиван знак показује нам један *смисао* или значење једне релативне количине, а негативан знак показује њен супротни смисао или њено супротно значење. Остаје још да одредимо позитивни и негативни смисао, позитивно и негативно значење једне релативне количине. У пракси уобичајено је да зараду означавамо зраком + а губитак знаком —; температуру изнад нуле са + а испод нуле са —; кретање тачке надесно са + а налево са —; северну географску ширину са + а јужну са —; источну географску дужину са + а западну са — итд. Тако, ако + 10° означава 10° над нулом, онда — 10° означаваће 10° испод нуле; ако + 500 година означава 500 година после Христова рођења, онда — 500 година означаваће 500 година пре Христова рођења; ако + $8m$ означава отстојање неке тачке десно од тачке О на правој XX_1, онда — $8m$ означаваће отстојање од $8m$ на левој страни, итд. *Бројеви снабдевени знаком + зову се позитивни, а снабдевени знаком — негативни. Позитивни и негативни бројеви једним се именом зову* **релативни** *или* **алгебарски бројеви**. На супрот релативним бројевима, сви бројеви без знакова пред њима називају се **апсолутни бројеви**.

Код сваког алгебарског броја водимо рачуна о знаку и о његовој *апсолутној вредности* Апсолутна вредност алгебарског броја је број иза знака. Тако, апсолутна вредност алгебарског броја + 5 је 5; а апсолутна вредност алгебарског броја — 8 је 8. Два алгебарска броја једнаких апсолутних вредности а различито означени, зову се *супротни бројеви*. Такви су бројеви + 3 и — 3.

Два алгебарска броја који су и једнаке апсолутне вредности и једнако означени зову се *једнаки*.

У алгебарске бројеве сматрамо и нулу, али, обично, пред њом не пишемо ни позитивни ни негативни знак.

У пракси позитивни знак + ретко се ставља пред позитивни број. Број без знака сматрамо увек позитивним. У операцијама са алгебарским бројевима стављамо ове бројеве у заграду. Тако, ако имамо да множимо број + 5 са бројем — 3, означавамо: (+5) · (—3).

ПРВИ ОДЕЉАК

ОСНОВНЕ РАДЊЕ СА ОПШТИМ И АЛГЕБАРСКИМ БРОЈЕВИМА, МОНОМИМА И ПОЛИНОМИМА[1]

I. Сабирање и одузимање

§ 12) Сабирање апсолутних целих бројева и монома

а) *Сабирање је таква рачунска радња којом од два или више бројева добијамо број у коме има онолико јединица колико их има скупа у свима датим бројевима.*

Резултат сабирања зове се *збир* или *сума,* а бројеви које сабирамо зову се *сабирци* или *чланови збира.* Знак сабирања је + (плус), који је увео у XVI веку немачки математичар Рудолф.

б) *Један посебан и један општи број, или више општих бројева, сабирамо када их напишемо један поред другога, а између њих ставимо знак сабирања.* Тако, ако имамо да сабирамо сабирке 5 и a, онда је њихов збир

$$5 + a,$$

а збир од бројева: a, b, c и d је израз:

$$a + b + c + d.$$

Збир од бројева a, b, c, d и e дâ се написати и овако:

$$\{[(a + b) + c] + d\} + e$$

а показује нам *ред* по коме треба да вршимо сабирање. Треба, дакле, најпре сабрати бројеве a и b, њиховом збиру додати трећи сабирак c, новом збиру додати четврти сабирак d итд., али се у пракси обично заграде изостављају.

с) *Збир од два или више бројева не зависи од реда по коме поједине бројеве сабирамо.* Тако, збир од бројева: 5, 3 и 9 је 17, а добијамо га сабирањем:

$5 + 3 + 9 = 17$, или $5 + 9 + 3 = 17$, или $9 + 5 + 3 = 17$, итд.

Тако исто су једнаки збирови:

$a+b+c = a+c+b = b+a+c = b+c+a = c+a+b = c + b+a$, јер сваки збир садржи све јединице бројева a, b и c.

---

[1] Овај одељак сами ученици обнављају.

d) *Неком броју додајемо збир од два или више бројева, када томе броју додајемо све сабирке збира ма којим редом.* Тако: $8+(3+4+9)=[(8+3)+4]+9=[(8+4)+3]+9=$ $=[(8+9)+3]+4$, или изостављањем заграда:

$$8+(3+4+9)=8+3+4+9=24.$$

Исто је:

$$a+(b+c+d)=a+b+c+d=a+d+b+c=$$
$$=a+d+c+b.$$

e) *Збир од два или више једнаких сабирака пише се краће, када се напише само један сабирак, а пред њим се стави број тих сабирака.* Тако:

$$a+a=2a;\quad b+b+b=3b;$$
$$ab+ab+ab+ab=4ab.$$

Овакви збирови написани у овом другом облику нису ништа друго до мономи. Према овоме, један моном претставља збир од онолико једнаких сабирака, као што је главна количина, колико његов коефицијенат има јединица. Тако:

$$4a=a+a+a+a;\quad 3a^2b=a^2b+a^2b+a^2b.$$

На основу овога изводимо правило о сабирању једноимених монома које гласи: *два или више једноимених монома сабирамо, кад им саберемо коефицијенте, па добивеном збиру допишемо заједничку главну количину. На пр.*

$$3ab+2ab=5ab, \text{ јер је } 3ab+2ab=(ab+ab+ab)+$$
$$+(ab+ab)=ab+ab+ab+ab+ab=5ab.$$

Исто је тако:

$$8a^2b+a^2b+5a^2b=14a^2b;\quad 2abc+7abc=9abc.$$

Напомена. Два или више разноимених монома сабирамо као ма која два или више бројева, тј. пишемо их један поред другога, а између њих ставимо знак сабирања.

Тако, збир монома: $3a$, $4b$ и $7c$ је:

$$3a+4b+7c.$$

f) *Једнаки бројеви сабрани са једнаким дају једнаке резултате.* Тако, ако је $a=b$ и $c=d$, онда је:

$$a+c=b+d.$$

Да је ово правило тачно, увиђамо из једначине $a+c=$ $=a+c$, ако на њеној десној страни заменимо a са b и c са d, чиме добијамо:

$$a+c=b+d.$$

m) *Неједнаки бројеви сабрани са једнаким дају неједнаке резултате истог знака неједнакости.* Тако, ако је $a>b$ и $c=d$, онда је:

$$a + c > b + d.$$

Примери.

1) За $8 > 5$ и $9 = 9$, биће $8 + 9 > 5 + 9$, или $17 > 14$.
2) За $7 < 9$ и $6 = 6$, биће $6 + 7 < 9 + 6$, или $13 < 15$.

§ 13) **Одузимање апсолутних целих бројева и монома**

а) *Одузимање је рачунска радња обрнута сабирању. Код одузимања је познат збир од два броја и један сабирак, а тражи се други сабирак.*

Познати збир зове се *умањеник*, познати сабирак *умалитељ*, а тражени сабирак, или резултат одузимања *разлика* или *остатак*. Умањеник и умалитељ зову се члановима разлике. Разлика бројева a и b, где је $a > b$, означава се

$$a - b$$

а чита се: a минус b. *Дакле, да бисмо извршили радњу одузимања између једног посебног и једног општег броја, или између два општа броја, треба само да их напишемо један поред другога а између њих да ставимо знак одузимања.*

Из дефиниције радње одузимања јасно је *да је умањеник раван збиру умалитеља и разлике*, тј.

$$(a - b) + b = a.$$

b) Особине разлике

1) Из једначине: $(a - b) + b = a$ . . . (1)
закључујемо: *број се не мења, ако му најпре одузмемо а резултату додамо један исти број, или обрнуто, ако му најпре додамо а затим одузмемо један исти број.* На пр.:

$$(8 - 5) + 5 = 8 \text{ и } (8 + 5) - 5 = 8.$$

2) *Разлика се не мења, ако и умањенику и умалитељу додамо један исти број.* Тако,

$$a - b = (a + m) - (b + m).$$

Заиста, ако је $a - b = c$, то је $a = b + c$. Тада је: $a + m = b + c + m$, или $(a + m) = (b + m) + c$. Одавде је: $c = (a + m) - (b + m)$, или заменом c са $a - b$:

$$a - b = (a + m) - (b + m).$$

3) *Од једнога броја одузима се збир од два или више сабирака, када се од тога броја одузму сабирци један за другим у произвољном реду.* Тако, $a - (b + c + d) = a - b - c - d$, јер сабирањем умалитеља $(b + c + d)$ са разликом $(a - b - c - d)$ добијамо умањеник a. На пр.

$$60 - (25 + 15) = (60 - 15) - 25 = 20.$$

Обрнуто, *два или више бројева одузимају се од некога броја, кад се од тога броја одузме њихов збир.* Тако, $a - b - c - d = a - (b + c + d)$.

На пр. $60 - 25 - 15 = 60 - (25 + 15) = 60 - 40 = 20$.

4) *Један се број одузима од неког збира, кад се одузме од ма ког његовог сабирка.* Тако, $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$, јер сабирањем умалитеља c са разликом добијамо умањеник $(a + b)$. Овде се претпоставља да је $a > c$ и $b > c$, тј. имамо могућа одузимања.

5) *Једном броју додаје се разлика, кад му се дода умањеник а одузме умалитељ.* Тако, $a + (b - c) = a + b - c$.

На пр. $30 + (18 - 10) = (30 + 18) - 10 = 38$.

6) *Од неког броја одузима се разлика, кад се од тога броја одузме умањеник а затим се дода умалитељ, или се томе броју најпре дода умалитељ а затим се одузме умањеник.* Тако, $a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b$, јер умалитељ $(b - c)$ сабран са разликом $(a - b + c)$ даје умањеник a.

Пример. $50 - (30 - 22) = (50 - 30) + 22 = (50 + 22) - 30 = 42$.

c) *Одузимање монома*

1) *Два једноимена монома одузимамо, када им одузмемо коефицијенте, па добивеној разлици допишемо заједничку главну количину.* Тако, $5ab - 3ab = 2ab$, јер је:

$$5ab - 3ab = (ab + ab + ab + ab + ab) - (ab + ab + ab) = ab + ab + ab + ab + ab - ab - ab - ab = ab + ab = 2ab.$$

2) *Два разноимена монома одузимамо, када их само напишемо један поред другога, а између њих ставимо знак одузимања.* Тако, разлика између монома $5a$ и $3b$ је $5a - 3b$.

d) *Особине једначина и неједначина*

1) *Ако од једнаких бројева одузмемо једнаке бројеве, добијамо једнаке резултате.* Тако, ако је $a = b$ и $c = d$, онда је

$$a - c = b - d.$$

Да је ово правило тачно, увиђамо из једначине

$$a - c = a - c$$

ако на њеној десној страни заменимо a са b и c са d, чиме добијамо:

$$a - c = b - d.$$

2) *Ако од неједнаких бројева одузмемо једнаке бројеве, добијамо неједнаке резултате истог знака неједнакости.* Тако, ако је $a > b$ и $c = d$, онда је

$$a - c > b - d \quad [a > c \text{ и } b > d].$$

Пример. $15 > 9$ и $5 = 5$; $15 - 5 > 9 - 5$.

3) *Ако од једнаких бројева одузмемо неједнаке бројеве, добијамо неједнаке резултате супротног знака неједнакости.* Тако, ако је $a = b$ и $c > d$, онда је $a - c < b - d$.

Пример. $20 = 20$ и $15 > 10$; $20 - 15 < 20 - 10$.

§ 14) **Сабирање алгебарских бројева.** Сваки негативни алгебарски број можемо сматрати као *разлику*, чији је умањеник 0 (нула) а умалитељ већи од нуле, а добива се, када имамо да одузимамо већи број од мањег. Тако, ако имамо да одузмемо број 15 од броја 10, онда добијамо:

$$10 - 15 = 10 - (10 + 5) = 10 - 10 - 5 = 0 - 5.$$

Оваква разлика пише се друкчије, када се изостави умањеник 0, а оставимо знак одузимања и умалитељ. Тако, $0 - 5 = -5$; $0 - 8 = -8$; $0 - a = -a$. Изостављањем умањеника 0 код оваквих разлика, добијамо негативан број. Негативан број у ствари је онај број јединица већега броја, за колико је он већи од мањега, а које су остале неодузете, јер немамо од чега да их одузмемо.

Напротив, позитиван алгебарски број можемо сматрати као збир од два сабирка од којих је један нула а други апсолутна вредност дотичног алгебарског броја. Тако, $+5 = 0 + 5$; $+a = 0 + a$. И овакве збирове пишемо друкчије, када изоставимо сабирак 0, а оставимо знак сабирања и други сабирак.

Дајући овакво тумачење алгебарским бројевима и узимајући у помоћ правила о додавању и одузимању збира и разлике од два броја неком броју (§ 11 под *d* и § 12 под 3, 5 и 6 тачке b), лако изводимо правило о сабирању алгебарских бројева које гласи:

Два алгебарска једнако означена броја сабирамо, када саберемо њихове апсолутне вредности, а добивени збир снабдемо заједничким знаком. Два алгебарска броја неједнако означена сабирамо, када мању апсолутну вредност одузмемо од веће апсолутне вредности, а добивену разлику снабдевамо знаком веће апсолутне вредности. Тако,

1) $(+7) + (+5) = +12$; 3) $(+7) + (-5) = +2$; и
2) $(-7) + (-5) = -12$; 4) $(-7) + (+5) = -2$.

Доказ.

1) $(+7) + (+5) = (0 + 7) + (0 + 5) = 0 + 7 + 0 + 5 =$
$= 0 + 0 + 7 + 5 = (0 + 0) + (7 + 5) = 0 + 12 = +12$;

2) $(-7) + (-5) = (0 - 7) + (0 - 5) = 0 - 7 + 0 - 5 =$
$= 0 + 0 - 7 - 5 = (0 + 0) - (7 + 5) = 0 - 12 = -12$;

3) $(+7)+(-5)=(0+7)+(0-5)=0+7+0-5=$
$=0+0+7-5=(0+0)+(7-5)=0+2=+2;$

4) $(-7)+(+5)=(0-7)+(0+5)=0-7+0+5=$
$=0+0-7+5=(0+0)-(7-5)=0-2=-2.$

Последице: 1) *Збир од два супротна алгебарска броја је 0.* Тако, $(+5)+(-5)=0;$ $(-5)+(+5)=0.$

2) *Ако је један алгебарски број 0, онда је збир раван другом броју.* Тако, $(+6)+0=+6;$ $(-6)+0=-6.$

3) *Збир од два алгебарска броја не зависи од реда којим их сабирамо.* Тако, $(+8)+(-3)=+5;$ $(-3)+(+8)=+5.$

4) *Три и више алгебарских бројева сабирамо, кад најпре саберемо два, затим резултат сабирамо с трећим бројем, нови резултат с четвртим бројем итд., и то произвољним редом.* Тако,

$$(+4)+(-2)+(-7)+(+8)+(-1)=+2.$$

Овде је $(+4)+(-2)=+2;$ $(+2)+(-7)=-5;$ $(-5)+(+8)=+3;$ и $(+3)+(-1)=+2.$ До истог резултата долазимо, ако их саберемо и другим редом. Тако,

$$(-7)+(+4)+(+8)+(-1)+(-2)=+2; \text{ и}$$
$$(-2)+(-7)+(-1)+(+4)+(+8)=+2 \text{ итд.}$$

Напомена. При сабирању више алгебарских бројева можемо најпре сабрати све позитивне, а затим све негативне бројеве, па њихове збирове сабирамо. Тако,

$$(+5)+(-13)+(-8)+(+6)+(+9)+(-7)=$$
$$=[(+5)+(+6)+(+9)]+[(-13)+(-8)+(-7)]=$$
$$=[+20]+[-28]=-8.$$

На основу правила о сабирању два алгебарска броја изводимо опште обрасце, а за $a>b$:

1) $(+a)+(+b)=+(a+b);$ 3) $(+a)+(-b)=+(a-b);$ и
2) $(-a)+(-b)=-(a+b);$ 4) $(-a)+(+b)=-(a-b).$

Напомена. Сабирање алгебарских бројева врло згодно може да се примени код прихода и расхода неког лица. Пошто се приходи неког лица додају ономе што има, а његови се расходи одузимају, то се приходи сматрају за позитивне а расходи за негативне бројеве. Лице знаће стање своје имовине, ако алгебарски дода своје приходе и расходе своме првобитном капиталу. На пр.

1) Неко је имао у почетку свога рада 300 дин., а затим у својим књигама записивао суме: $+70$, -40, $+120$, -50 динара; колико динара има у каси?

Пошто је имао у почетку 300 дин., и зарадио је најпре 70 дин., то је свега имао у каси 370 дин., одузимањем 40 дин. расхода, остаје му у каси 330 дин., додавањем нове зараде од 120 дин., имаће у каси 450 дин.; и најзад одузимајући 50 дин. расхода, остају му напослетку 400 дин. До истог резултата долазимо применом правила о сабирању алгебарских бројева, јер је:

$$(+300)+(+70)+(-40)+(+120)+(-50)=+400.$$

b) Неко је имао 3000 дин. готовине, а дужан је за робу 3500 дин.. Какво је стање његове имовине?

Како је имао само 3000 дин. готовине, а 3500 дуга, то је јасно да је после обрачунавања остао још дужан 500 дин. До овог резултата долазимо и по правилу о сабирању алгебарских бројева, јер је:

$$(+3000)+(-3500)=-500.$$

c) Неко је имао 60 динара дуга и зарадио је 90 динара. Колико је имао после тога?

Са зарађених 90 динара он је исплатио дуг од 60 дин. и остало му је готовине 30 дин. По правилу о сабирању алгебарских бројева долазимо до истог резултата, јер је:

$$(-60)+(+90)=+30.$$

d) Неко је имао дуг 100 дин., па се још задужио 50 дин. Колико је сада дужан?

Пошто се поред старог дуга од 100 дин. задужио још 50 дин., то му је целокупни дуг 150 дин. По правилу о сабирању алгебарских бројева добијамо исти резултат, јер је:

$$(-100)+(-50)=-150.$$

Из горња четири примера види се да правило о сабирању позитивних и негативних бројева даје тачне резултате потпуно саобразне са стварношћу.

§ 15) **Одузимање алгебарских бројева.** На основу правила да је код одузимања умањеник једнак збиру од умалитеља и разлике, лако је доказати правило о одузимању алгебарских бројева, које гласи:

Разлика од два алгебарска броја једнака је збиру од умањеника и супротног броја умалитеља.

Тако, ако је b' супротан број броју b, онда је $a-b=$ $=a+b'$, јер збир разлике $(a+b')$ и умалитеља b је $a+b'+$ $+b=a+(b'+b)=a+0=a$, тј. $=$ умањенику.

Примери:

1) $(+9)-(+5)=(+9)+(-5)=+4$, јер је $(+4)+(+5)=+9$;
2) $(+9)-(-5)=(+9)+(+5)=+14$, „ „ $(+14)+(-5)=+9$;

3) $(-9)-(+5)=(-9)+(-5)=-14$, јер је $(-14)+(+5)=-9$; и
4) $(-9)-(-5)=(-9)+(+5)=-4$, „ „ $(-4)+(-5)=-9$.

Све особине разлике апсолутних бројева у важности су и код разлике алгебарских бројева.

Примери:

1) $(+8a)-(+3a)=+5a$; 4) $(-15a^2b)-(-8a^2b)=-7a^2b$;
2) $(+12ab)-(-4ab)=+16ab$; 5) $(-4a^3)-(-4a^3)=0$;
3) $(-10a^2)-(+2a^2)=-12a^2$; 6) $(-20abc)-(+10abc)=$
$=-30abc$.

§ 16) **Упоређивање алгебарских бројева.** За један алгебарски број a каже се да је већи од алгебарског броја b, ако је разлика $a-b$ позитиван број. Напротив, ако је разлика $a-b$ негативан број, онда је број a мањи од броја b. Тако, број $+8$ је већи од броја $+5$, јер је $(+8)-(+5)=+3$, тј. *од два позитивна броја већи је онај који има већу апсолутну вредност.*

Број $+3$ је већи од броја -6, јер је $(+3)-(-6)=+9$, тј. *сваки позитиван број већи је од ма ког негативног броја.*

Број -5 већи је од броја -7, јер је $(-5)-(-7)=+2$, тј. *од два негативна броја већи је онај који има мању апсолутну вредност.*

Како је $(+a)-0=+a$ и $(-a)-0=-a$, *то је сваки позитиван број већи, а сваки негативан број мањи од нуле.*

Стога се позитивни број $(+a)$ често означава: $+a>0$, а негативни број $(-a)$ означава: $-a<0$.

§ 17) **Алгебарски збирови.** Под алгебарским збиром разумемо означени збир од више алгебарских бројева. Такви су збирови:

$(+a)+(-b)+(-c)+(+d)+(+e)$; $(+3a)+(-4b)+(+3c)+(-5d)$ итд. Бројеви: $+a$, $-b$, $-c$, $+d$, и $+e$ зову се члановима збира (сабирцима, сумандима). Сваки алгебарски збир дâ се написати у облику полинома, ако изоставимо заграде и знак сабирања, а пишемо његове бројеве са њиховим знацима. Тако, $(+a)+(-b)+(-c)+(+d)+(+e)=a-b-c+d+e$, јер је, на основу правила о додавању збирова и разлика неком броју:

$$(+a)+(-b)+(-c)+(+d)+(+e)=(0+a)+(0-b)+(0-c)+(0+d)+(0+e)=0+a+0-b+0-c+0+d+0+e=0+0+0+0+0+a-b-c+d+e=a-b-c+d+e.$$

Обрнуто, сваки полином да̂ се написати у облику алгебарског збира, ако његове чланове ставимо у заграде са њиховим знацима, а између њих ставимо знак сабирања. Тако, $4ab - 3ac + 5bc = (+4ab) + (-3ac) + (+5bc)$.

Сводити један алгебарски збир значи сабрати му чланове који су једноимени. Тако, $(+7a) + (-3a) + (-4b) + (+6b) = (+4a) + (+2b) = 4a + 2b$.

Ово свођење да̂ се извршити и после претварања алгебарског збира у облик полинома. Тако, $(+7a) + (-3a) + (-4b) + (+6b) = 7a - 3a - 4b + 6b = 7a - 3a + 6b - 4b = 4a + 2b$. При свођењу једног алгебарског збира или полинома управљамо се, дакле, по правилу о сабирању два алгебарска броја једнако или супротно означена.

Примери:

1) $(+9a) + (-5a) + (-2a) + (+6a) = +8a$, јер је $(+9a) + (-5a) = +4a$, $(+4a) + (-2a) = +2a$, $(+2a) + (+6a) = +8a$. Овај збир, написан у облику полинома има облик:

$9a - 5a - 2a + 6a$; сведен, даје вредност $8a$. При свођењу овога полинома изговарамо: плус $9a$ и минус $5a$ даје плус $4a$, плус $4a$ и минус $2a$ даје плус $2a$, плус $2a$ и плус $6a$ даје плус $8a$, тј. изговарамо све чланове алгебарског збира: $(+9a) + (-5a) + (-2a) + (+6a)$, а знак сабирања изговарамо свезом *и*.

За два алгебарска збира кажемо да су супротна, ако имају исте чланове али са супротним знацима. Такви су збирови: $S = (+7) + (-3) + (+5) + (-6)$ и $S' = (-7) + (+3) + (-5) + (+6)$. Зову се супротним алгебарским збировима, јер су њихови резултати два супротна алгебарска броја. Тако, код горњих збирова је $S = +3$ и $S' = -3$. Супротни су тако исто збирови (полиноми) $S = a + b - c - d + e$ и $S' = -a - b + c + d - e$, јер је $S = (+a) + (+b) + (-c) + (-d) + (+e)$ и $S' = (-a) + (-b) + (+c) + (+d) + (-e)$.

§ 18) **Сабирање и одузимање полинома.** 1) Једном изразу M, који може бити моном или полином, додајемо један алгебарски збир, када томе изразу додамо све чланове збира са њиховим знацима. Тако, ако хоћемо да броју 20 додамо алгебарски збир $S = (+6) + (-2) + (+5) + (-4)$, добијамо: $20 + 6 - 2 + 5 - 4 = 25$. До овога истога резултата долазимо ако броју 20 додамо вредност збира $S = +5$,

$20 + 5 = 25$. Тако исто, ако хоћемо изразу M да додамо гебарски збир $S = (+a) + (-b) + (-c) + (+d) = -b - c + d$, добијамо: $M + S = M + (a - b - c + d) = M + a - b - c + d$.

2) Од једног израза M, који може бити моном или олином, одузимамо један алгебарски збир, ако му додамо ве чланове са супротним знацима. Тако, ако хоћемо од броја 20 да одузмемо збир $S = (+6) + (-2) + (+5) + (-4)$, добијамо $20 - 6 + 2 - 5 + 4 = 15$. Заиста, до овога резултата бисмо дошли ако од броја 20 одузмемо вредност збира $S = +5 = 5$, тј. $20 - 5 = 15$, или ако броју 20 додамо супротни збир $S' = (-6) + (+2) + (-5) + (+4)$, у ком случају добијамо: $20 - 6 + 2 - 5 + 4 = 15$, или $20 + S' = (+20) + (-5) = +15 = 15$. Тако исто, ако хоћемо од израза M да *одузмемо* збир $S = (+a) + (-b) + (-c) + (+d) = a - b - c + d$, добијамо исти резултат који би се добио када изразу M *додамо* супротни збир $S' = (-a) + (+b) + (+c) + (-d) = -a + b + c - d$. Тај је резултат: $M - S = M + S' = M + (-a + b + c - d) = M - a + b + c - d$.

На основу горња два правила о додавању или одузимању једног алгебарског збира, изводимо правило о сабирању и одузимању полинома, а које гласи:

а) *Једном моному или полиному додајемо полином, када томе моному (полиному) додамо све чланове полинома са њиховим знацима;*

b) *Од једнога монома или полинома одузимамо полином, када томе моному (полиному) додамо све чланове полинома са супротним знацима.*

Примери:

1) $(7a + 2b - 3c) + (4a - 6b + 5c) = 7a + 2b - 3c + 4a - 6b + 5c = 11a - 4b + 2c;$

2) $(7a + 2b - 3c) - (4a - 6b + 5c) = 7a + 2b - 3c - 4a + 6b - 5c = 3a + 8b - 8c.$

Напомена. При сабирању и одузимању полинома можемо полиноме писати један испод другога тако да су им једноимени чланови један испод другога, а затим вршимо свођење, пошто претходно променимо код одузимања умалитељу знаке.

1) $$\left.\begin{array}{r}7a + 2b - 3c\\ 4a - 6b + 5c\end{array}\right\}+ \qquad \begin{array}{r}\hline 11a - 4b + 2c.\end{array}$$

2) $$\left.\begin{array}{r}7a + 2b - 3c\\ 4a - 6b + 5c\\ - \quad + \quad -\end{array}\right\}- \qquad \begin{array}{r}\hline 3a + 8b - 8c\end{array}$$

Напомена. При сабирању и одузимању полинома или алгебарских збирова ослобођавамо се претходно од заграда. При ослобођавању од заграда управљамо се по овом практичном правилу:

Ако пред заградом постоји знак +, онда се овај знак и заграда изостављају, а пишу се чланови полинома са њиховим знацима; ако пред заградом постоји знак —, онда се овај знак и заграда изостављају, а чланови се полинома пишу са супротним знацима.

Ако у једном полиному има више заграда, онда се ослобођавање врши поступно, и то најпре малих, па средњих и најзад великих, или обратно.

Примери.

1) $(3a - 2b) + (5a + 3b) - (7a - 6b) = 3a - 2b + 5a +$
$+ 3b - 7a + 6b = a + 7b;$

2) $12ab^2 + \{5b^2 - [(3b^2 - 7a^2) - (10ab^2 - 4b^2)]\} = 12ab^2 +$
$+ \{5b^2 - [3b^2 - 7a^2 - 10ab^2 + 4b^2]\} = 12ab^2 + \{5b^2 -$
$- 3b^2 + 7a^2 + 10ab^2 - 4b^2\} = 12ab^2 + 5b^2 - 3b^2 + 7a^2 +$
$+ 10ab^2 - 4b^2 = 22ab^2 - 2b^2 + 7a^2.$

Обрнуто, можемо да уводимо заграде код једног полинома стављајући његове чланове у заграду. При овоме водимо рачуна да ли пред заграду стављамо знак + или —. У првом случају пишемо чланове полинома у загради са њиховим знацима, а у другом са супротним. Тако, $a - b + c - d - e =$ $= (a - b) + (c - d - e) = a - (b - c + d + e) = (a + c) -$ $- (b + d + e) = (a - b + c) - (d + e)$ итд.

§ 19) **Задаци за вежбу из сабирања и одузимања**

1) $(+8) + (+5);$
2) $(-8) + (-3);$
3) $(-7) + (+4);$
4) $(+12) + (-7);$
5) $(+a) + (-4a);$
6) $(+2x) + (-9x);$
7) $(+2a) + (+5a);$
8) $(-9ab) + (-4ab);$
9) $(+6a) + (-2a);$
10) $(+7b) + (-8b);$
11) $(-7) + (-4) + (-9);$
12) $(-3ab) + (-3ab) +$
$+ (+9ab);$
13) $(-12a) + (-8a) +$
$+ (+10a);$
14) $(-7xy) + (-3xy) + (+15xy);$
15) $(+a) + (+b) + (+4a) + (+5b) + (-7b);$
16) $\left(+\frac{5}{7}a\right) + \left(-\frac{1}{7}a\right) + \left(+\frac{2}{7}a\right) + \left(+\frac{4}{7}a\right);$
17) $(-0{,}35x) + (+1{,}75x)) + (-2{,}30x);$

18) $(+5)-(+2)$;
19) $(+12)-(-10)$;
20) $(-7)-(-4)$;
21) $\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{1}{6}\right)$;
22) $(+8a)-(-3a)$;
23) $(-7ab)-(-3ab)$;
24) $(+8a^2)-(+4a^2)$;
25) $(-10a^2b)-(-6a^2b)$;
26) $(-25)-[(+10)+(-5)+(-3)]$;
27) $(+1{,}52x)-[(-2{,}4x)+(-0{,}1x)+(+3{,}4x)]$;
28) $4ab-18ab+20ab-7ab+13ab$;
29) $10+(+8-a)+(-2b+3a-7)+(-8+3b)$;
30) $(+80)-[(+20)-(-30)-(-15)-(-40)+(+50)]$;
31) $2a-(+a-b+c)$;   32) $a-(2b-3c)-(8a-7b)$;
33) $(5x-3y-2z)-(-7x+4y-5z)$;
34) $(7xy-3zu)-(-2xy+8zu)$;
35) $(4a-8b+3c-7d)+(5a+2b-7c+2d)$;
36) $(5x^2-8x+3y-5)+(15x^2+6x-7y+9)$;
37) $(20x-24y+18z-15)-(8x-10y-9z+25)$;
38) $\left(3a^2-2b^2+\frac{c^2}{2}\right)-\left(2a^2-2b^2-\frac{4}{3}c^2\right)$;
39) $26a-(9a-5b+6c)+(13a+11b-17c)-(4a-3b-9c)-(17b-11c)$;
40) $(123a-147b)-[25a-(17a-19b)-(23b+4a)-11b]$;
41) $95x^2-(57y^2+11xy)-[54xy-(36x^2-19y^2)-(37y^2-25x^2)]-(-32y^2+66xy)$;
42) $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-z^2\right)+\left[\frac{y^2}{6}+\left(x^2-\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}\right)\right]-\left[\frac{x^2}{6}-\left(y^2-\frac{z^2}{3}\right)\right]+\frac{z^2}{3}$;
43) $(x^2yz-3xy^2z+2xyz^2)-\{7x^2yz-5xy^2z-[10xyz^2-(x^2yz+xy^2z)]\}$;
44) $[7(a-x)^2-10(a-x)^4+(a-x)^6]-[-3(a-x)^4+5(a-x)^6+9(a-x)^2]$;

45) Дати су полиноми: $A=x^5+x^3-8$, $B=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$, $C=x^5-2x^4+x-2$ и $D=x^3-4x^3+4$; да се изврше радње: $A+B+C+D$, $A-B+C-D$, $A-B-C+D$, $B-C-D-A$, $D-A-B-C$ и $B+D-C-A$.

46) Који полином треба додати полиному $a^2-2b-3ac+4b^2$ да би се добио полином $4ab-3bc+5c^2$?

47) Полином $4a^2+5b^2-3ab+2c^2-ac-3bc$ да се претстави као разлика чији је умањеник: $4a^2$, или $4a^2-3ab$, или $5b^2-3bc$, или $2c^2-ac$.

II. Множење

§ 20) Множење апсолутних целих бројева и монома

1) *Множење је таква рачунска радња којом од два броја добијамо као резултат број који би се добио ако један од датих бројева узмемо као сабирак онолико пута колико други број има јединица.* Тако, ако имамо да помножимо број 5 са бројем 3, добијамо резултат 15, а до овога резултата долазимо или узимањем броја 5 као сабирак 3 пута ($5+5+5=15$), или узимањем броја 3 као сабирак 5 пута ($3+3+3+3+3=15$). Број који се множи зове се *множеник,* број којим множимо *множитељ,* а резултат множења *производ.* Множеник и множитељ једним се именом зову *чинитељи.* Према овоме, *производ је збир једнаких сабирака.* Тако, производ од чинитеља a и b, који се пише $a\cdot b$ или ab, претставља или збир: $a+a+a+\cdots$ (b пута), или збир: $b+b+b+\cdots$ (a пута). Производ од три и више чинитеља одређује се, кад се најпре одреди производ од два чинитеља, затим се добивени производ множи трећим чинитељем итд.

Тако, ако производ од чинитеља a, b, c и d означимо са m, онда је $a\cdot b\cdot c\cdot d=[(ab)c]\,d=abcd=m$.

Веза: $abcd$ заступа производ m, тј. заступа резултат множења, или вредност производа. Знак множења ($\times$ или $\cdot$) обично се не ставља између једног посебног и једног општег броја, нити између општих бројева, нити пред заградом. Тако, $5\cdot a\cdot b$ пише се $5ab$ и изговара се „пет а бе“; $3\cdot(a+b)$ пише се $3\,(a+b)$ а изговара се „три помножено са збиром a плус b“, али се тај знак мора стављати између посебних бројева, на пр. 3×5, 4×173 итд., јер би се добили сасвим други бројеви: 35, 4173 итд. кад се он не би ставио.

2) *Производ се не мења, ако његови чинитељи узајамно промене своја места.*

Тако, $2\cdot 3\cdot 5=3\cdot 2\cdot 5=2\cdot 5\cdot 3=3\cdot 5\cdot 2=5\cdot 2\cdot 3=5\cdot 3\cdot 2=30$.
Тако исто: $a\cdot b\cdot c=acb=bac=bca=cab=cba$.

3) *Производ од 1 и од ма ког другог чинитеља једнак је другом чинитељу.* Тако,

$1\cdot 4=1+1+1+1=4$; $1\cdot a=1+1+1+1+\cdots$(a пута)$=a$; $5\cdot 1=1\cdot 5=1+1+1+1+1=5$.

4) *Производ од 0 и од ма ког другог чинитеља једнак је 0.* Тако, $0\cdot 5=0+0+0+0+0=0$; $0\cdot a=0+0+0+\cdots\cdots$ (a пута)$=0$; $4\cdot 0=0\cdot 4=0+0+0+0=0$.

5) *Производ множимо неким бројем, ако му помножимо ма који од његових чинитеља.* Тако,

$$(2\cdot 3\cdot 5)\cdot 4 = (2\cdot 4)\cdot 3\cdot 5 = 2\cdot (3\cdot 4)\cdot 5 = 2\cdot 3\cdot (5\cdot 4) = 120;$$
$$(abc)\cdot d = (ad)\,bc = a\,(bd)\,c = ab\,(cd) = abcd.$$

6) *Број множимо производом, ако га најпре помножимо једним чинитељем, затим добивени резултат другим чинитељем, нови резултат трећим чинитељем* итд. Тако,

$$5\cdot (2\cdot 3\cdot 4) = (5\cdot 2)\cdot 3\cdot 4 = (10\cdot 3)\cdot 4 = 30\cdot 4 = 120;$$
$$a\cdot (bcde) = \{[(ab)c]d\}e = abcde.$$

7) *Степене једнаких основа множимо када заједничку основу степенујемо збиром изложитеља.*

Тако, $a^3\cdot a^2\cdot a^4 = a^9$, јер је:

$$a^3\cdot a^2\cdot a^4 = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^9;\quad a^m\cdot a^n = a^{m+n}.$$

Напомена. Степене различних основа множимо као ма која два општа броја, тј. треба их написати један поред другога, а између њих ставити или не ставити знак множења.

Тако, $a^3\cdot b^4 = a^3\,b^4$; $a^m\cdot b^n = a^m\,b^n$.

8) На основу горњих правила изводи се правило о множењу монома које гласи: *Моном се множи мономом, када се производу коефицијената допише производ главних количина.*

Тако, $2a\cdot 3b = 6ab$; $7xy\cdot 8zu = 56\,xyzu$.

$3ab\cdot 4abc = 12a^2\,b^2\,c$, јер је по 6 правилу:

$3ab\cdot 4abc = (\{[(3ab)4]a\}b)c$, а по 5 правилу је:

$3ab\cdot 4 = 12ab$, затим $12ab\cdot a = 12a^2b$, затим $12a^2b\cdot b = 12a^2b^2$, и најзад $12a^2\,b^2\cdot c = 12a^2b^2c$.

Примери:

1) $4a^2bc\cdot 5ab^2c = 20a^3b^3c^2$;

2) $\dfrac{3}{4}\,ab\cdot \dfrac{5}{7}\,a^2b = \dfrac{15}{28}\,a^3b^2$

3) $5a^m\,b^n\,c\cdot 2a^2\,b^3\,cd = 10a^{m+2}\,b^{n+3}c^2\,d.$

9) *Збир се множи неким бројем, кад му се најпре помноже тим бројем сви сабирци, а затим се резултати саберу.*

Тако: $(a+b+c+d)\cdot 3 = 3a+3b+3c+3d$, јер је:

$$(a+b+c+d)\cdot 3 = (a+b+c+d)+(a+b+c+d)+$$
$$+(a+b+c+d) = a+b+c+d+a+b+c+d+$$
$$+a+b+c+d = a+a+a+b+b+b+c+$$
$$c+c+d+d+d = 3a+3b+3c+3d.$$

10) *Разлика се множи неким бројем, кад јој се помножи тим бројем и умањеник и умалитељ, па се добивени резултати одузму.* Тако:

$$(a-b)\cdot 3 = 3a - 3b, \text{ jер је:}$$
$$(a-b)\cdot 3 = (a-b)+(a-b)+(a-b) = a-b+a-b+a-b =$$
$$= a+a+a-b-b-b = 3a-3b.$$

§ 21) **Множење алгебарских бројева.** *Два алгебарска броја множимо, када помножимо њихове апсолутне вредности, и пред производ ставимо позитиван знак (+), ако су бројеви једнако означени, тј. ако су оба позитивна или оба негативна, а негативан знак (—), ако су различито означени, тј. ако је један позитиван а други негативан, и обрнуто.*

Тако:

1) $(+5)\cdot(+4) = +20$; 3) $(+5)\cdot(-4) = -20$; и
2) $(-5)\cdot(+4) = -20$; 4) $(-5)\cdot(-4) = +20$.

Доказ:

1) $(+5)\cdot(+4)=(0+5)\cdot 4=4\cdot 0+5\cdot 4=0+20=+20$ (§ 19 т. 9),
или: $(+5)\cdot(+4)=(+5)\cdot 4=(+5)+(+5)+(+5)+$
$+(+5)=+20$;
2) $(-5)\cdot(+4)=(0-5)\cdot 4=(0\cdot 4)-(5\cdot 4)=0-20=-2$
(§ 19 т. 10), или: $(-5)\cdot(+4)=(-5)\cdot 4=(-5)+$
$+(-5)+(-5)+(-5)=-20$;
3) $(+5)\cdot(-4)=(-4)\cdot(+5)=(0-4)\cdot 5=(0\cdot 5)-(4\cdot 5)=$
$=0-20=-20$ (§ 19 т. 10), или: $(+5)\cdot(-4)=$
$=(-4)\cdot(+5)=(-4)\cdot 5=(-4)+(-4)+(-4)+$
$+(-4)+(-4)=-20$;
4) $(-5)\cdot(-4)=(0-5)\cdot(-4)=[0\cdot(-4)]-[5\cdot(-4)]=$
$=[0]-[-20]=0+20=+20$ (§ 19 т. 10).

Ако имамо да множимо више алгебарских бројева, онд најпре множимо два, резултат множимо трећим бројем, но резултат четвртим итд. Резултат производа биће *позитива* ако је број негативних чинитеља *паран*, а *негативан*, ако број ових чинитеља *непаран*. Тако:

1) $(+2)\cdot(-3)\cdot(+4)\cdot(-5)=+120$, јер је $(+2)\cdot(-3)=$
$(-6)\cdot(+4)=-24$; $(-24)\cdot(-5)=+120$.
2) $(+2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)=-120$, јер је $(+2)\cdot(-3)=$
$(-6)\cdot(--4)=+24$; $(+24)\cdot(-5)=-120$.

Према томе потребно је при множењу алгебарских бр јева претходно утврдити знак производа и њега написати потом множити бројеве као да су апсолутни.

Примери:

1) $(-3a)\cdot(+4b)\cdot(-2ab)=+24a^2b^2$;
2) $(+5ab)\cdot(-3a^2b)\cdot(-6ab^2c)\cdot(-2bc^2)=-180a$
3) $(-2x^2yz)\cdot(-3xy^2z)\cdot(+5xyz^2)=+30x^4y^4z^4$

§ 22) **Степен алгебарског броја.** 1) Позитиван број степе-
ан ма којим бројем даје позитиван резултат. Тако,

$(+4)^3 = +64$, јер је $(+4)^3 = (+4)\cdot(+4)\cdot(+4) = +64$;

$(+4)^4 = +256$, „ „ $(+4)^4 = (+4)\cdot(+4)\cdot(+4)\cdot(+4) = +256$;

Уопште је

$$(+a)^{2n} = +a^{2n} \text{ и } (+a)^{2n\pm1} = +a^{2n\pm1}$$

нам израз $2n$ претставља увек паран а израз $2n\pm1$ непаран
ј, па био n паран или непаран број.

2) Негативан број степенован ма којим парним бројем
е позитиван резултат. Тако,

$3)^2 = (-3)\cdot(-3) = +9$; $(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = +81$.

Уопште је $$(-a)^{2n} = +a^{2n}$$

3) Негативан број степенован ма којим непарним бројем
е негативан резултат. Тако,

$(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$;

$(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243$;

Уопште је

$$(-a)^{2n\pm1} = -a^{2n\pm1}$$

Примери:

1) $(+4ab)^3 = +64a^3b^3$; 3) $(+5ab^2c)^4 = +625a^4b^8c^4$;

2) $(-2a^2b)^4 = +16a^8b^4$; 4) $(-2a^2b^2)^3 = -8a^6b^6$.

§ 23) **Множење полинома**

1. *Полином се множи мономом, када се сваки члан по-
ома помножи мономом.* Тако,

$$(a - b + c - d)\, m = am - bm + cm - dm.$$

аз: $(a - b + c - d)\, m = (a - b + c - d) + (a - b + c - d) +$
$a - b + c - d) + \cdots\cdot$ (m пута) $= a + a + a + \cdots\cdot$ (m
$) - b - b - b - \cdots\cdot$ (m пута) $+ c + c + c + \cdots\cdot$ (m
$) - d - d - d - \cdots\cdot$ (m пута) $= am - bm + cm - dm$.

Примери:

$4a^4b - 3a^2b^2 - 8a^2b^3 + 5ab^4)\cdot 2a^2b^3 = 8a^6b^4 - 6a^5b^5 -$
$- 16a^4b^6 + 10a^3b^7$;

$6a^3b + 2a^2b^2 - 7ab^8)\cdot(-5ab) = -30a^4b^2 - 10a^3b^3 + 35a^2b^4$.

2. *Полином се множи полиномом, када се сваки члан једнога
нома помножи са сваким чланом другога полинома.* Тако,
$b - c)\cdot(m - n + p) = am + bm - cm - an - bn + cn + ap + bp - cp$.

аз. Нека је вредност полинома $m - n + p = A$. Тада је
$b - c)\cdot(m - n + p) = (a + b - c)\cdot A = Aa + Ab - Ac$.
еном A са $m - n + p$ у $Aa + Ab - Ac$ добијамо: $(m - n +$
$) a + (m - n + p) b - (m - n + p) c = (am - an + ap) +$
$bm - bn + bp) - (cm - cn + cp) = am - an + ap +$

$+ bm - bn + bp - cm + cn - cp$. Када упоредимо овај резултат са резултатом добивеним радећи по правилу, видимо да су идентични, чиме се доказује ово правило.

Примери:

a) $(5a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3)(3a^3 - 2a^2b + 5ab^2) = 15a^6b + 6a^5b^2 -$
$- 12a^4b^3 - 10a^5b^2 - 4a^4b^3 + 8a^3b^4 + 25a^4b^3 + 10a^3b^4 -$
$- 20a^2b^5 = 15a^6b - 4a^5b^2 + 9a^4b^3 + 18a^3b^4 - 20a^2b^5$.

b) $(x^2 + 7x - 5)(x^2 - 3x + 7) = x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 3x^3 - 21x^2 +$
$+ 15x + 7x^2 + 49x - 35 = x^4 + 4x^3 - 19x^2 + 64x - 35$.

c) $$\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} +$$

$$+ \frac{x^3}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^3}{4} -$$

$$- \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{16} = 1 + \frac{5x^2}{12} - \frac{5x^4}{36} - \frac{x^6}{16}.$$

Напомена. За један полином каже се да је *уређен*, ако је уређен било по опадајућим, било по растућим изложитељима једног писмена главних количина његових чланова. Такав је полином: $5a^4 - 3a^3b^2 + 4a^2b^2 + 6ab^3 - 2b^5$. Два уређена полинома можемо лакше и брже множити још на следећи начин. — Пишемо други полином испод првог и повлачимо испод црту да бисмо испод ње писали производ полинома. Најпре множимо све чланове првог полинома првим чланом другога полинома и резултат пишемо испод црте; затим множимо све чланове првога полинома другим чланом другога полинома и резултат пишемо испод претходног резултата тако да једноимени чланови дођу један испод другога. Овај поступак настављамо и даље све дотле док не помножимо све чланове првога полинома са последњим чланом другога полинома. Када све ово свршимо, повлачимо другу црту испод које пишемо сведени производ. Тако, горњи примери под a) и b) решени према овом упутству изгледају:

a) I пол. $5a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3$
II пол. $3a^3 - 2a^2\,b + 5ab^2$

Производ са $3a^3$: $15a^6b + 6a^5b^2 - 12a^4b^3$
Производ са $-2a^2b$: $-10a^5b^2 - 4a^4b^3 + 8a^3b^4$
Производ са $5ab^2$: $+25a^4b^3 + 10a^3b^4 - 20a^2b^5$.

Сведени производ: $15a^6b - 4a^5b^2 + 9a^4b^3 + 18a^3b^4 - 20a^2b^5$.

b) I полином	$x^2 + 7x - 5$
II полином	$x^2 - 3x + 7$
Производ са x^2:	$x^4 + 7x^3 - 5x^2$
Производ са $-3x$:	$-3x^3 - 21x^2 + 15x$
Производ са 7:	$+7x^2 + 49x - 35$
Сведени производ:	$x^4 + 4x^3 - 19x^2 + 64x - 35.$

II *Напомена:* Производ од два полинома увек је полином, јер ако први полином има m а други n чланова, онда би требало да у производу има mn чланова, што није увек случај, а особито код уређених полинома, услед свођења једноимених чланова производа. Међутим, број чланова производа и уређених полинома мора бити *најмање два*, јер први и последњи члан производа немају своје једноимене чланове.

§ 24) Особени случајеви множења полимона

1) $\mathbf{(a + b)^2} = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \mathbf{= a^2 + 2ab + b^2}$, тј. *квадрат бинона облика збира једнак је квадрату првог члана, више двоструки производ првог и другог члана и више квадрат другога члана.*

Примери:

a) $(3a + 4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$;

b) $(4x^2y + 5)^2 = 16x^4y^2 + 40x^2y + 25$.

2) $\mathbf{(a - b)^2} = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \mathbf{= a^2 - 2ab + b^2}$, *тј. квадрат бинома облика разлике раван је квадрату првог члана, мање двоструки производ првог и другог члана и више квадрат другог члана.*

Примери:

a) $(4a^2 - 3bc)^2 = 16a^4 - 24a^2bc + 9b^2c^2$;

b) $(7x - 5y)^2 = 49x^2 - 70xy + 25y^2$.

3) $\mathbf{(a + b - c - d)^2} = (a + b - c - d)(a + b - c - d) = a^2 + ab - ac - ad + ab + b^2 - bc - bd - ac - bc + c^2 + cd - ad - bd + cd + d^2 =$

$\mathbf{= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 2cd}$, тј. *квадрат полинома добијамо, када збиру квадрата свих његових чланова додамо са њиховим знацима најпре двоструке производе од првог члана и свих осталих чланова, затим двоструке производе од другога члана и свих осталих даљих чланова итд. док се још не дода двоструки производ од претпоследњег и последњег члана.*

Пример.

$(3a-2b-4c-5d+e)^2=9a^2+4b^2+16c^2+25d^2+e^2-$
$-12ab-24ac-30ad+6ae+16bc+20bd-4be+40cd-$
$-8ce-10de.$

Напомена. Први и други случај обухваћени су трећим.

4) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=\mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$, тј. *бином облика збира на куб једнак је кубу првог члана, више троструки квадрат првог члана помножен другим чланом, више троструки први члан помножен квадратом другог члана и више куб другог члана.*

Пример.

$(3ab+5)^3=27a^3b^3+135a^2b^2+225ab+125,$

5) $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=\mathbf{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$, тј. *куб бинома облика разлике једнак је: кубу првог члана, мање троструки квадрат првог члана помножен другим чланом, више троструки први члан помножен квадратом другог члана и мање куб другог члана.*

Пример.

$(2ab-3xy)^3=8a^3b^3-36a^2b^2xy+54abx^2y^2-27x^3y^3.$

6) $\mathbf{(a+b)(a-b)}=a^2+ab-ab-b^2=\mathbf{a^2-b^2}$, тј. *производ од збира и разлике два иста броја једнак је разлици квадрата тих бројева.*

Примери:

a) $(9a+5)(9a-5)=81a^2-25;$
b) $(3ab-4x)(3ab+4x)=9a^2b^2-16x^2.$

§ 25 Задаци за вежбу из множења

Помножити:

1) a са b;
2) 5 са a;
3) abc са mn;
4) a^2b са cd;
5) $4a^2b^3$ са ab;
6) $3a^2b^2$ са $4ab^3$;
7) $\frac{6}{7}b^2x$ са $\frac{5}{9}abc^2$;
8) $1{,}3ab^2x$ са $2{,}56x^2z$;

Извршити означено множење:

9) $(+7ab)\cdot(-3a)$;
10) $(+4abx)\cdot(-5xy)$;
11) $(-17a^2bx)\cdot(+5ab^2xy)$;
12) $(+8ab^2z)\cdot(-{}^3/_4a^2bx)$;
13) $(0{,}4ax)\cdot(+1{,}7bx)$;
14) $7a^2bc\cdot(-4ab^2c)$;
15) $(-0{,}3a^x)\cdot(-0{,}4a^x)$;
16) $(-2a^{x-2}b^{y-1})\cdot(-3a^{x-1}b^{y-3})$;

17) $2a^2b \cdot (-3ab^2) \cdot 4a^2c \cdot (-8b^2c)$;

18 $(-5a^{m+n}\, b^{p+s}) \cdot (+2a^{m-n}\, b^{p-s})$;

Извршити означено множење;

19) $(2x^2-3y+5) \cdot 6$;

20) $(-2ab) \cdot (2a^2-3ab+4b^2)$;

21) $(-5ab) \cdot (-2a^2b+12ab^2-15a^2b^2)$;

22) $(7a^n - 3a^{n-1}\, b+5a^{n-2}b^3)\,(-5a^{3-n}\, a^2)$;

23) $5a^r\, b \cdot (-4a^s\, b^2+7a^5b^3+2b^p)$;

Извршити означене радње:

24) $15a^2bc - 7ab\,(4a^2b - 3ac) - 5ac\,(7bc - 4c^2)$;

25) $5x^2\,[3x^3 - 2\,(4x^2 - 5x) + 7] + 3x\,[5x^3 + 4\,(3x^2 - 7) + 11x]$;

26) $5a + (2b + c)\,5 - 9\,(2a - 3b + 4c) + 5\,(a + 2b - 5c)$;

27) $3x\,(4y - z) + 7x\,(3z - y) + 5z\,(4y - 3x) - 2yz$;

28) $[3a^2 - (4a^2 - 3b) + 8a^2 - 5b^3\,(2a + b^2)] \cdot 4a^3b^2$;

29) $\{8a^4\, b^2 - [2a^2\,(b^2 - a^2) - {}^1/_2 b^3\,(2a^2\, b - 3a\, b^2)]\} \cdot 5^2/_3 a^3\, b^3$;

Извршити означено множење полинома:

30) $(2a - 3b)\,(a - b)$;

31) $(5a - 2a)\,(6a + 3b)$;

32) $(8m - 5n + 3p)\,(2m + 6n - 7p)$;

33) $(x^2 - xy + y^2)\,(x + y)$;

34) $(4 - 2x + 5x^2 + 3x^3)\,(2 + 6x - 7x^2 + 8x^3)$;

35) $(a^3 + a^2 + a + 1)\,(a - 1)$;

36) $(7x - 5y)\,(3x + 4y) - (6x + 7y)\,(2x - 3y)$;

37) $(5x - 7y)\,(3x - 8y)\,(9x - 4y) - (8x - 3y)\,(7x + 9y)$;

38) $(5x - 7y + 9z)\,(5x + 7y - 9z) + (2x + 3y - 5z)\,(2x - 3y - 5z)$;

39) $(3x + 4y)^2$;

40) $(2a^2 - 4b^2)^2$;

41) $(7a^2bz + 5x^2y)^2$;

42) $(a - b + c)^2$;

43) $(1 + x + x^2)^2$;

44) $(1 + x - x^2)^2$;

45) $(5a^2 - 7a - 4)^2$;

46) $(4a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - 8b^3)^2$;

47) $(9a^3x + 5a^2y + 4az - 8)^2$.

Подићи на куб полиноме:

48) $(x + b)^3$;

49) $(3x - 2y)^3$;

50) $(2a^2\, x^2 + 4b^2\, y^2)^3$;

51) $(3a^2\, x - 5b^2\, y^2)^3$;

52) $(a + b + c)^3$;

53) $(a^2 - b^2 + c^2)^3$;

Изврши краћим путем множење:

54) $(3a + 2b)\,(3a - 2b)$;

55) $(5ax - 7by)\,(5ax + 7by)$;

56) $(a^2 + b^2)\,(a^2 - b^2)$;

57) $(3a + 4b - 6c)(3a + 4b + 6c)$;

58) $(4x - 5y + 3z)(4x - 5y - 3z)$;

59) $(2a + 3b)(2a - 3b)(4a^2 + 9b^2)$;

60) $(5a - 1)(5a + 1)(25a^2 + 1)$;

61) $(2a + b)(2a - b)(4a^2 + b^2)$;

62) $(a + b - c - d)(a + b + c + d)$.

Провери да ли су добре једначине:

63) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$;

64) $(x^2 + xy - y^2)^2 - (x^2 - xy - y^2)^2 = 4xy(x + y)(x - y)$;

65) $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^2 - xy + y^2)^2 = 4xy(x^2 + y^2)$;

66) $(a - b)^3 + 3(a - b)^2(a + b) + 3(a - b)(a + b)^2 + {}$
$+ (a + b)^3 = 8a^3$.

III. Дељење

§ 26) Дељење апсолутних целих бројева и монома

Дељење је рачунска радња изведена из множења. Дељењем се из производа од два чинитеља и једног од чинитеља, добија други чинитељ. Познати производ зове се *дељеник*, познати чинитељ *делитељ*, а тражени чинитељ *количник*. Тако, за

$$ab = c, \text{ биће } a = c : b, \text{ и } b = c : a.$$

1) *Количник од једног посебног и једног општег броја, или између два општа броја, означава се, када те бројеве напишемо један поред другога, а између њих ставимо знак дељења, или кад их напишемо један испод другога, а између њих ставимо црту.* Тако, количник између бројева m и n је $m : n$ или $\frac{m}{n}$; количник између бројева 5 и a је $5 : a$, или $\frac{5}{a}$.

2) *Према дефиницији дељења јасно је да је производ од количника и делитеља једнак дељенику.* Тако, ако количник бројева m и n помножимо са n, добијамо m. То се означава:

$$\frac{m}{n} \cdot n = m.$$

Ово се правило примењује ради провере да ли је количник тачан.

Напомена. Горње показује и супротност радње множења и дељења, јер се један број не мења ако се истовремено и помножи и подели једним истим бројем.

По дефиницији дељења такође су јасна правила:

3) *Сваки број подељен самим собом даје 1 за количник.*

Тако, $5 : 5 = 1$, $a : a = 1$, $b : b = 1$ итд.

Отуда је: $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{cm}{cm} = \ldots 1$, тј.

Количници једнаких бројева јесу једнаки.

Количник између неког броја и 1 је сам тај број.

Тако, $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{a}{1} = a$, $\frac{b}{1} = b$.

4) *Производ делимо неким бројем, ако му поделимо* **само један,** *ма који, чинитељ тим бројем.*

Тако, $(6 \cdot 9 \cdot 12) : 3 = (6 : 3) \cdot 9 \cdot 12 = 6 \cdot (9 : 3) \cdot 12 = 6 \cdot 9 \cdot (12 : 3) = 216$.

Примери:

a) $15abc : 5 = 3abc$; b) $15abc : a = 15bc$.

То се правило искоришћује у случају кад је један од чинитеља дељив оним делитељем. Тада се он и подели њиме а добијени количник измножи са осталим чинитељима.

Пример:

$(9 \cdot 16 \cdot 25) : 8 = (16 : 8) \cdot 9 \cdot 25 = 2 \cdot 9 \cdot 25 = 450$.

5) *Број се дели производом, кад се поступно подели свима чинитељима производа.*

Тако, $150 : (2 \cdot 3 \cdot 5) = [(150 : 2) : 3] : 5 = 5$. Да је ово правило тачно, увиђамо по томе што долазимо до истог резултата, ако најпре означени производ у заградама извршимо па резултатом поделимо дељеник 150. Биће, дакле:

$$150 : (2 \cdot 3 \cdot 5) = 150 : 30 = 5.$$

6) *Степене једнаких основа делимо, када заједничку основу степенујемо разликом изложитеља.* Тако, $a^5 : a^3 = a^2$, јер је $a^5 : a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a : a \cdot a \cdot a = a \cdot a = a^2$.

Примери:

a) $a^7 : a^4 = a^3$; b) $x^9 : x^5 = x^4$; c) $\mathbf{a}^{m} : \mathbf{a}^{n} = \mathbf{a}^{m-n}$

Напомена. Степене неједнаких основа делимо, када их поделимо као два општа броја, тј. пишемо их један испод другога а између њих стављамо црту. Тако, количник између степена a^3 и b^2 је $\frac{a^3}{b^2}$.

7) На основу горњих правила изводимо правило о дељењу монома, које гласи: *Моном делимо мономом, када количнику њихових коефицијената допишемо количник главних количина.* Тако,

a) $15a^2b^3cx : 5abx = 3ab^2c$, јер је по 6 правилу:
$15a^2b^3cx : 5\,abx = \{[(15a^2b^3cx : 5) : a] : b\} : x$, а по 5 правилу је: $15a^2b^3cx : 5 = 3a^2b^3cx$, затим $3a^2b^3cx : a =$

$= 3ab^3cx$, затим $3ab^3cx : b = 3ab^2cx$ и најзад $3ab^2cx : x = 3ab^2c$.

b) $5a^5b^2c : 3a^3bc = \frac{5}{3}a^2b$; c) $5m^3n^4 : 4m^2n^2 = 1{,}25mn^2$.

Примери:

a) $60a^5b^4c^3 : 15a^2b^3c = 4a^3bc^2$;

b) $24a^4x^3y : 4a^2x^2 = 6a^2xy$;

c) $30a^2b^3x : 6ab^2yz = \frac{5abx}{yz}$.

§ 27) **Дељење с нулом.** При дељењу с нулом имамо ова три случаја:

a) Ако је дељеник нула а делитељ ма који број a, онда је: $\frac{0}{a} = 0$, јер је $0 \cdot a = 0$; дакле, *количник између нуле и ма ког броја је нула.*

b) Ако је делитељ нула, а дељеник ма који број a, онда је количник $\frac{a}{0}$. Овакав количник је на први поглед *немогућан*, јер по дефиницији дељења не постоји ниједан број помножен нулом да даје за производ дељеник a.

c) Ако је и дељеник и делитељ нула, онда количник може имати ма коју вредност и да̂ се написати: $\frac{0}{0} = a$, где је a неодређен број, јер је $a \cdot 0 = 0$, па ма какву вредност имао број a. Стога се израз $\frac{0}{0}$ зове *неодређен.*

Изразу $\frac{a}{0}$ можемо дати значење да нам он претставља *бесконачно велики број* ∞, из следећег разлога. — Ако посматрамо ред бројева:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots, \frac{1}{\infty} \quad (1)$$

чији су бројеви реципрочне вредности бројева природног бројног реда: 1, 2, 3, 4, 5, . . . ∞ (2), видимо да ти бројеви поступно опадају и приближују се поступно нули, кад им именитељи расту. Као што број ∞ сматрамо за бесконачно велики број, већи од ма ког замишљеног великог броја реда (2), тако и број $\frac{1}{\infty}$ сматрамо за бесконачно мали број, који је мањи од ма ког малог замишљеног броја, а који се од нуле бесконачно мало разликује. Док је ∞ граница реда (2), $\frac{1}{\infty}$

је граница реда (1). Како и нулу сматрамо као границу реда (1), то узимамо да је

$$\frac{1}{\infty} = 0.$$

Замењујући нулу у изразу $\frac{a}{0}$ са $\frac{1}{\infty}$ добијамо: $\frac{a}{0} = a : 0 = = a : \frac{1}{\infty} = a \cdot \infty = \infty$. Према овој претпоставци, можемо рећи да *ма каји број подељен нулом даје за количник бесконачно велики број.*

Како је из $\frac{a}{0} = \infty$, $a = \infty \cdot 0$, то је и $\frac{a}{\infty} = 0$, тј. *ма који коначан број подељен бесконачно великим бројем даје за количник нулу.*

Напомена. Израз $\frac{a}{0} = \infty$, или $a = \infty \cdot 0$, претставља привидно неодређени израз, о коме ће се ученици упознати детаљније у вишој математици.

§ 28) **Дељење алгебарских бројева.** *Два алгебарска броја делимо, када им поделимо њихове апсолутне вредности, па пред добивени количник ставимо позитивни знак, ако су бројеви једнако означени, тј. ако су оба позитивна, или оба негативна, а негативни знак, ако су бројеви различито означени, тј. ако је један позитиван а други негативан, и обрнуто.* Тако,

1) $(+12) : (+4) = +3$, јер је $(+3) \cdot (+4) = +12$;
2) $(+12) : (-4) = -3$ „ „ $(-3) \cdot (-4) = +12$;
3) $(-12) : (+4) = -3$ „ „ $(-3) \cdot (+4) = -12$;
4) $(-12) : (-4) = +3$ „ „ $(+3) \cdot (-4) = -12$.

Примери:

a) $(+15a) : (+3a) = +5$; b) $(-18ab) : (+6b) = -3a$;
c) $(+24a^2b^3c) : (-3ab^2) = -8abc$;
d) $(-40a^3x^4y^2) : (-8a^2xy) = +5ax^3y$.

§ 29) **Дељење полинома**

1) *Полином делимо мономом, када сваки члан полинома поделимо мономом.* Тако,

$$(3a^3x + 5a^2x^2 - 4ax^3) : ax = 3a^2 + 5ax - 4x^2, \text{ јер је:}$$
$$(3a^2 + 5ax - 4x^2) \cdot ax = 3a^3x + 5a^2x^2 - 4ax^3.$$

Ако поједини или сви чланови у полиному нису дељиви мономом, онда се дељење и не врши, већ се само означава, и то у облику разломка. *Пример:*

$$(a-b+c):3a=\frac{a-b+c}{3a}$$

Напомена. Познато је да је производ од два полинома полином са најмање два члана. Према томе, није могуће наћи полином који помножен полиномом за резултат даје моном. Отуда је јасно да је немогућно дељење монома са полиномом. Овакво дељење само се означава у облику разломка. Тако, количник између монома $3ab$ и полинома $a-b+c-d$ је

$$\frac{3ab}{a-b+c-d}$$

2) *Полином делимо полиномом по истом поступку по коме делимо два посебна броја.* Тако, ако имамо да делимо на пр. број 9612 са 27, онда је поступак дељења:

$$\begin{array}{lrccccc}
 & \text{дељеник} & & \text{делитељ} & & \text{количник} \\
 & 9612 & : & 27 & = & 356 \\
 & -81 & \rightarrow & (27\cdot 3) & & \\
\cline{2-2}
\text{I ост.} & 151 & & & & \\
\cline{2-2}
 & -135 & \rightarrow & (27\cdot 5) & & \\
\cline{2-2}
\text{II ост.} & 162 & & & & \\
\cline{2-2}
 & -162 & \rightarrow & (27\cdot 6) & & \\
\cline{2-2}
\text{III ост.} & 0 & & & &
\end{array}$$

Истим поступком делимо полиноме: $46a^4b^5-22a^5b^4+15a^6b^3+7a^2b^7-30a^3b^6$ и $7a^2b^4-3a^4b^2-2a^3b^3$, само их треба пре дељења уредити или по опадајућим или по растућим изложитељима једнога од чинитеља њихових главних количина. Тако, ако ова два полинома уредимо по опадајућим изложитељима чинитеља a и затим делимо, добијамо:

$$\begin{array}{l}
(15a^6b^3-22a^5b^4+46a^4b^5-30a^3b^6+7a^2b^7):(3a^4b^2-2a^3b^3+ \\
(15a^6b^3-10a^5b^4+35a^4b^5 \qquad\qquad +7a^2b^4)=5a^2b-4ab^2+b^3 \\
- \qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad -12a^5b^4+11a^4b^5-30a^3b^6 \\
\qquad -12a^5b^4+\ \ 8a^4b^5-28a^3b^6 \\
\qquad + \qquad - \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 3a^4b^5-2a^3b^6+7a^2b^7 \\
\qquad\qquad\qquad 3a^4b^5-2a^3b^6+7a^2b^7 \\
\qquad\qquad\qquad - \qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Дакле, поступак дељења два полинома састоји се у овоме: *Најпре оба полинома уређујемо било по опадајућим, било по* *растућим изложитељима једног чинитеља њихових главних количина, а затим делимо I члан дељеника са I чланом делитеља и тиме добијамо I члан количника. Множимо затим све чланове делитеља првим чланом количника и добивени производ одузимамо од дељеника, чиме добијамо први остатак. Први члан остатка поново делимо са првим чланом делитеља, чиме добијамо други члан количника. Овим чланом множимо опет све чланове делитеља и добивени производ одузимамо од првог остатка, чиме добијамо други остатак. Први члан другог остатка делимо опет са првим чланом делитеља и тиме добијамо трећи члан количника итд. Овај се поступак наставља све дотле док не добијемо или остатак нулу, или остатак чији први члан није дељив првим чланом делитеља.* У првом су случају дати полиноми потпуно дељиви а у другом нису. У овом другом случају дељеник није једнак производу од количника и делитеља, већ је једнак производу од количника и делитеља коме се додаје последњи остатак са својим знаком.

Тумачење. Познато је да се при множењу два уређена полинома највиши члан производа добива множењем највиших чланова множеника и множитеља. Стога, ако поделимо највиши члан дељеника са највишим чланом делитеља, добијамо највиши члан количника. Код нашег је примера:

$$15a^6b^3 : 3a^4b^2 = 5a^2b$$

При множењу два полинома, множимо сваки члан једнога олинома са сваким чланом другога полинома, добивени ре- ултат сводимо и тиме добијамо тражени производ. Стога, од дељења полинома, нађеним првим чланом количника мно- кимо све чланове делитеља и добивени производ одузимамо д дељеника, да бисмо добили *први остатак,* који је у ствари роизвод од делитеља и осталих чланова количника.

Судећи на исти начин, лако је разумети да је највиши ан првог остатка добијен множењем највишег члана дели- ља са *другим* чланом количника. Стога, да бисмо добили уги члан количника, делимо први члан првог остатка са вим чланом делитеља. Код нашег је примера:

$$-12a^5b^4 : 3a^4b^2 = -4ab^2.$$

Идући истим путем добијамо трећи, четврти итд. члан личника, док не добијемо остатак нулу, који нам показује је дељење завршено.

I Напомена. При добијању остатака треба да спуштамо све остале чланове дељеника, али се у пракси ти чланови спуштају поступно, и то се спуштају само они чланови који су потребни, као што је рађено код нашег примера.

II Напомена. Ако при дељењу два полинома не добијамо за последњи остатак нулу, већ остатак чији први члан није дељив с првим чланом делитеља, значи да дати полиноми нису потпуно дељиви. У овом случају, као што смо раније поменули, дељеник није производ од два полинома (делитеља и количника), већ је збир од производа делитеља и количника и последњег остатка. У овом случају, последњи се остатак додаје количнику у облику разломка, чији је бројитељ последњи остатак а именитељ делитељ, или се дељење датих полинома само означава у облику обичног разломка, и тај се разломак зове *алгебарски*.

Пример:

$$(6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 4) : (3x^3 - 3x^2 + x - 2) = 2x + 1 + \frac{3x^2 - 2x + 6}{3x^3 - 3x^2 + x - 2}$$

$$\begin{array}{ll}
 & 6x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x \\
 & - \quad + \quad\quad - \quad\quad + \\
\hline
\text{I ост.} & \quad 3x^3 - x + 4 \\
 & \quad 3x^3 - 3x^2 + x - 2 \\
 & \quad - \quad + \quad\quad - \quad + \\
\hline
\text{II ост.} & \quad 3x^2 - 2x + 6
\end{array}$$

III Напомена. Знаци по којима познајемо да нису два полинома дељиви јесу следећи:

1) Ако највиши члан дељеника није дељив са највишим чланом делитеља, а тако исто најнижи члан дељеника са најнижим чланом делитеља;

2) Ако у главним количинама делитеља има чинитеља којих нема код дељеника;

3) Када је дељеник моном а делитељ полином; и

4) Када наилазимо на остатак чији први члан није дељив првим чланом делитеља.

§ 30) **Особени случајеви дељења полинома.** У вези особених случајева множења полинома (§ 24) имамо:

1) $(a^2 \pm 2ab + b^2) : (a \pm b) = a \pm b;$

2) $(a^2 - b^2) : (a \pm b) = a \mp b;$

3) $(a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3) : (a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2;$

4) $(a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3) : (a^2 \pm 2ab + b^2) = a \pm b;$

5) Као нарочито особени случај дељења треба запазити

дељење бинома $a^m \pm b^m$ са $a \pm b$, где је изложитељ m цео позитиван број. Овде наступају ови потслучајеви:

а) $a^m — b^m$ увек је дељив са $a — b$, па био m паран или непаран број, и добијамо за количник полином чији су сви чланови позитивни, а уређен је по опадајућим изложитељима од a [почиње од $(m—1)$] а по растућим изложитељима од b.

Примери:

1) $(a^4 — b^4) : (a — b) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$;
2) $(a^5 — b^5) : (a — b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$;
3) $(x^6 — 1) : (x — 1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

b) $a^m — b^m$ дељив је са $a + b$, само ако је m паран број и добијамо за количник полином, наизменично уређен, по опадајућим изложитељима од a, а по растућим изложитељима од b.

Примери:

1) $(a^6 — b^6) : (a + b) = a^5 — a^4b + a^3b^2 — a^2b^3 + ab^4 — b^5$;
2) $(a^4 — 1) : (a + 1) = a^3 — a^2 + a — 1$.

c) $a^m + b^m$ није дељив са $a — b$, па био број m паран или непаран.

d) $a^m + b^m$ дељив са $a + b$ само ако је m непаран број, а добија се за количник полином, уређен наизменично, по опадајућим изложитељима од a, а по растућим изложитељима од b.

Примери:

1) $(a^5 + b^5) : (a + b) = a^4 — a^3b + a^2b^2 — ab^3 + b^4$;
2) $(a^3 — 1) : (a + 1) = a^2 — a + 1$.

§ 31) **Задаци за вежбу из дељења**

Изврши дељења монома:

1) $12a : 4$;
2) $18cd : 6c$;
3) $25x^2y^2 : 5xy$;
4) $36x^3yx^3 : 18x^2z^2$;
5) $4{,}95a^2b^3 : 1{,}1ab^2$;
6) $30x^2y^4z^6 : 7{,}5xy^2z^3$;
7) $0{,}5a^3b : \frac{9}{11}a^2b$;
8) $6b^2c^3 : 3c^2d$;
9) $8x^2y^3 : 4x^3y^5$;
10) $(+ 40a^3b) : (— 8a^2b)$;
11) $(— 84a^2x^3y) : (+ 7ax^2y)$;
12) $(— 24a^4b^3c^2) : (— 6a^2bc^2)$;
13) $(— 18a^4b^6c^9x^5) : (— 3a^3b^4cx^5)$;
14) $(+ 9a^xb^y) : (— 3a^{x-2}b^{y-3})$;
15) $4x^2y^2 (1 — a)^5 : — 2x (1 — a)^3$;
16) $(— 16abc^3) : (— 8a^2b^3c)$;

17) $(-0{,}5x^{2m}y^3) : 25x^m y^2$;

18) $a^z b^s : (-a^2b^5)$.

Извршити означено дељење:

19) $(25a^3x^2 + 6a^2x^3 - 25xy^2 - 30ax^4) : 5x$;

20) $(12a^4b^2 - 32a^3b^3 + 4ab^5) : (-4ab^2)$;

21) $(6x^{p+1}y^p + 3x^{p+2}y^{p+1} - 9x^{p+3}y^{p+2}) : (-3x^p y^p)$;

22) $(3a^3b^2 - 6a^2b^4 + 12ab^6c) : 3ab^2$;

23) $(36x^5y^4 - 18x^4y^5 - 15x^3y^6) : (-3x^3y^4)$;

24) $(-16a^4b^3x + 12a^2b^4x^2 - 4b^6x^3) : (-4bx)$;

25) $(25x^3y^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{4}{5}x^2y - 7xy^2) : (-8xy)$;

26) $(6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4) : (3x^2 - 5x + 1)$;

27) $(3ax^5 - 15a^2x^4 + 6a^3x^3) : (x^4 - 5ax^3 + 2a^2x^2)$;

28) $(x^2 + 4ax + 4a^2) : (x + 2a)$;

29) $(x^3 + y^3) : (x^2 - xy + y^2)$;

30) $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) : (a^2 - 2ab + b^2)$;

31) $(a^4 + a^2b^2 + b^4) : (a^2 - ab + b^2)$;

32) $(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) : (x + y + z)$;

33) $(x^7 - 9x^5y^2 + 7x^4y^2 + 13x^3y^4 - 19x^2y^5 + 8xy^6 - y^7) :$
$: (x^4 - 7x^2y^2 + 6xy^3 - y^4)$;

34) $(x^{12} - y^{12}) : (x^4 - x^3y + xy^3 - y^4)$;

35) $(a^2 - 2 + a^6) : (a^2 + 2 + a^4)$;

36) $(1 + a^8 + a^4) : (a^6 + a^5 - a^3 + a + 1)$;

37) $[2x^2 + (2a + b + 2)x + 2a + b] : (2x + 2a + b)$;

38) $(x^4 - 1) : (x - 1)$;

39) $(a^6 - 1) : (a - 1)$;

40) $(a^5 + x^5) : (a + x)$;

41) $(a^7 + 1) : (a + 1)$;

42) $(x^4 - 1) : (x + 1)$;

43) $(a^6 - 1) : (a + 1)$;

44) $(a^5 - x^5) : (a - x)$;

45) $(x^8 - y^8) : (x - y)$.

Које полиноме треба поделити да би се добили количници:

46) $x^2 + x + 1$;

47) $a^2 + ab + b^2$;

48) $x^2 - x^2 + x - 1$;

49) $x^3 - ax^2 + a^2x - a^3$;

50) $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$;

51) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$;

52) $a^2 - ab + b^2$;

53) $y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$

ДРУГИ ОДЕЉАК

ДЕЉИВОСТ БРОЈЕВА И АЛГЕБАРСКИХ ИЗРАЗА И ОПЕРАЦИЈЕ СА РАЗЛОМЦИМА

§ 32) **Прости и сложени бројеви и изрази.** За један број или израз каже се да је *прост*, ако је дељив само самим собом и јединицом. Такви су бројеви и изрази: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,··· a, b, c, d, $(a+b)$, $(a-b+c)$, $(ax+by+cz)$, итд.

За један број или израз каже се да је *сложен*, ако је дељив не само самим собом и јединицом већ и другим неким бројем. Такви су бројеви и изрази: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15,··· ab, abc, $3xy$, a^2-b^2, a^3+b^3, a^3-b^3, $ab+ac-ad$ итд.

Сваки сложен број или сложен израз није ништа друго до један *производ* од два или више простих чинитеља. Тако, $4=2\cdot2$; $6=2\cdot3$; $15=3\cdot5$; $24=2\cdot2\cdot2\cdot3$; $30=2\cdot3\cdot5$; $3a^2b=3\cdot a\cdot a\cdot b$; $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$; $(a^3+b^3)=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$, итд.

Раставити један сложен број или сложен израз на просте чинитеље значи пронаћи све оне просте бројеве (изразе) који помножени међу собом дају за производ дотични сложен број или сложен израз.

§ 33) **Дељивост декадних бројева.** Ради растављања посебних сложених бројева на просте чинитеље, потребно је да се упознамо са условима дељивости декадних бројева са 2, 3, 5, и 11. Ти су услови следећи:

1) *Број је дељив са 2, ако му је цифра на месту јединица дељива са 2.*

Доказ. Сваки декадан број N није ништа друго до један полином, уређен по опадајућим изложитељима броја 10, а коефицијенти су му цифре декадног броја. Тако,

$$57\,564=50\,000+7\,000+500+60+4=$$

$$=5\cdot10\,000+7\cdot1\,000+5\cdot100+6\cdot10+4=5\cdot10^4+7\cdot10^3+5\cdot10^2+6\cdot10+4.$$

Стога један декадан број биће дељив са 2, ако је његов полином дељив са 2. Па како су, осим последњег, сви остали чланови полинома декаднога броја увек дељиви са 2, то дељивост полинома са 2 зависи само од његовог последњег члана, односно од цифре јединица декаднога броја.

2) *Број је дељив са 3, ако му је збир цифара дељив са 3.*

Доказ a) Број 5238 је дељив са 3, јер његов полином $5\cdot10^3+2\cdot10^2+3\cdot10+8$ дâ се написати $(5\cdot999+5)+(2\cdot99+2)+(3\cdot9+3)+8=5\cdot999+2\cdot99+3\cdot9+(5+2+3+8)$, а овај полином биће дељив са 3 само ако му је члан $(5+2+3+8)$, тј. збир цифара декадног броја, дељив са 3, пошто су му остали бројеви дељиви са 3.

b) Број 36 241 није дељив са 3, јер последњи члан његовог полинома: $3\cdot9\,999+6\cdot999+2\cdot99+4\cdot9+(3+6+2+4+1)$ није дељив са 3.

3) *Број је дељив са 5, ако му је цифра на месту јединица 0 или 5.*

Доказ је истоветан са доказом о дељивости једног броја са 2, јер су сви чланови, осим последњег полинома декадног броја увек дељиви са 5, а цео полином биће дељив са 5, ако му је само последњи члан дељив са 5, а тај члан биће дељив са 5, само ако је 0 или 5.

4) *Број је дељив са 11, ако му је разлика између збира цифара на непарним местима и збира цифара на парним местима дељива са 11.*

Доказ: Број 64 735 дељив је са 11, јер је разлика између збира цифара на непарним местима $(5+7+6)$ и збира цифара на парним $(3+4)$ дељива са 11, што опет увиђамо из његовог полинома $6\cdot10^4+4\cdot10^3+7\cdot10^2+3\cdot10+5$ који се дâ написати у облику:

$$5+(11\cdot3-3)+(99\cdot7+7)+(1\,001\cdot4-4)+(9\,999\cdot6+6)=$$
$$=11\cdot3+99\cdot7+1001\cdot4+9\,999\cdot6+[(5+7+6)-(3+4)].$$

Овај полином биће дељив са 11, само ако му је последњи члан $[(5+7+6)-(3+4)]$ дељив са 11.

Напомена. Правила о дељивости бројева са осталим простим бројевима: 7, 13, 17,··· не наводе се, јер су заметна и пре долазимо до сазнања о дељивости бројева овим простим бројевима пробом, него по правилу. Правила о дељивости бројева сложеним бројевима: 4, 6, 8, 9, 15, 25, 125,··· иако нам нису потребна при растављању сложених бројева на просте чинитеље, ипак их наводимо, јер се често примењују при скраћивању разломака. Та су правила:

1) *Број је дељив са 4 или са 25, ако му је двоцифрени завршетак дељив са 4 или са 25.*

Тако, са 4 су дељиви бројеви 253 400, 253 404, 253 408, 253 412, 253 416,··· а са 25 су дељиви: 53 400, 3 525, 78 350, 23 400,···

2) *Са 8 или са 125 дељив је број чији је троцифрен завршетак дељив са 8 или са 125.* Тако са 8 дељиви су бројеви: 25 000, 34 008, 52 088, 52 168, 34 816,···, а са 125 су дељиви: 38 000, 4 596 125, 38 250, 4 500,···

3) *Број је дељив са 9, ако му је збир цифара дељив са 9.* Тако, дељиви су са 9 бројеви: 4 212, 576, 30 042, 8 757,···

4) На основу правила да је један број дељив производом, ако је дељив са свима чинитељима тога производа, изводимо правила: а) *Са 6 је дељив број који је дељив и са 2 и са 3; b) са 12, који је дељив и са 3 и са 4, или и са 2 и са 6; c) са 15, који је дељив и са 3 и са 5; d) са 21, који је дељив и са 3 и са 7;* итд.

5) *Број је дељив са 10, ако има на завршетку бар једну нулу, са 100 бар две нуле, са 1000 бар три нуле* итд.

§ 34) Растављање сложених бројева и израза на просте чинитеље

а) *Растављање на просте чинитеље посебних бројева.* Треба с десне стране датог броја повући усправну црту и делити га најпре са 2 све дотле док наилазимо на количнике дељиве са 2, затим настављамо дељење са 3, затим са 5, 7 итд., док не наиђемо на количник који је прост број и који је дељив само самим собом. Делитеље увек пишемо с десне стране, а добивене количнике с леве стране усправне црте један испод другога. Делитељи с десне стране црте јесу тражени прости чинитељи датог броја.

Примери:

1)	120	2	2)	144	2	3)	490	2	4)	360	2
	60	2		72	2		245	5		180	2
	30	2		36	2		49	7		90	2
	15	3		18	2		7	7		45	3
	5	5		9	3		1			15	3
	1			3	3					5	5
				1						1	

b) *Растављање целих монома на просте чинитеље.* Треба им раставити на просте чинитеље само коефицијенте, ако су сложени бројеви, а главну количину не растављамо на чинитеље, јер се на први поглед види од којих је простих чинитеља она састављена.

Примери:

1) $36a^2bc = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot a\cdot a\cdot b\cdot c;$
2) $70ab^2cx = 2\cdot 5\cdot 7\cdot a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot x;$
3) $50a^3b^2 = 2\cdot 5\cdot 5\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b;$
4) $60ab^3c^2\,(x+y) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c\cdot (x+y).$

c) *Растављање полинома на просте чинитеље*

Сложени полином који се раставља на чинитеље или је производ од једнога полинома и једнога монома, или је производ од два или више полинома, или је производ од једнога монома и два или више полинома. Према овоме, раставити један сложен полином на просте чинитеље значи наћи онај полином и моном, или оне полиноме, или моном и полиноме, који помножени дају за производ дотични полином. Да бисмо лакше савладали партију о растављању полинома на просте чинитеље, а та је партија необично важна, јер наилазимо непрестано на њену примену у алгебри, поделићемо све сложене полиноме на групе и дати посебна упутства за растављање полинома тих група.

I група. *У ову групу спадају полиноми чији сви чланови имају један или више заједничких чинитеља.* Такав је полином $3ab - 6ac + 15ad$, код кога су заједнички чинитељи 3 и a. Ове полиноме растављамо на просте чинитеље, када пред заграду ставимо производ заједничких чинитеља, а у заграду ставимо количник добивен дељењем датог полинома производом заједничких чинитеља.

Примери:

1) $3ab - 6ac + 15ad = 3a\,(b - 2c + 5d);$
2) $12a^2b^3x - 4a^3b^2x^2 = 4a^2b^2x\,(3b - ax);$
3) $4a^{m+1} - 2a^m + 6a^{m-1} = 2a^{m-1}\,(2a^2 - a + 3).$

II група. *У ову групу спадају полиноми код којих поједини чланови имају заједничке чинитеље.* Такав је полином $am - bm + an - bn$. Ове полиноме растављамо на чинитеље: кад извлачимо пред заградама заједничке чинитеље само из чланова који имају те чинитеље, и на тај начин стварамо полиноме са мањим бројем чланова, али који спадају у прву групу полинома. Најзад поступамо по упутству за полиноме прве групе:

Примери:

1) $am - bm + an - bn = m\,(a - b) + n\,(a - b) =$
$= (a - b)\,(m + n);$
2) $ab - ac - b + c = a(b - c) - (b - c) = (b - c)\,(a - 1);$

3) $a^2b^3 + abc^2d + ab^2cd + c^3 d^2 = ab(ab^2 + c^2 d) +$
$+ cd(ab^2 + c^2d) = (ab^2 + c^2d)\ (ab + cd)$.

III **група.** *У ову групу спадају биноми који су разлике квадрата од два броја.* Такав је бином $9a^2 - 25$, чији је први члан квадрат од $3a$ а други од 5. Ови биноми имају свега два чинитеља: један је збир а други је разлика бројева чији су квадрати чланови бинома.

Примери:

1) $9a^2 - 25 = (3a + 5)\ (3a - 5)$;
2) $x^2 - y^2 = (x + y)\ (x - y)$;
3) $16a^2b^4 - 9x^4y^2 = (4ab^2 + 3x^2y)\ (4ab^2 - 3x^2y)$.

IV **група.** *У ову групу спадају триноми добивени од бинома подигнутих на квадрат.* Знаци по којима познајемо да ли су ти триноми постали од бинома подигнутих на квадрат јесу следећи: ти триноми имају два члана, који су квадрати од два броја, а један је члан њихов двоструки производ. Ови триноми имају свега два једнака чинитеља, и то су: збир или разлика бројева од којих су она два члана тринома квадрати. Биће збир, ако је њихов двоструки производ позитиван, а разлика, ако је тај производ негативан.

Примери:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)\ (a + b) = (a + b)^2$;
2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)\ (a - b) = (a - b)^2$;
3) $9a^2 \pm 24ab + 16b^2 = (3a \pm 4b)\ (3a \pm 4b) = (3a \pm 4b)^2$.

V **група.** *У ову групу спадају биноми који су збирови степена са једнаким* ***непарним*** *изложитељима.* Такви су биноми: $a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$, $a^3 + 8$, односно $a^3 + 2^3$. Ови биноми имају свега два чинитеља: један је збир основа, а други је полином, уређен наизменично, по опадајућим изложитељима прве основе, а по растућим изложитељима друге основе.

Примери:

1) $a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$;
2) $(a^5 + 32) = (a^5 + 2^5) = (a + 2)\ (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16)$;
3) $(x^7 + 1) = (x + 1)\ (x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

VI **група.** *У ову групу спадају биноми који су разлике степена са једнаким* ***непарним*** *изложитељима.* Такви су биноми: $a^3 - b^3$, $a^5 - b^5$, $a^3 - 8$. Ови биноми такође имају два чинитеља: један је разлика основа, а други је полином чији су сви чланови позитивни, а уређен је по опадајућим изложитељима прве основе, а по растућим изложитељима друге основе.

Примери:

1) $a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$;

2) $a^5 - x^5 = (a - x)\ (a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4)$;

3) $x^5 - 1 = (x - 1)\ (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

VII **група.** У ову групу спадају триноми који нису постали од бинома подигнутих на квадрат, али који се дају свести у полиноме друге групе, растављањем другога члана на таква два члана чији је збир други члан, а производ њихових коефицијената раван је коефицијенту трећег члана. Када ове триноме овим начином претворимо у полиноме друге групе, онда их растављамо на чинитеље по упутству за полиноме друге групе.

1) $x^2 - 8x + 15 = x^2 - 3x - 5x + 15 = x\,(x - 3) - 5\,(x -$
$- 3) = (x - 3)\,(x - 5)$;

2) $x^2 - 5x - 24 = x^2 - 8x + 3x - 24 = x\,(x - 8) + 3(x - 8) =$
$= (x - 8)\,(x + 3)$;

3) $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 10x - 2x - 20 = x\,(x + 10) -$
$- 2\,(x + 10) = (x + 10)\,(x - 2)$.

VIII **група.** У ову групу спадају полиноми од четири члана (катриноми), који су постали од бинома подигнутих на куб. То су полиноми облика $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, тј. имају два члана који су кубови од два броја, један члан је троструки производ од квадрата првог броја помножен другим бројем, а други је члан троструки производ од првог броја помножен квадратом другог броја. Ови катриноми имају три једнака чинитеља, и то збир или разлику основа она два члана који су кубови. Биће збир ако су сви чланови катринома позитивни, а разлика, ако је овај катрином наизменично уређен.

Примери:

1) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)\,(a + b)\,(a + b) =$
$= (a + b)^3$;

2) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$;

3) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$.

Напомена. Сви остали сложени полиноми углавном су комбинације полинома поменутих осам група, а растављају се на чинитеље по упутствима тих група.

Решени примери.

1) $\underset{\text{(III)}}{a^6 - b^6} = \underset{\text{(V)}}{(a^3 + b^3)}\,\underset{\text{(VI)}}{(a^3 - b^3)} = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$
$(a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$;

2) $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 \underset{(V)}{=} (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$;

3) $3y^2 + 18y + 27 \underset{(I)}{=} 3(y^2 + 6y + 9) \underset{(IV)}{=} 3(y + 3)^2$;

4) $45x^4y^2 - 120x^2y^2 + 80y^2 = 5y^2(9x^4 - 24x^2 + 16) = 5y^2(3x^2 - 4)^2$;

5) $a^2 - b^2 + c^2 + 2ac = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$;

6) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c)$;

7) $x^{10} - 1 = (x^5 + 1)(x^5 - 1) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$;

8) $x^{12} - y^{12} = (x^6 + y^6)(x^6 - y^6) = [(x^2)^3 + (y^2)^3](x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Примери за вежбу

1) $5a + 5b$; 2) $2x - 2y$; 3) $abx - acx$; 4) $rs - r$;
5) $ab - ac + ad$; 6) $ax + bx - cx$; 7) $a(x - y) - b(x - y)$;
8) $b(x + y) - x - y$; 9) $ab - bc + a - c$; 10) $bc - b + c - 1$;
11) $4ab - 6cd - 4bc + 6ad$; 12) $4x^2 + 10x - 8xy - 20y$;
13) $30ab - 34bc - 15a + 17c$; 14) $x^4 - x^3y - xy^3 + y^4$;
15) $a^3 - 5a^2 - 9a + 45$; 16) $ax^3 - bx^2y - axy^2 + by^3$;
17) $2ax + 3bx + 4cx - 2ay - 3by - 4cy$;
18) $2ax - 3bx - 4cx - 2ay + 3by + 4cy$;
19) $(3a + b)(p - q) + (4a - 7q)(p - q) + (8 + a)(p - q)$;
20) $(4x - 5y + 6z)(3x - 2y - 5z) - (4x - 5y + 6z)(2x + 3y - 4z) + (4x - 5y + 6z)(5x - 6y - 7z) - (4x - 5y + 6z)(5x - 9y - 11z)$;
21) $a^2 - 1$; 22) $1 - x^2$; 23) $9a^2 - 4b^2$; 24) $24a^2 - 54b^2$;
25) $36x^2y^2 - 49a^2b^2c^2$; 26) $(2x - 3y)^2 - 4y^2$;
27) $9(5r - 4p)^2 - 64a^2$; 28) $a^2 + b^2 + 2ab - c^2$;
29) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$; 30) $9a^2 - 6ab + b^2 - c^2$;
31) $4x^2 + 20xy + 25y^2$; 32) $36a^2 - 108ab + 81b^2$;
33) $a^2b^2 - 14ab + 49b^2$; 34) $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3$;
35) $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3$; 36) $16x^4 - 81y^4$;
37) $a^6 + 6a^4b + 12a^2b^2 + 8b^3$; 38) $x^9 - 9x^6y^3 + 27x^3y^6 - 27y^9$;
39) $8x^3 \pm 27y^3$; 40) $64a^3 \pm 27b^3$; 41) $a^9 - b^9$;
42) $x^2 + 8x + 15$; 43) $a^2 - 6a + 8$; 44) $a^2 - 7a - 60$;
45) $a^2 + 2a - 35$; 46) $a^2 - a - 12$; 47) $a^2 + a - 12$;
48) $x^2 - 5xy - 6y^2$; 49) $a^2 - 3ab - 10b^2$; 50) $x^2 + 19xy + 90y^2$;

51) $b(b^3 + a^3) + ab(b^2 - a^2) + a^3(b + a)$;
52) $b(b^3 - a^3) + ab(b^2 - a^2) + a^3(b - a)$;
53) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$. Одг. $3(a + b)(a + c)(b + c)$.

§ 35) **Највећа заједничка мера.** Под *мером* једнога броја или израза разумемо други број (израз) који без остатка дели први број. Тако, број 2 је мера за број 10; израз $3x$ је мера за израз $6ax$; израз $a + b$ је мера за израз $a^2 - b^2$, итд. Под *заједничком мером* за два или више бројева или израза разумемо број или израз који дели све те бројеве (изразе) без остатка. Тако, број 5 је заједничка мера за 10 и 15; број 7 је заједничка мера за 14, 21 и 35; израз $a - b$ је заједничка мера за изразе $a^2 - b^2$ и $a^3 - b^3$ итд. Дешава се да дати бројеви немају само једне заједничке мере, већ две и више. Тако, бројеви 12 и 18 имају као заједничке мере: бројеве 2, 3 и 6; $15a^2bx$ и $18ab^2y$ имају као заједничке мере: 3, $3a$, $3b$ и $3ab$. Под највећом заједничком мером за два или више бројева или израза разумемо највећи број (израз) од свију бројева (израза) који могу бити за дате бројеве (изразе) заједничка мера. Тако, код пређашњих примера је број 6 највећа заједничка мера за бројеве 12 и 18, а израз $3ab$ је нај. заjед. мера за $15a^2bx$ и $18ab^2y$.

За два или више бројева или израза каже се да су *међусобно прости* или *релативно прости*, ако осим 1 немају друге заједничке мере. Такви су бројеви: 8 и 15; $3abx$, $5acy$ и $7bdz$; $a^3 - b^3$ и $a^3 + b^3$ итд.

Главна правила која се односе на мере бројева и израза јесу следећа:

1) *Заједничка мера два броја је истовремено мера и њиховог збира и разлике.*

Доказ. Ако је m заједничка мера за бројеве a и b, и ако је $\frac{a}{m} = p$ и $\frac{b}{m} = q$, онда је $a = mp$ и $b = mq$. Тада је $a \pm b = mp \pm mq$. Па како је израз $mp \pm mq$ дељив са m, то је и $a \pm b$, који је једнак са $mp \pm mq$, дељив са m. Уопште, ако је m заједничка мера за a, b, c и d, онда је m мера и за $a \pm b \pm c \pm d$.

2) *Мера неког броја је истовремено мера сваког производа од тога броја и неког другог броја.*

Доказ. — Нека је m мера броја a и нека је $\frac{a}{m} = p$. Тада је $a = mp$. Ако ову једначину помножимо ма којим бројем, на пр. бројем n, добијамо $an = mnp$. Како је m мера за mnp, то је m мера и за an, који је израз једнак изразу mnp.

3) *Ако је неки сложен број мера неког броја, онда су мере за тај број и сви његови прости чинитељи.*

Доказ: — Нека је $m = pqr$ мера за број a и нека је $\frac{a}{m} = s$. Тада је $a = ms = pqrs$. Па како је $pqrs$ дељив и са p и са q и са r, то је и a, који је једнак са $pqrs$, дељив са тим бројевима.

4) *Број који је заједничка мера дељеника и делитеља, мера је и њиховог деоног остатка.*

Доказ. — Нека је a дељеник, b делитељ, q њихов количник, d деони остатак, а m заједничка мера за a и b. Тада је $\frac{a}{b} = q + \frac{d}{b}$, а одавде је $d = a - bq$. Па како је израз $a - bq$ дељив са m, јер су a и b дељиви са m, то је и d, који је једнак са $a - bq$, дељив са m.

5) *Број који је заједничка мера делитеља и остатка, мера је и дељеника.*

Доказ. Ако је m зај. мера за b и d, онда из једначине $\frac{a}{b} = q + \frac{d}{b}$ имамо $a = bq + d$. Па како је m мера за $bq + d$, то је m мера и за дељеник a, који је једнак са $bq + d$.

Последица 4 и 5 правила јесте следеће правило: *Највећа заједничка мера за делитељ и деони остатак је истовремено највећа заједничка мера за дељеник и делитељ.* Ово ће правило често примењује при тражењу највеће заједничке мере за два полинома.

§ 36) Упутство за изналажење највеће заједничке мере

Највећу заједничку меру за два или више бројева или израза налазимо на два начина: *растављањем на просте чинитеље* и *верижним дељењем.*

а) *Растављањем на просте чинитеље.* Треба дате бројеве или изразе раставити најпре на просте чинитеље, а затим помножити све њихове *заједничке* чинитеље. Добивени производ биће тражена највећа заједничка мера.

Примери:

1) Наћи највећу заједничку меру за 12 и 18.

12	2
6	2
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

Подвучени прости чинитељи на десним странама усправних црта јесу *заједнички* чинитељи бројева 12 и 18; њихов је производ $2 \cdot 3 = 6$. Према томе је број 6 највећа заједничка мера за бројеве 12 и 18. Заиста, не постоји већи број од 6 а да дели једновремено и 12 и 18.

2) Наћи нај. зај. меру за $15a^2bx$ и $18ab^2y$. Овде је $15a^2bx = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot x$ и $18ab^2y = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot y$, а заједнички чинитељи јесу: 3, a и b. Њихов производ је $3ab$ и он је тражена нај. зај. мера.

3) Наћи нај. зај. меру за $18x^3 - 2xy^2$ и $y^4 + 6y^3x + 9x^2y^2$.

Овде је:

$18x^3 - 2xy^2 = 2x(9x^2 - y^2) = 2x(3x + y)(3x - y)$ и $y^4 + 6xy^3 + 9x^2y^2 = y^2(y^2 + 6xy + 9x^2) = y^2(y + 3x)^2$, те је највећа заједничка мера $y + 3x$, јер је само тај чинитељ заједнички.

b) *Верижним дељењем.* За два броја или израза налазимо највећу заједничку меру верижним дељењем на следећи начин. Треба најпре већи број поделити мањим. Ако се мањи број потпуно садржава у већем, онда је мањи број тражена највећа заједничка мера. Ако не наступи тај случај, већ преостаје остатак, онда мањи број делимо остатком, затим делимо први остатак другим остатком, и тако поступамо док не наиђемо на остатак који се потпуно садржава у претходном остатку. Тај остатак биће тражена највећа заједничка мера. За три броја налазимо највећу зај меру, када најпре нађемо нај. зај. меру за прва два броја, а затим верижним дељењем налазимо нај. зај. меру за трећи број и за нај. зај. меру од прва два броја. Ако су дата четири броја, онда налазимо нај. зај. меру за прва два, а затим за друга два, и најзад за нађене заједничке мере. Овај се поступак заснива на последици 4 и 5 правила из § 34.

Напомена. Истим путем налазимо нај. зај. меру и за полиноме. Ако се деси случај да први члан дељеника није дељив са првим чланом делитеља, онда, на основу другог правила из § 34, или дељеник множимо или делитељ делимо таквим једним најмањим бројем, да омогућимо дељење првих чланова.

Примери:

1) Одредити нај. зај. меру за 558 и 504.

Рад: 558 : 504 = 1 а остатак 54;
504 : 54 = 9 „ „ 18;
54 : 18 = 3 „ „ 0.

Према томе је 18 тражена нај. зај. мера за дате бројеве. Нађи нај. зај. меру за дате бројеве растављањем на чинитеље!

2) Одредити нај. зај. меру за 336, 700 и 640.

Најпре налазимо Н. З. М. за 336 и 700.

$$\left.\begin{array}{l} 700 : 336 = 2 \text{ а остатак } 28 \\ 336 : 28 = 12 \text{ а остатак } 0 \end{array}\right\} \text{28 је Н. З. М. за 336 и 700.}$$

Затим за 28 и 640:

$$\left.\begin{array}{l} 640 : 28 = 22 \text{ а остатак } 24 \\ 28 : 24 = 1 \text{ а остатак } 4 \\ 24 : 4 = 6 \text{ а остатак } 0 \end{array}\right\} \text{4 је Н. З. М. за све дате бројеве.}$$

3) Наћи нај. зај. меру за полиноме: $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ и $x^2 + x - 12$.

Рад: — а) Прво дељење:

$$\begin{array}{l} (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) : (x^2 + x - 12) = x - 10 \text{ (количник)} \\ \ \ x^3 + x^2 - 12x \\ \underline{\ -\quad -\quad +\qquad\qquad} \\ \qquad -10x^2 + 39x - 27 \\ \qquad -10x^2 - 10x + 120 \\ \underline{\qquad\ +\qquad +\qquad -\quad} \\ \qquad\qquad\quad 49x - 147 \qquad \text{(деони остатак).} \end{array}$$

b) Друго дељење:

$(x^2 + x - 12) : (49x - 147)$, или дељењем остатка са 49, према горњој напомени, добијамо:

$$\begin{array}{l} (x^2 + x - 12) : (x - 3) = x + 4 \\ x^2 - 3x \\ \underline{- \ +\qquad} \\ \quad 4x - 12 \\ \quad 4x - 12 \\ \underline{\ -\quad +\ } \\ \qquad 0 \end{array}$$

Према томе Н. З. М. за дате полиноме је $x - 3$.

4) Наћи Н. З. М. за полиноме: $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$, $4x^3 - 20x^2 + 33x - 18$ и $4x^2 - 12x + 9$.

Најпре налазимо Н. З. М. за прва два.

$$\begin{array}{l} (8x^3 - 36x^2 + 54x - 27) : (4x^3 - 20x^2 + 33x - 18) = 2 \text{ (количник)} \\ \ 8x^3 - 40x^2 + 66x - 39 \\ \underline{-\qquad +\qquad -\qquad +\qquad} \\ \qquad\qquad 4x^2 - 12x + 9 \quad \text{(I. остатак)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (4x^3 - 20x^2 + 33x - 18) : (4x^2 - 12x + 9) = x - 2 \\ \ 4x^3 - 12x^2 + 9x \\ \underline{-\qquad +\qquad -\qquad} \\ \qquad -8x^2 + 24x - 18 \\ \qquad -8x^2 + 24x - 18 \\ \underline{\qquad +\qquad -\qquad +\ } \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Према томе $4x^2 - 12x + 9$ је Н. З. М. за прва два полинома. Па како је трећи дати полином исти, то је ова мера Н. З. М. за сва три дата полинома.

§ 37) **Примери за вежбу**

Растављањем на просте чинитеље нађи највећу заједничку меру за:

1) 30, 75 и 120;
2) 216, 240 и 512;
3) $4abx$, $8acx$ и $18adx$;
4) $36a^3bx^2y^4$ и $84a^2b^3x^3y^2$;
5) $9ac$, $12b^2c$ и $24ac^2$;
6) $14a^2bc^2$ и $7abcd$;
7) $6a^3a^2c$, $12a^2bc^3$ и $18a^4b^3c^2$;
8) $72x^6y^6$, $1080x^5y^5z^3$, $90x^7y^9z^8$;
9) $66x^{m+r}\ y^{n+s}$, $44x^{m+r-1}y^{n+s+2}$, $132x^{m+r+1}y^{n+s-2}$;
10) $15x^2y^2z^2u^2$, $45y^3u^4$, $90x^4y^4z^4u^4$ и $180x^5y^3u^5$;
11) $4(m+n)^2$ и $6(m+n)$;
12) $a^3 - a^2p$ и ap^3n;
13) $a^2b - ab^2$ и $a^2b - b^3$;
14) $24a^2 + 36ab - 48ac$ и $3a^3 + 45a^2b - 60a^2c$;
15) $18(x^2 - y^2)$ и $27(x - y)^2$;
16) $a^5 - b^5$ и $a^3 - b^3$;
17) $a^2 - 1$ и $a^2 + 4a + 3$;
18) $x^4 + 2a^2x^2 + a^4 + ax^3 + a^3x$ и $x^4 - a^4$;
19) $4a^2 - 9b^2$, $(2a + 3b)^2$ и $8a^3 + 27b^3$;
20) $x^2 - 7x + 10$, $x^2 - 4x - 5$ и $x^2 - 8x + 15$;
21) $a^3 - a^2x - ax^2 + x^3$, $a^3 - 3ax^2 - 2x^3$ и $a^3 + 2a^2x -$
$- ax^2 - 2ax^2 - 2x^3$.

Верижним дељењем нађи највећу заједничку меру за:

22) $8x^3 - 6x + 2$ и $8x^3 + 16x^2 - 5$;
23) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ и $x^3 - 2x - 1$;
24) $3x^5 - x^4 - 3x + 1$ и $3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$;
25) $x^2 - 2a^2 - ax$, $x^2 - 6a^2 + ax$ и $x^2 + 2ax - 8a^2$;
26) $x^2 - 3x + 2$, $x^2 + x - 2$ и $x^2 - x - 2$;
27) $x^3 - 4x^2y + 3xy^2$, $x^2y + 2xy^2 - 3y^3$, $x^3y - x^2y^2 - 2xy^3$.

§ 38) **Најмањи заједнички садржатељ.** Под *садржатељем* неког броја разумемо број у коме се дати број садржава без остатка. Тако, 6 је садржитељ за 3; $4ab$ је садржитељ за a; $a^2 - b^2$ је садржатељ за $a + b$ итд. Под *заједничким садржатељем* за два или више бројева или израза разумемо број (израз) који је дељив свима датим бројевима (изразима). Тако, 12 је заједнички садржатељ за 2, 3, 4 и 6; $15ab$ је заједнички садржатељ за 3, 5, a, b, $3a$, $3b$, $5a$, $5b$, $3ab$, $5ab$ и ab; $a^2 - b^2$ је заједнички садржатељ за $a + b$ и $a - b$ итд.

Међутим, дати бројеви немају само један заједнички садржатељ, већ бескрајно много. Тако, бројеви 3 и 4 имају као заједничке садржатеље: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84,...; бројеви a и b имају као зај. садржатеље: ab, $2ab$, $3ab$, $4ab$,... mab итд.

Међу бројевима који могу бити заједнички садржатељи за дате бројеве један је најмањи и он се зове *најмањи заједнички садржатељ* (Н. З. С.). *Дакле, под најмањим заједничким садржатељем разумемо најмањи број (израз) од свију бројева (израза) који могу бити за дате бројеве садржатељи.*

Најмањи заједнички садржатељи за дане бројеве или изразе налазимо, као и највећу заједничку меру, на два начина: а) растављањем на чинитеље и b) помоћу највеће заједничке мере.

а) *Растављањем на чинитеље*

Ако су дати бројеви прости или релативно прости, онда је њихов производ најмањи заједнички садржатељ; ако су дати бројеви такви да међу њима постоји један у коме се сви дати бројеви садржавају, онда је он најмањи заједнички садржатељ; ако су дати бројеви такви да не спадају ни у први ни у други случај, онда их растављамо најпре на просте чинитеље, а затим множимо све различите чинитеље и то сваки се од њих узима као чинитељ онолико пута колико се ма у ком датом броју највише пута јавља као чинитељ. Добивени производ биће тражени најмањи заједнички садржатељ датих бројева и израза.

Решени примери:

1) Наћи Н. З. С. за 3, 5 и 7.

Овде су дати бројеви прости, те је Н. З. С. $= 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

2) Наћи Н. З. С. за 8 и 15.

Овде су дати бројеви релативно прости, те је Н. З. С. $=$ $= 8 \cdot 15 = 120$.

3) Наћи Н. З. С. за: $3ac$, $5ab$, $4a^2bc$ и $60a^2bc$.

Овде се сви дати бројеви садржавају у $60a^2bc$, те је тражени Н. З. С. $= 60a^2bc$.

4) Наћи Н. З. С. за 560, 660 и 480.

Растављањем ових бројева на просте чинитеље добијамо:

560	2	660	2	480	2
280	2	330	2	240	2
140	2	165	3	120	2
70	2	55	5	60	2
35	5	11	11	30	2
7	7	1		15	3
1				5	5
				1	

Овде су различити чинитељи: 2, 3, 5, 7 и 11, и то 2 се јавља највише пет пута (код III), а сви остали највише по једанпут. Стога је Н. З. С. $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 =$ $= 36\,960$.

I *Напомена*. За посебне бројеве Н. З. С. налазимо на следећи скраћени начин:

560,	660 и	480	2
280	330	240	2
140	165	120	2
70	165	60	2
35	165	30	2
35	165	15	3
35	55	5	5
7	11	1	7
1	11		11
	1		

Треба све дате бројеве написати у хоризонталном реду, па с десне стране повући усправну црту. Затим делимо дате бројеве са 2, ако међу њима постоји ма и један број који је дељив са 2, količnike пишемо испод датих бројева а делитељ 2 с десне стране. Бројеве који нису дељиви са 2 спуштамо у ред количника. Дељење са 2 продужава ће све дотле док наилазимо на количнике дељиве са 2. Затим, као са 2, делимо редове количника са 3, 5, 7, 11, 13 итд. док год на дну сваког стуба не добијемо количник један. Множењем бројева с десне стране црте добијамо тражени Н. З. С.

II *Напомена*. Ако међу датим бројевима има бројева који се садржавају у неком другом датом броју, онда се ти бројеви изостављају при тражењу Н. З. С. Тако, ако се тражи Н. З. С. за 18, 35, 36 и 70, онда бројеве 18 и 35 изостављамо, јер се први садржава у 36 а други у 70; тражимо Н. З. С. само за 36 и 70, јер је очевидно да је број дељив са 36 дељив и са 18, а број дељив са 70, дељив је и са 35.

5) Нађи Н. З. С. за:

4,	12,	28,	36,	25,	70	и 100	2
		14	18		35	50	2
		7	9		35	25	3
		7	3		35	25	3
		7	1		35	25	5
		7			7	5	5
		7			7	1	7
		1			1		

Овде је

Н. З. С. $= 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7 =$
$= 6\,300.$

6) Нађи Н З. С. за: $12a^2b^3$, $15ab^2c$, $21a^3c^2$ и $28ab^3c$. Овде је за коефицијенте Н. З. С. $= 2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7 = 420$, а за главне количине $a^3b^3c^2$, те је Н. З. С. за дате мономе: $420a^3b^3c^2$.

12	15	21	и 28	2
6	15	21	14	2
3	15	21	7	3
1	5	7	7	5
	1	7	7	7
		1	1	

7) Нађи Н. З. С. за: x^3-2x^2+x, $2ax^2-2a$ и $5x^2+10x^3+5x^4$ Када ове полиноме раставимо на чинитеље, добијамо:

$x^3-2x^2+x = x\,(x^2-2x+1) = x\,(x-1)^2$;

$2ax^2 - 2a = 2a(x^2 - 1) = 2a(x+1)(x-1)$; и
$5x^2 + 10x^3 + 5x^3 = 5x^2(1 + 2x + x^2) = 5x^2(1+x)^2$.

Овде су различити чинитељи: 2, 5, a, x, $(x+1)$ и $(x-1)$. Узимајући сваки од њих у производу онолико пута колико се пута највише јавља, налазимо да је Н.З.С. $10ax^2(1+x)^2(1-x)^2$.

8) Најмањи заједнички садржатељ за полиноме:
$x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=(x+1)^2(x-1)$;
$x^2-3x+2=x^2-x-2x+2=x(x-1)-2(x-1)=(x-1)(x-2)$; и
$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)(x^2-1)=$
$=(x-2)(x+1)(x-1)$ је: $(x+1)^2(x-1)(x-2)$.

b) *Помоћу највеће заједничке мере*

Најмањи заједнички садржатељ за два цела броја (израза) раван је њиховом производу подељеном њиховом највећом заједничком мером.

Доказ. — Нека је D највећа заједничка мера за A и B и нека је $\frac{A}{D} = m$ и $\frac{B}{D} = n$. Тада је:

$$A = Dm \text{ и } B = Dn \cdots (1)$$

Одавде је: $AB = D^2mn$ и $\frac{AB}{\mathrm{D}} = Dmn$ (2). Па како је Dmn најмањи заједнички садржатељ за Dm и Dn, односно за A и B(1), то је $\frac{AB}{D}$, који је једнак са Dmn (2), најмањи заједнички садржатељ за A и B. Ако је $D = 1$, то је најмањи заједнички садржатељ за A и B њихов производ. У овом случају A и B су релативно прости бројеви (изрази). Овај начин изналажења Н. З. С. примењује се онда када су бројеви (изрази) велики и незгодни за растављање на чинитеље.

Примери:

1) Нађи Н.З.С. за $6x^3+13x^2+15x-25$ и $2x^3+4x^2+4x-10$.

Највећа заједничка мера за дате полиноме је:

$$\begin{array}{l}
(6x^3 + 13x^2 + 15x - 25) : (2x^3 + 4x^2 + 4x - 10) = 3 \\
\;\;6x^3 + 12x^2 + 12x - 30 \\
\underline{-\quad\;\; -\qquad\; -\qquad +\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad x^2 + 3x + 5 \text{ (I остатак)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(2x^3 + 4x^2 + 4x - 10) : (x^2 + 3x + 5) = 2x - 2 \\
2x^3 + 6x^2 + 10x \\
\underline{-\qquad -\qquad -\qquad} \\
\quad -2x^2 - 6x - 10 \\
\quad -2x^2 - 6x - 10 \\
\quad \underline{+\qquad +\qquad +\;\;} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad \text{Н. З. М.} = x^2 + 3x + 5.$$

Тада је Н.З.С. $= \frac{(6x^3+13x^2+15x-25)(2x^3+4x^2+3x-10)}{x^2+3x+5} =$
$= (6x^3+13x^2+15x-25)(2x-2) = 12x^4+14x^3+4x^2-80x+50.$

Напомена. Најмањи заједнички садржатељ за три и више бројева (израза) налазимо када најпре нађемо Н. З. С. за прва два броја, затим за нађени Н. З. С. и трећи број (израз), затим за други нађени Н. З. С. и четврти број (израз) итд. док не добијемо Н. З. С. од претпоследњег Н. З. С. и последњег броја (израза).

§ 39) **Примери за вежбу.** Нaћи најмањи заједнички садржатељ растављањем на чинитеље:

1) 80, 120 и 150; 3) $2a$, $3ab$, $4abm$ и $15a^2b$;
2) 5, 7, 15, 21 и 60; 4) $8a$, $12abc$, $32a^2c$ и $36ab^2c$;
5) $4a$, $(a-2)$, $8(a+2)$, $16(a^2-4)$ и $32(a+2)^2$;
6) $3a^2-3ab$, $6ab-6b^2$ и $12a^2b^2$;
7) $8ac^5$, $64a^4c^3(a+x)^2$ и $4a^3c(a-x)^3$;
8) $26a^4x^n$, $9a^3x^{2n}$ и $36a^2x^{3n}$;
9) $ax+ay$, x^2+xy, a^2bx-ab^2y и $abx+b^2y$;
10) y^2-16 и y^3-64;
11) $a^2-15a+36$ и $a^2-9a-36$;
12) $a^2+8a+15$ и $a^2+10a+25$;
13) $27x^3+64$ и $9x^2-12x+16$;
14) $(a+b)$, $(a-b)$ и a^2-b^2;
15) a^2-b^2, $(a-b)^2$ и $a+b$;
16) $ab+ac$, $bd-cd$ и b^2e-c^2e;
17) $x+y$, $3x-3y$, $6xy+6y^2$ и $x-y$;
18) $a-1$, a^2+a+1 и a^3-1;
19) a^2+b^2, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^2$;
20) x^2-y^2, $x-y$, x^3-y^3, $x+y$ и x^3+y^3;
21) $x-y$, x^2+xy+y^2, x^3-y^3, $x+y$, x^2-xy+y^2 и x^3+y^3;
22) $2a^5-8a^4+8a^3$, $3a^5-6a^4$ и $8a^3-32$;
23) x^3-2x^2-x+2 и $x^3+2x^2-9x-18$.

Нaћи Н. З. С. помоћу нај. зај. мере:

24) 561 и 1530; 25) 816, 765 и 697.
26) $a^3-49a-120$ и $a^2+10a+25$;
27) $a^4+3a^3+6a^2+5a+3$ и a^3+2a^2+2a+1;
28) $4x^2+4x-3$ и $6x^2-7x+2$;
29) $x^3-4x^2y+3xy^2$, $x^2y+2xy^2-3y^3$ и $x^3y-x^2y^2-2xy^3$;
30) $21x^3+20x^2-3x-2$, $6x^3-11x^2-12x+5$ и
$3x^3-10x^2-9x+4$.

§ 40) **Разломци.** Ако једну целину узмемо за јединицу па је поделимо на неколико једнаких делова, онда се сваки такав део зове *разломљена јединица.* Збир од две или више разломљених јединица зове се *разломак* или *разломљен број.* Тако, ако јединицу поделимо на 6 једнаких делова, онда је $\frac{1}{6}$ разломљена јединица, а $\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}$ разломци. Код разломка разликујемо два дела: *бројитељ* и *именитељ.* Именитељ показује на колико је једнаких делова подељена јединица, а бројитељ колико смо таквих делова узели. Код разломка $\frac{a}{b}$ именитељ је b а бројитељ a. Разломак ће бити *прав,* ако је бројитељ мањи од именитеља, а *неправ,* ако је бројитељ већи од именитеља. Цели и разломљени бројеви једним се именом зову *рационални.* Општи облик рационалних бројева је разломак, јер је $a = \frac{an}{n}$, те су правила за рачунске операције и целих и разломљених бројева иста.

Ако су A и B цели рационални изрази и ако A није дељиво са B, то се количник $\frac{A}{B}$ зове разломљен израз или рационалан разломак. Тако, $\frac{5x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$ је рационалан разломак. Рационалан разломак је *прав,* ако је степен бројитеља мањи од степена именитеља, а *неправ* ако је степен бројитеља једнак степену именитеља, или је степен бројитеља већи од степена именитеља.

Сваки неправ разломак дâ се претставити као збир од једног целог и једног разломљеног броја (израза). Тако,

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3} = x + 7 + \frac{x + 5}{x^2 + 2x - 3}.$$

§ 41) Особине разломака

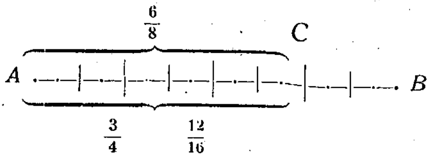
а) *Сваки је разломак једно означено дељење.* Тако, $\frac{a}{b} = a : b$, јер поделити a са b значи поделити поступно сваку јединицу броја a са b. Тако, $\frac{3}{2} = 3 : 2 = (1 + 1 + 1) : 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

Па како b-ти део од 1 је $\frac{1}{b}$, то је b-ти део од a јединица a пута већи од $\frac{1}{b}$, или разломак $\frac{a}{b}$. Ако при деоби једног броја с другим бројем добијамо количник и деони остатак, онда се остатак означава као разломак чији је бројитељ остатак а именитељ делитељ. Тако, $35:8=4+\frac{3}{8}$; ако делимо a са b, па добијемо количник q и остатак r, то је $a:b=q+\frac{r}{b}$. Одавде је $a=\left(q+\frac{r}{b}\right)b=bq+\frac{rb}{b}=bq+r$.

b) *Ниједан разломак не мења своју вредност ако и бројитељ и именитељ помножимо или поделимо једним истим бројем.*

Доказ. — Како је сваки разломак једно означено дељење, чији је дељеник бројитељ а делитељ именитељ, а познато је да се количник не мења, ако и дељеник и делитељ помножимо или поделимо једним истим бројем, то се ово правило за количник два броја примењује за вредност разломка. Тако,

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm} \text{ и } \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$$



Сл. 2

О овом се уверавамо и из сл. 2. Ако дуж AB поделимо на 8 једнаких делова, па узмемо таквих делова 6, онда отсечак AC претставља разломак $\frac{6}{8}$. Међутим исти овај отсечак претставља разломак $\frac{3}{4}$ и разломак $\frac{12}{16}$, добивени од $\frac{6}{8}$ дељењем (множењем) и бројитеља 6 и именитеља 8 са 2, јер ако исту дуж AB поделимо са 4, односно са 16, па узмемо 3 (12) таквих делова, добијемо опет њен отсечак AC. Исте особине важе и за *рационалне разломке*.

§ 42) **Скраћивање разломака и њихово довођење на заједнички именитељ.**

а) ***Скраћивање разломака.*** Скратити један разломак значи поделити му и бројитељ и именитељ једним истим бројем. Ово скраћивање врши се да бисмо добили разломак чији су бројитељ и именитељ најмањи релативно прости бројеви (изрази), а вредност се разломка не мења на основу правила под b) § 40. При скраћивању разломака делимо бројитељ и именитељ њиховом највећом заједничком мером. Ако бројитељ и именитељ разломка нису мономи, већ полиноми, онда их пре скраћивања растављамо на просте чинитеље, па ће се одмах видети једнаки чинитељи у бројитељу и именитељу којима се разломак може скратити.

Решени примери:

1. Скратити разломак $\frac{25a^2bx}{40ab^2x}$. Овде је за бројитељ и именитељ Н. З. М. $= 5abx$. Ако поделимо и бројитељ и именитељ с овом мером, добијамо скраћени разломак $\frac{5a}{8b}$.

2. Скратити разломак $\frac{2ax - a + 10x - 5}{a - ax - 5x + 5}$. Ако раставимо на чинитеље бројитељ и именитељ добијамо: $\frac{(2x-1)(a+5)}{(1-x)(a+5)}$. Скраћивањем са $(a+5)$ добијамо $\frac{2x-1}{1-x}$.

3. Скратити разломак $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2+6xy+5y^2}$. Ако бројитељ и именитељ раставимо на чинитеље, добијамо: $\frac{(x+y)(x+2y)}{(x+y)(x+5y)}$. Скраћивањем са $(x+y)$ добијамо $\frac{x+2y}{x+5y}$.

Напомена. При одређивању бројне вредности једног рационалног разломка за неке посебне вредности општих бројева, често наилазимо на неодређену вредност $\frac{0}{0}$, ако супституцију извршимо пре скраћивања разломака. Да бисмо нашли праву вредност дотичног разломка, треба супституцију да извршимо после скраћивања разломка. Тако, $\frac{x^2+6x-16}{x^2+5x-24}$ за $x = -8$ имаће пре скраћивања привидну неодређену вредност $\frac{0}{0}$, а праву његову вредност наћи ћемо, ако бројитељ и именитељ раставимо на чинитеље: $\frac{(x+8)(x-2)}{(x+8)(x-4)}$ па скраћивањем добијамо: $\frac{x-2}{x-3}$ а супституцијом $\frac{-8-2}{-8-3} = \frac{-10}{-11} = \frac{10}{11}$.

b) Довођење разломака на заједнички именитељ

Два или више разломака различитих именитеља доводимо на заједнички именитељ, на основу правила под b) § 40, ако и бројитељ и именитељ свакога разломка помножимо таквим једним бројем, да добијемо разломке једнаких именитеља. Број којим треба да множимо и бројитељ и именитељ сваког разломка је количник између заједничког садржатеља именитеља свих датих разломака и именитеља дотичног разломка. Обично овим количником множимо само бројитељ а не и именитељ разломка, јер је производ од именитеља разломка и количника најмањи заједнички садржатељ.

Примери:

1) Доведи на зај. именитељ: $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{12}$ и $\frac{7}{18}$.

Овде је најмањи зај. садржатељ за именитеље 360. Стога бројитељ I разломка множимо са 72 (количник између 360 и 5), II разломка са 90 ($360 : 4 = 90$), III разломка са 45, IV разломка са 30, а V разломка са 20. Именитеље тих разломака не множимо поменутим количницима, јер унапред знамо да ћемо добијати свуда именитељ 360. Овим поступком добијамо разломке: $\frac{288}{360}, \frac{270}{360}, \frac{315}{360}, \frac{150}{360}$ и $\frac{140}{360}$.

2) Доведи на заједнички именитељ разломке:

$$\frac{a+1}{a-1}, \frac{a^2+2a}{a^2-1}, \frac{3a}{a+1} \text{ и } \frac{a^2-1}{a^2+1}$$

Овде се $(a-1)$ и $(a+1)$ садржавају у a^2-1, а за a^2-1 и a^2+1, који су релативно прости изрази, заједнички је именитељ њихов производ a^4-1, или $(a+1)(a-1)(a^2+1)$. Стога бројитељ I разломка множимо са $(a+1)(a^2+1)$, II разломка са (a^2+1), III са $(a-1)(a^2+1)$, а IV са (a^2-1). Тиме добијамо разломке:

$$\frac{(a+1)^2(a^2+1)}{a^4-1}, \frac{(a^2+2a)(a^2+1)}{a^4-1}, \frac{3a(a-1)(a^2+1)}{a^4-1} \text{ и } \frac{(a^2-1)^2}{a^4-1}.$$

§ 43) Задаци за вежбу

а) Скрати разломке:

1) $\frac{6ab^2}{7abc}$; 2) $\frac{18ax^2y}{30axy^2}$; 3) $\frac{39a^3b^3(a+b)}{65ab^3(a+b)^2}$; 4) $\frac{a^3-a^2b}{ab^2-b^3}$;

5) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$; 6) $\frac{10xy-25y^2}{9x^2-30xy+25y^2}$; 7) $\frac{50a^3-72ab^2}{25a^2-60ab+36b^2}$;

8) $\frac{23a^3b^2c^3+46a^5b^6}{46a^3b^2c^3+92a^5b^6}$; 9) $\frac{ap+bq+bp+aq}{2ap-bq-bp+2aq}$; 10) $\frac{b^2-5b-bc+5c}{b^2-3b-bc+3c}$;

11) $\frac{tu+tv}{u^2-v^2}$; 12) $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$; 13) $\frac{x^3+5x^2}{x^2-25}$; 14) $\frac{8a-6b}{27b^2-48a^2}$;

15) $\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}$; 16) $\frac{6a^2 - 9ab}{16a^2b - 48ab^2 + 36b^3}$;

17) $\frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}$; 18) $\frac{a^2bc - b^3c + b^2c^2 - bc^3}{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$;

19) $\frac{a^2 - 4a + 3}{a^2 - 2a - 3}$; 20) $\frac{a^2 - 4a + 4}{a^2 - 5a + 6}$; 21) $\frac{a^2 + 5a - 36}{a^2 - 15a + 44}$;

22) $\frac{a^2 - 7a - 18}{a^2 - 15a + 54}$; 23) $\frac{(x+a)^2 - (y-b)^2}{(x-b)^2 - (y+a)^2}$;

24) $\frac{a^2 - 4ab - 21b^2}{a^2 - 49b^2}$.

в) Доведи на заједнички именитељ разломке:

1) $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$; 2) $\frac{b}{3a}$ и $\frac{d}{5c}$; 3) $\frac{2a^2}{b^3}$, $\frac{3b^2}{a^2}$ и $\frac{5ab}{c^3}$;

4) $\frac{5a}{c^3}$, $\frac{2b^2}{ac}$ и $\frac{b^3}{a^3c}$; 5) b и $\frac{a^2}{b}$;

6) $\frac{7b^3c}{24a^4d^6}$, $\frac{a^3b^4}{18c^5x}$ и $\frac{5b^5c^3}{36a^3d^{12}}$; 7) $\frac{a}{a-b}$, $\frac{b^2}{a^2+ab}$ и $\frac{a^3}{a^2b-b^3}$;

8) $\frac{3a}{x^3 - ax^2}$, $\frac{2x}{x+2a}$ и $\frac{5a}{x^3 + ax^2 - 2a^2x}$;

9) $\frac{2ax}{a^4 - x^4}$, $\frac{a^2}{x^2(x^2 - a^2)}$ и $\frac{x^2}{a^3(x-a)}$;

10) $\frac{A}{9a^3 - 9a^2b}$, $\frac{B}{6a^4b^3 + 6a^3b^4}$, $\frac{C}{18b(a^2 - 2ab + b^2)}$;

11) $\frac{A}{(a-b)(a-c)}$, $\frac{B}{(b-a)(b-c)}$, $\frac{C}{(c-a)(c-b)}$.

§ 44) Сабирање и одузимање разломака

а) *Два или више разломака једнаких именитеља сабирамо, када им саберемо само бројитеље, а заједнички именитељ потписујемо.* Тако,

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a + b + c}{m}.$$

b) *Два или више разломака различитих именитеља сабирамо, када их претходно доведемо на заједнички именитељ, а затим поступамо по првом случају, тј. сабирамо бројитеље а заједнички именитељ потписујемо.* Тако,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{m}{n} = \frac{adn}{bdn} + \frac{bcn}{bdn} + \frac{bdm}{bdn} = \frac{adn + bcn + bdm}{bdn}.$$

c) *Два разломка једнаких именитеља одузимамо, када бројитељ умалитељев одузмемо од бројитеља умањеникова а заједнички именитељ потписујемо.* Тако,

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m};\qquad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a-b-c}{m}.$$

d) *Два разломка различитих именитеља одузимамо, када их претходно доведемо на заједнички именитељ, а затим бројитељ умалитељев одузимамо од бројитеља умаљеникова, а заједнички именитељ потписујемо.* Тако,

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{p}{q}=\frac{adq-bcq-bdp}{bdq}.$$

Намомена. Ако имамо да сабирамо (одузимамо) цео број с разломком, или обрнуто, разломак с целим бројем, онда најпре цео број множимо и делимо именитељем, чиме добијамо да сабирамо (одузимамо) два разломка једнаких именитеља, а затим поступамо као под а) или под с). Тако,

1) $a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$; 2) $a-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$;

3) $\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{bc}{b}=\frac{a+bc}{b}$; 4) $\frac{a}{b}-c=\frac{a}{b}-\frac{bc}{b}=\frac{a-bc}{b}$.

Овде у ствари имамо да сабирамо (одузимамо) два разломка различитих именитеља, јер цео број можемо сматрати као разломак чији је именитељ 1. Увек се, дакле, множи цео број са именитељем, и добивеном производу додаје се бројитељ разломка (са својим знаком); све то узимамо за бројитељ резултата а именитељ потписујемо.

Примери за вежбу:

1) $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}$; 2) $\frac{x}{m}-\frac{y}{m}$; 3) $\frac{a}{5}+\frac{9a}{5}$; 4) $\frac{xy}{n}-\frac{yz}{n}$;

5) $\frac{3x}{m}-\frac{2x}{m}+\frac{x}{m}$; 6) $\frac{3x}{n}+\frac{5x}{n}-\frac{12x}{n}$; 7) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}$; 8) $\frac{a}{x}-\frac{b}{mx}$;

9) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$; 10) $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$; 11) $\frac{2b}{9a^4}-\frac{7c}{6ab^2}$; 12) $\frac{m}{a}+\frac{m}{b}+\frac{m}{c}$;

13) $\frac{3a}{bc}-\frac{5a}{bd}+\frac{4d}{bf}$; 14) $\frac{3b}{5a^2}-\frac{a}{6b^2}-\frac{8c}{15ab}$;

15) $\frac{a^{n-1}}{c^2x^{n-3}}-\frac{b^4z^n}{c^4x^{n-4}}-\frac{1}{acx^n}$; 16) $\frac{a+b}{b}+\frac{a-b}{b}$;

17) $\frac{c+d}{3c}-\frac{c-d}{4c}$; 18) $\frac{2a-3b}{4}+\frac{3a-2b}{5}$;

19) $\frac{3x-2y}{3}-\frac{4y+2x}{5}+\frac{22y-9x}{15}$;

20) $\frac{20a^2b+c^2}{10a^3b^2}+2ab^2-\frac{3}{2ab}$;

21) $\frac{6c+5b}{6bc}+\frac{3a-5b}{15ab}-\frac{a-7c}{12ac}-\frac{4c-5b}{2abc}+\frac{3}{4a}$;

22) $\frac{(a-b)^2}{4ab}+1$; 23) $1-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$;

24) $x-1-\frac{4x^3-4x^2+x}{4x^2+4x+1}$; 25) $\frac{b}{a-b}+\frac{a}{a+b}$;

26) $\frac{x}{1-a^2}-\frac{x}{a^2+1}$; 27) $\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

28) $\frac{2a+3x}{2a-3x}-\frac{2a-3x}{3x-2a}$; 29) $\frac{a}{a-b}+\frac{3a}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$;

30) $\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}-\frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$; 31) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}$;

32) $\frac{5}{2a+2}-\frac{1}{10a-10}-\frac{24}{10a+15}$;

33) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

34) $\frac{1}{a-3}+\frac{a-3}{a^2+3a+9}+\frac{3a-2a^2}{a^3-27}$;

35) $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}+\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\frac{2}{x^4+x^2y^2+y^4}$;

36) $\frac{a+2x}{3a-3x}-\frac{3c-a}{2a-2c}+\frac{a^2-cx}{a^2-ac+cx-ax}$;

37) $\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{a^2+5a+6}$;

38) $\frac{(a+b)^2-c^2}{a^2-b^2+2bc-c^2}+\frac{a-b-c}{a+b-c}-\frac{a+b+c}{a-b+c}$;

39) $\frac{1}{(m-n)(m-p)}+\frac{1}{(n-m)(n-p)}+\frac{1}{(p-m)(p-n)}$;

40) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}$;

41) $\frac{7x+3y}{6xy-2y^2}-\frac{3x-4y}{9x^2+3xy}+\frac{5x^2-3xy}{27x^3-3xy^2}-\frac{xy-2y^2}{18x^2y-2y^2}$,

§ 45) **Множење разломака.** *Разломак се множи разлом-*

ком, кад се помножи бројитељ бројитељем а именитељ именитељем. Тако,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Када имамо цео број да множимо разломком, или обрнуто, разломак с целим бројем, онда замишљајући да је цео број разломак, чији је именитељ 1, поступамо по горњем правилу, тј. множимо цео број бројитељем а именитељ потписујемо. Тако,

$$a \cdot \frac{b}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{d}; \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}.$$

Доказ. Како је $a = \frac{a}{b} \cdot b$ и $c = \frac{c}{d} \cdot d$, то множењем ових двеју једначина добијамо:

$ac = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot bd$ (јер производ левих страна мора бити раван производу десних).

Ако и леву и десну страну ове једначине поделимо са bd, добијемо: $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, или обрнуто $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, чиме је горње правило доказано.

Примери за вежбу:

1) $\frac{a}{b} \cdot c$; 2) $\frac{4a^2}{b^2} \cdot 3b^2c^3$; 3) $\frac{4x^2y^2}{15p^4b^9} \cdot 45p^2q^2$;

4) $4m^2x^3 \cdot -\frac{3a^2m^3}{8x^5}$; 5) $-2b^n c^3 (x-1)^n \cdot \frac{3c}{b^p (x-1)^{n-2}}$;

6) $\frac{2a}{3b} \cdot \frac{6bc}{5a^2}$; 7) $\frac{9a^2b^{n-2}}{c^3d^{m-p}} \cdot -\frac{2cd^{m+q}}{3a^5b^2}$;

8) $\frac{5a^2b}{3cd} \cdot \frac{4b^2c}{15a^2} \cdot \frac{9c^2d}{16b^3}$; 9) $\frac{3bx^2}{8(x+y)^4c^3} \cdot -6(x+y)^2 c^4x^3$;

10) $\frac{18a^5 (a-x)^3c^{n-2}}{d^4} \cdot \frac{5a^2}{9c^{n-4} (a-x)^5}$;

11) $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{6z}{35x} \cdot \frac{7y}{8z} \cdot 5x$; 12) $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2-1}$;

13) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{3x}{x-y}$; 14) $\frac{ab+ac}{bd-cd} \cdot \frac{ab-ac}{bd+cd}$;

15) $\frac{x^3+y^3}{x-y} \cdot \frac{x+y}{x^3-y^3}$; 16) $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{ab(a-b)}$;

17) $\frac{b(a-c)}{a^2+2ac+c^2} \cdot \frac{a(c+a)}{a^2-2ac+c^2}$;

18) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^3+3xy(x+y)+y^3} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$;

19) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2} \cdot \dfrac{a^3+b^3}{a-b}$;

20) $\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac} \cdot \dfrac{x^2-c^2}{x^2-a^2}$;

21) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$; 22) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{c}{b}\right)$; 23) $\left(\dfrac{a^2}{b}-a\right)\left(c-\dfrac{bc}{a}\right)$;

24) $\dfrac{ab}{a+b} \cdot \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$; 25) $\left(1+\dfrac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\dfrac{2a}{a+b}\right)$;

26) $\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right)$;

27) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}+1\right)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$;

28) $\left(\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{y-x}{x}\right) \cdot \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$; 29) $\left(1+a-\dfrac{a^2+3}{a+1}\right)\left(1-a^2\right)$;

30) $\left(\dfrac{a^2+1}{2a-1}-\dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{3-a}{a+2}-1\right)$; 31) $\dfrac{1-a^2}{1+b} \cdot \dfrac{1-b^2}{a+a^2} \cdot \left(1+\dfrac{a}{1-a}\right)$;

32) $\left(\dfrac{3}{5x}-\dfrac{3}{x+y}\right)\left(\dfrac{x+y}{5x}-x-y\right)$;

33) $\left(\dfrac{x}{yz}-\dfrac{y}{xy}-\dfrac{r}{xy}-\dfrac{2}{y}\right) \cdot \left(1-\dfrac{2z}{x+y+z}\right)$;

34) $\left(\dfrac{4xy}{z^2-x^2-y^2+2xy}-1\right)\left(1-\dfrac{2x}{x+y+z}\right)$;

35) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1} \cdot \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2} : \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$;

36) $\dfrac{a^6-b^6}{a^4+2a^2b^2+b^4} \cdot \dfrac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2} \cdot \dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$.

§ 46) **Дељење разломака**

Разломак делимо разломком, када поделимо бројитељ бројитељем а именитељ именитељем, ако је то могуће, а ако је то немогуће, онда најпре бројитељ првог разломка множимо именитељем другога, затим именитељ првог множимо бројитељем другог разломка, па први производ узимамо за бројитељ, а други за именитељ резултата (количника). Тако,

a) $\dfrac{ax}{by} : \dfrac{x}{y} = \dfrac{ax : x}{by : y} = \dfrac{a}{b}$; b) $\dfrac{a}{b} : \dfrac{m}{n} = \dfrac{an}{bm}$.

На краћи начин: $\dfrac{a}{b} : \dfrac{m}{n} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{n}{m} = \dfrac{an}{bm}$, тј. први разломак множимо са реципрочном вредношћу другог разломка.

Да је ово правило тачно, уверавамо се, и код првог и код другога примера, множењем количника делитељем, чиме добијамо у оба случаја дељеник.

Напомена. Када имамо да делимо цео број разломком, или обрнуто, разломак целим бројем, онда опет поступамо по горњем правилу, јер замишљамо да је цео број разломак, чији је именитељ јединица. Тако,

а) $a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$; b) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$.

Добро упамти: када делиш разломак целим бројем, увек само множи целим бројем именитељ разломка.

Примери за вежбу:

1) $\frac{a}{b} : a$; 2) $a^3 : \frac{a^2}{c}$; 3) $\frac{x}{y} : z$; 4) $x : \frac{y}{z}$;

5) $\frac{1}{b} : a$; 6) $\frac{ab}{cd} : abc$; 7) $\frac{9m^3n^2}{8pq} : 8n^2$; 8) $49x^2y^3 : \frac{7x^2y^2}{11pq}$;

9) $\frac{a}{b} : \frac{1}{b}$; 10) $\frac{1}{c} : \frac{6ab}{c}$; 11) $\frac{24xy}{7ab} : \frac{16z}{9ab}$; 12) $\frac{7ab}{3mn} : \frac{5pb}{11xy}$;

13) $\frac{14a^2b^3c}{39d^5s^7} : \frac{35a^4b^5}{9d^7s}$; 14) $\frac{a^{3n-2}}{b^{mn+1}} : \frac{a^{n+2}}{b^{2m+mn}}$;

15) $\frac{a^{m+n}b^{n+p}}{x^{n+p}y^{p+n}} : \frac{a^{n-p}b^{p-m}}{x^{p-1}y^{m-2}}$; 16) $\frac{3p-3q}{5p+5q} : \frac{3q-3p}{10q+10p}$;

17) $\frac{6ab-6b^2}{a(a+b)} : \frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}$; 18) $\frac{y^2-4x^2}{y^2+4xy} : \frac{y^2-2xy}{xy+4x^2}$;

19) $\frac{6a^4}{a^2-ab+b^2} : \frac{12a^3}{a^3+b^3}$; 20) $\frac{a^2+b^2}{1+x+x^2} : \frac{a^4-b^4}{1+x^2+x^4}$;

21) $\frac{x^2+(a+b)x+acb}{x^2-(a-c)x-ac} : \frac{x^2-a^2}{x^2-c^2}$;

22) $\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{z^2-x^2-y^2+2xy} : \frac{x+y+z}{y+z-x}$;

23) $\frac{a^2+2a-3}{a^2+4a+4} : \frac{a^2-9}{a^2+3a+2}$; 24) $\frac{a^2-2a-15}{a^2-8a+16} : \frac{a^2-8a+15}{a^2-a-12}$;

25) $\frac{x^6+1}{x^2-1} : \frac{(x^2-1)^2+x^2}{x^2-2x+1}$;

26) $\frac{6p^2q^3}{m+n} : \left\{\frac{3(m-n)q}{7(r+s)} : \left[\frac{4(r-s)}{21p^2q^2} : \frac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right]\right\}$;

27) $\left(4x^2 - \frac{y^2}{9}\right) : \left(2x - \frac{y}{3}\right)$; 28) $\frac{a^2b^2-1}{b^2} : \left(a - \frac{1}{b}\right)$;

29) $\left[\frac{(r+s)^2-(2s)^2}{r^2-s^2} - \frac{r-s}{r+s}\right] : \frac{2s}{r+s}$;

30) $\left(\frac{z}{xy} - \frac{2z}{xy} + \frac{z}{3xy}\right) : \frac{2z}{3xy}$;

31) $\left(\frac{x^2y^4}{3} - 23y^2 + \frac{12}{x^2}\right) : \left(\frac{2}{x^2y} - \frac{3}{x} + \frac{y}{3}\right)$;

32) $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right);$

33) $\left(\frac{a-b}{5ab^2}+\frac{b-a}{10a^2b}\right):\left(\frac{1}{10a^2b}-\frac{1}{5ab^2}\right);$

34) $\dfrac{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}}{\frac{c}{m}};$ 35) $\dfrac{\frac{b}{n}-\frac{c}{n}}{\frac{a}{n}};$ 36) $\dfrac{\frac{m}{x}+\frac{n}{y}}{\frac{m}{x}-\frac{n}{y}};$

37) $\dfrac{\frac{a}{x^2}-\frac{b}{xy}}{\frac{c}{xy^2}};$ 38) $\dfrac{\frac{a}{xy}+\frac{c}{y^2}}{\frac{b}{x^2y}};$ 39) $\dfrac{m+\frac{mn}{m+n}}{m-\frac{mn}{m+n}};$

40) $\dfrac{1-\frac{y}{x+y}}{1+\frac{y}{x-y}};$ 41) $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}};$ 42) $\dfrac{\frac{2-n}{2+n}-\frac{n+2}{n-2}}{\frac{2+n}{2-n}-\frac{n-2}{n+2}};$

43) $\dfrac{\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}}{\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^3-n^3}{m^3+n^3}};$ 44) $\dfrac{\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^3+n^3}{m^3-n^3}}{\frac{m-n}{m+n}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}};$ 45) $\dfrac{1+\frac{1}{a+1}}{1-\frac{1}{a+1}};$

46) $\dfrac{1-\frac{2}{x+2}}{1+\frac{2}{x-2}};$ 47) $\dfrac{a-\frac{b^2}{a+b}}{b-\frac{a^2}{a+b}};$ 48) $\dfrac{\frac{x}{x-y}-y}{x-\frac{y^2}{x-y}};$

49) $\dfrac{p+2-\frac{1}{p+2}}{p+2+\frac{p}{p+2}};$ 50) $\dfrac{x-\frac{1}{y}}{x+\frac{z}{yz+1}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)};$

51) $$\frac{3abc}{bc+ac-ab}-\frac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}};$$

52) $$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right);$$

53) $1+\dfrac{a}{1+a+\frac{2a^2}{1-a}};$ 54) $\dfrac{1}{2-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}};$

55) $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a}}}$; 56) $1-\dfrac{a^2+\dfrac{x^3}{a}}{a+\dfrac{x}{1+\dfrac{x-2a}{x-a}}}$; 57) $\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}}{\dfrac{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+c}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+c}}}$;

58) $\dfrac{a^3-b^3}{a+b-\dfrac{ab}{a+b}}-\dfrac{a^3+b^3}{a+b+\dfrac{ab}{a-b}}$;

59) $\dfrac{2a^3}{2a+\dfrac{ab}{a-b}-\dfrac{ab}{a+b}}+\dfrac{a^3+b^3}{a-b+\dfrac{ab}{a-b}}$;

60) $\dfrac{\dfrac{1}{1+a}}{1-\dfrac{1}{1+a}}+\dfrac{\dfrac{1}{1+a}}{\dfrac{a}{1-a}}+\dfrac{\dfrac{1}{1-a}}{\dfrac{a}{1+a}}$.

§ 47) Израчунавање бројних вредности разломљених израза

При одређивању бројних вредности разломљених израза супституцијом општих бројева њиховим посебним вредностима врло често наилазимо на символе облика: $\frac{0}{m}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{m}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Код § 26 видели смо да је $\frac{0}{m}=0$; $\frac{0}{0}$ претставља неодређен израз, јер може да претставља ма који број: $a, b, c, \ldots$; $\frac{m}{0}=\infty$; а код разломака јавља се и неодређени израз $\frac{\infty}{\infty}$, који може имати једну одређену вредност. Да бисмо избегли добивање неодређених израза $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ код разломака, треба претходно да извршимо скраћивање, ако је оно могуће, или треба да их доведемо на такав облик да супституцијом општих бројева њиховим посебним вредностима избегнемо добивање неодређених вредности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Примери:

1) Нађи вредност израза $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ за $x=2$. Ако извршимо супституцију пре скраћивања, добијамо неодређен израз $\frac{0}{0}$. Међутим, скраћивањем датог разломка добијамо $\frac{x-2}{x+2}$, а супституцијом $\frac{0}{4}=0$. Његова је, дакле, бројна вредност 0

за $x = 2$.

2) Наћи вредност израза $\frac{x^2 - a^2}{a^2 - 3ax + 2x^2}$ за $x = a$. Пре скраћивања добијамо супституцијом $\frac{0}{0}$, а ако извршимо претходно скраћивање, добијамо $\frac{x + a}{2x - a}$, супституцијом $\frac{2a}{a} = 2$.

3) За $x = 4$ вредност разломка $\frac{5x + 4}{x - 4}$ је $\frac{24}{0} = \infty$.

4) За $x = \infty$ вредност разломка $\frac{3x^2}{4x^3}$ пре скраћивања је $\frac{\infty}{\infty}$, а после скраћивања добијамо разломак $\frac{3}{4x}$, чија је вредност, за $x = \infty$, $\frac{3}{\infty} = 0$.

5) Наћи вредност разломка $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ за $x = \infty$.

Ако извршимо одмах супституцију, добијамо израз $\frac{\infty}{\infty}$, али ако и бројитељ и именитељ овога разломка поделимо претходно са x^2, добијамо $\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$, па извршимо супституцију, добијамо $\frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0 - 0} = \frac{1}{1} = 1$.

Примери за вежбу:

1) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15}$ за $x = 3$;
2) $\frac{x^2 - a^2}{ax - a^2}$ за $x = a$;
3) $\frac{a^2 - 5ab + 4b^2}{a^2 + ab - 2b^2}$ за $a = b$;
4) $\frac{r^2 + 2rs + s^2}{r^2 - s^2}$ за $r = s$;
5) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 4}$ за $x = 1$;
6) $\frac{2}{a^2 - 1} - \frac{1}{a - 1}$ за $a = 1$;
7) $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ за $x = 1$;
8) $\frac{3a - 3}{2a^2 - 2a}$ за $a = \infty$;
9) $\frac{a}{x^2 - a^2} : \frac{x + a}{x^3 - a^3}$ за $x = a$;
10) $\frac{x^3 + x}{x^3 + 1}$ за $x = \infty$.

§ 48) Претварање обичних разломака у децималне, и обрнуто

а) *Обичан разломак, прав или неправ, претварамо у десетан, ако му бројитељ поделимо именитељем.*

Примери:

1) $\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$; 2) $\frac{7}{5} = 7:5 = 1{,}4$; 3) $\frac{17}{20} = 17:20 = 0{,}85$;

4) $\frac{113}{25} = 113:25 = 4{,}52$; 5) $\frac{2}{3} = 2:3 = 0{,}666\ldots = 0{,}\dot{6}$;

6) $\frac{5}{7} = 5:7 = 0{,}714285714285\ldots = 0{,}\overline{714285}$;

7) $\frac{37}{11} = 37:11 = 3{,}3636\ldots = 3{,}\overline{36}$; 8) $\frac{13}{9} = 13:9 = 1{,}44\ldots = 1{,}\dot{4}$;

9) $\frac{5}{6} = 5:6 = 0{,}833\ldots = 0{,}8\dot{3}$; 10) $\frac{26}{15} = 26:15 = 1{,}7\dot{3}$.

Из горњих примера се види да при претварању обичних разломака у десетне наилазимо на тројаке десетне разломке, и то: 1) на *коначне*, тј. на разломке са ограниченим бројем децимала; 2) на *чисто периодичне*, тј. на разломке код којих се један или више децимала непрестано понављају одмах после десетне запете; и 3) на *нечисто периодичне*, тј. на разломке, код којих се цифра или цифре, које се понављају, почињу да се понављају после једног, два или више децимала. У примени врло важно је знати, пре претварања обичног разломка у десетан, да ли ћемо добити као резултат коначан или периодичан разломак. *Коначан десетан разломак добијамо само онда, ако је именитељ 2, 5, или такав сложен број чији су прости чинитељи или само двојке, или само петице, или двојке и петице једновремено.* У сваком другом случају добијамо периодичан десетан разломак, и то: *чист*, ако је именитељ ма који прост број, осим 2 и 5, или сложен број који нема простих чинитеља 2 и 5, а *нечист*, ако је именитељ сложен број који има, поред других, још простих чинитеља 2 и 5, или 2 и 5 једновремено. Код горњих примера: коначни су 1, 2, 3, и 4; чисто периодични: 5, 6, 7 и 8, а нечисто периодични 9 и 10.

b) *Коначни десетан разломак претварамо у обичан, када децимале узмемо за бројитељ, а за именитељ 10, 100, 1000,..., што зависи од броја децимала.* Ако је један децимал, узимамо 10, два децимала 100, три децимала 1000 итд.

Примери:

1) $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; 2) $1{,}4 = 1\frac{4}{10} = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$;

3) $0{,}85 = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$; 4) $4{,}52 = 4\frac{52}{100} = 4\frac{13}{25}$;

5) $0{,}9518 = \frac{9518}{10000} = \frac{4759}{5000}$; 6) $5{,}525 = 5\frac{525}{1000} = 5\frac{21}{40}$.

c) *Чист периодичан разломак претварамо у обичан, ако цифру или цифре, које се понављају, узмемо за бројитељ, а за именитељ узимамо онолико деветица колико има децимала који се понављају.*

Примери:

1) $0{,}\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; 2) $0{,}\overline{63} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$;

3) $0{,}\overline{714285} = \frac{\overset{9}{714285}}{999999} = \frac{\overset{3}{79365}}{111111} = \frac{\overset{37}{26455}}{37037} = \frac{\overset{143}{715}}{1001} = \frac{5}{7}$;

4) $5{,}\overline{492} = 5\frac{492}{999} = 5\frac{164}{333}$.

Доказ. — a) За први пример:

Ако $0{,}\dot{6}$ поделимо са 6, добијамо 0,1111 . . . , а ако 1 поделимо са 9, добијамо исти количник 0,111 . . . Стога је:

$\frac{0{,}\dot{6}}{6} = \frac{1}{9}$ или $0{,}\dot{6} = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$.

b) За други пример:

Ако $0{,}\overline{63}$ поделимо са 63, добијамо 0,010101 . . . , а ако 1 поделимо са 99, добијамо исти количник 0,010101 . . . . .

Стога је $\frac{0{,}\overline{63}}{63} = \frac{1}{99}$, а одавде је $0{,}\overline{63} = \frac{63}{99}$.

НЗ. Ово правило не важи за $0{,}\overline{9}$, јер $\frac{9}{9} = 1$, а не $0{,}\dot{9}$.

d) *Нечисто периодичан десетан разломак претварамо у обичан, када за бројитељ узмемо разлику између целог децималног дела и броја од цифара које се не понављају, а за именитељ узимамо онолико деветица колико има децимала који се понављају и онолико нула колико има децимала који се не понављају:*

1) $0{,}75\overline{39} = \frac{7539 - 75}{9900} = \frac{7464}{9900} = \frac{622}{825}$.

Доказ. Ако $0{,}75\overline{39}$ најпре помножимо са 100, добијамо чист периодичан разломак $75{,}\overline{39}$, који кад се претвори у обичан, добијамо $75\frac{39}{99} = \frac{7464}{99}$, а затим кад поделимо овај резултат са 100, добијамо $\frac{7464}{9900} = \frac{622}{825}$.

$$2)\quad 2{,}6\overline{384} = 2\frac{6384 - 6}{9990} = 2\frac{637\overset{6}{8}}{9990} = 2\frac{1063}{1665}.$$

Доказ је истоветан, само што се овај децималан број најпре множи са 10, да би се добио чист периодичан, а затим се његов обичан разломак дели са 10.

$$3)\quad 0{,}290\overline{74} = \frac{29074 - 290}{99000} = \frac{\overset{8}{2}8784}{99000} = \frac{3598}{12375}.$$

Примери за вежбу:

Претвори дате обичне разломке у десетне:

1) $\frac{7}{15}$; 2) $\frac{17}{9}$; 3) $\frac{15}{16}$; 4) $\frac{117}{125}$; 5) $\frac{43}{50}$;

6) $\frac{23}{11}$; 7) $\frac{125}{33}$; 8) $\frac{143}{37}$; 9) $\frac{356}{51}$ и 10) $\frac{80}{99}$.

Претвори дате децималне разломке у обичне:

11) 0,65; 12) 1,75: 13) 25,354; 14) 0,056; 15) 1,05;

16) 235,502; 17) 0,00045; 18) 2,0506; 19) $0{,}\overline{54}$; 20) $2{,}\overline{396}$;

21) $25{,}\overline{056}$; 22) $18{,}\overline{504}$; 23) $1{,}\overline{7236}$; 24) $0{,}\overline{458}$;

25) $15{,}38\overline{51}$; 26) $17{,}352\overline{891}$; 27) $0{,}3\overline{895}$; 28) $2{,}451\dot{6}$.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК*)

РАЗМЕРЕ, СРАЗМЕРЕ И ЊИХОВА ПРИМЕНА

I. Размера

§ 49) **Врсте размера.** Однос између два броја може бити двојак. Или нам он показује *за колико* је један број већи или мањи од другога, или показује *колико је пута* први број већи или мањи од другога. Такав однос (веза) између два броја зове се размера. Ако нам однос показује за колико је један број већи или мањи од другога, онда имамо *аритметичку размеру*, а ако однос показује колико је пута један број већи или мањи од другога, онда имамо *геометриску размеру*. Тако, 8 — 5 је једна аритметичка, а 10 : 5 једна геометриска размера. Прва је у ствари једно означено одузимање, а друго означено дељење.

---

* За ученике трговачких и учитељских школа.

Бројеви или изрази, који дају било аритметичку било геометриску размеру, зову се *члановима*, и то први је број први члан, а други — други члан.

Ако бројеви 9 и 4 дају једну аритметичку размеру, онда се она претставља: 9 — 4, а чита се „9 према 4“. Код ње је умаљеник први а умалитељ други члан, а знак одузимања изговара се „према“.

Под *вредношћу* једне аритметичке размере разумемо разлику добивену одузимањем другога члана од првог. Тако, код размере 9 — 3 вредност је 6, а код размере 13 — 10 вредност је 3.

Особине аритметичке размере су истоветне са особинама разлике. Те су особине:

a) *Вредност се размере не мења, ако и први и други члан увећамо или умањимо једним истим бројем.* Тако, размера 15 — 8 има вредност. 7. Ако оба њена члана увећамо са 4, добијамо размеру 19 — 12, чија је вредност опет 7; ако оба њена члана умањимо са 5, добијамо размеру 10 — 3, чија је вредност опет 7.

b) *Вредност се размере увећава за онолико за колико се увећава први или смањује други члан.* Тако, вредност размере 15 — 10 увећава се за 4, ако увећавамо њен први или смањујемо њен други члан тим бројем. У првом случају имамо размеру 19 — 10 а у другом 15 — 6.

c) *Вредност се размере смањује за онолико за колико се смањује први или увећава други члан.* Тако, вредност размере 10 — 6 смањује се за 2, ако умањимо први или увећамо други члан тим бројем. У првом случају имамо размеру 8 — 6, а у другом 10 — 8.

Примена аритметичких размера у математици је незнатна, док је примена геометриских врло честа, те се стога бавимо искључиво геометриским размерама.

§ 50) **Геометриске размере.** Знак дељења код геометриских (као и код аритметичких размера) изговара се „према“. Тако размеру $a:b$ или $\frac{a}{b}$ изговарамо: „*a* има се *према b*“, или краће: „*a према b*“. Геометриске размере делимо на *растуће* и *опадајуће*. Растућа је она код које је први члан мањи од другог. Такве су размере: 3 : 6, 4 : 12, 5 : 20 итд. Размера је опадајућа, ако јој је први члан већи од другог. Такве су размере: 10 : 2, 15 : 5, 18 : 3 итд.

Под *вредношћу* једне размере разумемо *количник* добивен дељењем првог члана другим. Тако, вредност размере $10 : 5$ је 2, размере $2 : 6$ је $\frac{1}{3}$, размере $(a^2 - b^2) : (a + b)$ је $a - b$ итд. Вредност опадајуће размере је *увек* већа од 1, а растуће мања од 1. Кад се зна вредност једне размере и ма који њен члан, у стању смо да нађемо други. Тако, *први се члан налази, када се вредност помножи другим чланом, а други се налази, када се први члан подели вредношћу.*

Примери:

1) Из $x : 4 = 5$ имамо $x = 5 \cdot 4 = 20$;
2) „ $x : (a - b) = a + b$ „ $x = (a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$;
3) „ $30 : x = 6$ „ $x = 30 : 6 = 5$;
4) „ $(a^3 - b^3) : x = a - b$ „ $x = (a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$.

Чланови размере морају бити или неименовани бројеви, или, ако су именовани, треба да буду исте врсте, па били једноимени или разноимени. Ако су разноимени или вишеименовани бројеви, онда их треба свести на истоимене. Сваку размеру, чији су чланови именовани бројеви истога имена, претварамо у размеру од истих чланова, али као неименованих бројева, јер обе ове размере имају исту вредност. Тако, размера $12\,m : 4\,m$ дâ се заменити размером $12 : 4$, јер обе ове размере имају неименован количник (вредност) 3.

Примери:

1) $2m\,45cm : 7\,dm\,2\,cm\,5\,mm = 2450\,mm : 725\,mm = 2450 : 725 = 98 : 29$.

Код овога примера налазимо да су $2m$ и $45cm$ онолико пута већи од $7\,dm\,2\,cm$ и $5mm$, колико је пута веће 98 од 29.

2) $8m^2\,28\,dm^2 : 12\,m^2 = 828\,dm^2 : 1200\,dm^2 = 828 : 12000 = 69 : 100$.

Код овога примера увиђамо да су $8m^2$ и 28 dm^2 онолико пута мањи од $12m^2$, колико је пута 69 мање од 100.

Главна особина сваке размере је ова:

Вредност размере се не мења, ако оба њена члана помножимо или поделимо једним истим бројем. Тако, вредност размере $20 : 10$ је опет 2, ако оба њена члана помножимо или поделимо са 5, или ма којим другим бројем. У првом случају имамо размеру $100 : 50$, а у другом $4 : 2$.

На основу ове особине, можемо размеру са разломљеним члановима претворити у размеру са целим члановима, а да јој се вредност не промени. Да бисмо ово постигли, множимо оба члана њиховим заједничким имениоцем. Тако исто, ако су чланови велики бројеви, а притом *самерљиви*, доводимо их на мање бројеве дељењем оба члана њиховом највећом заједничком мером.

Примери:

1) $5 : \frac{3}{4} = 5 \cdot 4 : \frac{3}{4} \cdot 4 = 20 : 3;$

2) $\frac{6}{7} : 1\frac{7}{8} = \frac{6}{7} : \frac{15}{8} = \frac{6}{7} \cdot 56 : \frac{15}{8} \cdot 56 = 48 : 105 = 16 : 35;$

3) $0,75 : 0,625 = 0,75 \cdot 1000 : 0,625 \cdot 1000 = 750 : 625 = 6 : 5;$

4) $\frac{a}{b} : \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \cdot ab : \frac{b}{a} \cdot ab = a^2 : b^2;$

5) $\left(1 + \frac{a}{b}\right) : \left(1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{a+b}{b} : \frac{a+b}{a} =$

$= \frac{a+b}{b} \cdot ab : \frac{a+b}{a} \cdot ab = (a+b)\, a : (a+b)\, b = a : b.$

За две размере каже се да су *једнаке*, ако имају једнаке вредности. Тако, размере: $8 : 4$, $14 : 7$, $30 : 15$ јесу једнаке, јер свака има вредност 2. Размере $5 : 15$ и $4 : 12$ такође су једнаке, пошто имају исту вредност $\frac{1}{3}$.

По себи је јасно да једна растућа размера не може бити једнака с једном опадајућом размером, јер прва има вредност мању од 1 а друга већу ~~од~~ од 1.

Од две или више размера стварамо *сложену размеру*, ако све прве, а тако исто и све друге чланове, помножимо међусобно. Тако, a) из размера: $a : b$, $c : d$ и $m : n$ стварамо сложену $acm : bdn$; b) из размера: $10 : 5$, $6 : 2$ и $12 : 3$ добива се сложена $720 : 30$; c) из размера: $2 : 10$, $20 : 4$, $8 : 2$ и $2 : 6$ добија се сложена $640 : 480$.

Вредност једне сложене размере једнака је производу вредности размера од којих је она постала.

Ако чланови једне размере узајамно промене своја места, онда се добивена размера зове *обрнута* или *реципрочна*. Насупрот њој, прва се размера зове *права*. Тако ако је $a : b$ права, $b : a$ је њена обрнута размера.

§ 51) Примери за вежбу

Нађи вредност размера, пошто претходно доведеш чланове на најмање целе бројеве (изразе):

1) $50 : 15;$ 2) $5 : 3^2/_5;$ 3) $1,25 : 0,625;$ 4) $2,\dot{3} : 0,245;$

5) $(a^2 - b^2) : (a + b);$ 6) $(a^3 + 1) : (a + 1);$

7) $\frac{m^2 - 4}{m^2 + 4} : \frac{m - 2}{m + 2};$ 8) $\frac{p^3 + 27}{p^3 - 27} : \frac{p + 3}{p - 3};$

9) $8(a + b)\, c : 12\,(a + b)\, d;$ 10) $\frac{a + b + x}{a + b - x} : \frac{a - b + x}{a - b - x};$

11) $\left(\frac{r}{s}-\frac{s}{r}\right):\frac{r-s}{s-r}$; 12) $\left(a+\frac{2ab}{a-b}\right):\left(b-\frac{2ab}{a-b}\right)$;

13) $3m$ $5mm$: $1m$ $2dm$ $8cm$; 14) 9^0 $30'$ $20''$: 14^0 $15'$ $30''$;

15) 3 год. 8 мес.: 2 год. 3 мес. 5 дана;

16) Плац је дугачак $23{,}7m$ а широк $7{,}9m$. Наћи размеру његове дужине и ширине.

17) Наћи размеру површина два квадрата чије су стране $2{,}5cm$ и $7{,}5cm$.

18) Наћи размеру брзина два тела, ако прво прелази у секунди $85\,m$ а друго $34\,m$.

19) Наћи размеру а) обима, b) површина два круга, ако су им полупречници $2{,}3\,dm$ и $1{,}25\,dm$.

20) Наћи размеру површина два правоугаоника, ако су димензије једнога $15m$ и $20m$ а другога $25m$ и $12m$.

21) Полупречник Месеца је $\frac{3}{11}$ полупречника Земље, а полупречник Сунца је 108 пута већи од полупречника Земље; нађи размеру полупречника Месеца и Сунца.

22) Вредност размере двеју дужина је 4,3. Ако је прва дужина $7{,}31m$, колика је друга дужина?

II. Сразмере — пропорције

§ 52) **Дефиниција.** Две једнаке размере везане знаком једнакости дају *сразмеру* или *пропорцију*. *Пропорција је, дакле, једначина двеју једнаких размера.* Такве су пропорције:

1) $8:4=10:5$; 2) $3:9=6:18$;

3) $(a-b)^2:(a^2-b^2)=(a^2-b^2):(a+b)^2$.

Код сваке пропорције разликујемо четири члана. Знак једнакости код пропорције изговара се: „као што се има“, или кратко „као“. Ако је $a:b=q$ и $c:d=q$, тада ове две размере дају пропорцију:

$$a:b=c:d,$$

која се изговара: „a према b као c према d“. Чланови a и d зову се *спољашњи*, а b и c *унутрашњи*. Пропорција код које су унутрашњи чланови једнаки, зове се *непрекидна*. Такве су пропорције:

1) $8:4=4:2$; 2) $20:10=10:5$; 3) $a^6:a^4=a^4:a^2$ итд.

Код једне непрекидне пропорције имамо свега три различита члана. Њен први члан зове се *прва непрекидна пропорционала*, други, односно трећи члан, зове се *средња про-*

порционала или *геометриска средина*, а четврти члан *трећа непрекидна пропорционала*. Код пропорције $20 : 10 = 10 : 5$, прва непрекидна је 20, средња пропорционала 10, а трећа непрекидна 5.

§ 53) **Особине пропорције.** I) Прва особина је ова: *Производ спољашњих чланова једнак је с производом унутрашњих.*

Доказ. Ако је $a : b = c : d$ једна пропорција, онда се она да̂ написати и у облику $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Па како једнаке количине помножене једним истим бројем дају једнаке резултате, то ћемо добити једнаке резултате, ако једнаке количине $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ помножимо са bd. Биће, дакле, $\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$ или

$$ad = bc,$$

чиме је ова особина доказана.

Користи од ове особине једне пропорције јесу следеће:

1) *Ако су позната три ма која члана једне пропорције, можемо наћи и четврти непознати члан, и то: ма који спољашњи налазимо када производ унутрашњих чланова поделимо познатим спољашњим чланом, а ма који унутрашњи налазимо када производ спољашњих чланова поделимо познатим унутрашњим чланом.*

Примери:

a) Из $3,75 : 4,8 = 0,5 : x$ је $x = \frac{4,8 \cdot 0,5}{3,75} = 0,64$;

b) Из $3^1/_3 : x = 1\frac{1}{9} : \frac{1}{6}$ је $x = \frac{3^1/_3 \cdot \frac{1}{6}}{1\frac{1}{9}} = \frac{\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{10}{9}} = \frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 6 \cdot 10} = \frac{1}{2}$;

c) Из $x : abc = a : \frac{b}{c}$ је $x = a^2bc \cdot \frac{c}{b} = a^2c^2$; и

d) Из $(a^3 + b^3) : (a^2 - b^2) = x : (a - b)$ је $x = \frac{(a^3 + b^3)(a - b)}{a^2 - b^2} =$

$$= a^2 - ab + b^2.$$

Напомена. Код непрекидне пропорције, прву непрекидну налазимо, кад квадрат средње пропорционале поделимо трећом непрекидном; средњу непрекидну налазимо, када извучемо квадратни корен из производа прве и треће непрекидне; а трећу непрекидну налазимо, када квадрат средње пропорционале поделимо с првом непрекидном.

Примери:

a) Из $x : 4 = 4 : 2$ је $x = \frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$;

b) Из $20 : x = x : 5$ је $x^2 = 20 \cdot 5$, а $x = \sqrt{100} = 10$; и

c) Из $20 : 10 = 10 : x$ је $x = \frac{10^2}{20} = \frac{100}{20} = 5$.

2) *Од чинитеља двају једнаких производа склапамо пропорцију, узимајући чинитеље једнога за спољашње, а чинитеље другога за унутрашње чланове.*

Примери:

a) Из $4 \cdot 5 = 10 \cdot 2$ имамо пропорцију $10 : 4 = 5 : 2$;

b) Из $(a + b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - b^2)$ имамо пропорцију $(a + b) : (a - b) = (a^2 - b^2) : (a - b)^2$;

Из овога је јасно да су четири броја само онда пропорционални, тј. дају пропорцију, ако је производ од два броја једнак производу од остала два.

3) Члановима пропорције можемо мењати места. То мењање места чланова може да се изврши само на следећа три начина:

a) *Могу спољашњи чланови узајамно да промене своја места;* b) *могу унутрашњи чланови узајамно да промене своја места; и* c) *могу оба спољашња да заузму места унутрашњих а унутрашњи места спољашњих чланова.* Тако, пропорцију $10 : 5 = 12 : 6$ можемо написати још: $10 : 12 = 5 : 6$; $6 : 5 = 12 : 10$; $6 : 12 = 5 : 10$; ~~5 : 10 = 6 : 12~~; ~~5 : 6 = 10 : 12~~; ~~12 : 10 = 6 : 5~~; и ~~12 : 6 = 10 : 5~~.

Овом променом места члановима можемо од једне пропорције створити још седам, дакле, свега осам, које су, у ствари, једна иста пропорција, са истим члановима, али на различитим местима.

II) Друга особина је ова: *Пропорција не мења своју вредност, ако ма који спољашњи и ма који унутрашњи члан помножимо или поделимо једним истим бројем.*

Доказ. — Из $a : b = c : d$ имамо:

1) $am : bm = c : d$; 2) $am : b = cm : d$;

3) $a : bm = c : dm$; и 4) $a : b = cm : dm$.

Код сваке новодобивене пропорције је $adm = bcm$, или, дељењем са m, $ad = bc$, што је случај са датом пропорцијом.

Исто ће бити, ако ма који спољашњи и ма који унутрашњи члан пропорције $a : b = c : d$ поделимо бројем n. У том случају добијамо једну од пропорција:

1) $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$; 2) $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$; 3) $a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}$ и 4) $a : b = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

Код сваке од ових пропорција је $\frac{ad}{n} = \frac{bc}{n}$, или множењем са n, $ad = bc$.

Из ове особине извлачимо ту корист, што сваку пропорцију са разломљеним члановима можемо претворити у пропорцију са целим члановима. *Ово постижемо множећи један спољашњи и један унутрашњи члан њиховим заједничким имeнитељем.*

Примери:

1) Претвори пропорцију $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{7}{9} : \frac{70}{81}$ у пропорцију са целим члановима.

Ако први и други члан помножимо њиховим заједничким имeнитељем 12, а трећи и четврти њиховим заједничким имeнитељем 81, добијемо: $\frac{3}{4} . 12 : \frac{5}{6} . 12 = \frac{7}{9} \cdot 81 : \frac{70}{81} \cdot 81$, или $9 : 10 = 63 : 70$.

2) Претвори пропорцију $8 : \frac{5}{6} = 9 : \frac{15}{16}$ у пропорцију са целим члановима.

Ако други и четврти, дакле један спољашњи и један унутрашњи члан, помножимо њиховим заједничким имeнитељем 48, добијамо:

$$8 : \frac{5}{6} \cdot 48 = 9 : \frac{15}{16} \cdot 48, \text{ или } 8 : 40 = 9 : 45.$$

Тако исто, ако су чланови пропорције сложени бројеви или изрази, а притом самерљиви, онда можемо један спољашњи и један унутрашњи члан поделити њиховом највећом заједничком мером, чиме добијамо пропорцију са мањим члановима.

III) Трећа особина једне пропорције јесте ова:

Пропорција се не мења, ако све њене чланове степенујемо или коренујемо једним истим бројем.

Доказ. — Ако је дата пропорција $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, онда је:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m$ или $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$;

b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$, или $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$.

§ 54) **Изведене пропорције.** Из сваке обичне пропорци могу се извести још следеће пропорције, јер је код сваке:

1) *Збир I и II члана има се према I, као што се им збир III и IV члана према III.*

Доказ. — Ако дату пропорцију $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ напишемо у облик $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, па левој и десној страни додамо 1, добијамо:

$$\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1, \text{ или } \frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c},$$

$$\text{или } (a+b):a=(c+d):c \cdots (1)$$

Посебни пример. — Из $28:4=42:6$ имамо $(28+4):28=(42+6):42$, или $32:28=48:42$, која је тачна, јер је производ спољашњих чланова раван производу унутрашњих.

2) *Збир I и II члана има се према II, као што се има збир III и IV члана према IV.*

Доказ. — Ако и левој и десној страни пропорције $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ додамо 1, добијамо:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1, \text{ или } \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{b},$$

$$\text{или } (a+b):b=(c+d):d \cdots\cdots (2)$$

Посебни примери: Из $20:5=16:4$ имамо:

$(20+5):5=(16+4):4$, или $25:5=20:4$.

3) *Разлика I и II члана има се према I, као што се има разлика III и IV члана према III.*

Доказ. — Ако дату пропорцију $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ најпре напишемо у облику $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, па затим и од леве и од десне стране одузмемо 1, добијамо:

$\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1$, или $\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$. Множењем са — 1 добијамо: $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$, или $(a-b):a=(c-d):c \cdots (3)$

Посебни пример. — Из $18:6=12:4$ имамо:

$(18-6):18=(12-4):12$, или $12:18=8:12$.

4) *Разлика I и II члана има се према II, као што се има разлика III и IV члана према IV.*

Доказ. — Ако и од леве и од десне стране дате пропорције $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ одузмемо 1, добијамо:

$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$, или $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$,

или $(a - b) : b = (c - d) : d \cdots\cdots (4)$.

Посебни пример. — Из $25 : 5 = 15 : 3$ имамо:
$(25 - 5) : 5 = (15 - 3) : 3$, или $20 : 5 = 12 : 3$.

5) *Збир I и II члана има се према њиховој разлици, као што се има збир III и IV члана према разлици ових чланова.*

Доказ. — Ако је дата пропорција $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, онда имамо према другој изведеној пропорцији $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, а према четвртој $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. Ако унутрашњим члановима ових пророрција променимо места, добијамо:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}, \text{ и } \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}, \text{ па је стога}$$

$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$, или, променом места унутрашњим члановима:

$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d) \cdots\cdots (5)$

Посебни пример. — Из $30 : 6 = 15 : 3$ имамо:
$(30 + 6) : (30 - 6) = (15 + 3) : (15 - 3)$, или $36 : 24 = 18 : 12$.

Напомена. Примена изведених пропорција у математици је врло честа. У алгебри примењују се при решавању једначина датих у облику пропорција, ако се непозната не налази само у једном члану.

Примери:

1) *Наћи вредност за* x *у пропорцији:* $(18 - x) : x = 2 : 1$.
Ако применимо II изведену пропорцију, добијамо:
$(18 - x + x) : x = 3 : 1$, или $18 : x = 3 : 1$, а одавде $x = 6$.

2) *Наћи вредност за* x *у пропорцији:* $(7 + x) : (7 - x) = 2 : 1$,
Применом V изведене пропорције имамо:
$(7 + x + 7 - x) : (7 + x - 7 + x) = 3 : 1$, или $14 : 2x = 3 : 1$,
или дељењем I и II члана са 2 имамо: $7 : x = 3 : 1$.

Одавде је $x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

3) *Наћи вредност за* x *и* y*, кад је* $x : y = 2 : 5$ а $x + y = 70$.
Ако применимо I и II изведену пропорцију, добијамо:

a) $(x + y) : x = 7 : 2$ и b) $(x + y) : y = 7 : 5$.

Заменом у овим пропорцијама $x + y$ са 70 добијамо:

a) $70 : x = 7 : 2$ и b) $70 : y = 7 : 5$.

Одавде је $x = 20$ а $y = 50$.

4) *Наћи вредност за* **x** *и* **y**, *кад је* $(x-y):x=1:5$, *а* $x+5y=200$. Када применимо IV изведену пропорцију, добијамо:

$$(x-y-x):x=-4:5,\text{ или }-y:x=-4:5.$$

Ако сада I и III члан ове пропорције помножимо са -5, добијамо: $5y:x=20:5$. Тада по II изведеној пропорцији имамо: $(5y+x):x=25:5$. Заменом у овој пропорцији $5y+x$ са 200 имамо: $200:x=25:5$, а одавде је $x=40$. Најзад заменом x са 40 у пропорцији $y:x=4:5$ имамо $y:40=4:5$, одакле је $y=32$.

§ 55) **Продужне пропорције.** Више једнаких размера везаних знацима једнакости дају продужну пропорцију. Таква је пропорција:

$$10:2=15:3=25:5=30:6=40:8.$$

Код једне продужне пропорције разликујемо само *прве* и *друге* чланове. Први су чланови први чланови размера од којих је пропорција постала, а други чланови су други чланови истих размера.

Свака продужна пропорција пише се још и тако да су сви њени први чланови с леве стране, а сви други с десне стране знака једнакости. Тако пропорција:

$a:b=c:d=e:f=m:n$ дâ се написати и у облику:

$$a:c:e:m=b:d:f:n.$$

Главна особина сваке продужне пропорције јесте ова: *Алгебарски збир првих чланова има се према алгебарском збиру других, као што се има ма који први према свом другом члану.*

Доказ: Нека је дата продужна пропорција:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$$

Ако је вредност њених размера r, онда је $a=br$, $c=dr$, $e=fr$, $m=nr$ и $p=qr$.

Сабирањем и одузимањем ових једнакости добијамо:

$a\pm c\pm e\pm m\pm p=r(b\pm d\pm f\pm n\pm q)$, или

$$\frac{a\pm c\pm e\pm m\pm p}{b\pm d\pm f\pm n\pm q}=r=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}.$$

Посебни пример. Из $18:6=9:3=12:4=15:5$ имамо:

а) $$\underbrace{(18+9+12+15)}_{54}:\underbrace{(6+3+4+5)}_{18}\begin{aligned}&=18:6\\&=\ 9:3\\&=12:4\\&=15:5\end{aligned}$$

b) $$\frac{\overbrace{18-9+12-15}^{6}}{\underbrace{6-3+\ 4-\ 5}_{2}}=\frac{18}{6}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=\frac{15}{5};$$

c) $$\frac{\overbrace{18-9-12+15}^{12}}{\underbrace{6-3-\ 4+\ 5}_{4}}=\frac{18}{6}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=\frac{15}{5};$$

d) $$\frac{\overbrace{18+9-12+15}^{30}}{\underbrace{6+3-\ 4+\ 5}_{10}}=\frac{18}{6}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=\frac{45}{5}.$$

Примери:

1) Наћи x, y и z, кад је $x:y:z=2:3:5$ и $x+y+z=60$.

Из пропорције имамо: $(x+y+z):10=x:2$

$$=y:3$$

$$=z:5$$

Заменом $x+y+z$ са 60 добијамо:

a) $60:10=x:2$, b) $60:10=y:3$ и c) $60:10=z:5$.

Одавде је $x=12$, $y=18$ и $z=30$.

2) Наћи $a:b:c:d:e$, кад је $a:b=2:3$, $b:c=4:9$, $c:d=3:5$ и $d:e=3:8$.

Ако узмемо да је $a=1$, онда је из прве пропорције $b=\frac{3}{2}$. Када b у другој пропорцији заменимо са $\frac{3}{2}$, онда је из те пропорције $c=\frac{27}{8}$. Заменом c са $\frac{27}{8}$ у трећој пропорцији, добијамо из ње да је $d=\frac{45}{8}$. Најзад заменом d са $\frac{45}{8}$ у четвртој пропорцији, добијамо из ње да је $e=15$. Тада је: $a:b:c:d:e=1:\frac{3}{2}:\frac{27}{8}:\frac{45}{8}:15$, или, множењем размерних бројева њиховим заједничким именитељем 8, добијамо:

$$a:b:c:d:e=8:12:27:45:120.$$

3) Углови једнога петоугла имају се као $2:3:4:4:5$; Колики су ти углови?

Ако је $\mathrm{I}=x$, $\mathrm{II}=y$, $\mathrm{III}=z$, $\mathrm{IV}=u$, $\mathrm{V}=v$, онда је: $x:y:z:u:v=2:3:4:4:5$. Тада је применом особине продужне пропорције: $(x+y+z+u+v):18=x:2=y:3=$ $=z:4=u:4=v:5$. Заменом $x+y+z+u+v=540^0$, колико износи збир углова петоугла, добијамо:

a) $540^0 : 18 = x : 2$, b) $540^0 : 18 = y : 3$, c) $540^0 : 18 = z : 4$, d) $540^0 : 18 = u : 4$ и e) $540^0 : 18 = v : 5$.

Одавде је $x = 60^0$, $y = 90^0$, $z = 120^0$, $u = 120^0$ и $v = 150^0$.

§ 56) **Сложена пропорција.** Од две или више обичних пропорција ствара се сложена, када се помноже међу собом одговарајући чланови датих пропорција. Тако, a) Из пропорција $a : b = c : d$, $m : n = p : q$ и $r : s = t : u$ имамо сложену $amr : bns = cpt : dqu$; b) Из пропорција $8 : 4 = 6 : 3$ и $10 : 2 = 15 : 3$ добија се сложена: $8 \cdot 10 : 4 \cdot 2 = 6 \cdot 15 : 3 \cdot 3$, или $80 : 8 = 90 : 9$.

§ 57) **Задаци за вежбу.** Провери тачност пропорција:

1) $a : b = 2a : 2b$; 2) $5a : 10b = 2a : 4b$;
3) $(a^2 - b^2) : (a + b)^2 = (a - b) : (a + b)$;
4) $(a^3 + b^3) : (a^2 - ab + b^2) = (b^2 - a^2) : (b - a)$.

Нађи вредност за x у пропорцијама:

5) $6\frac{2}{3} a^2b^3 : 5ab^2 = x : 4a^2b^4$; 6) $x : \frac{3}{7} a^2b^3 = \frac{8}{3} a^5 b^3 : \frac{6}{7} a^3b^2$;
7) $x : (4a^2 + 12ab + 9b^2) = (3a - 4b) : (2a + 3b)$;
8) $(r + s) : (r^2 + rs + s^2) = x : (r^3 - s^3)$;
9) $\left(b - \frac{ab}{a + b}\right) : x = a^2b^2 : \left(a + \frac{ab}{a - b}\right)$;
10) $\frac{a(b - a)}{(b + a)^2} : ab = x : \frac{b(a + b)}{(b - a)^2}$.

Састави пропорцију од чинитеља ових једнаких производа:

11) $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$; 12) $mn = pq$; 13) $2x = 3y$;
14) $ay - a = mb$; 15) $(a + b)^2 = 3m$;
16) $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$;
17) $(a - b)(a^3 + b^3) = (a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)$;
18) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Нађи четврту пропорционалу за:

19) 3, 4 и 6; 30) $3^1/_3$, $3\frac{3}{4}$ и $5^1/_3$; 21) $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$;
22) $\frac{a - b}{a + b}$, $\frac{(a - b)^2}{(a + b)^2}$ и $\frac{a}{b}$.

Нађи трећу непрекидну пропорпионалу за:

23) 9 и 6; 24) 25 и 15; 25) r и s;
26) $\frac{a^2 - b^2}{r}$ и $\frac{a - b}{r}$.

Нађи геометриску средину за:

27) 4 и 9; 28) 5 и $3\frac{1}{5}$; 29) $4\frac{3}{8}$ и $2^4/_5$; 30) $\frac{ab}{r}$ и $\frac{ar}{b}$.

Применом изведених пропорција удеси следеће пропорције тако да се x као члан налази на једном месту и то са́мо, и затим наћи вредност за x.

31) $a : b = (c - x) : x$; 32) $a : b = (x + c) : x$;

33) $a : b = x : (c + x)$; 34) $\frac{a}{b} = x : (c - x)$;

35) $\frac{a}{b} = \frac{c+x}{c-x}$; 36) $\frac{a+x}{b} = \frac{a-x}{c}$; 37) $\frac{x+a}{x} = \frac{x+b}{x-b}$;

38) $\frac{a-x}{x} = \frac{b-x}{b+x}$; 39) $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x}$; 40) $\frac{x+a}{x} = \frac{x}{x+b}$.

Применом изведених пропорција, а с обзиром на дате збирове и разлике непознатих x и y, наћи њихову вредност, кад је:

41) $x : y = 5 : 4$ и $x - y = 8$; 42) $x : y = 3{}^1/_2 : 2\frac{1}{3}$ и $x + y = 37{}^1/_2$;
43) $x : y = (a + b) : (a - b)$ и $x - y = 2b$;
44) $x : y = (a^2 + b^2) : 2ab$ и $x - y = a - b$;
45) $x : y = (a^2 + b^2) : 2ab$ и $x + y = a + b$;
46) $x : y = (a + b)^2 : (a - b)^2$ и $x - y = 2ab$.

Састави продужне пропорције из пропорција:

47) $a : b = 6 : 5$ и $a : c = 9 : 7$ $(a : b : c = ?)$;
48) $a : b = 4 : 3$, $a : c = 6 : 5$ и $a : d = 8 : 7$;
49) $c : a = 3 : 4$, $b : d = 1 : 2$ и $d : a = 3 : 2$;
50) $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 5$, $c : d = 6 : 7$ и $d : e = 8 : 9$.

Применом особине продужних пропорција наћи вредности непознатих, кад је:

51) $x : y : z = 2 : 3 : 5$ и $x + y + z = 30$;
52) $x : y : z : u = 3 : 4 : 5 : 6$ и $x + y + z + u = 9$.
53) $x : y : z = 3 : 5 : 7$ а $5x + 2y + 3z = 506$;
54) $x : y : z : u = 2 : 3 : 4 : 5$ а $3x + 5y - 2z + 7u = 240$; и
55) $x : y = 7 : 8$, $z : u = 9 : 10$, $y : u = 4 : 5$ а $x - 3y - 5z + 7u = 16$.

III. Примена пропорција

§ 58) **Просто тројно правило.** Код задатака из простог тројног правила имамо две врсте количина, а у свакој врсти по две једнородне количине. Од тих количина увек су три познате а четврта се тражи. Ту непознату количину сматрамо за четврту пропорционалу за остале три познате количине.

Вредност непознате количине налазимо формирањем пропорције. Ради тога стварамо најпре од датих и непознату количину два реда: *погодбени (условни)* и *упитни*, у коме се налази непозната количина. Пре *стварања* пропорције приморани смо да сазнамо из погодаба у задатку да ли је непозната већа или мања од количине изнад ње. После тога приступа се *стварању* пропорције узимајући за први члан непознату x, за други члан количину изнад ње, чиме добијамо леву размеру тражене пропорције. Ако је ова размера *опадајућа*, онда за трећи члан узимамо већу, а за четврти мању од осталих двеју количина. Напротив, ако је лева размера *растућа*, онда за трећи члан узимамо мању, а за четврти већу од осталих двеју количина, пошто обе размере пропорције морају бити или опадајуће или растуће, да би била пропорција тачна.

Примери:

1) 30 радника зарадили зу 800 дин. за извесно време; 50 радника под истим условима, за исто време, колико ће зарадити?

Погодб. ред: 30 радника зарађују 800 дин.
Уп. ред: 50 „ „ x „

Из погодаба у задатку лако увиђамо да је количина $x > 800$, јер кад 30 радника зарађују 800 дин., јасно је да ће 50 радника, под истим условима, за исто време, зарадити више. Према горњем упутству биће, дакле,

$$x : 800 = 50 : 30,$$

$$\text{а } x = \frac{800 \cdot 50}{30} = 1333\frac{1}{3} \text{ дин.}$$

2) 50 m неке робе вреде 450 дин.; колико ће вредети 18 m исте робе?

Погд. ред: 50 m вреде 450 дин.
Уп. ред: 18 „ „ x „

Код овог је примера јасно да је $x < 450$, јер мањи број метара исте робе мање вреди. Стога је,

$$x : 450 = 18 : 50,$$

$$\text{а } x = \frac{450 \cdot 18}{50} = 162 \text{ дин.}$$

Примери за вежбу:

3) Кад 18 kg кафе стају 900 динара; колико ће стати 13 kg исте кафе?

4) Кад 300 l пшенице вреде 1200 дин.; колико ће вредети 450 l исте пшенице?

5) Када 2,5 hl неког вина вреде 2000 дин.; колико ће вредети 185 l истог вина?

6) Када 5000 дин. за 3 месеца дају известан интерес; колико је времена потребно да 4000 дин. донесу исти интерес?

§ 58) **Сложено правило тројно.** Код задатака из сложеног тројног правила имамо три и више врста количина, а у свакој врсти опет по две једнородне количине. Од тих парова количина, само једна количина неке врсте је непозната, а све остале су познате. Да бисмо нашли ту непознату количину применом пропорација, радимо по следећем упутству, чију тачност доказујемо код доњег примера. — Као и код простог тројног правила, најпре стварамо погодбени и упитни ред, а затим сваку врсту количина упоређујемо са оном врстом у којој се налази непозната, независно од осталих врста количина. Тиме стварамо онолико пропорција колико у задатку има врста количина мање једну. Све те пропорције имају леве стране једнаке (та лева страна је размера непознате x према количини изнад ње). Затим све ове пропорције пишемо једну испод друге тако да се на левој страни пише само лева размера прве пропорције, а на десној страни пишемо десне размере свих пропорција заједно са знацима једнакости. Најзад, непознату x налазимо кад производ свих унутрашњих чланова поделимо производом спољашњих.

Пример.

1) 40 радника радећи дневно по 10 час. за 150 дана са дневницом од 60 дин. зарадили су 360 000 дин.; колико ће зарадити 25 радника радећи по 8 часова дневно, са дневницом од 50 дин. за 240 дана?

	I	II	III	IV	V
Пог. ред:	40 рад.	10 час.	60 дин. надн.	за 150 дана	зарађују 360000 дин.
Упит. ред:	25 „	8 „	50 „ „	„ 240 „	„ x „

Упоређујући V врсту са сваком врстом, независно од осталих врста, стварамо пропорције:

$x : 360000 = 25 : 40$ (упоређењем I и V)
$x : 360000 = 8 : 10$ („ II „ V)
$x : 360000 = 50 : 60$ („ III „ V)
$x : 360000 = 240 : 150$ („ IV „ V)

Према горњем упутству добивене пропорције пишемо:

$$\begin{aligned} x : 360000 &= 25 : 40 \\ &= 8 : 10 \\ &= 50 : 60 \\ &= 240 : 150 \end{aligned}$$

Одавде је $x = \dfrac{360000\cdot25\cdot8\cdot50\cdot240}{40\cdot10\cdot60\cdot150} = 240000.$

Овај поступак рада оснива се на добивању сложене пропорције из више обичних пропорција. Овај задатак, као и сваки други задатак из сложеног правила тројног, дâ се раставити на онолико задатака из простог правила тројног колико има врста количина мање један. Тако, први задатак би био:

40 радника зарађују 360000 дин.
25 „ „ y „ (мање)
те је $y : 360000 = 25 : 40$ (1)
а одавде је $y = \dfrac{360000\cdot25}{40} = 225000.$

Други би био:

Ако раде дневно по 10 часова, зарађују y дин.
„ „ „ „ 8 „ „ z „ (мање),
те је $z : y = 8 : 10\cdots(2)$,
а одавде је $z = \dfrac{8y}{10} = \dfrac{8\cdot225000}{10} = 180000$ дин.

Трећи би био:

Радећи са надницом од 60 дин. зарађују z дин.
„ „ „ „ „ 50 „ „ u (мање),
те је $u : z = 50 : 60\cdots(3)$,
а одавде је $u = \dfrac{50z}{60} = \dfrac{50\cdot180000}{60} = 150000$ дин.

Четврти би био:

Ако раде 150 дана, зарађују u дин.
„ „ 240 „ „ x „ (више),

те је $x : u = 240 : 150 \cdots (4)$,

а одавде је $x = \frac{240u}{150} = \frac{240 \cdot 150000}{150} = 240000$ дин.

Уместо овог поступног решавања могли смо добивене четири пропорције да напишемо једну испод друге и да од њих створимо сложену пропорцију. Тако, имамо:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & y : 360000 & = & 25 : 40, \\ 2) & z : \quad y & = & 8 : 10, \\ 3) & u : \quad z & = & 50 : 60 \text{ и} \\ 4) & x : \quad u & = & 240 : 150. \end{array}$$

Стварајући сложену пропорцију добијамо:

$$yzux : 360000yzu = 25 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 240 : 40 \cdot 10 \cdot 60 \cdot 150$$

или $x : 360000 = 25 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 240 : 40 \cdot 10 \cdot 60 \cdot 150.$

Одавде је $x = \frac{360000 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 240}{40 \cdot 10 \cdot 60 \cdot 150} = 240000$ дин.

Задаци за вежбу

2) 56 ткача израде за 5 недеља 560 комада чохе дужине 32 *m*, ширине 125 *cm*; колико би комада израдило 80 ткача за 11 недеља исте чохе дужине 27,5 *m* а ширине 110 *cm?*

3) Један зид од 3,5 *m* висине, 75 *cm* дебљине и 40 *m* дужине израде за 22 дана 16 зидара радећи дневно по 10 часова; за колико дана могу 10 зидара, који дневно раде 12 часова, озидати зид 4,5 *m* висине, 90 *cm* дебљине и 20 *m* дужине?

4) За патосање једне учионице дужине 18 *m*, ширине 10 *m* потребно је 150 комада дасака дужине 6 *m* а ширине 20 *cm*; колико треба дасака дужине 4 *m* а ширине 15 *cm* за исту толику учионицу?

5) 120 зидара свршавају неки посао за 12 недеља, ако на дан раде по 8 часова; колико би требало зидара више узети, па да исти посао сврше за 10 недеља, а да на дан раде по 6 часова?

6) Једна парна машина извлачи за 6 минута 15 *hl* воде из дубине од 180 *m*; за које ће време та машина извући 20 *hl* воде из дубине од 120 *m?*

§ 60) **Процентни рачун.** Овај рачун, који се примењује при израчунавању добити или штете, при израчунавању одбитака и трошкова, при израчунавању вредности робе и друго, у ствари је специјалан случај правила тројног. Код овог рачуна јављају се ове количине: *проценат, главница* и *процентни принос*. Под *процентом* (p%) разумемо број јединица добитка, губитка, комисиона или провизиона, ажије, дисажије, порезе, сконта, рабата и др. које треба рачунати на 100 јединица исте врсте. Тако, кад се каже да се пореза рачуна 2%, значи да се на сваких 100 дин. од вредности имања плаћа на име порезе 2 динара. *Главница* (Г) је она количина од које рачунамо процентни принос. *Процентни принос* (П) је целокупни добитак, губитак, провизион, пореза, дара и др. израчунат на целу главницу, према датом проценту.

Кад год су познате две од ових количина, у стању смо да нађемо трећу помоћу пропорција, сматрајући је за четврту пропорционалу за познате две количине и 100.

I. Израчунавање процентног приноса

1) Колико износи тара неке робе, ако се она рачуна 5%, а бруто тежина робе износи 2300 *kg?*

Пог. ред: на 100 *kg* рачуна се тара 5 *kg*
Упит. ред: „ 2300 „ „ „ „ П. „ (више).

Стога је П : 5 = 2300 : 100, а одавде је

$$П = \frac{2300 \cdot 5}{100} = 115\ kg$$

2) Колико износи тара неке робе, ако се она рачуна 5%, а њена је нето тежина 2185 *kg?*

Пог. ред: 95 *kg* нето теж. остају (од 100 *kg)* ако је тара 5%
Уп. ред: 2185 „ „ „ „ „ „ „ П (већа)

Стога је П : 5 = 2185 : 95, а одавде $П = \frac{2185 \cdot 5}{95} = 115\ kg$.

3) Нека роба заједно са 5% трошкова износи 2415 дин.; колики су трошкови?

Пог. ред: 115 дин. постају (од 100 дин.), ако су трошкови 5%
Уп. ред: 2185 „ „ „ „ „ П (више).

Стога је П : 5 = 2415 : 105, а одадве је $П = \frac{2415 \cdot 5}{105} = 115$ дин.

Из горњих се примера види да главница при израчунавању процентнога приноса може бити чиста, умањена и увећана.

Проценти принос израчунавамо у првом случају када главницу (чисту) множимо процентом и производ делимо са 100; у другом, главницу (умањену) множимо опет процентом, али добивен производ делимо са (100 — p); а у трећем случају главницу (увећану) опет множимо са процентом, а добивени производ делимо са (100 + p).

Према овоме имамо три врсте процентног рачуна.

a) од %, ако је главница дата чиста;
b) на %, „ „ „ „ увећана;
c) у %, „ „ „ „ умањена.

Обрасци за израчунавање процентног приноса П јесу:

a) $П = \frac{Г \cdot p}{100}$, ако је главница дата чиста;

b) $П = \frac{Г \cdot p}{100 + p}$, „ „ „ „ увећана; и

c) $П = \frac{Г \cdot p}{100 - p}$, „ „ „ „ умањена.

Напомена. Чисте су главнице: куповна цена робе; вредност имања; бруто тежина робе; прошлогодишња производња; прошлогодишњи увоз или извоз; садашњи број становника неке вароши; плата чиновника итд. *Увећане су главнице:* цена робе с трошковима; продајна цена робе, ако је она продата с добитком; крајњи износ неке фактуре коме је додан комисион; повећани број становника неког места; повећана производња; повећани извоз или увоз; имовина радње која је порасла итд. *Умањене су главнице:* нето тежина робе; цена робе плаћена у готову по одбитку сконта; продајна цена робе, ако је она продата с губитком; цена робе по одбитку рабата; смањена количина увоза, извоза, производње; смањени број популације итд.

II. Израчунавање чисте главнице

1) *Код процентног рачуна од % чисту главницу налазимо из*

обрасца $П = \frac{Г \cdot p}{100}$. *Из овога је обрасца* $Г = \frac{100 \cdot П}{p}$.

Примери:

a) Колико износи бруто тежина неке робе, када тара износи 72 kg, а рачуна се $3^{1}/_{3}\%$?

Овде је $Г = \frac{100 \cdot 72}{3^{1}/_{3}} = \frac{100 \cdot 72}{\frac{10}{3}} = \frac{100 \cdot 72 \cdot 3}{10} = 2160$ kg.

b) Комисион рачунат $\frac{1}{6}\%$, износи 8,67 динара; колика је сума од које је рачунат комисион?

$Г = \frac{100 \cdot 8{,}67}{\frac{1}{6}} = 100 \cdot 8{,}67 \cdot 6 = 5202$ дин.

2) *Код процентног рачуна на % чисту главницу израчунавамо, када предходно нађемо процентни принос (ако није дат) по обрасцу* $П = \frac{Г \cdot p}{100 + p}$, *а затим нађени процентни принос одузимамо од познате увећане главнице.*

Примери:

a) Цена некој акцији скочила је за 2% и данас се *котира* на берзи 867 дин.; колика је била њена ранија цена?

$П = \frac{867 \cdot 2}{102} = 17$ дин. Ранија је цена $= 867 - 17 = 850$ дин.

b) Продајући робу за 1485 дин. трговац заради 10%; колико је дао за робу?

$П = \frac{1485 \cdot 10}{110} = 135$ дин.; за робу је дао $1485 - 135 = 1350$ дин.

3) *Код процентног рачуна у % чисту главницу израчунавамо, када претходно израчунамо процентни принос употребом обрасца* $П = \frac{Г \cdot p}{100 - p}$, *а затим нађени процентни принос додајемо познатој умањеној главници.*

Примери:

a) Колика је вредност робе, кад је за њу по одбитку 3% сконта плаћено у готову 6062,50 дин.?

$П = \frac{6062{,}50 \cdot 3}{97} = 187{,}50$ дин.. Вредност робе $= 6062{,}50 + 187{,}50 =$ $= 6250$ дин.

b) Продајући робу за 6125 дин. трговац изгуби 2%; шта га стаје роба?

$П = \frac{6125 \cdot 2}{98} = 125$. Роба стаје $6125 + 125 = 6250$ дин.

III. Израчунавање процента

1) *Код процентног рачуна од % проценат p израчунавамо из обрасца* $П = \frac{Гp}{100}$. *Из овога је обрасца* $p = \frac{100\ П}{Г}$.

Примери:

a) Колико је од 100 рачунато провизије, кад је од 6250 дин. узето на име провизије 250 дин.?

$$p = \frac{100 \cdot 250}{6250} = 4\%.$$

b) Неко је уложио 4175 дин. у хартије од вредности. Кад му оне доносе годишње прихода 250,50 дин., колико му процената од 100 носи његов капитал?

$$p = \frac{100 \cdot 250{,}50}{4175} = \frac{25050}{4175} = 6\%.$$

2) *Код процентног рачуна на % проценат p израчунавамо, када претходно израчунамо чисту главницу одузимањем процентног приноса од увећане главнице, а затим примењујемо горњи образац*

$$p = \frac{100\,П}{Г\ (\text{чиста})}.$$

Примери:

a) Продајући робу за 17550 динара трговац заради 1300 дин.; колико је % зарадио?

Чиста главница $Г = 17550 - 1300$ дин., а $p = \dfrac{100 \cdot 1300}{16250} = 8\%$.

b) Станарина је повећана за 26 дин. и сада се плаћа 286 дин.; колико је од 100 повећана?

Чиста главница $Г = 286 - 26 = 260$ дин.,

$$\text{а } p = \frac{100 \cdot 26}{260} = 10\%.$$

3) *Код процентног рачуна у % проценат p израчунавамо, када претходно нађемо чисту главницу додавањем процентног приноса умањеној главници, а затим примењујемо горњи образац* $p = \dfrac{100 \cdot П}{Г\ (\text{чиста})}$.

Примери:

a) По одбитку рабата дин. 126,90, купац је платио дин. 719,10; колико му је процента попуштено?

Чиста главница $Г = 719{,}10 + 126{,}90 = 846$,

$$\text{а } p = \frac{100 \cdot 126{,}90}{846} = 15\%.$$

b) Нето тежина износи kg 11250, дара kg 1250; колико је % рачуната тара?

Чиста главница (бруто) $Г = 11250 + 1250 = 12500$ кг,

$$\text{а } p = \frac{100 \cdot 1250}{12500} = \frac{1250}{125} = 10\%.$$

Примери за вежбу:

1) Колико износи провизион на дин. 862,75, ако се он рачуна $6\frac{1}{4}\%$?

2) Колико износи бруто тежина неке робе, ако тара износи 250 kg а рачуна се 4%?

3) Буре шпиритуса тежило је, према рачуну, при одашиљању kg 386,50, а на месту испоруке измерено тежило је 377 kg колико је од 100 изгубило буре у тежини услед транспорта?

4) Извоз једне робе попео се на 49387 тона, а износио је пређе 42928 тона; колико је од 100 повећан?

5) Крајњи износ једне фактуре са 2,5% комисиона износи дин. 4264; колики је комисион?

6) Увоз неке робе порастао је за 40% и износи kg 1845300; за колико је kg повећан?

7) Једна партија вуне упила је $2,5^0/_0$ воде и тежи сада kg 17681,25; колико кг воде има у овој вуни?

8) Продајући робу за дин. 7775 трговац заради 450 дин.; колико је од 100 зарадио?

9) Цена акцији скочила је за 29 дин. и данас се котира 754 дин.; колико је од 100 скочила цена?

10) Једна партија зеитина претрпела је $7,5^0/_0$ кало (исцурење) и сада мери 3015,15 литара; колико је литара исцурило приликом преноса?

11) Колика је вредност робе кад је за њу по одбитку $5^0/_0$ сконта плаћено у готову 8725 дин.?

12) По одбитку провизије 170 дин. комисионар је послао комитенту 8303 дин.; колико је од 100 рачунао себи провизион?

§ 61) **Прост интересни рачун.** Покретна или непокретна имовина која доноси сопственику известан приход зове се *капитал*. Приход од 100 динара некога капитала за годину дана, зове се *проценат*. Приход од целог капитала за неко извесно време зове се *интерес*. Ако се годишњи интерес не придодаје капиталу у почетку идуће године, да с њим вуче интерес, већ и даље само уложени капитал вуче интерес, онда је капитал дат под *прост интерес*. Напротив, ако се интерес придодаје капиталу у почетку сваке наредне године (или семестра), да и он с капиталом и интересима ранијих година заједно вуку интерес, онда се каже да је капитал дат под *сложен интерес*, или под *интерес на интерес*.

Задатке из простог интересног рачуна решавамо као оне из сложеног правила тројног, па било да се тражи интерес, било капитал, проценат или време. При упоређивању врста количина имамо да водимо рачуна: 1) да је интерес већи, кад је капитал већи, проценат већи, време дуже, и обрнуто; 2) да је капитал већи, ако је интерес већи, проценат мањи, а време краће, и обрнуто; 3) да је проценат већи, ако је интерес већи, капитал мањи, а време краће, и обрнуто; и 4) да је време дуже, ако је интерес већи, капитал мањи и проценат мањи, и обрнуто.

I) Израчунавање интереса

1) Наћи интерес од 5683,85 дин. по $4,5^0/_0$ за 8 година.

Пог. ред: 100 дин. за 1 годину дају 4,5 дин. интереса
Уп. ред: 5683,85 „ „ 8 година „ i „ „

Поступајући као код сложеног правила тројног добијамо:

$$i : 4,5 = 5683,85 : 100$$
$$= 8 \quad : 1$$

Одавде је $i = \frac{5783,85 \cdot 4,5 \cdot 8}{100} = 2082,186 = 2082,19$ дин.

2) Наћи интерес од 5436 дин. по $8^0/_0$ за 4 год. и 3 месеца.

Пог. ред: 100 дин. за 1 год. дају 8 дин. интереса
Уп. ред: 5436 „ „ $4^1/_4$ „ „ i „ „

Овде је $i : 8 = 5436 : 100$

$= 4^1/_4 : 1$ Одавде је $i = \frac{5436 \cdot 8 \cdot 4,25}{100} = 1848,24$ д.

3) Наћи интерес од 6432 дин. по $6^0/_0$ за 7 месеци.

Пог. ред: 100 дин. за 12 мес. дају 6 дин. интереса.
Уп. ред: 6432 „ „ 7 „ „ i „ „

Тада је $i : 6 = 6432 : 100$

$$= 7 : 12 \quad \text{Одавде је } i = \frac{6432 \cdot 6 \cdot 7}{1200} = 225{,}12 \text{ дин.}$$

4) Наћи интерес од 6432 дин. по 6% за 4 год., 1 мес. и 4 дана.

Пог. ред: 100 дин. за 360 дана дају 6 дин. интереса.

Уп. ред: 6432 „ „ 1474 „ „ i „ „

Тада је $i : 6 = 6432 : 100$

$$= 1374 : 360 \quad \text{Одавде је } i = \frac{6432 \cdot 6 \cdot 1474}{36000} = 1580{,}12 \text{ д.}$$

Из горњих задатака увиђамо да је увек интерес

$$i = \frac{K \cdot p \cdot Г}{100}, \text{ или } i = \frac{K \cdot p \cdot M}{1200}, \text{ или } i = \frac{K \cdot p \cdot D}{36000},$$

где нам *K* значи капитал, *p* проценат, *Г* време у годинама, *M* време у месецима и *D* време у данима.

II) **Израчунавање капитала.** Из образаца за израчунавање интереса налазимо да је:

$$K = \frac{100 \cdot i}{p \cdot Г} \text{ или } K = \frac{1200 \cdot i}{p \cdot M} \text{ или } K = \frac{36000 \cdot i}{p \cdot D}.$$

Пример. Који капитал по 5% за 2 год. 3 мес. и 20 дана доноси 400 дин. инт.?

$$K = \frac{36000 \cdot 400}{5 \cdot 830} = 3469{,}88 \text{ дин.}$$

III) **Израчунавање процента.** Из образаца за интерес налазимо да је:

$$p = \frac{100 \cdot i}{K \cdot Г}, \text{ или } p = \frac{1200 \cdot i}{K \cdot M}, \text{ или } p = \frac{36000 \cdot i}{K \cdot D}$$

Пример. Под којим процентом 10000 дин. за 11 мес. дају 550 дин интереса?

$$p = \frac{1200 \cdot 550}{10000 \cdot 11} = 6\%.$$

IV) **Израчунавање времена.** Из образаца за интерес налазимо да је: a) време у годинама $Г = \frac{100 \cdot i}{K \cdot p}$, b) време у месецима $M = \frac{1200 \cdot i}{K \cdot p}$, c) време у данима $D = \frac{36000 \cdot i}{K \cdot p}$.

Примери:

За које време капитал од 8000 дин. по 5% даје 1600 дин. интереса?

$$Г = \frac{100 \cdot i}{K \cdot p} = \frac{100 \cdot 1600}{8000 \cdot 5} = 4 \text{ год.}$$

V) **Случај када је капитал дат заједно с интересом**

Ако са *S* означимо суму која претставља капитал и интерес уједно, онда је:

$$S = K + \frac{KpГ}{100}, \text{ или } S = K + \frac{KpM}{1200}, \text{ или } S = K + \frac{KpD}{36000},$$

$$\text{или } S = \frac{K(100 + pГ)}{100} = \frac{K(1200 + pM)}{1200} = \frac{K(36000 + pD)}{36000} \cdots (1)$$

Из овог обрасца налазимо да је чист капитал:

$$K = \frac{100\,S}{100 + pГ} = \frac{1200\,S}{1200 + pM} = \frac{36000\,S}{36000 + pD} \cdots (2)$$

Када су капитал и интерес уједно, интерес израчунавамо по обрасцу

$$i = S - K = S - \frac{100\ S}{100 + p\Gamma} = \frac{100\ S + Sp\Gamma - 100\ S}{100 + p\Gamma} = \frac{Sp\Gamma}{100 + p\Gamma}, \text{ или}$$

$$i = \frac{SpM}{1200 + pM}, \text{ или } i = \frac{SpD}{36000 + pD} \cdots (3).$$

Напомена. Чист капитал K можемо, дакле, наћи или непосредно употребом обрасца под (2), или претходно израчунавамо интерес i употребом обрасца под (3), па се нађени интерес одузме од увећаног капитала. Проценат p и време (Γ, M, D) налазимо, када претходно нађемо чист капитал, а затим из

$$p = \frac{100 \cdot i}{K\Gamma} = \frac{1200 \cdot i}{KM} = \frac{36000 i}{KD} \text{ налазимо проценат } p, \text{ а из}$$

$$\Gamma = \frac{100\, i}{Kp},\ M = \frac{1200\, i}{Kp},\ D = \frac{36000\, i}{Kp} \text{ налазимо време у годи-}$$

нама, или месецима, или данима.

Примери:

1) На коју вредност нарасте капитал од 5200 дин. по $6^0/_0$ за 2 год. и 5 месеци?

Овде је $S = \dfrac{K\,(1200 + pM)}{Kp} = \dfrac{5200 \cdot (1200 + 6 \cdot 29)}{1200} = \dfrac{5200 \cdot 1374}{1200} = 5954.$

2) Који капитал за 150 дана по $6^0/_0$ постаје са интересом 5000 дин.?

$$K = \frac{36000\, S}{36000 + pD} = \frac{36000 \cdot 5000}{36000 + 6 \cdot 150} = 4878{,}04 \text{ дин.}$$

3) Под којим процентом 3000 дин. за 90 дана постају с интересом 3037,50 дин. ?

$$i = S - K = 3037{,}50 - 3000 = 37{,}50;$$

$$p = \frac{36000 \cdot 37{,}50}{3000 \cdot 90} = 5^0/_0$$

4) За које време 8000 дин. по $6^0/_0$ постану с интересом 10000дин.?

$$i = S - K = 10000 - 8000 = 2000.$$

$$\Gamma = \frac{100 \cdot i}{K \cdot p} = \frac{100 \cdot 2000}{8000 \cdot 6} = 4 \text{ год. и 2 месеца.}$$

Задаци за вежбање

1) Колики је интерес од 10000 дин. по $9^0/_0$ за 5 год., 4 мес. и 20 дана?

2) Колики је интерес од 150000 дин по $12^0/_0$ од 7-I до 15-XI исте године?

3) Два капитала од 20000 дин. и 18000 дин. дати су под интерес, и то први по $8^0/_0$ за 2 год. 3 мес., а други по $10^0/_0$ за 1 год., 9 мес. и 25 дана; наћи суму њихових интереса.

4) Који капитал по $12^0/_0$ за 8 година и 3 месеца даје 3750 динара интереса?

5) Капитал од 55000 дин. даје за 3 год. 13000 дин. интереса; под којим је процентом дат под интерес?

6) Нека кућа купљена је за 300000 дин. а доноси годишњу кирију 36000 дин., колики је проценат добитка кад се за оправке, одбије 2000 дин. и кад се на кућу плаћа пореза $5^0/_0$?

7) За које време капитал од 20000 дин. по $7^1/_2{}^0/_0$ доноси 6000 дин. интереса?

8) Ког је дана позајмљен капитал од 12000 дин., кад је 20 октобра 1926 године примљен интерес 2750 дин. рачунајући по $9^0/_0$?

9) Кад се 40000 дин. позајме за 5 год. и 4 мес. по 10%, колику своту треба вратити после тог времена?

10) За дуг, који је имао да се исплати после 5 година, плаћено је одмах 50000 дин.; колики је био дуг кад је есконтован са 10%?

11) Дужник је вратио после 90 дана заједно са 8% иртереса дин. 6987; колико је динара интерес и колика је позајмљена сума?

12) На основу једног тестамента неко је у праву да после 6 месеци потражује дин. 100000. Ако му се ово потраживање исплати одмах по одбитку 10% интереса, колико ће му се исплатити?

13) Згодитак од дин. 40000, који треба да се исплати после 6 месеци, дисконтован је за 8%. Колика је садашња вредност овог згодитка?

14) Капитал са интересом од 29/IV—31/X износи дин. 4217,50, а сам интерес износи 59,50 дин.; колики је проценат?

15) Дуг дин. 3283 има да се исплати после 1 год., 3 мес. и 14 дана; колика је садашња вредност, кад се интерес рачуна по 5% годишње?

§ 62) Друштвени рачун — пропорционална подела

1) **Прост друштвени рачун.** Да бисмо дани број A поделили на више делова по размери $m:n:p:q\ldots$, служимо се особином продужних пропорција. Тако, ако деону суму A делимо на четири дела по размери $m:n:p:q$ и ако ставимо да је тражени I део $= x$, II $= y$, III $= z$ и IV$=u$, онда је:

$$x:y:z:u = m:n:p:q$$

$$\text{или}\quad x:m = y:n = z:p = u:q.$$

Применом особина продужних пропорција имамо:

$$(x+y+z+u):(m+n+p+q) = x:m = y:n = z:p = u:q,$$

$$\text{или}\quad A:(m+n+p+q) = x:m,$$

$$A:(m+n+p+q) = y:n,$$

$$A:(m+n+p+q) = z:p,$$

$$A:(m+n+p+q) = u:q.$$

Одавде је:

$$x = \frac{A}{m+n+p+q}\cdot m;\ y = \frac{A}{m+n+p+q}\cdot n;$$

$$z = \frac{A}{m+n+p+q}\cdot p;\ \text{и}\ u = \frac{A}{m+n+p+q}\cdot q.$$

Дакле, да бисмо нашли сразмерне делове, треба деону суму да поделимо збиром размерних бројева и добивени количник да помножимо одговарајућим размерним бројем.

Ако размерни бројеви нису цели, онда, ради олакшице у раду, претварамо их у целе бројеве, множењем свакога размерног броја њиховим заједничким именитељем.

Напомена. Зарада или губитак у једном трговачком предузећу дели се према уложеним капиталима ортака или акционара, ако је предузеће акционарско. Овде је зарада или губитак деона сума, а уложени капитали размерни бројеви.

Примери:

1) Подели број 1440 на три дела по размери 2 : 3 : 4.

Ако је први део x, други y и трећи z, онда је

$$x:y:z = 2:3:4,\ \text{па је}$$

$$x = \frac{1440}{9}\cdot 2 = 160\cdot 2 = 320;\ y = \frac{1440}{9}\cdot 3 = 480;\ \text{и}$$

$$z=\frac{1440}{9}\cdot 4=640.$$

Проба: $x+y+z=320+480+640=1440$.

2) Поделити број 1290 на три дела по размери $4:5\frac{1}{6}:8\frac{3}{4}$.

Ако је I део $=x$, II $=y$ и III $=z$, онда је $x:y:z=4:5^{1}/_{6}:8\frac{3}{4}$, или множењем размерних бројева њиховим заједничким именитељем 12, $x:y:z=48:62:105$. Тада је:

$$x=\frac{1290}{215}\cdot 48=6\cdot 48=288;\quad y=\frac{1290}{215}\cdot 62=6\cdot 62=372;\text{ и}$$

$$z=\frac{1290}{215}\cdot 105=630.$$

Проба: $288+372+630=1290$.

3) Поделити 96000 дин. на три лица тако да други има $\frac{3}{5}$ дела првога, а трећи $\frac{7}{8}$ збира првог и другога.

Ако је део првог лица 1, онда је део другог лица $\frac{3}{5}$, а део трећег лица $\frac{7}{8}$ од $\left(1+\frac{3}{5}\right)$, тј. $\frac{7}{8}$ од $\frac{8}{5}$, што чини $\frac{7}{5}$. Онда се тражени делови x, y и z узимају као $1:\frac{3}{5}:\frac{7}{5}$ или $5:3:7$. Стога је $x=\frac{96000}{15}\cdot 5=$ $=6400\cdot 5=32000$; $y=\frac{96000}{15}\cdot 3=19200$ и $z=19200\ \frac{96000}{15}\cdot 7=44800$.

4) Поделити 5348 дин. на три лица тако да други има $\frac{3}{5}$ дела првога више 300 дин., а трећи добија $\frac{2}{3}$ дела другога мање 50 дин.

Ако прво лице добија 1, онда друго добија $\frac{3}{5}+300$, а треће $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}+300\right)-50=\frac{2}{5}+200-50=\frac{2}{5}+150$. Ако се да̂, дакле, II лицу 300 и III 150 дин., остаје да се подели $5348-(300+150)=4898$ дин. на три дела по размери $1:\frac{3}{5}:\frac{2}{5}$, или $5:3:2$.

Тада I лице прима $\frac{4898}{10}\cdot 5=2449$; II лице $=\frac{4898}{10}\cdot 3=1469{,}4+300=$ $=1769{,}40$; и III лице $=\frac{4898}{10}\cdot 2=979{,}6+150=1129{,}60$.

Проба: $2449+1769{,}40+1129{,}60=5348$ дин.

5) Поделити 17212 дин. на четири дела тако да се I : II = 2 : 3, II : III = 8 : 9 и III : IV = 12 : 7.

Ако је I $=x$, II $=y$, III $=z$ и IV $=u$, онда је $x:y=2:3$, $y:z=8:9$ и $z:u=12:7$. Тада је за $x=1$, $y=\frac{3}{2}$, $z=\frac{27}{16}$ и $u=\frac{63}{64}$,

а $x:y:z:u=1:\frac{3}{2}:\frac{27}{16}:\frac{63}{64}=64:96:108:63$.

Стога је $x = \frac{17212}{331} \cdot 64 = 3328; y = \frac{17212}{331} \cdot 96 = 4992;$

$z = \frac{17212}{331} \cdot 108 = 5616;$ и $u = \frac{17212}{331} \cdot 63 = 3276.$

6) Три општине граде на некој реци мост чији је предрачун 98000 дин. Колико која општина треба да плати, ако је прва удаљена од места где се мост гради 5 *km*, друга 8 *km*, трећа 12 *km?*

Овде треба предрачунску суму поделити обрнуто пропорционално даљинама општина од места грађења моста. Дакле, ако прва општина има да плати x дин., друга y дин. и трећа z дин., онда је

$$x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}, \text{ или } x : y : z = 24 : 15 : 10.$$

Тада је $x = \frac{98000}{49} \cdot 24 = 48000;$ $y = \frac{98000}{49} \cdot 15 = 30000,$ и

$$z = \frac{98000}{49} \cdot 10 = 20000.$$

II) **Сложени друштвени рачун.** Ако се деона сума A дели не само према размерним бројевима $a : b : c$, већ и према $m : n : p$, и према $q : s : t$, онда рачун спада у сложени друштвени рачун. Ако са x, y и z означимо тражене делове, онда

$$\text{је } \left.\begin{aligned} x : y : z &= a : b : c \\ &= m : n : p \\ &= q : s : t \end{aligned}\right\} \text{ или } x : y : z = amq : bns : cpt.$$

Тада је : $x = \frac{A}{amq + bns + cpt} \cdot amq;$ $y = \frac{A}{amq + bns + cpt} \cdot bns;$

и $z = \frac{A}{amq + bns + cpt} \cdot cpt.$

Пример

Три ортака удруже се у неком послу овако: A уложи 80000 дин. за 5 месеци, B 40000 дин. за 6 месеци и C 20000 дин. за 8 месеци. Посао донесе чисте добити 46000 дин.; колико добитка припада сваком ортаку?

Ако је $A = x$, $B = y$ и $C = z$, онда је

$$\begin{aligned} x : y : z &= 80000 : 40000 : 20000 \\ &= 5 \quad : 6 \quad : 8 \quad, \text{ или} \\ x : y : z &= 400000 : 240000 : 160000, \text{ или} \end{aligned}$$

скраћивањем размерних бројева

Тада је $x : y : z = 5 : 3 : 2.$

$x = \frac{46000}{10} \cdot 5 = 23000;$ $y = 4600 \cdot 3 = 13800;$ $z = 4600 \cdot 2 = 9200$ дин.

Примери за вежбање:

1) Поделити број 12673 обрнуто пропорционално бројевима

$$4\frac{3}{8},\ 2\frac{6}{7} \text{ и } 1\frac{4}{11}.$$

2) Наследство од 266500 дин. треба да поделе 4 сина обрнуто пропорционално њиховим годинама. Колико је који добио, кад су њихове године 24, 21, 18 и 15?

3) Три ортака унели су у заједничко предузеће 40000, 30000 и 70000 дин.; како су поделили зараду од 14000 дин.?

4) Дин. 5000 треба поделити на петорицу тако да сваки доцнији прими увек 100 дин. више од претходног; колико сваки добива?

5) За куповину неке куће уложио је $A\frac{1}{4}$, $B\frac{1}{5}$, $C\frac{3}{8}$ и D остатак износу 105000 дин. Колико је сваки уложио и пошто је купљена кућа?

6) A, B, C и D поделе 35805 дин. тако да B добије 2 пута толико колико A, C половину онога што добију A и B заједно и $D\frac{2}{3}$ пута толико колико C добија. Колико добија сваки?

7) A, B и C подигну неку циглану. A уложи 150000 дин., Б 180000 дин. и C 270000 дин. Циглана је прве године донела на сваких 100 дин. уложених 15,50 динара добити. Колико ће од те добити пасти на свакога, ако C као деловођа радње добија на име плате 4 дин. од сваких 100 динара чисте добити?

8) Њих тројица уложе у заједничко предузеће, и то: A 58000, B 70000 дин. и C 120000 дин. Чиста добит износи $\frac{1}{8}$ целокупног улога. Од те добити добија A $\frac{1}{10}$ као деловођа радње, а B дугује радњи 1860 дин.; колико сваки добија?

9) Наслеђе од 90000 дин. треба да поделе 4 наследника тако да A добије $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ а D остатак. Али пре поделе умре B, а остала тројица поделе међу собом његов део по размери својих делова. Колико је који добио?

10) Три групе радника примили су за известан посао дин. 257500. Ову суму треба да поделе међу собом сразмерно броју радника и времену рада. Прва група имала је 26 радника, који су радили 19 дана по 10 часова дневно; друга група имала је 30 радника, а радили су 18 дана по 12 часова дневно; а трећа група имала 40 радника за 12 дана по 13 часова дневно. Колико ће добити свака група?

11) A почне радњу са 16000 дин.; после три месеца придружи му се B са 70000 дин., после даља 2 месеца придође C са 90000 дин.. 9 месеци после ступања C закључени су рачуни са чистом зарадом 21500 дин. Колико добија сваки?

§ 63) **Верижно правило.** Када однос имеђу двеју количина није непосредно дат, већ га треба одређивати из читавог низа познатог односа, онда се примењује *верижно* или *Розово* правило.

Упутство за решавање задатака по овом правилу заснива се на правилу: *да једнаке количине помножене једнаким, дају једнаке резултате.* На основу овога правила, од датих количина у задатку, чији се однос тражи, или је дат, *стварамо* онолико једнакости колико има количина истог имена, а затим стављамо да је производ њихових левих страна раван производу десних. Тражена се количина онда јавља као чинитељ, обично у првом производу, и та се количина добија када се производ чинитеља с десне стране подели производом од осталих чинитеља с леве стране.

Примери:

1) Колико динара сребра има у 125 турских гроша, када се зна, да у 100 турских гроша има 22,73 динара злата и да се ажија на злато рачуна 4%?

Решење: У x дин. сребра има = 125 т. гроша,
„ 100 т. гроша „ = 22.73 злат. динара,
„ 100 зл. динара „ = 104 сребр. динара.

Изостављајући имена и множећи добијамо:

$100 \cdot 100 \cdot x = 125 \cdot 23{,}73 \cdot 104$,

а одавде је $x = \frac{125 \cdot 23{,}73 \cdot 104}{100 \cdot 100} = 29{,}59$ сребр. динара.

2) Колико има метара у 100 турских аршина, кад у 61 тур. аршину има 65 руских аршина, а у 9 руских аршина има 7 енглеских јарда и кад у 35 јарда има 32 метра?

Решење: x мет. = 100 т. арш.
61 т. арш. = 65 р. арш.
9 р. арш. = 7 енгл. јарда
35 енгл. јар. = 32 метра.

Стога је: $61 \cdot 9 \cdot 35 \cdot x = 100 \cdot 65 \cdot 7 \cdot 32$,

а одавде је $x = \frac{100 \cdot 65 \cdot 7 \cdot 32}{61 \cdot 9 \cdot 35} = 75{,}774$ m.

Практични поступак. Из решења горњих задатака изводимо овакав практичан поступак при решавању задатака верижног рачуна:

1) Знаци једнакости замењују се усправном цртом;

2) С леве стране црте пише се непозната x са својим именом, а с десне стране њој једнака задата количина. Испод њих пишу се све посредне количине тако да се увек почиње лево с оном количином која је с претходном десно истог имена, а десно се ставља њој једнака количина. Ово се продужава све дотле док не добијемо десну количину истог имена са x, и

3) Најзад производ свих неименованих бројева с десне стране црте делимо производом свих неименованих бројева с леве стране испод x. Добивени количник је тражена непозната количина x.

Пример.

Претвори 10 дана орања у хектаре, кад се зна да 1600 квадратних хвати износе 1 дан орања, 1 квадратни хват има 36 квадратних стопа, а 1 m^2 има 10,00931 квадратних стопа.

Решење:

x хект.	10 д. ор.
1 д. ор.	1600 кв. хв.
1 кв. хв.	36 кв. ст.
10,00931 кв. ст.	1 m^2
10000 m^2	1 хектар

$$x = \frac{10 \cdot 1600 \cdot 36}{10{,}00931 \cdot 10000} = 5{,}854 ha \cdot$$

Примери за вежбу:

1) Колико динара стаје 1 m тканине од које 10 јарда у Лондону стају *фуната* 1,25 кад 1 јарда чини 0,914 m, а 1 фунта вреди на берзи 253,70 дин?

2) Колико динара стаје 1 kg неке робе, кад 1 тона стаје 900 круна, а 1 круна вреди 1,12 динара?

3) *А* добија 2158 kg бруто еспапа, са 7% таре, а 1 kg нето кошта 85 динара; колико динара има свега да плати?

4) Комад сребра финоће 0,720 тежи 14,5 kg; шта стаје тај комад, кад 1 kg чистог сребра вреди 2500 динара?

5) Колико марака у злату чине 140 златних динара, када $1722^2/_9$ динара садрже 500 gr чистог злата, а 100 gr чистог злата стају 2790 марака?

6) Знајући да се 5 *говеди* могу разменити за 3 коња, 11 коња за 210 оваца, 7 оваца за 88 kg кафе, а 6 kg кафе за 200 динара, тражи се колико ће динара вредети једно говече?

§ 64) **Дисконтни или есконтни рачун.** Под дисконтом или есконтом разумемо ону суму коју поверилац даје дужнику зато што је овај одужио свој дуг пре уговореног рока. Тај дисконт у ствари је једнак интересу од зајмљене суме од дана када се она одужује до краја уговореног рока. Ако дисконт означимо са D, вредност дуга са интересом са S, а вредност позајмљене суме K, проценат са p, а време у годинама са t, онда је:

$$S = K + D = K + \frac{Kpt}{100} = \frac{100K + Kpt}{100} = \frac{K(100 + pt)}{100}.$$

$$\text{Одавде је } K = \frac{100S}{100 + pt}.$$

Позајмљена сума K зове се почетна или садашња вредност капитала, капитал с интересом S зове се крајња или будућа вредност капитала.

Примери:

1) Меница од 5626,30 динара дисконтује се 2 месеца пре рока са 4%; a) колики је дисконт, b) колико треба купац да плати?

Вредност менице 2 месеца пре рока је:

$$K = \frac{100\,S}{100 + pt} = \frac{100 \cdot 5626{,}30}{100 + 4 \cdot \frac{2}{12}} = 5589{,}04 \text{ дин.},$$

а дисконт $D = 5626{,}30 - 5589{,}04 = 37{,}26$ дин.

2) Неко има да плати после 9 месеци 3600 дин.; кад он хоће да плати 5 месеци пре рока, колики је дисконт, кад се рачуна 6%?

$$K = \frac{100 \cdot S}{100 + pt} = \frac{100 \cdot 3600}{100 + 6 \cdot \frac{5}{12}} = \frac{1200 \cdot 3600}{1200 + 6 \cdot 5} = 3512{,}20 \text{ дин.}$$

Стога је дисконт $D = 3600 - 3512{,}20 = 87{,}80$ дин.

Напомена. Овако израчунат дисконт будуће вредности капитала зове се *прави*, или *математички прави дисконт.* Међутим, у трговачком и берзанском животу, дисконт једног дуга (менице) налази се по обрасцу $D = \frac{Spt}{100}$, узимајући крајњу вредност дуга S као садашњу. Ово се ради зато што је лакше делити са 100 и што је време t обично мање од 3 месеца. Овакав дисконт није тачан и већи је од математичког. Тако, код првог горњег примера је трговачки дисконт

$$D = \frac{5626{,}30 \cdot 4 \cdot \frac{2}{12}}{100} = \frac{5626{,}30 \cdot 4 \cdot 2}{1200} = 37{,}51; \text{ дакле, за } 0{,}25 \text{ дин. већи, а код}$$

другог примера је $D = \frac{3600 \cdot 6 \cdot 5}{1200} = 90$ дин.; дакле, за 2,20 дин. већи од математичког.

Примери за вежбу

1) 2/VII есконтована је меница од дин. 6215,60 чији је рок 8 недеља доцније; наћи њену вредност и дисконт, ако се дисконт рачуна 12%.

2) Есконтована је меница 11/X од дин. 6500, чији је рок 18/XII исте године са 10% дисконта; наћи дисконт.

3) Дисконтоване су 4/X са 8% менице: дин. 3200, за14/XII; дин. 8000, за 21/XII; и дин. 15000, за 2/I идуће год.; наћи за коју су суму дисконтоване и колики је целокупни дисконт.

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

I ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ СТЕПЕНА И ЊИХОВА ПРИМЕНА

§ 65) **О једначинама уопште.** Два једнака израза, монома или полинома, везана знаком једнакости, зову се *једначина.* У свакој једначини имамо две стране: *леву* и *десну.* Изрази који дају једначину, јесу стране једначине.

Једначине се деле на две главне групе: на *идентичне* (истоветне) и *погодбене.* Идентична је она једначина код које се на први поглед види да је заиста њена лева страна једнака са десном. Код ове једначине израз је изједначен са самим собом или са својим преображајем у неком другом облику. Тако, идентичне су једначине:

1) $a=a$; 2) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; и 3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Сваки образац за математичке операције је идентична једначина. Она је тачна за ма коју произвољну посебну вредност општих бројева који у њој постоје.

Погодбена је она једначина у којој, поред познатих количина, постоји једна или више непознатих количина и, само за извесне вредности тих количина, лева је страна једнака с десном. Тако, једначина $5x-8=3x$ је погодбена, а тачна је, тј. њена лева страна једнака је с десном само ако x има вредност 4. За сваку другу вредност за x, њена лева страна није једнака са десном. Оне вредности непознатих количина у једној погодбеној једначини које чине да је њена лева страна једнака с десном, или које задовољавају једначину, као што се обично каже, зову се *корени* или *решења* једначине. Решити једну погодбену једначину значи одредити оне вредности непознатих количина за које је једначина *задовољена,* тј. наћи њене корене.

§ 66) **Врсте погодбених једначина.** Погодбене једначине деле се такође на две главне групе: на *алгебарске* и *трансцендентне.*

Алгебарска је она погодбена једначина у којој је непозната количина везана са осталим количинама само знацима сабирања, одузимања, множења и дељења.

У овој једначини непозната се јавља само као основа каквог степена. Такве су једначине:

1) $ax-5a^2=15ab-3bx$; 2) $3x+7y=36$; 3) $x^2-4x=21$;

4) $\frac{5}{x}+\frac{4}{y}-\frac{6}{z}=20$; 5) $\sqrt{3x^2+9}=2$;

6) $x^4-4x^2=45$ итд.

За једну алгебарску једначину кажемо да је *уређена*, ако јој је десна страна 0 (нула), а лева јој је страна полином уређен по опадајућим степенима једне од непознатих количина, а чији први члан има коефицијенат $+1$. Такве су једначине:

1) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$ и 2) $x^2+9x+5=0$.

Према броју непознатих количина у алгебарској једначини, ове једначине делимо на једначине с једном, две, три и више непознатих количина, а према њиховом степену, на једначине првог, другог, трећег итд. степена. Тако, једначина:

1) $ax-b=0$ је I степена с једном непознатом;

2) $ax+by=c$ „ I „ с две непознате;

3) $5x^2+13x+17=0$ је II степена с једном непознатом;

4) $x^3-y^3=a$ је III степена с две непознате;

5) $6x^4-11x^2=35$ је IV степена с једном непознатом;

6) $x^3+y^3+z^3=90$ је III степена с три непознате итд.

Једначина, у којој су познати бројеви посебни, зове се *бројна*, а ако су ти бројеви само општи, или општи и посебни, онда се зове *општа*. Тако, једначина $4x-3=21$ је *бројна*, а једначина $\frac{1-x}{1-a}-\frac{1+x}{1+a}+\frac{1-x}{1+2a+a^2}=0$ је *општа*.

Трансцендентне једначине су оне у којима непознате количине заузимају места једног изложитеља, степена или корена, или се налазе под логаритамским знаком, или се налазе под неким од тригонометриских знакова. Према томе трансцендентне једначине делима на: 1) *изложитељне*, 2) *логаритамске* и 3) *гониометриске* или *тригонометриске*. Са свима трансцендентним једначинама ученици ће се упознати у VI и VII разреду.

§ 67) **Алгебарске једначине првог степена с једном непознатом**. Да бисмо нашли решење једне алгебарске једначине првог степена с једном непознатом количином, тј. да бисмо нашли ону вредност непознате количине за коју је једначина задовољена, служимо се главном особином сваке једначине, која гласи: ***Вредност непознате количине*** *у једначини се не мења, ако и на једној и на другој њеној страни извршимо подједнаке промене,* а то значи:

1) *Вредност непознате се не мења, ако и једној и другој страни једначине додамо један исти број.* Тако, код јед-

начине $3x - 8 = 7$ вредност за x је 5. Ова се вредност не мења, ако и једној и другој страни додамо ма који број. Ако додамо број 8, добијамо једначину: $3x - 8 + 8 = 7 + 8$, или $3x = 7 + 8$, или $3x = 15$, која се задовољава опет за $x = 5$.

2) *Вредност непознате се не мења, ако и од једне и од друге стране једначине одузмемо један исти број.* Тако, код једначине $4x + 6 = 18$ вредност за x је 3. Ова се вредност не мења, ако и од једне и од друге стране одузимамо ма који број. Ако одузмемо број 6, добијамо једначину:

$4x + 6 - 6 = 18 - 6$, или $4x = 18 - 6$, или $4x = 12$, која се задовољава опет само за $x = 3$.

Напомена. — На основу 1 и 2 особине једне једначине можемо вршити пребацивање њених чланова с једне на другу њену страну. *Треба само пребаченом члану да променимо знак.* На основу истих особина избацујемо оне чланове једначине који се налазе на обема странама, а једнаки су и једнако означени. Тако из $x - a = b$ имамо $x = b + a$, а из $ax + b = c + b$ имамо $ax = c$.

3) *Вредност непознате се не мења, ако обе стране једначине помножимо једним истим бројем.* Тако, код једначине $5x - 2 = 8$ вредност за x је 2. Ова се вредност неће променити, ако обе стране једначине помножимо ма којим бројем. Ако их помножимо са 3, добијамо једначину $15x - 6 = 24$, која се задовољава опет само за $x = 2$.

На основу ове особине можемо једначину ослободити њених разломљених чланова, ако обе њене стране помножимо *заједничким именитељем* разломљених чланова. Тако, ако једначину $\frac{13}{10}x - 2 = x - \frac{5}{12} + \frac{8}{15}x - \frac{13}{6}$ помножимо са 60, који је заједнички именитељ разломљених чланова, добијамо једначину $78x - 120 = 60x - 25 + 32x - 130$.

4) *Вредност непознате се не мења, ако обе стране једначине поделимо једним истим бројем.* Тако, код једначине $9x - 24 = 21$ вредност за x је 5. Ако обе њене стране поделимо са 3, добијамо једначину $3x - 8 = 7$, која се задовољава опет само за $x = 5$.

На основу ове особине можемо свести коефицијенат уз непознату количину на $+1$, дељењем обеју страна једначине тим коефицијентом. Тако, ако једначину $5x + 10 = 45$ поделимо са 5, добијамо једначину $x + 2 = 9$.

На основу горе изложених особина једне једначине, изводимо овакав поступак за решавање једначина првог степе с једном непознатом количином:

1) *Ако у једначини има разломака, онда, да бисмо ослободили разломљених чланова, множимо обе стране једн чине њиховим заједничким именитељем (радња ослобођава именитеља);*

2) *Ако у једначини има заграђених израза, онда, бисмо се ослободили заграда, извршујемо означене рачунс радње између заграда (радња ослобођавање заграда);*

3) *Чланове с непознатом количином пребацујемо на јед (најчешће на леву), а независне чланове на другу стра (радња пребацивање чланова);*

4) *После пребацивања чланова вршимо свођење једн имених чланова и на једној и на другој страни једначи (радња свођења); и*

5) *Најзад делимо обе стране једначине са коефицијен том уз непознату количину, да бисмо свели њен коефицијент на + 1 (радња ослобођавање коефицијента).*

Употребом горе изложених *пет радња*, можемо свак једначину првог степена најсложнијег облика свести на обли $x = a$, где нам a претставља тражени *корен* или *решење* дат једначине. Од примера зависи да ли ћемо узимати у поступа свих пет изложених радња да бисмо једначину решили, ил је њихов број мањи.

Напомена. За две једначине каже се да су *еквивалентне*, ако имају једно исто решење (корен), тј. када корен једне једначине задовољавају другу једначину. Употребо горе наведених *радња* при решавању једне једначине, наилазимо само на еквивалентне једначине које имају различит облике, али исто решење.

1 пример

Решити једначину $\frac{3}{4x} - \frac{3 - 4x}{2} + \frac{5}{3x} = \frac{6 - 5x + 8x^2}{4x}$. Ако об њене стране помножимо заједничким именитељем $12x$, добијамо једначину:

$$9 - (3 - 4x) \cdot 6x + 20 = (6 - 5x + 8x^2) \cdot 3.$$

Ако у овој једначини извршимо означено множење, добијамо једначину:

$$9 - 18x + 24x^2 + 20 = 18 - 15x + 24x^2.$$

Избацивањем најпре чланова $24x^2$ и на левој и на десно страни, пошто су и једнаки и једнако означени, а затим пребацивањем чланова добијамо једначину:

$$9 + 20 - 18 = 18x - 15x.$$

Свођењем и на левој и на десној страни ове једначине, добијамо једначину:

$$11 = 3x, \text{ или } 3x = 11,$$

Најзад дељењем ове једначине коефицијентом 3 уз x добијамо:

$$x = \frac{11}{3} = 3\,\frac{2}{3}.$$

2 пример. Решити једначину:

$$\frac{a^2\,(x - a)}{b} - b\,(x - 2a) = \frac{b^2\,(x - a)}{a} - a\,(x - a - b).$$

Множењем обеју страна заједничким имениоцем ab добијамо једначину:

$$a^3\,(x - a) - ab^2\,(x - 2a) = b^3\,(x - a) - a^2b\,(x - a - b).$$

Извршујући означено множење добијамо једначину:

$$a^3x - a^4 - ab^2x + 2a^2b^2 = b^3x - ab^3 - a^2bx + a^3b + a^2b^2.$$

Пребацивањем чланова добијамо једначину:

$$a^3x - ab^2x - b^3x + a^2bx = a^4 - 2a^2b^2 - ab^3 + a^3b + a^2b^2.$$

Свођењем једноимених чланова добијамо:

$$a^3x + a^2bx - ab^2x - b^3x = a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3.$$

Извлачењем x пред заграду, да бисмо јасније видели његов коефицијенат, добијамо:

$$x(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3) = a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3.$$

Дељењем коефицијентом уз x добијамо:

$$x = \frac{a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3}{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3} = \frac{a\,(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3)}{a^2 + a^2b - ab^2 - b^3} = a.$$

3 пример. Решити једначину:

$$\sqrt{4x^2 + 12x - 31} = 2x - 7.$$

Ако обе стране једначине степенујемо са 2, добијамо:

$$4x^2 + 12x - 31 = 4x^2 - 28x + 49.$$

Избацивањем чланова $4x^2$, пошто су једнаки и једнако означени, а налазе се на супротним странама, и пребацивањем чланова добијамо:

$$12x + 28x = 31 + 49.$$

Свођењем добијамо:

$$40x = 80.$$

Дељењем са коефицијентом 40 уз x добијамо:

$$x = 2.$$

§ 68) **Случај немогућности и неодређености решења једначина првог степена с једном непознатом.** Једначина првог степена с једном непознатом има чланова с непознатим и чланова без непознате, или тако званих независних чланова. Ако извршимо пребацивање чланова с непознатом на једну а независних на другу страну, па извршимо затим свођење, онда сваку једначину првог степена с једном непознатом сводимо на облик:

$$ax = b \cdots\cdots (1)$$

где нам a и b претстављају два позната броја.

При даљем решавању једначине (1) могу наступити два случаја, оба зависна од тога да ли је a једнако или различито од 0 (нуле).

1 случај. — Ако је a различито од 0, онда обе стране једначине (1) могу се поделити са a, чиме добијамо једначину

$$x = \frac{b}{a} \cdots\cdots (2)$$

Једначина (2) биће тада задовољена, ако се у њој x замени вредношћу $\frac{b}{a}$, која вредност може бити позитивна, негативна, или равна нули. Једначина (1) има тада исти корен $\frac{b}{a}$, као и једначина (2), и ниједан више. *Према овоме, једначина (1), за случај $a \neq 0$, има корен истоветан с кореном једначине (2).*

2 случај. Ако је $a = 0$, престаје наше право да обе стране једначине (1) делимо са a. Једначина (1) постаје:

$$0 \cdot x = b \cdots\cdots (3)$$

Ако претпоставимо да $b \neq 0$ и да има вредност рецимо 5, једначина (3) постаје:

$$0 \cdot x = 5$$

Решити ову једначину значи тражити онај број који помножен са 0, даје производ 5. Како сваки број помножен са нулом даје за производ 0, значи да једначина (3) нема решења. Каже се онда да је једначина (3) *немогућна.*

Ако пак претпоставимо да је и $b = 0$, онда једначина (3) добија облик:

$$0 \cdot x = 0 \cdots\cdots (4)$$

Тада је једначина (4) задовољена за све могуће вредности од x. Она, дакле, може имати бескрајно много решења. У том случају каже се да је једначина *неодређена.*

Из свега овога закључујемо да свака једначина првог степена с једном непознатом има само једно једино решење, осим у случају када је она немогућна или неодређена.

Примери:

1. Решити једначину: $\frac{5x}{4} - 2 = 7x + \frac{5}{3} - 12$.

Када ову једначину доведемо на облик $ax = b$, добијамо $69x = 100$, а одавде је $x = \frac{100}{69} = 1\frac{31}{69}$.

Дана једначина има, дакле, само једно решење.

2. Решити једначину: $\frac{3x}{4} - \frac{5x}{12} = \frac{5x}{9} + 6 - \frac{2x}{9}$.

Ако ову једначину доведемо на облик $ax = b$, добијамо:

$$0 \cdot x = 216.$$

Стога је ова једначина немогућна.

3. Решити једначину: $\frac{2x}{7} - 8 = \frac{29x}{28} + \frac{4}{5} - \frac{3x}{4} - \frac{44}{5}$.

Ако ову једначину доведемо на облик $ax = b$, добијамо:

$$0 \cdot x = 0$$

Дата једначина је, дакле, неодређена, пошто има бескрајно много решења.

§ 69) **Примери за вежбу**

Решити следеће једначине:

1) $x + a = b$. 2) $x - b = c$. 3) $nx = a$.

4) $\frac{x}{d} = b$. 5) $a - x = b$.

6) $\frac{a}{x} = n$. 7) $ax - b = 0$. 8) $12cx - 4x = 5cx$.

9) $(a + b)x + b = a$. 10) $ax = 1 + nx$. 11) $x - m = px$.

12) $ax + b = cx + d$. 13) $px + q = p + qx$.

14) $6n + x = 3m - 2x$. 15) $n^2 - nx = p^2 - px$.

16) $a - b + 6cx = 5a - 6dx + 3b$.

17) $a^2x + b^2 - 3b^2x = a^2 + 2abx - 4b^2x$.

18) $a - \frac{n}{x} = b$. 19) $a + \frac{1 - a^2}{x} = 1$.

20) $a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{x}$. 21) $\frac{3a + x}{x} - 7 = \frac{6}{x}$.

22) $\frac{cn}{x} + a = \frac{an}{x} + c$. 23) $x - \frac{n}{a} = \frac{x}{a} - n$.

24) $a + \frac{x}{a} = b + \frac{x}{b}$. 25) $\frac{a}{x} - a = \frac{b}{2x} - \frac{b}{2}$.

26) $\frac{10}{ax} = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{10}$. 27) $1 - \frac{x}{3a} = \frac{x}{6a} + \frac{x}{c}$.

28) $\frac{2x}{ab} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{b} + \frac{x}{a^2}$. 29) $\frac{ax}{b^2n} - \frac{a}{b^3} = \frac{1}{b^2} + \frac{x}{an}$.

30) $2a - (a + 1)x = (a - 1)\ x.$

31) $2ac - (b + c)x = (c - b)x + 2bx.$

32) $(2a - b)x - 2ab = a^2 + (a - 2b)x + b^2.$

33) $2(2n - 1) - \dfrac{x + a}{x} = \dfrac{a - x}{x}.$

34) $a(x - 12) = b(x - 12) - 2(a - b).$

35) $3(a + 2x) - 11(a - 2b) = 2(x - 3b).$

36) $a(x - a^2) - b(x - b^2) = 0.$

37) $a(x + a) - 2a(x - 2a) = a(3x + a).$

38) $\dfrac{8b - (5x - 6b)}{3} = -x.$ 39) $x = \dfrac{a^2(a - x) + 1}{1 - a}.$

40) $51 - \dfrac{(7 - 3x)x}{5} = (11 + 3x)\dfrac{x}{5} - 3 \qquad (x = 15).$

41) $\dfrac{a(a - nx) + x}{ab} + 1 = \dfrac{bn + 1}{ab} \cdot x.$

42) $\dfrac{24{,}08}{x} + \dfrac{1}{x}\,0{,}04(x + 0{,}9) = 241{,}2 \qquad (x = 0{,}1).$

43) $\dfrac{a^3(x - a)}{a + b} + \dfrac{b^3(x + b)}{a + b} = -abx \qquad (x = a - b).$

44) $\dfrac{3x - 7}{6} - \dfrac{2x - 5}{7} = 7\dfrac{10}{21} \quad (x = 37).$

45) $\dfrac{7x - 3}{6} - \dfrac{x - 5}{4} = 7{,}1\dot{6} \qquad (x = 7).$

46) $\dfrac{3 - 2x}{3} = \dfrac{5}{9}x + 0{,}2\dot{6} \qquad \left(x = \dfrac{3}{5}\right).$

47) $\dfrac{3x - 7}{12} - \dfrac{2(x - 5)}{27} = 1 - \dfrac{x}{18} \qquad \left(x = \dfrac{1}{5}\right).$

48) $7 + 5\left(\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{3}\right) = 3x - 2\left(\dfrac{x}{2} - 9\right) - 7 \qquad \left(x = 1\dfrac{1}{3}\right).$

49) $\dfrac{2x - a}{x} = \dfrac{7x + 11a}{5x} - 1.$ 50) $\dfrac{ax}{c} = \dfrac{a(x^2 + c^2)}{cx} - bd \quad \left(x = \dfrac{ac}{bd}\right).$

51) $\dfrac{x - 1}{n - 1} + \dfrac{2n^2(1 - x)}{n^4 - 1} = \dfrac{2x - 1}{1 - n^4} - \dfrac{1 - x}{1 + n} \qquad \left(x = \dfrac{3}{4}\right).$

52) $\left(\dfrac{x}{a - b} - \dfrac{1}{c - d}\right) : (n - q) = \left(\dfrac{1}{d - c} - \dfrac{x}{b - a}\right) : (q - n)$

$$\left(x = \frac{a - b}{c - d}\right).$$

53) $\dfrac{ac^2 + x}{c} = \dfrac{ax + b^2}{b}$

54) $\dfrac{a - bx}{a} - \dfrac{b - ax}{b} = a - b \qquad \left(x = \dfrac{ab}{a + b}\right)$

55) $\frac{1-ax}{bx}=\frac{bx-1}{ax}+2 \quad \left(x=\frac{1}{a+b}\right).$

56) $\frac{b}{ag}=\frac{5agx+bc}{acg}-\frac{18a-x}{c}.$

57) $\frac{x}{a^2}-1=\frac{2x}{a^2n}-\frac{a^2+x}{a^2n^2} \quad \left(x=\frac{a^2n+a^2}{n-1}\right).$

58) $\frac{b+x}{a}=1-\frac{c}{d}+\frac{c(x+b)}{ad} \quad (x=a-b).$

59) $1=\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right) \quad (x=a+b).$

60) $\frac{x-1\frac{1}{2}}{10}-\frac{11x-3}{18}+5\frac{1}{20}=\frac{9-\frac{x}{2}}{3}.$

61) $\frac{3}{4}-\frac{\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+x}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+x}-\frac{3}{4} \quad \left(x=\frac{1}{2}\right).$

62) $1-\frac{1-\frac{1}{a^2}}{\frac{a}{x}\left(1-\frac{1}{a}\right)}=-\frac{1}{a^2}.$

63) $\frac{1}{a-cx}=\frac{bc}{a^2+ac-bc^2}.$ 64) $\frac{x}{a-b}-\frac{5a}{a+b}=\frac{2bx}{a^2-b^2}.$

65) $\frac{a}{bx}+\frac{c}{b}-\frac{cx}{bx-a}=0 \quad \left(x=\frac{a}{b-c}\right).$

66) $\frac{x}{d}+\frac{a}{b+c}=\frac{a(b+c)+dx}{bd+cd}.$

67) $\frac{7}{6x+30}+\frac{1}{9x-45}=\frac{15}{2x^2-50}. \quad (x=10).$

68) $\frac{a+b}{a+2b}+\frac{x}{b}=1+\frac{b(b-x)}{a^2+2ab} \quad \left(x=\frac{b^2}{a+b}\right).$

69) $\frac{a^2+4a}{x^2+x-a^2+a}-\frac{a}{x+a}=\frac{1}{x-a+1}.$

70) $\frac{x+1}{a^3-x^3}-\frac{1}{ax^2-x^3}+\frac{a}{x^4+ax^3+a^2x^2}=-\frac{1}{x^2} \quad \left(x=\frac{a^2}{2}\right).$

71) $(x+1)^2=[111-(1-x)]\,x-80 \quad \left(x=\frac{3}{4}\right).$

72) $(a+b)(a-x)-(a-x)(x-b)-(x-b)(b+x)=0 \quad \left(x=\frac{a+b}{2}\right).$

73) $(x-a)(a+b)+(2x+c)(a-b)=2a^2+ac-2bx-bc \quad (x=a+1).$

74) $(a+b)(b-a)(1+x^2)-2x(b-a)=(a-bx)^2-(b-ax)^2 \quad (x=a+b).$

75) $\frac{n}{n^2-x^2}=\frac{x+n}{n-x}+\frac{x-n}{n+x} \quad \left(x=\frac{1}{4}\right).$

76) $\frac{x-2n}{x+3n}+\frac{2x^2-13n^2}{x^2-9n^2}=3.$

77) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{2x^2+2x}=\frac{3x+3}{2x^2-2x}$ $\left(x=-\frac{1}{4}\right)$.

78) $\frac{7a-x}{a+x}=\frac{3a+4x}{5a-4x}$. 79) $\frac{a+bx^2}{5x-3}=\frac{a^2+3bx^2}{15x-3a}$ $\left(x=-\frac{5a}{3b}\right)$

80) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}-\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\frac{1{,}5x-2}{x^2-1}$ $\left(x=1\frac{1}{3}\right)$

81) $\frac{a(x-a)}{a+2b}+\frac{b(x-b)}{2a+b}=a+b$.

82) $\frac{a}{ac+bc}+\frac{a-b}{2bx}=\frac{a+b}{2bc}-\frac{b}{ax+bx}$.

83) $\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$ $\left(x=\frac{a+b}{a-b}\right)$.

84) $\frac{a^2+ax+x^2}{a^3+a^2x+ax^2+x^3}-\frac{a^3-a^2x+ax^2}{a^4+2a^2x^2+x^4}=\frac{1}{a+x}$.

85) $\frac{3x+7a}{a^2x^2+a^3(2x+a)}+\frac{4x+5a}{a^3x+x^4}=\frac{a^2-2ax+3x^2}{a^4x-a^3x^2+a^2x^3}$. $\left(x=-\frac{a}{4}\right)$.

86) $\frac{x+b}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{b+x}{a^2+2ab+b^2}-\frac{x-b}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a}$.

87) $-4x-\{5x-[6x-(7x-(8x-9))]\}=-10$ $\left(x=\frac{1}{2}\right)$.

88) $-4-4\{4-4[4-4(4-x)]\}=44$ $(x=4)$.

89) $\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}(x+2)+4\right)+6\right]+8\right\}=1$ $(x=1)$.

90) $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}-1\right)-1\right)-1\right]-1\right\}-1=0$ $(x=363)$.

II. Алгебарске једначине првог степена са две непознате

§ 70) **Одређене и неодређене једначине.** Једна једначина ма ког степена може бити *одређена* или *неодређена.* Она је одређена, ако за сваку непознату даје само један корен (једно решење), или ограничен број решења. Тако, једначана $3x-4=11$ је одређена, јер има само једно решење, и то $x=5$. За сваку другу вредност од x једначина није задовољена. Једначина $x^3-3x^2=10x$ такође је одређена, јер постоје само три корена, и то $x=0$, $x=5$ и $x=-2$, који задовољавају ту једначину.

Једначина је неодређена, ако она за сваку непознату даје бескрајно много корена (решења). Тако, једначина $\frac{2x}{7} - 8 = \frac{29x}{28} + \frac{4}{5} - \frac{3x}{4} - \frac{44}{5}$, која се своди на $0 \cdot x = 0$, је неодређена, пошто се задовољава за сваку позитивну или негативну, целу или разломљену вредност од x.

Једначина $y - 3x = 20$ такође је неодређена, јер постоји бескрајно много позитивних, негативних, целих и разломљених парова решења за x и y која задовољавају ту једначину. Те парове решења добијамо, ако дату једначину решимо по једној од непознатих количина, па узимајући за другу непознату разне произвољне вредности и замењујући ту непознату овим вредностима, добијамо за сваку од тих вредности по једну одређену вредност прве непознате. Тако, ако дату једначину решимо по y, добијамо:

$$y = 3x + 20.$$

Тада за вредности:

$x = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\ldots$ добијамо

$y = 20, 23, 17, 26, 14, 29, 11 \ldots\ldots$

Из овога примера је јасно да је свака једначина са две непознате неодређена. За једну непознату може се узимати ма која произвољна вредност па, замењујући у једначини, добијамо и вредност за другу непознату.

Неодређености код једне једначине првог степена са две непознате неће бити, ако поред ове једначине постоји још једна једначина са истим непознатим количинама, а поред тога и погодба, да се за обе непознате одреде само оне вредности које једновремено задовољавају обе једначине. Обе једначине тада чине један *систем једначина*, а под *решењем* једнога таквога система разумемо оне вредности непознатих које задовољавају обе једначине једновремено. Обе те вредности дају један *спрег* (*пар*) *корена*.

Да бисмо решили један систем од две једначине, старамо се да једну непознату згодним начином избацимо (елиминујемо), тако да од две дате једначине добијемо једну трећу, тако звану ***елиминациону једначину,*** *у којој избачена непозната не постоји. Решавањем ове елиминационе једначине налазимо вредност једне непознате, па заменом те вредности у једној, ма којој од датих једначина, налазимо и вредност друге (избачене) непознате.*

Ради стварања елиминационе једначине постоје четири методе, и то: *упоређивања* или *компарације*, *замене* или *суп-*

ституције, једнаких коефицијената и ***Безуова метода** или* ***метода неодређених коефицијената.***

§ 71. Методе елиминовања (избацивања)

А) **Метода упоређивања.** Ова се метода састоји у овоме: *налазимо најпре и из једне и из друге једначине изразе који претстављају вредност једне исте непознате. Ти изрази могу бити различитог облика, али су једнаки, пошто претстављају једну исту непознату. Везивањем тих израза знаком једнакости добијамо тражену елиминациону једначину коју решавамо као једначину првог степена с једном непознатом, ради добијања вредности њене непознате количине. Најзад заменом ове вредности у једној од једначина датог система добијамо једначину из које налазимо и вредност непознате коју смо били елиминовали.*

1 пример. Решити систем једначина:

$$1)\ 7x - 2y = 11.$$
$$2)\ 2x + 3y = 21.$$

Ако елиминујемо y, онда имамо из (1)

$$y = \frac{7x - 11}{2}, \text{ а из друге } y = \frac{21 - 2x}{3}.$$

Тада је елиминациона једначина:

$$\frac{7x - 11}{2} = \frac{21 - 2x}{3}.$$

Решавањем ове једначине добијамо да је $x = 3$.

Заменом ове вредности у (2) добијамо:

$$6 + 3y = 21, \text{ а одавде је } y = 5.$$

2 пример. Решиту систем једначина:

$$1)\ ax + y = a^3,$$
$$2)\ x + ay = 1.$$

Елиминујући x, добијамо из (1) $x = \frac{a^3 - y}{a}$, а из (2)$x=1-ay$.

Тада је елиминациона једначина:

$$\frac{a^3 - y}{a} = 1 - ay.$$

Решавањем ове једначине добијамо да је $y = -a$.

Заменом у (1) или (2) добијамо да је $x = 1 + a^2$.

В) **Метода замене.** — *Одређујемо из ма које од датих једначина једну непознату — одређујемо израз који претставља њену вредност — а затим ту непознату замењујемо у другој једначини њеним изразом, чиме добијамо тражену елиминациону једначину. Даљи је рад истоветан као код прет-*

ходне методе. Ако је коефицијенат једне непознате $= 1$, онда је најбоље да ту непознату елиминујемо, пошто је њен израз цео.

1 пример. Решити систем једначина:

$$1)\ 3x + 4y = 4,$$
$$2)\ 12x - 6y = 5.$$

Ако желимо да елиминујемо x, онда је из (1) $x = \frac{4-4y}{3}$.

Заменом у (2) x са $\frac{4-4y}{3}$ добијамо елиминациону једначину: $12 \cdot \frac{4-4y}{3} - 6y = 5$.

Решењем ове једначине добијамо да је $y = \frac{1}{2}$.

Заменом ове вредности за y у (2) добијамо:

$$12x - 3 = 5. \quad \text{Овде је } x = \frac{2}{3}.$$

2 пример. Решити систем једначина:

$$1)\ x - y = a,$$
$$2)\ ax - by = a^2 + b^2.$$

Из (1) имамо $x = a + y$. Заменом x са $a + y$ у (2) добијамо елиминациону једначину:

$$a(a + y) - by = a^2 + b^2.$$

Из ове је једначине $y = \frac{b^2}{a-b}$. Заменом у (1) добијамо:

$$x = a + \frac{b^2}{a-b} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a-b}.$$

С) **Метода једнаких коефицијената.** *Треба претходно обе једначине довести на облик $ax + by = c$. Затим ако коефицијенти непознате коју желимо да елиминујемо нису једнаки, множимо само једну или обе једначине таквим бројевима, да бисмо створили уз ту непознату једнаке коефицијенте, и то њихов најмањи заједнички садржатељ. Најзад ново добијене једначине сабирамо или одузимамо, према томе да ли су једнаки коефицијенти уз непознату намењену за елиминовање различитих или једнаких знакова. Овим се добива тражена елиминациона једначина, па је даљи рад као у претходним методама.*

1 пример. Решити систем једначина:

$$1)\ 7x - 2y = 11, \quad |\cdot 3|$$
$$2)\ 2x + 3y = 21. \quad |\cdot 2|$$

Ако желимо да елиминујемо непознату y, онда треба прву једначину да помножимо са 3, а другу са 2, пошто је најмањи заједнички садржатељ за коефицијенте уз y 6. Тиме добијамо:

$$1)\ 21x - 6y = 33 \text{ и}$$
$$2)\ 4x + 6y = 42.$$

Сабирањем ових једначина добијамо елиминациону једначину:

$$25x = 75.$$

Из ње је $x = 3$, а заменом x са 3 у једначини (2) добија се:

$$6 + 3y = 21. \text{ Одавде је } y = 5.$$

2 пример. — Решити систем једначина:

$$1)\ x - ay = ab, \quad |\cdot b|$$
$$2)\ cx + aby = af.$$

Ако желимо да елиминујемо y, онда треба само прву једначину да помножимо са b. Тиме добијамо:

$$1)\ bx - aby = ab^2 \text{ и}$$
$$2)\ cx + aby = af.$$

Сабирањем ових једначина добијамо елиминациону једначину:

$$ax + cx = ab^2 + af$$

из које је $x = \frac{ab^2 + af}{b + c}$. Заменом x у првој једначини овом вредношћу, добијамо једначину:

$$\frac{ab^2 + af}{b + c} - ay = ab,$$

или скраћивањем са a добијамо:

$$\frac{b^2 + f}{b + c} - y = b. \text{ Одавде је } y = \frac{b^2 + f}{b + c} - b = \frac{f - bc}{b + c}.$$

§ 72) Случајеви немогућности и неодређености решења једначина првог степена са две непознате

Ако једначине система

$$1)\ ax + by = c \text{ и}$$
$$2)\ a'x + b'y = c'$$

решимо по ма којој од метода из претходног параграфа, добијамо да је:

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \text{ и } y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

Испитивањем ове вредности лако се уверавамо да има случајева када обе једначине система нису у складу и да може наступити случај немогућности или неодређености.

а) *Случај немогућности.* — Овај случај се јавља када су именитељи ових вредности једнаки нули, а њихови бројитељи различити од нуле, тј. када је $ab' = a'b$, а $b'c \gtrless bc'$ и $ac' \gtrless a'c$. Тада је, за $b'c - bc' = A$ и $ac' - a'c = B$,

$$x = \frac{A}{0} \text{ и } y = \frac{B}{0}$$

које су вредности немогућне, нити имају смисла, јер се ове једначине могу написати у облику:

$$0\cdot x = A \text{ и } 0\cdot y = B,$$

из кога се облика најбоље да̂ увидети ова немогућност, пошто не постоји ни један број помножен нулом да даје вредност A, односно B.

Овај случај увек наступа када су једначине система једна другој *противречне* или *супротне*. Јер, ако се у првој једначини стави $a = a'm$, биће, из $ab' = a'b$, или $a'mb' = a'b$, и $b = b'm$, те дате једначине добијају облик:

$$1)\ a'mx + b'my = c \text{ и}$$
$$2)\ a'x + b'y = c'.$$

Ако другу једначину помножимо са m, па је упоредимо са првом, добили бисмо да је

$$c'm = c.$$

Ова једначина обелодањује нам противречност (супротност), пошто по претпоставци треба да је

$$bc' \gtrless b'c, \text{ или } b'mc' \gtrless b'c, \text{ или } mc' \gtrless c,$$

Пример. Решити систем једначина:

$$1)\ 4x - 10y = 13,$$
$$2)\ 6x - 15y = 2.$$

Ако радимо методом замене, онда имамо из (1) $x = \frac{13+10y}{4}$, па је елиминациона једначина:

$$6\cdot\frac{13+10y}{4} - 15y = 2$$

која, када се упрости, добија облик

$$0\cdot y = 35.$$

Па како је ова једначина немогућна, то је немогућан и систем датих једначина.

Напомена. — Најбоље увиђамо немогућност овог система једначина, ако га решавамо методом једнаких коефицијената. Тако, ако прву једначину помножимо са 3 а другу са 2, добијамо једначине:

$$1)\ 12x - 30y = 39 \text{ и}$$
$$2)\ 12x - 30y = 4,$$

чије су леве стране једнаке а десне нису, што је немогуће.

b) *Случај неодређености.* — Овај случај се јавља, када су не само именитељи већ и бројитељи вредности од x и од y једнаки нули, тј. када је $ab' = a'b$, $b'c = bc'$ и $ac' = a'c$. Тада је:

$$x = \frac{0}{0} \text{ и } y = \frac{0}{0} \text{ или } 0\cdot x = 0 \text{ и } 0\cdot y = 0,$$

које нам једначине најбоље обелодањују случај неодређености, пошто постоје бесконачно многе вредности од x и од y, које помножене са нулом, дају за производ нулу.

Овај случај наступа свагда када је једна једначина система *зависна* од друге његове једначине, или када су оне у ствари *идентичне*. Јер, ако се стави да је $a = a'm$, онда из $ab' = a'b$ излази да је $b = b'm$, а из $ac' = a'c$ излази да је $c = c'm$, те дате једначине система имаће облик:

$$1)\ a'mx + b'my = c'm \text{ и}$$

$$2)\ a'x + b'y = c',$$

које нам показују да су једна од друге зависне, или да су идентичне, јер је прва постала од друге множењем ове са m. Па како је из ових једначина:

$$\frac{a'm}{a'} = \frac{b'm}{b'} = \frac{c'm}{c'} = m, \text{ или } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = m,$$

то изводимо закључак *да ће једначине система бити зависне једна од друге, ако су њихови коефицијенти* a, b, c и a', b', c' пропорционални.

Пример. Решити систем једначина:

$$1)\ 12x + 21y = 9 \text{ и}$$

$$2)\ 28x + 49y = 21.$$

Радећи методом замене добијамо из (1) $x = \frac{9 - 21y}{12}$, па је елиминациона једначина:

$$28 . \frac{9 - 21y}{12} + 49y = 21,$$

која, када се упрости, добија облик $0 \cdot y = 0$. Па како је ова једначина неодређена, то је неодређен и систем датих једначина.

Ако овај систем решимо методом једнаких коефицијената, па, да бисмо елиминовали x, помножимо прву са 7 а другу са 3, добијамо две идентичне једначине облика $84x + 147y = 63$. Зависност ових двеју једначина датог система увиђа се и из пропорционалности њихових коефицијената.

Закључак. — Систем од две једначине првог степена са две непознате допушта један спрег одређених решења, када нису његове једначине нити ***противречне (супротне)****, нити* ***зависне (идентичне)****; не допушта никакво решење, ако су његове једначине* ***противречне****; допушта бескрајно много решења, ако су његове једначине* ***зависне (идентичне)****;*

§ 73) **Решавање алгебарских једначина првог степена са три и више непознатих количина.** Да бисмо решили један систем једначина од n непознатих, треба да имамо у систему онолико једначина колико и непознатих и све те једначине треба да буду једне од других *независне* и да једна другој нису супротне (противречне).

Поступак за решавање система од n једначина је следећи: *Треба избацити (елиминовати), употребом једне од наведених метода, из сваке две задате једначине једну исту непознату. Овим ћемо створити $n - 1$ нових једначина са $n - 1$ непознатих. Поступајући исто тако, избацујемо из сваке две од $n - 1$ једначина једну исту непознату и тиме стварамо $n - 2$ нове једначине са $n - 2$ непознате. Овај поступак настављамо све дотле док не добијемо једну једначину с једном непознатом. Решењем ове једначине налазимо вредност њене непознате. Заменом ове вредности у једној од претходних двеју једначина налазимо и вредност друге непознате. Заменом вредности обеју нађених непознатих количина у једној од претходних трију једначина, налазимо и вредност треће непознате. Овакав се поступак наставља све дотле док не буду одређене вредности свију непознатих количина.*

Напомена. — Ако је дато у систему мање једначина но што има непознатих, онда је систем једначина *неодређен*, јер радећи по горњем упутству, наилазимо најзад на једну једначину са две непознате, која је неодређена и која тиме чини систем неодређеним. Ако је дато више једначина но непознатих, онда је систем немогућан, јер нађене вредности непознатих од $n - 1$ једначина не задовољавају n-ту једначину тога система. Ако у систему једначине нису потпуне, тј. свака једначина не садржава све непознате, онда се једна непозната избацује само из једначина у којима она постоји, чиме се горњи поступак за решавање система од n једначина са n непознатих само упрошћава.

Пример 1. Решити систем једначина:

1) $3x + 2y - z = 12,$
2) $5x - 4y + 3z = 16,$
3) $2x + 3y + 2z = 35.$

Избацујући z из (1) и (2) једначине по методи једнаких коефицијената добијамо:

$$\begin{array}{l|c|l}
1)\ 3x + 2y - z = 12 & \cdot 3 & \left.\begin{array}{l} 1)\ 9x + 6y - 3z = 36 \\ \underline{2)\ 5x - 4y + 3z = 16} \end{array}\right\} + \\
2)\ 5x - 4y + 3z = 16 & &
\end{array}$$

I) $14x + 2y = 52$, или I) $7x + y = 26$.

Тако исто, избацујући z из (1) и (3) једначине, по истој методи, добијамо:

$$\begin{array}{l|c|l} 1)\ 3x+2y-\ z=12 & \cdot 2 & 1)\ 6x+4y-2z=24 \\ 2)\ 2x+3y+2z=35 & & \underline{2)\ 2x+3y+2z=35} \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\}+$$

$$\text{II)}\ 8x+7y=59.$$

Ако сада из (I) и (II) избацимо y методом замене, онда имамо из (I) $y=26-7x$, а заменом у (II) имамо:

$$8x+7(26-7x)=59.$$

Из ове једначине налазимо да је $x=3$. Заменом у (I) добијамо: $21+y=26$, а $y=5$. Заменом x и y у (I) добијамо: $9+10-z=12$, а $z=7$.

Пример 2. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} &1)\ 3x+4y-2z+5u=25,\\ &2)\ 5x-3y+2z-6u=-19,\\ &3)\ 2x-7y+3z+4u=13,\\ &4)\ 8x-9y-5z+3u=-13. \end{aligned}$$

Ако избацимо z по методи једнаких коефицијената најпре из (1) и (2):

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 3x+4y-2z+5u=25 \\ \underline{2)\ 5x-3y+2z-6u=-19} \end{array}\right\}+$$

$$\text{I)}\ 8x+y-u=6;$$

затим из (2) и (3):

$$\begin{array}{l|c|l} 2)\ 5x-3y+2z-6u=-19 & \cdot -3 & 2)\ -15x+9y-6z+18u=57 \\ 3)\ 2x-7y+3z+4u=13 & \cdot\ \ 2 & 3)\ \ \ 4x-14y+6z+8u=26 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\}+$$

$$\text{II)}\ -11x-5y+26u=83;$$ и најзад

из (3) и (4):

$$\begin{array}{l|c|l} 3)\ 2x-7y+3z+4u=13 & \cdot 5 & 3)\ 10x-35y+15z+20u=65 \\ 4)\ 8x-9y-5z+3u=-13 & \cdot 3 & 4)\ 24x-27y-15z+9u=-39 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\}+$$

$$\text{III)}\ 34x-62y+29u=26.$$

Ако сада избацимо u из (I), (II) и (III) методом замене, онда је из (I) $u=8x+y-6$, а заменом најпре у (II), а затим у (III) добијамо:

$$\begin{aligned} &a)\ -11x-5y+26(8x+y-6)=83 \quad \text{и}\\ &b)\ 34x-62y+29(8x+y-6)=26, \quad \text{или} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a)\ 197x+21y=239 \quad \text{и}\\ &b)\ 266x-33y=200. \end{aligned}$$

Избацујући y из *(a)* и *(b)* по методи једнаких коефицијената добијамо:

$$\begin{array}{l|c|l} a)\ 197x+21y=239 & \cdot 11 & a)\ 2167x+231y=2629 \\ b)\ 266x-33y=200 & \cdot\ \ 7 & b)\ 1862x-231y=1400 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\}+$$

$$\text{d)}\ \ 4029x=4029, \text{ или } x=1.$$

Тада је заменом у *(а)*:

$$\text{а)}\quad 197 + 21y = 239, \quad \text{а } y = 2;$$

заменом x и y у (I):

$$\text{I)}\quad 8 + 2 - u = 6, \quad \text{а } u = 4; \quad \text{и}$$

заменом x, y и u у (I):

$$\text{II)}\quad 5 - 6 + 2z - 24 = -19, \quad \text{а } z = 3.$$

Пример 3. Решити систем једначина:

$$\begin{array}{ll} 1) & 7x \qquad - 9z = 19 \\ 2) & 4x - 3y \qquad = 7 \\ 3) & \qquad 2y + 3z = 9. \end{array}$$

Ако избацимо z из (1) и (3), добијамо:

$$\begin{array}{l|c|l} 1)\ 7x - 9z = 19 & & 1)\ 7x - 9z = 19 \\ 3)\ 2y + 3z = 9 & \cdot 3 & 3)\ 6y + 9z = 27 \end{array} \Big\} +$$

$$\text{I)}\quad 7x + 6y = 46.$$

Ако истом методом избацимо y из (2) и (I) добијамо:

$$\begin{array}{l|c|l} 2)\ 4x - 3y = 7 & \cdot 2 & 2)\ 8x - 6y = 14 \\ \text{I)}\ 7x + 6y = 46 & & \text{I)}\ 7x + 6x = 46 \end{array} \Big\} +$$

$$\text{II)}\quad 15x = 60, \quad \text{а } x = 4.$$

Тада је заменом x у (I): $28 - 9z = 19$, а $z = 1$, а заменом у (2): $16 - 3y = 7$, а $y = 3$.

§ 74 Упрошћено решавање једначина првог степена са више непознатих

а) Ако једна непозната има за коефицијенат јединицу, почиње се са избацивањем ове непознате, за коју се добива израз без именитеља. Ако неке од једначина система не садрже све непознате, почиње се са избацивањем оне непознате која се најмање јавља у једначинама, да би замењивање било мање.

Пример 1. Решити систем једначина:

$$\begin{array}{ll} 1) & 2x - 5y + z \qquad\qquad = -5, \\ 2) & 2x \qquad\qquad + u \qquad = 7, \\ 3) & 3x \qquad\qquad - 3u + 5t = 8, \\ 4) & \qquad 7y + 2z \qquad\qquad = 20 \quad \text{и} \\ 5) & x - y \qquad\qquad + 2t = 7. \end{array}$$

Почињемо са избацивањем непознате u, која се јавља само у (2) и (3) једначини.

Из (2) је: $u = 7 - 2x$, а заменом у (3) добијамо:

$$\text{I)}\quad 9x + 5t = 29.$$

Из (1) је: $z = 5y - 2x - 5$, а заменом у (4) добијамо:

$$\text{II)}\quad 17y - 4x = 30.$$

Из (5) је: $t=\frac{7-x+y}{2}$, а заменом у (I) добијамо:

$$\text{III)}\ 13x+5y=23.$$

Решењем једначина (II) и (III) добијамо $x=1$ и $y=2$. Тада је: $t=\frac{7-1+2}{2}=4$, $z=10-2-5=3$ и $u=7-2=5$.

b) Ако се једна непозната налази само у једној једначини система, онда се та једначина решава напослетку.

Пример 2. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned}
&1)\ 3y+5y=26,\\
&2)\ 2x+u=9,\\
&3)\ y-x=2,\\
&4)\ 2t+5y=26,\\
&5)\ u+2z=7 \text{ и}\\
&6)\ 2u+3v=28.
\end{aligned}$$

Непознате t, z и v јављају се само у трима последњим једначинама, те се стога бавимо најпре решавањем претходних једначина.

Избацивањем y из (1) и (3) добијамо I) $8x=16$, а $x=2$. Тада је, заменом x у (3): $y-2=2$, а $y=4$; заменом у (2): $4+u=9$, а $u=5$. Најзад из једначине (4) налазимо $t=\frac{26-5y}{2}=\frac{26-20}{2}=3$; из једначине (5) имамо: $z=\frac{7-u}{2}=$ $=\frac{7-5}{2}=1$, и из једначине (6) имамо: $v=\frac{28-2u}{3}=\frac{28-10}{3}=6$.

c) Ако једначине система претстављају извесну симетрију, не служимо се познатим методама за њихово решавање, већ се употребљавају извесни допуштени краћи поступци који убрзавају решење.

Пример 3. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned}
&1)\ x+y+z=a,\\
&2)\ y+z+t=b,\\
&3)\ t+z+x=c \text{ и}\\
&4)\ t+x+y=d.
\end{aligned}$$

Сабирањем датих једначина система добијамо:

$$3(x+y+z+t)=a+b+c+d, \text{ или}$$

$$\text{I)}\ x+y+z+t=\frac{a+b+c+d}{3}.$$

Одузимајући сваку једначину система од једначине (I) добијамо:

$$t=\frac{a+b+c+d}{3}-a=\frac{b+c+d-2a}{3};\ x=\frac{a+b+c+d}{3}-b=$$

$$=\frac{a+c+d-2b}{3};\ y=\frac{a+b+c+d}{3}-c=\frac{a+b+d-2c}{3};\ \text{и}$$

$$z=\frac{a+b+c+d}{3}-d=\frac{a+b+c-2d}{3}.$$

Пример 4. Решити систем једначина:

$$1)\quad x+\frac{y+z}{2}=a,$$

$$2)\quad y+\frac{x+z}{2}=b,$$

$$3)\quad z+\frac{x+y}{2}=c.$$

Ослобођавајући се именитеља код једначина система добијамо:

$$4)\ 2x+y+z=2a,$$
$$5)\ 2y+x+z=2b,$$
$$6)\ 2z+x+y=2c.$$

Сабирањем ових једначина добијамо:

$$4(x+y+z)=2(a+b+c),\quad \text{или}\quad \text{I)}\ x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Ако ову једначину одузмемо редом од једначина (4), (5) и (6), добијамо:

$$x=\frac{3a-b-c}{2},\ y=\frac{3b-a-c}{2}\ \text{и}\ z=\frac{3c-a-b}{2}.$$

Пример 5. Решиси систем једначина:

$$1)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a,\qquad 3)\ \frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{x}=c,$$

$$2)\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=b,\qquad 4)\ \frac{1}{t}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=d.$$

Сабирањем ових једначина добијамо:

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=a+b+c+d,\ \text{или}$$

$$\text{I)}\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{a+b+c+d}{3}.$$

Одузимајући од једначине (I) једначине система добијамо:

$$\frac{1}{x}=\frac{b+c+d-2a}{3},\ \frac{1}{y}=\frac{a+c+d+2b}{3},\ \frac{1}{z}=\frac{a+b+d-2c}{3}\ \text{и}$$

$$\frac{1}{t}=\frac{a+b+c-2d}{3},\ \text{или}$$

$$x=\frac{3}{b+c+d-2a}\,,\quad y=\frac{3}{a+c+d-2b}\,,\quad z=\frac{3}{a+b+d-2c}\ \text{и}$$

$$t=\frac{3}{a+b+c-2d}\,.$$

Напомена. У овом и сличним примерима не траже се одмах вредности за непознате, већ за њихове реципрочне вредности, а кад се ове нађу, из њих се лако налазе и вредности самих непознатих.

Пример 6. Решити систем једначина:

1) $x:y:z:t=a:b:c:d,$

2) $x+y+z+t=m.$

Применом особина продужених пропорција имамо из (1)

$(x+y+z+t):(a+b+c+d)=x:a=y:b=z:c=t:d,$

или $m:(a+b+c+d)=x:a=y:b=z:c=t:d.$

Одавде је:

$$x=\frac{am}{a+b+c+d},\ y=\frac{bm}{a+b+c+d},\ z=\frac{cm}{a+b+c+d}\ \text{и}\ t=\frac{dm}{a+b+c+d}.$$

Пример 7. Решити систем једначина:

1) $\dfrac{xy}{x+y}=a,$

2) $\dfrac{xz}{x+z}=b,$

3) $\dfrac{yz}{y+z}=c.$

Једначине овога система могу се написати и у облику:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}\,, \\ 2) & \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{b}\,, \\ 3) & \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{c}\,. \end{array}\right\}$$

Даљи је рад као код 5 примера.

Пример 8. Решити систем једначина:

1) $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=m,$

2) $\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=n.$

Заменом $\dfrac{1}{x-y}=u$ и $\dfrac{1}{x+y}=v$ добијамо:

1) $u+v=m$ и

2) $u-v=n.$

Најпре сабирањем а затим одузимањем ових двеју једначина добијамо:

$$u=\frac{m+n}{2} \text{ и } v=\frac{m-n}{2}.$$

Тада је:

$$\frac{1}{x-y}=\frac{m+n}{2} \text{ и } \frac{1}{x+y}=\frac{m-n}{2}, \text{ или}$$

$$x-y=\frac{2}{m+n} \text{ и } x+y=\frac{2}{m+n}.$$

Ако ове две једначине најпре саберемо а затим одузмемо, добијамо:

$$x=\frac{2m}{m^2-n^2} \text{ и } y=\frac{2n}{m^2-n^2}.$$

Пример 9. Решити систем једначина:

$$1)\ \frac{xy}{5x+4y}=6, \qquad 2)\ \frac{xz}{3x+2x}=8, \qquad 3)\ \frac{yz}{3y+5z}=6.$$

Како су једначине система у облику пропорција, то их можемо написати и у облику:

$$1)\ \frac{5x+4y}{xy}=\frac{1}{6}, \quad 2)\ \frac{3x+2z}{xz}=\frac{1}{8} \text{ и } \quad 3)\ \frac{3y+5z}{yz}=\frac{1}{6}, \text{ или}$$

$$1)\ \frac{5}{y}+\frac{4}{x}=\frac{1}{6}, \quad 2)\ \frac{3}{z}+\frac{2}{x}=\frac{1}{8}, \quad 3)\ \frac{3}{z}+\frac{5}{y}=\frac{1}{6}.$$

Заменом $\frac{1}{y}=u, \frac{1}{x}=v$ и $\frac{1}{z}=t$, једначине добијају облик:

$$1)\ 5u+4v=\frac{1}{6}, \quad 2)\ 3t+2v=\frac{1}{8}, \quad 3)\ 3t+5u=\frac{1}{6}.$$

Из ових једначина имамо:

$u=\frac{1}{60}, v=\frac{1}{48}$ и $t=\frac{1}{36}$, те је $x=48$, $y=60$ и $z=36$.

Пример 10. Решити систем једначина:

$$1)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5, \qquad 2)\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2xy.$$

Када другу једначину најпре ослободимо именитеља, а затим поделимо са xy, добија се облик:

$$3)\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=12.$$

Радећи најзад као код претходног примера добијамо из (1) и (3) да је $x=\frac{1}{3}$ и $y=\frac{1}{2}$.

Пример 11. Решити систем једначина:

1) $xy+xz+yz=9xyz,$
2) $5yz+4xz+3xy=10xyz,$
3) $5yz-3xz-4yz=3xyz.$

Ако сваку једначину система поделимо са xyz, добијамо:

1) $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=9$, 2) $\frac{5}{x}+\frac{4}{y}-\frac{3}{z}=10$, 3) $\frac{5}{z}-\frac{3}{y}-\frac{4}{x}=3$.

Даљи је рад као код 9 задатка.

§ 75) Случајеви решавања једначина првог степена у којима број непознатих није једнак броју једначина

а) **Број једначина већи је од броја непознатих.** Ако претпоставимо да је дат један систем од три једначине са две непознате x и y, онда решавамо ма које две једначине тога система и тиме налазимо оне вредности за x и за y које задовољавају те две једначине. Да би дати систем био *могућан*, треба нађене вредности x-а и y-а да задовољавају и трећу једначину.

Пример 1. Решити систем једначина:

1) $2x-5y=2$, 2) $3x+4y=26$ и 3) $7x-2y=38$

Ако (2) и (3) једначину решимо по методи једнаких коефицијената, налазимо да је $x=6$ и $y=2$.

Па како ове вредности x-а и y-а задовољавају и једначину (1), то је дати систем могућан.

Пример 2. Решити систем једначина:

1) $3x-y=20$, 2) $4x+3y=31$, 3) $5x-2y=24$.

Овај систем је *немогућан*, јер решењем (1) и (2) једначине добијамо $x=7$ и $y=1$, а ове вредности не задовољавају трећу једначину.

Уопште, ако имамо у систему $(m+n)$ једначина са m непознатих, решавамо само m једначина, чиме налазимо вредности од m непознатих. Да би систем био могућан, треба нађене вредности да задовољавају и осталих n једначина тога система. У противном случају дати систем је немогућан.

Напомена. — Ако су једначине система опште, онда можемо наћи оне услове који су потребни да буду испуњени па да систем буде могућан.

Тако, ако је дат систем:

1) $x+y=a$, 2) $x-y=b$ и 3) $2x-y=a-b$,

онда решењем (1) и (2) једначине добијамо $x=\frac{a+b}{2}$ и $y=\frac{a-b}{2}$.

Ако заменимо ове непознате њиховим вредностима у трећој једначини, добијамо:

$$a+b-\frac{a-b}{2}=a-b, \text{ или } a=5b\cdots(4).$$

Једначина (4) даје нам тражену погодбу, која треба да буде испуњена, па да дати систем буде могућан. Ако $a \neq 5b$, систем ће бити немогућан.

b) **Број непознатих већи је од броја једначина.** Ако претпоставимо да имамо да решавамо један систем од две једначине са три непознате:

$$1)\ x + y + 2z = 18,$$
$$2)\ x - y - z = 5,$$

онда, решавајући ове једначине по x и y, добијамо:

$$x = \frac{23 - z}{2} \text{ и } y = \frac{13 - 3z}{2}.$$

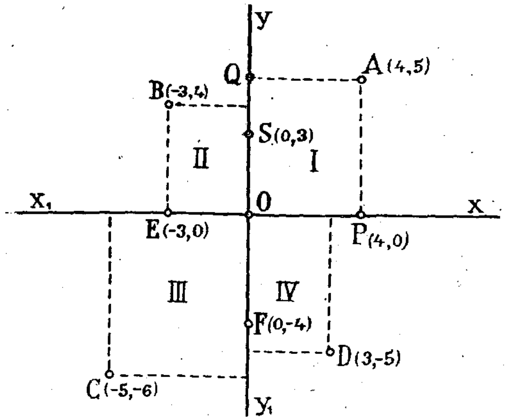
Ако сада дајемо разне вредности z-у, добијамо за сваку од тих вредности по једну вредност за x и по једну за y. Према томе, дати систем претставља један неодређен бесконачно велики број решења. Стога је он *неодређен.*

III. Функције и графичко решавање алгебарских једначина првог степена

§ 79) **Правоугли координатни систем.** Под правоуглим координатним системом разумемо две праве сталног правца, а које стоје нормално једна на другој (сл. 3). Права XX', која обично заузима хоризонталан положај, зове се *апсцисна осовина,* а права $УУ'$ која је на апсцисној осовини нормална, зове се *ординатна осовина.* Обе праве једним се именом зову *координатне осовине,* а њихов пресек О зове се *координатни почетак.* Правоугли координатни систем дели раван на четири једнака дела, на четири *квадранта.* Као први узима се квадрант $XOУ$, као други $УOX'$, као трећи $X'OУ'$, а као четврти $У'OX$.

Мерни број отстојања ма које тачке у равни до ординатне осовине зове се *апсциса* те тачке, а мерни број њеног отстојања до апсцисне осовине *ордината.* Тако тачка A (сл. 3) има апсцису AQ или OP, а ординату AP. Апсциса неке тачке означава се са x, а ордината са y. Апсциса и ордината неке тачке једним се именом зову *координате* те тачке. Израз (x,y) претставља тачку чија је апсциса x а ордината y. Тако, $(4,5)$ претставља тачку чија је апсциса 4 а ордината 5.

Положај неке тачке у равни одређен је, ако знамо њене координате. Треба најпре на апсцисној осовини, почевши од координатног почетка, да пренесемо њену апсцису, а затим у крајњој тачки пренете апсцисе подижемо нормалу на коју пре-



Сл. 3

носимо ординату дате тачке. Тада нам крајња тачка ординатина претставља тражену тачку. Међутим, у сваком квадранту постоји по једна тачка која има истоветне координате као друге три тачке у осталим квадрантима. Стога, ако знамо само апсолутне вредности координата неке тачке, нисмо у могућности да прецизно одредимо у коме се квадранту налази дотична тачка. Да би се избегла забуна, координате тачака снабдевене су знацима „+“ и „—“. Утврђена је ова норма: *Све тачке изнад апсцисне осовине, тј. тачке I и II квадранта, имају ординате позитивне, а испод апсцисне осовине, тј. тачке III и IV квадранта, имају ординате негативне; све тачке с десне стране ординатне осовине, тј. тачке I и IV квадранта, имају апсцисе позитивне, а с леве стране ове осовине, тј. тачке II и III квадранта, имају апсцисе негативне.* Тако на сл. 3 имају координате: тачка *A* (4,5), тачка *B* (— 3,4), *C* (—5, —6), *D* (3, —5), *E* (—3,0), *P* (4,0), *S* (0,3), *F* (0,—4) и *O* (0,0). Све тачке на апсцисној осовини имају ординате = 0, а све тачке на ординатној осовини имају апсцисе = 0. Координатни почетак, као пресек тих осовина, има нулу и апсцису и ординату (0,0).

За вежбу. Наћи тачку чије су координате: (—3,4), (5,—2), (—7, —3), (8,—6), (0,—7), (8,0), (—5,0), (—3, —8), (5, —2).

§ 77) **О функцијама уопште.** Видели смо код § 69 да је једначина $ax+by=c$ неодређена, јер има бесконачно много вредности *x-a* и *y-a* које је задовољавају. Ако непознатој *x* дајемо разне стварне вредности, позитивне или негативне, онда за сваку вредност *x-a* добијамо из једначине $y=\frac{c-ax}{b}$ по једну вредност *y-a*. Вредност *y-a* зависи од вредности *x-a*, те промењиву *y* сматрамо као зависну количину промењиве *x*.

Тако исто, можемо непознатој y давати разне вредности, па ћемо из једначине $x = \frac{c - by}{a}$ добити за сваку вредност y-а по једну вредност x-а. У овом случају, променљиву x сматрамо као *зависну* количину променљиве y. Она променљива количина којој ми дајемо разне вредности, зове се *независно променљива*, а променљива количина чија вредност зависи од вредности независно променљиве, зове се *зависно променљива* или *функција*. Познате количине у једначини сматрају се као сталне. Веза између функције и независно променљиве количине изражава се једначином. Тако, у једначини $y + 3x = 15$, ако y сматрамо као функцију x-а, имамо за:

$$x = 1,\ 2,\ 3,\cdots -1,\ -2,\ -3,\cdots$$

$$x = 12,\ 9,\ 6,\cdots\ 18,\ \ 21,\ \ 24,\cdots$$

Запремину лопте сматрамо као функцију њеног полупречника, јер се запремина увећава или смањује, ако се полупречник увећава или смањује. Њихова је веза дата једначином $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. Обим круга такође сматрамо као функцију његовог полупречника, јер се и он мења, када полупречник расте или опада. Ширење тела сматрамо као функцију топлоте итд. Ако је дата веза између двеју променљивих количина, тј. ако је дата једначина у којој постоје те две непознате количине, поред других познатих количина, у теорији је све једно коју ћемо од променљивих количина узети за функцију, а коју за независну променљиву. Али се у пракси обично узима за функцију она променљива до чије вредности брже и лакше долазимо дајући различите вредности независно променљивој. Тако, у горњој једначини $y + 3x = 15$, боље је сматрати y као функцију x-а него обрнуто. Боље је сматрати запремину коцке као функцију ивице, него ивицу као функцију запремине, јер из једначине $V = a^3$ много лакше и брже налазимо вредности за V, него што налазимо вредности за a из једначине $a = \sqrt[3]{V}$, ако a сматрамо као функцију запремине V.

Дешава се да једна функција зависи не од једне већ од две и више независно променљивих количина. Тако, пут s код једнаког кретања зависи и од брзине c којом се креће једно тело, а тако исто и од времена кретања t. Њихова је веза дата једначином $s = c \cdot t$. Запремина паралелопипеда V зависи, тј. функција је и од дужине a, и од ширине b и од висине c. Њихова је веза дата једначином $V = abc$. *Дакле, под функцијом разумемо такву једну променљиву количину чија вредност зависи од вредности једне или више променљивих количина, а са којима стоји у вези исказаној једном једначином.* И функције, као и једначине, делимо на *алгебарске* и *трансцендентне*, према томе да ли је веза између функције и независно променљивих изражена алгебарском или трансцендентном једначином.

§ 78) Графичко претстављање једначина првог степена са једном или две непознате

I) Ако решимо једначину $mx + ny = c$ по y, добијамо:

$$y = -\frac{m}{n}x + \frac{c}{n} = ax + b,$$

где је $a = -\frac{m}{n}$ и $b = \frac{c}{n}$, а које се количине зову *сталне*, за разлику од променљивих x и y.

Ако сада посматрамо промене функције $y = ax + b$ дајући независно променљивој количини x произвољне вредности, наилазимо на следеће случајеве:

1) *а је позитиван број.* За пример узимамо функцију $y = 3x - 5$. Тада је за:

$x = \cdots\cdots -4, -3, -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \cdots\cdots$

$y = \cdots\cdots -17, -14, -11, -8, -5, -2, \ 1, \ 4, \ 7, \cdots\cdots$

Увиђамо, дакле, да кад независно променљива x расте (опада), онда функција y расте (опада). Независно променљива x и функција y у овоме случају мењају се у истом односу. За такву функцију каже се да је *растућа*.

2) *а је негативан број.* За пример узимамо функцију $y = -2x + 3$. Тада је за:

$x = \cdots\cdots -4, -3, -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \cdots\cdots$

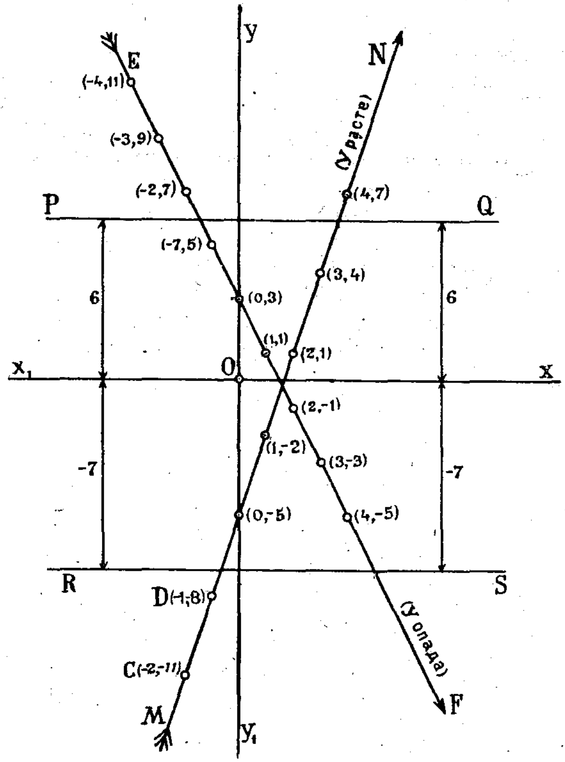
$y = \cdots\cdots \ 11, \ 9, \ 7, \ 5, \ 3, \ 1, -1, -3, -5, \cdots\cdots$

Увиђамо, дакле, да кад независно променљива x расте (опада), онда функција y опада (расте). У овоме случају каже се да се независно променљива x и функција y мењају у супротном односу. За такву функцију каже се да је *опадајућа*.

3) $a = o$. Кад је $a = o$, онда се функција $y = ax + b$ своди на $y = \pm b$. Овде функција y не зависи од x, те је она *стална*, пошто нити расте нити опада.

II) Промене функције y код горњих примера јасније увиђамо ако их графички претставимо.

Тако, ако код функције $y = 3x - 5$ сматрамо *спрегове* решења: $(-2, -11)$, $(-1, -8)$, $(0, -5)$, $(1, -2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 7)$ као координате тачака у равни, па све те тачке конструишемо и најзад спојимо, добијамо праву MN (сл. 4) као геометриски претставник једначине $y = 3x - 5$. Ако код функције $y = -2x + 3$ сматрамо спрегове решења: $(-4, 11)$, $(-3, 9)$, $(-2, 7)$, $(-1, 5)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, -3)$, $(4, -5)$ као координате тачака у равни, па све те тачке најпре конструишемо, а затим спојимо, добијамо праву EF (сл. 4). Ако најзад конструишемо сталне функције: а) $y = 6$ и b) $y = -7$, које у ствари претстављају праве чије су све тачке удаљене од апсцисне осовине XX' за 6, односно за -7, добијамо праве PQ и RS паралелне са апсцисном осовином. Према овоме, стална функција $y = 0$ тада претставља апсцисну осовину XX'.



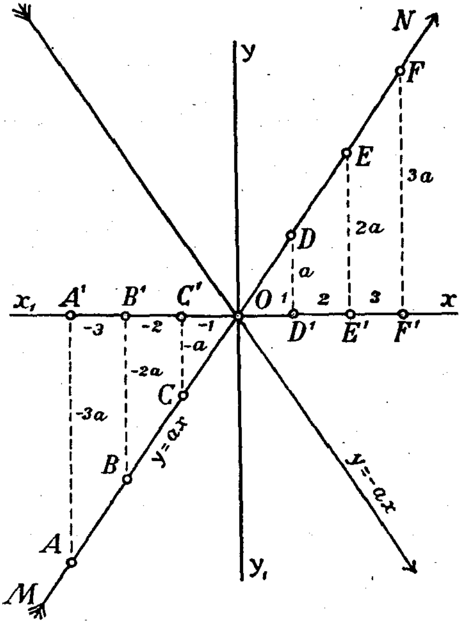
Сл. 4

Из ових се примера види да функција (једначина) $y = ax + b$ претставља у геометрији праву линију, и зато се ова функција зове *линеарна функција,* а њен бином $ax + b$ зове се *бином линеарне функције.* Ова констатација, до које смо дошли из горњих примера, дâ се увидети на следећи начин:

1) *Нека је* $b = 0$. *У* овоме случају функција $y = ax + b$ има облик $y = ax$. Тада је за:

$$x = \cdots -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \cdots$$
$$y = \cdots -3a, -2a, -a, \ 0, \ a, \ 2a, \ 3a, \cdots$$

Ако добивене спрегове решења $(-3, -3a)$, $(-2, -2a)$, $(-1, -a)$, $(0, 0)$, $(1, a)$, $(2, 2a)$, $(3, 3a)$, сматрамо као координате тачака у равни, онда конструкцијом добијамо тачке A, B, C, O, D, E, F (сл. 5). Да ове тачке заиста леже на правој MN, увиђамо из сличности правоуглих троуглова OAA′, OBB′, OCC′, ODD′, OEE′ и OFF′. Ти су троуглови слични, јер имају углове једнаке. Стога је $\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'} = \frac{DD'}{OD'} = \frac{EE'}{OE'} = \frac{FF'}{OF'} = a$.



Сл. 5

Одавде увиђамо да је: $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB' = \sphericalangle COC' = \sphericalangle DOD' = \sphericalangle EOE' = \sphericalangle FOF'$, те су OA, OB, OC, OD, OE, OF делови једне исте праве, а која пролази кроз координатни почетак O. Ако је a позитиван број, права пролази кроз III и I квадрант, а ако је a негативан број, онда права пролази кроз II и IV квадрант. У случају $y = ax$, функција је *растућа*, а за $y = -ax$, функција је *опадајућа*. Исти је стучај и са њеном линијом. У првом случају она се пење, а у другом силази, када x расте.

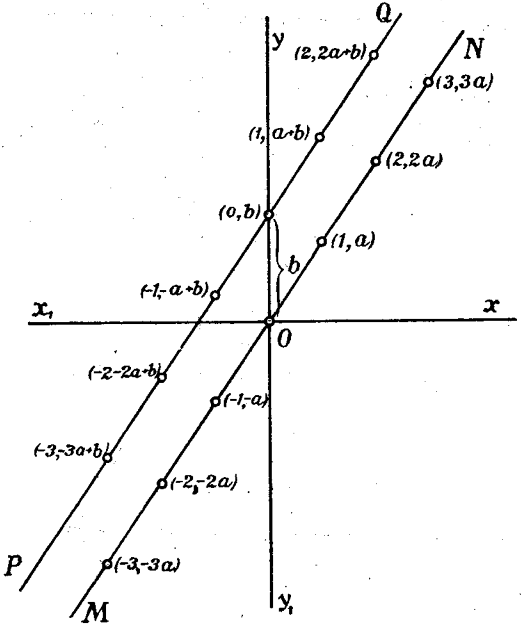
2) *Нека* $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тада је функција $y = ax + b$ потпуна, тј. има све своје чланове. Ако посматрамо једновремено и дату функцију $y' = ax$, онда је за:

$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$

$y \neq -3a + b, -2a + b, -a + b, b, a + b, 2a + b, 3a + b,$ и

$y' = -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a.$

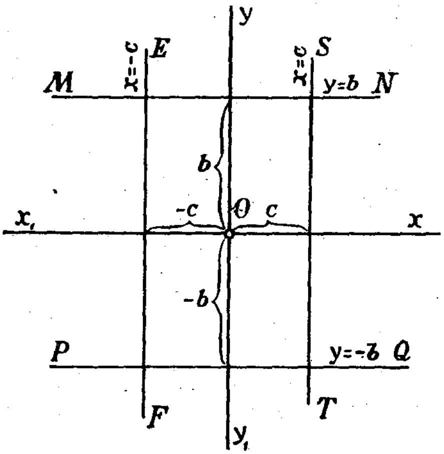
Из овога закључујемо да је разлика ордината двеју тачака исте апсцисе, а од којих једна лежи на линији прве функције, а друга на линији друге функције, стална и $= b$. Ово нам показује да су линије функција $y = ax + b$ (PQ, сл. 6) и $y' = ax$ (MN, сл. 6) паралелне, те је и линија функције $y = ax + b$ права. Када x расте, онда се линија функције $y = ax + b$ пење, ако је $a > 0$. Напротив, она силази ако је $a < 0$.



Сл. 6

3) *Нека је* $a = 0$ а $b \neq 0$. У овоме се случају функција $y = ax \pm b$ своди на $y = \pm b$, која нам показује да је y стална количина и

независна од x-а. Све тачке линије $y = \pm b$ једнако су удаљене од апсцисне осовине XX', те је $y = b$ (MN, сл. 7), и $y = -b$ (PQ) права паралелна са апсцисном осовином на отстојању $\pm b$. Овде је функција y стална, јер нити расте нити опада. Исти је случај и са њеном линијом: нити силази нити



Сл. 7

се пење, и остаје подједнако удаљена од осе XX'. Једначина $x = 0$ претставља ординатну осовину.

III) *Графичко претстављање једначине првог степена с једном непознатом*

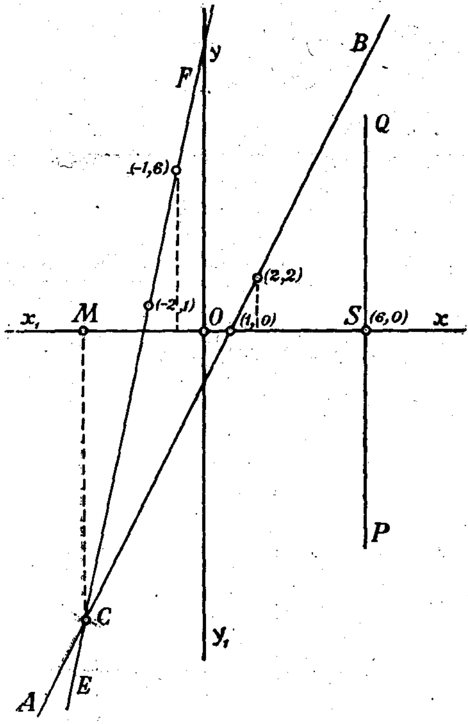
Свака једначина првог степена с једном непознатом дâ се довести на облик $ax + b = 0$, а одавде је $x = -\frac{b}{a}$ или $x = c$, ако је $-\frac{b}{a} = c$. Једначина $x = c$ претставља нам праву чије су апсцисе сталне, тј. праву чије све тачке имају исту апсцису c, а то је права паралелна с ординатном осовином YY'. Ако је c позитиван број, права ST (сл. 7) лежи с десне стране, а ако је c негативан број, права EF лежи с леве стране ординатне осовине. Једначина $x = 0$ претставља ординатну осовину.

§ 79) Графичко решавање једначина првог степена с једном и две непознате

1) Решити једначину $ax + b = 0$ значи наћи ону вредност x-а за коју функција $y = ax + b$ постаје равна нули. Па како $y = 0$ претставља апсцисну осовину, а $ax + b = 0$,

или $x = -\frac{b}{a}$ претставља праву паралелну с ординатном осовином, то тачка $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ лежи и на правој $x = -\frac{b}{a}$ и на апсцисној осовини, тј. ова је тачка њихов пресек.

Према томе, корен или решење једначине $ax + b = 0$ није ништа друго до апсциса пресечне тачке праве $x = -\frac{b}{a}$ са апсцисном осовином. Решити једначину $ax + b = 0$, значи наћи апсцису пресечне тачке њене праве са апсцисном осовином. Конструкцијом праве $ax + b = 0$, налазимо пресек са апсцисном осовином. Његова апсциса биће решење дате једначине.



Сл. 8

Пример. Решити једначину $0{,}9x = 5{,}4$ графичким путем. Ова се једначина своди на $9x = 54$, или $x = 6$, а претставља праву PQ (сл. 8). Апсциса њеног пресека S са апсцисном осовином је 6, и то је решење задате једначине.

2) Решити један систем од две једначине првог ст пена са две непознате графичким путем, значи наћи о вредности x-a и y-a које задовољавају обе једначине. Па ка свака једначина претставља по једну праву линију, то једин координате њиховог пресека могу задовољавати и једну другу једначину, пошто се она налази и на једној и на друг правој. Према томе, решење једног система од две једначине са две непознате графичким путем своди се на то да с пронађу координате пресечне тачке њихових правих. Ради тога треба познатим путем конструисати и једну и другу праву, па измерити координате њихове пресечне тачке. При конструкцији правих $ax+by=c$ и $a'x+b'y=c'$ датог система, довољно је наћи само по два ма која спрега решења (x_1, y_1) и (x_2, y_2) за сваку једначину, пошто је права у равни потпуно одређена двема својим тачкама.

Пример:

Графички решити систем:

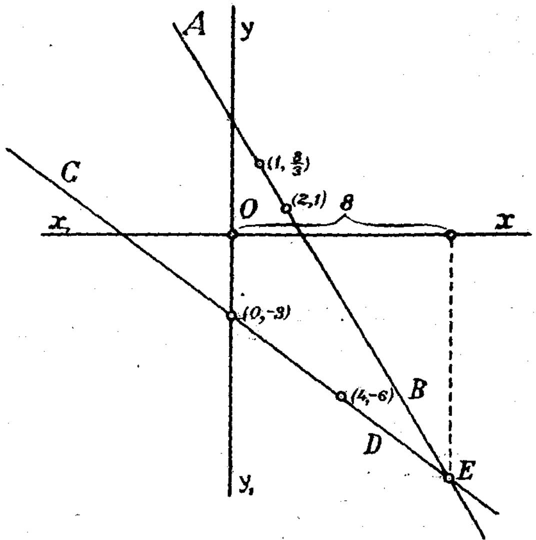
$$1)\ 2x-y=2, \quad 2)\ 5x-y=-11.$$

Ако ове једначине решимо по y, добијамо:

$$1)\ y=2x-2 \text{ и } 2)\ y=5x+11.$$

Тада је из (1) за $x=1, 2,$ $y=0, 2,$ а из (2) за $x=-1, -2,$ $y=6,1.$

Конструкцијом и спајањем тачака (1,0) и (2,2) добијамо праву AB (сл. 8) прве једначине а конструкцијом и спајањем



Сл. 9

тачака (—1,6) и (—2,1) добијамо праву EF друге једначине. Координате њиховог пресека C јесу корени или решења датог система.

Мерењем налазимо да је апсциса пресека $x = OM = -4\frac{1}{3}$, а ордината $y = CM = -10\frac{2}{3}$, које вредности добијамо и решењем задатих једначина ма којом другом методом.

Напомена I. Ако при решавању система графичким путем добијамо паралелне праве, значи да је дати систем *немогућан*, пошто праве немају пресека. Ако се пак обе праве једначина система поклапају, значи да претстављају једну исту праву, те је у овом случају дати систем *неодређен*.

Напомена II. Ако је једначина првог степена с једном непознатом сложенијег облика, онда је не доводимо у облик $ax - b = 0$, већ стављамо да су обе њене стране $= y$, чиме добијамо један систем од две једначине првог степена. Конструкцијом правих које одговарају једначинама овог система, добијамо њихов пресек. Апсциса тога пресека биће тражено решење, јер кроз овај пресек пролази и права паралелна са ординатном осовином, а чија је апсциса пресека са апсцисном осовином истоветна са апсцисом пресека правих једначина система.

Пример 1. Решити графичким путем једначину:

$$2 - \frac{5x - 7}{3} = -\frac{3x + 12}{4}.$$

Ако ставимо да су обе њене стране $= y$, онда добијамо систем:

$$1)\quad y = 2 - \frac{5x - 7}{3} = -\frac{5}{3}x + \frac{13}{3},$$

$$2)\quad y = -\frac{3x + 12}{4} = -\frac{3}{4}x - 3.$$

$1)\ x_1 = 1,\ y_1 = \frac{8}{3}$

$x_2 = 2,\ y_2 = 1$

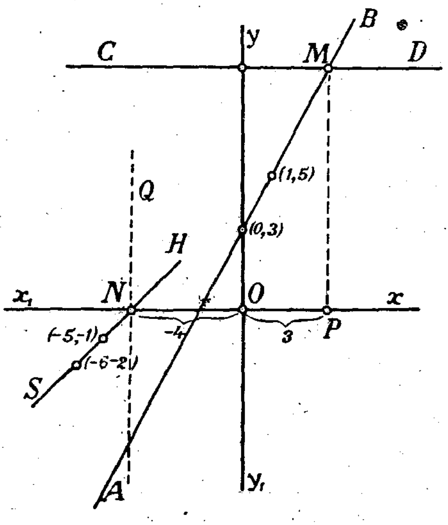
$2)\ x_1 = 0,\ y_1 = -3$

$x_2 = 4,\ y_2 = -6$

Конструкцијом и спајањем тачака $\left(1, \frac{8}{3}\right)$ и (2, 1) добијамо праву AB прве једначине, а конструкцијом и спајањем тачака (0, — 3) и (4, — 6) добијамо праву CD (сл. 9) друге једначине. Њихов пресек E има апсцису 8, и то је решење дате једначине.

Пример 2. Решити графички једначину $0{,}8x + 1{,}2 = 3{,}6$. Ову једначину множењем са 10 сводимо најпре на облик $8x + 12 = 36$, а дељењем са 4 сводимо на облик

$$2x + 3 = 9$$



Сл. 10

Стављајући да су обе стране $= y$ добијамо:

$$1)\ y = 2x + 3 \text{ и } 2)\ y = 9.$$

Тада је из (1) једначине:

$$\text{за } x = 0 \text{ и } 1,\ y = 3 \text{ и } 5.$$

Конструкцијом и спајањем тачака (0, 3) и (1, 5) добијамо њену праву AB (сл. 10). Права једначине $y = 9$ је CD паралелна са апсцисном осовином XX'. Њихов пресек M има апсцису 3, и то је решење дате једначине. Ова апсциса једнака је са апсцисом пресека P праве $MP \parallel YY'$.

Пример 3. Решити графички праву $x + 4 = 0$.

Стављајући да су обе стране $= y$, добијамо систем:

$$1)\ y = x + 4 \text{ и } 2)\ y = 0.$$

Тада је из (1) за $x = -5$ и -6, $y = -1$ и -2. Конструкцијом и спајањем тачака $(-5, -1)$ и $(-6, -2)$, добијамо њену праву SH. Права $y = 0$ претставља апсцисну осовину XX' (сл. 10). Њихов пресек N има апсцису -4, и то је решење задате једначине, која претставља праву $NQ \parallel YY'$.

§ 80) Задаци за вежбу

I. Системи од две једначине са две непознате

1) $\begin{cases} y - x = a, \\ x + y = b. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + ay = 5a^2, \\ 3x - ay = a^2. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 10x - 3y = 25, \\ 5x - 9y = -25. \end{cases}$

4) $\begin{cases} nx - ay = 0, \\ n^2x - ay = an. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 12x + 15y = 8, \\ 16x + 9y = 7 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} ax + by = q, \\ cx + dy = h. \end{cases}$

7) $\begin{cases} bcx + ay = ac, \\ acx - by = bc. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \frac{y}{2} - 3x = 2 \\ y = 14x. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x + y = a, \\ \frac{x}{y} = n \cdot \end{cases}$

10) $\begin{cases} ay = bx, \\ a + y = b + x. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x + ay + 1 = 0, \\ y + c(x+1) = 0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{a}{b+y} = \dfrac{b}{3a+x}, \\ ax + 2by = b^2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{a}{am+ny} = \dfrac{b}{mn+bx} \\ ax = by. \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{a}{n+x} = \dfrac{b}{n+ny}, \\ n(y+1) = x. \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{a^2x+n}{cy+n} = 1, \\ \dfrac{1+2a}{ax+2cy} = \dfrac{1}{ac}. \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{5} + 0,3(y-2) + 1 = 0, \\ \dfrac{y-3}{4} - \dfrac{4x+9}{20} + 1^1/_2 = 9. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{1-y}{a} = \dfrac{x}{n}, \\ y + \dfrac{a-n}{n} = \dfrac{a}{a+n}(x+y). \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = 0,1(y-a) + ab, \\ y = 1,5\left(b - \dfrac{x}{a}\right)b + a. \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{b-c}{bc} - \dfrac{2c}{ab} = \dfrac{x-y}{a}, \\ \dfrac{c}{by}(x+2) = 1. \end{cases}$

20) $\begin{cases} (x+1)(y+7) = xy + 12^1/_2, \\ \dfrac{1}{5}(x-3) - \dfrac{5}{8}y = 0. \end{cases}$

21) $\begin{cases} (x+2)(y-3) + 29 = (x-1)(y-2) \\ \dfrac{x + \dfrac{1}{3}y}{2} = 45\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{6}. \end{cases}$

22) $\begin{cases} (x-3)(x-5) - x^2 = 15 + y, \\ (2x+3)(x-3) + 3y = 2x^2 - 9. \end{cases}$

23) $\begin{cases} (x-2)(y+6) = xy + 13, \\ (y-2)(x+4) = xy - 13. \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{x+c-d}{y-c-d} = \dfrac{x-d}{y-c}, \\ \dfrac{d}{x-c} = \dfrac{c}{y-d}. \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dfrac{n+1}{x+y+1} = \dfrac{n-1}{x-y+1} \\ \dfrac{x-y-1}{1-a} = \dfrac{x+y+1}{1+a} \end{cases}$

26) $\begin{cases} \dfrac{y-6}{x-4} + \dfrac{10}{x^2-16} = \dfrac{y+6}{x+4}, \\ \dfrac{5}{x^2-3x} - \dfrac{3}{xy-3y} = -\dfrac{10}{xy}. \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2\{x + 3[y - 2(x-1)]\} = 5, \\ 5\left\{6\left[\frac{1}{2}(x+1) - y\right] - x\right\} = 6. \end{cases}$

28) $\begin{cases} \dfrac{x}{n+1} = \dfrac{1-y}{n-1}, \\ \dfrac{y}{n-1} = \dfrac{x-1}{n+1}. \end{cases}$

29) $\begin{cases} ax = by + \dfrac{a^2+b^2}{2}, \\ a(x-y) - b(x+y) = 0. \end{cases}$

30) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2a} = 1, \\ \dfrac{a(x-y)}{2} - \dfrac{x-y}{2a} = 1. \end{cases}$

31) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8c} + \dfrac{x-y}{12d} = 1, \\ \dfrac{x}{4c+6d} + \dfrac{y}{4c-6d} = 1. \end{cases}$

32) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = b. \end{cases}$

33) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2\frac{5}{6}, \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6}. \end{cases}$

34) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5, \\ \frac{1}{3x} - \frac{5}{2y} = -2\frac{1}{6}. \end{cases}$

35) $\begin{cases} \frac{3a}{x} - \frac{2c}{y} = 1, \\ \frac{a}{x} - \frac{c}{3y} = \frac{2}{3}. \end{cases}$

36) $\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{y} = h, \\ \frac{bx}{y} + 9x = c. \end{cases}$

37) $\begin{cases} \frac{a+1}{x} - \frac{a-1}{y} = 0, \\ \frac{xy}{x-y} = b. \end{cases}$

38) $\begin{cases} \frac{x}{a-b} - \frac{ax}{ay-by} = \frac{b}{y}, \\ \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} = \frac{b-a}{bx}. \end{cases}$

39) $\begin{cases} \frac{x-9}{x-4} = \frac{12y-3}{12y+4}, \\ \frac{2x}{3} + \frac{3(10y-1)}{4} = 2^1/_2 \end{cases}$

40) $\begin{cases} \frac{2}{x-y} - \frac{6}{x+y} = 1,1, \\ \frac{4}{x-y} - \frac{9}{x+y} = 0,1. \end{cases}$

41) $\begin{cases} \frac{2n}{x+ny} - \frac{1}{x-ny} = 1, \\ \frac{10n}{x+ny} + \frac{3}{x-ny} = 1. \end{cases}$

II. Системи са три и више непознатих ;

42) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + y - z = 10, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$

43) $\begin{cases} x + y + z = a, \\ y - x + z = b, \\ z - y + x = c. \end{cases}$

44) $\begin{cases} 4y - 2x + z = 9, \\ 3z + x + 3y = 31, \\ 2x - 4z - 2y = -8. \end{cases}$

45) $\begin{cases} ax + by - cz = 2ab, \\ by + cz - ax = 2bc, \\ cz + ax - by = 2ac. \end{cases}$

46) $\begin{cases} ax + 2by - 3cz = 0, \\ 4ax - 5by + 6cz = 5, \\ 8by + 9cz - 7ax = 10. \end{cases}$

47) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ z - y = 1, \\ z - x = 2. \end{cases}$

48) $\begin{cases} y = 4x - 8z + 1, \\ 6x + 7y - 10 = 0, \\ 2y + 4z = 3. \end{cases}$

49) $\begin{cases} ax + by + cz = 3, \\ 5ax - 3cz = 2, \\ 2by - cz = 1. \end{cases}$

50) $\begin{cases} a^2x - ay + 4z = 0, \\ ax + y = 2a^2, \\ a^2x - 10z = a^3. \end{cases}$

51) $\begin{cases} x + y = a, \\ x + z = b, \\ y + z = c. \end{cases}$

52) $\begin{cases} x + y = a, \\ x - z = b, \\ \dfrac{y}{z} = c. \end{cases}$

53) $\begin{cases} ay - nz = n - a, \\ a^2y - n^2z = 0, \\ a^3y - n^3x = 0. \end{cases}$

54) $\begin{cases} x + \dfrac{a}{b}y = a, \\ y + \dfrac{b}{c}z = b, \\ y + \dfrac{c}{a}x = c. \end{cases}$

55) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{a+c}{6}, \\ \dfrac{a-2y}{c+z} = 3, \\ \dfrac{x+3y}{y-2z} = 3. \end{cases}$

56) $\begin{cases} \dfrac{x}{ac} + \dfrac{z}{ab} = \dfrac{1}{bc}, \\ \dfrac{x+1}{c} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{a+b}{ac}, \\ az = c - by. \end{cases}$

57) $\begin{cases} \dfrac{5x}{6} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{3z}{2} = -1, \\ \dfrac{5y}{12} - 0{,}5z = -1, \\ 5(y+1) - 4x = -1. \end{cases}$

58) $\begin{cases} \dfrac{21x + y}{2z + 5} = 5, \\ \dfrac{7x - 3}{0{,}5(5 - 3z)} = 5, \\ \dfrac{5x - 0{,}833\cdots}{x - y} = 5. \end{cases}$

59) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{a}{c}, \\ \left(\dfrac{c}{a-z}\right)^2 - \dfrac{z}{a-z} = 1, \\ \dfrac{1}{a^3} + \dfrac{z}{ac^2} = \dfrac{x+y-1}{c^2}. \end{cases}$

60) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 2, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{y} = 8, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x} = 14. \end{cases}$

61) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = b, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = c. \end{cases}$

62) $\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 3, \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} - \dfrac{c}{z} = 1, \\ \dfrac{2a}{x} - \dfrac{b}{y} - \dfrac{c}{z} = 0. \end{cases}$

63) $\begin{cases} \dfrac{10}{x} + \dfrac{9}{y} - \dfrac{8}{z} = 14{,}9, \\ \dfrac{7}{x} + \dfrac{6}{y} - \dfrac{5}{z} = 10{,}4, \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} + \dfrac{2}{z} = 2{,}9. \end{cases}$

64) $\begin{cases} 3x - 2y = z - a, \\ 2a - 3x - y = \dfrac{1}{2}, \\ 3(y - a) = \dfrac{z}{2} - 2. \end{cases}$

65) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x + y + z) = 1, \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{a}{y} = 0, \\ \dfrac{5z - bx}{xz} = 0. \end{cases}$

66) $$\begin{cases} \dfrac{(a-b)\,x+(a+b)\,y}{z}=2, \\ \dfrac{ax-by+z}{a^2}=2, \\ \dfrac{bx-ay+z}{ad}=2. \end{cases}$$

67) $$\begin{cases} x+y+z=0, \\ ax+by+cz=0, \\ \dfrac{bcx+acy+abz}{(a-b\,(a-c)\,(b-c)}=1. \end{cases}$$

68) $$\begin{cases} \dfrac{x}{bc}-\dfrac{z}{ab}=\dfrac{b-y}{ac} \\ \dfrac{bx-cy}{a^2}=1-\dfrac{z}{a}, \\ x=c-\dfrac{ay-bz}{c}. \end{cases}$$

69) $$\begin{cases} a\,(x-z)=\dfrac{1-y}{a}, \\ by+\dfrac{1}{b}\,(x-1)=bz, \\ cx-\dfrac{1}{c}=cy-\dfrac{z}{c}. \end{cases}$$

70) $$\begin{cases} \dfrac{b+c}{x}=\dfrac{a}{y}+\dfrac{a}{z}, \\ z-y=(b-c)\,yz, \\ xyz=\dfrac{xy+xz+yz}{a+b+c}. \end{cases}$$

71) $$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=1, \\ \dfrac{xz}{2z-2x}=1, \\ \dfrac{4}{y}-\dfrac{4}{z}=1. \end{cases}$$

72) $$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=2a. \\ \dfrac{xz}{x-z}=-a, \\ xyz=\dfrac{1}{3}\,(xy-xz+yz). \end{cases}$$

73) $$\begin{cases} \dfrac{3}{x+y+z}+\dfrac{6}{2x+y}+\dfrac{1}{y-3z}=1, \\ \dfrac{6}{x+y+z}+\dfrac{4}{2x-y}-\dfrac{1}{y-3z}=3, \\ \dfrac{15}{x+y+z}-\dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{3}{y-3z}=5. \end{cases}$$

74) $$\begin{cases} x+y+z+v=8, \\ x+y+z-v=1, \\ x+y-z+v=3, \\ x-y+z+v=5. \end{cases}$$

75) $$\begin{cases} 5x-6y+3z-v=4, \\ 3x+3y-2z+v=5, \\ -x+y+2z-v=6, \\ x+y+z+v=7. \end{cases}$$

76) $$\begin{cases} 2x+3y=39, \\ 4y+3z=41, \\ 7z-5x=-11, \\ 3v-2y=2. \end{cases}$$

77) $$\begin{cases} 10x-y+3z=5, \\ 4v-5x=6, \\ 2y+3z=1; \\ 3y+2v=4. \end{cases}$$

78) $$\begin{cases} x+y+z=3a+b+c, \\ x+y+v=a+3\,b+c, \\ x-z-v=a+b+c, \\ y+z-v=3a-b-c. \end{cases}$$

79) $$\begin{cases} x+y+z-v=a, \\ 3x-ay-z+av=a^2, \\ 6x+3a^2y-2z-a^2v=a^3, \\ 12-3a^3y-4z+2a^3v=a^4. \end{cases}$$

80) $$\begin{cases} \frac{2}{x-y}-\frac{1}{y-z}-\frac{2}{z-v}-\frac{a}{v+x}=-1, \\ \frac{1}{x-y}+\frac{2}{y-z}=2, \\ \frac{2b}{y-z}+\frac{a-2b}{z-v}=a-b, \\ \frac{2a+b}{x-y}-\frac{a}{y-z}-\frac{a-b}{z-v}-\frac{a^2}{v+x}=0. \end{cases}$$

Матурски задаци:

81) $$\begin{cases} \frac{a-b}{x}+\frac{a+b}{x+y}+\frac{a-b}{x+y+z}=1, \\ \frac{a^3-b^3}{x}-\frac{a^3-b^3}{x+y}+\frac{2a^2b-2ab^2}{x+y+z}=0, \\ \frac{a^2-b^2}{x}-\frac{a^2+ab+b^2}{x+y}=\frac{ab}{a+b}. \end{cases}$$

(Одг. $x=a-b$, $y=2b$, $z=-2a$.)

82) $$\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3, \\ x-by+b^2z=b^3, \\ x-cy+c^2z=c^3. \end{cases}$$

(Одг. $x=abc$, $y=ab+ac+bc$, $z=a+b+c$).

83) $$\begin{cases} x+y+z+a(x+y)+a^2x=a^3, \\ x+y+z+b(x+y)+b^2x=b^3, \\ x+y+z+c(x+y)+c^2x=c^3. \end{cases}$$

Одг. $x=a+b+c$, $y=-(ab+ac+bc+a+b+c)$. $z=abc+ab+ac+bc$.

Упутство. Заменом $x+y+z=u$ и $x+y+v$ своди се на 82.

III. Наћи праве чије су једначине:

84) $y=2x$;
85) $y=2x+1$;
86) $y=-2x+1$;
87) $x+y=0$;
88) $y=-2x$.
89) $y=2x-1$;
90) $x=-2x-1$;
91) $3y-2x=5$;
92) $y=3x-5$;
93) $y=-3x-5$;
94) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.

IV. Решити графички ове једначине:

95) $x+5=8$,
96) $3x=15$,
97) $\frac{45}{4x}=15$;
98) $18+5x=8x$.
99) $x-1=\frac{2x+1}{3}$;
100) $1+x=\frac{3x-1}{2}$.
101) $\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3}=\frac{x-5}{2}+\frac{x+1}{8}$;
102) $\frac{3x-1}{4}-\frac{5x-4}{20}=2\frac{3}{4}-\frac{x}{5}$.

V. Решити графички ове системе:

103) $x+y=5$, $2x+3y=13$.
104) $x-y=3$, $5x+4y=33$.
105) $x+9y=23$, $9x-y=33$.
106) $2x-y=2$. $5x-y=-11$.
107) $7x-2y=24$. $3x-2y=8$.

§ 81) Примена једначина првог степена

Под *проблемом* разумемо задатак исказан речима, а који се решава помоћу погодбених једначина. Поступак при решавању једног проблема углавном је тројак: 1) постављање једначине између датих и непознатих количина; 2) решавање постављених једначина; и 3) дискусија нађених израза за непознате количине.

Поставити једначину једног проблема, значи изразити алгебарским изразима и знацима све везе (релације) дате у задатку између познатих и тражених количина. За постављање једначине проблема нема утврђених општих правила, нити је могуће дати каква правила. Овај се посао да олакшати једино вежбањем. Па ипак, као једно мало упутство, може послужити ово правило: *најпре треба врло пажљиво прочитати проблем и словима x, y, z··· заменити тражене количине. Везивањем датих и непознатих количина алгебарским знацима према погодбама исказаним у проблему, добијамо за једну исту количину по два израза различитог облика, али једнаке вредности. Везивањем ових израза знаком једнакости добијамо тражену једначину.*

Дискусија се уопште врши само онда када је задатак општег значаја, или када је решење негативно. Ако је једначина проблема *општа*, онда дискусијом налазимо онај однос између општих бројева који треба да буде испуњен па да проблем буде могућан.

I. Проблеми с једном непознатом

a) Простији проблеми за однос између бројева

1) Наћи онај број чији збир од његове половине и трећине, смањен за 600, даје $\frac{5}{7}$ разлике између траженог броја и овога збира.

Решење. Ако је тражени број x, онда је збир његове половине и трећине $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$, а разлика између траженог броја и овога збира: $x-\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)$. Тражена једначина проблема биће:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-600=\frac{5}{7}\left[x-\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)\right].$$

Решењем ове једначине добијамо да је $x=840$.

2) *А* има три пута више оваца него *В;* ако *А* да *В*-у 5 оваца, онда би он имао само 2 пута више него *В*. Колико сваки од њих има оваца?

Решење. Према првој погодби у задатку, ако *В* има x оваца, онда *А* има $3x$. Ако *А* да *В*-у 5 оваца, онда њему остају $3x-5$, а *В* тада има $x+5$. Према другој погодби у задатку биће тада:

$$3x-5=2\,(x+5).$$

Овде је $x=15$. Дакле *В* има 15 а *А* 45 оваца.

3) Разлика два броја је 40. Ако оба броја увећамо са 7, онда први постаје 3 пута већи од другога. Који су ти бројеви?

Решење. Ако је мањи број x, онда је већи $x+40$. Увећани ти бројеви са 7 постају $x+7$ и $x+47$. Тада је према другој погодби у проблему:

$$x+47=3\,(x+7).$$

Решењем ове једначине добијамо $x=13$. Стога су тражени бројеви 53 и 13.

4) Неки играч у првој игри губи половину свога новца мање 5 динара; у другој игри он губи петину свога остатка више 7 дин.; у трећој добија три пута више него што је имао после друге игре мање 8 дин. После треће игре одустао је од даљег играња са једним добитком од 40 динара. Колико је он имао у почетку играња?

Решење. Имао је x дин. После прве игре он губи $\frac{x}{2}-5$, те му је остало $x-\left(\frac{x}{2}-5\right)$, или $\frac{x}{2}+5$ дин. у другој игри губи $\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}+5\right)+7$, или $\frac{x}{10}+8$, те му је остало после друге игре $\left(\frac{x}{2}+5\right)-\left(\frac{x}{10}+8\right)$ или $\frac{2x}{5}-3$. У трећој игри добија $3\cdot\left(\frac{2x}{5}-3\right)-8$, или $\frac{6x}{5}-17$. Према последњој погодби у проблему биће:

$$\left(\frac{2x}{5}-3\right)+\left(\frac{6x}{5}-17\right)=x+40.$$

Решењем ове једначине добијамо $x=100$.

5) Који је оно двоцифрен број чији је збир цифара 10, а кад му цифре промене места, добија се број који је за 54 већи од траженог?

Решење. Ако јединице траженог броја означимо са x, онда су његове десетице према првој погодби $10-x$, а тражени је број $10(10-x)+$ $+x$. (Нпр. $34=10\cdot3+4$). Ако цифре узајамно промене своја места, онда су x десетице а $10-x$ јединице, те је изврнути број $10x+(10-x)$. Тада је према другој погодби у задатку:

$$10\,(10-x)+x+54=10x+(10-x).$$

Одавде је $x=8$, те су јединице 8, десетице 2, а тражени број 28.

6) Од два брата један је сада 6 година старији од млађега, а пре две године био је три пута старији од млађег. Колико година има сваки?

Решење. Ако млађи сада има x година, онда према првој погодби у задатку, старији има сада $x+6$. Пре две године старији је имао $x+4$ године, а млађи $x-2$. Тада је према другој погодби у задатку:

$$x+4=3(x-2).$$

Овде је $x=5$. Према томе млађи брат има пет година и старији 11.

7) Има један број који кад се помножи са 2, па се резултату с десне стране допише цифра 5, добивени број подели са 11, а добивени количник повећа за 1, онда је тако постали број 2, пута већи од замишљеног. Који је тај број?

Решење. Нека је тражени број x. Помножен са 2, добијамо $2x$. Кад овоме резултату допишемо с десне стране цифру 5, добијамо број $2x\cdot10+5$ или $20x+5$. (Нпр. Броју 36 дописати 5, добија се 365, или $36\cdot10+5=360+5=365$). Када овај број поделимо са 11, добијамо количник $\frac{20x+5}{11}$. Тада је по последњој погодби у задатку:

$$\frac{20x+5}{11}+1=2x.$$

Овде је $x=8$.

8) Коме броју треба додати 25 да би се добио број 81? (56)

9) Којим бројем треба увећати 318 да би се добио број 513 (195)

10) Који број треба одузети од 718 да би се добио број 397? (321)

11) Који број помножен са $5^1/_2$ даје производ 33? (6)

12) Којим бројем треба поделити 518 да би се добио количник 74? (7)

13) Наћи број који најпре сабран са бројем 3 пута већим од њега, а затим додавањем 8, даје збир који је 6 пута већи од траженог броја. (4)

14) Наћи онај број чији је збир од његове половине и троструког већег броја $10\frac{1}{2}$. (3)

15) Наћи број чији је збир од његове трећине и петине 16. (30)

16) Ако један број умањимо са 125, а добивеној разлици додамо шести део тога броја, онда се добија број који је за 19 мањи од половине траженог броја. Који је тај број? (159)

17) Наћи број који, најпре умањен са 17, а добивена разлика помножена са 2, производ подељен са 5, даје количник 3 пута мањи од тога броја. (102)

18) Ако се један број помножи са 2, производу дода 5, добивени збир помножи са 6, нови производ увећа са 11, а добивени резултат најзад подели са 7, добија се количник који би се добио ако се тај број помножи са 4 и од добивеног производа одузме 1. Који је тај број? (3)

19) Један путник треба за три дана да пређе 70 *Km*. Првог дана прешао је известан пут, другог двапута већи пут, а трећег дана је прешао 25 *Km*. Колики је пут прешао првог дана? (15)

20) За избор једног народног посланика гласало је 5 000 гласача. Један кандидат је добио 314 гласова више од свога противника. Колико је гласова добио сваки кандидат? (2 343; 2 657)

21) *A* и *B* купили заједнички 80 *kg* робе за 1500 дин. *A* је купио 16 *kg* мање од *B*. Колико је динара сваки платио за робу? (600; 900)

22) *A* и *B* купили заједнички 12 *kg* робе за 500 дин. *A* је платио 120 дин. више од *B*. Колико је килограма купио сваки? ($A=7{,}44$; $B=4{,}56$)

23) Подели 800 дин. на три лица тако да друго лице добије 30 дин. више од првог, а треће 10 дин. мање од првог. (260; 290; 250)

24) Обим једног троугла је 134 m. Његова основица је 6 m дужа од једне а 11 m краћа од друге стране. Нађи дужину сваке стране. (43; 37; 54)

25) Један гарнизон од пешадије, коњице и артиљерије има 16000 војника. У пешадији је било 3500 војника више, а у артиљерији двапута мање војника него у коњици. Колико је било војника у свакоме роду? ($К = 5\,000$; $П = 8\,500$; $А = 2\,500$)

26) Четири брата треба да поделе имање од 250 000 дин. Оба старија брата примају једнаке суме, а од млађих, због њиховог школовања, један прима 15 000, а други 20 000 дин. више од старијих. Колико је сваки добио? (I и II по 53750; III = 68750; IV = 73750)

27) Три најдуже реке у Европи: Волга, Дунав и Дњепар имају укупну дужину 1154 географске миље. Волга је за 134 геогр. м. краћа од Дунава и Дњепра заједно, а Дунав је за 166 миља краћи од удвојене дужине Дњепра. Нађи дужине тих река. (Дњ. = 270; Дун. = 374; В. = 510)

28) Један отац је 4 пута старији од старијег сина, а овај је 2 године старији од млађег брата. Укупно сви имају 64 године. Колико година има сваки. (9; 11; 44)

29) Од три бурета прво захвата $3^1/_2$ пута више литара од другог а $2^1/_8$ пута више од трећег. Ако се из пуног првог бурета напуне друга два празна, преостаје у првом још 10 литара. Колико хвата свако буре? (35; 10; 15)

30) Подели 612 на таква четири дела да је други део 5 пута већи од првог, трећи 2 пута већи од другог, а четврти $3^1/_2$ пута већи од трећег. (12; 60; 120; 420)

31) Два радника примили су подједнако што су извршили неки посао. Да је први примио 7 дин. више а други 5 дин. мање, онда би први примио 3 пута више динара од другог. Колико је сваки добио? (по 11 дин.)

32) A има сада 58 а B 26 година. 1) После колико ће година бити A двапута старији од B? 2) Пре колико је година био A трипута старији од B? [1) 6; 2) 10]

33) У једном разреду има клупа подједнаке дужине. Ако се стави по 6 ученика у клупу, остаје последња клупа са 3 ученика; ако пак седну по 5 ученика у клупу, онда 4 ученика остају без места. Колико је било клупа и ученика у разреду? (7 кл.; 39 уч.)

34) Једно друштво људи жели да скупи неку суму за известан циљ. Ако сваки да по 5 дин., јавља се вишак од 20 дин.; ако пак дâ сваки по 4,5 дин., јавља се недостатак од 12 дин. Колики је број чланова тога друштва и коју суму желе да скупе? (64 чл.; 300 дин.)

35) Који број треба додати бројитељу и именитељу разломка $\frac{11}{15}$ да би се добио разломак $\frac{4}{5}$? (5)

36) Ако се увећају бројитељ и именитељ разломка $\frac{9}{11}$ једним извесним бројем, добија се разломак једнак разломку који се добија кад се исти број одузме и од бројитеља и од именитеља разломка $\frac{27}{31}$. Који је тај број? (3)

37) У једном кавезу било је зечева и фазана укупно 35 глава а ногу 98. Колико је било зечева а колико фазана? (Зечева 14, фазана 21)

✓ 38) У неком друштву било је 40 лица: људи, жена и деце. Број жена износио је $\frac{3}{5}$ броја људи, а број деце био је $\frac{2}{3}$ броја људи и жена укупно. Одреди њихов број. (Људи 15, жена 9, деце 16).

b) Проблеми из процентног и интересног рачуна

Образац за процентни рачун: $\Pi = \frac{\Gamma\cdot p}{100}$. $\left\{\begin{array}{l} \Gamma = \text{чиста главница} \\ p = \text{проценат} \\ \Pi = \text{процентни принос.} \end{array}\right.$

Образац за интересни рачун $i = \frac{Kpt}{100}$ $\left(i = \frac{KpM}{1\,200} = \frac{KpD}{36\,000}\right)$, где је K капитал, *p* годишњи проценат, *t* време у годинама, M време у месецима и D време у данима.

39) Један књижар купио је известан број књига за 3 600 динара. Рачунајући себи за зараду $33^1/_3\%$ продаје сваку књигу по 24 дин. Колико је књига купио и колико зарађује на једној књизи?

Решење. Ако је купио *x* књига, онда једна књига њега стаје $\frac{3\,600}{x}$ дин., а зарада (процентни принос) на једној књизи је $\frac{\frac{3\,600}{x}\cdot 33^1/_3}{100} =$

$$= \frac{\frac{3\,600}{x}\cdot\frac{100}{3}}{100} = \frac{1\,200}{x}$$ дин. Тада је једначина:

$$\frac{3\,600}{x} + \frac{1\,200}{x} = 24\,.$$

Одавде је $x = 200$. Купио је, дакле, 200 књига, а зарадио 6 дин. на једној књизи.

40) Који капитал, дат по 5% под прост интерес, за $3^1/_2$ године нарасте на 62 275 дин. с интересом?

Решење. Ако је капитал *x*, онда је његов интерес за $3^1/_2$ године по $5\% = \frac{x\cdot 3{,}5\cdot 5}{100} = \frac{17{,}5x}{100}$. Тада је једначина:

$$x + \frac{17{,}5x}{100} = 62\,275.$$

Одавде је $x = 53\,000$ дин.

41) Један трговац продао је извесну робу за 1 620 дин. са 8% зараде. Колико њега стаје роба и колика му је зарада? (1500; 120).

42) Трговац прода 150 *kg* неке робе, по 6,40 дин. *kg*, са 4% губитка. Колико је дао за ту количину робе и колики му је губитак? (1000; 40).

43) Једна роба купљена је за 6 500 дин. а продата је за 6 955 дин. Колика је од % зарада? (7%).

44) Један трговац купи за 6 300 дин. неколико боца ликера. При преносу изломљено је 24 боце. Да би зарадио 20%, продаје боцу по 60 дин. Колико је боца купио? (150 боца).

45) Нето тежина неке робе је 573 *kg*, а тара се рачуна 4,5%; колика је бруто тежина те робе? (Тару рачунај на бруто тежину!) (600 *kg*)

46) Становништво неке вароши увећало се у току једне године са $1^1/_3\%$ и број на крају године је 20 976 становника. Колико је било становника у почетку године? (20 700)

47) Срачунато је за зидање једне зграде 71 000 комада цигала. Колико цигала треба спремити, ако се при раду ломе и не улазе у посао $5^1/_3\%$ цигала? (75 000)

48) При куповини неке робе рачунато је трошкова 12%. Та је роба продата за 128,10 дин. са 8,5% губитка. Шта стаје роба без трошкова? (125)

49) Цена некој акцији скочила је за 5% и сада се котира на берзи са 2 100 дин. Колика је била њена ранија цена? (2 000)

50) Продајући робу за дин. 6625 трговац заради 375 дин.; колико је од 100 зарадио? (6%)

51) Станарина је повећана за 26 дин. и сада се плаћа 286 дин. За колико је од 100 повећана? (10%)

52) Имовина неке радње смањена је због 14% губитка и данас је дин. 15 050; колика је била првобитна имовина? (17 500)

53) По одбитку провизије 170 дин., комисионар је послао комитенту 8 330 динара; колико је од 100 рачунао себи провизије? (2%)

54) Који капитал за 5 година са 4,5% доноси 1350 динара интереса? (6 000)

55) По колико од % треба дати капитал од 17 250 дин. да за 3 год. и 3 месеца донесе 4 485 дин. интереса? (8%)

56) За које време капитал од 850 дин. са $3^1/_3\%$ доноси 165,75 дин. интереса? (5 год. 10 мес. 6 дана)

57) За које време ма који капитал са 4% постаје два пута већи? (25 год.)

58) Са којим процентом треба дати ма који капитал за 30 година на прост интерес, да би он постао трипута већи? (са $6^2/_3\%$)

59) Један је поделио свој капитал на 3 једнака дела. Први је део дао по 4%, други по $4^1/_3\%$, а трећи по 4,5%. Од целокупног капитала прима годишње на име интереса 9 779 дин. Колико износи његов капитал? (228 600 динара)

60) Два капитала, чија је укупна сума 14 700 динара, дати су под интерес, и то први по $3^2/_3\%$ а други по $4^1/_2\%$. Њихови су годишњи интереси једнаки. Колико износи сваки капитал? (8 100; 6 600)

61) Један је дао $\frac{1}{5}$ свога капитала по $4^1/_4\%$, $\frac{1}{3}$ по 4% а остатак по $3^3/_4\%$. После три године његов капитал износи 33 540 динара. Колико је износио његов првобитни капитал? (30 000)

62) Један је поделио свој капитал на два дела у размери 3 : 4. Ако да први део по 4% а други по 5%, онда му је годишњи интерес за 75 дин. већи од годишњег интереса који би добио, ако први део да по 5% а други по 4%. Колико износи сваки део капитала? (I = 22 500; II = 30 000)

63) Једна облигација исплаћена је са дин. 3 600 једну годину пре рока са сконтом 4%. Наћи њену номиналну вредност? (3 750)

64) Известан рачун исплаћен је са 301,78 дин. $1^1/_2$ годину раније са сконтом од 14,22 дин. Колики је шконт од 100? (3%)

65) Једна облигација од 3 800 динара исплаћена је са 3 733,50 дин. са интересом од $3^1/_2\%$. Колико је времена пре рока била исплаћена? $\left(\frac{1}{2}\text{ године}\right)$

66) Једно лице купило је кућу за 220 000 дин. под условом да је исплати целу после $2^1/_2$ године са 4% интереса. Којом сумом би могао данас да исплати кућу? (200 000)

67) Једно лице имало је да прими 170 250 дин. после извесног времена. Један банкар нуди му одмах 150 000 дин. рачунајући $4^1/_2\%$, коју је понуду лице одбацило. После ког ће времена примити своје прво примање? (3 год.)

с) Проблеми из терминског (рочног) рачуна

Ови се проблеми решавају на принципу *да је збир интереса појединих дужних сума за њихове рокове раван интересу целокупног дуга за средњи рок.*

Ако су K_1, K_2, $K_3 \dots$ поједине дужне суме које треба исплатити после t_1, t_2, $t_3, \dots$ времена са $p\%$, K целокупни дуг ($K = K_1+K_2+K_3 + \dots$), а x тражени средњи рок, онда је: $\frac{K_1pt_1}{100} + \frac{K_2pt_2}{100} + \frac{K_3pt_3}{100} + \dots = \frac{Kpx}{100}$, или дељењем са $\frac{p}{100}$:

$$\mathbf{K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3 + \dots = Kx.}$$

68) Један трговац треба да исплати 4 500 дин. после 3 месеца, а 6 000 дин. после 10 месеци. После колико месеци може исплатити целокупни дуг, да не изгуби нити он нити зајмодавац?

Решење: после x месеци. Тада је:

$$\mathbf{4\,500 \cdot 3 + 6\,000 \cdot 10 = 10\,500 \cdot x}$$

Одавде је $x = 7$ месеци.

69) Један трговац купио је робе за 18 000 дин. под условом да ову суму исплати после 10 месеци. У место овога он плати одмах 6 000 дин. и обавеже се да ће остатак исплатити у три једнака рока једнаким деловима остатка дуга. Када пада први рок?

Решење. После x месеци. Тада је једначина проблема:

$$\mathbf{18\,000 \cdot 10 = 6\,000 \cdot 0 + 4\,000 \cdot x + 4\,000 \cdot 2x + 4\,000 \cdot 3x}, \text{ или}$$

$$180 = 4x + 8x + 12x.$$

Одавде је $x = 7^1/_2$ месеци. Дакле, рок је за прву своту остатка дуга $7^1/_2$ месеци, за другу 15 месеци, а за трећу $22^1/_2$ месеца.

70) Један је дужан да исплати 1 610 дин. после 3 месеца, 3 800 дин. после 7 месеци и 6 200 динара после 8 месеци. Када може да исплати целокупан дуг? (6 месеци и 29 дана)

71) Један трговац дужан је да плати $^1/_4$ свога дуга после 5 месеци, $^2/_3$ после 10 месеци, а остатак дуга после 13 месеци. После колико месеци може да исплати целокупни дуг? (9 месеци)

72) Један треба да исплати 5 000 дин. после 9 месеци. Он је платио 3 500 дин. после 6 месеци. Пита се после колико месеца треба да исплати остатак дуга? (16 месеци)

73) Један треба да исплати 12 000 дин. после 8 месеци. Међутим он је платио 5 200 дин. после 3 месеца, а 3 000 дин. после 4 месеца. После колико месеца треба да исплати остатак дуга? (18 месеци)

74) Неко је био дужан да исплати три суме, и то: дин. 1 800 после 5 месеци, дин. 2 700 после 8 месеци и једну трећу суму после 10 месеци. Колико динара је била трећа сума, када може он целокупан дуг да исплати после $7^1/_3$ месеци? (900)

75) Неко је био дужан да плати 7 000 дин. одмах, 3 500 дин. после 9 месеци и 1 500 дин. после 11 месеци. Он жели да целокупан дуг исплати одједном. После колико месеци може то да учини? (4 месеца)

76) Неко је био дужан да исплати одмах 1 600 дин., после 4 месеца 1 400 дин. и после 5 месеци 600 дин. Уместо тога он исплати 2 200 дин. после два месеца. Колико месеци може он задржати остатак дуга? (3 месеца)

77) Један предузимач погодио се да храни 400 радника за 14 дана. Али је у почетку ступило на рад само 150 радника, после 4 дана 50 радника, а после 7 дана остатак од 200 раденика. Пошто је протекло 14 дана, колико још дана треба да храни предузимач раднике, да би испунио своју обавезу? (4 дана)

d) Проблеми из друштвеног рачуна

1) *Прост друштвени рачун*

Ако је S деона сума, $m, n, p, \cdots$ размерни бројеви по којима се деона сума дели, $x, y, z, \cdots$ тражени делови, онда је

$$x = \frac{Sm}{m+n+p+\cdots}, \quad y = \frac{Sn}{m+n+p+\cdots},$$
$$z = \frac{Sp}{m+n+p+\cdots}.$$

2) *Сложени друштвени рачун*

Ако је S деона сума $m : n : p : \cdots$ први ред размерних бројева, $q : s : t : \cdots$ други ред, $a : b : c : \cdots$ трећи ред, $x, y, z, \cdots$ тражени делови, онда је:

$$x = \frac{S \cdot amq}{amq + bns + cpt}, \quad y = \frac{S \cdot bns}{amq + bns + cpt},$$
$$z = \frac{S \cdot cpt}{amq + bns + cpt}.$$

78) Губитак од 6 450 дин. поделити сразмерно улозима: A је уложио дин. 24 000, B дин. 36 000 и C дин. 60 000.

Решење. Овде је $S = 6\,450$; $m : n : p = 24\,000 : 36\,000 : 60\,000$, или скраћивањем са 12 000, $m : n : p = 2 : 3 : 5$.

Стога је $A = \frac{6450 \cdot 2}{10} = 1290$ дин., $B = \frac{6450 \cdot 3}{10} = 1935$ дин., $C = \frac{6450 \cdot 5}{10} = 3225$.

79) A, B и C закупили су неку пашу за 435 динара. Колико треба сваки да плати, ако се зна да су 15 крава A-а пасле 20 дана, 18 крава B-а пасле 24 дана и 12 крава C-а пасле 26 дана?

Решење. Овде је $S = 435$; $m : n : p = 15 : 18 : 12$, $q : s : t = 20 : 24 : 26$, а $mq : ns : pt = 15 \cdot 20 : 18 \cdot 24 : 12 \cdot 26$, или скраћивањем размерних бројева $25 : 36 : 26$. Стога:

A плаћа $= \frac{435 \cdot 25}{87} = 125$ дин., $B = \frac{435 \cdot 36}{87} = 180$. и $C = \frac{435 \cdot 26}{87} = 130$ дин.

80) Четири трговца предузела су заједнички један посао и уложили су дин. 24 000. При подели добити од дин. 6 400 добио је A 2000 дин., B 1500 дин., C 1800 и D остатак. Колико је сваки уложио?

(A = 7500; B = 5625; C = 6750; D = 4125)

81) Која је то добит од које је A добио $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{6}$, C $\frac{3}{8}$ и D остатак који износи дин. 5100? (40800)

82) Динара 5000 треба поделити на петорицу тако да сваки доцнији прими увек 100 дин. више од претходног; колико добива сваки од њих?

(I = 800; II = 900; III = 1000; IV = 1100; V = 1200).

83) Колико има становника у Јагодини, Крагујевцу и Нишу, кад се зна да у Јагодини има 1000 становника више од $\frac{2}{19}$ становника у сва три града, број становника у Крагујевцу је за 1750 мањи од $\frac{3}{8}$ броја у сва три града и број становника у Нишу већи је за 1500 од половине становника у сва три града? (J = 5000; К = 12500; Н = 20500).

е) Проблеми из мешања и смесе

а) *За мешавину:* Ако су: a_1, a_2, a_3, . . . узети килограми (литри) појединих врста; c_1, c_2, c_3, . . . њихове цене; a тежина (запремина) мешавине ($a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$); c цена једног килограма (литра) мешавине, онда је једначина проблема:

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots = ac.$$

b) *За смесу:* Ако су q_1, q_2, q_3, ... узети килограми (грамови) појединих сребрних (златних) смеса, f_1, f_2, f_3, . . . њихове финоће, q целокупна тежина нове смесе ($q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots$), а f финоћа нове смесе, онда је једначина проблема:

$$q_1f_1 + q_2f_2 + q_3f_3 + \ldots = q \cdot f.$$

Напомена. Под финоћом једне сребрне или златне смесе разумемо количину племенитог метала (чистог сребра, злата) у једном килограму или граму те смесе. Тако, ако у једној сребрној смеси има 15 *gr* чистог сребра и 5 *gr* бакра, или ма којег другог неплеменитог метала, онда је њена финоћа $f = \frac{15}{20} = 0{,}750$, а значи да у 1 *gr* те смесе јесу 750 милиграма чистог сребра а 250 милиграма неплеменитог метала. Ако је q тежина племенитог метала у једној смеси, Q њена целокупна тежина, f финоћа, онда је:

$$f = \frac{q}{Q}, \text{ одавде је } q = Q \cdot f.$$

Једначина $q = Q \cdot f$ показује нам да треба да помножимо апсолутну тежину неке сребрне (златне) смесе са њеном финоћом, ако желимо да сазнамо колика је тежина племенитог метала у тој смеси.

84) Винар помеша 14 л. вина од 15 дин. литар са 26 л. вина од 9 дин. литар. Шта стаје један литар мешавине?

Решење. Ако 1 л. мешавине стаје x дин., онда је једначина проблема:

$$14 \cdot 15 + 26 \cdot 9 = 40 \cdot x$$

Овде је x = 11,10 дин.

85) Један има 360 л. вина по 11 дин. литар. Колико литара воде треба да сипа у вино, да би био литар мешавина 9 дин.?

Решење. Треба да сипа x л. воде. Тада је једначина проблема:

$$360 \cdot 11 + x \cdot 0 = (360 + x) \cdot 9$$

Одавде је $x = 80$ л.

Напомена. Вредност воде према вину узима се да је нула.

86) Један златар смешао је два сребра од 0,760 и 0,475 финоће и добио је сребро 380 *gr* финоће 0,610. По колико је грама узео од сваког сребра?

Решење. Ако је узео од I-ог сребра x *gr*, онда је из II-ог сребра узео $(380 - x)$ *gr*. Тада је једначина проблема:

$$x \cdot 0{,}760 + (380 - x) \cdot 0{,}475 = 380 \cdot 0{,}610$$

Читај: Чисто сребро у x *gr* и чисто сребро у $(380 - x)$ *gr* = чистом сребру у новој смеши. Одавде је $x = 180$ *gr*. Дакле, узео је од I-ог сребра 180 *gr*, а од II-ог 200 *gr*.

87) Винар помеша 20 л. вина од 14 дин. 1 л. са 5 л. воде. Колико стаје 1 л. мешавине? (11,20)

88) Винар има две врсте ракије, од 17 и 12 дин. литар. Жели од ових врста да начини мешавину чија је цена 15 дин. од литра. Ако је узео од I-ве врсте 10 л., колико је узео од II-ге врсте? $\left(6\frac{2}{3}\text{ л.}\right)$

89) Кафеџија помеша 220 л. вина од 20 дин. 1 л. са 280 л. од 15 дин. 1 л. Колико литара воде треба да сипа у ту мешавину, ако жели да 1 л. нове мешавине продаје по 16 дин.? (37,5 л.)

90) Трговац помеша 30 *kg* кафе од 14 дин. 1 *kg* са кафом од 12 дин. 1 *kg*. При пржењу кафа губи од своје тежине 15%. Колико *kg* треба да узме од друге врсте кафе, ако жели да 1 *kg* пржене кафе продаје по 16 дин. 1 *kg*? (7,5 *kg*)

91) Трговац има 75-процентног шпиритуса у који је сипао 12 л. воде и тиме добио шпиритус 51-процентни. Колико је литара шпиритуса имао у почетку? (25,5 л.)

92) Један је помешао 60 л. рума од 72% са 70 л. алкохола од 96%. Колико литара воде треба да сипа у ову мешавину, ако жели да добије рум од 46%? (110 л.)

93) Златар жели од 28 *gr* чистог злата да начини смесу финоће 0,875. Колико *gr* бакра треба да стави? (4 *gr*)

Напомена. Вредност бакра према злату је нула.

94) Један златар има 5 *kg* златне смесе финоће 0,940, па хоће да дода злато финоће 0,750 да би добио смесу чија је финоћа 0,800. Колико *kg* злата треба да узме од злата финоће 0,750? (11,20 *kg*)

f) Проблеми за одређивање времена заједничког рада

95) Три цеви пуне један басен. Сама прва цев пуни га за 12 часова, друга за 15 часова, а трећа за 18 часова. За које време се басен пуни, ако су отворене све три цеви?

Решење. Нека све три цеви пуне басен за x часова.

Сама I-ва цев пуни за 1 час $\frac{1}{12}$ од басена,
„ II-га „ „ „ „ „ $\frac{1}{15}$ „ „
„ III-ћа „ „ „ „ „ $\frac{1}{18}$ „ „
Све три цеви пуне „ „ „ $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18}$ од басена.

Како за x часова пуне цео басен, то је једначина проблема:

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18}\right) \cdot x = 1\,.$$

Одавде је $x = 4\frac{32}{37}$ часа.

96) Једно корито се пуни кроз две цеви. Прва га пуни за 3 часа а друга за 5. За које га време пуне обе цеви заједно? $\left(1\frac{7}{8}\text{ ч.}\right)$

97) Једно корито се пуни кроз две цеви. Једна га пуни сама за 20 часова, а обе заједно за 12 часова. За које време пуни корито сама II-га цев? (30 ч.)

98) Три радника врше известан посао. Први радник може да сврши тај посао сам за 12 дана, други за 10 дана, а трећи за 15 дана. За које време сва три радника заједно свршавају тај посао? (4 дана)

99) Три преписивача треба да препишу $56^3/_4$ страна. Први може да препише за 1 час $1^1/_4$ стране, други за 3 часа 4 стране, а трећи за 5 часова 6 страна. За које време сва три преписивача могу свршити преписивање, ако сва три почну посао једновремено? (15 ч.)

g) Проблеми из кретања

100) Отстојање места *A* и *B* је 78 *Km*. Трамвај полази из *A* и *B* и прелази 9 *Km* за час; после 1,5 часа полазе из *B* за *A* поштанска кола која прелазе за 3 часа 16 *Km*. После колико часова од поласка трамваја има да се сусретну?

Решење. Ако је време путовања трамваја до сусрета $t_1 = x$ часова, онда је време путовања кола до сусрета $t_2 = (x - 1,5)$ часова. Тада је пут трамваја $S_1 = c_1 t_1 = 9x\ Km$, а пут кола $S_2 = c_2 t_2 = \frac{16}{3}(x - 1,5)\ Km$. Па како је $S_1 + S_2 = 78$, то је

$$9\,x + \frac{16}{3}(x - 1,5) = 78$$

Одавде је $x = 6$ часова.

101) Два пријатеља *A* и *B* желе да пређу известан пут заједно. Услед изненадног посла *A* је пошао на пут 6 дана доцније од дана поласка *B*. Ако *B* прелази дневно 2,5 миље, а *A* 4 миље дневно, после колико ће дана *A* стићи *B*? (10 дана)

102) После једног курира који дневно прелази 12 миља, пошао је други курир за њим са дневном брзином од 15 миља и стиже првог курира после 20 дана од свога поласка. Пре колико дана је пошао на пут први курир? (5 дана)

103) Два пријатеља пошла су једновремено из два места *A* и *B*, чије је отстојање 70 миља, један другоме у сусрет. После колико дана има да се сусретну, ако први прелази дневно $3^1/_4$ миље а други $5^1/_2$ миља? (8 дана)

104) Из Београда полази лађа за Панчево у 4 ч. и 16 мин. по подне, а из Панчева за Београд пошла је у 4 час. по подне. Обе лађе прелазе овај пут за 50 минута. Када се лађе сусрећу? (у 4 ч. и 33 мин.)

105) Лисица је удаљена од неког хрта који је гони 60 скокова. Она учини 9 скокова за исто време за које хрт учини 6, али 3 скока хрта вреде колико 7 скокова лисице. Колико је скокова потребно хрту да учини па да стигне лисицу? (72 скока)

Решење. Нека хрт учини *x* скокова док стигне лисицу. Па како 3 скока хрта износе 7 скокова лисице, то је један скок хрта једнак са $\frac{7}{3}$

скока лисице, његових 6 скокова чине $6\cdot\frac{7}{3}=14$ скокова лисичиних, а x његових скокова чине $\frac{7x}{3}$ скокова лисичиних. Ако лисица учини y скокова док је хрт стигне, онда је: $\frac{7x}{3}:y=14:9$, а одавде је $y=\frac{3x}{2}$. Тражена једначина биће: $\frac{7x}{3}-\frac{3x}{2}=60$, а одавде је $x=72$.

106) Из места A и B, чије је отстојање 12 миља, излазе два путника једновремено и иду истим правцем и смислом. Предњи прелази дневно $3^1/_2$ миље, а задњи 5 миља. После колико дана ће се сустићи? (8 дана)

107) Из места A и B, чије је отстојање 540 *Km*, полазе једновремено два путника један другоме у сусрет и сретну се после $7^1/_2$ дана. Њихове се брзине имају као 5 : 4. По колико Km прелазе дневно? ($c_1 = 40$ *Km*, $c_2 = 32$ *Km*)

108) Из Београда полази лађа у 7 часова изјутра за Смедерево и прелази тај пут за 70 минута. Тога јутра полази из Смедерева лађа за Београд у 7 часова и 10 мин. и прелази тај пут за 80 минута. У колико сати има да се лађе сретну? (у 7 ч. и 42 мин.)

109) Место B се налази на путу из A за C. Отстојање AB износи 68 *Km*. Из A полази путник за C и прелази дневно 20 *Km*. Три дана раније пошао је из B други путник такође за C и прелази дневно 18 *Km*. После колико дана од поласка из A путник има да стигне путника из B и на ком отстојању од A (61 дан; 1220 *Km*)

110) Два тела удаљена 105 m крећу се истим правцем и смислом. Брзина предњег тела које се креће 3 секунде раније од задњег, има се према брзини задњег тела као 3 : 5. Наћи брзине тих тела када се зна да се сустижу после 8 секунада? ($c_1 = 75$; $c_2 = 45$)

111) Са станице A полази теретни воз који прелази 3 *Km* за 4 минута. После 7 минута из B полази за A поштански воз, који прелази 6 *Km* за 5 минута. Наћи отстојање AB, кад се зна да су се возови срели тачно на средини пута. $\left[28\ Km = \overline{AB}\right]$

112) Један пође из једног места на пут и прелази дневно 3 миље. После три дана је пошао за њим други путник из истог места и стигао првог путника после 7 дана од свога поласка. Колики пут дневно прелази други путник? ($4\frac{2}{7}$ миље)

113) Место B, које је између места A и C, удаљено је од A 20 *Km* а од C 24 *Km*. Из B полази путник за C и прелази 16 *Km* за 3 часа. У исто време полази из A за C други путник и стиже у C један час доцније него путник из B. Колико *Km* за час прелази други путник? (8 *Km*)

114) Једна лађа полази из A за B и прелази 6 *Km* за 25 минута; после 18 минута полази друга лађа из A за B и прелази за $2^1/_4$ *Km* за 10 минута. Ако је прва лађа стигла у B 21 минут раније од друге, онда колико је отстојање AB и за које време свака лађа прелази пут AB? (AB = 10,8 *Km*; $t_1 = 45$, $t_2 = 48$)

115) Два тела крећу се из тачака A и B, чије је отстојање 62 *m*, истим правцем и смислом. Брзина предњег тела је за 3 *m* у секунди мања

од брзине задњег тела, а задње тело почиње да се креће 3 секунде раније. Ако се оба тела сустигну после 7 секунада од поласка предњег тела, онда колике су брзине тих тела? ($c_1 = 13^2/_3$; $c_2 = 10^2/_3$ *m*)

116) Два тела крећу се једновремено из два места једно другоме у сусрет. Отстојање полазних места је 96 *m*. Једно се тело креће брзином од 7 *m* а друго од 5 *m* у секунди. После колико секунада тела ће бити удаљена 36 *m*? (5 сек.)

117) Обим задњег точка неких кола је 60 *cm* већи од обима предњег точка. Наћи обиме оба точка, кад се зна да предњи точак учини 5 обртања док задњи учини 4. (240; 300)

118) На једном путовању предњи је точак начинио 2800 обртања више него задњи. Обим предњег точка је 1,8 *m* а задњег 2,5 *m*. Колики су пут прешла кола? (18 *Km*)

119) Колико времена протекне од једног до другог поклапања сказаљака једног часовника? ($65^5/_{11}$)

(Рачунај да је минутна брзина велике сказаљке $\frac{0}{60}$, а мале $\frac{0}{720}$, где је *0* обим круга.)

120) У 9 часова сказаљке часовника дају прав угао. После ког времена сказаљке поново дају такав угао, а после ког времена дају угао од 60°? ($32^8/_{11}$; $27^3/_{11}$)

$\left(\text{Овде рачунај минутну брзину велике сказаљке } \frac{360^0}{60}, \text{ а мале } \frac{360^0}{720}\right)$

h) Проблеми из геометрије

121) У једном правоуглом троуглу једна је катета 15 *cm* а друга је за 3 *cm* мања од хипотенузе. Колика је хипотенуза? (39 *cm*)

122) Обим једног правоуглог троугла је 120 *cm*. Једна му је катета 40 *cm*. Нађи дужину друге катете. (30 *cm*)

123) Хипотенузина висина једног правоуглог троугла је за 12 *cm* већа од једног отсечка, а за 16 мања од другог отсечка хипотенузиног. Колика је висина? (48 *cm*)

124) Колика је једна катета правоуглог троугла, кад се зна да је она за 4 *cm* мања од хипотенузе, а за 3 *cm* већа од њене пројекције на хипотенузи (од ближњег отсечка хипотенузиног)? (12 *cm*)

125) Разлика катета једног правоуглог троугла је 7 *cm*. Ако се једна катета смањи за 1 *cm*, а друга повећа за 3 *cm*, онда је површина новог правоуглог троугла за 17 cm^2 већа од површине ранијег троугла. Наћи дужине катета. (22 *cm*; 29 *cm*)

126) Обим једног равнокраког троугла је 130 *cm*. Размера крака и основице је 3 : 4. Наћи основицу. (52 *cm*)

127) Обим равнокраког троугла је 256 *cm*, основичина висина 80 *cm*. Наћи његове стране. ($o = 78$; $k = 89$).

128) Стране једнога троугла, чија је површина 72 cm^2, имају се као 9 : 10 : 17. Наћи те стране. ($9\sqrt{2}$; $10\sqrt{2}$; $17\sqrt{2}$).

129) Стране једног правоугаоника имају се као 3 : 5. Ако се мања страна смањи са 1 *cm* а већа увећа за 2 *cm*, површина правоугаоника увећава се за 5 cm^2. Наћи његове стране. (21 *cm*; 35 *cm*.)

130) Површина једнога ромба, чије се дијагонале разликују за 8 *cm*, не мења се, ако мању дијагоналу увећамо за 3 *cm* а већу смањимо за 4 *cm*. Наћи дијагонале. (12 *cm* и 20 *cm*.)

131) Код једног трапеза је висина 13 *cm* а површина 208 cm^2. Нађи његове паралелне стране, ако је:

а) њихова разлика 6 *cm*; b) њихова размера 5 : 3.

а) [13 *cm* и 19 *cm*], b) [12 *cm* и 20 *cm*].

132) У једном равнокраком трапезу је висина 20 *cm*, а разлика паралелних страна је 16 *cm*. Нађи површину овога трапеза, када је његова дијагонала једнака већој паралелној страни. (420 cm^2).

133) Једна од паралелних страна трапезових је 24 *cm*, а средња му линија износи $^2/_8$ друге паралелне стране. Колика је ова паралелна страна? (72 *cm*).

II. Проблеми са две и више непознатих

а) Решени примери:

1) Један басен пуни се кроз три цеви. Прва и друга цев пуне га за $5\frac{5}{23}$ часова, прва и трећа за $5\frac{5}{7}$, а друга и трећа за $8\frac{4}{7}$ часова. Пита се за колико би се часова напунио басен са сваком цеви понаособ?

Решење. Нека га I цев пуни за x часова, II за y часова, а III за z часова. Тада:

I цев за 1 час пуни $\frac{1}{x}$ дела од басена,

II „ „ „ „ „ $\frac{1}{y}$ „ „ „

III „ „ „ „ „ $\frac{1}{z}$ „ „ „

I и II за 1 час пуне $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ „ „ „

II и III „ „ „ „ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ „ „ „

I и III „ „ „ „ $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$ „ „ „.

Како I и II цев пуне цео басен за $5\frac{5}{23}$, или за $\frac{120}{23}$ часова, онда за 1 час пуне ове две цеви $1:\frac{120}{23}=\frac{23}{120}$ дела од басена; II и III за 1 час пуне $1:8\frac{4}{7}$, или $\frac{7}{60}$ дела од басена; и I и III за 1 час пуне $1:5\frac{5}{7}$, или $\frac{7}{40}$ дела од басена.

Стога су једначине проблема:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{23}{120} \\ 2) & \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{7}{40} \\ 3) & \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{60} \end{array}\right\}$$

Одавде је; $x = 8$ч., $y = 15$ч. и $z = 20$ч.. Дакле, прва цев пуни басен за 8ч., друга за 15ч., и трећа за 20ч..

2) Нађи онај четвороцифрени број код кога је:

а) збир његових цифара 25, b) да је цифра десетица једнака с збиром цифара стотина и хиљада, c) да је двострука цифра десетица једнака с збиром цифара јединица и стотина и d) да је број од истих цифара али у обрнутом реду већи од траженог броја за 8082.

Решење. Ако су x јединице, y десетице, z стотине и t хиљаде, онда имамо, према погодбама у проблему, ове једначине:

1) $x + y + z + t = 25$,
2) $y = z + t$,
3) $2y = x + z$,
4) $1000t + 100z + 10y + x + 8082 = 1000x + 100y + 10z + t$.

Решењем овог система добијамо: $x = 9$, $y = 8$, $z = 7$, и $t = 1$. према томе тражени је број 1 789.

→ 3) Једно друштво од људи и жена, чији је број 40, скупили су 350 дин. за неки добротворни циљ. Колико је било људи а колико жена у томе друштву, ако се зна да је сваки човек дао по 10 динара, а свака жена по 5 динара?

Решење. Ако је број људи x а број жена y, онда су једначине проблема према његовим погодбама:

1) $x + y = 40$,
2) $10x + 5y = 350$.

Решењем овог система добијамо $x = 30$ и $y = 10$.

4) Ако један двоцифрен број поделимо збиром његових цифара, добијамо за количник 4; ако број од истих цифара али у обрнутом реду поделимо збиром његових цифара више 1, добијамо за количник 6. Нађи тај број.

Решење. Ако су јединице x, а десетине y, онда су једначине проблема према његовим подацима:

$$1)\quad \frac{10y + x}{x + y} = 4, \text{ илн } 2y - x = 0,$$

$$2)\quad \frac{10x + y}{x + y + 1} = 6, \text{ или } 4x - 5y = 6.$$

Одавде је $x = 4$, $y = 2$, те је тражени број 24.

5) Једна лађа прелази за 11 часова 168 *Km* низ воду и 48 *Km* уз воду; другипут иста лађа пређе за 11 часова 144 *Km* низ воду и 60 *Km* уз воду. Колико *Km* прелази лађа за један час само снагом машине, а колико *Km* само снагом текуће воде?

Решење. Ако лађа прелази за један час само снагом машине x *Km* а само снагом воде y *Km*, онда она прелази за један час низ воду $(x + y)$ *Km* а уз воду $(x - y)$ *Km*. Стога пут од 168 *Km* низ воду лађа прелази за $\frac{168}{x + y}$ часова а пут уз воду од 48 *Km* прелази за $\frac{48}{x - y}$ часова. Тако исто, пут од 144 *Km* низ воду прелази за $\frac{144}{x + y}$ часова, а пут од 60 *Km* уз воду прелази за $\frac{60}{x - y}$ часова. Према томе, једначине проблема јесу:

$$1)\quad \frac{168}{x + y} + \frac{48}{x - y} = 11.$$

$$2)\quad \frac{144}{x + y} + \frac{60}{x - y} = 11.$$

Решење ових једначина, пошто претходно заменимо $\frac{1}{x + y} = z$ и $\frac{1}{x - y} = v$, добијамо $x = 18\,Km$ и $y = 6\,Km$.

6) Број ученика I-ог разреда једне троразредне школе био је за 35 мањи од целокупног броја ученика II-ог и III-ег разреда. После испита прешло је у II-ги разред 34 ученика, у III-ћи 30 ученика, а свршио је III-ћи разред 31 ученик. Понављају разред: у I разреду 3 пута више ученика него у II, а 2 пута мање него у III. Колико је ученика било по разредима пре испита?

Решење. Ако је број ученика у I разреду x, у II y а у III z, онда су једначине проблема према његовим погодбама:

1) $x + 35 = y + z$, 2) $x - 34 = (y - 30) \cdot 3$, 3) $(x - 34)\,2 = z - 31$.

Решењем овога система добијамо: $x = 40$, $y = 32$, $z = 43$.

7) Разлика површина од два квадрата је 99 cm^2. Ако страну првога квадрата увећамо са 5 cm, а страну другога умањимо са 5 cm, онда је разлика површина нових квадрата 429 cm^2. Наћи стране тих квадрата.

Решење. Ако је страна већег квадрата x а мањег y, онда су једначине проблема:

$$1)\ x^2 - y^2 = 99$$

$$2)\ (x + 5)^2 - (y - 5)^2 = 429,$$

$$\text{или}\quad x^2 - y^2 + 10x + 10y = 429.$$

Ако (1) одузмемо од (2), добијамо (I) $x + 3 = 33$. Тада је прва $(x+y)(x - y) = 99$, или $33\,(x - y) = 99$, или $x - y = 3$ (II). Сабирањем и одузимањем једначина (I) и (II), добијамо $x = 18$ cm, $x = 15$ cm.

8) Два капитала износе заједно 24600 дин. Наћи ове капитале кад се зна да први капитал за 8 месеци са 6% доноси онолико интереса колико други доноси интереса за 10 месеци по 7,5%.

Решење. Ако је први капитал x динара а други y динара, онда су једначине проблема:

$$1)\ x + y = 24600,$$

$$2)\ \frac{x \cdot 6 \cdot 8}{1200} = \frac{y \cdot 7{,}5 \cdot 10}{1200},\ \text{или}\ 16\,x = 25y.$$

Решењем овог система добијамо $x = 15000$ и $y = 9600$.

9) Круна сиракускога краља Хиерона тежила је 10 $kg.$, а потопљена у води губила је од своје тежине 0,625 kg. Колико је kg злата, а колико kg сребра било у тој круни, ако злато губи у води $\frac{1}{19}$ а сребро $\frac{1}{10}$ од своје тежине?

Решење. Ако је у круни било x kg злата и y kg сребра, онда су једначине проблема према његовим погодбама:

$$1)\ x + y = 10, \qquad 2)\ \frac{x}{19} + \frac{y}{10} = 0{,}625.$$

Одавде је $x = 7\frac{11}{12} kg$ и $y = 2\frac{1}{12}$ kg.

10) Од двеју станица A и B, чије је отстојање 300 Km полазе два воза један другоме у сусрет. Ако први пођe 4 часа раније, онда сусрет возова биће после 4 часа и 35 минута од поласка другог воза; ако други воз пође 5 часова раније него први, онда сусрет возова биће после 3 часа и 20 минута од поласка првог. Колике су часовне брзине ових возова?

Решење. Ако је брзина првог воза x Km а другог y Km, онда је према првој погодби:

1) $8\frac{7}{12}x+4\frac{7}{12}y=300$, а према другој

2) $3\frac{1}{3}x+8\frac{1}{3}y=300$

пошто до сусрета по првој погодби воз из *A* путује $8\frac{7}{12}$ часова а воз из *B* $4\frac{7}{12}$ ч., а по другој погодби воз из *A* путује $3\frac{1}{3}$ ч., а из *B* $8\frac{1}{3}$ ч.

Решењем једначина овог система добијамо $x=20$ *Km* а $y=28$ *Km*.

b) Примери за решавање

11) Трговац купи за 1280 дин. оваца и коза. За сваку је овцу платио 120 дин. а за сваку козу 140 динара. Колико је купио оваца а колико коза, кад је њихов укупан број 10? ($o=6$; $\kappa=4$)

12) Збир два броја је 42. Први је број $2^{1}/_{2}$ пута већи од другога. Који су ти бројеви? (30 и 12)

13) Разлика два броја је 28 а њихова аритметичка средина 19; који су ти бројеви? (5 и 33)

14) Ако и бројитељ и именитељ једнога разломка увећамо са 3, добијамо разломак $\frac{6}{7}$; напротив, ако и бројитељ и именитељ смањимо са 3, добијамо разломак $\frac{3}{4}$. Који је тај разломак? $\left(\frac{9}{11}\right)$

15) Два броја имају се као 5 : 6. Ако први број увећамо са 5 а други са 8, онда добијамо бројеве који се имају као 3 : 4. Који су то бројеви? (10 и 12)

16) Један број подељен другим бројем даје 9 за количник и 5 за остатак. Ако збир ових бројева поделимо мањим бројем увећаним претходно са 2, добијамо 8 за количник и 3 за остатак. Који су то бројеви? (68 и 7)

17) „Ако ми даш 2 динара“, каже неко лице своме пријатељу, „онда ћу имати два пута више новаца од тебе.“ „Дај ти мени 4 динара“, одговори, пријатељ, „па ћемо онда обојица имати подједнако новаца.“ Колико динара има сваки од њих? (22; 14)

18) За две њиве плаћено је 36000 динара. Кад би прва њива била јевтинија 500 дин., онда би биле подједнаке цене. Колико је динара плаћено за сваку њиву? (18250; 17750)

19) Један сељак може да исплати свој дуг од 1470 динара или са 650 *kg* пшенице и 250 *kg* кукуруза, или пак са 340 *kg* пшенице и 715 *kg* кукуруза. Шта стаје *hl* пшенице а шта кукуруза? (1 *hl* пшенице = 180 дин. а кукуруза 120 дин.)

20) Ако променимо место цифрама једног двоцифреног броја, добијамо број за 18 мањи од првог броја. Ако пак дати број поделимо збиром његових цифара, добијамо 6 за количник и 1 за остатак. Који је тај број? (97)

21) Ако променимо места цифрама једног двоцифреног броја, добијамо број 1,75 пута већи од датог. Производ цифара је $2^{2}/_{8}$ пута већи од њиховог збира. Који је тај број? (48)

22) Наћи она два броја чији је производ $3^{3}/_{4}$ пута већи од њиховог збира, а тај збир је 4 пута већи од разлике бројева (I = 10; II = 6)

23) Наћи она два броја чији је збир 16, а разлика њихових квадрата 32? (9 и 7)

24) Наћи два двоцифрена броја са оваквим условима: ако први број напишемо испред другог, па тако добивени четвороцифрени број поделимо другим бројем, добијамо количник 121; ако пак други број напишемо испред првог и добивени број поделимо првим бројем, онда добијамо за количник 84 а за остатак 14. (42; 35)

25) Једно је лице дало један део свога капитала по $5^0/_0$ а други део по $4^0/_0$ и добија годишње интерес 1270 дин. Кад би дао први део по $4^0/_0$ а други по $5^0/_0$, онда би добио 70 дин. више интереса. Наћи та два дела његовог капитала. (11000; 18000)

26) Један капитал дат под интерес за 10 месеци постаје 8300 дин., а за 15 месеци 8450 дин. Колики је био тај капитал и са којим је процентом био дат под интерес? (Капитал 8000 дин., проценат $4{,}5^0/_0$)

27) У једно предузеће уложили су *A* и *B* заједнички 10 000 дин., и то *A* за 3 а *B* за 5 месеци. При деоби добити добили су обојица подједнаке суме. Наћи њихове уложене капитале. ($A = 6250$; $B = 3750$)

28) *A* и *B* уложили су у неко предузеће 13800 дин., и то *A* за 7 а *B* за 10 месеци. Добит износи $2^0/_0$ месечно. При деоби добити *B* је добио 618 дин. више него *A*. Наћи њихове уложене капитале. ($A = 6827{,}77$; $B = 6972{,}23$)

29) Једно лице је било дужно да исплати 1000 динара после 6 месеци, али се споразумео са својим кредитором да му један део да после 4 а други после 9 месеци. Наћи величину сваког дела овог дуга. (600; 400)

30) Трговац купи за 3750 дин. две врсте кафе од 24 и 18 динара. При пржењу прва је кафа изгубила $14^0/_0$ а друга $16^0/_0$ од своје тежине. *kg* прве кафе продавао је по 30 дин. а друге по 25 дин. и зарадио је 405 дин. По колико је *kg* купио од сваке врсте? (100; 75)

31) Трговац има две врсте кафе. Ако помеша обе врсте по размери 3 : 5, онда 1 *kg* мешавине стаје 26 дин.; ако помеша по размери 7 : 3, онда 1 *kg* мешавине кошта 31,20 дин. Шта кошта 1 *kg* сваке врсте? (36; 20)

32) Трговац има две врсте шпиритуса. Ако помеша 13 *л.* од прве врсте са 7 *л.* од друге, добија шпиритус од $63^0/_0$. Ако помеша 21 *л.* од прве са 19 *л.* од друге врсте, добија шпиритус од $60{,}5^0/_0$. Колико процената алкохола садржи свака врста шпиритуса? ($70^0/_0$; $50^0/_0$)

33) Златар има 14 и 21,5 каратно злато и жели да начини злато од 100 *gr* а од 18 карата. Колико *gr* треба да узме од сваке врсте злата? ($46^2/_3$ *gr*; $53^1/_3$ *gr*)

34) Златар има две врсте злата. Ако смеши од 136 *gr* од прве врсте са 68 *gr* од друге врсте, добија 14-токаратно злато. Ако пак дода још 204 *gr* од друге врсте, добија 16-токаратно злато. Од колико карата је свака врста злата? (12; 18)

35) Два тела чија је раздаљина 42 *m* крећу се једновремено и сталном брзином. Она ће се срести после 6 сек. ако се крећу једно другоме у сусрет, а стижу се после 14 сек. ако се крећу једно за другим. Наћи њихове брзине. (5 *m*; 2 *m*)

36) Два тела крећу се из тачака *A* и *B*, чије је отстојање 117 *m*. Тело из *B* креће се 5 сек. раније од тела *A*. Ако се из тела крећу једно за

другим, сустижу се после 27 сек. (од поласка тела из A); ако се крећу једно другоме у сусрет, сретну се после 3 сек. Наћи брзину сваког тела. (15 *m*; 9 *m*)

37) Два тела крећу се по обиму круга дужине 380 *m* из исте тачке. Сустижу се сваких 76 сек. ако се крећу једно за другим, а после 20 сек. ако се крећу једно другоме у сусрет. Наћи њихове брзине. (12 *m*; 7 *m*)

38 Два тела крећу се по обиму круга дужине 600 *m*, а почињу кретање из исте тачке једно за другим. Прво, које има мању брзину, почиње да се креће 6 сек. раније. Ако се првипут сустигну после 16 сек. од поласка другог тела, а по другипут после 3 мин. и 20 сек., какве су њихове брзине? (8 *m*; 11 *m*)

39) Из места A и B полазе два тела једно другоме у сусрет и крећу се брзинама од 11 и 7 *m* у секунди. Ако тело из B почиње покрет неколико секунди раније, онда би се тела срела после 12 сек. од поласка тела из A; напротив, ако тело из B почиње покрет исто толико секунада доцније, онда би се срела после 19 секунада. Нађи отстојање AB и колико секунада би требало тело из B да почне покрет раније или доцније? (9 *сек.*; $AB = 279$ *m*)

40) Један суд који хвата 132 *л*. пуни се са две цеви. Ако се прва цев отвори 4 а друга 3 минута, онда у суд уђе течности 74 *л*. Ако се пак остави отворена прва пев 4,5 а друга 5 минута, онда у суд уђе течности 93 *л*. Колико литара течности пролази кроз сваку цев за 1 минут и колико је минута потребно да обе цеви, једновремено отворене, пуне цео суд? (14 *л*; 6 *л*.; 6,6 мин.)

41) Један басен може да се напуни кроз две цеви на два начина: или ако су отворене обе цеви 6 часова, или ако се остави отворена прва цев 7 часова и друга 4 часа. За које време свака цев сама пуни басен? (9 *ч*.; 18 *ч*.)

42) Два радника могу да сврше известан посао за 7,5 дана. Први је радник радио 2,5 дана, а други 4 дана и извршили су $\frac{11}{24}$ од целог посла. За колико дана може да сврши сваки радник тај посао? (20 д.; 12 д.)

43) Два радника могу да сврше известан посао за 12 дана. После заједничког рада од 5 дана, један се радник разболи, те је други сам продужио посао и завршио га је после 17,5 дана. За колико дана може да сврши тај посао сваки радник? (20 д.; 30 д.)

44) Ако основу правоугаоника увећамо са 2 *m* а висину смањимо са 5 *m*, онда му се површина смањује са 39 m^2; ако пак основу увећамо са 5 *m* а висину смањимо са 2 *m*, онда се површина увећава за 12 m^2. Наћи стране тога правоугаоника. (9 *m*; 8 *m*)

45) Висина једног трапеза је 6 *m* и површина му је 96 m^2. Једна од паралелних страна је за 4 *m* већа од друге. Нађи паралелне стране тога трапеза. (18 *m*, 14 *m*)

46) Обим правоуглог троугла је 36 *cm*, а једна од катета 12 *cm*. Наћи хипотенузу и другу катету. (15 *cm*; 9 *cm*).

47) Једна од катета правоуглог троугла је 9 *cm*, а хипотенуза му је за 1 *cm* већа од друге катете. Нађи хипотенузу и другу катету. (41 *cm*; 40 *cm*)

48) Две тетиве једног круга дужине 26 и 30 *cm* секу се тако да је збир мањих њихових делова 14 *cm*. Наћи те њихове делове. (6 и 8 *cm*)

49) Две тетиве једног круга секу се тако да су им већи делови 12 и 8 *cm* а збир мањих делова 5 *cm*. Наћи дужине ових тетива. (14 *cm*; 11 *cm*)

50) Дужине двају правоугаоника имају се као 7 : 9 а ширине као 3 : 4. Површина другога правоугаоника је за 25 m^2 већа од површине првога. Наћи површину сваког правоугаоника. (35 m^2; 60 m^2)

51) Збир трију бројева је 36. Троструки први број је за 4 мањи од збира друга два, а други број је за 6 већи од разлике трећег и првог броја. Наћи та три броја. (8; 13; 15)

52) Један трговац има три врсте кафе. 2 *kg* од прве, 5 *kg* од друге и 10 *kg* од треће стају 230 дин; 3 *kg* од прве, 4 *kg* од друге и 6 *kg* од треће стају 181 дин.; 4 *kg* од прве, 3 *kg* од друге и 1 *kg* од треће стају 120 дин.; колико динара стаје један *kg* од сваке врсте? (15; 16; 12).

53) Збир трију бројева износи 84. Ако се подели други број првим, добија се 3 за количник и 2 за остатак; ако се трећи број подели другим, добија се 2 за количник и 8 за остатак. Наћи та три броја. (7; 23; 54).

54) Један суд од 360 л. пуни се кроз три цеви. Ако се остави отворена прва цев 15 мин., друга 12 мин. и трећа 8 мин., онда у суд уђе течности 259 л. Ако се остави отворена прва цев 6 мин., друга 5 мин. а трећа 3 мин., онда уђе течности 103 л. Ако се најзад остави отворена прва цев 3 мин., друга 7 мин. и трећа 4 мин., онда уђе течности 115 л. Колико литара течности протиче кроз сваку цев за један минут и за колико се минута пуни суд кроз све три цеви заједно? (5 л.; 8 л.; 11 л.; 15 мин.)

55) Два курира путују један другоме у сусрет из места *A* и *B*. Курир из *B* полази $^1/_2$ ч. раније од курира из *A* и сретну се после 4 ч (од поласка курира из *A*). Ако курир из *B* полази $1^1/_2$ ч. доцније (уместо раније), срели би се после $5^1/_3$ ч. (од поласка курира из *A*). Ако би пошли једновремено, али с тим да сваки прелази 1,5 *Km* више на час, они би се срели после $3^1/_2$ ч. Наћи отстојање *AB* и часовне брзине курира. (4,2; 8,4; $AB = 54,6$ *Km*)

56) Три ортака поделили су годишњу добит тако, да су други и трећи добили заједно $^3/_5$ од добити првог; разлика делова првог и трећег је за 200 већа од удвојеног дела другога; збир делова првог и другог је за 400 дин. већи од шестоструког дела трећег. Колико је сваки добио? (9000; 3400; 2000)

57) Збир цифара једног троцифреног броја је 12. Ако томе броју додамо 297, добијамо нов троцифрени број од истих цифара али у обрнутом реду. Наћи тај број, кад се зна да је цифра стотина за 3 већа од цифре десетица. (417)

58) Отац, кћи и син имају укупно 78 година. Пре 5 година збир година оца и сина био је 8 пута већи од година кћери; после 5 година, збир година кћери и сина биће за 9 година мањи од година очевих. Колико година има сваки? (46; 20; 12)

III. Матурски проблеми из једначина првог степена

(За домаће вежбање ученика)

1) Једно лице купило је ливаду, виноград и њиву. За ливаду је платило $\frac{2}{3}$ виноградове цене мање 119 динара. Њивина цена је за 500 динара већа од виноградове. После неког времена прода ливаду и заради на њој $\frac{1}{7}$ њене куповне цене; прода затим и њиву и заради на њој $\frac{2}{25}$ њене куповне цене. Ове две добити су једнаке. Колико вреди сваки комад земље? (Београд, II мушка, 1907)

2) Из два места, која су удаљена 81 Km, полазе два пријатеља A и B један другом у сусрет. Ако A пође 3 часа раније него B, тада ће се срести после 7 часова од поласка лица B. Ако B пође 3 часа раније, они ће се сусрести после 8 часова од поласка лица A. Колико километара прелази на час сваки од њих? (Ниш, 1905)

3) Три зидара A, B и C имају да озидају зид V. A и B радећи заједно свршили би зид за 12 дана, B и C заједно би били готови за 20 дана, и најзад, кад би A и C на њему радили, изидали би га за 15 дана. За колико би дана сваки посебице озидао тај зид, и за колико у друштву? (Крушевац, 1898)

4) Деца наслеђују по очевој смрти имовину овако: прво дете узима 300 динара и $\frac{1}{10}$ остатка, друго узима 600 динара и $\frac{1}{10}$ новог остатка, треће узима за овим 900 динара и $\frac{1}{10}$ новог остатка итд. узима свако и добија увек по 300 динара више и $\frac{1}{10}$ новог остатка. Сва су деца добила на тај начин једнаке делове. Колика је била имовина, колики је број деце и колики је део сваког детета? (Београд, I мушка, 1908)

5) Два тела A и B крећу се из тачке M у супротним правцима. Тело B прелази за свака три секунда 2 m више но тело A, и ма да се за 2 минута доцније почело да креће од тела A, ипак је после 10 минута од свог поласка прешло пут за 160 m дужи од пута који је прешло тело A. С којом се брзином крећу оба тела? (Београд, I мушка, 1912)

6) Базен цилиндричног облика пуни се кроз једну цев за 2 часа. Пун базен, кад не протиче вода, испразни се кроз лулу на дну за 4 часа, а до пола би се испразнио за $5^{1}/_{2}$ часова кроз лулу која се налази у средини. За које ће се време напунити празан базен, кад су отворене обе луле? (Београд, III мушка, 1911)

7) По периферији једног круга крећу се два тела која се мимоилазе сваких 30 секунада ако се крећу у истом смислу, а сретају се сваких 10 секунада ако се крећу у супротном смислу. Ако су у другом случају још и 30 m удаљена једно од другога, то ће после 3 секунде бити поново 30 m удаљена. Колике су брзине тих тела, а колика периферија кружна? (Крагујевац, 1895)

8) Неки је троцифрен број такав да, кад се напише други број његовим цифрама обрнутим редом, добија се број за 198 већи од њега, а уз то разлика између цифре јединица и десетица чини 2, а збир цифара стотина и десетица једнак је цифри јединица. Који је тај број? (Крагујевац, 1904)

9) Збир цифара једног четвороцифреног броја износи 18. Цифра јединица чини половину збира осталих цифара, а цифра хиљада је половина цифре јединица. Најпосле, кад се томе броју дода 3087 добива се број коме су цифре обрнутог реда према цифрама траженог броја. Који је то број? (Крагујевац, 1911)

10) Два дечака трче за опкладу од места А ка месту В и почињу трчање у исто време. Први прелази 2,5 m а други 2,1 m у секунди. Први, пошто брже трчи, стигне пре у В и одмах се враћа, трчећи истом брзином у ком ће се случају срести с другим дечаком. После колико ће се секунди срести оба дечака, кад се време рачуна од поласка из А и кад су оба места удаљена 253 метра? (Београд, Реалка, 1905)

11) Један економ спремио је хране својој стоци за неко време. Кад би продао 75 волова, храна би му трајала 20 дана дуже; а кад би докупио 100 волова, храна би нестала 15 дана раније. Колико је било грла и за колико је дана била храна спремљена? (Београд, I мушка 1902)

12) Једном велосипедисту, који прелази 96 Km дневно, поквари се точак, те пешице доврши свој пут, прелазећи по 32 Km дневно. Да је ишао само на точку, прешао би 384 Km више, а да је само пешачио, прешао би 576 Km мање. Пита се, колико је дана путовао и колико је километара прешао? (Београд, I мушка 1906)

13) Неко се задужи и купи имање мислећи да ће га одужити за 4 године приходом са самог имања. Доцније му се учини да му треба 6 година па да приходом одужи дуг. Стварни је пак приход $^1/_5$ оба предвиђена прихода. За које ће време одужити дуг (прост интерес по $3^0/_0$)? (Београд, III мушка, 1907)

14) Једно лице узме на зајам 21000 дин. за 2 године. Дуг је исплатио у два маха по 12100 дин., на крају прве и на крају друге године. Израчунати проценат. (Београд, III женска, 1932)

15) У трошку од 1500 дин. суделују тројица, и то: према платама (управно!), према броју деце (обрнуто!) и према старости (обрнуто!). Колико пада трошак на свакога ако је: а) плата А = 4000, В = 3000, С = 1800; в) деца А = 4, В = 5, С = 2; с) године старости А = 35, В = 40 и С = 30. (Карловац, 1933)

16) Збир цифара четвороцифреног броја је 20. Цифра јединица чини $\frac{2}{3}$ збира осталих цифара, а цифра десетица трипут је већа од цифре тисућице; кад се траженом броју дода 6174, добија се број коме су цифре у обрнутом реду. Који је то број? (Загреб, II мушка, 1932)

17) Ако се хоће да поређа известан број сребрних динара један до другога у облику квадрата, онда недостаје 25 комада, а ако се страна квадратова смањи са два комада, онда претиче 31 комад. Колико је било динара? (Београд, I женска, 1923)

18) Места А и В, удаљена су 48 Km. Из А пође у В један пешак у исто време када и један коњаник из В у А. Они се сретну на три часа после поласка, а када је коњаник стигао у А, пешак је имао да путује још 8 часова до В. Колико километара је прелазио на сат коњаник, а колико пешак? (Београд, III мушка, 1929)

19) Један баштован има имање од 1000 воћака. Ако воћке сади у редове тако да у сваки ред дође по 37 воћака, тада му преостаје 8 воћака;

ако сади тако да у сваки ред дође по 43 воћке, тада му преостаје 11 воћака. Колико је воћака имао? (Нови Сад, Мушка, 1929)

20) Из два места која су једно од другог удаљена 2 Km крену бициклисти A и B истим смислом; ако крену истовремено, A достигне B-а након 50 минута, а ако B крене 5 минута раније, достигне га A тек након 75 минута (рачунајући од поласка A). Које су минутне брзине бициклиста? (Карловац, 1930)

IV. Неједначине првог степена

§ 82. **Особине неједначина.** Под *неједначином* разумемо два израза везана знаком $>$ или $<$. Тако, $A > B$ или $B < A$ јесу неједначине. И код неједначине, као и код једначине, разликујемо *леву* и *десну* страну. Изрази који дају неједначину јесу њене стране. Неједначине делимо на *условне* и *безусловне*. *Безусловна је она неједначина која је очевидна сама по себи, а тачна је за ма коју посебну вредност њених општих бројева.* Такве су неједначине:

$$1)\ 8 > 5;\ 2)\ 3 < 7;\ \text{и}\ 3)\ a^2 + b^2 > a^2 - b^2$$

Условна (погодбена) нејадначина тачна је само за извесне вредности општих бројева, који се налазе у њој. Тако, $3x + 2 > 8 - x$ је условна неједначина, јер је тачна само тада ако x има вредност већу од $1^1/_2$. Ова неједначина није тачна ако x има вредност 1,5 или мању од 1,5.

Погодбене неједначине, као и једначине, могу бити, с обзиром на број непознатих, са *једном, две, три* и више непознатих количина, а с обзиром на степен непознатих, 1-ог, 2-ог, 3-ег и вишег степена. Две погодбене неједначине биће *еквивалентне*, ако имају исте непознате количине и иста решења.

Свака неједначина остаје опет неједначина, ако се на обема њеним странама изврше исте рачунске операције, на основу аксиоме: ***кад се на неједнаким количинама изврше исте промене, биће и резултати неједнаки.***

То значи да неједначина остаје опет неједначина, ако обема странама додамо исти број (израз); ако од обеју страна одузмемо исти број; ако обе стране помножимо или поделимо истим бројем; ако обе стране степенујемо или коренујемо једним истим бројем. При вршењу ових операција у већини случајева наилазимо на неједначину истог смисла неједнакости, тј. на еквивалентну неједначину. Али, има случајева, особито при операцији с негативним бројевима, када добијамо неједнакост супротног знака неједнакости. Ове особине неједначина исказане су овим правилима:

1) *Ако обема странама једне неједначине додамо, или од обеју страна одузмемо, један исти број (израз), добијамо еквивалентну неједначину истог знака неједнакости.* Заиста, ако имамо неједначину:

$$A > B \cdots (1)$$

и ако њеним странима додамо C, или од обеју страна одузмемо C, добијемо неједначину:

$$A \pm C > B \pm C \cdots (2)$$

која је еквивалентна с неједначином (1), јер су и неједначина (1) и неједначина (2) еквивалентне с неједначином $A - B > 0$. Из неједначине (1) ово је очевидно, а из неједначине (2) ово увиђамо када ту неједначину напишемо у облику:

$A \pm C - (B \pm C) > 0$ или $A \pm C - B \mp C > 0$, или $A - B > 0$.

На основу ове особине једне неједначине, може се ма који њен члан пребацити с једне стране на другу, кад му се промени само знак.

Тако, из неједначине $5x - 2 > x + 4$ имамо $5x - x > 2 + 4$, или $4x > 6$.

2) *Ако обе стране једне неједначине помножимо или поделимо једним истим* ***позитивним*** *бројем, добијамо еквивалентну неједначину истог знака неједнакости.*

Заиста, ако имамо неједначину $A > B$, или $A - B > 0(1)$, па ако обе њене стране помножимо са m, добијамо:

$$m(A - B) > 0 \cdots (2),$$

која је еквивалентна с датом неједначином (1), јер су и m и $A - B$ позитивни, те је и њихов производ позитиван. Тако исто, ако неједначину (1) поделимо позитивним бројем n, добијамо еквивалентну неједначину

$$\frac{A - B}{n} > 0 \cdots (3),$$

јер су и $A - B$ и n позитивни, те је и њихов количник позитиван и као такав већи од нуле.

3) *Ако обе стране једне неједначине помножимо или поделимо једним истим* ***негативним*** *бројем, добијамо неједначину супротног знака неједнакости.*

Заиста, ако имамо неједначину $A > B$, или $A - B > 0(1)$, па ако обе њене стране помножимо негативним бројем p, добијамо неједначину:

$$p\,(A - B) < 0 \cdots (2)$$

која је супротног знака неједнакости из тога разлога што су чинитељи p и $A - B$ супротнога знака, па је њихов производ негативан, тј. мањи од нуле. Тако исто, ако обе стране неједначине (1) поделимо негативним бројем p, добијамо неједначину $\frac{A-B}{p} < 0 \cdots (3)$, јер је $A-B$ позитиван а p негативан, па је њихов количник $\frac{A-B}{p}$ негативан, тј. мањи од нуле.

На основу друге и треће особине једне неједначине, можемо се ослободити њених разломљених чланова, ако обе њене стране помножимо њиховим заједничким именитељем. Тако исто, можемо се ослободити коефицијента уз непознату количину, ако обе стране неједначине поделимо тим коефицијентом. Тако из неједначине $5x - \frac{2}{3} > x + \frac{5}{7}$, добијамо множењем страна са 21, неједначину:

$$105x - 14 > 21x + 15,$$

која нема разломљених чланова. Тако исто, неједначину $5x > 10$ претварамо у неједначину $x > 2$, ако обе стране поделимо са 5.

Напомена. О степеновању и кореновању неједначина биће говора у наредном одељку.

§ 83) **Решавање неједначина првог степена с једном непознатом.** Да бисмо решили једну неједначину првог степена с једном непознатом, тј. да бисмо одредили границе вредности непознате количине до које може она доћи, да би била неједначина задовољена, поступамо као и код решавања једначина. *И овде се, на основу правила из претходног параграфа, најпре ослобођавамо разломљених чланова, затим заграда, потом вршимо пребацивање познатих чланова на једну а непознатих на другу страну, вршимо свођење једноимених чланова и најзад ослобођавамо се коефицијента уз непознату.*

Разуме се, све ове радње вршимо код најсложенијих случајева. Код простијих примера број ових радња је мањи.

Примери:

1) Решити неједначину $\frac{3x-1}{4} - \frac{3(x-2)}{8} - 1 > \frac{5-3x}{2}$.

Множењем заједничким именитељем 8 добијамо

$$2(3x - 1) - 3(x - 2) - 8 > 4(5 - 3x).$$

Ако на обема странама извршимо означене радње, добијамо неједначину:

$$6x - 2 - 3x + 6 - 8 > 20 - 12x.$$

Пребацивањем чланова добијамо:

$$6x - 3x + 12x > 20 + 2 - 6 + 8,$$

а свођењем $15x > 24$. Дељењем са 15 добијамо:

$$x > \frac{24}{15}, \text{ или } x > 1\frac{3}{5}.$$

Дакле, неједначина биће само тада задовољена, ако x има сваку вредност већу од $1^3/_5$. Ова неједначина биће нетачна ако је $x = 1\frac{3}{5}$ или $x < 1\frac{3}{5}$.

2) Решити неједначину $2x - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} > 3x - \frac{1}{3} + \frac{x}{6}$.

Ослобођавањем именитеља добијамо:

$$12x - 2x + 3 > 18x - 2 + x,$$

пребацивањем чланова добијамо:

$$12x - 2x - 18x - x > -3 - 2,$$

свођењем добијамо:

$$-9x > -5.$$

Множењем са -1 добијамо:

$$9x < 5,$$

а ослобођавањем коефицијента 9 имамо

$$x < \frac{5}{9}.$$

Напомена. Ако се непозната налази у именитељу и знак заједничког именитеља је неизвестан, онда не смемо се ослобођавати именитеља множењем обеју страна неједначине заједничким именитељем, већ у овоме случају доводимо све чланове неједначине најпре на заједнички именитељ, а затим их све пребацујемо на леву страну. Тиме неједначину доводимо на облик $\frac{A}{B} > 0$, или $\frac{A}{B} < 0 \ldots (1)$.

Ма какав био знак именитеља B, његов квадрат (B^2) биће позитиван. Множењем неједначине (1) са B^2, на основу другог правила претходног параграфа, добијамо еквивалентну неједначину

$$AB > 0, \text{ или } AB < 0.$$

3) Решити неједначину $\frac{2x}{x+1} > 2 + \frac{3}{x+1}$.

Довођењем свих чланова ове неједначине на заједнички именитељ добијамо

$$\frac{2x}{x+1} > \frac{2x+2}{x+1} + \frac{3}{x+1}.$$

Ако све ове чланове пребацимо на леву страну и извршимо свођење, добијамо

$$\frac{2x-2x-2-3}{x+1} > 0, \text{ или } \frac{-5}{x+5} > 0, \text{ или } \frac{5}{x+1} < 0.$$

Ако ову неједначину помножимо са $(x+1)^2$, добијамо еквивалентну неједначину

$$5(x+1) < 0, \text{ или } x+1 < 0, \text{ а одавде } x < -1.$$

Дакле, дата неједначиоа биће тачна само тада, ако x има вредност мању од -1, тј. ако је $x = -2, -3, -4$, итд.

Примери за вежбање:

а) Реши неједначине:

1) $x + 3 > 2 - 3x$; 2) $4(x-1) > 2 + 7x$;

3) $5x + 3 > 3x - 7$; 4) $\frac{x}{2} + 1 < \frac{7x}{3} - 8$;

5) $(x-1)(x-2) < (x+1)(x+3)$;

6) $(x-1)(x-2)(x-3) - x^2(x-6) > 0$;

7) $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3$; 8) $\frac{37-2x}{3} + 9 < \frac{3x-8}{4} - x$;

9) $(x-1)^2 + 7 > (x+4)^2$; 10) $\frac{7-6x}{2} + 12 < \frac{8x+1}{3} - 10x$.

11) Наћи целе вредности x-*а* које задовољавају једновремено неједначине:

$$3x + \frac{5}{21} < 2x + 1 \text{ и } 4x + \frac{3}{2} > 2x - 7.$$

Наћи вредности x-*а* које задовољавају једновремено неједначине:

12) $5x - \frac{2}{3} > \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ и $2(x-4) > \frac{3x-14}{2}$;

13) $8x - 5 > \frac{15x}{2} - 4$ и $2x - 3 > \frac{5x}{2} - \frac{3}{8}$;

14) $6x + \frac{5}{7} > 4x + 7$ и $4x + \frac{3}{2} > 2x + 25$;

15) $15x - \frac{1}{3} > 2(x+1)$ и $4(x-4) < 3x - 14$;

b) За које ће вредности x-*а* бити позитивни ови изрази:

16) $2x - 16$; 17) $5 - 3x$; 18) $\frac{3x}{8} - 4$;

19) $\frac{5-x}{8} + \frac{3+2x}{4}$; 20) $\frac{12+x}{4} - \frac{x}{5} - 1$;

21) $\frac{2x-3}{2} - 4x + 2$; 22) $\frac{6x-7}{5} - \frac{x+3}{15}$.

c) За које ће вредности x-*а* бити негативни ови изрази:

23) $3x + 15$; 24) $7 - 14x$; 25) $5 - \frac{2}{3}x$;

26) $\frac{x-2}{3} + x$; 27) $\frac{3x-5}{2} - \frac{2x-1}{3} + 2$;

28) $\frac{4-5x}{6} + \frac{3-4x}{3} - 5$.

§ 84) **Везе између једначина и неједначина.** Ове везе могу бити између двеју неједначина, или између једне једначине и једне неједначине. Као и код једначина, тако и код неједначина, можемо да вршимо њихово сабирање, одузимање, множење и дељење.

а) *Везе између једначина и неједначина.* Ове везе исказане су помоћу следећа четири правила, која се оснивају на правилима § 82.

1) *Ако се странама једне неједначине додаду или одузму једноимене стране једне једначине, добијамо неједначину истог смисла неједнакости.*

Тако, сабирањем неједначине $a \gtrless b$ с једначином $c = d$, добијамо:

$$a + c \gtrless b + d;$$

одузимањем једначине $c = d$ од неједначине $a \gtrless b$, добијамо:

$$a - c \gtrless b - d.$$

Посебни примери: 1). Из $10 > 7$ и $15 = 15$ имамо сабирањем: $10 + 15 > 7 + 15$, или $25 > 22$; одузимањем: $10 - 15 > 7 - 15$, или $-5 > -8$. 2) Из $5 < 8$ и $12 = 12$ имамо сабирањем: $5 + 12 < 8 + 12$, или $17 < 20$; одузимањем: $5 - 12 < 8 - 12$, или $-7 < -4$.

2) *Ако стране једне неједначине помножимо или поделимо једноименим странама једне једначине, добијамо неједначину истог знака неједнакости.*

Тако, из $a \gtrless b$ и $c = d$, имамо множењем: $ac \gtrless bd$, а дељењем: $\frac{a}{c} \gtrless \frac{b}{d}$.

Посебни примери: — 1) Из $15 > 10$ и $5 = 5$, добијамо множењем: $75 > 50$, а дељењем: $8 > 2$. 2) Из $18 < 24$ и $6 = 6$ имамо множењем: $108 < 144$, а дељењем: $3 < 4$.

Напомена. Ако су обе стране једначине негативне, онда их претходно претварамо у позитивне множењем са -1.

3) *Ако стране једне једначине саберемо или помножимо једноименим странама једне неједначине, добијамо неједначину истог смисла неједнакости.*

Тако, из $a = b$ и $c \gtrless d$, имамо сабирањем: $a + c \gtrless b + d$, а множењем: $ac \gtrless bd$.

Посебни примери. — 1) Из $8 = 8$ и $18 > 12$ имамо сабирањем: $26 > 20$, а множењем: $144 > 96$. 2) Из $10 = 10$ и $6 < 9$, имамо сабирањем: $16 < 19$, а множењем: $60 < 90$.

4) *Ако од страна једне једначине одузмемо једноимене стране једне неједначине, или стране једначине поделимо јед-*

ноименим странама неједначине, добијамо неједначину супротног знака неједнакости.

Тако, из $a = b$ и $c \gtrless d$, имамо одузимањем:

$$a - c \lessgtr b - d, \text{ а дељењем: } \frac{a}{c} \lessgtr \frac{b}{d}.$$

Посебни примери. — 1) Из $10 = 10$ и $15 > 12$, имамо одузимањем: $10 - 15 < 10 - 12$, или $-5 < -2$, а дељењем $\frac{10}{15} < \frac{10}{12}$, или $\frac{2}{5} < \frac{5}{6}$. 2) Из $10 = 10$ и $4 < 6$, имамо одузимањем: $10 - 4 > 10 - 6$, или $6 > 4$, а дељењем $\frac{10}{4} > \frac{10}{6}$, или $\frac{5}{2} > \frac{5}{3}$.

b) ***Везе између самих неједначина.*** Ове везе можемо исказати помоћу следећа четири правила:

1) *Сабирањем двеју неједначина истог смисла добијамо неједначину истог смисла неједнакости.*

Тако, из $a > b$ и $c > d$ биће $a + c > b + d$, јер је из прве неједначине разлика $a - b > 0$ (тј. позитивна), а из друге неједначине такође је $c - d > 0$, па и њихов збир $(a - b) + (c - d)$ је позитиван, тј. $a - b + c - d > 0$, или $a + c > b + d$.

Тако исто, из $a < b$ и $c < d$ биће $a + c < b + d$, јер су у овом случају разлике $a - b$ и $c - d$ негативне, па и њихов збир $(a + b) + (c - d)$ је негативан, тј. $a - b + c - d < 0$, или $a + c < b + d$.

Посебни примери:

$$1)\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 8 > 5 \\ 15 > 7 \end{array}\right\} + \\ \hline 23 > 12 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 12 < 15 \\ 4 < 7 \end{array}\right\} + \\ \hline 16 < 22 \end{array}$$

$$3)\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} -3 > -5 \\ 8 > 6 \end{array}\right\} + \\ \hline 5 > 1 \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} -8 < -5 \\ -12 < -7 \end{array}\right\} + \\ \hline -20 < -12 \end{array}$$

2) За сабирање неједначина различитог смисла и за одузимање неједначина истог смисла не постоји одређено правило, већ то зависи од самих примера.

Посебни примери

I) *За сабирање*:

$$1)\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 8 < 15 \\ 4 > 2 \end{array}\right\} + \\ \hline 12 < 17 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 8 < 12 \\ 3 > -1 \end{array}\right\} + \\ \hline 11 = 11 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 7 > -9 \\ 4 < 6 \end{array}\right\} + \\ \hline 11 > -3 \end{array}$$

$$4)\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} -5 > -8 \\ -4 < -2 \end{array}\right\} + \\ \hline -9 > -10 \end{array} \qquad 5)\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} -5 > -8 \\ -4 < +2 \end{array}\right\} + \\ \hline -9 < -6 \end{array}$$

II) *За одузимање*:

$$1)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}8>6\\5>3\end{array}\right\}-\\\hline 3=3\end{array}\qquad 2)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}12>7\\4>1\end{array}\right\}-\\\hline 8>6\end{array}\qquad 3)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}10>7\\6>1\end{array}\right\}-\\\hline 4<6\end{array}$$

$$4)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}10>6\\7<10\end{array}\right\}-\\\hline 3>-4\end{array}\qquad 5)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}5<8\\12>7\end{array}\right\}-\\\hline -7<1\end{array}$$

3) *Множењем једноимених страна двеју неједначина истог смисла, али чије су стране позитивне, добијамо неједначину истог смисла неједнакости.* Тако из $a>b$ и $c>d$, биће $ac>bd$, а из $m<n$ и $p<q$ биће $mp<nq$, јер су код првих неједначина разлике $a-b$ и $c-d$ позитивне, а код других су разлике $m-n$ и $p-q$ негативне, те су њихови производи позитивни. Разлика $ac-bd$ неједначине $ac>bd$ већа је од нуле, тј. она је позитивна, јер се да написати:

$$ac-bd=(a-b)c+(c-d)b.$$

Па како су разлике $a-b$ и $c-d$ позитивне, а c и b позитивни бројеви, то је $(a-b)c+(c-d)b>0$, или $ac-bc+bc-bd>0$ или $ac-bd>0$, или $ac>bd$.

Разлика $mp-nq$ неједначине $mp<nq$ је негативна, јер се да̂ написати:

$$mp-nq=(m-n)p+(p-q)n.$$

Па како су у овом случају разлике $m-n$ и $p-q$ негативне, а p и n позитивни бројеви, то је $(m-n)p+(p-q)n<0$, или $mp-np+np-nq<0$, или $mp-nq<0$, или $mp<nq$.

Напомена. За множење неједначина различитог смисла, не постоји одређено правило, већ резултат зависи од самих примера.

Примери:

$$1)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}5>3\\8<12\end{array}\right\}\cdot\\\hline 40>46\end{array}\qquad 2)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}5>3\\8<15\end{array}\right\}\cdot\\\hline 40<45\end{array}\qquad 3)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}4>2\\5<10\end{array}\right\}\cdot\\\hline 20=20\end{array}$$

$$4)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}8<10\\-3>-8\end{array}\right\}\cdot\\\hline -24>-80\end{array}\qquad 5)\ \begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}10<15\\4>-5\end{array}\right\}\cdot\\\hline 40>-75\end{array}$$

4) *Дељењем неједначина супротног смисла, а чије су стране позитивне, добијамо неједначину оног смисла неједнакости ког је смисла дељеник.* Тако дељењем $a>b$ и $c<d$, добијамо $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$, а дељењем $a<b$ и $c>d$, добијамо $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$. (Зашто?)

Посебни примери:

$$1)\ \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 15 > 8 \\ 3 < 4 \end{array}\right\}: \\ \hline 5 > 2 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 15 < 24 \\ 5 > 3 \end{array}\right\}: \\ \hline 3 < 8 \end{array}$$

Напомена. За дељење неједначина истог смисла не постоји одређено правило, већ резултат зависи од самих примера.

Примери:

$$1)\ \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 8 > 6 \\ 4 > 3 \end{array}\right\}: \\ \hline 2 = 2 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 4 < 12 \\ 2 < 6 \end{array}\right\}: \\ \hline 2 = 2 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 12 < 15 \\ 3 < 5 \end{array}\right\}: \\ \hline 4 > 3 \end{array}$$

$$4)\ \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 18 > 10 \\ 2 > -5 \end{array}\right\}: \\ \hline 9 > -2 \end{array} \qquad 5)\ \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} -18 < 10 \\ -3 < 5 \end{array}\right\}: \\ \hline 6 > 2 \end{array}$$

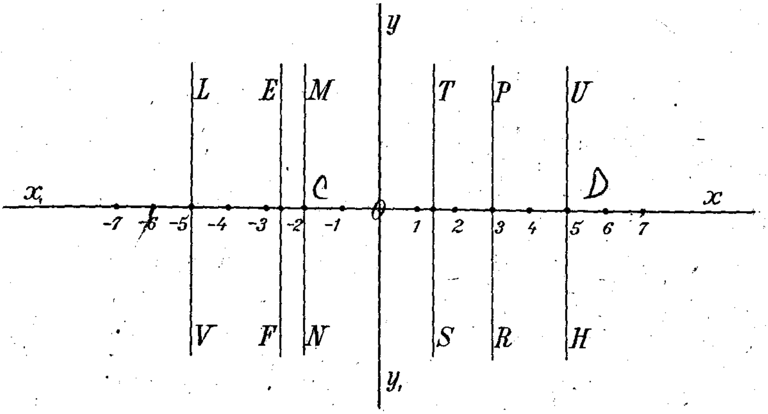
§ 85) **Графичко решавање неједначина првог степена са једном и две непознате**

а) Видели смо код § 78 да једначине првог степена било са једном, било са две непознате ($ax + c = 0$, $by + c = 0$ и $ax + by + c = 0$) претстављају у геометрији увек праве линије, и то:

1) једначина $ax + c = 0$ претставља праву паралелну са ординатном осовином, а у случају $x = 0$ саму ординатну осовину; 2) једначина $by + c = 0$ претставља праву паралелну са апсцисном осовином, а у случају $y = 0$ саму апсцисну осовину; и 3) једначина $ax + by + c = 0$ претставља праву која сече обе координатне осовине и пролази кроз три квадранта, осим у случају $c = 0$, када пролази само кроз два квадранта, пошто сече координатне осовине у координатном почетку.

b) Неједначине: $ax \pm c \gtrless 0$ и $by \pm c \gtrless 0$ не претстављају у геометрији паралелне праве са ординатном, односно са апсцисном осовином, већ једино делове ових осовина које се налазе с леве или десне стране праве чија је једначина $ax \pm c = 0$, или с горње или с доње стране праве чија је једначина $by \pm c = 0$, о чему се лако уверавамо из следећих примера.

Пример 1. Неједначина $x + 2 > 0$, или $x > -2$, претставља део апсцисне осовине с десне стране праве MN (сл. 11), чија је једначина $x + 2 = 0$, јер само координате тачака дела AX, осим координате тачке A, задовољавају неједначину $x + 2 > 0$, или $x > -2$. Координате дела апцисне осовине AX_1 не задовољавају ову неједначину, пошто су све апсцисе овог дела мање а не веће од -2.



Сл. 11

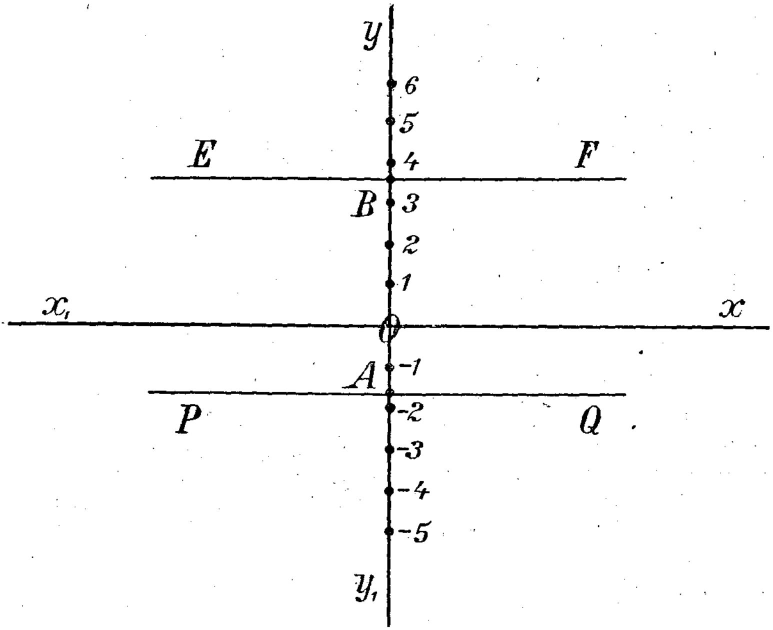
Пример 2. Неједначина $x - 3 > 0$, или $x > 3$, претставља део апсцисне осовине опет с десне стране праве PR (сл. 11), чија је једначина $\boldsymbol{x - 3 = 0}$, или $x = 3$, јер само координате тачака дела BX, осим координате тачке B, задовољавају дату неједначину.

Пример 3. Неједначина $2x + 5 < 0$, или $x < -\frac{5}{2}$, претставља део апсцисне осовине с леве стране праве EF, чија је једначина $\boldsymbol{2x + 5 = 0}$, јер само координате тачака дела QX_1, осим координате тачке Q, задовољавају дату неједначину.

Пример 4. Неједначина $\boldsymbol{2x - 3 < 0}$, или $x < \frac{3}{2}$, претставља део апсцисне осовине такође с леве стране праве TS (сл. 11), чија је једначина $2x - 3 = 0$, јер само координате тачака дела KX_1, осим координате тачке K, задовољавају дату неједначину.

Напомена. Ако је дат један систем од више неједначина исте непознате x, па се тражи његово решење, онда налазимо најпре понаособ решења свих неједначина система, а затим узимамо за решења система само координате тачака оног дела апсцисне осовине које задовољавају све неједначине система. Тако, за систем $x + 5 > 0$ и $x - 5 < 0$ је $x > -5$ и $x < 5$, или $-5 < x < 5$. Тада координате тачака дела CD, између правих LV и UH (сл. 11), чије су једначине $x = -5$ и $x = 5$, задовољавају обе наједначине датог система.

Пример 5. Неједначина $3y + 5 > 0$, или $y > -\frac{5}{3}$, претставља део ординатне осовине изнад праве PQ (сл. 12), чија је једначина $3y+5=0$, јер само координате тачака дела AY осим координате тачке A, задовољавају дату неједначину.



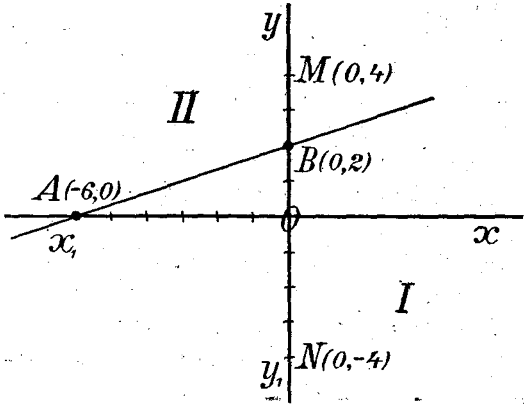
Сл. 12

Пример 6. Неједначина $2y-7<0$, или $y<\frac{7}{2}$, претставља део ординатне осовине испод праве EF (сл. 12), чија је једначина $2y-7=0$, јер само координате тачака дела BY_1, осим координате тачке B, задовољавају дату неједначину.

Координате тачака дела AB (сл. 12), осим координата крајњих тачака A и B, задовољавају обе неједначине система: $3y+5>0$ и $2x-7<0$, те су те тачке решења овог система.

с) Међутим, неједначине првог степена са две непознате облика: $ax\pm by\pm c\gtrless 0$, или $ax\pm by\gtrless 0$ ни у ком случају не претстављају у геометрији праве линије. Непознате x и y у тим неједначинама јесу координате тачака једне од двеју области равнине, десне или леве, које ствара права $ax\pm by\pm c=0$, односно права $ax\pm by=0$, о чему се уверавамо из следећих примера.

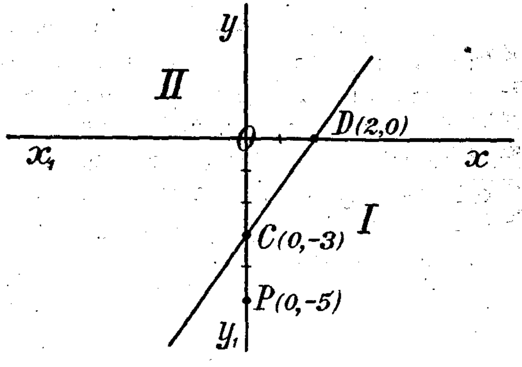
Пример 7. Нека је дата неједначина $x-3y+6>0$. Тада једначина $x-3y+6=0$ претставља праву AB (сл. 13) која



Сл. 13

дели равнину на области I и II. Полином ове једначине $x-3y+6$ имаће вредност једнаку нули, ако x и y заменимо координатама ма које тачке на правој AB. Вредност овог полинома биће позитивна, ако x и y заменимо координатама ма које тачке у области I (пробај за тачку O или N), а негативна ако x и y заменимо координатама ма које тачке у области II (пробај за тачку M). Па како само координате тачака у области I задовољавају дату неједначину, а тачке II области и тачке на правој AB је не задовољавају, то дата неједначина претставља ма коју тачку I области.

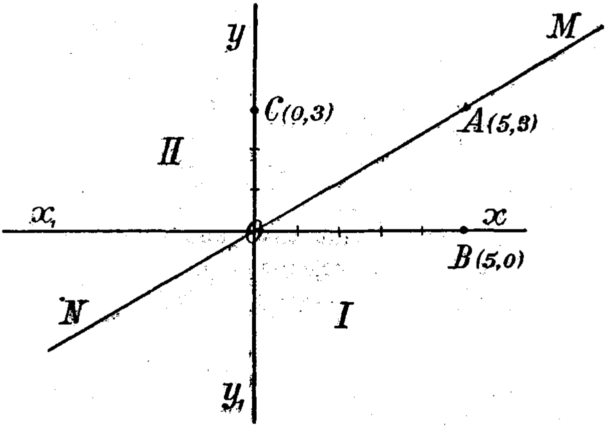
Пример 8. Нека је дата неједначина $3x-2y-6<0$. Тада једначина $3x-2y-6=0$ претставља праву CD (сл. 14),



Сл. 14

која дели равнину на области I и II. Полином ове једначине, или дате неједначине, $3x-2y-6$ имаће вредност једнаку нули, ако x и y заменимо координатама ма које тачке на правој CD (пробај за тачку C или D). Вредност овог полинома биће позитивна, ако x и y заменимо ма које тачке у области I (пробај за тачку P), а негативна ако x и y заменимо координатама ма које тачке у области II (пробај за тачку O). Па како само координате тачака II области задовољавају дату неједначину, то дата неједначина претставља ма коју тачку II области.

Пример 9. Нека је дата неједначина $3x - 5y > 0$. Тада једначина $3x - 5y = 0$ претставља праву MN (сл. 15) која дели равнину на области I и II. Њен полином $3x - 5y$ имаће вредност позитивну, ако x и y заменимо координатама ма које тачке I области (пробај за тачку B), а негативну ако x и y заменимо координатама ма које тачке II области (пробај за тачку C), а једнаку нули, ако x и y заменимо координатама ма које тачке на правој NM (пробај за тачку O или A). Па како само координате тачака I области задовољавају дату неједначину, то дата неједначина претставља ма коју тачку I области.



Сл. 15

ПЕТИ ОДЕЉАК

СТЕПЕНОВАЊЕ, КОРЕНОВАЊЕ и ЛОГАРИТМОВАЊЕ

I. Степеновање

А) Степеновање са целим позитивним бројевима

§ 86) *Основна и главна правила степеновања*

Видели смо раније (§ 7) да под степеном разумемо један производ од више једнаких чинитеља. Тако, 5^3 значи $5 \cdot 5 \cdot 5$; $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$; $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}$ итд. Код једнога степена разликујемо *основу* и *изложитељ*. Основа је један од чинитеља производа који је степеном претстављен, а изложитељ је *део степена* који нам показује колико чинитеља, као што је основа, има у томе производу. Код горњих степена основе су: 5, a и $\frac{m}{n}$, а изложитељи: 3, 4 и 2. *Степеновати један број (израз) другим бројем значи узети први број (израз) онолико пута као чинитељ колико други број има јединица.* Тако ако степенујемо 4 са 3, добијамо $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Под *вредношћу* једног степена разумемо резултат који се добива кад се степеновање изврши. Тако, вредност степена $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ је $\frac{a^3}{b^3}$, јер је $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$.

Напомена. Овакво тумачење степена има смисла само онда, ако је изложитељ позитиван цео број. Сваки се број или израз сматра као степен чији је изложитељ 1. Тако, $a = a^1$, $a + b - c = (a + b - c)^1$, $\frac{m}{n} = \left(\frac{m}{n}\right)^1$ итд.

На основу дефиниције степеновања изводимо следећа правила:

а) Основна правила:

1. ***Број 1 степенован ма којим бројем даје вредност 1.*** Тако, $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; $1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots$ (n пута) $= 1$.

2) ***Нула степенована ма којим бројем даје вредност нулу.*** Тако, $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$; $0^n = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \ldots$ (n пута) $= 0$.

3) ***Негативан број степенован парним изложитељем даје позитивну вредност.***

Тако, $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$; $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$;

уопште: $(-a)^{2n} = a^{2n}$.

4) ***Негативан број степенован непарним изложитељем даје негативну вредност.***

Тако, $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$;
$(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3\cdot(-3) = -243$.
Уопште: $(-a)^{2n\pm1} = -a^{2n\pm1}$.

Напомена. Израз $2n$ претставља увек *паран*, а израз $2n+1$ или $2n-1$ увек *непаран* број, па био n паран или непаран број. Тако, за $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ биће $2n = 2, 4, 6, 8, \cdots$.

b) **Главна правила**

1) ***Степене једнаких основа множимо, када заједничку основу степенујемо збиром изложитеља.***

Тако, 1) $a^3\cdot a^2 = a^5$, јер је $a^3\cdot a^2 = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^5$;
2) $(a-b)\cdot(a-b)^3 = (a-b)^4$, јер је $(a-b)\cdot(a-b)^3 =$
$= (a-b)(a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)^4$; 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \left(\frac{a}{b}\right)^7$.
Уопште је $a^m\cdot a^n\cdot a^p = a^{m+n+p}$.

На основу овога правила, *један се број (израз) степенује збиром, кад се степенује са сваким сабирком, па се добивене вредности помноже*. Тако 1) $a^{m+n} = a^m\cdot a^n$; 2) $5^7 = 5^3\cdot5^4$, или $= 5^2\cdot5^5$, или $= 5^2\cdot5^2\cdot5^3$, или $= 5^2\cdot5^2\cdot5^2\cdot5 = 78125$.

2) ***Степене једнаких основа делимо, када заједничку основу степенујемо разликом изложитеља.*** Тако,

1) $a^5 : a^3 = a^2$, јер је $a^5 : a^3 = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a : a\cdot a\cdot a = a\cdot a = a^2$;
2) $(a+b)^7 : (a+b)^4 = (a+b)^3$; $\left(\frac{a}{b}\right)^5 : \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^3$.
Уопште је: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

На основу овога правила, *број се степенује разликом, кад се најпре степенује умањеником, затим умалитељем, па се добивене вредности поделе.*

Тако, 1) $a^{p-q} = a^p : a^q$; 2) $a^{x-y} = a^x : a^y$.

3) ***Производ степенујемо неким бројем, када му најпре степенујемо тим бројем сваки чинитељ, па затим добивене вредности множимо.***

Тако, 1) $(2ab)^3 = 8a^3b^3$, јер је $(2ab)^3 = 2ab\cdot2ab\cdot2ab = 8a^3b^3$;
2) $[4a(m+n)]^4 = 256a^4(m+n)^4$; 3) $[2abc(m-n)]^5 = 32a^5b^5c^5(m-n)^5$.
Уопште је: $(abc)^m = a^m\, b^m\, c^m$.

На основу овога правила, ***степене једнаких изложитеља множимо, када им најпре помножимо основе, а затим добивени резултат степенујемо заједничким изложитељем.*** Тако,

1) $2^3\cdot5^3 = (2\cdot5)^3 = 10^3 = 1000$;
2) $25^2\cdot4^2 = (25\cdot4)^2 = 100^2 = 10000$;
3) $(a+b)^3\cdot(a-b)^3 = [(a+b)(a-b)]^3 = [a^2-b^2]^3$;
4) $\left(\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}\right)^m\cdot\left(\frac{c+d}{a-b}\right)^m\cdot\left(\frac{c-d}{a+b}\right)^m = \left[\frac{(a^2-b^2)\,(c+d)\,(c-d)}{(c^2-d^2)\,(a-b)\,(a+b)}\right]^m =$
$= 1^m = 1$.

4) *Разломак степенујемо неким бројем, када му степенујемо тим бројем и бројитељ и именитељ, па добивене вредности поделимо.* Тако,

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a^3}{b^3}$, јер је $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{3^4}{5^4}=\frac{81}{625}$;

3) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^5=\left(-\frac{3}{2}\right)^5=-\left(\frac{3}{2}\right)^5=-\frac{3^5}{2^5}=-\frac{243}{32}=-7\frac{19}{32}$.

Уопште је:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

На основу овога правила, *степене једнаких изложитеља делимо, када им најпре поделимо основе, а затим добивени резултат степенујемо заједничким изложитељем.* Тако,

1) $6^5 : 3^5=\left(\frac{6}{3}\right)^5=2^5=32$;

2) $\left(-3\frac{3}{5}\right)^4 : \left(-1\frac{1}{5}\right)^4=\left(-\frac{18}{5}\right)^4 : \left(-\frac{6}{5}\right)^4=3^4=81$;

3) $(x^2-y^2)^m : (x-y)^m=\left(\frac{x^2-y^2}{x-y}\right)^m=(x+y)^m$.

Напомена. При степеновању правог разломка позитивним целим бројем, добија се вредност увек мања од тога разломка, што се дâ увидети из ових посебних примера:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1^2}{3^2}=\frac{1}{9}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1^3}{3^3}=\frac{1}{27}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1^4}{3^4}=\frac{1}{81}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2^3}{5^3}=\frac{8}{125}$.

Вредност правог разломка постаје све мања, ако се степенује све са већим и већим позитивним бројем, што увиђамо из примера под 1), 2) и 3).

Вредност степена разломка, чији су бројитељ и именитељ релативно прости бројеви, увек је разломак чији су бројитељ и именитељ такође релативно прости бројеви, јер су степени од два релативно проста броја такође релативно прости бројеви. Тако,

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$; 2) $\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{64}{81}$; 3) $\left(\frac{10}{7}\right)^3=\frac{1000}{343}$; итд.

5) *Степен степенујемо неким бројем када основу степенујемо производом изложитеља.* Тако,

1) $(a^2)^3=a^6$, јер је $(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^6$; 2) $(a^4)^5=a^{20}$;

Уопште је:

$$[(a^m)^n]^p = a^{mnp}.$$

На основу овога правила, ***број се степенује производом, када се најпре степенује једним чинитељем, добивени резултат се степенује затим другим чинитељем итд. док се не степенује претпоследњи резултат последњим чинитељем.***

Тако, 1) $2^6 = (2^2)^3 = 4^3 = 64$; или $2^6 = (2^3)^2 = 8^2 = 64$;
2) $a^{mnp} = [(a^m)^n]^p$, или $= [(a^n)^m]^p$, или $= [(a^p)^m]^n$ итд.

Примери за вежбу

1) $(\pm 2)^4$; 2) $(\pm 5)^3$; 3) $(\pm 10)^3$;
4) $(\pm 100)^4$; 5) $(-1)^{2n}$; 6) $(2 \cdot 3)^3$;
7) $(5 \cdot 7 \cdot 3)^2$; 8) $(abc)^4$; 9) $(-cd)^6$;
10) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; 11) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$; 12) $(-0{,}2)^5$;
13) $(-0{,}01)^4$; 14) $(a^3)^2$; 15) $(a^5)^4$;
16) $(-a^3)^2$; 17) $(-a^6)^3$;
18) $(-a^5)^{2n-1}$; 19) $[(-a)^4]^3$; 20) $[(-a)^3]^5$; 21) $(2a^4)^3$; 22) $(7a^3b^2)^3$;
23) $(4a^n b^m)^3$; 24) $(3a^m b^4)^n$; 25) $\left(\frac{3bc}{a}\right)^3$; 26) $\left(\frac{3}{4}c^7d^2f\right)^4$;
27) $(-0{,}2a^p b)^5$; 28) $\left(-1\frac{3}{4}a^{2n-1}\right)^3$; 29) $(-0{,}01a^{n-2}b^m)^6$;
30) $\left(\frac{2a^7b^8}{c^6 d^n}\right)^5$; 31) $\left(\frac{a^m b^n}{c^{p-1}}\right)^4$; 32) $\left(\frac{a^{2n} b^{n+3}}{c^{mn}}\right)^n$; 33) $\left(\frac{a^{3m-1}}{b^{3m}}\right)^{3m+1}$;
34) $\left(-\frac{a^m b^{n+p}}{c^p}\right)^{2p}$; 35) $\left(-\frac{a^{6n+1}}{b^{2n} c^{n+2}}\right)^{6n-1}$; 36) $x^2y^3 \cdot x^{n-2} \cdot y^{n-3}$
37) $(a-b)^{m-2} \cdot (a-b)^{3-n} \cdot (a-b)^{n-1}$; 38) $(a^x + b^y)(a^x - b^y)$;
39) $(a^x - b^y)^2$; 40) $\frac{a^{2b+3c-4d}}{b^{3b}} \cdot a^{8-3c+3d}$; 41) $a^{5x} : a^{3x}$;
42) $b^{y+3x} : b^{2y-3x}$; 43) $a : a^{n+1}$; 44) $\frac{x^{a+b+c}}{x^{a-b+c}}$;
45) $\frac{a^{p+1} b^{q-1}}{a^p b}$; 46) $(a^{4r} - 1) : (a^r - 1)$;
47) $\frac{a^{5x-6y} \cdot a^{7x-8y}}{a^{8x-9y} \cdot a^{10x-11y}} : \frac{a^{12x-13y}}{a^{14x-15y}}$; 48) $\left(\frac{4x^{r+1}}{5y^s}\right)^p \cdot \left(\frac{125y^{s-1}}{8x^r}\right)^p$;
49) $\left(\frac{7-c}{d-5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5-d}{7-c}\right)^6$; 50) $\left(\frac{8-a}{x-y}\right)^4 \cdot \left(\frac{x-y}{a-8}\right)^3$;
51) $\left(\frac{a^2-b^2}{x^4-y^4}\right)^5 \cdot \left(\frac{x^4-y^4}{b^2-a^2}\right)^7$; 52) $\left(\frac{a+b}{c}\right)^x \cdot \left(\frac{d(a-b)}{e(a+b)}\right)^y \cdot \left(\frac{ce}{a-b}\right)^z$.

§ 87) Квадрат полинома и посебних бројева

а) Начин подизања једног полинома на квадрат познат нам је израније (§ 23 т. 1, 2 и 3). Ради потсећања наводимо примере:

1) $(a+b-c-d+m)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+m^2+2ab-$ $-2ac-2ad+2am-2bc-2bd+2bm+2cd-2cm-2dm.$

2) $(6x^3-5x^2+4x-3)^2 = 36x^6+25x^4+16x^2+9-60x^5+$ $+48x^4-36x^3-40x^3+30x^2-24x = 36x^6-60x^5+73x^4-76x^3+$ $+46x^2-24x+9.$

Међутим, полиноме можемо подићи на квадрат и по овом упутству: *подижемо на квадрат само први члан, па добивеном квадрату додајемо:* а) *двоструки производ од првог члана сабран најпре с другим, а затим помножен с другим чланом;* b) *двоструки производ од прва два члана сабран најпре с трећим, а затим помножен с трећим чланом, итд. настављамо овај поступак, док не додамо двоструки производ од свију претходних чланова (осим последњег) сабран најпре с последњим, а затим помножен с последњим чланом.*

Тако,

1) $(a+b)^2 = a^2+(2a+b)\,b = a^2+2ab+b^2;$

2) $(a-b)^2 = a^2+(2a-b)\cdot(-b) = a^2-2ab+b^2;$

3) $(a+b-c-d+m)^2 = a^2+(2a+b)\,b+(2a+2b-$ $-c)\cdot(-c)+(2a+2b-2c-d)\cdot(-d)+(2a+2b-2c-2d+$ $+m)\,m = a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2-2ad-2bd+2cd+$ $+d^2+2am+2bm-2cm-2dm+m^2.$

b) Подизање ма кога целог броја декадног система оснива се на горњем упутству, пошто је ма који број овога система у ствари полином уређен по опадајућим степенима основе 10. Тако,

1) $356 = 300+50+6 = 3\cdot10^2+5\cdot10+6;$

2) $52378 = 50000+2000+300+70+8 = 5\cdot10^4+$ $+2\cdot10^3+3\cdot10^2+7\cdot10+8.$

Да бисмо, дакле, декадни цео број подигли на квадрат, треба да га претходно напишемо у облику полинома, а затим да се послужимо упутством о подизању полинома на квадрат. Тако, $3417^2 = (3000+400+10+7)^2 = 3000^2+(2\cdot3000+400)\cdot400+$ $+[2\cdot(3000+400)+10]\cdot10+[2\cdot(3000+400+10)+7]\cdot7=$ $= 9000000+2560000+68100+47789 = 11675889.$

Међутим, овај поступак подизања декадних бројева на квадрат је заметан, особито ако је дати број вишецифрен. Да бисмо избегли овај компликован рад, практично поступамо овако: Подижемо најпре прву цифру на квадрат, а испод њеног квадрата, за два места удесно, пишемо број добивен, када се прва цифра помножи са 2, с десне стране допише друга цифра и помножи овом цифром; затим испод овога броја пишемо, опет за два места удесно, број добивен, када двоструком производу од првих двеју цифара допишемо с десне стране трећу цифру, а затим помножимо овом цифром, итд. Овај поступак настављамо док не напишемо испод ранијих бројева, за два места удесно, број добивен, када се двоструком производу од свију претходних цифара (осим последње) допише последња цифра а затим помножи том последњом цифром. Најзад овако написане бројеве сабирамо.

Ако горе израђени пример израдимо по овом практичном упутству, добијамо:

$$\begin{array}{lcr} 3417^2 \cdots\cdot 3^2 & = & 9\cdot\cdot \\ 64\cdot 4 \cdots\cdots & = & 256\cdot\cdot \\ 681\cdot 1 \cdots\cdots & = & 681\cdot\cdot \\ 6827\cdot 7 \cdots\cdot & = & 47789 \\ \hline \text{Резултат}\cdot\cdot & = & 11675889. \end{array}$$

До овога резултата дошли бисмо, када сабирке збира:

$$9000000 + 256000 + 68100 + 47789$$

добиveног подизањем 3417 на квадрат по упутству за подизање полинома на квадрат, напишемо један испод другога, па сабирање извршимо. Тако, овај збир је:

a) *с нулама:*

$$\begin{array}{r} 9000000 \\ 2560000 \\ + \quad 68100 \\ 47789 \\ \hline 11675889 \end{array}$$

b) *без нула:*

$$\begin{array}{r} 9 \\ 256 \\ + \quad 681 \\ 47789 \\ \hline 11675889 \end{array}$$

Из овога примера је јасно да се практично упутство за подизање декадних целих бројева на квадрат оснива на правилу о подизању полинома на квадрат. Овде се само сабирци пишу један испод другог, а нуле се изостављају.

c) *Обичне разломке подижемо на квадрат када им подигнемо на квадрат и бројитељ и именитељ.*

Примери:

1) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$; 2) $\left(\frac{72}{543}\right)^2 = \frac{72^2}{543^2} = \frac{5184}{294849}$.

d) *Мешовите бројеве подижемо на квадрат, када их претходно претворимо у неправе разломке, а затим подижемо на квадрат и бројитељ и именитељ.*

Примери:

1) $\left(-2\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{13}{5}\right)^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{13^2}{5^2} = \frac{169}{25} = 6\,\frac{19}{25}$;

2) $\left(5\,\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{21}{4}\right)^2 = \frac{21^2}{4^2} = \frac{441}{16} = 27\,\frac{9}{16}$.

е) *Десетне разломке (децималне бројеве) подижемо на квадрат као и целе бројеве, само у резултату, с десне стране улево, одвајамо десетном запетом двапут више децимала него што их има у датом разломку.*

Примери:

1) $$\begin{array}{rl} 3{,}5^2 & = 9\cdot\cdot \\ 65.5\cdot\cdot & = 325 \\ \hline & 12{,}25 \end{array}$$

Доказ. $3{,}5^2 = \left(\frac{35}{10}\right)^2 = \frac{35^2}{10^2} = \frac{1225}{100} = 12{,}25$.

2) $$\begin{array}{rr} 0{,}523^2 \;= & 25\cdot\cdot \\ 102\cdot 2\cdots = & 204\cdot\cdot \\ 1043\cdot 3\cdots = & 3129 \\ \hline & 0{,}273529 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{rr} 0{,}0013^2 \;= & 1\cdot\cdot \\ 23\cdot 3\cdots = & 69 \\ \hline & 0{,}00000169 \end{array}$$

Напомена. Ако је десетан разломак *чисто или нечисто периодичан*, подиже се на квадрат, пошто се претходно претвори у обичан разломак.

Примери:

1) $2{,}\dot{3}^2 = \left(2\,\frac{3}{9}\right)^2 = \left(2\,\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} = 5\,\frac{4}{9}$;

2) $0{,}\overline{37}^2 = \left(\frac{37}{99}\right)^2 = \frac{1369}{9801}$;

3) $0{,}23\dot{5}^2 = \left(\frac{235 - 23}{900}\right)^2 = \left(\frac{212}{900}\right)^2 = \left(\frac{53}{225}\right)^2 = \frac{2809}{50625}$;

4) $4{,}5\dot{6}^2 = \left(4\frac{51}{90}\right)^2 = \left(4\frac{17}{30}\right)^2 = \left(\frac{137}{30}\right)^2 = \frac{18769}{900} = 20\,\frac{769}{900}$.

Примери за вежбу

1) $\left(\frac{x^3}{8} + \frac{2}{x^3}\right)^2$; 2) $\left(3a^2b - \frac{1}{3ab^2}\right)^2$; 3) $\left(1\,\frac{1}{4}ab^3c - \frac{8a}{b^3c^4}\right)^2$;

4) $(a + 2b + 3c)^2$; 5) $(5x^2 + 3x - 1)^2$; 6) $\left(a^3 - 2a^2 + \frac{a}{2}\right)^2$;

7) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}\right)^2$; 8) $\left(9x + \frac{3}{4}y - \frac{z}{2}\right)^2$;

9) $(2ax^3 + 3a^2x^2 - 4a^3x)^2$; 10) $2a^n - 3a^{n-1} + a^{n-2})^2$;

11) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^2$; 12) $\left(\frac{a}{2} + 2b - 2c + \frac{1}{2}\right)^2$;

13) $(8a^4 - 4a^3 + 2a^2 - a)^2$;

14) $\left(\frac{1}{2} - x^n - 1\,\frac{1}{2}\,x^{n+1} + 2x^{n+2}\right)^2$;

15) $(4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 7)^2$.

Подигни на квадрат ове бројеве:

16) 89; 69; 97; 270. 17) 6,5; 0,27; 0,56; 0,032.

18) 162; 541; 308; 1260. 19) 2,47; 67,3; 0,0312; 0,0504.

20) $\frac{57}{113}$; $4\frac{17}{43}$; $3\frac{13}{114}$; $2\frac{7}{506}$. 21) $2,\overline{37}$; $0,03\dot{7}$; $2,55\dot{2}$.

§ 88) **Куб полинома и посебних бројева**

а) Начин подизања *бинома* на куб показан је раније (§ 23 т. 4 и 5), а остале полиноме подижемо на куб, када их употребом заграда претходно доведемо на облик бинома, а затим вршимо подизање на куб, или непосредно на следећи начин: *подиже се на куб први члан, а од сваког следећег члана стварају се три сабирка, и то: први је утројен — троструки — квадрат збира свију чланова пред њим помножен тим чланом; други је троструки збир свију чланова пред њим помножен квадратом тога члана; и најзад трећи је сабирак куб дотичног члана.*

Пример 1. Подићи на куб полином $(a - b + c - d)$.

а) *Претварањем у бином:*

$$[(a - b) + (c - d)]^3 = (a - b)^3 + 3\,(a - b)^2\,(c - d) +$$
$$+ 3\,(a - b)\,(c - d)^2 + (c - d)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2c -$$
$$- 6abc + 3b^2c - 3a^2d + 6abd - 3b^2d + 3ac^2 - 3bc^2 - 6acd +$$
$$+ 6bcd + 3ad^2 - 3bd^2 + c^3 - 3c^2d + 3cd^2 - d^3.$$

b) *Непосредно:*

$$(a - b + c - d)^3 = a^3 + 3a^2\,(-b) + 3a\,(-b)^2 + (-b)^3 + 3\,(a -$$
$$- b)^2c + 3\,(a - b)\,c^2 + c^3 + 3\,(a - b + c)^2\,(-d) + 3\,(a - b + c)\,(-d)^2 +$$
$$+ (-d)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2c - 6abc + 3b^2c + 3ac^2 -$$
$$- 3bc^2 + c^3 - 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abd - 6acd + 6bcd +$$
$$+ 3ad^2 - 3bd^2 + 3cd^2 - d^3.$$

Пример 2. $(x^2 - 3xy + 2y^2)^3 = x^6 - 9x^5y + 27x^4y^2 - 27x^3y^3 + + 3\,(x^2 - 3xy)^2.\ 2y^2 + 3\,(x^2 - 3xy) \cdot 4y^4 + 8y^6 = x^6 - 9x^5y + 33x^4y^2 - 63x^3y^3 + 66x^2y^4 - 36xy^5 + 8y^6$.

b) *Декадне целе бројеве подижемо на куб по горњем упутству за подизање полинома (непосредни начин), само што добивене сабирке, ради олакшице у раду, пишемо један испод другога. Пошто се нуле изостављају, пишемо поједине сабирке тако да последња цифра сваког сабирка заузме једно место даље удесно. Децималне бројеве подижемо на куб као и целе бројеве, само у резултату одвајамо запетом с десна улево трипут више децимала него што их има у датом броју. Периодичне десетне разломке подижемо на куб, када их претходно претворимо у обичне, а затим подижемо на куб и бројитељ и именитељ.*

Примери:

$$1)\quad \begin{array}{rl} 35^3 & = 42875 \\ \hline 3^3 & = 27. \\ 3\cdot 3^2\cdot 5 & = 135. \\ 3\cdot 3\cdot 5^2 & = 225. \\ 5^3 & = 125 \\ \hline \end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{rl} 2{,}31^3 & = 12{,}326391 \\ \hline 2^3 & = 8. \\ 3\cdot 2^2\cdot 3 & = 36. \\ 3\cdot 2\cdot 3^2 & = 54. \\ 3^3 & = 27. \\ 3\cdot 23^2\cdot 1 & = 1587. \\ 3\cdot 23\cdot 1^2 & = 69. \\ 1^3 & = 1 \end{array}$$

Доказ

$$2{,}31^3 = \left(\frac{231}{100}\right)^3. = \frac{231^3}{100^3} = \frac{12326391}{1000000} = 12{,}326391$$

$$3)\ 2{,}\dot{3}^3 = \left(2\frac{3}{9}\right)^3 = \left(2\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{343}{27} = 12\frac{19}{27}.$$

$$4)\ 3{,}13\dot{7}^3 = \left(3\,\frac{127-12}{900}\right)^3 = \left(3\frac{115}{900}\right)^3 = \left(3\,\frac{23}{180}\right)^3 = \left(\frac{563}{180}\right)^3 =$$

$$= \frac{178453547}{5832000} = 30\frac{3493547}{5832000}.$$

Примери за вежбу

1) $(3a+5b)^3$; $(a^2+b^2)^3$; $(2x-3y+4z)^3$;

2) $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b-c)^3-(b+c-a)^3$.

3) $(a+b+c)^3+(a-b-c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3$.

4) $(a+b+c)^3-3(ab+ac+bc)(a+b+c)$.

5) $(a+b+c+d)^3$; $(a-b+c-d)^3$; $(x^3+x^2-x-1)^3$.

Одреди куб бројева:

6) 43; 125; 2,60; 0,097; 3,756.

Израчунати:

7) $6000^3 : 60^3$; 8) $1{,}8128^3 : 0{,}4532^3$;

9) 135^3-135^2; 10) 114^4-118^3.

В) Степеновање са нулом и негативним целим бројевима

§ 89) Тумачење

а) Степеновити један број или израз који је различит од нуле с нулом, значи степеновати га оном разликом код које су и умаљеник и умалитељ једнаки. Тако,

$$1)\ a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1\,; \qquad 2)\ \left(\frac{a}{b}\right)^0 = \frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Из ових примера увиђамо *да је сваки број или израз, који је различит од нуле, на нултом изложитељу једнак 1.*

Примери:

$$3)\ 5^0 = 5^{n-n} = 5^n : 5^n = 1; \qquad 4)\ (abc)^0 = a^0\,b^0\,c^0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1\,;$$

$$5)\ \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^0 = \frac{(a+b)^0}{(c+d)^0} = \frac{(a+b)^{q-q}}{(c-d)^{p-p}} = \frac{(a+b)^q : (a+b)^q}{(c+d)^p : (c-d)^p} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\left[\text{или } \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^0 = \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^{m-m} = \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^m : \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^m = 1\right].$$

Напомена. Израз 0^0 је неодређен, јер је $0^0 = 0^{m-m} = 0^m : 0^m = 0 : 0$, или $\frac{0}{0}$.

b) Степеновати један број или израз негативним бројем, значи степеновати га оном разликом код које је умањеник нула, а умалитељ апсолутна вредност негативног броја. Тако,

1) $a^{-m} = a^{0-m} = a^0 : a^m = 1 : a^m = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$;

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \frac{a^{-p}}{b^{-p}} = \frac{\frac{1}{a^p}}{\frac{1}{b^p}} = \frac{b^p}{a^p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$.

Из ових примера изводимо правило: *да се број или израз степенује негативним бројем кад се реципрочна вредност тога броја (израза) степенује истим, али позитивним бројем.*

Примери

3) $5^{-2} = 5^{0-2} = 5^0 : 5^2 = 1 : 25 = \frac{1}{25}$; 4) $a^{-4} = \left(\frac{1}{a}\right)^4 = \frac{1}{a^4}$.

Напомена. Израз $0^{-m} = \infty$, јер је $0^{-m} = \left(\frac{1}{0}\right)^m = \frac{1}{0^m} = \frac{1}{0} = \infty$. Стога се нула (0) не узима за основу код степоновања с негативним бројевима.

c) На основу правила о степеновању с негативним бројевима, у стању смо: 1) да сваки израз ослободимо негативних изложитеља; 2) да изразе облика разломака претворимо у целе изразе; и 3) да израз у целом облику претворимо у израз облика разломака. Ово успевамо само мењањем знака изложитеља оног чинитеља који се из бројитеља пребацује у именитељ, или обрнуто, из именитеља у бројитељ.

Примери:

Ослободи следеће изразе негативних изложитеља:

1) $3x^3y^{-2} = \frac{3x^3}{y^2}$, јер је $3x^3y^{-2} = 3x^3 \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{3x^5}{y^2}$.

2) $\frac{2a^2b^{-3}}{3c^{-4}} = \frac{2a^2c^4}{3b^3}$, јер је $\frac{2a^2b^{-3}}{3c^{-4}} = \frac{2a^3 \cdot \frac{1}{b^3}}{3 \cdot \frac{1}{c^4}} = \frac{\frac{2a^3}{b^3}}{\frac{3}{c^4}} = \frac{2a^2c^4}{3b^3}$.

Претвори следеће разломљене изразе у целе:

1) $\frac{5x}{y}=5xy^{-1}$; 2) $\frac{3a^2x^{-2}}{b^{-1}}=3a^2bx^{-2}$; 3) $\frac{2a^3x^2}{by^{-3}z^2}=2a^3b^{-1}x^2y^3z^{-2}$.

Претвори $3abc$ у разломљен израз:

$3abc=\frac{3ab}{c^{-1}}$, или $\frac{3a}{b^{-1}\,c^{-1}}$, или $\frac{3c}{a^{-1}\,b^{-1}}$, или $\frac{3bc}{a^{-1}}$ итд.

Сва правила степеновања са целим и позитивним бројевима важе и за степеновање са негативним бројевима.

Примери:

1) $(-3)^{-2}=\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$; 2) $(-5)^{-3}=\left(-\frac{1}{5}\right)^3=-\frac{1}{125}$;

3) $1^{-5}=\left(\frac{1}{1}\right)^5=1^5=1$;

4) $0{,}125^{-3}=\left(\frac{125}{1000}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}=8^3=512$;

5) $a^5\cdot a^{-3}=a^{5+(-3)}=a^2$;

6) $a^{-7}:a^{-9}=d^{-7+9}=a^2$;

7) $(x^{-2})^3=x^{-6}=\frac{1}{x^6}$; 8) $(3x^2-2x^{-2})^2=9x^4-12+4x^{-4}$;

9) $5^{-2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\left(5\cdot\frac{2}{5}\right)^{-2}=2^{-2}=\frac{1}{4}$;

10) $10^{-4}:5^{-4}=\left(\frac{10}{5}\right)^{-4}=2^{-4}=\frac{1}{16}$.

Примери за вежбу. Ослободити следеће изразе негативних изложитеља и нуле:

1) x^{-0}; 2) $a^4\cdot a^0$; 3) $a^6\cdot d^{-5}$; 4) x^0+x^0;

5) $0^x\cdot 0^x$; 6) $(-x^5)^{-3}$; 7) $\frac{1}{b^{-2}}$; 8) $\frac{d^0}{c^{-2}}$;

9) $\frac{x^{-n}}{y^{-n}}$; 10) $\frac{x^{a-5}}{x^{-6}}$; 11) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$; 12) $\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$;

13) $a(a-1)^{-2}$; 14) $\frac{4(a^0+b^0)^{-2}c^{-5}}{5c^{-3}d^{-4}}$; 15) $\frac{a^2b^{-4}}{x^{-3}y^{-5}}\cdot\frac{a^{-2}b^4}{x^5y^3}$;

16) $\frac{21x^{-4}y^{-3}z^{-5}}{35x^{-6}y^{-5}z^{-1}}$; 17) $(x^{3-z}+y^{4-s})^{-2}$;

18) $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-c^{-2}}\right)^{-2}:\left(\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-4}-b^{-4}}\right)^{-3}$;

Следеће изразе напиши у целом облику:

19) $\frac{1}{a}$; 20) $\frac{1}{a^n}$; 21) $\left(\frac{a}{b}\right)^m$; 22) $\frac{4}{(-a)^3}$; 23) $\frac{1}{a^n}\cdot a^m$; 24) $\frac{ab}{a+b}$;

25) $\frac{a^4}{a^r}-\frac{b^5}{b^s}$; 26) $\frac{a}{x^{-2}(a^3-x)^{4-n}}$; 27) $\frac{2}{-0{,}5a^{(x-1)(1-x)}}$.

Изврши означене радње:

28) $b^{-8} \cdot b^{4}$; 29) $a^{0} \cdot a^{-3} \cdot a^{5}$; 30) $x^{0}y^{5} \cdot x^{-3}y^{-4}$;
31) $x^{n} \cdot x^{-m} \cdot x^{-2n}$; 32) $b^{3} \cdot b^{-3a}$; 33) $(-a)^{-3}$;
34) $(-a)^{-2} \cdot (-a)^{-3}$; 35) $(-b)^{-2n} \cdot (-b)^{-2n+1}$;
36) $(b^{-4} - b^{-3} + b^{-2} - b^{-1} + b)(-b)^{-4}$;
37) $(2a + 5a^{-1})(2a - 5a^{-1})$ 38) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)^{-5}$;
39) $(x^{-1} - 2x^{-2} + 3x^{-3})(x^{0} + x^{-1} - x^{-2})$;
40) $a^{-1} \cdot b^{-1}$; 41) $(0{,}2a)^{-1} \cdot (0{,}5b)^{-1}$;
42) $(m^{2} - n^{2})^{-6} \cdot (n^{2} - m^{2})^{-6}$; 43) $(3a^{4} - 4)^{-5} \cdot (4 - 3a^{3})^{-5}$;
44) $\left(\frac{5x^{-1} - 3y^{-2}}{2a^{-4} + 3b^{-5}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4a^{-8} - 9b^{-10}}{25x^{-2} - 9y^{-4}}\right)^{-3}$;
45) $[(5x)^{2}]^{-2}$; 46) $[(-1)^{-1}]^{-2}$; 47) $(a^{-1} \cdot b^{2})^{-2}$;
48) $(x^{-3} \cdot y^{-5})^{3}$; 49) $(-r^{-x} \cdot s^{-y})^{-2x}$;
50) $\left(\frac{a^{0}b^{-2}}{c^{3}d^{-4}}\right)^{-3}$; 51) $\left(\frac{a^{-1}b^{-2}}{c^{-3}d^{-4}}\right)^{-1}$;
52) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a-b}{c+d}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{2}$;
53) $\left[\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{-3}\right]^{2} \cdot \left[\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2}\right]^{3}$;
54) $a^{-9} : a^{-7}$; 55) $(a+b)^{-r-s} : (a+b)^{-r+s}$;
56) $\frac{5a^{-5}}{-3a^{-3}}$; 57) $(a^{-14} - b^{-8}) : (a^{-7} + b^{-4})$;
58) $\left(\frac{a^{-4}}{b^{5}}\right)^{-3} : \left(\frac{a^{-5}}{b^{-4}}\right)^{-3}$.

Израчунај бројне вредности израза:

59) $(0{,}25)^{-2} \cdot 1000$; 60) $\frac{100}{(-1)^{-3}}$; 61) $1 : 0{,}125^{-3}$;
62) $[(2^{-2})^{-3}]^{2}$; 63) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{9}{10}\right)^{-2}$;
64) $10^{-2} : 10^{-1}$; 65) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; 66) $(0{,}3)^{-1} : (0{,}3)^{-4}$.

§ 90) Графичко претстављање функција $y = x^{n}$ и $y = a^{x}$.

Вредност једног степена зависи и од основе и од изложитеља тога степена. Тако, вредност степена x^{3}, постаје све већа, ако је $x > 1$, а све мања, ако је $x < 1$.

за $x = 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$ вредност постаје $8,\ 27,\ 64,\ 125, \ldots$
за $x = \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}, \ldots$ „ „ $\frac{1}{8},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{125}, \ldots$
за $x = \frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{6}, \ldots$ „ „ $\frac{8}{27},\ \frac{8}{64},\ \frac{8}{125},\ \frac{8}{216}, \ldots$

Вредност степена 2^{x} постаје све већа за $x > 0$, а мања за $x < 0$. Тако, за $x =$ 0, 1, 2, 3, 4,... вредност постаје 1, 2, 4, 8, 16,....

за $x = -1,-2,-3,-4,-5,...$ „ „ $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},....$

Према овоме вредност једног степена сматрамо као *функцију* било основе, било изложитеља тога степена, пошто се она мења променом основе и изложитеља степена. Ако вредност степена означимо са y, онда је

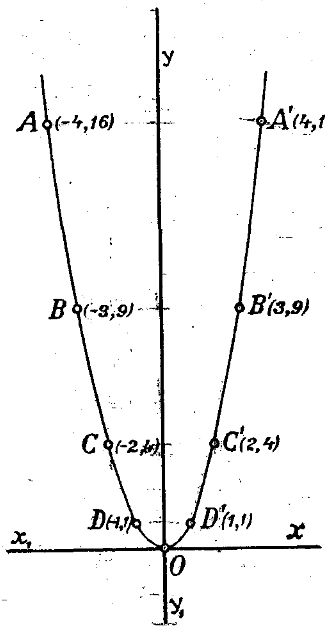
$y = x^n$ ($y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$...) *алгебарска* функција, а
$y = a^x$ ($y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$,....) *изложитељна* функција.

Да бисмо графички претставили било алгебарску функцију $y = x^n$, или изложитељну $y = a^x$, треба за независну промењиву количину x узети неколико произвољних вредности и за сваку такву вредност x-а наћи из једначине одговарајућу вредност функције y-а. Сматрајући одговарајуће вредности x-а и y-а као координате тачака у равни, онда, конструкцијом и везивањем тих тачака, добијамо геометриски претставник (линију) дотичне функције.

Примери:

1) *Наћи геометриски претставник функција* $y = x^2$.

Ако независно промењивој дамо вредности $x = -4$, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... добијамо да је функција $y =$ .... 16, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16, ... Овде су парови решења: .... $(-4, 16)$, $(-3, 9)$, $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$, $(4, 16)$,.....



Сл. 16

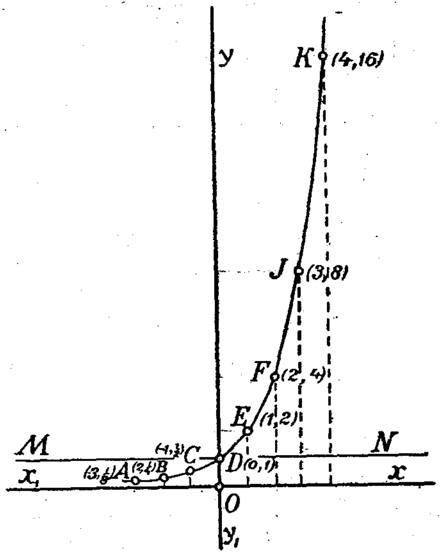
Сматрајући ове спрегове решења као координате тачака, онда њиховом конструкцијом и спајањем добијамо криву AOA' (сл. 16), која је геометриски претставник једначине $y = x^2$, а која се зове *парабола*. Ова крива заузима *симетричан* положај према ординатној осовини, пролази кроз координатни почетак, њене обе гране пружају се до бесконачности, а удаљују се поступно од ординатне осовине.

За вежбу. Конструиши функције: 1) $y = -x^2$; 2) $y = \pm 2x^2$; 3) $y = \pm 3x^2$; 4) $y = \pm x^3$; 5) $y = \pm 2x^3$; 6) $y = \pm 3x^3$; 7) $y = 2x^2 + 3$; 8) $y = 3x^2 - 5$.

2) *Наћи геометриски претставник функције* $y = 2^x$.

Ако независно променљивој дамо вредности $x = -4$, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, добијамо да је функција $y = \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16$. Овде су парови решења: $\left(-4, \frac{1}{16}\right)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$, $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 8)$, $(4, 16)$, ...
Сматрајући ове парове решења као координате тачака и конструкцијом и спајањем тих тачака, добијамо криву AK (сл. 17), која је геометриски претставник изложитељне функције $y = 2^x$. Ова крива сече ординатну осовину у тачки $(0,1)$ и све се више приближује негативном смислу апсцисне осовине, али је не сече, пошто не прелази на њену доњу страну.

Прелаз на доњу страну апсцисне осовине је немогућан, јер за негативне вредности x-а, добијамо увек позитивне вредности за y, које постаје све мање, како x по апсолутној вредности расте. Апцисна осовина $X'X$ за ову криву зове се *асимтота*. Тако се зове свака права којој се нека крива постепено приближује, али нема с њом ни једне заједничке тачке.



Сл. 17

Напомена. Све криве функције $y = a^x$, где основа a може имати ма коју целу или разломљену вредност, пролази кроз тачку $(0,1)$, јер је за $x = 0$, $y = a^0 = 1$. Ако је $a = 1$, онда је за ма коју вредност x-а, $y = 1$. Једначина $y = 1$ претстављa праву паралелну с апсцисном осовином, а на отстојању $y = +1$ (MN, на сл. 17). Ова права зове се *„крива првога степена“*, што се може казати и за сваку другу праву.

За вежбу. Конструиши функције:

a) $y = 3^x$; b) $y = 4^x$; c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; d) $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$.

II. Кореновање

А. Кореновање са целим позитивним бројевима

§ 91) **Тумачење.** Под кореновањем разумемо ону рачунску радњу којом се од познате вредности једног степена и његовог изложитеља тражи непозната основа. Према томе, кореновање је супротна радња степеновања. Дата вредност степена код кореновања зове се *радиканд*, дати изложитељ *коренов изложитељ*, а тражена основа *корен*. Код $\sqrt[3]{125}=5$, 125 је радиканд, 3 коренов изложитељ, а 5 корен. *Кореновати један број другим значи, дакле, наћи трећи број који степенован с другим, даје за вредност први број.* Тако, ако имамо да коренујемо 81 са 4, онда се то означава $\sqrt[4]{81}$, а резултат је 3, јер је $3^4=81$. Исто тако је $\sqrt[n]{a}$ онај број који, степенован изложитељем *n*, даје за вредност радиканд *a*.

Напомена. Други корен некога броја назива се *квадратни корен*, а трећи *кубни корен*. Изложитељ *2* обично се не пише, већ само коренов знак $\sqrt{\ }$. Овај је знак увео Христифор Рудолф (1525 год.), а означава почетно слово латинске речи radix (корен).

§ 92) **Основна правила кореновања**

1.) *Кад се корен степенује својим изложитељем, добија се радиканд.* $(\sqrt[n]{a})^n = a.$

Нпр. 1) $(\sqrt{4})^2=4$, јер $(\sqrt{4})^2=2^2=4$; 2) $(\sqrt[3]{27})^3=27$.

2) *Кад се степен коренује својим изложитељем, добија се основа.* $\sqrt[n]{a^n}=a$.

Нпр. 1) $\sqrt{3^2}=3$, јер $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$; 2) $\sqrt[4]{2^4}=2$; 3) $\sqrt[5]{3^5}=3$.

3) *Први корен неког броја је сам број.* Тако,

$$\sqrt[1]{a}=a,\ \text{јер}\ a^1=a.$$

4) *Број 1 кореснован ма којим бројем, даје корен 1.* Тако,

$$\sqrt[n]{1}=1,\ \text{јер}\ 1^n=1.$$

5) *Нула, коренована ма којим позитивним бројем, даје за резултат* 0. Тако,

$$\sqrt[n]{0}=0,\ \text{јер}\ 0^n=0.$$

Напомена. На основу првог и другог основног правила јасно је, *да се број не мења, ако се најпре коренује а затим* *степенује, или обрнуто, ако се најпре степенује а затим коренује једним истим бројем.* Тако,

$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$. Па како је на основу овога

$a = \sqrt[2n]{a^{2n}} = \sqrt[3n]{a^{3n}} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{n}{p}}}$, то изводимо правило: *да се вредност корена не мења, ако се коренов и радикандов изложитељ помноже или поделе истим бројем.*

§ 93) **Ирационални изрази и бројеви.** При извлачењу *n*-тог корена из једног позитивног целог броја *a*, могу наступити ова два случаја: *a*) да је број а *n*-ти степен од некога позитивног целог броја на пр. $a = q^n$. Тада је $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{q^n} = q$, једнак је, дакле, позитивном целом броју, b) да је број *a* такав цео позитиван број који се налази између два *n*-та степена двају узастопних целих бројева природнога бројнога реда. У овом случају $\sqrt[n]{a}$ је број који се налази између она узастопна цела броја бројнога реда, те према томе $\sqrt[n]{a}$ није цео број. Тако, $\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125} = 5$, а $\sqrt[3]{6^3} = \sqrt[3]{216} = 6$, а 3-ћи корен свакога целог броја већег од 125 а мањег од 216, налази се између 5 и 6, те и није цео број. Такви су корени $\sqrt[3]{150}$, $\sqrt[3]{203}$, $\sqrt[3]{181}$ итд. Међутим, у овом случају $\sqrt[n]{a}$ не претставља ни разломак, јер ако претпоставимо да је $\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$, где су *p* и *q* два релативно проста броја, онда би требало да буде $\left(\frac{p}{q}\right)^n = a$, тј. раван једном целом броју, што се коси с правилом: *да је степен разломка опет разломак а не цео број* (Види напомену § 86, b, 4). Према томе, $\sqrt[n]{a}$, у овом другом случају, нити је цео број, нити је разломак. Он није, дакле, *рационални број*, већ је *ирационалан*, тј. он је бескрајан децималан број у коме има бесконачно много децимала, који се не понављају, као код периодичних десетних разломака. Ти се бројеви називају ирационалним, супротно целим и разломљеним бројевима, који су рационални бројеви. Рачунати с ирационалним бројевима значи уопште рачунати с њиховим приближним вредностима. Резултати биће утолико тачнији, уколико узимамо више децимала у поступак. Па како су ови резултати рационални бројеви, то сва правила за рачунање с рационалним бројевима, вреде и за ирационалне.

За један израз каже се да је ирационалан, ако је он n-ти корен од једнога радиканда који није n-ти степен некога рационалног израза. Такви су изрази: $\sqrt{a-b}$, $\sqrt[3]{a^2+b^2-c^2}$ и тако даље.

Напомена. Ваља разликовати ирационалан израз од ирационалног броја. Тако, ирационалан израз $\sqrt[3]{a+b}$, за $a=5$ и $b=3$, не претставља и ирационалан број, јер је $\sqrt[3]{5+3}=$ $=\sqrt[3]{8}=2$, који је рационалан број. Ирационалан израз може, дакле, да претставља и ирационалан и рационалан број, што зависи једино од бројних вредности општих бројева у радиканду.

§ 94) Главна правила кореновања

1) ***Производ се коренује неким бројем када се сваки чинитељ коренује тим бројем, па се резултати помноже.***

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Доказ. — $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b^n}\cdot\sqrt[n]{c^n}=abc.$

Примери:

1) $\sqrt[5]{32a^5b^5}=2ab$; 2) $\sqrt{9\cdot25\cdot49}=3\cdot5\cdot7=105$;

3) $\sqrt[3]{27a^3b^3}=3ab$.

На основу овога правила, ***корене једнаких изложитеља множимо када производ њихових радиканада коренујемо заједничким изложитељем.***

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdot=\sqrt[n]{abc}.$$

Примери:

1) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16}=4$;

2) $6\sqrt{6}\cdot5\sqrt{2}=30\sqrt{12}=30\sqrt{4\cdot3}=30\cdot2\sqrt{3}=60\sqrt{3}$;

3) $\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$;

4) $\sqrt[3]{\frac{4a}{9b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2b}{3a}}=\sqrt[3]{\frac{8ab}{27ab}}=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$.

Напомена. — Ако у радиканду има чинитеља из којих се корен даје извући, онда се ти чинитељи коренују делимично, њихови се резултати стављају као чинитељи пред корен, а у радиканду остављају се само чинитељи од којих се корен не може извући. Тако исто, чинитељ пред кореном даје се увући у корен, ако се претходно степенује кореновим изложитељем. а затим напише као чинитељ радиканда.

Примери:

1) $\sqrt[n]{a^n b^{2n} cd} = ab^2\sqrt[n]{cd}$; 2) $\sqrt{25a^2bc^2d} = 5ac\sqrt{bd}$;

3) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$; 4) $ab\sqrt[3]{cd} = \sqrt[3]{a^3b^3cd}$.

2) *Разломак се коренује неким бројем кад се тим бројем коренује и бројитељ и именитељ, па се први корен дели другим.*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ јер } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

Примери:

1) $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$; 2) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^3}{27c^3}} = \frac{2ab}{3c}$.

На основу овога правила, *корене једнаких изложитеља делимо када количник из радиканда дељеникова и радиканда делитељева коренујемо заједничким изложитељем.*

Примери:

1) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; 2) $\sqrt{75} : \sqrt{3} = \sqrt{25} = 5$;

3) $\sqrt{a^2-b^2} : \sqrt{a-b} = \sqrt{a+b}$; 4) $\sqrt[x]{a^{3x+2}} : \sqrt[x]{a^{2x+2}} = \sqrt[x]{a^x} = a$.

3) *Степен се коренује неким бројем, када се изложитељ степена подели изложитељем корена.*

$$\sqrt[n]{a^q} = a^{\frac{q}{n}}, \text{ јер } (a^{\frac{q}{n}})^n = a^{\frac{qn}{n}} = a^q.$$

Примери:

1) $\sqrt[m]{a^{mx}} = a^x$; 2) $\sqrt[5]{a^{35}} = a^7$;

3) $\sqrt[m+n]{x^{am+an}} = \sqrt[m+n]{x^{a(m+n)}} = x^a$; 4) $\sqrt{a^5}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a^6} = a^3$.

5) $\sqrt[3]{a^7}\cdot\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^{12}} = a^4$; 6) $\sqrt[5]{\frac{a^5x^{10}}{b^5y^{10}}} = \frac{ax^2}{by^2}$.

4) *Корен се коренује неким бројем кад се радиканд коренује производом коренових изложитеља.*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \text{ јер } \left(\sqrt[mn]{a}\right)^m = \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}.$$

Примери:

1) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[3n]{a}$; 2) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{2}$;

$$3)\quad \sqrt[8]{\sqrt[5]{a^{12}}} = \sqrt[40]{a^{12}} = \sqrt[10]{a^3}.$$

На основу овога правила, *број коренујемо производом кад се поступно коренује појединим чинитељима ма којим редом*. Тако,

$$\sqrt[mnp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}},\ \text{или} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}\ \text{итд.}$$

5) *Корен се степенује неким бројем када му се или радиканд степенује тим бројем, или се изложитељ корена подели тим бројем.*

Тако,

$$1)\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}\,;$$

$2)\ (\sqrt[3]{a^2})^4 = \sqrt[3]{a^8}$, jер je $(\sqrt[3]{a^2})^4 = \sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^8} =$
$= \sqrt[3]{a^6\cdot a^2} = a^2\sqrt[3]{a^2}$.

$$3)\quad (\sqrt[6]{a})^3 = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a},\ \text{или}\ (\sqrt[6]{a})^3 = \sqrt[\frac{6}{3}]{a} = \sqrt{a}.$$

§ 95) **Довођење корена на заједнички изложитељ.** На основу правила: *да корен не мења своју вредност, ако и коренов и радикандов изложитељ помножимо или поделимо једним истим бројем* (напомена § 91), корене различитих изложитеља доводимо на заједнички изложитељ, када претходно за изложитеље корена, нађемо њихов најмањи заједнички садржатељ, а затим делимо нађени нај. зај. садржатељ са изложитељем свакога корена и добивеним количником множимо и изложитељ корена и изложитељ сваког чинитеља радиканда дотичног корена. Тако, ако имамо да доводимо корене: $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$ и $\sqrt[5]{c^3}$ на заједнички изложитељ, онда је нај. зај. садржатељ за коренове изложитеље 30. Стога изложитељ корена и изложитељ радиканда првог корена множимо са 15, другог са 10 и трећег са 6, чиме добијамо:

$$\sqrt[30]{a^{15}},\ \sqrt[30]{b^{20}}\ \text{и}\ \sqrt[30]{c^{18}}.$$

Ако имамо да помножимо или да делимо корене различитих изложитеља, треба их претходно довести на заједнички изложитељ, а затим вршимо множење и дељење по Г и 2 правилу из претходног параграфа, тј. множимо *(делимо) радиканде и добивени производ (количник) коренујемо заједничким изложитељем.*

Примери:

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^5};$

2) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[9]{a^7} = \sqrt[18]{a^{15}} \cdot \sqrt[18]{a^{14}} = \sqrt[18]{a^{29}} = a \sqrt[18]{a^{11}};$

3) $\sqrt[4]{a} : \sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^3} : \sqrt[12]{a^2} = \sqrt[12]{a};$

4) $\sqrt[10]{\frac{a^5b^2}{c^{15}}} : \sqrt[3]{\frac{ab}{c^4}} = \sqrt[30]{\frac{a^{15}b^6}{c^{45}}} : \sqrt[30]{\frac{a^{10}b^{10}}{c^{40}}} = \sqrt[30]{\frac{a^5}{b^4c^5}}.$

В. Кореновање са целим негативним бројевима

§ 96) **Тумачење.** *Број се коренује негативним бројем када се његова реципрочна вредност коренује истим али позитивним бројем.*

Тако, $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$, јер ако и изложитељ корена и изложитељ радиканда помножимо са — 1, добијамо:

$$\sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Обично се негативни изложитељи корена уклањају, кад се негативност пренесе на изложитељ радиканда. Тако:

1) $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{a^{-1}};$ 2) $\sqrt[-3]{a^2} = \sqrt[3]{a^{-2}};$ 3) $\sqrt[-m]{b^{-n}} = \sqrt[m]{b^n}.$

Израђени примери:

1) $\sqrt[-3]{27} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3};$ 2) $\sqrt[-2]{0{,}75} = \sqrt[-2]{\frac{25}{100}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2;$

3) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[-2]{a} = \sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{a^2} = a;$

4) $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[-2]{a} = \sqrt[3]{a^2} : \sqrt{a^{-1}} = \sqrt[6]{a^4} : \sqrt[6]{a^{-3}} = \sqrt[6]{a^7} = \sqrt[6]{a^6 \cdot a} = a \sqrt[6]{a};$

5) $\sqrt[-3]{\frac{a^{-3}b^6c^{-9}}{x^{-6}y^3}} = \frac{ab^{-2}c^3}{x^2y^{-1}} = \frac{ac^3y}{b^2x^2}.$

С) Степеновање и кореновање са разломљеним бројевим

§ 97) **Довођење корена на облик степена и обрнуто.** Н основу правила да се корен неће променити, ако изложител корена и изложитељ радиканда поделимо једним истим броје *можемо корен довести на облик степена, ако радиканд степенујемо количником између изложитеља радиканда и изложитеља корена.*

Тако, $\sqrt[r]{a^q}=a^{\frac{q}{r}}$, јер дељењем са r изложитеља корена и изложитеља радиканда, добијамо $\sqrt[1]{a^{\frac{q}{r}}}=a^{\frac{q}{r}}$. Да је правило тачно, увиђамо и по томе што добијамо радиканд a^q, ако резултат $a^{\frac{q}{r}}$ степенујемо са r $[(a^{\frac{q}{r}})^r=a^{\frac{qr}{r}}=a^q]$.

Примери:

$$1)\ \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}};\quad 2)\ \sqrt[\frac{3}{4}]{b^{\frac{1}{5}}}=b^{\frac{1}{5}:\frac{3}{4}}=b^{\frac{4}{15}};$$

$$3)\ \sqrt[3]{a^2b}=(a^2b)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}.$$

Обрнуто, *степен с разломљеним изложитељем доводимо на облик корена, ако основу степенујемо бројитељем а коренујемо именитељем, или најпре коренујемо именитељем, а затим степенујемо бројитељем.*

$$\text{Тако, } a^{\frac{m}{u}}=\sqrt[n]{a^m};\ \text{или}=(\sqrt[n]{a})^m.$$

Примери:

$$1)\ b^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{b^3};\quad 2)\ a^{0,25}=a^{\frac{25}{100}}=a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a};$$

$$3)\ (a^2b^3c)^{\frac{3}{7}}=\sqrt[7]{(a^2b^3c)^3}=\sqrt[7]{a^6b^9c^3}=b\sqrt[7]{a^6b^2c^3}.$$

На горњим се правилима оснивају правила о степеновању и кореновању са разломљеним изложитељима. *Ако је, дакле, коренов изложитељ разломак, треба само корен претворити у степен, или кореновати бројитељем а степеновати именитељем. Ако је изложитељ степена разломак, треба степен довести на облик корена.*

Примери:

$$1)\ a^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{a^5};\qquad 2)\ 25^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5;$$

$$3)\ 64^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{64^5}=(\sqrt[6]{64})^5=2^5=32.$$

$$4)\ \sqrt[\frac{3}{4}]{5}=5^{1:\frac{3}{4}}=5^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{5^3.5}=5\sqrt[3]{5};$$

$$5)\ \sqrt[1,75]{128}=\sqrt[1\frac{3}{4}]{128}=\sqrt[\frac{7}{4}]{128}=\sqrt[7]{128^4}=(\sqrt[7]{128})^4=2^4=16;$$

$$6)\ \sqrt[0,25]{\frac{1}{2}}=\sqrt[\frac{1}{4}]{\frac{1}{2}}=\sqrt[1]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{16};$$

$$7)\ \sqrt[0,4]{9}=\sqrt[\frac{4}{10}]{9}=\sqrt[\frac{2}{5}]{9}=(\sqrt{9})^5=3^5=243.$$

Напомена. Сваки број или израз кореснован нулом даје степен са бесконачним изложитељем, а основа му је тај број (израз). Тако,

$$1)\ \sqrt[0]{a}=a^{\frac{1}{0}}=a^{\infty}; \qquad 2)\ \sqrt[0]{5}=5^{\infty}=\infty;$$

$$3)\ \sqrt[0]{0,5}=(0,5)^{\infty}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=\frac{1}{\infty}=0;$$

$$4)\ \sqrt[0]{\left(\frac{b}{a}\right)^3}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{0}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\infty}.$$

Сва правила, која су вредела за степеновање и кореновање са целим бројевима, вреде и за степеновање и кореновање са разломљеним бројевима.

Примери:

$$1)\ 5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{6}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}=5^{\frac{12}{6}}=5^{2}=25;$$

$$2)\ a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}=(ab)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{ab};$$

$$3)\ a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{n}{m}}=a^{\frac{m^2-n^2}{mn}};$$

$$4)\ (x^{n})^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{n}{n}}=x;$$

$$5)\ \left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{6}{12}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a};$$

$$6)\ \sqrt[-3]{a^{\frac{3}{4}}}=a^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a}}.$$

$$7.\ (4\cdot 25)^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=2\cdot 5=10.$$

§ 98) **Корени с алгебарским радикандима.** Видели смо код степеновања да добијамо *позитивну вредност*, ако степенујемо: *a*) позитиван број било парним, било непарним бројем; и *b*) када степенујемо негативан број парним бројем, а да добијемо негативну вредност, ако степенујемо негативан број непарним изложитељем. Било је, дакле,

1) $(\pm a)^{2n}=+p$; 2) $(+b)^{2n+1}=+q$; 3) $(-b)^{2n+1}=-q$, где p и q претстављају добивене вредности степена. Како је

кореновање супротна радња степеновању, онда се из горњих трију једначина добија:

4) $\sqrt[2n]{+p}=\pm a$;   5) $\sqrt[2n+1]{+q}=+b$; и   6) $\sqrt[2n+1]{-q}=-b$;

из којих једначина изводимо закључак:

1) *Да сваки паран корен из позитивног радиканда има по две једнаке али супротно означене стварне вредности;*

2) *Да сваки непаран корен из позитивног радиканда има само једну позитивну стварну вредност; и*

3) *Да сваки непаран корен из негативног радиканда има само једну стварну негативну вредност.*

Остаје нам да испитамо случај кад имамо да извлачимо паран корен из негативног радиканда, тј. случај $\sqrt[2n]{-a}$. *У овом* случају апсолутно је немогуће добити једну стварну, позитивну или негативну, вредност, јер не постоји ни једна таква вредност, било цела, разломљена или ирационална, која, степенована са парним изложитељем $2n$, даје за вредност негативни радиканд $-a$. Стога израз $\sqrt[2n]{-a}$ није стваран. Он је *уображен (имагинаран)*. Из свега овога изводимо још правило:

4) *Сваки паран корен из негативна радиканда нема стварне вредности.*

Израз $\sqrt[2n]{-a}$ је само један алгебарски обележај, који је задржан у алгебри само у циљу генералисања. Израз $\sqrt{-a}$ зове се *уображен (имагинаран) број другог степена.* Такви су бројеви $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-25}$ итд. Па како подизањем на *квадрат* једног имагинарног броја II-гог степена, добијамо његов стварни радиканд $[(\sqrt{-a})^2=-a]$, значи да за све имагинарне бројеве II степена вреди основно правило из кореновања: *да корен, степенован кореновим изложитељем, даје за резултат свој радиканд.*

§ 99) **Примери за вежбу**

а) Наћи корене:

1) $\sqrt[n]{a^{2nx}}$;   2) $\sqrt[r]{(x-b)^{nr}}$;   3) $\sqrt[n]{a^{nx}\,b^{-pn}}$; 4) $\sqrt[7]{a^{14}\,(b^7-c^7)^{7x}}$;

5) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{y^{-n}\,z^{nx}}}$;   6) $\sqrt[6]{\dfrac{a^{12}\,b^{-24}\,c^6}{64\,n^{18}\,x^{-42}}}$;   7) $\sqrt[r]{a^{2r}\,y^{nr+r}}$;

11) $\sqrt[2n-3]{\dfrac{a^{17n-10n^2-3}}{b^{(4n-6)2}c^{15-10n}}}$.

b) *Стави пред корен чинитеље радиканда који се могу кореновати:*

12) $\sqrt{12}$; 13) $\sqrt[3]{72}$; 14) $\sqrt[3]{192}$; 15) $\sqrt[4]{576}$; 16) $\sqrt[6]{2186}$;

17) $\sqrt[4]{6x^4}$; 18) $\sqrt{16x^4y^2z^5}$; 19) $\sqrt[4]{81a^6b^2}$; 20) $4\sqrt{72r^3s^4}$;

21) $\sqrt{x^{2z+1}}$; 22) $\sqrt[3]{4x^{3z-2}}$; 23) $\sqrt[3]{6a^9b^2c^4}$; 24) $\sqrt[3]{\frac{125x^2}{216y^4}}$;

25) $\sqrt{a^2x^2-b^2x^3+c^2x^4}$; 26) $\sqrt[7]{-a^{16n}b^{5n}}$; 27) $\sqrt[8]{a^8b^{24}c^{17}d^{40n}h^{35n}}$;

28) $\sqrt[n]{b^{nx+r}b^{3n}z^3}$; 29) $\sqrt[x]{a^{2x-3}b^{2-3x}}$; 30) $\sqrt[x]{\frac{a^{1-2x}b^{-3x}}{c^{-5x-7}}}$;

31) $\sqrt[5]{a^{7n-5}b^{11n+23}c^{-10}}$; 32) $\sqrt[6]{\frac{a^{6n+r}b^{-9n-13}}{c^{17n-15}d^{4n-10r+1}}}$; 33) $\sqrt[n]{a^{n+1}b^{n}\cdot a^{n}b^{n+1}}$.

c) Уведи чинитеље пред кореном у корен:

34) $5\sqrt{7}$; 35) $3\sqrt[3]{3}$; 36) $3\sqrt[5]{2}$; 37) $a\sqrt{2}$;

38) $c\sqrt[6]{6d}$; 39) $-a\sqrt{5}$; 40) $-r\sqrt[3]{5}$;

41) $x^3\sqrt[5]{y^{14}c^{13}}$; 42) $\frac{7}{8}\sqrt[4]{\frac{512a}{49}}$; 43) $\frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{b^4}{c^2}}$;

44) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$; 45) $(3a-5b)\sqrt[3]{\frac{9a^2-25b^2}{(3a-5b)^4}}$;

46) $(\sqrt{10}+\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$; 47) $2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$.

d) Следеће корене претвори у степене:

48) $\sqrt[n]{a^p}$; 49) $\sqrt[3]{5a^2}$; 50) $\sqrt[5]{a^3b^4c^5}$;

51) $\sqrt[15]{x^3y^5z^{12}}$; 52) $\sqrt[7]{\frac{a^3(x-y)^8}{7x^5+5y^7}}$; 53) $\sqrt[3]{a^6x^{-1}}$.

e) Следеће степене претвори у корене:

54) $a^{\frac{1}{n}}$; 55) $a^{-\frac{p}{q}}$; 56) $c^{1\frac{1}{2}}$; 57) $m^{-\frac{x}{2}}$;

58) $\left(\frac{a}{x-1}\right)^{\frac{2}{n}}$; 59) $\frac{1}{(a-x)^{-0,6}}$; 60) $a^{\frac{px}{2n}-\frac{1}{4n}}$.

f) Нађи вредност степена:

61) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $125^{\frac{1}{3}}$; $32^{\frac{1}{5}}$; $0{,}01^{-0{,}5}$;

62) $1000^{\frac{2}{3}}$; $0{,}16^{1{,}5}$; $243^{0{,}6}$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $64^{-\frac{5}{6}}$; $\left(\frac{1}{27}\right)^{-1{,}5}$;

63) $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}$; $0{,}064^{\frac{2}{3}}$; $(-0{,}064)^{\frac{2}{3}}$; $(-0{,}00032)^{\frac{3}{5}}$.

h) Доведи на најмањи заједнички изложитељ корене:

64) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[4]{3}$; 65) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[9]{10}$; 66) $\sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{7}$ и $\sqrt[6]{15}$;

67) $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}, \sqrt[6]{\frac{5}{6}}$ и $\sqrt[18]{\frac{7}{8}}$; 68) $\sqrt[3]{a^4}$ и $\sqrt[4]{a^3}$;

69) $\sqrt{\frac{a}{b^2}}, \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}$; 70) $\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[4r]{a^8}$ и $\sqrt[8]{a^p}$.

i) Сабери и одузми корене:

71) $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$; 72) $2\sqrt{3}-6\sqrt{3}+4\sqrt{3}$;

73) $5\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$; 74) $3\sqrt[5]{2}+4\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{64}$;

75) $3\sqrt{a}-\frac{2}{3}\sqrt{a}-1\frac{5}{6}\sqrt{a}$; 76) $\sqrt[3]{27c^4}-\sqrt[3]{8c^4}+\sqrt[3]{125c^4}$;

77) $3\sqrt{126x^3y^2}+y\sqrt{20x^3}-\sqrt{500x^3y^2}-x\sqrt{45xy^2}$;

78) $\sqrt[n]{a^{n+1}}+\sqrt[n]{a}$; 79) $\sqrt[z]{ab^{z+1}}+b\sqrt[z]{a^{z+1}b}$.

k) Помножи корене:

80) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; 81) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$; 82) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{-36}$;

83) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$; 84) $(3\sqrt{8}+\sqrt{13}+\sqrt{50}-2\sqrt{72})\cdot\sqrt{2}$;

85) $(2\sqrt{20}-7\sqrt{8}-3\sqrt{5}+3\sqrt{18})\cdot4\sqrt{10}$;

86) $(5-2\sqrt{3})(6+5\sqrt{3})$; 87) $(3\sqrt{5}+\sqrt[4]{7})\ (3\sqrt{5}-\sqrt[4]{7})$;

88) $\sqrt{5+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{5-5\sqrt{15}}$; 89) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

90) $3\sqrt{a}\cdot4\sqrt{b}$; 91) $x\sqrt{6z}\cdot y\sqrt{24z^3}$;

92) $\sqrt[z]{a^{2z-s}}\cdot\sqrt[z]{a^{s-z}}$; 93) $\sqrt[4]{(a+b)^3}\cdot\sqrt[4]{a^2-b^2}\cdot\sqrt[4]{(a-b)^3}$;

94) $(a-b\sqrt{c})^2$; 95) $(a\sqrt{y}+b\sqrt{y^3})^4$;

96) $(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})\ (a\sqrt{b}-b\sqrt{a})$; 97) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}$;

98) $\sqrt[5]{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; 99) $\sqrt[3]{\frac{s}{z}}\ \sqrt[4]{\frac{z}{s}}$; 100) $3\sqrt{2x}\cdot5\sqrt[4]{2x^2}$;

101) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt[8]{a^7}}$; 102) $\left(\sqrt{a^5}-\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a^3}\right)^2$.

l) Подели корене:

103) $\sqrt{63}:\sqrt{7}$; 104) $\sqrt[4]{80}:\sqrt[4]{5}$;

105) $\sqrt{\frac{5}{8}}:\sqrt{\frac{5}{6}}$; 106) $\frac{3}{\sqrt{5}}:\frac{\sqrt{3}}{5}$;

107) $(\sqrt{24}-\sqrt{18}+\sqrt{12}):\sqrt{3};$ 108) $\sqrt{4a}:\sqrt{a};$

109) $\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{b}{a}};$ 110) $\sqrt{\frac{a^3}{x^2}}:\sqrt{a}-\sqrt[3]{\frac{b^5}{x^4}}:\sqrt[3]{\frac{b^2}{x}};$

111) $(a-b):(\sqrt{a}-\sqrt{b});$ 112) $(a-1):(\sqrt{a}-1);$

113) $(x-1):(\sqrt[4]{x}+1);$ 114) $(a^2+a+1):(a+\sqrt{a}+1);$

115) $\sqrt{72}:\sqrt[4]{64};$ 116) $\sqrt{\frac{3}{5}}:\sqrt[4]{3\frac{3}{8}};$

117) $\sqrt{b}:\sqrt[4]{b};$ 118) $x^3:\sqrt{x};$

119) $\sqrt[9]{\frac{ab^4}{c^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{ab^4}{c}}:\sqrt[15]{\frac{ab^4}{c^3}}:\sqrt[45]{\frac{c^{31}}{a^3b^7}};$ 120) $\left(\frac{a^2}{x^2}-\sqrt{\frac{x}{a}}\right):\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}-\sqrt[6]{\frac{x}{a}}\right).$

m) Изврши означено кореновање са негативним изложитељима:

121) $\sqrt[-2]{16};\quad \sqrt[-2]{\frac{1}{16}};\quad \sqrt[-3]{64};\quad \sqrt[-5]{243};$

122) $\sqrt[-2]{a};\quad \sqrt[-3]{x^6};\quad \sqrt[-3]{\frac{a}{b}};\quad \sqrt[-4]{\frac{a^6}{b^{10}}}.$

123) $\sqrt[3]{a^7}\cdot\sqrt[-7]{b^3};\quad \sqrt[3]{a^2}:\sqrt[-3]{a};\quad \sqrt[-2]{c^3}\cdot\sqrt[-]{c^5}.$

124) $\sqrt[-4]{a^{-14}};\quad \sqrt[-1]{a}\cdot\quad \sqrt[-3]{a^5};\quad \sqrt[-3]{216^{-2}}.$

n) Изврши степеновање корена:

125) $(\sqrt{a^5})^2;\quad (\sqrt[3]{b^2})^3;\quad (\sqrt[4]{c^3})^4.$

126) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}\right)^4;\quad \left(\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^7}}\right)^3;\quad \left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{343\cdot125}{1000}}}\right)^5;$

127) $(\sqrt[12]{ab})^3\cdot\left(\sqrt[12]{\frac{a}{b}:\frac{1}{bc}}\right)^4\cdot\left(\sqrt[12]{\frac{a^7}{b^6}\cdot\frac{a^{-6}}{b^{-7}}}\right)^5.$

128) $(\sqrt[6]{(a^2-b^2)^4})^3;\quad (\sqrt[r]{(x^2-y^2)^{2r}})^s;\quad (\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18})^2;$

129) $(-\sqrt[3]{5})^6;\quad (-\sqrt{3ab^3c})^2;\quad (-\sqrt[3]{r^2s^4})^3.$

p) Изврши кореновање корена:

130) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}};\quad \sqrt{\sqrt[3]{x}};\quad \sqrt[6]{\sqrt[3]{a^6}};\quad \sqrt[5]{\sqrt[4]{y^{10}}};$

131) $\sqrt[4]{64};\quad \sqrt[6]{81};\quad \sqrt[12]{16};\quad \sqrt[10]{32a^5};$

132) $\sqrt{a\sqrt[8]{a}}$; $\sqrt[3]{b\sqrt{b}}$; $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{9a^{18}}}$;

133) $\sqrt[3]{ab^2\sqrt{a^3b}}$; $\sqrt[5]{a^4b^3\sqrt[3]{ab^2\sqrt{a^3b^5}}}$;

134) $\sqrt[9]{\sqrt[5]{b^{11}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[15]{b^{19}}} : \sqrt[3]{b}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a^7}} : \sqrt[6]{\sqrt{a}} : a$;

135) $\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[z]{a^{24x}}}}$; $\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}$; $\sqrt[4]{c\sqrt[3]{c\sqrt{c}}}$; $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b}}}$.

q) Изврши означене радње са степенима чији су изложитељи разломљени:

136) $a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}$; $\frac{1}{2}a^{\frac{2}{3}}+4a^{-\frac{2}{3}}$;

137) $4a^{-\frac{3}{5}}-0{,}6a,^{-\frac{3}{5}}-3a^{-\frac{3}{5}}$;

138) $d^{-\frac{2}{3}} \cdot d^{\frac{3}{4}}$; $a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{12}}$; $x^{-\frac{1}{a}} \cdot x^{-\frac{1}{b}}$; $\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{8}{12}}$;

139) $(b-c)^{\frac{1}{2}} \cdot (b+c)^{\frac{1}{2}}$; $\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{4}}\right)$;

140) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}}$; $a^{-\frac{1}{4}} : a^{-\frac{1}{2}}$; $b^{\frac{2}{3}} : b^{-\frac{1}{2}}$;

141) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{7}}c^{-3\frac{1}{2}} : a^{\frac{5}{9}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{7}}$; $a^{\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{a}$;

142) $\sqrt[3]{b^2} : b^{\frac{1}{6}}$; $\sqrt[12]{c^5} : c^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[4]{x^3} : x^{\frac{11}{20}}$;

143) $\left(a^{\frac{2}{x}}-b^{\frac{2}{x}}\right) : \left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)$; $\left(x^{\frac{2r}{x}}-3x^{\frac{r}{s}}+2\right) : \left(x^{\frac{r}{s}}-1\right)$.

D) Преображај ирационалних корена

§ 100) **Рационалење именитеља.** Често се јавља потреба за претварање једнога разломка, чији је именитељ ирационалан, у разломак са рационалним именитељем, а да му се вредност не промени. Овај се посао назива *рационалење именитеља,* а врши се на основу особине разломка да се његова вредност не мења, ако му и бројитељ и именитељ помножимо једним истим бројем. Разломак са ирационалним именитељем може имати један од ових облика:

a) $\frac{b}{\sqrt[m]{a^n}}$ b) $\frac{c}{m\sqrt{a} \pm n\sqrt{b}}$ и c) $\frac{c}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[m]{b^q}}$,

од којих случајеве под a) и b), као најчешће испитујемо.

а) *Да бисмо рационалили именитељ расломка* $\frac{b}{\sqrt[m]{a^n}}$, *где је* $m > n$, *треба да помножимо и бројитељ и именитељ са* $\sqrt[m]{a^{m-n}}$. Тако,

$$\frac{b}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{b\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n}\cdot\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{b\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{b\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

Напомена. Најчешћи је случај из овога облика, када је $m = 2$ а $n = 1$, тј. кад је именитељ облика $\sqrt{a}$. У овом случају множимо и бројитељ и именитељ са $\sqrt{a}$.

Решени примери:

1) $\frac{2}{\sqrt2} = \frac{2\sqrt2}{(\sqrt2)^2} = \frac{2\sqrt2}{2} = \sqrt2$;

2) $\frac{6+\sqrt{12}}{\sqrt3} = \frac{(6+\sqrt{12})\sqrt3}{(\sqrt3)^2} = \frac{6\sqrt3+\sqrt{36}}{3} = \frac{6\sqrt3+6}{3} = 2\sqrt3+2$;

3) $\frac{\sqrt a}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{\sqrt a\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt a\cdot\sqrt[5]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[10]{a^{11}}}{a} = \frac{a\sqrt[10]{a}}{a} = \sqrt[10]{a}$;

4) $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y}} = \frac{(x^2-y^2)\sqrt{x+y}}{(\sqrt{x+y})^2} = \frac{(x^2-y^2)\sqrt{x+y}}{x+y} = (x-y)\sqrt{x+y}$;

5) $\frac{3x\sqrt{5a}}{2\sqrt[4]{2a}} = \frac{3x\sqrt{5a}\sqrt[4]{(2a)^3}}{2\cdot(\sqrt[4]{2a})^4} = \frac{3x\sqrt[4]{25a^2\cdot8a^3}}{4a} = \frac{3x\sqrt[4]{200a^5}}{4a} =$

$$= \frac{3ax\sqrt[4]{200a}}{4a} = \frac{3x\sqrt[4]{200a}}{4}.$$

b) *Да бисмо рационалили именитељ разломка облика* $\frac{c}{a\pm\sqrt b}$ или $\frac{c}{m\sqrt a\pm n\sqrt b}$, *треба и бројитељ и именитељ да помножимо са* $a\mp\sqrt b$, *односно* $m\sqrt a\mp n\sqrt b$. Тада је:

1) $\frac{c}{a\pm\sqrt b} = \frac{c(a\mp\sqrt b)}{(a\pm\sqrt b)(a\mp\sqrt b)} = \frac{c(a\mp\sqrt b)}{a^2-b}$;

2) $\frac{c}{m\sqrt a\pm n\sqrt b} = \frac{c(m\sqrt a\mp n\sqrt b)}{(m\sqrt a\pm n\sqrt b)(m\sqrt a\mp n\sqrt b)} = \frac{c(m\sqrt a\mp n\sqrt b)}{m^2a-n^2b}$;

Израђени примери:

1) $\frac{\sqrt2}{2-\sqrt2} = \frac{\sqrt2(2+\sqrt2)}{(2-\sqrt2)(2+\sqrt2)} = \frac{\sqrt2(2+\sqrt2)}{4-2} = \frac{2\sqrt2+2}{2} = \sqrt2+1$

$$2)\ \frac{m}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=\frac{m\,(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})}{a^2 b-b^2 a}\,;$$

$$3)\ \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-3}=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}\,;$$

$$4)\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot(2+\sqrt{3})}{4-3}=$$

$$=\sqrt{20-10\sqrt{3}}\,(2+\sqrt{3}\,.$$

§ 101) **Ирационалне једначине.** Ирационалне су једначине оне у којима се непозната количина, сама или са другим количинама, налази у радиканду, који се не може потпуно кореновати. Таква је једначина $\sqrt{10+3\sqrt{2x+1}}=5$. При решавању ирационалних једначина старамо се најпре да једначине ослободимо корена у чијим се радикандима јавља непозната количина. Ради тога једначину најпре преображавамо тако да чланове с коренима у чијим се радикандима налази и непозната остављамо на једној, а остале чланове пребацујемо на другу њену страну, па затим степенујемо обе њене стране креновим изложитељем. Тиме добијамо једначину без корена, коју даље решавамо по ранијим упутствима. Ако степеновањем не успемо да се свију корена под којима се налази у радиканду и непозната ослободимо, онда опет добивену једначину претходно преображавамо тако да буду њени чланови с коренима под којима је непозната с једне, а све остале чланове с друге стране, па наново вршимо степеновање. 1)

Примери: Решити једначину $\sqrt{4x^2+8x-11}-2x=1$.

Најпре ову једначину доводимо на облик:

$$\sqrt{4x^2+8x-11}=1+2x,$$

а затим степеновањем са 2, добијамо:

$$4x^2+8x-11=1+4x+4x^2.$$

Одавде је $x=3$.

2) *Решити једначину* $\sqrt{16+3\sqrt{2x+1}}=5$.

Степеновањем са 2 добијамо:

$16+3\sqrt{2x+1}=25$, или $3\sqrt{2x+1}=9$, или $\sqrt{2x+1}=3$.

Поновним степеновањем са 2 добијамо: $2x+1=9$, а одавде је $x=4$.

3) *Решити једначину* $\sqrt{x+a^2}-\sqrt{x-2ab}=a$.

Степеновањем са 2 добијамо:

$x+a^2-2\sqrt{(x+a^2)(x-2ab)}+x-2ab=a^2$, или $2x-2ab=$ $=2\sqrt{(x+a^2)(x-2ab)}$, или $x-ab=\sqrt{(x+a^2)(x-2ab)}\cdot$

Поновним степеновањем са 2 добијамо:

$x^2-2abx+a^2b^2=(x+a^2)(x-2ab)$, а одавде је $x=b(b+2a)$.

Напомена. Често се дешава да неко добивено решење не задовољава дату једначину, иако смо сасвим правилно радили. У том случају решење задовољава једначину од истих чланова, само са супротним знаком пред парним кореном у чијем је радиканду непозната. Ово се оснива на теореми: Једначина $A^m=B^m$ (1), *где су A и B зависне количине од x, еквивалентна је с једначином $A=B$* (2), *ако је m непаран број, а еквивалентна је с једначинама $A=B$ и $A=-B$, ако је m паран број.* Заиста,

1) Ако је m непаран број, онда A и B имају исте знаке као и A^m и B^m, те је за $A^m=B^m$ и $A=B$; 2) ако је m паран број, онда за $A^m=B^m$, јер и $A=B$ и $A=-B$, јер је $(-A)^m=$ $=(-B)^m=(+A)^m=(+B)^m=A^m=B^m$.

§ 102) **Задаци за вежбу**

а) Рационали именитеље разломака:

1) $\frac{b}{\sqrt{a}}$; $\frac{x}{\sqrt[3]{a}}$; $\frac{x}{\sqrt[3]{a^2}}$; $\frac{m}{\sqrt[5]{a^2}}$. 2) $\frac{u}{\sqrt[n]{a}}$; $\frac{u}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$; $\frac{v}{\sqrt[n]{a^{2n-m}}}$; $\frac{a}{\sqrt{a}}$.

3) $\frac{x^2}{\sqrt[n]{x}}$; $\frac{x^3}{\sqrt[4]{x^7}}$; $\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$; $\frac{x\sqrt{xy}}{\sqrt{zy}}$.

4) $\frac{1}{4+\sqrt{14}}$; $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$; $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; $\frac{6}{\sqrt{7}-2}$.

5) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$; $\frac{12}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}$.

6) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\frac{a\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

7) $\frac{1+\sqrt{2a-1}}{1-\sqrt{2a-b}}$; $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$; $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b+\sqrt{ab}}$.

b) Решити ове ирационалне једначине:

9) $\sqrt{2x}=4$; $2\sqrt{x}=3$; $4\sqrt{3x}=2{,}7$.

10) $3\sqrt{5x-3}=0{,}2$; $\sqrt{5x-17}=\sqrt{3x+11}$.

11) $a\sqrt{bx}=b$; $b\sqrt{x-a}=a$; $\sqrt{\frac{b-ax}{a+b}}=a-b$.

12) $\sqrt{x}+5=12$; $13-\sqrt{x}=8$;

13) $\sqrt{19+\sqrt{3x+15}}=5; \quad (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)=x+1.$

14) $(\sqrt{x}+8)^2+(\sqrt{x}+12)^2=2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)+1.$

15) $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}=2; \quad \sqrt{x-3}-1=\sqrt{x-10}.$

16) $\sqrt[3]{20-3\sqrt{5x+1}}=2; \quad \sqrt{x+1}-\dfrac{2(x-2)}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x-1}.$

17) $\sqrt{x+a^2}+\sqrt{x+b^2}=a+b.$

18) $\sqrt{8x-7}+\dfrac{2x-2}{\sqrt{2x+3}}=\sqrt{2x+3}.$

19) $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{y}}=6, \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{4}{\sqrt{y}}=1. \end{cases}$ 20) $\begin{cases} \sqrt{2x}-\sqrt{3y}=3, \\ 3\sqrt{x}+\sqrt{y}=7\sqrt{2}. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{4}{\sqrt{y+2}}=2, \\ \dfrac{15}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{8}{\sqrt{y+2}}=1. \end{cases}$ 22) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}+1}-1=\sqrt{\dfrac{x}{y}-1}, \\ \sqrt{x+y}=\sqrt{3x+4y+5}. \end{cases}$

E) Примена степеновања и кореновања на решавање изложитељних једначина

§ 103) Врста изложитељних једначина које се решавају без употребе логаритама

Видели смо раније да је изложитељна она једначина чија се непозната, сама или са другим количинама, налази у изложитељу неког степена или корена. Такве су једначине:

$$a^x = b \text{ и } \sqrt[x]{c} = d.$$

Решавање изложитељних једначина врши се уопште употребом логаритама. Међутим, постоји једна врста изложитељних једначина које се решавају без употребе логаритама. То су оне изложитељне једначине чије стране можемо довести на степене с једнаким основама, тј. које можемо довести на облик:

$$a^m = a^n.$$

Па како су тада стране једначине једнаки степени с једнаким основама, то је јасно да су им и изложитељи једнаки, тј. $m = n$. Према томе упутство за решавање изложитељних једначина које се решавају без употребе логаритама, састоји се у овоме: *треба најпре обе стране једначине довести на једнаке степене с једнаким основама применом правила из степеновања и кореновања. Затим изостављамо основе, а став-*

љамо да су изложитељи једнаки, чиме добијамо обичну алгебарску једначину коју најзад решавамо по ранијим упутствима.

Решени примери:

1) *Решити једначину* $a^{x+1}\cdot a^{3x-4}=a^{x}\cdot a^{7x-11}$.

Када извршимо означено множење на обема странама, добијамо:

$$a^{4x-3}=a^{8x-11}.$$

Одавде је $4x-3=8x-11$, а $x=2$.

2) *Решити једначину* $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x-11}=\left(\frac{5}{3}\right)^{3-7x}$.

Како десну страну ове једначине можемо написати као $\left(\frac{3}{5}\right)^{7x-3}$, то је $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x-11}=\left(\frac{3}{5}\right)^{7x-3}$.

Стога је $3x-11=7x-3$, а $x=-2$.

3) *Решити једначину* $3^{x}+3^{x-2}=270$.

Растављањем на чинитеље леве стране, добијамо:

$3^{x-2}(3^2+1)=270$, или $3^{x-2}\cdot 10=270$, или $3^{x-2}=27$, или $3^{x-2}=3^3$. Одавде је $x-2=3$, а $x=5$.

4) *Решити систем једначина:*

$$a^{4x-y}:a^{y-x}=a,\quad a^{x+y}:a^{8x-2y}=1.$$

Ако извршимо означено дељење на левим странама, а 1 заменимо са a^0, добијамо:

$$1)\ a^{5x-2y}=a^{1},\ \text{и}\ 2)\ a^{3y-7x}=a^{0}.$$

Из (1) имамо: $5x-2y=1$, а из (2): $3y-7x=0$. Решењем ових једначина добијамо: $x=3$, $y=7$.

5) *Решити једначину* $\sqrt{2^{x+1}}=\sqrt{0,5^{1-4x}}$.

Ако корене на обема странама доведемо на облик степена, добијамо:

$$2^{\frac{x+1}{2}}=0,5^{\frac{1-4x}{7}},\ \text{или}\ 2^{\frac{x-1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-4x}{7}},\ \text{или}\ 2^{\frac{x+1}{2}}=2^{\frac{4x-1}{7}}.$$

Одавде је $\frac{x+1}{2}=\frac{4x-1}{7}$, а $x=9$.

Примери за вежбу:

6) $4^{x}=64$;

7) $3^{x-5}=81$;

8) $12^{x-13}=\frac{1}{144}$;

9) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-x}=4096$;

10) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{4x}{5}}=\frac{64}{125}$;

11) $1,5^{0,4x}=\frac{16}{81}$;

12) $x^{x}=x$;

13) $2^{x}=3^{x}$;

14) $\sqrt[2x]{64} = 2;$ 15) $\sqrt[x+2]{5^{2-3x}} = \frac{1}{25};$

16) $4^{2(x+1)} = \sqrt[-5]{16^{15-x}}$ 17) $100 \cdot 10^{2x-1} = \sqrt[5]{1000^7};$

18) $4^{3x+1} = 64 \cdot 2^{2x+1};$ 19) $2^x = 32;$

20) $(5^x)^3 = 25;$ 21) $\frac{1}{49^{2x}} = 343;$

22) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7} = 64;$ 23) $\left(\frac{4}{3}\right)^{4x-7} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2-3x};$

24) $\left(\frac{27}{19}\right)^{11x-15} = \left(\frac{19}{27}\right)^{7x-3};$ 25) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^{x-1} = \left(\frac{3b}{2a}\right)^{2x-3};$

26) $(a^{x-3})^{2x} = (a^{2x})^{1+x};$ 27) $\sqrt[x+2]{a^{4x-17}} = \sqrt[x+3]{a^{4(x-5)}};$

28) $0{,}25^{23} = \sqrt[3]{4^{5x-3}} \cdot 0{,}125^{6x};$ 29) $64^{\frac{x+2}{8x-5}} = \sqrt[4]{0{,}5} \cdot \sqrt[x+3]{2^{x+24}};$

30) $7^x + 7^{x-1} = 8^x;$ 31) $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3};$

32) $\sqrt{a^{x-1}} \cdot \sqrt[3]{a^{2x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{2-3x}} = 1;$

33) $\sqrt[3]{a^{2-x}} \cdot \sqrt[4]{a^{4-x}} \cdot \sqrt[6]{a^{5x+1}} = 1;$

34) $\left(\frac{1}{0{,}75}\right)^x = \frac{27}{64};$ 35) $3^{x+1} - 3^x = 2;$

36) $8 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 891;$ 37) $2^{2x} \cdot 3^x = 144;$

38) $5^{x+1} + 5^x = 750;$ 39) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3};$

40) $\left\{\begin{aligned} &4^{2x-3} \cdot 2^{3y-2} = 1024, \\ &3^{x-2} \cdot 3^{y-3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}\right.$ 41) $\left\{\begin{aligned} &a^{x+y} : a^{8x-2y} = 1, \\ &2^{2x-3} \cdot 2^{5-3y} = 0{,}5. \end{aligned}\right.$

42) $\left\{\begin{aligned} &\sqrt[x]{a^{3-2n}} \cdot \sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{a^{2+n}}, \\ &\sqrt[x+y]{a} \cdot \sqrt[x+y]{a^{2n}} = a^2. \end{aligned}\right.$ 43) $\left\{\begin{aligned} &\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{8} = \frac{1}{2}, \\ &\sqrt[4x]{3} \cdot \sqrt[2y]{27} = 1. \end{aligned}\right.$

44) $\left\{\begin{aligned} &\sqrt[3]{m^{x-5}} \sqrt{m^{y-3}} = 1, \\ &\sqrt[4]{(m^{x-1})^3} \cdot \sqrt[3]{m^{5y-1}} = \sqrt[3]{m^{23}}. \end{aligned}\right.$ 45) $\left\{\begin{aligned} &\sqrt[3x]{a} \cdot \sqrt[2y]{a^5} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \\ &\sqrt[x]{b^2} = b^{13} \sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[4y]{b^7}. \end{aligned}\right.$

F) Квадратни и кубни корен из полинома и посебних бројева

§ 104) **Квадратни корен из полинома.** Како је извлачење квадратног корена обрнута радња подизању полинома на квадрат, то се поступак за извлачење квадратнога корена састоји у овоме:

Најпре из првог члана уређеног радиканда извлачимо квадратни корен, и добивени корен је први члан резултата. Квадрат овог првог члана одузимамо од радиканда, чиме добијамо остатак од осталих чланова радиканда. Затим први члан остатка делимо двоструким производом првог члана резултата, и добивени количник додајемо и резултату и делитељу. Овако увећани делитељ множимо додатим количником, и добивени производ одузимамо од првог остатка радикандовог. Први члан новог остатка опет делимо првим чланом двоструког бинома од првог и другог члана резултата, и нови количник додајемо и резултату и новом делитељу. Овако увећани нови делитељ множимо новим количником и производ одузимамо од другог остатка радикандовог. Овако радимо све дотле док не добијемо за остатак нулу.

Ако радимо по горњем упутству, па не добијемо остатак нулу већ полином чији први члан није дељив с првим чланом двоструког резултата, значи да дати радиканд није квадрат неког полинома.

Решени примери:

1) $\sqrt{16a^6 - 24^5_{\alpha} + 25a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1} = \mathbf{4a^3 - 3a^2 + 2a - 1}.$

$$\underline{-\ 16a^6}$$

$$-\ 24a^5 + 25a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1 : (8a^3 - 3a^2) \cdot (-3a^2)$$

$$-\ 24a^5 + 9a^4$$

$$\underline{+ \qquad -}$$

$$16a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1 : (8a^3 - 6a^2 + 2a) \cdot 2a$$

$$16a^4 - 12a^3 + 4a^2$$

$$\underline{- \qquad + \qquad -}$$

$$-8a^3 + 6a^2 - 4a + 1 : (8a^3 - 6a^2 +$$

$$-8a^3 + 6a^2 - 4a + 1 \qquad + 4a - 1) \cdot (-1)$$

$$\underline{+ \qquad - \qquad + \qquad -}$$

$$0$$

2) $\sqrt{9a^2 - 12ab + 4b^2 + 18ac + 9c^2 - 12bc + 2a + 3b - 2c} = \boldsymbol{3a - 2b + 3c}.$

$$\underline{-\ 9a^2}$$

$$-\ 12ab + 4b^2 + 18ac + 9c^2 - 12bc + 2a + 3b - 2c : (6a -$$

$$-\ 12ab + 4b^2 \qquad - 2b) \cdot (-2b)$$

$$\underline{+ \qquad -}$$

$$18ac + 9c^2 - 12bc + 2a + 3b - 2c : (6a -$$

$$18ac + 9c^2 - 12bc \qquad - 4b + 3c) \cdot 3c$$

$$\underline{- \qquad - \qquad +}$$

$\boldsymbol{2a + 3b - 2c}$ (остатак).

Код овога је примера радиканд раван : $(3a - 2b + 2c)^2 + 2a + 3b - 2c$.

3) $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots\ldots$

$$\underline{-1}$$

$$x : \left(2 + \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{x}{2}$$

$$x + \frac{x^2}{4}$$

$$\underline{-\quad -}$$

$$-\frac{x^2}{4} : \left(2 + x - \frac{x^2}{8}\right) \cdot \left(-\frac{x^2}{8}\right)$$

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}$$

$$\underline{+ \quad + \quad -}$$

$$\frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64} : \left(2 + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16}\right) \cdot \frac{x^3}{16}$$

$$\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^5}{64} + \frac{x^6}{256}$$

$$\underline{- \quad - \quad + \quad -}$$

$$\frac{5x^4}{64} + \frac{x^5}{64} - \frac{x^6}{256} \text{ итд.}$$

Примери за вежбу:

1) $\sqrt{81a^2 + 72ab + 15b^2}$; 2) $\sqrt{81x^2y^2 - 54xy^2z + 9y^2z^2}$;

3) $\sqrt{2\frac{1}{4}a^6 - 10a^3b^2 + 11\frac{1}{9}b^4}$;

4) $\sqrt{49a^4 - 42a^3b + 37a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4}$;

5) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 12xz + 25y^2 + 30yz + 9z^2}$;

6) $\sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{ab}{3} - \frac{2ac}{15} + \frac{b^4}{4} - \frac{bc}{5} + \frac{b^2}{23}}$;

7) $\sqrt{16a^2 + 40ab + 25b^2 + 16ac + 20bc + 4c^2}$;

8) $\sqrt{16a^4 + 216a^2b^2 + 81b^4 - 96a^3b - 216ab^3}$;

9) $\sqrt[4]{256 - 1280a + 2400a^2 - 2000a^3 + 625a^4}$;

10) $\sqrt[8]{1 - 8a + 28a^2 - 56a^3 + 70a^4 - 56a^5 + 28a^6 - 8a^7 + a^8}$.

Одреди пет чланова квадратног корена:

11) $\sqrt{1 + a}$; 12) $\sqrt{1 - a}$; 13) $\sqrt{x^2 + a}$; 14) $\sqrt{a^2 - 1}$;

15) $\sqrt{x^2 + x + 1}$; 16) $\sqrt{x^2 - x + 1}$; 17) $\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

§ 105) Квадратни корен посебних бројева

а) *Радиканд је квадрат неког целог броја.*

Упутство. — Дати радиканд најпре се дели, идући на-

лево, на одељке од по две цифре, тако да последњи одељак може имати и једну цифру. Затим се из првог одељка на левој страни извлачи квадратни корен, и то приближно мањи, ако се не може извући потпун корен. Нађени корен је прва цифра траженог корена. Затим се квадрат ове цифре одузима од првог радикандовог одељка, а добивеном се остатку дописује следећи радикандов одељак. Овоме се броју привремено издваја последња цифра, па се остали део овога броја дели двоструком првом цифром траженог корена. Добивени количник је друга цифра траженог корена. Ова цифра дописује се траженом корену и делитељу, па се тако допуњен делитељ множи другом цифром корена, а производ се одузима од дељеника, коме сада рачунамо и раније издвојену цифру. Новодобивеном се остатку дописује следећи одељак, радикандов (трећи), па се горњи поступак продужава све дотле док се не употреби и последњи радикандов одељак.

Примери:

1) $\sqrt{53|99|31|04} = 7348.$
49|9 : 143·3
703|1 : 1464·4
11750|4 : 14688·8
0

2) $\sqrt{3|95|85|08|16} = 19896.$
29|5 : 29·9
348|5 : 388·8
3810|8 : 3969·9
23871|6 : 39786·6
0

b) *Радиканд је квадрат неког децималног броја.*

Из децималног броја извлачи се квадратни корен као из целог броја само с том разликом што се децимални број дели на одељке, почевши од десетне запете и надесно и налево, тако да се може десити да последњи одељак на левој страни буде једноцифрен, а тако исто и последњи одељак на десној страни, у ком се случају попуњава овај на десној страни дописивањем једне нуле. (Ово се јавља када радиканд није квадрат неког децималног броја). У резултату (корену) ставља се десетна запета пре него што се спусти први одељак из децималнога дела радикандовога.

Примери:

1) $\sqrt{10|72,62|80|01} = 32,751$
17|2 : 62·2
486|2 : 647·7
3338|0 : 6545·5
6550|1 : 65501·1
0

2) $\sqrt{47,4721} = 6,89$
114|7 : 128·8
1232|1 : 1369·9
0

c) *Радиканд је квадрат неког обичног разломка.*

У овоме случају извлачи се квадратни корен и из бројитеља и из именитеља.

Примери:

1) $\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}=\frac{12}{13}$; 2) $\sqrt{\frac{625}{2209}}=\frac{25}{47}$.

d) *Извлачење квадратног корена из целог или децималног броја који није квадрат другог броја.*

У овоме случају извлачимо квадратни корен по упутствима за целе и децималне бројеве, само што је добивени корен приближно тачан. Овај корен биће утолико тачнији, уколико има више децимала.

Примери:

1) $\sqrt{2{,}00|00|00}=1{,}4142\ldots$

$10|\underline{0} : 24 \cdot 4$

$40|\underline{0} : 281 \cdot 1$

$1190|\underline{0} : 2824 \cdot 4$

$6040|\underline{0} : 28282 \cdot 2$

3836

итд.

2) $\sqrt{3{,}70|00|00}=1{,}9235\ldots$

$27|\underline{0} : 29 \cdot 9$

$90|\underline{0} : 382 \cdot 2$

$1360|\underline{0} : 3843 \cdot 3$

$20710|\underline{0} : 38465 \cdot 5$

14775

итд.

3) $\sqrt{0{,}00|02|70}=0{,}0164\ldots$

$17|\underline{0} : 26 \cdot 6$

$140|\underline{0} : 324 \cdot 4$

$\underline{104}$

итд.

Напомена. Ако извлачимо квадратни корен из обичнога разломка чији бројитељ или именитељ, или оба, нису квадрати других бројева, онда је најпрактичније да се дати разломак претходно претвори у десетан, па да се приступи извлачењу корена. При извлачењу квадратнога корена из периодичних десетих разломака, спуштамо уместо по две нуле (пошто исцрпемо спуштање постојећих одељака радиканда), по два од њихових понављајућих децимала.

Примери:

1) $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{21}{7^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{4{,}5826\ldots.}{7}=0{,}65465\ldots..$, или

$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{0,(42|85|71)} = 0,65465 \ldots$

$68|\underline{5} : 125 \cdot 5$

$607|\underline{1} : 1304 \cdot 4$

$8554|\underline{2} : 13086 \cdot 6$

$70268|\underline{5} : 130925 \cdot 5$

$\underline{48060}$

итд.

2) $\sqrt{0,00|03|73} = 0,0193 \ldots$

$27|\underline{3} : 29 \cdot 9$

$127|\underline{3} : 383 \cdot 3$

$\underline{124}$

итд.

Примери за вежбу:

Одреди квадратни корен из бројева:

196; 576; 729; 841; 916; 1225; 2304; 3025; 9604; 8100; 61009; 56169; 90601; 65536; 516976; 207936; 630436; 9084196; 250109011881.

Одреди четврти корен из бројева:

3418801, 1874161; 30237384321.

Одреди осми корен из бројева:

214358881; 25600000000.

Одреди квадратни корен из бројева:

0,1369; 0,2209; 13,69; 0,09; 0,0001; 0,00000324; 0,665856; 0,00047524; 444,619396.

Одреди квадратни корен са три децимала из:

31,8; 0,318; 0,0318; 3,18; $\frac{5}{7}$; $6\frac{1}{3}$; $\frac{12}{71}$; $2\frac{131}{173}$; $8\frac{15}{49}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{53}{121}$; 80; 170; 401; 2501; 10004; 1603; 89997.

§ 106) Конструкција израза $\sqrt{n}$, где је n цео број

a) Ако је број **n** такав да се може претставити као збир квадрата од два цела броја, онда ће, према Питагорином правилу, $\sqrt{n}$ претстављати хипотенузу правоуглог троугла код кога су ти бројеви катете. Тако $\sqrt{5}$ даје се претставити као $\sqrt{4+1}$ или $\sqrt{2^2+1^2}$, те је $\sqrt{5}$ хипотенуза правоуглог троугла код кога су катете 2 и 1. Ако су катете 2 cm и 1 cm, онда ће хипотенуза $\sqrt{5}$ изнети приближно 2,23 cm, о чему се конструкцијом троугла и мерењем хипотенузе уверавамо.

Тако исто $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{3^2+1}$ претставља хипотенузу правоуглог троугла чије су катете 3 и 1.

b) Ако је број n такав да се може претставити као разлика квадрата од два цела броја, онда нам $\sqrt{n}$ претставља катету правоуглог троугла код кога је већи број хипотенуза а мањи друга катета. Тако, $\sqrt{5}$ даје се претставити као $\sqrt{9-4} = \sqrt{3^2-2^2}$, те $\sqrt{5}$ претставља катету правоуглог троугла чија је хипотенуза 3 а друга катета 2. Тако исто $\sqrt{12} = \sqrt{16-4} = \sqrt{4^2-2^2}$ претставља катету правоуглог троугла чија је хипотенуза 4 а друга катета 2.

c) Ако је број *n* такав да се не може претставити нити као збир квадрата, нити као разлика квадрата од два цела броја, онда опет поступамо као у случајевима под a) или b), старајући се да број n претставимо као збир квадрата, или као разлику квадрата од једног целог и једног ирационалног броја, или од два ирационална броја, па је даљи рад као у претходним случајевима, што се види из следећих примера.

Пример 1. Број $\sqrt{7}$ даје се претставити као $\sqrt{4+3}$ или $\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}$. Па како је $\sqrt{3}=\sqrt{4-1}=\sqrt{2^2-1^2}$, то је $\sqrt{3}$ катета правоуглог троугла чија је хипотенуза 2 а друга катета 1. Конструкцијом овог правоуглог троугла налазимо ту катету, чију величину означавамо са x. Тада $\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{2^2+x^2}$ претставља хипотенузу правоуглог троугла чија је једна катета 2 а друга x.

Пример 2. Број $\sqrt{14}$ даје се претставити као $\sqrt{16-2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}$. Међутим, $\sqrt{2}$ даје се претставити као $\sqrt{1+1}=\sqrt{1^2+1^2}$, те нам претставља хипотенузу равнокрако-правоуглог троугла чија је катета 1. Ако величину ове хипотенузе, коју конструкцијом троугла налазимо, означимо са y, онда $\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4^2-y^2}$ претставља катету правоуглог троугла чија је хипотенуза 4 а друга катета y.

Примери за вежбу: $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{37}$; $\sqrt{40}$.

§ 107) **Кубни корен из полинома.** Пошто је извлачење кубног корена из полинома обрнута радња њиховом подизању на куб, то се поступак за извлачење кубног корена ослања на образац:

$(a+b+c+d)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3$ а састоји се у овоме:

Треба извући кубни корен из првог члана радиканда a^3, чиме добијамо први члан a корена; одузимамо куб првог члана корена од радиканда и тиме добијамо први његов остатак; први члан овога остатка делимо са троструким квадратом првога члана корена $3a^2$, чиме добијамо други члан b корена; одузимамо затим од првога остатка радикандовог збир: $3a^2b+3ab^2+b^3$, чиме добијамо други остатак радиканда; први члан овога остатка делимо са $3(a+b)^2$ и тиме добијамо трећи члан c корена; одузимамо затим од другог остатка радикандовог збир: $3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$ и тиме добијамо трећи остатак радиканда; најзад, први члан овога остатка делимо са $3(a+b+c)^2$ и тиме добијамо и четврти члан d корена; па се поступак овај наставља све дотле док се за остатак не добије нула.

Ако дати полином није куб другог полинома, не добија се остатак нула, ма колико да се продужи извлачење кубног корена.

Примери:

1) $$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{64a^3-240a^2b+300ab^2-125b^3}=4a-5b\\
-64a^3\\
\hline
\quad -240a^2b+300ab^2-125b^3 \;:\; 3\cdot(4a)^2\;(=48a^2)\\
\quad -240a^2b+300ab^2-125b^3 \leftarrow 3\cdot(4a)^2(-5b)+3\cdot 4a\cdot(-5b)^2+(-5b)^3\\
\quad +\qquad\qquad -\qquad\qquad +\\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

2) $$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\ldots\\
-1\\
\hline
\quad x \qquad :3\cdot 1^2\\
\quad x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{27} \quad \leftarrow 3\cdot 1^2\cdot\frac{x}{3}+3\cdot 1\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3\\
\quad -\quad -\quad -\\
\hline
\quad -\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{27} \quad :3\left(1+\frac{x}{3}\right)^2=\left(3+2x+\frac{x^2}{3}\right)\\
\quad -\frac{x^2}{3}-\frac{2x^3}{9}+\frac{x^5}{81}-\frac{x^6}{729} \leftarrow 3\left(1+\frac{x}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{x^2}{9}\right)+3\cdot\\
\quad +\quad +\quad -\quad + \qquad \cdot\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdot\left(-\frac{x^2}{9}\right)+\left(-\frac{x^2}{9}\right)^3\\
\hline
\qquad +\frac{5x^4}{27}-\frac{x^5}{81}+\frac{x^5}{729} \text{ итд.}
\end{array}$$

Примери за вежбу. Одреди кубни корен из полинома:

3 ~~5~~) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$;

4 ~~6~~) $27x^6-108x^5+171x^4-136x^3+57x^2-12x+1$;

5 ~~7~~) $343a^3b^3-441a^2b^3c+189ab^3c^2-27b^3c^3$;

6 ~~8~~) $27a^3-54a^2b+39ab^2-8b^3+27a^3c-36abc+12b^2c+9ac^2-$
$-6bc^2+c^3$;

Одреди 4 члана кубног корена из

7 ~~9~~) $1-x$; a^3+x^3; a^3+1; a^3-1; и a^3-a^2+1.

§ 108) **Кубни корен из посебних бројева.** Поступак за извлачење кубног корена из посебних бројева сличан је поступку за извлачење кубног корена из полинома, а узимајући у обзир подизање на куб посебних бројева (§ 88). Овде радиканде делимо на одељке од по 3 цифре идући улево код целих бројева, а улево и десно од запете код децималних бројева.

Решени примери:

1) $\sqrt[3]{340|068|392} = 698$

-216

$1240|68 : 3\cdot6^2$ или 108

$3\cdot6^2\cdot9 \rightarrow 972$

$3\cdot6\cdot9^2 \rightarrow 1458$

$9^3 \rightarrow 729$

$115593|92 : 3\cdot69^2$ или 14283

$3\cdot69^2\cdot8 \rightarrow 114264$

$3\cdot69\cdot8^2 \rightarrow 13248$

$8^3 \rightarrow 512$

0

2) $\sqrt[3]{41,|063|625} = 3,45$

-27

$140|63 : 3\cdot3^2$ или 27

$3\cdot3^2\cdot4 \rightarrow 108$

$3\cdot3\cdot4^2 \rightarrow 144$

$4^3 \rightarrow 64$

$17596|25 : 3\cdot34^2$ или 3468

$3\cdot34^2\cdot5 \rightarrow 17340$

$3\cdot34\cdot5^2 \rightarrow 2550$

$5^3 \rightarrow 125$

0

3) $\sqrt[3]{2,000000} = 1,25\ldots$

1

$10|00 : 3\cdot1^2$ или 3

$3\cdot1^2\cdot2 \quad 6$

$3\cdot1\cdot2^2 \quad 12$

$2^3 \quad 8$

$2720|00 : 3\cdot12^2$ или 432

$3\cdot12^2\cdot5 \quad 2160$

$3\cdot12\cdot5^2 \quad 900$

$5^3 \quad 125$

46875 итд.

Примери за вежбу:

Наћи кубни корен из бројева:

4) 5832; 5) 3375; 6) 32768; 7) 287496;
8) 804357; 9) 1367631; 10) 32157432;
11) 438976000000; 12) 2,197; 13) 0,000512;
14) 0,004913; 15) 24,389; 16) 0,000778688;
17) 0,000010648.

Одреди кубни корен са 3 децимала из бројева:

4; 3; 13; 565; 0,45; 612; 800;

$317,\overline{81}$; $15,\overline{41}$; $1,08\dot{3}$.

Одреди шести корен из бројева:

10; 100; 1000; 10000; 100000.

Одреди кубни корен из:

$\frac{512}{729}$; $\frac{2197}{3375}$; $6\frac{303}{512}:\frac{1000}{2197}$; $\frac{2}{3}$ (3 дец.); $\frac{3}{4}$ (3 дец.).

Ј) Имагинарни и комплексни бројеви

§ 109) **Рачунске радње са имагинарним бројевима другог степена.** Видели смо раније (§ 98) да се израз $\sqrt{-a}$ зове имагинаран број другог степена. *Квадрат овог имагинарног броја је стваран негативан број, јер је* $(\sqrt{-a})^2 = -a$. Па како је сваки имагинарни израз $\sqrt[2n]{-a}$ у ствари n-ти корен имагинарног броја $\sqrt{-a}$, јер је $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{\sqrt{-a}}$, $\left(\sqrt[4]{-a} = \sqrt{\sqrt{-a}},\ \sqrt[6]{-a} = \sqrt[3]{\sqrt{-a}},\ \sqrt[10]{-a} = \sqrt[5]{\sqrt{-a}} \text{ итд.}\right)$, то ћемо испитати рачунске операције само имагинарних бројева другог степена, које ћемо отсад помињати само као имагинарне бројеве.

Сваки имагинаран број једнак је производу од једног стварног броја и имагинарног броја $\sqrt{-1}$, који се назива *имагинарна јединица*, а бележи се са $\boldsymbol{i}$. Тако, $\sqrt{-a} = \sqrt{a \quad (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = bi$, ако је $\sqrt{a} = b$.

Примери:

1) $\sqrt{-16} = \pm 4i$, јер је $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = \pm 4i$;
2) $\sqrt{-25} = \pm 5i$; 3) $\sqrt{-8} = \pm 2i\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$;
5) $\sqrt{-a^2} = \pm ai$.

Пре вршења ма које операције са *имагинарним* бројевима, доводимо ове бројеве увек на облик bi, а осим овога треба увек имати у виду да је $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

а) *Сабирање и одузимање.* Ако имамо да саберемо или одузмемо имагинарне бројеве ai и bi, онда је њихов збир:

$$ai + bi = (a + b)i.$$

а разлика:

$$ai - bi = (a - b)\ i.$$

Према овоме, збир од два имагинарна броја је такође имагинаран, а тако исто је имагинарна и њихова разлика.

Примери:

1) $\sqrt{-4} + \sqrt{-9} + \sqrt{-16} = 2i + 3i + 4i = 9i;$

2) $2\sqrt{-36} - \sqrt{-100} = 12i - 10i = 2i;$

3) $\sqrt{-a^2b} \pm \sqrt{-ab^2} = ai\sqrt{b} \pm bi\sqrt{a} = \left(a\sqrt{b} \pm b\sqrt{b}\sqrt{a}\right)i.$

b) *Множење.* Ако имамо да множимо имагинарни број ai са стварним бројем b, онда је њихов производ:

$$ai \cdot b = abi$$

Ако имамо пак да множимо два имагинарна броја ai и bi, онда је њихов производ:

$$ai \cdot bi = abi^2 = ab \cdot (-1) = -ab\,.$$

Из овога увиђамо *да је производ од једног стварног и и једног имагинарног броја имагинаран, а производ од два имагинарна броја стваран број.*

Примери:

1) $\sqrt{-16} \cdot 5 = 4i \cdot 5 = 20i\,;$ 2) $7 \cdot \sqrt{-3} = 7 \cdot i\sqrt{3} = 7i\sqrt{3}\,;$

3) $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-16} = 3i \cdot 4i = 12i^2 = -12\,;$

4) $\sqrt{-x^2} \cdot \sqrt{-y^2} = xi \cdot yi = xyi^2 = -xy\,.$

c) *Дељење.* Ако имамо да делимо имагинарни број ai са стварним бројем b, онда је њихов количник:

$$\frac{ai}{b} = \frac{a}{b}\,i = mi,\ \text{за}\ \frac{a}{b} = m\,.$$

Дакле, количник између једног имагинарног и једног стварног броја је имагинаран. Међутим, ако имамо да делимо имагинарне бројеве ai и bi, онда је њихов количник:

$$\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}\,.$$

Добијамо, дакле, у овом случају реалан количник:

Примери:

1) $\sqrt{-25} : 5 = 5i : 5 = i\,;$ 2) $\sqrt{-64} : 2 = 8i : 2 = 4i\,;$

3) $8 : \sqrt{-16} = 8 : 4i = \frac{2}{i} = \frac{2i}{i^2} = \frac{2i}{-1} = -2i\,;$

4) $\sqrt{-36} : \sqrt{-9} = 6i : 3i = 2.$

d) *Степеновање.* При степеновању имагинарних бројева добијамо или стварне или имагинарне вредности. То једино зависи од степена имагинарне јединице; јер та јединица степенована парним бројем даје стварну, а степенована непарним бројем, даје имагинарну вредност.

Тако, $i^1 = i$; $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$; $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$; $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$; $i^7 = i^3 \cdot i^4 = -i \cdot 1 = -i$; $i^{13} = i^{12} \cdot i = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot i = i$ итд..

Уопште је:

$$\mathbf{i}^{4n} = +\mathbf{1}\text{; }\mathbf{i}^{4n+1} = +\mathbf{i}\text{; }\mathbf{i}^{4n+2} = -\mathbf{1}\text{; и }\mathbf{i}^{4n+3} = -\mathbf{i}\,.$$

Дакле, да бисмо сазнали да је неки степен i^n *једнак* $i, -i, +1$, *или* -1, *треба изложитељ степена* **n** *да поделимо са 4, па ако је остатак нула, онда је* $i^n = +1$; *ако је остатак 1, онда је* $i^n = i$; *ако је остатак 2, онда је* $i^n = -1$; *и најзад, ако је остатак 3, онда је* $i^n = -i$. Према овоме n-ти степен од i слаже се са степенима: i^4, i^3, i^2 и i.

Ако имамо да степенујемо имагинарни број ai са n, онда је:

$$(ai)^n = a^n i^n\,.$$

Да ли је добивена вредност $a^n i^n$ стварна или имагинарна, зависи од i^n, а сазнајемо по горњем упутству.

Примери:

1) $(\sqrt{-9})^3 = (3i)^3 = 27i^3 = -27i$;

2) $(\sqrt{-a^2b^4})^9 = (ab^2i)^9 = a^9b^{18}i^9 = a^9a^{18}i$;

3) $(\sqrt{-25})^4 = (5i)^4 = 625i^4 = 625$;

4) $(\sqrt{-5})^6 = (i\sqrt{5})^6 = i^6 \cdot \sqrt{5^6} = -125$.

Напомена. 1) Кад имагинаран број коренујемо ма којим стварним бројем, добијамо за резултат имагинаран израз. Тако,

1) $\sqrt[3]{\sqrt{-16}} = \sqrt[6]{-16}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt{-9}} = \sqrt[8]{-9}$; 3) $\sqrt[m]{\sqrt{-a}} = \sqrt[2m]{-a}$.

2) При множењу, дељењу и подизању на квадрат и куб полинома чији су сви или поједини чланови имагинарни придржавамо се ранијих правила о тим радњама с полиномима и правила из овога параграфа о операцијама са имагинарним бројевима.

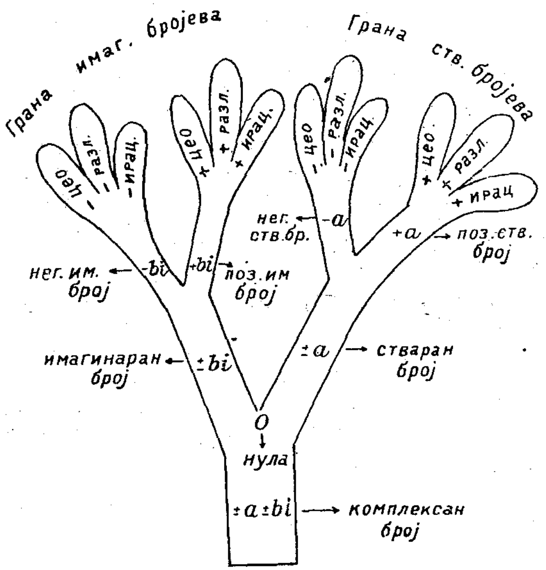
Примери:

1) $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})(\sqrt{-a} - \sqrt{-b}) = (\sqrt{-a})^2 - (\sqrt{-b})^2 = -a + b$;

2) $(\sqrt{-ab} + \sqrt{-ac}) : \sqrt{-a} = (i\sqrt{ab} + i\sqrt{ac}) : i\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$;

3) $(2 - \sqrt{-2})^2 = (2 - i\sqrt{2})^2 = 2^2 - 4i\sqrt{2} + 2i^2 = 4 - 4i\sqrt{2} - 2 = 2 - 4i\sqrt{2}$.

§ 110) **Комплексни бројеви.** Кад се један стваран и један имагинаран број, оба различита од нуле, вежу или знаком сабирања, или знаком одузимања, онда се добива нов бројни израз, који по облику није ни стваран ни имагинаран број. Овакав се израз зове *комплексан број*. Комплексан је број, дакле, збир или разлика од једног стварног и једног имагинарног броја. Такви су бројеви $a+bi$ и $a-bi$. Код сваког комплексног броја облика $a+bi$ разликујемо два дела: стварни део a и имагинарни bi. Два комплексна броја облика $a+bi$ и $a-bi$ зову се *коњуговано* (*спрегнуто*) *комплексни*. Израз $a+bi$ је општи облик за све стварне и имагинарне бројеве, јер претставља нулу за $a=0$ и $b=0$; претставља стваран број за $b=0$ а $a \neq 0$; и најзад, претставља све имагинарне бројеве за $a=0$ а $b \neq 0$. Слика 18, звана *стабло бројева*, даје нам јасан преглед свих врста стварних и имагинарних бројева.



Сл. 18

Комплексни број $a+bi$ претставља:

1) за $b=0$ а $a>0$ позитиван стваран број, који може бити цео, разломљен и ирационалан (нпр. 5, $^2/_3$ и $\sqrt{3}$);

2) За $b=0$ а $a<0$ негативан стваран број (цео, разломљен и ирационалан, (нпр. -3, $-\frac{4}{5}$ и $-\sqrt{2}$);

3) За $a = 0$ а $b > 0$ позитиван имагинаран број (цео, разломљен и ирационалан, нпр. $2i$, $\frac{6}{7}\,i$ и $i\sqrt{3}$);

4) За $a = 0$ и $b < 0$ негативан имагинаран број (цео, разломљен и ирационалан, нпр. $-4i$, $-\frac{3}{5}\,i$ и $i\sqrt{7}$); и најзад

5) За $a = 0$ и $b = 0$ претставља нулу.

Према овоме, стварна и имагинарна бројна област имају само нулу заједничку.

При сабирању, одузимању, множењу и дељењу и степеновању комплексних бројева придржавамо се правила о операцијама с полиномима. Пре сваке операције потребно је довести имагинарни део комплексног броја на облик bi, а притом треба водити рачуна да је $i^2 = -1$. *У свима операцијама с комплексним бројевима добијамо за резултате опет комплексне бројеве облика $A + Bi$, осим при сабирању и множењу два комплексна коњугована броја, када добијамо за резултате стварне бројеве*

$$[(a + bi) + (a - bi) = 2a;\ (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2].$$

Примери:

1) $(1 - \sqrt{-4}) + (3 - \sqrt{-25}) - (2 - \sqrt{-64}) = 1 - 2i + 3 - 5i -$
$- 2 + 8i = 2 + i$;

2) $(3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - 4i^2 = 9 - 4 \cdot (-1) =$
$= 9 + 4 = 13$;

3) $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$;

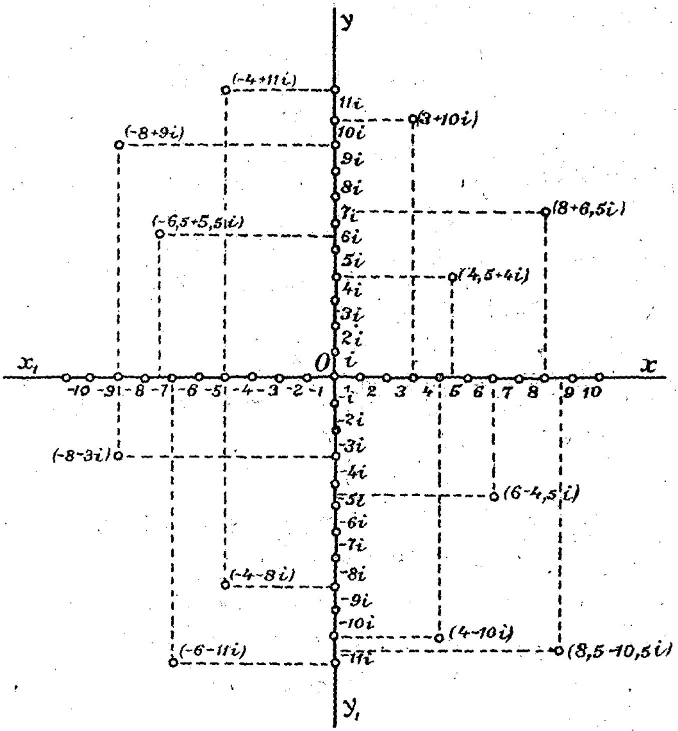
4) $(5 + 2i)^3 = 125 + 150i + 60i^2 + 8i^3 = 125 + 150i - 60 -$
$- 8i = 65 + 142i$;

5) $\frac{5}{3 - 2i} = \frac{5(3 + 2i)}{3^2 - (2i)^2} = \frac{15 + 10i}{9 + 4} = \frac{15 + 10i}{13}$.

§ 111) Графичко претстављање бројева

Тумачење сл. 19. 1) Права XX' зове се *стварна бројна линија*, јер све њене тачке претстављају све стварне: целе, разломљене, ирационалне позитивне и негативне бројеве, и то: на делу OX налазе се позитивне, а на делу OX' негативне. *Тачке* на тој правој (управо њихова отстојања од координатног почетка 0), које су подједнако удаљене једна од друге претстављају целе бројеве; тачке између ових тачака претстављају разломљене бројеве и најзад тачке између тачака које претстављају разломљене бројеве а служе за то да створе везу тачака ради добивања праве линије, претстављају ирационалне бројеве.

2) Права *УУ'* зове се *имагинарна бројна линија*, јер све њене тачке претстављају све имагинарне: целе, разломљене и ирационалне бројеве, и то: на делу *ОУ* налазе се позитивни, а на делу *ОУ'* негативни. Тачке на овој правој, које су подједнако удаљене једна од друге (на истом отстојању као и цели стварни бројеви на стварној правој), претстављају целе имагинарне бројеве; тачке између ових тачака, претстављају имагинарне разломљене бројеве; и најзад, тачке на овој правој између тачака које претстављају разломљене бројеве, а служе за то да створе везу за добивање праве линије, претстављају ирационалне имагинарне бројеве.



Сл. 19

3) Тачке у I квадранту (*XOY*) претстављају комплексне бројеве чији су и стварни и имагинарни делови позитивни.

4) Тачке у II квадранту (*YOX'*) претстављају комплексне бројеве чији су стварни делови негативни а имагинарни делови позитивни.

5) Тачке у III квадранту ($X'OY'$) претстављају комплексне бројеве чији су стварни и имагинарни делови негативни;

6) Тачке у IV квадранту ($Y'OX$) претстављају комплексне бројеве чији су стварни делови позитивни а имагинарни негативни.

Из свега овога излази да свака тачка у равни претставља по један број. Пресечна тачка O стварне праве XX' и имагинарне YY' претставља нулу. Ова је тачка и једина заједничка тачка стварних и имагинарних бројних области.

§ 111) **Задаци за вежбу**

a) Довести на облик bi:

1) $\sqrt{-9};\ \sqrt{-16};\ \sqrt{-64};\ \sqrt{-121};\ \sqrt{-x^4};\ \sqrt[4]{-16};\ \sqrt[4]{-81};\ \sqrt[4]{-256};$

2) $\sqrt{-a^{2r}};\ \sqrt{-a^4b^8};\ \sqrt{-9a^2x};\ \sqrt[4]{-16a^8};\ \sqrt[8]{-256};\ 4\sqrt{-72a^4}.$

b) Колика је вредност степена имагинарне јединице:

3) $(\sqrt{-1})^2;\ (\sqrt{-1})^2;\ (\sqrt{-1})^5;\ (\sqrt{-1})^{12};\ (\sqrt{-1})^{43};\ i^{51};\ i^9;\ i^{13}.$

c) Изврши означене радње:

4) $8\sqrt{-12}+5\sqrt[4]{-80}-6\sqrt{-3}+3\sqrt[4]{-405};$

5) $\sqrt{-(a-r)^2}-\sqrt{-(r-2a)^2}+\sqrt{-4a^2r^2}-\sqrt{-4(a-r)^2};$

6) $\sqrt{-r}\cdot\sqrt{-r};$ 7) $i\sqrt{-28}\cdot i\sqrt{-32};$ 8) $i\sqrt{-x^2};$

9) $\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{b-a};$ 10) $(5-6i)(4+3i);$

11) $(\sqrt{-3}+\sqrt{-2})\cdot\sqrt{-6};$ 12) $(2x+3i)(3y-8i);$

13) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}+2i)(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+2i);$ 14) $\sqrt{5+4i}\cdot\sqrt{5-4i};$

15) $(1+\sqrt{2}-3i\sqrt{5}-2i)(1+\sqrt{2}+3i\sqrt{5}+2i);$

16) $(3+2i\sqrt{2})^2;$

17) $(7+i\sqrt{5})^2+(7-i\sqrt{5})^2+(-7+i\sqrt{5})^2+(-7-i\sqrt{5})^2;$

18) $\sqrt{-25}:-\sqrt{-36};$ 19) $x:\sqrt{-x};$ 40) $\sqrt{-y^2}:\sqrt{-y}.$

d) Рационалиши именитељи разломака:

20) $\frac{4}{1+\sqrt{-3}};\quad \frac{2}{1+i};\quad \frac{46}{7+2\sqrt{-5}};\quad \frac{50}{3-4i};\quad \frac{12}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}};$

21) $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}};$ 22) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{-b}};$ 23) $\frac{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}.$

e) Одредити вредност израза:

24) $2^{3-2i}\cdot 2^{3+2i};$ 25) $5^{5-5i}:5^{5-5i};$ 26) $(2^{2+2i})^{2-i};$

27) $(3^{3i})^{-2i};$ 28) $(4^{-5i})^{i};$ 29) $(2^{3i})^{4i}.$

§ 113. **Четири рачунске радње с приближним вредностима ирационалних бројева**

Код § 93 казато је за ирационалне бројеве да се могу сматрати као децимални бројеви са бесконачно много децимала без периодног понављања и да рачунске радње са тим бројевима вршимо само са њиховим приближним вредностима. Резултати ће бити утолико тачнији, уколико узимамо у поступак више децимала. За обичну употребу при рачунању са ирационалним бројевима узимамо по 3, а за тачнију по 5 и 6 децимала, а остале децимале изостављамо. При свођењу ирационалних бројева на децималне бројеве од 3, 4 и 5 децимала пазимо увек на први изостављени децимал ирационалног броја. Ако је тај децимал: 0, 1, 2, 3 и 4, онда се он и сви остали даљи децимали изостављају. Ако је тај децимал: 5, 6, 7, 8 и 9, онда се он и сви остали децимали опет изостављају, али се у овом случају последњи децимал добивеног децималног броја повећава за 1. Тако, ирационалне бројеве:

2,35142....., 3,91562....., 25,89371.....

сводимо на њихове приближне децималне бројеве од три децимала:

2,351, 3,916 и 25,894.

Тада је 2,351 *приближно мањи*, а 3,916 и 25,894 *су приближно већи* бројеви од датих ирационалних бројева.

Под *грешком* при свођењу ирационалног броја у децималан број разумемо *разлику* између ирационалног и приближно мањег децималног броја, или *разлику* између приближно већег децималног и ирационалног броја. Ова је разлика увек мања од 0,001, 0,0001, 0,00001,.... при свођењу ирационалних бројева на децималне бројеве од 3, 4, 5,.... децимала. Тако, код предњих примера *грешка* је мања од 0,001, јер је:

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} -\ 2{,}35142\ldots \\ 2{,}351 \\ \hline 0{,}00042\ldots \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} -\ 3{,}916 \\ 3{,}91562\ldots \\ \hline 0{,}00038\ldots \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{r} -\ 25{,}894 \\ 25{,}89371\ldots \\ \hline 0{,}00029\ldots \end{array}$$

1) Сабирање ирационалних бројева

Нека имамо да саберемо ирационалне бројеве:

8,5938168...., 5,3412834.... и 3,8145419....

Тада је њихов приближни збир:

a) са три децимала:

$$\begin{array}{r} 8{,}594 \\ +\ 5{,}341 \\ 3{,}815 \\ \hline \mathbf{17{,}750} \end{array}$$

b) са четири децимала:

$$\begin{array}{r} 8{,}5938 \\ +\ 5{,}3413 \\ 3{,}8145 \\ \hline \mathbf{17{,}7496} \end{array}$$

c) са пет децимала:

$$\begin{array}{r} 8{,}59382 \\ +\ 5{,}34128 \\ 3{,}81454 \\ \hline \mathbf{17{,}74964} \end{array}$$

d) са шест децимала:

$$\begin{array}{r} 8{,}593817 \\ +\ 5{,}341283 \\ 3{,}814542 \\ \hline \mathbf{17{,}749642} \end{array}$$

Из добивених збирова увиђамо да су они приближно једнаки, јер ако извршимо поправке код збирова под b), c) и d) и сведемо их на три децимала, добијамо збир под a).

II) Одузимање ирационалних бројева

Нека имамо да одузмемо ирационалан број 57,2814521 .... од ирационалног броја 92,5407852... Тада је њихова приближна разлика:

a) са 3 децимала:	b) са 4 децимала:	c) са 5 децимала:
_ 92,541	_ 92,5408	_ 92,54079
57,281	57,2815	57,28145
35,260	**35,2593**	**35,25934**

И овде увиђамо да је *грешка* у сва три случаја добивених разлика мања од 0,001, што није значајно за обичну употребу.

III) Множење ирационалних бројева — Угтредова скраћена метода

Нека имамо број 25,481752 .... да множимо са бројем 34,819456 .... Ако желимо да добијемо приближни производ са четири децимала, онда сводимо најпре дате бројеве на децималне са по два децимала 34,82 и 25,48, приступамо њиховом множењу, чиме добијамо приближни производ 887,2136.

Међутим, овај начин множења је недовољно тачан и дуготрајан, те се при множењу ирационалних бројева, или децималних бројева са великим бројем децимала, служимо *Угтредовом* методом (Енглез Угтред 1573—1660), којом се множење у многоме упрошћава. Ова метода састоји се у овоме: треба најпре *множитељ*, ако већ није, свести на децималан број чија је целина *једноцифрена* делећи га са 10, 100, 1000, ... Због овога, да се не би променио производ, *множеник* множимо са 10, 100, 1000, ... (Код наших бројева множеник 35,481725 .... претварамо у 254,81725 .... а множитељ 34,819456 .... у 3,4819456 ....)

Затим *множитељ* пишемо испод *множеника* тако да његова цифра јединица дође испод оне децималне цифре множеника (2-ге, 3-ће, 4-те, ...) са колико децимала желимо да израчунамо тражени производ (са 2, 3, 4, ... децимала), а све остале цифре множитеља пишемо испод множеника у обрнутом реду. Тако, да бисмо добили производ са 4 децимала. наше дате бројеве пишемо:

254,81725 ....
6 549 1843

Најзад приступамо множењу које вршимо на следећи начин: множимо најпре са 3 све цифре множеника, почевши од 5, али производ од 3 и 5, звани поправка, не пишемо испод црте множења, већ га додајемо производу од цифре 3 и цифре изнад ње, 2. Затим настављамо редом множење са осталим цифрама множитеља, множећи најпре цифру множеника за једно место удесно од цифре множитеља са којом множимо. Овај производ (поправка) додаје се увек производу од цифре множитеља и цифре множеника изнад ње. Ако је поправка од 0 до 4, не додајемо следећем производу ништа, ако је та поправка од 5 до 14, додајемо 1, ако је од 15 до 24 додајемо 2, од 25 до 34 додајемо 3 итд.

254,81725 ....
6549 1843
764 4518
101 9269
20 3854
2548
2293
102
13
1
= 887,2598

Добивене делимичне производе од свих цифара множитеља пишемо један испод другога не померајући их за једно место улево, као што радимо код множења. Сабирањем најзад свих делимичних производа добијамо тражени производ, у коме одвајамо запетом с десна улево онолико децимала са колико и желимо да израчунамо производ.

Производ датих бројева са 4 децимала добивен по Угтредовој методи је 887,2598, а разликује се од правог производа датих бројева:

887,259802441600

тек у шестом децималном месту.

Пример 2. Нека имамо да множимо децималне бројеве 0,923415671 и 151,58415 и желимо да нађемо производ са 3 децимала. Померањем запете за два места добијамо:

92,341 5671 · 1,515 8415,

а пишући бројеве један испод другога и њиховим множењем по Угтредовој методи добијамо:

$$\begin{array}{r}
92{,}3415(671)\\
(51)485\ 151\\
\hline
92342\\
46171\\
923\\
462\\
74\\
4\\
\hline
\end{array}$$

Код овог примера цифре множеника 671 и цифре множитеља 51, као излишне, изостављамо.

= 139,976 (Потпун: 139,97517958521465).

Пример 3. Нека имамо да множимо децималне бројеве 0,008174 и 0,28135 и желимо да нађемо производ са 5 децимала. Померањем запете за једно место код множеника улево, а код множитеља удесно, добијамо 0,0008174 и 2,8135, а пишући бројеве један испод другога и њиховим множењем по Угтредовој методи добијамо:

$$\begin{array}{r}
0{,}000817(4)\\
(53)182\\
\hline
163\\
65\\
1\\
\hline
\end{array}$$

Код овог примера цифру множеника 4 и цифре множитеља 53, као излишне, изостављамо.

0,00229 (потпун: 0,00229975490)

Примери за вежбу. Изврши множење са онолико децимала колико је означено у загради:

1) 27,5671 · 13,45601(3)
2) 925,81072 · 5,381896 (4),
3) 25,893456 · 0,002731(5),
4) 519,819435 · 56,2371(2),
5) 0,056234 · 0,081493(5),
6) 250,35678 · 0,084562(4),
7) 26,89354 · 56,1234(2),
8) 15,48193 · 897,456(4).

IV) Дељење ирационалних бројева: — Гијова скраћена метода

Дељење вишецифрених бројева по Гијовој методи (Ги, француски официр из XIX века) састоји се у овоме:

а) Ако унапред није условљен број децимала у количнику, онда, као и у обичном дељењу, делитељ претварамо најпре у цео број, а затим приступамо обичном дељењу све док не спустимо последњу *дељеникову* цифру. После овога даљим остацима не додаје се нула (не спуштамо нулу), већ се поступно избацује по једна *делитељева* цифра с десне стране, па се дељење даље врши, узимајући у обзир увек и поправку са избаченом цифром.

Пример 1. Нека имамо да делимо број 428,5213456 са 75,89145. Тада је: 42852134,56 : 7|5|8|9|1|4|5 = *5,64650346*

49064095

35292256

4935676

382189

2732

355

52

Објашњење. Дељеник је дељен до краја и тиме добијамо део количника 5,64, а затим остатак 4935676 дели се делитељем 758914, јер се његова цифра 5 избацује, али се узима у обзир поправка ове цифре у наступајућем делимичном производу. Нови остатак 382189 дели се са 75891 итд.

Добивени количник разликује се од правог тек у седмом децималном месту.

Пример 2. 0,876 : 0,325 = 876 : 3|2|5 = 2,69

226

31

2

Код овог примера добивени количник разликује се од правог у трећем децималном месту.

в) Гијова метода нарочито се примењује при дељењу ирационалних бројева или децималних бројева са великим бројем децимала, када је унапред условљен број децимала у количнику.

У овом случају не узимамо у поступак све цифре дељеника и делитеља, већ само онолико колико је потребно да се добије количник са утврђеним бројем децимала. Разуме се, врло је важно да се претходно одреди и целина траженог количника. Та се целина лако одређује из целина дељеника и делитеља, као што се види из следећих решених примера. Ако је делитељ десетан разломак, онда га претходно множимо са 10, 100, 1000, ... да бисмо добили децималан број са једноцифреном целином, а са толико исто множимо и дељеник да се не би количник променио. Ако нађемо да ће целина количника бити на пр. двоцифрена, а тражи се количник са три децимала, онда делимо само 5 или 6 првих цифара дељеника и 5 цифара делитеља, што зависи од тога да ли је прва цифра дељеника већа или мања од прве цифре делитеља. О шестој цифри делитеља ипак водимо рачуна ради израчунавања поправке ове цифре; та се поправка додаје првом делимичном производу.

Пример 3. 428,5213456 ..... : 75, 89145 ... (3 децимала).

Код овога примера целина траженог количника биће једноцифрена, јер је она количник између 428 и 75. Па како је условљено да тражени количник има три децимала, то по Гијовој методи делимо само од дељеника 42852 са делитељем 7589(1), а остале њихове цифре као излишне занемарујемо. Биће дакле:

42852 : 7589(1) = 5,646

4906

353

50

5

Упореди овај пример са првим!

Пример 4. 0,875 : 0,325 (4 децимала).

Множимо најпре и дељеник и делитељ са 10, чиме добијамо 8,75 : 3,25, те увиђамо да ће целина количника бити једноцифрена, а цео количник петоцифрен. Да бисмо добили тражени количник, делимо овде:

87500 : 32500 = 2,6923
22500
3000 Упореди овај пример са другим!
75 Прави количник је 2,692307.....
10
0

Пример 5. 6,8234781 : 58,35126 (4 децимала).

Овде увиђамо да ће бити целина траженог количника О. Па како су нам потребна четири његова децимала, то по Гијовој методи делимо само:

6823 : 5835(1) = 0,1169
988
404 Обично делећи дате бројеве добијамо 0,11693.....
54
2

Пример 6. 0,5817345 : 42,53812 (5 децимала).

Овде увиђамо да је први део количника 0,01. Па како нам је потребно 5 децимала, то децимални део количника, осим О, налазимо делећи по Гијовој методи бројеве:

5817 : 4253(8) = 0,01367
1563
287 Обично делећи дате бројеве добијамо 0,0136756.....
32
3

Примери за вежбу. Поделити са онолико децимала колико је означено у загради:

1) 52,84231 : 8,214561 (3),
2) 584,105623 : 24,81093 (3),
3) 8,503794 : 235,4267 (4),
4) 0,0893145 : 0,527134 (5),
5) 18,598431 : 0,7562 (3),
6) 35,4281 : 0,098134 (2),
7) 0,06583 : 65,9841 (6),
8) 54,782534 : 0,00098356 (4),
9) 8,9154 : 0,6835 (3),
10) 0,8 : 3,52134 (5).

III. Логаритмовање

§ 114) **Појам и особине логоритама.** Логоритмовање, као и кореновање, је рачунска радња која стоји у тесној вези са степеновањем. Код ове радње зна се вредност степена и његова основа, а тражи се изложитељ. Тако, из $5^3 = 125$, логаритам од 125 за основу 5 је 3. Код логоритмовања дата вредност степена зове се *логаритманд* (*нумерус* или *антилогаритам*), дата основа *логаритамска основа*, а тражени изложитељ *логаритам. Дакле, под логаритмом неког броја за неку дату основу разумемо онај изложитељ којим треба степеновати основу да би се добила вредност једнака датом броју.* Тако,

логоритам од 8 за основу 2 је 3, јер $2^3 = 8$;
„ „ $\sqrt{2}$ „ „ 2 „ $\frac{1}{2}$, „ $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$;
„ „ 81 „ „ 3 „ 4, „ $3^4 = 81$;
„ „ 216 „ „ 6 „ 3, „ $6^3 = 216$.

Ако је, дакле, $b^n = a$, онда је n логоритам броја a за основу b. Ова се означава

$$log\ a_{(b)} = n,$$

а чита се: „логаритам од a за основу b је n“.

Напомена. Да бисмо са сигурношћу одредили логаритам неког броја за дану основу, замишљамо најпре да је тражени логаритам x, а затим стављамо да је x-ти степен основе једнак нумерусу. Најзад добивену изложитељну једначину решавамо, доводећи обе њене стране на степене с једнаким основама, тј. доводећи их на облик $b^x = b^n$. Одавде је $x = n$.

Примери:

1) $log\ 729_{(3)} = x$. Тада је $3^x = 729$, или $3^x = 3^6$. Одавде је $x = 6$, или $log\ 729_{(3)} = 6$;

2) $log\ \frac{625}{16}{}_{\left(\frac{2}{5}\right)} = x$. Тада је $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{625}{16} = \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$.

Одавде је $x = -4$, или $log\ \frac{625}{16}{}_{\left(\frac{2}{5}\right)} = -4$.

На основу дефиниције логаритма лако је решити једначине:

1) за $log\ x_{(4)} = 3$, је $x = 4^3 = 64$;

2) за $log\ 256_{(x)} = 4$, је $x^4 = 256$, а $x = \sqrt[4]{256} = 4$.

Примери за вежбу:

1) Наћи логаритме за основу 2 бројевима: 2, 4, 64, 8, 32, 128, 16, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{128}$ и 1.

2) Наћи логаритме за основу 3 бројевима: 3, 9, 81, 27, 1, 243, 3^n, 729, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ и $\frac{1}{243}$.

3) Наћи логаритме за основу -4 бројевима: 16, -64, -1024 и 256.

4) Наћи логаритме за основу -5 бројевима: -5, 25, -125 и 625.

5) Наћи: $log\ 36_{(6)}$; $log\ 49_{(7)}$; $log\ 216_{(6)}$; $log\ 81_{(9)}$; $log\ 64_{(-8)}$; $log\ 343_{(7)}$; $log\ 256_{(4)}$; $log\ 729_{(9)}$; $log\ 512_{(8)}$; $log\ \frac{1}{9}_{(\frac{1}{3})}$; $log\ \frac{1}{27}_{(\frac{1}{3})}$; $log\ \frac{1}{243}_{(\frac{1}{3})}$; $log\ 81_{(\frac{1}{9})}$; $log\ 729_{(\frac{1}{9})}$; $log\ \frac{1}{2}_{(4)}$; $log\ \frac{1}{8}_{(4)}$; $log\ \frac{1}{27}_{(9)}$; $log\ \frac{16}{25}_{(\frac{4}{5})}$; $log\ \frac{125}{216}_{(\frac{5}{6})}$; $log\ \frac{27}{512}_{(\frac{3}{8})}$; $log\ \frac{25}{9}_{(\frac{3}{5})}$; $log\ \frac{121}{36}_{(\frac{6}{11})}$.

6) Израчунати x из једначина:

$log\ x_{(9)} = 2$; $log\ x_{(4)} = 3$; $log\ x_{(7)} = 1$; $log\ x_{(2)} = 3$;
$log\ 121_{(x)} = 2$; $log\ 196_{(x)} = 2$; $log\ 343_{(x)} = 3$ и
$log\ 625_{(x)} = 4$.

7) Наћи: $log\ r^{\frac{1}{3}}_{(r)}$; $log\ \sqrt[n]{r}_{(r)}$; $log\ a^{\frac{b}{c}}_{(a)}$; и $log\ \sqrt{a^3}_{(a)}$; $log\ a^{-b}_{(a)}$; $log\ a^{-1}_{(a)}$; $log\ \frac{1}{a}_{(a)}$; и $log\ \frac{1}{a^2}_{(a)}$.

§ 115) **Основна правила логаритмовања.** Правила која се доказују на основу саме дефиниције логаритмовања јесу:

1) *Кад се основа степенује логаритмом, добија се логаритманд.*

Како је $log\ 64_{(4)} = 3$, то је заиста $4^3 = 64$.

2) *Логаритам неког броја за основу једнаку с тим бројем је 1.* Тако,

a) $log\ 5_{(5)} = 1$, јер је $5^1 = 5$;

b) $log\ a_{(a)} = 1$, јер је $a^1 = a$.

3) *Логаритам од 1 за ма коју основу је 0.*

a) $log\ 1_{(a)} = 0$, јер $a^0 = 1$;

b) $log\ 1_{(10)} = 0$, јер $10^0 = 1$.

4) *Логаритам степена за основу једнаку са степеновом основом једнак је изложитељу степена.*

a) $log\ a^3_{(a)} = 3$, јер $(a)^3 = a^3$;

b) $log\ 10^4_{(10)} = 4$, јер $(10)^4 = 10^4 = 10000$.

5) *Логаритам од нуле за основу* > 1 *је* $-\infty$, *а за основу* < 1 *је* $+\infty$.

a) $log\ 0_{(a)} = -\infty$, јер је $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$ (ако је $a > 1$);

b) $log\ 0_{(a)} = +\infty$, јер је $a^\infty = 0$ (ако је $a < 1$).

6) *Једнаким бројевима (изразима) за исту позитивну и од нуле различиту основу, одговарају једнаки логаритми, и обрнуто.*

Доказ. — а) Нека је број $M =$ броју N, а основа $a > 0$. Ако претпоставимо да је $log\ M_{(a)} = m$ и $log\ N_{(a)} = n$, онда је $M = a^m$ и $N = a^n$. Па како је $M = N$, то је и $a^m = a^n$.

Одавде је $m = n$ или $log\ M_{(a)} = log\ N_{(a)}$.

b) Нека је $log\ M_{(a)} = log\ N_{(a)}$, а основа $a > 0$. Ако претпоставимо да је $log\ M_{(a)} = m$, а $log\ N_{(a)} = n$, онда $a^m = M$ и $a^n = N$. Па како је $m = n$, то је и $a^m = a^n$, па и $M = N$.

7) *За основу > 1 већем броју одговара већи логаритам, и обрнуто.*

Доказ. — Нека је број M већи од броја N, а основа а > 1. Ако претпоставимо да је $log\ M_{(a)} = m$ и $log\ N_{(a)} = n$, онда је $M = a^m$ и $N = a^n$. Па како је по претпоставци $M > N$, то је и $a^m > a^n$. Пошто су ови степени неједнаки, а имају једнаке основе, и то веће од 1, то је очевидно да је изложитељ m степена на левој страни ове неједначине већи од изложитеља n, тј. $m > n$, или

$$log\ M_{(a)} > log\ N_{(a)}.$$

8) *За основу < 1, већем броју одговара мањи логаритам, и обрнуто.*

Доказ. — Нека је број M већи од броја N, а основа $a < 1$. Ако претпоставимо да је $log\ M_{(a)} = m$ и $log\ N_{(a)} = n$, то је $M = a^m$ и $N = a^n$. Па како је $M > N$, то је и $a^m > a^n$. Степени ове неједначине су неједнаки, а основе су им једнаке, али мање од 1, тј. они су прави разломци. Стога изложитељ m мора бити мањи од изложитеља n, пошто је разломак већи кад му је изложитељ мањи. Дакле је: $m < n$, или $log\ M_{(a)} < log\ N_{(a)}$.

9) *Логаритам негативног броја за позитивну основу је имагинаран (уображен) број.* Тако, $log\ (-8)_{(2)}$ није ни $+3$, ни -3, тј. није стваран број, јер је $2^3 = 8$ и $2^{-3} = \frac{1}{8}$ а не -8.

Да је ово правило тачно, уверавамо се и по томе што је негативан број мањи од 0 (нуле), па би требао његов логаритам, на основу 5 и 7 основ. правила, да буде мањи и од $-\infty$, а то је немогуће.

10) *За основу > 1, $log\ \infty$ је ∞.*

Заиста је, за $a > 1$, $log\ \infty_{(a)} = \infty$, јер је $a^\infty = \infty$.

11) *За основу > 1, логаритми позитивних бројева већих од 1 јесу позитивни, а позитивних бројева мањих од 1 јесу негативни.*

Како је за основу > 1, $\log 0 = -\infty$, а $\log 1 = 0$, то, на основу 7 основног правила, бројеви већи од 1 имају логаритме веће од нуле, тј. они су позитивни, а бројеви мањи од 1 а већи од 0, имају логаритме мање од 0 а веће од $-\infty$, тј. њихови су логаритми негативни.

Напомена: Број 1, нула (0) и негативни бројеви не узимају се при логаритмовању за основе, пошто је ма који степен од 1 једнак 1; што су степени од 0 једнаки нули, или неодређени, а понекад и немогућни; а степени негативних бројева нису увек позитивни. Из овога разлога за логаритамске основе узимају се само позитивни цели или разломљени бројеви. *За овакву основу сваком позитивном стварном броју одговара само један стваран логаритам.*

§ 116) Главна правила за логаритмовање израза

1) *Логаритам производа једнак је збиру логаритама појединих његових чинитеља.*

Образац: $\mathbf{\log MNP = \log M + \log N + \log P}$.

Доказ. — Ако претпоставимо да је $\log M_{(a)} = m$, $\log N_{(a)} = n$ и $\log P_{(a)} = p$, онда је $M = a^{m}$, $N = a^{n}$ и $P = a^{p}$. Множењем ових једначина добијамо

$$MNP = a^{m+n+p}.$$

Тада је, на основу 6 и 4 основног правила:

$$\log MNP_{(a)} = \log a^{m+n+p}_{(a)} = m + n + p, \text{ или}$$

$$\log MNP = \log M + \log N + \log P.$$

Примери:

а) $\log 3ab(x^2 - y^2) = \log 3 + \log a + \log b + \log(x + y) + \log(x - y)$;
b) $\log 30 = \log(2 \cdot 3 \cdot 5) = \log 2 + \log 3 + \log 5$.

2) *Логаритам разломка (количника) једнак је разлици између логаритма бројитеља (дељеника) и логаритма именитеља (делитеља).*

Образац: $\mathbf{\log \frac{M}{N} = \log M - \log N}$.

Доказ — Ако претпоставимо да је $\log M_{(a)} = m$ и $\log N_{(a)} = n$, онда је $M = a^{m}$ и $N = a^{n}$. Дељењем ових једначина добијамо

$$\frac{M}{N} = a^{m-n}.$$

Тада је, на основу 6 и 4 осн. правила:

$$\log \frac{M}{N}_{(a)} = \log a^{m-n}_{(a)} = m - n, \text{ или}$$

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N.$$

Примери:

a) $$log \frac{5ab}{7c(x+y)} = log\ 5ab - log\ 7c(x+y)$$

$$= (log\,5 + log\,a + log\,b) - [log\,7 + log\,c + log\,(x+y)]$$

$$= log\ 5 + log\ a + log\ b - log\ 7 - log\ c - log\ (x+y).$$

b) $$log \frac{a(x^2 - y^2)}{bc} = log\,a + log\,(x+y) + log\,(x-y) - log b - log c.$$

3) *Логаритам степена једнак је производу од изложитеља степена и логаритма основе.*

. *Образац:* $\boldsymbol{log\ M^q = q \cdot log\ M}$.

Доказ. — Ако претпоставимо да је $log\ M_{(a)} = m$, онда је $M = a^m$. Ако ову једначину степенујемо са q, добијамо:

$$M^q = a^{qm}.$$

Тада је, на основу 6 и 4 основног правила:

$$log\ M^q_{(a)} = log\,a^{qm}_{(a)} = qm, \text{ или}$$

$$log\ M^q = q \cdot log\ M.$$

Примери:

a) $log\ a^x\, b^y = x\ log\ a + y\ log\ b;$

b) $$log \frac{3a^4b^2}{5c^3d} = log\,3 + 4\ log\ a + 2\ log\ b - log\,5 - 3\ log\ c - log\ d.$$

4) *Логаритам корена једнак је количнику између логаритма радиканда и изложитеља корена.*

Образац: $$\boldsymbol{log \sqrt[p]{M} = \frac{log\,M}{p} = \frac{1}{p} \cdot log\ M.}$$

Доказ. — Ако претпоставимо да је $log\,M_{(a)} = m$, онда је $M = a^m$. Ако ову једначину коренујемо са p, добијамо:

$$\sqrt[p]{M} = \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}.$$

Тада је, на основу 6 и 4 основног правила:

$$log \sqrt[p]{M_{(a)}} = log\ a^{\frac{m}{p}}_{(a)} = \frac{m}{p}, \text{ или}$$

$$log \sqrt[p]{M} = \frac{log\,M}{p}.$$

Примери:

a) $$log \sqrt[q]{\frac{a^2b^3c}{d^x\ m}} = \frac{1}{q}\ (2\ log\,a + 3\ log\,b + log\,c - x\ log\ d - - log\ m);$$

b) $$log \sqrt[5]{\frac{a^3bc^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}} = \frac{1}{5}\{3\ log\ a + log\ b + 2\ log\ c - - \frac{1}{2}[log\,(x+y) + log\,(x-y)]\}.$$

Примери за вежбу. Нађи логаритме израза:

1) $3abc$; 2) pqr; 3) $5axy$;

4) $ab(c+d)$; 5) a^2+ab; 6) a^2-ab;

7) $\frac{abc}{de}$; 8) $\frac{pq}{rs}$; 9) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$;

10) $\frac{a(b+c)}{mn}$; 11) $\frac{(a+b)(c-d)}{x(y+z)}$; 12) $\frac{a^2+ab}{ab-b^2}$;

13) $a^5c^2d^7$; 14) $\frac{a^5b^2c}{m^3n}$; 15) $\frac{a^m b^n c^p}{d^p e^s}$;

16) $(a^3b^2c)^5$; 17) $\left(\frac{a^2b^3}{c^4d}\right)^6$; 18) $\frac{a^7}{z}\cdot\left(\frac{bc}{x+y}\right)^3$;

19) $\sqrt[5]{ab}$; 20) $\sqrt[9]{a^3b^2}$; 21) $a\sqrt[5]{bcd}$;

22) $\frac{a}{b}\sqrt[4]{cx}$; 23) $(ab\sqrt{xy})^6$; 24) $(x^4\sqrt[3]{y^2})^5$;

25) $\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a^7}}{\sqrt[4]{x}}$; 26) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{b}}$; 27) $\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{y^5}}$;

28) $a\sqrt[8]{\frac{b^5c^7}{x^2\sqrt{y}}}$; 29) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}$; 30) $\sqrt[x]{a\sqrt[x]{b\sqrt[x]{c}}}$;

31) $\sqrt[x]{\sqrt[y]{\frac{p}{q}}}$; 32) $\sqrt[12]{\frac{a^5\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^5\sqrt{a}}}}$; 33) $\sqrt[4]{\frac{m}{\sqrt{mn}}\sqrt[3]{\frac{m}{n}}}$;

34) $\frac{a^4\sqrt[5]{b^2c}}{x^2\sqrt[3]{yz^4}}$; 35) $\frac{x^n y^{2n}}{2\sqrt[n]{(x+x)^3}}$; 36) $\frac{a-b}{c-d}\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}$;

37) $\frac{a^m}{\sqrt[n]{b\sqrt[r]{c}}}$; 38) $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n\sqrt[4]{b}}}$;

39) $\frac{\sqrt[m]{a\sqrt[x]{by}}}{\sqrt[n]{b\sqrt[y]{a^x}}}$; 40) $\frac{4a^2}{b^3}\sqrt[10]{\frac{(a-2b)^5c^7}{\sqrt[5]{7x^2y^3}}}$.

§ 117) **Антилогаритмовање.** Радња којом се тражи израз чији је логаритам познат, зове се *антилогаритмовање*. Њен је правац рада супротан радњи логаритмовања израза, а ослања се на правила из претходног параграфа. Ако су сви чланови познатог логаритма позитивни, значи да је тражени израз моном у целом облику; ако у том логаритму има и негативних чланова, значи да је тражени израз разломљен.

1) $\log x = 3 \log a + 2 \log b - 5 \log c - \log d;\ x = ?$

$$3 \log a + 2 \log b - 5 \log c - \log d = \log \frac{a^3 b^2}{c^5 d}, \text{ те је } x = \frac{a^3 b^2}{c^5 d}.$$

2) $\log z = 2 \log (x - y) - \frac{1}{2} [\log (x+y) + \log (x^2 - xy + y^2)];\ z = ?$

$$2 \log (x - y) - \frac{1}{2} [\log (x + y) + \log (x^2 - xy + y^2)] =$$

$$= \log \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^3 + y^3}}, \text{ те је } z = \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^3 + y^3}}.$$

3) $\log x = 3 \log a - \frac{2}{5} \log b - \frac{1}{4} \log c - 3 \log d + \frac{3}{4} \log f;\ x = ?$

✓ $$3 \log a - \frac{2}{5} \log b - \frac{1}{4} \log c - 3 \log d + \frac{3}{4} \log f =$$

$$= \log \frac{a^3 \cdot \sqrt[4]{f^3}}{\sqrt[5]{b^2} \cdot \sqrt[4]{c} \cdot d^3}, \text{ те је } x = \frac{a^3 \sqrt[4]{f^3}}{d^3 \sqrt[5]{b^2} \sqrt[4]{c}}.$$

Примери за вежбу. Нађи антилогаритме логаритмима:

1) $\log a + \log b - \log c$; 2) $5 \log a + 6 \log b - 2 \log c - 3 \log d$;

3) $\log a + \log b - \log (a+b)$; 4) $5 \log a - \log b + \log 5$;

5) $3 \log a + \frac{1}{2} \log b - \log c$; 6) $4 \log a - (\log b + \log c)$;

7) $\frac{1}{2} \log c - 3 \log d - \log 4$; 8) $\frac{1}{7} [3 \log a - (2 \log b + 2 \log c)]$.

9) $\frac{1}{5} (4 \log a - \frac{2}{3} \log c + \log 4)$;

10) $\log a + \frac{3}{4} \log c - \log b - \frac{1}{5} (\log n + \log x)$;

11) $p \log a + q \log b - \frac{1}{p} (q \log a - r \log n) - \log 2$;

12) $\frac{1}{2} [\log (a - x) + \log (a + x)] - \log c - \frac{3}{5} \log a$;

13) $n \log (a + b) + m \log c - \log (c + d) - \frac{3}{4} \log d$;

14) $-(\log 3 + \log a - 2 \log b + \frac{n-1}{3} \log c)$;

15) $-\frac{5}{6} [\log a + 7 \log x + \frac{1}{2} (\log b - \log z)]$;

16) $\frac{n}{r} \log x - \frac{r}{x} \log a - \left(\frac{x}{n} \log b + \frac{n}{x} \log c\right)$;

17) $\log a + \frac{1}{2} [\log b + \frac{1}{3} \log (c - d)] - \frac{5}{4} (\log n - \log x) - \log 5$;

18) $\frac{1}{4}[log\, 3 + 5\, log\, a + \frac{1}{5}\, log\, (a—b) — \frac{1}{2}\, (log\, x + y)]$;

19) $log a + \frac{1}{a}\{log\, a + \frac{1}{a}\, [log\, a + \frac{1}{a}\, (log\, a + \frac{1}{a}\, log a)]\}$;

20) $\frac{1}{r}\, (m\, log a + \frac{s}{n}\, log\, b — (p\, log\, c + \frac{h}{q}\, log\, d)]$.

§ 118 **Логаритамске системе.** Као што је раније казато (напомена § 115), сваки позитиван цео или разломљен број може се узети за логаритамску основу и за сваку такву основу одговора само по један стваран логаритам сваком броју природног бројног реда. Скуп свију логаритама свију бројева природнога бројнога реда за неку позитивну и од 1 различиту основу, зове се *логаритамска система.* Пошто се сваки позитиван и од 1 различити број може узети за логаритамску основу, то бисмо имали бескрајно много тих логаритамских система. Међутим, у математици употребљавају се само две, и то: *обична, Бригова* или *децимална* система за основу 10, и *природна* или *Неперова* система за ирационалну основу 2,718281828·····, који се број добија сабирањем чланова бескрајног реда:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$

а која се бележи словом *e*.

Бригова или децимална система је, дакле, скуп логаритама свију бројева природнога бројног реда, израчунатих за основу 10, а Неперова је скуп логаритама истих бројева израчунатих за основу e = 2,718281828······ Таблице у којима се налазе израчунати *логаритми* било Бригове било Неперове системе, зову се *логаритамске таблице.* У употреби су углавноме Бригови логаритми, који задовољавају све потребе у практици, а Неперови се логаритми употребљавају у вишој математици. Од логаритама Бригове системе можемо добити логаритме Неперове системе, и обрнуто, помоћу теореме која гласи:

Количник логаритама истог броја за две различите основе увек је сталан и једнак реципрочној вредности логаритма једне основе израчунат за другу основу.

Доказ. — Ако претпоставимо да је $log\ N_{(a)} = n$, онда је $a^n = N$. Тада је по 6 основном правилу: $log\ a^n{}_{(b)} = log\ N_{(b)}$, или $n\, log\ a_{(b)} = log\ N_{(b)}$, или $log\ N_{(a)}.\ log\ a_{(b)} = log\ N_{(b)}$.

Овде је $\frac{log\ N_{(a)}}{log\ N_{(b)}} = \frac{1}{log\, a_{(b)}}$, или $log\ N_{(a)} = log\, N_{(b)}\ \frac{1}{log\, a_{(b)}}$ (1)

Заменено ово

Посебни примери:

1) $\frac{log\,64_{(8)}}{log\,64_{(4)}} = \frac{1}{log\,8_{(4)}}\left[\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\right]$; 2) $\frac{log\,64_{(2)}}{log\,64_{(8)}} =$

$= \frac{1}{log\,2_{(8)}}\left[\frac{6}{2} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3\right]$; 3) $\frac{log\,81_{(9)}}{log\,81_{(3)}} = \frac{1}{log\,9_{(3)}}\left[\frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right]$.

Помоћу једначине (1) можемо добити логаритме за основу *a* из логаритма за основу *b*, ако ове логаритме помножимо са $\frac{1}{log\,a_{(b)}}$. Израз $\frac{1}{log\,a_{(b)}}$ зове се *модуо.* Модуо Бригове системе према Неперовој је $\frac{1}{log\,10_{(e)}} = 0{,}4342945\cdots$, а модуо Неперове према Бриговој је $\frac{1}{log\,e_{(10)}} =$

$$= \frac{1}{log\,2{,}718281828.._{(10)}} = \frac{1}{0{,}4342945} = 2{,}302585.$$

Дакле, да бисмо добили Бригове логаритме из Неперових, треба ове помножити са 0,4342945.... а Неперове добијамо из Бригових, ако ове помножимо са 2,302585.

§ 119) **Бригови логаритми.** То су логаритми свију бројева десетног система израчунати за основу 10. Особине Бригових логаритама исказане су помоћу ова три правила: 1) *Сви бројеви десетног система који су степени од 10, т.ј. бројеви 1, 10, 100, 1000,... 0,1, 0,01, 0,001,... имају за бригове логаритме целе рационалне бројеве, и то: позитивне, ако је изложитељ од 10 позитиван, а негативне ако је тај изложитељ негативан.*

Тако, $log\ 1 = 0$, јер $10^0 = 1$;

$log\ 10 = 1$, „ $10^1 = 10$;

$log\ 100 = 2$, „ $10^2 = 100$;

$log\ 1000 = 3$, „ $10^3 = 1000$;

$log\ 10000 = 4$, „ $10^4 = 10000$;

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$log\ 0{,}1 = -1$, јер $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$;

$log\ 0{,}01 = -2$, „ $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$;

$log\ 0{,}001 = -3$, „ $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$;

$log\ 0{,}0001 = -4$, „ $10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$;

$log\ 0{,}00001 = -5$, јер $10^{-5} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$;

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

Уопште је $log\ 10^{n} = n$ и $log\ 10^{-n} = -n$.

2) *Сви бројеви (цели или разломљени) који нису степени од 10, имају за Бригове логаритме ирационалне бројеве, и то: позитивне, ако су ти бројеви већи од 1, а негативне, ако су мањи од 1.* Заиста, ако је M такав један број, чији је логаритам x, онда је $10^{x} = M$. Из ове једначине увиђамо да x не може бити цео број, јер M није степен од 10. Тако исто x не може бити ни разломљен број, јер ако претпоставимо да је $x = \frac{p}{q}$, онда је $10^{x} = 10^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{10^{p}}$ = неком ирационалном броју а не рационалном M. Ови ирационални логаритми претстављају се као децимални бројеви, обично са 5 или 6 децимала. Код оваквога логаритма водимо рачуна и о његовом целом делу и о његовом децималном делу. Цели се део овога логаритма зове *карактеристика*, а децимални *мантиса*. Тако, ако је на пр. 3,56235 логаритам неког броја, онда је 3 његова карактеристика а 0,56235 мантиса.

3) *Логаритми од два броја, који се разликују 10^{n} пута, где је n ма који цео број, имају различите карактеристике, али једнаке мантисе.*

Заиста логаритми бројева M и $10^{n} \cdot M$ разликују се само у карактеристикама, јер је $log\ 10^{n} \cdot M = n\ log\ 10 + log\ M = n + log\ M$. Исти је случај и са логаритмима бројева M и $10^{-n} \cdot M$, јер је $log\ 10^{-n}\ M = -n + log\ M = log\ M - n$.

а) **Одређивање карактеристике.** 1) *Карактеристика логаритама свију бројева већих од 1 (целих или разломљених) једнака је броју цифара целине тих бројева мање 1.* Заиста, сви логаритми целих и разломљених бојева већих од 1 а мањих од 10 (једноцифрени и децимални бројеви са једноцифреном целином) имају за карактеристику нулу (0), јер су ти логаритми, на основу 7 основног правила (§ 115), већи од 0, која је логаритам од 1, а мањи од 1, који је логаритам од 10; логаритми целих и разломљених бројева већих од 10 а мањих од 100 (двоцифрени цели бројеви и децимални бројеви са двоцифреном целином) имају карактеристику 1, јер су ти логаритми, на основу истог основног правила, већи од 1 (log 10) а мањи од 2 (log 100); логаритми целих и разломљених бројева већих од 100 а мањих од 1000 (троцифрени цели и децимални бројеви са троцифреном целином) имају карактеристику 2, јер су ти логаритми већи од 2 (*log* 100) а мањи од 3 (*log* 1000); итд.

2) Позитивни бројеви мањи од 1 имају негативне логаритме, јер су ти бројеви > 0 а < 1, па се и њихови логаритми налазе између $-\infty$ и 0 [$-\infty = \log 0$, а $0 = \log 1$; 3 и 5 осн. пр. § 115]. Овакав логаритам, ради удобности при рачунању, претвара се у разлику, чији је умаљеник десетан разломак са целином 0, а умалитељ један цео број, а на основу правила: *да се број не мења, ако му се најпре дода а затим одузме један исти број.* Тако, ако је $-2{,}52347$ логаритам једног броја < 1, онда се овај логаритам пише: $3 - 2{,}52347 - 3 = 0{,}47653 - 3$. Оваква се разлика пише друкчије: $\overline{3}{,}47653$, а зове се логаритам с позитивном мантисом а негативном карактеристиком. Такав логаритам претставља увек негативан број. Тако, $\overline{2}{,}34562 = 0{,}34562 - 2 = -1{,}65438$; $\overline{1}.82397 = 0{,}82397 - 1 = -0{,}17603$; итд.

Када тражимо логаритам једнога броја < 1, не налазимо његов негативни логаритам већ њему једнак логаритам с позитивном мантисом а негативном карактеристиком. *Та негативна карактеристика једнака је броју свију нула испред првог децимала (који није нула) датог броја.* Тако, карактеристика логаритма броја 0,5 је -1, броја 0,025 је -2, броја 0,0000156 је -5, итд.

b) **Одређивање мантисе.** Одређивање мантисе логаритама вршимо или елементарним путем који је заметан и неподесан, или подеснијим методама изложеним у вишој математици, и то само простих бројева. Тако, да бисмо нашли Бригов логаритам од 2 елементарним путем, поступамо овако:

Ако ставимо да је $\log 2_{(10)} = x$, онда је $\mathbf{10^x = 2}$ (I). Из ове једначине увиђамо да је $0 < x < 1$, јер је $10^0 < 2 < 10^1$. Логаритам x је, дакле, прав разломак и нека је његова вредност $x = \frac{1}{y}$. Заменом у (I) добијамо: $10^{\frac{1}{y}} = 2$, или степеновањем са y имамо $\mathbf{2^y = 10}$ (II). Из ове једначине увиђамо да је $3 < y < 4$, јер је $2^3 < 10 < 2^4$. Ако ставимо да је $y = 3 + \frac{1}{z}$ (где је $z > 1$), онда, заменом у (II) имамо: $2^{3+\frac{1}{z}} = 10$, или $2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z}} = 10$, или $2^{\frac{1}{z}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, или $\mathbf{2} = \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right)^z$ (III). Из ове једначине увиђамо да је $3 < z < 4$, јер је $\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$. Ако ставимо да је $z = 3 + \frac{1}{u}$ и заменом у (III) добијамо: $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{u}}$, или $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}}$, или $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{128}{125}$, или степеновањем са u добијамо $\frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^u$ (IV). Из ове једначине увиђамо да је $9 < u < 10$ итд.

Ако сада узмемо да је $u = 9$, онда је $z = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$, $y = 3 + \frac{1}{z} = 3 + \frac{9}{28} = \frac{93}{28}$, а $x = \frac{1}{y} = \frac{28}{93} = 0{,}30107\ldots$

Дакле, $x = log\,2 = 0{,}30107\ldots$ Тачнијим рачунањем добијамо $log\,2 = 0{,}30103$.

Истим путем могли бисмо израчунати логаритме свију осталих простих бројева[1]), али је овај посао заметан и неподесан. Од овога смо рада ослобођени, јер су логаритми свију бројева природнога бројног реда већ израчунати и скупљени у логаритамским таблицама. Остаје нам да покажемо само руковање с таблицама, тј. да покажемо како ћемо даном броју наћи логаритам у таблицама, и обрнуто, познатом логаритму наћи одговарајући број (нумерус).

§ 120) **Употреба таблица**. За обичну употребу врло су подесне *Давидовића* таблице, у којима се налазе мантисе логаритама бројева од 1 до 10009, израчунате са пет децимала, и то: од 1 до 24 стране. За остале целе и децималне бројеве налазимо њихове логаритме рачунским путем, а помоћу логаритама бројева од 1 до 10009. Употреба логаритамских таблица је двојака: или помоћу њих датом броју налазимо логаритам или познатом логаритму налазимо број (нумерус). У овим таблицама налазе се само мантисе, а не и карактеристике, које претходно одређујемо на основу упутства у § 119 под а). Прве цифре бројева чији се логаритми траже налазе се у првој колони, а последња њихова цифра налази се у првом хоризонталном реду горе.

---

[1]) Логаритме сложених бројева налазимо из логаритама њихових простих чинитеља. Тако, $log\,6 = log\,(2 \cdot 3) = log\,2 + log\,3$; $log\,30 = log\,(2 \cdot 3 \cdot 5) = log\,2 + log\,3 + log\,5$; $log\,72 = log\,(8 \cdot 9) = log\,(2^3 \cdot 3^2) = 3\,log\,2 + 2\,log\,3$; итд.

А) **Логаритми бројева**

1) *Мантисе логаритама целих бројева од 4 цифре и децималних бројева од свега 4 цифре налазе се у таблицама,* и то наспрам првих трију цифара вертикалне колоне а испод четврте цифре, која се налази у хоризонталном реду горе. Мантисе једноцифрених и двоцифрених бројева налазе се на 1 страни наспрам бројева.

Примери:

1) *log* 7 = 0,84510 (стр. 1)
2) *log* 25 = 1,39794 (стр. 1)
3) *log* 70 = 1,84510 (стр. 1, види правило 3 § 119)
4) *log* 2,5 = 0,39794 (стр. 1, „ „ „)
5) *log* 325 = 2,51188 (стр. 7)
6) *log* 3,25 = 0,51188 (стр. 7)
7) *log* 1257 = 3,09934 (стр. 2)
8) *log* 1475 = 3,16879 (стр. 3)
9) *log* 5074 = 3,70535 (стр. 12)
10) *log* 507,4 = 2,70535 (стр. 12; 3 пр. § 119)
11) *log* 0,0325 = $\bar{2}$,51188 (стр. 7)
12) *log* 0,5074 = $\bar{1}$,70535 (стр. 12)
13) *log* 0,001354 = $\bar{3}$,13162 (стр. 2)

2) Мантисе логаритама целих и децималних бројева од 5, 6 и више цифара налазимо када претходно дати број претворимо десетном запетом у децималан број са целином која се налази у таблицама, чиме добијамо број који ће по 3 правилу § 119 имати исту мантису с датим бројем. Затим за добивену целину налазимо у таблицама мантису. Најзад ову мантису увећавамо производом добивеним множењем разлике између следеће и нађене мантисе (*звана таблична диференција)* са десетним разломком у коме су децимали издвојене 5, 6 итд. цифре датог броја. Тако, да бисмо нашли логаритам броја 52,3475, чија је карактеристика 1, треба овај број да претворимо у децималан 5234,75, затим да нађемо мантису *log* 5234 = 0,71883 и да ову мантису увећамо производом $0{,}00009 \cdot 0{,}75 = 0{,}0000675 = 0{,}00007$, чиме добијамо мантису датог броја 0,71890. Његов логаритам биће 1,71890. Производ од табличне диференције и издвојених децимала зове се поправка. Ако ову поправку означимо са P, табличну диференцију са D, а издвојени децимални део са S, онда је $P = D \cdot S$. У пракси P израчунавамо када последње децимале табличне диференције помножимо са S, па целину доби-

веног производа додамо последњим децималима раније нађене мантисе. Тако, код пређашњег примера је $D = 9$, $S = 0{,}75$, па је $P = D \cdot S = 9 \cdot 0{,}75 = 6{,}75 = 7$, који производ додајемо последњим децималима нађене мантисе 0,71883.

Напомена. Овакав начин изналаска логаритама бројева од 5 и више цифара оснива се на III правилу § 119 и на сразмерности разлике два узастопна броја с разликом њихових логаритама. Тако, ако желимо да израчунамо логаритам броја 5234,75, онда је његов логаритам, на основу 7 осн. правила (§ 115) већи од логаритма броја 5234 а мањи од логаритма броја 5235. Па како је *log* 5235 = 3,71892 а *log*5234 = 3,71883, то је разлика њихових логаритама 0,00009, а разлика тих бројева је 1. Па како се број 5234,75 разликује од броја 5234 за 0,75, то је разлика x логаритама бројева 5234,75 и 5234 још мања, него што је разлика 0,00009 лог. бројева 5234 и 5235. Тада је по тројном правилу:

Ако се бројеви разликују за 1, њихови се логар. разликују за 0,00009. Ако се бројеви разликују за 0,75, њихови се логар. разликују за x.

Стога је $x : 0{,}00009 = 0{,}75 : 1$.

Одавде је $x = P = 0{,}00009 \cdot 0{,}75 = 0{,}0000675 = 0{,}00007$ (шести и седми децимали се избацују. При избацивању пети се децимал повишава за 1 ако је 6-ти 5, 6, 7, 8 или 9).

Примери:

1) $\log 0{,}00002561\underline{|72} = \bar{4}{,}40841$ $(D = 17;\ S = 0{,}72;$

$$\begin{array}{r} +\ 12 \\ \hline \bar{4}{,}40853 \end{array} \qquad P = 17 \cdot 0{,}72 = 12{,}24 = 12).$$

2) $\log 1205\underline{|74{,}5} = 5{,}08099$*) $(D = 36;\ S = 0{,}745;\ P = 36 \cdot 0{,}745 =$

$$\begin{array}{r} +\ 27 \\ \hline 5{,}08126 \end{array} \qquad = 26{,}820 = 27)$$

3) $\log 0{,}01452\underline{|356} = \bar{2}{,}16197$ $(D = 30;\ S = 0{,}356;\ P = 30 \cdot 0{,}356 =$

$$\begin{array}{r} +11 \\ \hline \bar{2}{,}16208 \end{array} \qquad = 10{,}680 = 11)$$

В) Изналазак нумеруса (антилогаритма)

1) *Мантиса датог логаритма налази се у таблицама.* У овом случају прве две, односно три, цифре мантисе упућују нас да нађемо и њене последње три цифре, па узимамо одговарајући број прве колоне допуњен цифром у хоризонталном реду горе, изнад последњих цифара мантисе. Најзад нађеном броју одређујемо целину према карактеристици логаритма, а по правилу о њеном одређивању (§ 119, *a*).

---

*) Ако су последње цифре мантисе у таблицама снабдевене звездицама, онда се претходно узимају ниже а не припадајуће прве две цифре мантисе.

Примери:

1) $\log x = 2{,}30103$; $x = N\overline{2{,}30103} = 200{,}0 = 200$; (стр. 4)
2) $\log x = 1{,}64316$; $x = N\overline{1{,}64316} = 43{,}97$; (стр. 10)
3) $\log y = \bar{3}{,}13066$; $y = N\overline{\bar{3}{,}13066} = 0{,}001351$; (стр. 2)
4) $\log z = 3{,}91429$; $z = N\overline{3{,}91429} = 8209$; (стр. 19).

2) *Мантиса датог логаритма не налази се у таблицама.* У овом случају тражени је број од 5 или више цифара.

Колики је број његових цифара зависи од карактеристике логаритма. У овом случају број налазимо на следећи начин: Налазимо најпре четвороцифрени, који одговара приближно мањој мантиси, а затим ову мантису одузимамо и од мантисе датог логаритма и од приближно веће мантисе у таблицама, чиме добијамо поправку P и табличну диференцију D. Најзад поправку P делимо са D, и децимале добивеног количника дописујемо нађеном броју наспрам приближно мање мантисе. Целину траженог броја налазимо најзад према карактеристици логаритма.

Примери:

1) $\log x = \bar{4},\ 40847$; $x = N\overline{\bar{4}{,}40847} = 0{,}0002561352$ (стр. 5)

$$\begin{array}{r} -\ 841 \\ \hline 6 : 17 = 0{,}352. \\ (P)\ (D)\qquad (S) \end{array}$$

2) $\log y = 5{,}081255$; $y = N\overline{5{,}081255} = 120575$

$$\begin{array}{r} -\ \ 099 \\ \hline (P)\ 27 : (D)\ 36 = 0{,}75 \end{array}$$

c) *Примери за вежбу*

Нађи логаритме бројевима:

1) 6; 15; 27; 49; 76 и 93;
2) 0,6; 1,5; 0,19 0,72; 0,079 и 9,7;
3) 304; 5,72; 47,8; 793; 0,241; 0,00974;
4) 0,5247; 943,4; 7981; 356000; 27400; 913400;
5) 8173452; 91,4681; 0,027356; 0,0914685; 312,4575;
6) 0,000434345; 20,0002; 516,891; 0,000052345.

Наћи бројеве чији су логаритми:

1) 2,92301;
2) 6,96345;
3) $\bar{4}{,}63783$;
4) $\bar{3}{,}42711$;
5) 0,23388;
6) —0,32542;
7) 0,00995;
8) $\bar{2}{,}85311$;
9) 7,60003;
10) 2,55114;
11) —2,52287;
12) $\bar{1}{,}04099$;
13) —2,31426;
14) 0,71088;
15) 4,21156;
16) 5,99336;
17) 0,99002;
18) —0,30103;
19) 0,59945—2;
20) —3,25.

§ 121) Операције с логаритмима

Операције са логаритмима са позитивним мантисама јесу идентичне с операцијама са децималним бројевима. Међутим, операције са логаритмима са негативним карактеристикама врше се на особени начин. *Најбоље је да претходно ове логаритме претворимо на облик разлике, чији је умањеник мантиса и умалитељ карактеристика, па да затим вршимо означене операције.* Радећи овако искључена је свака грешка при операцијама са овим логаритмима, иако је рад компликованији.

I. Сабирање. Сабирање логаритама јавља се при логаритмовању производа.

Примери.

1) $1{,}25678 + 0{,}56918 + 3{,}10562 = 4{,}93158$;

2) $2{,}93105 + \overline{3}{,}25671 + \overline{2}{,}94286 = 2{,}93105 + 0{,}25671 -$
$- 3 + 0{,}94285 - 2 = 4{,}13052 - 5 = 0{,}13062 - 1 =$
$= \overline{1}{,}13062$.

II. Одузимање. Одузимање логаритама јавља се при логаритмовању разломка,

Примери:

1) $2{,}56712 - 1{,}89104 = 0{,}67608$;

2) $1{,}45672 - 2{,}58919 = 3{,}45672 - 2 - 2{,}58919 =$
$= 0{,}86753 - 2 = \overline{2}{,}86753$.

Напомена. Овај случај се јавља при логаритмовању правог разломка. Тада се мањем логаритму додаје и одузима такав један цео број, да добијемо већи логаритам од умалитеља.

3) $0{,}83175 - \overline{2}{,}37145 = 0{,}83175 - (0{,}37145 - 2) =$
$= 0{,}83175 - 0{,}37145 + 2 = 2{,}83175 - 0{,}37145 =$
$= 2{,}46030$;

4) $\overline{3}{,}59184 - \overline{2}{,}08540 = 0{,}59184 - 3 - 0{,}08540 + 2 =$
$= 2{,}59184 - 3{,}08540 = 3{,}59184 - 1 - 3{,}08540 =$
$= 0{,}50644 - 1 = \overline{1}{,}50644$.

III. Множење. Множење логаритма целим бројем јавља се при логаритмовању степена.

Примери:

1) $3 \cdot 1{,}89045 = 5{,}67135$;

2) $2 \cdot \overline{3}{,}94015 = 2 \cdot (0{,}94015 - 3) = 1{,}88030 - 6 =$
$= 0{,}88030 - 5 = \overline{5}{,}880430$;

3) $-2 \cdot 3{,}04621 = -6{,}09242 = 7 - 6{,}09242 - 7 =$
$0{,}90758 - 7 = \overline{7} \cdot 90758$;

4) $-3 \cdot \overline{1},52739 = -3 \cdot (0,52739 - 1) = -1,58217 + 3 =$
$= 3 - 1,58217 = 1,41783.$

IV. Дељење. Дељење логаритама целим бројем јавља се при логаритмовању корена, а дељење логаритама логаритмом, при решавању изложитељних једначина.

Примери:

1) $\dfrac{1,52347}{3} = 0,50782\dot{3} = 0,50782;$

2) $\dfrac{\overline{1},52347}{3} = \dfrac{0,52347 - 1}{3} = \dfrac{2,52347 - 3}{3} = 0,84116 - 1 =$
$= \overline{1},84116;$

3) $\dfrac{1,52347}{-3} = -0,50782 = 1 - 0,50782 - 1 = 0,49218 -$
$- 1 = \overline{1},49218;$

4) $\dfrac{\overline{1},52347}{-3} = \dfrac{0,52347 - 1}{-3} = \dfrac{1 - 0,52347}{3} = \dfrac{0,47653}{3} = 0,15884;$

5) $\dfrac{2,57813}{0,23174} = \dfrac{257813}{23174} = 11,12 \ldots$ (употреби Гијову методу);

6) $\dfrac{3,52734}{\overline{2},69173} = \dfrac{3,52734}{0,69173 - 2} = \dfrac{3,52734}{-1,30827} =$
$= \dfrac{352734}{-130827} = -2,6 \ldots$ (употреби Гијову методу);

7) $\dfrac{\overline{3},89845}{0,34210} = \dfrac{0,89845 - 3}{0,34210} = \dfrac{-2,10155}{0,34210} = \dfrac{-210155}{34210} = -6,14 \ldots;$

8) $\dfrac{\overline{2},94510}{3,21659} = \dfrac{0,94510 - 2}{0,21659 - 3} = \dfrac{-1,05490}{-2,78341} = \dfrac{105490}{278341} = 0,37 \ldots$

§ 122) **Кологаритми.** За два броја каже се да су *супротни*, ако су једнаки по апсолутној вредности, а јесу супротнога знака. Такви су бројеви: $+5$ и -5; $+2,563$ и $-2,563$; $+a$ и $-a$ итд. Збир супротних бројева увек је једнак нули. *Кологаритам* неког броја није ништа друго до супротни логаритам тога броја, а означава се са „*colog*“. Тако, ако је $\log 5 = 0,69897$, онда је $\operatorname{colog} 5 = -0,69897 = 1 - 0,69897 - 1 = 0,30103 - 1 = \overline{1},30103$. Како су кологаритам и логаритам неког броја два супротна броја, то је њихов збир $= 0$, што увиђамо из предњег примера, јер је: $0,69897 + \overline{1},30103 = 0$.

Настаје питање како ћемо из логаритама бројева наћи практично њихове кологаритме. То успевамо на следећи начин:

Ако претпоставимо да је $log\ N = K + M$ (1), где је K карактеристика а M мантиса логаритма броја N, онда је његов кологаритам, као супротан број,

$$colog\ N = -(K + M) = -(K - M) \quad (2).$$

Одузимањем и додавањем 1 десној страни једначине (2) добијамо једначину:

$$colog\ N = -K - 1 + 1 - M = -(K + 1) + (1 - M) \quad (3),$$

која нам пружа практично упутство за претварање логаритма некоr броја у његов кологаритам, а састоји се у овоме:

Карактеристику кологаритма добијамо из каракеристике логаритма, када ову најпре увећамо за 1 а добивеном збиру променимо знак; мантису кологаритма добијамо, када мантису логаритма одузмемо од 1.

Тако, из $log\ 5 = 0{,}69897$ налазимо $colog\ 5 = \overline{1}{,}30103$, јер је $-(0 + 1) = -1$ и $1 - 0{,}69897 = 0{,}30103$; из $log\ 256 = 2{,}40824$ налазимо $colog\ 256 = \overline{3}{,}59176$, јер је $-(2 + 1) = -3$ и $1 - 0{,}40824 = 0{,}59176$.

Кологаритме корисно употребљавамо при логаритмовању једнога разломка. Тада, уместо да одузимамо од збира логаритама бројитељевих чинитеља логаритме чинитеља именитеља, можемо додавати њихове кологаритме, чиме замењујемо радњу одузимања, која је тежа, радњом сабирања, која је лакша.

Тако, уместо:

$$log\ \frac{ab}{cd} = log\ a + log\ b - log\ c - log\ d \text{ имамо}$$

$$log\ \frac{ab}{cd} = log\ a + log\ b + colog\ c + colog\ d, \text{ јер је}$$

$$log\ \frac{ab}{cd} = log\ a + log\ b + log\frac{1}{c} + log\frac{1}{d} = log\ a + log\ b + (-\ log\ c) + (-\ log\ d) = log\ a + log\ b + colog\ c + colog\ d.$$

§ 123) **Примена логаритама.** Логаритме корисно примењујемо при израчунавању бројних вредности израза, нарочито израза до чије вредности не бисмо могли доћи другим операцијама.

а) *Дати израз претставља моном у коме су радње: множење, дељење, степеновање и кореновање.*

Пример 1. Наћи вредност израза $\frac{1{,}562^3 \cdot \sqrt[5]{631} \cdot \sqrt[7]{56}}{6{,}65^5 \cdot 0{,}087}$.

Ако је његова вредност x, онда је:

$$log\ x = 3 \cdot log\ 1{,}562 + \frac{1}{5}\ log\, 631 + \frac{1}{7}\ log\ 56 - 5\ log\ 6{,}65 -$$

$$-\log 0{,}087 = 3\cdot 0{,}19368 + \frac{1}{5}\cdot 2{,}80003 + \frac{1}{7}\cdot 1{,}74819 -$$
$$-5.0{,}82282 - \bar{2}{,}93952 = 0{,}58104 + 0{,}56002 + 0{,}24974 -$$
$$-4{,}11410 - 0{,}93952 + 2 = 3{,}39080 - 5{,}05362 = 5{,}39080 -$$
$$-2 - 5{,}05362 = 0{,}33718 - 2 = \bar{2}{,}33718, \text{ а } x = N\overline{\bar{2}{,}33718} =$$
$$= \mathbf{0{,}021736.}$$

Исти прймер рађен употребом кологоритама изгледа овако:

$$\log x = 3\cdot\log 1{,}562 + \frac{1}{5}\log 631 + \frac{1}{7}\log 56 + \operatorname{colog} 6{,}35^5 +$$
$$+ \operatorname{colog} 0{,}087 = 0{,}58104 + 0{,}56002 + 0{,}24974 + \bar{5}{,}88590 +$$
$$+ 1{,}06048 = 3{,}33718 - 5 = \bar{2}{,}33718, \text{ а } x = N\overline{\bar{2}{,}33718} = 0{,}021736.$$

Пример 2) Наћи вредност израза $\sqrt[7]{\dfrac{3{,}19^3\cdot\sqrt[5]{\frac{2}{3}}}{0{,}894^2\cdot\sqrt[3]{0{,}0357}}}$.

Ако је његова вредност x, онда је

$$\log x = \frac{1}{7}[3\log 3{,}19 + \frac{1}{5}(\log 2 - \log 3) - 2\log 0{,}894 - \frac{1}{3}\log 0{,}0357]$$
$$= \frac{1}{7}[3\cdot 0{,}50379 + \frac{1}{5}(0{,}30103 - 0{,}47712) - 2,\cdot\bar{1}{,}95134 -$$
$$- \frac{1}{3}\cdot\bar{2}{,}55267] = \frac{1}{7}[1{,}51137 - 0{,}03522 - 2\cdot(0{,}95134 - 2) -$$
$$- \frac{1{,}55267-3}{3}] = \frac{1}{7}[1{,}51137 - 0{,}03522 - 1{,}90268 + 4 - 0{,}51755 + 1]$$
$$= \frac{1}{7}[6{,}51137 - 2{,}45545] = \frac{4{,}05592}{7} = 0{,}57942;$$
$$x = N\overline{0{,}57942} = 3{,}796808\ldots$$

b) *Дати израз је моном у коме има и радње: сабирања и одузимања.*

Пример 3) Наћи вредност израза $\sqrt[5]{\dfrac{6\sqrt{66}+7\sqrt{27}}{3\sqrt{219}-18\sqrt{0{,}263}}}$.

У овом случају стављамо да је $y = 6\sqrt{66}$, $z = 7\sqrt{27}$, $u = 3\sqrt{219}$ и $v = 18\sqrt{0{,}263}$, па је:

$$\log y = \log 6 + \frac{1}{2}\log 66 = 0{,}77815 + \frac{1{,}81954}{2} = 1{,}68792;$$
$$y = N\overline{1{,}68892} = 48{,}856\ldots$$
$$\log z = \log 7 + \frac{1}{2}\log 27 = 0{,}84510 + \frac{1{,}43136}{2} = 1{,}56078;$$
$$z = N\overline{1{,}56078} = 36{,}373\ldots$$

$$log\ u = log\ 3 + \frac{1}{2}\ log\ 219 = 0{,}47712 + \frac{2{,}34044}{2} = 1{,}64734;$$

$$u = N\overline{1{,}64734} = 44{,}395...$$

$$log\ v = log 18 + \frac{1}{2}\ log\ 0{,}273 = 1{,}25527 + \frac{\overline{1},43616}{2} = 0{,}97335;$$

$$v = N\overline{0{,}97335} = 9{,}405...$$

Тада је вредност израза $x = \sqrt[5]{\frac{48{,}744+36{,}373}{44{,}395-\ 9{,}405}} = \sqrt[5]{\frac{85{,}117}{34{,}990}}$.

$$log\ x = \frac{1}{5}\ (log\ 84{,}117 - log\ 34{,}990) = \frac{1}{5}\ (1{,}93003 - 1{,}54394) =$$

$$= \frac{0{,}38609}{5} = 0{,}07723;\ \ x = N\overline{0{,}07723} = 1{,}194...$$

c) *Дати израз је моном у коме има негативних чинитеља.* У овом случају налазимо претходно знак целог израза, па ако је тај знак негативан, логаритмујемо његову апсолутну вредност, па пред добивени нумерус стављамо негативни знак.

Пример 4). Наћи вредност израза $\sqrt[9]{-0{,}287\,18^5}$.

Ако је та вредност x, онда је $x = \sqrt[9]{-0{,}287\,18^5} =$

$= -\sqrt[9]{0{,}287\,18^5}$, или $-x = \sqrt[9]{0{,}287\,18^5}$, а $\log(-x) = \frac{5}{9} \log 0{,}28718 =$

$$= \frac{5}{9} \cdot \overline{1},45815 = \frac{5\,(0{,}45815 - 1)}{9} = \frac{2{,}29075 - 5}{9} =$$

$$= \frac{6{,}29075 - 9}{9} = 0{,}69897 - 1 = \overline{1},69897;$$

$$-x = N\overline{\overline{1},69897} = 0{,}5,\ \text{а}\ x = -0{,}5.$$

d) *Логаритмовање степена с негативним изложитељем*

Пример 5) Наћи вредност од $6{,}263^{-\frac{3}{2}}$. Ако је та вредност x, онда је $\log x = -\frac{3}{2} \log 6{,}263 = -\frac{3}{2} \cdot 0{,}79678 =$

$= -1{,}19517 = 2 - 1{,}19517 - 2 = 0{,}80483 - 2 = \overline{2},80483$; а $x =$

$= N\overline{\overline{2},80483} = 0{,}06380 \ldots\ldots$

e) *Логаритмовање логоритма*

Пример 6) Наћи вредност израда $0{,}513^{\sqrt[6]{0,69}}$. Ако је та вредност x, онда је $\log x = \sqrt[6]{0{,}69} \cdot \log 0{,}513 = \sqrt[6]{0{,}69} \cdot \overline{1},71012 =$

$= \sqrt[6]{0{,}69} \cdot (-0{,}28988) = -\sqrt[6]{0{,}69} \cdot 0{,}28988$, или $-\log x =$

$= \sqrt[6]{0{,}69} \cdot 0{,}28988$.

Тада је $\log(-\log x) = \frac{1}{6}\log 0,69 + \log 0,28988 = \frac{\overline{1},83885}{6} + \overline{1},46222 = \frac{5,83885 - 6}{6} + 0,46222 - 1 = 0,97314 - 1 + 0,46222 - 1 = 1,43536 - 2 = 0,43536 - 1 = \overline{1},43536$; $-\log x = N\overline{\overline{1},43536} = 0,27250$, $\log x = -0,27250 = 1 - 0,27250 - 1 = \overline{1},72750$, $x = N\overline{\overline{1},72750} = 0,5339\ldots$.

f) *Логоритовање полинома.* Треба независно логаритмовати сваки члан полинома и добивене нумерусе свести.

Пример 7) Наћи вредност израза $\sqrt{23} + \sqrt[3]{7} - \sqrt[5]{6}$. Ако је $y = \sqrt{23}$, $z = \sqrt[3]{7}$ и $u = \sqrt[5]{6}$, онда је:

$\log y = \frac{1}{2}\log 23 = \frac{1}{2}\cdot 1,36173 = 0,68086$; $y = N\overline{0,68086} = 4,7958 \cdot \log z = \frac{1}{3}\log 7 = \frac{1}{3}\cdot 0,84510 = 0,28170$; $z = N\overline{0,28170} = 1,9129 \cdot \log u = \frac{1}{5}\log 6 = \frac{1}{5}\cdot 0,77815 = 0,15563$; $u = N\overline{0,15563} = 1,4309$. Тада је $x = \sqrt{23} + \sqrt[3]{7} - \sqrt[5]{6} = 4,7958 + 1,9129 - 1,4309 = 5,2778$.

Примери за вежбу

Наћи вредност израза:

1) $21,562 \cdot 0,7346 \cdot 0,00283$;
2) $7,48915 \cdot 0,0083 \cdot 234,527$;
3) $\frac{7,842 \cdot 981,9405}{2,004 \cdot 0,8916}$;
4) $1,06237^7$;
5) $(2,918 \cdot 3,45627)^5$;
6) $\left(\frac{15,246 \cdot 0,0983}{8,791}\right)^5$;
7) $\left(235\frac{27}{479}\right)^9$;
8) $\sqrt[7]{256,062}$;
9) $\sqrt[6]{\frac{56,25 \cdot 3,728}{0,0745}}$;
10) $\sqrt[7]{8,914^5}$;
11) $\left(0,06723\ \frac{4}{5}\right)^{\frac{4}{5}}$;
12) $\frac{321}{752} \cdot \sqrt[5]{2,744^3}$;
13) $\frac{97 \cdot \sqrt[6]{0,984}}{15,71\sqrt[5]{0,00623}}$
14) $\sqrt[7]{256\sqrt[5]{0,84}}$;
15) $\sqrt[10]{\frac{0,83\sqrt[7]{0,8916}}{(2,8\sqrt[3]{0,74})^2}}$;
16) $\sqrt[7]{-3563}$;
17) $(-0,72638)^{-\frac{7}{5}}$;
18) $\sqrt[3]{8 + \sqrt[5]{7}}$;
19) $\sqrt[5]{60,893 - 27\sqrt[3]{0,0814}}$;

20) $56{,}23^{0{,}2} \cdot 0{,}541^{2\frac{3}{5}}$; 21) $0{,}62783^{-0{,}7} \cdot (2{,}345)^{0{,}06}$;

22) $0{,}0562\sqrt[3]{0{,}25}$; 23) $0{,}0005\sqrt[3]{0{,}0005}$.

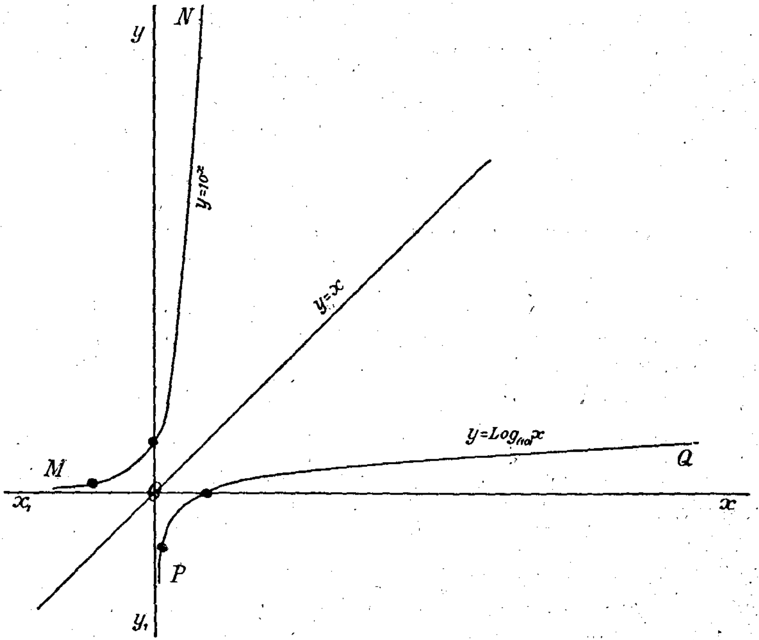
§ 124. Графичко претстављање функција $10^x, \log_{(10)} x, n^x$ и $\log_{(n)} x$.

Линије функција: $y = 10^x$, $y = log_{(10)} x$, $y = n^x$ и $y = log_{(n)} x$ налазимо по истом поступку као и линије осталих функција (§ 78 и 90), само се препоручује да се њихове конструкције врше на хартији ишпартаној на квадратне милиметре, званој милиметарска хартија. То је стога што се код ових функција одговарајућа решења за x и y разликују нагло по величини, те је на обичној хартији теже наћи тачке које та решења претстављају.

1) *Конструкција функције* $y = 10^x$.

За $x = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ имамо $y = 1,\ 10,\ \frac{1}{10},\ 100,\ \frac{1}{100},\ 1000,\ \frac{1}{1000}, \ldots$

Конструкцијом тачака: $(0,1)$, $(1,10)$, $\left(-1, \frac{1}{10}\right)$, $(2,100)$, $\left(-2, \frac{1}{100}\right)$, $(3,1000)$, $\left(-3, \frac{1}{1000}\right), \ldots$ и њиховим спајањем добијамо криву линију MN(сл. 20) коју претставља функција $y=10^x$.



Сл. 20

2) *Конструкција функције* $y = \log^{x}_{(10)}$.

За $x = 1,\ 10,\ \frac{1}{10},\ 100,\ \frac{1}{100},\ldots$ имамо $y = 0,\ 1, -1,\ 2, -2,\ldots$

Конструкцијом и спајањем тачака: $(1,0)$, $(10,1)$, $\left(\frac{1}{10}, -1\right)$, $(100,\ 2)$, $\left(\frac{1}{100}, -2\right),\ldots$ добијамо криву линију PQ (сл. 20) коју претставља дата функција.

Напомена. Из сл. 20 увиђамо да је апсцисна осовина асимтота криве MN изложитељне функције $y = 10^{x}$., а ординатна осовина је асимтота криве PQ логаритамске функције $y = \log_{(10)} x$ и да обе криве заузимају симетричан положај према правој $y = x$. Ова напомена важи и за све изложитељне и логаритамске функције исте основе, што се види из сл. 21. До истог закључка долазимо и посматрањем вредности за x и y једне изложитељне и једне логаритамске функције исте основе.

3) *Конструкција функције* $y = 3^{x}$.

За $x = 0,\ 1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3,\ 4, -4,\ldots$ имамо $y = 1,\ 3,\ \frac{1}{3},\ 9,\ \frac{1}{9},\ 27,\ \frac{1}{27},\ 81,\ \frac{1}{81},\ldots$

Конструкцијом и спајањем тачака: $(0,1)$, $(1,3)$, $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$, $(2,9)$, $\left(-2, \frac{1}{9}\right)$, $(3,27)$, $\left(-3, \frac{1}{27}\right)$, $(4,81)$, $\left(-4, \frac{1}{81}\right),\ldots$ добијамо криву LS (сл. 21) као геометриски претставник дате функције.

Конструкција функције $y = 2^{x}$ извршена је код § 90, сл. 17.

4) *Конструкција функције* $y = \log_{(3)} x$.

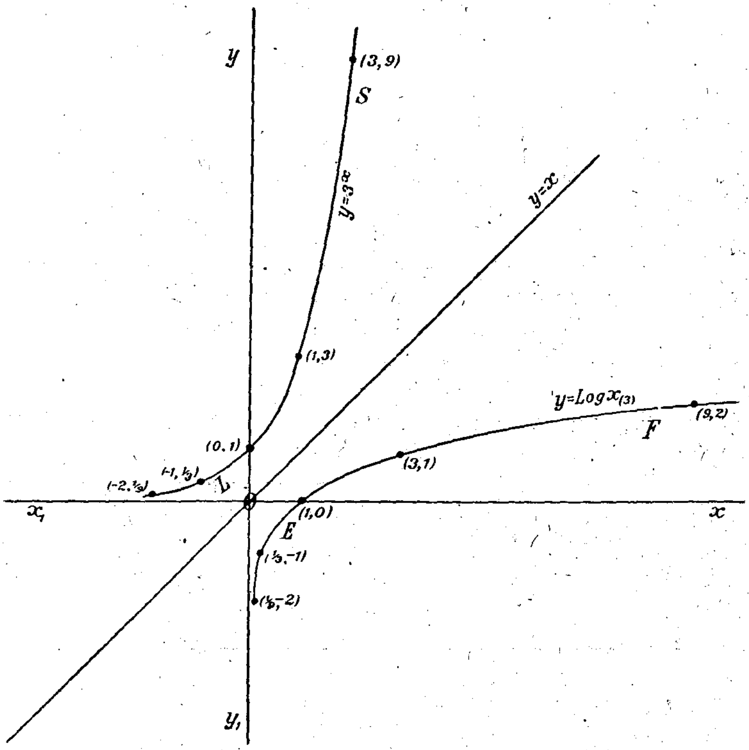
За $x = 1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ldots$ имамо $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$

Конструкцијом и спајањем тачака $(1,0)$, $(3,1)$, $(9,2)$, $(27,3)$, $(81,4),\ldots$ добијамо криву EF (сл. 21) као геометриски претставник дате функције.

Примери за вежбу. Конструиши функције:

a) $y = \log_{(2)} x$; b) $y = 4^{x}$; c) $y = \log_{(4)} x$; d) $y = 5^{x}$; e) $y = \log_{(5)} x$.

§ 125) **Логаритамске једначине.** Једначина у којој се непозната, сама или с другим количинама, налази под логаритамским знаком, зове се *логаритамска.* Таква је једначина $\log\,(x - 1) = 2$. Ове једначине решавамо на следећи начин: *најпре налазимо антилогаритме на обема странама једначине* (§ 117), *а затим, на основу основног правила да једнаки ло-*



Сл. 21

гаритми одговарају једнаким бројевима (изразима), изостављамо логаритамске знаке и на једној и на другој страни једначине, и тиме добијамо алгебарску једначину коју најзад решавамо по ранијим упутствима.

Код дате једначине, за 2 је антилогаритам 100, те се она може исписати:

$\log (x - 1) = \log 100$, а затим $x - 1 = 100$, $x = 101$.

Пример 2. Решити једначину: $\log x + \log (x + 1) = 2 \log (1 - x)$. Како је лева страна логаритам од $x (x + 1)$ и десна од $(1 - x)^2$, то је:

$$\log x(x + 1) = \log (1 - x)^2, \text{ или,}$$

изостављањем логаритамских знакова: $x (x + 1) = (1 - x)^2$.

Одавде је $x^2 + x = 1 - 2x + x^2$, или $3x = 1$ а $x = \frac{1}{3}$.

Примери за вежбу:

1) $\log x = 3$; 2) $\frac{2 + \log x}{2 - \log x} = 4$;

3) $\log(x+2) - \log(x-2) = 2 - \log 4$; 4) $56^{\log x} = 3136$;

5) $\log 5x + \log(2x+3) = 1 + 2\log(3-x)$;

6) $\log(x+7) = 2 + \log(x-11)$; 7) $3^{\log x} = 9$;

8) $5^{\log 2x} = 625$; 9) $16^{\log 3x} = 32^{\log x}$;

10) $\log x + \log 2x + \log 4x = -3$;

11) $7 \log x^2 - 4 \log x^3 = \log 25$;

12) $\log 16x - \log 2x + \log 3x = \log 9 + \log 4 - \log 6$.

§ 126) **Изложитељне једначине.** Код § 103 показали смо како се решавају изложитељне једначине које можемо довести на једнаке степене с једнаким основама. Сада решавамо изложитељне једначине чије су стране степени различитих основа. Ове једначине решавамо помоћу логаритама. Упутство за њихово решавање састоји се у овоме: *треба најпре да стране једначине, ако нису, учинимо растављањем на чинитеље подесним за логаритмовање. Затим, на основу основног правила да једнаки изрази имају једнаке логаритме, логаритмујемо обе стране једначине и тиме добијамо алгебарску једначину, коју најзад решавамо по ранијим упутствима.*

Примери:

1) Решити једначину: $(a^{x-2})^3 = b^x$. Ако извршимо најпре означено степеновање на левој страни, добијамо $a^{3x-6} = b^x$.

Тада је: $(3x-6)\log a = x \log b$, или $3x \log a - 6 \log a = x \log b$.

$$\text{Одавде је } x = \frac{6 \log a}{3 \log a - \log b}.$$

2) Решити једначину: $2^{3x+4} . 2^{2+x} = 5^x$. Ако најпре извршимо означено множење на левој страни, добијамо $2^{4x+6} = 5^x$. Тада је: $(4x+6)\log 2 = x \log 5$, или $4x \log 2 + 6 \log 3 = x \log 5$.

$$\text{Одавде је: } x = \frac{6 \log 2}{\log 5 - 4 \log 2} = \frac{6 \cdot 0{,}30103}{0{,}69897 - 4 \cdot 0{,}30103} =$$

$$= \frac{1{,}80612}{-0{,}50515} = -3{,}575\ldots$$

3) Решити једначину: $2^{x-2} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$. Ако најпре обе стране ове једначине раставимо на чинитеље, добијамо: $2^{x-3}(2-1) = 3^{x-3}(3-1)$, или $2^{x-3} = 3^{x-3} . 2$, или $2^{x-4} = 3^{x-3}$.

Тада је: $(x-4)\log 2 = (x-3) \log 3$, или $x \log 2 - 4 \log 2 = x \log 3 - 3 \log 3$.

$$\text{Одавде је: } x = \frac{3 \log 3 - 4 \log 2}{\log 3 - \log 2} = 1{,}29\ldots$$

4) Решити систем једначина: $a^x \cdot b^y = m$ и $c^x \cdot d^y = n$.

Логаритмовањем обеју једничина добијамо:

$x \log a + y \log b = \log m, \qquad x \log c + y \log d = \log n.$

Решавајући ове једначине ма којом методом добијамо да је:

$$x = \frac{\log m \log d - \log n \log b}{\log a \operatorname{lag} d - \log b \log c} \text{ и } y = \frac{\log m \log c - \log n \log a}{\log b \log c - \log a \log d}$$

Примери за вежбу:

1) $5011{,}89^{\frac{1}{x}} = 10$; 2) $\sqrt[3x]{18{,}1193} = 25$; 3) $2^{3x-1} = 3^{2x+1}$;

4) $2^x . 3^{3x} = 4^{x-1}$; 5) $3^x + 2 = 3^{x+2}$;

6) $3^{x+1} - 3^x - 162 = 0$; 7) $\sqrt[x]{10} = 2$;

8) $\sqrt[x]{2154{,}4} = 2{,}1544$; 9) $\sqrt[x-1]{5} = \sqrt[x+1]{6}$;

10) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$;

11) $\sqrt[3]{3^x} = 2{,}478062$; 12) $3^{15x-4} = 2^{7x}$;

13) $5^{2x+3} = 0{,}9^{3x}$; 14) $\left(\frac{11}{17}\right)^{5x} = 7^{4x-3}$;

15) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-2} = 5{,}301^{\,x+1}$; 16) $7(8^x) = 3(5^x)$;

17) $12^{x+3} - 12^x = 5^{x+2} - 5^{x+1}$; 18) $3^{x+1} + 4^{y+2} = 54,$
$3^{x+2} + 4^{y+1} = 30.$

19) $3^x + 4^y = 27{,}25,$
$3^{x+2} . 4^{y+1} = 242.$
20) $5^x \cdot 2^y = 400000,$
$2^x \cdot 5^y = 2500000.$

21) $2^{3x} \cdot 3^{4y} = 18,$
$12x - 6y = 1.$
22) $\sqrt[5]{7^{2x}} \cdot \sqrt[7]{5^{y+1}} = 245,$
$3x - 2y = 3.$

23) $\sqrt[x]{x+y} = 2,$
$(x+y) \cdot 3^x = 216.$
24) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt[3]{3^y} = 12,$
$\sqrt{4^{-x}} : \sqrt[3]{4^y} = \frac{1}{64}.$

25) $\sqrt[x]{a^{y+1}} = m,$
$\sqrt[y]{b^{x+1}} = n.$
26) $2^x \cdot 5^y = 2000,$
$3^x \cdot 6^z = 2916,$
$4^y \cdot 7^z = 3136.$

ШЕСТИ ОДЕЉАК

ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА

I) Квадратне једначине с једном непознатом

§ 127) **Врсте квадратних једначина и њихово решавање**

Општи облик једне једначине другог степена, која се зове још и квадратна, јесте:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1)$$

Ова једначина има, дакле, три члана: члан с непознатом на другом степену, члан с непознатом на првом степену и члан с непознатом на нултом степену, или тако звани *стални* или *независни члан*. Ова се једначина зове *потпуна*. Једначина (1) своди се на *непотпуне:*

$$(2)\ Ax^2 + Bx = 0, \text{ за } C = 0,$$
$$(3)\ Ax^2 + C = 0, \text{ за } B = 0 \text{ и}$$
$$(4)\ Ax^2 = 0, \text{ за } B = 0 \text{ и } C = 0.$$

Једначина (3) зове се још и чиста. Ако је $A = 0$, онда се једначина (1) своди на $Bx + C = 0$, у ком случају не бисмо имали једначину другог, већ првог степена.

а) Решавање непотпуних квадратних једначина

1) Једначину $Ax^2 + Bx = 0$ решавамо кад њену леву страну раставамо на чинитеље, тј. доведемо је на облик

$$x\,(Ax + B) = 0,$$

а затим, стављајући да су поједини чинитељи равни нули, добијамо једначине првог степена:

$$x = 0 \text{ и } Ax + B = 0.$$

Из ових једначина добијамо решења $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{B}{A}$, која оба задовољавају дату једначину. Дакле, непотпуна квадратна једначина облика $Ax^2 + Bx = 0$ увек има једно решење једнако нули.

Пример. $5x^2 - 8x = 0$. *Решење:* $x\,(5x - 8) = 0$. Одавде је 1) $x = 0$ и 2) $5x - 8 = 0$. Стога су решења: $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

2) Чисту квадратну једначину $Ax^2 + C = 0$ решавамо, када најпре независан члан C пребацимо на десну страну, затим добивену једначину поделимо коефицијентом A уз непознату и најзад извучемо квадратни корен из обеју страна нове једначине.

Тако, из $Ax^2 + C = 0$, имамо најпре $Ax^2 = -C$, затим $x^2 = -\frac{C}{A}$ и најзад $x = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$. Чиста квадратна једначина има, дакле, два једнака али супротно означена корена: $x_1 = +\sqrt{-\frac{C}{A}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{C}{A}}$. Ти корени могу бити стварни или имагинарни, што зависи од позитивности или негативности радиканда $-\frac{C}{A}$.

1) *Пример:* $9x^2 - 25 = 0$. *Решење:* $9x^2 = 25$, $x^2 = \frac{25}{9}$, $x = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} = \pm\frac{5}{3}$. Стога су решења: $x_1 = 1\frac{2}{3}$ и $x_2 = -1\frac{2}{3}$

Пример. $9x^2 + 25 = 0$. *Решење:* $9x^2 = -25$, $x^2 = -\frac{25}{9}$, $x = \pm\sqrt{-\frac{25}{9}} = \pm\frac{5}{3}i$. Стога су решења: $x_1 = 1\frac{2}{3}i$ и $x_2 = -1\frac{2}{3}i$.

3) Непотпуна једначина $Ax^2 = 0$ има оба решења $x = 0$, јер је $x^2 = \frac{0}{A} = 0$, а $x = \pm\sqrt{0} = \pm 0 = 0$.

b) Решавање квадратних једначина

1) Потпуну квадратну једначину $Ax^2 + Bx + C = 0$ решавамо по обрасцу:

$$x_{(1,2)} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \text{(I)}\ \text{тј.}$$

корени x_1 и x_2 једнаки су: *коефицијенту уз непознату на првом степену с промењеним знаком, ± квадратни корен из квадрата тога коефицијента смањен за четвороструки производ од коефицијента уз непознату на другом степену и независног члана, и све то подељено двоструким коефицијентом уз непознату на другом степену.*

Извођење обрасца. Пребацивањем независног члана на десну страну добијамо једначину:

$$Ax^2 + Bx = -C.$$

Ако ову једначину помножимо најпре са $4A$, а затим додамо обим странама B^2, добијамо једначину:

$$4A^2x^2 + 4ABx + B^2 = B^2 - 4AC,$$

чија је лева страна квадрат од $2Ax + B$.

Стога се ова једначина даје написати овако:

$$(2Ax + B)^2 = B^2 - 4AC.$$

Одавде је $2Ax + B = \pm\sqrt{B^2 - 4AC}$, или

$$2Ax = -B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}, \text{ а } x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Примери. 1) $\underline{\boldsymbol{5x^2 + 7x - 24 = 0.}}$

Решење: Овде је $B = 7$, $A = 5$, а $C = -24$, те је употребом обрасца (I):

$$x_{(1,2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 5 \cdot (-24)}}{2 \cdot 5} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{10} = \frac{-7 \pm 23}{10};$$

Одавде је $x_1 = \frac{-7 + 23}{10} = 1{,}6$ и $x_2 = \frac{-7 - 23}{10} = -3$. Код овога су примера, дакле, оба решења стварна и неједнака.

2) $\underline{\boldsymbol{x^2 + 9x + 5 = 0}}$.

Решење: Одавде је $A = 1$, $B = 9$, а $C = 5$, те је:

$$x_{(1,2)} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm \sqrt{61}}{2}.$$ Одавде је

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{61}}{2}, \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{61}}{2}.$$

Корени су, дакле, стварни и неједнаки, али ирационални.

3) $\underline{\boldsymbol{5x^2 + 13x + 17 = 0.}}$

Решење: Овде је $A = 5$, $B = 13$, а $C = 17$, те је:

$$x_{(1,2)} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 5 \cdot 17}}{10} = \frac{-13 \pm \sqrt{-171}}{10}.$$ Одавде је

$$x_1 = \frac{-13 + i\sqrt{171}}{10} \text{ и } x^2 = \frac{-13 - i\sqrt{171}}{10}.$$

Оба су, дакле, решења уображена, и то коњуговани комплексни бројеви.

4) $\underline{\boldsymbol{x^2 - (a + b)\,x + ab = 0.}}$ *Решење:* Овде је A $= 1$, B $= -(a+b)$ а C$=ab$, те је $x_{(1,2)} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}}{2} =$

$$= \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}}{2} = \frac{a + b \pm \sqrt{(a - b)^2}}{2} = \frac{a + b \pm (a - b)}{2}.$$

Одавде је: $x_1 = \frac{a + b + a - b}{1} = \frac{2a}{2} = a$ и $x_2 = \frac{a + b - a + b}{2} =$

$$= \frac{2b}{2} = b.$$

Напомена. а) Ако имамо да решимо једначину

$$Ax^2 + 2B_1\,x + C = 0,$$

где је коефицијенат уз непознату на првом степену паран број, онда применом обрасца (I) добијамо:

$$x_{(1,2)} = \frac{-2B_1 \pm \sqrt{4B_1^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-2B_1 \pm 2\sqrt{B_1^2 - AC}}{2A} =$$

$= \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - AC}}{A}$ (II), где је B_1 половина коефицијента уз x.

Дакле, ако је коефицијенат уз x паран број, онда је боље употребити за решење једначине образац (II).

Пример. $12x^2 - 20x + 3 = 0$. Решење: Овде је $B_1 = -10$, $A = 12$, а $C = 3$, те је $x_{(1,2)} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 12 \cdot 3}}{12} = \frac{\sqrt{100 - 36}}{12} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{12} = \frac{10 \pm 8}{12}$. Одавде је $x_1 = \frac{10 + 8}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ и $x_2 = \frac{10 - 8}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

b) Ако имамо да решимо једначину

$$x^2 + 2B_1 x + C = 0,$$

где је коефицијенат уз x^2 јединица, а коефицијенат уз x паран број, онда применом обрасца (I) добијамо:

$$x_{(1,2)} = \frac{-2B_1 \pm \sqrt{4B_1^2 - 4C}}{2} = \frac{-2B_1 \pm 2\sqrt{B_1^2 - C}}{2} =$$

$$= -\boldsymbol{B_1} \pm \sqrt{\boldsymbol{B_1^2} - \boldsymbol{C}} \qquad \text{(III)},$$

где је B_1 половина коефицијента уз x. Овај се образац препоручује за употребу само онда, ако је коефицијенат уз x^2 јединица, а коефицијенат уз x паран број.

Примери 1) $\underline{\boldsymbol{x^2 - 6x - 7 = 0}}$. *Решење:* Овде је $B_1 = -3$, а $C = -7$, те је, применом трећег обрасца:
$x_{(1,2)} = 3 \pm \sqrt{9 + 7} = 3 \pm \sqrt{16} = 3 \pm 4$. Одавде је $x_1 = 7$ и $x^2 = -1$.
2) $\underline{\boldsymbol{x^2 + 4x + 4 = 0}}$. *Решење:* Овде је $B_1 = 2$, а $C = 4$. Стога је:
$x_{(1,2)} = -2 \pm \sqrt{4 - 4} = -2 \pm \sqrt{0} = -2 \pm 0 = -2$. Овде је и $x_1 = -2$ и $x_2 = -2$, тј. оба су корена стварна и једнака.

§ 128) **Испитивање корена квадратне једначине.** Из примера решених у претходном параграфу видели смо да корени квадратне једначине $Ax^2 + Bx + C = 0$ могу бити стварни (једнаки или неједнаки) и имагинарни. Какви ће бити ти корени, једино зависи од поткореног израза $B^2 - 4AC$. *Ако је вредност овога израза, који се зове* **дискриминанта** *квадратне једначине, позитивна ($B^2 - 4AC > 0$), онда је извлачење квадратнога корена могуће, те су корени x_1 и x_2 стварни нејед-*

наки; ако је та вредност равна нули ($B^2 - 4AC = 0$), *онда је и* $\sqrt{0} = 0$, *те су оба корена стварна и једнака* $\frac{-B}{2A}$; *и најзад, ако је вредност дискриминанте негативна* ($B^2 - 4AC < 0$), *онда је извлачење квадратног корена из негативног радиканда немогуће, те су оба корена* x_1 *и* x_2 *имагинарна.* У овом случају су оба корена коњуговани комплексни бројеви. Ако је $x_1 = a + bi$, биће $x_2 = a - bi$.

Примери:

1) Корени једначине $5x^2 + 7x - 24 = 0$ јесу стварни неједнаки, јер је $B^2 - 4AC = 7^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-24) = 49 + 480 = 529$, тј. позитивна;

2) Корени једначине $5x^2 + 13x + 17 = 0$ јесу имагинарни, јер је вредност дискриминанте $B^2 - 4AC = 13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 17 = 169 - 340 = -171$, тј. негативна;

3) Корени једначине $x^2 + 4x + 4 = 0$ јесу стварни једнаки, јер је вредност дискриминанте $B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$. Сви су ови примери решени у претходном параграфу и можемо проверити њихову тачност.

§ 129) **Однос (веза) између корена и коефицијената квадратне једначине. — Састав квадратне једначине, ако су познати њени корени.** Ако једначину $Ax^2 + Bx + C = 0$ поделимо са A и ставимо да је $\frac{B}{A} = p$ и $\frac{C}{A} = q$, добијамо једначину:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Решењем ове једначине употребом III обрасца добијамо:

$$x_{(1,2)} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Стога су њени корени:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Сабирањем ових корена добијамо:

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = -p,$$

тј. збир корена једнак је коефицијенту уз x са промењеним знаком. Код једначине $Ax^2 + Bx + C = 0$ биће $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$.

Множењем корена x_1 и x_2 добијамо:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 -$$

$$-\left(-\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q,$$ тј. *производ корена једнак је независном члану q једначине облика*

$x^2+px+q=0$, *а тај је производ једнак* $\frac{C}{A}$ *једначине облика* $Ax^2+Bx+C=0$.

На основу ове везе између корена и коефицијената квадратне једначине, у стању смо да склопимо једначину, ако знамо њене корене. То постижемо употребом једначина:

$$p=-(x_1+x_2) \quad \text{и} \quad q=x_1\cdot x_2,$$

које нам пружају могућност за израчунавање коефицијената p и q једначине $x^2+px+q=0$, а који су једино потребни ради њеног склапања.

Примери:

1) Наћи једначину чији су корени $x_1=1,6$ а $x_2=-3$. *Решење:* $p=-(x_1+x_2)=-(1,6-3)=1,4$; $q=1,6\cdot(-3)=-4,8$. Једначина је: $x^2+1,4x-4,8=0$, или $10x^2+14x-48=0$, или $5x^2+7x-24=0$.

2) Наћи једначину чији су корени $x_1=\frac{-9+\sqrt{61}}{2}$ и $x_2=\frac{-9-\sqrt{61}}{2}$.

Решење: $p=-\left(\frac{-9+\sqrt{61}}{2}+\frac{-9-\sqrt{61}}{2}\right)=-\frac{-18}{2}=9$,

$$q=\frac{-9+\sqrt{61}}{2}\cdot\frac{-9-\sqrt{61}}{2}=\frac{(-9)^2-(\sqrt{61})^2}{4}=\frac{81-61}{4}=\frac{20}{4}=5.$$

Једначина је: $x^2+9x+5=0$

3) Наћи једначину чији су корени $x_1=\frac{-13+i\sqrt{171}}{10}$ и $x_2=\frac{-13-i\sqrt{171}}{10}$.

Решење: $p=-\left(\frac{-16+i\sqrt{171}}{10}+\frac{-13-i\sqrt{171}}{10}\right)=$

$$=-\frac{-26}{10}=\frac{13}{5},\ q=\frac{-13+i\sqrt{171}}{10}\cdot\frac{-13-i\sqrt{171}}{10}=$$

$$=\frac{(-13)^2-(i\sqrt{171})^2}{10}=\frac{169+171}{100}=\frac{340}{100}=\frac{17}{5}.$$

Једначина је: $x^2+\frac{13}{5}x+\frac{17}{5}=0$, или $5x^2+13x+17=0$.

Напомена I. Једначине: $p=-(x_1+x_2)$ и $q=x_1\cdot x_2$ пружају нам такође могућност да нађемо један од коефицијената p и q, ако знамо један од њих и један од корена x_1 и x_2.

Примери:

1) Допуни једначину $5x^2 + 7x \cdots = 0$, када је један њен корен -3.

Решење: Из једначине $p = -(x_1 + x_2)$, или $\frac{7}{5} = -(-3 + x_2)$ имамо $x_2 = 3 - \frac{7}{5} = \frac{8}{5}$. Стога је $q = x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot \frac{8}{5} = -\frac{24}{5} = \frac{C}{5}$.

Одавде је $C = -24$. Попуњена једначина је:

$$5x^2 + 7x - 24 = 0.$$

2) Колико је p у једначини $x^2 + px + 5 = 0$, ако је један корен $\frac{-9 + \sqrt{61}}{2}$.

Решење: Из једначине $q = x_1 \cdot x_2$, или $5 = \frac{-9 + \sqrt{61}}{2} \cdot x_2$ имамо $x_2 = \frac{10}{-9 + \sqrt{61}} = \frac{10(-9 - \sqrt{61})}{81 - 61} = \frac{-9 - \sqrt{61}}{2}$. Стога је $p = -\left(\frac{-9 + \sqrt{61}}{2} + \frac{-9 - \sqrt{61}}{2}\right) = -\frac{-18}{2} = 9$. Једначина је: $x^2 + 9x + 5 = 0$.

3) Колико је A у једначини $Ax^2 + 13x + 17 = 0$, ако је један корен једначине $x_1 = \frac{-13 + i\sqrt{171}}{10}$.

Решење: Овде је $p = \frac{13}{A} = -\left(\frac{-13 + i\sqrt{171}}{10} + x_2\right)$ (1), а $q = \frac{17}{A} = \frac{-13 + i\sqrt{171}}{10} \cdot x_2$ (2).

Одавде је, из (1) $x_2 = \frac{13 - i\sqrt{171}}{10} - \frac{13}{A}$, а из (2) $x_2 = \frac{170}{A(-13 + i\sqrt{171})}$. Стога је:

$$\frac{13 - i\sqrt{171}}{10} - \frac{13}{A} = \frac{170}{A(-13 + i\sqrt{171})}.$$

Решењем ове једначине имамо $A = 5$.

Једначина је: $5x^2 + 13x + 17 = 0$.

Напомена II. На основу односа $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$ брже налазимо две непознате количине, ако знамо њихов збир и производ. Тада те две непознате количине сматрамо као корене оне квадратне једначине код које је познати збир с промењеним знаком коефицијенат уз непознату на првом степену, а познати производ независан члан.

Пример. Наћи она два броја чији је збир 15 а производ 50. Ако су ти бројеви x_1 и x_2, онда су они корени једначине $x^2 - 15x + 50 = 0$.

Решењем ове једначине добијамо $x_1 = 10$ и $x_2 = 5$.

§ 130) **Знаци корена квадратне једначине.** Кад је дата једначина било облика $Ax^2 + Bx + C = 0$ било $x^2 + px + q = 0$, у стању смо да сазнамо пре њеног решавања да ли су њени стварни корени оба позитивна, или оба негативна, или је један позитиван а други негативан. За ово испитивање опет се служимо једначинама: 1) $x_1 + x_2 = -p = -\frac{B}{A}$ и 2) $x_1 \cdot x_2 = q = \frac{C}{A}\cdot$ При овом испитивању наилазимо на следећа три случаја:

1) *Независан је члан позитиван.* У овом случају биће и производ корена $x_1 \cdot x_2$, на основу друге једначине, позитиван, те су корени x_1 и x_2 оба позитивни или оба негативни. Па како је њихов збир, по првој једначини, раван коефицијенту уз x с промењеним знаком $\left(= -p = -\frac{B}{A}\right)$, то ће они бити оба позитивни, ако је други члан једначине *негативан*, а оба корена биће негативни, ако је тај члан *позитиван*.

Тако, код једначине $x^2 - 4x + 3 = 0$ јесу оба корена позититивна, а код једначине $x^2 + 15x + 56 = 0$ јесу оба корена негативна. Тако исто корени једначине $3x^2 - 17x + 10 = 0$ јесу оба позитивна а једначине $2x^2 + 7x + 5 = 0$ јесу негативна.

2) *Независан је члан негативан.* У овом случају биће, према другој једначини, и производ $x_1 \cdot x_2$ негативан, те су корени x_1 и x_2 различито означени. Тада, на основу прве једначине, већи корен има супротан знак знаку другог члана једначине. Тако, код једначине $x^2 - 6x - 7 = 0$ већи је корен позитиван а мањи негативан, а код једначине $18x^2 + 3x - 10 = 0$ већи је корен негативан а мањи позитиван.

3) *Независан је члан нула.* У овом случају је и производ корена $x_1 \cdot x_2 = q = \frac{C}{A} = 0$, те један од корена мора бити једнак нули. Ако је $x_1 = 0$, онда из једначине $x_1 + x_2 = -p = -\frac{B}{A}$, мора бити други корен $x_2 = -p = -\frac{B}{A}$, т ј. има знак супротан знаку другог члана једначине. Тако, код јед-

начине $3x^2 + 17x = 0$, је $x_1 = 0$ а $x_2 = -\frac{17}{3}$, а код једначине $x^2 - 5x = 0$, је $x_1 = 0$ а $x_2 = 5$.

§ 131) Примери за вежбу

Решити непотпуне квадратне једначине:

1) $x^2 - 7x = 0$;

2) $7x^2 - 8x = 5x^2 - 13x$;

3) $(2x + 5)^2 - (x - 3)^2 = 16$;

4) $\frac{x+5}{2x+1} = \frac{x+15}{3-x}$;

5) $\frac{x\sqrt{3}}{x-2\sqrt{3}} = \frac{2x}{x\sqrt{3}-5}$;

6) $x^2 - 25 = 0$;

7) $\frac{5x^2}{6} = \frac{6}{125}$;

8) $\frac{x}{6} + \frac{6}{x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$;

9) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = 3\frac{1}{3}$;

10) $\frac{5\sqrt{7} - 2x}{\sqrt{7} - 10x} = \frac{\sqrt{7} - 4x}{2(\sqrt{7} - x)}$;

11) $\frac{x-a}{a} = \frac{a}{x-a}$;

12) $\frac{a-x}{x} \quad \frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$;

13) $ax^2 - b^3 = a^3 - bx^2$:

14) $\frac{c}{ab} - 2x^2 = \frac{ax^2}{b} + \frac{bx^2}{a}$;

15) $(21a - x)^2 + (x - 3a)^2 = (7a - 3x)^2 + (3x - a)^2$;

16) $\sqrt{23x^2 - 70x + 81} = 5x - 7$;

17) $5 + \sqrt{19x^2 + 32x + 13} = 4x + 9$;

18) $\sqrt{36 - \sqrt{x^2 + 40}} = 5$;

19) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2+39} - 2} = 2$;

20) $\sqrt{2x + 8} + 2 = 2\sqrt{x + 5}$;

21) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{a}$;

22) $\sqrt[3]{\sqrt{5} + x} + \sqrt[3]{\sqrt{5} - x} = \sqrt[3]{5\sqrt{5}}$.

Решење. Степеновањем са 3 добијамо: $\sqrt{5} + x + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+x)^2(\sqrt{5}-x)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)^2} + \sqrt{5} - x = 5\sqrt{5}$

Пребацивањем, свођењем и дељењем са 3 добијамо:

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5}+x)^2(\sqrt{5}-x)} + \sqrt[3]{(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)^2} = \sqrt{5};$$

Растављањем леве стране на чинитеље добијамо:

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+x} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-x}\right) = \sqrt{5}.$$

Заменом израза у загради са $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ добијамо:

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Степеновањем са 3 имамо:

$(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x).\ 5\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$, или $5 - x^2 = 1$, или $x^2 = 4$, а $x = \pm 2$.

Решити потпуне квадратне једначине:

23) $x^2 + 12x + 20 = 0$;

24) $x^2 - 7x + 12 = 0$:

25) $x^2 + 3x - 130 = 0$; 26) $x^2 - 2x + 10 = 0$;
27) $(x-1)\,(x-2) = 0$; 28) $4x^2 - 3x = 3$;
29) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; 30) $(2x-3)^2 = 8x$;
31) $x^2 - x + 1 = 0$; 32) $x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$;
33) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$; 34) $2x^2 - 3ax - 2a^2 = 0$;
35) $3b^2x^2 + 10abx + 3a^2 = 0$; 36) $(mx+n)\,(nx-m) = 0$;
37) $bx^2 - a = (a-b)\,x$; 38) $x^2 - 22x + 25 = 2x^2 - 20x + 1$;
39) $(3x-2)^2 = 8\,(x+1)^2 - 100$; 40) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 7\frac{3}{8} = 8$;
41) $\frac{x-7}{2\,(x+3)} = \frac{x-6}{x+24}$; 42) $\frac{x+1}{3} + \frac{3\,(x-1)}{4} = (x-3)^2 + 1$;
43) $\frac{(x-12)^2}{6} - \frac{x}{9} + \frac{x\,(x-9)}{18} = \frac{(x-14)^2}{2} + 5$;
44) $\frac{(x-20)\,(x-10)}{10} - \frac{(34-x)\,(40-x)}{2} + \frac{(30-x)\,(5-x)}{3} = 0$;
45) $\frac{1}{x^2-x-6} + \frac{2}{x^2+x-6} = \frac{4}{x^2-9} - \frac{2}{x^2-4}$;
46) $\frac{x+6}{x-1} - \frac{x^2+17}{x^2+x+1} = \frac{x+30}{x^3-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$;
47) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$; 48) $\frac{x+a}{x-a} - \frac{x+b}{x-b} = 1$;
49) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0$; 50) $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$;
51) $(a+b)\,(a-b)\,x^2 = ab\,(2ax - ab)$;
52) $x^2 - \frac{cx}{a+b} - \frac{2c^2}{(a+b)^2} = 0$;
53) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; 54) $\frac{a+b-x}{a-b-x} = \frac{a-c+x}{a-c-x}$;
55) $\frac{a+c\,(a+x)}{a+c\,(a-x)} + \frac{a+x}{x} = \frac{a}{a-2cx}$;
56) $3x - 8 = 4\,\sqrt{4x+1}$; 57) $3x - 2\,\sqrt{3x^2-4x-6} = 1$;
58) $\sqrt{3x - 4 + \sqrt{8x^2-4x+11}} = 6$;
59) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$;
60) $3\sqrt{5x+1} - 2\,\sqrt{3x} = 6\,\sqrt{2x-5}$;
61) $a^2 - b\sqrt{x-a^2} = a\,\sqrt{x-b^2} - b^2$;
62) $\sqrt{x-3a^2} + \sqrt{2x+a^2} = \sqrt{3x+4a^2}$;
63) $\sqrt{2x + 1 - 2\,\sqrt{2x+3}} = 1$; 64) $\sqrt[3]{x-a} + \sqrt[3]{x-a} = \sqrt[3]{2x}$.

Не решавајући следеће једначине наћи да ли су им корени стварни неједнаки, једнаки или уображени (§ 128):

65) $x^2 + 6x + 5 = 0$; 66) $x^2 + 4x + 5 = 0$;
67) $x^2 + 2x - 120 = 0$; 68) $12x^2 + 7x - 12 = 0$;
69) $25x^2 + 30x + 9 = 0$; 70) $2x^2 - 18x + 65 = 0$.

Не решавајући следеће једначине, одреди знаке њихових корена (§ 130):

71) $x^2 - 8x + 15 = 0$; 72) $x^2 - 17x - 60 = 0$;
73) $x^2 - 26x + 169 = 0$; 74) $2x^2 + 5x + 2 = 0$;
75) $4x^2 + 2x + 1 = 0$; 76) $8x^2 + 4x - 1 = 0$.

Састави квадратне једначине, чији су корени:

77) 2 и 3; $-3 \pm \sqrt{-13}$; $\frac{ab}{a+b}$ и $\frac{ab}{a-b}$;
78) -5 и 0; $3a$ и $-2b$; $a \pm \sqrt{b}$;
79) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{4}$; $-\frac{a}{3}$ и $\frac{a}{2}$; -4 и 6;
80) $\sqrt{6}$ и $-\sqrt{3}$; $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$; 3 и -3;
81) $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{3}{2}$; $4 \pm \sqrt{3}$; $1 \pm i\sqrt{10}$;
82) $2a - b$ и $a - 2b$; $a \pm b$; $\frac{a-b}{a+b}$ и 1;
83) $\frac{b}{1-a}$ и $\frac{a}{1-b}$; $\sqrt{a} \pm i\sqrt{b}$; $\sqrt{b} \pm i\sqrt{a}$.

84) У једначини $x^2 - 7x + q = 0$ да се нађе q, када је *a*) један њен корен 3; *b*) један њен корен -8; *c*) $x_1 = \frac{4}{5}$; *d*) $x_1 = 0$.

85) У једначини $x^2 - px + 38 = 0$ да се одреди p, ако је a) $x_1 = x_2$, b) $x_1 = -x_2$; c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$.

86) У једначини $x^2 - 8x + q = 0$ да се одреди q, ако је a) $x_1 = x_2$; b) $x_1 = 3x_2$; c) $x_1 = \frac{1}{x_2}$; d) $x_1 = -\frac{1}{x_2}$; e) $x_1 - 4x_2 = 3$.

87) Реши једничину $x^2 - 8x + q = 0$, кад се зна да је збир квадрата њених корена 34.

88) Реши једначину $x^2 - px + 21 = 0$, кад се зна да је збир квадрата њених корена 58.

89) Реши једначину $x^2 + px + 45 = 0$, кад се зна да је квадрат разлике њених корена 144.

90) Реши једначину $x^2 - 17x + q = 0$, кад је квадрат разлике њених корена 49.

91) За које вредности коефицијента b једначина $4x^2 + bx + 25 = 0$ има једнаке корене?

93) Наћи једначину чији су корени: a) једнаки реципрочним вредностима корена једначине $2x^2 - 5x + 2 = 0$; b) једнаки квадратима корена једначине $3x^2 - 7x + 2 = 0$; c) n пута већи од корена једначине $9x^2 - 24x - 20 = 0$; d) за n већи (мањи) од корена једначине $x^2 - 2x - 35 = 0$; e) 3 пута већи од кубова корена једначине $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Матурски задаци

94) За које вредности m-а једначина $mx^2 + 2\ (m + 1)\,x + m + 3 = 0$ има једнаке корене? (Београд, I мушка, 1903).

95) Кад се сваком корену једначине $x^2 + px + q = 0$ дода по 1, добијају се бројеви који су корени једначине $x^2 - p^2x + pq = 0$. Одредити p и q и проверити. (Београд, II мушка, 1933).

96) Нека су x_1 и x_2 корени једначине $x^2-(1+\lambda)\,x+\lambda^2=0$. Написати једначину по непознатој z чији су корени $z_1 = \frac{x_1}{x_2}$ и $z_2 = \frac{x_2}{x_1}$; у једначини по непознотој z наћи такву вредност за λ да један корен те једначине буде $\frac{1}{4}$. За ту вредност λ наћи одговарајуће вредности за x_1 и x_2.

(Београд, II мушка, 1931).

97) У једначини $3x^2 - 7x + m^2 - m = 0$ одредити за m такву вредност да збир квадрата корена те једначине буде $\frac{37}{9}$.

(Београд, II мушка, 1929)

98) У једначини $2x^2 + 4\,(m - 2)\,x + 9 - 7m = 0$ одредити m тако да a) корени буду једнаки; b) један корен буде двапута већи од другога.

(Битољ, 1933)

99) Дата је једначина $\sqrt{x^2} - 4\sqrt{x} + 25 = 0$. Како гласи она једначина чији су корени аритметичка и геометриска средина корена дате једначине?

(Сарајево, II мушка, 1934)

100) Дата је једначина $x^2 - (8\alpha - 2)\ x + 15\alpha^2 - 7 = 0$. Одредити α тако да збир квадрата корена те јерначине буде једнак 24.

(Београд, Реалка, 1923)

101) У једначини $2x^2 - 3x + 5c = 0$ одредити c тако да се корени разликују за 1. (Београд, II мушка, 1930)

102) Поставити једначину чији су корени једнаки реципрочним вредностима корена једначине $5^{x^2-5x+9} - 125 = 0$.

(Београд, II мушка, 1920)

§ 132) Системе од двеју једначина од којих је једна првог а друга другог степена

Општи облик једне једначине другог степена са две непознате је

$$Ax^2 + Mxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1),$$

а првог степена са две непознате

$$Mx + Ny + P = 0 \qquad (2).$$

Систем једначина (1) и (2) обично решавамо методом замене када нађемо из једначине првог степена (2) вредност x-а или y-а, па заменимо ту непознату у једначини другог степена (1) њеним изразом. Тиме добијамо квадратну једначину с једном непознатом, коју најзад решавамо да бисмо добили оба њена корена. Заменом нађених корена у изразу елиминоване непознате, налазимо обе њене вредности.

Пример 1. Решити систем једначина:

1) $x^2 + y^2 - 4xy + 5x - 2y - 19 = 0,$

2) $2x - 3y = 5.$

Решење. Из једначине (2) је $x = \frac{5 + 3y}{2}$. Заменом у (1) добијамо $\left(\frac{5 + 3y}{2}\right)^2 + y^2 - 4y \cdot \frac{5 + 3y}{2} + \frac{5(5 + 3y)}{2} - 2y - 19 = 0$ или $11y^2 - 12y + 1 = 0$. Одавде је $y_1 = 1$ и $y_2 = \frac{1}{11}$. Тада је из (2): $x_1 = 4$ и $x_2 = \frac{29}{11}$.

Међутим, има система које можемо решити много брже и лакше него методом замене на подесан начин.

Тако, ако знамо збир и производ двеју непознатих, онда њихове вредности сматрамо као корене оне квадратне једначине чији је коефицијенат уз непознату на првом степену познати збир с промењеним знаком, а независни члан познати производ.

Пример 2. 1) $x + y = 12$

2) $xy = 35$

Решење. x и y јесу корени једначине $z^2 - 12z + 35 = 0$. Одавде је $z_1 = 5$, $z_2 = 7$. Стога је $x_2 = 5$, $y_2 = 7$, $x_1 = 7$, $y_1 = 5$.

Пример 3. 1) $x - y = 5$

2) $xy = -4.$

Заменимо $-y = y^1$ биће 1) $x + y^1 = 5$ и 2) $xy^1 = 4$. Тада су, x и y^1 корени једначине $z^2 - 5z + 4 = 0$. Одавде је $z_1 = x = 4$, $z_2 = y^1 = 1$, а $y = -1$.

Пример 4. 1) $x + y = 5$

2) $x^2 + y^2 = 13.$

Ако прву степенујемо са 2, добијамо:

1) $x^2 + 2xy + y^2 = 25.$

Ако одузмемо од ове другу, добијамо $xy = 6$.

Тада су x и y корени једначине $z^2 - 5z + 6 = 0$.

Одавде је $z_1 = x = 3$, $z_2 = y = 2$. Тако исто се решава и систем у коме се зна збир квадрата непознатих и њихова разлика.

Пример 5. 1) $x^2 - y^2 = 24$

2) $x - y = 4$.

Ако (1) поделимо са (2) добијамо: (3) $x + y = 6$.

Тада сабирањем и одузимањем једначине (2) и (3) добијамо $x = 5$ и $y = 1$.

Тако исто се решава систем, ако се зна разлика квадрата непознатих и њихов збир.

Примери за вежбу

1) $\begin{cases} xy = 0{,}5, \\ \dfrac{x}{y} = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{xy} = 5, \\ \dfrac{y}{x} = 20. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = a, \\ 1 + \dfrac{xy}{a+1} = a^2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2b, \\ \dfrac{x}{a-b} = \dfrac{a+b}{y}. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y = 120, \\ x^2 + y = 50. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x-2)(y-3) = 1, \\ \dfrac{x-2}{y-3} = -1. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x - y = \dfrac{2a}{a^2-1}, \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{a}. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + y = 2a, \\ \dfrac{x^2 - 2a^2 + y^2}{2} = 1. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \dfrac{x - 3y - 1}{6x - 11y - 3} = \dfrac{1}{2}. \\ 3xy - (x^2 + y^2) = 11. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 5x^2 - 3y = 11, \\ 4x + 9y = 35. \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x + \sqrt{2y+4} = 9, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} y - \sqrt{3x-3} = 6, \\ 2x + 3y = 35. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x + y = 21, \\ xy = 108. \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x + y = 2a, \\ xy = a^2 - b^2. \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = -59, \\ x + y = 19. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4xy = 286, \\ x + y = 14. \end{cases}$ 17) $\begin{cases} (x+3)(y-5) = 24, \\ x + y = 16. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 586, \\ x + y = 34. \end{cases}$ 19) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 160, \\ x - y = 8. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 45, \\ x + y = 15. \end{cases}$ 21) $\begin{cases} (x+5)^2 - (x+6)^2 = 29, \\ x - y = 2. \end{cases}$

§ 133) **Проблеми другог степена с једном непознатом.** Има велики број проблема који се своде на решавање једначина другог степена, а чија решења, иако задовољавају једначину, не задовољавају проблем. Код § 128 видели смо да корени квадратне једначине могу бити стварни неједнаки, стварни једнаки и имагинарни, што зависи једино од дискриминанте $B^2 - 4AC$. Из овога разлога може да се деси да оба, или поједина решења једначине не задовољавају све или поједине услове проблема. У овом случају проблем је немогућан за та решења. Такав ће бити проблем, ако су оба решења једначине имагинарна, или је тражена количина такве природе да не-може бити нити негативна нити разломљена, а корени једначине су негативни или разломљени. Тада решења једначине, која не задовољавају услове проблема, као бесмислена, одбацујемо.

а) *Решени примери:*

1) *Наћи онај двоцифрен број чији је збир цифара 14, а њихов производ 24.*

Решење. — Ако су јединице x, онда су десетице $14—x$. Према другој погодби биће:
$x(14—x)=24$, или $14x—x^2=24$, или $x^2—14x=—24$.

Решењем ове једначине добијамо $x_1=12$ и $x_2=2$. Оба ова решења, иако су стварна и позитивна не задовољавају проблем, јер решење x_1 није једноцифрено, а решење x_2, иако једноцифрено, ипак не задовољава проблем, пошто би тада десетице биле 12, што је немогуће.

Закључак: овај проблем је немогућан.

2) *Раставити број 30 на таква два дела да је њихов производ 8 пута већи од њихове разлике.*

Решење. — Ако је један део x, други је $30—x$. Тада је према другом услову

$$x(30—x)=8\cdot(30—x—x), \text{ или}$$
$$30x—x^2=240—16x, \text{ или } x^2—46x+240=0.$$

Решењем ове једначине имамо $x_1=40$ и $x_2=6$. Прво решење x_1 не задовољава проблем, јер је веће од самог броја. Друго решење задовољава проблем.

Закључак: Први је део 6, а други 24. Заиста је $24\cdot6=8\cdot(24—6)$.

3) *Ученици најстаријег разреда у једној школи измењаше узајамно своје фотографије чији је број био 1056. Колико је било ученика у разреду? Решење.* Ако је било x ученика, онда је сваки дао фотографијâ $x—1$. Једначина је $x(x—1)=1056$, или $x^2—x=1056$. Решењем ове једначине имамо:

$$x_1=35 \text{ и } x_2=—32.$$

Друго решење $x_2=—32$, као бесмислено, одбацујемо, јер број ученика не може бити негативан. Прво решење задовољава проблем. Дакле, број ученика у разреду је био 33.

4) *Хипотенуза правоуглог троугла је 10 m, а једна је катета за 2 m већа од друге. Колико је мања катета?*

Решење: Ако је мања катета x, већа је $x+2$. Тада је једначина по Питагорином правилу

$$x^2+(x+2)^2=100, \text{ или } x^2+2x=48.$$

Њеним решењем добијамо $x_1 = 6$ и $x_2 = -8$. Прво решење задовољава проблем, а друго, као негативно, одбацујемо.

5) *Број 12 раставити на таква два дела да је њихов производ 40.*

Решење. — Ако је један део x, други је $12 - x$. Тада је једначина $x(12 - x) = 40$, или $x^2 - 12x = -40$. Њеним решењем добијамо $x_1 = 6 + 2i$ и $x_2 = 6 - 2i$. Пошто су оба решења имагинарна, то оба не задовољавају проблем. Он је немогућан, тј. број 12 не може се раставити на делове чији је производ 40.

λ) **Примери за вежбу:**

1) Који број постаје 5 пута већи, ако се сабере са својом реципрочном вредношћу? $\left(\pm\frac{1}{2}\right)$

2) Наћи број чији је производ од његове половине и осмине 1. ($\pm$ 4)

3) Наћи она два броја чија је размера 5 : 7, а производ 490. ($I = \pm\ {}^{5}\sqrt{14}$, $II = \pm {}^{7}\sqrt{14}$)

4) Наћи број чија је деветина једнака производу од његове трећине, шестине и осмине. ($\pm$ 4)

5) Који број најпре увећан за 7 а затим смањен за 7 даје бројеве чији је производ 51? ($\pm$ 10)

6) Са колико је процената дат капитал под интерес, ако је годишњи интерес 1250 дин., а зна се да је капитал 5000 пута већи од процента? (5%)

7) Са колико процената треба да се да неки капитал под прост интерес да би се он удвојио за онолико година колики је и проценат? (10%)

8) Трошак неког друштва, у којем је било двапут више људи но жена, изнео је 176 дин. Кад је сваки човек платио двапут толико колико је било људи, а свака жена трипут толико колико је било жена, пита се колико је било људи и колико жена у томе друштву? (жена 4, људи 8)

9) Наћи број који трипут помножен самим собом даје производ трипут већи од тога броја. ($\pm\sqrt{3}$).

10) Кад се једном броју најпре дода 5 и затим одузме 5, биће збир квадрата добивеног збира и разлике једнак 178. Који је тај број? ($\pm\sqrt{8}$)

11) Стране два квадрата стоје у размери 5 : 7. Површина другога је за 1944 m^2 већа од површине првог. Наћи њихове стране. (45 *m*, 63 *m*)

12) Хипотенуза правоуглог троугла је 10 *m*, а једна је катета $1^1/_3$ пута већа од друге. Наћи катете. (6 *m* и 8 *m*)

13) Од темена правог угла крећу се једновремено два тела по крацима угла с брзинама од 5 *m* и 12 *m* у секунди. После колико секунада оба тела биће удаљена 52 *m* једно од другог? (после 4 сек.)

14) Од темена правог угла крећу се по крацима два тела једнаком брзином. Прво почиње кретање 7 секунада раније од другог тела. После 15 секунада од поласка првог тела, отстојање између телâ је 102 *m*; којом се брзином крећу тела? (6 *m*)

15) Разлика суседних страна једног правоугаоника је 6 *m*. Ако се мања страна удвоји, а већа смањи за 3 *m*, онда се површина правоугаоника увећава за 25 m^2. Наћи стране правоугаоника. (5 *m* и 11 *m*)

16) Два тела крећу се једновремено по крацима правог угла, и то прво из тачке *A*, удаљене 117 *m* од темена, к темену са брзином од 7,5 *m* у секунди; друго полази из тачке *B*, удаљене од темена 39 *m*, удаљујући се од темена са брзином од 22,5 *m* у секунди. После колико секунада су оба тела удаљена једно од другог 170 *m*? ($4\frac{14}{15}$ сек)

17) Три броја стоје у размери као 3 : 2 : 5 а збир њихових квадрата износи 342; наћи те бројеве. (± 9, ± 6 и ± 15)

18) Један басен пуни се за 8 часова кроз две цеви, ако буду једновремено отворене. Друга цев сама напунила би басен за 9 часова дуже време од $\frac{1}{8}$ времена које је потребно да прва цев сама напуни басен. За које време свака цев пуни басен? (I за 24 ч., II за 12 ч.)

19) Наћи број који помножен са $3\frac{1}{3}$ даје производ једнак деветини свога квадрата увећаној са 25. (15)

20) Којим бројем треба поделити 96 да се добије количник који је за 4 већи од тога броја? (8 и — 12).

21) Наћи разломак чији је производ бројитеља и именитеља 120, кад се зна да бројитељ и именитељ постају једнаки ако бројитељу додамо 1 а од именитеља одузмемо 1. $\left(\frac{10}{12}\right)$

22) Наћи број, чије $\frac{3}{4}$ увећане за 1, а затим помножене са $\frac{4}{5}$ тога броја које су смањене за 15, дају производ 16. (20 и $-\frac{31}{12}$)

23) Трговац прода неку робу за 39 динара и на њој заради толико на $^0/_0$ колико њега роба стаје. Колико њега стаје роба? (30 дин.)

24) Наћи она два узастопна непарна броја чија је разлика квадрата 8000. (2001 и 1999)

25) Траже се она три узастопна цела броја чији је производ 5 пута већи од њиховог збира (— 1, 0, 1, или 3, 4, 5, или — 5, — 4, — 3).

26) Поделити број 12 на таква два дела да је већи део средња пропорционала између целог броја и мањег дела. (I део 6 $(\sqrt{5} - 1)$, или приближно 7, 4164)

27) Наћи број који увећан са шестоструким квадратним кореном тога броја даје 135, (225 и 81)

28) Наћи године старости једнога дечака, кад се зна да ће после три године имати онолико година колики је био квадрат његових година пре три године. (6 год.)

29) Једно лице уложи под прост интерес 20000 дин. под извесним процентом. После 5 година узме капитал и интерес за то време и уложи у други завод који даје проценат за 1 мањи од ранијег процента, и тада добија годишњи интерес 1300 дин. Наћи проценат. ($6^0/_0$)

30) Друштво од 15 људи и жена ручало је заједнички у некој гостионици. Трошак људи износи 36 дин. а толико исто и трошак жена. Колико је било људи а колико жена и колико је трошак сваког учесника, ако је сваки човек платио 2 дин. више него жена? (људи 6, жена 9; човек плаћа 6 дин.; жена 4 дин.)

31) Сума од 400 дин. треба да се подели на известан број људи подједнако. Пре деобе 4 лица одрекну се примања, услед чега је сваки од осталих примио по 5 дин. више него што би примио. Колико је било лица? (20)

32) Сељак је купио известан број оваца за 750 дин. У току три месеца изгубио је услед болести 5 оваца, а остале прода и добија по 6 дин. више од овце него што је платио за њу. На овој продаји изгуби 30 дин. Наћи број оваца и њихову цену. (25 оваца, свака стаје 30 дин.)

33) Два курира полазе у исто време, из истог места за неку варош удаљену 90 *Km*. Први прелази на час 1 *Km* више од другог, те услед тога стиже у варош 1 час раније но други. Наћи њихове часовне брзине. (10 *Km* и 9 *Km*)

34) Два курира полазе једновремено један другоме у сусрет из два места удаљена 320 *Km*. Дневна брзина првог је за 8 *Km* већа од дневне брзине другог, а путују до места сусрета онолико дана колика је половина *Km* које дневно прелази други курир. Наћи њихове путеве. (192 *Km*, 128 *Km*)

35) Трошкови путовања више лица изнели су 432 дин. Па како су два лица путовала без трошка, то је сваки од осталих платио по 3 дин. више. Колико је било лица? (18 лица)

36) Један вод војника треба да направи маршруту од 240 *Km* за известан број дана. Међутим, у моменту поласка, наређено му је да ту маршруту заврши 2 дана раније. Због овога вод прелази 6 *Km* дневно више него што је намеравао. За колико је дана била пројектована ранија маршрута? (10 дана)

37) Место на коме је саграђена нека кућа има облик правоугаоника дужине 36 *m* а ширине 20 *m*. Око целе куће треба начинити тротоар једнаке ширине. Наћи ту ширину, ако се зна да је његова површина $\frac{1}{3}$ од површине коју кућа обухвата. (2 *m*)

38) У коме правилном многоуглу сваки унутрашњи угао постаје за 10° већи ако му се број страна повећа за 3? (у 9-тоуглу)

39) Трговац прода неку робу за 62,50 дин. с процентом зараде која износи половину куповне цене. Шта стаје њега роба? (Дин. 50)

40) Неки басен пуни се кроз две цеви. Прва цев пуни басен сама за 5 часова дуже него друга. Обе заједно, једновремено отворене, пуне га за 6 часова. За колико часова свака цев пуни басен? (15 ч; 10 ч.)

41) Два преписача треба да препишу известан број страна неког рукописа. Кад би сваки сам радио, другом треба да сврши посао 4 часа више но првом. Ако први ради 6 часова, а други 7 часова, преписали би страна чији је број за $\frac{1}{3}$ већи од броја страна који треба да препишу. За које време може сваки да препише рукопис, а за које обојица? (I = 8 ч; II = 12 ч; обојица 4 ч. и 48 мин.)

42) Из два места *A* и *B*, чије је отстојање 18 *Km*, полазе два путника један другоме у сусрет. Први из *A* одлази 27 минута раније, али сваки *Km* прелази за 3 минута више времена но други. После $2^1/_2$ часа од поласка првог срели су се. За колико минута прелази сваки од њих 1 *Km*? $\left(16\frac{2}{3};\ 13\frac{2}{3}\right)$

43) Из двеју тачака, чија је раздаљина 340 *m*, полазе тела *A* и *B* једно другоме у сусрет. *A* почиње кретање 5 секунди раније од *B*, али сваке секунде прелази 4 *m* мање него *B*. Пређени од њих путеви при сусрету стоје као 8 : 9. Наћи њихове секундне брзине. (8 *m* и 12 *m*)

44) Два путника *A* и *B* полазе у 6 часова из два места један другоме у сусрет и сретну се у 9 часова. При сусрету прорачунали су да је *A* прешао 3 *Km* више но *B* и сваки је продужио пут с истом брзином. Најзад *A* стигне у своје место 1 час и 6 минута раније но *B*. Наћи отстојање полазних места и за које време сваки од њих прелази 1 *Km*. (33 *Km*; 10 и 12 мин.)

45) По једном краку правог угла из тачке чије је отстојање до темена 40 *m*, креће се к темену једно тело са брзином од 2 *m* у секунди. Једновремено креће се друго тело из темена по другом краку угла са брзином од 16 *m* у секунди. После колико секунада отстојање оба тела биће 100 *m*? (6)

46) По крацима правог угла крећу се ка темену једновремено из тачака *A* и *B*, чије је отстојање 187 *m*, два тела. Разлика њихових брзина је 7 *m*. Ако оба тела стигну у теме после 11 секунада, која је брзина сваког тела? (15 и 8 *m*)

47) Од темена правог угла почињу кретање по крацима центри два круга. Центар првог круга, чији је полупречник 40 *cm*, креће се брзином од 3 *cm* у секунди, а центар другога круга, чији је полупречник 38 *cm*, почиње кретање 2 секунде раније са брзином од 6 *cm* у секунди. После колико секунада од поласка првог центра, оба се круга додирују споља? (10 сек.)

48) Неколико радника примили су за неки посао 400 дин. Кад би број радника био за 3 мањи, онда би сваки радник примио по 30 дин. више. Колики је број радника? (8)

49) Неколико књига купљене су за 60 дин. Цена сваке књиге у динарима је за 4 мања од броја књига. Колико је књига купљено? (10)

50) Неки је потрошио за неколико дана 900 дин. за храну. Кад би дневно трошио по 10 дин. мање, онда би исти новац потрошио за 3 дана више. По колико је онда трошио? (60 дин.)

51) Продато је две врсте кафе: од прве за 1020 дин., а од друге за 871 дин. Од друге врсте је продато 3 *kg* више него од прве. По колико је *kg* продато од сваке врсте, кад се зна да *kg* друге врсте стаје 35 дин. мање него *kg* прве врсте? (10 *kg* и 13 *kg*)

52) Неки човек, продавши свој часовник за 24 дин., изгубио је онолико процената колико му је часовник вредео. Колико му вреди часовник? (60 дин.)

53) Неки је позајмио 5000 дин. од два зајмодавца. Првоме је плаћао годишњи интерес од 240 дин., а другом 200 дин. Са колико % су били зајмови начињени, кад се зна да је другом зајмодавцу плаћао 2% више него првом. (8% и 10%)

54) Један део капитала од 8000 дин. доноси годишњи интерес 90 дин., а други део 200 дин. Са колико процента је дат сваки део тога капитала, ако је други део дат под интерес за 1% већи проценат но први део? (3% и 4%)

55) Два путника полазе једновремено из једног места за друго. Први прелази за један час 1 *Km* више него други и стиже у друго ме-

сто 1 час раније. Колико *Km* прелази сваки за час, ако је отстојање места 56 *Km*? (8 *Km* и 7 *Km*)

56) Једна тачка креће се по обиму једнога круга чији је обим 225 *cm*. Ако се брзина тачке смањи за 10 *cm* у секунди, онда би прешла обим за 6 секунди доцније. За колико секунада обиђе обим круга та тачка са првом својом брзином? (9 сек.)

57) Збир катета правоуглог троугла је 17 *m*, а хипотенуза му је 13 *m*. Наћи катете. (12 *m* и 5 *m*)

58) Површине двају квадрата имају се као 25 : 49. Страна првог је за 10 *m* мања од стране другог. Наћи њихове стране. (25 *m* и 35 *m*)

59) Површине двају равнокрако-правоуглих троуглова имају се као 9 : 16. Хипотенуза првог је за 2 *m* мања од хипотенузе другог. Наћи стране тих троуглова. ($\mathrm{I} = 3\sqrt{2{,}6}$; $\mathrm{II} = 4\sqrt{2{,}8}$)

60) Од једног троугла, чија је површина 121 m^2, добивен је трапез површине 85 m^2, правом повученом паралелно основици троугла. Наћи висину троугла и њене делове, кад се зна да је та висина 2 пута већа од основице троугла. ($h = 22\ m$; 10 и 12)

61) Кружна тетива од 12 *m* дужине преполовљена је другом тетивом од 15 *m* дужине. Наћи отсечке друге тетиве. (3 *m* и 12 *m*)

62) Страна једног квадрата је 230 *m*; колике су стране оног правоугаоника чији је обим за 12 *m* већи од обима квадрата, а површина за 460 m^2 мања од квадратове површине? (276 и 190 *m*)

С) Матурски задаци

63) По периферији једног круга од 360 *m* дужине крећу се два тела *A* и *B*. *A* прелази у секунди 4 *m* више од *B*, те му је због тога потребно једна секунда мање да би прешло целу периферију круга. Колико метара прелази свако од њих у секунди?

(Крагујевац, 1899)

64) У једном трапезу је већа паралелна страна за 3 m дужа од мање паралелне стране, а висина трапеза је средња аритметичка средина обеју паралелних страна. Кад је површина трапеза за 7,75 m^2 мања од двоструке површине квадрата над мањом паралелном страном, колике су паралелне стране трапезове и висина? (Пожаревац, 1910)

65) Неки отац остави своје имање од 84000 дин. својој малолетној деци тако да се на једнаке делове подели, са жељом, ако би неко пре пунолетства умро, да се онима који га преживе и његов део на једнаке делове подели. Умрла су два детета пре него што су пунолетна била и зато је од остале деце свако наследило још по 3500 дин. Колико је отац деце оставио? (Ужице, 1905)

66) Неки трговац купио је *x* ствари за 6000 дин.; он је себи задржао 20 ствари, а остале је продао за 15 динара скупље сваку ствар и тако је опет за њих добио 6000 дин. Колико је ствари купио?

(Ниш, Мушка, 1930)

67) Неко има три шупље коцке разне величине. Прва је 5 см виша од друге, а друга 5 см виша од треће. Ако другу празну коцку напунимо водом из прве пуне, а затим трећу празну из друге пуне, онда ће у првој бити 1350 $\mathrm{см}^3$ воде више него у другој. Колика је запремина сваке коцке?

(Ниш, 1903).

68) Збир цифара једног двоцифреног броја износи 10; ако пак цифр у обрнутом реду пишемо и добивени број помножимо са прећашњи бројем, производ ће бити 2701. Који је тај број? (Суботица, 1922)

69) Трговац прода робу за 56 динара, при чему заради толик процената колико га стаје та роба. Колико је за њу платио?
(Београд, III мушка 1928)

70) Једном човеку потребно је да чамцем пређе узводно пут од 240 км два дана више него кад иде низводно, јер прелази 6 км мање. Колико му је дана потребно за низводни пут?
(Београд, III мушка 1933)

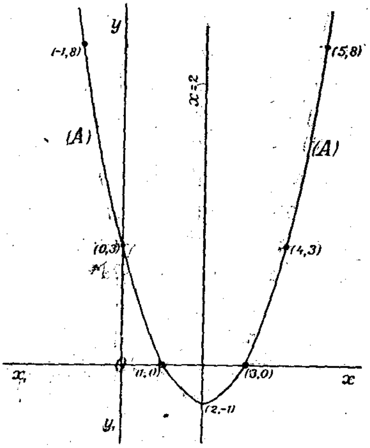
71) Враћајући се из једне шетње неки бициклиста прелази у једном часу 5 км мање него при одласку. Пита се, којом се брзином кретао при одласку, кад се зна, да је његов повратак трајао 48 минута више него одлазак и кад се зна да је бициклиста отишао 80 км далеко од своје полазне тачке. (Београд, II мушка, 1933)

§ 134) **IV. Графичко претстављање крадратног тринома и испитивање његових промена.** Да бисмо квадратни трином $Ax^2 + Bx + C$ претставили графички и да бисмо његове промене графички испитали, треба најпре да ставимо да је он једнак *y*, а затим да независно-промењивој *x* дајемо произвољне вредности, чиме добијамо одговарајуће вредности функције *y*. Сматрајући одговарајуће вредности *x*-а и *y*-а као координате појединих тачака у равни, конструишући те тачке помоћу правоуглог координатног система и најзад њиховим спајањем добијамо линију квадратног тринома, која је *парабола*. Из добивене линије можемо увидети и промене тринома које он има када *x* мења своју вредност од $-\infty$ до $+\infty$.

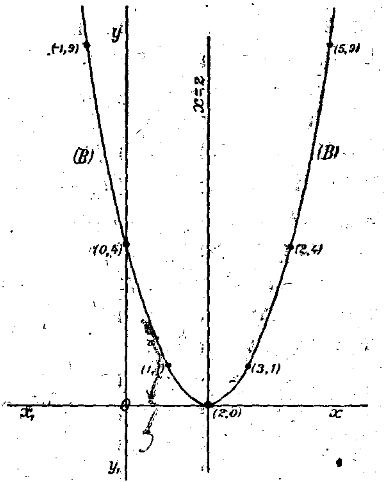
Примери:

1) $\mathbf{y = x^2 - 4x + 3}$. За $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\ldots$ биће $y = 24, 15, 8, 3, 0, -1, 0, 3, 8, 15\ldots$ Конструкцијом тачака: $(-3, 24)$, $(-2, 15)$, $(-1, 8)$, $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$, $(5, 8)$, $(6, 15)$, $(7, 24)\ldots$ и њиховим спајањем добијамо параболу (A) слике 22. Из ове линије увиђамо: 1) да трином $x^2 - 4x + 3$ има корене 1 и 3, јер је он раван нули за $x = 1$ и $x = 3$, тј. ова линија сече апсцисну осовину у тачкама чије су апцисе 1 и 3; 2) дати трином је позитиван за све вредности *x*-а изван корена, јер су ординате позитивне за $1 > x > 3$; 3) дати трином је негативан за вредности *x*-а између корена, јер су ординате негативне за $1 < x < 3$; 4) за $x = 2$ дати трином има најмању вредност -1, јер је најмања ордината -1 за $x = 2$; и 5) да парабола датог тринома заузима симетричан положај према правој чија је једначина $x = 2$.

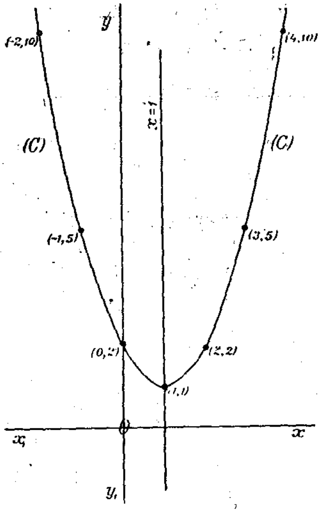
2) $\mathbf{y = x^2 - 4x + 4}$. За $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots$ биће $y = 16, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16\ldots$ Конструкцијом тачака



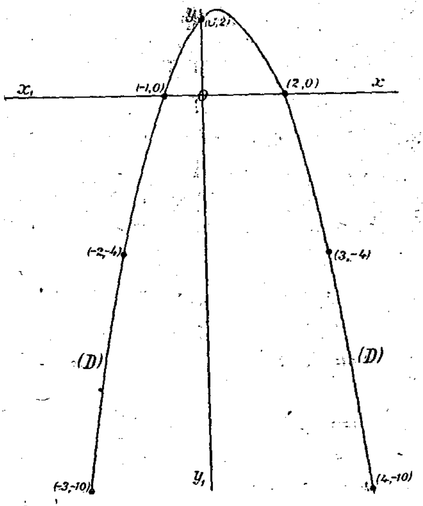
Слика 22



Слика 23



Слика 24



Слика 25

(—2, 16), (—1, 9), (0, 4), (1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 4), (5, 9), (6, 16)... и њиховим спајањем добијамо параболу (B) слика 23. Из ове линије увиђамо : 1) да трином $x^2 - 4x + 4$ има оба корена једнака, јер крива додирује апсцисну осовину за $x = 2$; 2) дати трином је увек позитиван за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, пошто су све ординате позитивне; 3) за $x = 2$ дати трином има минималну вредност 0, јер је најмања ордината 0; и 4) да парабола датог тринома заузима симетричан положај према правој чија је једначина $x = 2$.

3) $\mathbf{y = x^2 - 2x + 2}$. За $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ биће $y = 10, 5, 2, 1, 2, 5, 10, \ldots$ Конструкцијом и спајањем тачака $(-2, 10)$, $(-1, 5)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 5)$, $(4; 10), \ldots$ добијамо параболу (C) слике 24. Из ове линије увиђамо: 1) трином $x^2 - 2x + 2$ има уображене корене, пошто парабола не сече апсцисну осовину; 2) дати трином је увек позитиван за све могуће вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, јер су све ординате тачака параболе позитивне; 3) за $x = 1$ дати трином има минималну вредност 1, јер је најмања ординанта 1.

4) $\mathbf{y = -x^2 + x + 2}$. За $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ биће $y = -10, -4, 0, 2, 2, 0, -4, -10, \ldots$

Конструкцијом и спајањем тачака $(-3, -10)$ $(-2, -4)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(3, -4)$, $(4, -10)$, добијамо параболу (D) слике 25. Из ове линије увиђамо: 1) трином $-x^2 + x + 2$ има корене -1 и 2, јер парабола сече апсцисну осовину у тачкама чије су апсцисе -1 и 2; 2) за $x = \frac{1}{2}$ дати трином има максималну вредност $2\frac{1}{4}$, јер је највећа ордината $y = 2^1/_4$; и 3) дати трином је позитиван само за оне вредности x-а које се налазе између корена -1 и 2, јер су ординате позитивне за $-1 < x < 2$.

Напомена. Истим путем дају се конструисати функције $y = ax^2$ и $y = ax^2 + c$, $y = (x \pm m)^2$ и $y = ax^2 + bx$, које све претстављају параболе.

Примери за вежбу

Конструисати следеће функције:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -4x^2$; 3) $y = 2x^2$;
4) $y = {}^3/_5 x^2$; 5) $y = 2{,}25x^2$; 6) $y = 2x^2 - 3x + 4$;
7) $y = 3x^2 + 2x - 3$; 8) $y = 3x^2 - 6x + 5$:
9) $y = x^2 + 2x - 3$; 10) $y = 5x^2 - 4x + 5$;
11) $y = (x + 1)^2$; 12) $y = (x - 2)^2$; 13) $y = -7x^2 + 12$;
14) $y = 4x^2 - 5$; 15) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$; 16) $y = -2x^2 + 4x + 3$.

§ 135) **Графичко решење једначина другог степена с једном непознатом.** Најпростији начин графичког решавања једначина другог степена с једном непознатом састоји се у овоме:

Треба најпре једначину $Ax^2 + Bx + C = 0$ *свести на облик* $Ax^2 = -Bx - C$, *а затим, стављамо да су обе стране, као једнаке, равне* y.

Тиме добијамо функцију другог степена $y = Ax^2$ и функцију првог степена $y = -Bx - C$, од којих прва претставља параболу, а друга праву. Најзад треба конструисати и параболу $y = Ax^2$ и праву $y = -Bx - C$, па апсцисе њихових пресечних тачака биће решења или корени дате једначине.

Пример. Решити графички једначину $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Доводећи ову једначину на облик $x^2 = -4x + 5$ и стављајући да је свака страна једнака y, добијамо једначине $y = x^2$ и $y = -4x + 5$.

Тада из прве једначине имамо:

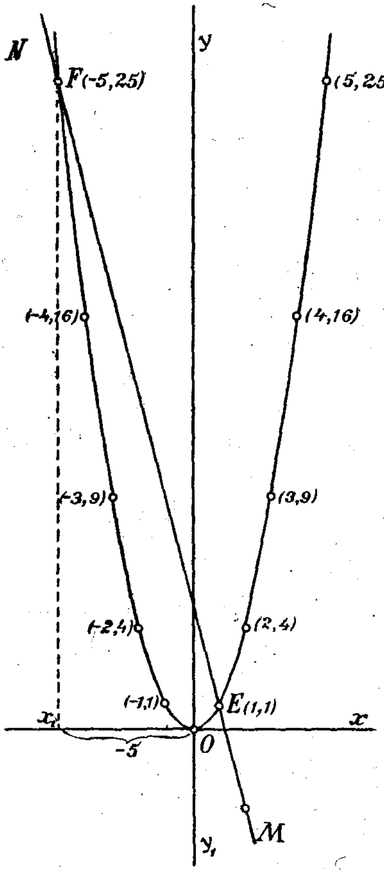
за $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

$y = 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, \ldots$

а из друге једначине:

за $x = 1, 2, \ldots y = 1, -3, \ldots$

Конструкцијом одговарајућих тачака и њиховим спајањем, добијамо параболу *(A)* и праву MN (сл. 26).



Сл. 26

Ова права сече параболу у тачкама E и F. Апсцисе пресечних тачака јесу 1 и — 5, и то су решења дате једначине.

Примери за вежбу:

Реши графички једначине:

1) $x^2 - 36 = 0$;
2) $x^2 - 16 = 0$;
3) $(x + 3)(x - 3) = 16$;
4) $x^2 - 7x = 0$;
5) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
6) $2x^2 - 4x - 3 = 0$;
7) $x^2 - 2x - 4 = 0$;
8) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
9) $(2x - 3)^2 = 8x$; и
10) $\frac{x - 7}{2x + 6} = \frac{x - 6}{x + 24}$.

САДРЖАЈ I ДЕЛА

УВОД

ПРВИ ОДЕЉАК

Основне радње са општим и алгебарским бројевима, мономима и полиномима

ДРУГИ ОДЕЉАК

Дељивост бројева и алгебарских израза и операције са разломцима

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

Размере, сразмере и њихова примена

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

Једначине и неједначине првог степена и њихова примена

ПЕТИ ОДЕЉАК

Степеновање, кореновање и логаритмовање

ШЕСТИ ОДЕЉК

Једначине другога степена