[illegible]ЉИКОВИЋ
[illegible] ГИМНАЗИЈЕ У ПЕНЗИЈИ

АЛГЕБРА

ЗА

ВИШЕ РАЗРЕДЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

ДРУГИ ДЕО

ЗА VII и VIII РАЗРЕД

Овај је уџбеник препоручен од Главног просветног савета С.бр. 276 од 1 марта 1937 и одобрен од Г. Министра просвете одлуком С.н.бр. 9035 од 30 марта 1937 године.

ДРУГО ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЋУКОВИЋА
БЕОГРАД — ПРЕСТОЛОНАСЛЕДНИКОВ ТРГ 17

Цена 30 дин.

РИСТА КАРЉИКОВИЋ
ДИРЕКТОР ГИМНАЗИЈЕ У ПЕНЗИЈИ

АЛГЕБРА

ЗА

ВИШЕ РАЗРЕДЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

ДРУГИ ДЕО

ЗА VII и VIII РАЗРЕД

Овај је уџбеник препоручен од Главног просветног савета и одобрен од Г. Министра просвете одлуком С. Н. Бр. 17636 од 18-VI-1930 год.

ДРУГО ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЋУКОВИЋА
БЕОГРАД — ПРЕСТОЛОНАСЛЕДНИКОВ ТРГ 17.

ШТАМПАРИЈА „ДАВИДОВИЋ“ ПАВЛОВИЋА И ДРУГА
Београд, 1932 — Таковска 32.

ШЕСТИ ОДЕЉАК
(НАСТАВАК)

§ 133. **Квадратни триноми и њихово растављање на просте чинитеље.**

Под квадратним триномом разумемо трином било облика

$$Ax^2 + Bx + C, \quad \text{било облика} \quad x^2 + px + q.$$

Такав је трином лева страна потпуне квадратне једначине сведене на нулу.

Под *кореним чиниоцем* разумемо разлику између непознате у једначини и њеног корена. Па како квадратна једначина има два корена x_1 и x_2, то она има и два корена чинитеља: $x - x_1$ и $x - x_2$.

Теорема. *Трином квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ једнак је производу корених чинитеља те једначине.*

Доказ. — Како су корени ове једначине:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

то су њени корени чинитељи:

$$x - x_1 = x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x - x^2 = x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Тада је:

$$(x - x_1)(x - x_2) = \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = x^2 + px +$$

$+ q$, чиме је теорема доказана.

Трином облика $Ax^2 + Bx + C$, који се да̂ написати као $A \cdot \left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right)$, или $A \cdot (x^2 + px + q)$, где је $p = \frac{B}{A}$ а $q = \frac{C}{A}$, може се, на основу ове теореме, написати као производ

$$A(x - x_1)(x - x_2).$$

Корист од ове теореме је двојака: а) можемо, на основу ове теореме, да склопимо квадратну једначину, ако су нам познати њени корени; и b) можемо квадратне триноме раставити на чинитеље.

а) *Једначину склапамо помоћу корена, када најпре од корена створимо оба корена чинитеља, а затим ставимо да је њихов производ једнак нули.*

Примери:

1) Наћи једначину, чији су корени $x_1 = 10$ и $x_2 = 5$.

Овде је I к. ч. $= x - 10$ а II к. ч. $= x - 5$. Једначина је: $(x - 10)(x - 5) = 0$, или $x^2 - 10x - 5x + 50 = 0$, или $x^2 - 15x + 50 = 0$.

2) Наћи једначину, чији су корени $x_1 = \frac{7}{3}$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Овде је I к. ч. $= x - \frac{7}{3}$ а II к. ч. $= x + \frac{2}{3}$. Једначина је: $\left(x - \frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$, или $x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x - \frac{14}{9} = 0$, или $9x^2 - 15x - 14 = 0$.

3) Наћи једначину, чији су корени $x_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$.

Овде је I к. ч. $= x - \sqrt{2} - i\sqrt{3}$ а II к. ч. $= x - \sqrt{2} + i\sqrt{3}$.

Једначина је:

$(x - \sqrt{2} - i\sqrt{3})(x - \sqrt{2} + i\sqrt{3}) = 0$, или множењем:

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 5 = 0.$$

b) *Квадратни трином $Ax^2 + Bx + C$ растављамо на чинитеље, када ставимо најпре да је једнак нули, затим добивену квадратну једначину решимо, да бисмо добили корене x_1 и x_2, па тражени чинитељи овога тринома биће: A и оба корена чинитеља*, т. ј.

$$Ax^2 + Bx + C = A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Примери:

1) Раставити на чинитеље трином $3x^2 - 14x + 8$.

Решењем једначине $3x^2 - 14x + 8 = 0$ добијамо $x_1 = 4$ и $x_2 = \frac{2}{3}$. Стога је $3x^2 - 14x + 8 = 3(x - 4)\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

2) Раставити на чинитеље трином: $x^2 + 3x - 88$.

Решењем једначине $x^2 + 3x - 88 = 0$ добијамо $x_1 = 8$ и $x_2 = -11$. Стога је $x^2 + 3x - 88 = (x - 8)(x + 11)$. Овде је $A = 1$, те се не пише.

3) Раставити на чинитеље трином $abx^2 + (a + b)x + 1$. Решењем једначине $abx^2 + (a + b)x + 1 = 0$ добијамо $x_1 = -\frac{1}{a}$ и $x_2 = -\frac{1}{b}$. Стога је $abx^2 + (a + b)x + 1 = ab\left(x + \frac{1}{a}\right)\left(x + \frac{1}{b}\right)$.

Напомена. а) Како је сваки производ дељив ма којим својим чинитељем, то је јасно да је сваки квадратни трином, као производ корених чинитеља и коефицијента уз x^2, дељив ма којим кореним чинитељем.

b) На основу исте ове теореме јасно је, да корене квадратне једначине, дате у облику производа:

$$r(mx+n)(sx+t)=0$$

лакше налазимо стављајући да су чинитељи $mx+n=0$ и $sx+t=0$, чиме добијамо једначине првог степена, из којих добијамо:

$$x_1=-\frac{n}{m} \text{ и } x_2=-\frac{t}{s}.$$

Пример. Решити једначину $(2x-5)(3x+8)=0$.

Овде је $2x-5=0$ и $3x+8=0$, те је $x_1=\frac{5}{2}=2{,}5$ и $x_2=-\frac{8}{3}=-2\frac{2}{3}$.

Задаци за вежбу:

Растави на чинитеље квадратне триноме:

1) $x^2-7x+12$;	8) $x^2-ax-6a^2$;
2) $x^2+3x-108$;	9) $abx^2-2ax+a^2-b^2$;
3) $6x^2+5x-6$;	10) $(a^2+b^2)x^2-2b^2x+b^2-a^2$;
4) $30x^2+37x+10$;	11) $x^2-ax-a\sqrt{b}-b$;
5) $x^2-6x+11$;	12) $x^2+\sqrt{b}\,x-a^2+a\sqrt{b}$;
6) $x^2+15x+44$;	13) $abx^2-2a\sqrt{ab}\,x+a^2b^2$;
7) $21x^2+22x-8$;	14) $a^2b^2x^2-2ab^2\sqrt{b}\,x+b^3-a^3$.

§ 134. **Позитивност и негативност тринома Ax^2+Bx+C.** Трином Ax^2+Bx+C је *функција другог степена* ($y=Ax^2+Bx+C$) независно променљиве x, јер за различите вредности x-а, добијамо различите вредности y-а, које могу бити позитивне или негативне. Знак вредности функције **y** једино зависе од дискриминанте тринома B^2-4AC.

Теорема: 1) *Ако је дискриминанта* $B^2-4AC \leqq 0$ (т. ј. ако је њена вредност негативна, или равна нули), *онда вредност функције* **y** *има знак као и коефицијенат A, за све вредност* **x**-*а од* $-\infty$ *до* $+\infty$; 2) *Ако је дискриминанта* $B^2-4AC>0$ (т. ј. ако је њена вредност позитивна), *онда вредност функције* **y** *има знак као коефицијенат A, за све вредности* **x**-*а, које су веће од већег корена или мање од мањег корена једначине* $Ax^2+Bx+C=0$. *Вредност тринома* Ax^2+Bx+C (*функције* **y**) *биће противног знака коефицијента A, ако* **x**-*су дамо вредност, која се налази између корена једначине* $Ax^2+B+C=0$.

Доказ. — Да је ова теорема тачна уверавамо се испитивањем производа A $(x - x_1)(x - x_2)$, који нам претставља трином $A x^2 + B x + C$.

1) Када је дискриминанта $B^2 - 4AC = 0$, онда су корени x_1 и x_2 једнаки. Тада су једнаки и корени чинитељи $x - x_1$ и $x - x_2$, те производ $A (x - x_1)(x - x_2)$ добија облик $A (x - x_1)^2$. Чинитељ $(x - x_1)^2$ овога производа увек је позитиван за све вредности x_{-a} од $-\infty$ до $+\infty$, па с тога и знак производа $A (x - x_1)^2$, односно тринома $Ax^2 + Bx + C$ (функције y), биће истоветан са знаком коефицијента A.

2) Ако је дискриминанта $B^2 - 4AC < 0$, онда су корени x_1 и x_2 имагинарни. Тада је производ $(x - x_1)(x - x_2)$, као производ од два коњугована комплексна броја, увек позитиван, за све вредности x_{-a} од $-\infty$ до $+\infty$. С тога производ $A (x - x_1)(x - x_2)$, односно трином $Ax^2 + Bx + C$ (функција y), има знак истоветан с коефицијентом A.

3) Ако је дискриминанта $B^2 - 4AC > 0$, онда су корени x_1 и x_2 стварни неједнаки. Ако претпоставимо, да је корен x_1 већи од корена x_2, и ако x-су дамо вредност већу од x_1 (наравно и од x_2), онда чинитељи $x - x_1$ и $x - x_2$ јесу позитивни (или су истог знака), те производ $(x - x_1)(x - x_2)$ увек је позитиван. С тога производ $A (x - x_1)(x - x_2)$, односно трином $Ax^2 + Bx + C$ (функција y), има знак коефицијента A. Међутим, ако x-су дамо вредност између корена x_1 и x_2 онда су корени чинитељи $x - x_1$ и $x - x_2$ различитог знака, те је њихов производ негативан. С тога производ $A (x - x_1)(x - x_2)$, односно трином $Ax^2 + Bx + C$ (функција y) има супротан знак коефицијента A.

Примери:

1) Трином: $x^2 + 4x - 32$ има дискриминанту $B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = +144$, т. ј. позитивну, а корени једначине $x^2 + 4x - 32 = 0$ јесу $x_1 = 4$ и $x_2 = -8$. С тога тај трином, код кога је $A = +1$, има позитивну вредност за све вредности x-са од $+\infty$ до $+4$ и од $-\infty$ до -8, а негативну, за све вредности x-а између -8 и $+4$. За $x = -8$ и $x = +4$, трином је $= 0$.

2) Трином: $x^2 - 10x + 25$ има дискриминанту $B^2 - 4AC = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$, те је његова вредност позитивна за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, јер је код овога тринома $A = +1$.

3) Трином: $x^2 - 5x + 8$ има дискриминанту $B^2 - 4AC =$

$=(-5)^2-4\cdot1\cdot8=-15$, т. ј. негативну, те је његова вредност увек позитивна за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, јер је код овога тринома $A=+1$..

4) Трином: $2x^2-6x+9$ има дискриминанту $B^2-4AC=$ $=(-6)^2-4\cdot2\cdot9=-36$, т. ј. негативну, те је његова вредност увек позитивна за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, јер је $A=+2$.

5) Трином: $-2x^2-x+10$ има дискриминанту $B^2-4AC=$ $=(-1)^2-4\cdot(-2)\cdot10=+81$, т. ј. позитивну, а корени једначине $-2x^2-x+10=0$, или $2x^2+x-10=0$ јесу $x_1=2$ и $x_2=-\frac{5}{2}$ те је вредност овога тринома негативна за све вредности x-а од $+\infty$ до $+2$ и од ∞ до $-2^1/_2$, а позитивна, за све вредности x-а између $-2^1/_2$ и $+2$, пошто је $A=-2$. Трином је раван нули за $x=2$ и $x=-2{,}5$.

6) Трином: $12-x-6x^2$ (или $-6x^2-x+12$) има дискриминанту $B^2-4AC=(-1)^2-4(-6)\cdot12=+289$, т. ј. позитивну, а корени једначине $-6x^2-x+12=0$ јесу $x_1=$ $=-1\frac{1}{2}$ а $x_2=1\frac{1}{3}$, те је вредност овога тринома негативна за све вредности x-а од $+\infty$ до $1\frac{1}{3}$ и од $-\infty$ до $-1\frac{1}{2}$, а позитивна, за све вредности x-а између $-1\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{3}$ јер је овде $A=-6$. За $x=-1\frac{1}{2}$ и $x=1\frac{1}{3}$ трином се анулира.

§ 135. **Неједначине другог степена.** Општи облик неједначине другог степена је

$$Ax^2+Bx+C>0 \quad (1).$$

Ако овај облик помножимо са -1 добијамо нов облик:

$$-Ax^2-Bx-C<0 \quad (2).$$

Да бисмо нашли услове за које је неједначина (1) могућна, узимамо у испитивање ова два случаја:

1) *Коефицијенат* $A>0$. Како је у овом случају коефицијенат A позитиван, а захтева се, да и вредност тринома Ax^2+Bx+C буде позитивна, то ће, на основу теореме из претходног параграфа, овај случај наступити само онда, ако је дискриминантна $B^2-4AC\leqq0$, а за $B^2-4AC>0$, ако x-су дамо вредност већу од већега корена, или мању од мањега корена једначине $Ax^2+Bx+C=0$.

2. *Коефицијенат* $A<0$. Како се захтева и у овоме случају да буде вредност тринома позитивна, т. ј. да буде супротног знака од A, то ће ово бити могуће, ако је само дискриминантна $B^2-4AC>0$ и поред тога, ако x-су дамо вредности између корена квадратне једначине $Ax^2+Bx+C=0$.

Ако је дискриминанта $B^2 - 4AC \leqq 0$, вредност тринома (1) биће негативна за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$. Стога неједначина $Ax^2 + Bx + C > 0$ је немогућна за $A < 0$ и $B^2 - 4AC \leqq 0$.

Примери:

1) Неједначина $x^2 - 4x + 3 < 0$, код које је $A = +1$, а дискриминанта $B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = +4$, могућна је само онда, ако *x*-су дамо вредности између корена једначине $x^2 - 4x + 3 = 0$, т. ј. ако x-су дамо вредност између 3 и 1, пошто је $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

2. Неједначина $4x^2 + 5x - 19 < 0$, код које је $A = +4$, а дискриминанта $B^2 - 4AC = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-19) = +329$, могућна је само онда, ако x-су дамо вредности између $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{329}}{8}$ и $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{329}}{8}$ једначине $4x^2 + 5x - 19 = 0$.

3) Неједначина $7x^2 - 4x + 1 < 0$, код које је $A = +7$, а дискриминантна $B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 1 = -12$, је немогућна, јер је трином $7x^2 - 4x + 1$ позитиван (т. ј. > 0) за све могуће вредности *x*-а од $-\infty$ до $+\infty$.

4) Неједначина $x^2 > 25$, или $x^2 - 25 > 0$, код које је $A = +1$, а дискриминанта $B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-25) = +100$, могућна је само за вредности x-а од $+\infty$ до $+5$ (без $+5$) и од $-\infty$ до -5 (без -5), јер су корени једначине $x^2 - 25 = 0$ $x_1 = 5$ и $x_2 = -5$.

5) Неједначина $9x^2 < 2x$, или $9x^2 - 2x < 0$, код које је $A = +9$, а дискриминанта $B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 0 = +4$, могућна је само онда, ако *x*-су дамо вредности између корена x_1 и x_2 једначине $9x^2 - 2x = 0$, т. ј. ако *x*-су дамо вредности између 0 и $\frac{2}{9}$.

6) Неједначина $(3x - 5)(3x^2 - 29x + 40) > 0$, или $(3x - 5)(3x - 5)(x - 8) > 0$, или $(3x - 5)^2 (x - 8) > 0$ биће увек могућна за све вредности *x*-са које су веће од 8, јер позитивност њене леве стране једино зависи од чинитеља $(x - 8)$, а не од чинитеља $(3x - 5)^2$, који је увек позитиван за све могуће вредности x-са.

7) Неједнакост $\frac{15 - 7x - 30x^2}{7x^2 - 5x + 8} > 0$, чији је именитељ $7x^2 - 5x + 8$ увек позитиван за све вредности x-са од $-\infty$

до $+\infty$ (јер је његов коефицијенат $A = +7$, а дискриминанта $B^2 - 4AC = (-5)^2 - 4\cdot 7\cdot 8 = -179$), биће могућна, ако је само њен бројитељ позитиван. Па како је код бројитеља $A = -30$, а његова је дискриминанта $B^2 - 4AC = (-7)^2 - 4\cdot(-30)\cdot 15 = +1849$, то ће бројитељ имати позитивну вредност, ако x-су дамо вредности између корена једначине $-30x^2 - 7x + 15 = 0$, или $30x^2 + 7x - 15 = 0$. Како су корени ове једначине $x_1 = 0{,}6$ и $x_2 = -\frac{5}{6}$, то ће бројитељ бити позитиван за вредности x-са између $0{,}6$ и $-\frac{5}{6}$. За такве вредности x-са дата неједначина је могућна.

Једначине вишег степена које се своде на квадратне.

§ 136. **Биквадратне једначине.** Непотпуна једначина четвртог степена, која има само: члан на четвртом степену, члан на другом степену и независни члан, т. ј. једначина облика:

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0,$$

зове се *биквадратна*. Она је у ствари квадратна једначина по x^2. Ове једначине решавамо, када најпре заменимо x^2 са y, чиме добијемо квадратну једначину:

$$Ay^2 + By + C = 0,$$

а затим је $x^2 = y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, а $x =$

$$= \pm\sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}.$$

Одавде је:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}};$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}; \text{ и } x_4 = -\sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

Пример. Решити једначину $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$.

Заменом $x^2 = y$, имамо: $4y^2 - 17y + 4 = 0$. Одавде је:

$$y_{(1,2)} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4\cdot4\cdot4}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}; \quad y_1 = 4,\ y_2 = \frac{1}{4}.$$ Стога је:

a) $x^2 = 4$ a $x_{(1,2)} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ и b) $x^2 = \frac{1}{4}$ a $x_{(3,4)} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} =$
$= \pm \frac{1}{2}$.

Напомена. Биквадратне једначине имају четири корена и четири корена чинитеља. Њихов полином $Ax^4 + Bx^2 + C = + A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$. У опште, полином једначине n-ог степена, једнак је производу, чији су чинитељи коефицијенат уз непознату на највишем степену и сви корени чинитељи једначине, што се множењем уверавамо.

Примери за вежбу:

1) $x^4 - 5x^2 = -4$;
2) $4x^4 + 576 = 100x^2$;
3) $3x^4 = 27\frac{1}{3}x^2 - 3$;
4) $x^2(x^2 - 50) + 504 = 0$;
5) $3\left(x^2 - 5\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{4}x^4$;
6) $x^2 - \frac{147}{x^2} = -7\frac{1}{3}$;
7) $x^4 - 6x^2 = -1$;
8) $x^4 - 20x^2 = -16$;
9) $16x^2(x^2 - 8) + 31 = 0$;
10) $2x^2(5x^2 - 1) = 18 - \frac{1}{10}x^2$;
11) $x^2(x^2 - 1) = 2(9 - 4x^2)$;
12) $\frac{x^2 - 7}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x^2}{7}$;
13) $\frac{x^2(x - 5)}{x + 9} = \frac{x - 9}{x + 5}$;
14) $x^2 = 12\left(1 - \frac{12}{x^2}\right)$;
15) $x^4 - 40ax^2 + 4a^2 = 0$;
16) $x^4 - 4ax^2 + 4n^2 = 0$;
17) $\frac{4a}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{x^2}$;
18) $74x^{-2} - x^{-4} - 1225 = 0$;
19) $432 - x^{-2}(3x^{-2} - 21) = 0$;
20) $x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0$.

§ 137. **Једначине које се заменом своде на квадратне.** Има велики број једначина, које су квадратне, али не по непознатој x, већ по неком изразу, у коме се налази непозната x. Таква је једначина нпр. $3(2x - 1) + 2\sqrt{2x - 1} = 33$. Те једначине решавамо, као и биквадратне, заменом израза по коме је дата једначина квадратна с новом непознатом y.

Решени примери:

1) Решити једначину $3(2x - 1) + 2\sqrt{2x - 1} = 33$. Заменом $\sqrt{2x - 1} = y$, добијамо $3y^2 + 2y = 33$. Одавде је $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{11}{3}$. С тога је: a) $\sqrt{2x - 1} = 3$, $2x - 1 = 9$, $x_1 = 5$; и b) $\sqrt{2x - 1} = -\frac{11}{3}$, $2x - 1 = \frac{121}{9}$, $x^2 = 7\frac{2}{3}$.

2) *Решити једначину* $(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+11$. Ова се једначина да̂ написати $[(2x^2-3x)+1]^2=11(2x^2-3x)+1$. Заменом $2x^2-3x=y$ добијамо $(y+1)^2=11y+1$, или $y^2-9y=0$. Одавде је $y_1=0$ и $y_2=9$. С тога је:

a) $2x^2-3x=0$, а $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$; и

b) $2x^2-3x=9$, а $x_3=3$, $x_4=-\frac{3}{2}=-1\frac{1}{2}$.

3) *Решити једначину* $\sqrt[3]{x^4}-3\sqrt[3]{x^2}=54$.

Заменом $\sqrt[3]{x^2}=y$ добијамо: $y^2-3y=54$. Одавде је $y_1=9$ и $y_2=-6$. Стога је: a) $\sqrt[3]{x^2}=9$, $x^2=729$, $x_{(1,2)}=\pm\sqrt{729}=\pm 27$; и b) $\sqrt[3]{x^2}=-6$, $x^2=-216$ $x_{(3,4)}=\pm\sqrt{-216}=\pm 6i\sqrt{6}$.

Примери за вежбу:

1) $(2x-5)^2-5(2x-5)+4=0$;
2) $(6x+3)^2-16(6x+3)+15=0$;
3) $(ax-b)^2+b(ax-b)-a(a-b)=0$;
4) $(x^2+ax)^2+b(x^2+ax)=c$;
5) $(x^2-3)^2-7(x^2-3)+6=0$;
6) $\sqrt{x}-8\sqrt[4]{x}=9$;
7) $2x^2-2x-3+3\sqrt{x^2-x+1}=0$;
8) $2\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{4x^2}-2=0$;
9) $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$;
10) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$;
11) $(x-\sqrt{3})^4-8(x-\sqrt{3})^2+4=0$;
12) $\sqrt{x^2+8}-(x^2+8)+12=0$;
13) $x^{\frac{1}{2}}-3x+30=0$; 14) $5x^{\frac{1}{2}}+3x-22=0$.

§ 138. **Реципрочне (симетричне) једначине.** То су једначине облика:

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots\pm Cx^2\pm Bx\pm A=0,$$

код којих су коефицијенти чланова подједнако удаљених од крајњих чланова једнаки по апсолутним вредностима, па било једнако или различито означени. Зову се тако, што и реципрочна вредност ма кога корена задовољава једначину. Заиста, ако је x_1 један корен реципрочне једначине, онда је:

$$Ax_1^n + Bx_1^{n-1} + Cx_1^{n-2} + \cdots \pm Cx_1^2 \pm Bx_1 \pm A = 0.$$

Дељењем ове једначине са x_1^n добијамо:

$$A + B\left(\frac{1}{x_1}\right) + C\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + \cdots \pm C\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2} \pm B\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} \pm$$
$$\pm A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n = 0,$$

или

$$\pm A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n \pm B\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} \pm C\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2} \pm \cdots + C\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 +$$
$$+ B\left(\frac{1}{x_1}\right) + A = 0, \text{ или}$$

$$\pm \left[A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n + B\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} + C\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2} + \cdots \pm C\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 \pm\right.$$
$$\left.\pm B\left(\frac{1}{x_1}\right) \pm A\right] = 0, \text{ или}$$

$$A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n + B\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} + C\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2} + \cdots \pm C\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 \pm$$
$$\pm B\left(\frac{1}{x_1}\right) \pm A = 0,$$

што показује да и $\frac{1}{x_1}$ је корен дате једначине.

а) **Реципрочне једначине трећег степена.** Њихов је облик:

$$Ax^3 + Bx^2 \pm Bx \pm A = 0.$$

Ове једначине решавамо најпре растављањем леве стране на чинитеље, а затим стављањем да су поједини чинитељи једнаки нули, добијамо једну једначину првог и једну другог степена, које најзад решавамо по ранијим упутствима. При растављању полинома једначине на чинитеље, узимамо у поступак најпре први и четврти, а затим други и трећи члан. Тако, $Ax^3 + Bx^2 \pm Bx \pm A = A(x^3 \pm 1) + Bx(x \pm 1) = A(x \pm 1)(x^2 \mp x + 1) + Bx(x \pm 1) = (x \pm 1)[A(x^2 \mp x + 1) + Bx)$.

1. *Пример.* Решити једначину $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$.

Решење: $5(x^3 + 1) - 21x(x + 1) = 0$; $5(x + 1)(x^2 - x + 1) - 21x(x + 1) = 0$; $(x + 1)(5x^2 - 5x + 5 - 21x) = 0$. Одавде је: 1) $x + 1 = 0$ и 2) $5x^2 - 26x + 5 = 0$. Из (1) је $x_1 = -1$, а из (2) је $x_2 = 5$ и $x_3 = \frac{1}{5}$.

2. *Пример. Решити једначину* $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решење: $2(x^3-1)+3x(x-1)=0$; $2(x-1)(x^2+x+1)+3x(x-1)=0$; $(x-1)(2x^2+2x+2+3x)=0$. Одавде је:

$$1)\ x-1=0 \text{ и } 2)\ 2x^2+5x+2=0.$$

$$\text{Из (1) је } x_1=1, \text{ а из (2) } x^2=-\frac{1}{2} \text{ и } x_3=-2.$$

Напомена. По истом поступку решавају се и једначине: $x^3+ax^2\pm abx\pm b^3=0$ и $x^3-ax^2+abx-b^3=0$.

3. *Пример. Решити једначину* $x^3+3x^2+15x+125=0$.

Решење: $(x^3+5^3)+3x(x+5)=0$; $(x+5)(x^2-5x+25)+3x(x+5)=0$; $(x+5)(x^2-5x+25+3x)=0$. Одавде је:

$$1)\ x+5=0 \text{ и } 2)\ x^2-2x+25=0.$$

$$\text{Из (1) је } x_1=-5, \text{ а из (2) } x_{(2,3)}=1\pm 2i\sqrt{6}.$$

Примери за вежбу:

1) $x^3+x^2+x+1=0$; 2) $x^3-x^2-x+1=0$;
3) $2x^3-7x^2+7x-2=0$; 4) $2x^3-3x^2-3x+2=0$;
5) $3x^3-13x^2+13x-3=0$; 6) $8x^3+73x^2+73x+8=0$;
7) $x^3+2x^2-4x-8=0$; 8) $27x^3+12x^2-8x-8=0$;
9) $7x-3x^3=7x^2-3$; 10) $2x^{-3}-7x^{-2}+7x^{-1}=2$.

b) Реципрочне једначине четвртог степена.

Њихов је облик: 1) $Ax^4+Bx^3\pm Cx^2+Bx+A=0$, или 2) $Ax^4\pm Bx^3+Cx^2\pm Bx+A=0$, или 3) $Ax^4+Bx^3-Bx-A=0$.

Реципрочне једначине четвртог степена облика (3), од којих су коефицијенти једнаки али различито означени, а немају средњег члана, решавају се као и реципрочне једначине трећег степена растављањем на чинитеље.

1. *Пример. Решити једначину* $2x^4+5x^3-5x-2=0$.

Решење: $2(x^4-1)+5x(x^2-1)=0$;

$$2(x^2+1)(x^2-1)+5x(x^2-1)=0;\ (x^2-1)(2x^2+2+5x)=0;$$

$$(x+1)(x-1)(2x^2+5x+2)=0. \text{ Одавде је:}$$

$$1)\ x+1=0,\ 2)\ x-1=0,\ 3)\ 2x^2+5x+2=0.$$

Из (1) је $x_1=-1$, из (2) је $x_2=1$, из (3) је $x_3=-\frac{1}{2}$ и

$$x_4=-2.$$

Реципрочне једначине облика (1) и (2) решавамо по овоме поступку: Најпре једначину делимо са x^2, чиме добијамо:

$$Ax^2+Bx+C+\frac{B}{x}+\frac{A}{x^2}=0, \text{ или}$$

$$A\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+B\left(x+\frac{1}{x}\right)+C=0.$$

Затим у овој једначини вршимо замену $x + \frac{1}{x} = y$, а $x^2 = \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, чиме добијамо квадратну једначину:

$$A(y^2 - 2) + By + C = 0, \text{ или } Ay^2 + By + (C - 2A) = 0.$$

Решењем ове једначине налазимо корене y_1 и y_2, а из једначина:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \text{ и } x + \frac{1}{x} = y_2$$

налазимо, најзад, сва четири корена дате једначине.

2. *Пример. Решити једначину:* $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0$.

Решење: Дељењем са x^2 добијамо: $3x^2 - 10x + 6 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$; $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$. Заменом $x + \frac{1}{x} = y$ имамо: $3(y^2 - 2) - 10y + 6 = 0$ или $3y^2 - 10y = 0$. Одавде је $y_1 = 0$ и $y_2 = \frac{10}{3}$. Тада је: a) $x + \frac{1}{x} = 0$ и b) $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$, или a) $x^2 + 1 = 0$ и b) $3x^2 - 10x + 3 = 0$. Из (a) $x_{(1,2)} = \pm i$, а из (b) је $x_3 = 3$ и $x_4 = \frac{1}{3}$.

Напомена. Истим поступком решава се једначина облика: $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, ако њени коефицијенти задовољавају пропорцију $A : E = B^2 : D^2$.

3. *Пример. Решити једначину:* $4x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 3x + 9 = 0$.

Решење. Дељењем са x^2 добијамо: $4x^2 + 2x + 10 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$, или $\left(4x^2 + \frac{9}{x^2}\right) + \left(2x + \frac{3}{x}\right) + 10 = 0$. Заменом

$2 : 3 = 4^2 : 9$

$2x + \frac{3}{x} = y$, а $4x^2 + \frac{9}{x^2} = y^2 - 12$, добијамо квадр. једначину: $y^2 - 12 + y + 10 = 0$, или $y^2 + y - 2 = 0$. Одавде је $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$. Најзад из једначина:

a) $2x + \frac{3}{x} = 1$ и b) $2x + \frac{3}{x} = -2$, или

a) $2x^2 - x + 3 = 0$ и b) $2x^2 - 2x + 3 = 0$ налазимо:

$$x_{(1,2)} = \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{4} \text{ и } x_{(3,4)} = \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}.$$

Примери за вежбу:

~~1)~~ $\cancel{6x^4} + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;

~~2)~~ $\cancel{6x^4} - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$;

3) $24x^4 - 110x^3 + 173x^2 - 110x + 24 = 0$;
4) $24x^4 + 110x^3 + 173x^2 + 110x + 24 = 0$;
5) $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$;
6) $x^4 + x^3 - 40x^2 + x + 1 = 0$;
7) $3x^4 + 7x^3 + 7x + 3 = 0$;
8) $2x^4 + 9x^3 + 9x + 2 = 0$;
9) $5x^4 - 6x^3 + 6x - 5 = 0$;
10) $x^4 - x^3 + 4x - 16 = 0$.

c) Реципрочне једначине петог степена.

Њихов је облик: $Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 \pm Cx^2 \pm Bx \pm A = 0$. И ове једначине решавамо, као и реципрочне једначине трећег степена, растављањем на чинитеље, чиме добијамо једну једначину првог и једну реципрочну једначину четвртог степена, које најзад решавамо по упуствима за решавање тих једначина.

Пример. Решити једначину:

$$6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Решење. $6(x^5 + 1) + 11x(x^3 + 1) - 33x^2(x + 1) = 0$;
$6(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + 11x(x+1)(x^2 - x + 1) - 33x^2(x+1) = 0$;
$(x + 1)[6(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + 11x(x^2 - x + 1) - 33x^2] = 0$;
$(x + 1)(6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6) = 0$. Одавде је:

a) $x + 1 = 0$ и b) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.

Решењем прве имамо $x_1 = -1$, а решењем друге имамо:

$$x_2 = 2,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{3} \text{ и } x_5 = -3.$$

Примери за вежбу:

1) $12x^5 - 18x^4 - 18x^3 + 18x$ [illegible] $= 0$; није решен
2) $12x^5 + 16x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 16x + 12 = 0$;
3) $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$;
4) $4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$;
5) $15x^5 + 34x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 34x - 15 = 0$;
6) $12x^5 - 56x^4 + 107x^3 - 107x^2 + 56x - 12 = 0$;
7) $x^5 + x^4 - x - 1 = 0$.

d) Реципрочне једначине шестог степена.

Њихов је облик $Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 \pm Dx^3 \pm Cx^2 \pm Bx + A = 0$. Поступак њиховог решавања сличан је решавању реципрочних једначина четвртог степена. Овде једначину делимо са x^3, израз $x + \frac{1}{x}$, односно $x - \frac{1}{x}$, замењујемо са y, а $x^3 + \frac{1}{x^3} =$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$, са $y(y^2 - 3)$, односно $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 - \frac{1}{x^2}\right)$ са $y(y^2 + 3)$, чиме добијамо једначину трећег степена.

1) *Пример. Решити једначину:*

$$x^6 - 10x^5 + 27x^4 - 20x^3 + 27x^2 - 10x + 1 = 0.$$

Решење: $x^3 - 10x^2 + 27x - 20 + \frac{27}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0;$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 10\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 27\left(x + \frac{1}{x}\right) - 20 = 0.$$

За $x + \frac{1}{x} = y$ биће $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, а $x^3 + \frac{1}{x^3} = y(y^2 - 3)$.

Стога је: $y(y^2 - 3) - 10(y^2 - 2) + 27y - 20 = 0$ или

$$y^3 - 10y^2 + 24y = 0.$$

Одавде је $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 4$.

Најзад из једначина: a) $x + \frac{1}{x} = 0$, b) $x + \frac{1}{x} = 6$ и c) $x + \frac{1}{x} = 4$ имамо: $x_{(1,2)} = \pm i$, $x_{(3,4)} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ и $x_{(5,6)} = 2 \pm \sqrt{3}$.

2) *Пример.* — Решити једначину:

$$2x^6 - x^5 - 8x^4 + 8x^2 + x - 2 = 0.$$

Решење: Овде су коефицијенти једнаки а различито означени, те се решава растављањем на чинитеље;

$2(x^6 - 1) - x(x^4 - 1) - 8x^2(x^2 - 1) = 0;$

$2(x^3 + 1)(x^3 - 1) - x(x^2 + 1)(x^2 - 1) - 8x^2(x^2 - 1) = 0;$

$2(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) - x(x^2+1)(x^2-1) - 8x^2(x^2-1) = 0;$

$(x^2 - 1)[2(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) - x(x^2 + 1) - 8x^2] = 0;$

$(x^2 - 1)(2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2) = 0.$

Одавде је:

a) $x^2 - 1 = 0$ и b) $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$. Стога је из (a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, а из (b) $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = -1$ и $x_6 = -1$.

§ 139. **Биномне једначине.** Општи је њихов облик:

$$x^n \pm a = 0 \quad (1).$$

Овај се облик да̂ свести на облик $y^n \pm 1 = 0$ (2), ако ставимо да је $x = y\sqrt[n]{a}$, јер је $x^n = ay^n$, те једначина (1) постаје $ay^n \pm a = 0$, или дељењем са a постаје $y^n \pm 1 = 0$. Једначину

$y^n \pm 1 = 0$ лако решавамо растављањем њеног полинома на просте чинитеље, а на основу правила о растављању збирова и разлика степена са парним и непарним изложитељима (§ 33, с.). Стављајући да су поједини чинитељи равни нули, добијамо једначине првог и другог степена, које даље решавамо по ранијим упуствима.

Решени примери:

1) *$x^3 + 27 = 0$. Решење*: $x = y\sqrt[3]{27} = 3y$. Заменом добијамо: $27y^3 + 27 = 0$, или $y^3 + 1 = 0$, или $(y+1)(y^2-y+1) = 0$. Одавде је: a) $y + 1 = 0$ и b) $y^2 - y + 1 = 0$. Из (a) је $y_1 = -1$, а из (b) је $y_{(2,3)} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Стога је

$x_1 = -3$, $x_{(2,3)} = \frac{3(1 \pm i\sqrt{3})}{2}$.

2) *$x^4 - 16 = 0$. Решење*: $x = y\sqrt[4]{16} = 2y$. Заменом добијамо: $16y^4 - 16 = 0$, или $y^4 - 1 = 0$, или $(y^2 + 1)(y^2 - 1) = 0$, или $(y + i)(y - i)(y + 1)(y - 1) = 0$. Одавде је: $y + i = 0$, $y - i = 0$, $y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$, а $y_1 = -i$, $y_2 = i$, $y_3 = -1$ и $y_4 = 1$. Стога је: $x_1 = -2i$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -2$ и $x_4 = 2$.

3) *$x^5 - 32 = 0$. Решење*: $x = y\sqrt[5]{32} = 2y$. Заменом добијамо: $32y^5 - 32 = 0$ или $y^5 - 1 = 0$, или $(y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0$. Одавде је: a) $y - 1 = 0$ и b) $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$. Из (a) је $y_1 = 1$, а из реципрочне једначине (b) имамо: $y_{(2,3)} = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ и $y_{(4,5)} = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4}$.

Стога је $x_1 = 2$, $x_{(2,3)} = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}$ и

$x_{(4,5)} = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{2}$.

4) *$x^6 + 64 = 0$. Решење*: $x = y\sqrt[6]{64} = 2y$. Заменом добијамо: $64y^6 + 64 = 0$, или $y^6 + 1 = 0$, или $(y^2)^3 + 1 = 0$, или $(y^2 + 1)(y^4 - y^2 + 1) = 0$. Одавде је: a) $y^2 + 1 = 0$ и b) $y^4 - y^2 + 1 = 0$. Из (a) је $y_{(1,2)} = \pm i$, а из биквадратне једначине (b) је: $y_{(3,4)} = \sqrt{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$ и $y_{(5,6)} = -\sqrt{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{3}}$. Стога је:

$x_{(1,2)} = \pm 2i$, $x_{(3,4)} = 2\sqrt{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$ и $x_{(5,6)} = -2\sqrt{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$.

Сви су дакле, корени имагинарни.

7) $64x^6 - 729 = 0$. Решење: Ако ову једначину најпре напишемо у облику $x^6 - \frac{729}{64} = 0$ и заменимо $x = y\sqrt[6]{\frac{729}{64}} = \frac{3}{2}\,y$ добијамо $\frac{729}{64}y^6 - \frac{729}{64} = 0$, или $y^6 - 1 = 0$, или $(y^3+1)(y^3-1) = 0$, или $(y+1)(y^2-y+1)(y-1)(y^2+y+1) = 0$. Одавде је: a) $y+1=0$, b) $y^2-y+1=0$, c) $y-1=0$ и d) $y^2+y+1=0$. Из (a) је: $y_1 = -1$, из (b) $y_{(2,3)} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, из (c) $y_4 = 1$, а из (d) $y_{(5,6)} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Стога је: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_{(2,3)} = \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{4}$, $x_4 = \frac{3}{2}$ и $x_{(5,6)} = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{4}$.

8) $x^{10} - 1 = 0$. Решење: $(x^5+1)(x^5-1) = 0$; $(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$. Одавде је: a) $x+1=0$, b) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, c) $x - 1 = 0$ и d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Из (a) је $x_1 = -1$, из (b) $x_{(2,3)} = \frac{1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4}$ и $x_{(4,5)} = \frac{1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}{4}$, из (c) $x_6 = 1$, а из (d) $x_{(7,8)} = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}{4}$ и $x_{(9,10)} = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4}$.

Има, дакле, два стварна корена $x_1 = -1$ и $x_6 = 1$, а остали су имагинарни.

Задаци за вежбу:

1) $x^3 - 1 = 0$;	8) $x^4 + 625 = 0$;	15) $125x^3 + 8 = 0$;
2) $x^3 + 1 = 0$;	9) $x^6 - 729 = 0$;	16) $81x^4 + 4 = 0$;
3) $x^4 - 1 = 0$;	10) $x^3 \pm a^3 = 0$;	17) $125x^3 - 27 = 0$;
4) $x^4 + 1 = 0$;	11) $x^{10} + 1 = 0$;	18) $16x^4 - 25 = 0$;
5) $x^5 - 1 = 0$;	12) $x^8 \pm 1 = 0$;	19) $x^5 + 3 = 0$;
6) $x^6 + 1 = 0$;	13) $x^{12} \pm 1 = 0$;	20) $3x^6 - 2 = 0$;
7) $x^4 + 16 = 0$;	14) $x^3 - 27 = 0$;	21) $x^5 - 243 = 0$.

§ 140. **Триномне једначине.** То су једначине облика $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$ (1). Решење ових једначина своди се на решење квадратне једначине $Ay^2 + By + C = 0$ помоћу замене $x^n = y$ и $x^{2n} = y^2$, а из биномних једначина:

$$x^n = y_1 \text{ и } x^n = y_2$$

налазимо сва решења дате једначине.

Напомена. За $n = 2$, једначина (1) постоје биквадратна, а за $n = 1$ квадратна.

Решени примери:

1) $3x^6 - 7x^3 - 6 = 0$. *Решење.* Заменом $x^3 = y$ имамо: $3y^2 - 7y - 6 = 0$. Одавде је: $y_1 = 3$ и $y_2 = -\frac{2}{3}$. Решењем биномних једачина a) $x^3 = 3$ и b) $x^3 = -\frac{2}{3}$ налазимо:

$$x_1 = \sqrt[3]{3},\ x_{(2,3)} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{3}}{2},\quad x_4 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}},\quad x_{(5,6)} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

2) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$. *Решење.* Заменом $x^4 = y$ имамо: $y^2 - 17y + 16 = 0$. Одавде је: $y_1 = 16$ и $y_2 = 1$. Најзад решењем биномних једначина $x^4 = 16$ и $x^4 = 1$ добијамо:

$$x_{(1,2)} = \pm 2,\quad x_{(3,4)} = \pm 2i,\quad x_{(5,6)} = \pm 1,\quad x_{(7,8)} = \pm i.$$

Примери за вежбу:

1) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$;

2) $2x^6 + 5x^3 - 1323 = 0$;

3) $x^6 - 52x^3 - 768 = 0$;

4) $29x^3 + 24 + 8(x^3 - 5)(x^3 + 6) = 0$;

5) $1 + \frac{1014}{x^4 - 3} = \frac{1106}{x^4 - 2}$;

6) $2x^6 + 61a^3x^3 = 6(x^6 - 8a^6)$;

7) $(x - 2)^6 - 19(x - 2)^3 = 216$;

8) $x^{-6} + 4x^{-3} + 3 = 0$;

9) $\frac{a^3}{9x^{-3} + 7a^3} = \frac{3x^{-3}}{a^3 - 5x^{-3}}$;

10) $x^3 + 4\sqrt{x^3} = 32$.

§ 141. **Једначине које се решавају растављањем на чинитеље.** Има једначина чија је десна страна нула, а лева јој је страна полином, који се дâ раставити на чинитеље. Те једначине решавамо, стављајући да су поједини чинитељи полинома једнаки нули, чиме добијамо једначине нижег степена, које најзад решавамо по упуствима тих једначина.

Решени Примери:

1) $x^3 + 3x^2 - (x + 3)(2x + 15) = 0$. *Решење.* $x^2(x + 3) - (x + 3)(2x + 15) = 0$; $(x + 3)(x^2 - 2x - 15) = 0$. Одавде је a) $x + 3 = 0$ и b) $x^2 - 2x - 15 = 0$. Из (a) је $x_1 = -3$, а из (b) је $x_2 = 5$ и $x_3 = -3$.

2) $x^3 - a^3 = a^2(a - x)$. *Решење.* $(x - a)(x^2 + ax + a^2) - a^2(a - x) = 0$; $(x - a)(x^2 + ax + 2a^2) = 0$. Одавде је a) $x - a = 0$ и b) $x^2 + ax + 2a^2 = 0$. Из (a) је $x_1 = a$, а из (b) $x_{(2,3)} =$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{-7a^2}}{2} = \frac{-a \pm ai\sqrt{7}}{2}.$$

Примери за вежбање:

1) $x^3 - 8x^2 + (x - 8)^2 + 6x(x - 8) = 0$;

2) $(3 - x)^3 - (x - 3) = 0$;

3) $x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{16}$;

4) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x = 72$;

5) $x^5[3x - 2(x^2 - 1)] - x^2[3(x^2 + 1) - 2x] = 2x - 3$.

§ 142. **Изложитељне и логаритамске једначине које се своде на квадратне.** Како изложитељне, тако и логаритамске једначине, решавамо по упуствима за решавање тих једначина (§123 и 124). Међутим, има изложитељних једначина, које неможемо одмах решити употребом логаритама, већ их морамо згодном заменом претходно претворити у алгебарске, па из добивених решења алгебарских једначина налазимо и вредности непознате дате једначине применом логаритама, или без њихове примене, доводећи нову једначину на једнаке степене с једнаким основама.

Решени примери:

1) $3^{x+2}+9^{x+1}=810$. *Решење.* $3^{x+2}+3^{2x+2}=810$; $3^x\cdot3^2+$ $+3^{2x}\cdot3^2=810$; $9\cdot3^x+3^{2x}=810$; $3^{2x}+3^x=90$. Заменом $3^x=y$, имамо $y^2+y=90$. Одавде је $y_1=9$ и $y_2=-10$. Тада је $3^x=3^2$, а $x=2$. Друго решење $y_2=-10$ не узимамо у обзир, јер једначину $3^x=-10$ не можемо решити нити употребом логаритама, пошто је логаритам десне стране имагинаран број, нити је можемо довести на једнаке степене с једнаким основама.

2) $3x^{\log x}+100x^{-\log x}=40$. *Решење.* $3x^{\log x}+\dfrac{100}{x^{\log x}}=40$;

$3x^{2\log x}-40x^{\log x}+100=0$. Заменом $x^{\log x}=y$ имамо:

$3y^2-40y+100=0$. Одавде је: $y_1=10$ и $y_2=\dfrac{10}{3}$.

Тада је: a) $x^{\log x}=10$ и b) $x^{\log x}=\dfrac{10}{3}$.

Решавајући једначину (a) употребом логаритама имамо: $\log x\cdot\log x=1$, или $\log^2 x=1$, или $\log x=\pm\sqrt{1}=\pm1$.

Стога је $x_1=10$, а $x_2=0,1$. Решавајући једначину (b) имамо: $\log x\cdot\log x=1-\log 3=1-0,477121=0,522879$, или $\log^2 x=0,522879$. Одавде је $\log x=\pm\sqrt{0,522879}$, а

$x_{(3,4)}=N\overline{\pm\sqrt{0,522879}}=N\overline{\pm0,723103}$; $x_3=5,285707\ldots$;

$x_4=N\overline{1-0,722303-1}=N\overline{\bar{1},276897}=0,1891895\ldots$

3) $\log(x-2)^3+3\log(x-5)=3$. *Решење.* Лева је страна $\log[(x-2)^3\cdot(x-5)^3]$, а десна $\log 1000$. Стога је: $\log[(x-2)^3$ $(x-5)^3]=\log 1000$, или $(x-2)^3$ $(x-5)^3=1000$, $(x-2)$ $(x-5)=10$, или $x^2-7x=0$. Одавде је $x_1=0$ и $x_2=7$.

Примери за вежбу:

1) $3^{x-1} = \sqrt[x]{9}$; 2) $8^{2(x+1)} = 32^{\frac{2}{x}-1}$;

3) $7^{x}\sqrt[x]{11^{3}} = 41503$; 4) $27^{x+1} = 5\sqrt[x]{0,6}.\ 75^{6x-1}$;

5) $7^{2x} - 5\cdot 7^{x+1} + 300 = 0$; 6) $3^{x+2} + 3^{2-x} = 82$;

7) $25^{x-1} - 5^{x+1} + 24 = 0$; 8) $2\log x + \frac{1}{\log x} = 3$;

9) $x^{2+3\log x} = 10$; 10) $(0,55x^{2})^{\log x} = 12898,5$;

11) $x^{\log x-2} = 1000$; 12) $\sqrt[x]{x^{\log x-1}} = 100$;

13) $5^{2x-2} = 2.5^{x-2} + 3$; 14) $\left(\frac{1}{9}\cdot 9^{x}\right)^{x} = 3^{2x+6}$;

15) $2^{x^{2}-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$; 16) $2^{x^{2}} = 0,25\cdot 2^{2(4x+11)}$;

17) $10^{12-x} = \sqrt[11-x]{100}$; 18) $\sqrt{9^{x(x-1)-\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3}$;

19) $\sqrt[1+x]{5^{2-x}}\cdot\sqrt[1-x^{2}]{25} - \sqrt[1-x]{5^{2+x}} = 0$; 20) $2\frac{1}{4}\cdot 4^{2x} - \frac{1}{2}\cdot 4^{4x} = 1$;

21) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} - 27 = 0$; 22) $x^{\log x} = 100x$;

23) $0,1\log^{4}x - \log^{2}x + 0,9 = 0$; 24) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^{x}$;

25) $\frac{1}{\log^{2}x} + \frac{\log^{2}x}{100} = 0,29$;

26) $\log 10 - \frac{1}{5-\log x} = \frac{2}{1+\log x} - \log 1$;

27) $\log\left(\frac{1}{2}+x\right) = \log\frac{1}{2} - \log x$;

28) $\log(x+\sqrt{3}) = -\log(x-\sqrt{7})$;

29) $2\log x = -\log(6-x^{2})$; 30) $\frac{\log x}{\log(x+1)} = -1$;

31) $\frac{1}{2}\log(x-9) + \log\sqrt{2x-1} = 1$;

32) $\log\sqrt{x-30} + \frac{1}{2}\log(x+30) = 1 + 2\log 2$;

33) $7\cdot 2^{3x} - 2^{6x} = 10$; решен 34) $4^{2x} + 56\cdot 4^{-2x} = 15$;

35) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$; 36) $12^{1+x} + 12^{1-x} = 25$;

37) $4(5^{x+2} - 25^{x+1}) = 9$; решен

38) $\log(x+2) + \log(x-1) = 2,477121$;

39) $x^{9\frac{1}{4}\log x - \log^{3}x} = 177,82796$;

40) $20 - 3x^{\log x} = 30\cdot x^{-\log x}$.

Системе једначина другог и вишег степена.

§ 143. **Системе од двеју једначина другог степена.** Општи облик једне системе од двеју једначина другог степена је:

1) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$

2) $Mx^2 + Nxy + Py^2 + Qx + Ry + S = 0.$

Ако методом једнаких коефицијената елиминишемо било чланове са x^2, било са y^2, онда у првом случају добијамо једначину:

I) $(BM-AN)\,xy + (MC - AP)\,y^2 + (MD - AQ)\,x + (EM - - AR)\,y + (MF - AS) = 0;$

или $axy + by^2 + cx + dy + e = 0$, а у другом:

II) $(AP-CM)x^2+(BP-CN)xy + (DP - CQ)x + (FP - CR)y + + (FP - CS) = 0,$

или II) $mx^2 + nxy + px + qy + s = 0.$

Ако једначину (I) решимо по x добијамо:

a) $x = -\dfrac{by^2 + dy + e}{ay + c}$, а из (II) имамо $y = -\dfrac{mx^2 + px + c}{nx + q}$ (b).

Заменом у једној од датих једначина било x, било y, њиховим вредностима под a) или под b), добијамо најзад једначине четвртог степена и то у првом случају једначину:

1) $A'y^4 + B'y^3 + C'y^2 + D'y + F' = 0$, а у другом

2) $A''x^4 + B''x^3 + C''x^2 + D''x + F'' = 0.$

Сав овај труд био би нам узалудан, јер наилазимо на једначине (1) и (2), које нашим досадањим математичким знањем, не можемо у већини случајева решити. С тога систем од двеју једначина другог степена не можемо решити, ако су једначине потпуне. У случајевима, када су једначине система непотпуне, могу се такви системи решити. При решавању непотпуних система, обично избегавамо познате методе елиминирања, које смо употребљавали при решавању једначина првог степена, већ погодним путем старамо се, да од датих једначина система створимо једну једначину првог степена, па узимајући у поступак ту једначину и једну од датих једначина система, методом замене, налазимо вредности непознатих количина. Тим начинима старамо се често пута да добијемо збир и производ непознатих количина, или њихов збир и разлику, или збир (разлика) њихових квадрата и њихов збир, или њихову разлику, или њихов производ. У опште, идемо на то да створимо један од типова система решених у параграфу 131.

Напомена. При решавању многих система са непотпуним једначинама, врло често замењујемо у једначинама $x = ty$, где је t нова непозната, па једначине система делимо. Тиме добијамо квадратну једначину по t, а из које налазимо t_1 и t_2. Најзад узимамо у поступак једначину првог степена $x = t_1y$, односно $x = t_2y$, и једну од једначина датог система.

Решени примери.

1) $\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 = a}, \\ \mathbf{xy = b}. \end{cases}$ *Решење.* Другу најпре множимо са 2, а затим сабирамо и одузимамо од прве.

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & x^2+y^2=a \\ 2) & 2xy=2b \end{array}\right\} \pm \begin{array}{l} a)\ (x+y)^2=a+2b. \\ b)\ (x-y)^2=a-2b. \end{array} \quad \text{Одавде је} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=\pm\sqrt{a+2b} \\ x-y=\pm\sqrt{a-2b} \end{array}\right\}$$

Сабирањем и одузимањем ових једначина добијамо:

$$x_{(1,2)} = \frac{\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}}{2} \quad \text{и} \quad y_{(1,2)} = \frac{\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}}{2}.$$

2) $\begin{cases} \mathbf{x^2 - y^2 = a}, \\ \mathbf{xy = b}. \end{cases}$ *Решење.* Заменом $x = ty$ добијамо: 1) $t^2y^2 - y^2 = a$ и 2) $ty^2 = b$. Дељењем ових једначина добијамо:

$$\frac{t^2-1}{t} = \frac{a}{b}, \quad \text{или} \quad bt^2 - at - b = 0.$$

Одавде је $t_{(1,2)} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2b}$. Најзад, из $ty^2 = b$ налазимо вредност непознате y, а из $x = ty$ налазимо вредност непознате x.

3) $\begin{cases} \mathbf{3x^2 + 7xy + 4y^2 = 0}, \\ \mathbf{5x^2 - 3xy + 4y^2 = 39}. \end{cases}$ *Решење.* Прва је једначина система *хомогена*, т. ј. она је једначина код које су сви чланови полинома истог степена. Ову једначину најпре делимо са y^2 чиме добијамо $3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 7\left(\dfrac{x}{y}\right) + 4 = 0$, која је квадратна по $\dfrac{x}{y}$. Из ове једначине налазимо да је $\left(\dfrac{x}{y}\right)_1 = -1$ и $\left(\dfrac{x}{y}\right)_2 = -\dfrac{4}{3}$, или $x = -y$ и $3x = -4y$.

Заменом у другој једначини система добијамо:

a) $7y^2 = 35$, а $y_{(1,2)} = \pm\sqrt{5}$ и b) $y_{(1,2)} = \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{35}{38}}$, па је $x_{(1,2)} = \pm\sqrt{5}$ и $x_{(1,2)} = \pm 2\sqrt{\dfrac{35}{38}}$.

4) $\begin{cases} \mathbf{x^2 + xy + y^2 = 3}, \\ \mathbf{2x^2 + 3xy + 4y^2 = 12}. \end{cases}$ *Решење.* Ако прву помножимо најпре са 4 и из добивене једначине одузмемо другу, добијамо хомогену једначину

$$2x^2 + xy = 0,$$

па је даљи рад као у претходном примеру. Овде бисмо могли да радимо и растављањем полинома хомогене једначине на просте чинитеље, чиме добијамо $x = 0$ и $x = -\frac{y}{2}$. Даљи је рад заменом.

5) $\mathbf{2x^2 + 3xy + y^2 = 70,}$
$\mathbf{6x^2 + xy - y^2 = 50.}$

Решење. Заменом $y = tx$ добијамо: $x^2(2 + 3t + t^2) = 70$, $x^2(6 + t - t^2) = 50$.

Дељењем ових једначина добијамо $3t^2 + 2t = 8$. Одавде је $t_1 = \frac{4}{3}$ и $t_2 = -2$. Стога је $y = \frac{4}{3}x$ и $y = -2x$. Даљи је рад заменом. Овај систем може да̂ се реши, ако од датих једначина створимо хомогену множењем прве са 5 а друге са 7 и њиховим одузимањем, па је даљи рад као код претходног примера.

6) $\mathbf{x^2 + xy = ay,}$
$\mathbf{y^2 + xy = bx.}$

Решење. Претварамо најпре систем на облик:

$$\frac{x}{y}(x + y) = a, \qquad \frac{y}{x}(y + x) = b.$$

Множењем и дељењем ових једначина добијамо:

I) $x + y = \pm\sqrt{ab}$ и II) $\frac{x}{y} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$. Даљи је рад заменом.

7) $\mathbf{x^2 - 3y^2 - 2xy - 2x + 14y - 8 = 0,}$
$\mathbf{2x^2 + 3y^2 + 5xy - 3x + 7y - 1 = 0.}$

Решење. Ако прву једначину сматрамо као квадратну само по непознатој x, онда је $x^2 - x(2y + 2) - (3y^2 - 14y + 8) = 0$, а $x_{(1,2)} = y = 1 \pm \sqrt{4y^2 - 12y + 9}$, или $x_{(1,2)} = y + 1 \pm (2y - 3)$. Даљи рад своди се на решавање система:

$$x = 3y - 2,$$
$$2x^2 + 3y^2 + 5xy - 3x + 7y - 1 = 0;$$

и

$$x = -y + 4,$$
$$2x^2 + 3y^2 + 5xy - 3x + 7y - 1 = 0,$$

методом замене. Овај се начин решавања примењује при решевању система од двеју потпуних квадратних једначина само онда, ако се једна непозната да̂ изразити рационалним изразом у коме се налази друга непозната, т. ј. ако при решавању једне једначине система по једној непознатој добијамо радиканд из кога можемо извући квадратни корен.

8) $\mathbf{4(x^2+y^2) - 7xy = 10,}$
$\mathbf{8(x^2+y^2) - 9xy - 10(x + y) = 0.}$

Решење. Заменом $x+y = u$ и $xy = v$,

биће $x^2+y^2=u^2-2v$. Тада једначине система имају облик:

1) $4(u^2-2v)-7v=10$.

2) $8(u^2-2v)-9v-10u=0$, или

1) $4u^2-15v=10$,

2) $8u^2-25v-10u=0$. Из овога система, који се дâ лако решити елиминирањем u^2, чиме се̂ ствара једна једначина првог степена, налазимо $u_1=5$, $u_2=\frac{5}{2}$, $v_1=6$ и $v_2=1$. Тада из стистема:

a) $x+y=5$, и b) $x+y=\frac{5}{2}$ налазимо $x_1=3$, $y_1=2$;

$xy=6$ $\qquad$ $xy=1$ $\qquad$ $x_2=2$ и $y_2=\frac{1}{2}$.

Напомена. Тако исто се решава систем $9x^2+9y^2-5(y-x)$ 40, $3xy+7(x-y)+1=0$. Овде је замена $y-x=u$ и $xy=v$, а $x^2+y^2=u^2+2v$.

§ 144. **Системе од две једначине вишег степена.** Ако су обе или само једна једначина система вишег степена, онда се обично такав систем решава подесним путем.

Решени примери:

1) **1)** $\mathbf{xy(x+y)=30}$, **2)** $\mathbf{x^3+y^3=35}$. *Решење*. Ако прву једначину помножимо са 3, добијамо $3x^2y+3xy^2=90$. Сабирањем ове једначине с другом, добијамо: $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=125$, или $(x+y)^3=125$, или 3) $x+y=5$. Заменом у првој имамо $xy=6$ (4). Из једначине (3) и (4) добијамо $x=3$, $y=2$.

2) 1) $\mathbf{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{5}}=5}$, 2) $\mathbf{x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{5}}=35}$. *Решење*. Заменом $x^{\frac{1}{4}}=u$ и $y^{\frac{1}{5}}=v$ добијамо систему:

1) $u+v=5$

2) $u^3+v^3=35$.

Тада, растављањем (2) на чинитеље имамо: $(u+v)(u^2-uv+v^2)=35$, или $5(u^2-uv+v^2)=35$, или $u^2-uv+v^2=7$ (3). Решењем једначина $u+v=5$ и $u^2-uv+v^2=7$ методом замене, добијамо: $u_1=3$, $u_2=2$, $v_1=2$, $v_2=3$. С тога је: $x_1=81$, $x_2=16$, $y_1=32$ и $y_2=243$.

3) 1) $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{2}{15}$, 2) $\mathbf{x^2y-xy^2=30}$. *Решење*. Најпре дате једначине система доводимо на облик:

1) $\frac{x-v}{xy}=\frac{2}{15}$ 2) $xy(x-y)=30$, а

затим њиховим множењем и дељењем добијамо: I) $(x-y)^2=4$, или $x-y=\pm 2$ и II) $(xy)^2=225$, или $xy=\pm 15$. Из I и II заменом налазимо: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$, $x_{(3,4)} = -1 \pm i\sqrt{14}$; $y_1 = 3$, $y_2 = 5$, $y_{(3,4)} = 1 \pm i\sqrt{14}$.

4) $\begin{matrix} \mathbf{x^4 + y^4 = 272.} \\ \mathbf{x + y = 6.} \end{matrix}$ *Решење.* Ако другу степенујемо са 4 добијамо: $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 1296$. Одузимањем ове једначине од прве налазимо: I) $2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 = 512$, или $2xy\,(x^2 + y^2) + 3x^2y^2 = 512$. Заменом $xy = u$, и $x^2 + y^2 = 36 - 2u$, једначина (I) добија облик: $2u\,(36 - 2u) + 3u^2 = 512$, или $u^2 - 72u = 512$. Одавде је $u_1 = 64$ и $u^2 = 8$. Најзад решењем система:

$$\alpha)\ \begin{matrix} x + y = 6, \\ xy = 64 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \beta)\ \begin{matrix} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{matrix} \quad \text{добијамо:}$$

$$x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_{(3,4)} = 3 \pm i\sqrt{55} \ \text{ и}$$
$$y_1 = 2,\ y_2 = 4,\ y_{(3,4)} = 3 \mp i\sqrt{55}.$$

5) $\begin{matrix} \mathbf{x^5 - y^5 = 2882,} \\ \mathbf{x - y = 2.} \end{matrix}$ *Решење.* Ако другу степенујемо са 5 (степенуј најпре са 4, а затим множи леву страну са $x - y$), добијамо: $x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 = 32$. Одузимањем ове једначине од прве и скраћивањем са 5 добијамо:

I) $x^4y - 2x^3y^2 + 2x^2y^3 - xy^4 = 570$, или $xy\,(x^3 - y^3) - 2x^2y^2\,(x - y) = 570$, или $xy\,(x - y)\,(x^2 + xy + y^2) - 3x^2y^2\,(x - y) = 570$.

Заменом $xy = u$, $x - y = 2$ и $x^2 + y^2 = 4 + 2u$, добијамо $u^2 + 4u = 285$.

Одавде је $u_1 = 15$ и $u_2 = -19$.

Најзад решењем система:

$$\alpha)\ \begin{matrix} x - y = 2, \\ xy = 15 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \beta)\ \begin{matrix} x - y = 2, \\ xy = 19 \end{matrix} \quad \text{добијамо:}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5,\ x^2 = -3,\ x_{(3,4)} = 1 \pm 3i\sqrt{2}, \\ y_1 = 3,\ y_2 = -3,\ y_{(3,4)} = -1 \pm 3i\sqrt{5}, \end{cases}$$

6) $\begin{matrix} \mathbf{(x + y)\,(x^2 + y^2) = 160,} \\ \mathbf{(x - y)\,(x^2 - y^2) = 580.} \end{matrix}$ *Решење.* Заменом $y = tx$ добијамо:

1) $x^3\,(1 - t)\,(1 - t^2) = 160$ и 2) $x^3\,(1 + t)\,(1 + t^2) = 580$

Дељењем ових једначина добијамо $21t^2 - 58t + 21 = 0$

Одавде је $t' = \dfrac{7}{3}$ и $t'' = \dfrac{3}{7}$. Стога је $y_1 = \dfrac{7}{3}\,x$ и $y_2 = \dfrac{3x}{7}$

Заменом у другој једначини добијамо биномне једначине $\alpha)$ $x^3 = 27$ и $\beta)$ $x^3 = 343$. Одавде је:

$$x = 3, \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}, 7, \frac{-7 \pm 7i\sqrt{3}}{2}, \text{ а } y = 7, \frac{-7 \pm 7i\sqrt{3}}{2}, 3, \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$$

7) $xy + xy^3 = 10$, $x + xy^2 + xy^4 = 2$. *Решење.* Дељењем ових једначина добијамо реципрочну једначину:

$$5y^4 - y^3 + 5y^2 - y + 5 = 0$$

из које налазимо сва четири решења. Даљи је рад заменом.

§ 145. **Системе од трију једначина са три непознате.** Ако ове системе радимо ма којом методом елиминирања, обично наилазимо на једначине вишег степена, које неможемо даље решавати. Међутим, ако су једначине система непотпуне, подесним путем, наилазимо врло често на једначине другог степена. Следећи примери показаће нам начине решавања ових система.

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x + y + z = 6$, $xy = \frac{2}{3}z$. *Решење.* Ако најпре трећу помножимо са 2, а затим саберемо с првом добијамо:

$$(x + y)^2 + z^2 = 14 + \frac{4z}{3}.$$

Заменом у овој једначини $x + y = 6 - z$ добијамо:

$$3z^2 - 20z + 33 = 0, \text{ из које је } z_1 = \frac{11}{3},\ z_2 = 3.$$

Заменом z нађеним вредностима у другој и трећој једначини, добијамо системе:

a) $x + y = \frac{7}{3}$, $xy = \frac{22}{9}$. и b) $x + y = 3$, $xy = 2$. Даљи је рад као код другог примера § 131.

2) $xy = a$, $xz = b$, $yz = c$. *Решење.* Множењем свих једначина система добијамо $x^2y^2z^2 = abc$, или $xyz = \pm\sqrt{abc}$. Ако ову једначину поделимо са сваком једначином система добијамо:

$$z = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}},\ y = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}} \text{ и } x = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

3) $x^2 + \frac{z}{2} = 8$, $x^2 + y^2 = 20$, $y^2 + z^2 = 80$. *Решење.* Ако најпре прву и трећу саберемо и од добивене једначине одузмемо другу, добијамо: $2z^2 + z - 136 = 0$, из које је $z_1 = 8$ и $z_2 = -\frac{17}{2}$. Заменом у првој добијамо $x_{(1,2)} = \pm 2$, $x_{(3,4)} = \pm\frac{7}{2}$, а заменом у трећој, добијамо $y_{(1,2)} = \pm 4$ и $y_{(3,4)} = \pm\frac{\sqrt{31}}{2}$.

4) $(x+y)(x+z)=35,$ $(y+z)(x+y)=40,$ $(x+z)(y+z)=56.$

Решење. Ради се као други задатак из овог параграфа.

5) $x(x+y+z)=a,$ $y(x+y+z)=b,$ $z(x+y+z)=c.$

Решење. Сабирањем свих једначина система добијамо: $x+y+z=\pm\sqrt{a+b+c}.$ (I)

Дељењем сваке једначине система једначином (I), добијамо:

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b+c}},\quad y=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b+c}} \text{ и } z=\pm\frac{c}{\sqrt{a+b+c}}.$$

6) 1) $x+y+z=1,$ 2) $xyz=-16,$ 3) $x^3+y^3+z^3=1.$

Решење. Ако (1) степенујемо најпре са 3, а затим од добивене једначине одузмемо трећу и заменимо xyz са -16, добијамо:

(I) $x^2y+xy^2+x^2z+y^2z+xz^2+yz^2=32$, или I) $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)=32$, или $x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z)=32$, или (I) $x^2+y^2+z^2-(x^3+y^3+z^3)=32$. Сабирањем ове једначине с трећом добијамо:

II) $x^2+y^2+z^2=33.$

Ако сада једначину (1) степенујемо са 2 и од добивене једначине одузмемо (II), добијамо:

III) $xy+xz+yz=-16$, или $x(y+z)+yz=-16$ или $x(1-x)-\frac{16}{x}=-16$; $x^2(1-x)-16+16x=0$; $x^2(1-x)-16(1-x)=0$; $(1-x)(x^2-16)=0$. Одавде је $x_1=1, x_{(2,3)}=\pm 4$.

Заменом у (1) и (2) добијамо системе:

a) $y+z=0$, $yz=-16$, b) $y+z=-3$, $yz=-4$, и c) $y+z=5$, $yz=4$,

чији нам је начин њиховог решавања познат.

7) 1) $x+y+z=6,$ 2) $x^2+y^2-z^2=8,$ 3) $x^3+y^3+z^3=90.$

Решење. Ако (1) доведемо најпре на облик $x+y=6-z$, а затим подигнемо на квадрат, добијамо: $x^2+2xy+y^2=36-12z=z^2$. Ако од ове једначине одузмемо другу, добијамо: (I) $xy=14-6z$. Најзад ако једначину (3) доведемо на облик $x^3+y^3=90-z^3$, или $(x+y)(x^2-xy+y^2)=90-z^3$ и у њој заменимо: $x+y=6-z$ $x^2+y^2=8+z^2$ и $xy=14-6z$, добијамо:

$(6-z)(8+z^2-14+6z)=90-z^3$, или $42z=126$, а одавд $z=3$. Заменом у (1) и (2) добијамо систем: $x+y=3$ $x^2+y^2=17$.

Из овога је система: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $y_1 = 4$, $y_2 = -1$. Друга вредност z-та је -3.

§ 146. **Изложитељне и логаритамске једначине које се своде на квадратне.**

1. *Пример.* $\mathbf{x^2 + y^2 = 425,}$ $\mathbf{\log x + \log y = 2.}$ *Решење.* — Другу једначину система сводимо најпре на облик: $\log xy = \log 100$, или $xy = 100$. Даљи је рад као код првог примера § 143.

2. *Пример.* $\mathbf{xy = 400,}$ $\mathbf{x^{\log y} = 16.}$ *Решење.* — Логаритмујући обе једначине система добијамо систем: $\log x + \log y = \log 400$, $\log y \cdot \log x = \log 16$.

Заменом $\log x = u$ и $\log y = v$ добијамо систем:

$$u + v = \log 400 = 2{,}602060. \quad \text{Одавде је } u = 2 \text{ и } v = 0{,}60206$$
$$uv = \log 16 = 1{,}204120.$$

Најзад, из $\log x = 2$ имамо $x = 100$, а из $\log y = 0{,}60206$ имамо $y = 4$.

3. *Пример.* $\mathbf{\sqrt[y]{x^2} - 11\sqrt[y]{x} + 10 = 0,}$ $\mathbf{y + \log x = 1.}$ *Решење.* Решењем прве једначине система, која је квадратна по $\sqrt[y]{x}$, добијамо $\sqrt[y]{x} = 10$ и $\sqrt[y]{x} = 1$.

Затим имамо да решавамо системе:

a) $\sqrt[y]{x} = 10$, $y + \log x = 1$ и b) $\sqrt[y]{x} = 1$, $y + \log x = 1$. Логаритмовањем прве једначине система (a) имамо:

$$\frac{\log x}{y} = 1, \text{ или } y = \log x.$$

Заменом у другој једначини добијамо:

$$2y = 1, \text{ а } y = \frac{1}{2}. \text{ Тада је } \log x = \frac{1}{2}, \text{ а } x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}.$$

Исто тако решавамо систем под b).

§ 147. **Примери за вежбу.**

1) $x^2 + y^2 = 89,$ $x^2 - y^2 = 39.$

2) $ax^2 + by^2 = c,$ $mx^2 - ny^2 = r.$

3) $2x^2 - 5xy = 100,$ $xy = 20.$

4) $x + y + xy = 47,$ $(x + y)xy = 420.$

5) $x^2 + y^2 = 73,$ $xy = 24.$

6) $x^2 + 3xy + y^2 = 51,$ $xy = 30.$

7) $x^2 - 4xy + y^2 = 52,$ $3xy = 72.$

8) $x + 2\sqrt{xy} + y^2 = 109,$ $xy = 36.$

9) $$\begin{aligned} x^2 - 3\sqrt{xy} + y^2 &= 2474, \\ xy &= 100. \end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned} (x+y)^2 + (x-y)^2 &= 436, \\ 4xy &= 364. \end{aligned}$$

11) $$\begin{aligned} x^2 + xy &= 187, \\ y^2 + xy &= 102. \end{aligned}$$

12) $$\begin{aligned} x^2 + xy + y &= 121, \\ x^2 + xy + x &= 61. \end{aligned}$$

13) $$\begin{aligned} xy + y^2 &= 2a^2 - 6a, \\ xy - y^2 &= 6a - 18. \end{aligned}$$

14) $$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 7, \\ \frac{1}{xy} &= 12. \end{aligned}$$

15) $$\begin{aligned} 3x^2 - 4x + y^2 &= 40, \\ 2x^2 + 3x + y^2 &= 52. \end{aligned}$$

16) $$\begin{aligned} xy + x^2 &= 18, \\ 2xy - x^2 &= x + 6. \end{aligned}$$

17) $$\begin{aligned} 2x + 3xy - 6y &= 8, \\ x - 2xy - 3y &= -3. \end{aligned}$$

18) $$\begin{aligned} 8(x+y) - 7(xy+1) &= 0, \\ 4(x-y) - (xy-1) &= 0. \end{aligned}$$

19) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y &= 68, \\ x^2 - y^2 + x - y &= 44. \end{aligned}$$

20) $$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 - ax - ay &= 7a^2, \\ x^2 + y^2 - ax + ay &= 4a^2. \end{aligned}$$

21) $$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} &= \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

22) $$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} &= 2, \\ \frac{2}{x^2} + \frac{4}{y^2} &= 4. \end{aligned}$$

23) $$\begin{aligned} 2x + 5y &= xy, \\ \frac{15}{x^2} + \frac{4}{y^2} &= 0{,}4. \end{aligned}$$

24) $$\begin{aligned} \frac{x+y}{a} &= xy, \\ \frac{x^2+y^2}{a^2} &= 5x^2y^2. \end{aligned}$$

25) $$\begin{aligned} 9x^2 + y^2 &= 1396, \\ xy &= -120. \end{aligned}$$

26) $$\begin{aligned} a^2x^2 + y^2 &= 2a^4, \\ xy - a^3 &= 0. \end{aligned}$$

27) $$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 44, \\ xy - y^2 &= 20. \end{aligned}$$

28) $$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2(x-y) &= 160, \\ (x+2y)(x-y) - 4x + 4y &= 120. \end{aligned}$$

29) $$\begin{aligned} (x + 3y - 6)y - 2x &= 0, \\ (2x + y - 12)y - 2x &= 0. \end{aligned}$$

30) $$\begin{aligned} 6(x+2y) &= xy, \\ 5(x-y) &= y^2. \end{aligned}$$

31) $$\begin{aligned} xy + (x+y) &= 34, \\ x^2 + y^2 - (x+y) &= 42. \end{aligned}$$

32) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x - y &= 44, \\ \frac{y}{2} - \frac{2}{x} &= 1 - \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

33) $$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{2}{5}, \\ x^2 + y^2 &= 104. \end{aligned}$$

34) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y &= a^2(a^2+1), \\ xy + a^2 &= 0. \end{aligned}$$

35) $$\begin{aligned} x(x+y) &= 40, \\ y(x+y) &= 24. \end{aligned}$$

36) $$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 &= 45, \\ xy &= 3. \end{aligned}$$

37) $$\begin{aligned} \sqrt{\frac{5x}{x-y}} - \sqrt{\frac{x-y}{5x}} &= \frac{21}{10}, \\ xy + x + y &= 11. \end{aligned}$$

38) $$\begin{aligned} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} &= \frac{20}{x+y}, \\ x^2 + y^2 &= 34. \end{aligned}$$

39) $$\begin{aligned} x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} &= \frac{30}{x-y}, \\ xy &= 80. \end{aligned}$$

40) $$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 152, \\ xy &= 15. \end{aligned}$$

41) $$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= 280, \\ xy &= 24. \end{aligned}$$

42) $$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= 275, \\ xy &= 6. \end{aligned}$$

43) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7, \quad xy=144.$

44) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6, \quad \sqrt{yx}=16\sqrt{2}.$

45) $x^3+y^3=441, \quad x+y=11.$

46) $x^3-y^3=37, \quad xy=12.$

47) $x^4-y^4=65, \quad xy=6.$

48) $x^5-y^5=1023. \quad xy=4.$

49) $x^3-y^3=61, \quad xy(x-y)=20.$

50) $x^3-y^3=279, \quad x-y=3.$

51) $x+xy-y=43, \quad xy=40.$

52) $x^2+xy+y^2=79, \quad (x+y):(x-y)=5:2.$

53) $(x^2+y^2)(x+y)=1080, \quad (x^2+y^2)(x-y)=540.$

54) $2x^2-3xy+4y^2=154, \quad 2x^2-3y^2=23.$

55) $x^2+3xy-5y^2=208, \quad xy-2y^2=16.$

56) $x^2-xy+y^2=300, \quad 2x^2-xy-y^2=100.$

57) $(x^2-xy+y^2)(2x-y)=1456, \quad (x^2-xy+y^2)(2y-x)=91.$

58) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2+z^2=34, \\ y^2+z^2=41. \end{cases}$

59) $\begin{cases} x^2+2y^2-3z^2=30, \\ 2x^2-y^2+z^2=47, \\ 3x^2+3y^2-4z^2=83. \end{cases}$

60) $\begin{cases} xy=56, \\ xz=24, \\ yz=21. \end{cases}$

61) $\begin{cases} x(y+z)=55, \\ y(x+z)=63, \\ z(x+y)=48. \end{cases}$

62) $\begin{cases} x+y+z=30, \\ 3x-y+z=34, \\ x^2+2y^2-z^2=84. \end{cases}$

63) $\begin{cases} y^2=xz, \\ xyz=64, \\ x+y+z=14. \end{cases}$

64) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=105, \\ xy+xz+yz=74, \\ x+y=9. \end{cases}$

65) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=117, \\ xy-xz+yz=26, \\ z-y+z=7. \end{cases}$

66) $\begin{cases} x+y=6-z, \\ x^2+y^2=14-z^2, \\ xy=6z. \end{cases}$

67) $\begin{cases} x+v=5, \\ y+z=9, \\ y^2+v=28, \\ z^2+x=18. \end{cases}$

68) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+v^2=65, \\ x+y=7, \\ z+v=8, \\ xy=vz. \end{cases}$

69) $\begin{cases} xv=yz, \\ x-v=6, \\ y-z=2, \\ x^2+y^2+z^2+u^2=164. \end{cases}$

70) $\begin{cases} \log^2 x+\log^2 y=37, \\ \log x-\log y=2{,}6. \end{cases}$

71) $\begin{cases} \log x+\log y=1{,}477121, \\ \log(x+1)+\log(x-1)=1{,}041393. \end{cases}$

72) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ \log x+\log y=0{,}903090. \end{cases}$

73) $\begin{cases} x^4-y^4=9744, \\ \log y-\log x=-0{,}397940. \end{cases}$

74) $\begin{cases} 2\log x-\log(5-y)=\log(y+5), \\ 2\log 5-\log(x-y)=\log(x+y)+\log(x^2+y^2)-0{,}845098. \end{cases}$

75) $\begin{cases} 2^x+3^y=17, \\ 2^{2x}+3^{2y}=145. \end{cases}$

§ 148. **Проблеми квадратних једначина с више непознатих.**

1) Наћи таква два броја да им је збир 30 а производ 189. (21 и 9).

2) Збир два броја је 20, а разлика њихових квадрата је 120; наћи та два броја. (13 и 7).

3) Разлика два броја је 6, а збир њихових квадрата је $2^1/_2$ пута већи од њиховог производа; наћи та два броја. $[6\sqrt{3};\ 6(\sqrt{3}+1)]$.

4) Отац и син имају заједно 40 година, а после 10 година биће производ њихових година 756; колико година има отац а колико син? (отац 32, син 8).

5) Одредити стране троугла, кад је његов обим 18 m, једна му страна половина збира других двеју, а да је производ тих двеју страна 32. (6 m, 4 m и 8 m).

6) Ако производу од два броја додамо мањи број, добијамо 54; ако истом производу додамо већи број, добијамо 56. Наћи та два броја. (6 и 8).

7) Која су то два броја, чији је збир једнак и њиховом производу и збиру њихових квадрата? $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\text{ и }\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

8) Обим правоуглог троугла је 132 m, а збир квадрата његових страна 6050. Наћи његове стране (33 m, 44 m и 55 m)

9) Одредити пропорцију код које је збир спољашњих чланова 21, збир унутрашњих 19, а збир крадрата сва четири члана 442. $(15 : 10 = 9 : 6)$.

10) Средња цифра једног троцифреног броја је 3; производ цифара је 36. Ако прва и трећа цифра измене своја места, па добивени број одузмемо од траженог броја, добијамо разлику 396. Наћи тај број. (632).

11) Производ од два броја је за 9 мањи од петоструког већег броја, а за 16 је већи од петоструког мањег броја. Наћи та два броја. (9 и 4).

12) Збир од два броја једнак је и њиховом производу и разлици њихових квадрата. Наћи та два броја.

$$\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\text{ и }\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right).$$

13) Производ цифара једног двоцифреног броја је 3 пута мањи од самог броја. Ако томе броју додамо 18, добијамо број од истих цифара, али у обрнутом реду. Наћи тај број. (24).

14) Збир од два броја је 8 пута већи од њихове разлике, а разлика квадрата тих бројева је 128. Наћи бројеве. (18 и 14).

15) Збир квадрата цифара једног двоцифреног броја је 34. Производ од овог броја и броја од истих цифара, али у обрнутом реду, је 1855. Наћи тај број. (35).

16) Збир четвртих степена два броја је 1921, а збир њихових квадрата је 61. Наћи та два броја. (5 и 6).

17) Два путника полазе једновремено из два града, чије је отстојање 396 Km, један другоме у сусрет. Путујући онолико дана, колика је разлика њихових дневних брзина, срели су се и дознали су, да је први прешао 216 Km. Наћи њихове дневне брзине. (36 и 30 Km.).

18) Из тачака A и B, чије је отстојање 50 m, крећу се два тела правцем AB. Предње тело почиње кретање 7 секунада раније од задњег, а прелази 4 m у секунди. Кад би задње тело прелазило у секунди 1 m више него што прелази, онда би стигло предње тело 13 секунада раније. Наћи секундну брзину задњег тела и време његовог путовања. (5 m; 78 сек.).

19) Неки курир треба из A да стигне у B за одређено време а путује одређеном брзином. Кад би прелазио 1 Km више за час, стигао би у B за 1,5 часа раније. Кад би прелазио 1 Km мање за час, онда би стигао у B за $11^1/_4$ часа. Колика је његова часовна брзина и отстојање AB. ($t = 9$ ч.; $AB = 45$ Km; $C = 5$ Km).

20) По крацима правог угла почињу једновремено кретање к темену два тела, с брзинама 1,5 m и 3 m у секунди. Првобитно отстојање тела је 29 m, а после 4 секунде њихово је отстојање 17 m. Наћи отстојања тела од темена угла. (21 m и 20 m).

21) По крацима правог угла почињу једновремено кретање два тела, која се удаљују од темена. Њихова отстојања од темена пре кретања јесу 6 m и 7 m. После 3 секунде отстојање тела биће 41 m, а после још 4 секунде, њихово отстојање биће 85 m. Наћи брзине тела. (1 и 11 m).

22) По крацима правог угла крећу се једновремено к темену центри два круга полупречника 9 m и 4 m. Отстојања центара до темена пре кретања јесу 48 m и 14 m. После 9 секунада кругови се додирују споља, а после још 2 секунде они се додирују изнутра. Наћи брзине центара тих кругова. (4 и 1 m).

23) Обим једног правоугаоника је 178 cm а порвшина му је 1848 cm^2. Наћи његове стране. (56 и 33 cm.)

24) Размера катета правоуглог троугла је 3 : 4, а његова је површина 54 cm^2. Наћи његове стране. (9, 12 и 15).

25) Суседне стране једног правоугаоника разликују се за 5 m, а другог једног правоугаоника за 3 m. Размера њихових површина је 21 : 22, а обими су им једнаки. Наћи њихове мање стране. (7 и 8).

26) Паралелне стране једног трапеза јесу 19 m и 15 m, а висина му је 8 m. Повучена је права паралелна с паралелним странама трапеза која гради два нова трапеза површина 72 m^2 и 64 m^2. Наћи дужину повучене паралелне и њено отстојање од веће паралелне стране. (17 и 4 m).

27) Један део капитала од 10000.— дин. даје годишњи интерес 300 дин. а остали део 240 дин. Проценат другог дела је за један већи од процента првог дела. С којим процентом је дат сваки део капитала. ($к_1 = 6000$; $p_1 = 5\%$. $P_2 = 6\%$).

28) Збир од производа два броја и њиховог збира је 23. Ако поделимо збир њихових квадрата њиховим производом, добијамо за количник 3 а за остатак 11. Наћи та два броја, (7 и 2).

29) Наћи она два броја, чија је разлика 3, а разлика њихових кубова 117. (5 и 2).

30) Збир кубова два броја је 152. Њихов производ помножен њиховим збиром даје 120. Наћи та два броја. (5 и 3).

31) Од три броја други је аритметичка средина од друга два броја. Збир квадрата првог и другог броја је 25, а збир квадрата првог и трећег броја 20. Наћи та три броја. (4, 3 и 2).

32) Од три броја други је геометријска средина од друга два. Њихов је збир 19, а збир њихових квадрата 133. Наћи та три броја. (9, 6 и 4).

33) Површина једног правоуглог правог паралелопипеда је 252 m^2. Збир његових димензија је 21 m, а висина је средња геометријска пропорционала између основичиних ивица. Наћи његове димензије. (12, 3 и 6).

§ 149. **IV Графично претстављање крадратног тринома и испитивање његових промена.** Да бисмо квадратни трином $Ax^2 + Bx + C$ претставили графички и да бисмо његове промене графички испитали, треба најпре да ставимо да је он једнак y, а затим да независно-промењљивој x дајемо произвољне вредности, чиме добијамо одговарајуће вредности функције y

Сматрајући одговарајуће вредности x_{-a} и y_{-a}, као координате појединих тачака у равни, конструисавајући те тачке помоћу правоуглог координатног система и најзад њиховим спајањем добијамо линију квадратног тринома, која је *парабола*. Из добивене линије можемо увидети и промене тринома које он има, када x мења своју вредност од $-\infty$ до $+\infty$, а које смо промене увидели код § 130.

Примери:

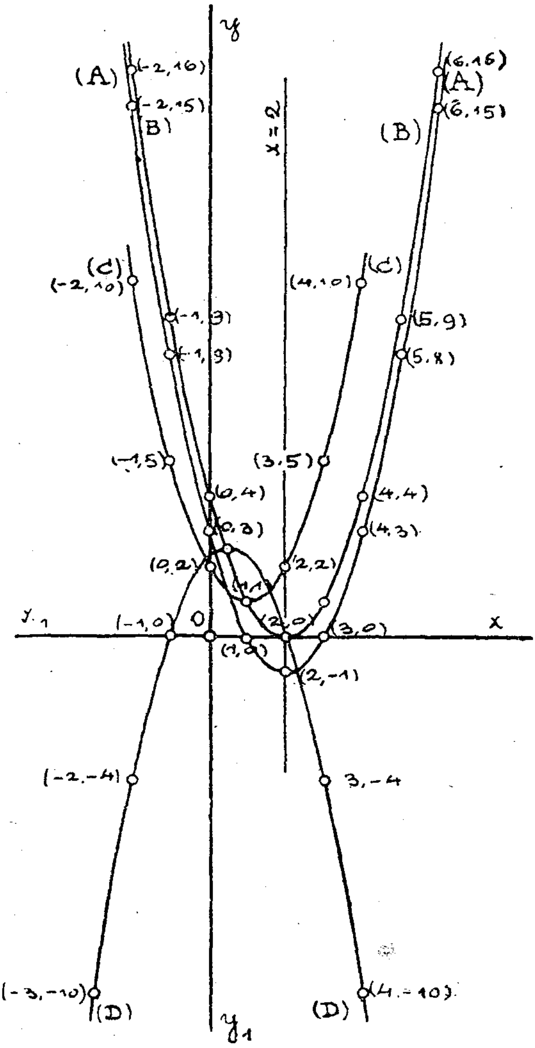
1) $\mathbf{y = x^2 - 4x + 3}$. За $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$ биће $y = 24, 15, 8, 3, 0, -1, 0, 3, 8, 15 \ldots$ Конструкцијом тачака: $(-3, 24)$, $(-2, 15)$, $(-1, 8)$, $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$, $(5, 8)$, $(6, 15)$, $(7, 24) \ldots$ и њиховим спајањем добијамо параболу (А) слике 15. Из ове линије увиђамо: 1) да трином $x^2 - 4x + 3$ има корене 1 и 3, јер је он раван нули за $x = 1$ и $x = 3$, т. ј. ова линија сече апсцисну осовину у тачкама, чије су апсцисе 1 и 3; 2) дати трином је позитиван за све вредности *x-са* изван корена, јер су ординате позитивне за $1 > x > 3$; 3) дати трином је негативан за вредности *x-са* између корена, јер су ординате негативне за $1 < x < 3$; 4) За $x = 2$ дати трином има најмању вредност -1, јер је најмања ордината -1 за $x = 2$; и 5) Да парабола датог тринома заузима симетричан положај према правој чија је једначина $x=2$.

2) $\mathbf{y = x^2 - 4x + 4}$. За $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ биће $y = 16, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16 \ldots$ Конструкцијом тачака $(-2, 16)$, $(-1, 9)$, $(0, 4)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 4)$, $(5, 9)$, $(6, 16) \ldots$ и њиховим спајањем добијамо параболу (B) слика 15. Из ове линије увиђамо: 1) да трином $x^2 - 4x + 4$ има оба корена једнака, јер крива додирује апсцисну осовину за $x = 2$; 2) Дати трином је увек позитиван за све вредности x-са од $-\infty$ до $+\infty$, пошто су све ординате позитивне; 3) За $x = 2$ дати трином има минималну вредност 0, јер је најмања ордината 0; и 4) да парабола датог тринома заузима симетричан положај према првој, чија је једначина $x = 2$.

3) $\mathbf{y = x^2 - 2x + 2}$. За $x = -2 -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ биће $y = 10, 5, 2, 1, 2, 5, 10, \ldots$ Конструкцијом и спајањем тачака $(-2, 10)$, $(-1, 5)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 5)$, $(4, 10), \ldots$ добијамо параболу (C) слике 15. Из ове линије увиђамо: 1) трином $x^2 - 2x + 2$ има уображене корене, пошто парабола не сече апсцисну осовину; 2) Дати трином је увек позитиван за све могуће вредности x_{-a} од $-\infty$ до $+\infty$, јер су све ординате

тачака параболе позитивне; 3) За $x = 1$ дати трином има минималну вредност 1, јер је најмања ордината 1.

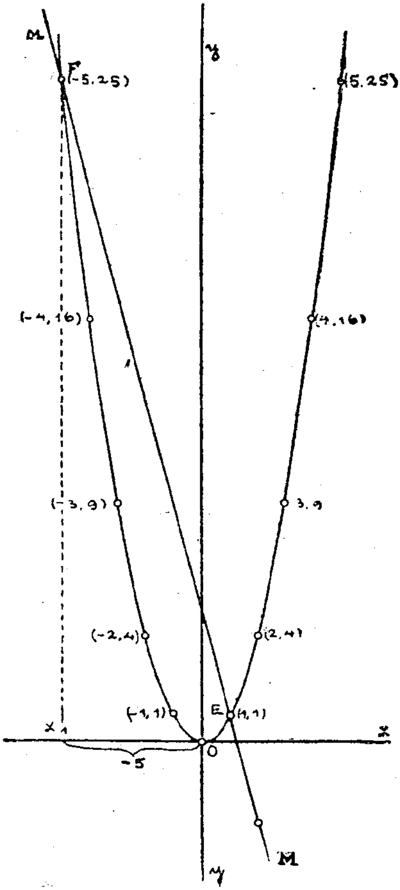
4) $\mathbf{y = -x^2 + x + 2}$. За $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ биће $y = -10, -4, 0, 2, 2, 0, -4, -10, \ldots$



Сл. 15.

Конструкцијом и спајањем тачака (— 3, —10) (—.2), — 4), (— 1, 0), (0, 2), (2, 0), (3, — 4), (4, — 10), добијамо параболу

(D) слике 15. Из ове линије увиђамо: 1) трином $-x^2+x+2$ има корене -1 и 2, јер паробола сече апсцисну осовину у тачкама, чије су апсцисе -1 и 2; 2) За $x=\frac{1}{2}$ дати трином има максималну вредност $2\frac{1}{4}$, јер је највећа орди-



Сл 16.

ната $y=2^1/_4$; и 3) дати трином је позитиван само за оне вредности x-са које се налазе између корена -1 и 2, јер су ординате позитивне за $-1<x<2$.

Напомена. Истим путем дају се конструисати функције $y = ax^2$ и $y = ax^2 + c$, $y = (x \pm m)^2$ и $y = ax^2 + bx$, које све претстављају параболе.

Примери за вежбу.

Конструисати следеће функције:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -4x^2$; 3) $y = 2x^2$;
4) $y = {}^3/_5 x^2$; 5) $y = 2{,}25x^2$; 6) $y = 2x^2 - 3x + 4$;
7) $y = 3x^2 + 2x - 3$; 8) $y = 3x^2 - 6x + 5$;
9) $y = x^2 + 2x - 3$; 10) $y = 5x^2 - 4x + 5$;
11) $y = (x + 1)^2$; 12) $y = (x - 2)^2$; 13) $y = -7x^2 + 12$;
14) $y = 4x^2 - 5$; 15) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$; 16) $y = -2x^2 + 4x + 3$.

§ 150. **Графичко решење једначина другог степена с једном непознатом.** Најпростији начин графичког решавања једначина другог степена с једном непознатом састоји се у овоме:

Треба најпре једначину $Ax^2 + Bx + C = 0$ свести на облик $Ax^2 = -Bx - C$, а затим, стављамо да су обе стране, као једнаке, равне y.

Тиме добијамо функцију другог степена $y = Ax^2$ и функцију првог степена $y = -Bx - C$, од којих прва претставља параболу, а друга праву. Најзад треба конструисати и параболу $y = Ax^2$ и праву $y = -Bx - C$, па апсцисе њихових пресечених тачака биће решења или корени дате једначине.

Пример. Решити графички једначину $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Доводећи ову једначину на облик $x^2 = -4x + 5$ и стављајући да је свака страна једнака y, добијамо једначину $y = x^2$ и $y = -4x + 5$.

Тада, из прве једначине имамо:

$$\text{за } x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$y = 9,\ 4,\ 1,\ 0,\ 1,\ 4,\ 9, \ldots$$

а из друге једначине:

$$\text{за } x = 1,\ 2, \ldots\ y = 1, -3, \ldots$$

Конструкцијом одговарајућих тачака и њиховим спајањем, добијамо параболу (A) и праву MN. (Сл. 16).

Ова права сече параболу у тачкама E и F. Апсцисе пресечених тачака јесу 1 и — 5 и то су решења дате једначине.

СЕДМИ ОДЕЉАК

ПРОГРЕСИЈЕ И СЛОЖЕНИ ИНТЕРЕСНИ РАЧУН.

§ 151. I) **Аритметичке прогресије.** Низ или ред бројева уређен тако, да је разлика између ма која два узастопна броја *стална*, зове се аритметичан ред или прогресија. Такви су редови:

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6,···
2) a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a,···
3) 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23,···
4) 100, 95, 90, 85, 80, 75,···

Бројеви који дају аритметичан ред, зову се члановима реда. Ако ред:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \cdots \quad a_{n-1}, \quad a_n, \cdots$$

претставља аритметичну прогресију, онда је a_1 њен *први* или *почетни* члан, a_2 други, a_n *општи*, пошто n може да значи ма који цео број природног бројног реда. *Такав ред зове се аритметичан зато, што је ма који члан аритметичка средина између својих суседних чланова, или између чланова подједнако удаљених од њега.* Аритметичан ред можемо замислити да постаје додавањем истог броја сваком претходном члану. Тај стални број зове се *разлика* (*диференција*) реда и бележи се обично са d. Ако је разлика реда позитивна (цела или разломљена), онда чланови реда поступно расту. Такав ред зове се *растући*. Ако је разлика негативна, онда чланови реда поступно опадају. Такав је ред *опадајући*. Од горњих редова прва три су растући а четврти опадајући.

Код једне аритметичке прогресије водимо рачуна о првом члану a_1, разлици d, броју чланова n, општем члану a_n и збиру од n чланова S_n. Кад су познате ма које три од тих количина, у стању смо да нађемо остале две, употребом обрасца за општи члан и збирног обрасца.

a) **Образац за општи члан.** Ако је ред:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots\cdots a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

аритметички, чија је разлика *d*, онда је

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d\,;\\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d\,;\\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d\,;\\
a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d\,;
\end{aligned}$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — —

Из ових једначина увиђамо, *да се ма који члан налази помоћу првог члана и разлике, кад се првом члану дода производ од разлике и броја чланова пред њим.* На основу ове констатације изводимо образац за општи члан:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)\,d}$$

Помоћу овога обрасца налазимо ма коју од количина: a_1, n, d и a_n, ако су три од њих познате.

Примери:

1) *Наћи 10-ти члан реда 2, 4, 6, 8,* ··· Овде је $a_1 = 2$; $d = 2$ и $n = 10$, те је $a_{10} = a_1 + 9d = 2 + 9 \cdot 2 = 20$.

2) *Наћи први члан реда, чији је 10-ти члан 20, а разлика 2.* Овде $a_{10} = 20$, $d = 2$, $n = 10$, те је из обрасца за општи члан $a_1 = a_{10} - 9d = 20 - 9 \cdot 2 = 2$.

3) *Наћи разлику реда, чији је први члан 5 а девети 29.* Овде је $a_9 = 29$, $a_1 = 5$, $n = 9$, те је из обрасца за општи члан

$$d = \frac{a_9 - a_1}{8} = \frac{29 - 5}{8} = 3.$$

4) *Аритметичка прогресија почиње са 100, разлика је — 5, а 60 је један њен члан; који је по реду?* Овде $a_1 = 100$, $a_n = 60$, а $d = -5$, те је из обрасца за општи члан

$$n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d} = \frac{60 - 100}{-5} = 8, \text{ а } n = 9.$$

b) **Збирни образац.** Ако је $a_1, a_2, a_3, \cdots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ један аритметичан ред од *n* чланова, онда је његов збир
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$, или
$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_2 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \ldots (1)$, или написан у обрнутом реду:
$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \cdots (2)$.

Сабирањем једначина (1) и (2) добијамо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (1_1 + a_n) + + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n\,(a_1 + a_n).$$ Одавде је:

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) \cdots (I).}$$

Ако у овом обрасцу заменимо $a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d$, добијамо његов други облик:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)\,d] \cdots (II),$$

чија је примена већа и који нас ослобођава рада за изналажење општега члана a_n, при тражењу збира од ма колико чланова неког познатог аритметичког реда.

Примери:

1) *Наћи збир 15 првих чланова реда: 1, 5, 9, 13, 17, ...*

Овде је $a_1 = 1$, $d = 4$, и $n = 15$, те је $S_{15} = \frac{15}{2}[2 + 14\cdot 4] = 435$.

2) *Колико чланова реда: 1, 5, 9, 13, 17, ... треба сабрати да би се добио збир 435?*

Овде је $a_1 = 1$, $d = 4$ и $S_n = 435$. Ако у другом збирном обрасцу извршимо замену познатих количина добијамо квадратну једначину по n:

$$435 = \frac{n}{2}\,[2 + (n - 1)\,4],$$

чијим решењем добијамо $n = 15$.

3) *Који је почетни члан реда чија је разлика 4, а збир од 15 његових првих чланова 435?*

Извршујући замену у другом збирном обрасцу познатих количина, добијамо једначину:

$$435 = \frac{15}{2}\,[2a_1 + 14\cdot 4],$$

чијим решењем налазимо да је $a_1 = 1$.

4) *Која је разлика реда, чији је први члан 3, а збир од 10 његових првих чланова 255?*

Заменом познатих количина у другом збирном обрасцу добијамо једначину:

$$255 = 5\,(6 + 9d),$$

одакле је $d = 5$.

c) **Образац за интерполацију.** Интерполовати једну аритметичку прогресију значи, уметнути известан број нових чланова између свака два њена узастопна члана тако, да нови чланови са пређашњим члановима дају нову аритметичку прогресију. Ако је број уметнутих чланова r, а два узастопна члана прогресије, чија је разлика d, a_n и a_{n+1}, онда се разлика d_1 нове прогресије добија применом обрасца за општи члан:

$$a_{n+1} = a_n + (r + 2 - 1) d_1,$$

пошто се a_n сматра као први, a_{n+1} као последњи члан, а број чланова је $r + 2$. Из ове једначине је:

$$d_1 = \frac{a_{n+1} - a_n}{r + 1}, \text{ или } \mathbf{d_1 = \frac{d}{r+1}}.$$

Овај нам образац пружа могућност, да нађемо разлику нове прогресије само помоћу разлике старе прогресије и броја уметнутих чланова, а која је неопходно потребна ради изналажења нових чланова.

Пример. Између чланова прогресије: 1, 5, 9, 13, 17,···· *уметни* **6** *нових чланова, да би се добила нова прогресија.*

Овде је $d = 4$, $r = 6$, те је $d' = \frac{4}{7}$. Нова прогресија биће:

$$\mathbf{1}, 1\tfrac{4}{7}, 2\tfrac{1}{7}, 2\tfrac{5}{7}, 3\tfrac{2}{7}, 3\tfrac{6}{7}, 4\tfrac{3}{5}, \mathbf{5}, 5\tfrac{4}{7}, 6\tfrac{1}{7}, 6\tfrac{5}{7}, 7\tfrac{2}{7}, 7\tfrac{6}{7}, 8\tfrac{3}{7}, \mathbf{9}, \ldots$$

§ 152. **Примери за вежбу:**

1) Наћи 20-ти члан и збир од 20 чланова прогресије: 2, 5, 8, 11.···

2) Наћи 15 ти члан и збир од 18 чланова прогресије: 3, 7, 11, 15,···

3) Наћи 13-ти члан и збир од 13 чланова прогресије: — 2, — 6, — 10, — 14,....

4) Наћи збир свих двоцифрених бројева од 21 до 50 закључно.

5) Наћи збир свих двоцифрених бројева од 36 до 60 закључно.

6) Наћи збир свих парних бројева до 200 закључно.

7) Наћи збир свих непарних бројева до 175 закључно.

8) Наћи збир од n чланова прогресије: $a, 2a - b, 3a - 2b, \ldots$

9) Први члан једне аритметичке прогресије је 3, разлика 5; наћи 25-ти члан и збир првих 25 чланова.

10) Дато: $a_1 = -5, d = 3, a_n = 100$; наћи S и n.

11) „ $a_1 = 5,\ d = -2, S = -27$; „ n и a_n.

12) „ $a_1 = 3^1/_2,\ a_n = -2, n = 23$; „ d и S.

13) „ $a_1 = -8, n = 19, S = 190$; „ d и a_{19}.

14) „ $a_1 = 8, a_n = -174, S = -2241$; „ d и n.

15) Дато $d = \frac{2}{3}$, $n = 16$, $a_n = 10\frac{3}{4}$; наћи a_1 и S.

16) „ $d = \frac{1}{6}$, $n = 13$, $S = -29\frac{1}{4}$; „ a_1 и a_n.

17) „ $d = 5$ $a_n = 19$, $S = 861$; „ a_1 и n.

18) „ $n = 12$, $a_n = 0.575$, $S = -1{,}35$; „ a_1 и d.

19) „ $a_1 = -7$, $d = -11$, $n = 18$; „ a_{18} и S.

20) Наћи први члан и разлику прогресије кад је:

a) $a_5 = 16$ и $a_{21} = 64$;

b) $a_9 + a_{12} = 67$ и $a_7 + a_2 = 85$;

c) $S_{10} = 230$ и $a_8 + a_{13} = 86$;

d) $a_{15} - a_8 = -21$ и $a_3 + a_9 = -26$;

e) $a_7 + a_{10} + a_{18} = 2\frac{1}{2}$ и $S_{21} = 21$;

f) $S_{15} - S_4 = 119\frac{5}{8}$ и $S_{26} - 2S_{10} = 223\frac{5}{8}$;

j) $a_4 \cdot a_9 = -9$ и $a_{15} - a_6 = -18$;

k) $a_{10} \cdot a_{17} + a_{10} + a_{17} = 1011$ и $S_{20} = 470$.

21) Наћи a_1 и d, кад је $a_{18}^2 - a_{14}^2 = 160$ и $S_{19} = 38$.

22) Наћи a_1, и d, кад је $a_5^2 + a_7 = 61$ и $a_{18} + a_{19} \cdots + a_{22} = 62\frac{1}{2}$.

23) Наћи a_1, d и n, кад је $a_3 + a_8 = -14$, $a_{15} - a_{12} = -6$ и $a_{n-1}^2 + a_n^2 = 1684$.

24) Наћи a_1 и n, кад је $d = -4$, $S_n = -117$ и $a_4 \cdot a_{12} = -87$.

25) Између 3 и 24 уметни 6 бројева тако, да се добије аритметичка прогресија.

26) Између 17 и 82 уметни 12 бројева тако, да се добије аритметичка прогресија.

27) Између бројева 27 и -28 уметни 10 бројева тако, да се добије аритметичка прогресија.

28) Између свака два члана прогресије: 1, 7, 13, 19, ... уметни 7 бројева, да се добије нова аритм. прогресија. Наћи 19-ти члан те прогресије и збир првих 19 чланова.

29) Збир од четири броја који чине аритм. прогресију је 30, а збир њихових реципрочних вредности $\frac{25}{36}$. Наћи те бројеве.

30) Један чиновник примио је прве године 18000 дин. плате, а сваке идуће године имао је по 1000— дин. више. Колика ће му бити плата у 35 години службе и колико ће свега примити за 35 година?

31) За копање бунара од 15 m дубине погођено је за први метар 20 динара, а за сваки потоњи по 2 дин. више. Колико је свега плаћено?

32) Једно лице уложило је у штедионици на прост интерес 5000 динара са 5%, а крајем сваке године улагао је још по 2000 — дин. Колико је свега примио на име интереса у току 20 година?

33) Једно лице прима ренту и то прве године 900, — дин., а сваке идуће године по 150 дин. више. Његов је трошак прве године 850,— дин., а сваке идуће године по 155,— дин. више. После колико година његов је приход једнак расходу?

34) Два путника полазе једновремено један другоме у сусрет из места A и B, чије је отстојање $29^3/_4$ миља. Први из A прелази првог дана 2 миље а сваки идући дан по $1^1/_4$ миље више од предходног, а други из B прелази првог дана $1^1/_2$ миља, а сваки идући дан по $^1/_8$ миље више од претходног. После колико дана и на ком отстојању од A има да се сретну путници?

35) Отстојање између два тела A и B која се крећу једно за другим је 20 Км. Тело A креће се брзином прве секунде 25 Км, а сваке идуће по $^1/_8$ Км. више од претходне. Тело B прелази прве секунде 30 Км, а сваке идуће секунде по $^1/_2$ Км. мање од претходне. После колико секунада тело A стиже тело B?

36) Два тела, чије је отстојање 153 м; крећу се једнс другоме у сусрет. Прво тело креће се сталном брзином о, 10 м. у секунди, а друго прелази прве секунде 3 м, а свак идуће секунде по 5 м. више од претходне. После колико ћ се секунада срести оба тела?

37) Два тела полазе из истог места и крећу се у исто правцу. Једно тело прелази прве секунде 1 м, а сваке идуђ секунде по 3 м. више од претходне. Друго тело, које почин кретање 2 секунде доцније, прелази прве секунде 10 м., сваке идуће секунде по 2 м. више него у претходној. Пос: колико секунада друго тело стиже прво?

38) По периферији једног круга крећу се два тела супротном правцу. Прво прелази прве секунде 3^0, а сва идуће секунде по 1^0 више од претходне. Друго тело пр лази прве секунде $1^1/_2{}^0$, а сваке идуће секунде по 6^0 ви него у претходној. После колико секунада сусрећу се ı ви пут?

39) Два се тела крећу једно другоме у сусрет из ; места, чије је отстојање 200 m. Прво прелази по 12 n минуту, а друго прелази 20 m прве минуте, а сваке ид

по 2 m више него у претходној минути. После колико се минута тела сусрећу?

40) Унутрашњи углови једног многоугла дају аритметичку прогресију, чија је разлика 10°, а најмањи угао има 100°. Наћи број стране тога многоугла.

41) Зна се да тело, које слободно пада, прелази прве секунде 4,9m, а сваке следеће секунде по 9,8m више него у претходној. Ако два тела почињу падање са исте висине, али једно почиње падање 4 секунде доцније, пита се, после колико секунада тела ће бити удаљена 274,4m?

42) Наћи разлику прогресије, чији је први члан 100, а збир од првих шест чланова је 5 пута већи од збира следећих шест чланова.

43) Наћи први члан прогресије, чија је разлика 4, а збир од првих пет чланова је 3 пута мањи од збира следећих пет чланова.

44) Састави прогресије од 1 до 21 тако, да се збир свих њених чланова има према збиру свих чланова између 1 и 21, као 11 : 9.

§ 153. **II Геометријске прогресије.** Низ или ред бројева тако уређен, да је количник између ма која два узастопна броја сталан, зове се геометријска прогресија. Такви су редови:

1) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,...

2) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729,...

3) 2, —6, 18, —54, 162, —486,...

4) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{3125}, \ldots$

5) $\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, -\frac{16}{81}, \frac{32}{243}, -\frac{64}{729}, \ldots$

Бројеви који дају геометријску прогресију, зову се члановима реда. Ако ред:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1} \text{ и } a_n$$

преставља једну геометријску прогресију, онда је a_1 њен *први* или *почетни члан*, a_n њен *општи члан*, јер n може да значи ма који цео број природног бројног реда. *Овакав ред бројева зове се геометријска прогресија, јер је ма који члан геометријска средина између суседних чланова, или између чланова подједнако удаљених од њега.* Сваки геометријски ред дâ се замислити да постаје множењем сваког претходног члана једним сталним бројем. Тај стални број зове се *количник* реда и бележи се обично са q. Количник q може бити већи или мањи од јединице и може бити позитиван или негативан. Код горњих редова је количник: код првог 2, другог 3, трећег -3, четвртог $\frac{1}{5}$, а петог $-\frac{2}{3}$. Ако је количник негативан, онда је ред наизменично уређен, т. ј. његови узастопни чланови јесу различитог знака. Ако је количник $q > 1$, онда је прогресија *растућа*, а за $q < 1$, прогресија је *опадајућа*. У првом случају чланови имају све веће и веће апсолутне вредности, а у другом све мање. Према броју чланова n, прогресија може бити *коначна* и *бескочна*. Коначна прогресија има ограничен број чланова, а бесконачна има бесконачно много чланова. И код геометријске прогресије, као и код аритметичке, водимо рачуна о првом члану a_1 количнику q, општем члану a_n, броју чланова n и збиру од n чланова S_n. Кад год знамо три од ових пет количина, у стању смо да нађемо остале две, употребом обрасца за *општи члан* и *збирног* обрасца.

а) **Образац за општи члан.**

Ако је ред: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ геометријски, чији је количник q, онда је:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q, \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3 \\ a_5 &= a_4 \cdot q = a_1 q^3 \cdot q = a_1 q^4 \\ &\text{— — — — — —} \\ &\text{— — — — — —} \end{aligned}$$

Из горњих једначина увиђамо, да се ма који члан реда добија помоћу првог члана a_1 и количина q, *кад се први члан помножи са степеном количника чији је изложитељ за 1 мањи од индекса тога члана.* На основу ове констатације изводимо образац за општи члан.

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Помоћу овог обрасца налазимо једну од количина: a_n, a_1, q и n, ако су остале три познате.

Примери:

1) Наћи 7-ми члан реда: 1, 3, 9, 27, 81,.... Овде је $a_1 = 1$ и $q = 3$, те је $a_7 = a_1 q^6 = 1.3^6 = 729$.

2) Наћи први члан реда, чији је 6-ти члан -486, а количник -3.

Из $a_6 = a_1.q^5$ имамо $a_1 = \frac{a_6}{q^5} = \frac{-486}{(-3)^5} = \frac{-486}{-243} = 2.$

3) Наћи количник реда, чији је први члан 1 а 5-ти $\frac{1}{625}$.

Из $a_5 = a_1q^4$, имамо $q = \sqrt[4]{\frac{a_5}{a_1}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{625}}{1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \frac{1}{5}$.

4) Први члан једнога реда је 1, количник је 2, a 512 је један његов члан; који је по реду?

Заменом у $a_n = a_1q^{n-1}$ имамо: $512 = 1 \cdot 2^{n-1}$, или $512 = 2^{n-1}$. Решавањем ове изложитељне једначине са или без употребе логаритама, добијамо да је $n = 10$ [$2^9 = 2^{n-1}$, $9 = n - 1$, $n = 10$].

b) **Збирни образац за коначну прогресију.** Ако је: $a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ један геометријски ред (растући или опадајући) од *n* чланова, чији је количник *q*, онда је:

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$, или

$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-3} + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \cdots (1)$.

Ако ову једначину помножимо са *q*, добијамо:

$Sq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n \cdots (2)$.

Одузимањем једначине (2) од (1) или обрнуто, добијамо у првом случају:

$S - Sq = a_1 - a_1q^n$, или $S(1 - q) = a_1(1 - q^n)$, а у другом:

$Sq - S = a_1q^n - a_1$, или $S(q - 1) = a_1(q^n - 1)$.

Одавде је:

$$\mathbf{S = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}}, \text{ или } \mathbf{S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}.$$

Напомена. Први образац је згоднији за опадајућу прогресију, а други за растућу. Ови обрасци нису различити, јер се други добија из првог, ако помножимо са -1 и бројитељ и именитељ десне стране тога обрасца. Ови се обрасци дају претставити и овако:

$S = \frac{a_1 - a_1q^n}{1 - q} = \frac{a_1 - a_1q^{n-1}q}{1 - q} = \frac{a_1 - a_nq}{1 - q}$, или $S = \frac{a_nq - a_1}{q - 1}$, а примењују се, када поред првог члана a_1 и количника q_1 знамо и општи члан a_n.

Пример.

1) Наћи збир од 10 првих чланова прогресије чији је први члан 7, а количник 4.

Решење. $S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{7 \cdot (4^{10} - 1)}{3} = \frac{7 \cdot 1048575}{3} =$

$= 2446675.$

Напомена. A) Вредност степена 4^{10} налазимо помоћу логаритама. За $4^{10} = x$, биће $\log x = 10 \log 4 = 10 \cdot 0{,}602060 = 6{,}020600$, а $x = N\overline{6{,}020600} = 1048576$.

B) Ако се тражи код овог задатка први члан a_1, а зна се количник $q = 4$, и $S_{10} = 244675$, онда је

$$a_1 = \frac{S(q-1)}{q^n - 1} = \frac{2446675 \cdot 3}{1048575} = 7.$$

C) Ако се тражи број чланова n, које треба сабрати да би се добио збир $S = 2446675$, а први је члан $a_1 = 7$ и количник $q = 4$, онда се јавља изложитељна једначина:

$2446675 = \frac{7(4^n - 1)}{3}$. Одавде је $7340025 = 7 \cdot 4^n - 7$;

$7340032 = 7 \cdot 4^n$; $4^n = 1048576$; $n \log 4 = \log 1048576$;

$$n = \frac{\log 1048576}{\log 4} = \frac{6{,}020600}{0{,}602060} = \frac{6020600}{602060} = 10.$$

D) Количник q може се израчунати, ако су познате количине: S, a_1 и a^n, употребом обрасца $S = \frac{a_1 - a^n q}{1 - q}$, али се тај количник не може увек израчунати, ако су познате количине: S, a_1 и a_n, особито када је n већи број, јер се јавља једначина вишег степена $S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, коју неможемо решити помоћу елементарне математике.

c) **Збирни образац за бесконачну опадајућу прогресију.** Бесконачна растућа геометријска прогресија је незбирљива, јер унапред знамо, да је њен збир бесконачно велики. Ово увиђамо и из обрасца за ту прогресију. Како је овде $q > 1$ и $n = \infty$, то је

$$S = \frac{a_1(q^{\infty} - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot \infty}{q - 1} = \infty.$$

Међутим, бесконачна опадајућа прогресија збирљива је, јер је код ње $q < 1$ (напр. $q = \frac{1}{b}$, а $b > 1$), те је:

$$S = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1\left[1 - \left(\frac{1}{b}\right)^n\right]}{1 - q} = \frac{a_1\left(1 - \frac{1}{b^{\infty}}\right)}{1 - q} = \frac{a_1\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)}{1 - q} =$$

$$= \frac{a_1(1 - 0)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Према овоме, $S = \frac{a_1}{1 - q}$ јесте збирни образац за бесконачну опадајућу прогресију.

1) *Пример.* Наћи збир бесконачне прогресије: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

Овде је $a_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$, те је $S = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

2) *Пример.* Наћи збир бескон. прогресије:

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$$

Овде је $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{2}{3}$, те је $S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{10}$.

3) *Пример.* Чисто периодичан разломак $0{,}\overline{54}$ претвори у обичан.

Како је сваки чисто периодичан разломак у ствари једна бесконачна опадајућа геом. прогресија, јер је

$$0{,}\overline{54} = \frac{54}{100} + \frac{54}{100^2} + \frac{54}{100^3} = \cdots, \text{ то је}$$

$$0{,}\overline{54} = \frac{\frac{50}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{54}{100}}{\frac{90}{100}} = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}.$$

4) *Пример.* Нечисто периодичан разломак $0{,}5\overline{36}$ претвори у обичан.

Овде је $0{,}5\overline{36} = \frac{5}{10} + \frac{36}{1000} + \frac{36}{100000} + \cdots = \frac{5}{10} + S = \frac{5}{10} +$

$$+ \frac{\frac{36}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{5}{10} + \frac{\frac{36}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{5}{10} + \frac{36}{990} = \frac{495 + 36}{990} = \frac{531}{990} = \frac{59}{110}.$$

d) **Образац за интерполацију.** Ако су a_n и a_{n+1} два узастопна члана геометријске прогресије, чији је количник q, број уметнутих чланова r, а количник нове прогресије q_1, онда је, према обрасцу за општи члан:

$a_{n+1} = a_n \cdot q_1^{n-1} = a_n \, q_1^{r+2-1} = a_n \, q_1^{r+1}$, а одавде је:

$q_1 = \sqrt[r+1]{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}} = \sqrt[r+1]{q}$. Овај нам образац пружа могућност, да нађемо количник нове прогресије само помоћу количника старе прогресије и броја уметнутих чланова, а који је количник неопходно потребан ради изналажења уметнутих чланова.

Пример. —

Између чланова прогресије: 3, 48, 768 уметни по 3 нова члана.

Решење. — Овде је $q = 16$, $r = 3$, а $q_1 = \sqrt[4]{16} = 2$. Нови ред биће: **3**, 6, 12, 24, **48**, 96, 192, 384, **768**.

§ 154. **Особине чланова геометријске прогресије.**

1) *Ма који члан је геометријска средина између суседних чланова, или између чланова подједнако удаљених од њега.*

Доказ. $a_6 = a_5 \cdot q$ и $a_6 = \frac{a_7}{q}$. Одавде је $a_6^2 = a_5 q \cdot \frac{a_7}{q} = a_5 a_7$, или $a_5 : a_6 = a_6 : a_7$.

Тако исто је: $a_6 = a_4 q^2$ и $a_6 = \frac{a_8}{q^2}$. Множењем ових једначина добијамо: $a^2_6 = a_4 \cdot a_8$, а одавде је $a_4 : a_6 = a_6 : a_8$.

2) *Производ од два члана једнако удаљених од крајних чланова, једнак је производу крајних чланова.*

Како је $a_3 = a_1 q^2$ и $a_{n-2} = \frac{a_n}{q^2}$, то је $a_3 \cdot a_{n-2} = a_1 q^2 \cdot \frac{a_n}{q^2} =$ $= a_1 \cdot a_n$.

3) *Производ од n чланова геометријске прогресије једнак је квадратноме корену из производа крајњих чланова на n-ом степену.*

Из $P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ и

$P = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \cdots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$, биће:

$P^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \cdots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_1 \cdot a_n)$ или на основу 2. особине:

$P^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdots (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) = (a_1 \cdot a_n)^n$, а $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.

4) *Ма која четири узастопна члана геометријске прогресије јесу пропорционални, т. ј. дају геометријску пропорцију.*

Како је $a_4 \cdot a_5 = a_3\, q \cdot \frac{a_6}{q} = a_3 \cdot a_6$, то је $a_3 : a_4 = a_5 : a_6$.

5) *Чланови геометријске прогресије, узети сваки други, или сваки трећи и т. д. дају опет геометријску прогресију.*

Тако из прогресије: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, добијамо геометријске прогресије:

1, 9, 81, 729, 6561;
1, 27, 729, 19683;
3, 27, 243, 2187;
3, 81, 2187.

§ 155. **Примери за вежбу.**

1) Напиши 7 првих чланова геом. прогресије, чији је први члан 1 а количник 10.

2) Напиши 10 првих чланова геом. прогресије, чији је први члан 384 а количник $\frac{1}{2}$.

3) Напиши геом. прогресију од 11 чланова, чији је количник $1\frac{1}{2}$, а шести је члан 2.

4) У геометриској прогресији a) $\frac{2}{5}$, 1,··· b) 0, 1, 0,02··· напиши још 4 члана.

5) Наћи шести члан геом. прогресије, чији је први члан 10, а количник је 2.

6) Наћи седми члан геом. прогресије чији је први члан 1200, а количник 0,1.

7) Наћи први члан прогресије, чији је количник 4, а осми члан 256.

8) Први члан прогресије је 2058 а четврти 6. Наћи њен количник.

9) 15 и 240 јесу крајњи чланови геом. прогресије, а количник је $\frac{1}{2}$. Колико чланова има ова прогресија?

10) Наћи збир чланова геом. прогресије, чији је количник 3, а крајњи су јој чланови 20 и 131220.

11) Почетни и крајњи члан геом. прогресије јесу 81920 и $1\frac{1}{4}$, а количник је 0,25. Наћи збир свих њених чланова.

12) Наћи први члан геом. прогресије, чији је количник 5, последњи члан 15625, а збир свих чланова 19531.

13) Први члан геом. прогресије је 7, а количник је 4. Наћи њен последњи члан, ако је збир свих чланова 9555.

14) Почетни и крајњи члан геом. прогресије јесу 4 и 78732, а збир чланова 118096. Наћи њен количник.

15) Наћи збир од 10 првих чланова геом. прогресије, чији је први члан 3, а количник 2.

16) Збир првих 12 чланова геом. прогресије је 797160, а количник је 3. Наћи први члан.

17) Први је члан геом. прогресије $\frac{1}{3}$, а количник је 0,1. Наћи збир од првих 6 чланова.

18) Наћи збир од 8 првих чланова прогресије: 5, 15, 45,$\cdots$

19) Наћи збир од 7 првих чланова прогресије: $-4,\ 16,\ -64,\cdots$

20) Наћи збир од 10 првих чланова прогресије: $3,\ -1,\ \frac{1}{3},\cdots$

21) Наћи збир од 5 првих чланова прогресије: $\sqrt{\frac{2}{3}},\ 1,\ \sqrt{\frac{3}{2}},\cdots$

22) Наћи збир од 6 првих чланова прогресије $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8},\cdots$

23) Наћи производ од 9 првих чланова прогресије: $\frac{81}{8}$, $\frac{27}{4}, \frac{9}{2},\cdots$

24) Наћи производ од 11 првих чланова прогресије: $\frac{a}{b}$, $-\frac{b}{a}, \frac{b^3}{a^3},\cdots$

25) Између чланова 31 и 496 уметни 3 члана да се добије нова геометр. прогресија.

26) Између бројева $\frac{a}{b^2}$ и $\frac{b}{a^2}$ уметни 5 чланова да се добије нова геом. прогресија.

27) Између a^{15} и b^{15} уметни 5 чланова да се добије нова геом. прогресија.

28) Између свака два члана прогресије: 1, 3, 9, 27,$\cdots$ уметни по 4 члана, да се добије нова геом. прогресија.

29) Наћи збирове следећих бесконачних геом. прогресија:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},\cdots$ 2) $1, \frac{2}{5}, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{2}{5}\right)^3,\cdots$;

3) $8, \frac{4}{5}, \frac{2}{25}, \frac{1}{125},\cdots$; 4) $\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, -\frac{9}{50},\cdots$;

5) $7,\ 2{,}1,\ 0{,}63,\ 0{,}189,\cdots$ 6) $7, -\frac{7}{8}, \frac{7}{64}, -\frac{7}{512},\cdots$;

7) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$; 8) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32},\ldots$;

9) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots$; 10) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-1+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\ldots$;

30) Периодичне разломке: a) $0,\overline{45}$; b) $0,\overline{341}$; c) $5,\overline{0792}$; d) 0,63; e) $0,3\overline{58}$; и f) $3,2\overline{027}$ претвори у обичне.

31) У којој је геом. бесконачној прогресији: 1) $a_1=6$ а $S=7$; 2) $q=\frac{2}{5}$ и $S=5$?

32) Између 16 и $\frac{1}{4}$ уметни више чланова тако, да са датим бројевима чине геом. прогресију, чији је збир $31\frac{3}{4}$. Наћи број уметнутих чланова.

33) Наћи први члан и количник прогресије, кад је:

1) $a_{11}=5120$ и $P_5=3200000$;

2) $a_4\cdot a_7=\frac{1}{3}$ и $a_{12}:a_8=\frac{1}{81}$;

3) $a_5-a_6=\frac{80}{81}$ и $a_9-a_{10}=\frac{1280}{6561}$;

4) $a_{15}=\frac{1}{512}$ и $P_{10}=32$;

5) $a_1+a_8=4376$ и $a_1\cdot a_8=8748$;

6) $a_1+a_4=196$ и $a_2+a_3=84$;

7) $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4=729$ и $a_2+a_3=12$;

8) $a_1+a_2+a_3+a_4=156$ и $a_1^2+a_4^2-a_2^2-a_3^2=14976$.

34) Да се докаже, да је

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$$

ако су a, b, c и d четири узастопна члана геометријске прогресије.

35) У једној геом. прогресији има 7 чланова. Збир првих 6 чланова је 157,5 а збир последњих 6 чланова је два пута мањи од збира првих 6 чланова. Наћи ту прогресију.

36) Збир прва три члана једне геом. прогресије је 28, а збир следећа три члана $3^1/_2$. Наћи прогресију.

37) Наћи четири броја, који чине геом. прогресију, кад се зна, да је први број већи од другог за 36, а трећи број је већи од четвртог за 4.

38) Наћи геом. прогресију од 6 чланова, кад се зна, да је збир непарних чланова 455, а збир парних 1365.

39) Збир кубова прва три члана једне геом. прогресије је 1971, а њихов је производ 216; наћи прогресију.

40) Ако 4 првим члановима једне аритметичке прогресије додамо поступно бројеве, 5, 6, 9 и 15, добија се једна геом. прогресија; наћи аритм. прогресију.

41) Три броја, који дају геом. прогресију, дају збир 26. Ако овим бројевима додамо бројеве 1, 6 и 3, добијамо три броја, који дају аритм. прогресију. Наћи та три броја.

42) Три броја, који дају аритм. прогресију, дају збир 15. Ако овим бројевима додамо бројеве, 1, 4 и 19, добијамо три броја, који дају геом. прогресију. Наћи та три броја.

43) Проналазач игре шаха тражио је као награду од Персијског Шаха онолико пшеничних зрна, колико би изашло, кад би се на прво поље шаховске табле метнуло једно зрно, на друго 2, на треће 4 и тако редом, на свако идуће поље по 2 пута више од претходног. Колико вагона чини та сума, ако се узме да вагон хвата 10000 Kgr., а у 1 Kgr. има 20000 зрна.

44) У једној геом. прогресији с непарним бројем чланова први је члан 7, средњи 56 а збир свих чланова 889. Колико има тих чланова и колики је количник?

45) У једној геом. прогресији од 8 чланова разлика између збира парних и непарних чланова је 150. Збир свих чланова је 250. Наћи ту прогресију.

46) Једна аритметичка и једна геом. прогресија имају исти почетни члан. Свака има по 4 члана. Други чланови стоје у размери 3 : 2, а трећи у размери 5 : 4. Први и последњи члан геом. прогресије дају збир 81. Које су те две прогресије?

47) Ако у један квадрат стране a упишемо други квадрат тиме, што ћемо спојити средине страна датог квадрата, затим у други квадрат упишемо на исти начин трећи квадрат, у трећи истим начином четврти и т. д. до бесконачности, пита се, колики је збир површина свих тако добивених квадрата?

48) У једном кругу полупречника r уписан је квадрат, у квадрат уписан је круг, у други круг уписан је крадрат, у ови квадрат уписан је круг и т. д. до бесконачности. Наћи збир површина свих кругова и квадрата.

49) Дат је равностран троугао стране a. Од висина тога троугла нацртан је нов троугао; од висина новог троугла конструисан је трећи троугао; од висина трећег троугла

конструисан је четврти троугао и т. д. до бесконачности. Наћи збир површина свих тако добивених троуглова.

50) Дат је круг полупречника r. У њему уписујемо концентричне кругове полупречницима: $\frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{8}, \ldots$ и т. д. до бесконачности. Наћи збир обима свих ових кругова.

51) У равностран троугао стране a, уписан је нов равностран троугао спајањем средине страна датог троугла; у нови троугао уписујемо нов равностран троугао спајањем средине страна другог троугла и т. д. до бесконачности. Наћи збир обима и површина свих троуглова.

52) У један круг полупречника r уписан је равностран троугао, у троугао уписан је круг, у овај круг нов равностран троугао и т. д. до бесконачности. Наћи збир обима и збир површина свих кругова и свих троуглова.

III. Сложени интересни рачун.

§ 156. **Сложени интерес и интересни чинитељ.** Ако се интерес неког капитала на крају једног тромесечја, полугођа или године придодаје капиталу, тако да у идућем тромесечју полугођу или години вуче интерес заједно с капиталом, онда се каже, да је капитал дат под *сложен интерес* или под *интересом на интерес*. Ако се интерес додаје капиталу тромесечно, шестомесечно или годишње, онда се каже, да се *капитализање врши тромесечно, шестомесечно* или *годишње*.

Под *интересним* или *каматним чинитељем* разумемо ону вредност једног динара, на коју он нарасте заједно с интересом за јединицу времена (тромесечје, полугође, година). Ако је годишњи интересни проценат (стопа) $p\%$ онда је годишњи интересни чинитељ $q = 1 + \frac{p}{100}$, шестомесечни $q = 1 + \frac{p:2}{100}$, а тромесечни $q = 1 + \frac{p:4}{100}$, јер 100 дин. постају с интересом за једну годину $100 + p$, за полугође $100 + \frac{p}{2}$, а за тромесечје $100 + \frac{p}{4}$, а један динар постаје 100 пута мањи, т. ј. $\frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$, $\frac{100+\frac{p}{2}}{100} = 1 +$

$+\frac{\frac{p}{2}}{100}$ и $\frac{100+\frac{p}{4}}{100}=1+\frac{\frac{p}{4}}{100}$. Тако, ако је интересна годишња стопа $p=8\%$, онда је годишњи интересни чинитељ 1,08, полугодишњи 1,04, а тромесечни 1,02. За годишње интересне стопе: 5%, $7,5\%$, 12% и 15% биће годишњи интересни чинитељи: 1,05, 1,075, 1,12 и 1,15, а шестомесечни: 1,025, 1,0375, 1,06 и 1,075. У пракси се најчешће врши капитализање шестомесечно и годишње.

§ 157. **Увећани капитал (крајња вредност капитала).** Под увећаним капиталом, или под крајњом вредношћу једног капитала разумемо ону вредност неког капитала K, на коју он нарасте за n година (полугођа) заједно са интересом на интерес. Ако крајњу вредност капитала K, дат под интересом на интерес са годишњом стопом $p\%$, а за n година, означимо са $K_{(n)}$, онда ту вредност налазимо из обрасца:

$$\mathbf{K_{(n)}=K\cdot q^n} \quad (1) \text{ јер}$$

1 динар постаје са интересом на крају прве године $1+\frac{p}{100}=q$, а K динара постају са интересом на крају прве године K пута више, т. ј.

$$K_1=K\cdot q;$$

Затим: 1 динар постаје са интересом од почетка до краја друге године q динара, а $K_{(1)}$ динара, односно Kq динара, постају Kq пута више, т. ј.

$$K_{(2)}=K_1\cdot q=Kq\cdot q=Kq^2;$$

Затим: 1 динар постаје са интересом од почетка до краја треће године q динара, а $K_{(2)}$ динара, односно Kq^2 динара постају Kq^2 пута више, т. ј.

$$K_3=K_{(3)}q=Kq^2\cdot q=Kq^3;$$

Продужујући овако налазимо да капитал са интересом на крају 4-те године постаје Kq^4, на крају 5-те Kq^5, и т. д., а на крају n-те године постаје Kq^n.

Помоћу обрасца (1) можемо наћи не само крајњу вредност капитала $K_{(n)}$, већ и првобитну његову вредност (садашњу вредност) $K=\frac{K_{(n)}}{q^n}$, број периода (година, полугођа) $n=\frac{\log K_{(n)}-\log K}{\log q}$; и интересни чинитељ $q=\sqrt[n]{\frac{K_{(n)}}{K}}$ а затим и интересну стопу p из једначине $1+\frac{p}{100}=q$.

Примери:

1) *На коју суму нарасте капитал од 10000,— дин. дат у штедионицу под интерес на интерес са 9°/₀ (p. a.)*[1]*, а за 15 година, кад се капиталисање врши a) годишње; b) семестрално?*

a) $K_{(15)} = 10000 \cdot 1{,}09^{15}$; $\log K_{(15)} = \log 10000 + 15 \log 1{,}09 =$ $= 4 + 15 \cdot 0{,}037426 = 4{,}561390$, а $K_{15} = N\overline{4{,}561390} = 36424{,}20$ д.

b) $K_{(30)} = 10000 \cdot 1{,}045^{30}$; $\log K_{(30)} = \log 10000 + 30 \cdot \log 1{,}045$ $= 4 + 30 \cdot 0{,}019116 = 4{,}573480$; а $K_{(30)} = N\overline{4{,}573480} = 37452{,}40$ д.

2) *На коју суму нарасте капитал од 20000,— дин. за $18^3/_4$ година са 6°/₀ (p. a), кад се капиталисање врши полугодишње.*

Код овог задатка најпре ћемо наћи крајњу вредност капитала за $18^1/_2$ година, односно за 37 семестра са 3°/₀ (p. s.) а затим израчунаћемо још прост интерес од $K_{(37)}$ за 3 месеца са 6°/₀.

$K_{(37)} = 20000 \cdot 1{,}03^{37}$; $\log K_{(37)} = \log 20000 + 37 \log 1{,}03 =$ $= 4{,}301030 + 37 \cdot 0{,}012837 = 4{,}775999$; а $K_{(37)} = N\overline{4{,}775999} =$

$$= 59703{,}40; \text{ Прост интерес } i = \frac{59703{,}40 \cdot 3 \cdot 6}{1200} = 895{,}60.$$

Стога је $K_{18\frac{3}{4}} = K_{37} + i = 60599{,}—$

3) *На коју суму нарасте капитал од 12000— дин. за 8 год. 7 мес. и 20 дана са 9°/₀ (p. a.), кад се капиталисање врши семестрално?*

Овде треба наћи најпре крајњу вредност за 17 семестара са 4,5°/₀ (p. s.), а затим још прост интерес од те крајње вредности за 50 дана.

$K_{(17)} = 12000 \cdot 1{,}045^{17}$; $\log K_{(17)} = \log 12000 + 17 \log 1{,}045 =$ $= 4{,}079181 + 17 \cdot 0{,}019116 = 4{,}404153$, $K_{(17)} = N\overline{4{,}404153} =$ $= 25360{,}25$.

$$\text{Прост интерес } i = \frac{25360{,}25 \cdot 9 \cdot 50}{36000} = 317{,}—$$

Стога је $K_{(8 \text{ г. } 7 \text{ м. } 20 \text{ д.})} = 25360{,}25 + 317 = 25677{,}25$ дин.

4) *Наћи првобитну вредност капитала, који је са 9°/₀ (p. a.) са полугодишњим капиталисањем за 15 година постао 37452,40 динара.*

---

[1]) (p. a.) (pro anno) за годину; (p, s.) (pro semestar) значи за полугође; (p. tr.) (pro trimestar) значи за тромесечје.

Из једначине: $37452,40 = K \cdot 1,045^{30}$ имамо:

$K = \frac{37452,40}{1,045^{30}}$; $\log K = \log 37452,40 - 30 \cdot \log 1,045 =$

$= 4,573480 - 30 \cdot 0,019116 = 4$, а $K = 10^4 = 10000,—$

5) *Наћи првобитну вредност капитала, који за 8 година 7 месеци и 20 дана, са 9%* (*р. а.*) *при полугодишњем капиталисању постао 25677,25 динара.*

Овде је: $K_{17} + i = 25677,25$, или $K \cdot 1,045^{17} +$

$$+ \frac{K \cdot 1,045^{17} \cdot 9 \cdot 50}{36000} = 25677,25.$$

Одавде је: $K \cdot 1,045^{17}\left(1 + \frac{9 \cdot 50}{36000}\right) = 25677,25$ или

$K \cdot 1,045^{17} \cdot \frac{81}{80} = 25677,25$, а $K = \frac{25677,25 \cdot 80}{1,045^{17} \cdot 81}$.

Стога је: $\log K = \log 25677,25 + \log 80 - 17 \log 1,045 - \log 81 = 4,409549 + 1,903090 - 0,324972 - 1,908485 = 4,079182$, а $K = N\overline{4,079182} = 12000,—$ дин.

6) *За које време капитал од 10000,— дин., при полугодишњем капиталисању, са 4,5%* (*p. s.*) *постаје 37452,40 динара.*

Из једначине: $37452,40 = 10000 \cdot 1,045^n$ имамо:

$\log 37452,40 = \log 10000 + n \cdot \log 1,045$, а $n =$

$$= \frac{\log 37452,40 - \log 10000}{\log 1,045} = \frac{4,573480 - 4}{0,019116} = \frac{0,573480}{0,019116} =$$

$= 573480 : 19116 = 30$ семестара $= 15$ година.

7) *Под којом годишњом стопом капитал од 10000,— дин. при полугодишњем капиталисању, за 15 година, постаје 37452,50 динара?*

Из $37452,40 = 10000. q^{30}$, биће $q = \sqrt[30]{3,745240,}$ $\log q =$

$= \frac{\log 3,74524}{30} = \frac{0,573480}{30} = 0,019116$; а $q = N\overline{0,019116} = 1,045.$

Најзад из једначине: $1 + \frac{p}{100} = 1,045$, добијамо $p\ (p \cdot s) =$

$= 4,5$, а стопа pro anno $p = 9\%$.

Напомена. — Одређивање стопе *p* је немогуће, ако је време *n* дато као вишеименован број, т. ј. ако је $n = m$ год. и *d* дана, јер је у овом случају

$$\mathbf{Kn} = \mathrm{Km} + \frac{\mathrm{Km}\cdot \mathrm{pd}}{36000} = \mathrm{Kq^m} + \frac{\mathrm{Kq^m}\cdot \mathrm{pd}}{36000} = \mathrm{K}\left(1+\frac{\mathrm{p}}{100}\right)^{\mathrm{m}} +$$

$$+\frac{\mathrm{K}\left(1+\frac{\mathrm{p}}{100}\right)^{\mathrm{m}}\cdot \mathrm{p}\cdot \mathrm{d}}{36000}$$

или

$$\mathbf{Kn} = \mathbf{K}\left(1+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{100}}\right)^{\mathrm{m}}\left(1+\frac{\mathbf{pd}}{\mathbf{36000}}\right) \quad (1)$$

коју једначину (m-ог степена) неможемо решити помоћу елементарне алгебре.

Међутим, време *n* у овоме случају можемо одредити, и ако имамо посла са две непознате *m* и *d*, јер је из једначине (1): $\log \mathrm{K_{(n)}} = \log \mathrm{K} + \mathrm{m} \log \mathrm{q} + \log\left(1+\frac{\mathrm{pd}}{36000}\right)$, а

$$\mathrm{m} = \frac{\log \mathrm{K_{(n)}} - \log \mathrm{K}}{\log \mathrm{q}} - \frac{\log\left(1+\frac{\mathrm{pd}}{36000}\right)}{\log \mathrm{q}}.$$

Па ако је $\frac{\log \mathrm{K_{(n)}} - \log \mathrm{K}}{\log \mathrm{q}} = \mathrm{Q} + \frac{\mathrm{R}}{\log \mathrm{q}}$, то је $\mathrm{m} = \mathrm{Q} + \frac{\mathrm{R}}{\log \mathrm{q}} - \frac{\log\left(1+\frac{\mathrm{pd}}{36000}\right)}{\log \mathrm{q}} \ldots (2).$

Па како *m* и Q морају бити цели бројеви, а $\frac{\mathrm{R}}{\log \mathrm{q}}$ и $\frac{\log\left(1+\frac{\mathrm{pd}}{36000}\right)}{\log \mathrm{q}}$ разломљени, то једначина (2) је могућа само ако је $m = Q$ или ако је $\frac{\mathrm{R}}{\log \mathrm{q}} = \frac{\log\left(1+\frac{\mathrm{pd}}{100}\right)}{\log \mathrm{q}}$, или $\mathrm{R} = \log\left(1+\frac{\mathrm{pd}}{36000}\right)$.

Из свега овога закључујемо, *да целина количника*: $\frac{\log \mathrm{K_{(n)}} - \log \mathrm{K}}{\log \mathrm{q}}$ *преставља нам тражени број* година *m* (или полугођа, ако је капиталисање шестомесечно), а остатак преставља $\log\left(1+\frac{\mathrm{pd}}{36000}\right)$. Најзад из једначине $\log\left(1+\frac{\mathrm{pd}}{36000}\right) = \mathrm{R}$, имамо: $1 + \frac{\mathrm{pd}}{36000} = \mathcal{N}\mathrm{R}$, а тражени број дана $\mathrm{d} = \frac{36000\,(\mathcal{N}\mathrm{R} - 1)}{\mathrm{p}}$.

8. *Пример. За које време капитал од 12000,— дин., при полугодишњем капиталисању, са 9°/₀ (р. а.), постаје 25677,25 динара?*

У овом задатку *т* преставља полугођа, а семестрална је стопа 4,5°/₀. Овде је $\frac{\log K_{(n)} - \log K}{\log q} = \frac{\log 25677{,}25 - \log 12000}{\log 1{,}045}$ $= \frac{4{,}409549 - 4{,}079181}{0{,}019116} = \frac{0{,}330368}{0{,}019116} = 330368 : 19116 = 17\frac{5396}{19116}$ $= 17 + \frac{0{,}005396}{0{,}019116}$. С тога је $m = 17$ семестра, а $\log\left(1 + \frac{9\,d}{36000}\right)$ $= 0{,}005396$;
$$1 + \frac{9\,d}{36000} = N\overline{0{,}005396} = 1{,}0125.$$

Одавде је $d = \frac{1{,}0125 \cdot 36000 - 36000}{9} = 50$ дана.

Према томе тражено време је 17 семестара и 50 дана, или 8 год. 7 месеци и 20 дана. (Види 5. задатак из овог параграфа).

Н. З. Готово исто време добијамо применом обрасца $K_{(n)} = K \cdot q^n$, сматрајући *п* као децималан број.

Код овог примера биће $25677{,}25 = 12000 \,.\, 1{,}045^n$, а
$$n = \frac{\log 25677{,}25 - \log 12000}{\log 1{,}045} = 17{,}28 \cdots \text{семестара} =$$
$= 17$ семестра и $0{,}28 \,.\, 180$ дана $= 17$ сем. 50,4 дана $= 8$ год. 7 мес. 20 дана.

§ 58. **Рачун улога.** Стална сума, која се у почетку или при крају периоде (године, семестра) улаже у новчани завод под интересом на интерес у намери да се нека сума уштеди, зове се *улог*.

Ако означимо стални улог са *а*, интересну стопу са *р*. (р. а.), а број година са *п*, онда је крајња вредност свих улога, према обрасцу за увећани капитал:

а) *За улагање у почетку године*:

$S_{(n)} = aq^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + \cdots + aq^3 + aq^2 + aq$, или

$S_{(n)} = aq\,(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$, или

$$\mathbf{S_{(n)} = \frac{aq\,(q^n - 1)}{q - 1}\ (I)}; \ \mathbf{a}$$

b) *За улоге при крају године:*

$S'_{(n)} = aq^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} + \cdots + aq^2 + aq + a = a\,(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$, или

$$\mathbf{S'_{(n)} = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}\ (II).}$$

Помоћу образаца (I) и (II) израчунавамо ма коју од количина: $S_{(n)}$, a, q, односно *p*, и *n*, ако су нам познате три од тих количина. Разуме се, израчунавање процената *p* је немогуће помоћу елементарне математике, јер нас наводи на решавање једначина вишег степена. Ако се улози улажу полугодишње, онда употребљавамо исте обрасце, али узимамо двапут мањи проценат *p*, а двапут веће време *n*.

Ако се уложи у новчани завод капитал K, а затим у почетку, или при крају године улаже стална сума *a*, за *n* година, са $p^0/_0$ (p. a.), онда капитал K постаје Kq^n, а остали улози $\frac{aq(q^n-1)}{q-1}$, или $\frac{a(q^n-1)}{q-1}$, те је целокупна уштеда:

$$У_{(n)}=K_{(n)}+S_{(n)}=Kq^n+\frac{aq(q^n-1)}{q-1}\cdots(III), \text{ или}$$

$$У'_{(n)}=K_{(n)}+S'_n=Kq^n+\frac{a(q^n-1)}{q-1}\cdots(IV).$$

Најзад, ако у почетку или при крају *n* година улажемо у новчани завод сталну суму *a*, а по истеку *n* година престајемо са улагањем, али и даље остављамо стечене уштеде $S_{(n)}$, односно $S'_{(n)}$, у заводу још *m* година, онда су уштеђевине:

$$У_{(n)}=S_{(n)}\cdot q^m=\frac{aq(q^n-1)}{q-1}.\ q^m\cdots(V), \text{ или}$$

$$У'_{(n)}=S'_{(n)}\cdot q^m=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.\ q^m\cdots(VI).$$

Примери:

1) *Који ћемо капитал имати после 18 година, ако у почетку сваке године уложимо по 1000,— динара са* $8^0/_0$ *(p. a) сложеног интереса?*

Овде је: a = 1000,— дин., n = 18, q = 1,08, те је

$$S_{18}=\frac{1000\ .\ 1{,}08\ (1{,}08^{18}-1)}{0{,}08}=\frac{100000\ .\ 1{,}08\,(1{,}08^{18}-1)}{8}=$$

$12500\ .\ 1{,}08\,(1{,}08^{18}-1)$. За $1{,}08^{18}=x$, биће $\log x=18\log 1{,}08=$ $=18.\ 0{,}033424=0{,}601632$, а $x=\overline{N0{,}601632}=3{,}996064$, те је $S_{(18)}=12500\cdot 1{,}08\cdot 2{,}996064=125\cdot 108\cdot 3=40500$,— дин.

2) *Ако у току 15 година, а при крају сваке године, улажемо под интерес на интерес, са* $3^1/_4{}^0/_0$ *(p.a), суму од 2500,— дин., пита се, коју ћемо суму уштедити?*

Овде је $a = 2500$, $n = 15$ год. $q = 1{,}0325$, те је

$$S'_{15} = \frac{2500\,(1{,}0325^{15} - 1)}{0{,}0325} = \frac{25000000\ (1{,}0325^{15} - 1)}{325} =$$

$$= \frac{1000000\ (1{,}0325^{15} - 1.}{13}$$

За $1{,}0325^{15} = x$, биће $\log x = 15.\log 1{,}0325 = 15.\,0{,}0138990 = 0{,}208350$, а $x = N\overline{0{,}208350} = 1{,}61566045$, те је

$$s = \frac{1000000 \cdot 0{,}61566045}{13} = \frac{615660{,}45}{13} = 47358{,}50 \text{ дин.}$$

3) *Даш је кайишал 15000,— дин. йод иншерес на иншерес са $5^0/_0$ (р. а), йа се крајем сваке године улаже још йо 2000,— дин. На коју суму нарасше кайишал йосле 10 ~~го~~ година са свима улозима заједно?*

Овде је $K = 15000$ $q = 1{,}05$, $a = 2000$,— и $n = 10$, те је целокупна уштеда:

$$У'_{(10)} = K_{(10)} + S'_{(10)} = 15000 \cdot 1{,}05^{10} + \frac{2000\ \ (1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05}.$$

За $1{,}05^{10} = x$, биће $\log x = 10 \log 1{,}05 = 10 \cdot 0{,}021189 = 0{,}211890$, а $x = N\overline{0{,}211890} = 1{,}628884 \ldots$ С тога је

$У'_{(10)} = 15000 \cdot 1{,}62888 + 40000 \cdot 0{,}628884 = 15 \cdot 1628{,}88 + 4 \cdot 6288{,}84 = 24433{,}20 + 25155{,}36 = 40588{,}56$ дин.

4) *Коју суму шреба улагаши у йочешку сваког семесшра йод иншерес на иншерес, да би смо за 10 год., са $10^0/_0$ (р.а) ушшедели 100000,— дин.?*

Овде је $S_{20} = 100000$.— $q = 1{,}05$ а $n = 20$, те је:

$$100000 = \frac{a \cdot 1{,}05\,(1{,}05^{20} - 1)}{0{,}05} = 21\,a(1{,}05^{20} - 1). \text{ Одавде је}$$

$a = \dfrac{100000}{21\,(1{,}05^{20} - 1)}$. За $1{,}05^{20} = x$, биће $\log x = 20 \log 1{,}05 = 20 \cdot 0{,}021189 = 0{,}423780$, а $x = N\overline{0{,}423780} = 2{,}65339$, те је

$$a = \frac{100000}{21 \cdot 1{,}65} = 2880{,}18 \text{ дин.}$$

5) *Колико година шреба улагаши у йочешку сваког йолугођа 2880,18 дин., са $10^0/_0$ (р.а), да би се ушшедило 100000,— динара?*

Овде је $S_{(n)} = 100000$,—, $a = 2880{,}18$ и $q = 1{,}05$, те је

$$100000 = \frac{2880{,}18 \cdot 1{,}05\ (1{,}05^n - 1)}{0{,}05} = 2880{,}18 \cdot 21\ \ (1{,}05^n - 1),$$

$100000 = 60483{,}78 \cdot 1{,}05^n - 60483{,}78,$

$160483{,}78 = 60483{,}75 \cdot 1{,}05^n.$

Brozović

Логаритмовањем ове једначине имамо:

$$\log 160483{,}78 = \log 60483{,}75 + n \log 1{,}05.$$

Одавде је $n = \frac{\log 160483{,}78 - \log 60483{,}75}{\log 1{,}05} = 20$ сем. $= 10$ год.

2045

§ 159. ~~**Рачун ренте.**~~ Под рентом разумемо сталан приход r, годишњи или семестрални, који прима нека личност, која је сама, или неко други, за њен рачун уложила у новчани завод раније под интерес на интерес суму K. Право на примање ренте може се стећи и улагањем сталне суме a у току n периода (година или семестара), па после престанка улагања, настаје примање ренте r у току m година. Ако се уплата за право на ренту изврши наједанпут, онда се таква уплата K зове *миза* или *садашња вредност ренте*. Ако се право на ренту стиче сталним претходним уплаћивањем суме a у току n година, онда се таква уплата зове *премија*. Ако се рента прима крајем периоде, онда се она зове *декурзивна*, а ако се прима у почетку сваке периоде, назива се *антиципативна рента*. Према трајању ренте, може она бити *привремена*, *доживотна* и *вечита*. Доживотна рента зависи од трајања живота њеног сопственика и у вези је с рачуном вероватноће, те се са овом врстом ренте нећемо ни бавити.

a) *Садашња вредност декурзивне ренте.* Ако уложимо суму K са $p\%$ (р. а), да бисмо стекли право на ренту r за n година, онда крајња вредност $K_{(n)}$ уложеног капитала K мора бити једнак суми $S'_{(n)}$ свију примљених рента у току n година. Биће, дакле, $K_{(n)} = S'_{(n)}$, или

$$K \cdot q^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ а одавде је } K = \frac{\mathbf{r(q^n - 1)}}{\mathbf{q^n(q - 1)}} \quad \text{(I)}$$

b) *Садашња вредност антиципативне ренте.* Код ове ренте биће $K_n = S_{(n)}$ или $Kq^n = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$, а $K = \frac{rq(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$ (II)

c) Ако се на ренту r за m година стиче право улагањем сталне суме a у току претходних n година, онда је:

α) За улагање премија почетком године и примање ренте почетком године:

$$\frac{aq(q^n - 1)}{q - 1} q^m = \frac{rq(q^m - 1)}{q - 1}, \text{ или } \mathbf{a(q^n - 1)\, q^m = r(q^m - 1)} \quad \text{(III)}$$

β) За улагање премија почетком године и примање ренте крајем године:

$$\frac{aq\,(q^n-1)}{q-1}q^m=\frac{r\,(q^m-1)}{q-1}, \text{ или } \mathbf{aq^{m+1}(q^n-1)=r\,(q^m-1)} \quad \text{(IV)}$$

γ) За улагање премија крајем године а примање ренте почетком године:

$$\frac{a\,(q^n-1)}{q-1}q^m=\frac{rq\,(q^m-1)}{q-1}, \text{ или } \mathbf{a\,(q^m-1)\,q^{m-1}=r\,(q^m-1)} \quad \text{(V)}$$

δ) За улагање премије крајем године и примање ренте крајем године:

$$\frac{a\,(q^n-1)}{q-1}q^m=\frac{r\,(q^m-1)}{q-1}, \text{ или } \mathbf{a\,(q^n-1)\,q^m=r\,(q^m-1)},$$ у ком се случају добија образац као за случај под α.

d) Вечита рента, т. ј. рента која траје вечито, једнака је годишњем интересу мизе *K*. Ово увиђамо из једначине:

$$K\cdot q^n=\frac{r\,(q^n-1)}{q-1}$$

Ако ову једначину поделимо са q^n, добијамо:

$K=\frac{r\,(q^n-1)}{q^n\,(q-1)}=\frac{r\left(1-\frac{1}{q^n}\right)}{q-1}$. Па како је $n=\infty$, то је $q^n=\infty$, а $\frac{1}{q^n}=0$. Стога је $K=\frac{r}{q-1}$. Одавде је $r=K\,(q-1)=Kq-$ $-K=i$.

Примери. 1) *Наћи садашњу вредност декурзивне ренте од 6000,— дин. годишње, која се плаћа 10 година, кад је интересна стопа 8%.*

Овде је $r=6000$, $n=10$ и $q=1{,}08$, те је $K\cdot 1{,}08^{10}=\frac{6000\,(1{,}08^{10}-1)}{0{,}08}$. За $1{,}08^{10}=y$, биће $\log y=$ $=10\log 1{,}08=10\cdot 0{,}033424=0{,}334240$, а $y=N\overline{0{,}334240}=$ $=2{,}158935$. Стога је $K=\frac{6000\cdot 1{,}158935}{2{,}158935\cdot 0{,}08}=\frac{600000\cdot 1158935}{2158935\cdot 8}=$ $=40260{,}65$ дин.

2) *Колика је годишња декурзивна рента обезбеђена, ако се уложи 150000,— дин. са 6°/₀ (p·a) за 30 година?*

Овде је $K=150000$,— $q=1{,}06$, $n=30$, те је $150000\cdot 1{,}06^{30}=\frac{r\,(1{,}06^{30}-1)}{0{,}06}$, а $r=\frac{150000\cdot 1{,}06^{30}\cdot 0{,}06}{1{,}06^{30}-1}$.

За $1{,}06^{30}=x$, биће $\log x=30\log 1{,}06=30\cdot 0{,}025306=$ $=0{,}759180$ а $x=N\overline{0{,}759180}=5{,}743546$. Стога је $r=\frac{150000\cdot 5{,}743546\cdot 0{,}06}{4{,}743546}=10897{,}30$ дин.

3) *Антиципативна годишња рента од 6437,50 динара са 5,5% (р. а.) купљена је за 100 000,— динара. Колико година траје та рента?*

Овде је $K = 100000,—$, $r = 6437,50$ и $q = 1,055$, те је

$$100000 \cdot 1,055^n = \frac{6437,50 \cdot 1,055\,(1,055^n - 1)}{0,055}.$$

Заменом $1,055^n = x$ у овој једначини добијамо: $100000x = \frac{6437,50 \cdot 1055\,(x - 1)}{55}$, а одавде је $x = \frac{103 \cdot 211}{4133} = 1,055^n$.

Стога је:

$$n \log 1,055 = \log 103 + \log 211 - \log 4133, \text{ а}$$

$$n = \frac{\log 103 + \log 211 - \log 4133}{\log 1,055} = 31 \text{ год.}$$

4) *Неко уплаћује 30 година, у почетку сваке године 200,55 дин. у једну банку, која плаћа 4% интерес на интерес. Колику ће му ренту признати банка од почетка прве идуће године, па кроз 25 година?*

Овде је уплата $a = 200,55$ дин. $n = 30$ год., $q = 1,04$ и $m = 25$ год., те је

$$\frac{200,55 \cdot 1,04\,(1,04^{30} - 1)}{0,04} \cdot 1,04^{25} = \frac{r \cdot 1,04\,(1,04^{25} - 1)}{0,04}.$$

Одавде је $r = \frac{200,55\ (1,04^{30} - 1) \cdot 1,04^{25}}{1,04^{25} - 1}$

Пошто претходно израчунамо помоћу логаритама да је $1,04^{30} = 3,243398$ и $1,04^{25} = 2,665836$ и заменимо у горњем изразу, добијамо:

$$r = \frac{200,55\ .\ 2,243398\ .\ 2,665836}{1,665836};$$

$$\log r = \log 200,55 + \log 2,243398 + \log 2,665836 - \log 1,665836 =$$
$$= 2,302220 + 0,350906 + 0,425833 - 0,221632 = 2,857327;$$

$$\text{а } r = N\overline{2,857327} = 720,— \text{ дин.}$$

5) *Коју суму треба уплаћивати у почетку сваке године, а кроз 20 година, по $4\frac{1}{2}$%, да би се после тога времена могла примати антиципативна рента од 300 дин. у току 25 година?*

Овде је $n = 20$, $q = 1,045$, $r = 300$ дин. и $m = 25$, те је

$$\frac{a \cdot 1,045\ (1,045^{20} - 1)}{0,045} \cdot 1,045^{25} = \frac{300\ .\ 1,045\,(1,045^{25} - 1)}{0,045}.$$

Одавде је $a = \frac{300 \cdot (1{,}045^{25} - 1)}{(1{,}045^{20} - 1) \cdot 1{,}045^{25}} = \frac{300 \cdot 2{,}005434}{1{,}411714 \cdot 3{,}005434}$

$\log a = \log 300 + \log 2{,}005434 - \log 1{,}411714 - \log 3{,}005434 =$
$= 2{,}151675$, а $a = N\overline{2{,}151675} = 141{,}80$ дин.

6) *Неко улаже крајем године за првих 10 година по 400 дин., затим за даљих 10 година по 500 дин. и најзад за наредних 10 година по 600 дин. у новчани завод са $3^1/_2\%$ (р. а.) Колико година затим може да ужива декурзивну ренту од 1570,46 годишње?*

Једначина за решење овог задатка је:

$$\left[\frac{400\,(1{,}035^{10} - 1)}{0{,}035} \cdot 1{,}035^{20} + \frac{500\,(1{,}035^{10} - 1)}{0{,}035} \cdot 1035^{10} + \right.$$
$$\left. + \frac{600\,(1{,}035^{10} - 1)}{0{,}035}\right] \cdot 1035^{m} = \frac{1570{,}46\,(1{,}035^{m} - 1)}{0{,}035}, \text{ или}$$

$100\,(1.035^{10} - 1)\,(4 \cdot 1{,}035^{20} + 5 \cdot 1{,}035^{10} + 6) \cdot 1{,}035^{m} =$
$= 1570{,}46\,(1{,}035^{m} - 1)$.

Одавде је:

$$1{,}035^{m} = \frac{1570{,}46}{707{,}71}, \text{ а } m = \frac{\log 1570{,}46 - \log 707{,}71}{\log 1{,}035} = 24 \text{ год.}$$

Узми: $1{,}035^{20} = 1{,}989789$ и $1{,}035^{10} = 1{,}410599$.

§ 160. **Амортизација дугова.** Под *ануитетом* разумемо стални улог a, који се уплаћује у неком новчаном заводу или конзорцији банака у току n периода у намери, да се учињени зајам K, са р %, поништи (амортизује, умртви, избрише — од француске речи *amortir*). Сваки ануитет садржава два дела један његов део, звани *отплата*, или амортизациона квота служи за смањивање (отплаћивање) учињеног дуга K, а други део служи за исплату интереса. Па како оба дела увек дају стални годишњи ануитет, то отплате поступно расту, а интереси поступно опадају. Прегледна табела, из које се види стање дуга, величина појединих интереса и величина појединих отплата у току n периода отплаћивања зајма, зове се *амортизациони план*.

Зајам од K динара, са $p\%$ (р. а.), има се амортизовати за n година ануитетом a. Кад се зајам не би амортизовао, нарастао би на $K_{(n)} = K \cdot q^n$. Али зајам се отплаћује сталним ануитетима a за n година са истима процентом р%. Збир крајњих вредности свих ануитета са интересом на интерес биће $S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$. Како се зајам има тим ануитетима поништити, мора дакле бити: $K_{(n)} = S$ или $Kq^n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ а одавде је ануитета $= \frac{Kq^n (q - 1)}{q^n - 1}$.

Примери. 1) *Којим се ануитетом може одужити зајам од 10000,— дин. за 5 год. са 8⁰/₀ (р. а.) Начинити амортизациони план.*

$$10000 \cdot 1{,}08^5 = \frac{a(1{,}08^5 - 1)}{0{,}08}$$

Одавде је $a = \frac{10000 \cdot 1{,}08^5 \cdot 0{,}08}{1{,}08^5 - 1} = \frac{10000 \cdot 1{,}469333 \cdot 0{,}08}{0{,}469333}$

$x = 1{,}08^5$,
$\log x = 5 \log 1{,}08$
$= 5 \cdot 0{,}033424$
$= 0{,}167120$,
$x = N\overline{0{,}167120} = 1{,}469333$

$= \frac{14693{,}33 \cdot 0{,}08}{0{,}469333} =$

$= \frac{1469333 \cdot 800}{469333} = 2504{,}55$

Амортизациони план биће:

$a = 2504{,}55$

n	д у г	8⁰/₀ инт.	отплата
1	10000,—	800,—	1704,55
2	8295,45	663,64	1840,91
3	6454,54	516,36	1988,19
4	4566,35	357,31	2147,24
5	2319,11	185,53	2319,02

Свега: 9999,91 = 10000,—

2) *Који се зајам може одужити за 5 година ануитетом $a = 2504{,}55$ са 8⁰/₀ (р.а)?*

Из $K.1{,}085^5 = \frac{2504{,}55\ (1{,}08^8 - 1)}{0{,}08}$ биће

$$K = \frac{2504{,}55 \cdot 0{,}469333}{1{,}469333 \cdot 0{,}08} = \frac{250455 \cdot 469333}{1469333 \cdot 8};$$

$\log K = \log 250455 + \log 469333 - \log 146933 - \log 8 = 5{,}398740 + 5{,}671480 - 6{,}167120 - 0{,}903090 = 11{,}070220 - 7{,}070210 = 4$, а $K = 10000$,— дин.

3) *За које се време зајам од 10000,— дин. са 8⁰/₀ (р . а) може одужити ануитетом од 2504,55 дин.?*

Овде је: $10000 \,.\, 1{,}08^n = \frac{2504{,}55\ (1{,}08^n - 1)}{0{,}08}$

Одавде је $1{,}08^n = \frac{2504{,}55}{1704{,}55} = \frac{250455}{170456} = \frac{50091}{34091}$; $n \log 1{,}08 =$

$\log 50091 - \log 34091$, a $n = \frac{\log 50091 - \log 34091}{\log 1{,}08} =$

$= \frac{4{,}699760 - 4{,}532640}{0{,}033424} = \frac{0{,}167120}{0{,}033424} = \frac{167120}{33424} = 5$ год.

Напомена. — Амортизационе квоте за поједине године можемо наћи израђујући план отплаћивања, као код првог задатка. Али ове отплате можемо наћи и овим путем. Ако амортизационе квоте означимо са $b_1, b_2, b_3 \cdots b_n$, а ануитет са a, онда су интереси појединих година: $a - b_1$, $a - b_2$, $a - b_3$, $\cdots a - b_n$, а остаци дуга биће: $K - b_1$, $K - b_1 - b_2$, $K - b_1 - b_2 - b_3$, и т. д. Како је ануитет за ма коју годину увек једнак збиру интереса и отплате дотичне године, то су ануитети:

За 1. годину $a = \frac{Kp}{100} + b_1$

„ 2. „ $a = (K - b_1)\frac{p}{100} + b_2$

„ 3. „ $a = (K - b_1 - b_2)\frac{p}{100} + b_3$

„ 4. „ $a = (K - b_1 - b_2 - b_3)\frac{p}{100} + b_4$

— — — — — — — — — — — — — —

Узастопним одузимањем ових једначина добијамо:

$$b_2 = b_1 + \frac{b_1 p}{100} = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_1 q;$$

$$b_3 = b_2 + \frac{b_2 p}{100} = b_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_2 q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 + \frac{b_3 p}{100} = b_3\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_3 q = b_1 q^3;$$

— — — — — — — — — — — — — —

Ма која амортизациона квота, $b_{(r)}$, према овоме биће:

$$\mathbf{b_{(r)} = b_1 \cdot q^{r-1}} \quad (1)$$

Како је збир свију отплата једнак зајму, то је

$K = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_n$, или

$K = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots\ldots + b_1 q^{n-1}$, или

$K = b_1 (1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1})$, или

$K = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$. Одавде је $b_1 = \frac{K(q - 1)}{q^n - 1}$ (2),

Који нам образац пружа могућност за израчунавање прве отплате b_1 непосредно из зајма а затим помоћу обрасца (1) и ма коју отплату $b_{(r)}$. Ако желимо да знамо стање дуга после m година, треба претходно да нађемо збир отплата за m година $S_{(m)} = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_m = b_1 + b_1 q + b_2 q^2 + \ldots\ldots + b_1 q^{m-1} = b_1 (1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{m-1}) =$

$=\frac{b_1(q^m-1)}{q-1}$, а остатак дуга после m година биће $D_m = = K - S_m = K - \frac{b_1(q^m-1)}{q-1}$.

§ 161. **Зајмови подељени на обвезнице.** Обично велики зајмови, ради њиховог лакшег остварења, подељени су на мање делове, на обвезнице или облигације, чија је номинална вредност 100, 500, 1000,— и више динара. Ови зајмови, које обично држава, општина, или какав велики новчани завод гради, отплаћују се поступним извлачењем појединих обвезница, годишње или семестрално, а које се после извлачења за одређени рок подносе на исплату, било по њиховој номиналној вредности, било са каквом великом ажијом. Број извучених обвезница сваке доцније године расте пошто се са сваком годином отплата дуга повећава, а интерес се смањује. Како је номинална вредност обвезнице округла сума, то се планом отплаћивања предвиђа унапред број извучених односно исплаћених обвезница појединим роковима који број мора бити цео.

Нека је начињени зајам од K динара, подељен на m обвезница, номиналне вредности од ω динара, који треба да се исплати за n година са $p\%$ једнаким ануитетима a. Тада је $K = m\omega$, а $a = \frac{Kq^n(q-1)}{q^n-1}$. Ако број обвезница којима се овај зајам отплаћује на крају појединих година означимо са $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$, онда је $m = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$, а поједини ануитети биће:

За прву годину $a = \frac{Kp}{100} + x_1\omega$;

„ другу „ $a = \frac{(K - x_1\omega)p}{100} + x_2\omega$;

„ трећу „ $a = \frac{(K - x_1\omega - x_2\omega)p}{100} + x_3\omega$;

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Поступним одузимањем ових једначина добијамо:

$$x_2 = x_1 + \frac{x_1 p}{100} = x_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_1 q;$$

$$x_3 = x_2 + \frac{x_2 p}{100} = x_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_2 q = x_1 q^2;$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Према овоме, број обвезница r-те године биће $x_{(r)} = x_1 q^{r-1}$, а n-те године $x_n = x_1 q^{n-1}$.

Горње једначине показују нам да је лако наћи број обвезница друге и осталих година, ако знамо њихов број прве године. Број обвезница ове године налазимо на следећи начин. —

Како је $m = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$, то је

$m = x_1 = x_1 q = x_1 q^2 + x_1 q^3 + \cdots + x_1 q^{n-1}$, или

$m = x_1 (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1})$, или

$m = \frac{x_1 (q_n - 1)}{q - 1}$, одавде је $x_1 = \frac{m (q - 1)}{q^n - 1}$.

Пример. Зајам од 1 000 000,— дин. са 9% (p·a), подељен на 1000 обвезница, отплатити за 6 година. Израдити план отплаћивања.

Овде је $m = 1000$, $\omega = 1000$, $a = \frac{1000000 \cdot 1{,}09^6 \cdot 0{,}09}{1{,}09^6 - 1} =$

$= \frac{1000000 \cdot 1{,}677 \cdot 0{,}09}{0{,}677} = \frac{1677 \cdot 90000}{677} = 222919{,}78$ дин.

Тако је:

	тачно:	заокругљено:
$x_1 = \frac{1000 \cdot 0{,}09}{1{,}09^6 - 1} = \frac{90}{0{,}679} = \frac{90000}{679}$	$= 132{,}55$	$= 133$
$x_2 = 132{,}55 \cdot 1{,}09 =$	$= 144{,}48$	$= 145$
$x_3 = 144{,}48 \cdot 1{,}09$	$= 157{,}48$	$= 158$
$x_4 = 157{,}48 \cdot 1{,}09$	$= 171{,}65$	$= 172$
$x_5 = 171{,}65 \cdot 1{,}09$	$= 187{,}09$	$= 187$
$x_6 = 187{,}09 \cdot 1{,}09$	$= 204{,}92$	$= 205$
	Свега обвезница:	1000

План отплаћивања биће:

$a = 222919{,}78$

Год.	Дуг	Број обвезница за исплату	9% дек. инт.	Отпл.	Потребна сума
1.	1000000	133	90000	133000	223000
2.	867000	145	78030	145000	223030
3.	722000	158	64980	158000	222980
4.	564000	172	50760	172000	222760
5.	392000	187	35280	187000	222280
6.	205000	205	18450	205000	223450
Свега		1000	337500	1000000	1337500

§ 162. **Задаци за вежбу.**

1) На коју суму нарасте капитал од 12750,— дин. дат под интерес на интерес за 20 год. са 8% (р. а.), кад је капиталисање а) годишње, b) полугодишње.

2) На коју суму нарасте капитал од 15000, дин. кад је најпре 10 година био по 6% (р. а.) а затим још 8 година са 8% (р. а.)?

3) На коју суму нарасте капитал од 50000,— дин. са $7\frac{3}{4}$% (р. а.) за 12 год. 8 мес. и 20 дана, кад је капиталисање а) годишње, b) семестрално?

4) На коју суму нарасте капитал од 10000,— дин. од 1. августа 1870. год. до 1. марта 1910. год. дат са 6% (р. а.), кад је капиталисање годишње?

5) Колико ће донети интерес на интерес капитал од 25000,— дин. дат под интерес са 10% (р. а.) за 12 год., кад је капиталисање а) годишње, b) сместрално, c) тромесечно?

6) При полугодишњем капиталисању, са 9% (р. а.), колики ће интерес на интерес донети капитал од 20000, за 18 семестара?

7) Капитал од 12000,— дин. дат је под интерес на интерес са 12% (р. а.), за 56 тромесечја. На коју је суму нарастао и колико износи интерес на интерес, кад је капиталисање а) семестрално, b) тромесечно?

8) Неки град има данас 22000 становника. Колико ће бити становника у том граду после 20 година, ако је годишњи прираштај $1\frac{1}{2}$%?

9) Неки забран има данас 10755 m^3 дрва. Колико ће m^3 дрва бити у томе забрану после $15\frac{1}{2}$ година, ако је годишњи прираштај 8,5%?

10) Нека држава има данас 25,000,000 становника. Колико ће бити становника у њој после 10 година, ако је годишњи прираштај 0,75%?

11) Капитал од 1000 дин. при полугодишњем капиталисању за 16 година донео је интерес на интерес 1382,40 дин.; под којим је процентом (р. а.), био капитал под интерес на интерес?

12) Са којим је процентом (р. а.) био капитал од 10000 дин., кад је за 15 година, при полугодишњем капиталисању, постао двапут већи.

13) Који капитал нарасте за 10 година на 45000,— дин., са процентом 9% (р. а.).

14) За колико ће година један динар са $5^1/_2\%$ (р. а.) донети интерес на интерес 1,25 дин.?

15) Неко има да плати после 10 година 80000,— дин. Са којом се сумом може данас да одужи овај дуг, ако је проценат $6^3/_4\%$?

16) Нека сума дата под интерес на интерес порасла је за 20 година на 50750,— дин. За првих 12 година проценат је био 8% (р. а.) а за остало време 9% (р. а.). Колика је била основна сума?

17) За куповину неког имања била су два купца. Први је нудио 120000,— динара с погодбом, да ту суму положи после $2^1/_2$ године, а други је нудио 39000 одмах да исплати а 75000 после 2 године. Која је понуда боља, кад се новац може дати по $4^1/_2\%$?

18) За које време 10000,— динара $6^1/_2\%$ (р. а.) постају 70000,— динара при a) годишњем капиталисању, b) полугодишњем капиталисању?

19) Сада има дрва у неком забрану 76000 m^3; колико година не би требало сећи забран, па да у њему буде дрва 12500 m^3, ако је годишњи прираштај дрва $2^3/_4\%$?

20) Колико времена треба да стоје под интересом на интерес 12546,— динара са $4^1/_2\%$ (р. а.), па да се добије сума 17596,25 динара?

21) Колико година треба да стоји неки капитал под интерес на интерес са $4^1/_2\%$ (р. а.), да би порастао онолико, колико порасте за 8 година са $6^3/_4\%$?

22) За једну кућу има три понуде. А нуди 260000,— динара одмах, В 310000,— динара после 4 године, а С нуди 54000,— дин. после 3, а толико исто после 6 година. Која је понуда најбоља, ако се новац може дати под интерес на интерес са 5% (р. а)?

23) Неко лице уложи у банку извесну суму новаца са $^1/_2\%$ (р. а); после 7 година уложи исту суму, а после даљих година примио је из банке 3965,96 дин. По колико је уложио у оба маха?

24) Који капитал за 15 година, са $3^1/_2\%$ (р. а) нарасте на исту суму, на коју нарасте 7600,— динара за 11 година са % (р. а)?

25) Збир од два капитала износи 11000,— дин. Један је дат под интерес на интерес са $3^1/_2\%$ (p. a), а капиталише се годишње, а други је дат са 4% (p. a), али се капиталише семестрално. После 16 година оба капитала износе 19976,75 динара. Колико износи сваки капитал?

26) Разлика од два капитала је 1000,— дин. Већи је био уложен по 4% (p. a), а мањи по $4^1/_2\%$ (p. a). После 20 година први капитал постаје два пут већи од другог. Наћи првобитне капитале.

27) Са којим процентом треба дати 18000,— дин., да би за 5 година постао 22500,— дин., ако се капиталише a) годишње, b) семестрално, c) четворомесечно, d) тромесечно, e) двомесечно, f) месечно?

28) Једна облигација од 3750, — дин., чији је рок 15. јуна 1927. године, исплаћена је 1. августа 1920. године са шконтом од 403,— дин. Наћи годишњи проценат.

29) Под којим процентом је дат неки капитал, који за 24 године постаје три пута већи, ако се капиталисање врши a) годишње, b) семестрално?

30) Један је дао 9300,— динара са $3^1/_2\%$ (p. a), а други 7200,— динара. После 18 година обојица имају једнаке суме. Под којим процентом је дат други капитал?

31) У неком граду било је: 1890. год. 34188 лица, 1895. год. 36982 лица, 1900. год. 39356 лица и 1905. год. 44388 лица. Колики су проценти прираштаја становника за поменуте интервале од 5 година?

32) Једно лице уложило је 4207,75 динара по $5^1/_2\%$ а друго 4320,— дин са 3% (p. a). После колико ће година прво лице имати *2 пут већи* капитал од другог?

33) Неко жели да кроз 15 година уштеди 60000,— дин.; колико би морао улагати почетком, а колико крајем године, кад се на улоге рачуна 6% интерес на интерес?

34) Отац уложи код Држ. хипотек. банке 2000,— дин. оног дана кад му се кћи родила, а затим је продужио годишње улагање сваког рођен дана његове ћерке по 2000,— дин., док није кћи навршила 21 годину. Којом сумом располаже његова кћи после 21 године, ако Држ. хипотекарна банка плаћа на улоге 6% (p. a), а интерес капиталише семестрално?

35) Отац улаже у штедионицу за своје дете, коме је било 6 година, почетком сваке године по 1000,— дин.; којом

ће сумом располагати дете, кад му буде 26 година, кад је интересна стопа 6% (р. а), а капиталисање се врши а) годишње b) полугодишње?

36) Колико треба улагати почетком сваке године, под интерес на интерес са 8% (р. а) па да се на крају 20 године прими 49421— дин.?

37) Колико треба улагати при крају сваке године, да би се уштедило у току 30 година са 6% (р. а) 29916 дин.?

38) За колико се година може уштедети капитал од 5865,65 дин., ако се почетком сваке године улаже по 1000.— дин. у завод који плаћа 7%?

39) Неко се осигура на 20000,— дин. и тога ради плаћа почетком сваке године, а у току 24 године, по 720,— дин. премије са 4% (р. а) Да ли друштво губи или добија?

40) Један је улагао код штедионице, почетком сваког семестра, а кроз 10 година по 500,— дин. са 6% (р. а). Којом ће сумом располагати на крају 10 године, ако се капиталисање врши семестрално?

41) Колико треба улагати почетком сваког семестра под интерес на интерес, са 7% (р. а), па да се на крају 10 године прими 20000,— дин., ако се капиталисање врши семестрално.

42) Неко улаже у почетку сваке године по 450,— дин. са 4% (р. а). После колико ће година његова уштеђевина бити 10000,— дин.?

43) Неки је човек наследио крајем 1921 године 240000,— дин.; он заложи тај новац у штедионицу, па је крајем сваке године додавао тој суми још по 3000,— дин. Кад штедионица плаћа $4^3/_4\%$ (р. а), колико је примио крајем 1927. год.?

44) Неко је наследио крајем 1915 год. 240000,— дин.; он уложи тај новац у штедионицу, па је крајем сваке године узимао по 3000,— дин. Колико ће му новаца остати крајем 1930 год., кад штедионица плаћа 6% (р. а), а интерес капиталише а) годишње, b) семестрално?

45) Неко је дао у почетку 1915. год. извесну суму на штедњу, па је крајем године узимао по 800,— дин. У почетку 1927 год. примио је 20000,— дин. Коју је суму уложио кад је проценат 4%?

46) Неко уложи на свој 30-ти рођен дан 15000,— дин. у штедионицу која плаћа $3^3/_4\%$ (р. а). Колико би морао до-

давати у почетку сваке следеће године, да би могао примити 60000,— дин. о своме 60 рођендану?

47) Неки је капитал дат под интерес на интерес по 6% (р. а). Који проценат тога капитала треба додавати крајем сваке године, да би капитал постао 5 пута већи после 15 година?

48) Неко је унео у банку 10000, — дин. по 4%, а после једне године почео је да узима годишње по 1000,— дин. После колико година ће изузети своју готовину?

49) У једној вароши има данас 13000 становника, а прираштај годишњи је $2\frac{1}{2}\%$. Колико ће становника бити у тој вароши после 25 година, ако се из ње годишње исељава по 180 становника?

50) Неко остави наследство од 600000,— дин. под интерес на интерес са $4\frac{1}{2}\%$ (р. а). Свака 3 месеца узима се по 7000,— дин. за васпитање његово 6-ро деце. После 8 година остатак наследства подељен је на једнаке делове међу децу. Колико добива свако дете, ако се капиталисање врши тромесечно?

51) Колика је садашња вредност антиципативне ренте од 1500,— дин., која би се примала 20 година, рачунајући 8%(р. а)?

52) Колико треба уложити са $4\frac{1}{2}\%$ (р. а) интерес на интерес, па да се кроз 25 година прима декурзивна рента од 3000,— дин.?

53) Колико треба улагати са 5% (р. а) интерес на интерес кроз 6 година, почетком сваке године, па да се за идућих 10 година прима декурзивна рента од 1000,— дин.?

54) Колико треба улагати са 7% (р. а) интерес на интерес кроз 6 година, почетком сваке године, па да се за идућих 8 година прима антиципативна рента од 3000,— дин.?

55) Колико треба улагати крајем сваке године са 7% (р. а.) под интерес на интерес за 10 година, па да се за идућих 5 година прима декурзивна рента 2000,— дин.?

56) Ако се 10 година улаже под интерес на интерес, почетком сваке године, по 1000,— дин. са 12% (р. а.), колика би се декурзивна рента могла примати идућих 5 година?

57) Ако се улаже почетком сваке године, за 12 година, са 9% (р. а.) по 2000,— дин. под интерес на интерес, колика би се антиципативна рента могла примати почев од 13 године а за 8 година?

58) Неко је уложио 6000,— дин. са 6% (р. а.) интерес на интерес; колику би декурзивну ренту могао примати за 20 година?

59) Да би се за 20 наредних година уживала декурзивна рента од 3000,— дин. годишње; колико је требало пре 10 година уложити под интерес на интерес са $5\frac{1}{2}$% (р. а.)?

60) Уложено је 19797 дин. са 5% (р. а) под интерес на интерес; колико би се година могла примати декурзивна рента од 2000,— динара?

61) Неко наследи 22500 дин.; он ту суму да под интерес на интерес, с тим да крајем сваке године узима ренту од 1500,— дин., док цео капитал не потроши. Колико ће година примати ренту, кад је проценат 5%?

62) Неко је уплатио 36000,— дин. за декурзивну ренту од 1628,14 дин. Колико година има да траје ова рента, ако је проценат $3\frac{3}{4}$% (р. а.)?

63) У једну банку, која плаћа 4% (р. а.), уложи неко 8000,— дин. с погодбом да му се тек после 8 година почне исплаћивати почетком сваке године рента од 865,35 дин. Колико ће година трајати та рента?

64) Неко хоће своју декурзивну годишњу ренту од 3000,— дин., коју би примао 30 година, да замени већом декурзивном рентом коју би примао 25 година. Колика би била друга рента, ако је проценат 6% (р. а.)?

65) Рента од 6000,— дин., која би имала да се прима 25 година почетком сваке године, није примана 10 првих година. Колика ће сад бити годишња рента за наредних 15 година, ако је проценат 5%?

66) Антиципативна рента од 1000,— дин., која би се примала 24 године, хоће да не исплати уједанпут сумом од 24000,— дин. После колико година ће бити њена садашња вредност толика, ако је проценат $3\frac{3}{4}$% (р. а)?

67) Кад се 15 година улаже по 500 дин. годишње почетком сваке године са 4% (р. а), колико се година после тога може примати декурзивна рента од 800 дин.?

68) Неко је улагао у току 20 година, почетком сваке године по 1000,— дин. са $4\frac{1}{2}$% (р. а), а 15 година после тога примио је атиципативну ренту. Колика је та рента?

69) Зајам од 50000,— дин. са 10% (р. а) интереса на интерес отплатити за 6 година једнаким ануитетима. Начинити план отплаћивања.

70) Отплатити једнаким ануитетима за 10 година зајам од 300000,— дин. са 6% (р. а.) Колики је годишњи ануитет, прва отплата b_1 и седма отплата b_7?

71) Наћи девету отплату зајма од 30000,— дин. начињен са 6% (р. а) за 15 година у једнаким ануитетима.

72) Зајам од 80000,— динара отплатити за 12 година са 3% (р. а). Наћи отплаћени капитал за првих 5 год. и остатак дуга после 5 година.

73) Који се зајам са 4% (р. а) може отплатити ануитетом од 25000,— дин. за 5 година (за нађени зајам начинити план отплаћивања)?

74) За које ће се време отплатити зајам од 20000,— динара са 4% (р. а) ануитетом од 1471,60 динара?

75) За које ће се време отплатити зајам од 5000,— дин. са 8% (р. а) ануитетом од 510 дин?

76) За зајам, који је отплаћен за 5 год.; са $6\frac{1}{2}$% (р. а), плаћено је на име четврте отплате 169,70 дин.; који је то зајам?

77) Начинити амортизациони план за зајам од 600000,— дин., са 7% (р. а) интереса, подељен на обвезнице номинале 500 динара, који треба отплатити за 6 година, исплаћујући обвезнице по номинали.

78) Начинити план отплаћивања за зајам од 300000,— дин. са 4% (р. а) подељен на обвезнице номинале 25,— дин., који треба отплатити за 10 година.

79) Неко је дужан 24000,— динара. Колики ануитет треба да плаћа кад је погодба да се за 5 година дуг сведе на половину и кад је проценат 5% (р. а)?

80) Отплаћивање дуга од 300000,— динара са 9% (р. а) треба да почне 10 година доцније и да се сврши у 30 једнаких годишњих ануитета. Колики су ти ануитети?

$$P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1\,;$$
$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\,;$$
— — — — — — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — — — — — —
$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$ т. ј.

број пермутација од **n** *елемената раван је производу свих целих бројева од 1 закључно до* **n**.

Израз: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)(n-1) \cdot n$ означава се краће $n!$ а изговара се „**n** *факторијел*". Према овоме је $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ и т. д.

Примери; 1) На колико се начина могу разместити 8 лица око округлог стола?

Овде $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$.

2) Колико се пермутација могу саставити од слова речи Београд?

$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Напомена. Образац $P_n = n \cdot P_{n-1}$ можемо написати: $n! = n \cdot (n-1)!$. Одавде је $(n-1)! = \frac{n!}{n}$. За $n = 1$ биће $0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$. Према томе, нула факторијел (0!) узима се у математици као јединица.

II) **Пермутације с понављањем**. То су пермутације у којима има једнаких елемената. Таква је пермутација aabbc. Дати елементи нису овде сви различити.

a) *Грађење пермутација* с понављањем врши се, када претходно једнаке елементе снабдемо индексима, затим састављамо све пермутације без понављања, сматрајући све дате елементе као различите, и најзад необзирући се на индексе, бришемо све једнаке (поновљене) пермутације.

Тако,

1) Пермутације од елемената: a, a, b и c са индексима јесу:

$a_1\,a_2\,b\,c$	$a_2\,a_1\,b\,c$	$b\,a_1\,a_2\,c$	$c\,a_1\,a_2\,b$
$a_1\,a_2\,c\,b$	$a_2\,a_1\,c\,b$	$b\,a_1\,c\,a_2$	$c\,a_1\,b\,a_2$
$a_1\,b\,a_2\,c$	$a_2\,b\,a_1\,c$	$b\,a_2\,a_1\,c$	$c\,a_2\,a_1\,b$
$a_1\,b\,c\,a_2$	$a_2\,b\,c\,a_1$	$b\,a_2\,c\,a_1$	$c\,a_2\,b\,a_1$
$a_1\,c\,a_2\,b$	$a_2\,c\,a_1\,b$	$b\,c\,a_1\,a_2$	$c\,b\,a_2\,a_1$
$a_1\,c\,b\,a_2$	$a_2\,c\,b\,a_1$	$b\,c\,a_2\,a_1$	$c\,b\,a_2\,a_1$

Ако у овим пермутацијама претходно избацимо индексе и изоставимо сваку поновљену пермутацију, добијамо тражене пермутације од датих елемената:

a a b c	b a a c	c a a b
a a c b	b a c a	c a b a
a b a c	b c a a	c b a a
a b c a		
a c a b		
a c b a		

2) Пермутације од елемената: 1, 2, 3 и 3 јесу:

1 2 3 3	2 1 3 3	3 1 2 3
1 3 2 3	2 3 1 3	3 1 3 2
1 3 3 2	2 3 3 1	3 2 1 3
		3 2 3 1
		3 3 1 2
		3 3 2 1

b) *Број пермутација* с понављањем је мањи од броја пермутација без понављања, као што се види из претходна два примера. Код ових примера имамо 4 елемента од којих су два једнака. Кад би били сви елементи различити, онда би број пермутација био $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Како су два елемента једнака, то је број пермутација понављањем $2!$ пута мањи од $4!$, јер се свака пермутација понавља онолико пута колико се пермутације могу начинити од једнаких елемената. Стога је број пермутација с понављањем од 4 елемената, од којих су 2 једнака

$$\frac{4!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 4,$$

што се види из горња два примера.

Из елемената: a, a, a и b можемо начинити пермутације с понављањем

$$\frac{4!}{3!} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 4,$$

а те су пермутације: aaab, aaba, abaa baaa. Све остале пермутације су једнаке са овим пермутацијама и као такве изостављамо.

Од елемената: 1,1 и 2 имамо пермутације:

112, 121 и 211,

а до њиховог броја 3 долазимо по обрасцу $\frac{3!}{2!} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3}{1 \,.\, 2} = 3.$

Уопште, ако имамо n елемената, од којих су α међусобом једнаки, β међусобом једнаки, онда је општи образац за број свих пермутација с понављањем:

$$P^1{}_{\underset{\alpha,\ \beta}{n}} = \frac{n!}{\alpha!\,.\,\beta!}.$$

Примери: 1) На колико се разних начина могу распоредити 2 беле, 3 црвене и 4 плаве руже?

Овде је свега ружа 9, те је број пермутација

$$\frac{9}{2!\,.\,3!\,.\,4!} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 1260.$$

2) Колико има шестоцифрених бројева с цифрама 1, 1, 2, 2, 2 и 3?

Њихов је број $\frac{6!}{2!\,.\,3!} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2\,.\,3} = 60.$

3) Колики је број пермутација од слова речи „Тетово".

Овде је број пермутација $\frac{6!}{2!\,.\,2!} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2} = 180.$

§ 165. **Комбинације. I) Комбинације без понављања.** Комбинације су слогови у којима се не налазе сви дати елементи, већ по један, два, три и више елемената. Код комбинација не водимо рачуна о међусобном размештају елемената, већ само о њиховом избору. Према броју елемената у појединим слоговима, комбинације могу бити I, II, III, ... n-те класе (unioni, ambi, terni, quatarni, quinterni и т. д.). Ако у комбинацијама има само различитих елемената, онда имамо комбинације *без понављања*. Комбинације с понављањем биће оне у којима има једнаких елемената.

а) *Грађење комбинација.* За грађење комбинација постоје два начина: *постпуни* и *независни*.

1) *Поступним начином* градимо комбинације стварањем најпре комбинација прве класе, које су у ствари дати елементи, затим стварамо ambe везивањем uniona свима осталим вишим елементима, *terne* добијамо везивањем свију *amba* свима осталим вишим елементима, која нису у њима и т. д.

Тако, комбинације од елемената: *a*, *b*, *c*, *d* и *e* јесу:

$C^1(abcde) = a, b, c, d, e;$

$C^2(abcde) = ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de.$

$C^3(abcde) = abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.$

$C^4(abcde) = abcd, abce, abde, acde, bcde.$

$C^5(abcde) = abcde.$

2) *Независним начином* стварамо комбинације ма које класе, када за почетни слог узмемо онолико првих елемената по азбучном или природном реду, колики је редни број дотичне класе, а затим остале слогове стварамо поступном заменом сваког елемента с десне стране свима осталим вишим елементима, остављајући елементе с леве стране у непромењеном реду.

Тако, комбинације четврте класе од елемената:

1, 2, 3, 4, 5 и 6 јесу:

1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, 1345, 1346, 1356, 1456 2345, 2346, 2356, 2456, 3456.

b) *Број комбинација.* Број комбинација ма које r-те класе од *n* елемената, који се означава са C_n^r, добијамо на следећи начин:

Број комбинација прве класе од *n* елемената раван је броју елемената, те је

$$C_n^1 = n.$$

Ако сваку комбинацију прве класе вежемо са свима осталим вишим и нижим елементима, чији је број *n—1*, онда би број *amba* био *n* (*n*—1). Међутим, овај је број дупло већи од траженог, пошто оваквим везивањем добијамо по две једнаке *ambe* (ab и ba, bc и cb, и т. д.). Према томе тачни број амба је:

$$C_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Ако сада сваку комбинацију друге класе вежемо са свима осталим вишим и нижим елементима, чији је број *n* — 2, онда би број *terna* био $\frac{n\,(n-1)}{2}\cdot(n-2)$.

Међутим, овај је број три пута већи од траженог, пошто оваквим везивањем добијамо по три једнаке *терне* (abc, acb и bca; abd, adb и bda; acd, adc и cda; bcd, bdc и cdb и т. д.)

Стога је тачни број *terna* три пут мањи и износи

$$C^3_n = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Судећи истоветно нашли бисмо да је:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, \ldots.$$

и најзад

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots r}.$$

Разломак $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots r}$ означава се краће са $\binom{n}{r}$, а изговара се „*n над r*".

Тако, број комбинација из 5 елемената

За другу класу је $C^2_5 = \binom{5}{2} = \frac{5.4}{1.2} = 10;$

„ трећу „ „ $C^3_5 = \binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10;$

„ четврту „ „ $C^4_5 = \binom{5}{4} = \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5;$

„ пету „ „ $C^5_5 = \binom{5}{5} = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 1$, што се да̂ увидети и из примера из овога параграфа при стварању комбинација поступним начином.

Напомена. Израз $\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$, што се можемо уверити из ма ког посебног примера. Тако, a) за $n = 7$ и $r = 5$, биће: $\binom{7}{5} = \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4\ 5} = 21$ а $\binom{7}{7-5}$ или $\binom{7}{2} = \frac{7.6}{1.2} = 21$; b) За $n = 9$ и $r = 6$ биће; $\binom{9}{6} = \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4\ 5.6} = 84$, а $\binom{9}{9-6}$ или $\binom{9}{3} = \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84.$

Одавде изводимо закључак да је $C_n^r = C^{n-r}_n$ т. ј. *да је број комбинација* **r**-*ше класе од* **n** *елеменаша једнак броју комбинација* (*n-r*)-*ше класе од исшог броја елеменаша.* Ако у $C_n^r = C^{n-r}_n$ ставимо да је $r = o$, онда је $C_n^o = C^{n-o}_n = C_n^n = 1$, или, што је све једно: $\boxed{\binom{n}{o} = \binom{n}{n} = 1.}$

Тако, $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$; $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$; $\binom{9}{0} = \binom{9}{9} = 1$; и т. д.

II) Комбинације с понављањем.

а) *Грађење комбинација с понављањем* дâ се извршити опет *постуйним* и *независним* начином, као и комбинације без понављања.

1) *Постуйним начином* стварамо најпре комбинације прве класе, које су у ствари дати елементи; затим стварамо *ambe*, везивањем сваког *uniona* самим собом и са свима осталим вишим елементима; *terne* добијамо из *amba*, кад се први елеменат веже са свима *амбама*, затим други елеменат веже са амбом у којој се налази само тај елеменат и са свима осталим амбима после те амбе, затим трећи елеменат веже са амбом у којој се налази само тај елеменат и са свима осталим амбама после те амбе и т. д.

Тако, комбинације с понављањем од елемената 1, 2, 3 и 4 јесу:

$C^1_{1(1\,2\,3\,4)} = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$

$C^2_{1(1\,2\,3\,4)} = 11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44;$

$C^3_{1(1\,2\,3\,4)} = 111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144,$
$222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444;$

$C^4_{1(1\,2\,3\,4)} = 1111, 1112, 1113, 1114, 1122, 1123, 1124, 1133, 1134, 1144,$
$1222, 1223, 1224, 1233, 1234, 1244, 1333, 1334, 1344, 1444,$
$2222, 2223, 2224, 2233, 2234, 2244, 2333, 2334, 2344, 2444,$
$3333, 3334, 3344, 3444, 4444.$

Сличним начином добили бисмо и комбинације 5-те, 6-те и т. д. класе.

2) *Независним начином* добијамо комбинације с понављањем ма које класе, када за почетни слог узмемо најнижи елеменат онолико пута колики је број дотичне класе, а из овога добијамо други, трећи и т. д. слогове, кад се први елеменат с десне стране, који се може заменити с вишим, замењује се поступно најближим вишим основком, остављајући елементе с леве стране у непромењеном реду.

Тако, комбинације с понављањем 3 класе од елемената 1, 2, 3, 4 и 5 јесу:

111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 134, 135, 144, 145, 155, 222, 223, 224, 235, 233, 234, 235, 244, 245, 255, 333, 334, 335, 344, 345, 355, 444, 445, 455, 555.

b) *Број комбинација*. Да бисмо нашли образац за број комбинација с понављањем r-те класе од n елемената, узимамо у посматрање пример из овог параграфа, у коме су поређане комбинације с понављањем I, II, III и IV класе од елемената: 1, 2, 3 и 4, добивених поступним начином.

1) Ако други елеменат у свакој комбинацији друге класе с понављањем увећамо за 1. добијамо комбинације: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 и 45, т. ј. добијамо комбинације друге класе од елемената 1, 2, 3, 4 и 5. Како је број ових комбинација 10 $\left[C_5^2 = \binom{5}{2} = 10\right]$, а број комбинација друге класе с понављањем од елемената 1, 2, 3 и 4 такође 10, то је

$$C'^2_4 = C^2_5 = \binom{5}{2} = \binom{4+2-1}{2} \ldots\ldots (1).$$

2) Ако сада у свакој комбинацији треће класе с понављањем од елемената 1, 2, 3 и 4 увећамо други елеменат с десна са 1 а трећи са 2, добијамо комбинације: 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356 и 456, т. ј. добијамо комбинације треће класе без понављања од елемената: 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Како је број и једних и других комбинација 20, то је

$$C'^3_4 = C^3_6 = \binom{6}{3} = \binom{4+3-1}{3} \ldots (2).$$

3) Ако сада у свакој комбинацији четврте класе с понављањем од елемената: 1, 2, 3, и 4, увећамо други елеменат са 1, трећи са 2, а четврти са 3, добијамо комбинације: 1234, 1235, 1236, 1237, 1245, 1246, 1247, 1256, 1257, 1267, 1345, 1346, 1347, 1356, 1357, 1361, 1456, 1457, 1467, 1567, 2345, 2346, 2347, 2356, 2357, 2367, 2456, 2457, 2467, 2567, 3456, 3457, 3467, 3567, и 4567, т. ј. добијамо комбинације четврте класе без понављања од елемената 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

Како је број и једних и других комбинација 35, то је

$$C'^4_4 = C^4_7 = \binom{7}{4} = \binom{4+4-1}{4} \ldots (3).$$

Уопште, ако у свакој комбинацији с понављањем r-те класе од елемената: 1, 2, 3, ... *n*, увећамо други елеменат са 1, трећи са 2, четврти са 3, ... r-ти са $r-1$, добијамо комбинације без понављања r-те класе од $n+r-1$ елемената

Како је број и једних и других комбинација увек исти, то је

$$\mathbf{C'^r_n = C^r_{n+r-1} = \binom{n+r-1}{r}},$$

што се види и из образаца под (1), (2) и (3). Тако, а) Број комбинација *треће* класе с понављањем од 5 елемената биће:

$$C'^{3}_{5} = C^{3}_{5+3-1} = C^{3}_{7} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35;$$

b) Број комбинација *четврте* класе с понављањем од 7 елемената биће:

$$C'^{4}_{7} = C^{4}_{10} = \binom{10}{4} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 210.$$

§ 166. **Варијације.** 1) *Варијације без понављања.* Варијације, као и комбинације, јесу слогови у којима се не налазе сви дати елементи, већ по један, два, три и више елемената. Код варијација водимо рачуна и о избору елемената у слоговима и о њиховом међусобном положају. Оне су, дакле, пермутоване комбинације прве, друге, треће и т. д. класе. Према броју елемената у слоговима имамо варијације прве, друге, треће и т. д. класе.

a) *Грађење варијација* врши се опет на два начина: *постушним* и *независним*.

1) *Постушним начином* стварамо варијације, када најпре створимо *унионе*, које су у ствари дати елементи; затим стварамо амбе везивањем сваког униона са свима осталим елементима; *терне* стварамо од амба везивањем сваке амбе свима елементима, који се не налазе у њој *кватерне* стварамо из терна везивањем сваке терне са елементима који се не налазе у њој и т. д.

Тако, варијације од елемената: 1, 2, 3, 4 и 5, јесу:

$V^{1}_{(12345)} =$ 1, 2, 3, 4 и 5;

$V^{2}_{(12345)} =$ 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53 и 54;

$V^{3}_{(12345)} =$ 123, 124, 125, 132, 134, 135, 142, 143, 145, 152, 153, 154, 213, 214, 215, 231, 234, 235, 241, 243, 245, 251, 253, 254, 312, 314, 315, 321, 324, 325, 341, 342, 345, 351, 352, 354, 412, 413, 415, 421, 423, 425, 431, 432, 435, 451, 452, 453, 512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 532, 534, 541, 542 и 543.

На сличан начин добијамо варијације и осталих класа.

2) **Независним начином** добијамо варијације ма које класе, када од датих елемената формирамо најпре комбинације исте класе, а затим добивене комбинације пермутујемо.

Тако, варијације треће класе од елемената *a*, *b*, *c*, и *d* добијамо, када најпре *створимо* комбинације те класе:

abc, abd, acd, bcd,

а кад ове комбинације пермутујемо, добијамо варијације:

abc	abd	acd	bcd
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb.

b) *Број варијација.* Број варијација прве класе од n елемената је $V^1 = n$. Како амбе добијамо везивањем униона са свима осталим елементима, чији је број $n-1$, то је број амба

$$V^2_n = n\,(n-1).$$

Како терне добијамо из амба везивањем амба елементима који не фигуришу у њима, а чији је број $n-2$, то је број терна

$$V^3_n = V^2_n \cdot (n-2) = n\,(n-1)\,(n-2).$$

Поступајући исто тако и даље, налазимо да је

$$V^4_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3);\quad V^5_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4);$$

$$\mathbf{V^r_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\cdots(n-r+1).}$$

Тако, $V^3_5 = 5\cdot4\cdot3 = 60$; $V^3_4 = 4\cdot3\cdot2 = 24$; $V^4_5 = 5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120$.

Напомена. Према независном начину грађења варијација наилазимо образац за број варијација без понављања r-те класе од n елемената на следећи начин:

Овде је $V^r_n = C^r_n \cdot P_n = \dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\cdot r!$ или

$$\mathbf{V^r_n = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1).}$$

II) **Варијације с понављањем.**

a) *Грађење варијација.* Варијације *прве класе* јесу сами дати елементи.

Тако, $V^1_{(1234)} = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$;

Амбе добијамо из униона, када сваки унион вежемо самим собом и свима осталим елементима. Тако,

$$V^2_{(1234)} = \left\{\begin{array}{cccc} 11 & 21 & 31 & 41 \\ 12 & 22 & 32 & 42 \\ 13 & 23 & 33 & 43 \\ 14 & 24 & 34 & 44 \end{array}\right.$$

Терне добијамо из амба, кад се свака амба веже са свима елементима. Тако,

$$V^3_{(1234)} = \left\{ \begin{array}{llll} 111 & 211 & 311 & 411 \\ 112 & 212 & 312 & 412 \\ 113 & 213 & 313 & 413 \\ 114 & 214 & 314 & 414 \\ 121 & 221 & 321 & 421 \\ 122 & 222 & 322 & 422 \\ 123 & 223 & 323 & 423 \\ 124 & 224 & 324 & 424 \\ 131 & 231 & 331 & 431 \\ 132 & 232 & 332 & 432 \\ 133 & 233 & 333 & 433 \\ 134 & 234 & 334 & 434 \\ 141 & 241 & 341 & 441 \\ 142 & 242 & 342 & 442 \\ 143 & 243 & 343 & 443 \\ 144 & 244 & 344 & 444 \end{array} \right.$$

Слично добијамо и варијације осталих класа.

b) *Број варијација.* Број варијација с понављањем r-те класе од n елемената лако је наћи узимајући у обзир начин њиховог формирања.

Тако, број варијација прве класе од n елемената $V'^{1}_{n} = n$.

Како амбе добијамо из униона везивањем униона са свима n елементима, то је број амба:

$$V'^{2}_{n} = n \cdot n = n^2.$$

Како терне добијамо из амба њиховим везивањем са свима елементима, то је број терна:

$$V'^{3}_{n} = V'^{2}_{n} \cdot n = n^2\, n = n^3$$

Истим резоновањем добијамо да је

$$V'^{4}_{n} = n^4;\quad V'^{5}_{n} = n^5 \text{ и } V'^{r}_{n} = n^r$$

Тако, $V'^{2}_{n} = 4^2 = 16$; $V'^{3}_{4} = 4^3 = 64$; $V'^{3}_{5} = 5^3 = 125$.

§ 167. Примери за вежбу.

a) Пермутације.

1) Начини пермутације од елемената: a) 3, 4, 5, 6; b) a_1, a_2, a_3, a_4.

2) Начини пермутације од писмена речи: a) соба, b) кола; c) труба; d) Слава; e) Авала; f) Мачва.

3) Колико има четвороцифрених бројева од цифара a) 5, 7, 8, 9; b) 4, 7, 0, 8; c) 2, 0, 0, 3?

4) Колико има шестоцифрених бројева, који се могу написати од цифара a) 3, 3, 6, 8, 8, 8; b) 2, 2, 4, 4, 5, 6?

5) Како гласи 42 пермутација од елемената 1, 2, 3, 4, 5?

6) На колико начина могу 6 лица измењати своја места за столом?

7) На колико се разних начина могу поређати 2 беле, 3 црвене и 1 плава лопта?

8) Број пермутација је 720, колики је број елемената?

9) На колико начина може број 480 да се престави као производ својих простих чинитеља?

10) Напиши све пермутације од писмена свога имена и која је пермутација по реду име?

b) **Комбинације**.

1) Одреди комбинације II, III, и IV класе од елемената a, b, c, d, e, f без понављања и с понављањем.

2) Одреди комбинације III и IV класе од елемената 1, 2, 3, 4, 5 без понављања.

3) Колико комбинација могу се саставити од 7 елемената друге, треће и четврте класе без понављања и с понављањем?

4) Колико правих линија можемо повући кроз 4, 5, 6, 7 и 8 тачака, када ма које три не леже на једној правој линији?

5) Број комбинација треће класе без понављања од x елемената има се према броју комбинација четврте класе без понављања од $x+1$ елемената као 4 : 9. Наћи x.

6) Од колико различитих елемената можемо образовати 276 комбинација друге класе?

7) Провери тачност једначина: a) $C_9^3 = C_9^6$; b) $C_{12}^7 = C_{12}^5$ c) $C_6^4 + C_6^3 = C_7^4$; d) $C^6 + C_{10}^5 = C_{11}^6$; e) $C_{12}^6 + C_{12}^5 = C_{13}^6$.

8) На колико начина могу бити изабрана четири лица за четири различите дужности од девет кандидата?

9) Наћи број дијагонала код 50 угла.

10) Колико круга можемо описати око 10 тачака распоређених тако, да ма које четири не леже на једном кругу?

11) Од колико предмета можемо саставити a) 210 амба, ƀ) 66 амба.

12) Колико елемената треба узети, да се број комбинација треће класе има према броју комбинација пете класе као 2 : 3.

13) Какве су везе по троје могућне из страна a, b, c и углова α, β, γ једног троугла?

c) **Варијације.**

1) Начини варијације друге и треће класе са и без понављања од елемената:

a) 1, 2, 3, 4; b) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 c) a, b, c, d, e, f.

2) Колико четвороцифрених бројева могу се написати од свију арапских цифара (без нуле)?

3) Наћи број елемента, кад је број варијација четврте класе без понављања 1680?

4) Колики је број варијација шесте класе без понављања од елемената 1, 2, 3, 4, 5, 6?

5) Број варијација треће класе без понављања стоји према броју варијација истих елемената треће класе с понављањем као 5 : 9 Колики је број елемената?

6) Број варијација друге класе без понављања стоји према броју варијација треће класе без понављања као 1 : 20. Колики је број елемената?

7) Број елемената има се према броју варијација треће класе без понављања као 1 : 20. Наћи број елемената.

8) Број варијација од n елемената r-те класе има се према броју варијација од истог броја елемента $r - 1$ класе, као 10 : 1; а број комбинација истог броја елемената r-те класе има се према броју комбинација $r - 1$ класе, као 5 : 3. Наћи n и r.

9) Број варијација од n елемената треће класе једнак је $\frac{5}{12}$ од броја варијација треће класе од $n + 2$ елемента. Наћи n.

II. Биномни образац

§ 168. Производ бинома са једнаким првим члановима.

Множење следећих бинома, код којих су први чланови једнаки, добијамо:

a) $(x + a)\ (x + b) = x^2 + x\ (a + b) + ab$;

b) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+x^2(a+b+c)+x(ab+$ $+ac+bc)+abc$;

c) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+x^3(a+b+c+d)+$ $+x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+x(abc+abd+acd+$ $bcd)+abcd$.

d) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)=x^5+x^4(a+b+$ $+c+d+e)+x^3(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+$ $+ce+de)+x^2(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+$ $+bce+bde+cde)+x(abcd+abce+abde+acde+bcde)+$ $+abcde$; и т. д.

Из добивених резултата увиђамо, да множењем таквих бинома добијамо за производе полиноме уређене по опадајућим изложитељима првог члана x, почевши од изложитеља једнаког броју бинома, а коефицијенти јесу 1 и збирови комбинација (без понављања) 1., 2., 3 ... n-те класе других чланова.

Општи образац за производ таквих бинома биће, дакле:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots\ldots(x+k)=x^n+\sum C'_n\,x^{n-1}+$$
$$+\sum C^2_n\,x^{n-2}+\sum C^3_n\,x^{n-3}+\cdots+\sum C^{n-1}_n\,x+C^n_n,\quad (I)$$

где нам грчко слово $\sum$ (сигма) значи збир, а $\sum C^1_n=a+b+c+\ldots+k$; $\sum C^2_n=ab+ac+ad+\ldots$; $\sum C^3_n=abc+abd+abe+\ldots$ и т. д.

Производ бинома: $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)$ добијамо истим путем.

У овом случају:

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)=x^n-\sum C^1_n\,x^{n-1}+\sum C^2_n\,x^{n-2}-$$
$$+\sum C^3_n\,x^{n-3}+\ldots\ldots\pm C^n_n.$$

Истим путем добијамо и производ бинома:

$$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)\ldots(x\pm k).$$

Примери:

1) $P=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=x^5+\sum C^1_5\,x^4+$ $+\sum C^2_5\,x^3+\sum C^3_5\,x^2+\sum C^4_5\,x+C^5_5$.

Овде је:

$\sum C^1_5=1+2+3+4+5=15$; $\sum C^2_5=1\,.\,2+1\,.\,3+$ $+1\,.\,4+1\,.\,5+2\,.\,3+2\,.\,4+2\,.\,5+3\,.\,4+3\,.\,5+4\,.\,5=85$; $\sum C^3_5=1\,.\,2\,.\,3+1\,.\,2\,.\,4+1\,.\,2\,.\,5+1\,.\,3\,.\,4+1\,.\,3\,.\,5+1\,.\,4\,.\,5+$ $+2\,.\,3\,.\,4+2\,.\,3\,.\,5+2\,.\,4\,.\,5+3\,.\,4\,.\,5=225$; $\sum C^4_5=1.2.3.4+$ $+.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,5+1\,.\,2\,.\,4\,.\,5+1\,.\,3\,.\,4\,.\,5+2\,.\,3\,.\,4\,.\,5=274$; и $C^5_5=1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5=120$.

Стога је тражени производ $P = x^5 + 15x^4 + 85x^3 + 225x^2 + 274x + 120$.

2) $P = (x+6)(x-3)(x-4)(x+5) = x^4 + \Sigma C_4^1 x^3 + \Sigma C_4^2 x^2 + \Sigma C_4^3 x + C_4^4$;

Овде је: $\Sigma C_4^1 = 6 - 3 - 4 + 5 = 4$; $\Sigma C_4^2 = (-3)\cdot(-4) + (-3)\cdot 5 + (-3)\cdot 6 + (-4)\cdot 5 + (-4)\cdot 6 + 5\cdot 6 = -35$; $\Sigma C_4^3 = (-3)\cdot(-4)\cdot 5 + (-3)\cdot(-4)\cdot 6 + (-3)\cdot 5\cdot 6 + (-4)\cdot 5\cdot 6 = -78$; и $C_4^4 = (-3)\cdot(-4)\cdot 5\cdot 6 = 360$.

Стога је $P = x^4 + 4x^3 - 35x^2 - 78x + 360$.

3) Наћи збир коефицијента производа $P = (x+2y)(x+3y)(x+4y)(x+5y) = x^4 + \Sigma C_4^1 x^3 + \Sigma C_4^2 x^2 + \Sigma C_4^3 x + C_4^4$;

Овде је: $\Sigma C_4^1 = 2y + 3y + 4y + 5y = 14y$;

$\Sigma C_4^2 = 2y\cdot 3y + 3y\cdot 4y + 2y\cdot 5y + 3y\cdot 4y + 3y\cdot 5y + 4y\cdot 5y = 71y^2$;

$\Sigma C_4^3 = 2y\cdot 3y\cdot 4y + 2y\cdot 3y\cdot 5y + 2y\cdot 4y\cdot 5y + 3y\cdot 4y\cdot 5y = 154y^3$; и

$C_4^4 = 2y\cdot 3y\cdot 4y\cdot 5y = 120y^4$. Стога је производ $P = x^4 + 14x^3y + 71x^2y^2 + 154xy^3 + 120y^4$, и збир коефицијента $= 1 + 14 + 71 + 154 + 120 = 360$.

§ 169. **Њутонов образац.** Ако у обрасцу (I) у претходном параграфу ставимо да је $a = b = c = d = \cdots = k$, онда је лева страна $(x+a)^n$, а на десној страни је:

$\Sigma C_n^1 = a + a + a + \cdots = na = \binom{n}{1} a$; $\Sigma C_n^2 = a^2 + a^2 + a^2 + \cdots = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^2 = \binom{n}{2} a^2$;

$$\Sigma C_n^3 = a^3 + a^3 + a^3 + \cdots = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3 = \binom{n}{3} a^3; \ldots$$

$\sum C_n^{n-1} = a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots = \binom{n}{n-1} a^{n-1} = \binom{n}{1} a^{n-1} = na^{n-1}$; и $C_n^n = a^n$.

Стога образац (I) добија облик:

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \binom{n}{3} a^3 x^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + a^n \quad \text{(II)},$$

који се зове *биномни* или *Њутонов образац*, а служи за израчунавање ма ког степена једног бинома.

Тако исто је:

$$(x-a)^n = x^n - \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} - \binom{n}{3} a^3 x^{n-3} + \cdots (\pm 1)^n a^n \quad \text{(III)}.$$

Код овога су обрасца, дакле непарни чланови позитивни а парни негативни.

Напомена. — Посматрајући полином биномног обрасца II и III увиђамо: а) да је број чланова за 1 већи од изложитеља *n* којим се бином степенује; b) да је сваки члан бинома *n*-ог степена, јер је збир изложитеља од *x* и *a* једнак *n*; c) да у првом члану не постоји *a*, и у последњем *x*; d) да су коефицијенти појединих чланова бројеви комбинација нулте, прве, друге и т. д. класе од *n* елемената; и е) да је коефициент ма кога члана једнак броју конбинација од *n* елемената онолике класе колико је чланова пред њим.

Према овоме (r + 1) члан полинома биће:

$$T_{(r+1)} = \pm \binom{n}{r} a^r x^{n-r}.$$

Све до сада изложено о биномном обрасцу вреди само, ако је изложитаљ *n* цео и позитиван број. Међутим, тај образац вреди и када је изложитељ *n негативан* и *разломљен број*, али се то може доказати само Вишом Математиком.

Примери:

$$1)\ (x + a)^5 = x^5 + \binom{5}{1} ax^4 + \binom{5}{2} a^2x^3 + \binom{5}{3} a^3x^2 +$$

$$+ \binom{5}{4} a^4x + \binom{5}{5} a^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

$$2)\ (x - a)^6 = x^6 - \binom{6}{1} ax^5 + \binom{6}{2} a^2x^4 + \binom{6}{3} a^3x^3 +$$

$$+ \binom{6}{4} a^4x^2 - \binom{6}{5} a^5x + \binom{6}{6} a^6 = x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 +$$

$$+ 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6.$$

$$3)\ (2x + 5)^4 = (2x)^4 + \binom{4}{1} \cdot 5 \cdot (2x)^3 + \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot (2x)^2 +$$

$$+ \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 2x + \binom{4}{4} \cdot 5^4 = 16x^4 + 160x^3 + 600x^2 + 1000x + 625.$$

§ 170. **Особине коефицијената.** 1) *Коефицијенти полинома биномног обрасца поступно расту од почетка до средине, а затим опадају од средине до краја и то: а) ако је изложитељ n непаран број, онда коефицијенти дају две симетричне половине b) ако изложитељ n паран број, онда су коефицијенти симетрично положени према коефицијенту средњег члана.*

Примери:

$$a)\ (x + a)^7 = x^7 + \underline{7}ax^6 + \underline{21}a^2x^5 + \underline{35}a^3x^4 + \underline{35}ax^4x^3 +$$

$$+ \underline{21}a^5x^2 + 7a^6x + a^7;$$

b) $(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$.

2) *Од коефицијената n-ог степена неког бинома добијамо коефицијенте (n + 1)-ог степена тога бинома, поступним сабирањем ближњих коефицијената n-ог степена.*

Тако, код примера под b) коефицијенти 6-ог степена бинома x + a јесу: 1, 6, 15, 20, 15, 6 и 1, а из њих добијамо коефицијенте 7-ог степена тога бинома: I = 1, II = 1 + 6 = 7; III = 6 + 15 = 21; IV = 15 + 20 = 35; V = 20 + 15 = 35; VI = 15 + 6 = 21; VII = 6 + 1 = 7; и VIII = 1, т. ј. добијамо коефицијенте примера под а).

На основу ове особине склопљен је *Паскалов троугао*, у коме су поређани коефицијенти биномног обрасца за n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...

1	n = 0
1 1	n = 1
1 2 1	n = 2
1 3 3 1	n = 3
1 4 6 4 1	n = 4
1 5 10 10 5 1	n = 5
1 6 15 20 15 6 1	n = 6
1 7 21 35 35 21 7 1	n = 7
1 8 28 56 70 56 28 8 1	n = 8

и т. д.

3) *Збир коефицијената биномног обрасца једнак је* 2^n. Ова се особина да увидети из ма ког реда Паскаловог троугла.

4) *Збир коефицијената на непарним местима једнак је збиру коефицијената на парним местима.* И ова се особина да увидети из ма ког реда Паскаловог троугла.

§ 171. Задаци за вежбу.

1) Наћи производ бинома.

a) $(x+1)(x+2)(x+3)$; b) $(y+a)(y+2a)(y+3a)$;
c) $(x-1)(x-2)(x-3)$; d) $(x+2a)(x+6a)(x+10a)$
e) $(x-4)(x-5)(x+6)(x+7)$; i) $(x+3)^2(x+4)^2(x-5)$;
g) $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$;

2) Наћи *четврти* и *пети* члан производа:

a) $(x+2)(x-3)(x+4)(x+5)(x-6)$;
b) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6)$.

3) Наћи коефицијенте уређених једначина, чији су корени:

a) 3, -4, 5, -2?   b) 1, -1, 2, -3, 4?

Напомена. Код прве су *корени чинитељи*: $(x-3)$, $(x+4)$, $(x-5)$ и $(x+2)$.

4) Одреди *трећи, четврти* и *пети* члан производа:

a) $\left(\frac{x}{2}+2\right)\left(\frac{x}{2}-4\right)\left(\frac{x}{2}+6\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)$;

b) $\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{a}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{a}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{a}-\frac{1}{7}\right)$.

5) Развиј степене:

a) $(1\pm x)^7$;   b) $(1+x)^{10}$;   c) $(3a+4b)^5$;

d) $(5a-3b)^8$;   e) $(b^3+c^3)^6$;   f) $\left(\frac{m}{2}+\frac{2}{3}n\right)^7$;

g) $(a^{-2}-b^{-2})^4$;   k) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^5$;   l) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^6$;

m) $\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{4a}\right)^5$;   n) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})^6$;   p) $(2\sqrt{a}-b)^7$;

q) $(1+3i)^7$;   r) $(\sqrt{-2}-2)^5$;   s) $(3a^2b-4ab^2)^6$;

t) $\left(\frac{2x}{3y^2}-\frac{3y}{4x^2}\right)^5$.

6) Наћи вредност израза:

a) $(2+\sqrt{5})^4+(2-\sqrt{5})^4$;   b) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^5-(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^5$.

7) Наћи коефицијенте чланова у развијеном степену од $(a+b)^n$, чије су главне количине:

a) a^7b^8;   b) a^9b^6;   c) a^4b^{11};   d) a^3b^{12};

8) Одреди четврти, седми и десети члан степена:

a) $(a+b)^{13}$;   b) $(4\sqrt{5}-2\sqrt{3})^{11}$;   c) $\left(\frac{3x^2}{5a}+\frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$.

III. Рачун вероватноће.

§ 172. **Општи појмови.** Узроци неких догађаја јесу *познати* а неких *случајни*. На случајне догађаје делују две врсте узрока: *стални* и *променљиви*. Тако на температуру неког места у неко доба године утичу *стални узроци*: географски положај и облик површине дотичног места и сунчана топлота, а *променљиви узроци*: атмосферски притисак, влага, правац ветра и т. д. Због променљивих узрока, један догађај може се десити раније или доцније од другог догађаја, а због сталних узрока, дешавање једног догађаја је вероватније од другога. Различите комбинације ових узрока пружају нам или *повољне* или *неповољне* услове за збивање једног случајног догађаја. Све могуће комбинације узрока и за повољне и за неповољне услове збивања једног догађаја зовемо их *свемогућим* комбинацијама тога догађаја. Тако, ако у једној урни имамо 12 белих и 4 црвених лопта једнаке величине, онда за вађење из урне беле лопте имамо: 12 повољних, 4 неповољна и 16 свемогућих услова, а за вађење црвене лопте имамо: 4 повољна, 12 неповољних и 16 свемогућих услова.

Дешавање једног догађаја у толико је вероватније, у колико има више повољних услова, а у толико је вероватније, у колико има више неповољних услова. Тако, ако у урни имамо 12 белих и 4 црвених лопта, онда при првом вађењу лопта, већа је вероватноћа да ћемо извући белу лопту, а мања је вероватноћа за црвену лопту. Ако у урну уметнемо још 2 црвене лопте, онда је шанс за вађење беле лопте мањи и ако је њихов број остао исти, пошто се број свемогућих случајева попео од 16 на 18. Отуда имамо: *при једнаком броју повољних случајева, догађај је у толико вероватнији, у колико је мањи број свемогућих случајева.*

Математичка или проста вероватноћа једног случајног догађаја је однос (размера) између повољних и свемогућих случајева тога догађаја. Тако, ако у урни има 12 белих и 4 црвених лопта, онда је математичка вероватноћа случајног догађаја за вађење беле лопте: $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

§. 173. **Проста вероватноћа.** Ако је a број повољних, b неповољних случајева, онда је број свемогућих случајева $(a+b)$. Тада је проста или математичка вероватноћа:

$$\boxed{w = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{m},}$$

где је $m = a + b$.

Па како је $a < m$, то је проста вероватноћа увек прав разломак. За $a = 0$, т. ј. ако немамо повољних случајева, онда је

$$w = \frac{a}{m} = \frac{0}{m} = 0.$$

За $a = m$, т. ј. ако су сви случајеви повољни, онда је

$$w = \frac{m}{m} = 1.$$

Код вероватноће *0*, имамо *немогућност*, т. ј. догађај не може да се деси, а код вероватноће 1 имамо *сигурност*, т. ј. догађај се мора да деси.

Напомена. За $W < \frac{1}{2}$ каже се да је догађај *неверован*, за $W > \frac{1}{2}$ догађај је *вероватан*, а за $W = \frac{1}{2}$ догађај је *сумњив*.

Размера између неповољних и свемогућих случајева зове се *супротна* или *обрнута вероватноћа*. Ако је број неповољних случајева *b*, повољних *a*, свемогућих $m = a + b$, онда је супротна вероватноћа:

$$W^1 = \frac{b}{m} = \frac{m-a}{m}$$

Па како је $\frac{a}{m} + \frac{m-a}{m} = 1$, то је *збир просте и супротне вероватноће неког догађаја 1.* Стога је проста вероватноћа равна разлици између 1 и супротне вероватноће и обрнуто. Тако, ако је проста вероватноћа неког догађаја $\frac{7}{9}$, онда је његова супротна вероватноћа $1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$.

Примери:

1) У једној урни има 10 белих и 6 плавих лопта; са каквом вероватноћом може да се тврди да ће једна извучена лопта бити a) бела, b) плава?

a) $W = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$; b) $W = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

2) Са каквом вероватноћом може да се тврди, да при бацању једне коцке код игре домине, да се добије 6?

Решење. Сви могући случајеви јесу 6, јер је број страна у коцке 6; повољних случајева имамо само 1, јер само једна страна има 6. Стога је:

$$W = \frac{1}{6}$$

3) Са каквом вероватноћом може да се тврди, да при бацању двеју коцка код домина, да добијамо суму 5?

Решење: Број свих могућих случајева је 36, јер је:

11	21	31	**41**	51	61
12	22	**32**	42	52	62
13	**23**	33	43	53	63

14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Број повољних случајева је 4 (види подвучене комбинације), те је $W = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

4) Кад у урни има 3 беле, 9 црвених и 12 плавих лоптица, онда је вероватноћа да се извади:

a) бела $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$; b) црвена $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, и c) плава $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

§ 174. **Тотална вероватноћа.** Ако у m свих могућих случајева има a повољних случајева за догађај A, a_1 повољних случајева за догађај. A_1 и a_2 опет повољних случајева за догађај A_2, онда је вероватноћа да ће се догодити или догађај A, или догађај A_1, или догађај A_2:

$$W = \frac{a + a_1 + a_2}{m},$$

пошто је број повољних случајева $(a + a_1 + a_2)$. Вероватноћа, да ће се догодити један ма који догађај од више један од другог независних догађаја, зове се *тотална* или *савезна*.

Па како је $W = \frac{a + a_1 + a_2}{m} = \frac{a}{m} + \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m} = W_1 + W_2 + W_3$,

то је свака тотална вероватноћа једнака збиру простих вероватноћа појединих догађаја.

Примери:

1) У једној урни има 6 белих, 8 плавих и 10 црвених лоптица; са каквом вероватноћом може да се тврди, да ће једна од извађених лоптица бити: a) или бела, или плава? b) или бела, или црвена; c) или бела, или плава, или црвена?

a) $W_1 = \frac{6+8}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$; b) $W_2 = \frac{6+10}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$;

c) $W_3 = \frac{6+8+10}{24} = \frac{24}{24} = 1$

Напомена. Тотална вероватноћа увек је *сигурна* т. ј. $= 1$, ако се очекује један, ма који, од m догађаја. Тако, код овога примера под c) сигурни смо, да ће једна од извучених лоптица бити или бела или плава, или црвена, јер је свега лоптица 24.

2) У шпилу од 32 карте има 4 краља, 4 даме и 4 пуба;

са каквом вероватноћом може да се тврди, да ће једна од извучених карата бити: a) или краљ, или дама?; b) или краљ, или дама, или пуб?

$$\text{a) } W_1 = \frac{4+4}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}; \quad \text{b) } W_2 = \frac{4+4+4}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

§ 175. **Релативна вероватноћа.** Ако при одређивању вероватноће неког догађаја не узимамо у обзир број m свих могућих случајева, већ само m^1 од тих случајева, где је $m^1 < m$, а при том је m^1 збир свих повољних случајева једне групе догађаја, чија се вероватноћа тражи, онда се таква вероватноћа зове *релативна*, за разлику од просте вероватноће. Код релативне вероватноће, дакле, водимо рачуна само о збиру свих повољних случајева, који припадају одређеној групи догађаја, а у коју групу спада и догађај, чија се вероватноћа тражи.

Релативна вероватноћа неког догађаја једнака је количнику од просте вероватноће тога догађаја и од збира простих вероватноћа свих догађаја исте групе, т. ј. групе догађаја у коју спада догађај чију вероватноћу тражимо.

Доказ. Нека су: A_1, A_2, $A_3 \dots A_n$ једна група догађаја са свега m_1 њихових повољних случајева и нека је m број свих могућих случајева ($m_1 < m$). Ако су: a_1, a_2, $a_3, \dots a_n$ бројеви њихових повољних случајева ($a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = m^1$), онда су њихове просте вероватноће:

$$W_1 = \frac{a_1}{m}, \; W_2 = \frac{a_2}{m}, \; W_3 = \frac{a_3}{m}, \dots W_n = \frac{a_n}{m}.$$

Тада је релативна вероватноћа догађаја A_1:

$$W = \frac{a_1}{m} = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = \frac{\frac{a_1}{m}}{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{m}} =$$

$$= \frac{\frac{a_1}{m}}{\frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m} + \frac{a_3}{m} + \dots + \frac{a_n}{m}} = \frac{W_1}{W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n}.$$

Пример:

1) У урни има 4 беле, 6 плавих и 8 црвених лопта. Проста вероватноћа за вађење беле лопте је $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$, за вађење плаве $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$, а за вађење црвене $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$. Стога је ре-

лативна вероватноћа да ће се извући: a) пре бела него плава $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$; b) пре бела него црвена $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; c) пре плава него бела $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$; d) пре плава него црвена $\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$; e) пре црвена него бела $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$; f) пре црвена него плава $\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$.

До ових резултата дошли бисмо и помоћу простих вероватноћа. Тако, за:

a) пре белу него плаву $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}+\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2+3}{9}}=\frac{2}{5}$;

b) пре белу него црвену $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}+\frac{4}{9}}=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{9}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$;

c) пре плаву него белу $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$;

d) пре плаву него црвену $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{9}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{9}}=\frac{3}{7}$;

e) пре црвену него белу $\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}+\frac{2}{9}}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{6}{9}}=\frac{2}{3}$; и

f) пре црвену него плаву $\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}+\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{7}{9}}=\frac{7}{4}$.

2) У игри са две коцке A добива кад избаци „паш“ (дуплон), а лице B кад избаци збир 6. Колике су им релативне вероватноће за добит?

11	21	31	41	51	61
12	**22**	32	42	52	62
13	23	**33**	43	53	63
14	24	34	**44**	54	64
15	25	35	45	**55**	65
16	26	36	46	56	**66**

Овде је број свих могућих случајева $m = 36$, број повољних случајева за „паш“ 6, а за збир 6 је број повољних случајева 5, те је $m^1 = 6 + 5 = 11$.

Стога је релативна вероватноћа да добије пре А него $B = \frac{6}{11}$, а релативна вероватноћа да добије пре B него $A = \frac{5}{11}$.

До ових резултата долазимо и помоћу простих вероватноћа. Тако, узимајући да је проста вероватноћа лица $A = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, а лица $B = \frac{5}{36}$, то је релативна вероватноћа лица

$$A = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36} + \frac{5}{36}} = \frac{6}{11}, \text{ а лица } B = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36} + \frac{6}{36}} = \frac{5}{11}.$$

§ 176. **Сложена вероватноћа.**

1) *Вероватноћа да се више догађаја десе заједно.*

Ако посматрамо два догађаја A_1 и A_2, који се догађају једновремено, или један за другим и ако за први догађај има m_1 свих могућих случајева, а за други m_2, а бројеви њихових повољних случајева јесу a_1 и a_2, онда је број свих могућих случајева за оба догађаја $m_1 \cdot m_2$, а број свих повољних случајева $a_1 \cdot a_2$, пошто сваки свемогућан (повољан) случај I догађаја може да се комбинира са сваким од осталих случајева II догађаја и то свемогућан са свемогућним, а повољан са повољним.

Отуда је вероватноћа да ће се оба догађаја десити једновремено, или један за другим:

$$W = \frac{a_1 \cdot a_2}{m_1 m_2} = \frac{a_1}{m_1} \cdot \frac{a_2}{m_2} = W_1 \cdot W_2, \text{ т. ј.}$$

једнака је производу простих вероватноћа одвојених догађаја. Исти је случај када је број догађаја већи од два. Отуда имамо опште правило:

Вероватноћа да се догоде више догађаја, међусобно независно, једновремено или један за другим, једнака је производу њихових простих вероватноћа.

Примери:

1) У једној урни има 6 белих и 8 црвених лопта, а у другој 5 белих и 6 црвених лопта; са каквом вероватноћом може да се тврди, да кад извлачимо из оба суда по једну лопту, да се извуку: a) обе беле; b) бела из I а црвена из II; c) црвена из I и бела из II; d) обе црвене?

a) $W_1 = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{154} = \frac{15}{77}$; b) $W_2 = \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{11} = \frac{36}{154} = \frac{18}{77}$;

c) $W_3 = \frac{8}{14} \cdot \frac{5}{11} = \frac{40}{154} = \frac{20}{77}$; d) $W_4 = \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{11} = \frac{48}{154} = \frac{24}{77}$.

2) Колика је вероватноћа да ће двема коцкама први пут избаци збир 5, а други пут збир 7?

11	21	31	41	51	**61**
12	22	32	42	**52**	62
13	23	33	**43**	53	63
14	24	**34**	44	54	64
15	**25**	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Овде је: $a_1 = 4$, $m_1 = 36$

$a_2 = 6$, $m_2 = 36$

Вероватноћа да ће се десити оба догађаја је

$$W = \frac{4}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}.$$

2) *Вероватноћа да се неки догађај поново деси.*

На основу раније реченог о сложеној вероватноћи од два или више догађаја, јасно је, да је вероватноћа, да се неки догађај понови по други, и трећи, r пут:

$$W_2 = W^2,\ W_3 = W^3,\ W_4 = W^4, \ldots W_r = W^r .$$

Примери:

1) Са каквом вероватноћом може да се тврди, да ће се из једне урне, у којој има 5 белих и 3 црвене лопте, извући три пута узастопно бела лопта, ако се извучена лопта враћа у урну?

$$W = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{125}{512}.$$

2) Колика је вероватноћа да ће се двема коцкама три пута изастопно избацити збир 7?

$$W = \left(\frac{6}{36}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216},$$

пошто је број повољних случајева 6 (16, 25, 34, 43, 52 и 61), а број свих могућих случајева 36.

Напомена. — Ако се неки догађај понавља, али се број његових и свих могућих и свих повољних случајева поступно умањује за 1, онда је његова вероватноћа за прву појаву $\frac{a}{m}$ (ако има *a* повољних а *m* свих могућих случајева), за другу појаву вероватноћа му је $\frac{a-1}{m-1}$, за трећу $\frac{a-2}{m-2}$, и т. д. а за r-ту $\frac{a-r+1}{m-r+1}$

Стога је његова вероватноћа за *r* пута поновљену појаву:

$$W=\frac{a}{m}\cdot\frac{a-1}{m-1}\cdot\frac{a-2}{m-2}\cdots\frac{a-r+1}{m-r+1}.$$

Примери:

1) Са каквом вероватноћом може да се тврди, да ће се из једне урне, у којој има 5 белих и 4 црвених лопта, извући три пута узастопно бела лопта, ако се извучена лопта не враћа у урну?

$$W=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5\,.\,4\,.\,3}{9\,.\,8\,.\,7}=\frac{5}{42}.$$

2) Колика је вероватноћа да се из урне са 5 белих и 7 плавих лопта четири пута узастопно извуче бела лопта, ако се извучена лопта не враћа у урну:

$$W=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{12\,.\,11\,.\,10\,.\,9}=\frac{1}{99}.$$

§ 177. **Вероватноћа живота и смрти. — Таблица смртности.**

Због смртности број једновремено рођених лица постепно се смањује. У овом опадању запажамо неку малу правилност, ако пажљиво испитујемо књиге рођења и умирања. Таблице, из којих се види поступно смањивање једновремено рођених лица, зову се *таблице смртности* или *морталне таблице*. Тих таблица има више врста, а употребљавају се код друштава за осигуравање живота. Ниже наведена таблица је Сисмилх-Бауманова. Према овој таблици од 1000 једновремено рођених лица достижу 10 година живота 532, 30 година 439, 50 година 300, 60 година 210 и т. д.

Употребом таблица смртности налазимо:

a) Вероватноћу, да ли ће неко лице од *n* година живети или не још *m* година; и

b) До које ће старости доћи неко лице од n година.

a) *Вероватност, да ће неко лице од n година живети још m година, налазимо помоћу таблица смртности, када* *број живих лица од* ($n + m$) *година поделимо бројем живих лица од* n *година.* Формула је:

$$W = \frac{V_{n+m}}{V_n} \ldots (1)$$

Вероватност, да неко лице од n *година неће живети после* m *година, налазимо као супротну вероватности* (1), *по формули:*

$$W_1 = 1 - W = 1 - \frac{Vn + m}{Vn} \; (2)$$

Примери:

1) Која је вероватноћа да ће лице од 40 година доживети 60 годишњу старост?

$$W = \frac{V_{60}}{V_{40}} = \frac{210}{374} = \frac{105}{187}.$$

2) Са којом вероватноћом може да се тврди да лице од 40 година неће дочекати 60 годишњу старост?

$$W_1 = 1 - \frac{V_{60}}{V_{40}} = 1 - \frac{105}{187} = \frac{82}{187}.$$

b) *Вероватну годину смрти некога лица од* n *година налазимо помоћу таблица смртности*, када узмемо број година, који се односи на $\frac{V_n}{2}$, т. ј. број лица која доживе n година делимо са 2 и добивеној половини тражимо одговарајући број година у таблици смртности.

Вероватни остатак живота неког лица од n година налазимо, када од његових вероватних година живота одузмемо садање његове године.

Примери:

1) Наћи цео вероватан живот једног лица од 20 година.

Овде је: $\frac{V_{20}}{2} = \frac{491}{2} = 245{,}5$. Па како овом броју у таблици смртности одговарају године 56 или 57, то је целокупни вероватни живот једног лица од 20 година између 56 и 57 година.

2) Колико година има још да живи једно лице од 50 година.

$\frac{V_{50}}{2} = \frac{300}{2} = 150$, те је његов вероватан живот 66 или 67 година. Стога остатак његовог живота је 16 или 17 година.

Сисмилх-Баумanова таблица смртности.

0	1000	25	466	50	300	75	69
1	750	26	461	51	291	76	62
2	661	27	456	52	282	77	55
3	618	28	451	53	273	78	49
4	593	29	445	54	264	79	43
5	579	30	439	55	255	80	37
6	567	31	433	56	246	81	32
7	556	32	427	57	237	82	28
8	547	33	421	58	228	83	24
9	539	34	415	59	219	84	20
10	532	35	409	60	210	85	17
11	527	36	402	61	201	86	14
12	523	37	395	62	192	87	12
13	519	38	388	63	182	88	10
14	515	39	381	64	172	89	8
15	511	40	374	65	162	90	6
16	507	41	367	66	152	91	5
17	503	42	360	67	142	92	4
18	499	43	353	68	132	93	3
19	495	44	346	69	122	94	2
20	491	45	339	70	112	95	1
21	486	46	332	71	103	96	0
22	481	47	324	72	94	97	—
23	476	48	316	73	85	98	—
24	471	49	308	74	77	99	—

§ 178. **Задаци за вежбу.**

1) Колика је вероватноћа, да се бацањем једног динара окрене глава?

2) У урни има 10 белих и 8 црвених куглица; колика је вероватноћа да ће се извући једна бела?

3) Колика је вероватноћа, да се из 32 карте за игру извуче a) једна црвена карта, b) један краљ?

4) Једна лутрија има 300 лозова од којих само 1 добија. Колика је вероватноћа за добитак лица које има 10 лозова?

5) У једној урни има 8 белих, 6 црвених и 12 плавих лоптица; колико је вероватноћа да при првом извлачењу извучемо једну a) црвену, b) белу, c) плаву, d) или црвену или белу e) или белу, или црвену, или плаву?

6) Колика је вероватноћа, да се из 52 карте за игру извуче при првом извлачењу: a) две црвене карте, b) једна црвена и једна црна, c) две купе, d) једна купа и једна каро, e) две слике исте боје, f) две слике различите боје?

7) Ако у једној лутрији на 100 лозова добију 15, колика је вероватноћа да један лоз добије?

8) У једној урни има 10 белих, 8 црвених и 6 зелених лоптица. Колика је вероватноћа да при првом извлачењу извучемо: a) 3 беле, b) 2 црвене и 1 бела, c) 3 лопте различите боје, d) 2 зелене и 1 бела?

9) Неко жели да при бацању две коцке добије први пут збир 5 а други пут збир 7. Колика је вероватноћа?

10) Колика је вероватноћа да при бацању две коцке добијемо први пут највећи збир 4, а по други пут већи збир од 9.

11) Неко жели да бацањем две коцке добије збир 9. Колика је вероватноћа?

12) Од 20 лозова једне лутрије 5 добијају. А има 2 лоза, B 3, а C 5. Колика је вероватноћа да a) сваки добије по један добитак, b) A и B да добију а C да изгуби?

13) Колика је вероватноћа да се трима коцкама окрену једнака поља (паш)?

14) Колика је вероватноћа, да ће се са 2 коцке бацити 8 окана?

15) Колика је вероватноћа да ће човек од a) 35 година доживети 50 годину, b) 40 година доживети 60 годину, c) 65 година доживети 80 годину, d) 70 година доживети 90 годину, e) 25 година доживети 50 годину.

16) Колика је веронатноћа да ће човек од a) 28 година живети још 22 године, b) 40 година живети још 25 година, c) 50 година живети још 30 година.

ДЕВЕТИ ОДЕЉАК

ТЕОРИЈА ИЗВОДА И ПОЈАМ МАКСИМУМА И МИНИМУМА

§ 179. **Бесконачно велики и мали бројеви**: Да би смо стекли појам о бесконачно великим и бесконачно малим бројевима, посматрамо бројне вредности функција $y = 3^x$ и $y_1 = \frac{1}{x}$. Ако независно промењљивој количини x дамо вредности:

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots 20, \cdots,$$

онда су бројне вредности прве функције:

$y = 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, \cdots 3486784401, \cdots$, а бројне вредности друге функције:

$$y_1 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots \frac{1}{20}, \cdots.$$

Видимо, дакле, да вредности прве функције поступно расту, а вредности друге поступно опадају. Па како је природни бројни ред: $1, 2, 3, 4, \cdots \infty$ бескрајан, то независно промењљивој количини x можемо дати врло велику вредност, у ком случају добијамо за прву функцију врло велику, а за другу врло малу вредност. Макаква да је велика, односно мала, вредност посматраних функција, могу те функције имати веће, односно мање, вредности, ако независно промењљивој x дамо веће вредности. Тако, за $x = 21$, биће вредност прве функције $y = 3^{21} = 10460353203 > 3^{20} = 3486784401$, а вредност друге функције $y_1 = \frac{1}{21} < \frac{1}{20}$. Из посматраних два примера увиђамо, да има таквих промењљивих бројних вредности, које у свим променама постају све-веће и веће, односно све мање и мање, од ма које замишљене сталне вредности, ма колико да је велика, односно мала, та стална вредност. Такве бројне вредности, односно такви бројеви јесу бесконачно велики, или бесконачно мали бројеви. **Дакле бесконачно велики, или бесконачно мали број, зове се онај промен-**

љиви број чија апсолутна вредност може постати већа, односно мања, од ма ког сталног позитивног броја, па ма колики да је велики, односно мали, тај број. Бесконачно велике и бесконачно мале бројеве не сматрамо као сталне, већ као променљиве. Бесконачно велике бројеве означавамо са ∞, а бесконачно мале са $\frac{1}{\infty}$.

§ 180. **Појам границе.** 1) Ако у једном кругу упишемо и опишемо по један правилан многоугао од n страна, онда је, као што знамо из Планиметрије, обим круга већи од обима уписаног, а мањи од обима описаног многоугла. Повећавањем броја страна n и уписаног и описаног многоугла, обим уписаног многоугла се увећава, а обим описаног се смањује, те се оба обима све више и више приближују обиму круга. Ако замислимо, да је број страна и уписаног и описаног многоугла бесконачно велики, онда се обими тих многоуглова за бескрајно мали број разликују од обима круга и можемо замислити, да се у том случају, готово поклапају с обимом круга. **Обим круга биће, дакле, граница којој теже и обими уписаних и обими описаних правилних многоуглова, чији се број страна поступно увећава и постаје бесконачно велики.**

2) Из Планиметрије такође знамо, да је величина једног унутрашњег угла правилног n-то угла $\frac{(n-2)\,180^0}{n}$. Ако вредност једног таквог угла означимо са α, онда је $\alpha = \frac{(n-2)180^0}{n} = 180^0 - \frac{360^0}{n}$, а одавде је $\frac{360^0}{n} = 180^0 - \alpha$. Ако сада замислимо, да се број страна n, правилног многоугла поступно повећава и постане бесконачно велики, онда $\frac{360^0}{n}$ постаје све мањи и мањи и постаје бесконачно мали број за $n = \infty$. Како сваки бесконачно мали број тежи нули, то и вредност разломка $\frac{360^0}{n}$ односно њему једнака разлика $180^0 - \alpha$, тежи нули за $n = \infty$. Међутим, да би једна разлика тежила нули, треба њен умалитељ поступно да расте и све више и више да се приближује умањенику. Исти је случај и са разликом $180^0 - \alpha$. **Према томе граница којој тежи један унутра-**

шњи угао правилног многоугла, чији број страна постепно расте и постаје бесконачно велики, јесте угао од 180°. Разуме се, угао α никад не може имати величину од 180°, пошто у том случају не бисмо имали правилан многоугао, јер би се претворио у праву.

3) Посматрајмо сада вредности функције $y = \frac{6 - x}{2 + x^2}$, када се независно промењива x поступно смањује и тежи нули. Ако x_{-y} дамо вредности $x = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, онда за функцију добијамо вредности $y = -\frac{1}{51}, 0, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{3}{11}, \frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{4}{9}, 2\frac{26}{33}, 2\frac{118}{129}$. Све ове вредности функције постају све веће и теже граници 3, што год се вредности независно поменљиве приближују нули. Вредност функције постоје 3 за $x = 0$. **Према овоме, број 3 је граница којој тежи вредност функције $y = \frac{6 - x}{2 + x^2}$, кад независно поменљива x тежи нули.**

Из горњих примера увиђамо, да под границом једне променљиве количине, разумемо такву једну сталну количину, којој се променљива све више и више приближује тако, да је разлика између сталне и променљиве количине бесконачно мала.

На основу стеченог појма у границама, можемо увидети да је: 1) **граница бесконачног малог броја нула;** и 2) **граница сталног броја је сам тај број:** Заиста ако је дат бескрајно мали број

$$x = 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001,\ 0{,}0001,\ 0{,}00001\ ;\ldots\ldots$$

који се у свом смањивању приближује нули, онда су разлике између узастопних вредности x и нуле:

$$x - 0 = 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001,\ 0{,}0001,\ 0{,}00001\ ;\ldots\ldots$$

Па како је нула сталан број а x променљив број, то је њихова разлика бескрајно мали број, те променљиви број x има за границу нулу.

Тако исто, и ако стални бројеви не могу имати границе, ипак, потпуности ради, ако сматрамо и њих као променљиве, онда граница таквог броја је разлика између тога сталног броја и истог сталног броја, сматран као променљив. Па како је оваква разлика увек нула, то је заиста граница једног сталног броја сам тај број.

Да бисмо симболички означили, да је неки сталан број a граница променљиве x, пишемо $\lim x = a$, (од limes-граница) а изговара се: „граница х-а је а".

Ако је променљива количина, која има своју границу, функција друге променљиве количине, која такође има своју границу, онда се означава и граница функције и граница независно променљиве. Тако, ако је у функција, чија је граница a, а независно променљива је x, чија је граница b, онда се то означава

$$\lim_{(x=b)} y = a,$$

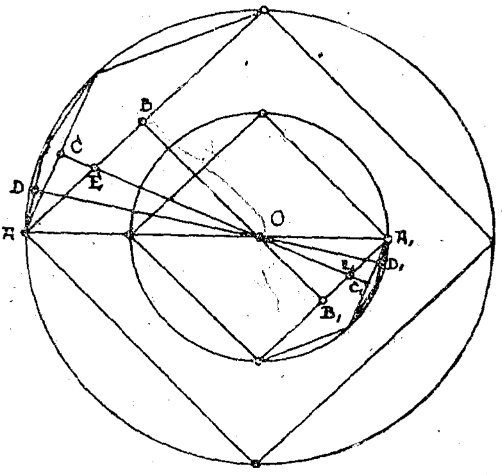
а изговара се: „граница у-на, за $x = b$, је а". Тако, код другог горњег примера означавамо да је $\lim_{n=\infty} \alpha = 180^0$,

или $\lim_{n=\infty}\left(180^0 - \frac{360^0}{n}\right) = 180^0$, а код трећег $\lim_{(x=0)} y = 3$,

или $\lim_{(x=0)} \frac{6-x}{2+x^2} = 3$.

§ 181 **Теореме које се односе на границе.**

1) **Граница збира од две или више променљивих количина једнака је збиру граница тих количина.** Тач-



Сл. 17.

ност ове теореме можемо увидети посматрањем сл. 17., на којој имамо два концентрична круга полупречника R и r, у којима су уписани квадрати. Ако централне раздаљине страна тих квадрата означимо са x и y ($OB = x$ и $OB' = y$), онда је из слике јасно, да је збир ових централних раздаљина $x + y$ мањи од збира полупречника $R + r$, или $BB' < AA'$. Ако сада упишемо у овим концентричним круговима правилне осмоугле, чије су централне раздаљине страна x и y, ($OC = x$ и $OC' = y$), онда је и збир ових централних раздаљина, и ако је већи од збира раздаљина квадратових страна, опет мањи од збира полупречника или $CC' < AA'$. Ако најзад продужимо уписивати у овим концентричним круговима правилне 16-тоугле, 32-угле и т. д. и централне раздаљине њихових страна опет означимо са x и y, онда збир ових централних раздаљина постаје све већи, али је опет сваки такав збир мањи од збира полупречника. Тако, код 16-тоугла биће опет $DD' < AA'$. Из свега овога је јасно, да при одвајању страна уписаних правилних многоуглова у овим концентричним круговима, збирови $x + y$ централних раздаљина страна јесу променљиве количине, који имају за границу AA', т. ј.

$$\lim_{n=\infty} (x + y) = AA' = R + r \cdots (1)$$

Па како је $\lim\limits_{n=\infty} x = R$ и $\lim\limits_{n=\infty} y = r$. то заменом у (1) добијамо

$$\mathbf{\lim (x + y) = \lim x + \lim y.}$$

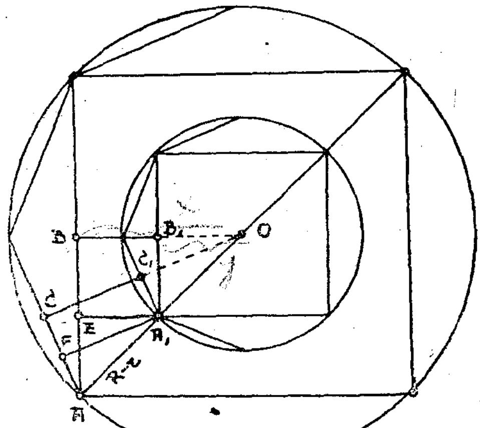
Ако је дат збир од више променљивих количина $x + y + z + u$, онда је $\lim (x + y + z + u) = \lim [(x + y) + (z + u)] = \lim (x + y) + \lim (z + u) = \lim x + \lim y + \lim z + \lim u$.

Ако у збиру, поред променљивих сабирака, има и сталних, онда је на основу ове теореме:

$$\lim (x + y + a) = \lim x + \lim y + \lim a = \lim x + \lim y + a.$$

2) **Граница разлика двеју променљивих једнака је разлици граница умаљеника и умалитеља.** Тачност и ове теореме најбоље увиђамо посматрањем сл. 18,, у којој опет имамо два концентрична круга полупречника R и r, а у којима су уписани квадрати. Ако сада сматрамо разлику $x - y$ централних раздаљина страна тих квадрата, видимо да је $x - y = OB - OB' = BB' = A'E < AA'$, т. ј. $x - y < R - r$. Разлика централних раздаљина страна уписаних осмоуглова $x - y = OC - OC' = CC' = A'F < AA'$, т. ј. $x - y < R - r$. Исти случај ће бити са свима разликама централних раздаљина страна свију уписаних 16-то углова, 32-углова и т. д. Према томе, ове разлике сма-

трамо као променљиве количине, које постају све веће удвајањем страна уписаних многоуглова, али које су увек мање од



Сл. 13.

разлике полупречника, а која је разлика њихова граница. Дакле је:

$$\lim_{n=\infty} (x - y) = R - r \cdots (2).$$

Како је $\lim\limits_{n=\infty} x = R$ и $\lim\limits_{n=\infty} y = r$, то заменом у (2) добијамо:

$$\mathbf{\lim (x - y) = \lim x - \lim y.}$$

Напомена. На основу горњих теорема можемо извести општу теорему: граница алгебарског збира једнака је алгебарском збиру граница појединих чланова. Тако,

$$\lim (x \pm y \pm z \pm a) = \lim x \pm \lim y \pm \lim z \pm a.$$

3. **Граница производа од променљивих чинитеља једнака је производу граница појединих чинитеља.** Тачност ове теореме можемо најбоље увидети посматрањем променљивих бројева:

$x = 5{,}1;\ 5{,}01;\ 5{,}001;\ 5{,}0001;\ 5{,}00001, \cdots$

$y = 3{,}2;\ 3{,}02;\ 3{,}002;\ 3{,}0002;\ 3{,}00002, \cdots$

и њиховог производа:

$xy = 16{,}32;\ 15{,}1302;\ 15{,}013002;\ 15{,}00130002;\ 15{,}0001300002; \cdots$

Јасно је да променљива x има за границу 5, променљива y

има за границу 3, а граница њиховог производа је 15, који производ је такође променљива количина која тежи броју 15.

Дакле је: **$\lim (x\,y) = 15 = 5 \cdot 3 = \lim x \cdot \lim y$,** чиме је ова теорема доказана.

Ако имамо производ од више променљивих количина, онда је према овој теореми:

$$\lim (x\,y\,z\,u) = \lim\,[(x\,y)\cdot(z\,u)] = \lim (x\,y)\cdot \lim (zu) = \\ = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z \cdot \lim u.$$

Као специјалан случај био би:

$$\lim (5\,x\,y) = \lim 5 \cdot \lim x \cdot \lim y = 5 \cdot \lim x \cdot \lim y.$$

4) **Граница степена, чија је основа променљива а изложитељ сталан број, једнака је граници основе степенована истим изложитељем.** Како је степен производ од онолико једнаких чинитеља, као што је основа, колики је број изложитеља, те је на основу треће теореме $\lim x^3 = \lim (x\cdot x\cdot x) = \lim x \cdot \lim x \cdot \lim x = (\lim x)^3$. Уопште је:

$$\mathbf{\lim x^n = (\lim x)^n}.$$

5) **Граница разломка (количника) једнака је граници бројитеља (дељеника) подељена границом именитеља (делитеља).** Тачност ове теореме можемо увидети посматрањем променљивих бројева:

$x = 16{,}32;\; 15{,}1302;\; 15{,}013002;\; 15{,}00130002;\; 15{,}0001300002; \cdots$
$y = 3{,}2;\; 3{,}02;\; 3{,}002;\; 3{,}0002;\; 3{,}00002; \cdots$

и њиховог количника, који је такође променљив:

$\frac{x}{y} = 5{,}1;\; 5{,}01;\; 5{,}001;\; 5{,}0001;\; 5{,}00001; \cdots$

Јасно је, да је граница броја *x* 15, броја *y* 3, а њиховог количника 5. Дакле је:

$$\lim \frac{x}{y} = 5 = \frac{15}{3} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ или } \boxed{\mathbf{\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}}.}$$

Као специјални случајеви били би:

a) $\lim \frac{a}{x} = \frac{\lim a}{\lim x} = \frac{a}{\lim x}$; b) $\lim \frac{x}{a} = \frac{\lim x}{\lim a} = \frac{\lim x}{a}$.

Поменуте теореме зову се основне и примењују се при тражењу граница код функција.

Решени примери:

1) Наћи границу функције $y = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 6$ за $\lim x = 0$. Према основним теоремама имамо:

$\lim y = \lim (4x^3 + 5x^2 - 3x + 6)_{x=0} = \lim (4x^3)_{x=0} + \lim (5x^2)_{x=0}$

$\lim (3x)_{x=0} + \lim 6 = \lim 4 \,.\, \lim x^3{}_{x=0} + \lim 5 \,.\, \lim x^2{}_{x=0} \,.$
$\lim 3 .\, \lim x_{x=0} + \lim 6 = 4 .\, (\lim x)^3{}_{x=0} + 5 .\, (\lim x)^2{}_{x=0} - 3 .$
$\lim x_{x=0} + 6 = 4 .\, 0^3 + 5 .\, 0^2 - 3 .\, 0 + 6 = 6.$

Стога је $\lim y = \lim (4x^3 + 5x^2 - 3x + 6)_{x=0} = 6.$

2) Наћи границу функције $y = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 6$, ако x тежи к ∞, т.ј. за $\lim x = \infty$.

Ако ову функцију најпре поделимо а затим помножимо са x^3 добијамо:

$$y = x^3 \left(4 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)$$

Тада је по основним теоремама:

$$\lim y = \lim_{x=\infty} \left[x^3 . \left(4 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)\right] = (\lim_{x=\infty} x)^3 . \left[\lim 4 + \lim_{x=\infty} \left(\frac{5}{x}\right)\right.$$

$$\left. - \lim_{x=\infty} \left(\frac{3}{x^2}\right) + \lim_{x=\infty} \left(\frac{6}{x^3}\right)\right].$$

Па како је $\lim x = \infty$, то су разломци: $\frac{5}{x}, \frac{3}{x^2}, \frac{6}{x^3}$ бескрајно мали бројеви. Стога је:

$$\lim y = \infty^3 .\, (4 + 0 - 0 + 0) = \infty^3 .\, 4 = \infty, \text{ или}$$
$$\lim y = \lim (4x^3 + 5x^2 - 3x + 6)_{x=\infty} = \infty.$$

3) Наћи границу функције $y = \frac{5x^3 - 2x^2 + 4x - 12}{4x^2 - 3x + 4}$, за $\lim x = 0$.

Према основним теоремама имамо:

$$\lim y = \lim \left(\frac{5x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{4x^2 - 3x + 4}\right)_{x=0} =$$

$$= \frac{\lim (5x^3 - 3x^2 + 4x - 12)\, x=0}{\lim (4x^2 - 3x + 4)\, x=0} = \frac{-12}{4} = -3.$$

4) Наћи границу функције $y = \frac{2x^3 + 3x^2 - 9x}{4x^3 - 3x^2 - x}$ за $\lim x = \infty$.

Решење: $\lim y = \lim \left(\frac{2x^3 + 3x^2 - 9x}{4x^3 - 3x^2 - x}\right)_{x=\infty} =$

$$= \lim_{x=\infty} \left[\frac{x^3 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2}\right)}{x^3 \left(4 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}\right] = \lim_{x=\infty} \left\{\frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2}}{4 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}\right\} =$$

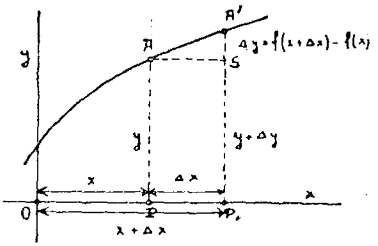
§ 182. **Прираштаји функција.** 1) Ако једној променљивој количини x дамо најпре вредност a, звана *првобитна*, а затим вредност b, звана *потоња*, онда разлика између потоње и првобитне вредности те променљиве зове се њен *прираштај*.

Тако, ако $x_{-су}$ дамо вредности $x = 4$ и $x = 7$, онда је $7 - 4 = 3$ прираштај променљиве x. Ако је првобитна вредност $x = 5$, а потоња $x = 3$, онда је њен прираштај $3 - 5 = -2$. Најзад, ако је првобитна вредност $x = 8$, а потоња $x = 8$, онда је прираштај $8 - 8 = 0$. Из ових примера увиђамо, да прираштај једне променљиве може бити позитиван, негативан и једнак нули. Прираштај једне променљиве обично се означава, када се пред том променљивом стави грчко слово Δ (делта). Тако, Δx, Δy, Δz означавају прираштаје променљивих x, y и z. Код горњих примера први је прираштај $\Delta x = 7 - 4 = 3$, други $\Delta x = 3 - 5 = -2$, а трећи $\Delta x = 8 - 8 = 0$.

Под прираштајем једне функције разумемо разлику између промењене и првобитне функције. Ако имамо функцију $y = f(x)$, па је независно променљива x добила прираштај Δx, онда је потоња или промењена вредност функције $f(x + \Delta x)$, а њен прираштај Δy биће:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Овај прираштај графички је претстављен на сл. 20. *Тај прираштај је, дакле, разлика ордината двеју тачака A_1 и A криве $y = f(x)$, чије су апсцисе $x + \Delta x$ и x.*



Сл. 20.

Да бисмо нашли прираштај једне функције, треба најпре образовати разлику $f(x + \Delta x) - f(x)$ и у њој свести једноимене чланове. *Резултат биће тражени прираштај функције.*

Решени примери: 1) Наћи прираштај функције $y = 4x - 3$

Овде је $\Delta y = 4(x + \Delta x) - 3 - (4x - 3) = 4x + 4\Delta x - 3 - 4x + 3 = 4\Delta x$.

2) Наћи прираштај функције $y = 3x^2 - 4x + 5$.

Овде је $\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 5 - (3x^2 - 4x + 5) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 4x - 4\Delta x + 5 - 3x^2 + 4x - 5 = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 4\Delta x = (6x - 4 + 3\Delta x) \cdot \Delta x$.

3. Наћи прираштај функције $y = \frac{3x - 2}{x - 1}$.

Овде је $\Delta y = \frac{3(x + \Delta x) - 2}{x + \Delta x - 1} - \frac{3x - 2}{x - 1} =$

$$= \frac{(3x + 3\Delta x - 2)(x - 1) - (x + \Delta x - 1)(3x - 2)}{(x - 1 + \Delta x)(x - 1)} = \frac{-\Delta x}{(x - 1 + \Delta x)(x - 1)}.$$

4) Наћи прираштај функције $y = x^5$.

Овде је $\Delta y = (x + \Delta x)^5 - x^5 = x^5 + \binom{5}{1} x^4 \Delta x +$

$$+ \binom{5}{2} x^3 \Delta x^2 + \binom{5}{3} x^2 \Delta x^3 + \binom{5}{4} x \Delta x^4 + \binom{5}{5} \Delta x^5 - x^5 = 5x^4 \Delta x +$$
$$+ 10x^3 \Delta x^2 + 10x^2 \Delta x^3 + 5x \Delta x^4 + \Delta x^5 = (5x^4 + 10x^3 \Delta x +$$
$$+ 10x^2 \Delta x^2 + 5x \Delta x^3 + \Delta x^4) \cdot \Delta x.$$

Примери за вежбу: Наћи прираштаје функција:

1) $y = 6x - 5$; 2) $y = 4x^2 - 5x + 1$; 3) $y = ax + b$;

4) $y = ax^2 + bx + c$; 5) $y = x^7$;

6) $y = \frac{x - 3}{x^2 - 2x - 3}$; 7) $y = \frac{ax + b}{mx + n}$.

§ 183. **Појам о непрекидности функција.** За једну функцију, која зависи од једне независно промењиве количине, каже се да је *непрекидна*, ако се она поступно и неосетно мења, када се и независно промењива поступно и неосетно мења. Код непрекидне функције њен прираштај тежи нули истовремено кад тежи нули и прираштај независно промењиве количине. Код ових функција, независно промењива може се повећати од неке одређене вредности a за врло малу вредност, да би се y функција увећала за толику малу вредност, колико се жели. Такве су све целе рационалне функције, пошто код свију тих функција њени прираштаји теже нули кад и прираштаји независно промењивих количина теже нули. Тако:

a) Код линеарне функције: $y = ax + b$ видимо да њен прираштај:

$$\Delta y = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) = a \cdot \Delta x$$

тежи нули, кад и прираштај Δx;

b) Код квадратне функције:

$$y = ax^2 + bx + c$$

видимо да и њен прираштај

$$\Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) =$$
$$= 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x = (2ax + a\Delta x + b) \cdot \Delta x$$

тежи нули кад и прираштај Δx.

c) Код функције трећег степена:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

видимо, да и њен прираштај

$$\Delta y = a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x)^2 + c(x + \Delta x) + d -$$
$$-(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (3ax^2 + 3ax\Delta x + a\Delta x^2 + 2bx +$$
$$+ b\Delta x + c) \cdot \Delta x$$

тежи нули, кад и прираштај Δx.

Исти ће случај бити и са ма којом целом рационалном функцијом ма ког степена била она, а уверавамо се истим путем.

Од трансцендентних функција непрекидне су:

$y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = \log x$, јер и њини Δy теже 0, кад и Δx. Тако:

a) $\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$;

b) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$;

c) $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$;

d) $\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\frac{x + \Delta x}{x} = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Код свију ових примера је $\Delta y = 0$ за $\Delta x = 0$.

Међутим, има функција такве особине, да се поступно и неосетно мењају, док се поступно и неосетно мења x у неком интервалу, али за извесне специјалне вредности x-а, функција прави нагли скок и добија вредност, која се сасвим разликује од пређашњих њених вредности. Таква се функција зове *прекидна*. Таква је $y = \frac{1}{x-3}$. Она је непрекидна за све могуће вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, осим за вредност $x = 3$, када функција постаје бесконачно велика, јер је у том случају $y = \frac{1}{0} = \infty$. Прираштај ове функције би био:

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 3} - \frac{1}{x - 3} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 3)(x - 3)}.$$

Из његовог израза видимо, да је Δy врло мала количина кад и Δx, осим када x_{-y} дамо вредност $x = 3$. Оне вредности независно промењљиве количине, за коју функција показује скокове, зову се *прекиди*. Код нашег примера прекид је $x = 3$.

Од алгебарских функција прекидне су рационалне разломљене функције, а њихови су прекиди оне вредности независно променљиве количине, за које именитељ постаје нула. Тако, функција

$$y = \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^2 - 9x + 14} = \frac{3x^2 - 7x + 1}{(x-2)(x-7)}$$

је непрекидна за све могуће вредности x-а од $-\infty$ до вредности < 2, од вредности > 2 до вредности < 7 и од вредности > 7 до $+\infty$, а има прекиде за $x = 2$ и $x = 7$, за које именитељ постаје нула.

Ово се дâ најбоље увидети из њеног прираштаја

$$\Delta y = \frac{3(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) + 1}{(x+\Delta x - 2)(x+\Delta x - 7)} - \frac{3x^2 - 7x + 1}{(x-2)(x-7)} =$$
$$\frac{(20x^2 - 20x\,\Delta x + 82x + 41\,\Delta x - 89)\cdot\Delta x}{(x+\Delta x - 2)(x+\Delta x - 7)(x-2)(x-7)},$$

који тежи нули кад и прираштај Δx, осим за $x = 2$ и $x = 7$, када тај прираштај постаје бесконачно велики.

Графички претставник непрекидне функције је линија без прекида. Њено се повлачење врши без подизања руку, што није тај случај код прекидне функције. При повлачењу линије прекидне функције стане се код прекида, па се повлачење наставља од друге тачке.

Функције $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$ имају прекиде и то: код прве за вредности $x \pm = \frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2} \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots$, а код друге за $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, пошто је $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ а $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Напомена. — Ако имамо више функција непрекидних у неком датом интервалу x-а, онда и њихове конбинације добивене: сабирањем, одузимањем и множењем тих функција, јесу непрекидне у томе интервалу. Ово не важи и за комбинацију добивену делењем двеју непрекидних функција, пошто оваква комбинација има прекида за све вредности x-а, за које именитељ (делитељ) постаје нула. Тачност ове напомене увиђамо из комбинација: $\sin x \pm \cos x$, $\sin x \cdot \cos x$ и $\frac{\sin x}{\cos x}$ добивених сабирањем, одузимањем, множењем и дељењем функција $\sin x$ и $\cos x$, за које смо видели да су непрекидне за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$. При испитивању функција од велике је важности претходно сазнање, да ли је дотична функција непрекидна или прекидна и који су јој прекиди.

Примери за вежбу:

Које су од ових функција прекидне а које не:

1) $y = 3x + 10$; 2) $y = -5x + 6$; 3) $y = 2 - x$;

4) $y = 5 - 3x - 2x^2$; 5) $y = -3x^2 - x$; 6) $y = \frac{4x - 1}{x - 2}$;

7) $y = \frac{2x^2 + 1}{5x - 3}$; $x = \frac{3}{5}$ 8) $y = \frac{x^2 + 5x - 10}{x^2 + 8x + 16}$;

9) $y = \frac{5x - 7}{x^2 - 6x + 9}$. $x = 3$

Наћи прекиде функција:

10) $y = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$ (одг. 3); 11) $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 7x + 12}$ (одг. 4 и 3);

12) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 6x + 5}$ (одг. 5 и 1);

13) $y = \frac{x + 1}{(x - 2)(x^2 + 2x - 15)}$ (одг. 2, 3 и -5);

14) $y = \frac{2x^2 + 3}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}$ (одг. 3, 2 и -2). $x^2(x-3) - 4(x-3) = (x-3)(x^2-4) = (x-3)(x-2)\ldots$

§ 184. **Изводи функција.** Ако је дата непрекидна функција $y = f(x)$ и ако независно променљива $\mathbf{x}$ добије врло мали прираштај Δx, онда и функција $\mathbf{y}$ добија врло мали прираштај Δy. Најзад, ако такав прираштај функције поделимо с прираштајем независно променљиве количине, добијамо количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, који при $\lim \Delta x = 0$ и $\lim \Delta y = 0$, добија неодређен облик $\frac{0}{0}$. Међутим, количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ има одређену вредност и зове се *извод* функције.

Дакле, под изводом једне непрекидне функције разумемо границу којој тежи количник између прираштаја функције и независно променљиве количине, када овај последњи прираштај постане бескрајно мали број.

Извод се означава тиме, што се функција, чији се извод тражи, обележава запетом. Тако, извод функције y означава се са y', а чита се „y прим“. Извод функције $y = f(x)$ је:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right).$$

Извод се обележава и са $\frac{dy}{dx}$, који се често срета у инфинитезималном рачуну. Заиста, код извода функције условљавамо да прираштаји Δx и Δy теже нули, да постају бесконачно мале количине, т. ј. да

$$\Delta x \to 0, \qquad \Delta y \to 0, \text{ или}$$
$$\lim \Delta x = 0, \quad \lim \Delta y = 0.$$

Да су количине Δx и Δy бескрајно мале означава се још симболима dx и dy, где је $dx = \lim\limits_{(\Delta x \to 0)} \Delta x$, а $dy = \lim\limits_{(\Delta y \to 0)} \Delta y$. Па како је $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim \Delta y}{\lim \Delta x}$ (§ 181 т. 5), то је $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$. Пошто је лева страна ове једначине извод функције $y = f(x)$, то је према томе $y' = \frac{dy}{dx}$. Дакле, $\frac{dy}{dx}$ је други симбол који претставља извод функције y по x_{-y}.

Према свему овоме, да бисмо нашли извод неке функције потребно је најпре, да независно промењивој количини x дамо прираштај Δx, затим да се одреди одговарајући прираштај Δy функције y и да се прираштај Δy подели прираштајем Δx и најзад, да се тражи граница добивеног количника, којој он тежи, када претпоставимо, да је Δx бескрајно мали број (Δx тежи 0).

Решени примери:

а) *Извод линеарне функције.*

Ако је дата линеарна функција $y = ax + b$, онда је њен извод $y' = \lim\limits_{(\Delta x = 0)} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{(\Delta x = 0)} \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a.$

Дакле, извод линеарне функције једнак је коефицијенту уз независно промењиву количину.

Посебни пример: Извод функције $y = 3x - 4$ је $y^1 = $
$= \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{3(x + \Delta x) - 4 - (3x - 4)}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3.$

Напомена. Ако је $a = 0$ у функцији $y = ax + b$, онда је $y = b$, а $y^1 = a = 0$, т. ј. **извод сталног броја је нула.**

Ако је у функцији $y = ax + b$ $a = 1$ и $b = 0$, онда је $y = x$, а $y' = a = 1$, т. ј. **извод независно промењиве је јединица.**

b) *Извод квадратне функције.* Ако је дата квадратна функција $y = ax^2 + bx + c$, онда је њен прираштај $\Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) = (2ax + b + a\Delta x)\Delta x$, а количник $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x$.

Тада, за $\lim \Delta x = 0$, је $y^1 = \lim\limits_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 2ax + b$.

Посебни пример: за $y = 3x^2 - 5x + 10$ је $y' = 6x - 5$.

с) *Извод функције трећег степена.* Ако је дата функција трећег степена $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, онда је њен прираштај

$y = x^n$

$\Delta y = a(x+\Delta x)^3 + b(x+\Delta x)^2 + c(x+\Delta x) + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d) =$ $= (3ax^2 + 3ax\Delta x + a\Delta x^2 + 2bx + b\Delta x + c)\Delta x$, а количник $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$ $= 3ax^2 + 2bx + c + 3ax\Delta x + b\Delta x + a\Delta x^2$. Тада, за $\lim \Delta x = 0$ је $\lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{3ax^2 + 2bx + c.}$

Посебни пример: за $y = 5x^3 - 7x^2 - 6x + 1$ је $y' = 15x^2 - 14x - 6$. Радећи као код претходна три примера налазимо, да је извод функције четвртог степена ($y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$) $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, петог степена ($y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$) $y' = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$ и т. д. Радећи по истом поступку, нашли бисмо да извод функције $y = x^n$ је $y' = nx^{n-1}$.

d) *Извод разломљене функције*. Ако је дата разломљена функција $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, онда је њен прираштај $\Delta y = \dfrac{a(x+\Delta x)+b}{c(x+\Delta x)+d} - \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{(ad-bc)\cdot\Delta x}{(cx+c\Delta x+d)(cx+d)}$, а количник $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$ $= \dfrac{ad-bc}{(cx+c\Delta x+d)(cx+d)}$. Тада је за $\lim \Delta x = 0$,

$$y' = \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Посебни пример. Извод функције $y = \dfrac{-3x+10}{5x-7}$ је

$$y' = \frac{(-3)\cdot(-7) - 5\cdot 10}{(5x-7)^2} = \frac{-29}{(5x-7)^2}.$$

e) *Извод функције $y = \sin x$.*

Њен је прираштај $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$ $2\cdot\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}\,\sin\dfrac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\dfrac{\Delta x}{2}$, а количник

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Тада је тражени извод:

$$y' = \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right] = \cos x,$$ пошто је

$\lim \Delta x = 0$, то је и $\lim \frac{\Delta x}{2} = \frac{0}{2} = 0$, $\lim \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right)_{\Delta x = 0} = 1$

(види 5. задатак § 181. код сл. 19.)

f) *Извод функције* $y = \cos x$.

Њен је прираштај $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \cdot \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot$
$\sin \frac{\Delta x}{2} = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$, а извод, за $\lim \Delta x = 0$,

$$\text{биће: } y' = \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0}\left[-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right]_{\Delta x = 0} = -\sin x$$

$$= -\sin x, \text{ пошто је } \lim \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right)_{\Delta x = 0} = 1.$$

j) *Извод функције* $y = \log x$. Њен је прираштај $\Delta y =$
$= \log(x + \Delta x) - \log x = \log \frac{x + \Delta x}{x} = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$, а извод, за

$\lim \Delta x = 0$, биће $y' = \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0}\left[\frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\right]_{\Delta x = 0} \cdots (1)$

Међутим, за $\lim \Delta x = 0$, десна се страна овог извода (1) претвара у неодређен облик $\frac{0}{0}$, пошто је тада $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0}{x} = 0$,
$\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log(1 + 0) = \log 1 = 0$. Како је $\lim \Delta x = 0$, то разломак $\frac{\Delta x}{x}$ можемо заменити изразом $\frac{1}{n}$, где је $n = \infty$, пошто су оба израза тада једнака нули. Заменом $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$ у (1) добијамо:

$$y' = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \frac{n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{x} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{x} \cdots (2)$$

Тада израз $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ добија опет неодређен облик 1^∞. Међутим, овај израз има своју одређену вредност, коју добијамо, када га развијемо по Њутоновом обрасцу. Тада је:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+\binom{n}{4}\cdot\frac{1}{n^4}+\cdots(3)$$

Како је: $\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1;\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}=$

$$=\frac{n^2-n}{1\cdot 2n^2}=\frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{1\cdot 2}=\frac{1}{1\cdot 2};\ \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{n^3-3n^2-2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}=\frac{1-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1-\frac{3}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$$

и т. д., то заменом у (3) добијамо:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots(4)$, чија је вредност Неперове логаритамске основе $e=2{,}718281828\ldots$, као што смо видели код логаритама (§ 118). Најзад, заменом у (2) добијамо да је извод

$$y'=(\log x)'=\frac{\log e}{x}=\frac{\log 2{,}718281\ldots}{x}\cdot(5).$$

Овај образац важи за сваку логаритамску основу. Ако узмемо Неперову логаритамску основу e, онда је $\log e_{e)}=1$, па се за ту основу образац (5) претвара у

$$y'=(\log x)'=\frac{1}{x}\cdots(6).$$

k) *Извод функције* $y=a^x$. Њен је прираштај $\Delta y=$ $=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\cdot a^{\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$, а количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot$ $\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$, а извод за $\lim\Delta x=0$ био би: $y'=(a^x)'=$ $\lim\left(a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)=a^x\cdot\frac{0}{0}\cdots(1)$, те опет добијамо неодређен облик $\frac{0}{0}$. Праву вредност израза $\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ наћићемо, ако извршимо замену $a^{\Delta x}-1$ са $\frac{1}{n}$, где би n био бесконачно велики број, пошто су оба израза једнака нули ($a^0-1=1-1=0$ и $\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$).

Стављајући да је $a^{\Delta x}-1=\frac{1}{n}$, или $a^{\Delta x}=1+\frac{1}{n}$, онда логаритмовањем добијамо:

$$\Delta x \log a = \log\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \text{a} \quad \Delta x = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log a} \cdots (2).$$

Тада је израз
$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log a}} = \frac{\log a}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\log a}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\log a}{\log e}, \text{ пошто је } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Заменом у (1) добијамо да је извод функције $y = a^x$:

$$\boxed{\mathbf{y' = (a^x)' = a^x \cdot \frac{\log a}{\log e} \cdots (3)}}$$

За специјални случај $a = e$, функција ће бити $y = e^x$, а њен извод, према обрасцу (3), биће:

$$y' = (e^x)' = e^x \cdot \frac{\log e}{\log e} = e^x, \text{ т. ј.}$$

Извод функције e^x једнак је њој самој. Ово је једина функција која има ту особину.

Примери за вежбу: Нађи изводе ових функција.

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = -5x + 6$; 3) $y = 0{,}35x + 4$;
4) $y = 7x$; 5) $y = -x$; 6) $y = -2{,}5x - 9$;
7) $y = -8x$; 8) $y = 5$; 9) $y = -6$;
10) $y = 5x^2 - 4x + 2$; 11) $y = -3x^2 + 5x - 3$;
12) $y = -4x^2 + 3x$; 13) $y = 7x^2 - 5$; 14) $y = 4 - 7x^2$;
15) $y = -8x^2$; 16) $y = -x^2$;
17) $y = 4x^7 - 5x^5 + 3x^3 + 8x - 7$; 18) $y = x^9$;
19) $y = 7x^{12}$; 20) $y = \frac{2x+1}{8x-5}$; 21) $y = \frac{-2x+11}{4x-7}$;
22) $y = \frac{4x}{5x+2}$; 23) $y = \frac{1}{4x-3}$; 24) $y = \frac{1}{8x}$;
25) $y = \frac{1}{x}$.

§ 185. **Теореме о изводима.**

1) **Извод алгебарског збира.** Нека су *u*, *v* и *t* различите непрекидне функције, чија је независно промењљива *x*. Тада и њихов алгебарски збир је очевидно непрекидна функција исте независно промењљиве x. Нека је дакле

$$y = u - v + t.$$

Ако независно промењивој количини дамо прираштај Δx, онда и функције: u, v, t и y добијају своје прираштаје Δu, Δv, Δt и Δy, па ће бити:
$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) + (t + \Delta t) - (u - v + t) = \Delta u - \Delta v + \Delta t$. Ако ову једначину поделимо најпре са Δx, а затим ставимо да је $\lim \Delta x = 0$, добијамо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x = 0,}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

или $y' = u' - v' + t'$, т. ј.

Извод алгебарског збира од неколико функција исте независно промењиве количине једнак је алгебарском збиру њихових извода.

Примери:

Ако је:

1) $u = 3x^2 - 5x - 2$, $v = \sin x$, $t = \cos x$, онда је
$y' = u' + v' + t' = 6x - 5 + \cos x - \sin x$.

2) Ако је $u = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ и $v = 5x^2 - 4x - 7$, онда је $y' = u' + v' = 12x^2 - 6x + 5 + 10x - 4 =$
$= 12x^2 + 4x + 1$.

ово

II) **Извод производа.** Нека су u и v две непрекидне функције исте независно промењиве x. Тада је очевидно, да је и њихов производ $y = uv$ функција исте независно промењиве x. Ако је прираштај независно промењиве Δx, онда и функције: y, u и v добијају своје прираштаје: Δy, Δu, и Δv, те је: $\Delta y = (u + \Delta u)\cdot(v + \Delta v) - uv = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$. Ако ову једначину поделимо са Δx и узмемо да је $\lim \Delta x = 0$, добијамо:

$$\lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x = 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right) = u\cdot\lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) +$$

$$+ v\cdot\lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x = 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot\lim_{\Delta x = 0}\Delta v.$$ Па како $\lim \Delta x = 0$, то је и $\lim_{\Delta x = 0} \Delta v = 0$. Заменом у претходној једначини добијамо:

$$y' = u\cdot v' + v\cdot u' + u'\cdot 0 = uv' + vu' \cdot (1)$$

Ако је дат производ од више функција исте независно променљиве x, н.пр. $y = uvtz$, онда је према једначини (1):
$y' = (uvtz)' = [(uv).(tz)]' = (uv)\cdot(tz)' + (tz).(uv)' = uv\,(tz'+zt') +$
$+ tz\,(uv' + vu') = \mathbf{uvtz' + uvzt' + utzv' + vtzu'}$, т. ј.

Извод производа од неколико непрекидних функција исте независно променљиве количине једнак је збиру производа који је састављен тако, да је у сваком производу извод једне од датих функција помножен производом осталих функција.

Примери:

1) За $y = \sin x \cdot \cos x$ биће $y' = (\sin x)' \cos x + (\cos x)' \sin x =$
$= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

2) За $y = (3x^2 + 4x + 5)\,(4x - 3)\cos x \cdot \sin x$ биће:
$y' = (6x + 4)\,(4x - 3) \cos x \sin x + (3x^2 + 4x + 5)\cdot 4 \cos x \sin x -$
$(3x^2 + 4x + 5)\,(4x - 3) \sin^2 x + (3x^2 + 4x + 5)(4x - 3) \cos^2 x =$
$= (14x^2 + 10x + 4) \sin 2x + (12x^3 + 7x^2 + 8x - 15) \cos 2x.$

Последица. Ако је $y = au$, где је a сталан број а u функција од независно променљиве x, онда је према горњем правилу:

$$y' = au' + a'u = au' + 0\cdot u = au', \text{ т. ј.}$$

Извод производа од једног сталног броја и једне функције једнак је производу од сталног броја и извода функције.

Примери:

1) За $y = 3 \sin x$, биће $y' = 3 \cos x$.

2) За $y = 9x^5$, биће $y' = 45x^4$.

III) Извод степена. Нека је u непрекидна функција независно променљиве x, а желимо да нађемо извод функције $y = u^4$. Како је $y = u^4 = u\cdot u\cdot u\cdot u$, то је по правилу за извод производа:

$$y' = u'uuu + uu'uu + uuu'u + uuuu' = 4u^3u'$$

Тако исто за $y = u^5$ биће $y' = 5u^4u'$; за $y = u^7$ биће $y' = 7u^6u'$ и т. д., а за $y = u^n$ биће $y' = nu^{n-1}u'$ т. ј. **Извод степена неке дате функције добија се, када изложитељ степена помножимо степеном исте функције, чији је изложитељ за 1 мањи, и изводом функције.**

Примери:

1) За $y = \sin^5 x$ биће $y' = 5 \sin^4 x \cos x$.

2) За $y = (2x^2 - 3x - 5)^3$ биће $y' = 3\,(2x^2 - 3x - 5)^2\,(4x - 3)$.

Напомена. У претходном параграфу нашли смо, да је извод функције $y = x^n$ $y' = n\,x^{n-1}$. До овог истог резултата дошли бисмо и примером горњег правила. По овом правилу биће: $y' = nx^{n-1}\,x' \ldots (1)$. Како је извод од $x = 1$, то заменом у (1) имамо: $y' = n\,x^{n-1}$. Тако, за $y = x^{11}$, биће $y' = 11\,x^{10}$; за $y = 10\,x^7$, биће $y' = 70\,x^6$ и т. д.

IV) Извод разломка (количника). Нека су *u* и *v* две непрекидне функције исте независно променљиве *x*. Тада је и $y = \frac{u}{v}$ функција исте променљиве *x*. Извод ове функције можемо добити поступајући истоветно као код претходних случајева, а може се добити и помоћу правила о изводу производа. Тако, из $y = \frac{u}{v}$ (1) имамо $u = y\,v$ (2), а $u' = y'v + v'y$ (3).

Одавде је $y' = \dfrac{u' - v'\,y}{v} = \dfrac{u' - v' \cdot \frac{u}{v}}{v} = \boxed{\dfrac{u'v - v'u}{v^2}}$, т. ј.

Извод разломка једнак је изводу бројитеља помножен имениоцем, мање извод именитеља помножен бројитељем, и све то подељено крадратом именитеља.

Примери:

1) За $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x + 1}$ биће $y' = \dfrac{(4x-1)(3x+1) - 3(2x^2 - x + 1)}{(3x + 1)^2} =$

$$= \frac{6x^2 + 4x - 4}{(3x + 1)^2};$$

2) За $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ биће $y' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

3) За $y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ биће $y' = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Напомена. Ако се тражи извод једног количника између сталног броја и функције или обрнуто, служимо се правилом о изводу количника.

Тако, извод од $y = \dfrac{a}{f(x)}$ је $y' = \dfrac{a'f(x) - f'(x)\,a}{[f(x)]^2} =$

$= \dfrac{0.f(x) - af'(x)}{[f(x)]^2} = -\dfrac{af'(x)}{[f(x)]^2}$; а извод од $y = \dfrac{f(x)}{a} =$

$= \dfrac{f'(x) \cdot a - 0 \cdot f(x)}{a^2} = \dfrac{af'(x)}{a^2} = \dfrac{f'(x)}{a}$.

До овог последњег резултата пре бисмо дошли служећи се правилом о изводу производа од једног сталног броја и функције. Тако $y = \frac{f(x)}{a} = \frac{1}{a} . f(x)$ а $y' = \frac{1}{a} . f'(x) = \frac{f'(x)}{a}$.

V) **Извод корена.** Нека је u функција независно променљиве количине x, а желимо да нађемо извод функције $y = \sqrt[n]{u}$.

1) За $n = 2$ биће $y = \sqrt{u}$, или $y^2 = u$. По правилу о изводу степена биће $2yy' = u'$, а $y' = \frac{u'}{2y} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

2) За $n = 3$ биће $y = \sqrt[3]{u}$, или $y^3 = u$. Одавде је $3y^2 y' = u'$, а $y' = \frac{u'}{3y^2} = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

3) За $n = 4$ биће $y = \sqrt[4]{u}$, или $y^4 = u$. Одавде је $4y^3 y' = u'$, а $y' = \frac{u'}{4y^3} = \frac{u'}{4\sqrt[4]{u^3}}$

Аналого горња три примера, извод од $y = \sqrt[n]{u}$ биће

$$\mathbf{y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}}.$$

Ако тражимо извод функције $y = \sqrt[n]{u^p}$, радимо по истом поступку. Тада је:

$$y^n = u^p,\ ny^{n-1}y' = pu^{p-1}u',\ \text{а}\ y' = \frac{pu^{p-1}u'}{ny^{n-1}} = \frac{pu^{p-1}u'}{n\sqrt[n]{u^{p(n-1)}}} =$$

$$= \frac{p\sqrt[n]{u^{n(p-1)}}\,u'}{n\sqrt[n]{u^{p(n-1)}}} = \frac{pu'}{n}\sqrt[n]{u^{p-n}} = \frac{p}{n}u^{\frac{p-n}{n}} . u' = \mathbf{\frac{p}{n}u^{\frac{p}{n}-1}u'}.$$

Примери:

1) За $y = \sqrt[3]{4x^2 - 5x + 2}$ биће $y' = \frac{1}{3}(4x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{3}-1}$.

$$(8x - 5) = \frac{1}{3}(4x^2 - 5x + 2)^{-\frac{2}{3}}(8x - 5) = \frac{8x - 5}{3\sqrt[3]{(4x^2 - 5x + 2)^2}};$$

2) За $y = \sqrt[n]{(ax + b)^q}$ биће $y' = \frac{q}{n}(ax + b)^{\frac{q}{n}-1} \cdot a =$

$$= \frac{aq}{n}\sqrt[n]{(ax + b)^{q-n}};$$

3) За $y = \sqrt[5]{\sin^4 x}$ биће $y' = \frac{4}{5}(\sin x)^{\frac{4}{5}-1} . \cos x =$

$$= \frac{4}{5}\sqrt[5]{(\sin x)^{-1}} . \cos x = \frac{4 \cos x}{5\sqrt[5]{\sin x}}.$$

I **Напомена.** — На основу овога, лако налазимо извод степена $x^{\frac{+p}{q}}$, а на основу правила о изводу разломка, налазимо и извод степена x^{-n}.

a) Тако, извод функције $y = x^{\frac{p}{q}}$, или $y = \sqrt[q]{x^p}$ је

$$y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} . x' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} . 1 = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} \mathbf{x}^{\frac{p}{q}-1};$$

b) Извод функције $y = x^{-\frac{p}{q}}$ је $y' = \left(-\frac{p}{q}\right) . x^{-\frac{p}{q}-1} . x' =$

$$= -\frac{p}{q} . x^{-\frac{p}{q}-1} . 1 = -\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} . \mathbf{x}^{-\frac{p}{q}-1};$$

c) Извод функције $y = x^{-n}$, или $y = \frac{1}{x^n}$ је

$y' = \frac{1' . x^n - nx^{n-1} . 1}{x^{2n}} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$; т.ј. *извод степена x^n добијамо, када изложитељ n помножимо са x^{n-1}, па био изложитељ цео или разломљен, позитиван или негативан број.*

Примери:

1) За $y = x^{\frac{3}{4}}$ је $y' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$;

2) За $y = x^{-\frac{5}{4}}$ је $y' = -\frac{5}{4} \cdot x^{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{5}{4} x^{-\frac{9}{4}} =$

$$= -\frac{5}{4\sqrt[4]{x^9}} = -\frac{5}{4x^2\sqrt[4]{x}};$$

3) За $y = -x^{-5}$ је $y' = -5 \cdot x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$;

4) За $y = -4x^{-\frac{3}{4}}$ је $y' = (-4) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) x^{-\frac{3}{4}-1} = 3x^{-\frac{7}{4}} =$

$$= \frac{3}{\sqrt[4]{x^7}} = \frac{3}{x\sqrt[4]{x^3}};$$

5) За $y = \sqrt[5]{\sin^4 x} = (\sin x)^{\frac{4}{5}}$ је $y' = \frac{4}{5}(\sin x)^{\frac{4}{5}-1} \cdot (\sin x)' =$
$\frac{4}{5}(\sin x)^{-\frac{1}{5}} \cdot \cos x = \frac{4 \cos x}{5\sqrt[5]{\sin x}}$. (Види 3 пример испред напомене)

Из свега овога ~~закључујемо, да~~ при тражењу извода једног корена, чији је радиканд независно променљива x, или ма која њена функција, треба само дати корен да претворимо најпре у степен, а затим да тражимо извод добивеног степена по правилу о изводима степена.

II **Напомена.** Изложене теореме у овоме параграфу зову се *опште теореме извода*, а служе да лакше и брже нађемо функцијама изводе, него на начин изложен у претходном параграфу (184). Ако је дата функција $y = 4x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 4x - 5$, онда је њен први извод $y' = 20x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 14x + 4$. Ако сада тражимо извод добиленог извода, који се означава са y'' и зове се други извод дате функције, добијамо $y'' = 80x^3 - 36x^2 + 30x - 14$. Трећи извод дате функције биће извод од другог извода. Он је $y''' = 240x^2 - 72x + 30$. Четврти извод биће:

$y^{IV} = 480x - 72$, а пети извод $y^{V} = 480$, а шести $y^{VI} = 0$.

Други, трећи и т. д. изводи зову се *изводи вишег реда*.

§ 186. **Изводи циклометријских функција.** У параграфима 184. и 185. упознали смо се са изводима алгебарских функција (целих и разломљених и ирационалних), затим са изводима трансендентних функција a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$ а сада прелазимо на изводе циклометријских функција:

$$\operatorname{arc}\sin x,\ \operatorname{arc}\cos x,\ \operatorname{arc}\operatorname{tg} x \text{ и } \operatorname{arc}\operatorname{cotg} x.$$

ово је

a) **Извод од arc sin x.** Нека је дата функција $y = \operatorname{arc}\sin x$. Како је y лук полупречника $r = 1$, чији је синус x, то је

$$x = \sin y$$

Сматрајући сада x као функцију а y као независно променљиву количину, то је

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \cos y,$$

$$\text{а } \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{Дакле, } \mathbf{y' = (arc\,sin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}.$$

b) **Извод од arc cos x.**

За $y = \operatorname{arc}\cos x$, биће $x = \cos y$. Тада је $\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\sin y$,

$$a \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Дакле, $\mathbf{y' = (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

c) **Извод од arc tgx.**

За $y = \operatorname{arc tg} x$, биће $x = \operatorname{tg} y$. Тада je $\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\cos^2 y}$. (Види 2. пример код IV параграфа 185). Како je $\frac{1}{\cos^2 y} = \left(\frac{1}{\cos y}\right)^2 =$ $= \sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$, то je $\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, a $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1+x^2}$. Дакле, $\mathbf{y' = (arc\,tg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}}$.

b) **Извод од arc cotg x.**

За $y = \operatorname{arc cotg} x$, биће $x = \operatorname{cotg} y$, a $\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{\sin^2 y}$ (Види 3. пример код IV § 185). Како je:

$\frac{1}{\sin^2 y} = \left(\frac{1}{\sin y}\right)^2 = \operatorname{cosec}^2 y = 1 + \operatorname{cotg}^2 y = 1 + x^2$, то je

$\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{\sin^2 y} = -(1 + x^2)$, a $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{1+x^2}$. Дакле,

$$\mathbf{y' = (arc\,cotg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}}.$$

§ 187. **Изводи посредних функција.** Ако je $y = F(u)$, a $u = f(x)$, онда се каже да je y посредна функција од x. Заменом у првој једначини u са $f(x)$, можемо наћи извод од $F[f(x)]$. Међутим, ово замењивање избегавамо, jep се служимо идентичном једначином

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Ако Δx тежи нули, онда je исти случај и са Δy и Δu. Како $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, $\lim \frac{\Delta y}{\Delta u} = F'(u)$ и $\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x)$, а граница производа једнака je производу граница његових чинитеља, то je

$$y' = F'(u) \cdot f'(x).$$

Исто, ако je $y = F(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = f(x)$, онда je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$, или у граници: $y' = F'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot f'(x)$.

Пример: Наћи извод функције $y = \sin^4 x^2$. Стављајући да је $u = x^2$, $v = \sin u$ и $y = v^4$, имамо $\lim \frac{\Delta y}{\Delta v} = 4v^3$, $\lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = \cos u$ и $\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = 2x$. Стога је

$$y' = 4\,v^3 \cdot \cos u \cdot 2\,x = 4 \sin^3 x^2 \cos x^2 \cdot 2\,x.$$

§ 188. **Примери за вежбу.** Наћи изводе следећих функција:

1) $y = 0{,}2x^5$; 2) $y = 0{,}75x^8$; 3) $y = \frac{1}{3}x^8$; 4) $y = -5x + 1$;

5) $y = 6x^2 - 4x + 6$; 6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$;

7) $y = 1 - 2x + 4x^2$; 8) $y = -4x^8 + x^2 - 3x + 2$;

9) $y = x^4 - x^8 + x^2 - x$; 10) $y = 1 + x - x^2 + x^8$;

11) $y = x^4 - 2x^8 + x^2 - x + 3$;

12) $y = x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1$;

13) $y = -0{,}5x^6 - x^8 + 3x$; 14) $y = 2x^5 + x^8 - 4x^2 + 3x + 1$;

15) $y = (2x - 3) \cdot (x + 4)$; 16) $y = (4 - 3x)(1 + x)$;

17) $y = (x^2 + 2x - 1)(2x^2 + 3x + 2)$;

18) $y = (1 + x - x^2)(3x^2 - 2x - 4)$;

19) $y = (3x + 1)(2x - 3)(x - 1)$;

20) $y = (3 - 2x)(5x - 1)(1 - 4x)$;

21) $y = (x - 1)(1 + 2x^2)(x^2 + 3)$;

22) $y = 2x^2(7x - 1)(x^2 - 2x + 1)$;

23) $y = \frac{5x - 1}{x}\left(\text{одг. } \frac{1}{x^2}\right)$; 24) $y = \frac{x + 2}{2x}\left(\text{одг. } -\frac{1}{x^2}\right)$;

25) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2x}\left(\text{одг. } \frac{x^2 - 2}{2x^2}\right)$;

26) $y = \frac{x^2 - 3}{3x}\left(\text{одг. } \frac{x^2 + 3}{3x^2}\right)$;

27) $y = \frac{x - 1}{x + 1}\left(\text{одг. } \frac{2}{(x+1)^2}\right)$; 28) $y = \frac{5}{2x - 1}\left(\text{одг. } \frac{-10}{(2x-1)^2}\right)$;

29) $y = \frac{x^2}{4x^2 + 1}\left(\text{одг. } \frac{2x}{(4x^2 + 1)^2}\right)$; 30) $y = \frac{x^3}{x^3 + 2}\left(\text{одг. } \frac{6x^2}{(x^3 + 2)^2}\right)$;

31) $y = \frac{5x^2 - 1}{3x^2}\left(\text{одг. } \frac{2}{3x^3}\right)$;

32) $y = \frac{4}{x^2 - 3x + 1}\left(\text{одг. } \frac{12 - 8x}{(x^2 - 3x + 1)^2}\right)$;

33) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}\left(\text{одг. } \frac{2}{(2 - x)^3}\right)$;

34) $y = (x^2 + 2)\frac{3x - 1}{x}\left(\text{одг. } \frac{6x^3 - x^2 + 2}{x^2}\right)$;

35) $y = (x^2 - x)^3$ (одг. $6x^5 - 15x^4 + 12x^3 - 3x^2$);

36) $y = (x^2 + 2x)^3$ (одг. $6x^5 + 30x^4 + 48x^3 + 24x^2$);

37) $y = (2x^2 + 3x - 1)^3$ [одг. $(12x + 9)(2x^2 - 3x - 1)^2$];

38) $y = (x^2 + 1)^4$ (одг. $8x^7 + 24x^5 + 24x^3 + 8x$);

39) $y = (5x^3 + 3x - 1)^4$ одг. $(60x^2 + 12)(5x^3 + 3x - 1)^3$;

40) $y = a \sin x \cos x$ [(одг. $a \cos 2x$);

41) $y = \sin x + \cos x$ [одг. $\sqrt{2} \sin (45^\circ - x)$];

42) $y = \sin x + \cos x \operatorname{tg} x$ (одг. $2 \cos x$);

43) $y = \cos x + \sin x \cdot \operatorname{tg} x$ $\left(\text{одг.} \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$.

44) $y = \sqrt{3x - 1}$ $\left(\text{одг.} \dfrac{3}{2\sqrt{3x - 1}}\right)$;

45) $y = \sqrt[3]{(4x^2 - 2x + 5)^2}$ $\left(\text{одг.} \dfrac{4(4x - 1)}{3\sqrt[3]{4x^2 - 2x + 5}}\right)$;

46) $y = \sqrt[5]{(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5)^3}$ $\left(\text{одг.} \dfrac{6(3x^2 - 3x + 2)}{5\sqrt[5]{(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5)^2}}\right)$;

47) $y = \sqrt[6]{(5x^2 - 2x)^5}$ $\left(\text{одг.} \dfrac{5(5x - 1)}{3\sqrt[6]{5x^2 - 2x}}\right)$;

Наћи други извод функције:

48) $y = 3x^2 - 6x + 2$ (одг. 6);

49) $y = 3 + 0{,}5x^2 - \dfrac{1}{3} x^4$ (одг. $1 - 4x^2$);

50) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ $\left(\text{одг.} \dfrac{4}{(x - 1)^3}\right)$;

51) $y = \dfrac{x^3}{x - 1}$ $\left(\text{одг.} \dfrac{2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x}{(x - 1)^2}\right)$.

Наћи трећи извод функције:

52) $y = 0{,}4x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ (одг. $24x^2 + 24x - 12$);

53) $y = \dfrac{5}{4} x^4 + \dfrac{4}{3} x^3 + \dfrac{3}{2} x^2 + 2x + 1$ (одг. $30x + 8$);

54) $y = \dfrac{2x^2 - 2}{x}$ $\left(\text{одг.} \dfrac{12}{x^4}\right)$; 55) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ $\left(\text{одг.} \dfrac{-6}{x^4}\right)$.

Наћи изводе функција:

56) $y = \sin 2x$; 57) $y = \sin^3 5x^2$;

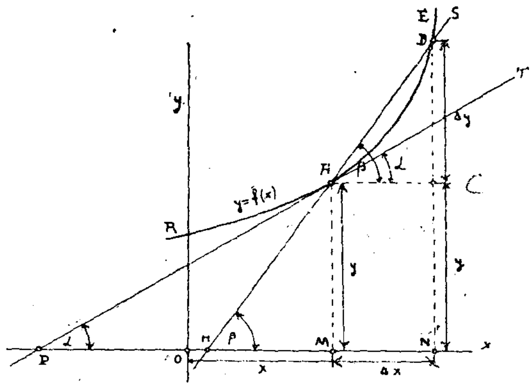
58) $y = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$;

59) $y = \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$;

60) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x (1 - \cos x)}$.

§ 189. **Геометриjски значаj извода и његова примена.**

Нека је крива RE (сл. 21) графички претставник непрекидне функције $y = f(x)$ и нека њена тачка A има координанте x и y. Ако независно променљивој дамо прираштај Δx, онда функција добија прираштај Δy. Из слике видимо, да су $x + \Delta x$ и $y + \Delta y$ координате тачке B. Ако повучемо $AC \parallel 0X$, а кроз B и A повучемо сечицу SH, добијамо правоугли трогугао ACB, чије су катете прираштај Δx и Δy, а $\sphericalangle$ BAC једнак је углу β који сечица гради с позитивним правцем апсцисне осовине. Из овога троугла видимо да је $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta$. Ако сада замислимо да се Δx поступно смањује и



Сл. 21.

тежи нули, онда се и Δy поступно смањује и тежи нули, пошто је дата функција непрекидна, што се, у осталом, види и из саме слике. У том се случају тачка B поступно приближује тачки A, сечица SH обрће се око тачке A и поступно тежи да заузме положај тангенте TP у тачки A, а угао β поступно се смањује и приближује се углу α, који гради тангента TP са позитивним правцем апсцисне осовине. Када Δx добије своју граничну вредност т. ј. кад је $\lim \Delta x = 0$, таду се сечица SH претвара у тангенту TP, угао β у α а $\operatorname{tg}\beta$ у $\operatorname{tg}\alpha$., т. ј.

$$\lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = \lim (\operatorname{tg}\beta)_{\Delta x = 0} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Из овога обрасца увиђамо да први извод функције

$y = f(x)$ има своје геометријско значење. Он нам претставља тангенс правца дирке криве $y = f(x)$ у једној датој тачки.

Према овоме, ако желимо да нађемо једначину тангенте ма које криве линије $y = f(x)$, у некој њеној тачки апсцисе $x = x_1$, онда налазимо најпре и ординату те тачке y_1 [из $y_1 = f(x_1)$], а затим тангенс правца тражене дирке $tg\alpha =$
$= \lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = \frac{dy}{dx}$, т. ј. једнак је вредности првог извода дате функције за $x = x_1$. Тражена једначина тангенте биће:

$$\mathbf{y - y_1 = f'(x_1)\,(x - x_1)}, \text{ или } y - y_1 = \frac{dy}{dx}\,(x - x_1).$$

Пример, 1) *Наћи једначину тангенте криве $y = x^2 - 3x + 1$ у тачки апсцисе $x_1 = 2$.* Ордината те тачке биће $y_1 = 4 - 6 + 1 = -1$, $y' = 2x - 3$ а тангента правца $f'(x_1) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Тражена једначина биће:

$$y + 1 = 1 \cdot (x - 2), \text{ или } y - x + 3 = 0.$$

Примери за вежбу: Наћи једначине тангенте код:

1) $y = 5x^2 + x + 2$ у тачки $x_1 = 0{,}5$ одг. $y - 6x - 0{,}75 = 0$.
2) $y = -2x^2 - 3x + 5$ „ „ $x_1 = -1$ „ $y - x - 7 = 0$.
3) $y = 4x^2 - 3x + 1$ „ „ $x_1 = 3$ „ $y - 21x + 35 = 0$.
4) $y = -x^2 + 2x + 1$ „ „ $x_1 = -3$ „ $y - 8x - 10 = 0$.
5) $y = -3x^2 + 7x + 5$ „ „ $x_1 = 2$ „ $y + 5x - 17 = 0$.

9-XII-1940

§ 190. **Парцијални (делимични) изводи**. Нека је дата функција $y = F(u,v)$ од двеју промењљивих *u* и *v*. Ако *v* сматрамо као сталну количину, онда извод функције само за независно промењљиву *u*, који се означава $F'_u(u,v)$ или $\frac{\partial F}{\partial u}$, зове се *парцијални извод узет по u*. Ако пак *u* сматрамо за сталну количину, а *v* за промењљиву, онда извод функције само за промењљиву *v*, који се бележи $F'_v(u,v)$ или $\frac{\partial F}{\partial v}$, зове *парцијални извод узет по v*. Ако најзад *u* и *v* сматрамо као функције промењљиве *x*, онда за прираштај Δx, прираштаји од y, u, v биће Δy, Δu и Δv. У том случају прираштај функције биће:

$$\Delta y = F(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - F(u,v) \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

или, ако овој једначини додамо и одузмемо $F(u, v + \Delta v)$, добијамо идентичну једначину:

$$\Delta \mathbf{y} = [F(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v)] + [F(u, v + \Delta v) - F(u,v)] \;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Разлику у првој загради у граничној вредности можемо сматрати као бесконачно мали прираштај функције, када је само *u* променљива, а разлику у другој загради сматрамо као бесконачно мали прираштај функције, када је само *v* променљива.

Ако прву разлику помножимо и поделимо са Δu, а другу са Δv, а затим целу једначину поделимо са Δx, добијамо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{F(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-F(u,\ v+\Delta v)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+$$
$$+\frac{F(u,\ v+\Delta v)-F(u,v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\ \cdots\ (3).$$

Најзад за $\lim \Delta x=0$ биће:

$$\mathbf{y'=F'_u\,(u,v)\,u'+F'_v\,(u,v)\,v'},$$
$$\text{или}\quad y'=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot u'+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot v'\ \cdots\ (4)$$

Једначина (4) казује, **да је извод једне функције од двеју променљивих једнак збиру њених делимичних извода, сваки помножен са изводом те променљиве у односу по нез. пром. количину.** Исти је случај и са изводом од трију и више променљивих.

§ 191. **Извод имплицитних функција.** За једну функцију $F(x, y)=0$ каже се да је *имплицитна* (скривена), ако није решена по зависно променљиво количини. Таква је функција $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Напротив, функција решена по зависно променљивој количини тако, да је само она на левој страни, зове се *експлицитна* (откривена). Таква је функција $y=ax+b$. Извод имплицитне функције можемо наћи помоћу обрасца под (4) претходног параграфа, а да претходно не решавамо једначину по *y*. Тако, да би смо нашли извод имплицитне функције $F(x, y)=0$, ставимо да је $z=F(x, y)$. Тада је према обрасцу (4) претходног параграфа:

$$Z'=F'_x\,(x, y).\,x'+F'_y\,(x, y)\,y',\quad \text{или}\quad z'=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot x'+\frac{\partial F}{\partial y}\,y'.$$

Како је у овом случају $z=0$, то је и $z'=0$. Стога је

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot x'+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0,\quad \text{или како је}\ x'=1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0.\quad \text{Одавде је}\ y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad \text{т. ј,}$$

Извод једне имплицитне функције налазимо, када најпре нађемо делимични извод функције по x, сматрајући y као сталну количину, затим налазимо делимични извод функције по y, сматрајући x као сталну количину, па најзад парцијални извод по x поделимо парцијалним изводом по y и добивеном количнику променимо знак.

Примери: 1) *Наћи извод имплицитне функције* $3x + 4y - 32 = 0$. Овде је $\frac{\partial F}{\partial x} = 3$, а $\frac{\partial F}{\partial y} = 4$, те је $y' = -\frac{3}{4}$. Да је ово тачно, можемо се уверити, ако претходно ову имплицитну функцију доведемо на експлицитни облик $y = -\frac{3}{4}x + 8$, чији је извод $y' = -\frac{3}{4}$.

2) Наћи извод функције $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Овде је $\frac{\partial F}{\partial x} = By + 2Cx + D$, а $\frac{\partial F}{\partial y} = 2Ay + Bx + E$, па је

$$y' = -\frac{By + 2Cx + D}{2Ay + Bx + E}.$$

Овај начин налажења извода имплицитних функција олакшава нам решење проблема изналажења једначина тангената и нормама код кривих, чије су једначине дате у имплицитном облику.

Ако је A (x_1, y_1) додирна тачка криве E $(x, y) = 0$, онда је једначина тангенте у тој тачки:

$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}, \text{ а нормале: } \mathbf{y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)},$$

где је $m = \operatorname{tg} \alpha$. Па како је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y'$, то је једначина тангенте:

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)}, \text{ а нормале: } y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$$

$$\text{где је } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \begin{pmatrix} x = x_1 \\ y = x_1 \end{pmatrix}$$

Примери:

1) *Код круга*: $x^2 + y^2 = r^2$ биће $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, а

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x_1}{2y_1} = -\frac{x_1}{y_1}$, те је једначина тангенте:

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)}, \text{ а нормале: } \mathbf{y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)}.$$

2) *Код елипсе*: $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ биће $\frac{\partial F}{\partial x} = 2b^2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2a^2y$, а $\frac{dy}{dx} = -\frac{2b^2x_1}{2a^2y_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, те је једначина тангенте:

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)}, \text{ а нормале: } \mathbf{y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1} \cdot (x - x_1)}.$$

3) *Код хиперболе*: $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ биће $\frac{\partial F}{\partial x} = 2b^2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2a^2y$, а $\frac{dy}{dx} = \frac{2b^2x_1}{2a^2y_1} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, те је једначина тангенте:

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)}, \text{ а нормале: } \mathbf{y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)}.$$

4) *Код параболе*: $y^2 - 2px = 0$ је $\frac{\partial F}{\partial x} = -2p$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, а $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{2y_1} = \frac{p}{y_1}$, те је једначина тангенте: $\mathbf{y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)}$,

а нормале: $\mathbf{y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)}$.

5) *Код круга*; $x^2 + y^2 - 2px - 2qy + (p^2 + q^2 - r^2) = 0$ је $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2p$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2q$, а $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x_1 - 2p}{2y_1 - 2q} = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}$,

те је једначина тангенте: $\mathbf{y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1)}$, **или** $\mathbf{(x - x_1)(x_1 - p) + (y - y_1)(y_1 - q) = 0}$, а нормале:

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - x_1)}.$$

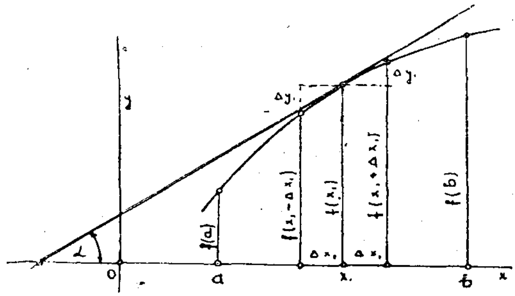
Примери за вежбу: Наћи једначине тангената и нормала кривих линија:

1) $x^2 + y^2 = 232$ у тачки $(14, -6)$; 2) $x^2 + y^2 - 14 - 4y - 5 = 0$ у тачки $(10,9)$; 3) $4x^2 + 9y^2 = 36$ у тачки $\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$.

4) $9x^2 - 4y^2 = 36$ у тачки $(4, -3\sqrt{3})$;

5) $y^2 = 10x$ у тачки $(7, \sqrt{70})$.

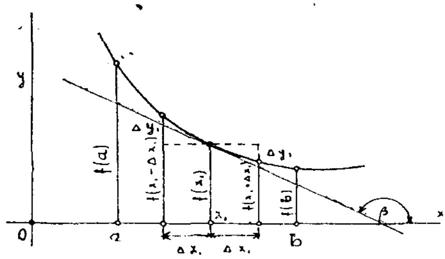
§ 192. **Растуће и опадајуће функције.** Нека је дата функција $y = f(x)$, која је непрекидна у неком датом интервалу (a, b). Како је функција непрекидна, то ће сваком бесконачно малом прираштају Δx независно променљиве x, одговарати бесконачно мали прираштај Δy функције y. Дата функција биће *растућа*, ако бесконачно малом позитивном прираштају Δx_1, где је $a < x_1 < b$, одговара бесконачно мали позитивни прираштај Δy_1, или бесконачно малом негативном



Сл. 22.

прираштају Δx_1, одговара бесконачно мали негативни прираштај Δy_1, т.ј. функција је растућа, ако су оба прираштаја Δx_1 и Δy_1 истог знака. Функција је *опадајућа*, ако су ови прираштаји различитог знака, т.ј. за $\Delta x_1 > 0$ је $\Delta y_1 < 0$, или за $\Delta x_1 < 0$ је $\Delta y_1 > 0$.

Ово се дâ најбоље увидети и посматрањем слика 22. и 23.



Сл. 23.

Посматрањем прве слике увиђамо, да се ордината увећава или смањује према томе, да ли се апсциса увећава или смањује, а посматрањем друге слике увиђамо, да се ордината смањује, када се апсциса повећава, а повећава се, када се апсциса смањује.

Дакле, функција $y = f(x)$, која је непрекидна у интервалу (a, b) је растућа, ако се повећавањем x, повећава и функција, или смањивањем x, смањује и функција; напротив, функција је опадајућа ако се увећавањем x, функција смањује, или смањивањем x, функција повећава.

Теорема. Код растуће непрекидне функције $y = f(x)$ у неком интервалу, први је извод позитиван, и код опадајуће тај је извод негативан.

Тачност ове теореме можемо увидети и посматрањем слика 22. и 23. Код прве тангента у тачки апсцисе x_1 гради с позитивном страном апсцисне осовине оштар угао, а код друге, ова тангента гради туп угао. Како тангенси ових углова претстављају прве изводе $f'(x_1)$, то је иста $f'(x_1)$, код растуће функције позитиван, као тангенс оштрог угла, а код опадајуће функције, тај је извод негативан, као тангенс тупог угла.

§ 193. **Појам о максимуму и минимуму функција.** Нека је дата функција $y = f(x)$, која је непрекидна у неком интервалу (a, b). Ако независно промењљивој x дамо различите вредности између a и b, онда и функција y, односно $f(x)$, добија различите вредности. У овим променама функције, наилазимо на такву једну вредност, која је већа од својих суседних блиских вредности, или наилазимо на такву једну њену вредност, која је мања од својих суседних блиских вредности. Ако први случај наступа за $x = x_1$, а други за $x = x_2$, онда се каже да дата функција има свој максимум $f(x_1)$ за $x = x_1$, а свој минимум $f(x_2)$ за $x = x_2$.

Код максимума, за бесконачно мали прираштај Δx_1, биће

$$f(x_1 - \Delta x_1) < f(x_1) > f(x_1 + \Delta x_1),$$

а код минимума, за бесконачно мали прираштај Δx_2, биће

$$f(x_2 - \Delta x_2) > f(x_2) < f(x_2 + \Delta x_2),$$

као што се јасно види из слике 24.

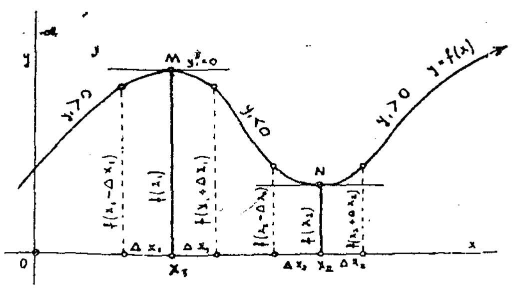
Када дата функција тежи своме максимуму, онда је растућа, те јој је први извод, према теореми из пређашњег параграфа, позитиван, т. ј. $y' = f'(x) > 0$, а кад прође свој максимум, функција постаје опадајућа, те јој је први извод, према истој теореми, негативан, т. ј. $y' = f'(x) < 0$.

Према овоме, код максимума, први извод функције од позитивности прелази на негативост, те мора пре-

ћи и кроз вредност нулу. Ту вредност добија извод, када функција има свој максимум. Тада је дакле $y' = f'(x) = 0$.

Међутим, када функција тежи своме минимуму, она је опадајућа, те је њен први извод негативан, т. ј. $y' = f'(x) < 0$, а чим пређе свој минимум, она постаје растућа, те јој први извод постаје позитиван; т. ј. $y' = f'(x) > 0$. **Према овоме, код минимума, први извод функције од негативне вредности прелази на позитивну вредност, те мора прећи и кроз вредност нулу.** Ту вредност добија извод, када функција има баш свој минимум. Тада је дакле $f'(x) = 0$.

Да је заиста први извод функције и код максимума и код минимума једнак нули, можемо увидети и из сл. 24., јер су и тангента у максималној тачки M, и тангента у минималној тачки N, криве једначине $y = f(x)$, паралелне са апсцисном



Сл. 24.

осовином, те су њихови угаони коефицијенти, т. ј. извод $f'(x)$ једнаки нули. Из свега изложеног до сада изводимо овај важан закључак.

Дата функција $y = f(x)$ имаће максимум или минимум само за ону вредност независно промењиве количине x, за коју вредност први извод функције постаје једнак нули.

Како код максмимума први извод, од позитивног постаје негативан, т.ј. *смањује се*, тада, према теореми из прећашњег параграфа, његов први извод, односно други извод дате функције, треба да има негативну вредност т. ј. $y'' = f''(x) < 0$. Код минимума, први извод од негативног постаје позитиван, т. ј. *повећава се*, те његов први извод, односно други извод дате функције, треба да има позитивну вредност, т. ј. $y'' = f''(x) > 0$. **Према овоме, изводимо закључак, да када функ-**

ција има максимум, онда је $y' = 0$ а $y'' < 0$, а када има минимум, онда је $y' = 0$ а $y'' > 0$.

Из свега овога изводимо следеће упутство за тражење максимума или минимума неке дате функције:

Одређујемо најпре први извод дате функције и стављамо да је тај извод једнак нули. Затим решавамо добивену једначину, да бисмо нашли њене корене, који су у ствари оне вредности x_{-a}, за које дата функција има свој максимум или минимум. Најзад налазимо други извод дате функције и одмах одређујемо његов знак за оне вредности x_{-a}, који су били корени једначине $f'(x) = 0$. Тада за $y'' < 0$ функција има максимум, а за $y'' > 0$ функција има минимум.

Решени примери:

1) *Наћи максимуме и минимуме функције* $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Овде је први извод $y' = 3x^2 - 12x + 9$ а други $y'' = 6x - 12$. Стављајући да је први извод раван нули, добијамо:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0, \text{ или } x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Одавде је $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Тада је $f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$ и $f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0$. Према томе, дата функција има један минимум за $x = 3$ и то $y = 1$ и један максимум за $x = 1$ и то $y = 5$.

2) *Наћи максимуме и минимуме функције* $y = \frac{5x^2 + 8x - 1}{x^2 + 1}$.

Овде је $y' = \frac{(10x+8)(x^2+1) - (5x^2+8x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-8x^2 + 12x + 8}{(x^2+1)^2}$

Стављајући да је први извод раван нули добијамо:

$$\frac{-8x^2 + 12x + 8}{(x^2+1)^2} = 0, \text{ или } -8x^2 + 12x + 8 = 0, \text{ или } 2x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Одавде је $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$. Да бисмо нашли сада вредности од $f''(2)$ и $f''\left(-\frac{1}{2}\right)$, довољно је наћи извод само бројитеља од $f''(x)$, јер именитељ не утиче на знак другог извода.

Извод овог бројитеља је $-16x + 12$, па је

$$f''(2) = -32 + 12 = -20 < 0 \text{ и } f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 8 + 12 = 20 > 0.$$

Према томе, дата функција има један максимум за $x = 2$ и то $y = 7$ и један минимум за $x = -\frac{1}{2}$ и то $y = -3$.

3) *Наћи максимуме и минимуме функције* $y = \frac{a+x}{a^2+x^2}$.

Овде је $y' = \frac{1 \cdot (a^2+x^2) - 2x(a+x)}{(a^2+x^2)^2} = \frac{a^2-2ax-x^2}{(a^2+x^2)^2}$.

Стављајући да је овај извод раван нули, добијамо: $\frac{a^2-2ax-x^2}{(a^2+x^2)^2} = 0$, или $a^2-2ax-x^2=0$, или $x^2+2ax-a^2=0$.

Одавде је $x_1 = a(\sqrt{2}-1)$ и $x_2 = -(\sqrt{2}+1)$.

Да бисмо нашли знак од $F''(x)$, опет налазимо, као код пређашњег примера, само извод бројитеља, пошто именитељ не утиче на знак другог извода. Извод овог бројитеља је $-2a-2x$, те је $F''[a(\sqrt{2}-1)] = -2a-2a(\sqrt{2}-1) = -2a\sqrt{2} < 0$, а $F''[-a(\sqrt{2}+1)] = -2a+2a(\sqrt{2}+1) = 2a\sqrt{2} > 0$. Према томе, дата функција има један максимум за $x = a(\sqrt{2}-1)$ и то $y = \frac{\sqrt{2}+1}{2a}$ и један минимум за $x = -a(\sqrt{2}+1)$ и то $y = \frac{1-\sqrt{2}}{2a}$.

4) *Наћи максимуме и минимуме функције* $y = \frac{x^2-x-4}{x-1}$.

Овде је први извод $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-1 \cdot (x^2-x-4)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}$. Стављајући да је први извод једнак нули, добијамо: $\frac{x^2-2x+5}{(x-1)^2} = 0$, или $x^2-2x+5=0$. Одавде је $x_1 = 1+2i$ и $x_2 = 1-2i$. Како ови корени нису стварни, већ имагинарни, то дата функција нема ни максимума ни минимума.

5) *Од 64 палидрвца начинити правоугаоник максималне површине.*

Ако је дужина траженог правоугаоника x, онда је његова ширина $32-x$, а његова површина $y = x(32-x)$. Први извод ове функције је $y' = 1 \cdot (32-x) + x \cdot (-1) = 32-2x$. Стављајући да је овај извод једнак нули, добијамо $32-2x=0$, а одавде је $x = 16$.

Како је други извод $f''(x) = -2$, то ће овај правоугаоник имати максималну површину, ако му је дужина 16, а ширина $32-16=16$, т.ј. ако је он квадрат стране 16 палидрваца.

6) *Наћи максимуме и минимуме функције*

$$y = \sin x \cos(\alpha - x).$$

Овде је први извод $y' = \cos(2x - \alpha)$. Стављајући да је овај извод једнак нули, добијамо $\cos(2x - \alpha) = 0$, а овде је

$$2x - \alpha = \pm \frac{\pi}{2}, \text{ или } x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Други извод је $y'' = -2\sin(2x - \alpha)$, те је

$$F''\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2,$$

$$F''\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Према томе, дата функција има један максимум за

$$x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ и то}$$

$$y = \sin\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \sin\alpha)$$

и један минимум за $x = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}$ и то $y = \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cdot$

$$\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

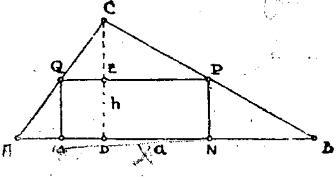
$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{2}(1 - \sin\alpha).$$

7) *У датом троуглу ABC уписати правоугаоник максималне површине.*

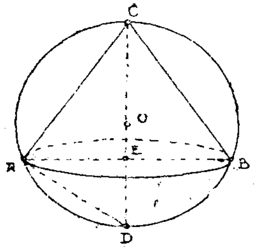
Нека је тражени правоугаоник $MNPQ$, чија је дужина $MN = x$ а ширина $MQ = z$. Тада из сличности троуглова ABC и QPC имамо: $AB : QP = CD : CE$, или $a : x = h : (h - Z)$, а



Сл. 25.

одавде је $z = \frac{h}{a}(a-x)$. Површина правоугаоника биће: $y = xz = x \cdot \frac{h}{a}(a-x) = \frac{h}{a}x(a-x)$. Овде је $y' = \frac{h}{a}(a-2x)$. Стављајући да је овај извод једнак нули, добијамо $\frac{h}{a}(a-2x)=0$ а одавде је $x = \frac{a}{2}$. Како је други извод $y'' = -2$, то ће тражени правоугаоник бити максималне површине $y = \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ah}{4}$, ако му је основица $x = \frac{a}{2}$ а висина $z = \frac{h}{2}$.

8) *У датој лопти полупречника* r *уписати купу максималне запремине.*



Сл. 26.

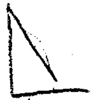
Ако полупречник купине основе AE означимо са x, а њену висину CE са Z, онда је запремина купе

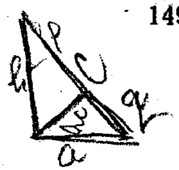
$$y = \frac{1}{3} x^2 \pi \cdot z \cdots (1)$$

Да бисмо израз на десној страни свели на једну непознату, а затим да му нађемо први извод, треба да елиминирамо x. Из правоуглог троугла ACD имамо: $CE : AE = AE : DE$, или $z : x = x : (2r - z)$. Одавде $x^2 = z(2r - z)$. Заменом у (1) добијамо $y = \frac{\pi}{3} z^2 (2r - z)$. Његов први извод је $y' = \frac{\pi z}{3}(4r - 3z)$. Тада је $\frac{\pi z}{3}(4r - 3z) = 0$, а $z = \frac{4r}{3}$ и $x = \frac{2r}{3}\sqrt{2}$. Како је други извод $y'' = \frac{\pi}{3}(4r - 6z)$, који има негативну вредност при замени $z = \frac{4r}{3}$, то уписана купа биће максималне запремине, ако је полупречник базиса $x = \frac{2r}{3}\sqrt{2}$, а висина $z = \frac{4r}{3}$.

Задаци за вежбу. Одреди максимуме или минимуме ових функција:

1) $y = 16x - x^2$ (max 64 за $x = 8$);
2) $y = 12x + 2x^2$ (min -18 за $x = -3$);





3) $y = 20 - 3x^2$ (max 20 за $x = 0$);

4) $y = x^2 + 8x$ (min -16 за $x = -4$);

5) $y = 7 + 2x^2$ (min 7 за $x = 0$);

6) $y = x^2 - 4x + 5$ (min 1 за $x = 2$);

7) $y = 17 + 8x - x^2$ (max 33 за $x = 4$);

8) $y = 6x - x^2 - 21$ (max -12 за $x = 3$);

9) $y = 8x - 2x^2 - 9$ (max -1 за $x = 2$);

10) $y = (x - 1)(x - 7)$ (min -9 за $x = 4$);

11) $y = x^3 - 3x + 5$ (min 3 за $x = 1$, max 7 за $x = -1$);

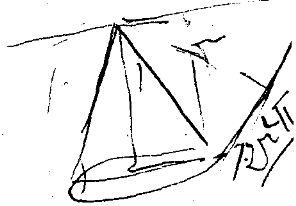
12) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ (min -28 за $x = 5$, max 4 за $x = 1$);

13) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ (min -15 за $x = 2$, max 12 за $x = -1$);

14) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 12$ (min -100 за $x = 4$, max 25 за $x = -1$);

15) $y = \dfrac{x^2 - 7}{x + 4}$ $\left(\begin{matrix}\text{min } -2 \text{ за } x = -1,\\ \text{max } -14 \text{ за } x = -7\end{matrix}\right)$;

16) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ $\left(\begin{matrix}\text{max } 0 \text{ за } x = 0,\\ \text{min } 4 \text{ за } x = 2\end{matrix}\right)$;



17) $y = 3x + \dfrac{27}{x}$ $\left(\begin{matrix}\text{min } 18 \text{ за } x = 3,\\ \text{max } -18 \text{ за } x = -3\end{matrix}\right)$;

18) $y = \dfrac{15 - 4x^2}{8 - 4x}$ $\left(\begin{matrix}\text{min } 5 \text{ за } x = \frac{5}{2}\\ \text{max } 3 \text{ за } x = \frac{3}{2}\end{matrix}\right)$;

19) $y = \dfrac{3x}{x^2 + x + 1}$ $\left(\begin{matrix}\text{max } 1 \text{ за } x = 1,\\ \text{min } -3 \text{ за } x = -1\end{matrix}\right)$;

20) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 23}{2x - 9}$ $\left(\begin{matrix}\text{max } 3 \text{ за } x = 2,\\ \text{min } 8 \text{ за } x = 7\end{matrix}\right)$;

21) $y = \dfrac{3 - 2x}{x^2 - 2x + 7}$ $\left(\begin{matrix}\text{max } \frac{1}{2} \text{ за } x = -1,\\ \text{min } -\frac{1}{3} \text{ за } x = 4\end{matrix}\right)$;

22) $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1}$ $\left(\begin{matrix}\text{нема ни max.}\\ \text{ни min.}\end{matrix}\right)$;

23) $y = \dfrac{2x^2 + 10x + 8}{2x^2 - 2x + 1}$ $\left(\begin{matrix}\text{min } -1 \text{ за } x = \frac{3}{2}\\ \text{max } 9 \text{ за } x = \frac{1}{4}\end{matrix}\right)$;

24) $y = \dfrac{4x^2 - 20x + 16}{4x^2 - 12x + 9}$ $\left(\text{max } \dfrac{9}{5} \text{ за } x = \dfrac{1}{4}\right)$;

25) $y = x^4(4a^2 - x^2)$ $\left(\text{max } \dfrac{256a^6}{27} \text{ за } x = \pm\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}\right)$;

26) $y = \dfrac{x - 2a}{x^3}$ $\left(\text{max } \dfrac{1}{27a^2} \text{ за } x = 3a\right)$;

27) $y = \frac{x^2 - a^2}{x^3} \left(\max \ \frac{2\sqrt{3}}{9a} \text{ за } x = a\sqrt{3}\right)$;

28) $y = \frac{x^3}{(x - a)^2} \left(\min \ \frac{27a}{4} \text{ за } x = 3a\right)$;

29) У функцији $y = 2x^2 - px - 1$ наћи p, кад се зна, да ова функција добија минимум за $x = 3$ (одг. 12).

30) У функцији $y = -4x^2 + dx - 1$ одреди d, кад се зна, да ова функција добија максимум за $x = 3$ (одг. 24).

31) Да се одреди a у функцији $y = ax^2 - 14x + 2$, кад се зна, да она добија минимум за $x = 1$ (од. 7).

32) Одреди a и b у функцији $y = ax^3 + bx^2 - 36x - 1$, кад се зна, да она добија минимум за $x = 3$, а максимум за $x = -2$ (одг. 2 и 3).

33) Број 6 поделити на таква два дела, да је збир њихових кубова минимум (одг. сваки је део 3, min 54).

34) Број 95 поделити на таква два цела дела, да је њихов производ максимум (47 и 48).

35) Број 18 раставити на таква два цела чинитеља, да је њихов збир минимум (одг. 3 и 6).

36) Поделити дуж $AB = 20_m$ тачком C на таква два дела да је збир $AC^2 + 3CB^2$ минимум ($AC = 15_m$, $CB = 5_m$).

37) У датој лопти уписати облицу, чија ће омотачева површина бити максимална (облица је равнострана).

38) Од свију правоуглих троуглова, којима је хипотенуза 4_m, који има највећи обим? (Равнокрако-правоугли катете $\sqrt{8}$ а обима $9{,}65_m$).

39) Наћи бочну ивицу правилне и праве четворостране призме, која има запремину $v = 343_{cm}{}^3$, а има најмању површину (одг. 7).

40) Да се одреди полупречник базиса и висина оне облице, чија је површина $471_{cm}{}^2$, а има највећу запремину (за $\pi = 3{,}14$ је $r = 5$, $h = 10$).

41) Од свију *равнокраких* троуглова уписаних у кругу полупречника r, који има максималну површину? (Одг. равностран троугао висине $\frac{3r}{2}$ а површине $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$).

§ 194. **Појам диференцијала.** Бесконачно мали прираштај неке промењљиве количине, зове се диференцијал те количине, а означава се, кад се пред том количином стави знак d. Тако диференцијали промењљивих x, y и z означавају се dx, dy и dz.

A) *Диференцијал функције од једне независно променљиве.* Да бисмо нашли диференцијал dy функције $y = f(x)$, када је dx бесконачно мали прираштај независно променљиве x, служимо се једначином

$$y + dy = f(x + dx).$$

Из ње је $dy = f(x + dx) - y = f(x + dx) - f(x)$.

Ако ову једначину поделимо са dx, добијамо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Како је десна страна ове једначине у ствари први извод дате функције, то је

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \text{ а одавде је } \mathbf{dy = f'(x)\, dx}, \text{ т. ј.}$$

да бисмо нашли диференцијал једне функције од једне независно променљиве количине, треба први извод те функције да помножимо са бесконачно малим прираштајем независно променљиве количине.

Примери: Наћи диференцијале функција:

a) $y = x^m$, b) $y = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 6$, c) $y = \sin x$, d) $y = \cos x$, e) $y = e^{x^2}$. Тражени диференцијали биће:

a) $dy = mx^{m-1}dx$; b) $dy = (9x^2 + 8x - 5)\, dx$; c) $dy = \cos x \cdot dx$; d) $dy = -\sin x \cdot dx$; e) За $x^2 = u$, биће $du = 2xdx$, а за $y = e^u$ биће $dy = e^u\, du$, или заменом $dy = e^{x^2} \cdot 2xdx = 2xe^{x^2}dx$.

Напомена. — Образац $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ даје нову дефиницију извода, која би гласила: *извод је количник између диференцијала функције и диференцијала независно променљиве количине.* Из овог обрасца увиђамо, да диференцијал једне функције зависи од ова три елемента: a) од облика функције; b) од вредности независно применљиве количине; и c) од вредности прираштаја независно променљиве количине. Сва правила која су служила за одређивање извода функција у важности су и за одређивање њихових диференцијала.

B) *Диференцијал функције која зависи од више променљивих количина.* Нека је дата функција $z = f(x, y)$, чији се диференцијал тражи. Применом правила о *парцијалним* изводима (§ 190) имамо:

$$z' = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' \text{ или за } x' = 1 \text{ имамо}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ или множењем са dx имамо:}$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy, \text{ т. ј.}$$

Диференцијал функције од две и више променљивих количина једнак је збиру делимичних диференцијала.

Пример. Наћи диференцијал функције $z = x^2y - xy^2$.

Овде је $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2$, а $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy$, те је

$$dz = (2xy - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy)\, dy.$$

C) *Диференцијал имплицитних функција.* Нека је дата имплицитна функција $f(x,y) = 0$. Код § 191. виделисмо да је њен извод:

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \text{ или}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = 0.$$

Пример. Наћи диференцијал функције $x^2 + y^2 = 25$

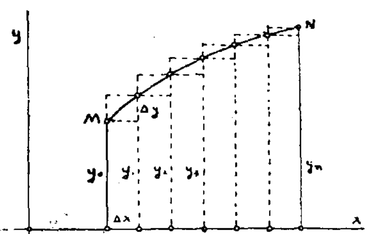
Овде је $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, а $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, па је $2xdx + 2ydy = 0$. Одавде је $dy = -\frac{x}{y}\, dx$.

Примери за вежбу могу се узети из § 188.

ДЕСЕТИ ОДЕЉАК

ОСНОВИ ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА.

§ 195. **Инфинитезимални рачун.** Овај се рачун бави операцијама са бесконачно великим и бесконачно малим количинама, које се количине могу употребити за израчунавање коначних количина. Како се рачун са бесконачно великим количинама да̂ свести на рачун са бесконачно малим количинама, то одређивање коначних количина може се извршити употребом бесконачно малих количина и то на следећа два начина: 1) *што коначну количину можемо сматрати као количник двеју бесконачно малих количина*; и 2) *што коначну количину можемо сматрати као границу збира од бесконачно много бесконачно малих количина.* Тачност првог начина најбоље се да̂ увидети из теорије извода, где смо видели, да је количник $\frac{dy}{dx}$ између бесконачно малог прираштаја функције y и бесконачно малог прираштаја независно променљиве x, претставља угаони коефицијенат дирке у некој тачки M криве $y = f(x)$. Тачност другог начина можемо увидети посматрањем сл. 27., где површину MEFN између криве MN, апсцисне осовине и ордината ME и NF, сматрамо као граничну вредност збира од бесконачно много бесконачно малих трапеза. На употреби бесконачно малих количина првим начином, ради израчунавања коначних количина, оснива се *диференцијални рачун*, а на другој *интегрални рачун.* Оба ова рачуна сматрају се као две гране инфинитезималног рачуна.



Сл. 27.

§ 196. **Задатак интегралног рачуна.** Интегрални рачун има за задатак: 1) *да одреди границу збира од бесконачно малих количина, чији је број бесконачно велики*; 2) *да одреди функцију чији је извод или диференцијал познат.* Оба ова задатка, на први поглед различита, своде са на један, што можемо увидети из следећег излагања. —

1) Нека је $y = f(x)$ једначина криве MN (сл. 27.), а желимо да одредимо површину ограничену овом кривом, апсцисном осовином 0x и ординатама y_0 и y_n. Ако отстојање EF између ордината y_0 и y_n поделимо на *n* једнаких делова величине Δx и из деоних тачака повучемо паралелне са ординатном осовином до пресека са кривом MN, онда се површина MNFE дели на *n* малих површина, облика и особина тражене површине. Ма која од ових малих површина, већа је од одговарајућег унутрашњег правоугаоника, а мања од спољашњег правоугаоника, нацртаних на слици. Ако означимо са P_1 збир површина свих унутрашњих правоугаоника, са P_2 збир површина свих спољашњих правоугаоника, а са P тражену површину, онда је очевидно:

$$P_1 < P < P_2 \ldots (1)$$

Како је $P_1 = y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x$, а

$$P_2 = y_1\Delta x + y_2\Delta x + y_3\Delta x + \ldots + y_n\Delta x,$$

то одузимањем ових двеју једначина, добијамо:

$$P_2 - P_1 = (y_n - y_0)\Delta x \ldots (2)$$

Ако сада замислимо да је Δx бесконачно мала количина, онда ће разлика $P_2 - P_1$, као производ од једне коначне и једне бесконачно мале количине, тежити нули. У том случају површина P тежи било површини P_1, било површини P_2 и поклапа се са макојом од тих површина. Биће, дакле:

$$P = \lim\,[y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x] \ldots (3).$$

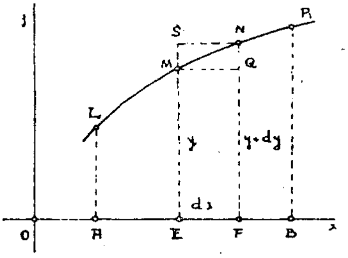
Једначина (3) показује да је заиста површина P граница којој тежи збир од бесконачно много бесконачно малих количина: $y^0\Delta x$, $y_1\Delta x$, $y_2\Delta x, \ldots$ $y_{n-1}\Delta x$. Узимајући сада да је $\Delta x = dx$, онда је из дате једначине $y = f(x)$: $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 + dx)$, $y_2 = f(x_0 + 2dx), \ldots y_{n-1} = f[x_0 + (n-1)dx]$. Заменом у једначини (3) добијамо:

$$P = \lim\,\{f(x_0)\,dx + f(x_0 + dx)\,dx + f(x_0 + 2dx)\,dx + \ldots .\, f[x_0 + (n-1)\,dx]\,dx\} \;(4)$$ или

$$P = \lim \sum_{n=1}^{\infty} f[x_0 + (n-1)\,dx]\,dx = \lim \sum f(x_0 + \kappa dx)\,dx. \quad (5)$$

Збир на десној страни једначине (4), односно (5) зове се *интегралом* функције f (x), а бележи се симболички $\int f(x)\,dx$.*) Ма који од сабирака овога збира зове се *елементом* интеграла. Из свега овога закључујемо: **да је интеграл једне функције f (x) збир од бесконачно много сабирака облика f (x+кdx) dx, узимајући поступно к = 1, 2, 3, . . ., а сматра се као површина ограничена кривом y = f (x), апсцисном осовином и двема крајним ординатама y_0 и y_n, које одговарају апсцисама x_0 и x_n.** Ова дефиниција само утврђује појам интеграла, али не служи и за његово израчунавање.

II) Израчунавање интеграла неке дате функције y = f (x) оснива се на дефиницији: *да је интеграл неке дате функције f (x) друга нека функција φ (x) чији је извод поха раван функцији под интегралним знаком.* Да је ова дефиниција тачна уверавамо се на следећи начин: Нека је LR (Сл. 28) крива дате функције y = f (x) и на њој бесконачно блиске тачке M и N. Посматрајући површину ABRL, чију величину означавамо са P и коју, према првој дефиницији сматрамо као интеграл функције y = f (x), онда површину MNFE можемо сматрати као диференцијал површине P, т. ј. dP = MNFE. Из слике се види да је диференцијал MNFE већи од правоугаоника MQFE = ydx, а мањи од правоугаоника SNFE = (y + dy)·dx т. j.



Сл. 28.

$$(y+dy).\ dx > dP > y \cdot dx \ldots (6)$$

Како се вредности: (y + dy) dx и y dx разликују за $dy\,dx$ који је производ бесконачна мала количина другог реда, то се ова разлика, као бесконачно мала, занемарује и узима се да је $dP = y \cdot dx$. Одавде је $\frac{dP}{dx} = y \ldots (7)$. Међутим, из једначине (4) знамо да је $P = \int f(x)\,dx$. Заменом у једначини (7) P са $\int f(x)\,dx$ и y са f (x), добијамо:

$$\frac{d\int f(x)dx}{dx} = f(x) \ldots (8),$$

*) Интегрални знак ∫ је деформација писмена S (suma = збир).

која нам једначина доказује тачност друге дефиниције интеграла. Разуме се, ова дефиниција интеграла, простија и важније од прве, служи за израчунавање интеграла неке дате функције. Упуство за ово израчунавање састојало би се у овоме: **треба наћи такву једну функцију $\varphi(x)$, да је њен извод по x једнак функцији $f(x)$ под интегралним знаком.** Функција под интегралним знаком зове се *интегрант*. Из једначина (4) и (8) види се, да су оба задатка интегралног рачуна, поменута у почетку овог параграфа, у ствари иста и своде се на један. Једначина (8) показује, да су диференцијални и интегрални рачун две супротне операције, које се поништавају ако се изводе једновремено на једној функцији, ма којим редом.

Примери :

1) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, јер је $\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = \frac{(m+1)x^m}{m+1} = x^m$

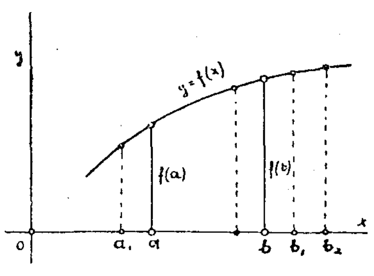
2) $\int \sin x\, dx = -\cos x$, јер је $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$;

3) $\int \cos x\, dx = \sin x$, јер јер $(\sin x)' = \cos x$.

§ 197. **Појам о одређеним и неодређеним интегралима.** Из друге дефиниције интегралног рачуна увиђамо, да један интеграл нема само једну, већ бесконачно много вредности, пошто и функције $\varphi(x)$ и $\varphi(x) + C$, где је C константна количина ма које вредности, имају један исти извод, рецимо $f(x)$. Стога, ако је $\varphi(x)$ један интеграл функције $f(x)$, остали интеграли биће $\varphi(x) + C$. Ово претстављамо обрасцем

$$\int f(x)\, dx = \varphi(x) + C \quad \ldots (1).$$

Осим ових вредности, које се разликују за сталну количину C, интеграл не може имати друге вредности, јер из теорије извода знамо, да две функције имају само онда једнаке изводе, ако су оне једнаке, или се разликују за једну сталну количину C. Тачности једначине (1) можемо увидети и геометриским путем посматрањем сл. 29. Према првој дефиницији интеграла, интеграл $\int f(x)\, dx$ претставља површину између криве



Сл. 29.

апсцисне осовине и ордината f (a) и f (b) апсциса *a* и *b*. Из слике видимо, да ова површина, т.ј. интеграл, не зависи само од апсцисе *a*, већ и од апсцисе *b*. Ако је једна од ових апсциса утврђена нпр. *b*, онда интеграл зависи од апсцисе *a*, који се повећава или смањује према томе, да ли *a* опада или расте. Ако су обе апсцисе *a* и *b* утврђене, онда и вредност интеграла била би потпуно одређена и биће један апсолутан број. Такав се интеграл бележи $\int_a^b f(x)\,dx$. Због овога интеграл $\int f(x)\,dx$ зове се *неодређеним*, а интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *одређеним* интегралом функције од x између *a* и *b*. Апсцисе *a* и *b* зову се интегралне границе. У претходном параграфу упознали смо се са упутством за одређивање неодређеног интеграла неке функције, а сада имамо да се упознамо и са начином одређивања вредности једног одређеног интеграла неке функције.

Једначина (1) у важности је, па ма у којим границама узели интеграл. Ако су ове границе *a* и *x*, онда је

$$\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) + C \cdots (2).$$

Међутим, ако се границе *a* и *x* поклапају, онда интеграл постаје нула, т ј. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. У овом случају и десна је страна једначине (2) једнака нули за $x = a$, т. ј. $\varphi(a) + C = 0$. Онда је $C = -\varphi(a)$. Заменом у (2) добијамо:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a) \cdots (3).$$

Најзад, ако место променљиве границе x узмемо утврђену *b*, имамо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) \cdots (4).$$

Једначина (4) даје упутство за одређивање вредности једног одређеног интеграла: **Треба, дакле, најпре наћи неодређени интеграл $\varphi(x)$, а затим у њему сменити x најпре горњом а затим доњом границом и резултате одузети.**

Примери:

1) *Наћи* $\int_2^4 x^3dx$. Овде је неодређени интеграл $\frac{x^4}{4}$, те је вредност датог интеграла $\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 60$.

2) *Наћи* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$. Овде је неодређени интеграл sin x, те је $\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0^0 = 1 - 0 = 1$.

3) *Наћи* $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Овде је неодређени интеграл arc tgx, те је $\left[\text{arc tg}x\right]_0^{\infty} = \text{arc tg}\,\infty - \text{arc tg}\,0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

§ 198. **Особине неодређених интеграла.**

I) *Општа вредност интеграла* $\int f(x)\,dx$ *добија се, када се нађеној вредности* $\varphi(x)$ *дода произвољна константа C*, т. ј.

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

Тачност ове особине очевидна је из излагања у претходном параграфу.

II) *Ако под интегралним знаком постоји као чинитељ нека константа, онда је интеграл једнак производу од константе и интеграла осталих чинитеља*, т. ј.

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

Тачност ове особине увиђамо из сличног правила које се односи на изводе. (Види последицу II теореме § 185).

Пример. $\int 3\cos x\,dx = 3\int \cos x\,dx = 3\sin x$.

III) *Интеграл алгебарског збира ма коликог броја функција једнак је алгебарском збиру интеграла тих функција*, т. ј.

$$\int[f(x)+\varphi(x)+\psi(x)+\mu(x)\ldots]\,dx = \int f(x)\,dx + \int\varphi(x)\,dx + \int\psi(x)\,dx + \int\mu(x)\,dx + \ldots$$

Тачност и ове особине увиђамо из сличног правила о изводима. (Види I теорему § 185).

Пример. $\int(x^5+\cos x)\,dx = \int x^5dx + \int\cos x\,dx = \frac{x^6}{6} + \sin x$.

§ 199. **Методе за израчунавање неодређених интеграла.**

1) **Непосредна интеграција.** Ова интеграција оснива се на познатим изводима простих функција и на особинама неодређених интеграла из претходног параграфа. Овде је интеграле лако наћи помоћу формула за изводе простих функција. Ти интеграли зову се *основни*.

Основни интеграли били би:

1) $\int dx = x + C$; 2) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$;

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$; 4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C;$ 6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{t}$[redacted] 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C;$

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C; \\ -\arccos x + C; \end{cases}$$

10) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + C; \\ -\operatorname{arc\,cotg} x + C; \end{cases}$$

11) $$\int \frac{dx}{x} = \log x + C;$$

12) $$\int 3(a+b)x^2 dx = 3(a+b)\int x^2 dx = 3(a+b)\cdot\frac{x^3}{3} + C = (a+$$
$$+ b)x^3 + C;$$

13) $$\int\left(\frac{a}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int\frac{a\,dx}{x} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = a\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= a\log x - \arcsin x + C;$$

14) $$\int\frac{3a\,dx}{5b\,(1+x^2)} = \frac{3a}{5b}\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{3a}{5b}\operatorname{arc\,tg} x + C;$$

15) $$\int\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C =$$
$$= \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C;$$

16) $$\int\sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C =$$
$$= \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C;$$

17) $$\int\frac{6x^4 + 8x^{\frac{3}{2}} - 5x + 2}{x}dx = \int 6x^3 dx + \int 8x^{\frac{1}{2}}dx - \int 5dx +$$
$$\int\frac{2dx}{x} = 6\int x^3dx + 8\int x^{\frac{1}{2}}dx - 5\int dx + 2\int\frac{dx}{x} = 6\cdot\frac{x^4}{4} +$$
$$8\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 5x + 2\log x + C = \frac{3x^4}{2} + \frac{16x\sqrt{x}}{3} - 5x + 2\log x + C;$$

18) $$\int(5x^3 - 4x^2 - 3x + 5)\,dx = 5\int x^3dx - 4\int x^2dx - 3\int x\,dx +$$
$$+ 5\int dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

II **Метода замене.** Ако дати интеграл $\int F(x)\,dx$ не потпада ни под један од основних интеграла, а облика је таквог, да постаје основним интегралом $\int f(u)\,du$ сменом

$x = f(u)$ и $dx = f'(u)\,du$, онда налазимо основни интеграл за независно промењиву *u*, а затим у томе интегралу вршимо замену *u* са њему једнаким изразом, у коме фигурише *x*.

Примери:

1) *Наћи* $\int \frac{dx}{a+x}$. За $a + x = u$, биће $x = u - a$, $dx = du$. Тада је $\int \frac{dx}{a+x} = \int \frac{du}{u} = \log u + C = \log(a+x) + C$.

2) *Наћи* $\int (ax+b)^m dx$. За $ax + b = u$, биће $x = \frac{u}{a} - \frac{b}{a}$, $dx = \frac{du}{a}$. Тада је $\int (ax+b)^m dx = \int u^m \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int u^m du = = \frac{1}{a} \cdot \frac{u^{m+1}}{m+1} + C = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C$.

3) *Наћи* $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-ax^4}}$. За $ax^4 = u^2$, биће $u = x^2\sqrt{a}$, $x^2 = \frac{u}{\sqrt{a}}$, $2xdx = \frac{du}{\sqrt{a}}$, $xdx = \frac{du}{2\sqrt{a}}$. Тада је $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-ax^4}} = = \int \frac{du}{2\sqrt{a}\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \arcsin u + C = = \frac{1}{2\sqrt{a}} \arcsin x^2\sqrt{a} + C$.

4) *Наћи* $\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. За $\cos x = u$, биће $-\sin xdx = du$, $dx = \frac{du}{-\sin x}$. Тада је $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{u} \cdot \frac{du}{-\sin x} = -\int \frac{du}{u} = -\log u + C = -\log\cos x + C$.

5) *Наћи* $\int cotg\,xdx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. За $\sin x = u$, биће $\cos xdx = = du$. Тада је $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \log u + C = \log \sin x + C$.

6) *Наћи* $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$[1]. За $x + \sqrt{a^2+x^2} = u$, или $u - x = = \sqrt{a^2+x^2}$, или $u^2 - 2ux + x^2 = a^2 + x^2$, или $u^2 - 2ux = a^2$ биће $2udu - 2udx - 2xdu = 0$, или $udu - udx - xdu = 0$, а одавде $(u-x)\,du = udx$, а $\frac{du}{u} = \frac{dx}{u-x} = \frac{dx}{x+\sqrt{a^2+x^2}-x} =$

[1]) Врло важан због своје честе примене *Ајлеров* интеграл.

$= \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Тада је $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{du}{u} = \log u + C = \log (x + \sqrt{a^2+x^2}) + C.$

Примери за вежбу:

1) $\int \frac{dx}{x-a}$; 2) $\int \cos (x \pm a)\, dx$; 3) $\int \sin (x \pm a)\, dx$;

4) $\int \sin (a+bx)\, dx$ [одг. $-\frac{1}{b} \cos (a+bx) + C$]

5) $\int \cos \frac{x}{2}\, dx$ (одг. $2 \sin \frac{x}{2} + C$;

6) $\int e^{\frac{x}{a}} dx$ (одг. $a\, e^{\frac{x}{a}} + C$);

7) $\int \frac{dx}{1+(a+bx)^2}$ [одг. $\frac{1}{b}$ arc tg $(a+bx)+C$];

8) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ (Замени $bx = au$, одг. $\frac{1}{ab}$ arc tg $\frac{bx}{a} + C$);

9) $\int \frac{bx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$ (Замени $bx = au$, одг. $\frac{1}{b}$ arc sin $\frac{bx}{a} + C$);

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ [Ради као 6. решени пример, одг. $\log (x + \sqrt{x^2-a^2} + C$];

11) $\int \frac{xdx}{a^2+x^2}$ [Замени $a^2+x^2=u$, одг. $\frac{1}{2} \log (a^2+x^2) + C$];

12) $\int (\sin^4 x - 3 \sin^3 x) \cos x dx$ (Замени $u = \sin x$, одг. $\frac{\sin x^5}{5} - \frac{3 \sin x^4}{5} + C$);

13) $\int \frac{dx}{2x-3}$ [одг. $\frac{1}{2} \log (2x-3) + C$].

III) **Делимична интеграција.** Оснива се на правилу диференцијаљења производа: $d(uv) = udv + vdu$ (1). Из ове једначине је: $udv = d(uv) - vdu$ (2).

Ако обе стране једначине (2) интегралимо, добијамо:

$\int uvd = \int d(uv) - \int vdu$, или $\int \mathbf{udv} = \mathbf{uv} - \int \mathbf{vdu}$ (3),

пошто је $\int d(uv) = uv$ услед потирања интегралног и диференцијалног знака. Једначина (3) даје упуство за интеграцију по овој методи, које се састоје у овоме: *старамо се најпре да функцију под интегралним знаком претставимо као производ двеју функција; једну од ових функција означавамо* *са u, а другу заједно са чиниоцем dx, са dv, чиме дати интеграл добија облик ∫ udv. Затим применом обрасца (3) дати интеграл сводимо на интеграл ∫ vdu, који ће се дати одредити, ако спада у групу основних или простих интеграла. Израчунавањем овог интеграла, израчунао би се и дати интеграл помоћу обрасца (3).*

Решени примери:

1) *Наћи* $\int xe^x\,dx$. За $x = u$ и $e^x\,dx = dv$, биће $du = dx$, а $v = \int e^x\,dx = e^x$. Тада је $\int xe^x\,dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$.

2) *Наћи* $\int x^3e^x\,dx$. За $u = x^3$ и $e^x\,dx = dv$, биће $du = 3x^2\,dx$, а $v = \int e^x\,dx = e^x$. Тада је $\int x^3e^x\,dx = \int udv = uv - \int vdu = x^3e^x - \int e^x \cdot 3x^2\,dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x\,ex$ (1). За интеграл $\int x^2e^x\,dx$, радећи по истом поступку, добијамо да је једнак $(x^2e^x - 2\int xe^x\,dx)$, а из првог решеног примера знамо да је $\int xe^x\,dx = (x-1)\,e^x$. Поступном заменом добијамо: $\int x^3e^x\,dx = x^3e^x - 3\,[x^2e^x - 2\,(x-1)\,e^x\,] = e^x\,(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$.

Напомена. По истом поступку налазимо $\int x^4\,e^x\,dx$, $\int x^5\,e^x\,dx$ и т. д.

2) *Наћи* $\int \log x\,dx$. За $\log x = u$ и $dx = dv$, биће $du = \frac{dx}{x}$ а $v = x$. Тада је $\int \log x\,dx = \int udv = uv - \int vdu = x\log x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\log x - \int dx = x\log x - x = x\,(\log x - 1) + C$.

4) *Наћи* $\int x^2\sin x\,dx$. За $x^2 = u$ и $\sin x\,dx = dv$, биће $du = 2x\,dx$ а $v = -\cos x$. Тада је $\int x^2\sin x\,dx = \int udv = uv - \int vdu = -x^2\cos x - \int -2x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$ (1). Вредност $\int x\cos x\,dx$ налазимо истим путем. Овде је за $x = u$ и $\cos x\,dx = dv$, биће $du = dx$ а $v = \int \cos x\,dx = \sin x$. Стога је $\int x\cos x\,dx = \int udv = uv - \int vdu = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$ (2).

Заменом (2) у (1) добијамо:

$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\,(x\sin x + \cos x) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

Примери за вежбу.

1) $\int x\sin x\,dx$; 2) $\int \arcsin x\,dx$;

3) $\int \mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$; 4) $\int \cos^2 x\,dx$;

5) $\int \sin^2 x\, dx \left(\text{одг.}\ \frac{1}{2}\ (x - \sin x \cos x) + C\right)$.

§ 200. **Примена интегралног рачуна.** Примена интегралног рачуна је врло велика не само у Геометрији, већ и у Механици, Физици и т. д. Најважнија његова примена у Геометрији је при израчунавању: 1) дужина лукова кривих линија, 2) површина ограничених луцима кривих линија и 3) запремина добивених обртањем кривих линија око неке осовине обртања.

Како су нама познати само основни појмови интегралног рачуна, можемо помоћу нашег уског знања овог рачуна, израчунати интеграле само неких простијих функција, наведених у претходним параграфима. Стога ћемо се у овом параграфу упознати само с начином израчунавања површине параболе и запремина обртног параболоида, елипсоида и лопте. (Са применом интегралног рачуна за израчунавање дужина лукова, површина и обртних запремина других кривих линија (елипсе, хиперболе и т. д.) ученици ће се упознати на Универзитету).

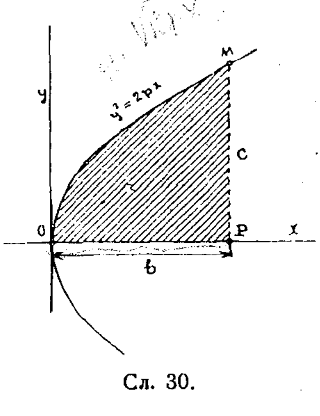
1) **Површина параболе.** Видели смо код § 196. и 197. да се површина, ограничена луком криве $y = f(x)$, апсцисном осовином и ординатама, које одговарају апсцисама a и b ($b > a$), да̂ израчунати интегралом:

$$P = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Како је једначина параболе $y^2 = 2px$, то је површина њеног дела 0PM (сл. 30):

$$P = \int_0^b y\, dx = \int_0^b \sqrt{2px}\, dx = \int_0^b \sqrt{2p}\cdot x^{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{2p}\int_0^b x^{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{2p}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^b =$$

$$= \sqrt{2p}\left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^b = \sqrt{2p}\cdot\frac{2b\sqrt{b}}{3} = \frac{2}{3}b\sqrt{2pb}.$$

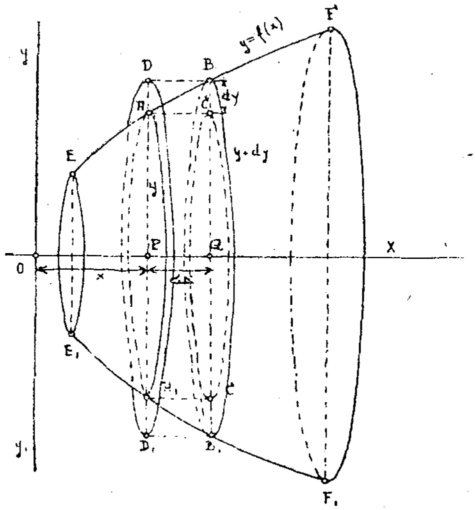


Сл. 30.

Како је $\sqrt{2pb}$ једнако ординати c тачке M, то је $P = \frac{2}{3}bc$, т.ј. *површина дела параболе ограничена луком и координа-*

тама (x_1, y_1) *неке тачке лука, једнака је две трећине производа координата.*

II **Обртна запремина.** Нека је једначина криве E F $y = f(x)$ и претпоставимо да се та крива обрће око апсцисне осовине.



Сл. 31.

Ако на овој кривој узмемо две бесконачно блиске тачке A (x, y) и B (x + dx, y + dy), онда о б р т н а запремина AA′B′B, која постаје обртањем лука AB, веће је од обртне запремине цилиндра AA′ C′ C (висине dx, а полупречника базиса y), а мања је од обртне запремине цилиндра DD′B′B (висине dx; а полупречника базиса $(y + dy)$). Ако са dv означимо запремину овог бесконачно малог дела AA′B′B обртне запремине добивене обртањем линије $y = f(x)$ око апсцисне осовине, онда је очевидно: $V_{(AA,C,C)} < dv < V_{(DD,B,B)}$, или

$$y^2\pi \cdot dx < dv < (y + dy)^2\pi \cdot dx, \text{ или}$$

$$y^2\pi dx < dv < y^2\pi dx + 2y\pi dy dx + \pi dy^2 dx \quad (1)$$

Како су тачке A и B бесконачно близу, то су dx и dy бесконачно мале количине. Због овога чланови: $2y\pi dydx$ и $\pi dy^2 dx$ неједначине (1), као бесконачно мале количине другог и трећег реда занемарују се, па се неједначина (1) своди на једначину

$$dv = y^2\pi dx.$$

Из ове једначине имамо једначину:

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{y^2\pi dx} = \pi \int \mathbf{y^2 dx} \ldots . \quad (2)$$

која даје општи образац за израчунавање обртних запремина добивених обртањем неког лука криве $y = f(x)$ око апсцисне осовине. Ако су апсцисе крајњих тачака овог лука a, b $(b > a)$, онда је његова обртна запремина

$$\mathbf{v} = \pi \int_a^b \mathbf{y^2 dx} \ldots (3)$$

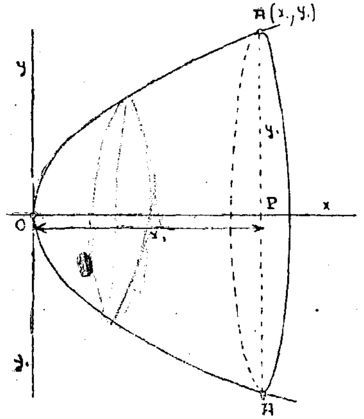
Прамери:

1) **Запремина обртног параболоида.** Једначина параболе је $y^2 = 2px$. Да бисмо нашли обртну запремину добивену луком OA, треба да променимо образац (3). Овде је $a = 0$, $b = x_1$, те је:

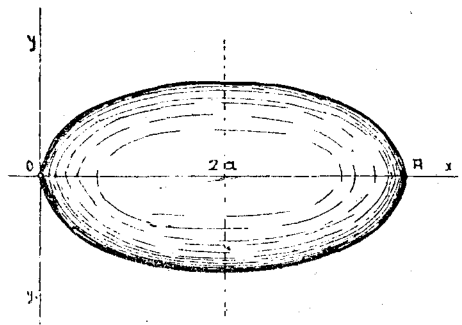
$$v = \pi \int_0^{x_1} y^2 dx = \pi \int_0^{x_1} 2px dx = 2p\pi \int_0^{x_1} x dx$$

$$= 2p\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_1} = 2p\pi \cdot \frac{x_1^2}{2} = \mathbf{p\pi x_1^2} .$$

Посебни пример. Код параболе $y^2 = 8x$, биће обртна запремина лука OA, чије су апсцисе *0* и 5, $v = 4 \cdot 3, 14 \cdot 25 = 314$.



Сл. 32.



Сл. 33.

2) **Запремина елипсоида.** Централна једначина елипсе је $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, а темена $b^2(x - a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, или $y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$. Ако сада замислимо да се цела елипса OA (сл. 33) обрће око апсцисне осовине 0X, онда обртну запремину добијамо применом обрасца (3). Овде су границе *0* и *2a*, те је

$$v = \pi \int_0^{2a} y^2 dx = \pi \int_0^{2a} \left(\frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2\right) dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^{2a} (2ax -$$

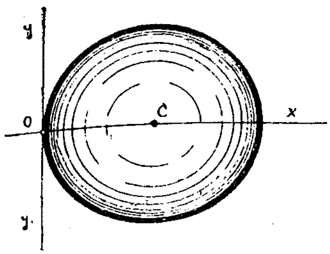
$$- x^2) dx = \frac{b^2\pi}{a^2} \int_0^{2a} 2axdx - \frac{b^2\pi}{a^2} \int_0^{2a} x^2dx = \frac{2b^2\pi}{a} \int_0^{2a} xdx -$$

$$-\frac{b^2\pi}{a^2}\int_0^{2a} x^2\,dx = \frac{2b^2\pi}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a} - \frac{b^2\pi}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{2b^2\pi}{a}\cdot\frac{4a^2}{2} -$$

$$-\frac{b^2\pi}{a^2}\cdot\frac{8a^3}{3} = 4ab^2\pi - \frac{8ab^2\pi}{3} = \frac{12ab^2\pi - 8ab^2\pi}{3} = \frac{4}{3}ab^2\pi.$$

Ако се елипса обрће око осовине 0У, онда је запремина $v = \frac{4}{3}ba^2\pi$.

3) **Запремина лопте.** Темена једначина круга C (сл. 34.) је $x^2 + y^2 = 2rx$. Ако се овај круг обрће око осовине 0X, онда запремину добивене лопте добијамо применом обрасца (3) а за границе 0 и $2r$. Овде је:



Сл. 34.

$$v = \pi\int_0^{2r} y^2dx = \pi\int_0^{2r}(2rx - x_2)\,dx =$$

$$= \pi\int_0^{2r} 2rxdx - \pi\int_0^{2r} x^2\,dx =$$

$$= 2r\,\pi\int_0^{2r} xdx - \pi\int_0^{2r} x^2\,dx =$$

$$= 2r\pi\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2r} - \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2r} = 2r\pi\cdot\frac{4r^2}{2} -$$

$$-\frac{8r^3\pi}{3} = 4r^3\pi - \frac{8r^3\pi}{3} = \frac{12r^3\pi - 8r^3\pi}{3} = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Напомена. До овога резултата дошли бисмо из обрасца за запремину елипсоида узимајући да је $a = b = r$, пошто је круг у ствари елипса, код које је $a = b$.

Завршено градиво за VIII разред априла 19..

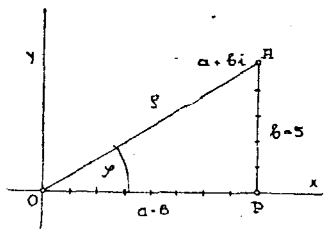
Завршено градиво за VII разред

ДОДАТАК*)

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ, МОАВРОВ ОБРАЗАЦ, ЈЕДНАЧИНЕ ТРЕЋЕГ СТЕПЕНА.

§ 201. **Тригонометриски облик комплексног броја.**

При графичком претстављању свих бројева (§ 108). видели смо, да се комплексни бројеви претстављају тачкама у квадратима правоуглог координатног система. Тако, тачка A (сл. 35) претставља комплексан број $8 + 5i$, пошто је њена апсциса 8 а ордината 5 Отстојање ове тачке до координатног почетка $A0 = \rho$ зове се *модуо* комплексног броја, а угао $A0P = \varphi$, који модуо ствара с позитивним правцем апсцисне осовине, зове се *амплитуда* или *аргуменат* комплексног броја. Модуо ρ је увек позитиван број, а тако исто је позитиван и угао φ, т. ј. он постаје у обрнутом смислу него што је кретање сказаљака часовника.



Сл. 35.

Из слике видимо да је:

$$a = \rho \cos \varphi \text{ и } b = \rho \sin \varphi \ldots (1),$$

те је комплексни број $a + bi = \varphi (\cos \varphi + i \sin \varphi) \ldots . (2)$, који се облик зове тригонометриски облик копмлексног броја. Па како су обе стране једначине (2) идентичне, то је

$$a = \rho \cos \varphi \text{ и } b = \rho \sin \varphi.$$

Подизањем најпре на квадрат ових једначина, а затим њиховим сабирањем, добијамо:

$$a^2 + b^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2.$$

---

*) За ученике Реалке. — Састављен према предавањима професора беогр. реалке *Боривоја Пујића*.

Одавде je $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Дељењем тих једначина добијамо

$$\frac{b}{a} = \frac{\rho \sin\varphi}{\rho \cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Једначине $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ дају нам могућност, да сваком комплексном броју нађемо одговарајући тригонометриски облик. Тако, тригонометриски облик комплексног броја $4 - 3i$ биће $5(\cos 323^0 7' 49'' + i \sin 323^0 7' 49'')$, јер je

$$\rho = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5, \text{ a } \operatorname{tg}\varphi = \frac{-3}{4}.$$

Овде угао φ припада четвртом квадранту, што увиђамо из једначина $\rho \cos\varphi = 4$ и $\rho \sin\varphi = -3$, где je $\cos\varphi$ позитиван a $\sin\varphi$ негативан. Стога je $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, где je $\sphericalangle \alpha$ допуна угла φ до 360^0. Употребом логаритама добијамо $\log \operatorname{tg}\alpha = \log 3 - \log 4 = 0{,}477121 - 0{,}602060 = \bar{1}{,}875061$, $\alpha = 36^0 52' 11''$, a $\varphi = 360^0 - \alpha = 323^0 7' 49''$.

Примери за вежбу: Одреди модуо и аргуменат комплексних бројева:

1) $4 + 3i$, 2) $5 - 12i$, 3) $-10 + 6i$, 4) $-4 - 3i$, 5) $-7 + 4i$.

§ 202. **Операције с комлексним бројевима.** 1) Код § 107. казато je, да сабирање, одузимање, множење, дељење и степеновање с комплексним бројевима вршимо као и са полиномима, само што треба да имагинарни део комплексног броја претходно доведемо на облик bi.

Тако, a) збир бројева $a + bi$ и $c + di$ биће:

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i,$$

т. j. *збир од два комплексна броја je комплексан број;*

b) разлика бројева $a + bi$ и $c + di$ биће:

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i,$$

т. j. *разлика два комплексна броја je комплексан број;*

c) производ бројева $a + bi$ и $c + di$ биће:

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + \\ + (bc + ad)i,$$

т. j. *производ од два комплексна броја je комплексан број;*

d) количник бројева $a + bi$ и $c + di$ биће:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bci - adi + bd}{c^2 + d^2} =$$

$$\frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i,$$

т. j. *количник два комплексна броја је комплексан број.*
e) При степеновању комплексног броја $a+bi$ са 2 имамо:

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

При степеновању са 3 добијамо:

$$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = a^3 + 3a^2bi - \\ - 3ab^2 - b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i.$$

При степеновању са ма којим другим већим бројем, примењујемо Њутонов образац. Тако,

$$(a+bi)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4bi + \binom{5}{2}a^3b^2i^2 + \binom{5}{3}a^2b^3i^3 + \\ + \binom{5}{4}ab^4i^4 + \binom{5}{5}b^5i^5 = a^5 + 5a^4bi - 10a^3b^2 - \\ - 10a^2b^3i + 5ab^4 + b^5i = (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) + \\ + (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)i,$$ и т. д.

1. **Напомена**. При сабирању и множењу два комплексна коњугована броја, добијамо стварне резултате. Тако,

a) $(a+bi)+(a-bi) = a+bi+a-bi = 2a$;

b) $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$.

2. Међутим, горње операције с комлексним бројевима можемо вршити, када претходно ове бројеве доведемо на тригонометричан облик. Тако, ако је:

$a+bi = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $c+di = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, онда је:

a) *њихов збир*:

$$\rho_1\cos\varphi_1 + \rho_1 i\sin\varphi_1 + \rho_2\cos\varphi_2 + \rho_2 i\sin\varphi_2 = (\rho_1\cos\varphi_1 + \\ + \rho_2\cos\varphi_2) + (\rho_1\sin\varphi_1 + \rho_2\sin\varphi_2)i;$$

b) *њихова разлика*:

$$\rho_1\cos\varphi_1 + \rho_1 i\sin\varphi_1 - \rho_2\cos\varphi_2 - \rho_2 i\sin\varphi_2 = (\rho_1\cos\varphi_1 - \\ - \rho_1\cos\varphi_2) + (\rho_1\sin\varphi_1 - \rho_2\sin\varphi_2)i;$$

c) *њихов производ*:

$$\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + \\ + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ = \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_2+\varphi_2)];$$

d) *њихов количник*:

$$\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\Big[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big]$$

e) Степеновањем са 2 комлексног броја имамо:

$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^2=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$
$=\rho^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi);$

Степеновањем са 3 добијамо:

$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^3=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^2.\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$
$=\rho^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi).\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$
$=\rho^3[\cos(2\varphi+\varphi)+i\sin(2\varphi+\varphi)]=\rho^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi);$

Степеновањем са 4 добијамо:

$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^4=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^3.\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi);$
$=\rho^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi).\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$
$=\rho^4[\cos(3\varphi+\varphi)+i\sin(3\varphi+\varphi)]=\rho^4(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi).$

Уопште, ако имамо да степенујемо бројем n добијамо
$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

§ 203. **Примери за вежбу.**

1) Наћи збир комплексних бројева:

a) $4+6i$ и $8+3i$; b) $-5+4i$ и $-7+5i$; c) $-5-7i$ и $9-5i$; d) $0{,}7+0{,}6i$ и $-5+0{,}9i$; e) $0{,}4-4i$ и $8-7i$.

2) Наћи разлику бројева:

a) $(5+7i)-(3+3i)$; b) $(10-4i)-(2+3i)$; c) $(8+5i)-$ $-(4-5i)$; d) $(-8+10i)-(5+4i)$; e) $(-9+8i)-(5-6i)$; f) $(-10-8i)-(8+2i)$.

3) Наћи производ бројева:

a) $(4+5i)(2+2i)$; b) $(-3+3i)(6+4i)$; c) $(-4-2i)\cdot$ $\cdot(-3+4i)$; d) $(5+2i)(6-3i)$; e) $(-6+4i)(-5-6i)$; f) $(5-i)(3+2i)$.

4) Одреди модуо и аргуменат производа:

a) $(4+3i)(8+7i)$; b) $(-5-4i)(-10-8i)$; c) $(8-3i\cdot$ $\cdot(-7-4i)$.

5) Одреди количник бројева:

a) $\frac{7+5i}{4-2i}$; b) $\frac{8-5i}{2+i}$; c) $\frac{-5+2i}{4+4i}$; d) $\frac{6-4i}{2+3i}$; e) $\frac{4+3i}{3-5i}$.

(9 Наћи модуо и аргуменат количника:

a) $\frac{4+2i}{3-5i}$; b) $\frac{6-5i}{3+2i}$; c) $\frac{-5+4i}{-3-5i}$.

7) Наћи степене комплексних бројева:

a) $(4+3i)^3$; b) $(2+4i)^4$; c) $(\sqrt{10}-6i)^5$; d) $(2-5i)^6$; e) $(-1+2i)^7$.

§ 204. **Моавров образац.** Код степеновања комплесног броја (§ 202, 2, e) видели смо, да је

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\cdots(1).$$

Ако извршимо степеновање производа на левој страни једначине (1), добијамо:

$$\rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\cdots(2).$$

Дељењем ове једначине са ρ^n, добијамо Моавров образац:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Тако:

a) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$ и b) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^9 = \cos 9\varphi + i\sin 9\varphi$.

§ 205. **Примена Моавровог обрасца.**

1) *Израчунавање функција n-то струког угла помоћу синуса и косинуса тога угла.*

Дабисмо израчунали ма коју функцију n-то струког угла помоћу Моавровог обрасца, ако знамо ма коју функцију тога угла, треба претходно да израчунамо помоћу основних образаца синус и косинус тога угла. Тако, ако је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} \text{ биће } \sec\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{4}{5}, \text{ a } \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Ако желимо да израчунамо ма коју функцију од $n\alpha$, треба помоћу Моавровог обрасца да израчунамо $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$. По овоме обрасцу имамо:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + \binom{n}{1} i\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha + \binom{n}{2} i^2\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{3} i^3\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{4} i^4\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha + \binom{n}{5} i^5\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha + \cdots$$

$$=\left[\cos^n-\alpha\binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha+\binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha-\cdots\right]+$$
$$+i\left[\binom{n}{1}\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha-\binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha-\cdots\right].$$

Па како су добивени комплексни бројеви и на левој и на десној страни ове једначине једнаки, то су им једнаки и њихови стварни и имагинарни делови, т.ј.

$$\left.\begin{aligned}\cos n\alpha &= \cos^n\alpha-\binom{n}{2}\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha+\binom{n}{4}\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha-\cdots\\ \text{и } \sin n\alpha &= \binom{n}{1}\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha-\binom{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-1}\alpha+\binom{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha-\cdots\end{aligned}\right\}[1]$$

ови обрасци дају могућност да израчунамо синус и косинус n-то струког угла, ако знамо синус и косинус тога угла.

1\. *Пример. Зна се* $tg\,\alpha=\frac{3}{4}$, *наћи све остале функције од* 5α. Из $tg\,\alpha=\frac{3}{4}$ је $\sin\alpha=\frac{5}{3}$ и $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Тада је према обрасцима (1)

$$\cos 5\alpha=\cos^5\alpha-\binom{5}{2}\sin^2\alpha\,coc^3\alpha+\binom{5}{4}\sin^4\alpha\cos\alpha=$$
$$=\left(\frac{4}{5}\right)^5-\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3+5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{4}{5}=-\frac{3116}{3125},$$
$$\sin 5\alpha=\binom{5}{1}\sin\alpha\cos^4\alpha-\binom{5}{3}\sin^3\alpha\cos^2\alpha+\binom{5}{5}\sin^5\alpha=$$
$$=5\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4-\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^5=-\frac{237}{3125},$$
$$tg\,5\alpha=\frac{\sin5\alpha}{\cos5\alpha}=\frac{237}{3116},\quad cotg\,5\alpha=\frac{3116}{237},\quad \sec5\alpha=-\frac{3125}{3116}$$

и $cosec\,5\alpha=-\frac{3125}{237}$.

2\) *Пример. Зна се* $cotg\,30^0=\sqrt{3}$; *наћи синус и косинус 7-мострукогугла, т. ј. угла од* 210^0.

Зна се да је $\sin 30^0=\frac{1}{2}$ а $\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тада је по обрасцима (1):

$$\cos 210^0=\cos 7.30^0=\cos^7 30^0-\binom{7}{2}\sin^2 30^0\cos^5 33^0+$$
$$+\binom{7}{4}\sin^4 30^0\cos^3 30^0-\binom{7}{6}\sin^6 30^0\cos 30^0=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7-\frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5+\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-7\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{128}-\frac{189\sqrt{3}}{128}+\frac{105\sqrt{3}}{128}-\frac{7\sqrt{3}}{128}=-$$

$$-\frac{64\sqrt{3}}{128}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin 210^0=\sin 7.30^0=\binom{7}{1}\sin\ 30^0\ \cos^6 30^0-$$

$$-\binom{7}{3}\sin^3 30^0\cos^4 30^0+\binom{7}{5}\sin^5 30^0\cos^2 30^0-\binom{7}{7}\sin^7 30^0=$$

$$=7\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6-\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4+\frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^7=-\left(\frac{1}{2}\right).$$

Разуме се, до ових резултата дошли бисмо пре применом образаца за претварање функција *тупоступчених* углова у функције оштрих углова. Тако, $\sin 210^0=\sin(180+30^0)=-$ $-\sin\ 30^0=-\frac{1}{2}$, а $\cos 210^0=\cos(180^0+30^0)=-\cos 30^0=-$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Рађено је горњим обилазним путем, да би се видела тачност Моавровог обрасца.

Примери за вежбу: 1) Зна се $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, наћи функције угла 3α, 4α и 5α;

2) Зна се $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, наћи функције угла 8α;

3) Зна се $\operatorname{tg}\alpha=2$, наћи функције угла 10α.

Једначине трећег степена.

§ 206. **Облици једначина трећег степена и њихове особине.** Општи облик једначине трећег степена је:

$$A x^3+B x^2+C x+D=0\cdots(1).$$

Коефицијенти: A, B, C и D јесу стварни бројеви, а могу бити *општи* или *посебни*. У првом се случају једначина зове *општа* а у другом *посебна* или бројна. Ми ћемо се бавити само бројним једначинама трећег степена. Ако поједини коефицијенти, осим A, буду једнаки нули, онда једначина (1) има један од следећих облика:

$$A x^3+C x+D=0,\ A x^3+B x^2+D=0,\ A x^3+B x^2+C x=0,$$
$$A x^3+B x^2=0,\ A x^3+C x=0,\ A x^3+D=0 \text{ и } A x^3=0.$$

Код квадратних једначина с једном непознатом, а тако исто и код једначина вишег степена, које се своде на квадратне, видели смо: 1) *да свака једначина има онолико корена, колики је њен степен*; 2) *да је полином једначине дељив ма којим својим кореним чинитељем*; и 3) *да је полином једначине једнак производу од коефицијента уз непознату на највишем степену и корених чинитеља*. Сва три ова правила вреде и за једначине трећег степена, што се можемо уверити код решавања тих једначина, а можемо их и доказати овако: 1. *Правило. Полином једначине дељив је сваким својим кореним чинитељем*. Ако претпоставимо да је x_1 један корен једначине $A x^3 + B x^2 + C x + D = 0$, онда је њен први корени чинитељ $x - x_1$. Деобом полинома једначине тим кореним чинитељем добијамо

$$(Ax^3+Bx^2+Cx+D):(x-x_1)=Ax^2+(B+Ax_1)x+[C+(B+Ax_1)]$$

$$\begin{array}{l}
Ax^3 - Ax_1x^2 \\
- \quad\; + \\
\hline
\quad (B+Ax_1)\,x^2 + Cx + D \\
\quad (B+Ax_1)\,x^2 - (B+Ax_1)\,x_1\,x \\
- \qquad\qquad\quad + \\
\hline
\quad [C+(Ax_1)x_1]\,x + D \\
\quad [C+(B+Ax_1)x_1]\,x - [C+(B+Ax_1)\,x_1]\,x_1 \\
- \qquad\qquad\qquad\qquad + \\
\hline
\end{array}$$

Остатак: $[C + (B + Ax_1)\,x_1]\,x_1 + D$ или $Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D$.

Па како је по претпоставци x_1 један корен дате једначине, који као сваки корен задовољава једначину, то је остатак $Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D$ раван нули, чиме је ово правило доказано.

2. *Правило. Једначина трећег степена има три корена*. Како је $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D):(x - x_1) = Ax^2 + (B + Ax_2)\,x + [C + (B + Ax_1)\,x_1]$, то је $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - x_1)\cdot\{Ax^2 + (B + Ax_1)\,x + [C + (B + Ax_1)\,x_1]\}$, или заменом $B + Ax_1 = E$ и $C - (B + Ax_1)\,x_1 = F$,

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - x_1)(Ax^2 + Ex + F) \quad .... \; (2)$$

Како је лева страна ове једначине једнака нули, то је и

$$(x - x_1)\,(Ax^2 + Ex + F) = 0 \quad .... \; (3)$$

Из једначине (3) имамо једначине:

$$\left.\begin{array}{r} x - x_1 = 0 \text{ и} \\ Ax^2 + Ex + F = 0 \end{array}\right\} (4)$$

Прва има само један корен $x = x_1$, а друга, као квадратна или два корена

$$x_2 = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4AF}}{2A} \text{ и } x_3 = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4AF}}{2A},$$

чиме је и ово правило доказано.

3. *Правило. Полином једначине трећег степена једнак је производу од коефицијента уз x^3 и њених корених чинитеља.*

Из теорије квадратних једначина знамо, да је полином друге једначине групе (4):

$$Ax^2 + Ex + F = A(x - x_2)(x - x_3).$$

Заменом у (2) добијамо:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

чиме и ово правило доказано.

Напомена. — Сва три горња правила су општа за све једначине ма ког степена. На основу I правила, ако знамо један корен једне једначине *n*-ог степена, онда од те једначине добијамо другу једначину (n — 1)-ог степена, ако полином прве поделимо са оговарајућим кореним чинитељем и добивени количник стављамо да је једнак нули. На основу III правила, ма који се полином n-ог степена да̂ раставити на чинитеље, ако се претходно стави да је једнак нули, затим добивену једначину решавамо, да бисмо добили корене: $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ и најзад чинитељи датог полинома биће: коефицијенат уз x^n и корени чинитељи: $(x-x_1), (x-x_2) \ldots (x-x_n)$.

§ 207. **Врсте корена.** — *Правило.* — *Свака једначина трећег степена са стварним коефицијентима, ако има један имагинаран корен облика $a + bi$, онда она има као корен његов коњуговани број $a - bi$.*

Заиста, ако претпоставимо да је један корен једначине

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \ldots (1)$$

$x = a + bi$, онда заменом у (1) имамо:

$$A(a + bi)^3 + B(a + bi)^2 + C(a + bi) + D = 0; \text{ или}$$

$$Aa^3 - 3Aab^2 + Ba^2 - Bb^2 + Ca + D) + (3Aa^2b - Ab^3 + 2Bab + Cb)\, i = 0. \ (2)$$

Ако у полиному једначине (1) заменимо x са $a - bi$ добијамо израз

$$(Aa^3 - 3Aab^2 + Ba^2 - Bb^2 + Ca + D) - (3Aa^2b - Ab^3 + 2Bab + Cb)\, i. \ (3):$$

Како је комплексан број једнак нули, ако му је и стварни и имагинарни део једнак нули, то из једначине (2) излази, да је

$$Aa^3 - 3Aab^2 + Ba^2 - Bb^2 + Ca + D = 0 \text{ и}$$

$$3Aa^2b - Ab^3 + 2Bab + Cb = 0 \ldots (4).$$

Из ових једначина увиђамо да је и израз (3) једнак нули, што значи да је и $a - bi$ корен дате једначине.

Пошто једначина трећег степена мора имати три корена, то, на основу овог правила, изводимо закључак, да корени једне једначине трећег степена са стварним коефицијентима јесу: 1) *или сва три стварни бројеви*, или 2) *један је стваран, а друга два имагинарна коњугована броја*.

Напомена. — Ово је правило у важности за све једначине n-ог степена. Број имагинарних корена увек је паран и то по два и два коњугована комплексна броја.

§. 208. **Веза између корена и коефицијената.** Свака једначина III-ег степена облика $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ (1) деобом са A да се свести на облик $x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0$, или, $x^3 + mx^2 + nx + p = 0 \dots (2)$, где је $m = \frac{B}{A}$, $n = \frac{C}{A}$ и $p = \frac{D}{A}$.

Ако су x_1, x_2 и x_3 корени једначине (2), онда је на основу трећег правила § 206.

$$x^3 + mx^2 + nx + p = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

или ако извршимо множење на десној страни,

$$x^3 + mx^2 + nx + p = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3 \dots (3).$$

Па како су обе стране ове једначине једнаке, то су једнаки и коефицијенти уз непознате истог степена, т. ј.

$$\left.\begin{aligned} m &= -(x_1 + x_2 + x_3), \\ n &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \text{ и} \\ p &= -x_1 x_2 x_3 \end{aligned}\right\} (4)$$

Једначине под (4) дају тражену везу између корена и коефицијената једначине трећег степена сведене на облик (2). Према овим једначинама имамо правило: 1) *коефицијенат уз непознату на другом степену једнак је збиру комбинација прве класе од корена са промењеним знаком;* 2) *коефицијенат уз непознату на првом степену једнак је збиру комбинација друге класе од корена и* 3) *независни је члан једнак производу корена са промењеним знаком.* И ово је правило опште за све алгебарске једначине n-ог степена са стварним коефицијентима, чији је коефицијенат уз x^n једнак 1, а гласило би:

Коефицијенат уз x^{n-1} једнак је збиру комбинација прве класе од корена с промењеним знаком; коефицијенат x^{n-2} једнак је збиру комбинација друге класе од корена; коефици-

јенат уз x^{n-3}раван је збиру комбинација треће класе с промењеним знаком и т. д., а независни члан једнак је производу корена без или са промењеним знаком, према томе, да ли је степен једначине паран или непаран (или је број корена паран или непаран).

На основу овог правила, у стању смо да склопимо једначину трећег степена, ако знамо њене корене. Тако, ако су корени $x_1 = 1, x_2 = -2$ и $x_3 = 5$, онда је, према једначинама под (4).

$m = -(1-2+5) = -4$, $n = 1\cdot(-2) + 1\cdot5 + (-2)\cdot5 = -7$ и $p = -[1\cdot(-2).\ 5] = 10$. Тражена једначина биће:

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0.$$

До ове једначине долазимо, ако ставимо да је производ корених чинитеља раван нули и извршимо множење. Тако, $(x-1)(x+2)(x-5) = 0$, или $(x^2+x-2)(x-5) = 0$, или

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Напомена. — На основу овог правила, ако у једначини трећег степена нема члана са x^2, т.ј. ако је $m = 0$, онда је $-(x_1+x_2+x_3) = 0$, а одавде је $x_1 = -(x_2+x_3)$; т. ј. *код једначине облика $x^3 + nx + p = 0$ један је корен раван збиру других корена с промењеним знаком.* Ако у једначини нема независнога члана ($p = 0$), онда је $-x_1x_2x_3 = 0$. Како је овај производ раван нули, ако му је један од чинитеља једнак нули, то изводимо закључак, *да једначина облика $x^3 + mx^2 + nx = 0$ има један корен једнак нули.*

§ 209. **Свођење потпуних једначина трећег степена на простији облик.** Свођење дате једначине облика $Ax^3 + Bx^2 Cx + D = 0$ (1) на облик $y^3 + py + q =$ (2) вршимо, ако заменимо $x = y + K$, где је y нова непозната, а К привремено неодређена количина. Овом заменом једначина (1) добија облик:

$$A(y+K)^3 + B(y+K)^2 + C(y+K) + D = 0, \text{ или}$$
$$Ay^3 + (3AK+B)y^2 + (3AK^2 + 2BK + C)y + (AK^3 + BK^2 + $$
$$+ CK + D) = 0. \quad (3).$$

Да би нестао у овој једначини члан са y^2, треба да је $3AK + B = 0$, а одавде је $K = -\frac{B}{3A}$. *Према томе, ако желимо да једначину (1) сведемо на једначину **облика** (2), треба да извршимо замену $x = y + K = y - \frac{B}{3A}$.* Дакле, решавање потпуних једначина облика (1) своди се на решавање једначина облика (2). Остаје да се упознамо само с начинима решавања једначина трећег степена облика $x^3 + px + q = 0$, с којима се упознајемо у идућем параграфу.

Међутим, при замени $x = y - \frac{B}{3A}$ у једначини (1) наилазимо врло често на једначине облика $y^3 \pm q = 0$, $y^3 + py = 0$ и $y^3 = 0$, т. ј. на једначине, чије даље решавање знамо. Такав је случај код следећих примера:

1) $x^3 + 9x^2 + 27x + 19 = 0$. Овде је $K = -\frac{B}{3A} = -\frac{9}{3 \cdot 1} = -3$, а $x = y - 3$. Дата једначина добија облик

$$(y - 3)^3 + 9(y - 3)^2 + 27(y - 3) + 19 = 0 \text{ или}$$

$$y^3 - 9y^2 + 27y - 27 + 9y^2 - 54y + 81 + 27y - 81 + 19 = 0, \text{ или}$$

$$y^3 - 8 = 0.$$

Из ове биномне јадначине имамо $(y - 2)(y^2 + 2y + 4) = 0$. Одавде је $y - 2 = 0$ и $y^2 + 2y + 4 = 0$. Из прве је $y_1 = 2$, а из друге $y_2 = -1 + i\sqrt{3}$ и $y_3 = -1 - i\sqrt{3}$. Тада је $x_1 = 2 - 3 = -1$, $x_2 = -1 + i\sqrt{3} - 3 = -4 + i\sqrt{3}$ и $x_3 = -1 - i\sqrt{3} - 3 = -4 - i\sqrt{3}$.

2) $x^3 - 39x^2 + 507x - 2197 = 0$. Овде је $K = -\frac{-39}{3 \cdot 1} = 13$, а $x - y = 13$.段Заменом у датој једначини добијамо: $(y + 13)^3 - 39(y + 13)^2 + 507x - 2197 = 0$, или $y^3 = 0$.

Према томе је

$y_1 = y_2 = y_3 = 0$, те је $x_1 = x_2 = x_3 = 0 + 13 = 13$.

3) $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$. Овде је $K = -\frac{-12}{3 \cdot 1} = 4$, а $x = y + 4$. Заменом добијамо:

$$(y + 4)^3 - 12(y + 4)^2 + 44(y + 4) - 48 = 0 \text{ или } y^3 - 4y = 0$$

Ову једначину пишемо $y(y^2 - 4) = 0$. Из ње је $y = 0$ и $y^2 - 4 = 0$. Из прве је $y_1 = 0$, а из друге $y_2 = 2$ и $y_3 = -2$. Корени дате једначине биће:

$$x_2 = 0 + 4 = 4, \quad x_2 = 2 + 4 = 6 \text{ и } x_3 = -2 + 4 = 2.$$

Решавање једначине $x^3 + px + q = 0$.

§ 210. I. **Случај. — Једначина има имагинарних корена.** Једначина $x^3 + px + q = 0$ (1) имаће један стваран и два имагинарна корена, ако је испуњен услов:

$$4p^3 + 27q^3 > 0 \dots (2).$$

Да је ово тачно уверавамо се на следећи начин. — Непознату x у једначини (1) замењујемо са збиром непознатих *u* и *v* $(x = u + v)$ и тиме једначина (1) добија облик $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ или

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0 \;\ldots.\; (3).$$

Непознате *u* и *v* бирају се такве да испуњавају услове: $u + v = x$ и $3uv + p = 0$, или $uv = -\frac{p}{3}$. Тада једначина (3), за $uv = -\frac{p}{3}$, добија облик

$$u^3 + v^3 = -q \cdots (4).$$

Решењем једначина $uv = -\frac{p}{3}$ и $u^3 + v^3 = -q$, добијамо вредности непознатих *u* и *v*. Како је друга од ових једначина трећег степена, то ћемо добити за непознате *u* и *v* по три вредности, а од сваке групе ових вредности по једну вредност за непознату *x*.

Једначине $uv = -\frac{p}{3}$ и $u^3 + v^3 = -q$ решавамо, када најпре прву степенујемо са 3, а затим u^3 и v^3 сматрамо као корене квадратне једначине, код које је коефицијенат уз непознату на првом степену $-(u^3 + v^3) = q$, а независни члан $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Та квадратна једначина имаће облик:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0 \text{ или } 27t^2 + 27qt - p^3 = 0 \cdot (5).$$

Из ње је: $t_1 = u^3 = \frac{-27q + \sqrt{27^2 q^2 + 4 \cdot 27 p^3}}{54}$ и

$$t_2 = v^3 = \frac{-27q - \sqrt{27^2 q^2 + 4 \cdot 27 p^3}}{54}$$

Стога је $u = \sqrt[3]{\frac{-27q + \sqrt{27^2 q^2 + 4 \cdot 27 p^3}}{54}}$ и

$$v = \sqrt[3]{\frac{-27q - \sqrt{27^2 q^2 + 4 \cdot 27 p^3}}{54}} \quad (6)$$

Корени једначине (5) t_1 и t_2 односно u^3 и v^3, биће стварни, ако је дискриминанта $27^2 q^2 + 4 \cdot 27 p^3 > 0$, или $27q^2 + 4p^3 > 0$, чиме је доказан услов под (2).

Ако поткорене изразе једначина (6) краткоће ради означимо привремено са M и N, онда је $u = \sqrt[3]{M}$ и $v = \sqrt[3]{N} \cdots (7)$

Како сваки кубни корен од стварног броја има по три вредности, од којих је једна стварна а две имагинарне, то је из једначина (7): $u = \sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{1 \cdot M} = \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{M}$ и $v = \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{1 \cdot N} = \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{N}$. А како је

$\sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{1} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ и $\sqrt[3]{1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, то је:

$$\left.\begin{array}{ll} U_1 = 1 \cdot \sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{N}, & V_1 = 1 \cdot \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{N}, \\ U_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{M}, & V_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{N} \text{ и} \\ U_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{M}, & V_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{N} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Како је $x = u + v$, а за u и v имамо по три различите вредности, то заменом ових вредности у $x = u + v$, добили би за x 9 различитих вредности, који је број за 6 већи од броја вредности x-а, који треба да добијемо, пошто је дата једначина трећег степена. Те 9 вредности x-а биле би:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = u_1 + v_1, & x_4 = u_2 + v_1, & x_7 = u_3 + v_1, \\ x_2 = u_1 + v_2, & x_5 = u_2 + v_2, & x_8 = u_3 + v_2 \text{ и} \\ x_3 = u_1 + v_3, & x_6 = u_2 + v_3, & x_9 = u_3 + v_3 \end{array}\right\}$$

Од ових девет вредности x-а узимамо у корене само оне, које задовољавају једначину $u\,v = -\frac{p}{3}$, коју је у ствари требало решавати са $u^3 + v^3 = -q$.

Према овоме је само: $u_1 v_1 = \sqrt[3]{M} \cdot \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{MN} =$

$$= \sqrt[3]{\frac{-27q + \sqrt{27^2q^2 + 4 \cdot 27 \cdot p^3}}{51} \cdot \frac{-27q - \sqrt{27^2q^2 + 4 \cdot 27p^3}}{54}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{729q^2 - 7{\angle}9q^2 - 4 \cdot 27p^3}{54^2}} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3};$$

$$u_2\,v_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{M} \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{N} = \frac{(-1)^2 - 3i^2}{4} \sqrt[3]{MN} =$$

$\sqrt[3]{MN} = -\frac{p}{3}$; и $u_3\,v_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{M} \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{N} =$

$$= \frac{(-1)^2 - 3i^2}{4} \sqrt[3]{MN} = \sqrt[3]{MN} = -\frac{p}{3}.$$

Сви остали производи: $u_1\,v_2$, $u_1\,v_3$, $u_2\,v_1$, $u_2\,v_2$, $u_3\,v_1$ и $u_3\,v_3$ немају као резултат $-\frac{p}{3}$, те се те вредности од u и v

не узимају у поступак. Стога су корени дате једначине;

$$x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{\frac{-27\,q + \sqrt{27^2q^2 + 108p^3}}{54}} + $$
$$+ \sqrt[3]{\frac{-27q - \sqrt{27^2q^2 + 108p^3}}{54}};\Bigg\}$$

$$x_2 = u_2 + v_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{M} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{N} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\cdot$$
$$\cdot\sqrt[3]{\frac{-27q + \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54}} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-27q - \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54}};\ \text{и}$$

$$x_3 = u_3 + v_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{M} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{N} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\cdot$$
$$\cdot\sqrt[3]{\frac{-27q + \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54}} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-27q - \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54}}\Bigg\} \quad (10)$$

Из свега овога се види, да једначина $x^3 + px + q = 0$ има један корен стваран а два имагинарна, ако је испуњен услов $27q^2 + 4p^3 > 0$. Образац:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-27q + \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54}} + \sqrt[3]{\frac{-27q - \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54}},\ \text{или}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-9q + \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{-9q - \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18}},\ \text{или}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (11)$$

зове се **Cardan-ов.** Овај образац употребљава се при добивању корена оне једначине трећег степена облика $x^3+px+q=0$, која има имагинарне корене, зашта је потребан услов $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ или $27q^2 + 4p^3 > 0$. Овај се образац не примењује при решавању једначине $x^3 + px + q = 0$, која има само стварне корене, пошто би се у овом случају добили три имагинарна корена, што је немогуће, јер је број имагинарних корена сваке једначине паран. За ове једначине, т. ј. за једначине $x^3 + px + q = 0$, код којих није $27q^2 + 4p^3 > 0$, употребљавају се тригонометријске методе при њиховом решавању с којима ћемо се упознати у следећем параграфу.

Решени примери:

1) $\mathbf{x^3+6x-7=0}$. Овде је дискриминанта $27q^2+4p^3= =27(-7)^2+4\cdot 6^3=2087$, т. ј. >0, те ћемо применити Карданов образац. Овим обрасцем имамо: $u=\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}+8}}= =2$ и $v=\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}+8}}=-1$, те су корени $x_1=2-1=1$;

$$x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\cdot 2+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)=\frac{1+3i\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot 2+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\cdot(-1)=\frac{-1-3i\sqrt{3}}{2}.$$

2) $\mathbf{x^3-9x+28=0}$. Овде је $p=-9$, $q=28$, а дискриминанта $27q^2+4p^3=27\cdot 28^2+4\cdot(-9)^3>0$, те се може применити Карданов образац. Стога је $u=\sqrt[3]{-14+\sqrt{196-27}}$ $=-1$, $v=\sqrt[3]{-14-\sqrt{196-27}}=\sqrt[3]{-27}=-3$, а корени:

$x_1=-1-3=-4$; $x_2=-1\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-3\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}= =2+i\sqrt{3}$; и $x_3=2-i\sqrt{3}$.

3) $\mathbf{x^3+12abx+8(b^3-a^3)=0}$. Овде је $p=12ab, q=8(b^3-a^3)$, а дискриминанта $27q^2+4p^3=27\cdot 64(b^6-2a^3b^2+a^6)+4\cdot 1728a^3b^3= =1728(a^3+b^3)^2>0$, па се може применити Карданов образац.

Стога је $u=\sqrt[3]{-4(b^3-a^3)+\sqrt{16b^6-32a^2b^3+16a^6+64a^3b^3}}=$ $\sqrt[3]{-4(b^3-a^3)+4(b^3+a^3)}=\sqrt[3]{8a^3}=2a$, $v=\sqrt[3]{-4(b^3-a^3)-4(b^3+a^3)}$ $=\sqrt[3]{-8b^3}=-2b$, а корени:

$x_1=2a-2b=2(a-b)$; $x_2=2a\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-2b\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ $=-(a-b)+(a+b)i\sqrt{3}$; и $x_3=-(a-b)-(a+b)i\sqrt{3}$.

4) $x^3-2x-4=0$. Овде је $p=-2$, $q=-4$, а дискриминанта $27q^2+4p^3=27(-4)^2+4(-2)^3=27\cdot 16-4\cdot 8>$ >0, те се примењује Карданов образац. Стога је:

$$u=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{100}{27}}}=\sqrt[3]{2+\frac{10}{2\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{2+\frac{10}{5{,}1961524228}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{20{,}3923048456}{5{,}1961524228}},\ v=\sqrt[3]{2-\frac{10}{5{,}1961524228}}=\sqrt[3]{\frac{0{,}3923048456}{5{,}1961524228}}.$$

Помоћу логаритама налазимо да је

$$u = 1{,}577 \text{ и } v = 0{,}423$$

Тада корени дате једначине биће:

$x_1 = 1{,}577 + 0{,}433 = 2$; $x_2 = 1{,}577.\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 0{,}433\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -1+i$; $x_2 = -1-i$.

Примери за вежбу:

1) $x^3 + 72x + 152 = 0$;
2) $x^3 + 72x - 152 = 0$;
3) $x^3 + 24x - 56 = 0$;
4) $x^3 + 36x - 208 = 0$;
5) $x^3 - 6x - 9 = 0$;
6) $x^3 - 3a^3bx - a^3(a^3b^3 + 1) = 0$;
7) $x^3 + 60x + 992 = 0$;
8) $x^3 - 2x - 5 = 0$;
9) $x^3 + 6ax^2 - 36a^3 = 0$;
19) $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$.

§ 211. II **Случај. — Једначина $x^3 + px + q = 0$ има само стварне корене.** Пре него што се упознамо с начином решавања једначине $x^3 + px + q = 0$, која има само стварне корене, испитајмо једначину

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \;\ldots.\; (1)$$

За коју из Тригонометрије знамо да је тачна. Ако у овој једначини заменимо $3\alpha = \varphi$, онда је $\alpha = \frac{\varphi}{3}$, а једначина (1) добија облик:

$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$, или

$$\cos^3\frac{\varphi}{3} - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{1}{4}\cos\varphi = 0 \;\ldots\; (2)$$

Међутим, из Тригонометрије знамо, да су сви углови, који би задовољили једначину $\cos\varphi = k$, где је k познат број, дати обрасцем

$$\varphi = 2n\pi \pm \alpha,$$

где је α најмањи од њих, а израчунава се помоћу логаритамских таблица. Тада је и $\frac{\varphi}{3} = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}$, те је $\cos\frac{\varphi}{3} = \cos\left(\frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right)$. Међутим, косинуси од $\frac{\varphi}{3}$, односно од $\left(\frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right)$, могу имати само 3 различите вредности и то: $\cos\frac{\alpha}{3}$, $\cos\frac{2\pi\pm\alpha}{3}$ и $\cos\frac{4\pi\pm\alpha}{3}$, за $n = 0$, 1 и 2, јер се и косинуси свих осталих углова за $n = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ своде на те вредности $\left\{\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3}{3} \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(2\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\right.$;

$$\cos\left(\frac{2\pi\cdot 4}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{2\pi(3+1)}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right)=\cos\frac{2\pi\pm\alpha}{3};\ \cos\left(\frac{2\pi\cdot 5}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi(3+2)}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{4\pi\pm\alpha}{3}\right)=$$
$$=\cos\frac{4\pi\pm\alpha}{2};\ \cos\left(\frac{2\pi\cdot 6}{3}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(4\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$\left.=\cos\frac{\alpha}{2},\text{ и т. д.}\right\},$$

а бројне вредности од $\cos\frac{\alpha}{3}, \cos\frac{2\pi\pm\alpha}{3}$ и $\cos\frac{4\pi\pm\alpha}{3}$ могу се израчунати уз помоћ логаритама. Ове вредности јесу једини корени једначине (2).

После овога, пређимо на решавање једначине $x^3+px+q=0$, која има само стварне корене. Ако у овој једначини заменимо $x=\rho\cos\frac{\varphi}{3}$ добијамо:

$$\rho^3\cos^3\frac{\varphi}{3}+p\rho\cos\frac{\varphi}{3}+q=0,\ \text{или}$$
$$\cos^3\frac{\varphi}{3}+\frac{p}{\rho^2}\cos\frac{\varphi}{3}+\frac{q}{\rho^3}=0\ldots.(3)$$

Упоређивањем ове једначине с једначином (2), које су индентичне, налазимо да је

$$\frac{p}{\rho^2}=-\frac{3}{4}\text{ и }\frac{q}{\rho^3}=-\frac{1}{4}\cos\varphi\ldots.(4)$$

Из прве је $\rho=\pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ а заменом у другој имамо:

$$\cos\varphi=-\frac{4q}{\rho^3}=-\frac{4q}{\pm 8\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}=\mp\frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Тада једначина (3) добија облик:

$$\mathbf{\cos^3\frac{\varphi}{3}-\frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3}\mp\frac{3q}{2q\sqrt{-\frac{p}{3}}}=0}\ldots.(5)$$

Како једначина (2) има као корене:

$$\cos\frac{\alpha}{3},\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right)\text{ и }\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\ \text{а } x=\rho\cos\frac{\varphi}{3},$$

то ће једначина $x^3+px+q=0$ имати као корене:

$$x_1 = \rho \cos \frac{\varphi}{3} = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3};$$

$$x_2 = 2 \sqrt{-\frac{p}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3} \right); \text{ и}$$

$$x_3 = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3} \right).$$

Разуме се, ови ће корени постајати само ако је $p < 0$, пошто се из једначине $\cos\varphi = \dfrac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}$ види, да ће $\cos\varphi$ бити стваран број, ако је $p < 0$, т. ј. ако је p негативан број, а осим овога, ако је $\cos^2\varphi < 1$. Из овог последњег услова излази да је $\dfrac{9q^2}{4p^2\left(-\frac{p}{3}\right)} < 1$, или $9q^2 < -\dfrac{4p^3}{3}$, или $27q^2 + 4p^3 < 0$.

Из свега овога закључујемо, *да ће једначина* $x^3 + px + q = 0$ *имати сва три корена стварна, ако је задовољен услов* $27q^2 + 4p^3 < 0$.

Решени примери:

1) $\mathbf{x^3 - 7x - 6 = 0}$. Овде је $p = -7$ и $q = -6$, а дискриминанта $27q^2 + 4p^3 = 27\ (-6)^2 + 4\cdot(-7)^3 = 27\cdot 36 - 4\cdot 343 < 0$, те су корени ове једначине стварни.

Овде је $\rho = 2\cdot\sqrt{-\dfrac{p}{3}} = 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$, а $\cos\varphi = \dfrac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}} =$

$$= \frac{3\cdot(-6)}{2\cdot(-7)\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{243}{343}}.$$

Тада је $\log\cos\varphi = \dfrac{1}{2}(\log 243 - \log 343) = \bar{1},925156$, а

$\varphi = 32^0 40' 49'' = \alpha$, те је $\dfrac{\alpha}{3} = 10^0 53' 44''$.

Најзад, корени дате једначине јесу:

$$x_1 = \rho\cos\frac{\alpha}{3} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos 10^0 53' 44'' = \sqrt{\frac{28}{3}}\cos 10^0 53' 36'' =$$

$$= N\sqrt{\frac{1}{2}(\log 28 - \log 3) + \log\cos 10^0 53' 36''} =$$

$$= N\sqrt{\frac{1}{2}(1,447158 - 0,477121) + \bar{1},992100} = N\overline{0,477119} = 3;$$

$$x_2 = \rho \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{\frac{28}{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 10^0\,53'\,36''\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{28}{3}} \cos 130^0\,53'\,36'' = -\sqrt{\frac{28}{3}} \cdot \sin 40^0\,53'\,36'' = -$$

$$- N\overline{\tfrac{1}{2}(\log 28 - \log 3) + \log\sin 40^0 50' 36''} = -N\overline{0{,}301030} = -2; \text{ и}$$

$$x_3 = \rho \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{\frac{28}{3}} \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 10^0\,53'\,36''\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{28}{3}} \cos 250^0\,53'\,36'' = -\sqrt{\frac{28}{3}} \cos 70^0\,53'\,36'' =$$

$$= -N\overline{\frac{1}{2}(\log 28 - \log 3) + \log\cos 70^0\,53'\,36''} = -1$$

2) $\mathbf{x^3 - 63x + 162 = 0}$. Овде је $p = -63$ и $q = 162$, а дискриминанта $27q^2 + 4p^3 = 27 \cdot 162^2 + 4 \cdot (-63)^3 < 0$, те су корени једначине стварни.

Овде је $\rho = 2\sqrt{\dfrac{63}{3}} = 2\sqrt{21} = \sqrt{84}$, $\cos\varphi = \dfrac{3 \cdot 162}{2 \cdot (-63)\sqrt{21}} =$

$-\dfrac{27}{7\sqrt{21}}$, $\cos\ (180^0 - \varphi) = -\cos\ \varphi = \dfrac{27}{7\sqrt{21}}$. Тада је:

$$\log\cos(180^0 - \varphi) = \log 27 - \log 7 - \frac{1}{2}\log 21 = 1{,}431364 - 0{,}845098 -$$

$- 0{,}661110 = \bar{1}{,}925156$, а $180^0 - \varphi = 32^0 40' 48''$, $\varphi = 212^0 40' 48''$,

$\dfrac{\alpha}{3} = 70^0\,53'36''$. С тога су корени ове једначине:

$$x_1 = \sqrt{84}\cos 70^0 53' 36'' = N\overline{\tfrac{1}{2}\log 84 + \log\cos 70^0 53' 36''} =$$

$$= N\overline{0{,}962140 + \bar{1}{,}514983} = N\overline{0{,}477121} = 3;$$

$$x_2 = \sqrt{84} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{84}\cos 190^0 53' 36'' = -\sqrt{84}\cos 10^0 53' 36''$$

$$= -N\overline{\tfrac{1}{2}\log 84 + \log\cos 10^0 53' 36''} = -N\overline{0{,}962140 + \bar{1}{,}992104} =$$

$$= -N\overline{0{,}954244} = -9;$$

$$x_3 = \sqrt{84}\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{84}\cos 310^0 53' 36'' = \sqrt{84}\cos 49^0 6' 24'' =$$

$$= N\overline{\tfrac{1}{2}\log 84 + \log\cos 49^0 6' 24''} = N\overline{0{,}778151} = 6.$$

Примери за вежбу:

1) $x^3 - 39x - 70 = 0$; 5) $x^3 - 112x + 384 = 0$;
2) $x^3 - 9x - 10 = 0$; 6) $x^3 - 363x - 2662 = 0$;
3) $x^3 - 3x + 1 = 0$; 7) $x^3 - 7x + 6 = 0$;
4) $x^2 - 0{,}13x + 0{,}012 = 0$; 8) $x^3 - 7x + 7 = 0$;

§ 212. III **Случај. — Једначина $x^3 + px + q = 0$ има стварне корене, од којих су два једнака.** Видели смо у претходна два случаја (§ 210 и 211.), да ће корени једначине $x^3 + px + q = 0$ бити један стваран и два имагинарна, ако је дискриминанта $27q^2 + 4p^3 > 0$, а сва три корена стварна и неједнака, ако је дискриминанта $27q^3 + 4p^3 < 0$. Остаје да видимо какви ће бити корени једначине $x^2 + px + q = 0$, ако је дискриминанта $27q^3 + 4p^3 = 0$. У овом случају једначине (6) параграфа 210. претварају се у:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{27q}{54}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \text{ и } v = \sqrt[3]{-\frac{27q}{54}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \text{ т. ј.}$$

$u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, или, на основу једначине (7) истог параграфа,

$$\sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Тада су корени дате једначине према обрасцима под 10 параграфа 209.

$$x_1 = \sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N} = 2\sqrt[3]{M} = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};$$

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{M} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{N} =$$

$$= \sqrt[3]{M} \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{2} = -\sqrt[3]{M} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}; \text{ и}$$

$$x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{M} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{N} =$$

$$= \sqrt[3]{M} \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}}{2} = -\sqrt[3]{M} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Према овоме, за $27q + 4p^3 = 0$, сва три корена су стварна, од којих су два једнака.

Напомена. Корене x_1, x_2 *и* x_3 можемо изразити и помоћу израза у којима фигуришу коефицијенти p и q. То успевамо помоћу једначине $27q^2 + 4p^3 = 0$. Из ње је

$$q = \pm\sqrt{-\frac{4p^3}{27}} = \pm\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\,; \quad -\frac{q}{2} = \mp\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\,; \quad \sqrt{-\frac{p}{3}} = \frac{3q}{2p}\,;$$

$-\frac{p}{3} = \frac{9q^2}{4p^2}$. Тада је $-\frac{q}{2} = \frac{9q^2}{4p^2}\cdot\frac{3q}{2p} = \frac{27q^3}{8p^3}$, а $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \frac{3q}{2p}$.

Одавде је $x_1 = \frac{3q}{p}$, а $x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p}$.

Мешовити примери за вежбу.

1) $x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = 0$; 2) $x^3 + x^2 - x + 2 = 0$;
3) $3x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$; 4) $8x^3 + 12x^2 + 17x - 4 = 0$;
5) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$; 6) $x^3 - 3x^2 + 4x = 0$;
7) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$; 8) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$;
9) $3x^2 - 2x^2 - 2x + 3 = 0$; 10) $2x^3 + 3x^2 - 4x + 10 = 0$.

САДРЖАЈ II ДЕЛА

ШЕСТИ ОДЕЉАК

(наставак)

стр.

СЕДМИ ОДЕЉАК

Прогресије и сложени интересни рачун

ОСМИ ОДЕЉАК

I Комбинаторика[1])

ДЕВЕТИ ОДЕЉАК

Теорија извода и појам максимума и минимума.

ДЕСЕТИ ОДЕЉАК

Основи интегралног рачуна

[1]) За ученике Реалке.

ДОДАТАК[1])

Комплексни бројеви, Моавров образац, једначине трећег степена

[1]) За ученике Реалке.